Προσεγγιστικά Πεπερασμένες Ascending HNN επεκτάσεις

Συρίγος Διονύσιος
ΑΜ: 103701
Διπλωματική εργασία ειδίκευσης στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Τριμελής επιτροπή
Ταλέλλη Ολυμπία
Συκιώτης Μιχαήλ
Ράπτης Ευάγγελος

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα 2013

Περιληψη

Το κύριο αποτέλεσμα στην παρούσα εργασία είναι ότι οι ascending HNN επεκτάσεις πολυκυκλικών-επί-πεπερασμένων ομάδων είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες. Από την στιγμή που η ιδιότητα του προσεγγιστικά πεπερασμένου διατηρείται από πολλές κατασκευές (π.χ. ελεύθερα γινόμενα, ευθέα γινόμενα) είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε αν διατηρείται και από ascending HNN επεκτάσεις. Η απάντηση είναι αρνητική και στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας βλέπουμε ένα αντιπαράδειγμα μια πεπερασμένα παραγόμενης προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας και μια ascending HNN επέκτασης της η οποία δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Η απάντηση είναι θετική, όπως αναφέραμε για τις πολυκυκλικές-επί-πεπερασμένες, αλλά αργότερα αποδείχτηκε και κάτι γενικότερο, ότι είναι θετική η απάντηση για πεπερασμένα παραγόμενες γραμμικές ομάδες (σε αυτές συμπεριλαμβάνονται οι πολυκυκλικές, οι ελεύθερες και οι μεταβελιανές).

Abstract

The main result of this dissertation is the fact that the ascending HNN extensions of polycyclic-by-finite groups are residually finite. Since many constructions preserve residual finiteness (for example free products, direct products) is interesting to know if it is preserved by ascending HNN extensions. The answer is negative and it the final chapter of the dissertation, there is a counterexample of a f.g. residually finite group which has an ascending HNN extension that it isn't residually finite. The answer is positive, as we have mentioned before for polycyclic-by-finite groups, but later it is proved something more general, in particular that the answer is positive for f.g. linear groups (this class includes polycyclic, free and f.g. metabelian).

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε κυρίως με την απόδειξη του παρακάτω Θεωρήματος των Tim Hsu και Daniel T. Wise ([5]).

Θεώρημα 1.1. Έστω $\phi : G \to G$ ένας μονομορφισμός μιας πολυκυκλικής-επί- πεπερασμένη ομάδας. Τότε η $G*_\phi$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Έστω G μια ομάδα και $\phi : G \to G$ μονομορφισμός. Τότε η Ascending HNN επέκταση της G, που αντιστοιχεί στην ϕ είναι η ομάδα $G*_\phi =< G, t|t^{-1}gt = \phi(g) >$, όπου η G λέγεται ομάδα βάσης. Οι Ascending HNN επεκτάσεις είναι μία ενδιαφέρουσα και καλά μελετημένη κλάση ομάδων. Για παράδειγμα οι Feighn και Handel ([23]) πρόσφατα έδειξαν ότι οι Ascending HNN επεκτάσεις ελευθέρων ομάδων είναι coherent (που σημαίνει ότι οι πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες της είναι πεπερασμένα παριστώμενες).
Αναφέρουμε ότι μια ομάδα G είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, αν κάθε μη τετριμμένο στοιχείο έχει μη-τετριμμένη εικόνα μέσω του φυσικού επιμορφισμού σε κάποιο πεπερασμένο πηλίκο της G. Όπως παρατήρησε ο Malcev μια split extension $G \rtimes_\phi \mathbb{Z}$ (ειδική μορφή ascending HNN επέκτασης, αν ϕ ισομορφισμός) μιας πεπερασμένα παραγόμενης προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας G είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη ([24] IIIA Theorem 7) και επειδή οι κανονικές μορφές των HNN επεκτάσεων και οι κανονικές μορφές των split extensions συμπεριφέρονται αρκετά παρόμοια, κάποιος μπορεί να υποθέσει ότι κάθε Ascending HNN επέκταση με ομαδα βάσης πεπερασμένα παραγόμενη, προσεγ-

γιστικά πεπερασμένη ομάδα είναι επίσης προσεγγιστικά πεπερασμένη. Ωστόσο αυτό δεν ισχύει όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 7, καθώς υπάρχουν Ascending HNN επεκτάσεις με ομάδα βάσης πεπερασμένα παραγόμενη, προσεγγιστικά πεπερασμένη, που δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες. Μάλιστα, υπάρχουν παραδείγματα τέτοιων Ascending HNN επεκτάσεων [25] ώστε να αποτυγχάνουν να είναι Hopfian (που σημαίνει ότι κάθε μονομορφισμός από την ομάδα στον εαυτό της, είναι ισομορφισμός.) Αυτό είναι ισχυρότερο καθώς μία πεπερασμένα παραγόμενη, προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα είναι Hopfian.

Είναι επίσης ενδιαφέρον να δούμε πως η ΄φύση΄ της ομάδας βάσης καθορίζει το αν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη η Ascending HNN επέκταση. Η κλάση των πολυκυκλικών ομάδων (είναι οι επιλύσιμες ομάδες που κάθε υποομάδα τους είναι πεπερασμένα παραγόμενη) είναι μία πολύ ενδιαφέρουσα κλάση ομάδων με ενδιαφέρουσες ιδιότητες, όπως για παράδειγμα ότι είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες. Αξιοσημείωτο, επίσης, είναι το γεγονός ότι η κλάση των Ascending HNN επεκτάσεων πολυκυκλικών ομάδων είναι ακριβώς η κλάση των πεπερασμένα παραγόμενων coherent επιλύσιμων ομάδων ([26, 27]). Όπως αναφέραμε ήδη λοιπόν οι Ascending HNN επεκτάσεις με ομάδα βάσης πολυκυκλική είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες όπως θα αποδείξουμε στο Κεφάλαιο 6.

Σημειώνουμε ότι αρκετές περιπτώσεις του 1.1 είναι ήδη γνωστές. Για παράδειγμα, όταν G είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή, τότε $G*_\phi$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη μεταβελιανή (που σημαίνει ότι η παράγωγος υποομάδα της είναι αβελιανή) και άρα προσεγγιστικά πεπερασμένη από το Θεώρημα του P. Hall ([1][15.4.1]).

Αργότερα, αποδείχθηκε επίσης ότι ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για πεπερασμένα παραγόμενες ελεύθερες ομάδες. Στην ίδια εργασία των A. Borisov, M. Sapir [29] αποδεικνύεται (χρησιμοποιώντας μεθόδους αλγεβρικής γεωμετρίας) κάτι ισχυρότερο, δηλαδή ότι κάθε ascending HNN επέκταση μιας πεπερασμένης παραγόμενης γραμμικής ομάδας είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Αφού οι πεπερασμένα παραγόμενες ελεύθερες και οι πολυκυκλικές είναι πεπερασμένα παραγόμενες γραμμικές το αποτέλεσμα για τις πεπερασμένα παραγόμενες ελεύθερες και το 1.1 αποτελούν ειδική περίπτωση του.

Μάλιστα, έχει αποδειχθεί ανεξάρτητα μια γενίκευση του Θεωρήματος 1.1 στο ([28]), όπου αποδεικνύεται ότι κάθε constructible επιλύσιμη ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη(p. 271, Th. 10). Να αναφέρουμε ότι κάθε πολυκυκλική ομάδα είναι constructible και ότι οι Ascending HNN επεκτάσεις constructible επιλύσιμων είναι constructible επιλύσιμες ([28]). Οπότε μπορούμε να δούμε το 1.1 ως πόρισμα του.

Από την άλλη η κλάση των ομάδων που μελετάμε (Ascending HNN επεκτάσεις με βάση πολυκυκλικές) έχουν την ιδιότητα:

Μια ομάδα G είναι πεπερασμένα παραγόμενη επιλύσιμη τέτοια ώστε ο ακέραιος ομαδοδακτύλιος $\mathbb{Z}G$ είναι coherent(δηλαδή κάθε πεπερασμένα παραγόμενο ιδεώδες του $\mathbb{Z}G$ είναι πεπερασμένα παριστώμενο) αν και μόνο αν είναι πολύκυκλική ή Ascending HNN επέκταση με βάση πολυκυκλικη. [27].

Στο επόμενο Κεφάλαιο παραθέτουμε κάποια βασικά αποτελέσματα στην Θεωρία Ομάδων. Στο 3ο Κεφάλαιο ασχολούμαστε με τις HNN επεκτάσεις και κυρίως τις Ascending HNN επεκτάσεις. Στο Κεφάλαιο 4, δίνουμε τον ορισμό και κάποιες βασικές ιδιότητες της έννοιας της προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας. Στην συνέχεια το 5ο Κεφάλαιο πραγματεύεται με την παράθεση και απόδειξη κάποιων βασικών αποτελεσμάτων επιλύσιμων, μηδενοδύναμων και πολυκυκλικών ομάδων. Το Θέωρημα 1.1 και κάποιες εφαρμογές του αποδεικνύονται στο Κεφάλαιο 6. Τέλος στο 7ο Κεφάλαιο, αναφέρουμε ένα παράδειγμα μιας πεπερασμένα παραγόμενης, προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας και μια Ascending HNN επέκταση της που δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, το οποίο μας δείχνει ότι το θεώρημα 1.1 δεν μπορεί να γενικευτεί για ομάδες για πεπερασμένες παραγόμενες, προσεγγιστικά πεπερασμένες.

Κλείνοντας την εισαγωγή, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου κυρία Ολυμπία Ταλέλλη για την υπομονή της, την στήριξη και την ουσιαστική βοήθεια που μου παρείχε κατά την διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Την ευχαριστώ επίσης για την επιλογή τους θέματος, μέσω του οποίου μου δόθηκε η ευκαιρία να γνωρίσω ενδιαφέροντα αποτελέσματα στην Θεωρία Ομάδων αλλά και για το ότι με βοηθούσε σε οποιοδήποτε πρόβλημα προέκυπτε. Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Ευάγγελο Ράπτη και τον κύριο Μιχάλη Συκιώτη για την συμμετοχή στην τριμελή επιτροπή και την βοήθεια που μου προσέφεραν.

Ευχαριστώ πολύ την οικογένεια μου και ιδιαίτερα τον πατέρα μου Σάκη, την μητέρα μου Στέλλα, τον αδερφό μου Βαγγέλη, τον παππού μου Διονύση και την γιαγιά μου Σούλα για την βοήθεια, την συμπαράσταση τους όλα αυτά τα χρόνια, αλλά και την υποστήριξη τους με την οποία μπόρεσα να φτάσω στο σημείο που βρίσκομαι σήμερα. Τέλος, ευχαριστώ την Δήμητρα για την υπομονή και την αμέριστη βοήθεια της.

Κεφάλαιο 2

Βασικά στοιχεία στην Θεωρία Ομάδων

2.1 Ευθέα και Ημιευθέα γινόμενα

Ξεκινώντας θα δούμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούριες ομάδες από υπάρχουσες. Θα δούμε το ευθύ και το ημιευθύ γινόμενο. Θα δώσουμε τους ορισμούς για το εσωτερικό ευθύ και ημιευθύ γινόμενο όμως μπορούμε να κατασκευάσουμε ομάδες μέσω του εξωτερικού ευθέως και ημιευθέως γινομένου έχοντας ως σύνολο το καρτεσιανό τους γινόμενο και να έχουν ανάλογες ιδιότητες με το εσωτερικό.

Ορισμός 2.1. Μία ομάδα G λέμε ότι είναι το (εσωτερικό) ευθύ γινόμενο δύο κανονικών υποομάδων της, K και H, αν ισχύει $K \cap H = 1$ και $KH = G$. Τότε θα γράφουμε $G = K \times H$

Ο ορισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί και σε άπειρο πλήθος υποομάδων και τότε θα έχουμε ότι $G = \prod_{i \in I} G_i$, με $G_i \lhd G$.

Ορισμός 2.2. Μία ομάδα G λέμε ότι είναι (εσωτερικό) ημιευθύ γινόμενο της K επί της Q, αν η G περιέχει υποομάδες τις K, Q και ισχύουν:

i $K \lhd G$

ii $KQ = G$

iii $K \cap Q = 1$

Παρατηρήσεις:

1. Αν μια ομάδα G είναι το ημιευθύ γινόμενο των K επί της Q τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον ομομορφισμό ομάδων

$$\sigma : Q \to Aut(K)$$
$$x \to \sigma_x : K \to K$$
$$\text{ώστε } \sigma_x(k) = xkx^{-1}$$

Τότε παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο $g \in G$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $g = kq, k \in K, q \in Q$. Επίσης αν $g_1 = k_1q_1, g_2 = k_2q_2, k_1, k_2 \in K, q_1, q_2 \in Q$ τότε παρατηρούμε ότι $g_1g_2 = k_1q_1k_2q_2 = k_1q_1k_2q_1^{-1}q_1q_2 = k_1\sigma_{q_1}(k_2)q_1q_2$. Τότε γράφουμε $G = K \rtimes_\sigma Q$.

2. Επίσης, αποδεικνύεται ότι (Θεώρημα 7.9 στον [2]), αν δίνονται δύο ομάδες K, Q και υπάρχει ομομορφισμός $\sigma : Q \to Aut(K)$ με $\sigma_x(k) = xkx^{-1}$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το γινόμενο $G = KQ$, το οποίο είναι το (εξωτερικό) ημιευθύ γινόμενο της K επί την Q μέσω του σ.

3. Το ημιευθύ γινόμενο K επί την Q συχνά αναφέρεται και ως split extension της K επί την Q.

Παράδειγμα 2.3. *Η διεδρική με $2n$ πλήθος στοιχεία, $D_{2n} =< a, b | a^2 = 1, b^n = 1, aba = b^{-1} >$ είναι ημιευθύ γινόμενο δύο κυκλικών, των C_n και C_2, όπου το a δρα στα στοιχεία της C_n αντιστρέφοντας τα. Αυτό είναι αυτομορφισμός αφού C_n αβελιανή.*

2.2 Ομάδες στρέψης και Ομάδες χωρίς στρέψη

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε κάποιους ορισμούς για ομάδες που έχουν μόνο στοιχεία πεπερασμένης τάξης και για ομάδες που δεν έχουν καθόλου τέτοια στοιχεία.

Ορισμός 2.4. i Μία ομάδα λέγεται ελευθέρα στρέψης, είναι μια ομάδα που δεν έχει στοιχεία πεπερασμένης τάξης.

ii Μια ομάδα λέγεται ομάδα στρέψης, αν όλα τα στοιχεία της είναι πεπερασμένης τάξης, εκτός του τετριμμένου.

Παράδειγμα 2.5. *1. Οι πεπερασμένες ομάδες είναι ομάδες στρέψης.*

2. Υπάρχουν άπειρες ομάδες στρέψης. Το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι άπειρη γιατί το Q δεν έχει υποομάδες πεπερασμένου δείκτη αλλά είναι ομάδα στρέψης αφού αν πάρουμε $q = m/n \in \mathbb{Q}$ τότε προφανώς $nq \in \mathbb{Z}$

3. Ακόμα υπάρχουν πεπερασμένα παραγόμενες, άπειρες που είναι ομάδες στρέψης. Θα δούμε για παράδειγμα την ομάδα του Grigorchuk (στο Κεφάλαιο 7). Από την άλλη κάθε επιλύσιμη ομάδα στρέψης είναι πεπερασμένη, όπως θα δούμε παρακάτω.

4. Οι ελεύθερες αβελιανές είναι βασικό παράδειγμα ομάδων ελευθέρων στρέψης

2.3 Πεπερασμένα Παραγόμενες Ομάδες

Μια ομάδα ονομάζεται πεπερασμένα παραγόμενη όταν έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων.
Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε μερικές βασικές ιδιότητες τους και πως συνδέονται με την maximal condition.

Ορισμός 2.6. Μια ομάδα G λέμε ότι έχει την ιδιότητα maximal condition, αν δεν υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία υποομάδων. Αλλιώς αν $1 = H_0 \leq H_1 \leq ... \leq H_k \leq H_{k+1} \leq ...$ με $H_i \leq G$ τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $H_n = H_m$ για κάθε $n \geq m$.

Πρόταση 2.7. Έστω G ομάδα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η G έχει την maximal condition.

2. Κάθε $H \leq G$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

Απόδειξη. Έστω ότι G έχει την maximal condition και έστω $H \leq G$. Τότε αν H δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη, υπάρχουν $a_1, a_2, ..., a_n, ... \in H$ ώστε $a_k \notin < a_1, ..., a_{k-1} >$. Τότε θεωρώντας τα $H_m =< a_1, ..., a_m >$, προκύπτει μία γνησίως αύξουσα ακολουθία υποομάδων της G, το οποίο είναι άτοπο.
Αντίστροφα, έστω κάθε υποομάδα της G είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Θεωρούμε τότε $1 = H_0 \leq H_1 \leq ... \leq H_k \leq H_{k+1} \leq ....$ Αν πάρουμε $H = \bigcup_n H_n$ τότε είναι υποομάδα (αφού είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία υποομάδων). Από υπόθεση H είναι πεπερασμένα παραγόμενη, ας πούμε ότι την παράγουν τα $a_1, .., a_m$. Τότε για κάθε $i \in \{1, ..., m\}$ υπάρχει m_i ώστε $a_i \in H_{m_i}$.
Παίρνοντας $k = max\{m_i\}$, έχουμε ότι $H_k = H$ και αφού προφανώς $H_n \leqslant H$ για κάθε n ισχύει ότι $H_k = H_n$ για κάθε $n \geqslant k$. Δηλαδή η G έχει την maximal condition. □

Λήμμα 2.8. Τομή πεπερασμένου πλήθους υποομάδων πεπερασμένου δείκτη είναι πεπερασμένου δείκτη.

Απόδειξη. Θα το δείξουμε για δύο υποομάδες. Η γενική περίπτωση βγαίνει όμοια. Έστω G ομάδα και $K_1, K_2 \leq G$ υποομάδες πεπερασμένου δείκτη. Ορίζουμε απεικόνιση $f : G/(K_1 \cap K_2) \to G/K_1 \times G/K_2$ με $f(xK_1 \cap K_2) = (xK_1, xK_2)$.
Η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη.
Έστω $x(K_1 \cap K_2) = y(K_1 \cap K_2) \iff y^{-1}x \in K_1 \cap K_2 \iff y^{-1}x \in K_1$ και $y^{-1}x \in K_2 \iff xK_1 = yK_1$ και $xK_2 = yK_2$. Δηλαδή είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον η f είναι $1-1$.
Έστω $f(xK_1 \cap K_2) = f(yK_1 \cap K_2) \iff (xK_1, xK_2) = (yK_1, yK_2) \iff xK_1 = yK_1$ και $xK_2 = yK_2 \iff y^{-1}x \in K_1$ και $y^{-1}x \in K_2$, δηλαδή $y^{-1}x \in K_1 \cap K_2$. οπότε $xK_1 \cap K_2 = yK_1 \cap K_2$. άρα η f είναι $1-1$.
Αφού προφανώς $G/K_1 \times G/K_2$ πεπερασμένο (γιατί $G/K_1, G/K_2$ είναι πεπερασμένα), έχουμε ότι $G/K_1 \cap K_2$ πεπερασμένο, δηλαδή $K_1 \cap K_2$ πεπερασμένου δείκτη στην G. □

Για να αποδείξουμε κάποιες ακόμα ιδιότητες θα χρειαστούμε ένα Λήμμα :

Λήμμα 2.9. Έστω G ομάδα, $H \leq K \leq G$ και $N \lhd G$. Τότε αν $HN = KN$ και $H \cap N = K \cap N$, ισχύει ότι $H = K$.

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι $H \geq K$.
Έστω λοιπόν $x \in K$. Τότε $xN = hN$ για κάποιο $h \in H$, δηλαδή $h^{-1}x \in N$. Επίσης $h^{-1}x \in K$ και άρα $h^{-1}x \in (N \cap K) = (N \cap H)$, δηλαδή $h^{-1}x \in H$ και αφού $h^{-1} \in H$ έχουμε ότι $x \in H$. Οπότε τελικά έχουμε $H = K$. □

Τώρα θα δείξουμε μερικές ιδιότητες των ομάδων που έχουν την maximal condition.

Λήμμα 2.10. i Η maximal condition είναι κλειστή ως προς υποομάδες.

ii Η maximal condition είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις ομάδων.

iii Κάθε κυκλική ομάδα ικανοποιεί την maximal condition.

Απόδειξη. i Έστω $H \leq G$ και G ικανοποιεί την maximal condtion. Έστω $H_0 \leq H_1 \leq ... \leq H_n \leq ...$ ακολουθία υποομάδων της H, οπότε και της G. άρα είναι τελικά σταθερή. Άρα η H έχει την maximal condition.

ii Έστω $N \lhd G$ και G/N έχουν την maximal condition. Τότε θα δείξουμε ότι G έχει την maximal condition. Έστω $G_1 \leq G_2 \leq ... \leq G_n \leq ....$ Τότε αρχικά θεωρούμε $H_i = H \cap G_i$ και η H_i αύξουσα ακολουθία υποομάδων της H. Οπότε είναι τελικά σταθερή, δηλαδή υπάρχει m_1 ώστε $H_{m_1} = H_n$ ή αλλιώς $H \cap G_{m_1} = H \cap G_n$ για κάθε $n \geq m_1$. Από την άλλη, $G_1N/N \leq G_2N/N \leq ... \leq G_nN/N \leq ....$ είναι αύξουσα ακολουθία υποομάδων της G/N, οπότε είναι τελικά σταθερή, δηλαδή υπάρχει m_2 ώστε $G_{m_2}N = G_nN$ για κάθε $n \geq m_2$. Οπότε παίρνοντας $m = max\{m_1, m_2\}$, έχουμε ότι $H_m = H_n$ και $G_mN = G_nN$ για κάθε $n \geq m$. Οπότε από Λήμμα 2.9 έχουμε ότι $G_m = G_n$ για $n \geq m$. Άρα η τυχούσα αύξουσα σειρά υποομάδων της G είναι τελικά σταθερή. Δηλαδή η G έχει την maximal condition.

iii Έστω $G =< x >$ κυκλική ομάδα. Επίσης, έστω $G_1 \leq G_2 \leq ... \leq G_n \leq ...$ αύξουσα ακολουθία υποομάδων της G. Αφού G κυκλική, έχουμε $G_i =<$

$x^{k_i} >$ και τότε $k_i | k_1$ για κάθε i. Επειδή υπάρχουν πεπερασμένοι διαιρέτες, αναγκαστικά η G_i είναι τελικά σταθερή. Οπότε ικανοποιεί την maximal condition.

□

Τέλος θα αναφέρουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητα για τις πεπερασμένες παραγόμενες ομάδες:

Πρόταση 2.11. Σε πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, κάθε υποομάδα πεπερασμένου δείκτη είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

Απόδειξη. Έστω G πεπαρασμένα παραγόμενη και θεωρούμε ότι $G =< X >$, X πεπερασμένο.
Επίσης, η H πεπερασμένου δείκτη στην G, επομένως θεωρούμε ένα σύνολο δεξιών αντιπροσώπων της H στην G, έστω $\{1 = t_1, ..., t_n\}$. Συνεπώς αν σταθεροποιήσουμε ένα $g \in G$ τότε για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$ υπάρχει ένα $k \in \{1, ..., n\}$ τέτοιο ώστε: $Ht_j g = Ht_k$. Επομένως, $Ht_j g = Ht_{\sigma(j)}$ όπου σ είναι μετάθεση του συνόλου $\{1, ..., n\}$ που επάγει το g.
Συνεπώς, $t_j g t^{-1}_{\sigma(j)} \in H$, άρα υπάρχει ένα στοιχείο $h \in H$ (που εξαρτάται από τα j, g) τέτοιο ώστε $t_j g = ht_j$.
Έστω τώρα ένα $h \in H$. Τότε καθώς $h \in G$ το h γράφεται στην μορφή $h = x_1...x_s$, όπου $x_i \in X \cup X^{-1}$, για κάθε $1 \leq i \leq s$. Τότε προκύπτει ότι για το στοιχείο h ισχύει $h = t_1 h = t_1 x_1...x_s$. Επομένως εφαρμόζοντας διαδοχικά το προηγούμενο παίρνουμε

$$h = h(1, y_1)t_{\sigma_{y_1}} y_2...y_s = h(1, y_1)h(\sigma y_1(1), y_2)...h(\sigma_{y_{s-1}}, y_s)t_{\sigma_{y_{s-1}}}(1) \tag{2.1}$$

Όμως το στοιχείο h είναι στοιχείο της H, άρα ο αντιπρόσωπος που του αντιστοιχεί είναι το $t_1 = 1$, δηλαδή $t_{\sigma_{y_{s-1}}}(1) = 1$. Τελικά παίρνουμε

$$h = h(1, y_1)t_{\sigma_{y_1}} y_2...y_s = h(1, y_1)h(\sigma y_1(1), y_2)...h(\sigma_{y_{s-1}}, y_s) \tag{2.2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η ομάδα H παράγεται από τα $h(\sigma_{y_j}(1), y_k)$, τα οποία είναι πεπερασμένα σε πλήθος καθώς τα y_k είναι πεπερασμένα σε πλήθος και επίσης υπάρχουν πεπερασμένες μεταθέσεις του συνόλου $\{1, ...n\}$.
Επομένως η H είναι πεπερασμένα παραγόμενη. □

Αντίθετα, υπάρχουν παραδείγματα ώστε αν δεν είναι πεπερασμένου δείκτη να μην ισχύει. Δηλαδή, υπάρχουν υποομάδες που πεπερασμένα παραγόμενων ομάδων που δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενες.

Τέλος, θα αποδείξουμε ένα βασικό θεώρημα για τις πεπερασμένα παραγόμενες αβελιανές ομάδες και θα είναι το πρώτο βήμα για να το αποδείξουμε αργότερα και για τις επιλύσιμες.

Πρόταση 2.12. Αν G πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή, ομάδα στρέψης είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη. Έστω $G =< g_1, ..., g_n >$ (n ελάχιστο πλήθος γεννητόρων). Τότε αν $G_i =< g_i >$ μπορούμε να δούμε την G από θεώρημα δομής αβελιανών ομάδων, ως το ευθύ άθροισμα των G_i, δηλαδή $G = G_1 \bigoplus ... \bigoplus G_n$.
Όμως κάθε G_i είναι πεπερασμένη για κάθε i, αφού G ομάδα στρέψης και άρα g_i πεπερασμένης τάξης. Οπότε έχουμε ότι G ευθύ άθροισμα πεπερασμένων ομάδων, δηλαδή πεπερασμένη. □

2.4 Αναλλοίωτες Υποομάδες

Ορισμός 2.13. Θα λέμε ότι μια υποομάδα H μιας ομάδας G λέγεται πλήρως αναλλοίωτη, αν $\phi(H) \subseteq H$ για κάθε ενδομορφισμό της ϕ.

Λήμμα 2.14. Έστω G ομάδα και n φυσικός αριθμός, και N είναι η τομή των υποομάδων της Γ που έχουν δείκτη $\leq n$. Τότε N είναι πλήρως αναλλοίωτη στην G. Αν επιπλέον G είναι πεπερασμένα παραγόμενη, τότε η N έχει πεπερασμένο δείκτη στην G.

Ως συνέπεια αυτού του Λήμματος μπορούμε να δούμε ότι κάθε υποομάδα πεπερασμένου δείκτη σε μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G περιέχει πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην Γ.

Απόδειξη. Έστω ϕ ενδομορφισμός της G και έστω $N = \bigcap_{[G:H]\leqslant n} H$. Παρατηρούμε ότι $\phi^{-1}(N) = \phi^{-1}(\bigcap_{[G:H]\leqslant n} H) = \bigcap_{[G:H]\leqslant n} \phi^{-1}(H)$. Τώρα αφού η αντίστροφη εικόνα $\phi^{-1}(H)$ μιας υποομάδας H δείκτη $\leqslant n$ έχει επίσης δείκτη $\leqslant n$, βλέπουμε ότι $\phi^{-1}(N)$ είναι και αυτό τομή υποομάδων δείκτη $\leqslant n$ (όχι απαραίτητα όλων των υποομάδων). Έπεται ότι $N \leqslant \phi^{-1}(N)$ η ισοδύναμα $\phi(N) \leqslant N$. Επιπλέον αν G είναι πεπερασμένως παραγόμενη τότε υπάρχουν πεπερασμένοι ομομορφισμοί $G \to S_k$ για $k \leqslant n$ και αφού κάθε υποομάδα πεπερασμένου δείκτη ορίζει έναν μοναδικό τέτοιο ομορφισμό, υπάρχουν πεπερασμένες υποομάδες της με δείκτη $\leqslant n$. Σε αυτήν την περίπτωση αφού τομή υποομάδων πεπεραμένου δείκτη ειναι πεπεραμένου δείκτη, έχουμε ότι η N είναι τομή πεπεράσμένων υποομάδων πεπερασμένου δείκτη και άρα και αυτή πεπερασμένου δείκτη. $\square$

Λήμμα 2.15. Έστω ϕ ενδομορφισμός μιας ομάδας G, K μία ϕ-αναλλοίωτη κανονική της G και έστω $\bar{\phi} : (G/K) \to (G/K)$ η απεικόνιση που επάγεται απο την ϕ. Αν και η $\bar{\phi}$ και ο περιορισμός της ϕ στο K είναι ισομορφισμοί, τότε ϕ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $x \in ker\phi$, δηλαδή $\phi(x) = 1$. Τότε το η $\bar{\phi}$ στέλνει το xK στο $\phi(x)K = K$, άρα αφού $\bar{\phi}$ είναι μονομορφισμός πρέπει $xK = K \iff x \in K$. Όμως αφού ϕ περιορισμός στην K είναι μονομορφισμός έχουμε ότι $x = 1$. Τώρα για το επί παίρνουμε $y \in G$, αφού $\bar{\phi}$ είναι επί, υπάρχει κάποιο $x_0 \in G$ τέτοιο ώστε $\phi(x_0) = yk$ για κάποιο $k \in K$, και αφού ϕ περιορισμένη στο K επί έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $x_1 \in K$ τέτοιο ώστε $\phi(x_1) = k^{-1}$, οπότε $\phi(x_0x_1) = y$. $\square$

Κεφάλαιο 3

HNN επεκτάσεις

3.1 Ελεύθερα γινόμενα

Ορισμός 3.1. Θεωρούμε μια οικογένεια ομάδων $\{G_i =< X_i|R_i >\}$ και έστω H μια άλλη ομάδα καθώς και μία οικογένεια ομομορφισμών $\phi_i : H \to G_i, i \in I$. Τότε σχηματίζουμε την ομάδα με παράσταση:

$$G =< \bigcup_{i\in I} X_i | \bigcup_{i\in I} R_i \bigcup \{\phi_i(h)\phi_j(h^{-1}) : h \in H, i, j \in I\} >$$

όπου υποθέτουμε ότι τα σύνολα γεννητόρων X_i είναι ξένα ανά δύο. Τότε η ομάδα G ονομάζεται το ελεύθερο γινόμενο των G_i με αμάλγαμα H. και συμβολίζεται με

$$G = *_H G_i$$

Ορισμός 3.2. Αν επιπλέον, στον παραπάνω ορισμό, η H είναι τετριμμένη, τότε η G ονομάζεται ελεύθερο γινόμενο των G_i και γράφουμε

$$G = *_{i\in I} G_i$$

Παρατηρήσεις:

1. Στην περίπτωση του ελευθέρου γινομένου δύο ομάδων G_1, G_2 με αμάλγαμα H γράφουμε $G = G_1 *_H G_2$.

2. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Von Dyck (Θεώρημα 2.2.1 στο [1]) για κάθε $i \in I$ υπάρχει κανονικός ομομορφισμός $\sigma_i : G_i \to G$. Από το Θεώρημα κανονικής μορφής έπεται ότι ο σ_i είναι μονομορφισμός (θεωρήματα 11.34 και 11.35 στο [1]). Συνεπώς, όλες οι G_i εμφυτεύονται στην G και αν ταυτίσουμε κάθε G_i με την εικόνα της $\sigma_i(G_i)$, τότε ισχύει και $\phi_i(h) = \phi_j(h)$ για κάθε $h \in H$. Επομένως, μπορούμε να ταυτίσουμε την H με οποιαδήποτε από τις εικόνες $\phi_i(H)$ και τότε προκύπτει ότι $G_i \cap G_j = H$ για $i, j \in I, i \neq j$. Συνεπώς οι ομάδες G_i τέμνονται ακριβώς στην H.

3.2 HNN επεκτάσεις - Ascending HNN επεκτάσεις

Ορισμός 3.3. Έστω G μια ομάδα, και έστω $G =< X|R >$ μια παράσταση της G. Επιπλέον υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο υποομάδες της G, έστω $A.B$ εφοδιασμένες με έναν ισομορφισμό $\tau : A \to B$. Τότε σχηματίζουμε την ομάδα

$$E =< X, t|R \cup \{t^{-1}ut = \tau(u) : u \in A\} >$$

όπου $t \notin X$. Τότε η ομάδα E ονομάζεται HNN-επέκταση της G με σταθερό γράμμα t, συσχετίζουσες υποομάδες A και B, και αντίστοιχο ισομορφισμό τ. Συμβολίζουμε την E ως $G*_\tau$ ή $G*_A$

Παράδειγμα 3.4. *1.* $\mathbb{Z} = 1*_1$

2. $F_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \mathbb{Z}*_1$

3. Αν πάρουμε για $A = B = \mathbb{Z}^{n-1}$ *και* $\tau : \mathbb{Z}^{n-1} \to \mathbb{Z}^{n-1}$ *(η ταυτοτική), τότε* $\mathbb{Z}^{n-1}*_{\mathbb{Z}^{n-1}} \simeq \mathbb{Z}^n$.

Ορισμός 3.5. Θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό $\pi : G* < t > \to G*_A$. Τότε για κάθε $x \in G*_A$, $x = \pi(g_0 t^{e_1} ... t^{e_n} g_n)$ όπου $e_i \in \{-1, 1\}$ και $g_i \in G$.

Μία ακολουθία $(g_0, t^{e_1}, ..., t^{e_n}, g_n)$, όπως πριν, θα λέγεται ανηγμένη, αν δεν περιέχει υπολέξεις της μορφής $(t^{-1}, a, t), a \in A$, και $(t, \tau(a), t^{-1}), a \in A$.

Επιλέγοντας λέξη ελαχίστου μήκους, κάθε στοιχείο της $G *_A$ αναπαρίσταται από ανηγμένη λέξη.

Έστω T_A το σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της A στην G και T_B το σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της $\tau(A)$ στην G.

Ορισμός 3.6. Μια κανονική μορφή είναι μία ανηγμένη ακολουθία της μορφής $(g_0, t^{e_1}, ...t^{e_n}, g_n)$, τέτοιο ώστε

i g_0 είναι τυχόν στοιχείο της G

ii Αν $e_i = 1$ τότε $g_i \in T_B$

iii Αν $e_i = -1$, τότε $g_i \in T_A$

Τώρα θα αναφέρουμε το βασικό θεώρημα για την κανονική μορφή στις HNN επεκτάσεις:

Θεώρημα 3.7. Έστω $E = G *_A =< G, t | t^{-1}at = \phi(a), a \in A >$. Τότε κάθε x στοιχείο της E γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $x = \pi(g_0 t^{e_1} ...t^{e_n} g_n)$, όπου $(g_0, t^{e_1}, ...t^{e_n}, g_n)$ είναι σε κανονική μορφή.

Απόδειξη. Δες [9], t. 2.1, p. 182 □

Πόρισμα 3.8. Η G εμφυτεύεται στην $G *_A$.

Απόδειξη. Το $1 \neq g \in G$ παριστάνεται από διαφορετική κανονική μορφή, $\pi(g) \neq \pi(1)$ από προηγούμενο θεώρημα. Άρα η G εμφυτεύεται στην $G *_A$ μέσω της π □

Άρα μπορούμε να βλέπουμε την G ως υποομάδα της $G *_A$.
Επίσης παίρνουμε ως πόρισμα και το Λήμμα του Britton:

Πόρισμα 3.9. Αν $(g_0, t^{e_1}, ..., t^{e_n}, g_n)$ ανηγμένη λέξη με $n > 0$ τότε $g_0 t^{e_1} ...t^{e_n} g_n \neq 1$.

Απόδειξη. Ξεκινώντας από το g_n αντικαθιστούμε διαδοχικά τα g_i με στοιχεία της μορφής hs_i με $s_i \in T_A \cup T_B, h \in A \cup \phi(A)$. Με αυτήν την διαδικασία φτάνουμε σε κανονική μορφή που συνεχίζει να έχει μήκος $n > 0$. Άρα είναι διάφορο του 1, αφού παριστάνονται από διαφορετικές λέξεις στην κανονική μορφή. □

Παρατηρήσεις:

i Το στοιχείο t είναι άπειρης τάξης στην E και οι υποομάδες U και V είναι συζυγείς στην E μέσω του t.

ii Κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης είναι συζυγές με στοιχείο της G [9]

iii Κάθε πεπερασμένη υποομάδα είναι συζυγής με πεπερασμένη υποομάδα της G.

iv Αν $A \neq G$ και $\phi(A) \neq G$ τότε η $G*_\phi$ περιέχει ελεύθερη διάστασης 2. (Από Θεώρημα κανονικής μορφή χρησιμοποιώντας ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον μη τετριμμένοι αντιπρόσωποι συμπλόκων)

v Στην ειδική περίπτωση που μία από τις δύο συσχετιζόμενες υποομάδες ταυτίζεται με την G, τότε η E θα αναφέρεται ως ascending HNN- επέκταση. Σχετικά δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.10. Έστω G μια ομάδα και $\phi : G \to G$ ένας μονομορφισμός της G. Τότε η ascending HNN-επέκταση της G που επάγεται από την ϕ είναι η ομάδα $G*_\phi$ με παράσταση $G*_\phi =< G, t | t^{-1}gt = \phi(g), g \in G >$.

Σχόλια:

1. Κάθε στοιχείο $g \in G*_\phi$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $g = t^m g t^{-n}$, $m, n \geqslant 0$

2. Ο όρος ascending HNN -επέκταση προκύπτει από το γεγονός ότι μέσω του μονομορφισμού ϕ παίρνουμε την αύξουσα ακολουθία υποομάδων:

$$... \leq t^{-2}Gt^2 \leq t^{-1}Gt \leq G \leq tGt^{-1} \leq t^2Gt^{-2} \leq ...$$

3. Στην περίπτωση που ο μονομορφισμός ϕ είναι ισομορφισμός, τότε η G γίνεται κανονική υποομάδα της $G*_\phi$ οπότε η $G*_\phi$ ταυτίζεται με το ημιευθύ γινόμενο της G επί της άπειρη κυκλική που παράγεται από το t, δηλαδή $G*_\phi = G \ltimes_\phi < t >$. Συνεπώς το ημιευθύ γινόμενο είναι μια ειδική περίπτωση ascending HNN- επέκτασης.

4. Οι Ross Geoghegan, M. L. Mihalik, Mark Sapir και Daniel T.Wise στο [3] δίνουν ένα Λήμμα που χαρακτηρίζει τις ascending HNN- επέκτασεις, το οποίο και παραθέτουμε παρακάτω.

Λήμμα 3.11. Έστω H μία υποομάδα μίας ομάδας G, και έστω $t \in G$. Υποθέτουμε ότι:

1. $t^{-1}Ht \subseteq H$

2. $G =< H, t >$

3. $t^n \notin H$ για κανένα ακέραιο $n \neq 0$

Αν ϕ είναι ο ενδομορφισμός της H που επάγεται από συζυγία με το t, τότε η ομάδα G είναι ισόμορφη με την asxending HNN- επέκταση $H*_\phi$ με παράσταση

$$< H, s | s^{-1}hs = \phi(h), h \in H >$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον φυσικό ομομορφισμό $f : H*_\phi \to G$, που επάγεται από την ταυτοτική απεικόνιση στην H, με $f(h) = h$ για κάθε $h \in H$ και $f(s) = t$. Αφού την έχουμε ορίσει στους γεννήτορες, ο ομομορφισμός είναι καλά ορισμένος.
Τότε αν πάρουμε $g \in G$ από τις υποθέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το g μπορεί να γραφεί στην μορφή $g = t^m h t^{-n}$ όπου $m, n \in \mathbb{N}$. Επομένως παίρνουμε ότι $g = f(s^m h s^{-n})$, από όπου έπεται ότι ο f είναι επιμορφισμός.
Θα δείξουμε ότι είναι και μονομορφισμός. Πράγματι, έστω $w \in kerf$. Τότε, όπως πριν, το στοιχείο w γράφεται στην μορφή $w = s^m h s^{-n}$ όπου $n, m \in \mathbb{N}$. Οπότε

$$f(w) = t^m h t^{-n} = 1 \iff h = t^{-m} t^n \iff h = t^{n-m}.$$

Όμως από υπόθεση (3) προκύπτει ότι $n - m = 0$. Συνεπώς $h = t^0 = 1$ και $w = 1_G$. Άρα η f είναι 1-1. $\square$

Κεφάλαιο 4

Προσεγγιστικά Πεπερασμένες Ομάδες

4.1 Εισαγωγή

Μία ομάδα ονομάζεται προσεγγιστικά πεπερασμένη αν κάθε μη τετριμμένο του στοιχείο μπορεί να απεικονιστεί σε ένα μη τετριμμένο στοιχείο μέσω κάποιου ομομορφισμού επί μίας πεπερασμένης ομάδας. Οι προσεγγιστικά πεπερασμένες ομάδες είναι σημαντικές από πολλές απόψεις.

Αρχικά είναι φυσικά παραδείγματα ομάδων με επιλύσιμο πρόβλημα λέξης (Δες [9] Θ. IV.4.10.). Εμφανίζονται στην θεωρία ομάδων ως ομάδες Galois κάποιων συγκεκριμένων επεκτάσεων του σώματος των ρητών.([15]). Αυτές οι ομάδες Galois είναι και τα πρώτα παραδείγματα απείρων, πεπερασμένα παραγομένων ομάδων στρέψης. [16]

Άλλο σημαντικό παράδειγμα προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας είναι οι ομάδες που παράγονται από automata (ομάδες που ανακαλύφθηκαν από τους Aleshin, Suschanskii, Grigorchuk, Gupta, Sidki και άλλους) και πολλές άλλες ομάδες που δρουν σε δέντρα. Οι πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες πινάκων υπεράνω κάποιου μεταθετικού δακτυλίου είναι επίσης προσεγγιστικά πεπερασμένες [17] και συνεπώς, οι ελεύθερες, οι πολυκυκλικές, οι πεπερασμένα παραγόμενες μεταβελιανές ομάδες κλπ, είναι και αυτές, γιατί μπορούν να αναπαρασταθούν

μέσω πινάκων.
Πολλές κατασκευές διατηρούν την ιδιότητα του προσεγγιστικά πεπερασμένου. Για παράδειγμα, το καρτεσιανό και το ελεύθερο γινόμενο προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη και η split extension μιας πεπερασμένα παραγόμενης προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας προς μια προσεγγιστικά πεπερασμένη είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.[18]. Συγκεκριμένα, μια HNN επέκταση μιας προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας μέσω ενός αυτομορφισμού είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη γιατί είναι απλά το ημιευθύ γινόμενο μιας προσεγγιστικά πεπερασμένης και μιας κυκλικής.
Ένα ωραίο αποτέλεσμα του Malcev είναι ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα είναι Hopf, που σημαίνει ότι δεν είναι ισομορφική με κανένα γνήσιο πηλίκο της.([9] , Θ. IV.4.10). Είναι συχνά ευκολότερο να ελέγξεις ότι μια ομάδα δεν είναι Hopf παρά να δείξεις ότι δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Για να δείξουμε ότι μια ομάδα δεν είναι Hopf είναι αρκετό να βρούμε έναν ¨κακό' επιμορφισμό που δεν είναι μονομορφισμός.
Η πρόταση ότι μια ομάδα είναι Hopf μπορεί να θεωρηθεί σαν μία ¨προσέγγιση' της πρότασης ότι είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Για παράδειγμα, ο Sela απέδειξε [19] ότι κάθε υπερβολική ομάδα ελευθέρα στρέψης είναι Hopf. Εδώ να σημειώσουμε ότι είναι ακόμα ανοιχτό, αν κάθε υπερβολική ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. [20]

4.2 Προσεγγιστικά Πεπερασμένες

Ορισμός 4.1. Μια ομάδα G λέγεται προσεγγιστικά πεπερασμένη, αν για κάθε $g \in G$ υπάρχει $N \lhd G$ πεπερασμένου δείκτη τέτοια ώστε $g \notin N$.

Πρόταση 4.2. Έστω G ομάδα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Η G είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

2. $\cap\{N \leq G | N \lhd G, N \text{ πεπερασμένου δείκτη } \} = 1$

3. Για κάθε $1 \neq g \in G$ υπάρχει ομομορφισμός $f_g : G \to K$, K πεπερασμένη. και $f_g(g) \neq 1$.

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2) Έστω $1 \neq x \in \cap\{N \leq G | N \lhd G, N$ πεπερασμένου δείκτη $\}$

Από υπόθεση, υπάρχει υποομάδα $K \lhd G$ πεπερασμένου δείκτη με $x \notin K$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα ισχύει το ζητούμενο.

(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω $\cap\{N \leq G | N \lhd G, N$ πεπερασμένου δείκτη $\} = 1$ και έστω $x \neq 1$.

Τότε $x \notin \cap\{N \leq G | N \lhd G, N$ πεπερασμένου δείκτη $\}$. Η αλλιώς, υπάρχει $K \lhd G$ πεπερασμένου δείκτη με $x \notin K$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

(1) $\Rightarrow$ (3) Έστω $x \neq 1$. Τότε από υπόθεση υπάρχει $N \lhd G$, πεπερασμένου δείκτη ώστε $x \notin N$.

Θεωρούμε την προβολή $\pi : G \to G/N$. Προφανώς, G/N πεπερασμένη και $\pi(g) = gN \neq N$, αφού $g \notin N$ και άρα το ζητούμενο.

(3) $\Rightarrow$ (1) Έστω $1 \neq g \in G$. Από υπόθεση υπάρχει ομομορφισμός $f_g : G \to K$, K πεπερασμένη. και $f_g(g) \neq 1$.

Θεωρούμε λοιπόν ως $N = kerf_g \lhd G$. Τότε G/N ισόμορφη με υποομάδα του K, από πρώτο θεώρημα Ισομορφισμών, άρα πεπερασμένη. Επίσης από επιλογή f_g, $g \notin kerf_g$. Οπότε τελικά G προσεγγιστικά πεπερασμένη. □

Πρόταση 4.3. Υποομάδα προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη

Απόδειξη. Έστω $K \leq G$ και $x \in K$ με $x \neq 1$.

Αφού G προσεγγιστικά πεπερασμένη, σημαίνει ότι υπάρχει $N \lhd G$, πεπερασμένου δείκτη με $x \notin N$. Τότε $N \cap K \lhd K$ πεπερασμένου δείκτη στην K (αφού $K/K \cap N \simeq KN/N \leq G/N$ και G/N πεπερασμένη) και, προφανώς, $x \notin N \cap K$.

Δηλαδή, τελικά, K προσεγγιστικά πεπερασμένη. □

Πρόταση 4.4. Έστω G ομάδα και $K \leq G$ πεπερασμένου δείκτη. Αν K προσεγγιστικά πεπερασμένη, τότε G επίσης προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Απόδειξη. Η K μπορεί να επιλεγεί πλήρως αναλλοίωτη από λήμμα 2.14. Έστω $1 \neq x \in G$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Αν $x \in K$. Τότε αφού K προσεγγιστικά πεπερασμένη, υπάρχει υποομάδα N πεπερασμένου δείκτη στην K, με $x \notin N$. Η N μπορεί να επιλεγεί πλήρως αναλλοίωτη στην K, άρα και στην G, όπως πριν. Οπότε η N πλήρως αναλλοίωτη, άρα κανονική στην G και προφανώς πεπερασμένου δείκτη.

- Αν $x \notin K$. Από ορισμό προσεγγιστικά πεπερασμένης και αφού έχουμε ότι $K \lhd G$, η G είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

□

Παράδειγμα 4.5.
- *Το $\mathbb{Z}$ προσεγγιστικά πεπερασμένη ομάδα. Αν πάρουμε ένα $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ και πάρουμε $p > |n|$ πρώτο , τότε θεωρούμε την απεικόνιση $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ και προφανώς $\pi(n) \neq 0$. Οπότε από πρόταση είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

- *Ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{i\in I} Z_i$ αντιτύπων του $\mathbb{Z}$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Αν $0 \neq w = (n_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} Z_{i_0}$, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $n_{i_0} \neq 0$. Τότε βρίσκομε p όπως πριν τέτοιο ώστε :*
  $\bigoplus_{i\in I} Z_i \to \mathbb{Z}_{i_0} \to \mathbb{Z}_p$
  $w \to \;\; n_{i_0} \to [n_{i_0}]_p$ *Τότε f_w η σύνθεση την παραπάνω ομομορφισμών, ισχύει πως $f_w(w) \neq 0$ και άρα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

- *Από το παραπάνω μπορούμε να δούμε και το ότι κάθε πεπερασμένη παραγόμενη, αβελιανή ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.*

- *Οι πολυκυκλικές ομάδες που θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες. (Δες [1])*

- *Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, αφού το $\mathbb{Q}$ δεν έχει γνήσιες υποομάδες πεπερασμένου δείκτη. Αν είχε έστω $N \lhd \mathbb{Q}$, δείκτη n τότε θα ίσχυε ότι $nx \in N$ για κάθε x ρητό και αφού $1/n$ ρητός, θα ίσχυε $n/n = 1 \in N$, άρα $N = \mathbb{Q}$.*

- *Υπάρχουν και πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες που δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες όπως για παράδειγμα η ομάδα με παράσταση $< a, b | a^{-1}b^2a = b^3 >$(ονομάζεται ομάδα των Baumslag - Solitar) μπορεί να αποδειχτεί ότι δεν είναι Hopf και αφού είναι πεπερασμένα παραγόμενη, δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. [21]*

4.3 Γενίκευση

Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο για κάθε κλάση ομάδων:

Ορισμός 4.6. Έστω X μια κλάση ομάδων. Θα λέμε ότι η ομάδα G είναι προσεγγιστικά-X, αν για κάθε $1 \neq g \in G$, υπάρχει $N_g \lhd G$ τέτοια ώστε $g \notin N_g$ και G/N_g να ανήκει στην κλάση X.

Αν λοιπόν ισχύει ότι μια ομάδα είναι προσεγγιστικά -X, τότε παρατηρούμε ότι $\bigcap\limits_{1 \neq g \in G} N_g = 1$.
Πράγματι, έστω $1 \neq x \in \bigcap\limits_{1 \neq g \in G} N_g$. Τότε προφανώς $x \in N_x$, που είναι άτοπο από επιλογή της N_x. Τελικά $\bigcap\limits_{1 \neq g \in G} N_g = 1$.
Οπότε μπορούμε να παρατηρήσουμε το παρακάτω:

Πρόταση 4.7. Αν G μια προσεγγιστικά-X ομάδα τότε $\iota : G \to \prod\limits_{1 \neq g \in G} G/N_g$, τέτοια ώστε $\iota(x) = (xN_g)_{1 \neq g \in G}$ είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω λοιπόν $1 \neq x \in G$. Τότε αν $x \in ker\iota$, έχουμε ότι πρέπει $xN_g = N_g$ για κάθε $g \neq 1$ ή ισοδύναμα $x \in N_g$ για κάθε $g \neq 1$, το οποίο δεν γίνεται από την προηγούμενη παρατήρηση για $x \neq 1$. Οπότε τελικά ι μονομορφισμός. □

Οπότε παρατηρούμε ότι η G εμφυτεύεται στην ομάδα $\prod\limits_{1 \neq g \in G} G/N_g$.
Ιδιαίτερα, αν G προσεγγιστικά πεπερασμένη αφού ισχύει ότι $\cap\{N \leq G | N \lhd G, N$ πεπερασμένου δείκτη $\} = 1$, έχουμε ότι G εμφυτεύεται σε γινόμενο κάποιων πεπερασμένων πηλίκων της.

Κεφάλαιο 5

Μηδενοδύναμες- Επιλύσιμες- Πολυκυκλικές Ομάδες

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με κάποιες ενδιαφέρουσες κλάσεις ομάδων.
Αρχικά οι επιλύσιμες ομάδες είναι οι ομάδες που μπορούμε να κατασκευάσουμε μέσω επεκτάσεων αβελιανών ομάδων. Ιστορικά η έννοια επιλύσιμη εμφανίστηκε στην Θεωρία Galois. Συγκεκριμένα, μια πολυωνυμική εξίσωση είναι επιλύσιμη με ριζικά αν και μόνο αν η αντίστοιχη ομάδα Galois είναι επιλύσιμη.
Οι πολυκυκλικές ομάδες είναι ουσιαστικά οι επιλύσιμες που ικανοποιούν την maximal condition για υποομάδες. Βασικά παραδείγματα πολυκυκλικών ομάδων είναι οι πεπερασμένα παραγόμενα αβελιανές πεπερασμένα παραγόμενες μηδενοδύναμες, και οι πεπερασμένες επιλύσιμες ομάδες. Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί ότι κάθε πολυκυκλική είναι ισόμορφη με μια ομάδα πινάκων ακεραίων [22] και κάθε επιλύσιμη υποομάδα μιας ομάδας πινάκων ακεραίων, είναι πολυκυκλική.
Τέλος οι μηδενοδυναμες, είναι η πιο κοντινή στις αβελιανές ομάδες, κλάση ομάδων καθώς έχουν αρκετές κοινές ιδιότητες που δεν ισχύουν σε άλλες ομάδες (όπως θα δούμε στην πρόταση 5.15).

5.1 Σειρές Ομάδων- Ορισμοί

Ορισμός 5.1. Έστω G ομάδα. Τότε ορίζεται η παράγωγος σειρά της G :

$$G^{(0)} = G \rhd G' \rhd G'' \rhd .... \rhd G^{(n)} \rhd ...$$

όπου $G^{(n)} = (G^{(n-1)})'$

Ορισμός 5.2.

1. Μια ομάδα G λέγεται επιλύσιμη, αν υπάρχει κανονική σειρά $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ τέτοια ώστε τα πηλίκα G_{i+1}/G_i να είναι αβελιανές για κάθε i.

2. Μια ομάδα G λέγεται πολυκυκλική, αν υπάρχει κανονική σειρά $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .... \lhd G_n = G$ τέτοια ώστε τα πηλίκα G_{i+1}/G_i να είναι κυκλικές για κάθε i (αυτές ονομάζονται πολυκυκλικές σειρές).

Ορισμός 5.3. Μία ομάδα G ονομάζεται μηδενοδύναμη, αν έχει μια σειρά με $G_i \lhd G$ $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ με τα πηλίκα $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$.

1. Έστω $Z(K)$ θα συμβολίζουμε το κέντρο μιας ομάδας K. Η ανωτέρα κεντρική σειρά της G ορίζεται επαγωγικά ορίζοντας $Z_0(G) = 1$ και $Z_{i+1}(G)$ την αντίστροφη εικόνα της $Z(G/Z_i(G)$ στην G, η αλλιώς η $Z_{i+1}(G)$ είναι τέτοια ώστε $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G)$ για κάθε i φυσικό.

2. Η κατωτέρα κεντρική σειρά της G ορίζεται επαγωγικά ορίζοντας $\gamma_0(G) = G$ και $\gamma_{i+1} = [G, \gamma_i(G)]$.

3. Τα πηλίκα $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ ονομάζονται ανωτέρα κεντρικά πηλίκα και τα $\gamma_{i+1}(G)/\gamma_i(G)$ ονομάζονται κατωτέρα κεντρικά πηλίκα.

4. Λέμε ότι η G είναι μηδενοδύναμη, αν υπάρχει ένας φυσικός i τέτοιος ώστε $Z_i(G) = G$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει φυσικός i τέτοιος ώστε $\gamma_i(G) = 1$. Λέμε ότι η κλάση μηδενοδυναμίας της G είναι ο μικρότερος φυσικός που ισχύουν οι προηγούμενες ισότητες.

5.2 Απλές Ιδιότητες και Σχέσεις μεταξύ τους

Ιδιότητες - Παρατηρήσεις

1. Κάθε μηδενοδύναμη είναι επιλύσιμη

2. Μία ομάδα είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η παράγωγος σειρά της τερματίζει, δηλαδή αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $G^n = 1$.

3. Μια ομάδα είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν η ανωτέρα κεντρική σειρά τερματίζει. Επίσης μια ομάδα είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν η κατωτέρα κεντρική σειρά τερματίζει. Μάλιστα στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι το μήκος της ανωτέρας κεντρικής σειράς ισούται με το μήκος την κατωτέρας κεντρικής σειράς και ορίζεται ως τάξη μηδενοδυναμίας.

Λήμμα 5.4. 1. Υποομάδα επιλύσιμης είναι επιλύσιμη.

2. Πηλίκο επιλύσιμης είναι επιλύσιμη.

3. Υποομάδα πολυκυκλικής είναι πολυκυκλική.

4. Πηλίκο πολυκυκλικής είναι πολυκυκλική.

5. Υποομάδα μηδενοδύναμης είναι μηδενοδύναμη.

6. Πηλίκο μηδενοδύναμης είναι μηδενοδύναμη.

Απόδειξη. 1. Έστω $H \leq G$ με G επιλύσιμη. Υπάρχει $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ ώστε G_{i+1}/G_i αβελιανή για κάθε i. Τότε αν θέσουμε $H_i = H \cap G_i \lhd H$. παίρνουμε $1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_n = H$ και $H_{i+1}/H_i = (H \cap G_{i+1})/(H \cap G_i) = (H \cap G_{i+1})/((H \cap G_{i+1}) \cap G_i) \simeq ((H \cap G_{i+1})G_i)/G_i \leq G_{i+1}/G_i$ είναι αβελιανή ως υποομάδα της αβελιανής G_{i+1}/G_i για κάθε i, άρα H επιλύσιμη.

2. Έστω G επιλύσιμη και $N \lhd G$. Υπάρχει $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ ώστε G_{i+1}/G_i αβελιανή για κάθε i. Από Θεώρημα Schreier και οτι επιλέπτυνση

επιλύσιμης σειράς είναι επιλύσιμη, άρα υπάρχει επιλύσιμη σειρά $1 = K_0 \lhd K_1 \lhd ... \lhd K_r = N \lhd ... \lhd K_m = G$, τότε $K_r/N \lhd K_{r+1}/N \lhd ... \lhd K_m/N = G/n$ και επίσης $(K_{i+1}/N)/(K_i/N) \simeq K_{i+1}/K_i$, άρα αβελιανή.

3. Έστω $H \leq G$ με G πολυκυκλική. Υπάρχει $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ ώστε G_{i+1}/G_i κυκλική για κάθε i. Τότε αν θέσουμε $H_i = H \cap G_i \lhd H$. παίρνουμε $1 = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_n = H$ και $H_{i+1}/H_i = (H \cap G_{i+1})/(H \cap G_i) = (H \cap G_{i+1})/((H \cap G_{i+1}) \cap G_i) \simeq ((H \cap G_{i+1})G_i)/G_i \leq G_{i+1}/G_i$ είναι κυκλική ως υποομάδα της κυκλικής G_{i+1}/G_i για κάθε i, άρα H πολυκυκλική

4. Έστω G πολυκυκλική και $N \lhd G$. Υπάρχει $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ ώστε G_{i+1}/G_i κυκλική για κάθε i. Από Θεώρημα Schreier και οτι επιλέπτυνση πολυκυκλικής σειράς είναι πολυκυκλική, άρα υπάρχει πολυκυκλική σειρά $1 = K_0 \lhd K_1 \lhd ... \lhd K_r = N \lhd ... \lhd K_m = G$, τότε $K_r/N \lhd K_{r+1}/N \lhd ... \lhd K_m/N = G/n$ και επίσης $(K_{i+1}/N)/(K_i/N) \simeq K_{i+1}/K_i$, άρα κυκλική.

5. Έστω $H \leq G$ με G μηδενοδύναμη. Υπάρχει $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ κεντρική σειρά, δηλαδή $[G_i, G] \leq G_{i-1}$. Θεωρούμε $H_i = H \cap G_i$ και τότε $[H_i, H] = [H \cap G_i.H] \leq G_{i-1} \cap H = H_{i-1}$.

6. Έστω G μηδενοδύναμη και $N \lhd G$. Υπάρχει $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ κεντρική σειρά, δηλαδή $[G_i, G] \leq G_{i-1}$. Τότε $1 \lhd G_1N/N \lhd G_2N/N \lhd ... \lhd G_nN/N = G/N$. Οπότε $[G_iN/N, G/N] = [G_i, G]N/N \leq G_{i-1}N/N$.

□

Πρόταση 5.5. Μία πεπερασμένα παραγόμενη επιλύσιμη ομάδα στρέψης είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη. Έστω $1 = G^{(n)} \lhd G^{(n-1)} \lhd .... \lhd G' \lhd G$ η παράγωγος σειρά της G. Θα κάνουμε επαγωγή στο μήκος της παραγώγου σειράς (το ελάχιστο ώστε να τερματίζει).

- Για $n = 1$, έχουμε ότι $G' = 1$ δηλαδή η G αβελιανή και το έχουμε ήδη αποδείξει στην 2.12.

- Έστω $n > 1$. Τότε θεωρούμε $A = G^{(n-1)}$. Ισχύει ότι G/G_{n-1} πεπερασμένα παραγόμενη, επιλύσιμη ομάδα στρέψης (πηλίκο πεπερασμένα παραγόμενης επιλύσιμης ομάδα στρέψης) και το μήκος της παραγώγου σειράς είναι $< n$ αφού $1 = A/A \lhd G^{(n-2)}/A \lhd ... \lhd G'/A \lhd G/A$ είναι επιλύσιμη σειρά. Οπότε από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι G/A πεπερασμένη ή αλλιώς A πεπερασμένου δείκτη στην G. Οπότε η A είναι πεπερασμένα παραγόμενη ως υποομάδα πεπρασμένου δείκτη σε περασμένα παραγόμενη. Άρα για την A έχουμε ότι είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα στρέψης(ως υποομάδα ομάδας στρέψης). Από βάση της επαγωγής έχουμε ότι A πεπερασμένη.
  Τελικά A και G/A πεπερασμένες, άρα και η G είναι πεπερασμένη.

□

5.3 Ιδιότητες της Κατωτέρας και της Ανωτέρας Κεντρικής Σειράς

Λήμμα 5.6. Έστω G μια ομάδα. Τότε $Z_j(G/Z_k(G)) = Z_{j+k}(G)/Z_k(G)$ για κάθε δύο φυσικούς j, k.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε φυσικό k και θα κάνουμε επαγωγή στο j. Θα συμβολίζουμε $Z_k = Z_k(G)$ και $Z_1(G) = Z(G)$

- $Z_1(G/Z_k) = Z(G/Z_k) = Z_{k+1}/Z_k$ από ορισμό Z_{k+1}.
- Έστω ότι ισχύει $Z_j(G/Z_k) = Z_{j+k}/Z_k$ Τότε $Z_{j+1}(G/Z_k)/Z_j(G/Z_k)$ από ορισμό ισούται με $Z((G/Z_k)/Z_j(G/Z_k)) = Z((G/Z_k/(Z_{j+k}/Z_k)$ από επαγωγική υπόθεση.
  Ισχυρισμός:
  $$(Z_{j+k+1}/Z_k)/(Z_{j+k}/Z_k) = Z((G/Z_k)/(Z_{j+k}/Z_k) = Z_{j+1}(G/Z_k)/Z_j(G/Z_k)$$
  Απόδειξη. **Ισχυρισμού**
  Από την μία αν $(x_0Z_k)Z_{j+k}/Z_k \in Z((G/Z_k)/(Z_{j+k}/Z_k))$ ισχύει πως $(gx_0Z_k)Z_{j+k}/Z_k =$

$(x_0 g Z_k)Z_{j+k}/Z_k$, για κάθε $g \in G$. Άρα $g^{-1}x_0^{-1}gx_0Z_k \in Z_{j+k}/Z_k$ ή αλλιώς $gx_0Zk = x_0gZ_k$. Οπότε $(x_0Z_k)Z_{j+k}/Z_k \in (Z_{j+k+1}/Z_k)/(Z_{j+k}/Z_k)$.
Αντίστροφα, αν $(x_0Z_k)Z_{j+k}/Z_k \in (Z_{j+k+1}/Z_k)/(Z_{j+k}/Z_k)$, δηλαδή $x_0 \in Z_{j+k+1}$ και $g \in G$, τότε $x_0gZ_{j+k} = gx_0Z_{j+k}$, και άρα $(gx_0Z_k)Z_{j+k}/Z_k = (x_0gZ_k)Z_{j+k}/Z_k$. Οπότε τελικά έχουμε $(x_0Z_k)Z_{j+k}/Z_k \in Z((G/Z_k)/(Z_{j+k}/Z_k)$ □

Τότε έχουμε από ισχυρισμό $Z_{j+1}(G/Z_k) = Z_{j+k+1}/Z_k$. Οπότε η επαγωγή τελείωσε.

□

Θεώρημα 5.7. Υπάρχει επιμορφισμός $f_i : \gamma_i/\gamma_{i+1} \bigotimes_{\mathbb{Z}} G/G' \to \gamma_{i+1}/\gamma_{i+2}$

Απόδειξη. Έστω $F_i = \gamma_i/\gamma_{i+1}$ και $G_{\alpha\beta}$. Θεωρούμε $f_i : F_i \times G_{\alpha\beta}$ με $f_i(a\gamma_{i+1}, g\gamma_2)) = [a,g]\gamma_{i+2}$ για κάθε $g \in G$, $a \in \gamma_i$.
Τότε f_i καλά ορισμένη. Πράγματι, έστω $a\gamma_{i+1} = b\gamma_{i+1}$, τότε $ab^{-1} \in \gamma_{i+1}$, οπότε $[ab^{-1}, g] \in \gamma_{i+2}$.
Όμως $[ab^{-1}, g] = ba^{-1}g^{-1}ab^{-1}g = b(a^{-1}g^{-1}ag)(g^{-1}b^{-1}gb)b^{-1} = b[a,g]([b,g])^{-1}b^{-1}$
Από την παραπάνω σχέση, $[ab^{-1}, g]$ και $[a,g]([b,g])^{-1}$ είναι συζυγή και αφού $[ab^{-1}, g] \in \gamma_{i+2}$ και $\gamma_{i+2} \lhd G$ έχουμε ότι $[a,g]([b,g])^{-1} \in \gamma_{i+2} \iff [a,g]\gamma_{i+2} = [b,g]\gamma_{i+2}$. Όμοια $[a,g_1]\gamma_{i+2} = [a,g_2]\gamma_{i+2}$. Δηλαδή f_i καλά ορισμένη.
Επίσης, για την διγραμμικότητα, αν $a \in \gamma_i$ ισχύει ότι $[a,g] \in \gamma_{i+1}$ και $[a,g]\gamma_{i+1} \in Z(G/\gamma_{i+2})$, οπότε $[ab,g]\gamma_{i+2} = b^{-1}[a,g]g^{-1}bg\gamma i + 2 = [a,g]\gamma_{i+2}[b,g]\gamma_{i+2}$. Αντίστοιχα, είναι γραμμική και ως προς την δεύτερη μεταβλητή.
Από τα παραπάνω και καθολική ιδιότητα τανυστικού γινομένου επάγεται ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $f_i : F_i \bigotimes_{\mathbb{Z}} G_{\alpha\beta} \to F_{i+1}$ με $f_i(a\gamma_{i+1} \bigotimes gG') = [a,b]\gamma_{i+2}$ και αφού οι μεταθέτες $[a,g]$ παράγουν την $\gamma_{i+1}/\gamma_{i+2}$ έχουμε ότι f_i επιμορφισμός. □

Λήμμα 5.8. Αν G ομάδα και $N \lhd G$ τότε $\gamma_n(G/N) = N\gamma_n(G)/N$.

Απόδειξη. Καταρχάς ισχύει ότι $N\gamma_k(G) = \gamma_k(G)N$ αφού $N \lhd G$. Οπότε αν πάρουμε $yN \in N\gamma_k(G)/N$ τότε υπάρχει $y' \in \gamma_k(G)$ και $n \in N$ τέτοιο ώστε

$yN = y'nN = y'N$, οπότε θα μπορούμε να θεωρούμε ότι $y \in \gamma_k(G)$.
Θα κάνουμε την απόδειξη με επαγωγή στο n.

- Για $n = 0$, $\gamma_0(G/N) = G/N$ και $\gamma_0 N/N = GN/N = G/N$. Οπότε ισχύει η ισότητα.

- Έστω ότι $\gamma_n(G/N) = \gamma_n(G)N/N$. Θα δείξουμε ότι $\gamma_{n+1}(G/N) = \gamma_{n+1}(G)N/N$.
  Πράγματι, έστω ένας γεννήτορας του $\gamma_{n+1}(G)$ που είναι της μορφής $[x, y]$ με $x \in G$, $y \in \gamma_n(G)$. Τότε $yN \in N\gamma_n(G)/N = \gamma_n(G/N)$ από επαγωγική υπόθεση.
  Έτσι $[x, y]N = [xN, yN] \in [G/N, \gamma_n(G/N)] = \gamma_{n+1}(G/N)$ από ορισμό της κατωτέρω κεντρικής σειράς.
  Άρα δείξαμε ότι $N\gamma_{n+1}(G)/N \subseteq \gamma_{n+1}(G/N)$.
  Αντίστροφα, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε γεννήτορας της $\gamma_{n+1}(G/N)$ είναι στοιχείο της $N\gamma_{n+1}/N$, άρα παίρνουμε $[xN, yN] \in \gamma_{n+1}(G/N)$ με $xN \in G/N$ και $yN \in \gamma_n(G/N) = N\gamma_n(G)/N$. Από παρατήρηση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $y \in \gamma_n(G)$.
  Δηλαδή, $[xN, yN] = [x, y]N \in N\gamma_{n+1}/N$ αφού $x \in G$ και $y \in \gamma_n$.
  Οπότε $\gamma_{n+1}(G/N) \subseteq N\gamma_{n+1}(G)/N$ και άρα τελικά την ισότητα.

□

Λήμμα 5.9. Για κάθε πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα ισχύει ότι τα πηλίκα γ_i/γ_{i+1} είναι πεπερασμένα παραγόμενες αβελιανές ομάδες για κάθε i.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο i.

- Για $i = 1$ παίρνουμε την $G/G' = G_{\alpha\beta}$, η οποία είναι πεπερασμένα παραγόμενη ως πηλίκο της G που είναι πεπερασμένα παραγόμενη και προφανώς αβελιανή.

- Έστω $F_i = \gamma_i/\gamma_{i+1}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή. Θα δείξουμε ότι $F_{i+1} = \gamma_{i+1}/\gamma_{i+2}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή.
  Αφού η F_i και η $G_{\alpha\beta}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενες προκύπτει ότι και η ομάδα $F_i \bigotimes_{\mathbb{Z}} G_{\alpha\beta}$ είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενη. Αυτό συμβαίνει

γιατί ισχύει γενικά πως αν έχουμε A, B δύο ομάδες πεπερασμένα παραγόμενες και έστω $\{a_1, a_2 ...., a_n\}, \{b_1.b_2 ...., b_m\}$ τα σύνολα γεννητόρων τους αντίστοιχα, τότε σύνολο γεννητόρων της ομάδας $A \bigotimes_{\mathbb{Z}} B$ είναι το σύνολο $\{a_i \otimes b_j : 1 \leq \ i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ που προφανώς είναι πεπερασμένο και άρα $A \bigotimes_{\mathbb{Z}} B$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη. Όμως από το Λήμμα 5.7 παίρνουμε ότι $F_{i+1} = \gamma_{i+1}/\gamma_{i+2}$ είναι επιμορφική εικόνα της $F_i \bigotimes_{\mathbb{Z}} G_{\alpha\beta}$, άρα είναι πεπερασμένα παραγόμενη ως επιμορφική εικόνα πεπερασμένα παραγόμενης. Επομένως κάθε F_i είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή.

□

5.4 Μηδενοδύναμες

Θα χρειαστούμε αυτό το τεχνικό Λήμμα για να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

Λήμμα 5.10. Έστω G ομάδα και $u, v \in G$.
Τότε ισχύει:

$$[u^m, v] = [u, v]^{u^{m-1}} [u, v]^{u^{m-2}} \dots [u, v]^u [u, v]$$

όπου $[u, v]^g = g^{-1}[u, v]g$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε με επαγωγή στο m.

- Για $m = 1$ έχουμε ότι $[u, v] = [u, v]$ που ισχύει.

- Έστω ότι ισχύει η πρόταση για m. Τότε

$$\begin{gathered}[u^{m+1}, v] = u^{-m-1}v^{-1}u^{m+1}v = u^{-1}u^{-m}v^{-1}u^m uv = u^{-1}[u^m, v]u^{-1}uv = \\ u^{-1}[u, v]^{u^{m-1}}[u, v]^{u^{m-2}}...[u, v]^u[u, v]v^{-1}uv = \\ u^{-1}[u, v]^{u^{m-1}}uu^{-1}[u, v]^{u^{m-2}}uu^{-1}...[u, v]^u uu^{-1}[u, v]uu^{-1}v^{-1}uv = \\ [u, v]^{u^m}[u, v]^{u^{m-1}}....[u, v]^u[u, v]\end{gathered}$$

$\square$

Λήμμα 5.11. Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα :

1. G είναι ελευθέρα στρέψης
2. $Z(G)$ ελευθέρα στρέψης
3. Όλα τα ανωτέρω κεντρικά πηλίκα της G είναι ελευθέρα στρέψης.

Απόδειξη. (1) $\Longrightarrow$ (2) Είναι προφανές αφού υποομάδα ομάδας ελευθέρα στρέψης, είναι ελευθέρα στρέψης.
(2) $\Longrightarrow$ (3) Αφού G μηδενοδύναμη υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$1 = Z_0 \lhd Z_1 = Z(G) \lhd ... \lhd Z_n = G$$

Θα κάνουμε επαγωγή στην τάξη μηδενοδυναμίας.

- Αν $n = 1$ τότε ισχύει από υπόθεση.
- Έστω ότι ισχύει Z_i/Z_{i-1} ελευθέρα στρέψης, θα δείξουμε ότι Z_{i+1}/Z_i ελευθέρα στρέψης. Έστω $gZ_i \in Z_{i+1}/Z_i$ με $(gZ_i)^m = Z_i$. Αφού $g \in Z_{i+1}$ έχουμε ότι $[g, h] \in Z_i$ για κάθε $h \in Z_i$.
  Τώρα από προηγούμενο Λήμμα και ότι $Z_i/Z_{i-1} = Z(G/Z_{i-1})$, έχουμε ότι $[g^m, h]Z_i = ([g, h]Z_i)^m$. Επομένως, το στοιχείο $[g, h]Z_{i-1}$ έχει πεπερασμένη τάξη και από την υπόθεση της επαγωγής αναγκαστικά $[g, h] \in Z_{i-1}$ για κάθε $h \in G$ ή ισοδύναμα σημαίνει ότι $g \in Z_i$. Άρα το τυχόν στοιχείο πεπερασμένης τάξης, είναι τετριμμένο. Δηλαδή η Z_{i+1}/Z_i είναι ελευθέρα στρέψης.

(3)$\Longrightarrow$ (1) Έστω $1 \neq x \in G$ με $x^m = 1$. Τότε αφού G μηδενοδύναμη υπάρχει i τέτοιο ώστε $xZ_i \neq Z_i$. Όμως $x^m Z_i = Z_i$, δηλαδή xZ_i πεπερασμένης τάξης. Αφού από υπόθεση πρέπει $xZ_i = Z_i$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει $x \neq 1$ με $x^m = 1$. $\square$

Πρόταση 5.12. Αν G είναι ελευθέρα στρέψης μηδενοδύναμη, τότε $G/Z(G)$ είναι επίσης (μηδενοδύναμη) ελευθέρα στρέψης.

Απόδειξη. Έστω G μηδενοδύναμη τότε $G/Z(G)$ μηδενοδύναμη ως πηλίκο μηδενοδύναμης.
Επίσης, από Λήμμα 5.6 έχουμε ότι $Z(G/Z(G)) = Z_2(G)/Z(G)$. Όμως αφού G ελευθέρα στρέψης από το τελευταίο του Λήμματος 5.11 έχουμε ότι $Z_2(G)/Z(G)$ είναι ελευθέρα στρέψης.
Άρα από το Λήμμα 5.11 ξανά έχουμε ότι αφού η $Z(G/Z(G))$ ελευθέρα στρέψης, άρα και η $G/Z(G)$ ελευθέρα στρέψης. □

Λήμμα 5.13. Έστω H υποομάδα μιας πεπερασμένα παραγόμενης, μηδενοδύναμης ομάδας G. Τότε $H \cap G^p = H^p$ για επαρκώς μεγάλους πρώτους p.

Απόδειξη. Δες Baumslag [6] [Proposition 2.2] □

Λήμμα 5.14. Αν G είναι πεπερασμένα παραγόμενη, μηδενοδύναμη ομάδα με πεπερασμένη αβελιανοποίηση G/G', τότε και η G είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι:

Ισχυρισμός: γ_i/γ_{i+1} είναι πεπερασμένο για κάθε i.

Τότε αφού G μηδενοδύναμη, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\gamma_n = 1$, οπότε $|G| = [G : 1] = [G : \gamma_1][\gamma_1 : \gamma_2]...[\gamma_{n-1} : \gamma_n] < \infty$. αφού $[\gamma_i : \gamma_{i+1}] < \infty$ για κάθε i. Δηλαδή G πεπερασμένη.

Απόδειξη. **Ισχυρισμού**
Θα το δείξουμε με επαγωγή στο n.

- Για $n = 1$, ισχύει ότι $G/\gamma_1 = G/G'$ είναι πεπερασμένη από υπόθεση.

- Έστω ότι γ_{i-1}/γ_i είναι πεπερασμένη. Τότε θα δείξουμε ότι γ_i/γ_{i+1} πεπερασμένη. Από Λήμμα 5.7 υπάρχει επιμορφισμός $f_i : \gamma_{i-1}/\gamma_i \bigotimes_{\mathbb{Z}} G/G' \to \gamma_i/\gamma_{i+1}$. Από επαγωγική υπόθεση γ_{i-1}/γ_i πεπερασμένη και G/G' πεπερασμένη, οπότε και το τανυστικό τους γινόμενο είναι πεπερασμένο. Άρα και η επιμορφική της εικόνα η γ_i/γ_{i+1} είναι επίσης πεπερασμένη.

□

Και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Αντίστοιχη απόδειξη μπορούμε να κάνουμε και για άλλες ιδιότητες που διατηρούνται από τανυστικά γινόμενα και επιμορφικές εικόνες, όπως για παράδειγμα πεπερασμένα παραγόμενη.

Θεώρημα 5.15. Τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης σε μια μηδενοδύναμη G αποτελούν κανονική υποομάδα. Αυτή την υποομάδα την ονομάζουμε ομάδα στρέψης και την συμβολίζουμε T_G. Μάλιστα ισχύει ότι G/T_G είναι ελευθέρα στρέψης και η T_G είναι το ευθύ γινόμενο των p συνιστωσών της.

Απόδειξη. Έστω G μηδενοδύναμη και $T_G = \{a \in G | \exists m \in \mathbb{N}, a^m = 1\} \subseteq G$.
Έστω $a, b \in T_G$, τότε θεωρούμε $H =< a, b >$. Έχουμε ότι $H/H' =< aH', bH' >$ πεπερασμένα παραγόμενη, αβελιανή και κάθε στοιχείο έχει πεπερασμένη τάξη, οπότε είναι πεπερασμένη.
Αφού H μηδενοδύναμη, από το προηγούμενο λήμμα H πεπερασμένη. Δηλαδή $H \subseteq T_G$. Πιο συγκεκριμένα, $ab \in T_G$. Αφού προφανώς $a^{-1} \in T_G$ για κάθε $a \in T_G$, η T_G είναι υποομάδα της G.
Για το δεύτερο σκέλος, έστω $xT_G \in G/T_G$ και $k \in \mathbb{N}$ ώστε $x^k T_G = T_G$, δηλαδή $x^k \in T_G$, που σημαίνει ότι υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ με $x^{kl} = 1$. Από το τελευταίο έπεται ότι $x \in T_G$. Ξεκινήσαμε με $x^k T_G = T_G$ και καταλήξαμε στο ότι $x \in T_G$, δηλαδή G/T_G είναι ελευθέρα στρέψης.
Για το τελευταίο δες [5.2.7] στο [2] □

5.5 Πολυκυκλικές

Πρόταση 5.16. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα είναι πολυκυκλική.

Απόδειξη. Έστω $F_i = \gamma_i/\gamma_{i+1}$. Από Λήμμα 5.9, κάθε F_i είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή, άρα είναι ευθύ άθροισμα κυκλικών ομάδων, δηλαδή $F_i = \bigoplus_{1 \le j \le n_j} C_{i_j}$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε μια επιλέπτυνση της αρχικής σειράς ώστε όλα τα πηλίκα να είναι κυκλικές ομάδες.

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε το πρώτο βήμα, δηλαδή να παρεμβάλλουμε κατάλληλες υποομάδες $G \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd ... \rhd \gamma_2$ ώστε όλα τα πηλίκα να είναι κυκλικές ομάδες. Όμοια μπορούμε να κάνουμε και τα υπόλοιπα.
Έστω ότι $G_{\alpha\beta} = \bigoplus_{1\leq k\leq n} C_k$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n.

- Αν $n = 1$ τότε η ίδια $G_{\alpha\beta}$ είναι κυκλική, οπότε ισχύει το ζητούμενο.

- Έστω $n > 1$. Τότε $\bigoplus_{1\leq k\leq n-1} C_k \leq G_{\alpha\beta}$, άρα υπάρχει $G_1 \lhd G$ τέτοια ώστε

$$G_1/\gamma_2 = \bigoplus_{1\leq k\leq n-1} C_k.$$

Από τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμών προκύπτει ότι

$$G/G_1 \simeq G_{\alpha\beta}/(G_1/\gamma_2) \simeq C_k.$$

Επομένως θεωρούμε την σειρά

$$G \rhd G_1 \rhd \gamma_2 \rhd ... \rhd 1$$

Όμως επειδή

$$G_1/\gamma_2 \simeq \bigoplus_{1\leq k\leq n-1} C_k$$

και άρα από επαγωγική υπόθεση υπάρχει επιλέπτυνση της $G_1 \rhd \gamma_2$ με πηλίκα κυκλικές ομάδες, οπότε η σειρά $G \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd ... \rhd \gamma_2$ είναι η ζητούμενη και η επαγωγή ολοκληρώθηκε. Συνεπώς η ομάδα είναι πολύκυκλική.

□

Πρόταση 5.17. Έστω G μια ομάδα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η G είναι πολυκυκλική.

2. Η G είναι επιλύσιμη και ικανοποιεί την maximal condition

3. Η G είναι επιλύσιμη και κάθε υποομάδα της είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το πρώτο συνεπάγεται το δεύτερο.
Αρχικά θεωρούμε ότι G είναι πολυκυκλική και τότε έχει κυκλική σειρά η οποία είναι και επιλύσιμη σειρά αφού οι κυκλικές είναι αβελιανές. Δηλαδή είναι επιλύσιμη.
Τώρα για να δείξουμε ότι ικανοποιεί την maximal condition θεωρούμε μια κυκλική σειρά της G, $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd .. \lhd G_n = G$ και κάνουμε επαγωγή στο μήκος της n.

- Για $n = 1$ η G είναι κυκλική και από Λήμμα 2.10 ικανοποιεί την maximal condition.

- Έστω ότι ισχύει για πολυκυκλικές ομάδες με μήκος $< n$. Τότε αν θεωρήσουμε $N = G_{n-1}$ από επαγωγική υπόθεση έχει την maximal condition και επίσης G/N κυκλική, άρα έχει την maximal condition (από βάση επαγωγής). Τότε από Λήμμα 2.10 και η G ικανοποιεί την maximal condition.

Το δεύτερο συνεπάγεται το τρίτο αφού η maximal condition είναι ισοδύναμο με το ότι κάθε υποομάδα είναι πεπερασμένα παραγόμενη
Για το τρίτο συνεπάγεται το πρώτο, θεωρούμε την παράγωγο σειρά. Κάθε όρος της σειράς είναι πεπερασμένα παραγόμενη από υπόθεση. Άρα κάθε πηλίκο είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή και άρα ευθύ άθροισμα κυκλικών. Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα με την απόδειξη της πρότασης 5.16, επιλεπτύνουμε την σειρά και όλα τα πηλίκα είναι κυκλικές. Άρα η G είναι πολυκυκλική. □

Λήμμα 5.18. Έστω G πολυκυκλική ομάδα. Ο αριθμός των άπειρων κυκλικών πηλίκων σε μια πολυκυκλική σειρά για G είναι αναλλοίωτος.

Απόδειξη. Αρχικά, αφού κάθε 2 κανονικές σειρές έχουμε ισοδύναμες επιλεπτύνσεις (από θεώρημα Schreier), προφανώς κάθε 2 επιλεπτύνσεις έχουν ίδιο αριθμό άπειρων κυκλικών παραγόντων. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι αν επιλεπτύνουμε μια κυκλική σειρά, θα συνεχίσει να έχει τον ίδιο αριθμό άπειρων παραγόντων.
Πράγματι, έστω $G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ κυκλική σειρά της G. Η επιλέπτυνση

προκύπτει σε βήματα βάζοντας μία υποομάδα την φορά, μας αρκεί να παρεμβάλλουμε μια υποομάδα.
Οπότε θεωρούμε $G_i \lhd H \lhd G_{i+1}$.
Υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

- Αν $[G_{i+1} : G_i] < \infty$, τότε όλα τα πηλίκα θα είναι πεπερασμένα και ο αριθμός των άπειρων κυκλικών παραμένει ίδιος.

- Αν $G_{i+1}/G_i \simeq \mathbb{Z}$. Τότε H/G_i υποομάδα άπειρης κυκλικής άρα είναι τετριμμένη ή άπειρη κυκλική. Αν είναι τετριμμένη, τότε έχουμε $H = G_i$ και ισχύει προφανώς το ζητούμενο. Αν τώρα H/G_i είναι άπειρη κυκλική, είναι αναγκαστικά πεπερασμένου δείκτη στην G_{i+1}/G_i άρα και η $G_{i+1}/H \simeq (G_{i+1}/G_i)/(H/G_i)$ είναι πεπερασμένη. Άρα έχουμε ότι H πεπερασμένου δείκτη στην G_{i+1}. Οπότε έχουμε πάλι έναν άπειρο κυκλικό παράγοντα και δεν αλλάζει το πλήθος των παραγόντων.

$\square$

Ορισμός 5.19. Ο αριθμός των απείρων πηλίκων σε μια πολυκυκλική σειρά για μια πολυκυκλική ομάδα G (που όπως είδαμε είναι αναλλοίωτος) ονομάζεται αριθμός μήκος Hirsch της G και συμβολίζεται $h(G)$.

Θεώρημα 5.20. Έστω H υποομάδα μιας πολυκυκλικής ομάδας G. Τότε H και G έχουν ίδιο μήκος Hirsch αν και μόνο αν H είναι πεπερασμένου δείκτη στην G.

Απόδειξη. Αρχικά θεωρούμε $[G; H] < \infty$. Από Λήμμα 2.14 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι H πλήρως αναλλοίωτη στην G.(γιατί υπάρχει $H' \leq G$ πεπερασμένου δείκτη, πλήρως αναλλοίωτη με $H' \leq H$ τότε αρκεί να δείξουμε ότι $h(H') = h(G)$ αφού $h(H') \leq h(H) \leq h(G)$.) Ειδικά, $H \lhd G$ και τότε H πολυκυκλική και G/H πολυκυκλική ως υποομάδα και πηλίκο πολυκυκλικής. Έχουμε ότι υπάρχουν σειρές $1 = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_n = H$ με τα διαδοχικά πηλίκα κυκλικά. Επίσης, όμοια $1 = H/H \lhd G_1/H \lhd ... \lhd G_m/H = G/H$ με τα πηλίκα κυκλικές και αναγκαστικά πεπερασμένες αφού $[G : H] < \infty$. Οπότε ισχύει ότι $1 = H_0 \lhd H_1 \lhd ... \lhd H_n = H \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_m$ είναι κυκλική σειρά ($G_{i+1}/G_i \simeq (G_{i+1}/H)/(G_i/H)$) αφού οι παραπάνω είναι και το μήκος των άπειρων παραγόντων της είναι $h(H)$ οπότε $h(H) = h(G)$, αφού το μήκος είναι αναλλοίωτο.

Αντίστροφα, το αντίστροφο θα το δείξουμε με επαγωγή στην $h(G) = n$

- Για $n = 0$, η G είναι πεπερασμένη οπότε και η H είναι πεπερασμένη άρα προφανώς $[G : H] < \infty$

- Έστω ότι ισχύει για κάθε ομάδα K με $h(K) \leq n-1$. Έστω $H \leq G$ και $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ με G_{i+1}/G_i κυκλική για κάθε i. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι G/G_{n-1} άπειρη. (Αν είναι πεπερασμένη τότε $K = H \cap G_{n-1} \leq G_{n-1}$ και κανονική πεπερασμένου δείκτη στην H, άρα από το αντίστροφο $h(H) = h(K)$ και αρκεί να δείξουμε ότι $h(G_{n-1}) = h(K)$. Οπότε αντικαθιστούμε την G με την G_{n-1} και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο). Τότε $h(G) = h(G_{n-1}) + 1$. Θεωρούμε την $K = G_{n-1} \cap H \lhd H$ και επίσης $H/K = H/(H \cap G_{n-1}) \simeq HG_{n-1}/G_{n-1} \leq G/G_{n-1}$ η οποία είναι κυκλική άρα και η H/K κυκλική. Επίσης, αφού $h(H) = h(G)$ έπεται ότι $h(K) = h(G_{n-1})$ και από επαγωγική υπόθεση K πεπερασμένου δείκτη στην G_{n-1}.
  Τέλος, HG_{n-1}/G_{n-1} μη τετριμμένη (αφού $H \nsubseteq G_{n-1}$) υποομάδα της κυκλικής G/G_{n-1} οπότε πεπερασμένου δείκτη, άρα HG_{n-1} πεπερασμένου δείκτη στην G. Όπως πριν αντικαθιστώντας την G με την πεπερασμένου δείκτη HG_{n-1} μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $G = HG_{n-1}$. Αλλά οι αντιπρόσωποι συμπλόκων της K στην G_{n-1} είναι αντιπρόσωποι συμπλόκων της H στην $HG_{n-1} = G$, οπότε H πεπερασμένου δείκτη στην G.

□

Πόρισμα 5.21. Αν G είναι πολυκυκλική και $\phi : G \to G$ μονομορφισμός, τοτε $\phi(G)$ είναι πεπερασμένου δείκτη στην G.

Απόδειξη. Αφού ϕ μονομορφισμός, έχουμε ότι $G \simeq \phi(G)$ και άρα $h(G) = h(\phi(G))$, οπότε από προηγούμενο Λήμμα $[G : \phi(G)[< \infty$. □

Θεώρημα 5.22. Έστω G πολυκυκλική ομάδα.Αν $N \lhd G$ ισχύει ότι $h(N) + h(G/N) = h(G)$

Απόδειξη. Καταρχάς, αφού G πολυκυκλική έχουμε ότι $N, G/N$ πολυκυκλικές. Άρα υπάρχουν πολυκυκλικές σειρές, δηλαδή $1 = N_0 \lhd N_1 \lhd ...N_k = N$ και $N/N = G_0/N \lhd G_1/N \lhd ... \lhd G_m/N = G/N$ ώστε τα πηλίκα να είναι κυκλικές. Οπότε αν πάρουμε την σειρά $1 = N_0 \lhd N_1 \lhd ...N_k = N \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_m = G$, οπότε αφού ισχύει ότι $G_{i+1}/G_i \simeq (G_{i+1}/N)/(G_i/N)$ έχουμε για ότι η σειρά για την G έχει άπειρα πηλίκα όσα το άθροισμα των άπειρων πηλίκων στις άλλες δύο και αφού ο αριθμός Hirsch είναι ανεξάρτητος της σειράς, έχουμε ότι $h(G) = h(N) + h(G/N)$. □

Πόρισμα 5.23. Αν $\phi : G \to G$ ομομορφισμός. Τότε ισχύει ότι: $h(ker\phi) + h(\phi(G)) = h(G)$

Απόδειξη. Ισχύει λόγω του προηγούμενου θεωρήματος, αφού $G/ker\phi \simeq \phi(G)$. Άρα για $N = ker\phi$, έχουμε ότι $h(ker\phi) + h(\phi(G)) = h(G)$. □

Από Λήμμα 5.20 έπεται άμεσα ότι:

Πρόταση 5.24. Αν G είναι ελευθέρα στρέψης πολυκυκλική και ϕ ενδομορφισμός της G τέτοια ώστε $\phi(G)$ να έχει πεπερασμένο δείκτη στην G, τότε ϕ είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη. Ισχύει ότι $h(ker\phi) + h(\phi(G)) = h(G)$ και αφού $[G : \phi(G)] < \infty$ έχουμε ότι $h(G) = h(\phi(G))$. Άρα $h(ker\phi) = 0$. Άρα $ker\phi$ δεν έχει άπειρα πηλίκα και αφού G ελευθέρα στρέψης, αναγκαστικά $ker\phi = 1$, δηλαδή ϕ μονομορφισμός. □

Θεώρημα 5.25. Κάθε πολυκυκλική G έχει κανονική υποομάδα, πεπερασμένου δείκτη $N \lhd G$, τέτοια ώστε να υπάρχει κανονική σειρά με την ιδιότητα:

$$1 = N_0 \lhd N_1 \lhd ... \lhd N_k = N : N_{i+1}/N_i \simeq \mathbb{Z} \tag{5.1}$$

Απόδειξη. Για μία πεπερασμένη ομάδα ισχύει προφανώς για $N = 1$, οπότε θα θεωρούμε ότι G άπειρη. Έστω $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ...G_{n-1} \lhd G_n = G$ κυκλική σειρά της G. Κάνουμε επαγωγή στο n,

- Για $n = 1$, έχουμε ότι G άπειρη κυκλική. Οπότε όποια υποομάδα της και να επιλέξουμε είναι πεπερασμένου δείκτη και είναι και αυτή άπειρη κυκλική, δηλαδή έχει την ζητούμενη ιδιότητα.

- Έστω ότι ισχύει για ομάδες με κυκλική σειρά μήκους $< n$. Παίρνουμε για $N = G_{n-1}$. Τότε από επαγωγική υπόθεση υπάρχει $M \lhd N$ πεπερασμένου δείκτη ώστε να ικανοποιεί την σχέση 5.1, δηλαδή να υπάρχουν $1 = M_0 \lhd M_1 \lhd ... \lhd M_k = M$ με $M_{i+1}/M_i \simeq \mathbb{Z}$.
Αρχικά, βλέπουμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M \lhd G$. Πράγματι, θεωρούμε την μεγαλύτερη κανονική υποομάδα της M στην G, την $M_G = \bigcap_{g \in G} gMg^{-1}$. Τότε η M_G έχει όλες τις ζητούμενες ιδιότητες της M και επιπρόσθετα είναι από επιλογή κανονική στην G. Για την ομάδα N/M_G παρατηρούμε ότι είναι πολυκυκλική ως πηλίκο της πολυκυκλικής N, ιδιαίτερα επιλύσιμη, επίσης είναι πεπερασμένα παραγόμενη (ως υποομάδα πολύκυκλικής) και κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη (Αν πάρουμε $nM_G \in N/M_G \Leftrightarrow n \in gMg^{-1}$ για κάθε $g \in G$. Αλλιώς, $g^{-1}ng \in M$ για κάθε $g \in G$. Όμως $g^{-1}ng \in N$, οπότε το στοιχείο $g^{-1}ngM \in N/M$ για κάθε $g \in G$, η οποία όμως είναι πεπερασμένη. Αν θεωρήσουμε $c = |N/M|$ τότε $g^{-1}n^c gM = (g^{-1}ng)^c M = M$ για κάθε $g \in G$, ή διαφορετικά $n^c \in gMg^{-1}$ για κάθε $g \in G$, οπότε $n^c \in M_G$. Οπότε το τυχόν στοιχείο της N/M_G έχει πεπερασμένη τάξη.). Οπότε πεπερασμένα παραγόμενη, επιλύσιμη ομάδα στρέψης είναι από πρόταση 5.5 πεπερασμένη. Δηλαδή η M_G πεπερασμένου δείκτη στην N. Τέλος θα δείξουμε ότι κάθε υποομάδα μιας ομάδας με την ιδιότητα 5.1 ικανοποιεί την ιδιότητα 5.1, ιδιαίτερα και η M_G την ικανοποιεί οπότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την M με την M_G και να την θεωρούμε κανονική στην G. (Πράγματι, λοιπόν έστω μια ομάδα $B \leq A$ ώστε να υπάρχει σειρά $1 = A_0 \lhd A_1 \lhd ... \lhd A_k = A$ με $A_{i+1}/A_i \simeq \mathbb{Z}$ τότε θεωρούμε την σειρά $B_i = A_i \cap B$ τότε $1 = B_0 \lhd B_1 \lhd ... \lhd B_k = B$ και έχουμε $B_{i+1}/B_i = (A_{i+1} \cap B)/(A_i \cap B) = (A_{i+1} \cap B)/A_i \cap (A_{i+1} \cap B) \simeq (A_{i+1} \cap B)A_i/A_i \leq A_{i+1}/A_i \simeq \mathbb{Z}$, οπότε μπορεί να είναι άπειρη κυκλική ή τετριμμένη. Αφαιρώντας τις τετριμμένες καταλήγουμε σε σειρά που όλα τα

πηλίκα είναι άπειρες κυκλικές και έχουμε το ζητούμενο.)
Ξέρουμε ότι G/N κυκλική. Υπάρχουν δυο περιπτώσεις:
Αν G/N πεπερασμένη, αφού και η M/N πεπερασμένη, τότε έχουμε ότι και η G/M πεπερασμένη και η ζητούμενη υποομάδα είναι η M.
Έστω τώρα ότι G/N άπειρη κυκλική και ας πούμε ότι $G/N =< xN >$ για κάποιο $x \in G$.
Παρατηρούμε ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε x^r να κεντροποιεί την N/M, δηλαδή $x^r n x^{-r} M = nM$ για κάθε $n \in N$ και μάλιστα ισχύει επίσης ότι $x^{ar} n x^{-ar} M = nM$. (Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : G/N \to Aut(N/M)$ με $\phi(x^r N) : N/M \to N/M$ τέτοια ώστε $\phi(x^r N)(nM) = x^r n x^{-r} M$ η οποία είναι καλά ορισμένη γιατί $N \lhd G$. Η ϕ είναι ομομορφισμός ανάμεσα σε μία άπειρη και μία πεπερασμένη (ομάδα αυτομορφισμών πεπερασμένης) και άρα αναγκαστικά έχει μη τετριμμένο πυρήνα αφού δεν μπορεί να είναι 1-1, δηλαδή υπάρχει $x^r N \neq N$ με $\phi(x^r N) = id$ η αλλιώς $x^r n x^{-r} M = nM$. Και αν $x^r N \in ker\phi$ έχουμε ότι $x^{ar} N \in ker\phi$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ αφού $x^{ar} N = (x^r N)^a$.)
Μετά θεωρούμε την υποομάδα $L =< x^r, M >$. Παρατηρούμε ότι αφού $G/N =< xN >$ το τυχόν στοιχείο της $g \in G$ γράφεται ως $g = x^k n$, οπότε $G =< x, N >$. Επίσης, ισχύει ότι $L \lhd G$. (Θα δείξουμε ότι $g x^{ar} m g^{-1} \in L$ για κάθε $g \in G$ και αφού τα στοιχεία της μορφής αυτής παράγουν την L έχουμε το ζητούμενο. Έστω $g = x^k n \in G$ τότε $x^k n x^{ar} m n^{-1} x^{-k} = x^k n m_1 m n^{-1} x^{ar} x^{-k} = x^k n m_1 m n^{-1} x^{-k} x^{ar}$
γιατί από προηγούμενα $x^{ar} m n^{-1} x^{-ar} n m^{-1} = m_1 \in M$ ισοδύναμα $x^{ar} m n^{-1} = m_1 m n^{-1} x^{ar}$. Τότε αφού $m_1 m \in M$ και $M \lhd N$ έχουμε ότι $n m_1 m n^{-1} \in M$ και αφού $M \lhd G$ έχουμε ότι $x^k n m_1 m n^{-1} x^{-k} \in M$
οπότε τελικά $x^k n m_1 m n^{-1} x^{-k} x^{ar} \in< x^r, M >= L$. Οπότε $L \lhd G$.
Έχουμε λοιπόν, αφού $G =< x, N >$ ότι η G/L παράγεται από τα $< x, L > /L$ και NL/L τα οποία θα δείξουμε ότι είναι πεπερασμένα. Το τυχόν στοιχείο gL γράφεται ως $x^k nL$, άρα και η G/L πεπερασμένη. Πράγματι, λοιπόν, η $< x, L > /L$ πεπερασμένη αφού ισχύει ότι $x^r \in L$, δηλαδή έχει το πολύ r στοιχεία. Ενώ για την άλλη παρατηρούμε ότι $NL/L \simeq N/(L \cap N) = N/M$ που είναι πεπερασμένη.

Τέλος L/M άπειρη κυκλική, αφού παράγεται από το $< x^r M >$ και ισχύει ότι $x^{rk} \notin M$ για κάθε k, γιατί $G/N =< xN >$ άπειρη κυκλική οπότε $x^{rk} \notin N$. Οπότε η $L \lhd G$, πεπερασμένου δείκτη και ισχύει ότι $1 = M_0 \lhd M_1 \lhd ... \lhd M_k = M \lhd L$ με όλα τα πηλίκα είναι άπειρες κυκλικές.

□

Λήμμα 5.26. Αν $N \lhd G$ και $N, G/N$ ελευθέρες στρέψεις, τότε και η G ελευθέρα στρέψης.

Απόδειξη. Έστω $1 \neq g \in G$, ώστε $g^m = 1$. Τότε αφού N ελευθέρα στρέψης, αναγκαστικά $g \notin N$. Δηλαδή, $gN \neq N$. Όμως $(gN)^m = g^m N = N$, το οποίο μας οδηγεί σε άτοπο αφού G/N ελευθέρα στρέψης. Άρα τελικά G ελευθέρα στρέψης. □

Λήμμα 5.27. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη, μηδενοδύναμη ομάδα έχει υποομάδα ελευθέρα στρέψης πεπερασμένου δείκτη.

Απόδειξη. Είναι άμεσο από 5.16, 5.25 και 5.26. □

Ορισμός 5.28. Έστω $\mathfrak{P}_1$ και $\mathfrak{P}_2$ δύο κλάσεις ομάδων (για παράδειγμα πεπερασμένη, μηδενοδυναμη, πολυκυκλική). Λέμε ότι η ομάδα G είναι $\mathfrak{P}_1$ επί $\mathfrak{P}_2$ αν η G έχει κανονική υποομάδα N με την ιδιότητα $\mathfrak{P}_1$ τέτοια ώστε το πηλίκο G/N να έχει την ιδιότητα $\mathfrak{P}_2$.

Πρόταση 5.29. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη πεπερασμένη-επί-αβελιανή ομάδα, είναι αβελιανή-επί-πεπερασμένη.

Απόδειξη. Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη πεπερασμενη-επί-αβελιανή.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $H \lhd G$ πεπερασμένη ώστε G/H αβελιανή.
Θεωρούμε την $C = C_G(H) = \{g \in G | ghg^{-1} = h . h \in H\}$ τότε $C \lhd G$ πεπερασμένου δείκτη.
Αυτό ισχύει γιατί θεωρούμε την $\phi : G \to Aut(H)$ με $\phi(g) = (h \to ghg^{-1})$. που είναι καλά ορισμένη γιατί $H \lhd G$. Τότε $ker\phi = C \lhd G$ οπότε $G/ker\phi \simeq im\phi \leqslant Aut(H)$. Οπότε αφού $Aut(H)$ είναι πεπερασμένη (γιατί H πεπερασμένη), έπεται ότι και G/C πεπερασμένη.

Επίσης, παρατηρούμε ότι C μηδενοδύναμη, αφού $1 \lhd C \cap H \lhd C$ κεντρική σειρά. Αυτό ισχύει επειδή $C \cap H$ αβελιανή και επίσης $C/C \cap H \simeq CH/C \leqslant G/H$, και G/H αβελιανή, άρα και η $C/C \cap H$ αβελιανή.
Οπότε για την C μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 5.27 και άρα υπάρχει $K \leqslant C$ πεπερασμένου δείκτη, ελευθέρα στρέψης. Επίσης παρατηρούμε ότι K αβελιανή γιατί $K' \leqslant K$ και $K' \leqslant H$ αφού $K' \leqslant G' \leqslant H$ (G/H αβελιανή). Δηλαδή $K' \leqslant H \cap K = 1$ αφού H πεπερασμένη και K ελευθέρα στρέψης.
Τελικά έχουμε ότι υπάρχει $K \leqslant G$ αβελιανή και πεπερασμένου δείκτη (αφού K πεπερασμένου δείκτη στην C και C πεπερασμένου δείκτη στην G). Οπότε μπορεί από Λήμμα 2.14 να επιλεγεί πλήρως αναλλοίωτη (γιατί υποομάδα αβελιανής είναι αβελιανή), ιδιαίτερα κανονική.
Οπότε έχουμε κανονική αβελιανή υποομάδα πεπερασμένου δείκτη, δηλαδή G είναι αβελιανή- επί - πεπερασμένη. □

Θεώρημα 5.30. Μια πολυκυκλική ομάδα έχει κανονική ομάδα πεπερασμένου δείκτη που η παράγωγος υποομάδα της είναι μηδενοδύναμη.

Απόδειξη. Δες Robinson [1] [15.1.16] □

Πρόταση 5.31. (Malcev) Κάθε πολυκυκλική-επί-πεπερασμένη ομάδα έχει υποομάδα πεπερασμένου δείκτη της οποίας η παράγωγος υποομάδα είναι πεπερασμένα παραγόμενη και μηδενοδύναμη.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το παραπάνω, αφού υποομάδα πολυκυκλικής είναι πεπερασμένα παραγόμενη. □

Κεφάλαιο 6

Βασικό Θεώρημα

6.1 Ascending Προσεγγιστικά Πεπερασμένες

Ορισμός 6.1. Μία ομάδα G ονομάζεται ascending προσεγγιστικά πεπερασμένη (ascending residually finite ή ARF), αν για κάθε $f : G \to G$ μονομορφισμό και $1 \neq x \in G$ $\exists W \rhd G$ πεπερασμένου δείκτη τέτοια ώστε :

(i) $x \notin W$

(ii) $f(W) \subseteq W$

(iii) η απεικόνιση $\bar{f} : G/W \to G/W$ που επάγεται από την f είναι ισομορφισμός.

Αν η W μπορεί να επιλεγεί πλήρως αναλλοίωτη, τότε λέμε την G FIARF.

Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι μια ομάδα είναι ARF αν και μόνο αν όλες οι ascending HNN επεκτάσεις της είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες. Συνεπώς, αν και οι ARF ομάδες πρέπει να είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες, το παράδειγμα που θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο μας δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει αναγκαστικά, δηλαδή υπάρχουν προσεγγιστικά πεπερασμένες ομάδες που δεν είναι ARF, ακόμα και στην κλάση των πεπερασμένα παραγόμενων προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων.

Σημειώνουμε ότι το θεώρημα 1.1 θα προκύψει από το γεγονός ότι οι πολυκυκλικές -επί- πεπερασμένες ομάδες είναι ARF, όπως θα αποδείξουμε στο 6.19.

Θεώρημα 6.2. Έστω G ομάδα.
Τότε κάθε ascending HNN επεκταση της G είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη $\Longleftrightarrow G$ είναι ARF

Απόδειξη. Έστω ότι κάθε HNN επέκταση της G είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.
Εστω $\phi : G \to G$ μονομορφισμός και $1 \neq x \in G$.
Τότε αφού $G*_\phi =< G, t|t^{-1}jt = \phi(j), j \in G >$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, υπάρχει ένα πεπερασμένο πηλίκο Q της $G*_\phi$ και θεωρώντας την φυσική προβολή $p : G*_\phi \to Q$ (μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $Q = G*_\phi /kerp$) ώστε $p(x) \neq 1$.
Αν $W = G \cap kerp \lhd G$ και πεπερασμένου δείκτη(αφού $kerp$ πεπερασμένου δείκτη στην $G*_\phi$) τότε ικανοποιεί τις 3 συνθήκες ώστε G να είναι ARF.

(i) Αφού $p(x) \neq 1$ έχουμε ότι $x \notin kerp \Rightarrow x \notin W$

(ii) Αν $j \in W$ τότε $p(j) = 1$ έχουμε ότι $p(\phi(j)) = p(t^{-1}jt) = p^{-1}(t)p(j)p(t) = 1$. Δηλαδή $\phi(j) \in G \cap kerp = W$. Δηλαδή έχουμε ότι $\phi(W) \subseteq W$

(iii) Τέλος θέλουμε να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\bar{\phi} : G/W \to G/W$ που επάγεται από την ϕ είναι ισομορφισμός.
Αρχικά παρατηρούμε ότι $p(j) \in G/W \ \forall \ j \in G$. Οπότε μπορούμε να δούμε ότι $\bar{\phi}(p(j)) = \bar{\phi}(jW) = \phi(j)W = p(\phi(j)) = p^{-1}(t)\phi(j)p(t)$.
Άρα τελικά $\bar{\phi}$ συζυγία με $p(t)$, οπότε είναι ισομορφισμός και έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω ότι G είναι ARF.
Έστω $\phi : G \to G$ μονομορφισμός και $1 \neq a \in G_\phi$. Από κανονική μορφή των ascending- HNN επεκτάσεων έχουμε ότι $a = t^r x t^{-s}$ για κάποια $r, s \geqslant 0$, $x \in G$. Αν ισχύει ότι $r - s \neq 0$ τότε μπορούμε να στείλουμε κάθε στοιχείο του G στο 0 και το t στο 1 και επάγεται ομομορφισμός $p : G*_\phi \to \mathbb{Z}_{r+s+1}$ τότε $p(a) = r - s \neq 0$ στο $\mathbb{Z}_{r+s+1}$. Στην άλλη περίπτωση αν $r = s$ τότε a συζυγές του x οπότε χ.β.τ.γ θεωρούμε $a = x$, Αφού λοιπόν G είναι ARF $\exists W$ κανονική ϕ-αναλλοίωτη υποομάδα της G τέτοια ώστε $x \notin W$, G/W πεπερασμένη και

$\bar{\phi} : G/W \to G/W$ ισομορφισμός.
Γράφοντας την εικόνα $j \in W$, στην G/W ως $\bar{j}$ τότε για την ομάδα $\bar{G*_\phi} =< G/W, t|\bar{j}^t = \bar{\phi}(\bar{j}), \bar{j} \in (G/W) >$ έχουμε ότι είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Για να το δείξουμε αυτό πρέπει να δείξουμε δύο ισχυρισμούς.

1. Η $\bar{G*_\phi} =< G/W, t|\bar{j}^t = \bar{\phi}(\bar{j}), \bar{j} \in G/W >$ είναι πεπερασμένη -επί- κυκλική. Πράγματι, αφού $\bar{\phi}$ είναι ισομορφισμός, ιδιαίτερα επί ισχύει ότι $\forall \bar{j} \in G$ $\exists \bar{j_1} \in G/W$ τέτοιο ώστε $\bar{j} = \bar{\phi}(\bar{j_1})$. Άρα ισχύει $t\bar{j}t^{-1} = t\bar{\phi}(\bar{j_1})t^{-1} = \bar{j_1} \in G/W$. Επίσης για κάθε $\bar{j} \in G$ ότι $t^{-1}\bar{j}t = \bar{\phi}(\bar{j}) \in G$ που ισχύει απο ιδιότητα της HNN επέκτασης. Άρα τελικά $t^{-1}\bar{j}t \in G/W$ και $t\bar{j}t^{-1} \in G/W$, οπότε έχουμε ότι $G/W \lhd \bar{G_\phi}$ και επίσης G/W πεπερασμένη. Τέλος, ισχύει ότι $\bar{G*_\phi}/(G/W) \simeq< t >$ αφού χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $t\phi(\bar{j}) = \bar{j}t$, και την κανονική μορφή παίρνουμε ότι κάθε στοιχείο $g(G/W) \in \bar{G_\phi}/(G/W)$ ισούται με στοιχείο της μορφής $t^k(G/W)$. Άρα τελικά έχουμε κανονική, πεπερασμένη υποομάδα με το πηλίκο να είναι κυκλική.

2. Κάθε πεπερασμένη- επί-κυκλική ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Πράγματι, έστω A πεπερασμένη-επί- κυκλική, δηλαδη έχει υποομάδα $B \lhd A$ πεπερασμένη με $A/B \simeq< a >$. Επίσης έστω $x \neq 1$ στην A. Αν $< t >\simeq \mathbb{Z}_n$ τότε αφού και B πεπερασμένη και πεπερασμένου δείκτη στην A έπεται ότι A είναι πεπερασμένη και άρα προσεγγιστικά πεπερασμένη. Αν τώρα $< t >\simeq \mathbb{Z}$ στην περίπτωση που $x \in B$ έχουμε το ζητούμενο όπως πριν γιατί B πεπερασμένη. Άρα θεωρούμε ότι $x \notin B$ ισοδύναμα ότι $xB \neq B$ μπορούμε να στείλουμε το x στο $(A/B) \simeq \mathbb{Z}$ ώστε να μην είναι 1 και αφού το $\mathbb{Z}$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένο στέλνουμε το x σε πεπερασμένο σύνολο, μέσω ομομορφισμού, ώστε να μην είναι 1, άρα τελικά A προσεγγιστικά πεπερασμένη σε κάθε περίπτωση.

Οπότε απο τους δύο ισχυρισμούς έχουμε ότι $\bar{G}*_\phi$ προσεγγιστικά πεπερασμένη, δηλαδή υπάρχει πεπερασμένο πηλίκο της $\bar{G}*_\phi$ ώστε $\bar{x} \neq 1$. Οπότε και $x \neq 1$ σε αυτην την ομάδα, δηλαδη η $G*_\phi$ προσεγγιστικά πεπερασμένη. $\square$

6.2 Μηδενοδύναμες ελευθέρες στρέψης

Θα ξεκινήσουμε με μερικούς χρήσιμους ορισμούς.

Ορισμός 6.3. Έστω G ομάδα. Για κάθε $x, y \in G$, ορίζουμε $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ και για κάθε H, K υποομάδες της G, ορίζουμε $[H, K] =< [x, y]|x \in H, y \in K >$

Ορισμός 6.4. Έστω G ομάδα και ακέραιος n, ορίζουμε $G^n =< x^n|x \in G >$ και $G' = [G, G]$. Αυτά είναι παραδείγματα verbal υποομάδων της G, βλέπε Magnus [4] για περισσότερα.

Λήμμα 6.5.

1. Έστω G ομάδα, $\psi : G \to G/K$ πηλίκο με πυρήνα K, ψ ο φυσικός επιμορφισμός. Τότε G^n είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της G, $(G/K)^n = \psi(G^n)$ και $(G/K)/(G/K)^n \simeq G/(KG^n)$
2. Έστω G ομάδα, $\psi : G \to G/K$ πηλίκο με πυρήνα K, ψ ο φυσικός επιμορφισμός. Τότε G' είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της G, $(G/K)' = \psi(G')$ και $(G/K)/(G/K)' \simeq G/(KG')$

Απόδειξη στον Magnus [4], [p.74; ex. 11, p. 80]

Το βασικό Θεώρημα σε αυτήν την ενότητα είναι.το ακόλουθο:

Θεώρημα 6.6. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη, ελευθέρα στρέψης, μηδενοδύναμη ομάδα είναι FIARF

Αφού η υποομάδα G^p είναι πλήρως αναλλοίωτη στην G σε κάθε ομάδα G από Λήμμα 6.5, αρκεί να αποδείξουμε το επόμενο Θεώρημα :

Θεώρημα 6.7. Αν G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, ελευθέρα στρέψης, μηδενοδύναμη ομάδα και έστω $\phi : G \to G$ μονομορφισμός και x μη τετριμμένο στοιχείο του G. Τότε για κάθε επαρκώς μεγάλο πρώτο p, το πηλίκο G/G^p είναι μια πεπερασμένη p- ομάδα, $x \notin G^p$ και ο επαγόμενος $\phi : G/G^p \to G/G^p$ είναι ισομορφισμός.

Στην πραγματικότητα, είναι γνωστό ότι για G πεπερασμένως παραγόμενη, ελευθέρα στρέψης μηδενοδύναμη, κάθε μη τετριμμένο $x \in G$ επιζεί στο πηλίκο

G/G^p για επαρκώς μεγάλο p (δες [6] [κεφ. 2]). Το κύριο σημείο του Θεωρήματος 6.7 είναι ότι για επαρκώς μεγάλο πρώτο p επίσης ¨συμφωνεί' με δοσμένο μονομορφισμό $\phi : G \to G$.

Για το υπόλοιπο της ενότητας, έστω G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, ελευθέρα στρέψης, μηδενοδύναμη ομάδα, $\phi : G \to G$ μονομορφισμός, και $Z_i = Z_i(G)$. Ξεκινάμε δείχνοντας ότι η ϕ συμπεριφέρεται καλά σεβόμενη την άνω κεντρική σειρά.

Λήμμα 6.8. Για κάθε i, $\phi(Z_i) \leq Z_i$ και ο επαγόμενος $\phi : (G/Z_i) \to (G/Z_i)$ είναι 1-1.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε το Λήμμα για $i = 1$. Πράγματι, κάνοντας επαγωγή στο i και θεωρώντας ότι το έχουμε δείξει για $i = 1$, υποθέτουμε ότι ισχύει για $i = k$ και θα το δείξουμε για $i = k+1$. Εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση στο G/Z_1 που από πρόταση 5.12 είναι επίσης ελευθέρα στρέψης μηδενοδύναμη, αφού και η G είναι. Τότε έχουμε ότι $Z_i(G/Z_1) = Z_{i+1}/Z_1$ από λήμμα (5.6). Άρα η επαγωγική υπόθεση μας δίνει $\phi(Z_{i+1}/Z_1) \leqslant Z_{i+1}/Z_1$, από το οποίο προκύπτει ότι $\phi(Z_{i+1}) \leqslant Z_{i+1}$. Επίσης, χρησιμοποιώντας ξανά την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\phi : (G/Z_1)/(Z_{1+1}/Z_1) \to (G/Z_1)/(Z_{1+1}/Z_1)$ είναι 1-1 και αφού από τρίτο θεώρημα ισομορφισμών $(G/Z_1)/(Z_{1+1}/Z_1) \simeq G/Z_{i+1}$, έχουμε ότι και η $\phi : G/Z_{i+1} \to G/Z_{i+1}$ είναι 1-1.

Μετά βλέπουμε ότι αρκεί για την απόδειξη του Λήμματος να δείξουμε την παρακάτω σχέση :

$$\phi(Z_1) = Z(\phi(G)) = Z_1 \cap \phi(G) \tag{6.1}$$

Αν το έχουμε δείξει τότε προφανώς ισχύει το πρώτο ζητούμενο, δηλαδή ότι $\phi(Z_1) \leq Z_1$.

Για το δεύτερο έστω $\phi(xZ_1) = \phi(x)Z_1 = Z_1$ για κάποιο $x \in G$, τότε $\phi(x) \in Z_1$. Επίσης, $\phi(x) \in \phi(G)$, δηλαδή $\phi(x) \in Z_1 \cap \phi(G) = \phi(Z_1)$. Όμως $\phi : G \to G$ μονομορφισμός άρα αναγκαστικά $x \in Z_1$. Ξεκινήσαμε με $\phi(xZ_1) = Z_1$ και καταλήξαμε στο ότι πρέπει $x \in Z_1$, άρα η $\phi : (G/Z_i) \to (G/Z_i)$ είναι 1-1.

Για να αποδείξουμε την 6.1 πρώτα παρατηρούμε ότι $Z(\phi(G)) = \phi(Z_1)$. Πράγματι, έστω $x \in \phi(Z_1)$, τότε $x = \phi(y)$ για κάποιο $y \in Z_1$ και $\phi(w) \in Z(\phi(G)) \leq$

$\phi(G)$. Άρα $x\phi(w) = \phi(y)\phi(w) = \phi(yw) = \phi(wy)$ (αφού $y \in Z_1$) και $\phi(wy) = \phi(w)\phi(y) = \phi(w)x$. Οπότε έχουμε ότι $x \in Z(\phi(G))$. Αντίστροφα τώρα, έστω $y \in Z(\phi(G)) \leq \phi(G)$, δηλαδή $y = \phi(x), x \in G$ τότε $y\phi(w) = \phi(w)y\forall w \in G$. Αλλιώς $\phi(x)\phi(w) = \phi(w)\phi(x)\forall w \in G$ ή ισοδύναμα $\phi(xw) = \phi(wx)\forall w \in G$. Όμως ϕ 1-1 άρα $xw = wx\forall w \in G$, δηλαδή $x \in Z_1$ και άρα $y \in Z(\phi(G))$.
Μετά παρατηρούμε ότι $\phi_{|Z_1} : Z_1 \to \phi(Z_1) = Z(\phi(G))$ είναι ισομορφισμός, και αφού G ελευθέρα στρέψης, έχουμε ότι είναι ελεύθερες αβελιανές, άρα είναι ισομορφισμός ελεύθερων αβελιανών ομάδων. Λόγω του ισομορφισμού έχουμε ότι $rank(Z_1) = rank(Z(\phi(G)))$. Ακόμα, αφού G πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη είναι πολυκυκλική και άρα εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.21 έχουμε $[Z_1 : Z_1 \cap \phi(G)] \leq [G : Z_1] < \infty$. Οπότε $rank(Z_1) = rank(Z_1 \cap \phi(G))$ και άρα $rank(Z_1 \cap \phi(G) = rank(Z(\phi(G))$. Επίσης, ισχύει ότι $Z_1 \cap \phi(G) \leq Z(\phi(G))$ γιατί αν $x \in (Z_1 \cap \phi(G))$ και $\phi(y) \in \phi(G)$ τότε προφανώς $x\phi(y) = \phi(y)x$ αφού $x \in Z_1$ και $x \in \phi(G)$, άρα $x \in Z(\phi(G))$. Οπότε αφού είναι ίδιας τάξης υποομάδα, έχουμε ότι είναι πεπερασμένου δείκτη, δηλαδή $[Z(\phi(G) : Z_1 \cap \phi(G)] < \infty$. Τέλος έχουμε ότι :

$$Z_1 \cap \phi(G) = Z_1 \cap Z(\phi(G)) \tag{6.2}$$

Αρχικά η ανισότητα $Z_1 \cap \phi(G) \geq Z_1 \cap Z(\phi(G))$ είναι προφανής αφού $\phi(G) \geq Z(\phi(G))$. Για την αντίστροφη παίρνουμε $x \in Z_1 \cap \phi(G)$ και $\phi(y) \in \phi(G)$, τότε $x\phi(y) = \phi(y)x\forall\phi(y) \in \phi(G)$ αφού $x \in Z_1$ και $x \in \phi(G)$ άρα $x \in Z(\phi(G)) \cap Z_1$.
Από τα παραπάνω και το δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών
$Z(\phi(G))/(Z_1 \cap \phi(G)) = Z(\phi(G))/(Z_1 \cap Z(\phi(G)) \simeq Z(\phi(G))Z_1/Z_1 \leq G/Z_1$.
Αφού $Z(\phi(G))/(Z_1 \cap \phi(G))$ πεπερασμένη, η $Z(\phi(G))Z_1/Z_1$ είναι πεπερασμένη υποομάδα της ελευθέρα στρέψης ομάδας(από πρόταση 5.12) G/Z_1, άρα τετριμμένη. Επομένως $Z(\phi(G)) = Z_1 \cap \phi(G)$. Οπότε το Λήμμα έπεται.
Αφού η $\phi : (G/Z_i) \to (G/Z_i)$ είναι 1-1, δηλαδή αν $\phi(xZ_i) = Z_i \iff x \in Z_i$, επάγεται $\phi_i : (Z_i/Z_{i-1}) \to (Z_i/Z_{i-1})$ μονομορφισμός. □

Από το παραπάνω θεώρημα παίρνουμε ένα ορισμό: Αφού Z_i/Z_{i-1} ελεύθερες αβελιανές, οπότε κάθε ϕ_i είναι μονομορφισμός μεταξύ ελεύθερων αβελιανών.

Ορισμός 6.9. Ορίζονται $d_i = det(\phi_i)$ για κάθε i, και τις λέμε άνω κεντρικές ορίζουσες της ϕ.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι $d_i \neq 0$.

Ορισμός 6.10. Έστω p πρώτος. Λέμε ότι η G p-reduces, αν $Z_i \cap G^p = Z_i^p$ για κάθε i.

Λήμμα 6.11. Έστω A, B, C υποομάδες την G τέτοια ώστε $C \leqslant A$. Τότε $(A \cap B)C = A \cap BC$.

Απόδειξη. Θα το δείξουμε για τους γεννήτορες, οπότε θα έχουμε την ισότητα. Αρχικά έστω $x = ac$ με $a \in A \cap B$ και $c \in C \leqslant A$, τότε προφανώς $x \in A$. Επίσης, αν $a \in B, c \in C$ τότε $ac \in BC$, έχουμε ότι $ac \in (A \cap B)C$. Δηλαδή έχουμε ότι $(A \cap B)C \subseteq A \cap BC$. Για την άλλη κατεύθυνση παίρνουμε $x \in A$ τέτοιο ώστε $x = bc$ με $b \in B, c \in C$. Αφού $bc \in A$ και $c \in C \leqslant A$ αναγκαστικά $b \in A$. Δηλαδή $b \in A \cap B$ και αφού $c \in C$ έπεται ότι $x = bc \in (A \cap B)C$. Οπότε $(A \cap B)C \supseteq A \cap BC$ □

Λήμμα 6.12. Έστω p πρώτος. Αν G p-reduces, τότε G/Z_1 p-reduces.

Απόδειξη. Έστω $\psi : G \to (G/Z_1)$ η φυσική απεικόνιση. Τότε έχουμε ότι $Z_{i-1}(G/Z(G) = Z_i/Z(G)$ από Λήμμα 5.6 και $Z_i/Z(G) = \psi(Z_i)$. Επίσης, $(G/Z(G))^p = \psi(G^p)$ από Λήμμα 6.5. Οπότε έχουμε ότι $Z_{i-1}(G/Z(G))^p = \psi(Z_i)^p = \psi(Z_i^p)$ συνδυάζοντας το προηγούμενο και το Λήμμα 6.5. Τότε αφού G p-reduces έχουμε $\psi(Z_i^p) = \psi(Z_i \cap G^p) = (Z_i \cap G^p)Z(G)$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.11 και ότι $Z^i \supseteq Z(G)$ παίρνουμε ότι $(Z_i \cap G^p)Z(G) = Z_i \cap (G^p Z(G)) = \psi(Zi) \cap \psi(G^p)$, από τα προηγούμενα. Οπότε έχουμε τελικά $Z_{i-1}(G/Z(G)) \cap (G/Z(G))^p = Z_{i-1}(G/Z(G))^p$, δηλαδή $G/Z(G)$ p-reduces.

□

Λήμμα 6.13. Έστω p πρώτος. Αν G p-reduces, τότε $Z_1 G^p / G^p \simeq Z_1 / Z_1^p$.

Απόδειξη. Αν G p-reduces έχουμε ότι $Z_1 G^p / G^p \simeq Z_1 / (Z_1 \cap G^p) = Z_1 / Z_1^p$ χρησιμοποιώντας το δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών. □

Λήμμα 6.14. Υποθέτουμε ότι G p-reduces, όπου p πρώτος που δεν διαιρεί καμία από τις άνω κεντρικές ορίζουσες της ϕ. Τότε η επαγόμενη απεικόνιση $\phi : (G/G^p) \to (G/G^{p})$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με επαγωγή στην κλάση μηδενοδυναμίας n.

- Αν $n = 0$ τότε $G = \{1\}$ οπότε ισχύει.

- Έστω ότι ισχύει για ομάδες με κλάση μηδενοδυναμίας $< n$. Τότε $G/Z(G)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη (αφού και η G είναι), χωρίς στρέψη (χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.11 αφού G είναι χωρίς στρέψη και μηδενοδύναμη) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.6 είναι μηδενοδύναμη κλάσης $n - 1$.
  Επίσης, από Λήμμα 6.12 η $G/Z(G)$ p-reduces, αφού G p-reduces. Ακόμα για την $\phi : G/Z(G) \to G/Z(G)$ που επάγεται από την ϕ, έχουμε για τις ϕ_i : $Z_i(G/Z(G))/Z_{i-1}(G/Z(G)) = (Z_{i+1}/Z(G))/(Z_i/Z(G)) \to Z_i(G/Z(G))/Z_{i-1}(G/Z(G)) = (Z_{i+1}/Z(G))/(Z_i/Z(G))$ και αφού $(Z_{i+1}/Z(G))/(Z_i/Z(G)) \simeq Z_{i+1}/Z_i$ οι ϕ_i για την $G/Z(G)$ είναι ουσιαστικά οι ϕ_{i+1} για την G, άρα από υπόθεση το p δεν διαιρεί καμία από τις ορίζουσες της ϕ.
  Από επαγωγική υπόθεση $\phi : (G/Z(G) \to (G/Z(G)))$ ο επαγόμενος ϕ : $(G/Z(G))/(G/Z(G))^p \to (G/Z(G))/(G/Z(G))^p$ είναι ισομορφισμός.
  Αφού από Λήμμα 6.5 $(G/Z(G))/(G/Z(G))^p \simeq G/Z_G G^p$, οπότε ο επαγόμενος $\phi : G/Z(G)G^p \to G/Z(G)G^p$ ισομορφισμός.
  Μετά, αφού p δεν διαιρεί καμία από την ορίζουσα της $\phi_1 : Z(G) \to Z(G)$ (αφού δεν διαιρεί τις ορίζουσες για κάθε ϕ_i), ο επαγόμενος $\phi : (Z(G)/Z(G)^p) \to (Z(G)/Z(G)^p)$ είναι ισομορφισμός. Άρα, αφού G p-reduces από Λήμμα 6.13 $(Z(G)G^p/G^p \simeq Z(G)/Z(G)^p$, έχουμε ότι ο επαγόμενος $\phi : Z(G)G^p/G^p \to Z(G)G^p/G^p$ ισομορφισμός.
  Έπεται ότι αφού $\phi :\to G/Z(G)G^p$ και $\phi : Z(G)G^p/G^p \to Z(G)G^p/G^p$ είναι ισομορφισμός, ο επαγόμενος $\phi : G/G^p \to G/G^p$ ισομορφισμός.

□

Τώρα για το Θεώρημα 6.7 :

Απόδειξη. Αρχικά, για κάθε p G/G^p είναι πεπερασμένα παραγόμενη, μηδενοδύναμη αφού και η G είναι. Επίσης, G/G^p είναι ομάδα στρέψης αφού, προφανώς, $(xG^p)^p = G^p$. Άρα από τα προηγούμενα και το Λήμμα (5.14) έχουμε ότι η G/G^p είναι πεπερασμένη, ή αλλιώς $[G : G^p] < \infty$. Μετά από το Λήμμα (5.13) για κάθε Z_i ισχύει $Z_i \cap G^p = Z_i^p$ βλέπουμε ότι G p-reduces για επαρκώς μεγάλο p.(Επιλέγουμε το p ώστε να ισχύει για όλα τα i η ζητούμενη σχέση) Επιπλέον, πάλι από Λήμμα 5.13, για κάθε $1 \neq x \in G$, για επαρκώς μεγάλο p έχουμε ότι $< x > \cap G^p =< x >^p$. Οπότε αν θεωρήσουμε ότι $x \in G^p$, από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε ότι $x \in < x >^p$, δηλαδή $x = (x^k)^p = x^{kp}$, άρα $x^{kp-1} = 1$. Όμως G ελευθέρα στρέψης, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Δηλαδή, τελικά $x \notin G^p$ για αρκετά μεγάλο p.
Τέλος επιλέγοντας p αρκετά μεγάλο ώστε συγχρόνως να ισχύει ότι G p-reduces και να μην διαιρεί κάποια από τις πεπερασμένες άνω κεντρικές ορίζουσες ϕ_i , από το Λήμμα 6.14, παίρνουμε ότι $\phi : G/G^p \to G/G^p$ είναι ισομορφισμός.
Αφού όλες οι παραπάνω διαδικασίες μπορούν να γίνουν για όλα τελικά τα p, οπότε επιλέγοντας ένα αρκετά μεγάλο, μπορούμε να επιτύχουμε ταυτόχρονα όλα τα ζητούμενα. □

6.3 Σταθεροποιούσα

Το παρακάτω Θεώρημα μας οδηγεί σε έναν ορισμό :

Θεώρημα 6.15. Έστω G ομάδα και $\phi : G \to G$ ένας ομομορφισμός. Επίσης έστω V μια ϕ-αναλλοίωτη κανονική υποομάδα της G και $W = \bigcup_{n=0}^{\infty} \phi^{-n}(V) = \{x \in G | \phi^n(x) \in V \text{ για κάποιο } n\}$.
Τότε W είναι ϕ -αναλλοίωτη κανονική υποομάδα της G, και η επαγόμενη $\bar{\phi} : G/W \to G/W$ είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $x \in W$, οπότε $x \in G$ με $\phi^n(x) \in V$ για κάποιο n, τότε θέλουμε να δείξουμε ότι W είναι ϕ -αναλλοίωτη, δηλαδή $\phi(x) \in W$. Πράγματι, $\phi^n(\phi(x)) = \phi(\phi^n(x)) \in V$, αφού $\phi^n(x) \in V$ γιατί V ϕ-αναλλοίωτη, άρα $\phi(x) \in W$, οπότε W είναι ϕ -αναλλοίωτη. Μετά, η W είναι αύξουσα ένωση κανονικών υποομάδων άρα είναι υποομάδα και μάλιστα κανονική υποομάδα της G. Τέλος θα δείξουμε ότι $\bar{\phi} : G/W \to G/W$ είναι μονομορφισμός. Έστω λοιπόν $x \in G$ με $\phi(x)W = W$, ή ισοδύναμα, $\phi(x) \in W$. Οπότε για κάποιο n, $\phi^n(\phi(x)) = \phi^{n+1}(x) \in V$ που συνεπάγεται ότι $x \in W$, άρα $\bar{\phi}(xW) = W$ έπεται ότι $xW = W$. Δηλαδή $\bar{\phi}$ μονομορφισμός. □

Ορισμός 6.16. Έστω G ομάδα και $\phi : G \to G$, V ϕ -αναλλοίωτη κανονική υποομάδα της G και $W = \bigcup_{n=0}^{\infty} \phi^{-n}(V) = \{x \in G | \phi^n(x) \in V\}$.
Τότε θα λέμε την W σταθερό πυρήνα της ϕ σε σχέση με την V και την $\bar{\phi}$ είναι η σταθεροποιούσα της ϕ σε σχέση με την V.

Θεώρημα 6.17. Έστω J ομάδα και G μία πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της. Υποθέτουμε ότι:

1. G είναι FIARF
2. κάθε πηλίκο μιας πεπερασμένης- επί- (J/G) είναι ARF

Τότε J είναι ARF.

Απόδειξη. Έστω $\phi : J \to J$ μονομορφισμός και K ο σταθερός πυρήνας σε σχέση με το G. Έστω και $x \neq 1$ στο J Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. Αν $x \in K$ τότε $\phi^n(x) \in G$ για κάποιο n, τότε αφού ϕ μονομορφισμός επαγωγικά μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι $\phi^n(x) \neq 1$. Από την πρώτη υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα πεπερασμένου δείκτη $V_0 \leq G$ τέτοια ώστε $\phi^n(x) \notin V_0$ και ο περιορισμός της ϕ στο G επάγει ισομορφισμό $\phi : G/V_0 \to G/V_0$. Έστω V ο σταθερός πυρήνας της ϕ σε σχέση με το V_0. Τότε αφού $\phi : G/V_0 \to G/V_0$ $1-1$ έχουμε ότι $V \cap G = V_0$. Πράγματι αφού $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} \phi^{-n}(V_0) = \{x \in J | \phi^n(x) \in V_0\}$, $V_0 \leq V$ (για $n = 0, \phi^o(v_o) = v_0 \in V$) και επίσης $V_0 \leq G$ από επιλογή V_0. Αντίστροφα, αν $x \in V \cap G$ τότε $\phi^n(x) \in V_0$ για κάποιο n, όμως $\phi : G/V_0 \to G/V_0$ $1-1$, άρα αναγκαστικά $x \in V_0$. Άρα δείξαμε την ισότητα $V \cap G = V_0$. Από αυτό βλέπουμε ότι $\phi^n(x) \notin V$, αφού $\phi^n(x) \notin V_0$ και

$\phi^n(x) \in G$. Οπότε αφού από θεώρημα 6.15 ο επαγόμενος ενδομορφισμός $\bar{\phi} : J/V \to J/V$ είναι $1-1$, έπεται ότι $x \notin V$.

2. Αν $x \notin K$, θέτουμε $V_0 = G$ και $V = K$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι J/V_0 είναι πεπερασμένη- επί- J/G ομάδα, αφού G/V_0 πεπερασμένη και $(J/V_0)/(G/V_0) \simeq J/G$. Έπειτα $J/V \simeq (J/V_0)/(V/V_0)$, δηλαδή J/V πηλίκο της πεπερασμένης- επί- J/G ομάδας. Επίσης και στις δύο περιπτώσεις ισχύει ότι ο επαγόμενος $\phi : J/V \to J/V$ είναι $1-1$ και $x \neq 1$ στο J/V. Από δεύτερη υπόθεση, υπάρχει ϕ- αναλλοίωτη υποομάδα, πεπερασμένου δείκτη $U \lhd J/V$ ώστε $\pi(x) \notin U$ όπου π η φυσική προβολή και $\phi : (J/V)/U \to (J/V)/U$ ισομορφισμός. Αν πάρουμε $U = W/V$ τότε W έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Αρχικά, $W \lhd J$, αφού $W/V \lhd J/V$ και είναι και πεπερασμένου δείκτη αφού $J/W \simeq (J/V)/(W/V) = (J/V)/U$, που ξέρουμε πως είναι πεπερασμένη. Μετά, $x \notin W$, αφού $\pi(x) \notin U$. Στην συνέχεια, έχουμε $\phi(U) \subseteq U$ και άρα $\phi(W) \subseteq W$. Τέλος, ξέρουμε ότι $\phi : (J/V)/(W/V) \to (J/V)/(W/V)$ ισομορφισμός και αφού $(J/V)/(W/V) \simeq J/W$ από τρίτο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε ότι $\phi : J/W \to J/W$ ισομορφισμός. Άρα W έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. $\square$

6.4 Απόδειξη Βασικού Θεωρήματος

Έχοντας δει προηγουμένως την ελευθέρα στρέψης μηδενοδύναμη περίπτωση, τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 6.17 για να επεκτείνουμε την κλάση ομάδων που ξέρουμε ότι είναι ARF μέχρι να φτάσουμε στον Θεώρημα 1.1

Λήμμα 6.18. Κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι ARF.

Απόδειξη. Έστω $G \neq 1$ πεπερασμένη, $x \neq 1$ και $\phi : G \to G$ μονομορφισμός. Για $W = \{1\} \lhd G$ έχουμε ότι:

- $x \notin W$
- $\phi(W) \subseteq W$

- $\bar{\phi} : G/\{1\} \to G/\{1\}$ είναι $1-1$ και αφού G πεπερασμένη είναι και επί, άρα ισομορφισμός.

□

Λήμμα 6.19. Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη, μηδενοδύναμη - επί- πεπερασμένη ομάδα είναι ARF.

Απόδειξη. Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη, μηδενοδύναμη - επί - πεπερασμένη ομάδα. Δηλαδή υπάρχει $N \lhd G$ μηδενοδύναμη τέτοια ώστε G/N πεπερασμένη.
Από Λήμμα 5.27 (αφού N πεπερασμένη παραγόμενη, ως υποομάδα πεπερασμένου δείκτη μιας πεπερασμένα παραγόμενης και μηδενοδύναμη) υπάρχει $N_0 \leq N$ ελευθέρα στρέψης με $[N : N_0] < \infty$. Όμως από Λήμμα 2.14 μπορούμε να βρούμε N_1 πλήρως αναλλοίωτη, πεπερασμένου δείκτη στην G. Τότε όπως πριν, N_1 πεπερασμένα παραγόμενη, μηδενοδύναμη, ελευθέρα στρέψης, οπότε από Θεώρημα 6.6 N_1 είναι FIARF. Τέλος, τα πηλίκα των πεπερασμένων - επί- (G/N_1) είναι πεπερασμένα (αφού έχει πεπερασμένη υποομάδα πεπερασμένου δείκτη), άρα από Λήμμα 6.18 είναι ARF.
Οπότε από τα παραπάνω, από το Θεώρημα 6.17, η G είναι ARF. □

Τώρα θα προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.1. Μπορούμε εδώ να το επαναδιατυπώσουμε:

Θεώρημα 6.20. Έστω $\phi : G \to G$ ένας μονομορφισμός -μιας πολυκυκλικής -επί- πεπερασμένη ομάδας. Τότε η $G*_\phi$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Απόδειξη. Έστω G πολυκυκλική - επί - πεπερασμένη. Από Λήμμα 5.31, υπάρχει $H \leq G$ πεπερασμένου δείκτη, τέτοια ώστε H' πεπερασμένα παραγόμενη, μηδενοδύναμη. Μπορούμε να υποθέσουμε από Λήμμα 2.14 ότι H πλήρως αναλλοίωτη στην G. (Μπορούμε να βρούμε $H_1 \leq H$, με H_1 πλήρως αναλλοίωτη στην G και πεπερασμένου δείκτη. Τότε $H_1' \leq H'$ άρα H_1' μηδενοδύναμη ως υποομάδα μηδενοδύναμης και H_1' πεπερασμένα παραγόμενης ως υποομάδα της πολυκυκλικής ως πεπερασμένα παραγόμενης μηδενοδύναμης H')
Οπότε H' πλήρως αναλλοίωτη στην G, αφού H' πλήρως αναλλοίωτη στην H

από Λήμμα 6.5 και H πλήρως αναλλοίωτη στην G.
Από Λήμμα 5.27 H' αφού είναι πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη, έχει $A \leq H'$ με A ελευθέρα στρέψης. Όπως πριν, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι A είναι πλήρως αναλλοίωτη στην H', οπότε A πλήρως αναλλοίωτη στην G. (Μπορούμε να βρούμε $A_1 \leq A$ με A_1 πλήρως αναλλοίωτη και πεπερασμένου δείκτη στην H'. Επίσης, A_1 ελευθέρα στρέψης ως υποομάδα μιας ομάδας ελευθέρα στρέψης.)
Τώρα από Θεώρημα 6.6 και ξέροντας ότι A είναι πεπερασμένα παραγόμενη, ελευθέρας στρέψης, μηδενοδύναμη να δούμε ότι A είναι FIARF.
Τώρα για να συνεχίσουμε θα αποδείξουμε τρεις ισχυρισμούς:

i Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη πεπερασμένη - επί -(αβελιανή-επί-πεπερασμένη) ομάδα είναι (πεπερασμένη - επί - αβελιανή)-επί- πεπερασμένη.

ii Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη (αβελιανή - επί - πεπερασμένη) - επί- πεπερασμένη είναι αβελιανή- επί - πεπερασμένη.

iii Πηλίκο μιας αβελιανής-επί- πεπερασμένη είναι αβελιανή - επί - πεπερασμένη.

Απόδειξη. **Ισχυρισμών**

i Έστω A πεπερασμένα παραγόμενη πεπερασμένη - επί -(αβελιανή-επί-πεπερασμένη), δηλαδή υπάρχει $B \lhd A$ πεπερασμένη με A/B αβελιανή- επί- πεπερασμένη, δηλαδή υπάρχει $(C/B) \lhd (A/B)$, με C/B αβελιανή. ώστε $(A/B)/(C/B)$ πεπερασμένη. Οπότε η A έχει την $C \lhd A$ ώστε $A/C \simeq (A/B)/(C/B)$ πεπερασμένη και C πεπερασμένη -επί - αβελιανή αφού $B \lhd C$, B πεπερασμένη και C/B αβελιανή.

ii Έστω A πεπερασμένα παραγόμενη (αβελιανή - επί- πεπερασμένη) - επί- πεπερασμένη, δηλαδή υπάρχει $B \lhd A$ πεπερασμένου δείκτη με B αβελιανή- επί- πεπερασμένη. (Μπορεί να επιλεγεί πλήρως αναλλοίωτη στην A από Λήμμα 2.14 γιατί βρίσκουμε $B_1 \leq B$ πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην A και τότε $B1$ επίσης αβελιανή - επί - πεπερασμένη, αφού αν $H \lhd B$ πεπερασμένου δείκτη με H αβελιανή, έχουμε ότι $B_1 \cap H$ κανονική πεπερασμένου δείκτη στην B_1 και $B_1 \cap H$ αβελιανή.) Επίσης, υπάρχει $C \lhd B$

πεπερασμένου δείκτη. Αφού B πεπερασμένου δείκτη σε πεπερασμένα παραγόμενη, είναι πεπερασμένα παραγόμενη και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ξανά το Λήμμα 2.14, όπως πριν αφού υποομάδα αβελιανής είναι αβελιανή και να επιλεγεί και η C πλήρως αναλλοίωτη στην B. Από τα παραπάνω έχουμε ότι C αβελιανή, πλήρως αναλλοίωτη, πεπερασμένου δείκτη στην A. (Αφού C πλήρως αναλλοίωτη, πεπερασμένου δείκτη στην B και B πλήρως αναλλοίωτη, πεπερασμένου δείκτη στην A). Οπότε A είναι αβελιανή- επί - πεπερασμένη.

iii Έστω A μιας αβελιανής - επί- πεπερασμένη και $B \lhd A$. Τότε θα δείξουμε ότι A/B αβελιανή- επί- πεπερασμένη. Υπάρχει λοιπόν $H \lhd A$ αβελιανή, πεπερασμένου δείκτη. Τότε $(HB/B) \lhd (A/B)$. Επίσης, $HB/B \simeq H/(B \cap H)$ (από τρίτο Θεώρημα ισομορφισμών) άρα αβελιανή. Τέλος $(A/B)/(HB/B) \simeq A/AB$ από δεύτερο Θεώρημα ισομορφισμών και αφού $[A : HB] \leq [A : H] < \infty$ άρα είναι πεπερασμένου δείκτη και έχουμε το ζητούμενο.

□

Τώρα παρατηρούμε ότι G/A αβελιανή- επί- πεπερασμένη αφού H/A είναι πεπερασμένη-επί- αβελιανή αφού έχει υποομαδα την πεπερασμένη H'/A και το πηλίκο τους είναι αβελιανή. Οπότε G/A είναι πεπερασμένη-επί-(πεπερασμένη-επί- αβελιανή) άρα και πεπερασμένη-επί-(αβελιανή επί πεπεραμσένη) από 5.29 οπότε και (πεπερασμένη-επι-αβελιανή)- επι πεπερασμένη από ισχυρισμό, άρα ειναι και (αβελιανή-επί-πεπερασμένη)-επί πεπερασμένη ξανά 5.29 και τελικά από ισχυρισμό αβελιανή-επί- πεπερασμένη.

Αφού λοιπόν πηλίκο μιας πεπερασμένης - επί -(G/A) είναι πηλίκο πηλίκο μιας πεπερασμένης - επί -(αβελιανή-επί-πεπερασμένη). Από τον πρώτο ισχυρισμού είναι πηλίκο μιας (πεπερασμένη - επί - αβελιανή)-επί- πεπερασμένη που από το Λήμμα 5.29 είναι πηλίκο (αβελιανή- επί- πεπερασμένη) - επί - πεπερασμένη και άρα από τον δεύτερο ισχυρισμό πηλίκο μιας αβελιανής - επί - πεπερασμένης. Ο τρίτος ισχυρισμός μας δίνει ότι είναι αβελιανή - επί - πεπερασμένη και άρα τελικά μηδενοδύναμη -επί- πεπερασμένη και επίσης πεπερασμένα παραγόμενη, άρα από

6.19 είναι ARF.

Από το Θεώρημα 6.17 έχουμε το ζητούμενο του Θεωρήματος. □

6.5 Εφαρμογή του Βασικού Θεωρήματος

Στο [29] αποδεικνύεται το εξής ανοιχτό έως τότε πρόβλημα:

Πρόταση 6.21. Κάθε ascending HNN επέκταση μιας πεπερασμένα παραγόμενης ελεύθερης ομάδας είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Σε αυτήν την ενότητα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1.1 για να αποδείξουμε μια ειδική της περίπτωση. Πιο συγκεκριμένα, έστω $G_{\alpha\beta}$ η αβελιανοποίηση G/G' της G. Προχωρώντας στην κατεύθυνση του προηγούμενου θεωρήματος, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα του Moldavanskii.

Θεώρημα 6.22. Αν G είναι πεπερασμένα παραγόμενη προσεγγιστικά ελευθέρα στρέψης, μηδενοδύναμη και $\phi : G \to G$ μονομορφισμός. Επίσης, υποθέτουμε ότι $[G_{\alpha\beta} : \phi_{\alpha\beta}(G_{\alpha\beta})] < \infty$. Τότε $G*_\phi$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Πιο συγκεκριμένα, αφού οι ελεύθερες ομάδες είναι προσεγγιστικά ελευθέρα στρέψης μηδενοδύναμη (Magnus [4]), το θεώρημα 6.22 μας δίνει αμέσως το επόμενο αποτέλεσμα, που αρχικά λάβαμε από τον Moldavanskii [7] [proposition 3] και αργότερα ανεξάρτητα σε μια αδημοσίευτη εργασία του Sapir [8]

Θεώρημα 6.23. Αν F είναι πεπερασμένα παραγόμενη ελεύθερη ομάδα και $\phi : F \to F$ είναι μονομορφισμός τέτοιος ώστε ο επαγόμενος $\phi_{\alpha\beta} : F_{\alpha\beta} \to F_{\alpha\beta}$ είναι επίσης μονομορφισμός, τότε $F*_\phi$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.

Απόδειξη. Αφού όπως αναφέραμε παραπάνω το ότι είναι ελεύθερη έπεται ότι είναι προσεγγιστικά ελευθέρα στρέψης μηδενοδύναμη, για να έχουμε τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.22 μας μένει να δείξουμε ότι $[F_{\alpha\beta} : \phi_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}] < \infty$. Αφού $\phi_{\alpha\beta} : F_{\alpha\beta} \to F_{\alpha\beta}$ είναι μονομορφισμός, έχουμε ότι $\phi_{\alpha\beta}(F_{\alpha\beta}) \simeq F_{\alpha\beta}$. Και αφού είναι πεπερασμένα παραγόμενες αβελιανές, αναγκαστικά πρέπει να ισχύει

ότι είναι πεπερασμένου δείκτη, δηλαδή έχουμε το ζητούμενο.
Έτσι εφαρμόζουμε το παραπάνω Θεώρημα και έπεται ότι $F*_\phi$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. $\square$

Για να αποδείξουμε το θεώρημα 6.22 χρειαζόμαστε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 6.24. Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα, $\alpha : G \to G/G'$ ο φυσικός επιμορφισμός και $H \leq G$ τέτοιο ώστε $\alpha(H)$ πεπερασμένου δείκτη στην $\alpha(G)$.
Τότε η H είναι πεπερασμένου δείκτη στην G.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι κάθε συζυγές της H έχει εικόνα $\alpha(H)$ στην $\alpha(G)$. Πράγματι, $\alpha(ghg^{-1}) = ghg^{-1}G' = h(h^{-1}ghg^{-1})G' = hG'$, αφού προφανώς $h^{-1}ghg^{-1} \in G'$. Άρα $\alpha(gHg^{-1}) = \alpha(H)$ για κάθε $g \in G$.
Οπότε $\alpha(\bigcap\limits_{g \in G} gHg^{-1}) = \alpha(H)$, οπότε αλλάζοντας την H με την $\bigcap\limits_{g \in G} gHg^{-1}$ δεν χάνουμε κάτι αν θεωρήσουμε ότι H είναι επίσης κανονική στην G.
Τότε G/H είναι πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη (αφού και η G είναι), και από το Λήμμα 6.5 έχουμε ότι $(G/H)_{\alpha\beta} = (G/H)/(G/H)' \simeq G/HG'$ άρα πεπερασμένη (αφού G/G' πεπερασμένη).
Δηλαδή η G/H έχει πεπερασμένη αβελιανοποίηση, οπότε από Λήμμα 5.14 είναι πεπερασμένη. Οπότε H πεπερασμένου δείκτη στην G. $\square$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι για κάθε ομάδα G και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $G/\gamma_{n+1}(G)$ είναι μηδενοδύναμη, αφού $\gamma_{n+1}(G/\gamma_{n+1}(G)) = \gamma_{n+1}(G)/\gamma_{n+1}(G) = 1$ από Λήμμα 5.8. Οπότε από 5.15, έχουμε ότι η ομάδα στέψης αποτελεί υποομάδα, οπότε έχει νόημα ο παρακάτω ορισμός, τον οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.22:

Ορισμός 6.25. Ορίζουμε $\bar{\gamma}_n(G)$ την υποομάδα της G για την οποία ισχύει ότι $\bar{\gamma}_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$ ισούται με την ομάδα στρέψης της $G/\gamma_{n+1}(G)$.

Τότε αρχικά παρατηρούμε ότι $\bar{\gamma}_n(G) \lhd G$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Επίσης ισχύει ο παρακάτω χαρακτηρισμός για τις προσεγγιστικά ελευθέρας στρέψης μηδενοδύναμες ομάδες:

Πρόταση 6.26. Έστω G ομάδα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

i Η G είναι προσεγγιστικά ελευθέρα στρέψης μηδενοδύναμη

ii $\bigcap_{n\in\mathbb{N},n\geq 1} \bar{\gamma}_n(G) = 1$

Απόδειξη. Έστω λοιπόν μια προσεγγιστικά ελευθέρα στρέψης μηδενοδύναμη ομάδα. Τότε έστω $1 \neq x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N},n\geq 1} \{\bar{\gamma}_n(G)\}$. Για το συγκεκριμένο $x \in G$ υπάρχει $x \notin N$, τέτοια ώστε G/N ελευθέρα στρέψης μηδενοδύναμη. Αφού είναι μηδενοδύναμη υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $N\gamma_{m+1}(G)/N = \gamma_{m+1}(G/N) = 1$, ή αλλιώς $\gamma_{m+1}(G) \leq N$. Ξέρουμε επίσης ότι $x \in \bar{\gamma}_m(G)$, οπότε $x\gamma_{m+1}(G) \in \bar{\gamma}_m(G)/\gamma_{m+1}(G)$, οπότε από ορισμό $\bar{\gamma}_m(G)$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x^k \in \gamma_{m+1}(G)$, ιδιαίτερα $x^k \in N$, το οποίο είναι άτοπο αφού $N \neq xNG/N$ ελευθέρα στρέψης. Οπότε αναγκαστικά $\bigcap_{n\in\mathbb{N},n\geq 1} \bar{\gamma}_n(G) = 1$

Αντίστροφα, έστω $1 \neq x \in G$. Τότε από υπόθεση, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin \bar{\gamma}_m(G)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $G/\bar{\gamma}_m(G)$ είναι ελευθέρα στρέψης μηδενοδύναμη. Παρατηρούμε λοιπόν ότι $\gamma_{m+1}(G/\bar{\gamma}_m(G)) = \bar{\gamma}_m(G)\gamma_{m+1}(G)/\bar{\gamma}_m(G) = 1$, οπότε όντως είναι μηδενοδύναμη. Για το δεύτερο, χρησιμοποιούμε το δεύτερο σκέλος της 5.15, έχουμε ότι $(G/\gamma_{m+1}(G))/(\bar{\gamma}_m(G)/\gamma_{m+1}(G)) \simeq G/\bar{\gamma}_m(G)$ είναι ελευθέρα στρέψης. Οπότε έχουμε ότι η G είναι προσεγγιστικά ελευθέρα στρέψης μηδενοδύναμη. □

Απόδειξη. **Θεωρήματος 6.22** Έστω $1 \neq x \in G$. Έχουμε ότι G πεπερασμένα παραγόμενη, προσεγγιστικά ελευθέρα στρέψης, μηδενοδύναμη. Από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $x \notin \bar{\gamma_n}(G)$.

Τότε θεωρούμε την $Q = G/\bar{\gamma}_n(G)$ και την προβολή της $\phi : G \to G$ στην $\bar{\phi} : Q \to Q$.

Μετά παρατηρούμε ότι $[G_{\alpha\beta} : \alpha(\phi(G_{\alpha\beta}))] < \infty$, οπότε η αβελιανοποίηση της ϕ είναι $1-1$ δηλαδή έχει μη μηδενική ορίζουσα. Επίσης $\alpha(\phi(\bar{q})) = \alpha(\phi(q)\bar{\gamma_n}(G)) = (\phi(q)\bar{\gamma_n}(G))Q'$, δηλαδή αφού η αβελιανοποίηση της ϕ έχει μη μηδενική ορίζουσα και η $\bar{\phi}$ έχει μη μηδενική ορίζουσα. Οπότε ισχύει ότι $\alpha\phi(G) \leq \alpha(Q)$ και είναι πεπερασμένου δείκτη.

Από Λήμμα 6.24 έπεται ότι $\phi(\bar{Q})$ πεπερασμένου δείκτη στην Q.
Επίσης, έχουμε ότι Q είναι ελευθέρα στρέψης πολυκυκλική. Αρχικά είναι πεπερασμένα παραγόμενη γιατί είναι πηλίκο της πεπερασμένα παραγόμενης G. Έπειτα, είναι μηδενοδύναμη γιατί $\gamma_{n+1}(Q) = \gamma_{n+1}(G)\bar{\gamma}_n(G)/\bar{\gamma}_n(G) = 1$ από Λήμμα 5.8 και άρα μηδενοδύναμη αφού η κατωτέρα κεντρική σειρά φτάνει στο 1. Οπότε είναι πολυκυκλική ως πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη.
Επίσης, όπως και στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, Q ελευθέρα στρέψης αφού χρησιμοποιούμε το δεύτερο σκέλος της 5.15,
έχουμε ότι $(G/\gamma_{m+1}(G))/(\bar{\gamma}_m(G)/\gamma_{m+1}(G)) \simeq G/\bar{\gamma}_m(G)$ είναι ελευθέρα στρέψης.
Οπότε από Πρόταση 5.24 μας δίνει ότι $\bar{\phi}$ μονομορφισμός.
Τότε το x ¨επιζεί' στην ascending HNN επέκταση $Q*_{\bar{\phi}}$. Όμως, από Θεώρημα 1.1 η $Q*_{\bar{\phi}}$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη,(αφού Q πολυκυκλική) άρα υπάρχει ομομορφισμός ώστε το x να ¨επιζεί' σε πεπερασμένο ομάδα.
Άρα τελικά η $G*_{\phi}$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. □

Κεφάλαιο 7

Αντιπαράδειγμα

7.1 Εισαγωγή

Το κύριο Θεώρημα της εργασίας είναι πως οι ascending HNN- επεκτάσεις πολυκυκλικών ομάδων είναι προσεγγιστικά πεπερασμένες. Αφού οι πολυκυκλικές ομάδες είναι πεπερασμένα παραγόμενες και προσεγγιστικά πεπερασμένες, ένα ερώτημα που μπορούμε να κάνουμε είναι αν ισχύει πως οι ascending HNN- επεκτάσεις πεπερασμένα παραγόμενων, προσεγγιστικά πεπερασμένων ομάδων είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη.
Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε ένα παράδειγμα μιας ascending HNN επέκτασης μιας πεπερασμένα παραγόμενης, προσεγγιστικά πεπερασμένης ομάδας που δεν είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη και έχει πολύ λίγα πηλίκα.
Αυτό το παράδειγμα είναι η HNN επέκταση του Lysenok με βάση την ομάδα του Grigorchuk.
Πριν από αυτό θα χρειαστούμε έναν ορισμό:

Ορισμός 7.1. Μια ομάδα G λέγεται perfect (τέλεια), αν ισούται με την παράγωγο της, δηλαδή αν $G = G'$

Αφού ισχύει πως αν για μια $H \lhd G$ ότι G/H αβελιανή, είναι ισοδύναμο με το ότι είναι $G' \leqslant H$. Οπότε μια perfect ομάδα δεν έχει (μη τετριμμένα) αβελιανά

πηλίκα.
Επίσης χρειαζόμαστε την έννοια της maximal υποομάδας:

Ορισμός 7.2. Έστω G μια ομάδα. Τότε θα λέμε:

i Μία $H \leqslant G$ θα λέγεται maximal υποομάδα αν δεν υπάρχει $K \lneqq G$ τέτοια ώστε $H \leq K$.

ii Μία $H \lhd G$ θα λέγεται maximal κανονική υποομάδα αν δεν υπάρχει $K \neq G$, $K \lhd G$ τέτοια ώστε $H \leq K$.

Λήμμα 7.3. 1. Κάθε πεπερασμένη ομάδα έχει maximal υποομάδα και maximal κανονική υποομάδα.

2. Αν G ομάδα και $H \lhd G$ τότε αν H maximal κανονική υποομάδα αν και μόνο αν G/H απλή.

Απόδειξη. 1. Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Zorn. Έστω μια αύξουσα ακολουθία υποομάδων $G_1 \leqslant G_2 \leqslant G_3 \leqslant \ldots$ της G.
Τότε επειδή όλες είναι υποομάδες της G, είναι πεπερασμένες και οι προηγούμενες σχέσεις δεν μπορεί να είναι γνήσιες. Οπότε αναγκαστικά από ένα σημείο και μετά είναι σταθερή. Άρα αυτή η αλυσίδα έχει μεγιστικό στοιχείο. Από το Λήμμα του Zorn αναγκαστικά η ομάδα έχει μεγιστικό στοιχείο, δηλαδή μεγιστική υποομάδα.

2. Έστω H maximal κανονική υποομάδα. Αν υπάρχει $K/H \lhd G/H$, δηλαδή $H \lhd K \lhd G$ αφού H maximal αναγκαστικά $H = K$ ή $K = G$. Δηλαδή G/H απλή. Αντίστροφα, αν G/H απλή. Τότε αν πάρουμε $H \lhd K \lhd G$ έχουμε ότι $K/H \lhd G/H$, και αφού είναι απλή αναγκαστικά $K/H = 1$ ή $G/H = K/H$, οπότε $K = H$ ή $K = G$. Δηλαδή H maximal κανονική.

□

7.2 Μεταβελιανές

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις μεταβελιανές ομάδες οι οποίες θα μας χρειαστούν για το αντιπαράδειγμα. Θα δούμε κάποιες βασικές ιδιότητες.

Ορισμός 7.4. Μια ομάδα G λέγεται μεταβελιανή, αν η παράγωγος υποομάδα G' είναι αβελιανή. (ή ισοδύναμα $G'' = 1$)

Ένας χαρακτηρισμός των μεταβελιανών ομάδων είναι:

Πρόταση 7.5. Έστω G ομάδα. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Η G είναι μεταβελιανή
2. Υπάρχει $N \lhd G$ αβελιανή τέτοια ώστε G/N αβελιανή.

Απόδειξη. Έστω ότι G είναι μεταβελιανή. Τότε προφανώς $G' \lhd G$ αβελιανή από υπόθεση και G/G' αβελιανή (ισχύει πάντα).
Αντίστροφα, αν υπάρχει $N \lhd G$ αβελιανή τέτοια ώστε G/N αβελιανή, τότε ξέρουμε πως $G' \leqslant N$ και άρα G' αβελιανή (ως υποομάδα αβελιανής). □

Μερικές χρήσιμες ιδιότητες για τις μεταβελιανές:

Πρόταση 7.6. i Υποομάδα μεταβελιανής είναι μεταβελιανή.

ii Πηλίκο μεταβελιανής είναι μεταβελιανή.

iii Ευθύ γινόμενο μεταβελιανών είναι μεταβελιανή.

Απόδειξη. i Έστω $H \leq G$ και G μεταβελιανή. Τότε $H' \leq G'$, και αφού G' αβελιανή έχουμε ότι H' αβελιανή, δηλαδή H μεταβελιανή.

ii Έστω $N \lhd G$ και G μεταβελιανή. Τότε $(G/N)' = G'N/N$ οπότε αφού G' αβελιανή και το πηλίκο είναι αβελιανή, δηλαδή $(G/N)'$ αβελιανή, οπότε G/N μεταβελιανή.

iii Έστω $G_i, i \in I$ οικογένεια μεταβελιανών ομάδων. Τότε παρατηρούμε ότι $([x_i, y_i])_{i\in I} = [(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}]$, οπότε έχουμε ότι $\prod_{i\in I} G_i' = (\prod_{i\in I} G_i)'$

□

7.3 Ομάδα του Grigorchuk

Θα ορίσουμε και θα δούμε βασικές ιδιότητες για την ομάδα του Grigorchuk. Αν και αρχικά η ομάδα του Grigorchuk ορίστηκε ως η ομάδα των μετασχηματισμών που διατηρούν το μέτρο Lebesque του $[0,1]$, τώρα ορίζεται ως ομάδα αυτομορφισμών του απείρου κανονικού rooted δυαδικού δέντρου T_2. Την T_2 την δούμε ως το σύνολο όλων των πεπερασμένων λέξεων στην αλφάβητο 0.1(συμπεριλαμβανομένης και της κενής λέξης).

Η κενή λέξη $\emptyset$ είναι η κορυφή του T_2 και για κάθε κορυφή του T_2 το x_0 είναι το αριστερό και το x_1 το δεξί ¨παιδί' του x.

Την ομάδα των αυτομορφισμών $Aut(T_2)$ μπορούμε να την σκεφτούμε σαν ομάδα όλων των μεταθέσεων πάνω στις λέξεις στο αλφάβητο $0,1$ με τις ιδιότητες να διατηρούν το μήκος και επίσης να σέβονται το αρχικό τμήμα, δηλαδή αν μια λέξη x είναι αρχικό τμήμα μια λέξης y τότε $\sigma(x)$ αρχικό τμήμα της λέξης $\sigma(y)$.

Τώρα θα ορίσουμε την G.

Ορίζεται λοιπόν ως η υποομάδα της $Aut(T_2)$ που παράγεται από τέσσερις αυτομορφισμούς.

Αρχικά, θα συμβολίζουμε $\bar{1} = 0$ και $\bar{0} = 1$.

Αν πάρουμε μία λέξη του T_2, $(j_1, ..., j_k)$ τότε ορίζουμε $a(j_1, ..., j_k) = (\bar{j_1}, ..., j_k)$.

Προφανώς, ισχύει $a^2 = 1 = x_\emptyset$.

Για τα υπόλοιπα έχουμε ότι:

- $a(0x) = 1x, a(1x) = 0x$ για κάθε x.

- $b(0x) = 0a(x), b(1x) = 1c(x)$

- $c(0x) = 0a(x), c(1x) = 1d(x)$

- $d(0x) = 0x, d(1x) = 1b(x)$

Μπορούμε επίσης να συμβολίζουμε:
$b = (a, c)$
$c = (a, d)$,
$d = (1, b)$

Όπου $b = (a, c)$ σημαίνει ότι b διατηρεί το πρώτο επίπεδο του T_2 (διατηρεί δηλαδή τα $0, 1)$ και b δρα σε αυτά που ξεκινάνε με 0 όπως το a και δρα σε αυτά που ξεκινάνε από 1 όπως το c.
Όμοια για τους άλλους συμβολισμούς και 1 συμβολίζουμε την ταυτοτική απεικόνιση.
Όπως βλέπουμε τα b, c, d ορίζονται επαγωγικά σε σχέση με το μήκος, δηλαδή επίπεδο με επίπεδο.

- Αρχικά, μία παράσταση της G είναι
$G =< a, b, c, d | a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = 1. U_k = V_k = 1, k \geq 0 >$, όπου $U_0 = (ad)^4, V_0 = (adacac)^4$ και $U_k = \sigma^k(U_0)$, $V_k = \sigma^k(V_0)$ όπου σ ορίζεται από $\sigma(a) = aca, \sigma(b) = d, \sigma(c) = b, \sigma(d) = c$.
Επίσης, σ είναι 1-1 αλλά όχι επί. (Δες [14])

- Η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη αλλά όχι πεπερασμένα παριστώμενη. (Δες [14] και [13])

- Είναι άπειρη 2-ομάδα. ([12]), δηλαδή κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη και μάλιστα δύναμη του 2. Ιδιαίτερα είναι ομάδα στρέψης.

- Είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Πράγματι, αν πάρουμε μία λέξη g μήκους n, τότε θεωρούμε $r_n : G \to Aut(T[n])$, οπού $T[n]$ τα πρώτα n επίπεδα του T_2, το οποίο είναι προφανώς πεπερασμένο. Και τότε $p_n(g) \neq 1$.

- Δεν έχει πολυωνυμική, αλλά ούτε και εκθετική ανάπτυξη, (Δες [12]). Μάλιστα, ήταν το πρώτο τέτοιο παράδειγμα.

- Είναι μόλις άπειρη, δηλαδή κάθε πηλίκο(εκτός από αυτού με την τετριμμένη υποομάδα) είναι πεπερασμένο και μάλιστα 2-ομάδα.(Δες [10])

- Έχει επιλύσιμο πρόβλημα λέξης και συζυγίας.(Δες [10])

- Δεν είναι μεταβελιανή.
  Πράγματι, έστω ότι είναι, δηλαδή υπάρχει $N \lhd G$ ώστε N, G/N αβελιανές. Τότε αφού η G είναι ομάδα στρέψης και άρα G/N ομάδα στρέψης και πεπερασμένα παραγόμενη. Οπότε έχουμε πεπερασμένα παραγόμενη, αβελιανή ομάδα στρέψης άρα πεπερασμένη. Δηλαδή, N πεπερασμένου δείκτη, οπότε και πεπερασμένα παραγόμενη (αφού G είναι). Οπότε όπως πριν N πεπερασμένα παραγόμενη, αβελιανή, ομάδα στρέψης και άρα πεπερασμένη. Οπότε θα είχαμε ότι G πεπερασμένη, το οποίο δεν ισχύει, άρα δεν είναι μεταβελιανή.

Αφού η σ είναι 1-1 ορίζεται η ascending HNN- επέκταση $G*_\sigma$ και μπορεί να αποδειχτεί(Δες [11]) ότι έχει μία πεπερασμένη παράσταση:
$G*_\sigma =< a, b, c, d, t | a^2, b^2, bcd.(ad)^4, (adacac)^4, a^t = aca.b^t = d.c^t = b.d^t = c >$.

Θεώρημα 7.7. Κάθε ομομορφική εικόνα(εκτός αυτής μέσω του τετριμμένου ομόμορφισμού) της $G*_\sigma$ είναι μεταβελιανή και έχει μια υποομάδα αβελιανή υποομάδα πεπερασμένου δείκτη. Ιδιαίτερα, κάθε μη τετριμμένο πηλίκο είναι μεταβελιανή.

Απόδειξη. Έστω H η εικόνα της $G*_\sigma$ μέσω ενός ομομορφισμού ϕ ομάδα.. Θα συμβολίζουμε τις εικόνες μέσω της ϕ των a, b, c, d, t με $\alpha, \beta, \gamma, \delta.\tau$.
Θεωρούμε μετά την $\phi(G)$ που είναι υποομάδα της H και θα δείξουμε ότι $\phi(G)$ είναι γνήσιο πηλίκο(δηλαδή εκτός αυτό από την τετριμμένη υποομάδα) της ομάδας του Grigorchuk, δηλαδή της G.
Κάθε στοιχείο της $G*_\sigma$ γράφεται στην μορφή $t^n g t^{-m}$ για κάποια $n, m \geq 0$, $g \in G$.
Αυτό το στοιχείο ισούται με 1 αν και μόνο αν $n = m$ και $g = 1$. Ο ομομορφισμός ϕ έχει ένα μη-τετριμμένο στοιχείο $z = t^n g t^{-m}$ στο πυρήνα του.

Αν $n = m$ τότε $g \neq 1$ είναι στον πυρήνα και άρα η $\phi(G)$ είναι γνήσια ομομορφική εικόνα της G.
Αν $n \neq m$, τότε $\phi(t^{m-n}) = \phi(g)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $m > n$. Τότε αφού σ δεν είναι επιμορφισμός, υπάρχει ένα στοιχείο $s \in G$, τέτοιο ώστε $s \notin \sigma(G)$. Άρα $s \notin G^t \subseteq G*_\sigma$. και από Θεώρημα κανονικής μορφή HNN- επεκτάσεων (δες [9]) τα στοιχεία $(s^{t^{m-n}})^{g^{-1}}$ και s είναι διαφορετικά στο G. Από την άλλη οι εικόνες τους μέσω της ϕ είναι ίδιες. Άρα και σε αυτήν την περίπτωση, ο πυρήνας της ϕ τέμνει μη τετριμμένα την G και άρα $\phi(G)$ γνήσιο πηλίκο της G.
Κάθε γνήσιο πηλίκο της G είναι πεπερασμένη 2-ομάδα και έτσι $\phi(G)$ είναι μια πεπερασμένη 2-ομάδα, οπότε είναι μηδενοδύναμη. Παρατηρούμε επίσης ότι το συζυγές του $\phi(G)$ μέσω του τ είναι μέσα στην $\phi(G)$(αφού $t^{-1}gt = \sigma(g) \in G$ και $\tau = \phi(t)$) και αφού $\phi(G)$ είναι πεπερασμένη, αναγκαστικά είναι επί του $\phi(G)$ (συζυγή έχουν ίδιο πλήθος στοιχείων) έπεται ότι $\phi(G)$ ισούται με κάθε το συζυγές του, και άρα είναι κανονική.
Τώρα θα δείξουμε ότι $\phi(G)$ είναι αβελιανή. Πρώτα παρατηρούμε ότι λόγω των σχέσεων $bcd = bb = cc = dd = 1$, η υποομάδα $< b, c, d >$ της G είναι ισόμορφη με το $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ και ιδιαίτερα είναι αβελιανή.
Θεωρούμε το $x = [\gamma, \alpha]$. Τότε έχουμε ότι $x^\tau = [\beta, \alpha\gamma\alpha] = [\beta, \gamma[\gamma, \alpha]]$ και αφού β και γ μετατίθενται, $x^\tau = [\beta, [\gamma, \alpha]]$.
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι $x^{\tau^2} = [\delta, [\beta, [\gamma, \alpha]]]$ και βλέπουνε ότι x^{τ^n} ανήκει στον n όρο της κατωτέρας κεντρικής σειράς της $\phi(G)$. Αφού $\phi(G)$ είναι μηδενοδύναμη κάποια στιγμή η σειρά θα φτάσει στο 1, αλλιώς $x^{\tau^n} = 1$ για κάποιο n, και έτσι $[\gamma, \alpha] = x = 1$.
Με παρόμοια επιχειρήματα βλέπουμε ότι $[\beta, \alpha] = 1$ και $[\delta, \alpha] = 1$, και άρα $\phi(G)$ αβελιανή.
Αφού λοιπόν οι τέσσερις γεννήτορες της $\phi(G)$ έχουν τάξη 2, βλέπουμε ότι η $\phi(G)$ είναι αβελιανή p-ομάδα. Στην πραγματικότητα, αφού $< \alpha, \beta.\gamma >$ είναι πηλίκο της $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ και αφού οι σχέσεις $a^t = aca$, $d^t = c$ συνεπάγονται ότι $\alpha = \delta$, βλέπουμε ότι $\phi(G)$ πηλίκο της $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
Άρα τελικά η H περιέχει μια p- ομάδα, κανονική, αβελιανή με δείκτη το πολύ

4 και κυκλική την ομάδα πηλίκο. Οπότε H είναι μεταβελιανή και μάλιστα έχει υποομάδα πεπερασμένου δείκτη κυκλική.

□

Αρχικά, ας δεχτούμε το συμπέρασμα και έστω ότι $G*_\sigma$ είναι προσεγγιστικά πεπερασμένη, τότε $G*_\sigma$ εμφυτεύεται σε γινόμενο πεπερασμένων πηλίκων της και όλα τα πεπερασμένα πηλίκα της είναι μεταβελιανά, και άρα και το γινόμενο είναι μεταβελιανή. Τότε η G είναι μεταβελιανή(ως υποομάδα μεταβελιανής) το οποίο είναι άτοπο αφού δεν μπορεί αυτή η ομάδα να είναι μεταβελιανή. Οπότε $G*_\sigma$ όχι προσεγγιστικά πεπερασμένη. Και έτσι έχουμε το ζητούμενο παράδειγμα.

Βιβλιογραφία

[1] D. Robinson [A course in the Theory of Groups] Graduate texts in Mathematics 80 Springer - Verlag New York Inc., 1982)

[2] J. Rotman, [An The Theory of Groups, An Introduction], 2nd ed., Allyn and Bacon, Inc., Boston

[3] R. Geoghegan, M.L.Mihalik, M. Sapir and D.T.Wise, [Ascending HNN-Extension of finitely generated free groups are Hopfian], London Mathem. Socitety 22 (2001), 292-298.

[4] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, [Combinatiorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations] , Interscience Publishers, New York, London, Sydney, 1966

[5] Tim Hsu, Daniel T. Wise [Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite] , Journal of Pure and Applied Algebra 182 (2003) 65-78.

[6] G.Baumsalg, Lecture Notes on Nilpotent Groups, CBMS Regional Conference Series in Mathematics Vol.2, American Mathematical Society, Providence, RI, 1971.

[7] D.I. Moldavanskii, [Residual finiteness of descending HNN-extensions of groups], Ukrain. Mat. Zh. 44 (6) (1992) 842-845

[8] M. Sapir [Residually finite hyperbolic groups are dynamics of polynomial over $\mathbb{Z}_p$. lecture in : International Conference on Non-Positive Curvature

in Group Theory, Topology and Geometry Vanderbilt University, May 1988.

[9] R.C.Lyndon, P.E.Schupp [Combinatorial Group Theory] Springer, Berlin, 1977, ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzegebiete, Band 89

[10] R.I. Grigorchuk, [On Burnside's problem on periodic groups], Funktsional. Anal. i Prilozhen., 14(1): 53-54, 1980

[11] R.I. Grigorchuk, [An example of a finitely presented amenable group that does not belong to the class EG], Mat. Sb., 189(1):79-100, 1988.

[12] Pierre de la Harpe. [Topics in geometric group theory.] Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago. ISBN 0-226-31719-6; Ch. VIII, The first Grigorchuk group, pp. 211–264.

[13] R. I. Grigorchuk, [Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means.] Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya. vol. 48 (1984), no. 5, pp. 939–985

[14] I. G. Lysënok, [A set of defining relations for the Grigorchuk group.] Matematicheskie Zametki, vol. 38 (1985), no. 4, pp. 503–516.

[15] E.S. Golod and I.R. Safarevic [On the class field tower]. Izv. Akad Nauk SSSR Ser. Mat., 28:261-272, 1964. English transl. in : Amer. Math. Soc. Transl (2) 48, 91=102 (1965)

[16] E S Golod, [On nil-algebras and finitely approximable p-groups] Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 28 1964 273–276, . English Transl in: Amer. Math. Sos. Transl. (2) 48 103-106 (1965)

[17] A. Malcev, [On isomorphic matrix representations of infinite groups], Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S., 8(50):3 (1940), 405–422 English Transl. in: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 45, 1-28 (1965)

[18] A. I. Mal'cev, [On homomorphisms onto finite groups], Uchen. Zapiski Ivanovsk. ped. instituta, 18, N 5 (1958), 49-60 (also in Selected papers, Vol. 1, Algebra, 1976, 450-462) English Transl. in : Amer. Math. Soc. Transl. (2) 119, 67-79 (1983)

[19] Zlil Sela, [Endomorphisms of hyperbolic groups]. I. The Hopf property. Topology, vol. 38 (1999), no. 2, pp. 301–321

[20] Mikhail Gromov, [Hyperbolic groups], in Essays in group theory, vol 8 of Math.Sci.Res. Inst. Publ. pp.75-263, Springer, 1987

[21] Gilbert Baumslag and Donald Solitar, [Some two-generator one-relator non-Hopfian groups], Bulletin of the American Mathematical Society 68 (1962), 199–201. MR0142635

[22] Dmitriĭ Alekseevich Suprunenko, K. A. Hirsch, Matrix groups (1976), pp. 174–5;

[23] Mapping tori of free group automorphisms are coherent. Feighn, Mark, Handel, Michael .Annals of Mathematics. Second Series (1999) Volume: 149, Issue: 3, page 1061-1077 ISSN: 0003-486X

[24] On Group-Theoretic Decision Problems and Their Classification. (AM-68) Charles F. Miller III

[25] Ascending HNN extensions of residually finite groups can be non-Hopfian and can have very few finite quotients Mark Sapir, Daniel T. Wise Department of Mathematics, Vanderbilt University, Nashville, TN 37240, USA; Department of Mathematics, Malott Hall, Cornell University, Ithaca, NY 14853, USA Journal of Pure and Applied Algebra DOI:10.1016/S0022-4049(01)00003-2

[26] R. Bieri and R. Strebel. Soluble groups with coherent group rings. In Homological group theory. (Proc. Sympos., Durham, 1977), volume 36 of London Math.

[27] J.R.J Groves Soluble Groups in which Every Finitely Subgroup is Finitely presented, J. Austal. Math Soc. Ser. A. 26 (1) (1978) 115-125

[28] Group theory : essays for Philip Hall /[edited by K.W. Gruenberg and J.E. Roseblade]. Other Authors Gruenberg, Karl W. Hall, Philip, 1904-1982. Roseblade, J. E. Published London ; Orlando : Academic Press, 1984.

[29] A. Borisov, M. Sapir. Polynomial maps over Finite Fields and residual Finiteness of mapping tori of group endomorphisms, arXive:math.GR/0309121.