ΣΚΕΔΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΕΝΑ ΟΡΘΟΤΡΟΠΙΚΟ ΜΕΣΟ

Παναγιώτα Ν. Κουταλιανού

Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στα
Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα,
Ιούνιος 2013

Στους γονείς μου
Γεωργία και Νικόλα,
στον αδελφό μου Στέφανο
και στο μικρό Νικόλα.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, η οποία υλοποιήθηκε στο τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, στα πλαίσια των μεταπτυχιακών σπουδών μου προκειμένου να αποκτήσω το μεταπτυχιακό δίπλωμα της κατεύθυνσης των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που συνέβαλαν στη διεκπεραίωση της.

Κατα κύριο λόγο, οφείλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον καθηγητή κ. Αθανασιάδη Χριστόδουλο, του Τμήματος Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α. για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε δίνοντας μου την δυνατότητα να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα. Τον ευχαριστώ επίσης για την καθοδήγηση και την υποστήριξη του καθ' όλη τη διάρκεια διεκπεραίωσης της παρούσας διπλωματικής.

Επιπλέον θα ήθελα να απευθύνω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επίκουρο καθηγητή κ. Βασίλειο Σεβρόγλου, του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για την απλόχερη βοήθεια, τις πολύτιμες γνώσεις και χρήσιμες συμβουλές που μου παρείχε καθόλη τη διάρκεια της εργασίας. Επίσης τον ευχαριστώ για τον χρόνο που αφιέρωσε κατά τη συγγραφή της εργασίας και για την άψογη συνεργασία μας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Γεωργία και Νίκο, για την κατανόηση που μου έχουν δώσει όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος, ευχαριστώ πολύ τους αδερφούς μου Γιάννη και Στέφανο, καθώς και τους φίλους μου για την συμπαράσταση τους με το δικό τους ξεχωριστό τρόπο.

Contents

Chapter 0

0.1 Πίνακας Συμβόλων

$J(x,t)$	Πυκνότητα ρεύματος
$E(x,t)$	Ένταση ηλεκτρικού πεδίου
$B(x,t)$	Ένταση μαγνητικού πεδίου
$D(x,t)$	Ηλεκτρική διέγερση
$H(x,t)$	Μαγνητική διέγερση
μ_0	Απόλυτη μαγνητική διαπερατότητα του κενού
ϵ_0	Απόλυτη ηλεκτρική σταθερά του κενού
$\epsilon \equiv \epsilon(x)$	Ηλεκτρική διαπερατότητα ή διηλεκτρική σταθερά
$\mu \equiv \mu(x)$	Μαγνητική διαπερατότητα
$\sigma \equiv \sigma(x)$	Ηλεκτρική αγωγιμότητα του υλικού
E^{inc}, H^{inc}	Προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο
E^{sct}, H^{sct}	Σκεδασμένο πεδίο
ω	Κυκλική συχνότητα
A, n	Καταστατικές παράμετροι φραγμένου ορθοτροπικού μη ομογενή μέσου στον $\mathbb{R}^2$
u^i	Προσπίπτον κύμα
u^s	Σκεδασμένο πεδίο
$u_\infty(\theta,\phi)$	Πλάτος σκέδασης
F	Τελεστής μακρινού πεδίου
u_g	Συνάρτηση κυμάτων Herglotz με πυρήνα g
$\hat{u}_g$	Συνάρτηση κυμάτων Herglotz με πυρήνα $g(\phi-\pi)$
$\Omega_\varepsilon(x_0)$	Μικρή σφαίρα
Ω_R	Σφαίρα ακτίνας R
$W(D)$	Χώρος Hilbert
$L(V)$	Φραγμένο συζυγές γραμμικό συναρτησιακό
$u_{g_z}^{\infty,\varepsilon}$	Κυματική συνάρτηση Herglotz με πυρήνα $g_z^{\infty,\epsilon}$
$\hat{n}$	Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα

Χώροι Συναρτήσεων

Ω	ανοικτό υποσύνολο στο $\mathbb{R}^n$
Ω	η κλειστότητα του Ω
D	μη κενό, ανοικτό και φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^2$, με C^2-σύνορο ∂D
$C^o(\Omega)$	σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στο Ω
$C_c(\Omega)$	συνεχείς συναρτήσεις με $supp\ f$ συμπαγές
$C_b^a(\Omega)$	το σύνολο όλων των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων στο Ω
$C^r(\Omega)$	$= \{u : \partial_u^a$ υπάρχει και είναι συνεχής στο Ωγια $\|a\| \leq r\}$
$C^r(\bar{\Omega})$	$= \{u\|_{\partial\bar{\Omega}} : u \in C^r(\mathbb{R}^2)\}$
$C^\infty(\Omega)$	$=\subset r \geq 0 cup C^r(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : supp\ u \leq 0\}$
$C^\infty(\bar{\Omega})$	$=\subset r \geq 0 cup C_r(\bar{\Omega})$
$C_0^\infty(\Omega)$	$= \{u : u \in C_k^\infty(\Omega)\}$
C_c^k	$= C^k(\Omega) \cup C_c(\Omega)$
C_c^∞	$= C^\infty(\Omega) \cup C_c(\Omega)$
$L^p(\Omega)$	$= \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με $\int_\Omega \|f(x)\|^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty\}$
$L^\infty(\Omega)$	$= \{f : \Omega \to \mathbb{R} \exists M > 0$ ώστε $\|f(x)\|^p dx \leq M$ σπ. στο $\Omega\}$
$H^1(\Omega)$	$= \{u \in L^2(\Omega) : \exists g \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u\phi' = \int_\Omega y\phi, \forall \phi \in C_c^1(\Omega)\}$
H_o^1	$= \{u \in H^1(\Omega) : u\|_{\partial D} = 0\}$
$H^m(\Omega)$	$u \in L^2(\Omega) : g_i \in L^2(\Omega), i = 1,2,3,...,,n$ τέτοιες ώστε $\int_\Omega u\phi^{(i)} = (-1)^i \int_\Omega g_i\phi, 1 \leq i \leq m\ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)\}$
$W(D)$	$\{\in C^2(D) \cup C^1(\bar{D}) : Deltau + k^2u = 0\}$
$H(\partial D)$	$= \{(u\|_{\partial D}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\|_{\partial D}) : u \in \bar{H}\}$
V^a	$= \{g \in X^* : \langle g, v\rangle = 0$ για όλα τα $u \in W\}$
${}^aV$	$= \{u \in X : \langle g, v\rangle = 0$ για όλα τα $g \in V\}$

0.2 Εισαγωγή

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η μελέτη της σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από ένα διαπερατό (ανισότροπο) ορθοτροπικό ανομοιογενές μέσο. Συγκεκριμένα, θα περιοριστούμε στην μονοδιάστατη περίπτωση που απεικονίζει σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από ένα ορθοτροπικό κύλινδρο άπειρου μήκους. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την επίλυση του αντίστροφου ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος σκέδασης για ένα μη ομογενή ορθοτροπικό μέσο.

Αρχικά, θα ξεκινήσουμε αυτή τη μελέτη παρουσιάζοντας κάποιες βασικές έννοιες, που αφορούν άμεσα το συγκεκριμένο θέμα. Θα αναφερθούμε γενικά στη σκέδαση και στο τέλος θα εστιάσουμε στο πρόβλημα μας.

Σκέδαση είναι το φαινόμενο κατά το οποίο ένα κύμα διαδίδεται σε ένα ομογενές μέσο και κατά τη διάδοση του συναντήσει ένα εμπόδιο, το σκεδαστή.

Η σκέδαση διαιρείται σε

- ***ελαστική** (όχι σημαντική αλλαγή ενέργειας), στην οποία ανήκουν η σκέδαση Rayleight και Mie.*
- ***ανελαστική** στην οποία ανήκουν η σκέδαση Brillouin, Raman, ανελαστική σκέδαση ακτίνων X και σκέδαση Compton.*

Η θεωρία σκέδασης ασχολείται με την επίδραση έντονων μεταβολών των φυσικών παραμέτρων στη διάδοση ενός κύματος, επομένως ασχολείται με την μελέτη των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τα διάφορα φαινόμενα σκέδασης.

Ένα πρόβλημα σκέδασης μπορεί να χωριστεί σε

- ***Ευθύ πρόβλημα σκέδασης**. Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης συνίσταται στον προσδιορισμό του σκεδασμένου πεδίου u^s, όταν είναι γνωστό το προσπίπτον κυματικό πεδίο, καθώς επίσης και οι φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή, δηλαδή τις συνοριακές συνθήκες του σκεδαστή. Είναι ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα κατά Hadamard, δηλαδή έχει λύση, η λύση είναι μοναδική και εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος. Η μοναδικότητα της λύσης εξασφαλίζεται από τις συνθήκες ακτινοβολίας, η οποία στη σημερινή της μορφή και για την περίπτωση των βαθμωτών πεδίων,προτάθηκε από τον A. Sommerfeld (1912).*

- ***Αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης***. *Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης συνίσταται στον προσδιορισμό των φυσικών και γεωμετρικών ιδιοτήτων ενός σώματος, του σκεδαστή (π.χ. μέγεθος, εσωτερική δομή), δεδομένης της έντασης (και φάσης) ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που σκεδάζονται από το σώμα αυτό, δηλαδή όταν γνωρίζουμε το προσπίπτον και το σκεδασμένο πεδίο. Το αντίστροφο πρόβλημα είναι εγγενώς μη γραμμικό και πιο σημαντικό από την άποψη των αριθμητικών υπολογιστών, μη καλά τοποθετημένο (δηλαδή ενδεχομένως να μην υπάρχει λύση ή αν υπάρχει να μην είναι μοναδική ή / και να μην εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος κατά συνεχή τρόπο)*

Φαινόμενα σκέδασης λαμβάνουν χώρα κατά την διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε μέσα και διατάξεις με συνέχειας. Η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων έχει απασχολήσει πολλούς επιστήμονες τα τελευταία 100 χρόνια, αποτελώντας σημαντικό πεδίο έρευνας για την επίλυση προβλημάτων που εμφανίζονται σε πλήθος εφαρμογών. Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων βρίσκει εφαρμογή στα ραδιοκύματα (π.χ. ραντάρ) και ορατό φως, όπου μαζί με την απορρόφηση είναι οι δύο φυσικές διαδικασίες που είναι υπεύθυνες για το τι βλέπουμε.

Στη διπλωματική αυτή εργασία θα μελετήσουμε το πρόβλημα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Ιδιαίτερα, η εργασία οργανώνεται ως εξής: Στο 1ο κεφάλαιο θα διατυπώσουμε εξισώσεις, βασικές έννοιες και νόμους που διέπουν τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Θα αναφερθούμε στις εξισώσεις του Maxwell, οι οποίες με κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία ανάγονται σε εξισώσεις που περιγράφουν κύματα. Θα μελετήσουμε χρονοεξαρτώμενες εξισώσεις και στη δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου τις εξισώσεις με αρμονική χρονική εξάρτηση.

Στο 2ο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε βασικούς ορισμούς και έννοιες της Συναρτησιακής Ανάλυσης και των χώρων Sobolev που παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη του ευθέως και αντίστροφου προβλήματος σκέδασης. Θα αναφερθούμε και σε κάποια σημαντικά παραδείγματα, λήμματα και θεωρήματα ώστε να κατανοήσουμε το θεώρημα και τις προτάσεις που θα διατυπώσουμε στο κεφάλαιο 3.

Στο 3ο κεφάλαιο θα διατυπώσουμε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από διαπερατό ορθοτροπικό ανομοιογενές μέσο. Θα μελετήσουμε την εξίσωση Helmholtz έξω από το σκεδαστή και την εξίσωση με μη σταθερούς συντελεστές μέσα στο σκεδαστή. Πιο συγκεκριμένα, δίνονται οι εξισώσεις του Maxwell σε ορθοτροπικό μέσο, θα αναφέρουμε και θα αποδείξουμε θεωρήματα, Λήμματα και πορίσματα που *σχετίζονται με την απόδειξη ύπαρξης μοναδικής λύσης του σκεδασμένου προβλήματος. Στη συνέχεια, αναδιατυπώνουμε αυτό το πρόβλημα σε κατάλληλους χώρους Sobolev και στην τελευταία υποενότητα θα εξετάσουμε τις μεταβολικές μεθόδους στην εύρεση ασθενών λύσεων για προβλήματα συνοριακών τιμών.*

Στο τελευταίο κεφάλαιο γνωρίζοντας το προσπίπτον και το σκεδασμένο πεδίο από το 3ο κεφάλαιο θα επεκταθούμε στην περίπτωση του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης, θα ορίσουμε τη κυματική συνάρτηση Herglotz και στη συνέχεια θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα λύσης του ομογενούς εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας. Θα αναφέρουμε μια απόδειξη με βάση τον Hahner [10] η οποία βασίζεται στην ομαλότητα της λύσης του. Τέλος, στην τελευταία υποενότητα αυτού του κεφαλαίου θα βρούμε μια προσέγγιση για τον φορέα της ανομοιογένειας.

Chapter 1

Εξισώσεις του Maxwell

1.1 Οι Χρονοεξαρτόμενες Εξισώσεις

Από το νόμο του Gauss για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, το νόμο της επαγωγής του Faraday και το νόμο του Ampere συμπληρωμένο με έναν ακόμη όρο από τον Maxwell που αφορά την μεταβολή της ροής της ηλεκτρικής μετατόπισης μέσα από την επιφάνεια που περικλείει μια κλειστή γραμμή προκύπτουν οι τέσσερις εξισώσεις Maxwell (πήραν το όνομα τους από το Φυσικό James Clerk Maxwell (1831-1879)):

$$divD(x,t) = \rho(x,t) \tag{1.1}$$

$$curlE(x,t) = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$divB(x,t) = 0 \tag{1.3}$$

$$curlH(x,t) = J(x,t) + \frac{\partial D(x,t)}{\partial t} \tag{1.4}$$

όπου $E(x,t), B(x,t)$ *η ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα,* $D(x,t), H(x,t)$ *η ηλεκτρική και μαγνητική διέγερση, αντίστοιχα,* $J(x,t)$ *η πυκνότητα ρεύματος και* $\rho(x,t)$ *η πυκνότητα φορτίου.*

Στις περιοχές του χώρου όπου δεν υπάρχουν φορτία ή ρεύματα οι εξισώσεις Maxwell γράφονται ως

$$divD(x,t) = 0 \tag{1.5}$$

$$curlE(x,t) = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} \tag{1.6}$$

$$divB(x,t) = 0 \tag{1.7}$$

$$curlH(x,t) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \tag{1.8}$$

όπου ϵ_0, μ_0 *η απόλυτη διηλεκτρική σταθερά και η απόλυτη μαγνητική διαπερατότητα του κενού, αντίστοιχα.*

Από τι εξισώσεις αυτές και με κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία και αποσύζευξη του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου προκύπτουν οι σχέσεις

$$\Delta E(x,t) = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.9}$$

$$\Delta B(x,t) = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.10}$$

οι οποίες έχουν τη μορφή κυματικής εξίσωσης και περιγράφουν κύματα που κινούνται με ταχύτητα $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 3 \times 10^8$, *η τιμή που ισούται με την ταχύτητα του φωτός.*

Σε αγώγιμο και ισότροπο υλικό τα ηλεκτρόνια είναι δεσμευμένα από τα άτομα του υλικού και όλες οι διεθύνσεις είναι ισοδύναμες. Σ' αυτή την περίπτωση ισχύουν οι καταστατικές σχέσεις:

$$D(x,t) = \epsilon E(x,t) \tag{1.11}$$

$$H(x,t) = \frac{1}{\mu} B(x,t) \tag{1.12}$$

και οι εξισώσεις Maxwell γίνονται

$$divD(x,t) = 0 \tag{1.13}$$

$$curlE(x,t) = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} \tag{1.14}$$

$$divB(x,t) = 0 \tag{1.15}$$

$$curlH(x,t) = \mu\epsilon \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \tag{1.16}$$

όπου με ϵ, μ *η ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα του υλικού. Στις τελευταίες σχέσεις η ποσότητα* $\mu_0\varepsilon_0$ *έχει αντικατασταθεί από το* $\mu\varepsilon$. *Συνεπώς, σε ένα γραμμικό ομογενές υλικό τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται με ταχύτητα* $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ *που είναι μικρότερη αυτή του φωτός.*

1.2 Αρμονική Χρονική Εξάρτηση

Θεωρούμε διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε ένα ανομοιογενές ανισότροπο μέσο στον $\mathbb{R}^3$. *Το συνολικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περι-*

γράφεται από το ηλεκτρικό πεδίο $\mathcal{E}$ και το μαγνητικό πεδίο που ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell:

$$curl\mathcal{E} + \mu\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = 0 \tag{1.17}$$

$$curl\mathcal{H} + \epsilon\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = \sigma\mathcal{E} \tag{1.18}$$

όπου ϵ σταθερό για την (1.18) η ηλεκτρική διαπερατότητα, μ η μαγνητική διαπερατότητα και σ η ηλεκτρική αγωγιμότητα.

Για ηλεκτρομαγνητικά κύματα με αρμονική χρονική εξάρτηση της μορφής

$$\mathcal{E}(x,t) = E(x)e^{-i\omega t} \tag{1.19}$$

$$\mathcal{H}(x,t) = H(x)e^{-i\omega t} \tag{1.20}$$

όπου $\omega > 0$ η κυκλική συχνότητα, μπορούμε να αναχθούμε στην εξίσωση

$$\nabla \times \mathcal{E}(x,t) = \nabla \times \left(e^{-i\omega t}E(x)\right) = e^{-i\omega t}\left(\nabla \times E(x)\right) \tag{1.21}$$

και παραγωγίζοντας την εξίσωση (1.20) παίρνουμε

$$\frac{\partial\mathcal{H}\left(x,t\right)}{\partial t} = \frac{\partial\left(H\left(x\right)e^{-i\omega t}\right)}{\partial t} = -i\omega H\left(x\right)e^{-i\omega t} \tag{1.22}$$

Αντικαθιστώντας τις (1.21) και (1.22) στην (1.17) έχουμε

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t}\Big(\nabla \times E(x)\Big) + \mu(-i\omega(x))e^{-i\omega t} &= 0 \\ \Rightarrow e^{-i\omega t}\Big[\nabla \times E(x) - i\omega\mu H(x)\Big] &= 0 \\ \Rightarrow curlE(x) - i\omega\mu H(x) = 0 & \end{aligned} \tag{1.23}$$

Με παρόμοια διαδικασία

$$\begin{aligned} curl\mathcal{H}(x,t) &= \nabla \times \Big(e^{-i\omega t}H(x)\Big) \\ &= e^{-i\omega t}\Big(\nabla \times H(x)\Big) \end{aligned} \tag{1.24}$$

και παραγωγίζοντας στην εξίσωση (1.19) φτάνουμε στην

$$\frac{\partial\mathcal{E}\left(x,t\right)}{\partial t} = \frac{\partial\left(E\left(x\right)e^{-i\omega t}\right)}{\partial t} = -i\omega e^{-i\omega t}E\left(x\right) \tag{1.25}$$

Αντικαθιστώντας τις (1.24) και (1.25) στην (1.18) συμπαιρένουμε,

$$curlH(x) + (i\omega\epsilon - \sigma)E(x) = 0 \tag{1.26}$$

Θέτουμε όπου $E(x)$ *την* $(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega})^{-\frac{1}{2}}E(x)$ *και όπου* $H(x)$ *τη σχέση* $\mu^{-\frac{1}{2}}H(x)$ *και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι από τις χρονοεξαρτώμενες εξισώσεις Maxwell (1.17)-(1.18) βρίσκουμε τις εξισώσεις (1.23) και (1.26) που γράφονται ως*

$$\begin{aligned} curlE(x) - i\kappa H(x) &= 0 \quad (1.27)\\ curlH(x) + i\kappa E(x) &= 0 \quad (1.28) \end{aligned}$$

με $\kappa > 0$ *ο κυματικός αριθμός* $\kappa^2 = \epsilon\mu\omega^2 > 0$.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες, θεωρίες της Συναρτησιακής Ανάλυσης και των χώρων Sobolev, το οποίο είναι πολύ βασικό για την μελέτη του προβλήματος σκέδασης που θα περιγράψουμε στο Κεφάλαιο 3.

Chapter 2

Βασικά Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε βασικούς ορισμούς και βασικές έννοιες των νορμικών χώρων και ιδιαίτερα των χώρων Hilbert, που αφορούν άμεσα το συγκεκριμένο θέμα.

2.1 Χώροι με Νόρμα

Αρχικά θα ορίσουμε τον νορμικό χώρο X. Υποθέτουμε ότι $X \neq 0$

Ορισμός 2.1 *Έστω X διανυσματικός χώρος πάνω στον* $\mathbb{C}$. *Η συνάρτηση* $|| \, ||X \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε*

1. $||\phi|| \geq 0$
2. $||\phi|| = 0$ *αν και μόνο αν* $\phi = 0$
3. $||a\phi|| = |a|||\phi||$ *για όλα τα* $a \in \mathbb{C}$
4. $||\phi + y|| = ||\phi|| + ||y|| \forall \phi, y \in X$

ονομάζεται νόρμα στον X, και ο διανυσματικός χώρος X εφοδιασμένος με τη νόρμα ονομάζεται νορμικός χώρος.

Παράδειγμα 2.1 *Ο διανυσματικός χώρος* $\mathbb{C}^n$ *των n-διατεταγμένων ζευγών των μιγαδικών αριθμών* $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ *με τους συνήθεις ορισμούς της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι χώρος με νόρμα*

$$||x|| := \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

όπου $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Η τριγωνικά ανισότητα $||x+y|| \geq ||x|| + ||y||$ *είναι απλά μια επαναδιατύπωση της ανισότητας Minkowski για αθροίσματα [1].*

Παράδειγμα 2.2 *Έστω X διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο [α, b] σύμφωνα με Lebesque. Τότε η νόρμα ορίζεται*

$$||\phi|| := \Big[\int_a^b |\phi(x)|^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}}$$

και ο νορμικός χώρος είναι ο $L^2(a,b)$

Μια ακολουθία $\{\phi_n\}, \phi_n \in X$ *συγκλίνει στο* $\phi \in X$ *αν* $||\phi_n - \phi|| \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$ *και γράφουμε* $\phi_n \to \phi$.

Έστω X,Υ χώροι με νόρμα. Η συνάρτηση $A : X \to Y$ *είναι συνεχής στον* $\phi \in X$ *αν* $\phi_n \to \phi$ *και άρα* $A\phi_n \to A\phi$.

Το υποσύνολο $U \cup X$ *είναι κλειστό αν περιέχει όλα τα όρια των συγκλίνουσων ακολουθιών του* U.

Υποθέτουμε ότι $U \cup X$ *και* $\phi \in X$. *Ένα στοιχείο* $u \in U$ *ονομάζεται καλύτερη προσέγγιση του φ σε σχέση με το* U *αν*

$$||\phi_n - u|| = \inf_{u \in U} ||\phi_n - u||$$

Ορισμός 2.2 *Το υποσύνολο U ονομάζεται πυκνό στον X αν* $\bar{U} = X$

Ορισμός 2.3 *Η ακολουθία* $\{\phi_n\}, \phi_n \in X$ *ονομάζεται ακολουθία Cauchy αν* $\forall \epsilon > 0$ *υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός* $N = N(\epsilon)$ *τέτοιος ώστε* $||\phi_n - \phi_m||$ *για όλα τα* $m, n \geq N$.

Ορισμός 2.4 *Το υποσύνολο* U *του* X *είναι πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy στο* U *συγκλίνει σε ένα στοιχείο* U

Ορισμός 2.5 *Ένας πλήρης νορμικός χώρος X ονομάζεται χώρος Banach*

Ορισμός 2.6 *Έστω X ένας διανυσματικός χώρος πάνω στον* $\mathbb{C}$. *Η συνάρτηση* $X \times X \to \mathbb{C}$ *τέτοια ώστε*

1. $(\phi, \phi) \geq 0$
2. $(\phi, \phi) = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$
3. $(\phi, y) = (y, \phi)$

4. $(a\phi + \beta y, x) = a(\phi, x) + \beta(y, x)$ *για όλα τα* $a, \beta \in \mathbb{C}$ *και για όλα τα* $\phi, y, x, \in X$ *ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο στον X.*

Παράδειγμα 2.3 *Το εσωτερκό γινόμενο στον* $L^2[a, \beta]$ *δίνεται από τη σχέση*

$$(\phi, y) := \int_a^\beta \phi \bar{y} dx$$

Θεώρημα 2.1 *Το εσωτερικό γινόμενο πληρεί την ανισότητα Cauch- Schwarz*

$$|(\phi, y)|^2 \leq (\phi, \phi)(y, y)$$

για όλα τα $\phi, y \in X$ *με την ισότητα* $\Longleftrightarrow$ ϕ *και* y *είναι γραμμικά εξαρτώμενα.*

Ορισμός 2.7 *Αν X είναι πλήρης με την νόρμα* $||\phi|| := (\phi, \phi)^{1/2}$ *ονομάζεται χώρος Hilbert*

Παράδειγμα 2.4 *Με το εσωτερικό γινόμενο του παραδείγματος (2.3) ο* $L^2[a, \beta]$ *είναι ένας χώρος Hilbert*

Ορισμός 2.8 *Ο υπόχωρος U του X είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του X που λαμβάνεται με το εσωτερικό γινόμενο στον X περιορίζεται σε* $U \times X$.

Ένα υποσύνολο S του χώρου Hilbert ονομάζεται υπόχωρος του H αν τότε για .

Ο S είναι κλειστός υπόχωρος του H αν S είναι υπόχωρος του H και επιπλέον έστω $\{u_n\}$ *συγκλίνουσα ακολουθία στον H τέτοιο ώστε* $u_n \in S, n = 1, 2, 3...$ *τότε* $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ *ανήκει στον S επίσης.*

Στη συνέχεια, το ακόλουθο αποτέλεσμα παρέχει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τις γεωμετρικές ιδιότητες ενός χώρου Hilbert.

Θεώρημα 2.2 (Θεώρημα προβολής) *Έστω G ένας κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H. Τότε για κάθε* $h \in H$ *υπάρχει μοναδικό* $g \in G$ *τέτοιο ώστε*

$$i) \qquad ||h - g|| \inf_{\phi \in G} ||h - \phi||$$

Επομένως

$$ii) \qquad (h - g, \phi) = 0 \qquad \text{για κάθε } \phi \in G$$

***Ορισμός* 2.9** *Δύο στοιχεία ϕ και y ενός χώρου Hilbert ονομάζεται ορθογώνιο αν $(\phi, y) = 0$ και γράφουμε $\phi \perp y$*

Ένα υποσύνολο ονομάζεται ορθογώνιο σύστημα αν $(\phi, y) = 0$, για κάθε $\phi, y \in U$ με $\phi \neq y$. Το ορθογώνιο σύστημα U ονομάζεται ορθοκανονικό αν $||\phi|| = 1,\ \forall \phi \in U$.

Το σύνολο

$$U^{\perp} := \{y \in X : \phi \perp y\}$$

ονομάζεται ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποσυνόλου U και είναι κλειστός υπόχωρος του H.

Για να το αποδείξουμε αυτό έστω $u_n \in U^{\perp}$ τέτοιο ώστε $u_n \to u$. Τότε $(u, \phi) = (u, \phi) - (u_n, \phi)$ για κάθε $\phi \in G$ καθώς $(u_n, \phi) = 0$

Άρα $|(u, \phi)| = |(u - u_n.\phi)| \leq ||u - u_n||\ ||\phi|| \to \infty$ καθώς $n \to \infty$, δηλαδή $(u, \phi) = 0 \Leftrightarrow u \in U^{\perp}$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $U \cup U^{\perp} = \{0\}$ και επομένως μπορούμε να γράψουμε τον H ως ευθύ άθροισμα του U και U.

$$H = U \oplus U^{\perp}$$

δηλαδή υπάρχουν δύο ξένοι κλειστοί υπόχωροι U και U τέτοιο ώστε για κάθε $h \in H, g \in G$ και $f \in U^{\perp}$ γράφεται ως $h = g + f$.

***Θεώρημα* 2.3** *Κάθε φραγμένη ακολουθία σε ένα χώρο Hilbert είναι ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.*

2.2 Φραγμένοι Γραμμικοί Τελεστές

***Ορισμός* 2.10** *Ένας τελεστής $A : X \to Y$ ονομάζεται γραμμικός αν $A(a\phi + \beta y) = aA\phi + \beta Ay$, για όλα τα $\phi, y \in X$ και $a, \beta \in \mathbb{C}$*

***Θεώρημα* 2.4** *Έστω X και Υ νορμικός χώρος και $A : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τότε ο A είναι συνεχής αν είναι συνεχής κατά σημείο.*

***Ορισμός* 2.11** *Ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ είναι φραγμένος αν υπάρχει θετική σταθερά c τέτοια ώστε*

$$||A\phi|| \leq c||\phi||$$

για κάθε $\phi \in X$.

Η νόρμα του A ορίζεται ως

$$||A|| := \sup_{||\phi||=1} ||A\phi|| \qquad \phi \in X$$

Αν $Y = \mathbb{C}$, ο A ονομάζεται φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό. Ο χώρος X^* των φραγμένων γραμμικών συναρτήσεων σε έναν νορμικό χώρο X ονομάζεται δυικός χώρος του X.

Θεώρημα 2.5 *Έστω X και Y νορμικός χώρος και $A : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τότε ο A είναι συνεχής αν είναι συνεχής φραγμένος.*

Παράδειγμα 2.5 *Έστω $K(x, y)$ συνεχής στο $[a, \beta] \times [a, \beta]$ και ορίζουμε $A : L^2[a, \beta] \to L^2[a, \beta]$ με*

$$\Big(A\phi\Big)(x) := \int_a^b K(x, y)\phi(y)dy$$

Τότε

$$\begin{aligned} ||A\phi||^2 &= \int_a^b \Big|\Big(A\phi\Big)(x)\Big|^2 dx \\ &= \int_a^b \Big|\int_a^b K(x, y)\phi(y)dy\Big|^2 dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^b \Big|K(x, y)\Big|^2 dxdy \\ &= ||\phi||^2 \int_a^b \int_a^b \Big|K(x, y)\Big|^2 dxdy \end{aligned}$$

A φραγμένος και

$$||A|| \leq \Big[\int_a^b \int_a^b \Big|K(x, y)\Big|^2 dxdy\Big]^{\frac{1}{2}}$$

Ορισμός 2.12 *Ο τελεστής A ονομάζεται ένα προς ένα αν $u_1 \neq u_2$ τότε $Au_1 = Au_2$*

Έστω X ένας χώρος Hilbert και $U \subset X$ μη-τετρημένος υπόχωρος. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $P : X \to U$ με την ιδιότητα $P\phi = \phi$ για κάθε $\phi \in U$ ονομάζεται τελεστής προβολής από το X στο U.

Υποθέτουμε ότι U είναι μη-τετριμμένος κλειστός υπόχωρος του X. Τότε $X = U \bigoplus U^\perp$ και ορίζουμε ορθογώνια προβολή $P : X \to U$ με $P\phi =$ u όπου u είναι η καλύτερη προσέγγιση του φ. Τότε είναι σαφές ότι $P\phi = \phi$ για κάθε $\phi \in U$ και P είναι φραγμένος δεδομένου

$$||\phi||^2 = ||P\phi + (\phi - P\phi)||^2 = ||P\phi||^2 + ||\phi - P\phi||^2 \geq ||P\phi||^2$$

Δεδομένου ότι $||P\phi|| \leq ||\phi||$ και
$P\phi = \phi$, για κάθε $\phi \in U$ έχουμε στην πραγματικότητα ότι $||P|| = 1$.

Στη συνέχεια θα εστιάσουμε στην προσοχή μας στην συμπάγεια.

***Ορισμός* 2.13** *Έστω ένα υποσύνολο U του νορμικού χώρου X ονομάζεται συμπαγές αν κάθε ακολουθία στοιχείων του U.*

Ο U ονομάζεται σχετικά συμπαγής αν ο κλειστός χώρος U είναι συμπαγές.

***Ορισμός* 2.14** *Ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ είναι συμπαγής τελεστής αν απεικονίζει κάθε φραγμένο σύνολο του X σε σχετικά συμπαγές σύνολο Υ.*

***Θεώρημα* 2.6** *Έστω X ένας νορμικός χώρος και Υ ένας χώρος Banach. Υποθέτουμε $An : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής για κάθε ακέραιο n και υπάρχει γραμμικός τελεστής A τέτοιος ώστε $||A - An|| \to 0$, καθώς $n \to \infty$.*

Τότε ο A είναι συμπαγής τελεστής.

***Παράδειγμα* 2.6** *Θεωρούμε τον τελεστή $A : L^2[a, \beta] \to L^2[a, \beta]$ όπως ορίζεται και στο προηγούμενο παράδειγμα από*

$$\Big(A\phi\Big)(x) := \int_a^b K(x, y)\phi(y)dy$$

όπου $K(x, y)$ είναι συνεχής στο $[a, \beta] \times [a, \beta]$. Έστω $\{\phi_n\}$ ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο στον $L^2[a, \beta]$.

Τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $\{\phi_n(x)\phi_m(y)\}$ είναι πλήρες ορθοκανονικό σύνολο στον $L^2\Big([a, \beta] \times [a, \beta]\Big)$. Επομένως

$$K(x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}\phi_i(x)\phi_j(y)$$

και από την ανισότητα Parseval

$$\int_a^b \int_a^b \Big|K(x, y)\Big|^2 dxdy = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$$

Επιπλέον

$$\int_a^b \int_a^b \Big|K(x, y) - \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}\phi_i(x)\phi_j(y)dxdy\Big|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$$

Άρα ο A μπορεί να προσεγγισθεί στην νόρμα από An, όπου

$$\Big(An\phi\Big)(x) := \int_b^a \Big[\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}\phi_i(x)\phi_j(y)\Big]\phi(y)dy$$

Αλλά $An : \mathbb{L}^2[a, \beta] \to L^2[a, \beta]$ έχει πεπερασμένης διάστασης εύρος.

Λήμμα 2.7 (Λήμμα Riesz) *Έστω X ένας νορμικός χώρος, $U \subset X$ κλειστός υπόχωρος τέτοιος ώστε $U \neq X$ και $a \in (0,1)$. Τότε υπάρχει $y \in X, ||y|| = 1$ τέτοιο ώστε $||y - \phi|| \geq a$ για κάθε $\phi \in U$.*

Θεώρημα 2.8 *Έστω X ο χώρος με νόρμα. Τότε ο ταυτοτικός τελεστής $I : X \to X$ είναι συμπαγή τελεστής αν και μόνο αν X είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Θεώρημα 2.9 (Riesz) *Έστω $A : X \to X$ συμπαγής τελεστής στο νορμικό χώρο X. Τότε είτε (1) η ομογενής εξίσωση*

$$\phi - A\phi = 0$$

έχει μη - τετριμμένη λύση $\phi \in X$ ή (2) για κάθε $f \in X$ η εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

έχει μοναδική λύση $\phi \in X$. Αν ο τελεστής $I - A$ είναι αμφιμονοσήμαντα ορισμένος (και ως εκ τούτου 1-1 και επί) τότε ο τελεστής$(I - A)^{-1} : X \to X$ είναι φραγμένος.

Έστω $A : X \to X$ συμπαγής τελεστής και X νορμικός χώρος. Ένας μιγαδικός αριθμός λ ονομάζεται ιδιοτιμή του A με ιδιόλυση $\phi \in X$ αν υπάρχει $\phi \in X, \phi = \not 0$ τέτοιο ώστε $A\phi = \lambda\phi$. Οι ιδιολύσεις αντιστοιχούν σε διαφορετκές ιδιοτιμές και είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Ονομάζουμε τη διάσταση του μηδενικού χώρου ως η πολλαπλότητα του λ. Αν $\lambda \neq 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του A από το θεώρημα Riesz ο αναλύων τελεστής $(\lambda I - A)^{-1}$ είναι καλώς ορισμένος, φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον X στον X. Αν $\lambda = 0$ τότε ο τελεστής A^{-1} δεν είναι φραγμένος στον $A(X)$ εκτός και αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης και αν $I = AA^{-1}$ είναι συμπαγής.

Θεώρημα 2.10 *Έστω $A : X \to X$ συμπαγής τελεστής με νορμικό χώρο X. Τότε ο τελεστής A έχει το πολύ ένα αριθμήσιμο σύνολο ιδιοτιμών χωρίς οριακά σημεία εκτός ίσως $\lambda = 0$. Για κάθε μη - μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη πολλαπλότητα.*

Θεώρημα 2.11 (Θεώρημα αναπαραστάσεως του Riesz) *Κάθε φραγμένο, συνεχές, γραμμικό συναρτησοειδές F σε ένα χώρο Hilbert X μπορεί να γραφτεί στη μοφή $F(\phi) = (\phi, f)$ για κάθε $\phi \in X$ και f στοιχείο του X το οποίο είναι μοναδικά προσδιορισμένο από F. Συνεπώς $||F|| = ||f||$*

Θεώρημα 2.12 *Έστω X και Υ χώροι Hilbert και έστω $A : X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός τελεστής. Τότε υπάρχει μοναδικά καθορισμένος γραμμικός τελεστής $A : Y \to X$ τέτοιος ώστε $(A\phi, y) = (\phi, Ay)$ για κάθε $\phi \in X$ και $y \in Y$. A ονομάζεται συζυγής του A και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $||A|| = ||A||$.*

Θεώρημα 2.13 *Έστω X και Υ χώροι Hilbrt και έστω $A : Y \to X$ συμπαγής τελεστής. Τότε ο τελεστής $A : Y \to X$ είναι επίσης συμπαγής τελεστής.*

Λήμμα 2.14 *Έστω U κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert X. Τότε $U^{11} = U$.*

Θεώρημα 2.15 *Έστω X και Υ χώροι Hilbert. Τότε για ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή $A : X \to Y$ έχουμε ότι αν $A(X) = \{y \in Y : y = Ax, για\ x \in X\}$ είναι το εύρος του A τότε*

$$A(X)^1 = N(A) \text{ και } N(A) = A(\bar{X})$$

Για το επόμενο θεώρημα υποθέτουμε ότι ο φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \to$, όπου X χώρος Hilbert λέγεται αυτοσυζυγής αν $A = A$, δηλαδή $(A\phi, y) = (\phi, Ay)$ για όλα τα $\phi, y \in X$

Θεώρημα 2.16 (Θεώρημα Hilbert - Schimidt) *Έστω $A : X \to X$ συμπαγής, αυτοσυμπαγής τελεστής σε χώρο Hilbert X. Τότε, αν $A \neq 0$, ο τελεστής A έχει τουλάχιστον ιδιοτιμή διαφορετική του μηδέν, όλες οι ιδιοτιμές και X έχει ορθογώνια βάση από ιδιολύσεις του A.*

2.3 Χώροι Sobolev

- *Χώροι Sobolev $H^P[0, 2\pi]$*

Αρχίζουμε από το γεγονός ότι το ορθοκανονικό σύστημα $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{imt}\}_{-\infty}^{\infty}$ είναι πλήρες στον $L^2[0, 2\pi]$ [14]

Από το θεώρημα 1.13, για $\phi \in L^2[0, 2\pi]$ στην μέση τετραγωνική σύγκλιση

$$\phi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m e^{int}$$

όπου a_m συντελεστής Fourier που ορίζονται ως

$$a_m := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \phi(t)e^{-int}dt$$

Αν $(.,.)$ το συνηθισμένο L^2 -εσωτερικό γινόμενο με την νόρμα $||.||$, από την ανισότητα Parseval έχουμε

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_m|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} |\phi(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}||\phi||^2$$

Έστω $0 \leq p < \infty$, ο χώρος $H^p[0,2\pi]$ ορίζεται ως ο χώρος των συναρτήσεων $\phi \in L^2[0,2\pi]$ τέτοιων ώστε

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^p|a_m|^2 < \infty$$

όπουa_m συντελεστής Fourier της ϕ.

Ο χώρος $H^p = H^p[0,2\pi]$ ονομάζεται χώρος Sobolev και $H^o[0,2\pi] = L^2[0,2\pi]$

Θεώρημα 2.17 *Ο χώρος $H^p[0,2\pi]$ είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο*

$$(\phi, y)_p := \sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^p a_m^2 \bar{b_m}$$

όπου a_m, b_m συντελεστές Fourier των ϕ, y αντίστοιχα. Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $H^p[0,2\pi]$.

Θεώρημα 2.18 (Θεώρημα Rellich) *Αν $q < p$ τότε ο χώρος $H^q[0,2\pi]$ ανήκει στον $H^p[0,2\pi]$ και η εμφύτευση του τελεστή $I : H^q \to H^p$ είναι συμπαγής.*

Θεώρημα 2.19 (Θεώρημα Εμφύτευσης Sobolev) *Έστω $p > \frac{1}{2}$ και $\phi \in H^p[0,2\pi]$. Τότε ϕ συμπίπτει σχεδόν παντού με συνεχή και 2π - περιοδική συνάρτηση (δηλαδή η διαφορά ανάμεσα στην συνάρτηση ϕ και αυτή την συνάρτηση είναι η συνάρτηση η τέτοια ώστε $||\eta||_p = 0$).*

Ορισμός 2.15 *Για $0 \leq p < \infty, H^{-p} = H^{-p}[0,2\pi]$ ορίζεται ως ο δυικός χώρος του $H^p[0,2\pi]$ δηλαδή ο χώρος των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών ορίζονται στον $H^p[0,2\pi]$.*

Αν F φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό ορισμένο στον $H^p[0,2\pi]$, η νόρμα του F ορίζεται ως

$$||F||_p := \sup_{\substack{\phi \in H^p \\ ||\phi||_p = 1}} |F\phi|$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει μια αναλυτική έκφραση για την νόρμα F και ένα χαρακτηρισμό του H^{-p}

Θεώρημα 2.20 *Για το συναρτησιακό $F \in H^{-p}[0,2\pi]$, η νόρμα δίνεται από τη σχέση*

$$||F||_p = \Big[\sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^{-p}|c_m|^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

όπου $c_m = F(f_m)$. *Αντίστροφα, για κάθε ακολουθία* $\{c_m\}$ *στο* $\mathbb{C}$ *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^p|c_m|^2 < \infty$$

υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $F \in H^{-p}[0,2\pi]$ *με* $F(f_m) = c_m$

Όπως προκύπτει από το πιο πάνω Θεώρημα, το θεώρημα Rellich εξακολουθεί να ισχύει για $\infty < p, q < \infty$.

Θεώρημα 2.21 *Για* $g \in L^2[0,2\pi]$ *η δυικότητα*

$$G(\phi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\phi(t)g(t)dt, \qquad \phi \in H^p$$

ορίζει φραγμένο, γραμμικό συναρτησιακό στον $H^p[0,2\pi]$ *δηλαδή* $G \in H^{-p}[0,2\pi]$. *Ειδικότερα, ο χώρος* $L^2[0,2\pi]$ *μπορεί να θεωρηθεί ως υπόχωρος του δυικού χώρου* $H^{-p}[0,2\pi], 0 \leq p < \infty$ *και τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα ορίζονται στον* $H^{-p}[0,2\pi]$.

Το πιο πάνω δυικό ζεύγος μπορεί να επεκταθεί σε φραγμένο γραμμικά συναρτησοειδή στον H^{-p}.

Ειδικότερα, για $\phi \in H^p$ *και* $g \in H^{-p}$ *ορίζεται*

$$g(\phi) := \int_0^{2\pi}\phi(t)g(t)dt$$

Επίσης, ο χώρος H^{-p} *γίνεται χώρος Hilbert με την επέκταση του εσωτερικού γινομένου που ορίστηκε προηγουμένως για* $p \geq 0$ *σε* $p < 0$.

Γενικότερα, αν X *είναι νορμικός χώρος με τον δυικό χώρο* X, *τότε για* $g \in X$ *και* $\phi \in X$ *ορίζεται η δυικότητα ως* $\langle g, \phi\rangle := g(\phi)$

- *Χώροι Sobolev* $H^p(\partial D)$

Θα ορίσουμε τώρα τους χώρους Sobolev στο σύνορο ∂D *της επίπεδης περιοχής* D. *Έστω* ∂D *το σύνορο ενός απλά συνεκτικού χωρίου* $D \subset \mathbb{R}^2$ *τέτοιο ώστε* ∂D *είναι της τάξης* C^k, *δηλαδή* ∂D *έχει k - φορές συνεχώς παραγωγίσιμες* 2π *- περιοδικές αναπαραστάσεις* $\partial D\{x(t) : t \in [0,2\pi), x \in C^k[0,2\pi]\}$

Τότε για $0 \leq p \leq k$ *μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο Sobolev ως ο χώρος των συναρτήσεων* $\phi \in L^2(\partial D)$ *τέτοιες ώστε* $\phi(x(t)) \in H^p[0,2\pi]$. *Το εσωτερικό γινόμενο και η νόρμα στον* $H^p(\partial D)$ *ορίζεται ως*

$$(\phi, y)_{H^p(\partial D)} := (\phi(x(t)), y(x(t)))_{H^p[0,2\pi]}$$

Ο χώρος Sobolev $H^1(D)$ σε φραγμένο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ με ∂D τάξεως C^1 ορίζεται ως η πλήρωση του χώρου $C^1(\bar{D})$ ως προς τη νόρμα

$$||u||_{H^1(D)} := \Big[\int_D (|u(x)|^2 + |grad\, u(x)|^2 dx \Big]^{\frac{1}{2}}$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι ο $H^1(D)$ είναι υπόχωρος του $L^2(D)$. Ο κύριος σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δείξει ότι οι συναρτήσεις στον ∂D, δηλαδή το ίχνος των συναρτήσεων στον $H^1(D)$ στο σύνορο ∂D είναι καλώς ορισμένο.

Θεώρημα 2.22 (Θεώρημα Dini) *Αν $\{\phi_n\}_1^\infty$ η ακολουθία πραγματικών τιμών συνεχών συναρτήσεων ϕ στο συμπαγές σύνολο D και αν $\phi_n(x) \geq \phi_{n+1}(x)$ για κάθε $x \in D, n = 1, 2, ...$ τότε $\phi_n \to \phi$ ομοιόμορφα στον D.*

Θεώρημα 2.23 *Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό φραγμένο χωρίο με σύνορο ∂D τάξεως C^2. Τότε υπάρχει θετικά σταθερά C τέτοια ώστε*

$$||u||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} \leq c||u||_{H^1(D)}$$

για όλα τα $u \in H^1(D)$, δηλαδή για $u \in H^1(D)$ ο τελεστής $u \to u\Big|_{\partial D}$ είναι καλώς ορισμένος και φραγμένος από $H^1(D)$ σε $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$

Chapter 3

Το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης σε Ορθοτροπικό Μέσο

3.1 Εισαγωγή

Στην καθημερινότητα πολλές φορές συναντούμε υλικά με ανισότροπη συμπεριφορά στα ηλεκτρομαγνητικό κύματα. Για παράδειγμα στην ιατρική νεύρα και όργανα (εγκέφαλος, καρδία, συκώτι) είναι ισχυρά ανισόρροπα. Επομένως, είναι πολύ σημαντικό κανείς να μελετήσει την ύπαρξη τέτοιων υλικών.

Στο κεφάλαιο αυτό θα διερευνήσουμε την σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από ένα διαπερατό ανισότροπο (ορθοτροπικό) ανομοιογενές μέσο. Θα περιοριστούμε στην μονοδιάστατη περίπτωση που απεικονίζει σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από έναν ορθοτροπικό κύλινδρο απείρου μήκους. Το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή της εξίσωσης Helmholtz έξω από το σκεδαστή και της εξίσωσης με μη σταθερούς συντελεστές μέσα στο σκεδαστή.

Το πρόβλημα ιμετατρέπεται σε ένα σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων ισχυρά ιδιάζων, μελετάμε την μοναδικότητα και ύπαρξη λύσης και εξετάζουμε την ομαλότητα αυτήν με τη βοήθεια των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Οι μέθοδοι ολοκληρωτικών εξισώσεων παίζουν κύριο ρόλο στη μελέτη προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μαθηματική διατύπωση των προβλημάτων σκέδασης οδηγεί σε εξισώσεις που ορίζονται σε μη φραγμένα χωρία. Ως εκ τούτου, από την αναδιατύπωση των ολοκληρωτικών εξισώσεων μπορεί να αντικαταστήσει το πρόβλημα πάνω σε μη φραγμένο χωρίο από ένα φραγμένο χωρίο. Αποτελούν επίσης, όπως θα διαπιστωθεί και στο τέταρτο *κεφάλαιο, ένα ισχυρό εργαλείο μελέτης του αντίστοιχου αντίστροφου προβλήματος σκέδασης.*

Παρόλο, που θα έπρεπε οι μέθοδοι ολοκληρωτικών εξισώσεων για τη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από ένα ανισότροπο ανομοιογενές μέσο να είναι αρκετά αναπτυγμένες, στην πραγματικότητα είναι ακόμα σε πρώιμο στάδιο. Παράδειγμα αποτελεί η μέθοδος ολοκληρωτικών εξισώσεων της Piana [2] και Potthast [3] για να λύσουν το ακόλουθο πρόβλημα, ισχύει μόνο υπό περιοριστικές υποθέσεις.

Ως εκ τούτου, για λόγους απλούστευσης θα περιοριστούμε στην περίπτωση που έχουμε ορθοτροπικό μέσο, επειδή στην περίπτωση αυτή μπορούμε να περιοριστούμε σε πρόβλημα δύο διαστάσεων. Ακολούθως, προτείνουμε μια μεταβαλλόμενη μέθοδο και βρίσκουμε τη λύση του προβλήματος σε μεγαλύτερο χωρίο από το χωρίο των δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Στην πρώτη ενότητα Θεωρώντας τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα να διαδίδονται από ανομοιογενές ανισότροπο μέσο στον $\mathbb{R}^3$, ερευνούμε τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με τη βοήθεια των εξισώσεων Maxwell.

3.2 Εξισώσεις Maxwell σε Ορθοτροπικό Μέσο

Όπως έχουμε δει στο κεφάλαιο 1 το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell:

$$curl\mathcal{E} + \mu\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \tag{3.1}$$

$$curl\mathcal{H} + \epsilon\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \sigma\mathcal{E} \tag{3.2}$$

όπου $\epsilon = \epsilon(x)$ η ηλεκτρική διαπερατότητα, $\mu = \mu(x)$ η μαγνητική διαπερατότητα και $\sigma = \sigma(x)$ η ηλεκτρική αγωγιμότητα.

Για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με αρμονική χρονική εξάρτηση της μορφής

$$\mathcal{E}(x,t) = E(x)e^{-i\omega t} \tag{3.3}$$

$$\mathcal{H}(x,t) = H(x)e^{-i\omega t} \tag{3.4}$$

όπου $\omega > 0$ η κυκλική συχνότητα, μπορούμε να αναχθούμε τις εξισώσεις

$$curlE - i\omega\mu(x)H = 0 \tag{3.5}$$

$$curlH + (i\omega\epsilon(x) - \sigma(x))E = 0 \tag{3.6}$$

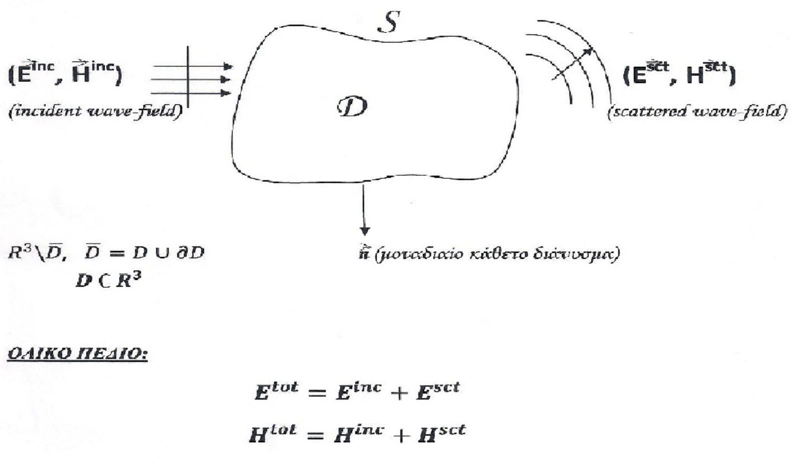

Figure 3.1: Γενικευμένο πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης

Τα προβλήματα σκέδασης είναι εκείνα στα οποία ο χώρος παρουσιάζει ορισμένες ανομοιογένειες οι οποίες διαταράσσουν τη διάδοση των κυματικών πεδίων. Έτσι, όταν στο χώρο διάδοσης του κυματικού πεδίου υπάρχει ένα εμπόδιο, που λέγεται "σκεδαστής" τότε αυτό δημιουργεί κάποια διαταραχή στη κυματική διάδοση.

Στο σχήμα 1.1 αναπαρίσταται το γενικευμένο πρόβλημα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Δεδομένου ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται με μεγαλύτερη ευκολία στα αέρια από ότι στα υγρά, στις εφαρμογές που προκύπτουν αφορούν ως μέσο διάδοσης τον αέρα, ενώ ο σκεδαστής μπορεί να είναι κάποιο μη - ομογενές μέσο ή σώμα.

Το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο E^{inc}, H^{inc} *προσπίπτει στον σκεδαστή* $D \subset \mathbb{R}^3$ *και δημιουργεί ένα σκεδασμένο πεδίο* E^{sct}, H^{sct} *και προφανώς ένα ολικό πεδίο* E^{tot}, H^{tot} *έτσι ώστε*

$$(E^{tot}, H^{tot}) = (E^{inc} + E^{sct}, H^{inc} + H^{sct})$$

Ο σκεδαστής μπορεί να είναι σώμα με καθορισμένο σύνορο (∂D) *αρκετά λείο ή απλώς το ίδιο μέσο διάδοσης. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε πως η πηγή διαταραχής βρίσκεται εκτός της περιοχής του σκεδαστή. Σ' αντίθετη περίπτωση δεν θα υπήρχε κάποια ασυνέχεια κατά τη διάδοση του κύματος άρα ούτε το φαινόμενο της σκέδασης.*

Για τον προσδιορισμό των αγνώστων πεδίων θα πρέπει να επιλυθούν οι εξισώσεις Maxwell που έχουμε ορίσει προηγουμένως.

Υποθέτουμε ότι έχουμε σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από ένα κύλινδρο απείρου μήκους. Θεωρούμε D *η διατομή αυτού του κυλίνδρου, με* C^2 *- σύνορο* ∂D *και* $\vec{n}$ *μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε κάθε σημείο* του συνόρου. Επίσης, θεωρούμε ότι ο άξονας του κυλίνδρου συμπίπτει με τον z - άξονα (άξονας συμμετρίας) και ότι ο αγωγός είναι ενταγμένος σ' ένα μη αγωγίμο ομοιογενές μέσο. Ως εκ τούτου, η ηλεκτρική διαπερατότητα και μαγνητική διαπερατότητα είναι θετικές σταθερές, $\varepsilon_0 > 0$, $\mu_0 > 0$, αντίστοιχα. και $\sigma_0 > 0$. Η $\varepsilon = \varepsilon(x)$ είναι τανυστής της διηλεκτρικής σταθεράς και $\sigma = \sigma(x)$ δηλώνει τανυστή της ηλεκτρικής αγωγιμότητας. Επιπλέον μπορούμε να υποθέσουμε ότι ε είναι θετικά ορισμένη και σ θετικά ημιορισμὲνη.

Στη συνέχεια ορίζουμε ως $A := A(X)$ τον μιγαδικό 3×3 πίνακα, ο οποίος δίνεται από

$$A(x) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\varepsilon(x) + i\frac{\sigma(x)}{\omega}\right) \tag{3.7}$$

και

$$N(x) = \frac{1}{\mu_0}\mu(x) \tag{3.8}$$

Στη συνέχεια ορίζομε τα διανυσματικά πεδία

$$E^{int,ext} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}E^{int,ext} \tag{3.9}$$

$$H^{int,ext} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}H^{int,ext} \tag{3.10}$$

όπου E^{int}, H^{int} και E^{ext}, H^{iext} τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία στο εσωτερικό (interior) και στο εξωτερικό (exterior) του αγωγού, αντίστοιχα.

Για ένα ορθοτροπικό μέσο έχουμε ότι οι πίνακες A και N είναι ανεξάρτητοι ως προς τη z συντεταγμένη και είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Ιδιαίτερα, το προσπίπτον πεδίο (E^{int}, H^{int}) στο εσωτερικό του αγωγού πληροί τις εξισώσεις (3.5) - (3.6) με

$$curl E^{int} - i\kappa N H^{int} = 0 \tag{3.12}$$

$$curl H^{int} + i\kappa A E^{int} = 0 \tag{3.13}$$

και το σκεδασμένο πεδίο ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$curl E^{sct} - i\kappa N H^{sct} = 0 \tag{3.14}$$

$$curl H^{sct} + i\kappa A E^{sct} = 0 \tag{3.15}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.12) με ικ έχουμε

$$i\kappa\, curlE^{int} + \kappa^2 N H^{int} \;=\; 0 \tag{3.16}$$

Από τις σχέσεις (3.13) και (3.16) παίρνουμε την σχέση

$$-curl\left(-A^{-1} curlH^{int}\right) + \kappa^2 N H^{int} \;=\; 0$$

$$\Leftrightarrow curl\left(-A^{-1}\right) curlH^{int} - \kappa^2 N H^{int} \;=\; 0 \tag{3.17}$$

για το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό , και αντίστοιχα, τη σχέση

$$-curlcurlH^{ext} - \kappa^2 H^{ext} = 0 \tag{3.18}$$

για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού.

Θεωρούμε σκέδαση από φραγμένο χωρίο με την υπόθεση ο $N(x) - I$ *να έχει συμπαγή φορέα. Έστω* $E^i, H^i \in H^i_{loc} \subset \mathbb{R}^3$ *μια λύση των εξισώσεων Maxwell (3.17) - (3.18) με* $N(x) \equiv I$. *Θέλουμε να βρούμε μια λύση* $(E, H) \in H^1_{loc} \subset \mathbb{R}^3$ *του τέτοιο ώστε*

$$E^{ext} \;=\; E^i + E^s \tag{3.19}$$

$$H^{ext} \;=\; H^i + H^s \tag{3.20}$$

όπου E^s, H^s *τα σκεδάσματα πεδία του* E^i, H^i, *αντίστοιχα. Τα σκεδασμένα πεδία* E^s, H^s *ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας Silver - Muller*

$$\lim_{r\to\infty}(H^s \times \chi - rE^s) = 0$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{x} = \frac{x}{|r|}$ *όπου* $r := |x|$.

Υποθέτουμε ότι το προσπίπτον κύμα είναι πολωμένο κάθετα προς τον άξονα του κυλίνδρου τέτοιο ώστε

$$H^i(x) = (0,0,u^i), \qquad H^s(x) = (0,0,u^s), \qquad H^{int}(x) = (0,0,u)$$

Χρησιμοποιώντας διανυσματική ανάλυση, από την (3.17) φτάνουμε στην

$$\nabla.(A\nabla v) + k^2 n v = 0, \qquad \text{στο } D \tag{3.21}$$

ή ισοδύναμα στην ασθενή μορφή

$$\int_D \nabla u\; A\nabla v\; dx - \int_{\partial D} v(vA\nabla v)Ads = k^2 \int_D uvdx, \tag{3.22}$$

όπου

$$A := \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$u \in H^1(D)$, *χωρίο* D *με* C^2*- σύνορα και* $\hat{n}$ *μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα προς τα έξω.*

Απόδειξη της (3.22)

Σύμφωνα με το θεώρημα της απόκλισης (Divergence theorem) ισχύει:

$$\int_V \nabla A dx = \int_S A v da \tag{3.23}$$

όπου $A \equiv uA\nabla v$

$$\int_D \nabla(uA\nabla v)dx = \int_{\partial D}(uA\nabla v)vdx \tag{3.24}$$

όπου

$$\int_D \nabla(uA\nabla v) = \int_D \nabla uA\nabla v + \int_D (u\nabla A\nabla v)dx \tag{3.25}$$

Θέτουμε $u = \phi, v = u$:

$$\int_D \phi\nabla A\nabla udx - \int_{\partial D} \phi\hat{n}A\nabla uds = -\int_D \nabla\phi A\nabla udx \tag{3.26}$$

Από την σχέση $\nabla A.\nabla u + k^2 nu = 0$ *στο* D *καταλήγουμε στη σχέση*

$$\int_D \nabla\phi A\nabla udx - \int_{\partial D} \phi vA\nabla uds = -k^2 \int_D n\phi udx \tag{3.27}$$

Επομένως, η σχέση (3.22)

$$\int_D \nabla uA\nabla udx + \int_D u\nabla A\nabla uds = -k^2 \int_D n\phi udx = \int_{\partial D} n(uA\nabla u)ds \tag{3.28}$$

Άρα,

$$\int_D u\nabla A\nabla vdx - \int_{\partial D} u(vA\nabla v)ds = \int_D \nabla uA\nabla vdx \tag{3.29}$$

και ισοδύναμα

$$\int_D u\nabla A\nabla v dx - \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial v_A} = \int_D \nabla u A \nabla v dx \tag{3.30}$$

Ανάλογα η (3.18) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση Helmhotz

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0 \qquad \sigma\tau o \quad \mathbb{R}^2/\bar{D} \tag{3.31}$$

Οι συνθήκες διαπερατότητας $\nu\times(H^s+H^i) = \nu\times H^{int}$ *και* $\nu\, curl(H^s+H^i) = v \times A^{-1} curl H^{int}$ *στο σύνορο του αγωγού γίνονται*

$$v - u^s = u^i \qquad \sigma\tau o \quad \partial D$$

και

$$\nu.A\nabla v - \nu.\nabla u^s = \nu.\nabla u^i \quad \sigma\tau o \quad \partial D \tag{3.32}$$

Τελικά, ανάλογο της συνθήκης ακτινοβολίας Silver - Muller στην συνθήκη ακτινοβολίας Silver - Muller στις δύο διαστάσεις είναι συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld:

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0 \tag{3.33}$$

ομοιόμορφα ως προς $\hat{x} = \frac{x}{r}$, *όπου* $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^2$.

3.3 Το Ευθύ πρόβλημα Σκέδασης

Συνοψίζοντας, έπεται ότι η σκέδαση αρμονικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων παραπάνω από ορθοτροπικό κυκλικό αγωγό μοντελοποιείται από το ακόλουθο πρόβλημα διαπερατότητας στον $\mathbb{R}^2$.

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$, *μη κενό, ανοικτό και φραγμένο σύνολο, έχοντας* C^2*- σύνορο* ∂D *τέτοιο ώστε το εξωτερικό χωρίο* $\mathbb{R}^2/\bar{D}$ *να είναι συνεκτικό σύνορο. Συμβολίζεται με* $\overrightarrow{n}$ *το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο* ∂D *το οποίο κατευθύνεται στο εξωτερικό του* D. *Με* $Re(A)$ *εννοούμε πινακοσυνάρτηση έχοντας καταχωρήσει τα πραγματικά μέρη των* $Re(a_{jk})$ *όπου*

$$D \to C^{2\times 2}, A \to C^{2\times 2}, A = (a_{jk})_{j,k=1,2}$$

με συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις $a_{jk} \in C^2(\bar{D})$.

Ομοίως ορίζουμε τον πίνακα $Im(A)$. Οι πίνακες $Re(A(x))x \in \bar{D}$ είναι συμμετρικοί και ικανοποιούν

$$\begin{aligned} \bar{\xi} Im(A) &\leq 0 \\ \bar{\xi} Re(A)\xi &\geq \gamma|\xi|^2 \end{aligned} \tag{3.34}$$

για όλα τα $\xi \in C^3, x \in \bar{D}$ όπου γ μια θετική σταθερά. Σημειώνεται ότι λόγω της συμμετρίας του A ισχύει

$$\begin{aligned} Im(\bar{\xi} A\bar{\xi}) &= \bar{\xi} Im(A)\bar{\xi} \\ Re(\bar{\xi} A\bar{\xi}) &= \bar{\xi} Re(A)\bar{\xi} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Επίσης υποθέτουμε ότι $n \in C(\bar{D})$ με $Im(n) \geq 0$.

Για συναρτήσεις $u \in C^1(\mathbb{R}/D)$ και $v \in C^1(\bar{D})$ ορίζουμε

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \to +0} \nu(x).\nabla u(x + h\nu(x)), \qquad x \in \partial D$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_A}(x) = \lim_{h \to +0} \nu(x).A(x)\nabla v(x - h\nu(x)), \qquad x \in \partial D$$

Το πρόβλημα σκέδασης το οποίο θα μελετήσουμε, μοντελοποιείται μαθηματικά ως εξής: Ζητούνται συναρτήσεις $u, v \in C^2(\mathbb{R}\backslash\bar{D}) \cup C^1(\mathbb{R}\backslash D)$ τέτοιες ώστε

$$\nabla A.\nabla v + k^2 n v = 0 \qquad \text{στο} \qquad D \tag{3.36}$$

$$\Delta u^s + k^s u^s = 0 \qquad \text{στο} \qquad \mathbb{R}^2\backslash\bar{D} \tag{3.37}$$

$$v - u^s = u^i \qquad \text{στο} \qquad \partial D \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_A} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu} = \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \qquad \text{στο} \qquad \partial D \tag{3.39}$$

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0 \tag{3.40}$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ μη κενό, ανοικτό και φραγμένο σύνολο με C^2- σύνορο ∂D το εξωτερικό χωρίο $\mathbb{R}^2\backslash\bar{D}$ να είναι ανοικτό, και $\bar{D} = D \cup \partial D$ και η (3.44) ισχύει ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $r = \frac{\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|}$.

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης του σκεδασμένου προβλήματος $(3.7) - (3.41)$. Επειδή είναι δύσκολο να εφαρμοστεί οποιαδήποτε μέθοδος, λόγω της ιδιότητας της ανομοιογένειας των υλικών [2], [3]. Δεδομένου ότι οι μεταβαλλόμενες μέθοδοι είναι κατάλληλες για τους χώρους Hilbert, στην επόμενη ενότητα *αναδιατυπώνουμε το πρόβλημα σκέδασης (3.37) - (3.41) σε κατάλληλους χώρους Sobolev.*

Στο πλαίσιο της μεθόδου μεταβολών, είναι φυσικό να αναζητούμε μια λύση για ένα γραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα συνοριακών τιμών δευτέρου βαθμού στο χώρο των συναρτήσεων οι οποίες είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες και έχουν τετραγωνικά ολοκληρώσιμες πρώτες μερικές παραγώγους. Υποθέτουμε ότι το D είναι ένα ανοικτό μη κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με ομαλό όριο ∂D. Στο κεφάλαιο 2 ορίσαμε τους χώρους Sobolev $H^1(D)$, $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ και $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ και έχουμε δει τη σχέση μεταξύ $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ και $H^1(D)$. Πιο συγκεκριμένα, για συναρτήσεις που ορίζονται στο $\bar{D}$ οι τιμές στο όριο είναι ορισμένες και ο περιορισμός της συνάρτησης στο σύνορο ∂D ονομάζεται ίχνος. Ο τελεστής που απεικονίζει μια συνάρτηση πάνω στο ίχνος της ονομάζεται τελεστής ίχνους. Το Θεώρημα 1.36 αναφέρει ότι ο τελεστής ίχνους μπορεί να επεκταθεί ως μια συνεχής απεικόνιση $\gamma_0 : H^1(D) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ και αυτή η επέκταση έχει ένα συνεχές από δεξιά αντίστροφο (βλ. θεώρημα 3.37 στο [4]). Το τελευταίο σημαίνει ότι για οποιαδήποτε συνάρτηση $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ υπάρχει μια $u \in H^1(D)$ τέτοια ώστε

$$\gamma_0 u = f \qquad \text{και} \qquad ||u||_{H^1(D)} \leq C||f||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D))}$$

όπου C είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη της f.

Για οποιοδήποτε ακέραιο $r \geq 0$ υποθέτουμε ότι

$$C^r(D) \;:=\; \{u : \partial^a u \text{ υπάρχει και είναι συνεχής στο } D \text{ για } |a| \leq r\},$$

$$C^r(\bar{D}) \;:=\; \{u|_{\bar{D}} : u \in C^r(\mathbb{R}^2)\}$$

και θέτουμε

$$C^\infty(D) = \cap_{r\geq 0} C^r(D) \qquad C^\infty(\bar{D}) = \cap_{r\geq 0} C^r(\bar{D})$$

Ο $H^1(D)$ ορίζεται ως η πλήρωση του $C^1(\bar{D})$ σε σχέση με τη νόρμα

$$||u||^2_{H^1(D)} := ||u||^2_{L^2(D)} + ||\nabla u||^2_{L^2(D)}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $H^1(D)$ είναι ένας χώρος Hilbert με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u,v)_{H^1(D)} := (u,v)_{L^2(D)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(D)}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο $C^\infty(\bar{D})$ είναι πλήρης στον $H^1 D$. [4] Αφού το $H^1(D)$ είναι ένας υποχώρος του $L^2(D)$ τότε την

$$I(u) = u \in L^2(D) \qquad \text{για} \qquad u \in H^1(D)$$

μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο τελεστής εμφύτευσης $I : H^1(D) \to L^2(D)$ ορίζεται από το . Προφανώς ο I είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Τα ακόλουθα δύο λήμματα αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του γνωστού θεωρήματος συμπάγειας του Rellich.

Λήμμα 3.1 *Η εμφύτευση $I : H^1(D) \to L^2(D)$ είναι συμπαγής.*

Στη συνέχεια πρέπει, επίσης, να εξετάσουμε τον χώρο Sobolev $H^2(D)$ ο οποίος είναι ο χώρος συναρτήσεων $u \in H^1(D)$ τέτοιων ώστε οι u_x και u_y να βρίσκονται, επίσης, στον $H^1(D)$. Παρομοίως, ο $H^2(D)$ μπορεί να οριστεί ως η πλήρωση του $C^2(\bar{D})$ (ή του $C^\infty(\bar{D})$) ως προς με τη νόρμα

$$||u||^2_{H^2(D)} = ||u||^2_{L^2(D)} + ||\nabla u||^2_{L^2(D)} + ||u_{xx}||^2_{L^2(D)} + ||u_{xy}||^2_{L^2(D)} + ||u_{yy}||^2_{L^2(D)}$$

Λήμμα 3.2 *Η εμφύτευση $I : H^2(D) \to H^1(D)$ είναι ένας συμπαγής τελεστής.*

Ορίζουμε τώρα

$$C^\infty_0(D) := \{u : u \in C^\infty_K(D) \text{για κάποιο συμπαγές υποσύνολο } K \text{του } D\}$$

όπου

$$C^\infty(D) := \{u \in C^\infty(D) : supp\, u \subseteq K\}$$

με $supp\, u$ να είναι η κλειστότητα στο D του συνόλου $\{x \in D : u(x) \neq 0\}$. Η πλήρωση του $C^\infty_0(D)$ στο $H^1(D)$ συμβολίζεται με $H^1_0(D)$ και μπορεί να χαρακτηριστεί σύμφωνα με την

$$H^1_0(D) := \{u \in H^1(D) : u|_{\partial D} = 0\}$$

Αυτός ο χώρος εξοπλισμένος με το εσωτερικό γινόμενο του $H^1(D)$ είναι, επίσης, ένας χώρος Hilbert. Η ακόλουθη ανισότητα, γνωστή ως ανισότητα του Poincaré, είναι η

$$||u||_{L^2(D)} \leq C||\nabla u||_{L^2(D)}$$

$u \in H^1_0(D)$ όπου η σταθερά $C > 0$ εξαρτάται αποκλειστικά από το D. [5]

Λήμμα 3.3 *Υποθέτουμε ότι το G είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα $X_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ που ικανοποιεί*

$$\begin{aligned} X_\epsilon(x) &= 1 && \text{αν } x \in G, \\ 0 \leq X_\epsilon(x) &\leq 1 && \text{αν } 0 < dist(x, G) < \epsilon, \\ X_\epsilon(x) &= 0 && \text{αν } dist(x, G) > \epsilon \end{aligned}$$

όπου $dist(x, G)$ συμβολίζει την απόσταση από το x στο G.

Η συνάρτηση $X_\epsilon(x)$, η οποία ορίζεται στο πιο πάνω λήμμα, ονομάζεται συνάρτηση αποκοπής για το G και χρησιμοποιείται για να εξομαλυνθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου.

Έχοντας υπόψη τη λύση του προβλήματος σκέδασης στην υποενότητα 3.2, επεκτείνουμε τώρα τον ορισμό της μερικής conor παραγώγου derivative $\partial u/\partial \nu_A$ σε συναρτήσεις $u \in H^1(D, \Delta)$ όπου

$$H^1(D, \Delta_A) := \{u \in H^1(D) : \nabla A{\cdot}\nabla u \in L^2(D)\}$$

εξοπλισμένος με το νόρμα

$$||u||^2_{H^1(D,\Delta_A)} := ||u||^2_{H^1(D)} + ||\nabla A \nabla u||^2_{L^2(D)}$$

Συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα ίχνους:

Θεώρημα 3.4 *Η απεικόνιση $\gamma_1 : u \to \theta u/\theta v_A := v{\cdot}A\nabla u$ που ορίζεται στο $C^\infty(\bar{D})$ μπορεί να επεκταθεί, μέσω της συνέχειας, σε μια γραμμική και συνεχή απεικόνιση, που εξακολουθεί να συμβολίζεται με γ_1 από το $H^1(D, \Delta_A)$ στο $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$.*

Απόδειξη. *Θέτουμε $\phi \in C^\infty(\bar{D})$ και $u \in C^\infty(\bar{D})$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα απόκλισης για τις συναρτήσεις ϕ και u έχουμε*

$$\int_{\partial D} \phi v A \nabla u ds = \int_D \nabla \phi A \nabla u dx + \int_D \phi \nabla A \nabla u dx \tag{3.41}$$

Αφού το $C^\infty(\bar{D})$ είναι πυκνό στο $H^1(D)$, αυτή η ισότητα (3.48) συνεχίζει να ισχύει για $\phi \in H^1(D)$ και $u \in C^\infty(\bar{D})$. Για αυτό

$$\Big| \int_{\partial D} \phi v A \nabla u ds \Big| \le C ||u||_{H^1(D,\Delta_A)} ||\phi||_{H^1(D)}, \ \forall \phi \in H^1(D), \ \forall u \in C^\infty(\bar{D}) \tag{3.42}$$

όπου C είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη από ϕ και u που εξαρτάται, όμως, από τα A και D. Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η συνάρτηση f αποτελεί ένα στοιχείο του $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$. Υπάρχει ένα $\phi \in H^1(D)$ τέτοιο ώστε $\gamma_0 \phi = f$, όπου γ_0 είναι ο τελεστής ίχνους στο ∂D. Τότε, από την ανισότητα (3.49) συνεπάγεται ότι

$$\Big| \int_{\partial D} f v A \nabla u ds \Big| \le C ||u||_{H^1(D,\Delta_A)} ||f||_{H^{(\frac{1}{2})(\partial D)}}, \quad f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D), \ \forall u \in C^\infty(\bar{D})$$

Τότε, η απεικόνιση

$$f \to \int_{\partial D} f v A \nabla u ds, \qquad f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$$

ορίζει ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό και

$$||vA\nabla u||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)} \leq C||u||_{H^1(D,\Delta_A)}$$

Τότε, η γραμμική απεικόνιση $\gamma_1 : u \to vA\nabla u$ που ορίζεται στο $C^\infty(\bar{D})$ είναι συνεχής όσο αφορά το νόρμα $H^1(D,\Delta_A)$. Αφού το $C^\infty(\bar{D})$ είναι πυκνό στο $H^1(D,\Delta_A)$, το γ_1 μπορεί να επεκταθεί, μέσω της συνέχειας, σε μια φραγμένη γραμμική απεικόνιση (που εξακολουθεί να ονομάζεται γ_1) από το $H^1(D,\Delta_A)$ στο $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$.

Ως συνέπεια του πιο πάνω θεωρήματος μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε το θεώρημα απόκλισης σε ένα ευρύτερο χώρο συναρτήσεων.

Πόρισμα 3.1 *Θέτουμε $u \in H^1(D)$ τέτοιο ώστε $\nabla{\cdot}A\nabla u \in L^2(D)$ και $v \in H^1(D)$. Τότε*

$$\int_D \nabla v{\cdot}A\nabla u dx + \int_D v\nabla{\cdot}A\nabla u dx = \int_{\partial D} \nu v{\cdot}A\nabla u ds$$

Παρατήρηση 3.1 *Με τη βοήθεια μιας συνάρτησης αποκοπής για μια περιοχή του ∂D μπορούμε με παρόμοιο τρόπο όπως και στο Θεώρημα 3.4 να ορίσουμε την $\partial u/\partial\nu_A$ για $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2\backslash\bar{D})$ τέτοια ώστε $\nabla{\cdot}A\nabla u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2\backslash\bar{D})$.*

Παρατήρηση 3.2 *Θέτοντας $A = I$ στο Θεώρημα 3.4 και σύμφωνα με το Πόρισμα 3.1, έχουμε ότι η $\partial u/\partial v$ είναι καλώς ορισμένη στο $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ για συναρτήσεις*

$$u \in H^1(D,\Delta) := u \in H^1(D) : \Delta u \in L^2(D)$$

Επιπλέον, ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα του Green:

$$\int_D \nabla v{\cdot}\nabla u dx + \int_D v\Delta u dx = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \nu}ds, \qquad u \in (H^1 D,\Delta),\ vH^1(D)$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε το ευθύ πρόβλημα για ένα ορθοτροπικό μέσο στο $\mathbb{R}^2$ σε κατάλληλους χώρους Sobolev. Υποθέτουμε ότι A, N και D ικανοποιούν τις υποθέσεις της υποενότητας 3.2. <<Δεδομένου ότι $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ και $h \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$, να βρείτε τα $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2\backslash\bar{D})$ και $\nu \in H^1(D)$ τέτοια ώστε

$$\nabla{\cdot}A\nabla v + k^2 nv = 0, \qquad \text{στο } D \tag{3.43}$$

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad \text{στο } \mathbb{R}^2\backslash\bar{D} \tag{3.44}$$

$$v - u = f, \qquad \text{στο } \partial D \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_A} - \frac{\partial u}{\partial \nu} = h, \qquad \text{στο } \partial D \tag{3.46}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\Big(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\Big) = 0 \tag{3.47}$$

Το πρόβλημα σκέδασης $(3.37)-(3.41)$ *είναι μια ειδική περίπτωση του (3.44)-(3.48). Συγκεκριμένα, το πεδίο σκέδασης* u^s *και το εσωτερικό πεδίο* v *ικανοποιούν το (3.44)-(3.48) με* $u=u^s$, $f=u^i|_{\partial D}$ *και* $h:=\frac{\partial u^i}{\partial \nu}|_{\partial D}$ *όπου το προσπίπτον κύμα* u^i *είναι τέτοιο ώστε*

$$\Delta u^i + k^2 u^i = 0, \qquad \text{στο } \mathbb{R}^2$$

Στην επόμενη υποενότητα θα συζητήσουμε για τις ασθενείς λύσεις και μεταβολικές μεθόδους στην εύρεση ασθενών λύσεων για προβλήματα οριακών τιμών.

3.4 Μέθοδος Μεταβολών

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε ιδιαίτερη σημασία και ενδιαφέρον στη μελέτη του ακόλουθου προβλήματος. Έστω X *ένας χώρος Hilbert με νόρμα* $||.||$ *και εσωτερικό γινόμενο* $(.,.)$. *Δοσμένης μιας συζυγής γραμμικής συνάρτησης* $F: X \to C$ *και μιας ημιγραμμικής μορφής* $(.,.)$ *στον* $X \times X$, *βρίσκουμε* $u \in X$ *τέτοια ώστε*

$$<< a(u,v) = F(v) \qquad \text{για όλα τα} \qquad v \in X >> \tag{3.48}$$

Η λύση αυτού του προβλήματος παρέχεται στο λήμμα Lax - Milgram. Έτσι αρχίζουμε την ενότητα με ένα πολύ σημαντικό θεώρημα της συναρτησιακής ανάλυσης.

Θεώρημα 3.5 (Λήμμα Lax - Milgram) *Έστω* $a: X \times X \to \mathbb{C}$ *ημιγραμμική μορφή (όχι κατ' ανάγκη συμμετρική), για την οποία υπάρχουν σταθερά* $a, \beta > 0$ *τέτοιο ώστε*

$$|a(u,v)| \leq a||u||\,||v||, \qquad \text{για όλα τα} \qquad u,v \in X \tag{3.49}$$

και

$$|a(u,v)| \geq \beta ||u||^2, \qquad \text{για όλα τα} \qquad u \in X \tag{3.50}$$

Τότε για κάθε φραγμένη, συζυγή, γραμμική συνάρτηση $F: X \to \mathbb{C}$ *υπάρχει μοναδικό στοιχείο* $u \in X$ *τέτοιο ώστε*

$$a(u,v) = F(v), \qquad \text{για όλα τα} \qquad v \in X \tag{3.51}$$

Συνεπώς,

$$||u|| \leq c||F||, \text{ όπου } c > 0 \text{ σταθερό ανεξάρτητη της } F.$$

Απόδειξη: *Έστω* X *χώρος Hilbert με* $||.||$ *και εσωτερικό γινόμενο και* $u \in X$ *ένα σταθερό στοιχείο. Τότε ορίζεται* $F : X \to \mathbb{R}$ *με* $F(v) = a(u,v), v \in X$. *Επομένως,*

$$|F(v)| = |a(u,v)| \leq c_1||u||\,||v||, \qquad \forall v \in X \tag{3.52}$$

άρα F *είναι γραμμικό, φραγμένο συναρτησιακό και έτσι από το λήμμα Riesz*[1], *υπάρχει μοναδικό* $\widetilde{u} \in X$ *τ.ω.*

$$F(v) = (\omega, v), \qquad \forall v \in X$$

Δηλαδή για κάθε φραγμένο $u \in X$, *ορίζεται* $\omega \in X$ *από την (3.52) και αυτό έγινε μονοσήμαντα. Ορίζουμε τον τελεστή* $A : X \to X$ *απεικονίζοντας το* u *στο* ω *ώστε* $Au = \omega$

$$a(u,v) = (Au, v), \qquad \text{για όλα τα } u, v \in X$$

Θα δείξουμε ότι ο A *είναι φραγμένος, γραμμικός τελεστής.*

Γραμμικός: *Έστω* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ *και* $u_1, u_2 \in X$. *Τότε*

$$\begin{aligned}
(A\left(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v\right)) &= a\left(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v\right) \\
&= \lambda_1 a\left(u_1, v\right) + \lambda_2 a\left(u_2, v\right) \\
&= \lambda_1\left(Au_1, v\right) + \lambda_2\left(Au_2, v\right) \\
&= \left(\lambda_1 Au_1, v + \lambda_2 Au_2, v\right), \qquad \forall\, v \in X
\end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε ότι από αυτή την ισότητα προκύπτει ότι

$$A\left(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2\right) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

Αποδεικνύουμε αυτό τον ισχυρισμό αν θέτουμε $u = z - \omega$ *τότε*

$$||z - \omega||^2 = 0 \Rightarrow z - \omega$$

Δηλαδή, αν $(z,v) = (\omega, v)$ *τότε* $z = \omega$, $\forall v \in X$.
Έστω $(z,v) = (\omega,v) \Rightarrow (z-\omega, v) = 0$, $\forall v \in X$. *Άρα τελικά,*

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \qquad \text{για κάθε } u_1, u_2 \in \text{ και } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

Φραγμένος: $(v, Au) = a(u,v), \qquad v, u \in X.$
Για $v = Au$ *τότε*

$$||Au||^2 = (Au, Av) = a(u, Au) \leq c_1||u||||Au|| \tag{3.53}$$

και κατά συνεπεία $||Au|| \le c_1||u||$ *για όλα τα* $u \in X$, *δηλαδή*

$$\sup_{0 \neq u \in X} \frac{||A||}{||u||} \le c_1.$$

Άρα A φραγμένος τελεστής.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι ο A είναι ένα προς ένα και το πεδίο τιμών του είναι ίσο με X. Για να το δείξουμε αυτό από την ανισότητα (3.50) υπολογίζουμε

$$\beta||u||^2 \le a(u,u) = (Au,u) \le ||Au||||u||$$

δηλαδή,

$$\beta||u|| \le ||Au|| \tag{3.54}$$

Η ανισότητα αυτή μας δείχνει ότι ο A είναι $1-1$ *και το πεδίο τιμών του είναι κλειστό στον* X.

Έστω $\omega \in A(X)$ *τότε*

$$\beta||\omega|| \le a(\omega,\omega) = (A\omega,\omega) \overset{\omega \in A(X)}{=} 0$$

άρα $\omega = 0$. *Και αφού* $A(X)$ *είναι κλειστό τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι* $A(X) = X$.

Για την ύπαρξη του u και της εξίσωσης (3.51) από το λήμμα Riesz υπάρχει μοναδικό $\bar{\omega} \in X$ *τέτοιο ώστε*

$$F(v) = (\bar{\omega}, v), \qquad \text{για κάθε} \in X \text{ και } ||\bar{\omega}|| = ||F||$$

Δηλαδή, ψάχνουμε $u \in X$ *τέτοιο ώστε* $Au = \bar{\omega}$. *Τότε*

$$a(u,v) = (Au,v) = (\bar{\omega},v) = F(v), \qquad \text{για κάθε } v \in X$$

Από την (3.54) συνεπάγεται $||u|| \le \frac{1}{\beta}||Au|| = \frac{1}{\beta}||\bar{\omega}|| = \frac{1}{\beta}||F||$ *και θέτοντας* $c = \frac{1}{\beta} > 0,\ ||u|| \le c||F||$.

Τέλος, θα δείξουμε την μοναδικότητα. Έστω $u, \bar{u} \in X$ *τ.ω.* $a(u,v) = F(v)$ *και* $a(\bar{u},v) = F(v)$ *για κάθε* $v \in X$. *Τότε*

$$a(u,v) = a(\bar{u},v), \text{ δηλαδή}, \ a(u,v) - a(\bar{u},v) = 0$$

και άρα $a(u-\bar{u},v) = 0$ *για κάθε* $v \in X$.

Από την σχέση αυτή και θέτοντας $v = u - \bar{u}$ *στην (3.50) παίρνουμε* $\beta||u-\bar{u}||^2 \le a(u-\bar{u},u-\bar{u}) = 0$ *δηλαδή* $||u-\bar{u}|| = 0$. *Άρα* $u = \bar{u}$.

Παρατήρηση 3.3 *Αν μια ημιγραμμική μορφή $a(.,.)$ ικανοποιεί την (3.49) τότε λέγεται ότι $a(.,.)$ είναι συνεχής και αν ικανοποιεί την (3.51) ονομάζεται ισχυρά συνεκτική*

Παράδειγμα 3.1 *Για να κατανοήσουμε το θεώρημα Lax - Milgram θα αναφερθούμε στην ύπαρξη μιας μοναδικής ασθενής λύσης του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Poisson. Έστω $f \in H^{1/2}(\partial D)$ και $\rho \in L^2(D)$, υπάρχει $u \in H^1(D)$ τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned} \Delta u &= \rho, \qquad \text{στο } D & (3.55)\\ u &= f, \qquad \text{στο } \partial D & (3.56) \end{aligned}$$

Αρχικά θεωρούμε $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ η οποία ικανοποιεί την $\Delta u = \rho$. Πολλαπλασιάζοντας την $\Delta u = \rho$ με $\bar{v} \in C_0^\infty(D)^2$ παίρνουμε $\Delta u\bar{v} = \rho\bar{v}$. Στη συνέχεια από το πρώτο θεώρημα Green παίρνουμε

$$\int_D (v\Delta u + \nabla u \nabla v) d\underset{\sim}{x} = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \nu} ds(x), \qquad u \in H^1(D) \quad (3.57)$$
$$v \in H_0^1(D)$$

$$\int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \nu} ds(x) = 0, \qquad \text{επειδή } v = 0 \text{ στο } \partial D$$

και λόγω του προβλήματος Dirichlet θέτοντας $\Delta u = \rho$ τότε

$$\int_D (\Delta u \cdot \nabla v) dx = \int_D \rho v dx \quad (3.58)$$

Από την (3.58) βρίσκουμε ασθενή λύση. Θέτουμε $X = H_0(D)$ και ορίζουμε

$$a(\omega, v) = (\nabla\omega, \nabla v)_{L^2(D)}, \qquad \omega, v \in X$$

Από γνωστό θεώρημα αν $u \in H^1(D)$ τότε $u' \in L^2(D)$.

Επομένως

$$|a(\omega, v)| \leq ||\nabla\omega||_{L^2(D)} ||\nabla v||_{L^2(D)} \underset{H^1 \subset L^2 \Rightarrow ||\cdot||_{L^2} \leq ||\cdot||_{H^1}}{\leq} ||\omega||_{H^1(D)} ||v||_{H^1(D)} \quad (3.59)$$

Επιπλέον, από ανισότητα Poincaré - Friedrichs υπάρχει σταθερά $c > 0$ εξαρτώμενη από το τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} a(\omega, \omega) &= ||\nabla\omega||^2_{L^2(D)} c \geq ||\omega||^2_{H^1(D)} \\ &\Rightarrow a(\omega, \omega) \geq c_* ||\omega||^2_{H^1(D)}, \qquad c_* = \frac{1}{c} \quad (3.60) \end{aligned}$$

Άρα από τις σχέσεις (3.59) και (3.60) βλέπουμε ότι η ημιγραμμική μορφή $a(.,.)$ ικανοποιεί τις παραδοχές του λήμματος Lax - Milgram $\Rightarrow$ μοναδική.

Στη συνέχεια θα βρούμε μια ασθενή λύση του προβλήματος (3.56) - (3.57) και μια μεταβαλλόμενη μορφή του αρχικού προβλήματος.

Έστω τώρα $u_0 \in H^1(D)$ να είναι τέτοιο ώστε $u_0 = f$ στο ∂D και

$$||u_0||_{H^1(D)} \leq c||f||_{H^{1/2}(\partial D)}$$

Αν $u = f$ στο ∂D τότε $u - u_0 = f - f_0$, άρα $u - u_0 \in H_0^1(D)$ και

$$\begin{aligned} a(u-u_0, v) &= (\nabla(u-u_0), \nabla u) = (\nabla u - \nabla u_0, \nabla v) \\ &= (\nabla u, \nabla v) - (\nabla u_0, \nabla v) \overset{\nabla u = \rho}{=} (\rho, v)_{L^2(D)} - a(u_0, v) \end{aligned}$$

Επομένως θα εξετάσουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

Να βρεθεί $u \in H^1(D)$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} << \ u - u_0 &\in H_0^1(D) \\ >> \ a(u-u_0, v) &= -a(u_0, v) + (\rho, v)_{L^2(D)}, \ \text{για κάθε } v \in H_0^1(D) \end{aligned} \tag{3.61}$$

Το πρόβλημα (3.61) είναι η μεταβολική μορφή του προβλήματος Dirichlet και μια λύση που ονομάζεται ασθενώς λύση.

Δεδομένου ότι η ημιγραμμική μορφή $a(.,.)$ είναι συνεχής, θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $F : vo - a(u_0, v) + (\rho, v)$ είναι ένα φραγμένο συζυγές γραμμικό συναρτησωειδές στον $H_0^1(D)$ και έτσι θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Lax - Milgran

Φραγμένο: *$F(v) = -a(u_0, v) + (\rho, v)$. Επομένως,*

$$\begin{aligned} |F(v)| &= |-a(u_0,v) + (\rho, v)| \\ &\leq |a(u_0, v)| + |(\rho, v)| \\ &\leq c||u_0||\,||v|| + \left(\left| \int \rho(x)\bar{v}dx \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\underset{Cauchy-Schwartz}{\leq} c||u_0||\,||v|| + \left(\int |\rho(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= c||u_0||\,||v|| + ||\rho|| + ||v|| \end{aligned}$$

άρα το F είναι φραγμένο συναρτησοειδές.

Γραμμικό: *Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $v_1, v_2 \in H_0^1(D)$ τότε η F είναι συζυγής γραμμικό συναρτησοειδές αν ισχύει*

$$F(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = \bar{\lambda}_1 | F_1(v_1) + \bar{\lambda}_2 | F_1(v_2)$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} F(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) &= -a(u_0, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + (\rho, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \\ &\underset{\alpha(.,.)\ \eta\mu\iota\gamma\rho\alpha\mu}{\overset{(.,.)\varepsilon\sigma\omega\tau.\ \gamma\iota\nu o\mu.}{=}} -\bar{\lambda}_1 a(u_0, v_1) - \bar{\lambda}_2 a(u_0, v_2) + \bar{\lambda}_1(\rho, v_1) + \bar{\lambda}_2(\rho, v_2) \\ &= \bar{\lambda}_1[-a(u_0, v_1) + (\rho, v_1)] + \bar{\lambda}_2[-a(u_0, v_2) + (\rho, v_2)] \\ &= \bar{\lambda}_1 F(v_1) + \bar{\lambda}_2 F(v_2) \end{aligned}$$

Συνεπώς, από το λήμμα Lax - Milgram, το πρόβλημα (3.61) έχει μοναδική λύση $u \in H^1(D)$ η οποία ικανοποιεί την:

$$||u||_{H^1(D)} \leq c\left(||u_0||_{H^1(D)} + ||\rho||_{L^2(D)}\right) \leq \hat{c}\left(||F||_{H^{1/2}(\partial D)} + ||\rho||_{L^2(D)}\right)$$

όπου η σταθερά $\hat{c} > 0$ είναι ανεξάρτητη της f και ρ.

Προφανώς, κάθε $uC^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ λύση του προβλήματος Dirichlet είναι ασθενής λύση. Αυτό είναι προφανές γιατί έστω συνάρτηση $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\Delta u = \rho \qquad \sigma\tau o\ D \tag{3.62}$$

$$u = f \qquad \sigma\tau o\ \partial D \tag{3.63}$$

Πολλαπλασιάζοντας την $\Delta u = \rho$ επί $\phi \in C_c^\infty(D)$ τότε

$$\int_D \Delta\, u \Delta\phi\, dx = \int_D \rho\, \phi\, dx, \qquad \forall C_c^\infty(D)$$

Για $u \in H_0^1$ τότε

$$\int_D \Delta u \Delta v dx = \int_D \rho v dx$$

Επειδή $v \in H_o^1$ τότε υπάρχει $\phi_n \to v,\ \phi_n \in C_c^\infty(D)$.

Επομένως

$$\int_D \rho\phi_n = \underset{\to(f,v)}{(f, \phi_n)}, \qquad \underset{\Rightarrow \phi_n' \to v' \Rightarrow \Delta\phi_n' \to \Delta v}{\phi_n \underset{H^1}{\to} v} \quad \Rightarrow \phi_n \underset{L^2}{\to} v$$

και λόγω πυκνότητας του $C_c^\infty(D)$ τότε από

$$\int_D \Delta u\, \Delta\phi\, dx = \int_D \rho\, \phi\, dx$$

συνεπάγεται

$$\int_D \Delta u\, \Delta\phi\, dx = \int_D f\, v dx$$

Επομένως κάθε κλασική λύση $u \in C^2(D) \cup C^1(\bar{D})$ *του προβλήματος Dorichlet είναι και ασθενής λύση.*

Αντιστρόφως, αν η ασθενής λύση u *είναι αρκετά λεία λόγω της ομαλότητας του*∂D*, της* f *και* ρ *τότε η ασθενής λύση ικανοποιεί κατά σημείο το πρόβλημα (3.62). [4]*

Πράγματι, παίρνοντας μια συνάρτηση $v \in C_0^\infty(D)$ *στο (3.62) βλέπουμε ότι*

$$\int_D (\Delta u - \rho) dx = 0, \qquad \text{για κάθε } \phi \in C_c^\infty(D)$$

δηλαδή $\Delta u = \rho$ *σχεδόν παντού στο* D*. Επιπλέον,* $u \to u_0$ *στο* ∂D*, έτσι* $u = f$*στο* ∂D*.*

Στη συνέχεια, επιστρέφουμε στο αφηρημένο πρόβλημα μεταβολών (3.52) και θεωρούμε την ακόλουθη μορφή:

Έστω X*, χώρος Hilbert,* $a, b : X \times X \to \mathbb{C}$ *συνεχείς ημιγραμμικές μορφές και* F *ένα φραγμένο συζυγή γραμμικό συναρτησοειδές στο* X*. Βρες* $u \in X$ *τέτοιο ώστε*

$$<< \ a(u,v) = b(u,v) = F(u), \text{για κάθε } v \in X \ >> \tag{3.64}$$

Ισοδύναμα, βρες $Au + Bu = \omega$*, κάτω από τις προϋποθέσεις:*

1. *Θεωρούμε ότι η συνεχής ημιγραμμική μορφή* $(.,.)$ *είναι ισχυρά συνεκτική δηλαδή* $a_1(u,u) \leq \kappa ||u||^2$ *για ορισμένη σταθερά* κ*.*

   Από το λήμμα Lax - Milgran υπάρχει ένα προς ένα και επί φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \to X$ *με φραγμένο αντίστροφο ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση*

   $$a(u,v) = (Au, v), \qquad \text{για κάθε } v \in X$$

2. *Έστω* $B : X \to X$ *φραγμένος γραμμικός τελεστής που ορίζεται ως*

   $$b(u,v) = (Bu, v), \qquad \text{για κάθε } v \in X$$

   Η ύπαρξη και η συνέχεια του τελεστή B *είναι ανάλογη της ύπαρξης του* A *στο πρώτο μέρος της απόδειξης του Λήμματος Lax - Milgram. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο τελεστής* B *είναι και συμπαγής.*

3. *Τέλος, από το Λήμμα αναπαραστάσεων του Reisz υπάρχει* $\omega \in X$ *ώστε* $F(v) = (\omega, v)$ *για κάθε* $v \in X$

Θεώρημα 3.6 *Έστω X, Y χώροι Hilbert. Θεωρούμε $A : X \to Y$ ένα προς ένα και επί φραγμένος γραμμικός τελεστής με φραγμένο αντίστροφο $A^{-1} : Y \to X$ και $B : X \to Y$ συμπαγής γραμμικός τελεστής. Τότε ο τελεστής $A+B$ είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν είναι επί. Αν $A+B$ είναι ένα προς ένα (και ως εκ τούτου ένα προς ένα και επί) τότε ο αντίστροφος $(A+B)^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος*

Απόδειξη: *Δεδομένου ότι υπάρχει ο αντίστροφος A^{-1} τότε*

$$\begin{aligned} A + B &= A + AA^{-1}B \\ &= A(I + A^{-1}B) \\ &= A(I - (A^{-1})B) \end{aligned} \tag{3.65}$$

Αφού ο A είναι ένα προς ένα και επί τότε από τη σχέση (3.65) έπεται ότι ο $(I - (A^{-1})B)$ είναι ένα προς ένα και επί. Επιπλέον, αφού A φραγμένος τελεστής και B συμπαγής τελεστής τότε ο $(-A^{-1})B$ είναι ένα συμπαγής χώρος.

Τότε από το θεώρημα Riesz και δεδομένου ότι ο τελεστής A φραγμένος και ο

$$\left[A(I + A^{-1}B)\right] = (A + B)^{-1}$$

είναι φραγμένος , δηλαδή

$$(A + B)^{-1} = \left(I - (-A^{-1})B\right)^{-1} A^{-1}$$

φραγμένος.

Παράδειγμα 3.2 *Θεωρούμε το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Helmholtz σε φραγμένο χωρίο D. Δοσμένης μιας $f \in H^{1/2}(\partial D)$ να βρεθεί $u \in H^1(D)$ τέτοιο ώστε*

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0, \qquad \text{στο } D \tag{3.66}$$

$$u = f \qquad \text{στο } \partial D \tag{3.67}$$

όπου $\kappa > 0$ πραγματικός. Όπως και στο Παράδειγμα (3.1) μπορούμε να μεταβάλλουμε το πρόβλημα (3.62).

Έστω $u_0 \in H^1(D)$ τέτοιο ώστε

$$u_0 = f \qquad \text{στο} \qquad \partial D$$

και

$$||u_0||_{H^1(D)} \leq c||f||_{H^{1/2}(\partial D)}$$

και ημιγραμμική μορφή $a(.,.)$ *που ορίζεται από την*

$$a(\omega, v) := \int_D (\nabla\omega\nabla\bar{v} - k^2\omega\bar{v})dx, \qquad \text{για κάθε } \omega, v \in H_0^1(D) \tag{3.68}$$

Αν $u = f$ *στο* ∂D *τότε* $u - u_0 \in H_0^1(D)$ *και*

$$\begin{aligned}
a(u-u_0, v) &= \int_D (\nabla(u-u_0)\nabla\bar{v} - k^2(u-u_0)\bar{v})dx \\
&= \int_D \left((\nabla u - \nabla u_0)\nabla\bar{v} - k^2u\bar{v} + k^2u_0\bar{v}\right)dx \\
&= \int_D \left(\nabla u\nabla\bar{v} - k^2u\bar{v}\right)dx \\
&\quad + \int_D \left(-\nabla u_0\nabla\bar{v} + k^2u_0\bar{v}\right)dx \\
&\overset{\substack{\int_D(\nabla u\nabla\bar{v})dx = \int_{\partial D}\bar{v}\frac{\partial u}{\partial n} \\ \text{1ο Θεώρημα Green}}}{=} -\int_D (\bar{v}\nabla u)dx + \int_{\partial D}\bar{v}\frac{\partial u}{\partial n}ds(\underset{\sim}{x}) - \int_D k^2u\bar{v}dx \\
&\quad + \int_D -\left(\nabla u_0\nabla\bar{v} + k^2u_0\bar{v}\right)dx \\
&\overset{\substack{\Delta u = -k^2u \\ \bar{u}=0 \text{ στο } \partial D}}{=} \int_D \bar{v}k^2udx - \int_D k^2u\bar{v}dx \\
&\quad - \int_D -\left(\nabla u_0\nabla\bar{v} + k^2u_0\bar{v}\right)dx \\
&= -a(u_0, v), \qquad \text{για κάθε } v \in H_0^1(D)
\end{aligned}$$

Επομένως, το αρχικό πρόβλημα (3.62) ανάγεται στο κάτωθι πρόβλημα:
Έστω $u_0 \in H^1(D)$ *τέτοιο ώστε* $u_0 = f$ *στο* ∂D *και* $||u_0||_{H^1(D)} \leq c||f||_{H^{1/2}}(\partial D)$.
Βρες $u \in H^1(D)$ *τέτοιο ώστε:*

$$\begin{aligned}
& u - u_0 \in H_0^1(D) \\
a(u-u_0, v) = -a(u_0, v) \qquad & \text{για όλα τα } v \in H_0^1(D)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

όπου η ημιγραμμική μορφή $a(.,.)$ *ορίζεται από την*

$$a(\omega, v) := \int_D \left(\nabla\omega\nabla\bar{v} - k^2\omega\bar{v}\right)dx, \qquad \omega, v \in H_0^1(D)$$

Προφανώς $a(.,.)$ *είναι συνεχής αλλά όχι γνήσια συνεκτικό.*

Γράφουμε την ημιγραμμική μορφή $a(.,.)$ *ως*

$$a(\omega, v) := a_1(\omega, v) + a_2(\omega, v) \tag{3.70}$$

όπου

$$a_1(\omega, v) := \int_D (\nabla\omega\nabla\bar{v})\, dx, \qquad \omega, v \in H_0^1(D) \tag{3.71}$$

γνήσια συνεκτικό στον $H_0^1(D) \times H_0^1(D)$ *και*

$$a_2(\omega, v) := -\kappa^2 \int_D \omega\bar{v} dx, \qquad \omega, v \in H_0^1(D) \tag{3.72}$$

έχουμε ότι

$$a(\omega, v) = a_1(\omega, v) + a_2(\omega, v)$$

όπου $a_1(.,.)$ *ισχυρά συνεκτικό στον* $H_0^1(D) \times H_0^1(D)$.

Έστω $A : H_0^1(D) \to H_0^1(D)$ *και* $B : H_0^1(D) \to H_0^1(D)$ *φραγμένοι γραμμικοί τελεστές που ορίζονται από τις σχέσεις*

$$(Au, v) = a_1(u, v)$$

και

$$(Bu, v) = \int_D u\bar{v} dx \qquad \text{για όλα τα} \qquad v \in H_0^1(D)$$

αντίστοιχα.

Κυρίως, ο A *είναι φραγμένος και έχει φραγμένη παράγωγο ισχυριζόμαστε ότι ο* $B : H_0^1(D) \to H_0^1(D)$ *είναι συμπαγής.*

Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό θεωρούμε δύο φραγμένες ακολουθίες y_j, ϕ_j, *οι οποίες συγκλίνουν ασθενώς στο* y *και* ϕ *στον* $H_0^1(D)$, *αντίστοιχα. Δεδομένου του Λήμματος 3.1 η εμφύτευση από τον* $H_0^1(D)$ *στον* $L^2(D)$ *είναι συμπαγής και υπάρχουν ακολουθίες* y_j *και* ϕ_j, *ισχυρά συγκλίνουσες στο* y *και* ϕ *στον* $L^2(D)$, *αντίστοιχα, δηλαδή*

$$||y_i||_{L^2(D)} \to ||y||_{L^2(D)}$$

και

$$||\phi_j||_{L^2(D)} \to ||\phi||_{L^2(D)}$$

Από τον ορισμό του $B, B\ y_j$ *είναι ασθενώς συγκλίνουσα στον* $H_0^1(D)$ *και* $(By_j, \phi_J \Rightarrow ||By_j||_{H_0^1(D)} \to ||By||_{H_0^1(D)}$ *Επομένως, έχουμε δείξει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία* y_j *στον* $H_0^1(D)$ *περιέχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία και άρα αποδεικνύεται ότι* B *είναι συμπαγής.*

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.6 στην (3.74). Συγκεκριμένα, το γεγονός ότι η $A - k^2B$ *είναι αμφιμονοσήμαντη, συνεπάγεται την ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης για την (3.74). Το ότι η* $A - k^2B$ *είναι* *αμφιμονοσήμαντη ισοδυναμεί με το γεγονός ότι η μόνη συνάρτηση $u \in H_0^1(D)$ που ικανοποιεί την*

$$a(u, v) = 0, \qquad \text{για όλα τα } v \in H_0^1(D)$$

είναι η $u = 0$. Αυτή είναι η ερώτηση μοναδικότητας για μια ασθενή λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών Dirichlet για την εξίσωση Helmholtz. Οι τιμές του ^{2} για τις οποίες υπάρχει μια μη μηδενική συνάρτηση $u \in H_0^1(D)$ που ικανοποιεί την

$$\Delta u + k^2 u = 0 \qquad \text{στο } D$$

(με την ασθενή έννοια) ονομάζονται ιδιοτιμές Dirichlet του -Δ και οι αντίστοιχες μη μηδενικές λύσεις ονομάζονται ιδιολύσεις Dirichlet του -Δ. Λάβετε υπόψη ότι η μηδενική συνοριακή συνθήκη είναι ενσωματωμένη στον χώρο $H_0^1(D)$. Συνοψίζοντας την πιο πάνω ανάλυση, έχουμε αποδείξει ότι αν το κ^2 δεν αποτελεί μια ιδιοτιμή Dirichlet του -Δ, τότε το πρόβλημα (3.67)-(3.68) έχει μια μοναδική λύση στο $H^1(D)$.

Θεώρημα 3.7 *Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση u_j για το $H_0^1(D)$ η οποία αποτελείται από ιδιολύσεις του -Δ. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές k^2 είναι όλες θετικές και συσσωρεύονται μόνο στο $+\infty$.*

Παρατήρηση 3.4 *Τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 3.1 και του Παραδείγματος 3.2 ισχύουν αν το D δεν είναι απλά συνεκτικό, δηλαδή, αν το $\mathbb{R}^2 \backslash \bar{\mathbb{D}}$ δεν είναι συνεκτικό.*

Τα προβλήματα συνοριακών τιμών που εμφανίζονται στη θεωρία σκέδασης σχηματίζονται μέσα σε μη φραγμένα χωρία. Για να λύσουμε αυτά τα προβλήματα με τη χρήση των παραμετρικών τεχνικών οι οποίες παρουσιάστηκαν σε αυτό το τμήμα, θα πρέπει να τα γράψουμε ως αντίστοιχα προβλήματα σε ένα φραγμένο χωρίο. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας ένα μεγάλο ανοιχτό δίσκο $\Omega_{\mathfrak{R}}$ με κέντρο στο σημείο το οποίο περιέχει το $\bar{D}$, όπου D είναι ο φορέας του σκεδαστή, λύνουμε αρχικά το πρόβλημα στο $\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D}$ (ή στο $\Omega_{\mathfrak{R}}$ για τις περιπτώσεις των προβλημάτων διάδοσης) με τη χρήση μεταβολικών μεθόδων. Έχοντας λύσει αυτό το πρόβλημα, επιχειρούμε στη συνέχεια να επεκτείνουμε τη λύση πέρα από το $\Omega_{\mathfrak{R}}$ σε μια λύση του αρχικού προβλήματος. Σε αυτή την περίπτωση το κύριο ερώτημα είναι τι οριακή συνθήκη θα πρέπει να επιβάλουμε στο τεχνητό όριο $\partial\Omega_{\mathfrak{R}}$ για να είναι δυνατή αυτή η επέκταση; Για να βρεθούν οι κατάλληλες οριακές συνθήκες για το $\partial\Omega_{\mathfrak{R}}$ εισαγάγουμε την απεικόνιση από Dirichlet σε Newmann. Αρχικά τυποποιούμε τον ορισμό μιας ακτινοβολούσας λύσης για την εξίσωση Helmholtz.

Ορισμός 3.1 *Μια λύση u της εξίσωσης Helmholtz της οποίας το χωρίο περιλαμβάνει το εξωτερικό κάποιου δίσκου ονομάζεται ακτινοβολούσα αν ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld*

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\Big(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\Big)=0$$

όπου $r=|x|$ και υποθέτουμε ότι το όριο ισχύει ομοιόμορφα σε όλες τις κατευθύνσεις $x/|x|$.

Ορισμός 3.2 *Η απεικόνιση Dirichlet σε Newmann T ορίζεται από*

$$\mathbf{T}:\omega\to\frac{\partial\omega}{\partial n}\qquad \text{στο } \partial\Omega_{\mathfrak{R}}$$

όπου η w είναι μια ακτινοβολούσα λύση για την εξίσωση Helmholtz $\Delta\omega+\kappa^2\omega=0, \partial\Omega_{\mathfrak{R}}$ είναι το όριο κάποιου δίσκου ακτίνας R και v είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα με κατεύθυνση προς τα έξω από το $\Omega_{\mathfrak{R}}$.

Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι το $\Omega_{\mathfrak{R}}$ είναι δίσκος, με τον διαχωρισμό των μεταβλητών μπορούμε να βρούμε μια λύση για το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet έξω από το $\Omega_{\mathfrak{R}}$ με το ανάπτυγμα σειράς που περιλαμβάνει συναρτήσεις Hankel. Χρησιμοποιώντας αυτή την επέκταση μπορούμε να καθορίσουμε τις ακόλουθες σημαντικές ιδιότητες τις απεικόνισης από Dirichlet σε Newmann.

Θεώρημα 3.8 *Η απεικόνιση από Dirichlet σε Newmann αποτελεί ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή από το $H^{\frac{1}{2}}(\Omega_{\mathfrak{R}})$ στο $H^{\frac{1}{2}}(\Omega_{\mathfrak{R}})$. Επιπλέον, υπάρχει ένας φραγμένος τελεστής $T_0: H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{\mathfrak{R}})\to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{\mathfrak{R}})$ που ικανοποιεί την*

$$-\int_{\partial\Omega_{\mathfrak{R}}} T_0\omega\bar{\omega}ds\geq C||\omega||^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{\mathfrak{R}})} \tag{3.73}$$

για κάποια σταθερά $C>0$, τέτοια ώστε ο $T-T_0: H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{\mathfrak{R}})\to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{\mathfrak{R}})$ να είναι συμπαγής

Παράδειγμα 3.3 *Εξετάζουμε το πρόβλημα εύρεσης μιας ασθενούς λύσης του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Helmholtz: Δεδομένου ότι η συνάρτηση $f\in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ να βρεθεί μια συνάρτηση $u\in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2\backslash\bar{D})$ τέτοια ώστε*

$$\Delta u+k^2u=0 \qquad \text{στο } \mathbb{R}^2\backslash\bar{D} \tag{3.74}$$

$$u=f \qquad \text{στο } \partial D \tag{3.75}$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\Big(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\Big)=0 \tag{3.76}$$

Αντί για το το πρόβλημα (3.75)-(3.77) λύνουμε ένα ισοδύναμο πρόβλημα σε ένα φραγμένο χωρί $\Omega_{\mathfrak{R}}\backslash\bar{D}$, συγκεκριμένα, βρίσκουμε μια $u \in H^1(\Omega_{\mathfrak{R}}\backslash\bar{D})$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
\Delta u + k^2 u &= 0 \qquad \text{στο } \Omega_{\mathfrak{R}}\backslash\bar{D} && (3.77)\\
u &= f \qquad \text{στο } \partial D && (3.78)\\
\frac{\partial u}{\partial \nu} &= Tu \qquad \text{στο } \partial\Omega_{\mathfrak{R}} && (3.79)
\end{aligned}$$

Όπου η συνάρτηση $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$. Τα η απεικόνιση το Dirichlet σε Newmann και $\Omega_{\mathfrak{R}}$ είναι ένας μεγάλος δίσκος ο οποίος περιλαμβάνει το $\bar{D}$.

Λήμμα 3.9 *Τα προβλήματα (3.75)-(3.77) και (3.78)-(3.80) είναι ισοδύναμα.*

Στη συνέχεια μετατρέπουμε το προβλημα (3.78)-(3.80) σε ένα πρόβλημα μεταβολών. Για αυτό τον σκοπό ορίζουμε τον χώρο Hilbert

$$X := \{u \in H^1(\Omega_{\mathfrak{R}})\backslash\bar{D} : u = 0 \qquad \text{στο } \partial D\}$$

και την διγραμμική $a(.,.)$ μέσω

$$a(u,v) = \int_{\Omega_{\mathfrak{R}}\backslash\bar{D}} (\nabla u.\nabla\bar{v} - k^2 u\bar{v})dx - \int_{\partial\Omega_{\mathfrak{R}}} Tu\bar{v}ds$$

το οποίο βρίσκουμε πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Helmholtz (3.78) με μια συνάρτηση ελέγχου $v \in X$, ολοκληρώνοντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη $\frac{\partial u}{\partial \nu} = Tu$ στο $\partial\Omega_{\mathfrak{R}}$ και την μηδενική συνοριακή συνθήκη στο ∂D. Τότε, η μέθοδος μεταβολών του (3.78)-(3.80) έχει ως εξής: Βρείτε μια $u \in H^1(\Omega_{\mathfrak{R}})$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
u &- u_0 \in X && (3.80)\\
u &= f \qquad \text{στο } \partial D && (3.81)\\
a(u-u_0, v) &= -a(u_0, v) \qquad \text{για όλα τα } v \in X && (3.82)
\end{aligned}$$

Για να αναλύσουμε την (3.83) ορίζουμε

$$a_1(\omega,v) = \int_{\Omega_{\mathfrak{R}}\backslash\bar{D}} (\nabla\omega.\nabla\bar{v} + \omega\bar{v})dx - \int_{\partial\Omega_{\mathfrak{R}}} T_0\omega\bar{v}ds$$

και

$$a_2(\omega,v) = -(\kappa^2+1)\int_{\Omega_{\mathfrak{R}}\backslash\bar{D}} \omega\bar{v}dx - \int_{\Omega_{\mathfrak{R}}\backslash\bar{D}} (T-T_0)\omega\bar{v}ds$$

όπου T_0 είναι ο τελεστής ο οποίος ορίστηκε στο Θεώρημα 3.7 και γράφουμε την εξίσωση στην (3.83) ως

$$a_1(u-u_0,v)+a_2(u-u_0,v)=F(v) \qquad \text{για όλα τα } v\in X$$

με $F(v):=a(u_0,v)$. Αφού ο T είναι ένας φραγμένος τλεστής από $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{\mathcal{R}})$ μέχρι $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{\mathcal{R}})$, το F είναι ένα φραγμένο συζυγές γραμμικό συναρτησιακό στο X και τόσο το $a_1(.,.)$ όσο και το $a_2(.,.)$ είναι συνεχή στο $X\times X$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (3.74) βλέπουμε ότι

$$a_1(\omega,\omega)\geq C||\omega||^2_{H^1(\partial\Omega_{\mathcal{R}})}$$

Είναι σημαντικό να συμπεριλάβουμε ένα L^2 εσωτερικό όρο γινομένου στο $a_1(.,.)$ αφού η ανισότητα του Poincare δεν ισχύει πλέον στο X. Επιπλέον, λόγω της συμπαγούς εμφύτευσης του $H^1(\partial\Omega_{\mathcal{R}})$ στο $L^2(\partial\Omega_{\mathcal{R}})$ και του γεγονότος ότι ο τελεστής $T-T_0 : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{\mathcal{R}})\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_{\mathcal{R}})$ είναι συμπαγής, το $a_2(.,.)$ δημιουργεί ένα συμπαγή τελεστή $B : X\rightarrow X$. Έτσι, από το Θεώρημα 3.6 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μοναδικότητα λύσης για το πρόβλημα (3.78)-(3.80) συνεπάγεται την ύπαρξη μιας λύσης για το πρόβλημα (3.75)-(3.77) και συνεπώς, από το Λήμμα 3.4, την ύπαρξη μιας ασθενούς λύσης για το πρόβλημα (3.79)-(3.81). Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα λύσης για το πρόβλημα (3.79)-(3.81) παρατηρούμε αρχικά ότι, σύμφωνα με το Λήμμα 3.4, μια λύση για το ομογενές πρόβλημα (3.78)-(3.80) ($f=0$) μπορεί να επεκταθεί σε μια λύση για το ομογενές πρόβλημα (3.75)-(3.77). Τώρα, ας υποθέσουμε ότι η u είναι μια λύση για το ομογενές πρόβλημα (3.75)-(3.77). Τότε, η πρώτη ταυτότητα του Green και η συνοριακή συνθήκη συνεπάγονται ότι

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_{\mathcal{R}}}\frac{\partial u}{\partial\nu}\bar{u}ds &= \int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\nu}\bar{u}+\int_{\Omega_{\mathcal{R}}\setminus\bar{D}}(|\nabla u|^2-k^2|u|^2)dx && (3.83)\\ &= \int_{\Omega_{\mathcal{R}}\setminus\bar{D}}(|\nabla u|^2-k^2|u|^2)dx && (3.84)\end{aligned}$$

όπου

$$Im\Big(\int_{\partial\Omega_{\mathcal{R}}}\frac{\partial u}{\partial\nu}\bar{u}ds\Big)=0$$

Θεώρημα 3.10 *Έστω $u^s\in C^2(R^2\setminus\bar{D})\cup C^1(R^2\setminus D)$ μια ακτινοβολούσα λύση της εξίσωσης Helmholtz τέτοια ώστε*

$$Im\int_{\partial\Omega_{\mathcal{R}}}u^s\frac{\partial\bar{u}^s}{\partial\nu}ds\geq 0$$

Τότε $u^s=0$ στο $R^2\setminus\bar{D}$.

Από το Θεώρημα 3.9 συμπεραίνουμε ότι $u = 0$ στο $\mathbb{R}^2\backslash\bar{D}$ γεγονός που αποδεικνύει τη μοναδικότητα και συνεπώς, την ύπαρξη μιας μοναδικής ασθενούς λύσης του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Helmholtz. Για την πιο πάνω απόδειξη της μοναδικότητας έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι εκτός του συνόρου, μια λύση $H^1_{loc}(\mathbb{R}^2\backslash\bar{\mathbf{D}})$ της εξίσωσης Helmholtz είναι πραγματική-αναλυτική. Αυτό μπορούμε να το δούμε από την αναπαράσταση του τύπου του Green.

Σε αυτή την υποενότητα έχουμε αναπτύξει την μέθοδο μεταβολών για την εύρεση ασθενών λύσεων στα προβλήματα συνοριακών τιμών για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Όπως έχουμε ήδη δει, στα προβλήματα σκέδασης οι συνοριακές συνθήκες είναι, τυπικά, τα ίχνη πραγματικά-αναλυτικών λύσεων π.χ. επίπεδα κύματα. Έτσι, δεδομένου ότι το σύνορο του σκεδαστη είναι ομαλό, είναι αναμενόμενο ότι το πεδίο σκέδασης είναι στην πραγματικότητα ομαλό. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το σύνορο, οι συνοριακές συνθήκες και οι συντελεστές των εξισώσεων είναι αρκετά ομαλοί, μια ασθενής λύση είναι στην πραγματικότητα C^2 μέσα στο χωρίο και C^1 μέχρι το σύνορο.

3.5 Ύπαρξη και Μοναδικότητα

Σ' αυτή την ενότητα για τη λύση του προβλήματος σκέδασης (3.44)-(3.48) θα ακολουθήσουμε τον Hähner [15], θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο μεταβολών που παρουσιάσαμε στην ενότητα 3.4 για να βρούμε μια λύση σε αυτό το πρόβλημα. Για να καταφέρουμε να φτάσουμε σε μια μεταβολική διατύπωση του προβλήματος (3.44)-(3.48) εισαγάγουμε ένα μεγάλο ανοιχτό δίσκο $\Omega_{\mathfrak{R}}$ με κέντρο στο σημείο το οποίο περιέχει το $\bar{D}$ και εξετάζουμε το ακόλουθο πρόβλημα: Δεδομένου ότι $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ και $h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$, να βρεθούν οι $u \in H^1(\Omega_{\mathfrak{R}}\backslash\bar{D})$ και $v \in H^1(D)$ τέτοιες ώστε

$$\nabla\ A.nablav + k^2 nv = 0 \qquad \text{στο } D \tag{3.85}$$

$$\Delta u + k^2 u = 0 \qquad \text{στο } \Omega_{\mathfrak{R}}\backslash\bar{D} \tag{3.86}$$

$$v - u = f \qquad \text{στο } \partial D \tag{3.87}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_A} - \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \qquad \text{στο } \partial D \tag{3.88}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = Tu \qquad \text{στο } \Omega_{\mathfrak{R}} \tag{3.89}$$

όπου T είναι ο τελεστής Dirichlet προς Newmann ο οποίος ορίζεται στον Ορισμό 3.2. Από το Λήμμα 3.4 μπορεί να αποδειχθεί ότι μια λύση u,v για το (3.88)-(3.92) μπορεί να επεκταθεί σε μια λύση για το πρόβλημα σκέδασης (3.86)-(3.90) και αντιστρόφως, μια λύση u, v για το πρόβλημα σκέδασης (3.44)-(3.48) είναι τέτοια ώστε η u και v περιορισμένη στο $\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D}$ λύνει το (3.86)-(3.90). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η $u_f \in H^1(\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D})$ είναι η μοναδική λύση για το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών Dirichlet:

$$\Delta u_f + k^2 u_f = 0 \qquad \text{στο} \quad \Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D} \tag{3.90}$$

$$u_f = f \qquad \text{στο} \quad \partial D \tag{3.91}$$

$$u_f = 0 \qquad \text{στο} \quad \partial \Omega_{\mathfrak{R}} \tag{3.92}$$

Η ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης σε αυτό το πρόβλημα παρουσιάζεται στο Παράδειγμα 3.2 (Βλ. επίσης Παρατήρηση 3.4). Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε ένα $\Omega_{\mathfrak{R}}$ τέτοιο ώστε το κ^2 να μην αποτελεί μια ιδιοτιμή Dirichlet για το -Δ στο $\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D}$. Μια ισοδύναμη μεταβολική διατύπωση του (3.88)-(3.92) είναι: Να βρεθεί μια $\omega \in H^1(\Omega_{\mathfrak{R}})$ τέτοια ώστε

$$\int_D (\nabla \bar{\phi}.A\nabla \omega - k^2 n \bar{\phi} \omega) dx + \int_{\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D}} (\nabla \bar{\phi}.\nabla \omega - k^2 \bar{\phi} \omega) dx \tag{3.93}$$

$$- \int_{\partial \Omega_{\mathfrak{R}}} \bar{\phi} T \omega ds = \int_{\partial D} \bar{\phi} h ds - \int_{\partial \Omega_{\mathfrak{R}}} \bar{\phi} T u_f ds + \int_{\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D}} (\nabla \bar{\phi}.\nabla u_f - k^2 \bar{\phi} u_f) dx$$

για όλα τα $\phi \in H^1(\Omega_{\mathfrak{R}})$. Με την βοήθεια της πρώτης ταυτότητας του Green (Βλ. Πόρισμα 3.1 και Παρατήρηση 3.2) είναι εύκολο να δούμε ότι η $v := \omega|_D$ και $u := \omega|_{\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D}} - u_f$ ικανοποιεί τις (3.86)-(3.90). Αντιστρόφως, πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις στις (3.86)-(3.90) με μια συνάρτηση ελέγχου και χρησιμοποιώντας τις συνθήκες μετάδοσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι $\omega = u$ στο D και $\omega = u + u_f$ στο $\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D}$ είναι τέτοιες ώστε $\omega \in H^1(\Omega_{\mathfrak{R}})$ και ικανοποιεί την (3.94), όπου v, u οι λύσεις του.

Στη συνέχεια ορίζουμε τη συνεχή ημιγραμμική μορφή στον $H^1(\Omega_{\mathfrak{R}}) \times H^1(\Omega_{\mathfrak{R}})$ ως

$$a_1(y, \phi) := \int_D (\nabla \bar{\phi}.A\nabla y + \bar{\phi} y) dx \quad + \quad \int_{\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D}} (\nabla \bar{\phi}.\nabla y + \bar{\phi} y) dx$$
$$- \quad \int_{\partial \Omega_{\mathfrak{R}}} \bar{\phi} T_0 y ds \qquad \phi, y \in H^1(\Omega_{\mathfrak{R}})$$

και

$$a_2(y, \phi) := - \int_D (nk^2 + 1) \bar{\phi} y dx \quad - \quad \int_{\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D}} (k^2 + 1) \bar{\phi} y dx$$
$$- \quad \int_{\partial \Omega_{\mathfrak{R}}} \bar{\phi} (T - T_0) y ds \qquad \phi, y \in H^1(\Omega_{\mathfrak{R}}$$

όπου T ο τελεστής που ορίστηκε στο θεώρημα 3.8.

Επιπλέον ορίζουμε το φραγμένο συζυγή γραμμικό συναρτησιακό F στον $H^1(\Omega_\mathfrak{R})$ ως

$$F(\phi) := \int_{\partial D} \bar{\phi} h ds - \int_{\partial \Omega_\mathfrak{R}} \bar{\phi} T u_f ds + \int_{\Omega_\mathfrak{R} \setminus \bar{D}} (\nabla \bar{\phi} . \nabla u_f - k^2 \bar{\phi} u_f) dx$$

Τότε η (3.94) μπορεί να γραφεί ως το πρόβλημα της εύρεσης $y \in H^1(\Omega_\mathfrak{R})$ τέτοιας ώστε

$$a_1(y, \phi) + a_2(y, \phi) = f(\phi) \qquad \textit{για όλες τις } \phi \in H^1(\Omega_\mathfrak{R})$$

Από την υπόθεση $\xi . Re(A)\xi \geq \gamma |\xi|^2$, για όλα τα $\xi \in \mathbb{C}^3$ και $x \in \bar{D}$ και (3.74) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ημιγραμμική μορφή είναι ισχυρά συνεκτική. Επομένως από το Λήμμα του Lax - Milgran συμπερένουμε ότι ο τελεστής $A : H^1(\Omega_\mathfrak{R}) \to H^1(\Omega_\mathfrak{R})$ που ορίζεται από $a_1(\omega, \phi) = A(A\omega, \phi)_{H^1(\Omega_\mathfrak{R})}$ είναι αντιστρλεψιμος με φραγμένο αντίστροφο. Επιπλέον, λόγω της συμπάγειας της εμφύτευσης του $H^1(\Omega_\mathfrak{R})$ στον $L^2(\Omega_\mathfrak{R})$ και το γεγονός ότι ο τελεστής $T - T_0 : H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega_\mathfrak{R}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial \Omega_\mathfrak{R})$ είναι συμπαγής (βλέπε θεώρημα 3.8), μπορούμε να δείξουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στο παράδειγμα 3.2 ότι ο τελεστής $B : H^1(\Omega_\mathfrak{R}) \to H^1(\Omega_\mathfrak{R})$ που ορίζεται από $a_2(\omega, \phi) = (B\omega, \phi)_{H^1(\Omega_\mathfrak{R})}$ είναι συμπαγής. Τελικά, από το θεώρημα 3.6 η μοναδικότητα λύσης του προβλήματος (3.86)-(3.90) συνεπάγεται ότι υπάρχει μια λύση.

Λήμμα 3.11 *Το πρόβλημα (3.86)-(3.90) και το πρόβλημα (3.44)-(3.48) έχουν το πολύ μια λύση.*

Απόδειξη *: Σύμφωνα με τις προηγούμενες παρατηρήσεις μας, η λύση του ομοιογενούς προβλήματος (3.86)-(3.90) ($f = h = 0$) μπορεί να επεκταθεί σε μια λύση $v \in H^1(D)$ και λύση $u \in H^1_{loc}(R^2 \setminus \bar{D})$ του ομοιογενούς προβλήματος (3.44)-(3.48). Από την πρώτη ταυτότητα του Green και τις συνοριακές συνθήκες συνεπάγεται ότι*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial \Omega_\mathfrak{R}} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds &= \int_{\partial D} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \int_{\Omega_\mathfrak{R} \setminus \bar{D}} (|\nabla u|^2 - k^2 |u|^2)^2 dx \\
&= \int_D (\nabla \bar{v}\, A \nabla v - \kappa^2 n |u|^2)^2 dx \\
&+ \int_{\Omega_\mathfrak{R} \setminus \bar{D}} (|\nabla u|^2 - k^2 |u|^2)^2 dx
\end{aligned}$$

Τώρα, καθώς $\xi . Im(A)\xi \leq 0$ για όλα τα $\xi \in \mathbb{C}^2$ και $Im(n) > 0$ για $x \in \bar{D}$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$Im\Big(\int_{\partial \Omega_\mathfrak{R}} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big) \leq 0$$

όπου συνεπάγεται ότι $u = 0$ στον $\mathbb{R}^2 \backslash \bar{D}$ (βλέπε θεώρημα 3.6[1]). Από τις συνθήκες μεταφοράς απορούμε να συμπεράνουμε ότι $v = 0$ και $\frac{\partial v}{\partial v_A}$ στο ∂D. Χρησιμοποιούμε μια μοναδική αρχή αυνέχισης ώστε να αποδείξουμε ότι $v = 0$ στο D. Για το σκοπό αυτό επεκτείνουμε τη $Re(A)$ σε πραγματική συμμετρική, θετικά ορισμένη και συνεχώς διαφορίσιμη πινακοσυνάρτηση στο $\Omega_{\mathfrak{R}}$ και τη $Im(A)$ σε πραγματική, συμμετρική, συνεχώς διαφορίσιμη έκταση του n στον $\bar{\Omega}_{\mathfrak{R}}$ και ορίζουμε $v = 0$ στο $\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D}$. Αφού $v = 0$ και $\frac{\partial \nu}{\partial \nu_A}$ στο ∂D τότε $\nu \in H^1(\Omega_{\mathfrak{R}})$ και ικανοποιεί $\nabla \ A \nabla \nu$ στο $\Omega_{\mathfrak{R}}$. Στη συνέχεια, λόγω κανονικότητας στο εσωτερικό του $\Omega_{\mathfrak{R}}, \nu$ είναι αρκετά ομαλή ώστε να εφαρμοστεί η μοναδική αρχή συξέχισης (βλέπε θεώσρημα 17.26 στο [16]). Ιδίως δεδομένου ότι $v = 0$ στο $\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D}$ τότε $v = 0$ στο $\Omega_{\mathfrak{R}}$. Αυτό αποδεικνύει την μοναδικότητα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, πρέπει να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα ύπαρξης, μοναδικότητας και συνεχής εξάρτησης των δεδομένων της λύσης του ευθέως προβλήματος σκέδασης για ένα ορθοτροπικό μέσο $\mathbb{R}^2$.

Θεώρημα 3.12 *Έστω D,A και n ικανοποιούν τις υποθέσεις της ενότητας 3.2 και έστω $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ και $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$. Τότε το πρόβλημα διαπερατότητας (3.44)-(3.48) έχει μοναδική λύση $v \in H^1(D)$ και $h \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D))$ η οποία ικανοποιεί την ανισότητα*

$$||v||_{H^1(D)} + ||u||_{H^1(\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D})} \leq c(||f||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} + ||h||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}) \tag{3.94}$$

όπου $c > 0$, θετική σταθερά ανεξάρτητη του f και h. Σημειώνεται ότι η prior εκτίμηση (3.95) επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η δυικότητα ορίσματος $||F||$ είναι φραγμένη από $||h||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}$ και $||u_f||_{H^1(\Omega_{\mathfrak{R}} \backslash \bar{D})}$ είναι φραγμένο από $||f||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)}$ (βλέπε παράδειγμα 3.2).

Τελειώνοντας, αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε δύο αποτελέσματα κανονικότητας από τη γενική θεωρία των μερικών διαφορρικών εξισώσεωμ που διατυπώθηκαν για το πρόβλημα μεταφοράς μας.

Έστω D_1 και D_2 φραγμένοι, ανοικτοί υπόχωροι στον $\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\bar{D}_1 \subset D_2$ και υποθέτουμε ότι A είναι πινακοσυνάρτηση με συνεχείς διαφορίσιμους εισόδους $a_{jk} \in C^1(\bar{D}_2)$ και $n \in C^1(\bar{D}_2)$.

Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι η πινακοσυνάρτηση A είναι συμμετρική και ικανοποιεί τη σχέση $\xi \ Re(A)\xi \leq \gamma|\xi|^2$ για όλα τα $\xi \in \mathbb{C}^3$ και $x \in \bar{D}_2$ για κάποια σταθερά $\gamma > 0$.

Θεώρημα 3.13 *Αν $u \in H^1(D_2)$ και $g \in L^2(D_2)$ ικανοποιούν τη σχέση*

$$\nabla . A \nabla u + k^2 n u = q$$

τότε $u \in H^2(D_1)$ *και*

$$||u||_{H^2(D_1)} \leq c(||u||_{H^1(D_2)} + ||q||_{L^2(D_2)})$$

όπου $c > 0$ *εξαρτάται μόνο από το* γ, D_1 *και* D_2.

Στο επόμενο θεώρημα δηλώνουμε ένα τοπικό αποτέλεσμα κανονικότητας για την λύση του προβλήματος μεταφοράς (3.43)-(3.47). Έστω $\Omega_\epsilon(z)$ *μια ανοικτή σφαίρα με κέντρο το* $z \in \mathbb{R}^2$ *και ακτίνας* ϵ.

Θεώρημα 3.14 *Υποθέτουμε* $z \in \partial D$ *και έστω* $u^i \in H^1(D)$ *τέτοιο ώστε* $\Delta u^i \in L^2(D)$
Ορίζουμε $f := u^i$ *και* $h := \frac{\partial u^i}{\partial \nu}$ *στο* ∂D

1. *Αν για* $c > 0$ *το προσπίπτον κύμα* u^i *ορίζεται επίσης στον* $\Omega_{2\epsilon}(z)$ *και ο περιορισμός του* u^i *στο* $\Omega_{2\epsilon}(z)$ *είναι στον* $H^2(\Omega_{2\epsilon}(z))$, *τότε η λύση u του προβλήματος (3.44)-(3.48) ικανοποιεί την* $u \in H^2((\mathcal{R}^2 \backslash \bar{D}) \cup \Omega_\epsilon(z))$ *και υπάρχει θετική σταθερά c τέτοια ώστε*

$$||u||_{H^2((\mathbb{R}^2 \backslash \bar{D}) \cup \Omega_\epsilon(z))} \leq c(||u^i||_{H^2(\Omega_{2\epsilon}(z))} + ||u^i||_{H^1(D)})$$

2. *Αν για κάποιο* ϵ *το προσπίπτον κύμα* u^i *ορίζεται επίσης στον* $\Omega_{\mathcal{R}} \backslash \Omega_\epsilon(z)$ *του* u^i *στο* $\Omega_{\mathcal{R}} \backslash \Omega_\epsilon(z)$ *είναι στον* $H^2(\Omega_{\mathcal{R}} \backslash \Omega_\epsilon(z))$ *και ο περιορισμός του* u^i *είναι στον* $\Omega_{\mathcal{R}} \backslash \Omega_\epsilon(z)$ *τότε η λύση u του προβλήματος (3.44)-(3.48) ικανοποιεί την* $u \in H^2(\mathbb{R} \backslash \bar{D} \cup \Omega_{z\epsilon}(z))$ *και υπάρχει θετική σταθερά c τέτοια ώστε*

$$||u||_{H^2((\mathcal{R}^2 \backslash (\bar{D}) \cup \Omega_{z\epsilon}(z)))} \leq c(||u^i||_{H^2(\Omega_{\mathcal{R}} \backslash \Omega_\epsilon(z))} + ||u^i||_{H^1(D)})$$

Chapter 4

Το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης σε Ορθοτροπικό Μέσο

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επεκτείνουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 για την περίπτωση του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης για ένα μη ομογενή ορθοτροπικό μέσο. Το αντίστροφο πρόβλημα που θα εξετάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο έχει σκοπό να καθορίσει τον φορέα της ορθοτροπικής ανομοιογένειας, με δεδομένο το πλάτος σκέδασης του πεδίου για πολλαπλές προσπίπτουσες διευθύνσεις.

Η διερεύνηση του αντίστροφου προβλήματος βασίζεται στην ανάλυση ενός non-standard προβλήματος συνοριακών τιμών, το οποίο ονομάζεται εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας. Έχοντας, ήδη συζητήσει την καλή τοποθέτηση του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας και την αριθμησιμότητα των ιδιοτιμών διαπερατότητας που ακολουθούν [13], προχωρούμε με μια μοναδική λύση για το αντίστροφο πρόβλημα. Θα παρουσιάσουμε μια απόδειξη με βάση τον Hähner [15], η οποία βασίζεται στη χρήση ενός αποτελέσματος ομαλότητας για τη λύση του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας. Τέλος, στο τελευταίο μέρος αυτού του κεφαλαίου, εξάγουμε την γραμμική μέθοδο δειγματοληψίας για να βρούμε μια προσέγγιση για το φορέα της ανομοιογένειας. Παρόλο που η ανάλυση για αιτιολόγηση της γραμμικής μεθόδου δειγματοληψίας αναφέρεται στο πρόβλημα σκέδασης για ένα ορθοτροπικό μέσο, η εφαρμογή της μεθόδου δεν απαιτεί καμία προηγούμενη γνώση των φυσικών ιδιοτήτων του αντικειμένου σκέδασης. Συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι η συνάρτηση για το μακρινό πεδίο που χρησιμοποιήσαμε στο Κεφάλαιο 3 για να καθορίσουμε το σχήμα ενός ατελή αγωγού, μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί στην παρούσα κατάσταση όπου το αντίστοιχο πλάτος σκέδασης χρησιμοποιείται για τον πυρήνα αυτής της εξίσωσης.

4.2 Η Μαθηματική Διατύπωση

Υποθέτουμε ότι D είναι ο φορέας και A και n είναι οι καταστατικές παράμετροι ενός φραγμένου ορθοτροπικού μη ομογενούς μέσου στον $\mathbb{R}^2$, όπου D, A και n ικανοποιούν τις υποθέσεις που δόθηκαν στην υποενότητα 3.2. Η σκέδαση ενός αρμονικά χρονικά εξαρτώμενου προσπίπτοντος επίπεδου κύματος $u^i := e^{ikz\cdot d}$ από τη ανομοιογένεια D περιγράφεται από το πρόβλημα:

$$\nabla\cdot A\nabla u + k^2 nu = 0 \qquad \text{στο } D \tag{4.1}$$

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0 \qquad \text{στο } R^2\backslash\bar{D} \tag{4.2}$$

$$u - u^s = e^{ikx\cdot d} \qquad \text{σε } \partial D \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu} = \frac{\partial e^{ikx\cdot d}}{\partial \nu} \qquad \text{σε } \partial D \tag{4.4}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\Big(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\Big) = 0 \tag{4.5}$$

$$\text{ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις} \qquad r := \frac{x}{|x|}$$

όπου $k > 0$ είναι ο κυματικός αριθμός, $d := (cos\phi, sin\phi)$ είναι η προσπίπτουσα διεύθυνση, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ και $r = |x|$. Συγκεκριμένα, το εσωτερικό πεδίο $(\cdot,\cdot) := v(\cdot,\phi)$ και το σκεδαζόμενο πεδίο $v^s(\cdot) := v^s(\cdot,\phi)$ εξαρτώνται από την προσπίπτουσα γωνία ϕ. Το ακτινοβολούμενο σκεδαζόμενο πεδίο v^s έχει και πάλι την ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$v^s(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{x}} u_\infty(\theta,\phi) + O(r^{\frac{-3}{2}}), r \to \infty$$

Όπου η συνάρτηση $v_\infty(\cdot,\phi)$, που ορίζεται στο $[0,2\pi]$ είναι το πλάτος σκέδασης που αντιστοιχεί στο πρόβλημα σκέδασης $(4.1)-(4.5)$ και το διάνυσμα $\hat{x} := (cos\theta, sin\theta)$ είναι η διεύθυνση παρατήρησης. Μπορεί να φανεί, με τον ίδιο τρόπο όπως και στο Θεώρημα 4.2 [1], ότι το πλάτος σκέδασης $v_\infty(\theta,\phi)$ που αντιστοιχεί στα $(4.1)-(4.5)$ ικανοποιεί τη σχέση
$v_\infty(\theta,\phi) = v_\infty(\phi+\pi,\theta+\pi)$ και δίνεται από

$$v_\infty(\theta,\phi) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial B} \Big(v^s(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu} - e^{-ik\hat{x}\cdot y}\frac{\partial u^s(y)}{\partial \nu}\Big) ds(y) \tag{4.6}$$

όπου ∂B είναι το σύνορο ενός φραγμένου χωρίου που περιλαμβάνει το D (μπορεί να είναι, επίσης και ∂D). Το ακόλουθο αποτέλεσμα μπορεί να εξαχθεί ως συνέπεια του λήμματος του Rellich (βλ. Θεώρημα 4.1 [1]):

Θεώρημα 4.1 *Ας υποθέσουμε ότι το πλάτος σκέδασης v_∞ που αντιστοιχεί στα $(4.1)-(4.5)$ ικανοποιεί το $v_\infty = 0$ για μια σταθερή γωνία ϕ και όλα τα θ στο $[0, 2\pi]$. Τότε $v^s = 0$ στο $\mathbb{R}^2 \backslash \bar{D}$.*

Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης το οποίο μας απασχολεί είναι ο καθορισμός του D αφού γνωρίζουμε το πλάτους σκέδασης $v_\infty(\theta, \phi)$ για όλες τις προσπίπτουσες γωνίες $\phi \in [0, 2\pi]$ και όλες τις γωνίες παρατήρησης $\theta[0, 2\pi]$. Τονίζουμε ότι για ένα ορθοτροπικό μέσο ότι τα A και n δεν καθορίζονται μονοσήμαντα από το πλάτος σκέδασης $v_\infty(\theta, \phi)$ για όλα τα $\phi \in [0, 2\pi]$ και $\theta \in [0, 2\pi]$, αλλά αυτό που είναι πιθανό να καθοριστεί είναι ο φορέας της ομογένειας D.

Εξετάζουμε τώρα τον τελεστή του μακρινού πεδίου $F := L^2[0, 2\pi] \to L^2[0, 2\pi]$ που αντιστοιχεί στο $(4.1)-(4.5)$ και καθορίζεται από

$$(Fg)(\theta) := \int_0^{2\pi} u_\infty(\theta, \phi) g(\phi) d\phi \tag{4.7}$$

όπου θα παίξει ένα κεντρικό ρόλο στην επίλυση του αντίστροφου προβλήματος. Έστω η συνάρτηση Herglotz με πυρήνα $g \in L^2[0, 2\pi]$

$$v_g(x) := \int_0^{2\pi} e^{ikx \cdot d} g(\phi) d\phi \tag{4.8}$$

Όπου $d = (cos\phi, sin\phi)$. Λάβετε υπόψη ότι, λόγω της υπέρθεσης, το Fg είναι το πλάτος σκέδασης της λύσης των $(4.1)-(4.5)$ με το $e^{ikx \cdot d}$ να αντικαθίσταται από το u_g. Ορίζουμε ως συνάρτηση κυμάτων Herglotz με πυρήνα $g(\phi - \pi)$.

$$(\hat{u}_g)(x) := \int_0^{2\pi} e^{-ikx \cdot d} g(\phi) d\phi \tag{4.9}$$

Θεώρημα 4.2 *Ο τελεστής μακρινού πεδίου F που αντιστοιχεί στο πρόβλημα σκέδασης $(4.1)-(4.5)$ είναι αμφιμονοσήμαντος με πυκνό εύρος εάν και μόνο δεν υπάρχει μια συνάρτηση κυμάτων Herglotz u_g τέτοια ώστε το ζεύγος u, u_g να αποτελεί λύση των*

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A \nabla u + k^2 n u &= 0 \text{ και } \Delta u_g + k^2 u_g = 0, \qquad \text{στο } D \\ v &= u_g \text{ και } \frac{\partial v}{\partial \nu_A} = \frac{\partial u_g}{\partial \nu} \qquad \text{σε } \partial D \end{aligned} \tag{4.10}$$

Απόδειξη *Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως και στο ευθύ πρόβλημα, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο τελεστής μακρινού πεδίου* F *είναι αμφιμονοσήμαντος εάν και μόνο αν ο αυτοσυζυγής τελεστής του* F^* *είναι αμφιμονοσήμαντος. Αφού*

$$N(F^*)^{\perp} := \overline{(F(L^2[0,2\pi]))}$$

για να αποδείξουμε το θεώρημα θα πρέπει να δείξουμε μόνο ότι το F *είναι αμφιμονοσήμαντο. Αλλά το* F_g *με* $g \neq 0$ *ισοδυναμεί με την ύπαρξη μιας μη μηδενικής συνάρτησης κυμάτων Herglotg* u_g *με πυρήνα* g *για την οποία το πλάτος σκέδασης* v_∞ *που αντιστοιχεί στα* $(4.1)-(4.5)$ *με το* $e^{ikx\cdot d}$ *να αντικαθίσταται από το* u_g*, εξαφανίζεται. Σύμφωνα με το λήμμα του Rellich έχουμε ότι* $u^s = 0$ *στο* $\mathbb{R}^2\backslash\bar{D}$ *και συνεπώς οι συνθήκες διαπερατότητας συνεπάγονται ότι*

$$v = v_g \qquad \textit{και} \qquad \frac{\partial v}{\partial \nu_A} = \frac{\partial \nu_g}{\partial \nu} \qquad \textit{σε } \partial D$$

Αφού το v_g *αποτελεί λύση της συνάρτησης Helmholtz, έχουμε ότι* v *και* v_g *ικανοποιούν και την* (4.10)*. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα.*

4.3 Το Εσωτερικό Πρόβλημα Διαπερατότητας

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε το που αντιστοιχεί στο διαπερατό πρόβλημα (3.48)-(3.52)

Εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας. *Δεδομένου ότι* $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ *και* $h \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ *, βρείτε δύο συναρτήσεις* $u \in H^1(D)$ *και* $\omega \in H^1(D)$ *που να ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\nabla\cdot A\nabla u + k^2 nu = 0 \qquad \textit{στο } D \tag{4.11}$$

$$\Delta\omega + k^2\omega = 0 \qquad \textit{στο } \mathbb{R}^2\backslash\bar{D} \tag{4.12}$$

$$u - \omega = f \qquad \textit{σε } \partial D \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_A} - \frac{\partial \omega}{\partial n} = h \qquad \textit{σε } \partial D \tag{4.14}$$

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών $(4.11)-(4.14)$ *με* $f = 0$ *και* $h = 0$ *ονομάζεται ομογενές εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας.*

Ορισμός 4.1 *Οι τιμές του* k^2 *για τις οποίες το ομογενές εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας έχει μια μη τετριμμένη λύση ονομάζονται ιδιοτιμές διαπερατότητας.*

Συγκεκριμένα, το Θεώρημα 4.2 δηλώνει ότι αν το k^2 δεν αποτελεί ιδιοτιμή διαπερατότητας, τότε το εύρος του τελεστή μακρινού πεδίου είναι πυκνό.

Ας μελετήσουμε τη μοναδικότητα της λύσης του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας.

Θεώρημα 4.3 *Αν $Im(n) > 0$, ή $Im(\bar{\xi}\cdot A\xi) < 0$ σε ένα σημείο $x_0 \in D$, τότε το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας (4.11)-(4.14) έχει το πολύ μια λύση.*

Απόδειξη *Υποθέτουμε ότι τα u και w αποτελούν μια λύση του ομογενούς εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας (π.χ. $f = h = 0$). Εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης στα $\bar{u}$ και $A\nabla u$ (βλ. Πόρισμα 3.1), χρησιμοποιώντας την συνοριακή οριακή συνθήκη και εφαρμόζοντας την πρώτη ταυτότητα του Green στα $\bar{w}$ και w (βλ. Παρατήρηση 3.2) έχουμε:*

$$\int_D \nabla\bar{u}\cdot A\nabla u dy - \int_D k^2 n|u|^2 dy = \int_{\partial D} \bar{u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \nu_A} dy = \int_D |\nabla\omega|^2 dy - \int_D k^2|\omega|^2 dy$$

Οπότε

$$Im\Big(\int_D \nabla\bar{u}\cdot A\nabla u dy\Big) = 0 \tag{4.15}$$

και

$$Im\Big(\int_D n|u|^2 dy\Big) = 0 \tag{4.16}$$

Αν $Im(n) > 0$ σε ένα σημείο $x_0 \in D$ και συνεπώς, λόγω συνέχειας σε μια μικρή σφαίρα, $\Omega_\varepsilon(x_0)$, τότε η ισότητα (4.16) και από μοναδικότητα έχουν ως αποτέλεσμα $v \equiv 0$ στο D. Αν $Im(\bar{\xi}\cdot A\xi) < 0$ σε ένα σημείο $x_0 \in D$, για όλα τα $\xi \in C^2$ και συνεπώς, λόγω συνέχειας σε μια μικρή σφαίρα, $\Omega_\varepsilon(x_0)$, από την ισότητα (4.15) έχουμε ότι $v \equiv 0$ σε $\Omega_\varepsilon(x_0)$ και από τη (4.12) $v \equiv 0$ στο $\Omega_\varepsilon(x_0)$, όπου και πάλι, $v \equiv 0$ στο D.

Προχωρούμε τώρα στην επιλυσιμότητα του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας. Στην ακόλουθη ανάλυση υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι το D είναι απλώς συνεκτικό. Στην αρχή, μελετούμε ένα ενδιάμεσο πρόβλημα το οποίο ονομάζεται τροποποιημένο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας. Στο τροποποιημένο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας δίνονται $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$, $h \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$, μια πραγματική συνάρτηση $m \in C(\bar{D})$ και δύο συναρτήσεις $p_1 \in L^2(D)$ και $p_2 \in L^2(D)$ και το ζητούμενο είναι να βρεθούν τα $u \in H^1(D)$ και $\omega \in H^1(D)$ που ικανοποιούν τα ακόλουθα:

$$\nabla\cdot A\nabla u - mu = p_1, \qquad \text{στο } D \tag{4.17}$$
$$\Delta\omega - \omega = \rho_2, \qquad \text{στο } D \tag{4.18}$$
$$u - \omega = f = f, \qquad \text{σε } \partial D \tag{4.19}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n_A} - \frac{\partial \omega}{\partial n} = h, \qquad \text{σε } \partial D \tag{4.20}$$

Αναδιατυπώνουμε τώρα το πρόβλημα (4.17) – (4.20) ως ένα ισοδύναμο μεταβολικό πρόβλημα της μορφής (3.49). Για αυτό το σκοπό, καθορίζουμε τον χώρο Hilbert:

$$W(D) := \left\{ w \in (L^2(D))^2 : \nabla\cdot w \in L^2(D) \text{ και } \nabla \times w = 0 \right\}$$

με εσωτερικό γινόμενο

$$(w_1, w_2)w = (w_1, w_2)_{L^2(D)} + (\nabla\cdot w_1, \nabla\cdot w_2)_{L^2(D)}$$

και την νόρμα

$$||w||^2 w = ||w||^2_{L^2(D)} + ||\nabla\cdot w||^2_{L^2(D)}$$

Δηλώνουμε με $\langle\cdot,\cdot\rangle$ τη δυική συσχέτιση μεταξύ $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ και $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$, δηλαδή

$$\langle \phi, \psi\cdot v\rangle = \int_D \phi\nabla\cdot\psi \, dx + \int_D \nabla\phi\cdot\psi \, dx \tag{4.21}$$

για $(\phi, \psi) \in H^1(D) \times W(D)$. Στη συνέχεια, ορίζουμε διγραμμική μορφή $\mathcal{A}$ στο $\{H^1(D) \times W(D)\}^2$ ως

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(U,V) \;&:=\; \int_D A\nabla u\cdot\nabla\bar{\phi}dx \\ &+\; \int_D mu\bar{\phi}dx + \int_D \nabla\cdot w\nabla\cdot\bar{\psi}dx \int_D w\cdot\psi dx - \langle u, \bar{\psi}\cdot\nu\rangle - \langle \phi, w\cdot\nu\rangle \end{aligned} \tag{4.22}$$

όπου $U := (u, w)$ και $V := (\phi, \psi)$ ανήκουν στο $H^1(D) \times W(D)$. Ορίζουμε με $L : H^1(D)\times W(D) \to \mathbf{C}$ το φραγμένο συζυγές γραμμικό συναρτησιακό που δίνεται από

$$L(V) := \int_D (\rho_1\bar{\phi} + \rho_2\nabla\cdot\bar{\psi})dx + \langle\bar{\phi}, h\rangle - \langle f, \bar{\psi}\cdot\nu\rangle \tag{4.23}$$

Τότε, η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος $(4.17)-(4.20)$ *είναι να βρεθεί το* $U=(u,w)\in H^1(D)\times W(D)$ *έτσι ώστε*

$$\mathcal{A}(U,V)=L(V), \qquad \text{για όλα } V\in H^1(D)\times W(D) \tag{4.24}$$

Το ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύει την ισοδυναμία μεταξύ των προβλημάτων $(4.17)-(4.20)$ *και* (4.24).

Θεώρημα 4.4 *Το πρόβλημα* $(4.17)-(4.20)$ *έχει μια μοναδική λύση* $(u,\omega)\in H^1(D)\times W(D)$ *αν και μόνο αν το πρόβλημα* (4.24) *έχει μια μοναδική λύση* $U=(u,w)\in H^1(D)\times W(D)$. *Επιπλέον, αν* (u,w) *είναι η μοναδική λύση του* $(4.17)-(4.20)$, *τότε* $U=(u,\omega)$ *είναι η μοναδική λύση του* (4.24). *Αντιστρόφως, αν* $U=(u,w)$ *είναι η μοναδική λύση του* (4.24), *τότε η μοναδική λύση* (u,ω) *για το πρόβλημα* $(4.17)-(4.20)$ *είναι τέτοια ώστε* $w=\nabla\omega$.

Απόδειξη *Αποδεικνύουμε πρώτα την ισοδυναμία μεταξύ της ύπαρξης μιας λύσης* (u,ω) *στο* $(4.17)-(4.20)$ *και της ύπαρξης μιας λύσης* $U=(u,w)$ *για το* (4.24).

1. *Υποθέτουμε ότι* (u,ω) *είναι μια λύση για το* $(4.17)-(4.20)$ *και θέτουμε* $w=\nabla\omega$. *Από* (4.18) *βλέπουμε ότι αφού* $\nabla w=\omega+\rho_2\in L^2(D)$, *τότε* $w\in W(D)$. *Παίρνοντας το βαθμωτό γινόμενο* L^2 *του* (6.18) *με* $\nabla\cdot\psi$ *για κάποιο* $\psi\in W(D)$ *και χρησιμοποιώντας το* (4.21), *έχουμε ότι*

$$\int_D \nabla\cdot w\nabla\cdot\bar{\psi}dx+\int_D w\cdot\bar{\psi}dx-\langle\omega,\bar{\psi}\cdot v\rangle=\int_D\rho_2\nabla\cdot\bar{\psi}dx. \tag{4.25}$$

   Έτσι, σύμφωνα με την (4.19)

$$\int_D \nabla\cdot w\nabla\cdot\bar{\psi}dx+\int_D w\cdot\bar{\psi}dx-\langle u,\bar{\psi}\cdot v\rangle=-\langle f,\bar{\psi}\cdot v\rangle+\int_D\rho_2\nabla\cdot\bar{\psi}dx \tag{4.26}$$

   Παίρνουμε τώρα το βαθμωτό γινόμενο L^2 *του* (4.17) *με* ϕ *στο* $H^1(D)$ *και ολοκληρώνουμε κατά μέλη. Χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη* (4.20) *βλέπουμε ότι*

$$\int_D A\nabla u\cdot\nabla\bar{\phi}dx+\int_D mu\bar{\phi}dx-\langle\bar{\phi},w\cdot\nu\rangle=\langle\bar{\phi},h\rangle+\int_D\rho_1\bar{\phi}dx \tag{4.27}$$

   Τέλος, προσθέτοντας τα (4.25) *και* (4.26) *έχουμε ότι το*

$$U=(u,\nabla\omega)$$

   είναι μια λύση για το (4.24).

2. *Ας υποθέσουμε τώρα ότι το* $U = (u, w) \in H^1(D) \times W(D)$ *αποτελεί μια λύση για το* (4.24). *Αφού* $xw = 0$ *και το* D *είναι απλά συνεκτικό, συμπεραίνουμε την ύπαρξη μιας συνάρτησης* $\omega \in {}^1(D)$ *τέτοιας ώστε* $w = \nabla\omega$. *Προφανώς, αν το* U *ικανοποιεί το* (4.24), *τότε το* (u, w) *ικανοποιεί τις* (4.25) *και* (4.26) *για όλα τα* $(\phi, \psi) \in H^1(D) \times W(D)$. *Μπορεί να φανεί εύκολα από το* (4.26) *ότι το ζεύγος* (u, ω) *ικανοποιεί τις σχέσεις*

$$\nabla \cdot A \nabla u - mu = p_1 \qquad \text{στο } D \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} - \frac{\partial \omega}{\partial \nu} = h, \qquad \text{σε } \partial D \tag{4.29}$$

Αντικαθιστώντας ως προς w *στο* (4.25) *και χρησιμοποιώντας την* (4.21) *στο δεύτερο ολοκλήρωμα, έχουμε ότι*

$$\int_D (\Delta\omega - \omega)\nabla\cdot\bar{\psi} dx + \langle w - u, \bar{\psi}\cdot\nu\rangle = -\langle f, \bar{\psi}\cdot\nu\rangle + \int_D \rho_2 \nabla\cdot\bar{\psi} dx \tag{4.30}$$

για όλα τα ψ *στο* $W(D)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει μια συνάρτηση

$$\phi \in L_0^2(D) = \left\{\phi \in L^2(D) : \int_D \phi dx = 0\right\}$$

και ότι το $x \in H^1(D)$ *αποτελεί μια λύση για το*

$$\begin{cases} \Delta\chi = \bar{\phi}, & \text{στο } \Delta \\ \frac{\partial\chi}{\partial n} = 0, & \text{στο } \partial D \end{cases} \tag{4.31}$$

Έστω ότι $\nabla\cdot\bar{\psi} = \phi$ *στο* D *και* $\bar{\psi}\cdot v = 0$ *σε* ∂D *και παίρνοντας* $\psi = \nabla\chi$ *στο* (4.29), *έχουμε ότι*

$$\int_D (\Delta\omega - \omega - \rho_2)\phi dx = 0, \qquad \text{για όλα } \phi \in L_0^2(D) \tag{4.32}$$

που συνεπάγεται την ύπαρξη μιας σταθεράς c_1 *τέτοιας ώστε*

$$\Delta\omega - \omega - \rho_2 = c_1 \tag{4.33}$$

Παίρνουμε τώρα $\phi \in L_0^2(D)$ *και υποθέτουμε ότι το* $\sigma \in {}^1(D)$ *αποτελεί μια λύση του*

$$\begin{cases} \Delta\sigma = 0, & \text{στο } \Delta \\ \frac{\partial\sigma}{\partial n} = \bar{\phi}, & \text{στο } \partial D \end{cases} \tag{4.34}$$

Παίρνοντας $\psi = \nabla\sigma$ *στο* (4.25) *και δεδομένου ότι* $\nabla\cdot\bar{\psi} = 0$ *στο* D *και* $\bar{\psi}\cdot n = \phi$ *σε* ∂D, *έχουμε ότι*

$$\int_{\partial D} (\omega - u + f)ds = 0, \qquad \text{για όλα τα } \phi \in L_0^2(\partial D)$$

από το οποίο συνεπάγεται η ύπαρξη μιας σταθεράς c_2 *τέτοιας ώστε*

$$\omega - u + f = c_2, \qquad \text{σε } \partial D \tag{4.35}$$

Αντικαθιστώντας τα (4.31) *και* (4.33) *στο* (4.29) *και χρησιμοποιώντας το* (4.21), *βλέπουμε ότι*

$$(c_1 - c_2)\int_D \nabla\cdot\bar{\psi}dx = 0, \qquad \forall\psi \in W(D) \tag{4.36}$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι $c_1 = c_2 = c$. *Οι εξισώσεις* (4.27), (4.31) *και* (4.33) *δείχνουν ότι το* $(v, \omega - c)$ *αποτελεί μια λύση για το* (4.17) – (4.20).

3. *Υποθέτουμε ότι το* (4.17) – (4.20) *έχει το πολύ μια λύση. Ας υποθέσουμε ότι τα* $U_1 = (u_1, w_1)$ *και* $U_2 = (u_2, w_2)$ *αποτελούν δύο λύσεις για το* (4.24). *Από το βήμα* 2 *πιο πάνω συνεπάγεται η ύπαρξη* w_1 *και* w_2 *στο* $H^1(D)$ *τέτοιων ώστε τα* $w_1 = \nabla\omega_1$ *και* $w_2 = \nabla\omega_2$ *και* (u_1, ω_1) *και* (u_2, ω_2) *να αποτελούν λύσεις για το* (4.17) – (4.20), *όπου* $(u_1, \omega_1) = (u_2, \omega_2)$ *και* $(u_1, w_1) = (u_2, w_2)$.

4. *Τέλος, υποθέτουμε ότι το* (4.24) *έχει το πολύ μια λύση και υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις* (u_1, ω_1) *και* (u_2, ω_2) *για το* (4.17) – (4.20). *Από το βήμα* 1 *μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα* $(v_1, \nabla\omega_1)$ *και* $(v_2, \nabla\omega_2)$ *αποτελούν δύο λύσεις για το* (4.24). *Οπότε το* $v_1 = v_2$ *και* $\omega = \omega_1 - \omega_2$ *είναι μια συνάρτηση στο* $H^1(D)$ *που ικανοποιεί*

$$\begin{cases} \Delta\omega - \omega = 0, & \text{στο } D \\ \omega = \frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 0, & \text{στο } \partial D \end{cases} \tag{4.37}$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι ω=0.

Εξετάζουμε τώρα το τροποποιημένο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας στην μεταβολική διατύπωση (4.24).

Θεώρημα 4.5 *Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια σταθερά* $\gamma > 1$ *τέτοια ώστε για* $\chi \in D$,

$$Re(\bar{\xi}\cdot A(x)\xi \geq \gamma|\xi|^2, \qquad \text{για όλα τα } \xi \in \mathbb{C}^2 \text{ και } m(x) \geq \gamma \tag{4.38}$$

Τότε, το πρόβλημα (4.24) *έχει μια μοναδική λύση*

$$U = (u, w) \in H^1(D) \times W(D)$$

Αυτή η λύση ικανοποιεί την a priori εκτίμηση

$$\begin{aligned} ||v||_{H^1(D)} + ||w||_w \leq 2C\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\Big(||\rho_1||_{L^2(D)} \quad + \\ ||\rho_2||_{L^2(D)} + ||f||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} \quad + \quad ||h||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}\Big) \end{aligned} \tag{4.39}$$

όπου η σταθερά $C > 0$ *είναι ανεξάρτητη από τα* p_1, p_2, f, h *και* γ.

Απόδειξη *Από την ανισότητα του Schwarz και λόγω συνέχειας του συζυγούς γραμμικού συναρτησιακού* L *σε* $H^1(D) \times W(D)$ *και την ύπαρξη μιας σταθεράς* c *ανεξάρτητης από τα* p_1, p_2, f *και* h, *τέτοιας ώστε*

$$||L|| \leq C\Big(||\rho_1||_{L^2} + ||\rho_2||_{L^2} + ||f||_{H^{\frac{1}{2}}} + ||h||_{H^{-\frac{1}{2}}}\Big) \tag{4.40}$$

Αν $U = (u, w) \in H^1(D) \times W(D)$, *τότε σύμφωνα με την υπόθεση* (4.34),

$$|\mathcal{A}(U, U)| \geq \gamma||v||_1^2 + ||w||_w^2 - 2Re(\langle(\bar{v}, w\rangle) \tag{4.41}$$

Σύμφωνα με την (4.21), *από την ανισότητα του Schwarz συνεπάγεται ότι*

$$|\langle\bar{v}, w\rangle| \leq ||v||_{H^1}||w||_w$$

οπότε και

$$|\mathcal{A}(U, U)| \geq \gamma||v||_{H^1}^2 + ||w||_w^2 - 2||v||_{H^1}||w||_w \tag{4.42}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\gamma\chi^2 + y^2 - 2\chi y = \frac{\gamma+1}{2}\Big(\chi - \frac{2}{\gamma+1}\Big)^2 + \frac{\gamma-1}{2}\chi^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}y^2$$

καταλήγουμε ότι

$$|\mathcal{A}(U, U)| \geq \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\Big(||w||_w^2 + ||v||_{H^1}^2\Big)$$

όπου το A *είναι συνεκτικό. Η συνέχιση του* A *συνεπάγεται εύκολα από την ανισότητα του Schwarz και το Θεώρημα* 1. *Το Θεώρημα* 4.6 *αποτελεί τώρα άμεση συνέπεια του λήμματος Lax-Milgram όταν εφαρμοστεί στο* (4.24).

Θεώρημα 4.6 *Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια σταθερά* $\gamma > 1$ *τέτοια ώστε για* $\chi \in D$ *,*

$$Re(\bar{\xi}\cdot A(\chi)\xi) \geq \gamma|\xi|^2, \qquad \text{για όλα τα } \in C^2 m(\chi) \geq \gamma \tag{4.43}$$

Τότε, το τροποποιημένο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας $(4.17) - (4.20)$ *έχει μια μοναδική λύση* (v, ω) *που ικανοποιεί*

$$\begin{aligned} ||v||_{H^1(D)} + ||\omega||_{H^1(D)} &\leq C\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\Big(||\rho_1||_{L^2(D)} + \\ +||\rho_2||_{L^2(D)} &+ ||f||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} + ||h||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}\Big) \end{aligned} \tag{4.44}$$

όπου η σταθερά $C > 0$ *είναι ανεξάρτητη από τα* p_1, p_2, f, h *και* γ*.*

Απόδειξη *Η ύπαρξη και μοναδικότητα μιας λύσης προέρχεται από το Θεώρημα* 4.5 *και το Θεώρημα* 4.6. *Η a priori εκτίμηση* (4.39) *μπορεί να εξασφαλιστεί άμεσα από το* $(4.17) - (4.20)$ *αλλά μπορούμε, επίσης, να τη συμπεράνουμε από το* (4.35) *ως ακολούθως:*

Το Θεώρημα 4.5 *δηλώνει ότι* $(v, \nabla\omega)$ *είναι η μοναδική λύση για το* (4.24). *οπότε, σύμφωνα με το* (4.35),

$$\begin{aligned} ||v||_{H^1} + ||\nabla\omega||_{L^2} \leq C_1\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\Big(|\rho_1||_{L^2} &+ \\ ||\rho_2||_{L^2} &+ ||f||_{H^{\frac{1}{2}}} + ||h||_{H^{-\frac{1}{2}}}\Big) \end{aligned} \tag{4.45}$$

Από την ανισότητα του Poincare, μπορούμε να γράψουμε

$$||\omega||_{H^1(D)} \leq C_2\Big(||\nabla\omega||_{L^2(D)} + ||\omega||_{L^2(\partial D)}\Big) \tag{4.46}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη (4.19) *και το θεώρημα ίχνους, έχουμε ότι*

$$||\omega||_{H^1(D)} \leq C_2\Big(||\nabla\omega||_{L^2(D)} + ||v||_{H^1(D)} + ||f||_{L^2(\partial D)}\Big) \tag{4.47}$$

Για κάποια θετική σταθερά C_2. *Στη συνέχεια, οι σταθερές* C_1 *και* C_2 *μπορούν να προσαρμοστούν ώστε να ισχύει το* (4.39).

Τώρα, είμαστε έτοιμοι να δείξουμε την ύπαρξη μιας λύσης για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας $(4.11) - (4.14)$.

Θεώρημα 4.7 *Ας υποθέσουμε ότι* $Im(n) > 0$ *ή* $Im(\bar{\xi}\cdot A\xi) < 0$ *σε ένα σημείο* $x_0 \in D$ *και ότι υπάρχει μια σταθερά* $\gamma > 1$ *τέτοια ώστε, για* $x \in D$

$$Re(\bar{\xi}\cdot A(x)\xi) \geq \gamma|\xi|^2, \qquad \text{για όλα τα } \xi \in C^2 \tag{4.48}$$

Τότε, το $(4.11)-(4.14)$ *έχει μια μοναδική λύση* $(v,\omega)\in H^1(D)\times H^1(D)$. *Αυτή η λύση ικανοποιεί την a priori εκτίμηση*

$$||v||_{H^1(D)}+||\omega||_{H^1(D)}\le C\Big(||f||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)}+||h||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}\Big) \tag{4.49}$$

όπου η σταθερά $C>0$ *είναι ανεξάρτητη από τα* f *και* h.

Απόδειξη *Θέτουμε*

$$\mathcal{X}(D)=\Big\{(v,\omega)\in H^1(D)\times H^1(D):\nabla\cdot A\nabla v\epsilon\, L^2(D)\ \text{και}\ \Delta\omega\in L^2(D)\Big\}$$

και εξετάζουμε τον τελεστή $\mathcal{G}$ *από το* $\mathcal{X}(D)$ *μέσα στην*

$$L^2(D)\times L^3(D)\times H^{\frac{1}{2}}(\partial D)\times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$$

που ορίζεται από

$$\mathcal{G}(v,\omega)=\Big(\nabla\cdot A\nabla v-mv,\Delta\omega-\omega,(v-\omega)|_{\partial D},\Big(\frac{\partial v}{\partial\nu}-\frac{\partial\omega}{\partial\nu}|_{\partial D}\Big) \tag{4.50}$$

όπου $m\in C(\bar{D})$ *και* $m>1$. *Προφανώς, το* $\mathcal{G}$ *είναι συνεχές και από το Θεώρημα 4.7 ξέρουμε ότι το αντίστροφο του* $\mathcal{G}$ *υπάρχει και είναι συνεχές. Τώρα, ας εξετάσουμε τον τελεστή* $\mathcal{T}$ *από το* $\mathcal{X}(D)$ *μέσα στην* $L_2(D)\times L2(D)\times H^{\frac{1}{2}}(\partial D)\times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ *που ορίζεται από*

$$\mathcal{T}(v,\omega)=((k^2n+m)v,(k^2+1)\omega,0,0) \tag{4.51}$$

Από τη συμπαγή εμφύτευση του $H^1(D)$ *στο* $L^2(D)$ *(βλ. υποενότητα 3.4), ο τελεστής* $\mathcal{T}$ *είναι συμπαγής. Από το Θεώρημα 4.4 συνεπάγεται ότι* $\mathcal{G}+\mathcal{T}$ *είναι αμφιμονοσήμαντο και για αυτό, από το Θεώρημα 3.6, μπορούμε να συμπεράνουμε την ύπαρξη και τη συνέχιση του* $(\mathcal{G}+\mathcal{T})^{-1}$, *το οποίο σημαίνει, συγκεκριμένα, την ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας* $(4.11)-(4.14)$, *η οποία ικανοποιεί την a priori εκτίμηση* (4.49).

Γενικά, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε την επιλυσιμότητα του εσωτερικού προβλήματος διαπερατότητας αν τα A *και* n *δεν ικανοποιούν τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος. Συγκεκριμένα, αν* $Im(A)=0$ *και* $Im(n)=0$ *στο* D, *το* k^2 *μπορεί να είναι μια ιδιοτιμή διαπερατότητας.*

Θεώρημα 4.8 *Υποθέτουμε ότι* $Im(A)=0$ *και* $Im(n)=0$ *στο* D *και ότι υπάρχει μια σταθερά* $\gamma>1$ *τέτοια ώστε, για* $x\in D$,

$$\bar{\xi}\cdot A(x)\xi\ge\gamma|\xi|^2,\qquad \text{για κάθε}\,\xi\in R^2\ \ \text{και}\ n(x)\ge\gamma$$

Τότε, το σύνολο των ιδιοτιμών διαπερατότητας είτε είναι κενό, είτε αποτελεί ένα διακριτό σύνολο.

Απόδειξη *Εξετάζουμε τον τελεστή* $\mathcal{G}$ *που ορίζεται από την σχέση* (4.50) *με* $m = n$ *και τον συμπαγή τελεστή* $\mathcal{T}$ *από το* $\mathcal{X}(D)$ *μέσα στην* $L^2(D) \times L^2(D) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ *που ορίζεται από*

$$\mathcal{T}(\omega, v) = (n\omega, v, 0, 0)$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{G} + (k^2 + 1)\mathcal{T}$ *είναι αντιστρέψιμος για όλα* $k \in C \backslash S$*, όπου το* S *αποτελεί ένα κενό ή διακριτό υποσύνολο του* C*. Αφού το* $\mathcal{G}$ *είναι αμφιμονοσήμαντο και επί (Θεώρημα* 4.6*), αυτό ισοδυναμεί με την απόδειξη ότι υπάρχει το* $(I + (k^2 + 1)\mathcal{G}^{-1}\mathcal{T})^{-1}$*, όπου* I *είναι ο ταυτοτικός τελεστής από το* $\mathcal{X}(D)$ *μέχρι το* $\mathcal{X}(D)$*. Από το Κεφάλαιο* 1.2*, μπορούμε να συμπεράνουμε άμεσα το γεγονός ότι υπάρχει αυτός ο τελεστής και ότι είναι φραγμένος εκτός από, το πολύ, ένα διακριτό σύνολο τιμών* k*. Λάβετε υπόψη ότι το* $(k^2+1)\mathcal{G}^{-1}\mathcal{T}$ *είναι ένας συμπαγής τελεστής.*

Γενικά, δεν είναι γνωστό αν υπάρχουν ιδιοτιμές διαπερατότητας. Το μόνο γνωστό αποτέλεσμα που αφορά την ύπαρξη ιδιοτιμών διαπερατότητας, είναι για την περίπτωση όπου $A = I$ *και* $n(x) = n(r)$ *[Θεώρημα 8.13 στην [33]].*

Η πιο πάνω ανάλυση για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας προϋποθέτει ότι ικανοποιείται η σχέση

$$Re(\bar{\xi}\cdot A(x)\xi) \geq \gamma|\xi|^2, \text{ για όλα τα } \xi \in C^2, x \in D \text{ και κάποια σταθερά } \gamma > 1$$

η οποία είναι $||Re(A)|| > 1$*. Τροποποιώντας τη μεταβολική προσέγγιση του Θεωρήματος* 4.4 *και του Θεωρήματος* 4.5 *μπορούν να αποδειχθούν τα πιο κάτω αποτελέσματα.*

Θεώρημα 4.9 *Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια σταθερά* $\gamma > 1$ *τέτοια ώστε, για* $x \in D$

$$Re(\bar{\xi}\cdot A(x)^{-1}\xi) \geq \gamma|\xi|^2, \text{ για όλα τα } \xi \in C^2 \text{ και } \gamma^{-1} \leq m < 1$$

Τότε, το $(4.11) - (4.14)$ *έχει μια μοναδική λύση* (v, ω) *η οποία ικανοποιεί*

$$\begin{aligned} ||v||_{H^1(D)} + ||\omega||_{H^1(D)} &\leq C\Big(||\rho_1||_{L^2(D)} + \\ +||\rho_2||_{L^2(D)} &+ ||f||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} + ||h||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}\Big) \end{aligned} \tag{4.52}$$

όπου η σταθερά $C > 0$ *είναι ανεξάρτητη από τα* p_1, p_2, f, h.

Θεώρημα 4.10 *Υποθέτουμε ότι είτε* $Im(n) > 0$*, είτε* $Im(\bar{\xi}\cdot A\xi) < 0$ *σε ένα σημείο* $x_0 \in D$ *και ότι υπάρχει μια σταθερά* $\gamma > 1$ *τέτοια ώστε, για* $x \in D$,

$$Re(\bar{\xi}\cdot(A(x))^{-1}\xi) \geq \gamma|\xi|^2, \qquad \text{για όλα τα } \xi \in C^2.$$

Τότε, το $(4.12)-(4.15)$ *έχει μια μοναδική λύση* $(v,\omega)\in H^1(D)\times H^1(D)$. *Αυτή η λύση ικανοποιεί την a priori εκτίμηση*

$$||v||_{H^1(D)}+||\omega||_{H^1(D)}\leq C\Big(||f||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)}+||h||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}\Big),$$

όπου η σταθερά $C>0$ *είναι ανεξάρτητη από τα* f *και* h.

Τέλος, με τον ίδιο τρόπο όπως και στο Θεώρημα 4.8, μπορεί να αποδειχθεί ότι σε αυτή την περίπτωση, υπό πρόσθετες υποθέσεις για το n, *το σύνολο των ιδιοτιμών διαπερατότητας είναι, το πολύ, διακριτό. Συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα.*

Θεώρημα 4.11 *Υποθέτουμε ότι* $Im(A)=0$ *και* $m(n)=0$ *στο* D *και ότι υπάρχει μια σταθερά* $\gamma>1$ *τέτοια ώστε, για* $x\in D$

$$\bar{\xi}\cdot(A(x))^{-1}\xi\geq\gamma|\xi|^2, \text{για όλα τα } \xi\in C^2$$

και

$$\gamma^{-1}\leq n(x)<1.$$

Τότε, το σύνολο των ιδιοτιμών διαπερατότητας είτε είναι κενό, είτε αποτελεί ένα διακριτό σύνολο.

Ολοκληρώνουμε αυτή την υποενότητα σημειώνοντας ότι, στην περίπτωση του $A=I$, *όπου το είναι η ταυτοτικός, η πιο πάνω ανάλυση δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Αυτή η περίπτωση μπορεί να μελετηθεί είτε ξαναγράφοντας το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας ως ένα πρόβλημα οριακών τιμών για μια για μια μερική διαφορική εξίσωση τετάρτου βαθμού για τη διαφορά* $v-\omega\in H^2(D)$, *είτε με τη χρήση αναλυτικών τελεστών προβολής.*

4.4 Μοναδικότητα

Για την απόδειξη της μοναδικότητας στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης αρχίζουμε με ένα απλό λήμμα.

Λήμμα 4.12 *Υποθέτουμε ότι είτε*

$$\bar{\xi}\cdot Re(A)\xi\geq\gamma|\xi|^2$$

ή

$$\bar{\xi}\cdot Re(A^{-1})\xi\geq\gamma|\xi|^2$$

για κάποια $\gamma > 1$. *Ας υποθέσουμε ότι η* $\{v_n, \omega_n\} \in H^1(D) \times H^1(D)$, $n \in N$, *είναι μια ακολουθία λύσεων για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας* (4.11) – (4.14) *με* $f_n \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D), h_n \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$. *Αν οι ακολουθίες* $\{f_n\}$ *και* $\{h_n\}$ *συγκλίνουν στην* $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ *και* $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ *αντίστοιχα και αν οι ακολουθίες* $\{v_n\}$ *και* $\{\omega_n\}$ *είναι φραγμένες στην* $H^1(D)$, *τότε υπάρχει μια υπακολουθία* $\{\omega_{nk}\}$ *η οποία συγκλίνει στην* $H^1(D)$.

Απόδειξη *Αρχικά, υποθέτουμε ότι* $\bar{\xi}\cdot Re(A)\xi \geq \gamma|\xi|^2, \gamma > 1$ *και ας υποθέσουμε ότι* $\{u_n, \omega_n\}$ *ορίζεται όπως δηλώνει το λήμμα. Λόγω της συμπαγούς εμφύτευσης της* $H^1(D)$ *μέσα στην* $L^2(D)$, *μπορούμε να επιλέξουμε τις* L^2-*συγκλίνουσες υπακολουθίες* $\{v_{nk}\}$ *και* $\{\omega_{nk}\}$. *Έτσι, οι* $\{v_{nk}\}$ *και* $\{\omega_{nk}\}$ *ικανοποιούν*

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot A\nabla v_{nk} - \gamma v_{nk} &= -(\gamma + \kappa^2 n)u_{nk}, && \text{στο } D \\
\Delta\omega_{nk} - \omega_{nk} &= -(1+\kappa^2)\omega_{nk}, && \text{στο } D \\
v_{nk} - \omega_{nk} &= f_{nk}, && \text{στο } \partial D \\
\frac{\partial v_n k}{\partial \nu_A} - \frac{\partial \omega_{nk}}{\partial \nu} &= h_{nk}, && \text{στο } D
\end{aligned}
$$

Τότε, το αποτέλεσμα του λήμματος συνεπάγεται από την a priori εκτίμηση του Θεωρήματος 4.6. *Στην περίπτωση όπου* $\bar{\xi}\cdot Re(A^{-1})\xi \geq \gamma|\xi|^2$, *για* $\gamma > 1$, *χρησιμοποιούμε το Θεώρημα* 4.9 *και* $1/\gamma$ *αντί* γ *στην πιο πάνω εξίσωση για* v_{nk} *για να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.*

Λάβετε υπόψη ότι στην απόδειξη του Λήμματος 4.12 *χρησιμοποιούμε την a priori εκτίμηση για το τροποποιημένο εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας αντί για την a priori εκτίμηση για το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας. Αυτό μας επιτρέπει να εξάγουμε το αποτέλεσμα χωρίς να υποθέσουμε ότι το* k^2 *δεν είναι μια ιδιοτιμή διαπερατότητας.*

Τώρα, είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το θεώρημα μοναδικότητας.

Θεώρημα 4.13 *Ας υποθέσουμε ότι τα χωρία* D_1 *και* D_2, *οι πινακοσυναρτήσεις* A_1 *και* A_2 *και οι συναρτήσεις* n_1 *και* n_2, *ικανοποιούν τις υποθέσεις της υποενότητας* 3.3. *Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι είτε ότι*

$$\bar{\xi}\cdot Re(A_1)\xi \geq \gamma|\xi|^2$$

είτε

$$\bar{\xi}\cdot Re(A_1^{-1})\xi \geq \gamma|\xi|^2$$

και είτε $\bar{\xi}\cdot Re(A_2)\xi \geq \gamma|\xi|^2$, *είτε* $\bar{\xi}\cdot Re(A_2^{-1})\xi \geq \gamma|\xi|^2$ *για κάποια* $\gamma > 1$.

Αν τα πλάτη σκέδασης $v^1_\infty(\theta,\phi)$ *και* $v^2_\infty(\theta,\phi)$ *που αντιστοιχούν στα* D_1, A_1, n_1 *και* D_2, A_2, n_2 *αντίστοιχα συμπίπτουν για όλα τα* $\theta \in [0, 2\pi]$ *τότε,* $D_1 = D_2$.

4.5 Η Γραμμική Μέθοδος Δειγματοληψίας

Έχοντας δείξει ότι ο φορέας της ανομοιογένειας μπορεί να καθοριστεί μοναδικά από το πλάτος σκέδασης, θέλουμε τώρα να βρούμε μια προσέγγιση για τον φορέα. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι, με δεδομένο ότι το k^2 δεν είναι μια ιδιοτιμή διαπερατότητας και ο πυρήνας του τελεστή μακρινού πεδίου είναι το πλάτος σκέδασης που αντιστοιχεί στο $(3.48)-(3.52)$. *Με δεδομένο ότι* $(f,h) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)\times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$, *υποθέτουμε ότι η* $(v,u) \in H^1(D)\times H^1_{loc}(\mathbb{R}^2\backslash D)$ *αποτελεί τη μοναδική λύση του αντίστοιχου προβλήματος διαπερατότητας* $(3.44)-(3.48)$. *Ας θυμηθούμε ότι το εκπεμπόμενο μέρος* u *έχει την ασυμπτωτική συμπεριφορά*

$$u(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}u_\infty(\hat{x}) + O\Big(r^{-\frac{3}{2}}\Big), \qquad r\to\infty, \qquad \hat{x} = \frac{x}{|x|}$$

όπου u_∞ *είναι το πλάτος σκέδασης που αντιστοιχεί στο* (v,u).

Ορισμός 4.2 *Ο φραγμένος γραμμικός τελεστής*

$$B : H^{\frac{1}{2}}(\partial D)\times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \to L^2[0,2\pi]$$

απεικονίζει την

$$(f,h) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)\times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$$

μέσα στο πλάτος σκέδασης $u_\chi \in\to L^2[0,2\pi]$ *όπου* (v,u) *είναι η λύση του* $(3.48)-(3.52)$ *με τα οριακά δεδομένα* (f,h).

Στη συνέχεια, θα καθορίσουμε τον ανάστροφο τελεστή και θα εξάγουμε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες αυτού του τελεστή. Υποθέτουμε ότι X *και* Y *είναι δύο χωροι Hilbert και υποθέτουμε ότι* X^* *και* Y^* *είναι οι δυικοί χώροι τους. Για οποιαδήποτε γραμμική απεικόνιση* $A : X\to Y$, *η ανάστροφη* $A^\tau : X^*\to Y^*$ *είναι η γραμμική απεικόνιση η οποία καθορίζεται από*

$$\langle A^\tau v, u\rangle_{\mathbf{X},\mathbf{X}^*} = \langle v, Au\rangle_{X,X^*}, \qquad \text{για όλα τα } u\in X \text{ και τα } v\in Y^*$$

όπου $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *δηλώνει τη δυική συσχέτιση μεταξύ των δηλωμένων χωρίων.*

Ισχύει ότι η ανάστροφη απεικόνιση A^τ *είναι φραγμένη αν και μόνο αν η* A *είναι φραγμένη.*

Ορισμός 4.3 *Για οποιοδήποτε υποσύνολο* $W\subseteq X$, *ο εκμηδενιστής* W^a *είναι ο κλειστός υποχώρος του* X^* *που ορίζεται από*

$$V^a = \Big\{g\in X^* : \langle g,v\rangle = 0 \text{ για όλα τα } u\in W\Big\}$$

Παρομοίως, για το $W \subseteq X^*$, ο εκμηδενιστής ${}^aV$ είναι ο κλειστός υποχώρος του X που ορίζεται από

$$ {}^aV = \Big\{ u \in X : \langle g, v \rangle = 0 \; για \; όλα \; τα \; g \in V \Big\} $$

Λήμμα 4.14 *Ο μηδενικός χώρος και εύρος των A και A^τ ικανοποιεί*

$$ N(A^\tau) = A(X)^a \qquad και \qquad N(A) =^a A^\tau(Y^*) $$

Απόδειξη *Εφαρμόζοντας τους διάφορους ορισμούς έχουμε*

$$ \begin{aligned} A(X)^a &= \Big\{ g \in Y^* : \langle g, v \rangle = 0 \; για \; όλα \; τα \; u \in \; στο \; εύρος \;\; A \Big\} \\ &= \Big\{ g \in Y^* : \langle g, Au \rangle = 0 \; για \; όλα \; τα \; u \in X \Big\} \\ &= \Big\{ g \in Y^* : \langle A^\tau g, u \rangle = 0 \; για \; όλα \; τα \; u \in X \Big\} \\ &= \Big\{ g \in Y^* : A^\tau g = 0 \Big\} = N(A^\tau) \end{aligned} $$

Ένα παρόμοιο επιχείρημα δείχνει ότι $N(A) =^a A^\tau(Y^*)$.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ένα υποσύνολο $W \subseteq X$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν $W^a = 0$. Συγκεκριμένα, από το Λήμμα 4.14 έχουμε ότι

Πόρισμα 4.1 *Ο τελεστής A έχει συμπαγές εύρος αν και μόνο αν ο αντίστροφος A^τ είναι αμφιμονοσήμαντος.*

Με τη βοήθεια του πιο πάνω λήμματος και πορίσματος μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για τον τελεστή .

Θεώρημα 4.15 *Το εύρος του $B : H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \to L^2[0, 2\pi]$ είναι συμπαγές στο $L^2[0, 2\pi]$.*

Από το Λήμμα 4.14 έχουμε επίσης ότι

$$ N(B) = B^\tau(L^2[0, 2\pi])^a := \Big\{ (f_0, h_0) : \int_{\partial D} (-f_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu_A} + h_0 \tilde{v}) ds = 0 \Big\} $$

όπου η $\tilde{v}$ ορίζεται όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.15 οπότε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης, βλέπουμε ότι τα ζεύγη $(v|\partial D, \frac{\partial v}{\partial \nu_A}|\partial D)$, όπου η $v \in H^1(D)$ αποτελεί μια λύση του $\nabla \cdot A \nabla v + k^2 n v = 0$ στο D, βρίσκονται στον πυρήνα του B. Οπότε ο B δεν είναι αμφιμονοσήμαντος. Θα περιορίσουμε τον τελεστή B με τέτοιο τρόπο ώστε ο περιορισμός να είναι αμφιμονοσήμαντος και να εξακολουθεί να έχει συμπαγές εύρος.

Για αυτό το σκοπό, δηλώνουμε με $\bar{H}$ την κλειστότητα στο $H^1(D)$ όλων των κυματικών συναρτήσεων Herglotz με πυρήνα $g \in L^2[0, 2\pi]$. Λάβετε υπόψη ότι, ο χώρος $\bar{H}$ συμπίπτει με το χώρο των H^1 ασθενών λύσεων της εξίσωσης Helmholtz. Με άλλα λόγια, $\bar{H} = \overline{W(D)}$, όπου $\overline{W(D)}$ είναι η κλειστότητα στο $H^1(D)$ του $W(D)$ που ορίζεται από

$$W(D) := \Big\{ u \in C^2(D) \cup C^1(\bar{D}) : \Delta u + k^2 u = 0 \Big\}$$

Πράγματι, αν $u \in \overline{W(D)}$ τότε, βλέποντας το u ως μια ασθενή λύση του εσωτερικού προβλήματος σύνθετης αντίστασης οριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz στο D με $\lambda = 1$ έχουμε ότι υπάρχει μια θετική σταθερά C τέτοια ώστε

$$||u||_{H^1(D)} \leq C || \frac{\partial u}{\partial v} + iu ||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}$$

και για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, υπάρχει μια κυματική συνάρτηση Herglotz v_g τέτοια ώστε $||u - v_g||_{H^1(D)} < \epsilon$, από όπου $\bar{H} = \overline{W(D)}$.

Λήμμα 4.16 *Οποιαδήποτε λύση της εξίσωση Helmholtz σε ένα φραγμένο χωρίο $D \in \mathbb{R}^2$ μπορεί να προσεγγιστεί στην νόρμα $H^1(D)$ με μια κυματική συνάρτηση Herglotz.*

Στη συνέχεια, ορίζουμε

$$H(\partial D) := \Big\{ \Big(u|(\partial D), \frac{\partial u}{\partial v}|\partial D \Big) : u \in \bar{H} \Big\}.$$

Λήμμα 4.17 *Το $H(\partial D)$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$.*

Θεώρημα 4.18 *Ας υποθέσουμε ότι το k^2 δεν αποτελεί μια ιδιοτιμή διαπερατότητας. Τότε, ο φραγμένος γραμμικός τελεστής $B_0 : H(\partial D) \to L^2[0, 2\pi]$, είναι αμφιμονοσήμαντος και έχει πυκνό εύρος.*

Απόδειξη *Ας υποθέσουμε ότι $B_0(f, h) = 0$ για $(f, h) \in H(\partial D)$ και ας υποθέσουμε ότι (v, u) είναι η λύση για το $(3.48) - (3.52)$ η οποία αντιστοιχεί σε αυτά τα οριακά δεδομένα. Τότε, η εκπεμπόμενη λύση της εξίσωσης Helmholtz στο εξωτερικό του D έχει πλάτος σκέδασης ίσο με μηδέν, από όπου $u = 0$ για $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \bar{D}$. Αυτό, συνεπάγεται ότι η v ικανοποιεί την*

$$\nabla \cdot A \nabla v + k^2 n v = 0 \qquad \text{στο } D,\ v = f \ \text{ και } \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \ \text{ στο } \partial D$$

Από τον ορισμό του $H(\partial D)$, τα f και h είναι τα ίχνη στο ∂D μιας $H^1(D)$ λύσης ω για την εξίσωση Helmholtz και η κανονική της παράγωγος αντίστοιχα. Έτσι, η (n,ω) λύνει το ομογενές εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας $(4.11)-(4.14)$ και αφού το k^2 δεν είναι μια ιδιοτιμή διαπερατότητας, έχουμε ότι $\omega \equiv 0$ και $v \equiv 0$ στο D από όπου $f = h = 0$.

Απομένει να δείξουμε ότι το σύνολο $B_0(H(\partial D))$ είναι πυκνό στο $L^2[0,2\pi]$. Για να γίνει αυτό, είναι αρκετό να δείξουμε ότι το εύρος του B περιλαμβάνεται μέσα στο εύρος του B_0 αφού, από το Θεώρημα 4.19, το εύρος του B είναι πυκνό στο $L^2[0,2\pi]$. Ας υποθέσουμε ότι το u_x βρίσκεται στο εύρος του B, δηλαδή, το u_∞ είναι το πλάτος σκέδασης του εκπεμπόμενου μέρους u μιας λύσης (v,u) για το $(3.48)-(3.52)$. Ας υποθέσουμε ότι το (v,ω) είναι η μοναδική λύση για το $(3.48)-(3.52)$ με τα οριακά δεδομένα $(u|\partial D, \frac{\partial u}{\partial \nu_A}|\partial D)$. Οπότε (v,u) είναι η λύση για το $(3.44)-(3.48)$ με οριακά δεδομένα $(\omega|\partial D, \frac{\partial \omega}{\partial \nu}|\partial D) \in H(\partial D)$ και έχει πλάτος σκέδασης το οποίο συμπίπτει με u_∞. Αυτό σημαίνει ότι $B_0(\omega|\partial D, \frac{\partial \omega}{\partial \nu}|\partial D) = u_\infty$.

Θεώρημα 4.19 *Ο τελεστής $B_0 : H(\partial D) \in L^2[0,2\pi]$ είναι πυκνός.*

Για μια v_g κυματική συνάρτηση Herglotz που δίνεται από την (4.8) με πυρήνα $g \in L^2[0,2\pi]$, ορίζουμε $H : L^2[0,2\pi] \to H(\partial D)$ με

$$g := \left(v_g|\partial D, \frac{\partial v_g}{\partial \nu}|\partial D\right)$$

Πόρισμα 4.2 *Ας υποθέσουμε ότι $u_\infty \to L^2[0,2\pi]$ ανήκει στο εύρος του B_0. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια $g_\epsilon \in L^2[0,2\pi]$ τέτοια ώστε η Hg_ϵ να ικανοποιεί την*

$$||B_0(Hg_\epsilon) - u_\infty||_{L^2[0,2\pi]} \leq \epsilon$$

Για την εύρεση μιας προσέγγισης του εμποδίου σκέδασης D, εξετάζουμε την εξίσωση μακρινού πεδίου που αντιστοιχεί στη σκέδαση με ένα ορθοτροπικό μέσο που δίνεται από

$$\int_0^{2\pi} u_\infty(\theta,\phi) g(\phi) d\phi = \gamma e^{-ik\hat{x}\cdot z}, \qquad z \in \mathbb{R}^2 \tag{4.53}$$

όπου $u_x(\theta,\phi)$ είναι το πλάτος σκέδασης του εκπεμπόμενου μέρους της λύσης του ευθέως προβλήματος $(4.1)-(4.5)$ που αντιστοιχεί στο προσπίπτον επίπεδο κύμα με προσπίπτουσα κατεύθυνση $d = (\cos\phi, \sin\phi)$ και κατεύθυνση παρατήρησης $\hat{x} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Η εξίσωση μακρινού πεδίου μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(Fg)(\hat{x}) = \Phi_\infty(\hat{x}, z), \qquad z \in \mathbb{R}^2$$

όπου Fg είναι ο τελεστής μακρινού πεδίου που αντιστοιχεί στο πρόβλημα διαπερατότητας $(4.1) - (4.5)$ και $\Phi_\infty(\hat{x}, z)$ είναι το πλάτος σκέδασης της θεμελιώδους λύσης $\Phi(x, z)$ της εξίσωσης Helmholtz στο $\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι ο τελεστής μακρινού πεδίου Fg μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$Fg = B_0(g)$$

Οπότε, η εξίσωση μακρινού πεδίου παίρνει τη μορφή

$$(B_0(Hg))(\hat{x}) = \Phi_\infty(\hat{x}, z), \qquad z \in \mathbb{R}^2 \tag{4.54}$$

Επομένως, στην περίπτωση σκέδασης από ένα ατελή αγωγό, η γραμμική μέθοδος δειγματοληψίας βασίζεται στο χαρακτηρισμό του πεδίου D από τη συμπεριφορά μιας λύσης για την εξίσωση μακρινού πεδίου (4.54). Για $z \in D$, η $g \in L^2[0, 2\pi]$ αποτελεί μια λύση για την εξίσωση μακρινού πεδίου αν και μόνο αν τα v και $\omega := v_g$ λύνουν το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας

$$\nabla \cdot A \nabla v - k^2 n v = 0, \qquad \text{στο } D \tag{4.55}$$

$$\Delta \omega + k^2 \omega = 0, \qquad \text{στο } D \tag{4.56}$$

$$v - \omega = \Phi(\cdot, z), \qquad \text{σε } \partial D \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \nu_A} - \frac{\partial \omega}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial \nu}, \qquad \text{σε } \partial D \tag{4.58}$$

όπου u_g είναι η κυματική συνάρτηση Herglotz με πυρήνα g. Γενικά αυτό δεν αληθεύει. Παρόλα αυτά όμως, στη συνέχεια θα δείξουμε ότι μπορεί να κατασκευαστεί μια λύση κατά προσέγγιση για την εξίσωση μακρινού πεδίου, η οποία συμπεριφέρεται με ένα συγκεκριμένο τρόπο.

Αρχικά, υποθέτουμε ότι $z \in D$ και ότι το κ^2 δεν αποτελεί μια ιδιοτιμή διαπερατότητας. Τότε, το εσωτερικό πρόβλημα διαπερατότητας $(4.55) - (4.58)$ έχει μια μοναδική λύση (v, ω). Σε αυτή την περίπτωση, το $(v, \Phi(\cdot, z))$ λύνει το πρόβλημα διαπερατότητας $(3.48) - (3.52)$ με συνθήκες διαπερατότητας $f := \omega|\partial D$ και $h := \frac{\partial \omega}{\partial}|\partial D$. Αφού η πιο πάνω λύση έχει πλάτος σκέδασης $\Phi_\infty(\cdot, z)$, μπορούμε να καταλήξουμε ότι το $\Phi_\infty(\cdot, z)$ είναι μέσα στο εύρος του B_0. Από το Πόρισμα 4.2 μπορούμε να βρούμε μια g_z^ϵ τέτοια ώστε

$$||B_0(g_z^\epsilon) - \Phi_\infty(\cdot, z)||_{L^2[0,2\pi]} \leq \epsilon \tag{4.59}$$

για ένα τυχαίο, μικρό ϵ. Προσέξτε ότι η αντίστοιχη κυματική συνάρτηση Herglotz $v_{g_{z^\epsilon}}$ προσεγγίζει το ω στην νόρμα $H^1(D)$. Τώρα, θέλουμε να δείξουμε ότι αν το z προσεγγίζει το όριο από το εσωτερικό του D, τότε ο πυρήνας g_z^ϵ και η αντίστοιχη κυματική συνάρτηση Herglotz απειρίζονται στις κατάλληλες νόρμα. Για αυτό το σκοπό, επιλέγουμε μια ακολουθία σημείων $\{z_j\}$, $z_j \in D$, τέτοια ώστε

$$z_j = z^* - \frac{R}{j}\nu(z^*), \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

με αρκετά μικρό R, όπου $z^* \in \partial D$ και $\nu(z^*)$ είναι το κανονικό κάθετο εξωφερές στο z^*. Δηλώνουμε με (v_j, ω_j) τη λύση του $(4.46)-(4.49)$ που αντιστοιχεί στο $z = z_j$. Καθώς $j \in \infty$, τα σημεία z_j προσεγγίζουν το οριακό σημείο z^* και για αυτό $||\Phi(\cdot, z_j)||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} \to x$. Από το θεώρημα ίχνους και με τη χρήση των οριακών συνθηκών μπορούμε να γράψουμε

$$||v_j||_{H^1(D)} + ||\omega_j||_{H^1(D)} \geq ||v_j - \omega_j||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} = ||\Phi(\cdot, z_j)||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} \tag{4.60}$$

Συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι η σχέση (4.51) συνεπάγεται ότι

$$\lim_{j\to\infty} ||\omega_j||_{H^1(D)} = \infty.$$

Για το σκοπό αυτό, υποθέτουμε αντίθετα ότι

$$||\omega_j||_{H^1(D)} \leq \bar{C}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

για μια θετική σταθερά $\bar{C}$. Από το θεώρημα ίχνους έχουμε ότι

$$||\omega_j||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} \leq \bar{C} \qquad \text{και} \qquad ||\frac{\partial \omega_j}{\partial n}||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} \leq \bar{C}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

Ας θυμηθούμε ότι για κάθε j, το ζεύγος $(v_j, \Phi(\cdot, z_j))$ είναι η λύση του $(3.48)-(3.52)$ με $(f, g) := (\omega_j|\partial D, \frac{\partial \omega_j}{\partial \nu}|\partial D)$. Η a priori εκτίμηση συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} &||v_j||_{H^1(D)} + |||\Phi(\cdot, z_j)||_{H^1(\Omega_R\setminus\bar{D})} \\ &\leq C\Big(||\omega_j||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} + ||\frac{\partial \omega_j}{\partial n}||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}\Big) \leq 2C\bar{C} \end{aligned}$$

Το οποίο αντιφάσκει με το γεγονός ότι το $||\Phi(\cdot, z_j)||_{H^1(\Omega_{\mathbb{R}}\setminus\bar{D})}$ δεν παραμένει φραγμένο καθώς $z_j \to z^* \in \partial D$. Έτσι, έχουμε ότι

$$\lim_{j\to\infty} ||\omega_j||_{H^1(D)} = \infty$$

Αφού για κάθε $j = 1, 2, \ldots$, οι αντίστοιχες κυματικές συναρτήσεις Herglotz $v_{g^\epsilon_{z_j}}$ που ικανοποιούν την (4.59) προσεγγίζουν τη λύση ω_j στην νόρμα $H^1(D)$, καταλήγουμε ότι

$$\lim_{j\to\infty} ||v_{g^\epsilon_{z_j}}||_{H^1(D)} = \infty,$$

και για αυτό

$$\lim_{j\to\infty} ||v_{g^{\epsilon}_{z_j}}||_{L^2[0,2\pi]} = \infty.$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε το $z \in \mathbb{R}^2 \backslash D$ *και υποθέτουμε και πάλι ότι το* κ^2 *δεν αποτελεί μια ιδιοτιμή διαπερατότητας. Για αυτά τα σημεία, το* $\Phi_\infty(\cdot, z_j)$ *δεν ανήκει στο εύρος του τελεστή* B_0 *γιατί το* $\Phi(\cdot, z_j)$ *δεν αποτελεί μια ασθενή λύση της εξίσωσης Helmholtz στο εξωτερικό του* D*. Αλλά, από το Θεώρημα 4.19 και το Πόρισμα 4.2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κανονικοποίηση Tikhonov για να κατασκευάσουμε μια κανονικοποιημένη λύση της εξίσωσης*

$$B_0(f,h) = \Phi_\infty(\cdot, z_j) \tag{4.61}$$

Συγκεκριμένα, αν η $(f_z^a, h_z^a) = (\omega^a(\cdot, z_j)|_\partial D, \partial\omega^a(\cdot, z_j)/\partial\nu|_\partial D) \in H(\partial D)$ *με* $\omega^a(\cdot, z_j) \in H$ *είναι μια κανονικοποιημένη λύση για το (4.61) που αντιστοιχεί στην παράμετρο κανονικοποίησης* $\propto$*, η οποία έχει επιλεγεί από μια κανονική στρατηγική κανονικοποίησης, έχουμε*

$$||B_0(f_z^a, h_z^a) - \Phi_\infty(\cdot, z_l)||_{L^2[0,2\pi]} \leq \delta, \tag{4.62}$$

για ένα τυχαίο μικρό αλλά σταθερό $\delta > 0$ *και*

$$\lim_{a\to 0}\Big(||f_z^a||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} + ||h_z^a||_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)}\Big) = \infty \tag{4.63}$$

Προσέξτε ότι $a = 0$ *καθώς* $\delta \to 0$*. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 4.2, για κάθε* $\propto$ *και* $\epsilon > 0$ *μπορούμε να βρούμε μια κυματική συνάρτηση Herglotz* $v_{g_z^{\propto,\epsilon}}$ *με πυρήνα* $g_z^{\propto,\epsilon} \in L^2[0,2\pi]$ *τέτοια ώστε*

$$\Big|\Big|B_0(H_{g_z^{\propto,\epsilon}}) - B_0\Big(f_z^a, h_z^\beta\Big)\Big|\Big|_{L^2[0,2\pi]} \leq \epsilon \tag{4.64}$$

και έτσι

$$\Big|\Big|B_0(H_{g_z^{\propto,\epsilon}}) - \Phi_\infty(\cdot, z)\Big|\Big|_{L^2[0,2\pi]} \leq \delta + \epsilon, \tag{4.65}$$

Επιπλέον, ξέρουμε ότι η κυματική συνάρτηση Herglotz $v_{g_z^{\propto,\epsilon}}$ *προσεγγίζει την* $\omega^a(\cdot, z_j)$ *στο* $H^1(D)$*. Έτσι η συνέχιση του τελεστή ίχνους μας δίνει*

$$\Big|\Big|H_{g_z^{\propto,\epsilon}} - \Big(f_z^a, h_z^\beta\Big)\Big|\Big|_{H(\partial D)} \leq C\Big|\Big|v_{g_z^{\propto,\epsilon}} - \omega^a(\cdot, z)\Big|\Big|_{H^1(D)} \leq \epsilon \tag{4.66}$$

Τέλος, από τα (4.64) και (4.66) συνεπάγεται ότι

$$\lim_{a\to 0}\Big|\Big|H_{g_z^{\propto,\epsilon}}\Big|\Big|_{H(\partial D)} = \infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{a\to 0}\Big|\Big|v_{g_z^{\propto,\epsilon}}\Big|\Big|_{H^1(D)} = \infty$$

και για αυτό

$$\lim_{a\to} \left|\left|g_z^{\propto,\epsilon}\right|\right|_{L^2[0,2\pi]} = \infty$$

Θεώρημα 4.20 *Ας υποθέσουμε ότι η συμμετρική πινακοσυνάρτηση*

$$A = (a_{j,k})_{j,k=1,2}, \qquad a_{j,k} \in C^1(\bar{D})$$

ικανοποιεί την $\bar{\xi}\cdot Im(A)\xi \leq 0$ *και είτε* $\bar{\xi}\cdot Re(A)\xi \geq \gamma|\xi|^2$ *ή* $\xi\cdot Re(A^{-1})\xi \geq \gamma|xi|^2$ *για όλα τα* $\xi \in C^2$ *και* $x \in \bar{D}$ *με μια σταθερά* $\gamma > 1$. *Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι η* $n \in C(\bar{D})$ *είναι τέτοια ώστε* $Im(n) \geq 0$ *και το* D *είναι ένα φραγμένο χωρίο με* C^2*-όριο* ∂D *τέτοιο ώστε το* $\mathbb{R}^2\backslash D$ *να είναι συνεκτικό. Υποθέτουμε ότι το* k^2 *δεν είναι μια ιδιοτιμή διαπερατότητας. Τότε, αν* F *είναι ο τελεστής μακρινού πεδίου* (4.7) *που αντιστοιχεί στο πρόβλημα διαπερατότητας* (4.1) – (4.5), *έχουμε ότι*

1. *Αν* $z \in D$ *τότε, για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει μια λύση* $g_z^\epsilon := g_z \in L^2[0, 2\pi]$ *η οποία ικανοποιεί την ανισότητα*

   $$||Fg_z - \Phi(\cdot, z)||_{L^2[0,2\pi]} < \epsilon$$

   Επιπλέον, αυτή η λύση ικανοποιεί τις

   $$\lim_{z\to 0} ||g_z||_{L^2[0,2\pi]} = \infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{z\to\partial D} ||v_{g_z}||_{H^1(D)} = \infty,$$

   όπου η v_{g_z} *είναι η κυματική συνάρτηση Herglotz με πυρήνα* g_z.

2. *Αν* $z \in \mathbb{R}^2\backslash D$ *τότε, για κάθε* $\epsilon > 0$ *και* $\delta > 0$ *υπάρχει μια λύση* $g_z^{\epsilon,\delta} := g_z \in L^2[0, 2\pi]$ *της ανισότητας*

   $$||Fg_z - \Phi_\infty(\cdot, z)||_{L^2[0,2\pi]} \leq \delta + \epsilon$$

   τέτοια ώστε

   $$\lim_{\delta\to 0} ||g_z||_{L^2[0,2\pi]} = \infty \qquad \text{και} \qquad \lim_{\delta\to 0} ||v_{g_z}||_{H^1(D)} = \infty$$

   όπου η v_{g_z} *είναι η κυματική συνάρτηση Herglotz με πυρήνα* g_z.

Το αντίστροφο πρόβλημα είναι εγγενώς μη γραμμικό και πιο σημαντικό από την άποψη των αριθμητικών υπολογισμών, μη καλά τοποθετημένο (δηλαδή ενδεχομένως να μην υπάρχει λύση ή αν υπάρχει να μην είναι μοναδική ή / και να μην εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος κατά συνεχή τρόπο).

1 Λήμμα Riesz: *Κάθε φραγμένο (συνεχές) γραμμικό συναρτσοειδές F σε ένα χώρο Hilbert X μπορεί να γραφτεί στη μορφή $F(\phi) = (\phi, f)$ για κάθε $\phi \in X$ και f στοιχείο του X το οποίο είναι μοναδικά περιορισμένη από F. Συνεπώς $||F|| = ||f||$.*

2 *Ένας γραμμικός τελεστής T στον X είναι φραγμένος αν $\sup_{0\neq\phi\in X} \frac{||T\phi||}{||\phi||} < \infty$ και η νόρμα του T ορίζεται ως $\sup_{0\neq\phi\in X} \frac{||T\phi||}{||\phi||}$.*

3 *Έστω X χώρος Hilbert και M υπόχωρος του H. Ως γραμμικό τελεστή $T : M \to X$ εννοούμε μια συνάρτηση ορισμένη στον M με τιμές στον X τέτοιο ώστε για $u \in M \in Tu \in X$ και ικανοποιεί $T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)$ για $u, v \in M$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*

4 *Ο τελεστής T ονομάζεται ένα προς ένα αν $u_1 \neq u_2$ τότε $Tu_1 \neq Tu_2$.*

5 Ασθενής λύση: *Αν $\rho \in L^2(D)$ τότε η ασθενής λύση του προβλήματος (3.62) είναι μια συνάρτηση $u \in H^1(D)$ η οποία ικανοποιεί*

$$\int_D \Delta uv = \int_D \rho v, \qquad v \in \overset{01}{H}(D)$$

ενώ αν $\rho \in C(\bar{D})$ τότε κλασική λύση είναι μια συνάρτηση $u \in C^2(\bar{D})$ η οποία ικανοποιεί το πρόβλημα. Κάθε κλασική λύση είναι ασθενής. Αν $\rho \in C(\bar{D})$ η ασθενής λύση είναι κλασική).

6

$$L^2(D) = \Big\{ f : \int_D f^2 dx < \infty \Big\}, \qquad ||f|| = ||f||_{L^2(D)} = \sqrt{\int_D f dx}$$

$$\overset{0}{H^1} D = \Big\{ u \in H^1 \text{ τ.ω. } \exists\, u_n \in C_c^\infty : u_n \underset{H_1}{\to} u, n \to \infty \Big\}$$

$$\text{και } \overset{0}{H^1} D = \Big\{ u \in H^1(D) : u\Big|_{\partial I} = 0 \Big\}$$

7 *Ο H^1 με τη νόρμα $||.||$ και το εσωτερικό γινόμενο $(.,.)$ είναι χώρος Hilbert.*

8

$$C^\infty(D) \equiv \cup_{k=0}^\infty C^k(D), \qquad C^k(D) : f, f', f'', ..., f^{(k)}, \text{ συνεχείς στο } D$$

9 Πρώτο Θεώρημα Green: *Έστω χωρίο D με σύνορο ∂D κλάσης C^2 και η κατεύθυνση προς το εξωτερικό του D.*

Για $u \in C^1(\bar{D})$ και $v \in C^2(\bar{D})$ τότε

$$\int_D (u\Delta v + \nabla u \nabla v) d\underset{\sim}{x} = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} ds(\underset{\sim}{x})$$

10 Ανισότητα Poincaré - Friedrich: *Έστω D φραγμένο χωρίο. Τότε υπάρχει σταθερά $C_* = C_*(\mu(D))$ τέτοιο ώστε*

$$||u||_{H^1(D)} \leq C_* ||u'||_{L^2(D)}$$

11 Θεώρημα Riesz: *Έστω $A : X \to X$ συμπαγής τελεστής και X χώρος με νόρμα. Τότε είτε η ομογενής εξίσωση $\phi - A\phi = 0$ έχει μη τετρημμένη λύση $\phi \in X$ ή για κάθε $f \in X$ η εξίσωση $\phi - A\phi = f$ έχει μοναδική λύση $\phi \in X$.*

Αν $I - A$ είναι ένα προς ένα (και ως εκ τούτου ένα προς ένα και επί) τότε ο $(I - A)^{-1} : X \to X$ είναι φραγμένος.

Bibliography

[1] *Fioralda Cakoni, David Colton, Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory.*

[2] *Piana M (1998) On uniqueness for anistropic inhomogeneous inverse scattering problems Inverse Problems.*

[3] *Potthast R (1999) Electromagnetic scattering from an orthotropic medium. Jour . Integral Equations Appl..*

[4] *McLean W (2000) Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge University Press, Cambridge.*

[5] *John F (1982) Partial Fifferential Equations, 4th ed. Springer Verlag, New York..*

[6] *Cakoni F, Colton D (2003) Combined for field operators in electronic inverse scattering theory Math. Methods Appl. Sci.*

[7] *Colton D and Kress R (1983) Integral Equations Methods in Scattering Theory, John Wiley, New York.*

[8] *Colton D, Haddar H, Monk P (2002) The linear sampling methods for solving the electromagnetic inverse scattering problem.*

[9] *Colton D, Kress R, Monk P (1997) Inverse scattering from an orthotropic medium, J. Comp. Appl. Math.*

[10] *Hahner P (2002) Electromagnetic wave scattering theory in Scattering (Pike and Sabatier eds) Academic Press, New York.*

[11] *Kirsch A (2005) The factorization method for Maxwell's equation Inverse Problems.*

[12] *Δάσιος Γ, Κυριακή Κ, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Αθήνα, 1994.*

[13] *Στρατής Ι, Γ, Σημειώσεις του Μεταπτυχιακού Μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ, Ε.Κ.Π.Α., Τμήμα Μαθηματικών, Αθήνα, 2007.*

[14] *Aposto T (1974) Mathematical Analysis, 2nd ed. Addison - Mesley, Reading, Masschuchatts*

[15] *Hahner P (2000) On the uniqueness of the shape of a penetrable, anisotropic obstacle. J. Comp. Appl Math.*

[16] *Kirsch A (2005) The factorization method for Maxwell's equation Inverse Problems.*

[17] *Harmander L (1985) The Analysis of Linear Partial Differential Operators III. Springer Verlag, Berlin.*