



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΤΟΜΕΑΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ  
ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Σύγχρονες Τεχνικές Υπολογισμού  
Πλατών Σκέδασης στην Θεωρία  
Πεδίου

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΑΤΣΙΝΗΣ

ΑΜ: 201346

Επιβλέπων Καθηγητής: Α. ΛΑΧΑΝΑΣ

ΑΘΗΝΑ 2014



*A method is more important than a discovery, since the right method can lead to new and even more important discoveries.*

Lev Landau

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της εργασίας Καθηγητή κ Α. Λαχανά για την ανάθεση ενός τόσο ενδιαφέροντος θέματος και για τις γνώσεις που έχω αποκομίσει μέσα από τις συζητήσεις μας. Επίσης ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν να αποκτήσω τις γνώσεις που έχω. Ξεχωριστά θα ήθελα να αναφερθώ στον κ Τζανάκο, ο οποίος δεν είναι πια κοντά μας. Η διπλωματική εργασία αφιερώνεται στην Αναστασία. Χωρίς την απεριόριστη βοήθειά της, την αμέριστη συμπαράστασή της και τις συνεχείς παροτρύνσεις της, η εκπόνηση αυτής της εργασίας δεν θα ήταν εφικτή.

Δημήτρης Κατσινής



# Περιεχόμενα

Περίληψη	6
1 Εισαγωγή	9
<b>I Πρώτης Τάξης Υπολογισμοί</b>	<b>11</b>
2 Εισαγωγή	11
2.1 Εισαγωγή στα γινόμενα σπινόρων . . . . .	11
2.2 Ανύσματα Πόλωσης . . . . .	13
2.3 Τετριμμένη εφαρμογή στην QED . . . . .	14
3 Φορμαλιστική Αντιμετώπιση των Πλατών	16
3.1 Φορμαλισμός Weyl - van der Waerden . . . . .	16
3.2 Ελικότητα . . . . .	17
3.3 Πλάτος Σκέδασης . . . . .	18
3.4 Διάταξη χρώματος . . . . .	18
3.5 Ταυτότητες για τα Μερικά Πλάτη . . . . .	20
4 Αναδρομή BCFW	22
5 Η συμπεριφορά των πλατών για $z \rightarrow \infty$	25
6 MHV πλάτη	28
6.1 Το MHV πλάτος τριών σημείων. . . . .	28
6.2 Το πλάτος MHV $n$ σημείων . . . . .	29
7 Αναδρομή BCFW στην $\mathcal{N} = 4$ Υπερσυμμετρία	31
<b>II Όλα τα tree level πλάτη της <math>\mathcal{N} = 4</math> Υπερσυμμετρικής Θεωρίας Yang-Mills</b>	<b>35</b>
8 Το πλάτος MHV $n$ σημείων	36
9 Το πλάτος NMHV $n$ σημείων	37
10 Το πλάτος NNMHV $n$ σημείων	42
11 Ο γενικός υπολογισμός του $N^P$ MHV	46
12 Διαβάζοντας Πλάτη Μποζονίων Βαθμίδας από τα Υπερπλάτη	51

III	Περαιτέρω κατευθύνσεις	52
13	Υπολογισμοί Ανώτερης Τάξης	52
14	Προς τον Υπολογισμό όλης της Διαταρακτικής Σειράς	53

## Περίληψη

Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Αρχικά γίνεται μια εισαγωγή στις νέες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό πλατών σκέδασης στην θεωρία πεδίου. Παρουσιάζονται τα γινόμενα σπινόρων και ο διαχωρισμός των παραγόντων χρώματος. Εισάγουμε τον φορμαλισμό των πλατών σκέδασης και τις ταυτότητες που ικανοποιούν. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές ιδιότητες των πλατών παρουσιάζουμε την αναδρομή BCFW, ένα πανίσχυρο εργαλείο για τον υπολογισμό πλατών σκέδασης σε επίπεδο tree level. Μελετάμε την συμπεριφορά των πλατών για  $z \rightarrow \infty$ . Αναπτύσσουμε την θεωρία των πλατών σκέδασης της  $N = 4$  υπερσυμμετρικής θεωρίας Yang Mills και την αντίστοιχη αναδρομή BCFW. Στο δεύτερο μέρος υπολογίζουμε όλα τα tree level πλάτη της της  $N = 4$  υπερσυμμετρικής θεωρίας Yang Mills. Τέλος γίνεται συνοπτική αναφορά στις τεχνικές που αφορούν υπολογισμούς ανώτερης τάξης και στην πρόοδο που έχει λάβει χώρα σε σχέση με τον υπολογισμό ολόκληρης της διαταρακτικής σειράς.

Λέξεις Κλειδιά

Θεωρία Πεδίου, Πλάτη Σκέδασης, Υπερσυμμετρία, Yang - Mills, Twistors

# Abstract

This Master Thesis is divided into two parts. In the first part we introduce all new efficient methods for calculating Scattering Amplitudes. We present spinor products and color ordering. Formal aspects of Scattering Amplitudes such as identities that they respect are discussed. We move the discussion to the complex plane in order to construct the BCFW recursion relation. We analyze the large  $z$  behavior of the Scattering Amplitudes. We discuss Scattering Amplitudes for  $N=4$  Super Yang Mills theory and the supersymmetric version of BCFW recursion. In the second part we calculate all tree level amplitudes of  $N=4$  Super Yang Mills Theory. Finally we give some insights on modern technics for loop calculations and more fancy aspects of field theory such as the relation between wilson loops and scattering amplitudes and the all loop integrand for  $N=4$  Super Yang Mills theory.

## Keywords

Field Theory, Scattering Amplitudes, Supersymmetry, Yang - Mills, BCFW, Twistors





# 1 Εισαγωγή

Η κβαντική θεωρία πεδίου σήμερα αποτελεί το καθιερωμένο πλαίσιο για την περιγραφή της φύσης. Η απαρχή της ήταν ο συνδυασμός της Ειδικής Σχετικότητας και της Κβαντικής Μηχανικής σε ένα ενιαίο πλαίσιο στο οποίο η φύση περιγράφεται από τοπικά μεγέθη. Σε πρακτικό επίπεδο για να υπολογίσει κανείς τα πλάτη κάποιων διαδικασιών δεν έχει παρά να ακολουθήσει μια σαφώς καθορισμένη συνταγή. Σχεδιάζει τα διαγράμματα Feynman για την διαδικασία που τον ενδιαφέρει. Χρησιμοποιεί τους κανόνες Feynman για να γράψει το πλάτος και υπολογίζει. Ακούγεται μια τετριμμένη, σχεδόν ανιαρή διαδικασία, αν δεν λάβει κανείς υπόψη του την εκάστοτε συμμετρία βαθμίδας και την πολυπλοκότητα την οποία εισάγει.

Η συμμετρία βαθμίδας δεν είναι τίποτα διαφορετικό από την δήλωση ότι διαφορετικές συναρτήσεις δυναμικού αντιστοιχούν στην ίδια φυσική κατάσταση. Όταν λοιπόν κανείς κληθεί να αθροίσει όλες τις διαφορετικές φυσικές καταστάσεις, έχει τον σύνδεσμο που εισάγει η συμμετρία βαθμίδας. Με άλλα λόγια δεν μπορεί κανείς απλά να ολοκληρώσει σε όλες τις καταστάσεις, αλλά πρέπει να ολοκληρώσει σε όλες τις καταστάσεις που δεν συνδέονται μεταξύ τους με μετασχηματισμούς βαθμίδας. Σε υπολογιστικό επίπεδο εισάγει κανείς Faddeev - Popov ghosts τα οποία φροντίζουν να αναιρέσουν τις συνεισφορές από τους αφύσικους βαθμούς ελευθερίας. Στην περίπτωση που κάποιος είναι αντιμέτωπος με θεωρία η οποία εμφανίζει αυθόρμητα παραβιασμένη συμμετρία βαθμίδας η κατάσταση περιπλέκεται ακόμα περισσότερο καθώς για να εξασφαλισθεί η επανακανονικοποιησιμότητα πρέπει να χρησιμοποιήσει βαθμίδα  $R_\xi$  και να εισαχθούν στην θεωρία όχι μόνο τα φυσικά μποζόνια Higgs αλλά και μποζόνια Goldstone.

Έχει φτάσει κανείς στο σημείο όπου η θεωρία του περιλαμβάνει φερμιόνια, μποζόνια βαθμίδας, μποζόνια Higgs, μποζόνια Goldstone και Faddeev - Popov ghosts. Προκειμένου να μπορέσει κανείς να προχωρήσει σε υπολογισμούς πέρα από το tree level πρέπει να συμπεριληφθούν και αντισταθμιστικοί όροι, οι οποίοι εισάγονται στην Lagrangian για να απορροφηθούν οι υπεριώδεις αποκλίσεις. Ο υπολογισμός διαγραμμάτων Feynman καθώς προχωρά κανείς σε όλο και μεγαλύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών είναι πρακτικά αδύνατος. Το συμπέρασμα είναι ότι έχουμε να κάνουμε με μια αρκετά καλή περιγραφή της φύσης, η οποία όμως χωλαίνει όσον αφορά την υπολογιστική της δυνατότητα. Το οξύμωρο είναι ότι παρά όλη αυτή την πολυπλοκότητα οι τελικές εκφράσεις είναι πολύ πιο απλές από αυτές που θα περίμενε κανείς όπως θα δούμε. Ένα καίριο βήμα είναι να μπορέσουμε να κρατήσουμε την μέγιστη δυνατή απλότητα σε κάθε στάδιο υπολογισμών. Για τον λόγο αυτό πρέπει να οργανώσουμε πολύ καλά τους υπολογισμούς μας διαχωρίζοντας τα κομμάτια που μπορούν να διαχωριστούν και δημιουργώντας όρους, οι οποίοι διαφέρουν μόνο στην διάταξη κάποιων σωματιδίων και μας επιτρέπουν με έναν υπολογισμό να βρούμε πολλά αποτελέσματα.

Τι κρύβεται πίσω από απρόσμενες απλοποιήσεις πολύπλοκων εκφράσεων; Μα φυσικά μεγαλύτερη συμμετρία. Κανείς μπορεί να χρησιμοποιήσει έναν νέο μη τοπικό φορμαλισμό ο οποίος απλοποιεί άλλοτε πολύπλοκους υπολογισμούς σε τετριμμένες εφαρμογές. Όταν ένας νέος ισοδύναμος φορμαλισμός κάνει την εμφάνισή του, όπως έχει φανεί διαχρονικά, αποκαλύπτονται ριζικά νέες θεωρήσεις της φύσης. Κανείς μπορεί να μελετήσει ως ανάλογο την σχέση μεταξύ Νευτώνειας Μηχανικής και Αναλυτικής Μηχανικής. Η Αναλυτική Μηχανική έκανε δύσκολους νευτώνιους υπολογισμούς να μοιάζουν προφανείς, αλλά όχι μόνο. Δεν έχει παρά να γράψει κανείς το εκθετικό της δράσης και να γεννήσει την Κβαντική Μηχανική. Βέβαια τίποτα δεν έρ-

χεται άνευ κόστους, έτσι ο έχδηλος ντετερμινισμός της Νευτώνειας Μηχανικής, κρύβεται στην περίπτωση της Αναλυτικής Μηχανικής. Αν παίζει κανείς το ίδιο παιχνίδι με την τοπικότητα στην περίπτωση των πλατών σκέδασης θα εκπλαγεί από την απλότητα των αποτελεσμάτων. Ο φορμαλισμών των MHV πλατών και η σχέση τους με τον χώρο των twistors δίνει την δυνατότητα μια νέας θεώρησης της φυσικής. Παράλληλα η βαθύτερη κατανόηση της φύσης των πλατών σκέδασης δίνει την δυνατότητα για εφαρμογή νέων μεθόδων οι οποίες επιτρέπουν την εκτέλεση αδύνατων μέχρι πρότινος υπολογισμούς. Η ακόμα πιο θεμελιώδης περιγραφή της φύσης σχετίζεται με την εμφάνιση νέων συμμετριών, οι οποίες κλείνουν μεταξύ τους σε μια Yangian συμμετρία, η οποία σχετίζεται με την ολοκληρωσιμότητα.

## Μέρος I

# Πρώτης Τάξης Υπολογισμοί

## 2 Εισαγωγή

Όπως αναφέραμε στον πρόλογο κύριο μέλημά μας είναι να διατηρήσουμε την απλότητα σε κάθε στάδιο των υπολογισμών πλατών σκέδασης. Θα εκτελέσουμε ευκολότερα τους υπολογισμούς μας χρησιμοποιώντας καλύτερες μεταβλητές [1]. Οι μεταβλητές αυτές θα μας βοηθήσουν να δούμε με μια διαφορετική ματιά τα πλάτη σκέδασης. Θα δούμε δομές οι οποίες παρουσιάζουν εκπληκτικές ιδιότητες, ιδιότητες που είναι καθέ αλλό παρά έκδηλες όταν χρησιμοποιεί κανείς τον φορμαλισμό των σπινόρων Dirac. Οι δομές αυτές μας βοηθούν να κατασκευάσουμε δομικούς λίθους τους οποίους μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε σύνθετα διαγράμματα.

### 2.1 Εισαγωγή στα γινόμενα σπινόρων

Σε υψηλές ενέργειες μπορούμε να θεωρήσουμε σε πολύ καλή προσέγγιση πως αρκετά σωματάρια είναι άμαζα. Για τα άμαζα σωματάρια η ελικότητα αποτελεί έναν καλό χβαντικό αριθμό, δεδομένου ότι είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Θα δούμε ότι πλάτη σκέδασης εκπεφρασμένα συναρτήσε της ελικότητας των σωματιδίων που σχεδιάζονται παρουσιάζουν ασυνήθιστη απλότητα. Δουλεύουμε στην χειραλική αναπαράσταση των πινάκων Dirac όπου

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

όπου  $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$   $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$ . Οι πίνακες ικανοποιούν την εξής σχέση πληρότητας:

$$Tr [\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu] = n^{\mu\nu} \quad (2)$$

Οι χειραλικοί σπίνορες Dirac έχουν την μορφή

$$U_R(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_R(p) \end{pmatrix}, \quad U_L(p) = \begin{pmatrix} u_L(p) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ενώ οι σπίνορες Weyl ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$p \cdot \sigma u_R = 0, \quad p \cdot \bar{\sigma} u_L = 0 \quad (4)$$

Οι σπίνορες Weyl δεν είναι ανεξάρτητοι καθώς συνδέονται με την συζυγία φορτίου ως

$$u_R = i\sigma^2 u_L^* \quad (5)$$

Δεδομένου ότι αναφερόμαστε σε άμαζα σωματάρια δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ των σπινόρων που αντιστοιχούν σε σωματάρια και αντισωματάρια, αφού ικανοποιούν τις ίδιες εξισώσεις. Στο εισαγωγικό κεφάλαιο χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\bar{U}_L(p) = \langle p, \quad \bar{U}_R(p) = [p, \quad U_L(p) = |p\rangle, \quad U_R(p) = |p\rangle. \quad (6)$$

Με τον συμβολισμό αυτό έχουμε τα Lorentz αναλλοίωτα γινόμενα

$$\bar{U}_L(p)U_R(q) = \langle pq \rangle, \quad \bar{U}_R(p)U_L(q) = [pq] \quad (7)$$

και τις σχέσεις πληρότητας

$$p\rangle[p = U_R(p)\bar{U}_R(p) = \not{p}\frac{1-\gamma^5}{2}, \quad p\rangle\langle p = U_L(p)\bar{U}_L(p) = \not{p}\frac{1+\gamma^5}{2}. \quad (8)$$

Από τις σχέσεις πληρότητας παίρνοντας το ίχνος έχουμε

$$\langle pq \rangle [qp] = Tr \left[ \not{q}\not{p}\frac{1+\gamma^5}{2} \right] = 2p \cdot q \quad (9)$$

οπότε καταλήγουμε

$$|\langle pq \rangle|^2 = |[pq]|^2 = 2p \cdot q, \quad (10)$$

αφού

$$\langle pq \rangle^* = [qp] \quad (11)$$

Οι εκφράσεις  $\langle pq \rangle$  και  $[pq]$  είναι αντισυμμετρικές στα ορίσματά τους αφού

$$\langle pq \rangle = u_L^\dagger(p)u_R(q) = u_{La}^*(p) (\iota\sigma^2)_{ab} u_{Lb}^*(q) = -\langle qp \rangle, \quad (12)$$

έτσι

$$\langle pq \rangle = -\langle qp \rangle \quad [pq] = -[qp] \quad (13)$$

Θα εκφράσουμε τα ρεύματα χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό που έχουμε εισάγει. Τα ρεύματα εκπεφρασμένα σε χειραλικές συνιστώσες είναι

$$\begin{aligned} \bar{U}_L(p)\gamma^\mu U_L(q) &= u_L^\dagger(p)\bar{\sigma}^\mu u_L(q) = \langle p\gamma^\mu q \rangle \\ \bar{U}_R(p)\gamma^\mu U_R(q) &= u_R^\dagger(p)\sigma^\mu u_R(q) = [p\gamma^\mu q] \end{aligned} \quad (14)$$

Οι εκφράσεις αυτές μπορούν να αναστραφούν

$$\begin{aligned} u_L^\dagger(p)\bar{\sigma}^\mu u_L(q) &= u_L^\dagger(p)\bar{\sigma}^\mu \left( -(\iota\sigma^2)^2 \right) u_L(q) = u_L^\dagger(p) (-\iota\sigma^2) \sigma^{\mu T} (-\iota\sigma^2) u_L(q) \\ &= u_R^T(p)\sigma^{\mu T} u_R^*(q) = u_R^\dagger(q)\sigma^\mu u_R(p) \end{aligned} \quad (15)$$

οπότε

$$\langle p\gamma^\mu q \rangle = [q\gamma^\mu p] \quad (16)$$

Αντίστοιχα

$$\langle p\gamma^\mu q \rangle^* = \langle q\gamma^\mu p \rangle \quad (17)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα Fierz

$$(\bar{\sigma}^\mu)_{ab} (\bar{\sigma}_\mu)_{cd} = 2 (\iota\sigma^2)_{ac} (\iota\sigma^2)_{bd} \quad (18)$$

μπορούμε να απλοποιήσουμε τα γινόμενα ρευμάτων

$$\langle p\gamma^\mu q \rangle \langle k\gamma_\mu \ell \rangle = 2\langle pk \rangle [\ell q], \quad \langle p\gamma^\mu q \rangle [k\gamma_\mu \ell] = 2\langle p\ell \rangle [kq] \quad (19)$$

## 2.2 Ανύσματα Πόλωσης

Θα δείξουμε ότι οι παρακάτω εκφράσεις (για τις πολώσεις εξερχόμενων ανυσματικών μποζονίων) ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες που θα έπρεπε να ικανοποιούν ως ανύσματα πόλωσης.

$$e_R^{*\mu}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle r\gamma^\mu k \rangle}{\langle rk \rangle}, \quad e_L^{*\mu}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[r\gamma^\mu k]}{[rk]} \quad (20)$$

Η τετραορμή  $r$  είναι απλά ένα οποιοδήποτε άνυσμα αναφοράς με τον περιορισμό να μην είναι συγγραμμικό με την τετραορμή  $k$ . Είναι τετριμμένο να δει κανείς ότι οι εκφράσεις (20) ικανοποιούν τις βασικές ιδιότητες

$$e_R^{*\mu}(k) = e_L^\mu(k) \quad k_\mu e_{L,R}^\mu(k) = 0 \quad (21)$$

Τα ανύσματα πόλωσης είναι φωτοειδή αφού

$$e_R^{*\mu}(k) e_{R\mu}^*(k) = \frac{1}{2} \frac{\langle r\gamma^\mu k \rangle \langle r\gamma_\mu k \rangle}{\langle rk \rangle \langle rk \rangle} = \frac{\langle rr \rangle [kk]}{\langle rk \rangle \langle rk \rangle} = 0 \quad (22)$$

ενώ το μιγαδικό μέτρο τους είναι

$$e_R^{*\mu}(k) e_{R\mu}(k) = \frac{1}{2} \frac{\langle r\gamma^\mu k \rangle \langle k\gamma_\mu r \rangle}{\langle rk \rangle [kr]} = \frac{\langle rk \rangle [rk]}{\langle rk \rangle [kr]} = -1 \quad (23)$$

Μπορούμε να εξετάσουμε την επίδραση του ανύσματος αναφοράς στο άνυσμα πόλωσης εξετάζοντας την διαφορά ενός ανύσματος πόλωσης για δυο διαφορετικά ανύσματα αναφοράς

$$\begin{aligned} e_R^{*\mu}(k; r) - e_R^{*\mu}(k; s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\langle r\gamma^\mu k \rangle}{\langle rk \rangle} - \frac{\langle s\gamma^\mu k \rangle}{\langle sk \rangle} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{-\langle r\gamma^\mu k \rangle \langle ks \rangle + \langle s\gamma^\mu k \rangle \langle kr \rangle}{\langle rk \rangle \langle sk \rangle} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{-\langle r\gamma^\mu k s \rangle + \langle s\gamma^\mu k r \rangle}{\langle rk \rangle \langle sk \rangle} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\langle s (\not{k}\gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}) r \rangle}{\langle rk \rangle \langle sk \rangle} \right) = \sqrt{2} \frac{\langle sr \rangle}{\langle rk \rangle \langle sk \rangle} k^\mu \end{aligned} \quad (24)$$

Η διαφορά των ανυσμάτων πόλωσης υπακούει την ταυτότητα Ward, αφού το εσωτερικό γινόμενο της διαφοράς των ανυσμάτων πόλωσης με την τετραορμή του εξωτερικού σωματιδίου (το οποίο βρίσκεται στον φλοιό μάζας) μηδενίζεται. Αυτό είναι ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα καθώς σε σύνθετους υπολογισμούς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό άνυσμα αναφοράς σε κάθε ομάδα διαγραμμάτων Feynman η οποία να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας απλουστεύοντας τους υπολογισμούς.

Απομένει ένας τελευταίος έλεγχος, να αναπαράξουμε τις συνήθεις εκφράσεις για τα ανύσματα πόλωσης. Επιλέγουμε την τετραορμή  $k = (k, 0, 0, k)$  και το άνυσμα αναφοράς  $r = (r, 0, 0, -r)$ . Για αυτές τις τετραορμές έχουμε

$$u_L(k) = \sqrt{2k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_R(k) = \sqrt{2k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_L(r) = \sqrt{2r} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\langle r\gamma^\mu k \rangle &= u_L^\dagger(r)\bar{\sigma}^\mu u_L(k) = \sqrt{4kr}(0, 1, -i, 0)^\mu \\ \langle rk \rangle &= u_L^\dagger(r)u_R(k) = -\sqrt{4kr}\end{aligned}\quad (26)$$

οπότε το δεξιόστροφο άνυσμα πόλωσης όπως αναμέναμε είναι

$$e_R^{*\mu}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0)^{*\mu} \quad (27)$$

Περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στο [2]. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο φορμαλισμός μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση σωματιδίων με μάζα [3–7].

### 2.3 Τετριμμένη εφαρμογή στην QED

Ας θεωρήσουμε την σκέδαση  $e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+$ . Γράφουμε το πλάτος

$$\begin{aligned}i\mathcal{M} &= (-ie)^2 \bar{U}_L(3)\gamma^\mu U(4)_L \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{U}_L(2)\gamma^\nu U_L(1) \\ &= \frac{ie^2}{q^2} \langle 3\gamma^\mu 4 \rangle \langle 2\gamma^\nu 1 \rangle \\ &= \frac{2ie^2}{q^2} \langle 32 \rangle [14]\end{aligned}\quad (28)$$

Η μεταφερόμενη τετραορμή είναι  $q^2 = 2k_1 \cdot k_2 = \langle 12 \rangle [21]$ , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}i\mathcal{M} &= 2ie^2 \frac{\langle 32 \rangle [14]}{\langle 12 \rangle [21]} \\ &= 2ie^2 \frac{\langle 32 \rangle [14] \langle 32 \rangle}{\langle 12 \rangle [21] \langle 32 \rangle}\end{aligned}\quad (29)$$

Ο παρονομαστής γίνεται

$$[21] \langle 32 \rangle = [12] \langle 23 \rangle = [1\cancel{2}3] = [1(-\cancel{1} - \cancel{3} - \cancel{4})3] = -[1\cancel{4}3] = -[14] \langle 43 \rangle \quad (30)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις Dirac των σωματιδίων 1,3 και το γεγονός ότι

$$\frac{1 + \gamma^5}{2} 3 \rangle = 3 \rangle. \quad (31)$$

Το πλάτος γίνεται

$$i\mathcal{M} = 2ie^2 \frac{\langle 32 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \quad (32)$$

Με

$$|\mathcal{M}|^2 = 4e^4 \frac{s_{23}^2}{s_{12}s_{34}} = 4e^4 \frac{u^2}{s^2} \quad (33)$$

όπου  $s_{ij} = (k_i + k_j)^2 = 2k_i \cdot k_j$  και  $s, u$  οι μεταβλητές Mandelstam. Βλέπουμε ότι ο φορμαλισμός των σπινόρων καθορισμένης ελικότητας απλοποιεί έναν αρκετά εύκολο υπολογισμό, αλλά θα ήταν αστείο να μπει κανείς στον κόπο να φτιάξει έναν νέο φορμαλισμό για να υπολογίσει αυτή την σκέδαση. Η πραγματική ισχύς των σπινόρων καθορισμένης ελικότητας σε συνδυασμό με καινοτόμες τεχνικές φαίνεται σε υπολογισμούς οι οποίοι είναι πρακτικά αδύνατοι με τις συμβατικές μεθόδους [8, 9].



### 3 Φορμαλιστική Αντιμετώπιση των Πλατών

#### 3.1 Φορμαλισμός Weyl - van der Waerden

Για να συνεχίσουμε πρέπει να περάσουμε σε ένα πιο αυστηρό φορμαλισμό. Αναφερόμαστε σε άμαζα σωμάτια, οπότε σε οποιαδήποτε υπολογισμό υπεισέρχεται ο μη γραμμικός σύνδεσμος  $p^2 = 0$ . Μια καλή αρχή θα ήταν να μπορέσουμε να γραμμικοποιήσουμε τον συγκεκριμένο σύνδεσμο. Εχμεταλλευόμαστε τον ισομορφισμό  $SO(1, 3, \mathbb{R}) \simeq SL(2, \mathbb{C})$  και έχουμε την αντιστοιχία

$$p^\mu \rightarrow p_{a\dot{a}} = p_\mu \sigma_{a\dot{a}}^\mu \quad (34)$$

τότε

$$\det(p_{a\dot{a}}) = p^2 = 0 \quad (35)$$

οπότε ο σύνδεσμος μεταφράζεται στον μηδενισμό της ορίζουσας, το οποίο έχει σαν αποτέλεσμα ο πίνακας  $p_{a\dot{a}}$  να έχει τάξη 1. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να εκφράσουμε τον πίνακα ως

$$p_{a\dot{a}} = \lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \quad (36)$$

όπου  $(\lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$  σπίνορες Weyl στις αντίστοιχες αναπαραστάσεις. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε κάνει τον σύνδεσμο τετριμμένο. Έχουμε δηλαδή αποκτήσει ένα σημαντικό πλεονέκτημα χρησιμοποιώντας τους σπίνορες καθώς αυτόματα ικανοποιούμε τον σύνδεσμο. Βέβαια η κατάσταση δεν είναι τόσο απλή καθώς η σχέση (36) δεν είναι αντιστρέψιμη, αφού οι σπίνορες  $(\lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}})$  δεν είναι μοναδικοί καθώς υπάρχει η δυνατότητα διαφορετικής βάρθμισης

$$(\lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}) \rightarrow (t\lambda_a, t^{-1}\tilde{\lambda}_{\dot{a}}) \quad t \in \mathbb{C}^* \quad (37)$$

Για να ενσωματώσουμε την δυνατότητα βάρθμισης μπορούμε να πάρουμε τους σπίνορες σε προβολικό χώρο οπότε να έχουμε  $(\lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ .

Βέβαια για πραγματικές ορμές οι σπίνορες  $(\lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}})$  δεν είναι ανεξάρτητοι επειδή

$$\lambda_{\dot{a}}^* = \pm \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \quad (38)$$

αλλά εμείς δεν έχουμε λόγο να αυτοπεριοριστούμε. Έχουμε δύο ειδών αναλλοίωτα γινόμενα

$$\langle \lambda \lambda' \rangle = \epsilon_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda'^\beta, \quad [\tilde{\lambda} \tilde{\lambda}'] = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}'^{\dot{\beta}} \quad (39)$$

Ενώ<sup>1</sup>

$$2p \cdot p' = \langle \lambda \lambda' \rangle [\tilde{\lambda} \tilde{\lambda}'] \quad (40)$$

Η σχέση  $\langle \lambda \lambda' \rangle = 0$  σημαίνει ότι  $\lambda'_a = c\lambda_a$ .

<sup>1</sup>Η σύμβαση αυτή διαφέρει κατά ένα πρόσημο από την σύμβαση που ακολουθείται στην QCD

## 3.2 Ελικότητα

Ας μελετήσουμε ένα φερμιόνιο αρνητικής ελικότητας. Η εξίσωση που υπακούει είναι

$$i\sigma_{a\dot{a}}^\mu \partial_\mu \psi^a = 0 \quad (41)$$

Για ένα επίπεδο κύμα  $\psi^a = \rho^a \text{Exp}(ix \cdot p)$  η σχέση αυτή δίνει  $p_{a\dot{a}}\rho^a = 0$  οπότε για  $p_{a\dot{a}} = \lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}}$  έχουμε  $\lambda_a \rho^a = 0$ . Καταλήγουμε λοιπόν ότι το φερμιόνιο αρνητικής ελικότητας έχει την κυματοσυνάρτηση

$$\psi^a = c\lambda^a e^{ix_{a\dot{a}}\lambda^a \tilde{\lambda}^{\dot{a}}} \quad (42)$$

Αντίστοιχα φερμιόνιο θετικής ελικότητας περιγράφεται από εξίσωση

$$\psi^{\dot{a}} = c\lambda^{\dot{a}} e^{ix_{a\dot{a}}\lambda^a \tilde{\lambda}^{\dot{a}}} \quad (43)$$

Θα κατασκευάσουμε τώρα τα ανύσματα πόλωσης, τα οποία πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση  $p^\mu \epsilon_\mu = 0$  και να εμφανίζουν την συμμετρία

$$\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^\mu + c p^\mu \quad (44)$$

Κατευθείαν μαντεύουμε την μορφή

$$\epsilon_{a\dot{a}}^+ = \frac{\mu_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}}}{\langle \mu \tilde{\lambda} \rangle}, \quad \epsilon_{a\dot{a}}^- = \frac{\lambda_a \tilde{\mu}_{\dot{a}}}{[\tilde{\lambda} \tilde{\mu}]} \quad (45)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η μορφή είναι ανεξάρτητη του ανύσματος αναφοράς. Ας επιλέξουμε την θετική πόλωση. Ο γενικότερος μετασχηματισμός του σπινόρα  $\mu_a$  είναι της μορφής

$$\delta \mu_a = \alpha \mu_a + \beta \lambda_a \quad (46)$$

έχουμε

$$\delta \epsilon_{a\dot{a}}^- = \frac{\beta}{1 + \alpha} \frac{\lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}}}{\langle \mu \tilde{\lambda} \rangle} \quad (47)$$

αφού ο πρώτος όρος του μετασχηματισμού αφήνει αναλλοίωτο το άνυσμα πόλωσης. Βλέπουμε ότι η αλλαγή  $\delta \mu_a = \beta \lambda_a$  αντιστοιχεί σε μετασχηματισμό βαθμίδας. Κάτω από την βάρθρωση  $(t\lambda_a, t^{-1}\tilde{\lambda}_{\dot{a}})$   $t \in \mathbb{C}^*$  τα ανύσματα πόλωσης βαθμίζονται ως

$$(\epsilon^-, \epsilon^+) \rightarrow (t^2 \epsilon^-, t^{-2} \epsilon^+) \quad (48)$$

Το δυναμικό είναι

$$A_{a\dot{a}}^+ = \epsilon_{a\dot{a}}^+ e^{ix_{a\dot{a}}\lambda^a \tilde{\lambda}^{\dot{a}}} \quad A_{a\dot{a}}^- = \epsilon_{a\dot{a}}^- e^{ix_{a\dot{a}}\lambda^a \tilde{\lambda}^{\dot{a}}} \quad (49)$$

Μέχρι στιγμής βλέπουμε ότι η κυματοσυνάρτηση ενός άμαζου σωματιδίου ελικότητας  $h$  κάτω από την βάρθρωση  $(t\lambda_a, t^{-1}\tilde{\lambda}_{\dot{a}})$   $t \in \mathbb{C}^*$  βαθμίζεται ως  $t^{-2h}$ . Αλγεβρικά αυτό μεταφράζεται ως

$$\left( \lambda^a \frac{\partial}{\partial \lambda^a} - \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}^{\dot{a}}} \right) \psi(\lambda, \tilde{\lambda}) = -2h\psi(\lambda, \tilde{\lambda}) \quad (50)$$

### 3.3 Πλάτος Σκέδασης

Γενικά το πλάτος μιας διαδικασίας εξαρτάται από την κυματοσυνάρτηση των σωματιδίων και από τις ορμές. Χρησιμοποιώντας τους σπίνορες Weyl μπορούμε να εκφράσουμε το πλάτος σκέδασης  $n$  σωματιδίων στην θεωρία Yang Mills ως

$$A = (2\pi)^4 g^{n-2} \delta^4 \left( \sum_i \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} \right) \mathcal{A}(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, h_i) \quad (51)$$

όπου όλα τα σωματίδια θεωρούνται εισερχόμενα και η συνάρτηση  $\delta$  οφείλεται στην διατήρηση ορμής. Η σχέση 50 προφανώς ισχύει και για το πλάτος, άρα

$$\left( \lambda^a \frac{\partial}{\partial \lambda^a} - \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}^{\dot{a}}} \right) \mathcal{A}(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, h_i) = -2h_i \mathcal{A}(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, h_i) \quad (52)$$

για κάθε σωματίδιο  $i$ .

### 3.4 Διάταξη χρώματος

Ας ξεκινήσουμε με μια θεωρία βαθμίδας  $SU(N)^2$ . Η Lagrangian της αλληλεπίδρασης είναι

$$\mathcal{L}^I = -i g \bar{\psi} \not{G}^a t^a \psi + \frac{g}{2} (\partial^\mu G^{a\nu} - \partial^\nu G^{a\mu}) f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A^{b\mu} A^{c\nu} A_\mu^d A_\nu^e \quad (53)$$

Ένα πρώτο βήμα στην αναζήτηση της απλότητας είναι να ξεχωρίσει κανείς την δυναμική από την κινηματική. Η άλγεβρα της ομάδας είναι

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c \quad (54)$$

ως συνήθως οι γεννήτορες είναι νορμαλισμένοι

$$Tr [t^a t^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (55)$$

Βαθμίζουμε τους γεννήτορες ως

$$T^a = \sqrt{2} t^a \quad (56)$$

Ο παράγοντας  $\sqrt{2}$  θα απορροφηθεί στους κανόνες Feynman. Με τον νέο νορμαλισμό έχουμε

$$[T^a, T^b] = i \sqrt{2} f^{abc} T^c \quad (57)$$

οπότε

$$-g f^{abc} = i \frac{g}{\sqrt{2}} Tr [T^a T^b T^c - T^a T^c T^b] \quad (58)$$

---

<sup>2</sup>Η διαδικασία συνήθως αφορά την QCD, εξού και η διάταξη χρώματος

και

$$\begin{aligned}
-ig^2 f^{abe} f^{cde} &= i\frac{g^2}{2} \text{Tr} [[T^a, T^b] [T^c, T^d]] \\
&= i\frac{g^2}{2} \text{Tr} [T^a T^b T^c T^d - T^a T^b T^d T^c - T^b T^a T^c T^d + T^b T^a T^d T^c]
\end{aligned} \tag{59}$$

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να μετασχηματίσουμε τους συνήθεις κανόνες Feynman σε κανόνες Feynman για συγκεκριμένη διάταξη χρωμάτων. Ο παράγοντας ζεύξης για τα 3 μποζόνια βαθμίδας γίνεται

$$i\frac{g}{\sqrt{2}} \text{Tr} [T^a T^b T^c] (g^{\mu\nu}(1-2)^\lambda + g^{\nu\lambda}(2-3)^\mu + g^{\lambda\mu}(3-1)^\nu) + (\text{non-cyclic}) \tag{60}$$

ενώ ο παράγοντας ζεύξης για τα 4 μποζόνια βαθμίδας γίνεται

$$i\frac{g^2}{2} \text{Tr} [T^a T^b T^c T^d] (2g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}) + (\text{non-cyclic}) \tag{61}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\sum_a (T^a)_{i_1}^{\bar{j}_1} (T^a)_{i_2}^{\bar{j}_2} = \delta_{i_1}^{\bar{j}_2} \delta_{i_2}^{\bar{j}_1} - \frac{1}{N} \delta_{i_1}^{\bar{j}_1} \delta_{i_2}^{\bar{j}_2} \tag{62}$$

μπορούμε να διαχειριστούμε τα ίχνη που εμφανίζονται στις εκφράσεις για τα πλάτη, όπως

$$\sum_a \text{Tr} [T^a A] \text{Tr} [T^a B] = \text{Tr} [AB] - \frac{1}{N} \text{Tr} [A] \text{Tr} [B] \tag{63}$$

$$\sum_a \text{Tr} [T^a A T^a B] = \text{Tr} [A] \text{Tr} [B] - \frac{1}{N} \text{Tr} [AB] \tag{64}$$

Εφαρμόζοντας τους χρωματικά διατεταγμένους κανόνες Feynman<sup>3</sup> στην σκέδαση  $n$  μποζονίων βαθμίδας βλέπουμε ότι σε tree level το πλάτος μπορεί να γραφεί [2, 10]

$$\mathcal{A}_{tot}^{tree}(\{k_i, \epsilon_i, a_i\}) = \sum_{\sigma \in S_n/Z_n} \text{Tr} [T^{a_{\sigma(1)}} T^{a_{\sigma(2)}} \dots T^{a_{\sigma(n)}}] \mathcal{A}_n^{tree}(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)) \tag{65}$$

όπου το  $\mathcal{A}_n^{tree}(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$  ονομάζεται μερικό πλάτος και περιέχει όλες τις κινηματικές πληροφορίες. Μεταβαίνοντας στο επίπεδο 1 loop το πλάτος γράφεται [11]

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{1-loop}(\{k_i, \epsilon_i, a_i\}) &= g^2 N \sum_{\sigma \in S_n/Z_n} \text{Tr} [T^{a_{\sigma(1)}} T^{a_{\sigma(2)}} \dots T^{a_{\sigma(n)}}] \mathcal{A}_n^{1-loop}(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)) \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{\sigma \in S_n/Z_n; c} \text{Tr} [T^{a_{\sigma(1)}} T^{a_{\sigma(2)}} \dots T^{a_{\sigma(c-1)}}] \text{Tr} [T^{a_{\sigma(c)}} T^{a_{\sigma(c+1)}} \dots T^{a_{\sigma(n)}}] \mathcal{A}_{n;c}^{1-loop}(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))
\end{aligned} \tag{66}$$

---

<sup>3</sup>ή τον φορμαλισμό των διπλών γραμμών [2, 12]

Όπου  $S_n/Z_{n,c}$  είναι οι μη κυκλικές μεταθέσεις τόσο στο σύνολο των σωματιδίων, όσο και στα δύο ίχνη που εμφανίζονται.

Το πρώτο πλεονέκτημα αυτής της ανάλυσης είναι ότι πράγματι η δυναμική, που οφείλεται στο χρώμα, έχει διαχωριστεί από την κινηματική. Για να υπολογίσει κανείς το πλάτος μιας άλλης θεωρίας βαθμίδας, δεν έχει παρά να υπολογίσει τα ίχνη με τους πίνακες της αναπαράστασης της νέας ομάδας συμμετρίας. Τα μερικά πλάτη δεν αλλάζουν σε τίποτα. Παράλληλα η διάταξη εξασφαλίζει ότι οι πόλοι και οι τομές διακλάδωσης εμφανίζονται μόνο σε διαδοχικά κανάλια της μορφής  $s_{i,i+1}$ . Το βασικότερο όμως πλεονέκτημα αυτού του διαχωρισμού είναι ότι τα μερικά πλάτη, αυτά καθ' αυτά, έχουν εξαιρετική σημασία. Αποτελούν τα ελλάσωνα αντικείμενα τα οποία είναι αναλλοίωτα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι αξίζει να μελετήσει κανείς τις ιδιότητές τους.

Γενικά μια απλοποίηση που μπορεί να κάνει κάποιος είναι να αγνοήσει όρους τάξης  $1/N$ , θεωρώντας το όριο

$$N \rightarrow \infty \quad g^2 N = \text{const} \quad (67)$$

Έτσι αν πρόκειται για αλληλεπίδραση μεταξύ μποζονίων βαθμίδας επιβιώνουν μόνο οι όροι με ένα ίχνος γεννητόρων. Οι όροι αυτοί αποτελούν την κύρια συνεισφορά στο ανάπτυγμα  $1/N$  και αποτελούν το λεγόμενο όριο 't Hooft. Με αυτή την επιλογή κρατάμε τα διαγράμματα που ανήκουν σε ένα επίπεδο και η διαταρακτική σειρά γίνεται το ανάπτυγμα στην σταθερά  $g^2 N$ . Η παραπάνω απλοποίηση είναι ισοδύναμη με το να εισάγει κανείς έναν γεννήτορα ο οποίος αντιστοιχεί στο ίχνος των γεννητόρων της ομάδας  $SU(N)$  και μετατίθεται με αυτούς, μετατρέποντάς την σε  $U(N) = SU(N) \times U(1)$ . Τότε η σχέση (62) μετατρέπεται σε

$$(T^a)_{i_1}^{\bar{j}_1} (T^a)_{i_2}^{\bar{j}_2} = \delta_{i_1}^{\bar{j}_2} \delta_{i_2}^{\bar{j}_1} \quad (68)$$

Ο  $U(1)$  γεννήτορας μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες της ομάδας  $SU(N)$ , οπότε δεν συμμετέχει στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μποζονίων βαθμίδας και ζεύγνεται μόνο με τα φερμιόνια ή με τα βαθμωτά πεδία τα οποία βρίσκονται στην θεμελιώδη αναπαράσταση της ομάδας συμμετρίας. Σε υπολογισμούς καθαρής θεωρίας βαθμίδας ο υποδεέστερος όρος στο ανάπτυγμα  $1/N$  του πρωτογενούς πλάτους, ακριβώς λόγω της αντιστοιχίας του  $U(1)$  γεννήτορα με τον όρο  $1/N$  στην σχέση (62), αντιστοιχεί στο πλάτος της ισοδύναμης διαδικασίας για φωτόνια. Η απεμπλοκή του  $U(1)$  γεννήτορα θα δούμε ότι οδηγεί σε σχέσεις που αφορούν τα μερικά πλάτη. Στην βιβλιογραφία μπορεί να βρει κανείς αναπτύγματα για την περίπτωση που στην σκέδαση υπάρχουν φερμιόνια ή βαθμωτά πεδία [2, 10].

### 3.5 Ταυτότητες για τα Μερικά Πλάτη

Ήδη από την σχέση 65 φαίνεται ότι τα πλάτη πρέπει να εμφανίζουν κυκλικότητα.

$$\mathcal{A}_n(1, 2, \dots, n) = \mathcal{A}_n(n, 1, \dots, n-1) \quad (69)$$

Ακόμα ικανοποιούν την ακόλουθη ταυτότητα αντιστροφής χρώματος

$$\mathcal{A}_n(1, 2, \dots, n-1, n) = (-)^n \mathcal{A}_n(n, n-1, \dots, 2, 1) \quad (70)$$

Η ταυτότητα απεμπλοκής του γεννήτορα  $U(1)$  είναι

$$\sum_{\text{cyclic}} \mathcal{A}(1, \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n)) = 0 \quad (71)$$

Οι σχέσεις Kleiss -Kuijf διατυπώθηκαν στο [13] και αποδείχθηκαν στο [14]. Οι σχέσεις είναι

$$\mathcal{A}_n(1, \{\alpha\}, n, \{\beta\}) = (-)^{n_\beta} \sum_{\sigma \in OP(\{\alpha\}, \{\beta^T\})} \mathcal{A}(1, \sigma, n) \quad (72)$$

Το άθροισμα είναι στις μεταθέσεις του συνόλου  $\alpha U \beta^T$ , όπου διατηρείται η σχετική διάταξη των συνόλων  $\alpha$  και  $\beta^T$  ( $\beta^T$  είναι το ανεστραμμένο σύνολο  $\beta$ ). Για παράδειγμα για την σκέδαση 6 μποζονίων βαθμίδας έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1, 2, 3, 6, 4, 5) = & \mathcal{A}(1, 2, 3, 5, 4, 6) + \mathcal{A}(1, 2, 5, 3, 4, 6) + \mathcal{A}(1, 2, 5, 4, 3, 6) \\ & + \mathcal{A}(1, 5, 4, 2, 3, 6) + \mathcal{A}(1, 5, 2, 4, 3, 6) + \mathcal{A}(1, 5, 2, 3, 4, 6) \end{aligned} \quad (73)$$

Οι σχέσεις Bern-Carrasco-Johansson διατυπώθηκαν στο [15], αποδείχθηκαν στα πλαίσια της θεωρίας χορδών στα [16, 17] και στα πλαίσια της θεωρίας πεδίου στα [18, 19].

Η κυκλική ιδιότητα μειώνει το πλήθος των ανεξάρτητων μερικών πλατών από  $n!$  σε  $(n-1)!$ . Οι σχέσεις KK μειώνουν το πλήθος σε  $(n-2)!$ , επιτρέποντας να ταυτοποιήσουμε το πρώτο και τελευταίο σωματίδιο του πλάτους με τα σωματίδια 1 και  $n$  αντίστοιχα. Οι σχέσεις BCJ αναδεικνύουν ακόμα περισσότερες σχέσεις μεταξύ των πλατών, αφήνοντάς μας με  $(n-3)!$  ανεξάρτητα μερικά πλάτη. Οι εκφράσεις των γενικών σχέσεων BCJ είναι αρκετά σύνθετες και μπορεί να τις βρει κανείς στο [15]. Κάποιες σχέσεις με πιο απλές εκφράσεις έχουν επικρατήσει ως θεμελιώδεις σχέσεις BCJ. Κάποια παραδείγματα είναι

$$0 = I_4 = \mathcal{A}(2, 4, 3, 1)(s_{43} + s_{41}) + \mathcal{A}(2, 3, 4, 1)s_{41} \quad (74)$$

$$0 = I_5 = \mathcal{A}(2, 4, 3, 5, 1)(s_{43} + s_{45} + s_{41}) + \mathcal{A}(2, 3, 4, 5, 1)(s_{45} + s_{41}) + \mathcal{A}(2, 3, 5, 4, 1)s_{41} \quad (75)$$

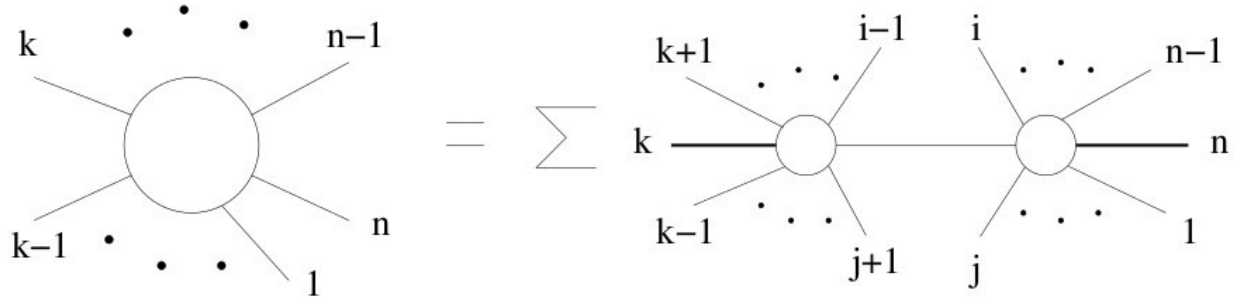
$$\begin{aligned} 0 = I_6 = & \mathcal{A}(2, 4, 3, 5, 6, 1)(s_{43} + s_{45} + s_{46} + s_{41}) + \mathcal{A}(2, 3, 4, 5, 6, 1)(s_{45} + s_{46} + s_{41}) \\ & + \mathcal{A}(2, 3, 5, 4, 6, 1)(s_{46} + s_{41}) + \mathcal{A}(2, 3, 5, 6, 4, 1)s_{41} \end{aligned} \quad (76)$$

## 4 Αναδρομή BCFW

Οι σχέσεις μεταξύ πλατών της προηγούμενης ενότητας μας δείχνουν πως γνωρίζοντας κάποια πλάτη σκέδασης  $n$  σωματιδίων μπορούμε να υπολογίσουμε κάποια άλλα επίσης  $n$  σωματιδίων. Τώρα θα δούμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πλάτος σκέδασης  $n$  σωματιδίων από πλάτη σκέδασης λιγότερων σωματιδίων. Η διαδικασία αυτή είναι επαναστατική καθώς επιτρέπει τον αναδρομικό υπολογισμό πλατών. Η αναδρομή BCFW αποδείχθηκε από τους Britto, Cachazo και Feng στο [20] οι οποίοι βασίστηκαν στην μελέτη μιας διαδικασίας 1-loop, ενώ στην συνέχεια με την συνδρομή του Witten στο [21] το ίδιο αποτέλεσμα εξήχθη απευθείας από την άμεση ανάλυση πλατών tree level. Θεωρούμε την σκέδαση  $n$  μποζονίων βαθμίδας. Η κβαντική θεωρία πεδίου μας επιτρέπει να παραγοντοποιήσουμε την διαδικασία ως την επαλληλία όλων των δυνατών συνδυασμών δύο σκεδάσεων οι οποίες συνδέονται με ένα δυνητικό μποζόνιο βαθμίδας:

$$A_n = \sum \hat{A}_{r+1}^h \frac{1}{P_r^2} \hat{A}_{n-r+1}^{-h}, \quad (77)$$

ο τόνος υποδηλώνει ότι τα πλάτη σκέδασης έχουν ένα σωματίδιο εκτός φλοιού μάζας.



Σχήμα 1: Η παραγοντοποίηση της σχέσης (77). Η έντονη γραμμή στο σχήμα του δεξιού μέλους υποδηλώνει τα μποζόνια βαθμίδας με τις τροποποιημένες ορμές.

Ας δούμε πως μεταβαίνοντας στο μιγαδικό επίπεδο θα μπορέσουμε να καταλήξουμε σε ένα εκπληκτικό αποτέλεσμα. Επιλέγουμε ένα ζεύγος μποζονίων βαθμίδας, έστω τα  $k$  και  $n$ . Η κυκλική συμμετρία των πλατών σκέδασης μας εξασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα θα ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος. Εισάγουμε μια μιγαδική μεταβλητή  $z$  και τροποποιούμε τους δισπίνορες των σωματιδίων ως εξής

$$\begin{aligned} \lambda_k &\rightarrow \hat{\lambda}_k(z) = \lambda_k - z\lambda_n \\ \tilde{\lambda}_n &\rightarrow \hat{\tilde{\lambda}}_n(z) = \tilde{\lambda}_n + z\tilde{\lambda}_k \end{aligned} \quad (78)$$

Η τροποποίηση αυτή έχει ως αποτέλεσμα οι ορμές των σωματιδίων  $k$  και  $n$  να μεταβληθούν αντίστοιχα ως

$$\begin{aligned} p_k(z) &= (\lambda_k - z\lambda_n) \tilde{\lambda}_k \\ p_n(z) &= \lambda_n (\tilde{\lambda}_n + z\tilde{\lambda}_k) \\ p_s(z) &= p_s \quad s \neq n, k \end{aligned} \quad (79)$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των ορμών των σωματιδίων παραμένει αμετάβλητο και ότι τα σωματίδια παραμένουν στον φλοιό της μάζας. Πλέον το πλάτος  $A_n$  εξαρτάται από την μιγαδική μεταβλητή  $z$ . Ένα λεπτό σημείο είναι το κατά πόσον ορίζεται η σχέση (79) για  $z \neq 0$ . Η απάντηση είναι καταφατική. Παρόλο που για τον χώρο Minkowski οι ορμές πρέπει να είναι πραγματικές με αποτέλεσμα να έχουμε τον σύνδεσμο  $\lambda = \pm \lambda^*$ , μπορούμε να απεμπλέξουμε τα  $\lambda$  από τα  $\tilde{\lambda}$  χρησιμοποιώντας την μετρική  $++--$  και θεωρώντας όλες τις ορμές μιγαδικές. Τα τελικά αποτελέσματα εκφράζονται ως γινόμενα σπινόρων, τα οποία ισχύουν για οποιαδήποτε μετρική του χωροχρόνου. Ακόμα και αν δεν καταφύγει κανείς στο τέχνασμα αυτό, μπορεί να απεμπλέξει τις ορμές ακόμα και με την μετρική Minkowski, αλλά χρειάζονται πολύ πιο σύνθετα μαθηματικά [22]. Ας μελετήσουμε το  $A_n(z)$  ως μιγαδική συνάρτηση. Πρόκειται για ρητή συνάρτηση ως προς την μεταβλητή  $z$ , η οποία μάλιστα παρουσιάζει μόνο απλούς πόλους. Οι πόλοι προέρχονται από τους τροποποιημένους διαδότες και οι διάφοροι διαδότες δίνουν πόλους για διαφορετικές τιμές του  $z$ , όπως θα δούμε. Σε σχέση με την παλιά θεωρία του πίνακα σχέδσης [23–26], που μετέφερε όλες τις ορμές στο μιγαδικό επίπεδο, η διαφοροποίηση έγκειται στο γεγονός ότι το πέρασμα στο μιγαδικό επίπεδο γίνεται πολύ πιο προσεκτικά μιγαδικοποιώντας μόνο 2 ορμές, και μάλιστα με συγκεκριμένο τρόπο.

Σε επίπεδο tree level η ορμή κάθε εσωτερικού σωματιδίου μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ορμών εξωτερικών σωματιδίων. Για συγκεκριμένη διάταξη χρώματος τα πλάτη της θεωρίας Yang Mills κείτονται σε ένα επίπεδο, έτσι το άθροισμα των ορμών πάντα είναι άθροισμα ορμών διαδοχικών σωματιδίων,  $P_{ij} = p_i + \dots + p_j$  για κάποια  $i, j$  με  $j > i$ . Το γεγονός αυτό σχετίζεται άμεσα με την τοπικότητα της θεωρίας. Ο διαδότης του εσωτερικού μποζονίου βαθμίδας θα έχει την μορφή  $1/P_{ij}^2$  ή  $1/P_{ij}^2(z)$  μετά την τροποποίηση των ορμών. Αν στο άθροισμα περιλαμβάνονται και τα δύο μποζόνια με τις τροποποιημένες ορμές τότε το άθροισμα είναι ανεξάρτητο του  $z$  οπότε δεν υπάρχει πόλος. Επομένως η κάθε τροποποιημένη ορμή θα πρέπει να περιλαμβάνεται σε διαφορετικό πλάτος στην παραγοντοποίηση (77), βλέπε σχήμα (1). Από την διατήρηση της ορμής, το άθροισμα των ορμών του ενός πλάτους είναι αντίθετο από το άθροισμα των ορμών του άλλου, οπότε μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι το σωματίδιο  $n$  ανήκει στο πρώτο πλάτος που περιλαμβάνει τα εξωτερικά σωματίδια  $i$  έως  $j$ , ενώ το  $k$  ανήκει στο δεύτερο πλάτος το οποίο περιλαμβάνει τα εξωτερικά σωματίδια  $i+1$  έως  $j-1$ . Τότε ο διαδότης που ενώνει τα δυο πλάτη θα έχει ορμή  $P_{ij}(z) = P_{ij} + z\lambda_n \tilde{\lambda}_k$ , οπότε  $P_{ij}^2(z) = P_{ij}^2 - z\langle \lambda_n | P_{ij} | \tilde{\lambda}_k \rangle$ , όπου  $\langle \lambda_n | P_{ij} | \tilde{\lambda}_k \rangle = -p_{ia} \lambda_n^a \tilde{\lambda}_k^a$ . Προφανώς ο παρονομαστής εμφανίζει πόλο για:

$$z_{ij} = \frac{P_{ij}^2}{\langle \lambda_n | P_{ij} | \tilde{\lambda}_k \rangle} \quad (80)$$

Από την παραπάνω συζήτηση βλέπουμε ότι οι πόλοι είναι διαφορετικοί για τις διάφορες παραγοντοποιήσεις του αρχικού πλάτους και ότι πράγματι η συνάρτηση  $A_n(z)$  παρουσιάζει μόνο απλούς πόλους. Θα αποδείξουμε ότι αν τα μποζόνια  $k$  και  $n$  έχουν ελικότητες  $(-, +)$  ή  $(+, +)$  ή  $(-, -)$  τότε το πλάτος  $A_n(z)$  μηδενίζεται για  $z \rightarrow \infty$ . Προς το παρόν απλά θα θεωρήσουμε ότι υπάρχει κάποια διάταξη ελικότητας για την οποία πράγματι ισχύει ο ισχυρισμός. Από την θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων είναι γνωστό ότι το ανάπτυγμα Laurent μια συνάρτησης



με απλούς πόλους η οποία μηδενίζεται στο άπειρο είναι

$$\mathcal{A}_n(z) = \sum_{i,j} \frac{c_{ij}}{z - z_{ij}}, \quad (81)$$

όπου το άθροισμα στα  $i$  και  $j$  είναι σε όλα τα δυνατά ζεύγη για τα οποία το  $n$  ανήκει στο εύρος  $i$  έως  $j$ . Το πλάτος σχέδασης που μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε είναι το  $\mathcal{A}_n(0)$  το οποίο θα δίνεται από την σχέση

$$\mathcal{A}_n(0) = - \sum_{i,j} \frac{c_{ij}}{z_{ij}}, \quad (82)$$

Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα δίνονται από την σχέση (77) θέτοντας  $z = z_{ij}$  στον αριθμητή

$$c_{ij} = - \sum_h \mathcal{A}^h(p_j(z), \dots, p_i(z)) \frac{1}{\langle \lambda_n | P_{ij} | \tilde{\lambda}_k \rangle} \mathcal{A}^{-h}(p_{i+1}(z), \dots, p_{j-1}(z)) \Big|_{z=z_{ij}} \quad (83)$$

Ωστόσο η αντικατάσταση  $z = z_{ij}$  στον αριθμητή καθιστά την μεταφερόμενη τετραορμή μηδενική, οπότε το δυναμικό μποζόνιο έρχεται στον φλοιό μάζας με αποτέλεσμα η παραγοντοποίηση (77) να αφορά πλάτη τα οποία περιλαμβάνουν αποκλειστικά εξωτερικά σωματίδια. Από όλη αυτή την συζήτηση καταλήγουμε στην αναδρομή BCFW

$$\mathcal{A}_n = \sum_{i,j} \sum_h \mathcal{A}^h(p_j(z), \dots, p_i(z)) \frac{1}{P_{ij}} \mathcal{A}^{-h}(p_{i+1}(z), \dots, p_{j-1}(z)) \Big|_{z=z_{ij}} \quad (84)$$

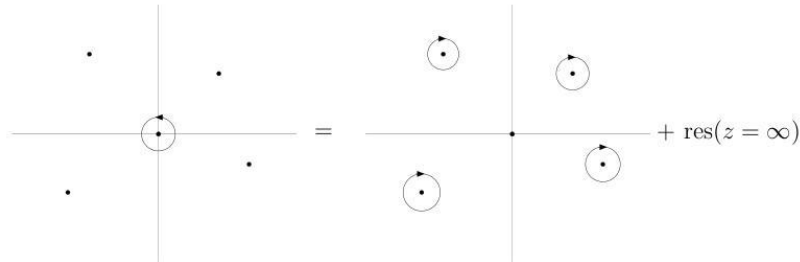
Ουσιαστικά η ανωτέρω διαδικασία δεν είναι τίποτα άλλο από τον υπολογισμό του μιγαδικού ολοκληρώματος

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathcal{A}_n(z)}{z} dz \quad (85)$$

γύρω από το μηδέν και γύρω από όλους τους υπόλοιπους πόλους. Προφανώς ισχύει η σχέση

$$I_0 = -I_{\text{poles}} + \text{res}(z = \infty) \quad (86)$$

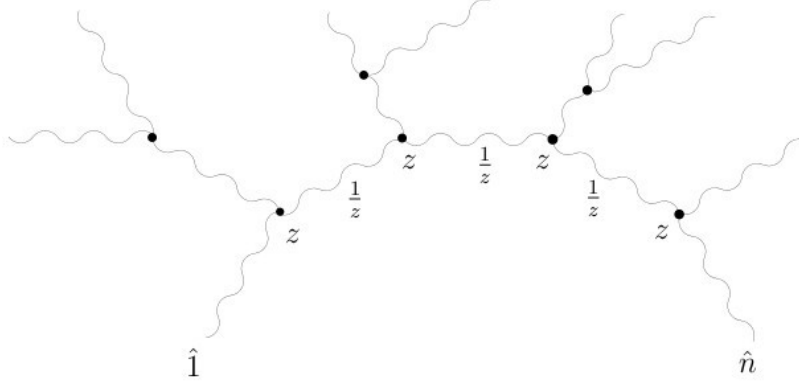
η οποία απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα (2).



Σχήμα 2: Οι διαδρομές ολοκλήρωσης της σχέσης (85) για τις οποίες ισχύει η σχέση (86).

## 5 Η συμπεριφορά των πλατών για $z \rightarrow \infty$

Η κρίσιμη υπόθεση για την αναδρομή BCFW είναι η υπάρξη κάποιας διάταξης ελικότητας για την οποία το τροποποιημένο πλάτος μηδενίζεται για  $z \rightarrow \infty$ . Δεν έχουμε παρά να καταφύγουμε στους κανόνες Feynman. Ανάμεσα στα σωματίδια με τις τροποποιημένες ορμές θα υπάρχουν διαδότες και κορυφές. Κάθε εσωτερικός διαδότης θα επηρεάζεται από την τροποποίηση και θα συνεισφέρει κατά  $1/z$  καθώς  $z \rightarrow \infty$ . Η ζεύξη των κορυφών τριών σημείων είναι ανάλογη της ορμής, οπότε η συνεισφορά αυτών των κορυφών θα είναι  $z$ . Η ζεύξη των κορυφών τεσσάρων σημείων δεν εξαρτάται από την ορμή, οπότε αυτές οι κορυφές δεν επηρεάζουν την συμπεριφορά του πλάτους για  $z \rightarrow \infty$ . Καταλήγουμε λοιπόν ότι η χειρότερη συμπεριφορά οφείλεται στα διαγράμματα που περιέχουν αποκλειστικά κορυφές τριών σημείων. Το διάγραμμα αυτό απεικονίζεται στο σχήμα 3. Μάλιστα αφού πάντα θα υπάρχει μια κορυφή περισσότερη σε σχέση με τους διαδότες το διάγραμμα θα αποκλίνει ως  $z$  καθώς  $z \rightarrow \infty$ .



Σχήμα 3: Το διάγραμμα με την χειρότερη συνεισφορά στο όριο  $z \rightarrow \infty$ .

Σε αυτό το σημείο πρέπει να συνυπολογίσουμε την συνεισφορά των ανυσμάτων πόλωσης. Τα ανύσματα πόλωσης είναι

$$\begin{aligned} \epsilon_{k,+}^{a\dot{a}} &= \frac{\tilde{\lambda}_k^{\dot{a}} \mu^a}{\langle \hat{\lambda}_k(z) \mu \rangle} \sim \frac{1}{z} & \epsilon_{n,+}^{a\dot{a}} &= \frac{\hat{\lambda}_n^{\dot{a}}(z) \mu^a}{\langle \hat{\lambda}_n \mu \rangle} \sim z \\ \epsilon_{k,-}^{a\dot{a}} &= \frac{\hat{\lambda}_k^a(z) \tilde{\mu}^{\dot{a}}}{[\tilde{\lambda}_k \tilde{\mu}]} \sim z & \epsilon_{n,-}^{a\dot{a}} &= \frac{\lambda_n^a \tilde{\mu}^{\dot{a}}}{[\hat{\lambda}_n(z) \tilde{\mu}]} \sim \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (87)$$

οπότε η συμπεριφορά του πλάτους για  $z \rightarrow \infty$  εξαρτάται από την ελικότητα των σωματιδίων με τις τροποποιημένες ορμές. Συγκεκριμένα η συμπεριφορά αυτή είναι (όπου σημειώνουμε τις ελικότητες των σωματιδίων  $k$  και  $n$  αντίστοιχα)

$$\mathcal{A}(+-) \sim \frac{1}{z} \quad \mathcal{A}(++) \sim z \quad \mathcal{A}(--) \sim z \quad \mathcal{A}(-+) \sim z^3 \quad (88)$$

Το αποτέλεσμα αυτό μας εξασφαλίζει ότι η αναδρομή BCFW μπορεί να χρησιμοποιηθεί τουλάχιστον για την (+−) τροποποίηση. Παρόλα αυτά θα δούμε ότι μια πιο προσεκτική μελέτη αναδεικνύει απλοποιήσεις οι οποίες οδηγούν σε ηπιότερη συμπεριφορά για τις (++) και (−−) τροποποιήσεις. Το αποτέλεσμα αυτό είναι απαραίτητο για την γενίκευση της αναδρομής BCFW σε υπερσυμμετρικές θεωρίες, όπου οι διάφορες διατάξεις ελικότητας σχετίζονται με υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς.

Στο όριο του μεγάλου  $z$  μπορούμε να θεωρήσουμε την σκέδαση ως σκέδαση ενός σωματιδίου με μεγάλη ορμή σε ένα ασθενές υπόβαθρο σωματιδίων χαμηλών ορμών [27]. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πεδίων υποβάθρου, αναπτύσσουμε την Lagrangian γύρω από το υπόβαθρο αυτό. Τα πεδία βαθμίδας γράφονται  $A_\mu = B_\mu + a_\mu$ , όπου  $B_\mu$  είναι το ασθενές υπόβαθρο και  $a_\mu$  η διακύμανση γύρω από το υπόβαθρο. Παράλληλα προσθέτουμε τον όρο  $(D_\mu a^\mu)^2$  για να καθορίσουμε την βαθμίδα των διακυμάνσεων. Στο tree level η εικόνα της αλληλεπίδρασης αποτυπώνεται στην εξής τοπολογία διαγραμμάτων Feynman. Μια συνεχής γραμμή αντιπροσωπεύει το σωματίδιο με την τροποποιημένη ορμή, ενώ υπάρχουν πρωτογενείς κορυφές αλληλεπίδρασης με το υπόβαθρο. Προφανώς η συμπεριφορά για μεγάλα  $z$  καθορίζεται αποκλειστικά από τις τετραγωνικές αλληλεπιδράσεις του  $a_\mu$  με το υπόβαθρο, ενώ οι περαιτέρω αυτοαλληλεπιδράσεις του πεδίου υποβάθρου δεν έχουν καμία συνεισφορά. Το ενδιαφέρον τμήμα της Lagrangian είναι

$$\mathcal{L}^{aa} = -\frac{1}{4}Tr [D_\mu a_\nu D^\mu a^\nu] + \frac{i}{2}Tr [F_B^{\mu\nu} [a_\mu, a_\nu]] \quad (89)$$

Η εξάρτηση από το  $z$  υπάρχει στον διαδότη του πεδίου  $a_\mu$  και στην τριγραμμική αλληλεπίδραση  $Ba\partial a$ . Οι συνεισφορές των διαδοτών είναι  $\sim 1/z$ , ενώ των τριγραμμικών ζεύξεων είναι  $\sim z$ . Η Lagrangian εμφανίζει μια συμμετρία Spin - Lorentz που αφορά τους δείκτες του πεδίου  $a_\mu$ , η οποία όμως σπάει από τον δεύτερο όρο. Η συμμετρία αυτή είναι αρκετή όμως για να μας καθορίσει την δομή του πλάτους. Για να αναδείξουμε την συμμετρία αυτή γράφουμε την Lagrangian στην μορφή

$$\mathcal{L}^{aa} = -\frac{1}{4}Tr [D_\mu a_a D^\mu a_b] n^{ab} + \frac{i}{2}Tr [F_B^{ab} [a_a, a_b]] \quad (90)$$

Ο πρώτος όρος είναι αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς Lorentz οι οποίοι δρουν αποκλειστικά στο πεδίο  $a$ , αλλά η παρουσία του αντισυμμετρικού τανυστή  $F_B$  σπάει αυτή την συμμετρία. Το πλάτος παρουσιάζει την χειρότερη συμπεριφορά όταν όλες οι κορυφές αλληλεπίδρασης είναι τριγραμμικές  $Ba\partial a$ . Τότε αφού υπάρχει μια κορυφή περισσότερη από τους διαδότες το πλάτος συμπεριφέρεται σαν  $\sim zn^{ab}$ . Η αντικατάσταση της κορυφής αυτής με άλλες αλληλεπιδράσεις μειώνει τον βαθμό του  $z$ . Το πλάτος μπορεί να αναπτυχθεί ως

$$\mathcal{A}^{ab} = n^{ab} (cz + d + \dots) + A^{ab} + \frac{1}{z}B^{ab} + \dots \quad (91)$$

Οι όροι της παρένθεσης οφείλονται στο πρώτο τμήμα της Lagrangian 90 και επομένως διατηρούν την ταυστική δομή  $n^{ab}$ . Πιο συγκεκριμένα ο πρώτος όρος της παρένθεσης οφείλεται σε τριγραμμικές ζεύξεις  $Ba\partial a$ , ενώ οι υπόλοιποι όροι της παρένθεσης οφείλονται σε ενθέσεις τετραγραμμικών ζεύξεων  $BBaa$ . Οι υπόλοιποι όροι οφείλονται στην ένθεση κορυφών που προκύπτουν από τον όρο  $F_B^{ab} [a_a, a_b]$ . Η ένθεση μιας τέτοιας κορυφής συνεισφέρει τον αντισυμμετρικό τανυστή  $A^{ab}$ , ενώ περισσότερες ενθέσεις δίνουν τανυστές χωρίς συγκεκριμένη συμμετρία.

Χρησιμοποιώντας φορμαλισμό Weyl-van der Waerden το πλάτος γράφεται

$$\mathcal{A}^{a\dot{a}b\dot{b}} = \epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}(cz + d + \dots) + \left(\epsilon^{ab}\tilde{s}^{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}s^{ab}\right) + \frac{1}{z}B^{a\dot{a}b\dot{b}} + \dots \quad (92)$$

όπου οι τανυστές  $s^{ab}$  και  $\tilde{s}^{\dot{a}\dot{b}}$  είναι συμμετρικοί. Για να βρούμε την συμπεριφορά του πλάτους για τις διάφορες διατάξεις ελικότητας δεν έχουμε παρά να συναιρέσουμε το πλάτος με τα διανύσματα πόλωσης 87. Για την διάταξη  $(++)$  βλέπουμε ότι ο πρώτος όρος της 92 δεν συνεισφέρει, με αποτέλεσμα η κύρια συνεισφορά να είναι

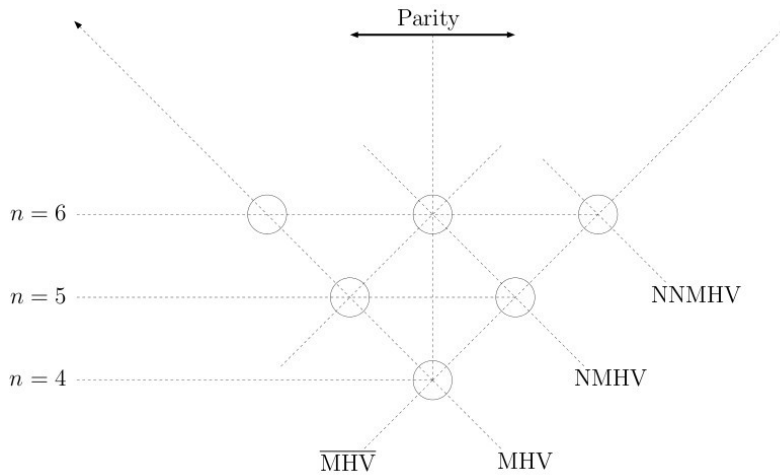
$$\frac{\left[\tilde{\lambda}_k \hat{\lambda}_n(z)\right] s^{ab} \mu_a \mu_b}{\left\langle \hat{\lambda}_k(z) \mu \right\rangle \left\langle \lambda_n \mu \right\rangle} \quad (93)$$

Ωστόσο ο αριθμητής δεν εξαρτάται από το  $z$  αφού  $[\tilde{\lambda}_k \hat{\lambda}_n(z)] = [\tilde{\lambda}_k \tilde{\lambda}_n]$ . Βλέπουμε ότι η Spin - Lorentz συμμετρία μας βοηθά να δείξουμε ότι στην πραγματικότητα η συμπεριφορά του πλάτους  $\mathcal{A}(++)$  είναι βελτιωμένη κατά δύο δυνάμεις του  $z$  σε σχέση με τον απλοϊκό υπολογισμό που βασίζεται στην ανάλυση των διαγραμμάτων Feynman. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για το πλάτος  $\mathcal{A}(--)$ . Η ηπιότερη συμπεριφορά έχει ως φυσική εξήγηση την δυσκολία που έχει ένα σωματίδιο μεγάλης ορμής να αντιστρέψει την ελικότητά του σχεδάζόμενο από ένα ήπιο υπόβαθρο. Η βελτιωμένη συμπεριφορά του πλάτους για τις διάφορες διατάξεις ελικότητας είναι

$$\mathcal{A}(+-) \sim \frac{1}{z} \quad \mathcal{A}(++) \sim \frac{1}{z} \quad \mathcal{A}(--) \sim \frac{1}{z} \quad \mathcal{A}(-+) \sim z^3 \quad (94)$$

## 6 MHV πλάτη

Πλέον έχοντας αναπτύξει ένα πολύ ισχυρό εργαλείο είμαστε σε θέση να μελετήσουμε την δόμη των πλατών σχέδασης. Η αφετηρία όλων των εξελίξεων υπήρξε η ασυνήθιστη απλότητα του τύπου που πρότειναν ο Parke και ο Taylor για όλα τα MHV πλάτη [28] και αποδείχθηκε από τους Berends και Giele [29]. Η ιδιότητα των MHV πλατών είναι ότι παραβιάζουν την διατήρηση της ελικότητας κατά τον μέγιστο δυνατό τρόπο σε tree level. Τα MHV πλάτη έχουν δύο μποζόνια βαθμίδας αρνητικής ελικότητας, ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι θετικής. Αντίστοιχα τα NMHV πλάτη έχουν τρία μποζόνια βαθμίδας αρνητικής ελικότητας, ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι θετικής. Η κατηγοριοποίηση αυτή απεικονίζεται στο σχήμα 4. Τα MHV πλάτη μπορούν να παίξουν τον ρόλο του δομικού λίθου για την κατασκευή όλων των πλατών μέσω της αναδρομής BCFW.



Σχήμα 4: Η κατηγοριοποίηση των πλατών σχέδασης.

Το MHV πλάτος σχέδασης  $n$  μποζονίων βαθμίδας, όπως θα αποδείξουμε στην συνέχεια, δίνεται από την σχέση

$$A_n^{MHV}(1^+, \dots, i^-, \dots, j^-, \dots, n^+) = \delta(p) \frac{\langle ij \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \quad (95)$$

### 6.1 Το MHV πλάτος τριών σημείων.

Από όλα τα MHV πλάτη αυτό που παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι το πλάτος των τριών σημείων. Η διατήρηση της τετραορμής υπαγορεύει

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0 \leftrightarrow \lambda_1^a \tilde{\lambda}_1^{\dot{a}} + \lambda_2^a \tilde{\lambda}_2^{\dot{a}} + \lambda_3^a \tilde{\lambda}_3^{\dot{a}} = 0 \quad (96)$$

Υψώνοντας την σχέση αυτή στο τετράγωνο καταλήγουμε ότι

$$\langle 12 \rangle [12] = \langle 23 \rangle [23] = \langle 31 \rangle [31] = 0 \quad (97)$$

Προφανώς για πραγματικές ορμές το πλάτος των τριών σημείων μηδενίζεται καθώς τα δύο εσωτερικά γινόμενα συνδέονται με σχέση συζυγίας, αλλά για μιγαδικές ορμές έχουμε την δυνατότητα να μηδενίσουμε ένα από τα δύο εσωτερικά γινόμενα και να χρησιμοποιήσουμε το άλλο για να εκφράσουμε τις κινηματικές μεταβλητές. Καταλήγουμε λοιπόν σε δύο τύπους δομικών λίθων

$$\begin{aligned}\langle 12 \rangle &= \langle 23 \rangle = \langle 31 \rangle = 0 & \overline{MHV} \\ [12] &= [23] = [31] = 0 & MHV\end{aligned}\quad (98)$$

Όποτε τα αντίστοιχα πλάτη δίνονται από την σχέση

$$\mathcal{A}_3^{MHV} = \delta(p) \frac{\langle ij \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} \quad \mathcal{A}_3^{\overline{MHV}} = \delta(p) \frac{[ij]^4}{[12][23][31]} \quad (99)$$

## 6.2 Το πλάτος MHV $n$ σημείων

Ξεκινάμε με τον υπολογισμό του πλάτους  $\mathcal{A}_4^{MHV}$ . Ο μοναδικός τρόπος για να κατασκευαστεί αυτό το πλάτος είναι να ενωθεί ένα πλάτος  $\mathcal{A}_3^{\overline{MHV}}$  με ένα πλάτος  $\mathcal{A}_3^{MHV}$ , έτσι το πλάτος αυτό δίνεται από την σχέση

$$\mathcal{A}_4^{MHV}(1^-, 2^+, 3^-, 4^+) = \mathcal{A}_3^{\overline{MHV}}(\hat{1}^-, 2^+, P^+) \frac{1}{P^2} \mathcal{A}_3^{MHV}(-P^-, 3^-, \hat{4}^+) \quad (100)$$

Όπου εφαρμόζουμε την αλλαγή

$$\hat{1} \rangle = 1 \rangle - zn \rangle \quad \hat{n} \rangle = n \rangle + z1 \rangle \quad (101)$$

ενώ το  $P^2$  υπολογίζεται για  $z = 0$  και ισχύει

$$P^2 = \langle 12 \rangle [12] \quad (102)$$

Αντικαθιστώντας τα πλάτη τριών σημείων έχουμε ότι

$$\mathcal{A}_4^{MHV}(1^-, 2^+, 3^-, 4^+) = \delta(p) \frac{[2\hat{P}]^4 \langle \hat{P}3 \rangle^4}{[12][2\hat{P}][\hat{P}1]\langle 12 \rangle [12]\langle \hat{P}3 \rangle \langle 34 \rangle \langle n\hat{P} \rangle} \quad (103)$$

Ισχύει ότι

$$[\hat{P}1]\langle \hat{P}3 \rangle = [21]\langle 23 \rangle \quad (104)$$

$$[2\hat{P}]\langle 4\hat{P} \rangle = [21]\langle 41 \rangle \quad (105)$$

$$[2\hat{P}]\langle \hat{P}3 \rangle = [21]\langle 13 \rangle \quad (106)$$

Οπότε καταλήγουμε

$$\mathcal{A}_4^{MHV}(1^-, 2^+, 3^-, 4^+) = \delta(p) \frac{\langle 13 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} \quad (107)$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\mathcal{A}_4^{MHV}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) = \delta(p) \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} \quad (108)$$

οπότε από την κυκλικότητα των πλατών σκέδασης καταλήγουμε ότι

$$\mathcal{A}_4^{MHV}(i^-, j^-) = \delta(p) \frac{\langle ij \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} \quad (109)$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική εκφράζουμε το πλάτων  $n$  σημείων συναρτήσει του πλάτους  $n - 1$  σημείων ως εξής

$$\mathcal{A}_n^{MHV}(1^-, i^-) = \mathcal{A}_3^{\overline{MHV}}(1^-, 2^+, P^+) \frac{1}{P^2} \mathcal{A}_{n-1}^{MHV}(-P^-, 3, \dots, i^-, \dots, n^+) \quad (110)$$

Με αντίστοιχους αλγεβρικούς χειρισμούς όπως εκτελέσαμε τον ανωτέρω υπολογισμό, αποδεικνύουμε επαγωγικά την σχέση 95.

## 7 Αναδρομή BCFW στην $\mathcal{N} = 4$ Υπερσυμμετρία

Η αναδρομή BCFW μπορεί να γενικευτεί μεταξύ άλλων και για την περίπτωση της μέγιστα υπερσυμμετρικής θεωρίας Yang-Mills [30, 31]. Χρησιμοποιούμε τον φορμαλισμό του Nair για τον  $\mathcal{N} = 4$  υπερχώρο στον φλοιό της μάζας [32]. Με την βοήθεια μεταβλητών Grassmann  $n^A$  κατασκευάζουμε την υπερκυματοσυνάρτηση

$$\Phi(p, n) = G^+(p) + n^A \Gamma_A(p) + \frac{1}{2!} n^A n^B S_{AB}(p) + \frac{1}{3!} n^A n^B n^C \epsilon_{ABCD} \bar{\Gamma}_D(p) + \frac{1}{4!} n^A n^B n^C n^D \epsilon_{ABCD} G^-(p), \quad (111)$$

η οποία περιλαμβάνει όλες τις καταστάσεις εντός φλοιού μάζας της  $\mathcal{N} = 4$  υπερσυμμετρικής θεωρίας Yang-Mills. Ο γεννήτορας της ελικότητας αποκτά την μορφή

$$h = \frac{1}{2} \left[ -\lambda^a \frac{\partial}{\partial \lambda^a} + \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}^{\dot{a}}} + n^A \frac{\partial}{\partial n^A} \right], \quad (112)$$

και προφανώς ισχύει ότι

$$h\Phi(p, n) = \Phi(p, n) \quad (113)$$

Η υπερκυματοσυνάρτηση παρουσιάζει αυτοσυζυγία στους μετασχηματισμούς CPT, οπότε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την αντιχειραλική αναπαράσταση όπου η βασική στάθμη είναι το μποζόνιο βαθμίδας  $G^-$ .

$$\bar{\Phi}(p, \bar{n}) = G^-(p) + \bar{n}^A \bar{\Gamma}_A(p) + \frac{1}{2!} \bar{n}^A \bar{n}^B S_{AB}(p) + \frac{1}{3!} \bar{n}^A \bar{n}^B \bar{n}^C \epsilon_{ABCD} \Gamma_D(p) + \frac{1}{4!} \bar{n}^A \bar{n}^B \bar{n}^C \bar{n}^D \epsilon_{ABCD} G^+(p) \quad (114)$$

Οι δύο αναπαραστάσεις σχετίζονται μεταξύ τους με έναν Grassmann μετασχηματισμό Fourier

$$\bar{\Phi}(p, \bar{n}) = \int d^4 n e^{n \cdot \bar{n}} \Phi(p, n) \quad (115)$$

Οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας έχουν την μορφή

$$p^{a\dot{a}} = \lambda^a \tilde{\lambda}^{\dot{a}}, \quad q^{aA} = \lambda^a n^A, \quad \bar{q}^{\dot{a}A} = \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial n^A} \quad (116)$$

και μαζί με τους γεννήτορες των μετασχηματισμών Lorentz και τους γεννήτορες της ομάδας  $SU(4)$

$$M_{ab} = \lambda_{(a} \frac{\partial}{\partial \lambda^{b)}, \quad M_{\dot{a}\dot{b}} = \tilde{\lambda}_{(\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}^{\dot{b})}, \quad R_B^A = n^A \frac{\partial}{\partial n^B} - \frac{1}{4} \delta_B^A n^C \frac{\partial}{\partial n^C} \quad (117)$$

αποτελούν αναπαράσταση της super Poincare άλγεβρας.

Με αυτό το φορμαλισμό όλα τα πλάτη  $n$  σημείων συντίθενται σε ένα υπερπλάτος. Τα αρχικά πλάτη προκύπτουν ως ανάπτυγμα στις μεταβλητές Grassmann

$$\mathcal{A}(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n) = (n_1)^4 (n_2)^4 A(-, -, +, \dots, +) + (n_1)^4 (n_2)^3 n_3 A(-, \bar{\Gamma}, \Gamma, +, \dots, +) + \dots \quad (118)$$



Για τα υπερπλάτη οι γεννήτορες της υπερσυμμετρίας δεν είναι τίποτε άλλο παρά το άθροισμα των γεννητόρων κάθε σωματιδίου

$$p^{a\dot{a}} = \sum_i \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}, \quad q^{aA} = \sum_i \lambda_i^a n_i^A, \quad \bar{q}^{\dot{a}A} = \sum_i \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial n_i^A} \quad (119)$$

Οι συμμετρίες αυτές δεν είναι οι μόνες συμμετρίες που εμφανίζει η θεωρία. Η θεωρία είναι σύμμορφη οπότε ο γεννήτορας των dilatations

$$d = \frac{1}{2} \sum_i \left[ \lambda_i^a \frac{\partial}{\partial \lambda_i^a} + \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}} \right] \quad (120)$$

και οι γεννήτορες special conformal και superconformal

$$k_{a\dot{a}} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^a \partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}}, \quad s_{aA} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^a \partial n_i^A}, \quad \bar{s}_{\dot{a}A} = \sum_i n_i^A \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}} \quad (121)$$

αποτελούν συμμετρία των tree level πλατών.

Ας δούμε πως η συμμετρία μπορεί να προσδιορίσει την μορφή των πλατών σχέδασης. Ξεκάθαρα η διατήρηση της ορμής υπαγορεύει την εμφάνιση της δέλτα συνάρτησης  $\delta(p)$ , αντίστοιχα η  $q$ -υπερσυμμετρία υπαγορεύει την εμφάνιση του  $\delta(q)$ <sup>4</sup>, αφού το πλάτος πρέπει να μηδενίζεται από την δράση του γεννήτορα  $q$ . Έτσι το γενικό πλάτος μπορεί να γραφεί ως

$$\mathcal{A}(\Phi_i) = \frac{\delta^{(4)}(p)\delta^{(8)}(q)}{\langle 12 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \mathcal{P}_n(\lambda_i \tilde{\lambda}_i, n_i), \quad (122)$$

όπου η εμφάνιση του παράγοντα  $\langle 12 \rangle \dots \langle n1 \rangle$  στον παρονομαστή μας επιτρέπει να έχουμε εμφανή την ελικότητα κάθε σωματιδίου, οπότε ο παράγοντας  $\mathcal{P}_n$  έχει μηδενική ελικότητα για κάθε σωματίδιο. Το MHV πλάτος  $n$  σωματιδίων είναι

$$\mathcal{A}_n^{MHV}(\lambda_i \tilde{\lambda}_i, n_i) = \frac{\delta^{(4)}(p)\delta^{(8)}(q)}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \quad (123)$$

οπότε η ανωτέρω σχέση γράφεται

$$\mathcal{A}(\Phi_i) = \mathcal{A}_n^{MHV}(\lambda_i \tilde{\lambda}_i, n_i) \mathcal{P}_n(\lambda_i \tilde{\lambda}_i, n_i), \quad (124)$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο παράγοντας  $\delta(q)$  σχετίζεται με τον μηδενισμό αρκετών πλατών (όπως τα πλάτη που αποτελούνται αποκλειστικά από μποζόνια βαθμίδας και λιγότερα από 2 σωματίδια αρνητικής ελικότητας), αφού πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 8 μεταβλητές Grassmann στο ανάπτυγμα του υπερπλάτους. Το γεγονός αυτό ισχύει σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών για τις Super Yang Mills θεωρίες βαθμίδας, αλλά σε tree level ισχύει για οποιαδήποτε θεωρία βαθμίδας. Αφού σε tree level δεν υπάρχει τρόπος να ξεχωρίσει κανείς την προέλευση ενός

<sup>4</sup>Θυμίζουμε ότι για μεταβλητές Grassmann  $\delta(\chi) = \chi$

πλάτους αποτελούμενο αποκλειστικά από μποζόνια βαθμίδας. Έτσι βλέπουμε την εμφάνιση μιας ενεργούς  $N = 4$  υπερσυμμετρίας στην μορφή ορισμένων πλατών σκέδασης μιας γενικής θεωρίας βαθμίδας.

Η μορφή του παράγοντα  $\mathcal{P}_n$  περιορίζεται επίσης από την  $SU(4)$  συμμετρία. Η συμμετρία αυτή αναγκάζει τις μεταβλητές Grassmann να εμφανίζονται σε τετράδες, οπότε μπορούμε να αναπτύξουμε τον παράγοντα  $\mathcal{P}_n$  στον βαθμό Grassmann. Οι όροι αυτοί βρίσκονται σε αντιστοιχία με τα πλάτη MHV, NMHV, NNMHV κτλ.

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(0)} + \mathcal{P}_n^{(4)} + \dots + \mathcal{P}_n^{(4n-16)} \quad (125)$$

Ο τελευταίος όρος αντιστοιχεί στο πλάτος  $\overline{MHV}$ . Ένα σημείο το οποίο απαιτεί προσοχή είναι το  $\mathcal{A}_3^{\overline{MHV}}$ . Ξεκινώντας από το πλάτος

$$\mathcal{A}_3^{MHV} = \frac{\delta^{(4)}(p)\delta^{(8)}(q)}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} \quad (126)$$

αντικαθιστούμε  $(\lambda_i, n_i) \rightarrow (\tilde{\lambda}_i, \bar{n}_i)$ . Για να επαναφέρουμε τα  $n_i$  χρησιμοποιούμε τον Grassmann μετασχηματισμό Fourier 115 και βρίσκουμε

$$\mathcal{A}_3^{\overline{MHV}} = \frac{\delta^{(4)}(p)\delta^{(4)}(q)}{[12][23][31]} \quad (127)$$

όπου λόγω του γεγονότος ότι τα  $\lambda$  είναι παράλληλα, το όρισμα της συνάρτησης  $\delta^{(8)}$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως  $q^{aA} = \lambda_F^a q_F^A$ , οπότε η διατήρηση της  $q$ -υπερσυμμετρίας ανάγεται στον παράγοντα  $\delta^{(4)}(q_F)$ .

Η  $\bar{q}$ -υπερσυμμετρία εισάγει τους δεσμούς  $\bar{q}_A^{\dot{a}} \mathcal{P}_n = 0$ , ενώ μας επιτρέπει να μηδενίσουμε δυο από τις μεταβλητές Grassmann. Συγκεκριμένα ο πεπερασμένος  $\bar{q}$ -μετασχηματισμός με παράμετρο

$$\xi_{\dot{a}}^A = \frac{\tilde{\lambda}_{i\dot{a}} n_j^A - \tilde{\lambda}_{j\dot{a}} n_i^A}{[\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_n]} \quad (128)$$

μηδενίζει τα  $n_i$  και  $n_j$ .

Η λογική της αναδρομής BCFW στην περίπτωση της μέγιστα υπερσυμμετρικής θεωρίας Yang Mills είναι ακριβώς η ίδια με την μη υπερσυμμετρική περίπτωση, μόνο που εκτός από τους διασπίνορες πρέπει να τροποποιήσει κανείς και τις μεταβλητές Grassmann για να διατηρήσει την υπερσυμμετρία. Η υπερσυμμετρική τροποποίηση είναι [30, 31]

$$\begin{aligned} \lambda_k &\rightarrow \hat{\lambda}_k(z) = \lambda_k - z \lambda_n \\ \tilde{\lambda}_n &\rightarrow \hat{\tilde{\lambda}}_n(z) = \tilde{\lambda}_n + z \tilde{\lambda}_k \\ n_n &\rightarrow \hat{n}_n(z) = n_n + z n_k \end{aligned} \quad (129)$$

Με αυτή την τροποποίηση βλέπουμε ότι η παράμετρος του  $\bar{q}$  υπερσυμμετρικού μετασχηματισμού που μηδενίζει τα  $n_k$  και  $n_n(z)$  είναι

$$\xi_{\dot{a}}^A = \frac{\tilde{\lambda}_{k\dot{a}} \hat{n}_n^A(z) - \hat{\tilde{\lambda}}_{n\dot{a}}(z) n_k^A}{[\tilde{\lambda}_k \hat{\tilde{\lambda}}_n(z)]} = \frac{\tilde{\lambda}_{k\dot{a}} n_n^A - \tilde{\lambda}_{n\dot{a}} n_k^A}{[\tilde{\lambda}_k \tilde{\lambda}_n]} \quad (130)$$

και δεν εξαρτάται από το  $z$ . Έτσι μας δίνεται η δυνατότητα να συσχετίσουμε την εξάρτηση από το  $z$  ολόκληρου του πλάτους με την εξάρτηση της  $(--)$  συνιστώσας (όπου αναφερόμαστε πάντα στα σωματίδια  $k$  και  $n$ ) με αποτέλεσμα όλο το πλάτος για μεγάλα  $z$  να συμπεριφέρεται σαν  $1/z$ , το οποίο σημαίνει ότι δεν υπάρχει επιφανειακός όρος από το  $z = \infty$ .

Σε σχέση με την μη υπερσυμμετρική περίπτωση η διαφοροποίηση έγκειται στο γεγονός ότι η άθροιση στις ελικότητες της ενδιάμεσης κατάστασης που συνδέει τα δύο πλάτη αντικαθίσταται από ολοκλήρωση στην μεταβλητή Grassmann της. Έτσι η αναδρομή BCFW για την  $N = 4$  υπερσυμμετρική θεωρία Yang-Mills είναι

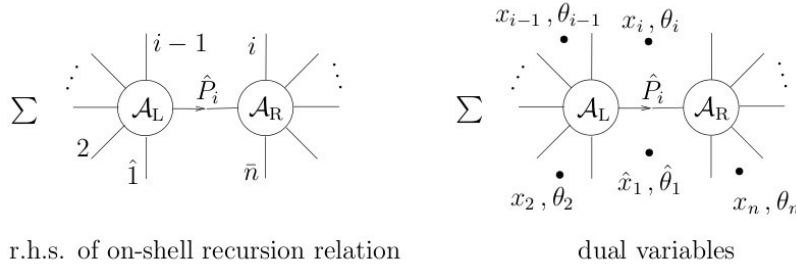
$$\mathcal{A}_n = \sum_i \int \frac{d\hat{n}_{P_i}}{P_i^2} \mathcal{A}_L(\hat{1}(z_{P_i}), 2, \dots, i-1, -\hat{P}(z)) \mathcal{A}_R(\hat{P}(z), i, \dots, n-1, \hat{n}(z)) \Big|_{z=z_i} \quad (131)$$

όπου η τροποποίηση αφορά τα σωματίδια 1 και  $n$ . Στην συνέχεια θα φανούν χρήσιμες οι δυϊκές μεταβλητές.

$$\lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} = x_i^a - x_{i+1}^{\dot{a}} = p_i^{a\dot{a}} \quad \lambda_i^a n_i^A = \theta_i^{aA} - \theta_{i+1}^{aA} = q_i^{aA} \quad (132)$$

Οι συντεταγμένες αυτές δίνουν μια δυϊκή εικόνα της θεωρίας, όπου οι κινηματικές μεταβλητές ορίζονται μέσα σε περιοχές και το πλάτος σκέδασης αναπαρίσταται από ένα κλειστό πολύγωνο με φωτεινές κορυφές [33]. Η αντιστοιχία μεταξύ των κινηματικών μεταβλητών και των δυϊκών μεταβλητών απεικονίζεται στο σχήμα 5. Συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες συντομογραφίες

$$x_{ij} = x_i - x_j = p_i + p_{i+1} + \dots + p_{j-1} \quad \theta_{ij} = \theta_i - \theta_j = q_i + q_{i+1} + \dots + q_{j-1} \quad (133)$$



Σχήμα 5: Η αντιστοιχία μεταξύ των κινηματικών μεταβλητών και των δυϊκών μεταβλητών.

Οι δυϊκές μεταβλητές ικανοποιούν κάποιες χρήσιμες σχέσεις, όπως

$$\langle i | x_{ij} = \langle i | x_{i+1,j} \quad \langle i | \theta_{ij} = \langle i | \theta_{i+1,j} \quad (134)$$

Η υπερσυμμετρική τροποποίηση στα σωματίδια 1 και  $n$  επιφέρει μόνο τις ακόλουθες αλλαγές στις ακόλουθες δυϊκές μεταβλητές [30]

$$\hat{x}_1 = x_1 - z \lambda_n \tilde{\lambda}_1 \quad \hat{\theta}_1 = \theta_1 - z \lambda_n n_1 \quad (135)$$

Το γεγονός ότι οι υπόλοιπες δυϊκές μεταβλητές δεν επηρεάζονται θα φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στην επίλυση υπερσυμμετρικών αναδρομικών σχέσεων.

## Μέρος II

# Όλα τα tree level πλάτη της $N = 4$ Υπερσυμμετρικής Θεωρίας Yang-Mills

Αφού αναπτύξαμε τις υπολογιστικές τεχνικές που χρειαζόμαστε, είμαστε σε θέση να τις εφαρμόσουμε στον υπολογισμό όλων των tree level πλατών της  $N = 4$  Υπερσυμμετρικής Θεωρίας Yang-Mills [34]. Η υπερσυμμετρική αναδρομή BCFW συνδέει πλάτη τόσο διαφορετικού πλήθους σωματιδίων, όσο και διαφορετικών βαθμών Grassmann. Έτσι το πλάτος  $\mathcal{A}_n^{N^pMHV}$  δίνεται από την αναδρομή

$$\mathcal{A}_n^{N^pMHV} = \int \frac{d^4 n_{\hat{P}}}{P^2} \mathcal{A}_3^{\overline{MHV}}(z_P) \mathcal{A}_{n-1}^{N^pMHV} + \sum_{m=0}^{p-1} \sum_i \int \frac{d^4 n_{\hat{P}_i}}{P_i^2} \mathcal{A}_i^{N^mMHV}(z_{P_i}) \mathcal{A}_{n-i+2}^{N^{(p-m-1)MHV}}(z_{P_i}) \quad (136)$$

Φαίνεται αδύνατο να μπορέσουμε να λύσουμε αυτή την αναδρομική σχέση απευθείας, για τον λόγο αυτό θα ξεκινήσουμε από τα πλάτη MHV, NMHV και NNMHV για να μελετήσουμε τις δομές που θα αναδειχθούν. Οι δομές αυτές είναι από την φύση τους αναδρομικές, έτσι στο τέλος θα καταφέρουμε να δώσουμε κανόνες για τον άμεσο υπολογισμό οποιουδήποτε tree level πλάτους  $\mathcal{A}_n^{N^pMHV}$ . Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε αποκλειστικά πλάτη της  $N = 4$  Υπερσυμμετρικής Θεωρίας Yang-Mills, οπότε ακόμα και αν δεν αναφέρεται ρητά θα εννοείται.

## 8 Το πλάτος MHV $n$ σημείων

Με αφετηρία το πλάτος MHV πλάτος 3 σημείων θα κατασκευάσουμε το πλάτος  $n$  σημείων. Όπως και στην μη υπερσυμμετρική περίπτωση, ο μοναδικός τρόπος για να κατασκευαστεί το πλάτος  $\mathcal{A}_4^{MHV}$  είναι μέσω των πλατών  $\mathcal{A}_3^{MHV}$  και  $\mathcal{A}_3^{\overline{MHV}}$ . Έτσι έχουμε

$$\mathcal{A}_4^{MHV} = \int \frac{d^4 n_{\hat{P}}}{P^2} \mathcal{A}_3^{\overline{MHV}}(\hat{1}, 2, -\hat{P}) \mathcal{A}_3^{MHV}(\hat{P}, 3, \hat{4}) \quad (137)$$

Αντικαθιστώντας τα πλάτη έχουμε

$$\mathcal{A}_4^{MHV} = \int \frac{d^4 n_{\hat{P}}}{P^2} \frac{\delta^4(n_1[2\hat{P}] + n_2[\hat{P}1] + n_{\hat{P}}[12])}{[12][2\hat{P}][\hat{P}1]} \frac{\delta^8(\lambda_{\hat{P}} n_{\hat{P}} + \lambda_3 n_3 + \lambda_4 \hat{n}_4)}{\langle \hat{P}3 \rangle \langle 34 \rangle \langle 4\hat{P} \rangle} \quad (138)$$

Η ολοκλήρωση της συνάρτησης  $\delta^4$  μας υπαγορεύει ότι

$$n_{\hat{P}} = -\frac{1}{[12]} \left( n_1[2\hat{P}] + n_2[\hat{P}1] \right) \quad (139)$$

ενώ παράλληλα εμφανίζεται ένας παράγοντας  $[12]^4$  στον αριθμητή. Για την συγκεκριμένη τιμή του  $n_{\hat{P}}$  το όρισμα της συνάρτησης  $\delta^8$  γίνεται

$$-\frac{1}{[12]} \left( n_1[2\hat{P}] + n_2[\hat{P}1] \right) + \lambda_3 n_3 + \lambda_4 \hat{n}_4 = \hat{\lambda}_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 + \lambda_4 \hat{n}_4 = q \quad (140)$$

όπου αρχικά χρησιμοποιήσαμε την διατήρηση της ορμής του αριστερού πλάτους  $\lambda_{\hat{P}} \tilde{\lambda}_{\hat{P}} = \hat{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_1 + \lambda_2 \tilde{\lambda}_2$  και στην συνέχεια απλοποιούμε την εξάρτηση από το  $z$  μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου όρου. Τελικά καταλήγουμε στην συνάρτηση  $\delta^8(q)$  του συνολικού πλάτους. Πάλι από την διατήρηση ορμής του πρώτου πλάτους έχουμε

$$P^2 = (p_1 + p_2)^2 = \langle 12 \rangle [12] \quad (141)$$

οπότε το πλάτος γίνεται

$$\mathcal{A}_4^{MHV} = \frac{[12]^4 \delta^8(q)}{\langle 12 \rangle [12]^2 [2\hat{P}][\hat{P}1] \langle \hat{P}3 \rangle \langle 34 \rangle \langle 4\hat{P} \rangle} \quad (142)$$

Ισχύει ότι

$$[\hat{P}1] \langle \hat{P}3 \rangle = [21] \langle 23 \rangle \quad \langle [2\hat{P}] \langle 4\hat{P} \rangle = [21] \langle 4\hat{1} \rangle = [21] \langle 41 \rangle \quad (143)$$

οπότε καταλήγουμε

$$\mathcal{A}_4^{MHV} = \frac{\delta^8(q)}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} \quad (144)$$

Με έναν πανομοιότυπο υπολογισμό μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά το πλάτος  $n$  σημείων.

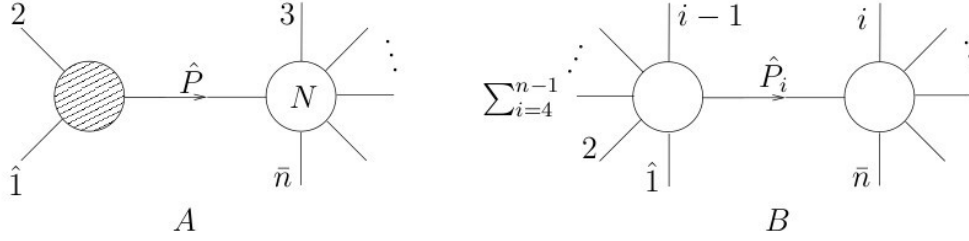
$$\mathcal{A}_n^{MHV} = \frac{\delta^8(q)}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n-1n \rangle \langle n1 \rangle} \quad (145)$$

Ο τύπος αυτός παρουσιάστηκε πρώτη φορά στο [32] και αποτελεί την υπερσυμμετρική εκδοχή του τύπου των Parke και Taylor [28].

## 9 Το πλάτος NMHV $n$ σημείων

Υπάρχουν δύο τρόποι για να κατασκευαστεί το  $\mathcal{A}_n^{NMHV}$  πλάτος  $n$  σημείων. Όπως απεικονίζεται και στο σχήμα 6, το πλάτος αυτό μπορεί να κατασκευαστεί είτε από τον συνδυασμό του  $\mathcal{A}_3^{MHV}$  με το  $\mathcal{A}_{n-1}^{NMHV}$  είτε από τον συνδυασμό δύο MHV πλάτων. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\mathcal{A}_n^{NMHV} = \int \frac{d^4 n_{\hat{P}}}{P^2} \mathcal{A}_3^{MHV}(z_P) \mathcal{A}_{n-1}^{NMHV}(z_P) + \sum_{i=4}^{n-1} \int \frac{d^4 n_{\hat{P}_i}}{P_i^2} \mathcal{A}_i^{MHV}(z_{P_i}) \mathcal{A}_{n-i+2}^{MHV}(z_{P_i}) \quad (146)$$



Σχήμα 6: Οι δύο τρόποι κατασκευής του NMHV πλάτους. Ο αριστερός όρος είναι ο ομογενής, ενώ ο δεξιός είναι ο μη ομογενής.

Ο πρώτος όρος είναι ομογενής καθώς κατασκευάζεται από το πλάτος ίδιου βαθμού Grassmann  $n - 1$  σημείων, ενώ ο δεύτερος όρος είναι μη ομογενής καθώς κατασκευάζεται από πλάτος μικρότερου βαθμού Grassmann. Σχηματικά λοιπόν έχουμε

$$\mathcal{A}_n^{NMHV} = A + B \quad (147)$$

όπου  $A$  είναι το ομογενές τμήμα της έκφρασης και  $B$  το μη ομογενές. Αφού γνωρίζουμε την γενική έκφραση του MHV πλάτους θα ξεκινήσουμε από την μελέτη του δεύτερου όρου.

$$I_i = \int \frac{d^4 n_{\hat{P}_i}}{P_i^2} \frac{\delta^8(\hat{\lambda}_1 n_1 + \sum_2^{i-1} \lambda_j n_j - \lambda_{\hat{P}_i} n_{\hat{P}_i})}{\langle \hat{1}2 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle i-1 \hat{P}_i \rangle \langle \hat{P}_i \hat{1} \rangle} \frac{\delta^8(\lambda_{\hat{P}_i} n_{\hat{P}_i} + \sum_i^{n-1} \lambda_j n_j + \lambda_n \hat{n}_n)}{\langle \hat{P}_i i \rangle \langle ii+1 \rangle \dots \langle n \hat{P}_i \rangle} \quad (148)$$

Η ολοκλήρωση Grassmann θα δώσει κάποια τιμή στην μεταβλητή  $n_{\hat{P}_i}$  λόγω της ύπαρξης των συναρτήσεων δέλτα, οπότε η αντικατάσταση της τιμής που προκύπτει από την μια συνάρτηση δέλτα στην άλλη συνάρτηση δέλτα θα εμφανίσει την συνάρτηση δέλτα της διατήρησης της υπερσυμμετρίας  $\delta(q)$ . Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την μια συνάρτηση δέλτα με την συνάρτηση δέλτα της διατήρησης της υπερσυμμετρίας.

$$I_i = \delta(q) \int \frac{d^4 n_{\hat{P}_i}}{P_i^2} \frac{\delta^8(\hat{\lambda}_1 n_1 + \sum_2^{i-1} \lambda_j n_j - \lambda_{\hat{P}_i} n_{\hat{P}_i})}{\langle \hat{1}2 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle i-1 \hat{P}_i \rangle \langle \hat{P}_i \hat{1} \rangle \langle \hat{P}_i i \rangle \langle ii+1 \rangle \dots \langle n \hat{P}_i \rangle} \quad (149)$$

Η συνάρτηση  $\delta$  μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\delta^8 \left( \hat{\lambda}_1 n_1 + \sum_2^{i-1} \lambda_j n_j - \lambda_{\hat{P}_i} n_{\hat{P}_i} \right) = \langle \hat{1} \hat{P}_i \rangle^4 \delta^4 \left( n_1 + \sum_2^{i-1} \frac{\langle \hat{P}_i j \rangle}{\langle \hat{P}_i \hat{1} \rangle} n_j \right) \delta^4 \left( \sum_2^{i-1} \frac{\langle \hat{1} j \rangle}{\langle \hat{1} \hat{P}_i \rangle} n_j - n_{\hat{P}_i} \right) \quad (150)$$

Η δεύτερη συνάρτηση  $\delta^4$  απορροφά την ολοκλήρωση, ενώ η πρώτη σε συνδυασμό με τις αγκύλες δίνει

$$\langle \hat{1}\hat{P}_i \rangle^4 \delta^4 \left( n_1 + \sum_2^{i-1} \frac{\langle \hat{P}_{ij} \rangle}{\langle \hat{P}_i \hat{1} \rangle} n_j \right) = \delta^4 \left( \langle \hat{P}_i \hat{1} \rangle n_1 + \sum_2^{i-1} \langle \hat{P}_{ij} \rangle n_j \right) = \delta^4 \left( \sum_1^{i-1} \langle \hat{P}_{ij} \rangle n_j - z \langle \hat{P}_i n \rangle n_1 \right) \quad (151)$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής εμφανίζουν ομογένεια 4ου βαθμού ως προς το  $\lambda_{\hat{P}_i}$ , οπότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον όρο  $(\langle n1 | [1\hat{P}_i])^4$ . Με αυτόν τον τρόπο εμφανίζουμε όρους της μορφής  $\langle n1 | [1\hat{P}_i] \langle \hat{P}_i |$ , οι οποίοι μπορούν να απλοποιηθούν με την βοήθεια των δυϊκών μεταβλητών ως εξής

$$\langle n1 | [1\hat{P}_i] \langle \hat{P}_i | = \langle n1 | [1|\hat{P}_i = \langle n1 | [1|P_i = \langle n1 | [1|x_{1i} = \langle n1 | [1|x_{2i} = \langle n|x_{12}x_{2i} = \langle n|x_{n2}x_{2i} \quad (152)$$

Απευθείας βλέπουμε ότι ο πρώτος όρος της δέλτα συνάρτησης γίνεται

$$\sum_1^{i-1} \langle \hat{P}_{ij} \rangle n_j = -\langle n|x_{n2}x_{2i}|\theta_{i1} \rangle \quad (153)$$

ενώ για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιώντας την σχέση  $\langle n1 | [1\hat{P}_i] \langle \hat{P}_i | = \langle n1 | [1|P_i$  και το γεγονός ότι

$$z = \frac{P_i^2}{\langle n|P_i|1 \rangle} \quad (154)$$

έχουμε

$$-z \langle n1 | \langle n|P_i|1 \rangle n_1 = -P_i^2 \langle n1 | n_1 = -x_{1i}^2 \langle n1 | n_1 = \langle n|x_{1i}x_{i1}|1 \rangle n_1 = -\langle n|x_{ni}x_{i2}|\theta_{21} \rangle \quad (155)$$

Οπότε το όρισμα της συνάρτησης δέλτα γίνεται

$$\delta^4 (\langle n|x_{n2}x_{2i}|\theta_{i1} \rangle + \langle n|x_{ni}x_{i2}|\theta_{21} \rangle) = \delta^4 (\langle n|x_{n2}x_{2i}|\theta_i \rangle + \langle n|x_{ni}x_{i2}|\theta_2 \rangle + x_{2i}^2 \langle n\theta_1 \rangle) \quad (156)$$

Από τον τελευταίο όρο βλέπουμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $\theta_1$  με το  $\theta_n$  αφού

$$\langle n\theta_1 \rangle = \langle n\theta_n \rangle \quad (157)$$

Το πλάτος γίνεται

$$I_i = \mathcal{A}_n^{MHV} \frac{\langle 21 \rangle \langle ii-1 \rangle \delta^4 (\langle n|x_{n2}x_{2i}|\theta_{in} \rangle + \langle n|x_{ni}x_{i2}|\theta_{2n} \rangle)}{P_i^2 \langle n1 \rangle^3 [1\hat{P}_i]^4 \langle \hat{1}2 \rangle \langle i-1\hat{P}_i \rangle \langle \hat{P}_i \hat{1} \rangle \langle \hat{P}_i i \rangle \langle n\hat{P}_i \rangle} \quad (158)$$

Απομένει να απλοποιήσουμε τον παρονομαστή.

$$\begin{aligned} P_i^2 \langle n1 \rangle^3 [1\hat{P}_i]^4 \langle \hat{1}2 \rangle \langle i-1\hat{P}_i \rangle \langle \hat{P}_i \hat{1} \rangle \langle \hat{P}_i i \rangle \langle n\hat{P}_i \rangle &= P_i^2 \langle n1 \rangle^3 \langle \hat{1}2 \rangle \langle i-1|P_i|1 \rangle [1|P_i|\hat{1}] [1|P_i|i] \langle n|P_i|1 \rangle \\ &= -P_i^2 (\langle 12 \rangle - z \langle n2 \rangle) \langle i-1|P_i|1 \rangle (\langle n|1P_i|1 \rangle - z \langle n1 | [1|P_i|1] \rangle) \langle n|1P_i|i \rangle \langle n|P_i|1 \rangle \\ &= P_i^2 (\langle n|P_i|1 \rangle - P_i^2 \langle n2 \rangle) \langle n|1P_i|i-1 \rangle (\langle n|1P_i|1 \rangle - P_i^2 \langle n1 \rangle) \langle n|1P_i|i \rangle \\ &= P_i^2 \langle n|P_i(1-P_i)|2 \rangle \langle n|1P_i|i-1 \rangle (\langle n|1P_i|1 \rangle - P_i^2 \langle n1 \rangle) \langle n|1P_i|i \rangle \\ &= -P_i^2 \langle n|x_{ni}x_{2i}|2 \rangle \langle n|x_{n2}x_{2i}|i-1 \rangle (\langle n|1P_i|1 \rangle - P_i^2 \langle n1 \rangle) \langle n|x_{n2}x_{2i}|i \rangle \end{aligned} \quad (159)$$

Ο όρος μέσα στην παρένθεση μαζί με τον παράγοντα  $P_i^2$  δίνουν

$$\begin{aligned} P_i^2 (\langle n|1P_i|1\rangle - P_i^2 \langle n1\rangle) &= P_i^2 (-\langle n|P_i1|1\rangle + 2(1 \cdot P_i)\langle n1\rangle - P_i^2 \langle n1\rangle) \\ &= -(P_i - 1)^2 P_i^2 \langle n1\rangle = -x_{2i}^2 \langle n|x_{n_i}x_{2i}|1\rangle \end{aligned} \quad (160)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $1|1\rangle = 0$  και  $1^2 = 0$ . Έτσι ο παρονομαστής γίνεται

$$x_{2i}^2 \langle n|x_{n_i}x_{i2}|2\rangle \langle n|x_{n_i}x_{i2}|1\rangle \langle n|x_{n_2}x_{2i}|i\rangle \langle n|x_{n_2}x_{2i}|i-1\rangle \quad (161)$$

οπότε ο μη ομογενής όρος του NMHV πλάτους είναι

$$B = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{i=4}^{n-1} R_{n;2i} \quad (162)$$

$$R_{n;2i} = \frac{\langle 21\rangle \langle ii-1\rangle \delta^4 (\langle n|x_{n_2}x_{2i}|\theta_{in}\rangle + \langle n|x_{n_i}x_{i2}|\theta_{2n}\rangle)}{x_{2i}^2 \langle n|x_{n_i}x_{i2}|2\rangle \langle n|x_{n_i}x_{i2}|1\rangle \langle n|x_{n_2}x_{2i}|i\rangle \langle n|x_{n_2}x_{2i}|i-1\rangle} \quad (163)$$

Για  $n = 5$  το πλάτος  $\mathcal{A}_5^{NMHV}$  κατασκευάζεται αποκλειστικά από τον μη ομογενή όρο, έτσι έχουμε

$$\mathcal{A}_5^{NMHV} = \mathcal{A}_5^{MHV} R_{5;24} \quad (164)$$

σχέση που είναι σε συμφωνία με τον άμεσο υπολογισμό

$$\mathcal{A}_5^{NMHV} = \mathcal{A}_5^{\overline{MHV}} \quad (165)$$

Στο σημείο αυτό αρχίζει να γίνεται φανερό ότι το πλάτος  $\mathcal{A}_n^{NMHV}$  υπολογίζεται από κάποια γενίκευση του  $R_{n;2i}$ . Η γενίκευση αυτή δεν είναι άλλη από την

$$R_{n;st} = \frac{\langle ss-1\rangle \langle tt-1\rangle \delta^4 (\langle n|x_{n_s}x_{st}|\theta_{tn}\rangle + \langle n|x_{n_t}x_{ts}|\theta_{sn}\rangle)}{x_{st}^2 \langle n|x_{n_t}x_{ts}|s\rangle \langle n|x_{n_t}x_{ts}|s-1\rangle \langle n|x_{n_s}x_{st}|t\rangle \langle n|x_{n_s}x_{st}|t-1\rangle} \quad (166)$$

Είναι σημαντικό να τονίσουμε το γεγονός ότι το όρισμα της συνάρτησης δέλτα δεν εξαρτάται από το  $n_n$  και το  $n_{n-1}$  ή το  $n_1$ .

$$\langle n|x_{n_s}x_{st}|\theta_{tn}\rangle + \langle n|x_{n_t}x_{ts}|\theta_{sn}\rangle = \langle n| \left[ x_{n_s}x_{st} \sum_{i=t}^{n-1} |i\rangle n_i + \langle n|x_{n_t}x_{ts} \sum_{i=s}^{n-1} |i\rangle n_i \right] \quad (167)$$

και

$$\delta^8(q) \langle n|x_{n_s}x_{st}|\theta_{tn}\rangle + \langle n|x_{n_t}x_{ts}|\theta_{sn}\rangle = -\delta^8(q) \langle n| \left[ x_{n_s}x_{st} \sum_{i=1}^{t-1} |i\rangle n_i + \langle n|x_{n_t}x_{ts} \sum_{i=1}^{s-1} |i\rangle n_i \right] \quad (168)$$

Επίσης είναι καίριο το γεγονός ότι [35]

$$\delta^8(q) \sum_{s,t} R_{n;st} = \delta^8(q) \sum_{s,t} R_{\acute{n};st} \quad (169)$$



όπου το άθροισμα είναι σε όλες τις τιμές των  $s$  και  $t$  έτσι ώστε τα  $n, s, t$  (ή  $\hat{n}, s, t$ ) να είναι κυκλικά. Τα  $n$  και  $s$  (ή  $\hat{n}$  και  $s$ ) καθώς και τα  $s$  και  $t$  πρέπει να απέχουν τουλάχιστον 2 μονάδες.

Υποθέτουμε ότι το πλάτος  $\mathcal{A}_n^{NMHV}$  δίνεται από την σχέση

$$\mathcal{A}_n^{NMHV} = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{2 \leq s < t \leq n-1} \frac{\langle ss-1 \rangle \langle tt-1 \rangle \delta^4(\langle n|x_{ns}x_{st}|\theta_{tn}\rangle + \langle n|x_{nt}x_{ts}|\theta_{sn}\rangle)}{x_{st}^2 \langle n|x_{nt}x_{ts}|s\rangle \langle n|x_{nt}x_{ts}|s-1\rangle \langle n|x_{ns}x_{st}|t\rangle \langle n|x_{ns}x_{st}|t-1\rangle} \quad (170)$$

όπου το άθροισμα γίνεται με τα  $s$  και  $t$  να απέχουν τουλάχιστον 2 μονάδες. Τότε από την κυκλικότητα των πλατών σκέδασης ισχύει η σχέση 169. Ο όρος  $\mathcal{A}_{n-1}^{NMHV}(z_p)$  στην σχέση 146 περιέχει αποκλειστικά την ποσότητα  $R_{n-1;st}$ . Πάλι η κυκλικότητα μας επιτρέπει να ταυτίσουμε τα σωματίδια του όρου  $\mathcal{A}_{n-1}^{NMHV}(z_p)$  όπως επιθυμούμε. Επιλέγουμε λοιπόν να ταυτίσουμε τα σωματίδια  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  του  $\mathcal{A}_{n-1}^{NMHV}(z_p)$  με τα σωματίδια  $\{\hat{P}, 3, \dots, n\}$  της αναδρομικής σχέσης 146. Έτσι έχουμε

$$A = \int \frac{d^4 P}{P^2} \int d^4 n_{\hat{P}} \mathcal{A}_3^{\overline{MHV}}(z_P) \mathcal{A}_{n-1}^{MHV} \mathcal{P}_{n-1}^{NMHV}(\hat{P}, 3, \dots, \hat{n}) \quad (171)$$

Η ολοκλήρωση προς  $n_{\hat{P}}$  δεν επηρεάζει το  $R_{n;st}$  καθώς αυτό εξαρτάται από τα  $\{n_3, \dots, n_{n-1}\}$  167, έτσι έχουμε

$$A = \mathcal{A}_n^{MHV} \mathcal{P}_{n-1}^{NMHV}(\hat{P}, 3, \dots, \hat{n}) \quad (172)$$

Όταν ο μικρός δείκτης αποκτήσει την ελάχιστη τιμή του, τότε ο όρος  $\langle \hat{P} |$  θα εμφανιστεί στον αριθμητή και παρονομαστή του  $R_{n;st}$ <sup>5</sup>, αλλά λόγω της κινηματικής του πλάτους των τριών σημείων αυτός ο δισπίνωρας είναι ανάλογος του  $\langle 2 |$ . Έτσι καταλήγουμε

$$A = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{3 \leq s < t \leq n-1} R_{n;st} \quad (173)$$

ο μη ομογενής όρος είναι το κομμάτι που λείπει για  $s = 2$ , έτσι έχουμε

$$\mathcal{A}_n^{NMHV} = A + B = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{2 \leq s < t \leq n-1} R_{n;st} \quad (174)$$

Καταλήγουμε ότι

$$\mathcal{P}_n^{NMHV} = \sum_{2 \leq a_1 < b_1 \leq n-1} R_{n;a_1 b_1} \quad (175)$$

όπου αλλάξαμε το όνομα των δεικτών καθώς θα χρησιμοποιήσουμε γενικεύσεις του  $R_{n;a_1 b_1}$  με πολύ περισσότερους δείκτες.

Βλέπουμε ότι χρησιμοποιώντας της κατάλληλες μεταβλητές καταφέραμε να υπολογίσουμε το  $\mathcal{A}_n^{NMHV}$  και να καταλήξουμε σε έναν πολύ κομψό τύπο. Το τίμημα που πληρώσαμε για αυτή την απλότητα είναι ότι πλέον έκαναν την εμφάνισή τους μη τοπικοί όροι της μορφής

$$\frac{1}{\langle n|x_{na}x_{ab}|b\rangle} \quad (176)$$

<sup>5</sup>η υπέρξη της συνάρτησης  $\delta(q)$  στο  $\mathcal{A}_n^{MHV}$  μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε την σχέση 169

οι οποίοι γενικά δεν μπορούν να γραφούν στην μορφή

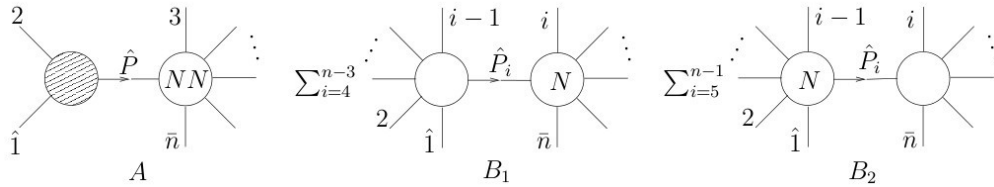
$$\frac{1}{(p_i + \dots + p_j)^2} \quad (177)$$

Φυσικά τίποτα δεν άλλαξε στην θεωρία μας η οποία παραμένει τοπική και όλοι οι αφύσικοι πόλοι αναιρούνται μεταξύ τους. Οι αναιρέσεις αυτές αναδεικνύουν σύνθετες σχέσεις για τις κινηματικές μεταβλητές. Αυτό που έχει συμβεί είναι ότι κρατήσαμε έκδηλη της διπλή σύμμορφη υπερσυμμετρία προκειμένου να έχουμε την μέγιστη δυνατή απλότητα σε κάθε στάδιο των υπολογισμών μας, κρύβοντας όμως έτσι την τοπικότητα.

## 10 Το πλάτος NNMHV $n$ σημείων

Πρωτού προχωρήσουμε στην κατασκευή του γενικού τύπου για όλα τα tree level πλάτη σχέδασης, θα μελετήσουμε τα NNMHV πλάτη σχέδασης. Τα πλάτη αυτά μπορούν να κατασκευαστούν με τρεις τρόπους, βλέπε εικόνα 7.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^{NNMHV} &= \int \frac{d^4 n_{\hat{P}}}{P^2} \mathcal{A}_3^{\overline{MHV}}(z_P) \mathcal{A}_{n-1}^{NNMHV}(z_P) + \sum_{i=4}^{n-3} \int \frac{d^4 n_{\hat{P}_i}}{P_i^2} \mathcal{A}_i^{MHV}(z_{P_i}) \mathcal{A}_{n-i+2}^{NMHV}(z_{P_i}) \\ &+ \sum_{i=5}^{n-1} \int \frac{d^4 n_{\hat{P}_i}}{P_i^2} \mathcal{A}_i^{NMHV}(z_{P_i}) \mathcal{A}_{n-i+2}^{MHV}(z_{P_i}) \equiv A + B_1 + B_2 \end{aligned} \quad (178)$$



Σχήμα 7: Οι τρεις τρόποι κατασκευής του NNMHV πλάτους. Ο αριστερός όρος είναι ο ομογενής, ενώ οι υπόλοιποι είναι μη ομογενείς.

Η λογική που θα ακολουθήσουμε είναι πανομοιότυπη με την λογική που ακολουθήσαμε για να επιλύσουμε την σχέση 146. Όπως αναφέραμε θα χρησιμοποιήσουμε γενικεύσεις του  $R$  που χρησιμοποιήσαμε για το NMHV πλάτος.

$$R_{n;b_1 a_1; b_2 a_2; \dots; b_r a_r; ab} = \frac{\langle aa-1 \rangle \langle bb-1 \rangle \delta^4(\langle \xi | x_{a_r a} x_{ab} | \theta_{b a_r} \rangle + \langle \xi | x_{a_r b} x_{ba} | \theta_{a a_r} \rangle)}{x_{ab}^2 \langle \xi | x_{a_r b} x_{ba} | a \rangle \langle \xi | x_{a_r b} x_{ba} | a-1 \rangle \langle \xi | x_{a_r a} x_{ab} | b \rangle \langle \xi | x_{a_r a} x_{ab} | b-1 \rangle} \quad (179)$$

όπου το  $\langle \xi |$  δίνεται από την σχέση

$$\langle \xi | = \langle n | x_{n b_1} x_{b_1 a_1} x_{a_1 b_2} \dots x_{b_r a_r} \quad (180)$$

όπως πριν θα έχουμε εκφράσεις της μορφής

$$\sum_{L \leq a < b \leq U} R_{n;b_1 a_1; b_2 a_2; \dots; b_r a_r; ab} \quad (181)$$

όπου πάλι ισχύει  $a < b-1$ , αλλά πρέπει να δούμε τι γίνεται στην ειδική περίπτωση που κάποιος δείκτης αποκτήσει κάποια ακραία τιμή. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\sum_{L \leq a < b \leq U} R_{n;b_1 a_1; b_2 a_2; \dots; b_r a_r; ab}^{l_1 \dots l_p; u_1 \dots n_q} \quad (182)$$

όπου όταν  $a = L$  αντικαθιστούμε την εξάρτηση από το  $\langle L-1 |$  στην σχέση 179 ως εξής

$$\langle L-1 | \rightarrow \langle n | x_{n l_1} x_{l_1 l_2} \dots x_{l_{p-1} l_p} \quad (183)$$

και όταν  $b = U$  αντικαθιστούμε την εξάρτηση από το  $\langle U |$  στην σχέση 179 ως εξής

$$\langle U | \rightarrow \langle n | x_{nu_1} x_{u_1 u_2} \dots x_{u_{q-1} u_q} \quad (184)$$

Στην περίπτωση όπου κάποιος όρος περιλαμβάνει και τις δύο ακραίες τιμές, τότε γίνονται και οι δυο αντικαταστάσεις, ενώ όταν δεν πρέπει να γίνει αντικατάσταση βάζουμε τον δείκτη 0.

$$\mathcal{P}_n^{NNMHV} = \sum_{2 \leq a_1, b_1 \leq n-1} R_{n;a_1 b_1}^{0;0} \left[ \sum_{a_1+1 \leq a_2, b_2 \leq b_1} R_{n;a_1 b_1; a_2 b_2}^{0;a_1 b_1} + \sum_{b_1 \leq a_2, b_2 \leq n-1} R_{n;a_2 b_2}^{a_1 b_1; 0} \right] \quad (185)$$

Αρχίζουμε τον υπολογισμό από τους μη ομογενείς όρους  $B_1$  και  $B_2$  της σχέσης 178. Ο όρος  $B_1$  μοιάζει αρκετά με τον όρο  $B$  του NMHV πλάτους σκέδασης, η διαφορά είναι ότι περιέχει τον όρο  $\mathcal{P}^{NMHV}$

$$B_1 = \sum_{i=4}^{n-3} \int \frac{d^4 n_{\hat{P}_i}}{P_i^2} \mathcal{A}_i^{MHV}(z_{P_i}) \mathcal{A}_{n-i+2}^{MHV}(z_{P_i}) \mathcal{P}_{n-i+2}^{NMHV}(z_{P_i}) \quad (186)$$

Εκμεταλλευόμαστε την κυκλική ιδιότητα των πλατών και ταυτίζουμε τα σωματίδια  $\{1, 2, \dots, n-i+2\}$  του πλάτους  $\mathcal{A}_{n-i+2}^{NMHV}$  με τα σωματίδια  $\{\hat{P}, i, \dots, n\}$ . Με αυτή την επιλογή ο όρος  $\mathcal{P}_{n-i+2}^{NMHV}$  δεν εξαρτάται από το  $n_{\hat{P}_i}$ . Έτσι η ολοκλήρωση μας δίνει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα όπως στον υπολογισμό του  $B$ ,

$$B_1 = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{i=4}^{n-1} R_{n;2i} \mathcal{P}_{n-i+2}^{NMHV}(\hat{P}, \dots, \hat{n}) \quad (187)$$

όπου η αλλαγή του άνω άκρου του αθροίσματος είναι επιτρεπτή επειδή οι επιπλέον όροι είναι μηδενικοί. Από τον ορισμό του γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{P}_{n-i+2}^{NMHV}(\hat{P}, \dots, \hat{n}) = \sum_{i \leq s < t \leq n-1} R_{n;st}(\hat{P}, \dots, \hat{n}) \quad (188)$$

Θυμόμαστε ότι η σειρά των σωματιδίων είναι  $\{\hat{P}, i, \dots, n\}$ , έτσι για  $s = i$  η εξάρτηση του  $R$  από το  $\langle s-1 |$  γίνεται εξάρτηση από το  $\langle \hat{P} |$ . Ωστόσο ο όρος αυτός εμφανίζεται τόσο στον αριθμητή όσο και στον παρονομαστή, έτσι πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τον όρο  $\langle n1 | [1\hat{P}]$  έχουμε

$$\langle n1 | [1\hat{P}_i] \langle \hat{P}_i | = \langle n1 | [1|\hat{P}_i] = \langle n1 | [1|P_i] = \langle n1 | [1|x_{1i}] = \langle n1 | [1|x_{2i}] = \langle n | x_{12} x_{2i} = \langle n | x_{n2} x_{2i} \quad (189)$$

έτσι για την ακραία τιμή  $s = i$  έχουμε την αντικατάσταση

$$\langle i-1 | \rightarrow \langle n | x_{n2} x_{2i} \quad (190)$$

Καταλήγουμε επομένως,

$$B_1 = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{i=4}^{n-1} R_{n;2i} \sum_{i \leq s < t \leq n-1} R_{n;st}^{2i;0} \quad (191)$$

Περνάμε τώρα στον υπολογισμό του όρου  $B_2$

$$B_2 = \sum_{i=5}^{n-1} \int \frac{d^4 n_{\hat{P}_i}}{P_i^2} \mathcal{A}_i^{MHV}(z_{P_i}) \mathcal{P}_i^{NMHV}(z_{P_i}) \mathcal{A}_{n-i+2}^{MHV}(z_{P_i}) \quad (192)$$

Για μια ακόμη φορά εκμεταλλευόμαστε την κυκλική ιδιότητα των πλατών και ταυτίζουμε τα σωματίδια  $\{1, 2, \dots, i\}$  του πλάτους  $\mathcal{A}_i^{NMHV}$  με τα σωματίδια  $\{2, \dots, -\hat{P}, \hat{1}\}$ . Αντίστοιχα με τον υπολογισμό του  $B_1$  βρίσκουμε

$$B_2 = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{i=4}^{n-1} R_{n;2i} \sum_{3 \leq s < t \leq \hat{P}} R_{\hat{1};st}(2, \dots, -\hat{P}, \hat{1}) \quad (193)$$

Όπως και πριν, όταν η μεταβλητή  $t$  αποκτήσει την ακραία τιμή  $t = \hat{P}$  πρέπει να προβούμε στην αντικατάσταση

$$\langle \hat{P} | \rightarrow \langle n | x_{n2} x_{2i} \quad (194)$$

Ωστόσο ο όρος  $B_2$  διαφοροποιείται από το γεγονός ότι το τελευταίο σωματίδιο είναι το  $\hat{1}$  και όχι το  $n$ . Για την ακρίβεια ο όρος  $\langle \hat{1} |$  εμφανίζεται 4 φορές στον αριθμητή και άλλες τόσες στον παρονομαστή. Έχουμε ότι

$$\langle \hat{1} | = \langle 1 | - z_{P_i} \langle n | = \langle 1 | - \frac{x_{1i}^2}{\langle n | x_{1i} | 1 \rangle} \langle n | = \frac{\langle n | x_{1i} (x_{12} - x_{1i})}{\langle n | x_{1i} | 1 \rangle} = \frac{\langle n | x_{ni} x_{i2}}{\langle n | x_{1i} | 1 \rangle} \quad (195)$$

οπότε πρέπει να κάνουμε την αντικατάσταση

$$\langle n | \rightarrow \langle n | x_{ni} x_{i2} \quad (196)$$

Καταλήγουμε ότι

$$B_2 = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{i=4}^{n-1} R_{n;2i} \sum_{3 \leq s < t \leq i} R_{n;i2;st}^{0;2i} \quad (197)$$

Το άθροισμα των μη ομογενών όρων είναι

$$B_1 + B_2 = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{i=4}^{n-1} R_{n;2i} \left[ \sum_{3 \leq s < t \leq i} R_{n;i2;st}^{0;2i} + \sum_{i \leq s < t \leq n-1} R_{n;st}^{2i;0} \right] \quad (198)$$

το οποίο γενικεύεται στο

$$\mathcal{A}_n^{NNMHV} = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{2 \leq a_1 < b_1 \leq n-1} R_{n;a_1 b_1}^{0;0} \left[ \sum_{a_1+1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1} R_{n;b_1 a_1; a_2 b_2}^{0;a_1 b_1} + \sum_{b_1 \leq a_2 < b_2 \leq n-1} R_{n;a_2 b_2}^{a_1 b_1;0} \right] \quad (199)$$

Υποθέτουμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για το  $\mathcal{A}_{n-1}^{NNMHV}$  και συνεχίζουμε στον υπολογισμό του ομογενούς όρου

$$\int \frac{d^4 n_{\hat{P}}}{P^2} \mathcal{A}_3^{MHV}(z_P) \mathcal{A}_{n-1}^{MHV}(z_P) \mathcal{P}_{n-1}^{NNMHV}(\hat{P}, 3, \dots, \hat{n}) \quad (200)$$

Κανέννας από τους όρους που υπάρχουν στο  $\mathcal{P}_{n-1}^{NNMHV}(\hat{P}, 3, \dots, \hat{n})$  δεν εξαρτάται από το  $n_{\hat{P}}$  οπότε έχουμε

$$A = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{3 \leq a_1 < b_1 \leq n-1} R_{n;a_1 b_1}^{0;0} \left[ \sum_{a_1+1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1} R_{n;b_1 a_1; a_2 b_2}^{0;a_1 b_1} + \sum_{b_1 \leq a_2 < b_2 \leq n-1} R_{n;a_2 b_2}^{a_1 b_1;0} \right] \quad (201)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε για πολλοστή φορά την κινηματική των τριών σημείων και αντικαταστήσαμε τον δισπίνορα  $\langle \hat{P} |$  με τον  $\langle 2 |$  όπου ο δείκτης  $a_1$  αποκτά την ακραία τιμή  $a_1 = 2$ . Παρατηρούμε ότι το άθροισμα  $B_1 + B_2$  δεν είναι τίποτα άλλο παρά το ανωτέρω άθροισμα για  $a_1 = 2$ , οπότε καταλήγουμε ότι

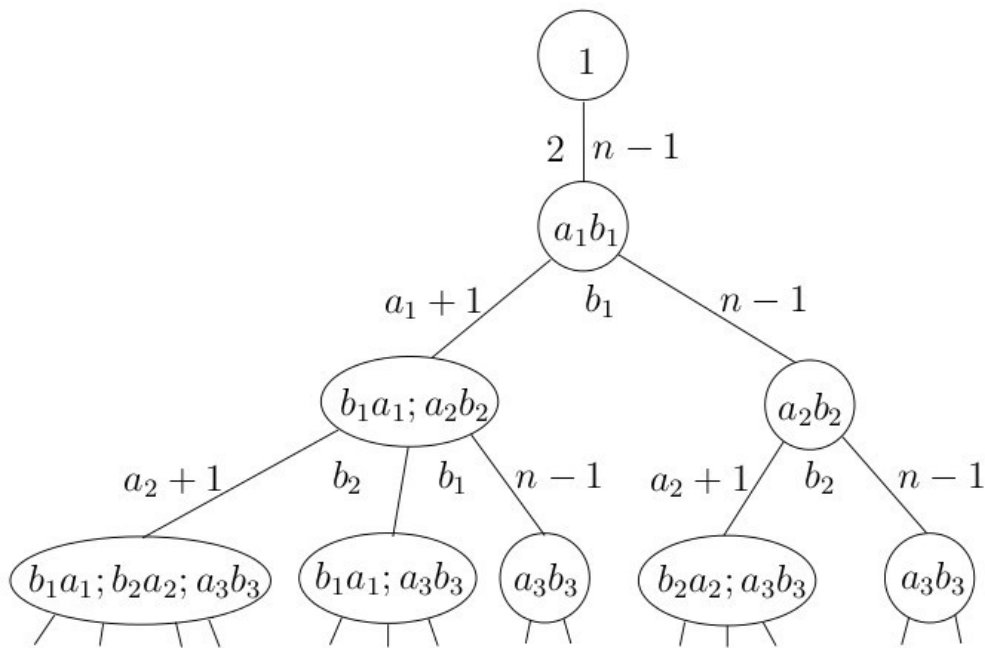
$$A + B_1 + B_2 = \mathcal{A}_n^{MHV} \sum_{2 \leq a_1 < b_1 \leq n-1} R_{n;a_1 b_1}^{0;0} \left[ \sum_{a_1+1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1} R_{n;b_1 a_1; a_2 b_2}^{0;a_1 b_1} + \sum_{b_1 \leq a_2 < b_2 \leq n-1} R_{n;a_2 b_2}^{a_1 b_1;0} \right] \quad (202)$$

Ο τύπος αυτός είναι σωστός για το πλάτος  $\mathcal{A}_6^{NNMHV}$ , γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

## 11 Ο γενικός υπολογισμός του $N^P M H V$

Η απόδειξη του γενικού τύπου θα βασιστεί σε μια διαγραμματική κατασκευή. Το πλήρες πλάτος  $n$  σημείων παρουσιάζεται ως ένα δενδροειδές διάγραμμα. Το διάγραμμα αυτό φαίνεται στο σχήμα 8. Η κορυφή της ρίζας είναι ο αριθμός 1 και έχει μια μόνο διακλάδωση που οδηγεί στην κορυφή με δείκτες  $a_1$  και  $b_1$ . Ο κανονάς με τον οποίο προκύπτει η κάθε σειρά δίνεται στο σχήμα 9. Η αρίθμηση των σειρών ξεκινά από το 0 το οποίο αντιστοιχεί στην ρίζα. Σε κάθε σειρά το πλήθος των κορυφών δίνεται από τον αριθμό Catalan

$$C(p) = \frac{(2p)!}{p!(p+1)!} \quad (203)$$

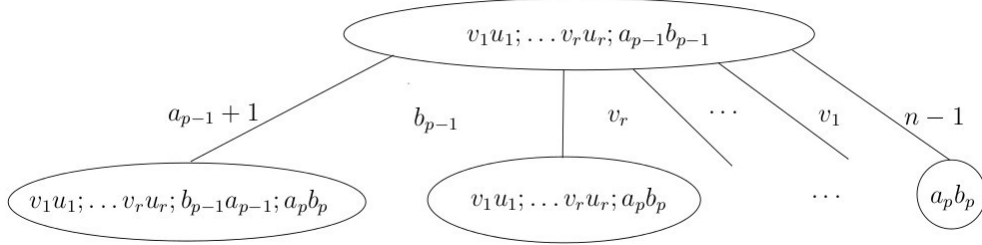


Σχήμα 8: Η γραφική αναπαράσταση του τύπου όλων των πλατών της  $N = 4$  υπερσυμμετρικής θεωρίας Yang-Mills.

Κάθε κορυφή αντιστοιχεί σε ένα όρο  $R_{n;xx}^{xx;xx}$ . Έτσι για παράδειγμα η κορυφή της πρώτης σειράς αντιστοιχεί στον όρο  $R_{n;a_1 b_1}^{0;0}$ , της δεύτερης στους όρους  $R_{n;b_1 a_1; a_2 b_2}^{0;a_1 b_1}$  και  $R_{n;a_2 b_2}^{a_1 b_1;0}$  κοκ.

Κάθε φορά παίρνουμε κατακόρυφες διαδρομές οι οποίες ξεκινούν από την ρίζα του διαγράμματος με τους όρους που αποτελούν την διαδρομή να συνοδεύονται από τα αντίστοιχα αθροίσματα. Το τελευταίο ζεύγος δεικτών σε κάθε κορυφή αντιστοιχεί στους αθροιζόμενους δείκτες. Για την γραμμή  $p$  οι δείκτες αυτοί είναι  $a_p b_p$  και στην άθροιση ισχύει πάντα ότι  $a_p + 2 \leq b_p$ . Οι ακραίες τιμές της άθροισης που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή αναγράφονται δεξιά και αριστερά της γραμμής που οδηγεί σε αυτήν. Για παράδειγμα οι δείκτες  $a_1$  και  $b_1$  του  $R_{n;a_1 b_1}^{0;0}$  αθροίζονται

στην περιοχή  $2 \leq a_1 < b_1 \leq n - 1$ , όπου πάντα  $a_1 + 2 \leq b_1$ . Οι άνω δεξιά δείκτες προκύπτουν από τους δείκτες της κορυφής σβήνοντας τους δείκτες  $a_p b_p$  και αντιστρέφοντας την σειρά του τελευταίου εναπομείνοντος ζεύγους δεικτών. Οι άνω αριστερά δείκτες ταυτίζονται με τους άνω δεξιά δείκτες της δίπλα αριστερά κορυφής.



Σχήμα 9: Ο κανόνας για την κατασκευή κάθε σειράς από την προηγούμενη είναι ότι για κάθε κορυφή της σειράς  $p - 1$  υπάρχουν  $r + 2$  διακλαδώσεις προς την σειρά  $p$ . Ξεκινάμε από αριστερά με την κορυφή  $v_1 u_1; \dots v_r u_r; b_{p-1} a_{p-1}; a_p b_p$  και καθώς προχωράμε προς τα δεξιά αφαιρούμε το ζεύγος δεικτών που βρίσκεται ακριβώς πριν το  $a_p b_p$  μέχρι να φτάσουμε στον τελευταίο όρο όπου έχουν απομείνει μόνο οι δείκτες  $a_p b_p$ . Οι δείκτες που σχετίζονται με τις ακραίες τιμές των αθροίσεων προκύπτουν και αυτοί από την πάνω κορυφή. Οι άνω δεξιά δείκτες προκύπτουν από τους δείκτες της κορυφής σβήνοντας τους δείκτες  $a_p b_p$  και αντιστρέφοντας της σειρά του τελευταίου εναπομείνοντος ζεύγους δεικτών. Οι άνω αριστερά δείκτες ταυτίζονται με τους άνω δεξιά δείκτες της δίπλα αριστερά κορυφής.

Πλέον είμαστε σε θέση να δώσουμε τον τύπο για το πλήρες πλάτος σκέδασης  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n^{MHV} \mathcal{P}_n$ . Το  $\mathcal{P}_n$  δίνεται από το άθροισμα όλων κάθετων διαδρομών ξεκινώντας από την ρίζα και φτάνοντας στην γραμμή  $n - 4$ .

$$\mathcal{P}_n = \sum \text{κατακόρυφες διαδρομές σχ 8} \quad (204)$$

Ας δούμε πως λειτουργεί ο τύπος για μερικές περιπτώσεις. Υπάρχει μόνο μια διαδρομή μηδενικού μήκους, με τιμή 1 η οποία αντιστοιχεί στο πλάτος MHV.

$$\mathcal{P}_n^{MHV} = 1 \quad (205)$$

Αντίστοιχα υπάρχει μόνο μια διαδρομή με μήκος ένα. Έχουμε 1 από την ρίζα και πολλαπλασιάζουμε με το  $R_{n; a_1 b_1}$  με τους δείκτες να αθροίζονται μεταξύ των τιμών 2 και  $n - 1$ . Δεν υπάρχουν άνω δείκτες. Έτσι

$$\mathcal{P}_n^{NMHV} = \sum_{2 \leq a_1 < b_1 \leq n-1} R_{n; a_1 b_1} \quad (206)$$

Αντίστοιχα συνεχίζει κανείς για να υπολογίσει και τις υπόλοιπες συνεισφορές. Στο τέλος αθροίζονται όλες οι διαδρομές, οπότε και έχουμε

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{MHV} + \mathcal{P}_n^{NMHV} + \mathcal{P}_n^{NNMHV} + \dots + \mathcal{P}_n^{\overline{MHV}} \quad (207)$$



Απομένει να αποδείξουμε την ισχύ της παραπάνω διαδικασίας. Πάλι η απόδειξη θα βασιστεί στην επαγωγή. Η αναδρομική σχέση για το πλάτος  $\mathcal{A}_n$  είναι

$$\mathcal{A}_n = \int \frac{d^4 n_{\hat{P}}}{P^2} \mathcal{A}_3^{\overline{MHV}}(z_P) \mathcal{A}_{n-1}(z_P) + \sum_{i=4}^{n-1} \int \frac{d^4 n_{\hat{P}_i}}{P_i^2} \mathcal{A}_i(z_{P_i}) \mathcal{A}_{n-i+2}(z_{P_i}) \quad (208)$$

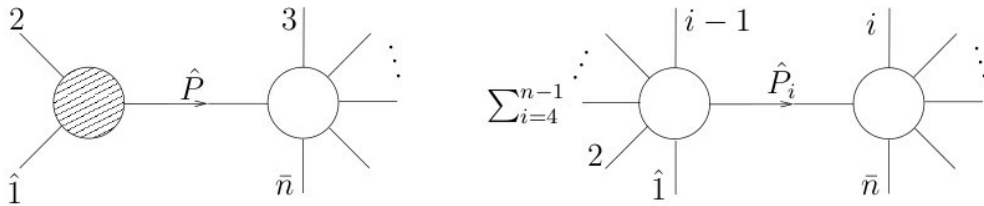
αναπαρίσταται γραφικά στο σχήμα 10. Ο πρώτος όρος είναι γραμμικός ενώ ο δεύτερος όρος είναι τετραγωνικός. Εμφανίζουμε τα  $\mathcal{P}_n$  μέσω της σχέσης  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n^{MHV} \mathcal{P}_n$  και ως συνήθως εκμεταλλευόμαστε την κυκλική ιδιότητα των πλατών προκειμένου να ταυτοποιήσουμε τα σωματίδια.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^{MHV} \mathcal{P}_n &= \int \frac{d^4 n_{\hat{P}}}{P^2} \mathcal{A}_3^{\overline{MHV}}(z_P) \mathcal{A}_{n-1}^{MHV}(z_P) \mathcal{P}_{n-1}(\hat{P}, 3, \dots, \hat{n}) \\ &+ \sum_{i=4}^{n-1} \int \frac{d^4 n_{\hat{P}_i}}{P_i^2} \mathcal{A}_i^{MHV}(z_{P_i}) \mathcal{P}_i(2, \dots, -\hat{P}_i, \hat{1}) \mathcal{A}_{n-i+2}^{MHV}(z_{P_i}) \mathcal{P}_{n-i+2}(\hat{P}_i, i, \dots, \hat{n}) \end{aligned} \quad (209)$$

όλοι οι παράγοντες  $\mathcal{P}$  δεν επιρεάζονται από την ολοκλήρωση Grassmann. Στον πρώτο όρο η ολοκλήρωση θα μας δώσει απλά το πλάτος  $\mathcal{A}_n^{MHV}$  ενώ στον τετραγωνικό όρο, ακριβώς όπως στον υπολογισμό του  $\mathcal{A}_n^{NMHV}$  για κάθε  $i$  θα πάρουμε έναν όρο  $\mathcal{A}_n^{MHV} R_{n;2i}$ . Έτσι έχουμε

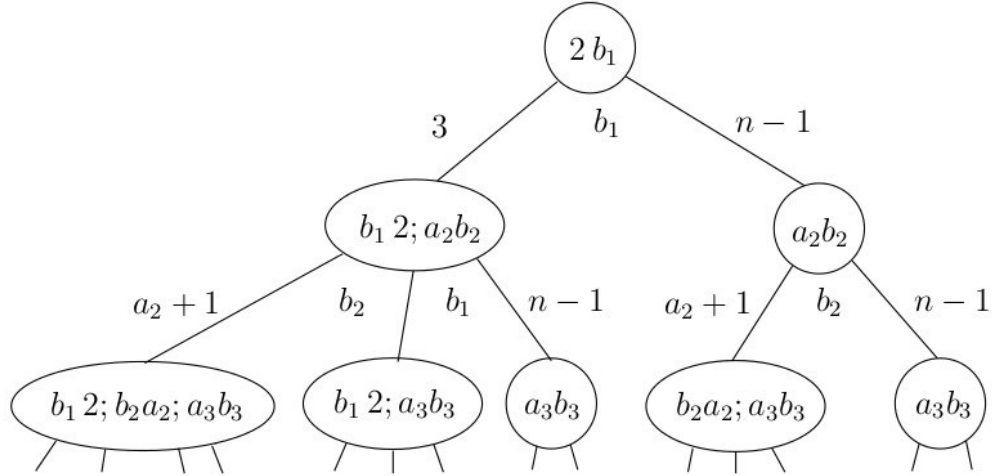
$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n-1}(\hat{P}, 3, \dots, \hat{n}) + \sum_{i=4}^{n-1} R_{n;2i} \mathcal{P}_i(2, \dots, -\hat{P}_i, \hat{1}) \mathcal{P}_{n-i+2}(\hat{P}_i, i, \dots, \hat{n}) \quad (210)$$

Η κινηματική των τριών σημείων μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε τον  $\langle \hat{P} |$  με το  $\langle 2 |$ , έτσι ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο άθροισμα των κατακόρυφων διαδρομών μόνο που στο πρώτο άθροισμα η κάτω ακραία τιμή της άθροισης είναι 3 και όχι 2. Το δένδρσειδές διάγραμμα απεικονίζεται στο σχήμα 11. Επομένως θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο τετραγωνικός όρος δίνει το άθροισμα των κατακόρυφων διαδρομών όταν ο μικρότερος δείκτης του πρώτου αθροίσματος είναι ακριβώς 2.



Σχήμα 10: Η γραφική αναπαράσταση της αναδρομικής σχέσης που δίνει το πλήρες πλάτος της  $N = 4$  υπερσυμμετρικής θεωρίας Yang Mills.

Όσον αφορά τον τετραγωνικό όρο ο όρος  $R_{n;2i} \mathcal{P}_i(2, \dots, -\hat{P}_i, \hat{1})$  απεικονίζεται διαγραμματικά στο αριστερό κομμάτι του σχήματος 12, ενώ ο όρος  $\mathcal{P}_{n-i+2}(\hat{P}_i, i, \dots, \hat{n})$  απεικονίζεται στο δεξίο κομμάτι του σχήματος. Οι διαφορές του αριστερού διαγράμματος από το διάγραμμα



Σχήμα 11: Το δενδροειδές διάγραμμα του γραμμικού όρου της αναδρομικής σχέσης που δίνει το πλήρες πλάτος της  $N = 4$  υπερσυμμετρικής θεωρίας Yang Mills.

8 είναι ότι η ρίζα δεν είναι η μονάδα αλλά το  $R_{2i}$  και ότι όλοι οι υπόλοιποι όροι έχουν άνω δείκτες εξαιτίας του γεγονότος ότι το τελευταίο σωματίδιο του  $\mathcal{P}_i(2, \dots, -\hat{P}_i, \hat{1})$  είναι το  $\hat{1}$ . Όπως είδαμε αυτό οδηγεί στην αντικατάσταση  $\langle n | \rightarrow \langle n | x_{ni} x_{i2}$  το οποίο επιτυγχάνεται με την εισαγωγή των όρων  $i2$  στις κορυφές. Το αριστερό διάγραμμα αποτελείται από μια διαδρομή μηδενικού μήκους

$$R_{n;2i} \quad (211)$$

μια διαδρομή μοναδιαίου μήκους

$$R_{n;2i} \sum_{3 \leq a_2 < b_2 \leq i} R_{n;i2;a_2 b_2}^{0;2i} \quad (212)$$

δύο διαδρομές με μήκος δύο

$$R_{n;2i} \sum_{3 \leq a_2 < b_2 \leq i} R_{n;i2;a_2 b_2}^{0;2i} \left[ \sum_{a_2+1 \leq a_3 < b_3 \leq i} R_{n;i2;b_2 a_2; a_3 b_3}^{0;i2 a_2 b_2} + \sum_{b_2 \leq a_3 < b_3 \leq i} R_{n;i2;a_3 b_3}^{i2 a_2 b_2; 2i} \right] \quad (213)$$

και άλλες διαδρομές μεγαλύτερου μήκους.

Όσο αφορά το δεξί διάγραμμα που αντιστοιχεί στον όρο  $\mathcal{P}_{n-i+2}(\hat{P}_i, i, \dots, \hat{n})$  οι διαφορές σε σχέση με το διάγραμμα του σχήματος 8 είναι ότι το πρώτο σωματίδιο είναι το  $\hat{P}_i$  και όχι το  $i-1$  γεγονός που οδηγεί στην εισαγωγή του άνω δείκτη  $2i$ . Το δεξί διάγραμμα αποτελείται από μια διαδρομή μηδενικού μήκους

$$1 \quad (214)$$

μια διαδρομή μοναδιαίου μήκους

$$\sum_{i \leq c_1 < d_1 \leq n-1} R_{n;c_1 d_1}^{2i;0} \quad (215)$$

δύο διαδρομές με μήκος δύο

$$\sum_{i \leq c_1 < d_1 \leq n-1} R_{n;c_1 d_1}^{2i;0} \left[ \sum_{c_1+1 \leq c_2 < d_2 \leq d_1} R_{n;d_1 c_1; c_2 d_2}^{0;c_1 d_1} + \sum_{d_1 \leq c_2 < d_2 \leq n-1} R_{n;c_2 d_2}^{c_1 d_1;0} \right] \quad (216)$$

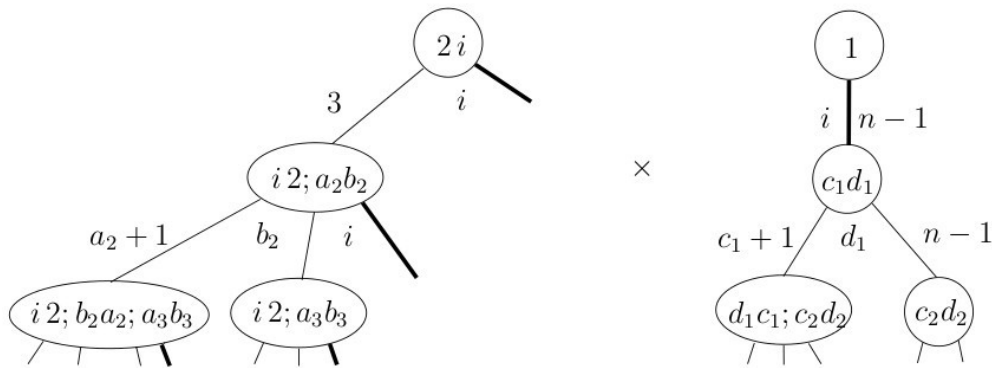
και άλλες διαδρομές μεγαλύτερου μήκους.

Το γινόμενο λοιπόν το διαγραμμάτων που αποτελούν τον τετραγωνικό όρο είναι

$$\begin{aligned} & R_{n;2i} \\ & + R_{n;2i} \left[ \sum_{3 \leq a_2 < b_2 \leq i} R_{n;i 2; a_2 b_2}^{0;2i} + \sum_{i \leq c_1 < d_1 \leq n-1} R_{n;c_1 d_1}^{2i;0} \right] \\ & + R_{n;2i} \left\{ \sum_{3 \leq a_2 < b_2 \leq i} R_{n;i 2; a_2 b_2}^{0;2i} \left[ \sum_{a_2+1 \leq a_3 < b_3 \leq i} R_{n;i 2; b_2 a_2; a_3 b_3}^{0;i 2 a_2 b_2} + \sum_{b_2 \leq a_3 < b_3 \leq i} R_{n;i 2; a_3 b_3}^{i 2 a_2 b_2; 2i} + \sum_{i \leq c_1 < d_1 \leq n-1} R_{n;c_1 d_1}^{2i;0} \right] \right. \\ & \left. + \sum_{i \leq c_1 < d_1 \leq n-1} R_{n;c_1 d_1}^{2i;0} \left[ \sum_{c_1+1 \leq c_2 < d_2 \leq d_1} R_{n;d_1 c_1; c_2 d_2}^{0;c_1 d_1} + \sum_{d_1 \leq c_2 < d_2 \leq n-1} R_{n;c_2 d_2}^{c_1 d_1;0} \right] \right\} + longer \end{aligned} \quad (217)$$

Αντικαθιστούμε  $c_1, d_1 \rightarrow a_2, b_2$  στην δεύτερη γραμμή,  $c_1, d_1 \rightarrow a_3, b_3$  στην τρίτη και  $c_1, d_1 \rightarrow a_2, b_2, c_2, d_2 \rightarrow a_3, b_3$  στην τέταρτη και αλλάζουμε την αθροιζόμενη μεταβλητή από  $i$  σε  $b_1$  και καταλήγουμε ακριβώς στον όρο που πρέπει να προστεθεί στον γραμμικό προκειμένου να κατασκευαστεί το πλήρες πλάτος. Διαγραμματικά μπορεί να δει κανείς αυτή την εικόνα αν ενθέσει την έντονη γραμμή του δεξιού διαγράμματος στις έντονες γραμμές του αριστερού διαγράμματος του σχήματος 8.

Στην βιβλιογραφία υπάρχει ο υπολογισμός όλων των tree level πλατών της άμαζης  $QCD$  [36] καθώς και της  $N = 8$  Υπερβαρύτητας [37].



Σχήμα 12: Το γινόμενο των δενδροειδών διαγραμμάτων που απαρτίζουν τον τετραγωνικό όρο της αναδρομικής σχέσης που δίνει το πλήρες πλάτος της  $N = 4$  υπερσυμμετρικής θεωρίας.

## 12 Διαβάζοντας Πλάτη Μποζονίων Βαθμίδας από τα Υπερπλάτη

Όπως είδαμε στην κατασκευή της υπερκυματοσυνάρτησης του  $\mathcal{N} = 4$  υπερχώρου στον φλοιό της μάζας από τον Nair [32], κάθε μποζόνιο βαθμίδας αρνητικής ελικότητας συνοδεύεται από έναν παράγοντα  $(n_j)^4 = n_j^1 n_j^2 n_j^3 n_j^4$  και κάθε μποζόνιο βαθμίδας θετικής ελικότητας από την μονάδα. Για παράδειγμα από την σχέση 118 για την περίπτωση του  $\mathcal{A}_n^{MHV}$  πλάτους έχουμε

$$\mathcal{A}_n^{MHV}(1^+, \dots, i^-, \dots, j^-, \dots, n^+) = \int d^4 n_i \int d^4 n_j \mathcal{A}_n^{MHV}(\Phi) = \delta^4(p) \frac{\langle ij \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \quad (218)$$

ενώ για την περίπτωση του  $\mathcal{A}_n^{NMHV}$  έχουμε

$$\mathcal{A}_n^{NMHV}(1^+, \dots, (n-3)^+, (n-2)^-, (n-1)^-, n^-) = \int d^4 n_{n-2} \int d^4 n_{n-1} \int d^4 n_n \mathcal{A}_n^{NMHV}(\Phi) \quad (219)$$

Μπορούμε πάντα να αναπτύξουμε την συνάρτηση  $\delta^8(q)$  σε δυο οποιεσδήποτε προβολές ως

$$\delta^8(q) = \langle n-1n \rangle^4 \delta^4 \left( n_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\langle in \rangle}{\langle n-1n \rangle} n_i \right) \delta^4 \left( n_n + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\langle n-1i \rangle}{\langle n-1n \rangle} n_i \right) \quad (220)$$

Οι ολοκληρώσεις ως προς τις  $n_n$  και  $n_{n-1}$  μεταβλητές Grassmann δίνουν απλά έναν παράγοντα  $\langle n-1n \rangle^4$  καθώς το πλάτος δεν εξαρτάται από αυτές. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{A}_n^{NMHV}(1^+, \dots, (n-3)^+, (n-2)^-, (n-1)^-, n^-) = \delta^4(p) \frac{\langle n-1n \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \int d^4 n_{n-2} \sum_{2 \leq s < t \leq n-1} R_{n;st} \quad (221)$$

Από την σχέση 168 βλέπουμε ότι το πλάτος εξαρτάται από το  $n-2$  μόνο για για  $t = n-1$ , έτσι έχουμε

$$\mathcal{A}_n^{NMHV}(1^+, \dots, (n-3)^+, (n-2)^-, (n-1)^-, n^-) = \delta^4(p) \frac{\langle n-1n \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \int d^4 n_{n-2} \sum_{s=2}^{n-3} R_{n;sn-1} \quad (222)$$

έχουμε ότι

$$\int d^4 n_{n-2} R_{n;sn-1} = - \frac{\langle ss-1 \rangle \langle n-1n-2 \rangle \langle n|x_{ns}x_{sn-1}|n-2 \rangle^3}{x_{sn-1}^2 \langle n|x_{ns}x_{sn-1}|n-1 \rangle \langle n|x_{nn-1}x_{n-1s}|s \rangle \langle n|x_{nn-1}x_{n-1s}|s-1 \rangle} - \frac{\langle ss-1 \rangle \langle n-1n-2 \rangle \langle n|x_{ns}x_{sn-1}|n-2 \rangle^3}{x_{sn-1}^2 x_{sn}^2 \langle nn-1 \rangle^3 [n-1|x_{n-1s}|s] [n-1|x_{n-1s}|s-1]} \quad (223)$$

οπότε καταλήγουμε στην σχέση

$$\mathcal{A}_n^{NMHV}(1^+, \dots, (n-3)^+, (n-2)^-, (n-1)^-, n^-) = - \frac{\delta^4(p)}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n-3n-2 \rangle \langle n1 \rangle} \sum_{s=2}^{n-3} \frac{\langle ss-1 \rangle \langle n-2|x_{n-1s}x_{sn}|n \rangle^3}{x_{sn-1}^2 x_{sn}^2 [n-1|x_{n-1s}|s] [n-1|x_{n-1s}|s-1]} \quad (224)$$

## Μέρος III

# Περαιτέρω κατευθύνσεις

Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες πληροφορίες για τα θέματα που αναπτύχθηκαν, αλλά και για θέματα που παραλήφθηκαν, στο ειδικό αφιέρωμα του Physical Letters A στα πλάτη σκέδασης [38–51].

## 13 Υπολογισμοί Ανώτερης Τάξης

Πλέον έχουν αναπτυχθεί μια σειρά από τεχνικές οι οποίες έχουν καταστήσει εφικτούς υπολογισμούς οι οποίοι ήταν πολύ πέρα από τις προσδοκίες με χρήση συμβατικών μεθόδων. Η ιδέα της χρήσης πλατών κατώτερης τάξης για την κατασκευή πλατών ανώτερης τάξης είναι αρκετά παλιά. Η κατασκευή στηριζόταν στις σχέσεις διασποράς μιγαδικών συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα στις σχέσεις Crammers - Kroning, που ανακατασκευάζουν την συνάρτηση σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο από τις ανωμαλίες. Η τεχνική αυτή δεν είναι αποδοτική καθώς περιλαμβάνει ολοκλήρωση με την πολυπλοκότητα που αυτό συνεπάγεται. Μια πιο έξυπνη σκέψη βασίζεται στο γεγονός ότι οποιοδήποτε ολοκλήρωμα στο πρώτο βρόγχο μπορεί να αναχθεί σε μια βάση βαθμωτών ολοκληρωμάτων (master integrals) και σε ρητούς όρους. Έτσι οι χρονοβόροι και δύσκολοι υπολογισμοί των ολοκληρωμάτων γίνονται μια και καλή και το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των συντελεστών για το ανάπτυγμα. Υπάρχει πληθώρα τεχνικών για να διαβάσουμε αυτούς τους συντελεστές.

Η απαρχή των μοντέρνων τεχνικών ήταν οι λεγόμενες μέθοδοι που βασίζονται στην μοναδιακότητα (Unitarity Based Methods). Η κεντρική ιδέα είναι ότι οι συντελεστές του αναπτύγματος στην βάση των ολοκληρωμάτων μπορούν να αναγνωριστούν από τις τομές διακλάδωσης των ολοκληρωμάτων σε φυσικά κανάλια. Γενίκευση αυτή της τεχνικής (Generalized Unitarity) χρησιμοποιεί γενικευμένες τομές διακλάδωσης, οι οποίες επεκτίνονται και σε αφύσικα κανάλια, διαβάζοντας πιο εύκολα τους συντελεστές. Με την μέθοδο αυτή τα πλάτη ανακατασκευάζονται από τα πλάτη χαμηλότερης τάξης. Επεκτάσεις αυτής της τεχνικής για τους συντελεστές συγκεκριμένων ολοκληρωμάτων περιλαμβάνουν την μέθοδο Forde, σπινοριακή ολοκλήρωση, χρήση του θεωρήματος Stokes και άλλες μεθόδους. Το δυσκολότερο κομμάτι των υπολογισμών αφορά την εύρεση του ρητού κομματιού καθώς αυτό χάνεται με την χρήση των ανωτέρω μεθόδων, ωστόσο υπάρχουν αρκετοί τρόποι υπολογισμού αυτών των όρων.

Τα ακόλουθα άρθρα επισκόπησης [52–54] περιέχουν εκτεταμένες αναφορές στην πρωτότυπη βιβλιογραφία.

## 14 Προς τον Υπολογισμό όλης της Διαταρακτικής Σειράς

Η αναζήτηση ενός δυϊσμού μεταξύ της Yang - Mills θεωρίας βαθμίδας και της θεωρίας χορδών έχει την απαρχή του στην δουλειά τους 't Hooft, ο οποίος μελετώντας την θεωρία  $U(N)$  στο όριο του μεγάλου  $N$  κρατώντας σταθερή την σταθερά ζεύξης  $\lambda = g_{YM}^2 N$  [12], παρατήρησε ότι τα διαγράμματα Feynman αποκτούν γεωμετρικές ιδιότητες, σχετιζόμενες με επιφάνειες Riemann. Το γεγονός αυτό άφησε υπόνοιες για μια δυϊκή περιγραφή της θεωρίας βαθμίδας μέσω μιας θεωρίας χορδών. Το διαταρακτικό ανάπτυγμα μπορεί να ειπωθεί ως το ανάπτυγμα στο  $1/N$ , οπότε η σταθερά ζεύξης της θεωρίας χορδών θα είναι  $g_s \sim 1/N$ . Ο δυϊσμός αυτός συνδέει μεταξύ τους δύο θεωρίες οι οποίες βρίσκονται σε ασθενή ζεύξη.

Η ιστορία συνεχίζεται με την πρόταση του Maldacena για τον δυϊσμό μεταξύ της  $N = 4$  Super - Yang - Mills θεωρίας και της  $IIB$  θεωρίας χορδών ορισμένης στον  $AdS_5 \times S^5$  [55]. Η πρόταση αυτή αποτέλεσε το έναυσμα για έναν καταιγισμό από εξελίξεις στην μελέτη του δυϊσμού μεταξύ σύμμορφων θεωριών βαθμίδας ορισμένες στο σύνορο μιας επιφάνειας και της θεωρίας χορδών ορισμένης στον χώρο που εσωκλύει η επιφάνεια (AdS/CFT Correspondance). Ο δυϊσμός αυτός ωστόσο είναι ένας δυϊσμός μεταξύ μιας θεωρίας βαθμίδας σε ισχυρή ζεύξη και μιας θεωρίας χορδών σε ασθενή ζεύξη. Πλέον έχουν γίνει σημαντικά βήματα στην εξεύρεση μιας δυϊκής περιγραφής στην οποία η θεωρία βαθμίδας είναι και αυτή σε ασθενή ζεύξη [33].

Οι γεωμετρικές ιδιότητες που εμφανίζουν τα πλάτη σκέδασης της  $N = 4$  υπερσυμμετρικής θεωρίας Yang Mills όταν κανείς τα εκφράσει στον χώρο των Twistor [22, 56] επιτρέπουν την αναδρομική κατασκευή της ολοκληρωτέας ποσότητας που εκφράζει τα πλάτη σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών [57, 58]. Η κατασκευή αυτή οδηγεί σε ένα νέο γεωμετρικό αντικείμενο, το Amplituhedron. Το Amplituhedron εκφράζει τα πλάτη σκέδασης ως τον όγκο τον οποίο καταλαμβάνει [59].

## Αναφορές

- [1] Z. Xu, D Zhang, L. Chang: *Helicity Amplitudes for Multiple Bremsstrahlung in Massless Nonabelian Gauge Theories*, Nucl Phys B 291, 392(1987).
- [2] L. Dixon: *Calculating Scattering Amplitudes Efficiently*, arXiv:hep-ph/9601359
- [3] S. Dittmaier: *Weyl - van der Waerden Formalism for Helicity Amplitudes of Massive Particles*, arXiv:hep-ph/9805445
- [4] K. J. Ozeren, W. J. Stirling: *Scattering Amplitudes with Massive Fermions using BCFW Recursion*, arXiv:hep-th/0603071
- [5] C. Schwinn, S. Weinzierl: *On-Shell Recursion Relations for all Born QCD Amplitudes*, arXiv:hep-th/0703021
- [6] C. Schwinn, S. Weinzierl: *Scalar Diagrammatic Rules for Born Amplitudes in QCD*, arXiv:hep-th/0503015
- [7] G. Rodrigo: *Multigluonic Scattering Amplitudes of Heavy Quarks*, arXiv:hep-th/0508138
- [8] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, L. J. Dixon, H. Johansson, R. Roiban: *The Complete Four-Loop Four-Point Amplitude in  $N=4$  Super-Yang-Mills Theory*, arXiv:1008.3327 [hep-th]
- [9] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, L. J. Dixon, H. Johansson, R. Roiban: *The Ultraviolet Behavior of  $N=8$  Supergravity at Four Loops*, arXiv:0905.2326 [hep-th]
- [10] M. L. Mangano, S. J. Parke: *Multiparton Amplitudes in Gauge Theories*, arXiv:hep-th/0509223
- [11] Z. Bern, D. A. Kosower: *Color Decomposition of the One Loop Amplitudes in Gauge Theories*, Nucl. Phys. B 362, 389 (1991).
- [12] G. 't Hooft: *A Planar Diagram Theory for Strong Interactions*, Nucl. Phys. B 72, 461 (1974)
- [13] R. Kleiss, H. Kuijf: *Multi-Gluon Cross-Sections and Five Jet production at Hadron Colliders*, Nucl. Phys. B 312, 616 (1989).
- [14] V. Del Duca, L. J. Dixon, F. Maltoni: *New Color Decompositions for Gauge Theory Amplitudes at Tree Level and Loop Level*, arXiv:hep-ph/9910563
- [15] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, H. Johansson: *New Relations for Gauge-Theory Amplitudes*, arXiv:0805.3993 [hep-ph]
- [16] N. E. J. Bjerrum-Bohr, P. H. Damgaard, P. Vanhove: *Minimal Basis for Gauge Theory Amplitudes*, arXiv:0907.1425 [hep-th]

- [17] S. Stieberger: *Open & Closed vs Pure Open String Disc Amplitudes*, arXiv:0907.2211 [hep-th]
- [18] B. Feng, R. Huang, Y. Jia: *Gauge Amplitude Identities by On-Shell Recursion Relation in s-Matrix Program*, arXiv:1004.3417 [hep-th]
- [19] Y. X. Chen, Y. J. Du, B. Feng: *A Proof of the Explicit Minimal-Basis Expansion of Tree Amplitudes in Gauge Field Theory*, arXiv:1101.0009 [hep-th]
- [20] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng: *New Recursion Relations for Tree Level Amplitudes of Gluons*, arXiv:hep-th/0412308
- [21] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng, E. Witten: *Direct Proof of Tree-Level Recursion Relation in Yang-Mills Theory*, arXiv:hep-th/0412308
- [22] E. Witten: *Perturbative Gauge Theory as a String Theory in Twistor Space*, arXiv:hep-th/0312171
- [23] L. D. Landau: *On Analytic Properties of Vertex Parts in Quantum Field Theory*, Nucl. Phys. B 13, 181 (1959)
- [24] S. Mandelstam: *Determination of Pion -Nucleon Scattering Amplitude from Dispersion Relations and Unitarity. General Theory*, Phys. Rev. 112 1344 (1958)
- [25] S. Mandelstam: *Analytic Properties of Transition Amplitudes in Perturbation Theory*, Phys. Rev. 115 1741 (1959)
- [26] R. E. Cutkosky: *Singularities and Discontinuities of Feynman Amplitudes*, J. Math. Phys. 1, 429 (1960)
- [27] N. Arkani-Hamed, J. Kaplan: *On Tree Level Amplitudes in Gauge Theory and Gravity*, arXiv:0801.2385
- [28] S. J. Parke, T. R. Taylor: *An Amplitude for n Gluon Scattering* Phys. Rev. Lett. 56, 2459 (1986)
- [29] F. A. Berends, W. T. Giele: *Recursive Calculations for Processes with n Gluons*, Nucl. Phys. B 313, 595 (1989)
- [30] A. Brandhuber, P. Heslop, G. Travaglini: *A Note on Dual Superconformal Symmetry of the  $\mathcal{N} = 4$  Super Yang-Mills S-Matrix*, arXiv:0807.4097
- [31] Nima Arkani-Hamed, F. Cachazo, J. Kaplan: *What is the Simplest Quantum Field Theory*, arXiv:0808.1446 [hep-th]
- [32] V. P. Nair: *A Current Algebra for some Gauge Theory Amplitudes*, Phys. Lett. B214, 215 (1988)



- [33] L. F. Alday, R. Roiban: *Scattering Amplitudes, Wilson Loops and the String/Gauge Theory Correspondence*, arXiv:0807.1889 [hep-th]
- [34] J. M. Drummond, J. M. Henn: *All Tree-Level Amplitudes in  $N=4$  SYM*, arXiv:0808.2475 [hep-th]
- [35] J.M. Drummond, J. Henn, G. P. Korchemsky, E. Sokatchev: *Generalized unitarity for  $N=4$  super-amplitudes*, arXiv:0808.0491 [hep-th]
- [36] L. J. Dixon, J. M. Henn, J. Plefka, T. Schuster: *All tree-level amplitudes in massless QCD*, arXiv:1010.3991 [hep-th]
- [37] J. M. Drummond, M. Spradlin, A. Volovich, C. Wen: *Tree-Level Amplitudes in  $N=8$  Supergravity*, arXiv:0901.2363 [hep-th]
- [38] T. Adamo, M. Bullimore, L. Mason, D. Skinner: *Scattering Amplitudes and Wilson Loops in Twistor Space*, arXiv:1104.2890 [hep-th]
- [39] L. Dixon: *Scattering Amplitudes: the Most Perfect Microscopic Structures in the Universe*, arXiv:1105.0771 [hep-th]
- [40] Z. Bern, Y. t. Huang: *Basics of Generalized Unitarity*, arXiv:1103.1869 [hep-th]
- [41] R. Britto: *Loop Amplitudes in Gauge Theories: Modern Analytic Approaches*, arXiv:1012.4493 [hep-th]
- [42] J. Bartels, L. N. Lipatov, A. Prygarin: *Integrable Spin Chains and Scattering Amplitudes*, arXiv:1104.0816 [hep-th]
- [43] J. M. Drummond: *Tree-Level Amplitudes and Dual Superconformal Symmetry*, arXiv:1107.4544 [hep-th]
- [44] L. Ferro: *Yangian Symmetry in  $N=4$  Super Yang-Mills*, arXiv:1107.1776 [hep-th]
- [45] T. Bargheer, N. Beisert, F. Loebbert: *Exact Superconformal and Yangian Symmetry of Scattering Amplitudes*, arXiv:1104.0700 [hep-th]
- [46] H. Ita: *Susy Theories and QCD: Numerical Approaches*, arXiv:1109.6527 [hep-th]
- [47] J. M. Henn: *Dual Conformal Symmetry an Loop Level: Massive Regularization*, arXiv:1103.1016 [hep-th]
- [48] H. Elvang, D. Z. Freedman, M Kiermaier: *SUSY Ward identities, Superamplitudes and Counterterms*, arXiv:1012.3401
- [49] R. M. Schabinger: *One Loop  $N=4$  Super Yang-Mills Scattering Amplitudes Calculated in All Order in the Dimensional Regularization Parameter*, arXiv:1104.3873 [hep-th] [hep-th]

- [50] A. Brandhuber, B. Spence, G Travaglini: *Tree-Level Formalism*, arXiv:1103.3477 [hep-th]
- [51] J. J. M. Carrasco, H. Johansson: *Generic Multiloop Methods and Application to  $N=4$  Super-Yang-Mills*, arXiv:1003.3298 [hep-th]
- [52] Z. Bern, L. Dixon and D. A. Kosower: *On-Shell Methods in Perturbative QCD*, arXiv:0704.2798v2 [hep-ph]
- [53] C. F. Berger, D. Forde: *Multi-Parton Scattering Amplitudes via On-Shell Methods*, arXiv:0912.3534v2 [hep-ph]
- [54] R. K. Ellis, Z. Kunszt, K. Melnikov, G. Zanderighi: *One-loop calculations in quantum field theory: from Feynman diagrams to unitarity cuts*, arXiv:1105.4319v1 [hep-ph]
- [55] J. M. Maldacena: *The Large  $N$  Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, arXiv:hep-ph/9711200
- [56] M. Wolf, *A First Course on Twistors, Integrability and Gluon Scattering Amplitudes*, arXiv:1001.3871 [hep-th]
- [57] N. Arkani-Hamed, J. L. Bourjaily, F. Cachazo, S. Caron-Huot, J. Trnka: *The All-Loop Integrand For Scattering Amplitudes in Planar  $N=4$  SYM*, arXiv:1008.2958 [hep-th]
- [58] M. Bullimore, L. J. Mason, D. Skinner: *Twistor-Strings, Grassmannians and Leading Singularities*, arXiv:0912.0539 [hep-th]
- [59] N. Arkani-Hamed, J. L. Bourjaily, F. Cachazo, A. B. Goncharov, A. Postnikov, J. Trnka: *Scattering Amplitudes and the Positive Grassmannian*, arXiv:0912.0539 [hep-th]