ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΣΟΥΛΤΑΝΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΡΟΣΒΑΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΣΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Επιβλέπων:Ι.Στρατής

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΘΗΝΑ 2013

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Ι.Στρατή για το ενδιαφέρον του και τη βοήθειά του στη συγγραφή αυτής της εργασίας, αλλά και για τη στήριξή του στη διάρκεια των σπουδών μου. Η παρουσία του ήταν ιδιαίτερα σημαντική για μένα. Ευχαριστώ τους καθηγητές Χ.Αθανασιάδη και Γ.Καλογερόπουλο για το ενδιαφέρον που έδειξαν στην εργασία και για τη διδακτική τους βοήθεια, όποτε αυτή μου χρειάστηκε.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου, που όλα αυτά τα χρόνια ήταν δίπλα μου και μου έδωσαν όλα τα απαραίτητα εφόδια για να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.

Εισαγωγή

Η Μαθηματική Θεωρία Ελέγχου είναι η περιοχή των εφαρμοσμένων μαθηματικών που ασχολείται με τις βασικές αρχές που διέπουν την ανάλυση και τη μελέτη του ελέγχου συστημάτων. Έλεγχος ενός αντικειμένου σημαίνει να επηρεάσεις τη συμπεριφορά του έτσι ώστε να πετύχεις έναν επιθυμητό στόχο. Για να εφαρμόσουν αυτή την επιρροή, μηχανικοί κατασκεύασαν μηχανές που ενσωματώνουν διάφορες μαθηματικές τεχνικές. Οι μηχανές αυτές ποικίλουν από τη ρυθμιστική ατμομηχανή του Watt , που σχεδιάστηκε κατά τη διάρκεια της Αγγλικής Βιομηχανικής Επανάστασης, μέχρι τους εξελιγμένους ρυθμιστικούς μικροεπεξεργαστές, όπως CD players και αυτοκίνητα ή βιομηχανικά ρομπότ και αυτόματους πιλότους αεροπλάνων. Η μελέτη αυτών των μηχανών και η επίδρασή τους με το αντικείμενο να ελέγχεται είναι το αντικείμενο αυτής της εργασίας.

Πιο συγκεκριμένα, θα αναφέρουμε τις βασικές έννοιες της προσβασιμότητας και ελεγξιμότητας και θα εστιάσουμε σε κάποια θέματα, όπως χρονικά αναλλοίωτα συστήματα, ελέγξιμα ζεύγη πινάκων, ελεγξιμότητα υπό δειγματοληψία κ.α. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την ελεγξιμότητα κάποιων κλασικών γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων: της εξίσωσης μεταφοράς και της εξίσωσης θερμότητας. Θα αποδείξουμε το καλώς τοποθετημένο του προβλήματος Cauchy αυτών των εξισώσεων και με διάφορες μεθόδους, όπως είναι η επίλυση με κάποια άμεση (explicit) διαδικασία, η μέθοδος επέκτασης και η δυϊκότητα ανάμεσα σε ελεγξιμότητα και παρατηρησιμότητα και θα μελετήσουμε την ελεγξιμότητα τους. Η δυϊκότητα δείχνει ότι η ελεγξιμότητα μπορεί να αναχθεί σε μία ανισότητα παρατηρησιμότητας. Θα δείξουμε πώς να αποδεικνύουμε αυτήν την ανισότητα μέσω της μεθόδου του πολλαπλασιαστή ή των ανισοτήτων Carleman . Επίσης θα παρουσιάσουμε ένα κλασικό αφηρημένο περιβάλλον το οποίο μας επιτρέπει να μελετήσουμε το καλώς τοποθετημένο και την ελεγξιμότητα πολλών μερικών διαφορικών εξισώσεων στο ίδιο πλαίσιο.

Κεφάλαιο 1

Προσβασιμότητα και Ελεγξιμότητα Συστημάτων

1.1 Βασικές Έννοιες Προσβασιμότητας

Σε όλους τους ορισμούς που θα ακολουθήσουν, $\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ είναι ένα αυθαίρετο σύστημα, όπου ένα **χρονικό σύνολο** $\mathcal{T}$ είναι μια υποομάδα του $(\mathbb{R}, +)$ και ένα **σύστημα** ή **μηχανή** $\Sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ αποτελείται από:

- Ένα χρονικό σύνολο $\mathcal{T}$,
- Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{X}$ που λέγεται **κατάσταση χώρου** του Σ,
- Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{U}$ που λέγεται **τιμή ελέγχου** ή **τιμή εισόδου του χώρου** του Σ, και
- Μία απεικόνιση $\phi : \mathcal{D}_\phi \to \mathcal{X}$ που λέγεται απεικόνιση μετάβασης του Σ, η οποία ορίζεται σε ένα υποσύνολο $\mathcal{D}_\phi$ του

  $$\{(\tau, \sigma, x, \omega) | \sigma, \tau \in \mathcal{T}, \sigma \leq \tau, x \in X, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}\},$$

  έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

  $\boxed{\text{Μη τετριμμένο}}$ Για κάθε κατάσταση $x \in \mathcal{X}$, υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος $\sigma < \tau$ στο $\mathcal{T}$ και κάποιο $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}$ τέτοιο ώστε ω να **είναι αποδεκτό για το** x, το οποίο σημαίνει ότι $(\tau, \sigma, x, \omega) \in \mathcal{D}_\phi$,
  $\boxed{\text{Περιορισμός}}$ Αν $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\mu)}$ είναι αποδεκτό για το x, τότε για κάθε $\tau \in [\sigma, \mu)$ ο περιορισμός $\omega_1 := \omega|_{[\sigma,\tau)}$ του ω στο υποδιάστημα $[\sigma, \tau)$ είναι επίσης αποδεκτός για το x και ο περιορισμός $\omega_2 := \omega|_{[\tau,\mu)}$ είναι αποδεκτός για το $\phi(\tau, \sigma, x, \omega_1)$,

  $\boxed{\text{Ημιομάδα}}$ Αν σ, τ, μ είναι οποιαδήποτε τρία στοιχεία του $\mathcal{T}$ έτσι ώστε $\sigma < \tau < \mu$, αν $\omega_1 \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}$ και $\omega_2 \in \mathcal{U}^{[\tau,\mu)}$ και αν x είναι μια κατάσταση τέτοια ώστε

  $$\phi(\tau, \sigma, x, \omega_1) = x_1 \quad \text{και} \quad \phi(\mu, \tau, x_1, \omega_2) = x_2,$$

τότε $\omega = \omega_1\omega_2$ είναι επίσης αποδεκτό για το x και $\phi(\mu, \sigma, x, \omega) = x_2$,

$\boxed{\text{Ταυτοτικός}}$ Για κάθε $\sigma \in \mathcal{T}$ και $x \in X$, η κενή ακολουθία $\diamond \in \mathcal{U}^{[\sigma,\sigma)}$ είναι αποδεκτή για το x και $\phi(\sigma, \sigma, x, \diamond) = x$.

Ορισμός 1.1.1. *Ένα συμβάν είναι ένα ζεύγος* $(x, t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{T}$

- *Το συμβάν* (z, τ) *μπορούμε να το προσεγγίσουμε από το συμβάν* (x, σ) *αν και μόνο αν υπάρχει μία τροχιά του* Σ *στο* $[\sigma, \tau]$ *της οποίας η αρχική θέση είναι το* x *και η τελική θέση το* z*, δηλαδή, αν υπάρχει ένα* $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}$ *έτσι ώστε*

$$\phi(\tau, \sigma, x, \omega) = z.$$

  Λέγεται επίσης ότι το (x, σ) *μπορεί να ελεγχθεί από το* (z, τ).

- *Αν* $x, z \in \mathcal{X}, T \geq 0 \in \mathcal{T}$*, και υπάρχουν* $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$ *με* $\tau - \sigma = T$ *έτσι ώστε το* (z, τ) *μπορούμε να το προσεγγίσουμε από το* (x, σ)*, τότε το* z *μπορούμε να το προσεγγίσουμε από το* x *σε χρόνο* T*. Ισοδύναμα, το* x *μπορεί να ελεγχθεί από το* z *σε χρόνο* T.

- *Το* z *μπορούμε να το προσεγγισουμε από το* x *(ή το* x *μπορεί να ελεγχθεί από το* z*) αν αυτό συμβαίνει για τουλάχιστον ένα* T.

Σημειώνουμε ότι, από το ταυτοτικό αξίωμα του ορισμού του συστήματος, κάθε συμβάν και κάθε κατάσταση μπορούμε να τις προσεγγίσουμε από τον εαυτό τους. Επίσης, σημειώνουμε ότι αν Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο, τότε το z μπορούμε να το προσεγγίσουμε από το x σε χρόνο T αν και μόνο αν το $(z, t+T)$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε από το (x, t) για κάθε $t \in \mathcal{T}$, έτσι, δεν υπάρχει καμία ανάγκη να εξετάσουμε ρητά την έννοια του συμβάντος για χρονικά αναλλοίωτα συστήματα.

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $(x, \sigma) \rightsquigarrow (z, \tau)$ για να δείξουμε ότι το συμβάν (z, τ) μπορούμε να το προσεγγίσουμε από το (x, σ). Σημειώνουμε ότι η ανισότητα $\sigma \leq \tau$ υπονοείται σε αυτό το συμβολισμό. Για καταστάσεις, γράφουμε $x \overset{T}{\rightsquigarrow} z$ αν το z μπορούμε να το προσεγγίσουμε από το x σε χρόνο T, και απλώς $x \rightsquigarrow z$ για να δείξουμε ότι το z μπορούμε να το προσεγγίσουμε από το x.

Λήμμα 1.1.1. Ισχύουν τα παρακάτω :

(α) Αν $(x, \sigma) \rightsquigarrow (z, \tau)$ και $(z, \tau) \rightsquigarrow (y, \mu)$, τότε $(x, \sigma) \rightsquigarrow (y, \mu)$.

(β) Αν $(x, \sigma) \rightsquigarrow (y, \mu)$ και αν $\sigma < \tau < \mu$, τότε υπάρχει $z \in \mathcal{X}$ έτσι ώστε $(x, \sigma) \rightsquigarrow (z, \tau)$ και $(z, \tau) \rightsquigarrow (y, \mu)$.

(γ) Αν $x \overset{T}{\rightsquigarrow} y$ για κάποιο $\mathtt{T} > 0$ και αν $0 < t < \mathtt{T}$, τότε υπάρχει κάποιο $z \in \mathcal{X}$ έτσι ώστε $x \overset{t}{\rightsquigarrow} z$ και $z \overset{T-t}{\rightsquigarrow} y$.

(δ) Αν $x \overset{t}{\rightsquigarrow} z$, $z \overset{s}{\rightsquigarrow} y$ και Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο, τότε $x \overset{t+s}{\rightsquigarrow} y$.

(ε) Αν $x \rightsquigarrow z$, $z \rightsquigarrow y$ και Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο, τότε $x \rightsquigarrow y$.

Ορισμός 1.1.2. *Το χρονοδιακριτό σύστημα Σ είναι γραμμικό (πάνω στο σώμα $\mathbb{K}$) αν:*

- *Είναι πλήρες. (το σύστημα Σ είναι πλήρες αν κάθε είσοδος είναι αποδεκτή για κάθε κατάσταση $\mathcal{D}_\phi = \{(\tau, \sigma, x, \omega) | \sigma \leq \tau,\ x \in \mathcal{X},\ \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}\}$)*
- *$\mathcal{X}$ και $\mathcal{U}$ είναι διανυσματικοί χώροι και*
- *$\mathcal{P}(t, \cdot, \cdot)$ είναι γραμμικό για κάθε $t \in \mathbb{Z}$.*

Το σύστημα με εξόδους Σ είναι γραμμικό αν επιπλέον:

- *Το $\mathcal{Y}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος και*
- *Η $h(t, \cdot)$ είναι γραμμική για κάθε $t \in \mathbb{Z}$.*

Το σύστημα είναι πεπερασμένης διάστασης αν και το $\mathcal{U}$ και το $\mathcal{X}$, όμοια το $\mathcal{Y}$ για ένα σύστημα με εξόδους, είναι πεπερασμένης διάστασης, η διάσταση του Σ είναι σε αυτήν την περίπτωση η διάσταση του $\mathcal{X}$.

Ορισμός 1.1.3. *Το συνεχές χρονικά σύστημα Σ είναι γραμμικό (και πεπερασμένης διάστασης) (πάνω στο $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) αν είναι τάξης $\mathcal{C}^1$ και:*

- *$\mathcal{X} = \mathbb{K}^n$ και $\mathcal{U} = \mathbb{K}^m$ και*
- *Η τοπική σε χρόνο περιγραφή ικανοποιεί ότι η $f(t, \cdot, \cdot)$ είναι γραμμική για κάθε $t \in \mathbb{R}$.*

Το σύστημα με εξόδους Σ είναι γραμμικό αν επιπλέον:

- *$\mathcal{Y} = \mathbb{K}^p$ και*
- *Η $h(t, \cdot)$ είναι γραμμική για κάθε $t \in \mathbb{Z}$.*

Η διάσταση του Σ είναι η διάσταση του $\mathcal{X}$.

Λήμμα 1.1.2. Για κάθε γραμμικό χρονοδιακριτό σύστημα και για κάθε ζεύγος ακεραίων $\sigma < \tau$, το $\phi(\tau, \sigma, \cdot, \cdot)$ είναι γραμμικό.

Λήμμα 1.1.3. Έστω Σ ένα γραμμικό χρονικά συνεχές σύστημα και έστω $\sigma < \tau$ ανήκει στο $\mathbb{R}$. Τότε το $\phi(\tau, \sigma, \cdot, \cdot)$ είναι γραμμικό ως μία απεικόνιση $\mathcal{X} \times \mathcal{L}_m^\infty \to \mathcal{X}$.

Λήμμα 1.1.4. Αν Σ είναι γραμμικό, τότε:

(α) Αν $(x_1,\sigma) \rightsquigarrow (z_1,\tau)$ και $(x_2,\sigma) \rightsquigarrow (z_2,\tau)$, τότε, για κάθε $r \in \mathbb{K}$, $(x_1 + rx_2,\sigma) \rightsquigarrow (z_1 + rz_2,\tau)$.

(β) $(x,\sigma) \rightsquigarrow (z,\tau)$ ανν $(0,\sigma) \rightsquigarrow (z - \phi(\tau,\sigma,x,\mathbf{0}),\tau)$ (εδώ το $\mathbf{0}$ σημαίνει ότι ο έλεγχος $\omega \equiv 0$.)

(γ) Αν Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο, $x \overset{T}{\rightsquigarrow} z$ ανν $0 \overset{T}{\rightsquigarrow} (z - \phi(T,0,x,\mathbf{0}))$.

(δ) Αν Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο, $x_1 \overset{T}{\rightsquigarrow} z_1$ και $x_2 \overset{T}{\rightsquigarrow} z_2$ συνεπάγεται ότι $(x_1 + rx_2) \overset{T}{\rightsquigarrow} (z_1 + rz_2)$ για όλα τα $r \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη. Το (α) έπεται από τη γραμμικότητα της $\phi(\tau,\sigma,\cdot,\cdot)$ (από Λήμματα 1.1.2 και 1.1.3), και το (δ) είναι συνέπεια αυτού. Από την ισοδυναμία

$$\phi(\tau,\sigma,x,\omega) = z \quad \text{ανν} \quad z - \phi(\tau,\sigma,x,\mathbf{0}) = \phi(\tau,\sigma,0,\omega)$$

συνεπάγεται το (β) και το (γ). □

Ορισμός 1.1.4. *Το σύστημα Σ είναι (πλήρως) ελέγξιμο στο διάστημα $[\sigma,\tau]$ αν για κάθε $x,z \in \mathcal{X}$ ισχύει ότι $(x,\sigma) \rightsquigarrow (z,\tau)$. Είναι (πλήρως) ελέγξιμο σε χρόνο T αν για κάθε $x,z \in \mathcal{X}$ ισχύει ότι $x \overset{T}{\rightsquigarrow} z$. Είναι απλά (πλήρως) ελέγξιμο αν $x \rightsquigarrow z$ για όλα τα x,z.*

Λήμμα 1.1.5. Έστω Σ ένα γραμμικό σύστημα και $\sigma,\tau,T \in \mathcal{T}$(τυχόντα)

(α) Το Σ είναι ελέγξιμο στο $[\sigma,\tau]$ ανν $(0,\sigma) \rightsquigarrow (y,\tau)$ για όλα τα $y \in \mathcal{X}$.

(β) Αν Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο, τότε Σ είναι ελέγξιμο σε χρόνο T ανν $0 \overset{T}{\rightsquigarrow} y$ για όλα τα $y \in \mathcal{X}$.

(γ) Αν Σ είναι συνεχές χρονικά, τότε είναι ελέγξιμο στο $[\sigma,\tau]$ ανν $(x,\sigma) \rightsquigarrow (0,\tau)$ για όλα τα $x \in \mathcal{X}$.

(δ) Αν Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο και συνεχές, τότε Σ είναι ελέγξιμο σε χρόνο T ανν $x \overset{T}{\rightsquigarrow} 0$ για όλα τα $x \in \mathcal{X}$.

(ε) Τα συμπεράσματα στο (γ) και (δ) ισχύουν επίσης αν το ‘‘συνεχές χρονικά’’ αντικατασταθεί απ'το ‘‘διακριτό χρονικά και $A(k)$ είναι αντιστρέψιμο για όλα τα $k \in [\sigma,\tau]$’’ (στο (δ), ‘‘A είναι αντιστρέψιμο’’).

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το (α), παίρνουμε τυχόντα συμβάντα (x,σ) και (z,τ). Έστω

$$y := z - \phi(\tau,\sigma,x,\mathbf{0}).$$

Από υπόθεση, $(0,\sigma) \rightsquigarrow (y,\tau)$. Έτσι, από Λήμμα 1.1.4(β), $(x,\sigma) \rightsquigarrow (0,\tau)$, όπως επιθυμούσαμε. Υποθέτουμε τώρα ότι Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο και ότι

$$0 \overset{T}{\rightsquigarrow} y$$

για όλα τα $y \in \mathcal{X}$. Τότε, $(0,0) \rightsquigarrow (y,T)$ για όλα τα $y \in \mathcal{X}$, άρα απ΄το (α) το Σ είναι ελέγξιμο (στο $[0,T]$), και αυτό αποδεικνύει και το (β).

Υποθέτουμε τώρα ότι Σ είναι συνεχές χρονικά ή ότι είναι χρονοδιακριτό και η προϋπόθεση της αντιστροφής στο (ε) ισχύει. Διαλέγουμε οποιοδήποτε $y \in \mathcal{X}$. Απ΄το (α), πρέπει να αποδείξουμε για το (γ) ότι $(0,\sigma) \rightsquigarrow (y,\tau)$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχουν $x \in \mathcal{X}$ τέτοια ώστε

$$\phi(\tau,\sigma,x,\mathbf{0}) = -y.$$

Σε συνεχή χρονικά συστήματα παίρνουμε $x := -\Phi(\sigma,\tau)y$ και σε χρονοδιακριτά συστήματα παίρνουμε $x := -\Phi^{-1}y$, όπου Φ είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$\Phi(\tau,s) = A(\tau-1)A(\tau-2)...A(\sigma+1)A(\sigma),$$

ο οποίος είναι αντιστρέψιμος με την υπόθεση ότι κάθε $A(k)$ είναι αντιστρέψιμο. Από την υπόθεση, $(x,\sigma) \rightsquigarrow (0,\tau)$. Άρα από το Λήμμα 1.1.4(β),

$$(0,\sigma) \rightsquigarrow (-\phi(\tau,\sigma,x,\mathbf{0}),\tau) = (y,\tau),$$

όπως επιθυμούσαμε. Τελικά, το (δ) έπεται απ΄το (β) επειδή η υπόθεση δίνει τώρα ότι $(x,0) \rightsquigarrow (0,T)$ για όλα τα $x \in \mathcal{X}$. $\square$

Η ιδιότητα στο (α) και (β), ότι κάθε κατάσταση είναι προσβάσιμη από το μηδέν, μερικές φορές λέγεται **προσβασιμότητα**. Αποδείξαμε ότι, για γραμμικά συστήματα *προσβασιμότητα και ελεγξιμότητα είναι ισοδύναμα*. Σημειώστε επίσης ότι η ιδιότητα στο (γ), (δ) και (ε), ότι κάποιος μπορεί να ελέγξει κάθε κατάσταση με την αρχική, ονομάζεται ''ελεγξιμότητα'' (ένας πιο ακριβής όρος, που επίσης χρησιμοποιείται μερικές φορές, είναι *μηδενική ελεγξιμότητα)*. Εμείς προτιμούμε να διατηρούμε τον όρο ελεγξιμότητα για την ιδιότητα που ορίσαμε στον Ορισμό 1.1.4.

Παρατήρηση 1.1.1. Το (ε) απ΄τα παραπάνω αποτελέσματα αποδεικνύει μία αρχή η οποία είναι κάπως γενική στη θεωρία ελέγχου: Πεπερασμένης διάστασης ομαλά χρονοδιακριτά συστήματα με ''αντιστρέψιμη'' ή ''αναστρέψιμη'' δυναμική τείνουν να έχουν μια θεωρία πολύ ανάλογη με αυτή των συνεχών χρονικά συστημάτων. (Ουσιαστικά, επειδή οι δράσεις ομάδων μπορεί να σχετίζονται με συστήματα για τα οποία οι απεικονίσεις $\phi(\tau,\sigma,\cdot,\omega)$ είναι αντιστρέψιμες.) Εκτός από την αλγεβρική δομή θεωρίας των *χρονικά αναλλοίωτων γραμμικών* συστημάτων, γενικά τα (μη αντιστρέψιμα) χρονοδιακριτά συστήματα συμπεριφέρονται με έναν πολύ πιο πολύπλοκο τρόπο σε σχέση με τα χρονικά συνεχή συστήματα. Ένας τρόπος με τον οποίο κατανέμονται (δηλ., άπειρης διάστασης) χρονικά συνεχή συστήματα να συμπεριφέρονται πολύ διαφορετικά απ΄τα συνεχή χρονικά συστήματα (πεπερασμένης διάστασης) είναι ακριβώς με την έννοια ότι τείνουν να μην έχουν αντιστρέψιμη δυναμική, για παράδειγμα, ένα σύστημα που εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση διάχυσης θα εξομαλύνει τις αρχικές συνθήκες.

1.2 Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα

Σε όλη αυτή την ενότητα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, το Σ είναι ένα χρονικά αναλλοίωτο σύστημα.

Ορισμός 1.2.1. *Έστω $T \in \mathcal{T}$ και $x \in \mathcal{X}$. Το προσεγγίσιμο σύνολο από το x σε χρόνο T είναι*

$$\mathcal{R}^T(x) := \{z \in \mathcal{X} \mid x \overset{T}{\rightsquigarrow} z\}.$$

Το προσεγγίσιμο σύνολο από το x είναι το

$$\mathcal{R}(x) := \cup_{T \in \mathcal{T}_+} \mathcal{R}^T(x) = \{z \in \mathcal{X} \mid x \rightsquigarrow z\}.$$

Αν $\mathcal{S}$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{X}$, γράφουμε επίσης

$$\mathcal{R}^T(\mathcal{S}) := \cup_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{R}^T(x),$$

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) := \cup_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{R}(x),$$

για τα σύνολα που προσεγγίζονται από το υποσύνολο $\mathcal{S}$.

Σημειώστε ότι $\mathcal{R}^0(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ για όλα τα υποσύνολα $\mathcal{S}$ και ότι Σ ελέγξιμο (αντίστοιχα, ελέγξιμο σε χρόνο T) ανν $\mathcal{R}(x)$ (αντίστοιχα, $\mathcal{R}^T(x)) = \mathcal{X}$ για όλα τα $x \in \mathcal{X}$.

Από τα Λήμματα 1.1.2 και 1.1.3 έχουμε τα ακόλουθα:

Λήμμα 1.2.1. Αν Σ είναι γραμμικό, τότε $\mathcal{R}^T(0)$ είναι ένας υπόχωρος, για όλα τα $T \in \mathcal{T}$.

Αν Σ είναι γραμμικό και x είναι τώρα μία αυθαίρετη κατάσταση, η ισότητα

$$\phi(T, 0, x, \omega) = \phi(T, 0, x, \mathbf{0}) + \phi(T, 0, 0, \omega)$$

δείχνει ότι

$$\mathcal{R}^T(x) = \phi(T, 0, x, \mathbf{0}) + \mathcal{R}^T(0)$$

και ως εκ τούτου το $\mathcal{R}^T(x)$ είναι μία γραμμική υποπολλαπλότητα (παράλληλη μετατόπιση ενός υπόχωρου) στο $\mathcal{X}$.

Λήμμα 1.2.2. Για κάθε $t, s \in \mathcal{T}$,

$$\mathcal{R}^{s+t}(x) = \mathcal{R}^s(\mathcal{R}^t(x))$$

για κάθε $x \in \mathcal{X}$.

Απόδειξη. Στο Λήμμα 1.1.1, απ'το (β) συνεπάγεται ότι $\mathcal{R}^{s+t}(x) \subseteq \mathcal{R}^s(\mathcal{R}^t(x))$, ενώ η αντίστροφη έγκλειση έπεται απ'το (δ). $\square$

Έχει ενδιαφέρον να μάθουμε εάν η προσβασιμότητα μπορεί να εξετασθεί σε πολλά πεπερασμένα βήματα. Στη θεωρία αυτοματισμού, συχνά χρησιμοποιείται η ακόλουθη παρατήρηση:

Λήμμα 1.2.3. Έστω ότι Σ είναι ένα χρονοδιακριτό σύστημα και $\mathrm{card}(\mathcal{X}) = n < \infty$. Τότε,

$$\cup_{k=0,\dots,n-1}\mathcal{R}^k(x) = \mathcal{R}(x)$$

για όλα τα $x \in \mathcal{X}$.

Απόδειξη. Έστω x και $z \in \mathcal{R}(x)$. Υποθέστε ότι k είναι ο μικρότερος ακέραιος έτσι ώστε $x \overset{k}{\rightsquigarrow} z$ και υποθέστε με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής ότι $k \geq n$. Απ΄το (γ) του Λήμματος 1.1.1, υπάρχουν στοιχεία

$$x = z_0, z_1, \dots, z_k = z$$

με

$$z_i \overset{1}{\rightsquigarrow} z_{i+1},\ i = 0, \dots, k-1.$$

Επειδή $k \geq n$, υπάρχουν $0 \leq i < j \leq k$ τέτοια ώστε $z_i = z_j$. Επειδή

$$x \overset{i}{\rightsquigarrow} z_i \quad \text{και} \quad z_j \overset{k-j}{\rightsquigarrow} z,$$

έπεται απ΄το (δ) του Λήμματος 1.1.1 ότι $x \overset{l}{\rightsquigarrow} z$, $l = i+k-j < k$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την ελαχιστότητα του k. □

Από την έννοια της κατάστασης ισορροπίας του $x \in \mathcal{X}$, για ένα χρονικά αναλλοίωτο σύστημα, αυτό είναι ισοδύναμο με την απαίτηση ότι υπάρχει ένα $u \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε για όλα τα $T \in \mathcal{T}_+$, $\phi(T, 0, x, \omega) = x$, όπου $\omega \equiv u$. Για χρονοδιακριτά συστήματα αυτό είναι ισοδύναμο με

$$\mathcal{P}(x, u) = x$$

και για συνεχή χρονικά συστήματα με

$$f(x, u) = 0.$$

Αν x είναι σε κατάσταση ισορροπίας, τότε $x \in \mathcal{R}^T(x)$ για όλα τα T. Έτσι, για όλα τα $\mathcal{S} \in \mathcal{T}_+$,

$$\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x) \subseteq \mathcal{R}^{\mathcal{S}}(\mathcal{R}^T(x)),$$

και έτσι απ΄το Λήμμα 1.2.2:

Πόρισμα 1.2.1. Αν x είναι σε κατάσταση ισορροπίας, τότε

$$\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x) \subseteq \mathcal{R}^{\mathcal{S}+T}(x)$$

για κάθε $\mathcal{S}, T \in \mathcal{T}_+$.

Λήμμα 1.2.4. Έστω x σε κατάσταση ισορροπίας. Αν υπάρχουν $\mathcal{S}, T \in \mathcal{T}_+$, $T > 0$, τέτοια ώστε

$$\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x) = \mathcal{R}^{\mathcal{S}+T}(x),$$

τότε απαραίτητα $\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x) = \mathcal{R}(x)$.

Απόδειξη. Πρώτα σημειώστε ότι
$$\mathcal{R}^{\mathcal{S}+kT}(x) = \mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x)$$
για όλους τους θετικούς ακέραιους k. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά: Η περίπτωση $k = 1$ δίνεται, και

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\mathcal{S}+(k+1)T}(x) &= \mathcal{R}^{T}(\mathcal{R}^{\mathcal{S}+kT}(x)) \\ &= \mathcal{R}^{T}(\mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x)) \\ &= \mathcal{R}^{\mathcal{S}+T}(x) \\ &= \mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x)\,,\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη και η τελευταία ισότητα έπονται από την υπόθεση της επαγωγής. Τώρα υποθέτουμε ότι $z \in \mathcal{R}(x)$ γνωστό. Έτσι υπάρχει κάποιο $t \in \mathcal{T}$, ώστε $z \in \mathcal{R}^{t}(x)$. Βρείτε έναν ακέραιο k έτσι ώστε $\mathcal{S} + kT > t$. Από το Πόρισμα 1.2.1, $z \in \mathcal{R}^{\mathcal{S}+kT}(x) = \mathcal{R}^{\mathcal{S}}(x)$. □

Πόρισμα 1.2.2. Υποθέστε ότι x είναι σε κατάσταση ισορροπίας, ότι $\mathcal{X}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{K}$ με $\dim \mathcal{X} = n < \infty$, και ότι $\mathcal{R}^{T}(x)$ είναι ένας υπόχωρος για κάθε $T \in \mathcal{T}_{+}$. (Από Λήμμα 1.2.1, αυτό συμβαίνει πάντα αν Σ είναι ένα πεπερασμένο γραμμικό σύστημα και $x = 0$.) Τότε:

(α) Αν $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}^{n}(x) = \mathcal{R}(x)$.

(β) Αν $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, τότε $\mathcal{R}^{\varepsilon}(x) = \mathcal{R}(x)$ για όλα τα $\varepsilon > 0$.

Απόδειξη. Πάρτε οποιαδήποτε γνήσια αύξουσα ακολουθία

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n+1}$$

των στοιχείων του $\mathcal{T}$, και έστω
$$\mathcal{X}_i := \mathcal{R}^{\tau_i}(x)$$
για κάθε i. Αν ήταν αληθές ότι το $\mathcal{X}_i$ περιεχόταν γνήσια στο $\mathcal{X}_{i+1}$ για όλα τα i, τότε αυτό θα σήμαινε ότι $\dim \mathcal{X}_{i+1} = dim\mathcal{X}$, άτοπο. Έτσι, σε κάθε τέτοια αλυσίδα της προσβασιμότητας, υπάρχουν κάποια i τέτοια ώστε $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{i+1}$. Απ΄το Λήμμα 1.2.4, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{R}^{\tau_i}(x) = \mathcal{R}(x).$$

Τώρα στην περίπτωση (α) εφαρμόζουμε το παραπάνω επιχείρημα με $\tau_i = i$ και στην περίπτωση (β) χρησιμοποιούμε $\tau_i = i\varepsilon/n$. □

Το συμπέρασμα ότι, για γραμμικά συνεχή χρονικά συστήματα, αν μπορεί κάποιος να προσεγγίσει το z από το 0, τότε μπορεί να το κάνει σε αυθαίρετα μικρό χρόνο, είναι μη διαισθητικό. Φυσικά, αυτό δεν μπορεί να γίνει ποτέ σε ένα φυσικό σύστημα. Υποκείμενο στην παραπάνω απόδειξη είναι το γεγονός ότι ο χώρος των τιμών ελέγχου είναι όλος ο $\mathbb{K}^{m}$. Για να επιτύχουμε μικρότερα ε, σε γενικές γραμμές θα χρειαζόμασταν μεγαλύτερες τιμές για τους ελέγχους.

Λήμμα 1.2.5. Έστω

$$\mathcal{C}^T(x) = \{z \in \mathcal{X} \mid z \overset{T}{\rightsquigarrow} x\},\ \mathcal{C}(x) = \cup_{T\in\mathcal{T}_+}\mathcal{C}^T(x).$$

Τότε τα Λήμματα 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4 και τα Πορίσματα 1.2.1 και 1.2.2 ισχύουν, για τις καταστάσεις που προκύπτουν όταν το "$\mathcal{C}$" αντικατασταθεί από τον όρο "$\mathcal{R}$" ολοκληρωτικά.

Παρατήρηση 1.2.1. (α) Ένα ν-διάστατο χρονοδιακριτό γραμμικό σύστημα είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}^n(0) = \mathcal{X}.$$

(β) Ένα συνεχές χρονικά γραμμικό σύστημα είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}^{\varepsilon}(0) = \mathcal{X} \text{ για όλα τα } \varepsilon > 0$$

αν και μόνο αν $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}^{\varepsilon}(0) = \mathcal{X}$ για όλα τα $\varepsilon > 0$.

Απόδειξη. Αν Σ είναι ελέγξιμο, τότε $\mathcal{R}(x) = \mathcal{X}$ για όλα τα $x \in \mathcal{X}$, άρα από το Πόρισμα 1.2.2 ισχύει προπαντώς ότι $\mathcal{R}^n(0) = \mathcal{X}$ στη χρονοδιακριτή περίπτωση και ότι $\mathcal{R}^{\varepsilon}(0) = \mathcal{X}$ για όλα τα $\varepsilon > 0$ στη συνεχή χρονικά περίπτωση. Αντίθετα, αν $\mathcal{R}^T(0) = \mathcal{X}$ για κάποιο $T > 0$, τότε Σ είναι ελέγξιμο, από Λήμμα 1.1.5(β). Σε συνεχή χρονικά, $\mathcal{C}^T(0) = \mathcal{X}$ συνεπάγει την ίδια κατάληξη, από το (δ) του ίδιου Λήμματος. □

Έστω Σ ένα n-διάστατο χρονοδιακριτό αναλλοίωτο γραμμικό σύστημα (A, B). Από τον τύπο

$$\phi(n, 0, 0, \omega) = \sum_{i=1}^{n} A^{i-1}B\omega(n-i),$$

έπεται ότι z ανήκει στο $\mathcal{R}^n(0)$ ανν ανήκει στην εικόνα της γραμμικής απεικόνισης

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{R}(A, B) := [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]} \tag{1.1}$$

το οποίο απεικονίζει

$$\mathcal{U}^n \to \mathcal{X}$$

στέλνοντας

$$(u_1, \ldots, u_n) \to \sum_{i=1}^{n} A^{i-1}Bu_i.$$

Όταν $\mathcal{U} = \mathbb{K}^m$ και $\mathcal{X} = \mathbb{K}^n$, ταυτίζουμε την $\mathbf{R}(A, B)$ με ένα $n \times nm$ πίνακα του οποίου οι στήλες είναι οι στήλες των $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ με αυτή τη σειρά. Από την Παρατήρηση 1.2.1, το Σ είναι ελέγξιμο ανν η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης $\mathbf{R}$ είναι όλο το $\mathcal{X}$ και αυτό συμβαίνει ανν το rank(τάξη) του (δηλ, η διάσταση της εικόνας του) είναι n. Έτσι:

Θεώρημα 1. *Το n-διάστατο χρονοδιακριτό σύστημα Σ είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν* rank $\mathbf{R}(A, B) = n$.

Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton ,όπου αν

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$, τότε

$$\varphi(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0$$

γνωρίζουμε ότι

$$A^n = a_1 I + a_2 A + \ldots + a_n A^{n-1} \tag{1.2}$$

όπου

$$\mathcal{X}_A(s) = det(sI - A) = s^n - a_n s^{n-1} - \ldots - a_2 s - a_1 \tag{1.3}$$

είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της (1.2) με το A και χρησιμοποιώντας ξανά την (1.2) για να αντικαταστήσουμε το A^n με το αποτέλεσμα του δεξιού μέλους της, έπεται ότι A^{n+1} είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των πινάκων A^i, $i = 0, \ldots, n-1$. Αναδρομικά, το ίδιο ισχύει και για όλες τις δυνάμεις του A. Έτσι, για οποιοδήποτε διάνυσμα v, η επέκταση του $\{A^i v, i \geq 0\}$ συμπίπτει με την επέκταση του $\{A^i v, i < n\}$. Εφαρμόζοντάς το αυτό σε κάθε στήλη του B, συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη rank $\mathbf{R}(A, B) = n$ αποτυγχάνει αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο n-διάστατο γραμμοδιάνυσμα $\rho \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$\rho A^i B = 0 \text{ για όλα τα } i \geq 0, \tag{1.4}$$

το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει μία γραμμική συνάρτηση (δηλ, $x \mapsto \rho x$) στην κατάσταση του χώρου που μηδενίζει όλες τις καταστάσεις που είναι προσβάσιμες απ΄την αρχή.

Αν τώρα Σ είναι ένα n-διάστατο συνεχές χρονικά σύστημα, μπορούμε ακόμα να θεωρήσουμε τον πίνακα $\mathbf{R}(A, B)$ όπως στο (1.1). Ένα γεγονός το οποίο είναι με την πρώτη ματια αξιοσημείωτο —και το οποίο είναι τελικά εξαιτίας των κοινών ιδιοτήτων των αναδρομικών και διαφορικών αναλλοίωτων χρονικά γραμμικών εξισώσεων— είναι ότι οι *ίδιες* αλγεβρικές συνθήκες του χρονοδιακριτού είναι αναγκαίες και ικανές και για συνεχή χρονικά. Τώρα θα αποδείξουμε αυτό το γεγονός. (Αργότερα, βλ. Παρατήρηση 1.5.4, προκύπτει από ένα γενικό θεώρημα για χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα.) Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι, για οποιοδήποτε γραμμοδιάνυσμα ρ,

$$\rho e^{tA} B = \sum_{i=0}^{\infty} \rho A^i B \frac{t^i}{i!} \equiv 0$$

αν και μόνο αν η (1.4) ισχύει, λόγω της αναλυτικότητας της εκθετικής. Όπου $e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$ με $\Phi(t)$ να συμβολίζει ένα θεμελιώδη πίνακα της $\boldsymbol{\psi}' = A\boldsymbol{\psi}$, A πίνακας σταθερός και ισχύει η ιδιότητα $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n = I_n + At + \ldots$.

Θεώρημα 2. *Το n-διάστατο συνεχές χρονικά γραμμικό σύστημα Σ είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν $rank\, \mathbf{R}(A, B) = n$.*

Απόδειξη. Αν η rank συνθήκη αποτύχει, υπάρχει κάποιο γραμμοδιάνυσμα $\rho \neq 0$ έτσι ώστε η (1.4) να ισχύει. Δεδομένου ότι κάθε στοιχείο του $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}^1(0)$ έχει τη μορφή

$$x = \int_0^1 e^{(1-t)A} B\omega(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{tA} B\omega(1-t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.5}$$

επίσης $\rho x = 0$ για όλα αυτά τα x. Έτσι, $\mathcal{R}(0) \neq \mathcal{X}$ και το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο.

Αντίθετα, αν η ελεγξιμότητα αποτύχει, τότε υπάρχει κάποιο $\rho \neq 0$ έτσι ώστε $\rho x = 0$ για κάθε x στον υπόχωρο $\mathcal{R}(0)$. Συγκεκριμένα, θεωρείστε τον έλεγχο

$$\omega(t) := B^* e^{(1-t)A^*} \rho^*$$

στο διάστημα [0,1], όπου ‘‘$*$’’ σημαίνει συζυγής ανάστροφος. Από το (1.5),

$$0 = \rho x = \int_0^1 \rho e^{tA} B B^* e^{tA^*} \rho^* \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \parallel B^* e^{tA^*} \rho^* \parallel^2 \,\mathrm{d}t,$$

και ως εκ τούτου, $\rho e^{tA} B \equiv 0$. □

Πάρτε ως παράδειγμα το γραμμικοποιημένο εκκρεμές (αρμονικός ταλαντωτής). Με τους πίνακες

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

και το σύστημα είναι ελέγξιμο. Αυτό σημαίνει ότι κάθε διαμόρφωση της θέσης και της ταχύτητας μπορεί να αλλάξει με οποιαδήποτε άλλη τέτοια διαμόρφωση μέσω της εφαρμογής κατάλληλου ελέγχου. Αργότερα θα υπολογίσουμε ένα σαφές παράδειγμα τέτοιου ελέγχου.

Για το αρχικό μη γραμμικό εκκρεμές, η χρήση του μετασχηματισμού ανατροφοδότησης επιτρέπει την εδραίωση ότι

$$\dot{x_1} = x_2,\, \dot{x_2} = -\sin x_1 + u$$

είναι επίσης ελέγξιμο, το μόνο που χρειάζεται είναι να τροποποιήσουμε οποιονδήποτε έλεγχο χρησιμοποιείται για τη μεταφορά του x στο z στο γραμμικό σύστημα $\dot{x_1} = x_2, \dot{x_2} = u$ με την προσθήκη του όρου $\sin \xi_1(t)$ υπολογισμένου κατά μήκος της επακόλουθης τροχιάς. Αυτό είναι μόνο μια ιδιότητα αυτού του απλού παραδείγματος, γενικά, για μη γραμμικά συστήματα η ελεγξιμότητα είναι πολύ πιο δύσκολο να χαρακτηρισθεί. Ωστόσο, η αρχή της γραμμικοποίησης για την ελεγξιμότητα που μελετάτε αργότερα είναι χρήσιμη στη μείωση των ερωτημάτων ως αναφορά την ‘‘τοπική’’ ελεγξιμότητα στη γραμμική περίπτωση.

1.3 Ελέγξιμα Ζεύγη Πινάκων

Σημειώνουμε ότι οι συνθήκες ελεγξιμότητας είναι ακριβώς οι ίδιες, σε ότι αφορά τους πίνακες (A, B), για τη διακριτή και τη συνεχή περίπτωση, έτσι είμαστε δικαιολογημένοι να εισάγουμε τον παρακάτω ορισμό για ζεύγη πινάκων:

Ορισμός 1.3.1. *Έστω $\mathbb{K}$ σώμα και έστω $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$, για θετικούς ακεραίους n, m. Το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο ή προσεγγίσιμο αν* $\operatorname{rank} \mathbf{R}(A, B) = n$

Καλούμε $\mathbf{R} = \mathbf{R}(A, B)$ τον πίνακα ελεγξιμότητας (A, B), την εικόνα της αντίστοιχης απεικόνισης, δηλαδή ο χώρος στηλών του $\mathbf{R}$ είναι ο προσεγγίσιμος (ή ελέγξιμος) χώρος του (A, B) και το δηλώνουμε αυτό με

$$\mathcal{R}(A, B)$$

ή απλά $\mathcal{R}$. Για χρονοδιακριτά ή συνεχή γραμμικά συστήματα, το $\mathcal{R}$ είναι το ίδιο με το σύνολο των καταστάσεων που είναι προσεγγίσιμες από την αρχή, όπως είναι ξεκάθαρο για χρονοδιακριτά και έπεται από την απόδειξη του Θεωρήματος 2 (σελ. 12) για συνεχή χρονικά. Όποτε αναφερόμαστε παρακάτω σε ''ζεύγη'' (A, B), εννοούμε ένα (A, B) όπως παραπάνω. Απ'το Θεώρημα Cayley-Hamilton έπεται η ακόλουθη παρατήρηση:

Λήμμα 1.3.1. Έστω (A, B) ένα ζεύγος όπως στον Ορισμό 1.3.1, και έστω

$$b_j := \text{η } j \text{ στήλη του } B,\ j = 1, \ldots, m.$$

Τότε ο ελέγξιμος χώρος $\mathcal{R}(A, B)$ είναι επέκταση του

$$\{A^i b_j,\ i \geq 0,\ j = 1, \ldots, m\}.$$

Έτσι, το $\mathcal{R}$ είναι ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathcal{X} = \mathbb{K}^n$ που περιέχει τις στήλες του B. Συγκεκριμένα, (A, B) είναι ελέγξιμο, ανν αυτή η επέκταση ανήκει όλη στο $\mathcal{X}$.

Όταν $m = 1$ αυτό δείχνει ότι η ελεγξιμότητα του (A, B) είναι ισοδύναμη με την προϋπόθεση ότι το B, θεωρούμενο ως διάνυσμα (στήλη) στο $\mathbb{K}^n$, είναι *κυκλικό* για τον πίνακα A. Υπό την έννοια αυτή η ελεγξιμότητα γενικεύει την κλασική αντίληψη της κυκλικότητας στη γραμμική άλγεβρα.

Έστω $GL(n)$ να υποδηλώνει την ομάδα όλων των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων στο $\mathbb{K}$. Το αποτέλεσμα, συχνά ονομαζόμενο η *Kalman ανάλυση ελεγξιμότητας*, είναι εξαιρετικά χρήσιμο στο να δίνει απλές αποδείξεις σε θέματα σχετικά με την ελεγξιμότητα.

Λήμμα 1.3.2. Θεωρούμε ότι το (A, B) δεν είναι ελέγξιμο. Έστω $\dim \mathcal{R}(A, B) = r < n$. Τότε υπάρχει ένας $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε οι πίνακες $\widetilde{A} := T^{-1}AT$ και $\widetilde{B} := T^{-1}B$ έχουν τη μορφή πινάκων

$$\boxed{\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}} \tag{1.6}$$

όπου A_1 είναι $r \times r$ και B_1 είναι $r \times m$. (Αν $r = 0$, η ανάλυση είναι μηδαμινή και τα A_1, A_2, B_1 δεν υπάρχουν.)

Απόδειξη. Διαλέγουμε έναν οποιοδήποτε υπόχωρο $\mathcal{S}$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{R} \oplus \mathcal{S} = \mathbb{K}^n$$

και έστω $\{v_1, \ldots, v_r\}$ μία βάση του $\mathcal{R}$ και $\{w_1, \ldots, w_{n-r}\}$ μία βάση του $\mathcal{S}$. Τότε, με

$$T := (v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}),$$

οι επιθυμητοί τύποι για το $\widetilde{A}$ και το $\widetilde{B}$ προκύπτουν απ'το γεγονός ότι $\mathcal{R}$ είναι A-αναλλοίωτο και ότι περιέχει την εικόνα του B. □

Λήμμα 1.3.3. Το (A_1, B_1) είναι το ίδιο ένα ελέγξιμο ζεύγος.

Για ένα συνεχές χρονικά σύστημα (A, B), μπορούμε να ερμηνεύσουμε την παραπάνω ανάλυση ως εξής: Με την αλλάγη μεταβλητών

$$x(t) := Tz(t)$$

η εξίσωση $\dot{x} = Ax + Bu$ μετασχηματίζεται σε

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_1 z_1 + A_2 z_2 + B_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= A_3 z_2 \end{aligned}$$

όπου z_1, z_2 είναι r- και $(n-r)$-διάστατα αντίστοιχα. Είναι τότε σαφές ότι η z_2 συνιστώσα της κατάστασης δεν μπορεί να ελεγχθεί με κανένα τρόπο. Μία ανάλογη παρατήρηση εφαρμόζεται σε χρονοδιακριτά συστήματα. Σημειώστε ότι το ''μόνο αν'' μέρος του Θεωρήματος 2 (σελ.10) είναι μία άμεση συνέπεια αυτής της ανάλυσης του αποτελέσματος.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A διασπάται ως εξής

$$\chi_A = \chi_c \chi_u$$

όπου

$$\chi_c = \chi_{A_1} \text{ και } \chi_u = \chi_{A_3}.$$

Σημειώνουμε ότι A_1 είναι ένας πίνακας αναπαράστασης για τον περιορισμό του A στο $\mathcal{R}$, άρα το χ_c είναι ανεξάρτητο από την επιλογή βάσης στο $\mathcal{R}$. Το ίδιο ισχύει και ως εκ τούτου για το $\chi_u = \chi_A / \chi_c$.(Η ανεξαρτησία της βάσης για το τελευταίο επίσης έπεται απ'το γεγονός ότι ο A_3 είναι ένας πίνακας για τη γραμμική απεικόνιση που συνάγεται απ'το A στο πηλίκο $\mathbb{K}^n/\mathcal{R}$ και ως εκ τούτου ορίζεται μοναδικά ως ομοιότητα.) Αν $r = 0$, θεωρούμε τη συνθήκη $\chi_c = 1$.

Ορισμός 1.3.2. *Τα πολυώνυμα χ_c και χ_u είναι, αντίστοιχα, τα ελέγξιμα και τα μη ελέγξιμα μέρη του χαρακτηριστικού πολυώνυμου χ_A (σε σχέση με το ζεύγος (A, B)).*

Κάποιες φορές αναφερόμαστε στις ιδιοτιμές (ή τα ιδιοδυανύσματα) αυτών ως οι ''ελέγξιμοι τύποι'' και ''μη ελέγξιμοι τύποι'', αντίστοιχα, του συστήματος (ή ζεύγους πινάκων) (A, B).

Θα αναφερθούμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα ως το Λήμμα του *Hautus*:

Λήμμα 1.3.4. Έστω $\widetilde{\mathbb{K}}$ το αλγεβρικό κάλυμμα του σώματος $\mathbb{K}$ (Στις περισσότερες εφαρμογές, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, άρα $\widetilde{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$.) Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες για το ζεύγος (A, B):

(α) (A, B) είναι ελέγξιμο.

(β) $\operatorname{rank}[\lambda I - A, B] = n$ για όλα τα $\lambda \in \widetilde{\mathbb{K}}$.

(γ) $\operatorname{rank}[\lambda I - A, B] = n$ για κάθε ιδιοτιμή λ του A.

Απόδειξη. Σημειώνουμε πρώτον ότι το (β) και το (γ) είναι ισοδύναμα, δεδομένου ότι ο πρώτος $n \times n$ μπλοκ πίνακας του $n \times (n+m)$ πίνακα $[\lambda I - A, B]$ ήδη έχει πλήρη τάξη, όταν λ δεν είναι μια ιδιοτιμή του A. Επίσης, δεδομένου ότι η ελεγξιμότητα χαρακτηρίζεται από μια κατάσταση τάξης, και κατα συνέπεια από το μηδενισμό συγκεκριμένων οριζουσών, το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο ανν είναι ελέγξιμο ως ζεύγος πάνω στο σώμα $\widetilde{\mathbb{K}}$. Από αυτό προκύπτει ότι $\widetilde{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$.

Αποδεικνύουμε παρακάτω ότι απ'το (α) συνεπάγεται το (β). Υποθέτουμε ότι το rank είναι μικρότερο από n για κάποια $\lambda \in \mathbb{K}$. Έτσι, ο χώρος γραμμών του $[\lambda I - A, B]$ έχει διάσταση μικρότερη από n, άρα υπάρχει κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα $p \in \mathbb{K}^n$ και κάποιο λ τέτοιο ώστε

$$p'[\lambda I - A, B] = 0 \tag{1.7}$$

Έτσι, $p'A = \lambda p'$ (λ είναι μία αριστερή ιδιοτιμή του A), και $p'B = 0$. Επομένως, επίσης $p'A^k B = \lambda^k p'B = 0$ για όλα τα k και άρα

$$p'\mathbf{R}(A, B) = 0,$$

διαψεύδοντας την ελεγξιμότητα.

Τελικά, διαπιστώνουμε ότι απ'το (β) συνεπάγεται το (α). Υποθέτουμε ότι το (α) δεν ισχύει, άρα υπάρχει μία ανάλυση όπως στην (1.6), με $r < n$. Έστω λ, v ένα ζευγάρι ιδιοτιμής/ιδιοσυνάρτησης του ανεστραμμένου πίνακα A_3', έτσι ώστε

$$v'(\lambda I - A_3) = 0.$$

Έπεται ότι το μη μηδενικό *n-διάνυσμα*

$$\omega := \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του $\widetilde{A}$, με $\omega'\widetilde{B} = 0$. Άρα η $p := (T')^{-1}\omega \neq 0$ ικανοποιεί την

$$p'[(\lambda I - A)T, B] = 0.$$

Από τη στιγμή που ο χώρος στηλών του πίνακα $[(\lambda I - A)T, B]$ συμπίπτει με αυτόν του $[\lambda I - A, B]$, επίσης η (1.7) ισχύει και άρα το (β) δεν μπορεί να είναι αληθές. □

Πόρισμα 1.3.1. Αν (A, B) είναι ελέγξιμο, τότε το $\operatorname{rank}[A, B] = n$.

Θυμίζουμε ότι η *γεωμετρική πολλαπλότητα* μιας ιδιοτιμής λ ενός πίνακα A είναι η διάσταση του μηδενοχώρου $ker(\lambda I - A)$.

Λήμμα 1.3.5. Υποθέτουμε ότι (A, B) είναι ελέγξιμο και ότι το $\operatorname{rank} B = q$. Τότε, η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του A είναι το πολύ q.

Οι μη ελέγξιμοι τύποι μπορούν να χαρακτηρισθούν κομψά χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του Hautus, όπως ακολουθεί.

Λήμμα 1.3.6. Τα μηδενικά του χ_u είναι ακριβώς οι μιγαδικοί αριθμοί λ για τους οποίους

$$\text{rank}[\lambda I - A, B] < n.$$

Θα φαινόταν φυσικό επίσης να μελετούσαμε μία ελαφρώς πιο γενική τάξη των ''γραμμικών'' (ή πιο συγκεκριμένα, ''ομοπαραλληλικών'') συστημάτων, δηλαδή, την τάξη των μη ομογενών γραμμικών συστημάτων

$$\dot{x} = Ax + Bu + c, \tag{1.8}$$

$c \neq 0$ (ή το ανάλογό τους σε χρονοδιακριτά). Τουλάχιστον για ελέγξιμα συστήματα, η ακόλουθη απλή συνέπεια του Λήμματος 1.3.4 δείχνει ότι, εκτός από τη μετάφραση των συντεταγμένων στην κατάσταση και είσοδο τιμών των χώρων, $x \to x - x_0$, $u \to u - u_0$, προκύπτουν ξανά ομογενή γραμμικά συστήματα. Με τον όρο col W συμβολίζουμε το χώρο στηλών του πίνακα W, δηλαδή το χώρο που παράγουν οι στήλες του W.

Έστω $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της έννοιας της ελεγξιμότητας είναι ότι είναι μία *generic* ιδιότητα, με την έννοια ότι το σύνολο των ελέγξιμων ζευγών είναι ένα ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του συνόλου όλων των ζευγών ενός δεδομένου μεγέθους. Διατυπώνουμε αυτή τη δήλωση ως εξής. Για κάθε σταθεροποιημένο ζεύγος θετικών ακεραίων n, m, έστω

$$\mathcal{S}_{n,m} := \{(A, B) | A \in \mathbb{K}^{n \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times m}\},$$

προσδιορισμένο με $\mathbb{K}^{n^2+nm}$ με την παράθεση όλων των συντελεστών των A, B σε κάποια σταθεροποιημένη σειρά. Έστω $\mathcal{S}^c_{n,m}$ υποσύνολο του $\mathcal{S}_{n,m}$ αποτελούμενο από όλα τα ελέγξιμα ζεύγη.

Πρόταση 1.3.1. Αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, το σύνολο $\mathcal{S}^c_{n,m}$ είναι ανοικτό και πυκνό στο $\mathcal{S}_{n,m}$.

Απόδειξη. Το συμπλήρωμα $\mathcal{S}^u_{n,m}$ του $\mathcal{S}^c_{n,m}$ είναι ένα αλγεβρικό υποσύνολο του $\mathcal{S}_{n,m}$, το οποίο είναι το σύνολο των κοινών μηδενικών ενός συνόλου πολυωνύμων $\{P_1, \ldots, P_r\}$ σε $n^2 + nm$ μεταβλητές. Πράγματι, μπορούμε να πάρουμε ως P_i το σύνολο όλων των πιθανών οριζουσών των $n \times n$ υποπινάκων του $\mathbf{R}(X, Y)$, όπου X, Y είναι πίνακες απροσδιόριστοι. Τότε

$$\text{rank}\, \mathbf{R}(A, B) < n,$$

το οποίο είναι,

$$(A, B) \in \mathcal{S}^u_{n,m}$$

ανν όλες αυτές οι υπο-ορίζουσες εξαφανισθούν. Σημειώνουμε ότι $\mathcal{S}^u_{n,m}$ είναι κλειστό, αφού είναι η τομή των μηδενικών συνόλων του P_i, καθένα απ΄τα οποία είναι κλειστά από τη συνέχεια του P_i. Επιπλέον, $\mathcal{S}^u_{n,m}$ είναι γνήσιο, αφού για οποιαδήποτε σταθεροποιημένα n, m υπάρχει τουλάχιστον ένα ελέγξιμο σύστημα.

Έμεινε μόνο να αποδείξουμε ότι οποιοδήποτε γνήσιο αλγεβρικό υποσυνόλο ενός Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{K}^q$ πρέπει να έχει ένα πυκνό συμπλήρωμα ή ισοδύναμα ότι αυτό το σύνολο δεν μπορεί να έχει καθόλου εσωτερικό. Αφού ένα αλγεβρικό σύνολο είναι μια τομή των συνόλων των ριζών πολυωνύμων, είναι απαραίτητο να δούμε μόνο ότι ένα σύνολο του τύπου $\{y \mid P(y) = 0\}$ (P πολυώνυμο) δεν μπορεί να έχει ένα μη κενό εσωτερικό εκτός αν $P \equiv 0$. Αυτό είναι ξεκάθαρο από την αρχή της αναλυτικής συνέχειας, ή ειδικά για πολυώνυμα, απλά παρατηρώντας ότι όλες οι παράγωγοι του P πρέπει να είναι μηδέν σε ένα εσωτερικό σημείο, και άρα ότι όλοι οι συντελεστές του P είναι μηδέν. (Εναλλακτικά, κάποιος θα μπορούσε να εργασθεί καθαρά αλγεβρικά, χρησιμοποιώντας επαγωγικά το γεγονός ότι ένα πολυώνυμο μίας μεταβλητής δεν μπορεί να έχει άπειρου πλήθους ρίζες.) $\square$

Κάποιος μπορεί επίσης να αποδείξει ότι $\mathcal{S}^u_{n,m}$ έχει μέτρο Lebesgue μηδέν. Η γενίκευση της ελεγξιμότητας σημαίνει ότι, αν όλοι οι συντελεστές του A και του B είναι πειραματικά μετρήσιμα μεγέθη, τότε το επακόλουθο σύστημα κατάπάσα πιθανότητα θα είναι ελέγξιμο. Ωστόσο, αν ένα σύστημα είναι σχεδόν $\mathcal{S}^u_{n,m}$, θα είναι ''δύσκολο'' να ελεγχθεί και στην πραγματικότητα το ''αληθινό'' σύστημα που προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε μπορεί να είναι μη ελέγξιμο, με μέτρηση σφαλμάτων λογαριασμένων για την αντίφαση. Είναι σημαντικό στην πράξη να εκτιμήσουμε πόσο κοντά ένα σύστημα είναι στο να είναι μη ελέγξιμο. Διάφορες δημοσιεύσεις ασχολούνται με αυτό το θέμα και αριθμητικά ισχυρές μέθοδοι που βασίζονται σ'αυτήν την έρευνα έχουν σχεδιαστεί. Συγκεκριμένα, μία έχει τον ακόλουθο χαρακτηρισμό.

Για οποιοδήποτε ελέγξιμο ζεύγος (A, B) στο $\mathbb{C}$, θεωρούμε

$$\delta(A, B) := \operatorname{dist}((A, B), \mathcal{S}^u_{n,m}) ,$$

όπου η απόσταση μετριέται σε σχέση με τη νόρμα τελεστή, δηλ

$$\operatorname{dist}(F, G) = \|F - G\|$$

για οποιουσδήποτε δύο πίνακες F, G μεγέθους $n \times (n + m)$. Αφού για κάθε σταθεροποιημένο n, m το σύνολο των μη ελέγξιμων συστημάτων είναι κλειστό —στην πραγματικότητα είναι ένα αλγεβρικό σύνολο, όπως παρατηρείται στην παραπάνω απόδειξη— έπεται ότι η απόσταση έχει πάντα επιτευχθεί, δηλ, υπάρχει κάποιο $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \in \mathcal{S}^u_{n,m}$ έτσι ώστε

$$\delta(A, B) = \operatorname{dist}((A, B), (\widetilde{A}, \widetilde{B})). \tag{1.9}$$

Αυτή η απόσταση δεν είναι εύκολο να υπολογισθεί, από τη στιγμή που περιλαμβάνει μία ελαχιστοποίηση όλων των μη ελέγξιμων ζευγών.

Παρατήρηση 1.3.1. Έστω A ένας μιγαδικός $n \times l$ πίνακας τάξης r. Χρησιμοποιώντας ''$*$'' για να συμβολίσουμε το συζυγή ανάστροφο, έστω $Q := A^*A$. Αφού ο Q είναι Ερμιτιανός και θετικά ημιορισμένος, όπου ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται Ερμιτιανός ή αυτοσυζυγής αν τα στοιχεία του, επί της κύριας διαγωνίου, είναι πραγματικοί και κάθε ζεύγος συμμετρικών ως προς την κύρια διαγώνιο είναι συζυγείς και θετικά ημιορισμένος αν ο A είναι Ερμιτιανός ($A^* = A$) και επιπλέον ισχύει $\widetilde{x}^*A\widetilde{x} \geq 0$, για κάθε $\widetilde{x} \in \mathcal{C}^n$, $\widetilde{x} \neq \widetilde{0}$ εισάγει μία ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα,

$$Qv_i = \lambda_i v_i,\ i = 1, \ldots, l$$

όπου οι ιδιοτιμές λ_i είναι πραγματικές,

$$0 \leq \lambda_l \leq \lambda_{l-1} \leq \ldots \leq \lambda_1.$$

Σημειώνουμε ότι $\operatorname{rank} Q = r$, έτσι $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_l = 0$.

Ορίζουμε $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$ για κάθε $i = 1, \ldots, r$. Εξορισμού, αυτές είναι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A. Συγκεκριμένα, συχνά συμβολίζουμε το σ_r ως

$$\sigma_{min}(A),$$

και αυτό είναι η μικρότερη ιδιάζουσα τιμή του A. Άρα το $\sigma_{min}(A)$ παρέχει ένα μέτρο για το πόσο μακρυά είναι ο A απ'το να γίνει ιδιάζων, με την έννοια του να έχει μη μηδενικό πυρήνα. Στην πραγματικότητα, αυτός ο αριθμός μετράει την ακριβή απόσταση από το σύνολο των ιδιαζόντων πινάκων.

Παρατήρηση 1.3.2. Για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων l και n, υπάρχουν l συνεχείς συναρτήσεις $\sigma_1, \ldots, \sigma_l : \mathbb{C}^{n\times l} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε A της τάξης $r \leq l$, $\sigma_r(A) \leq \ldots \leq \sigma_1(A)$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του A. Συγκεκριμένα, σε πίνακες οποιασδήποτε σταθεροποιημένης τάξης r, το $\sigma_{min}(A)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση του A.

Απ'την άλλη, μπορούμε να λάβουμε υπόψη μας την ποσότητα

$$\delta'(A, B) := \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \sigma_{min}(\lambda I - A, B)\,,$$

όπου σ_{min} υποδηλώνει τη μικρότερη ιδιάζουσα τιμή, η οποία περιλαμβάνει μόνο μία βαθμωτή ελαχιστοποίηση. (Παρατήρηση 1.3.1) Είναι δικαιολογημένη η γραφή $''minimum``$ σε αντιδιαστολή με απλά $''infimum``$ διότι η συνάρτηση

$$f(\lambda) := \sigma_{min}(\lambda I - A, B)$$

είναι μη αρνητική και συνεχής (η συνέχεια ιδιάζουσων τιμών ως προς τις εισόδους πινάκων, Παρατήρηση 1.3.2, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $rank$ του $(\lambda I - A, B)$ είναι πάντα n, λόγω ελεγξιμότητας) και το $\lim_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda) = \infty$ επειδή

$$\sigma_{min}(\lambda I - A, B) = |\lambda| \sigma_{min}\left(I - \frac{1}{\lambda}A, \frac{1}{\lambda}B\right)$$

και $\sigma_{min}(I - \frac{1}{\lambda}A, \frac{1}{\lambda}B) \to \sigma_{min}(I, 0) = 1$.

Παρατήρηση 1.3.3. Για κάθε πίνακα A πλήρους τάξης γραμμών $r = n$, $\sigma_{min}(A) = \min\{\|\Delta\| \mid (A + \Delta)$ δεν είναι πλήρους τάξης γραμμών$\}$.

Πρόταση 1.3.2. Για κάθε ελέγξιμο ζεύγος $(A, B), \delta(A, B) = \delta'(A, B)$.

Απόδειξη. Έστω $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \in \mathcal{S}^u_{n,m}$ να είναι όπως στο (1.9) και γράφουμε

$$\Delta_A := \widetilde{A} - A,\ \Delta_B := \widetilde{B} - B.$$

Από την ιδιότητα του Hautus, υπάρχει κάποιο λ έτσι ώστε το

$$[\lambda I - \widetilde{A}, \widetilde{B}] = [\lambda I - A, B] + [-\Delta_A, \Delta_B]$$

να έχει $rank$ μικρότερο του n. Από την Παρατήρηση 1.3.3 για $(\lambda I - A, B)$ και $\Delta = (-\Delta_A, \Delta_B)$,

$$\delta'(A,B) \leqslant \sigma_{min}(\lambda I - A, B) \leqslant \|(-\Delta_A, \Delta_B)\| = \|(\Delta_A, \Delta_B)\| = \delta(A,B).$$

Για να αποδείξουμε την άλλη ανισότητα, έστω λ τέτοιο ώστε $\delta'(A,B) = \sigma_{min}(\lambda I - A, B)$. Πάλι λόγω της Παρατήρησης 1.3.3, πρέπει να υπάρχουν πίνακες (Δ_A, Δ_B) με μέτρο ίσο με του $\sigma_{min}(\lambda I - A, B)$ έτσι ώστε, καθορίζοντας τα $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ όπως παραπάνω, αυτό είναι ένα ζεύγος σε απόσταση $\sigma_{min}(\lambda I - A, B)$ από το (A,B), το οποίο δεν είναι ελέγξιμο. Άρα

$$\delta(A,B) \leqslant \sigma_{min}(\lambda I - A, B) = \delta'(A,B)$$

ισχύει επίσης. □

Παρατήρηση 1.3.4. Έστω ότι (A,B) αντιστοιχεί σε ένα χρονοδιακριτό αναλλοίωτο γραμμικό σύστημα Σ. Υπενθυμίζουμε ότι μηδενική ελεγξιμότητα σημαίνει ότι κάθε κατάσταση μπορεί να ελεγχθεί στο μηδέν. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι όλες ισοδύναμες:

1. Το Σ είναι μηδενικής ελεγξιμότητας.
2. Η εικόνα του A^n συμπεριλαμβάνεται στην εικόνα του $\mathbf{R}(A,B)$.
3. Στην ανάλυση του Λήμματος 1.3.2, A_3 είναι μηδενικής ισχύος.
4. $\text{rank}[\lambda I - A, B] = n$ για όλα τα μη μηδενικά $\lambda \in \widetilde{\mathbb{K}}$.
5. $\text{rank}[I - \lambda A, B] = n$ για όλα τα $\lambda \in \widetilde{\mathbb{K}}$.

1.4 Ελεγξιμότητα Υπό Δειγματοληψία

Όταν χρησιμοποιούμε ψηφιακό έλεγχο, οι είσοδοι περιορίζονται με διάφορους τρόπους. Ένας τρόπος μοντελοποίησης του περιορισμού σε κατά τμήματα σταθερούς ελέγχους είναι μέσω της έννοιας της δειγματοληψίας. Επομένως, έχει ενδιαφέρον να γνωρίζουμε πότε ένα συνεχές χρονικά σύστημα το οποίο είναι γνωστό ότι είναι ελέγξιμο, παραμένει έτσι αν εφαρμόσουμε ελέγχους, οι οποίοι είναι σταθεροί σε ένα διάστημα δειγματοληψίας $[k\delta, (k+1)\delta]$. Μαθηματικά, το ερώτημα είναι εάν το δειγματοληπτικό σύστημα $\Sigma_{[\delta]}$ είναι ελέγξιμο, και η απάντηση θα εξαρτηθεί απ'το χρόνο δειγματοληψίας δ καθώς και από το σύστημα Σ.

Αν το Σ είναι ένα συνεχές χρονικά γραμμικό (ακόμα χρονικά αναλλοίωτο) σύστημα, το $u \in \mathcal{U}$ είναι μια τιμή ελέγχου, και $\delta > 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, ο τύπος της μεταβολής των παραμέτρων ,δηλαδή αν έχουμε το Π.Α.Τ. με σταθερούς συντελεστές, της μορφής

$$y' + \alpha y = g(t), y(t_0) = y_0,$$

όπου $\alpha \in \mathcal{R}$, τότε $p(t) = \alpha$ και η λύση θα είναι

$$y(t) = e^{-\alpha(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

για $\omega \equiv u$, δίνει ότι

$$\begin{aligned}\phi(\delta, 0, x, \omega) &= e^{\delta A}x + \int_0^\delta e^{(\delta-s)A}Bu \,\mathrm{d}s \\ &= Fx + Gu,\end{aligned}$$

όπου

$$F := e^{\delta A}, \quad G := A^{(\delta)}, \quad A^{(\delta)} := \int_0^\delta e^{(\delta-s)A}\,\mathrm{d}s. \tag{1.10}$$

Άρα το $\Sigma_{[\delta]}$ είναι ένα χρονοδιακριτό, αναλλοίωτο γραμμικό σύστημα(F, G) και είναι ελέγξιμο ανν το

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(F, G) &= [G, FG, \ldots, F^{n-1}G] \\ &= A^{(\delta)}[B, e^{\delta A}B, \ldots, e^{(n-1)\delta A}B] \\ &= A^{(\delta)}\mathbf{R}(e^{\delta A}, B)\end{aligned} \tag{1.11}$$

έχει rank n. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι οι πίνακες $A^{(\delta)}$ και $e^{\delta A}$ αντιμετατίθενται, ώντας και οι δύο συναρτήσεις του A. Σημειώστε ότι $A^{(\delta)} = f(A)$, όπου f είναι η ακέραια συνάρτηση

$$f(s) \quad = \quad \int_0^\delta e^{(\delta-t)s}\,\mathrm{d}t \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}s^n \quad = \quad \frac{e^{\delta_s} - 1}{s}.$$

Αφού $sf(s) = e^{\delta_s} - 1$, ισχύει επίσης η χρήσιμη ταυτότητα

$$AA^{(\delta)} = e^{\delta A} - I$$

Μπορούμε να πούμε ότι το συνεχές χρονικά σύστημα Σ είναι $\delta - \mathit{sampled\,controllable}$ αν το χρονοδιακριτό σύστημα $\Sigma_{[\delta]}$ είναι ελέγξιμο. Φυσικά, η $\delta - \mathit{sampled}$ ελεγξιμότητα για οποιοδήποτε $\delta > 0$ συνεπάγεται ελεγξιμότητα, αφού για οποιαδήποτε κατάσταση x, z, ισχύει $x \rightsquigarrow z$ στο $\Sigma_{[\delta]}$ επίσης συνεπάγεται ότι $x \rightsquigarrow z$ στο αρχικό σύστημα Σ (χρησιμοποιώντας κατά τμήματα συνεχείς ελέγχους). Το ενδιαφέρον βρίσκεται στον καθορισμό των συνθηκών για να ισχύει το αντίστροφο. Από την εξίσωση (1.11) προκύπτει ότι το Σ είναι $\delta - \mathit{sampled\,controllable}$ ανν και οι δύο $A^{(\delta)}$ και $\mathbf{R}(e^{\delta A}, B)$ έχουν rank n.

Λήμμα 1.4.1. Το Σ είναι $\delta - \mathit{sampled\,controllable}$ αν και μόνο αν το ζεύγος $(e^{\delta A}, B)$ είναι ελέγξιμο και το A δεν έχει ιδιοτιμές της μορφής $2k\pi i/\delta$ για οποιοδήποτε μη μηδενικό ακέραιο k.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις, αρκεί να αποδείξουμε ότι $A^{(\delta)}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη της ιδιοτιμής. Αυτό προκύπτει από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης, αφού οι ιδιοτιμές του είναι οι πιθανές τιμές $f(\lambda)$, όπου f είναι η παραπάνω συνάρτηση και λ είναι μια ιδιοτιμή του A. Αν $\lambda = 0$, $f(\lambda) = \delta \neq 0$, αλλιώς

$$f(\lambda) = \frac{e^{\delta\lambda} - 1}{\lambda},$$

ο αριθμητής είναι μη μηδενικός για όλα τα $\lambda \neq 0$ αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη ιδιοτιμής. □

Παράδειγμα 1.4.1. Θεωρούμε, ως ένα παράδειγμα, το σύστημα Σ, που αντιστοιχεί στο γραμμικοποιημένο εκκρεμές (σελ. 10), το οποίο αποδείχθηκε νωρίτερα ότι είναι ελέγξιμο. Υπολογίζουμε ότι

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Έτσι, για οποιοδήποτε $\delta > 0$,

$$\mathbf{R}(e^{\delta A}, B) = \begin{pmatrix} 0 & \sin\delta \\ 1 & \cos\delta \end{pmatrix},$$

ο οποίος έχει ορίζουσα $(-\sin\delta)$. Από το Λήμμα 1.4.1, το Σ είναι $\delta - sampled\, controllable$ ανν

$$\sin\delta \neq 0 \quad \text{και} \quad 2k\pi i \neq \pm i\delta,$$

δηλ, αν και μόνο αν δ δεν είναι πολλαπλάσιο του π.

Παίρνουμε, για παράδειγμα, το χρόνο δειγματοληψίας $\delta = 2\pi$. Από την εκθετική μορφή του e^{tA}, γνωρίζουμε ότι $e^{\delta A} = I$. Έτσι,

$$A^{\delta} = A^{-1}(e^{\delta A} - I) = 0,$$

Άρα $G = 0$. Αυτό σημαίνει ότι για το χρονοδιακριτό σύστημα $\Sigma_{[\delta]}$ ισχύει η εξελικτική εξίσωση

$$x(t+1) = x(t)$$

Άσχετα με το τι (σταθερός) έλεγχος εφαρμόζεται κατά το διάστημα δειγματοληψίας $[0,\delta]$, η κατάσταση (θέση και ταχύτητα) είναι η ίδια στο τέλος του διαστήματος όπως ήταν στην αρχή της περιόδου (Διαισθητικά, λέμε για το γραμμικοποιημένο εκκρεμές, είμαστε ενάντια στη φυσική κίνηση για τη μισή διάρκεια του διαστήματος και μαζί με τη φυσική κίνηση κατά τη διάρκεια της άλλης μισής). Θεωρούμε τότε την περίπτωση, όπου $\delta = \pi$, η οποία σύμφωνα με το παραπάνω Λήμμα θα οδηγήσει επίσης σε μη ελεγξιμότητα του $\Sigma_{[\delta]}$. Εδώ

$$F = e^{\delta A} = -I$$

και

$$A^{\delta} = A^{-1}(e^{\delta A} - I) = -2A^{-1} = 2A,$$

άρα

$$G = 2AB = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, το χρονοδιακριτό σύστημα $\Sigma_{[\delta]}$ έχει τις εξελικτικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= -x_1(t) + 2u(t) \\ x_2(t+1) &= -x_2(t) \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι τώρα μπορούμε μερικώς να ελέγξουμε το σύστημα, αφού η πρώτη συντεταγμένη (θέση) μπορεί να τροποποιηθεί αυθαίρετα εφαρμόζοντας κατάλληλους ελέγχους u.

Απ΄την άλλη, η τιμή της δεύτερης συντεταγμένης (ταχύτητας) δεν μπορεί να τροποποιηθεί με κανένα τρόπο και στην πραγματικότητα σε χρόνους $\delta, 2\delta, \ldots$ θα ταλαντώνεται ανάμεσα στις τιμές $\pm x_2(0)$, ανεξάρτητα από το (σταθερό) έλεγχο που εφαρμόζεται κατά τη διάρκεια του διαστήματος.

Το παράδειγμα που συζητήσαμε παραπάνω προτείνει ότι θα διατηρηθεί, εξασφαλίζοντας ότι έχουμε δείγμα σε συχνότητα $1/\delta$ η οποία είναι μεγαλύτερη απ΄το διπλάσιο της φυσικής συχνότητας (εκεί, $1/2\pi$) του συστήματος. Το επόμενο αποτέλεσμα, μερικές φορές γνωστό ως το κριτήριο "Kalman-Ho-Narendra" και το Λήμμα που το ακολουθεί, το κάνω αυτό συγκεκριμένο.

Λήμμα 1.4.2. Υποθέτουμε ότι f είναι μία ακέραια συνάρτηση η οποία είναι ένα προς ένα στο φάσμα του A, και έστω λ μία ιδιοτιμή του A για την οποία $f'(\lambda) \neq 0$. Τότε η γεωμετρική πολλαπλότητα του $f(\lambda)$ σε σχέση με το $f(A)$ είναι η ίδια όπως στο λ σε σχέση με το A. Επίσης, ο $f(\lambda)$-ιδιόχωρος του $f(A)$ είναι ο ίδιος με το λ-ιδιόχωρο του A.

Θεώρημα 3. *Έστω $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ και έστω $\Sigma = (A, B)$ ένα ελέγξιμο συνεχές χρονικά (αναλλοίωτο) γραμμικό σύστημα. Αν $\delta > 0$ είναι τέτοιο ώστε*

$$\boxed{\delta(\lambda - \mu) \neq 2k\pi i, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots,}$$

για κάθε δύο ιδιοτιμές λ, μ του A, τότε το Σ είναι επίσης $\delta -$ sampled ελέγξιμο.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι $(e^{\delta A}, B)$ είναι ένα ελέγξιμο ζεύγος. Το συμπέρασμα τότε θα είναι μία συνέπεια του Λήμματος 1.4.1, επειδή αν το A είχε οποιαδήποτε ιδιοτιμή λ της μορφής $2k\pi i/\delta, \quad k =$ μη μηδενικός ακέραιος, τότε, με αυτό το λ

$$\delta(\lambda - \bar{\lambda}) = 4k\pi i,$$

έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση.

Τώρα αποδεικνύουμε ότι το κριτήριο Hautus θα πρέπει να ισχύει για $(e^{\delta A}, B)$. Από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης, όλες οι ιδιοτιμές του $e^{\delta A}$ είναι της μορφής $e^{\delta\lambda}$, όπου λ μια ιδιοτιμή του A. Άρα πρέπει να ελέγξουμε ότι

$$\operatorname{rank}[e^{\delta\lambda} I - e^{\delta A}, B] = n$$

για κάθε τέτοιο λ. Ισοδύναμα, πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα p, το οποίο είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $(e^{\delta A})'$, απαραίτητα

$$p'B \neq 0. \tag{1.12}$$

Από την ελεγξιμότητα του (A, B) το συμπέρασμα (1.12) ισχύει αν p είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A'. Άρα το μόνο βήμα που έμεινε είναι να δείξουμε ότι το A' και το $(e^{\delta A})' = e^{\delta A'}$ έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα. Απ΄το Λήμμα 1.4.2 συνεπάγεται αυτό, εξασφαλίζοντας ότι $f(\lambda) := e^{\delta\lambda}$ είναι ένα προς ένα ως προς το φάσμα του A. Αλλά αυτό είναι ακριβώς, ότι η υπόθεση του Θεωρήματος ισχυρίζεται. □

Η συνθήκη στο παραπάνω Θεώρημα δεν είναι αναγκαία εκτός αν ο αριθμός των ελέγχων $m = 1$. Μία απλούστερη, αν και ισχυρότερη, ικανή συνθήκη είναι η ακόλουθη. Για οποιοδήποτε δοσμένο σύστημα $\Sigma = (A, B)$, η συχνότητα του Σ είναι οποιοσδήποτε αριθμός της μορφής

$$\frac{| \, Im\lambda \, |}{2\pi},$$

όπου λ είναι μια ιδιοτιμή του A. Για παράδειγμα, για το σύστημα του Παραδείγματος 1.4.1 υπάρχει μόνο μία συχνότητα, $1/2\pi$. Αυτή είναι η συχνότητα ταλάντωσης των λύσεων του μη ελέγξιμου συστήματος $\dot{x} = Ax$, που είναι όλοι οι συνδυασμοί του $\sin t$ και $\cos t$ (περιόδου 2π). Σημειώνουμε ότι το B δεν επηρεάζει τις συχνότητες.

Λήμμα 1.4.3. Ένα ελέγξιμο συνεχές χρονικά αναλλοίωτο σύστημα $\Sigma = (A, B)$ παραμένει ελέγξιμο εξασφαλίζοντας ότι η συχνότητα δειγματοληψίας $1/\delta$ είναι μεγαλύτερη από 2ω για κάθε συχνότητα ω του Σ.

Παρατήρηση 1.4.1. Όταν $m = 1$, η συνθήκη της ιδιοτιμής που αναφέρεται στο Θεώρημα 3 είναι επίσης αναγκαία. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Υποθέτουμε ότι (A, B) είναι $\delta - sampled$ ελέγξιμοκαι ότι $\lambda \neq \mu$ ιδιοτιμές του A τέτοιες ώστε

$$e^{\delta\lambda} = e^{\delta\mu} = \alpha.$$

Διαλέγουμε δύο (απαραίτητα γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα:

$$Av = \lambda v, \quad Aw = \mu w.$$

Τότε επίσης

$$e^{\delta A}v = \alpha v \quad \text{και} \quad e^{\delta A}w = \alpha w,$$

από τα οποία έπεται ότι α είναι μία ιδιοτιμή του $e^{\delta A}$ με γεωμετρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από ένα, σε αντίφαση με το Λήμμα 1.3.5

Παρατήρηση 1.4.2. Υπάρχει ένας κάπως διαφορετικός τρόπος απόδειξης του Θεωρήματος 3, οποίος είναι περισσότερο εννοιολογικός. Τον δίνουμε τώρα. Το βασικό σημείο είναι ότι, σύμφωνα με τις υποθέσεις του Θεωρήματος, μπορεί να αποδειχθεί ότι A είναι μια αναλυτική συνάρτηση του $e^{\delta A}$, έτσι ώστε A να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των πινάκων

$$e^{k\delta A},\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Απ΄τη στιγμή που αυτό είναι γνωστό, έπεται ότι κάθε στήλη του $\mathbf{R}(A, B)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του $\mathbf{R}(e^{\delta A}, B)$ και συνεπώς ο δεύτερος πίνακας δεν μπορεί να έχει rank μικρότερο από n, δεδομένου ότι ο πρώτος έχει rank n από την υπόθεση ελεγξιμότητας. Τότε έπεται ότι το ζεύγος $(e^{\delta A}, B)$ είναι ελέγξιμο, όπως επιθυμούσαμε.

Θα δείξουμε τώρα ότι το A είναι μια αναλυτική συνάρτηση του $e^{\delta A}$. (Η απόδειξη απαιτεί την έννοια των αναλυτικών ωστόσο μη ακεραίων συναρτήσεων των πινάκων.) Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση $f(s) = e^{\delta s}$. Η υπόθεση σημαίνει ακριβώς ότι η f είναι ένα προς ένα ως προς το σύνολο

$$\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$$

των ιδιοτιμών του A. Παίρνουμε τις ξένες περιοχές

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_l$$

των

$$f(\lambda_1), f(\lambda_2, \ldots, f(\lambda_l)$$

αντίστοιχα. Αφού η f είναι παντού μη ιδιάζουσα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης και να καταλήξουμε στο ότι, παίρνοντας μικρότερα $\mathcal{O}_k$ αν χρειάζεται, υπάρχουν οι ξένες περιοχές

$$\mathcal{O}_1^0, \mathcal{O}_2^0, \ldots, \mathcal{O}_l^0$$

των

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$$

και οι αμφιδιαφορίσεις

$$g_k : \mathcal{O}_k \to \mathcal{O}_k^0$$

τέτοιες ώστε

$$g_k \circ f_k = \text{ ταυτοτική σε κάθε } \mathcal{O}_k^0.$$

Τελικά, έστω $\mathcal{O}$ (αντίστοιχα $\mathcal{O}^0$) η ένωση των συνόλων $\mathcal{O}_k$ (αντίστοιχα $\mathcal{O}_k^0$ και έστω g η επέκταση των g_k. Τότε $g \circ f$ ισοδυναμεί με την ταυτοτική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο $\mathcal{O}^0$, το οποίο περιέχει τις ιδιοτιμές του A και συνεπώς

$$g(f(A)) = A,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι όντως το A είναι μία συνάρτηση του $e^{\delta A} = f(A)$.

1.5 Περισσότερα επί της Γραμμικής Ελεγξιμότητας

Αυτή η ενότητα αναπτύσσει κάποια απ΄τα βασικά γεγονότα της ελεγξιμότητας των γραμμικών συστημάτων, πιθανά χρονικά μεταβαλλόμενων. Θα επικεντρωθούμε σε συνεχείς χρονικά περιπτώσεις, η διακριτή χρονικά κατάσταση είναι εν μέρει ανάλογη και πολύ ευκολότερη, παρ΄όλαυτα κάποιες πλευρές δεν μπορούν να γενικευθούν.

Θα ξεκινήσουμε με μία ανασκόπηση κάποιων βασικών ιδιοτήτων των γενικευμένων αντίστροφων τελεστών.

Ψευδοαντιστροφές

Έστω $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Θυμίζουμε ότι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο H πάνω στο $\mathbb{K}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος μαζί με μια διμελή πράξη $\langle x, y\rangle$ τέτοια ώστε $\langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ για όλα τα $x, y \in H$ και ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για όλα τα $x, y, z \in H$ και όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

(α) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$(η μπάρα συμβολίζει τη μιγαδική συζυγία, έτσι, στην περίπτωση που $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, λέμε ότι τα εσωτερικά γινόμενα είναι συμμετρικά.)

(β) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle$ και

(γ) $\langle x, x\rangle > 0$ για $x \neq 0$ και $\langle 0, 0\rangle = 0$.

Με δοσμένο ένα τέτοιο εσωτερικό γινόμενο, ορίζουμε μία σχετική νόρμα $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ και ο H γίνεται ένας μετρικός χώρος με τη συνάρτηση απόστασης $d(x, y) := \|x - y\|$. Αν ο H είναι πλήρης ως μετρικός χώρος με αυτήν την απόσταση, τότε ο H λέγεται χώρος *Hilbert*.

Υπάρχουν δύο συγκεκριμένα είδη χώρων *Hilbert*, που χρησιμοποιούμε. Για οποιοδήποτε σταθεροποιημένο n, βλέπουμε το $\mathbb{K}^n$ ως το σύνολο όλων των n-διάστατων διανυσμάτων με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y\rangle := x^* y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i.$$

(Εδώ το "$*$" συμβολίζει το συζυγή ανάστροφο.) Το άλλο είδος του χώρου *Hilbert* που θα δουλέψουμε είναι άπειρης διάστασης και ορίζεται ακολούθως. Για κάθε θετικό ακέραιο m, θεωρούμε $\mathcal{L}^2_m(\sigma, \tau)$ να είναι το σύνολο όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\omega : [\sigma, \tau) \to \mathbb{K}^m$. Ένα τέτοιο ω μπορεί να θεωρηθεί ως ένα m-διάστατο διάνυσμα των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Το σύνολο $\mathcal{L}^2_m(\sigma, \tau)$ είναι ένας χώρος *Hilbert* με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \omega, \nu\rangle := \int_{\sigma}^{\tau} \omega(t)^* \nu(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

Έστω Ω και $\mathcal{X}$ δύο χώροι *Hilbert*. Δοσμένης μίας συνεχούς γραμμικής απεικόνισης (σε όρους συναρτησιακής ανάλυσης, ενός *φραγμένου τελεστή*)

$$L : \Omega \to \mathcal{X},$$

υπάρχει πάντα ένας συζυγής τελεστής L^*, ορισμένος με την ιδιότητα ότι

$$\langle L_\omega, x\rangle_{\mathcal{X}} = \langle \omega, L^* x\rangle_{\Omega} \quad \text{για όλα τα} \quad x \in \mathcal{X}, \omega \in \Omega.$$

Για παράδειγμα, αν $\Omega = \mathbb{K}^m$ και $\mathcal{X} = \mathbb{K}^n$ και L θεωρηθεί ως ένας $n \times m$ πίνακας (σε σχέση με τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n$) τότε L^* είναι απλά ο ανάστροφος συζυγής του L.

Παράδειγμα 1.5.1. Ως ένα άλλο παράδειγμα, θεωρούμε την περίπτωση που $\Omega = \mathcal{L}^2_m(\sigma, \tau)$, $\mathcal{X} = \mathbb{K}^n$ και

$$L\omega := \int_{\sigma}^{\tau} k(t)^* \omega(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.14}$$

όπου k είναι ένας σταθεροποιημένος $m \times n$ πίνακας στοιχείων του $\mathcal{L}^2(\sigma, \tau)$. Έτσι, αν ονομάσουμε k_i την i στήλη του k, $\quad i = 1, \ldots, n$, τότε κάθε k_i ανήκει στο $\mathcal{L}^2_m(\sigma, \tau)$ και

$$L\omega = \begin{pmatrix} \langle k_i, \omega\rangle \\ \vdots \\ \langle k_n, \omega\rangle \end{pmatrix}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το συζυγή του L. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $\omega \in \Omega$ και $x \in \mathcal{X}$. Αφού $\langle L_\omega, x\rangle$ ισούται με

$$\left(\int_\sigma^\tau k(t)^*\omega(t)\,\mathrm{d}t\right)^* x = \left(\int_\sigma^\tau \omega(t)^* k(t)\,\mathrm{d}t\right) x = \int_\sigma^\tau \omega(t)^*(k(t)x)\,\mathrm{d}t,$$

έχουμε ότι L^*x είναι στοιχείο του $\mathcal{L}_m^2$ δοσμένο απ'τη συνάρτηση $(L^*x)(t) = k(t)x$.

Από εδώ και στο εξής υποθέτουμε ότι το $\mathcal{X}$ είναι πεπερασμένης διάστασης. (Τα περισσότερα από αυτά που κάνουμε γενικοποιούνται εύκολα στην περίπτωση τυχαίου $\mathcal{X}$, αλλά το L να είναι κλειστού εύρους. Η τελευταία ιδιότητα είναι προφανής στην περίπτωση της πεπερασμένης διάστασης.)

Το ακόλουθο Λήμμα είναι βασικό. Εδώ το ''im'' δηλώνει την εικόνα, το ''ker'' τον πυρήνα ή το μηδενικό χώρο και ''$\perp$'' υποδηλώνει το ορθογώνιο συμπλήρωμα:

$$\mathcal{S}^\perp = \{z | \langle x, z\rangle = 0 \quad \text{για όλα τα} \quad x \in \mathcal{S}\}.$$

Αφού το $\mathcal{X}$ υποθέσαμε ότι είναι πεπερασμένης διάστασης, ισχύει ότι $(\mathcal{S}^\perp)^\perp = \mathcal{S}$ για όλους τους υπόχωρους $\mathcal{S}$ του $\mathcal{X}$.

Λήμμα 1.5.1. Για οποιοδήποτε L όπως παραπάνω, $\operatorname{im} LL^* = (\ker L^*)^\perp = \operatorname{im} L$

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι $\operatorname{im} LL^* \subseteq \operatorname{im} L$. Αφού το ''$\perp$'' αντιστρέφει τους εγκλεισμούς, θα ήταν αρκετό να αποδείξουμε ότι

$$(\operatorname{im} LL^*)^\perp \subseteq \ker L^* \subseteq (\operatorname{im} L)^\perp.$$

Διαλέγουμε ένα οποιοδήποτε $z \in (\operatorname{im} LL^*)^\perp$. Τότε, $\langle LL^*x, z\rangle = 0$ για όλα τα $x \in \mathcal{X}$, άρα συγκεκριμένα για $x = z$:

$$0 = \langle LL^*z, z\rangle = \langle L^*z, L^*z\rangle = \|L^*z\|^2,$$

άρα συνεπάγεται ότι $z \in \ker L^*$. Άρα επίσης το $z \in (\operatorname{im} L)^\perp$, όπως θέλαμε, αφού για $\omega \in \Omega$, $\langle L\omega, z\rangle = \langle \omega, L^*z\rangle = 0$. ☐

Έστω

$$W : \mathcal{X} \to \mathcal{X},\ W := LL^* \tag{1.15}$$

Όταν $\mathcal{X} = \mathbb{K}^n$, ταυτοποιούμε το W με ένα $n \times n$ πίνακα. Σημειώνουμε ότι

$$W^* = (LL^*)^* = L^{**}L^* = LL^* = W, \tag{1.16}$$

δηλαδή ο W είναι *αυτοσυζυγής*. (Όταν $\mathcal{X} = \mathbb{K}^n$, ο W είναι ένας Ερμιτιανός πίνακας). Επιπλέον ο W είναι θετικά ημιορισμένος, γιατί

$$\langle x, Wx\rangle = \|L^*\|^2$$

για όλα τα x. Αφού το $\mathcal{X}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: ο W είναι επί, ένα προς ένα, αντιστρέψιμος, θετικά ορισμένος. Μπορούμε τώρα να συμπεράνουμε τα ακόλουθα.

Πόρισμα 1.5.1. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για τα L, W όπως παραπάνω:

(α) η L είναι επί.

(β) η L^* είναι ένα προς ένα.

(γ) ο W είναι επί.

(δ) $\det W \neq 0$.

(ε) ο W είναι θετικά ορισμένος.

Θεωρούμε ξανά την κατάσταση στο Παράδειγμα 1.5.1. Εδώ η L είναι επί ανν ο πίνακας

$$W = \int_\sigma^\tau k(t)^* k(t)\,\mathrm{d}t > 0. \tag{1.17}$$

Ισοδύναμα, η L είναι επί ανν η L^* είναι ένα προς ένα, δηλαδή,

$$\text{δεν υπάρχει } p \neq 0 \text{ στο } \mathcal{X} \text{ με } k(t)p = 0 \text{ για σχεδόν όλα τα } t \in [\sigma, \tau), \tag{1.18}$$

ή αλλιώς με $k_i :=$ η i στήλη του k^*:

$$\langle p, k_i \rangle = 0 \text{ για όλα τα } i \text{ και σχεδόν για όλα τα } t \Rightarrow p = 0. \tag{1.19}$$

Πρόταση 1.5.1. Υποθέτουμε ότι το L είναι επί και έστω

$$L^\# := L^*(LL^*)^{-1} : \mathcal{X} \to \Omega. \tag{1.20}$$

Τότε, $L^\# x$ είναι μία μοναδική λύση του $L\omega = x$ της ελάχιστης δυνατής νόρμας, δηλαδή,

- $L(L^\# x) = x$ για όλα τα $x \in \mathcal{X}$ και
- $\|L^\# x\| < \|\omega\|$ για κάθε ω για το οποίο $L\omega = x$ και $\omega \neq L^\# x$.

Απόδειξη. Αφού

$$LL^\# = (LL^*)(LL^*)^{-1} = \text{ ταυτοτικό},$$

η πρώτη ιδιότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε τώρα ότι $L\omega = x$. Θα αποδείξουμε ότι $\langle \omega - L^\# x, L^\# x \rangle = 0$, έτσι

$$\|\omega\|^2 = \|\omega - L^\# x\|^2 + \|L^\# x\|^2$$

θα δώσει το συμπέρασμα που θέλουμε. Αλλά

$$\langle \omega - L^\# x, L^\# x \rangle = \langle \omega, L^\# x \rangle - \|L^\# x\|^2,$$

άρα θα αποδείξουμε ότι τα δύο δεξιά μέρη είναι ίσα:

$$\begin{aligned}
\langle \omega, L^\# x \rangle &= \langle \omega, L^*(LL^*)^{-1} x \rangle \\
&= \langle L\omega, (LL^*)^{-1} x \\
&= \langle LL^*(LL^*)^{-1} x, (LL^*)^{-1} x \rangle \\
&= \langle L^*(LL^*)^{-1} x, L^*(LL^*)^{-1} x \rangle \\
&= \|L^\# x\|^2.
\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ο τελεστής $L^{\#}$ είναι η *γενικευμένη αντιστροφή* ή $(Moore-Penrose)$ *ψευδοαντιστροφή* του L. Όταν η L δεν είναι επί, πρέπει να ορίσουμε έναν τελεστή με την ιδιότητα της ελαχιστοποίησης στο παραπάνω αποτέλεσμα επανατοποθετημένο με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, παραλείπουμε τις λεπτομέρειες εδώ, αφού μόνο η περίπτωση που η L είναι επί θα μας χρειασθεί.

Στο Παράδειγμα 1.5.1,

$$(L^{\#}x)(t) = k(t)\left[\int_\sigma^\tau k(s)^* k(s)\,\mathrm{d}s\right]^{-1} x.$$

Σημειώνουμε ότι αν τα στοιχεία του k συμβαίνει να είναι ουσιαστικά φραγμένα (όχι μόνο τετραγωνικά ολοκληρώσιμα), τότε $L^{\#}x$ είναι επίσης ουσιαστικά φραγμένη.

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε τη νόρμα τελεστή του $L^{\#}$ σε όρους του πίνακα W. Ορίζουμε τη νόρμα τελεστή ως

$$\|L^{\#}\| := \sup_{\|x\|=1} \|L^{\#}x\|$$

ως προς τη $\mathcal{L}_m^2$ νόρμα. Από τους ορισμούς (1.15) και (1.20), έπεται ότι, για κάθε διάνυσμα x,

$$\begin{aligned}\|L^{\#}x\|^2 &= \|L^* W^{-1}x\|^2 \\ &= \langle L^* W^{-1}x, L^* W^{-1}x\rangle \\ &= \langle LL^* W^{-1}x, W^{-1}x\rangle \\ &= \langle x, W^{-1}x\rangle.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|L^{\#}\| = \|W^{-1}\|^{1/2}, \tag{1.21}$$

το οποίο σημαίνει ότι η νόρμα της ψευδοαντιστροφής είναι η τετραγωνική ρίζα του $1/\sigma_{\min}$, όπου $\sigma_{\min}$ είναι η ελάχιστη ιδιοτιμή του θετικά ορισμένου πίνακα W.

Εφαρμογή στην Ελεγξιμότητα

Θυμόμαστε από το Λήμμα 1.1.5 (α) ότι το συνεχές χρονικά γραμμικό σύστημα Σ είναι ελέγξιμο στο $[\sigma,\tau]$ ανν ισχύει ότι $(0,\sigma) \rightsquigarrow (y,\tau)$ για όλα τα $y \in \mathcal{X}$. Έτσι, η ελεγξιμότητα σημαίνει ακριβώς ότι ο ακόλουθος τελεστής είναι επί:

$$N : \mathcal{L}_m^\infty(\sigma,\tau) \to \mathbb{K}^n : \omega \mapsto \phi(\tau,\sigma,0,\omega) = \int_\sigma^\tau \Phi(\tau,s)B(s)\omega(s)\,\mathrm{d}s.$$

Έτσι, η επέκταση του N στο $\mathcal{L}_m^2$, με $k(s) := B(s)^*\Phi(\tau,s)^*$:

$$L : \mathcal{L}_m^2(\sigma,\tau) \to \mathbb{K}^n : \omega \mapsto \int_\sigma^\tau k(s)^*\omega(s)\,\mathrm{d}s, \tag{1.22}$$

είναι επίσης επί. Σημειώνουμε ότι τα στοιχεία του B ειναι ουσιαστικά φραγμένα, από τον ορισμό του συνεχούς χρονικά γραμμικού συστήματος και ότι τα στοιχεία του $\Phi(\tau,s)$ είναι (απολύτως) συνεχή στο s. Έτσι, κάθε στοιχείο του k ανήκει στο $\mathcal{L}_m^\infty(\sigma,\tau)$ και άρα και στο $\mathcal{L}_m^2(\sigma,\tau)$, άρα το L είναι ένας τελεστής όπως στο Παράδειγμα 1.5.1.

Δοσμένου οποιουδήποτε Σ, θεωρούμε τον τελεστή L προσδιορισμένο από τον τύπο (1.22). Αν το Σ είναι ελέγξιμο, το L είναι επί. Αντίστροφα, θεωρούμε ότι το L είναι επί. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{X}$, $\omega := L^{\#}x$ είναι τέτοιο ώστε $L\omega = x$. Αφού τα στοιχεία του k είναι ουσιαστικά φραγμένα, έπεται ότι το ω είναι επίσης ουσιαστικά φραγμένο. Έτσι, το ω ανήκει στο χωρίο N και άρα το x ανήκει στην εικόνα του N. Συμπεραίνουμε ότι το L είναι επί ανν και το N είναι, που είναι ανν το Σ είναι ελέγξιμο. (Εναλλακτικά, θα συζητούσαμε ότι το L είναι επί ανν είναι και το N, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $\mathcal{L}_m^\infty$ είναι πυκνό στο $\mathcal{L}_m^2$ και ότι το N και το L είναι και τα δύο συνεχή.) Εφαρμόζουμε το παραπάνω αποτέλεσμα σε αυτό το L, για να εξασφαλίσουμε το ακόλουθο συμπέρασμα. Για το τελευταίο μέρος, θυμόμαστε ότι

$$\phi(\tau,\sigma,x,\omega) = z \text{ ανν } z - \phi(\tau,\sigma,x,\mathbf{0}) = N\omega.$$

Θεώρημα 4. *Θεωρούμε ότι το Σ είναι ένα συνεχές χρονικά γραμμικό σύστημα, $\sigma < \tau \in \mathbb{R}$ και συμβολίζουμε με b_i την i στήλη του B. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *το Σ είναι ελέγξιμο στο $[\sigma,\tau]$,*
2. $W(\sigma,\tau) = \int_\sigma^\tau \Phi(\tau,s)B(s)B(s)^*\Phi(\tau,s)^*\,\mathrm{d}s > 0$,
3. *Δεν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $p \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $\langle p, \Phi(\tau,s)b_i(s)\rangle = 0$ για σχεδόν όλα τα $s \in [\sigma,\tau]$ και όλα τα i.*

Αν τα παραπάνω ικανοποιούνται, τότε, δοσμένων δύο οποιωνδήποτε $x, z \in \mathcal{X}$, ο έλεγχος που δίνεται απ'τον τύπο

$$\omega(t) = B(t)^*\Phi(\tau,t)^*W(\sigma,\tau)^-1(z - \Phi(\tau,\sigma)x) \tag{1.23}$$

είναι ο μοναδικός που ελαχιστοποιεί το $\|\omega\|$ ανάμεσα σε όλους αυτούς τους ελέγχους που ικανοποιούν την

$$\phi(\tau,\sigma,x,\omega)$$

Παράδειγμα 1.5.2. Θεωρούμε τον αρμονικό ταλαντωτή (γραμμικοποιημένο εκκρεμές)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u\end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι θέλουμε να βρούμε τη μεταφορά ελέγχου

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

στο $z = 0$ σε χρόνο 2π ενώ ελαχιστοποιούμε την ''ενέργεια''

$$\int_0^{2\pi} u(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα. Πρώτον σημειώνουμε ότι, χρησιμοποιώντας το e^{tA} όπως υπολογίστηκε στο Παράδειγμα 1.4.1, έχουμε

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-s)A}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ \ 1)e^{(2\pi-s)A^*}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}\sin^2 s & -\sin s\cos s\\ -\sin s\cos s & \cos^2 s\end{pmatrix}\mathrm{d}s \\ &= \pi I, \end{aligned}$$

άρα

$$W^{-1}(z-\Phi(2\pi,0)x) = (-1/\pi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Επομένως,

$$\omega(t) = -\frac{1}{\pi}(0\ \ 1)\begin{pmatrix}\cos(2\pi-t) & -\sin(2\pi-t)\\ \sin(2\pi-t) & \cos(2\pi-t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\sin t$$

δίνει τον έλεγχο που θέλαμε.

Το παραπάνω Θεώρημα παρέχει σε κάποιο βαθμό ένα υπολογίσιμο κριτήριο για ελεγξιμότητα στο $[\sigma,\tau]$. Μπορούμε να εξασφαλίσουμε αριθμητικά τη θεμελιώδη λύση και μετά να εκτελέσουμε την απαιτούμενη ολοκλήρωση για να πάρουμε το σταθερό πίνακα $W(\sigma,\tau)$ του οποίου η ορίζουσα έχει ελεγχθεί να είναι μη μηδενική. Παρακάτω αναπτύσσουμε ένα κριτήριο, που μπορεί να εφαρμοσθεί όταν τα στοιχεία των A και B είναι λεία ως συναρτήσεις του χρόνου, το οποίο δε χρειάζεται ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης. Πρακτικά, φυσικά τα σφάλματα στρογγύλευσης θα κάνουν την ορίζουσα του $W(\sigma,\tau)$ πάντα μη μηδενική. Έτσι η ελεγξιμότητα δεν μπορεί να αποφασισθεί ακριβώς. Επιπλέον, αν η ορίζουσα του W αποδειχθεί ότι είναι μικρή, ακόμα κι αν το σύστημα είναι ελέγξιμο, δεν είναι έτσι με την πρακτική έννοια, αφού οι απαραίτητοι έλεγχοι θα τείνουν να είναι πολύ μεγάλοι, όπως προτείνεται απ΄τον όρο W^{-1} που εμφανίζεται στην έκφραση της ελάχιστης νόρμας ελέγχου. Αυτό έχει σχέση με το γεγονός ότι παρότι τα περισσότερα συστήματα είναι ελεγχόμενα (τουλάχιστον στη χρονικά αναλλοίωτη περίπτωση), πολλά μπορεί να είναι ''κοντά'' στο να γίνουν μη ελέγξιμα, θυμόμαστε το σχόλιο μετά την απόδειξη της Πρότασης 1.3.1. Έχει επίσης σχέση με το γεγονός ότι προσπαθώντας να ελέγξουμε τόσο σύντομα ένα διάστημα, απαιτούνται μεγάλοι έλεγχοι, άσχετα με το πόσο ελέγξιμο είναι το σύστημα (αφού το ορισμένο ολοκλήρωμα του W, το παίρνουμε σε ένα μικρό διάστημα).

Λήμμα 1.5.2. Για όλα τα $\sigma,\tau,\mu\in\mathbb{R}$:

(α) $\Phi(\tau,\tau)=I$.

(β) $\Phi(\tau,\sigma)=\Phi(\tau,\mu)\Phi(\mu,\sigma)$.

(γ) $\Phi(\tau,\sigma)^{-1}=\Phi(\sigma,\tau)$.

(δ) $\dfrac{\partial \Phi(\sigma,\tau)}{\partial \tau} = -\Phi(\sigma,\tau)A(\tau)$.

(ε) Αν $A(t) \equiv A$ είναι σταθερά, τότε $\Phi(\tau,\sigma) = e^{(\tau-\sigma)A}$.

(στ) $\det \Phi(\tau,\sigma) = e^{\int_\sigma^\tau traceA(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$.

Μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τη συνθήκη (3) σε μια ελαφρώς διαφορετική μορφή, η οποία θα είναι χρήσιμη για τη μεταγενέστερη μελέτη της παρατηρισιμότητας. Μεταφέροντας το συμπέρασμα (δ) του Λήμματος 1.5.2, έχουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 1.5.3. Για οποιοδήποτε $A(\cdot)$, η θεμελιώδης λύση $\Psi(t,s)$ σχετίζεται με τη συζυγή εξίσωση

$$\dot{p}(t) = -A(t)^* p(t) \tag{1.24}$$

ισχύει $\Psi(t,s) := \Phi(s,t)^*$.

Πόρισμα 1.5.2. Το συνεχές χρονικά γραμμικό σύστημα Σ είναι ελέγξιμο στο $[\sigma,\tau]$ αν και μόνο αν δεν υπάρχει μία μη μηδενική λύση $p(t)$ της συζυγούς εξίσωσης στο $[\sigma,\tau]$ τέτοια ώστε

$$\langle p(t), b_i(t)\rangle = 0 \text{ για σχεδόν όλα τα } t \in [\sigma,\tau]$$

για όλα τα $i = 1,\dots,m$ (θυμόμαστε ότι b_i είναι η i στήλη του B).

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι η ύπαρξη μιας τέτοιας λύσης θα πρέπει να είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα (3) του Θεωρήματος 4. Γιάυτό, σημειώνουμε απλά ότι αν το p είναι μία λύση της συζυγούς εξίσωσης στο $[\sigma,\tau]$ τότε $p(t) = \Psi(t,\tau)p(\tau) = \Phi(\tau,t)^* p(\tau)$, έτσι

$$\langle p(t), b\rangle = \langle p(\tau), \Phi(\tau,t)b\rangle$$

για οποιοδήποτε διάνυσμα b και ότι το $p(t)$ είναι μη μηδενικό για όλα τα t αν και μόνο αν $p(\tau) \neq 0$. $\square$

Το τελευταίο μέρος του Θεωρήματος 4 παρέχει μία λύση σε ένα συγκεκριμένο τύπο προβλήματος βέλτιστου ελέγχου, όπως ελαχιστοποίησης της νόρμας του ελέγχου που επηρεάζει μία δεδομένη κατάσταση μεταφοράς. Σε εφαρμογές, αυτή η νόρμα είναι συνήθως ανάλογη σε κάποιο μέγεθος της ενέργειας που χρησιμοποιείται στον έλεγχο του συστήματος. Υπάρχει μια μεταβολή αυτού του προβλήματος που μπορεί να λυθεί με τις ίδιες ακριβώς τεχνικές. Θεωρούμε ότι οι συντεταγμένες του ελέγχου u καθορίζονται από διαφορετικά κόστη. Για παράδειγμα, μπορεί να θέλουμε να θεωρήσουμε μία κατάσταση στην οποία υπάρχουν δύο ανεξάρτητοι έλεγχοι και είναι 10 φορές πιο ακριβό να εφαρμόσουμε μία μονάδα του πρώτου ελέγχου όπως είναι στο δεύτερο. Σε αυτήν την περίπτωση, θα είχε νόημα να προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος $(10u_1)^2 + u_2^2 = 100u_1^2 + u_2^2$. Πιο γενικά , μπορεί να έχουμε ένα κόστος του τύπου $\sum_i \sum_j \alpha_{ij} u_i^2 u_j^2$.

Παρατήρηση 1.5.1. Τα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου για γραμμικά συστήματα με τετραγωνικό κόστος έχουν αποτέλεσμα συνήθως σε λύσεις, που είναι γραμμικές με την κατάλληλη έννοια. Για παράδειγμα, ο βέλτιστος έλεγχος στο Θεώρημα 4 είναι γραμμικός και στο x και στο z. Αυτό δεν είναι παράξενο, αφού με μια αφηρημένη έννοια η ελαχιστοποίηση μιας τετραγωνικής συνάρτησης (εδώ η νόρμα του ελέγχου) υποτάσσεται σε γραμμικούς περιορισμούς (η γραμμική διαφορική εξίσωση) μπορεί να θεωρηθεί, μετά από απαλοιφή, ως μία μη δεσμευμένη ελαχιστοποίηση μιας τετραγωνικής συνάρτησης, η οποία με τη σειρά της μπορεί να λυθεί βρίσκοντας παραγώγους στο μηδέν, δεδομένου ότι οι παράγωγοι των τετραγωνικών συναρτήσεων είναι γραμμικές, η λύση στο αρχικό πρόβλημα γίνεται γραμμική στα αρχικά δεδομένα. (Αυτό το είδος συλλογιστικής μπορεί να γίνει ακριβές μέσα απ΄τη μελέτη αφηρημένων τετραγωνικών προβλημάτων βελτιστοποίησης σε χώρους άπειρης διάστασης.) Η ιδιότητα της γραμμικότητας σημαίνει ότι γενικά, προβλήματα γραμμικών συστημάτων με τετραγωνικά κόστη είναι πολύ ευκολότερα να επιλυθούν απ΄ότι, δηλαδή, γραμμικά προβλήματα με μη τετραγωνικά κόστη ή μη γραμμικό έλεγχο προβλημάτων με τετραγωνικά κόστη.

Παρατήρηση 1.5.2. Το Θεώρημα 4 δείχνει ότι ανάμεσα σε όλους τους ελέγχους που επηρεάζουν τη μεταφορά $(x,\sigma) \rightsquigarrow (z,\tau)$ υπάρχει ένας μοναδικός της ελάχιστης νόρμας. Φυσικά, στην περίπτωση που δεν επιβάλλει την ελάχιστη απαίτηση, υπάρχουν πολλοί τέτοιοι έλεγχοι, αφού το N απεικονίζει ένα χώρο άπειρης διάστασης μέσα σε ένα πεπερασμένης. Πολλά πυκνά υποσύνολα του $\mathcal{L}^{\infty}_{m}$ θα απεικονισθούν πάνω σε όλο το χώρο κατάστασης. Για παράδειγμα, υπάρχουν πάντα στην ελέγξιμη περίπτωση κατά τμήματα σταθεροί έλεγχοι έτσι ώστε $(x,\sigma) \rightsquigarrow (z,\tau)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι ο ακριβής τύπος για τον έλεγχο της ελάχιστης νόρμας δείχνει ότι αυτός ο έλεγχος είναι της τάξης $\mathcal{C}^k$ εξασφαλίζοντας ότι $A(\cdot)$ και $B(\cdot)$ είναι της τάξης $\mathcal{C}^k$.

Η Συνθήκη Τάξης (Rank)

Ο χαρακτηρισμός της ελεγξιμότητας που έχει δωθεί στο Θεώρημα 4 εμπλέκει την ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης του συστήματος. Τώρα ψάχνουμε για μια πιο απλή συνθήκη ανάλογη της rank συνθήκης Kalman για χρονικά αναλλοίωτα συστήματα.

Αν το Σ είναι χρονικά συνεχές γραμμικό σύστημα και $\mathcal{I}$ είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$, λέμε ότι το Σ είναι **ομαλά μεταβαλλόμενο στο** $\mathcal{I}$ ανν $A(t)$ και $B(t)$ ομαλές (άπειρες φορές παραγωγίσιμες) ως συναρτήσεις του t για $t \in \mathcal{I}$ και ότι το Σ είναι **αναλυτικά μεταβαλλόμενο στο** $\mathcal{I}$ ανν $A(t)$ και $B(t)$ είναι επίσης αναλυτικές στο $\mathcal{I}$. Η αναλυτικότητα σημαίνει ότι για κάθε $t \in \mathcal{I}$ κάθε στοιχείο του A και του B μπορεί να αναπτυχθεί σε μια δυναμοσειρά του t, συγκλίνουσα σε κάποιο μη κενό διάστημα $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$.

Η συνάρτηση πίνακας $\Phi(s,t)$ είναι ομαλή (αντίστοιχα, αναλυτική) ως συνάρτηση του $t \in \mathcal{I}$ και του $s \in \mathcal{I}$ όταν το Σ είναι ομαλά (αντίστοιχα, αναλυτικά) μεταβαλλόμενο στο $\mathcal{I}$. Σταθεροποιούμε τα Σ και $\mathcal{I}$ έτσι ώστε το Σ να είναι ομαλά μεταβαλλόμενο στο $\mathcal{I}$ και σταθεροποιούμε ένα μη τετριμμένο υποδιάστημα $[\sigma,\tau] \subseteq \mathcal{I}$. Θεωρούμε τον (ομαλό) $n \times m$ πίνακα συνάρτηση

$$M_0(t) := \Phi(\tau,t)B(t),$$

και έστω

$$M_k(t) := (\,\mathrm{d}^k M_0/\,\mathrm{d}t^k)(t),\ k \geq 1.$$

Θεωρούμε επίσης τον πίνακα των συναρτήσεων που να αποτελείται απ'όλες τις στήλες του $M_i,\ i = 0, \ldots, k$:

$$M^{(k)}(t) := (M_0(t), M_1(t), \ldots, M_k(t)).$$

Πρόταση 1.5.2. Έστω Σ ένα συνεχές χρονικά γραμμικό σύστημα.

1. Υποθέτουμε ότι το Σ είναι ομαλά μεταβαλλόμενο στο $\mathcal{I}$ και διαλέγουμε ένα οποιοδήποτε $\sigma < \tau$ έτσι ώστε $[\sigma, \tau] \subseteq \mathcal{I}$. Αν υπάρχει ένα $t_0 \in [\sigma, \tau]$ και ένας μη αρνητικός ακέραιος k τέτοιος ώστε
$$\operatorname{rank} M^{(k)}(t_0) = n,$$
τότε το Σ είναι ελέγξιμο.

2. Υποθέτουμε τώρα ότι το Σ είναι αναλυτικά μεταβαλλόμενο στο $\mathcal{I}$ και έστω t_0 ένα σταθεροποιημένο στοιχείο του $\mathcal{I}$. Τότε το Σ είναι ελέγξιμο σε κάθε μη τετριμμένο υποδιάστημα του $\mathcal{I}$ αν και μόνο αν
$$\operatorname{rank} M^{(k)}(t_0) = n$$
για κάποιον ακέραιο k.

Απόδειξη. Αν το Σ δεν ήταν ελέγξιμο στο $[\sigma, \tau]$, θα υπήρχε από την ιδιότητα (3) του Θεωρήματος 4 ένα μη μηδενικό διάστημα p τέτοιο ώστε $p^* M_0(t) = 0$ για σχεδόν όλα τα $t \in [\sigma, \tau]$ και άρα λόγω συνέχειας του M_0, για όλα αυτά τα t. Έπεται ότι όλοι οι παράγωγοι είναι επίσης ταυτοτικά μηδέν, το οποίο σημαίνει ότι,

$$p^* M_k(t) \equiv 0$$

για όλα τα $t \in [\sigma, \tau]$ και όλα τα $k \geq 0$. Έτσι, οι γραμμές του κάθε πίνακα $M^{(k)}(t)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες, άρα $\operatorname{rank} M^{(k)}(t) < n$ για όλα τα $t \in [\sigma, \tau]$. Αυτό αποδεικνύει την πρώτη δήλωση.

Τώρα θα αποδείξουμε το ικανό στην αναλυτική περίπτωση. Αν το Σ δεν ήταν ελέγξιμο στο $[\sigma, \tau]$, τότε, όπως στην ομαλή περίπτωση, $p^* M_k(t) \equiv 0$ στο $[\sigma, \tau]$, για όλα τα k. Αλλά τότε, λόγω της αρχής της αναλυτικής συνέχειας, επίσης

$$p^* M_k(t) \equiv 0 \text{ για όλα τα } t \in \mathcal{I}.$$

Έτσι αν το rank είναι n για κάποιο $t \in \mathcal{I}$ και κάποιο k, ερχόμαστε σε αντίφαση.

Αντίστροφα υποθέτουμε τώρα ότι το Σ είναι ελεγξιμο και αναλυτικά μεταβαλλόμενο στο $\mathcal{I}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο $t_0 \in \mathcal{I}$ τέτοιο ώστε

$$\operatorname{rank} M^{(k)}(t_0) < n$$

για όλα τα k. Για αυτό το t_0, υποθέτουμε ότι

$$P_k := \{p \in \mathbb{K}^n | p^* M^{(k)}(t_0) = 0\}.$$

Από την υπόθεση, οι υπόχωροι P_k είναι όλοι μη μηδενικοί. Αφού

$$P_0 \supseteq P_1 \supseteq \ldots,$$

οι διαστάσεις του P_k είναι μη αύξουσες. Έστω ότι το P_K έχει την ελάχιστη διάσταση, τότε

$$P_k = P_K \text{ για } k \geq K.$$

Διαλέγουμε $p \in P_K$. Έπεται ότι $p^* M_k(t_0) = 0$ για όλα τα k. Λόγω αναλυτικότητας, $p^* M_0(t) \equiv 0$ για t σε ένα διάστημα του t_0 (αναπτύσσουμε σε μια δυναμοσειρά του t_0) και έτσι, λόγω αναλυτικής συνέχειας, ισχύει σε όλο το $\mathcal{I}$ και συγκεκριμένα σε όλο το $[\sigma, \tau]$. Αυτό θα ερχόταν σε αντίφαση με την υποτιθέμενη ελεγξιμότητα του Σ. □

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να αναδιατυπωθεί κάπως πιο κομψά σε όρους άπειρων πινάκων

$$M(t) := (M_0(t), M_1(t), \ldots, M_k(t), \ldots).$$

Το σύστημα Σ είναι ελέγξιμο αν $M(t_0)$ έχει τάξη n για κάποιο t_0 και στην αναλυτική περίπτωση αυτή η συνθήκη είναι επίσης αναγκαία για κάθε t_0.

Η συνθήκη φαίνεται επίσης ότι εμπλέκει ολοκλήρωση, αφού ο πίνακας αλλαγής βάσης (μετάβασης) Φ χρησιμοποιείται στον ορισμό των M_k. Αλλά μπορούμε να εξασφαλίσουμε μια ισοδύναμη ιδιότητα ως εξής: Έστω $B_0 := B$ και για κάθε $i \geq 1$,

$$B_{i+1}(t) := A(t)B_i(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_i(t).$$

Σημειώνουμε ότι τα B_i μπορούν να βρεθούν απευθείας από τα δεδομένα (A, B).

Λήμμα 1.5.4. Για όλα τα i και όλα τα $t \in \mathcal{I}$, $M_i(t) = (-1)\Phi(\tau, t)B_i(t)$.

Απόδειξη. Με τη μέθοδο της επαγωγής. Η περίπτωση $i = 0$ ισχύει λόγω ορισμού. Υποθέτουμε ότι το Λήμμα αποδεικνύεται για i και θεωρούμε το $M - i + 1$. Τότε,

$$\begin{aligned} M_{i+1}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_i(t) = (-1)^i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\Phi(\tau, t)B_i(t)] \\ &= (-1)^i \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\tau, t)\right] B_i(t) + \Phi(\tau, t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_i(t) \right\} \\ &= (-1)^i \left\{ -\Phi(\tau, t)A(t)B_i(t) + \Phi(\tau, t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_i(t) \right\}, \end{aligned}$$

Αλλά ο τελευταίος όρος είναι ίσος με $(-1)^{i+1}\Phi(\tau, t)B_{i+1}(t)$, όπως επιθυμούσαμε. □

Αφού ο $\Phi(\tau, t)$ είναι αντιστρέψιμος για όλα τα $\tau, t, p^* M_i(t_0) = 0$ αν και μόνο αν $q^* B_i(t) = 0$, με $q = \Phi(\tau, t)^* p$. Συμπεραίνουμε ότι:

Πόρισμα 1.5.3. Τα συμπεράσματα της Πρότασης 1.5.2 ισχύουν όταν

$$\operatorname{rank}[B_0(t_0), B_1(t_0), \ldots, B_k(t_0)] = n \tag{1.25}$$

ισχύει αντί για τη rank συνθήκη στο $M^{(k)}(t_0)$.

Παρατήρηση 1.5.3. Στην Πρόταση 1.5.2 και Πόρισμα 1.5.3, η άπειρη παραγωγισιμότητα δε χρειάζεται για τις αναγκαίες προτάσεις με την ακόλουθη έννοια: Αν $A(\cdot)$ και $B(\cdot)$ είναι k-φορές παραγωγίσιμα και αν το $M^{(k)}(t_0)$ ή η (1.25) έχει τάξη n σε κάποιο t_0, τότε η ελεγξιμότητα επίσης έπεται λόγω του ίδιου επιχειρήματος.

Παράδειγμα 1.5.3. Θεωρούμε το σύστημα με $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $m = 1$ και πίνακες

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t^3 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Αυτό το σύστημα είναι ομαλά (στην πραγματικότητα, αναλυτικά) μεταβαλλόμενο στο $(-\infty, \infty)$. Αφού

$$[B_0(0), B_1(0), B_2(0), B_3(0)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

και αυτός ο πίνακας έχει τάξη 3, το σύστημα είναι ελέγξιμο σε κάθε μη τετριμμένο διάστημα $[\sigma, \tau]$.

Παρατήρηση 1.5.4. Στη χρονικά αναλλοίωτη περίπτωση, $B_i(t) \equiv A^{i-1}B$, άρα η παραπάνω συνθήκη λέει ότι το Σ είναι ελέγξιμο σε οποιοδήποτε μη τετριμμένο διάστημα $[\sigma, \tau]$ αν και μόνο αν οι στήλες του $(B, AB, A^2B, \ldots)$ παράγουν ένα n-διάστατο χώρο, ο οποίος όπως παρατηρήθηκε στο Λήμμα 1.3.1 είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη $\operatorname{rank} \mathbf{R}(A, B) = n$. Αυτό παρέχει ακόμα μία απόδειξη του Θεωρήματος 2

Γενικά, για οποιοδήποτε σταθεροποιημένο t_0, μπορεί να είναι αναγκαίο να ελέγξουμε την τάξη του πίνακα στο Πόρισμα 1.5.3 για αυθαίρετα μεγάλο k. Ως μια ερμηνεία, θεωρούμε το αναλυτικό σύστημα

$$\dot{x} = t^k u,$$

όπου k είναι ένας ακέραιος. Αυτό είναι ελέγξιμο σε οποιοδήποτε μη τετριμμένο διάστημα (απλά ελέγξτε τη rank συνθήκη στο 1, για παράδειγμα), αλλά με $t_0 = 0$ θα έπρεπε να ελέγξουμε μέχρι τον k-οστό πίνακα.

1.6 Φραγμένοι Έλεγχοι

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με συνεχή χρονικά αναλλοίωτα συστήματα της μορφής $\dot{x} = Ax + Bu$ για τα οποία $\mathcal{U}$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Στα γραμμικά συστήματα ισχύει, εξ'ορισμού, ότι $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, έτσι ονομάζουμε αυτά τα συστήματα ''γραμμικά συστήματα με περιορισμένους ελέγχους''. Για παράδειγμα, παίρνουμε το σύστημα $\dot{x} = -x + u (n = m = 1)$, με $\mathcal{U} = (1, 1)$. Το ζεύγος $(A, B) = (1, 1)$ είναι ελέγξιμο, αλλά το σύστημα με περιορισμένους ελέγχους δεν είναι, αφού είναι αδύνατο να μεταφέρουμε την κατάσταση $x = 0$ στη $z = 2$ (αφού $\dot{x} < 0$ για οποιοδήποτε $x(t) \in (1, 2)$).

Για να αποφύγουμε τη σύγχυση με την προσβασιμότητα για τα συσχετιζόμενα γραμμικά συστήματα με μη περιορισμένους ελέγχους, σε αυτό το κεφάλαιο θα λέμε ότι το $z \in \mathbb{R}^n$ μπορούμε να το $\mathcal{U}$-προσεγγίσουμε από το $x \in \mathbb{R}^n$ (ή το x μπορεί να $\mathcal{U}$-ελεγχθεί από το z) σε χρόνο T αν υπάρχει κάποια είσοδος $\omega : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε $\phi(T,0,x,\omega) = z$ και $\omega(t) \in \mathcal{U}$ για (σχεδόν) όλα τα $t \in [0,T]$. Ορίζουμε το προσβάσιμο σύνολο σε χρόνο $T \geq 0$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(x) := \{z \in \mathbb{R}^n \ \mathcal{U}\text{-προσεγγίσιμο από το } x \text{ σε χρόνο } T\}$$

και $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(x) := \cup_{T\geq 0}\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(x)$. (Έτσι το $\mathcal{R}_{\mathbb{R}^m}(x)$ είναι το ίδιο με το $\mathcal{R}(x)$.)

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5. *Έστω $\mathcal{U}$ μία φραγμένη γειτονιά του μηδέν. Τότε, $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0) = \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν*

(α) το ζεύγος (A,B) είναι ελέγξιμο και

(β) ο πίνακας A δεν έχει ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος.

Παρατηρούμε ότι η αναγκαιότητα για ελεγξιμότητα για το ζεύγος (A,B) είναι προφανής, αφού $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0) \subseteq \mathcal{R}(0)$.

Θα αποδειξουμε το Θεώρημα 5 μετά από μια σειρά προαπαιτούμενων αποτελεσμάτων.

Λήμμα 1.6.1. Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ και παίρνουμε δύο τυχόντα $S, T \geq 0$. Τότε

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0) + e^{TA}\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^S(0) = \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^{S+T}(0).$$

Απόδειξη. Παιρνουμε

$$x_1 = \int_0^T e^{(T-\tau)A}B\omega_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_S^{S+T} e^{(S+T-\tau)A}B\omega_1(\tau - S)\,\mathrm{d}\tau$$

και

$$x_2 = \int_0^S e^{(S-\tau)A}B\omega_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

με τις εισόδους ω_i $\mathcal{U}$-εκτιμόμενες. Σημειώνουμε ότι

$$e^{TA}x_2 = \int_0^S e^{(S+T-\tau)A}B\omega_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Έτσι

$$x_1 + e^{TA}x_2 = \int_0^{S+T} e^{(S+T-\tau)A}B\omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

όπου

$$\omega(s) = \begin{cases} \omega_2(\tau) & 0 \leq \tau \leq S \\ \omega_1(\tau - S) & S \leq \tau \leq S+T. \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι το $\omega(t) \in \mathcal{U}$ για όλα τα $t \in [0, S+T]$. Έτσι $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0) + e^{TA}\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^S(0) \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^{S+T}(0)$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός έπεται αν ακολουθήσουμε τα βήματα αντίστροφα. □

Με επαγωγή στο q μπορούμε να συμπεράνουμε:

Πόρισμα 1.6.1. Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ και παίρνουμε τυχαίο $T \geq 0$ και οποιοδήποτε ακέραιο $q \geq 1$. Τότε

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0) + e^{TA}\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0) + \ldots + e^{(q-1)TA}\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0) = \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^{qT}(0).$$

Πρόταση 1.6.1. (1) Αν το $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι κυρτό, τοτε $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$ είναι ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. (2) Αν το (A, B) είναι ελέγξιμο και $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ μια γειτονιά του $0 \in \mathbb{R}^m$, τότε $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Η κυρτότητα κάθε $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0)$ έπεται από τη γραμμικότητα του $\phi(T, 0, 0, u)$ στο u και την κυρτότητα του $\mathcal{U}$. Αυτό δείχνει ότι η (αύξουσα) ένωση $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$ είναι κυρτή, όταν το $\mathcal{U}$ είναι κυρτό.

Υποθέτουμε τώρα ότι το (A, B) είναι ελέγξιμο και το $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι μια γειτονιά του 0. Πρώτα θα δείξουμε ότι, για κάθε $T > 0$, το $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0)$ είναι μια γειτονιά του $0 \in \mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο T. Παίρνουμε ένα υποσύνολο $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ το οποίο είναι μια κυρτή γειτονιά του 0. Θα φθάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα αν δείξουμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι το εσωτερικό του $\mathcal{R}_{\mathcal{U}_0}^T(0)$, αφού $\mathcal{R}_{\mathcal{U}_0}^T(0) \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0)$. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας, μέχρι το τέλος της παραγράφου αντικαθιστούμε το $\mathcal{U}_0$ με $\mathcal{U}$ και άρα υποθέτουμε ότι το $\mathcal{U}$ είναι επίσης κυρτό. Παίρνουμε μία οποιαδήποτε βάση $e_1, \ldots, e_n$ του $\mathbb{R}^n$. Έστω $e_0 := -\Sigma_{i=1}^n e_i$. Για κάθε $i = 0, \ldots, n$ υπάρχει μία είσοδος ω_i, όχι απαραίτητα $\mathcal{U}$-εκτιμόμενη, έτσι ώστε

$$e_i = \phi(T, 0, 0, \omega_i).$$

Έστω $\mu > 0$ τέτοιο ώστε, με $\omega_i' := \frac{1}{\mu}\omega_i,\ i = 0, \ldots, n$, να ισχύει για όλα τα i ότι $\omega_i'(t) \in \mathcal{U}$ για (σχεδόν) όλα τα $t \in [0, T]$. (Υπάρχουν μερικά τέτοια μ, αφού το $\mathcal{U}$ είναι μια γειτονιά του 0 και τα ω_i είναι ουσιωδώς φραγμένα.) Έτσι $e_i' := \frac{1}{\mu}e_i = \phi(T, 0, 0, \omega_i') \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0)$ για κάθε i.

Παίρνουμε οποιαδήποτε $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ τέτοια ώστε $|\varepsilon_i| \leq \dfrac{1}{2(n+1)}$ για όλα τα i. Τότε

$$\frac{\varepsilon_1}{\mu}e_1 + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{\mu}e_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1-\varepsilon}{n+1} + \varepsilon_i\right)e_i' + \frac{1-\varepsilon}{n+1}e_0'$$

με $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$. Αυτός είναι ένας κυρτός συνδυασμός. Αφού όλα τα $e_i' \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0)$, και αυτό το σύνολο είναι κυρτό, έπεται ότι $\frac{\varepsilon_1}{\mu}e_1 + \ldots + \dfrac{\varepsilon_n}{\mu}e_n \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0)$ για όλα τα αρκετά μικρά $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, το οποίο δείχνει ότι το $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0)$ είναι μια γειτονιά του 0.

Τελικά, θα δείξουμε ότι το $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$ είναι ανοικτό. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $S > 0$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, υπάρχει κάποιο ανοικτό υποσύνολο $V \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^S(0)$ που να περιέχει το μηδέν. Παίρνουμε $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$, θέλουμε να δείξουμε ότι κάποια γειτονιά του x περιέχεται στο $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$. Έστω $\omega : [0, T] \to \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $x = \phi(T, 0, 0, \omega)$. Το σύνολο $W := e^{TA}V$ είναι ανοικτό, γιατί το e^{TA} είναι μη ιδιάζον. Για κάθε $y = e^{TA}v \in W$,

$$y + x = e^{TA}v + \phi(T, 0, 0, \omega) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(V).$$

Έτσι $x + W$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(V) \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^{S+T}(0) \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$ το οποίο περιέχει το x. $\square$

Για κάθε ιδιοτιμή λ του A και για κάθε θετικό ακέραιο k θεωρούμε το

$$J_{k,\lambda} := \ker(\lambda I - A)^k$$

(ένας υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$) και το σύνολο που αποτελείται απ'τα πραγματικά μέρη

$$J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}} := \mathrm{Re}(J_{k,\lambda}) = \{\mathrm{Re}\, v | v \in J_{k,\lambda}\}$$

(ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$). Παρατηρούμε ότι αν $v \in J_{k,\lambda},\ v = v_1 + iv_2$ με $v_j \in \mathbb{R}^n,\ j = 1, 2$, τότε $v_1 \in J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}}$, εξ'ορισμού, αλλά επίσης το φανταστικό μέρος $v_2 \in J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}}$, επειδή το $(-iv)$ ανήκει στον υπόχωρο $J_{k,\lambda}$. Επίσης θεωρούμε $J_{0,\lambda} = J_{0,\lambda}^{\mathbb{R}} = 0$.

Έστω L το άθροισμα των διαφόρων χώρων $J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}}$, με $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ και έστω M το άθροισμα των διάφορων χώρων $J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}}$, με $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. Κάθε τέτοιος χώρος είναι A-αναλλοίωτος, γιατί αν v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A και $v = v_1 + iv_2$ είναι η ανάλυση του σε πραγματικό και φανταστικό μέρος, τότε ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα v_1 και v_2 είναι A-αναλλοίωτος. Από τον τύπο παραγοντοποίησης του Jordan, γνωρίζουμε ότι κάθε στοιχείο στο $\mathbb{C}^n$ μπορεί να γραφεί σαν ένα άθροισμα στοιχείων των διαφόρων ''γενικευμένων ιδιόχωρων'' $J_{k,\lambda}$, έτσι παίρνοντας τα πραγματικά μέρη γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{R}^n$ χωρίζεται στο ευθύ άθροισμα του L και του M. (Στην πραγματικότητα, το L είναι ο μεγαλύτερος αναλλοίωτος υπόχωρος στον οποίον όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν μη αρνητικά πραγματικά μέρη, ανάλογα για το M.)

Θα χρειασθούμε την ακόλουθη γενική παρατήρηση:

Λήμμα 1.6.2. Αν το C είναι ένα ανοικτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και L ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που περιέχεται στο C, τότε $C + L = C$.

Απόδειξη. Προφανώς $C = C + 0 \subseteq C + L$, άρα χρειάζεται μόνο να αποδείξουμε τον άλλον εγκλεισμό. Παίρνουμε $x \in C$ και $y \in L$ τυχόντα. Τότε για όλα τα $\varepsilon \neq 0$:

$$x + y = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)[(1+\varepsilon)x] + \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\left[\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)y\right].$$

Αφού το C είναι ανοικτό, $(1+\varepsilon)x \in C$ για κάποιο αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$. Αφού L είναι ένας υπόχωρος, $\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}y \in L \subseteq C$. Έτσι $x + y \in C$, λόγω κυρτότητας. $\square$

Το κύριο τεχνικό κομμάτι που χρειάζεται είναι το ακόλουθο. Σταθεροποιούμε μία ιδιοτιμή $\lambda = \alpha + i\beta$ του A με πραγματικό μέρος $\alpha \geq 0$, και ορίζουμε για απλότητα $J_k^{\mathbb{R}} := J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}}$.

Λήμμα 1.6.3. Υποθέτουμε ότι (A, B) είναι ελέγξιμο και $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι μια γειτονιά του 0. Τότε $J_k^{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$ για όλα τα k.

Απόδειξη. Πρώτον αν χρειάζεται αντικαθιστούμε το $\mathcal{U}$ με ένα κυρτό υποσύνολο, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\mathcal{U}$ είναι μια κυρτή γειτονιά του 0. Αυτό θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο k, η περίπτωση $k = 0$ είναι τετριμμένη. Έτσι υποθέτουμε ότι $J_{k-1}^{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$, και παίρνουμε τυχαίο $\tilde{v} \in J_{k,\lambda},\ \tilde{v} = \tilde{v}_1 + i\tilde{v}_2$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\tilde{v}_1 \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$.

Πρώτον παίρνουμε τυχαίο $T > 0$ έτσι ώστε $e^{\lambda Tj} = e^{\alpha Tj}$ για όλα τα $j = 0, 1, \ldots$. (Αν $\beta = 0$ μπορούμε να πάρουμε τυχαίο $T > 0$, αλλιώς πρέπει να πάρουμε για παράδειγμα $T = \frac{2\pi}{|\beta|}$.) Μετά παίρνουμε τυχαίο $\delta > 0$ με την ιδιότητα $v_1 := \delta\tilde{v}_1 \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^T(0)$. (Υπάρχει τέτοιο δ, γιατί το $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$ περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, από Πρόταση 1.6.1.) Αφού $v \in \ker(\lambda I - A)^k$, όπου $v = \delta\tilde{v}$,

$$e^{(A-\lambda I)t}v = \left(I + t(A - \lambda I) + \frac{t^2}{2}(A - \lambda I)^2 + \dots\right)v = v + w \quad \forall t,$$

όπου $w \in J_{k-1}$. Έτσι

$$e^{\alpha t}v = e^{\lambda t}v = e^{tA}v - e^{\lambda t}w = e^{tA}v - e^{\alpha t}w \quad \forall t = jT,\ j = 0, 1, \dots\ . \tag{1.26}$$

Αναλύοντας σε πραγματικό και φανταστικό μέρος $w = w_1 + iw_2$ και παίρνοντας τα πραγματικά μέρη στην Εξίσωση (1.2.6)έχουμε,

$$e^{\alpha t}v_1 = e^{tA}v_1 - e^{\alpha t}w_1 \quad \forall t = jT,\ j = 0, 1, \dots\ .$$

Τώρα παίρνουμε έναν οποιοδήποτε ακέραιο $q \geq 1/\delta$. Τότε

$$\left(\sum_{j=0}^{q-1} e^{\alpha jT}\right)v_1 = \sum_{j=0}^{q-1} e^{jTA}v_1 + w'$$

όπου $w' = -\sum e^{\alpha jT}w_1$ ανήκει στον υπόχωρο $J_{k-1}^{\mathbb{R}}$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 1.6.1, συμπεραίνουμε ότι

$$pv_1 \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}^{qT}(0) + J_{k-1}^{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$$

όπου

$$p = \sum_{j=0}^{q-1} e^{\alpha jT} \geq \sum_{j=0}^{q-1} 1 = q \geq \frac{1}{\delta}.$$

(Εδώ είναι ακριβώς όπου χρησιμοποιούμε ότι $\alpha \geq 0$.) Επομένως $\delta p\tilde{v}_1 = pv_1 \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$. Απ'την άλλη, $\delta p \geq 1$ σημαίνει ότι

$$\tilde{v}_1 = \frac{1}{\delta p}\delta p\tilde{v}_1 + \left(1 - \frac{1}{\delta p}\right)0$$

είναι ένας κυρτός συνδυασμός. Αφού το $\delta p\tilde{v}_1$ και το 0 ανήκουν και τα δύο στο $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$, συμπεραίνουμε λόγω της κυρτότητας του τελευταίου ότι πράγματι $\tilde{v}_1 \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$. □

Πόρισμα 1.6.2. Υποθέτουμε ότι (A, B) είναι ελέγξιμο και $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι μια γειτονιά του 0. Τότε $L \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$.

Απόδειξη. Όπως προηγουμένως, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\mathcal{U}$ είναι κυρτό. Γνωρίζουμε ότι L είναι το άθροισμα των χώρων $J_{k,\lambda}^{\mathbb{R}}$, όλων των ιδιοτιμών λ με πραγματικό μέρος μη αρνητικό και κάθε ένας από αυτούς τους χώρους να περιέχεται στο $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$. Γενικά, αν L_1 και L_2 είναι δύο υπόχωροι ενός κυρτού συνόλου C, $L_1 + L_2 \subseteq C$ (αφού $x + y = \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}(2y)$),)άρα το άθροισμα των L πράγματι περιέχεται στο $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει ότι το προσβάσιμο σύνολο από το 0 είναι ένας ''διευρημένος γραμμικός υπόχωρος``:

Πόρισμα 1.6.3. Υποθέτουμε ότι (A, B) είναι ένα ελέγξιμο και $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι μία κυρτή και φραγμένη περιοχή του 0. Τότε υπάρχει ένα σύνολο $\mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0) = \mathcal{B} + L$ και $\mathcal{B}$ είναι φραγμένο, κυρτό και ανοικτό σε σχέση με το M.

Απόδειξη. Ισχυριζόμαστε ότι $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0) = (\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0) \cap M) + L$. Ο ένας εγκλεισμός είναι ξεκάθαρος από

$$\Big(\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0) \cap M\Big) + L \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0) + L = \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$$

(εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.6.3). Αντίστροφα, ένα οποιοδήποτε $v \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$ μπορεί να διασπασθεί ως $v = x + y \in M + L$, πρέπει να δείξουμε ότι $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$. Αλλά $x = v - y \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0) + L = \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$ (εφαρμόζοντας το ίδιο Λήμμα ξανά). Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Θεωρούμε $\mathcal{B} := \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0) \cap M$. Αυτό το σύνολο είναι κυρτό και ανοικτό στο M, γιατί το $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$ είναι ανοικτό και κυρτό. Τώρα μας μένει μόνο να δείξουμε ότι είναι φραγμένη.

Έστω $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η προβολή πάνω στο M κατά μήκος του L, το οποίο σημαίνει ότι, $P(x + y) = x$ αν $x \in M$, $y \in L$. Παρατηρούμε ότι $PA = AP$, γιατί κάθε L και M είναι A-αναλλοίωτα (έτσι από το $v = x + y,\ Ax \in M,\ Ay \in L$, συνεπάγεται ότι $PAv = Ax = APv$). Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0) \bigcap M$. Αφού $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$, υπάρχουν T και ω έτσι ώστε

$$x = \int_0^T e^{(T-\tau)A} B\omega(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Απ'την άλλη, αφού $x \in M,\ x = Px$. Έτσι:

$$x = Px = \int_0^T Pe^{(T-\tau)A} B\omega(\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

όπου $x(\tau) = PB\omega(\tau) \in M \cap PB(\mathcal{U})$ για όλα τα τ.

Αφού ο περιορισμός του A στο M έχει όλες του τις ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος, υπάρχουν πιθανοί σταθεροί $c, \mu > 0$ τέτοιοι ώστε $\|e^{tA}x\| \leq ce^{-\mu t}\|x\|$ για όλα τα $t \geq 0$ και όλα τα $x \in M$. Αφού το $PB(\mathcal{U})$ είναι φραγμένο, υπάρχει τότε κάποιος σταθερός c' τέτοιος ώστε, αν x ανήκει επίσης στο $PB(\mathcal{U})$, $\|e^{tA}x\| \leq c'e^{-\mu t}$ για όλα τα $t \geq 0$. Έτσι, για x όπως παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\|x\| \leq c' \int_0^T e{-}\mu(T - \tau)\, \mathrm{d}\tau \leq \frac{c'}{\mu},$$

και αποδείξαμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι φραγμένο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5

Υποθέτουμε πρώτον ότι $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0) = \mathbb{R}^n$. Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι το ζεύγος (A, B) πρέπει να είναι προσβάσιμο. Αν η συνθήκη ιδιοτιμής (β) δεν ισχύει, τότε το L είναι ένας γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $M \neq 0$. Επεκτείνοντας το $\mathcal{U}$ αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\mathcal{U}$ είναι κυρτό και φραγμένο. Το Πόρισμα 1.6.3 ισχυρίζεται ότι το $\mathbb{R}^n = \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$ είναι τότε ένα υποσύνολο του $L + \mathcal{B}$, με φραγμένο $\mathcal{B}$, άτοπο. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι τα (α) και (β) ισχύουν. Από το Πόρισμα 1.6.2, $\mathbb{R}^n = L \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(0)$. □

Επίσης λέμε ότι το σύστημα Σ είναι $\mathcal{U}$-ελεγχόμενο αν $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(x) = \mathbb{R}^n$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

1.7 Πρώτης Τάξης Τοπική Ελεγξιμότητα

Για μη γραμμικά συστήματα, το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε θεωρώντας τις έννοιες τις ελεγξιμότητας είναι να χαρακτηρίσουμε την τοπική ελεγξιμότητα-και ακόμα και αυτό το πρόβλημα δεν είναι εντελώς κατανοητό. Για να μιλήσουμε για τοπικές έννοιες θα πρέπει να εισάγουμε την τοπολογία στην κατάσταση χώρου. Ακόμα κι αν τα μόνα μη τετριμμένα αποτελέσματα αποδειχθούν για χρονοδιακριτά και συνεχεί συστήματα τάξης $\mathcal{C}_1$, είναι καλύτερο να παρέχουμε τους βασικούς ορισμούς κάπως πιο γενικά. Παρακάτω εισάγεται μια κλάση που ονομάζεται *τοπολογικά συστήματα* , η οποία δείχνει τις βασικές ιδιότητες της συνέχειας που χρειαζόμαστε. Από εδώ και στο εξής σε αυτό το κεφάλαιο, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, όταν λέμε *σύστημα* εννοούμε *τοπολογικό σύστημα* με την έννοια του Ορισμού 1.7.1 που δίνεται παρακάτω.

Τοπολογικά Συστήματα

Αν $\mathcal{X}$ είναι ένας μετρικός χώρος, χρησιμοποιούμε $\mathrm{d}(a,b)$ για να δηλώσουμε την απόσταση μεταξύ δύο στοιχείων του $\mathcal{X}$ και όπως προηγουμένως, θεωρούμε το d_∞ να είναι η ομοιόμορφη απόσταση μεταξύ δύο χρονικών συναρτήσεων στο $\mathcal{X}$, δηλαδή, αν $\gamma_1, \gamma_2 : \mathcal{I} \to \mathcal{X}$, για κάποιο διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}$, τότε

$$\mathrm{d}_\infty(\gamma_1, \gamma_2) := \sup\{\,\mathrm{d}(\gamma_1, \gamma_2), t \in \mathcal{I}\}$$

(ουσιώδες supremum όταν ασχολούμαστε με μετρήσιμες συναρτήσεις και $\mathcal{I} = \mathbb{R}$). Επίσης χρησιμοποιούμε την έννοια

$$\mathcal{B}_\rho(x) := \{y \in \mathcal{X} |\ \mathrm{d}(x,y) < \rho\}$$

για την ανοικτή μπάλα ακτίνας ρ και κέντρου x και

$$\bar{\mathcal{B}}_\rho(x) := \{y \in \mathcal{X} |\ \mathrm{d}(x,y) \leq \rho\}$$

για την κλειστότητα του (θήκη).

Ορισμός 1.7.1. *Ένα τοπολογικό σύστημα Σ είναι ένα αντικείμενο*

$$(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$$

τέτοιο ώστε $\mathcal{X}$ είναι ένας μετρικός χώρος. Το Σ είναι ένα σύστημα όπου $\mathcal{X}$ θεωρείται ως απλά ένα σύνολο και για κάθε $\sigma < \tau$ στο $\mathcal{T}$ και κάθε $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}$,

$$\psi(\tau, \sigma, \cdot, \omega)$$

έχει ένα ανοικτό χωρίο και είναι συνεχές εκεί ως μία απεικόνιση στο $\mathcal{X}^{[\sigma,\tau]}$ (με μετρική τη d_∞).

Με άλλα λόγια, η ακόλουθη ιδιότητα πρέπει να ισχύει για κάθε ζεύγος $\sigma < \tau$ στο $\mathcal{T}$: Αν ω είναι αποδεκτό για την κατάσταση x και αν

$$x_n \to x$$

στο $\mathcal{X}$, τότε υπάρχει κάποιος ακέραιος N τέτοιος ώστε ω είναι αποδεκτό για το x_n για όλα τα $n > N$, και

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(\phi(t,\sigma,x_n,\omega), \phi(t,\sigma,x,\omega)) = 0$$

ομοιόμορφα στο $t \in [\sigma, \tau]$.

Πρόταση 1.7.1. Αν το Σ είναι είτε συνεχές χρονικά, είτε χρονοδιακριτό σύστημα της τάξης $\mathcal{C}^0$, τότε το Σ είναι τοπολογικό όταν το $\mathcal{X}$ δίνεται από την επαγόμενη τοπολογία του $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 1.7.1. Αν το Σ είναι ένα τοπολογικό σύστημα, τότε η απεικόνιση $\phi(t,\sigma,x,\omega)$ είναι από κοινού συνεχής στο (t,x), εξασφαλίζοντας μόνο η $\phi(\cdot,\sigma,x,\omega)$ να είναι συνεχής για κάθε σταθεροποιημένο σ,x,ω (όπως συμβαίνει με συνεχή χρονικά συστήματα). Πράγματι, δοσμένων οποιωνδήποτε σ,τ,ω, οποιουδήποτε ξ για το οποίο το ω είναι αποδεκτό, οποιοδήποτε $t\in[\sigma,\tau]$, και οποιονδήποτε αριθμό $\varepsilon>0$, υπάρχει πάντα, λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας του ϕ στο x, ένα $\delta>0$ έτσι ώστε

$$\mathrm{d}(\phi(t,\sigma,x,\omega),\phi(t,\sigma,y,\omega))<\varepsilon/2$$

κάθε φορά που $\mathrm{d}(x,y)<\delta$. Επιπλέον, η συνέχεια του $\phi(\cdot,\sigma,x,\omega)$ εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα $\delta'>0$ έτσι ώστε

$$\mathrm{d}(\phi(s,\sigma,x,\omega),\phi(t,\sigma,x,\omega))<\varepsilon/2$$

κάθε φορά που $s\in[\sigma,\tau]$ είναι τέτοιο ώστε $|t-s|<\delta'$. Επομένως,

$$\mathrm{d}(\phi(s,\sigma,x,\omega),\phi(t,\sigma,y,\omega))<\varepsilon$$

αν (s,x) είναι κοντά στο (t,y), όπως απαιτείται.

Μια κατάσταση ισορροπίας x^0 είναι μία κατάσταση για την οποία υπάρχει ένας έλεγχος τιμών $u^0\in\mathcal{U}$ τέτοιος ώστε

$$\phi(\tau,\sigma,x^0,\omega^0)=x^0$$

για κάθε $\sigma\le\tau,\ \sigma,\tau\in\mathcal{T}$, όπου ω^0 είναι ο έλεγχος με $\omega^0(t)\equiv u^0$. Όταν το σύστημα Σ είναι γραμμικό, πάντα παίρνουμε $x^0=0$ και $u^0=0$. Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, x^0 είναι μια σταθεροποιημένη, αλλά αυθαίρετη κατάσταση ισορροπίας.

Ορισμός 1.7.2. *Έστω Σ ένα τοπολογικό σύστημα. Έστω ξ μια διαδρομή πάνω στο διάστημα $\mathcal{T}=[\sigma,\tau]$, και συμβολίζουμε*

$$x_0:=\xi(\sigma),\ x_1:=\xi(\tau).$$

Το σύστημα Σ είναι τοπικά ελέγξιμο κατά μήκος του ξ αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κάποιο $\delta>0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $z,y\in\mathcal{X}$ με $\mathrm{d}(z,x_0)<\delta$ και $\mathrm{d}(y,x_1)<\delta$ υπάρχει κάποια διαδρομή ζ πάνω στο $\mathcal{I}$ τέτοια ώστε

$$\zeta(\sigma)=z,\ \zeta(\tau)=y$$

και

$$\mathrm{d}_\infty(\zeta,\xi)<\varepsilon.$$

Όταν x είναι μια κατάσταση ισορροπίας και $\xi\equiv x$ στο διάστημα $[\sigma,\tau]$, $T=\tau-\sigma$, λέμε απλά ότι το Σ είναι τοπικά ελέγξιμο (σε χρόνο T) στο x.

Έτσι, η τοπική ελεγξιμότητα κατά μήκος μιας τροχιάς αντιστοιχεί στην πιθανότητα ελέγχου κάθε αρχικής κατάστασης κοντά στην αυθεντική αρχική κατάσταση με κάθε τελική κατάσταση κοντά στην αυθεντική τελική κατάσταση, για να μπορούμε να το κάνουμε αυτό χωρίς να παρεκκλίνουμε πολύ απότην αρχική αυθεντική τροχιά. Για καταστάσεις ισορροπίας, οι αρχικές και τελικές καταστάσεις είναι οι ίδιες, και ο ορισμός μπορεί να δωθεί με λίγο διαφορετικούς όρους, χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ορολογία:

Ορισμός 1.7.3. *Έστω Σ ένα τοπολογικό σύστημα και έστω y, z ανήκουν στο $\mathcal{X}$. Αν $\mathcal{V}$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{X}$ που περιέχει τα y και z, λέμε ότι το z μπορεί να ελεγχθεί από το y χωρίς να εξέλθει από το $\mathcal{V}$ [σε χρόνο T] (ή ότι το y μπορούμε να το προσεγγίσουμε από το z μέσα στο $\mathcal{V}$) αν υπάρχει κάποια διαδρομή ζ πάνω σε κάποιο διάστημα $[\sigma, \tau]$ [αντίστοιχα, με $T = \tau - \sigma$] τέτοιο ώστε*

$$\zeta(\sigma) = z \quad \textit{και} \quad \zeta(\tau) = y$$

και επίσης

$$\zeta(t) \in \mathcal{V}$$

για όλα τα $t \in [\sigma, \tau]$.

Παρατήρηση 1.7.2. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε: Το σύστημα Σ είναι τοπικά ελέγξιμο σε χρόνο T στην κατάσταση ισορροπίας x αν και μόνο αν για κάθε περιοχή $\mathcal{V}$ του x υπάρχει μια άλλη περιοχή $\mathcal{W}$ του x τέτοια ώστε, για κάθε ζεύγος στοιχείων z, y του $\mathcal{W}$, το z μπορεί να ελεγχθεί από το y μέσα στο $\mathcal{V}$ σε χρόνο T.

Λήμμα 1.7.1. Για οποιοδήποτε χρονοδιακριτό ή συνεχές χρονικά γραμμικό σύστημα Σ και κάθε ζεύγος $\sigma < \tau$ στο $\mathcal{T}$, οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

(α) Το Σ είναι τοπικά ελέγξιμο κατά μήκος κάποιας τροχιάς Γ στο $[\sigma, \tau]$.

(β) Το Σ είναι τοπικά ελέγξιμο κατά μήκος κάθες τροχιάς Γ στο $[\sigma, \tau]$.

(γ) Το Σ είναι ελέγξιμο στο $[\sigma, \tau]$.

Ειδικά, για συνεχή χρονικά συστήματα $\dot{x} = f(x, u)$, με $(0, 0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ και $f(0, 0) = 0$, το αποτέλεσμα μας βεβαιώνει ότι η ελεγξιμότητα του ζεύγους (A, B) που εξασφαλίζεται αναπτύσσοντας σε πρώτη τάξη $\dot{x} = Ax + Bu + o(x, u)$ είναι ικανό να μας εξασφαλίσει την τοπική ελεγξιμότητα στο $x = 0$.

Θεώρημα 6. *Υποθέτουμε ότι Σ είναι ένα συνεχές χρονικά σύστημα τάξης $\mathcal{C}^1$. Τότε,*

1. *Έστω $\Gamma = (\xi, \omega)$ μία τροχιά του Σ σε ένα διάστημα $\mathcal{I} = [\sigma, \tau]$. Τότε, μία ικανή συνθήκη του Σ για να είναι τοπικά ελέγξιμο κατά μήκος του ξ είναι ότι το $\Sigma_*[\Gamma]$ είναι ελέγξιμο στο $[\sigma, \tau]$.*

2. *Έστω Σ χρονικά αναλλοίωτο και υποθέτουμε ότι το x είναι μια κατάσταση ισορροπίας. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ και οποιοδήποτε $u \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $f(x, u) = 0$. Τότε, μία ικανή συνθήκη για το Σ για να είναι τοπικά ελέγξιμο στο x σε χρόνο ε είναι ότι η γραμμικοποίηση του Σ στο (x, u) να είναι ελέγξιμη.*

Απόδειξη. Το δεύτερο μέρος είναι μια εξαιρετική περίπτωση του πρώτου, άρα θα αποδείξουμε το μέρος (1). Έστω $x_0 := \xi(\sigma)$ και $x_1 := \xi(\tau)$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\alpha : \mathcal{D}_{\sigma,\tau} \to \mathcal{X}, \alpha(x,v) := \phi(\tau,\sigma,x,v).$$

Σημειώνουμε ότι $\alpha(x_0,\omega) = x_1$. Αυτή η απεικόνιση είναι συνεχώς διαφορίσιμη και οι μερικές παράγωγοί της ως προς το v που υπολογίζονται στο (x_0,ω) είναι η απεικόνιση $\phi_\Gamma(\tau,\sigma,0,\cdot)$, η οποία είναι επί, λόγω της παραδοχής της ελεγξιμότητας. Έπεται χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Πεπλεγμένης Απεικόνισης για απεικονίσεις από ένα χώρο με νόρμα σε ένα πεπερασμένης διάστασης χώρο, ότι υπάρχει ένα $\varepsilon_1 > 0$ και μία συνεχής διαφορίσιμη απεικόνιση

$$j : \mathcal{B}_{\varepsilon 1}(x_0) \times \mathcal{B}_{\varepsilon 1}(x_1) \to \mathcal{L}_m^\infty$$

τέτοια ώστε

$$\alpha(z, j(z < y)) = y$$

για όλα τα (z,y) στο χωρίο του j και τέτοια ώστε $j(x_0,x_1) = \omega$. Δοσμένου τώρα οποιουδήποτε $\varepsilon > 0$, παίρνουμε $\delta > 0$ αρκετά μικρό έτσι ώστε

$$\mathrm{d}_\infty(\xi, \psi(z, j(z,y))) < \varepsilon$$

κάθε φορά που $z \in \mathcal{B}_\delta(x_0)$ $y \in \mathcal{B}_\delta(x_1)$. Ένα τέτοιο δ υπάρχει λόγω συνέχειας του j και του ψ και είναι όπως επιθυμούμε για την τοπική ελεγξιμότητα. □

Λήμμα 1.7.2. Για χρονοδιακριτά συστήματα τάξης $\mathcal{C}^1$, ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα με το Θεώρημα 6.

Παρατήρηση 1.7.3. Ο ορισμός της τοπικής ελεγξιμότητας μπορεί να εξασθενίσει με πολλούς τρόπους διατηρώντας ασφαλώς παράλληλα την ιδέα ότι κάθε κατάσταση κοντά στην αρχική, μπορεί να ελεγχθεί από κάθε κατάσταση κοντά στην τελική. Μια τέτοια εξασθένιση είναι η αρχή για μεγάλες διαδρομές. Για παράδειγμα, θεωρούμε το ακόλουθο διγραμμικό σύστημα στο $\mathbb{R}^2$, με $\mathcal{U} = \mathbb{R}$:

$$\dot{x} = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] x$$

ή σε πολικές συντεταγμένες μακρυά από την αρχή των αξόνων

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 1 \\ \dot{\rho} &= u\rho. \end{aligned}$$

Παίρνουμε οποιαδήποτε μη μηδενική κατάσταση, για παράδειγμα, $x := (1,0)'$. Από την περιγραφή των πολικών συντεταγμένων, είναι φανερό ότι το σύστημα που περιορίζεται στο $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ είναι ελέγξιμο και συγκεκριμένα, ότι κάθε κατάσταση κοντά στο x μπορεί να ελεγχθεί με κάθε άλλη κατάσταση κοντά στο x. Ωστόσο, ο μόνος τρόπος να ελέγξουμε το x στο $(1+\varepsilon,0)'$, για ε μικρό, είναι μέσω μιας κίνησης του χρόνου τουλάχιστον 2π που κυκλώνει την αρχή και συγκεκριμένα μία κίνηση που σχηματίζει μία μπάλα ακτίνας 1 γύρω από το x. Επομένως, αυτό το σύστημα δεν είναι τοπικά ελέγξιμο με τη δική μας έννοια.

Τα ακόλουθα είναι κάποια παραδείγματα τοπικής ελεγξιμότητας και η εφαρμογή της αρχής της γραμμικοποίησης.

Παράδειγμα 1.7.1. Με $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ και $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + \sin x_2 + x_1 e^{x_2} \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 + u. \end{aligned}$$

Αυτό είναι τοπικά ελέγξιμο στο $x = 0$, γιατί η γραμμικοποίηση στο $(0,0)$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ικανοποιεί τη rank συνθήκη ελεγξιμότητας. Όταν το u^2 αντικαταστήσει το u στη δεύτερη εξίσωση, το γραμμικό τεστ αποτυγχάνει, αφού τώρα το $B = 0$. Στην πραγματικότητα, το σύστημα δεν είναι τοπικά ελέγξιμο, δεδομένου ότι ξεκινώντας απ'το 0 είναι αδύνατο να φθάσουμε οποιαδήποτε κατάσταση της μορφής $\binom{0}{x_2}$ με $x_2 < 0$. Απ'την άλλη, το γραμμικό τεστ δεν είναι σαφές: Για παράδειγμα, αν είχαμε u^3 αντί για u στη δεύτερη εξίσωση, τότε το γραμμικό τεστ αποτυγχάνει (ξανά $B = 0$), αλλά το σύστημα είναι ακόμη τοπικά ελέγξιμο. Το τελευταίο γεγονός έπεται από την παρατήρηση ότι, δοσμένης οποιασδήποτε τροχιάς (ξ, ω) του αρχικού συστήματος, τότε (ξ, ν) είναι μία τροχιά του συστήματος, η οποία έχει u^3 στη δεύτερη εξίσωση, αν ορίσουμε $\nu(t) := \omega(t)^{1/3}$.

Παράδειγμα 1.7.2. Θεωρούμε το σύστημα με $\mathcal{X} = \mathcal{U} = \mathbb{R}$ και εξισώσεις

$$\dot{x} = 1 + u \sin^2 x.$$

Υποστηρίζουμε ότι αυτό το σύστημα είναι ελέγξιμο κατά μήκος κάθε τροχιάς $\Gamma = (\xi, \omega)$ με ω ομαλά ορισμένο σε οποιοδήποτε $\mathcal{I} = [\sigma, \tau]$ (με $\sigma < \tau$). Πράγματι, οι πίνακες γραμμικοποίησης (εδώ 1×1) είναι

$$A(t) = (\omega(t) \sin 2\xi(t)) \quad B(t) = (\sin^2 \xi(t)).$$

Άρα $\operatorname{rank} B(t_0) = 1$ για τουλάχιστον ένα $t_0 \in [\sigma, \tau]$ αν και μόνο αν $\sin \xi(t)$ δεν είναι ταυτοτικά ίσο με το μηδέν. Αλλά αν συμβεί το τελευταίο, τότε

$$\dot{\xi} \equiv 1,$$

το οποίο σημαίνει ότι το ξ δεν μπορεί να είναι σταθερό.

Η παραδοχή ότι το ω είναι ομαλό δεν είναι απαραίτητη, αφού δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ελεγξιμότητα της γραμμικοποίησης αμέσως, αλλά αυτή η παραδοχή εξυπηρετεί στη διευκρίνιση της χρήσης του κριτηρίου ελεγξιμότητας για γραμμικά αναλλοίωτα χρονικά συστήματα. Σε αυτό το παράδειγμα, δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε καθολική ελεγξιμότητα για το αρχικό σύστημα.

1.8 Κατά Τμήματα Σταθεροί Έλεγχοι

Συχνά, έχει ενδιαφέρον να γνωρίζουμε πόσο πιο περιοριστικό είναι να θεωρούμε μόνο ελέγχους που είναι συγκεκριμένου τύπου, όπως πολυωνυμικούς ως προς το χρόνο ή κατά τμήματα σταθερούς ελέγχους. Γενικά, για οποιαδήποτε m, σ, τ, έστω $\mathcal{A}$ να είναι ένας οποιοσδήποτε υπόχωρος του $\mathcal{L}_m^\infty(\sigma, \tau)$ που ικανοποιεί τα εξής:

1. Για κάθε $\omega \in L_m^\infty$ υπάρχει μία ισοφραγμένη ακολουθία του $\mathcal{A}$ που συγκλίνει στο ω και

2. περιέχει όλους τους σταθερούς ελέγχους. Για παράδειγμα, κάποιος μπορεί να πάρει πολυωνυμικούς ή κατά τμήματα σταθερούς ελέγχους. Για γραμμικά συστήματα, οι έλεγχοι του $\mathcal{A}$ είναι αρκετά πλούσιοι:

Πρόταση 1.8.1. Υποθέτουμε ότι το Σ είναι γραμμικό συνεχές χρονικά σύστημα, $\sigma < \tau$, και το $\mathcal{A}$ είναι όπως παραπάνω. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(α) Το Σ είναι ελέγξιμο στο $[\sigma, \tau]$.

(β) Για κάθε $x, z \in \mathcal{X}$, υπάρχει κάποιος έλεγχος του $\mathcal{A}$ τέτοιος ώστε $\phi(\tau, \sigma, x, \omega) = z$.

Συγκεκριμένα, για χρονικά αναλλοίωτα συστήματα, η ελεγξιμότητα είναι ισοδύναμη με την ελεγξιμότητα που χρησιμοποιεί ελέγχους στο $\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα οποιοδήποτε $x \in \mathcal{X}$. Το σύνολο

$$\{\phi(\tau, \sigma, x, \omega) | \omega \in \mathcal{A}\}$$

είναι πυκνό στο $\mathcal{X}$. Αλλά αυτό το σύνολο είναι ένας συσχετισμένος υπόχωρος, αφού αυτό είναι το σύνολο όλων των εκφράσεων της μορφής

$$\phi(\tau, \sigma, x, 0) + \phi(\tau, \sigma, 0, \omega)$$

και η απεικόνιση $\phi(\tau, \sigma, 0, \cdot)$ είναι γραμμική. Έτσι, θα πρέπει να ισχύει για όλο το $\mathcal{X}$. $\square$

Πρόταση 1.8.2. Έστω Σ ένα χρονικά αναλλοίωτο, συνεχές σύστημα της τάξης $\mathcal{C}^1$ με $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο ζεύγος ισορροπίας (x^0, u^0) τέτοιο ώστε η γραμμικοποίηση του Σ στο (x^0, u^0) να είναι ελέγξιμη. Παίρνουμε οποιοδήποτε $\sigma < \tau$ και $\mathcal{A}$ όπως παραπάνω. Τότε υπάρχει μια περιοχή V του x^0 τέτοια ώστε για κάθε $x, z \in V$ υπάρχει κάποιος έλεγχος $\omega \in \mathcal{A}$ τέτοιος ώστε $\phi(\tau, \sigma, x, \omega) = z$.

Απόδειξη. Αυτό αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως η τοπική ελεγξιμότητα στο Θεώρημα 6, με εφαρμογή του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Απεικόνισης στην απεικόνιση α, με ελέγχους δοσμένους απ'τη supremum νόρμα. Η μόνη τροποποίηση είναι ότι πρέπει να περιορίσουμε τους ελέγχους στο $\mathcal{A}$, θεωρούμενο ως ένα (όχι απαραίτητα πυκνό) υποσύνολο του $\mathcal{L}_m^\infty(\sigma, \tau)$. Αλλά το full rank έχει ήδη επιτευχθεί σε αυτά, λόγω της Πρότασης 1.8.1 και του γεγονότος ότι η διαφορική δεν είναι τίποτα άλλο από την αντίστοιχη απεικόνιση προσβασιμότητας για τη γραμμικοποίηση. $\square$

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω επιχείρημα χρησιμοποιεί το γεγονός ότι το α είναι $\mathcal{C}^1$ σε σχέση με τη supremum νόρμα και ότι το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης εφαρμόσθηκε για έλεγχο σταθερά ισοδύναμο με τον u^0 (ο οποίος ανήκει στο $\mathcal{A}$ από την υπόθεση).

Πόρισμα 1.8.1. Αν το Σ είναι όπως στην Πρόταση 1.8.2, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ και Σ είναι ελέγξιμο, τότε για κάθε $x, z \in \mathcal{X}$ υπάρχει κάποιο $\sigma \leq \tau$ και κάποιος κατά τμήματα σταθερός έλεγχος $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}$ τέτοιος ώστε $\phi(\tau, \sigma, x, \omega) = z$.

Απόδειξη. Παίρνουμε πρώτα ένα οποιοδήποτε $\sigma < \tau$ και εφαρμόζουμε την Πρόταση με $\mathcal{A} =$η οικογένεια όλων των κατά τμήματα σταθερών ελέγχων, για να εξασφαλίσουμε το ανοικτό σύνολο V. Έστω x, z να είναι όπως στην εκφώνηση. Λόγω της παραδοχής της ελεγξιμότητας, υπάρχει κάποιος έλεγχος απεικόνισης x στο x^0. Υπάρχει κάποιος κατά τμήματα σταθερός έλεγχος ω_1 που απεικονίζει το x σε κάποιο στοιχείο x' στο V και ένας ω_2 που απεικονίζει κάποιο z' από το V στο z. Συνδέοντας το ω_1 με ένα κατά τμήματα σταθερό έλεγχο που στέλνει το x' στο z' και ομοίως με το ω_2, το συμπέρασμα έπεται. □

Κεφάλαιο 2

Ελεγξιμότητα Κλασικών Γραμμικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Οι εξισώσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε σε αυτό το δεύτερο μέρος της εργασίας είναι η εξίσωση μεταφοράς και η εξίσωση θερμότητας. Χρησιμοποιώντας μεθόδους (επίλυση με άμεση διαδικασία, μέθοδος επέκτασης, δυϊκότητα ελεγξιμότητας-παρατηρησιμότητας) θα γίνει μελέτη των παραπάνω εξισώσεων. Θα εξετάσουμε την αναγωγή της ελεγξιμότητας σε μιά ανισότητα παρατηρησιμότητας αποδεικνύοντας την ανισότητα αυτή. Ξεκινάμε με την απόδειξη του καλώς τοποθετημένου του προβλήματος Cauchy για αυτές τις εξισώσεις.

2.1 Εξίσωση Μεταφοράς

Έστω $T > 0$ $L > 0$. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα ελέγχου

$$y_t + y_x = 0,\ t \in (0, T),\ x \in (0, L), \tag{2.1}$$

$$y(t, 0) = u(t), \tag{2.2}$$

όπου, σε χρόνο t, ο έλεγχος είναι $u(t) \in \mathbb{R}$ και η κατάσταση είναι $y(t, \cdot) : (0, L) \to \mathbb{R}$. Ο στόχος μας είναι να μελετήσουμε την ελεγξιμότητα του συστήματος ελέγχου (2.1)-(2.2), αλλά ας μελετήσουμε πρώτα το πρόβλημα Cauchy που σχετίζεται με το (2.1)-(2.2).

Το Καλώς Τοποθετημένο του Προβλήματος Cauchy

Ας θυμηθούμε πρώτα το συνήθη ορισμό του προβλήματος Cauchy

$$y_t + y_x = 0,\ t \in (0, T),\ x \in (0, L), \tag{2.3}$$

$$y(t, 0) = u(t),\ t \in (0, T), \tag{2.4}$$

$$y(0, x) = y^0(x),\ x \in (0, L). \tag{2.5}$$

όπου $T > 0$, $y^0 \in L^2(0, L)$ και $u \in L^2(0, T)$ δοσμένα. Για να ενεργοποιήσουμε αυτόν τον ορισμό, ας υποθέσουμε πρώτα ότι υπάρχει μία συνάρτηση y της τάξης $\mathcal{C}^1$ στο $[0, T] \times [0, L]$ που να ικανοποιεί τις (2.3)-(2.4)-(2.5) με τη συνήθη έννοια. Έστω $\tau \in [0,T]$. Έστω $\phi \in \mathcal{C}^1([0,\tau]\times[0,L])$. Πολλαπλασιάζουμε την (2.3) με ϕ και ολοκληρώνουμε την αποκτηθείσα ταυτότητα στο $[0,\tau]\times[0,L]$. Χρησιμοποιώντας τις (2.4),(2.5) και παραγοντική ολοκλήρωση, παίρνουμε ότι

$$-\int_0^\tau\int_0^L(\phi_t+\phi_x)y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_0^\tau y(t,L)\phi(t,L)\,\mathrm{d}t-\int_0^\tau u(t)\phi(t,0)\,\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^L y(\tau,x)\phi(\tau,x)\,\mathrm{d}x-\int_0^L y^0(x)\phi(0,x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Αυτή η ισότητα οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω $T>0$, $y^0\in L^2(0,L)$ και $u\in L^2(0,T)$ δοσμένα. Μία λύση του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5) είναι μια συνάρτηση $y\in\mathcal{C}^0([0,T];L^2(0,L))$ τέτοια ώστε, για κάθε $\tau\in[0,T]$ και για κάθε $\phi\in\mathcal{C}^1([0,\tau]\times[0,L])$ τέτοιο ώστε*

$$\phi(t,L)=0,\ \forall t\in[0,\tau], \tag{2.3 α}$$

έχουμε

$$-\int_0^\tau\int_0^L(\phi_t+\phi_x)y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_0^\tau u(t)\phi(t,0)\,\mathrm{d}t+\int_0^L y(\tau,x)\phi(\tau,x)\,\mathrm{d}x-\int_0^L y^0(x)\phi(0,x)\,\mathrm{d}x=0. \tag{2.3 β}$$

Αυτός ο ορισμός επίσης ερμηνεύεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.1.1. Έστω $T>0$, $y^0\in L^2(0,L)$ και $u\in L^2(0,T)$ δοσμένα. Ας υποθέσουμε ότι το y είναι μία λύση του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5) το οποίο είναι τάξης C^1 στο $[0,T]\times[0,L]$. Τότε

$$y^0\in\mathcal{C}^1([0,L]),$$

$$u\in\mathcal{C}^1([0,T]),$$

$$y(0,x)=y^0(x),\ \forall x\in[0,L],$$

$$y(t,0)=u(t),\ \forall t\in[0,T],$$

$$y_t(t,x)+y_x(t,x)=0,\ \forall(t,x)\in[0,T]\times[0,L].$$

Θεώρημα 7. *Έστω $T>0$, $y^0\in L^2(0,L)$ και $u\in L^2(0,T)$ δοσμένα. Τότε το πρόβλημα Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5) έχει μοναδική λύση. Αυτή η λύση ικανοποιεί την*

$$\|y(\tau,\cdot)\|_{L^2(0,L)}\le\|y^0\|_{L^2(0,L)}+\|u\|_{L^2(0,L)},\ \forall\tau\in[0,T].$$

Ελεγξιμότητα

Ας γυρίσουμε τώρα στην ελεγξιμότητα του συστήματος ελέγχου (2.1)-(2.2). Ξεκινάμε με ένα φυσικό ορισμό της ελεγξιμότητας.

Ορισμός 2.1.2. *Έστω $T > 0$. Το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) είναι ελέγξιμο σε χρόνο T αν, για κάθε $y^0 \in L^2(0, L)$ και κάθε $y^1 \in L^2(0, L)$, υπάρχει $u \in L^2(0, T)$ τέτοια ώστε η λύση y του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5) να ικανοποιεί την $y(T, \cdot) = y^1$.*

Με αυτόν τον ορισμό έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 8. *Το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) είναι ελέγξιμο σε χρόνο T αν και μόνο αν $T \geq L$.*

Παρατήρηση 2.1.1. Ας διευκρινίσουμε ότι το Θεώρημα 8 δείχνει ότι υπάρχει μια συνθήκη του χρόνου T για να έχουμε ελεγξιμότητα. Ένα τέτοιο φαινόμενο δεν εμφανίζεται ποτέ σε γραμμικά συστήματα ελέγχου με πεπερασμένη διάσταση. Ωστόσο, σημειώνουμε ότι ένα τέτοιο φαινόμενο μπορεί να εμφανισθεί σε μη γραμμικά συστήματα ελέγχου με πεπερασμένη διάσταση.

Θα δώσουμε τρεις διαφορετικές αποδείξεις για το Θεώρημα 8:

1. Μία απόδειξη βασισμένη στη λύση y σε λελυμένη μορφή του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5).
2. Μία απόδειξη βασισμένη στη μέθοδο επέκτασης.
3. Μία απόδειξη βασισμένη στη δυϊκότητα ανάμεσα στην ελεγξιμότητα ενός γραμμικού συστήματος ελέγχου και την παρατηρησιμότητα του συζυγούς του.

Λύση σε Λελυμένη Μορφή

Ας ξεκινήσουμε την απόδειξη που είναι βασισμένη στη λύση σε λελυμένη μορφή του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5).Παίρνουμε πρώτα $T \in (0, L)$ και παρατηρούμε ότι το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) δεν είναι ελέγξιμο σε χρόνο T. Ας ορίσουμε y^0 και y^1 με

$$y^0(x) = 1 \text{ και } y^1(x) = 0, \ \forall x \in [0, L].$$

Έστω $u \in L^2(0, T)$. Τότε η λύση y του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5) ικανοποιεί την

$$y(T, x) = 1, \ x \in (T, L).$$

Ιδιαίτερα, $y(T, \cdot) \neq y^1$. Αυτό δείχνει ότι το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) δεν είναι ελέγξιμο σε χρόνο T.

Τώρα υποθέτουμε ότι $T \geq L$ και θα δείξουμε ότι το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) είναι ελέγξιμο σε χρόνο T. Έστω $y^0 \in L^2(0, L)$ και $y^1 \in L^2(0, L)$. Ορίζουμε $u \in L^2(0, T)$ με

$$u(t) = y^1(T - t), \ t \in (T - L, T),$$

$$u(t) = 0, \ t \in (0, T - L),$$

$$y(t,x) := u(t-x),\ \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,L] \text{ τέτοιο ώστε } t > x.$$

Τότε η λύση y του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5) ικανοποιεί την

$$y(T,x) = u(T-x) = y^1(x),\ x \in (0,L).$$

Αυτό δείχνει ότι το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) είναι ελέγξιμο σε χρόνο T.

Μέθοδος Επέκτασης

Ας παρουσιάσουμε πρώτα ένα νέο ορισμό.

Ορισμός 2.1.3. *Έστω $T > 0$. Το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) είναι μηδενικά ελέγξιμο σε χρόνο T αν, για κάθε $y^0 \in L^2(0,L)$ υπάρχει $u \in L^2(0,T)$ τέτοιο ώστε η λύση y του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5) να ικανοποιεί την $y(T,\cdot) = 0$.*

Λήμμα 2.1.1. Το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) είναι ελέγξιμο σε χρόνο T αν και μόνο αν είναι μηδενικά ελέγξιμο σε χρόνο T.

Απόδειξη. Το ''μόνο αν'' κομμάτι είναι προφανές. Για το ''αν'' κομμάτι, υποθέτουμε ότι το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) είναι ελέγξιμο σε χρόνο T. Έστω $y^0 \in L^2(0,L)$ και $y^1 \in L^2(0,L)$. Υποθέτουμε, προσωρινά, ότι υπάρχει ένα $\bar{y}^0 \in L^2(0,L)$ και ένα $\bar{u} \in L^2(0,T)$ τέτοια ώστε η λύση $\bar{y} \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$ του προβλήματος Cauchy

$$\bar{y}_t + \bar{y}_x = 0,\ t \in (0,T),\ x \in (0,L), \tag{2.6}$$

$$\bar{y}(t,0) = \bar{u}(t),\ t \in (0,T), \tag{2.7}$$

$$\bar{y}(0,x) = \bar{y}^0(x),\ x \in (0,L). \tag{2.8}$$

ικανοποιεί την

$$\bar{y}(T,x) := \bar{y}^1(x),\ x \in (0,L). \tag{2.9}$$

Αφού το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) είναι ελέγξιμο σε χρόνο T, υπάρχει $\tilde{u} \in L^2(0,T)$ τέτοιο ώστε η λύση $\tilde{y} \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$ του προβλήματος Cauchy

$$\tilde{y}_t + \tilde{y}_x = 0,\ t \in (0,T),\ x \in (0,L), \tag{2.10}$$

$$\tilde{y}(t,0) = \tilde{u}(t),\ t \in (0,T), \tag{2.11}$$

$$\tilde{y}(0,x) = y^0(x) - \bar{y}^0(x),\ x \in (0,L). \tag{2.12}$$

ικανοποιεί την

$$\tilde{y}(T,x) := 0,\ x \in (0,L). \tag{2.13}$$

Ορίζουμε $u \in L^2(0,T)$ με

$$u := \bar{u} + \tilde{u}. \tag{2.14}$$

Από τις (2.6)-(2.8) και τις (2.10)-(2.12), η λύση $y \in C^0([0,T];L^2(0,L))$ του προβλήματος Cauchy

$$y_t + y_x = 0,\ t \in (0,T),\ x \in (0,L),$$
$$y(t,0) = u(t),\ t \in (0,T),$$
$$y(0,x) = y^0(x),\ x \in (0,L),$$

είναι $y = \bar{y} + \tilde{y}$. Από τις (2.9) και (2.13), $y(T,\cdot) = y^1$. Επομένως, όπως επιθυμούσαμε, ο έλεγχος u διευθύνει το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) από την κατάσταση y^0 στην κατάσταση y^1 κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[0,T]$. Μας μένει να αποδείξουμε την ύπαρξη του $\bar{y}^0 \in L^2(0,L)$ και του $\bar{u} \in L^2(0,T)$. Έστω $z \in C^0([0,T];L^2(0,L))$ η λύση του προβλήματος Cauchy

$$z_t + z_x = 0,\ t \in (0,T),\ x \in (0,L), \tag{2.15}$$
$$z(t,0) = 0,\ t \in (0,T), \tag{2.16}$$
$$z(0,x) = y^1(L-x),\ x \in (0,L). \tag{2.17}$$

Σημειώνουμε ότι από την (2.15) παίρνουμε ότι $z \in H^1((0,L);H^{-1}(0,T))$. Ιδιαίτερα, η $z(\cdot,L)$ είναι καλά ορισμένη και

$$z(\cdot,L) \in H^{-1}(0,T). \tag{2.18}$$

Στην πραγματικότητα η $z(\cdot,L)$ είναι πιο ομαλή από την (2.18): δηλαδή έχουμε

$$z(\cdot,L) \in L^2(0,T). \tag{2.19}$$

Την ιδιότητα (2.19) μπορούμε να τη δούμε με τις δύο ακόλουθες μεθόδους.

- Για την πρώτη, χρησιμοποιούμε τη λελυμένη έκφραση του z.
- Για τη δεύτερη, ξεκινούμε με την περίπτωση όπου το $y^1 \in H^1(0,L)$ ικανοποιεί την $y^1(L) = 0$. Τότε $z \in C^1([0,T];L^2(0,L)) \cap C^0([0,T];H^1(0,L))$. Πολλαπλασιάζουμε την (2.15) με z και ολοκληρώνουμε στο $[0,T]\times[0,L]$. Χρησιμοποιώντας τις (2.16) και (2.17), παίρνουμε

  $$\int_0^L z(T,x)^2\,\mathrm{d}x - \int_0^L y^1(x)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T z(t,L)^2\,\mathrm{d}t = 0.$$

  Ιδιαίτερα,

  $$\|z(\cdot,L)\|_{L^2(0,T)} \leq \|y^1\|_{L^2(0,L)}. \tag{2.20}$$

  Η (2.20) ισχύει, λόγω πυκνότητας, αν y^1 ανήκει μόνο στο $L^2(0,L)$, το οποίο συμπληρώνει τη δεύτερη απόδειξη του (2.19).

Ορίζουμε $\bar{y}^0 \in L^2(0,L)$ και $\bar{u} \in L^2(0,T)$ με

$$\bar{y}^0(x) = z(T,L-x),\ x \in (0,L)$$

$$\bar{u}(t) = z(T-t,L),\ t \in (0,T).$$

Τότε εύκολα παρατηρούμε ότι η λύση $\bar{y}$ του προβλήματος Cauchy (2.6)-(2.7)-(2.8) είναι η

$$\bar{y}(t,x) = z(T-t, L-x),\ t \in (0,T),\ x \in (0,L). \tag{2.21}$$

Από τις (2.17) και (2.21), παίρνουμε την (2.9). Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του Λήμματος 1.9.1. □

Παρατήρηση 2.1.2. Το γεγονός ότι το $z(\cdot, L) \in L^2(0,T)$ καλείται μερικές φορές μια κρυμμένη ιδιότητα ομαλότητας, δεν έπεται ακριβώς από την ομαλότητα που απαιτείται στο z, π.χ.,$z \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$.

Ας εισάγουμε τώρα τον ορισμό της λύσης του προβλήματος Cauchy

$$y_t + y_x = 0,\ (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R},\ y(0,x) = y^0(x), \tag{2.22}$$

όπου y^0 δοσμένο στο $L^2(\mathbb{R})$.

Ορισμός 2.1.4. *Έστω $y^0 \in L^2(\mathbb{R})$. Μία λύση του προβλήματος Cauchy (2.22) είναι η συνάρτηση $y \in C^0([0,+\infty); L^2(\mathbb{R}))$ τέτοια ώστε, για κάθε $\tau \in [0,+\infty)$, $R > 0$ και $\phi \in C^1([0,\tau] \times \mathbb{R})$ τέτοια ώστε*

$$\phi(t,x) = 0,\ \forall t \in [0,\tau],\ \forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq R,$$

έχουμε

$$-\int_0^\tau \int_{-R}^R (\phi_t + \phi_x) y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{-R}^R y(\tau,x)\phi(\tau,x)\,\mathrm{d}x - \int_{-R}^R y^0(x)\phi(0,x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Πρόταση 2.1.2. Για κάθε $y^0 \in L^2(\mathbb{R})$, το πρόβλημα Cauchy (2.22) έχει μοναδική λύση. Η λύση y ικανοποιεί την:

$$\|y(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|y^0\|_{L^2(\mathbb{R})},\ \forall \tau \in [0,+\infty).$$

Στην πραγματικότητα, όπως στην περίπτωση του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5), μπορούμε να δώσουμε το y σε λελυμένη μορφή:

$$y(t,x) = y^0(x-t),\ t \in (0,+\infty),\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Τότε η μέθοδος επέκτασης έπεται ως εξής. Έστω $y^0 \in L^2(0,L)$. Έστω $R \geq 0$. Έστω $\bar{y}^0 \in L^2(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε

$$\bar{y}^0(x) = y^0(x),\ x \in (0,L), \tag{2.24}$$

$$\bar{y}^0(x) = 0,\ x \in (-\infty,-R). \tag{2.25}$$

Έστω $\bar{y} \in C^0([0,+\infty); L^2(\mathbb{R}))$ η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\bar{y}_t + \bar{y}_x = 0,\ t \in (0,+\infty),\ x \in \mathbb{R},$$

$$\bar{y}(0,x) = \bar{y}^0(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Χρησιμοποιώντας την (2.25) και τη λελυμένη μορφή (2.23) του προβλήματος Cauchy (2.22), βλέπουμε ότι

$$\bar{y}(t,x) = 0 \text{ αν } x < t - R. \tag{2.26}$$

Υιοθετώντας τις αποδείξεις του (2.19), παίρνουμε ότι

$$\bar{y}(\cdot, 0) \in L^2(0, +\infty).$$

Έστω $T \geq L$. Τότε εύκολα παρατηρούμε ότι η λύση $y \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$ του προβλήματος Cauchy

$$\begin{aligned} y_t + y_x &= 0,\ t \in (0,T),\ x \in (0,L), \\ y(t,0) &= \bar{y}(t,0),\ t \in (0,T), \\ y(0,x) &= y^0(x),\ x \in (0,L), \end{aligned}$$

δίνεται από την

$$y(t,x) = \bar{y}(t,x),\ t \in (0,T),\ x \in (0,L). \tag{2.27}$$

Από την (2.26), παίρνουμε $y(T,\cdot) = 0$ αν $R \leq T - L$. Επομένως ο έλεγχος $t \in (0,T) \mapsto \bar{y}(t,0)$ διευθύνει το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) από την κατάσταση y^0 στο 0 κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[0,T]$.

Φυσικά, για το απλό μας σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2), η μέθοδος επέκτασης δε φαίνεται ούτε ενδιαφέρουσα, ούτε πολύ διαφορετική από τη μέθοδο σε λελυμένη μορφή (παίρνοντας $R = 0$ οδηγούμαστε στον ίδιο έλεγχο). Ωστοσό, η μέθοδος της επέκτασης έχει κάποια ενδιαφέροντα πλεονεκτήματα σε σχέση με τη μέθοδο σε λελυμένη μορφή για πιο πολύπλοκες υπερβολικές συναρτήσεις, όπου η μέθοδος σε λελυμένη μορφή δεν μπορεί εύκολα να εφαρμοσθεί.

Ας επισημάνουμε επίσης ότι η μέθοδος της επέκτασης είναι ισοδύναμα χρήσιμη για το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) αν ενδιαφερόμαστε για πιο ομαλή λύση. Πράγματι, έστω $m \in \mathbb{N}$, υποθέτουμε ότι $y^0 \in H^m(0,L)$ και ότι θέλουμε να διευθύνουμε το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) από το y^0 στο 0 σε χρόνο $T > L$ με τέτοιο τρόπο ώστε η κατάσταση πάντα να παραμένει στο $H^m(0,L)$. Τότε αρκεί να πάρουμε $R := T - L$ και να επιβάλλουμε στο $\bar{y}^0$ να ανήκει στο $H^m(\mathbb{R})$. Σημειώνουμε ότι αν $m \geq 1$, παίρνουμε $T = L$.

Παρατήρηση 2.1.3. Να τονίσουμε ότι υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ της ομαλότητας της κατάστασης και της ομαλότητας του ελέγχου: Για $r \geq 0$, αν η κατάσταση είναι στο $H^r(0,L)$, μπορούμε να έχουμε ελεγξιμότητα με έλεγχο $u \in H^s(0,T)$ για

$$s > r. \tag{2.28}$$

Επιπλέον, η (2.28) είναι βέλτιστη: Για κάθε $T > L$, για κάθε $y^0 \in H^r(0,L)$ και για κάθε $y^1 \in H^r(0,L)$, υπάρχει $u \in H^r(0,T)$ τέτοιο ώστε η λύση y του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5) να ικανοποιεί τη $y(T,\cdot) = y^1$ και $y \in C^0([0,T]; H^r(0,L))$. Φυσικά αυτό το πρόβλημα της σχέσης μεταξύ της ομαλότητας της κατάστασης και της ομαλότητας του ελέγχου συχνά εμφανίζεται για μερικές διαφορικές εξισώσεις. Η βέλτιστη σχέση συχνά είναι ανοικτό πρόβλημα.

Δυϊκότητα ανάμεσα στην Ελέγξιμότητα και την Παρατηρησιμότητα

Έστω $T > 0$. Ορίζουμε μία γραμμική απεικόνιση $\mathcal{F}_T : L^2(0,T) \to L^2(0,L)$ με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω $u \in L^2(0,T)$. Έστω $y \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$ η λύση του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5) με $y^0 := 0$. Τότε

$$\mathcal{F}_T(u) := y(T,\cdot).$$

Λήμμα 2.1.2. Το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) είναι ελέγξιμο σε χρόνο T αν και μόνο αν η $\mathcal{F}_T$ είναι επί.

Απόδειξη. Το ‘‘μόνο αν’’ κομμάτι είναι προφανές. Ας υποθέσουμε ότι η $\mathcal{F}_T$ είναι επί, θα αποδείξουμε ότι το σύστημα ελέγχου (2.1)-(2.2) είναι ελέγξιμο σε χρόνο T. Έστω $y^0 \in L^2(0,L)$ και $y^1 \in L^2(0,L)$. Έστω $\tilde{y}$ η λύση του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5) με $u := 0$. Αφού το $\mathcal{F}_T$ είναι επί, υπάρχει $u \in L^2(0,T)$ τέτοιο ώστε $\mathcal{F}_T(u) = y^1 - \tilde{y}(T,\cdot)$. Τότε η λύση y του προβλήματος Cauchy (2.3)-(2.4)-(2.5) ικανοποιεί τη $y(T,\cdot) = \tilde{y}(T,\cdot) + y^1 - \tilde{y}(T,\cdot) = y^1$. □

Για να αποφασίσουμε αν η $\mathcal{F}_T$ είναι επί ή όχι, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κλασικό αποτέλεσμα της συναρτησιακής ανάλυσης.

Πρόταση 2.1.3. Έστω H_1 και H_2 δύο χώροι Hilbert. Έστω $\mathcal{F}$ μία γραμμική συνεχής απεικόνιση από το H_1 στο H_2. Τότε η $\mathcal{F}$ είναι επί αν και μόνο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathcal{F}^*(x_2)\|_{H_1} \geq c\|x_2\|_{H_2},\ \forall x_2 \in H_2. \tag{2.29}$$

όπου $\mathcal{F}^* : H_2 \to H_1$ είναι συζυγής της $\mathcal{F}$. Επιπλέον, αν ισχύει η (2.29) για κάποιο $c > 0$, υπάρχει μία γραμμική συνεχής απεικόνιση $\mathcal{G}$ από το H_2 στο H_1 τέτοια ώστε

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(x_2) = x_2,\ \forall x_2 \in H_2,$$

$$\|\mathcal{G}(x_2)\|_{H_1} \leq \frac{1}{c}\|x_2\|_{H_2},\ \forall x_2 \in H_2.$$

Στη θεωρία ελέγχου, η ανισότητα (2.29) λέγεται ‘‘ανισότητα της παρατηρησιμότητας’’ . Για να εφαρμόσουμε αυτήν την Πρόταση, ορίζουμε σε λελυμένη μορφή την $\mathcal{F}_T^*$ στο ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.1.3. Έστω $z^T \in H^1(0,L)$ η (μοναδική) λύση του

$$z^T(L) = 0. \tag{2.30}$$

όπου $z \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L))$

$$z_t + z_x = 0, \tag{2.31}$$

$$z(t,L) = 0,\ \forall t \in [0,T], \tag{2.32}$$

$$z(T,\cdot) = z^T. \tag{2.33}$$

Τότε

$$\mathcal{F}_T^*(z^T) = z(\cdot,0). \tag{2.34}$$

Απόδειξη. Αν $\tilde{z} \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L))$ είναι η λύση του

$$\tilde{z}(t,0) = 0, \ \forall t \in [0,T],$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}t} = A\tilde{z},$$

$$\tilde{z}(0,x) = z^T(L-x), \ \forall x \in [0,L],$$

τότε

$$z(t,x) = \tilde{z}(T-t, L-x), \ \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,L].$$

Έστω $u \in C^2([0,T])$ να είναι τέτοιο ώστε $u(0) = 0$. Έστω

$$y \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L))$$

τέτοιο ώστε

$$y_t + y_x = 0, \tag{2.35}$$

$$y(t,0) = u(t), \ \forall t \in [0,T], \tag{2.36}$$

$$y(0,\cdot) = 0. \tag{2.37}$$

Τότε, από τις (2.31), (2.32), (2.33), (2.35), (2.36) και (2.37), παίρνουμε, χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση κατά μέρη, ότι

$$\begin{aligned} \int_0^L z^T \mathcal{F}_T(u)\,\mathrm{d}x &= \int_0^L z^T y(T,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^T \int_0^L (zy)_t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^T \int_0^L (z_x y + z y_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T z(t,0)u(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

το οποίο, αφού το σύνολο του $u \in C^2([0,T])$ έτσι ώστε $u(0) = 0$ είναι πυκνό στο $L^2(0,T)$, καταλήγει στην απόδειξη του Λήμματος. □

Από το Λήμμα 9, έπεται ότι η ανισότητα (12) είναι ισοδύναμη με την

$$\int_0^T z(t,0)^2\,\mathrm{d}t \geq c^2 \int_0^L z^T(x)^2\,\mathrm{d}x, \tag{2.38}$$

για κάθε $z^T \in H^1(0,L)$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (2.30), με z να είναι η (μοναδική) λύση του (2.31)-(2.32)-(2.33) στο $C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L))$.

Ας παρουσιάσουμε τώρα δύο μεθόδους για να αποδείξουμε την (2.38). Η πρώτη βασίζεται στη λύση (2.31)-(2.32)-(2.33) σε λελυμένη μορφή, η δεύτερη στη λεγόμενη μέθοδο του πολλαπλασιαστή.

Με τη Λύση σε Λελυμένη Μορφή

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $T \geq L$. Παρατηρούμε ότι η λύση του (2.31)-(2.32)-(2.33) δίνεται από τη

$$z(t,x) = z^T(x+T-t) \text{ αν } 0 < x < L+t-T,$$
$$z(t,x) = 0, \text{ αν } L+t-T < x < L.$$

Ιδιαίτερα, αφού $T \geq L$,

$$\int_0^T z(t,0)^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^L z^T(x)^2 \, \mathrm{d}x,$$

δείχνει ότι ισχύει η (2.38) με $c = 1$. □

Με τη Μέθοδο του Πολλαπλασιαστή

Απόδειξη. Υποθέτουμε τώρα ότι $T > L$. Θα αποδείξουμε ότι η ανισότητα της παρατηρισιμότητας (2.38) πράγματι ισχύει για

$$c := \sqrt{\frac{T-L}{T}}. \tag{2.39}$$

Έστω $z^T \in H^1(0,L)$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (2.30). Έστω

$$z \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L))$$

η (μοναδική) λύση του (2.31) εώς (2.33). Πολλαπλασιάζουμε την (2.31) με z και ολοκληρώνουμε την αποκτηθείσα ισότητα στο $[0,L]$. χρησιμοποιώντας την (2.32), παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^L |z(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x\right) = |z(t,0)|^2. \tag{2.40}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την (2.31) με xz και ολοκληρώνουμε την αποκτηθείσα ισότητα στο $[0,L]$. Χρησιμοποιώντας την (2.32), παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^L x|z(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x\right) = \int_0^L |z(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{2.41}$$

Για $t \in [0,T]$, έστω $e(t) := \int_0^L |z(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x$. Από την (2.41), έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^T e(t) \, \mathrm{d}t &= \int_0^L x|z(T,x)|^2 \, \mathrm{d}x - \int_0^L x|z(0,x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\leq L\int_0^L z(T,x)|^2 \, \mathrm{d}x = Le(T).\end{aligned} \tag{2.42}$$

Από την (2.40), παίρνουμε

$$e(t) = e(T) - \int_t^T |z(\tau,0)|^2 \, \mathrm{d}\tau \geq e(T) - \int_0^T |z(\tau,0)|^2 \, \mathrm{d}\tau. \tag{2.43}$$

Από τις (2.33), (2.42) και (2.43), παίρνουμε την

$$(T-L)\|z^T\|^2_{L^2(0,L)} \leq T\int_0^T |z(\tau,0)|^2\,\mathrm{d}\tau, \tag{2.44}$$

η οποία, μαζί με το Λήμμα 2.1.3 και την πυκνότητα στο $L^2(0,L)$ των συναρτήσεων $z^T \in H^1(0,L)$ τέτοιων ώστε να ισχύει η (2.30), αποδεικνύει την ανισότητα της παρατηρισιμότητας (2.38) με c δοσμένο από την (2.39). □

Παρατήρηση 2.1.4. Αφού

$$\sqrt{\frac{T-L}{T}} < 1,\ \forall T \geq L > 0,$$

η μέθοδος του πολλαπλασιαστή δίνει μία πιο ασθενή ανισότητα της παρατηρισιμότητας (2.38) από τη μέθοδο που βασίζεται σε λύσεις λελυμένης μορφής, η οποία δίνει τη βέλτιστη ανισότητα. (Σημειώνουμε επίσης ότι η μέθοδος του πολλαπλασιαστή, σε αντίθεση με τη μέθοδο που βασίζεται σε λύσεις λελυμένης μορφής, δε μας αφήνει να αποδείξουμε την ελεγξιμότητα στην οριακή περίπτωση που $T=L$.) Ωστόσο, η μέθοδος του πολλαπλασιαστή είναι αρκετά ευέλικτη και δίνει ενδιαφέροντα αποτελέσματα όσο αφορά την ελεγξιμότητα για πολλά μερικά διαφορικά γραμμικά συστήματα ελέγχου.

2.2 Αφηρημένα Γραμμικά Συστήματα Ελέγχου

Για δύο γραμμικούς χώρους με νόρμα H_1 και H_2, συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(H_1;H_2)$ το σύνολο των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων από το H_1 στο H_2 και συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H_1;H_2)}$ τη συνήθη νόρμα σε αυτό το χώρο.

Έστω H και U δύο χώροι Hilbert . Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς, αυτοί οι χώροι Hilbert υποθέτουμε ότι είναι πραγματικοί χώροι Hilbert . Ο χώρος H είναι ο χώρος κατάστασης και ο χώρος U είναι ο χώρος ελέγχου. Συμβολίζουμε με $(\cdot,\cdot)_H$ το εσωτερικό γινόμενο στο H, με $(\cdot,\cdot)_U$ το εσωτερικό γινόμενο στο U, με $\|\cdot\|_H$ τη νόρμα στο H και με $\|\cdot\|_U$ τη νόρμα στο U.

Έστω $S(t),\ t\in[0,+\infty)$, να είναι μία ισχυρά συνεχής ημιομάδα συνεχών γραμμικών τελεστών στο H. Έστω A ο απειροστός γεννήτορας της ημιομάδας $S(t),\ t\in[0,+\infty)$. Ως συνήθως, συμβολίζουμε με $S(t)^*$ το συζυγή του $S(t)$. Τότε ο $S(t)^*,\ t\in[0,+\infty)$, είναι μία ισχυρά συνεχής ημιομάδα συνεχών γραμμικών τελεστών και ο απειροστός γεννήτορας αυτής της ημιομάδας είναι ο συζυγής A^* του A. Το $D(A^*)$ είναι εφοδιασμένο με τη συνήθη νόρμα γραφήματος $\|\cdot\|_{D(A^*)}$ του μη φραγμένου τελεστή A^* :

$$\|z\|_{D(A^*)} := \|z\|_H + \|A^*z\|_H,\ \forall z\in D(A^*).$$

Αυτή η νόρμα έχει σχέση με το εσωτερικό γινόμενο στο $D(A^*)$ που συμβολίζεται ως εξής:

$$(z_1,z_2)D(A^*) := (z_1,z_2)_H + (A^*z_1,A^*z_2)_H,\ \forall (z_1,z_2)\in D(A^*)^2.$$

Με αυτό το εσωτερικό γινόμενο, ο $D(A^*)$ είναι ένας χώρος Hilbert . Ιδιαίτερα,

$$D(A^*) \subset H \subset D(A^*)'.$$

Έστω

$$B \in \mathcal{L}(U, D(A^*)').$$

Με άλλα λόγια , το B είναι μια γραμμική απεικόνιση από το U στο σύνολο των γραμμικών συναρτήσεων από το $D(A^*)$ στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε, για κάποιο $C > 0$,

$$|(Bu)z| \leq C\|u\|_U \|z\|_{D(A^*)},\ \forall u \in U,\ \forall z \in D(A^*).$$

Επίσης υποθέτουμε την ακόλουθη ιδιότητα ομαλότητας (καλείται επίσης και αποδεκτή συνθήκη):

$$\forall T > 0,\ \exists C_T > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \int_0^T \|B^* S(t)^* z\|_U^2 \,\mathrm{d}t \leq C_T \|z\|_H^2,\ \forall z \in D(A^*). \qquad (2.45\ \alpha)$$

Στην (2.45 α) και στα ακόλουθα, $B^* \in \mathcal{L}(D(A^*); U)$ είναι ο συζυγής του B. Έπεται από την (2.45 α) ότι οι τελεστές

$$(z \in D(A^*)) \mapsto ((t \mapsto B^* S(t)^* z) \in C^0([0,T]; U)),$$

$$(z \in D(A^*)) \mapsto ((t \mapsto B^* S(T-t)^* z) \in C^0([0,T]; U))$$

μπορούν να επεκταθούν με μοναδικό τρόπο ως συνεχείς γραμμικές απεικονίσεις από το H στο $L^2((0,T); U)$. Χρησιμοποιούμε τα ίδια σύμβολα για να συμβολίσουμε αυτές τις επεκτάσεις.

Σημειώνουμε ότι, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $S(t)^*,\ t \in [0, +\infty)$, είναι μία ισχυρά συνεχής ημιομάδα συνεχών γραμμικών τελεστών στο H, δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσουμε ότι η (2.45 α) είναι ισοδύναμη με την

$$\exists T > 0,\ \exists C_T > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \int_0^T \|B^* S(t)^* z\|_U^2 \,\mathrm{d}t \leq C_T \|z\|_H^2,\ \forall z \in D(A^*).$$

Το σύστημα ελέγχου που θεωρούμε εδώ είναι το

$$\dot{y} = Ay + Bu,\ t \in (0,T), \qquad (2.45)$$

όπου σε χρόνο t, ο έλεγχος είναι $u(t) \in U$ και η κατάσταση είναι $y(t) \in H$.

Το Καλώς Τοποθετημένο του Προβλήματος Cauchy

Έστω $T > 0,\ y^0 \in H$ και $u \in L^2((0,T); U)$. Ενδιαφερόμαστε για το πρόβλημα Cauchy

$$\dot{y} = Ay + Bu(t),\ t \in (0,T), \qquad (2.46)$$

$$y(0) = y^0. \qquad (2.47)$$

Θα δώσουμε πρώτα τον ορισμό μιας λύσης του (2.46)-(2.47).

Έστω $\tau \in [0,T]$ και $\varphi : [0,\tau] \to H$. Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο στο H της (2.46) με φ και ολοκληρώνουμε στο $[0,\tau]$. Τουλάχιστον φορμαλιστικά, παίρνουμε, χρησιμοποιώντας μία ολοκλήρωση κατά μέρη μαζί με την (2.47),

$$(y(\tau),\varphi(\tau))_H - (y^0,\varphi(0))_H - \int_0^\tau (y(t),\dot{\varphi}(t) + A^*\varphi(t))_H \,\mathrm{d}t = \int_0^\tau (u(t), B^*\varphi(t))_U \,\mathrm{d}t.$$

Παίρνοντας $\varphi(t) = S(\tau - t)^* z^\tau$, για κάθε δοσμένο $z^\tau \in H$, έχουμε φορμαλιστικά $\dot{\varphi}(t) + A^*\varphi(t) = 0$, το οποίο οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω $T > 0$, $y^0 \in H$ και $u \in L^2((0,T);U)$. Μία λύση του προβλήματος Cauchy (2.46)-(2.47) είναι η συνάρτηση $y \in C^0([0,T];H)$ τέτοια ώστε*

$$(y(\tau),z^\tau)_H - (y^0, S(\tau)^* z^\tau)_H = \int_0^\tau (u(t), B^* S(\tau - t)^* z^\tau)_U \,\mathrm{d}t,\ \forall \tau \in [0,T],\ \forall z^\tau \in H. \quad (2.48)$$

Σημειώνουμε ότι, λόγω της (2.45 α), το δεξί μέρος της (2.48) είναι καλώς ορισμένο.

Θεώρημα 9. *Έστω $T > 0$. Τότε, για κάθε $y^0 \in H$ και κάθε $u \in L^2((0,T);U)$, το πρόβλημα του Cauchy (2.46)-(2.47) έχει μία μοναδική λύση y. Επιπλέον, υπάρχει $C = C(T) > 0$, ανεξάρτητο απ'το $y^0 \in H$ και $u \in L^2((0,T);U)$, τέτοιο ώστε*

$$\|y(t)\|_H \le C(\|y^0\|_H + \|u\|_{L^2((0,T);U)}),\ \forall \tau \in [0,T]. \quad (2.49)$$

Ανισότητα Ελεγξιμότητας και Παρατηρισιμότητας

Σε αυτήν την ενότητα ενδιαφερόμαστε για την ελεγξιμότητα του συστήματος ελέγχου (2.45). Σε αντίθεση με την περίπτωση των γραμμικών πεπερασμένης διάστασης συστημάτων ελέγχου, πολλά είδη ελεγξιμότητας είναι πιθανά και έχουν ενδιαφέρον.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω $T > 0$. Το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι πλήρως ελέγξιμο σε χρόνο T αν, για κάθε $y^0 \in H$ και κάθε $y^1 \in H$, υπάρχει $u \in L^2((0,T);U)$ τέτοιο ώστε η λύση y του προβλήματος Cauchy*

$$\dot{y} = Ay + Bu(t),\ y(0) = y^0, \quad (2.50)$$

να ικανοποιεί την $y(T) = y^1$.

Ορισμός 2.2.3. *Έστω $T > 0$. Το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι μηδενικά ελέγξιμο σε χρόνο T αν, για κάθε $y^0 \in H$ και κάθε $\tilde{y}^0 \in H$, υπάρχει $u \in L^2((0,T);U)$ τέτοιο ώστε η λύση του προβλήματος Cauchy (2.50) να ικανοποιεί την $y(T) = S(T)\tilde{y}^0$.*

Ας επισημάνουμε ότι, λόγω γραμμικότητας, παίρνουμε έναν ισοδύναμο ορισμό του ''μηδενικά ελέγξιμου σε χρόνο T'' αν, στον Ορισμό 2.2.3, υποθέσουμε ότι $\tilde{y}^0 = 0$. Αυτό εξηγεί τη συχνή ορολογία ''μηδενική ελεγξιμότητα''.

Ορισμός 2.2.4. *Έστω $T > 0$. Το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι προσεγγιστικά ελέγξιμο σε χρόνο T αν, για κάθε $y^0 \in H$, κάθε $y^1 \in H$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $u \in L^2((0,T);U)$ τέτοιο ώστε η λύση y του προβλήματος Cauchy (2.50) να ικανοποιεί την $\|y(T) - y^1\|_H \leq \varepsilon$.*

Προφανώς

(πλήρης ελεγξιμότητα) $\Rightarrow$ (μηδενική ελεγξιμότητα και προσεγγιστική ελεγξιμότητα).

Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει (π.χ. το σύστημα ελέγχου (2.115)-(2.116) παρακάτω). Ωστόσο, η αντιστροφή ισχύει αν S είναι μία ισχυρά συνεχής ομάδα γραμμικών τελεστών. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 10. *Υποθέτουμε ότι $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, είναι μία ισχυρά συνεχής ομάδα γραμμικών τελεστών. Έστω $T > 0$. Υποθέτουμε ότι το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι μηδενικά ελέγξιμο σε χρόνο T. Τότε το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι πλήρως ελέγξιμο σε χρόνο T.*

Απόδειξη. Έστω $y^0 \in H$ και $y^1 \in H$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση της μηδενικής ελεγξιμότητας στα αρχικά δεδομένα $y^0 - S(-T)y^1$, υπάρχει $u \in L^2((0,T);U)$ τέτοιο ώστε η λύση $\tilde{y}$ του προβλήματος Cauchy

$$\dot{\tilde{y}} = A\tilde{y} + Bu(t),\ \tilde{y}(0) = y^0 - S(-T)y^1,$$

να ικανοποιεί την

$$\tilde{y}(T) = 0. \tag{2.51}$$

Παρατηρούμε ότι η λύση y του προβλήματος Cauchy

$$\dot{y} = Ay + Bu(t),\ y(0) = y^0,$$

δίνεται από την

$$y(t) = \tilde{y}(t) + S(t-T)y^1,\ \forall t \in [0,T]. \tag{2.52}$$

Ιδιαίτερα, από τις (2.51) και (2.52),

$$y(T) = y^1.$$

□

Ας εισάγουμε τώρα κάποιες ‘‘βέλτιστες απεικονίσεις ελέγχου’’. Ας ασχοληθούμε πρώτα με την περίπτωση που το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι πλήρως ελέγξιμο σε χρόνο T. Τότε, για κάθε y^1, το σύνολο $U^T(y^1)$ του $u \in L^2((0,T);U)$ τέτοιο ώστε

$$(\dot{y} = Ay + Bu(t),\ y(0) = 0) \Rightarrow (y(T) = y^1)$$

είναι μη κενό. Σαφώς το σύνολο $U^T(y^1)$ είναι ένας κλειστός συσχετισμένος υπόχωρος του $L^2((0,T);U)$. Ορίζουμε από το $\mathcal{U}^T(y^1)$ την προβολή του 0 πάνω στον κλειστό συσχετισμένο υπόχωρο, π.χ. το στοιχείο του $U^T(y^1)$ της μικρότερης $L^2((0,T);U)$-νόρμας. Τότε δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{U}^T : H \ \to \ L^2((0,T);U)$$

$$y^1 \mapsto \mathcal{U}^T(y^1)$$

είναι μια γραμμική απεικόνιση. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα κλειστού γραφήματος παρατηρούμε ότι αυτή η γραμμική απεικόνιση είναι συνεχής.

Ας ασχοληθούμε τώρα με την περίπτωση που το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι μηδενικά ελέγξιμο σε χρόνο T. Τότε, για κάθε y^0, το σύνολο $U_T(y^0)$ του $u \in L^2((0,T);U)$ τέτοιο ώστε

$$(\dot{y} = Ay + Bu(t),\ y(0) = y^0) \Rightarrow (y(T) = 0)$$

είναι μη κενό. Σαφώς το σύνολο $U_T(y^0)$ είναι ένας κλειστός συσχετισμένος υπόχωρος του $L^2((0,T);U)$. Ορίζουμε από το $\mathcal{U}_T(y^0)$ την προβολή του 0 πάνω στον κλειστό συσχετισμένο υπόχωρο, δηλαδή το στοιχείο του $L^2((0,T);U)$-νόρμας. Τότε, πάλι, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_T : H &\to L^2((0,T);U) \\ y^0 &\mapsto \mathcal{U}_T(y^0) \end{aligned}$$

είναι μια συνεχής γραμμική απεικόνιση.

Τα κύρια αποτελέσματα αυτής της ενότητας είναι τα ακόλουθα.

Θεώρημα 11. *Έστω $T > 0$. Το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι πλήρως ελέγξιμο σε χρόνο T αν και μόνο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\int_0^T \|B^*S(t)^*z\|_U^2 \,\mathrm{d}t \geq c\|z\|_H^2,\ \forall z \in D(A^*). \tag{2.53}$$

Επιπλέον, αν ένα τέτοιο $c > 0$ υπάρχει και αν c^T είναι το μέγιστο των συνόλων του $c > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (2.53), έχουμε

$$\|\mathcal{U}^T\|_{\mathcal{L}(H;L^2((0,T);U))} = \frac{1}{\sqrt{c^T}}. \tag{2.54}$$

Θεώρημα 12. *Το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι προσεγγιστικά ελέγξιμο σε χρόνο T αν και μόνο αν, για κάθε $z \in H$,*

$$(B^*S(\cdot)^*z = 0 \text{ στο } L^2((0,T);U)) \Rightarrow (z = 0).$$

Θεώρημα 13. *Έστω $T > 0$. Το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι μηδενικά ελέγξιμο σε χρόνο T αν και μόνο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\int_0^T \|B^*S(t)^*z\|_U^2 \,\mathrm{d}t \geq c\|S(T)^*z\|_H^2,\ \forall z \in D(A^*). \tag{2.55}$$

Επιπλέον , αν ένα τέτοιο $c > 0$ υπάρχει και αν c^T είναι το μέγιστο των συνόλων του $c > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (2.55), τότε

$$\|\mathcal{U}^T\|_{\mathcal{L}(H;L^2((0,T);U))} = \frac{1}{\sqrt{c^T}}. \tag{2.56}$$

Θεώρημα 14. *Υποθέτουμε ότι, για κάθε $T > 0$, το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι μηδενικά ελέγξιμο σε χρόνο T. Τότε, για κάθε $T > 0$, το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι προσεγγιστικά ελέγξιμο σε χρόνο T.*

Οι ανισότητες (2.53) και (2.55) ονομάζονται συνήθως ανισότητες παρατηρισιμότητας για το αφηρημένο γραμμικό σύστημα ελέγχου $\dot{y} = Ay + Bu$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 11 και του Θεωρήματος 12

Έστω $T > 0$. Ορίζουμε μια γραμμική απεικόνιση $\mathcal{F}_T : L^2((0,T); U \to H)$ με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω $u \in L^2((0,T); U)$. Έστω $y \in C^0([0,T]; H)$ η λύση του προβλήματος Cauchy (2.50) με $y^0 := 0$. Τότε

$$\mathcal{F}_T(u) := y(T, \cdot).$$

Έχουμε το ακόλουθο Λήμμα, η απόδειξη του οποίου είναι παρόμοια με την απόδειξη του Λήμματος 2.1.2.

Λήμμα 2.2.1. Το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι πλήρως ελέγξιμο σε χρόνο T αν και μόνο αν η $\mathcal{F}_T$ είναι επί. Το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι προσεγγιστικά ελέγξιμο σε χρόνο T αν και μόνο αν $\mathcal{F}_T(L^2((0,T); U))$ είναι πυκνό στο H.

Είναι ένα κλασικό αποτέλεσμα της συναρτησιακής ανάλυσης ότι $\mathcal{F}_T(L^2((0,T); U))$ είναι πυκνό στο H αν και μόνο αν $\mathcal{F}_T^*$ είναι ένα προς ένα. Ας θυμηθούμε από την άλλη, από την Πρόταση 2.1.3, ότι $\mathcal{F}_T$ είναι επί αν και μόνο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathcal{F}_T^*(z^T)\|_{L^2((0,T);U)} \geq c\|z^T\|_H, \ \forall z^T \in H.$$

Επομένως, το πρώτο μέρος του Θεωρήματος 11 όπως και του Θεωρήματος 12 είναι μια συνέπεια του παρακάτω Λήμματος.

Λήμμα 2.2.2. Για κάθε $z^T \in H$,

$$(\mathcal{F}_T^*(z^T))(t) = B^* S(T-t)^* z^T.$$

Απόδειξη. Έστω $z^T \in D(A^*)$. Ας θυμηθούμε ότι το $D(A^*)$ είναι πυκνό στο H. Έστω $u \in L^2((0,T); U)$. Έστω $y \in C^0([0,T]; H)$ η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\dot{y} = Ay + Bu(t), \ y(0) = 0.$$

Από τον ορισμό του $\mathcal{F}_T$ και τον Ορισμό 1.10.1,

$$(u, \mathcal{F}_T^*(z^T))_{L^2((0,T);U)} = (\mathcal{F}_T u, z^T)_H = (y(T), z^T)_H = \int_0^T (u, B^* S(T-t)^* z^T)_U \, \mathrm{d}t.$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Λήμματος 2.2.2 και το πρώτο μέρος της απόδειξης των Θεωρημάτων 11 και 12. $\square$

Ας προχωρήσουμε τώρα στο δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 11, δηλαδή στην εξίσωση (2.54). Λόγω του ορισμού του c^T και του Λήμματος 2.2.2

$$\|\mathcal{F}_T^*(z^T)\|^2_{L^2((0,T);U)} \geq c^T \|z^T\|^2_H, \ \forall z^T \in H. \tag{2.57}$$

Λόγω της Πρότασης 2.1.3, από την (2.57) συνεπάγεται η ύπαρξη μιας συνεχούς γραμμικής απεικόνισης $\mathcal{U} : L^2((0,T);U)$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{F}_T \mathcal{U} y^1 = y^1, \ \forall y^1 \in H, \tag{2.58}$$

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{L}(H;L^2((0,T);U))} \leq \frac{1}{\sqrt{c^T}}. \tag{2.59}$$

Από τις (2.58), (2.59) και τον ορισμό του $\mathcal{U}^T$, παίρνουμε

$$\|\mathcal{U}^T\|_{\mathcal{L}(H;L^2((0,T);U))} \leq \frac{1}{\sqrt{c^T}}. \tag{2.60}$$

Τελικά, από τον ορισμό του $\mathcal{U}^T$, έχουμε

$$\mathcal{F}_T \mathcal{U}^T y^1 = y^1, \ \forall y^1 \in H,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$(\mathcal{F}_T^* z^T, \mathcal{U}^T z^T)_{L^2((0,T);U))} = \|z^T\|^2_H, \forall z^T \in H. \tag{2.61}$$

Από την (2.61), έχουμε

$$\begin{aligned}
\|z^T\|^2_H &\leq \|\mathcal{F}_T^* z^T\|_{L^2((0,T);U)} \|\mathcal{U}^T z^T\|_{L^2((0,T);U)} \\
&\leq \|\mathcal{F}_T^* z^T\|_{L^2((0,T);U)} \|\mathcal{U}^T\|_{\mathcal{L}(H;L^2((0,T);U))} \|z^T\|_H, \ \forall z^T \in H,
\end{aligned}$$

το οποίο μαζί με τον ορισμό του c^T και το Λήμμα 2.2.2, δίνει ότι

$$c^T \geq \frac{1}{\|\mathcal{U}^T\|_{\mathcal{L}(H;L^2((0,T);U))}}.$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της (2.54). □

Απόδειξη του Θεωρήματος 13

Το εργαλείο κλειδί για την απόδειξη του Θεωρήματος 13 είναι το ακόλουθο Λήμμα το οποίο θα αποδείξουμε στη συνέχεια.

Λήμμα 2.2.3. Έστω H_1, H_2 και H_3 τρεις χώροι Hilbert . Έστω C_2 μία συνεχής γραμμική απεικόνιση από το H_2 στο H_1 και έστω C_3 ένα πυκνά ορισμένος κλειστός γραμμικός τελεστής από το $\mathcal{D}(C_3) \subset H_3$ στο H_1. Τότε οι δύο ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

(1) Υπάρχει $M \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$\|C_2^* h_1\|_{H_2} \leq M \|C_3^* h_1\|_{H_3}, \ \forall h_1 \in \mathcal{D}(C_3^*). \tag{2.62}$$

(2) Έχουμε τον ακόλουθο εγκλεισμό:

$$C_2(H_2) \subset C_3(\mathcal{D}(C_3)). \tag{2.63}$$

Επιπλέον, αν $M \geq 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (2.62), τότε υπάρχει μία συνεχής γραμμική απεικόνιση C_1 από το H_2 στο H_3 τέτοια ώστε

$$C_1(H_2) \subset \mathcal{D}(C_3), \ C_2 = C_3 C_1, \tag{2.64}$$

$$\|C_1\|_{\mathcal{L}(H_2;H_3)} \leq M. \tag{2.65}$$

Παρατήρηση 2.2.1. Στην πραγματικότητα, έχουμε υποθέσει ότι ο γραμμικός τελεστής C_3 είναι συνεχής από το H_3 στο H_2. Ωστόσο, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και την περίπτωση όπου το C_3 είναι μόνο ένας πυκνά ορισμένος κλειστός γραμμικός τελεστής.

Ας εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.2.3 με τους ακόλουθους χώρους και απεικονίσεις.

- Οι χώροι H_1, H_2 και H_3 δίνονται από τις

$$H_1 := H, \ H_2 := H, \ H_3 := L^2((0,T);U).$$

- Η γραμμική απεικόνιση C_2 απεικονίζει το $y^0 \in H$ στο $y(T) \in H$, όπου $y \in C^0([0,T];H)$ είναι η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\dot{y} = Ay, \ y(0) = y^0.$$

  Με άλλα λόγια,

$$C_2 = S(T). \tag{2.66}$$

- Η γραμμική απεικόνιση C_3 απεικονίζει το $u \in L^2((0,T);U)$ στο $y(T) \in H$, όπου $y \in C^0([0,T];H)$ είναι η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\dot{y} = Ay + Bu(t), \ y(0) = 0.$$

  Με άλλα λόγια,

$$C_3 = \mathcal{F}_T. \tag{2.67}$$

  Σημειώνουμε ότι, το C_3, σε αυτήν την περίπτωση, είναι ένας συνεχής γραμμικός τελεστής από το $L^2((0,T);U)$ στο H.

Με αυτές τις επιλογές, η μηδενική ελεγξιμότητα του γραμμικού συστήματος ελέγχου $\dot{y} = Ay + Bu$ είναι ισοδύναμη με τον εγκλεισμό (2.63). Πράγματι, ας υποθέσουμε πρώτα ότι ισχύει η (2.63) και θα αποδείξουμε τη μηδενική ελεγξιμότητα. Έστω y^0 και $\tilde{y}^0$ να ανήκουν και τα δύο στο H. Έστω $u \in L^2((0,T);U)$ να είναι τέτοιο ώστε $C_3 u = C_2(\tilde{y}^0 - y^0)$, δηλαδή, $\mathcal{F}_T u = S(T)(\tilde{y}^0 - y^0)$. Έστω $y \in C^0([0,T];H)$ η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\dot{y} = Ay + Bu(t), \; y(0) = y^0.$$

Τότε $y = y_1 + y_2$, όπου $y_1 \in C^0([0,T];H)$ είναι η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\dot{y}_1 = Ay_1, \; y_1(0) = y^0,$$

και όπου $y_2 \in C^0([0,T];H)$ είναι η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\dot{y}_2 = Ay_2 + Bu, \; y_2(0) = 0.$$

Ιδιαίτερα,

$$y(T) = y_1(T) + y_2(T) = C_2 y^0 + C_3 u = S(T)y^0 + S(T)(\tilde{y}^0 - y^0) = S(T)\tilde{y}^0,$$

το οποίο αποδεικνύει τη μηδενική ελεγξιμότητα. Όμοια αποδεικνύουμε και το αντίστροφο.

Ας ερμηνεύσουμε τώρα την (2.62). Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2.3, τις (2.66) και (2.67), παίρνουμε ότι η (2.62) είναι ισοδύναμη με τη (2.55) με $c = 1/M^2$.

Τελικά, λαμβάνοντας υπόψη την (2.56), ορίζουμε, με το συμβολισμό του Λήμματος 2.2.3,

$$\mathcal{U} := -C_1 \in \mathcal{L}(H, L^2((0,T);U)).$$

Έχουμε

$$((\dot{y} = Ay + B\mathcal{U}y^0, \; y(0) = y^0) \Rightarrow (y(T) = 0)), \; \forall y^0 \in H, \tag{2.68}$$

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{L}(H;L^2((0,T);U))} \leq \frac{1}{\sqrt{c^T}}. \tag{2.69}$$

Από τις (2.68), (2.69) και τον ορισμό του $\mathcal{U}_T$, έχουμε

$$\|\mathcal{U}_T\|_{\mathcal{L}(H;L^2((0,T);U))} \leq \frac{1}{\sqrt{c^T}}. \tag{2.70}$$

Μας μένει να αποδείξουμε ότι

$$\|\mathcal{U}_T\|_{\mathcal{L}(H;L^2((0,T);U))} \geq \frac{1}{\sqrt{c^T}}. \tag{2.71}$$

Από τον ορισμό του $\mathcal{U}_T$, έχουμε

$$\mathcal{F}_T \mathcal{U}_T = -S(T), \tag{2.72}$$

Από την (2.72), έχουμε, $z \in H$,

$$\begin{aligned} \|S(T)^* z\|_H^2 &= -(\mathcal{U}_T^* \mathcal{F}_T^* z, S(T)^* z)_H \\ &\leq \|\mathcal{U}_T\|_{\mathcal{L}(H;L^2((0,T);U))} \|\mathcal{F}_T^* z\|_{L^2((0,T);U)} \|S(T)^* z\|_H, \end{aligned}$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\|\mathcal{F}_T^* z\|_{L^2((0,T);U)} \geq \frac{1}{\|\mathcal{U}_T\|_{\mathcal{L}(H;L^2((0,T);U))}} \|S(T)^* z\|_H,\ \forall z \in H. \tag{2.73}$$

Η ανισότητα (2.71) έπεται από την (2.73), τον ορισμό του c_T και το Λήμμα 2.2.2. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 13, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2.3. □

Απόδειξη του Λήμματος 2.2.3

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι από το (2) συνεπάγεται το (1). Έτσι υποθέτουμε ότι ισχύει η (2.63). Έστω $h_2 \in H_2$. Από την (2.63), υπάρχει ένα και μόνο ένα $h_3 \in \mathcal{D}(C_3)$, ορθογώνιο στον πυρήνα του C_3, τέτοιο ώστε $C_2 h_2 = C_3 h_3$. Ας ορίσουμε από τη $C_1 : H_2 \to H_3$ την απεικόνιση που ορίζεται από τη $C_1(h_2) := h_3$. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι η C_1 είναι γραμμική. Επιπλέον, λόγω κατασκευής της C_1, ισχύει η (2.64). Σημειώνουμε ότι, για κάθε $h_1 \in \mathcal{D}(C_3^*) \subset H_1$ και για κάθε $x \in H_2$,

$$\begin{aligned}(C_2^* h_1, x)_{H_2} &= (h_1, C_2 x)_{H_1} \\ &= (h_1, C_3 C_1 x)_{H_1} \\ &= (C_3^* h_1, C_1 x)_{H_3}.\end{aligned} \tag{2.74}$$

Επομένως, αν η C_1 είναι συνεχής, από την (2.64) συνεπάγεται η (2.62) με $M := \|C_1\|_{\mathcal{L}(H_2;H_3)}$. Ας ελέγξουμε λοιπόν αν η C_1 είναι συνεχής. Λόγω του Θεωρήματος κλειστού γραφήματος, αρκεί να ελέγξουμε ότι το γράφημα της C_1 είναι κλειστό. Έστω $(h_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_3^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $h_2 \in H_2$ και $h_3 \in H_3$ τέτοια ώστε

$$h_2^n \in H_2,\ h_3^n \in H_3,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.75}$$

$$h_3^n = C_1 h_2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.76}$$

$$h_2^n \to h_2 \text{ στο } H_2 \text{ και } h_3^n \to h_3 \text{ στο } H_3 \text{ με } n \to +\infty. \tag{2.77}$$

Από την (2.76), έχουμε

$$C_2 h_2^n = C_3 h_3^n,\ h_3^n \in \ker(C_3)^\perp,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.78}$$

Αφήνοντας το $n \to +\infty$ στην (2.78) και χρησιμοποιώντας την (2.77), παίρνουμε (ας θυμηθούμε ότι ο C_3 είναι ένας κλειστός τελεστής)

$$h_3 \in \mathcal{D}(C_3),\ C_2 h_2 = C_3 h_3 \text{ και } h_3 \in \ker(C_3)^\perp,$$

το οποίο μας λέει ότι $h_3 = C_1 h_2$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της συνέχειας του C_1 και η απόδειξη του (2) $\Rightarrow$ (1).

Ας αποδείξουμε τώρα το αντίστροφο. Υποθέτουμε ότι ισχύει η (2.62) για κάποιο $M \geq 0$. Ορίζουμε την απεικόνιση $K : C_3^*(\mathcal{D}(C_3^*)) \subset H_3 \to H_2$ απαιτώντας να ισχύει

$$K(C_3^* h_1) = C_2^* h_1,\ \forall h_1 \in \mathcal{D}(C_3^*) \subset H_1.$$

Η απεικόνιση K είναι καλώς ορισμένη αφού, λόγω της (2.62),

$$(C_3^* h_1 = C_3^* \tilde{h}_1) \Rightarrow (C_3^*(h_1 - \tilde{h}_1) = 0) \Rightarrow (C_2^*(h_1 - \tilde{h}_1) = 0) \Rightarrow (C_2^* h_1 = C_2^* \tilde{h}_1).$$

για κάθε $(h_1, \tilde{h}_1) \in \mathcal{D}(C_3^*) \times \mathcal{D}(C_3^*)$. Επιπλέον, η K είναι γραμμική. Ο διανυσματικός χώρος $C_3^*(\mathcal{D}(C_3^*))$, ο οποίος είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του H_3, είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα του H_3. Τότε η K είναι επίσης συνεχής αφού, λόγω της (2.62),

$$\|K(C_3^* h_1)\|_{H_2} = \|C_2^* h_1\|_{H_2} \leq M \|C_3^* h_1\|_{H_3}, \ \forall h_1 \in \mathcal{D}(C_3^*) \subset H_1,$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι $K \in \mathcal{L}(C_3^*(\mathcal{D}(C_3^*)); H_2)$ και ότι

$$\|K\|_{\mathcal{L}(C_3^*(\mathcal{D}(C_3^*)); H_2)} \leq M. \tag{2.79}$$

Λόγω της (2.79), η_K μπορεί να είναι μονοσήμαντα διευρυμένη ως μία συνεχή γραμμική απεικόνιση από το $C_3^*(\bar{\mathcal{D}}(C_3^*)$ στο H_2. Τότε επεκτείνουμε το K σε μια γραμμική απεικόνιση από το H_3 στο H_2 απαιτώντας ότι το K μηδενίζεται στο $C_3^*(\bar{\mathcal{D}}(C_3^*)^{\perp}$. Προφανώς $K \in \mathcal{L}(H_3; H_2)$ και

$$\|K\|_{\mathcal{L}(H_3; H_2)} \leq M, \tag{2.80}$$

$$K C_3^* = C_2^*. \tag{2.81}$$

Από την (2.81), παίρνουμε εύκολα ότι

$$K^*(H_2) \subset \mathcal{D}(C_3) \text{ και } C_3 K^* = C_2, \tag{2.82}$$

από το οποίο συνεπάγεται η (2.63). Σημειώνουμε ότι, αν υποθέσουμε ότι $C_1 := K^*$, η (1.90) συνεπάγεται από την (2.82) και η (2.65) από την (2.80). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Λήμματος 2.2.3. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 14

Έστω $y^0 \in H,\ y^1 \in H,\ T > 0$ και $\varepsilon > 0$. Αφού η ημιομάδα $S(t),\ t \in [0, +\infty)$, είναι ισχυρά συνεχής, υπάρχει $\eta \in (0, T)$ τέτοιο ώστε

$$\|S(\eta) y^1 - y^1\|_H \leq \varepsilon, \tag{2.83}$$

Αφού το σύστημα ελέγχου (2.45) είναι μηδενικής ελεγξιμότητας σε χρόνο η, υπάρχει $\bar{u} \in L^2((0, \eta); U)$ τέτοιο ώστε η λύση $\bar{y} \in C^0([0, \eta]; H)$ του προβλήματος Cauchy

$$\dot{\bar{y}} = A\bar{y} + B\bar{u}(t),\ t \in (0, \eta),\ \bar{y}(0) = S(T - \eta) y^0,$$

να ικανοποιεί την

$$\bar{y}(\eta) = S(\eta) y^1. \tag{2.84}$$

Έστω $u \in L^2(0, T)$ ορισμένη από τις

$$u(t) = 0,\ t \in (0, T - \eta),$$

$$u(t) = \bar{u}(t - T + \eta),\ t \in (T - \eta, T).$$

Έστω $y \in C^0([0,T]; H)$ η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\dot{y} = Ay + Bu(t),\ t \in (0,T),\ y(0) = y^0.$$

Τότε

$$y(t) = S(t)y^0,\ \forall t \in [0, T - \eta], \tag{2.85}$$

$$y(t) = \bar{y}(t - T + \eta),\ \forall t \in (T - \eta, T). \tag{2.86}$$

Από τις (2.83), (2.84) και (2.86), παίρνουμε ότι

$$\|y(T) - y^1\|_H \leq \varepsilon.$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 14. □

Παρατήρηση 2.2.2. Σε αντίθεση με το Θεώρημα 14, σημειώνουμε ότι, για δοσμένο $T > 0$, από τη μηδενική ελεγξιμότητα σε χρόνο T δε συνεπάγεται η προσεγγιστική ελεγξιμότητα σε χρόνο T. Για παράδειγμα, έστω $L > 0$ και παίρνουμε $H := L^2(0,L)$ και $U := \{0\}$. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα ελέγχου

$$y_t + y_x = 0,\ t \in (0,T),\ x \in (0,L), \tag{2.87}$$

$$y(t,0) = u(t) = 0,\ t \in (0,T). \tag{2.88}$$

Παρακάτω θα δούμε πως να βάζουμε αυτό το σύστημα ελέγχου στο αφηρημένο πλαίσιο $\dot{y} = Ay + Bu$. Από τα προηγούμενα έπεται ότι, για οποιοδήποτε $y^0 \in L^2(0,L)$, η λύση του προβλήματος Cauchy

$$y_t + y_x = 0,\ t \in (0,T),\ x \in (0,L),$$

$$y(t,0) = u(t) = 0,\ t \in (0,T),$$

$$y(0,x) = y^0(x),\ x \in (0,L),$$

ικανοποιεί την

$$y(T,\cdot) = 0,\ \text{αν}\ T \geq L.$$

Ιδιαίτερα, αν $T \geq L$, το γραμμικό σύστημα ελέγχου (2.87)-(2.88) είναι μηδενικά ελέγξιμο αλλά όχι προσεγγιστικά ελέγξιμο.

Παραδείγματα

Σε αυτό το σημείο θα δείξουμε πως το αφηρημένο πλαίσιο μπορεί να εφαρμοσθεί στη γραμμική εξίσωση μεταφοράς.

Η Εξίσωση Μεταφοράς

Επιστρέφουμε στο σύστημα ελέγχου μεταφοράς που είχαμε θεωρήσει και νωρίτερα. Έστω $L > 0$. Το γραμμικό σύστημα ελέγχου που μελετάμε είναι

$$y_t + y_x = 0, \ t \in (0,T), \ x \in (0,L), \tag{2.89}$$

$$y(t,0) = u(t), \ t \in (0,T), \tag{2.90}$$

όπου, σε χρόνο t, ο έλεγχος είναι $u(t) \in \mathbb{R}$ και η κατάσταση $y(t,\cdot) : (0,L) \to \mathbb{R}$.

Για το χώρο Hilbert H, παίρνουμε $H := L^2(0,L)$. Για τον τελεστή $A : \mathcal{D}(A) \to H$ παίρνουμε

$$\mathcal{D}(A) := \{f \in H^1(0,L); f(0) = 0\},$$

$$Af := -f_x, \ \forall f \in \mathcal{D}(A).$$

Τότε $\mathcal{D}(A)$ είναι πυκνό στο $L^2(0,L)$ και ο A κλειστός και αποσβεστικός (dissipative) (δηλ. $\mathrm{Re}\ (Af,f) \leq 0, \ \forall f \in \mathcal{D}(A)$). Ο συζυγής A^* του A ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{D}(A^*) := \{f \in H^1(0,L); f(L) = 0\},$$

$$A^*f := f_x, \ \forall f \in \mathcal{D}(A^*).$$

Ο τελεστής A^* είναι επίσης αποσβεστικός. Επομένως, ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας ισχυρά συνεχούς ημιομάδας $S(t), \ t \in [0,+\infty)$, ενός συνεχούς γραμμικού τελεστή στο H.

Για το χώρο Hilbert U, παίρνουμε $U := \mathbb{R}$. Ο τελεστής $B : \mathbb{R} \to D(A^*)'$ ορίζεται ως εξης:

$$(Bu)z = uz(0), \ \forall u \in \mathbb{R}, \ \forall z \in D(A^*). \tag{2.91}$$

Σημειώνουμε ότι το $B^* : D(A^*) \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$B^*z = z(0), \ \forall z \in D(A^*).$$

Ας ελέγξουμε την ιδιότητα ομαλότητας (2.45 α). Έστω $z^0 \in D(A^*)$. Έστω

$$z \in C^0([0,T]; D(A^*)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,L))$$

να ορίζεται από τη $z(t,\cdot) = S(t)^*z^0$. Η ανισότητα (2.45 α) είναι ισοδύναμη με τη

$$\int_0^T z(t,0)^2 \,\mathrm{d}t \leq C_T \int_0^L z^0(x)^2 \,\mathrm{d}x. \tag{2.92}$$

Ας αποδείξουμε αυτήν την ανισότητα για $C_T := 1$. Έχουμε

$$z_t = z_x, \ t \in (0,T), \ x \in (0,L), \tag{2.93}$$

$$z(t,L) = 0, \ t \in (0,T), \tag{2.94}$$

$$z(0,x) = z^0(x),\ x \in (0,L). \tag{2.95}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (2.93) με z και ολοκληρώνουμε στο $[0,T]\times[0,L]$. Χρησιμοποιώντας τις (2.94), (2.95) και ολοκληρώνοντας κατά μέρη, παίρνουμε

$$\int_0^T z(t,0)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^L z^0(x)^2\,\mathrm{d}x - \int_0^L z(T,x)^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^L z^0(x)^2\,\mathrm{d}x, \tag{2.96}$$

το οποίο δείχνει ότι ισχύει η (2.92) για $C_T := 1$.

Σημειώνουμε ότι υπάρχει ένα σημείο που πρέπει να ξεκαθαρίσουμε: έχουμε δύο ορισμούς για τη λύση του προβλήματος Cauchy

$$y_t + y_x = 0,\ t \in (0,T),\ x \in (0,L), \tag{2.97}$$

$$y(t,0) = u(t), \tag{2.98}$$

$$y(0,x) = y^0(x),\ x \in (0,L), \tag{2.99}$$

όπου T δίνεται στο $(0,+\infty)$, y^0 στο $L^2(0,L)$ και u στο $L^2(0,T)$. Ο πρώτος ορισμός είναι αυτός που δίνεται στον Ορισμό 2.1.1. Ο δεύτερος είναι αυτός που δίνεται στον Ορισμό 2.2.1. (Στην πραγματικότητα, για τώρα, δεν υπάρχουν στοιχεία που να αποδεικνύουν κάποια σχέση μεταξύ των ''y είναι μία λύση με την έννοια του Ορισμού 2.2.1'' και y ικανοποιεί, με κάποια ''λογική έννοια'', τις (2.97), (2.98) και (2.99).) Θα δείξουμε ότι αυτοί οι δύο ορισμοί στην πραγματικότητα οδηγούν στην ίδια λύση.

Έστω T να δίνεται στο $(0,+\infty)$, y^0 στο $L^2(0,L)$ και u στο $L^2(0,T)$. Έστω $y \in C([0,T];L^2(0,L))$ μία λύση με την έννοια του Ορισμού 2.1.1. Για να αποδείξουμε ότι y είναι μία λύση με την έννοια του Ορισμού 2.2.1, αρκεί να δείξουμε ότι , για κάθε $\tau \in [0,T]$ και κάθε $z^\tau \in L^2(0,L)$,

$$\int_0^L y(\tau,x)z^\tau(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^L y^0(x)z(\tau,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\tau u(t)z(\tau-t,0)\,\mathrm{d}t, \tag{2.100}$$

όπου $z(t,\cdot) := S(t)^* z^\tau$. Λόγω πυκνότητας του $D(A^*)$ στο $L^2(0,L)$ και της συνέχειας του αριστερού και του δεξιού μέρους της (2.100) σε σχέση με το z^τ για την $L^2(0,L)$-τοπολογία, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η (2.100) για κάθε $\tau \in [0,T]$ και κάθε $z^\tau \in D(A^*)$. Έστω $\tau \in [0,T]$ και $z^\tau \in D(A^*)$. Τότε έχουμε

$$z \in C^0([0,T];H^1(0,L)) \cap C^1([0,T];L^2(0,L)), \tag{2.101}$$

$$z_t - z_x = 0,\ t \in (0,T),\ x \in (0,L), \tag{2.102}$$

$$z(t,L) = 0,\ t \in (0,T), \tag{2.103}$$

$$z(0,x) = z^\tau(x),\ x \in (0,L). \tag{2.104}$$

Να επισημάνουμε ότι, λόγω πυκνότητας και των επιχειρημάτων της συνέχειας, ισχύει η (2.3 β) (σελ.50) για κάθε $\phi \in C^0([0,\tau];H^1(0,L)) \cap C^1([0,\tau];L^2(0,L))$ ικανοποιώντας την (2.3 α). Παίρνουμε $\phi \in C^0([0,\tau];H^1(0,L)) \cap C^1([0,\tau];L^2(0,L))$ ορισμένο ως εξής:

$$\phi(t,x) = z(\tau - t, x),\ t \in (0,L). \tag{2.105}$$

Σημειώνουμε ότι, λόγω των (2.103) και (2.105), ισχύει η (2.3 α). Επομένως έχουμε την (2.3 β). Επιπλέον, από τις (2.102) και (2.103), παίρνουμε

$$\phi_t + \phi_x = 0,\ t \in (0,\tau),\ x \in (0,L). \tag{2.106}$$

Από την (2.3 β) και την (2.106), έχουμε

$$-\int_0^\tau u(t)\phi(\tau,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^L y(\tau,x)\phi(\tau,x)\,\mathrm{d}x - \int_0^L y^0(x)\phi(0,x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

το οποίο, μαζί με τις (2.104) και (2.105), δίνουν την (2.100).

Ας ασχοληθούμε με το αντίστροφο: Θα αποδείξουμε ότι κάθε λύση με την έννοια του Ορισμού 2.2.1 είναι μία λύση με την έννοια του Ορισμού 2.1.1. Στην πραγματικότητα αυτό έπεται από αυτό που μόλις αποδείξαμε (μία λύση με την έννοια του Ορισμού 2.1.1 είναι μία λύση με την έννοια του Ορισμού 2.2.1), τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος Cauchy με την έννοια του Ορισμού 2.2.1 και την ύπαρξη της λύσης του προβλήματος Cauchy με την έννοια του Ορισμού 2.1.1. Ας δώσουμε μια άμεση απόδειξη. Έστω $T > 0,\ u \in L^2(0,T),\ y^0 \in L^2(0,L)$. Έστω $y \in C^0([0,T];L^2(0,L))$ μία λύση του προβλήματος Cauchy (2.97)-(2.98)-(2.99) με την έννοια του Ορισμού 2.2.1. Έστω $\tau \in [0,T]$. Έστω $\phi \in C^1([0,\tau]\times[0,L])$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (2.3 α). Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει η (2.3 β). Λόγω πυκνότητας και των επιχειρημάτων της συνέχειας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\phi \in C^2([0,\tau]\times[0,L])$. Έστω $f \in C^1([0,\tau]\times[0,L])$ να οριζέται ως εξής:

$$f(t,x) = -\phi_t(\tau - t,x) - \phi_x(\tau - t,x),\ \forall t \in [0,\tau],\ \forall x \in [0,L]. \tag{2.107}$$

Έστω $a \in C^1([0,\tau];L^2(0,L)) \cap C^0([0,\tau];D(A^*))$ να ορίζεται ως εξής:

$$a(t,\cdot) := \int_0^t S(t-s)^* f(s,\cdot)\,\mathrm{d}s. \tag{2.108}$$

Έστω $b \in C^1([0,\tau];L^2(0,L)) \cap C^0([0,\tau];D(A^*))$ να ορίζεται ως εξής:

$$b(t,x) = \phi(\tau - t,x) - a(t,x),\ \forall t \in [0,\tau],\ \forall x \in [0,L]. \tag{2.109}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι

$$b(t,\cdot) = S(t)^*\phi(\tau,\cdot),\ \forall t \in [0,\tau]. \tag{2.110}$$

Από τις (2.48) και (2.110), έχουμε

$$\int_0^L y(\tau,x)\phi(\tau,x)\,\mathrm{d}x - \int_0^L y^0(x)b(\tau,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\tau u(t)b(\tau - t,0)\,\mathrm{d}t. \tag{2.111}$$

Έστω $f(t) := f(t,\cdot),\ t \in [0,\tau]$. Από την (2.48) έχουμε, για κάθε $t \in [0,\tau]$,

$$\int_0^L y(t,x)f(\tau - t,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L y^0 S(t)^* f(\tau - t)\,\mathrm{d}x + \int_0^t u(s)B^*S(t-s)^*f(\tau - t)\,\mathrm{d}s. \tag{2.112}$$

Ολοκληρώνοντας την (2.112) στο $[0,\tau]$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini μαζί με την (2.108), παίρνουμε

$$\int_0^\tau \int_0^L y(t,x) f(\tau - t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^L y^0 a(\tau, x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\tau u(t) a(\tau - t, 0)\,\mathrm{d}t. \tag{2.113}$$

Από τις (2.107), (2.109), (2.111) και (2.113), παίρνουμε την (2.3 β). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη για την ισοδυναμία ανάμεσα στον Ορισμό 2.1.1 και 2.2.1. □

Ας ασχοληθούμε τώρα με την ανισότητα της παρατηρισιμότητας (2.53) για πλήρη ελεγξιμότητα. Αυτή η ανισότητα, με τον παραπάνω συμβολισμό, δίνει

$$\int_0^T z(t,0)^2\,\mathrm{d}t \geq c \int_0^L z^0(x)^2\,\mathrm{d}x, \tag{2.114}$$

όπου $c > 0$ είναι ανεξάρτητο του $z^0 \in D(A^*)$ και όπου $z(t,\cdot) = S(t)^* z^0$. Η μεταβολή της συνάρτησης $\tilde{z}(t,x) := z(T-t,x)$ δείχνει ότι η ανισότητα (2.114) είναι ισοδύναμη με την ανισότητα (2.38).

2.3 Εξίσωση Θερμότητας

Σε αυτήν την ενότητα Ω είναι ένα μη κενό φραγμένο ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}^l$, και ω είναι ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του Ω. Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα ελέγχου:

$$y_t - \Delta y = u(t,x),\ t \in (0,T),\ x \in \Omega, \tag{2.115}$$

$$y = 0 \text{ στο } (0,T) \times \partial\Omega, \tag{2.116}$$

όπου, σε χρόνο $t \in [0,T]$, η κατάσταση είναι $y(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$ και ο έλεγχος είναι $u(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$. Απαιτούμε

$$u(\cdot,x) = 0,\ x \in \Omega \setminus \omega. \tag{2.117}$$

Επομένως θεωρούμε την περίπτωση εσωτερικού ελέγχου.

Το Καλώς Τοποθετημένο του Προβλήματος Cauchy

Πάλι ξεκινούμε δίνοντας ένα φυσικό ορισμό μιας (ασθενούς) λύσης του προβλήματος Cauchy που σχετίζεται με το σύστημα ελέγχου (2.115)-(2.116), δηλαδή το πρόβλημα Cauchy

$$y_t - \Delta y = u(t,x),\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \tag{2.118}$$

$$y = 0 \text{ στο } (0,T) \times \partial\Omega, \tag{2.119}$$

$$y(0,x) = y^0(x),\ x \in \Omega, \tag{2.120}$$

όπου $T > 0$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ και $u \in L^2((0,T) \times \Omega)$ δοσμένα. Για να ενεργοποιήσουμε αυτόν τον ορισμό, ας υποθέσουμε πρώτα ότι υπάρχει μία συνάρτηση y της τάξης C^2 στο $[0,T] \times \bar{\Omega}$

που ικανοποιεί τις (2.118) εώς (1.120) με τη συνήθη έννοια. Έστω $\tau \in [0, T]$ και έστω $\phi \in C^2([0, \tau] \times \bar{\Omega})$ να είναι τέτοια ώστε

$$\phi(t, x) = 0, \ \forall (t, x) \in [0, \tau] \times \partial\Omega. \tag{2.121}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (2.118) με ϕ και ολοκληρώνουμε την αποκτηθείσα ισότητα στο $[0, \tau] \times \Omega$. Χρησιμοποιώντας τις (2.119), (2.120), (2.121) και ολοκληρώνοντας κατά μέρη, παίρνουμε (τουλάχιστον αν το Ω είναι ομαλό αρκετά)

$$-\int_0^\tau \int_\Omega (\phi_t + \Delta\phi) y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_0^\tau \int_\Omega u\phi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_\Omega y(\tau, x)\phi(\tau, x) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega y^0(x)\phi(0, x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Αυτή η ισότητα οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.3.1. *Έστω $T > 0$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ και $u \in L^2((0, T) \times \Omega)$ δοσμένα. Μία λύση του προβλήματος Cauchy (2.118)-(2.119)-(2.120) είναι μία συνάρτηση $y \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ τέτοια ώστε, για κάθε $\tau \in [0, T]$ και για κάθε $\phi \in C^0([0, \tau]; H^1(\Omega))$ τέτοιο ώστε*

$$\phi(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega), \ \forall t \in [0, \tau], \tag{2.122}$$

$$\phi_t \in L^2((0, T) \times \Omega), \ \Delta\phi \in L^2((0, T) \times \Omega), \tag{2.123}$$

έχουμε

$$-\int_0^\tau \int_\Omega (\phi_t + \Delta\phi) y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t - \int_0^\tau \int_\Omega u\phi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_\Omega y(\tau, x)\phi(\tau, x) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega y^0(x)\phi(0, x) \, \mathrm{d}x = 0. \tag{2.124}$$

Στην (2.122) και στα ακόλουθα, $H_0^1(\Omega)$ συμβολίζει την κλειστότητα στο $H^1(\Omega)$ του συνόλου των συναρτήσεων $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ με συμπαγή φορέα. Ας θυμήσουμε ότι, αν Ω είναι της τάξης C^1, τότε

$$H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \ \varphi = 0 \text{ στο } \partial\Omega\}$$

Θεώρημα 15. *Έστω $T > 0$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ και $u \in L^2((0, T) \times \Omega)$ δοσμένα. Τότε το πρόβλημα Cauchy (2.118)-(2.119)-(2.120) έχει μοναδική λύση. Αυτή η λύση ικανοποιεί την*

$$\|y(\tau, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|y^0\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2((0,T)\times\Omega)}), \ \forall \tau \in [0, T], \tag{2.125}$$

για κάποιο $C > 0$ το οποίο δεν εξαρτάται από το $(y^0, u) \in L^2(\Omega) \times L^2((0, T) \times \Omega)$.

Ελεγξιμότητα

Λόγω του αποτελέσματος εξομάλυνσης της εξίσωσης θερμότητας, για οποιαδήποτε $y^0 \in L^2(\Omega)$ και $u \in L^2((0, T) \times \Omega)$ ικανοποιούν την (2.117), η λύση $y : (0, T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ του προβλήματος Cauchy (2.118)-(2.119)-(2.120) είναι τέτοια ώστε y είναι τάξης C^∞ στο $(0, T) \times (\Omega \setminus \bar{\omega})$. Επομένως, αν $\Omega \not\subseteq \bar{\omega}$, δεν μπορούμε να περιμένουμε ότι θα έχουμε την ελεγξιμότητα που είχαμε βρει στην εξίσωση μεταφοράς. Πιο συγκεκριμένα, αν $\Omega \not\subseteq \bar{\omega}$, υπάρχουν $y^1 \in L^2(\Omega)$ τέτοια ώστε, για κάθε $y^0 \in L^2(\Omega)$, για κάθε $T > 0$ και για κάθε $u \in L^2((0,T) \times \Omega)$ ικανοποιείται η (2.117), $y(T, \cdot) \neq y^1$. Για την εξίσωση της θερμότητας, όπως και για πολλές εξισώσεις όπου υπάρχει το αποτέλεσμα της εξομάλυνσης, η καλή έννοια της ελεγξιμότητας είναι να μην πάμε από μία δοσμένη κατάσταση σε μια άλλη δοσμένη κατάσταση σε κάποιο σταθεροποιημένο χρόνο, αλλά να πάμε από μία δοσμένη κατάσταση σε μια δοσμένη τροχιά. Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.3.2. *Το σύστημα ελέγχου (2.115)-(2.116)-(2.117) είναι ελέγξιμο αν, για κάθε T, $y^0 \in L^2(\Omega)$, $\hat{y} \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ και για κάθε $\hat{u} \in L^2((0,T) \times \Omega)$ τέτοια ώστε*

$$\hat{u}(t,x) = 0,\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega \setminus \bar{\omega}, \tag{2.126}$$

και τέτοια ώστε το y είναι η λύση του προβλήματος Cauchy

$$\hat{y} - \Delta \hat{y} = \hat{u}(t,x),\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \tag{2.127}$$

$$\hat{y} = 0 \text{ στο } (0,T) \times \partial\Omega, \tag{2.128}$$

$$\hat{y}(0,x) = \hat{y}(0,\cdot)(x),\ x \in \Omega, \tag{2.129}$$

τότε υπάρχει $u \in L^2((0,T) \times \Omega)$ που ικανοποιεί την (2.117) τέτοια ώστε η λύση y του προβλήματος Cauchy (2.118)-(2.119)-(2.120) να ικανοποιεί την

$$y(T,\cdot) = \hat{y}(Y,\cdot). \tag{2.130}$$

Παρατήρηση 2.3.1. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του συστήματος ελέγχου (2.115)-(2.116)-(2.117), δεν είναι δύσκολο να παρατηρήσουμε ότι η έννοια της ελεγξιμότητας που εισάγεται στον Ορισμό 2.3.2 είναι ισοδύναμη με αυτό που καλείται μηδενική ελεγξιμότητα, βλέπε Ορισμό 2.2.3.

Θεώρημα 16. *Υποθέτουμε ότι Ω είναι τάξης C^2 και συνεκτικό. Τότε το σύστημα ελέγχου (2.115)-(2.116)-(2.117) είναι ελέγξιμο.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 13, έχουμε την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.3.1. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $T > 0$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $y^0 \in L^2(\Omega)$, η λύση y του προβλήματος Cauchy

$$y_t - \Delta y = 0,\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \tag{2.131}$$

$$y = 0 \text{ στο } (0,T) \times \partial\Omega, \tag{2.132}$$

$$y(0,x) = y^0(x),\ x \in \Omega, \tag{2.133}$$

να ικανοποιεί την

$$\|y(T,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M^2 \int_0^T \int_\omega y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \tag{2.134}$$

Τότε το σύστημα ελέγχου (2.115)-(2.116)-(2.117) είναι ελέγξιμο.

Πράγματι, η ανισότητα (2.55) διαβάζεται σαν την ανισότητα (2.134) με $M := c^{-1/2}$. (Η ανισότητα (2.134) είναι η ανισότητα της παρατηρησιμότητας του συστήματος ελέγχου (2.115)-(2.116)-(2.117).)

Απόδειξη της Ανισότητας της Παρατηρησιμότητας (2.134)

Θα αποδείξουμε μία Carleman ανισότητα, από την οποία συνεπάγεται η ανισότητα της παρατηρησιμότητας (2.134). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $y^0 \in H_0^1(\Omega)$. Έστω y η λύση του προβλήματος Cauchy (2.131)-(2.132)-(2.133). Έστω ω_0 ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του ω τέτοιο ώστε η κλειστότητα $\bar{\omega}_0$ του ω_0 στο $\mathbb{R}^l$ είναι ένα υποσύνολο του ω. Το πρώτο βήμα είναι το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.3.1. Υπάρχει $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ τέτοιο ώστε

$$\psi > 0 \text{ στο } \Omega,\ \psi = 0 \text{ στο } \partial\Omega, \tag{2.135}$$

$$|\nabla\psi(x)| > 0,\ \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \omega_0. \tag{2.136}$$

Απόδειξη. Αν $l = 1$, είναι προφανές. Στο εξής υποθέτουμε ότι $l \geq 2$. Έστω $g \in C^2(\bar{\Omega})$ τέτοια ώστε:

- Το σύνολο του $x \in \bar{\Omega}$ τέτοιο ώστε $\nabla g(x) = 0$ είναι πεπερασμένο και δε συναντά το $\partial\Omega$.
- $g > 0$ στο Ω και $g = 0$ στο $\partial\Omega$.

Η ύπαρξη ενός τέτοιου g έπεται από τα κλασικά επιχειρήματα της Θεωρίας του Morse . Ας συμβολίσουμε με $a_i,\ i \in \{1, \ldots, k\}$ τα $x \in \Omega$ τέτοια ώστε $\nabla g(x) = 0$. Έστω $\gamma_i \in C^\infty([0,1];\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\text{η } \gamma_i \text{ είναι ένα προς ένα για κάθε } i \in \{1, \ldots, k\}, \tag{2.137}$$

$$\gamma_i([0,1]) \cap \gamma_j([0,1]) = \emptyset,\ \forall (i,j) \in \{1, \ldots, k\}^2 \text{ τέτοιο ώστε } i \neq j, \tag{2.138}$$

$$\gamma_i(0) = a_i,\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}, \tag{2.139}$$

$$\gamma_i(1) \in \omega_0,\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}. \tag{2.140}$$

Η ύπαρξη τέτοιων γ_i έπεται από τη συνεκτικότητα του Ω. Βασίζεται σε εύκολα επιχειρήματα εγκαρσιότητας αν $l \geq 3$ (αν $l \geq 3$, δύο εμφυτευμένες καμπύλες οι οποίες τέμνονται μπορούν να διαταραχθούν λίγο ώστε να μην τέμνονται πια.) Αν $l = 2$, προχωρούμε με τη μέθοδο της επαγωγής στο k και παρατηρούμε ότι το $\Omega \setminus \Gamma$, όπου Γ είναι ένας πεπερασμένος αριθμός ξένων εγκάρσιων διαδρομών στο Ω, είναι συνεκτικό. Τώρα έστω $X \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ τέτοιο ώστε

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}^n; X(x) \neq 0\}} \subset \Omega, \tag{2.141}$$

$$X(\gamma_i(t)) = \gamma_i'(t), \forall i \in \{1, \ldots, k\}. \tag{2.142}$$

Έστω Φ η ροή που σχετίζεται με το διανυσματικό πεδίο X, δηλαδή, $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (t,x) \mapsto \Phi(t,x)$ να ικανοποιεί την

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = X(\Phi),\ \Phi(0,x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Από την (2.142), έχουμε

$$\Phi(t, a_i) = \gamma_i(t),\ \forall t \in [0,1]. \tag{2.143}$$

Από τις (2.140) και (2.143), έχουμε $\Phi(1, a_i) \in \omega_0$. Σημειώνουμε ότι, για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$, $\Phi(\tau, \cdot)$ είναι μία αμφιδιαφόριση του $\mathbb{R}^n$ (η αντίστροφη απεικόνιση είναι $\Phi(-\tau, \cdot)$). Από τη (2.141), για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$, οι $\Phi(\tau, \Omega)$ και $\Phi(\tau, \cdot)$ είναι ισοδύναμες με την ταυτοτική απεικόνιση σε μία περιοχή του $\partial\Omega$. Τότε εύκολα παρατηρούμε ότι $\psi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$\psi(x) := g(\Phi(-1, x)),\ \forall x \in \bar{\Omega},$$

ικανοποιεί όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Λήμματος 2.3.1. $\square$

Ας σταθεροποιήσουμε το ψ όπως στο Λήμμα 2.3.1. Έστω $a : (0, T) \times \bar{\Omega} \to (0, +\infty)$ και $\phi : (0, T) \times \bar{\Omega} \to (0, +\infty)$ να ορίζονται ως εξής:

$$a(t, x) = \frac{e^{2\lambda\|\psi\|_{C^0(\bar{\Omega})}} - e^{\lambda\psi(x)}}{t(T - t)},\ \forall (t, x) \in (0, T) \times \bar{\Omega}, \tag{2.144}$$

$$\phi(t, x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{t(T - t)},\ \forall (t, x) \in (0, T) \times \bar{\Omega}, \tag{2.145}$$

όπου το $\lambda \in [1, +\infty)$ θα το διαλέξουμε αργότερα. Έστω $z : [0, T] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ να ορίζεται ως εξής:

$$z(t, x) := e^{-sa(t,x)} y(t, x),\ (t, x) \in (0, T) \times \bar{\Omega}, \tag{2.146}$$

$$z(0, x) = z(T, x) = 0,\ x \in \bar{\Omega}, \tag{2.147}$$

όπου το $s \in [1, +\infty)$ θα το διαλέξουμε αργότερα. Από τις (2.131), (2.144), (2.145) και (2.146), έχουμε

$$P_1 + P_2 = P_3 \tag{2.148}$$

με

$$P_1 := -\Delta z - s^2\lambda^2\phi^2|\nabla\psi|^2 z + s a_t z, \tag{2.149}$$

$$P_2 := z_t + 2s\lambda\phi\nabla\psi\nabla z + 2s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z, \tag{2.150}$$

$$P_3 := -s\lambda\phi(\Delta\psi)z + s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2 z. \tag{2.151}$$

Έστω $Q := (0, T) \times \Omega$. Από την (2.148), έχουμε

$$2\int\int_Q P_1 P_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \int\int_Q P_3^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{2.152}$$

Συμβολίζουμε με n το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στο $\partial\Omega$. Σημειώνουμε ότι το z μηδενίζεται στο $[0, T] \times \partial\Omega$ (βλέπε (2.132) και (2.146)) και στο $\{0, T\} \times \bar{\Omega}$ (βλέπε (2.147)). Τότε χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση κατά μέρη οδηγούμαστε στην

$$2\int\int_Q P_1 P_2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = I_1 + I_2 \tag{2.153}$$

με

$$I_1 := \int\int_Q (2s^3\lambda^4\phi^3|\nabla\psi|^4|z|^2 + 4s\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|\nabla z|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^T\int_{\partial\Omega} 2s\lambda\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)^2\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t, \tag{2.154}$$

$$I_2 := \int\int_Q (4s\lambda(\phi\psi_i)_j z_i z_j - 2s\lambda(\phi\psi_i)_i|\nabla z|^2 + 2s^3\lambda^3\phi^3(|\nabla\psi|^2\psi_i)_i z^2 - 2s\lambda^2(\phi|\nabla\psi|^2)_{ii}z^2$$
$$- sa_{tt}z^2 - 2s^2\lambda(\phi\psi_i a_t)_i z^2 + 4s^2\lambda^2\phi a_t|\nabla\psi|^2 + 2s^2\lambda^2\phi\phi_t|\nabla\psi|^2 z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{2.155}$$

Στην (2.155) και μέχρι το τέλος της απόδειξης του Θεωρήματος 16, χρησιμοποιούμε το συνήθη επαναλαμβανόμενο δείκτη της συνθήκης αθροίσματος. Από τις (2.136) και (2.145), υπάρχει Λ έτσι ώστε, για κάθε $\lambda \geq \Lambda$, έχουμε, στο $(0,T)\times(\Omega\setminus\omega_0)$, ότι

$$-4\lambda^2\phi|\nabla\psi|^2|a|^2 \leq 4\lambda(\phi\psi_i)_j a_i a_j - 2\lambda(\phi\psi_i)_i|a|^2,\ \forall a = (a_1,\ldots,a_n)^{tr}\in\mathbb{R}^n, \tag{2.156}$$

$$-\lambda^4\phi^3||\nabla\psi|^4 \leq 2\lambda^3\phi^3(|\nabla\psi|^2\psi_i)_i. \tag{2.157}$$

Παίρνουμε $\lambda := \Lambda$. Σημειώνουμε ότι, λόγω της (2.135),

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} \leq 0 \text{ στο } \partial\Omega. \tag{2.158}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις (2.144) και (2.145), παίρνουμε την ύπαρξη του $C > 0$, τέτοια ώστε, για κάθε $(t,x)\in(0,T)\times\Omega$,

$$|a_{tt}|+|(\phi\psi_i a_t)_i|+|\phi a_t|\nabla\psi|^2|+|\phi\phi_t|\nabla\psi|^2|+|\phi^3(|\nabla\psi|^2\psi_i)_i|+|\phi^3|\nabla\psi|^4| \leq \frac{C}{t^3(T-t)^3}, \tag{2.159}$$

$$|\phi(\Delta\psi)| + |\phi|\nabla\psi|^2| + |(\phi\psi_i)_i| + |(\phi\psi_i)_i| + |(\phi|\nabla\psi|^2)_{ii}| \leq \frac{C}{t(T-t)}, \tag{2.160}$$

$$|(\phi\psi_i)_j| \leq \frac{C}{t(T-t)},\ \forall(i,j)\in\{1,\ldots,l\}^2. \tag{2.161}$$

Από τις (2.136) και (2.145), παίρνουμε την ύπαρξη του $C > 0$, τέτοια ώστε

$$\frac{1}{t^3(T-t)^3} \leq C\phi^3|\nabla\psi|^4(t,x),\ \forall(t,x)\in(0,T)\times(\Omega\setminus\omega_0). \tag{2.162}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.152) εώς (2.162), παίρνουμε την ύπαρξη του $C > 0$, τέτοια ώστε, για κάθε $s \geq 1$ και για κάθε y^0,

$$s^3\int_{(0,T)}\int_{\Omega\setminus\omega_0}\frac{|z|^2}{t^3(T-t)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq Cs^2\int\int_Q\frac{|z|^2}{t^3(T-t)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + Cs^3\int_{(0,T)}\int_{\omega_0}\frac{|\nabla z|^2+|z|^2}{t^3(T-t)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{2.163}$$

Επομένως, για αρκετά μεγάλα $s \geq 1$, υπάρχει $c_0 > 0$ ανεξάρτητο του y^0 τέτοιο ώστε

$$\int_{T/3}^{2T/3} \int_{\Omega} |z|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq c_0 \int_0^T \int_{\omega_0} \frac{|\nabla z|^2 + |z|^2}{t^3(T-t)^3} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \tag{2.164}$$

Παίρνουμε ένα τέτοιο s και ένα τέτοιο c_0. Επιστρέφοντας στο y και χρησιμοποιώντας τις (2.144) και (2.146), συμπεραίνουμε από την (2.164) την ύπαρξη του $c_1 > 0$ ανεξάρτητη του y^0 τέτοια ώστε

$$\int_{T/3}^{2T/3} \int_{\Omega} |y|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq c_1 \int_0^T \int_{\omega_0} t(T-t)(|\nabla y|^2 + |y|^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \tag{2.165}$$

Έστω $\rho \in C^\infty(\bar{\Omega})$ να είναι τέτοιο ώστε

$$\rho = 1 \text{ στο } \omega_0,$$

$$\rho = 0 \text{ στο } \bar{\Omega} \setminus \omega.$$

Πολλαπλασιάζουμε την (2.131) με $t(T-t)\rho y$ και ολοκληρώνουμε στο Q. Χρησιμοποιώντας την (2.132) και με ολοκληρώσεις κατά μέρη, παίρνουμε την ύπαρξη του $c_2 > 0$ ανεξάρτητη του y^0 τέτοια ώστε

$$\int_0^T \int_{\omega_0} t(T-t)(|\nabla y|^2 + |y|^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq c_2 \int_0^T \int_{\omega} |y|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \tag{2.166}$$

Από τις (2.165) και (2.166), παίρνουμε

$$\int_{T/3}^{2T/3} \int_{\Omega} |y|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq c_1 c_2 \int_0^T \int_{\omega} |y|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t. \tag{2.167}$$

Ας πολλαπλασιάσουμε τώρα την (2.131) με y και να ολοκληρώσουμε στο Ω. Χρησιμοποιώντας ολοκληρώσεις κατά μέρη μαζί με την (2.132), παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} |y(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq 0. \tag{2.168}$$

Από τις (2.167) και (2.168), παίρνουμε ότι ισχύει η (2.134) με

$$M := \sqrt{\frac{3c_1 c_2}{T}}.$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 16. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Γ.Ακρίβης, Ν.Αλικάκος, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2013.

[2] Ν.Δ.Αλικάκος, Γ.Η.Καλογερόπουλος, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2003.

[3] H.Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[4] J.Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs Volume 136, American Mathematical Society, 2007.

[5] L.C.Evans, *Partial Differential Equations*, 2^{nd} edition, American Mathematical Society, 2010.

[6] Γ.Η.Καλογερόπουλος, *Λογισμός Πινάκων και Εφαρμογές*, Αθήνα, 1995.

[7] E.D.Sontag, *Mathematical Control Theory*, Springer, 1998.