



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ  
ΑΘΗΝΑ, 2014

## Σχετικιστική Μαγνητοϋδροδυναμική σε Χωρόχρονο Μελανής Οπής Kerr: Εφαρμογή σε Αστροφυσικές Εκροές

Καράμπελας Κωνσταντίνος

Karampelas Konstantinos

A.M.: 201122

E-mail: [kkarampelas@phys.uoa.gr](mailto:kkarampelas@phys.uoa.gr)

Μ.Δ.Ε.: Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής

Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής Νεκτάριος Βλαχάκης

Μέλος Τριμελούς (Α): Καθηγητής Κανάρης Τσίγγανος

Μέλος Τριμελούς (Β): Επίκουρος Καθηγητής Θεοχάρης Αποστολάτος

# Σχετικιστική Μαγνητοϋδροδυναμική σε Χωρόχρονο Μελανής Οπής Kerr: Εφαρμογή σε Αστροφυσικές Εκροές

## 1 Περίληψη

Στην παρούσα εργασία, μελετάμε τη φυσική αστροφυσικών εκροών σε περιβάλλον γεωμετρίας Kerr. Στο πρώτο μέρος της εργασίας, γίνεται μια παρουσίαση του φορμαλισμού  $3 + 1$  και της χρησιμότητάς του στην αστροφυσική. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω φορμαλισμό, εξάγουμε τις εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής σε χώροχρονο Kerr, απ' όπου και υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ολοκληρώματα για αξισυμμετρικές, μαγνητισμένες ροές, δουλεύοντας πάντα στην στατική περίπτωση. Το δεύτερο μέρος της εργασίας αναφέρεται σε μια εφαρμογή των προηγούμενων ολοκληρωμάτων πάνω σε αστροφυσικές εκροές, με στόχο να δείξουμε τις δυνατότητές τους. Συγκεκριμένα λύνουμε την εξίσωση ορμής κατά μήκος της ροής, υποθέτοντας διάφορες μορφές στη γεωμετρία του μαγνητικού δυναμικού και κατ' επέκταση στη μορφή της γενικευμένης "bunching function"  $S_r = h_\phi B_p / A$ , όπου  $h_\phi$  είναι ένα στοιχείο μήκους της μετρικής Kerr στη  $\phi$  διεύθυνση,  $B_p$  το πολοειδές μαγνητικό πεδίο και  $A$  το «βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό» ή αλλιώς η συνάρτηση ροής. Μελετάμε επίσης τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης  $S_r$  και πώς τα τελευταία επηρεάζουν τον ασυμπτωτικό παράγοντα Lorentz  $\gamma_\infty$  και την απόδοση της επιτάχυνσης  $\gamma_\infty / \mu$ , όπου  $\mu$  είναι ο λόγος της ροής ενέργειας ανά ροή μάζας, ισοδύναμος με τον μέγιστο δυνατό  $\gamma_\infty$  της ροής. Φυσικά, συγκρίνουμε και με την περίπτωση της ειδικής σχετικότητας για να εντοπίσουμε τυχόν διαφορές. Τέλος, μελετάμε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων μας, αντικαθιστώντας τα στην εξίσωση ορμής κάθετα στην ροή, στη λεγόμενη transfield διεύθυνση. Αυτό το βήμα παίζει μικρό σχετικά ρόλο στην παρούσα εργασία, ωστόσο αποτελεί μια καλή μέθοδο κατανόησης των χαρακτηριστικών μια ακριβούς λύσης του προβλήματος.

## 2 Summary (in english)

In the current work, we study the physics of astrophysical outflows in Kerr spacetime. At the first part of this work, the "3 + 1" formalism is introduced, alongside its value for astrophysics. Using the stated formalism, we derive the equations of magnetohydrodynamics in Kerr spacetime and the corresponding integrals for axisymmetric, magnetized, time stationary flows. The second part of our work is about using the former integrals for astrophysical outflows, presenting their effectiveness. More specifically, we solve the momentum equation along the flow, taking various forms of the magnetic field geometry and by extension, various forms of the "bunching function"  $S_r = h_\phi B_p / A$ , where  $h_\phi$  is the line element for the Kerr metric in the azimuthal direction,  $B_p$  is the poloidal magnetic field and  $A$  the "scalar magnetic field" a.k.a. the flux function. We study the function  $S_r$  and how it affects the asymptotical Lorentz factor  $\gamma_\infty$  and the acceleration efficiency  $\gamma_\infty / \mu$ , where  $\mu$  is the ratio of the energy flux to mass flux, which is equal to the maximum  $\gamma_\infty$  of the flow. Of course, comparison is made between the above and the special relativistic case. Finally, we test the validity of our results by substituting them to the momentum equation across the flow in the transfield direction. The latter is only a small part of this work, but it gives us insight about the form of a proper solution to the full problem.

**Λέξεις Κλειδιά:** GRMHD, Jets, 3 + 1-formalism, Πίδακες

### 3 Εισαγωγή

Όπως είναι γνωστό σε κάθε ερευνητή και φοιτητή που ασχολείται με την αστροφυσική πάνω από το 95 % της ύλης του ορατού Σύμπαντος αποτελείται από πλάσμα. Εμφανίζεται στο εσωτερικό και στις ατμόσφαιρες αστέρων, στους αστρικούς όπως είναι ο Ήλιος μας, στις ατμόσφαιρες των περισσότερων πλανητών, την ανώτερη ατμόσφαιρα, ιονόσφαιρα και μαγνητόσφαιρα της Γης, όπου ο παρατηρούμενος ιονισμός οφείλεται διέλευση κοσμικής ακτινοβολίας μέσω (από τον Ήλιο ή το μεσοαστρικό χώρο) αλλά και υψηλών ενεργειών (από το μεσογαλαξιακό χώρο κυρίως). Πλάσμα συναντάται επίσης στις ατμόσφαιρες των pulsars, σε δίσκους προσαύξησης γύρω από νεαρά άστρα ή και μελανές οπές, σε jets γύρω από γαλαξιακούς πυρήνες και αλλού. Παρακάτω βλέπουμε δύο εικόνες που μας δείχνουν την ύπαρξη του πλάσματος σε δύο πολύ διαφορετικά περιβάλλοντα. Στην εικόνα 1 έχουμε μια ηλιακή προεξοχή, όπως παρατηρήθηκε από το SDO στο υπεριώδες στις 31 Δεκεμβρίου 2012. Το φαινόμενο κράτησε τέσσερις ώρες και η μεγαλύτερη ποσότητα του πλάσματος ξαναέπεσε στον Ήλιο. Το μήκος της προεξοχής αυτής είναι περίπου 20 φορές μεγαλύτερο από τη διάμετρο της γης. Το ενδιαφέρον σε αυτήν την εικόνα είναι και οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου που μπορούμε δούμε να διαγράφονται από το πλάσμα που κινείται κατά μήκος τους. Τέλος, στην εικόνα 2 έχουμε μια πολύ διδακτική σύγκριση



Figure 1: Εικόνα μιας προεξοχής του Ήλιου που παρατηρήθηκε στις 31 Δεκεμβρίου 2012. Παρατηρούμε το πως διαγράφονται από το πλάσμα οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές. Πηγή: <http://sdo.gsfc.nasa.gov/gallery/main/item/176>

μεταξύ του φεγγαριού και των radio jets του Centaurus A. Τα Cen A radio jets δεν έχουν μόνο μήκος άνω του ενός εκατομμυρίου ετών φωτός, αλλά καλύπτουν στον νυχτερινό ουρανό μια έκταση 200 φορές μεγαλύτερη της πανσελήνου. Αυτά τα jets, που τα παρατηρούμε στο ράδιο μέσω ακτινοβολίας σύγχροντρον, εκκινούν από την γαλαξιακή μελανή οπή που βρίσκεται στο κέντρο του ενεργού γαλαξία Cen A. Οι αναλογίες στην εικόνα είναι πραγματικές και να σημειώσουμε ότι στο φόντο δεν βλέπουμε τον ουρανό στο οπτικό αλλά στο ράδιο.

Ένας πολύ απλός και εύχρηστος τρόπος για να περιγράψουμε την φυσική των αστροφυσικών μαγνητισμένων πλασμάτων είναι μέσω των εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής (εν συντομία ΜΥΔ) ή magnetohydrodynamics (MHD) στα αγγλικά. Μέσω της ΜΥΔ μπορούμε να μελετήσουμε τη μακροσκοπική συμπεριφορά του πλάσματος χωρίς να ασχολούμαστε με τη φυσική των επιμέρους πληθυσμών που το αποτελούν. Εξαιτίας αυτής της σύμβασης, δεν μπορούμε να μελετήσουμε φαινόμενα που άπτονται της στατιστικής φυσικής (όπως για παράδειγμα τη φυσική των μαγνητικών επανασυνδέσεων ή τα κβαντομηχανικά φαινόμενα στην πυρηνική σύντηξη). Όση ακρίβεια όμως χάνουμε, αναπληρώνεται από την αυξημένη ταχύτητα των αριθμητικών υπολογισμών μας, καθώς και από την αδιαμφισβήτητη ευκολία που μας παρέχει στις αναλυτικές δουλειές.



Figure 2: Σύγκριση της προβολής της Σελήνης και των ραδιο-λοβών του γαλαξία Cen A στον νυκτερινό ουρανό, όπως θα φαινόταν στα ραδιοκύματα. Βλέπουμε επίσης τα ραδιοτηλεσκόπια από το Australian Telescope Compact Array (ATCA) στο Narrabri, NSW, στην Αυστραλία. Πηγή: <http://apod.nasa.gov/apod/ap110413.html>

Κοινό τόπο στην αστροφυσική πλάσματος και στην αστροφυσική υψηλών ενεργειών, αποτελούν ορισμένα πεδία έρευνας, όπως είναι οι ενεργοί γαλαξιακοί πυρήνες (active galactic nuclei ή AGNs), οι ατμόσφαιρες των pulsars και των μελανών οπών, όπως επίσης και οι εκλάμψεις γάμμα ακτινοβολίας (Gamma Ray Bursts ή GRBs). Αν στρέψουμε την προσοχή μας σε πιο χαμηλές ενέργειες, τότε τα X-Ray binaries και οι πρωτοαστέρες παρουσιάζουν αντίστοιχους μηχανισμούς με τα προηγούμενα με παρόμοιες δυσκολίες στην μελέτη τους. Δίσκοι προσαύξησης, εστιασμένες (jets) και μη (άνεμοι) εκροές, φαίνονται να βρίσκονται στην ημερήσια διάταξη, τις περισσότερες φορές μαζί με τη χρήση της σχετικότητας. Ειδικά οι εστιασμένες εκροές, είναι από τα πιο εντυπωσιακά φαινόμενα στην αστροφυσική και μάλιστα παρατηρούνται σε διάφορες κλίμακες. Μπορούμε σαν παράδειγμα να αναφέρουμε τα μη σχετικιστικά jets από πρωτοαστέρες τύπου T-Tauri, εκροές από microquasars, τα σχετικιστικά jets στους ραδιογαλαξίες και στα quasars, όπως και τις ακραία σχετικιστικές εκροές των εκλάμψεων γ ακτινοβολίας. Υπό διαφορετικές συνθήκες, η μελέτη του κάθε φαινομένου θα ήταν εξαντλητική και αποκομμένη από την μελέτη των υπολοίπων. Ευτυχώς όμως δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο. Είμαστε τυχεροί για δύο λόγους:

1. Τα jets έχουν αντίστοιχη μορφή σε όλες τις περιπτώσεις και σε όλες τις κλίμακες, έχουν δηλαδή αυτοομοιότητα σε όλες τις κλίμακες, οπότε η μελέτη τους μπορεί να βασιστεί σε self-similar μοντέλα. Αν μελετήσουμε τη δομή ενός, θα έχουμε συμπεράσματα και για όλα τα υπόλοιπα. Επίσης την αυτοομοιότητα μπορούμε να την εκμεταλευτούμε για την κατασκευή αναλυτικών ΜΥΔ λύσεων για εκροές (Vlahakis & Tsinganos 1998).
2. Όλοι οι μηχανισμοί που δημιουργούν πίδακες στα παραπάνω περιβάλλοντα αναφέρονται σε μια μηχανή που δημιουργεί την εστιασμένη εκροή, μέσω της πρόσπτωσης ύλης προς το κεντρικό αντικείμενο. Το μαγνητικό πεδίο περιστρέφεται λόγω του μαγνητισμένου δίσκου, ή της μαγνητόσφαιρας του κεντρικού αντικειμένου, μεταφέροντας στο περιβάλλον πλάσμα στροφορμή και ενέργεια, επιταχύνοντάς το. Συγκεκριμένα παραδείγματα βρίσκουμε στις δουλειές των Blandford & Payne 1982 για την μαγνητοπεριστροφική επιτάχυνση και του Contopoulos J. 1995 για την μαγνητική πίεση του ελικοειδούς μαγνητικού πεδίου ("spring pressure" ή "the astrophysical plasma gun").

Ακολουθώντας την παραπάνω παρατήρηση, η μελέτη των ραδιογαλαξιών, των blazars, των BL-Lac αντικειμένων, των quasars και γενικότερα όλων των περιπτώσεων ενεργών γαλαξιών, ανάγεται συχνά

στη μελέτη και κατανόηση των αντίστοιχων ενεργών γαλαξιακών πυρήνων τους. Το τυπικό μοντέλο ενός AGN περιλαμβάνει μια κεντρική υπερμεγέθη μελανή οπή,  $10^5$  με  $10^9$  Ηλιακών μαζών, με έναν δίσκο προσαύξησης γύρω της, ένα «τόρο» σκόνης να περικλείει το δίσκο και να τον τροφοδοτεί υλικό, ένα πίδακα στο ένα, ή και στα δύο «ημισφαίρια», πάνω και κάτω από το επίπεδο του δίσκου και τέλος διάφορα νέφη αερίων και σκόνης σε μια κάποια απόσταση από την μελανή οπή. Οι διαφορετικές γωνίες παρατήρησης, αλλά και η ύπαρξη ή όχι jet, καθορίζει έως ένα βαθμό το τι θα δούμε. Αν δηλαδή θα παρατηρήσουμε ένα ραδιο-ήσυχο ή ραδιο-ενεργό γαλαξία, έναν quasar ή ένα BL-Lac αντικείμενο. Αντίστοιχο μοντέλο σε μικρογραφία, ισχύει και στα X-Ray Binaries, με το συνοδό αστέρι να παίζει το ρόλο του «τόρου» και τη μαύρη τρύπα να είναι αστρικής τάξης (μάζας έως μερικών μόνο ηλιακών μαζών), αλλά και στα GRBs, όπου το μοντέλο του collapsar για τα long GRBs προβλέπει τη δημιουργία μιας μελανής οπής με τον περιβάλλοντα δίσκο στο εσωτερικό του πυρήνα ενός μαζικού αστέρα τύπου Wolf-Rayet.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω φαινόμενα, δεν μπορούμε παρά να προσέξουμε το πόσο συχνά εμφανίζεται ο συνδυασμός μελανών οπών και μαγνητικών πεδίων στα συστήματα που μελετάμε. Πράγματι, οι σχετικιστικές ταχύτητες στις οποίες επιταχύνεται η ύλη, αλλά και η φύση της ακτινοβολίας που πολλές φορές κάνουμε τις παρατηρήσεις μας, υποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού μαγνητικού πεδίου στην περιοχή του δίσκου προσαύξησης και της μελανής οπής. Υπάρχουν αρκετές ιδέες σχετικά με το πως μπορεί να συνδεθεί το μαγνητικό πεδίο με την περιστροφή της μελανής οπής, που εξετάζουν το ίδιο πρόβλημα από ελαφρώς διαφορετική σκοπιά. Η αρχή έγινε από τους Blandford & Znajek το 1977, όταν αυτοί, πρώτοι, χρησιμοποίησαν την Γ.Θ.Σ. για να περιγράψουν την ηλεκτρομαγνητική εξαγωγή ενέργειας και στροφορμής από μελανή οπή τύπου Kerr, απουσία εξωτερικών δυνάμεων. Ουσιαστικά η εργασία τους αυτή γενικεύει την προηγούμενη δουλειά των Goldreich και Julian του 1969, πάνω στην μαγνητόσφαιρα ενός pulsar, και αποτέλεσε το έναυσμα για τις επόμενες δουλειές. Η εργασία των Blandford & Znajek ουσιαστικά περιγράφει την ηλεκτρομαγνητική απαγωγή στροφορμής και ενέργειας από την μελανή οπή, καθώς και την ύπαρξη του ελικοειδούς μαγνητικού πεδίου στα jets. Το γεγονός όμως ότι δούλεψαν στην force free περίπτωση, δημιουργεί προβλήματα στην επιτάχυνση του πλάσματος από το μαγνητικό πεδίο. Επίσης πολλοί αμφισβήτησαν το μοντέλο τους που ήθελε το μαγνητικό πεδίο να διασχίζει τον ορίζοντα γεγονότων και να «κλείνει» εντός την μελανής οπής. Η σκέψη των Blandford & Znajek ήταν να ότι με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσαν να περιστρέψουν το μαγνητικό πεδίο, με αποτέλεσμα την απαγωγή ηλεκτρομαγνητικής στροφορμής και ενέργεια από την οπή. Ωστόσο, δουλειές όπως των Punsly & Coroniti 1990 έδειξαν ότι αρκεί το μαγνητικό πεδίο να περιστραφεί εξαιτίας του φαινομένου της παράσυρσης των αδρανειακών συστημάτων (frame dragging) στην περιοχή της εργόσφαιρας της μελανής οπής. Η δουλειά των Thorne & MacDonald 1982, που εισάγει μεταξύ άλλων και τον φορμαλισμό  $3 + 1$ , για τον οποίο θα μιλήσουμε παρακάτω, καταπιάνεται με αντίστοιχα προβλήματα αιτιότητας των συνοριακών τιμών που προέκυψαν από τη δουλειά των Blandford & Znajek. Συγκεκριμένα, για να λύσουν το πρόβλημα τοποθέτησης συνοριακών συνθηκών πάνω ακριβώς στον ορίζοντα, εισηγήθηκαν, μαζί με τον Price το 1986, την χρήση του λεγόμενου "membrane paradigm". Το τελευταίο, αποτελεί ένα μοντέλο που προσομοιάζει την μελανή οπή με μια μεμβράνη, χωρικά τοποθετημένη οριακά πάνω στον ορίζοντα γεγονότων. Όλες οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες της οπής αυτής μπορούν να οριοθετηθούν πάνω σε αυτήν την «μεμβράνη».

Άλλο ένα σημαντικό πρόβλημα που προκύπτει με την χρήση της μελανής οπής ως μαγνητισμένου αγωγού για την λειτουργία της «μηχανής» μας, είναι η ίδια η ύπαρξη του μαγνητικού πεδίου στο σύστημα. Ο Wald (1974) βρήκε την ακριβή στάσιμη λύση στο κενό για περιστρεφόμενη μελανή οπή, εντός ομοιόμορφου-στο-άπειρο μαγνητικού πεδίου, παράλληλο με τον άξονα περιστροφής της οπής. Το 1975, οι King, Lasota & Kundt απέδειξαν ότι αυτή η λύση δίνει μηδενική μαγνητική ροή διαμέσου του ορίζοντα, για οπή μεγίστης στροφορμής  $a = 1 M$ . Με άλλα λόγια, μια περιστρεφόμενη μελανή οπή μεγίστης στροφορμής, το μαγνητικό πεδίο αποβάλλεται από τον ορίζοντα. Αυτό είναι το λεγόμενο «φαινόμενο Meissner στην ηλεκτροδυναμική μελανών οπών»<sup>1</sup>. Παρόλα αυτά, το συγκεκριμένο φαινόμενο δεν παρατηρείται στις προσομοιώσεις παρά μόνο στην περίπτωση που το  $a$  τείνει στην μονάδα. Επιπλέον προσομοιώσεις στην εργασία των Komissarov & McKinney το 2007 έδειξαν ότι ενώ το φαινόμενο όντως παρατηρείται για μελανή οπή στο κενό για  $a \rightarrow 1$ , η ύπαρξη πλάσματος στον περιβάλλοντα χώρο αρκεί για να επαναφέρει το πεδίο εντός του ορίζοντα (ή έστω οριακά πάνω

<sup>1</sup> Το κανονικό φαινόμενο Meissner αναφέρεται στην αποβολή μαγνητικού πεδίου από υπεραγωγούς. Πρόκειται για μια αναλογία, γι' αυτό και χρησιμοποιήθηκε το όνομα του αρχικού φαινομένου.

του) μέσω του φαινομένου της προσαύξεσης (βλέπε Komissarov & McKinney 2007, Figure 1).

Τέλος στο ερώτημα του πως μπορεί να βρεθεί κατάλληλης γεωμετρίας μαγνητικό πεδίο στην γειτονιά μιας μελανής οπής, μια απάντηση δίνει ο Punsly B. σε εργασία του το 1998, όπου και περιγράφεται το μοντέλο μια μελανής οπής τύπου Kerr-Newmann. Το μοντέλο που προτείνει είναι μια ηλεκτρικά φορτισμένη μελανή οπή που περιστρέφεται παρουσία δίσκου και δημιουργεί ένα διπολικό μαγνητικό πεδίο του οποίου οι δυναμικές γραμμές κοντά στις πολικές περιοχές ανοίγουν. Η μηχανή αυτή είναι ικανή να επιταχύνει πλάσμα κατά μήκος των ανοικτών γραμμών, σε μια κάποια αναλογία με την περίπτωση των pulsars. Σε μια αντίστοιχη ιδέα στηρίζεται το μοντέλο για long GRBs που περιγράφεται στην εργασία των Contopoulos, Nathanael & Pugliese 2013. Η βασική ιδέα είναι ότι κατά την βαρυτική κατάρρευση του υπερ-μαζικού αστέρα, το μαγνητισμένο πλάσμα του συμπυκνώνεται σε έναν αστέρα νετρονίων ο οποίος στην συνέχεια καταρρέει σε μια μαγνητισμένη και ηλεκτρικά φορτισμένη μελανή οπή τύπου Kerr-Newmann. Το μοντέλο αυτό θέλει την φορτισμένη μελανή να περνάει από δύο φάσεις:

1. Κατά την πρώτη φάση, η μελανή οπή συμπεριφέρεται σύμφωνα με το μοντέλο των Blandford & Znajek, χάνοντας στροφορμή, με το περιβάλλον πλάσμα να συγκρατεί το αρχικό μαγνητικό πεδίο στην μελανή οπή.
2. Κατά την δεύτερη φάση, που αντιστοιχεί στο λεγόμενο afterglow μιας έκλαμψης ακτινοβολίας Γάμμα, το περιβάλλον υλικό έχει πλέον διαλυθεί και η φορτισμένη μελανή οπή τύπου Kerr-Newmann, δημιουργεί πεδίο λόγω της περιστροφής της.

Μια άλλη ιδέα, που βασίζεται στα παραπάνω, χωρίς να χρειάζεται ιδιαίτερα πολύπλοκη φυσική και ζητήματα αιτιότητας, είναι η πλήρης μαγνητοϋδροδυναμική θεώρηση, μέσω του δίσκου. Μια τέτοια εικόνα συναντάμε στην εργασία των Punsly & Coroniti 1990. Αν έχουμε ένα μαγνητισμένο δίσκο που παρουσιάζει προσπίπτουσα ροή προς την μελανή οπή, τότε η τελευταία μπορεί να παρασύρει το μαγνητικό πεδίο πολύ κοντά στην μελανή οπή (εντός της εργόσφαιρας πάντοτε) οπότε, εκμεταλλευόμενοι τόσο την περιστροφή του πλάσματος, όσο και του frame dragging, να μπορούμε να δημιουργήσουμε τον πίδακα. Εξάλλου, αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως είναι να δικαιολογήσουμε την ύπαρξη σχετικιστικών εκροών με πολύ μεγάλους παράγοντες Lorentz. .

Άλλες ενδεικτικές δουλειές, υπολογιστικές και αναλυτικές πάνω στο ίδιο θέμα, αλλά και βιβλία που πραγματεύονται τα φαινόμενα αυτά βλέπουμε στα συνεχίστηκαν τα νεότερα χρόνια από τον Komissarov (S. S. Komissarov 2009, 2011). Δουλειές, τόσο στην force free, όσο και στην πλήρη MHD περίπτωση αναφέρει και ο Punsly στο βιβλίο του "Black Hole Gravitohydrodynamics", 2008. Προσομοιώσεις πάνω στις εκροές από μελανές οπές τύπου Schwarzschild έχουμε και στο άρθρο των Meliani et al. 2006. Σημαντική δουλειά επίσης πάνω σε προσπίπτουσες ροές σε μελανές οπές έχουμε από τους Takahashi et al 1990. Τέλος εργασίες πάνω στην μελέτη της εξίσωσης ορμής στην tranfield διεύθυνση, δηλαδή κάθετα στις μαγνητικές δυναμικές γραμμές στο πολυιδές επίπεδο (περισσότερα στην ενότητα 3.4), έχει κάνει ο Beksin, στο βιβλίο του οποίου "MHD Flows in Compact Astrophysical Objects - Accretion, Winds and Jets", 2010 βλέπουμε πληθώρα εφαρμογών πάνω στην GRMHD σε χωρόχρονο Kerr.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το μαγνητισμένο πλάσμα, συμμετέχει σε πολλά, αλλά και είναι υπεύθυνο για πολλά φαινόμενα που παρατηρούμε στο σύμπαν, η κατανόησή του ωστόσο δεν είναι ακόμη πλήρης. Και δεν μιλάμε τόσο για τη φύση του μαγνητισμένου πλάσματος, όσο για τους μηχανισμούς στους οποίους εμπλέκεται και την αναλυτική περιγραφή της φυσικής των διαδικασιών που λαμβάνουν χώρα. Δυστυχώς δεν μπορούμε να μελετήσουμε αναλυτικά πέρα από μερικές περιπτώσεις προβλημάτων, όπου κάνουμε πολλές υποθέσεις, όπως για την ύπαρξη κάποιας συμμετρίας, για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα. Στις μέρες μας, όπου η ραγδαία εξάπλωση των υπολογιστών και η ενίσχυση των δυνατοτήτων τους, κατέστησε τις αριθμητικές προσομοιώσεις ως την κύρια μέθοδο μελέτης των φαινομένων, ολοένα και περισσότεροι καταπιάνονται με αυτές, φάχγοντας «πραγματικές» πλήρεις λύσεις των εκάστοτε προβλημάτων τους. Φυσικά δεν έχουν σταματήσει να γίνονται αναλυτικές δουλειές, απλώς σήμερα είναι συνήθης πρακτική η αναλυτική μελέτη επιμέρους σημείων με εφαρμογή των όσων ανακαλύπτουμε στις προσομοιώσεις, που με τη σειρά τους λύνουν το πλήρες πρόβλημα, ή απλά κάνουν πολύ πιο γρήγορα το υπολογιστικό κομμάτι που είναι απαραίτητο σε κάθε επιστημονική μελέτη.

Στην παρούσα εργασία, θα μελετήσουμε στάσιμες και αξισυμμετρικές μαγνητισμένες εκροές σε περιβάλλον γεωμετρίας Kerr. Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε στο πρώτο μέρος την διαδικασία εξαγωγής των απαραίτητων ολοκληρωμάτων, έχοντας ως βάση μας την μετρική Kerr. Εν συνεχεία θα

προχωρήσουμε, στο δεύτερο μέρος, με την μελέτη της εξίσωσης ορμής κατά μήκος της ροής και την απόδοση της μαγνητικής επιτάχυνσης, γενικεύοντας έτσι τα συμπεράσματα εργασιών όπως του Fendt & Oyed 2004, Vlahakis 2004 (1) & (2), Vlahakis & Königl 2003 κ.α..

## 4 Φορμαλισμός 3+1

Ξεκινάμε την ανάλυσή μας με μια σύντομη παρουσίαση του φορμαλισμού 3+1. Ουσιαστικά πρόκειται για μια διαφορετική θέαση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, όπου ο τετραδιάστατος χωρόχρονος χωρίζεται σε «τομείς» τρισδιάστατου χώρου (υπερεπιφάνειες), κάθετες στην τετραταχύτητα του παρατηρητή (βλέπε εικόνα 3). Χονδρικά, αποτελεί έναν τρόπο για να χωρίσουμε το χωρόχρονο σε «χώρο» και «χρόνο» και να χειριζόμαστε χρονομεταβλητά τανυστικά πεδία στο συνήθη τρισδιάστατο χώρο. Ο χωρισμός αυτός εξαρτάται στενά από το σύστημα συντεταγμένων που επιλέγουμε, κάτι που περιορίζει τις δυνατότητες του φορμαλισμού αυτού σε «ημι-κλασικές» περιοχές, όπου η εμπειρία και η διαίσθησή μας, μας επιτρέπει να επιλέξουμε έναν παρατηρητή και να γράψουμε τις εξισώσεις μας στο σύστημά του. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να κάνουμε κοσμολογικές μελέτες με αυτόν τον τρόπο, λόγω της αδυναμίας να διαλέξουμε έναν προνομιακό παρατηρητή, μπορούμε όμως να μελετήσουμε πολύ εύκολα την κίνηση μαζών γύρω από μια μελανή οπή σε ισορροπία, π.χ. σε μια γεωμετρία Schwartzschild.

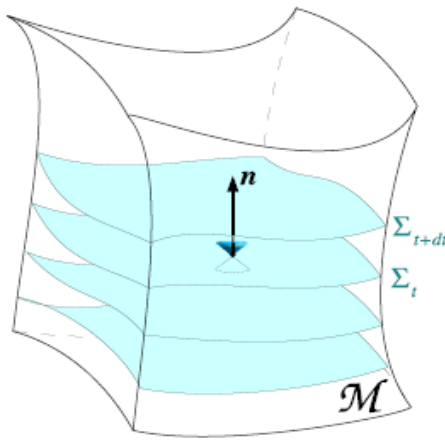


Figure 3: Σχηματική αναπαράσταση του χωρισμού του τετραδιάστατου χωροχρόνου  $\mathcal{M}$  σε «χωρικές» τρισδιάστατες υπερεπιφάνειες  $\Sigma_t$  κάθετες στην τετραταχύτητα  $\bar{n}$  του παρατηρητή. Πηγή:ourgoulhon Eric, 2007, "3 + 1 Formalism and Bases of Numerical Relativity"

**Χρησιμότητα** Η ευχρηστία τώρα της μεθόδου αυτής, έχει να κάνει με την έλλειψη εξοικείωσης που έχουν πολλοί αστροφυσικοί με τα μαθηματικά και το φορμαλισμό της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Οι θεωρητικοί της σχετικότητας μελετούν τη φυσική με γεωμετρικούς όρους, κινούμενοι μέσα σε έναν δυναμικό τετραδιάστατο χωρόχρονο, εναλλασσόμενοι ελεύθερα ανάμεσα σε αδρανειακούς παρατηρητές που τους διευκολύνουν. Αυτή η οπτική, είναι απαραίτητη για τη μελέτη δυναμικών χωροχρόνων, όπως εξελισσόμενες μελανές οπές ή τα κοσμολογικά μοντέλα. Αντίθετα, οι υπόλοιποι αστροφυσικοί, αντιλαμβάνονται το σύμπαν μέσα από τη Νευτώνεια θεώρηση του επίπεδου χώρου, αυτήν ενός σταθερού και απόλυτου τρισδιάστατου χώρου, όπου τα γεγονότα εξελίσσονται με την πάροδο του παγκόσμιου χρόνου. Οι περισσότεροι από εμάς αισθανόμαστε άβολα με τον καμπύλο χωρόχρονο, ακόμη και όταν μελετούν οικεία θέματα. Η διαίσθησή μας είναι αρκετή για τα περισσότερα φαινόμενα όπου το σωστό αποτέλεσμα βγαίνει με μερικές σχετικιστικές διορθώσεις. Ο φορμαλισμός 3 + 1, δίνει στους αστροφυσικούς ένα εργαλείο, ώστε να μελετάνε με όλες τις σχετικιστικές διορθώσεις, φαινόμενα που δεν ξεφεύγουν από τη διαισθητική μας εικόνα για το σύμπαν.



## 4.1 Εφαρμογή στη μετρική Kerr

Στα παρακάτω, θα ακολουθήσουμε τα δύο άρθρα των Thorne και Macdonald 1982 και Macdonald και Thorne 1982 πάνω στον φορμαλισμό 3 + 1. Ιδιαίτερα χρήσιμες επίσης θα φανούν οι σημειώσεις των διαλέξεων του Éricourgoulhon 2007, πάνω στον φορμαλισμό 3 + 1.

**Σημείωση** Τα τετραδιάστατα διανύσματα και ταυιστές θα τα συμβολίζουμε, όπου χρειαστεί με  $\vec{A}$  και  $\vec{M}$  ή με δείκτες  $A^\alpha$  και  $M^{\alpha\beta}$  αντίστοιχα. Τα τριδιάστατα, «χωρικά» διανύσματα και ταυιστές θα τα συμβολίζουμε με αντίστοιχα με  $\vec{A}$  και  $\mathbf{M}$  ή με δείκτες τα  $A^i$  και  $M^{ij}$ . Συμβολίζουμε την απόκλιση  $\nabla \cdot \vec{A}$  και τον στροβιλισμό  $\nabla \times \vec{A}$  ενός διανύσματος  $\vec{A}$  και την κλίση  $\nabla\Phi$  ενός βαθμωτού, τα οποία και ορίζουμε ακριβώς όπως στην τριδιάστατη περίπτωση, με την χρήση των στοιχείων μήκους από τη μετρική. Ουσιαστικά ορίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο

$$d_{;\nu}^\beta = d_{,\nu}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta d^\mu, \quad (1)$$

και στις τρεις διαστάσεις, καταλήγουμε στους γνωστούς τύπους για την κλίση, την απόκλιση και τον στροβιλισμό μετά από τετριμμένες πράξεις.

Η μετρική Kerr σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist δίνεται παρακάτω:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - \alpha^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{4GMa r}{\Sigma c^2} \sin^2 \theta d\phi dt \Rightarrow \quad (2)$$

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 + 2g_{\phi t} d\phi dt \quad (3)$$

όπου τα

$$\Sigma = r^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2GM r/c^2 + \alpha^2 \quad (4)$$

$$A = (r^2 + \alpha^2)^2 - \alpha^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (5)$$

Παρατηρούμε ότι για  $r \rightarrow \infty$  η παραπάνω μετρική παίρνει τη μορφή αυτής επίπεδου χώρου σε σφαιρικές συντεταγμένες, ενώ για  $\alpha = 0$  μετατρέπεται σε μετρική Schwarzschild. Γράφοντας την πιο γενική μορφή μιας στάσιμης αξισυμμετρικής μετρικής, και εφαρμόζοντας για την περίπτωσή μας, έχουμε:

$$ds^2 = -h^2 c^2 dt^2 + g_{\phi\phi} (d\phi - \omega dt)^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 \quad (6)$$

όπου  $h = \sqrt{\Sigma\Delta/A}$  είναι η λεγόμενη lapse function,  $\alpha = cJ/(GM)$  η γωνιακή στροφορμή ανά μονάδα μάζας και  $\omega = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi} = 2\alpha GM r/(cA)$  είναι το αποτέλεσμα του frame dragging στο χωρόχρονο γύρω από περιστρεφόμενη μελανή οπή. Το χωρικό κομμάτι της μετρικής που χρησιμοποιούμε στο φορμαλισμό 3+1 είναι:

$$ds^2 = \zeta_{ij} dx^i dx^j = \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (7)$$

με τα αντίστοιχα στοιχεία μήκους της «τριδιάστατης» μετρικής:

$$h_1 = h_r = \sqrt{g_{rr}} = \sqrt{\zeta_{rr}} \quad (8)$$

$$h_2 = h_\theta = \sqrt{g_{\theta\theta}} = \sqrt{\zeta_{\theta\theta}} \quad (9)$$

$$h_3 = h_\phi = \sqrt{g_{\phi\phi}} = \sqrt{\zeta_{\phi\phi}} \quad (10)$$

Από τη στιγμή που χωρίσαμε τη μετρική σε «χρονικό» και «χωρικό» μέρος, μπορούμε να δουλέψουμε στα πλαίσια του φορμαλισμού 3 + 1, με εξισώσεις αναλόγου μορφής με τις γνωστές από το «νευτώνειο» όριο.

Καταρχάς θα ορίσουμε τους προνομιακούς παρατηρητές, στους οποίους θα στηρίξουμε τον φορμαλισμό μας. Για την περίπτωση της γεωμετρίας Kerr, αυτοί θα είναι οι «παρατηρητές μηδενικής στροφορμής», δηλαδή "Zero-Angular-Momentum-Observers" ή εν συντομία ZAMOs. Στον «απόλυτο» χώρο που θα κινηθούμε, οι νόμοι της φύσης εκφράζονται με όρους και μεγέθη που μετράνε οι ZAMOs. Για

παράδειγμα, ένα σωματίδιο φορτίου  $q$  και ταχύτητας  $\vec{v}$ , όπως μετρώνται από τους ZAMOs, κινούμενο σε μέσα σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  αντίστοιχα, όπως μετρώνται από τους ZAMOs, θα αισθανθεί δύναμη Lorentz  $q[\vec{E} + (\vec{v}/c) \times \vec{B}]$ .

Πρέπει να τονίσουμε ότι ο ZAMO **δεν** είναι αδρανειακός παρατηρητής. Για μη περιστρεφόμενη μελανή οπή, οι Zamos ηρεμούν σε σχέση με τον απόλυτο χώρο, σε **σταθερή απόσταση από την μαύρη τρύπα**. Είναι δηλαδή επιταχυνόμενη παρατηρητές. Αν η οπή περιστρέφεται, οι ZAMOs παρασύρονται σε κίνηση στη  $\hat{\phi}$ -διεύθυνση, με γωνιακή ταχύτητα:

$$(d\phi/dt)_{of\ ZAMO\ rest\ frame} = \omega = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi} = 2\alpha GMr/(cA) \quad (11)$$

Η αξονική συμμετρία του χώρου και η χρονική του στατικότητα, υποδηλώνει ότι η μετρική είναι ανεξάρτητη του χρόνου  $t$  και του  $\phi$ , ορίζονται δηλαδή δύο ανύσματα killing, τα  $\vec{k} = h\vec{n} + \vec{\beta}$  και  $\vec{m} = h_\phi^2 \nabla\phi$  αντίστοιχα, όπου το  $\vec{\beta} = \vec{\beta} = -\omega\vec{m}$  είναι το λεγόμενο διάνυσμα μετατόπισης (shift vector), και  $\vec{n}$  η τετραταχύτητα ενός ZAMO. Για την τετραταχύτητα ενός ZAMO ισχύει ότι:

$$n^\alpha = \frac{1}{h}(c, -\beta^i) \quad (12)$$

$$n_\alpha = (-hc, 0, 0, 0). \quad (13)$$

Οι κοσμικές γραμμές των ZAMOs είναι κάθετες στις υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου  $t$ , δηλαδή είναι κάθετες στον απόλυτο χώρο. Ένας ZAMO επομένως αντιλαμβάνεται το σύμπαν ως έναν τρισδιάστατο χώρο στον οποίο «κυλά» ο χρόνος. Η μεταβολή του ιδιοχρόνου (lapse of proper time)  $d\tau$  ενός ZAMO, συνδέεται με την μεταβολή του απόλυτου χρόνου  $dt$  μέσω του τύπου:

$$(d\tau/dt)_{of\ ZAMO\ rest\ frame} = h = \sqrt{\Sigma\Delta/A}, \quad (14)$$

εξ ου και ο όρος lapse function. Η σχέση ανάμεσα στην τετραταχύτητα ενός ZAMO, του διανύσματος μετατόπισης και του χρονικού διανύσματος (εδώ  $\partial_t$ ) φαίνεται γεωμετρικά στην εικόνα (4). Το σχήμα αυτό μας δείχνει ότι η τετραταχύτητα  $\vec{n}$  του ZAMO είναι κάθετη στις υπερεπιφάνειες σταθερού χρόνου, ο άξονας του χρόνου (εδώ με τη μορφή του χρονικού διανύσματος) είναι παράλληλος στις γραμμές σταθερών χωρικών συντεταγμένων και ότι η διαφορά των δύο μας δίνει το διάνυσμα μετατόπισης, που ουσιαστικά περιγράφει την μετατόπιση μεταξύ των υπερεπιφανειών, όπως την αντιλαμβάνεται ο ZAMO.

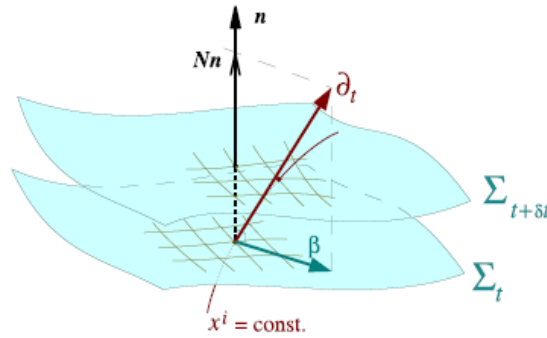


Figure 4: Σχηματική αναπαράσταση της τετραταχύτητας του ZAMO, του διανύσματος μετατόπισης και του «άξονα του χρόνου». Πηγή: Gourgoulhon Eric, 2007, "3 + 1 Formalism and Bases of Numerical Relativity"

Κάθε τετραδιάνυσμα ή τανυστής, κάθετα στην τετραταχύτητα των ZAMOs μπορεί να θεωρηθεί ως καθαρά «χωρικό», δηλαδή τρισδιάστατο. Ένα πολύ σημαντικό μέγεθος είναι η μετρική  $\gamma$  των επιφανειών σταθερού χρόνου, για την οποία ισχύει ότι

$$\zeta^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} n^\alpha n^\beta, \quad (15)$$

η οποία και προβάλλει τα τετραδιάστατα μεγέθη πάνω στις τρισδιάστατες επιφάνειες.  $g^{\alpha\beta}$  είναι η τετραδιάστατη μετρική. Οι ορίζουσες των δύο μετρικών συνδέονται με τον τύπο:

$$\sqrt{-g} = h\sqrt{\zeta} \quad (16)$$

Εισάγουμε τα παρακάτω μεγέθη για την περιγραφή των κοσμικών γραμμών των παρατηρητών:

- την διαστολή  $\theta = n_{;\alpha}^{\alpha}$
- την τετραεπιτάχυνση  $a^{\alpha} = n_{;\beta}^{\alpha} n^{\beta} \Rightarrow \vec{a} = c^2 \nabla \ln h$
- την διάτμηση  $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \zeta_{\alpha}^{\mu} \zeta_{\beta}^{\nu} (n_{\mu;\nu} + n_{\nu;\mu}) - \frac{1}{3} \theta \zeta_{\alpha\beta}$
- την περιστροφή  $\vec{\omega} = 0$ , που μηδενίζεται γιατί οι κοσμικές γραμμές των παρατηρητών είναι κάθετες στις υπερεπιφάνειες που μελετάμε.

Όλα τα παραπάνω μεγέθη είναι κάθετα στην τετρααχύτητα και γι αυτό είναι τρισδιάστατα. Επίσης η τετραεπιτάχυνση που πήραμε είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας που αισθάνονται οι ZAMOs. Ο ταυστής της διάτμησης είναι συμμετρικός και μηδενικού ίχνους. Μπορούμε επίσης να ορίσουμε τον ταυστή εξωτερικής καμπυλότητας

$$K_{\alpha\beta} = -(\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \theta \zeta_{\alpha\beta}) \quad (17)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις υπολογισουμε τον τύπο:

$$n_{\alpha;\beta} = -a_{\alpha} n_{\beta} - K_{\alpha\beta} \quad (18)$$

Ο ταυστής ενέργειας και ορμής γράφεται ως:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho_0 + \rho_0 \frac{e}{c^2} + \frac{P}{c^2}) u^{\alpha} u^{\beta} + P g^{\alpha\beta} + \frac{1}{4\pi} (F^{\alpha\nu} F_{\nu}^{\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\nu\mu} F_{\nu\mu}), \quad (19)$$

όπου

$$u^{\alpha} = \gamma(n^{\alpha} + v^{\alpha}) \quad (20)$$

η ταχύτητα του πλάσματος όπως την μετράει ένας παρατηρητής στο άπειρο,  $\vec{v}$  η ταχύτητα του πλάσματος όπως την μετράει ένας ZAMO και  $\Gamma$  ο παράγοντας Lorentz,  $e$  η εσωτερική ενέργεια ανά μάζα και  $\rho_0$  και  $P$  η πυκνότητα και η πίεση αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας της ταχύτητα στον τύπο του ταυστή ενέργειας και ορμής έχουμε στο σύστημα του ZAMO:

$$\tilde{T} = \frac{1}{c^2} \epsilon \bar{n} \otimes \bar{n} + \frac{\bar{n} \otimes \bar{S}}{c^2} + \tilde{t} \Rightarrow \quad (21)$$

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2} \epsilon n^{\alpha} n^{\beta} + \frac{n^{\alpha} S^{\beta} + n^{\beta} S^{\alpha}}{c^2} + t^{\alpha\beta} \quad (22)$$

με τα μεγέθη

$$\epsilon = \gamma^2 (\rho_0 c^2 + \rho_0 e + P \frac{v^2}{c^2}) + \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad (23)$$

$$\vec{S} = \gamma^2 (\rho_0 c^2 + \rho_0 e + P) \vec{v} + \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \gamma^2 \eta_0 w \vec{v} + \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad (24)$$

$$\mathbf{t} = \gamma^2 \frac{\eta_0 w}{c^2} \vec{v} \otimes \vec{v} + P \zeta + \mathbf{t}_{em} \quad (25)$$

$$\mathbf{t}_{em} = \frac{1}{4\pi} (-\vec{E} \otimes \vec{E} - \vec{B} \otimes \vec{B} + \frac{1}{2} \gamma (E^2 + B^2)). \quad (26)$$

όπου ως  $w = \xi m_p c^2$  ορίζουμε την ενθαλπία ανά σωματίδιο και όπου  $\xi c^2$  είναι η ειδική ενθαλπία που μετράνε οι ZAMOs:

$$\xi c^2 = c^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{P}{\rho_0} \quad (27)$$

Θα δουλέψουμε με την υπόθεση ιδανικού πλάσματος, δηλαδή απείρου αγωγιμότητας:

$$F^{\alpha\beta} u_{\beta} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \quad (28)$$

## 4.2 Εξισώσεις Maxwell

Για να υπολογίσουμε τις εξισώσεις του Maxwell πρώτα ορίζουμε τον ταυστή του H/M πεδίου και τον δυϊκό του αντίστοιχα:

$$F^{\alpha\beta} = n^\alpha E^\beta - n^\beta E^\alpha - \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} n_\gamma B_\delta \quad (29)$$

$$*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = n^\alpha B^\beta - n^\beta B^\alpha + \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} n_\gamma E_\delta \quad (30)$$

όπου

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} [\alpha\beta\gamma\delta] \quad (31)$$

το στοιχείο όγκου και  $[\alpha\beta\gamma\delta]$  το αντισυμμετρικό σύμβολο Levi-Civita. Οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται στη μορφή:

$$*F_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0 \quad (32)$$

$$F_{;\beta}^{\alpha\beta} = 4\pi J^\alpha. \quad (33)$$

Ισχύει ότι

$$F_{;\beta}^{\alpha\beta} = n^\alpha E_{;\beta}^\beta + E^\beta n_{;\beta}^\beta - n^\beta E_{;\beta}^\alpha - E^\alpha n_{;\beta}^\beta + (\epsilon^{\alpha\beta\gamma} B_\gamma)_{;\beta} \quad (34)$$

όπου  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma} = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} n_\delta$ .

Ο τελευταίος όρος της πιο πάνω εξίσωσης γράφεται ως:

$$\begin{aligned} (\epsilon^{\alpha\beta\gamma} B_\gamma)_{;\beta} &= \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} (B_\gamma n_\delta)_{;\beta} = \\ &= \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} (n_\delta B_{\gamma;\beta} - B_\gamma n_{\delta;\beta}) = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} (n_\delta \nabla_\beta B_\gamma - B_\gamma n_{\delta\alpha}) = \\ &= \frac{1}{h} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} (h n_\delta \nabla_\beta B_\gamma - B_\gamma n_\delta \nabla_\beta h) \Leftrightarrow \\ &(\epsilon^{\alpha\beta\gamma} B_\gamma)_{;\beta} = \frac{1}{h} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta (h B_\gamma) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια αν πάρουμε την παράγωγο Lie του  $E^\alpha$  κατά μήκος του  $h n^\alpha$ , έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{h} \mathcal{L}_{h\bar{n}} E^\alpha = \frac{1}{h} (\partial_t - \mathcal{L}_{\bar{\beta}}) E^\alpha = n^\beta E_{;\beta}^\alpha - E^\beta n_{;\beta}^\alpha - E^\beta n^\alpha (\ln h)_{;\beta} \quad (35)$$

Επίσης αν λάβουμε υπόψη ότι τις παρακάτω σχέσεις:

1.  $E_{;\alpha}^\alpha = \nabla_\alpha E^\alpha - E^\alpha \nabla_\alpha \ln h$ ,
2.  $n^\beta n_{\alpha;\beta} = a_\alpha = \nabla_\alpha \ln h$ ,
3.  $E^\alpha \nabla_\alpha \ln h = E^\alpha (\ln h)_{;\alpha}$ ,

τότε η εξίσωση (33) γράφεται ως:

$$4\pi h J^\alpha = -(\partial_t - \mathcal{L}_{\bar{\beta}}) E^\alpha + \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta (h B_\gamma) + h n^\alpha \nabla_\beta E^\beta + h \theta E^\alpha \quad (36)$$

Από αυτήν παίρνουμε τις δύο από τις τέσσερις εξισώσεις στη συνήθη μορφή:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho_e \quad (37)$$

$$\vec{\nabla} \times (h \vec{B}) = \frac{4\pi h \vec{j}}{c} + \frac{1}{c} (\partial_t \vec{E} - \mathcal{L}_{(-\omega \vec{m})} \vec{E}) \quad (38)$$

Με εντελώς αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε και τις άλλες δύο εξισώσεις από την (32):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (39)$$

$$\vec{\nabla} \times (h \vec{E}) = -\frac{1}{c} (\partial_t \vec{B} - \mathcal{L}_{(-\omega \vec{m})} \vec{B}) \quad (40)$$

Το μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο βρίσκονται από τους τύπους:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (41)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{h}(\vec{\nabla}A_0 + \frac{\omega}{c}\vec{\nabla}A_\phi) - \frac{1}{hc}(\dot{\vec{A}} + \omega \mathcal{L} \vec{m} \vec{A}) \quad (42)$$

όπου  $\vec{A} = (A_0c, \vec{A})$  το τετραδιάστατο η/μ δυναμικό με

1.  $A_\phi = \vec{A} \cdot \vec{m} \equiv A$  και
2.  $A_0 = -h\Phi - \omega A_\phi$ , όπου  $\Phi$  το γνωστό βαθμωτό δυναμικό.

### 4.3 Εξισώσεις ορμής, συνέχειας, εντροπίας και ενέργειας

**Σημείωση** Για να διευκολυνθούμε στις πράξεις μας, στην παρούσα ενότητα μόνο θα θεωρήσουμε ότι το  $c = G = 1$ . Η διόρθωση των τελικών αποτελεσμάτων γίνεται εύκολα αν ελέγξουμε τις διαστάσεις των εξισώσεών μας.

Ας ορίσουμε το τετραδιάστατο ρεύμα φορτίων και μάζας αντίστοιχα:

$$J^\alpha = \rho_{e0}\gamma n^\alpha + \rho_{e0}\gamma v^\alpha = \rho_e n^\alpha + \vec{j} \quad (43)$$

$$(\eta_0 u^\alpha) = \eta_0 \gamma n^\alpha + \eta_0 \gamma v^\alpha = \eta n^\alpha + \eta \vec{v} \quad (44)$$

Για να υπολογίσουμε την εξίσωση συνέχειας του φορτίου, δουλεύουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} J^\alpha_{;\alpha} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{h\sqrt{\zeta}}(h\sqrt{\zeta}J^\alpha)_{,\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{h\sqrt{\zeta}}(h\sqrt{\zeta}J^0)_{,0} + \frac{1}{h\sqrt{\zeta}}(h\sqrt{\zeta}J^i)_{,i} = 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{1}{h\sqrt{\zeta}}(h\sqrt{\zeta}\rho_e n^0)_{,0} + \frac{1}{h\sqrt{\zeta}}(h\sqrt{\zeta}j^i)_{,i} + \frac{1}{h\sqrt{\zeta}}(h\sqrt{\zeta}\rho_e n^3)_{,3} = 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{1}{h}\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\omega}{h}\frac{\partial \rho_e}{\partial \phi} + \frac{1}{h}\nabla(h\vec{j}) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

όπου και λάβαμε υπόψη ότι το  $h$  και το  $\omega$  είναι ανεξάρτητα των  $t$  και  $\phi$ . Με εντελώς όμοιο τρόπο υπολογίζουμε και την εξίσωση συνέχειας της μάζας:

$$\frac{1}{h}\frac{\partial \gamma \eta_0}{\partial t} + \frac{\omega}{h}\frac{\partial \gamma \eta_0}{\partial \phi} + \frac{1}{h}\nabla(h\gamma \eta_0 \vec{v}) = 0. \quad (46)$$

Την εξίσωση της ενέργειας την βγάζουμε από τη σχέση:

$$n^\alpha T^\beta_{\alpha;\beta} = 0 \Rightarrow \quad (47)$$

$$n^\alpha(\epsilon n_\alpha n^\beta + n_\alpha S^\beta + n^\beta S_\alpha + t^\beta_{\alpha};\beta) = 0 \Rightarrow \quad (48)$$

$$n^\alpha(t^\beta_{\alpha;\beta} + \theta S_\alpha + n^\beta S_{\alpha;\beta} + S^\beta_{;\beta} n_\alpha - S^\beta K_{\beta\alpha} + \theta \epsilon n_\alpha + \epsilon \nabla_\alpha \ln h + n^\beta \epsilon_{;\beta} n_\alpha) = 0 \quad (49)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τους ορισμούς της διαστολής, της διάτμησης, της εξωτερικής καμπυλότητας (σχέση 16) και της επιτάχυνσης των ZAMOs, καθώς και τη σχέση (17). Επειδή τώρα τα  $\vec{K}$ ,  $\vec{S}$  και  $\vec{\nabla} \ln h$  αποδεικνύονται κάθετα στο  $\vec{n}$ , η τελευταία σχέση παίρνει τη μορφή:

$$n^\alpha t^\beta_{\alpha;\beta} + n^\alpha n^\beta S_{\alpha;\beta} - S^\beta_{;\beta} - \theta \epsilon - n^\beta \epsilon_{;\beta} = 0 \Rightarrow \quad (50)$$

Και πάλι λαμβάνοντας υπόψη το ότι  $\vec{n} \cdot \vec{t} = 0 = \vec{n} \cdot \vec{S}$  έχουμε αντίστοιχα ότι:

$$n^\alpha t^\beta_{\alpha;\beta} = -t^\beta_{\alpha} n^\alpha_{;\beta} = t^{\beta\alpha} g_{\alpha\alpha} n^\alpha_{;\beta} = t^{\beta\alpha} (g_{\alpha\alpha} n^\alpha)_{;\beta} = -t^{\beta\alpha} n_{\alpha;\beta} = -t^{\beta\alpha} K_{\alpha\beta} \quad (51)$$

$$n^\beta n^\alpha S_{\alpha;\beta} = -S_\alpha n^\beta n^\alpha_{;\beta} = -S_\alpha a^\alpha \quad (52)$$

Παρακάτω θα εκφράσουμε την τετραδιάστατη «κλίση» ενός διανύσματος, συναρτήσει της τρισδιάστατης κλίσης:

$$\nabla_{\beta} S^{\beta} = \gamma_{\beta}^{\mu} \gamma_{\nu}^{\beta} S_{;\mu}^{\nu} = \gamma_{\nu}^{\mu} S_{;\mu}^{\nu} = (\delta_{\nu}^{\mu} + n^{\mu} n_{\nu}) S_{;\mu}^{\nu} = S_{;\mu}^{\mu} - S^{\nu} n^{\mu} n_{\nu;\mu} = S_{;\mu}^{\mu} - S^{\nu} \nabla_{\nu} \ln h \Rightarrow \quad (53)$$

$$S_{;\beta}^{\beta} = \nabla_{\beta} S^{\beta} + S^{\beta} \nabla_{\beta} \ln h \Rightarrow \quad (54)$$

$$\bar{D} \cdot \bar{S} = \bar{\nabla} \cdot \bar{S} + \bar{S} \cdot \bar{\nabla} \ln h \Rightarrow \quad (55)$$

$$S_{;\beta}^{\beta} = \nabla_i S^i + S^i \nabla_i \ln h \quad (56)$$

όπου ορίσαμε το τετρ αδιάστατο τελεστή «τύπου» ανάδελτα  $D$  και όπου το

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{S} + \bar{S} \cdot \bar{\nabla} \ln h \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{S} \cdot \vec{\nabla} \ln h \quad (57)$$

Ένας άλλος τρόπος να δούμε την παραπάνω απόδειξη είναι ο εξής. Όπως γνωρίζουμε και από τη διαφορική γεωμετρία, ισχύει η εξής ιδιότητα:

$$S_{;\beta}^{\beta} = \frac{1}{h\sqrt{\zeta}} (h\sqrt{\zeta} S^{\beta})_{;\beta} \quad (58)$$

Αν πάρουμε τώρα τον ορισμό του μέτρου ενός διανύσματος<sup>2</sup>, θα έχουμε ότι

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \zeta \eta_{ij} v^i v^j \quad (59)$$

Με άλλα λόγια, για μια «φυσική» συνιστώσα  $v_{\hat{\phi}}$  του διανύσματος θα ισχύει:

$$(v_{\hat{\phi}})^2 = \zeta_{\phi\phi} (v^{\phi})^2 = \zeta^{\phi\phi} (v_{\phi})^2 \quad (60)$$

Αυτό μας λύνει τα χέρια αφού, για  $\zeta = \zeta_{rr} \zeta_{\phi\phi} \zeta_{\theta\theta}$ , θα έχουμε π.χ.:

$$\sqrt{\zeta} S^r = \sqrt{\zeta_{rr} \zeta_{\phi\phi} \zeta_{\theta\theta}} S^r = \sqrt{\zeta_{\phi\phi} \zeta_{\theta\theta}} S_{\hat{r}}, \quad (61)$$

κ.τ.λ., επομένως θα ισχύει ότι

$$S_{;\beta}^{\beta} = \frac{1}{h\sqrt{\zeta}} (h\sqrt{\zeta} S^{\beta})_{;\beta} = S_{;\beta}^{\beta} = \frac{1}{h} \vec{\nabla} \cdot (h\vec{S}) \quad (62)$$

που είναι ταυτόσημη με τη σχέση (56).

Βάσει όλων των παραπάνω, η σχέση διατήρησης της ενέργειας (50) παίρνει την μορφή

$$\epsilon\theta + \frac{1}{h} \nabla(h\vec{S}) + \frac{\partial\epsilon}{\partial\tau} + t^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} + \frac{1}{h} (\vec{S} \cdot \nabla) h = 0 \Rightarrow \quad (63)$$

$$D_{\tau}\epsilon + \epsilon\theta + \frac{1}{h^2} \nabla(h^2\vec{S}) + t^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = 0 \quad (64)$$

Το  $D_{\tau}\epsilon$  είναι η χρονική παράγωγος στη μετακίνηση τύπου Fermi που αναφέρεται στο MacDonald D. & Thorne K. 1982. Πρόκειται ουσιαστικά για το χρονικό διαφορικό ως προς τον ιδιοχρόνο του παρατηρητή (εδώ του ZAMO). Στην παραπάνω πορεία μας χρησιμοποιήσαμε και τις παρακάτω σχέσεις και ιδιότητες:

1.  $n^{\alpha} n_{\alpha} = -1$
2.  $\epsilon_{,\beta} n^{\beta} = \frac{\partial\epsilon}{\partial\tau}$

<sup>2</sup> Βλέπε βιβλίο MHD Flows in Compact Astrophysical Objects, V. S. Beskin, 2010 σχέση 1.103

Την εξίσωση της ορμής την βγάζουμε από το χωρικό μέρος της σχέσης:

$$\zeta_\nu^\alpha T_{\alpha;\beta}^\beta = 0 \Rightarrow \quad (65)$$

$$\zeta_\nu^\alpha t_{\alpha;\beta}^\beta + \theta S_\nu + \zeta_\nu^\alpha n^\beta S_{\alpha;\beta} - K_{\nu\beta} S^\beta + \epsilon \nabla_\nu \ln h = 0 \quad (66)$$

Παρακάτω κάνουμε ορισμένες πράξεις σε επιμέρους τμήματα της προηγούμενης εξίσωσης.

$$\nabla_\beta t_\nu^\beta = \zeta_\beta^\rho \zeta_\sigma^\beta \zeta_\nu^\alpha t_{\alpha;\rho}^\sigma \Rightarrow \quad (67)$$

$$\nabla_\beta t_\nu^\beta = \zeta_\nu^\alpha (\delta_\sigma^\rho + n^\rho n_\sigma) t_{\alpha;\rho}^\sigma \Rightarrow \quad (68)$$

$$\nabla_\beta t_\nu^\beta = \zeta_\nu^\alpha (t_{\alpha;\rho}^\rho - t_\alpha^\sigma n^\rho n_{\sigma;\rho}) \Rightarrow \quad (69)$$

$$\nabla_\beta t_\nu^\beta = \zeta_\nu^\alpha t_{\alpha;\beta}^\beta - t_\nu^\beta \nabla_\beta \ln h \Rightarrow \quad (70)$$

$$\zeta_\nu^\alpha t_{\alpha;\beta}^\beta = \frac{1}{h} \nabla_\beta (h t_\nu^\beta) \quad (71)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\zeta_\nu^\alpha n^\beta S_{\alpha;\beta} = g_\nu^\alpha n^\beta S_{\alpha;\beta} + n^\alpha n_\nu n^\beta S_{\alpha;\beta} \Rightarrow \quad (72)$$

$$\zeta_\nu^\alpha n^\beta S_{\alpha;\beta} = g_\nu^\alpha n^\beta S_{\alpha;\beta} - n^\alpha n_\nu n^\beta (n^\alpha n_\alpha S_\alpha)_{;\beta} \Rightarrow \quad (73)$$

$$\zeta_\nu^\alpha n^\beta S_{\alpha;\beta} = g_\nu^\alpha n^\beta S_{\alpha;\beta} - n^\alpha n_\nu n^\beta (n_\alpha)_{;\beta} \Rightarrow \quad (74)$$

$$\zeta_\nu^\alpha n^\beta S_{\alpha;\beta} = n^\beta S_{\nu;\beta} - n^\alpha n_\nu \nabla_\alpha \ln h \Rightarrow \quad (75)$$

$$\zeta_\nu^\alpha n^\beta S_{\alpha;\beta} = n^\beta S_{\nu;\beta} \quad (76)$$

Όμως από τον ορισμό της χρονικής παραγώγου Fermi έχουμε τα παρακάτω

$$D_\tau S^\kappa = \zeta^{\kappa\alpha} S_{\alpha;\beta} n^\beta \Rightarrow \quad (77)$$

$$\zeta_{\kappa\alpha} D_\tau S^\kappa = S_{\alpha;\beta} n^\beta \Rightarrow \quad (78)$$

$$D_\tau (\zeta_{\kappa\alpha} S^\kappa) = S_{\alpha;\beta} n^\beta \Rightarrow \quad (79)$$

$$D_\tau (g_{\kappa\alpha} S^\kappa + n_\alpha n_\kappa S^\kappa) = S_{\alpha;\beta} n^\beta \Rightarrow \quad (80)$$

$$D_\tau (S^\alpha) = S_{\alpha;\beta} n^\beta \quad (81)$$

Επομένως, με χρήση των σχέσεων (17), (71), (76) και (81), η εξίσωση διατήρησης της ορμής (66) παίρνει την μορφή<sup>3</sup>

$$D_\tau \vec{S} + \frac{4}{3} \theta \vec{S} + \sigma \cdot \vec{S} + \epsilon \vec{\nabla} \ln h + \frac{1}{h} \vec{\nabla} (h \mathbf{t}) = 0 \quad (82)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις:

$$\sigma = \frac{1}{2h} (\vec{m} \otimes (\vec{\nabla} \omega) + (\vec{\nabla} \omega) \otimes \vec{m}) \quad (83)$$

$$\vec{m} \otimes (\vec{\nabla} \omega) \mathbf{t} + (\vec{\nabla} \omega) \otimes \vec{m} \mathbf{t} = 2\vec{m} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{\nabla} \omega \quad (84)$$

$$\theta = 0 \quad (85)$$

$$D_\tau \vec{M} = \frac{1}{h} (\dot{\vec{M}} + \omega \mathcal{L}_{\vec{m}} \vec{M} + \frac{1}{2} (\vec{m} \times \vec{\nabla} \omega) \times \vec{M}) \quad (86)$$

$$D_\tau \Psi = \frac{1}{h} (\dot{\Psi} - \vec{\beta} \cdot \vec{\nabla} \Psi) \quad (87)$$

$$-\vec{S} \times (\vec{m} \times \vec{\nabla} \omega) = -\vec{m} \cdot (\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \omega) + (\vec{m} \cdot \vec{S}) \vec{\nabla} \omega \quad (88)$$

$$\frac{1}{h} (\vec{m} \otimes \vec{\nabla} \omega + \vec{\nabla} \omega \otimes \vec{m}) \vec{S} = \frac{1}{h} (\vec{m} \cdot \vec{S}) \vec{\nabla} \omega \quad (89)$$

<sup>3</sup>Θεωρήσαμε όπου  $c = G = 1$ .

οι εξισώσεις (64) και (82) γράφονται ως:

$$\dot{\epsilon} + \omega \vec{m} \cdot \vec{\nabla} \epsilon + \frac{1}{h} \vec{\nabla} \cdot (h^2 \vec{S}) + \vec{m} \cdot \mathbf{t} \cdot \vec{\nabla} \omega = 0 \quad (90)$$

$$\frac{1}{h} (\dot{\vec{S}} + \omega \mathcal{L}_{\vec{m}} \vec{S} + (\vec{S} \cdot \vec{m}) \vec{\nabla} \omega) + \epsilon \vec{\nabla} \ln h + \frac{1}{h} \vec{\nabla} \cdot (h \mathbf{t}) = 0, \quad (91)$$

όπου

$$\mathcal{L}_{\vec{n}} \vec{M} = (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{M} - (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{n} \quad (92)$$

η παράγωγος Lie.

Η εξίσωση (90) μας δίνει τις θερμοδυναμικές σχέσεις που ισχύουν για την ροή μας, ενώ η (91) μας δίνει το προφίλ ταχυτήτων και την ισορροπία των δυνάμεων σε αυτήν. Ένας πιο σύντομος τρόπος για να βρούμε τις θερμοδυναμικές σχέσεις για μια αδιαβατική ροή, για πλάσμα απείρου αγωγιμότητας όπως εδώ, είναι προβάλλοντας τον ταυιστή ενέργειας και ορμής πάνω στην τετραταχύτητα του πλάσματος:

$$u_\alpha T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \quad (93)$$

$$u_\alpha (\eta_0 \frac{w}{c^2} u^\alpha u^\beta)_{;\beta} + u_\alpha (P g^{\alpha\beta}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2} u_\alpha \eta_0 u^\beta u^\alpha w_{;\beta} + u_\alpha \eta_0 w u_{;\beta}^\alpha u^\beta + g^{\alpha\beta} u_\alpha P_{;\beta} = 0 \Rightarrow \quad (94)$$

$$\frac{1}{c^2} (-c^2) \eta_0 u^\beta w_{;\beta} + \eta_0 w u^\beta u_\alpha u_{;\beta}^\alpha + u^\beta P_{;\beta} = 0 \Rightarrow \quad (95)$$

$$-\frac{1}{h} \eta_0 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + (h\vec{v} + \omega \vec{m}) \cdot \vec{\nabla} w \right) + \left( \frac{\partial P}{\partial t} + (h\vec{v} + \omega \vec{m}) \cdot \vec{\nabla} P \right) = 0. \quad (96)$$

Σημειώνουμε, πρώτον ότι για πλάσμα άπειρης αγωγιμότητας το ενεργειακό κομμάτι εξαρτάται μόνο από την συνεισφορά της ύλης και δεύτερον, ότι κάναμε χρήση ορισμένων τύπων και ιδιοτήτων που παραθέτονται ακολούθως:

- $g_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ , γνωστή ιδιότητα, γενίκευση της αντίστοιχης από την ειδική σχετικότητα,  $n_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ .
- $u_{;\beta}^\alpha u_\alpha = 0$ , ομοίως γενίκευση αντίστοιχης ιδιότητας από την ειδική σχετικότητα, όπου και αποδεικνύεται τετριμμένα.
- $u^\alpha w_{;\alpha} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + (h\vec{v} + \omega \vec{m}) \cdot \vec{\nabla} w \right)$ , όπως προκύπτει από τους ορισμούς της τετραταχύτητας του πλάσματος (20) και του διανύσματος killing  $k^\alpha$ .

Υποθέτοντας αξισυμμετρία και χρονική στασιμότητα, η παραπάνω εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$\eta_0 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} w = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P \Rightarrow \quad (97)$$

$$\eta_0 m_p c^2 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \xi = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P \Rightarrow \quad (98)$$

$$\rho_0 c^2 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \xi = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P \Rightarrow \quad (99)$$

όπου ξαναθυμίζουμε ότι για την ειδική σχετικιστική ενθαλπία  $\xi c^2$  ισχύει ότι το

$$\xi c^2 = \frac{\rho_0 c^2 + \rho_0 e + P}{\rho_0} = \frac{w}{m_p} \quad (100)$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε την καταστατική εξίσωση για την εσωτερική ενέργεια ανά μάζα  $e$ :

$$e = \frac{P}{\rho_0} \frac{1}{\Gamma - 1} \quad (101)$$

τότε η εξίσωση (99) ξαναγράφεται ως:

$$\rho_0 c^2 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( 1 + \frac{P}{\rho_0 c^2} \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \right) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P \Rightarrow \quad (102)$$



$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{P}{\rho_0 c^2} \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \right) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{P}{\rho_0 c^2} \right) - \vec{v} \cdot P \vec{\nabla} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} \right) \Rightarrow \quad (103)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{P}{\rho_0 c^2} \frac{1}{\Gamma - 1} \right) + \vec{v} \cdot P \vec{\nabla} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} \right) = 0 \Rightarrow \quad (104)$$

$$\frac{\rho_0^\Gamma}{\Gamma - 1} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{P}{\rho_0^\Gamma} \right) = 0 \Rightarrow \quad (105)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{P}{\rho_0^\Gamma} \right) = 0 \quad (106)$$

Οι εξισώσεις (37) έως (40), (45), (46), (91) και (106) είναι το σύνολο των εξισώσεων που χρειαζόμαστε στην ΜΥΔ.

#### 4.4 Ολοκληρώματα της ΜΥΔ

Δουλεύοντας κατά τα γνωστά, χωρίζουμε το κάθε διανυσματικό μέγεθός μας σε μια τοροϊδή και μια πολοειδή συνιστώσα. Θα ορίσουμε, αν και ακόμα δεν χρειάζεται αυστηρά, ένα σύστημα συντεταγμένων, ή πιο σωστά, διευθύνσεων που φαίνεται και στην εικόνα (5):

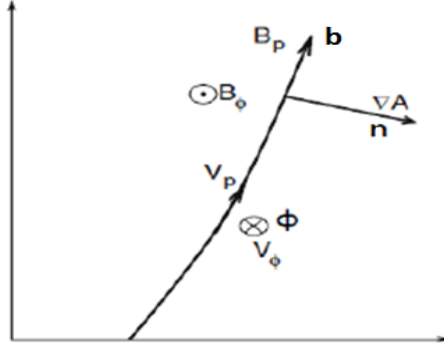


Figure 5: Το σύστημα διευθύνσεων στο πολοϊδές επίπεδο και τα αντίστοιχα πεδία και οι ταχύτητες που εμφανίζονται σε μια γραμμή ροής σταθερής τιμής.

$$\left( \hat{n} = \frac{\vec{\nabla} A_\phi}{|\vec{\nabla} A_\phi|}, \hat{\phi}, \hat{b} \right) \quad (107)$$

Οι συνιστώσες  $\hat{n}$  και  $\hat{b}$  βρίσκονται πάνω στο πολοϊδές επίπεδο, με την  $\hat{b}$  να είναι η συνιστώσα του πολοϊδούς μαγνητικού πεδίου. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο πολοειδή συνιστώσα.

$$\vec{E}_p = \frac{1}{h} (\vec{\nabla} A_0 + \frac{\omega}{c} \vec{\nabla} A_\phi) - \frac{1}{hc} (\dot{A} + \omega \mathcal{L}_{\vec{m}} \vec{A}) \quad (108)$$

$$\vec{E}_\phi = 0 \quad (109)$$

$$\vec{B}_p = \frac{1}{h_3} \vec{\nabla} A_\phi \times \hat{\phi} \quad (110)$$

$$\vec{B}_\phi = -\frac{2I}{chh_3} \hat{\phi} \quad (111)$$

Από τις σχέσεις (28) και (39) προκύπτει ότι:

$$\left| \frac{h}{c} \vec{v}_p \times \vec{B}_p \right| \hat{\phi} = 0 \Rightarrow \Psi_A = \frac{4\pi\gamma\eta_0 h v_p}{B_p} \quad (112)$$

$$\left| \frac{1}{c} \vec{v}_p \times \vec{B}_\phi + \frac{1}{c} \vec{v}_\phi \times \vec{B}_p \right| \hat{\phi} = \frac{1}{h} (\vec{\nabla} A_0 + \frac{\omega}{c} \vec{\nabla} A_\phi) - \frac{1}{hc} (\dot{\vec{A}} + \omega \mathcal{L} \vec{m} \vec{A}) \Rightarrow \quad (113)$$

$$v_\phi = \frac{\Psi_A B_p}{4\pi\gamma\eta_0 h} + \frac{h_3}{h} (\Omega(A) - \omega) \quad (114)$$

όπου ορίσαμε το

$$\Omega(A) \equiv -c \frac{dA_0}{dA_\phi} \quad (115)$$

και όπου

$$\Omega_{Kerr} = \Omega(A) - \omega \quad (116)$$

Επομένως για την ταχύτητα θα ισχύει ότι

$$\vec{v} = \frac{\Psi_A \vec{B}}{4\pi\gamma\eta_0 h} + \frac{h_3}{h} (\Omega(A) - \omega) \hat{\phi} \quad (117)$$

Για να βρούμε τα ολοκληρώματα της στροφορμής και της ενέργειας θα ακολουθήσουμε τα βήματα από το paper των MacDonald & Thorne 1982. Θα ορίσουμε την πυκνότητα και την ροή ενέργειας «στο άπειρο» (energy at infinity) ( $E$ ) και στροφορμής ( $L$ ) ως εξής:

$$\epsilon_E \equiv h\epsilon + \omega \vec{S} \cdot \vec{m} / c^2, \quad \vec{S}_E \equiv h\vec{S} + \omega \mathbf{t} \cdot \vec{m} \quad (118)$$

$$\epsilon_L \equiv \vec{S} \cdot \vec{m} / c^2, \quad \vec{S}_L \equiv \mathbf{t} \cdot \vec{m} \quad (119)$$

για τις οποίες ισχύει ότι

$$(\partial_t + \omega \vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \epsilon_E + \vec{\nabla} \cdot (h\vec{S}_E) = 0 \quad (120)$$

$$(\partial_t + \omega \vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \epsilon_L + \vec{\nabla} \cdot (h\vec{S}_L) = 0 \quad (121)$$

Στην περίπτωση της χρονοανεξαρτησίας και της αξισυμμετρίας που μας ενδιαφέρει οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται:

$$\vec{\nabla} \cdot (h\vec{S}_E) = 0 \quad (122)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (h\vec{S}_L) = 0 \quad (123)$$

από τις οποίες και θα πάρουμε τα ολοκληρώματα ροής ενέργειας και στροφορμής ανά ροή μάζας. Συγκεκριμένα για το ολοκλήρωμα της ροής στροφορμής ανά ροή μάζας έχουμε ότι:

$$\nabla \cdot (hS_L) = \nabla \cdot (ht \cdot \vec{m}) = \nabla \cdot (hh_3 t^{p\phi} \hat{p}) = \quad (124)$$

$$\nabla \cdot \left[ h\eta_0 \frac{w}{c^2} \gamma^2 \frac{\Psi_A}{4\pi h\eta_0 \gamma} \vec{B}_p v_\phi h_3 + \frac{hh_3}{4\pi} (-\vec{B}_p B_\phi) \right] \Rightarrow \quad (125)$$

$$\nabla \cdot (hS_L) = \nabla \cdot \left[ \left( \dots \right) \frac{\Psi_A}{4\pi} \vec{B}_p \right] \quad (126)$$

όπου το  $\Psi_A / (4\pi) = const..$  Επειδή τώρα, από τη διατήρηση της μάζας έχουμε ότι τα:

$$\nabla \cdot \vec{B}_p = 0 \quad (127)$$

$$(\vec{B} \cdot \nabla) \frac{\Psi_A}{4\pi} = 0, \quad (128)$$

έχουμε τελικά για το ολοκλήρωμα της στροφορμής:

$$L(A) = \frac{w}{c^2} \gamma h_3 v_\phi - \frac{h_3 h B_\phi}{\Psi_A} \quad (129)$$

Για το ολοκλήρωμα τώρα της ενέργειας θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το  $h\vec{S}_E$ .

$$h\vec{S}_E = h^2 \vec{S} + h\omega \vec{S}_L = h^2 \vec{S} + h\omega h_3 t^{p\phi} \quad (130)$$

Επειδή έχουμε αξισυμμετρία θα επιζηήσει στην απόκλιση μόνο η πολοειδής συνιστώσα του

$$\vec{S}_E = \frac{1}{4\pi}(hc(\vec{E} \times \vec{B}_\phi) - \omega h_3 B_\phi \vec{B}_p) + \eta_0 \omega \gamma^2 h v_p \vec{v} + \omega \frac{w}{c^2} h_3 \eta_0 \gamma^2 v_\phi v_p \vec{v} \quad (131)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (122), έχουμε με τον ίδιο με πριν τρόπο, στο ολοκλήρωμα της ενέργειας:

$$E(A) = h\gamma w - hh_3 \frac{\Omega_{Kerr}}{\Psi_A} B_\phi + \omega L(A) \quad (132)$$

Τέλος, από την σχέση (106) προκύπτει άμεσα ότι ο λόγος  $P/\rho_0^\Gamma$  είναι μια σταθερά της ροής, δηλαδή

$$\frac{P}{\rho_0^\Gamma} = Q(A) \quad (133)$$

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματά μας, τα ολοκληρώματα που υπολογίσαμε για την περίπτωση του χωροχρόνου Kerr είναι τα παρακάτω:

1.  $\Psi_A = \frac{4\pi\gamma\eta_0 h v_p}{B_p}$
2.  $\Omega(A) \equiv -c \frac{dA_0}{dA_\phi}$
3.  $\frac{P}{\rho_0^\Gamma} = Q(A)$
4.  $L(A) = \frac{w}{c^2} \gamma h_\phi v_\phi - \frac{h_3 h B_\phi}{\Psi_A}$
5.  $E(A) - \omega L(A) = E' = h\gamma w - hh_3 \frac{\Omega_{Kerr}}{\Psi_A} B_\phi$

όπου δεν πρέπει να ξεχάσουμε τις σχέσεις

$$\Omega_{Kerr} = \Omega(A) - \omega \quad (134)$$

$$\vec{v} = \frac{\Psi_A \vec{B}}{4\pi\gamma\eta_0 h} + \frac{h_3}{h} \Omega_{Kerr} \hat{\phi} \quad (135)$$

Βλέποντας τους παραπάνω τύπους για την ταχύτητα και τα ολοκληρώματα, δεν μπορούμε παρά να παρατηρήσουμε την αναλογία που έχουν οι παραπάνω εξισώσεις με τις αντίστοιχες για την περίπτωση της γεωμετρίας Schwarzschild (Meliani et al., 2006). Παραγματικά, το μόνο που φαίνεται να αλλάζει στις παραπάνω εξισώσεις είναι η εισαγωγή του επιπλέον  $\omega$  εξαιτίας του frame dragging. Αν ορίσουμε τα παρακάτω μεγέθη:

- την ποσότητα  $x_{Kerr} = \frac{h_3 \Omega_{Kerr}}{ch}$
- την ποσότητα  $x_{A Kerr}^2 = \frac{\Omega_{Kerr} L(A)}{E(A) - \omega L(A)}$
- και τον πολοειδή "Alfvénic" Mach number:
$$M^2 = \frac{4\pi h^2 \eta_0 \omega \Gamma^2 v_p^2}{B_p^2} = \frac{w \Psi_A^2}{4\pi \eta_0 c^2}$$

μπορούμε τότε να υπολογίσουμε, με τετριμμένες πράξεις, από τους τύπους των ολοκληρωμάτων στροφορμής και ενέργειας, τα  $v_\phi$ ,  $B_\phi$  και  $\Gamma$  συναρτήσει των ολοκληρωμάτων που έχουμε στα χέρια μας καθώς και του  $\omega$ .

$$h\gamma w = [E(A) - \omega L(A)] \left[ \frac{M^2 - h^2(1 - x_{A Kerr}^2)}{M^2 - h^2(1 - x_{Kerr}^2)} \right] \quad (136)$$

$$v_\phi = \frac{c}{x_{Kerr}} \left[ \frac{M^2 x_{AKerr}^2 - x_{Kerr}^2 h^2 (1 - x_{AKerr}^2)}{M^2 - h^2 (1 - x_{AKerr}^2)} \right] \quad (137)$$

$$B_\phi = -\frac{[E(A) - \omega L(A)] \Psi_A}{c x_{Kerr}} \left[ \frac{x_{Kerr}^2 - x_{AKerr}^2}{M^2 - h^2 (1 - x_{AKerr}^2)} \right] \quad (138)$$

**Εξαγωγή ενέργειας και στροφορμής από Μ.Ο.** Εδώ να αναφέρουμε γρήγορα το πως μπορούμε να αφαιρέσουμε ενέργεια και στροφορμή μέσω της ροής Poynting από μια μελανή οπή. Αν πάρουμε το ηλεκτρομαγνητικό μέρος της πολοϊδούς στροφορμής και της ενέργειας στο άπειρο έχουμε:

$$\vec{S}_L^p = \frac{1}{4\pi} [-(\vec{E} \cdot \vec{m})\vec{E} - (\vec{B} \cdot \vec{B})\vec{B} + \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\vec{m}]^p = \frac{1}{4\pi} (-B_\phi h_3) B_p \hat{b} = -B_\phi |\vec{\nabla} A_\phi| \hat{b} \quad (139)$$

$$\vec{S}_E^p = \frac{1}{4\pi} (hc \vec{E} \times \vec{B}_\phi - \omega (\vec{B} \cdot \vec{m}) \vec{B}_p) = \quad (140)$$

$$= \frac{1}{4\pi} [hc(-) \frac{(\Omega - \omega)}{hc} |\vec{\nabla} A_\phi| B_\phi - \omega h_3 B_\phi \frac{|\vec{\nabla} A_\phi|}{h_3}] \hat{b} = \quad (141)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \Omega |\vec{\nabla} A_\phi| B_\phi \hat{b} = \quad (142)$$

$$\vec{S}_E^p = \Omega \vec{S}_L^p \quad (143)$$

όπου θεωρήσαμε ότι στην περίπτωση της χρονοανεξαρτησίας και την αξισυμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο παίρνει την μορφή

$$\vec{E}_p = -\frac{(\Omega - \omega)}{ch} \vec{\nabla} A_\phi = -\frac{(\Omega - \omega)}{ch} |\vec{\nabla} A_\phi| \hat{n} \quad (144)$$

Από τα παραπάνω μπορούμε γρήγορα δούμε, ότι απαραίτητη προϋπόθεση για την εξαγωγή στροφορμής (μέσω των πεδίων) από τη μαγνητόσφαιρα μιας ΒΗ, είναι να έχουμε αρνητικό  $B_\phi$ , ή αντίστοιχα θετικό ρεύμα  $I$ . Επίσης, επειδή η ροή ενέργειας στο άπειρο και η ροή στροφορμής είναι παράλληλες μεταξύ τους και με την ίδια φορά, όπως προκύπτει και από την παραπάνω σχέση αναλογίας, υποθέτοντας ότι το πλάσμα περιστρέφεται αριστερόστροφα, η ίδια συνθήκη αρκεί και για την εξαγωγή ενέργειας από την μελανή οπή.

## 5 Λύση της Wind equation

Ο τρόπος με το οποίο γράφουμε μέχρι στιγμής τα ολοκληρώματά μας στην περίπτωση της γεωμετρίας Kerr, καθώς και η έκφραση του  $\gamma$ , του  $v_\phi$  και του  $B_\phi$  συναρτήσκει τους, μπορεί να είναι δόκιμος για την γρήγορη σύγκριση με την περίπτωση της μη περιστρεφόμενης μελανής οπής, ή ακόμη και της ειδικής σχετικότητας, δεν μας δίνει όμως καμιά διαίσθηση για την συμπεριφορά τους στην περίπτωσή μας. Θα πρέπει λοιπόν να τα αναπτύξουμε σε μια πιο εύχρηστη, για τους υπολογισμούς μας, μορφή. Κατ' αρχάς ας ορίσουμε τα παρακάτω μεγέθη, τα γνωστά μας από την ειδική σχετικότητα:

- την κυλινδρική απόσταση σε μονάδες του «κυλίνδρου φωτός»:  $x = \frac{h_3 \Omega(A)}{c}$ ,
- το Alfvénic lever arm  $x_A^2 = \frac{\Omega(A)l(A)}{\mu(A)c^2}$ ,
- το αδιάστατο ολοκλήρωμα της ενέργειας  $\mu(A) = \frac{E(A)}{m_p c^2}$ ,
- το αδιάστατο ολοκλήρωμα της στροφορμής  $l(A) = \frac{L(A)}{m_p}$ ,
- τον λόγο ροής μάζας ανά μονάδα μαγνητικής ροής  $\Psi_a = \Psi_A m_p$ ,
- την ποσότητα  $\nu = \frac{\omega}{\Omega(A)}$ .

Τα αντίστοιχα μεγέθη που είχαμε ορίσει παραπάνω τώρα γίνονται:

- $x_{Kerr} = x \frac{(1-\nu)}{h}$
- $x_{AKerr}^2 = x_A^2 \frac{(1-\nu)\mu c^2}{\mu c^2 - \omega l(A)}$

Για να προχωρήσουμε τώρα παρακάτω θα κάνουμε κάποιες επιπλέον αλλαγές στις σχέσεις μας. Ορίζουμε την λεγόμενη "proper speed",  $U = (\gamma v/c)$ . Επίσης θα ορίσουμε ένα ιδιαίτερος χρήσιμο μέγεθος, την παράμετρο Michel:

$$\sigma_m = \frac{A_\phi \Omega(A)^2}{c^3 \Psi_a}. \quad (145)$$

Τώρα λοιπόν μπορούμε να ξαναγράψουμε τα ολοκληρώματα που υπολογίσαμε στην προηγούμενη ενότητα, σε μια αδιάστατη μορφή, ώστε να μπορούμε να κάνουμε πιο άνετα τους υπολογισμούς μας. Έχουμε λοιπόν και λέμε:

(α) Το λόγο ροής μάζας ανά μαγνητική ροή

$$\Psi_a = \frac{4\pi\gamma\rho_0 h v_p}{B_p} \quad (146)$$

(β) Την αδιαβατική σχέση

$$Q(A) = \frac{P}{\rho_0^{\Gamma}} \quad (147)$$

(γ) Τη γωνιακή ταχύτητα των δυναμικών γραμμών του πεδίου, που ισοδυναμεί με την γωνιακή ταχύτητα του πλάσματος στη βάση των δυναμικών γραμμών στο δίσκο,

$$\Omega(A) \equiv -c \frac{dA_0}{dA_\phi} = \frac{1}{(1-\nu)} \left( \frac{v_\phi h}{h_\phi} - \frac{v_p h B_\phi}{h_\phi B_p} \right) \quad (148)$$

(δ) Την ολική ειδική γωνιακή στροφορμή

$$l(A) = \xi \gamma h_\phi v_\phi - \frac{h_\phi h B_\phi}{\Psi_a} \quad (149)$$

(ε) Την αδιάστατη ενέργεια

$$\mu(A) - \omega \frac{l(A)}{c^2} = h\gamma\xi - hh_\phi \frac{\Omega(A)(1-\nu)}{\Psi_A c^2} B_\phi \quad (150)$$

όπου φυσικά δεν πρέπει να ξεχάσουμε να αναφέρουμε την σχέση για την "proper speed"

$$\vec{U} = \frac{\Psi_A \vec{B}}{4\pi c \rho_0 h} + \frac{\gamma h_\phi}{ch} \Omega(A)(1-\nu) \hat{\phi} \quad (151)$$

Από εδώ και εμπρός θα αντικαταστήσουμε τα ολοκληρώματα που είχαμε παραπάνω ( $E(A)$ ,  $L(A)$ ,  $\Omega(A)$ ,  $Q(A)$ ,  $\Psi_A$ ) με τα ακόλουθα,  $\mu(A)$ ,  $x_A$ ,  $\Omega(A)$ ,  $Q(A)$ ,  $\sigma_m$ . Τελικά έχουμε τα παρακάτω:

$$U_\phi = \frac{\gamma v_\phi}{c} = \frac{\mu(A)}{\xi(1-\nu)x} \frac{x_A^2 [M^2 - M^2\nu + x^2(1-\nu)^2] - x^2(1-\nu)^2}{h^2 - M^2 - x^2(1-\nu)^2} \quad (152)$$

$$U_p = \frac{\gamma v_p}{c} \quad (153)$$

$$\gamma = \frac{\mu(A)}{\xi} \frac{(1-x_A^2)h + (1-\nu x_A^2) \frac{M^2}{h}}{h^2 - M^2 - x^2(1-\nu)^2} \quad (154)$$

$$B_\phi = \frac{A_\phi \Omega(A)^2 \mu(A)}{c^2 \sigma_M x h^2} \frac{x_A^2 - x^2(1-\nu)(1-\nu x_A^2)}{h^2 - M^2 - x^2(1-\nu)^2} \quad (155)$$

$$M^2 = \frac{U_p \xi x^2 h}{\sigma_M S_r} \quad (156)$$

όπου το  $\Gamma = 4/3$  ή  $5/3$  είναι ο πολυτροπικός δείκτης και όπου η συνάρτηση  $S_r$  είναι η γενικευμένη bunching function και ισούται με :

$$S_r = h_3 \frac{|\vec{\nabla} A|}{A}. \quad (157)$$

Περισσότερα για την συνάρτηση αυτή θα ακολουθήσουν. Η εξίσωση Bernulli δίνεται λοιπόν από τον τύπο:

$$\left(\frac{\mu}{\xi}\right)^2 \left( \left[ \frac{\sigma_M S_r h (1-x_A^2) + U_p (1-\nu x_A^2) x^2 \xi}{\sigma_M S_r h^2 - U_p \xi x^2 h - x^2(1-\nu)^2 \sigma_M S_r} \right]^2 - \left[ \frac{h x \xi x_A^2 U_p + x(1-\nu) \sigma_M S_r (x_A^2 - 1)}{\sigma_M S_r h^2 - U_p \xi x^2 h - x^2(1-\nu)^2 \sigma_M S_r} \right]^2 \right) - U_p^2 - 1 = 0 \quad (158)$$

Με αυτήν την εξίσωση μπορούμε να δούμε την ταχύτητα που αποκτά η ροή μας. Στην πορεία μας από εδώ και πέρα, θα δουλέψουμε στην περίπτωση της κρύας ροής ( $\xi \approx 1$ ). Αυτή η προσέγγιση μας διευκολύνει, αφού τώρα η λύση μας θα περνάει μόνο από δύο κρίσιμα σημεία, το Alven και το fast σημείο και αφού από το Alven περνούν όλες οι λύσεις εξ ορισμού, εμείς απλά πρέπει να διαλέξουμε κατάλληλες τιμές ολοκληρωμάτων ώστε να περνάει και από το fast.

**Το ολοκλήρωμα  $\mu$**  Παίρνοντας τώρα το τύπο του ολοκληρώματος της ενέργειας και ακολουθώντας την παρακάτω αποδεικτική (για την γενική περίπτωση) γενικεύουμε το άρθρο του Vlahakis 2004

$$\mu[1 - \nu x_A^2] - h\gamma\xi = -hh_\phi \Omega \frac{B_\phi (1-\nu)}{\Psi_A c^2} \Rightarrow \quad (159)$$

$$\mu[1 - \nu x_A^2] - h\gamma\xi = -hh_\phi \Omega \frac{c^3 \sigma_M B_\phi (1-\nu)}{A \Omega^2 c^2} \Rightarrow \quad (160)$$

$$\mu[1 - \nu x_A^2] - h\gamma\xi = \sigma_M S_r \left(-\frac{B_\phi}{E}\right) (1-\nu)^2 \Rightarrow \quad (161)$$

$$\frac{\mu[1 - \nu x_A^2] - h\gamma\xi}{\mu[1 - \nu x_A^2]} = \frac{\sigma_M}{\mu} S_r \left(-\frac{B_\phi}{E}\right) \frac{(1-\nu)^2}{[1 - \nu x_A^2]} \quad (162)$$

Ας ορίσουμε ένα ακόμα μέγεθος, την ροή ενέργειας Poynting ανά ροή ενέργειας μάζας του πλάσματος:

$$\sigma = \frac{\mu(A)(1 - \nu x_A^2) - h\gamma\xi}{h\gamma\xi} \quad (163)$$

Χρησιμοποιώντας όλους τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να οδηγηθούμε στην παρακάτω ακριβή σχέση:

$$\frac{\sigma}{1 + \sigma} = \frac{\mu(1 - \nu x_A^2) - h\gamma\xi}{\mu(1 - \nu x_A^2)} = \frac{\sigma_M}{\mu} \left(-\frac{B_\phi}{E}\right) S_r \frac{(1 - \nu)^2}{1 - \nu x_A^2} \quad (164)$$

όπου ως  $S_r = h_\phi \frac{|\vec{\nabla}A|}{A}$  ορίσαμε την γενικευμένη bunching function, στην οποία θα αναφερθούμε και παρακάτω. Η σχέση αυτή έχει αρκετές και σύνθετες εξαρτήσεις από τα  $r$  και  $\theta$ , όμως για μεγάλες αποστάσεις αποκτά την πολύ πιο εύχρηστη, γνωστή από την ειδική σχετικότητα, μορφή:

$$\frac{\mu - \gamma\xi}{\mu} = \frac{\sigma_M}{\mu} \left(-\frac{B_\phi}{E}\right) S \quad (165)$$

Από εδώ και πέρα, η πορεία μας είναι ταυτόσημη με αυτή του Vlahakis 2004 (1), γιατί θα δουλέψουμε σε ειδική σχετικότητα. Συγκεκριμένα παίρνοντας τον νόμο της ισοπεριστροφής των δυναμικών γραμμών

$$\Omega(A) = \frac{v_\phi}{\varpi} - \frac{v_p B_\phi}{\varpi B_p} = constant \quad (166)$$

σε συνδυασμό με την υπόθεση ότι η  $\vec{\phi}$ -συνιστώσα της ταχύτητας  $v_\phi \ll r\Omega(A)$  και αντικαθιστώντας όπου  $E = -xB_p$ , καταλήγουμε στον τύπο:

$$\left(-\frac{B_\phi}{E}\right)^2 = \left(\frac{c}{v_p}\right)^2 \quad (167)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι η πολιοϊδής ταχύτητα της ροής είναι πολύ μεγαλύτερη της αζιμουθιακής, τότε ο παραπάνω τύπος γίνεται

$$-\frac{B_\phi}{E} = \sqrt{\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}}. \quad (168)$$

Παρατηρούμε ότι για  $\gamma \gg 1$ , το δεξί μέρος της παραπάνω ισότητας γίνεται μονάδα. Τότε θα ισχύει ότι

$$\frac{\sigma}{1 + \sigma} = \frac{\sigma_M}{\mu} S \quad (169)$$

Δεν απαιτείται παραπάνω από στοιχειώδεις γνώσεις άλγεβρας για να αποδείξουμε ότι ο παράγοντας Lorentz στο άπειρο παίρνει την μορφή:

$$\gamma_\infty = \frac{\mu - \sigma_M S_\infty}{\xi_\infty} \quad (170)$$

Επειδή στην superfast περιοχή, στην περίπτωση των AGNs και των GRBs, το  $\Gamma \gg 1$ , Αμέσως αμέσως, έχουμε μια σχέση που μας δίνει την τελική ταχύτητα της ροής μας στο άπειρο (αφού εκεί το  $\Gamma_\infty \simeq U_{p\infty}$ , άρα και την απόδοση του μηχανισμού μας. Μπορούμε έτσι να ελέγξουμε την απόδοση της επιτάχυνσης για διάφορα σχήματα δυναμικών γραμμών, δίχως να χρειαστεί να λύσουμε την εξίσωση ορμής στην transfield διεύθυνση.

## 5.1 Η "Bunching function" S

Προηγούμενως στην εργασία, ορίσαμε δυο μεγέθη, την απλή και την γενικευμένη bunching function αντίστοιχα

$$S = \varpi \frac{|\vec{\nabla}A|}{A} \quad (171)$$

$$S_r = h_\phi \frac{|\vec{\nabla} A|}{A} \quad (172)$$

Ουσιαστικά πρόκειται για ένα και το αυτό μέγεθος, με την  $S_r \rightarrow S$  για  $\alpha \rightarrow 0$ . Η συνάρτηση  $S$  είναι ένας έμμεσος τρόπος ώστε να εισάγουμε την γεωμετρία του πεδίου μας μέσα στις εξισώσεις. Η σωστή μορφή του εν λόγω μεγέθους προκύπτει από την επίλυση την προβολή της εξίσωσης εξίσωσης ορμής στην transfield διεύθυνση, δηλαδή στη διεύθυνση του διανύσματος  $\vec{\nabla} A$ . Εισάγοντας μια μορφή της «με το χέρι», ουσιαστικά παρακάμπτουμε την transfield εξίσωση. Η συνάρτηση  $S$  εξαρτάται από τη μορφή της συνάρτησης ροής  $A$  και αντιστρόφως, αν καθορίσουμε την  $S$  μπορούμε, θεωρητικά πάντα, να υπολογίσουμε το  $A$ . Και λέμε «θεωρητικά», διότι στην πραγματικότητα ο υπολογισμός του  $A$  προϋποθέτει την επίλυση μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, η αντιμετώπιση της οποίας αποδεικνύεται εξαιρετικά δύσκολη. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι ή να δουλέψουμε κανονικά και να υπολογίσουμε από δοθέν  $A$  το  $S$ , ή να «κατασκευάσουμε» ένα  $A$  με οδηγό την  $S$ , το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε την αντίστοιχη bunching function. Και αυτό που πρέπει να επιλέξουμε να κάνουμε είναι το δεύτερο, διότι υπάρχουν φυσικοί λόγοι που περιορίζουν την μορφή που μπορεί να πάρει η  $S$ .

Βλέποντας ξανά την σχέση για το ολοκλήρωμα της ενέργειας, αποδείξαμε ότι μπορούμε να το γράψουμε στην προσεγγιστική μορφή

$$\mu \approx \gamma + \sigma_M S \frac{\gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}} = \gamma + \mu \Sigma \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (173)$$

όπου θέσαμε το  $\Sigma = (\sigma_M/\mu)S$ . Παραγωγίζοντας τώρα το  $\mu$  ως προς  $x$ , πάνω σε μια γραμμή ροής σταθερού  $A$ , παίρνουμε την σχέση:

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\gamma^2 \mu (\gamma^2 - 1)^{(1/2)} \frac{d\Sigma}{(\gamma^3 - \mu)} \quad (174)$$

Όπως βλέπουμε από τη διαφορική εξίσωση, για  $\gamma < \mu^{1/3}$  η συνάρτηση  $S$  αυξάνει με την απόσταση, ενώ για  $\gamma > \mu^{1/3}$  μικραίνει, για μια επιταχυνόμενη ροή. Το σημείο όπου το  $\gamma \approx U_p = \mu^{1/3}$  είναι το γνωστό fast σημείο. Καταλαβαίνουμε επομένως ότι η πιο ρεαλιστική προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση που παρουσιάζει μέγιστο κοντά στο fast σημείο και στη συνέχεια πέφτει αργά για μεγάλες αποστάσεις. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα φαίνεται στη εικόνα (6) για bunching function της μορφής:

$$S_1 = 3.1 \frac{\tanh(x)}{(x+1)} + \tanh(x) \quad (175)$$

Στην περίπτωση που στην ροή επικρατεί η ροή ενέργειας Poynting της ροή ενέργειας μάζας, τότε στο «γρήγορο» σημείο η συνάρτηση  $\Sigma$  παρουσιάζει μέγιστο:

$$\Sigma \approx 1 \quad \Rightarrow \quad S_{max} \approx \frac{\mu}{\sigma_M} \quad (176)$$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι, αν έχουμε συνάρτηση  $S$  που να παρουσιάζει μέγιστο, το ασυμπτωτικό  $\Gamma$ , για κρύα ροή, δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma_\infty = \mu \left(1 - \frac{S_\infty}{S_{max}}\right) \quad (177)$$

Με άλλα λόγια, για μεγαλύτερες τιμές του  $S_\infty$  ή μικρότερες τιμές του  $S_{max}$ , η απόδοση της επιτάχυνσης γίνεται μεγαλύτερη.

Καταλήξαμε στην γενική μορφή που πρέπει να έχει η συνάρτηση  $S$ , αλλά υπάρχουν ακόμη κάποιες ελεύθερες παράμετροι που πρέπει να ελέγξουμε. Αυτό που κυρίως πρέπει να δούμε είναι οι τιμές που περιμένουμε να παίρνουν τα  $S_{max}$  και  $S_\infty$ . Για να ελέγξουμε την ασυμπτωτική τιμή της συνάρτησής μας, θα πρέπει να θυμηθούμε την μορφή που παρουσιάζουν ασυμπτωτικά οι πίδακες. Το κύριο χαρακτηριστικό τους, για σχετικιστικές και μη ταχύτητες, είναι πως διατηρούν το σχήμα και την εστίασή τους για πολύ μεγάλες αποστάσεις, ακόμη και για πολλά  $Mpc$  αν μιλάμε για AGN jets. Ουσιαστικά αποκτούν κυλινδρικό σχήμα για μεγάλες αποστάσεις και όπως μπορούμε να δούμε στην ανάλυση του Vlahakis 2004 (2), σε αυτήν την περίπτωση η bunching function παίρνει ασυμπτωτικά την τιμή  $\sim 1$ . Στην ίδια εργασία βλέπουμε επίσης ότι τιμές του  $S_{max} \sim 2$  με  $3$  είναι αποδεχτές.



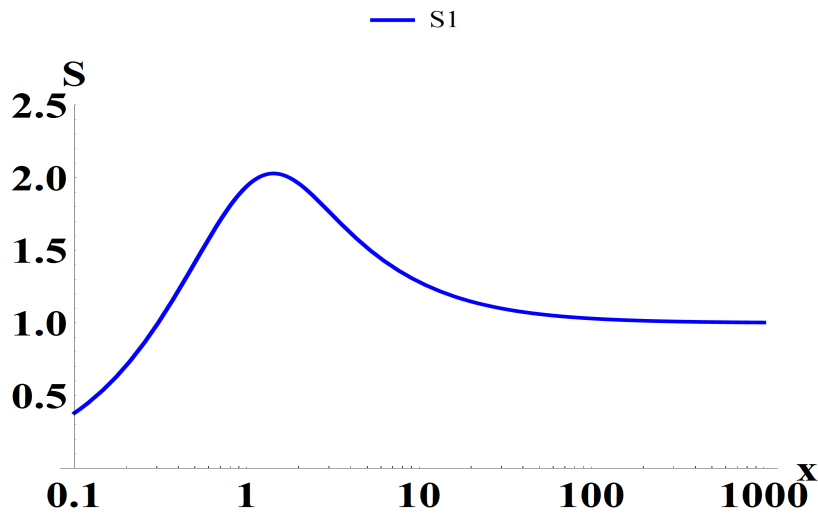


Figure 6: Παράδειγμα bunching function  $S_1$ . Παρατηρούμε το μέγιστο και την αργή πτώση για μεγάλα  $x$  (αποστάσεις σε κυλίνδρους φωτός).

## 5.2 Απόδοση της επιτάχυνσης

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε αρκετά plots της wind equation και της συνάρτησης  $S$  τόσο για γενική, όσο και για ειδική σχετικότητα, ώστε να δούμε τη συμπεριφορά των λύσεών μας στην περίπτωση των δύο φορμαλισμών. Υπενθυμίζουμε ότι θα δουλέψουμε στην περίπτωση της χρονικά σταθερής, κρύας ροής για μαγνητισμένες αξισυμμετρικές εκροές. Τόσο στην περίπτωση της ειδικής, όσο και τις γενικής σχετικότητας, θα μετράμε τις αποστάσεις σε μονάδες κυλίνδρου φωτός. Αυτό μας δίνει το πλεονέκτημα να δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο ανεξαρτήτως κλίμακας αλλά και να βλέπουμε άμεσα κάθε φορά το πλάτος του jet στο σημείο που ολοκληρώνεται η επιτάχυνση της ροής. Εδώ πρέπει να τονίσουμε, ότι στην περίπτωση της γενικής σχετικότητας, μπορούμε να πάρουμε και την σφαιρική απόσταση, μετρημένη σε μονάδες μάζας του κεντρικού αντικειμένου. Δεν θα το κάνουμε εδώ, ωστόσο αυτό μας διδάσκει ότι η μάζα του κεντρικού αντικειμένου αυτομάτως καθορίζει την κλίμακά μας. Όλους τους υπολογισμούς μας τους κάναμε χρησιμοποιώντας τη Mathematica, όπου και εκμεταλλευτήκαμε την ακρίβεια που μας προσφέρει αυτή η εφαρμογή στους υπολογισμούς μας.

**Σημείωση** Σε όλους τους παρακάτω υπολογισμούς θα χρησιμοποιούμε τις παρακάτω τιμές, όπου χρειάζεται, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά:

- $\Omega = 0.5 \cdot \omega_{horizon}$
- $\mu = 100$
- $a = 1 \cdot maza$
- $x_A = 0.998$

Προφανώς, μηδενίζοντας την μάζα της μελανής οπής, τα αποτελέσματά μας ταυτίζονται με όσα περιμένουμε από την ειδική σχετικότητα

Κατ' αρχάς, θα δούμε ορισμένες περιπτώσεις (σε ειδική σχετικότητα), όπου θα φανεί η σημασία των όσων είπαμε προηγουμένως για τον λόγο ( $S_\infty/S_{max}$ ). Η εικόνα (7) μας δίνει την γραφική παράσταση των ακόλουθων συναρτήσεων  $S$  για διαφορετικό  $S_{max}$  και τις ισούψεις της Wind equation αντίστοιχα:

- $S_2 = 4 \tan(x) - \frac{3x}{2+x}$ , με συνεχή μπλε γραμμή,

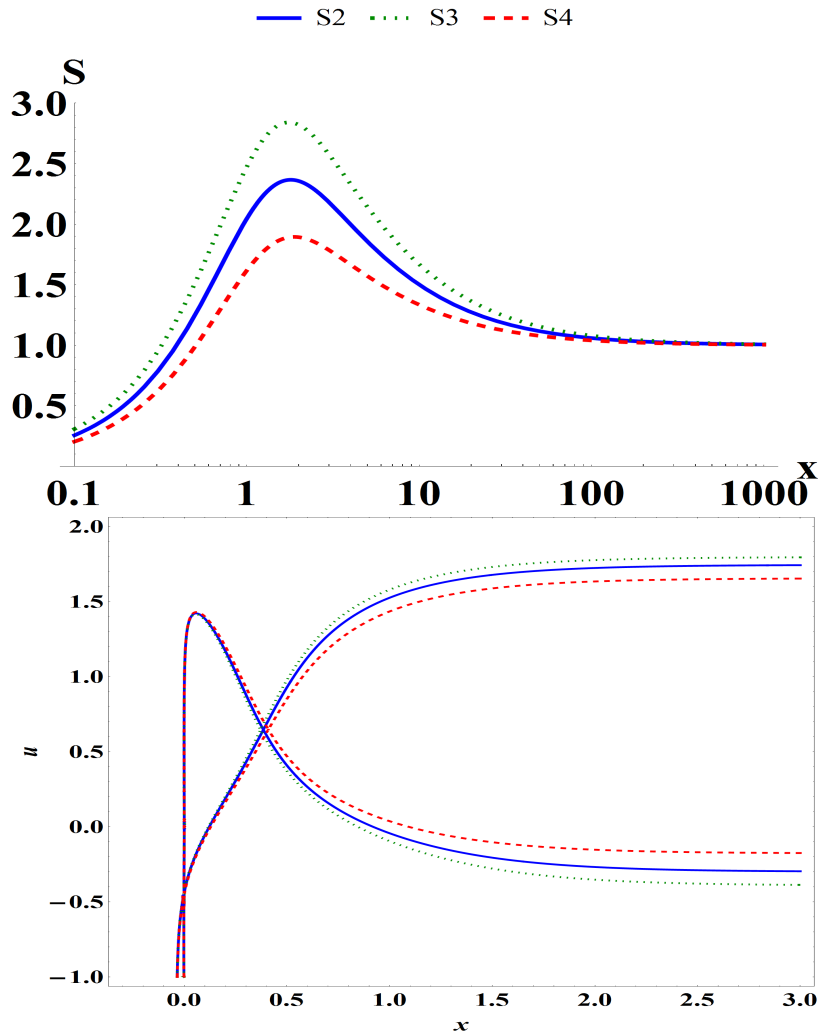


Figure 7: Πάνω: Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $S$ . Κάτω: Ισοϋψείς της wind equation. σε λογαριθμική κλίμακα.

- $S_3 = 5 \tan(x) - \frac{4x}{2+x}$ , με πράσινη στικτή γραμμή,
- $S_4 = 3 \tan(x) - \frac{2x}{2+x}$ , με πορτοκαλί διακεκομμένη γραμμή

Όπως το περιμέναμε, για μεγαλύτερο  $S_{max}$  έχουμε και μεγαλύτερη επιτάχυνση. Τίποτα το ιδιαίτερο εδώ. Παρατηρούμε επίσης, όπως θα δούμε και στα υπόλοιπα, ότι το σημείο που παρουσιάζεται το  $S_{max}$  είναι κοντά στο fast σημείο. Η εικόνα (8) μας δίνει την γραφική παράσταση των ακόλουθων συναρτήσεων  $S$  για διαφορετικό  $S_\infty$  και τις ισοϋψείς της Wind equation αντίστοιχα, όπου και βλέπουμε ότι για μεγαλύτερο  $S_\infty$  έχουμε μικρότερη επιτάχυνση:

- $S_5 = \frac{4.4 \tan(x)}{(x+1)} - \tanh(x)$ , με συνεχή μπλε γραμμή,
- $S_6 = \frac{3 \tan(x)}{(x+1)} - 1.6 \tanh(x)$ , με πράσινη στικτή γραμμή,

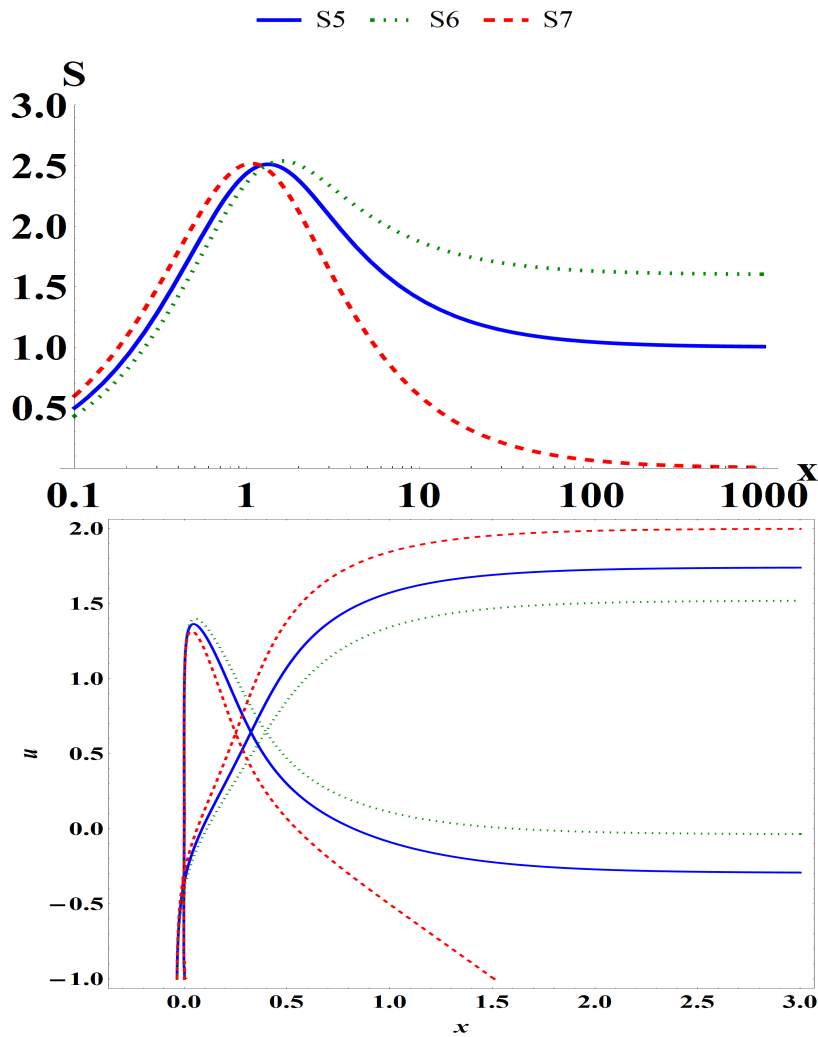


Figure 8: Πάνω: Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $S$ . Κάτω: Ισοϋψείς της wind equation. σε λογαριθμική κλίμακα.

- $S_7 = \frac{6.6 \tan(x)}{(x+1)} - 0 \tanh(x)$ , με πορτοκαλί διακεκομμένη γραμμή

Στη συνέχεια θα κάνουμε αντιπαραβολή μιας μονοτονικά φθίνουσας λύσης, παρόμοιας συμπεριφοράς με τις αντίστοιχες που χρησιμοποίησαν οι Fendt και Oyed 2004, με δύο «σύννομες» λύσεις που συμφωνούν με τη θεωρία (σχήμα 9). Παρατηρούμε ότι όλες οι λύσεις μας δίνουν μια καλή επιτάχυνση, κοντά στην επιθυμητή μορφή. Το γεγονός ότι οι μονοτονικές συναρτήσεις μας δίνουν καλές μορφές λύσεων, με πολύ λιγότερο κόπο υπολογισμού, εξηγεί γιατί είναι οι πρώτες πετυχημένες λύσεις που έδωσαν ικανοποιητικά υψηλές επιταχύνσεις σε πεπερασμένη απόσταση.

- $S_8 = 2.1x^{-0.1}$ , όπου είναι η λύση του Fendt με συνεχή μπλε γραμμή,
- $S_9 = 3x \cos(x)^{-2} + \tanh(x)$ , με πράσινη στικτή γραμμή.
- $S_{10} = 4.5x \exp(-x) + 0.5 \tanh(x)$ , με πορτοκαλί διακεκομμένη γραμμή

Δεν έχουμε να δούμε και πολλά παραπάνω πάνω στο θέμα αυτό γύρω από την ειδική σχετικότητα, εκτός από μια πραγματική λύση. Στο σχήμα (10), παρουσιάζουμε μια πραγματική λύση του πλήρους

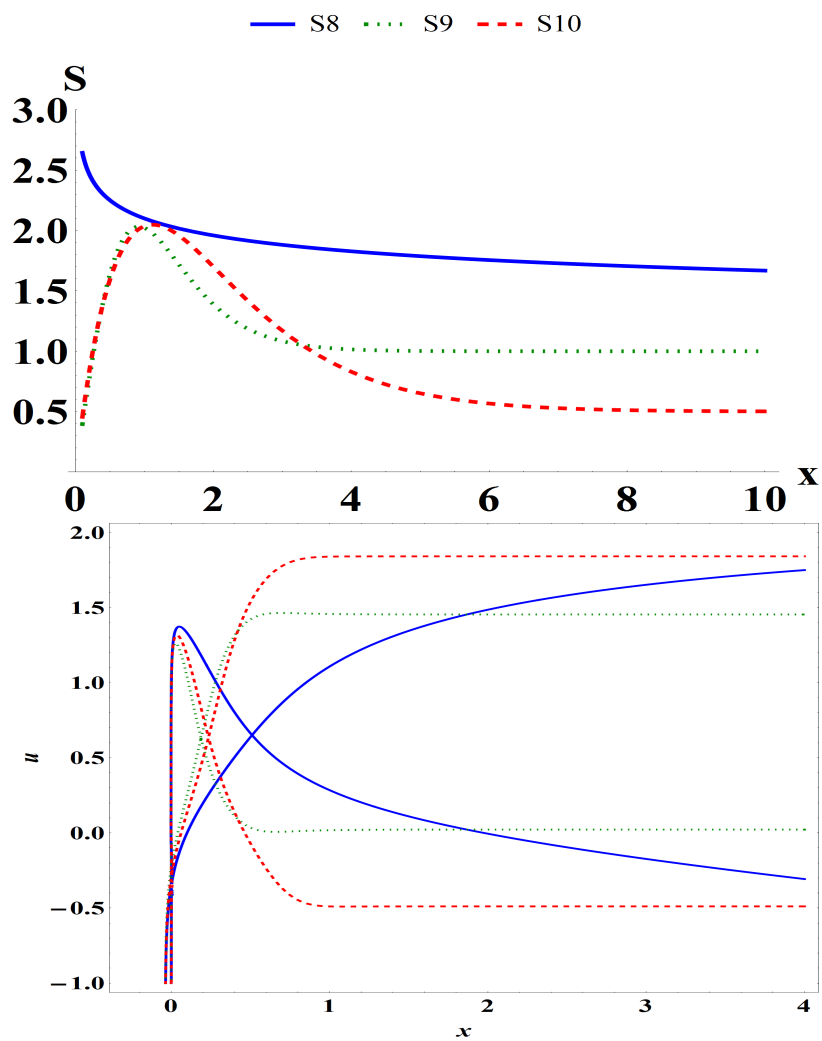


Figure 9: Πάνω: Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $S$ . Κάτω: Ισοϋψείς της wind equation, σε λογαριθμική κλίμακα.

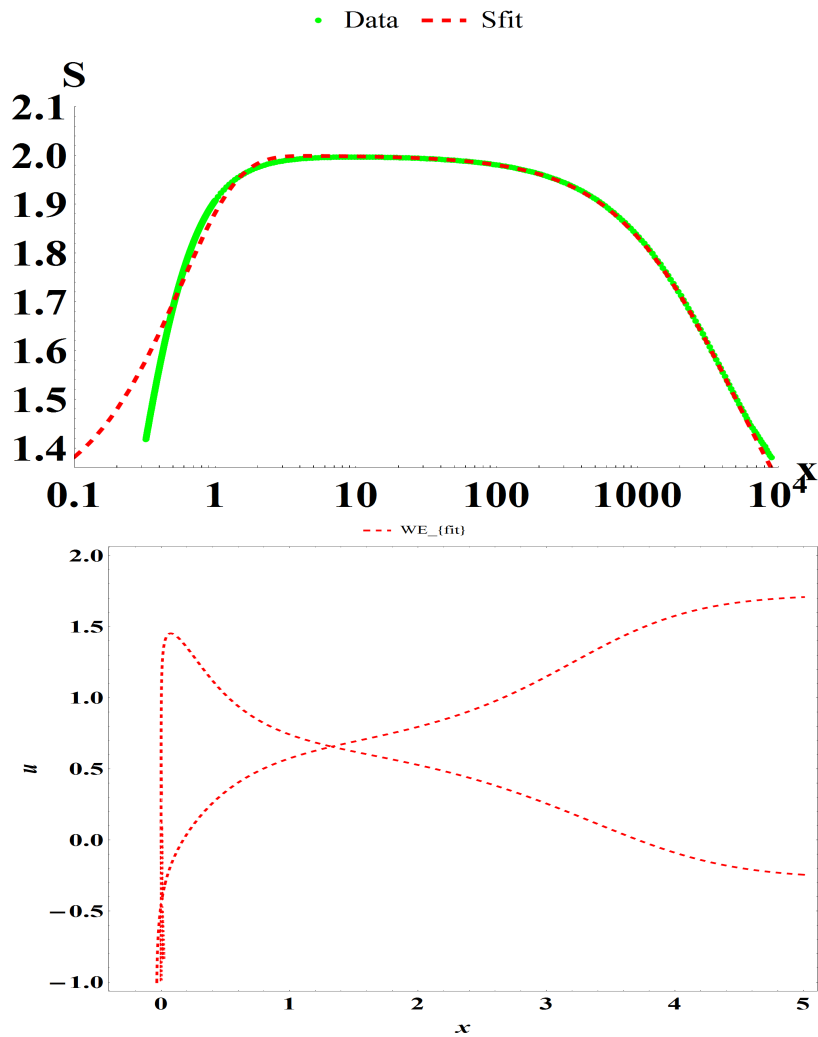


Figure 10: Πάνω: Η πειραματική συνάρτηση  $S_{sims}$  (με πράσινο) και η προσαρμοσμένη συνάρτηση  $S_{fit}$ , με κόκκινη διακεκομμένη γραμμή. Κάτω: Ισοϋψείς της wind equation σε λογαριθμική κλίμακα για την αντίστοιχη συνάρτηση.

προβλήματος (και της transfield εξίσωσης) όπως προέκυψε από τις προσομοιώσεις. Στο ίδιο επίσης γράφημα παρουσιάζουμε και τη συνάρτηση

$$S_{fit} = 2 \tanh(x + 0.75) - \frac{x}{(5000 + x)} \quad (178)$$

την οποία και προσαρμόσαμε πάνω στα δεδομένα, για να λύσουμε την Wind equation, σε ειδική σχετικότητα πάντα. Όπως παρατηρούμε, η πλήρης λύση δεν παρουσιάζει μεγάλες διαφορές, ποιοτικά, σε σχέση με τις λύσεις που δουλεύουμε εμείς στην εργασία. Η μόνη διαφορά είναι ότι η πλήρης λύση πετυχαίνει την επιτάχυνση σε μεγαλύτερες αποστάσεις από τις δικές μας, πράγμα ωστόσο που καθορίζεται από το φθίνον κομμάτι της  $S$  και άρα είναι εύκολο στο να επαναληφθεί και από τις δικές μας συναρτήσεις. Ουσιαστικά, αν συγκρίνουμε και με τις προηγούμενες περιπτώσεις που είδαμε, όσο πιο γρήγορα «πέφτει» η  $S$ , τόσο πιο γρήγορα φτάνουμε στην μέγιστη ταχύτητα ροής. Κάτι αντίστοιχο βλέπουμε και στις εργασίες των Komissarov et al. 2007 και Komissarov et al. 2009 όπου έχουμε αριθμητικές προσομοιώσεις αξιsymμετρικών μαγνητισμένων σχετικιστικών πιδάκων. Εκεί η buching function υπολογίζεται απ' ευθείας από το πολοϊδές μαγνητικό πεδίο, όπως το τελευταίο προέκυψε από

τις global προσομοιώσεις του jet. Φαίνεται λοιπόν ότι η ανάλυση που έχουμε κάνει είναι σωστή και πως η δουλειά μας δεν είναι αστήρικτη. Ο λόγος που εμείς θα προτιμήσουμε, κυρίως, συναρτήσεις  $S$  με πιο «σύντομο» φθίνον κομμάτι, επομένως και με πιο γρήγορη επιτάχυνση, είναι καθαρά τεχνικό ζήτημα της Mathematica, καθώς όσο πιο γρήγορα πέφτει η συνάρτηση  $S$ , τόσο πιο εύκολη είναι η κατασκευή της συνάρτησης ροής  $A$ . Και η συνάρτηση ροής, είναι απαραίτητη αν θέλουμε να λύσουμε την Wind equation σε χωρόχρονο Kerr, όπως και κάνουμε παρακάτω. Ωστόσο θα κατασκευάσουμε και ένα  $A$  εμπνευσμένο από το  $S_{fit}$ , όπως θα δούμε παρακάτω.

Η πορεία που θα ακολουθήσουμε τώρα με την περίπτωση της γεωμετρίας Kerr δεν είναι και πολύ διαφορετική. Για αρχή θα επαληθεύσουμε, ξανά, την σχέση μεταξύ του λόγου ( $S_{\infty}/S_{max}$ ) και της επιτάχυνσης και στη συνέχεια θα δούμε μερικές ακόμη περιπτώσεις με τα δυναμικά τους. Θα ελέγξουμε επίσης το τι γίνεται αν αλλάξουμε την τιμή της ειδικής στροφορμής της μελανής οπής, την αριθμητική τιμή της συνάρτησης ροής  $A$  ή ακόμα την τιμή του ολοκληρώματος της γωνιακής ταχύτητας της ροής. Στο σχήμα (11) φαίνονται δύο περιπτώσεις συναρτήσεων ροής, με τα αντίστοιχα  $S - plots$  και τις ισούψεις της ταχύτητας της ροής. Παρατηρούμε και πάλι ότι όσο πιο μικρός είναι ο γνωστός μας λόγος, τόσο μεγαλύτερη η επιτάχυνση που πετυχαίνουμε.

- $A_1 = r[\csc(\theta)^2 \tan(\theta/2)^{3 \cos(\theta)}] = 2$
- $A_2 = r[\csc(\theta)^{1.5} \tan(\theta/2)^{3 \cos(\theta)}] = 2$

Παρακάτω παρουσιάζουμε ακόμη μερικές λύσεις για τυχαίες τιμές της συνάρτησης ροής (σχήμα 12). Τονίζουμε ότι η δεύτερη συνάρτηση προέρχεται από το τη buching function

$$S = 2 \tanh(x + 0.75) - \frac{x}{(5 + x)} \quad (179)$$

που με την σειρά της είναι εμπνευσμένη από προέρχεται από την  $S_{fit}$ , με τη διαφορά ότι αυτή παρουσιάζει ταχύτερη πτώση. Την επιλέξαμε για καθαρά τεχνικούς λόγους, και πιο συγκεκριμένα, διότι σε αυτήν μπορούμε να σχεδιάσουμε και το  $A$  χωρίς προβλήματα.

- $A_3 = r \tan(\theta) = 10$
- $A_{4fit} = r \left[ -\frac{\cot(\frac{\theta}{2}) \operatorname{sech}(0.75 - \ln(\tan(\frac{\theta}{2})))^2}{[-5 + \ln(\tan(\frac{\theta}{2}))]^5} \right] = 0.0005$

Όπως είδαμε και παραπάνω, όσο πιο γρήγορα γίνεται η πτώση της συνάρτησης  $S$ , τόσο πιο γρήγορα καταλήγουμε στην μέγιστη ταχύτητα. Τα συμπεράσματά μας δεν φαίνεται να αλλάζουν από την παρουσία της βαρύτητας, παρόλο που βρισκόμαστε αρκετά κοντά στην μελανή οπή. Αυτό που κυρίως παρατηρούμε, είναι ότι παρουσία βαρύτητας, για ίδια θέση του μεγίστου της  $S_r$ , το σημείο fast εμφανίζεται σε ελαφρώς μεγαλύτερες αποστάσεις από τον άξονα, σε σχέση με την περίπτωση της επίπεδης γεωμετρίας. Κατά τα άλλα, το προφίλ ταχυτήτων στην superfast περιοχή, δεν φαίνεται να επηρεάζεται από την βαρύτητα, όπως ήταν αναμενόμενο. Σε αυτό το σημείο, καλό είναι να δούμε και την συμπεριφορά της Wind Equation για επίπεδο ή και καμπύλο χώρο, αν χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση ροής  $A_{4fit}$ . Στο σχήμα (ρεφφιγ:ΣΑ4φιτ) βλέπουμε τις συναρτήσεις  $S$  και  $S_r$  (απουσία και παρουσία βαρύτητας αντίστοιχα) για το εν λόγω δυναμικό, καθώς και τις ισούψεις της ταχύτητας για τις δύο αυτές περιπτώσεις. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι έχουμε αντίστοιχη συμπεριφορά με τα υπόλοιπα δυναμικά μας, με τις μικροδιαφορές που παρατηρούνται σε κάθε περίπτωση.

Αυτό που θα δούμε τώρα (σχήμα 14), είναι το πως αλλάζει η επιτάχυνση της ροής καθώς κινούμαστε από γραμμή σε γραμμή. Θα παρουσιάσουμε δηλαδή λύσεις της Wind equation για διαφορετικές τιμές μιας συγκεκριμένης συνάρτησης

$$A_5 = r \left[ e^{[3.3 - 3.3 \ln(\tan(\frac{\theta}{2}))] \tan(\frac{\theta}{2})} \sin(\theta) \right]. \quad (180)$$

- $A_{5i} = 40$
- $A_{5ii} = 50$

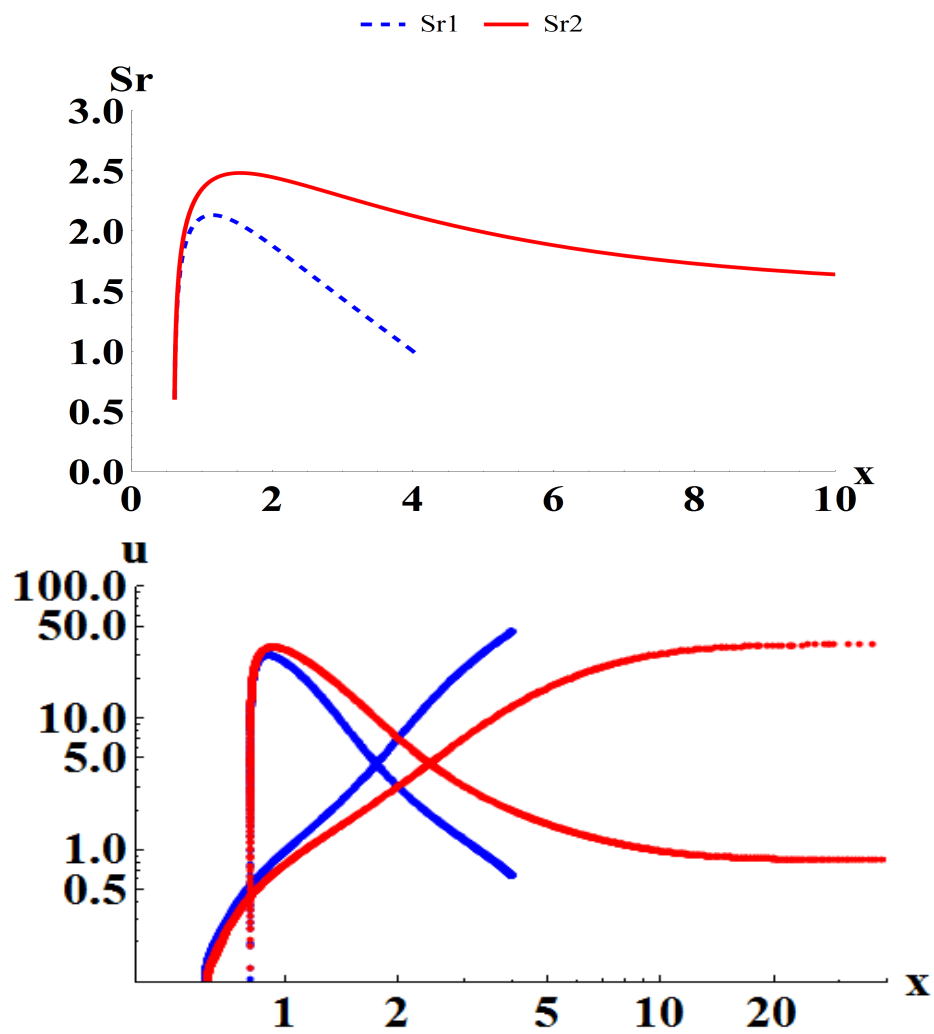


Figure 11: Πάνω: Οι αντίστοιχες, για κάθε  $A$ , συναρτήσεις  $S_r$ . Κάτω: Ισοϋψείς της wind eq. σε λογαριθμική κλίμακα.

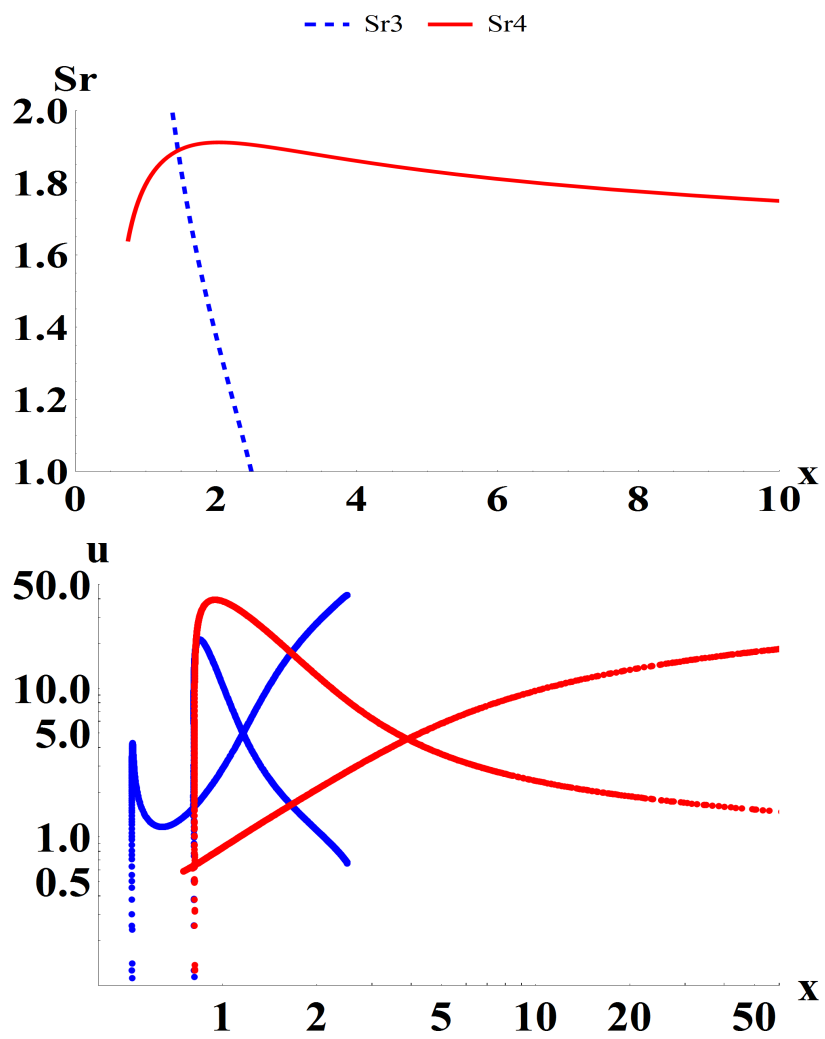


Figure 12: Πάνω: Οι αντίστοιχες, για κάθε  $A$ , συναρτήσεις  $S_r$ . Κάτω: Ισοϋψείς της wind eq. σε λογαριθμική κλίμακα.



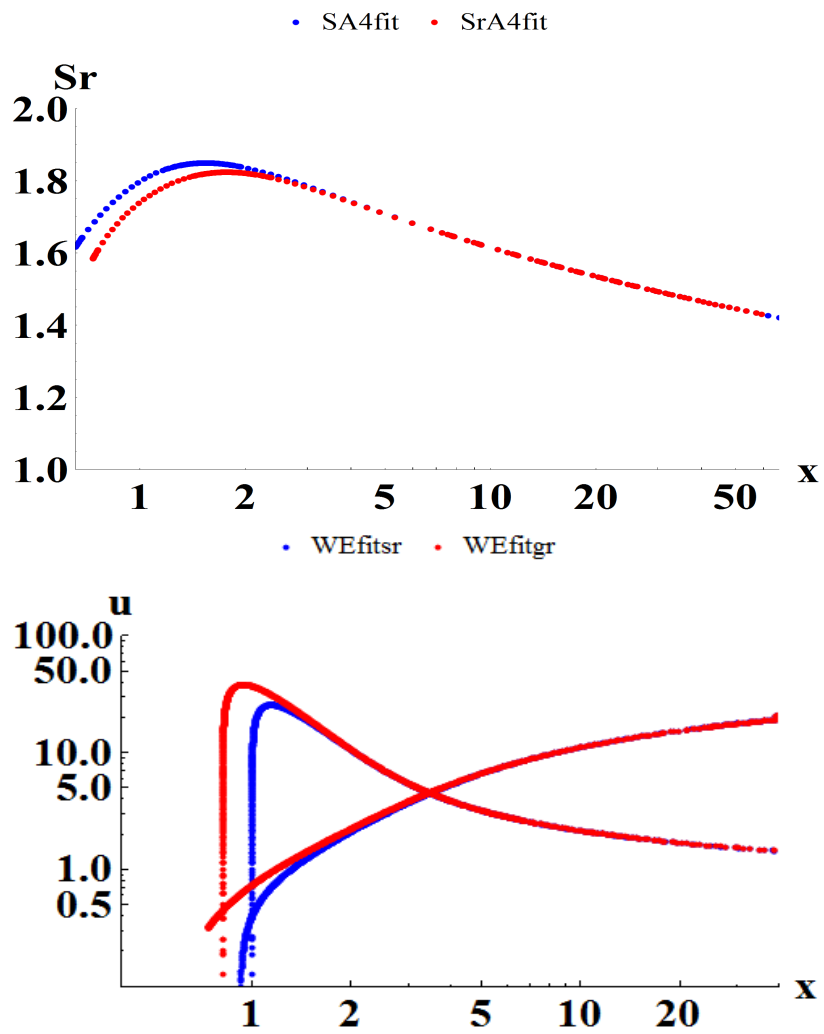


Figure 13: Πάνω: Οι συναρτήσεις  $S_r$  και  $S$  για το δυναμικό  $A_{4fit}$ . Κάτω: Οι αντίστοιχες ισοϋψείς της wind eq. σε λογαριθμική κλίμακα.

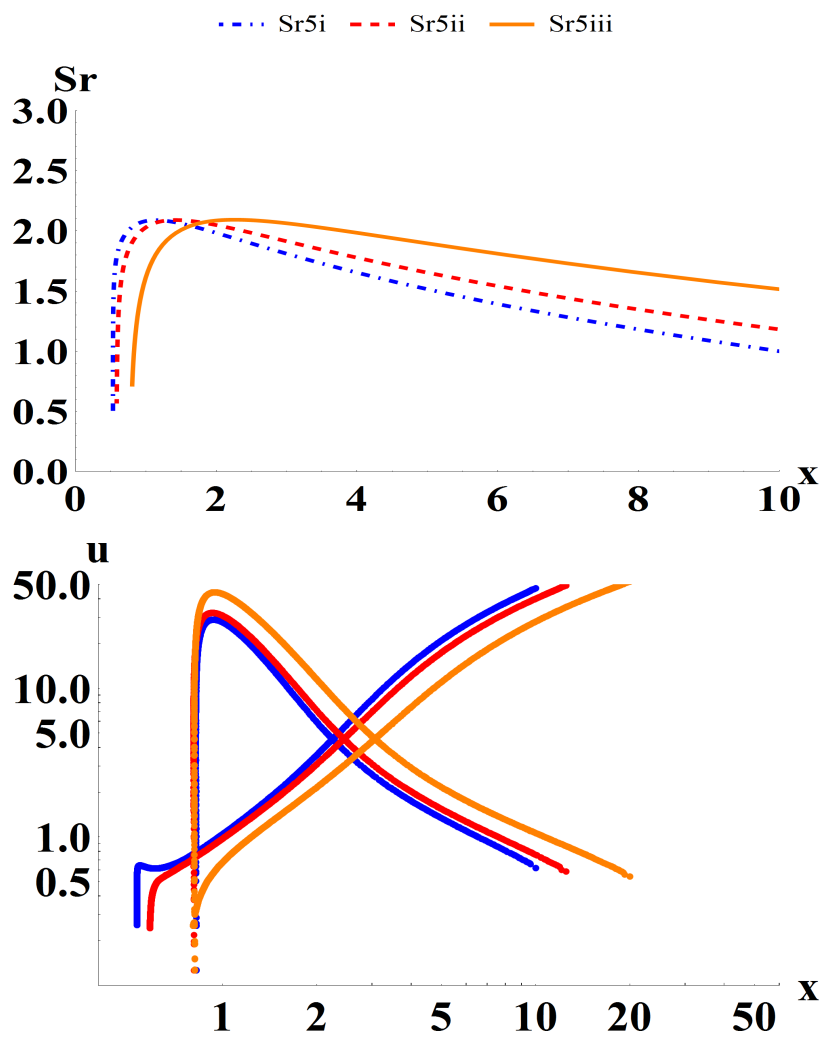


Figure 14: Πάνω: Οι αντίστοιχες, για κάθε  $A$ , συναρτήσεις  $S_r$ . Κάτω: Ισοϋψείς της wind eq. σε λογαριθμική κλίμακα.

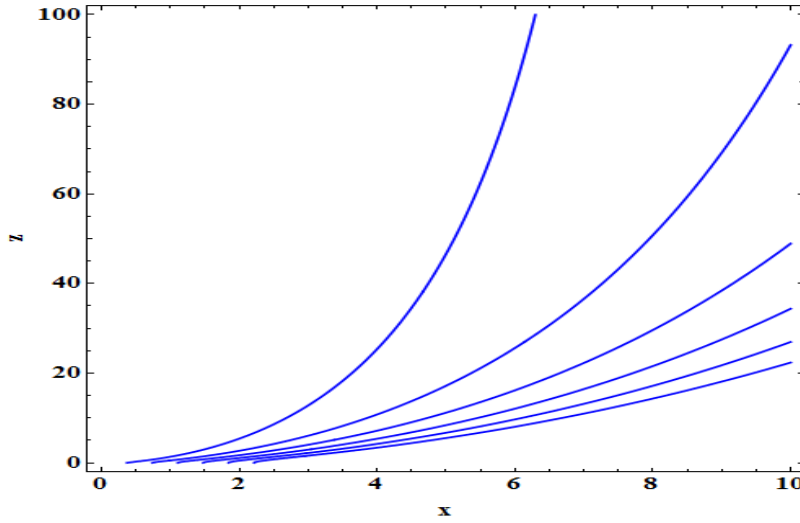


Figure 15: Οι δυναμικές γραμμές πεδίου που αντιστοιχούν στη συνάρτηση ροής  $A_5$ .

- $A_{5iii} = 80$

Βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται η τιμή της συνάρτησης ροής, τόσο πιο πλατύ γίνεται το jet ενώ παράλληλα μεγαλώνει, όπως είναι φυσικό, η κυλινδρική απόσταση στην οποία εμφανίζεται το σημείο fast. Από μόνο του αυτό δεν λέει πολλά πράγματα, αν δεν ξέρουμε το σχήμα των δυναμικών γραμμών, ή για την ακρίβεια της προβολής τους στο πολυϊδές επίπεδο, που ταυτίζεται με την προβολή των γραμμών ροής στο ίδιο επίπεδο. Στο σχήμα (15) βλέπουμε το προφίλ της παραπάνω συνάρτησης ροής  $A_5$ , σε ευκλείδειο χώρο. Όσο κινούμαστε μακριά από τον άξονα, η τιμή του  $A$  ανεβαίνει. Το δυναμικό αυτό, όπως έχουμε ήδη δει, μας δίνει μια buching function που τείνει στη μονάδα για μεγάλες αποστάσεις (και μικρές γωνίες). Παρατηρούμε ότι το σχήμα των γραμμών τείνει να γίνει κυλινδρικό, όπως περιμέναμε και από το άρθρο Vlahakis 2004 (2).

Στο σχήμα (16) σχεδιάσαμε τα  $S_r$  και την W.E. που προκύπτουν για το δυναμικό

$$A_1 = r[\csc(\theta)^2 \tan(\theta/2)^{3 \cos(\theta)}] = 2 \quad (181)$$

μόνο που αυτή τη φορά, αλλάξαμε σε κάθε περίπτωση την τιμή της ειδικής στροφορμής της μελανής οπής,  $\alpha$ .

- $\alpha_i = 1 M$
- $\alpha_{ii} = 0$

Όπως παρατηρούμε, όσο μειώνεται το  $\alpha$ , δεν αλλάζει η θέση του fast σημείου ή η επιτάχυνση. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι αλλάζει η μορφή του προφίλ ταχυτήτων όσο πλησιάζουμε στην εργόσφαιρα. Τελικά, για  $\alpha = 0$ , η γεωμετρία του προβλήματος αλλάζει σε Schwarzschild. Η μορφή της W.E. γίνεται τότε παρόμοια με αυτήν που ξέρουμε από την περίπτωση του ανέμου Parker.

Στο σχήμα (17) σχεδιάσαμε τα  $S_r$  και την W.E. που προκύπτουν για το δυναμικό

$$A_1 = r[\csc(\theta)^2 \tan(\theta/2)^{3 \cos(\theta)}] = 2 \quad (182)$$

μόνο που αυτή τη φορά, αλλάξαμε σε κάθε περίπτωση την τιμή του ολοκληρώματος  $\Omega$  για  $x_A = 0.996$

- $\Omega_i = 1/2 \omega_{horizon}$ , με μπλε διακεκομμένη γραμμή,
- $\Omega_{ii} = 1/4 \omega_{horizon}$ , με κόκκινη συνεχή γραμμή.

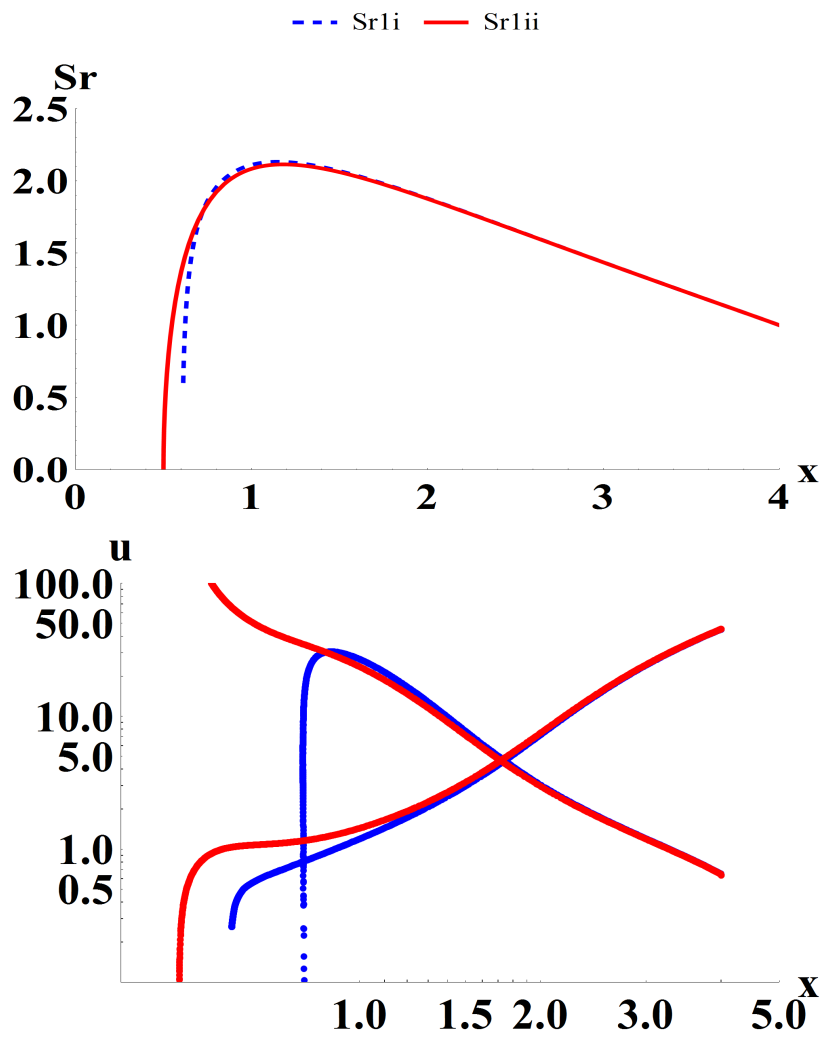


Figure 16: Πάνω: Οι αντίστοιχες, για κάθε  $A$ , συναρτήσεις  $S_r$ . Κάτω: Ισοϋψείς της wind eq. σε λογαριθμική κλίμακα.

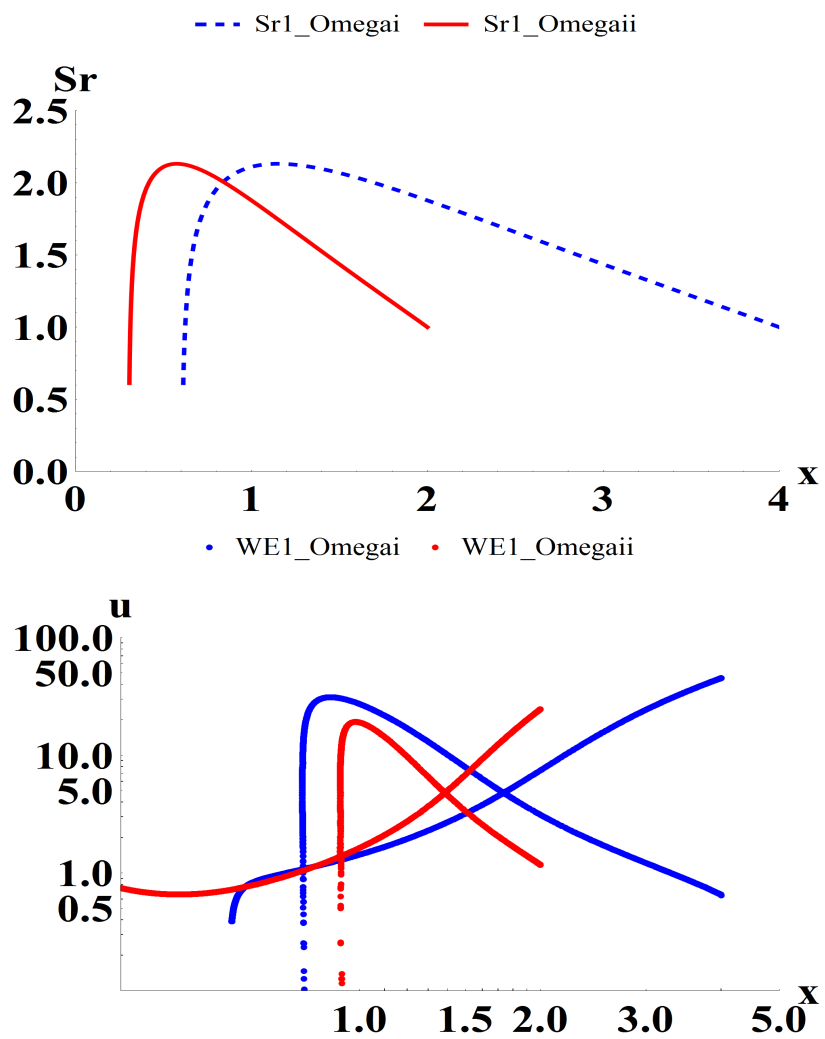


Figure 17: Πάνω: Οι αντίστοιχες, για κάθε  $A$ , συναρτήσεις  $S_r$ . Κάτω: Ισοϋψείς της wind eq. σε λογαριθμική κλίμακα.

Παρατηρούμε τελικά, ότι όσο μειώνεται η τιμή του ολοκληρώματος  $\Omega$ , τόσο μειώνεται η τελική ταχύτητα που πετυχαίνουμε αλλά και τόσο πλησιάζει η θέση του Fast σημείου τον άξονα περιστροφής.

Λίγο πριν τελειώσουμε θα δείξουμε τι συμβαίνει όταν η συνάρτηση  $S$  που παίρνουμε δεν παρουσιάζει πτωτικό κομμάτι. Στο σχήμα (18) βλέπουμε την απλή συνάρτηση  $S$  και την γενικευμένη (κάτω) συνάρτηση  $S_r$  για το δυναμικό από τη λύση του Michel καθώς και για ένα άλλο που παρουσιάζει παραβολικό σχήματος γραμμές, όπως φαίνεται και στο σχήμα (19):

- $A_{Michel} = [1 - \cos(\theta)]$
- $A_{parabolic} = r[1 - \cos(\theta)]$

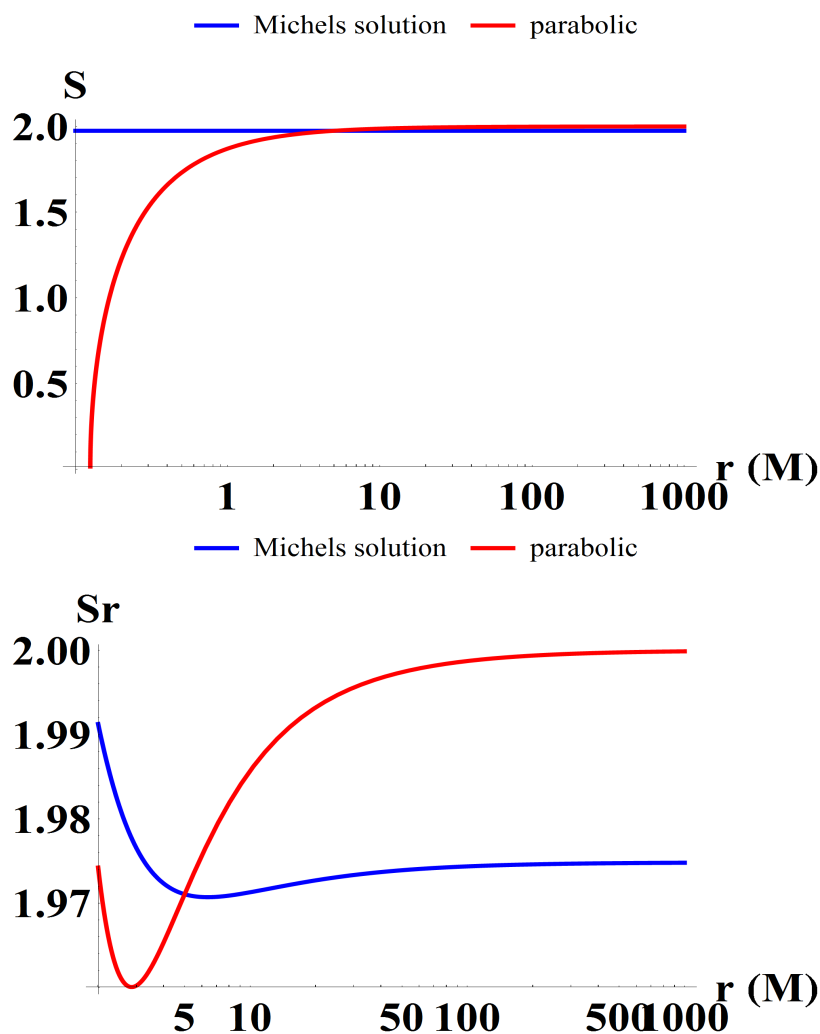


Figure 18: Πάνω: Οι συναρτήσεις  $S$  για τα  $A_{Michel}$  και  $A_{parabolic}$ . Κάτω: Τα ίδια για την  $S_r$ .

Στο σχήμα (;;) βλέπουμε τις ισοϋψείς της ταχύτητας για τα δύο προηγούμενα δυναμικά, πάνω για την ειδική σχετικότητα και κάτω για τη γενική σχετικότητα. Αυτό που παρατηρούμε, είναι ότι τα δυναμικά αυτά είναι τελείως αντιπαραγωγικά, όσο αναφορά την επιτάχυνση. Αυτό συμβαίνει διότι η ροή επιταχύνεται κυρίως στην superfast περιοχή, ενώ στην περίπτωση μας το fast σημείο βρίσκεται στο άπειρο. Περισσότερο να τονίσουμε ότι η έλλειψη μεγίστου και (κυρίως) πτωτικού κομματιού στην συνάρτηση  $S$  παίζει καθοριστικό ρόλο στην μη αποδοτικότητα του μηχανισμού, όπως βλέπουμε και στον Komissarov et al., 2007 και 2009.

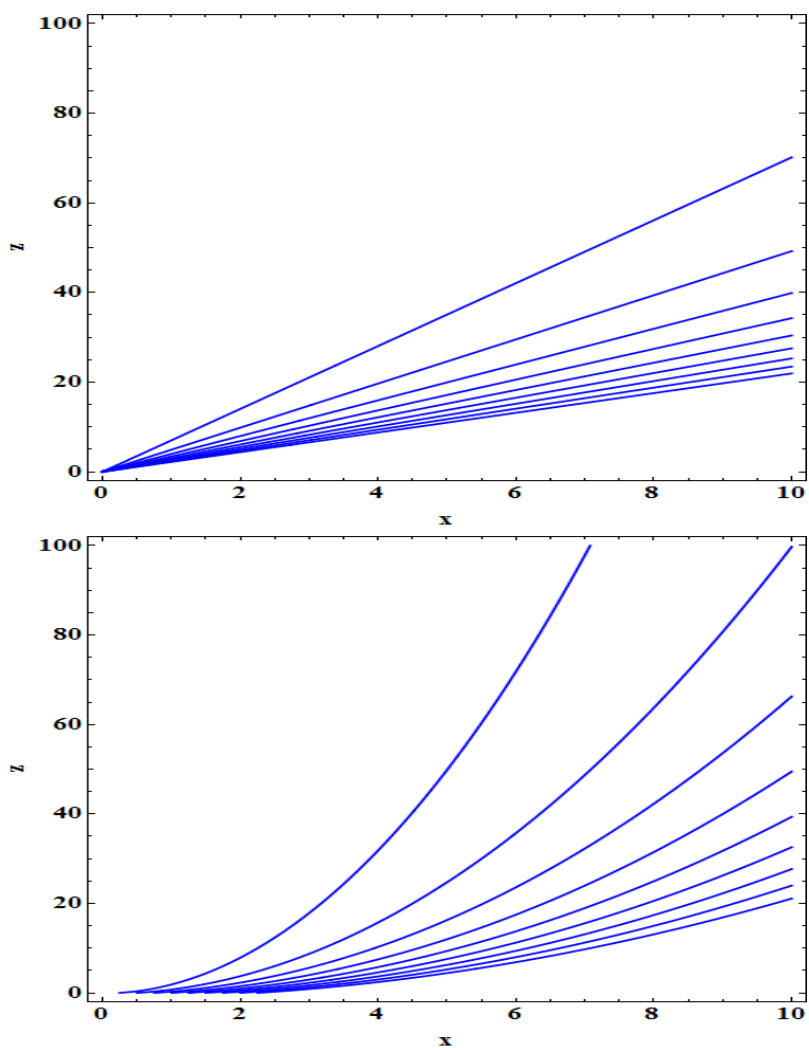


Figure 19: Οι δυναμικές γραμμές για τα  $A_{Michel}$  (πάνω) και  $A_{parabolic}$  (κάτω).

Τέλος, στο σχήμα (21) θα παρουσιάσουμε τη γεωμετρία του πεδίου που δίνουν τρία επιπλέον διαφορετικά δυναμικά που έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα, τα

- $A_2 = r[\csc(\theta)^{1.5} \tan(\theta/2)^{3 \cos(\theta)}]$ , με μπλε γραμμή
- $A_3 = r \tan(\theta)$ , με πράσινη γραμμή και το
- $A_4 = r \left[ -\frac{\cot(\frac{\theta}{2}) \operatorname{sech}(0.75 - \ln(\tan(\frac{\theta}{2})))^2}{[-5 + \ln(\tan(\frac{\theta}{2}))]^5} \right]$  με πορτοκαλί γραμμή.

Τα δυναμικά αυτά τα δείχνουμε, για να τονίσουμε τη σημασία που παίζει η συμπεριφορά της  $S$ , στη γεωμετρία του πεδίου και της ροής κατ' επέκταση. Όλες οι buching functions που δοκιμάσαμε, μας οδηγούν σε πεδίο που τείνει να πάρει κυλινδρική ή άλλη παραπλήσια μορφή.

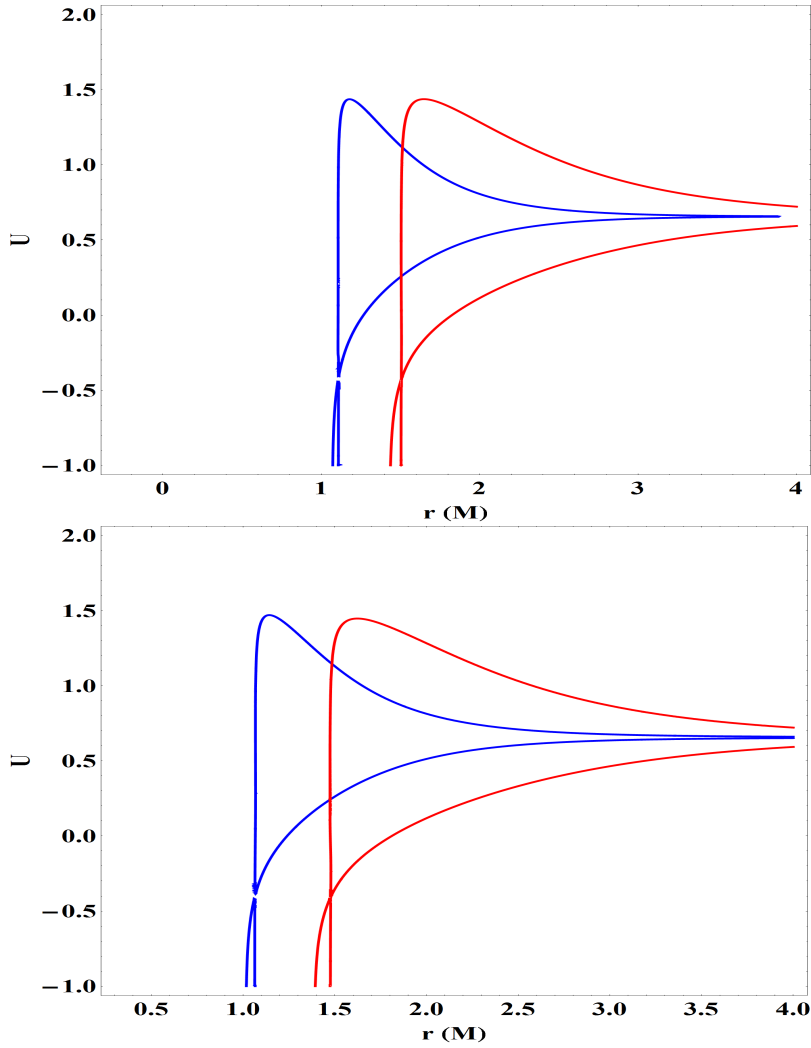


Figure 20: Ισοϋφείς της ταχύτητας για τα  $A_{Michel}$  και  $A_{parabolic}$ , πάνω απουσία και κάτω παρουσία βαρύτητας.

## 6 Η εξίσωση Grad Shafranov

Μέχρι στιγμής, λύσαμε την εξίσωση του ανέμου, τη λεγόμενη Wind equation, χάρη στην οποία είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ποιο είναι το προφίλ ταχυτήτων της λύσης μας γραμμής ροής. Βρήκαμε αναλυτικά τύπους που μας επιτρέπουν να επιλέξουμε ρεαλιστικές μορφές της συνάρτησης  $S$  και μέσω αυτής, ρεαλιστικές μορφές του μαγνητικού δυναμικού. Μπορούμε ακόμη να προβλέψουμε τη απόδοση της επιτάχυνσης της ροής μας για κάθε διαφορετική γεωμετρία του πεδίου. Αυτό όμως που δεν μπορούμε να κάνουμε, είναι να κατασκευάσουμε και μια λύση σε δυναμική ισορροπία με το περιβάλλον. Αυτό εξαρτάται από τις δυνάμεις που ασκούνται στην εκροή, επομένως και από την ακριβή μορφή του  $A$ . Εμείς μπορεί να είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε αληθοφανείς συναρτήσεις ροής, μόνο όμως μια ακριβής λύση θα οδηγήσει σε ισορροπία δυνάμεων. Και δυστυχώς, αυτό μπορεί να γίνει μόνο από την επίλυση της εξίσωσης ορμής κάθετα στις δυναμικές γραμμές, δηλαδή από την επίλυση της εξίσωσης Grad-Shafranov. Το μεγάλο πρόβλημα με την εξίσωση αυτή, είναι η εξαιρετικά σύνθετη μορφή της (ειδικά στην περίπτωση της γεωμετρία Kerr) καθώς και το γεγονός ότι η ταυτόχρονη επίλυσή της με την Wind equation είναι ακόμη δυσκολότερη.

Για να αποφύγουμε την ανάγκη υπολογισμού της λοιπόν, σκεφτήκαμε έναν τρόπο έμμεσης αντιμετώπισης



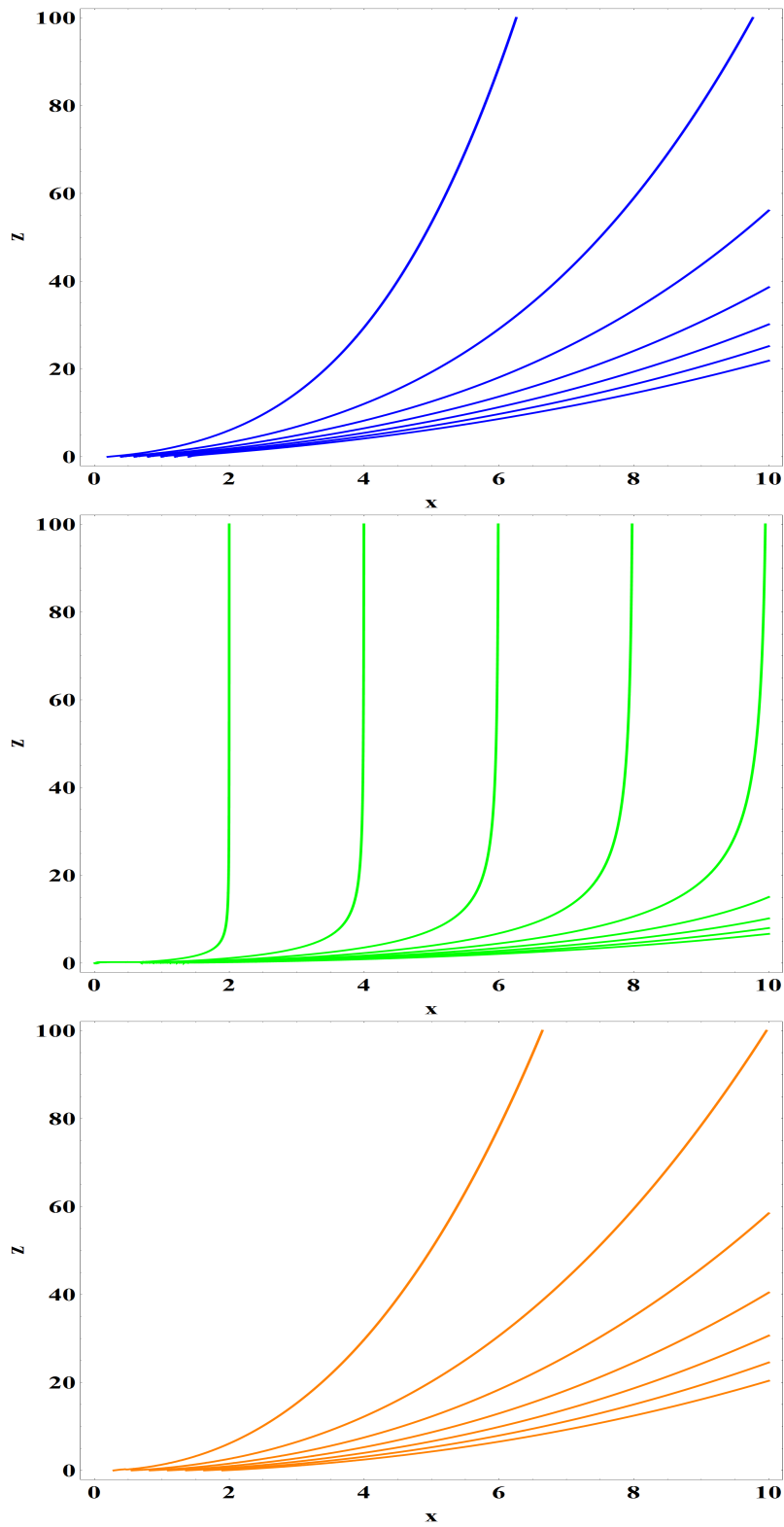


Figure 21: Οι δυναμικές γραμμές για κάθε συνάρτηση  $A$ . Από πάνω προς τα κάτω,  $A_2$ ,  $A_3$  και  $A_4$ .

της. Αυτό που θα επιχειρήσουμε, είναι η αντικατάσταση των διαφόρων δυναμικών μας και των αντίστοιχων τιμών των ολοκληρωμάτων μας και των λύσεών μας στην τελευταία, ώστε να δούμε το σφάλμα που εμφανίζεται. Αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμεύσει τόσο ως ένα μέσο για να ελέγχουμε την αξιοπιστία και την ορθότητα των αποτελεσμάτων μας, όσο και ως ένα εργαλείο για την καλύτερη κατανόηση της εξάρτησης της πλήρους λύσης από τα ολοκληρώματα και το  $A$ .

## 6.1 Δυνάμεις στο πλάσμα

Ας πάρουμε την εξίσωση διατήρησης της ορμής στην στάσιμη και αξισυμμετρική της περίπτωση (εισάγοντας τα  $c^2$ ).

$$\frac{1}{c^2 h} (\vec{S} \cdot \vec{m}) \vec{\nabla} \omega + \epsilon \vec{\nabla} \ln h + \frac{1}{h} \vec{\nabla} \cdot (h \mathbf{t}) = 0 \quad (183)$$

Αν και θεωρητικά η μορφή αυτή είναι κατάλληλη για μελέτη, εμείς έχουμε συνηθίσει σε μια διαφορετική μορφή της εξίσωσης αυτής, η οποία βολεύει ιδιαίτερα όταν ψάχνουμε να βρούμε τις δυνάμεις που δρουν στο πλάσμα. Θα τη φέρουμε λοιπόν σε εκείνη την συμβατική μορφή, ώστε να έχουμε καλύτερη εποπτεία. Απομονώνοντας τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις στο δεξί μέλος της εξίσωσης, όπως μας το δίνει και οι Thorne και Macdonald 1982, ενώ στο αριστερό κρατούμε τους όρους της ύλης, έχουμε:

$$\frac{1}{c^2 h} (\vec{S}_v \cdot \vec{m}) \vec{\nabla} \omega + \epsilon_v \vec{\nabla} \ln h + \frac{1}{h} \vec{\nabla} \cdot (h \mathbf{t}_v) = +\rho_e \vec{E} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c} \quad (184)$$

Αυτό που μας μένει να κάνουμε είναι να βρούμε τι μας δίνει το κομμάτι της ύλης. Έχουμε λοιπόν τα παρακάτω, αναπτύσσοντας τον κάθε όρο χωριστά:

$$(\vec{S} \cdot \vec{m}) \nabla^i \omega = \gamma^2 \eta_0 w v_\phi h_\phi \nabla^i \omega \quad (185)$$

$$\epsilon \nabla_i \ln h = \gamma^2 \eta_0 w \nabla_i \ln h - P \nabla_i \ln h \quad (186)$$

$$\frac{1}{h} \nabla_k (h t_i^k) = t_{i;\beta}^\beta = W_{i;\beta}^\beta + P_{;\beta} \zeta_i^\beta + P \zeta_{i;\beta}^\beta \Rightarrow \quad (187)$$

$$\frac{1}{h} \nabla_k (h t_i^k) = \frac{1}{h} \nabla_k (h W_i^k) + P_{;\beta} \zeta_i^\beta + P \nabla_i \ln h \quad (188)$$

$$\frac{1}{h} \nabla_k (h W_i^k) = \gamma \eta_0 v^k \nabla_k \left( \frac{\gamma w v^i}{c^2} \right) + \gamma w \frac{v^i}{h} \nabla_k (h \gamma \eta_0 v^k) \quad (189)$$

$$\gamma w \frac{v^i}{h} \nabla_k (h \gamma \eta_0 v^k) = 0 \quad (\text{εξ. στυ.}) \quad (190)$$

$$\gamma_i^\beta P_{;\beta} = (g_i^\beta + n^\beta n_i) \sqrt{\gamma_{\beta\beta}} \nabla^\beta P = \sqrt{\zeta_{ii}} \nabla^i P \quad (191)$$

όπου ξαναθυμίζουμε ότι το  $\sqrt{\zeta_{ii}} \nabla_i P$  δεν είναι τίποτε άλλο από μια συνιστώσα του διανύσματος της κλίσης του  $P$ . Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, μαζί με τις εξισώσεις του Maxwell, η εξίσωση ορμής του πλάσματος σε γεωμετρία Kerr παίρνει την μορφή<sup>4</sup>

$$\gamma^2 \eta_0 \frac{w}{c^2} v_\phi h_\phi \vec{\nabla} \omega + \gamma \eta_0 (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{\gamma w \vec{v}}{c^2} \right) = -\vec{\nabla} P - \gamma^2 \eta_0 w \vec{\nabla} \ln h + \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{4\pi} \vec{E} + \frac{\vec{\nabla} \times (h \vec{B})}{4\pi h} \times \vec{B} + \frac{(\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \omega) \vec{m}}{4\pi c h} \times \vec{B} \quad (192)$$

Παρατηρούμε ότι οι τρεις επιπλέον όρους που εμφανίζονται στην περίπτωση της γεωμετρίας Kerr (σε σχέση με αυτήν της ειδικής σχετικότητας) είναι οι

- Η δύναμη της βαρύτητας  $\gamma^2 \eta_0 w \vec{\nabla} \ln h$ ,
- Μια «φυγόκεντρος» δύναμη  $\gamma^2 \eta_0 \frac{w}{c^2} v_\phi h_\phi \vec{\nabla} \omega$ , που οφείλεται στο φαινόμενο του frame dragging, και

<sup>4</sup>για την υδροδυναμική περίπτωση, βλέπε βιβλίο MHD Flows in Compact Astrophysical Objects, V. S. Beskin, 2010, σελίδα 1.241

- Μια επιπλέον H/M δύναμη  $\frac{(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}\omega)\vec{m}}{4\pi ch} \times \vec{B}$ , που και αυτή οφείλεται στη περιστροφή των αδ-ρειακών συστημάτων. Αυτή μάλιστα προκύπτει από το καθαρά σχετικιστικό φαινόμενο δημιουργίας ηλεκτρικού πεδίου από ένα στάσιμο μαγνητικό πεδίο, σε γεωμετρία Kerr.

Προτού προχωρήσουμε τώρα παρακάτω, καλό θα είναι να ξαναθυμηθούμε ορισμένα πράγματα. Πρώτα απ' όλα να θυμηθούμε το σύστημα διευθύνσεων που είδαμε και στην εικόνα (;):

$$(\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}A_\phi}{|\vec{\nabla}A_\phi|}, \hat{\phi}, \hat{b}) \quad (193)$$

Μεταφέροντας όλες τις συνιστώσες στα δεξιά, ονομάζουμε την κάθε μια δύναμη:

1.  $f_1 = -\gamma^2 \eta \frac{w}{c^2} v_\phi h_\phi \vec{\nabla}\omega$
2.  $f_2 = -\vec{\nabla}P = 0$
3.  $f_3 = -\gamma^2 \eta w \vec{\nabla} \ln h$
4.  $f_4 = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}{4\pi} \vec{E}$
5.  $f_5 = \frac{\vec{\nabla} \times (h\vec{B})}{4\pi h} \times \vec{B}$
6.  $f_6 = \frac{(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}\omega)\vec{m}}{4\pi ch} \times \vec{B}$
7.  $f_7 = -\gamma \eta_0 (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{\gamma w \vec{v}}{c^2} \right)$

Οι συνιστώσες  $\hat{n}$  και  $\hat{b}$  βρίσκονται πάνω στο πολοϊδές επίπεδο, με την  $\hat{b}$  να είναι η συνιστώσα του πολοϊδούς μαγνητικού πεδίου. Αυτές οι τρεις διευθύνσεις θα μας διευκολύνουν τόσο στον υπολογισμό των εξωτερικών γινομένων, όσο και στην καλύτερη εποπτεία των δυνάμεων που επιταχύνουν και εστιάζουν τη ροή.

Δεν θα γράψουμε εδώ αναλυτικά τις συνιστώσες των δυνάμεων στην transfield διεύθυνση, για οικονομία χώρου, πάντως η διαδικασία είναι αρκετά τετριμμένη. Για να βρούμε τις συνιστώσες που μας ενδιαφέρουν, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της κλίσης, του στροβιλισμού και της απόκλισης σε τρισδιάστατο σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων, καθώς και να υπολογίσουμε ορισμένα σύμβολα Cristoffel για την «χωρική» μετρική Kerr. Θα χρησιμοποιήσουμε το δυναμικό

$$A_5 = r \left[ e^{[3.3 - 3.3 \ln(\tan(\frac{\theta}{2}))]} \tan(\frac{\theta}{2}) \sin(\theta) \right] = 11.8 \quad (194)$$

του οποίου την γεωμετρία την είδαμε και παραπάνω στο σχήμα (15) Οι καμπύλες μας πιάνουν όλη την περιοχή του ανέμου. Το κενό που παρουσιάζεται στην περιοχή του fast σημείου, έχει να κάνει με την ακρίβεια του fit που κάναμε για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση του  $\sigma_m$  συναρτήσει του  $|A|$ . Οι μορφές των ολοκληρωμάτων που επιλέξαμε είναι οι

- $\mu = 2 \cdot |A|$
- $x_A = 0.998$
- $\Omega = 1/2\omega_{horizon}$
- $\sigma_M = 0.893851 \cdot |A| + 6.10642$
- $Q(A) = 0$

όπου  $|A|$  είναι η αριθμητική τιμή της συνάρτησης ροής. Θεωρούμε ότι βρισκόμαστε σε μια περιοχή αρκετά κοντά στον άξονα περιστροφής της μελανής οπής (και στην εργόσφαιρα κατ' επέκταση), όπου το ολοκλήρωμα της γωνιακής ταχύτητας της ροής, μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν σταθερό. Ακολουθούν στο σχήμα (22) δύο plots, που απεικονίζουν την transfield εξίσωση σε κανονική μορφή (στις γεωμετρικές μονάδες που δουλεύουμε) μαζί με τις κυρίαρχες δυνάμεις  $f_4, f_5, f_7$ , οι οποίες και μας χρειάζονται σαν μέτρο σύγκρισης για να βρούμε ποια δύναμη επηρεάζει την ΓΣ περισσότερο. Το πάνω διάγραμμα μας δίνει τα παραπάνω για όλο το μήκος μιας γραμμής ροής, ενώ το κάτω μόνο για την superfast περιοχή. Στη συνέχεια, στο σχήμα (23), παρουσιάζουμε ξεχωριστά κάθε μια από τις δυνάμεις που έχουμε, για να συγκρίνουμε τα μεγέθη τους: Παρακάτω θα επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία (δείχνουμε μόνο τις

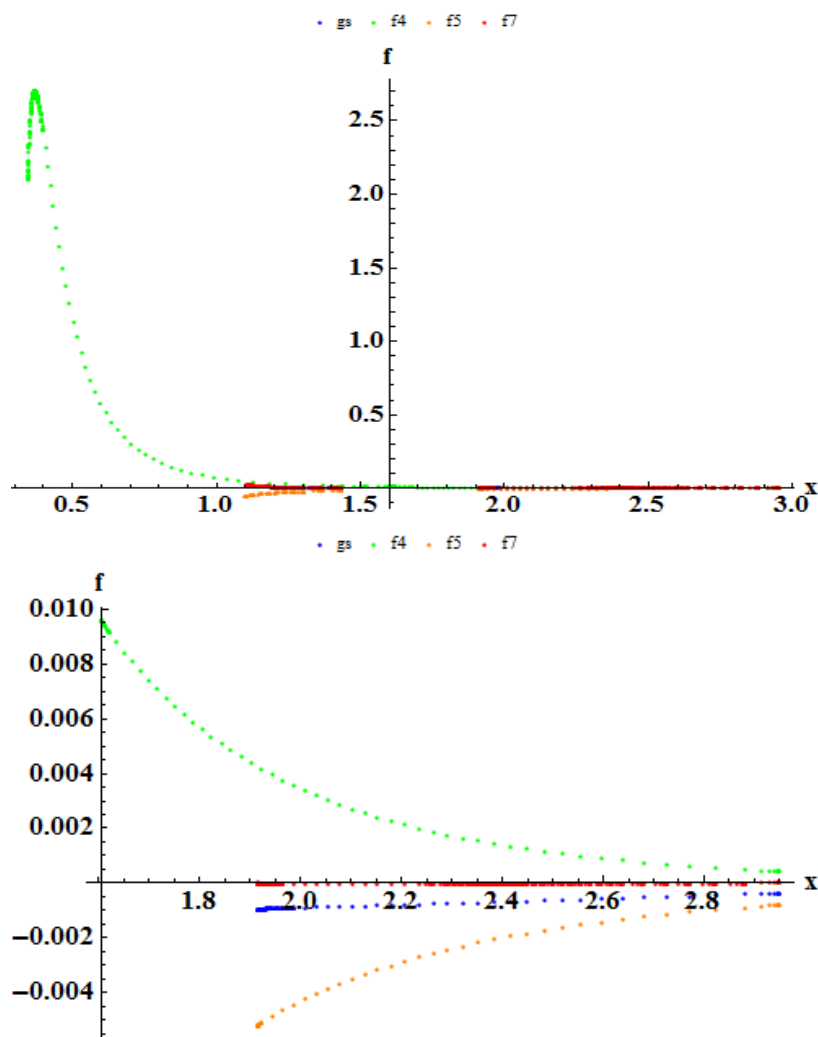


Figure 22: Από πάνω προς τα κάτω, η transfield εξίσωση και οι κυρίαρχες δυνάμεις για το δυναμικό  $A_5$ , σε όλο το χώρο και στην superfast περιοχή.

κυρίαρχες δυνάμεις) για τα δυναμικά

1.  $A_3 = r \tan(\theta) = 13.2$  (σχήμα 24).
2.  $A_1 = r[\csc(\theta)^2 \tan(\theta/2)^{3 \cos(\theta)}] = 13.5$  (σχήμα 25).

Στη περίπτωση του δυναμικού  $A_3$ , οι μορφές των ολοκληρωμάτων που επιλέξαμε είναι οι παρακάτω:

- $\mu = 2 \cdot |A|$

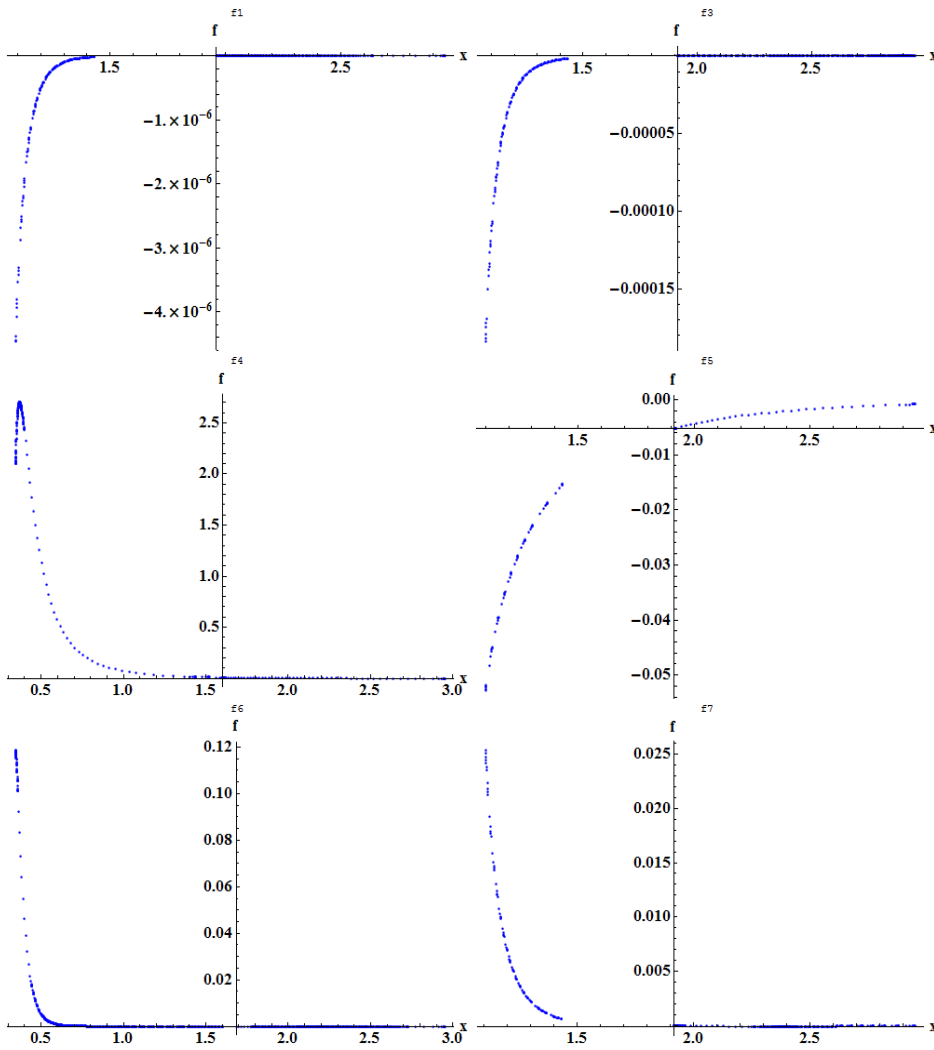


Figure 23: Οι δυνάμεις  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ , για το δυναμικό  $A_5$ .

- $x_A = 0.998$
- $\Omega = 1/2\omega_{horizon}$
- $\sigma_M = 0.531686 \cdot \sqrt{|A|} + 8.73033$
- $Q(A) = 0$

ενώ στην περίπτωση του δυναμικού  $A_1$ , οι μορφές των ολοκληρωμάτων που επιλέξαμε είναι οι παρακάτω:

- $\mu = 2 \cdot |A|$
- $x_A = 0.998$
- $\Omega = 1/2\omega_{horizon}$
- $\sigma_M = 0.808291 \cdot |A| - 0.532715$
- $Q(A) = 0$

Εδώ πρέπει να εξηγήσουμε λίγο τα αποτελέσματα των διαγραμμάτων που αφορούν την transfield εξίσωση. Προφανώς τα αποτελέσματα δείχνουν πως για τα ολοκληρώματα που χρησιμοποιήσαμε, οι συναρτήσεις ροής που βάλουμε δεν αποτελούν λύσεις της εξίσωσης αυτής, πράγμα που έπρεπε και να περιμένουμε. Προφανώς, η transfield παίζει καθοριστικό ρόλο, όχι μόνο στην εστίαση, αλλά εμμέσως και στην επιτάχυνση της ροής μας, οπότε η μη επίλυσή της φέρει τον κίνδυνο της ανακρίβειας. Αυτό όμως που μας ενδιαφέρει εδώ, είναι να δούμε το πόσο μεγάλο είναι το σφάλμα μας, αλλά και για πιο λόγο πέσαμε έξω. Θα επικεντρωθούμε στις εικόνες της GS για την superfast περιοχή, για την οποία και κάναμε την θεωρητική μας ανάλυση με την buching function. Παρατηρούμε τελικά ότι την καλύτερη συμπεριφορά μας την δίνει το δυναμικό  $A_5$ , για το οποίο έχουμε σχεδόν μηδενισμό της υπό μελέτη εξίσωσης. Στην περίπτωση αυτή, οι αδρανειακές δυνάμεις είναι πολύ μικρές και σχεδόν αλληλοεξουδετερώνονται από το αλγεβρικό άθροισμα της ηλεκτρικής με την μαγνητική δύναμη. Λέμε σχεδόν, διότι η πλήρης εξουδετέρωση σημαίνει και ισορροπία δυνάμεων, κάτι που θα συνέβαινε μόνο στη λύση του πλήρους προβλήματος. Αντιθέτως, τα δυναμικά  $A_1$  και  $A_3$  δεν δίνουν πολύ καλή συμπεριφορά και αυτό οφείλεται στις αδρανειακές δυνάμεις. Όπως βλέπουμε, οι δυνάμεις αδρανείας κυριαρχούν, ελέγχοντας ουσιαστικά τη μορφή της εξίσωσης. Αν προσπαθήσουμε να το ερμηνεύσουμε αυτό, θα λέγαμε ότι το σχήμα των γραμμών μας φαίνεται να παρουσιάζει μια σχετικά πιο απότομη καμπή, πράγμα που οδηγεί σε αύξηση των αδρανειακών δυνάμεων και στην παραπάνω συμπεριφορά. Τα πράγματα δεν είναι τόσο καλά κοντά στην μελανή οπή, αλλά δεν μελετήσαμε αναλυτικά την περιοχή αυτή όπου και περιμένουμε ιδιαίτερα σύνθετη συμπεριφορά λόγω των σχετικιστικών φαινομένων. Αυτό μπορεί να γίνει σε κάποια μελλοντική δουλειά, αν θελήσουμε να μελετήσουμε το πρόβλημα της πρόσπτωσης υλικού στην κεντρική μελανή οπή. Επαναλαμβάνουμε όμως ότι κάνοντας χρήση αυτής της μεθόδου, μπορούμε να εντοπίσουμε τις κατάλληλες μορφές των συναρτήσεων ροής για κάθε ομάδα ολοκληρωμάτων που χρησιμοποιούμε.

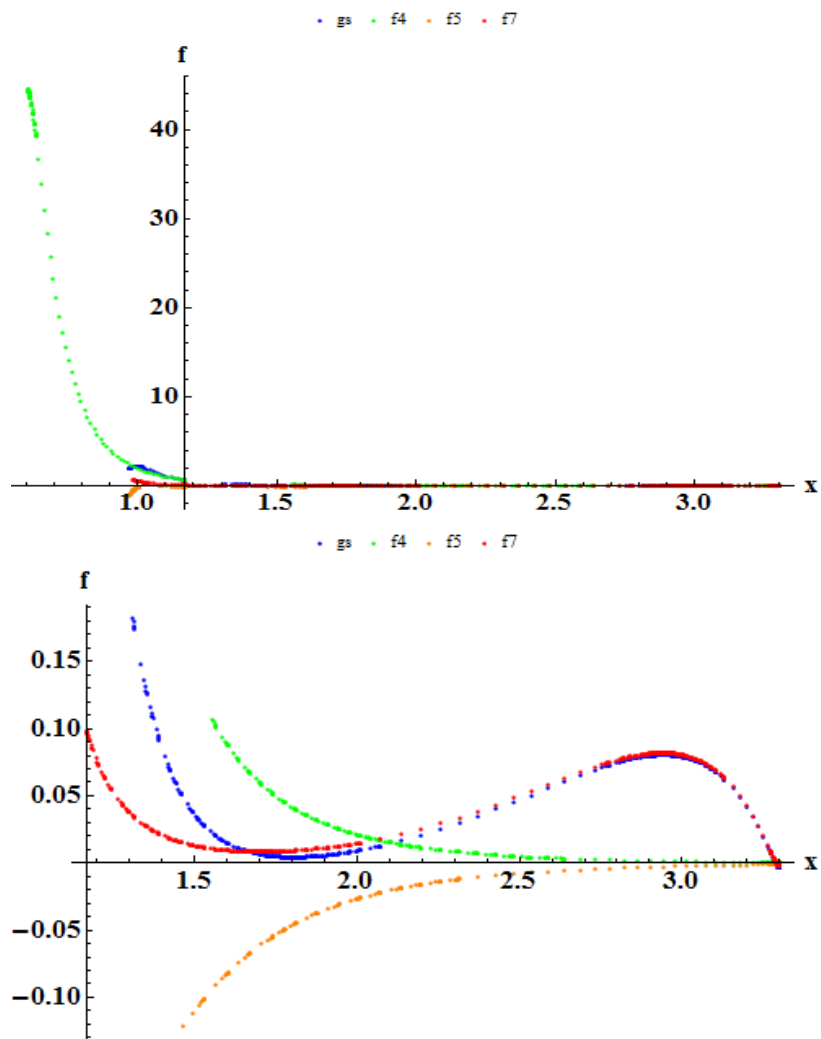


Figure 24: Από πάνω προς τα κάτω, η transfield εξίσωση και οι κυρίαρχες δυνάμεις για το δυναμικό  $A_3$ , σε όλο το χώρο και στην superfast περιοχή.

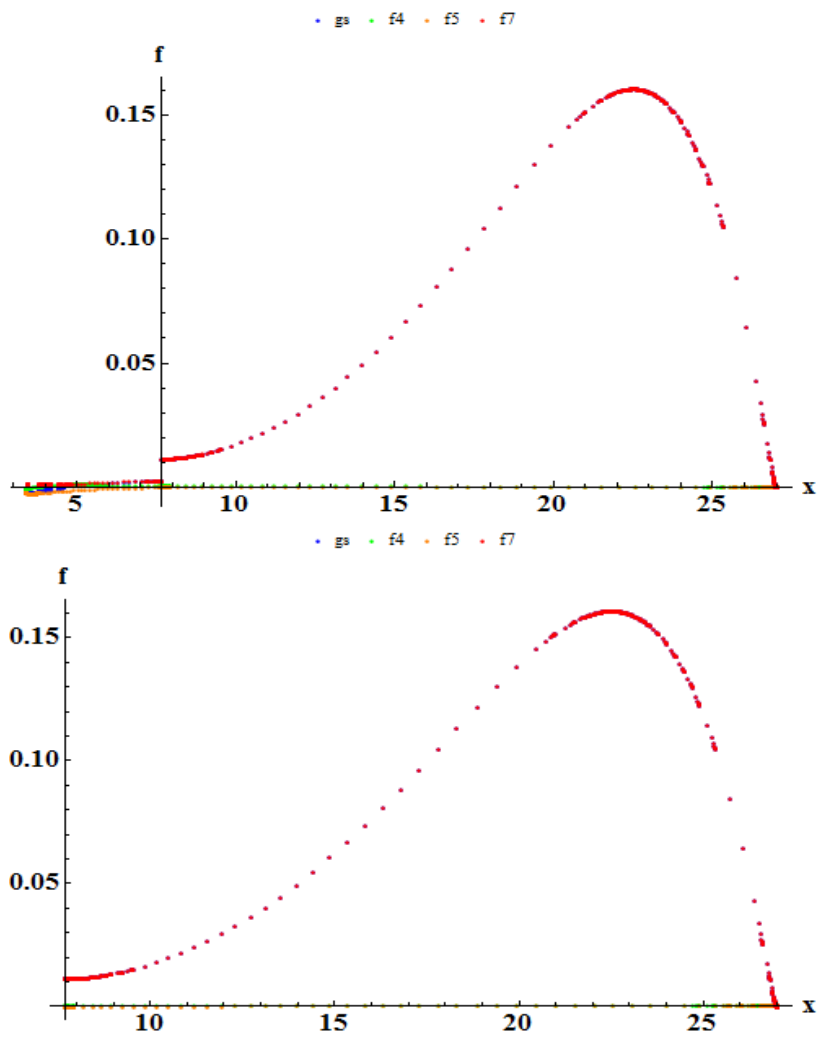


Figure 25: Από πάνω προς τα κάτω, η transfield εξίσωση και οι κυρίαρχες δυνάμεις για το δυναμικό  $A_1$ , σε όλο το χώρο και στην superfast περιοχή.



## 7 Επίλογος

Στην παρούσα εργασία, κάναμε μια αναλυτική μελέτη πάνω στην γενική σχετικιστική μαγνητοϋδροδυναμική σε χωρόχρονο Kerr, την οποία και εφαρμόσαμε στη συνέχεια για την περίπτωση αστροφυσικών αξισυμμετρικών εκροών, υποθέτοντας χρονοανεξαρτησία και κρύα ροή. Χειριστήκαμε τον φορμαλισμό 3+1 που, κατά περίπτωση, μας επιτρέπει να αντιμετωπίζουμε τον τετραδιάστατο χωρόχρονο ως «απόλυτο χρόνο» και τρισδιάστατο «χώρο». Επιλέγοντας ένα προνομιακό σύστημα συντεταγμένων, ορίσαμε τους παρατηρητές μηδενικής στροφορμής, τους λεγόμενους *ZAMOs* και τους χρησιμοποιήσαμε για να γράψουμε στο σύστημά τους τις εξισώσεις της GRMHD σε μια βολική μορφή παρόμοια με αυτή που ξέρουμε από την ειδική σχετικότητα. Στόχος μας ήταν να έχουμε στα χέρια μας τύπους με τους οποίους είμαστε εξοικειωμένοι ώστε να μπορούμε να δουλέψουμε με άνεση, χρησιμοποιώντας και την διαίσθησή μας όπου μπορούμε.

Αφού υπολογίσαμε τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, τονίσαμε την ομοιότητα που παρουσιάζουν τόσο με την με τα αντίστοιχα στην ειδική σχετικότητα, όσο και με τα υπογισθέντα ολοκληρώματα σε γεωμετρία Schwarzschild, όπως είδαμε και στην εργασία των Meliani et al., 2006. Ορίζοντας αδιάστατες μορφές των ολοκληρωμάτων μας, υπολογίσαμε και μετά λύσαμε την Wind Equation για διαφορετικές γεωμετρίες μαγνητικού πεδίου. Είδαμε ότι παρουσία βαρύτητας, η κλίμακα του προβλήματός μας καθορίζεται όχι μόνο από τα ολοκληρώματα αλλά και από τη μάζα του κεντρικού αντικειμένου, ευτυχώς με έναν αρκετά άμεσο τρόπο, που μας επιτρέπει να δουλέψουμε ανεξαρτήτως κλίμακας. Είπαμε λίγα λόγια για την απλή και την γενικευμένη buching function, αποδεικνύοντας πως το σχήμα των δυναμικών γραμμών είναι καθοριστικό για την επιτάχυνση της ροής μας. Δουλέψαμε με αρκετές συναρτήσεις  $S$  και  $S_r$ , οι περισσότερες των οποίων είχαν τη χαρακτηριστική μορφή που παρουσιάζει μέγιστο, κοντά στο σημείο fast, και που συμφωνεί και με τα simulations (Vlahakis 2004 (2)). Κάναμε επίσης έναν έλεγχο, υπολογίζοντας αντίστοιχες περιπτώσεις απουσία βαρύτητας, για να ανακαλύψουμε τελικά, ότι οι μόνες (μικρές) διαφορές, εμφανίζονται κοντά στην εργόσφαιρα της μελανής οπής, μην επηρεάζοντας ουσιαστικά τις λύσεις μας.

Τέλος, εισάγαμε μια μέθοδο, για να ελέγχουμε την ορθότητα των αποτελεσμάτων μας, μέσω της εξίσωσης ορμής στην transfield διεύθυνση, χωρίς να χρειάζεται να επιλύσουμε την εν λόγω εξίσωση. Τα αποτελέσματα δείχνουν πως για τη συγκεκριμένη μορφή των ολοκληρωμάτων που χρησιμοποιήσαμε, οι συναρτήσεις ροής μας δεν αποτελούν λύσεις της εξίσωσης αυτής, πράγμα που έπρεπε και να περιμένουμε. Προφανώς, η transfield παίζει καθοριστικό ρόλο, όχι μόνο στην εστίαση, αλλά εμμέσως και στην επιτάχυνση της ροής μας, οπότε η μη επίλυσή της φέρει τον κίνδυνο της ανακρίβειας. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να βρούμε συσχετίσεις ανάμεσα σε διάφορους τύπους συναρτήσεων ροής και των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων που οδηγούν σε ορθότερα αποτελέσματα. Μελλοντικές δουλειές πάνω στην μέθοδο αυτή θα μπορούσαν να ενισχύσουν την κατανόησή μας γύρω από τι χαρακτηρίζει μια ορθή λύση και ποιο πιθανή φυσική σημασία μπορεί να έχει αυτό.

Το πιο σημαντικό όμως αποτέλεσμα της δουλειάς μας, είναι τα έτοιμα μαθηματικά εργαλεία που έχουμε στα χέρια μας και τα οποία είναι διαθέσιμα σε όποιον θέλει να μελετήσει την συμπεριφορά ενός ανέμου, ενός jet, ή ακόμα και ενός accretion, από και προς μια μελανή οπή τύπου Kerr, τύπου Schwarzschild, είτε ακόμη και τύπου Kerr-Newman, με μια μικρή προσθήκη στους τύπους μας αντίστοιχα.

## 8 Βιβλιογραφία

1. Beskin Vasily S., 2010, in: "MHD Flows in Compact Astrophysical Objects - Accretion, Winds and Jets", Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010
2. Blandford R. D. & Payne, 1982, MNRAS, 199, 883
3. Blandford R. D. & Znajek R. L., 1977, MNRAS, 179, 433
4. Contopoulos J., 1995, ApJ, 450, 616
5. Contopoulos I., Nathanail A., Pugliese D., 2013, ApJ, submitted
6. Fendt C. & Ouyed R., 2004, ApJ, 608, 378
7. Gourgoulhon Éric, 2007, in: "3 + 1 Formalism and Bases of Numerical Relativity", arXiv:gr-qc/0703035v1
8. King A. R., Lasota J. P., Kundt W., 1975, Phys. Rev. D, 12, 3037
9. Komissarov Serguei S., McKinney Jonathan C., 2007, MNRAS, 377, L491
10. Komissarov S. S., Barkov M. V., Vlahakis N., Königl A., 2007, MNRAS, 380, 51
11. Komissarov S. S., Vlahakis N., Königl A., Barkov M. V., 2009, MNRAS, 394, 1182.
12. Komissarov S. S., 2009, Journal of the Korean Physical Society, 54, 6
13. Komissarov S. S., 2011, MNRAS, 418, Issue 1, pp. L94
14. MacDonald D. & Thorne K., 1982, MNRAS, 198, 345
15. Meliani Z., Sauty C., Vlahakis N., Tsinganos K., Trussoni E., 2006, A&A, 447, 797
16. Mobarry C. M. & Lovelace R. V. E., 1986, ApJ, 309, 455
17. Punsly B. & Coroniti F. V., 1990, ApJ, 354, 583
18. Punsly Brian, 1998, ApJ, 498, 640
19. Punsly Brian, 208, in: "Black Hole Gravitohydromagnetics - Second Edition", Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008
20. Takahashi M., Nitta S., Tatematsu Y. & Totimatsu A., 1990, ApJ, 363, 206
21. Thorne K. S. & MacDonald D. A., 1982, MNRAS, 198, 339
22. Thorne K. S., Price R. H., MacDonald D. A., 1986, in: "Black Holes: The Membrane Paradigm", Yale University Press, New Haven and London, 1986
23. Vlahakis N., Tsinganos K., 1998, MNRAS, 298, 777
24. Vlahakis N., 2004, ApJ, 600, 324
25. Vlahakis N., 2004, Astrophysics and Space Science, 293, 67
26. Wald R. M., 1974, Phys. Rev. D, 10, 1680