ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στρατηγικές Ισορροπίας και Κοινωνική Βελτιστοποίηση σε Συστήματα Αναμονής με Εναλλακτικές Μορφές Εξυπηρέτησης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ Ν. ΜΑΡΚΟΣ

Για το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
με κατεύθυνση Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΝΤΩΝΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

ΑΘΗΝΑ

2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και την Επιχειρησιακή Έρευνα που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστήμιου Αθηνών

Εγκρίθηκε στις .... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
Μπουρνέτας Απόστολος	Καθηγητής	....
Οικονόμου Αντώνης (Επιβλέπων)	Αναπληρωτής Καθηγητής	....
Φακίνος Δημήτριος	Αναπληρωτής Καθηγητής	....

Αφορμή για την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας στάθηκε το μοντέλο επιλογής μεταφορικού μέσου επιβατών "Shuttle - Bus Service" που αναλύεται στο βιβλίο των Hassin and Haviv (2003) *" To Queue Or Not To Queue ".* Πρώτα θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον αναπληρωτή καθηγητή Αντώνη Οικονόμου, επιβλέποντα καθηγητή της παρούσης διπλωματικής εργασίας, για την άψογη συνεργασία και καθοδήγηση καθόλη τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών σπουδών μου στο Μαθηματικό Τμήμα, καθώς και τον καθηγητή Απόστολο Μπουρνέτα για την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου. Ευχαριστώ, επίσης, τον αναπληρωτή καθηγητή Δημήτριο Φακίνο για τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη σύζυγό μου Πηνελόπη για την συμπαράσταση και ενθάρυνσή της.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Θα αρκεστούμε, στο κεφάλαιο αυτό, να υπενθυμίσουμε στον αναγνώστη κάποιες βασικές έννοιες τόσο από τη θεωρία ουρών, όσο και από τη στοιχειώδη θεωρία παιγνίων, χωρίς να επιμείνουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες. Θεωρούμε πως ο αναγνώστης είναι ήδη εξοικειωμένος σε μεγάλο βαθμό με τα αντικείμενα αυτά, έτσι ώστε να είναι δυνατή η διαδικασία μελέτης - βελτιστοποίησης του μοντέλου που εισάγουμε και της παραλαγής αυτού, που περιγράφονται στα επόμενα κεφάλαια. Επομένως, το κεφάλαιο αυτό έχει ως κύριο σκοπό τη σύνοψη βασικών αποτελεσμάτων απο τις δυο αυτές γνωστικές περιοχές, καθώς και την εισαγωγή της απαραίτητης ορολογίας και των συμβολισμών που θα χρησιμοποιήσουμε.

1.1 Βασικά στοιχεία ουρών αναμονής

Η θεώρια ουρών (queueing theory) θεωρείται κλάδος της Επιχειρησιακής Έρευνας, καθώς τα αποτελέσματα της χρησιμοποιούνται συχνά στη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων σχετικά με τη διαχείριση των διαθέσιμων πόρων για την παροχή υπηρεσιών. Ουρές αναμονής δημιουργούνται, όταν η τρέχουσα ζήτηση για κάποια υπηρεσία, είναι μεγαλύτερη από τη δυναμικότητα παροχής της. Ακόμη και στις περιπτώσεις, όπου η δυναμικότητα του συστήματος φαινομενικά καλύπτει τη ζήτηση, ουρές αναμονής τείνουν να διαμορφώνονται λόγω της στοχαστικότητας που υπάρχει στις διαδικασίες άφιξης και εξυπηρέτησης των πελατών. Ως **ουρά αναμονής** ή **σύστημα εξυπηρέτησης** ορίζεται κάθε σύστημα, το οποίο παρέχει κάποιου είδους εξυπηρέτηση σε πελάτες που προσέρχονται σ' αυτό. Το σύστημα αποτελείται από το **χώρο εξυπηρέτησης** και συνήθως από ένα **χώρο αναμονής**, όπου περιμένουν οι πελάτες που δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν αμέσως. Λόγω της τυχαιότητας που ενυπάρχει στους χρόνους αφίξεων των πελατών και των αντίστοιχων χρόνων εξυπηρέτησης, ο αριθμός των παρόντων πελατών στο σύστημα (**μήκος ουράς**), αυξομειώνεται ως συνάρτηση του χρόνου κατά τυχαίο τρόπο, είναι δηλαδή μια στοχαστική διαδικασία. Παραδείγματα ουρών αναμονής μπορούν να θεωρηθούν τα ταμεία μιας τράπεζας, σταθμοί διοδίων, μετακινούμενοι (επιβάτες) που αναμένουν ταξί, ένα εξωτερικό ιατρείο κ.α.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα μελετήσουμε ένα μοντέλο εξυπηρέτησης με πελάτες που έχουν δύο εναλλακτικές μορφές εξυπηρέτησης για τη μετακίνησή τους (ταξί - λεωφορείο). Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις σε σχέση με το μοντέλο μας (ταξί - λεωφορείο), ανάλογα με το αν οι μετακινούμενοι (πελάτες) μπορούν να παρατηρήσουν ή όχι το μήκος ουράς στην πιάτσα των ταξί, πριν λάβουν οποιαδήποτε απόφαση. Θα αναφερόμαστε σ' αυτές τις περιπτώσεις ως *παρατηρήσιμες* (*observable*) και *μη παρατηρήσιμες* (*unobservable*) αντίστοιχα. Κάθε πελάτης, όπως θα δούμε παρακάτω, αναμένει μια ωφέλεια (πληρωμή), η οποία εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος, την απόφασή του και τις στρατηγικές των υπόλοιπων μετακινούμενων. Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στη συμπεριφορά των μετακινούμενων, όταν αυτοί αποφασίζουν κατά τη στιγμή της άφιξής τους, αν θα μετακινηθούν με ταξί ή λεωφορείο. Τα κύρια χαρακτηριστικά κάθε ουράς είναι η **διαδικασία αφίξεων**, ο **μηχανισμός εξυπηρέτησης** και η **πειθαρχία ουράς**.

Η **διαδικασία αφίξεων** περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο οι πελάτες καταφθάνουν στο σύστημα και ορίζεται από την κατανομή των χρονικών στιγμών $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ των αντίστοιχων αφίξεων στο $[0, \infty)$. Η πιο συχνά εμφανιζόμενη στην πράξη είναι η **διαδικασία Poisson**.

Ο **μηχανισμός εξυπηρέτησης** ορίζεται από τον αριθμό των υπηρετών που λειτουργούν παράλληλα και από την κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης. Η πιο σημαντική ειδική περίπτωση είναι όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Η **πειθαρχία ουράς** αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο επιλέγονται οι πελάτες για να εξυπηρετηθούν. Η συνήθης πειθαρχία ουράς είναι η **FCFS** $\{\equiv$ *First Come First Served*$\}$, όπου οι πελάτες εξυπηρετούται σύμφωνα με τη σειρά άφιξής τους στο σύστημα. Άλλες σημαντικές πειθαρχίες ουράς είναι η **LCFS**$\{\equiv$ *Last Come First Served*$\}$, όπου κάθε φορά που ένας υπηρέτης είναι ελεύθερος, επιλέγει για εξυπηρέτηση τον πελάτη που αφίχθηκε πιο πρόσφατα, ενώ παραλλαγή αυτής είναι η **LCFS/PR** $\{\equiv$ Last Come First Served / Preemptive Resume$\}$, όπου κάθε πελάτης αρχίζει να εξυπηρετείται αμέσως μόλις φθάσει στο σύστημα, διακόπτοντας ακόμα και την εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται τότε (ο οποίος θα συνεχίσει αργότερα την εξυπηρετησή του).

O David G. Kendall εισήγαγε μια συντομογραφία για την περιγραφή των συστημάτων εξυπηρέτησης με βάση τα τρία παραπάνω χαρακτηριστικά, χρησιμοποιώντας τρία μέρη και γράφοντας a/b/c. Το πρώτο μέρος αναφέρεται στην κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των πελατών και το δεύτερο στην κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης. Για παράδειγμα, το γράμμα G (General) χρησιμοποιείται για κάποια γενική κατανομή, το M (Memoryless) για την εκθετική κατανομή (εξαιτίας της αμνήμονης ιδιότητας της κατανομής αυτής, όπως θα δούμε στο τέλος αυτής της παραγράφου) και το D (Deterministic) για ντετερμινιστικούς ή προσδιοριστικούς χρόνους. Το τρίτο και τελευταίο στοιχείο της συντομογραφίας αναφέρεται στον αριθμό των υπηρετών. Μερικά παραδείγματα είναι $M/M/1$, $M/D/c$, $M/G/1$ κ.α. Η γραφή αυτή μπορεί να επεκταθεί με ακόμη ένα στοιχείο που αναφέρεται στη χωρητικότητα του συστήματος, προκειμένου να καλύψουμε κι άλλα συστήματα εξυπηρέτησης. Για παράδειγμα, ένα σύστημα εξυπηρέτησης με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης, έναν υπηρέτη και χώρο αναμονής για το πολύ N πελάτες, συμπεριλαμβανομένου και αυτού που εξυπηρετείται, γράφεται με συντομογραφία τεσσάρων στοιχείων, $M/M/1/N$. Τέλος, δίπλα στους προαναφερόμενους συμβολισμούς, γράφεται και η πειθαρχία ουράς, όταν δεν είναι η FCFS. Έχοντας καθορίσει τον τρόπο χαρακτηρισμού ενός συστήματος εξυπηρέτησης, μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην περιγραφή των **μέτρων λειτουργικότητας**, τα οποία προσδιορίζονται μέσω της ανάλυσης.

Ορίζουμε ως S_j ,W_j , X_j , το χρόνο παραμονής ,το χρόνο αναμονής και το χρόνο εξυπηρέτησης του j-οστού αφικνούμενου πελάτη αντίστοιχα. Προφανώς ισχύει η σχέση

$$S_j = W_j + X_j \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{1.1}$$

Επίσης, ορίζουμε ως $Q(t)$, $Q_q(t)$, $Q_s(t)$ τον αριθμό των πελατών στο σύστημα, στο χώρο αναμονής και τον αριθμό των πελατών που εξυπηρετούνται την χρονική στιγμή t αντίστοιχα. Ισχύει ότι

$$Q(t) = Q_q(t) + Q_s(t) \quad (t \geq 0). \tag{1.2}$$

Οι ποσότητες $\bar{Q}$, $\bar{Q}_q$, $\bar{S}$ και $\bar{W}$ αποτελούν τα **συνήθη μέτρα λειτουργικότητας** μιας ουράς. Οι $\bar{Q}$ και $\bar{S}$ ισούνται αντίστοιχα με

$$\bar{Q} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q(x)dx \quad \text{και} \quad \bar{S} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} S_j, \tag{1.3}$$

και παριστάνουν το (μακροπρόθεσμο) μέσο μήκος ουράς και το (μακροπρόθεσμο) μέσο χρόνο παραμονής στο σύστημα αντίστοιχα, ενώ τα $\bar{Q}_q$ και $\bar{W}$ ορίζονται ανάλογα.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, το μήκος ουράς $\{Q(t)\}$ είναι η πιο χρήσιμη στοχαστική διαδικασία για την περιγραφή και τη μελέτη μιας ουράς. Επομένως, μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός της αντίστοιχης **μεταβατικής κατανομής**, δηλαδή η εύρεση των πιθανοτήτων $p_j = p_j(t)$, $(j \in \mathbf{N_0})$, ύπαρξης j πελατών στο σύστημα ως συναρτήσεων του χρόνου t. Συχνά όμως είναι δύσκολο ή αδύνατο να βρεθεί σε αναλυτική μορφή η μεταβατική κατανομή και επειδή μετά από την παρέλευση σχετικά μικρού χρόνου η $\{Q(t)\}$ παύει ουσιαστικά να επιδεικνύει μεταβατική συμπεριφορά, δηλαδή φθάνει σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην εύρεση της αντίστοιχης **οριακής κατανομής**, δηλαδή στην εύρεση των πιθανοτήτων $p_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t)$, $(j \in \mathbf{N_0})$. Συνεχίζουμε με την υπενθύμιση της Μαρκοβιανής ιδιότητας.

Ορισμός

Μαρκοβιανή διαδικασία λέγεται κάθε στοχαστική διαδικασία $\{X_t,\, t \in T\}$ με τη Μαρκοβιανή (ή αμνήμονη) ιδιότητα, δηλαδή με την ιδιότητα ότι, δεδομένης της τιμής της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) $X(t)$ (παρόν), οι τ.μ. $\{X(u) : u > t\}$ (μέλλον) είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τις τ.μ. $\{X(s) : s < t\}$ (παρελθόν), δηλαδή η πιθανότητα οποιασδήποτε μελλοντικής εξέλιξης της διαδικασίας, όταν είναι γνωστή η παρούσα της κατάσταση, δεν μεταβάλλεται από επιπλέον πληροφορίες σχετικά με την παρελθούσα ιστορία της. Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες με διακριτό χώρο καταστάσεων αναφέρονται ειδικότερα ως Μαρκοβιανές αλυσίδες.

Σε πολλές περιπτώσεις η $\{Q(t)\}$ δεν έχει τη **Μαρκοβιανή ιδιότητα**. Έτσι συχνά προσπαθούμε να εξετάσουμε τη στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ σε κατάλληλες διακεκριμένες χρονικές στιγμές στο $[0, \infty)$ και μόνο σ΄ αυτές, προκειμένου να ανακτήσουμε τη Μαρκοβιανή ιδιότητα. Αυτές είναι οι στιγμές διαδοχικών αφίξεων ή διαδοχικών αναχωρήσεων πελατών από το σύστημα. Συγκεκριμένα, ορίζο τις οριακές πιθανότητες

$$r_j = \lim_{n\to\infty} P(Q_n^-) \quad , \quad d_j = \lim_{n\to\infty} P(Q_n^+) \qquad (j \in \mathbf{N_0})\,. \tag{1.4}$$

όπου $\{Q_n^- : n \in \mathbf{N_0}\}$,$\{Q_n^+ : n \in \mathbf{N_0}\}$ συμβολίζουν το μήκος ουράς μόλις πριν την n-οστή άφιξη και αμέσως μετά την n-οστή αναχώρηση στο $[0, \infty)$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση μεμονωμένων αφίξεων και αναχωρήσεων ισχύει ότι

$$r_j = d_j\,. \tag{1.5}$$

Γενικά, οι οριακές κατανομές, $\{p_j\}$ σε συνεχή χρόνο και $\{r_j\}$ σε στιγμές αφίξεων (ή $\{d_j\}$ σε στιγμές αναχωρήσεων) δεν συμπίπτουν. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την D/D/1 ουρά, η οποία είναι κενή τη χρονική στιγμή 0, με αφίξεις τις χρονικές στιγμές 1,3,5... και χρόνους εξυπηρέτησης 1, τότε κάθε αφικνούμενος πελάτης βρίσκει το σύστημα κενό, ενώ το ποσοστό του χρόνου, που το σύστημα είναι κενό, ισούται με $\frac{1}{2}$.

Ειδικά, όμως, στην περίπτωση που έχουμε Poisson διαδικασία αφίξεων ισχύει ότι

$$r_j = p_j\,, \tag{1.6}$$

μια ιδιότητα που είναι γνωστή και ως **PASTA**(**Poisson Arrivals See Time Averages**). Διαισθητικά, μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι οι Poisson αφίξεις συμβαίνουν εντελώς τυχαία στο χρόνο. Ακολούθως αναφέρουμε ένα βασικό αποτέλεσμα, που είναι γνωστό ώς νόμος του **Little**.

Θεώρημα 1 *Για κάθε ουρά αναμονής ισχύει ότι :*

$$\bar{Q} = \lambda \bar{S}\,, \tag{1.7}$$

όπου $\bar{Q}\,,\bar{S}$ *δίνονται από τη σχέση* (1.3) *και* λ *είναι ο ρυθμός αφίξεων.*

Ο νόμος του Little εκφράζει το γεγονός ότι ασυμπτωτικά ο μέσος αριθμός πελατών σ'ενα σύστημα ισούται με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων επί το μέσο χρόνο παραμονής σ' αυτό το σύστημα. Διαισθητικά, το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να κατανοηθεί και ως ακολούθως. Υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες, για όσο χρόνο βρίσκονται στο σύστημα, πληρώνουν μια χρηματική μονάδα ανά μονάδα του χρόνου. Τα χρήματα μπορούν να εισπραχθούν με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι να αφήσουμε τους πελάτες να πληρώνουν ' συνεχώς ' στο χρόνο. Τότε, η μέση αμοιβή ανά μονάδα χρόνου που εισπράττει το σύστημα ισούται με $E(Q)$ χρηματικές μονάδες. Ο δεύτερος είναι να αφήσουμε τους πελάτες να πληρώσουν, όταν θα φύγουν από το σύστημα, μια χρηματική μονάδα ανά μονάδα του χρόνου για το χρόνο παραμονής τους σ' αυτό. Όταν έρθει το σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας, ο μέσος αριθμός πελατών που αποχωρεί από το σύστημα στη μονάδα του χρόνου ισούται με το μέσο αριθμό πελατών που εισέρχεται σ' αυτό. Έτσι, το σύστημα εισπράττει μια μέση αμοιβή $\lambda \cdot E(S)$ χρηματικές μονάδες στη μονάδα του χρόνου. Προφανώς, το σύστημα εισπράτει το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις.

Ολοκληρώνοντας αυτές τις σύντομες υπενθυμίσεις από τις ουρές αναμονής, αναφέρουμε με μορφή παρατήρησης τη σπουδαιότερη ιδιότητα της εκθετικής κατανομής.

Παρατήρηση

Η εκθετική κατανομή είναι η μοναδική συνεχής κατανομή που έχει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης ή αλλιώς αμνήμονη ιδιότητα (Memoryless property).

Μια τυχαία μεταβλητή λέγεται ότι δεν έχει **μνήμη** (**Memoryless**), εάν ισχύει

$$P[X > s + t | X > t] = P[X > s], \quad \forall\ s, t > 0.$$

Στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής, ισχύει

$$P[X > s + t | X > t] = \frac{P[X > s+t, X > t]}{P[X > t]} = \frac{P[X > s+t]}{P[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P[X > s], \quad \forall\ s, t > 0,$$

δηλαδή, αν ένας χρόνος X έχει την εκθετική(λ) κατανομή, τότε η κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου αν παρατηρήσουμε τι συμβαίνει τη στιγμή t δεν εξαρτάται από το t, δηλαδή το χρόνο που έχει περάσει.

Για μια εκτεταμένη εισαγωγή και μελέτη στην θεωρία ουρών αναμονής βλέπε το βιβλίο Φακίνος (2003).

1.2 Βασικά στοιχεία θεωρίας παιγνίων

Η θεωρία παιγνίων (game theory) ανήκει στους κλάδους των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και προσπαθεί να αντιμετωπίσει με μαθηματικές μεθόδους μοντέλα σύγκρουσης και συνεργασίας. Στη θεωρία παιγνίων, έχουμε τουλάχιστον δύο διαφορετικούς παίκτες και η πληρωμή κάθε παίκτη εξαρτάται, όχι μόνο από τις δικές του αποφάσεις, αλλά και από τις αποφάσεις όλων των υπολοίπων. Έτσι, το όφελος ενός παίκτη μπορεί να είναι σε κάποιο βαθμό ή και ολοκληρωτικά σε σύγκρουση με το όφελος κάποιου άλλου παίκτη και οι λύσεις που προτείνονται έχουν το μειονέκτημα να απαιτούν από τους παίκτες να είναι με κάποιο τρόπο 'λογικοί' και / ή να γνωρίζουν τις εναλλακτικές λύσεις που έχουν στη διάθεση τους και / ή το πως εκτιμούν οι αντίπαλοι και / ή οι συνεργάτες τους τα κέρδη ή τις ζημιές από το παιγνίδι. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται έννοιες του είδους: πλήρες σχέδιο δράσης (στρατηγική), στρατηγική ισορροπία, επικοινωνία πριν την επιλογή στρατηγικής, κ.α. Ακολούθως, υπενθυμίζουμε τον ορισμό ενός παιχνιδιού.

Ορισμός

Ένα παιχνίδι Γ σε κανονική μορφή, N παικτών, χωρίς συνεργασία, με πλήρη πληροφόρηση, αποτελείται από τα εξής:

1. Ένα σύνολο N που αντιπροσωπεύει τους παίκτες. Το N μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο ($N = |N|$).

2. Ένα σύνολο S^i, για κάθε παίχτη $i \in N$, που αντιπροσωπεύει τις διαθέσιμες στρατηγικές του i - παίκτη. *Καθαρή* στρατηγική (pure strategy) του i - παίκτη είναι μια ενέργεια από το S^i, ενώ *μεικτή* στρατηγική (mixed strategy) του i - παίκτη είναι κάθε κατανομή πιθανότητας πάνω στο χώρο των στρατηγικών του S^i. Το σύνολο S^i μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο.

3. Μια πραγματική συνάρτηση h^i, για κάθε παίκτη $i \in N$, με πεδίο ορισμού το σύνολο των στρατηγικών καταστάσεων S, $S := \prod_{i \in N} S^i$ και πεδίο τιμών το R. Η h^i αντιπροσωπεύει την πληρωμή του i - παίκτη όταν η στρατηγική κατάσταση $s \in S$ υιοθετείται από τους παίκτες.

Επεξηγούμε περαιτέρω το σύνολο των στρατηγικών καταστάσεων, αναφέροντας τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός

Το καρτεσιανό γινόμενο $S := \prod_{i \in N} S^i$ ονομάζεται σύνολο των στρατηγικών καταστάσεων του παιχνιδιού, άρα $S = \{(s^1, s^2, ..., s^n) : \;\; s^i \in S^i, \;\; i = 1, 2, ..., n\}$. Ένα διάνυσμα $s \in S$, του οποίου οι συντεταγμένες, ως στρατηγικές, είναι επίσης διανύσματα, αντιπροσωπεύει μια επιλογή στρατηγικής απο κάθε παίχτη. Έτσι, αν ορίσουμε την h μέσω της $i \xrightarrow{h} h^i$, $i \in N$, θα συμβολίζουμε ένα παιχνίδι με $\Gamma = < N, S, h >$.

Ας συμβολίζουμε τώρα με s^{-i} τις στρατηγικές όλων των υπολοίπων παικτών, *εκτός του* i, στη στρατηγική κατάσταση s, δηλαδή $s^{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots s_n)$ και $h^i(s^i, s^{-i})$ την πληρωμή του i - παίχτη, όταν αυτός ακολουθεί την στρατηγική s^i και οι υπόλοιποι παίχτες την s^{-i}. Ακολούθως, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $h^i(s) = h^i(s^i, s^{-i})$ είναι γραμμική ως προς s^i. Αυτο σημαίνει ότι, αν s^i είναι μια μίξη των στρατηγικών s_1^i και s_2^i με πιθανότητες p και $1-p$ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει

$$h^i(s^i, s^{-i}) = p \cdot h^i(s_1^i, s^{-i}) + (1-p) \cdot h^i(s_2^i, s^{-i}), \;\; \forall s^{-i}.$$

Σημειώνουμε επίσης ότι, η στρατηγική κατάσταση $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ ταυτίζεται με την (s^i, s^{-i}).

Σ' αυτή την εργασία, θ' αντιμετωπίσουμε όμοιους παίκτες που παίρνουν αποφάσεις (επιλέγουν στρατηγικές), προκειμένου να μεγιστοποιήσουν τις συναρτήσεις πληρωμής τους. Έτσι, συμβολίζουμε με S και h το σύνολο των στρατηγικών και τη συνάρτηση πληρωμής κάθε παίκτη αντίστοιχα, όπου $h(a, b)$ θα δηλώνει την πληρωμή του παίκτη, όταν αυτός ακολουθεί τη στρατηγική a, ενώ οι υπόλοιποι τη στρατηγική b.

Όπως θα δούμε στην ανάλυση των περιπτώσεων του μοντέλου μας (Κεφ. 2 και 3), συχνά μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός της πληρωμής του μετακινούμενου (παίκτη), όταν αυτός υιοθετεί πολιτική (στρατηγική) x, ενώ όλοι οι υπόλοιποι ακολουθούν μια διαφορετική πολιτική y. Τις περισσότερες φορές υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει φτάσει σε κατάσταση στασιμότητας και η κατάσταση του συστήματος είναι ακριβώς το αποτέλεσμα της πολιτικής που ακολουθούν οι υπόλοιποι πελάτες. Η έννοια της στάσιμης κατάστασης έχει την έννοια της οριακής κατανομής και ο πελάτης υποθέτει ότι αυτή είναι ακριβώς η κατανομή πιθανότητας πάνω στις καταστάσεις.

Ορισμός

Μια στρατηγική s^i του παίχτη i θα λέγεται βέλτιστη απάντηση στη στρατηγική κατάσταση $s \in S$ αν και μόνο αν ισχύει

$$h^i(s^i, s^{-i}) \geq h^i(t^i, s^{-i}),\ \forall t^i \in S^i \ \text{ανν}\ h^i(s^i, s^{-i}) = \max_{t^i \in S^i}\{h^i(t^i, s^{-i}) : t^i \in S^i\}\,. \tag{1.8}$$

Δηλαδή, η στρατηγική s^i του i - παίκτη αποτελεί βέλτιστη απάντηση στην στρατηγική κατάσταση s, εαν η πληρωμή του i - παίκτη μεγιστοποιείται, όταν αυτός επιλέξει s^i και οι υπόλοιποι παίκτες μείνουν σταθεροί στις επιλογές τους, όπως αυτές περιγράφονται από την s.

Συμβολίζοντας τώρα με $BR^i(s)$ (Best Response) το σύνολο όλων των βέλτιστων απαντήσεων του i - παίκτη στην s, έπεται

$$BR^i(s) := \left\{u^i \in S^i : h^i(u^i, s^{-i}) \geq h^i(t^i, s^{-i}),\ \ \forall t^i \in S^i\right\}. \tag{1.9}$$

Πιο αναλυτικά, όταν όλοι οι πελάτες ακολουθούν μια στρατηγική s^{-i}, τότε μεταξύ όλων των πολιτικών, μια πολιτική κάτω από την οποία βελτιστοποιείται η ατομική ωφέλεια του i - πελάτη είναι η u^i και κατά συνέπεια είναι μια βέλτιστη απάντηση του στην s^{-i}. Επίσης, είναι σαφές ότι η $BR(s) := \prod_{i=1}^{n} BR^i(s)$ είναι μια ανταπόκριση πάνω στο σύνολο των στρατηγικών καταστάσεων S, η οποία ονομάζεται *ανταπόκριση βέλτιστης απάντησης του παιχνιδιού.* Δηλαδή, αν $(u^1, u^2, ..., u^n) \in BR(s)$, τότε η u^1 είναι βέλτιστη απάντηση του $1^{ου}$ παίκτη στην s, η u^2 είναι βέλτιστη απάντηση του $2^{ου}$ παίκτη στην s, κ.ο.κ. Συνεχίζουμε με τον ορισμό του Σημείου Στρατηγικού Ισορροπίας (ΣΣΙ) και τον ορισμό της Κυριαρχίας.

Ορισμός

(Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας 'ΣΣΙ' ή Σημείο Nash). Μια στρατηγική κατάσταση $s_* \in S$

ονομάζεται (συμμετρικό) σημείο στρατηγικής ισορροπίας (Nash), αν και μόνο αν η στρατηγική s_*^i που ακολουθεί ο παίκτης i, για κάθε παίκτη $i \in \mathbf{N}$, είναι βέλτιστη απάντηση στην s_* (στον εαυτό της), δηλαδή

$$s_* \text{ είναι ΣΣΙ } \overset{\text{ορσ.}}{\iff} \forall i \in N \text{ ισχύει } h^i(s_*^i, s_*^{-i}) \geq h^i(s^i, s_*^{-i}),\ \ \forall s^i \in S^i \iff$$

$$\iff h^i(s_*^i, s_*^{-i}) = \max_{s^i \in S^i} h^i(s^i, s^{-i}),\ \ \forall i \in N.$$

Διαισθητικά, θα λέγαμε ότι, σε κατάσταση στασιμότητας, τα ΣΣΙ είναι εκείνες οι στρατηγικές καταστάσεις, στις οποίες, εάν όλοι οι παίκτες ανακοίνωναν τις στρατηγικές που σκοπεύουν να ακολουθήσουν, πριν αρχίσει το παίχνίδι, τότε κανείς παίκτης δεν θα μπορούσε να βελτιώσει την πληρωμή του αξιοποιώντας τη γνώση αυτή. Ισοδύναμα, όταν όλοι οι παίκτες ακολουθούν την ίδια στρατηγική ισορροπίας, τότε, σε κατάσταση στασιμότητας, κανένας δεν έχει κίνητρο να παρεκλίνει από τη στρατηγική αυτή. Υπογραμμίζουμε ότι ο παραπάνω ορισμός δεν υποδηλώνει ότι υπάρχει πάντοτε σημείο στρατηγικής ισορροπίας, ούτε ότι είναι μοναδικό, σε περίπτωση που υπάρχει.

Ορισμός

(Κυριαρχία 'Dominance') Μια στρατηγική s^1 θα λέμε ότι κυριαρχεί ασθενώς επί μιας στρατηγικής s^2 αν

$$h(s^1, s) \geq h(s^2, s),\ \ \forall s \in S, \text{ όπου } s = (s^1, s^2, ..., s^n)$$

και η ανισότητα ισχύει αυστηρά για μια τουλάχιστον στρατηγική s. Μια στρατηγική s^* θα λέγεται ασθενώς κυριαρχούσα αν κυριαρχεί ασθενώς επί όλων των στρατηγικών στο σύνολο S.

Όπως θα δούμε παρακάτω, η επιλογή στρατηγικών από τους πελάτες καθορίζει τις πιθανότητες μετάβασης του συστήματος. Είναι δυνατόν η υιοθέτηση μιας στρατηγικής από τους πελάτες να οδηγήσει σε καταστάσεις που έχουν μηδενική στάσιμη πιθανότητα. Έτσι, είναι άσκοπο να εξετάσει κανείς τι επιλέγουν οι στρατηγικές που είναι βέλτιστες απαντήσεις όταν ο πελάτης βρίσκεται στις καταστάσεις αυτές. Όμως μια στρατηγική καλώς ορισμένη πρέπει να καθορίζει βέλτιστες απαντήσεις και για τις καταστάσεις με μηδενική στάσιμη πιθανότητα. Για το σκοπό αυτό υπάρχει μια εκλεπτυσμένη έννοια που αναφέρεται ως **Subgame Perfect Equillibrium** (**SPE**). Ένα τέτοιο σημείο στρατηγικής συμπεριφέρεται ορθολογικά και στις καταστάσεις με μηδενική στάσιμη πιθανότητα. Για περισσότερα γύρω απο το SPE μπορεί να ανατρέξει κανείς στους Hassin and Haviv [18].

Εξ΄ ορισμού είπαμε πως, ένα συμμετρικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας αποτελεί βέλτιστη απάντηση στον εαυτό του. Μπορεί όμως να μην αποτελεί τη μοναδική βέλτιστη απάντηση. Δηλαδή, αν υποθέσουμε ότι το y είναι συμμετρικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας, μπορεί να υπάρχει βέλτιστη απάντηση x με $x \neq y$, τέτοια ώστε η x να αποτελεί αυστηρά καλύτερη απάντηση στον εαυτό της απ΄ ότι η y για τη x. Με την έννοια αυτή τότε, το y είναι ένα ασταθές σημείο ισορροπίας, διότι είναι δυνατόν οι πελάτες ξεκινώντας απ΄ αυτό να υιοθετήσουν στην συνέχεια την στρατηγική x και έτσι να έχουμε στρατηγική ισορροπία στην x. Όταν δεν υπάρχει τέτοια x, λέμε τότε ότι, η στρατηγική y είναι **Εξελικτικά Ευσταθής Στρατηγική (ΕΕΣ)** (**Evolutionary Stable Strategy (ESS)**). Ο αυστηρός ορισμός μιας **ΕΕΣ** είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός

Ένα σημείο στρατηγικής ισορροπίας s_* θα λέγεται **ΕΕΣ**, αν είναι συμμετρικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας και επιπλέον ισχύει ότι:

$$\forall\, z \neq s_* \ \text{ τέτοιο ώστε } \ z \in \arg\max_{s \in S} h(s_*, s) \quad \Rightarrow \quad h(s_*, z) > h(z, z) \tag{1.10}$$

Διαισθητικά, μια στρατηγική **ΕΕΣ** λέει ότι, όταν ένας πελάτης φύγει απ΄ την ισορροπία και οι άλλοι τον ακολουθήσουν, τον συμφέρει να επιστρέψει στην αρχική του στρατηγική.

Πέραν από την έννοια της στασιμότητας που θεωρούμε ότι έχει περιέλθει το σύστημα, τις περισσότερες φορές στους υπολογισμούς μας, όπως θα δούμε παρακάτω, ενδιαφερόμαστε για μια συγκεκριμένη κλάση στρατηγικών που υιοθετούν οι πελάτες και με βάση αυτές υπολογίζουν τις συναρτήσεις πληρωμής τους. Οι στρατηγικές, που θα μας απασχολήσουν παρακάτω, ονομάζονται **στρατηγικές (πολιτικές) τύπου κατωφλίου**. Αναφέρουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός

Μια καθαρή στρατηγική κατωφλίου (pure threshold strategy) με κατώφλι n περιγράφει μια ενέργεια A για τις καταστάσεις του συστήματος $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ και μια άλλη ενέργεια B για τις υπόλοιπες καταστάσεις, δηλαδή για $\{n, n+1, \ldots\}$.

Όμως, πολλές φορές, δεν υπάρχει τέτοια καθαρή πολιτική κατωφλίου που να οδηγεί σε κατάσταση στρατηγικής ισορροπίας. Αναζητήτουμε τότε μεικτές πολιτικές κατωφλίου.

Ορισμός

Μια μεικτή στρατηγική (πολιτική) κατωφλίου (mixed threshold strategy) με κατώφλι $r = n + p$, $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1)$ επιβάλει μία από τις ενέργειες, έστω Α, για κάθε κατάσταση στο $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$, επιλέγει τυχαία μεταξύ των ενεργειών Α και Β για την κατάσταση n προσδίδοντας πιθανότητα p στην Α και $1-p$ στην Β, ενώ καθορίζει την ενέργεια Β για τις υπόλοιπες καταστάσεις $\{n+1, n+2, ...\}$.

Πιο αναλυτικά, μια μεικτή πολιτική κατωφλίου για την είσοδο ενός πελάτη στο σύστημα υποδεικνύει ότι ο πελάτης επιλέγει να εισέλθει στο σύστημα για τις καταστάσεις $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, επιλέγει με πιθανότητα p να μπεί στο σύστημα όταν η κατάσταση είναι n (και με πιθανότητα $1-p$ να μην μπει), ενώ επιλέγει να μην εισέλθει στο σύστημα για τις καταστάσεις $\{n+1, n+2, \ldots\}$.

Προφανώς, για $p = 0$, η μεικτή στρατηγική κατωφλίου r ανάγεται στην καθαρή στρατηγική κατωφλίου n.

Ορισμός

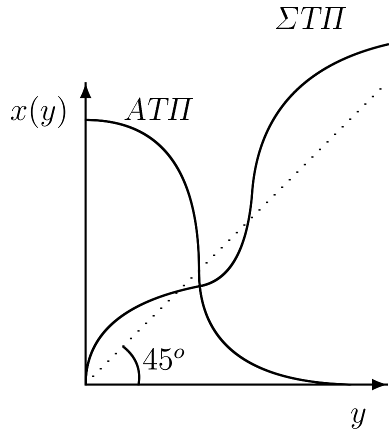
(*Αντίθετα με το πλήθος 'ΑΤΠ' - Σύμφωνα με το πλήθος 'ΣΤΠ'*) Υποθέτουμε ότι το σύνολο των στρατηγικών S είναι γραμμικά διατεταγμένο, π.χ. $S = [0, 1]$ ή $S = \{0, 1, 2, ...\}$ και για κάθε $y \in S$ υπάρχει μοναδική βέλτιστη απάντηση

$$x(y) = \arg\max_{x \in S} h(x, y), \tag{1.11}$$

όπου $x(y)$ είναι μια συνεχής και μονότονη συνάρτηση. Στην περίπτωση που η $x(y)$ είναι φθίνουσα, το μοντέλο είναι τύπου *Αντίθετα με το πλήθος*, ενώ, όταν είναι αύξουσα, είναι τύπου *Σύμφωνα με* *το πλήθος*.

Δηλαδή, στο μοντέλο τύπου *Αντίθετα με το πλήθος*, η βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη είναι φθίνουσα συνάρτηση της ακολουθούμενης στρατηγικής από τους άλλους πελάτες και πιο επεξηγηματικά, σημειώνουμε ότι, όσο υψηλότερα βρίσκεται η τιμή της στρατηγικής τύπου κατωφλίου που υιοθετείται από τους άλλους, τόσο χαμηλότερα είναι η τιμή της στρατηγικής, που δίνει την καλύτερη απάντηση για έναν συγκεκριμένο πελάτη.

Απ΄ την άλλη, στο μοντέλο τύπου *Σύμφωνα με το πλήθος*, η βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη είναι αύξουσα συνάρτηση της ακολουθούμενης στρατηγικής από τους άλλους πελάτες και πιο συγκεκριμένα, όσο υψηλότερη είναι η στρατηγική τύπου κατωφλίου που υιοθετείται από τους άλλους, τόσο υψηλότερα βρίσκεται το κατώφλι, το οποίο δίνει την καλύτερη απάντηση για έναν πελάτη. Σχηματικά.



Τονίζουμε ότι η στρατηγική βέλτιστης απάντησης y είναι στρατηγική ισορροπίας αν $x(y) = y$, δήλαδη όταν αποτελεί σταθερό σημείο της συνάρτησης $x(y)$.

Για μια εκτεταμένη εισαγωγή και μελέτη στην θεωρία παιγνίων βλέπε το βιβλίο του Μηλολιδάκη (2009).

1.3 Μέθοδος μελέτης των συστημάτων ουρών αναμονής - Παραδείγματα

Τις τελευταίες δεκαετίες υπάρχει μια τάση να μελετώνται τα συστήματα ουρών αναμονής και από οικονομική οπτική. Ειδικότερα, μετά τη μελέτη των μέτρων απόδοσης ενός συστήματος, εισάγεται μια δόμη αμοιβής - κόστους και ο στόχος είναι η βελτιστοποίηση του συστήματος. Επιτρέποντας στον κάθε πελάτη να λαμβάνει τις δικές του αποφάσεις (να εισέλθει στο σύστημα ή να αποχωρήσει κ.α.), η βελτιστοποίηση του συστήματος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα παίγνιο μεταξύ των πελατών. Έτσι, το πρώτο πρόβλημα είναι να βρέθουν οι συμμετρικές πολιτικές ισορροπίας (Nash) των πελάτων. Η ανάλυση για την εύρεση των σημείων στρατηγικής ισορροπίας πραγματοποιείται κάνοντας χρήση στοιχείων της θεωρίας παιγνίων, ενώ εφαρμόζονται κλασικές τεχνικές για τη βελτιστοποίηση του κοινωνικού κέρδους. Στο μοντέλο μας (ταξί - λεωφορείο), όπως θα δούμε παρακάτω, οι πελάτες κατά την άφιξη τους, πέραν των χαρακτηριστικών του συστήματος, όπως αμοιβή εξυπηρέτησης με ταξί ή λεωφορείο, κόστος αναμονής ανά μονάδα χρόνου στην πιάτσα ή τη στάση κ.α., λαμβάνουν ή όχι κάποια πληροφορία σχετικά με το σύστημα (πλήθος πελατών που αναμένουν στην πιάτσα των ταξί) και συνεπώς οι αποφάσεις τους επηρεάζονται από την γνώση αυτής της πληροφορίας ή όχι. Για την ανάλυση του μοντέλου μας, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια δομή αμοιβής - κόστους μέσω της οποίας ποσοτικοποιείται η επιθυμία του πελάτη να εξυπηρετηθεί με ταξί ή λεωφορείο. Έτσι, ένας πελάτης αποφασίζει να περιμένει στην πιάτσα των ταξί, αν η αναμενόμενη αμοιβή του είναι μεγαλύτερη εκείνης του λεωφορείου, λαμβάνοντας υπόψη του την παρεχόμενη πληροφόρηση.

Ακολούθως, μέσω δύο παραδειγμάτων, θα προσπαθήσουμε να αποσαφηνίσουμε αρκετές από τις μέχρι τώρα αναφερόμενες θεωρητικές έννοιες και να δώσουμε το μοτιβό αντιμετώπισης και επίλυσης των προβλημάτων που πραγματεύεται η παρούσα εργασία. Πρώτα, θα αναφερθούμε σε μια πλήρως παρατηρήσιμη $M/M/1$ ούρα εφοδιασμένη με μια απλή δομή αμοιβής - κόστους. Αυτό είναι το κλασικό μοντέλο του *Naor* (1969). Οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Έστω $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ο ρυθμός συνωστισμού. Η αμοιβή ενός πελάτη, ο οποίος ολοκληρώνει την εξυπηρέτηση του, είναι R, ενώ το κόστος για κάθε χρονική μονάδα που πέρναει στο σύστημα (στο χώρο αναμονής ή εξυπηρέτησης) είναι C. Υπάρχει ένας υπηρέτης και η πειθαρχία ουράς είναι η FCFS. Οι πελάτες, κατά την άφιξή τους, παρατηρούν τον αριθμό των ήδη παρόντων πελατών στο σύστημα και κατόπιν αποφασίζουν αν θα εισέλθουν στο σύστημα ή όχι. Περαιτέρω, σημειώνουμε ότι, όταν ένας πελάτης επιλέξει να μπει στο σύστημα, δεν επιτρέπεται να αποχωρήσει πριν την εξυπηρέτησή του (όχι υπαναχωρήσεις) και κάθε πελάτης που δεν επιθυμεί να μπει στο σύστημα, αποχωρεί και δεν επιστρέφει ποτέ (όχι επαναπροσπάθειες). Θεωρούμε ότι,

$$R \geq \frac{C}{\mu},$$

διαφορετικά όλοι, ακόμη και εκείνοι που βρίσκουν το σύστημα κενό, θα αποχωρούσαν και το σύστημα θα παρέμενε συνεχώς κενό. Το σύνολο των δυνατών αποφάσεων κάθε πελάτη που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση n είναι $S_n = \{0, 1\}$, όπου το 0 συμβολίζει την απόφαση της αποχώρησης και το 1 την απόφαση της εισόδου στο σύστημα, για τη δεδομένη κατάσταση. Έτσι, η στρατηγική ενός πελάτη αντιστοιχεί σε μια ακολουθία από μηδενικά και μονάδες, εφόσον ο χώρος καταστάσεων του συστήματος είναι αριθμήσιμα άπειρος. Για παράδειγμα, η στρατηγική (1,1,0,0,1,0,0,...) επιτάσσει ότι αν ένας πελάτης βρει το σύστημα κενό ή με έναν ή με πέντε πελάτες, η απόφαση του είναι να εισέλθει στο σύστημα, ενώ σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, αποχωρεί χωρίς να εξυπηρετηθεί.

Αρχικά, προσδιορίζουμε την ατομικά βέλτιστη στρατηγική. Ας θεωρήσουμε έναν επιλεγμένο πελάτη, ο οποίος, κατά την άφιξή του, αντικρίζει n πελάτες μπροστά του. Αν αποφασίσει να εισέλθει στο σύστημα, τότε έχει αναμενόμενο κέρδος $S_e^1(n) = R - C \cdot \frac{n+1}{\mu}$ μονάδες. Θα αποφασίσει να μπει αν η ποσότητα αυτή είναι μη αρνητική, δηλαδή αν $n + 1 \leq \frac{R\mu}{C}$, διαφορετικά αναχωρεί. Οπότε, μια βέλτιστη στρατηγική επιτάσσει να εισέλθει στο σύστημα όσο ο αριθμός των πελατών που βρίσκει κατά την άφιξη του είναι $n \leq \lfloor \frac{R\mu}{C} \rfloor - 1$. Θέτω $n_e = \lfloor \frac{R\mu}{C} \rfloor$. Τότε, η βέλτιστη στρατηγική είναι (1,1,...,1,0,0,0,0...) αποτελούμενη από n_e μονάδες στις πρώτες συντεταγμένες και μηδενικά στις υπόλοιπες. Αυτή η στρατηγική αντιστοιχεί στην καθαρή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι n_e και μάλιστα είναι κυριαρχούσα στρατηγική.

Το πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης είναι πιο περίπλοκο. Υποθέτουμε ότι, όλοι οι πελάτες ακολοθούν την ίδια πολιτική κατωφλίου n, δηλαδή η στρατηγική τους είναι $(1, 1, ..., 1, 0, 0, 0...)$ με n μονάδες. Όπως είπαμε προηγουμένως, οι πελάτες τότε εισέρχονται στο σύστημα, όταν συναντούν το πολύ $n-1$ άτομα. Έπεται τότε ότι, το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια $M/M/1/n$ ουρά. Έστω p_k, $k = 0, 1, ..., n$, η στάσιμη κατανομή της. Με χρήση της κατανομής αυτής, το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα είναι $E(Q) = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1-(n+1)\rho^n+n\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}$. Επίσης, η πιθανότητα να μπει στο σύστημα ένας αφικνούμενος πελάτης είναι $1 - p_n = \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}$. Έτσι, το αναμενόμενο καθαρό κοινωνικό κέρδος στη μονάδα του χρόνου είναι $S^1_{soc}(n) = \lambda(1 - p_n)R - CE(Q)$, το οποίο παίρνει τελικά τη μορφή

$$S^1_{soc}(n) = \lambda\frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}R - C\left(\frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1-(n+1)\rho^n+n\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}\right).$$

Πρέπει να βρούμε το σημείο n^* στο οποίο μεγιστοποιείται η παραπάνω συνάρτηση. Ο *Naor* (1969) κατασκεύασε μια διαδικασία για τον υπολογισμό του n^*, η οποία βασίζεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση είναι μονοκόρυφη. Επιπλέον, έδειξε ότι $n^* \leq n_e$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η ατομική βελτιστοποίηση οδηγεί σε μεγαλύτερο μήκος ουράς πελατών απ΄ ό,τι είναι κοινωνικά επιθυμητό.

Συνεχίζουμε με τη δεύτερη περίπτωση του μη παρατηρήσιμου μοντέλου. Αυτό το μοντέλο μελετήθηκε από τους *Edelson* και *Hildebrand* (1975). Οι υποθέσεις του μοντέλου είναι ίδιες με το προηγούμενο παράδειγμα και η μοναδική διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι οι πελάτες, κατά την άφιξή τους, δεν πληροφορούνται την κατάσταση του συστήματος. Η απόφαση που πρέπει να λάβουν τη στιγμή της άφιξής τους είναι αν θα εισέλθουν στο σύστημα (1) ή αν θα αναχωρήσουν (0). Έτσι, το σύνολο των καθαρών στρατηγικών κάθε πελάτη είναι το $S = \{0, 1\}$. Υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν την ίδια μεικτή στρατηγική q. Αυτό σημαίνει ότι εισέρχονται με πιθανότητα q, ενώ αναχωρούν με πιθανότητα $1 - q$ χωρίς να εξυπηρετηθούν. Κάτω απ΄ αυτή την στρατηγική, το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια $M/M/1$ ουρά, με διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό λq. Ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\mu - \lambda q$. Ας θεωρήσουμε τώρα έναν επιλεγμένο πελάτη, ο οποίος αφικνείται στο σύστημα. Αν αποφασίσει να μπει, το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του θα είναι $S^2_e(q) = R - \frac{C}{\mu-\lambda q}$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

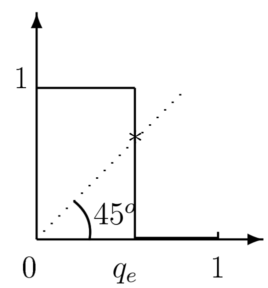
1. Αν $R \leq \frac{C}{\mu}$, τότε το καθαρό κέρδος του επιλεγμένου πελάτη είναι μη θετικό, ακόμα κι αν κανείς άλλος πελάτης αποφασίσει να μην μπει, δηλαδή $S_e^2(q) \leq 0, \ \ \forall q \in [0,1]$. Συνεπώς, η βέλτιστη απάντηση του είναι να μην εισέλθει και η απόφαση της βέβαιας αποχώρησης είναι κυριαρχούσα στρατηγική.

2. Αν $R \geq \frac{C}{\mu-\lambda}$, τότε το καθαρό κέρδος του επιλεγμένου πελάτη είναι μη αρνητικό, ακόμα κι αν όλοι οι πελάτες αποφασίσουν να μπουν, δηλαδή $S_e^2(q) \geq 0, \ \ \forall q \in [0,1]$. Συνεπώς, η βέλτιστη απάντηση του είναι να εισέλθει και η απόφαση της βέβαιας εισόδου αποτελεί κυριαρχούσα στρατηγική.

3. Αν κανένα από τα παραπάνω δεν ισχύει, δηλαδή αν $\frac{C}{\mu} < R < \frac{C}{\mu-\lambda}$, τότε υπάρχει μια τιμή του q, τέτοια ώστε $S_e^2(q) = 0$. Αυτή η τιμή είναι η $q_e = \frac{\mu}{\lambda}\left(1 - \frac{C}{R\mu}\right)$. Γι αυτή την τιμή του q, ο επιλεγμένος πελάτης είναι αδιάφορος αν θα μπει στο σύστημα ή όχι, αφού το κέρδος του είναι μηδέν. Έτσι, οποιαδήποτε στρατηγική $q \in [0,1]$ είναι βέλτιστη απάντηση στην q_e. Η μοναδική στρατηγική που είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της είναι η q_e, η οποία είναι σημείο ισορροπίας, αλλά δεν είναι κυριαρχούσα στρατηγική.

Σημειώνουμε ότι η $S_e^2(q)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς q. Ας υποθέσουμε ότι όλοι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν την ίδια πολιτική q. Αν $q < q_e$, τότε η βέλτιστη απάντηση του επιλεγμένου πελάτη είναι να εισέλθει στο σύστημα (1), αν $q > q_e$, τότε η βέλτιστη απάντηση του επιλεγμένου πελάτη είναι να αποχωρήσει από το σύστημα (0), ενώ $q = q_e$, τότε οποιαδήποτε πολιτική μεταξύ 0 και 1 είναι βέλτιστη απάντηση. Συνεπώς, η βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη είναι φθίνουσα συνάρτηση της στρατηγικής των υπολοίπων (βλέπε επόμενο σχήμα), άρα το μοντέλο αυτό είναι ΑΤΠ.

Καλύτερη απάντηση



Συνεχίζουμε με το πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση και υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν την ίδια μεικτή πολιτική q. Το σύστημα τότε λειτουργεί ως μια M/M/1 ουρά με ρυθμό άφιξης λq. Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα δίνεται ως $E(Q) = \frac{\lambda q}{\mu - \lambda q}$. Τότε το καθαρό κοινωνικό κέρδος στη μονάδα του χρόνου είναι

$$S^2_{soc}(q) = \lambda q R - C E(Q) = \lambda q R - C \tfrac{\lambda q}{\mu - \lambda q}.$$

Εύκολα μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή $q^* \in [0,1]$ που μεγιστοποιεί την παραπάνω συνάρτηση. Οι *Edelson* και *Hildebrand* (1975) έδειξαν ότι προκύπτουν οι εξής τρεις περιπτώσεις:

1. Αν $R \leq \frac{C}{\mu}$, τότε $q^* = 0$. Σ′ αυτήν την περίπτωση, το σύστημα, κάτω από μια τέτοια πολιτική, παραμένει συνεχώς κενό.
2. Αν $\frac{C}{\mu} < R < \frac{C}{\mu}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2$, τότε $q^* = \frac{\mu}{\lambda}\left(1 - \sqrt{\frac{C}{R\mu}}\right)$.
3. Αν $R \geq \frac{C}{\mu}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2$, τότε $q^* = 1$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, όμοια με την παρατηρήσιμη περίπτωση, ισχύει $q^* \leq q_e$. Συμπεραίνουμε και εδώ ότι, η ατόμική βελτιστοποίηση οδηγεί σε υπερβολική χρήση του συστήματος, περισσότερη απ′ ό,τι είναι κοινωνικά επιθυμητό. Αιτία του φαινομένου αυτού είναι οι αρνητικές επιδράσεις που επάγουν οι πελάτες στους μετέπειτα αφικνούμενους πελάτες, κάτι το οποίο αγνοούν κατά τη στιγμή λήψης της απόφασής τους, ως προς το αν θα εισέλθουν ή όχι στο σύστημα. Στην επόμενη παράγραφο, θα αναφερθούμε σε μερικά ιστορικά στοιχεία.

1.4 Μερικά ιστορικά στοιχεία

Η ιδέα της ανάλυσης της συμπεριφοράς των πελατών με βάση μια δομή αμοιβής - κόστους και παιγνιοθεωρητικά επιχειρήματα ανάγεται στις πρωτοποριακές εργασίες του *Naor* (1965) και των *Edelson* και *Hildebrand* (1975). Οι συγγραφείς αυτοί μελέτησαν το πρόβλημα της εύρεσης στρατηγικών εισόδου που μεγιστοποιούν το ατομικό όφελος, το κοινωνικό όφελος και το κέρδος του διαχειριστή, σε μια $M/M/1$ ουρά με απλή γραμμική δομή αμοιβής - κόστους. Εκτός από τα χαρακτηριστικά του συστήματος, το επίπεδο πληροφόρησης που παρέχεται στους πελάτες κατά την άφιξη τους και πριν λάβουν την απόφαση τους, είναι ένα κεντρικό σημείο που επηρεάζει δραστικά τη συμπεριφορά τους και συνεπώς τη συμπεριφορά του συστήματος. Ο *Naor* (1969) μελέτησε την *παρατηρήσιμη* περίπτωση, όπου κάθε αφικνούμενος πελάτης παρατηρεί την ουρά και συνεπώς η πληροφορία του είναι ο ακριβής αριθμός των παρόντων πελατών στο σύστημα. Βασισμένος σ′ αυτή την πληροφορία καλείται να αποφασίσει αν θα εισέλθει στο σύστημα ή όχι. Οι *Edelson* και *Hildebrand* (1975) μελέτησαν την *μη παρατηρήσιμη* περίπτωση, όπου κάθε πελάτης λάμβανει την απόφασή του χώρις να έχει στη διάθεσή του καμιά πληροφορία. Και στην περίπτωση αυτή, αποφασίζει αν θα εισέλθει στο σύστημα ή όχι.

Ο *Leeman* (1964) ανέφερε τρεις στόχους, οι οποίοι μπορούν να επιτευχθούν μέσω της διαδικασίας τιμολόγησης μιας ουράς αναμονής. Πρώτον, βελτιώνεται η διάθεση / κατανομή των υπαρχόντων πόρων εξυπηρέτησης. Δεύτερον, αποκεντρώνονται οι αποφάσεις των επιχειρήσεων και τέλος καθοδηγούνται οι μακροπρόθεσμες επενδυτικές αποφάσεις. Ο *Leeman* (1964) παρέλειψε έναν πολύ σημαντικό τέταρτο λόγο, ο οποίος συμπληρώθηκε από τον *Naor* (1969), δηλαδή τη ρύθμιση της ζήτησης, η οποία, χωρίς τη διαδικασία της τιμολόγησης, τείνει να οδηγεί σε υπερβολική χρήση των διαθέσιμων πόρων.

Η ιδέα της οικονομικής οπτικής στη Θεωρία Ουρών που εισήχθει με την εργασία του *Naor* (1969) αναπτύχθηκε περαιτέρω από άλλους ερευνητές και έτσι δημιουργήθηκε μια αρκετα εκτεταμένη βιβλιογραφία στην περιοχή αυτή. Τα τελευταία χρόνια, η έρευνα σχετικά με την εύρεση πολιτικών ισορροπίας και πολιτικών που μεγιστοποιούν το κοινωνικό όφελος ή το κέρδος του διαχειριστή, έχει δώσει σημαντικά αποτελέσματα. Πολλοί συγγραφείς έχουν μελετήσει τέτοια προβλήματα σε συστήματα ουρών που ενσωματώνουν διάφορα χαρακτηριστικά όπως προτεραιότητες (priorities), υπαναχώρηση (reneging), επαναπροσπάθειες (retrials), κ.α. Οι *Hassin* και *Havin* (2003) παρουσιάζουν συνοπτικά τα θεμελειώδη μοντέλα και τα υπάρχοντα αποτελέσματα στην ερευνητική αυτή περιοχή, με πλούσιες βιβλιογραφικές αναφορές. Διαφορα άρθρα επίσης επικεντρώνονται στην επίδραση του επιπέδου της πληροφορίας στις στρατηγικές των πελατών και την απόδοση του συστήματος, όπως π.χ. *Hassin* και *Havin* (1994), *Chen* και *Frank* (2004), *Burnetas* και *Economou* (2007), *Economou* και *Kanta* (2008), κ.α. Στο παραπάνω παιγνιοθεωρητικό πλαίσιο ανάλυσης ενός συστήματος ουρών, επεκτάσεις ή γενικεύσεις μπορεί να οδηγήσουν σε προβλήματα που είναι αρκετά δύσκολο να αναλυθούν μαθηματικά και να δώσουν αποτελέσματα σε κλειστή μορφή για τις στρατηγικές ισορροπίας ή για τις στρατηγικές που μεγιστοποιούν το κοινωνικό όφελος ή το κέρδος του διαχειριστή. Σε κάποιες περιπτώσεις, η ανάλυση της βέλτιστης συμπεριφοράς των πελατών με μαθηματικές μεδόδους καθίσταται αδύνατη από ένα σημείο και ύστερα και τότε είναι απαραίτητο να συμπληρωθεί με εκτεταμένα αριθμητικά πειράματα που φωτίζουν διάφορες πτυχές των αντίστοιχων μοντέλων.

1.5 Δομή της εργασίας

Το **Κεφάλαιο 1** περιέχει βασικές έννοιες και ορισμούς, τόσο από την θεωρία ουρών αναμονής, όσο και απο τη στοιχειώδη θεωρία παιγνίων, έτσι ώστε να εισαχθεί η αναγκαία ορολογία και ο συμβολισμός που απαιτείται για την καλύτερη κατανόηση και προσέγγιση των προβλημάτων που πραγματεύεται η παρούσα εργασία.

Στο **Κεφάλαιο 2** εισάγουμε το μοντέλο μας, *Ταξί - Λεωφορείο*, στο οποίο οι μετακινούμενοι κατά την άφιξή τους στη στάση - πιάτσα, αποφασίζουν αν θα μετακινηθούν με ταξί ή λεωφορείο, αφου παρατηρήσουν ή όχι το μήκος ουράς που έχει σχηματιστεί στην πιάτσα των ταξί. Οι επιβιβάσεις στα ταξί πραγματοποιούνται μεμονωμένα, ενώ στα λεωφορεία μαζικά, όπως θα διευκρινίσουμε στη συνέχεια της εργασίας μας. Τέλος, δίνονται αριθμητικά πειράματα που φωτίζουν τις διαφορές μεταξύ ατομικής και κοινωνικής βελτιστοποίησης και παράλληλα, με την παρουσίαση σχεδιαγραμμάτων, γίνεται προσπάθεια σύγκρισής τους.

Στο **Κεφάλαιο 3** μελετάμε το μοντέλο μας, στην περίπτωση που οι μετακινούμενοι αφικνούνται μεν μεμονωμένα στη στάση - πιάτσα, επιβιβάζονται δε το πολύ δύο άτομα σε κάθε ταξί. Επίσης, βελτιστοποιούμε και εδώ τόσο την ατομική ωφέλεια, πρώτα στην *παρατηρήσιμη* και ύστερα στην *μη παρατηρήσιμη* περίπτωση, όσο και συνολικά το κοινωνικό κέρδος. Αριθμητικά πειράματα, στο τέλος του κεφαλαίου, μας βοηθούν και εδώ να διακρίνουμε τις διαφορές μεταξύ ατομικής και κοινωνικής βελτιστοποίησης, αλλά και να συγκρίνουμε μεταξύ τους τις ατομικές, καθώς και τις κοινωνικές βέλτιστες απαντήσεις των μετακινούμενων των κεφαλαίων 2 και 3.

Κεφάλαιο 2

Μοντέλο Ταξί - Λεωφορείο Μεμονωμένες αφίξεις και επιβιβάσεις

Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη καθαρών και μεικτών στρατηγικών, αλλά και στρατηγικών τύπου κατωφλίου (threshold strategies) που μεγιστοποιούν τόσο την ατομική, όσο και την κοινωνική ευημερία, στην παρατηρήσιμη και στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση του μοντέλου μας. Η διάκριση μεταξύ παρατηρήσιμης και μη παρατηρήσιμης περίπτωσης βασίζεται στο κατά πόσο οι μετακινούμενοι που αφικνούνται στη στάση - πιάτσα, μπορούν ή όχι αντίστοιχα να παρατηρήσουν τον αριθμό των παρόντων ατόμων. Οι έννοιες αυτές και οι ιδιότητες των βέλτιστων στρατηγικών θα μελετηθούν λεπτομερώς παρακάτω. Στο τέλος του κεφαλαίου, με την παρουσίαση αποτελεσμάτων μέσω διαγράμματων από συγκεκριμένα αριθμητικά πειράματα, γράφουμε μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις, οι οποίες μας βοηθούν να κατανοήσουμε καλύτερα τις διαφορές μεταξύ ατομικής και κοινωνικής βελτιστοποίησης. Ακολούθως, περιγράφουμε το βασικό μοντέλο της εργασίας.

2.1 Περιγραφή του μοντέλου

1. Σε μια στάση - πιάτσα προσέρχονται μετακινούμενοι (επιβάτες) σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.

2. Τα λεωφορεία φτάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία, της οποίας οι ενδιάμεσοι χρόνοι έχουν κατανομή $F_B(x)$. Συμβολίζουμε με b τον αναμενόμενο οριακό προδρομικό χρόνο ανανέωσης αυτής της ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας.

3. Τα ταξί διέρχονται από την πιάτσα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό θ, δηλαδή οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των ταξί είναι ανεξάρτητοι, εκθετικοί με παράμετρο θ.

4. Η ωφέλεια ενός μετακινούμενου χρησιμοποιώντας ταξί ή λεωφορείο είναι R_T ή R_Λ αντίστοιχα. Η ωφέλεια αυτή περιλαμβάνει την ικανοποίηση που απορρέει από την εξυπηρέτησή - μετακίνησή του με ταξί ή λεωφορείο.

5. Το κόστος ανά μονάδα χρόνου για κάποιον που περιμένει στην πιάτσα ή στη στάση είναι C_T ή C_Λ αντίστοιχα. Το κόστος αυτό συσσσωρεύεται μόνο κατά τη διάρκεια αναμονής του μετακινούμενου στην ουρά της πιάτσας των ταξί ή τη στάση των λεωφορείων και όχι κατά τη διάρκεια της μετακίνησής του.

6. Η πειθαρχία ουράς στην πιάτσα των ταξί είναι *First Come First Served (FCFS)*, δηλαδή υπάρχει σειρά προτεραιότητας για κάθε μετακινούμενο που αφικνείται.

Αρχικά, θεωρούμε ότι κάθε ταξί που διέρχεται χρησιμοποιείται από έναν μετακινούμενο. Σε περίπτωση που δεν αναμένει κανείς στην πιάτσα, τα ταξί αναχωρούν 'άδεια' και δεν περιμένουν έως ότου αφιχθεί κάποιος. Θεωρούμε, επίσης, ότι ο χρόνος επιβίβασης των μετακινούμενων είναι αμελητέος.

Στα λεωφορεία δεν υπάρχει όριο χωρητικότητας. Όσοι περιμένουν στη στάση, επιβιβάζονται κάθε φορά όλοι και αναχωρούν.

Υποθέτουμε ότι στη στάση και στην πιάτσα υπάρχει άπειρη χωρητικότητα. Οι μετακινούμενοι επιτρέπεται να αποφασίσουν μόνο κατά την άφιξή τους ποιο μέσο μεταφοράς θα χρησιμοποιήσουν και η απόφαση τους αυτή είναι αμετάκλητη. Ειδικότερα, όταν ένας μετακινούμενος επιλέξει το μέσο μεταφοράς που θα μετακινηθεί, δεν επιτρέπεται να αποχωρήσει από τη στάση ή την πιάτσα πριν την εξυπηρέτησή του (όχι υπαναχωρήσεις). Επίσης, κάθε μετακινούμενος που δεν επιθυμεί να μετακινηθεί με ταξί ή λεωφορείο, αποχωρεί και δεν επιστρέφει ποτέ (όχι επαναπροσπάθειες). Τέλος, οι μετακινούμενοι ενδιαφέρονται να μεγιστοποιήσουν το αναμενόμενο καθαρό κέρδος τους.

Παρατήρηση

Η ανωτέρω υπόθεση **(3)** μπορεί να τροποποιηθεί και να γίνει πιο ρεαλιστική αν υποθέσουμε επιπλέον ότι τα ταξί είναι '*ελεύθερα*' με πιθανότητα q. Τότε έπεται ότι, οι χρόνοι διέλευσης των ταξί θα είναι ανεξάρτητοι, εκθετικοί με παράμετρο θq.

Στην επόμενη παράγραφο, θα μελετήσουμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του μοντέλου μας.

2.2 Παρατηρήσιμη περίπτωση - Ατομική βελτιστοποίηση

Υποθέτουμε ότι, κάθε μετακινούμενος, κατά την άφιξή του στη στάση - πιάτσα, παρατηρεί πρώτα τον ακριβή αριθμό των παρόντων ατόμων που περιμένουν για ταξί και μετά επιλέγει ποιο μέσο μεταφοράς θα χρησιμοποιήσει. Το σύνολο των δυνατών αποφάσεων κάθε μετακινούμενου που βρίσκει τη στάση - πιάτσα στην κατάσταση n είναι $S_n = \{T, \Lambda\}$, όπου το γράμμα T συμβολίζει την απόφαση της μετακίνησης με ταξί και το γράμμα Λ την απόφαση της μετακίνησης με λεωφορείο, για τη δεδομένη κατάσταση. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου και πιο συγκεκριμένα, υπάρχει ένα επίπεδο (κατώφλι) τέτοιο ώστε ένας μετακινούμενος που φθάνει στη στάση - πιάτσα μπαίνει στην ουρά αναμονής για ταξί, μόνο αν το πλήθος των παρόντων ατόμων δεν υπερβαίνει το επίπεδο αυτό.

Θεώρημα 2 *Στην παρατηρήσιμη περίπτωση του μοντέλου, υπάρχει ένα κατώφλι n_e που δίνεται από τη σχέση*

$$n_e = \lfloor \frac{\theta(R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b)}{C_T} \rfloor - 1,$$

τέτοιο ώστε η στρατηγική «παρατήρησε τον αριθμό $Q_T(t)$ των μετακινούμενων στην πιάτσα των ταξί, μπες στην ουρά αν $Q_T(t) \leq n_e$, διαφορετικά πάρε λεωφορείο» είναι η μοναδική κυριαρχούσα καθαρή στρατηγική ισορροπίας. Με $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζουμε το κάτω ακέραιο μέρος του αριθμού x, δηλαδή $\lfloor x \rfloor = \{\max_{z\in\mathbb{Z}} : \ z \leq x\}$.

Απόδειξη

Ο πρώτος μετακινούμενος που φθάνει στην πιάτσα, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής, θα περιμένει μέσο χρόνο $\frac{1}{\theta}$ έως ότου επιβιβασθεί σε ταξί. Έτσι, τον συμφέρει να χρησιμοποιήσει ταξί, εφόσον ισχύει η ακόλουθη ανίσωση

$$R_T - C_T \frac{1}{\theta} \geq R_\Lambda - C_\Lambda b, \tag{2.1}$$

δηλαδή αν το κέρδος του, όταν αφικνείται πρώτος στη στάση - πιάτσα και επιλέγει το ταξί ως μέσο μεταφοράς του, είναι μεγαλύτερο ή ίσο από εκείνο που θα αποκόμιζε αν χρησιμοποιούσε το λεωφορείο. Διαφορετικά εξ' αρχής, ακόμη και εκείνοι που θα έβρισκαν την πιάτσα κενή, θα προτιμούσαν να μετακινηθούν με λεωφορείο και κανένας δεν θα είχε λόγο να επιλέξει το ταξί ως μέσο μεταφοράς του. Έτσι, εφόσον ισχύει η σχέση (2.1), οι πρώτοι μετακινούμενοι, που θα αφιχθούν στη στάση - πιάτσα μέχρι και τον n-οστό, θα επιλέξουν ταξί, μιας και το κέρδος τους θα είναι μεγαλύτερο, ενώ οι υπόλοιποι θα χρησιμοποιήσουν λεωφορείο. Συνεπώς, ο ρυθμός άφιξης των μετακινούμενων μέχρι και τον n-οστό είναι λ, καθόσον με πιθανότητα 1 επιλέγουν ταξί, ενώ από τον n-οστό και ύστερα είναι μηδέν, αφού πλέον με πιθανότητα 1 προτιμούν το λεωφορείο.

Έστω $K_T = R_T - C_T E(S_T)$ και $K_\Lambda = R_\Lambda - C_\Lambda E(S_\Lambda)$ η ωφέλεια ένος μετακινούμενου, ο οποίος χρησιμοποιεί το ταξί ή το λεωφορείο αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι ο μέσος χρόνος $E(S_T)$ διέλευσης των ταξί από την πιάτσα είναι εκθετικός με παράμετρο θ, άρα ο πρώτος μετακινούμενος θα περιμένει μέσο χρόνο $\frac{1}{\theta}$, ο δεύτερος $2 \cdot \frac{1}{\theta}$, ο τρίτος $3 \cdot \frac{1}{\theta}$ κ.ο.κ. Όποτε ένας μετακινούμενος που φθάνει στην πιάτσα και βλέπει n άτομα να περιμένουν για ταξί, εισέρχεται στην ουρά, όταν ισχύει

$$K_T \geq K_\Lambda \quad ή \quad R_T - C_T E(S_T) \geq R_\Lambda - C_\Lambda E(S_\Lambda) \quad ή \quad R_T - C_T \cdot \tfrac{n+1}{\theta} \geq R_\Lambda - C_\Lambda \cdot b \quad ή$$

$$n \leq \lfloor \frac{\theta(R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b)}{C_T} \rfloor - 1, \tag{2.2}$$

διαφορετικά προτιμά να μετακινηθεί με λεωφορείο. Έστω $n_e = \lfloor \frac{\theta(R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b)}{C_T} \rfloor$. Τότε η βέλτιστη στρατηγική είναι $(T, T, ..., T, \Lambda, \Lambda, \Lambda, ...)$ αποτελούμενη από n_e το πλήθος γράμματα T στις πρώτες συντεταγμένες και Λ στις υπόλοιπες. Αυτή η στρατηγική αντιστοιχεί στην καθαρή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι n_e και μάλιστα είναι κυριαρχούσα στρατηγική ισορροπίας. Επίσης, βλέπουμε ότι το κατώφλι είναι ανεξάρτητο του ρυθμού άφιξης λ των μετακινούμενων στη στάση - πιάτσα.

■

Παρατήρηση

Υπάρχουν και στρατηγικές ισορροπίας που δεν είναι τύπου κατωφλίου. Αν ένας μετακινούμενος εισέρχεται όταν η ουρά στην πιάτσα των ταξί δεν έχει μέγεθος n_e, τότε αυτή είναι μια πολιτική ισορροπίας όχι τύπου κατωφλίου. Ειδικά στην περίπτωση αυτή, οι καταστάσεις j του συστήματος για $j \geq n_e+1$ είναι μεταβατικές και επομένως δεν παρατηρούνται. Άρα, δεν παίζουν ρόλο οι αποφάσεις που αφορούν τις καταστάσεις αυτές όσον αφορά τη συμπεριφορά (και άρα τα μακροπρόθεσμα μέτρα κέρδους) του συστήματος.

2.3 Μη Παρατηρήσιμη περίπτωση - Ατομική βελτιστοποίηση

Υποθέτουμε τώρα ότι, φθάνοντας οι μετακινούμενοι στη στάση - πιάτσα, δεν παρατηρούν τον αριθμό των ατόμων που περιμένουν στην ουρά για ταξί και γενικά κατά την άφιξή τους δεν διαθέτουν καμιά πληροφορία σχετικά με το πλήθος των ήδη παρόντων ατόμων στην πιάτσα. Η απόφαση που πρέπει να λάβουν τη στιγμή της άφιξής τους είναι αν θα μετακινηθούν με ταξί ή με λεωφορείο. Το σύνολο των καθαρών στρατηγικών κάθε μετακινούμενου είναι και εδώ $S = \{T, \Lambda\}$. Τότε, ο χρόνος αναμονής ενός μετακινούμενου, που θα χρησιμοποιήσει ταξί, εξαρτάται από την επιλογή που θα κάνουν κι οι άλλοι. Ειδικότερα, όσο μικρότερος είναι ο ρυθμός άφιξης ατόμων στην πιάτσα των ταξί, τόσο μικρότερος θα είναι και ο μέσος χρόνος αναμονής ενός επιλεγμένου πελάτη, κάνοντας τη μεταφορά με ταξί περισσότερο ελκυστική. Αντίθετα, αν ένας μεγάλος αριθμός ατόμων χρησιμοποιεί την υπηρεσία των ταξί, τότε ο μέσος χρόνος αναμονής ενός επιλεγμένου πελάτη θα είναι μεγάλος, με αποτέλεσμα να είναι λιγότερο πρόθυμος να μετακινηθεί με ταξί. Έπεται λοιπόν πως όσο περισσότεροι επιλέγουν την υπηρεσία των ταξί, τόσο λιγότερο ένας μετακινούμενος επιθυμεί να χρησιμοποιήσει το ταξί ως μέσο μεταφοράς του. Υποθέτουμε ότι, όλοι οι μετακινούμενοι ακολουθούν την ίδια μεικτή στρατηγική p. Αυτό σημαίνει ότι επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν το ταξί με πιθανότητα p, ενώ με πιθανότητα $1-p$ το λεωφορείο. Τότε έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3 *Στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση του μοντέλου, η στρατηγική «Φθάνοντας στη στάση - πιάτσα τη χρονική στιγμή t, μπες στη ουρά για ταξί με πιθανότητα p_e», όπου η p_e δίνεται από τη σχέση*

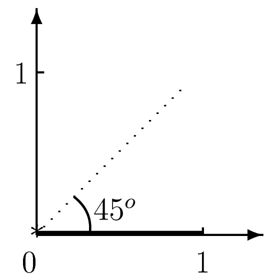
$$p_e = \begin{cases} 0 & , \; 0 < \theta < \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b} \\ \\ \frac{\theta - \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b}}{\lambda} & , \; \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b} \leq \theta < \lambda + \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b} \\ \\ 1 & , \; \theta \geq \lambda + \frac{C_T}{R_T - R\Lambda + C_\Lambda b} \end{cases}$$

είναι η μοναδική μεικτή στρατηγική ισορροπίας.

Απόδειξη

Αν ισχύει η ανισότητα $R_T - C_T\frac{1}{\theta} < R_\Lambda - C_\Lambda b$, δηλαδή αν η ωφέλεια ενός μετακινούμενου, που φθάνει πρώτος στη στάση - πιάτσα και επιλέγει να μετακινηθεί με ταξί, είναι μικρότερη από εκείνη που θα εισέπραττε αν χρησιμοποιούσε το λεωφορείο ως μέσο μεταφοράς του, τότε προφανώς θα επέλεγε το λεωφορείο, όπως και όλοι οι υπόλοιποι μετά απ' αυτόν. Έτσι, προκύπτει ότι η στρατηγική $p_e = 0$, δηλαδή η στρατηγική «Φθάνοντας ένας μετακινούμενος στη στάση - πιάτσα τη χρονική στιγμή t, επιλέγει με πιθανότητα 0 να μετακινηθεί με ταξί, άρα με πιθανότητα 1 να χρησιμοποιήσει το λεωφορείο», είναι μοναδική κυριαρχούσα καθαρή στρατηγική ισορροπίας, όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχεδιάγραμμα.

Καλύτερη απάντηση



Σχεδιάγραμμα: *Καλύτερη απάντηση έναντι στο ποσοστό αυτών που χρησιμοποιούν ταξί.*

Προφανώς, η στρατηγική αυτή είναι εξελικτικά ευσταθής στρατηγική (ΕΕΣ).

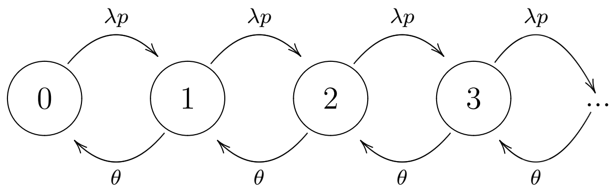
Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει

$$R_T - C_T\frac{1}{\theta} \geq R_\Lambda - C_\Lambda b \quad \text{ή} \quad R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b \geq C_T\frac{1}{\theta} > 0 \quad \text{ή}$$

$$\theta \geq \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b}. \tag{2.3}$$

Διαισθητικά τότε, ένα ποσοστό μετακινούμενών που φθάνουν στη στάση - πιάτσα έχουν κίνητρο και ώφελος να χρησιμοποιήσουν το ταξί ως μέσο μεταφοράς τους. Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα ως ένα συμμετρικό παιχνίδι μεταξύ των μετακινούμενων, εφόσον δεν μπορούν να διαχωριστούν μεταξύ τους, δεδομένου ότι έχουν όλοι το ίδιο σύνολο στρατηγικών από το οποίο καλούνται να επιλέξουν (μετακίνηση με ταξί ή λεωφορείο). Έστω ότι, οι μετακινούμενοι χρησιμοποιούν την ίδια μεικτή στρατηγική $0 < p < 1$. Αυτό σημαίνει ότι, αν αποφασίσουν να μετακινηθούν με ταξί ή λεωφορείο, τότε εισέρχονται στην πιάτσα με πιθανότητα p, ενώ με πιθανότητα $1-p$ μεταβαίνουν στη στάση. Τότε, οι αφίξεις στην πιάτσα των ταξί συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λp. Αυτή η στρατηγική θα είναι στρατηγική ισορροπίας αν οι μετακινούμενοι είναι αδιάφοροι για το ποιο μέσο μεταφοράς θα χρησιμοποιήσουν και συνεπώς κανείς μετακινούμενος δεν έχει κίνητρο να αλλάξει την αρχική του επιλογή.

Συμβολίζοντας με $Q_T(t)$ το μήκος ουράς των ατόμων στην πιάτσα τη χρονική στιγμή t, είναι φανερό ότι, η $\{Q_T(t), t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία γέννησης - θανάτου με χώρο καταστάσεων $S_T = \{0, 1, 2, ...\}$ και ρυθμούς *γέννησης* και *θανάτου*, λp και θ αντίστοιχα. Το αντίστοιχο διάγραμμα ρυθμών μετάβασης έχει τη μορφή



Η γενική συνθήκη ύπαρξης στάσιμης κατανομής γίνεται

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda p)^n}{\theta^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda p}{\theta}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda p}{\theta}} < \infty, \tag{2.4}$$

$$\text{αν} \qquad \frac{\lambda p}{\theta} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda p < \theta. \tag{2.5}$$

Η σχέση (2.5) αποτελεί αναγκαία συνθήκη ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές.

Έτσι, η οριακή κατανομή πιθανότητας του μήκους ουράς των ατόμων στην πιάτσα των ταξί είναι

$$p_n = B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_n} = \left(1 - \frac{\lambda p}{\theta}\right) \left(\frac{\lambda p}{\theta}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.6}$$

δηλαδή γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\frac{\lambda p}{\theta}$.

Ο μέσος αριθμός αυτών είναι

$$E(Q_T) = \frac{\frac{\lambda p}{\theta}}{1 - \frac{\lambda p}{\theta}} = \frac{\lambda p}{\theta - \lambda p}, \tag{2.7}$$

ενώ ο μέσος χρόνος αναμονής τους, σύμφωνα με το θεώρημα Little, ισούται με

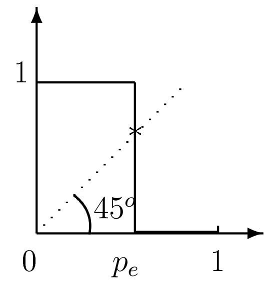
$$E(S_T) = \frac{E(Q_T)}{\lambda p} = \frac{1}{\theta - \lambda p}. \tag{2.8}$$

Έτσι, ένας μετακινούμενος χρησιμοποιεί ταξί, όταν ισχύει

$$
\begin{aligned}
K_T > K_\Lambda \quad ή \quad R_T - C_T E(S_T) > R_\Lambda - C_\Lambda E(S_\Lambda) \quad ή \\
R_T - C_T \tfrac{1}{\theta - \lambda p} > R_\Lambda - C_\Lambda b \quad ή \\
p < \frac{\theta - \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b}}{\lambda},
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

διαφορετικά πηγαίνει στη στάση και περιμένει το λεωφορείο. Έτσι, θέτοντας $p_e = \frac{\theta - \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b}}{\lambda}$ και υποθέτοντας ότι όλοι οι μετακινούμενοι ακολουθούν την ίδια πολιτική p, τότε, αν $p < p_e$, η βέλτιστη απάντηση του επιλεγμένου μετακινούμενου είναι να μετακινηθεί με ταξί, αν $p > p_e$, η βέλτιστη απάντηση είναι να μετακινηθεί με λεωφορείο, ενώ αν $p = p_e$, οποιαδήποτε πολιτική μεταξυ T και Λ είναι βέλτιστη απάντηση. Σχηματικά.

Καλύτερη απάντηση

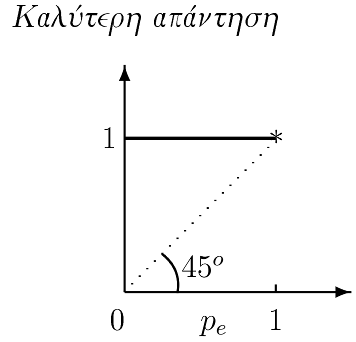


Σχεδιάγραμμα: *Καλύτερη απάντηση έναντι στο ποσοστό αυτών που χρησιμοποιούν ταξί.*

Όπως φαίνεται από το σχεδιάγραμμα, σημειώνουμε ότι, το μοντέλο μας είναι τύπου *Αντίθετα με το πλήθος*, δηλαδή η βέλτιστη απάντηση ενός μετακινούμενου είναι φθίνουσα συνάρτηση της ακολουθούμενης στρατηγικής από τους άλλους μετακινούμενους. Όταν είναι $p_e = p$, τότε ένας μετακινούμενος είναι αδιάφορος μεταξύ της μετακίνησης με ταξί ή λεωφορείο, αφού το κέρδος του είναι ίδιο. Έτσι, οποιαδήποτε στρατηγική $p \in [0, 1]$ είναι βέλτιστη απάντηση στην p_e. Το μοναδικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας, δηλαδή η μοναδική στρατηγική που είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, είναι η p_e. Στην περίπτωση αυτή, η μεικτή στρατηγική p_e είναι σημείο ισορροπίας, αλλά δεν είναι κυριαρχούσα στρατηγική. Σημειώνουμε επίσης ότι, η στρατηγική αυτή είναι εξελικτικά ευσταθής. Γενικά, όσο περισσότερα άτομα προτιμούν το ταξί για να μετακινηθούν, τόσο λιγότερο ένας επιλεγμένος μετακινούμενος επιθυμεί να χρησιμοποιήσει το ταξί ή ισοδύναμα τόσο περισσότερο προτιμά το λεωφορείο.

Στην περίπτωση τώρα που ισχύει $\frac{\theta - \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b}}{\lambda} \geq 1$ ή ισοδύναμα $\theta \geq \lambda + \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b}$, τότε ένας επιλεγμένος μετακινούμενος χρησιμοποιεί το ταξί ως μέσο μεταφοράς του με πιθανότητα $p_e = 1$ και αυτή είναι η μοναδική κυριαρχούσα καθαρή στρατηγική ισορροπίας, η οποία είναι κι αυτή εξελικτικά ευσταθής στρατηγική.

Σχηματικά.



Σχεδιάγραμμα: *Καλύτερη απάντηση έναντι στο ποσοστό αυτών που χρησιμοποιούν ταξί.*

■

Στην επόμενη παράγραφο, προχωρούμε με το πρόβλημα μεγιστοποίησης του κοινωνικού κέρδους.

2.4 Κοινωνική βελτιστοποίηση

Αναζητούμε ένα κατώφλι n_{soc}, το οποίο μεγιστοποιεί το μέσο καθαρό κοινωνικό κέρδος στη μονάδα του χρόνου. Αρχικά, έστω $K_{social}(n)$ η συνάρτηση του μέσου καθαρού κοινωνικού κέρδους στη μονάδα του χρόνου. Αυτή δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4 *Η συνάρτηση του μέσου καθαρού κοινωνικού κέρδους $K_{social}(n)$ στη μονάδα του χρόνου, δεδομένης μιας πολιτικής κατωφλίου n που ακολούθούν οι μετακινούμενοι, δίνεται από τη σχέση*

$$K_{social}(n) = \lambda(1 - p_n)R_T + \lambda p_n R_\Lambda - C_T E(Q_T) - C_\Lambda \lambda p_n b,$$

όπου

$$E(Q_T) = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1-(n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}} & , \ \rho = \frac{\lambda}{\theta} \neq 1 \\ \frac{n}{2} & , \ \rho = 1 \end{cases}$$

και

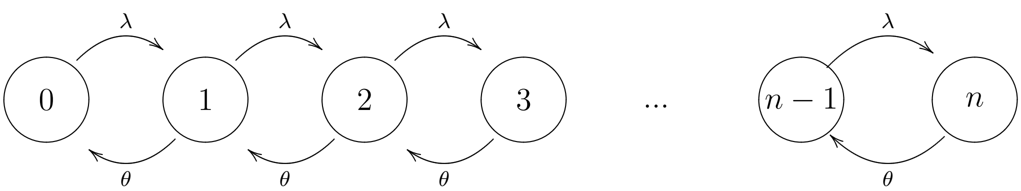
$$p_k = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}\rho^k & , \ \rho = \frac{\lambda}{\theta} \neq 1 \\ \frac{1}{n+1} & , \ \rho = 1 \end{cases}$$

με $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Απόδειξη

Έχουμε συμπεράνει ότι, όταν οι μετακινούμενοι ακολουθούν μια πολιτική κατωφλίου n στην πιάτσα των ταξί, προκύπτει μια ουρά αναμονής $M/M/1/n$, όπου n είναι ο μέγιστος αριθμός ατόμων που μπορεί να αναμένουν στην πιάτσα.

Το αντίστοιχο διάγραμμα ρυθμών μετάβασης έχει τη μορφή



Το σύστημα είναι πάντα ευσταθές, αφού ο χώρος αναμονής είναι πεπερασμένος. Η σταθερά κανονικοποίησης για τη στάσιμη κατανομή βρίσκεται υπολογίζοντας το άθροισμα

$$B^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{\theta^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \rho^k = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}, \tag{2.10}$$

όπου $\rho = \frac{\lambda}{\theta}$.

Η οριακή κατανομή του μήκους ουράς έχει τότε τη μορφή

$$p_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{\sum_{k=0}^{n} \rho^k} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \rho^k & , \ \rho = \frac{\lambda}{\theta} \neq 1 \\ \frac{1}{n+1} & , \ \rho = \frac{\lambda}{\theta} = 1 \ \ , \end{cases} \tag{2.11}$$

όπου $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Η μέση τιμή του μήκους ουράς είναι

$$E(Q_T) = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1-(n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}} & , \ \rho = \frac{\lambda}{\theta} \neq 1 \\ \frac{n}{2} & , \ \rho = 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Αν συμβολίσουμε με λ^* τον πραγματικό ρυθμό άφιξης ατόμων στην πιάτσα των ταξί, έχουμε

$$\lambda^* = \lambda \cdot \left(\begin{array}{c} \text{η πιθανότητα ένας πελάτης κατά την άφιξή του} \\ \text{να δει το πολύ } n-1 \text{ πελάτες στην πιάτσα} \end{array} \right) \tag{2.13}$$

Ορίζοντας r_k την πιθανότητα ένας μετακινούμενος που αφικνείται στην πιάτσα να αντικρίσει k άτομα, τότε, λόγω της ιδιότητας PASTA, θα ισχύει

$$r_k = p_k,$$

όπου p_k η στάσιμη πιθανότητα να υπάρχουν k άτομα στην πιάτσα. Ισοδύναμα τότε, η σχέση (2.13) γράφεται

$$\lambda^* = \lambda(1 - r_n) = \lambda(1 - p_n), \tag{2.14}$$

όπου

$$1-p_n=\begin{cases} 1-\frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}}\rho^n=\frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} & ,\ \rho=\frac{\lambda}{\theta}\neq 1 \\ 1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1} & ,\ \rho=1 \end{cases} \tag{2.15}$$

είναι το ποσοστό των μετακινούμενων που εξυπηρετούνται με ταξί. Από την άλλη, ο ρυθμός άφιξης ατόμων στη στάση των λεωφορείων ισούται με λp_n και, όπως γνωρίζουμε, ο μέσος χρόνος αναμονής τους είναι $E(S_\Lambda)=b$, άρα το μέσο πλήθος, σύμφωνα με το θεώρημα Little, ισούται με

$$E(Q_\Lambda)=\lambda p_n b. \tag{2.16}$$

Έτσι, το κοινωνικό κέρδος $K_{social}(n)$ στη μονάδα του χρόνου γράφεται

$$K_{social}(n)=\begin{pmatrix}\text{κοινωνική ωφέλεια}\\ \text{ανά μονάδα χρόνου}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{κοινωνικό κόστος}\\ \text{ανά μονάδα χρόνου}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{κοινωνική ωφέλεια από την}\\ \text{εξυπηρέτηση με ταξί}\\ \text{στη μονάδα του χρόνου}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{κοινωνική ωφέλεια από την}\\ \text{εξυπηρέτηση με λεωφορείο}\\ \text{στη μονάδα του χρόνου}\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}\text{κοινωνικό κόστος}\\ \text{αναμονής στην πιάτσα}\\ \text{ανά μονάδα χρόνου}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{κοινωνικό κόστος}\\ \text{αναμονής στη στάση}\\ \text{ανά μονάδα χρόνου}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{πραγματικός}\\ \text{ρυθμός αφίξεων}\\ \text{στην πιάτσα}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{ωφέλεια από την}\\ \text{εξυπηρέτηση}\\ \text{με ταξί}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{πραγματικός}\\ \text{ρυθμός αφίξεων}\\ \text{στη στάση}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{ωφέλεια από την}\\ \text{εξυπηρέτηση}\\ \text{με λεωφορείο}\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix} \text{κόστος} \\ \text{αναμονής ανά} \\ \text{μονάδα χρόνου} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{μέσος αριθμός} \\ \text{πελατών} \\ \text{στην πιάτσα} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{κόστος} \\ \text{αναμονής ανά} \\ \text{μονάδα χρόνου} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{μέσος αριθμός} \\ \text{πελατών} \\ \text{στη στάση} \end{pmatrix}.$$

Έπεται λοιπόν ότι, η συνάρτηση του κοινωνικού κέρδους παίρνει τη μορφή

$$K_{social}(n) = \lambda(1-p_n)R_T + \lambda p_n R_\Lambda - C_T E(Q_T) - C_\Lambda E(Q_\Lambda),$$

η οποία, με τη βοήθεια της σχέσης (2.16), γράφεται

$$K_{social}(n) = \lambda(1-p_n)R_T + \lambda p_n R_\Lambda - C_T E(Q_T) - C_\Lambda \lambda p_n b. \tag{2.17}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (2.12), (2.14) και (2.15), για $\rho = \frac{\lambda}{\theta} \neq 1$, το κοινωνικό κέρδος $K_{social}(n)$ στη μονάδα του χρόνου ισούται με

$$K_{social}(n) = \lambda \tfrac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} R_T + \lambda \tfrac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \rho^n R_\Lambda - C_T \tfrac{\rho}{1-\rho} \tfrac{1-(n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}} - C_\Lambda \lambda \tfrac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \rho^n b, \tag{2.18}$$

ενώ για $\rho = 1$, ισούται με

$$K_{social}(n) = \lambda \tfrac{n}{n+1} R_T + \lambda \tfrac{1}{n+1} R_\Lambda - C_T \tfrac{n}{2} - C_\Lambda \lambda \tfrac{1}{n+1} b \tag{2.19}$$

■

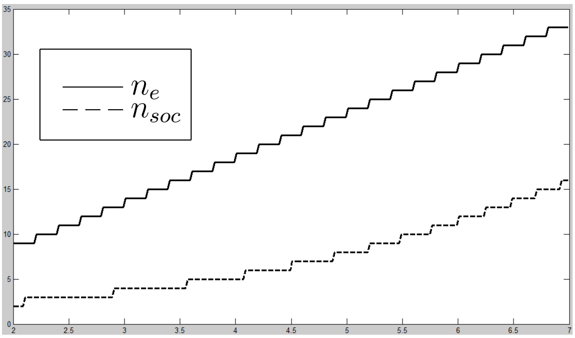
Με τη βοήθεια του λογισμικού MATLAB, βρίσκουμε σε αριθμητικά παραδείγματα τη στρατηγική κατωφλίου n_{soc}, η οποία μεγιστοποιεί το μέσο καθαρό κοινωνικό κέρδος $K_{social}(n)$ στη μονάδα του χρόνου. Η στρατηγική αυτή είναι «Μπες στην ουρά για ταξί, αν το πλήθος των ήδη παρόντων μετακινούμενων στην πιάτσα είναι μικρότερο ή ίσο του n_{soc}, διαφορετικά πήγαινε στη στάση και πάρε το λεωφορείο».

Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, θα αναφέρουμε στη συνέχεια αριθμητικά παραδείγματα του μοντέλου μας, αποτελέσματα των οποίων παρουσιάζονται μέσω σχεδιαγραμμάτων και μας βοηθούν να κατανοήσουμε τις διαφορές μεταξύ ατομικής και κοινωνικής βελτιστοποίησης.

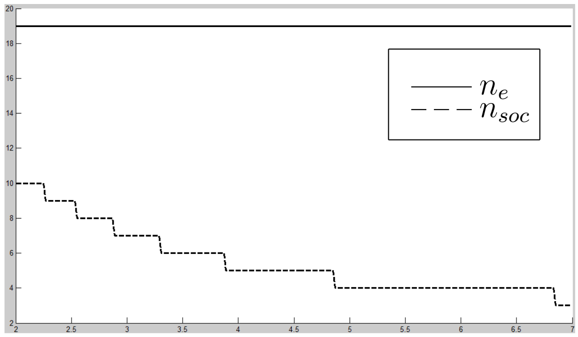
2.5 Αριθμητικά παραδείγματα - Συμπεράσματα

Με τη βοήθεια του λογισμικού MATLAB, είμαστε πλέον σε θέση να παρουσιάσουμε μερικά αριθμητικά παραδείγματα για διάφορες τιμές των $R_T, R_\Lambda, C_T, C_\Lambda, \lambda$, θ και b.

Αρχικά, έστω $R_T = R_\Lambda = 20$, $C_T = C_\Lambda = 1$ και $b = 5$. Όπως φαίνεται στα επόμενα σχεδιαγράμματα 1 και 2, παρατηρούμε ότι, μεταβάλλοντας **μόνο**, είτε τον ρυθμό άφιξης λ των μετακινούμενων στη στάση - πιάτσα ή τον ρυθμό διεύλευσης θ των ταξί από την πιάτσα, η τιμή κατωφλίου n_{soc} της βέλτιστης πολιτικής για τη μεγιστοποίηση του κοινωνικού κέρδους είναι μικρότερη της τιμής κατωφλίου n_e, όπου n_e είναι το κατώφλι εκείνο στο οποίο ένας αφικνούμενος μετακινούμενος μπαίνει στην ουρά για ταξί μόνο αν το πλήθος των παρόντων ατόμων δεν υπερβαίνει το κατώφλι αυτό.

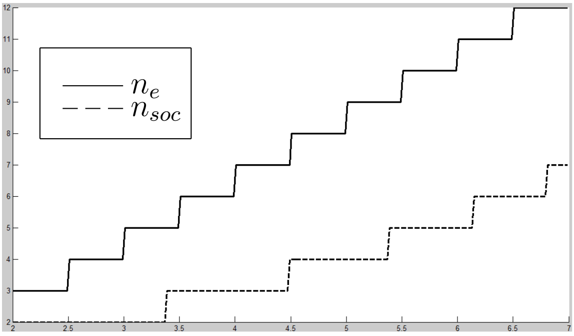


Σχήμα 2.1: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του θ.

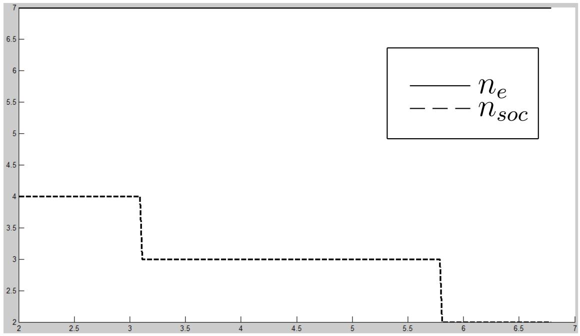


Σχήμα 2.2: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του λ.

Μειώνοντας τώρα μόνο την αμοιβή R_T ενός μετακινούμενου που χρησιμοποιεί ταξί στην τιμή 17, έπονται στην επόμενη σελίδα τα σχεδιαγράμματα 2.3 και 2.4.

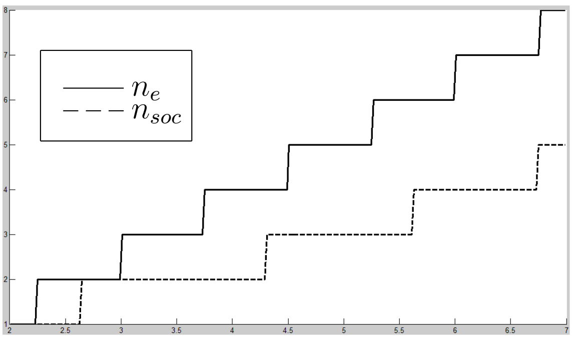


Σχήμα 2.3: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του θ.

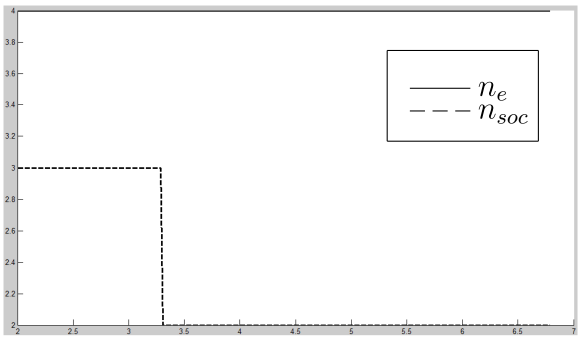


Σχήμα 2.4: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του λ.

Παρατηρώντας τα σχεδιαγράματα 2.1 έως 2.4, διαπιστώνουμε πλέον ότι, η διαφορά μεταξύ των n_{soc} και n_e έχει μειωθεί αισθητά, δηλαδή οι μετακινούμενοι τείνουν να ακολουθήσουν την κοινωνικά βέλτιστη πολιτική κατωφλίου n_{soc} αντί της ατομικά συμφέρουσας πολιτικής n_e. Ακολούθως, διατηρώντας την αμοιβή R_T στην τιμή 17 και αυξάνοντας το κόστος C_T στη μονάδα του χρόνου ενός ατόμου που περιμένει στην πιάτσα, φαίνεται, στα σχεδιαγράμματα 2.5 και 2.6 ότι, αν και η μετακίνηση με ταξί έχει γίνει ακόμη λιγότερο ελκυστική, εντούτοις η ατομική πολιτική κατωφλίου n_e συνεχίζει να μας οδηγεί σε μεγαλύτερες ουρές στην πιάτσα των ταξί απ΄ ό,τι είναι κοινωνικά επιθυμητό.

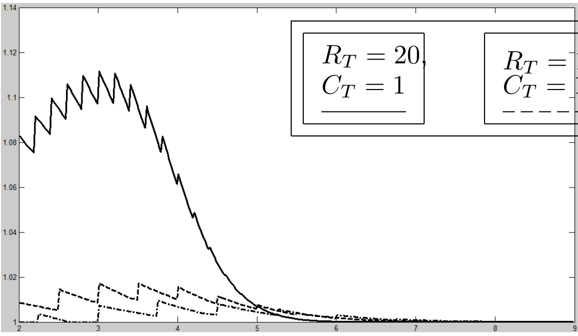


Σχήμα 2.5: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του θ.

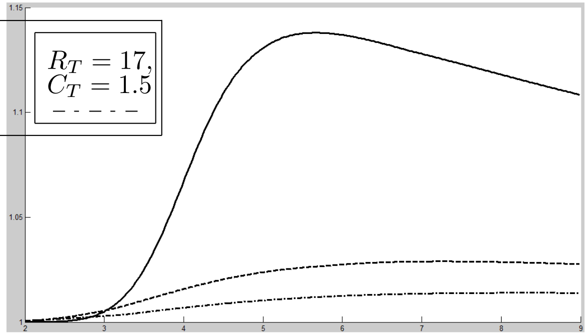


Σχήμα 2.6: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του λ.

Εν συνεχεία στα σχεδιαγράμματα 2.7 και 2.8, φαίνεται πως μεταβάλλεται ο λόγος $PoA = \frac{K_{social}(n_{soc})}{K_{social}(n_e)}$ $(Price\ of\ Anarchy \equiv PoA)$ διατηρώντας σταθέρες τις παραμέτρους $R_\Lambda = 20$, $C_\Lambda = 1$ και $b = 5$ και **επιβαρύνοντας** συγκριτικά τις αντίστοιχες τιμές των R_T και C_T, άλλοτε για διάφορες τιμές του θ και άλλοτε για διάφορες τιμές του λ.

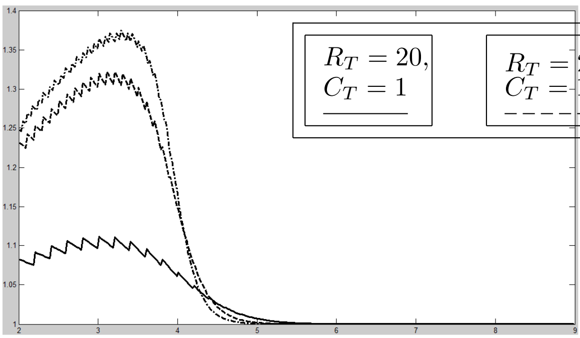


Σχήμα 2.7: Ο λόγος PoA συναρτήσει του θ, για $R_\Lambda = 20$, $C_\Lambda = 1$, $\lambda = 4$ και $b = 5$.

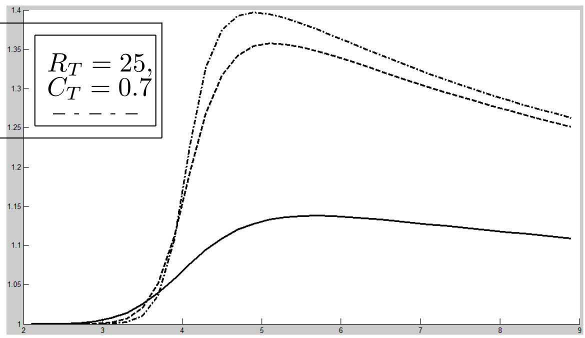


Σχήμα 2.8: Ο λόγος PoA συναρτήσει του λ, για $R_\Lambda = 20$, $C_\Lambda = 1$, $\theta = 4$ και $b = 5$.

Στα ακόλουθα σχεδιαγράμματα 2.9 και 2.10, φαίνεται πως μεταβάλλεται ο λόγος $PoA = \frac{K_{social}(n_{soc})}{K_{social}(n_e)}$ διατηρώντας σταθέρες τις παραμέτρους $R_\Lambda = 20$, $C_\Lambda = 1$ και $b = 5$ και **βελτιώνοντας** συγκριτικά τις αντίστοιχες τιμές των R_T και C_T, άλλοτε για διάφορες τιμές του θ και άλλοτε για διάφορες τιμές του λ.



Σχήμα 2.9: Ο λόγος PoA συναρτήσει του θ, για $R_\Lambda = 20$, $C_\Lambda = 1$, $\lambda = 4$ και $b = 5$.

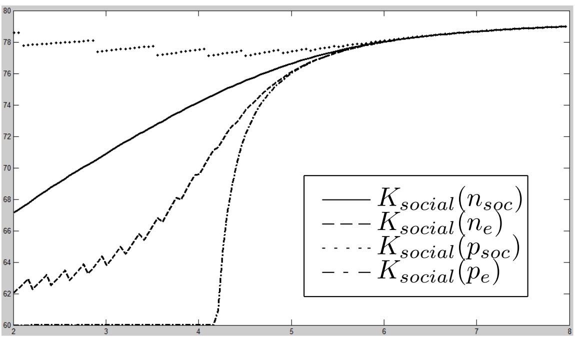


Σχήμα 2.10: Ο λόγος PoA συναρτήσει του λ, για $R_\Lambda = 20$, $C_\Lambda = 1$, $\theta = 4$ και $b = 5$.

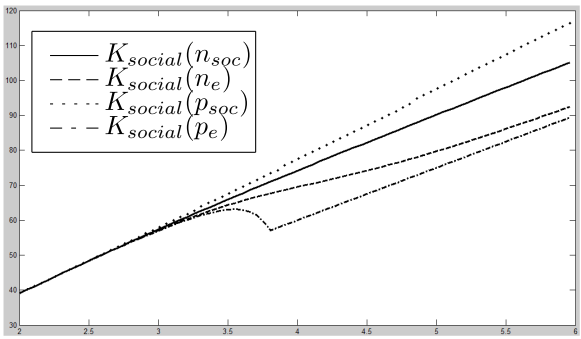
Παρατηρούμε λοιπόν από τα σχεδιαγράμματα 2.7 και 2.9 ότι, όσο αυξάνεται ο ρυθμός διέλευσης

θ των ταξί σε σχέση με τον ρυθμό άφιξης λ ατόμων στη στάση - πιάτσα, το κοινωνικό κέρδος που αντιστοιχεί στην τιμή κατωφλίου n_e τείνει να γίνει ίσο με το κοινωνικό κέρδος που αντιστοιχεί στην τιμή κατωφλίου n_{soc}. Μια βασική αιτία διαφοροποίησης μεταξύ ατομικής και κοινωνικής βελτιστοποίησης αποτελεί το γεγονός ότι, καθέ νεοαφιχθείς μετακινούμενος στην πιάτσα των ταξί, αν και δεν δημιουργεί αρνητικές επιδράσεις στα άτομα που βρίσκονται μπροστά απ΄ αυτόν, λόγω πειθαρχίας ουράς FCFS στην πιάτσα, εντούτοις δημιουργεί εν αγνοία του αρνητικές επιδράσεις σε πιθανές μελλοντικές αφίξεις μετακινούμενων.

Στη συνέχεια σε κοινό σχεδιάγραμμα, για $R_T = R_\Lambda = 20, C_T = C_\Lambda = 1$ και $b = 5$ παρουσιάζουμε το μέσο καθαρό κοινωνικό κέρδος K_{social} συναρτήσει των n_e, n_{soc}, p_e και p_{soc}, άλλοτε για διάφορες τιμές του θ και $\lambda = 4$ και άλλοτε για διάφορες τιμές του λ και $\theta = 4$, όπου οι τιμές των $K_{social}(n_e)$ και $K_{social}(p_e)$ αντιστοιχούν στις πολιτικές n_e και p_e της παρατηρήσιμης και μη παρατηρήσιμης κατάστασης του μοντέλου μας, ενώ οι τιμές των $K_{social}(n_{soc})$ και $K_{social}(p_{soc})$ αντιστοιχούν στις πολιτικές n_{soc} και p_{soc} για τις οποίες μεγιστοποιείται το μέσο καθαρό κοινωνικό κέρδος.



Σχήμα 2.11: Το κοινωνικό κέρδος K_{social} συναρτήσει των n_e, n_{soc}, p_e και p_{soc} για διάφορες τιμές του θ.



Σχήμα 2.12: Το κοινωνικό κέρδος K_{social} συναρτήσει των n_e, n_{soc}, p_e και p_{soc} για διάφορες τιμές του λ.

Παρατηρούμε λοιπόν στο συγκεκριμένο παράδειγμα, όπως φαίνεται από το σχήμα 2.11, ότι, όσο ο ρυθμός διέλευσης θ των ταξί αυξάνεται συγκριτικά της σταθερής τιμής του ρυθμού άφιξης $\lambda = 4$, τόσο οι τιμές της συνάρτησης του κοινωνικού κέρδους K_{social} στη μονάδα του χρόνου συναρτήσει των n_e, n_{soc}, p_e και p_{soc} συγκλίνουν και ειδικότερα για $\theta \geq 6$, οι τιμές πλέον είναι ίσες. Από την άλλη, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.12, ισχύει κάτι αντίστροφο, καθόσον εδώ η τιμή του λ αυξάνεται και το θ παραμένει σταθερό στην τιμή 4, με αποτέλεσμα οι τιμές του κοινωνικού κέρδους K_{social} στη μονάδα του χρόνου συναρτήσει των n_e, n_{soc}, p_e και p_{soc} να αρχίζουν να αποκλίνουν για $\lambda \geq 3$. Συνεχίζουμε με μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία.

Ονομάζουμε *πληροφορημένους* τους μετακινούμενους, οι οποίοι, κατά τη στιγμή της άφιξής τους στη στάση - πιάτσα, παρατηρούν πρώτα την ουρά των ατόμων που έχει σχηματιστεί στην πιάτσα και μετά αποφασίζουν ποιο μέσο μεταφοράς θα χρησιμοποιήσουν, ενώ, αυτούς που δεν παρατηρούν, *απληροφόρητους*. Επίσης, καλούμε *ιδιοτελείς* τους μετακινούμενους, οι οποίοι δημιουργούν εν αγνοία τους αρνητικές επιδράσεις σε πιθανές μελλοντικές αφίξεις, ενώ αυτούς που δεν δημιουργούν, *αλτρουϊστές*. Έτσι, θα λέγαμε πως η συνάρτηση του κοινωνικού κέρδους $K_{social}(n_e)$ στη μονάδα του χρόνου για διάφορες τιμές του θ εκφράζει το γεγονός ότι οι μετακινούμενοι είναι πληροφορημένοι και ιδιοτελείς, καθόσον πληροφορούνται μεν το μήκος ουράς στην πιάτσα των ταξί και ύστερα αποφασίζουν με ποιο μέσο μεταφοράς θα μετακινηθούν, αγνούν δε ότι δημιουργούν αρνητικές επιδράσεις σε πιθανές μελλοντικές αφίξεις. Συνεχίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο, η συνάρτηση του κοινωνικού κέρδους $K_{social}(n_{soc})$ αντιστοιχεί σε μετακινούμενους που είναι πληροφορημένοι και αλτρουϊστές, η συνάρτηση $K_{social}(p_e)$ σε απληροφόρητους και ιδιοτελείς και η συνάρτηση $K_{social}(p_{soc})$ σε απληροφόρητους και αλτρουϊστές. Παρατηρώντας τα σχεδιαγράμματα 2.11 και 2.12, σημειώνουμε ότι οι τιμές της συνάρτησης του κοινωνικού κέρδους $K_{social}(p_{soc})$ των μετακινούμενων που είναι απληροφόρητοι και αλτρουϊστές, είναι μεγαλύτερες εκείνων της συνάρτησης $K_{social}(n_{soc})$ των πληροφορημένων και αλτρουϊστών. Μετά ακολουθούν οι τιμές της $K_{social}(n_e)$ των μετακινούμενων που είναι πληροφορημένοι και ιδιοτελείς και τελευταία οι τιμές της $K_{social}(p_e)$ των απληροφόρητων και ιδιοτελών.

Κεφάλαιο 3

Μοντέλο Ταξί - Λεωφορείο Μεμονωμένες αφίξεις και επιβιβάσεις το πολύ δύο ατόμων

Εισαγωγή

Θεωρούμε τώρα ότι, κάθε διερχόμενο *ελεύθερο* ταξί, χωρητικότητας δύο το πολύ ατόμων, χρησιμοποιείται από έναν ή δύο μετακινούμενους με πιθανότητα r_1 ή τη συμπληρωματική $r_2 = 1 - r_1$ αντίστοιχα, ενώ οι υπόλοιπες υποθέσεις του μοντέλου μας παραμένουν ίδιες, όπως περιγράφονται στην αρχή του δεύτερου κεφαλαίου. Λόγω σπανιότητας ύπαρξης κοινών προορισμών μεταξύ δύο ή περισσότερων διαδοχικών μετακινούμενων που περιμένουν στην πιάτσα των ταξί, είναι γεγονός ότι, σε κάθε διερχόμενο *ελεύθερο* ταξί, επιβιβάζεται κατά κανόνα ένα άτομο. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις στις οποίες τυγχάνει δύο ή περισσότεροι διαδοχικοί μετακινούμενοι που βρίσκονται στην ουρά να έχουν κοινό προορισμό και τότε επιτρέπεται να επιβιβασθούν έως δύο το πολύ άτομα σε κάθε ταξί. Αυτό εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως παραδείγματος χάριν, η τοποθεσία της στάσης - πιάτσας. Για παράδειγμα, αν μια στάση - πιάτσα βρίσκεται στο κέντρο μιας πόλης, τότε οι προόρισμοι μεταξύ των μετακινούμενων είναι λογικό να ποικίλλουν σε μεγάλο βαθμό μεταξύ τους και είναι φανερό ότι η πιθανότητα ύπαρξης κοινών προορισμών μεταξύ δύο ή περισσότερων διαδοχικών μετακινούμενων είναι μικρή. Αντιθέτως, αν μια στάση - πιάτσα βρίσκεται πλησίον ενός αεροδρομίου είναι προφανές ότι, η πιθανότητα να επιβιβάζονται δύο άτομα στα διερχόμενα ταξί θα είναι μεγαλύτερη. Στην επόμενη παράγραφο, μελετάμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του μοντέλου μας.

3.1 Παρατηρήσιμη περίπτωση - Ατομική βελτιστοποίηση

Και στο κεφάλαιο αυτό, κάθε μετακινούμενος, κατά την άφιξή του στη στάση - πιάτσα, παρατηρεί πρώτα τον ακριβή αριθμό των παρόντων ατόμων που περιμένουν για ταξί και μετά επιλέγει ποιο μέσο μεταφοράς θα χρησιμοποιήσει. Και εδώ, το σύνολο των δυνατών αποφάσεων κάθε μετακινούμενου που βρίσκει τη στάση - πιάτσα στην κατάσταση n είναι $S_n = \{T, \Lambda\}$, όπου, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το γράμμα T συμβολίζει την απόφαση της μετακίνησης με ταξί και το γράμμα Λ την απόφαση της μετακίνησης με λεωφορείο, για τη δεδομένη κατάσταση. Ακολούθως, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου, η οποία όμως δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή, αλλά μόνο αριθμητικά. Πιο συγκεκριμένα, στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύουμε ότι, υπάρχει ένα επίπεδο n_e τέτοιο ώστε ένας μετακινούμενος που φθάνει στη στάση - πιάτσα μπαίνει στην ουρά αναμονής για ταξί, μόνο αν το πλήθος των παρόντων ατόμων δεν υπερβαίνει το επίπεδο αυτό.

Θεώρημα 5 *Στην παρατηρήσιμη περίπτωση του μοντέλου, υπάρχει μια στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου n_e, η οποία βρίσκεται επιλύοντας την ακόλουθη ανίσωση ως προς n*

$$R_T - C_T S_n > R_\Lambda - C_\Lambda b, \tag{3.1}$$

όπου

$$S_n = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} \frac{j}{\theta}\binom{j}{n-j} r_1^{2j-n} r_2^{n-j} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{j}{\theta}\binom{j-1}{n-j} r_1^{2j-n-1} r_2^{n-j+1} & , \text{ για } n \text{ άρτιο } (n=2k) \\ \\ \sum_{j=k+1}^{n} \frac{j}{\theta}\binom{j}{n-j} r_1^{2j-n} r_2^{n-j} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{j}{\theta}\binom{j-1}{n-j} r_1^{2j-n-1} r_2^{n+1-j} & , \text{ για } n \text{ περιττό } (n=2k+1) \end{cases}$$

είναι ο χρόνος αναμονής ενός μετακινούμενου μέχρι να επιβιβαστεί σε ταξί, όταν βλέπει $n-1$ άτομα μπροστά του. Και εδώ, η στρατηγική «παρατήρησε τον αριθμό $Q_T(t)$ των μετακινούμενων στην πιάτσα των ταξί, μπες στην ουρά αν $Q_T(t) \leq n_e$, διαφορετικά πάρε λεωφορείο» είναι η μοναδική κυριαρχούσα καθαρή στρατηγική ισορροπίας.

Απόδειξη

Έστω ότι, φθάνοντας ένας μετακινούμενος στην πιάτσα των ταξί, αντικρίζει $n-1$ άτομα να περιμένουν στην ουρά. Ο χρόνος αναμονής του μέχρι να επιβιβαστεί σε ταξί ισούται με

$$S_n = \sum_j \begin{pmatrix} \text{Πλήθος } j \text{ επιβιβάσεων} \\ \text{μέχρι να επιβιβαστεί} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Μέσος χρόνος} \\ \text{διέλευσης των ταξί} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Πιθανότητα του} \\ \text{ενδεχομένου } \Gamma_{j,n} \end{pmatrix},$$

όπου με $\Gamma_{j,n}$ συμβολίζουμε το ενδεχόμενο (Χρειάζονται j ταξί μέχρι να επιβιβαστεί και ο n - οστός μετακινούμενος).

Έτσι,

$$S_n = \sum_j j \cdot \frac{1}{\theta} \cdot P(\text{χρειάζονται } j \text{ ταξί μέχρι να επιβιβαστεί και ο } n \text{ - οστός μετακινούμενος}). \quad (3.2)$$

Τώρα, επειδή υπάρχει πιθανότητα r_2 στο j - οστό ταξί να επιβιβαστεί, μαζί με τον n - οστό, και ο $(n+1)$ - οστός μετακινούμενος, το ενδεχόμενο $\Gamma_{j,n}$ διαμερίζεται σε δύο ενδεχόμενα, A και B, όπου $A \equiv \{$Χρειάζονται j Ταξί και στην j - οστή επιβίβαση, επιβιβάζεται έως και ο n - οστός$\}$ και $B \equiv \{$Χρειάζονται j Ταξί και στην j - οστή επιβίβαση, επιβιβάζεται έως και ο $(n+1)$ - οστός$\}$.

Όποτε, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$S_n = \sum_j \frac{j}{\theta} P(A \cup B) = \sum_j \frac{j}{\theta}\left[P(A) + P(B)\right] = \underbrace{\sum_j \frac{j}{\theta} P(A)}_{S_1} + \underbrace{\sum_j \frac{j}{\theta} P(B)}_{S_2}, \quad (3.3)$$

αφού τα ενδεχόμενα A,B είναι προφανώς ξένα μεταξύ τους.

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος, θα διακρίνουμε στη συνέχεια δύο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν ο n - οστός αφιχθείς μετακινούμενος συναντά άρτιο πλήθος ατόμων που περιμένουν για ταξί και η δεύτερη όταν συναντά περιττό αριθμό ατόμων.

Έστω, αρχικά, ότι ο αριθμός των ατόμων που συναντά ο n - οστός αφιχθείς μετακινούμενος στην πιάτσα των ταξί, συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου, είναι άρτιος, δηλαδή $n = 2k$. Υπολογίζω πρώτα την πιθανότητα $P(A)$. Έστω $x_i = 1$ ή 2 - ο αριθμός ατόμων που επιβιβάζονται στο i - ταξί, $i = 1, 2, \cdots, j$. Τότε, θα πρέπει να ισχύει η ισότητα

$$x_1 + x_2 + \cdots x_j = n.$$

Θέτω h το πλήθος των ταξί στα οποία επιβιβάζεται ένα άτομο και άρα στα υπόλοιπα $j-h$ θα επιβιβάζονται δύο άτομα. Τότε, από την προηγούμενη σχέση, παίρνουμε

$$h \cdot 1 + (j-h) \cdot 2 = 2k, \quad \text{οπότε, μετά από λίγες πράξεις,} \quad h = 2j - 2k \quad \text{και} \quad j - h = 2k - j.$$

Η επιβίβαση n μετακινούμενων στα ταξί είναι μια ακολουθία j επιβιβάσεων του ενός ή δύο το πολύ ατόμων σε κάθε ταξί. Αν συμβολίσουμε με A_1 και A_2 την επιβίβαση ενός ή δύο ατόμων αντίστοιχα, τότε μια συγκεκριμένη πραγματοποίηση j επιβιβάσεων στα ταξί είναι παραδείγματος χάριν, $\underbrace{A_1A_1A_2A_2A_2A_2...A_2A_1}_{j \text{ - το πλήθος}}$ και η αντίστοιχη πιθανότητα να παρατηρήσουμε μια τέτοια ακολουθία είναι $r_1r_1r_2r_2r_2r_2...r_2r_1$. Αυτό ισχύει, διότι οι j επιβιβάσεις είναι ανεξάρτητες και επομένως τα ενδεχόμενα A_1 και A_2, τα οποία εμφανίζονται σε τυχούσα ακολουθία, όπως η παραπάνω, είναι ανεξάρτητα. Τώρα, αν ο αριθμός των A_1 σε μια ακολουθία j επιβιβάσεων είναι h (άρα $j-h$ είναι τα A_2), τότε η πιθανότητα μιας τέτοιας ακολουθίας είναι $r_1^h r_2^{j-h}$. Το πλήθος αυτών των ακολουθιών, δηλαδή των j επιβιβάσεων που απαρτίζονται από h επιβιβάσεις ενός ατόμου (A_1) και $j-h$ δύο ατόμων (A_2), ισούται με το πλήθος των συνδυασμών j επιβιβάσεων ανά $j-h$, δηλαδή $\binom{j}{j-h}$.

Άρα,

$$P(A) = \binom{j}{j-h} r_1^h r_2^{j-h} = \binom{j}{2k-j} r_1^{2j-2k} r_2^{2k-j} = \binom{j}{n-j} r_1^{2j-n} r_2^{n-j}$$

και το πρώτο άθροισμα της σχέσης (3.3), γράφεται

$$S_1 = \sum_{j=k}^{n} \frac{j}{\theta} \binom{j}{n-j} r_1^{2j-n} r_2^{n-j}, \tag{3.4}$$

καθόσον ο ελάχιστος αριθμός ταξί που απαιτείται για να επιβιβασθούν $n = 2k$ μετακινούμενοι είναι k, αν επιβιβάζονται κάθε φορά δύο άτομα, ενώ ο μέγιστος αριθμός τους είναι $2k$, όταν επιβιβάζεται σε κάθε ταξί ένα άτομο.

Με παρόμοιο τρόπο, υπολογίζω την πιθανότητα $P(B)$ ως ακολούθως. Έστω y_i =1 ή 2 είναι ο αριθμός ατόμων που επιβιβάζονται στο i - ταξί, για $i = 1, 2, \cdots, j-1$, ενώ για $i = j$, ισχύει

$y_j = 2$, αφού τώρα στο j - οστό ταξί επιβιβάζεται πλέον ο n - οστός μαζί με τον $(n+1)$ - οστό. Θα πρέπει και εδώ να ισχύει η ισότητα

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_j = n+1 \quad \text{ή} \quad y_1 + y_2 + \cdots + y_{j-1} = n-1.$$

Στην περίπτωση αυτή, πρόκυπτει

$$h \cdot 1 + (j-1-h) \cdot 2 = 2k-1, \quad \text{οπότε παίρνουμε} \quad h = 2j-2k-1 \quad \text{και} \quad j-1-h = 2k-j.$$

Με ίδιο σκεπτικό, συμπεραίνουμε ότι

$$P(B) = \binom{j-1}{j-1-h} r_1^h r_2^{j-1-h} r_2,$$

όπου το τελικό r_2 στη σχέση αυτή υπάρχει, διότι στο j - οστό ταξί, όπως αναφέραμε προηγουμένως, μαζί τον n - οστό επιβιβάζεται και ο $(n+1)$ - οστός μετακινούμενος. Αντικαθιστώντας τα h και $j-1-h$, η πιθανότητα $P(B)$ παίρνει τελικά τη μορφή

$$P(B) = \binom{j-1}{2k-j} r_1^{2j-2k-1} r_2^{2k-j} r_2 = \binom{j-1}{n-j} r_1^{2j-n-1} r_2^{n-j} r_2.$$

Έτσι, το δεύτερο άθροισμα της σχέσης (3.3) γράφεται

$$S_2 = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{j}{\theta} \binom{j-1}{n-j} r_1^{2j-n-1} r_2^{n-j+1}. \tag{3.5}$$

Συνολικά λοιπόν, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.4) και (3.5) στη (3.3), παίρνουμε ότι ο μέσος χρόνος αναμονής ενός μετακινούμενου μέχρι να επιβιβαστεί σε ταξί, όταν βλέπει $n-1$ άτομα μπροστά του και n είναι άρτιος αριθμός $(n = 2k)$, ισούται με

$$S_n = \sum_{j=k}^{n} \frac{j}{\theta} \binom{j}{n-j} r_1^{2j-n} r_2^{n-j} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{j}{\theta} \binom{j-1}{n-j} r_1^{2j-n-1} r_2^{n-j+1}. \tag{3.6}$$

Στην περίπτωση τώρα, που ο αριθμός των ατόμων που συναντά ένας μετακινούμενος στην πιάτσα των ταξί, συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου, είναι περιττός, δηλαδή $n = 2k+1$, τότε, ακολουθώντας εν συντομία τα ανωτέρω βήματα, υπολογίζουμε με τον ίδιο τρόπο τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ των ενδεχομένων A και B. Έτσι αρχικά έχουμε

$$h \cdot 1 + (j-h) \cdot 2 = n \quad \text{ή} \quad h \cdot 1 + (j-h) \cdot 2 = 2k+1,$$

άρα προκύπτει $\quad h = 2j - 2k - 1 \quad$ και $\quad j - h = 2k + 1 - j$.

Οπότε,

$$P(A) = \binom{j}{j-h} r_1^h r_2^{j-h} = \binom{j}{2k+1-j} r_1^{2j-2k-1} r_2^{2k+1-j} = \binom{j}{n-j} r_1^{2j-n} r_2^{n-j}.$$

και τότε το πρώτο άθροισμα της σχέσης (3.3) παίρνει τη μορφή

$$S_1 = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{j}{\theta} \binom{j}{n-j} r_1^{2j-n} r_2^{n-j}. \tag{3.7}$$

Όταν τώρα

$$h \cdot 1 + (j-1-h) \cdot 2 = n-1 \quad \text{ή} \quad h \cdot 1 + (j-1-h) \cdot 2 = 2k,$$

τότε παίρνουμε $\quad h = 2j - 2k - 2 \quad$ και $\quad j - 1 - h = 2k - j + 1$.

Συνεπώς,

$$P(B) = \binom{j-1}{j-1-h} r_1^h r_2^{j-1-h} = \binom{j-1}{2k+1-j} r_1^{2j-2k-2} r_2^{2k+1-j} r_2 = \binom{j-1}{n-j} r_1^{2j-n-1} r_2^{n-j} r_2$$

και έτσι το δεύτερο άθροισμα της σχέσης (3.3), γράφεται ως

$$S_2 = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{j}{\theta} \binom{j-1}{n-j} r_1^{2j-n-1} r_2^{n+1-j}. \tag{3.8}$$

Οπότε στην περίπτωση αυτή, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.7) και (3.8) στην (3.3), παίρνουμε ότι ο χρόνος αναμονής ενός μετακινούμενου μέχρι να επιβιβαστεί σε ταξί, όταν βλέπει $n-1$ άτομα μπροστά του και n είναι περιττός αριθμός ($n = 2k + 1$), ισούται με

$$S_n = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{j}{\theta} \binom{j}{n-j} r_1^{2j-n} r_2^{n-j} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{j}{\theta} \binom{j-1}{n-j} r_1^{2j-n-1} r_2^{n+1-j}. \tag{3.9}$$

Τώρα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο, ένας μετακινούμενος που φθάνει στην πιάτσα και βλέπει $n-1$ άτομα να περιμένουν για ταξί, εισέρχεται στην ουρά, όταν ισχύει

$$K_T \geq K_\Lambda \text{ ή } R_T - C_T E(S_T) \geq R_\Lambda - C_\Lambda E(S_\Lambda) \text{ ή } R_T - C_T S_n \geq R_\Lambda - C_\Lambda b, \tag{3.10}$$

όπου $K_T = R_T - C_T E(S_T)$ και $K_\Lambda = R_\Lambda - C_\Lambda E(S_\Lambda)$ είναι το μέσο καθαρό κέρδος που εισπράττει ένας μετακινούμενος, ο οποίος χρησιμοποιεί το ταξί ή το λεωφορείο αντίστοιχα. Στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου, με τη βοήθεια του λογισμικού MATLAB, υπολογίζοντας την τιμή του S_n για διαδοχικές τιμές του n σε αριθμητικά παραδείγματα και αντικαθιστώντας την στην ανίσωση (3.10), βρίσκουμε το κατώφλι n_e για συγκεκριμένες τιμές των $R_T, R_\Lambda, C_T, C_\Lambda, \theta, \lambda, r_2$ και b.

■

Συνεχίζουμε στην επόμενη παράγραφο με τη μελέτη της μη παρατηρήσιμης περίπτωσης του μοντέλου.

3.2 Μη Παρατηρήσιμη περίπτωση - Ατομική βελτιστοποίηση

Στην παράγραφο αυτή, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι μετακινούμενοι που φθάνουν στη στάση - πιάτσα, δεν παρατηρούν τον αριθμό των παρόντων ατόμων που περιμένουν στην ουρά για ταξί. Η απόφαση, που πρέπει να λάβουν τη στιγμή της άφιξής τους, είναι και εδώ αν θα μετακινηθούν με ταξί ή με λεωφορείο. Το σύνολο των καθαρών στρατηγικών κάθε μετακινούμενου είναι $S = \{T, \Lambda\}$. Υποθέτουμε και εδώ ότι, όλοι οι μετακινούμενοι ακολουθούν την ίδια μεικτή στρατηγική p. Αυτό σημαίνει ότι, επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν το ταξί με πιθανότητα p, ενώ με πιθανότητα $1 - p$ το λεωφορείο. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

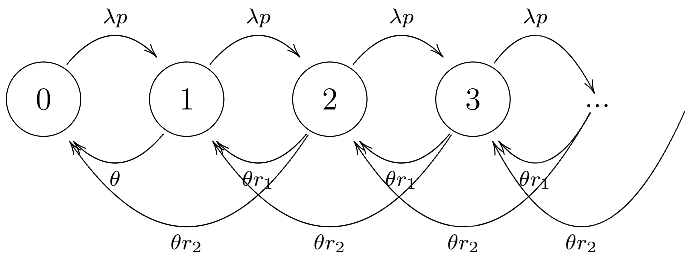
Θεώρημα 6 *Στο μη παρατηρούμενο μοντέλο, η στρατηγική «Φθάνοντας στη στάση - πιάτσα τη χρονική στιγμή t, μπες στην ουρά με πιθανότητα p_e» είναι η μοναδική μεικτή στρατηγική ισορροπίας, όπου η p_e δίνεται από τη σχέση*

$$p_e = \begin{cases} 0 & , \ \gamma\iota\alpha \ 0 < \theta < \frac{a}{2} \\ \frac{[\theta(1+r_2)-a]+\sqrt{\theta^2(1+r_2)^2-2a\theta r_2}}{2\lambda} & , \ \gamma\iota\alpha \ \frac{a}{2} \leq \theta < \frac{(2\lambda+a)^2}{2[2\lambda(1+r_2)+a]}, \\ 1 & , \ \gamma\iota\alpha \ \theta \geq \frac{(2\lambda+a)^2}{2[2\lambda(1+r_2)+a]} \end{cases}$$

όπου $a = \frac{2C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b}$.

Απόδειξη

Κάτω από μια στρατηγική p, το σύστημα εδώ συμπεριφέρεται ως μια τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς ($M/M^C/1$), με διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό λp και διαδικασία εξυπηρετήσεων όπως περιγράφηκε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου. Άρα, το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης έχει τη ακόλουθη μορφή



Η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος είναι

$$\lambda p < \theta(r_1 \cdot 1 + r_2 \cdot 2),$$

όπου $r_1 \cdot 1 + r_2 \cdot 2$ είναι ο μέσος αριθμός ατόμων που επιβιβάζονται στα ταξί.

Η προηγούμενη σχέση γράφεται ως

$$\lambda p < \theta(1 + r_2), \tag{3.11}$$

που σημαίνει ότι ο μέσος αριθμός αφίξεων στη μονάδα του χρόνου, θα πρέπει να είναι μικρότερος της μέγιστης δυνατότητας επιβίβασης ατόμων στα ταξί ανά χρονική μονάδα.

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned} \lambda p p_0 &= \theta p_1 + \theta r_2 p_2 && , \text{ για } n = 0, \\ (\lambda p + \theta) p_n &= \lambda p p_{n-1} + \theta r_1 p_{n+1} + \theta r_2 p_{n+2} && , \text{ για } n \geq 1. \end{aligned}$$

Με χρήση των πιθανογεννητριών, έπονται τα ακόλουθα.

Πολλαπλασιάζοντας την n - όστη εξίσωση με z^n και αθροίζοντας, παίρνουμε

$$\lambda p p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda p + \theta) p_n z^n = \theta p_1 + \theta r_2 p_2 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \theta r_1 p_{n+1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \theta r_2 p_{n+2} z^n$$

ή

$$\lambda p P(z) + \theta \left(P(z) - p_0 \right) = \theta r_2 p_1 + \lambda p z P(z) + \frac{\theta r_1}{z} \left(P(z) - p_0 \right) + \frac{\theta r_2}{z^2} \left(P(z) - p_1 z - p_0 \right)$$

ή

$$\left[(\lambda p + \theta) z^2 - \lambda p z^3 - \theta r_1 z - \theta r_2 \right] P(z) = (\theta p_0 + \theta r_2 p_1) z^2 - (\theta r_1 p_0 + \theta r_2 p_1) z - \theta r_2 p_0$$

ή

$$P(z) = \frac{(\theta p_0 + \theta r_2 p_1) z^2 - (\theta r_1 p_0 + \theta r_2 p_1) z - \theta r_2 p_0}{(\lambda p + \theta) z^2 - \lambda p z^3 - \theta r_1 z - \theta r_2}$$

ή

$$P(z) = \frac{(z-1) \left[(\theta p_0 + \theta r_2 p_1) z + \theta r_2 p_0 \right]}{(z-1) \left(-\lambda p z^2 + \theta z + \theta r_2 \right)}$$

ή

$$P(z) = \frac{\theta\left[\left(p_0 + r_2 p_1\right) z + r_2 p_0\right]}{-\lambda p z^2 + \theta z + \theta r_2}. \tag{3.12}$$

Θέτουμε $A(z) = \left(p_0 + r_2 p_1\right) z + r_2 p_0$ τον αριθμητή και $D(z) = -\lambda p z^2 + \theta z + \theta r_2$ τον παρονομαστή της πιθανογεννήτριας $P(z)$.

Οι ρίζες του $D(z)$, με χρήση της διακρίνουσας Δ, είναι

$$z_{1,2} = \tfrac{-\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2}}{-2\lambda p},$$

όπου

$$\Delta = \theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2 > 0.$$

Επομένως

$$z_1 = \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2}}{2\lambda p} \tag{3.13}$$

και

$$z_2 = \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2}}{2\lambda p}. \tag{3.14}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, ο αριθμητής της z_1, $\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2}$, είναι αρνητικός, καθόσον αν υποθέσουμε ότι ισχύει $\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2} < 0$, μετά από λίγες πράξεις καταλήγουμε στη σχέση $4\lambda p \cdot \theta r_2 > 0$, που αληθεύει πάντα, αφού $\lambda, p, \theta, r_2 > 0$. Συνεπώς ισχύει ότι η $z_1 < 0$.

Ακόμη, ισχύει ότι $z_1 > -1$. Πράγματι,

$$z_1 > -1 \quad \text{ή} \quad \tfrac{\theta-\sqrt{\theta^2+4\lambda p\cdot\theta r_2}}{2\lambda p} > -1 \qquad \text{ανν}$$

$$\theta + 2\lambda p > \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2} \qquad \alpha\nu\nu$$

$$(\theta + 2\lambda p)^2 > \left(\sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2}\right)^2 \qquad \text{ανν}$$

$$\theta^2 + 4\theta \cdot \lambda p + 4\lambda^2 p^2 > \theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2 \qquad \text{ανν}$$

$$\lambda p^2 + \theta(1 - r_2)p = \lambda p^2 + \theta r_1 p > 0 \ , \qquad \text{που ισχύει.}$$

Η z_2, όπως φαίνεται από τον τύπο της, είναι προφανώς θετική. Ακόμη, παρατηρούμε ότι, $D(-1) = -\lambda p - \theta(1 - r_2) = -\lambda p - \theta r_1 < 0$ και $D(0) = \theta r_2 > 0$. Οπότε προκύπτει η ακόλουθη διάταξη

$$-1 < z_1 < 0 < z_2.$$

Η $P(z)$ είναι πιθανογεννήτρια και η z_1 μηδενίζει τον παρονομαστή της, $D(z)$. Επειδή $|z_1| < 1$, θα πρέπει και ο αριθμητής $A(z)$ να μηδενίζεται στη θέση z_1. Άρα, θα πρέπει να ισχύει

$$z_1 = \tfrac{\theta-\sqrt{\theta^2+4\lambda p\cdot\theta r_2}}{2\lambda p} = -\tfrac{r_2 p_0}{p_0 + r_2 p_1}.$$

Δεδομένου ότι ο αριθμητής είναι πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού, θα είναι της μορφής $A(z) = c \cdot (z - z_1)$, όπου c - σταθερά και ο παρονομαστής της μορφής $D(z) = -2\lambda p(z - z_1)(z - z_2)$. Οπότε, μετά και από την απλοποίηση του κοινού παράγοντα $z - z_1$, η σχέση (3.11) γράφεται

$$P(z) = \tfrac{c}{-\lambda p(z-z_2)}.$$

Από εξίσωση κανονικοποίησης $P(1) = 1$, βρίσκουμε την άγνωστη σταθερά c, η οποία ισούται με $c = -\lambda p(1 - z_2)$. Τελικά

$$P(z) = \frac{-\lambda p(1 - z_2)}{-\lambda p(z - z_2)} = (1 - z_2)\frac{1}{z - z_2} = \frac{1 - \frac{1}{z_2}}{1 - \frac{1}{z_2}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{z_2}\right) \left(\frac{1}{z_2}\right)^n z^n. \qquad (3.15)$$

Επομένως, η στάσιμη κατανομή p_n είναι γεωμετρική με παράμετρο $\frac{1}{z_2}$, δηλαδή

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right)^n, \quad \gamma\iota\alpha \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.16}$$

όπου $z_2 = \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2}}{2\lambda p} > 0$.

Ο μέσος αριθμός αυτών είναι

$$E(Q_T) = \frac{\frac{1}{z_2}}{1 - \frac{1}{z_2}} = \frac{1}{z_2 - 1} = \frac{2\lambda p}{\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2} - 2\lambda p} \tag{3.17}$$

και ο μέσος χρόνος αναμονής τους, σύμφωνα με το θεώρημα Little, ισούται με

$$E(S_T) = \frac{E(Q_T)}{\lambda p} = \frac{2}{\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2} - 2\lambda p}. \tag{3.18}$$

Έτσι, ένας μετακινούμενος προτιμά να μετακινηθεί με τάξι, όταν ισχύει

$$K_T \geq K_\Lambda \quad \text{ή} \quad R_T - C_T E(S_T) \geq R_\Lambda - C_\Lambda E(S_\Lambda) \quad \text{ή}$$

$$R_T - \frac{2C_T}{\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2} - 2\lambda p} \geq R_\Lambda - C_\Lambda b,$$

διαφορετικά χρησιμοποιεί το λεωφορείο. Ακολούθως, υπολογίζουμε τη στρατηγική ισορροπίας p_e. Η τελευταία ανίσωση γράφεται

$$R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b \geq \frac{2C_T}{\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2} - 2\lambda p} \tag{3.19}$$

Συνεχίζοντας την απόδειξη του θεωρήματος, επιλύουμε την προηγούμενη ανίσωση (3.19) ως προς την πιθανότητα p. Αρχικά υποθέτουμε ότι ισχύει

$$R_T - C_T \tfrac{1}{\theta} \geq R_\Lambda - C_\Lambda b \quad \text{ή} \quad R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b \geq \tfrac{C_T}{\theta} > 0 \quad \text{ή}$$

$$\theta \geq \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b} > 0, \tag{3.20}$$

ώστε κάποιος που φθάνει στη στάση - πιάτσα να έχει κίνητρο να χρησιμοποιήσει την υπηρεσία των ταξί. Διαφορετικά, το μέσο καθαρό κέρδος ενός μετακινούμενου θα ήταν μη θετικό, ακόμη και αν κανείς άλλος πελάτης δεν χρησιμοποιούσε το ταξί ως μέσο μεταφοράς του.
Θέτω $D_1 = \theta + \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2} - 2\lambda p$ τον παρονομαστή της σχέσης (3.19) και μάλιστα ισχύει $D_1 > 0$. Πράγματι, επειδή πρέπει να ισχύει

$$p_0 = 1 - \tfrac{1}{z_2} > 0 \quad \text{έπεται ότι} \quad z_2 > 1 \quad \text{ή} \quad \theta + \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2} > 2\lambda p.$$

Άρα η σχέση (3.19) γράφεται ως

$$\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2} - 2\lambda p > a, \tag{3.21}$$

όπου $a = \frac{2C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b} > 0$, που ισχύει από τη σχέση (3.20)
Συνεχίζοντας με πράξεις στην σχέση (3.21), έπονται τα ακόλουθα

$$\sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2} > 2\lambda p + a - \theta \qquad \text{ή}$$

$$\left(\sqrt{\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2}\right)^2 > (2\lambda p + a - \theta)^2 \qquad \text{ή}$$

$$\theta^2 + 4\lambda p \cdot \theta r_2 > (2\lambda p)^2 + 2 \cdot 2\lambda p \cdot (a - \theta) + (a - \theta)^2 \qquad \text{ή}$$

$$4\lambda^2 p^2 + 4\lambda(a - \theta - \theta r_2)p + (a - \theta)^2 - \theta^2 < 0 \qquad \text{ή}$$

$$\underbrace{4\lambda^2}_{A} p^2 + \underbrace{4\lambda[a - \theta(1 + r_2)]}_{B} p + \underbrace{a(a - 2\theta)}_{\Gamma} < 0 \tag{3.22}$$

Με χρήση της διακρίνουσας, παίρνουμε

$$\Delta = B^2 - 4A\Gamma = 4\lambda[a - \theta(1 + r_2)]^2 - 4 \cdot 4\lambda^2 \cdot a(a - 2\theta) = 16\lambda^2[\theta^2(1 + r_2)^2 - 2a\theta r_2] > 0 \quad \text{ανν}$$

$$\theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta r_2 > 0 \quad \text{ανν} \quad \theta > \tfrac{ar_2}{(1+r_2)^2}, \quad \text{καθόσον } \theta > 0.$$

Πράγματι, επειδή ισχύει $\frac{a}{2} > \frac{ar_2}{(1+r_2)^2}$, καθόσον μετά από λίγες πράξεις καταλήγουμε στη σχέση $(1+r_2)^2 > 2r_2$, που αληθεύει και επειδή έχουμε υποθέσει ότι $\theta > \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + C_\Lambda b} = \frac{a}{2}$, συνεπάγεται ότι $\theta > \frac{ar_2}{(1+r_2)^2}$. Συνεπώς, $\Delta > 0$.

Άρα υπάρχουν δύο άνισες πραγματικές ρίζες, έστω οι p_1 και p_2, όπου

$$p_1 = \frac{[\theta(1+r_2) - a] - \sqrt{\theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta r_2}}{2\lambda} \tag{3.23}$$

και

$$p_2 = \frac{[\theta(1+r_2) - a] + \sqrt{\theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta r_2}}{2\lambda}. \tag{3.24}$$

Ισχυρισμός. Η p_1 είναι **αρνητική**.

Πράγματι, διακρίνω τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

- Αν ισχύει $\theta(1+r_2) - a \leq 0$ ή $\theta \leq \frac{a}{1+r_2}$, ο ισχυρισμός προφανώς αληθεύει, καθόσον τότε ο αριθμήτης της p_1 είναι αρνητικός και ο παρονομαστής της θετικός.

- Διαφορετικά, αν ισχύει $\theta(1+r_2) - a > 0$ ή $\theta > \frac{a}{1+r_2}$, τότε έχουμε τα ακόλουθα

$$\theta(1+r_2) - a > \sqrt{\theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta r_2} \qquad \text{ή}$$

$$[\theta(1+r_2) - a]^2 > \left(\sqrt{\theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta r_2}\right)^2 \qquad \text{ή}$$

$$\theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta(1+r_2) + a^2 > \theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta r_2 \qquad \text{ή}$$

$$-2a\theta - 2a\theta r_2 + a^2 > -2a\theta r_2 \qquad \text{ή}$$

$2a\theta < a^2$ και επειδή $a > 0$, συμπεραίνουμε τελικά ότι $\theta < \frac{a}{2} = \frac{C_T}{R_T - R_\Lambda + b \cdot C_\Lambda}$, το οποίο είναι άτοπο, αφού, όπως έχουμε υποθέσει στη σχέση (3.20), ισχύει $\theta \geq \frac{a}{2}$.

Συνεπώς, η λύση p_1 απορρίπτεται, διότι η p_1 είναι πιθανότητα ($0 \leq p_1 \leq 1$).

Απ΄ την άλλη, η p_2 είναι **θετική**, καθόσον, αν θεωρήσω τη συνάρτηση

$$f(\theta) = \frac{[\theta(1+r_2) - a] + \sqrt{\theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta r_2}}{2\lambda}, \quad \theta > \frac{a}{2}, \tag{3.25}$$

αυτή είναι γνησίως αύξουσα για $\theta > \frac{a}{2}$. Πράγματι

$$f'(\theta) = \frac{1+r_2}{2\lambda} + \frac{2\theta(1+r_2)^2 - 2ar_2}{2\lambda\sqrt{\theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta r_2}} > 0,$$

αφού ο αριθμητής του δεύτερου κλάσματος είναι θετικός, μιας και από προηγουμένως ισχύει $\theta > \frac{a}{2} > \frac{ar_2}{(1+r_2)^2}$.

Ακόμη, $\lim_{\theta \to \frac{a}{2}} f(\theta) = 3r_2 > 0$. Επομένως, συνολικά, η $p_2 > 0$ για κάθε $\theta \in \left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$.
Καθόσον η p_2 είναι πιθανότητα, θα πρέπει να ισχύει $p_2 \leq 1$, δηλαδή

$$\tfrac{[\theta(1+r_2)-a]+\sqrt{\theta^2(1+r_2)^2-2a\theta r_2}}{2\lambda} \leq 1 \qquad \text{ή}$$

$$\sqrt{\theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta r_2} \leq 2\lambda + a - \theta(1+r_2).$$

Όμως, το αριστερό μέλος της ανίσωσης είναι θετικό, άρα και το δεύτερο μέλος θα πρέπει να είναι θετικό, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει

$$2\lambda + a - \theta(1+r_2) \geq 0 \quad \text{ή} \quad \theta \leq \frac{2\lambda + a}{1+r_2}. \tag{3.26}$$

Τότε, έπεται

$$\left(\sqrt{\theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta r_2}\right)^2 \leq [2\lambda + a - \theta(1+r_2)]^2 \qquad \text{ή}$$

$$\theta^2(1+r_2)^2 - 2a\theta r_2 \leq (2\lambda+a)^2 - 2\theta(2\lambda+a)(1+r_2) + \theta^2(1+r_2)^2 \qquad \text{ή}$$

$$-2a\theta r_2 \leq (2\lambda + a)^2 - 2\theta(2\lambda + a)(1 + r_2) \qquad ή$$

$$[2(2\lambda + a)(1 + r_2) - 2ar_2]\,\theta \leq (2\lambda + a)^2 \qquad ή$$

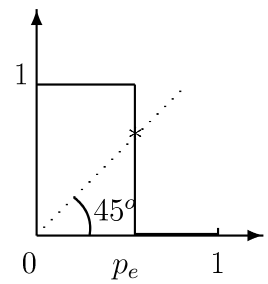
$$2[2\lambda(1 + r_2) + a]\theta \leq (2\lambda + a)^2 \qquad ή$$

$$\theta \leq \frac{(2\lambda + a)^2}{2[2\lambda(1 + r_2) + a]}, \text{ μιας και } 2\lambda(1 + r_2) + a > 0. \tag{3.27}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.26) και (3.27) και μετά από λίγες πράξεις, συνάγουμε ότι ισχύει $\frac{2\lambda+a}{1+r_2} > \frac{(2\lambda+a)^2}{2[2\lambda(1+r_2)+a]}$, καθόσον καταλήγουμε στη σχέση $2\lambda(1 + r_2) + ar_1 > 0$, που αληθεύει. Έπεται λοιπόν ότι, $\theta \leq \frac{(2\lambda+a)^2}{2[2\lambda(1+r_2)+a]} < \frac{2\lambda+a}{1+r_2}$. Συμπεραίνουμε έτσι ότι ισχύει $0 < p_2 \leq 1$ για $\theta \in \left(\frac{a}{2}, \frac{(2\lambda+a)^2}{2[2\lambda(1+r_2)+a]}\right]$.

Συνολικά, θέτοντας $p_e = p_2$ και υποθέτοντας ότι όλοι οι μετακινούμενοι ακολουθούν την ίδια πολιτική p, τότε, αν $p < p_e$, η βέλτιστη απάντηση ενός μετακινούμενου είναι να μετακινηθεί με ταξί, αν $p > p_e$, η βέλτιστη απάντηση είναι να χρησιμοποιήσει το λεωφορείο, ενώ αν $p = p_e$, οποιαδήποτε πολιτική μεταξυ T και Λ είναι βέλτιστη απάντηση.
Σχηματικά.

Καλύτερη απάντηση



Σχεδιάγραμμα: *Καλύτερη απάντηση έναντι στο ποσοστό αυτών που χρησιμοποιούν ταξί.*

Όπως φαίνεται από το σχεδιάγραμμα, σημειώνουμε και εδώ ότι, το μοντέλο μας είναι τύπου *Αντίθετα με το πλήθος* και άρα η βέλτιστη απάντηση ενός μετακινούμενου είναι φθίνουσα συνάρτηση της ακολουθούμενης στρατηγικής από τους άλλους μετακινούμενους. Όταν $p_e = p_2$, τότε ένας μετακινούμενος είναι αδιάφορος μεταξύ της μετακίνησης με ταξί ή λεωφορείο, αφού το κέρδος του είναι ίδιο. Έτσι, οποιαδήποτε στρατηγική $p \in [0, 1]$ είναι βέλτιστη απάντηση στην p_e. Το μοναδικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας, δηλαδή η μοναδική στρατηγική που είναι βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, είναι η p_e. Στην περίπτωση αυτή, η μεικτή στρατηγική p_e είναι σημείο ισορροπίας, αλλά δεν είναι κυριαρχούσα στρατηγική. Σημειώνουμε επίσης ότι, η στρατηγική αυτή είναι εξελικτικά ευσταθής, αφού, αν ένας συγκεκριμένος μετακινούμενος επιλέξει αρχικά το λεωφορείο και εν συνεχεία θελήσει να μεταβεί στην πιάτσα, προκειμένου να χρησιμοποιήσει το ταξί, και τον ακολουθήσουν και οι άλλοι, τότε συμφέρει να επιστρέψει στην αρχική του επιλογή, καθόσον, αν δεν το πράξει, η ωφέλεια του θα μειωθεί. Γενικά, όσο περισσότερα άτομα προτιμούν το ταξί για να μετακινηθούν, τόσο λιγότερο ένας επιλεγμένος μετακινούμενος επιθυμεί να χρησιμοποιήσει το ταξί ή ισοδύναμα τόσο περισσότερο προτιμά το λεωφορείο.

Στην επόμενη παράγραφο, συνεχίζουμε με τη μελέτη του προβλήματος μεγιστοποίησης του κοινωνικού κέρδους.

3.3 Κοινωνική βελτιστοποίηση

Στην παράγραφο αυτή, όπως και στο 2^o κεφάλαιο, αναζητούμε ένα κατώφλι n_{soc}, το οποίο μεγιστοποιεί το μέσο καθαρό κοινωνικό κέρδος στη μονάδα του χρόνου. Αρχικά, έστω $K_{social}(n)$ το μέσο καθαρό κοινωνικό κέρδος στη μονάδα του χρόνου δεδομένης μιας πολιτικής κατωφλίου n_e. Αυτό δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 7 *Η συνάρτηση του μέσου καθαρού κοινωνικού κέρδους $K_{social}(n)$ στη μονάδα του χρόνου δεδομένης μιας πολιτικής κατωφλίου n που ακολούθούν οι μετακινούμενοι, δίνεται από τη σχέση*

$$K_{social}(n) = \lambda(1-p_n)R_T + \lambda p_n R_\Lambda - C_T E(Q_T) - C_\Lambda E(Q_\Lambda),$$

όπου

$E(Q_T) = \frac{[-\lambda(n+2)p_n+\theta(p_0+r_2p_1)]\cdot[-\lambda+\theta(1+r_2)]-[-\lambda p_n+\theta(p_0+r_2(p_0+p_1))](-2\lambda+\theta)}{[-\lambda+\theta(1+r_2)]^2},$

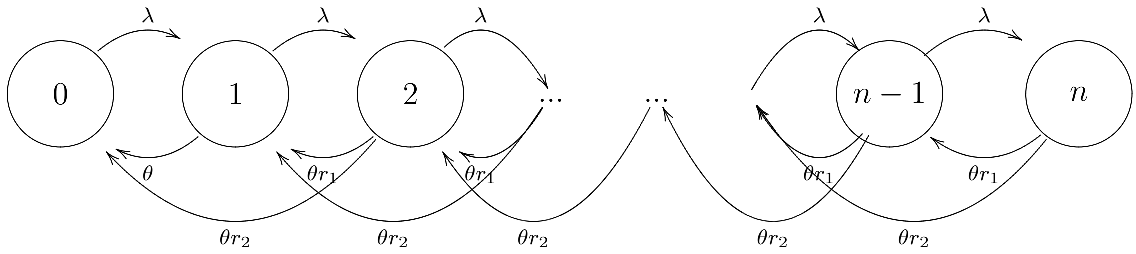
$E(Q_\Lambda) = \lambda p_n b$ *και*

$$p_k = \begin{cases} -\frac{\theta r_2 p_0}{\lambda}\cdot a_0 & , \ k=0 \\ -\frac{\theta(p_0+r_2p_1)}{\lambda}\cdot a_{k-1} - \frac{\theta r_2 p_0}{\lambda}\cdot a_k & , \ 1\le k\le n \end{cases}$$

με $a_k = \left[\frac{1}{z_1(z_2-z_1)}\left(\frac{1}{z_1}\right)^k + \frac{1}{z_2(z_1-z_2)}\left(\frac{1}{z_2}\right)^k\right]$ *και* $k = 0, 1, 2, ..., n.$

Απόδειξη

Όταν οι μετακινούμενοι ακολουθούν μια πολιτική κατωφλίου n, το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια τροποποίηση της $M/M/1/n$ ουράς ($M/M^C/1/n$), με διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό λ και ανεξάρτητους χρόνους εξυπηρετήσεων που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο, άλλοτε θr_1, όταν επιβιβάζεται ένας μετακινούμενος και άλλοτε θr_2, όταν επιβιβάζονται σε ομάδα δύο ατόμων, σε κάθε διερχόμενο ταξί. Το αντίστοιχο διάγραμμα ρυθμών μετάβασης έχει την ακόλουθη μορφή



Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$
\begin{aligned}
&\lambda p_0 = \theta p_1 + \theta r_2 p_2 && \text{, για } k = 0,\\
&(\lambda+\theta) p_k = \lambda p_{k-1} + \theta r_1 p_{k+1} + \theta r_2 p_{k+2} && \text{, για } 1 \le k \le n-2,\\
&(\lambda+\theta) p_{n-1} = \lambda p_{n-2} + \theta r_1 p_n && \text{, για } k = n-1 \text{ και}\\
&\theta p_n = \lambda p_{n-1} && \text{, για } k = n.
\end{aligned}
$$

Πολλαπλασιάζοντας τη n-οστή εξίσωση με z^k και αθροίζοντας, έπεται

$$\lambda \sum_{k=0}^{n-1} p_k z^k + \theta \sum_{k=1}^{n} p_k z^k = \lambda \sum_{k=1}^{n} p_{k-1} z^k + \theta r_1 \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} z^k + \theta r_2 \sum_{k=0}^{n-2} p_{k+2} z^k + \theta r_2 p_1.$$

Εν συνεχεία, με χρήση των πιθανογεννητριών, εξάγουμε ότι η πιθανογεννήτρια $P(z)$ ισούται με

$$P(z) = \frac{\lambda p_n \cdot z^{n+2}(1-z) + \theta\left[(p_0 + r_2 p_1)\cdot z^2 - (r_1 p_0 + r_2 p_1)\cdot z - r_2 p_0\right]}{-\lambda \cdot z^3 + (\lambda+\theta)\cdot z^2 - \theta r_1 \cdot z - \theta r_2},$$

η οποία, μετά από απλοποίηση του παράγοντα $z-1$, γράφεται ως

$$P(z) = \frac{-\lambda p_n \cdot z^{n+2} + \theta\left[(p_0 + r_2 p_1)\cdot z + r_2 p_0\right]}{-\lambda \cdot z^2 + \theta \cdot z + \theta r_2}. \tag{3.28}$$

Οι ρίζες του παρονομαστή της πιθανογεννήτριας $P(z)$, με τη βοήθεια της διακρίνουσας, ισούνται με

$$z_1 = \frac{-\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\lambda\cdot\theta r_2}}{-2\lambda} = \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\lambda\cdot\theta r_2}}{2\lambda} \quad \text{και}$$

$$z_2 = \frac{-\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\lambda\cdot\theta r_2}}{-2\lambda} = \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\lambda\cdot\theta r_2}}{2\lambda}.$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, επειδή η $P(z)$ είναι πιθανογεννήτρια, ο αριθμητής της μηδενίζεται στις θέσεις z_1 και z_2, οπότε

$$-\lambda p_n \cdot z_1^{n+2} + \theta \cdot (p_0 + r_2 p_1) \cdot z_1 + \theta r_2 p_0 = 0 \qquad \text{ή}$$

$$-\lambda z_1^{n+2} \cdot p_n + \theta(z_1 + r_2) \cdot p_0 + \theta r_2 z_1 \cdot p_1 = 0 \qquad (1).$$

και

$$-\lambda p_n \cdot z_2^{n+2} + \theta \cdot (p_0 + r_2 p_1) \cdot z_2 + \theta r_2 p_0 = 0 \qquad \text{ή}$$

$$-\lambda z_2^{n+2} \cdot p_n + \theta(z_2 + r_2) \cdot p_0 + \theta r_2 z_2 \cdot p_1 = 0 \qquad (2).$$

Τώρα, με χρήση της εξίσωσης κανονικοποίησης ($P(1) = 1$), έχουμε

$$-\lambda p_n + \theta(1 + r_2) p_0 + \theta r_2 p_1 = -\lambda + \theta(1 + r_2) \qquad (3).$$

Έτσι, από τις σχέσεις (1), (2) και (3), προκύπτει ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, τους p_0, p_1 και p_N. Λύνοντας αρχικά την σχέση (3) ως προς p_N, παίρνουμε

$$p_n = \frac{\theta(1 + r_2)}{\lambda} \cdot p_0 + \frac{\theta r_2}{\lambda} \cdot p_1 + \frac{\lambda - \theta(1 + r_2)}{\lambda}$$

και αντικαθιστώντας την εν συνεχεία στις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τους p_0 και p_1. Με χρήση τώρα της μεθόδου των οριζουσών, εξάγουμε τελικά

$$D = \theta^2 r_2^2 [z_2 - z_1 + (z_1 - 1) z_2^{n+2} + (1 - z_2) z_1^{n+2}]$$

$$D_{p_0} = \theta r_2 [-\lambda + \theta(1 + r_2)] z_1 z_2^{n+2} (z_2^{n+1} - z_1^{n+1}) \qquad \text{και}$$

$$D_{p_1} = \theta[-\lambda + \theta(1 + r_2)][(z_2 + r_2) z_1^{n+2} - (z_1 + r_2) z_2^{n+2}],$$

όπου D, D_{p_0} και D_{p_1} είναι οι αντίστοιχες ορίζουσες. Έτσι, τα p_0 και p_1 ισούνται με

$$p_0 = \frac{D_{p_0}}{D} = \frac{[-\lambda+\theta(1+r_2)] z_1 z_2 \left(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}\right)}{\theta r_2 \left[z_2 - z_1 + (z_1 - 1) z_2^{n+2} + (1 - z_2) z_1^{n+2}\right]}$$

$$p_1 = \frac{D_{p_1}}{D} = \frac{[-\lambda+\theta(1+r_2)] \left[(z_2 + r_2) z_1^{n+2} - (z_1 + r_2) z_2^{n+2}\right]}{\theta r_2^2 \left[z_2 - z_1 + (z_1 - 1) z_2^{n+2} + (1 - z_2) z_1^{n+2}\right]}.$$

Επιστρέφοντας τώρα στον τύπο (3.28) της πιθανογεννήτριας $P(z)$, αυτός γράφεται ως ακολούθως

$$P(z) = \underbrace{\frac{\lambda p_n \cdot z^{n+2} - \theta\left[(p_0 + r_2 p_1)\cdot z - r_2 p_0\right]}{\lambda}}_{K(z)} \cdot \tfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} \qquad \text{ή}$$

$$P(z) = \tfrac{K(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} = \tfrac{K(z)}{(z_2-z_1)} \cdot \tfrac{1}{z_1-z} + \tfrac{K(z)}{(z_1-z_2)} \tfrac{1}{z_2-z} \qquad \text{ή}$$

$$P(z) = \tfrac{K(z)}{z_1(z_2-z_1)} \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{z}{z_1}\right)^j + \tfrac{K(z)}{z_2(z_1-z_2)} \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{z}{z_2}\right)^j \qquad \text{ή}$$

$$P(z) = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{z_1(z_2-z_1)}\left(\frac{1}{z_1}\right)^j + \frac{1}{z_2(z_1-z_2)}\left(\frac{1}{z_2}\right)^j\right]}_{a_j} \cdot K(z) \cdot z^j$$

και αντικαθιστώντας το $K(z)$, παίρνουμε

$$P(z) = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \left(p_n \cdot z^{n+2} - \tfrac{\theta(p_0+r_2p_1)}{\lambda} \cdot z - \tfrac{\theta r_2 p_0}{\lambda}\right) \cdot z^j \qquad \text{ή}$$

$$P(z) = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} p_n \cdot a_j \cdot z^{j+n+2} - \sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{\theta(p_0+r_2p_1)}{\lambda} \cdot a_j \cdot z^{j+1} - \sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{\theta r_2 p_0}{\lambda} \cdot a_j \cdot z^j,$$

όπου, με αλλαγή μεταβλητής, προκύπτει

$$P(z) = \textstyle\sum_{k=n+2}^{\infty} p_n \cdot a_{k-(n+2)} \cdot z^k - \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\theta(p_0+r_2p_1)}{\lambda} \cdot a_{k-1} \cdot z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\theta r_2 p_0}{\lambda} \cdot a_k \cdot z^k \qquad (3.29)$$

Επείδη τώρα οι καταστάσεις του συστήματος αριθμούν μέχρι n, έπεται ότι το πρώτο άθροισμα της προηγούμενης σχέσης (3.30) μηδενίζεται, άρα εξάγουμε τελικά ότι η στάσιμη κατανομή ισούται με

$$p_k = \begin{cases} -\frac{\theta r_2 p_0}{\lambda} \cdot a_0 & ,\ k = 0 \\ \\ -\frac{\theta(p_0+r_2p_1)}{\lambda} \cdot a_{k-1} - \frac{\theta r_2 p_0}{\lambda} \cdot a_k & ,\ 1 \le k \le n \end{cases} \qquad (3.30)$$

όπου $a_k = \left[\tfrac{1}{z_1(z_2-z_1)}\left(\tfrac{1}{z_1}\right)^k + \tfrac{1}{z_2(z_1-z_2)}\left(\tfrac{1}{z_2}\right)^k\right]$.

Γνωρίζουμε τώρα ότι, ο μέσος αριθμός μετακινούμενων που περιμένουν στην πιάτσα για ταξί ισούται με την τιμή της πρώτης παραγώγου της πιθανογεννήτριας $P(z)$ στη θέση $z = 1$, δηλαδή $E(Q_T) = P'(1)$. Παραγωγίζοντας έτσι την σχέση (3.28) ως προς z, προκύπτει

$$P'(z) = \frac{\left[-\lambda(N+2)p_N \cdot z^{N+1} + \theta(p_0 + r_2 p_1)\right] \cdot (-\lambda z^2 + \theta z + \theta r_2) - [-\lambda p_N \cdot z^{N+2} + \theta(p_0 + r_2 p_1) \cdot z + \theta r_2 p_0] \cdot (-2\lambda z + \theta)}{(-\lambda z^2 + \theta z + \theta r_2)^2}$$

απ΄ όπου, θέτοντας $z = 1$, έχουμε ότι το μέσο πλήθος άτομων $E(Q_T)$ στην πιάτσα των ταξί ισούται με

$$E(Q_T) = \frac{[-\lambda(N+2)p_N + \theta(p_0 + r_2 p_1)] \cdot [-\lambda + \theta(1 + r_2)] - [-\lambda p_N + \theta(p_0 + r_2(p_0 + p_1))](-2\lambda + \theta)}{[-\lambda + \theta(1 + r_2)]^2} \tag{3.31}$$

■

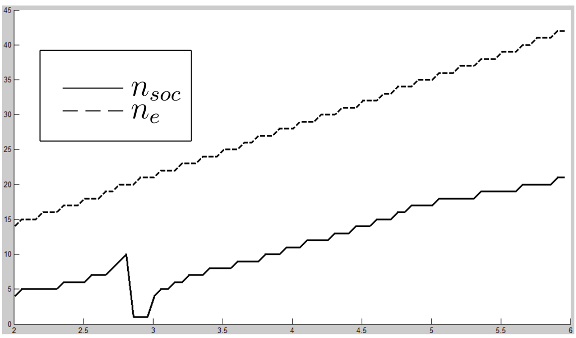
Με τη βοήθεια του λογισμικού MATLAB, βρίσκουμε σε αριθμητικά παραδείγματα τη στρατηγική κατωφλίου n_{soc}, η οποία είναι «Μπες στην ουρά για ταξί, αν το πλήθος των ήδη παρόντων μετακινούμενων στην πιάτσα είναι μικρότερο ή ίσο του n_{soc}, διαφορετικά πήγαινε στη στάση και πάρε το λεωφορείο» και μεγιστοποιεί το καθαρό μέσο κοινωνικό κέρδος $K_{social}(n)$ στη μονάδα του χρόνου.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου μας, θα αναφερθούμε σε αριθμητικά παραδείγματα αυτής της περίπτωσης του μοντέλου μας, αποτελέσματα των οποίων παρουσιάζονται μέσω σχεδιαγραμμάτων και μας βοηθούν να κατανοήσουμε τις διαφορές μεταξύ ατομικής και κοινωνικής βελτιστοποίησης.

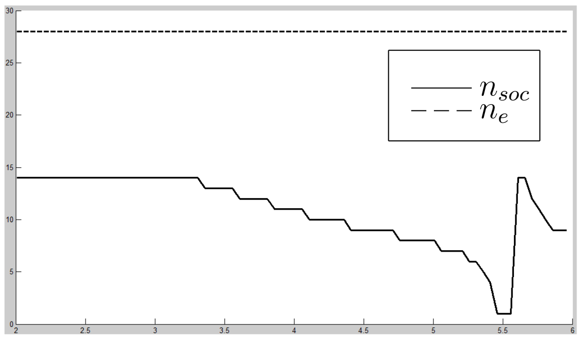
3.4 Αριθμητικά παραδείγματα - Συμπεράσματα

Με τη βοήθεια του λογισμικού MATLAB, θα παρουσιάσουμε και εδώ μερικά αριθμητικά παραδείγματα για διάφορες τιμές των $R_T, R_\Lambda, C_T, C_\Lambda, \lambda, \theta, r_2$ και b.

Αρχικά, έστω $R_T = R_\Lambda = 20$, $C_T = C_\Lambda = 1$, $r_2 = 0.4$ και $b = 5$. Όπως φαίνεται στα επόμενα σχεδιαγράμματα 1 και 2, παρατηρούμε και εδώ, όπως στο 2^o κεφάλαιο ότι, μεταβάλλοντας **μόνο**, είτε τον ρυθμό άφιξης λ των μετακινούμενων στη στάση - πιάτσα για $\theta = 4$ ή τον ρυθμό διεύλευσης θ των ταξί από την πιάτσα για $\lambda = 4$, η τιμή κατωφλίου n_{soc} της βέλτιστης πολιτικής για τη μεγιστοποίηση του κοινωνικού κέρδους είναι μικρότερη της τιμής κατωφλίου n_e, όπου n_e είναι το κατώφλι εκείνο στο οποίο ένας αφικνούμενος μετακινούμενος μπαίνει στην ουρά για ταξί μόνο αν το πλήθος των παρόντων ατόμων δεν υπερβαίνει το κατώφλι αυτό.

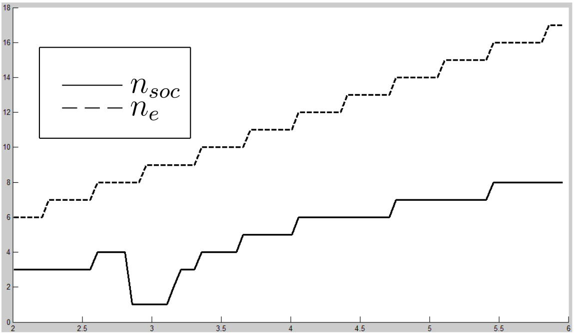


Σχήμα 3.1: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του θ.

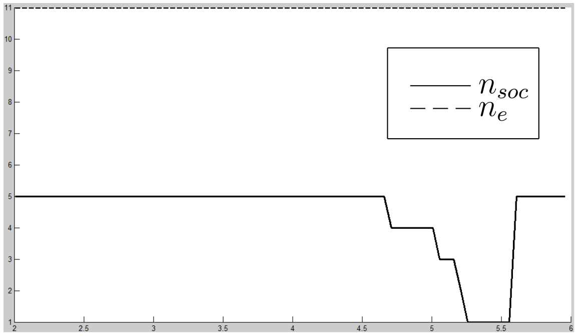


Σχήμα 3.2: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του λ.

Μειώνοντας τώρα και εδώ μόνο την αμοιβή R_T ενός μετακινούμενου που χρησιμοποιεί ταξί στην τιμή 17, έπονται στην επόμενη σελίδα τα σχεδιαγράμματα 3.3 και 3.4



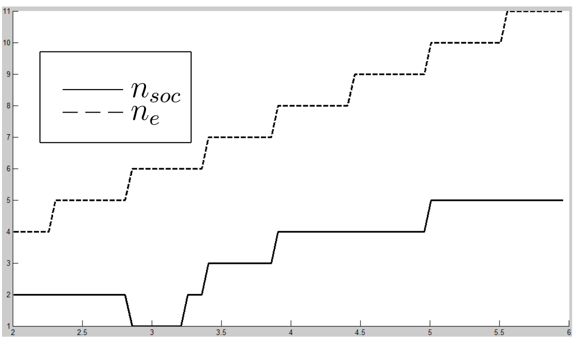
Σχήμα 3.3: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του θ.



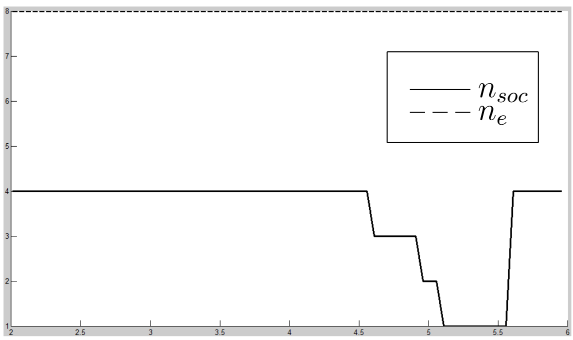
Σχήμα 3.4: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του λ.

Παρατηρώντας συνολικά τα σχήματα 3.1 έως 3.4, διαπιστώνουμε πάλι ότι, η διαφορά μεταξύ των n_{soc} και n_e έχει μειωθεί αισθητά, δηλαδή οι μετακινούμενοι τείνουν να συμπεριφέρονται κοινωνικά βέλτιστα.

Συνεχίζοντας πάλι όπως στο 2^o κεφάλαιο, διατηρούμε την αμοιβή R_T στην τιμή 17 και αυξάνουμε το κόστος στη μονάδα του χρόνου C_T ενός ατόμου που περιμένει στην πιάτσα. Τότε, όπως φαίνεται στα σχεδιαγράμματα 3.5 και 3.6, αν και η μετακίνηση με ταξί έχει γίνει ακόμη λιγότερο ελκυστική, εντούτοις η ατομικά συμφέρουσα πολιτική, συγκρινόμενη με την κοινωνική, συνεχίζει να μας οδηγεί σε μεγαλύτερες ουρές στην πιάτσα των ταξί.



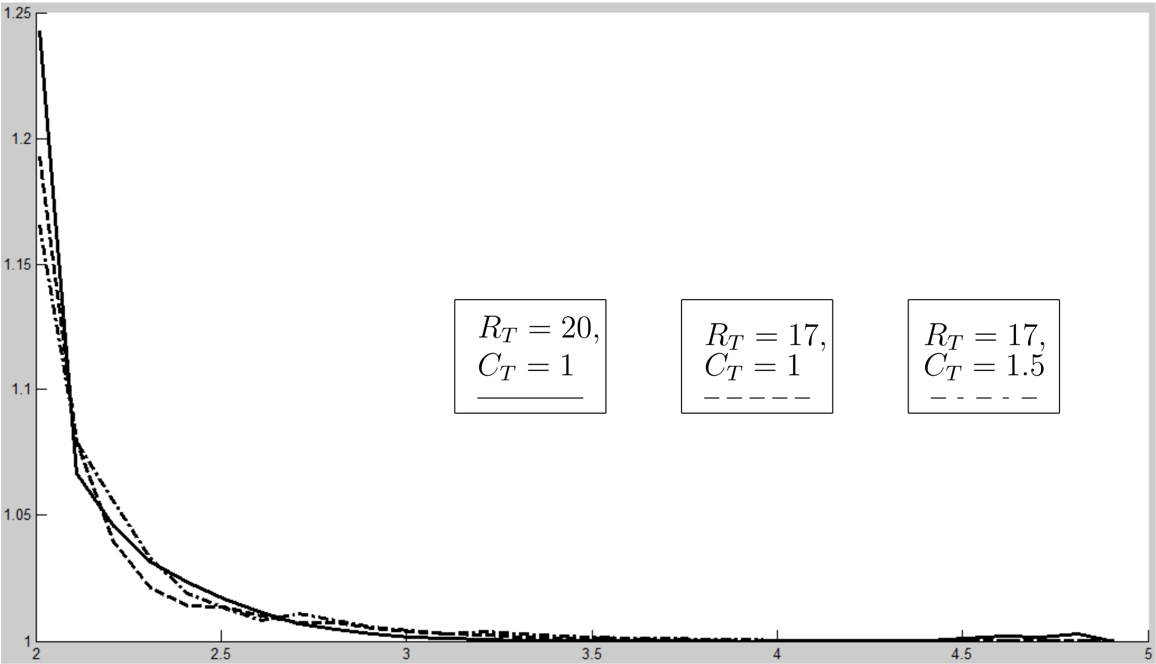
Σχήμα 3.5: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του θ.



Σχήμα 3.6: Τα επίπεδα κατωφλίου n_e και n_{soc} συναρτήσει του λ.

Στο ακόλουθο σχεδιάγραμμα 3.7, φαίνεται και εδώ πως μεταβάλλεται ο λόγος $PoA = \frac{K_{social}(n_{soc})}{K_{social}(n_e)}$

διατηρώντας σταθέρες τις παραμέτρους $R_\Lambda = 20$, $C_\Lambda = 1$ και $b = 5$ και **επιβαρύνοντας** συγκριτικά τις αντίστοιχες τιμές των R_T και C_T, άλλοτε για διάφορες τιμές του θ και άλλοτε για διάφορες τιμές του λ.



Σχήμα 3.7: Ο λόγος PoA συναρτήσει του θ, για $R_\Lambda = 20$, $C_\Lambda = 1$, $\lambda = 3$, $r_2 = 0.5$ και $b = 5$.

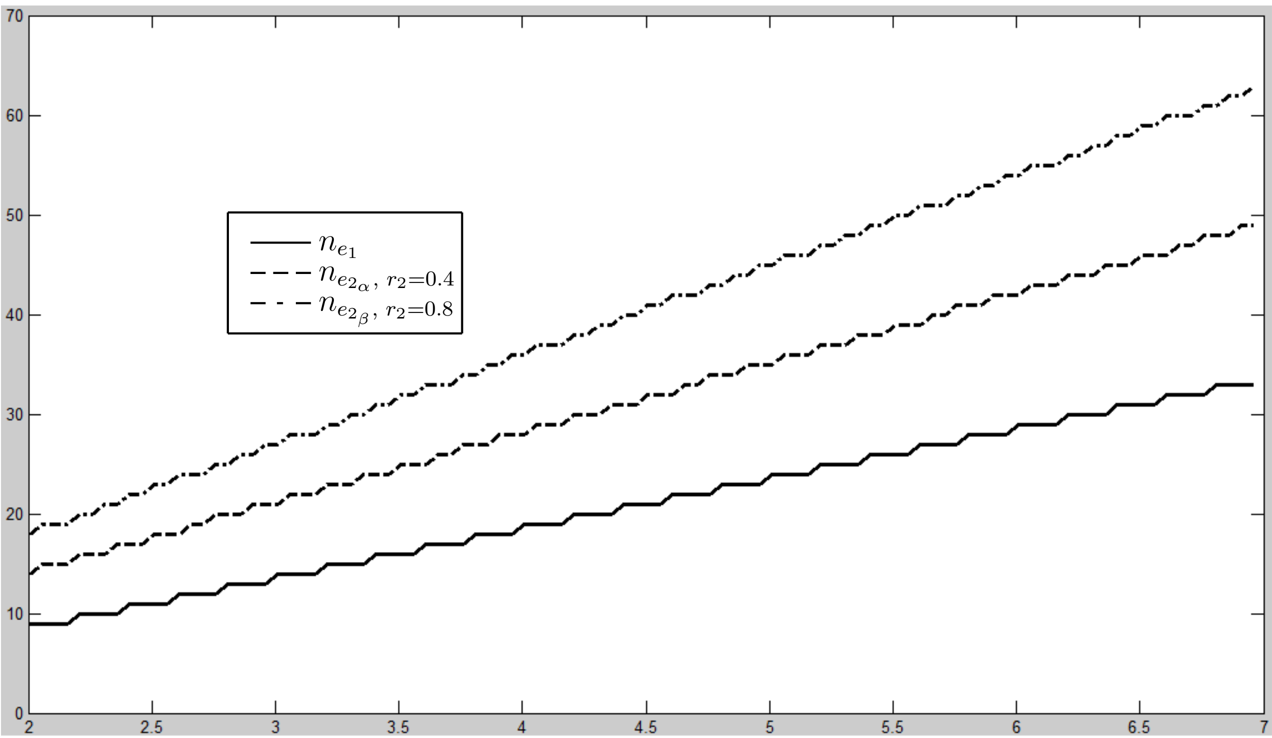
Παρατηρούμε λοιπόν από το σχεδιάγραμμα 3.7 ότι, όσο αυξάνεται ο ρυθμός διέλευσης θ των ταξί σε σχέση με τον ρυθμό άφιξης λ των ατόμων στη στάση - πιάτσα, το κοινωνικό κέρδος που αντιστοιχεί στην τιμή κατωφλίου n_e τείνει να γίνει ίσο με το κοινωνικό κέρδος που αντιστοιχεί στην τιμή κατωφλίου n_{soc}. Και εδώ η βασική αιτία διαφοροποίησης μεταξύ ατομικής και κοινωνικής βελτιστοποίησης αποτελεί το γεγονός ότι, καθέ νεοαφιχθείς μετακινούμενος στην πιάτσα των ταξί, αν και δεν δημιουργεί αρνητικές επιδράσεις στα άτομα που βρίσκονται μπροστά απ΄ αυτόν, λόγω πειθαρχίας ουράς FCFS στην πιάτσα, εντούτοις δημιουργεί εν αγνοία του αρνητικές επιδράσεις σε πιθανές μελλοντικές αφίξεις μετακινούμενων.

Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε στην επόμενη παράγραφο μερικά αριθμητικά παραδείγματα προκειμένου να συγκρίνουμε μέσω σχεδιαγραμμάτων τα μοντέλα του $2^{ου}$ και $3^{ου}$ κεφαλαίου.

3.5 Σύγκριση μοντέλων - Συμπεράσματα

Είμαστε τώρα σε θέση να ασχοληθούμε με κάποιες ενδιαφέρουσες συγκρίσεις μεταξύ των δύο μοντέλων και με τη βοήθεια σχεδιαγραμμάτων, να εξάγουμε μερικά συμπεράσματα που μας βοηθούν να διακρίνουμε τις μεταξύ τους διαφορές.

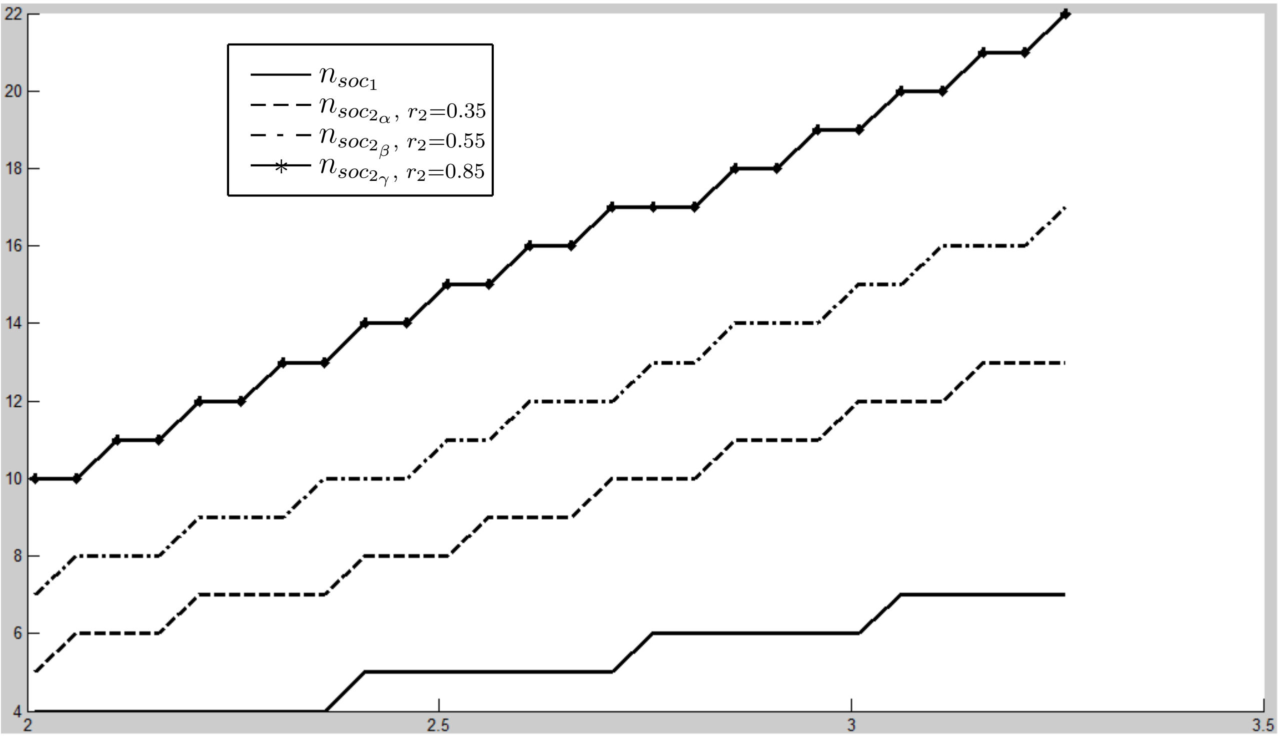
Στην παρατηρήσιμη κατάσταση των μοντέλων μας του $2^{ου}$ και του $3^{ου}$ κεφαλαίου, όπως απεικονίζεται και στο ακόλουθο σχεδιάγραμμα, φαίνονται τα επίπεδα κατωφλίου n_{e_1}, $n_{e_{2_\alpha}}$ και $n_{e_{2_\beta}}$ συναρτήσει του θ για $R_T = R_\Lambda = 20$ και $C_T = C_\Lambda = 1$. Τα n_{e_1}, $n_{e_{2_\alpha}}$ και $n_{e_{2_\beta}}$ είναι πολιτικές κατωφλίου, στις οποίες ένας αφικνούμενος μετακινούμενος μπαίνει στην ουρά για ταξί μόνο αν το πλήθος των παρόντων ατόμων δεν υπερβαίνει τα κατώφλια αυτά ή ισοδύναμα τα επίπεδα αυτά αντιστοιχούν στον μέγιστο αριθμό ατόμων που αντικρίζει στην πιάτσα των ταξί ένας νεοαφιχθής μετακινούμενος, ώστε η ατομική του ωφέλεια που εισπράτει από την μετακίνηση με ταξί να είναι μεγαλύτερη αυτής του λεωφορείου. Το επίπεδο n_{e_1} αντιστοιχεί στο 2^o κεφάλαιο, ενώ τα $n_{e_{2_\alpha}}$ και $n_{e_{2_\beta}}$ στο 3^o κεφάλαιο για τιμές του $r_2 = 0.4$, και 0.8 αντίστοιχα.



Σχήμα 3.8: Τα επίπεδα κατωφλίου n_{e_1}, $n_{e_{2_\alpha}}$ και $n_{e_{2_\beta}}$ συναρτήσει του θ.

Είναι φανερό λοιπόν ότι, όσο αυξάνεται η πιθανότητα r_2 επιβίβασης δύο ατόμων στα διερχόμενα ταξί, αυξάνεται και το επιτρεπόμενο επίπεδο κατωφλίου στην πιάτσα των ταξί, με αποτέλεσμα ένας νεοαφιχθής μετακινούμενος να εξακολουθεί να προτιμά το ταξί σε σχέση με το λεωφορείο, ακόμη και αν αυξάνεται ο αριθμός των ατόμων στην πιάτσα των ταξί.

Στη συνέχεια, σε κοινό σχεδιάγραμμα απεικονίζουμε τα επίπεδα κατωφλίου n_{soc_1}, $n_{soc_{2_\alpha}}$, $n_{soc_{2_\beta}}$ και $n_{soc_{2_\gamma}}$ συναρτήσει του θ για $R_T = R_\Lambda = 20$, $C_T = C_\Lambda = 1$ και $\lambda = 2$. Τα n_{soc_1}, $n_{soc_{2_\alpha}}$, $n_{soc_{2_\beta}}$ και $n_{soc_{2_\gamma}}$ αντίστοιχουν στις βέλτιστες πολιτικές που μεγιστοποιούν το κοινωνικό κέρδος και ειδικότερα το πρώτο αντιστοιχει σε κοινωνική βελτιστοποίηση του μοντέλου στο 2^o κεφάλαιο και το δεύτερο έως και το τέταρτο σε κοινωνική βελτιστοποίηση του μοντέλου στο 3^o κεφάλαιο για τις τιμές του $r_2 = 0.35,\ 0.55$ και 0.85 αντίστοιχα.



Σχήμα 3.9: Τα επίπεδα κατωφλίου n_{soc_1}, $n_{soc_{2_\alpha}}$, $n_{soc_{2_\beta}}$ και $n_{soc_{2_\gamma}}$ συναρτήσει του θ.

Και εδώ βλέπουμε ότι, όσο αυξάνεται η πιθανότητα r_2 επιβίβασης δύο ατόμων στα διερχόμενα ταξί, αυξάνονται και οι τιμές n_{soc} που μεγιστοποιούν το κοινωνικό κέρδος για διάφορες τιμές του θ.

Βιβλιογραφία

[1] Δ. Φακίνος (2003), *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις,* Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα.

[2] Κ. Μηλολιδάκης (2009), *Θεωρία Παιγνίων: Μαθηματικά Μοντέλα Συγκρουσης και Συνεργασίας*, Εκδόσεις Σοφία.

[3] A. Burnetas, A. Economou (2007), *Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times*, Queueing systems **56**, 213-228.

[4] A. Economou, S. Kanta (2008a),*Optimal balking strategies and pricing for the single server Markovian queue with compartmented waiting space*, Queueing systems **59**, 237-269.

[5] A. Economou, S. Kanta (2008b),*Equilibrium balking strategies in the observable single - server queue with breakdowns and repairs*, Operations Research Letters **36**, 696-699.

[6] R. Hassin (1986), *Consumer information in markets with random products quality:The case of queues and balking*, Econometrica **54**, 1185-1195 .

[7] R. Hassin, M. Haviv (2002), *Nash Equilibrium and subgame perfection:the case of observable queues*, Annals of Operations Research.

[8] R. Hassin, M. Haviv (2003), *To Queue Or Not To Queue: Equilibrium Behavior In Queueuing Systems*, Kluwer Academic Publishers Group, Boston.