



Διπλωματική Εργασία

**ΣΟΛΙΤΟΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ  
ΑΒΕΛΙΑΝΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΑΒΕΛΙΑΝΩΝ  
ΘΕΩΡΙΩΝ  $SU(2)$  ΜΕ ΠΑΡΑΒΙΑΣΜΕΝΗ  
ΤΗΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΒΑΘΜΙΔΑΣ**

Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Τμήμα Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων

**Γαρυφαλλιά Κατσιμίγα**

A.M: 200811

Επιβλέπων: Επικ. Καθ. κ. Ξ. Μαϊντάς

Επιτροπή: Επικ. Καθ. κ. Φ. Διάκονος, Επ. Καθ. κ. Γ. Διαμάντης

ΑΘΗΝΑ 2011

## Abstract

We consider the classical dynamics of the  $U(1)$ - and  $SU(2)$ - Higgs field theories, using multiple scale perturbation theory. In the spontaneously broken phase, we explore the possible solutions assuming small perturbations of the Higgs field about its vacuum expectation value in each case. In the case of the abelian  $U(1)$  theory we derive a non linear Schrödinger equation for both the Higgs and the gauge field, and discuss solutions in the form of dark and bright solitons. In the case of the  $SU(2)$ -Higgs theory, soliton solutions are found to be unstable and we seek solutions in the form of plane waves. We show that non-linear plane wave solutions can only be stable if the Higgs amplitude is an order of magnitude smaller than the gauge field amplitude. In this case the mass parameter of the Higgs field possesses some bounds which may be of relevance in the search for the Higgs particle at LHC.

## Περίληψη

Στη παρούσα εργασία μελετάμε τη κλασική δυναμική της αβελιανής θεωρίας πεδίου  $U(1)$ -Higgs και της μη αβελιανής  $SU(2)$ -Higgs, με τη χρήση της θεωρίας διαταραχών πολλών κλιμάκων. Στην αυθόρμητα παραβιασμένη φάση, εξετάζουμε πιθανές λύσεις θεωρώντας μικρές διαταραχές του πεδίου Higgs γύρω από την αναμενόμενη τιμή του κενού, για κάθε περίπτωση. Στην περίπτωση της  $U(1)$  θεωρίας εξάγουμε μια μη γραμμική εξίσωση Schrödinger τόσο για το πεδίο Higgs όσο και για το πεδίο βαθμίδας, και στη συνέχεια περιγράφουμε λύσεις με τη μορφή σκοτεινών και φωτεινών σολιτονίων. Στην περίπτωση της θεωρίας  $SU(2)$ -Higgs, οι σολιτονικές λύσεις βρίσκονται ότι είναι ασταθείς και αναζητούμε λύσεις στη μορφή επίπεδων κυμάτων. Δείχνουμε ότι τα μη γραμμικά επίπεδα κύματα μπορεί να είναι ευσταθή, μόνο αν το πλάτος του μποζονίου Higgs είναι μια τάξη μεγέθους μικρότερο από το πλάτος του πεδίου βαθμίδας. Στην περίπτωση αυτή η παράμετρος της μάζας του πεδίου Higgs παίρνει περιορισμένες τιμές οι οποίες μπορεί να είναι σημαντικές για την αναζήτηση του σωματιδίου Higgs στο LHC.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Θεωρίες Βαθμίδας και αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας</b>	<b>7</b>
1.1	Αβελιανή θεωρία Βαθμίδας και μηχανισμός Higgs . . . . .	7
1.2	Αναλλοίωτο βαθμίδας στην κβαντική μηχανική . . . . .	10
1.3	Μη αβελιανές θεωρίες και μηχανισμός Higgs . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Παραβίαση της αβελιανής συμμετρίας βαθμίδας και υπεραγωγιμότητα</b>	<b>13</b>
2.1	Landau - Ginzburg . . . . .	13
2.2	Πρότυπο των Nielsen - Olesen . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Κλασικές λύσεις των μη Αβελιανών θεωριών βαθμίδας</b>	<b>19</b>
3.1	Λύσεις των θεωριών Yang - Mills . . . . .	19
3.2	Λύσεις Σαββίδη των θεωριών Yang - Mills . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Αβελιανή θεωρία Βαθμίδας και μηχανισμός Higgs</b>	<b>25</b>
4.1	Μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων . . . . .	25
4.2	Εξισώσεις κίνησης: Σολιτονικού τύπου λύσεις . . . . .	27
4.3	Μη διαταραχτική προσέγγιση . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Μη Αβελιανή θεωρία βαθμίδας SU(2) και μηχανισμός Higgs</b>	<b>39</b>
5.1	Εξισώσεις κίνησης και μικρές διακυμάνσεις του πεδίου Higgs . . . . .	39
5.2	Ασταθείς σολιτονικές λύσεις . . . . .	43
5.3	Μη γραμμικά επίπεδα κύματα: Ευσταθείς λύσεις . . . . .	44
5.4	Εξισώσεις κίνησης πεπλεγμένης μορφής . . . . .	47
5.5	Μελέτη ευστάθειας των λύσεων . . . . .	52
5.6	Συμπεράσματα . . . . .	56



# Κεφάλαιο 1

## Θεωρίες Βαθμίδας και αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας

### 1.1 Αβελιανή θεωρία Βαθμίδας και μηχανισμός Higgs

Ακρογωνιαίο λίθο για το πέρασμα από την κλασική στην κβαντική θεώρηση και την ανάπτυξη της αποκαλούμενης σήμερα κβαντικής ηλεκτροδυναμικής (QED) αποτελεί ο ηλεκτρομαγνητισμός [1]. Ο καθοριστικός αυτός ρόλος του, οφείλεται στο ότι πρόκειται για μια θεωρία στην οποία η “δυναμική”, (δηλαδή η συμπεριφορά των δυνάμεων), είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με μια “αρχή συμμετρίας”. Γνωρίζουμε ότι με τον όρο “συμμετρία” εννοούμε ότι όταν δράσουμε πάνω σε “κάτι” με “κάποιο” τρόπο, τότε μετά τη δράση αυτή, το “κάτι” θα είναι ακριβώς όπως πριν. Επεκτείνοντας τον συλλογισμό αυτό, μπορούμε να υιοθετήσουμε μια σειρά μαθηματικών εργαλείων, μαθηματικοί τελεστές, ή μετασχηματισμούς και να τους εφαρμόζουμε στην θεωρία μας έτσι ώστε οι φυσικοί νόμοι να παραμένουν οι ίδιοι. Τέτοιου τύπου μετασχηματισμοί οδηγούν στην αναλλοiotητα των νόμων.

Στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό και ιδιαίτερα στην κβαντική μηχανική, είναι βολικό αντί των πεδίων  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  να ορίσουμε το ανυσματικό πεδίο  $\mathbf{A}$ , ή την συναλλοιώτη μορφή του:

$$A_\mu = (V, \mathbf{A}). \quad (1.1.1)$$

όπου  $V$  το βαθμωτό δυναμικό, έτσι ώστε :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.1.2)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.1.3)$$

Η αναλλοiotητα βαθμίδας στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό βασίζεται στο γεγονός ότι τα  $\mathbf{A}$ ,  $V$  δεν ορίζονται μονοσήμαντα για δεδομένα  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ . Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας οδηγούν στην αναλλοiotητα των εξισώσεων Maxwell ή διαφορετικά στην αναλλοiotητα βαθμίδας. Πρόκειται για μετασχηματισμούς που έχουν την γενική μορφή:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (1.1.4)$$

## 1.1. ΚΑΘΟΛΟΓΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΙΑΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ HIGGS

όπου  $\chi$  οποιαδήποτε συνάρτηση και επομένως για να μην υπάρξει αλλαγή του ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E}$  πρέπει το βαθμωτό δυναμικό να ακολουθεί τον εξής νόμο μετασχηματισμού:

$$V \rightarrow V' = V - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (1.1.5)$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί μπορούν να παρασταθούν με την βοήθεια τετρανύσματος,  $A^\mu \equiv (V, \mathbf{A})$ . Επομένως ένας μετασχηματισμός βαθμίδας έχει την μορφή:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \quad (1.1.6)$$

Ενώ οι εξισώσεις Maxwell σε συναλλοίωτη μορφή γράφονται:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} Qe j_\nu \quad (1.1.7)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.1.8)$$

όπου  $Qe$  είναι το φορτίο του σωματιδίου,  $e$  το φορτίο του ηλεκτρονίου,  $j^\mu$  το τετρανύσμα του ηλεκτρομαγνητικού ρεύματος:

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) \quad (1.1.9)$$

Μετασχηματισμοί της μορφής:

$$\psi \rightarrow \psi' = \exp(i\alpha)\psi \quad (1.1.10)$$

όπου  $\alpha = \text{stajer}'a$ , καλούνται καθολικοί (global phase invariance) ενώ στην περίπτωση εξάρτησης της φάσης απ' το χώρο και το χρόνο, γίνεται λόγος για τοπική αναλλοιότητα φάσης:

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}, t) = \exp(i\alpha(\mathbf{x}, t))\psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.11)$$

Στην QED αναλλοίωτο βαθμίδας η τοπική αναλλοιότητα φάσης σχετίζονται με το άμμαζο φωτονικό πεδίο  $A^\mu$ , το οποίο ικανοποιεί κατά τα γνωστά τις εξισώσεις του Maxwell:

$$\square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \quad (1.1.12)$$

η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας (1.1.6). Ωστόσο αν το  $A^\mu$  έπρεπε να αναπαριστά έμμαζα πεδία, τότε η κατάλληλη εξίσωση θα ήταν η ακόλουθη:

$$(\square + M^2) A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \quad (1.1.13)$$

Η τελευταία δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς (1.1.6), γεγονός που οφείλεται στον όρο μάζας που υπεισέρχεται σ' αυτήν.



### Αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας: μηχανισμός Higgs στην U(1)

Λαμβάνουμε ως εκκίνηση της ανάλυσης μας την κατωτέρω Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + ((\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^*)((\partial_\mu + ieA_\mu)\phi) - V(\phi, \phi^*) \quad (1.1.14)$$

με  $V(\phi, \phi^*)$  είναι το ακόλουθο δυναμικό:

$$V(\phi, \phi^*) = +\mu^2\phi\phi^* + \lambda(\phi\phi^*)^2 \quad (1.1.15)$$

όπου  $\mu^2 < 0, \lambda > 0$ . Μεταβάλλοντας το πεδίο  $\phi$ , δηλαδή παραβιάζοντας την συμμετρία του συστήματος, αναζητούμε το κενό της “ νέας ” θεωρίας:

$$\frac{dV}{d|\phi|} = \frac{d}{d|\phi|}(\mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4) = 0 \quad (1.1.16)$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (1.1.17)$$

αναπτύσσοντας το  $\phi$  γύρω από το κενό της θεωρίας,  $\frac{v}{\sqrt{2}}$  ως ακολούθως:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x) + i\chi(x)) \quad (1.1.18)$$

και επιλέγοντας συνθήκη βαθμίδας τέτοια ώστε  $\chi(x) = 0$ , υπολογίζουμε κάθε όρο της  $\mathcal{L}$  χωριστά και λαμβάνουμε την σχέση:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}e^2(v^2 + 2v\eta + \eta^2(x))A_\mu^2 + \mu^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 \quad (1.1.19)$$

με δυναμικό αλληλεπίδρασης το ακόλουθο:

$$V(\eta) = -\mu^2\eta^2 + \lambda v\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 \quad (1.1.20)$$

Στην παραπάνω Λαγκρανζιανή (1.1.20) αναγνωρίζουμε τους κινητικούς όρους των δύο πεδίων, (δύο πρώτοι όροι αυτής), όρους αλληλεπίδρασης τόσο μεταξύ των, όσο και κάθε πεδίου με τον εαυτό του και τέλος έναν επιπλέον όρο, ο οποίος γραμμένος με το σωστό πρόσημο αποτελεί τον όρο μάζας του πεδίου βαθμίδας. Έχοντας δηλαδή ξεκινήσει με δύο άμαζα πεδία, ένα το φωτονικό και ένα βαθμωτό, καταλήξαμε μέσω παραβίασης της συμμετρίας του φυσικού συστήματος, σε έμμαζα πεδία. Καλούμε λοιπόν Μηχανισμό Higgs [2], τον μηχανισμό απόδοσης μάζας σε άμαζα πεδία βαθμίδας. Οι μάζες που έχουν αποδοθεί στα δύο πεδία μέσω της εξίσωσης (1.1.20) είναι οι ακόλουθες:

$$m_\eta^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2 \quad (1.1.21)$$

$$m_A^2 = e^2 v^2 \quad (1.1.22)$$

## 1.2 Αναλλοίωτο βαθμίδας στην κβαντική μηχανική

Η εξίσωση Schrödinger για κίνηση σωματιδίου εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου έχει την μορφή:

$$\left( \frac{1}{2m} (-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + qV \right) \psi(\mathbf{x}, t) = i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (1.2.1)$$

Πραγματοποιώντας μετασχηματισμό βαθμίδας της μορφής: (1.1.4), (1.1.5) αναζητούμε τον νόμο μετασχηματισμού της  $\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}, t)$ . Γνωρίζοντας τον νόμο μετασχηματισμού των πεδίων  $\mathbf{A}, V$  στα  $\mathbf{A}', V'$  έχουμε:

$$\left( \frac{1}{2m} (-i\nabla - q\mathbf{A}')^2 + qV' \right) \psi'(\mathbf{x}, t) = i \frac{\partial \psi'(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (1.2.2)$$

από όπου προκύπτει τελικά ότι η  $\psi$  μετασχηματίζεται ως ακολούθως:

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}, t) = \exp(iq\chi)\psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.3)$$

γεγονός που προκύπτει και με χρήση της συναλλοίωτης γραφής για το πεδίο  $A^\mu$ , (1.1.6) και ορίζοντας την συναλλοίωτη παράγωγο:

$$D^\mu \equiv \partial^\mu + iqA^\mu \quad (1.2.4)$$

Οδηγούμαστε έτσι στο σημαντικό αποτέλεσμα ότι κάθε κυματική εξίσωση που περιλαμβάνει τον τελεστή  $\partial^\mu$  μπορεί να γίνει αναλλοίωτη, (gauge invariant), κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής: (1.1.6), (1.2.3), με αντικατάσταση του  $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$ . Η συναλλοίωτη παράγωγος είναι καθοριστικής σημασίας καθώς αποτελεί τον τελεστή εκείνο, η γενίκευση του οποίου οδηγεί από την Αβελιανή συμμετρία βαθμίδας της QED στις μη Αβελιανές θεωρίες.

## 1.3 Μη αβελιανές θεωρίες και μηχανισμός Higgs

### Εισαγωγή

Με αφετηρία μια ολοκληρωμένη δυναμική θεωρία (QED) βασισμένη σε μια απλή αλλά θεμελιώδη αρχή: Αναλλοιότητα της θεωρίας κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας τύπου U(1) προχωρούμε σε γενίκευση σύμφωνα με την οποία οι παράγοντες φάσης περιλαμβάνουν μη μετατιθέμενους εν γένει, τελεστές. Θεωρίες που ασχολούνται με την μετατροπή τέτοιων αναλλοίωτων ποσοτήτων σε τοπικές, καλούνται μη Αβελιανές θεωρίες Βαθμίδας. Η πρώτη τέτοιου είδους συμμετρία που χρησιμοποιήθηκε στην σωματιδιακή φυσική, ήταν η αδρονική SU(2) συμμετρία ισοσπίν.

### Μηχανισμός Higgs στην SU(2)

Ξεκινάμε γράφοντας την Lagrangian για μια SU(2) μη Αβελιανή θεωρία [3].

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu\alpha} + [(\partial_\mu + igA_\mu^\alpha \tau_\alpha)\phi]^\dagger [(\partial_\mu + igA_\mu^\alpha \tau_\alpha)\phi] - V(\phi^\dagger\phi) \quad (1.3.1)$$

Με το πεδίο  $\phi$  να δίνεται από την σχέση:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (1.3.2)$$

Όπου η συναλλοίωτη παράγωγος ορίζεται ως ακολούθως :

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^\alpha \tau_\alpha \quad (1.3.3)$$

ο ταυιστής  $F_{\mu\nu}^\alpha$ , που προκύπτει μέσω του μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων  $[D_\mu, D_\nu]$  έχει στην περίπτωση της  $SU(2)$  την παρακάτω μορφή:

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha - gf^{\alpha bc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.3.4)$$

με  $f^{\alpha bc}$  να είναι οι σταθερές δομής της  $SU(2)$  και  $\tau_\alpha \equiv \sigma_\alpha/2$ , οι γεννήτορες της. Στην συνέχεια υπολογίζουμε στην αναπαράσταση Pauli τον όρο  $A_\mu^\alpha \tau_\alpha$  καθώς και κάθε όρο της  $\mathcal{L}$  χωριστά :

$$A_\mu^\alpha \tau_\alpha = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{bmatrix} \quad (1.3.5)$$

Ο τρίτος όρος της (1.3.3) γράφεται κάνοντας χρήση της (1.3.5) :

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{bmatrix} \quad (1.3.6)$$

Θεωρώντας σε πλήρη αντιστοιχία με την  $U(1)$  περίπτωση, βαθμωτό πεδίο  $\phi$  της μορφής:

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2}(v + H) \end{bmatrix} \quad (1.3.7)$$

Έχουμε:

$$D_\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu (v + H) + \frac{ig}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (A_\mu^1 - iA_\mu^2)(v + H) \\ -A_\mu^3(v + H) \end{bmatrix} \quad (1.3.8)$$

Αντίστοιχα υπολογισμός του δεύτερου όρου της (5.1.1):

$$(D_\mu \phi)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu (v + H) - \frac{ig}{2\sqrt{2}} [(A_\mu^1 + iA_\mu^2)(v + H), -A_\mu^3(v + H)] \quad (1.3.9)$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (1.3.8) , (1.3.9) προχωρούμε σε ευθύ υπολογισμό του όρου  $(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi)$  της  $\mathcal{L}$  καταλήγοντας στην ακόλουθη σχέση:

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 + \frac{g^2}{8} (v + H)^2 A^{\mu\alpha} A_\mu^\alpha \quad (1.3.10)$$

Υπολογισμός του τέταρτου όρου της  $\mathcal{L}$ :

$$V(\phi^\dagger \phi) = \frac{-\mu^4}{4\lambda} - \mu^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda H^4}{4} \quad (1.3.11)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΚΑΙ ΑΥΘΟΡΜΗΤΗ ΠΑΡΑΒΙΑΣΗ ΤΗΣ  
1.3. ΜΗ ΑΒΕΛΙΑΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ HIGGS ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

---

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι  $m_H^2 = 2\lambda v^2$  και  $m_A^2 = \frac{1}{4}g^2v^2$  η σχέση (5.1.1) γράφεται:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{g^2}{8}(v + H)^2 A^{\mu\alpha} A_\mu^\alpha - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 \quad (1.3.12)$$

Έχοντας πλέον στην διάθεσή μας την Λαγκρανζιανή της “ νέας θεωρίας ” μπορούμε να προχωρήσουμε στην εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης των δύο πεδίων. Η μελέτη εξαγωγής και στην συνέχεια λύσης των εξισώσεων αυτών θα πραγματοποιηθεί σε επόμενο κεφάλαιο. (Βλέπε κεφ. 5)

## Κεφάλαιο 2

# Παραβίαση της αβελιανής συμμετρίας βαθμίδας και υπεραγωγιμότητα

### 2.1 Landau - Ginzburg

#### Εισαγωγή

Υπεραγωγιμότητα είναι το φαινόμενο μηδενικής ηλεκτρικής αντίστασης που εμφανίζουν συγκεκριμένα υλικά κάτω από μία χαρακτηριστική θερμοκρασία. Πρόκειται για φαινόμενο όπως ο σιδηρομαγνητισμός και οι ατομικές φασματικές γραμμές που ερμηνεύεται κβαντομηχανικά. Χαρακτηρίζεται από το φαινόμενο Meissner, δηλαδή τον μηδενισμό του μαγνητικού πεδίου εντός του υπεραγωγού, φαινόμενο που οφείλεται στο γεγονός ότι εντός υπεραγωγού η μεγάλη τιμή της έντασης του ρεύματος έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση μαγνητικού πεδίου, το οποίο σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz είναι τέτοιο ώστε να αντιτίθεται στο αίτιο που το δημιούργησε, δηλαδή στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Η εμφάνιση του φαινομένου αυτού, φανερώνει ότι η υπεραγωγιμότητα δεν μπορεί να γίνει κατανοητή απλά ως εξιδανίκευση της τέλει αγωγιμότητας στην κλασική φυσική. Η ηλεκτρική αντίσταση μεταλλικού αγωγού ακολουθεί σταδιακή μείωση καθώς η θερμοκρασία μειώνεται. Σε συνηθισμένους αγωγούς, όπως ο άργυρος, αυτή η μείωση περιορίζεται λόγω ατελειών και άλλων ελαττωμάτων. Ακόμα και κοντά στο απόλυτο μηδέν, ένας πραγματικός αγωγός παρουσιάζει κάποια αντίσταση ενώ σε έναν υπεραγωγό η αντίσταση τείνει απότομα στο μηδέν όταν το υλικό ψυχθεί κάτω από την κρίσιμη για αυτό θερμοκρασία.

#### Μοντέλο Ginzburg - Landau

Η θεωρία των Ginzburg - Landau, (G-L) [4], είναι μία μαθηματική θεωρία που χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει την υπεραγωγιμότητα. Παρουσιάστηκε το 1950 και περιγράφει την μετάβαση ενός υλικού στην υπεραγώγιμη φάση από θερμοδυναμική σκοπιά. Για τον λόγο αυτό καλείται συχνά φαινομενολογική. Εξετάζει μακροσκοπικές ιδιότητες των υπεραγωγών με χρήση θερμοδυναμικών επιχειρημάτων, χωρίς ωστόσο να εξηγεί τον μικροσκοπικό τους χαρακτήρα. Η υπεραγώγιμη και η κανονική κατάσταση ενός μετάλλου, αποτελούν

δύο διαφορετικές θερμοδυναμικές φάσεις της ύλης, ακριβώς όπως η υγρή, η στερεή και η αέρια κατάσταση. Βασιζόμενοι στην προηγούμενη θεμελιωμένη θεωρία του Landau για τις δεύτερης τάξης μεταβάσεις φάσης, οι Ginzburg - Landau διατείνονταν ότι η ελεύθερη ενέργεια  $F$  ενός υπεραγωγού κοντά στην υπεραγωγίμη μετάβαση, μπορεί να εκφραστεί σε όρους της μιγαδικής παραμέτρου  $\psi$ , το τετράγωνο του μέτρου της οποίας στην αναπαράσταση αυτή, υποδηλώνει το κλάσμα των ηλεκτρονίων ως προς το σύνολό τους, τα οποία συμπυκνώθηκαν σε υπερρευστό και η οποία περιγράφει τον βαθμό υπεραγωγιμότητας του συστήματος [5]. Η ελεύθερη ενέργεια έχει την μορφή:

$$F = F_n + a|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m} |(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \quad (2.1.1)$$

όπου  $F_n$  είναι η ελεύθερη ενέργεια στην κανονική φάση,  $a$ ,  $\beta$  φαινομενολογικές παράμετροι,  $m$  ενεργός μάζα,  $e$  το φορτίο του ηλεκτρονίου και  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  τα ανυσματικό και μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα. Ελαχιστοποίηση της ελεύθερης ενέργειας με σεβασμό στις διακυμάνσεις της παραμέτρου τάξης και του ανυσματικού δυναμικού εξάγονται οι εξισώσεις (G-L):

$$a\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})^2\psi = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{m}\mathcal{R}e[\psi^*(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi] \quad (2.1.3)$$

όπου  $\mathbf{j}$  η πυκνότητα ρεύματος. Η πρώτη εξίσωση, που παρουσιάζει ομοιότητες με την χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schödinger, καθορίζει την παράμετρο τάξης  $\psi$ , βασισμένη στο εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο, ενώ η δεύτερη αποτελεί το υπεραγωγίμο ρεύμα. Θεωρώντας ομογενή υπεραγωγό απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, τότε δεν υπάρχει υπεραγωγίμο ρεύμα και η εξίσωση (2.1.2) παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$a\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 \quad (2.1.4)$$

η εξίσωση αυτή έχει τετριμμένη λύση την  $\psi = 0$  και αντιστοιχεί στην κανονική κατάσταση του υπεραγωγού, δηλαδή αυτή για θερμοκρασίες  $T$  μεγαλύτερες της θερμοκρασίας της υπεραγωγίμης μετάβασης  $T_c$ . Για θερμοκρασίες  $T$  μικρότερες της  $T_c$  η παραπάνω εξίσωση αναμένεται να έχει μη τετριμμένες λύσεις, δηλαδή  $\psi \neq 0$ , επομένως προκύπτει ότι:

$$|\psi|^2 = -\frac{a}{\beta} \quad (2.1.5)$$

Για θετικές τιμές του δεξιού μελούς της σχέσης (2.1.5), προκύπτει μη μηδενική λύση για το  $\psi$  με την υπόθεση της ακόλουθης σχέσης εξάρτησης του  $a$  από την θερμοκρασία:

$$a(T) = a_0(T - T_c) \quad (2.1.6)$$

με  $a_0/\beta > 0$ .

Για  $T > T_c$ ,  $a(T) > 0$  άρα  $a(T)/\beta < 0$  επομένως η εξίσωση G - L έχει λύση μόνο την  $\psi = 0$ .

Για  $T < T_c$ ,  $a(T) < 0$  άρα  $a(T)/\beta > 0$  επομένως η εξίσωση G - L έχει λύση  $\psi \neq 0$ .

Τέλος για  $T \rightarrow T_c$  από μικρότερες θερμοκρασίες, τότε  $\psi \rightarrow 0$ . Στην θεωρία των Ginzburg - Landau, τα ηλεκτρόνια που συνεισφέρουν στην υπεραγωγιμότητα, θεωρείται ότι σχηματίζουν υπερρευστό. Σε αυτή την αναπαράσταση η  $|\psi|^2$  υποδηλώνει το κλάσμα των ηλεκτρονίων που συμπυκνώθηκαν σε υπερρευστό.

### Μήκος συσχέτισης και μήκος διείσδυσης

Ένα από τα σημαντικότερα συμπεράσματα των εξισώσεων G - L είναι η πρόβλεψη των δύο χαρακτηριστικών μηκών ενός υπεραγωγού. Το πρώτο εξ αυτών καλείται μήκος συσχέτισης  $\xi$  δίνεται από την σχέση:

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m|a|}} \quad (2.1.7)$$

και περιγράφει το μέγεθος των θερμοδυναμικών διακυμάνσεων στην υπεραγώγιμη φάση. Το δεύτερο ονομάζεται μήκος διείσδυσης  $\lambda$  και περιγράφει την απόσταση στην οποία διεισδύει το μαγνητικό πεδίο εντός του υπεραγωγού. Δίνεται από την σχέση:

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{4\mu_0 e^2 \psi_0^2}} \quad (2.1.8)$$

όπου  $\psi_0$  είναι η τιμή της  $\psi$  στην ισορροπία, απουσία μαγνητικού πεδίου. Ο λόγος:

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \quad (2.1.9)$$

είναι γνωστός ως παράμετρος G - L και αποδεικνύεται ότι υπεραγωγοί τύπου I, (το μαγνητικό πεδίο παραμένει μηδέν εντός του υπεραγωγού μέχρι την ξαφνική καταστροφή της υπεραγώγιμης κατάστασης), είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει:  $0 < \kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$  ενώ υπεραγωγοί τύπου II, (δύο διαφορετικά εξωτερικά μαγνητικά πεδία), είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει:  $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ένα από τα σημαντικότερα εξαγόμενα της θεωρίας G - L έγινε το 1957 από τον Alexei Abrikosov [6]. Ωστόσο δεν θα επεκταθούμε παραπάνω, καθώς μία τέτοια μελέτη ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας εργασίας.

## 2.2 Πρότυπο των Nielsen - Olesen

### Εισαγωγή

Στόχος του προτύπου αυτού είναι να αναδείξει την ευκολία κατασκευής κλασικών θεωριών πεδίου, επιτρέποντας στις γραμμές στροβίλων (vortex lines), να έχουν εξισώσεις κίνησης ταυτόσημες με αυτές των δυϊκών χορδών τύπου Nambu, (Nambu dual string). Η περιγραφή με χρήση χορδών και επομένως η εξαγωγή των αντίστοιχων εξισώσεων κίνησης, προκύπτουν με χρήση της προσέγγισης ότι οι ακτίνα καμπυλότητας της χορδής είναι πολύ μεγαλύτερη του εύρους της. Αφετηρία της μελέτης στο πρότυπο των Nielsen - Olesen [7], αποτέλεσε η σύζευξη ενός Αβελιανού πεδίου βαθμίδας με ένα βαθμωτό. Το μοντέλο αυτό, είχε χρησιμοποιήσει και ο Higgs, προκειμένου να εξηγήσει τον μηχανισμό Higgs. Το μοντέλο Higgs, μπορεί να θεωρηθεί ως η σχετικιστική γενίκευση της φαινομενολογικής θεωρίας πεδίου των Ginzburg - Landau για την υπεραγωγιμότητα. Στην περίπτωση των Ginzburg - Landau, είναι γνωστή η ύπαρξη λύσης στην μορφή γραμμής στροβίλων και ακριβώς αυτό το γεγονός επιτρέπει την σύνδεση μιας Λαγκρανζιανής τύπου Higgs, με μια δυϊκή χορδή, (dual string).

### Στατικές λύσεις τύπου Ginzburg - Landau

Θεωρώντας την στατική περίπτωση μίας Λαγκρανζιανής τύπου Higgs με την παρακάτω μορφή:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}|(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi|^2 + c_2|\phi|^2 - c_4|\phi|^4 \quad (2.2.1)$$

οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης είναι:

$$(\partial_\mu + ieA_\mu)^2\phi = -2c_2\phi + 4c_4\phi^2\phi^* \quad (2.2.2)$$

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} \equiv j_\mu = \frac{1}{2}ie(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*) + e^2A_\mu\phi^*\phi \quad (2.2.3)$$

Αναζητώντας λύση με την μορφή στροβίλου και επιδιώκοντας την ταύτιση του στροβίλου αυτού με δυϊκή χορδή πρέπει η ροή να είναι κβαντωμένη. Προκειμένου κάτι τέτοιο να γίνει κατανοητό, γίνεται χρήση της ακόλουθης σχέσης για την ροή:

$$\Phi = \int F_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu} = \oint A_\mu(x)dx^\mu \quad (2.2.4)$$

όπου  $d\sigma^{\mu\nu}$  διδιάστατο στοιχείο επιφάνειας στον χώρο Minkowski. Γράφοντας  $\phi = |\phi|e^{i\chi}$  η εξίσωση κίνησης (2.2.3) δίνεται από την σχέση:

$$A_\mu = \frac{j_\mu}{e^2|\phi|^2} - \frac{1}{e}\partial_\mu\chi \quad (2.2.5)$$

και ολοκληρώνοντας την (2.2.4) γύρω από κλειστή καμπύλη χωρίς έγκλειστο ρεύμα έχουμε:

$$\Phi = \oint A_\mu(x)dx^\mu = -\frac{1}{e}\oint \partial_\mu\chi(x)dx^\mu \quad (2.2.6)$$

Σημαντικό είναι να αναφερθεί πως τα περισσότερα από τα παραπάνω αποτελέσματα ήταν γνωστά από την θεωρία των Ginzburg - Landau για τους υπεραγωγούς (type II superconductors) [5], το ουσιαστικό ωστόσο μέρος του προτύπου ήταν η εξαγωγή της θεωρίας των Ginzburg - Landau, μέσω αναζήτησης στατικής λύσης μιας Λαγκρανζιανής τύπου Higgs. Το ολοκλήρωμα της απόκλισης της φάσης  $\phi$  δεν είναι απαραίτητα μηδέν. Η μόνη γενική απαίτηση είναι η φάση να λαμβάνει μία τιμή, δηλαδή για  $\chi$  να παίρνει τιμές ανάλογες του  $2\pi n$  κατα μήκος κλειστής καμπύλης, με  $n$  ακέραιο ισχύει:

$$\Phi = n\Phi_0 \quad \text{με} \quad \Phi_0 = -\frac{2\pi}{e} \quad (2.2.7)$$

Έτσι οι γραμμές στροβίλων είναι κβαντωμένες. Ωστόσο δεν έχει ακόμαδειχθεί ότι οι εξισώσεις κίνησης επιδέχονται λύσεις με την μορφή χορδών. Με επιλογή βαθμίδας  $A_0 = 0$  αναζητώντας κυλινδρικά συμμετρικές λύσεις με τους άξονες κατα μήκος της  $z$  διεύθυνσης έχουμε:

$$A(r) = \frac{r \times e_z}{r}|A(r)| \quad (2.2.8)$$

$$\Phi(r) = 2\pi r|A(r)| \quad (2.2.9)$$

$$|B| = \frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr}\Phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r|A(r)|) \quad (2.2.10)$$



Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} |\Phi(r)| \right) + \left[ \left( \frac{1}{r} - e|A| \right)^2 - 2c_2 + 4c_4|\phi|^2 \right] |\phi| = 0 \quad (2.2.11)$$

$$-\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r|A(r)|) \right) + \left( e^2|A(r)| - \frac{e}{r} \right) |\phi|^2 = 0 \quad (2.2.12)$$

Η ακριβής λύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων δεν είχε προσδιοριστεί αναλυτικά. Κάνοντας ωστόσο την παραδοχή  $|\phi| \approx \text{σταθερά}$ , για  $r \rightarrow \infty$  η εξίσωση κίνησης (2.2.12) χωρίς περεταίρω προσέγγιση γράφεται:

$$|A| = \frac{1}{er} + \frac{c}{e} K_1(e|\phi|r) \rightarrow \frac{1}{er} + \frac{c}{e} \sqrt{\frac{\pi}{2e|\phi|r}} e^{-e|\phi|r} + \text{όροι χαμ. τάξης} \quad (2.2.13)$$

$$|B| = c|\phi| K_0(e|\phi|r) \rightarrow \frac{c}{e} + \sqrt{\frac{\pi|\phi|}{2er}} e^{-e|\phi|r} + \text{όροι χαμηλότερης τάξης} \quad (2.2.14)$$

Με το πεδίο  $|A|$  να δίνεται από την σχέση (2.2.13), το πεδίο  $|\phi|$  δίνεται προσεγγιστικά από την σχέση:

$$|\phi| \approx \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}} \quad (2.2.15)$$

με  $c_2, c_4$  μεγάλα, ώστε να μην υπάρχουν αποκλίσεις του  $|A|$  από τον όρο  $1/er$ . Στην συνέχεια της εργασίας προσδιορίζεται το χαρακτηριστικό μήκος  $\lambda$ , (μήκος διείσδυσης στην υπεραγωγιμότητα), το οποίο αποτελεί μέτρο της απόστασης στην οποία το μαγνητικό πεδίο  $B$  μηδενίζεται.

$$\lambda = \frac{1}{e|\phi|} = \sqrt{\frac{2c_4}{e^2c_2}} \quad (2.2.16)$$

Παρατηρώντας την σχέση (2.2.15) για το  $|\phi|$ , αποτελεί το ελάχιστο του δυναμικού, δηλαδή:

$$|\phi| = \phi_0 = \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}} \quad (2.2.17)$$

θεωρώντας μικρές διακυμάνσεις γύρω από το ελάχιστο αυτό:

$$|\phi| = \phi_0 + \rho(x) \quad (2.2.18)$$

η πρώτη παράγωγος του δυναμικού μηδενίζεται ενώ η δεύτερη έχει την μορφή:

$$2c_2 = 2c_4|\phi_0|^2 \quad (2.2.19)$$

σχέση που αποτελεί το τετράγωνο της μάζας του βαθμωτού πεδίου στον μηχανισμό Higgs. Μέσω των διαταραχών προκύπτει λύση για το  $\rho$  τύπου Yukawa:

$$\rho(x) \propto e^{-\sqrt{2c_2}x} \quad (2.2.20)$$

ορίζοντας νέο χαρακτηριστικό μήκος  $\xi$ :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2c_2}} \quad (2.2.21)$$

το οποίο αποτελεί μέτρο της απόστασης που απαιτείται πριν το πεδίο  $|\phi|$ , λάβει την αναμενόμενη τιμή του κενού. Η κατάσταση του κενού περιγράφεται από  $B = 0$  και  $|\phi| = \sqrt{\frac{c_2}{2c_4}}$ . Για  $\xi, \lambda$  της ίδιας τάξης μεγέθους, προκύπτει καλά ορισμένη γραμμή στροβίλου (vortex line) ή αλλιώς καλά ορισμένη χορδή, ενώ η επέκταση της χορδής δίνεται για  $\xi \propto \lambda$ . Βασικό συμπέρασμα της παραπάνω μελέτης αποτελεί το γεγονός ότι μία Λαγκρανζιανή τύπου Higgs επιτρέπει λύσεις με την μορφή χορδών, κάτι που οφείλεται στο ότι μία τέτοια Λαγκρανζιανή είναι η σχετικιστική γενίκευση μιας Λαγκρανζιανής Ginzburg - Landau, που έχει λύσεις με την μορφή στροβίλων. Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπομο να αναφέρουμε ότι τέτοιου τύπου λύσεις υπάρχουν από την δεύτερη διάσταση και άνω, αφού στην μονοδιάστατη περίπτωση οι λύσεις είναι ευσταθείς και γνώστες. Τέλος η σταθερά  $c$  που προήλθε από την ολοκλήρωση σχέση (2.2.13), προσδιορίζεται από την απαίτηση η ροή σχ.(2.2.4), να τείνει στο μηδέν για  $\xi \ll r \ll \lambda$ . Για  $0 < e|\phi|r \ll 1$  τότε:  $K_1(e|\phi|r) \approx \frac{1}{e|\phi|r}$  και επομένως  $c = -e|\phi|$ .

## Κεφάλαιο 3

# Κλασικές λύσεις των μη Αβελιανών θεωριών βαθμίδας

### 3.1 Λύσεις των θεωριών Yang - Mills

#### Εισαγωγή

Στην ενότητα που ακολουθεί, θα γίνει μία συνοπτική αναφορά των κλασικών λύσεων που έχουν προταθεί για θεωρίες Yang - Mills σε πραγματικό χώρο Minkowski. Θεωρώντας λύση της μορφής  $A_\mu(x) = cf_\mu(x)$ , όπου  $c$  είναι ένας και μοναδικός πίνακας χρώματος για όλες τις συνιστώσες  $\mu$  και όλα τα σημεία του χωρού  $x$ , οι μεταθέτες που εμφανίζονται στον τανυστή  $F_{\mu\nu}$  καθώς και στις εξισώσεις κίνησης:

$$\partial_\mu F^{\alpha,\mu\nu} + gf^{abc} A^{b,\mu} F^{c,\mu\nu} = 0 \quad (3.1.1)$$

μηδενίζονται και η κλασική δυναμική του συστήματος είναι ταυτόσημη με αυτή της Ηλεκτροδυναμικής. Έχοντας την δυνατότητα κάθε λύση να την εκφράσουμε ως υπέρθεση επίπεδων κυμάτων της μορφής  $A_\mu(x) = ce^{-ikx}$ , και προχωρώντας στην κβάντωσή τους, προκύπτουν λύσεις, στην περαιτέρω μελέτη των οποίων δεν θα επεκταθούμε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

#### Μελέτη σολιτονικού τύπου λύσεων

Οι μη γραμμικές εξισώσεις, σχέση (3.1.1), είναι δυνατό να δεχτούν πληθώρα μη τετριμμένων λύσεων. Ανάμεσα σε αυτές είναι και οι σολιτονικού τύπου λύσεις. Τα σολιτόνια, αποτελούν εντοπισμένες λύσεις πεπερασμένης ενέργειας των εξισώσεων κίνησης, εμφανίζονται δε ως λύσεις σε πολλά μη γραμμικά συστήματα. Ένα από τα πρώτα παραδείγματα μη γραμμικών εξισώσεων που μελετήθηκαν, αποτελεί και η εξίσωση Korteweg - de Vries ( KdV)[8, 9]

$$u_t + au_x + \beta u_x xx + \gamma uu_x = 0,$$

η οποία περιγράφει κύματα στην επιφάνεια νερού μικρού βάθους και επιδέχεται λύσεις σολιτονικού τύπου. Γενικά ένα σολιτόνιο εξαρτάται από την ποσότητα  $(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ , όπου με  $\mathbf{v}$  συμβολίζουμε την ταχύτητα του . Σε μία θεωρία που δεν παραβιάζει την συμμετρία Lorentz είναι δυνατή η ' ακινητοποίηση ' ενός σολιτονίου με χρήση ενός τυπικού Lorentz

μετασχηματισμού, με άμεσο αποτέλεσμα την στατικότητα της λύσης και την εξάρτησή της μόνο από το  $x$ . Με την υπόθεση ότι οι εξισώσεις κίνησης, σχέση (3.1.1), δέχονται μία σολιτονικού τύπου λύση χαρακτηριστικής κλίμακας  $\rho$  και πεπερασμένης ενέργειας  $E$ , τότε μην περιλαμβάνοντας καμμία διαστατική σταθερά, πρέπει να παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς κλίμακας της μορφής:  $x \rightarrow \lambda x$ . Έτσι αν μία αναπαράσταση του πεδίου κλίμακας  $\rho$  αποτελεί λύση, αντίστοιχα λύση θα πρέπει να είναι και μία άλλη διευθέτηση ίδιου σχήματος και κλίμακας  $\lambda\rho$ . Η διαφορά στην ενέργεια στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, οφείλει για διαστατικούς λόγους να διαφέρει κατά έναν παράγοντα  $\lambda$ , δηλαδή:  $E \rightarrow E/\lambda$ . Στην περίπτωση που  $\lambda > 1$ , η ενέργεια μειώνεται και οδηγούμαστε σε μία λογική αντίφαση: “μία στατική λύση θα έπρεπε να αντιστοιχεί σε ελάχιστο της ενέργειας”, γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με τις λύσεις που προαναφέρθηκαν, οι οποίες οδηγούν σε αναπαραστάσεις του πεδίου χαμηλότερης ενέργειας. Αν ωστόσο αναφερθούμε στην περίπτωση μίας Λαγκρανζιανής που περιλαμβάνει Yang - Mills πεδία, εξαιτίας του όρου μάζας που εισάγεται σε αυτήν, οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν δεν είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς κλίμακας της ανωτέρω μορφής και έτσι δεν εμπίπτουν στην περίπτωση που αναφέρθηκε μόλις παραπάνω.

Τα μονόπολα είναι δυνατό να υπάρχουν καθώς οι αντίστοιχες εξισώσεις περιλαμβάνουν μία διαστατική παράμετρο  $\eta$  οποία δεν είναι άλλη από την μέση αναμενόμενη τιμή του κένου του πεδίου Higgs. Θεωρώντας ότι το πεδίο κείται επί μίας πεπερασμένης χωρικής πολλαπλότητας (π.χ  $S^3$ ), μπορούν να υπάρξουν εντοπισμένες στατικές λύσεις μίας μη Αβελιανής θεωρίας τύπου  $SU(2)$ , όπως η Yang - Mills, καθώς το μέγεθος της πολλαπλότητας είναι σε αυτή την περίπτωση που παρέχει την χαρακτηριστική κλίμακα. Τέτοιες λύσεις δεν είναι δυνατό να υπάρχουν σε έναν άπειρο, επίπεδο τρισδιάστατο χώρο, καθώς αν προκύψει μία αναπαράσταση πεπερασμένης κλίμακας, θα απαλειφθεί με την πάροδο του χρόνου. Επομένως μη τετριμμένες λύσεις των εξισώσεων κίνησης (3.1.1), έχουν άπειρη ενέργεια και δεν έχουν κλίμακα. Αναζητώντας λύσεις, με την υπόθεση ότι  $A_0 = 0$ , οι συνιστώσες  $A_i$  έχουν μόνο χωρική εξάρτηση και περιοριζόμενοι στην περίπτωση της  $SU(2)$ , η Λαγκρανζιανή λαμβάνει την μορφή:

$$\mathcal{L} = \frac{L}{V} = \frac{1}{2g^2} (\dot{A}_i^\alpha)^2 - \frac{1}{4g^2} [(A_i^\alpha A_i^\alpha)^2 - (A_i^\alpha A_j^\alpha)^2] \quad (3.1.2)$$

όπου  $V$  είναι ο όγκος. Η ανωτέρω  $\mathcal{L}$  αποτελεί ένα μηχανικό ανάλογο πεπερασμένων βαθμών ελευθερίας και οδηγεί στις παρακάτω εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{A}_i^\alpha + [A_i^\alpha (A_j^b A_j^b) - A_j^\alpha (A_j^b A_i^b)] = 0 \quad (3.1.3)$$

επιπλέον κάνοντας την περιοριστικότερη επιλογή  $A_1^1(t) = A_2^2(t) = A(t)$ , με όλες τις υπόλοιπες συνιστώσες των πεδίων να μηδενίζονται, (μείωση των βαθμών ελευθερίας του συστήματος), οι εξισώσεις κίνησης (3.1.3) γράφονται:

$$\ddot{A}_i^\alpha + A^3 = 0 \quad (3.1.4)$$

η τελευταία σχέση περιγράφει μη γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή με δυναμικό  $V = A^4/4$ . Λύση της παραπάνω σχέσης προκύπτει μέσω του ολοκληρώματος κίνησης:

$$\frac{1}{g^2} \left( \dot{A}^2 + \frac{1}{2} A^4 \right) = \frac{E}{V} \equiv \epsilon \quad (3.1.5)$$

η οποία μπορεί εύκολα να ολοκληρωθεί:

$$\int \frac{dA}{\sqrt{2\epsilon g^2 - A^4}} = \frac{t - t_0}{\sqrt{2}} \quad (3.1.6)$$

μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων το ολοκλήρωμα αυτό γράφεται:

$$A(t) = C_0 \operatorname{cn} \left[ C_0(t - t_0), \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad (3.1.7)$$

όπου  $C_0 = (2\epsilon g^2)^{1/4}$ . Η περίοδος της ταλάντωσης είναι αντιστρόφως ανάλογη του πλάτους, δηλαδή ισχύει  $T \propto 1/C_0$ , σχέση που μπορεί να εξαχθεί παρατηρώντας ότι η μοναδική παράμετρος κλίμακας στις εξισώσεις κίνησης παρέχεται από το χαρακτηριστικό πλάτος του πεδίου, του οποίου η διάσταση είναι:  $[A] = m \propto 1/T$ . Η σχέση (3.1.7) είναι ένα μη γραμμικό στάσιμο κύμα και εφαρμόζοντας έναν μετασχηματισμό Lorentz προκύπτουν μη γραμμικά διαδιδόμενα κύματα.

Στην περίπτωση λιγότερο περιοριστικής συνθήκης για τα πεδία της μορφής:  $A_1^1(t) = A(t)$ ,  $A_2^2(t) = B(t)$ , η Λαγκρανζιανή δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\dot{A}^2 + \dot{B}^2] - g^2 \frac{A^2 B^2}{2} \quad (3.1.8)$$

η παραπάνω  $\mathcal{L}$  περιγράφει κίνηση στο επίπεδο  $(AB)$  με δυναμικό  $V(A, B) \propto A^2 B^2$ . Συνθήκη της μορφής  $V(A, B) = C$ , με  $C$  σταθερά, καθορίζει οικογένειες καμπυλών υπερβολικής μορφής, η δε κίνηση του συστήματος αυτού είναι χαοτική καθώς η τροχιά ολοκλήρωσης δεν διαθέτει κανονική μορφή, αλλά καλύπτει πυκνά όλη την επιφάνεια που ορίζεται στον φασικό χώρο για μία σταθερή ενέργεια. Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται ότι δεν διαθέτει μνήμη, αφού έπειτα από την εκτέλεση μερικών ταλαντώσεων με χαρακτηριστική χρονική κλίμακα ανάλογη του  $1/A_{char}$ , οι αρχικές συνθήκες παύουν να καθορίζουν την εξέλιξη του συστήματος. Ωστόσο μέσα στην χαοτική αυτή συμπεριφορά, υπάρχουν υπόχωροι του χώρου των φάσεων στους οποίους το σύστημα παύει να είναι χαοτικό. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται με την επιλογή κατάλληλων αρχικών συνθηκών για τις οποίες η τροχιά στον χώρο των φάσεων είναι κλειστή και κανονική. Ένα παράδειγμα τέτοιων αρχικών συνθηκών είναι οι  $A = B$ ,  $\dot{A} = \dot{B}$  που οδηγούν σε λύση της μορφής (3.1.7).

## 3.2 Λύσεις Σαββίδη των θεωριών Yang - Mills

### Εισαγωγή

Από τις σημαντικότερες ίσως λύσεις που αποτέλεσαν το έναυσμα για πολλές μεταγενέστερες προεκτάσεις, είναι οι γνωστές λύσεις Σαββίδη [10]. Η κατανόηση του κενού των θεωριών Yang - Mills κατέστησε ιδιαίτερα κρίσιμη την αναζήτηση λύσεων των εξισώσεων κίνησης αυτών, χωρίς την παρουσία εξωτερικών πηγών. Οι λύσεις αυτές αποτελούν χρήσιμο εργαλείο για την μελέτη του κβαντικού κενού και τις ασυμπτωτικές καταστάσεις της θεωρίας.

### Μελέτη των λύσεων

Προς χάριν απλούστευσης, οι λύσεις των εξισώσεων κίνησης (3.1.1), αναφέρονται σε ένα πεδίο Yang - Mills με ομάδα συμμετρίας την SU(2). Η επίλυση γίνεται σε σύστημα αναφοράς τέτοιο ώστε το άνωσμα Poynting να μηδενίζεται.

$$T_{0j} = F_{0i}^\alpha F_{ji}^\alpha = 0 \quad (3.2.1)$$

Με  $T_{\mu\nu} = -F_{\mu\lambda}^\alpha F_\nu^{\alpha\lambda} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}^\alpha F^{\alpha\lambda\rho}$ , ο ταυιστής ενέργειας - ορμής και επιλογή βαθμίδας τέτοια ώστε  $A_0^a = 0$ ,  $\partial_i A_i^a = 0$  προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\varepsilon^{abc} A_i^b \dot{A}_i^c = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\ddot{A}_i^a - \partial_j F_{ji}^\alpha + g\varepsilon^{abc} A_j^b F_{ji}^c = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\dot{A}_i^\alpha F_{ij}^\alpha = 0 \quad (3.2.4)$$

με χρήση της σχέσης (3.2.2), η (3.2.4) γράφεται:

$$\dot{A}_i^a (\partial_i A_j^\alpha - \partial_j A_i^\alpha) = 0 \quad (3.2.5)$$

ικανή συνθήκη ικανοποίησης της σχέσης (3.2.5), είναι η ακόλουθη:

$$\partial_j A_i^\alpha = 0 \quad (3.2.6)$$

εξαιτίας της οποίας αναζητούνται λύσεις εξαρτώμενες μόνο από τον χρόνο  $A_i^\alpha = A_i^\alpha(t)$  και έτσι η εξίσωση (3.2.3) γράφεται:

$$\ddot{A}_i^a - g^2 A_j^a A_j^b A_i^b + g^2 A_i^a A_j^b A_j^b = 0. \quad (3.2.7)$$

Γενική λύση της τελευταίας εξίσωσης (3.2.7), (σύστημα 9 εξισώσεων εκ των οποίων οι 3 μηδενίζονται λόγω της (3.2.2) ), έχουμε για την λύση  $A_i^a(t)$ :

$$A_i^\alpha(t) = \frac{O_i^\alpha}{g} f^{(\alpha)}(t). \quad (3.2.8)$$

Με  $O_i^\alpha$  να αποτελούν σταθερά στοιχεία διαγώνιου πίνακα έτσι ώστε να ισχύει,  $O_i^\alpha O_i^b = \delta^{ab}$ . Για τις συναρτήσεις  $f^{(\alpha)}(t)$  με αντικατάσταση στην σχέση (3.2.7), προκύπτει η επόμενη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$\ddot{f}^{(\alpha)} + f^{(\alpha)}(\mathbf{f}^2 - f^{(\alpha)^2}) = 0. \quad (3.2.9)$$

Όπου  $\mathbf{f}^2 \equiv \sum_{a=1}^3 f^{(a)^2}$  και κάνοντας την επιλογή  $f^{(1)} = f^{(2)} = f^{(3)} = f$  οι εξισώσεις κίνησης για το  $f$  γίνονται:

$$\ddot{f}(t) + 2f^3(t) = 0, \quad (3.2.10)$$

και έχουν λύσεις της μορφής:

$$f(t) = \left(\frac{2g^2}{3}\right)^{1/4} \mu c n \left[ \left(\frac{8g^2}{3}\right)^{1/4} \mu t; \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \quad (3.2.11)$$

με  $cn(x; k)$  τις ελλειπτικές συναρτήσεις,  $\mu^4 = T_{00}$  στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Πραγματοποιώντας έναν μετασχηματισμό Lorentz οι λύσεις  $f(t)$  γίνονται:

$$A_\mu^a(k^\mu x_\mu) = a_\mu^\nu \frac{\mathcal{O}_\nu^a}{g} f(k^\mu x_\mu) \quad (3.2.12)$$

$$\mathcal{O}_0^a = 0 \quad (3.2.13)$$

όπου  $k_0 = \mu\gamma$ ,  $k_i = \mu u_i \gamma$  και  $k^2 = \mu^2$  με  $\mu^2$  να είναι η μάζα των πεδίων. Η λύση λοιπόν είναι ένα έμμαζο μη γραμμικό επίπεδο κύμα, με την μάζα να προέρχεται ως μη γραμμικότητα της θεωρίας.

### Συμπεράσματα

Η χρησιμοποίηση των λύσεων Σαββίδη που συνοπτικά αναφέρθηκαν παραπάνω, ήταν αυτή που οδήγησε μέσω μιας ημικλασικής μεθόδου στον υπολογισμό του διαδότη του πεδίου Yang - Mills, ο οποίος βρίσκεται σε συμφωνία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα στο πλέγμα. Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμη μία μικρή αναφορά και σε άλλες εργασίες, όπως αυτή του Coleman [11]. Πρόκειται για λύσεις της μορφής μη Αβελιανών επίπεδων κυμάτων με  $k^2 = 0$ , λύσεις οι οποίες διαφέρουν από τις λύσεις Σαββίδη, λόγω του γεγονότος ότι στις τελευταίες το άνυσμα Poynting μηδενίζεται και δεν είναι ίσο με την πυκνότητα ενέργειας. Τέλος σημειώνουμε ότι υπάρχουν λύσεις των θεωριών Yang - Mills στον ευκλείδιο χώρο, οι οποίες σε αντίθεση με τις παραπάνω λύσεις εμφανίζονται εντοπισμένες. Σε ευκλείδιο χώρο έχει βρεθεί μία πληθώρα μη ομογενών χωρικά λύσεων, τα Instantons [12], σε ανάλυση των οποίων ωστόσο δεν θα επεκταθούμε, καθώς ξεφεύγει από τα όρια της παρούσας εργασίας.





## Κεφάλαιο 4

# Αβελιανή θεωρία Βαθμίδας και μηχανισμός Higgs

### 4.1 Μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων

#### Εισαγωγή

Στην ενότητα που ακολουθεί κρίνεται σκόπιμη η αναφορά στην διαταρακτική μέθοδο που θα χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Καλείται μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων (Multiple scale analysis) [13] και τόσο στα μαθηματικά όσο και στην φυσική, περιλαμβάνει τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή ενιαίων και έγκυρων προσεγγίσεων για τις λύσεις προβλημάτων με διαταραχές, τόσο για μικρές όσο και για μεγάλες τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών. Κάτι τέτοιο πραγματοποιείται εισάγοντας γρήγορης κλίμακας και αργής κλίμακας μεταβλητές για μία ανεξάρτητη μεταβλητή. Ακολουθώντας μεταχειριζόμαστε τις μεταβλητές αυτές (αργές - γρήγορες) σαν ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στην διαδικασία επίλυσης του διαταρακτικού προβλήματος, η προκύπτουσα πρόσθετη ελευθερία που εισήχθη από τις νέες μεταβλητές, χρησιμοποιείται για την αφαίρεση αιώνιων όρων (secular terms), όρος που θέτει περιορισμούς στην προσεγγιστική λύση, οι οποίοι καλούνται συνθήκες επιλυσιμότητας (solvability conditions). Έτσι στις παραγράφους που ακολουθούν εισάγουμε τις μεταβλητές:

$$X_{\mu_n} = \epsilon^n x_{\mu}, \quad \epsilon \ll 1 \quad (4.1.1)$$

με άμεση συνέπεια οι διαφορικοί τελεστές να λαμβάνουν την μορφή:

$$\partial_{\mu} \rightarrow \partial_{\mu_0} + \epsilon \partial_{\mu_1} + \epsilon^2 \partial_{\mu_2} + \epsilon^3 \partial_{\mu_3} + \dots \quad (4.1.2)$$

όπου πλέον οι μεταβλητές στις διαφορετικές κλίμακες θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους. Προκειμένου να αποσαφηνιστεί η παραπάνω μέθοδος, παραθέτουμε ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής της στην περίπτωση μίας συνήθους διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει έναν μη γραμμικό ταλαντωτή. Ξεκινώντας από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + \epsilon y^3 = 0 \quad (4.1.3)$$

#### 4.1 ΚΥΒΕΡΩΣΗ ΤΩΝ ΒΕΛΟΝΗΘΕΩΡΙΑ ΒΑΘΜΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ HIGGS

που αποτελεί μία δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση (Duffing equation), με αρχικές συνθήκες τις ακόλουθες:

$$y(0) = 1 \quad \text{και} \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (4.1.4)$$

Αναζητούμε λύση  $y(t)$  για μικρές τιμές τις παραμέτρου μη γραμμικότητας ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ). Ωστόσο η εξίσωση Duffing χωρίς απόσβεση, αποτελεί Χαμιλτονιανό σύστημα, επομένως ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dq} \quad (4.1.5)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dH}{dp} \quad (4.1.6)$$

όπου  $H$  είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος και δίνεται από την σχέση:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + \varepsilon \frac{q^4}{4} \quad (4.1.7)$$

με  $q = y(t)$  και  $p = \dot{y}(t)$ . Ωστόσο η Χαμιλτονιανή  $H(q, p)$  είναι διατηρούμενη ποσότητα, και εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος δίνεται από την σχέση:

$$H = \frac{1}{2} + \varepsilon \frac{1}{4}. \quad (4.1.8)$$

Έτσι  $y(t), \dot{y}(t)$  υπακούουν στους επόμενους περιορισμούς:

$$|y(t)| \leq \sqrt{1 + \frac{1}{2}\varepsilon} \quad (4.1.9)$$

$$|\dot{y}(t)| \leq \sqrt{1 + \frac{1}{2}\varepsilon} \quad (4.1.10)$$

που πρέπει να ισχύουν για κάθε  $t$ . Ευθύς υπολογισμός με χρήση της συνηθισμένης θεωρίας διαταραχών, οδηγεί στην ακόλουθη σχέση:

$$y(t) = \cos(t) + \varepsilon \left[ \frac{1}{32} \cos(3t) - \frac{1}{32} \cos(t) - \frac{3}{8} t \sin(t) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.1.11)$$

Ο τελευταίος όρος εντός της αγκύλης είναι αυτός που αποκαλούμε secular, αφού αυξάνει χωρίς περιορισμό για μεγάλες τιμές  $|t|$ , με άμεσο αποτέλεσμα, η ισχύς της διαταρακτικής λύσης να περιορίζεται μόνο σε μικρούς χρόνους. Προκειμένου λοιπόν να κατασκευάσει λύση καθολικής αξίας, γίνεται χρήση της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων. Ορίζονται οι αργές κλίμακες:

$$t_1 = \varepsilon t$$

και πλέον η λύση  $y(t)$  εξαρτάται από τις  $t, t_1$  και γράφεται:

$$y(t) = y_0(t, t_1) + \varepsilon y_1(t, t_1) + \varepsilon^2 y_2(t, t_1) + \dots \quad (4.1.12)$$

αντίστοιχα μετασχηματίζονται και οι διαφορικοί τελεστές και τελικά θεωρώντας αναπτύγματα πρώτης τάξης ως προς την παράμετρο  $\varepsilon$  έχουμε για την  $y(t)$  την επόμενη σχέση:

$$y(t) = \cos \left[ \left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon\right)t \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.1.13)$$

Λύσεις ανώτερης τάξης απαιτούν την εισαγωγή επιπρόσθετων αργών κλιμάκων, ( $t_2 = \varepsilon^2 t$  κ.λ.π.)

## 4.2 Εξισώσεις κίνησης: Σολιτονικού τύπου λύσεις

### Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας έγινε μία εισαγωγή στις Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας και στην συνέχεια στην περίπτωση μίας  $U(1)$  θεωρίας βαθμίδας με χρήση του μηχανισμού Higgs, (αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας), οδήγησε σε μία νέα Λαγκρανζιανή. Είμαστε πλέον σε θέση έπειτα από την αναφορά των καθοριστικής σημασίας προτύπων - μοντέλων και εργασιών που προηγήθηκαν και προαναφέρθηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο, να προχωρήσουμε στο κύριο κομμάτι της παρούσας μελέτης.

Με χρήση της Λαγκρανζιανής, σχέση (1.1.20), είμαστε πλέον σε θέση να εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης των δύο πεδίων. Για τον σκοπό αυτό αρχικά γράφουμε τις εξισώσεις Euler - Lagrange στην γενική περίπτωση ενός πεδίου  $\phi$ .

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \quad (4.2.1)$$

Κάνοντας χρήση της παραπάνω σχέσης έχουμε για τα πεδία  $A_\mu$  και  $\eta$ :

$$(\square + e^2 v^2)A_\mu - \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) + 2e^2 v \eta A_\mu + e^2 \eta^2 A_\mu = 0 \quad (4.2.2)$$

σχέση που αποτελεί την εξίσωση κίνησης του πεδίου  $A_\mu$ . Αντίστοιχα:

$$(\square + 2\lambda v^2)\eta + \lambda \eta^3 + 3\lambda v \eta^2 - e^2 \eta A_\mu^2 - e^2 v A_\mu^2 = 0 \quad (4.2.3)$$

σχέση που αποτελεί την εξίσωση κίνησης του πεδίου Higgs. Κάνοντας χρήση της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων, δηλαδή θεωρώντας το ανάπτυγμα κάθε πεδίου ως προς την μικρή παράμετρο  $\varepsilon$ , έχουμε:

$$A_\mu = \varepsilon A_\mu(1) + \varepsilon^2 A_\mu(2) + \dots \quad (4.2.4)$$

$$\eta = \varepsilon^2 \eta(2) + \dots \quad (4.2.5)$$

Στο σημείο αυτό κρίνεται αναγκαίο πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό τάξη προς τάξη ως προς την παράμετρο  $\varepsilon$ , των εξισώσεων κίνησης κάθε πεδίου, να αναφέρουμε αρχικά ότι ο λόγος που λαμβάνουμε το πεδίο  $\eta$  σε δεύτερη τάξη ως προς την παράμετρο  $\varepsilon$ , σχ. (4.2.5),

#### 4.2 ΚΕΦΑΛΑΙΟΙΣ ΚΑΘΕΣΤΗΝΕΘΕΤΡΙΝΙΒΑΘΜΙΝΑΟΣΥΚΑΤΣΗΧΑΝΙΣΜΟΣ HIGGS

είναι γιατί αρχικά ενδιαφερόμαστε για μικρες διακυμάνσεις γύρω από το κενό της θεωρίας, ( $\phi = v/\sqrt{2}$ ). Σημειώνουμε επιπλέον ότι τα πεδία στην κατάσταση του κενού ικανοποιούν τις σχέσεις:  $A_\mu(0) = \eta(0) = 0$ . Η περίπτωση ωστόσο που και τα δύο πεδία εκκινούν από την ίδια τάξη, θα μελετηθεί σε επόμενο κεφάλαιο. Προχωρούμε λοιπόν στη διερεύνηση του όρου:  $\partial_\mu(\partial^\nu A_\nu)$ , όπου θεωρούμε χρονική βαθμίδα (temporal gauge)  $A_0 \equiv 0$ .

$$\mu = 1$$

$$E_1 = -\partial_x(\partial^\nu A_\nu) \quad (4.2.6)$$

$$= -\partial_x(\partial_0 A_0) + \partial_x^2 A_1 + \partial_x \partial_y A_2 + \partial_x \partial_z A_3 \quad (4.2.7)$$

$$= \partial_x(\partial_x A_1 + \partial_y A_2 + \partial_z A_3) \quad (4.2.8)$$

Υποθέτοντας ότι το πεδίο  $A_\mu$  έχει την μορφή:

$$A_i(1) = f_i(1; \xi, T_2) e^{(ik_0 t)} \quad (4.2.9)$$

$$A_i(2) = f_i(2; \xi, T_2) e^{(ik_0 t)} \quad (4.2.10)$$

όπου  $\xi = \xi(\chi_1, \psi_1)$ , είναι συνάρτηση των αργών μεταβλητών και έχουμε:

$$\begin{aligned} \partial_x A_1 + \partial_y A_2 + \partial_z A_3 &= \varepsilon(\partial_x A_1(1) + \partial_y A_2(1) + \partial_z A_3(1)) \\ &+ \varepsilon^2(\partial_{x_1} A_1(1) + \partial_{\psi_1} A_2(1) + \partial_{z_1} A_3(1)) \\ &+ \varepsilon^2(\partial_x A_1(2) + \partial_y A_2(2) + \partial_z A_3(2)) + \dots \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Ελέγχοντας κάθε όρο της (4.2.11) χωριστά έχουμε:

$$\partial_x A_1(1) + \partial_y A_2(1) + \partial_z A_3(1) = 0 \quad (4.2.12)$$

$$\partial_{x_1} A_1(1) + \partial_{\psi_1} A_2(1) + \partial_{z_1} A_3(1) = \partial_{x_1} A_1(1) + \partial_{\psi_1} A_2(1) \quad (4.2.13)$$

$$\partial_x A_1(2) + \partial_y A_2(2) + \partial_z A_3(2) = 0 \quad (4.2.14)$$

με χρήση των εξισώσεων (4.2.9),(4.2.10), οδηγούμαστε σε μηδενισμό των (4.2.12),(4.2.14) ενώ ο δεύτερος όρος μηδενίζεται μόνο αν ισχύει:  $f_1(1) = f_2(1)$ , όπου  $\xi = x_1 - \psi_1$ , οπότε έχουμε:

$$\partial_{x_1} f_1(1) + \partial_{\psi_1} f_2(1) = \partial_\xi f_1(1) - \partial_\xi f_2(1) = 0 \quad (4.2.15)$$

Έτσι συγκεντρώνοντας τα ανωτέρω εξαγόμενα έχουμε:

$$E_1 = -\partial_x(\partial^\nu A_\nu) = 0 \quad (4.2.16)$$

Ομοίως και για τα  $E_2, E_3$ ,επομένως ισχύει:

$$\partial_\mu(\partial^\nu A_\nu) = 0 \quad (4.2.17)$$

Οι εξισώσεις κίνησης των πεδίων λαμβάνουν την μορφή:

$$(\square + m_A^2)A_\mu + 2e^2 v \eta A_\mu + e^2 \eta^2 A_\mu = 0 \quad (4.2.18)$$

$$(\square + m_\eta^2)\eta(x) + \lambda \eta^3 - e^2 v A_\mu^2 - e^2 \eta A_\mu^2 + 3\lambda v \eta^2 = 0 \quad (4.2.19)$$

Αναπτύσσουμε τις ανωτέρω με χρήση της μεθόδου των αργών μεταβλητών, έως και την τρίτη τάξη ως προς την παράμετρο  $\varepsilon$  και έχουμε:

$O(\varepsilon)$ :

$$(\square_0 + m_A^2)A_\mu(1) = 0 \quad (4.2.20)$$

$O(\varepsilon^2)$ :

$$(\square_0 + m_A^2)A_\mu(2) + (2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_1} + 2e^2v\eta(1))A_\mu(1) = 0$$

Ωστόσο ισχύει:  $\eta(1) = 0$  και  $\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_1}A_\mu(1) = 0$ , επομένως:

$$(\square_0 + m_A^2)A_\mu(2) = 0 \quad (4.2.21)$$

$O(\varepsilon^3)$ :

$$\begin{aligned} &(\square_0 + m_A^2)A_\mu(3) + (2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_1} + 2e^2v\eta(1))A_\mu(2) \\ &+ (\square_1 + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_2} + 2e^2v\eta(2))A_\mu(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Στην τελευταία σχέση όροι που περιλαμβάνουν το πεδίο  $\eta(1)$  μηδενίζονται καθώς και ο όρος  $2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_1}A_\mu(2) = 0$ , (ως secular term). Επομένως η (4.2.22) λαμβάνει την μορφή:

$$(\square_0 + m_A^2)A_\mu(3) + (\square_1 + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_2} + 2e^2v\eta(2))A_\mu(1) = 0 \quad (4.2.23)$$

Η παραπάνω εξίσωση χωρίζεται στα ακόλουθα δύο κομμάτια:

$$\begin{cases} (\square_0 + m_A^2)A_\mu(3) + n.s.p[2e^2v\eta(2)A_\mu(1)] = 0 \\ (\square_1 + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_2})A_\mu(1) + s.p[2e^2v\eta(2)A_\mu(1)] = 0 \end{cases} \quad (4.2.24)$$

Ομοίως εργαζόμαστε και για το πεδίο *Higgs* :

$O(\varepsilon^2)$ :

$$(\square_0 + m_\eta^2)\eta(2) = e^2vA_\mu^2(1) \quad (4.2.25)$$

$O(\varepsilon^3)$ :

$$(\square_0 + m_\eta^2)\eta(3) + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_1}\eta(2) = e^2vA_\mu(1)A^\mu(2) \quad (4.2.26)$$

Είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε σε πρώτη τάξη ως προς  $\varepsilon$  το πεδίο  $A$ . Έχουμε:

$$A(1) = fe^{-im_A t} + f^*e^{+im_A t} \quad (4.2.27)$$

Γνώση της παραπάνω λύσης οδηγεί στον αναλυτικό υπολογισμό του πεδίου  $\eta(2)$  μέσω της εξίσωσης σε δεύτερη τάξη ως προς την παράμετρο  $\varepsilon$ , σχέση (1.4.38). Αρχικά υπολογισμός του όρου  $A^2(1)$  δίνει:

$$A^2(1) = (fe^{-im_A t} + f^*e^{+im_A t})^2 = 2|f|^2 + f^2e^{-2im_A t} + f^{*2}e^{2im_A t} \quad (4.2.28)$$

## 4.2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.2 ΚΑΘΕΣΤΩΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΡΑΓΜΑΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΗIGGS

Με χρήση των ανωτέρω σχέσεων η εξίσωση για το πεδίο  $\eta(2)$  σε δεύτερη τάξη ως προς την παράμετρο  $\varepsilon$  λαμβάνει τη μορφή:

$$(\square_0 + m_\eta^2)\eta(2) = \nu e^2(2|f|^2 + f^2 e^{-2im_A t} + f^{*2} e^{+2im_A t}) \quad (4.2.29)$$

Επομένως η λύση για το  $\eta(2)$  είναι η ακόλουθη:

$$\eta(2) = A(b|f|^2 + f^2 e^{-2im_A t} + f^{*2} e^{+2im_A t}) \quad (4.2.30)$$

επιστρέφοντας στην εξίσωση κίνησης έχουμε:

$$\begin{aligned} (\square_0 + m_\eta^2)A(b|f|^2 + f^2 e^{-2im_A t} + f^{*2} e^{+2im_A t}) \\ = (2|f|^2 + f^2 e^{-2im_A t} + f^{*2} e^{+2im_A t})\nu e^2 \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα προσδιορισμού των συντελεστών:

$$\begin{cases} Abm_\eta^2 = 2\nu e^2 \\ A(m_\eta^2 - 4m_A^2) = e^2 \nu \end{cases} \quad (4.2.32)$$

από όπου έχουμε:

$$A = \frac{1}{\nu(\lambda^2 - 4)} \quad (4.2.33)$$

$$b = \frac{2(\lambda^2 - 4)}{\lambda^2} \quad (4.2.34)$$

Έχοντας προσδιορίσει τα  $A(1)$ ,  $\eta(2)$  επιστρέφουμε στην εξίσωση για το  $A$  στην τρίτη τάξη. Προηγουμένως υπολογίζουμε χωριστά τον δεύτερο όρο αυτής:

$$2e^2 \nu \eta(2) A(1) = 2e^2 \nu A(b|f|^2 + f^2 e^{-2im_A t} + f^{*2} e^{+2im_A t})(f e^{-im_A t} + f^* e^{+im_A t}) \quad (4.2.35)$$

Στην τελευταία σχέση κρατάμε μόνο όρους ανάλογους της ποσότητας  $e^{-im_A t}$ .

$$s.p[2e^2 \nu \eta(2) A(1)] = 6e^2 \nu A(b+1) |f|^2 f e^{-im_A t} \quad (4.2.36)$$

Όπου με s.p συμβολίζουμε τους αιώνιους όρους, (secular parts). Με αντικατάσταση των  $A(1)$ ,  $\eta(2)$  και της (4.2.36) έχουμε:

$$(\square_1 + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_2})A(1) + 6e^2 \nu A(b+1) |f|^2 f e^{-im_A t} = 0 \quad (4.2.37)$$

Εκτελώντας τις παραπάνω πράξεις καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση:

$$(\nabla_1^2 + 2im_A \partial_{T_2})f - 6e^2 \alpha(\lambda) |f|^2 f = 0. \quad (4.2.38)$$

όπου με  $\lambda$  έχουμε ορίσει τον λόγο:  $\lambda = m_\eta/m_A$  και  $\alpha(\lambda)$  το παρακάτω:

$$\alpha(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2 - 4} \quad (4.2.39)$$

Συγκεντρώνοντας τις σταθερές της τελευταίας σχέσης, (4.2.38) έχουμε την συμπαγέστερη μορφή της μονοδιάστατης εξίσωση κίνησης για το πεδίο  $A(1)$ :

$$\left[ i\partial_{T_2} + \frac{1}{2m_A} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right] f - s |f|^2 f = 0 \quad (4.2.40)$$

$$s = \frac{3g^2}{m_A} \left( \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2 - 4} \right) \quad (4.2.41)$$

Η εξίσωση αυτή, καλείται μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS) η οποία βρίσκει εφαρμογή σε πολλούς και διαφορετικούς κλάδους της φυσικής όπως τα συμπυκνώματα Bose-Einstein (BEC), μη γραμμική οπτική, δυναμική ρευστών. Τα σολιτόνια αποτελούν τις θεμελιώδεις μη γραμμικές της, διεγέρσεις και έχουν μελετηθεί εκτενώς τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά (π.χ για τα (BECs) βλέπε αναφορά [14]. Επιπλέον η εξίσωση κίνησης για το  $A(3)$  σε ότι αφορά στο n.s.p, (non secular part), κομμάτι λαμβάνει την μορφή:

$$(\square_0 + m_A^2)A(3) + 6e^2 v A \left\{ f^3 e^{-3im_A t} + f^{*3} e^{+3im_A t} \right\} = 0. \quad (4.2.42)$$

### Τυπική μορφή της μονοδιάστατης εξίσωσης NLS

Στο σημείο αυτό της ανάλυσης μας κρίνεται σκόπιμη η αναφορά της τυπικής μορφής της εξίσωσης NLS και των μη γραμμικών της διεγέρσεων [15], όπου πρέπει να επισημανθεί ότι το  $s$ , στην ανάλυση που θα ακολουθήσει λαμβάνει τις τιμές  $s = \pm 1$ . Για την σύνδεση όσων θα αναφερθούν στα παρακάτω με τα ανωτέρω εξαγόμενα πρέπει να πραγματοποιηθούν οι ακόλουθες αλλαγές:  $t = T_2$ ,  $x = \sqrt{m_A} x_1$ ,  $|u|^2 = s|f|^2$ . Έτσι έχουμε:

$$\frac{i\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - s |u|^2 u = 0 \quad (4.2.43)$$

Όταν  $s < 0$  (εστιάζουσα NLS), λύσεις είναι τα φωτεινά σολιτόνια (bright solitons) που έχουν τη γενική μορφή:

$$u = n \cosh^{-1}(n(x - vt)) e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.2.44)$$

ενώ όταν  $s > 0$  (αφεστιάζουσα NLS), λύσεις είναι τα σκοτεινά σολιτόνια (dark solitons) με γενική μορφή:

$$u = (A \tanh(u_0 A(x - vt)) + iB) u_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{με} \quad A^2 + B^2 = 1. \quad (4.2.45)$$

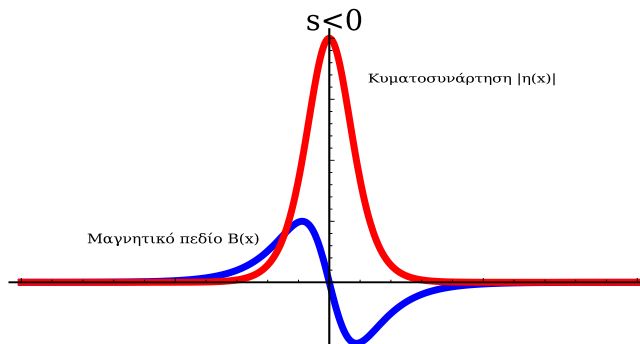
Για  $s < 0$  και για στατικές λύσεις τα πεδία έχουν την μορφή:

$$A(x) = 2|s|^{-1/2} n \operatorname{sech}(nx) \quad (4.2.46)$$

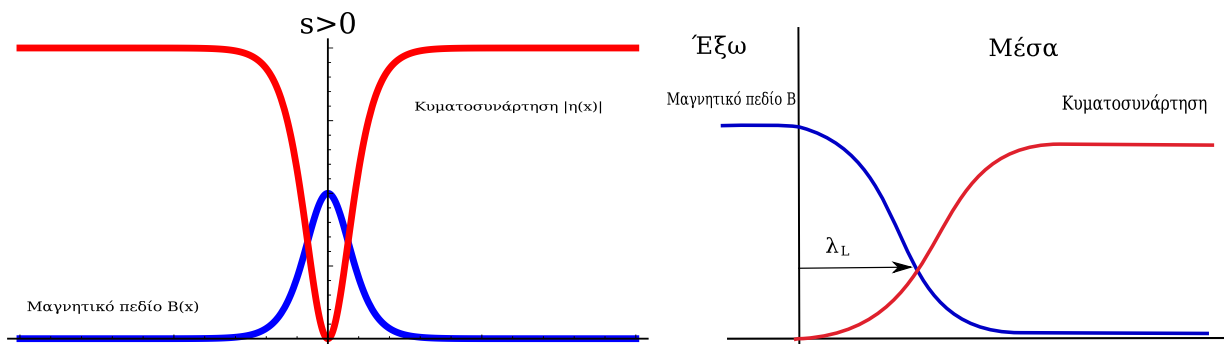
$$\eta(x) = A|s|^{-1} n^2 \operatorname{sech}^2(nx) (b + 1) \quad (4.2.47)$$

$$B(x) = \partial_x A_x = -2n^2 |s|^{-1/2} \operatorname{sech}(nx) \tanh(nx). \quad (4.2.48)$$

Η μορφή των πεδίων αυτών φαίνεται στο Σχήμα 4.1 όπου η μία καμπύλη αναπαριστά το πεδίο  $\eta$  ενώ η άλλη το μαγνητικό πεδίο  $B$ . Ο οριζόντιος άξονας είναι ο άξονας των  $x$ .



Σχήμα 4.1: Το πεδίο  $\eta(x)$  και το μαγνητικό πεδίο  $B(x)$  όπως περιγράφονται από τις Εξ.(4.2.47)-(4.2.48) αντίστοιχα.



Σχήμα 4.2: Στο αριστερό διάγραμμα η πρώτη καμπύλη αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο και η δεύτερη στην κυματοσυνάρτηση. Αντίστοιχα ισχύουν στο δεξί διάγραμμα που προέρχεται από την βιβλιογραφία.

Ομοίως για  $s > 0$  και για στατικές λύσεις έχουμε:

$$A(x) = 2|s|^{-1/2} f_0 A \tanh(f_0 A x) \quad (4.2.49)$$

$$\eta(x) = \tilde{A} [|s|^{-1} b f_0^2 \tanh^2(f_0 A x) + 2|s|^{-1} f_0^2 \tanh^2(f_0 A x)] \quad (4.2.50)$$

$$B(x) = \partial_x A_x = 2A f_0^2 |s|^{-1/2} \text{sech}^2(f_0 A x) \quad (4.2.51)$$

Στο αριστερό πλαίσιο του Σχήματος 4.2 φαίνονται οι λύσεις για τα πεδία  $\eta$  και  $B$  για την περίπτωση όπου  $s > 0$ . Παρατηρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι πεπερασμένο για μια περιοχή κοντά στο κέντρο, ενώ μηδενίζεται εκθετικά για μεγάλα  $x$ , αντίθετα το πεδίο  $\eta$  έχει μια σταθερή τιμή παντού ενώ κοντά στο κέντρο φθίνει εκθετικά στο 0. Η συμπεριφορά αυτή των πεδίων μας θυμίζει το φαινόμενο Meissner ( δεξιά πλαίσιο στο Σχήμα 4.2 ) όπου το μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται σε απόσταση  $\lambda_L$ , (μήκος διείσδυσης London), μέσα σε ένα υπεραγωγό. Τέλος από την μελέτη του προσήμου του όρου μη γραμμικότητας, οδηγούμαστε και στον προσδιορισμό των επιτρεπόμενων περιοχών για το  $\lambda$ , οι οποίες είναι:  $\lambda < 8/3$  και  $\lambda > 2$ .



### 4.3 Μη διαταρακτική προσέγγιση

#### Εισαγωγή

Στην προηγούμενη ενότητα στην προσπάθεια αναζήτησης λύσεων των πεδιακών εξισώσεων κάναμε χρήση της διαταρακτικής μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων. Στην ενότητα που ακολουθεί, ο στόχος παραμένει ίδιος, αλλά αυτή τη φορά αναζητούμε λύσεις με την μορφή δυναμοσειρών. Σκοπός μίας τέτοιας διερεύνησης δεν είναι άλλος από την σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων και επομένως την ενίσχυση της ορθότητας αυτών.

Δοθείσης της  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V \quad (4.3.1)$$

με  $V$  να είναι δυναμικό τύπου  $|\phi|^4$ , δηλαδή της μορφής:

$$V = \lambda\rho^4 - \mu^2\rho^2 \quad (4.3.2)$$

όπου με  $\rho$  έχουμε ορίσει το  $\phi(x)$  της προηγούμενης ενότητας, προχωρούμε στην μελέτη της αυθόρμητης παραβίασης της συμμετρίας, (μηχανισμός Higgs), με  $\mu^2 > 0$ ,  $\lambda > 0$ , σε μία διάσταση. Η θεωρία αυτή κατά τα γνωστά παρουσιάζει ελάχιστο του δυναμικού στο  $\phi(x) = 0$ . Παραβιάζοντας την συμμετρία αναζητούμε το κενό της “ νέας ” θεωρίας.

$$\frac{dV}{d\rho} = 0 \quad (4.3.3)$$

$$2\rho(2\lambda\rho^2 - \mu^2) = 0 \quad (4.3.4)$$

$$\rho^2 = \frac{1}{2}v^2 \quad (4.3.5)$$

Ακριβώς όπως και στην ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου, προχωρούμε στην γραφή των εξισώσεων κίνησης των πεδίων  $A_\mu$ ,  $\eta(x)$  έχουμε λοιπόν τις παρακάτω σχέσεις:

$$(\square + g^2v^2) A_\mu + 2v\eta g^2 A_\mu + g^2\eta^2 A_\mu = 0 \quad (4.3.6)$$

$$(\square + 2\lambda v^2) \eta + \lambda\eta^3 + 3\lambda v\eta^2 - g^2v A_\mu A_\mu - g^2\eta A_\mu A_\mu = 0 \quad (4.3.7)$$

Στα επόμενα εργαζόμαστε έχοντας επιλέξει βαθμίδα τέτοια ώστε η ποσότητα  $(\partial^\nu A_\nu) = 0$ , με  $A_0 = 0$ ,  $A_1 = A_3 = 0$ ,  $A_2 = A_y = A_y(x)$ . Η εξίσωση κίνησης του πεδίου  $A_\mu$  γράφεται:

$$\begin{aligned} \square A_\mu + g^2v^2 A_\mu + 2v\eta g^2 A_\mu + g^2\eta^2 A_\mu &= 0 \\ \square A_\mu + g^2(v + \eta)^2 A_\mu &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

$$-A'' + g^2(v + \eta)^2 A = 0 \quad (4.3.9)$$

$$-A'' + 2g^2\rho^2 A = 0 \quad (4.3.10)$$

Στο τελικό αποτέλεσμα καταλήξαμε λαμβάνοντας υπόψη στατικές λύσεις, καθώς και το γεγονός ότι το βαθμωτό πεδίο  $\rho$ , δίνεται από την σχέση:

$$\rho = \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} \quad (4.3.11)$$

### 4.3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΑΚΕΤΑΚΑΙΝΠΡΟΘΕΩΡΙΑΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ HIGGS

Αντίστοιχα εργαζόμαστε και στην περίπτωση του πεδίου  $\eta(x)$ :

$$\begin{aligned}
 \square \eta + 2\lambda v^2 \eta + 3\lambda v \eta^2 - g^2 v A_\mu A_\mu - g^2 \eta A_\mu A_\mu &= 0 \\
 \square \eta + \lambda \eta^3 + 3\lambda v \eta^2 + 2\lambda v^2 \eta - g^2 (v + \eta) A_\mu A_\mu &= 0 \\
 \square \left( \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda \eta^3 + 3\lambda v \eta^2 + 2\lambda v^2 \eta) - g^2 \frac{(v + \eta)}{\sqrt{2}} A_\mu A_\mu &= 0 \\
 \square \rho + 2\lambda \rho^3 - \mu^2 \rho - g^2 \rho A_\mu A_\mu &= 0
 \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Αναζητώντας στατικές λύσεις και σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$-\rho'' - g^2 \rho A_\mu A_\mu = \mu^2 \rho - 2\lambda \rho^3 \tag{4.3.13}$$

Στο σημείο αυτό επαναορίζουμε τις μάζες των δύο πεδίων σε πλήρη αντιστοιχία με την προηγούμενη παράγραφο. Έτσι έχουμε:

$$m_A^2 = g^2 v^2 \tag{4.3.14}$$

$$m_\eta^2 = 2\mu^2 \tag{4.3.15}$$

Θεωρούμε λύσεις της μορφής:

$$\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu f^\nu \tag{4.3.16}$$

$$A = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu f^\nu \tag{4.3.17}$$

δηλαδή αναπτύσσουμε τις λύσεις σε σειρά, ως προς βάση δυνάμεις του  $f$ , το οποίο δίνεται από την σχέση:

$$f = \frac{1}{\cosh \alpha x} \tag{4.3.18}$$

Ο λόγος που προχωρήσαμε σε μία τέτοια επιλογή, ήταν η ίδια η μορφή των εξισώσεων κίνησης, σχ. (4.3.10) και σχ. (4.3.13). Αρχικά αναζητήθηκαν λύσεις με την μορφή πολυωνύμων προκειμένου να ικανοποιούνται οι εξισώσεις αυτές, ωστόσο εξαιτίας της πρώτης εξ αυτών, στην οποία παρατηρούμε την συμμετοχή τόσο πρώτων όσο και τρίτων παραγώγων του  $f$  κρίθηκε αναγκαία η δοκιμή λύσεων με την μορφή δυναμοσειρών. Προχωρώντας στην συνέχεια της μελέτης μας, αρχικά από την εξίσωση (4.3.10) παρατηρούμε ότι  $D_0 = 0$ . Σημειώνουμε επίσης ότι σε όσους υπολογισμούς ακολουθήσουν γίνεται χρήση της ταυτότητας:

$$(f^m)'' = \alpha^2 (m^2 f^m - m(m+1) f^{m+2}) \tag{4.3.19}$$

Υπολογισμός κάθε όρου χωριστά.

$$\begin{aligned}\rho'' &= (c_1 f^1 + c_2 f^2 + \dots)'' \\ &= \alpha^2 (c_1 f + 4c_2 f^2 + (9c_3 - 2c_1) f^3 + (16c_4 - 6c_2) f^4 + \dots)\end{aligned}\quad (4.3.20)$$

$$\begin{aligned}A'' &= (D_1 f^1 + D_2 f^2 + \dots)'' \\ &= \alpha^2 (D_1 f + 4D_2 f^2 + (-2D_1 + 9D_3) f^3 + (-6D_2 + 16D_4) f^4 + \dots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho^2 &= (c_0 + c_1 f + \dots)^2 \\ &= c_0^2 + 2c_0 c_1 f + (c_1^2 + 2c_0 c_2) f^2 + (2c_0 c_3 + 2c_1 c_2) f^3 \\ &\quad + (2c_0 c_4 + c_2^2 + 2c_1 c_3) f^4 + \dots\end{aligned}\quad (4.3.21)$$

$$\begin{aligned}-A^2 &= -(D_1 f + D_2 f^2 + \dots)^2 \\ &= -(D_1^2 f^2 + 2D_1 D_2 f^3 + (D_2^2 + 2D_1 D_3) f^4 + \dots)\end{aligned}\quad (4.3.22)$$

$$\begin{aligned}-g^2 \rho A^2 &= -g^2 (D_1^2 f^2 + 2D_1 D_2 f^3 + \dots) (c_0 + c_1 f + \dots) \\ &= -g^2 (c_0 D_1^2 f^2 + (2c_0 D_1 D_2 + c_1 D_1^2) f^3 \\ &\quad + (c_0 D_2^2 + 2c_1 D_1 D_2 + c_2 D_1^2 + 2c_0 D_1 D_3) f^4 + \dots)\end{aligned}\quad (4.3.23)$$

$$\begin{aligned}\rho^3 &= c_0^3 + 3c_0^2 c_1 f + 3(c_0^2 c_2 + c_0^2 c_2) f^2 + (c_1^3 + 3c_0^2 c_3 + 6c_0 c_1 c_2) f^3 \\ &\quad + (c_0^2 c_4 + 4c_0 c_1 c_3 + 3c_1^2 c_2 + 2c_0 c_2^2) f^4 + \dots\end{aligned}\quad (4.3.24)$$

Επομένως η σχέση (4.3.10) γράφεται:

$$\begin{aligned}&\alpha^2 (D_1 f + 4D_2 f^2 + (-2D_1 + 9D_3) f^3 + (-6D_2 + 16D_4) f^4 + \dots) \\ &= 2g^2 (c_0 + c_1 f + c_2 f^2 + \dots)^2 (D_1 f + D_2 f^2 + \dots) \\ &= 2g^2 ((c_0^2 D_1 f + (c_0^2 D_2 + 2c_0 c_1 D_1) f^2 \\ &\quad + (2c_0 c_1 D_2 + c_1^2 D_1 + 2c_0 c_2 D_1 + c_0^2 D_3) f^3 + \dots)\end{aligned}\quad (4.3.25)$$

Εξίσωση συντελεστών των δυνάμεων  $f$  στην τελευταία σχέση.  
Όροι  $f^1$ :

$$\begin{aligned}\alpha^2 D_1 &= 2g^2 c_0^2 D_1 \\ D_1 (\alpha^2 - 2g^2 c_0^2) &= 0\end{aligned}\quad (4.3.26)$$

Όροι  $f^2$ :

$$\begin{aligned}4\alpha^2 D_2 &= 2g^2 (c_0^2 D_2 + 2c_0 c_1 D_1) \\ (4\alpha^2 - 2g^2 c_0^2) D_2 &= 4g^2 c_0 c_1 D_1\end{aligned}\quad (4.3.27)$$

### 4.3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΑΡΑΚΕΤΑΘΗΤΕΡΩΣ ΤΩΝ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ HIGGS

Όροι  $f^3$ :

$$\begin{aligned} \alpha^2(-2D_1 + 9D_3) &= 2g^2(2c_0c_1D_2 + c_1^2D_1 + 2c_0c_2D_1) \\ (9\alpha^2 - 2g^2c_0^2)D_3 &= (2\alpha^2 + 2g^2c_1^2 + 4g^2c_0c_2)D_1 + 4g^2c_0c_1D_2 \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Όροι  $f^4$ :

$$\begin{aligned} \alpha^2(-6D_2 + 16D_4) &= 2g^2(c_0^2D_4 + 2c_0c_1D_3 + c_1^2D_2 \\ &+ 2c_0c_2D_2 + 2c_0c_3D_1 + 2c_1c_2D_1) \\ (16\alpha^2 - 2g^2c_0^2)D_4 &= 4g^2(c_0c_3 + c_1c_2)D_1 + (6\alpha^2 + 2g^2c_1^2 + 4g^2c_0c_2)D_2 \\ &+ 4g^2c_0c_1D_3 \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

Παρατήρηση της μορφής των παραπάνω σχέσεων, (Βλέπε σχ. (4.3.26), (4.3.27), (4.3.28) και (4.3.29) ), οδηγεί στην κατασκευή της ορίζουσας που παραθέτουμε παρακάτω:

$$\det \begin{bmatrix} \alpha^2 - 2g^2c_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -4g^2c_0c_1 & 4\alpha^2 - 2g^2c_0^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -2\alpha^2 - 2g^2c_1^2 - 4g^2c_0c_2 & -4g^2c_0c_1 & 9\alpha^2 - 2g^2c_0^2 & 0 & 0 & \dots \\ -4g^2(c_0c_3 + c_1c_2) & -6\alpha^2 - 2g^2(c_1^2 + 2c_0c_2) & -4g^2c_0c_1 & 25\alpha^2 - 2g^2c_0^2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = 0 \quad (4.3.30)$$

Από την εξίσωση κίνησης του πεδίου  $\rho$ ,  $\rho'' = g^2\rho A^2 - \mu^2\rho + 2\lambda\rho^3$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^2 [c_1f + 4c_2f^2 + (-2c_1 + 9c_3)f^3 + (-6c_2 + 16c_4)f^4 + \dots] \\ = g^2(c_0D_1^2f^2 + \dots) - \mu^2(c_0 + c_1f \dots) + 2\lambda(c_0^3 + \dots) \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές στη παραπάνω σχέση έχουμε:

Όροι  $f^0$  :

$$c_0(2\lambda c_0^2 - \mu^2) = 0 \quad (4.3.32)$$

Εφόσον λύση  $c_0 = 0$  είναι τετριμμένη , επιλέγουμε την ακόλουθη:

$$c_0 = v/\sqrt{2} \quad (4.3.33)$$

Όροι  $f^1$ :

$$(\alpha^2 + \mu^2 - 6\lambda c_0^2)c_1 = 0, \quad \Rightarrow c_1 = 0 \quad (4.3.34)$$

Όροι  $f^2$ :

$$g^2c_0D_1^2 = (4\alpha^2 + \mu^2 - 6\lambda c_0^2)c_2, \quad \Rightarrow c_2 = \frac{g^2c_0}{4\alpha^2 - 2\mu^2}D_1^2 \quad (4.3.35)$$

Όροι  $f^3$ :

$$2g^2c_0D_1D_2 = (9\alpha^2 + \mu^2 - 6\lambda c_0^2)c_3, \quad \Rightarrow c_3 = \frac{3g^2c_0}{9\alpha^2 - 2\mu^2}D_1D_2 \quad (4.3.36)$$

Όροι  $f^4$ :

$$\begin{aligned} \alpha^2(-6c_2 + 16c_4) &= g^2(c_0D_2^2 + c_2D_1^2 + 2c_0D_1D_3) - \mu^2c_4 + 2\lambda(c_0^2c_4 + 2c_0c_2^2) \\ c_4 &= [(6\alpha^2 + g^2D_1^2 + 4\lambda c_0c_2)c_2 + 2g^2c_0D_1D_3]/(16\alpha^2) \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

Στην τελευταία έκφραση έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι αφού το  $c_1 = 0$  τότε από την ορίζουσα (4.3.30) προκύπτει ότι  $D_2 = 0$  άρα και το  $c_3 = 0$ . Μπορούμε να συνοψίσουμε τα παραπάνω εξαγώμενα στον ακόλουθο πίνακα:

**Συγκεντρωτικός πίνακας**

$c_0 = v/\sqrt{2}$	$D_0 = 0$
$c_1 = 0$	$D_1 = ?$
$c_2 = \frac{g^2c_0}{4\alpha^2 - 2\mu^2}D_1^2$	$D_2 = 0$
$c_3 = 0$	$D_3 = \frac{1}{8\alpha^2}(2\alpha^2 + 4g^2c_0c_2)D_1$
$c_4 = [(6\alpha^2 + g^2D_1^2 + 4\lambda c_0c_2)c_2 + 2g^2c_0D_1D_3]/(16\alpha^2)$	$D_4 = 0$

όπου οι άγνωστοι συντελεστές θα υπολογιστούν στη συνέχεια.

$$\begin{aligned} \rho(x) &= c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i f^i \\ \Rightarrow \rho(x) &= \frac{v}{\sqrt{2}} + c_2 \frac{1}{\cosh^2 \alpha x} + c_4 \frac{1}{\cosh^4 \alpha x} + \dots \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

Στο σημείο αυτό επιλέγουμε  $c_2 = -v/\sqrt{2}$  επομένως:

$$\rho(x) = \frac{v}{\sqrt{2}} \tanh^2 \alpha x + \dots \quad (4.3.39)$$

Με αυτήν την επιλογή ο συντελεστής  $D_1$  γίνεται:

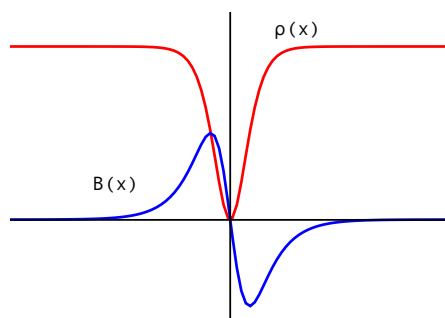
$$D_1^2 = \frac{2\mu^2 - 4\alpha^2}{g^2} \Rightarrow D_1^2 = \frac{m_\eta^2 - 4m_A^2}{g^2} \quad (4.3.40)$$

Από την τελευταία έκφραση έπεται ότι :  $m_\eta^2 - 4m_A^2 > 0$  και άρα  $\lambda^2 > 4$ . Το τελευταίο αποτέλεσμα για την παράμετρο  $\lambda$  έρχεται σε συμφωνία με την διαταραχτική προσέγγιση που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Με αυτή μας την επιλογή μπορούμε να συμπληρώσουμε όλα τα στοιχεία του συγκεντρωτικού πίνακα.

**Τελικός πίνακας**

$c_0 = v/\sqrt{2}$	$D_0 = 0$
$c_1 = 0$	$D_1 = 1/g^2(\lambda^2 - 4)$
$c_2 = -v/\sqrt{2}$	$D_2 = 0$
$c_3 = 0$	$D_3 = 0$
$c_4 = -c_0/8$	$D_4 = 0$

### 4.3 ΚΕΝΤΡΑ ΔΙΑΔΡΑΚΤΕΛΕΙΑΣ ΠΡΟΣΕΩΡΙΣΗ ΒΑΘΜΙΔΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ HIGGS



Σχήμα 4.3: Το πεδίο  $\rho(x)$  και το μαγνητικό πεδίο  $B(x)$  όπως περιγράφονται από τις Εξ.(4.3.39)-(4.3.43) αντίστοιχα.

Όμοια για το  $A(x)$ :

$$A(x) = \frac{D_1}{\cosh \alpha x} + \dots \quad (4.3.41)$$

Όμως σύμφωνα με τα προηγούμενα, δηλαδή έχοντας κάνει επιλογή βαθμίδας τέτοια ώστε  $A_0 = A_1 = A_3 = 0$ ,  $A_2 = A_y = A(x)$  έχουμε:

$$\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} = \hat{k} \partial_x A \quad (4.3.42)$$

Επομένως προκύπτει για το μαγνητικό πεδίο η ακόλουθη σχέση:

$$B_z = \partial_x A(x) = -\frac{D_1 \alpha \tanh \alpha x}{\cosh \alpha x} \quad (4.3.43)$$

Στο Σχήμα 4.3, παρατηρούμε ότι το πεδίο  $\rho$  (άνω καμπύλη στο διάγραμμα), έχει μια σταθερή τιμή παντού (αναμενόμενη τιμή του κενού), ενώ κοντά στο κέντρο φθίνει εκθετικά στο 0. Αντίστοιχα το μαγνητικό πεδίο, (κάτω καμπύλη στο διάγραμμα), είναι πεπερασμένο για μια περιοχή κοντά στο κέντρο, ενώ μηδενίζεται εκθετικά για μεγάλα  $x$ .

## Κεφάλαιο 5

# Μη Αβελιανή θεωρία βαθμίδας SU(2) και μηχανισμός Higgs

### 5.1 Εξισώσεις κίνησης και μικρές διακυμάνσεις του πεδίου Higgs

#### Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή εκκινώντας από την γραφή της Λαγκρανζιανής για μία SU(2) μη Αβελιανή θεωρία, θα εφαρμόσουμε μία πιο αυστηρή επιλογή των πεδίων και στην συνέχεια θα εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης. Η πορεία αυτή έχει ήδη αναφερθεί και εφαρμοστεί στην Αβελιανή περίπτωση της προηγούμενης ενότητας. Κρίνεται ωστόσο απαραίτητο εδώ να επισημανθεί πως η λύση που προτείνεται στις παραγράφους που θα ακολουθήσουν αναφέρεται σε έμμαζες θεωρίες. Σε πλήρη αντιστοιχία με την U(1) περίπτωση, ξεκινάμε γράφοντας την Λαγκρανζιανή για μια SU(2) μη Αβελιανή θεωρία.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu\alpha} + [(\partial_\mu + igA_\mu^\alpha \tau_\alpha)\phi]^\dagger [(\partial_\mu + igA_\mu^\alpha \tau_\alpha)\phi] - V(\phi^\dagger\phi) \quad (5.1.1)$$

Όπου η συναλλοίωτη παράγωγος ορίζεται ως ακολούθως:

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^\alpha \tau_\alpha \quad (5.1.2)$$

ενώ ο τανυστής  $F_{\mu\nu}^\alpha$ , έχει στην περίπτωση της SU(2) την παρακάτω μορφή:

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (5.1.3)$$

με  $f^{abc}$  να είναι οι σταθερές δομής της SU(2) και  $\tau_\alpha \equiv \sigma_\alpha/2$ , οι γεννήτορες της, όπου  $\sigma_\alpha$  οι πίνακες του Pauli. Στην συνέχεια υπολογίζουμε στην αναπαράσταση Pauli τον όρο  $A_\mu^\alpha \tau_\alpha$  καθώς και κάθε όρο της  $\mathcal{L}$  χωριστά:

$$A_\mu^\alpha \tau_\alpha = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

Ο τρίτος όρος της (5.1.1) γράφεται κάνοντας χρήση της (5.1.4):

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{bmatrix} \quad (5.1.5)$$

Θεωρώντας σε πλήρη αντιστοιχία με την  $U(1)$  περίπτωση και έπειτα από την παραβίαση της συμμετρίας, βαθμωτό πεδίο  $\phi$  της μορφής:

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2}(v + H) \end{bmatrix} \quad (5.1.6)$$

Έχουμε:

$$D_\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu (v + H) + \frac{ig}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (A_\mu^1 - iA_\mu^2)(v + H) \\ -A_\mu^3(v + H) \end{bmatrix} \quad (5.1.7)$$

Αντίστοιχα υπολογισμός του δεύτερου όρου της (5.1.1):

$$(D_\mu \phi)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu (v + H) - \frac{ig}{2\sqrt{2}} [(A_\mu^1 + iA_\mu^2)(v + H), -A_\mu^3(v + H)] \quad (5.1.8)$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (5.1.7), (5.1.8) προχωρούμε σε ευθύ υπολογισμό του όρου  $(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi)$  της  $\mathcal{L}$  καταλήγοντας στην ακόλουθη σχέση:

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 + \frac{g^2}{8} (v + H)^2 A^{\mu\alpha} A_\mu^\alpha \quad (5.1.9)$$

Υπολογισμός του τέταρτου όρου της  $\mathcal{L}$ :

$$V(\phi^\dagger \phi) = \frac{-\mu^4}{4\lambda} - \mu^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda H^4}{4} \quad (5.1.10)$$

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι  $m_H^2 = 2\lambda v^2$  η σχέση (5.1.1) γράφεται:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 + \frac{g^2}{8} (v + H)^2 A^{\mu\alpha} A_\mu^\alpha - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{1}{4} \lambda H^4 \quad (5.1.11)$$

Έχοντας πλέον στην διάθεσή μας την Λαγκρανζιανή της νέας θεωρίας μπορούμε να προχωρήσουμε στην εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης των δύο πεδίων. Έτσι καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση κίνησης για το πεδίο  $A_\mu$ :

$$\begin{aligned} & \left( \square + \frac{1}{4} g^2 v^2 \right) A_\mu^\alpha - \partial_\mu (\partial_\nu A^{\nu\alpha}) \\ & + g \varepsilon_{abc} [(\partial_\mu A^{\nu c}) A_\nu^b - (\partial_\nu A^{bc}) A_\mu^c - 2A_\nu^b \partial^\nu A_\mu^c] \\ & - g^2 [A_\mu^\alpha A_\nu^b A^{\nu b} - A_\mu^b A_\nu^\alpha A^{\nu b}] + \frac{g^2}{2} v H A_\mu^\alpha + \frac{g^2}{4} H^2 A_\mu^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

Στην παραπάνω σχέση (5.1.12) ορίζουμε και σε αυτή την περίπτωση ως μάζα του πεδίου  $A$  την ποσότητα:  $m_A^2 = (1/4)g^2 v^2$ . Στο σημείο αυτό προοικονομώντας αναφέρουμε ότι οι όροι οι ανάλογοι του  $g$  [δεύτερος όρος στην σχέση (5.1.12)], μηδενίζονται μέχρι την τρίτη



τάξη που εξετάζουμε ως προς την παράμετρο  $\varepsilon$ . Με εντελώς ανάλογο τρόπο προκύπτει και η εξίσωση κίνησης του πεδίου Higgs:

$$(\square + m_H^2) H - \frac{g^2}{4}(v + H)A^{\mu\alpha}A_\mu^\alpha + 3\tilde{\lambda}vH^2 + \tilde{\lambda}H^3 = 0 \quad (5.1.13)$$

Δουλεύοντας στην περίπτωση κατά την οποία  $A_1^1 = A_2^2 = A_3^3$  και κάνοντας χρήση της διαταρακτικής μεθόδου των πολλαπλών κλίμακων, δηλαδή θεωρώντας για τα πεδία  $A$ ,  $H$  αναπτύγματα της μορφής:

$$A = \varepsilon A(1) + \varepsilon^2 A(2) + \dots \quad (5.1.14)$$

$$H = \varepsilon^2 H(2) + \dots \quad (5.1.15)$$

υπολογίζουμε σε όρους τάξης  $\varepsilon$  τις εξισώσεις κίνησης των δύο πεδίων. Στα διαταρακτικά αναπτύγματα των πεδίων θεωρούμε ότι το μέν πεδίο βαθμίδας ξεκινάει από τάξη  $\varepsilon$ , ενώ το πεδίο Higgs το οποίο αντιμετωπίζεται σαν μία μικρή διακύμανση γύρω από την τιμή  $v/\sqrt{2}$ , συγκρινόμενο και με το πεδίο  $A_\mu^\alpha$ , ξεκινάει από τάξη  $\varepsilon^2$ . Στα παρακάτω θα εξεταστεί και η περίπτωση κατά την οποία και τα δύο πεδία εκκινούν από την ίδια τάξη. Ωστόσο και στις δύο περιπτώσεις οι διαταραχές θεωρούνται ως προς την μηδενική τιμή των πεδίων  $A_\mu^\alpha(0) = H(0) = 0$ , οι οποίες αποτελούν λύση (το κενό), του συστήματος των εξισώσεων των πεδίων. Στην γενική περίπτωση, μπορούμε λοιπόν να γράψουμε τις εξισώσεις στην μορφή:

$$A_\mu^\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i A_\mu^\alpha(i) \quad (5.1.16)$$

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i H(i) \quad (5.1.17)$$

Έτσι για το πεδίο  $H$  σε δεύτερη τάξη προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$(\square_0 + m_H^2) H(2) = -\frac{3}{4}g^2vA_1^1(1)A_1^1(1). \quad (5.1.18)$$

Αντιστοιχά για το πεδίο  $A$  έχουμε:

Όροι  $\varepsilon$ :

$$(\square_0 + m_A^2)A_1^1(1) = 0 \quad (5.1.19)$$

Όροι  $\varepsilon^2$ :

$$(\square_0 + m_A^2)A_1^1(2) + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_1}A_1^1(1) = 0 \quad (5.1.20)$$

Όροι  $\varepsilon^3$ :

$$\begin{aligned} & (\square_0 + m_A^2)A_1^1(3) + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_1}A_1^1(2) + \square_1A_1^1(1) \\ & + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_2}A_1^1(1) + \frac{g^2v}{2}H(2)A_1^1(1) + 2g^2A_1^1(1)A_1^1(1)A_1^1(1) = 0 \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Η τελευταία εξίσωση (5.1.21) χωρίζεται στα ακόλουθα τρία μέρη:

$$1) \quad (\square_0 + m_A^2)A_1^1(3) + n.s.p. \left[ \frac{g^2 v}{2} H(2)A_1^1(1) + 2g^2 A_1^1(1)A_1^1(1)A_1^1(1) \right] = 0 \quad (5.1.22)$$

$$2) \quad (\square_1 + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_2})A_1^1(1) + s.p. \left[ \frac{g^2 v}{2} H(2)A_1^1(1) + 2g^2 A_1^1(1)A_1^1(1)A_1^1(1) \right] = 0 \quad (5.1.23)$$

$$3) \quad 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} A_1^1(2) = 0 \quad (5.1.24)$$

Από την εξίσωση κίνησης του πεδίου A σε πρώτη τάξη ως προς την παράμετρο  $\varepsilon$  σχέση (5.1.22) προκύπτει ότι η γενική λύση για το  $A_1^1(1)$  είναι η παρακάτω:

$$A_1^1(1) = f e^{-im_A t} + f^* e^{+im_A t} \quad (5.1.25)$$

Γνώση του παραπάνω αποτελέσματος, σχέση (5.1.25) και ταυτόχρονα παρατήρηση της εξίσωσης για το πεδίο H σε δεύτερη τάξη, σχέση (5.1.18), οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η γενική λύση για το H(2) είναι της μορφής:

$$H(2) = A (b|f|^2 + f^2 e^{-2im_A t} + f^{*2} e^{+2im_A t}) \quad (5.1.26)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (5.1.25), (5.1.26) στην (5.1.18) γίνεται ο προσδιορισμός των σταθερών A, b που υπεισέρχονται στην γενική λύση για το H(2). Έπειτα από αντικατάσταση και εξίσωση των συντελεστών των δύο μελών της διαφορικής καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα:

$$Abm_H^2 = -\frac{6}{4}g^2 v$$

$$A(m_H^2 - 4m_A^2) = -\frac{3}{4}g^2 v \quad (5.1.27)$$

Ορίζοντας τον λόγο των μαζών των δύο πεδίων,  $\lambda = m_H/m_A$ , οι συντελεστές A, b συναρτήσει του  $\lambda$  έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$A = -\frac{3}{v(\lambda^2 - 4)} \quad (5.1.28)$$

$$b = \frac{2(\lambda^2 - 4)}{\lambda^2} \quad (5.1.29)$$

Έχοντας προσδιορίσει πλέον και τις σταθερές που εισήχθησαν στην εξίσωση κίνησης του πεδίου Higgs, επιστρέφουμε στην εξίσωση κίνησης του πεδίου  $A_1^1$  σε τρίτη τάξη ως προς  $\varepsilon$  και προχωρούμε σε αναλυτικό υπολογισμό κάθε όρου αυτής.

$$2g^2 A_1^1 A_1^1 A_1^1 = 2g^2 \left[ (f^3 e^{-3im_A t} + |f|^2 f e^{-im_A t} + |f|^2 f^* e^{+im_A t} + f^{*3} e^{+3im_A t} + 2|f|^2 f e^{-im_A t} + 2|f|^2 f^* e^{+im_A t}) \right] \quad (5.1.30)$$

$$\frac{1}{2}g^2 v H(2)A_1^1 = -\frac{3g^2}{2(\lambda^2 - 4)} \left[ (b+1)|f|^2 f e^{-im_A t} + (b+1)|f|^2 f^* e^{+im_A t} + f^3 e^{-3im_A t} + f^{*3} e^{+3im_A t} \right] \quad (5.1.31)$$

Κρατώντας μόνο τα  $[s.p.]$  μέρη των ανωτέρω όρων, δηλαδή μόνο όρους ανάλογους του  $[e^{-im_A t}]$  και αντικαθιστώντας τα  $A, b$  από τις σχέσεις ορισμού τους, (5.1.28), (5.1.29) η εξίσωση (5.1.23) γράφεται:

$$(\square_1 + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_2})fe^{-im_A t} + 3g^2 \left[ 2 - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4(\lambda^2 - 4)} \right] |f|^2 fe^{-im_A t} = 0 \quad (5.1.32)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί μαζεύοντας τους σταθερούς όρους και ορίζοντας  $T_2 \equiv t$  να γραφεί στην συμπαγέστερη μορφή:

$$\left[ i\partial_t + \frac{1}{2m_A}\nabla_1^2 - s|f|^2 \right] f = 0 \quad (5.1.33)$$

Όπου με  $s$  έχουμε ορίσει την παρακάτω ποσότητα:

$$s = \frac{g^2}{m_A}(3 + \tilde{\alpha}(\lambda)) \quad (5.1.34)$$

$$\tilde{\alpha}(\lambda) = -\frac{3}{4}\left(\frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2 - 4}\right) \quad (5.1.35)$$

Στο σημείο αυτό κρίνεται αναγκαία η διερεύνηση του προσήμου του όρου μη γραμμικότητας της εξίσωσης  $NLS$ .

## 5.2 Ασταθείς σολιτονικές λύσεις

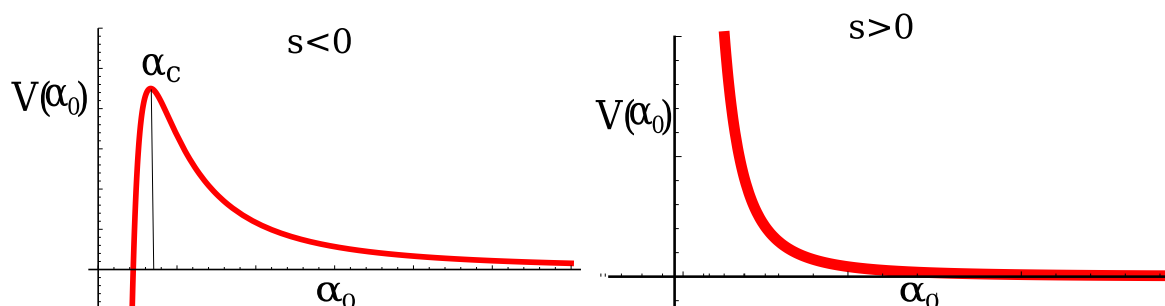
### Εντοπισμένες λύσεις της $NLS$

Στην συνέχεια της ανάλυσης μας και θέτοντας ως βασικό κριτήριο την αναζήτηση εντοπισμένων λύσεων της εξίσωσης  $NLS$  και διερευνώντας την ευστάθεια των λύσεων αυτών, δοκιμάζουμε λύσεις γκαουσιανού τύπου της μορφής:

$$f = A(t)e^{-\frac{r_1^2}{2\alpha_0(t)^2} + \frac{i}{2}b(t)r_1^2 + i\delta(t)} \quad (5.2.1)$$

και αναζητούμε την χρονική εξέλιξη των παραμέτρων του  $\alpha_0(t), A(t), b(t), \delta(t)$  όπου  $\alpha_0(t)$  είναι το εύρος,  $A(t)$  το πλάτος,  $b(t)$  και  $\delta(t)$  παράμετροι που καθορίζουν τη φάση. Η μέθοδος που εφαρμόζεται είναι γνωστή ως λογισμός των μεταβολών για σολιτόνια [16]. Για μία εξίσωση  $NLS$  γραμμένη στην τυπική μορφή, η οποία προέρχεται κατά τα γνωστά από μία Λαγκρανζιανή πυκνότητα  $\mathcal{L}$ , αντικαθιστώντας την λύση (5.2.1), καταλήγουμε σε μία ενεργό Λαγκρανζιανή που στις τρεις διαστάσεις ( $D = 3$ ) έχει την μορφή:

$$\mathcal{L}_{eff}^{3D} = \frac{1}{2}\pi^{3/2}A^2\alpha_0^3 \left( -\frac{3}{2}\frac{db}{dt}\alpha_0^2 - 2\frac{d\delta}{dt} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda(t)A^2 - \frac{3}{\alpha_0^2} - 3b^2\alpha_0^2 \right) \quad (5.2.2)$$



Σχήμα 5.1: Διαγράμματα ενεργού δυναμικού σαν συνάρτηση του εύρους για αρνητικές και θετικές τιμές του όρου μη γραμμικότητας.

από την οποία προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις για τον προσδιορισμό των παραμέτρων που αναφέρθηκαν παραπάνω:

$$\pi^{3/2} A^2 \alpha_0^3 \equiv N = \text{σταθερό} \quad (5.2.3)$$

$$b = (2\alpha_0)^{-1} \frac{d\alpha_0}{dt} \quad (5.2.4)$$

$$\frac{d^2\alpha_0}{dt^2} = \frac{4}{\alpha_0^3} + \frac{2 \left( s \frac{N}{2\pi} - 2 \right)}{\alpha_0^4} \quad (5.2.5)$$

Παραθέτουμε την γραφική απεικόνιση του ενεργού δυναμικού, σχήμα 5.1, που προκύπτει μέσω της διαφορικής εξίσωσης του εύρους  $\alpha_0$ . Παρατηρούμε στην περίπτωση  $s < 0$  ότι υπάρχει μία κρίσιμη τιμή  $\alpha_0 = \alpha_{cr}$  τέτοια ώστε για  $\alpha_0 > \alpha_{cr}$  η λύση  $f \rightarrow 0$  και για  $\alpha_0 < \alpha_{cr}$ ,  $f \rightarrow \delta$ . Επομένως οδηγούμαστε σε αστάθεια και άρα μη αποδεκτή λύση. Αντίστοιχα στην περίπτωση που το  $s > 0$ , δεν προσδιορίζεται καμία τιμή για το  $\alpha_0$  και το ενεργό δυναμικό είναι πλήρως απωστικό. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι ξεκινώντας την αναζήτηση λύσεων με μόνο κριτήριο τον εντοπισμό αυτών, οδηγούμαστε σε μη αποδεκτές λύσεις.

### 5.3 Μη γραμμικά επίπεδα κύματα: Ευσταθείς λύσεις

#### Εισαγωγή

Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε ότι στην προσπάθεια εύρεσης λύσεων της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger με κριτήριο τον εντοπισμό των λύσεων αυτών, οδηγηθήκαμε στην τρισδιάστατη πάντοτε περίπτωση, σε ασταθείς και επομένως μη αποδεκτές λύσεις. Έτσι στην ενότητα που ακολουθεί, προχωρώντας περαιτέρω την ανάλυσή μας, θα απαιτήσουμε όχι εντοπισμό αλλά ευστάθεια των λύσεων. Για την μελέτη αυτή ελέγχουμε λύσεις με την μορφή μη γραμμικών επίπεδων κυμάτων.

### Συνθήκη ευστάθειας και επιτρεπόμενες περιοχές της μάζας του Higgs

Ελέγχουμε κατά πόσο τα επίπεδα κύματα αποτελούν ευσταθείς λύσεις της  $NLS$ , μέσω της μελέτης γραμμικής ευστάθειας (Modulation instability analysis) [17]. Για επίπεδα κύματα της μορφής:

$$f = f_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (5.3.1)$$

που είναι λύσεις της  $NLS$  και ικανοποιούν την σχέση διασποράς:

$$\omega(k) = \frac{k^2}{2m_A} + s|f_0|^2 \quad (5.3.2)$$

σχέση στην οποία βλέπουμε το αποτύπωμα της μη γραμμικότητας, θεωρούμε διαταραχή της μορφής:

$$f \rightarrow f' = f + \delta f \quad (5.3.3)$$

επομένως η (5.1.33) με την παραπάνω αντικατάσταση λαμβάνει την μορφή:

$$i\partial_t \delta f + \frac{1}{2m_A} \nabla_1^2 \delta f - s f^2 \delta f^* - 2s|f|^2 \delta f = 0 \quad (5.3.4)$$

θεωρώντας  $\delta f = R e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ , με  $R$  εν γένει μιγαδικό, η παραπάνω εξίσωση (5.3.4) γράφεται:

$$i\left(\partial_t R + \frac{\vec{k}\vec{\nabla}R}{m_A}\right) + \frac{1}{2m_A} \nabla^2 R - (R + R^*)s f_0^2 = 0 \quad (5.3.5)$$

Στην συνέχεια εφόσον δεχτήκαμε ότι  $R$  είναι μιγαδικός, θέτουμε  $R = u + iv$ , με άμεσο αποτέλεσμα, η σχέση (5.3.5) να λάβει την μορφή:

$$i\left(\partial_t u + i\partial_t v + \frac{\vec{k}\vec{\nabla}u}{m_A} - \frac{i\vec{k}\vec{\nabla}v}{m_A}\right) + \frac{1}{2m_A} \nabla^2 u + \frac{i}{2m_A} \nabla^2 v - 2us f_0^2 = 0 \quad (5.3.6)$$

Χωρίζοντας την παραπάνω σχέση σε πραγματικό και φανταστικό κομμάτι προκύπτουν οι σχέσεις:

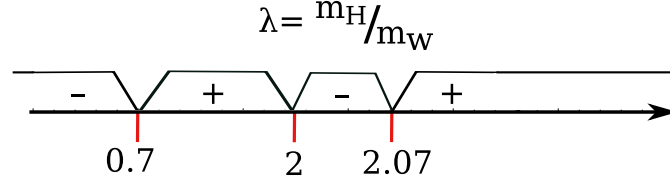
$$-\partial_t v + \frac{\vec{k}\vec{\nabla}v}{m_A} + \frac{1}{2m_A} \nabla^2 u - 2us f_0^2 = 0 \quad (5.3.7)$$

$$i\partial_t u - \frac{i\vec{k}\vec{\nabla}u}{m_A} + \frac{i}{2m_A} \nabla^2 v = 0 \quad (5.3.8)$$

Επιλέγοντας τώρα ως  $u, v$  τα παρακάτω:

$$u = u_0 e^{-i(\Omega t - \vec{Q}\vec{r})} + \text{c.c} \quad (5.3.9)$$

$$v = v_0 e^{-i(\Omega t - \vec{Q}\vec{r})} + \text{c.c} \quad (5.3.10)$$



Σχήμα 5.2: Διάγραμμα επιτρεπόμενων περιοχών του λόγου των μαζών  $\lambda$ .

οι (5.3.7) , (5.3.8) γράφονται αντίστοιχα:

$$iv_0\left(\Omega - \frac{\vec{k}\vec{Q}}{m_A}\right) - \left(\frac{Q^2}{2m_A} + 2f_0^2s\right)u_0 = 0 \quad (5.3.11)$$

$$u_0\left(\Omega - \frac{\vec{k}\vec{Q}}{m_A}\right) - \frac{iQ^2}{2m_A}v_0 = 0 \quad (5.3.12)$$

Για να πάρουμε μηδέν στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων, πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών αυτού να είναι μηδέν, επομένως:

$$\det \begin{bmatrix} i\left(\Omega - \frac{\vec{k}\vec{Q}}{m_A}\right) & -\left(\frac{Q^2}{2m_A} + 2sf_0^2\right) \\ -\frac{iQ^2}{2m_A} & \left(\Omega - \frac{\vec{k}\vec{Q}}{m_A}\right) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3.13)$$

Υπολογισμός της παραπάνω ορίζουσας οδηγεί στην σχέση:

$$\left(\Omega - \frac{\vec{k}\vec{Q}}{m_A}\right)^2 = \frac{Q^2}{2m_A} \left(\frac{Q^2}{2m_A} + 2sf_0^2\right) \quad (5.3.14)$$

Ωστόσο λόγω της απαίτησης το  $\Omega$  στην τελευταία σχέση, να είναι πραγματικός για κάθε τιμή του  $Q$ , άρα και για πολύ μικρό  $Q$ , έπεται ότι η ποσότητα στο δεξί μέλος της εξίσωσης (5.3.14) πρέπει να είναι θετική. Κατί τέτοιο όμως συμβαίνει μόνο αν  $s > 0$ . Έτσι η αναζήτηση της ευστάθειας ή μη των λύσεων μας έχει αναχθεί σε μελέτη του προσήμου του συντελεστή του όρου μη γραμμικότητας της  $NLS$ . Συμπερασματικά λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι, τα επίπεδα κύματα της μορφής (5.3.1) είναι λύσεις της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger, σχέση (5.1.33) και είναι ευσταθείς αν το  $s$  είναι θετικό. Τέλος για  $s > 0$  προκύπτουν οι επιτρεπόμενες περιοχές για το λόγο  $\lambda = m_H/m_A$  των μαζών των δύο πεδίων και άρα οι επιτρεπόμενες περιοχές για τη μάζα του Higgs.

$$s > 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 0.5)(\lambda^2 - 4.3) > 0 \quad (5.3.15)$$

$$56 < m_H < 160\text{GeV} \quad (5.3.16)$$

$$m_H > 165\text{GeV} \quad (5.3.17)$$

Για την εξαγωγή των επιτρεπόμενων περιοχών για την μάζα του Higgs έγινε ταυτοποίηση της μάζας του πεδίου  $A$  με την γνωστή από την βιβλιογραφία μάζα των  $W$ 's, όπου  $m_A = m_W = 80.4\text{GeV}$ . Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώνονται και από τα μέχρι τώρα πειραματικά δεδομένα [;].

## 5.4 Εξισώσεις κίνησης πεπλεγμένης μορφής

### Εισαγωγή

Στην συνέχεια της ανάλυσής ακολουθούμε τα βήματα που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα, με την διαφορά ότι στην παρούσα διερεύνηση τόσο το πεδίο  $A$ , όσο και το πεδίο  $H$  λαμβάνονται ως αναπτύγματα πρώτης τάξης ως προς την παράμετρο  $\varepsilon$ . Βασίζόμενοι στα εξαγόμενα της ανωτέρω ανάλυσης, μπορούμε προτρέχοντας να υποθέσουμε ότι, εφόσον στην περίπτωση κατα την οποία το πεδίο  $H$  εκκινούσε από δεύτερη τάξη, οδηγηθήκαμε σε μία μη γραμμική εξίσωση Schrödinger, στην παρούσα παράγραφο λόγω ανάμειξης των ίδιας πλέον τάξης πεδίων, θα προκύψει πεπλεγμένο σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων Schrödinger.

Ξεκινάμε και στην περίπτωση αυτή, από την υπόθεση ότι τα πεδία  $A_i^i$  με  $i = 1, 2, 3$ , είναι ίδια. Ισχύει δηλαδή ότι:  $A_1^1 = A_2^2 = A_3^3$  και όπως εισαγωγικά αναφέραμε, θα θεωρήσουμε τα κατωτέρω αναπτύγματα:

$$A = \varepsilon A(1) + \varepsilon^2 A(2) + \dots \quad (5.4.1)$$

$$H = \varepsilon H(1) + \varepsilon^2 H(2) + \dots \quad (5.4.2)$$

Προχωρούμε στην γραφή των εξισώσεων κίνησης:

$$\left(\square + m_A^2\right) A_i^i + 2g^2 A_i^i A_i^i A_i^i + \frac{g^2}{2} v H A_i^i + \frac{g^2}{4} H^2 A_i^i = 0 \quad (5.4.3)$$

$$\left(\square + m_H^2\right) H + \frac{3g^2}{4} (v + H) A_i^i A_i^i + 3\lambda v H^2 + \lambda H^3 = 0 \quad (5.4.4)$$

Με εφαρμογή της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων, έχουμε τα ακόλουθα αναπτύγματα σε δυνάμεις  $\varepsilon$ .

Όροι  $\varepsilon$ :

$$\left(\square_0 + m_A^2\right) A_1^1(1) = 0 \quad (5.4.5)$$

όπου από τα όμοια θεωρούμενα πεδία επιλέξαμε να δουλέψουμε με το  $A_1^1$ .

Όροι  $\varepsilon^2$ :

$$\left(\square_0 + m_A^2\right) A_1^1(2) + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} A_1^1(1) + \frac{g^2}{2} v H(1) A_1^1(1) = 0 \quad (5.4.6)$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται ως ακολούθως:

$$\left(\square_0 + m_A^2\right) A_1^1(2) + \frac{g^2}{2} v H(1) A_1^1(1) = 0 \quad (5.4.7)$$

$$2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} A_1^1(1) = 0 \quad (5.4.8)$$

Όροι  $\varepsilon^3$ :

$$\begin{aligned} & \left(\square_0 + m_A^2\right) A_1^1(3) + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} A_1^1(2) + \square_1 A_1^1(1) + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_2} A_1^1(1) \\ & + \frac{g^2}{2} v H(1) A_1^1(2) + \frac{g^2}{2} v H(2) A_1^1(1) + 2g^2 A_1^1 A_1^1 A_1^1 + \frac{g^2}{4} H(1)^2 A_1^1(1) = 0 \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Την τελευταία εξίσωση (5.4.9) την χωρίζουμε στα αόλουθα τρία μέρη:

$$\begin{aligned} & \left( \square_0 + m_A^2 \right) A_1^1(3) + n.s.p. \left[ 2g^2(A_1^1)^3 + \frac{g^2}{2} v H(1) A_1^1(2) \right. \\ & \left. + \frac{g^2}{2} v H(2) A_1^1(1) + \frac{g^2}{4} H(1)^2 A_1^1(1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

$$\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} A_1^1(2) = 0 \quad (5.4.11)$$

$$\begin{aligned} & \left( \square_1 + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_2} \right) A_1^1(1) + s.p. \left[ 2g^2(A_1^1)^3 + \frac{g^2}{2} v H(1) A_1^1(2) \right. \\ & \left. + \frac{g^2}{2} v H(2) A_1^1(1) + \frac{g^2}{4} H(1)^2 A_1^1(1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

Αντίστοιχα εργαζόμαστε και στην περίπτωση του πεδίου Higgs.

Όροι  $\varepsilon$ :

$$\left( \square_0 + m_H^2 \right) H(1) = 0 \quad (5.4.13)$$

Όροι  $\varepsilon^2$ :

$$\left( \square_0 + m_H^2 \right) H(2) + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} H(1) + \frac{3g^2}{4} v A_1^1(1) A_1^1(1) + 3\lambda v H^2(1) = 0 \quad (5.4.14)$$

Η εξίσωση αυτή χωρίζεται κατα τα γνωστά σε δύο κομμάτια:

$$\left( \square_0 + m_H^2 \right) H(2) + \frac{3g^2}{4} v A_1^1(1) A_1^1(1) + 3\lambda v H^2(1) = 0 \quad (5.4.15)$$

$$2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} H(1) = 0 \quad (5.4.16)$$

Όροι  $\varepsilon^3$ :

$$\begin{aligned} & \left( \square_0 + m_H^2 \right) H(3) + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} H(2) + \square_1 H(1) + 2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_2} H(1) \\ & + \frac{3g^2}{4} H(1) (A_1^1(1))^2 + \frac{6g^2}{4} v A_1^1(2) A_1^1(1) + 6\lambda v H(2) H(1) + \lambda H^3(1) = 0 \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Τα τρία μέρη αυτής είναι:

$$\begin{aligned} & \left( \square_0 + m_H^2 \right) H(3) + n.s.p. \left[ \frac{3g^2}{4} H(1) (A_1^1(1))^2 \right. \\ & \left. + \frac{6g^2}{4} v A_1^1(2) A_1^1(1) + 6\lambda v H(2) H(1) + \lambda H^3(1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

$$2\partial_{\mu_0} \partial^{\mu_1} H(2) = 0 \quad (5.4.19)$$



$$\begin{aligned} & \left( \square_1 + 2\partial_{\mu_0}\partial^{\mu_2} \right) H(1) + s.p \left[ \frac{3g^2}{4} H(1)(A_1^1(1))^2 \right. \\ & \left. + \frac{6g^2}{4} v A_1^1(2) A_1^1(1) + 6\lambda v H(2) H(1) + \lambda H^3(1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Σε πλήρη αντιστοιχία με την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου, παρατηρώντας την εξίσωση κίνησης του πεδίου  $A$  σε πρώτη τάξη ως προς  $\varepsilon$ , (5.4.5), έπεται ότι η γενική λύση για το  $A_1^1(1)$  είναι:

$$A_1^1(1) = f e^{-im_A t} + f^* e^{+im_A t} \quad (5.4.21)$$

Ωστόσο σε αντιδιαστολή με την πρώτη περίπτωση, όπου δεν υπήρχε εξίσωση σε πρώτη τάξη για το πεδίο  $H$ , στην παρούσα διερεύνηση παρατήρηση της εξίσωσης κίνησης (5.4.13), οδηγεί στο γεγονός ότι η γενική λύση για το  $H(1)$  είναι της μορφής:

$$H(1) = \eta e^{-im_H t} + \eta^* e^{+im_H t} \quad (5.4.22)$$

γνώση των εξισώσεων (5.4.21), (5.4.22) και παρατήρηση της μορφής της (5.4.7) η γενική λύση για το  $A_1^1(2)$  είναι η παρακάτω:

$$\begin{aligned} A_1^1(2) &= a f \eta e^{-i(m_A+m_H)t} + \beta f \eta^* e^{-i(m_A-m_H)t} \\ &+ a^* f^* \eta^* e^{+i(m_A+m_H)t} + \beta^* f^* \eta e^{+i(m_A-m_H)t} \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

όπου οι σταθερές  $a, \beta$  προσδιορίζονται με αντικατάσταση των σχέσεων (5.4.21), (5.4.22) και (5.4.23) στην (5.4.7). Παραθέτουμε το σύστημα που προκύπτει έπειτα από αυτή την αντικατάσταση.

$$\begin{cases} a[m_A^2 - (m_A + m_H)^2] = -\frac{g^2 v}{2} \\ \beta[m_A^2 - (m_A - m_H)^2] = -\frac{g^2 v}{2} \end{cases} \quad (5.4.24)$$

Ακολούθως έχοντας ορίσει το λόγο  $\lambda$  στην προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να εκφράσουμε τα  $a, \beta$  του προηγούμενου συστήματος, σχέση (5.4.24) συναρτήσει αυτού.

$$\begin{cases} a = \frac{2}{v\lambda(\lambda+2)} \\ \beta = \frac{2}{v\lambda(\lambda-2)} \end{cases} \quad (5.4.25)$$

Είμαστε πλέον σε θέση να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του πεδίου  $H(2)$ , αφού γνωρίζουμε τα  $A_1^1(1), A_1^1(2), H(1)$  σχέσεις (5.4.21), (5.4.23), (5.4.22) αντίστοιχα. Αρχικά υπολογίζουμε τον δεύτερο και τρίτο όρο της σχέσης (5.4.15). Έχουμε:

$$A_1^1(1)A_1^1(1) = f^2 e^{-2im_A t} + f^{*2} e^{+2im_A t} + 2|f|^2 \quad (5.4.26)$$

$$H(1)H(1) = \eta^2 e^{-2im_H t} + \eta^{*2} e^{+2im_H t} + 2|\eta|^2 \quad (5.4.27)$$

Από την μορφή που έχουν οι παραπάνω όροι, σχέσεις (5.4.26), (5.4.27), προκύπτει ότι η γενική λύση για το  $H(2)$  έχει την μορφή:

$$\begin{aligned} H(2) &= A \left( b|f|^2 + f^2 e^{-2im_A t} + f^{*2} e^{+2im_A t} \right) \\ &+ A' \left( b' |\eta|^2 + \eta^2 e^{-2im_H t} + \eta^{*2} e^{+2im_H t} \right) \end{aligned} \quad (5.4.28)$$

Όμοια με προηγουμένως για τον προσδιορισμό των σταθερών που υπεισέρχονται στην παραπάνω σχέση, επιστρέφουμε στην διαφορική εξίσωση (5.4.15), η οποία έπειτα από αντικατάσταση των σχέσεων (5.4.26), (5.4.27) και (5.4.28), οδηγεί στο ακόλουθο σύστημα για τα  $A, A', b, b'$ :

$$m_H^2 A b = -\frac{3g^2 v}{2} \quad (5.4.29)$$

$$m_H^2 A' b' = -6\tilde{\lambda} v \quad (5.4.30)$$

$$A(m_H^2 - 4m_A^2) = -\frac{3g^2 v}{4} \quad (5.4.31)$$

$$A'(m_H^2 - 4m_H^2) = -3\tilde{\lambda} v \quad (5.4.32)$$

Αντικατάσταση του λόγου  $\lambda$  και σε αυτή την περίπτωση δίνει τις ανωτέρω ποσότητες συναρτήσει αυτού. Έχουμε:

$$A = -\frac{3}{v(\lambda^2 - 4)} \quad (5.4.33)$$

$$A' = -\frac{1}{2v} \quad (5.4.34)$$

$$b = \frac{2(\lambda^2 - 4)}{\lambda^2} \quad (5.4.35)$$

$$b' = -6 \quad (5.4.36)$$

Στο σημείο αυτό και προκειμένου να διευκολυνθούμε στους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν κρίνεται σκόπιμη η κατασκευή ενός συγκεντρωτικού πίνακα σταθερών.

#### Συγκεντρωτικός πίνακας σταθερών

$A = -\frac{3}{v(\lambda^2 - 4)}$	$A' = -\frac{1}{2v}$
$b = \frac{2(\lambda^2 - 4)}{\lambda^2}$	$b' = -6$
$a = \frac{\lambda^2}{v\lambda(\lambda + 2)}$	$\beta = \frac{2}{v\lambda(\lambda - 2)}$
$\lambda = \frac{m_H}{m_A}$	$m_H^2 = 2\lambda v^2$
$m_A^2 = \frac{g^2 v^2}{4}$	

Έχοντας προσδιορίσει και το  $H(2)$ , επιστρέφουμε στην εξίσωση κίνησης σε τρίτη τάξη για το πεδίο  $A$ , σχέση (5.4.12). Αρχικά υπολογίζουμε κάθε όρο αυτής χωριστά.

$$2g^2 A_1^1(1)A_1^1(1)A_1^1(1) = 2g^2 (f^3 e^{-3im_A t} + f^{*3} e^{+3im_A t}) + 3|f|^2 f e^{-im_A t} + 3|f|^2 f^* e^{+im_A t} \quad (5.4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{g^2 v}{2} H(1)A_1^1(2) &= \frac{g^2 v}{2} \left[ \eta^2 a f e^{-im_H t} e^{-i(m_A + m_H)t} + |\eta|^2 \beta f e^{-im_H t} e^{-i(m_A - m_H)t} \right. \\ &+ |\eta|^2 a^* f^* e^{-im_H t} e^{+i(m_A + m_H)t} + \eta^2 \beta^* f^* e^{+im_H t} e^{+i(m_A - m_H)t} \\ &+ \eta^{*2} a^* f^* e^{+im_H t} e^{+i(m_A + m_H)t} + |\eta|^2 \beta^* f^* e^{+im_H t} e^{+i(m_A - m_H)t} \\ &\left. + |\eta|^2 a f e^{+im_H t} e^{-i(m_A + m_H)t} + \eta^{*2} \beta f e^{+im_H t} e^{-i(m_A - m_H)t} \right] \quad (5.4.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{g^2 v}{2} H(2) A_1^1(1) &= \frac{g^2 v}{2} \left[ Ab |f|^2 f e^{-im_A t} + A f^3 f e^{-3im_A t} + A |f|^2 f^* e^{+im_A t} \right. \\ &+ A' b' |\eta|^2 f e^{-im_A t} + A' \eta^2 f e^{-im_A t} e^{-2im_H t} + A' \eta^{*2} f e^{-im_A t} e^{+2im_H t} \\ &+ Ab |f|^2 f^* e^{+im_A t} + A |f|^2 f e^{-im_A t} + A f^{*3} f e^{+3im_A t} + A' \eta^{*2} f^* e^{+im_A t} e^{+2im_H t} \\ &\left. + A' b' |\eta|^2 f^* e^{+im_A t} + A' \eta^2 f^* e^{+im_A t} e^{-2im_H t} + A f^{*3} f e^{+3im_A t} \right] \end{aligned} \quad (5.4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{g^2}{4} H^2(1) A_1^1(1) &= \left[ 2 |\eta|^2 f e^{-im_A t} + 2 |\eta|^2 f^* e^{+im_A t} + \eta^2 f e^{-im_A t} e^{-2im_H t} + \eta^2 f^* e^{+im_A t} e^{-2im_H t} \right. \\ &\left. + \eta^{*2} f e^{-im_A t} e^{+2im_H t} + \eta^{*2} f^* e^{+im_A t} e^{+2im_H t} \right] \end{aligned} \quad (5.4.40)$$

Σε κάθε έναν από τους παραπάνω όρους, σχέσεις (5.4.37), (5.4.38), (5.4.39) και (5.4.40) κρατώντας μόνο  $[s.p.]$  όρους, δηλαδή όρους ανάλογους του  $e^{-im_A t}$ , και αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης (5.4.12) καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\left[ -\nabla_1^2 - 2im_A \partial_{T_2} \right] f + 2g^2 \left[ (3 + \alpha(\lambda)) |f|^2 + (\beta(\lambda) - \frac{1}{2}) |\eta|^2 \right] f = 0 \quad (5.4.41)$$

η οποία αποτελεί την πρώτη εκ των δύο μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS) για το πεδίο  $f$ . Με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο εργαζόμαστε προκειμένου να εξάγουμε την αντίστοιχη εξίσωση για το πεδίο Higgs. Ξεκινάμε υπολογίζοντας κάθε όρο της σχέσης (5.4.20) χωριστά.

$$\lambda H^3(1) = \lambda \left[ \eta^3 e^{-3im_H t} + \eta^{*3} e^{+3im_H t} + 3 |\eta|^2 \eta e^{-im_H t} + 3 |\eta|^2 \eta^* e^{+im_H t} \right] \quad (5.4.42)$$

$$\begin{aligned} 6\lambda v H(2) H(1) &= 6\lambda v \left[ Ab |f|^2 \eta e^{-im_H t} + A' b' |\eta|^2 \eta e^{-im_H t} + A' |\eta|^2 \eta e^{-im_H t} \right. \\ &+ A' \eta^{*3} e^{+3im_H t} + A' \eta^3 e^{-3im_H t} + A f^2 \eta e^{-2im_A t} e^{-im_H t} \\ &+ A f^{*2} \eta e^{+2im_A t} e^{-im_H t} + A' |\eta|^2 \eta^* e^{+im_H t} + A' b' |\eta|^2 \eta^* e^{+im_H t} + Ab |f|^2 \eta^* e^{+im_H t} \\ &\left. + A f^2 \eta^* e^{-2im_A t} e^{+im_H t} + A f^{*2} \eta^* e^{+2im_A t} e^{+im_H t} \right] \end{aligned} \quad (5.4.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{3g^2}{4} A_1^1(1) A_1^1(1) H(1) &= \frac{3g^2}{4} \left[ f^{*2} \eta e^{+2im_A t} e^{-im_H t} + f^{*2} \eta^* e^{+2im_A t} e^{+im_H t} + f^2 \eta e^{-2im_A t} e^{-im_H t} \right. \\ &\left. + 2 |f|^2 \eta e^{-im_H t} + 2 |f|^2 \eta^* e^{+im_H t} + f^2 \eta^* e^{-2im_A t} e^{+im_H t} \right] \end{aligned} \quad (5.4.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{3g^2 v}{2} A_1^1(2) A_1^1(1) &= \frac{3g^2 v}{2} \left[ a f^2 \eta e^{-i(m_A+m_H)t} e^{-im_A t} + \beta f^2 \eta^* e^{-i(m_A-m_H)t} e^{-im_A t} \right. \\ &+ a^* \eta^* |f|^2 e^{-i(m_A+m_H)t} e^{-im_A t} + \beta^* \eta |f|^2 e^{+i(m_A-m_H)t} e^{-im_A t} \\ &+ a \eta |f|^2 e^{-i(m_A+m_H)t} e^{+im_A t} + \beta \eta^* |f|^2 e^{-i(m_A-m_H)t} e^{+im_A t} \\ &\left. + a^* f^{*2} \eta^* e^{+i(m_A+m_H)t} e^{+im_A t} + \beta^* f^{*2} \eta e^{+i(m_A-m_H)t} e^{+im_A t} \right] \end{aligned} \quad (5.4.45)$$

Από τις σχέσεις (5.4.42), (5.4.43), (5.4.44) και (5.4.45) κρατώντας μόνο [s.p.] όρους, δηλαδή όρους ανάλογους του  $e^{-im_H t}$  αυτή τη φορά και αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης (5.4.20) καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$\left[ -\nabla_1^2 - 2im_H \partial_{T_2} \right] \eta - 12\tilde{\lambda} \left[ |\eta|^2 + \frac{3|f|^2}{\lambda^2} \right] \eta + \frac{3g^2}{2} \left[ (1 + 4\beta(\lambda)) |f|^2 \eta \right] = 0 \quad (5.4.46)$$

που αποτελεί την δεύτερη NLS για το πεδίο  $\eta$ . Κατασκευάσαμε λοιπόν βήμα προς βήμα το πεπλεγμένο σύστημα των δύο NLS.

Πίνακας σταθερών 2

$A\nu(b+1) = -3\left(\frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2-4}\right)$	$A'\nu(b'+1) = -5/2$
$a + \beta = \frac{4}{v(\lambda^2-4)}$	$A'b' = -3/v$
$\alpha(\lambda) = -(3/4)\left(\frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2-4}\right)$	$\beta(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2-4}$

## 5.5 Μελέτη ευστάθειας των λύσεων

### Εισαγωγή

Στην παράγραφο που ακολουθεί στόχος είναι η μελέτη της ευστάθειας των μη γραμμικών επίπεδων κυμάτων, τα οποία σύμφωνα με την διεξοδική ανάλυση που έχει προηγηθεί, αποτελούν λύσεις των εξισώσεων NLS. Διερευνούμε λοιπόν στα παρακάτω αν αυτές οι λύσεις διατηρούν τον ευσταθή χαρακτήρά τους στην περίπτωση των συζευγμένων εξισώσεων NLS της προηγούμενης ενότητας. Η μελέτη της ευστάθειας θα πραγματοποιηθεί με χρήση της ίδιας διαταρακτικής μεθόδου [17].

Αρχικά γράφουμε το συζευγμένο σύστημα των εξισώσεων NLS (Βλέπε σχ.(5.4.41) και (5.4.46) ) σε συμπαγέστερη μορφή (συγκεντρώνοντας τις σταθερές). Προκύπτουν έτσι οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\left[ i\partial_t + \frac{1}{2m_A} \nabla^2 - (g_{11} |f|^2 + g_{12} |\eta|^2) \right] f = 0 \quad (5.5.1)$$

$$\left[ i\partial_t + \frac{1}{2m_H} \nabla^2 - (g_{21} |f|^2 + g_{22} |\eta|^2) \right] \eta = 0 \quad (5.5.2)$$

όπου  $g_{ij}$  που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις είναι τα ακόλουθα:

$$g_{11} = \frac{1}{2m_A} 2g^2 \left( 3 + \frac{1}{4} \nu A(b+1) \right) \quad (5.5.3)$$

$$g_{12} = \frac{1}{2m_A} \frac{g^2}{2} (\nu A'b' + \nu(a+b) + 1) \quad (5.5.4)$$

$$g_{21} = \frac{1}{2m_H} (6\tilde{\lambda} \nu A b + \frac{3}{2} g^2 (1 + \nu(a+b))) \quad (5.5.5)$$

$$g_{22} = \frac{1}{2m_H} (3\tilde{\lambda} + 6\tilde{\lambda} \nu A'(b'+1)) \quad (5.5.6)$$

Θεωρώντας επίπεδα κύματα της μορφής:

$$f = f_0 e^{-i\omega_f t} \quad (5.5.7)$$

$$n = n_0 e^{-i\omega_n t} \quad (5.5.8)$$

με τα  $\omega_f$  και  $\omega_n$  να δίνονται από τις σχέσεις:

$$\omega_f = g_{11} |f_0|^2 + g_{12} |n_0|^2 \quad (5.5.9)$$

$$\omega_n = g_{21} |f_0|^2 + g_{22} |n_0|^2 \quad (5.5.10)$$

Διαταράσσοντας τις λύσεις  $f$  και  $n$  ως ακολούθως:

$$f \rightarrow f' = f + \delta f \quad (5.5.11)$$

$$n \rightarrow n' = n + \delta n \quad (5.5.12)$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις σχ.(5.5.1) και σχ.(5.5.2) έχουμε:

$$i\partial_t(f + \delta f) + \frac{1}{2m_A} \nabla^2(f + \delta f) - [g_{11} |f + \delta f|^2 + g_{12} |n + \delta n|^2] (f + \delta f) = 0 \quad (5.5.13)$$

$$i\partial_t(n + \delta n) + \frac{1}{2m_H} \nabla^2(n + \delta n) - [g_{21} |f + \delta f|^2 + g_{22} |n + \delta n|^2] (n + \delta n) = 0 \quad (5.5.14)$$

Εκτελώντας τις παραπάνω πράξεις και απαλείφοντας όρους της μορφής  $|\delta f|^2$  και  $|\delta n|^2$  ως αμελητέους, έχουμε:

$$i\partial_t \delta f + \frac{1}{2m_A} \nabla^2 \delta f - [g_{11}(f^2 \delta f^* + 2|f|^2 \delta f) + g_{12}(|n|^2 \delta f + n f \delta n^* + n^* f \delta n)] = 0 \quad (5.5.15)$$

$$i\partial_t \delta n + \frac{1}{2m_H} \nabla^2 \delta n - [g_{21}(|f|^2 \delta n + f n \delta f^* + f^* n \delta f) + g_{22}(2|n|^2 \delta n + n^2 \delta n^*)] = 0 \quad (5.5.16)$$

Θεωρώντας τώρα κατά τα γνωστά,  $f$  και  $n$  να δίνονται από τις σχ. (5.5.7) και σχ. (5.5.8) αντίστοιχα και  $\delta f$  και  $\delta n$  από τις επόμενες:

$$\delta f = R_f e^{-i\omega_f t} \delta n = R_n e^{-i\omega_n t} \quad (5.5.17)$$

οι εξισώσεις σχ. (5.5.15) και σχ. (5.5.16) γράφονται:

$$i\partial_t R_f + \frac{1}{2m_A} \nabla^2 R_f - [g_{11} f_0^2 (R_f + R_f^*) + g_{12} n_0 f_0 (R_n + R_n^*)] = 0 \quad (5.5.18)$$

$$i\partial_t R_n + \frac{1}{2m_H} \nabla^2 R_n - [g_{21} n_0 f_0 (R_f + R_f^*) + g_{22} n_0^2 (R_n + R_n^*)] = 0 \quad (5.5.19)$$

για  $R_f$  και  $R_n$  εν γένει μιγαδικούς, δηλαδή:

$$R_f = u_1 + iv_1 \quad (5.5.20)$$

$$R_n = u_2 + iv_2 \quad (5.5.21)$$

οι εξισώσεις σχ. (5.5.18) και σχ. (5.5.19) γράφονται:

$$i(\partial_t u_1 + i\partial_t v_1) + \frac{1}{2m_A}(\nabla^2 u_1 + i\nabla^2 v_1) - [2g_{11}f_0^2 u_1 + 2g_{12}n_0 f_0 u_2] = 0 \quad (5.5.22)$$

$$i(\partial_t u_2 + i\partial_t v_2) + \frac{1}{2m_H}(\nabla^2 u_2 + i\nabla^2 v_2) - [2g_{21}n_0 f_0 u_1 + 2g_{22}n_0^2 u_2] = 0 \quad (5.5.23)$$

Χωρίζοντας σε πραγματικά και φανταστικά μέρη κάθε μία από τις παραπάνω (Βλέπε σχ. (5.5.22) και σχ. (5.5.23) ) καταλήγουμε στις επόμενες τέσσερις εξισώσεις:

$$-\partial_t v_1 + \frac{1}{2m_A}\nabla^2 u_1 - [2g_{11}f_0^2 u_1 + 2g_{12}n_0 f_0 u_2] = 0 \quad (5.5.24)$$

$$\partial_t u_1 + \frac{1}{2m_A}\nabla^2 v_1 = 0 \quad (5.5.25)$$

$$-\partial_t v_2 + \frac{1}{2m_H}\nabla^2 u_2 - [2g_{21}n_0 f_0 u_1 + 2g_{22}n_0^2 u_2] = 0 \quad (5.5.26)$$

$$\partial_t u_2 + \frac{1}{2m_H}\nabla^2 v_2 = 0 \quad (5.5.27)$$

Γράφοντάς τους μιγαδικούς  $u_{1,2}$  και  $v_{1,2}$  σε εκθετική μορφή ως ακολούθως:

$$u_{1,2} = u_{01,2} e^{-i(\Omega t - \vec{Q}\vec{r})} + c.c \quad (5.5.28)$$

$$v_{1,2} = v_{01,2} e^{-i(\Omega t - \vec{Q}\vec{r})} + c.c \quad (5.5.29)$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις σχ. (5.5.24) και σχ. (5.5.25) σχ. καθώς και στις (5.5.26) και σχ. (5.5.27) αντίστοιχα έχουμε:

$$-\left[\frac{Q^2}{2m_A} + 2g_{11}f_0^2\right] u_{01} + i\Omega v_{01} - 2g_{12}f_0 n_0 u_{02} = 0 \quad (5.5.30)$$

$$-i\Omega u_{01} - \frac{Q^2}{2m_A} v_{01} = 0 \quad (5.5.31)$$

$$-\left[\frac{Q^2}{2m_H} + 2g_{22}n_0^2\right] u_{02} + i\Omega v_{02} - 2g_{21}f_0 n_0 u_{01} = 0 \quad (5.5.32)$$

$$-i\Omega u_{02} - \frac{Q^2}{2m_H} v_{02} = 0 \quad (5.5.33)$$

Από τις σχέσεις (5.5.30), (5.5.31), (5.5.32) και (5.5.33) κατασκευάζουμε την ορίζουσα των συντελεστών η οποία οφείλει να μηδενίζεται.

$$\det \begin{bmatrix} -(\frac{Q^2}{2m_A} + 2g_{11}f_0^2) & i\Omega & -2g_{12}f_0n_0 & 0 \\ -i\Omega & -\frac{Q^2}{2m_A} & 0 & 0 \\ -2g_{21}f_0n_0 & 0 & -(\frac{Q^2}{2m_H} + 2g_{22}n_0^2) & i\Omega \\ 0 & 0 & -i\Omega & -\frac{Q^2}{2m_H} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.5.34)$$

Υπολογισμός της ανωτέρω ορίζουσας οδηγεί στο τριώνυμο:

$$\Omega^4 - \beta\Omega^2 + \gamma = 0 \quad (5.5.35)$$

όπου έχουμε ορίσει ως  $\beta$  και  $\gamma$  τα ακόλουθα:

$$\beta = x(x + 2g_{22}n_0^2) + y(y + 2g_{11}f_0^2) \quad (5.5.36)$$

$$\gamma = xy(y + 2g_{11}f_0^2)(x + 2g_{22}n_0^2) - 4xyf_0^2n_0^2g_{12}g_{21} \quad (5.5.37)$$

ενώ  $x$  και  $y$  με  $x, y$  να ανήκουν στο διάστημα  $[0, \infty)$ :

$$x = \frac{Q^2}{2m_H} \quad (5.5.38)$$

$$y = \frac{Q^2}{2m_A} \quad (5.5.39)$$

Από τον ορισμό των  $x, y$  έπεται ότι θετικές ρίζες υπάρχουν όταν  $\beta > 0$  και  $\gamma > 0$ .

Για  $\beta > 0$  καταλήγουμε στην ακόλουθη ανίσωση για τα  $x, y$ :

$$(x + 2g_{22}n_0^2) + y(y + 2g_{11}f_0^2) > 0 \quad (5.5.40)$$

η οποία οφείλει να ισχύει για κάθε τιμή τους. Έτσι προκύπτει η απαίτηση  $g_{11} > 0$  και  $g_{22} > 0$ .

Αντίστοιχα για  $\gamma > 0$  έχουμε:

$$\begin{aligned} & xy(y + 2g_{11}f_0^2)(x + 2g_{22}n_0^2) - 4xyf_0^2n_0^2g_{12}g_{21} > 0 \\ \Rightarrow & x^2y^2 + 2x^2yg_{11}f_0^2 + 2xy^2g_{22}n_0^2 + 4xyn_0^2f_0^2(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) > 0 \end{aligned} \quad (5.5.41)$$

Για κάθε  $x, y \geq 0$  οι τρεις πρώτοι όροι της ανίσωσης σχ. (5.5.41) είναι θετικοί. Αρκεί επομένως για να ικανοποιείται να είναι θετικός και ο τέταρτος όρος αυτής. Παρατήρηση του όρου αυτού οδηγεί στην επόμενη ορίζουσα:

$$\det \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.5.42)$$

Ελέγχοντας ξεχωριστά τις απαιτήσεις στις οποίες έχουμε καταλήξει, κάνοντας χρήση των σταθερών που αναφέρονται στον πίνακα σταθερών 2, παρατηρούμε ότι η απαίτηση  $g_{22} > 0$  δεν ικανοποιείται. Ελέγχοντας την ορίζουσα σχ. (5.5.42), με την βοήθεια των σχέσεων (5.5.3), (5.5.4), (5.5.5) και (5.5.6) έχουμε:

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \frac{g^2}{4m_A m_H} \left[ -1.2\lambda^2 \left[ 3 - \frac{3}{4} \left( \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2 - 4} \right) \right] \right] \quad (5.5.43)$$

$$- \frac{1}{2} \left[ -3 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4} \right] \left[ -1.8 + 0.63 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 4} \right] > 0 \quad (5.5.44)$$

Η τελευταία σχέση (5.5.44) πρέπει να ισχύει για κάθε τιμή του  $\lambda$ . Ωστόσο αναλυτικός υπολογισμός αυτής οδηγεί μόνο σε αρνητικές λύσεις, με άμεσο αποτέλεσμα και η απαίτηση σχ. (5.5.42) να μην ικανοποιείται. Οδηγούμαστε επομένως στο συμπέρασμα, ότι τα επίπεδα κύματα δεν αποτελούν ευσταθείς λύσεις του συζευγμένου συστήματος των εξισώσεων NLS.

## 5.6 Συμπεράσματα

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, είμαστε πλέον σε θέση να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε. Σε όλη την έκταση της παρούσας εργασίας σκοπός μας ήταν η εύρεση λύσεων των εξισώσεων κίνησης των πεδίων, τόσο σε μία θεωρία βαθμίδας τύπου  $U(1)$  όσο και σε μία θεωρία τύπου  $SU(2)$ , στις οποίες γίνεται αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας. Έτσι στην μεν πρώτη περίπτωση, καταλήξαμε με χρήση της διαταρακτικής μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων σε μία μονοδιάστατη εξίσωση NLS, σχέση (4.2.41) για την οποία τα σολιτόνια αποτελούν τις θεμελιώδεις μη γραμμικές της, διεγέρσεις. Στην συνέχεια μέσω της μελέτης του προσήμου του όρου μη γραμμικότητας και για στατικές λύσεις παραστάθηκαν γραφικά το μαγνητικό πεδίο  $B$  και το πεδίο  $\eta$ , τόσο στην περίπτωση κατά την οποία το  $s < 0$ , σχέσεις (4.2.47) και (4.2.48) όπως φαίνονται στο Σχήμα 4.1, όσο και στην περίπτωση όπου το  $s > 0$ , σχέσεις (4.2.50) και (4.2.51) που παριστάνονται στο Σχήμα 4.2. Επιπλέον στην περίπτωση αυτή προσδιορίστηκαν οι επιτρεπόμενες περιοχές για το λόγο των μαζών  $\lambda = m_H/m_A$ , καταλήγοντας στην ανίσωση  $\lambda > 2$ . Ακολούθως με χρήση μη διαταρακτικής μεθόδου, αναζητήθηκαν λύσεις με την μορφή δυναμοσειρών. Σκοπός μίας τέτοιας διερεύνησης δεν ήταν άλλος από την σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων και επομένως την ενίσχυση της ορθότητας της διαταρακτικής μεθόδου που εφαρμόσαμε. Αντίστοιχα καταλήξαμε στις σχέσεις για το μαγνητικό πεδίο  $B$  και το πεδίο  $\rho$ , σχέσεις (4.3.43) και (4.3.39). Επιπλέον προσδιορισμός του λόγου  $\lambda$ , οδήγησε στις ίδιες ανισωτικές σχέσεις, με άμεσο αποτέλεσμα την ενίσχυση της χρησιμοποιούμενης διαταρακτικής μεθόδου.

Αντίστοιχα στην περίπτωση της  $SU(2)$  με αυθόρμητη παραβίαση της συμμετρίας, καταλήξαμε σε τριδιάστατη εξίσωση NLS σχέση (5.1.33), με την μη γραμμικότητα να οφείλεται:

- 1) στην αλληλεπίδραση των  $H$ ,  $A_\mu^\alpha$
- 2) σε αυτοαλληλεπίδραση  $\propto A^3$ .

Αρχικά διερευνήσαμε λύσεις γκαουσιανού τύπου έχοντας ως βασικό κριτήριο των εντοπισμό των λύσεων αυτών. Η μελέτη της ευστάθειας τους προκύπτει μέσω της μελέτης του προσήμου του όρου μη γραμμικότητας. Η διερεύνηση αυτή μας οδήγησε σε ασταθείς



και επομένως μη αποδεκτές λύσεις, όπως φαίνονται στο σχήμα (5.1). Προχωρήσαμε λοιπόν στην διερεύνηση λύσεων με την μορφή μη γραμμικών επίπεδων κυμάτων, με βασικό κριτήριο αυτή τη φορά την ευστάθεια των λύσεων αυτών και καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι για να είναι οι λύσεις ευσταθείς πρέπει  $s > 0$ .

Στη συνέχεια, για  $s > 0$ , προσδιορίσαμε τις περιοχές για το λόγο  $\lambda$  και καταλήξαμε στις αντίστοιχες περιοχές για την μάζα του Higgs.

$$56 < m_H < 160\text{GeV} \quad (5.6.1)$$

$$m_H > 165\text{GeV} \quad (5.6.2)$$

Για την εξαγωγή των παραπάνω αποτελεσμάτων κάναμε χρήση της μάζας των  $W$ 's. Θεωρήσαμε δηλαδή ότι  $m_A = m_W = 80.4\text{GeV}$  και οδηγηθήκαμε σε αποτελέσματα που επιβεβαιώνονται και από τα μέχρι τώρα πειραματικά δεδομένα. Τέλος εξετάστηκε η περίπτωση κατά την οποία και τα δύο πεδία εκκινούν από την ίδια τάξη ως προς την παράμετρο  $\varepsilon$ . Οδηγηθήκαμε σε συζευγμένο σύστημα εξισώσεων NLS όπου θεωρώντας λύσεις με την μορφή μη γραμμικών επίπεδων κυμάτων και απαιτώντας ευστάθεια των λύσεων αυτών, δείξαμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λόγου των μαζών  $\lambda$ , οι λύσεις είναι ασταθείς. Η αστάθεια των λύσεων στην περίπτωση αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι, όταν τα πεδία ξεκινούν από την ίδια τάξη υπάρχει ισχυρότερη ζεύξη μεταξύ τους.



# Βιβλιογραφία

- [1] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*, 3rd Edition, Taylor & Francis Group, New York (2003)
- [2] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison - Wesley, Massachusetts (1995)
- [3] W. Greiner, S. Schramm, E. Stein, D.A. Bromley, *Quantum Chromodynamics*, Springer, New York (2002)
- [4] V.L. Ginzburg and L.D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 1064 (1950)
- [5] J. F. Annet *Superconductivity Superfluids and Condensates*, Oxford University Press (2004)
- [6] A.A. Abrikosov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **32**, 1442 (1957) [English translation: Sov. Phys. JETP 5 1174 (1957) ]
- [7] H.B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys., **B61** (1973)
- [8] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **64**, 1627 (1973) [Sov. Phys. JETP **37**, 823 (1973)].
- [9] Ablowitz, M. J. and Clarkson, P. A., *Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [10] S. G. Matinyan, G. K. Savvidy and N. G. Ter-Arutyunyan-Savvidy, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **80**, 830 (1981); B. V. Chirikov and D. L. Shepelyanskii, Pi'sma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34**, 171 (1981); S. G. Matinyan, G. K. Savvidy and N. G. Ter-Arutyunyan-Savvidy, Pi'sma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34**, 613 (1981); S. G. Matinyan, Fiz. Elem. Chastits. At. Yadra **16**, 522 (1985); S. G. Matinyan, E. P. Prokhorenko, and G. K. Savvidy, Pi'sma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **44**, 109 (1986).
- [11] S. Coleman, Comm. Math. Phys. **55**, 113 (1977), S. Coleman, Phys.Lett. 70 **B**(1977).
- [12] A.M. Polyakov, Phys. Lett. **59B**, 82(1975); A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwarz, and Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. **59B**, 85(1975).
- [13] A. Jeffrey and T. Kawahara, *Asymptotic methods in nonlinear wave theory*, Pitman (1982).

- [14] D. J. Frantzeskakis, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 213001 (2010).
- [15] G.P. Agrawal., *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, New York (1989).
- [16] B. A. Malomed *Soliton management in periodic systems* Birkhäuser 2006
- [17] Y. S. Kivshar and D. E. Pelinovsky, Phys. Rep. **331** 117 (2000)