ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στρατηγική συμπεριφορά πελατών σε σειριακά δίκτυα συστημάτων εξυπηρέτησης

Διπλωματική εργασία για το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών με Κατεύθυνση την Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

Ηλιάνα Στεργίου

Επιβλέπων καθηγητής: Αντώνιος Οικονόμου

Αθήνα, 2016

"Δώσε μου έναν αρκετά μεγάλο μοχλό και έδαφος να σταθώ και θα κινήσω τον κόσμο. "

~ Αρχιμήδης ~

Οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τον αναπληρωτή καθηγητή Αντώνιο Οικονόμου, επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, για την άψογη συνεργασία και την πολύτιμη καθοδήγησή του καθόλη την διάρκεια τόσο των προπτυχιακών όσο και των μεταπτυχιακών μου σπουδών στο Μαθηματικό Τμήμα. Ευχαριστώ, επίσης, θερμά τον καθηγητή Απόστολο Μπουρνέτα για την αμέριστη υποστήριξη και εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή Δημήτριο Φακίνο για την συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στη Στατιστική και την Επιχειρησιακή Έρευνα που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Εγκρίθηκε στις .... από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**	**Υπογραφή**
Απόστολος Μπουρνέτας	Καθηγητής	....
Δημήτριος Φακίνος	Αναπληρωτής Καθηγητής	....
Αντώνιος Οικονόμου (Επιβλέπων)	Αναπληρωτής Καθηγητής	....

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικά στοιχεία

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά κάποια βασικά στοιχεία από τη Θεωρία Παιγνίων (Game Theory)[1], τη Θεωρία Ουρών Αναμονής (Queueing Theory)[2] και τον συνδυασμό τους[3]. Θεωρείται ότι ο αναγνώστης έχει ήδη γνώσεις πάνω στη Θεωρία Παιγνίων και στις Ουρές Αναμονής. Το κεφάλαιο αυτό έχει ως σκοπό απλά να υπενθυμίσει κάποια βασικά στοιχεία των περιοχών αυτών, και σε καμία περίπτωση δεν καλύπτεται όλη η Θεωρία Παιγνίων και όλη η Θεωρία Ουρών Αναμονής.

1.1 Βασικά στοιχεία Ουρών Αναμονής

Μια **ουρά αναμονής ή σύστημα εξυπηρέτησης** (queueing system) είναι ένα σύστημα (π.χ. ιατρείο), που παρέχει **εξυπηρέτηση** (π.χ. θεραπεία) σε **πελάτες** (π.χ. ασθενείς), ο οποίοι προσέρχονται στο σύστημα για να εξυπηρετηθούν. Οι πελάτες φεύγουν από το σύστημα αμέσως μετά το τέλος της εξυπηρέτησής τους. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε μια ουρά αναμονής ως ένα σύστημα εισόδου-εξόδου.

[1]Βλ. Κωνσταντίνος Μηλολιδάκης, *Θεωρία Παιγνίων: Μαθηματικά Μοντελα Σύγκρουσης και Συνεργασίας*. Εκδόσεις Σοφία, Αθήνα, 2009.

[2]Βλ. Δημήτρης Φακίνος, *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008, 2η έκδοση.

[3]Βλ. Rafael Hassin and Moshe Haviv, *To Queue or Not To Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

Μια ουρά αναμονής αποτελείται από:

α) έναν **χώρο εξυπηρέτησης**, στον οποίο υπάρχουν ένας ή περισσότεροι **υπηρέτες** (π.χ. γιατροί), που εξυπηρετούν τους πελάτες και

β) ίσως έναν **χώρο αναμονής**, στον οποίο περιμένουν οι πελάτες που δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν αμέσως.

Γενικά, οι διαδοχικοί **χρόνοι αφίξεων** και οι διάρκειες των **χρόνων εξυπηρέτησης** των πελατών είναι τυχαίες μεταβλητές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, το **μήκος ουράς** (δηλαδή ο αριθμός των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα) να μεταβάλλεται συνεχώς με τυχαίο τρόπο. Άρα, λοιπόν, το μήκος ουράς είναι μια στοχαστική διαδικασία[4].

Τα κύρια χαρακτηριστικά μιας ουράς αναμονής είναι η **διαδικασία αφίξεων**, ο **μηχανισμός εξυπηρέτησης** και η **πειθαρχία ουράς**.

Η διαδικασία αφίξεων

Η διαδικασία αφίξεων περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο φτάνουν στο σύστημα οι διαδοχικοί πελάτες, έστω $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$.

Αν συμβολίσουμε με $t_0 = 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq \ldots$ τις χρονικές στιγμές άφιξης στο $[0, \infty)$ των πελατών $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ αντίστοιχα, τότε, η διαδικασία αφίξεων ορίζεται από την κατανομή των χρονικών αυτών στιγμών ή ισοδύναμα από τη στοχαστική εξάρτηση των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης $T_n = t_n - t_{n-1}$, $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Οι κυριότερες διαδικασίες αφίξεων είναι οι εξής:

α) **Poisson διαδικασία αφίξεων (συμβολικά: M[5])**: Η διαδικασία Poisson [6] είναι το κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο για την περιγραφή γεγονότων που συμβαίνουν εντελώς τυχαία στον χρόνο, και γι' αυτό η Poisson διαδικασία αφίξεων

[4] Η τυχαιότητα των διαδοχικών χρόνων αφίξεων και των χρόνων εξυπηρέτησης δεν μας επιτρέπει να προβλέψουμε επακριβώς την εξέλιξη του συστήματος μέσα στον χρόνο. Έτσι, για να μελετήσουμε την εξέλιξη αυτή, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε κάποια κατάλληλη στοχαστική διαδικασία (π.χ. το μήκος ουράς).

[5] Από το Memoryless ή Markovian (property).

[6] Για περισσότερες πληροφορίες για την διαδικασία Poisson βλ. Δημήτρης Φακίνος, *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008, 2η έκδοση.

ονομάζεται και εντελώς τυχαία διαδικασία αφίξεων. Η Poisson διαδικασία αφίξεων είναι η απλούστερη και πιο συχνά εμφανιζόμενη στην πράξη διαδικασία αφίξεων. Είναι το κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο αφίξεων για συστήματα στα οποία το πλήθος των δυνητικών πελατών είναι μεγάλο και κάθε πελάτης τα χρησιμοποιεί σε αραιά χρονικά διαστήματα και ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες.

β) **Σταθερή διαδικασία αφίξεων** (**συμβολικά: D**[7]): Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $T_n = a$, για κάθε $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ (με πιθανότητα 1), δηλαδή οι πελάτες φτάνουν στο σύστημα ο ένας μετά τον άλλο, σε ίσα χρονικά διαστήματα μήκους a. Είναι το κατάλληλο μοντέλο για την περιγραφή και μελέτη συστημάτων που παρέχουν εξυπηρέτηση με ραντεβού.

γ) **Γενικές ανεξάρτητες αφίξεις** (**συμβολικά: GI**[8]): Αυτή είναι η περίπτωση, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι $T_1, T_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, που ακολουθούν κάποια γενική (αυθαίρετη) κατανομή, έστω $A(x),\ x \geq 0$, με πεπερασμένη μέση τιμή $a = \int_0^\infty x dA(x) = \int_0^\infty (1 - A(x))dx = \int_0^\infty A^c(x)dx$.

Η παράμετρος $\lambda = 1/a$ είναι ο μέσος αριθμός αφίξεων στη μονάδα του χρόνου και ονομάζεται **ρυθμός αφίξεων**.

Η D διαδικασία αφίξεων είναι η ειδική περίπτωση της GI, στην οποία $A(x) = 0$, αν $x < a$, και $A(x) = 1$, αν $x \geq a$, ενω η M είναι η ειδική περίπτωση της GI , στην οποία $A(x) = 0,\ x \leq 0$ και $A(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ (δηλαδή οι $T_1, T_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με την εκθετική κατανομή).

Ο μηχανισμός εξυπηρέτησης

Ο μηχανισμός εξυπηρέτησης περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο εξυπηρετούνται οι πελάτες από τους υπηρέτες. Ο μηχανισμός εξυπηρέτησης ορίζεται από τον αριθμό, έστω k ($k \in \{1, 2, \ldots\} \bigcup \{\infty\}$), των υπηρετών και από την κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης.

Συμβολίζουμε με X_n τον χρόνο εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη που φτάνει στο σύστημα και υποθέτουμε ότι οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες

[7]Από το Deterministic.
[8]Από το General Independent.

τυχαίες μεταβλητές.

Οι κυριότεροι χρόνοι εξυπηρέτησης που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές είναι:

α) **Εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης** (**συμβολικά: M**): Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

β) **Σταθεροί χρόνοι εξυπηρέτησης** (**συμβολικά: D**): Εδώ έχουμε ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι σταθεροί, δηλαδή $X_n = b$, για κάθε $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ (με πιθανότητα 1).

γ) **Γενικοί χρόνοι εξυπηρέτησης** (**συμβολικά: G**): Σε αυτήν την περίπτωση οι χρόνοι εξυπηρέτησης $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κάποια γενική (αυθαίρετη) κατανομή, έστω $B(x)$, $x \geq 0$, με πεπερασμένη μέση τιμή $b = \int_0^\infty x dB(x) = \int_0^\infty (1 - B(x))dx = \int_0^\infty B^c(x)dx$.

Για ουρές με έναν υπηρέτη, η παράμετρος $\mu = 1/b$ εκφράζει το μέσο αριθμό αναχωρήσεων ή εξυπηρετήσεων στη μονάδα του χρόνου, όσο είναι συνεχώς απασχολημένος, και ονομάζεται **ρυθμός εξυπηρέτησης**.

Το D είναι η ειδική περίπτωση του G, στην οποία $B(x) = 0$, αν $x < b$, και $B(x) = 1$, αν $x \geq b$, ενω το M είναι η ειδική περίπτωση του G, στην οποία $B(x) = 0$, $x \leq 0$ και $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x \geq 0$.

Η πειθαρχία ουράς

Με τον όρο πειθαρχία ουράς εννοούμε τον τρόπο με τον οποίο επιλέγονται για να εξυπηρετηθούν οι πελάτες που βρίσκονται στον χώρο αναμονής. Δύο σημαντικές πειθαρχίες ουράς είναι η **FCFS** (First-Come-First-Served), στην οποία κάθε πελάτης εξυπηρετείται σύμφωνα με τη σειρά που φτάνει στο σύστημα, και η **LCFS** (Last-Come-First-Served), όπου κάθε φορά που ένας υπηρέτης είναι ελεύθερος, επιλέγει να εξυπηρετήσει τον πελάτη που έφτασε τελευταίος στο σύστημα. Η FCFS είναι η συνήθης πειθαρχία ουράς.

Οι FCFS και LCFS δεν λαμβάνουν υπόψη τους τους συγκεκριμένους χρόνους εξυπηρέτησης των πελατών που περιμένουν στον χώρο αναμονής. Υπάρχουν, όμως, και πειθαρχίες ουράς οι οποίες λαμβάνουν υπόψη τους αυτούς τους χρόνους. Ένα παράδειγμα είναι η **SSTF** (Shortest-Service-Time-First), όπου ο υπηρέτης που ελευθερώνεται προτιμά να εξυπηρετήσει πρώτα τον πελάτη με τον μικρότερο χρόνο εξυπηρέτησης.

Υπάρχουν πειθαρχίες ουράς, οι οποίες βάζουν **προτεραιότητες** για συγκεκριμένους τύπους πελατών. Αυτές οι πειθαρχίες διακρίνονται σε **διακόπτουσες** (preemptive), στις οποίες διακόπτεται η εξυπηρέτηση ενός πελάτη που εξυπηρετείται, προκειμένου να εξυπηρετηθεί ένας πελάτης που μόλις μπήκε και έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα, και **μη-διακόπτουσες**(non-preemptive), όπου δεν διακόπτεται η εξυπηρέτηση του πελάτη με την άφιξη ένος άλλου, μεγαλύτερης προτεραιότητας, πελάτη. Οι διακόπτουσες πειθαρχίες ουράς διακρίνονται σε **συντηρητικές**(conservative), στις οποίες κάθε εξυπηρέτηση που έχει διακοπεί, συνεχίζει από το σημείο που διακόπηκε, και σε **μη-συντηρητικές**(non-conservative), στις οποίες μια εξυπηρέτηση που διακόπηκε ξαναρχίζει από την αρχή.

Ένα παράδειγμα διακόπτουσας συντηρητικής πειθαρχίας ουράς είναι η **LCFS/P-R** (Last-Come-First-Served/Preemptive-Resume). Σύμφωνα με την LCFS/P-R, όταν φτάσει ένας πελάτης στο σύστημα, διακόπτεται η εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται τότε, και ο πελάτης του οποίου η εξυπηρέτηση διακόπηκε, επιστρέφει στην ουρά και περιμένει εκεί μέχρι να επιλεγεί σύμφωνα με την LCFS πειθαρχία ουράς για να συνεχίσει την εξυπηρέτησή του από το σημείο που διακόπηκε.

Σύμφωνα με τα παραπάνω χαρακτηριστικά (διαδικασία αφίξεων, μηχανισμός εξυπηρέτησης και πειθαρχία ουράς), για την ταξινόμηση των ουρών αναμονής έχει επικρατήσει η **συντομογραφία $\boldsymbol{A|B|k}$**, όπου το $\boldsymbol{A}$ αναφέρεται στη **διαδικασία αφίξεων**, το $\boldsymbol{B}$ αναφέρεται στο **μηχανισμό εξυπηρέτησης** και το k είναι ο **αριθμός των υπηρετών** που λειτουργούν παράλληλα. Αν η **χωρητικότητα του συστήματος** είναι πεπερασμένη, έστω $s < \infty$, τότε εισάγουμε στη συντομογραφία και ένα τέταρτο σύμβολο, το οποίο δηλώνει την χωρητικότητα του συστήματος, δηλαδή η **συντομογραφία** γίνεται $\boldsymbol{A|B|k|s}$, και αν η πειθαρχία ουράς δεν είναι η FCFS, τότε αυτό το δηλώνουμε γράφοντας στο τέλος της συντομογραφίας το όνομα της πειθαρχίας που χρησιμοποιείται μέσα σε παρένθεση. Για παράδειγμα με $M|G|2$ (LCFS) συμβολίζεται η ουρά αναμονής με Poisson διαδικασία αφίξεων, γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης, 2 υπηρέτες, χώρο αναμονής με άπειρη χωρητικότητα και πειθαρχία ουράς την LCFS, και με $D|M|9|23$ συμβολίζεται η ουρά αναμονής με σταθερή διαδικασία αφίξεων, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης, 9 υπηρέτες, 14 θέσεις στον χώρο αναμονής (δηλαδή η χωρητικότητα του συστήματος είναι 9+14=23) και πειθαρχία ουράς την FCFS.

1.1.1 Συνήθη μέτρα απόδοσης μιας ουράς

Για κάθε $j \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, συμβολίζουμε με:

- S_j τον **χρόνο παραμονής** στο σύστημα του πελάτη C_j,
- W_j τον **χρόνο αναμονής** στην ουρά του πελάτη C_j,
- X_j τον **χρόνο εξυπηρέτησης** του πελάτη C_j.

Προφανώς ισχύει $S_j = W_j + X_j$, για κάθε $j \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Για κάθε $t \geq 0$, συμβολίζουμε με:

- $Q(t)$ τον **αριθμό των πελατών στο σύστημα** τη χρονική στιγμή t (**μήκος ουράς**),
- $Q_q(t)$ τον **αριθμό πελατών στο χώρο αναμονής** τη χρονική στιγμή t,
- $Q_s(t)$ τον **αριθμό πελατών που εξυπηρετούνται** τη χρονική στιγμή t.

Προφανώς ισχύει $Q(t) = Q_q(t) + Q_s(t)$, για κάθε $t \geq 0$.

Οι **βασικές στοχαστικές διασικασίες** για τη μελέτη μιας ουράς είναι οι $\{Q(t) : t \geq 0\}$, $\{Q_q(t) : t \geq 0\}$, $\{S_j : j \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$ και $\{W_j : j \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$.

Έστω:

- $\overline{Q} = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q(x)dx$ το (μακροπρόθεσμο) **μέσο μήκος ουράς**,

- $\overline{Q}_q = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_q(x)dx$ ο (μακροπρόθεσμος) **μέσος αριθμός πελατών στον χώρο αναμονής**

- $\overline{Q}_s = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Q_s(x)dx$ ο (μακροπρόθεσμος) **μέσος αριθμός πελατών που εξυπηρετούνται.**

Προφανώς τα $\overline{Q}$, $\overline{Q}_q$ και $\overline{Q}_s$ είναι μέσοι ως προς τον χρόνο (**χρονικοί μέσοι**). Έστω επίσης:

- $\overline{S} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} S_j$ ο (μακροπρόθεσμος) **μέσος χρόνος παραμονής**,

- $\overline{W} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} W_j$ ο (μακροπρόθεσμος) **μέσος χρόνος αναμονής**,

- $\overline{X} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ ο (μακροπρόθεσμος) **μέσος χρόνος εξυπηρέτησης**.

Προφανώς τα $\overline{S}$, $\overline{W}$ και $\overline{X}$ είναι μέσοι ως προς τους πελάτες (**πελατειακοί μέσοι**).

Οι ποσότητες $\overline{Q}$, $\overline{Q}_q$, $\overline{S}$ και $\overline{W}$ αποτελούν τα συνήθη **μέτρα απόδοσης** μιας ουράς.

Όταν οι στοχαστικές διασικασίες $\{Q(t) : t \geq 0\}$, $\{Q_q(t) : t \geq 0\}$, $\{Q_s(t) : t \geq 0\}$, $\{S_j : j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$, $\{W_j : j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ και $\{X_j : j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ είναι αναγεννητικές[9] (πράγμα που ισχύει για τις $GI|G|k$ ουρές), τότε τα $\overline{Q}$, $\overline{Q}_q$, $\overline{Q}_s$, $\overline{S}$, $\overline{W}$ και $\overline{X}$ συμπίπτουν (με πιθανότητα 1) με τις μέσες τιμές των αντίστοιχων οριακών τυχαίων μεταβλητών, έστω Q, Q_q, Q_s, S, W και X.

1.1.2 Το μήκος ουράς

Η πιο χρήσιμη στοχαστική διαδικασία για την περιγραφή και μελέτη της στοχαστικής συμπεριφοράς μιας ουράς είναι, στις περισσότερες περιπτώσεις, η διαδικασία μήκους ουράς $\{Q(t) : t \geq 0\}$. Επομένως, μας ενδιαφέρει να βρούμε τη **μεταβατική κατανομή** της $\{Q(t)\}$, δηλαδή τις πιθανότητες $p_j(t)$, $j \in \mathbb{N}$ (ως συναρτήσεις

[9] Για τις αναγεννητκές διαδικασίες βλ. Δημήτρης Φακίνος, *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008, 2η έκδοση, σελ. 36-39.

του t), όπου:

$p_j(t) = P(Q(t) = j) = P($να υπάρχουν j πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή t).

Επειδή συχνά συμβαίνει να είναι δύσκολο ή αδύνατο να βρούμε την αναλυτική μορφή της μεταβατικής κατανομής της $\{Q(t)\}$, και επειδή, μετά από παρέλευση μικρού σχετικά χρόνου, η $\{Q(t)\}$ παύει ουσιαστικά να επιδεικνύει μεταβατική συμπεριφορά, δηλαδή φτάνει σε **κατάσταση στατιστικής ισορροπίας**, στρέφουμε το ενδιαφέρον μας στην εύρεση της αντίστοιχης **οριακής κατανομής**:

$$p_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t),\ j \in \mathbb{N}.$$

Αυτό το κάνουμε γιατί η οριακή κατανομή είναι ανεξάρτητη του t, οπότε είναι πολύ πιο εύκολο να τη βρούμε.

Ευστάθεια

Γενικά, για κάθε ουρά της οποίας η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων ή η κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης είναι συνεχής ή έχει ένα συνεχές τμήμα (κάτι που ισχύει για όλες τις ουρές που εμφανίζονται στις εφαρμογές), η οριακή κατανομή ορίζεται. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι ισχύει ακριβώς μία από τις επόμενες προτάσεις, και μάλιστα ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση $Q(0)$:

(i) Η $\{Q(t)\}$ **έχει ακριβώς μία γνήσια οριακή κατανομή** $\{p_j\}$.

(ii) Η $\{Q(t)\}$ **αποκλίνει**, δηλαδή η οριακή κατανομή είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Για ουρές με πεπερασμένη χωρητικότητα ισχύει πάντα η πρώτη πρόταση, ενώ για ουρές με άπειρη χωρητικότητα, η βασική παράμετρος που μας δείχνει ποιά από τις παραπάνω δύο προτάσεις ισχύει είναι ο **ρυθμός (ή ένταση) συνωστισμού**:

$$\rho = \lambda b.$$

Για την ακρίβεια[10], ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η πρόταση (i) για

[10] Για περισσότερες πληροφορίες για τον ρυθμό συνωστισμού βλ. Δημήτρης Φακίνος, *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008, 2η έκδοση, σελ. 107.

τη μη-ντετερμινιστική $GI|G|k$ ουρά είναι η σχέση:

$$\rho < k.$$

Αποδεικνύεται ότι όταν ισχύει η πρόταση (i) για την $GI|G|1$ ουρά, η οριακή πιθανότητα το σύστημα να είναι κενό είναι $p_0 = 1 - \rho$, $\rho < 1$.

Εμφυτευμένες διαδικασίες στο μήκος ουράς

Όταν η $\{Q(t)\}$ έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα[11], η μελέτη της είναι πολύ πιο εύκολη. Έτσι, σε περιπτώσεις που δεν είναι εύκολη η μελέτη της $\{Q(t)\}$, προσπαθούμε να επιλέξουμε κατάλληλες διακεκριμένες χρονικές στιγμές στο $[0, \infty)$, τέτοιες ώστε η $\{Q(t)\}$ να έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα αν την εξετάσουμε μόνο σε αυτές τις χρονικές στιγμές. Αυτές οι κατάλληλες χρονικές στιγμές είναι συνήθως οι **στιγμές διαδοχικών αφίξεων** και οι **στιγμές διαδοχικών αναχωρήσεων** πελατών από το σύστημα.

Αν συμβολίσουμε με t_n τη χρονική στιγμή άφιξης του πελάτη C_n στο σύστημα και με τ_n τη χρονική στιγμή αναχώρησής του από το σύστημα, τότε ορίζουμε τις εξής τυχαίες μεταβλητές:

- $Q_n^- = Q(t_n^-)$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ = μήκος ουράς αμέσως πριν την $n-$οστή άφιξη στο $[0, \infty)$
- $Q_n^+ = Q(\tau_n^+)$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ = μήκος ουράς αμέσως μετά την $n-$οστή αναχώρηση στο $[0, \infty)$

Οι στοχαστικές διαδικασίες $\{Q_n^- : n \in \mathbb{N}\}$ και $\{Q_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$, που περιγράφουν το σύστημα αποκλειστικά σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα, ονομάζονται **εμφυτευμένες διαδικασίες** στην $\{Q(t) : t \geq 0\}$.

Συμβολίζουμε με:

[11] **Μαρκοβιανή (ή Αμνήμονη) Ιδιότητα:** Λέμε ότι μια στοχαστική $\{X(t) : t \in T\}$ έχει τη Μαρκοβιανή Ιδιότητα (και τότε ονομάζεται Μαρκοβιανή διαδικασία) όταν έχει την ιδιότητα ότι δεδομένης της τιμής της τυχαίας μεταβλητής $X(t)$ (παρόν), οι τυχαίες μεταβλητές $\{X(u) : u > t\}$ (μέλλον) είναι στοχαστικά ανεξάρτητες από τις τυχαίες μεταβλητές $\{X(s) : s < t\}$ (παρελθόν). Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες με διακριτό χώρο καταστάσεων ονομάζονται Μαρκοβιανές αλυσίδες.

- $r_j = \lim_{n\to\infty} P(Q_n^- = j)$, $j \in \mathbb{N}$
- $d_j = \lim_{n\to\infty} P(Q_n^+ = j)$, $j \in \mathbb{N}$

τις οριακές κατανομές των $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ αντίστοιχα.

Ιδιότητες μεμονωμένων μεταβάσεων και PASTA

Γενικά δεν ισχύει ότι $r_j = d_j$. Όμως αν έχουμε μεμονωμένες αφίξεις και αναχωρήσεις, τότε για τις $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ ισχύει: $r_j = d_j$, $j \in \mathbb{N}$. Η ιδιότητα αυτή αναφέρεται ως ιδιότητα των μεμονωμένων μεταβάσεων.

Γενικά δεν ισχύει ούτε $p_j = r_j$ (ή $p_j = d_j$), $j \in \mathbb{N}$, δηλαδή η οριακή κατανομή σε συνεχή χρόνο γενικά δεν συμπίπτει με την οριακή κατανομή σε στιγμές αφίξεων (ή αναχωρήσεων). Υπάρχει, όμως, μια ειδική περίπτωση στην οποία $p_j = r_j$, $j \in \mathbb{N}$. Αυτή είναι η περίπτωση που η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson. Αυτή η ιδιότητα αναφέρεται ως **Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)**.

Αποτέλεσμα του Little

Διαισθητικά περιμένουμε ότι το μήκος ουράς και ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά είναι ποσότητες ανάλογες, δηλαδή αν σε μια ουρά το μήκος ουράς είναι μεγάλο, τότε και ο μέσος χρόνος παραμονής είναι μεγάλος. Αυτό όντως ισχύει. Για την ακρίβεια, έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα το οποίο καλείται **αποτέλεσμα του Little**:

$$\overline{Q} = \lambda \overline{S} \text{ (με πιθανότητα 1).}$$

Το αποτέλεσμα του Little εκφράζει το γεγονός ότι ασυμπτωτικά, ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα, ισούται με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων επί τον μέσο χρόνο παραμονής σε αυτό, σχεδόν για κάθε πραγματοποίηση της διαδικασίας.

Υποθέτοντας ότι υπάρχουν οι οριακές κατανομές των στοχαστικών διαδικασιών $\{Q(t) : t \geq 0\}$ και $\{S_n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ και είναι γνήσιες, και συμβολίζοντας με Q και S τις αντίστοιχες οριακές τυχαίες μεταβλητές, έχουμε ότι $E(Q) = \overline{Q}$ και

$E(S) = \overline{S}$, οπότε το Αποτέλεσμα του Little παίρνει την εναλλακτική μορφή:

$$E(Q) = \lambda E(S).$$

Αν κοιτάξει κανείς την απόδειξη του αποτελέσματος του Little[12], θα δει ότι για την απόδειξή του δεν χρειάζεται να περιγραφεί πλήρως το σύστημα. Αυτό έχει σαν συνέπεια, το αποτελέσμα του Little να ισχύει ακόμα και αν θεωρήσουμε ως σύστημα μόνο τον χώρο αναμονής ή μόνο τον χώρο εξυπηρέτησης. Αν θεωρήσουμε ως σύστημα μόνο τον χώρο αναμονής, το αποτελέσμα του Little γίνεται:

$$E(Q_q) = \lambda E(W),$$

όπου Q_q και W είναι οι οριακές τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν τον αριθμό των πελατών στον χώρο αναμονής και τον χρόνο που περιμένουν οι πελάτες στον χώρο αναμονής αντίστοιχα, ενώ αν ως σύστημα θεωρήσουμε μόνο τον χώρο εξυπηρέτησης, το αποτελέσμα του Little γίνεται:

$$E(Q_s) = \lambda E(X) = \lambda b = \rho,$$

όπου $E(X) = b$ είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης και Q_s είναι η οριακή τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των πελατών που εξυπηρετούνται ταυτόχρονα (ή ισοδύναμα των απασχολημένων υπηρετών).

1.1.3 Η M|M|1 ουρά

Διαδικασίες Γέννησης-Θανάτου

Έστω $\{X(t) : t \geq 0\}$ μια Μαρκοβιανή αλυσίδα[13] με χώρο καταστάσεων $S = \mathbb{N}$ ή $S = \{0, 1, \ldots, s\}$, στην οποία οι μόνες μεταβάσεις από μια κατάσταση n είναι

[12] βλ. Δημήτρης Φακίνος, *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008, 2η έκδοση, σελ. 111-113.

[13] Δηλαδή μια στοχαστική διαδικασία με διακριτό χώρο καταστάσεων, η οποία έχει την Μαρκοβιανή Ιδιότητα.

είτε προς την $n-1$ με ρυθμό μ_n είτε προς την $n+1$ με ρυθμό λ_n. Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι:

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r, bend left, "\lambda_0"] & (1) \arrow[l, bend left, "\mu_1"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu_2"] \arrow[r, bend left, "\lambda_{n-2}"] & (n-1) \arrow[l, bend left, "\mu_{n-1}"] \arrow[r, bend left, "\lambda_{n-1}"] & (n) \arrow[l, bend left, "\mu_n"] \arrow[r, bend left, "\lambda_n"] & (n+1) \arrow[l, bend left, "\mu_{n+1}"] \arrow[r, bend left, "\lambda_{n+1}"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu_{n+2}"]
\end{tikzcd}$$

Η στοχαστική διαδικασία $\{X(t) : t \geq 0\}$ λέγεται **διαδικασία Γέννησης-Θανάτου** με **ρυθμούς γέννησης $\boldsymbol{\lambda_n}$** $(n = 0, 1, \ldots)$ και **ρυθμούς θανάτου $\boldsymbol{\mu_n}$** $(n = 1, 2, \ldots)$. Υποθέτουμε ότι η $\{X(t) : t \geq 0\}$ είναι κανονική[14] και αδιαχώριστη[15].

Η (μοναδική) γνήσια στάσιμη κατανομή p_n, $n \in S$, υπάρχει αν και μόνο αν:

$$B^{-1} = \sum_{n \in S} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} < \infty,$$

και τότε έχουμε:

$$p_n = B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} > 0,\, n \in S$$

και η $\{X(t)\}$ είναι θετικά επαναληπτική. Όταν $B^{-1} = \infty$, τότε $p_n = 0$, $n \in S$ και η $\{X(t)\}$ είναι μηδενικά επαναληπτική ή παροδική.

M|M|1 ουρά

Μια $M|M|1$ ουρά λειτουργεί ως εξής: Οι πελάτες φτάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson (λ) και αν βρουν τον (μοναδικό) υπηρέτη απασχολημένο, περιμένουν σε ένα χώρο αναμονής άπειρης χωρητικότητας μέχρι να έρθει η σειρά τους να τους εξυπηρετήσει. Οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με την Εκθετική (μ) κατανομή και είναι ανεξάρτητοι από τους χρόνους αφίξεων. Όταν τελειώσει η εξυπηρέτηση ενός πελάτη, τότε ο πελάτης φεύγει αμέσως από το σύστημα και ο υπηρέτης επιλέγει από τον

[14] Δηλαδή δεν είναι δυνατό να υπάρξουν άπειρες στο πλήθος μεταβάσεις σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

[15] Δηλαδή για οποιεσδήποτε δύο καταστάσεις είναι δυνατή η μετάβαση από τη μία στην άλλη.

χώρο αναμονής τον επόμενο πελάτη που θα εξυπηρετήσει (σύμφωνα με την FCFS πειθαρχία ουράς, εκτός και αν δηλώνεται κάποια άλλη πειθαρχία ουράς).

Έστω $Q(t)$ το μήκος ουράς την χρονική στιγμή t. Τότε η $\{Q(t) : t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με διακριτό χώρο καταστάσεων $S = \mathbb{N}$. Μάλιστα είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα αφού οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων και οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους ακολουθίες ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την Εκθετική (λ) κατανομή και την Εκθετική (μ) κατανομή αντίστοιχα.

Σύμφωνα με την περιγραφή της $M|M|1$ ουράς που δώσαμε, έχουμε ότι το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι:

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r, bend left, "\lambda"] & (1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & (n-1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & (n) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & (n+1) \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

Άρα, η $\{Q(t) : t \geq 0\}$ είναι μια διαδικασία Γέννησης-Θανάτου με ρυθμούς γέννησης $\lambda_n = \lambda$, $n \in \mathbb{N}$ και ρυθμούς θανάτου $\mu_n = \mu$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Επομένως, η (μοναδική) οριακή κατανομή της $\{Q(t) : t \geq 0\}$ υπάρχει αν και μόνο αν:

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n < \infty,$$

όπου $\rho = \lambda/\mu$ είναι ο ρυθμός συνωστισμού.

Η τελευταία συνθήκη ισχύει αν και μόνο αν $\rho < 1$ και τότε:

$$B^{-1} = \frac{1}{1-\rho}.$$

Άρα, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει η $\{Q(t) : t \geq 0\}$ γνήσια οριακή κατανομή είναι $\rho < 1$ και τότε η οριακή κατανομή είναι $p_n = (1-\rho)\rho^n$, $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η Γεωμετρική (ρ) κατανομή. Αν $\rho \geq 1$, τότε $p_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Αν συμβολίσουμε με Q και S τις οριακές τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν το μήκος ουράς και τον χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα (όταν $\rho < 1$), τότε:

- Η Q έχει την Γεωμετρική (ρ) κατανομή, οπότε:

$$E(Q) = \frac{\rho}{1-\rho} \text{ και } V(Q) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

- Από το αποτέλεσμα του Little έχουμε:

$$E(Q) = \lambda E(S) \Rightarrow E(S) = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Για την Q έχουμε επίσης τα εξής:

- $p_0 = P(Q=0) = 1-\rho$
- $P(Q \geq k) = \rho^k,\ k \in \mathbb{N}$.

1.2 Βασικά στοιχεία Θεωρίας Παιγνίων

Όπως λέει και το όνομά της, η Θεωρία Παιγνίων ασχολείται με παιχνίδια. Κάθε παιχνίδι (game) περιλαμβάνει ένα σύνολο από (τουλάχιστον 2) **"λογικούς"**[16] **παίκτες**, καθένας από τους οποίους διαθέτει ένα σύνολο (όχι αναγκαστικά ίδιο για όλους τους παίκτες) από (καθαρές) **στρατηγικές**. Μια στρατηγική (strategy) ενός παίκτη είναι ένα **πλήρες σχέδιο δράσης**, που υπαγορεύει στον παίκτη τί πρέπει να κάνει μέσα στο παιχνίδι, καλύπτοντας όλες τις πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί ο παίκτης κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού[17].

Εκτός από το σύνολο των στρατηγικών, σε κάθε παίκτη αντιστοιχεί και μια **συνάρτηση ωφέλειας** (όχι αναγκαστικά ίδια για όλους τους παίκτες), δηλαδή μια συνάρτηση η οποία δείχνει ποιό θα είναι το κέρδος (αν είναι θετική) ή το κόστος (αν είναι αρνητική) του κάθε παίκτη στο τέλος του παιχνιδιού. Το ποιά θα είναι η

[16] Με την έννοια ότι, αν ένας παίκτης ξέρει ότι μια στρατηγική είναι η πιο συμφέρουσα γι' αυτόν, τότε θα διαλέξει αυτήν τη στρατηγική.

[17] Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Κωνσταντίνος Μηλολιδάκης, *Θεωρία Παιγνίων: Μαθηματικά Μοντελα Σύγκρουσης και Συνεργασίας*. Εκδόσεις Σοφία, Αθήνα, 2009.

ωφέλεια του κάθε παίκτη, εξαρτάται από τη στρατηγική που χρησιμοποίησε ο ίδιος και τις στρατηγικές που χρησιμοποίησαν οι άλλοι παίκτες στο παιχνίδι.

1.2.1 Παιχνίδια χωρίς συνεργασία και στρατηγικές

Υπάρχουν παιχνίδια, στα οποία οι παίκτες δεν μπορούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους, οπότε δεν μπορούν να συνεργαστούν (**παιχνίδια χωρίς συνεργασία** (non cooperative games)) και παιχνίδια στα οποία οι παίκτες μπορούν να επικοινωνήσουν και να συνάψουν συμμαχίες (**παιχνίδια σε συμμαχική μορφή** (cooperative games))[18]. Εμάς, στα πλαίσια της παρούσης εργασίας, μας ενδιαφέρουν μόνο τα πρώτα.

Για τα παιχνίδια χωρίς συνεργασία έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 1. *Ένα παιχνίδι χωρίς συνεργασία ορίζεται από:*
α) Ένα **σύνολο παικτών**, *έστω* $\mathbf{\Pi = \{1, \ldots, N\}}$.
β) Ένα σύνολο (άπειρο ή πεπερασμένο) από αποφάσεις/ενέργειες για κάθε παίκτη, που ονομάζονται **καθαρές στρατηγικές** *(pure strategies), έστω* $A_{\mathbf{1}}, \ldots, A_{\boldsymbol{N}}$.
γ) Μια **συνάρτηση ωφέλειας** *(payoff function)*[19] *για κάθε παίκτη, έστω* $\boldsymbol{F_1, \ldots, F_N}$.

Παρατήρηση 1. *Στα πλαίσια εφαρμογών της επιχειρησιακής έρευνας, το* Π *μπορεί να είναι και άπειρο σύνολο. Μάλιστα, το κεντρικό κομμάτι αυτής της εργασίας έχει να κάνει με παιχνίδια με άπειρους παίκτες (για την ακρίβεια, οι παίκτες είναι πελάτες που φτάνουν σε μια* $M|M|1$ *ουρά).*

Εκτός από τις καθαρές στρατηγικές, υπάρχουν και οι **μεικτές στρατηγικές** (mixed strategies). Μια μεικτή στρατηγική ενός παίκτη είναι ένα διάνυσμα που δίνει σε κάθε καθαρή στρατηγική του παίκτη μία πιθανότητα (την πιθανότητα να χρησιμοποιήσει ο παίκτης την αντίστοιχη καθαρή στρατηγική). Για παράδειγμα, αν το σύνολο των καθαρών στρατηγικών ενός παίκτη είναι $A = \{a_1, \ldots, a_4\}$, τότε μερικές μεικτές στρατηγικές του παίκτη αυτού είναι: $m_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$,

[18] Υπάρχουν και άλλοι τύποι παιχνιδιών π.χ. τα παιχνίδια διαπραγμάτευσης (bargaining games).
[19] Θα τις δούμε πιο αναλυτικά παρακάτω.

$m_2 = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right)$, $m_3 = \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{3}{5}, 0\right)$ (η $j-$οστή συντεταγμένη κάθε m_i είναι η πιθανότητα που δίνει η m_i στην a_j).

Προφανώς, οι συντεταγμένες κάθε μεικτής στρατηγικής αθροίζουν στο 1.

Έστω $M_1, \ldots, M_N$ τα σύνολα των μεικτών στρατηγικών των παικτών. Αν το σύνολο των καθαρών στρατηγικών του παίκτη i είναι $A_i = \{a_{i1}, \ldots, a_{in_i}\}$, τότε το σύνολο των μεικτών στρατηγικών του είναι $M_i = \{(p_1, \ldots, p_{n_i}) : \sum_{k=1}^{n_i} p_k = 1\}$.

Για κάθε καθαρή στρατηγική ενός παίκτη i, υπάρχει μια μεικτή που αντιστοιχεί σ' αυτή. Πράγματι, η a_{ij} αντιστοιχεί στην $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in M_i$, η οποία έχει το 1 στην $j-$οστή θέση και η οποία λέει στον παίκτη να επιλέξει την στρατηγική a_{ij} με πιθανότητα 1.

Ορισμός 2. *Το σύνολο* $\boldsymbol{M = M_1 \times \ldots \times M_N} = \{(m_1, \ldots, m_N) : m_1 \in M_1, \ldots, m_N \in M_N\}$ *λέγεται* **σύνολο των στρατηγικών καταστάσεων** *του παιχνιδιού. Κάθε* $m \in M$ *λέγεται* **στρατηγική κατάσταση** *(strategy profile) και καθορίζει μια στρατηγική για κάθε παίκτη.*

1.2.2 Συνάρτηση ωφέλειας και σημεία στρατηγικής ισορροπίας

Η συνάρτηση ωφέλειας $F_i(s)$ ενός παίκτη i είναι μια συνάρτηση, που δείχνει ποιά θα είναι η πληρωμή (κέρδος ή κόστος) του παίκτη i, δεδομένου ότι χρησιμοποιείται από τους παίκτες η στρατηγική κατάσταση s.

Συμβολίζουμε με m_{-i} το διάνυσμα που περιέχει τις στρατηγικές των παικτών $\Pi \backslash \{i\}$, δηλαδή αν $m = (m_1, \ldots, m_N)$, τότε $m_{-i} = (m_1, ..., m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_N)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε $m = (m_i, m_{-i})$.

Με βάση τον παραπάνω συμβολισμό, έχουμε για τη συνάρτηση ωφέλειας F_i του παίκτη i, ότι είναι μια συνάρτηση από το σύνολο M στο $\mathbb{R}$:

$$F_i : m = (m_i, m_{-i}) \to r_i.$$

Υποθέτουμε ότι κάθε F_i είναι γραμμική συνάρτηση ως προς τη στρατηγική m_i, δηλαδή:

Αν $m_i = p \cdot a + (1-p) \cdot b$, για $p \in [0,1]$ και $a, b \in M_i$, τότε

$$F_i(m_i, m_{-i}) = \; = p \cdot F_i(a, m_{-i}) + (1-p) \cdot F_i(b, m_{-i}).$$

Ορισμός 3. *Λέμε ότι μια στρατηγική m_i^1* **κυριαρχεί ασθενώς***(weakly dominates) επί μιας στρατηγικής m_i^2, αν για κάθε m_{-i} ισχύει $F_i(m_i^1, m_{-i}) \geq F_i(m_i^2, m_{-i})$ και η ανισότητα είναι γνήσια για τουλάχιστον ένα m_{-i}. Επίσης, μια στρατηγική λέγεται* **ασθενώς κυριαρχούσα** *(weakly dominant), αν κυριαρχεί ασθενώς επί όλων των άλλων στρατηγικών του M_i.*

Ορισμός 4. *Λέμε ότι μια στρατηγική m_i^* είναι μια* **βέλτιστη απάντηση** *(best response) του παίκτη i κατά της στρατηγικής κατάστασης $\hat{m} \in M$, όταν $m_i^* \in \arg\max_{m_i \in M_i} F_i(m_i, \hat{m}_{-i})$. Δηλαδή η m_i^* μεγιστοποιεί την ωφέλεια του παίκτη i, όταν οι υπόλοιποι παίκτες χρησιμοποιούν την $\hat{m}_{-i}$.*

Θα συμβολίζουμε με $BR_i(\hat{m}_{-i})$ το σύνολο που περιέχει όλες τις βέλτιστες απαντήσεις του παίκτη i, όταν οι υπόλοιποι παίκτες χρησιμοποιούν την $\hat{m}_{-i}$, δηλαδή

$$\begin{aligned} BR_i(\hat{m}_{-i}) &= \{m_i^* : F_i(m_i^*, \hat{m}_{-i}) \geq F_i(m_i, \hat{m}_{-i}), \; \forall m_i \in M_i\} \\ &= \arg\max_{m_i \in A_i} F(m_i, \hat{m}_{-i}) \end{aligned}$$

Ορισμός 5. *Λέμε ότι μια στρατηγική κατάσταση $\tilde{m}$ είναι* **σημείο στρατηγικής ισορροπίας (σ.σ.ι.)** *σε καθαρές στρατηγικές ή σημείο Nash (equilibrium), αν ισχύει $\tilde{m}_i \in BR_i(\tilde{m}_{-i})$, για κάθε $i \in \Pi$, δηλαδή κάθε $\tilde{m}_i$ είναι βέλτιστη απάντηση στην $\tilde{m}_{-i}$.*

Παρατήρηση 2. *Αν μια βέλτιστη απάντηση είναι μίξη στρατηγικών έναντι μια στρατηγικής, τότε όλες αυτές οι στρατηγικές είναι επίσης βέλτιστες απαντήσεις στην ίδια στρατηγική. Αυτό δεν ισχύει για τα σ.σ.ι., δηλαδή αν ένα σημείο στρατηγικής ισορροπίας είναι μίξη δύο στρατηγικών, τότε οι στρατηγικές αυτές δεν είναι απαραίτητα σ.σ.ι.*

1.3 Θεωρία Παιγνίων και Ουρές Αναμονής

Υποθέτουμε ότι κάθε πελάτης που φτάνει στο σύστημα δεν είναι ο "τυπικός" πελάτης που γνωριζουμε από τη Θεωρία Ουρών Αναμονής, αλλά ένας παίκτης (με την έννοια της Θεωρίας Παιγνίων), που πρέπει να επιλέξει κάποια από τις διαθέσιμες σ' αυτόν στρατηγικές, με σκοπό να μεγιστοποιήσει την (προσωπική) ωφέλειά του. Το **κέρδος** ενός πελάτη από την ολοκλήρωση της **εξυπηρέτησής** του είναι $\boldsymbol{R}$ και το **κόστος ανά μονάδα χρόνου παραμονής** του στο σύστημα είναι $\boldsymbol{C}$. Ως **κατάσταση του συστήματος** ορίζουμε το μήκος ουράς, έστω $Q(t)$.

Έστω ένα παιχνίδι με άπειρους στο πλήθος παίκτες, οι οποίοι είναι **όμοιοι** μεταξύ τους, δηλαδή οι οποίοι έχουν την ίδια συνάρτηση ωφέλειας και το ίδιο σύνολο στρατηγικών. Αν συμβολίσουμε με $\boldsymbol{F}$ την **κοινή συνάρτηση ωφέλειας** και με A το **κοινό σύνολο στρατηγικών**, τότε το $F(a,b)$, όπου $a,b \in A$, είναι η ωφέλεια ενός παίκτη που χρησιμοποιεί την στρατηγική a, όταν όλοι οι άλλοι παίκτες χρησιμοποιούν την στρατηγική b. Με βάση αυτά, έχουμε τον επόμενο Ορισμό:

Ορισμός 6. *Η $a \in A$ ονομάζεται* **συμμετρική στρατηγική ισορροπίας (symmetric equillibrium strategy)**, *αν $F(a,a) \geq F(b,a)$, για κάθε b.*

Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής θα ασχοληθούμε με την περίπτωση συστημάτων ουρών αναμονής, αποτελούμενα από δύο $M|M|1$ ουρές σε σειρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_1 και μ_2 αντίστοιχα. Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση τέτοιων συστημάτων θα περιγράψουμε το βασικό πλαίσιο, χρησιμοποιώντας την $M|M|1$ ουρά.

1.3.1 Πληροφορία και στρατηγικές

Έχοντας ως βασικό παράδειγμα την $M|M|1$ ουρά, θα εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις ως προς το επίπεδο πληροφορίας που λαμβάνουν οι πελάτες κατά την άφιξή τους:

1. **Παρατηρήσιμη ουρά (Observable Queue):** Είναι η περίπτωση όπου οι πελάτες (τους οποίους ονομάζουμε **παρατηρούντες**) παρατηρούν πρώτα

το μήκος ουράς και μετά αποφασίζουν αν θα μπουν ή όχι. Άρα, οι **στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι παρατηρούντες πελάτες** μπορεί να είναι **στρατηγικές κατωφλίου** (δηλαδή ο πελάτης επιλέγει ως στρατηγική έναν φυσικό αριθμό n, και αν παρατηρήσει μήκος ουράς το πολύ n, τότε μπαίνει στο σύστημα, διαφορετικά δεν μπαίνει). Γενικότερα μια στρατηγική είναι ένα διάνυσμα $(q_0, q_1, q_2, \ldots)$, όπου q_i είναι η πιθανότητα εισόδου για έναν πελάτη που βλέπει i πελάτες κατά την άφιξή του. Μια στρατηγική κατωφλίου αντιστοιχεί σε στρατηγική τύπου $(1, 1, 1, \ldots, 0, 0, 0, \ldots)$.

2. **Μη-παρατηρήσιμη ουρά (Unobservable Queue):** Σε αυτή την περίπτωση, οι πελάτες (τους οποίους ονομάζουμε **μη- παρατηρούντες**) δεν μπορούν να παρατηρήσουν το μήκος ουράς πριν εισέλθουν στο σύστημα. Οι μη-παρατηρούντες πελάτες αποφασίζουν αν θα μπουν στο σύστημα επιλέγοντας μια πιθανότητα εισόδου, έστω q (δηλαδή οι **διαθέσιμες στρατηγικές για τους μη-παρατηρούντες πελάτες** είναι όλα τα $\boldsymbol{q} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$).

3. **Μερικώς παρατηρήσιμη ουρά (Partially Observable Queue):** Σε αυτή την περίπτωση, οι πελάτες λαμβάνουν κάποια λιγότερο σαφή πληροφορία από την ακριβή κατάσταση του συστήματος. Για παράδειγμα, μπορεί να γνωρίζουν αν υπάρχουν το πολύ n πελάτες ή όχι.

Ο επόμενος ορισμός εισάγει ένα είδος στρατηγικών που θα μας χρειαστούν παρακάτω:

Ορισμός 7.

- *Μια* **καθαρή στρατηγική (ή πολιτική) κατωφλίου** *(pure threshold strategy) με κατώφλι $n \in \mathbb{N}$, καθορίζει μια ενέργεια A για τις καταστάσεις $0, 1, \ldots, n-1$ του συστήματος και μια άλλη ενέργεια B για τις υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος (δηλαδή τις $n, n+1, \ldots$).*

- *Μια* **μεικτή στρατηγική (ή πολιτική) κατωφλίου** *(mixed threshold strategy) με κατώφλι $r = n + p$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1)$, ορίζει μια μίξη μεταξύ των* *δύο καθαρών στρατηγικών κατωφλίου n και $n+1$, έτσι ώστε η στρατηγική n να έχει πιθανότητα $1-p$ και η στρατηγική $n+1$ να έχει πιθανότητα p, με αποτέλεσμα η r να καθορίζει:*

- *μια ενέργεια A για τις καταστάσεις του συστήματος $0, 1, \ldots, n-1$*
- *τυχαία επιλογή μεταξύ των A και B (η A επιλέγεται με πιθανότητα p και η B με πιθανότητα $1-p$), όταν η κατάσταση του συστήματος είναι n*
- *μια ενέργεια B για τις υπόλοιπες καταστάσεις του συστήματος (δηλαδή τις $n+1, n+2, \ldots$).*

Άρα λοιπόν:

- Μια καθαρή στρατηγική κατωφλίου n λέει στον πελάτη να δράσει ως εξής: Αν η κατάσταση του συστήματος είναι $< n$, διάλεξε την q, και αν η κατάσταση του συστήματος είναι $\geq n$, διάλεξε την q'.
- Μια μεικτή στρατηγική κατωφλίου $r = n + p$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1)$, λέει στον πελάτη:

  Αν η κατάσταση του συστήματος είναι $< n$, διάλεξε το q, αν η κατάσταση του συστήματος είναι n, διάλεξε το q με πιθανότητα p και το q' με πιθανότητα $1-p$, και αν η κατάσταση του συστήματος είναι $> n$, διάλεξε το q'.

1.3.2 Στασιμότητα

Στις ουρές με παρατηρούντες πελάτες, κάθε καθαρή στρατηγική ορίζει μια επιλογή (π.χ. "θα μπω στην ουρά" ή "δεν θα μπω στην ουρά") για κάθε κατάσταση του συστήματος. Μια στρατηγική κατάσταση και μια αρχική κατάσταση $Q(0)$ επάγουν μια κατανομή πιθανότητας πάνω στις καταστάσεις του συστήματος. Έτσι, **η ωφέλεια ενός πελάτη εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος, την στρατηγική που ακολουθεί ο ίδιος και τις στρατηγικές που ακολουθούν οι υπόλοιποι πελάτες**, και κάθε πελάτης ενδιαφέρεται για τη δική του αναμενόμενη ωφέλεια (τη μέση τιμή την παίρνουμε πάνω στις καταστάσεις του συστήματος και τις ενέργειες που καθορίζει για την κάθε κατάσταση η στρατηγική που χρησιμοποιεί ο πελάτης).

Έστω ότι η ωφέλεια ενός πελάτη που χρησιμοποιεί τη στρατηγική $a \in A$, όταν οι υπόλοιποι πελάτες χρησιμοποιούν τη στρατηγική $b \in A$, $a, b \in A$, είναι $F(a, b)$. Όταν υπολογίζουμε την αναμενόμενη ωφέλεια ένος πελάτη, υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι σε **κατάσταση στασιμότητας**. Ο όρος "κατάσταση στασιμότητας" έχει τη συνήθη έννοια, δηλαδή σημαίνει ότι η κατανομή πιθανότητας πάνω στις καταστάσεις του συστήματος είναι η οριακή κατανομή. Ένας πελάτης λοιπόν, υποθέτει ότι **η κατανομή πιθανότητας πάνω στις καταστάσεις του συστήματος είναι η οριακή κατανομή**[20].

Παράδειγμα 1. *Θεωρούμε μια $M|M|1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, στην οποία κάθε πελάτης που φτάνει στο σύστημα, παρατηρεί πρώτα το μήκος ουράς και μετά αποφασίζει αν θα μπει στην ουρά για να εξυπηρετηθεί ή όχι (είμαστε δηλαδή στην περίπτωση των παρατηρούντων πελατών). Άρα, το σύνολο των αποφάσεων/ενεργειών των πελατών είναι $A = \{a_1, a_2\}$, όπου $a_1 =$ "Θα μπω στην ουρά." και $a_2 =$ "Δεν θα μπω στην ουρά.".*

Έστω $b \in A$ και ας συμβολίσουμε με $b(n)$ την επιλογή που κάνει ένας πελάτης που χρησιμοποιεί την b, όταν η κατάσταση του συστήματος είναι η $n \in \mathbb{N}$. Για ευκολία ας θεωρήσουμε ότι η b είναι καθαρή στρατηγική, δηλαδη σε κάθε κατάσταση n, το $b(n)$ είναι είτε η a_1 είτε η a_2.

Αν όλοι οι πελάτες χρησιμοποιούν την b, τότε η b καθορίζει τις πιθανότητες μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων του συστήματος π.χ. αν $b(n) = a_2$, για $n \in \mathbb{N}$, τότε κανείς πελάτης δεν μπαίνει στο σύστημα και η κατάσταση του συστήματος είναι πάντα η 0, ενώ αν $b(n) = a_1$, για $n < 10$ και $b(n) = a_2$, για $n \geq 10$, τότε ένας πελάτης θα μπει στην ουρά μόνο αν το μήκος ουράς είναι < 10.

Έστω $p_n(b)$ η οριακή πιθανότητα της κατάστασης n, δεδομένης μιας οποιασδήποτε αρχικής κατάστασης και δεδομένου ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν την στρατηγική

[20] Δηλαδή $P(Q(t) = n) = P(Q = n) = p_n$ (σύμφωνα με τον συμβολισμό της Ενότητας 1.1).

b. Τότε ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά ενός πελάτη που χρησιμοποιεί τη στρατηγική a είναι:

$$E(W) = \sum_{n:a(n)=a_1} p_n(b)\frac{n+1}{\mu}.$$

1.3.3 Σύμφωνα με το πλήθος και Αντίθετα από το πλήθος

Σε πολλά μοντέλα ουρών, οι στρατηγικές μπορούν να παρασταθούν από έναν αριθμό, π.χ. στις ουρές με παρατηρούντες πελάτες, οι στρατηγικές κατωφλίου αντιστοιχούν σε φυσικούς αριθμούς, και στις ουρές με μη-παρατηρούντες πελάτες, οι στρατηγικές παριστάνονται με σημεία του [0,1]. Σε τέτοια μοντέλα, όπου ο χώρος των διαθέσιμων στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος, έχει νόημα να θέτουμε ερωτήματα της μορφής "Είναι η βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη αύξουσα (ή φθίνουσα) συνάρτηση της στρατηγικής που χρησιμοποιούν οι άλλοι πελάτες;".

Έστω ότι ένας πελάτης χρησιμοποιεί τη στρατηγική $a \in A$, ενώ όλοι άλλοι πελάτες χρησιμοποιούν τη στρατηγική $b \in A$. Τότε η ωφέλεια του πελάτη αυτού είναι $F(a, b)$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε b υπάρχει μια μοναδική βέλτιστη απάντηση $a(b) : a(b) = \arg\max_a F(a, b)$ στην b και ότι η $a(b)$ είναι γνησίως μονότονη. Όταν η $a(b)$ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα), τότε όσο πιο μεγάλο είναι το b, τόσο πιο μεγάλη (αντίστοιχα μικρή) είναι η βέλτιστη απάντηση του πελάτη στην b, δηλαδή, όπως λέμε, ο πελάτης ακολουθεί το πλήθος (αντίστοιχα αποφεύγει το πλήθος), δηλαδή κάνει ό,τι κάνουν και οι άλλοι πελάτες (αντίστοιχα κάνει το αντίθετο από αυτό που κάνουν οι άλλοι πελάτες). Έτσι, η περίπτωση που η $a(b)$ είναι γνησίως αύξουσα καλείται **Σύμφωνα με το πλήθος (ΣΜΤΠ (Follow The Crowd))** και η περίπτωση που είναι γνησίως φθίνουσα καλείται **Αντίθετα από το πλήθος (ΑΑΤΠ (Avoid The Crowd))**.

Μια στρατηγική ισορροπίας b ικανοποιεί την $a(b) = b$, δηλαδή είναι ένα σταθερό σημείο της συνάρτησης a. **Στην περίπτωση ΣΜΤΠ είναι δυνατόν να υπάρχουν πάνω από μία στρατηγικές ισορροπίας, ενώ στην περίπτωση ΑΑΤΠ υπάρχει το πολύ μία στρατηγική ισορροπίας.**

1.4 Στρατηγική ανάλυση συστημάτων εξυπηρέτησης σε σειρά

1.4.1 Ιστορική αναδρομή

Όταν η συνολική αξία της εξυπηρέτησης ενός πελάτη συνίσταται από την ολοκλήρωση επιμέρους εξυπηρετήσεων, λέμε ότι αυτές οι εξυπηρετήσεις είναι συμπληρωματικές. Όταν η σειρά των λαμβανώμενων εξυπηρετήσεων είναι προκαθορισμένη, τότε έχουμε τις ουρές σε σειρά. Ως δίκτυο, οι ουρές σε σειρά παρουσιάζονται σαν κατευθυνόμενο μονοπάτι. Υπάρχουν πολλοί που ασχολήθηκαν με το συγκεριμένο κομμάτι της θεωρίας ουρών αναμονής σε συνδυασμό με τη θεωρία παιγνίων.

Οι Parlakt*ü*rk και Kumar (2004) θεώρησαν ένα σύστημα με δύο υπηρέτες, εξυπηρέτηση δύο σταδίων και τυχαία διαδικασία αφίξεων. Το πρώτο στάδιο της εξυπηρέτησης παίρνει χρόνο m_f, και το δεύτερο παίρνει χρόνο m_s, ανεξάρτητα από τον υπηρέτη που αναλαμβάνει την εξυπηρέτηση. Και οι δύο υπηρέτες είναι ικανοί να πραγματοποιήσουν και τα δύο στάδια, αλλά τα δύο μέρη της εξυπηρέτησης πρέπει να πραγματοποιηθούν από διαφορετικούς υπηρέτες για κάθε δεδομένο πελάτη. Οι υπηρέτες έχουν ξεχωριστές ουρές και η πειθαρχία της εξυπηρέτησης μπορεί να διακρίνει τους πελάτες που αναζητούν να αποκτήσουν το πρώτο στάδιο της εξυπηρέτησής τους από αυτούς που φτάνουν για το δεύτερο στάδιο της εξυπηρέτησής τους. Η απόφαση ενός πελάτη σε ποια ουρά να εισέλθει πρώτα εξαρτάται από τα παρατηρούμενα μήκη των ουρών και τους υπολειπόμενους χρόνους εξυπηρέτησης και των δύο υπηρετών. Ο διαχειριστής της ουράς αποφασίζει τον κανόνα προτεραιότητας στις ουρές, χωρίζοντας τους πελάτες σε πρώτου και δεύτερου σταδίου. Καθώς ο κανόνας προτεραιότητας επιτρέπει τις προσπεράσεις, η απόφαση ενός αφιχθέντα πελάτη επίσης εξαρτάται από τις στρατηγικές των μελλοντικών αφίξεων, και έτσι οι συγγραφείς αναζητούν (καθαρή) στρατηγική ισορροπίας των πελατών και κανόνα προτεραιότητας που επάγουν καλή (κοινωνική) απόδοση στην κατάσταση της στρατηγικής ισορροπίας. Δύο φυσικοί κανόνες προτεραιότητας φαίνεται να μην είναι ικανοποιητικοί σε αυτή την περίπτωση : Η απόδοση προτεραιότητας στους πελάτες δεύτερου σταδίου και η πειθαρχία FIFO. Παρ' όλα αυτά οι συγγραφείς αναπτύσουν έναν κανόνα ρύθμισης φόρτου εργασίας ο οποίος παρακινεί τις αφίξεις να χωριστούν ομοιόμορφα και αποφεύγει την αργία του υπηρέτη. Ο κανόνας γενικά δίνει προτεραιότητα στους πελάτες δεύτερου σταδίου. Όταν όμως ο αριθμός των πελατών δεύτερου σταδίου σε μία από τις ουρές είναι μικρός προτεραιότητα δίνεται στους πελάτες πρώτου σταδίου στην άλλη ουρά. Αποδεικνύεται ότι τα αναμενόμενα μήκη ουρών κάτω από αυτόν τον κανόνα δεν είναι πολύ μεγαλύτερα από αυτά που θα προέκυπταν από κάποια θεωρητικά αποδειχθέντα κάτω όρια.

Οι D' Auria και Kanta (2015) θεώρησαν στρατηγικές κατωφλίου για την είσοδο ή όχι σε ένα μαρκοβιανό μοντέλο αποτελούμενο από δύο ουρές σε σειρά και ομογενείς πελάτες. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης του πρώτου υπηρέτη είναι μ_1 και του δεύτερου μ_2. Η αξία της εξυπηρέτησης είναι R και η αναμονή στην ουρά i κοστίζει C_i ανά μονάδα χρόνου. Η απόφαση για το αν θα εισέλθει στο σύστημα ή θα φύγει πριν μπει σε αυτό, λαμβάνεται κατά την άφιξη και επαναπροσπάθεια δεν είναι δυνατή. Οι συγγραφείς υπολογίζουν το σημείο στρατηγικής ισορροπίας τύπου κατωφλίου υποθέτωντας ότι οι πελάτες γνωρίζουν το συνολικό αριθμό των πελατών στο σύστημα, αλλά όχι πόσοι υπάρχουν στην κάθε ουρά. Βρίσκουν ότι η πιθανότητα ενός δεδομένου μήκους της πρώτης ουράς δεδομένου του γνωστού συνολικού μήκους των ουρών είναι ανεξάρτητη από το κατώφλι του πελάτη. Αυτή η ιδιότητα οδηγεί σε μία απόδειξη για την ύπαρξη μιας κυριαρχούσας στρατηγικής τύπου κατωφλίου.

Ο Burnetas (2013) ερεύνησε ένα δίκτυο από N ουρές σε σειρά με πολλαπλούς υπηρέτες. Η παραμονή στην n-οστή ουρά κοστίζει C_n ανά μονάδα χρόνου και η λήψη εξυπηρέτησης επάγει αμοιβή R_n. Οι πελάτες αποφασίζουν, πριν εισέλθουν, από ποιο σύνολο, από το 1 μέχρι το n, συνεχώμενων ουρών θα περάσουν. Μία στρατηγική χαρακτηρίζεται γι' αυτό το λόγο από ένα διάνυσμα $(x_1, \ldots, x_N)$, όπου x_n είναι η πιθανότητα ο πελάτης να περάσει από τις ουρές 1 μέχρι τουλάχιστον και την n. Προφανώς $1 \geq x_1 \geq \ldots \geq x_N \geq 0$. Ο συγγραφέας αποδεικνύει ότι υπάρχει ένα μοναδικό συμμετρικό σημείο στρατηγικής ισορροπίας $(x_1^e, \ldots, x_N^e)$. Συγκρινόμενο με την κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική $(x_1^*, \ldots, x_N^*)$ δείχνεται ότι $x_n^* \leq x_n^e$ για κάθε $n = 1, \ldots, N$.

Οι Arlotto, Frazelle και Wei (2015) θεώρησαν παραλλαγές του ακόλουθου σεναρίου. Πελάτες χρειάζονται εξυπηρέτηση από δύο σταθμούς, A και B, αλλά είναι ελεύθεροι να επιλέξουν την σειρά με την οποία θα επισκεφτούν τον καθένα τους. Οι αφίξεις είναι Poisson, η εξυπηρέτηση είναι ντετερμινιστική και οι ρυθμοί άφιξης και εξυπηρέτησης ικανοποιούν τις ανισότητες $\mu_B > \mu_A$ και $\lambda \geq \mu_A$. Ο δεύτερος ισχυρισμός σημαίνει ότι η ουρά είναι υπερφορτωμένη, αλλά η ανάλυση εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε δεδομένη κατάσταση του συστήματος. Οι πελάτες που καταφθάνουν παρατηρούν το φόρτο εργασίας και στους δύο σταθμούς, πριν αποφασίσουν αν θα εισέλθουν πρώτα στην ουρά A ή στη B με το σκοπό τους να είναι να ελαχιστοποιήσουν τον χρόνο αναμονής. Οι συγγραφείς αποδεικνύουν ότι η στρατηγική " επίσκεψη στο σταθμό A πρώτα " ανεξάρτητα από την κατάσταση του συστήματος είναι μία στρατηγική ισορροπίας.

1.4.2 Το μοντέλο

Το μοντέλο που θα μελετήσουμε στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας αποτελείται από δύο ουρές $M|M|1$ τοποθετημένες σε σειρά. Ο ρυθμός αφίξεων είναι λ και οι ρυθμοί εξυπηρέτησης είναι μ_1, μ_2 αντίστοιχα. Στο σύστημα φτάνουν πελάτες, οι οποίοι αποφασίζουν αν θα μπουν σε αυτό. Ένας πελάτης που μπαίνει στο σύστημα, δεν μπορεί να φύγει πριν εξυπηρετηθεί. Έστω R το κέρδος που έχει ένας πελάτης από την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του στο σύστημα και C_i : το κόστος αναμονής ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σταθμό i, $i = 1, 2$. Θα συμβολίζουμε με $N_i(t)$ το πλήθος των πελατών στο σταθμό i, $i = 1, 2$. και συνεπώς το ζευγάρι $\{(N_1(t), N_2(t))\}$ αποτελεί μια Μ.α.σ.χ.

Τα επίπεδα πληροφόρησης που μπορούμε να συναντήσουμε σε αυτό το μοντέλο είναι τα εξής:

- Πλήρως παρατηρήσιμο δίκτυο: όπου ο πελάτης κατά την άφιξή του γνωρίζει το πλήθος των πελατών και στους δύο σταθμούς $(N_1(t), N_2(t))$.

- Μη-παρατηρήσιμο δίκτυο: όπου ο πελάτης κατά την άφιξή του δεν έχει καμία πληροφορία για την κατάσταση του συστήματος.
- Μερικώς παρατηρήσιμο δίκτυο: όπου ο πελάτης κατά την άφιξή του έχει μερική πληροφορία για την κατάσταση του συστήματος και διακρίνεται στις εξής υποπεριπτώσεις:
  - Περίπτωση 1: να γνωρίζει το πλήθος πελατών στον πρώτο σταθμό $N_1(t)$
  - Περίπτωση 2: να γνωρίζει το πλήθος πελατών στον δεύτερο σταθμό $N_2(t)$
  - Περίπτωση 3: να γνωρίζει το πλήθος πελατών στον σύστημα, αλλά όχι το πως αυτοί κατανέμονται στους δύο σταθμούς $N_1(t) + N_2(t)$

Κεφάλαιο 2

Παρατηρήσιμη περίπτωση σειριακών συστημάτων

Θεωρούμε ένα σειριακό δίκτυο με δύο ουρές, όπου η καθεμία έχει από έναν υπηρέτη, άπειρη χωρητικότητα και χρόνους εξυπηρέτησης ανεξάρτητους και εκθετικά κατανεμημένους. Χρησιμοποιώντας το γράμμα l, με $l = 1, 2$ για να αναφερόμαστε στην πρώτη ή στη δεύτερη ουρά, συμβολίζουμε με μ_l το ρυθμό εξυπηρέτησης στην ουρά l. Πελάτες φτάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και πριν εισέλθουν στο σύστημα παρατηρούν ολόκληρη την κατάστασή του, δηλαδή τον αριθμό πελατών που βρίσκονται σε κάθε ουρά. Η καθαρή στρατηγική κατωφλίου, σε αυτή την περίπτωση, ορίζεται από το ζευγάρι (n, m), το οποίο σημαίνει ότι ο πελάτης αποφασίζει να μπει μέσα στο σύστημα αν ο αριθμός των πελατών στην πρώτη ουρά είναι το πολύ n (συμπεριλαμβανομένου και του εαυτού του) και το πολύ m στην δεύτερη ουρά, αλλιώς εγκαταλείπει το σύστημα χωρίς να εισέλθει σε αυτό. Ένας επιλεγμένος (tagged) πελάτης που μόλις φτάνει, αν αποφασίσει να μπει, παίρνει αμοιβή R για την εξυπηρέτησή του στο δίκτυο, και υφίσταται κόστος C_l ανά μονάδα χρόνου παραμονής του στο σταθμό l. Συνεπώς, το καθαρό κέρδος του, αν μπει, είναι $R - C_1S_1 - C_2S_2$, όπου με S_l συμβολίζουμε τους χρόνους παραμονής του πελάτη στο σταθμό l.

Σκοπός είναι η εύρεση στρατηγικών ισορροπίας στο δίλημμα εισόδου/αποχώρησης των πελατών. Θα περιορίσουμε την αναζήτησή μας στην κλάση των στρατηγικών τύπου κατωφλίου.

Ο επιλεγμένος πελάτης παίρνει την απόφασή του βελτιστοποιώντας το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του, δεδομένης της πληροφορίας που λαμβάνει κατά το χρόνο άφιξής του και η οποία είναι ο αριθμός πελατών στο δίκτυο (Q_1, Q_2). Το καθαρό κέρδος ενός επιλεγμένου πελάτη που βλέπει κατά την άφιξή του $n-1$ πελάτες στον πρώτο σταθμό και m πελάτες στο δεύτερο είναι:

$$P_o(n,m) = R - C_1\frac{n}{\mu_1} - C_2T_2(n,m) = R - (C_1 - C_2)\frac{n}{\mu_1} - C_2T(n,m), \quad (2.1)$$

όπου $T_1(n,m) = \frac{n}{\mu_1}$ είναι ο μέσος χρόνος παραμονής στον πρώτο σταθμό, $T_2(n,m)$ ο μέσος χρόνος παραμονής στον δεύτερο σταθμό και $T(n,m) = T_1(n,m) + T_2(n,m)$.

Αν αποφαίσει να μην εισέλθει στο σύστημα το καθαρό του κέρδος θα είναι μηδέν. Ο επιλεγμένος πελάτης θα αποφασίσει να εισέλθει στο σύστημα μόνο εάν το καθαρό του κέρδος είναι θετικό. Φυσικά για έναν τέτοιο πελάτη οι αποφάσεις των μελλοντικών αφίξεων δε θα επηρεάσουν τον χρόνο παραμονής του στο σύστημα.

Το κύριο απότελεσμα είναι ότι το σειριακό δίκτυο έχει μια καθαρή στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου. Δηλαδή, για κάθε αριθμό n πελατών που βρίσκει ο πελάτης στην πρώτη ουρά, αποφασίζει να εισέλθει μόνο αν ο αριθμός των πελατών στην δεύτερη ουρά είναι το πολύ $m^*(n)$. Ο αριθμός $m^*(n)$ χαρακτηρίζεται ως το μοναδικό $m^*(n)$ τέτοιο ώστε

$$P_o(n, m^*(n)) \geq 0 \text{ και } P_o(n, m^*(n)+1) < 0,$$

όπου $P_o(n,-1) = 0$. Αν $m^*(n) = -1$, τότε ο επιλεγμένος πελάτης που βρίσκει n πελάτες στην πρώτη ουρά αποφασίζει να φύγει ανεξάρτητα από τον αριθμό πελατών στην δεύτερη ουρά.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι

$$R > C_1/\mu_1 + C_2/\mu_2.$$

Αν δεν ισχύει η σχέση αυτή, ο πελάτης αναμένει μέσο αρνητικό κέρδος από το δίκτυο ακόμα και αν μπαίνοντας σε αυτό το βρει άδειο. Οπότε, στην περίπτωση που $R \leq C_1/\mu_1 + C_2/\mu_2$, η προφανής στρατηγική ισορροπίας είναι η στρατηγική της σίγουρης αποχώρησης.

2.1 Μέσοι Χρόνοι Παραμονής και Στρατηγική Ι-σορροπίας

Συμβολίζουμε με $S_l(n, m)$ τους χρόνους παραμονής στο σταθμό l του επιλεγμένου πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα όντας στην κατάσταση $(n - 1, m)$, το οποίο δηλώνει ότι πρόκειται να πάρει την θέση n στην πρώτη ουρά. Συμβολίζουμε με $T_l(n, m) = E[S_l(n, m)]$ τον αντίστοιχο αναμενόμενο χρόνο παραμονής και $T(n, m) = T_1(n, m) + T_2(n, m)$ τον συνολικό αναμενόμενο χρόνο παραμονής. Ο χρόνος παραμονής στην πρώτη ουρά ακολουθεί την κατανομή Erlang, συμβολικά $S_1(n, m) \sim Erlang(n, \mu_1)$, με μέση τιμή $T_1(n, m) = n/\mu_1$. Ο συνολικός χρόνος παραμονής μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά εφαρμόζοντας ανάλυση πρώτου βήματος η οποία οδηγεί στον τύπο

$$T(n, m) = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} T(n - 1, m + 1) + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} T(n, m - 1), n, m > 0. \tag{2.2}$$

Ο πρώτος όρος αναφέρεται στο μέσο χρόνο ως το επόμενο γεγονός που μπορεί να είναι ολοκλήρωση εξυπηρέτησης στο σταθμό 1 ή 2. Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέρος της παραπάνω σχέσης αντιστοιχεί σε πιθανή αναχώρηση από την πρώτη ουρά και ο τελευταίος όρος σε πιθανή αναχώρηση από την δεύτερη ουρά. Αυτά τα ενδεχόμενα εμφανίζονται με πιθανότητα $\mu_l/(\mu_1 + \mu_2), l = 1, 2$ αντίστοιχα. Για να ολοκληρώσουμε την αναδρομή χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες

$$T(0,m) = \frac{m}{\mu_2};\ T(n+1,0) = \frac{1}{\mu_1} + T(n,1),\ n,m > 0. \tag{2.3}$$

Η πρώτη ισότητα στηρίζεται στο γεγονός ότι $S_2(0,m) \sim Erlang(m,\mu_2)$. Η δεύτερη σημαίνει ότι αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $(n+1,0)$, τότε ο μέσος χρόνος παραμονής του $(n+1)$ πελάτη θα είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη που βρίσκεται πρώτος στον πρώτο σταθμό που είναι $\frac{1}{\mu_1}$, συν το μέσο συνολικό χρόνο παραμονής των πελατών της νέας κατάστασης του συστήματος $(n,1)$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2) καταλήγουμε σε έναν αναδρομικό τύπο για να υπολογίσουμε τα $T(n,m), T_2(n,m)$, όπως αποδεικνύεται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 1. *Ο αναμενόμενος συνολικός χρόνος παραμονής στο σύστημα,* $T(n,m)$*, και ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο δεύτερο σταθμό,* $T_2(n,m)$*, μπορούν να υπολογιστούν από τους αναδρομικούς τύπους*

$$T(n,m) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\mu_2^m}{(\mu_1+\mu_2)^m} T(n-1,1) + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\mu_2^i}{(\mu_1+\mu_2)^i} T(n-1,m+1-i),$$

$$T_2(n,m) = \frac{\mu_2^m}{(\mu_1+\mu_2)^m} T_2(n-1,1) + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\mu_2^k}{(\mu_1+\mu_2)^k} T_2(n-1,m+1-k), \tag{2.4}$$

που ισχύει για $n > 0$ *και*

$$T(0,m) = T_2(0,m) = \frac{m}{\mu_2},$$

με $m \geq 0$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.2) έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
T(n,m) &= \frac{1}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}T(n-1,m+1) + \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}T(n,m-1) \\
&= \frac{1}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}T(n-1,m+1) + \\
&\quad \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\left(\frac{1}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}T(n-1,m) + \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}T(n,m-2)\right) \\
&= \frac{1}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}T(n-1,m+1) + \frac{\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2} + \\
&\quad \frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2}T(n-1,m) + \frac{\mu_2^2}{(\mu_1+\mu_2)^3} + \frac{\mu_1\mu_2^2}{(\mu_1+\mu_2)^3}T(n-1,m-1) + \\
&\quad \frac{\mu_2^3}{(\mu_1+\mu_2)^3}T(n,m-3) \\
&= \frac{1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\mu_2^i}{(\mu_1+\mu_2)^i} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\mu_2^i}{(\mu_1+\mu_2)^i}T(n-1,m+1-i) + \\
&\quad \frac{\mu_2^m}{(\mu_1+\mu_2)^m}T(n,0) \\
&= \frac{(\mu_1+\mu_2)^m-\mu_2^m}{(\mu_1+\mu_2)^m\mu_1} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\mu_2^i}{(\mu_1+\mu_2)^i}T(n-1,m+1-i) + \\
&\quad \frac{\mu_2^m}{(\mu_1+\mu_2)^m\mu_1} + \frac{\mu_2^m}{(\mu_1+\mu_2)^m}T(n-1,1) \\
&= \frac{1}{\mu_1} + \frac{\mu_2^m}{(\mu_1+\mu_2)^m}T(n-1,1) + \\
&\quad \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\mu_2^i}{(\mu_1+\mu_2)^i}T(n-1,m+1-i)
\end{aligned}
$$

Για τη δεύτερη σχέση, γνωρίζουμε ότι $T_1(n,m) = n/\mu_1$ και $T(n,m) = T_1(n,m) + T_2(n,m)$. Με απλές πράξεις καταλήγουμε στην σχέση (2.4). □

Με βάση τα παραπάνω αναδρομικά σχήματα είναι εύκολος ο υπολογισμός των κατωφλίων $m^*(n)$ που δίνουν την στρατηγική ισορροπίας στην παρατηρήσιμη περίπτωση.

Στο υπόλοιπο της παραγράφου μελετάμε ιδιότητες μονοτονίας των $T-$συναρτήσεων, που θα φανούν χρήσιμες στην μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση. Το ακόλουθο Λήμμα χαρακτηρίζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες οι $T-$συναρτήσεις είναι μονότονα αύξουσες ως προς τη μεταβλητή n. Αυτές οι συνθήκες είναι απαραίτητες για την παρακάτω ανάλυσή μας.

Λήμμα 2. *Οι συναρτήσεις* $T_1(n, m)$ *και* $T(n, k-n)$ *είναι αύξουσες ως προς* n. *Η συνάρτηση* $T_2(n, m)$ *είναι αύξουσα ως προς* n *αν και μόνο αν* $\mu_1 \geq \mu_2$.

Απόδειξη. Για την συνάρτηση $T_1(n, m)$ προφανώς ισχύει η υπόθεση, αφού $T_1(n, m) = n/\mu_1$ ανεξάρτητο του m.

Ένας τρόπος για να δείξουμε ότι η $T(n, k-n)$ είναι αύξουσα ως προς n, για $n \leq k$ είναι να αποδείξουμε ότι $T(n+1, m) \geq T(n, m+1)$ χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.2) και (2.3). Θα προτιμήσουμε ένα επιχείρημα ζεύξης. Χρησιμοποιώντας τον ίδιο χώρο πιθανότητας, κατασκευάζουμε δύο δίκτυα ξεκινώντας αντίστοιχα με $(n+1, m)$ και $(n, m+1)$ αρχικούς χρήστες. Η απόδειξη συνάγεται συγκρίνοντας τους χρόνους αναμονής των πελατών που είναι τελευταίοι στην πρώτη ουρά και των δύο δικτύων και δείχνοντας ότι ο πελάτης στο πρώτο δίκτυο περιμένει περισσότερο από τον αντίστοιχο στο δεύτερο. Για να κατασκευάσουμε τη ζεύξη υποθέτουμε ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης για όλους τους πελάτες είναι οι ίδιοι και στα δύο δίκτυα, αλλά μετακινούμε τον πελάτη που είναι στην εξυπηρέτηση της πρώτης ουράς του πρώτου δικτύου στο τέλος της δεύτερης ουράς του δεύτερου δικτύου. Αφού οι χρόνοι εξόδου καθορίζονται από την FIFO πειθαρχία και επειδή ο πελάτης που μετακινήθηκε μειώνει τον χρόνο παραμονής του κατά τον χρόνο εξυπηρέτησής του στην πρώτη ουρά, το αποτέλεσμα ισχύει.

Τέλος, για να δείξουμε ότι $T_2(n, m)$ είναι αύξουσα ως προς n για $\mu_1 \geq \mu_2$ θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Για να είναι αύξουσα θα πρέπει $T_2(n+1, m) \geq T(n, m)$ για κάθε $n, m \geq 0$, δηλαδή $\Delta_1 T_2(n, m) \geq 0$ για κάθε $n, m \geq 0$, όπου $\Delta_1 T_2(n, m) = T_2(n+1, m) - T_2(n, m)$. Για $n = 0$, θα δείξουμε ότι $\Delta_1 T_2(0, m) \geq 0$

για κάθε m. Από τη σχέση (2.4) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 T_2(0,m) &= T_2(1,m) - T_2(0,m) \\
&= \left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^m T_2(0,1) + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{k=0}^{m-1}(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2})^k T_2(0,m+1-k) - \frac{m}{\mu_2} \\
&= (\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2})^m \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^k \frac{m+1-k}{\mu_2} - \frac{m}{\mu_2} \\
&= (\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2})^m \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\frac{m}{\mu_2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^k + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} \\
&\quad \frac{1}{\mu_2}\sum_{k=0}^{m-1}(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2})^k - \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\frac{1}{\mu_2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^k k - \frac{m}{\mu_2}
\end{aligned}$$

Όμως:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1} x^k &= \frac{1-x^m}{1-x} \overset{d/dx}{\Rightarrow} \\
\sum_{k=0}^{m-1} kx^{k-1} &= \frac{-mx^{m-1}(1-x)+(1-x^m)}{(1-x)^2} \overset{\cdot x}{\Rightarrow} \\
\sum_{k=0}^{m-1} kx^k &= \frac{-mx^m(1-x)+x(1-x^m)}{(1-x)^2} \overset{x=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}}{\Rightarrow} \\
\sum_{k=0}^{m-1} k\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^k &= \frac{-m\mu_1\mu_2^m+\mu_2(\mu_1+\mu_2)^m-\mu_2^{m+1}}{\mu_1^2(\mu_2+\mu_1)^{m-1}}
\end{aligned}$$

και

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^k = \frac{(\mu_1+\mu_2)^m-\mu_2^m}{\mu_1(\mu_2+\mu_1)^{m-1}}.$$

Συνολικά θα έχουμε ότι

$$\Delta_1 T_2(0,m) = \frac{\mu_1(\mu_1+\mu_2)^m-\mu_2(\mu_1+\mu_2)^m+\mu_2^{m+1}}{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^m}.$$

Αν αντικαταστήσουμε $a=\mu_1/\mu_2$ η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\Delta_1 T_2(0,m) = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{a-1+(a+1)^{-m}}{a}\right).$$

Η παραπάνω ποσότητα είναι φθίνουσα για m. Για να δείξουμε ότι είναι μη αρνητική για κάθε τιμή του m παίρνουμε $m \longrightarrow \infty$, άρα $\lim_{m \longrightarrow \infty} \Delta_1 T_2(0, m) = \frac{a-1}{a}$ και για να είναι μη αρνητικό παίρνουμε την αναγκαία και ικανή συνθήκη $a \geq 1$.

Έστω ότι ισχύει $\Delta_1 T_2(n-1, m) \geq 0$ για κάθε m. Θα δείξουμε ότι $\Delta_1 T_2(n, m) \geq 0$ για κάθε m.

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 T_2(n,m) &= T_2(n+1,m) - T(n,m) \\
&= \left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^m T_2(n,1) + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^k T_2(n,m+1-k) - \\
&\quad \left[\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^m T(n-1,1) + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^k T_2(n,m+1-k)\right] \\
&= \left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^m \Delta_1 T_2(n-1,1) + \\
&\quad \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^k \Delta_1 T_2(n-1,m+1-k).
\end{aligned}
$$

Άρα έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 T_2(n,m) &= \left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^m \Delta_1 T_2(n-1,1) + \\
&\quad \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)^k \Delta_1 T_2(n-1,m+1-k). \quad (2.5)
\end{aligned}
$$

Επειδή όλοι οι συντελεστές των $\Delta_1 T_2(,)$ είναι θετικοί από την επαγωγική υπόθεση συμπεραίνουμε ότι $\Delta_1 T_2(n, m) \geq 0$ και άρα η επαγωγή ολοκληρώθηκε και το συμπέρασμα ισχύει. □

Είναι αναγκαία όμως η υπόθεση $\mu_1 \geq \mu_2$ για να είναι η $T_2(n, m)$ αύξουσα; Διαισθητικά είναι εύλογη, γιατί αν $\mu_1 < \mu_2$, δηλαδή ο δεύτερος υπηρέτης είναι πιο γρήγορος, υπάρχουν ενδείξεις ότι μπορεί να συμβαίνει $T_2(n, m) > T_2(n + 1, m)$. Για παράδειγμα, ας συγκρίνουμε δύο συστήματα όπου στο πρώτο υπάρχουν 3 πελάτες στην πρώτη ουρά και 1 στην δεύτερη και στο δεύτερο σύστημα υπάρχουν 4 πελάτες στην πρώτη ουρά και 1 στην δεύτερη. Όταν έρθει η σειρά να εξυπηρετηθεί στο σταθμό 2 ο τελευταίος πελάτης κάθε συστήματος, το δεύτερο σύστημα φαίνεται πλεονεκτικότερο γιατί η ύπαρξη περισσότερων πελατών στο πρώτο σταθμό του δεύτερου συστήματος δίνει περισσότερο χρόνο στον δεύτερο σταθμό να αδειάσει.

Κεφάλαιο 3

Μη-παρατηρήσιμη περίπτωση σειριακών συστημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου οι πελάτες κατά την άφιξή τους δεν λαμβάνουν καμία πληροφορία σχετικά με την κατάσταση του συστήματος. Η απόφαση που θα πρέπει να πάρουν είναι για το αν θα μπουν στο σύστημα ή θα αποχωρήσουν χωρίς να εισέλθουν σε αυτό.

3.1 Μέσοι Χρόνοι Παραμονής και Στρατηγική Ι-σορροπίας

Υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν την ίδια μεικτή στρατηγική q, που σημαίνει ότι εισέρχονται στο σύστημα με πιθανότητα q και αποχωρούν από αυτό πριν εισέλθουν με πιθανότητα $1 - q$. Κάτω από αυτή την στρατηγική, το σύστημα είναι ένα ανοιχτό δίκτυο Jackson, όπου η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson(λq). Για αυτό το σύστημα, ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων σε κάθε ουρά, λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις συνωστισμού, είναι λq. Συμβολίζοντας με $T_i, i = 1, 2$ τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στον σταθμό i του δικτύου, έχουμε ότι $T_i = (\mu_i - \lambda q)^{-1}$.

Θεωρούμε ένα πελάτη που εισέρχεται στο σύστημα. Αν αποφασίσει να εισέλθει, τότε το αναμενόμενο κέρδος του από το δίκτυο είναι $R - C_1T_1 - C_2T_2$, το οποίο μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$P_u(q) = R - \frac{C_1}{\mu_1 - \lambda q} - \frac{C_2}{\mu_2 - \lambda q}. \tag{3.1}$$

Υποθέτουμε ότι οι παράμετροι ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες

$$\mu_1 - \lambda > 0 \text{ και } \mu_2 - \lambda > 0, \tag{3.2}$$

διασφαλίζοντας ότι το σύστημα είναι σταθερό κάτω από οποιαδήποτε στρατηγική q που οι πελάτες μπορεί να ακολουθήσουν. Να επισημάνουμε ότι όταν αυτές οι συνθήκες ισχύουν τότε $\mu_1 + \mu_2 - 2\lambda > 0$.

Θεώρημα 1. *Θεωρούμε το μη-παρατηρήσιμο σύστημα δύο ουρών σε σειρά, όπου ισχύει η συνθήκη* (3.2). *Υπάρχει μία μοναδική στρατηγική ισορροπίας εισόδου με πιθανότητα q_e, όπου το q_e δίνεται από τον τύπο*

$$q_e = \begin{cases} 0 & , \text{αν } R \in [0, \frac{C_1}{\mu_1} + \frac{C_2}{\mu_2}] \\ q^* & , \text{αν } R \in [\frac{C_1}{\mu_1} + \frac{C_2}{\mu_2}, \frac{C_1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{C_2}{\mu_2 - \lambda}) \\ 1 & , \text{αν } R \in [\frac{C_1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{C_2}{\mu_2 - \lambda}, \infty) \end{cases} \tag{3.3}$$

όπου

$$q^* = \frac{R(\mu_1 + \mu_2) - (C_1 + C_2) - \sqrt{[R(\mu_1 - \mu_2) - (C_1 - C_2)]^2 + 4C_1C_2}}{2\lambda R} \tag{3.4}$$

Απόδειξη. θεωρούμε έναν πελάτη που φτάνει στο σύστημα όταν όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν την ίδια μεικτή στρατηγική q, δηλαδή εισέρχονται με πιθανότητα $q \in [0, 1]$. Το αναμενόμενο καθαρό του κέρδος, αν αποφασίσει να μπει, δίνεται από την σχέση (3.1). Προφανώς αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα εφόσον το καθαρό του κέρδος είναι μη-αρνητικό. Διαχωρίζουμε τρεις περιπτώσεις:

- Αν $R < \frac{C_1}{\mu_1} + \frac{C_2}{\mu_2}$, τότε το κέρδος του επιλεγμένου πελάτη είναι αρνητικό και η βέλτιστη απόφαση για αυτόν είναι να αποχωρήσει χωρίς να εισέλθει στο σύστημα. Η αποχώρηση τότε είναι μία κυριαρχούσα στρατηγική και το σύστημα παραμένει συνεχώς άδειο.

- Αν $R \in \left[\frac{C_1}{\mu_1} + \frac{C_2}{\mu_2}, \frac{C_1}{\mu_1-\lambda} + \frac{C_2}{\mu_2-\lambda}\right)$, τότε υπάρχει μία μοναδική τιμή του q τέτοια ώστε $P_u(q) = 0$. Πραγματικά, η εξίσωση $P_u(q) = 0$ είναι τετραγωνική και έχει δύο πραγματικές ρίζες. Η μία όμως ρίζα κάτω από την συνθήκη (3.2) είναι πάντα μεγαλύτερη από 1 και για αυτό δεν αποτελεί πιθανότητα. Έτσι, έχουμε μόνο μία ρίζα που είναι η q^*, όπως ορίστηκε στην (3.4). Για αυτή την τιμή της q, ο επιλεγμένος πελάτης είναι ουδέτερος ανάμεσα στο να εισέλθει στο σύστημα ή να αποχωρήσει από αυτό χωρίς να εισέλθει κι έτσι κάθε πιθανότητα εισόδου $q \in [0, 1]$ είναι βέλτιστη απάντηση. Η μοναδική στρατηγική που είναι η καλύτερη απάντηση ενάντια στον εαυτό της είναι η q^*. Έτσι, η $q_e = q^*$ είναι η στρατηγική ισορροπίας και αποδεικνύουμε τον δεύτερο κλάδο της (3.3).

- Αν $R \geq \frac{C_1}{\mu_1-\lambda} + \frac{C_2}{\mu_2-\lambda}$, τότε ακόμα και στην περίπτωση όπου όλοι οι πελάτες αποφασίσουν να εισέλθουν ($q = 1$) το καθαρό κέρδος του επιλεγμένου πελάτη είναι μη-αρνητικό, δηλαδή $P_u(q) \geq 0$, για κάθε $q \in [0, 1]$. Έτσι, η καλύτερη απάντηση για τον επιλεγμένο πελάτη είναι να εισέλθει (με πιθανότητα 1). Επομένως, το να εισέλθει είναι κυριαρχούσα στρατηγική.

$\square$

Παρατήρηση 3. *Η συνάρτηση $P_u(q)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς την στρατηγική q που ακολουθείται από τους άλλους πελάτες. Υποθέτουμε ότι όλοι εισέρχονται με πιθανότητα q. Τότε η ωφέλεια ενός επιλεγμένου πελάτη που εισέρχεται με πιθανότητα s είναι ίση με $sP_u(q)$. Συμβολίζουμε με $s^*(q)$ την βέλτιστη απάντηση του επιλεγμένου πελάτη ενάντια στην στρατηγική q που έχει επιλεχθεί από τους άλλους πελάτες. Είναι εύκολο να δούμε ότι $s^*(q) = 0$ όταν $q > q^*$ και $s^*(q) = 1$ όταν $q < q^*$. Όταν $q = q^* < 1$ όλες οι στρατηγικές είναι βέλτιστες απαντήσεις ενάντια στην q^* και άρα η q^* είναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση ενάντια στον εαυτό της, άρα και (συμμετρική) στρατηγική ισορροπίας. Έπεται ότι η* *συνάρτηση της βέλτιστης απάντησης είναι φθίνουσα ως προς* q, *το οποίο σημαίνει ότι το μοντέλο είναι της μορφής Αντίθετα με το Πλήθος (ATC). Είναι γνωστό ότι τα μοντέλα αυτού του είδους έχουν μοναδική στρατηγική ισορροπίας.*

Κεφάλαιο 4

Μερικώς παρατηρήσιμη περίπτωση σειριακών συστημάτων εξυπηρέτησης

Θεωρούμε ένα σειριακό δίκτυο με δύο ουρές, όπου η καθεμία έχει από έναν υπηρέτη, άπειρη χωρητικότητα και χρόνους εξυπηρέτησης ανεξάρτητους και εκθετικά κατανεμημένους. Χρησιμοποιώντας το γράμμα l, με $l = 1, 2$ για να αναφερόμαστε στην πρώτη ή στη δεύτερη ουρά, συμβολίζουμε με μ_l το ρυθμό εξυπηρέτησης στην ουρά l. Πελάτες φτάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και πριν εισέλθουν στο σύστημα λαμβάνουν μερική πληροφόρηση σχετικά με την κατάσταση του συστήματος. Ο χώρος καταστάσεων είναι $\mathbb{N}^2$ και περιλαμβάνει όλα τα πιθανά ζευγάρια (Q_1, Q_2) με Q_l το πλήθος πελατών στο σταθμό εξυπηρέτησης l. Ένας επιλεγμένος πελάτης που μόλις φτάνει, αν αποφασίσει να μπει, παίρνει αμοιβή R για την εξυπηρέτησή του στο δίκτυο, και υφίσταται κόστος C_l ανά μονάδα του χρόνου παραμονής του στο σταθμό l. Συνεπώς, το καθαρό κέρδος του, αν μπει, είναι $R - C_1S_1 - C_2S_2$, όπου με S_l συμβολίζουμε τους χρόνους παραμονής του πελάτη στο σταθμό l.

Σκοπός είναι η εύρεση στρατηγικών ισορροπίας στο δίλημμα εισόδου/αποχώρησης των πελατών. Θα περιορίσουμε την αναζήτησή μας στην κλάση των στρατηγικών τύπου κατωφλίου.

Ο επιλεγμένος πελάτης παίρνει την απόφασή του βελτιστοποιώντας το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του, δεδομένης της πληροφορίας που λαμβάνει κατά το χρόνο άφιξής του και η οποία είναι ο συνολικός αριθμός πελατών στο δίκτυο Q_1+Q_2. Το καθαρό κέρδος ενός επιλεγμένου πελάτη που βλέπει κατά την άφιξή του k πελάτες είναι

$$P_K(k) = R - C_1 T_{K,1}(k) - C_2 T_{K,2}(k), \tag{4.1}$$

όπου $T_{K,l} = E_K[S_l | Q_1 + Q_2 = k]$. Το κεφαλαίο γράμμα K δηλώνει ότι ο υπόλοιπος πληθυσμός χρησιμοποιεί μια καθαρή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι το K για να μπει στην ουρά. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι χρήστες εξαιρουμένου του επιλεγμένου εισέρχονται στο δίκτυο αν και μόνο αν αυτό περιλαμβάνει λιγότερους από K πελάτες.

Το κύριο αποτέλεσμα που θα δείξουμε είναι ότι το σειριακό δίκτυο έχει μια καθαρή στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου K, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό $K \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$P_K(k) \geq 0 \text{ όταν } k < K \text{ και } P_K(k) < 0 \text{ όταν } k \geq K.$$

Η κλάση των στρατηγικών κατωφλίου φαίνεται να είναι η πιο φυσιολογική για την αναζήτηση στρατηγικών ισορροπίας, ακολουθώντας και την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Δεν αποκλείεται, όμως, η ύπαρξη άλλων στρατηγικών ισορροπίας διαφορετικής μορφής.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι

$$R > C_1/\mu_1 + C_2/\mu_2.$$

Αν δεν ισχύει η σχέση αυτή, ο πελάτης αναμένει μέσο αρνητικό κέρδος από το δίκτυο ακόμα και αν μπαίνοντας σε αυτό το βρει άδειο. Οπότε, στην περίπτωση που $R \leq C_1/\mu_1 + C_2/\mu_2$, η προφανής στρατηγική ισορροπίας είναι η στρατηγική της σίγουρης αποχώρησης.

4.1 Μέσοι χρόνοι παραμονής κάτω από την $K-$στρατηγική

Υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες που καταφθάνουν στο σύστημα λαμβάνουν μερική πληροφόρηση σχετικά με την κατάσταση του δικτύου και αποφασίζουν να εισέλθουν μόνο εάν ο αριθμός των πελατών στο σύστημα, ας πούμε k, είναι μικρότερος από ένα δεδομένο κατώφλι $K \geq 0$. Κάτω από την $K-$στρατηγική το σειριακό δίκτυο συμπεριφέρεται ως ημιανοιχτό δίκτυο Jackson. Συμβολίζουμε με Q_l^* τον στάσιμο τυχαίο αριθμό πελατών στην ουρά l (δηλαδή μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας την στάσιμη κατανομή του αριθμού πελατών στην ουρά l) και $Q^* = Q_1^* + Q_2^*$ τον στάσιμο συνολικό αριθμό πελατών στο σύστημα.

Οι εξισώσεις ισορροπίας για την στάσιμη κατανομή $\pi_K(n,m)$ είναι οι εξής:

$$
\begin{aligned}
\lambda \pi_K(0,0) &= \mu_2 \pi_K(0,1), \\
(\lambda+\mu_2)\pi_K(0,m) &= \mu_1 \pi_K(1,m-1) + \mu_2 \pi_K(0,m+1), \ m \geq 1, \\
(\lambda+\mu_1)\pi_K(n,0) &= \lambda \pi_K(n-1,0) + \mu_2 \pi_K(n,1), \ 1 \leq n \leq K-1, \\
\mu_1 \pi_K(k,0) &= \lambda \pi_K(k-1,0) + \mu_2 \pi_K(k,1), n = K \\
(\lambda+\mu_1+\mu_2)\pi_K(n,m) &= \lambda \pi_K(n-1,m) + \mu_2 \pi_K(n,m+1) + \mu_1 \pi_K(n+1,m-1), \\
&\quad 1 \leq n \leq K-1, \ 1 \leq m \leq K-1-n, \\
(\mu_1+\mu_2)\pi_K(n,K-n) &= \lambda \pi_K(n-1,K-n) + \mu_1 \pi_K(n+1,K-1-n), \\
&\quad 1 \leq n \leq K-1.
\end{aligned}
$$

Η στάσιμη κατανομή δίνεται από τη σχέση

$$
\pi_K(n,m) = \mathbb{P}_K(Q_1^* = n, Q_2^* = m) = c_K \rho_1^n \rho_2^m, \ n+m \leq K, \tag{4.2}
$$

όπου $\rho_l = \lambda/\mu_1$ και $c_K^{-1} = \sum_{n+m\leq K} \rho_1^n \rho_2^m,\ n+m \leq K$ είναι η σταθερά κανονικοποίησης.

Υποθέτωντας ότι $n \leq K$, η δεσμευμένη πιθανότητα $P_K(Q_l^* = n|Q^* = k) = \frac{\rho_l^n \rho_{3-l}^{k-n}}{\sum_{h=0}^{k} \rho_l^h \rho_{3-l}^{k-h}}$ δεν εξαρτάται από το K. Συμβολίζοντας με $p_l(n|k) = P_k(Q_l^* = n|Q^* = k)$ μετά από αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε τον τύπο

$$p_l(n|k) = \begin{cases} \frac{\mu_l^{k-n}\mu_{3-l}^{n}(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1^{k+1}-\mu_2^{k+1}} & \text{, αν } \mu_1 \neq \mu_2 \\ \frac{1}{1+k} & \text{, διαφορετικά.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Η ανεξαρτησία από το K μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές $Q_l^*(k),\ l \in \{1,2\}$, να έχουν κατανομές $p_l(\cdot|k)$ και όχι να εξαρτώνται από την καθαρή στρατηγική κατωφλίου που εφαρμόζεται από όλους τους πελάτες.

Η υπόθεση ότι ο υπόλοιπος πληθυσμός ακολουθεί μία πολιτική κατωφλίου είναι απαραίτητη για να έχουμε μία στάσιμη κατανομή, που εκφράζεται από τον τύπο (4.3).

Ορίζουμε ως $T_l(k) = E[S_l|Q^* = k]$ τον αναμενόμενο χρόνο παραμονής στην ουρά l του επιλεγμένου πελάτη ο οποίος εισέρχεται σε ένα σύστημα που περιέχει k πελάτες.

Λήμμα 3. *Υποθέτωντας ότι $\mu_1 \neq \mu_2$, ισχύει ότι*

$$T_1(k) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{k+1}{\mu_1}\frac{\mu_2^{k+1}}{\mu_1^{k+1} - \mu_2^{k+1}}, \tag{4.4}$$

$$T_2(k) = \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\frac{\mu_1^{k+1}}{\mu_1^{k+1} - \mu_2^{k+1}}\sum_{n=0}^{k} T_2(n+1, k-n)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n \tag{4.5}$$

και για $\mu_1 = \mu_2$,

$$T_1(k) = \frac{1}{\mu_1\left(1 + \frac{k}{2}\right)}$$

και

$$T_2(k) = \frac{1}{(k+1)\sum_{n=0}^{k} T_2(n+1, k-n)}.$$

Απόδειξη. Εξ' ορισμού $T_1(k) = \frac{1}{\mu_1}\sum_{n=0}^{k}(n+1)p_1(n|k)$. Γι αυτό από τη σχέση

(4.3) και δεδομένου ότι $\mu_1 \neq \mu_2$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_1(k) &= \frac{1}{\mu_1}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1^{k+1}-\mu_2^{k+1}}\sum_{n=0}^{k}(n+1)\mu_1^{k-n}\mu_2^{n} \\ &= \frac{1}{\mu_1}\frac{\mu_1^k(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1^{k+1}-\mu_2^{k+1}}\frac{\mu_1^{2+k}-(2+k)\mu_1\mu_2^{1+k}+(k+1)\mu_2^{2+k}}{\mu_1^k(\mu_1-\mu_2)^2}. \end{aligned}$$

Απλοποιώντας την παραπάνω έκφραση παίρνουμε την (4.4). Ο τύπος για $T_2(k)$ προέρχεται παρόμοια από την έφραση $T_2(k) = \sum_{n=0}^{k} T_2(n+1, k-n)p_1(n|k)$. Τα αποτελέσματα για $\mu_1 = \mu_2$ μπορούν να ανακτηθούν με παρόμοιο τρόπο ή πιο άμεσα παρατηρώντας ότι σε αυτή την περίπτωση οι τυχαίες μεταβλητές Q_l^* είναι διακριτά ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $\{0, 1, \ldots, k\}$. Κάποιος μπορεί επίσης να υπολογίσει το όριο των εκφράσεων (4.4) και (4.5) καθώς $\mu_1 \to \mu_2$. $\square$

4.2 Στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου

Από το Λήμμα 3 το αναμενόμενο κέρδος $P_p(k)$ ενός επιλεγμένου πελάτη που λαμβάνει την πληροφορία k δεν εξαρτάται από την στρατηγική K που ακολουθείται από τους υπόλοιπους πελάτες. Γι αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε το κέρδος με τον τύπο

$$P_p(k) = R - C_1T_1(k) - C_2T_2(k). \tag{4.6}$$

Ο επιλεγμένος πελάτης αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα μόνο εάν $P_p(k) \geq 0$. Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε κάτω από ποιες συνθήκες η συνάρτηση του αναμενόμενου καθαρού κέρδους του πελάτη είναι φθίνουσα ως προς k. Επιπλέον, αφού αυτή η συνάρτηση είναι σταθερή ως προς τη στρατηγική K, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η στρατηγική ισορροπίας που θα προκύψει είναι επιπλέον κυριαρχούσα στην κλάση των στρατηγικών κατωφλίου. Πριν αναφέρουμε το κύριο αποτέλεσμα χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα για την στοχαστική μονοτονία των τυχαίων μεταβλητών $Q_l^*(k)$.

Λήμμα 4. *Οι τυχαίες μεταβλητές $Q_l^*(k)$ είναι στοχαστικά αύξουσες για $k \geq 0$.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι $Q_l^*(k+1) \geq_{\mathrm{st}} Q_l^*(k)$ αρκεί να δείξουμε την ισχυρότερη συνθήκη $Q_l^*(k+1) \geq_{\mathrm{LR}} Q_l^*(k)$, όπου $\geq_{\mathrm{LR}}$ είναι η διάταξη λόγου πιθανοφάνειας[1]. Η συνθήκη αυτή μπορεί να ελεγχθεί αποδεικνύοντας ότι

$$P(Q_l^*(k+1) = n+1)P(Q_l^*(k) = n) \geq P(Q_l^*(k+1) = n)P(Q_l^*(k) = n+1), \quad (4.7)$$

για κάθε $n \geq 0$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η (4.7) ισχύει σαν ισότητα για κάθε $n < k$ και είναι αυστηρή ανισότητα για $n = k$, όπου ο δεύτερος όρος είναι 0 και για αυτό το αποτέλεσμα ισχύει. □

Το επόμενο Λήμμα μας δίνει την μονοτονία για τους μέσους χρόνους παραμονής.

Λήμμα 5. *Οι συναρτήσεις $T_1(k)$ και $T(k)$ είναι αύξουσες για όλες τις τιμές του λόγου μ_1/μ_2. Η συνάρτηση $T_2(k)$ είναι αύξουσα όταν ο λόγος είναι μεγαλύτερος του 1.*

Απόδειξη. Είναι $T_1(k) = E[T_1(Q_1^*(k), Q_2^*(k))] = E[Q_1^*(k)]/\mu$, οπότε η συνάρτηση $T_1(k)$ είναι αύξουσα από το Λήμμα 4. Για την $T(k)$, προκύπτει από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} T(k+1) &= E[T(Q_1^*(k+1), k+1-Q_1^*(k+1))] \\ &\geq E[T(Q_1^*(k+1), k-Q_1^*(k+1))] \\ &\geq E[T(Q_1^*(k), k-Q_1^*(k))] = T(k), \end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιούμε ότι η $T(n,m)$ είναι αύξουσα ως προς m και στην δεύτερη ανισότητα στηριζόμαστε στο γεγονός ότι η $T(n, k-n)$ είναι αύξουσα ως προς n (βλ. Λήμμα 2) και στην στοχαστική μονοτονία των μεταβλητών $Q_1^*(k)$, που αποδείχτηκε στο Λήμμα 4. Ένα παρόμοιο επιχείρημα δουλεύει και για

[1] Γενικά $X \leq_{LR} Y$ αν και μόνο αν $f_X(x)/f_Y(x)$ είναι φθίνουσα ως προς x, όπου $f_X(x)$, $f_Y(x)$ οι συναρτήσεις πιθανότητας ή συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των X και Y.

τη συνάρτηση $T_2(k)$. Υποθέτοντας ότι $\mu_1 \geq \mu_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_2(k+1) &= E[T_2(k+1-Q_2^*(k+1), Q_2^*(k+1))] \\ &\geq E[T_2(k-Q_2^*(k+1), Q_2^*(k+1))] \\ &\geq E[T_2(k-Q_2^*(k), Q_2^*(k))] = T_2(k). \end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα εξηγείται από το Λήμμα 2 κάτω από τον ισχυρισμό για τους ρυθμούς εξυπηρέτησης, η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την μονοτονία της Q_2^*, που δείχθηκε στο Λήμμα 4 και το γεγονός ότι $T_2(k-m,m)$ είναι αύξουσα ως προς m για κάθε αριθμό $k > 0$. □

Για να δούμε ότι η $T_2(k)$ μπορεί να φθίνει όταν $\mu_1 < \mu_2$, ας δούμε το παράδειγμα όπου $\mu_1 = 0.1$ και $\mu_2 = 1$. Τότε

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$T_2(k)$	0.198347	0.0313319	0.00438963	0.000573903	0.0000717892

Πόρισμα 1. *Αν $\mu_1 > \mu_2$ ή εάν $C_1 \geq C_2$ το αναμενόμενο καθαρό κέρδος του πελάτη $P_p(k)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.*

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα έπεται από το Λήμμα 5 αν $\mu_1 > \mu_2$. Αν $C_1 \geq C_2$, είναι αρκετό να ξαναγράψουμε τη συνάρτηση του κέρδους ως $P_p(k) = R - (C_1 - C_2)T_1(k) - C_2T(k)$ και να χρησιμοποιήσουμε την μονοτονία των $T_1(k)$ και $T(k)$. □

Τελικά αναφέρουμε το κύριο αποτέλεσμα που δίνει την στρατηγική ισορροπίας.

Θεώρημα 2. *Όταν η πληροφορία που γίνεται γνωστή στον πελάτη που φτάνει στο σύστημα είναι μόνο ο συνολικός αριθμός πελατών μέσα στο σύστημα, τότε η στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει την είσοδο στον πελάτη αν βλέπει μπαίνοντας το πολύ K πελάτες μαζί με τον εαυτό του, όπου το κατώφλι K δίνεται από την*

$$K = argmin^2\{k \in \mathbb{N} : P(k) < 0\}. \tag{4.8}$$

[2] Το ελάχιστο k για το οποίο θα ισχύει $P(k) < 0$

Σύμφωνα με αυτή τη στρατηγική ένας επιλεγμένος πελάτης εισέρχεται μόνο εάν βρίσκει λιγότερους από K πελάτες στο σύστημα. Η $K-$στρατηγική είναι κυριαρχούσα στρατηγική στην κλάση των στρατηγικών κατωφλίου.

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι η στρατηγική κατωφλίου K είναι η καλύτερη απάντηση ενάντια στον εαυτό της. Το σύστημα είναι πάντα εργοδικό, για αυτό χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ξεκινάει άδειο. Αφού όλοι οι πελάτες ακολουθούν την στρατηγική K ο επιλεγμένος χρήστης δεν θα βρει ποτέ περισσότερους από K πελάτες μέσα στο σύστημα και σύμφωνα με την σχέση (4.8), θα ακολουθήσει την ίδια στρατηγική και το αποτέλεσμα έπεται.

Οι ενέργειες τις οποίες ο επιλεγμένος πελάτης μπορεί να κάνει για τις τιμές του $k > K$ δεν χρειάζεται να προσδιοριστούν, καθώς δεν θα βρει ποτέ στο σύτημα αυτές τις καταστάσεις. Παρόλα αυτά εάν οι συνθήκες μονοτονίας που δίνονται από το Λήμμα 5 ισχύουν, τότε η $K-$στρατηγική οδηγεί σε ένα σημείο στρατηγικής ισορροπίας τέλειο ως προς τα υποπαιχνίδια, δηλαδή σε ένα σημείο ισορροπίας που υπαγορεύει τις σωστές αποφάσεις ακόμα και για καταστάσεις που έχουν μηδενική πιθανότητα να παρατηρηθούν.

Η $K-$στρατηγική είναι κυριαρχούσα γιατί είναι η καλύτερη απάντηση σε οποιαδήποτε άλλη πιθανή στρατηγική κατωφλίου. Αυτό ισχύει γιατί η συνάρτηση καθαρού κέρδους του πελάτη δεν εξαρτάται ούτε από τον ρυθμό άφιξης ούτε από το κατώφλι που υιοθετούν οι άλλοι πελάτες. Υποθέτοντας ότι το σύστημα δουλεύει κάτω από μια καθαρή στρατηγική με κατώφλι διαφορετικό από K, εάν σε κάποιο σημείο του χρόνου οι πελάτες ξεκινήσουν να φέρονται εγωιστικά, θα υιοθετήσουν την $K-$στρατηγική. □

Η έκφραση (4.6) εξαρτάται από τις τιμές της συνάρτησης $T_2(n, m)$ που δίνεται από την (4.5) και έτσι δεν αναμένουμε να προκύψει κλειστός τύπος για την στρατηγική ισορροπίας κατωφλίου. Παρόλα αυτά μπορούμε πάντα να την υπολογίσουμε αριθμητικά από την (4.5).

Κεφάλαιο 5

Επεκτάσεις: Μοντέλα με υπαναχωρήσεις

Στο μέρος αυτό της εργασίας, περιγράφουμε δύο μοντέλα στα οποία οι πελάτες έχουν την δυνατότητα υπαναχώρησης (reneging) μετά την εξυπηρέτησή τους στην πρώτη ουρά.

5.1 Η παρατηρήσιμη περίπτωση

Στο μοντέλο αυτό υποθέτουμε ότι οι πελάτες μπορούν να αποχωρήσουν από την πρώτη ουρά μετά το πέρας της εξυπηρέτησής τους σε αυτή, χωρίς να συνεχίσουν στη δεύτερη. Επιπλέον, παρατηρούν το πλήθος πελατών στην πρώτη ουρά κατά την άφιξή τους και στη δεύτερη ουρά κατά την άφιξή τους σε αυτή. Επίσης, η αμοιβή εξυπηρέτησης R αναλύεται σε δύο μέρη R_1, R_2 που αντιστοιχούν στις εξυπηρετήσεις στις δύο ουρές αντίστοιχα.

Μια στρατηγική κατωφλίου (N_1, N_2) υπαγορεύει είσοδο στην ουρά i αν το πλήθος των πελατών που παρατηρεί ο πελάτης κατά την άφιξή του σε αυτή είναι το πολύ N_i, $i = 1, 2$. Για μια στρατηγική ισορροπίας θα πρέπει

$$N_2 = \left\lfloor \frac{R_2 \mu_2}{C} \right\rfloor$$

αφού ένας πελάτης που φτάνει στην δεύτερη ουρά και παρατηρεί n πελάτες θα συμπεριφερθεί όπως στο κλασικό μοντέλο του Naor (Θα μπει εάν $R_2 - C\frac{n+1}{\mu} \geq 0$).

Επομένως, ας θεωρήσουμε έναν επιλεγμένο πελάτη όταν οι υπόλοιποι ακολουθούν μια στρατηγική

$$(N_1, N_2) = \left(N_1, \left\lfloor \frac{R_2\mu_2}{C} \right\rfloor\right).$$

Σαν συνέπεια αυτής της στρατηγικής, ο αριθμός των πελατών στην πρώτη ουρά δεν θα ξεπεράσει ποτέ τον αριθμό N_1.

Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα διαφέρει ουσιαστικά από τις προηγούμενες περιπτώσεις, καθώς οι ουρές σε σειρά δεν αποτελούν πλέον ανοιχτό δίκτυο Jackson με άπειρη ή πεπερασμένη χωρητικότητα.

Ας συμβολίσουμε με $Q^*_{(N_1,N_2),i}$ το στάσιμο αριθμό πελατών στην ουρά i, $i = 1, 2$, κάτω από την στρατηγική (N_1, N_2). Έστω επίσης $S_{(N_1,N_2),1}$ ο χρόνος παραμονής του πελάτη στην πρώτη ουρά. Ορίζουμε

$$T_{(N_1,N_2),1}(n) = E[S_{(N_1,N_2),1} | Q^*_{(N_1,N_2),1} = n]$$

το δεσμευμένο μέσο χρόνο παραμονής στην πρώτη ουρά δεδομένου ότι ο επιλεγμένος πελάτης βλέπει n άτομα σε αυτή την ουρά κατά την άφιξή του (η κατανομή του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων συμπίπτει με την κατανομή του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο λόγω της ιδιότητας PASTA).

Τότε το καθαρό κέρδος του επιλεγμένου πελάτη που βλέπει κατά την άφιξή του n άτομα στην πρώτη ουρά και αποφασίζει να μπει είναι

$$P_{ro,(N_1,N_2)}(n) = \left(R_1 - C\frac{n+1}{\mu_1}\right) + \sum_{j=0}^{N_2-1} P_{e2,(N_1,N_2)}(j|n)\left(R_2 - C\frac{j+1}{\mu_2}\right),$$

όπου $P_{e2,(N_1,N_2)}(j|n)$ είναι η πιθανότητα ο επιλεγμένος πελάτης να δει j άτομα στην δεύτερη ουρά κατά την άφιξή του σε αυτή, δεδομένου ότι είδε n άτομα κατά την άφιξή του στην πρώτη ουρά.

Ο υπολογισμός της $P_{e2,(N_1,N_2)}(j|n)$ φαίνεται αρκετά περίπλοκος. Έχουμε ότι

$$P_{e2,(N_1,N_2)}(j|n) = \sum_{m=0}^{N_2-1} \frac{\pi_{(N_1,N_2)}(n,m)}{\pi_{N_1}(n)} P_{e2,(N_1,N_2)}(j|n,m),$$

όπου $\pi_{(N_1,N_2)}(n,m)$ είναι η στάσιμη κατανομή της $(Q^*_{(N_1,N_2),1}, Q^*_{(N_1,N_2),2})$, $\pi_{N_1}(n)$ η αντίστοιχη περιθώρια και $P_{e2,(N_1,N_2)}(j|n,m)$ είναι η πιθανότητα ο επιλεγμένος πελάτης να δει j άτομα στην δεύτερη ουρά κατά την άφιξή του σε αυτή, δεδομένου ότι το σύστημα βρισκόταν στην κατάσταση $(Q^*_{(N_1,N_2),1}, Q^*_{(N_1,N_2),2}) = (n,m)$ κατά την άφιξή του.

Η $\pi_{(N_1,N_2)}(n,m)$ μπορεί να υπολογιστεί λύνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας της αντίστοιχης Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου.

$$\begin{aligned}
\lambda\pi_{(N_1,N_2)}(0,0) &= \mu_2\pi_{(N_1,N_2)}(0,1) \\
(\lambda+\mu_2)\pi_{(N_1,N_2)}(0,m) &= \mu_1\pi_{(N_1,N_2)}(1,m-1) + \mu_2\pi_{(N_1,N_2)}(0,m+1), \\
&\quad 1 \le m \le N_2 - 1 \\
(\lambda+\mu_1)\pi_{(N_1,N_2)}(n,0) &= \lambda\pi_{(N_1,N_2)}(n-1,0) + \mu_2\pi_{(N_1,N_2)}(n,1), \\
&\quad 1 \le n \le N_1 - 1 \\
\mu_1\pi_{(N_1,N_2)}(N_1,0) &= \lambda\pi_{(N_1,N_2)}(N_1-1,0) + \mu_2\pi_{(N_1,N_2)}(N_1,1) \\
(\lambda+\mu_2)\pi_{(N_1,N_2)}(0,N_2) &= \mu_1\pi_{(N_1,N_2)}(1,N_2-1) + \mu_1\pi_{(N_1,N_2)}(1,N_2) \\
(\lambda+\mu_1+\mu_2)\pi_{(N_1,N_2)}(n,m) &= \lambda\pi_{(N_1,N_2)}(n-1,m) + \mu_2\pi_{(N_1,N_2)}(n,m+1) + \\
&\quad \mu_1\pi_{(N_1,N_2)}(n+1,m-1), \\
&\quad 1 \le n \le N_1 - 1,\ 1 \le m \le N_2 - 1 \\
(\mu_1+\mu_2)\pi_{(N_1,N_2)}(N_1,N_2) &= \lambda\pi_{(N_1,N_2)}(N_1-1,N_2) \\
(\mu_1+\mu_2)\pi_{(N_1,N_2)}(N_1,m) &= \lambda\pi_{(N_1,N_2)}(N_1-1,m) + \mu_2\pi_{(N_1,N_2)}(N_1,m+1), \\
&\quad 1 \le m \le N_2 - 1 \\
(\lambda+\mu_1+\mu_2)\pi_{(N_1,N_2)}(n,N_2) &= \lambda\pi_{(N_1,N_2)}(n-1,N_2) + \mu_1\pi_{(N_1,N_2)}(n+1,N_2-1) \\
&\quad +\mu_1\pi_{(N_1,N_2)}(n+1,N_2),\ 1 \le n \le N_1 - 1
\end{aligned}$$

Επίσης, η $P_{e2,(N_1,N_2)}(j|n,m)$ είναι η πιθανότητα πρώτης εισόδου στην κατάσταση $(0,j)$ κατά την είσοδο στο σύνολο $\{(0,i) : 0 \leq i \leq N_2\}$, της Μ.α.σ.χ. με αρχική κατάσταση (n,m) που καταγράφει το πλήθος των πελατών που βρίσκονται μπροστά από τον επιλεγμένο πελάτη (μαζί με αυτόν) στην διάρκεια της παραμονής του στην πρώτη ουρά. Για απλότητα, για σταθερό j και πολιτική (N_1, N_2), γράφουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις με $P_{e2,(N_1,N_2)}(j|n,m) = p(n,m)$.

$$\begin{aligned}
p(0,j) &= 1 \\
p(0,m) &= 0,\ 0 \leq m \leq N_2, m \neq j \\
p(n,0) &= p(n-1,1),\ n \geq 1 \\
p(n,m) &= \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} p(n-1,m+1) + \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} p(n,m-1),\ n \geq 1, \\
&\quad 1 \leq m \leq N_2 - 1 \\
p(n,N_2) &= \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} p(n-1,N_2) + \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} p(n,N_2-1),\ n \geq 1
\end{aligned}$$

Το σύστημα υπολογίζει αναδρομικά το $p(n,m)$ με την διάταξη

$$\begin{array}{ccc}
p(0,0), p(0,1), & \dots & , p(0,N_2) \\
p(1,0), p(1,1), & \dots & , p(1,N_2) \\
\dots, & \dots & , \dots \\
p(n,0), p(n,1), & \dots & , p(n,m)
\end{array}$$

Λύνοντας την $P_{ro,(N_1,N_2)}(n) \geq 0$ βρίσκουμε την βέλτιστη απάντηση του επιλεγμένου πελάτη έναντι της (N_1, N_2). Όμως, η δυσκολία υπολογισμού της $P_{ro,(N_1,N_2)}(n)$ που εξηγήθηκε παραπάνω, δεν έχει επιτρέψει προς το παρόν τον αποτελεσματικό προσδιορισμό των στρατηγικών ισορροπίας.

5.2 Η μη-παρατηρήσιμη περίπτωση

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε την μη-παρατηρήσιμη περίπτωση. Έχει μελετηθεί στη βιβλιογραφία η μη-παρατηρήσιμη περίπτωση και μάλιστα στο γενικότερο πλαίσιο με n ουρές σε σειρά τύπου $M|M|m$ [1] Θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τη λύση στο δικό μας πλαίσιο, δηλαδή για 2 ουρές τύπου $M|M|1$.

Έστω q_1 η πιθανότητα ένας πελάτης να μπει τουλάχιστον στην πρώτη ουρά και q_2 η πιθανότητα να μπει στην πρώτη και την δεύτερη ουρά, με $q_1 \geq q_2$. Επίσης ισχύουν οι συνθήκες ευστάθειας $\lambda q_1 < \mu_1$ και $\lambda q_2 < \mu_2$, όπου λ ο ρυθμός αφίξεων στο σύστημα και μ_i, $i = 1, 2$ ο ρυθμός εξυπηρέτησης στις δύο ουρές αντίστοιχα.

Συμβολίζουμε με $X = \{(q_1, q_2) : 0 \leq q_2 \leq q_1 \leq 1, q_1 < \frac{\mu_1}{\lambda}, q_2 < \frac{\mu_2}{\lambda}\}$ τον χώρο μεικτών στρατηγικών (q_1, q_2) που ακολουθούν οι άλλοι πελάτες και με (r_1, r_2) την στρατηγική του επιλεγμένου πελάτη. Ορίζουμε ως

$$\begin{aligned}
\overline{p}_{u_1}(q_1) &= R_1 - \frac{C}{\mu_1 - \lambda q_1} \\
\overline{p}_{u_2}(q_2) &= R_2 - \frac{C}{\mu_2 - \lambda q_2}
\end{aligned}$$

τα μέσα κέρδη εάν ένας πελάτης εισέλθει τουλάχιστον στην πρώτη ουρά, όταν οι άλλοι εισέρχονται σε αυτή με πιθανότητα q_1 και όταν ένας πελάτης εισέλθει και στις δύο ουρές, όταν οι άλλοι εισέρχονται με πιθανότητα q_2 αντίστοιχα. Έτσι το αναμενόμενο κέρδος του επιλεγμένου πελάτη που ακολουθεί στρατηγική (r_1, r_2), ενώ όλοι οι άλλοι ακολουθούν την στρατηγική (q_1, q_2) είναι ίσο με

$$\overline{p}_u((r_1, r_2), (q_1, q_2)) = r_1 \overline{p}_{u_1}(q_1) + r_2 \overline{p}_{u_2}(q_2).$$

Υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν μία στρατηγική $(q_1, q_2) \in X$. Τότε η βέλτιστη απάντηση του επιλεγμένου πελάτη είναι η λύση του ακόλουθου προ-

[1] Για περισσότερες πληροφορίες βλ. Burnetas, Apostolos (2013) *Customer equilibrium and optimal strategies in Markovian queues in series.* Annals of Operations Research 208 (2013) 515-529.

βλήματος μεγιστοποίησης

$$F(q_1, q_2) = max_{(r_1,r_2)}\{r_1\overline{p}_{u_1}(q_1) + r_2\overline{p}_{u_2}(q_2)\}$$

υπό τον περιορισμό ότι $0 \leq r_2 \leq r_1 \leq 1$, το οποίο γράφεται ως

$$F(q_1, q_2) = max_{(r_1,r_2)}\left\{r_1\left(R_1 - \frac{C}{\mu_1 - \lambda q_1}\right) + r_2\left(R_2 - \frac{C}{\mu_2 - \lambda q_2}\right)\right\}$$

υπό τον περιορισμό ότι $0 \leq r_2 \leq r_1 \leq 1$.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

max (r_1, r_2)	$R_1 - \frac{C}{\mu_1 - \lambda q_1}$	$R_2 - \frac{C}{\mu_2 - \lambda q_2}$
(1,1)	+	+
$(1, r_2)$	+	0
(1,0)	+	-
(1,1)	0	+
(r_1, r_2)	0	0
$(r_1, 0)$	0	-
(r, r)	-	+
(0,0)	-	0
(0,0)	-	-

Αναλυτικά αυτό σημαίνει ότι:

- Στην πρώτη περίπτωση το κέρδος του επιλεγμένου πελάτη από την εξυπηρέτησή του στην πρώτη και την δεύτερη ουρά είναι θετικό. Επομένως, η βέλτιστη απάντηση για τον επιλεγμένο πελάτη θα είναι να εισέλθει και στις δύο ουρές.

- Στην δεύτερη περίπτωση το κέρδος του επιλεγμένου πελάτη από την εξυπηρέτησή του στην πρώτη ουρά είναι θετικό, ενώ από την δεύτερη μηδενικό. Επομένως, η βέλτιστη στρατηγική θα είναι να εισέλθει στον πρώτο σταθμό με πιθανότητα 1 και στον δεύτερο με r_2.

- Στην τρίτη περίπτωση ο επιλεγμένος πελάτης έχει κέρδος μόνο από την εξυπηρέτησή του στην πρώτη ουρά. Επομένως, η βέλτιστη στρατηγική θα είναι να εισέλθει στον πρώτο σταθμό και να αποχωρήσει από το σύστημα, χωρίς να μπει στον δεύτερο.

- Στην τέταρτη περίπτωση το κέρδος του επιλεγμένου πελάτη από την εξυπηρέτησή του στην πρώτη ουρά είναι μηδενικό, ενώ από την δεύτερη θετικό. Επομένως, η βέλτιστη στρατηγική θα είναι να εισέλθει και στους δύο σταθμούς με πιθανότητα 1.

- Στην πέμπτη περίπτωση το κέρδος του επιλεγμένου πελάτη από την εξυπηρέτησή του στις δύο ουρές είναι μηδενικό. Επομένως, η βέλτιστη στρατηγική θα είναι να εισέλθει και στους δύο σταθμούς με πιθανότητες $0 \leq r_2 \leq r_1 \leq 1$.

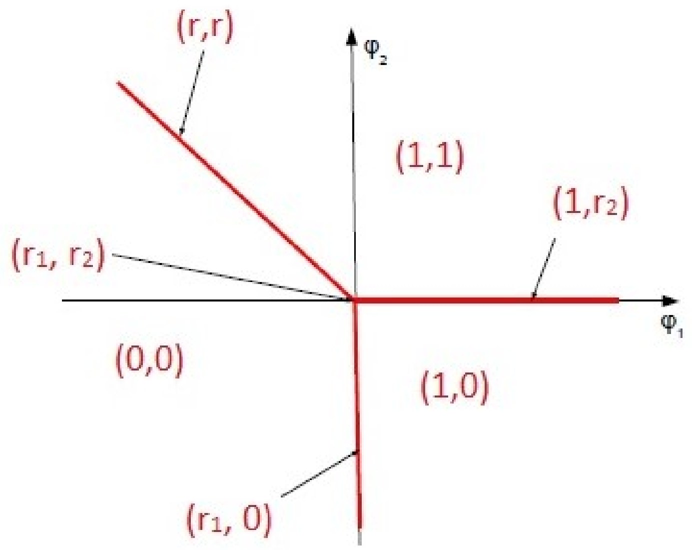
- Στην έκτη περίπτωση το κέρδος του επιλεγμένου πελάτη από την εξυπηρέτησή του στην πρώτη ουρά είναι μηδενικό, ενώ από την δεύτερη αρνητικό. Επομένως, η βέλτιστη στρατηγική θα είναι να εισέλθει στον πρώτο σταθμό με πιθανότητα r_1 και να αποχωρήσει από το σύστημα, χωρίς να μπει στον δεύτερο.

- Στην έβδομη περίπτωση το κέρδος του επιλεγμένου πελάτη από την εξυπηρέτησή του στην πρώτη ουρά είναι αρνητικό, αλλά το αντίστοιχο κέρδος του από την δεύτερη ουρά θετικό. Έτσι, το r_1 θα πρέπει να είναι όσο πιο κοντά γίνεται στο 0 και αντίστοιχα το r_2 όσο πιο κοντά γίνεται στο 1. Επομένως, θα έχουμε ότι $r_1 = r_2 = r$. Άρα, η βέλτιστη στρατηγική του επιλεγμένου πελάτη θα είναι να μπει και στις δύο ουρές με την ίδια πιθανότητα.

- Στην όγδοη περίπτωση το κέρδος του επιλεγμένου πελάτη από την εξυπηρέτησή του στην πρώτη ουρά είναι αρνητικό, ενώ από την δεύτερη μηδενικό. Επομένως, η βέλτιστη στρατηγική θα είναι να μην εισέλθει σε καμία από τις δύο ουρές και να αποχωρήσει από το σύστημα.

- Στην τελευταία περίπτωση το κέρδος του επιλεγμένου πελάτη από την εξυπηρέτησή του και στις δύο ουρές είναι αρνητικό. Επομένως, η βέλτιστη απόφαση για αυτόν θα είναι να μην εισέλθει σε καμία από τις δύο ουρές και να αποχωρήσει από το σύστημα.

Σχηματικά:



όπου $\phi_i = R_i - \frac{C}{\mu_i - \lambda q_i}$, $i = 1, 2$.

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι οι στρατηγικές $(1,1)$, $(1,r_2)$, $(1,0)$, (r_1,r_2), $(r_1,0)$, (r,r), $(0,0)$ είναι πιθανές στρατηγικές ισορροπίας.

- Η (1,1) θα είναι μοναδική στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$R_1 - \frac{C_1}{\mu_1 - \lambda} \geq 0 \text{ και } R_2 - \frac{C}{\mu_2 - \lambda} \geq 0$$

ή

$$R_1 - \frac{C}{\mu_1 - \lambda} \leq 0,\ R_2 - \frac{C}{\mu_2 - \lambda} \geq 0 \text{ και } R_1 + R_2 - \frac{C_1}{\mu_1 - \lambda} - \frac{C}{\mu_2 - \lambda} \geq 0$$

Συνοπτικά η (1,1) θα είναι μοναδική στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$R_2 - \frac{C}{\mu_2 - \lambda} \geq 0,\ R_1 + R_2 - \frac{C}{\mu_1 - \lambda} - \frac{C}{\mu_2 - \lambda} \geq 0.$$

- Η (1,0) θα είναι μοναδική στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$R_1 - \frac{C}{\mu_1 - \lambda} \geq 0 \text{ και } R_2 - \frac{C}{\mu_2} \leq 0.$$

- Η (0,0) θα είναι μοναδική στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$R_1 - \frac{C}{\mu_1} \leq 0 \text{ και } R_2 - \frac{C}{\mu_2} \leq 0$$

ή

$$R_1 - \frac{C}{\mu_1} \leq 0,\ R_2 - \frac{C}{\mu_2} \geq 0 \text{ και } R_1 + R_2 - \frac{C}{\mu_1} - \frac{C}{\mu_2} \leq 0$$

Συνοπτικά η (0,0) θα είναι μοναδική στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$R_1 - \frac{C}{\mu_1} \leq 0,\ R_1 + R_2 - \frac{C}{\mu_1} - \frac{C}{\mu_2} \leq 0.$$

- Η $(1, r_2)$ με $0 < r_2 < 1$ θα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$R_1 - \frac{C}{\mu_1 - \lambda} \geq 0 \text{ και } R_2 - \frac{C}{\mu_2 - \lambda r_2} = 0.$$

- Η $(r_1, 0)$ με $0 < r_1 < 1$ θα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$R_1 - \frac{C}{\mu_1 - \lambda r_1} = 0 \text{ και } R_2 - \frac{C}{\mu_2} \leq 0.$$

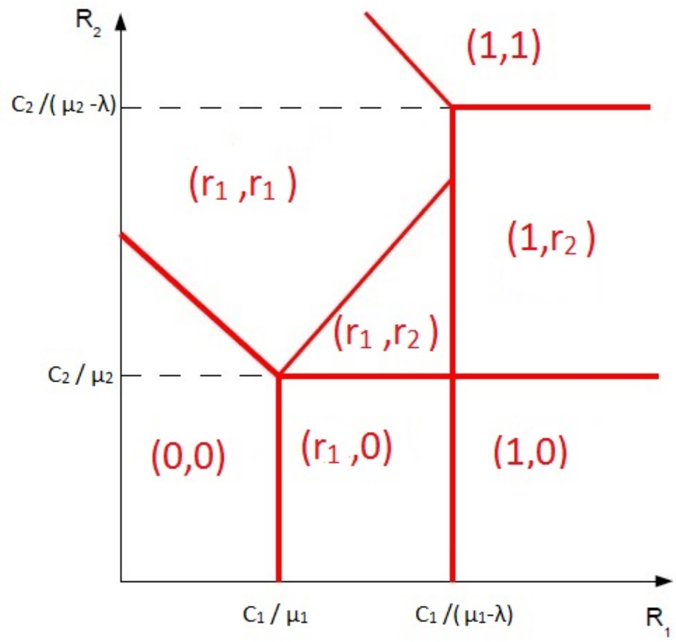
- Η (r_1, r_2) με $0 < r_1, r_2 < 1$ θα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$R_1 - \frac{C}{\mu_1 - \lambda r_1} = 0 \text{ και } R_2 - \frac{C}{\mu_2 - \lambda r_2} = 0.$$

- Η (r, r) με $0 < r < 1$ θα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$R_1 - \frac{C}{\mu_1 - \lambda r} = 0 \text{ και } R_2 - \frac{C}{\mu_2 - \lambda r} = 0.$$

Σχηματικά:



Βιβλιογραφία

[1] Hassin, R. and Haviv M. (2003) *To Queue or Not To Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

[2] Μηλολιδάκη, Κ. (2009) *Θεωρία Παιγνίων: Μαθηματικά Μοντελα Σύγκρουσης και Συνεργασίας.* Εκδόσεις Σοφία, Αθήνα.

[3] Φακίνου, Δ. (2008) *Ουρές Αναμονής: Θεωρία και Ασκήσεις, 2η έκδοση.* Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

[4] D' Auria, Bernardo and Kanta, Spyridula (2011) *Equilibrium Strategies in a Tandem Queue Under Various Levels of Information.* Working paper 11-33, Statistics and Econometrics Series.

[5] D' Auria, Bernardo and Kanta, Spyridula (2015) *Pure threshold strategies for a two-node tandem network under partial information.* Operations Research Letters 43 (2015) 467-470.

[6] Burnetas, Apostolos (2013) *Customer equilibrium and optimal strategies in Markovian queues in series.* Annals of Operations Research 208 (2013) 515-529.

[7] Parlakturk, Ali and Kumar, Sunil (2004) *Self-interested routing in queueing networks.* Management Science 50(7).

[8] Arlotto, Alessandro and Frazelle, Andrew and Wei, Yehua (2015) *Strategic Open Routing in Queueing Networks.* The Fuqua School of Business, Duke University