

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών



Σχολή Θετικών Επιστημών

Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης Ηλεκτρονικής και
Ραδιοηλεκτρολογίας

Διπλωματική Εργασία

**Σολιτόνια σε ατομικά συμπυκνώματα Bose-Einstein και
πολαριτονικά υπερρευστά**

Νικόλαος Α. Ανδρούτσος

2013103

Επιβλέπων: καθηγητής Δημήτριος Ι. Φραντζεσκάκης

Αθήνα, 2015

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας αυτή την διπλωματική εργασία, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Δημήτριο Ι. Φραντζεσκάκη, με τον οποίο είχα μια άψογη και επικοινωνιακή συνεργασία. Επίσης, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω τόσο για την ευκαιρία που είχα να εργαστώ σ' αυτό το ενδιαφέρον και πρωτότυπο θέμα, όσο και για τη καθοδήγηση αλλά και τη συμβολή του στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στην οικογένειά μου, που με βοήθησαν τόσο ψυχολογικά όσο και υλικά, καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου καθώς επίσης και καθ' όλη την διάρκεια προετοιμασίας και ολοκλήρωσης της διπλωματικής μου εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται μη γραμμικά υλικά κύματα σολιτονίων σε συμπυκνώματα Bose-Einstein και σε μίγματα συμπυκνωμάτων, αποτελούμενα από δυο διαφορετικά συστατικά. Πιο συγκεκριμένα αναλύονται τα διανυσματικά σολιτόνια που μπορούν να προκύψουν σε ένα ατομικό συμπύκνωμα Bose-Einstein, στο οποίο οι σταθερές αλληλεπίδρασης ανάμεσα τόσο σε σωματίδια του ίδιου συστατικού, όσο και διαφορετικών, θα κατέχουν μια συγκεκριμένη τιμή. Επίσης, αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο μπορούν να παραχθούν έγκυρες αναλυτικές λύσεις σολιτονίων, ακόμα και έξω από το πλήρως ολοκληρώσιμο σύστημα και για όσο το δυνατόν πιο αυθαίρετες σταθερές αλληλεπίδρασης σε ένα ατομικό συμπύκνωμα Bose-Einstein. Επιπρόσθετα, μελετώνται οι ακέραιες αλλά και οι ημιακέραιες τοπολογικές διεγέρσεις σε ένα υπερρευστό συμπύκνωμα πολαριτονίων, σε μία αλλά και στις δύο διαστάσεις, για σταθερά αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε σωματίδια διαφορετικών συστατικών, πολύ μικρότερη από εκείνη ανάμεσα στα σωματίδια ίδιων συστατικών.

ABSTRACT

This M.Sc. thesis presents non-linear matter-wave solitons in Bose-Einstein condensates and mixtures of them, consisting of two different components. Specifically, it analyzes vector solitons, which may occur in atomic Bose-Einstein condensates. In these condensates, interaction constants between particles of either same or different components, will possess a specific value. Furthermore, it analyzes the procedure of valid analytical soliton solutions production in an atomic Bose-Einstein condensate, even outside of the very special integrable regime of equal interaction constants. In this case, interaction constants will be as general as possible. Similarly, this thesis studies topological excitations and half-integer topological excitations in a superfluid polariton condensate in one or two dimensions, under the regime which, the interaction constant between particles of different components is much smaller compared to this of particles between same components.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	7
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο	
ΓΕΝΙΚΑ ΣΟΛΙΤΟΝΙΑ ΚΑΙ NLS ΕΞΙΣΩΣΗ	13
1.1 Υλικά κύματα σολιτονίων σε BECs.....	13
1.2 Σολιτόνια σε BECs ενός συστατικού.....	13
1.3 Εξίσωση NLS και λύσεις σκοτεινών σολιτονίων.....	16
1.4 Ολοκληρώματα της κίνησης και βασικές ιδιότητες σκοτεινών σολιτονίων.....	21
1.5 Πολλαπλά σκοτεινά σολιτόνια και οι αλληλεπιδράσεις τους.....	23
1.5.1 Η κατάσταση δύο-σολιτονίων και οι συγκρούσεις μεταξύ σκοτεινών σολιτονίων.....	23
1.5.2 Η απωστική αλληλεπίδραση ανάμεσα σε αργά σκοτεινά σολιτόνια.....	28
1.5.3 Πειράματα πολλαπλών σκοτεινών σολιτονίων.....	29
1.6 Αδιάστατη GP εξίσωση υπό την παρουσία δυναμικού.....	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο	
ΣΟΛΙΤΟΝΙΑ ΣΕ ΑΤΟΜΙΚΑ ΣΥΜΠΥΚΝΩΜΑΤΑ BOSE-EINSTEIN	33
2.1 Υλικά-κύματα σκοτεινών σολιτονίων σε πολλαπλών συστατικών BECs..	33
2.2 Σολιτόνια σε μείγματα από δυο BEC	33
2.3 Ορισμός του μοντέλου.....	35

2.4 Οι θεμελιώδεις καταστάσεις του μείγματος.....	36
2.5 Ο διαχωρισμός της φάσης.....	37
2.6 Διανυσματικά σολιτόνια σε BECs δυο συστατικών.....	38
2.7 Διανυσματικά σολιτόνια στην ομογενή περίπτωση.....	39
2.8 Ορισμός του μοντέλου για την ανεύρεση έγκυρων αναλυτικών λύσεων σολιτονίων υπό αυθαίρετες σταθερές αλληλεπίδρασης.....	51
2.9 Αναλυτικές λύσεις DB σολιτονίων για αυθαίρετες σταθερές αλληλεπίδρασης.....	53

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

ΣΟΛΙΤΟΝΙΑ ΣΕ ΠΟΛΑΡΙΤΟΝΙΚΑ ΥΠΕΡΕΥΣΤΑ.....	56
3.1 Σολιτόνια σε 1D BECs.....	56
3.2 Δίνες και πλάγια σολιτόνια σε 2D BECs.....	58
3.3 Τοπολογικές διεγέρσεις σε πολαριτονικά κβαντικά ρευστά.....	61
3.4 Ημιακέραιες τοπολογικές διεγέρσεις σε σπινωρικά BECs.....	67
3.4.1 Μισά σολιτόνια στην μια διάσταση.....	68
3.4.2 Πλάγια μισά σολιτόνια στις δυο διαστάσεις.....	73
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	75
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	77

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1.1: Η πυκνότητα ενός σκοτεινού και ενός φωτεινού σολιτονίου.....	14
Εικόνα 1.2: Παραδείγματα της πυκνότητας και της φάσης μαύρων και γκρι σολιτονίων.....	20
Εικόνα 1.3: Προφίλ της πυκνότητας της λύσης δυο-σολιτονίων.....	25
Εικόνα 1.4: Τροχιές σολιτονίων για συμμετρικές και ασυμμετρικές δυο-σολιτονίων συγκρούσεις για διαφορετικές αρχικές ταχύτητες.....	27
Εικόνα 2.1: Η πυκνότητα ενός σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου.....	34
Εικόνα 2.2: Οι θεμελιώδεις καταστάσεις του μίγματος.....	37
Εικόνα 2.3: Παράδειγμα ενός DB σολιτονίου.....	42
Εικόνα 2.4: Παραδείγματα των beating DD σολιτονίων.....	46
Εικόνα 2.5: Παραδείγματα των regular DD σολιτονίων.....	47
Εικόνα 2.6: Πειραματικές εικόνες DB και DD σολιτονίων σε ένα δυο συστατικών BEC.....	50
Εικόνα 3.1: Η κανονικοποιημένη πυκνότητα του σκοτεινού σολιτονίου μαζί με τη φάση του.....	58
Εικόνα 3.2: Οι διασπορές των στοιχειωδών διεγέρσεων σε πεπερασμένη ορμή διέγερσης.....	63
Εικόνα 3.3: Αριθμητική λύση που παρουσιάζει στάσιμα 2D πλάγια σολιτόνια που εμφανίζονται στον απόηχο του εμποδίου.....	66
Εικόνα 3.4: Κανονικοποιημένα προφίλ της πυκνότητας των HSs και των OHSs.....	72

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία με θέμα «Σολιτόνια σε ατομικά συμπυκνώματα Bose-Einstein και πολαριτονικά υπερρευστά» εκπονήθηκε στο πλαίσιο των διπλωματικών εργασιών του διατμηματικού Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης Ηλεκτρονικής και Ραδιοηλεκτρολογίας των τμημάτων Φυσικής και Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, για την απόκτηση του ομώνυμου διπλώματος. Η υλοποίηση της εργασίας αυτής έχει ως στόχο την μελέτη και την ανάλυση σολιτονίων (solitons), τόσο θεωρητικά όσο και μαθηματικά.

Πιο συγκεκριμένα, η διπλωματική αυτή εργασία, απαρτίζεται από τρία βασικά κεφάλαια και η σύνθεσή της έχει ως ακολούθως. Αρχικά γίνεται μια εισαγωγή τόσο στα συμπυκνώματα Bose-Einstein όσο και στα μίγματα των συμπυκνωμάτων αυτών, αλλά και στα υπερρευστά εξιτονικών πολαριτονίων. Στη συνέχεια και κατά το πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, θα αναλυθεί η Nonlinear Schrödinger(NLS) εξίσωση, τα σκοτεινά (dark) και φωτεινά (bright) σολιτόνια και επίσης μερικές βασικές έννοιες και ιδιότητες αυτών. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα μελετηθούν τα σολιτόνια σε ατομικά Bose-Einstein συμπυκνώματα (BECs), με επίκεντρο τα διανυσματικά σολιτόνια που προκύπτουν σε αυτά. Εν συνεχεία, στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας, θα μελετηθούν τα υπερρευστά συμπυκνώματα εξιτονίων-πολαριτονίων και πιο συγκεκριμένα τα σολιτόνια και τα μισά σολιτόνια για συστήματα μιας διάστασης και οι δίνες, τα πλάγια σολιτόνια και τα πλάγια μισά σολιτόνια, που μπορεί να προκύψουν σε συστήματα δυο διαστάσεων.

Αν και η εργασία δεν εστιάζεται σε συστήματα ανώτερων διαστάσεων (2D,3D) και το σχηματισμό δινών (vortices), παρόλα αυτά αναφέρονται κάποιες ιδιότητες αυτών, ούτως ώστε στο πλαίσιο των πολαριτονικών υπερρευστών και πιο συγκεκριμένα κατά τη μελέτη των ημιακέραιων τοπολογικών διεγέρσεων να παρουσιαστούν και να σχολιαστούν λύσεις και για τα επανομαζόμενα πλάγια (oblique) και πλάγια μισά σολιτόνια (oblique half) σολιτόνια, αντίστοιχων δηλαδή ημιακέραιων τοπολογικών διεγέρσεων με τα μισά σολιτόνια αλλά στις δυο διαστάσεις.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το φαινόμενο της συμπύκνωσης Bose-Einstein [Bose-Einstein condensation (BEC)] σε αραιά αέρια ατόμων, αποτελεί μια ξεκάθαρα μακροσκοπική κβαντική κατάσταση, σε ένα πολυσωματιδιακό σύστημα[5]. Η θεωρητική πρόβλεψη αυτής της κατάστασης της ύλης, έγινε το 1920 από τους Satyendra Nath Bose και Albert Einstein. Είχαν προβλέψει ότι για αρκούντως χαμηλές θερμοκρασίες ένας πεπερασμένος αριθμός ατόμων σε ένα αέριο μποζονίων, μπορεί να καταλάβει την ίδια, χαμηλότερη διαθέσιμη ενεργειακή στάθμη. Τότε το πραγματικό μέγεθος των επιμέρους ατόμων γίνεται συγκρίσιμο με το αντίστοιχο μήκος κύματος de Broglie, και όλα τα άτομα συμπεριφέρονται συλλογικά σαν ένα γιγάντιο υλικό κύμα (matter wave). Στην πραγματικότητα η συμπύκνωση παρατηρείται στα πειράματα σε θερμοκρασίες μεταξύ 100 nK και 1μK σε αραιά αέρια αλκαλίων μετάλλων, με πυκνότητες της τάξης των 10^{15} cm^{-3} . Ο αριθμός των ατόμων σε ένα τέτοιο συμπύκνωμα μπορεί να είναι της τάξης του 10^6 είτε μερικές εκατοντάδες άτομα, ανάλογα με την εκάστοτε πειραματική διάταξη. Οι διαστάσεις ενός τυπικού BEC είναι περίπου 10 μm, ενώ ο χρόνος ζωής του μπορεί να φτάσει πλέον, μέχρι και μερικά λεπτά.

Η πειραματική υλοποίηση ενός ατομικού BEC, πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1995 σε δύο πρωτοποριακά πειράματα. Το πρώτο από την ομάδα του JILA, στο Πανεπιστήμιο του Κολοράντο χρησιμοποιώντας άτομα ρουβιδίου ^{87}Rb και το άλλο στο MIT χρησιμοποιώντας άτομα νατρίου ^{23}Na . Οι επικεφαλές των αντίστοιχων πειραμάτων E.Cornel, Weiman (Colorado) και W.Ketterle (MIT) τιμήθηκαν το 2001 με το βραβείο Νόμπελ Φυσικής. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι ενώ τα παραπάνω πειράματα διεξήχθησαν χρησιμοποιώντας άτομα με απωστικές αμοιβαίες αλληλεπιδράσεις, ενδείξεις συμπύκνωσης μποζονικού αερίου με ελκτικές αλληλεπιδράσεις, είχαν αναφερθεί παράλληλα και στα πειράματα στο Πανεπιστήμιο Rice, χρησιμοποιώντας άτομα λιθίου ^7Li . Αυτά τα πρωτοποριακά πειράματα από τρία διαφορετικά εργαστήρια, αποτέλεσαν το έναυσμα για την έντονη δραστηριότητα στην περιοχή αυτή, που αφορά τόσο στα πειράματα (σήμερα

υπάρχουν πάνω από εκατό εργαστήρια με BEC) όσο και στη θεωρία. Η μεγάλη πρόοδος που επιτεύχθηκε στον τομέα της φυσικής των ατομικών συμπυκνωμάτων Bose-Einstein, είχε ως αποτέλεσμα τη δημιουργία νέων ερευνητικών κατευθύνσεων όπως της οπτικής των ατόμων (atom optics) κλπ.

Μια πολύ ενδιαφέρουσα πτυχή των ατομικών BEC πηγάζει από το γεγονός ότι αυτό το πεδίο είναι στενά συνδεδεμένο με φαινόμενα που συναντώνται σε ποικίλους κλάδους της φυσικής, όπως στη φυσική συμπυκνωμένης ύλης, στην υπερρευστότητα, στους υπεραγωγούς στα λείζερ, στη μη γραμμική οπτική και στη θεωρία των μη γραμμικών κυμάτων. Η εγγενής μη γραμμικότητα, καθώς και η συνοχή της φάσης (phase coherence), είναι δύο ιδιότητες κοινές στα προαναφερθέντα συστήματα. Τα υπέρψυχρα ατομικά αέρια ωστόσο προσφέρουν τη μοναδική δυνατότητα της πειραματικά ελεγχόμενης μη γραμμικότητας, μέσω συντονισμών Feshbach και της φάσης τους, με τη χρήση εξωτερικών οπτικών και μαγνητικών πεδίων. Από θεωρητική σκοπιά, η παραπάνω σύνδεση των BEC με άλλους κλάδους της φυσικής, γίνεται προφανής από το γεγονός ότι πολλά φαινόμενα που παρατηρούνται στα BEC περιγράφονται στο πλαίσιο της θεωρίας μέσου πεδίου (mean field), μέσω της εξίσωσης Gross-Pitaevskii (GP) που έχει την ακόλουθη αδιάστατη μορφή (σε μονάδες τέτοιες ώστε $\hbar = m = 1$):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2} i \nabla^2 + V(r, t) + g |\psi|^2 \right) \psi$$

Η κυματοσυνάρτηση $\psi(r, t)$ είναι η παράμετρος τάξης του συμπυκνώματος. Ο τελεστής της ορμής είναι ο όρος $i \nabla^2$, η παράμετρος g περιγράφει το μέγεθος των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των ατόμων και η παράμετρος $V(r, t)$ είναι το εξωτερικό δυναμικό (που παγιδεύει ή/και ελέγχει τα άτομα). Η παραπάνω εξίσωση είναι μια μερική διαφορική εξίσωση, που έχει τη μορφή μιας μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger (non linear Schrödinger equation, NLSE) η οποία απαντάται σε πολλούς κλάδους της φυσικής, όπως στη μη γραμμική οπτική, στα βαθιά υδάτινα κύματα (deep water waves), στα υπερρευστά, στη φυσική πλάσματος, κ.α.

Παρά το γεγονός ότι η εξίσωση GP παρουσιάστηκε στην αρχή της δεκαετίας του 60, μόλις σχετικά πρόσφατα (δηλ. περίπου 40 χρόνια μετά) δείχθηκε ότι αυτό το μοντέλο μπορεί να εξαχθεί αυστηρά με αυτό-συνεπή τρόπο, από το αντίστοιχο πολυσωματιδιακό κβαντικό πρόβλημα (many-body quantum problem). Έτσι δεν πρέπει να αποτελεί έκπληξη ότι το μοντέλο αυτό έχει αποδειχθεί εξαιρετικά χρήσιμο, έχοντας τη δυνατότητα να περιγράψει με ακρίβεια πολλές από τις στατικές και δυναμικές ιδιότητες του συμπυκνώματος. Τέτοιες ιδιότητες συμπεριλαμβάνουν τη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος για διαφορετικές γεωμετρίες παγίδευσης, την ταχύτητα του ήχου, αλλά και τους συλλογικούς τρόπους ταλάντωσης (collective modes), όπως τον διπολικό (dipole) και τον τετραπολικό (quadrupole) τρόπο. Ακόμη επίσης σημαντικό είναι ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη μη γραμμικών διεγέρσεων των BEC στη μορφή σολιτονίων (solitons) και στροβίλων (vortices), αλλά και άλλων μη γραμμικών φαινομένων όπως η μίξη τεσσάρων κυμάτων (four-wave mixing) και η γένεση ωστικών κυμάτων. Σε κάθε περίπτωση, η περιγραφή των παραπάνω φαινομένων μέσω της εξίσωσης GP βρίσκεται σε πολύ καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα.

Μείγματα συμπυκνωμάτων από υπέρψυχρα ατομικά αέρια κατασκευάστηκαν πειραματικά αμέσως μετά τα πρώτα πειράματα με βαθμωτά BEC (που αποτελούνται από ένα μόνο συστατικό). Συγκεκριμένα, στα πειράματα της ομάδας του MIT, συμπυκνώθηκαν και οι τρεις $F=1$ καταστάσεις υπέρλεπτης υφής του ^{23}Na σε οπτική παγίδα, γεγονός που αποτελεί την πρώτη παρατήρηση ενός σπινωρικού (spinor) BEC. Τα σπινωρικά συμπυκνώματα, κυρίως λόγω των ενδογενών αλληλεπιδράσεων του σπιν, εμφανίζουν ένα πλούσιο διάγραμμα φάσεων με διαφορετικές υφές του σπιν (spin-textures), που εξαρτάται από το συνολικό αριθμό των καταστάσεων σπιν (πειραματικά έχουν πλέον κατασκευαστεί συμπυκνώματα καταστάσεων με $F=2$ αλλά και $F=3$). Ο πρόσθετος βαθμός ελευθερίας λόγω σπιν επιτρέπει την μελέτη πολλών νέων φαινομένων στα σπινωρικά BEC, όπως αλλαγές φάσης από φερρομαγνητικές σε αντι-φερρομαγνητικές καταστάσεις, αλλά και η αυθόρμητη μαγνήτιση. Παράλληλα, οι επιπλέον εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας λόγω σπιν και οι αντίστοιχες συμμετρίες τους

μπορούν να οδηγήσουν στη δημιουργία τοπολογικών εντοπισμένων λύσεων όπως στροβίλους, μονόπολα και Skyrmions.

Παράλληλα με τις πρώτες μελέτες σε σπινωρικά BEC, σε μια σειρά πειραμάτων στο εργαστήριο του JILA χρησιμοποιώντας μια διαφορετική μέθοδο, κατάφεραν να συμπυκνώσουν δυο διαφορετικές καταστάσεις υπέρλεπτης υφής του ^{87}Rb και συγκεκριμένα τις καταστάσεις $|2,2\rangle$ και $|1,-1\rangle$, κατασκευάζοντας έτσι το πρώτο «ψευδο-σπινωρικό» (pseudo-spinor) συμπύκνωμα, ένα μείγμα δυο συμπυκνωμάτων που δεν ανήκουν στην ίδια κατάσταση F. Ο όρος «ψευδο-σπινωρικό» χρησιμοποιείται ακριβώς για να τονίσει ότι τα δυο συστατικά δεν αλληλεπιδρούν μέσω του σπιν τους, ενώ πολλές φορές αναφέρονται στη βιβλιογραφία και ως «διανυσματικά BEC», επειδή περιγράφονται από μια διανυσματική εξίσωση GP. Ένας μεγάλος αριθμός πειραματικών και θεωρητικών εργασιών έχει ασχοληθεί με φαινόμενα που εμφανίζονται σε τέτοια μείγματα συμπυκνωμάτων, όπως η εμφάνιση «περιοχών» σπιν (spin domains), η δυναμική πλέγματος στροβίλων και η εμφάνιση εγκάρσιων κυμάτων ψευδο-σπιν (longitudinal “spin waves”). Επιπλέον, οι σύγχρονες πειραματικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται στα υπέρψυχρα άτομα, επιτρέπουν τη μελέτη των υδροδυναμικών ιδιοτήτων του μείγματος BEC και την παρατήρηση φαινομένων όπως η αστάθεια Rayleigh-Taylor και η κβαντική τύρβη.

Τα πολαριτόνια εξιτονίων είναι οι μικτές καταστάσεις ανάμεσα σε φωτόνια κοιλότητας και εξιτόνια κβαντικών πηγαδιών, συζευγμένα από ισχυρή αλληλεπίδραση φωτός και ύλης μέσα σε μικροκοιλότητες. Αποτελούν δηλαδή ένα είδος ψευδοσωμάτων. Τα πολαριτόνια έχουν γίνει πρόσφατα ένα μοντέλο για τη μελέτη των BECs σε συστήματα μίας ή δύο διαστάσεων, για σχετικά φαινόμενα όπως αυτό της υπερρευστότητας, των στροβίλων ή των σολιτονίων, χάρη στον υψηλό βαθμό ελέγχου που προσφέρεται από το σύστημα, όπως επίσης και λόγω της εκπομπής λέιζερ με εξαιρετικά χαμηλό κατώφλι, αλλά και της επίτευξης Bose-Einstein συμπυκνωμάτων και υπερρευστών καταστάσεων για θερμοκρασίες πολύ υψηλότερες από εκείνες των ατομικών συμπυκνωμάτων και των παγωμένων εξιτονίων στη στερεά[15]. Διαθέτουν συναρπαστικές ιδιότητες, συμπεριλαμβανομένων εκείνης του

φωτός με μικρή ενεργό μάζα, αλλά και της ύλης (αυτό-αλληλεπιδράσεις με φωνόνια). Ο πεπερασμένος χρόνος ζωής των σωματιδίων τους, τα καθιστά ικανά ακόμα και για την πιθανή τεχνητή κατασκευή ηχητικών μαύρων τρυπών (sonic black holes), καθώς υπάρχει αναλογία ανάμεσα στις εξισώσεις που περιγράφουν τις διεγέρσεις του BEC που σχηματίζεται, με τις μετρικές του καμπυλωτού χωρο-χρόνου. Η αναλογία αυτή έχει παρατηρηθεί εδώ και παραπάνω από δέκα χρόνια. Η δομή του σπιν τους είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσα, καθώς τα πολαριτόνια είναι μποζόνια με δύο μόνο πιθανές καταστάσεις σπιν ± 1 στον άξονα ανάπτυξης του δείγματος, που επιτρέπει σε ένα δυο συστατικών σπινωριακό συμπύκνωμα να σχηματιστεί.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό τους που θα χρησιμοποιηθεί και στη συνέχεια είναι η ισχυρή σπιν-ανισοτροπία στις αλληλεπιδράσεις τους. Η ενέργεια αλληλεπίδρασης του πολαριτονικού συμπυκνώματος ελαχιστοποιείται όταν αυτό είναι γραμμικά πολωμένο. Αυτό δίνει ένα χημικό δυναμικό τουλάχιστον δυο φορές μικρότερο απ' ό τι στην περίπτωση της κυκλικής πόλωσης. Ένα πολαριτονικό Bose-Einstein συμπύκνωμα, που αποτελείται από δύο συστατικά με διαφορετικό σπιν, μπορεί να υποστηρίξει την ύπαρξη των μισών-σολιτονίων (half-solitons) και των μισών-στροβίλων (half-vortices), όπου παρατηρήθηκαν για πρώτη φορά το 2009 και θα αναλυθούν περαιτέρω στη συνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΓΕΝΙΚΑ ΣΟΛΙΤΟΝΙΑ ΚΑΙ NLS ΕΞΙΣΩΣΗ

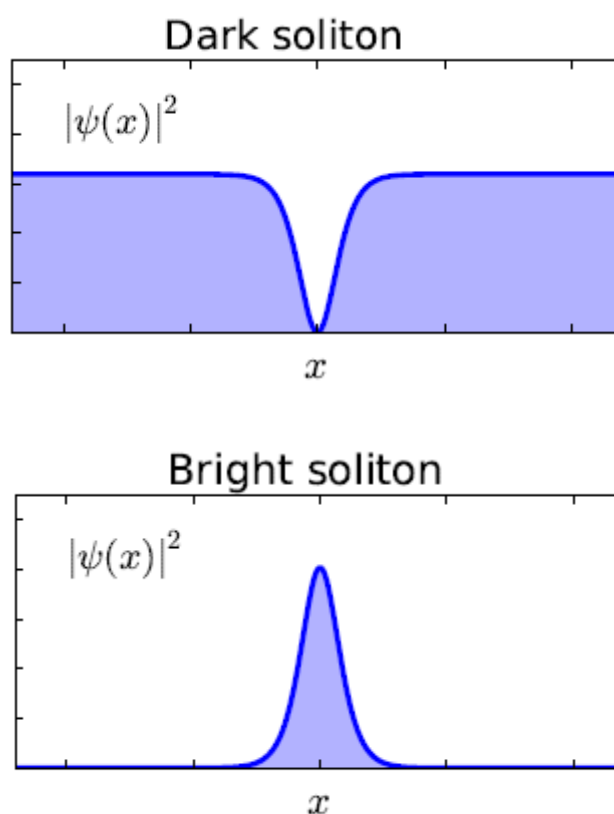
1.1 Υλικά κύματα σολιτονίων σε BEC

Μια από τις πιο σημαντικές επιτυχίες της θεωρίας μέσου πεδίου στα BECs, είναι η πρόβλεψη της ύπαρξης και η περιγραφή της δυναμικής εντοπισμένων μη γραμμικών υλικών κυμάτων, όπως παρατηρούνται στα πειράματα[5]. Αυτό γίνεται στο πλαίσιο της μελέτης της εξίσωσης GP που αναφέρθηκε. Τα εντοπισμένα υλικά κύματα μπορεί να έχουν τη μορφή των λεγόμενων σολιτονίων στη μια διάσταση και δομών με στροβιλισμό (στρόβιλοι, δακτύλιοι στροβίλων, πλέγματα στροβίλων, κλπ.) σε ανώτερες διαστάσεις. Τα σολιτόνια είναι μη γραμμικά εντοπισμένα κύματα (που η μελέτη τους ξεκινά από τις παρατηρήσεις του J.S. Russel το 1840), τα οποία απαντώνται και παρατηρούνται στα περισσότερα φυσικά συστήματα που εμφανίζουν μη γραμμικότητα και διασπορά. Έτσι, εφαρμογές των σολιτονίων συναντώνται σε ένα ευρύτατο φάσμα περιοχών της φυσικής που περιλαμβάνει τη φυσική υψηλών ενεργειών και την κοσμολογία, τη μη γραμμική οπτική και τους φωτονικούς κρυστάλλους, τα υδάτινα κύματα, τη φυσική συμπυκνωμένης ύλης, ακόμα τη μελέτη των πρωτεϊνών και του DNA.

1.2 Σολιτόνια σε BECs ενός συστατικού

Τα υλικά κύματα σολιτονίων (matter-wave solitons), όντας στην πραγματικότητα οι πλέον στοιχειώδης μακροσκοπικές μη γραμμικές διεγέρσεις ενός συμπυκνώματος, έχουν προσελκύσει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Σε βαθμωτά συμπυκνώματα αποτελούμενα από μια κατάσταση υπέρλεπτης υφής του αερίου υπάρχουν δυο τύποι σολιτονίων, τα λεγόμενα σκοτεινά (dark) και φωτεινά (bright), για απωστικές ($g > 0$) και ελκτικές ($g < 0$) διατομικές αλληλεπιδράσεις αντίστοιχα[5]. Και οι δυο προαναφερθέντες τύποι σολιτονίων αποτελούν ακριβείς λύσεις της εξίσωσης GP που αναφέρθηκε, όταν $V(r,t) = 0$. Συγκεκριμένα, τα σκοτεινά σολιτόνια (που προβλέφθηκε ότι

υπάρχουν σε BEC από το 1973) έχουν τη μορφή ενός βυθίσματος στην πυκνότητα του συμπυκνώματος, όπως φαίνεται στο επάνω πάνελ της εικόνας 1.1. Η ονομασία «σκοτεινό» , που προέρχεται από την οπτική, είναι απόρροια της μορφής του: εκεί παρατηρείται μια σκοτεινή «λωρίδα» (εντοπισμένη απώλεια φωτός) σε ένα φωτεινό υπόβαθρο. Αντιθέτως τα φωτεινά σολιτόνια, έχουν την μορφή εντοπισμένων παλμών, όπως φαίνεται στο κάτω πάνελ της εικόνας 1.1. Η ονομασία «φωτεινό» , που επίσης προέρχεται από την οπτική, αναφέρεται στο γεγονός ότι το φωτεινό σολιτόνιο παρατηρείται σαν μια εντοπισμένη δέσμη φωτός σε ένα σκοτεινό υπόβαθρο.



Εικόνα 1.1: η πυκνότητα $|\psi(x)|^2$ ενός σκοτεινού σολιτονίου (επάνω πάνελ) και ενός φωτεινού σολιτονίου (κάτω πάνελ)

Σολιτόνια έχουν παρατηρηθεί σε πειράματα με βαθμωτά BECs χρησιμοποιώντας διάφορες σύγχρονες τεχνικές. Για την δημιουργία σκοτεινών

σολιτονίων, αυτές περιλαμβάνουν τη μέθοδο «τυπώματος φάσης» (phase imprinting), τη μέθοδο «διαχείρισης της πυκνότητας» (density engineering), ή συνδυασμό και των δυο. Από την άλλη πλευρά, για την δημιουργία φωτεινών σολιτονίων χρησιμοποιείται κυρίως η αλλαγή προσήμου της παραμέτρου g (δηλαδή η αλλαγή της φύσης των αλληλεπιδράσεων των ατόμων από απωστικές σε ελκτικές) μέσω συντονισμού Feshbach.

Δεν αποτελεί έκπληξη, ότι τα σολιτονικά υλικά κύματα ατομικών BECs έχουν προσελκύσει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Αυτό οφείλεται σε διάφορους λόγους. Κατ' αρχήν, τα σκοτεινά σολιτόνια, όπως και οι στρόβιλοι σε ανώτερες διαστάσεις, εμφανίζονται αυθόρμητα ως τοπολογικές ατέλειες (topological defects) κατά την αλλαγή φάσης που οδηγεί στη συμπύκνωση, ακολουθώντας τον μηχανισμό Kibble-Zurek. Από την άλλη πλευρά, τα φωτεινά σολιτόνια εμφανίζονται μετά την εκδήλωση της «αστάθειας διαμόρφωσης» (modulational instability), που αφορά την αστάθεια επιπέδων κυμάτων λόγω της μη γραμμικότητας και αποτελεί έναν βασικό μηχανισμό μορφογένεσης (pattern formation). Έτσι, η αυθόρμητη γένεση των κυμάτων αυτών αποτελούν «υπογραφές» θεμελιωδών φαινομένων που απαντώνται γενικά στη φυσική. Επίσης, το σκοτεινό σολιτόνιο αποτελεί το μη γραμμικό ανάλογο της πρώτης διεγερμένης κατάστασης του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή, οπότε συνιστούν ένα σύνδεσμο μεταξύ της καθιερωμένης κβαντικής μηχανικής και του αλληλεπιδρώντος αερίου μποζονίων. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι τόσο τα σκοτεινά όσο και τα φωτεινά σολιτόνια, αν και αφορούν ένα πολυσωματιδιακό κβαντικό σύστημα, παρουσιάζουν μια «κλασσική» συμπεριφορά, υπακούοντας Νευτώνειες εξισώσεις κίνησης. Αυτός ο σωματιδιακός τους χαρακτήρας, είναι εκείνος που καθιστά τα κύματα αυτά εξαιρετικούς υποψήφιους για πολλές εφαρμογές (όπως συμβαίνει στη μη γραμμική οπτική).

Η συχνότητα ταλάντωσης των σκοτεινών σολιτονίων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως διαγνωστικό εργαλείο για τη διαστατικότητα ή την ισχύ των διατομικών αλληλεπιδράσεων. Επίσης, έχουν προταθεί εφαρμογές όπου η ακριβής θέση του σκοτεινού σολιτονίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ανιχνεύσει την μεταβολή της φάσης σε ατομικά συμβολόμετρα, στη μη

γραμμική περιοχή. Σημαντικό μέρος της βιβλιογραφίας έχει ασχοληθεί επίσης με τη χρήση φωτεινών σολιτονίων σε ατομικά συμβολόμετρα, αξιοποιώντας τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Επιπλέον, οι ιδιότητες των φωτεινών σολιτονίων μπορούν να βρουν εφαρμογές στα ατομικά λέιζερ, ενώ με κατάλληλη διαχείρισή τους μέσω περιοδικών δυναμικών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για εφαρμογές στην κβαντική πληροφορική.

1.3 Εξίσωση NLS και λύσεις σκοτεινών σολιτονίων

Θα αρχίσουμε εξετάζοντας την περίπτωση του ψευδο-1D συμπυκνώματος που περιγράφεται από την GPE στη πιο κάτω αδιάστατη μορφή[1,3]:

$$i\partial_t\psi(z,t) = \left[-\frac{1}{2}\partial_z^2 + V(z) + |\psi(z,t)|^2 \right] \psi(z,t) \quad (1.1)$$

όπου η πυκνότητα $|\psi|^2$, το μήκος, ο χρόνος και η ενέργεια μετριοούνται αντίστοιχα σε μονάδες $2\alpha, \alpha_{\perp}, \omega_{\perp}^{-1}$ και $\hbar\omega_{\perp}$ ενώ το δυναμικό δίνεται από:

$$V(z) = \frac{1}{2}\Omega^2 z^2 \quad (1.2)$$

Στην υπό εξέταση περίπτωση η κανονικοποιημένη δύναμη παγίδας (aspect ratio) είναι $\Omega \ll 1$ και έτσι σαν πρώτο βήμα στην ανάλυσή μας θα αγνοήσουμε το δυναμικό $V(z)$. Σε μια τέτοια περίπτωση το συμπύκνωμα είναι ομογενές και μπορεί να περιγραφεί από την πλήρως ολοκληρώσιμη αποκεντρωμένη NLS εξίσωση:

$$i\partial_t\psi(z,t) = \left[-\frac{1}{2}\partial_z^2 + |\psi(z,t)|^2 \right] \psi(z,t) \quad (1.3)$$

Αυτή η εξίσωση κατέχει έναν άπειρο αριθμό σωματιδίων διατηρούμενων ποσοτήτων (ολοκληρώματα της κίνησης). Εκείνα της χαμηλότερης τάξης είναι ο αριθμός των σωματιδίων N , η ορμή P και η ενέργεια E , όπου αντίστοιχα δίνονται από:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dz \quad (1.4)$$

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi \partial_z \psi^* - \psi^* \partial_z \psi) dz \quad (1.5)$$

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|\partial_z \psi|^2 + |\psi|^4) dz \quad (1.6)$$

Επίσης πρέπει να αναφερθεί ότι η NLS εξίσωση (1.3) μπορεί να προκύψει από την Euler-Lagrange εξίσωση:

$$\frac{\delta L}{\delta \psi^*} = \partial_t (\partial_{\partial_t \psi^*} L) + \partial_z (\partial_{\partial_z \psi^*} L) \partial_{\psi^*} L = 0$$

όπου η Lagrangian πυκνότητα L δίνεται από την σχέση:

$$L = \frac{i}{2} (\psi \partial_t \psi^* - \psi^* \partial_t \psi) - \frac{1}{2} (|\partial_z \psi|^2 + |\psi|^4) \quad (1.7)$$

Η απλούστατη μη τετριμμένη λύση της εξίσωσης (1.3) είναι ένα επίπεδο κύμα κυματάριθμου k και συχνότητας ω , συγκεκριμένα:

$$\psi = \sqrt{n_0} \exp[i(kz - \omega t + \theta_0)], \quad \omega = \frac{1}{2} k^2 - \mu \quad (1.8)$$

Όπου ο περιορισμός της πυκνότητας του BEC n_0 ορίζει το χημικό δυναμικό, δηλαδή $n_0 = \mu$ και θ_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερά φάση. Αυτή η λύση η οποία ανάγεται στην $\Psi = \sqrt{n_0} \exp(-i\mu t / \hbar)$ για $k=0$ είναι διαμορφωμένη ευσταθής όπως μπορεί να επιβεβαιωθεί από αναλύσεις ευστάθειας. Για μικρές πυκνότητες, $n_0 \ll 1$ το πιο πάνω κύμα ικανοποιεί την γραμμική

Schrödinger εξίσωση, $i\partial_t \psi + \frac{1}{2} \partial_z^2 \psi = 0$ και οι σχετικές γραμμικές λύσεις της

NLS εξίσωσης χαρακτηρίζονται από τη σχέση διασποράς $\omega = \frac{1}{2} k^2$.

Σημειώστε ότι εάν το σύστημα χαρακτηρίζεται από ένα μήκος ℓ , τότε τα ολοκληρώματα της κίνησης για την εξίσωση (1.8) παίρνουν τις τιμές:

$$\begin{aligned} N &= 2n_0\ell \\ P &= kn_0\ell \\ E &= \frac{1}{2}(k^2 - n_0)n_0\ell \end{aligned} \quad (1.9)$$

Η NLS εξίσωση επιτρέπει μη τετριμμένες λύσεις, στη μορφή σκοτεινών σολιτονίων, τα οποία μπορούν να θεωρηθούν σαν ισχυρές μη γραμμικές διεγέρσεις της λύσης του επιπέδου κύματος, σχέση (1.8). Στην πιο γενική περίπτωση με κινούμενο υπόβαθρο [$k \neq 0$ στην εξίσωση (1.8)] μια μονή λύση σκοτεινού σολιτονίου μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\psi(z, t) = \sqrt{n_0} (B \tanh \zeta + iA) \exp[i(kz - \omega t + \theta_0)] \quad (1.10)$$

όπου $\zeta \equiv \sqrt{n_0} B [z - z_0(t)]$, εδώ $z_0(t) = ut + z_0$ είναι το κέντρο του σολιτονίου, z_0 είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά που αναπαριστά την αρχική τοποθεσία του σκοτεινού σολιτονίου, u είναι η σχετική ταχύτητα ανάμεσα στο σολιτόνιο και στο υπόβαθρο και δίνεται από $u = A\sqrt{n_0} + k$, η συχνότητα ω παρέχεται από τη σχέση διασποράς του επίπεδου κύματος υποβάθρου, $\omega = (1/2)k^2 + n_0$ και τελικά οι παράμετροι A και B είναι συνδεδεμένοι μέσω της εξίσωσης $A^2 + B^2 = 1$. Σε μερικές περιπτώσεις, είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε μια παράμετρο αντί για δύο και έτσι μπορεί κανείς να ορίσει:

$$A = \sin \phi \text{ και } B = \cos \phi \quad (1.11)$$

όπου ϕ καλείται η γωνία φάσης του σολιτονίου ($|\phi| < \pi/2$). Σημειώστε ότι παρόλο που οι ασυμπτωτικές της λύσης του σκοτεινού σολιτονίου, σχέση (1.10), συμπίπτουν με αυτές της εξίσωσης (1.8), τα επίπεδα κύματα στο $z \rightarrow \pm\infty$ έχουν διαφορετικές φάσεις και σαν αποτέλεσμα υπάρχει ένα μη τετριμμένο άλμα φάσης $\Delta\phi$ σε όλο το σκοτεινό σολιτόνιο που δίνεται από:

$$\Delta\phi = 2 \left[\tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right) - \frac{\pi}{2} \right] = -2 \tan^{-1} \left(\frac{A}{B} \right) \quad (1.12)$$

Από εδώ και στο εξής, θα θεωρήσουμε την απλούστατη περίπτωση όπου το υπόβαθρο του υλικού-κύματος σκοτεινού σολιτονίου είναι σε ανάπαυση, δηλαδή $k = 0$. Τότε η συχνότητα ω στην πραγματικότητα παίζει τον ρόλο των κανονικοποιημένων χημικών δυναμικών και συγκεκριμένα $\omega = \mu = n_0$, το οποίο ορίζεται από τον αριθμό των ατόμων στο συμπύκνωμα.

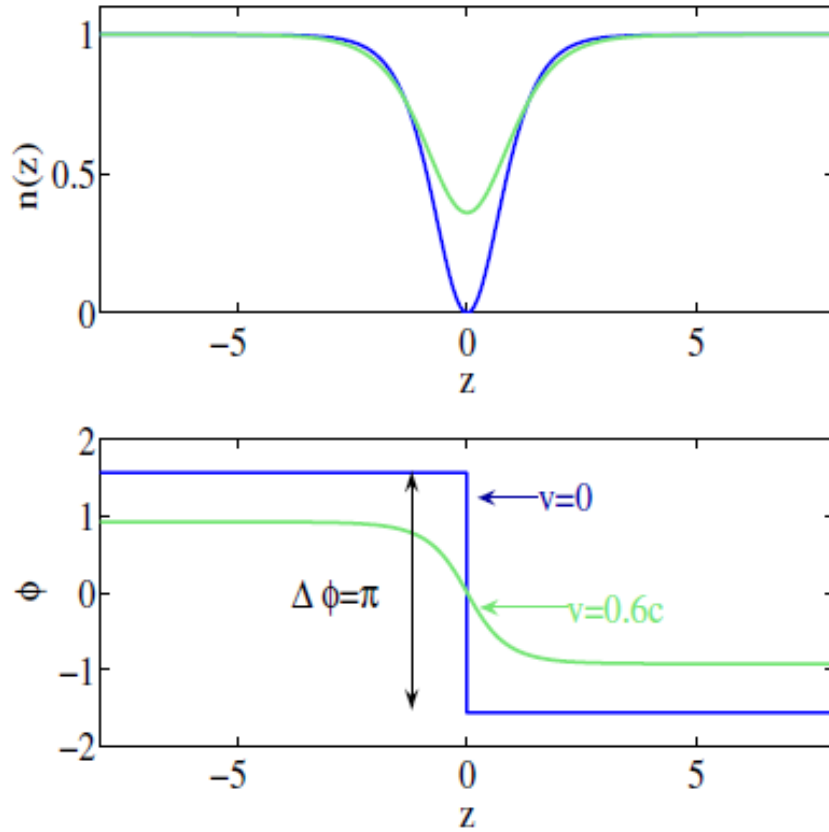
Η γωνία φάσης του σολιτονίου περιγράφει επίσης τη “σκοτεινότητα” του σκοτεινού σολιτονίου και συγκεκριμένα:

$$|\psi|^2 = n_0 (1 - \cos^2 \phi \operatorname{sech}^2 \zeta) \quad (1.13)$$

Με αυτό τον τρόπο, οι περιπτώσεις όπου $\phi = 0$ και $0 < \phi < \pi/2$ αντιστοιχούν στα ονομαζόμενα μαύρα (black) και γκρι (gray) σολιτόνια αντίστοιχα. Το πλάτος και η ταχύτητα των σκοτεινών σολιτονίων γράφονται (για $k = 0$) $\sqrt{n_0} \cos \phi$ και $\sqrt{n_0} \sin \phi$ αντίστοιχα. Έτσι το μαύρο σολιτόνιο

$$\psi = \sqrt{n_0} \tanh(\sqrt{n_0} z) \exp(-i\mu t) \quad (1.14)$$

χαρακτηρίζεται από μια μηδενική ταχύτητα $u = 0$ (και έτσι καλείται επίσης και stationary kink), ενώ το γκρι σολιτόνιο κινείται με πεπερασμένη ταχύτητα $u \neq 0$. Παραδείγματα των μαύρων και γκρι σολιτονίων εμφανίζονται στην εικόνα 1.2 παρακάτω.



Εικόνα 1.2: Παραδείγματα της πυκνότητας (επάνω πάνελ) και της φάσης (κάτω πάνελ) ενός μαύρου (μπλε γραμμή) και ενός γκρι (πράσινη γραμμή) σολιτονίου, πάνω από ένα υπόβαθρο με πυκνότητα $n_0 = 1$. Οι παράμετροι του μαύρου σολιτονίου είναι $A = 0$ και $B = 1$, δηλαδή $u = 0$, $n_{\min} = 0$ και $\Delta\phi = \pi$. Οι παράμετροι του γκρι σολιτονίου είναι $A = 0.6$ και $B = 0.8$, δηλαδή $u = 0.6C_s$ (όπου $C_s = \sqrt{n_0} = 1$), $n_{\min} = n_0(1 - B^2) = n_0A^2 = 0.36$ και $\Delta\phi = 0.31\pi$.

Στην οριακή περίπτωση πολύ ρηχών(μικρού πλάτους) σκοτεινών σολιτονίων με $\cos\phi \ll 1$, η ταχύτητα του σολιτονίου είναι κοντά στην ταχύτητα του ήχου, η οποία στις δικές μας μονάδες δίνεται:

$$c_s = \sqrt{n_0} \quad (1.15)$$

Η ταχύτητα του ήχου είναι ως εκ τούτου η μέγιστη δυνατή ταχύτητα του σκοτεινού σολιτονίου, το οποίο γενικά ταξιδεύει με μια ταχύτητα μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου. Τελικά καταλήγουμε ότι η λύση σκοτεινού

σολιτονίου, σχέση (1.10), έχει δυο ανεξάρτητες παραμέτρους (για $k=0$), μια για το υπόβαθρο n_0 και μια για το σολιτόνιο ϕ , ενώ υπάρχει επίσης ελευθερία στην επιλογή της αρχικής τοποθεσίας του σκοτεινού σολιτονίου.

1.4 Ολοκληρώματα της κίνησης και βασικές ιδιότητες των σκοτεινών σολιτονίων

Ας προχωρήσουμε τώρα στα ολοκληρώματα τις κίνησης των σκοτεινών σολιτονίων. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι εξισώσεις (1.4) έως και (1.6) αναφέρονται και για το υπόβαθρο και για το σολιτόνιο, μπορούμε να επανακανονικοποιήσουμε τα ολοκληρώματα της κίνησης έτσι ώστε να εξάγουμε τη συνεισφορά του υποβάθρου (βλ. σχέση (1.9))[1,3]. Με αυτόν τον τρόπο τα επανακανονικοποιημένα ολοκληρώματα της κίνησης γίνονται πεπερασμένα και όταν υπολογίζονται για την λύση σκοτεινού σολιτονίου, σχέση (1.10), παρέχουν τα ακόλουθα αποτελέσματα(για $k=0$). Ο αριθμός των σωματιδίων N_{ds} του σκοτεινού σολιτονίου γράφεται:

$$N_{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} (n_0 - |\psi|^2) dz = 2\sqrt{n_0}B \quad (1.16)$$

Η ορμή P_{ds} του σκοτεινού σολιτονίου δίνεται από,

$$\begin{aligned} P_{ds} &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi \partial_z \psi^* - \psi^* \partial_z \psi) dz - n_0 \Delta \phi \\ &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi \partial_z \psi^* - \psi^* \partial_z \psi) \left(1 - \frac{n_0}{|\psi|^2} \right) dz \\ &= -2u(c_s^2 - u^2)^{1/2} + 2c_s^2 \tan^{-1} \left[\frac{(c_s^2 - u^2)^{1/2}}{u} \right] \quad (1.17) \end{aligned}$$

όπου $\Delta \phi$ δίνεται από την σχέση (1.12) και $c_s = \sqrt{n_0}$ είναι η ταχύτητα του ήχου. Επιπρόσθετα, η ενέργεια E_{ds} του σκοτεινού σολιτονίου δίνεται από,

$$E_{ds} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [|\partial_z \psi|^2 + (|\psi|^2 - n_0)^2] dz = \frac{4}{3} (c_s^2 - u^2)^{3/2} \quad (1.18)$$

ενώ η επανακανονικοποιημένη Lagrangian πυκνότητα παίρνει τη μορφή:

$$L_{ds} = \frac{i}{2} (\psi \partial_t \psi^* - \psi^* \partial_t \psi) \left(1 - \frac{n_0}{|\psi|^2} \right) - \frac{1}{2} [|\partial_z \psi|^2 + (|\psi|^2 - n_0)^2] \quad (1.19)$$

Τα επανακανονικοποιημένα ολοκληρώματα της κίνησης μπορούν τώρα να χρησιμοποιηθούν για την καλύτερη κατανόηση των βασικών χαρακτηριστικών των σκοτεινών σολιτονίων. Για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι, αν κάποιος διαφορίσει τις εκφράσεις (1.17) και (1.18) στην ταχύτητα του σολιτονίου $u \equiv A\sqrt{n_0}$, προκύπτει το αποτέλεσμα

$$\frac{\partial E_{ds}}{\partial P_{ds}} = u \quad (1.20)$$

το οποίο μας δείχνει ότι το σκοτεινό σολιτόνιο συμπεριφέρεται σαν ένα κλασικό σωματίδιο υπακούοντας μια τυπική εξίσωση της κλασικής μηχανικής. Επιπρόσθετα, είναι επίσης πιθανό να συνδεθεί μια ενεργός μάζα στο σκοτεινό σολιτόνιο, σύμφωνα με την εξίσωση $m_{ds} = \partial P_{ds} / \partial u$. Με αυτόν τον τρόπο χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.47) μπορεί να βρεθεί ότι

$$m_{ds} = -4\sqrt{n_0} B \quad (1.21)$$

το οποίο δείχνει ότι το σκοτεινό σολιτόνιο χαρακτηρίζεται από μια αρνητική ενεργό μάζα. Το ίδιο αποτέλεσμα, αλλά για σχεδόν μαύρα σολιτόνια $B \approx 1$, με επαρκώς μικρές σολιτονικές ταχύτητες ($u^2 \ll c_s^2$), μπορεί επίσης να προκύψει με τη χρήση της εξίσωσης (1.18). Σε αυτή την περίπτωση η ενέργεια του σκοτεινού σολιτονίου μπορεί να προσεγγιστεί ως $E_{ds} \approx (4/3)c_s^3 - 2c_s u^2$ ή ισοδύναμα

$$E_{ds} = E_0 + \frac{1}{2} m_{ds} u^2 \quad (1.22)$$

όπου $E_0 \equiv \frac{4}{3}c_s^3$ και η ενεργός μάζα του σολιτονίου είναι $m_{ds} = -4\sqrt{n_0}$.

1.5 Πολλαπλά σκοτεινά σολιτόνια και οι αλληλεπιδράσεις τους

1.5.1 Η κατάσταση δυο-σολιτονίων και συγκρούσεις μεταξύ σκοτεινών σολιτονίων

Εκτός από τις μονές λύσεις σκοτεινών σολιτονίων, η NLS εξίσωση (1.3) κατέχει ακριβής αναλυτική λύση πολλαπλών σολιτονίων, η οποία μπορεί να βρεθεί με τη χρήση IST[1,3]. Τέτοιες λύσεις, περιγράφουν τις ελαστικές συγκρούσεις ανάμεσα σε σκοτεινά σολιτόνια, καθώς στο ασυμπτωτικό όριο $t \rightarrow \pm\infty$ η λύση πολλαπλών σολιτονίων μπορεί να εκφραστεί σαν μια γραμμική υπέρθεση των λύσεων των ατομικών σολιτονίων, οι οποίες παραμένουν ανεπηρέαστες από τη σύγκρουση αν εξαιρέσουμε μια ολίσθηση φάσης επαγόμενη από τη σύγκρουση. Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε την κυματοσυνάρτηση των σολιτονίων ως $\psi = \psi(z, t)$, η οποία μπορεί να εκφραστεί ασυμπτωτικά ως:

$$\psi \rightarrow \psi\left(z - \sqrt{n_0}A_1t, A_1, z_1^+\right) + \psi\left(z - \sqrt{n_0}A_2t, A_2, z_2^+\right), t \rightarrow +\infty \quad (1.23)$$

$$\psi \rightarrow \psi\left(z - \sqrt{n_0}A_1t, A_1, z_1^-\right) + \psi\left(z - \sqrt{n_0}A_2t, A_2, z_2^-\right), t \rightarrow -\infty \quad (1.24)$$

όπου $z_{1,2}^\pm$ συμβολίζουν την θέση κάθε ατομικού σολιτονίου. Οι παράμετροι A_j και B_j , με $j=1,2$ και ισχύοντας ότι $A_j^2 + B_j^2 = 1$, χαρακτηρίζουν την ταχύτητα και το βάθος του j σολιτονίου. Με βάση αυτά, είναι προφανές ότι το σχήμα και οι παράμετροι κάθε σολιτονίου διατηρούνται, ενώ η ολίσθηση της φάσης δίνεται από τις σχέσεις:

$$\Delta z_1 \equiv z_1^+ - z_1^- = \frac{1}{2B_1} \ln \left[\frac{(A_1 - A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2}{(A_1 - A_2)^2 + (B_1 - B_2)^2} \right] \quad (1.25)$$

$$\Delta z_2 \equiv z_2^+ - z_2^- = \frac{1}{2B_2} \ln \left[\frac{(A_1 - A_2)^2 + (B_1 + B_2)^2}{(A_1 - A_2)^2 + (B_1 - B_2)^2} \right] \quad (1.26)$$

Εάν οι ταχύτητες των σολιτονίων είναι ίσες, δηλαδή, $A_1 = -A_2 = A$ και ως εκ τούτου και $B_1 = -B_2 = B$, τότε η ολίσθηση της φάσης είναι ίδια και για τα δυο σολιτόνια και δίνεται από τη σχέση: $\Delta z = (2B)^{-1} \ln(1 + B^2/A^2)$. Οι εξισώσεις (1.25, 1.26) δείχνουν ότι η χωρική ολίσθηση κάθε τροχιάς σολιτονίου είναι στην ίδια κατεύθυνση όπως η ταχύτητα κάθε ατομικού σολιτονίου και έτσι τα σκοτεινά σολιτόνια πάντα απωθούν το ένα το άλλο. Πρέπει να αναφερθεί ότι αυτό το σημαντικό αποτέλεσμα μπορεί να γίνει καλύτερα κατανοητό κατά τη μελέτη της ρητής μορφής των κυματοσυναρτήσεων δυο-σολιτονίων, παρά το ασυμπτωτικό τους όριο που θεωρήσαμε παραπάνω. Για να το επιχειρήσουμε πρέπει να ισχυριστούμε ξανά την περίπτωση της λύσης δυο-σολιτονίων, θεωρώντας για απλότητα ότι τα δυο σολιτόνια κινούνται με ίσες ταχύτητες, δηλαδή ότι $A_1 = -A_2 = A$. Σε αυτή την περίπτωση η κυματοσυνάρτηση των δυο-σολιτονίων δίνεται από τη σχέση:

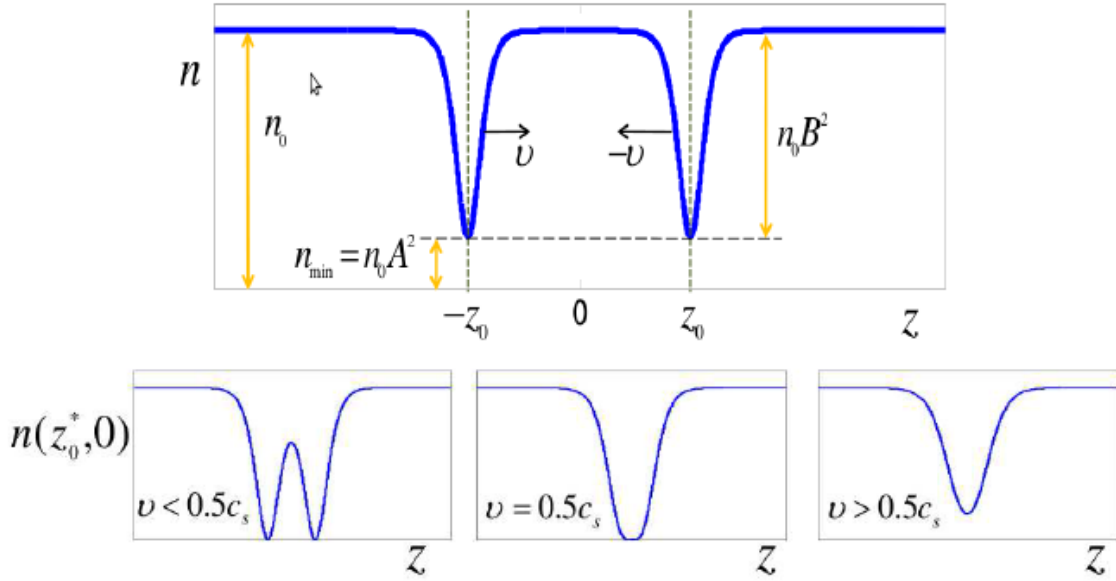
$$\psi(z, t) = \frac{F(z, t)}{G(z, t)} \exp(-i\mu t) \quad (1.27)$$

όπου $F(z, t) = 2(n_0 - 2n_{\min}) \cosh(2n_0 ABt)$

$$-2n_0 A \cosh(2\sqrt{n_0} Bz) + i \sinh(2n_0 ABt) \quad (1.28)$$

$$G(z, t) = 2\sqrt{n_0} \cosh(2n_0 ABt) + 2\sqrt{n_{\min}} \cosh(2\sqrt{n_0} Bz) \quad (1.29)$$

Ενώ $n_{\min} = n_0 - n_0 B^2 = n_0 A^2$ είναι η ελάχιστη πυκνότητα, δηλαδή η πυκνότητα στο κέντρο κάθε σολιτονίου. Το προφίλ της πυκνότητας της λύσης δυο-σολιτονίων στην εξίσωση (1.27) φαίνεται στο επάνω πάνελ της εικόνας 1.3.



Εικόνα 1.3: Το επάνω πάνελ απεικονίζει το προφίλ της πυκνότητας της λύσης δυο-σολιτονίων της εξίσωσης (1.27). Τα κάτω πάνελ παρουσιάζουν τα προφίλ της πυκνότητας δυο σκοτεινών σολιτονίων κατά το σημείο της σύγκρουσής τους που αντιστοιχεί στο $z = z_0^*$ και $t = 0$. Η πυκνότητα των σολιτονίων χαμηλής ταχύτητας, δηλαδή $u < u_c$ χαρακτηρίζεται από δυο ξεχωριστά ελάχιστα (κάτω αριστερά πάνελ), ενώ στην περίπτωση υψηλής ταχύτητας σολιτονίων, δηλαδή $u > u_c$, η πυκνότητα παρουσιάζει ένα μονό ελάχιστο (κάτω δεξιά πάνελ). Στην κρίσιμη περίπτωση όπου $u = u_c$, η πυκνότητα έχει ένα επίπεδο μονό ελάχιστο (κάτω μεσαίο πάνελ).

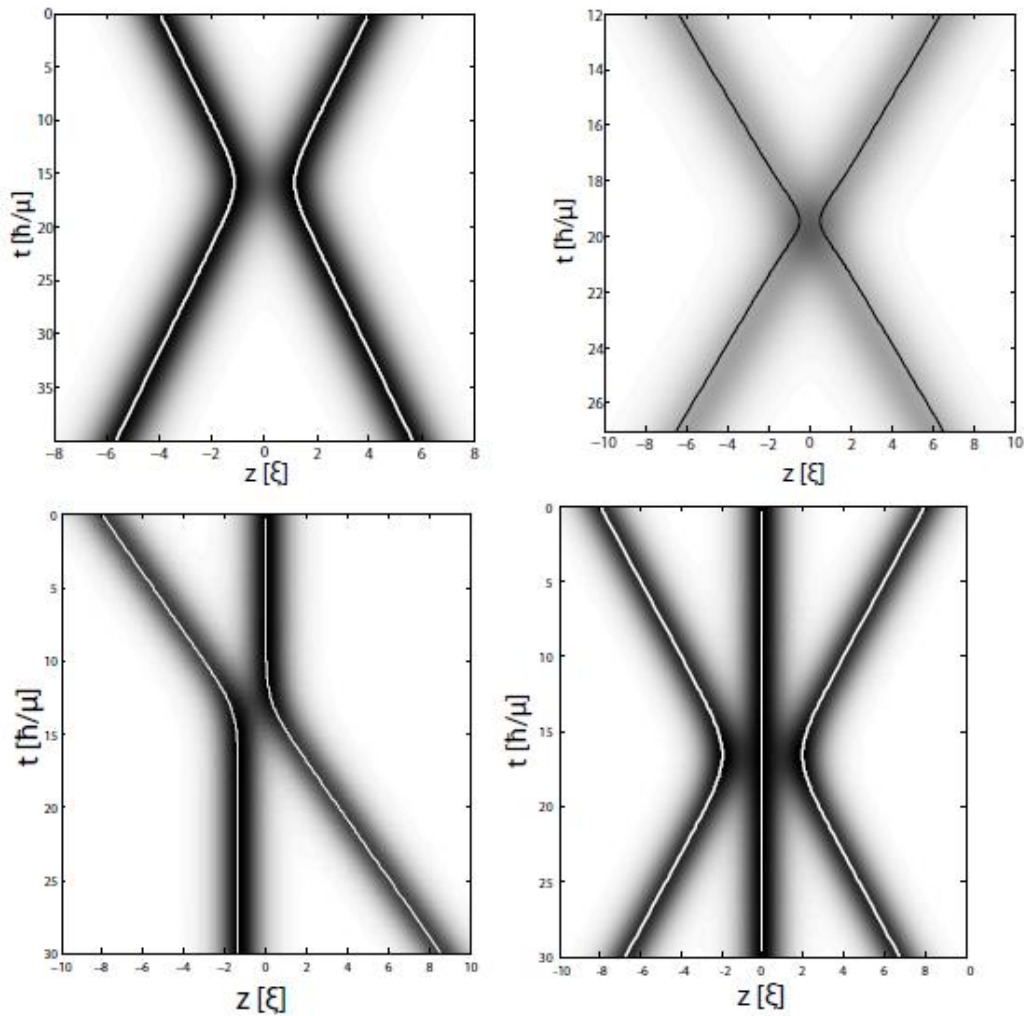
Για να μελετήσουμε αναλυτικά την αλληλεπίδραση και τη σύγκρουση ανάμεσα σε σκοτεινά σολιτόνια, θα βρούμε αρχικά τη συντεταγμένη της τροχιάς του σολιτονίου z_0 σαν συνάρτηση του χρόνου: χρησιμοποιώντας την βοηθητική εξίσωση $\partial_z |\psi|^2 = 0$, όπου η πυκνότητα $|\psi|^2$ καθορίζεται από τη σχέση (1.27), το ακόλουθο αποτέλεσμα προκύπτει:

$$\cosh(2\sqrt{n_0} B z_0) = \sqrt{\frac{n_0}{n_{\min}}} \cosh(2n_0 A B t) - 2\sqrt{\frac{n_{\min}}{n_0}} \frac{1}{\cosh(2n_0 A B t)} \quad (1.30)$$

Τότε η εξίσωση (1.30) καθορίζει την απόσταση $2z_0^*$ ανάμεσα στα δυο σολιτόνια στο σημείο της πλησιέστερης εγγύτητάς τους, δηλαδή το σημείο σύγκρουσης αντιστοιχεί στο $t = 0$:

$$z_0^* = \frac{1}{2\sqrt{n_0 - n_{\min}}} \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{n_0}{n_{\min}}} - 2\sqrt{\frac{n_{\min}}{n_0}} \right) \quad (1.31).$$

Αυτή η εξίσωση, η οποία είναι έγκυρη για $n_{\min}/n_0 = v^2 \leq 1/4$, ενώ διαφορετικά παρέχει μια μιγαδική τιμή για z_0^* , δείχνει ότι $z_0^* = 0$ για $n_{\min}/n_0 = A^2 = 1/4$. Έτσι είναι ξεκάθαρο ότι υπάρχει μια κρίσιμη τιμή της ταχύτητας του σολιτονίου και συγκεκριμένα: $u_c = \frac{1}{2}\sqrt{n_0} \equiv \frac{1}{2}c_s$, η οποία καθορίζει δυο είδη σκοτεινών σολιτονίων, παρουσιάζοντας διαφορετική συμπεριφορά κατά την διάρκεια της σύγκρουσής τους. Πιο συγκεκριμένα, αυτά είναι: τα σολιτόνια χαμηλής ταχύτητας με $u < u_c$, τα οποία αντανακλούνται το ένα από το άλλο, και τα σολιτόνια υψηλής ταχύτητας με $u > u_c$, τα οποία μεταδίδονται το ένα μέσω του άλλου. Στην πραγματικότητα, όπως φαίνεται στις εικόνες 1.3 και 1.4, τα προφίλ της πυκνότητας των καταστάσεων δύο-σολιτονίων χαμηλής και υψηλής ταχύτητας, παρουσιάζουν δυο ξεχωριστά ελάχιστα και ένα μη-μηδενικό ελάχιστο αντίστοιχα, στο σημείο της σύγκρουσης και πιο συγκεκριμένα, $n(z_0^*, 0) = 0$ και $n(z_0^*, 0) \neq 0$. Με άλλα λόγια, τα σολιτόνια χαμηλής ταχύτητας είναι στην πραγματικότητα καλά διαχωρισμένα σολιτόνια, τα οποία μπορούν πάντα να χαρακτηρίζονται από δυο ξεχωριστά ελάχιστα στην πυκνότητα, ακόμα και στο σημείο σύγκρουσης, ενώ τα σολιτόνια υψηλής ταχύτητας, επικαλύπτουν πλήρως το σημείο της σύγκρουσης.



Εικόνα 1.4: Επάνω πάνελ: Τροχιές σολιτονίων για συμμετρικές δυο-σολιτονίων συγκρούσεις για διαφορετικές αρχικές ταχύτητες: Στην αριστερή περίπτωση $A = 0.2$ και τα σολιτόνια ανακλούνται το ένα από το άλλο και δεξιά $A = 0.8$ και τα σολιτόνια εκπέμπονται τον ένα μέσω του άλλου. Κάτω πάνελ: Τροχιές σολιτονίων για μια ασυμμετρική σύγκρουση δυο-σολιτονίων για αρχικές ταχύτητες $A_1 = 0.5$ και $A_2 = 0$ αριστερά και για μια σύγκρουση τριών σολιτονίων με $A_1 = -A_3 = 0.4$ και $v_2 = 0$ στα δεξιά. Σε όλα τα πάνελ, απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των κυματοσυναρτήσεων που μεταφέρουν τα σολιτόνια, όπως προκύπτει από άμεση αριθμητική ολοκλήρωση της ομογενούς NLS εξίσωσης. Οι μονόχρωμες γραμμές αντιστοιχούν στις σχετικές αναλυτικές προβλέψεις που βασίζονται στο ενεργό δυναμικό αλληλεπίδρασης. Σε όλες τις περιπτώσεις το κακονικοποιημένο χημικό δυναμικό $\mu = 1$.

1.5.2 Η απωστική αλληλεπίδραση ανάμεσα σε αργά σκοτεινά σολιτόνια

Ας ερευνήσουμε τώρα λεπτομερέστερα την περίπτωση των καλά διαχωρισμένων σολιτονίων, τα οποία πάντα αντανακλούνται το ένα από το άλλο, με την αλληλεπίδρασή τους να μοιάζει με εκείνη των hard-sphere-like σωματιδίων[1,3]. Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε την οριακή περίπτωση των εξαιρετικά αργών σολιτονίων, δηλαδή $n_0/n_{\min} = A^2 \ll \frac{1}{4}$, για την οποία ο διαχωρισμός των σολιτονίων είναι μεγάλος για οποιαδήποτε τιμή ($z_0^* \gg 0$). Σε αυτή την περίπτωση ο δεύτερος όρος της σχέσης (1.30) είναι πολύ μικρότερος από τον πρώτο και μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος. Με αυτόν τον τρόπο, η συντεταγμένη του σολιτονίου μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$z_0 = \frac{1}{2\sqrt{n_0}B} \cosh^{-1} \left[A^{-1} \cosh(2n_0ABt) \right] \quad (1.32)$$

Η παραπάνω εξίσωση επιφέρει τις ταχύτητες των σολιτονίων:

$$\frac{dz_0}{dt} = \frac{\sqrt{n_0} \sinh(2n_0vBt)}{\sqrt{A^{-1} \cosh^2(2n_0vBt) - 1}} \quad (1.33)$$

η οποία στο όριο $t \rightarrow 0$, γίνεται $dz_0/dt = 0$. Έτσι καθώς το ένα σκοτεινό σολιτόνιο προσεγγίζει το άλλο, το βάθος τους και η ταχύτητά τους αυξάνονται και μειώνονται αντίστοιχα. Στο σημείο της σύγκρουσης ($t=0$), τα σολιτόνια γίνονται μαύρα (black) καθώς παραμένουν σε μια μικρή απόσταση το ένα από το άλλο. Στη συνέχεια τα σκοτεινά σολιτόνια ανακλώνται το ένα από το άλλο και συνεχίζουν την κίνησή τους σε αντίθετες κατευθύνσεις, με τις ταχύτητές τους να προσεγγίζουν τις ασυμπτωτικές τιμές $dz_0/dt = \pm\sqrt{n_0}A$ για $t \rightarrow \pm\infty$ (βλ. εξίσωση (1.33)), δηλαδή τις τιμές της ταχύτητας του άλλου ξεχωριστού σολιτονίου.

Στη συνέχεια, διαφορίζοντας την εξίσωση (1.32) δυο φορές ως προς τον χρόνο και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.30), χωρίς τον δεύτερο όρο ο οποίος είναι αμελητέος για καλά διαχωρισμένα σολιτόνια, μπορεί κανείς να

παράγει μια εξίσωση κίνησης για την συντεταγμένη του σολιτονίου στη μορφή $d^2 z_0 / dt^2 = -\partial V_{\text{int}}(z_0) / \partial z_0$, όπου το δυναμικό αλληλεπίδρασης $V_{\text{int}}(z_0)$ δίνεται από:

$$V_{\text{int}}(z_0) = \frac{1}{2} \frac{n_0 B^2}{\sinh^2(2\sqrt{n_0} B z_0)} \quad (1.34)$$

Είναι ξεκάθαρο ότι το V_{int} είναι ένα απωστικό δυναμικό, που υποδεικνύει ότι τα σκοτεινά σολιτόνια απωθούν το ένα το άλλο. Εάν ο διαχωρισμός ανάμεσα στα σκοτεινά σολιτόνια είναι επαρκώς μεγάλος (δηλαδή $2z_0 \gg 1$), τότε η υπερβολική \sinh στην εξίσωση (1.34) μπορεί να προσεγγιστεί από την εκθετική της ασύμπτωτη, και το δυναμικό της σχέσης (1.34) μπορεί να απλοποιηθεί ως:

$$V_{\text{int}}(z_0) \approx 2n_0 B^2 \exp(-4\sqrt{n_0} B z_0) \quad (1.35)$$

Η τελευταία έκφραση μπορεί επίσης να παραχθεί με τη χρήση της Lagrangian προσέγγισης. Το παραπάνω αποτέλεσμα αναφέρεται σε μια συμμετρική δυο-σολιτονίων σύγκρουση. Επίσης είναι πιθανό το απωστικό δυναμικό της σχέσης (1.34) να χρησιμοποιηθεί και σε περιπτώσεις μη-συμμετρικών συγκρούσεων, με τη χρήση ενός “μέσου βάθους” των δυο σολιτονίων και των πολλαπλών σκοτεινών σολιτονίων, με το κάθε σολιτόνιο να αλληλεπιδρά με τα γειτονικά του (βλ. εικόνα 1.4).

1.5.3 Πειράματα πολλαπλών σκοτεινών σολιτονίων

Τα πολλαπλά σκοτεινά σολιτόνια αρχικά δημιουργήθηκαν σε ένα ^{23}Na BEC στο NIST πείραμα με τη χρήση της μεθόδου τυπώματος φάσης, ενώ η αλληλεπίδραση και η σύγκρουση μεταξύ δυο σκοτεινών σολιτονίων σε ένα ^{87}Rb BEC [1,3]. Σε αυτό το αρχικό πείραμα το αποτέλεσμα της σύγκρουσης δεν ήταν αρκετά καθαρό εξαιτίας της παρουσίας απωλειών που προκαλούνται από την αλληλεπίδραση του συμπυκνώματος με το θερμικό σύννεφο. Στα πιο πρόσφατα πειράματα του Αμβούργου, η μέθοδος τυπώματος φάσης

χρησιμοποιήθηκε επίσης για τη δημιουργία δυο σκοτεινών σολιτονίων σε ένα ^{87}Rb BEC με ελαφρώς διαφορετικά βάθη. Αυτά τα σολιτόνια διαδίδονταν σε αντίθετες πλευρές του συμπυκνώματος, αντανακλώμενα κοντά στις άκρες τους BEC, και συνεπώς υποβάλλονταν σε μια μονή σύγκρουση στο κέντρο της παγίδας. Επιπρόσθετα, στο πρόσφατο πείραμα της Χαιδελβέργης, δυο σκοτεινά σολιτόνια δημιουργήθηκαν σε ένα ^{87}Rb BEC με την ονομαζόμενη μέθοδο της παρεμβολής. Τα σολιτόνια που παρατηρήθηκαν σε αυτό το πείραμα, τα οποία ήταν τα καλά-διαχωρισμένα, διαδίδονταν σε αντίθετες κατευθύνσεις, αντανακλώμενα και κατόπιν υποβάλλονταν σε πολλαπλή ελαστική σύγκρουση, από την οποία τα σολιτόνια που προέκυπταν στην ουσία ήταν άθικτα. Τα πειραματικά αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν σε συμφωνία με τις θεωρητικές προβλέψεις που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

1.6 Αδιάστατη GP εξίσωση υπό την παρουσία δυναμικού

Αν και στη διπλωματική αυτή οι αναλύσεις γίνονται για την περίπτωση όπου το δυναμικό είναι μηδενικό, είναι χρήσιμο να αναφερθούν μερικά γενικά σχόλια για την περίπτωση όπου $V(z) \neq 0$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ξανά την εξίσωση (1.1), αλλά τώρα ενσωματώνοντας το εξωτερικό δυναμικό $V(z)$. Σε αυτή τη περίπτωση, η δυναμική των υλικών-κυμάτων σολιτονίων μπορεί να μελετηθεί αναλυτικά με τη χρήση ποικίλων μεθόδων διαταραχών, υποθέτοντας ότι το δυναμικό παγίδευσης $V(z)$ είναι ομαλό και μεταβάλλεται αργά στην κλίμακα του σολιτονίου. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση για παράδειγμα μιας κλασικής αρμονικής παγίδας (βλ. σχέση (1.2)), η κανονικοποιημένη δύναμη παγίδας θεωρείται ότι είναι $\Omega \sim \varepsilon$, όπου $\varepsilon \ll 1$ είναι μια τυπική μικρή παράμετρος διαταραχής. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (1.1) μπορεί να εκφραστεί σαν μια διαταραγμένη NLS εξίσωση ως εξής[1,3]:

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2} \partial_z^2 \psi - |\psi|^2 \psi = R(\psi) \equiv V(z)\psi \quad (1.36)$$

Τότε, σύμφωνα με τη θεωρία διαταραχών για τα σολιτόνια, μπορεί κανείς να υποθέσει ότι ή αντίστοιχη σολιτονική λύση της σχέσης (1.36) μπορεί να εκφραστεί στην ακόλουθη γενική μορφή:

$$\psi(z, t) = \psi_s(z, t) + \varepsilon \psi_r(z, t) \quad (1.37)$$

Εδώ, $\psi_s(z, t)$ έχει τη λειτουργική μορφή της λύσης σκοτεινού σολιτονίου της σχέσης (1.10), αλλά με τις παραμέτρους του σολιτονίου να εξαρτώνται από το χρόνο και ψ_r είναι η ακτινοβολία σε μορφή ηχητικών κυμάτων, εκπεμπόμενων από το σολιτόνιο. Γενικά ο τελευταίος όρος, είναι ισχυρός μόνο για αρκετά ισχυρές διαταραχές. Έτσι, η απλούστατη πιθανή προσέγγιση για την μελέτη των υλικών-κυμάτων σολιτονίων σε παγίδα, αντιστοιχεί στην επονομαζόμενη αδιαβατική προσέγγιση (adiabatic approximation) της θεωρίας διαταραχής για τα σολιτόνια και συγκεκριμένα $\psi(z, t) \approx \psi_s(z, t)$. Σε κάθε περίπτωση, η μελέτη των υλικών-κυμάτων σολιτονίων σε παγίδα πρέπει να λαμβάνει υπόψη, ότι η παγίδα μεταβάλλει τις οριακές συνθήκες για την κυματοσυνάρτηση και την πυκνότητα του BEC. Συγκεκριμένα, $n \rightarrow 0$ αντί για $n \rightarrow n_0$ στην ομογενή περίπτωση (βλ. σχέση (1.13)), καθώς $z \rightarrow \pm\infty$. Από φυσική άποψη και με βάση την σωματιδιακή φύση των σκοτεινών σολιτονίων, είναι αναμενόμενο τα σκοτεινά σολιτόνια να αντανακλώνται από το δυναμικό παγίδευσης. Ένας τέτοιος μηχανισμός, έχει ως αποτέλεσμα μια ταλαντευόμενη κίνηση των σκοτεινών σολιτονίων στην παγίδα.

Υπάρχουν πολλές θεωρητικές μελέτες αφιερωμένες στην ταλάντωση των σκοτεινών ατομικών σολιτονίων σε παγιδευμένα BECs. Οι πρώτες μελέτες πάνω σε αυτό το θέμα, ανέφεραν ότι τα σολιτόνια ταλαντώνονται σε ένα συμπύκνωμα περιορισμένο σε μια αρμονική παγίδα με συχνότητα Ω . Μια αναλυτική περιγραφή της κίνησης του σκοτεινού σολιτονίου και το σωστό αποτέλεσμα σχετικά με την συχνότητα ταλάντωσης του, $\Omega/\sqrt{2}$, παρατηρήθηκε πρώτη φορά στην αναφορά [12]. Το ίδιο αποτέλεσμα προέκυψε και στις αναφορές [13,14] με τη επίλυση των Bogoliubov de Gennes εξισώσεων για σχεδόν μαύρα σολιτόνια, εκτελώντας μικρού πλάτους ταλαντώσεις γύρω από το κέντρο της παγίδας. Επιπρόσθετα στην αναφορά

[13] μια προσέγγιση της κινητικής εξίσωσης χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει την μη-συντηρητική δυναμική των σκοτεινών σολιτονίων εξαιτίας της αλληλεπίδρασης του BEC με το θερμικό σύννεφο.

Η δυναμική υλικών κυμάτων σολιτονίων σε παγιδευμένα BECs, έχει επίσης αναλυθεί σε πολλές μελέτες με τη χρήση διαφόρων τεχνικών που αρχικά αναπτύχθηκαν για οπτικά σκοτεινά σολιτόνια. Αργότερα αναπτύχθηκε η ονομαζόμενη δυναμική Landau (Landau dynamics) προσέγγιση, βασισμένη στη χρήση των επανακανονικοποιημένων ενεργειών των σολιτονίων (βλ. σχέση (1.18)), μαζί με μια προσέγγιση τοπικής πυκνότητας. Μοντέλα σχετικά με τη δυναμική των υλικών-κυμάτων σκοτεινών σολιτονίων σε 1D ισχυρά αλληλεπιδρώντων μποζονικών αερίων, θεωρούνται επίσης και αναλύονται με χρήση της προσέγγισης μικρού-πλάτους (small-amplitude). Σε άλλες μελέτες, παρουσιάζεται μια Lagrangian προσέγγιση για τα υλικά κύματα σκοτεινών σολιτονίων. Μια ασυμπτωτική μέθοδος διαταραχής πολλαπλών βαθμίδων χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή των ταλαντώσεων των σκοτεινών σολιτονίων και της επαγόμενης ανομοιογενούς εκπομπής ακτινοβολίας. Η κίνηση των σκοτεινών σολιτονίων αναλύθηκε πρόσφατα αυστηρά, ενώ το ίδιο πρόβλημα διερευνείται στο πλαίσιο του γενικευμένου μοντέλου NLS.

Οι ταλαντώσεις των σκοτεινών σολιτονίων, παρατηρήθηκαν πρόσφατα στα πειράματα στο Αμβούργο και στη Χαιδελβέργη. Σε αυτές τις έρευνες, οι πειραματικές συχνότητες ταλάντωσης των σολιτονίων, βρέθηκαν να αποκλίνουν από τις θεωρητικές προβλέψεις τιμής $\Omega/\sqrt{2}$. Αυτή η απόκλιση οφείλεται είτε στην αναρμονία της παγίδας, είτε στη διαστασιοποίηση του συστήματος, όπως επίσης και στις αλληλεπιδράσεις των σολιτονίων αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

ΣΟΛΙΤΟΝΙΑ ΣΕ ΑΤΟΜΙΚΑ ΣΥΜΠΥΚΝΩΜΑΤΑ BOSE-EINSTEIN

2.1 Υλικά-κύματα σκοτεινών σολιτονίων σε πολλαπλών συστατικών BECs

Τα πολλαπλών συστατικών υπέρψυχρα ατομικά αέρια και τα Bose-Einstein συμπυκνώματα που μπορεί να αποτελούνται από δυο ή περισσότερα ατομικά αέρια, έχουν παρατηρηθεί σε πειράματα και πιθανώς να έχουν τη μορφή[1]:

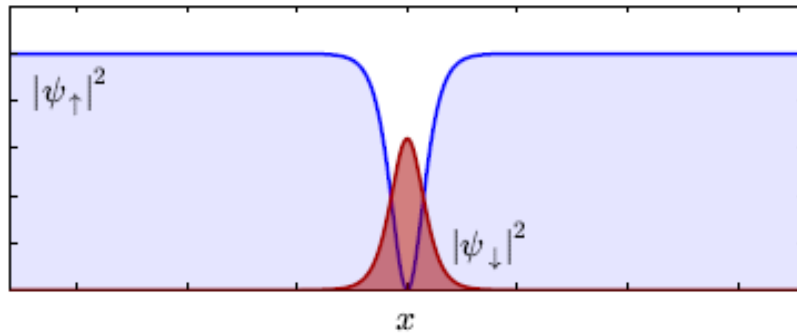
- Δυο διαφορετικών καταστάσεων σπιν του ίδιου είδους ατόμων ονομαζόμενα ψευδο-σπινोरιακά (pseudo-spinor) συμπυκνώματα
- Διαφορετικά Zeeman υπό-επίπεδα του ίδιου επιπέδου υπέρλεπτης υφής, ονομαζόμενα σπινोरιακά (spinor) συμπυκνώματα
- Διαφορετικά ατομικά ήδη (heteronuclear mixtures)
- Εκφυλισμένα σύννεφα μποζονίων-φερμιονίων
- Καθαρά εκφυλισμένα σύννεφα φερμιονίων

Τέτοια συστήματα πολλαπλών συστατικών υποστηρίζουν πολλούς τύπους υλικών κυμάτων σολιτονίων, με τον τύπο του σολιτονίου στο ένα είδος να είναι είτε το ίδιο είτε διαφορετικό σε σχέση με αυτό στα άλλα είδη. Προφανώς στην περίπτωση των απωστικών αλληλεπιδράσεων, ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι τα διανυσματικά (vector) σολιτόνια με το ένα τους συστατικό να είναι ένα σκοτεινό (dark) σολιτόνιο. Αυτά τα διανυσματικά σολιτόνια έχουν μελετηθεί κυρίως θεωρητικά αλλά και πειραματικά στο πλαίσιο των δυο συστατικών και των σπινोरιακών συμπυκνωμάτων.

2.2 Σολιτόνια σε μίγματα από δυο BEC

Μολονότι μίγματα συμπυκνωμάτων είχαν υλοποιηθεί πειραματικά από το 1998, η πρώτη δημιουργία ενός εντοπισμένου κύματος ύλης στη μορφή σκοτεινού-φωτεινού (dark-bright, DB) σολιτονίου παρουσιάστηκε το 2008 από

την πειραματική ομάδα του Αμβούργου[5]. Τα σολιτόνια αυτού του τύπου αποτελούνται από ένα σκοτεινό σολιτόνιο στο ένα συστατικό του μίγματος ($|\psi_{\uparrow}|$) και ένα φωτεινό σολιτόνιο στο άλλο ($|\psi_{\downarrow}|$), όπως φαίνεται στην εικόνα 2.1.



Εικόνα 2.1: Η πυκνότητα ενός σκοτεινού-φωτεινού σολιτονίου, όπου στα $|\psi_{\uparrow}|$ και $|\psi_{\downarrow}|$ εμφανίζεται ένα σκοτεινό και ένα φωτεινό σολιτόνιο αντίστοιχα.

Είναι σημαντικό ότι αυτά τα κύματα παρατηρήθηκαν σε BEC ρουβιδίου που έχει απωστικές αλληλεπιδράσεις, οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω έπρεπε να υποστηρίζει μόνο σκοτεινά σολιτόνια. Όμως στην περίπτωση των κυμάτων αυτών, η ύπαρξη του φωτεινού σολιτονίου (που υποστηρίζεται σε BEC με ελκτικές αλληλεπιδράσεις) οφείλεται αποκλειστικά στην ύπαρξη του σκοτεινού. Στην πραγματικότητα το σκοτεινό σολιτόνιο, δημιουργεί ένα φαινομενικό δυναμικό στο σύστημα, που μπορεί να υποστηρίξει μια δέσμια κατάσταση, στη μορφή φωτεινού σολιτονίου. Έτσι, τα σολιτόνια DB αναφέρονται και ως συμβιωτικά σολιτόνια (symbiotic solitons).

Επίσης, στο πλαίσιο της φυσικής των BECs, παρουσιάστηκαν κάποια αριθμητικά αποτελέσματα, που έδειξαν ότι είναι δυνατή η εμφάνιση δέσμιων καταστάσεων από πολλαπλά σολιτόνια DB.

Σε μια σειρά πειραμάτων που ξεκίνησαν το 2011 από την ομάδα του πανεπιστημίου της Ουάσινγκτον, μελετήθηκαν οι υδροδυναμικές ιδιότητες ενός μίγματος BEC αποτελούμενο από δυο καταστάσεις υπέρλεπτης υφής του ρουβιδίου. Κατά τη διάρκεια αυτών των πειραμάτων παρατηρήθηκε η γένεση DB σολιτονίων, η ύπαρξη ζευγών σολιτονίων, ακόμα και δέσμιων

καταστάσεων από πολλά σολιτόνια, όπως και διάφορες άλλες πιο σύνθετες εντοπισμένες δομές.

2.3 Ορισμός του μοντέλου

Γενικά μιλώντας, ένα μείγμα από N καθαρά μποζονικά συστατικά μπορεί να περιγραφεί στο πλαίσιο της θεωρίας μέσου-πεδίου από ένα σύστημα από N συζευγμένες Gross-Pitaevskii εξισώσεις. Στην περίπτωση όπου διαφορετικά συστατικά που ανήκουν στο ίδιο είδος ατόμων, το Gross-Pitaevskii σύστημα εξισώσεων μπορεί να εκφραστεί στην ακόλουθη αδιάστατη μορφή[1]:

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_n + V_n(r) \psi_n + \sum_{k=1}^N [g_{n,k} |\psi_k|^2 \psi_n - \kappa_{n,k} \psi_k + \Delta_{n,k} \psi_n] \quad (2.1)$$

Εδώ ψ_n είναι η κυματοσυνάρτηση του n -οστού συστατικού ($n=1,2,\dots,N$), $V_n(r)$ είναι το δυναμικό παγίδευσης επικυρώνοντας το N -οστό συστατικό, $\Delta_{n,k}$ είναι η διαφορά των χημικών δυναμικών ανάμεσα στα συστατικά n και k . Οι συντελεστές μη γραμμικότητας $g_{n,k} = g_{k,n}$ χαρακτηρίζουν τις διαατομικές συγκρούσεις, ενώ οι γραμμικοί συντελεστές σύζευξης $\kappa_{n,k} = \kappa_{k,n}$ λαμβάνονται υπόψη για την κατάσταση σπιν δια-μετατροπής που συνήθως προκαλείται από την σπιν-αναστροφή συντονισμού ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Πρέπει να αναφερθεί ότι, τα φερμιονικά μίγματα περιγράφονται επίσης στα πλαίσια της θεωρίας μέσου-πεδίου, με την αυτό-αλληλεπίδραση μη γραμμικών όρων να αντικαθίσταται από $g_{n,n} |\psi_n|^{4/3} \psi_n$. Η GP εξίσωση της σχέσης (2.1) χαρακτηρίζεται από μετατροπή της ενέργειας E και του συνολικού αριθμού των ατόμων: $N = \sum_{k=1}^N N_k = \sum_{k=1}^N \int |\psi_k|^2 dr$. Επίσης υπό την απουσία γραμμικών δια-μετατροπών ($\kappa_{n,k} = 0$), ο αριθμός των ατόμων σε κάθε συστατικό N_k είναι ξεχωριστά διατηρούμενος.

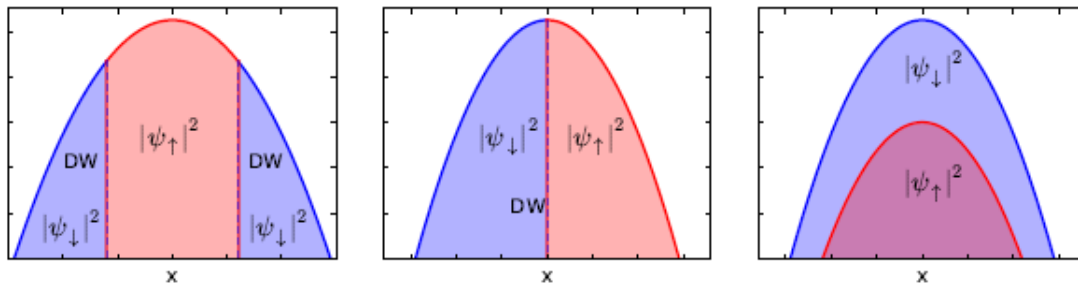
2.4 Οι θεμελιώδεις καταστάσεις του μίγματος

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση δυο μποζονικών ειδών, δηλαδή $N=2$ και να υποθέσουμε ότι το σύστημα είναι ομογενές, δηλαδή $V_n=0$. Εάν επιπρόσθετα δεν υπάρχει δια-μετατροπή κατάστασης σπιν ($\kappa_{n,k}=0$) και η διαφορά των χημικών δυναμικών $\Delta\mu_{n,k}=0$, τότε το δυαδικό μίγμα είναι μη αναμίξιμο, παρέχοντας την ακόλουθη συνθήκη μη-αναμιξιμότητας[1]:

$$\Delta \equiv \frac{(g_{12}^2 - g_{11}g_{22})}{g_{11}^2} > 0 \quad (2.2)$$

όπου Δ είναι η ονομαζόμενη παράμετρος αναμιξιμότητας. Στην πράξη η παράμετρος αυτή παίρνει τιμές της τάξης του 10^{-3} η και ακόμα λιγότερο. Για παράδειγμα $\Delta \approx 9 \times 10^{-4}$ ή $\Delta \approx 0.036$ για ένα μίγμα από δυο καταστάσεις σπιν του ^{87}Rb BEC ή ένα ^{23}Na BEC αντίστοιχα. Η σχέση (2.2) υποδεικνύει ότι αν η αμοιβαία απωστική αλληλεπίδραση ανάμεσα στα δυο είδη είναι ισχυρότερη από την απωστική αλληλεπίδραση ανάμεσα σε άτομα από ίδιο είδος, τότε τα δυο είδη δεν αναμειγνύονται. Σε μια τέτοια περίπτωση τα δυο είδη τείνουν να χωριστούν, καταλαμβάνοντας δυο διαφορετικές χωρικές περιοχές και σχηματίζοντας μια η περισσότερες διαχωριστικές επιφάνειες (domain-walls). Η θεμελιώδης κατάσταση του συστήματος, δηλαδή η κατάσταση που ελαχιστοποιεί την ενέργεια, πιθανώς να δεχθεί λύσεις της μορφής διαχωριστικής επιφάνειας της GP εξίσωσης (2.1). Σε συμφωνία με τις πειραματικές παρατηρήσεις αυτές οι λύσεις αντιπροσωπεύουν διαμορφώσεις της ακόλουθης μορφής: Στο Thomas-Fermi όριο, όπου η κινητική ενέργεια είναι αμελητέα, το ένα είδος καταλαμβάνει την περιοχή γύρω από το κέντρο της παγίδας και διαχωρίζεται από το άλλο συστατικό, που καταλαμβάνει τις δυο άκρες του πηγαδιού δυναμικού, από δυο διαχωριστικές επιφάνειες όπως φαίνεται και στο αριστερό πάνελ της εικόνας 2.2 που ακολουθεί[5]. Αυτή η δομή ονομάζεται κατάσταση σφαίρας και φλοιού (ball and shell) αφού στην τρισδιάστατη μορφή της αποτελείται από μια σφαίρα με άτομα του ενός συστατικού, επικαλυπτόμενη από ένα φλοιό με άτομα του άλλου συστατικού. Από την άλλη πλευρά, όταν η κινητική ενέργεια είναι μεγαλύτερη ευνοείται μια διαμόρφωση μιας μόνο διαχωριστικής επιφάνειας όπου ξεχωρίζει τα δυο είδη

εκατέρωθεν της παγίδας, όπως φαίνεται και στο μεσαίο πάνελ της εικόνας 2.2. Στην περίπτωση που το μίγμα είναι αναμίξιμο, δηλαδή $\Delta < 0$, η θεμελιώδης κατάσταση αποτελείται από δυο επικαλυπτόμενα νέφη Thomas-Fermi, όπως φαίνεται στο δεξί πάνελ της εικόνας 2.2.



Εικόνα 2.2: Η κατάσταση στη μορφή σφαίρας φλοιού (αριστερό πάνελ) με δυο διαχωριστικές επιφάνειες (domain-walls, DW), η κατάσταση με μια διαχωριστική επιφάνεια να ξεχωρίζει τα συστατικά (μεσαίο πάνελ) και μια αναμίξιμη θεμελιώδης κατάσταση (δεξιό πάνελ)

2.5 Ο διαχωρισμός της φάσης

Η δυναμική του διαχωρισμού φάσης σε δυο συστατικών BECs έχει μελετηθεί σε πολλά άρθρα τόσο θεωρητικά, όσο και πειραματικά. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι, μαγνητικό πεδίο συντονισμών Feshbach, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ελεγχόμενη αλλαγή των μηκών σκέδασης και έτσι την ελεγχόμενη μεταβολή της (μη)-αναμιξιμότητας ανάμεσα σε δυο είδη. Εναλλακτικά, οι ιδιότητες (μη)-αναμιξιμότητας από δυο καταστάσεις σπιν ενός BEC μπορούν να ελεγχθούν από την παρουσία γραμμικής σύζευξης (ορίζεται από τις παραμέτρους $\mathcal{K}_{n,k}$ στην εξίσωση (2.1)), όπως έχει προβλεφθεί θεωρητικά και έχει παρουσιαστεί και πειραματικά. Πιο πρόσφατα στο πλαίσιο τεχνητών μετρήσεων δυναμικών και σπιν-τροχιών σύζευξης σε κρύα άτομα, έχει δειχθεί ότι τα χαρακτηριστικά (μη)-αναμιξιμότητας σπινωριακών αερίων μπορούν να αλλαχθούν με τη χρήση σύζευξης Raman.

2.6 Διανυσματικά σολιτόνια σε BECs δυο συστατικών

Εκτός από διαχωριστικές επιφάνειες, ένα παγιδευμένο δυο συστατικών ψευδο-1D BEC υποστηρίζει διανυσματικά σολιτόνια, με το ένα συστατικό να είναι σκοτεινό (dark) σολιτόνιο. Σε αυτή την περίπτωση τυπικά το άλλο συστατικό μπορεί να είναι[1]:

- Ένα φωτεινό (bright) σολιτόνιο, ώστε το διανυσματικό σολιτόνιο να είναι ένα σκοτεινό-φωτεινό (Dark-Bright, DB) σολιτόνιο
- Ένα σκοτεινό (dark) σολιτόνιο, ώστε το διανυσματικό σολιτόνιο να είναι ένα σκοτεινό-σκοτεινό (Dark-Dark, DD) σολιτόνιο
- Ένα αντισκότεινο (antidark) σολιτόνιο, ώστε το διανυσματικό σολιτόνιο να είναι ένα σκοτεινό-αντισκότεινο (Dark-AntiDark, DAD) σολιτόνιο

Εδώ, πρέπει να αναφερθεί ότι ένα αντισκότεινο σολιτόνιο είναι ουσιαστικά ένα σκοτεινό σολιτόνιο, το οποίο έχει τη μορφή ενός υψώματος (καμπούρα) αντί για βύθισμα (πηγάδι) πάνω από ένα υπόβαθρο. Όπως αναφέρεται και πιο πάνω όλοι αυτοί οι τύποι διανυσματικών σολιτονίων έχουν μελετηθεί σε πολλά θεωρητικά άρθρα. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι DB σολιτόνια έχουν επίσης πρόσφατα παρατηρηθεί σε πειράματα είτε με τη χρήση της μεθόδου τυπώματος φάσης (phase-imprinting), είτε με αυτή της αντίθετης ροής (counterflow) ανάμεσα σε δυο αναμίξιμα συμπυκνώματα. Αυτές οι πειραματικές μελέτες έχουν κυρίως αναμίξει τη δυναμική ενός DB σολιτονίου σε μια παγίδα, τη δημιουργία πολλαπλών DB σολιτονίων, τη μελέτη των αλληλεπιδράσεών τους καθώς και τη δημιουργία ενός συγκεκριμένου τύπου DD σολιτονίων προερχόμενα από SU(2)-rotated DB σολιτόνια. Όπως θα αναλύσουμε και περαιτέρω στη συνέχεια αυτά τα διανυσματικά σολιτόνια έχουν τη μορφή “beating DD” σολιτονίων. Από την άλλη πλευρά διανυσματικά σολιτόνια DAD τύπου έχουν προβλεφθεί ότι υπάρχουν στη θεωρία είτε σε στατική μορφή, είτε σαν δυναμικές οντότητες που προκύπτουν από αστάθειες.

Παρακάτω θα εστιάσουμε στη πιο γενική περίπτωση διανυσματικών υλικών-κυμάτων σολιτονίων και πιο συγκεκριμένα στα DD και DB, παρουσιάζοντας αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε σχετικές διαμορφώσεις που περιέχουν την παραδοσιακή χρόνο-ανεξάρτητη παγίδα. Στο σημείο αυτό

πρέπει να τονιστεί ότι υπό την απουσία παγίδας, τα διανυσματικά σολιτόνια των τύπων που προαναφέραμε έχουν μελετηθεί εκτενώς στα πλαίσια της μη-γραμμικής οπτικής, όπου σολιτόνια πολλαπλών συστατικών δημιουργούνται όταν πεδία μιας συχνότητας ή μιας πόλωσης έρχονται σε σύζευξη με πεδία άλλων συχνοτήτων ή άλλων πολώσεων. Μιλώντας από μαθηματική άποψη η ύπαρξη και η ευστάθεια των οπτικών σολιτονίων πολλαπλών συστατικών και επίσης των υλικού-κύματος σολιτονίων, στην αναμίξιμη περίπτωση, μπορούν να γίνουν κατανοητά από το γεγονός ότι οι σχετικές συζευγμένες NLS εξισώσεις βασίζονται στο γνωστό επονομαζόμενο σύστημα Manakov. Αυτό έχει τη μορφή μιας διανυσματικής NLS εξίσωσης και πιο συγκεκριμένα είναι :

$$i\partial_t \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \partial_z^2 \mathbf{u} \pm |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \quad (2.3)$$

όπου $\mathbf{u}(z,t) = (u_1(z,t), u_2(z,t), \dots, u_n(z,t))$ είναι ένα n συστατικών διάνυσμα. Αυτό το σύστημα είναι γνωστό ότι είναι πλήρως ολοκληρώσιμο. Στην πραγματικότητα, μπορεί να ολοκληρωθεί με την επέκταση της Inverse Scattering Transform (IST) μεθόδου, που χρησιμοποιείται για την ολοκλήρωση της βαθμωτής NLS εξίσωσης και επιτρέπει τέτοιες διανυσματικές N-σολιτονίων λύσεις.

2.7 Διανυσματικά σολιτόνια στην ομογενή περίπτωση

Ας ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας με την απλούστερη πιθανή περίπτωση που αντιστοιχεί σε ένα δυο συστατικών διαμήκες (κατά μήκος της x διεύθυνσης) απωστικό BEC, αποτελούμενο από δυο διαφορετικές καταστάσεις υπέρλεπτης υφής του ιδίου αλκαλικού ισότοπου, όπως για παράδειγμα του ρουβιδίου 87, ^{87}Rb . Τέτοιες καταστάσεις μπορούν να είναι οι $|1, -1\rangle$ και $|2, 1\rangle$ όπως στην περίπτωση αρκετών πειραμάτων που έχουν διεξαχθεί. Στην πρώτη περίπτωση, τα μήκη σκέδασης παίρνουν τις τιμές $\alpha_{11} = 100,4\alpha_0$, $\alpha_{12} = 97,66\alpha_0$ και $\alpha_{22} = 95,00\alpha_0$ ενώ στη δεύτερη περίπτωση οι αντίστοιχες τιμές είναι $\alpha_{11} = 100,4\alpha_0$, $\alpha_{12} = 98,98\alpha_0$ και $\alpha_{22} = 98,98\alpha_0$ όπου α_0 είναι η ακτίνα του Bohr. Είναι ξεκάθαρο και στις δυο περιπτώσεις ότι τα μήκη

σκέδασης έχουν περίπου τις ίδιες τιμές, ας πούμε $\alpha_{ij} \approx \alpha$. Επιπρόσθετα, υποθέτοντας ότι η παγίδα είναι υψηλά ανισοτροπική, δηλαδή εάν η διαμήκης και η εγκάρσια συχνότητα παγίδευσης είναι τέτοιες ώστε $\omega_x \ll \omega_\perp$, το σύστημα της εξίσωσης (2.1) ανάγεται στη μορφή:

$$i\partial_t \psi_1 = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \psi_1 + V(x)\psi_1 + (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - \mu) \psi_1 \quad (2.4)$$

$$i\partial_t \psi_2 = -\frac{1}{2} \partial_x^2 \psi_2 + V(x)\psi_2 + (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - \mu - \Delta) \psi_2 \quad (2.5)$$

όπου Δ είναι η διαφορά ανάμεσα στα χημικά δυναμικά των δυο συστατικών, ενώ το δυναμικό στις εξισώσεις (2.4, 2.5) δίνεται τώρα από την σχέση:

$$V(x) = \frac{1}{2} \Omega^2 x^2 \quad \text{όπου } \Omega = \omega_x / \omega_\perp \text{ είναι η κανονικοποιημένη δύναμη παγίδας.}$$

Στην ανάλυσή μας παρακάτω, θα υποθέσουμε ότι τα χημικά δυναμικά που χαρακτηρίζουν κάθε συστατικό είναι ίσα και συνεπώς η διαφορά τους Δ θα είναι ίση με μηδέν ($\Delta = 0$).

Σχετικά με τις λύσεις των διανυσματικών σολιτονίων θα εφαρμόσουμε την διαδικασία που ακολουθεί. Δεδομένης της απουσίας δυναμικού και υποθέτοντας ότι $\Delta = 0$, το σύστημα των εξισώσεων (2.4, 2.5) είναι το πλήρως ολοκληρώσιμο Manakov σύστημα και θα αρχίσουμε από μια ακριβή διανυσματική σολιτονική λύση των εξισώσεων (2.4, 2.5), και πιο συγκεκριμένα το DB σολιτόνιο και στη συνέχεια θα εξάγουμε άλλα είδη διανυσματικών σολιτονίων όπως regular και beating DD σολιτόνια με χρήση SU(2) rotations.

Θεωρώντας τις οριακές συνθήκες $|\psi_1|^2 \rightarrow \mu$ και $|\psi_2|^2 \rightarrow 0$ καθώς το $|x| \rightarrow \infty$ οι εξισώσεις (2.4, 2.5) κατέχουν μια ακριβής αναλυτική DB σολιτονική λύση της ακόλουθης μορφής:

$$\psi_1(x, t) = \sqrt{\mu} (\cos \phi \tanh \xi + i \sin \phi) \quad (2.6)$$

$$\psi_2(x, t) = n \operatorname{sech} \xi \exp[i k x + i \theta(t)] \quad (2.7)$$

όπου $\xi = D(x - x_0(t))$, ϕ είναι η γωνία φάσης του σκοτεινού σολιτονίου $\cos\phi$ και n αναπαριστούν το πλάτος των σκοτεινών και φωτεινών σολιτονίων και D και $x_0(t)$ συνδέονται με το αντίστροφο πλάτος και την κεντρική θέση του DB σολιτονίου. Επιπρόσθετα $k = D \tan\phi$ και $\theta(t)$ είναι η (σταθερά) κυματάρηθμος και η φάση του φωτεινού σολιτονίου αντίστοιχα. Οι πιο πάνω παράμετροι του DB σολιτονίου συνδέονται μέσω των ακόλουθων εξισώσεων:

$$D^2 = \mu \cos^2 \phi - n^2 \quad (2.8)$$

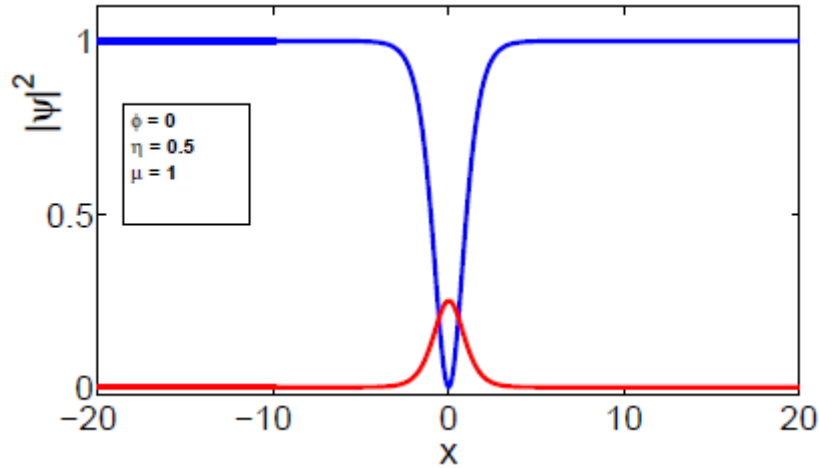
$$\dot{x}_0 = k = D \tan \phi \quad (2.9)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2}(D^2 - k^2) \quad (2.10)$$

με \dot{x}_0 και $\dot{\theta}$ να υποδηλώνουν την ταχύτητα και την γωνιακή συχνότητα του DB σολιτονίου αντίστοιχα. Οι τελείες υποδηλώνουν τις χρονικές παραγώγους των μεταβλητών. Έτσι το DB σολιτόνιο, σχέσεις (2.6) και (2.7), χαρακτηρίζεται από τρεις ελεύθερες παραμέτρους και άρα συνολικά από επτά παραμέτρους και συγκεκριμένα $\mu, \phi, n, k, D, \dot{x}_0, \dot{\theta}$ και τέσσερις περιορισμούς (εξισώσεις (2.8) έως (2.10)). Σημειώστε ότι το πλάτος n του φωτεινού σολιτονίου, το χημικό δυναμικό μ του σκοτεινού σολιτονίου καθώς και η παράμετρος (αντίστροφου) πλάτους D του DB σολιτονίου συνδέονται με τον αριθμό των ατόμων N_B του φωτεινού σολιτονίου με τη χρήση της ακόλουθης εξίσωσης:

$$N_B = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_2|^2 dx = \frac{2\sqrt{\mu n^2}}{D} \quad (2.11)$$

Ένα τυπικό παράδειγμα των πυκνοτήτων των σκοτεινών και των φωτεινών σολιτονίων φαίνεται στην εικόνα 2.3 που ακολουθεί.



Εικόνα 2.3: Παράδειγμα της πυκνότητας για συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων (για $t=0$ και για $\phi=0$ και $\mu=1$) ενός DB σολιτονίου για $\eta=0.5$. Οι μπλε και κόκκινες συνεχόμενες γραμμές αντιστοιχούν στις ατομικές πυκνότητες $|\psi_1|^2$ (σκοτεινό σολιτόνιο) και $|\psi_2|^2$ (φωτεινό σολιτόνιο) αντίστοιχα.

Είναι τώρα ιδιαίτερα χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων (2.4) και (2.5), παραμένει αμετάβλητο υπό την χρήση SU(2) rotations. Πιο συγκεκριμένα, ας παρατηρήσουμε ότι μια γενική μήτρα στοιχείων SU(2) παίρνει την εξής μορφή:

$$U = \begin{pmatrix} a & -\beta^* \\ \beta & a^* \end{pmatrix}$$

όπου a και β είναι μιγαδικές σταθερές τέτοιες ώστε $|a|^2 + |\beta|^2 = 1$. Σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να αποδειχθεί ότι, εάν $(\psi_1, \psi_2)^T$ είναι λύση των εξισώσεων ((2.4) και (2.5)) τότε και οι

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} \equiv U \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\psi_1 - \beta^*\psi_2 \\ \beta\psi_1 + a^*\psi_2 \end{pmatrix}$$

είναι επίσης λύσεις των εξισώσεων (2.4) και (2.5). Αυτό υποδηλώνει ότι μπορεί κανείς τώρα να αρχίσει από τη λύση DB σολιτονίου και να κατασκευάσει λύσεις SU(2) rotated στην ακόλουθη μορφή[1,2]:

$$\psi_1(x,t) = \alpha\sqrt{\mu} \{ \cos \phi \tanh \xi + i \sin \phi \} - \beta^* \eta \operatorname{sech} \xi \exp \{ ikx + i\theta(t) \} \quad (2.12)$$

$$\psi_2(x,t) = \beta\sqrt{\mu} \{ \cos \phi \tanh \xi + i \sin \phi \} + a^* \eta \operatorname{sech} \xi \exp \{ ikx + i\theta(t) \} \quad (2.13)$$

Με τις επιπρόσθετες τέσσερις παραμέτρους $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ και τον περιορισμό $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ η λύση (2.12, 2.13) χαρακτηρίζεται από έξι ελεύθερες παραμέτρους. Εισάγοντας μια νέα παράμετρο c , την ταχύτητα του ρευστού υποβάθρου, ακόμα μια λύση μπορεί να κατασκευαστεί από τις εξισώσεις (2.12) και (2.13) μέσω μιας Galilean boost:

$$\psi_{1,2}(x,t) \rightarrow \psi_{1,2}(x-ct,t) \exp[i(cx - c^2t/2)]$$

Έτσι, στην πιο γενική περίπτωση αυτή η λύση σολιτονίου χαρακτηρίζεται από επτά ελεύθερες παραμέτρους. Ένα φυσικό σετ παραμέτρων μπορεί να βρεθεί από την μακρινού πεδίου $|x| \rightarrow \infty$ συμπεριφορά, που αποτελείται από δυο πυκνότητες, μια συνολική ταχύτητα ρευστού και τέσσερις φάσεις.

Εξαιτίας της αμεταβλητότητας Galilean αλλά και της αμεταβλητότητας της φάσης, $\psi'_j(x,t) = \psi_j(x,t) \exp(i\phi_j)$, θα υποθέσουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι το υπόβαθρο είναι σε ηρεμία, δηλαδή $c=0$ και θα εστιάσουμε πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση των SO(2) rotated DB σολιτονίων. Σε αυτή την περίπτωση η αντίστοιχη ορθογώνια μήτρα δίνεται από:

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\chi) & -\sin(\chi) \\ \sin(\chi) & \cos(\chi) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

όπου χ είναι μια αυθαίρετη γωνία. Με αυτό τον τρόπο οι σχετικές SO(2) rotated λύσεις σολιτονίων παίρνουν την μορφή:

$$\begin{aligned} \psi_1(x,t) = & \cos(\chi)\sqrt{\mu}\{\cos\phi\tanh(D(x-x_0(t))) + i\sin\phi\} \\ & - \sin(\chi)\eta\operatorname{sech}(D(x-x_0(t)))\exp\{ikx + i\theta(t)\} \quad (2.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(x,t) = & \sin(\chi)\sqrt{\mu}\{\cos\phi\tanh(D(x-x_0(t))) + i\sin\phi\} \\ & + \cos(\chi)\eta\operatorname{sech}(D(x-x_0(t)))\exp\{ikx + i\theta(t)\} \quad (2.16) \end{aligned}$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι για $\chi=0$, η λύση των σχέσεων (2.15) και (2.16) ανάγεται σε ένα DB σολιτόνιο (σχέσεις (2.6) και (2.7)), ενώ για $\eta=0$ ανάγεται σε ένα regular DD σολιτόνιο. Αυτό γίνεται εμφανής με τη θεώρηση των ασυμπτωτικών του διανυσματικού σολιτονίου οι οποίες είναι: $|\psi_1|^2 \rightarrow \mu\cos^2(\chi)$ και $|\psi_2|^2 \rightarrow \mu\sin^2(\chi)$ καθώς το $|x| \rightarrow \infty$. Όταν και οι δυο παράμετροι χ και η είναι μη μηδενικές, τότε κάθε σολιτόνιο αποτελείται από μια διαδοχή ενός βυθίσματος και ενός παλμού (υψώματος) πάνω από ένα υπόβαθρο σταθερής πυκνότητας, που αντιστοιχούν σε σκοτεινά και φωτεινά συστατικά των εκφράσεων των σχέσεων (2.15) και (2.16). Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι ασυμπτωτικές σε αυτή τη γενική περίπτωση παραμένουν αμετάβλητες και έτσι η λύση (2.15, 2.16) είναι στην πραγματικότητα μια λύση DD σολιτονίου, που χαρακτηρίζεται από τέσσερις ελεύθερες παραμέτρους.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις πυκνότητες των σκοτεινών σολιτονίων οι οποίες διαβάζονται:

$$\begin{aligned} n_1 \equiv |\psi_1|^2 = & \mu\cos^2(\chi) - (\mu\cos^2(\chi)\cos^2\phi - \eta^2\sin^2(\chi))\operatorname{sech}^2\xi - \sqrt{\mu\eta}\sin(2\chi) \\ & \times\{\sin\phi\sin[kx + \theta(t)] + \cos\phi\cos[kx + \theta(t)]\tanh\xi\}\operatorname{sech}\xi \quad (2.17) \end{aligned}$$

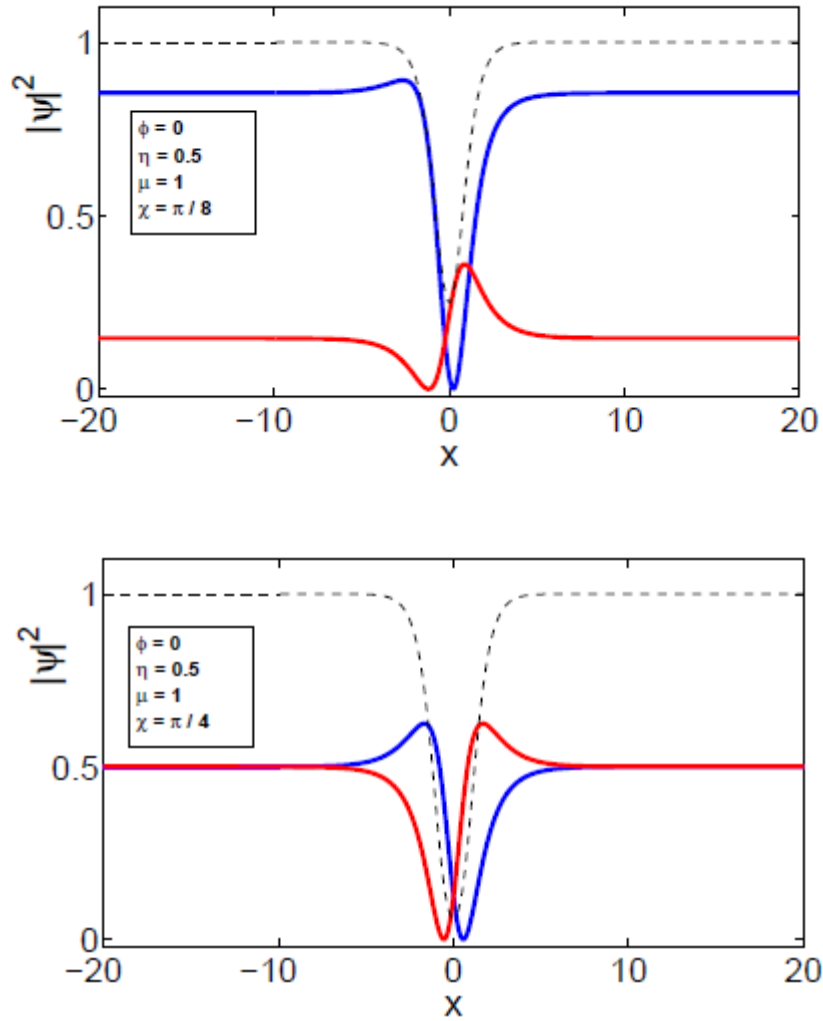
$$n_2 \equiv |\psi_2|^2 = \mu \sin^2(\chi) - (\mu \sin^2(\chi) \cos^2 \phi - \eta^2 \cos^2(\chi)) \operatorname{sech}^2 \xi + \sqrt{\mu \eta} \sin(2\chi) \\ \times \{ \sin \phi \sin[kx + \theta(t)] + \cos \phi \cos[kx + \theta(t)] \tanh \xi \} \operatorname{sech} \xi \quad (2.18)$$

ενώ η συνολική πυκνότητα n_{tot} του DD σολιτονίου δίνεται από:

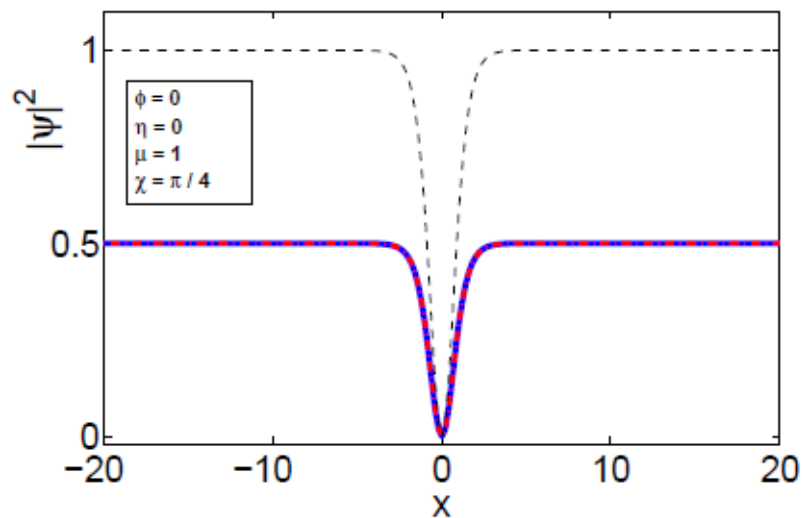
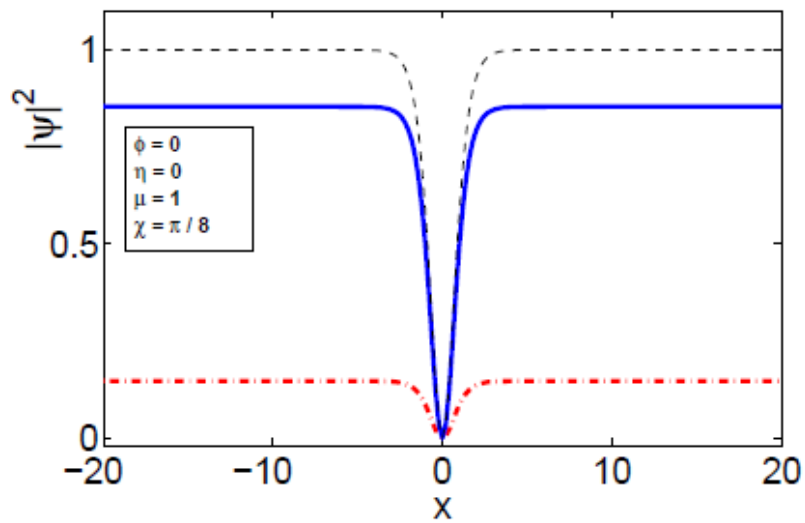
$$n_{tot} = n_1 + n_2 = \mu - D^2 \operatorname{sech}^2 \xi \quad (2.19)$$

Στο σημείο αυτό, πρέπει να τονιστεί ότι η συνολική πυκνότητα του DD σολιτονίου είναι χρόνο-ανεξάρτητη και έχει τη μορφή της πυκνότητας ενός σκοτεινού σολιτονίου βάθους D^2 πάνω από ένα υπόβαθρο πυκνότητας μ . Η πιο πάνω πυκνότητα είναι στην ουσία πανομοιότυπη με την πυκνότητα του DB σολιτονίου. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του γεγονότος ότι υπό την SO(2) rotation η συνολική πυκνότητα, όπως και όλες οι άλλες πυκνότητες, παραμένουν αμετάβλητες. Αυτό θα είναι ιδιαίτερα σημαντικό αν λάβουμε υπόψη την κίνηση των σολιτονίων αυτών σε παγίδα.

Παραδείγματα των πυκνοτήτων των ξεχωριστών σολιτονίων, καθώς και οι συνολικές πυκνότητες των πιο πάνω DD σολιτονίων φαίνονται στις εικόνες 2.4 και 2.5 που ακολουθούν.



Εικόνα 2.4: Παραδείγματα των πυκνοτήτων για $t=0$, $\phi=0$ και $\mu=1$ των beating DD σολιτονίων, με $n=0.5$ και με τα ξεχωριστά για κάθε συστατικό σκοτεινά σολιτόνια, να έχουν διαφορετικές ($\chi=\pi/8$) ή ίσες ($\chi=\pi/4$) πυκνότητες αντίστοιχα. Οι μπλε και οι κόκκινες συνεχόμενες γραμμές αντιστοιχούν στις ατομικές πυκνότητες $|\psi_1|^2$ και $|\psi_2|^2$, ενώ οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στη συνολική πυκνότητα $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$.



Εικόνα 2.5: Παραδείγματα των πυκνοτήτων για $t=0$, $\phi=0$ και $\mu=1$ των regular DD σολιτονίων, με $n=0$ και με τα ξεχωριστά σκοτεινά σολιτόνια κάθε συστατικού, να έχουν διαφορετικές ($\chi=\pi/8$) ή ίσες ($\chi=\pi/4$) πυκνότητες αντίστοιχα. Οι μπλε και οι κόκκινες συνεχόμενες γραμμές αντιστοιχούν στις ατομικές πυκνότητες $|\psi_1|^2$ και $|\psi_2|^2$, ενώ οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στη συνολική πυκνότητα $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$.

Στην πιο γενική περίπτωση που αντιστοιχεί για $\eta \neq 0$, για παράδειγμα για $\eta=0.5$, η πυκνότητα κάθε σολιτονίου χαρακτηρίζεται από ένα βύθισμα και

ένα ύψωμα όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Από την άλλη πλευρά για $\eta=0$, το διανυσματικό σολιτόνιο είναι ένα regular σολιτόνιο, με τις πυκνότητες υποβάθρου να είναι γενικά διαφορετικές όπως για παράδειγμα στην περίπτωση με $\chi = \pi/8$ (επάνω πάνελ εικόνας 2.5). Στην περίπτωση κατά την οποία $\chi = \pi/4$ (κάτω πάνελ εικόνας 2.5) οι πυκνότητες υποβάθρου είναι ίσες. Σε όλες τις περιπτώσεις οι συνολικές πυκνότητες ακολουθούν το γνωστό μοτίβο της πυκνότητας ενός μονού σκοτεινού σολιτονίου (βλ. διακεκομμένες γραμμές).

Είναι χρήσιμο, να θεωρήσουμε τις πυκνότητες των σκοτεινών σολιτονίων n_1 και n_2 σε όλη την τροχιά των DD σολιτονίων, δηλαδή για $\xi=0$. Σε μια τέτοια περίπτωση, $x = x_0(t) = ut$ και συνεπώς οι πυκνότητες γράφονται ως εξής:

$$n_1(\xi = 0) = \mu \cos^2(\chi) \sin^2 \phi + \eta^2 \sin^2(\chi) - \sqrt{\mu\eta} \sin(2\chi) \sin \phi \sin \left[\frac{1}{2}(k^2 + D^2)t \right] \quad (2.20)$$

$$n_2(\xi = 0) = \mu \sin^2(\chi) \sin^2 \phi + \eta^2 \cos^2(\chi) + \sqrt{\mu\eta} \sin(2\chi) \sin \phi \sin \left[\frac{1}{2}(k^2 + D^2)t \right] \quad (2.21)$$

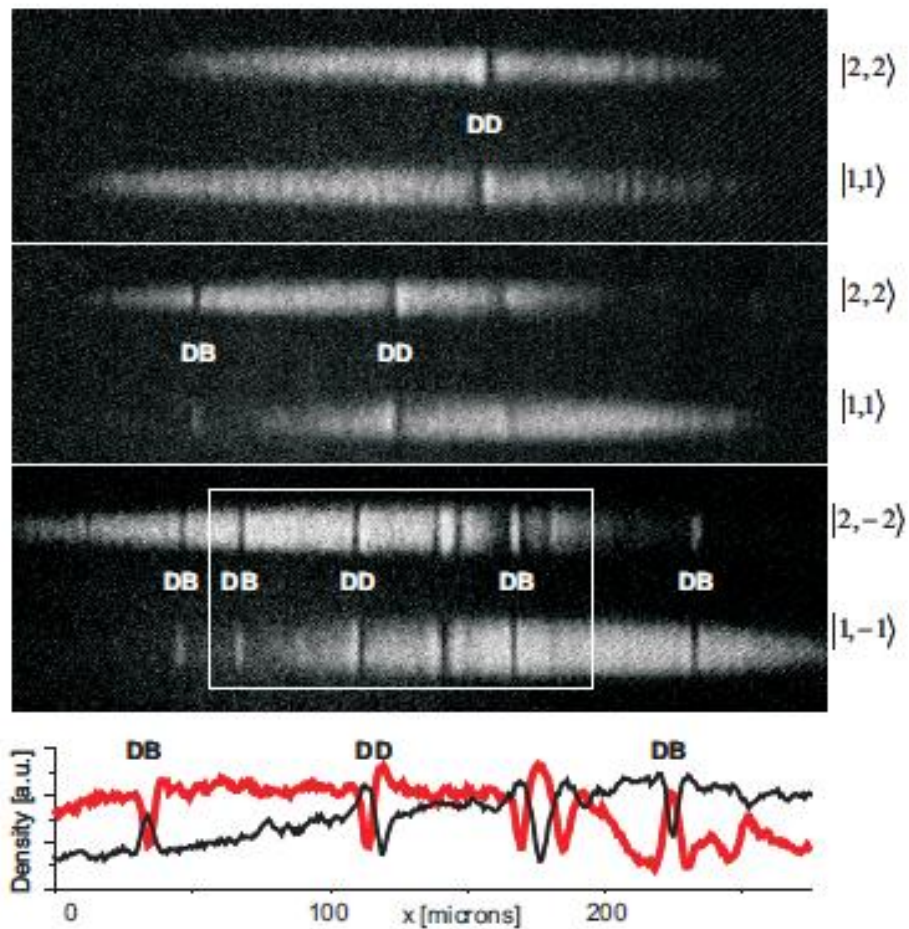
Είναι φανερό ότι, εάν $\eta=0$, δηλαδή στην περίπτωση των regular DD σολιτονίων, οι πυκνότητες $n_{1,2}(\xi=0)$ είναι χρόνο-ανεξάρτητες. Παρ όλα αυτά στη γενική περίπτωση όπου $\eta \neq 0$, οι πυκνότητες $n_{1,2}(\xi=0)$ είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου και έτσι στην περίπτωση αυτή οι λύσεις (2.15) και (2.16) καλούνται beating DD σολιτόνια. Η σχετική γωνιακή συχνότητα, η οποία αποτελεί την εσωτερική beating συχνότητα του DD σολιτονίου δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(k^2 + D^2) = \frac{1}{2}(\mu - \eta^2 \sec^2 \phi) \quad (2.22)$$

όπου έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει την εξίσωση (2.8). Η συχνότητα ω_0 οριοθετείται από δυο περιοριστικές τιμές. Αρχικά για την περίπτωση όπου $n \rightarrow \infty$, το beating DD σολιτόνιο, γίνεται ένα regular σολιτόνιο που χαρακτηρίζεται από ένα πλάτος $D = \sqrt{\mu} \cos \phi$ και μια ταχύτητα $k = \sqrt{\mu} \sin \phi$. Σε αυτή την περίπτωση $\omega_0 \rightarrow (1/2)\mu$. Δεύτερον, για την οριακή περίπτωση όπου $D \rightarrow 0$, το beating DD σολιτόνιο μειώνεται σε ένα επίπεδο κύμα. Σε αυτή την περίπτωση $\omega_0 \rightarrow (1/2)k^2$. Με άλλα λόγια, η εγγενής συχνότητα ταλάντωσης παίρνει τιμές στο εύρος:

$$\frac{1}{2}k^2 < \omega_0 < \frac{1}{2}\mu \quad (2.23)$$

Προτού προχωρήσουμε παρακάτω, είναι αρκετά ενδιαφέρον να παρουσιαστούν αποτελέσματα από πρόσφατα πειράματα, με χρήση της μεθόδου αντίθετης ροής από δυο αναμίξιμα BEC, όπου η παρατήρηση πολλών ειδών διανυσματικών σολιτονίων αναφέρεται. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα φαίνεται στην εικόνα 2.6 παρακάτω.



Εικόνα 2.6: Πειραματικές εικόνες σκοτεινών-φωτεινών (DB) και σκοτεινών-σκοτεινών (DD) σολιτονίων σε ένα δυο συστατικών BEC. Τα δυο συστατικά είναι κατακόρυφα μετατοπισμένα για τον διαχωρισμό της απεικόνισης. Όλες οι δυναμικές συμβαίνουν με εγκάρσια επικαλυπτόμενα συστατικά πριν τη διαδικασία της απεικόνισης. Τα καθαρά παραδείγματα DB και DD σολιτονίων που παρατηρούνται είναι μαρκαρισμένα. Στο τέταρτο πάνελ, η κόκκινη γραμμή δείχνει μια ακτινικά ολοκληρωμένη εγκάρσια τομή, του πιο πάνω συστατικού στην περιγεγραμμένη περιοχή από το κουτί του τρίτου πάνελ, ενώ η μαύρη γραμμή δείχνει την εγκάρσια τομή του κάτω συστατικού. Οι $|F, m_F\rangle$ υπέρλεπτες καταστάσεις υψής που χρησιμοποιούνται για αυτές τις εικόνες, δίνονται στα δεξιά του κάθε συστατικού, προσαρμοσμένες με βάση την αναφορά[8].

Το BEC σε αυτήν την εικόνα περιλαμβάνει δυο διαφορετικές υπέρλεπτες καταστάσεις υφής του ^{87}Rb και τα σολιτόνια δημιουργούνται με την υποβολή του BEC σε δια-συστατική αντίστροφη ροή. Σε κάθε πάνελ τα σύννεφα ατόμων των δυο συστατικών είναι κάθετα αποτυπωμένα μόνο για την απεικόνιση, ενώ όλες οι δυναμικές οδηγούν στο σχηματισμό σολιτονίων.

Καθαρά παραδείγματα DB σολιτονίων (μαρκαρισμένα σαν DB στην εικόνα), αποτελούνται από ένα σκοτεινό σολιτόνιο στο πρώτο συστατικό, συζευγμένο με ένα φωτεινό σολιτόνιο στο δεύτερο συστατικό. Το πειραματικό αποτέλεσμα της εικόνας 2.6 παρουσιάζει όχι μόνο τη δημιουργία πολλών DB σολιτονίων, αλλά και το σχηματισμό σολιτονίων τύπου DD και ακόμα και συνύπαρξη σολιτονίων διαφορετικών τύπων σε ένα απλό BEC. Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε τα προφίλ των πυκνοτήτων των DD σολιτονίων (κάτω πάνελ της εικόνας 2.6) με εκείνα των SO(2) rotated DB σολιτονίων, δηλαδή τα beating DD σολιτόνια (κάτω πάνελ της εικόνας 2.4). Μια αξιοσημείωτη, τουλάχιστον ποσοτικά συμφωνία παρατηρείται. Τα πιο πάνω αποτελέσματα, παρέχουν το κίνητρο για τη λεπτομερή μελέτη της ευστάθειας και της δυναμικής των διανυσματικών σολιτονίων στην παγίδα.

2.8 Ορισμός του μοντέλου για την ανεύρεση έγκυρων αναλυτικών λύσεων σολιτονίων υπό αυθαίρετες σταθερές αλληλεπίδρασης

Η ανάλυσή θα ξεκινήσει θεωρώντας ένα δυο συστατικών διαμήκες (κατά μήκος της x διεύθυνσης) απωθητικό Bose-Einstein συμπύκνωμα αποτελούμενο από δυο διαφορετικές υπέρλεπτες καταστάσεις υφής του ίδιου αλκαλικού ισότοπου. Θα εστιάσουμε στην περίπτωση μιας υψηλά ανισοτροπικής παγίδας, δηλαδή οι διαμήκης και εγκάρσιες συχνότητες παγίδευσης είναι τέτοιες ώστε $\omega_x \ll \omega_{\perp}$. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα μπορεί να περιγραφεί στο επίπεδο μέσου πεδίου από δυο συζευγμένες Gross-Pitaevskii εξισώσεις στη μορφή[4,11]:

$$i\hbar\partial_t\psi_j = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi_j + V(x) - \mu_j + \sum_{k=1}^2 g_{jk} |\psi_k|^2 \right) \psi_j \quad (2.24)$$

Στο μοντέλο αυτό, το $\psi_j(x,t)$ ($j=1,2$) υποδηλώνει τις μέσου πεδίου κυματοσυναρτήσεις των δυο συστατικών, κανονικοποιημένες στον αριθμό των ατόμων. Δηλαδή όπως έχει αναφερθεί ξανά: $N_j = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_j|^2 dx$, όπου m είναι η ατομική μάζα και μ_j είναι τα χημικά δυναμικά. Επίσης $g_{jk} = 2\hbar\omega_{\perp}a_{jk}$ είναι οι ισχύουσες σταθερές αλληλεπίδρασης στη μια διάσταση (1D), με a_{jk} να υποδηλώνει τα τρία s-wave μήκη σκέδασης ($\alpha_{12} = \alpha_{21}$) που λαμβάνονται υπόψη για συγκρούσεις ανάμεσα σε άτομα που ανήκουν στο ίδιο (α_{jj}) η διαφορετικό ($\alpha_{jk}, j \neq k$) είδος. Το εξωτερικό δυναμικό παγίδευσης είναι παραβολικό της μορφής $V(x) = (1/2)m\omega_x^2 x^2$. Θεωρώντας κανονικοποιημένες πυκνότητες $|u_j|^2 = 2\alpha |\psi_j|^2$ και μήκος μέτρησης, χρόνο και ενέργεια σε μονάδες $a_r = \sqrt{\hbar/\omega_{\perp}}$, ω_{\perp}^{-1} και $\hbar\omega_{\perp}$ αντίστοιχα, η σχέση (2.24) εκφράζεται στην ακόλουθη αδιάστατη μορφή:

$$i\partial_t u_1 = -\frac{1}{2}\partial_x^2 u_1 + V(x)u_1 + (g_{11}|u_1|^2 + g_{12}|u_2|^2 - \mu_1)u_1 \quad (2.25)$$

$$i\partial_t u_2 = -\frac{1}{2}\partial_x^2 u_2 + V(x)u_2 + (g_{12}|u_2|^2 + g_{22}|u_1|^2 - \mu_2)u_2 \quad (2.26)$$

Δηλαδή ανάγεται, σε ένα αντίστοιχο σχήμα με εκείνο των εξισώσεων (2.4) και (2.5), αλλά διαμορφωμένο για αυθαίρετες σταθερές αλληλεπίδρασης. Το κανονικοποιημένο εξωτερικό δυναμικό στις εξισώσεις (2.25) και (2.26), όπως έχει αναφερθεί ξανά, παίρνει τη μορφή:

$$V(x) = (1/2)\Omega^2 x^2$$

όπου αντίστοιχα το $\Omega = \omega_x / \omega_\perp$ αντιπροσωπεύει την κανονικοποιημένη δύναμη παγίδας.

2.9 Αναλυτικές λύσεις DB σολιτονίων για αυθαίρετες σταθερές αλληλεπίδρασης

Τώρα θα παρουσιάσουμε ότι τα κύματα DB τύπου μπορεί στην πραγματικότητα να βρεθούν σε μια ρητή αναλυτική μορφή, ακόμα και έξω από την εξαιρετική περίπτωση πλήρως ολοκληρώσιμου συστήματος με $g_{ij} = 1$ όπου η θεωρία Inverse Scattering παρέχει τέτοιες ρητές λύσεις. Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $V(x) = 0$, αλλά διατηρώντας όσο το δυνατόν γενικότερους συντελεστές και συγκεκριμένα τα g_{ij} θα είναι αυθαίρετα και θα περιορίζονται μόνο από τις συνθήκες για την ύπαρξη των λύσεων όπως ακολουθεί.

Επιδιώκουμε πραγματικές λύσεις στάσιμου κύματος των εξισώσεων (2.25) και (2.26) με $\partial_t u_j = 0$ και προκύπτει:

$$\mu_1 u_1 = -\frac{1}{2} u_1'' + (g_{11} u_1^2 + g_{12} u_2^2) u_1 \quad (2.27)$$

$$\mu_2 u_2 = -\frac{1}{2} u_2'' + (g_{12} u_1^2 + g_{22} u_2^2) u_2 \quad (2.28)$$

όπου οι διπλοί τόνοι συμβολίζουν τη λαπλασιανή των u_1 και u_2 αντίστοιχα.

Οι ρητές αναλυτικές λύσεις σε μορφή σκοτεινών κυμάτων u_1 και φωτεινών κυμάτων για u_2 , είναι[4]:

$$u_1 = A_1 \tanh(bx) \quad (2.29)$$

$$u_2 = A_2 \operatorname{sech}(bx) \quad (2.30)$$

Όπου A_1 και A_2 υποδηλώνουν τα πλάτη των σκοτεινών και φωτεινών συστατικών αντίστοιχα, ενώ το b είναι το κοινό αντίστροφο τους πλάτος. Εισάγοντας τις πιο πάνω σχέσεις στις εξισώσεις κίνησης, βρίσκουμε ότι το σύστημα ικανοποιείται παρέχοντας ένα αριθμό αλγεβρικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα για να ικανοποιήσουμε τη σχέση (2.27) απαιτείται:

$$\mu_1 = b^2 + g_{12}A_2^2 \quad (2.31)$$

$$b^2 = g_{11}A_1^2 - g_{12}A_2^2 \quad (2.32)$$

ενώ για να ικανοποιήσουμε την (2.28) απαιτείται:

$$\mu_2 = -\frac{b^2}{2} + g_{12}A_1^2 \quad (2.33)$$

$$b^2 = g_{12}A_1^2 - g_{22}A_2^2 \quad (2.34)$$

Έτσι πλέον, εύκολα μπορούμε να επιλύσουμε τις πιο πάνω συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα, οι εξισώσεις (2.31) και (2.32) και (2.34) μπορούν να επιλυθούν σαν τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους A_1, A_2, b^2 με την προϋπόθεση ότι οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης g_{ij} και το χημικό δυναμικό μ_1 έχουν ορισθεί. Η εναπομένουσα εξίσωση (2.33) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν τη σχέση, η οποία καθορίζει το χημικό δυναμικό του δεύτερου (φωτεινού) συστατικού. Έτσι, η αναλυτική λύση έχει τις παραμέτρους πλάτους A_1 και A_2 να ορίζονται ως:

$$A_1^2 = \frac{\mu_1}{g_{11}} \quad (2.35)$$

$$A_2^2 = \frac{\mu_1}{g_{11}} \frac{g_{11} - g_{12}}{g_{12} - g_{22}} \quad (2.36)$$

και η παράμετρος αντίστροφου πλάτους b ορίζεται ως εξής:

$$b^2 = \frac{\mu_1}{g_{11}} \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{22} - g_{12}} \quad (2.37)$$

ενώ η εξίσωση (2.33) με την εισαγωγή της σχέσης (2.37) και (2.35) ολοκληρώνει τον υπολογισμό.

Μερικά σημαντικά συμπεράσματα σχετικά με την ακριβή λύση που προκύπτει από τον πιο πάνω υπολογισμό αλλά και τους περιορισμούς των παραμέτρων ύπαρξης είναι φανερά. Συγκεκριμένα, μπορεί να παρατηρηθεί από τη εξίσωση (2.36) ότι το φωτεινό συστατικό μπορεί να επιβιώσει όταν

$$\min(g_{11}, g_{22}) < g_{12} < \max(g_{11}, g_{22}). \quad (2.38)$$

Επιπρόσθετα, είναι ενδιαφέρον να συμπεράνουμε από την εξίσωση (2.37) ότι, εάν $g_{22} > g_{12}$ δηλαδή το δεύτερο συστατικό κατέχει το μεγαλύτερο μήκος διασκορπισμού, ενώ το φωτεινό σολιτόνιο είναι στο πρώτο συστατικό, τότε τέτοιες ακριβείς λύσεις σκοτεινών-φωτεινών σολιτονίων θα υπάρχουν μόνο για αναμίξιμα συστατικά και συγκεκριμένα για $g_{11}g_{22} > g_{12}^2$. Από την άλλη πλευρά, εάν $g_{22} < g_{12}$ δηλαδή το πρώτο συστατικό κατέχει το μεγαλύτερο μήκος διασκορπισμού και είναι εκείνο που κατέχει το σκοτεινό σολιτόνιο, τότε τα πάνω σκοτεινά-φωτεινά σολιτόνια θα υπάρχουν μόνο για μη αναμίξιμα συστατικά, δηλαδή πιο συγκεκριμένα για την περίπτωση όπου $g_{11}g_{22} < g_{12}^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

ΣΟΛΙΤΟΝΙΑ ΣΕ ΠΟΛΑΡΙΤΟΝΙΚΑ ΥΠΕΡΡΕΥΣΤΑ

3.1 Σολιτόνια σε 1D BECs

Στην παράγραφο αυτή, θα περιγραφούν ξανά τα σολιτόνια (στην μια διάσταση 1D), για ένα πολαριτονικό όμως BEC, έτσι ώστε στις επόμενες παραγράφους να συνδεθούν με τις δίνες και τα πλάγια σολιτόνια (για ένα 2D σύστημα). Όπως έχει αναφερθεί ένα BEC είναι ένα σύστημα από μποζονικά σωματίδια που καταλαμβάνουν σε χαμηλή θερμοκρασία την ίδια χαμηλότερης ενέργειας (θεμελιώδη) κατάσταση. Η μακροσκοπική κυματοσυνάρτηση του συμπυκνώματος μπορεί να γραφεί:

$$\psi(r,t) = \sqrt{n(r,t)} e^{i\theta(r,t)} \quad (3.1)$$

Η κυματοσυνάρτηση αυτή είναι στη γενική περίπτωση μιγαδικής τιμής και έτσι κατέχει μια φάση θ η οποία μπορεί πιθανώς να περιέχει έναν όρο διάδοσης $k \cdot r$ ενώ το πλάτος της διέπεται από την πυκνότητα $n = |\Psi|^2$ των σωματιδίων μάζας m στο BEC. Η εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης, στην προσέγγιση του μέσου πεδίου, περιγράφεται όπως έχουμε αναφέρει από την GP εξίσωση:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + a_1 |\Psi|^2 \Psi \quad (3.2)$$

η οποία προσθέτει έναν όρο μη γραμμικής αλληλεπίδρασης στην NLS εξίσωση με μια σταθερά αλληλεπίδρασης a_1 ανάμεσα στα σωματίδια. Στη συνέχεια θα εστιάσουμε στην περίπτωση όπου $a_1 > 0$, που αντιστοιχεί σε απωστική αλληλεπίδραση ανάμεσα στα σωματίδια. Η GP εξίσωση θεωρεί την κανονικοποιημένη συνθήκη $N = \int |\psi|^2 dr$, όπου N ο συνολικός αριθμός σωματιδίων στο σύστημα. Η υπερρευστότητα επιτρέπεται από τη γραμμική διασπορά των στοιχειωδών διεγέρσεων (bogolons) σε μικρή ορμή. Η κλήση του γραμμικού μέρους της διασποράς ορίζει μια ταχύτητα του ήχου

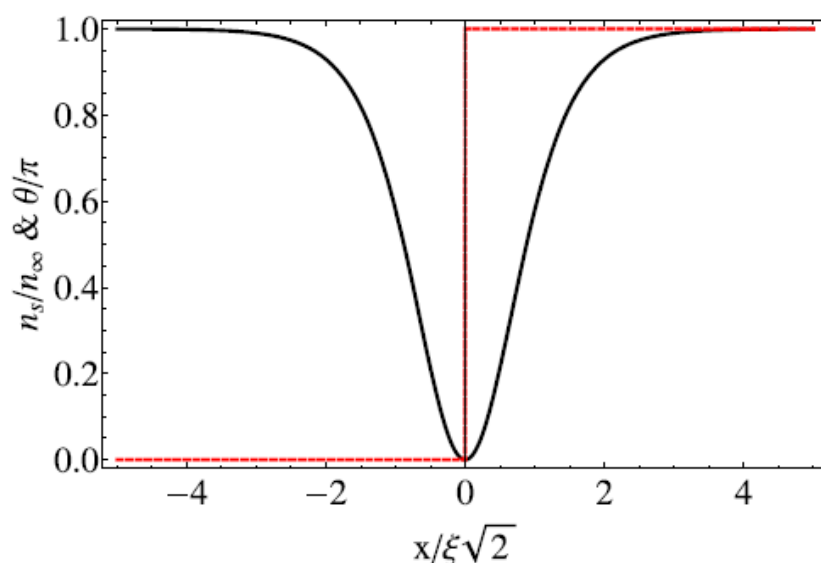
$c = \sqrt{\mu/m}$, όπου $\mu = \alpha_1 n$ είναι το χημικό δυναμικό. Οι μικρού πλάτους διεγέρσεις του συμπυκνώματος διαδίδονται με αυτή την ταχύτητα. Το κριτήριο του Landau επιτρέπει ένα διαδιδόμενο BEC να παραμένει υπερρευστό σε υποηχητικές ταχύτητες $0 < u < c$. Σε αυτό το εύρος, δεν υπάρχει τελική κατάσταση για την σκέδαση Rayleigh του διαδιδόμενου BEC (βλ. εικόνα 3.2). Το BEC συνεπώς, θα αγνοεί οποιαδήποτε ατέλεια που διακόπτει την ροή του. Για $u > c$, το BEC λέγεται ότι είναι υπερηχητικό και η σκέδαση Rayleigh γίνεται ξανά πιθανή.

Σε ένα 1D σύστημα ($r \rightarrow x$) η GP εξίσωση επιτρέπει ειδικές λύσεις να εμφανιστούν: τα γνωστά γκρι σολιτόνια, τα οποία παραμένουν ευσταθή (δεν εξαπλώνονται με το χρόνο) ακόμα και αν διαδίδονται. Αυτή η βύθιση στην πυκνότητά τους σχετίζεται με μια ολίσθηση στη φάση τους. Η λύση του σολιτονίου γράφεται:

$$\Psi_s(x, t) = \sqrt{n_\infty} \left[\sqrt{1 - \frac{u_s^2}{c^2}} \tanh \left(\frac{x - u_s t}{\xi \sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{u_s^2}{c^2}} \right) + i \frac{u_s}{c} \right] \quad (3.3)$$

Εδώ n_∞ είναι η πυκνότητα μακριά από τον πυρήνα του σολιτονίου, u_s είναι η ταχύτητα του σολιτονίου που σχετίζεται με το βάθος του μέσω της $u_s = c \sqrt{n(0)/n_\infty}$ και $\xi = \hbar / \sqrt{2m\mu}$ είναι το μήκος αποκατάστασης (healing length) του BEC που ορίζει το μέγεθος του πυρήνα του σολιτονίου. Η ολίσθηση της φάσης του σολιτονίου είναι $\Delta\theta = \arccos(u_s/c)$ και ποικίλλει ανάμεσα στο 0 και το π . Για $u_s = 0$, η κυματοσυνάρτηση είναι πραγματικής τιμής, η πυκνότητα του πυρήνα του σολιτονίου είναι ακριβώς μηδέν και η φάση είναι μια Heaviside συνάρτηση πλάτους π , η οποία δεν ορίζεται στο $x=0$. Αυτή η λύση είναι το γνωστό σκοτεινό σολιτόνιο. Τα γκρι σολιτόνια παραμένουν ευσταθή στο σύστημα εξαιτίας των αλληλεπιδράσεων που υπάρχουν και αντισταθμίζουν τη διασπορά, με βάση την γραμμική Schrödinger εξίσωση. Ωστόσο, από μαθηματική σκοπιά, τίποτα δεν αποτρέπει αυτό το είδος του σολιτονίου από το να μετασχηματίζεται συνέχεια σε μια ομογενή λύση και έτσι, ένα γκρι σολιτόνιο είναι στη ουσία μια ψευδο-

τοπολογική ατέλεια. Μπορεί να παρατηρήσει κανείς τον παράγοντα Lorentz $1/\gamma = \sqrt{1 - u_s^2/c^2}$ που εμφανίζεται στην σχέση (3.3), επειδή η ενέργεια των σολιτονίων στο BEC περιγράφεται από μια σχετικιστική έκφραση (τουλάχιστον σε χαμηλά κυματοδιανύσματα). Η εικόνα 3.1 δείχνει το κανονικοποιημένο προφίλ της πυκνότητας του σκοτεινού σολιτονίου μαζί με τη φάση του.



Εικόνα 3.1: Η κανονικοποιημένη πυκνότητα $n_s(x) = |\Psi_s(x)|^2$ (συνεχής μαύρη γραμμή) του σκοτεινού σολιτονίου μαζί με τη φάση του (διακεκομμένη κόκκινη γραμμή)

3.2 Δίνες και πλάγια σολιτόνια σε 2D BECs

Στην περίπτωση των δυο διαστάσεων, οι στοιχειώδης τοπολογικές διεγέρσεις είναι οι κβαντισμένες δίνες, γνωστές και ως υπεραγωγοί. Αυτά τα αντικείμενα είναι μη τετριμμένες διαμορφώσεις της κυματομορφής του συμπυκνώματος που εμφανίζουν μια κατάρρευση της υπερρευστότητας. Όπως τα σκοτεινά σολιτόνια, οι δίνες χαρακτηρίζονται από μια εξαφανιζόμενη πυκνότητα, καθώς και μια μοναδική φάση στον πυρήνα τους. Χάρη στη διαστασιοποίηση του συστήματος, κατέχουν επίσης μια γωνιακή ορμή. Τα

σωματίδια περιστρέφονται όλο και πιο γρήγορα καθώς προσεγγίζουν την ελάχιστη πυκνότητα, όπως ακριβώς στις κλασικές δίνες υδάτων. Η διαφορά με τα κλασικά ρευστά ανθίζει από τη φάση του συμπυκνώματος. Πράγματι, η φάση ορίζεται μέχρι και το 2π για μια οποιαδήποτε κυματοσυνάρτηση. Ως εκ τούτου η κυκλοφορία της ταχύτητας του υπερρευστού σε ένα κλειστό βρόχο που περικυκλώνει τη δίνη είναι κβαντισμένη: $\oint V \cdot dl = lh/m$, όπου το κβαντικό l είναι ο επονομαζόμενος winding αριθμός. Ο winding αριθμός μιας κλειστής καμπύλης στο επίπεδο γύρω από ένα σημείο, είναι ένας αριθμός που αναπαριστά το συνολικό αριθμό όπου η καμπύλη ταξιδεύει αντίστροφα από τη φορά του ρολογιού γύρω από το σημείο αυτό. Δοσμένου ότι $V = \hbar/m\nabla\theta$, μπορεί να δει κανείς ότι $\theta = l\phi$, όπου ϕ είναι πολική γωνία. Στα συμπυκνώματα πολαριτονίων οι αυθόρμητα δημιουργούμενες δίνες, έχουν αρχικά παρατηρηθεί σε ντετερμινιστικές θέσεις αγκιστρωμένες σε διαταραχές. Πιο συχνά, οι δίνες έχουν εντοπιστεί σε διαταραχές σε ένα ρευστό πολαριτονίων διαδιδόμενο μέσα από ένα εμπόδιο. Θα εστιάσουμε στο είδος της διαμόρφωσης των πλάγιων μισών σολιτονίων (oblique half-soliton, OHS). Ένας αρκετά μεγάλος αριθμός πειραματικών παρατηρήσεων, αντικατοπτρίζει την ευκολία που προσφέρεται από ένα πολαριτονικό σύστημα για τη διερεύνηση σχετικών υδροδυναμικών αποτελεσμάτων. Ένα από τα πλεονεκτήματα είναι ότι οι δίνες είναι πολύ μεγαλύτερες σε χωρικό μέγεθος για τα πολαριτόνια, δηλαδή $\xi \sim 1 \mu m$, σε σχέση με τα ατομικά συμπυκνώματα. Ένα άλλο πλεονέκτημα είναι ότι χρησιμοποιώντας τεχνικές κλασικής οπτικής είναι πιθανό να ανακατασκευαστεί ολόκληρη η κυματοσυνάρτηση του συμπυκνώματος και συγκεκριμένα η πυκνότητά του, από την ένταση του φωτός που δραπετεύει από τη μικροκοιλότητα και τη φάση του έως ένα παράγοντα 2π , από συμβολογραφήματα. Επιπρόσθετα, ο έλεγχος των παραμέτρων του συμπυκνώματος, όπως η πυκνότητα του ή το κυματοδιάνυσμά του εκτελούνται απλά με αλλαγή της έντασης της αντλίας και της γωνίας της διέγερσης του λέιζερ.

Το 2006 προτάθηκε η θεωρητική ανάλυση της επίδρασης μιας ατέλειας (δυναμικό εμπόδιο) που εμποδίζει τη ροή ενός υπερηχητικού BEC. Με την παραδοχή ότι η ατέλεια είναι αρκετά μεγάλη ως προς το μήκος

αποκατάστασης ξ του συμπυκνώματος για να διαταράξει το ρευστό σε βαθμίδες μήκους συγκρίσιμες με το ξ , (pseudo-) τοπολογικές ατέλειες μπορούν να δημιουργηθούν σε ένα κβαντικό ρευστό. Η πρόβλεψη ήταν ότι ένα ζευγάρι από πλάγια σολιτόνια θα δημιουργούνταν στον απόηχο του εμποδίου και αυτά θα επεκτείνονταν χωρίς παραμόρφωση. Μπορεί να περιμένει κανείς, ότι η σολιτονική λύση σε 2D θα είναι ασταθής ενάντια στις διαταραχές. Η ανάλυση της ευστάθειας, που πραγματοποιήθηκε αργότερα, έδειξε ότι το σολιτόνιο είναι πράγματι ασταθές και η αστάθεια υφίσταται μόνο κατά τη διάδοσή του. Αυτό σημαίνει ότι το σολιτόνιο αποσβένει καθώς διαδίδεται μακριά στην κάτω ροή από την ατέλεια. Εξαιτίας των αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στα σωματίδια, τα πλάγια σολιτόνια, είναι ευνοημένα ως προς τον σχηματισμό των σολιτονίων σαν σταθερές δομές. Ένας άλλος τρόπος για να περιγράψουμε τη δημιουργία των σολιτονίων είναι ο ακόλουθος: Το ρευστό τείνει να επιταχύνεται τοπικά κοντά στην ατέλεια, και δεδομένου ότι το πεδίο ταχύτητας και η φάση του ρευστού σχετίζονται μέσω $V = \hbar / m \nabla \theta$, μια σημαντική ολισθήση φάσης αποκτάται, δίνοντας γέννηση σε μια αρνητική παρεμβολή, παράγοντας βυθίσματα της πυκνότητας, τα οποία δεν είναι τίποτα παραπάνω παρά σολιτόνια. Αυξάνοντας το μέγεθος της ατέλειας οδηγούμαστε σε μεγαλύτερες ολισθήσεις φάσης και έτσι, περισσότερα από ένα ζευγάρια σολιτονίων μπορεί να εμφανιστούν.

Οι ιδιότητες ενός πλάγιου σολιτονίου μπορούν να παραχθούν αναλυτικά στο πλαίσιο της κβαντικής υδροδυναμικής. Αν $V = (u_x(x, y), u_y(x, y))$ είναι το πεδίο ταχύτητας της ροής σε καρτεσιανές συντεταγμένες, το πλάγιο σολιτόνιο τότε, ορίζεται πλήρως από της ακόλουθες εξισώσεις, οι οποίες παρέχουν την ταχύτητα των συστατικών σε όρους πυκνότητας [6,10]:

$$u_x = \frac{M(1+a^2n)}{(1+a^2)n} \quad (3.4)$$

$$u_y = \frac{aM(1-n)}{(1+a^2)n} \quad (3.5)$$

Η επιθυμητή λύση στη μορφή ενός σκοτεινού σολιτονίου στην πυκνότητα δίνεται από την σχέση:

$$n(\alpha) = 1 - (1 - p) \operatorname{sech} \left[\frac{\sqrt{1 - p}}{\sqrt{1 + a^2}} \alpha \right]^2 \quad (3.6)$$

όπου $\alpha = x - ay$ είναι ένα κεκλιμένο σύστημα συντεταγμένων, κάθετο στο πλάγιο σολιτόνιο (όπου a η κλίση του σολιτονίου ως προς τον άξονα y), $M = u/c$ είναι ο ονομαζόμενος Mach αριθμός και $p = M^2 / (1 + a^2)$.

Τα διαφορετικά συστατικά ταχύτητας μπορούν να βρεθούν από την εισαγωγή της έκφρασης (3.6) στις εκφράσεις (3.4) και (3.5), ενώ το αντίστροφο μισό πλάτος του σολιτονίου στην κατεύθυνση του x , δίνεται από

την έκφραση: $k = 2\sqrt{\frac{1-p}{1+a^2}}$. Το σολιτόνιο αυτό καλείται πλάγιο (oblique) γιατί

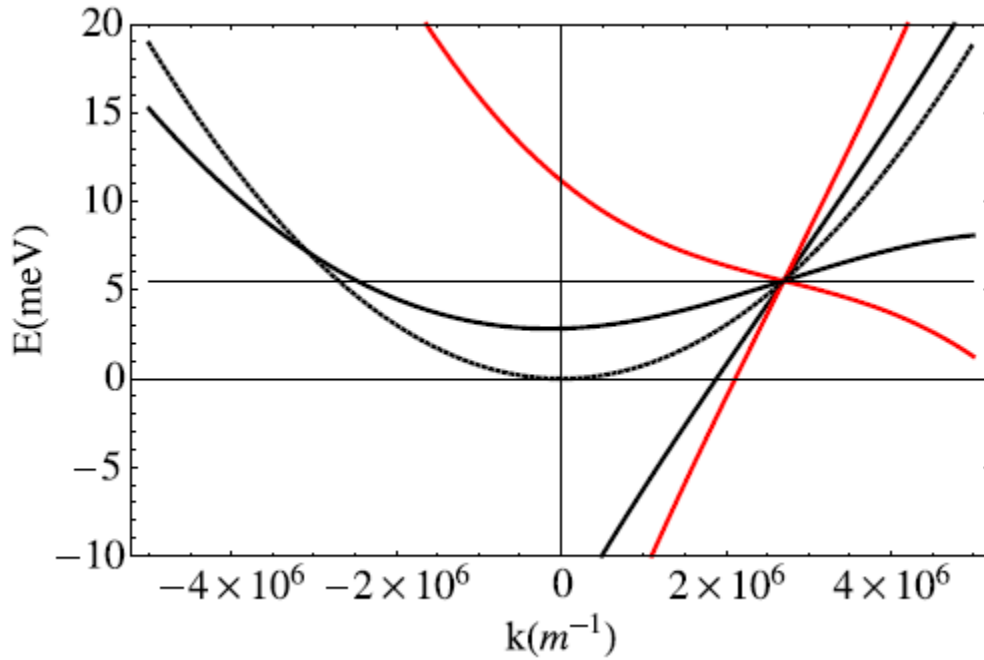
είναι πάντα κεκλιμένο ως προς την κατεύθυνση του υπερηχητικού ρευστού. Για τα 1D συστήματα ισχύει ότι η ταχύτητα ενός σολιτονίου σχετίζεται με το βάθος του, όπως αντίστοιχα και για τα 2D συστήματα. Πράγματι, για συγκεκριμένη τιμή του M , αυξάνοντας το a αυξάνεται το βάθος του σολιτονίου και έτσι μειώνει την ταχύτητά του. Με άλλα λόγια, όσο περισσότερο το σολιτόνιο είναι υπό κλίση ως προς τον x άξονα, τόσο γρηγορότερα κινείται σε σχέση με το συμπύκνωμα και τόσο ρηχότερο και μεγαλύτερο γίνεται.

3.3 Τοπολογικές διεγέρσεις σε πολαριτονικά κβαντικά ρευστά

Τα πρώτα πειραματικά αποδεικτικά των πλάγιων σολιτονίων, προέκυψαν σε ένα πολαριτονικό συμπύκνωμα το 2011 χάρη στον υψηλό βαθμό ελέγχου που προσφέρεται από το σύστημα. Το πείραμα περιλάμβανε ένα διαδιδόμενο ρευστό πολαριτονίων, διασκορπιζόμενο από μια ακίνητη δομική ατέλεια στην μικροκοιλότητα. Ένα συμπύκνωμα εξιτονίου-πολαριτονίου, έχει πεπερασμένο χρόνο ζωής. Φωτόνια εισάγονται συνεχώς μέσω των Bragg ανακλαστών της μικροκοιλότητας, από μια αντλία λέιζερ για να αντισταθμιστεί η αποσύνθεση. Η ενέργεια της αντλίας λέιζερ μπορεί να

ρυθμιστεί σε συντονισμό με τα πολαριτόνια. Κάποιος μπορεί εύκολα να αλλάξει την ορμή των εισαγόμενων σωματιδίων με τη μεταβολή της γωνίας του λέιζερ ως προς τον άξονα ανάπτυξης του δείγματος. Έτσι, κάθε σημείο της διασποράς των σωματιδίων μπορεί να διεγερθεί. Ένα κρίσιμο σημείο είναι αυτό στο οποίο η διαμόρφωση που περιγράφεται είναι στην ουσία ένα ισχυρό μη γραμμικό dissipative (μη-συντηρητικό) σύστημα, για το οποίο η διασπορά των στοιχειωδών διεγέρσεων μπορεί να διαφέρει ισχυρά από την περίπτωση ισορροπίας.

Πράγματι, περιοχές διάχυσης με επίπεδη διασπορά μπορεί να εμφανιστούν και το φάσμα Bogoliubov ανακτάται μόνο όταν το *detuning* δ ανάμεσα στην ενέργεια του λέιζερ και της διασποράς, είναι ακριβώς αντισταθμισμένο από την αλληλεπίδραση που προκαλείται από την κυανή μετατόπιση (blueshift) μ της αντλούμενης κατάστασης. Το *detuning* του λέιζερ είναι στην ουσία η ρύθμιση της συχνότητας του λέιζερ σε μια συχνότητα, ελαφρώς μακριά από τη συχνότητα συντονισμού ενός κβαντικού συστήματος. Το λέιζερ γίνονται *detuned* ούτως ώστε να είναι Doppler ολισθημένο στη συχνότητα συντονισμού σε ένα κινούμενο σύστημα. Αυτό επιτρέπει στα λέιζερ να επιδρούν μόνο σε άτομα που κινούνται με συγκεκριμένη ταχύτητα ή σε συγκεκριμένη κατεύθυνση. Η κυανή μετατόπιση (blueshift) γενικά, είναι μια μείωση στο μήκος κύματος, που συνεπάγεται και την αντίστοιχη αύξηση στη συχνότητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Μια τέτοια κατάσταση παρουσιάζεται στην εικόνα 3.2 που ακολουθεί.



Εικόνα 3.2: Οι διασπορές των στοιχειωδών διεγέρσεων σε πεπερασμένη ορμή διέγερσης. Η συνεχόμενη κόκκινη (μαύρη) γραμμή απεικονίζει ένα υπερρευστό (υπερηχητικό) φάσμα. Η διακεκομμένη μαύρη γραμμή είναι η καθαρή διασπορά των πολαριτονίων σε ένα γραμμικό καθεστώς και η συνεχόμενη (λεπτή) οριζόντια μαύρη γραμμή κατευθύνει το μάτι στα διαθέσιμα backscattering (αντανάκλαση των κυμάτων πίσω από την κατεύθυνση από την οποία προήλθαν) σημεία. Όπως μπορεί να δει κανείς, δεν είναι πιθανή σκέδαση Rayleigh στο υπερρευστό καθεστώς.

Για να περιγράψουμε με ακρίβεια τα *driven-dissipative* πολαριτονικά BECs, χρειάζεται κανείς να διαχωρίσει το φωτονικό μέσο πεδίο $\Phi(r,t)$ από το εξιτονικό $\chi(r,t)$ με ένα σετ διαμορφωμένων Schrodinger και Gross-Pitaevskii εξισώσεων αντίστοιχα, συζευγμένες μέσω αλληλεπίδρασης φωτός-ύλης, που δίνεται μέσω της Rabi διάσπασης Ω_R :

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_\phi} \Delta \phi + \Omega_R \chi + D\phi + P e^{i(k_p \cdot r - \omega_p t)} - \frac{i\hbar}{2\tau_\phi} \phi \quad (3.7)$$

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_\chi} \Delta \chi + \Omega_R \phi + \alpha |\chi|^2 \chi - \frac{i\hbar}{2\tau_\chi} \chi \quad (3.8)$$

όπου $m_{\phi,\chi}$ και $\tau_{\phi,\chi}$ είναι αντίστοιχα οι μάζες και οι χρόνοι ζωής των σωματιδίων, ενώ P είναι το πλάτος της αντλίας λέιζερ, συχνότητας ω_p και κυματοδιανύσματος $k_p \cdot D(r)$ υπολογισμένο για την ατέλεια που ενεργεί στο φωτονικό μέρος της κυματοσυνάρτησης. Οι αλληλεπιδράσεις στο BEC προκύπτουν από το εξιτονικό μέρος της κυματοσυνάρτησης.

Οι τοπολογικές διεγέρσεις δημιουργούνται από σημαντικές ολισθήσεις της φάσης. Το πρόβλημα με τη διαμόρφωση που θεωρήσαμε είναι ότι ένα καθεστώς συντονισμένης άντλησης συνεχούς κύματος (cw) επιβάλλει μια συγκεκριμένη φάση σε οποιαδήποτε στιγμή στο σημείο της αντλίας. Ως εκ τούτου είναι αδύνατο να δημιουργηθεί τοπολογική ατέλεια με τη χρήση μεγάλου ομογενούς σημείου άντλησης που να εκτείνεται σε όλο το δείγμα. Η χρήση ενός τοπικού σημείου αντλίας με πεπερασμένη ορμή στην ανοδική ροή από την ατέλεια έχει προταθεί και έτσι το πολαριτονικό ρευστό θα είναι ήδη διαδιδόμενο ελεύθερα γύρω από την ατέλεια και η φάση του θα εκτυλίσσεται χωρίς να επιβάλλεται από την αντλία. Ωστόσο εξαιτίας του πεπερασμένου χρόνου ζωής των σωματιδίων που εμπλέκονται, η πυκνότητα αποσυντίθενται με την απόσταση διάδοσης.

Έχουν προκύψει αριθμητικά, τρία καθεστώτα με διαφορετικές πυκνότητες συμπυκνώματος (ελεγχόμενες από το *detuning* του λέιζερ). Σε χαμηλή πυκνότητα, η οποία προέρχεται από μεγάλο *detuning* του λέιζερ, το σύστημα είναι σε υπερηχητικό σχήμα και σκοτεινά σολιτόνια γεννούνται στην καθοδική ροή από την ατέλεια. Σε αυτή την περίπτωση, τα σολιτόνια εμφανίζονται σαν σταθερές στατικές λύσεις. Ωστόσο, το σχήμα του εξαρτάται από την απόσταση από την ατέλεια. Για την ακρίβεια, εξαιτίας της αποσύνθεσης της πυκνότητας το μήκος αποκατάστασης αυξάνεται με την απόσταση από το ελάττωμα $\xi = (x - x_D)$ και το πλάγιο σολιτόνιο προσαρμόζει τον εαυτό του στην τοπική πυκνότητα, γίνεται μεγαλύτερο, ρηχότερο και

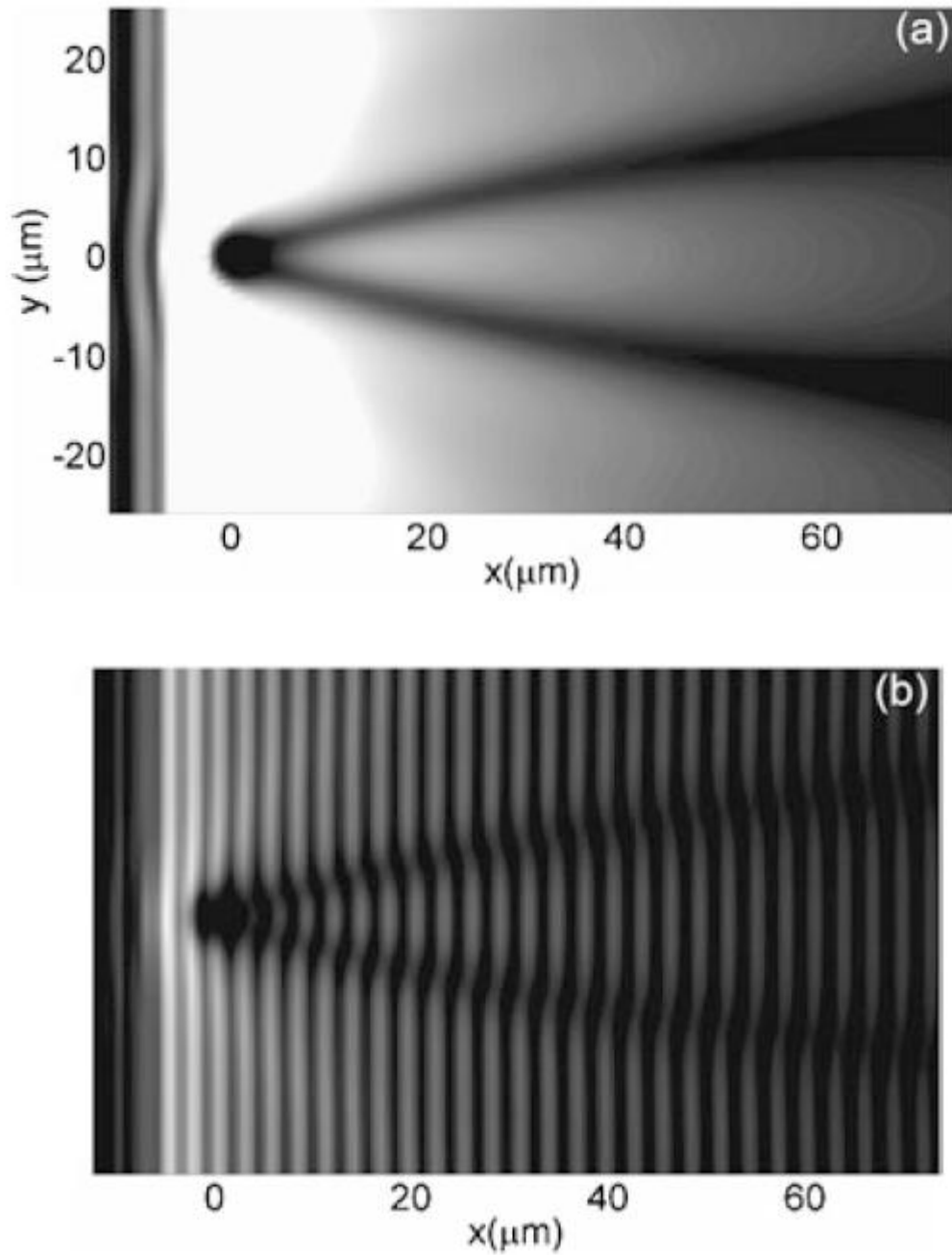
καμπυλωτό. Ένα επίσης χαρακτηριστικό των πολαριτονικών πλάγιων σολιτονίων, είναι ότι είναι ικανά να επιβιώσουν ακόμα και σε υποηχητικές ταχύτητες και συγκεκριμένα σε σχήματα όπου δεν είναι ορατή Cerenkov ακτινοβολία (ship waves) στην άνω ροή από την ατέλεια. Το πλάγιο σολιτόνιο είναι επιπρόσθετα σταθερό από τον επιβαλλόμενο χρόνο ζωής λόγω αποσύνθεσης της πυκνότητας.

Όταν κανείς μειώνει το *detuning* ή αυξάνει την πυκνότητα, τα πλάγια σολιτόνια τείνουν να εξαφανιστούν με την ανάπτυξη των snake instabilities. Αυτά αντικαθιστούνται από ένα τρένο από vortex-dipoles όπως έχει προβλεφθεί. Αυτό συμβαίνει σε χαμηλότερη κρίσιμη ταχύτητα απ' ό τι στο μη-αποσβυνόμενο BEC. Κάποιος θα μπορούσε να σημειώσει εδώ ότι οι δίνες επιβιώνουν σε υποηχητικά σχήματα χάρη στην τοπική επιτάχυνση του ρευστού κοντά στην ατέλεια, το οποίο δεν παραβιάζει το κριτήριο του Landau. Αυξάνοντας την πυκνότητα επιπρόσθετα θα επιτραπεί να εισέρθει το υπερρευστό καθεστώς στο οποίο δεν προκαλούνται διαταραχές από την παρουσία της ατέλειας. Παρ' όλα αυτά σε αυτή την περίπτωση η θέση του σημείου αντλίας γίνεται καθοριστική. Πράγματι, εάν το τελευταίο είναι υπερβολικά επικαλυπτόμενο με την ατέλεια τότε η φάση αντλίας θα αποτυπώνεται, κρύβοντας δυναμικές διαταραχές. Εάν είναι πολύ μακριά, τότε η πυκνότητα θα έχει αποσυντεθεί υπερβολικά φτάνοντας στη θέση της ατέλειας. Η κατά προσέγγιση συνθήκη για τη υπερρευστότητα είναι:

$$E_{\text{int}} \geq 2E_{\text{kin}} \quad \text{όπου} \quad E_{\text{int}} = \mu = \alpha n \quad \text{είναι η ενέργεια αλληλεπίδρασης και}$$

$$E_{\text{kin}} = m^* u^2 / 2 \quad \text{είναι η κινητική ενέργεια με } m^* \text{ την ενεργό μάζα.}$$

Εν συντομία, το πολαριτονικό σύστημα επιτρέπει τη διερεύνηση πολλών υδροδυναμικών σχημάτων που έχουν παρατηρηθεί πειραματικά. Η εικόνα 3.3 που ακολουθεί, παρουσιάζει ένα παράδειγμα από ένα ζευγάρι πλάγιων σολιτονίων που έχουν δημιουργηθεί σε υποηχητικά (χωρίς ορατά ship waves) σχήματα, υπολογισμένα για τον χρόνο ζωής των πολαριτονίων.



Εικόνα 3.3: Αριθμητική λύση που παρουσιάζει στάσιμα 2D πλάγια σολιτόνια που εμφανίζονται στον απόηχο του εμποδίου. Η φωτονική πυκνότητα $n_\phi(x, y)$ φαίνεται στο αριστερό πάνελ (a) και το υπόδειγμα παρεμβολής αποκαλύπτει τις χαρακτηριστικές ολισθήσεις φάσης μέσω των σολιτονίων (b)

3.4 Ημιακέραιες τοπολογικές διεγέρσεις σε σπινωριακά BECs

Τα πολλαπλών συστατικών (σπινωριακά) συμπυκνώματα επιτρέπουν ακόμα πιο πολύπλοκες τοπολογικές διεγέρσεις. Τα σολιτόνια σε σπινωριακά 1D συστήματα (διανυσματικά σολιτόνια), και τα πλάγια σολιτόνια σε σπινωριακά 2D συστήματα έχουν προβλεφθεί θεωρητικά. Στη μια διάσταση πολλές πιθανές διαμορφώσεις περιγράφονται, εξαρτώμενες από την δύναμη και το είδος των αλληλεπιδράσεων των σωματιδίων (απωστικές ή ελκτικές). Συγκεκριμένα μια λύση όπου θα αναλυθεί είναι το μισό σολιτόνιο (half-soliton, HS). Το αντίστοιχο μιας τέτοιας ατέλειας σε δυο διαστάσεις (2D) είναι η επονομαζόμενη μισή-δίνη (half-vortex, HV)].

Τα πολαριτόνια εξιτονίων έχουν δυο επιτρεπόμενες καταστάσεις σπιν, $\sigma_{\pm} = \pm 1$ στον άξονα ανάπτυξης του δείγματος. Κάποια εξιτόνια είναι σκοτεινά και δεν ταιριάζουν με φωτόνια για να δημιουργήσουν πολαριτόνια. Ως εκ τούτου τα συμπυκνώματα πολαριτονίων αποτελούνται από μόνο δυο συστατικά σπιν, αντί για τα τρία συστατικά που αναμένεται για ένα ατομικό συμπύκνωμα με σπιν -1. Το BEC πολαριτονίων είναι ισχυρά σπιν-ανισοτροπικό. Οι δια-συστατικές αλληλεπιδράσεις είναι ασθενείς και ως εκ τούτου το BEC δημιουργεί αυθόρμητα μια γραμμική πόλωση, συγκεκριμένα με ίση πυκνότητα σ_+ (δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένα) και σ_- (αριστερόστροφα κυκλικά πολωμένα) συμπυκνωμένα σωματίδια. Μια περίπτωση ξεχωριστή είναι εκείνη του κυρίου μέρους GaN, όπου οι αλληλεπιδράσεις σπιν υπάρχει περίπτωση να είναι ισοτροπικές, όπως φαίνεται από την τυχαία (συμπεριλαμβανομένου κυκλική) αυθόρμητη πόλωση του συμπυκνώματος.

Οι στοιχειώδης τοπολογικές διεγέρσεις των 2D συμπυκνωμάτων πολαριτονίων είναι οι HVs, οι οποίες κουβαλούν δυο φορές λιγότερη ενέργεια από τις ακέραιες δίνες και συνεπώς η αλληλεπίδρασή τους είναι δυο φορές ασθενέστερη. Οι HVs έχουν παρατηρηθεί και σε πειράματα και εμφανίζονται αυθόρμητα στα ρεύματα που επιβάλλονται από διαταραγμένα τοπία στη μικροκοιλότητα. Η εμφάνισή τους, απαιτεί ο διαχωρισμός ανάμεσα στις γραμμικές πολώσεις να είναι ασθενής, καθώς τείνει να συγχωνεύσει τις HVs σε μια ακεραία δίνη. Οι HVs είναι ζωτικής σημασίας τόσο από βασικής, όσο και από εφαρμοσμένης άποψης. Πρώτα από όλα, η υπερρευυστή μετάβαση

στις 2D έχει μια καθολικότητα κατηγορίας Berezinskii-Kosterlitz-Thouless μετάβασης και συνοδεύεται με το σχηματισμό ζευγαριών δίνης-αντιδίνης (vortex-antivortex) στην περιοχή της κρίσιμης θερμοκρασίας. Ως εκ τούτου, αυτή η θερμοκρασία θα είναι δυο φορές μικρότερη εάν τα ζευγάρια μισών-δινών εμπλέκονται σε αντικατάσταση. Δεύτερον, οι HVs είναι τοπικά, ισχυρά κυκλικά πολωμένα αντικείμενα και είναι πολλά υποσχόμενες στο σχηματισμό φορέων στο πλαίσιο των spin-optonics.

3.4.1 Μισά σολιτόνια στη μια διάσταση

Ένα δυο συστατικών συμπύκνωμα πολαριτονίων στους μηδέν (0) Kelvin μπορεί να περιγραφεί από μια διανυσματική μακροσκοπική συνάρτηση $\psi = (\psi_+, \psi_-)^T$, της οποίας η εξέλιξη ακολουθεί ένα ζεύγος από συζευγμένες GPEs. Θεωρώντας πρώτα μια παραβολική διασπορά με μια ενεργό μάζα m^* και άπειρο χρόνο ζωής των σωματιδίων έχουμε:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_+}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta \psi_+ + (\alpha_1 |\psi_+|^2 + \alpha_2 |\psi_-|^2) \psi_+ \quad (3.9)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_-}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta \psi_- + (\alpha_1 |\psi_-|^2 + \alpha_2 |\psi_+|^2) \psi_- \quad (3.10)$$

Χρόνο-ανεξάρτητες λύσεις μπορούν να βρεθούν εκφράζοντας τις κυματοσυναρτήσεις των BEC ως: $\psi_{\pm}(r, t) = \psi_{\pm}(r) \exp(-i\mu t)$ [6,7], όπου $\mu = (\alpha_1 + \alpha_2)n_0/2$ είναι το χημικό δυναμικό που σχετίζεται με την πυκνότητα του ομογενούς συμπυκνώματος $n_{0+} = n_{0-} = n_0/2$. Η ευστάθεια των μισών σολιτονίων, διασφαλίζεται γενικά στην περίπτωση των σπιν-ανισοτροπικών αλληλεπιδράσεων με $|\alpha_1| \gg |\alpha_2|$, δηλαδή για την περίπτωση όπου η απόλυτη τιμή της σταθεράς αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε σωματίδια του ίδιου συστατικού, είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν ανάμεσα σε συστατικά διαφορετικού είδους[9]. Η τιμή αυτή είναι χαρακτηριστική για ένα BEC εξιτονίων-πολαριτονίων. Συνεπώς, η ευστάθεια είναι διασφαλισμένη και για

τις περιπτώσεις που θα αναλύσουμε παρακάτω[6], είτε δηλαδή για μια γραμμικά πολωμένη θεμελιώδη κατάσταση με μια ανισοτροπία στην $a_2 = -0.1a_1$, είτε για την περίπτωση όπου $\alpha_2 = 0$. Για μια λύση όπως για παράδειγμα, μια δίνη ή ένα σολιτόνιο, η ασυμπτωτική συμπεριφορά μπορεί να βρεθεί αναλυτικά. Για αυτό, ας υποθέσουμε ότι μακριά από το ελάττωμα η πυκνότητα του συμπυκνώματος είναι αδιατάρακτη από την παρουσία της ατέλειας και είναι επομένως σταθερή σε κάθε συστατικό.

Η παράμετρος τάξης μπορεί να γραφτεί σε δυο ξεχωριστές παραστάσεις. Στη βάση των κυκλικών πολώσεων που συζητήσαμε προηγουμένως, κάθε συστατικό κατέχει τη δική του φάση $\theta_{\pm}(r)$ και

$$(\psi_+, \psi_-)^T = \sqrt{n_0/2} (e^{i\theta_+}, e^{i\theta_-})^T. \quad (3.11)$$

Στη βάση της γραμμικής πόλωσης η γωνία πόλωσης και η global φάση του συμπυκνώματος $\theta(r)$ μπορεί να χωριστούν:

$$(\psi_x, \psi_y) = \sqrt{n_0} (e^{i\theta} \cos(n), e^{i\theta} \sin(n))^T. \quad (3.12)$$

Ο μετασχηματισμός από τη γραμμική στη κυκλική πόλωση και αντίστροφα, προκύπτει μέσω των σχέσεων:

$$\psi_{\pm} = (\psi_x \mp i\psi_y) / \sqrt{2} \quad (3.13)$$

$$\theta_{\pm} = \theta \mp n. \quad (3.14)$$

Στη βάση της γραμμικής πόλωσης, οι HVs χαρακτηρίζονται από δυο ημιακέραιους *winding* αριθμούς (k, m) για τις γωνίες φάσης και πόλωσης αντίστοιχα, που οδηγούν σε ακέραιες ολισθήσεις του π γύρω από τον πυρήνα τους.

Παρόμοιοι ισχυρισμοί μπορούν να εφαρμοστούν και στα σολιτόνια. Πράγματι στη μια διάσταση (1D) η κανονικοποιημένη βαθμωτή λύση

σκοτεινού σολιτονίου δίνεται απλά από τη σχέση: $\psi_s = \sqrt{n_0} \tanh(x)$ και η φάση της, είναι μια Heaviside συνάρτηση πλάτους π .

Στη βάση της κυκλικής πόλωσης (σ_+, σ_-) και στην απλούστατη περίπτωση όπου $\alpha_2 = 0$, δηλαδή προφανώς και ικανοποιείται το κριτήριο της ευστάθειας που αναφέρθηκε παραπάνω, καθώς τα σωματίδια ανάμεσα σε διαφορετικά συστατικά δεν αλληλεπιδρούν, ένα μισό σολιτόνιο (HS) δεν είναι τίποτα παραπάνω από ένα συνηθισμένο σκοτεινό σολιτόνιο που εμφανίζεται στο ένα συστατικό, έστω για παράδειγμα στο ψ_- , ενώ το άλλο παραμένει ομογενές. Έτσι η σχετική παράμετρος τάξης γράφεται:

$$(\psi_+^{HS}, \psi_-^{HS}) = \sqrt{n_0/2} (1, \tanh(x)). \quad (3.15)$$

Ξαναγράφοντας την σχέση (3.15) στη βάση της γραμμικής πόλωσης οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση:

$$(\psi_x^{HS}, \psi_y^{HS}) = \frac{\sqrt{n_0}}{2} (1 + \tanh(x), i - i \tanh(x))^T. \quad (3.16)$$

Αναζητώντας τις ασυμπτωτικές τιμές στο άπειρο, μπορεί να κατασκευάσει κάποιος τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\psi_x^{HS}(+\infty) = \sqrt{n_0} e^{2ih\pi} \cos(2s\pi) \quad (3.17)$$

$$\psi_y^{HS}(+\infty) = \sqrt{n_0} e^{2ih\pi} \sin(2s\pi) \quad (3.18)$$

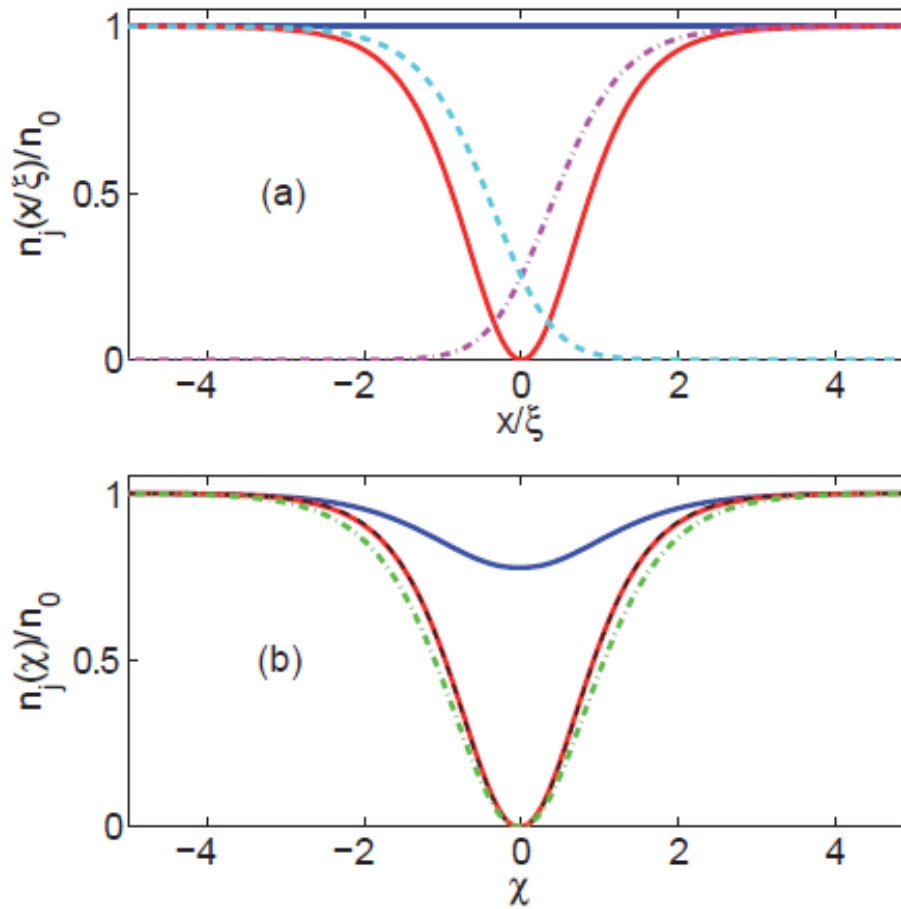
$$\psi_x^{HS}(-\infty) = \sqrt{n_0} e^{ih\pi} \cos(s\pi) \quad (3.19)$$

$$\psi_y^{HS}(-\infty) = \sqrt{n_0} e^{ih\pi} \sin(s\pi) \quad (3.20)$$

με h και s ημιακέραιους αριθμούς που μπορούν να χαρακτηριστούν σαν τοπολογικές απώλειες. Τα HSs κυρίως εμφανίζονται για :

$$(h, s) = \{(\pm 1/2, \pm 1/2), (\pm 1/2, \mp 1/2)\}$$

και η φάση τους, αλλά και η γωνία πόλωσής τους αλλάζουν από 0 έως $\pi/2$ πηγαίνοντας από το – στο + άπειρον, ενώ το κέντρο είναι πλήρως κυκλικά πολωμένο, όπως ακριβώς ο πυρήνας μιας μισής-δίνης. Αυτή η τοπολογική ατέλεια μπορεί επίσης να φανεί σαν μια περιοχή τοίχου ως προς τα x και y πολωμένα σωματίδια. Ένα σχέδιο της κανονικοποιημένης πυκνότητας των μισών σολιτονίων φαίνεται στην εικόνα 5.4 (a) που ακολουθεί.



Εικόνα 3.4: Στο επάνω πάνελ (a) παρατηρούμε τα προφίλ της πυκνότητας των HSs κανονικοποιημένα στο n_0 και στο ξ . Οι μπλε και κόκκινες μονόχρωμες καμπύλες αναπαριστούν τις n_- και n_+ πυκνότητες, ενώ οι μωβ διακεκομένες με τελείες και οι σκέτες διακεκομένες κυανές καμπύλες αναπαριστούν τα n_x και n_y αντίστοιχα. Στο κάτω πάνελ (b) απεικονίζεται η πυκνότητα του OHS κανονικοποιημένη στον άξονά του. Οι μονόχρωμες μπλε και κόκκινες καμπύλες αναπαριστούν τα αριθμητικά προφίλ. Η διακεκομένη μαύρη καμπύλη είναι η λύση της διαταραχής που περιγράφεται στο κείμενο και η πράσινη διακεκομένη με τελείες καμπύλη αντιπροσωπεύει τη βαθμωτή λύση σολιτονίου.

3.4.2 Πλάγια μισά σολιτόνια στις δυο διαστάσεις

Ας εστιάσουμε τώρα στην πιθανότητα της δημιουργίας 2D πλάγιων μισών σολιτονίων. Πρώτα απ' όλα για την περίπτωση όπου τα δυο συστατικά των σπινωριακών BECs δεν αλληλεπιδρούν, δηλαδή για την περίπτωση $a_2 = 0$, εάν αρχικά είναι ισοπληθής, μια σημαντική διαταραχή στο ένα μόνο συστατικό θα οδηγήσει στο σχηματισμό των ημιακέραιων τοπολογικών διεγέρσεων. Εάν η αλληλεπίδραση μεταξύ των δυο συστατικών δεν είναι αμελητέα, πρέπει να γυρίσουμε πίσω στις εξισώσεις (3.1) και (3.2) και να τις ανακατασκευάσουμε, ψάχνοντας για στάσιμες λύσεις και στρεφόμενοι προς το υδροδυναμικό σχήμα, όπου η φάση κάθε συμπυκνώματος εκφράζεται με χρήση των στατικών και αστρόβιλων πεδίων ταχύτητας μέσω: $V_{\pm}(r) = \hbar/m^* \nabla \theta_{\pm}(r)$, με $r = (x, y)$. Ψάχνουμε για πλάγιες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται μόνο από το κεκλιμένο σύστημα συντεταγμένων $\chi = (x - ay)/\sqrt{1 + a^2}$, το οποίο οδηγεί στο ακόλουθο ζεύγος εξισώσεων:

$$\left(n_+^{\prime 2}/4 - n_+ n_+''/2 \right) + 2n_+^2 (\Lambda_1 n_+ + 2\Lambda_2 n_-) = (q + 2\mu)n_+^2 - qn_0^2 \quad (3.21)$$

$$\left(n_-^{\prime 2}/4 - n_- n_-''/2 \right) + 2n_-^2 (\Lambda_1 n_- + 2\Lambda_2 n_+) = (q + 2\mu)n_-^2 - qn_0^2 \quad (3.22)$$

όπου $\Lambda_{1,2} = \alpha_{1,2}/(\alpha_1 + \alpha_2)$ και $q = U^2/(1 + a^2)$, όπου U είναι η ταχύτητα του ρευστού. Το σύστημα αυτό πρέπει να επιλυθεί αριθμητικά, αλλά μπορούμε να κάνουμε μερικά σχόλια πάνω σε αυτό. Το προφίλ της πυκνότητας ενός ακεραίου πλάγιου σολιτονίου σε ένα σπινωριακό ρευστό δίνεται από:

$$n_{ODS} = 1 - (1 - q/\mu) \operatorname{sech} \left[\chi \sqrt{\mu - q} \right]^2 \quad (3.23)$$

με $\mu = (\Lambda_1 + \Lambda_2)n_0/2 = \Lambda n_0/2$. Τώρα, για την περίπτωση των OHSs, η εγκοπή της πυκνότητας στο σ_- συστατικό, που περιέχει την ατέλεια φαίνεται σαν ένα εξωτερικό δυναμικό από το αρχικά αδιατάρακτο σ_+ συστατικό, εξαιτίας των αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στα σωματίδια με διαφορετικά σπιν. Υποθέτουμε ότι το σ_+ συστατικό ταιριάζει με το σχήμα του δυναμικού αυτού,

που δεν είναι τίποτα παραπάνω παρά $\Lambda_2 n_-$. Τότε αυτή η διαταραχή δημιουργεί με τη σειρά της, ένα δυναμικό για το σ_- συστατικό που δίνεται από $-\Lambda_2 n_+ = -\Lambda_2^2 n_-$. Ως εκ τούτου το προφίλ της πυκνότητας διαμορφώνεται ως εξής: $\tilde{n}_- \leftarrow (\Lambda n_- - \Lambda_2^2 n_-) / \Lambda$. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία οδηγεί σε μια γεωμετρική σειρά και στην επανακανονικοποίηση της σταθεράς αλληλεπίδρασης που φαίνεται από το συστατικό που περιέχει το σολιτόνιο $\tilde{\Lambda} \leftarrow \Lambda - \Lambda_2^2 / (\Lambda - \Lambda_2)$. Συνεπώς η OHS λύση προσεγγίζεται από:

$$n_{OHS} = 1 - (1 - q / \tilde{\mu}) \operatorname{sech} \left[\chi \sqrt{\tilde{\mu} - q} \right]^2 \quad (3.24)$$

με $\tilde{\mu} = \tilde{\Lambda} n_0$. Σε αυτή την περιγραφή, η ταχύτητα του ήχου αλλάζει σε $c_s \rightarrow \tilde{c}_s = \sqrt{\tilde{\mu} / m^*}$ και το μήκος αποκατάστασης σε $\xi \rightarrow \tilde{\xi} = \hbar / \sqrt{2m^* \tilde{\mu}}$. Στην περίπτωση όπου $\Lambda_2 < 0$, το οποίο αντιστοιχεί σε ελκτικές αλληλεπιδράσεις, η c_s είναι ελαφρώς αυξημένη, ενώ αντίστροφα το ξ είναι μειωμένο. Στην περίπτωση όπου $\Lambda_2 > 0$, το οποίο αντιστοιχεί σε απωστικές αλληλεπιδράσεις, η c_s είναι ελαφρώς μειωμένη, ενώ αντίστροφα το ξ είναι αυξημένο. Το συστατικό που δεν περιέχει σολιτόνιο προφανώς και παρουσιάζει ένα ελάχιστο για την πρώτη περίπτωση και ένα μέγιστο για την δεύτερη περίπτωση. Αυτή η επιχειρηματολογία συγκρίνεται με τις αναλυτικές λύσεις των σχέσεων (3.4) και (3.5) στην εικόνα 5.4 (b) δείχνοντας μια αξιοσημείωτη ακρίβεια για μικρές τιμές του Λ_2 .

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο στόχος της εργασίας αυτής, είναι η περιγραφή γενικά των σολιτονίων σε συμπυκνώματα Bose-Einstein τόσο από θεωρητική, όσο και από μαθηματική σκοπιά, καθώς επίσης και η εισαγωγή σε πολλές βασικές ιδιότητες και πολλά θέματα, καθένα από τα οποία είναι ικανό να αποτελέσει ξεχωριστό αντικείμενο ενδιαφέροντος, άξιο για περαιτέρω διερεύνηση, που μπορεί να κυμαίνονται από τη δημιουργία και την αλληλεπίδραση σολιτονίων μέχρι τη δυναμική και την ευστάθειά τους κ.λπ.. Αν και αναλύονται συστήματα τόσο μιας, όσο και δυο διαστάσεων, μεγαλύτερη έμφαση δίνεται στα συστήματα 1D καθώς στην ουσία αυτά αποτελούν και τον βασικό πυλώνα για μελέτη και την κατανόηση των μη γραμμικών αυτών διεγέρσεων, ενώ συνάμα η μαθηματική περιγραφή τους είναι πολύ απλούστερη από τις ανώτερες διαστάσεις.

Πιο συγκεκριμένα, η παρούσα διπλωματική παρέχει μια λεπτομερή περιγραφή των σκοτεινών σολιτονίων, των ιδιοτήτων τους και των ολοκληρωμάτων της κίνησης τους, μέσω της πλήρους ολοκληρώσιμης NLS εξίσωσης, στην οποία οδηγούμαστε υπό την προϋπόθεση κατά την οποία το δυναμικό θεωρείται αμελητέο στην αδιάστατη μορφή της GP εξίσωσης και περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ πολλαπλών σκοτεινών σολιτονίων. Αν και η παρούσα διπλωματική δεν εστιάζει στην μελέτη της GP εξίσωσης υπό την παρουσία δυναμικού, παρόλα αυτά κάνει μια γενική περιγραφή στην NLS εξίσωση και για την περίπτωση που υπάρχει δυναμικό και δεν θεωρείται αμελητέο. Στο πλαίσιο των ατομικών συμπυκνωμάτων Bose-Einstein, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ανάλυση των διανυσματικών σκοτεινών-φωτεινών και των σκοτεινών-σκοτεινών σολιτονίων. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά παρέχεται ακριβής αναλυτική DB σολιτονική λύση και κατόπιν κατασκευάζεται μια DD λύση, που προκύπτει από την εφαρμογή SU(2) rotations πάνω στην αρχική DB λύση. Επίσης εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς να κατασκευάσει ρητές αναλυτικές λύσεις σε μορφή σκοτεινών και φωτεινών κυμάτων, ακόμα και έξω από την εξαιρετική περίπτωση πλήρους ολοκληρώσιμου συστήματος, με σταθερά αλληλεπίδρασης ανάμεσα τόσο στα

ίδια όσο και σε διαφορετικά συστατικά να είναι συγκεκριμένα ίση με 1 και στην συνέχεια παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να εξάγει κανείς ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων, οι οποίες στην ουσία να ορίζουν ένα εύρος εγκυρότητας για τις λύσεις αυτές. Στο πλαίσιο των πολαριτονικών υπερρευστών, η εργασία αρχικά αναλύει και σχολιάζει τη μακροσκοπική κυματοσυνάρτηση του συμπυκνώματος για τα συστήματα μιας διάστασης. Κατόπιν, και με βάση τις παρατηρήσεις για τα 1D συστήματα, περιγράφονται οι δίνες για τα 2D συστήματα και αναλύονται οι ιδιότητες ενός πλάγιου σολιτονίου που μπορούν να παραχθούν αναλυτικά στο πλαίσιο της κβαντικής υδροδυναμικής, ενώ παράλληλα παρέχεται μια λύση μορφής σκοτεινού σολιτονίου. Επίσης, αναλύει τις τοπολογικές διεγέρσεις σε ένα πολαριτονικό κβαντικό ρευστό και κατόπιν μελετά τις ημιακέραιες τοπολογικές διεγέρσεις και ποιο συγκεκριμένα τα μισά σολιτόνια και τα πλάγια μισά σολιτόνια και παρέχει έγκυρες λύσεις αυτών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] P. G Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis and R. Carretero-Gonzalez, The defocusing nonlinear Schrödinger equation. From dark solitons to vortices and vortex rings, SIAM, in press
- [2] D. Yan, J.J. Chang, C. Hamner, M. Hofer, P.G. Kevrekidis, P. Engels, V. Achilleos, D.J. Frantzeskakis, and J. Cuevas, Beating dark-dark solitons in Bose-Einstein condensates, arXiv:1202.2777v1 [cond-mat.quant-gas], (2012)
- [3] D. J. Frantzeskakis, Dark solitons in atomic Bose–Einstein condensates: from theory to experiments, J. Phys. A: Math. Theor. 43, (2010)
- [4] D. Yan, F. Tsitoura, P. G. Kevrekidis and D. J. Frantzeskakis, Dark-bright Solitons and their Lattices in Atomic Bose-Einstein Condensates, PHYSICAL REVIEW A 00, 003600, (2015)
- [5] Β. Αχιλλέως, Σολιτόνια σε μείγματα συμπυκνωμάτων Bose-Einstein, Διδακτορική Διατριβή, (2014)
- [6] M. Wouters, A. Bramati, M Modugno, Physics of Quantum Fluids- New Trends and Hot Topics in Atomic and Polariton Condensates, Springer (2013)
- [7] H. Flayac, D.D. Solnyshkov, and G. Malpuech, Oblique Half-Solitons and their Generation in Exciton-Polariton Condensates, arXiv:1103.4516v1 [cond-mat.quant-gas], (2011)
- [8] D. Yan, J.J. Chang, C. Hamner, M. Hofer, P.G. Kevrekidis, P. Engels, V. Achilleos, D.J. Frantzeskakis, and J. Cuevas, Beating dark-dark solitons in Bose-Einstein condensates. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 45 115301, (2012)
- [9] H. Tercas D. D. Solnyshkov, and G. Malpuech, Topological Wigner Crystal of Half-Solitons in a Spinor BEC, arXiv:1209.6197v1 [cond-mat.quant-gas], (2012)

- [10] G.A. El, A. Gammal, and A.M. Kamchatnov, Oblique dark solitons in supersonic flow of a Bose-Einstein condensate, arXiv:nlin/0604044v2 [nlin.PS], (2006)
- [11] P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González, Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates, Springer-Verlag (Berlin, 2008)
- [12] Th. Busch and J.R. Anglin, Motion of Dark Solitons in Trapped Bose-Einstein Condensates. Phys. Rev. Lett., 84 (2000) 2298–2301.
- [13] P.O. Fedichev, A.E. Muryshev, and G.V. Shlyapnikov, Dissipative dynamics of a kink state in a Bose-condensed gas. Phys. Rev. A, 60 3220–3224, (1999)
- [14] A.E. Muryshev, H.B. van Linden van den Heuvell, and G.V. Shlyapnikov, Stability of standing matter waves in a trap. Phys. Rev. A, 60 R2665–R2668, (1999)
- [15] Α. Καρβουνής, Ιδιότητες υπερρευστότητας σε συμπυκνώματα εξιτονίων-πολαριτονίων, Διπλωματική Εργασία, (2013)