ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας της συνέχειας

Συγγραφέας
Αντωνόπουλος Ματθαίος
Α.Μ. Δ201212

Επιβλέπων Καθηγητής
Θεοδόσιος Ζαχαριάδης

ΑΘΗΝΑ 2015

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 21η Οκτωβρίου 2015 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Αναπλ. Καθηγήτρια
▪ Ξ. Βαμβακούση	Επικ. Καθηγήτρια

Στους αγαπημένους μου γονείς,

Βασίλη Αντωνόπουλο και Μαρία Αντωνοπούλου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου:

Τον κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για τις πολύτιμες συμβουλές του και τη συνολική στήριξη κατά τη συγγραφή της συγκεκριμένης εργασίας καθώς και γιατί με έφερε σε επαφή με τη διδακτική του απειροστικού λογισμού.
Την κ. Δέσποινα Πόταρη η οποία με βοήθησε να εντρυφήσω στην έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών και να δω τα πράγματα στη διδασκαλία με μια περισσότερο ερευνητική σκοπιά.
Την κ. Ξένια Βαμβακούση της οποίας το μάθημα αποτέλεσε αφορμή για το συγκεκριμένο θέμα της διπλωματικής εργασίας.
Τον κ. Γιώργο Ψυχάρη για την πολύτιμη βοήθεια κατά τη δειγματοληψία της συγκεκριμένης εργασίας.
Τον κ. Παναγιώτη Σπύρου για τις πολύ ενδιαφέρουσες συζητήσεις στο μάθημά του.
Τον κ. Ανδρέα Μούτσιο-Ρέντζο καθώς έμαθα μέσα από το μάθημά του πολλά για την σωστή καταγραφή μίας επιστημονικής εργασίας.
Την κ. Διονυσία Μπακογιάννη που πάντα μας στήριζε σε όλα τα ακαδημαϊκά θέματα μέσα από την εξαιρετική δουλειά της στη γραμματεία του τμήματος.
Την κ. Ελένη Κλή που συνεχίζει με επιτυχία το σημαντικό έργο της Διονυσίας.

Επίσης ευχαριστώ όλους τους φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος που δέχθηκαν όλοι τους να βοηθήσουν και αποτέλεσαν ένα σημαντικό και αξιόπιστο δείγμα για τη συγγραφή της έρευνας.

Τέλος, τους συμφοιτητές μου Μάρκο Δάλλα, Ειρήνη Κούβελα, Χρυσούλα Χούτου, Σταματίνα Βουκελάτου, Διονυσία Πιτσιλή-Χατζή και Αθανασία Βασίλα για την άψογη συνεργασία κατά τη διάρκεια των σπουδών μας.

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη

Η συνέχεια ως έννοια έχει κεντρικό ρόλο στα μαθηματικά. Η συγκεκριμένη έρευνα πραγματοποιήθηκε σε φοιτητές του μαθηματικού τμήματος Αθηνών με τη χρήση ερωτηματολογίου και συνεντεύξεων. Η παρούσα έρευνα έχει ως σκοπό να δημιουργήσει επίπεδα κατανόησης της έννοιας από τους φοιτητές αφού πρώτα εξετάσει τις αντιλήψεις τους, το βαθμό κατανόησης του ορισμού του πανεπιστημίου και την αντιμετώπισή τους ανάλογα με το επίπεδο αναπαράστασης της συνάρτησης. Στην κατηγοριοποίηση των επιπέδων κατανόησης βοήθησε η θεωρία των τριών κόσμων του Tall (2004), καθώς και της εικόνας έννοιας και ορισμού έννοιας των Tall και Vinner (1981) όπως και σχετικές έρευνες με την έννοια της συνέχειας . Τα αποτελέσματα της έρευνας σε συνδυασμό με το θεωρητικό πλαίσιο, φανερώνουν την ύπαρξη 4 επιπέδων κατανόησης της έννοιας της συνέχειας.

Abstract

The continuity as a concept holds a central role in math. For this particular research a number of students of the department of Math in Athens participated through the use of questionnaires and interviews. The aim of the research is to create levels of understanding of the concept among the students after having examined theirs perceptions, the level of understanding of the academic definition and their reaction according to the level of the representation of the function. The Theory of the three worlds by Tall (2004), the concept image and concept definition by Tall and Vinner (1981), as also other researches related to the concept of continuity contributed to the categorization of the levels of understanding. The research' results and the theoretical framework bring out the existence of 4 levels of understanding of the concept of continuity.

Εισαγωγή

Η έννοια της συνέχειας κατέχει κεντρικό ρόλο στον τομέα της Ανάλυσης. Είναι κοινός αποδεκτό πως δημιουργεί δυσκολίες τόσο στους μαθητές όσο και στους φοιτητές αλλά ορισμένες φορές ακόμα και στους καθηγητές. Για τη μελέτη της έννοιας έχουν διεξαχθεί διάφορες έρευνες (Juter K. 2012: Bezuidenhout, 2001: Basturk, S. 2011: Nair S. 2010: Bridgers, L. 2006: Hitt, F., & Lara, H. 1999: Cornu, 1996: Vinner 1987 etc). Η συγκεκριμένη έρευνα έχει ως στόχο την δημιουργία επίπεδων κατανόησης της έννοιας από φοιτητές του μαθηματικού τμήματος.

Όσον αφορά την Ελλάδα η εισαγωγή της έννοιας γίνεται στην τρίτη τάξη του Λυκείου στα πλαίσια του μαθήματος «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης» και με χρήση του βιβλίου των Ανδρεαδάκη Σ., Κατσαργύρη Β., Μέτη Σ., Μπρουχούτα Κ., Παπασταυρίδη Σ. και Πολύζου. Στο μαθηματικό τμήμα του Ε.Κ.Π.Α. η έννοια διδάσκεται στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού 1 και το σύγγραμμα που χρησιμοποιείται είναι των Νεγρεποντης, Σ. ,Γιωτόπουλος, Σ ,Γιαννακούλιας, Ε.(1987). Απειροστικός Λογισμός , Τόμος 1,Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα.

Μπορούμε να υποθέσουμε πως οι φοιτητές δεν έχουν από το σχολείο μια ικανοποιητική γνώση της έννοιας της συνέχειας. Η προϋπάρχουσα γνώση με την οποία ξεκινούν τα μαθήματα της ανάλυσης συνήθως είναι περιορισμένη κάτι που σημαίνει ότι οι καθηγητές στο πανεπιστήμιο πρέπει να διαγνώσουν τις εννοιολογικές δυσκολίες, τις παρανοήσεις και να αναπτύξουν στρατηγικές διδασκαλίας οι οποίες θα αντιμετωπίζουν αυτά τα προβλήματα (Bezuidenhout 2001).

Οι παρανοήσεις οι οποίες είναι σχετικές με την έννοια είναι πολλές και συχνές στους περισσότερους φοιτητές. Πολλοί από αυτούς συγχέουν την έννοια της συνέχειας με τη συνεκτικότητα Tall και Vinner (1981), άλλοι ταυτίζουν την ύπαρξη του ορίου με τη συνέχεια Williams (1991), ενώ ορισμένοι θεωρούν πως αν μια συνάρτηση ορίζεται σε ένα σημείο είναι απαραίτητα και συνεχής (Duru et al. 2010). Φυσικά οι παρανοήσεις όπως θα δούμε στο θεωρητικό πλαίσιο αλλά και στα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας είναι πολυάριθμες. Οι δυσκολίες που εμφανίζουν οι φοιτητές είναι πολλές και κατά χρήση του ορισμού μάλιστα οι περισσότεροι δεν είναι σε θέση να συνδέσουν τον ορισμό του πανεπιστημίου με αυτό του λυκείου ενώ δυσκολεύονται όταν πρέπει σε μια άσκηση να χρησιμοποιήσουν τα ε και δ του ορισμού. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι διαφορές στην αντιμετώπιση των φοιτητών όταν οι συναρτήσεις παρουσιάζονται με διαφορετικές αναπαραστάσεις Lauten et al. (1994), όπως και στις ικανότητές τους ανάλογα με το επίπεδο αναπαράστασης (Duru, A.et al. 2010).

Οι Tall και Vinner (1981) όρισαν την *εικόνα έννοιας* την οποία καλούμε το ερέθισμα που δεχόμαστε στο άκουσμα μιας έννοιας (π.χ. μία οπτική αναπαράσταση της έννοιας, συλλογή εμπειριών ή εντυπώσεων) δηλαδή οποιαδήποτε γνωστική δομή ενός ατόμου. Ο D.Tall (2004) εισήγαγε ένα μοντέλο που περιγράφει την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών με τρεις διαφορετικούς τρόπους, τον ενσαρκωμένο (embodied) που βασίζεται στις ανθρώπινες αντιλήψεις και δράσεις στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου τον διαδικασιοεννοιολογικό (proceptual) ο οποίος αξιοποιεί τη διπλή υπόσταση ως διεργασία και ως έννοια των συμβόλων της αριθμητικής και της άλγεβρας, και τέλος τον αξιωματικό (axiomatic) κόσμο ο οποίος προσεγγίζει τα μαθηματικά με τυπικό, φορμαλιστικό και αυστηρό τρόπο, δηλαδή με αφετηρία αξιώματα και θεωρήματα και μέσα από λογικούς συλλογισμούς καταλήγει στην απόδειξη. Το άτομο σχηματίζει εικόνα για κάθε έννοια δίνοντας διαφορετική έμφαση στους τρεις αυτούς κόσμους με αποτέλεσμα η κατανόηση των εννοιών να γίνετε με διαφορετικό τρόπο.

Είναι σημαντικό να αναπτυχθεί η εννοιολογική κατανόηση της συνέχειας αλλά και των υπόλοιπων εννοιών της ανάλυσης, στο ίδιο επίπεδο με τις τεχνικές δεξιότητες και τις διαδικασίες. Η διδασκαλία είναι αυτή που οφείλει να περιέχει και τα δύο ώστε οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν πόσο σημαντικά είναι και τα δύο. Οι μαθητές πρέπει πίσω από τα σύμβολα να βλέπουν έννοιες και να είναι σε θέση να τα ερμηνεύσουν και να τα χρησιμοποιήσουν για να αναπαριστούν έννοιες, καθώς οι διαδικασίες παρά τη μεγάλη σημασία τους δε συνεπάγονται και την κατανόηση των εννοιών (Bezuidenhout 2001).

Η συγκεκριμένη έρευνα έχει ως σκοπό να μελετήσει τις αντιλήψεις των φοιτητών για την έννοια της συνέχειας, το βαθμό κατανόησης του ορισμού του πανεπιστημίου της έννοιας, τις διαφορές που παρουσιάζονται στην αντιμετώπιση διαφορετικών ειδών αναπαράστασης και στο τέλος να παρουσιάσει τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας. Για το σκοπό αυτό δόθηκαν 96 ερωτηματολόγια σε φοιτητές του μαθηματικού τμήματος και πάρθηκαν 7 συνεντεύξεις, ως θεωρητικό πλαίσιο για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιείται η θεωρία της εικόνας έννοιας (concept image) και του ορισμού έννοιας (concept definition) (Tall και Vinner, 1981) και η θεωρία των τριών κόσμων του Tall (2004) καθώς και πληθώρα άλλων ερευνών σχετικών με την έννοια της συνέχειας.

1. Θεωρητικό πλαίσιο

1.1 Έρευνες σχετικές με την έννοια της συνέχειας

Πληθώρα ερευνών (Tall και Vinner 1981: Mastorides και Zahariades 2004: Pinto και Gray, 1995: Bagni, 1999: Hit και Lara, 1999 Smith et al., 1993 Jayakody 2013 Bezuidenhout 2001, Williams, 1991 Duru et al. 2010) έχουν επισημάνει τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις που αφορούν την κατανόηση της έννοιας της συνέχειας. Οι συγκεκριμένες παρανοήσεις είναι σε μεγάλο βαθμό κοινές ανάμεσα σε μαθητές και φοιτητές και μάλιστα κάποιες φορές ακόμη και σε καθηγητές. Ο Kathlen (1994) στην έρευνά του κατατάσσει τις παρανοήσεις σε δύο μεγάλες κατηγορίες, αυτές που αποκτώνται μέσα από τις εμπειρίες της καθημερινής ζωής και αυτές που προέρχονται από την εκπαίδευση του ατόμου.

Οι μαθητές έχουν την αντίληψη ότι για να είναι συνεχής μία συνάρτηση δεν πρέπει το γράφημά της να διακόπτεται, φαίνεται δηλαδή η εικόνα της έννοιας να επηρεάζεται έντονα από την άτυπη γλώσσα (Tall and Vinner 1981). Η συγκεκριμένη αντίληψη είναι η πιο διαδεδομένη που συναντάται στη βιβλιογραφία και σχετίζεται με τη καθημερινή γλώσσα αλλά και με εικόνες που αφορούν κινήσεις (Núñez et al. 1999), για παράδειγμα το άτομο μπορεί αντί για στατική τη γραμμή να την αντιλαμβάνεται ως προϊόν κίνησης, κάτι που δείχνει μία δυναμική αντίληψη (Tall and Vinner 1981).

Είναι συχνό να χρησιμοποιούνται οπτικά ερεθίσματα κατά τον έλεγχο της συνέχειας και η επιχειρηματολογία να περιέχει εκφράσεις όπως «μονοκόμματο γράφημα», «λείο», «απουσία απότομων στροφών», «απουσία αλμάτων» κ.α. (Tall and Vinner 1981). Η συνέχεια των πραγματικών συναρτήσεων τείνει να αντιμετωπίζεται γεωμετρικά, θεωρώντας ότι η γραφική παράσταση είναι μία καμπύλη της οποίας το γράφημα δεν διακόπτεται (Cottrill et al., 1996).

Πολλοί μαθητές θεωρούν ότι μία συνάρτηση είναι ασυνεχής όταν το γράφημα της έχει κάποια γωνία. Όταν δίνεται το γράφημα και έχει μία οπή ή κάνει κάποιο «άλμα» τη χαρακτηρίζουν ως ασυνεχή, κάτι που δείχνει ότι προσεγγίζουν την ασυνέχεια με πολλαπλούς τρόπους(Nair 2010). Υπάρχει μία συγκεκριμένη αντίληψη για την ασυνέχεια κατά την οποία κάποιος αναζητά τυχόν ασυνέχειες όταν το γράφημα μιας συνάρτησης παρουσιάζει άλματα, οπές, διαλειμματα ή ασύμπτωτες με αποτέλεσμα σε όλες τις άλλες περιπτώσεις να θεωρείται αυτονόητο πως μία συνάρτηση είναι συνεχής (Duru et al. 2010, Tall and Vinner 1981).

Κάποιοι πιστεύουν ότι αν τα πλευρικά όρια, είναι ίσα η συνάρτηση είναι πάντα συνεχής σε εκείνο το σημείο, παρ' ότι όταν τους ζητείται να δώσουν τον ορισμό του λυκείου δίνουν τον σωστό (Nair 2010) Ορισμένοι φοιτητές έχουν την τάση να ταυτίζουν την ύπαρξη του ορίου με τη συνέχεια. Για παράδειγμα κάποιοι φοιτητές θεωρούν ότι η χρήση του ορίου είναι κατάλληλη μόνο για την ύπαρξη ασυνέχειας (Williams 1991). Ορισμένοι φοιτητές θεωρούν πως αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο τότε υποχρεωτικά θα είναι και συνεχής, μια παρανόηση η οποία ίσως δημιουργείται από την πρόταση «αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο, τότε το όριο σε εκείνο το σημείο υπάρχει» (Bezuidenhout 2001). Μια παρανόηση που σχετίζεται με τον ορισμό του λυκείου που συναντάται ακόμα και σε πρωτοετείς φοιτητές είναι πως το όριο της συνάρτησης και η τιμή της συνάρτησης είναι πανομοιότυπα μαθηματικά αντικείμενα (Bezuidenhout 2001, Jordaan 2009).

Ο ορισμός της έννοιας της συνέχειας της συνάρτησης σε ένα σημείο που δίνεται στο λύκειο περιέχει την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης. Αν οι μαθητές έχουν πρόβλημα στην κατανόηση της έννοιας του ορίου και ως εκ τούτου έχουν μια θολή εικόνα για την έννοια του ορίου, τότε αυτό έχει σημαντικές επιπτώσεις και στην εικόνα για την έννοια της συνέχειας (Jayakody 2013, Bezuidenhout 2001, Williams, 1991).)

Ορισμένοι φοιτητές του πρώτου έτους θεωρούν ότι αν μια συνάρτηση ορίζεται σε ένα σημείο τότε είναι και συνεχής. Μάλιστα με βάσει την ίδια έρευνα δείχνουν να μην αντιλαμβάνονται τη συνέχεια ως μια έννοια η οποία χαρακτηρίζει μια συνάρτηση αλλά εστιάζουν στον υπολογισμό της τιμής μιας συνάρτησης σε ένα σημείο (Bezuidenhout 2001). Παρόμοια παρανόηση «αν η συνάρτηση δεν ορίζεται είναι ασυνεχής σε εκείνο το σημείο» έχει παρατηρηθεί και σε άλλη έρευνα (Duru et al. 2010). Επιπλέον πιστεύουν ότι αν μια συνάρτηση έχει για πεδίο ορισμού όλο το R τότε είναι πάντα συνεχής. Παρ' όλα αυτά όταν τους δίνεται το γράφημα μίας συνάρτησης που ισχύει κάτι τέτοιο αλλά σε ένα σημείο το γράφημα διακόπτεται και εκεί η συνάρτηση έχει ένα μεμονωμένο σημείο τη χαρακτηρίζουν με ευκολία ως ασυνεχή (Nair 2010).

Ορισμένοι χαρακτηρίζουν μια συνάρτηση ως συνεχή απλώς επειδή σε αυτή αντιστοιχεί μια εξίσωση παρ' ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση αιτιολογούν μέσω μίας λογικής έκφρασης και μη χρησιμοποιώντας κάποια μαθηματική σχέση (Tall and Vinner 1981). Ακόμη, οι μαθητές φαίνεται να θεωρούν μη συνεχείς τις συναρτήσεις που έχουν πολλούς κλάδους, με αποτέλεσμα, συναρτήσεις ενός τύπου να τις θεωρούν συνεχείς. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση συναρτήσεων ενός τύπου που θεωρούνται από τους μαθητές συνεχείς (όταν τους δίνεται μόνο ο αλγεβρικός τύπος), ακόμα κι αν το γράφημά τους διακόπτεται (Tall και Vinner, 1981). Για παράδειγμα, στην υπερβολοειδή συνάρτηση, η οποία αν δοθεί μέσω του αλγεβρικού της τύπου χαρακτηρίζεται ως συνεχής (λόγω του ότι αποτελείται από έναν τύπο), αν δοθεί μέσω του γραφήματός της χαρακτηρίζεται ως ασυνεχής (λόγω του ότι το γράφημά της αποτελείται από δυο κλάδους). Ορισμένες φορές, μάλιστα, παρατηρείται το γεγονός οι μαθητές να απαντούν σωστά, άλλοτε με το σκεπτικό που ακολούθησαν να είναι λάθος, και άλλοτε παρουσιάζεται πλήρης αδυναμία αιτιολόγησης της απάντησής τους. Για παράδειγμα, μπορεί να αποφανθούν ότι είναι συνεχής επειδή δίνεται από έναν μόνο τύπο (Tall και Vinner, 1981).

Οι δυσκολίες ανάμεσα στη διαφορισιμότητα και τη συνέχεια δεν απουσιάζουν. Σύμφωνα με τον Meel (1998) οι περισσότεροι από τους μαθητές είχαν την πεποίθηση πως η συνέχεια ήταν ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης. Τον ίδιο ισχυρισμό συναντήσαμε και σε περιπτώσεις που είχε τονιστεί στο μάθημα ότι η ύπαρξη συνέχειας δε συνεπάγεται και την ύπαρξη διαφορισιμότητας (Juter 2012). Κάποια άλλη έρευνα έδειξε ότι η μη διαφορισιμότητα αποτελεί επιχείρημα για τη μη ύπαρξη συνέχειας (Tall και Vinner 1981). Παρόμοια αποτελέσματα για τη σχέση διαφορισιμότητας και συνέχειας είχαν και άλλες έρευνες (Bezuidenhout 2001, Baker et al. 2000).

Ορισμένες φορές ο τρόπος που μιλάμε για την συνέχεια μπορεί να είναι παραπλανητικός με δυσάρεστα διδακτικά αποτελέσματα. Μια σημαντική πηγή προβλημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση είναι κάποιες φορές η φιλοσοφική προσέγγιση των πραγμάτων (φορμαλισμός, πλατωνισμός κ.ά.) καθώς οι φιλοσοφικές δεσμεύσεις μεταφέρονται στην εκπαιδευτική διαδικασία, για παράδειγμα η πεποίθηση πως η διαίσθηση πρέπει να πάψει να υπάρχει πλήρως ώστε να εξαλειφθεί η ασάφεια. Κάτι τέτοιο όμως όχι μόνο δεν είναι απαραίτητο αλλά δε βοηθά πάντα τη μάθηση (Smith et al., 1993).

Σύμφωνα με τον Bridgers (2006) υπάρχουν ομοιότητες ανάμεσα στον τρόπο που σκέφτονται οι καθηγητές και οι μαθητές για την συνέχεια. Συχνά δημιουργείται σύγχυση ανάμεσα στη διαφορισιμότητα και στη συνέχεια. Επιπλέον πολλές φορές δε μπορούν να συσχετίσουν την έννοια με αυτή του ορίου. Σε έρευνα των Hitt και Lara (1999) ένας καθηγητής όταν του δόθηκε το γράφημα μία συνάρτησης με τρύπα χαρακτήρισε μία συνάρτηση ασυνεχή όταν η τιμή της συνάρτηση δεν είναι ίδια με την τιμή του ορίου παρ' ότι η συνάρτηση δεν ορίζονταν στο σημείο που διακόπτεται το γράφημα. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι σύμφωνα με έρευνα των Mastorides και Zachariades (2004) σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της συνέχειας και του ορίου σε καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αρκετές δυσκολίες που εμφανίζονται στους μαθητές υπάρχουν και στους ίδιους τους καθηγητές. Σε αυτούς έχουν παρατηρηθεί συχνές παρανοήσεις των μαθητών όπως η σύγχυση ανάμεσα στην έννοια της συνέχειας με την έννοια της συνεκτικότητας. Επιπλέον οι καθηγητές δεν στέκονται στον ε-δ ορισμό λόγω της έντονης επιρροής από το πλαίσιο στο οποίο διδάσκεται η έννοια στο σχολείο. Πολλές φορές, επίσης, δεν μπορούν να μεταφράσουν τις ιδιότητες της συνέχειας από τη συμβολική στη γραφική αναπαράσταση, και αντίστροφα. Είναι αξιοσημείωτο ότι ακόμα και έμπειροι καθηγητές φαίνεται να μην έχουν πλήρη εικόνα της έννοιας. Σύμφωνα με μία άλλη έρευνα φαίνεται οι καθηγητές να δυσκολεύονται όταν καλούνται να αντιμετωπίσουν εννοιολογικά θέματα σχετικά με τη συνέχεια, εν αντιθέσει με συγκεκριμένες διαδικασίες τις οποίες έχουν συνηθίσει και μπορούν να αντιμετωπίσουν με ευκολία. Προτιμούν λοιπόν θέματα τα οποία σχετίζονται κυρίως με διαδικασίες και λειτουργίες (Basturk and Donmez 2011).

Μέσα από τη μελέτη της βιβλιογραφίας μπορούμε να κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα των κυριότερων λανθασμένων αντιλήψεων. Με πλάγια γράμματα έχουν προστεθεί κάποιες κατηγορίες οι οποίες προέκυψαν από την παρούσα έρευνα.

Μία συνάρτηση είναι συνεχής όταν μπορείς να τη σχεδιάσεις χωρίς να σηκώσεις το μολύβι (gapless)	Δυναμική συνεκτική* αντίληψη (τύπος Α)
Συνεχής αφού το γράφημα δε διακόπτεται (gapless)	Στατική συνεκτική αντίληψη (τύπος Α)
Συνεχής επειδή ορίζεται σε κάποιο σημείο (defined)	Συνεκτική αντίληψη (τύπος Β)
Ασυνεχής λόγω μεμονωμένων σημείων (gapless)	*Συνεκτική αντίληψη (τύπος Γ)*
Μία συνάρτηση είναι συνεχής αν το γράφημά της δεν έχει οπές ή άλματα (gapless)	Ελλιπής ασυνεχή αντίληψη
Υπάρχει το όριο άρα είναι συνεχής (limit)	Ελλιπής γνώση του ορισμού του λυκείου (τύπος Α)
Τα πλευρικά διαφέρουν άρα ασυνεχής (σε σημείο όμως εκτός του πεδίου ορισμού) (limit)	*Ελλιπής γνώση του ορισμού του λυκείου (τύπος Β)*
Μη διαφορίσιμη άρα ασυνεχής	Σύγχυση ανάμεσα στις έννοιες διαφορισιμότητα-συνέχεια
Συνεχής ως πολυωνυμική, συνεχής ως μεμονωμένο σημείο κ.ά. με παράλληλη αδυναμία απόδειξης του ισχυρισμού	*Ανάκληση από βάση δεδομένων*

*Με τον όρο συνεκτική εννοούμε ένα γράφημα το οποίο δεν παρουσιάζει κενά, δηλαδή ανάμεσα στα σημεία δεν υπάρχουν κενά

1.2 Ορισμός έννοιας και Εικόνα έννοιας

Είναι αδιαμφισβήτητο το πόσο εξαιρετικής σημασίας είναι για τα μαθηματικά ο ορισμός κάθε έννοιας. Στην καθημερινή ζωή ακούμε κάποιον ορισμό και σπάνια καλούμαστε να τον αξιοποιήσουμε αργότερα, στο μαθηματικό πλαίσιο όμως οι ορισμοί αξιοποιούνται συνεχώς διαδραματίζοντας σημαντικό ρόλο και εν τέλει είναι αυτοί που βοηθούν αρκετά στο σχηματισμό της εικόνας για μια έννοια. Αυτό συμβαίνει γιατί στα μαθηματικά οι προτάσεις και τα θεωρήματα στηρίζονται στα αξιώματα και τους ορισμούς. Ο ορισμός έννοιας (concept definition) σύμφωνα με τους Tall & Vinner (1981) είναι ένας λεκτικός ορισμός που περιγράφει την έννοια με ακριβή τρόπο.

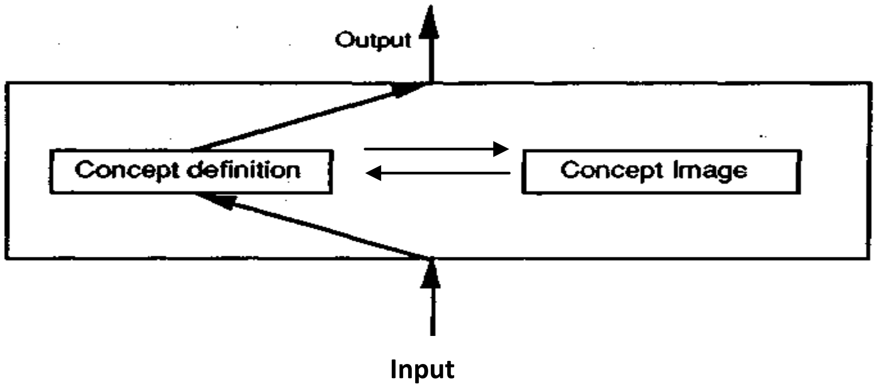
Η εικόνα έννοιας (concept image) αρχικά χρησιμοποιήθηκε από τους Vinner& Herschowitz (1980). Σύμφωνα με τους Tall&Vinner (1981) ο όρος χρησιμοποιείται για να περιγράψει μία γνωστική δομή η οποία σχετίζεται με μία έννοια και περιλαμβάνει όλες τις διαδικασίες και τις ιδιότητες που συνδέονται με την έννοια. Η εικόνα δομείται μέσα από τις εμπειρίες του ατόμου και μεταβάλλεται καθώς το άτομο ωριμάζει και συναντά νέα ερεθίσματα.

Το όνομα μιας έννοιας, όταν το βλέπουμε ή όταν το ακούμε προκαλεί ένα ερέθισμα στη μνήμη μας. Συνήθως δεν πρόκειται για τον τυπικό ορισμό της έννοιας. Αυτό που έρχεται στη μνήμη μας όταν ακούμε η βλέπουμε το όνομα μιας έννοιας αποκαλείται *«εικόνα έννοιας» (concept image)* ή *«πλαίσιο έννοιας» (concept frame).* Αυτή μπορεί να είναι μια οπτική αναπαράσταση της έννοιας στην περίπτωση που η έννοια έχει οπτικές αναπαραστάσεις. Μπορεί επίσης, να είναι μια συλλογή εντυπώσεων ή εμπειριών. Η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει το σχηματισμό μιας εικόνας έννοιας γι' αυτήν. Η αποστήθιση του τυπικού ορισμού της δεν εγγυάται την κατανόηση της. Για να την κατανοήσουμε πρέπει να διαθέτουμε μια σωστή εικόνα της (Vinner, 1991).

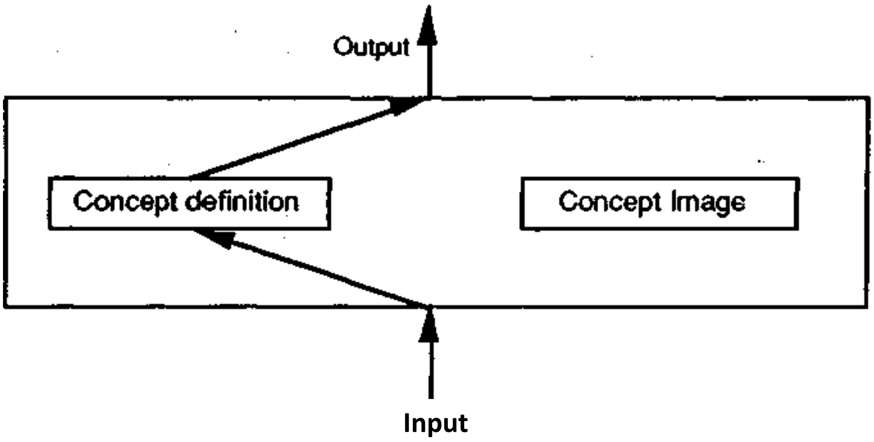
Ας υποθέσουμε την ύπαρξη δύο διαφορετικών «κελιών» στη γνωστική μας δομή. Το ένα κελί είναι για τον *(τυπικό) ορισμό της έννοιας* και το δεύτερο για την *εικόνα της έννοιας*. Ένα από τα κελιά ή ακόμα και τα δύο μπορεί να είναι κενά. Το κελί της εικόνας της έννοιας θεωρείται κενό εφ' όσον δεν αποδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί σε πολλές περιπτώσεις όπου η απομνημόνευση του ορισμού της έννοιας γίνεται με έναν άνευ νοήματος τρόπο.

Οι διαδικασίες σχηματισμού της εικόνας της έννοιας περιγράφονται μέσα από δύο σχήματα:

Σχήμα 1: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας έννοιας & ορισμού έννοιας, αναφέρεται σε μακροχρόνιες διαδικασίες του σχηματισμού μιας έννοιας μέσω της αλληλεπίδρασης των δύο κελιών.

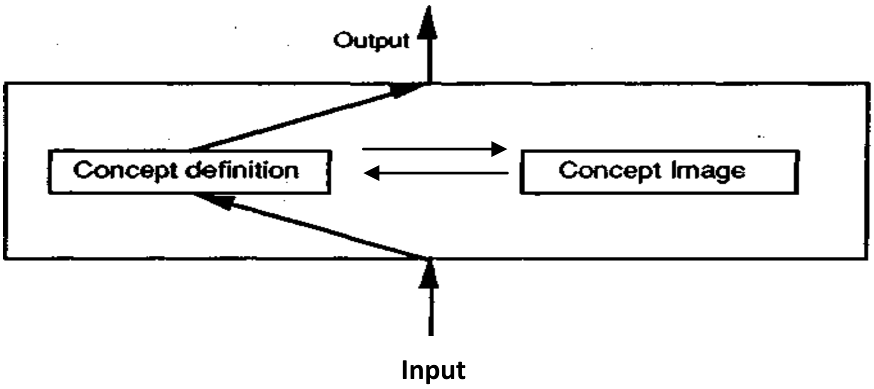


Σχήμα 2: Γνωστική ανάπτυξη μιας τυπικής έννοιας, εδώ η εικόνα έννοιας διαμορφώνεται και ελέγχεται πλήρως από τον τυπικό ορισμό της έννοιας.

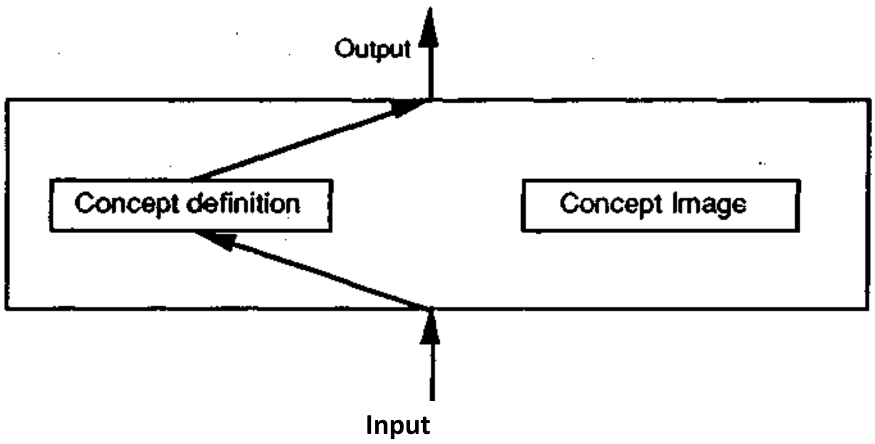


Όταν ένας μαθητής δέχεται κάποια ερώτηση αναμένεται να ενεργοποιήσει κάποιο από τα δύο ή και τα δύο κελιά. Υπάρχουν συγκεκριμένα σχήματα που μπορούν να δημιουργηθούν. Οι εκπαιδευτικοί αναμένουν ο μαθητής να λειτουργεί με έναν ανάμεσα από τρεις τρόπους:

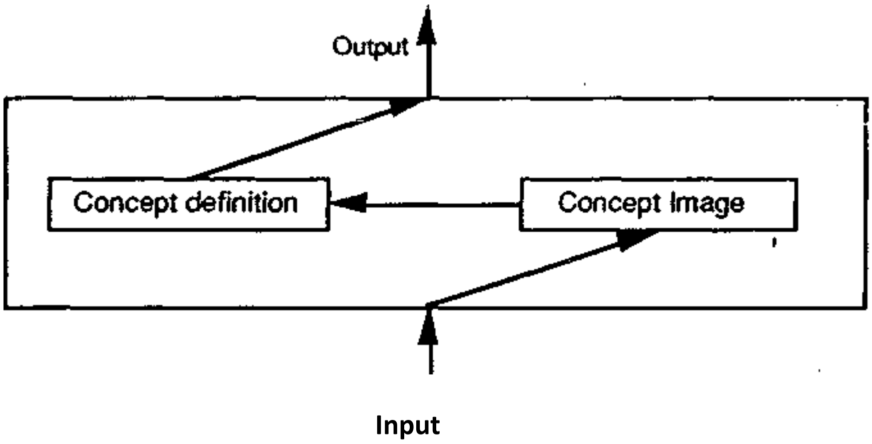
Σχήμα 3: Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και της εικόνας



Σχήμα 4: Καθαρά τυπική αφαίρεση με χρήση μόνο του ορισμού



Σχήμα 5: Τυπική αφαίρεση μετά από τη διαισθητική σκέψη



Το κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα όλων των παραπάνω σχημάτων είναι ότι για την επίλυση ενός προβλήματος οι διανοητικές διαδικασίες που συντελούνται περιλαμβάνουν οπωσδήποτε και τον ορισμό της έννοιας. Αυτό είναι φυσικά η επιθυμητή διαδικασία. Δυστυχώς, στη πράξη με τους μαθητές δε συμβαίνει πάντοτε αυτό. Στην πράξη οι περισσότεροι μαθητές δίνουν διαισθητική απάντηση. Δηλαδή η κυψέλη του ορισμού έννοιας, αν και μη κενή, δεν ενεργοποιείται κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Ο τρόπος σκέψης που έχει συνηθίσει ο μαθητής στα πλαίσια της καθημερινής ζωής κυριαρχεί και έτσι αγνοεί την ανάγκη να συμβουλευτεί τον τυπικό ορισμό. Στις περισσότερες περιπτώσεις στην πράξη, η αναφορά μόνο στην κυψέλη της εικόνας της έννοιας οδηγεί τον μαθητή στην επιτυχία (Vinner, 1991).

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα έρευνας της Jayakody (2013) που πραγματοποιήθηκε σε 37 πρωτοετείς φοιτητές, κάποιοι μαθητές φαίνεται να χρησιμοποιούν κατευθείαν την εικόνα έννοιας όταν τους ζητείται σε μία συνάρτηση να ελέγξουν αν είναι συνεχής, κάτι που επιβεβαιώνει και αντίστοιχη έρευνα του Vinner (1991). Πολλές φορές κατά τον έλεγχο της συνέχειας γίνεται μία διαδικαστική αντιμετώπιση και δεν δίνεται έμφαση στον ορισμό. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε ασκήσεις «ρουτίνας» οι μαθητές αναπτύσσουν αλγοριθμικές διαδικασίες και αυτές αποτελούν κάποιο μέρος της εικόνας της έννοιας (Jayakody 2013). Στην ίδια έρευνα φάνηκε ότι οι φοιτητές που είχαν την καλύτερη επίδοση ήταν εκείνοι οι οποίοι στη στρατηγική που χρησιμοποίησαν στις απαντήσεις τους ενέπλεξαν τον ορισμό της έννοιας και τίποτε το περιττό που μπορεί να υπάρχει στην εικόνα έννοιας που έχουν, φαίνεται δηλαδή να ανήκουν στο σχήμα 6 του Vinner.

Σε έρευνα που έγινε για τον τρόπο με τον οποίο υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στις έννοιες όριο, παράγωγος, ολοκλήρωμα, συνέχεια όταν δίνεται το γράφημα μιας συνάρτησης φάνηκε η συνέχεια να είναι εκείνη που οι φοιτητές μπορούν να τη συνδέσουν λιγότερο. Κάτι τέτοιο σύμφωνα με τον ερευνητή συμβαίνει επειδή η συνέχεια είναι και η έννοια που σε σχέση με τις υπόλοιπες τρεις η διδασκαλία της καταλαμβάνει το λιγότερο χρόνο με αποτέλεσμα οι φοιτητές να μην μπορούν να σχηματίσουν την κατάλληλη εικόνα έννοιας. Η έρευνα διεξήχθη στη Σουηδία σε φοιτητές οι οποίοι ήταν μελλοντικοί καθηγητές (Juter 2010). Συμπεραίνουμε λοιπόν πως ο χρόνος που θα διατεθεί για μια έννοια είναι σημαντικός παράγοντας για το σχηματισμό της σωστής εικόνας έννοιας.

Είναι σημαντικό να εμπλέκουμε τους φοιτητές με ασκήσεις που θα αγγίζουν πολλές πτυχές της έννοιας καθώς σύμφωνα με το Vinner (1991) εφ 'όσον η εικόνα έννοιας οδηγήσει σε μια σωστή λύση, ο μαθητής θα κρατήσει αυτή τη στρατηγική εφόσον είναι απλή και φυσική».

1.3 Τα επίπεδα αναπαράστασης της συνάρτησης και η συνέχεια

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση είναι κάτι το οποίο έχει αναδειχθεί στη βιβλιογραφία. Για μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση, το μάθημα δεν θα πρέπει να εξαντλείται μόνο στη χρήση αλγεβρικών παραστάσεων αλλά επιπλέον θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι γεωμετρικές και διαισθητικές αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν στα μαθηματικά αντικείμενα καθώς και στην αλληλεπίδραση μεταξύ των πολλαπλών αναπαραστάσεων (Kaput 1994). Η ικανότητα της αναπαράστασης της ίδιας έννοιας με διαφορετικούς τρόπους, θεωρείται προϋπόθεση για την κατανόησή της (Duval 2002).

Οι οπτικές αναπαραστάσεις μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας και να αποφύγουν γνωστές παρανοήσεις όπως ότι συνεχής είναι μόνο η συνάρτηση της οποίας το γράφημα δεν διακόπτεται. Η τεχνολογία μπορεί να βοηθήσει τόσο τους μαθητές όσο και τους φοιτητές σε αυτή την κατεύθυνση μέσω της εύκολης σχεδίασης γραφημάτων που παρέχει.(Takaci et al, 2003)

Σύμφωνα με τους Ferrini-Mundy και Graham (1994), όταν τα προβλήματα παρουσιάζονται με διαφορετικές αναπαραστάσεις τότε, οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικούς τρόπους σκέψης. Οι Lauten et al. (1994) αναφέρουν ότι όταν το ίδιο πρόβλημα δίνεται με διαφορετική αναπαράσταση όπως αλγεβρική ή γραφική οι μαθητές το χειρίζονται με διαφορετικό τρόπο. Μάλιστα όταν οι ερευνητές ζήτησαν να ακούσουν τις ιδέες τους για τη συνέχεια φάνηκε να μην υπάρχει κάποια σύνδεση ανάμεσα στον τρόπο που επιχειρηματολογούν στη γραφική και στη συμβολική αναπαράσταση. Οι ερευνητές θεωρούν ότι το επίπεδο αναπαράστασης παίζει καταλυτικό ρόλο στις ερμηνείες των μαθητών για την έννοια της συνέχειας. Για παράδειγμα σύμφωνα με τον Cornu (1991) η έννοια της συνέχειας στην καθημερινή ζωή δημιουργεί παρανοήσεις όταν δίνεται το γράφημα μιας συνάρτησης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να συγχέουν την έννοια της συνεκτικότητας και της συνέχειας. Μάλιστα οι καθηγητές φαίνεται όταν αντιμετωπίζουν ασκήσεις με το γράφημα μιας συνάρτησης να χρησιμοποιούν εκφράσεις όπως «σχεδιάζετε χωρίς να σηκώνουμε το μολύβι» συντηρώντας αυτή τη σύγχυση.

Οι φοιτητές φαίνεται να προτιμούν την αλγεβρική αναπαράσταση της συνάρτησης και να φέρνουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τη γραφική αναπαράσταση αυτής κατά τον έλεγχο της συνέχειας. Η συχνή τριβή μαθητών και φοιτητών με διαδικασίες έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη περισσότερων ικανοτήτων που αφορούν τη συμβολική γραφή κατά την επίλυση προβλημάτων (Duru, A.et al. 2010). Μάλιστα σύμφωνα με την έρευνα των Karatas et al. (2011) τα ποσοστά επιτυχίας στο χειρισμό γραφικών αναπαραστάσεων, από φοιτητές που προορίζονται για καθηγητές μαθηματικών, μειώνονται όσο αυξάνονται τα χρόνια σπουδών.

1.4 Οι τρεις κόσμοι του Tall

Ο D.Tall (2004) σε μια προσπάθεια ανάπτυξης μιας θεωρίας η οποία να καλύπτει όλα τα είδη αναπαραστάσεων και λειτουργιών στα μαθηματικά ανέπτυξε μια θεωρία σύμφωνα με την οποία υπάρχουν τρεις τρόποι προσέγγισης των μαθηματικών: ο **ενσαρκωμένος(embodied)**, ο **διαδικασιοεννοιολογικός (proceptual)** και ο **αξιωματικός (axiomatic)** κόσμος.

Ο ενσαρκωμένος έχει την βάση του στις αισθήσεις και τις δράσεις στα πλαίσια του πραγματικού κόσμου. Έχει ως εκκίνηση τη σύλληψη των φυσικών αντικειμένων μέσω των αισθήσεων. Φυσικά δεν περιορίζεται μόνο σε αυτά αλλά επεκτείνεται στις νοητικές κατασκευές οι οποίες προκύπτουν από αφαίρεση παραμένοντας όμως συνδεδεμένος με τη δράση των αισθήσεων από τις οποίες προέρχεται. Περιλαμβάνει τις έννοιες εκείνες που για να τις κατανοήσει το άτομο αναγκάζεται να τις αναμορφώσει και να τις ενσαρκώσει ώστε να μπορεί να τις χειριστεί π.χ. σε μικρή ηλικία τα παιδιά νιώθουν την ανάγκη να αναμορφώσουν τον αριθμό 5 σε 5 βόλους, 5 τελείες, αντικείμενα δηλαδή που μπορούν να αγγίξουν και να δουν σε ένα ανώτερο**,** επίπεδο το άτομο μπορεί να αποστασιοποιηθεί τελείως από το φυσικό αντικείμενο και να δρα μόνο με εικόνες πραγματικές ή νοητικές που σχετίζονται με τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η ευθεία γραμμή, η οποία μπορεί να γίνει αντιληπτή στο χώρο που κινείται το παιδί, μέσα από τις γραμμές που ζωγραφίζει, αλλά σε ανώτερο επίπεδο αυτή η γραμμή δεν έχει πάχος, αρχή ή τέλος και αποτελεί ένα κατασκεύασμα του νου που χάνει την άμεση επαφή του με το φυσικό κόσμο (Gray & Tall, 2001). Σύμφωνα με τον Altiparmak (2014) κάποια παραδείγματα αυτού του κόσμου είναι οι διαδικασίες του ορίου, της συνέχειας, της απόστασης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης οι οποίες είναι αναγκαίες για την ανάπτυξη δυνατοτήτων παραγώγισης μιας συνάρτησης. Ο ενσαρκωμένος κόσμος αποτελεί τον αρχικό τρόπο σκέψης στα μαθηματικά καθώς στα πλαίσια αυτού του κόσμου αρχίζει ο μαθητής να μαθαίνει και να σκέπτεται Μαθηματικά. Είναι ο βασικός τρόπος ενεργειών που βασίζεται στις αισθήσεις και στη δράση, είτε αυτό είναι μελέτη σχημάτων στη Γεωμετρία είτε είναι αρίθμηση αντικειμένων στην Αριθμητική. Ο μαθητής σκέφτεται Μαθηματικά, ενεργώντας σε κάτι που μπορεί να αντιληφθεί με τις αισθήσεις του, επομένως, οι εικονικές αναπαραστάσεις, οπτικές ή νοερές, αποτελούν σημαντικά εργαλεία στα πλαίσια αυτού του κόσμου.

Ο **διαδικασιοεννοιολογικός (proceptual) κόσμος ή συμβολικός (symbolic)** είναι εκείνος που αξιοποιεί το ρόλο των συμβόλων στην αριθμητική, στην άλγεβρα και στην ανάλυση συνδυάζοντας τη διπλή τους υπόσταση, ως διαδικασία και ως έννοια **(διαδικασιοέννοια/procept).** Πρόκειται για τον κόσμο της επεξεργασίας και διαχείρισης συμβόλων. Οι δράσεις ενθυλακώνονται ως έννοιες στα σύμβολα τα οποία είναι αυτά που επιτρέπουν να μετατρέψουμε τις διαδικασίες (κάνω μαθηματικά) στις έννοιες (σκέφτομαι για τα μαθηματικά). Οι διαδικασίες μπορούν και μεταβάλλονται σε έννοιες αλλά και το αντίστροφο μέσω των συμβόλων. Σε αυτό τον κόσμο κυριαρχούν τα σύμβολα των οποίων η συμβολή στο σχηματισμό των μαθηματικών εννοιών είναι καθοριστική. Ο όρος **διαδιακασιοέννοια/procept** δημιουργήθηκε από τους Gray & Tall (1994) με το συνδυασμό των λέξεων **pro**cess (διαδικασία) και con**cept** (έννοια) για να περιγράψουν το μίγμα της διαδικασίας και της αντίστοιχης έννοιας που χρησιμοποιούν κοινό συμβολισμό. Δηλαδή το σύμβολο λειτουργεί ως ο συνδετικός άξονας μεταξύ της διαδικασίας και της έννοιας, για παράδειγμα τα σύμβολα 3+2 υποδηλώνουν πρόσθεση (διαδικασία) αλλά και κάποιο ποσό (έννοια) ή το κλάσμα $\frac{4}{5}$ εκφράζει ταυτόχρονα τη διαίρεση 4 διά 5 (διαδικασία) και το αποτέλεσμα της διαίρεσης με μορφή κλασματικού αριθμού (έννοια).

Το άτομο είναι δυνατόν να παρουσιάζει δεξιοτεχνία στους χειρισμούς των συμβόλων με αποτέλεσμα να τα χρησιμοποιεί ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος άλλοτε ως διαδικασία και άλλοτε ως έννοια. Από την άλλη οι μαθητές, που αντιμετωπίζουν τα σύμβολα μόνο ως μια εντολή για την εκτέλεση μιας συγκεκριμένης διαδικασίας, πολύ συχνά συναντούν αρκετές δυσκολίες στα μαθηματικά καθώς υλοποιούν ενέργειες πάνω σε αντικείμενα συσχετίζοντας δεδομένα και ζητούμενα αποκλειστικά μέσω διαδικασιών καθιστώντας τη σκέψη περισσότερο ανελαστική καθώς έχουν **διαδικαστική γνώση (procedural knowledge)**. Η σκέψη δύναται να στηρίζεται και σε **εννοιολογική γνώση (conceptual knowledge)** δηλαδή το άτομο μπορεί να αναγνωρίσει τους δεσμούς που συνδέουν μια έννοια με άλλες έννοιες και ιδιότητες με αποτέλεσμα να είναι περισσότερο ευέλικτη. Οι ικανότητες ενός ατόμου είναι αυτές που του επιτρέπουν να αναλύει και να ανασυνθέτει το ίδιο αντικείμενο σε διαφορετικές διαδικασίες, επομένως υπάρχει η λεγόμενη **διαδικασιοεννοιολογική σκέψη (proceptual thinking)** που ορίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να χειρίζεται το συμβολισμό ευέλικτα άλλοτε ως διαδικασία και άλλοτε ως έννοια, αλλάζοντας με άνεση διαφορετικούς συμβολισμούς για το ίδιο αντικείμενο (Gray & Tall, 1994).

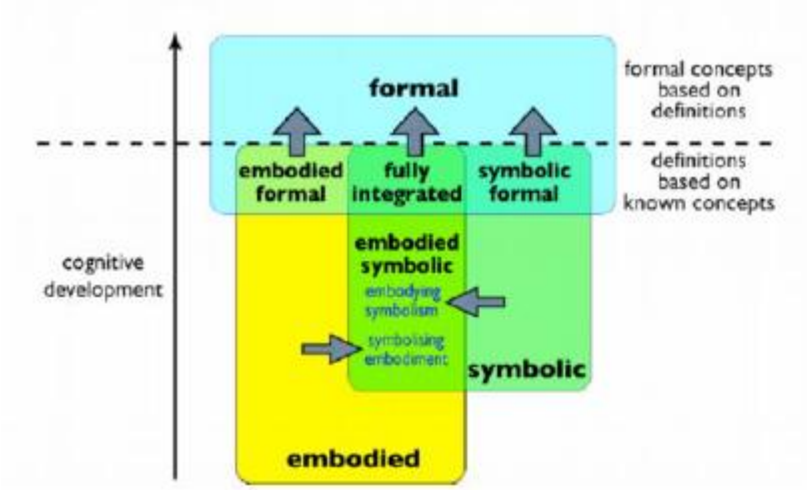
Ο **αξιωματικός (axiomatic)** κόσμος είναι εκείνος που προσεγγίζει τα μαθηματικά με τον τυπικό, φορμαλιστικό τρόπο. Κυρίαρχο ρόλο παίζουν οι ορισμοί των εννοιών και τα αξιώματα. Με αφετηρία τα αξιώματα και με λογικά συμπεράσματα οδηγείται στην απόδειξη προτάσεων. Κάθε πρόταση είναι αληθής όταν μπορεί να αποδειχθεί με βάση τα αξιώματα και τις ήδη γνωστές προτάσεις και θεωρήματα. Οι μαθητές λειτουργούν με αξιώματα τα οποία μπορούν να ορίσουν μαθηματικές δομές. Λόγω της αυστηρότητας και του φορμαλισμού που απαιτεί ο κόσμος αυτός, αποτελεί το σημείο εκείνο που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη δυσκολία για τους μαθητές με αποτέλεσμα λίγοι να εντάσσονται στον κόσμο αυτό. Τα μαθηματικά είναι ένα πλήρες οικοδόμημα το ποίο έχει για βάση τις πρωταρχικές έννοιες και τα αξιώματα και κάπως έτσι ορίζονται νέες έννοιες και αποδεικνύονται οι προτάσεις με αποτέλεσμα να έχουμε μία συνεπή και λογική θεωρία.

Ο κάθε κόσμος έχει διαφορετικό βαθμό αυστηρότητας. Ο ενσαρκωμένος παρουσιάζει μία χαλαρότητα ως προς την απόδειξη, ο διαδικασιοεννοιολογικός στηρίζεται , κατά την αποδεικτική διαδικασία, στα σύμβολα με ότι από τις δύο φύσεις που έχουν αυτά μπορεί να αντιπροσωπεύουν, ενώ ο αξιωματικός κόσμος διακρίνεται για την αυστηρότητά του μέσα από τα αξιώματα, τα θεωρήματα και τις προτάσεις. Οι δύο πρώτοι κόσμοι κυριαρχούν στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντίστοιχα. Συγκεκριμένα ο ενσαρκωμένος τρόπος σκέψης χρησιμοποιείται στα χρόνια του δημοτικού κατά την εισαγωγή ορισμένων εννοιών όμως στο γυμνάσιο περιορίζεται κυρίως στην αντιμετώπιση των γραφικών παραστάσεων. Ο δεύτερος κόσμος είναι αυτός ο οποίος κυριαρχεί στα χρόνια του γυμνασίου και του λυκείου με τους μαθητές σε πολλές περιπτώσεις να μην είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν τον ενσαρκωμένο τρόπο σκέψης. Ο τρίτος κόσμος συναντάται στο πανεπιστήμιο όπου έχουμε τα αξιώματα τους ορισμούς και τα θεωρήματα που προκύπτουν μέσα από τις αποδείξεις.

Η έννοια της συνέχειας αρχικά έχει ενσαρκωμένη υπόσταση μέσω του συνεχούς της ευθείας. Το γράφημα αποτελεί ένα ενσαρκωμένο αντικείμενο, το βάρος δίνεται στην εποπτεία του αντικειμένου που είναι η ευθεία. Όταν δίνεται ο ορισμός του λυκείου η έννοια αντιμετωπίζεται στα πλαίσια του συμβολικού κόσμου. Γίνεται χρήση κατάλληλου συμβολισμού ο οποίος αναφέρεται και στη διαδικασία υπολογισμού του ορίου και στην τιμή αυτού αλλά και στην τιμή της συνάρτησης η οποία πρέπει να είναι ίση με αυτή του ορίου. Η έμφαση δίνεται στους υπολογισμούς και στη διαχείριση των εννοιών και πάντα με τη χρήση των κατάλληλων αλγεβρικών συμβόλων τα οποία είναι συνδετικός κρίκος ανάμεσα στις έννοιες και τις διαδικασίες. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει και στους φοιτητές όταν μαθαίνουν τον ε-δ ορισμό. Στη συνέχεια έχουμε τη είσοδο στον αξιωματικό κόσμο καθώς εισάγονται οι ιδιότητες και τα θεωρήματα που αφορούν την έννοια. Ο φοιτητής στα πλαίσια αυτού του κόσμου απαιτείται να έχει συνείδηση των κανόνων και μέσω λογικών προτάσεων να οδηγείται στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

1.5 Η αλληλεπίδραση των τριών κόσμων του Tall

Οι τρεις κόσμοι δεν είναι διακριτοί αλλά ανάμεσά τους υπάρχει μία ώσμωση. Αυτό μπορεί να φανεί και στο παρακάτω σχήμα:



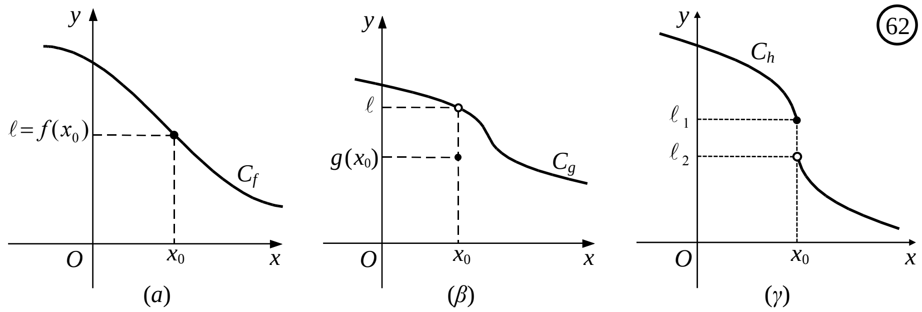
Το παραπάνω σχήμα Tall (2008b) δείχνει την αλληλεπίδραση των τριών κόσμων. Η βάση των σχολικών μαθηματικών είναι ο ενσαρκωμένος κόσμος όπου ενσαρκώνονται υλικές αντιλήψεις και ενέργειες (παιχνίδι ,σχήματα, μέτρηση με δείξιμο αντικειμένων κ.ά. Αργότερα αυτές οι ενέργειες μπορούν να συμβολιστούν και να λειτουργήσουν ως ενέργειες και οντότητες πάνω στις οποίες θα εφαρμοστούν και άλλες ενέργειες για παράδειγμα ενέργειες όπως η μέτρηση θα συμβολιστούν ως αριθμοί και σε αυτούς θα εφαρμοστούν οι πράξεις που είναι μια νέα ενέργεια. Η μεταφορά από την ενσάρκωση στο χειρισμό των συμβόλων θα οδηγήσει στη μετατόπιση από τον ενσαρκωμένο κόσμο στο διαδικασιοεννοιολογικό και πλέον οι δύο κόσμοι θα αλληλεπιδρούν στα σχολικά μαθηματικά. Ο τελικός προορισμός είναι η μετάβαση στον αξιωματικό κόσμο. Φυσικά, το μοντέλο δεν είναι γραμμικό με αφετηρία τον ενσαρκωμένο κόσμο και προορισμό τον αξιωματικό. Το μοντέλο μπορεί να λειτουργήσει και κυκλικά για παράδειγμα η έννοια του διανυσματικού χώρου. Η αφετηρία είναι το R^2 όπου έχουμε κάποια εικόνα, έπειτα περνάμε σε ν-διάστατους χώρους και στη συνέχεια ένα στοιχείο του $R^ν$ το υλοποιούμε με χρήση ενός διανύσματος.

Ο ορισμός της συνέχειας είναι ιδιαίτερα απαιτητικός καθώς δε βοηθά στο σχηματισμό της εικόνας της έννοιας. Αυτό συνεπάγεται ότι ακόμα και η γνώση του δεν είναι αρκετή εν αντιθέσει ίσως με άλλες έννοιες των μαθηματικών αλλά απαιτείται βαθύτατη κατανόηση ώστε οι φοιτητές να είναι σε θέση να τον εφαρμόσουν όταν αυτό τους ζητείται. Κάτι τέτοιο αποδείχθηκε και μέσα από την ερώτηση 4. Ζητήσαμε από τους φοιτητές να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό κάτι που κατευθείαν τους οδηγεί στη χρησιμοποίηση του κελιού ορισμού έννοιας, οι περισσότεροι έδωσαν σωστά τον ορισμό όμως δεν ήταν σε θέση να τον χρησιμοποιήσουν ίσως μια ερμηνεία ήταν ότι απλά τη γνώση του ορισμού δεν είχε αναπτυχθεί σωστά η εικόνα της έννοιας. Φυσικά η έννοια της συνέχειας είναι τόσο κεντρική στα μαθηματικά που οι φοιτητές έρχονται συνεχώς αντιμέτωποι με αυτή.

2. Η έννοια της συνέχειας στα βιβλία του λυκείου και του πανεπιστημίου

2.1 Η έννοια της συνέχειας στο βιβλίο του λυκείου

Η έννοια της συνέχειας διδάσκεται στη Γ Λυκείου μέσα από το βιβλίο των Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος Γ. στο Β μέρος του βιβλίου, αυτό της Ανάλυσης. Η διδασκαλία της έννοιας γίνεται αμέσως μετά τη διδασκαλία του ορίου. Και η έννοια της συνέχειας καθώς και αυτή του ορίου διδάσκονται χωρίς τη χρήση των ε-δ τα οποία είναι εκτός ύλης και αναφέρεται μόνο για την πληρότητα του βιβλίου. Συγκεκριμένα, η έννοια της συνέχειας εισάγεται μέσω εποπτικών παραδειγμάτων. Η ενότητα ξεκινά με την παρουσίαση τριών γραφημάτων από τα οποία μόνο το πρώτο αναφέρεται σε συνεχή συνάρτηση.



Το βιβλίο αναφέρει «Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της f δε διακόπτεται στο x_0. Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο x_0** μόνο τη συνάρτηση f.» Η συγκεκριμένη φράση μπορεί να χαρακτηριστεί ανεπιτυχής καθώς θα λέγαμε ότι ενισχύει τη λάθος αντίληψη πως συνεχής συνάρτηση είναι μόνο αυτή που το γράφημά της δεν διακόπτεται. Στη συνέχεια δίνεται ο ακόλουθος ορισμός:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Έπειτα δίνονται κάποια παραδείγματα μη συνεχών συναρτήσεων τα οποία αφορούν κάποιες δίκλαδες συναρτήσεις:

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Για παράδειγμα:

— Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν} \quad x\le 0 \\ 2-x, & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$,

οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

— Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x\ne 1 \\ 3, & \text{αν} \quad x=1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1, αφού

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, ενώ $f(1)=3$.

Στη συνέχεια το βιβλίο δίνει μία βάση δεδομένων συνεχών συναρτήσεων καθώς σύμφωνα με αυτό συνεχής είναι κάθε συνάρτηση η οποία ανήκει σε μία από τις κατηγορίες:

— **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση *P* είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_0 \in R$ ισχύει

$\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$.

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\dfrac{P}{Q}$ είναι συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

— **Οι συναρτήσεις $f(x)=\text{ημ}x$ και $g(x)=\text{συν}x$ είναι συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0 \in R$ ισχύει

$\lim\limits_{x\to x_0} \text{ημ}x=\text{ημ}x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} \text{συν}x=\text{συν}x_0$.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

— **Οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\ne 1$ είναι συνεχείς**.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της πολυωνυμικής συνάρτησης , αν και πρόκειται για αρκετά εύκολη απόδειξη, θα μπορούσε να δοθεί καθώς καλλιεργεί μία συνείδηση στους μαθητές κατά την οποία μπορούν να κάνουν ανάκληση κατά την επιχειρηματολογία τους από μία βάση δεδομένων αδυνατώντας όμως πολλές φορές να αποδείξουν τον ισχυρισμό τους κάτι που σε ανώτερο επίπεδο (π.χ. συνεχής από μεμονωμένα σημεία στο πανεπιστήμιο) μπορεί να οδηγήσει σε ελλείψεις.

Οι συγγραφείς του βιβλίου δίνουν κάποια θεωρήματα για τη συνέχεια τα οποία ακολουθούνται από λίγα παραδείγματα τα οποία θα μπορούσαν να εμπλουτιστούν και να είναι πιο πετυχημένα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f+g, \quad c\cdot f, \text{ όπου } c\in\mathbb{R}, \quad f\cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f| \text{ και } \sqrt[\nu]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

Για παράδειγμα:

— Οι συναρτήσεις $\boldsymbol{f(x)=\varepsilon\varphi x}$ και $\boldsymbol{g(x)=\sigma\varphi x}$ είναι **συνεχείς** ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

— Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{3x-2}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$, αφού η συνάρτηση $g(x)=3x-2$ είναι συνεχής.

— Η συνάρτηση $f(x)=|x\eta\mu x|$ είναι συνεχής, αφού είναι της μορφής $f(x)=|g(x)|$, όπου $g(x)=x\eta\mu x$ η οποία είναι συνεχής συνάρτηση ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)=x$ και $f_2(x)=\eta\mu x$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\varphi(x)=\eta\mu(x^2-1)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & y=x^2-1 \arrow[d, "g"] \\ & \omega=\eta\mu y=\eta\mu(x^2-1) \end{tikzcd}$$

πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=\text{ημ}x$.

Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα

Πολλά από τα θεωρήματα της Ανάλυσης αναφέρονται σε συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σε διαστήματα του πεδίου ορισμού τους. Είναι, επομένως, απαραίτητο να γνωρίζουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα.

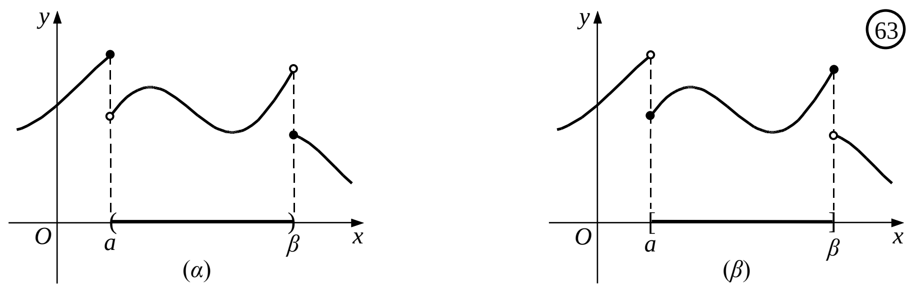
Έπειτα ακολουθεί κάποιος ορισμός ο οποίος αν δεν ακολουθηθεί από τα σωστά παραδείγματα μπορεί να δημιουργήσει τρομερές παρανοήσεις όπως ότι συνεχής είναι μια συνάρτηση μόνο αν το γράφημά της δεν διακόπτεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η συνέχεια να συγχέεται με την έννοια της συνεκτικότητας του γραφήματος. Αυτό το οποίο ισχύει είναι πως μια συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σε κάποιο διάστημα έχει συνεκτικό γράφημα και αν το γράφημα μια συνάρτησης διακόπτεται σε κάποιο διάστημα του πεδίου ορισμού της τότε η συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Φυσικά η έννοια της συνεκτικότητας περιέχει αρκετά επικίνδυνα σημεία όπως ότι μία συνάρτηση παρόλο που μπορεί να έχει συνεκτικό γράφημα δύναται να είναι ασυνεχής.

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β). (Σχ. 63α)

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta) \quad (\Sigma\chi.\ 63\beta)$$



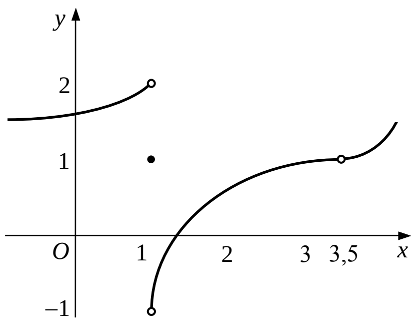
Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$.

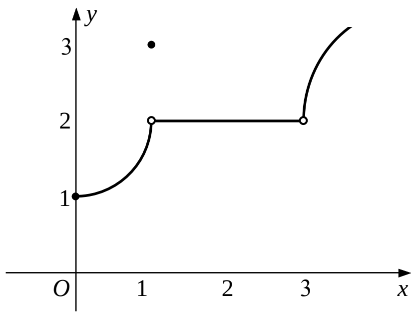
Αν δούμε τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται στο χαρακτηρισμό μίας συνάρτησης ως συνεχή θα δούμε πως μόνο μία από αυτές περιέχει γραφικές παραστάσεις. Επιπλέον βλέπουμε σε όλες το ίδιο μοτίβο, μία δίκλαδη συνάρτηση όπου ο μαθητής είτε έχει κατανοήσει τον ορισμό είτε όχι μπορεί να αντιμετωπίσει τις ασκήσεις κάνοντας απλώς κάποιους αλγεβρικούς υπολογισμούς δηλαδή μέσα από διαδικασίες, οι οποίες για κάποιους μαθητές μπορεί να είναι κενού νοήματος αν δεν έχουν κατανοήσει την έννοια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ x^3\ , & x\geq 2 \end{cases}$, αν $x_0=2$

ii) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ \sqrt{3+x}, & x\geq 1 \end{cases}$, αν $x_0=1$

iii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2}, & x\neq -2 \\ -3 \quad , & x=-2 \end{cases}$, αν $x_0=-2$.

3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις και μετά να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση, αν

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & |x|\leq 1 \\ \dfrac{2}{x} \quad , & |x|>1 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} \quad , & x\neq 2 \\ 5 \quad , & x=2 \end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} x \quad , & x<1 \\ \ln x \quad , & x\geq 1 \end{cases}$ iv) $f(x)=\begin{cases} e^x \quad , & x\leq 0 \\ -x^2+1 \quad , & x>0 \end{cases}$.

4. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3 \quad , & x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \quad , & x>1 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\text{ημ}x}{x} \quad , & x<0 \\ \text{συν}x \quad , & x\geq 0 \end{cases}$.

5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

i) $f(x)=\text{ημ}(\text{συν}x)$ ii) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$

iii) $f(x)=\text{ημ}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ iv) $f(x)=e^{\text{ημ}x}$

v) $f(x)=\ln(\ln x)$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $f(x)=\begin{cases} (x-\kappa)(x+\kappa) \quad , & x\leq 2 \\ \kappa x+5 \quad , & x>2 \end{cases}$, να προσδιορίσετε το κ, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

2. Αν $f(x)=\begin{cases} \alpha^2x^2+\beta x-12 & , \quad x<1 \\ 5 & , \quad x=1 \\ \alpha x+\beta & , \quad x>1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

3. i) Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$. Να βρείτε το $f(0)$, αν για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει

$x\,f(x)=\text{συν}x-1$.

ii) Ομοίως, να βρείτε το $g(0)$ για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$|\,xg(x)-\text{ημ}x\,|\leq x^2$.

Στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου δίνονται κάποια βασικά θεωρήματα της συνέχειας όπως το Bolzano, των ενδιάμεσων τιμών καθώς και το μέγιστης-ελάχιστης τιμής.

2.2 Η έννοια της συνέχειας στο βιβλίο του πανεπιστημίου

Στο μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστήμιου Αθηνών η έννοια της συνέχειας διδάσκεται για πρώτη φορά στα πλαίσια του μαθήματος Απειροστικός Λογισμός Ι στο πρώτο εξάμηνο σπουδών. Το βιβλίο που χρησιμοποιείται είναι Απειρσοτικός Λογισμός Ι Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε. από τις εκδόσεις Συμμετρία (1987). Στο συγκεκριμένο βιβλίο η συνέχεια παρουσιάζεται στο $8^{ο}$ κεφάλαιο.

Ο ορισμός που δίνεται είναι ο εξής:

Έστω XCR, f:X→R μία πραγματική συνάρτηση και x_0єR. Η f είναι συνεχής στο αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 ώστε αν xєX και $|x-\text{xo}|<\delta$ τότε$|f(x)-f(\text{xo})|<\varepsilon$

Αν μελετήσουμε το συγκεκριμένο βιβλίο σε σχέση με το σχολικό φαίνεται σε πολλά σημεία να μην αλληλοσυμπληρώνονται με άρτιο τρόπο καθώς δε φαίνεται το ένα ως συνέχεια του άλλου καθιστώντας επιτακτική την ανάγκη ο καθηγητής του πανεπιστημίου να γεφυρώσει αυτό το κενό μέσα από τις σημειώσεις που θα δώσει στην παράδοση του μαθήματος. Στο λύκειο δίνεται ο ορισμός μέσω του ορίου ενώ στο πανεπιστήμιο με χρήση των ε-δ με μελέτη της συνέχειας σε σημείο του πεδίου ορισμού. Οι δύο ορισμοί φυσικά δεν είναι ισοδύναμοι καθώς του λυκείου ισχύει αποκλειστικά για σημεία συσσώρευσης. Η πανεπιστημιακή μορφή του σχολικού ορισμού θα ήταν Έστω XCR, f:X→R μία πραγματική συνάρτηση και x_oϵR. Η f είναι συνεχής στο αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 ώστε αν xϵX και $0 < |x - \text{xo}| < \delta$ τότε$|f(x) - f(\text{xo})| < \varepsilon$. Στο λύκειο λοιπόν ο ορισμός αναφέρεται σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων ενώ στο πανεπιστήμιο το X είναι κάποιο σύνολο.

3. Μεθοδολογία

3.1 Συλλογή δεδομένων

Η διαδικασία συλλογής δεδομένων που ακολουθήθηκε ήταν η εξής: Το ακαδημαϊκό έτος 2014-2015 μοιράστηκαν ερωτηματολόγια σε 96 φοιτητές τμήματος Μαθηματικών. Ζητήθηκε προαιρετικά η συμπλήρωση του ονοματεπώνυμου των φοιτητών καθώς και η συμπλήρωση του εξάμηνου σπουδών των φοιτητών. Είχε προηγηθεί το Μάρτιο του 2014 μία πιλοτική έρευνα σε 5 άτομα η οποία. Από τους φοιτητές που συμπλήρωσαν τα στοιχεία τους η πλειοψηφία βρίσκονταν στο $7^{ο}$ εξάμηνο σπουδών είτε ήταν σε κάποιο επί πτυχίω εξάμηνο, ενώ αρκετοί φοιτητές ήταν εγγεγραμμένοι στο $5^{ο}$ εξάμηνο σπουδών. Μετά τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων και την αρχική τους ανάλυση επιλέχθηκαν συγκεκριμένοι φοιτητές ,ανάμεσα σε αυτούς που είχαν συμπληρώσει τα στοιχεία τους, σύμφωνα με το ενδιαφέρον που κρίθηκε ότι είχαν οι απαντήσεις τους για περεταίρω μελέτη. Υλοποιήθηκαν 7 συνεντεύξεις οι οποίες δόθηκαν εντός του Μαρτίου του 2015, οι οποίες καταγράφηκαν και έπειτα απομαγνητοφωνήθηκαν. Οι συνεντεύξεις ήταν ημιδομημένες και δόθηκαν αφού αρχικά έγινε μία πρώτη γνωριμία με τους φοιτητές και αφού είχε προηγηθεί μία μικρή συζήτηση για τη μαθηματική τους βιογραφία.

3.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας είναι:

1. Ποιες είναι οι πιο συχνές παρανοήσεις των φοιτητών για την έννοια της συνέχειας.

2. Ποιος ο βαθμός κατανόησης του ορισμού του πανεπιστημίου της έννοιας της συνέχειας.

3. Ποιες οι διαφορές που παρουσιάζουν οι φοιτητές στον έλεγχο της συνέχειας ανάμεσα στο επίπεδο της γραφικής αναπαράστασης και σε αυτό της συμβολικής γραφής.

Θα μπορούσαμε να πούμε πως αν η εισαγωγή των εννοιών στον απειροστικό λογισμό δε γίνει μέσω του ενσαρκωμένου κόσμου τότε οι έννοιες είναι κενού νοήματος, από την άλλη όταν εισάγονται μέσα σε ένα πλαίσιο από την καθημερινότητα υπάρχει ο κίνδυνος να κρυώσουν το νόημα των μαθηματικών όποτε χρειάζεται προσεκτικός χειρισμός.

Στη συγκεκριμένη έρευνα έγινε προσπάθεια να διατηρηθούν οι ισορροπίες μέσα από την προσεκτική κατασκευή του ερωτηματολογίου. Υπήρχαν ερωτήσεις που περιείχαν γραφικές παραστάσεις οι οποίες ανήκουν στον ενσαρκωμένο κόσμο άλλες οι οποίες συνδύαζαν διαδικασίες όπως ελέγχου της συνέχειας αλλά και έννοιες καθώς και ερωτήματα που απαιτούσαν αυστηρότητα και ένα πιο τυπικό και φορμαλιστικό τρόπο προσέγγισης χειρισμούς δηλαδή που συναντούμε στον αξιωματικό κόσμο του Tall.

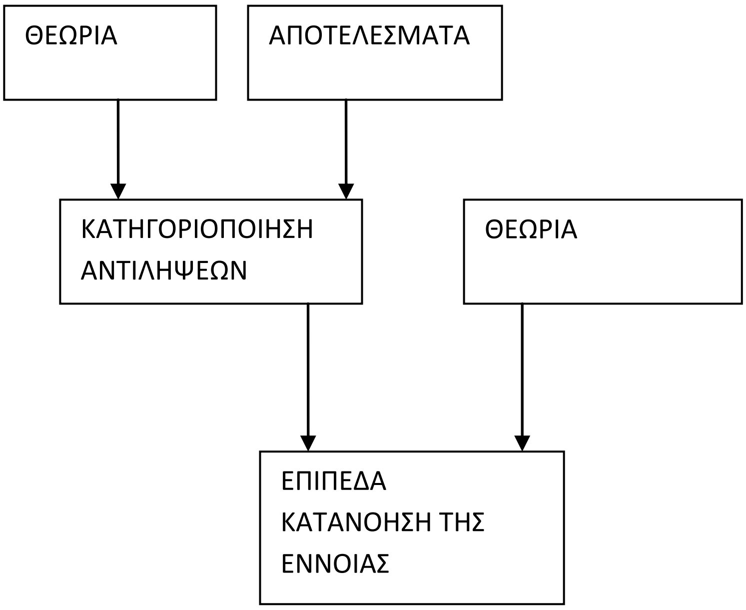
Το ερωτηματολόγιο βρίσκεται στο παράρτημα της παρούσας εργασίας. Η πρώτη ερώτηση έχει ως στόχο να ελεγχθεί η διαίσθηση των φοιτητών και οι αυθόρμητες αντιλήψεις για την εικόνα της έννοιας της συνέχειας. Η δεύτερη σχεδιάστηκε με σκοπό να ελέγξει κατά πόσο οι φοιτητές έχουν γνώση των ορισμών του λυκείου και του πανεπιστημίου αλλά και κατά πόσο είναι σε θέση να αναγνωρίσουν ότι οι δύο ορισμοί δεν είναι ισοδύναμοι. Μέσω της τρίτης ερώτησης μελετάται πως αντιμετωπίζουν οι φοιτητές τον έλεγχο της συνέχειας όταν δίνεται το γράφημα μιας συνάρτησης. Στην τέταρτη ερώτηση ελέγχεται αν οι φοιτητές είναι σε θέση να εφαρμόσουν τον ορισμό του πανεπιστημίου. Στην πέμπτη ερώτηση ζητείται η άρνηση του ορισμού της συνέχειας του πανεπιστημίου. Η έκτη ερώτηση σχεδιάστηκε ώστε να ελέγξει τον έλεγχο της συνέχειας όταν δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης. Τέλος δόθηκαν κάποια ερωτήματα της κατηγορίας σωστού – λάθους με σκοπό να ελέγξουν περεταίρω θέματα που εξετάζονται σε όλη την έκταση του ερωτηματολογίου.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα ελέγχεται από όλη την έκταση του ερωτηματολογίου καθώς οι πιθανές παρανοήσεις των φοιτητών για την έννοια της συνέχειας μπορούν να παρατηρηθούν μέσα από όλα τα ερωτήματα. Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα μελετάται μέσα από το δεύτερο, το τέταρτο και το πέμπτο ερώτημα. Συγκεκριμένα η γνώση του ορισμού ελέγχεται μέσω της δεύτερης και της πέμπτης ερώτησης ενώ η εφαρμογή του ορισμού του πανεπιστημίου μέσα από την τέταρτη ερώτηση. Επιπλέον το συγκεκριμένο ερευνητικό ερώτημα ελέγχεται και στα ερωτήματα τρία και έξι μέσα από τον έλεγχο της συνέχειας όποτε αυτός έγινε από τους φοιτητές με χρήση των ορισμών. Τέλος το τρίτο ερευνητικό ερώτημα ελέγχεται μέσα από το τρίτο και το έκτο ερώτημα τα οποία μελετήθηκαν συγκριτικά καθώς στην ερώτηση τρία τα τέσσερα γραφήματα αντιστοιχούν σε κάποιο τύπο συνάρτησης της έκτης ερώτησης.

3.3 Ανάλυση δεδομένων

Το θεωρητικό πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε ήταν η θεωρία των τριών κόσμων των μαθηματικών του D.Tall καθώς και η μελέτη των Tall & Vinner σχετικά με την εικόνα έννοιας και τον ορισμό έννοιας. Κεντρικό ρόλο στην ανάλυση έπαιξαν και οι προϋπάρχουσες έρευνες σχετικά με την έννοια της συνέχειας καθώς έγινε προσπάθεια να συσχετιστούν με τα δεδομένα της συγκεκριμένης έρευνας. Για την έρευνα χρησιμοποιήθηκε ποιοτική μεθοδολογία και ποσοτικά στοιχεία δόθηκαν μόνο στις ερωτήσεις 2 και 7. Η ανάλυση είχε ως άξονες τα ερευνητικά ερωτήματα καθώς ο ένας άξονας ήταν η καταγραφή των παρανοήσεων των φοιτητών για την έννοια, ο δεύτερος άξονας ήταν ο βαθμός κατανόησης του ορισμού και ο τρίτος η επισήμανση των διαφορών που παρουσιάζονται ανάμεσα στα διαφορετικά επίπεδα αναπαράστασης για τους φοιτητές. Με βάση τα αποτελέσματα και έπειτα από προσεκτική μελέτη της βιβλιογραφίας δημιουργήθηκαν κατηγορίες απαντήσεων μέσα από τα δεδομένα (grounded theory Strauss, G. (1967)) για κάποια από τα ερωτήματα (ερ. 2,3,4 και 6) και έπειτα με συσχέτιση αυτών των κατηγοριών έγινε μία προσπάθεια ομαδοποίησης αυτών των κατηγοριών από τις οποίες προέκυψαν κατηγορίες αντιλήψεων των φοιτητών για τη συνέχεια. Τέλος από τη συνολική μελέτη όλων των ερωτημάτων αλλά και το θεωρητικό πλαίσιο των τριών κόσμων του Tall και την εικόνα που είχαμε για κάθε φοιτητή ξεχωριστά έγινε προσπάθεια δημιουργίας κάποιων επιπέδων κατανόησης για την έννοια της συνέχειας.

Σχηματική αναπαράσταση της συλλογής δεδομένων.



4. Αποτελέσματα

Ερώτηση 1

Η πρώτη ερώτηση είχε ως στόχο να μελετήσει την πρώτη εικόνα που σχηματίζουν οι φοιτητές για την έννοια της συνέχειας, και ήταν ανοικτού τύπου. Μέσα από τη μελέτη των απαντήσεων των φοιτητών, φάνηκε να δημιουργούνται κάποιες κατηγορίες:

Συνεκτική αντίληψη: Το χαρακτηριστικό αυτής της αντίληψης είναι ότι οι φοιτητές θεωρούν ως συνεχή συνάρτηση αυτή της οποίας το γράφημα δεν διακόπτεται. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις που έδωσαν οι φοιτητές ήταν: «Μια συνάρτηση που το σύνολο τιμών της είναι διάστημα της μορφής $(-\infty,+\infty)[\alpha,+\infty)(-\infty,\beta][\alpha,\beta]$», «το γράφημα της συνάρτησης να μην έχει κενά», «χάραξη της γραφικής παράστασης χωρίς να υπάρχουν «τρύπες»», «μια συνάρτηση η οποία δεν παρουσιάζει κάποιο άλμα σε σημείο του πεδίου ορισμού της», «γραφική παράσταση η οποία συνεχίζει χωρίς διακοπές», «η έννοια σχετίζεται με το κατά πόσο το γράφημα παρουσιάζει κενά δηλαδή η γραμμή διακόπτεται», «διαδικασίες ομαλές», «γράφημα χωρίς μεμονωμένα σημεία», «μία συνεχόμενη γραμμή χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι απ’ το χαρτί», «όταν δεν έχει οπές το γράφημα, άπειρα σημεία ενωμένα ώστε να μην υπάρχουν κενά μεταξύ τους», «γνωρίζοντας ότι δεν είναι αναγκαστικά σωστό σκέφτομαι μια καμπύλη χωρίς τρύπες.»

Η συγκεκριμένη αντίληψη ήταν αυτή που συναντήθηκε εντονότερα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το ότι εμφανίστηκε ακόμα και σε φοιτητές οι οποίοι στα υπόλοιπα ερωτήματα έδειξαν ότι έχουν κατανοήσει την έννοια, κάτι που αποδεικνύει το πόσο έντονη είναι η επιρροή μέσα από την καθημερινότητα ,όπου συνεχές θεωρούμε κάτι το οποίο δεν διακόπτεται, δημιουργώντας δυσκολίες όταν η έννοια συναντάται στο μαθηματικό πλαίσιο. Μάλιστα παρατηρούμε πως οι εικόνες των φοιτητών στη συγκεκριμένη κατηγορία μπορούν να χωριστούν σε δύο άλλες υποκατηγορίες καθώς είτε είναι στατικές π.χ. «γράφημα χωρίς μεμονωμένα σημεία» είτε προϊόν κάποιας κίνησης π.χ. «σχεδίαση μιας συνεχόμενης γραμμής χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί».

Αναφορά στον ορισμό: Η δεύτερη μεγαλύτερη κατηγορία ήταν αυτή στην οποία οι φοιτητές έδωσαν τον ορισμό της έννοιας ή έκαναν κάποια γενική αναφορά σε αυτόν. Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα: «αν πάρουμε μια περιοχή ενός σημείου συσσώρευσης που ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης τότε οποιοδήποτε σημείο αυτής της περιοχής απεικονίζεται σε μια περιοχή της εικόνας αυτού του σημείου συσσώρευσης», «$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A |x - x_o| < \delta$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$ $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$», «μας επιτρέπει να είμαστε οσοδήποτε κοντά στο $f(x_o)$ θέλουμε αρκεί να είμαστε κατάλληλα κοντά στο x_o,» «όταν οσοδήποτε κοντά πλησιάζουμε στο πεδίο ορισμού της πλησιάζουμε και την αντίστοιχη εικόνα», «ο ορισμός του βιβλίου της Γ’ λυκείου».

Οι συγκεκριμένες απαντήσεις ήταν αρκετά συχνές κάτι που είναι απόλυτα λογικό αν σκεφτούμε τη σημασία του ορισμού για την έννοια καθώς οι περισσότερες κατηγορίες ασκήσεων που συναντούν οι φοιτητές έχουν άμεση επαφή με αυτόν και θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως ο συγκεκριμένος ορισμός είναι από τους βασικότερους της ανάλυσης. Άλλωστε είναι αδιαμφισβήτητο το πόσο σημαντικοί είναι οι ορισμοί για την επιστήμη των μαθηματικών αφού σε αυτούς στηρίζονται τα θεωρήματα εν αντιθέσει με την καθημερινότητα όπου συνήθως δεν αξιοποιούμε συχνά τον ορισμό κάποιου πράγματος. Κάποιοι ελάχιστοι φοιτητές έδωσαν απαντήσεις οι οποίες συνδυάζουν τις δύο προηγούμενες κατηγορίες.

Αναφορά σε θεωρήματα συνέχειας: Κάποιοι λίγοι φοιτητές αναφέρθηκαν σε θεωρήματα της συνέχειας π.χ. «μια συνάρτηση συνεχής με δύο ετερόσημες τιμές θα τέμνει πάντα τον άξονα x'x σε τουλάχιστον ένα σημείο (αναφορά στο Bolzano)». Τα περισσότερα από τα θεωρήματα της συνέχειας διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στην ανάλυση με αποτέλεσμα όταν κάποιος αναφέρεται στην έννοια να είναι έντονη η εικόνα των θεωρημάτων σε ορισμένους φοιτητές.

Γενικές επιρροές από τα μαθηματικά: Αρκετοί φοιτητές έδωσαν απαντήσεις οι οποίες δεν είχαν άμεση σχέση με τη συνέχεια αλλά είχαν επιρροές από το πεδίο των μαθηματικών. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις ήταν: «όρια», «βασική ιδιότητα συναρτήσεων», «γραφικές παραστάσεις», «η συνάρτηση f(x)=x», «σύγκλιση κατά σημείο ή ομοιόμορφα», «συναρτήσεις», «το όριο υπάρχει παντού», «μία τυχαία συνάρτηση και ένα σημείο ασυνέχειας», «σύνδεση του πεδίου ορισμού με το σύνολο τιμών μέσω συναρτήσεων», «πλευρικά όρια».

Η συγκεκριμένη κατηγορία ήταν η τρίτη μεγαλύτερη, κάτι απόλυτα λογικό αν σκεφτούμε τις έντονες εικόνες που έχουν οι φοιτητές από τις μαθηματικές σπουδές τους.

Επιρροές από την καθημερινότητα: Τέλος κάποιοι ελάχιστοι φοιτητές έδωσαν απαντήσεις οι οποίες έχουν να κάνουν με το πώς χρησιμοποιείται η έννοια στην καθημερινότητα π.χ. «δεν υπάρχει παύση ή διακοπή».

Συνοψίζοντας, η συντριπτική πλειοψηφία των φοιτητών έδωσε απαντήσεις επηρεασμένες από την αντίληψη πως το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης δεν διακόπτεται. Κάτι τέτοιο δηλώνει πως η επιρροή από αυτή την αντίληψη θα είναι έντονη και στα υπόλοιπα ερωτήματα.. Η συγκεκριμένη αντίληψη οφείλεται κατά κύριο λόγο στις επιρροές από το πλαίσιο της καθημερινότητας όπου συνεχές είναι κάτι που δεν διακόπτεται, όμως η συγκεκριμένη αντίληψη αρκετές φορές ενισχύεται και στα σχολικά χρόνια όπως φάνηκε και στις συνεντεύξεις που θα παρουσιαστούν παρακάτω, καθώς, όπως λέει χαρακτηριστικά ο Γιάννης « στο σχολείο μας έλεγαν ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής όταν δεν έχει στο γράφημά της κενά». Επιπλέον υπήρχαν απαντήσεις οι οποίες αναφέρονταν στον ορισμό, με λίγες μόνο από αυτές να δίνουν τον ακριβή ορισμό. Κάτι τέτοιο είναι λογικό αν σκεφτούμε το βαθμό χαλαρότητας της ερώτησης η οποία ήθελε να εξετάσει το ποια είναι η πρώτη εικόνα που σκέφτεται ένας φοιτητής όταν ακούει για την έννοια της συνέχειας. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι οι περισσότερες απαντήσεις εντάσσονται σε δύο μεγάλες ομάδες, αυτή της «συνεκτικής αντίληψης» και αυτή της έντονης επιρροής από τον ορισμό της έννοιας κάτι λογικό αν σκεφτούμε τη σημασία που έχει ο ορισμός της έννοιας.

Ερώτηση 2

Το συγκεκριμένο ερώτημα ως προς το δεύτερο μέρος του όπου ζητείται από τους φοιτητές να αναφέρουν αν οι δύο ορισμοί λυκείου και πανεπιστημίου είναι ισοδύναμοι ήταν από αυτά που δυσκόλεψε περισσότερο τους φοιτητές. Η πλειοψηφία και συγκεκριμένα 56 άτομα δεν ανέφεραν καν, παρόλο που ζητήθηκε, αν οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Επίσης από αυτούς που έδωσαν κάποια απάντηση ένα μεγάλο μέρος θεωρεί ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι καθώς μόνο 21 από αυτούς ισχυρίζονται ότι δεν είναι ισοδύναμοι. Παρ' όλα αυτά στις περισσότερες των περιπτώσεων ακόμα και αυτοί αδυνατούσαν να αιτιολογήσουν σωστά ή δεν αιτιολογούσαν τον ισχυρισμό τους.

Ακολουθούν κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις των φοιτητών ανάλογα με τον ισχυρισμό τους ως προς την ισοδυναμία των δύο ορισμών.

Ισοδύναμοι: «είναι ισοδύναμοι καθώς ισχύει είτε το xo είναι σημείο συσσώρευσης είτε μεμονωμένο σημείο», «αν είναι μεμονωμένο σημείο τότε προφανώς το $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$», «είναι ισοδύναμοι διότι ο δεύτερος ξεκάθαρα είναι ο ορισμός του ορίου της f όταν x→ x_0», «οι δύο ορισμοί είναι σαφώς ισοδύναμοι» «είναι ισοδύναμοι καθώς προσπαθούμε να φτάσουμε οσοδήποτε κοντά στο x→ x_0», «είναι ισοδύναμοι με τη διαφορά ότι στο πανεπιστήμιο εισάγεται το ε-δ», «είναι ισοδύναμοι μόνο που ο τύπος του πανεπιστημίου είναι πιο αυστηρός», «για οσοδήποτε μικρά δ,ε αν το x→ x_0 τότε f(x) → $f(x_0)$», «είναι ισοδύναμοι καθώς η έννοια του ορισμού στον πρώτο μπορεί να αποδοθεί και με τον ε-δ», «από τον ορισμό του λυκείου μπορούμε να φτάσουμε σε αυτόν του πανεπιστημίου με ισοδυναμίες».

Ένα μεγάλο μέρος των φοιτητών που θεωρεί ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι βλέπει τον ορισμό του πανεπιστημίου σαν μια «αυστηροποίηση» αυτού του λυκείου. Πολλοί φοιτητές θεωρούν πως οι ορισμοί είναι ακριβώς οι ίδιοι απλώς πλέον με τα ε-δ εργαλεία του πανεπιστημίου ο ορισμός μπορεί να δοθεί και με διαφορετικό τρόπο.

Μη ισοδύναμοι (με λάθος/ελλιπής αιτιολόγηση): «όχι ισοδύναμοι ο ορισμός με το όριο συνεπάγεται τον ε-δ το αντίστροφο δεν ισχύει αφού π.χ. σε κάθε μεμονωμένο σημείο του π.ο. της δεν ορίζεται εκεί όριο», « ο δεύτερος είναι πιο γενικός» «στα μεμονωμένα σημεία είναι συνεχής αλλά το όριο μπορεί να διαφέρει», «στο λύκειο μαθαίναμε μόνο για συνέχεια διαστημάτων ή ένωση διαστημάτων, στο πανεπιστήμιο μαθαίνουμε τον ακριβή ορισμό και για μεμονωμένα σημεία», «στο λύκειο μιλάμε για το R ενώ στο πανεπιστήμιο για μετρικούς χώρους γενικότερα», «όχι γιατί στο πανεπιστήμιο ορίζουμε τη συνέχεια χωρίς τη χρήση ορίου», «ο ορισμός στο πανεπιστήμιο είναι ανώτερος (αδυνατεί να δώσει τον ορισμό του λυκείου)».

Όπως βλέπουμε από τις απαντήσεις ορισμένοι φοιτητές έδωσαν την απάντηση μη ισοδύναμοι αδυνατώντας όμως να δικαιολογήσουν τον ισχυρισμό τους ή σε κάποιες περιπτώσεις το έκαναν με λανθασμένο τρόπο.

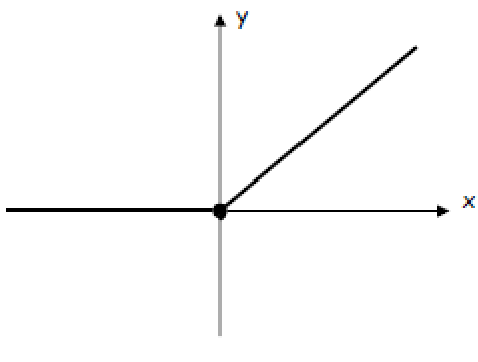
Μη ισοδύναμοι: «ο δεύτερος συνεπάγεται τον πρώτο άμα το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης», «όχι αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο δεν έχει νόημα να μιλάμε για σημείο συσσώρευσης» «δεν είναι ισοδύναμοι καθώς το x_0χο ενδέχεται να είναι μεμονωμένο σημείο», «ο πρώτος ορισμός ισχύει μόνο όταν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης αλλιώς το όριο δεν υπάρχει», «δεν είναι ισοδύναμοι, στην πρώτη περίπτωση δεν έχουμε πληροφορίες για το μεμονωμένο σημείο»

Συνοψίζοντας βλέπουμε πως η γνώση του ορισμού δε συνεπάγεται την κατανόησή του κάτι που φαίνεται και από την αδυναμία ορθής απάντησης για τους περισσότερους φοιτητές ως προς την ισοδυναμία των δύο ορισμών. Παρά τη μεγάλη δυσκολία να χαρακτηρίσουν τους δύο ορισμούς ως μη ισοδύναμους οι περισσότεροι μπόρεσαν να διατυπώσουν σωστά τους ορισμούς. Η αποστήθιση ενός τυπικού ορισμού φαίνεται να μη συνεπάγεται πάντα τη βαθύτερη κατανόησή του. Από τους ελάχιστους που δεν μπόρεσαν να δώσουν σωστά κάποιο ορισμό οι περισσότεροι δυσκολεύτηκαν στον ορισμό του λυκείου κάτι το οποίο έχει εξήγηση στο ότι τον είχαν ξεχάσει από τα σχολικά χρόνια. Τέλος οι περισσότεροι που πιστεύουν ότι είναι ισοδύναμοι αντιμετωπίζουν τον ορισμό του πανεπιστημίου σαν μία «αυστηροποίηση» αυτού του λυκείου.

Ερωτήσεις 3-6

Τα αποτελέσματα των ερωτήσεων 3 και 6 έχει ενδιαφέρον να μελετηθούν μαζί καθώς, όπως αναφέρεται και στη μεθοδολογία, τέσσερις από τις έξι γραφικές παραστάσεις που δίνονταν αντιστοιχούσαν σε συγκεκριμένους αναλυτικούς τύπους της έκτης ερώτησης.

Η πρώτη γραφική παράσταση που δίνεται στην ερώτηση 3 είναι η αντίστοιχη της τέταρτης συνάρτησης που δίνετε στην ερώτηση 6.



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

Θα μπορούσαμε να χωρίσουμε τις αντιλήψεις των φοιτητών σε τέσσερις κατηγορίες.

Συνεκτική αντίληψη(1): Αρκετοί φοιτητές συγχέουν την έννοια της συνεκτικότητας με αυτή της συνέχειας. Για παράδειγμα βλέπουμε απαντήσεις όπως «συνεχής αφού δεν διακόπτεται το γράφημα», «μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημα χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι», «συνεχής αφού δεν παρουσιάζει κάποιο άλμα». Οι συγκεκριμένες απαντήσεις ήταν συχνότερες όταν δίνονταν το γράφημα της συνάρτησης και όχι ο τύπος της.

Έλεγχος <u>μόνο</u> των πλευρικών ορίων στα σημεία αλλαγής του πεδίου ορισμού(2): Ορισμένοι φοιτητές έλεγξαν τα πλευρικά όρια στα σημεία που αλλάζει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και δεν κοιτούσαν αν αυτά είναι ίσα με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο εκείνο. Για παράδειγμα ένας φοιτητής γράφει τον τύπο της συνάρτησης που αντιστοιχεί στο γράφημα που του δίνεται και ελέγχει στο σημείο αλλαγής τα πλευρικά όρια, ένας άλλος γράφει «συνεχής παντού πλευρικά ίσα στο 0» . Οι φοιτητές ίσως έχουν έντονες επιρροές από τα σχολικά χρόνια και την πληθώρα ασκήσεων που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο στις οποίες ζητείται ο έλεγχος της συνέχειας δίκλαδων συναρτήσεων στις οποίες τα πλευρικά όρια στο σημείο αλλαγής του τύπου δεν είναι ίσα και η συνάρτηση είναι ασυνεχής ξεχνούν όμως πως η ύπαρξη του ορίου στο σημείο αλλαγής τύπου δεν αποτελεί προϋπόθεση για τη συνέχεια της συνάρτησης και πρέπει να ελέγξουν ακόμη αν αυτό είναι και ίσο με την τιμή της συνάρτησης.

Έλεγχος της συνέχειας <u>μόνο</u> στο σημείο αλλαγής του τύπου της συνάρτησης(3): . Οι φοιτητές ελέγχουν σωστά τη συνέχεια της συνάρτησης στο σημείο αλλαγής του πεδίου ορισμού της αν αυτή είναι δίκλαδη ή αν φαίνεται από το γράφημά της ότι το σημείο εκείνο αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης αλλά δε νοιώθει την ανάγκη να χαρακτηρίσει τη συνάρτηση ως συνεχή ή μη σε όλο το πεδίο ορισμού της κάτι το οποίο είναι σαφώς απαραίτητο. Οι περισσότεροι φοιτητές σε αυτή την κατηγορία έλεγξαν σωστά τη συνέχεια με χρήση του ορισμού του λυκείου για παράδειγμα «$\lim_{x\to 0^+} 0 = \lim_{x\to 0^-}(-x) = f(0) = 0$» όμως δε χαρακτήρισαν τις συναρτήσεις ως παντού συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους το οποίο είναι το R.

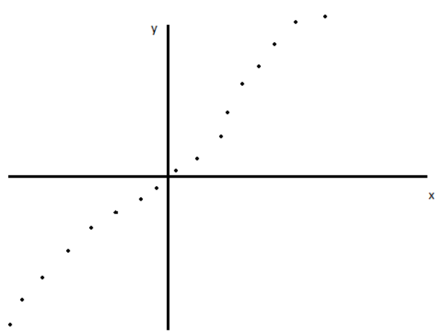
Πλήρης έλεγχος της συνέχειας(4): Οι φοιτητές κάνουν πλήρη έλεγχο της συνέχειας σε όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με σωστούς χειρισμούς. Αρχικά σχολιάζουν τη συνέχεια στο μηδέν όπου βλέπουν να αλλάζει το γράφημα ή ο τύπος της συνάρτησης και αργότερα τη χαρακτηρίζουν ως συνεχή σε όλο το πεδίο ορισμού της αφού ελέγξουν πρώτα αν όντως αυτή είναι. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις «συνεχής ως σταθερή στο (0,+∞) , ως πολυωνυμική στο (-∞,0]», «συνεχής στο 0 και στο υπόλοιπο πεδίο ορισμού», «συνεχής παντού και ειδικά στο 0 ισχύει $\lim_{x\to 0^+} 0 =$

$\lim_{x \to 0^-}(-x) = f(0) = 0$»

Πολλοί φοιτητές όταν τους δόθηκε το γράφημα είχαν την ανάγκη να γράψουν τον αναλυτικό τύπο της συνάρτησης και έπειτα να ελέγξουν αν αυτή είναι συνεχής, κάτι που ίσως δείχνει ότι είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τη χρήση αναλυτικών τύπων. Στις απαντήσεις των φοιτητών βλέπουμε διαφορές στον τρόπο ελέγχου της συνέχειας ανάλογα με την αναπαράσταση της συνάρτησης. Είναι συχνές οι διαφορές στις απαντήσεις ανάλογα με το αν δίνεται η γραφική ή η αλγεβρική αναπαράσταση αυτής με αποτέλεσμα να μην είναι εύκολο να εντάξουμε ορισμένους φοιτητές σε κάποια αποκλειστικά από τις παραπάνω κατηγορίες αντιλήψεων. Μάλιστα ένα μικρός μέρος τον φοιτητών δε παρουσίασε διαφορά ανάμεσα στα δύο ερωτήματα μόνο στον τρόπο ελέγχου αλλά και στο χαρακτηρισμό της συνέχειας. Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα:

Γράφημα συνάρτησης	Τύπος συνάρτησης	Κατηγορία απάντησης Σχόλια
Ελέγχει μόνο τα πλευρικά όρια στο 0	Χρήση ορισμού στο 0	2-3
Συνεχής ως συνεχόμενες γραμμές	Μη συνεχής	αντίφαση
Πλήρης και σωστός έλεγχος σε όλο το πεδίο ορισμού	Έλεγχος της συνέχειας μόνο στο 0	Ελέγχει μόνο στο μηδέν όταν δίνεται ο αναλυτικός τύπος 4-3
Ελέγχει σε κάθε κλάδο ξεχωριστά αλλά και στο 0 τη συνέχεια	Συνεχής τα όρια είναι ίσα	4-2
Συνεχής αφού σχεδιάζετε μονοκονδυλιά	Δεν είναι συνεχής ως δίκλαδη	αντίφαση
Συνεχής ως παραγωγίσιμη	Συνεχής με χρήση του ορισμού μόνο στο 0	3
Συνεχής αφού δεν έχει μεμονωμένα σημεία	Έλεγχος της συνέχειας μόνο στο 0	1-3
Συνεχής στο πεδίο ορισμού της	$\lim_{x \to 0^+} 0 = \lim_{x \to 0^-}(-x) = f(0) = 0$ (γίνεται έλεγχος μόνο στο 0)	Ελέγχει τη συνέχεια μόνο στο μηδέν όταν δίνετε ο αναλυτικός τύπος 4-3
Το γράφημα δεν έχει σημεία ασυνέχειας	Συνεχής στο 0 και στο υπόλοιπο πεδίο ορισμού	1-4
Δεν έχει κενά η άλματα	Συνεχής στο 0 με χρήση του ορισμού	1-3

Η δεύτερη γραφική παράσταση που δίνεται στην ερώτηση 3 είναι η αντίστοιχη της πρώτης συνάρτησης που δίνεται στην ερώτηση 6. Συγκεκριμένα δίνεται το γράφημα μιας συνάρτησης που αποτελείται από μεμονωμένα σημεία και μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το N.



$$f(x) = x^3, x \in N$$

Τις απαντήσεις των φοιτητών θα μπορούσαμε να τις χωρίσουμε σε πέντε κατηγορίες.

Δεν έχει νόημα να εξετάσουμε τη συνέχεια (1): Σύμφωνα με τους φοιτητές δεν έχει νόημα να εξετάσουν αν η συνάρτηση είναι συνεχής καθώς εκείνη αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Αυτό ίσως να οφείλεται στην αδυναμία εφαρμογής του ορισμού του λυκείου καθώς στο γράφημα δεν υπάρχουν σημεία συσσώρευσης. Από την άλλη μια πιθανή ερμηνεία είναι πως οι μαθητές έχοντας έντονη «συνεκτική αντίληψη» για τη συνάρτηση και βλέποντας μόνο μεμονωμένα σημεία αντί για μια γραμμή η οποία δε διακόπτεται θεώρησαν ότι η συνάρτηση δεν έχει καν νόημα να χαρακτηρισθεί ως προς τη συνέχεια. Η συγκεκριμένη αντίληψη λοιπόν δεν αφήνει το περιθώριο σε ορισμένους φοιτητές για τον έλεγχο της συνέχειας. Αξιοσημείωτο είναι ότι με αυτή τη θεώρηση θα μπορούσε κάποιος μη βλέποντας κάποια συνάρτηση η οποία μπορεί να σχεδιασθεί μονοκονδυλιά να τη χαρακτηρίσει ως ασυνεχή όμως είναι πιθανό οι συγκεκριμένοι λίγοι φοιτητές βλέποντας αποκλειστικά μεμονωμένα σημεία στο γράφημα να θεώρησαν ότι η συνάρτηση δεν έχει νόημα να χαρακτηρισθεί ως προς τη συνέχεια. Για παράδειγμα, «δεν μπορώ να μιλήσω για συνέχεια γιατί το πεδίο ορισμού είναι μεμονωμένα σημεία», «δεν έχει νόημα η μελέτη της συνέχειας αφού είναι μεμονωμένα σημεία», «δεν έχει νόημα να μιλάμε για συνέχεια, π.χ. δεν λέμε ότι μια ακολουθία είναι συνεχής». Όσον αφορά τον τύπο της συνάρτησης οι περισσότεροι από τη συγκεκριμένη κατηγορία τη χαρακτήρισαν ως συνεχή χωρίς όμως να σταθούν στο πεδίο ορισμού που είναι το N (κάτι που θα τους ανάγκαζε με τη λογική της πρώτη απάντησης να απαντήσουν ότι δεν έχει νόημα ο έλεγχος της συνέχειας) με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν διαφορά στην αντιμετώπισή τους ανάλογα με το επίπεδο αναπαράστασης της συνάρτησης.

Συνεκτική αντίληψη(2): Αρκετοί φοιτητές χαρακτήρισαν τη συνάρτηση ως ασυνεχή διότι εκείνη αποτελείται από μεμονωμένα σημεία, κάτι που δείχνει την έντονη «συνεκτική αντίληψη» για την έννοια. Ορισμένοι προσπάθησαν να εφαρμόσουν τον ορισμό του λυκείου, κάτι το οποίο δεν είναι σωστό φυσικά αφού μπορεί να αξιοποιηθεί μόνο για σημεία συσσώρευσης. Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι, «δεν υπάρχει συνεχής σύνδεση των σημείων», «μη συνεχής από μεμονωμένα σημεία», «όχι δεν έχει σημεία συσσώρευσης», «ασυνεχής αφού διακόπτεται».

Ασυνεχής λόγω των πλευρικών ορίων(3): Εντύπωση προκαλεί πως ορισμένοι χαρακτήρισαν ως ασυνεχή τη συνάρτηση διότι εκείνη δεν έχει ίσα πλευρικά όρια (παρ' ότι λανθασμένα μιλούν για όρια) ή επειδή εκείνα δεν ορίζονται, κάτι που δείχνει ελλείψεις των συγκεκριμένων φοιτητών όχι μόνο στην έννοια της συνέχειας αλλά και σε αυτή του ορίου. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι, «δεν είναι συνεχής γιατί δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια», «άνισα πλευρικά όρια».

Συνεχής επειδή αποτελείται από μεμονωμένα σημεία (ανάκληση από βάση δεδομένων) (4): Αρκετοί φοιτητές χαρακτήρισαν συνεχή τη συνάρτηση όταν είδαν ότι αποτελείται από μεμονωμένα σημεία ή ότι έχει για πεδίο ορισμού το Ν , χωρίς όμως να είναι σε θέση να αποδείξουν κάτι τέτοιο. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως συγκράτησαν τη φράση «μεμονωμένα σημεία= συνεχής συνάρτηση» σαν κανόνα μέσα από τα ακούσματα που έχουν από τα μαθήματα του απειροστικού λογισμού και αυτή από μόνη της αποτέλεσε επιχείρημα για το χαρακτηρισμό της συνέχειας συνάρτησης. Η απόδειξη του συγκεκριμένου ισχυρισμού για τους περισσότερους ξεχάστηκε (όπως φάνηκε και στις συνεντεύξεις) εκείνος όμως συνέχισε να υπάρχει. Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι «μεμονωμένα σημεία άρα συνεχής», «όλες οι διακριτές συναρτήσεις είναι συνεχείς», «συνεχής γιατί όλα τα σημεία του Ν είναι μεμονωμένα»

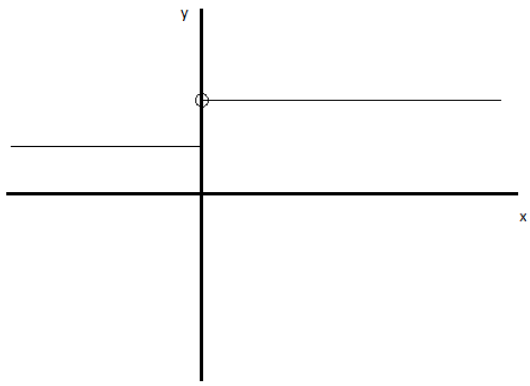
Συνεχής με χρήση του ορισμού του πανεπιστημίου(5): Κάποιοι φοιτητές προσπάθησαν να εφαρμόσουν τον ορισμό που έμαθαν στο πανεπιστήμιο. Οι συγκεκριμένοι φοιτητές ήταν ελάχιστοι και ήταν αυτοί οι οποίοι είχαν κατανοήσει σε βάθος τον ορισμό του πανεπιστημίου. Για παράδειγμα, «είναι συνεχής αφού κάθε σημείο του πεδίου ορισμού είναι μεμονωμένο και άρα υπάρχει περιοχή κάθε σημείου του x_o όπου είναι το μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού και άρα απ' τον ορισμό $\forall\varepsilon > 0$ θα ισχύει $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$, «η f είναι παντού συνεχής. Αν x ε A $\cap(x_o-\delta,x_o+\delta)$ τότε $x=x_o$ άρα $|f(x)-f(x_o)|<\varepsilon$».

Είναι χαρακτηριστικό ότι η γνώση του ορισμού της συνέχειας που διδάσκεται στο πανεπιστήμιο δε συνεπάγεται και την ικανότητα εφαρμογής του, καθώς πολλοί φοιτητές ενώ κατάφεραν να δώσουν σωστά τον ορισμό αδυνατούσαν να το χρησιμοποιήσουν για να ελέγξουν τη συνέχεια κάποιας συνάρτησης η οποία αποτελούνταν από μεμονωμένα σημεία. Οι περισσότεροι φοιτητές δίνουν την εντύπωση πως έχουν μία βάση δεδομένων (μεμονωμένα σημεία= συνεχής, συνεχής ως πολυωνυμική κ.α.) την οποία χρησιμοποιούν όποτε αυτό χρειαστεί, όμως πολλές φορές αδυνατούν όταν καλούνται να αποδείξουν τον ισχυρισμό να το κάνουν. Στα συγκεκριμένα υποερωτήματα προέκυψε για πρώτη φορά η κατηγορία, δεν έχει νόημα ο έλεγχος της συνέχεια, κάτι το οποίο πιθανό να οφείλεται στην ιδιαίτερη φύση μιας ακολουθίας και τις δυσκολίες που αυτή δημιουργεί.

Ειδικά για τη συνάρτηση $f(x)=x^3$ υπήρχαν αρκετές απαντήσεις πως είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Ο συγκεκριμένος ισχυρισμός είναι σωστός όμως προκαλεί εντύπωση πως ελάχιστοι στάθηκαν στο πεδίο ορισμού της συγκεκριμένης συνάρτησης το οποίο δεν είναι όλο το R όπως συνηθίζεται. Αρκετοί παρουσίασαν αντιφάσεις στον τρόπο που επιχειρηματολόγησαν, για παράδειγμα ενώ όταν τους δόθηκε το γράφημα μίλησαν για μεμονωμένα σημεία όταν δόθηκε ο αναλυτικός τύπος της ίδιας συνάρτησης εκείνοι τη χαρακτήρισαν ως συνεχή διότι είναι πολυωνυμική μη αξιοποιώντας το πεδίο ορισμού της συνάρτησης που είναι το N. Εκτός από τη συγκεκριμένη υπήρχαν και άλλες αντιφάσεις στις απαντήσεις. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει διαφορές στην αντίληψη και στον τρόπο προσέγγισης του φοιτητή για τη συνέχεια ανάλογα με το επίπεδο αναπαράστασης της συνάρτησης.

Γράφημα συνάρτησης	Τύπος συνάρτησης	Κατηγορία απάντησης Σχόλια
Μη συνεχής από μεμονωμένα σημεία	Συνεχής ως πολυωνυμική	2
Όχι από πλευρικά όρια	Όχι μεμονωμένα σημεία	3-2
Δεν είναι συνεχής γιατί δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια	Συνεχής ως πολυωνυμική	3
Μεμονωμένα σημεία άρα συνεχής	Ναι ως πολυώνυμο	
Συνεχής αφού η γραφική παράσταση αποτελείται από μεμονωμένα σημεία	Συνεχής ως πολυωνυμική	4
Είναι συνεχής εφόσον δεν ορίζεται πλευρικά	Δεν είναι από τη γραφική παράσταση που είναι μεμονωμένα σημεία	2
Κάθε μεμονωμένο σημείο είναι συνεχές, βγαίνει τετριμμένα από τον ορισμό	Συνεχής ως πολυώνυμο	5

Η τρίτη γραφική παράσταση που δίνεται στην ερώτηση 3 είναι η αντίστοιχη με τη δεύτερη συνάρτηση που δίνεται στην ερώτηση 6. Συγκεκριμένα ζητείται ο έλεγχος της συνέχειας για το γράφημα και τον τύπο μιας συνάρτησης η οποία αποτελείται από δύο σταθερές συναρτήσεις και το πεδίο ορισμού αλλάζει στο μηδέν στο οποίο και ορίζεται η συνάρτηση.



$$f(x) = \begin{cases} 5, & x > 0 \\ 13, & x \leq 0 \end{cases}$$

Μπορούμε να εντάξουμε τους φοιτητές σε πέντε κατηγορίες σύμφωνα με τις απαντήσεις που έδωσαν.

Συνεκτική αντίληψη(1): Η συγκεκριμένη αντίληψη είναι αρκετά συχνή όταν οι φοιτητές καλούνται να χαρακτηρίζουν τη συνέχεια της συνάρτησης μόνο μέσα από το γράφημα. Κάτι τέτοιο συμβαίνει καθώς όταν δίνεται ο αναλυτικός τύπος μιας συνάρτησης οι φοιτητές προσεγγίζουν την έννοια μέσω του ορισμού του λυκείου και έτσι αποφεύγεται η λανθασμένη αντίληψη «το γράφημα διακόπτεται άρα η συνάρτηση είναι ασυνεχής». Κάποια παραδείγματα είναι, «έχει σημείο ασυνέχειας το κυκλάκι στον y’y», «δεν είναι συνεχής γιατί έχει ασυνέχεια στο 0», «ασυνεχής αφού αλλάζει το γράφημα στο 0».

Ταύτιση πεδίου ορισμού της συνάρτησης με τη συνέχεια(2):Ορισμένοι φοιτητές ταυτίζουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με την έννοια της συνέχειας. Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι: «συνεχής διότι παίρνει τιμές σε όλο το R», «κάθε σημείο του πεδίου ορισμού έχει κάποια τιμή άρα συνεχής», «είναι συνεχής αφού όλα τα σημεία ικανοποιούν τη συνάρτηση-συνθήκη».

Έλεγχος των πλευρικών ορίων(3): Ένας μεγάλος αριθμός φοιτητών υπολόγισε τα πλευρικά όρια και χαρακτήρισε ως ασυνεχή τη συνάρτηση καθώς αυτά δεν είναι ίσα. Η συγκεκριμένη κατηγορία είναι αναμενόμενη αν σκεφτούμε πως ακόμα και στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται ως κριτήριο ασυνέχειας η μη ισότητα των τιμών των πλευρικών ορίων. Κάποια παραδείγματα είναι: «συνεχής παντού εκτός από το 0 λόγω πλευρικών ορίων», «δεν είναι συνεχής αφού τα πλευρικά υπάρχουν και είναι διαφορετικά», «ασυνεχής λόγω πλευρικών ορίων $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 13 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 5$».

Χρήση του ορισμού του λυκείου(4): Ένα μέρος των φοιτητών προσπάθησε να χρησιμοποιήσει τον ορισμό του λυκείου καθώς υπολόγισε την τιμή της συνάρτησης και το ένα από τα δύο πλευρικά όρια και χαρακτήρισε ως ασυνεχή τη συνάρτηση καθώς αυτά είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Κάποια παραδείγματα είναι: «$f(0) = 13 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 5$», «$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$». Η συνάρτηση είναι ασυνεχής καθώς τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, οι συγκεκριμένοι φοιτητές αγνόησαν κάτι τέτοιο και στην προσπάθειά τους να αξιοποιήσουν τον ορισμό του λυκείου χρησιμοποίησαν μόνο το ένα πλευρικό όριο.

Χρήση του ορισμού του πανεπιστημίου(5): Ορισμένοι φοιτητές χρησιμοποίησαν τον ορισμό του πανεπιστημίου για να δείξουν ότι οι συναρτήσεις είναι ασυνεχείς. Για παράδειγμα: «έστω ε=1/2 ∃ δ>0 αν x ε A και $|\chi - 0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(0)| = |y_1 - y_1| = 0 < \frac{1}{2} = \varepsilon$» «έστω ε >0 και ε<α, τότε δεν μπορώ να βρω δ>0 που να ισχύει ο ορισμός, άρα ασυνεχής στο 0 οπότε όχι συνεχής», «ασυνεχής στο 0 (ορισμός ε-δ)».

Στα συγκεκριμένα ερωτήματα εν αντιθέσει με τα υπόλοιπα υπήρξαν ελάχιστοι φοιτητές που είχαν ισχυρή «συνεκτική αντίληψη» και μάλιστα τέτοιου τύπου απαντήσεις συναντήθηκαν αποκλειστικά στο γραφικό επίπεδο αναπαράστασης. Επιπλέον, όπως είδαμε εμφανίζεται μία καινούρια κατηγορία καθώς ένα μέρος των φοιτητών ταυτίζει το πεδίο ορισμού της μορφής (α, β) με την συνέχεια της συνάρτησης. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι οι συγκεκριμένες απαντήσεις για ορισμένους φοιτητές ίσως αποτελούν κάποιο τύπο «συνεκτικής αντίληψης» καθώς για τους φοιτητές λανθασμένα μια συνάρτηση η οποία έχει ένα πεδίο ορισμού αυτής της μορφής παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές άρα κατά κάποιο τρόπο δε διακόπτεται. Για κάποιους άλλους υπάρχει η αντίληψη πως η συνάρτηση δε διακόπτεται ανά κλάδο άρα είναι συνεχής. Η πλειοψηφία των φοιτητών έλεγξε τη συνέχεια στο σημείο που αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης μέσω των πλευρικών ορίων τα οποία δεν ήταν ίσα οπότε με βάση αυτό τη χαρακτήρισε ως ασυνεχή στο μηδέν. Υπήρξαν φοιτητές που προσέγγισαν τα ερωτήματα μέσω της χρήσης του ορισμού της συνέχειας κυρίως αυτόν του λυκείου και κάποιοι με αυτόν του πανεπιστημίου. Οι ελάχιστες απαντήσεις μέσω της χρήσης του ορισμού του πανεπιστημίου (πράγμα σε μεγάλο βαθμό φυσιολογικό λόγω της μεγαλύτερης δυσκολίας του στη χρήση του) δείχνει πως οι φοιτητές αρέσκονται σε διαδικαστικές λύσεις και σπάνια προσεγγίζουν κάτι εννοιολογικά. Ο συχνός έλεγχος της ασυνέχειας σε ασκήσεις μέσω των διαφορετικών πλευρικών ορίων οδηγεί τους φοιτητές σε πολλές περιπτώσεις, όπως φαίνεται, και στα παρακάτω ερωτήματα, στο να ελέγχουν τα πλευρικά όρια ακόμη και σε σημεία εκτός του πεδίου ορισμού της συνάρτησης όταν εκείνη αλλάζει σε κάποιο σημείο τύπο (κάτι που φυσικά είναι λάθος).

Φυσικά δεν έλειψαν οι αντιφάσεις ανάλογα με το επίπεδο αναπαράστασης που δόθηκε. Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι:

Γράφημα συνάρτησης	Τύπος συνάρτησης	Κατηγορία απάντησης
Συνεχής ως σταθερή συνάρτηση και στο σημείο αλλαγής τύπου βλέπουμε ότι είναι συνεχής	Στο 0 παρουσιάζει ασυνέχεια λόγω διαφορετικών πλευρικών ορίων $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$	3
Είναι συνεχής αφού σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού το όριο είναι ίσο με την εικόνα του μέσω της f	Δεν υπάρχει το όριο λόγω πλευρικών άρα όχι συνεχής στο 0	4-3
Ασυνεχής καθώς $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$	Συνεχής ως σταθερή ∀x∈ R	3
Ασυνεχής λόγω του σημείου στον y'y	Συνεχής	1

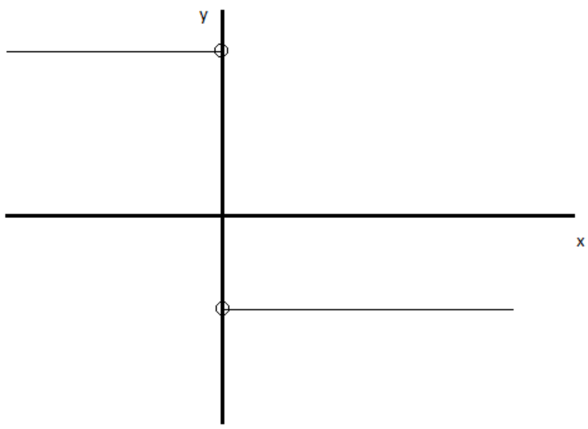
Είναι χαρακτηριστικό πως ενώ οι αντιφάσεις στο χαρακτηρισμό της συνέχειας για τα δύο επίπεδα αναπαράστασης ήταν αρκετές, σε πολλές από τις απαντήσεις τους έλειπε η αιτιολόγηση κάτι που δείχνει το χαμηλό βαθμό κατανόησης της έννοιας για τους συγκεκριμένους φοιτητές. Μάλιστα το μοτίβο σε 9 από αυτούς τους φοιτητές παρόλο που έλειπε η αιτιολόγηση της απάντησής του ήταν το ίδιο καθώς όταν δίνονταν το γράφημα χαρακτήριζαν ως συνεχή τη συνάρτηση (πιθανόν επειδή ορίζεται στο R η αποτελείται από δύο σταθερούς κλάδους) ενώ όταν δίνονταν ο αναλυτικός τύπος της συνάρτησης ως ασυνεχή (πιθανόν υπολογίζοντας προφορικά τα πλευρικά όρια). Αρκετοί ήταν οι φοιτητές που έδειξαν να επιχειρηματολογούν με διαφορετικό τρόπο ανάλογα με το επίπεδο αναπαράστασης. Για παράδειγμα:

Γράφημα συνάρτησης	Τύπος συνάρτησης	Κατηγορία απάντησης
Δεν είναι συνεχής στο 0 από ορισμό ε-δ	Ασυνεχής στο 0 λόγω πλευρικών ορίων	5-3
Δεν είναι συνεχής αφού τα πλευρικά υπάρχουν και είναι διαφορετικά	$f(0) = 13 \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = 5$	3-4
Ασυνεχής αφού αλλάζει το γράφημα στο 0	Όχι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$	1-3

Διαφέρουν τα πλευρικά όρια	$f(0) = 13 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 5$	3-4

Σε ορισμένους παρατηρήθηκε όταν δινόταν το γράφημα να υπολογίζουν τα πλευρικά όρια στο σημείο αλλαγής τύπου ενώ όταν δινόταν ο αναλυτικός τύπος μιας αντίστοιχης συνάρτησης προσπάθησαν να αξιοποιήσουν τον ορισμό που έμαθαν στο λύκειο χρησιμοποιώντας μόνο το ένα από τα δύο πλευρικά όρια. Φαίνεται οι φοιτητές να είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση του ορισμού του λυκείου περισσότερο όταν δίνεται ο αναλυτικός τύπος μιας συνάρτησης, ενώ όταν δίνεται το γράφημα μιας συνάρτησης η οποία αποτελείται από δύο κλάδους και ορίζεται στο σημείο αλλαγής τύπου δείχνουν την ασυνέχεια μέσω της μη ισότητας των πλευρικών ορίων.

Η τέταρτη γραφική παράσταση που δίνεται στην ερώτηση 3 αντιστοιχεί στην τρίτη συνάρτηση της ερώτησης 6. Συγκεκριμένα ζητείται ο έλεγχος της συνέχειας σε μια συνάρτηση η οποία αποτελείται από δύο σταθερούς κλάδους και το πεδίο ορισμού αλλάζει στο 0 στο οποίο δεν ορίζεται η συνάρτηση.



$$f(x) = \begin{cases} -2, & x > 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$$

Οι απαντήσεις των φοιτητών μπορούν να κατηγοριοποιηθούν στις επόμενες κατηγορίες:

Συνεκτική αντίληψη(1): Η συνάρτηση δεν ορίζεται στο μηδέν. Αυτό δεν εμπόδισε πολλούς φοιτητές να ελέγξουν τη συνέχεια στο μηδέν και να χαρακτηρίσουν τη συνάρτηση ως ασυνεχή λόγω του ότι το γράφημα διακόπτεται. Για παράδειγμα ορισμένοι φοιτητές έγραψαν «δεν είναι συνεχής στο 0 άρα η συνάρτηση είναι ασυνεχής».

Ταύτιση πεδίου ορισμού της συνάρτησης με τη συνέχεια(2):Αρκετοί φοιτητές ταυτίζουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με την έννοια της συνέχειας. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι : «ασυνεχής ,διότι δεν ορίζεται στο x=0, «δεν υπάρχει καμία τιμή της συνάρτησης για τα σημεία που βρίσκονται στον y’y άρα είναι ασυνεχής», «δεν είναι συνεχής στο x_o=0 γιατί δεν υπάρχει το $f(x_o)$» Παρατηρούμε ότι ορισμένοι φοιτητές θεωρούν πως μια συνάρτηση πρέπει να ορίζεται σε ένα σημείο ώστε να είναι συνεχής. Η συγκεκριμένη λανθασμένη αντίληψη μπορεί να οφείλεται σε δύο λόγους. Ένα μέρος των φοιτητών ακολουθεί τον επαγωγικό συλλογισμό, μια συνάρτηση δεν ορίζεται σε ένα σημείο άρα δεν παίρνει κάποια τιμή, επομένως, διακόπτεται άρα είναι ασυνεχής (συνεκτική αντίληψη τύπου Β). Η συγκεκριμένη σκέψη γίνεται περισσότερο όταν δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης. Κάποιοι άλλοι φοιτητές παρουσιάζουν πλήρη σύγχυση ταυτίζοντας έννοιες όπως πεδίο ορισμού και συνέχεια με αποτέλεσμα όταν μια συνάρτηση δεν ορίζεται κάπου να θεωρείται ασυνεχής.

Ασυνεχής λόγω των πλευρικών ορίων(3): Όπως παρατηρήσαμε και σε κάποιες άλλες κατηγορίες ένα πολύ μεγάλο μέρος των φοιτητών έλεγξε τη συνέχεια στο μηδέν παρόλο που εκείνο δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Οι συγκεκριμένοι φοιτητές όταν υπολόγισαν τα πλευρικά όρια είδαν ότι είναι διαφορετικά και χαρακτήρισαν ως ασυνεχή τη συνάρτηση. Φυσικά ο έλεγχος της συνέχειας σε σημεία εκτός του πεδίου ορισμού δεν έχει νόημα. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι: «ασυνεχής στο $0, \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$», «τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά άρα δεν υπάρχει το όριο», «ασυνεχής στο 0 $\lim_{x\to 0^-} f(x) = l \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = k$, συνεχής στο $(-\infty, 0)$ $\cup(0,+\infty)$», «η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το R (που είναι το πεδίο ορισμού) εκτός από το σημείο x_o=0, καθώς $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$».

Συνεχής με παράλληλη αναφορά σε σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού(4): Ένα μεγάλο μέρος των φοιτητών ενώ χαρακτήρισε σωστά ως προς την συνέχεια την συνάρτηση είχε την ανάγκη να κάνει αναφορά και στο μηδέν παρ' ότι εκείνο δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Κάτι τέτοιο ίσως οφείλεται στην πληθώρα ασκήσεων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οι φοιτητές στις οποίες καλούνται να ελέγξουν τη συνέχεια σε σημεία όπου αλλάζει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι: «Συνεχής γιατί το 0 δεν ανήκει στην f», «το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της άρα είναι συνεχής», «συνεχής, το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της, σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τα όρια ταυτίζονται με τις τιμές», «το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης οπότε δεν έχει νόημα να μιλήσω για συνέχεια στο 0 όμως για τα x τα οποία ανήκουν στο πεδίο ορισμού η συνάρτηση είναι συνεχής, «είναι συνεχής ως σταθερή στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0,+\infty)$, δεν μας νοιάζει η συμπεριφορά της f πλευρικός στο 0 διότι δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού».

Συνεχής με αναφορά στην κατά τμήματα συνέχεια λόγω της σταθερής συνάρτησης(ανάκληση από βάση δεδομένων)(5): Ένα μέρος των φοιτητών χαρακτήρισε συνεχή τη συνάρτηση κάνοντας επίκληση στο ότι είναι κατά τμήματα σταθερή. Συχνά οι φοιτητές όταν θέλουν να επιχειρηματολογήσουν για τη συνέχεια μιας συνάρτησης χρησιμοποιούν κάποιο στοιχείο από μια βάση δεδομένων (πολυωνυμική, ρητή, μεμονωμένα σημεία, λογαριθμική, ημιτονοειδής, σταθερή κ.ά.) χαρακτηρίζοντας αυτόματα μια συνάρτηση ως συνεχή όταν ανήκει σε κάποια από τις παραπάνω κατηγορίες. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι: «συνεχής ως σταθερή σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, το 0 δεν ανήκει στο γράφημα», «συνεχής , είναι ευθεία στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0,+\infty)$ άρα είναι συνεχής και στην ένωση αυτή», «συνεχής στα δύο διαστήματα ως σταθερή», «είναι συνεχής ως σταθερή στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0,+\infty)$, δεν μας νοιάζει η συμπεριφορά της f πλευρικός στο 0 διότι δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού», «είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0,+\infty)$ αφού είναι σταθερή και στα δύο διαστήματα άρα είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της».

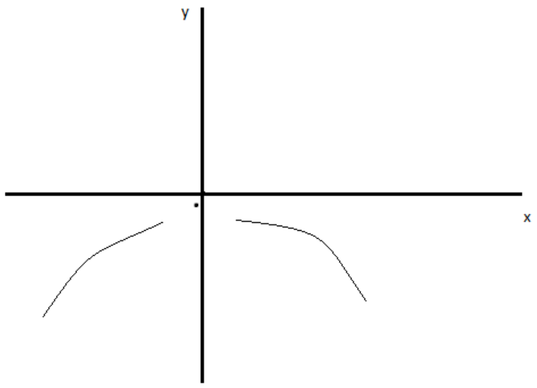
Συνεχής με αναφορά στον ορισμό της συνέχειας(6): Τέλος ένα μικρό μέρος των φοιτητών έκανε κάποια αναφορά στον ορισμό της συνέχειας, για παράδειγμα «είναι συνεχής ικανοποιείται ο ορισμός στο $(-\infty, 0) \cup (0,+\infty)$».

Εντύπωση προκαλεί πως παρά το μικρό βαθμό δυσκολίας του συγκεκριμένου ερωτήματος αρκετοί φοιτητές χαρακτήρισαν λανθασμένα τις συναρτήσεις ως ασυνεχείς, παρ' όλα αυτά συγκριτικά με το προηγούμενο ζεύγος συναρτήσεων το οποίο αναφερόταν σε ασυνεχείς συναρτήσεις οι φοιτητές δείχνουν να δυσκολεύονται λιγότερο. Όσον αφορά τις διαφορές που παρουσιάστηκαν στις απαντήσεις ανάλογα με την αναπαράσταση της συνάρτησης δεν παρουσιάστηκαν κάποιες αντιφάσεις στις απαντήσεις των φοιτητών.

Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε ορισμένες από τις απαντήσεις οι οποίες παρουσίαζαν κάποια αντίφαση ως προς την κατηγορία αντίληψης του φοιτητή αλλά και το χαρακτηρισμό της συνέχειας.

Γράφημα συνάρτησης	Τύπος συνάρτησης	Κατηγορία απάντησης
Δεν είναι συνεχής στο x_o=0 γιατί δεν υπάρχει το $f(x_o)$	Συνεχής εκτός του x_o=0 που δεν ορίζεται	2-4
Συνεχής ως σταθερή αλλά ασυνεχής στο σημείο αλλαγής τύπου	ασυνεχής $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$	4-3
Διαφέρουν τα πλευρικά όρια	f(0) δεν ορίζεται	3-2
Ασυνεχής στο 0	Συνεχής αφού δεν ορίζεται στο 0	-2
Διαφέρουν τα πλευρικά στο 0	Ναι είναι στο πεδίο ορισμού της	3-

Το πέμπτο γράφημα της ερώτησης 3 αντιστοιχεί στον έκτο τύπο συνάρτησης της ερώτησης. Συγκεκριμένα δίνονται δύο συναρτήσεις οι οποίες αποτελούνται από δύο κλάδους και ένα μεμονωμένο σημείο.



$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |\,x\,| > 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Οι κατηγορίες των απαντήσεων που προέκυψαν ήταν οι εξής:

Συνεκτική αντίληψη(1): Ένα σημαντικό μέρος των φοιτητών παρουσίασε συνεκτική αντίληψη, κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι: «δεν είναι συνεχής γιατί έχει κενά», «δεν είναι συνεχής γιατί διακόπτεται παρατεταμένα», «μη συνεχής γραφική παράσταση= μη συνεχής συνάρτηση στο R», και απαντήσεις μάλλον επηρεασμένες από τη συγκεκριμένη αντίληψη όπως: «η f ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής (-∞$, b]U[a, +$∞) και είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά. Αλλά δεν ξέρουμε αν η f θα είναι συνεχής στο (-∞$, b]U[a, +$∞) καθώς b<0 και α>0».

Ασυνεχής λόγω του μεμονωμένου σημείου (2): Ορισμένοι φοιτητές στάθηκαν ιδιαίτερα στο μεμονωμένο σημείο της συνάρτησης και την χαρακτήρισαν ως ασυνεχή λόγω αυτού. Θα μπορούσαμε να εντάξουμε αυτούς τους φοιτητές στην κατηγορία της συνεκτικής αντίληψης καθώς αναμένουν το γράφημα της συνάρτησης να είναι μια γραμμή η οποία δεν διακόπτεται, χαρακτηρίζουν ως ασυνεχή τη συνάρτηση όταν εκείνη έχει κάποιο μεμονωμένο σημείο. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις ήταν: «Δεν είναι λόγω του μεμονωμένου σημείου», «Όχι στο 0, μεμονωμένο σημείο», «Το 0 είναι μεμονωμένο σημείο».

Ταύτιση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης με τη συνέχεια(3): Ένα μικρό μέρος των φοιτητών φαίνεται να ταυτίζει την ύπαρξη της συνέχειας με την ύπαρξη του πεδίου ορισμού της συνάρτησης σε κάποιο σημείο. Για παράδειγμα συναντάμε απαντήσεις όπως: «Η γραφική παράσταση αποτελείται από δύο διαφορετικά τμήματα και τα σημεία που βρίσκονται ενδιάμεσα δεν έχουν τιμή άρα ασυνεχής», «η συνάρτηση δε γνωρίζουμε αν είναι συνεχής γιατί δεν ξέρουμε αν η γραφική παράσταση είναι έτσι γιατί δεν ορίζεται ή γιατί δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της», «ασυνεχής γιατί κοντά στο 0 δεν έχουμε f».

Προσπάθεια εμπλοκής των ορίων(4): Ένα μικρό μέρος των φοιτητών προσπάθησε να εμπλέξει τα όρια στις απαντήσεις του μέσω του ορισμού του λυκείου, άλλοτε σωστά, π.χ. «είναι συνεχής αφού το D_f είναι ένωση διαστημάτων άρα κάθε x∈ Df είναι σημείο συσσώρευσης και το όριο σε κάθε x∈ Df είναι ίσο με το f(x)» και άλλοτε με λάθος τρόπο, π.χ. «ασυνεχής λόγω διαφορετικών πλευρικών», «ασυνεχής πρόβλημα στο όριο».

Συνεχής με αναφορά στο μεμονωμένο σημείο (ανάκληση από τη βάση δεδομένων)(5): Κάποιοι φοιτητές κατά τον έλεγχο της συνέχειας ασχολήθηκαν αποκλειστικά με το μεμονωμένο σημείο π.χ. «συνεχής το 0 είναι μεμονωμένο σημείο» ενώ αρκετοί στάθηκαν στις απαντήσεις τους στο μεμονωμένο σημείο δίνοντας έμφαση σε αυτό μη παραλείποντας όμως να αναφερθούν και στο υπόλοιπο πεδίο ορισμού « συνεχής στο 0 ως μεμονωμένο, στο υπόλοιπο διάστημα είναι γνωστό» , «μεμονωμένο σημείο, πολυωνυμική άρα συνεχής» , «συνεχής γιατί είναι συνεχής στα $(-\infty,-1),(1,\infty)$ ως πολυωνυμική και στο 0 ως μεμονωμένο σημείο».

Συνεχής με αναφορά στον ορισμό της συνέχειας του πανεπιστημίου(6): Κάποιοι φοιτητές χρησιμοποιούν τον ορισμό του πανεπιστημίου ή κάνουν κάποια αναφορά σε αυτόν για να δείξουν πως η συνάρτηση είναι συνεχής. Για παράδειγμα: «δεν είναι συνεχής με βάσει τον ε-δ ορισμό της συνέχειας», «ισχύει ο ορισμός άρα συνεχής», « $\forall x \in R|x|>1, \lim_{y\to x} f(y)=f(x)$ αν x=0 $\forall \varepsilon>0$ παίρνουμε δ=1/2 και $D_f \cap (-\delta,\delta)=\{0\}$ άρα $|f(0)-f(0)|=0<\varepsilon$»

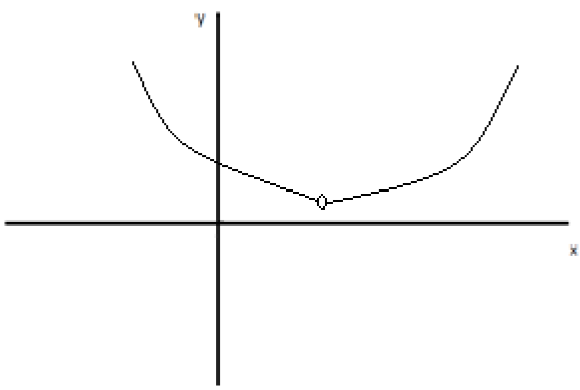
Δεν έλειψε και εδώ η χρήση κάποιας βάσης δεδομένων κυρίως στην τέταρτη κατηγορία. Π.χ. συνεχής ως πολυωνυμική, συνεχής λόγω μεμονωμένου σημείου κ.ά. Επίσης υπήρξαν ορισμένες απαντήσεις στις οποίες σχολιάστηκε η συνέχεια στα δύο διαστήματα όμως το μεμονωμένο σημείο παραλείφθηκε από τις απαντήσεις των φοιτητών. Ίσως λόγω της σχηματικής απόστασης των δύο κλάδων οι φοιτητές δεν ασχολήθηκαν με τα πλευρικά όρια και τον ορισμό του λυκείου όσο το έκαναν σε άλλες περιπτώσεις.

Όσον αφορά την επίδοση των φοιτητών ανάλογα με το είδος της αναπαράστασης της συνάρτησης, 38 φοιτητές απάντησαν στην πρώτη μορφή της συνάρτησης ότι είναι ασυνεχής, οι περισσότεροι μη αιτιολογώντας την απάντηση πιθανότατα βλέποντας μη συνεκτικό το γράφημα. Εντύπωση προκαλεί ότι στην αναπαράσταση της συνάρτησης μέσω του τύπου της , 20 μόνο απάντησαν πως είναι ασυνεχής. Φαίνεται όταν δίνεται ο τύπος μιας συνάρτησης παρόλο που μπορεί να έχει δοθεί ένα αντίστοιχο γράφημα με αυτή νωρίτερα, τα ποσοστά αποτυχίας να μειώνονται ίσως γιατί ο φοιτητής δεν «εγκλωβίζεται» στο μη συνεκτικό γράφημα όπως πρέπει αλλά και επειδή είναι περισσότερο εξοικειωμένος στις διαδικασίες όπως τη χρήση ορίων ή την αντιμετώπιση του αναλυτικού τύπου των συναρτήσεων.

Οι αντιφάσεις ανάλογα με το επίπεδο αναπαράστασης δεν έλειψαν. Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι:

Γράφημα συνάρτησης	Τύπος συνάρτησης	Κατηγορία απάντησης
Συνεχής στο πεδίο ορισμού που είναι ένωση διαστημάτων	Ασυνεχής $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \neq \lim_{x\to 1+} f(x) = 1$	-4
Ασυνεχής δεν υπάρχει το όριο στο μεμονωμένο σημείο	Συνεχής $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$	-4
Δεν είναι συνεχής γιατί έχει κενά	Είναι συνεχής αφού $\lim_{x\to 1+} f(x) = f(1) = \lim_{x\to -1-} f(x) = f(-1)$	1-4
Ασυνεχής αφού δεν υπάρχουν τα πλευρικά στα α, β	Συνεχής από τον ορισμό	4-6
Η συνάρτηση δε γνωρίζουμε αν είναι συνεχής γιατί δεν ξέρουμε αν η γραφική παράσταση είναι έτσι γιατί δεν ορίζεται ή γιατί δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της	Είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της	3-
Ισχύει ο ορισμός άρα συνεχής	Το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού , όχι	-3
Είναι συνεχής στα διαστήματα δεξιά και αριστερά	Δεν είναι συνεχής, παρουσιάζει άλματα	-1

Το έκτο και τελευταίο γράφημα δεν αντιστοιχεί σε κάποιο τύπο συνάρτησης του έκτου ερωτήματος. Συγκεκριμένα δίνεται μία συνάρτηση η οποία παρουσιάζει μια οπή σε ένα σημείο.



Τις απαντήσεις των φοιτητών θα μπορούσαμε να τις χωρίσουμε σε τρεις κατηγορίες:

Συνεκτική αντίληψη(1): Και σε αυτό το γράφημα όπως και στα προηγούμενα βλέπουμε αρκετοί φοιτητές να συγχέουν το συνεκτικό γράφημα με το γράφημα της συνεχούς συνάρτησης. Οι πιο χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι: «είναι ασυνεχής αφού υπάρχει μια διακοπή στη ροή της παράστασης», «συνεχής εκτός από το σημείο αυτό (κυκλώνει το σημείο που διακόπτεται το γράφημα)», «ασυνεχής καθώς η συνέχεια της γραμμής διακόπτεται».

Συνεχής με παράλληλη αναφορά σε σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού(2): Αρκετοί φοιτητές θεώρησαν σημαντικό να αναφερθούν στο σημείο που διακόπτεται η συνάρτηση παρ' ότι το συγκεκριμένο σημείο δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι: «το σημείο δεν ανήκει στη συνάρτηση άρα δεν έχει νόημα να μελετήσουμε τη συνέχεια εκεί, οπότε είναι συνεχής.», «η συνάρτηση φαίνεται να έχει πεδίο ορισμού το R-$\{x_0\}$, δεν έχει νόημα να γίνει μελέτη της συνέχειας στο x_0 άρα η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.» Το συγκεκριμένο σημείο δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης οπότε δεν έχει νόημα ο έλεγχος της συνέχειας, όμως λόγω της συνεκτικής αντίληψης πολλών φοιτητών είναι λογικό σε μεγάλο βαθμό να αισθάνονται την ανάγκη να σχολιάσουν ως προς την συνέχεια σε κάποιο σημείο που η συνάρτηση παρουσιάζει μία οπή.

Ταύτιση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης με την συνέχεια (3):Κάποιοι φοιτητές ταυτίζουν την ύπαρξη του πεδίου ορισμού της συνάρτησης με τη συνέχειά της. Κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις είναι: «ασυνεχής στο x_0 γιατί δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού», «ασυνεχής υπάρχει σημείο στη γραφική παράσταση που δεν παίρνει τιμή», «δεν είναι συνεχής στο x_0 αφού δεν υπάρχει το $f(x_0)$»

Στην έκτη ερώτηση ο πέμπτος τύπος αποτελεί μια παραλλαγή της γνωστής συνάρτησης του Dirichlet η οποία είναι ασυνεχής παντού.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\ ρητός \\ -1, & x\ άρρητος \end{cases}$$

Οι κατηγορίες που προέκυψαν ήταν οι εξής:

Χρήση της αρχής της μεταφοράς (1): Κάποιοι φοιτητές, στην πλειοψηφία τους αυτοί που ανήκουν στα υψηλότερα επίπεδα κατανόησης της έννοιας χρησιμοποίησαν την αρχή της μεταφοράς για να αποδείξουν ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Ορισμένοι από αυτούς έκαναν απλώς μια αναφορά σε αυτή και όχι την πλήρη απόδειξη.

Αναφορά στην πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων(2): Αρκετά συχνές ήταν και οι απαντήσεις που αναφέρονταν στην πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων η οποία δεν επιτρέπει στη συνάρτηση να είναι συνεχής. Φυσικά η πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων είναι απαραίτητη για να βρούμε μια ακολουθία ρητών και μία αρρήτων που να τείνει στην ίδια τιμή x_o, όμως για να έχουμε πλήρη απόδειξη χρειάζεται και η αρχή της μεταφοράς την οποία οι συγκεκριμένοι φοιτητές δεν χρησιμοποίησαν. Κάποια παραδείγματα είναι: «συνεχής παντού γιατί σε κάθε διάστημα του R υπάρχει ρητός και άρρητος.», «για οποιοδήποτε ρητό βρίσκουμε περιοχή που να υπάρχει άρρητος άρα όχι».

Κάποιοι θυμούνται από τις σπουδές τους ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής αλλά πλέον δεν είναι σε θέση να το αποδείξουν. Ακόμη κάποιες φορές η απάντηση ήταν πρόχειρα δοσμένη κάτι που δείχνει ότι οι φοιτητές προσπάθησαν να ανασύρουν από τη μνήμη τους την απάντηση ανεπιτυχώς τις περισσότερες φορές. Επιπλέον μια σωστή απάντηση δε σημαίνει πάντοτε εις βάθος κατανόηση της έννοιας και αυτό ισχύει και σε άλλες ερωτήσεις της έρευνας. Ήταν η συνάρτηση που είχε τις λιγότερες προσπάθειες αιτιολόγησης των απαντήσεων από τους φοιτητές κάτι λογικό αν σκεφτούμε τις δυσκολίες που παρουσιάζει. Φαίνεται πολλοί να απάντησαν ότι είναι ασυνεχής με λάθος όμως αιτιολόγηση. Υπήρχαν κατηγορίες που συναντήσαμε σε άλλες συναρτήσεις όπως ασυνεχής λόγω διαφορετικών πλευρικών ορίων ή απαντήσεις που οι φοιτητές ισχυρίζονταν πως δεν έχει νόημα ο χαρακτηρισμός της συνέχειας όμως δεν ήταν αρκετές ώστε να αποτελέσουν και εδώ κάποια μεγάλη κατηγορία απαντήσεων. Μία απάντηση που δόθηκε η οποία είχε πλήρη αιτιολόγηση ήταν: Έστω x_o ρητός. Τότε $f(x_o) = 1$. Επίσης, υπάρχει ακολουθία αρρήτων $xn : xn \to x0$ και $xn \neq x_o$ και $f(xn) = -1 \to -1 \neq f(x_o) = 1$. Δηλαδή η f δεν είναι συνεχής σε κανένα ρητό. Έστω x_o άρρητος. Τότε $f(x_o) = -1$. Επίσης, υπάρχει ακολουθία ρητών $xn' : xn' \to x_o$ και $xn' \neq x_o$ και $f(xn) = 1 \to 1 \neq f(x_o) = -1$. Δηλαδή η f είναι ασυνεχής και σε κάθε άρρητο.

Ερώτηση 4

Η συγκεκριμένη ερώτηση με βάση τις απαντήσεις των φοιτητών ήταν από τις αυτές που δυσκόλεψαν σε μεγαλύτερο βαθμό τους φοιτητές. Ζητήθηκε να γίνει έλεγχος της συνέχειας της $f(x)= x^2$ στο $x=3$ με χρήση του ορισμού του πανεπιστημίου. Αρκετοί από αυτούς δεν απάντησαν καθόλου, ενώ ελάχιστοι μόνο κατάφεραν να αποδείξουν σωστά τη συνέχεια της συνάρτησης στο σημείο που ζητείται. Μπορούμε να χωρίσουμε τις απαντήσεις σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

Αδυναμία εύρεσης κατάλληλου δ: Αρκετοί φοιτητές είχαν μια γενική εικόνα για τη χρήση του ορισμού όμως δεν κατάφεραν να δώσουν μια πλήρη απόδειξη καθώς οι περισσότεροι από αυτούς αδυνατούσαν να βρουν το κατάλληλο δ. Οι περισσότεροι αναπαρήγαγαν τον ορισμό που δίνεται στο πανεπιστήμιο με τη διαφορά ότι αντί για το x_o του ορισμού έβαλαν το 3 στο οποίο και ζητούνταν να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση είναι συνεχής. Για παράδειγμα έγραψαν, έστω $\varepsilon>0$ τότε αρκεί να βρω $\delta>0$ ώστε για $|x-3|<\delta$ να έχω $|x^2-9|<\varepsilon$.

Λάθος εξάρτηση του δ: Όπως γνωρίζουμε το δ μπορεί να εξαρτάται από το ε και το x_o, ενώ στη συγκεκριμένη κατηγορία οι φοιτητές έγραψαν πως εξαρτάται από το x. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι περισσότεροι φοιτητές δεν έχουν κατανοήσει από τι μπορεί να εξαρτάται το δ. Μία χαρακτηριστική απάντηση είναι:

Έστω ε>0. Θα δείξουμε ότι για $|x-3|<\delta$

$|x^2-9|=|x-3||x+3|<\delta|x+3|=\frac{\varepsilon}{|x+3|}|x+3|=\varepsilon$ *για* $\delta=\frac{\varepsilon}{|x+3|}$

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις κάποιων ελάχιστων φοιτητών (3 στον αριθμό) όπου το δ εξαρτιόνταν από το ίδιο το δ.

Π.χ.

Έστω ε>0. Θα δείξουμε ότι για $|x-3|<\delta$

$|x^2-9|=|x-3||x+3|<\delta(\delta+6)=\varepsilon$ *για* $\delta=\frac{\varepsilon}{(\delta+6)}$

$$|x+3|=|x-3+6|\leq|x-3|+6<\delta+6$$

Πλήρης αιτιολόγηση: Ελάχιστες ήταν οι απαντήσεις με πλήρη αιτιολόγηση, κάτι που αποδεικνύει τις μεγάλες δυσκολίες στην κατανόηση του ορισμού της συνέχειας.

Έστω ε>0. Θεωρούμε δ=min$\{1,\frac{\varepsilon}{7}\}$αν $|x-3|<\delta$

τότε$|f(x)-f(3)|=|x^2-9|=|x-3||x+3|\leq(|x|+3)|x-3|<$
$|x-3|7<\frac{\varepsilon}{7}7=\varepsilon$

αφού $|x-3|<\delta\leq 1, |x|-3<1,\ |x|<4$

Συμπερασματικά, παρ' ότι πολλοί φοιτητές έδωσαν το σωστό ορισμό δεν ήταν σε θέση να τον εφαρμόσουν. Η μεγαλύτερη δυσκολία ήταν η εύρεση του κατάλληλου δ καθώς οι περισσότεροι φοιτητές προσπάθησαν ανεπιτυχώς να βρουν σωστά το δ. Οι φοιτητές φαίνεται να έχουν απομνημονεύσει τον ορισμό του πανεπιστημίου όμως αρέσκονται σε απλές διαδικαστικές ασκήσεις και δεν μπορούν να ανταπεξέλθουν σε υψηλότερο επίπεδο όπου απαιτούνται δυσκολότεροι χειρισμοί αλλά και εννοιολογική κατανόηση. Κάτι τέτοιο δείχνει ότι η γνώση ενός ορισμού δεν συνεπάγεται και την κατανόησή του για τους περισσότερους φοιτητές.

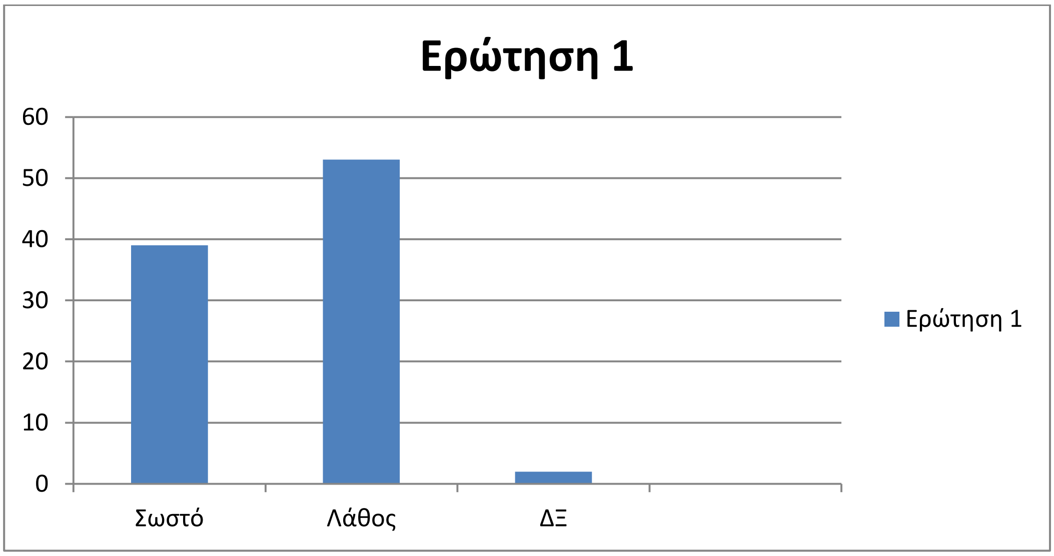
Ερώτηση 5

Η άρνηση του ορισμού της συνέχειας δεν δυσκόλεψε τους φοιτητές καθώς όσοι μπόρεσαν να δώσουν σωστά τον ορισμό , ανταποκρίθηκαν και στην άρνηση αυτού.

Ερώτηση 7

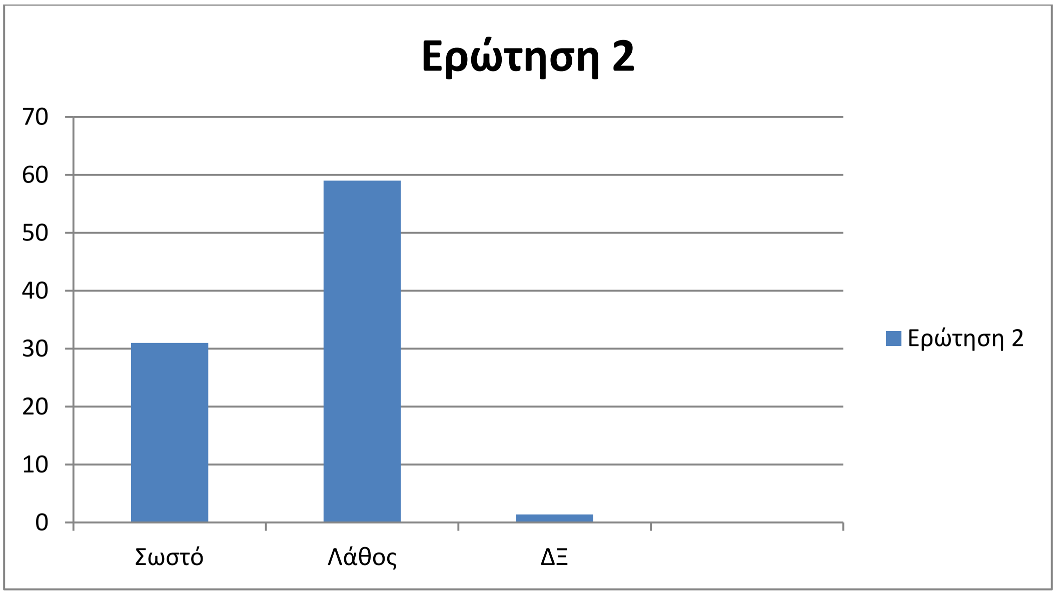
Η συγκεκριμένη ερώτηση είναι τύπου Σ-Λ. Παρακάτω δίνονται πίνακες με βάση τις απαντήσεις των φοιτητών στα ερωτήματα στους οποίους παρουσιάζονται κάποια ποσοτικά στοιχεία.

Το γινόμενο και το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση και αντιστρόφως. Σ Λ



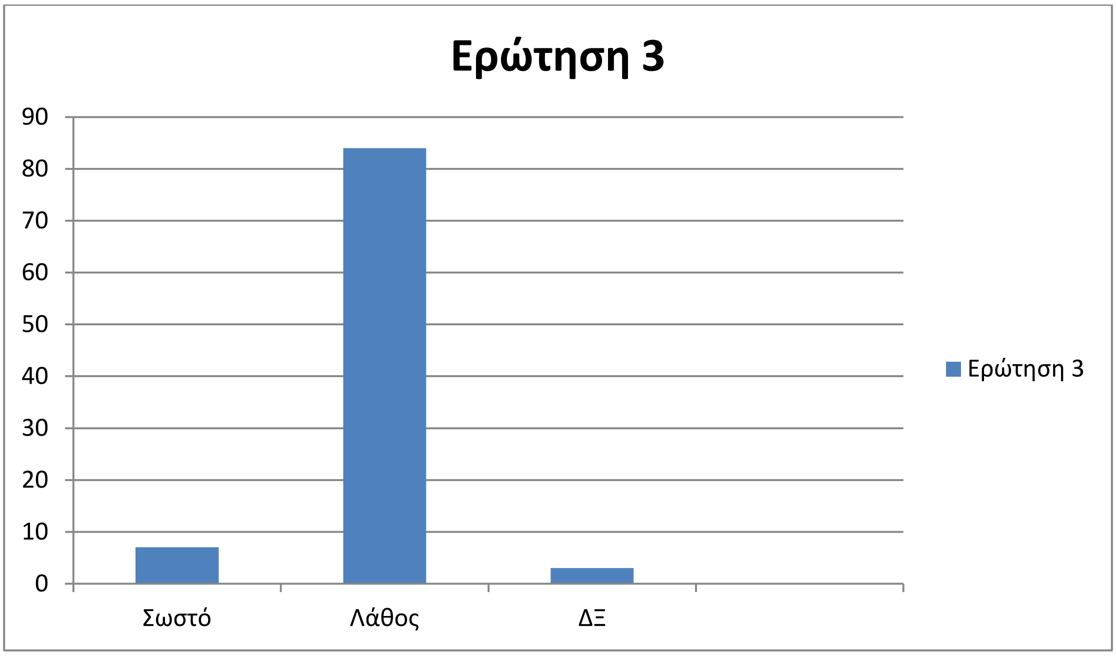
Παρατηρούμε ότι σε ένα ποσοστό περίπου 40% οι φοιτητές πιστεύουν λανθασμένα πως το γινόμενο και το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση και αντιστρόφως.

Μια συνάρτηση είναι συνεχής μόνο αν το γράφημά της μπορεί να σχεδιαστεί χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί. Σ Λ



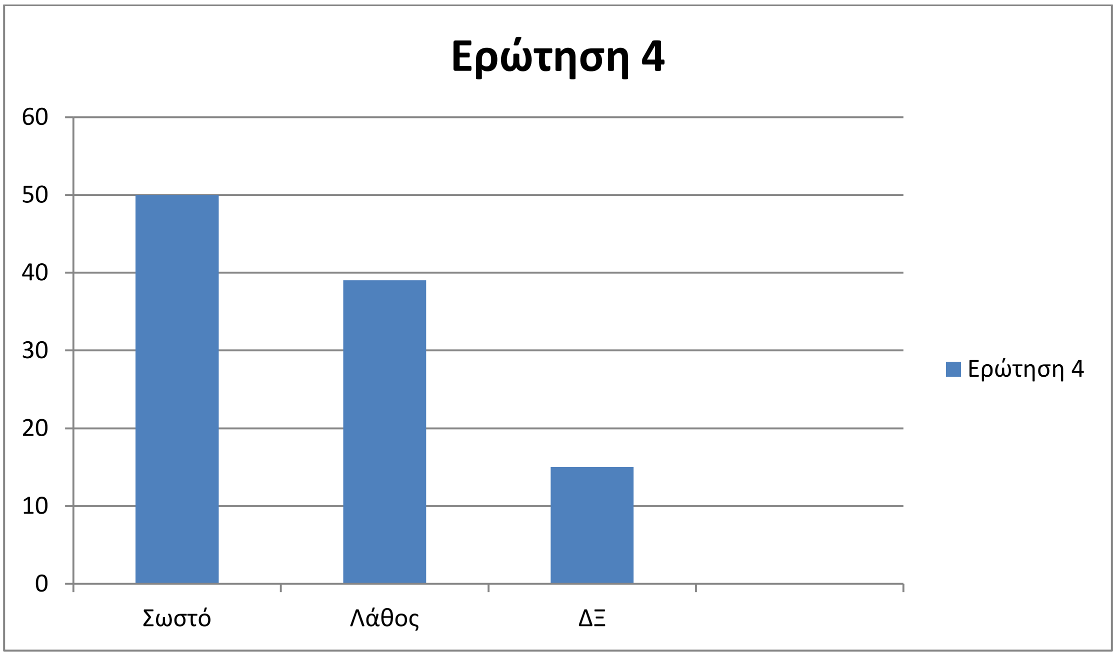
Εντύπωση προκαλεί ότι 31 φοιτητές επέλεξαν το Σ (σωστό) πράγμα που δείχνει την έντονη συνεκτική αντίληψη. Οι συγκεκριμένοι φοιτητές θεωρούν ότι συνεχής είναι μία συνάρτηση η οποία μπορεί να σχεδιαστεί μόνο χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το γραπτό.

Όταν μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού όλο το R τότε δεν γίνεται να είναι ασυνεχής σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της. Σ Λ



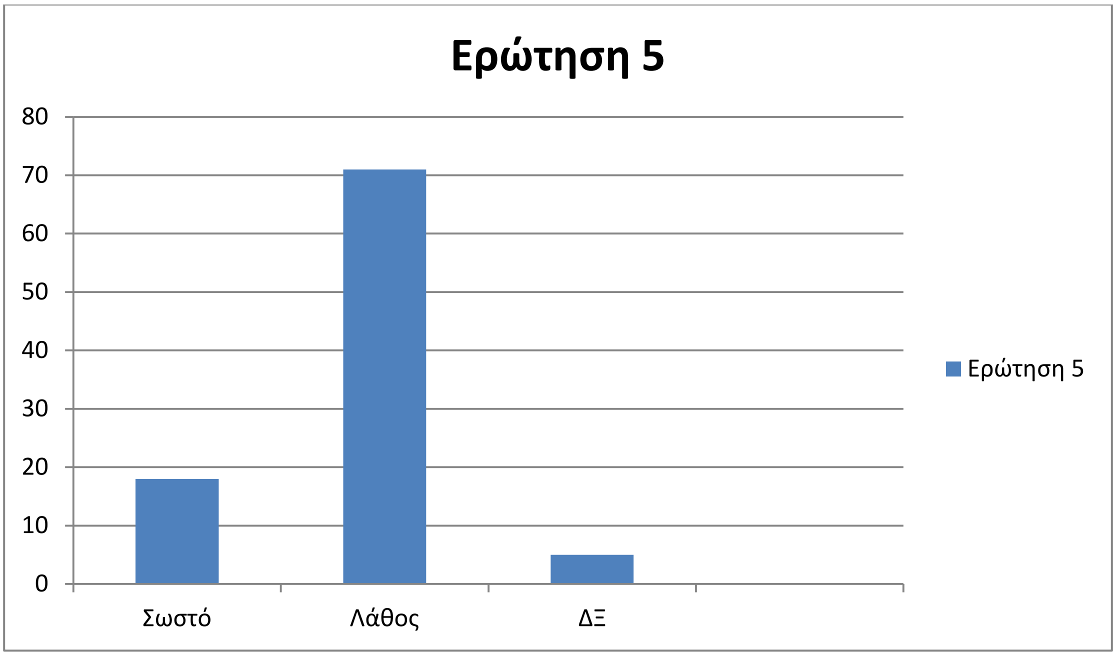
Η επίδοση των φοιτητών στη συγκεκριμένη ερώτηση ήταν εξαιρετική. Παρ' όλα αυτά σε προηγούμενη ερώτηση που τους δόθηκε συνάρτηση η οποία έχει για πεδίο ορισμού το R και είναι ασυνεχής δεν μπόρεσαν να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους κάτι που δείχνει πως περισσότερο θυμούνται τη σωστή απάντηση από τα μαθήματά τους και λιγότερο είναι σε θέση να δώσουν κάποιο παράδειγμα αλλά και να κάνουν κάποια απόδειξη για τον ισχυρισμό. Τέλος η διατύπωση του ερωτήματος θα μπορούσε να οδηγήσει τους φοιτητές στην παρανόηση ότι πεδίο ορισμού R σημαίνει και συνεκτικό γράφημα απαραίτητα, κάτι που δεν φαίνεται να συμβαίνει καθώς τα ποσοστά αποτυχίας θα ήταν μεγάλα όπως στο προηγούμενο ερώτημα.

Αν η f είναι συνεχής τότε πάντα και η IfI είναι συνεχής. Σ Λ



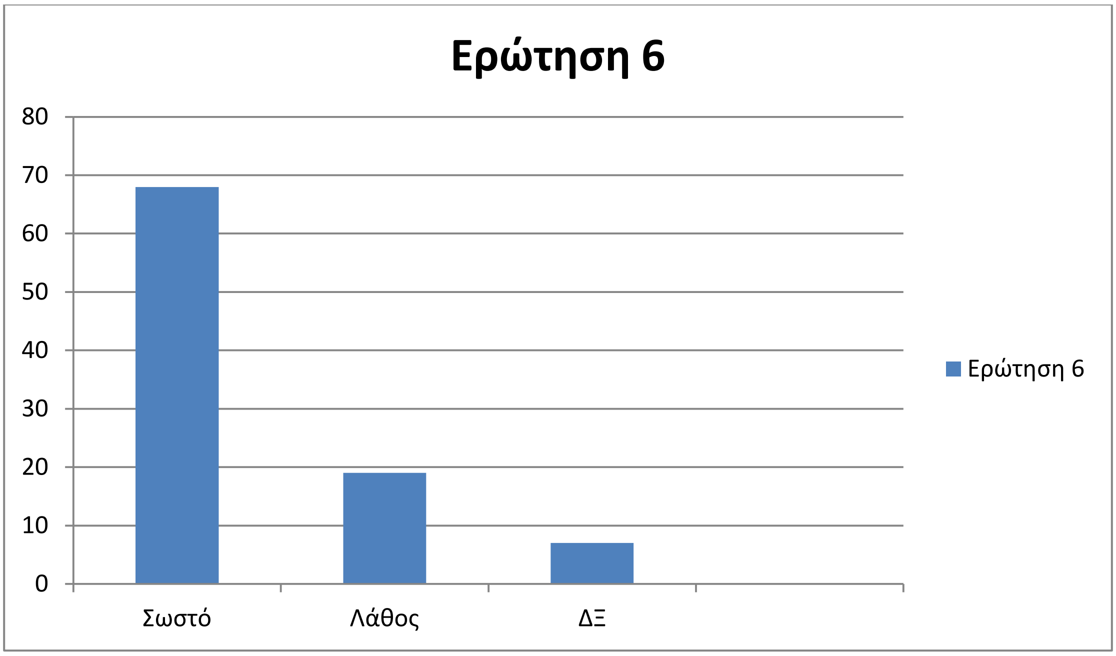
Το συγκεκριμένο ερώτημα δυσκόλεψε τους φοιτητές, καθώς φαίνεται αρκετοί να πιστεύουν αν μια συνάρτηση μπει σε απόλυτο θα μπορούσε πλέον να μην είναι συνεχής.

Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένη. Σ Λ



Το συγκεκριμένο ερώτημα δεν δυσκόλεψε τους φοιτητές καθώς έχουν συναντήσει αρκετά παραδείγματα στις σπουδές τους όπου μια συνάρτηση είναι συνεχής αλλά δεν φράζεται.

Δυο ασυνεχείς συναρτήσεις μπορούν να έχουν συνεχή σύνθεση. Σ Λ



Παρά τις δυσκολίες που θα μπορούσε να δημιουργήσει η ερώτηση, η επίδοση των φοιτητών ήταν αρκετά καλή.

Συνεντεύξεις

Δόθηκαν συνεντεύξεις από 7 άτομα. Η επιλογή των ατόμων έγινε με βάση την προσβασιμότητα αλλά και μετά από μία πρώτη ανάλυση των ερωτηματολογίων. Έγινε προσπάθεια τα άτομα να είναι αντιπροσωπευτικά για τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας, τουλάχιστον όπως φαίνονταν αυτά να διαμορφώνονται εκείνη την περίοδο. Η κάθε συνέντευξη ήταν ημιδομημένη, και μπροστά του ο κάθε συνεντευξιαζόμενος είχε το παλιό ερωτηματολόγιο με τις απαντήσεις που είχε δώσει καθώς και ένα νέο σε περίπτωση που χρειαστεί να ανασκευάσει κάποια αρχική του απάντηση.

Πέτρος:

Η εικόνα της έννοιας που έχει ο Πέτρος για την έννοια είναι έντονα επηρεασμένη από τη συνεκτικότητα καθώς θεωρεί ότι συνεχής είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού της μορφής (α, β). Επιπλέον πιστεύει ότι στην πρώτη επαφή με την έννοια η καθημερινή της χρήση αποτελεί εμπόδιο καθώς όπως λέει «είναι μια γραμμή που σχεδιάζεται με το μολύβι και τέτοια». Δυσκολεύεται να κατανοήσει τον ορισμό του πανεπιστημίου, και όπως λέει χαρακτηριστικά «πλέον τον σκέφτομαι και γραφικά». Θεωρεί ότι οι δύο ορισμοί λυκείου και πανεπιστημίου δεν είναι ισοδύναμοι γιατί όπως λέει το έχει ακούσει αδυνατεί όμως να δώσει κάποια εξήγηση. Για να απαντήσει στην ερώτηση 3 στάθηκε περισσότερο στο γράφημα. Όταν είδε μία συνάρτηση με μεμονωμένα σημεία την χαρακτήρισε ως συνεχή μη μπορώντας όμως να αιτιολογήσει το γιατί. Είχε την ανάγκη να σχολιάσει την συνέχεια στα σημεία αλλαγής του τύπου για τις δίκλαδες ακόμη και αν η συνάρτηση δεν ορίζονταν εκεί, όμως δεν σχολίασε την συνέχεια στο υπόλοιπο πεδίο ορισμού καθώς όπως λέει δεν το έχει σκεφτεί αλλά μάλλον του φαίνεται προφανές. Δυσκολεύτηκε πάρα πολύ στην τέταρτη ερώτηση καθώς δεν κατάφερε να απαντήσει σωστά. Όταν του ζητήθηκε να ξανασκεφτεί το ερώτημα θεώρησε ότι πρέπει να αλλάξει την αρχική του απάντηση η οποία ήταν «, έστω ε>0 τότε αρκεί να βρω δ>0 ώστε για $|x-3|<\delta$ να έχω $|x^2-9|<\varepsilon.$» και αντί για το 3 έπρεπε να βάλει x_o , καταλήγοντας όμως πάλι σε αδιέξοδο. Ο Πέτρος συνεχώς κάνει ανάκληση από κάποια βάση δεδομένων.

Π.χ.

Εγώ: Να σε ρωτήσω, εδώ λες ότι η συνάρτηση είναι «βασική άρα συνεχής», τι εννοείς;

Πέτρος: Βασική ως πολυωνυμική.

Εγώ: Όταν απάντησες αυτό κοίταξες το πεδίο ορισμού της συνάρτησης που είναι το Ν;

Πέτρος: Όχι

Δείχνει εγκλωβισμένος στην οπτική αναπαράσταση της έννοιας καθώς ακόμα και όταν του δινόταν ο αναλυτικός τύπος κάποιας συνάρτησης, ισχυρίστηκε ότι για να απαντήσει σκέφτονταν πάλι γραφικά. Όταν του σχεδίασα δύο συναρτήσεις σταθερές σε κάθε κλάδο που άλλαζε ο τύπος τους στο 0 και η μία ορίζονταν εκεί ενώ η άλλη όχι απάντησε « είναι ασυνεχής γιατί αλλάζει ο τύπος στο μηδέν». Όσον αφορά τη συνάρτηση που του δόθηκε η οποία ήταν ασυνεχής σε όλο το R λέει:

Πέτρος: Εντάξει θέλει και άλλο να γράψω σε αυτό την πληρότητα ότι πάντα ανάμεσα σε ένα ρητό και ένα άρρητο πάντα θα υπάρχει ένας άλλος.

Εγώ: Οπότε γιατί θα είναι ασυνεχής;

Πέτρος: Γιατί μία θα πηγαίνει πάνω μία κάτω

Για μία ακόμη φορά κάνει μεταφορά στο γραφικό επίπεδο αναπαράστασης.

Πέτρος: Με βοηθάει να το σκέφτομαι πάντα γραφικά

Εγώ: Από το γράφημα τι κριτήρια είχες για το αν είναι συνεχής;

Πέτρος: «Τώρα από τότε που το έχω κάνει μπορεί και να έχω αλλάξει άποψη , τότε μπορεί να σκεφτόμουν αν κόβεται μπορεί να μην είναι συνεχής, τώρα δεν την πατάω έτσι» (τα λεγόμενά του έρχονται σε σύγκρουση με τον τρόπο που λειτουργούσε προηγουμένως)

Εγώ: Τώρα δηλαδή τι κάνεις;

Πέτρος: Κοιτάς που ορίζεται πρώτα γιατί το μεγαλύτερο λάθος αυτό είναι πιστεύω γιατί στο λύκειο σου κάνει συγκεκριμένο πεδίο, ένα διάστημα ξέρω γω, δε σου λέει σε ένωση διαστημάτων και γι’ αυτό…

Επιπλέον θεωρεί ότι οι πανεπιστημιακές σημειώσεις είναι πολύ καλές έχει όμως παράπονα από τα σχολικά βιβλία καθώς θα ήθελε να έχουν περισσότερες ασκήσεις με ένωση διαστημάτων. Τέλος όπως ομολογεί προσεγγίζει τα πράγματα πιο πολύ μηχανικά.

Σχολιασμός: Ο φοιτητής προσεγγίζει όλα τα θέματα μέσω της λανθασμένης εικόνας που έχει για την έννοια (χρησιμοποιεί αποκλειστικά το σχήμα 4 του Vinner). Παρουσιάζει τις περισσότερες από τις παρανοήσεις που εμφανίζονται σχετικά με την έννοια. Για παράδειγμα θεωρεί ότι η συνέχεια ταυτίζεται με την έννοια της συνεκτικότητας, δηλαδή κατά τον Tall θα μπορούσαμε να πούμε ότι κινείται αποκλειστικά στον πρώτο κόσμο, τον ενσαρκωμένο. Οι επιδόσεις του είναι το ίδιο χαμηλές σε κάθε επίπεδο αναπαράστασης της συνάρτησης παρ’ ότι ο ίδιος δείχνει να ανήκει στον ενσώματο κόσμο και θα ήταν αναμενόμενο να έχει καλύτερες επιδόσεις όταν δίνεται το γράφημα κάποιας συνάρτησης. Δείχνει να γνωρίζει τον ορισμό όμως δεν είναι σε θέση να τον εφαρμόσει καθώς δεν τον έχει κατανοήσει σε βάθος και απλώς τον αναπαράγει. Παρ’ ότι η έννοια είναι κεντρική για τα μαθηματικά και θα ήταν λογικό να βρίσκεται τουλάχιστον στον διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο παρατηρούμε να μη συμβαίνει κάτι τέτοιο.

Ρούλα:

Όταν ακούει τη λέξη «συνέχεια» φέρνει την εικόνα ορίων και συναρτήσεων. Δίνει σωστά τους ορισμούς όμως θεωρεί ότι είναι ισοδύναμοι και εκφράζουν το ίδιο πράγμα με άλλα λόγια. Ελέγχει την συνέχεια σε ένα γράφημα όταν αυτό αλλάζει κλίση σε κάποιο σημείο. Χαρακτηρίζει συνεχή μία συνάρτηση όταν αποτελείται από μεμονωμένα σημεία χωρίς όμως να είναι σε θέση να αιτιολογήσει τον ισχυρισμό της. Εξετάζει την συνέχεια και σε σημεία εκτός του πεδίο ορισμού παρόλο που όταν ρωτήθηκε αν αυτό είναι σωστό αλλάζει την αρχική της απάντηση. Όταν βλέπει το γράφημα μιας συνάρτησης η οποία παρουσιάζει οπή σε κάποιο σημείο τη χαρακτηρίζει ως ασυνεχή όμως πλέον στη συνέντευξη αναγνωρίζει πως κάτι τέτοιο δεν είναι σωστό καθώς η συνάρτηση δεν ορίζεται σε εκείνο το σημείο με αποτέλεσμα πλέον να την χαρακτηρίζει ως συνεχή. Παρουσιάζει πλήρη αδυναμία εφαρμογής του ε-δ ορισμού. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το παρακάτω κομμάτι διαλόγου καθώς προσεγγίζει γραφικά μια συνάρτηση η οποία αναπαριστάται μέσω του αναλυτικού τύπου της.

Εγώ: Όταν σου δίνεται η $f(x)=x^3$ με x∈N λες ότι είναι συνεχής για κάθε x∈N, για ποιο λόγο;

Ρούλα: Έχω την εντύπωση ότι η γραφική της παράσταση είναι συνεχής.

Όταν της δόθηκε η $f(x)=\begin{cases} 5, & x>0 \\ 13, & x\leq 0 \end{cases}$ απάντησε σωστά όμως για λάθος λόγο, καθώς έγραψε ότι είναι ασυνεχής επειδή το όριο στο μηδέν δεν είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης, όμως όταν της ζητήθηκε να ξανασκεφτεί την απάντησή της μπόρεσε να διακρίνει ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα. Σε όλη την έκταση του ερωτηματολογίου νοιώθει την ανάγκη να σχολιάσει την συνέχεια μόνο κατά σημείο και όχι σε όλο το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης. Πιο κάτω αναφέρεται στην αρχή της μεταφοράς χωρίς όμως να την έχει κατανοήσει. Ακόμη προσπαθεί να υπολογίσει το όριο σε μεμονωμένο σημείο κάτι που δείχνει ότι πολλές δυσκολίες που έχει βασίζονται στην αδυναμία της να καταλάβει την έννοια του ορίου με ότι προβλήματα μπορεί αυτό να συνεπάγεται.

Θεωρεί ότι η καθημερινότητα δημιουργεί εμπόδια στην προσπάθεια κατανόησης της έννοιας. Παραδέχεται πως προσεγγίζει διαδικαστικά τα περισσότερα ζητήματα και δείχνει να έχει ανασφάλεια με τις περισσότερες λειτουργίες που σχετίζονται με την έννοια.

Σχολιασμός: Η Ρούλα παρουσιάζει τις περισσότερες παρανοήσεις π.χ. θεωρεί το συνεκτικό γράφημα ως προϋπόθεση συνεχούς συνάρτησης. Είναι προφανές ότι ανήκει ακόμη στον ενσαρκωμένο κόσμο καθώς ακόμα και όταν της δόθηκε ο αναλυτικός τύπος μιας συνάρτησης έφερε στη μνήμη της το γράφημα της συνάρτησης για να απαντήσει. Σε δύο σημεία χρησιμοποίησε φράσεις κενού νοήματος καθώς δεν μπορούσε να αποδείξει τα λεγόμενα της. Συγκεκριμένα χαρακτήρισε συνεχή μια συνάρτηση λόγω των μεμονωμένων σημείων και ασυνεχή μια άλλη από την αρχή της μεταφοράς. Κάτι που δείχνει ότι οι φοιτητές με το πέρασμα του χρόνου συγκρατούν κάποιες σημαντικές μαθηματικές προτάσεις, αυτές όμως έχουν χάσει το νόημα τους με αποτέλεσμα να πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να διερευνούμε πάντα αν μια φράση βασίζεται σε μία βαθύτερη γνώση. Δεν παρουσιάζει αντιφάσεις ανάμεσα στα επίπεδα αναπαράστασης. Αναπαράγει τον ορισμό του πανεπιστημίου χωρίς να είναι σε θέση να τον εφαρμόσει σε κανένα σημείο.

Σταύρος:

Η πρώτη εικόνα που έρχεται στο μυαλό του για την έννοια είναι μνήμες σχετικές με τον ορισμό του λυκείου, όπως λέει ο καθηγητής του εστίαζε αρκετά στο πεδίο ορισμού το οποίο θεωρεί ότι το μπερδεύουν συχνά οι μαθητές. Θεωρεί ότι με το πέρασμα του χρόνου η πεποίθηση ότι συνεχής είναι η συνάρτηση που δεν διακόπτεται παύει να υπάρχει. Παρ' όλα αυτά εντύπωση προκαλεί ότι δεν θυμάται τον ορισμό του λυκείου. Χρησιμοποιεί το κλασικό επιχείρημα της συνεκτικότητας για να δείξει ότι είναι συνεχής παρ' ότι γνωρίζει ότι κάτι τέτοιο αποτελεί συχνή παρανόηση των φοιτητών.

Εγώ: Γιατί είναι συνεχής;

Σταύρος: Θα πω κάτι πολύ σχετικό, φαίνεται πολύ προφανές ότι δεν διακόπτεται πουθενά.

Εγώ: Υπάρχει όμως περίπτωση να είναι συνεχής και να διακόπτεται;

Σταύρος: Ναι, εξαρτάται από το πεδίο ορισμού αυτό.

Όταν του δίνεται μία συνάρτηση με μεμονωμένα σημεία στην αρχή θεωρούσε ότι δεν έχει νόημα ο έλεγχος της συνέχειας, «εδώ είχα καθαρά στο μυαλό μου τι κάναμε στο λύκειο, αν μιλήσω πλέον με όσα ξέρω απ' το πανεπιστήμιο θα έλεγα ότι είναι συνεχής, από τον ορισμό του πανεπιστημίου επειδή είναι μεμονωμένα τα σημεία», παρατηρούμε δηλαδή να ανασκευάζει τα λεγόμενά του. Έπειτα χαρακτηρίζει μία δίκλαδη συνάρτηση ως ασυνεχή διότι δεν είναι τα πλευρικά όρια ίσα.

Εγώ: Τι θα έπρεπε να ισχύει για να είναι συνεχής;

Σταύρος: Να είναι τα πλευρικά ίσα.

Παρατηρούμε μία παρανόηση, ταυτίζει τη συνέχεια με την ύπαρξη ορίου.

Εγώ: Μόνο τα πλευρικά;

Σταύρος: Και να υπήρχε και η τιμή και να ήταν ίση.

Διορθώνει το λάθος και μάλιστα χρησιμοποιεί χωρίς να το έχει συνειδητοποιήσει τον ορισμό του λυκείου που προηγουμένως ισχυρίστηκε πως δε θυμάται. Επιμένει πάρα πολύ στο να ελέγχει την συνέχεια μόνο στο πεδίο ορισμού, αποφεύγοντας με αυτό τον τρόπο ένα σοβαρό λάθος, μία ισχυρή ανάμνηση από τα μαθητικά του χρόνια όπως λέει. Αποδίδει την αδυναμία του να χειριστεί σε ασκήσεις τον ορισμό του πανεπιστημίου στα έτη σπουδών που έχουν περάσει από το πρώτο έτος καθώς φοιτά στο 9^o εξάμηνο σπουδών. Δεν ξεχνά να χαρακτηρίσει τη συνάρτηση ως προς τη συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού της παρ' ότι κάτι τέτοιο συχνά το παρέλειπαν οι φοιτητές που ανήκουν στα χαμηλά επίπεδα κατανόησης της έννοιας. Επιπλέον σε πολλά σημεία φαίνεται να ταυτίζει την ισότητα των πλευρικών ορίων με την ύπαρξη της συνέχειας, σα να έχει παρανοήσει την τεχνική ελέγχου της συνέχειας των σχολικών χρόνων.

Εγώ: Αν είχες μία συνάρτηση όπου κοντά σε ένα σημείο τα πλευρικά όρια ήταν ίσα αλλά εκείνο το σημείο δεν έπαιρνε τιμή ίση με του ορίου;

Σταύρος: Μμμ θα έπρεπε και η τιμή να ήταν ίση.

Για άλλη μία φορά ανασκευάζει την αρχική του άποψη. Ενδιαφέρον παρουσιάζει πως όταν του δόθηκε κάποια δίκλαδη συνάρτηση με τον ένα κλάδο να είναι ο x^2 ισχυρίζεται πως έφερε τη γραφική παράσταση στο μυαλό του την οποία σκέφτηκε σαν μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε δύο διαστήματα όπως η 1/x.

Εκφράζει το παράπονο ότι δεν ασχολείται τόσο με τη συνέχεια ενώ θεωρεί πως στο παρελθόν τον απειροστικό 2 τον πέρασε καθαρά λόγω συνέχειας. Χαρακτηριστικά λέει ότι τα ε και δ μόνο στον απειροστικό 1 και 2 χρησιμοποιούνται και λίγο στην πραγματική ανάλυση. Στο λύκειο θεωρεί ότι έκανε αρκετή περισσότερη εξάσκηση στη συνέχεια απ' ότι στο πανεπιστήμιο. Λέει «αν κάποιος ασχολείται μόνο με την ανάλυση δεν υπάρχει πιθανότητα να μην γνωρίζει τη συνέχεια αλλά αν κάποιος πηδάει από την ανάλυση στις πιθανότητες και μετά πάλι αλλού, όλα είναι μπλεγμένα, θα πάρεις πτυχίο στα μαθηματικά αλλά μετά αν πας πιο συγκεκριμένα το εσωτερικεύεις, αυτό πιστεύω». Όπως παραδέχεται πολλά ερωτήματα τα προσέγγισε καθαρά διαισθητικά.

Σχολιασμός: Ο φοιτητής παρουσιάζει αρκετές από τις παρανοήσεις οι οποίες είναι σχετικές με την έννοια της συνέχειας. Θυμάται μόνο τον ορισμό του πανεπιστημίου όμως δεν είναι σε θέση να τον εφαρμόσει σωστά. Φαίνεται να μην παρουσιάζει μεγάλες διαφορές στον τρόπο που προσεγγίζει τη συνέχεια ανάλογα με το είδος αναπαράστασης της συνάρτησης. Ο Σταύρος φαίνεται να μη σκέπτεται πλέον στα πλαίσια του ενσαρκωμένου κόσμου καθώς όπως λέει και ο ίδιος σε ένα σχόλιο μεταγνωστικού τύπου « είναι λάθος να πιστεύουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση είναι αυτή που υποχρεωτικά το γράφημά της δεν διακόπτεται». Δείχνει να ανήκει στον κόσμο των διαδικασιών-εννοιών καθώς προσπαθεί να χρησιμοποιήσει τον ορισμό του λυκείου (στην αρχή λανθασμένα), χρησιμοποιεί τα γραφήματα, είναι σε θέση να διατυπώσει τον ορισμό του πανεπιστημίου αλλά φαίνεται να μην μπορεί να σκεφτεί ενοποιημένα για τις ιδιότητες που γνωρίζει με αποτέλεσμα να βρίσκεται μόλις στις αρχές του δεύτερου κόσμου του Tall. Φαίνεται η προσέγγιση που κάνει στις ασκήσεις να είναι το 4^o σχήμα του Vinner καθώς χρησιμοποιεί τη (λανθασμένη) εικόνα έννοιας που έχει και δυσκολεύεται ακόμα και στη χρήση του ορισμού του λυκείου ο οποίος είναι αρκετά πιο απλός από αυτόν του πανεπιστημίου.

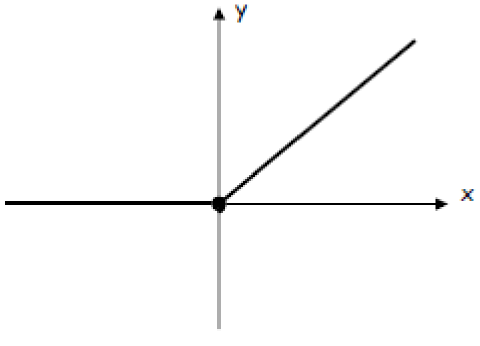
Κυριάκος:

Η πρώτη εικόνα που του έρχεται στο μυαλό για την έννοια είναι μια γραφική παράσταση της οποίας το γράφημα δεν διακόπτεται. Όμως όπως παραδέχεται στη συνέχεια αυτό είναι κάτι διαισθητικό και δίνει ιδιαίτερη σημασία στο ότι η συνέχεια πρέπει να ελέγχεται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Θεωρεί ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι καθώς όπως λέει:

« Είναι ισοδύναμοι γιατί αν δεις τον ορισμό του… ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό του πανεπιστημίου γιατί στην τρίτη λυκείου… επειδή διδάσκω κιόλας στην τρίτη λυκείου εεε ντάξει τους δίνουμε στην ουσία το συμπέρασμα του ορισμού του πανεπιστημίου, ας ξεκινήσουμε λοιπόν από τον ορισμό του πανεπιστημίου, ο ορισμός του πανεπιστημίου ο ε-δ ορισμός όπως τον βλέπω εγώ είναι για τη συνέχεια μια εεε συνέχεια του ορισμού του ορίου, δηλαδή στον ορισμό του ορίου τι μου λέει, μια συνάρτηση έχει όριο τον αριθμό l αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε για κάθε x που ανήκει στο (x_o-δ, x_o+δ) η απόλυτη τιμή του η $|f(x) - l|$<ε αυτό το l μπορεί να μην είναι η εικόνα κάποιου σημείου του πεδίου ορισμού , δεν με νοιάζει δεν εξετάζω το όριο μόνο σε σημείο του πεδίου ορισμού ενώ τη συνέχεια την εξετάζω σε σημεία του πεδίου ορισμού και αυτό το l στον ορισμό της συνέχειας αντικαθίσταται με το $f(xo)$ όπως το βλέπω εγώ»

Όταν του δόθηκε το παρακάτω γράφημα, αφού έλεγξε την συνέχεια αριστερά και δεξιά του μηδέν στάθηκε στο σημείο αλλαγής του τύπου καθώς όπως λέει χαρακτηριστικά:

«… αφού αλλάζει ο τύπος στο μηδέν δικαιούμαι να ελέγξω την συνέχειά της στο μηδέν από τη στιγμή που αλλάζει τύπο.»



Όταν του δόθηκε το γράφημα μιας συνάρτησης με μεμονωμένα σημεία ακολούθησε ο διάλογος:

Εγώ: Μπορείς να προσεγγίσεις την άσκηση με τον ορισμό του λυκείου;

Κυριάκος: Κοίτα να δεις αν το δούμε από τη σκοπιά του μαθητή όχι θα δυσκολευόταν, αν το δούμε από τη σκοπιά του καθηγητή θα μπορούσα να το προσεγγίσω με τον ορισμό του λυκείου έχοντας όμως στο μυαλό μου και τον ορισμό του πανεπιστημίου γιατί αν έχω το μεμονωμένο σημείο εξετάζω όπως είπα μία περιοχή (x_o-δ, x_o+δ), ναι αλλά σε αυτή την περιοχή όσο μικρό και αν είναι το δ επειδή το x_o μεμονωμένο σημείο δεν ορίζεται η συνάρτησή μου όσο μικρό και αν το πάρουμε το δ σε μία περιοχή του x_o , ορίζεται μόνο στο x_o

Εγώ: Που πιστεύεις ότι κολλάει ο ορισμός του λυκείου και προσπαθείς να το πας με του πανεπιστημίου;

Κυριάκος: Όχι κοίταξε να δεις εφαρμόζεται γιατί ο ορισμός του λυκείου τι λέει; Ότι η f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o αν το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_o είναι ίσο με f(x_o), εφαρμόζεται αλλά ο μαθητής ακόμα δεν έχει την ικανότητα να δει αυτό που λέμε περιοχή και ίσως φταίει το μάθημα έτσι όπως γίνεται στο λύκειο γιατί ο μαθητής δεν μπορεί ενδεχομένως να το δει.

Θεωρεί ότι όταν μια συνάρτηση διακόπτεται σε κάποιο σημείο και εκεί ορίζεται έχει υποχρέωση να εξετάσει την συνέχεια, όμως στο επόμενο γράφημα του δόθηκε μια παρόμοια συνάρτηση με την διαφορά ότι δεν ορίζονταν στο μηδέν που διακόπτεται και την χαρακτήρισε ως ασυνεχής στο μηδέν. Κατά την διάρκεια της συνέντευξης όταν έλεγξε ξανά το γράφημα διαπίστωσε το λάθος του με αποτέλεσμα να αλλάξει την αρχική του απάντηση. Όσον αφορά τους ορισμούς δεν είναι σε θέση να εφαρμόσει αυτόν του πανεπιστημίου. Όταν του δίνεται η x^3 τη χαρακτηρίζει συνεχή ως πολυωνυμική και θεωρεί ότι δεν έχει σημασία το ότι το πεδίο ορισμού είναι το N καθώς « είναι συνεχής στο R εεε παίρνω και την κόβω στους φυσικούς και παίρνω σαν γράφημα μεμονωμένα σημεία». Παρουσιάζει μεγάλη σύγχυση στη συνάρτηση η οποία ήταν παραλλαγή αυτής του Dirichlet με αποτέλεσμα στο τέλος να αδυνατεί να την χαρακτηρίσει ως προς τη συνέχεια, μάλιστα θεωρεί ότι τέτοιο τύπου συναρτήσεις τον δυσκολεύουν περισσότερο από οτιδήποτε.

Τεράστιο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο παρακάτω διάλογος στον οποίο ο ίδιος ο φοιτητής αναφέρει για κάποια βάση δεδομένων που χρησιμοποιεί.

Εγώ: Γιατί ενώ στην αρχή μου είπες ότι πρέπει να κοιτάω την συνέχεια στο πεδίο ορισμού, ελέγχεις μόνο τοπικά σε κάποια σημεία και δεν την εξετάζεις και στο υπόλοιπο πεδίο ορισμού;

Κυριάκος: Κοίταξε να δεις από τη στιγμή που έχουμε κατηγοριοποιήσει κάποιες συναρτήσεις τις σταθερές, τις πολυωνυμικές, τη λογαριθμική, τις τριγωνομετρικές ότι είναι συνεχείς βασιζόμαστε πάνω σε τύπους άρα όταν μου δώσεις μια συνάρτηση σαν τύπο αλλάζει δεν αλλάζει τύπο το πρώτο πράγμα είναι αν τρέξω σαν υπολογιστής σε αυτή τη data base που έχω ας πούμε έτσι να δω τον τύπο τι είναι; Είναι μία από αυτές τις πέντε έξι κατηγορίες που ξέρω; Και αν είναι οκ την λέω συνεχής αν όμως αλλάζει σε κάποιο σημείο πρέπει να δω τους επιμέρους κλάδους και μετά να τρέξω στη data base και τότε να πω ο κάθε κλάδος συνεχής και να ελέγξω στη συνέχεια στο σημείο που αλλάζει.

Εγώ: Σε μια εξέταση στην απάντησή σου θα ήσουν πιο αυστηρός; Θα έγραφες και στο υπόλοιπο πεδίο ορισμού..

Κυριάκος: Ναι θα έγραφα ότι στον ένα κλάδο ορίζεται γιατί είναι η σταθερή συνάρτηση -2 στο (-∞, 0)και από το (0,+∞) πάλι σταθερή άρα συνεχής στο 0 δεν εξετάζω γιατί δεν είναι σημείο του πεδίου ορισμού της θα έγραφα, αυτή θα ήταν κατά λέξη η απάντησή μου η γραπτή.

Πιστεύει ότι ο τρόπος που χρησιμοποιείται η έννοια στην καθημερινότητα επηρεάζει σε κάποιο βαθμό την αντίληψη για την έννοια. Για να βελτιωθεί θα ήθελε να δει περισσότερες ασκήσεις με πεδίο ορισμού ρητούς και άρρητους ώστε να κατανοήσει καλύτερα την έννοια. Τέλος προσεγγίζει όπως παραδέχεται περισσότερο διαδικαστικά τα πράγματα και μάλιστα χαρακτηριστικά λέει «νομίζω ότι είναι η σωστή εποπτεία που πρέπει να έχει ένας μαθηματικός».

Σχολιασμός: Θεωρεί ότι μπορεί σε μεμονωμένο σημείο να ελέγξει τη συνέχεια με τον ορισμό λυκείου αλλά αλλάζει άποψη και προσπαθεί να χρησιμοποιήσει τον ορισμό του πανεπιστημίου και γενικότερα παρουσιάζει μία σύγχυση σε έννοιες όπως συνάρτηση, ότι, πεδίο ορισμού καθώς και στο χειρισμό των ε και δ. Γενικά δεν είναι τόσο σταθερός στις αρχικές του απαντήσεις καθώς κατά την διάρκεια της συνέντευξης διόρθωσε κάποια πράγματα. Δεν παρουσιάζει αντιφάσεις στις απαντήσεις του ανάλογα με το επίπεδο αναπαράστασης της συνάρτησης. Είναι σε θέση να δώσει σωστά τους ορισμούς και να τους περιγράψει με σωστό τρόπο αν του ζητηθεί όμως έχει τεράστια δυσκολία στο να εφαρμόσει αυτόν του πανεπιστημίου. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η παραδοχή του ότι έχει κατασκευάσει μια βάση δεδομένων συνεχών συναρτήσεων χωρίς όμως να είναι σε θέση σε δύσκολες περιπτώσεις να μπορεί να αποδείξει την συνέχεια της συνάρτησης π.χ. όταν του δίνονται μεμονωμένα σημεία. Μάλιστα το ότι δε χαρακτήρισε τη συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού το στηρίζει στο ότι εκτός του σημείου αλλαγής του τύπου κάποιων συναρτήσεων ο τύπος της συνάρτησης στο υπόλοιπο πεδίο ορισμού ήταν αυτός κάποιας βασικής (π.χ. σταθερή συνάρτηση) με αποτέλεσμα να θεωρεί περιττό να χαρακτηρίσει τη συνέχεια αλλά όπως λέει σε ένα γραπτό εξέτασης θα το έκανε. Χρησιμοποιεί τον ορισμό έννοιας σε απλές ασκήσεις αλλά σε απαιτητικά θέματα η πορεία που ακολουθεί είναι μέσα από την εικόνα έννοιας καθώς πουθενά δεν μπόρεσε να αξιοποιήσει τον ορισμό του πανεπιστημίου. Δυσκολεύεται σε περισσότερο απαιτητικές ασκήσεις και δεν έχει καταφέρει να εισέλθει στον αξιωματικό κόσμο. Προσεγγίζει περισσότερο διαδικαστικά τα πράγματα αλλά υστερεί στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας. Δεν διαχειρίζεται εντελώς ισότιμα έννοιες και διαδικασίες και θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχει εισέλθει στο διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο όμως δεν βρίσκεται στο κατώφλι του αξιωματικού κόσμου.

Γιάννης:

Η αυθόρμητη εικόνα έννοιας που έχει είναι μία συνάρτηση η οποία δεν έχει κενά, μάλιστα ισχυρίζεται ότι αυτό ακριβώς έκαναν στα σχολικά χρόνια. Παρ' όλα αυτά δε θεωρεί εμπόδιο το πώς χρησιμοποιείται η έννοια στα πλαίσια της καθημερινότητας. Βρίσκει με επιτυχία ότι οι δύο ορισμοί δεν είναι ισοδύναμοι καθώς το x_o μπορεί να μην είναι σημείο συσσώρευσης άρα και να μην εφαρμόζεται ο ορισμός του λυκείου. Αποφεύγει να σκέφτεται γραφικά τον ορισμό του πανεπιστημίου. Όταν βλέπει το γράφημα μίας συνάρτησης όπου σχηματίζει γωνία σε κάποιο σημείο, έχει την ανάγκη να ελέγξει τη συνέχεια εκεί που αλλάζει ο τύπος. Ισχυρίζεται πως αν μία συνάρτηση έχει μεμονωμένα σημεία είναι συνεχής, μη μπορώντας όπως να το αιτιολογήσει και κάνοντας μία απλή αναφορά στο ότι κάτι τέτοιο αποδεικνύεται από τον ορισμό. Παρακάτω εφαρμόζει με επιτυχία τον ορισμό του λυκείου. Στα σημεία αλλαγής τύπου έχει την ανάγκη να σχολιάσει τη συνέχεια ακόμα και αν αυτά δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Στην προσπάθειά του να αντιμετωπίσει την άσκηση στην οποία ζητείται ο έλεγχος της συνέχειας με χρήση του ε-δ ορισμού δεν καταφέρνει να βρει κάποια λύση και σταματά την προσπάθεια.

Γιάννης: Δεν ξέρω αν ισχύει καν αυτό που γράφω, κατά τα άλλα αυτή είναι η ιδέα, παίρνω περιπτώσεις για το ε και βρίσκω το κατάλληλο δ.

Εγώ: Αυτό το δ εξαρτάται από το ε;

Γιάννης: Όπως το έχω κάνει εγώ ναι, αλλά μπορεί και να γίνεται γενικά και να μην εξαρτάται.

Εγώ: Πρέπει να εξαρτάται πιστεύεις ή δε το θυμάσαι;

Γιάννης: Ναι πιστεύω πως ναι.

Στην $f(x)=x^3$ με $x \epsilon N$, δεν παρατήρησε καν το πεδίο ορισμού και την χαρακτήρισε συνεχή ως πολυωνυμική. Χρησιμοποιεί με ιδιαίτερη ευκολία τον ορισμό του λυκείου για τον έλεγχο της συνέχειας. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο διάλογος που έγινε στο σημείο που του δίνεται η $f(x) = \begin{cases} 1, & x\ ρητός \\ -1, & x\ άρρητος \end{cases}$

Γιάννης: Ε, εδώ αυτή την έχουμε δει χιλιάδες φορές, δε χρειάζεται.

Εγώ: Την εξήγηση την θυμάσαι;

Γιάννης: εεε οτιιι αν πάρουμε τον ορισμό εεεεε, μισό λεπτό να το σκεφτώ (παύση ενός λεπτού). Αν πάρουμε ε για ½ μια μικρή ποσότητα για όποιο δ και να πάρουμε πάντα θα μπορούμε να πάρουμε έναν άρρητο ή ένα ρητό ώστε να ξεπερνάει την απόσταση δηλαδή όταν το x_o είναι ρητός θα είναι πολύ μεγάλο το ½ και όσο πιο κοντά να πάμε πάντα θα βρίσκουμε πάντα ένα ρητό ώστε η απόσταση να ξεπερνάει το ε, οπότε δεν μπορούμε να βρούμε ένα ε ώστε για όλα τα x…

Εγώ: Γραφικά το φαντάζεσαι;

Γιάννης: Γραφικά είναι τελείως προφανές πάει πάνω κάτω συνέχεια.

Ο φοιτητής βλέπουμε να δυσκολεύεται και να μην δίνει μία τόσο τυπική απάντηση, αρχικά είχε εντάξει τον συγκεκριμένο τύπο συνάρτησης σε μία βάση δεδομένων και όποια έβλεπε να έχει αυτά τα χαρακτηριστικά την χαρακτήριζε ως ασυνεχή. Δυσκολεύεται σε κάποιες ιδιότητες όπως στο ότι το γινόμενο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Όταν του ζητείται να δώσει το παράδειγμα μιας συνάρτησης η οποία έχει για πεδίο ορισμού το R αλλά είναι ασυνεχής χαρακτηρίζει την |x| ως ασυνεχή αλλά αμέσως διορθώνει τα λεγόμενά του.

Εγώ: Γιατί δε χαρακτηρίζεις μία συνάρτηση ως προς τη συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού, έχει νόημα αυτό;

Γιάννης: Κανονικά πρέπει αλλά αφού ξέρουμε ότι ξέρω εγώ η –x είναι συνεχής…

Εγώ: Το θεώρησες προφανές δηλαδή.

Γιάννης: (γνέφει καταφατικά)

Αρέσκεται περισσότερο στη χρήση των αναλυτικών τύπων. Ισχυρίζεται πως στον απειροστικό 2 δεν κάνουν πολλά παραδείγματα όμως όποιος θέλει μπορεί να βρει περισσότερα και θεωρεί ότι και ο ίδιος εμφανίζει πολλές δυσκολίες. Τέλος, όταν έχει ασκήσεις με όρια τις προσεγγίζει διαδικαστικά, όταν όμως έχει μια συνάρτηση που απαιτεί την χρήση του ορισμού προσπαθεί να σκεφτεί πιο αφηρημένα.

Σχολιασμός: Ο Γιάννης δεν αντιμετωπίζει τη συνέχεια στον ενσώματο κόσμο. Κάνει χρήση του ορισμού του λυκείου με ιδιαίτερη ευκολία και όλοι οι χειρισμοί του είναι στα πλαίσια των συμβόλων, ενώ αποφεύγει πολλά λάθη που κάνουν συχνά οι φοιτητές. Από την άλλη δε φαίνεται να μπορεί να χειριστεί τον ορισμό του πανεπιστημίου και να αντιμετωπίσει με επιτυχία περισσότερο απαιτητικά θέματα και φαίνεται να μην έχει απόλυτη συνείδηση των διεργασιών που γίνονται με τον ορισμό του πανεπιστημίου. Σκέφτεται σωστά για τα γραφήματα και είναι σε θέση να γνωρίζει πως σχετίζονται τα διάφορα επίπεδα αναπαράστασης, μάλιστα διαχειρίζεται ισότιμα διαδικασίες και έννοιες. Θα μπορούσαμε να πούμε πως ανήκει στο διαδικασιο-εννοιολογικό κόσμο και βρίσκεται στο κατώφλι του αξιωματικού κόσμου του Tall.

Μαργαρίτα:

Όπως και οι περισσότεροι φοιτητές ως πρώτη εικόνα όταν ακούει για συνέχεια της έρχεται μία συνάρτηση της οποίας το γράφημα δεν διακόπτεται και δεν έχει άλματα. Χαρακτηριστικά λέει «λάθος είναι αυτό βέβαια αλλά τότε έτσι νόμιζα», ισχυρίζεται ότι επηρεάστηκε από την καθημερινή ζωή όπου όταν κάτι είναι συνεχές δεν διακόπτεται. Όσον αφορά την ισοδυναμία των δύο ορισμών αλλάζει την αρχική της άποψη που ήταν ότι είναι ισοδύναμοι καθώς λέει «τώρα ξέρω… δεν είναι ισοδύναμοι γιατί του πανεπιστημίου ισχύει γενικά για όλα τα σημεία είτε το σημείο είναι σημείο συσσώρευσης είτε είναι μεμονωμένο σημείο ενώ του λυκείου θα έπρεπε το x_o να είναι σημείο συσσώρευσης». Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο παρακάτω διάλογος όπου φαίνεται το πώς επιχειρηματολογεί γιατί έλεγξε την συνέχεια σε σημείο της γραφικής παράστασης όπου αλλάζει η κλίση αυτής.

Εγώ: Βλέπω ότι στην πρώτη είχες την ανάγκη στο μηδέν να ελέγξεις αν είναι συνεχής. Γιατί αυτό;

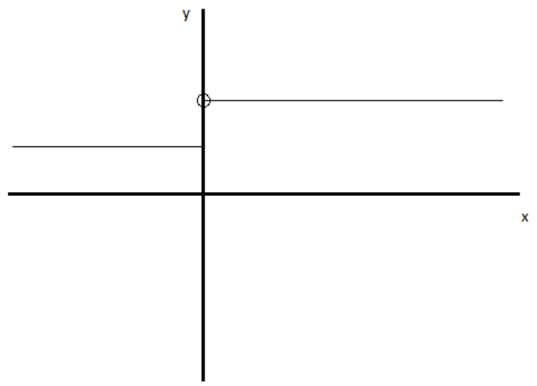
Μαργαρίτα: Δεν έπρεπε ε;

Εγώ: Δεν λέω ότι δεν έπρεπε απλά σε ρωτάω.

Μαργαρίτα: Κοίτα από το γράφημα φαίνεται ότι είναι συνεχές στο μηδέν αλλά ναι εγώ το τσέκαρα μπορεί να μπερδεύτηκα και από την παράγωγο επειδή έχει άλλο τύπο εδώ η συνάρτηση και άλλο εδώ να μπερδεύτηκα και να πήρα τα πλευρικά.

Έπειτα για άλλη μια φορά αλλάζει την αρχική της άποψη και αναφέρει πως όταν έχουμε μια συνάρτηση με μεμονωμένα σημεία δεν ισχύει ο ορισμός του λυκείου αλλά ισχύει ο ορισμός του πανεπιστημίου με τα ε και δ με τον οποίο δείχνουμε ότι είναι συνεχής. Όταν της ζητείται να γράψει την απόδειξη δεν δυσκολεύεται καθόλου.

Όταν της δόθηκε το παρακάτω γράφημα παρ' ότι στο γραπτό της το είχε χαρακτηρίσει την συνάρτηση ως ασυνεχή επειδή υπάρχει άλμα στο μηδέν, πλέον στην συνέντευξη ισχυρίζεται πως είναι ασυνεχής καθώς τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα.



Έχει την ανάγκη να ελέγξει την συνέχεια σε κάποιο σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Χαρακτηρίζει συνεχή μια συνάρτηση όταν στα επιμέρους σημεία του πεδίου ορισμού της δεν διακόπτεται και αναφέρει από μόνη της τον όρο συνεκτικότητα. Χαρακτηριστικός είναι και ο παρακάτω διάλογος που έγινε μόλις ανέφερε τον όρο συνεκτικότητα.

Εγώ: Υπάρχει διαφορά ανάμεσα στη συνεκτικότητα και την συνέχεια;

Μαργαρίτα: Συνεκτικότητα είναι αυτό που νόμιζα στην αρχή για τη συνέχεια, ότι δεν διακόπτεται πουθενά.

Όταν της ζητήθηκε να ξαναπροσπαθήσει να εφαρμόσει τον ορισμό του πανεπιστημίου για να δείξει την συνέχεια στην x^2 δεν κατάφερε για δεύτερη φορά να απαντήσει. Ισχυρίζεται ότι δεν σκέφτεται καθόλου γραφικά μια συνάρτηση όταν έχει τον αναλυτικό της τύπο. Νοιώθει την ανάγκη να χαρακτηρίσει μια συνάρτηση ως προς τη συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού της και όχι μόνο τοπικά στα σημεία που θα μπορούσε εκείνη να είναι ασυνεχής. Όταν δεν το κάνει λέει «επειδή μας έχουνε πει ότι ξέρω εγώ οι ρητές είναι συνεχείς συναρτήσεις, οι πολυωνυμικές είναι συνεχείς συναρτήσεις γι' αυτό δεν το τσεκάρω συνεχώς».

Όταν της δίνεται η

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\ ρητός \\ -1, & x\ άρρητος \end{cases}$$

γράφει πως δεν έχει νόημα η συνέχεια να ελεγχθεί καθώς η συνάρτηση αποτελείται από μεμονωμένα σημεία, όμως στη συνέντευξη αναφέρει «τότε νόμιζα ότι έπρεπε να είναι σημείο συσσώρευσης αυτό που είχαμε κάνει στο λύκειο ότι αν δεν είναι τότε δεν μπορώ να μιλήσω για συνέχεια»

Πιστεύει ότι αυτό που την δυσκολεύει περισσότερο είναι ο χειρισμός των ε και δ καθώς λέει «όχι τόσο θεωρητικά, θεωρητικά τα γράφω, στην πράξη». Θεωρεί ότι η χρήση της έννοιας και σε πλαίσια εκτός του μαθηματικών δημιουργεί παρανοήσεις καθώς λέει «λόγω της καθημερινότητας δεν μπορεί ο άνθρωπος να μην το λάβει υπόψη του, είναι πολύ λογικό όταν μιλάμε για συνέχεια να σκέφτεται κάτι από την καθημερινή ζωή». Θεωρεί ότι το βιβλίο απ' το οποίο έχει διδαχθεί την έννοια δεν την καλύπτει και θα ήθελε περισσότερα στοχευμένα παραδείγματα τα οποία θα την πήγαιναν ένα επίπεδο παραπάνω. Στην ερώτηση αν προσεγγίζει τα πράγματα εννοιολογικά ή διαδικαστικά απαντά: «θα έπρεπε κανονικά εννοιολογικά αλλά όταν γίνει δύσκολο και ξέρω ότι βγαίνει τυποποιημένα το κάνω τυποποιημένα.»

Σχολιασμός: Δείχνει αρκετά βελτιωμένη έχει καλύτερη επίδοση στην συνέντευξη σε σχέση με τις απαντήσεις που είχε δώσει στο ερωτηματολόγιο. Σε ορισμένα σημεία κάνει σχόλια μεταγνωστικού τύπου και δείχνει να έχει κατανοήσει την έννοια σε σχέση με την περίοδο που απάντησε στις ερωτήσεις. Δεν εμφανίζει τις συχνές παρανοήσεις και δυσκολεύεται μόνο σε πολύ απαιτητικά θέματα όπου παρόλο που έχει την πρόθεση να τα προσεγγίζει περισσότερο εννοιολογικά αναγκάζεται κάποιες φορές όπως ομολογεί να τα προσεγγίζει τυποποιημένα. . Όταν έχει μια συνάρτηση από αυτές που έχει διδαχθεί ότι είναι συνεχής πάντα π.χ. ρητές δεν νοιώθει την υποχρέωση να την χαρακτηρίζει ως προς την συνέχεια γιατί το θεωρεί προφανές αλλά θεωρεί ότι στα πλαίσια ενός διαγωνίσματος θα έπρεπε να το αναφέρει. Με βάση τις απαντήσεις της στην συνέντευξη ανήκει στα ανώτερα επίπεδα κατανόησης καθώς έχει μια ισορροπία ανάμεσα στις διαδικασίες και τις έννοιες τις οποίες έχει κατανοήσει, όμως αδυνατεί να ανταποκριθεί στο υψηλότερο επίπεδο καθώς σε ασκήσεις που απαιτούν λεπτότερους χειρισμούς δεν εμφανίζει την ίδια συνέπεια. Σαφέστατα ανήκει στο διαδικασιοεννοιολογικό κόσμο και αν καταβάλει κάποια προσπάθεια θα μπορέσει να κάνει το πέρασμά της στον αξιωματικό κόσμο.

Σωτήρης:

Θεωρεί την ερώτηση «τι σας έρχεται στο νου με την συνέχεια;» πολύ γενική. Η συγκεκριμένη ερώτηση είναι ανοικτού τύπου, όμως μόνο τυχαίο δεν είναι που αυτό το σχολιάζει μόνο ο Σωτήρης καθώς όπως θα δούμε παρακάτω ανήκει στο υψηλότερο επίπεδο κατανόησης. Ως πρώτη εικόνα του έρχεται μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση παντού ορισμένη. Όπως συμπληρώνει «γενικά όμως όταν στα μαθηματικά διαβάζω συνέχεια το πρώτο πράγμα που μου έρχεται για παρακάτω είναι ο ορισμός, δεν έχω την εικόνα και με αυτή πορεύομαι, απλά αν ένας στο δρόμο μου πει συνεχή συνάρτηση θα πω ότι… ένα τέτοιο πράγμα» (σχεδιάζει ένα γράφημα μονοκονδυλιά). Αναγνωρίζει με ιδιαίτερη ευκολία ότι οι δύο ορισμοί δεν είναι ισοδύναμοι και μάλιστα με σωστή αιτιολόγηση. Σε σχέση με τους υπόλοιπους φοιτητές βάζει και μια άλλη διάσταση στην κατηγορία «μονοκόμματη σχεδίαση» καθώς συμπληρώνει πως για να είναι συνεχής πρέπει να είναι μονοκόμματη η σχεδίαση αλλά μέσα στο πεδίο ορισμού της. Χαρακτηρίζει συνεχή μία συνάρτηση όταν έχει μεμονωμένα σημεία αλλά παράλληλα έχει την ανάγκη να αποδείξει τον ισχυρισμό του με χρήση του ορισμού του πανεπιστημίου. Παρακάτω ελέγχει τα πλευρικά όρια σε σημείο του πεδίου ορισμού και αφού δεν είναι ίσα ισχυρίζεται ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής, επιπλέον μιλά για σημεία συσσώρευσης ώστε να αιτιολογήσει την χρήση ορίων. Όσον αφορά την άσκηση ελέγχου της συνέχειας με χρήση του ε-δ ορισμού:

Εγώ: Σε δυσκόλεψε αυτό με το ε-δ, το θυμόσουν;

Σωτήρης: Εεε όχι δε το θυμόμουνα απέξω αλλά το έκανα, είναι και κλασικό με τη διαφορά τετραγώνων που αυτό το σπάμε…

Δείχνει να μπορεί να αναπτύξει σύνθετες στρατηγικές αντιμετώπισης. Εν αντιθέσει με τους περισσότερους φοιτητές για την $f(x)=x^3$ με $x \in N$ υπερτονίζει το πεδίο ορισμού και μιλά κατευθείαν για μεμονωμένα σημεία ενώ στο γραπτό του κάνει μια πλήρη απόδειξη. Όταν ρωτήθηκε για το πώς σκέφτηκε λέει χαρακτηριστικά «μόλις δω μεμονωμένα σημεία, κατευθείαν συνεχής και μετά με τον ορισμό θα πήγαινα», επίσης συμπληρώνει «δε κάνω γράφημα, ξέρω ότι στα μεμονωμένα σημεία θα είναι συνεχής και η απόδειξη είναι πολύ στάνταρ». Ελέγχει τη συνέχεια πάντα σε όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο παρακάτω διάλογος.

Εγώ: Γιατί το πας με τον ορισμό του λυκείου και δε λες συνεχής ως σταθερή;

Σωτήρης: Φαντάζομαι ότι δεν κολλάω, δεν έχω κάτι στάνταρ ότι δηλαδή η σταθερή θα είναι έτσι, όλα με ορισμό τα περνάω και αφού είναι ίσα είναι συνεχής (εφαρμόζει τον ορισμό του λυκείου).

Έπειτα του ζήτησα να σχολιάσει τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & x\ ρητός \\ -1, & x\ άρρητος \end{cases}$ για την οποία λέει: «Δεν υπάρχει το όριο γιατί μπορούμε να βρούμε δύο ακολουθίες που η μία θα τείνει στο 1 και η άλλη στο -1 οποιοδήποτε και αν είναι το όριο. Άρα αφού δεν υπάρχει το όριο και όλα είναι σημεία συσσώρευσης δεν μπορεί να είναι συνεχής.» (εδώ κάνει λάθος καθώς δεν υπάρχουν σημεία συσσώρευσης). Θεωρεί ότι ο ε-δ ορισμός έχει νόημα να χρησιμοποιείται μόνο στα μεμονωμένα σημεία, μάλιστα όπως λέει «η ισοδυναμία σε αυτό βοηθά να κάνει πιο εύκολα κάποια πράγματα».

Δεν πιστεύει ότι υπάρχει κάτι που τον δυσκολεύει για την έννοια από τα μαθητικά χρόνια έως τώρα, ίσως ο ορισμός ε-δ όταν τον είδε για πρώτη φορά μέχρι όπως λέει « να το βάλεις σε κάποια τάξη στο μυαλό σου». Σκέφτηκε τον ορισμό «σαν περιοχές» για να τον καταλάβει. Έχει έντονη ενασχόληση με τα μαθηματικά και διαβάζει και άλλα συγγράμματα εκτός αυτών που δίνονται στα μαθήματα. Θεωρεί ότι η καθημερινή χρήση της έννοιας δημιουργεί αντιφάσεις και αποτελεί εμπόδια για τη σωστή κατανόηση της έννοιας. Ελέγχει τη συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού γιατί θυμάται πως ήταν κάτι που το τόνιζε ιδιαιτέρως ο καθηγητής που είχε στο σχολείο. Όταν του δίνεται ένα γράφημα λέει «όταν βλέπω το συνεχές μέρος το περνάω γρήγορα αλλά σίγουρα αν υπήρχε κάποια ανωμαλία παραπέρα θα το έβλεπα, κοιτώ πρώτα όλη συνολικά και μετά εκεί που μπορεί να υπάρξει κάποια…»., «πάντα λίγο πολύ με εικόνες θα σκέφτεσαι αλλά φιλτράρεται σε μεγάλο βαθμό από τον ορισμό ή οτιδήποτε τυπικό μαθηματικό».

Σχολιασμός: Ο Σωτήρης ανήκει στο υψηλότερο επίπεδο κατανόησης. Προσεγγίζει τις περισσότερες φορές όπως και ο ίδιος μονολογεί τα πράγματα μέσα από τον ορισμό της έννοιας έχοντας μία καθαρά τυπική αφαίρεση (σχήμα 2 Vinner). Είναι σε θέση να αναπτύξει δύσκολες στρατηγικές καθώς έχει μία πολύ γερή βάση κατανόησης της έννοιας της συνέχειας και των ιδιοτήτων της. Μια σημαντική διαφορά σε σχέση με τους υπόλοιπους είναι ότι δεν κάνει μόνο ανάκληση πραγμάτων από τη βάση δεδομένων αλλά έχει και την ανάγκη να αποδείξει τον ισχυρισμό του κάθε φορά, δημιουργώντας μία απόλυτα αυστηρή απόδειξη. Μία επιπλέον διαφορά είναι πως έχει την ανάγκη να χαρακτηρίσει την συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού της και όχι μόνο τοπικά στα σημεία αλλαγής του τύπου της συνάρτησης. Προσεγγίζει περισσότερο φορμαλιστικά τα πράγματα καθώς έχει την ικανότητα να έχει την εποπτεία των πραγμάτων αλλά δε τη θεωρεί απαραίτητη (όπως ομολογεί), έχει δημιουργήσει ένα ενοποιημένο αντικείμενο μέσα στο οποίο σχέσεις, ιδιότητες και αναπαραστάσεις είναι τμήματα αυτού, έχει δημιουργήσει μια κλάση συνεχών συναρτήσεων η οποία ενοποιεί όλα τα χαρακτηριστικά που έχει συναντήσει για τη συνέχεια. Είναι δεδομένο πως έχει κατακτήσει την έννοια της συνέχειας στον αξιωματικό κόσμο (τρίτος κόσμος Tall). Φυσικά αυτό δεν σημαίνει ότι οι υπόλοιποι κόσμοι δεν υπάρχουν, απλώς ο φοιτητής έχει τον πλήρη έλεγχό τους.

5.Συζήτηση-Συμπεράσματα

5.1 Οι συχνότερες παρανοήσεις σχετικά με την έννοια της συνέχειας

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα εξετάζει τις πιο συχνές παρανοήσεις των φοιτητών σχετικά με την έννοια της συνέχειας. Οι παρανοήσεις προέκυψαν από όλη την έκταση του ερωτηματολογίου αλλά και κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων.

Αρχικά βλέπουμε πως αρκετοί φοιτητές παρουσιάζουν σύγχυση ανάμεσα στην έννοια της συνεκτικότητας και αυτή της συνέχειας. Η συγκεκριμένη αντίληψη ενισχύεται από κάποιες αυθόρμητες αντιλήψεις οι οποίες προέρχονται από την χρήση της καθημερινής γλώσσας με φράσεις όπως «έβρεχε συνεχώς όλη μέρα» ή «η σιδηροδρομική γραμμή είναι συνεχώς ενωμένη». Μάλιστα αρκετοί φοιτητές παρουσιάζουν μια απλή ενόραση για την έννοια μιλώντας για γραφική παράσταση η οποία είναι «μονοκόμματη» ή «σχεδιάζεται χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι». Η συγκεκριμένη αντίληψη είναι έντονη και φαίνεται να επιβεβαιώνει αντίστοιχες έρευνες του παρελθόντος (Tall and Vinner 1981, Núñez et al. 1999). Οι φοιτητές με τη συγκεκριμένη παρανόηση χωρίζονται σε δύο κατηγορίες αυτούς που αντιλαμβάνονταν τη γραμμή ως στατική και αυτούς που την έβλεπαν ως προϊόν κίνησης όπως στην έρευνα των Tall and Vinner (1981).

Για πολλούς θεωρείται αυτονόητο πως μια συνάρτηση είναι ασυνεχής όταν παρουσιάζει άλματα, οπές, γωνίες ή διαλείμματα. Βλέπουμε η ασυνέχεια να προσεγγίζεται με πολλαπλούς τρόπους όπως συνέβη και σε άλλες παρόμοιες μελέτες (Nair 2010, Duru et al. 2010, Tall and Vinner 1981).

Δεν έλειψαν οι σωστές απαντήσεις οι οποίες όμως βασίζονταν σε λάθος αιτιολόγηση. Αυτό συνέβη σε αρκετές περιπτώσεις όταν δόθηκε μία συνάρτηση η οποία είναι ασυνεχής σε όλο το R η οποία ήταν παρόμοια με την γνωστή συνάρτηση του Dirichlet. Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι από αυτές που δυσκόλεψε περισσότερο τους φοιτητές. Ορισμένες φορές, παρατηρείται το γεγονός οι φοιτητές να απαντούν σωστά, αλλά το σκεπτικό που ακολούθησαν να είναι λάθος, ή παρουσιάζεται ακόμη και πλήρης αδυναμία αιτιολόγησης της απάντησής τους όπως και σε έρευνα των Tall και Vinner (1981).

Κάποιοι άλλοι φοιτητές όταν τους δόθηκε κάποια δίκλαδη συνάρτηση έλεγξαν μόνο τα πλευρικά όρια στο σημείο αλλαγής του τύπου και δεν κοίταξαν αν αυτά είναι ίσα με την τιμή της συνάρτησης, ένα αποτέλεσμα που επιβεβαιώνει την έρευνα του (Nair 2010) στην οποία οι φοιτητές θεωρούν πως όταν τα πλευρικά όρια είναι ίσα η συνάρτηση είναι πάντα συνεχής σε εκείνο το σημείο, παρ’ ότι όταν τους ζητείται να δώσουν τον ορισμό του λυκείου δίνουν το σωστό. Επιπλέον η παρούσα έρευνα έδειξε πως ακόμα και αν οι φοιτητές κάνουν σωστό έλεγχο της συνέχειας τοπικά στο σημείο αλλαγής τύπου ελάχιστοι αισθάνονται την ανάγκη να την χαρακτηρίσουν ως προς την συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Οι μόνοι φοιτητές που δεν παρέλειψαν να χαρακτηρίσουν τη συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού, ακόμα και όταν ήταν προφανές, ήταν αυτοί που είχαν την υψηλότερη επίδοση σε όλο το ερωτηματολόγιο.

Όταν οι φοιτητές έχουν πρόβλημα στην κατανόηση της έννοιας του ορίου τότε αυτό έχει σημαντικές επιπτώσεις και στην εικόνα για την έννοια της συνέχειας (Jayakody 2013 Bezuidenhout 2001, Williams, 1991), όμως στη συγκεκριμένη έρευνα φάνηκε , έστω διαδικαστικά, οι φοιτητές να μην δυσκολεύονται κατά το χειρισμό τους στον υπολογισμό των ορίων και κατ' επέκταση αυτό δεν είχε αρνητικό αντίκτυπο στον υπολογισμό της συνέχειας.

Από την άλλη δεν λείπει η παρανόηση της σύνδεσης των ορίων με τη συνέχεια. Ορισμένοι φοιτητές χαρακτήρισαν ασυνεχής κάποια συνάρτηση λόγω διαφορετικών πλευρικών ορίων ενώ εκείνη δεν ορίζονταν σε εκείνο το σημείο άρα δεν έπρεπε να ελεγχθεί καν το όριο, όπως ισχυρίζεται και ο Williams (1991) κάποιοι φοιτητές θεωρούν ότι η χρήση του ορίου είναι κατάλληλη μόνο για την ύπαρξη ασυνέχειας. Οι συχνές ασκήσεις που δίνονται με δίκλαδες συναρτήσεις οδηγούν τους μαθητές κάποιες φορές στο να ελέγχουν τα πλευρικά όρια ακόμα και αν η συνάρτηση δεν ορίζεται σε ένα σημείο. Είναι εμφανές πως οι φοιτητές έχουν την ανάγκη να μιλήσουν πάντα για το σημείο αλλαγής του τύπου της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, ένα μεγάλος μέρος των φοιτητών ακόμα και αν χαρακτήρισε σωστά ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση είχε την ανάγκη να κάνει αναφορά και στο μηδέν παρ' ότι δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Η συγκεκριμένη ανάγκη καλλιεργείται είτε λόγω της πληθώρας ασκήσεων με δίκλαδες συναρτήσεις είτε λόγω της υψηλής επικινδυνότητας για ασυνέχεια στα σημεία αλλαγής του τύπου κάποιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου.

Ένα μικρό μέρος των φοιτητών χαρακτήρισε συνεχή κάποια συνάρτηση επειδή σε κάποιο σημείο υπήρχε το όριό της. Μια παρανόηση που σχετίζεται με τον ορισμό του λυκείου όμως συναντάται ακόμα και σε πρωτοετείς φοιτητές είναι πως το όριο της συνάρτησης και η τιμή της συνάρτησης είναι πανομοιότυπα μαθηματικά αντικείμενα (Bezuidenhout 2001, Jordaan 2009). Είναι πιθανό η συγκεκριμένη αντίληψη να είναι μία παρανόηση πάνω στη φράση «αν σε μία συνάρτηση σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της δεν υπάρχει το όριο τότε αυτή είναι ασυνεχής» η οποία χρησιμοποιείται για τη λύση πληθώρας ασκήσεων στα σχολικά χρόνια.

Ένα, επίσης, μικρό μέρος των φοιτητών, παρ' ότι το ερωτηματολόγιο δεν σχεδιάστηκε προς αυτήν την κατεύθυνση, προσπάθησε να συνδέσει την συνέχεια με την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης. Για παράδειγμα υπήρχε απάντηση φοιτητή που χρησιμοποίησε τη διαφορισιμότητα ως επιχείρημα για την ύπαρξη της συνέχειας κάτι που έχει συμβεί και σε άλλες έρευνες (Tall και Vinner 1981, Bezuidenhout 2001, Baker et al. 2000).

Επιπλέον, μία ακόμη παρανόηση είναι η σύγχυση ανάμεσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και στη συνέχεια. Ένα μέρος των φοιτητών θεωρούν ότι αν μια συνάρτηση ορίζεται σε ένα σημείο είναι και συνεχής υποχρεωτικά, αντίστοιχα, λοιπόν, αν μια συνάρτηση δεν ορίζεται είναι ασυνεχής σε εκείνο το σημείο. Παρόμοια ευρήματα έχουν βρεθεί και σε άλλες έρευνες όπως του Bezuidenhout (2001) στην οποία φαίνεται να μην αντιλαμβάνονται την συνέχεια ως μια έννοια η οποία χαρακτηρίζει μια συνάρτηση αλλά εστιάζουν στον υπολογισμό της τιμής μιας συνάρτησης σε ένα σημείο ή όταν δεν ορίζεται την χαρακτηρίζουν ως ασυνεχή όπως στην έρευνα των Duru et al. (2010). Είναι αξιοσημείωτο ότι η συγκεκριμένη αντίληψη στην παρούσα έρευνα επικρατεί για την ύπαρξη ασυνέχειας, π.χ. δεν ορίζεται στο μηδέν άρα ασυνεχής κάτι που φαίνεται να συμβαίνει γιατί μία συνάρτηση εκεί που δεν ορίζεται διακόπτεται και το γράφημά της. Από την άλλη στη συγκεκριμένη έρευνα δεν επιβεβαιώνεται σε μεγάλο βαθμό η έρευνα του Nair (2010) που ισχυρίζεται ότι ορισμένοι φοιτητές θεωρούν ότι αν μια συνάρτηση έχει για πεδίο ορισμού όλο το R τότε είναι πάντα συνεχής καθώς σε σχετική ερώτηση η συντριπτική πλειοψηφία απάντησε πως η συγκεκριμένη πρόταση είναι λανθασμένη.

5.2 Ο βαθμός κατανόησης του ορισμού του πανεπιστημίου από τους φοιτητές.

Είναι χαρακτηριστικό ότι η γνώση του ορισμού που διδάσκεται στο πανεπιστήμιο δεν συνεπάγεται και την βαθύτερη κατανόησή του. Σχεδόν όλοι οι φοιτητές αδυνατούσαν να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό για να ελέγξουν την συνέχεια της συνάρτησης η οποία αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Σύμφωνα με τον Vinner (1991) αν και οι φοιτητές έχουν σωστή γνώση του ορισμού, αποφεύγουν την χρήση του και καταφεύγουν στην εικόνα έννοιας που έχουν δημιουργήσει. Όταν ζητήθηκε στη συνέντευξη να αξιοποιηθεί ο ορισμός οι φοιτητές αδυνατούσαν στις περισσότερες των περιπτώσεων κάτι που δείχνει ότι καταφεύγουν στην εικόνα έννοιας από την αδυναμία της βαθύτερης εννοιολογικής κατανόησης του ορισμού.

Μάλιστα καθώς οι περισσότεροι φοιτητές δεν χρησιμοποιούν συχνά τον ε-δ ορισμό όταν ελέγχουν την συνέχεια μιας συνάρτησης, αυτό έχει ως αποτέλεσμα κάποιες παρανοήσεις που υπάρχουν να αναπτύσσονται περισσότερο, αντίθετα ο ορισμός του λυκείου ο οποίος είναι πιο απλός ως προς τις διαδικασίες χρησιμοποιείται με ιδιαίτερη ευκολία. Τα ευρήματα επιβεβαιώνονται από τον (Jayakody 2013) που ισχυρίζεται πως κατά τον έλεγχο της συνέχειας γίνεται μία διαδικαστική αντιμετώπιση και δεν δίνεται έμφαση στον ορισμό, δηλαδή στις ασκήσεις «ρουτίνας» οι μαθητές αναπτύσσουν αλγοριθμικές διαδικασίες και αυτές αποτελούν κάποιο μέρος της εικόνας της έννοιας. Προτείνεται λοιπόν να δίνονται και ερωτήματα τα οποία θα φέρουν στην επιφάνεια τρόπους αντιμετώπισης που θα ενισχύσουν την εννοιολογική κατανόηση του ορισμού του πανεπιστημίου.

Φαίνεται οι φοιτητές που έχουν την καλύτερη επίδοση σε όλο το ερωτηματολόγιο να είναι εκείνοι που αξιοποιούν περισσότερο τον ορισμό του πανεπιστημίου και τίποτε το περιττό που υπάρχει στην εικόνα της έννοιας (σχήμα 6 Vinner) κάτι που επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό του (Jayakody 2013). Φυσικά αυτό δεν σημαίνει ότι ο ορισμός γίνεται κατανοητός από τον φοιτητή μόνο μέσα από την παράθεσή του αλλά αντιθέτως μέσα από το συνδυασμό του με οπτικές αναπαραστάσεις, αναλυτικά παραδείγματα για πολλές περιπτώσεις συναρτήσεων. Η εικόνα έννοιας είναι αυτή που θα βοηθήσει και θα έχει ένα επικουρικό ρόλο στην εννοιολογική κατανόηση του ορισμού, χαρακτηριστικά στις συνεντεύξεις αρκετοί φοιτητές θεώρησαν ότι στα πανεπιστημιακά τους μαθήματα δεν είχαν δει τον απαιτούμενο αριθμό παραδειγμάτων με αποτέλεσμα να προσεγγίζουν τον ορισμό σαν μια διαδικασία, να έχουν ελλιπή εικόνα για την έννοια και να αποτυγχάνουν καθώς ο ορισμός του πανεπιστημίου αποτελείται από σύνθετες διαδικασίες που απαιτούν και βαθύτερη εννοιολογική κατανόησης της έννοιας.

Είναι αξιοσημείωτο πως όταν δόθηκε μία συνάρτηση με ιδιαίτερες απαιτήσεις ως προς το χαρακτηρισμό της συνέχειας

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\ ρητός \\ -1, & x\ άρρητος \end{cases}$$

οι φοιτητές που έδειξαν να έχουν γνώση του ε-δ ορισμού χρησιμοποίησαν με επιτυχία και έναν άλλο ορισμό της συνέχειας, αυτόν του Χάινε (αρχή της μεταφοράς) που συναντάμε σε μεγαλύτερα έτη σπουδών, βέβαια ορισμένοι από αυτούς έκαναν μια απλή αναφορά του συγκεκριμένου ορισμού. Δεν έλειψαν και οι απαντήσεις που αναφέρονταν στην πυκνότητα των ρητών, μία προϋπόθεση ώστε να υπάρχει μια ακολουθία ρητών και μία αρρήτων που να τείνει στην ίδια τιμή x_o, όμως για να είναι η απόδειξη στο συγκεκριμένο ερώτημα πλήρης χρειάζεται και η αρχή της μεταφοράς την οποία οι συγκεκριμένοι φοιτητές δεν χρησιμοποίησαν.

Οι φοιτητές δεν δυσκολεύονται καθόλου στη διατύπωση των ορισμών καθώς και στην άρνηση αυτού του πανεπιστημίου. Μερικοί από τους ελάχιστους που δυσκολεύτηκαν είχαν ξεχάσει τον ορισμό του λυκείου. Όμως το ίδιο λίγοι ήταν και αυτοί που απάντησαν σωστά στο αν οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Οι περισσότεροι αντιμετωπίζουν τον ορισμό του πανεπιστημίου ως μία «αυστηροποίηση» σε αυτόν του λυκείου, άλλοι θεωρούν πως δεν είναι ισοδύναμοι αλλά για λάθος λόγο. Παρά την απουσία δυσκολιών στην παράθεση των ορισμών τίθεται σε αμφιβολία το κατά πόσο έχει υλοποιηθεί η βαθύτερη κατανόηση αυτών από τους φοιτητές.

Ο ορισμός της συνέχειας είναι ιδιαίτερα απαιτητικός καθώς δε βοηθά στο σχηματισμό της εικόνας της έννοιας. Αυτό συνεπάγεται ότι ακόμα και η γνώση του δεν είναι αρκετή εν αντιθέσει ίσως με άλλες έννοιες των μαθηματικών αλλά απαιτείται βαθύτατη κατανόηση ώστε οι φοιτητές να είναι σε θέση να τον εφαρμόσουν όταν αυτό τους ζητείται. Τις δυσκολίες στην κατανόηση τους ειδικά για τον ορισμό του πανεπιστημίου υπερτονίζει το ερώτημα απόδειξης της συνέχειας σε ένα συγκεκριμένο σημείο με αποκλειστική χρήση του ε-δ ορισμού. Το συγκεκριμένο ερώτημα υποχρεώνει τους φοιτητές να χρησιμοποιήσουν το κελί του ορισμού της έννοιας. Οι περισσότεροι έδωσαν σωστά τον ορισμό όμως δεν ήταν σε θέση να τον χρησιμοποιήσουν. Φυσικά η έννοια της συνέχειας είναι τόσο κεντρική στα μαθηματικά που οι φοιτητές έρχονται συνεχώς αντιμέτωποι με τέτοιου είδους ερωτήματα, παρ’ όλα αυτά η επίδοση των φοιτητών ήταν απογοητευτική. Οι συντριπτική πλειοψηφία δεν μπόρεσε να απαντήσει σωστά. Πολλοί δεν απάντησαν καν, άλλοι έκαναν «ψευδοχρήση» του ορισμού δείχνοντας ότι δεν έχουν νοηματοδοτήσει το ε και το δ και ορισμένοι (γνωρίζουμε πως το δ μπορεί να εξαρτάται από το ε και το x_0) έδωσαν απαντήσεις στις οποίες το δ εξαρτάται από το x. Παρατηρούμε ότι ενώ ζητείται η πορεία του σχήματος 4 του Vinner , δηλαδή καθαρά τυπική αφαίρεση με χρήση του ορισμού, υπάρχει πλήρης αδυναμία αυτής της πορείας για τους φοιτητές. Φυσικά αν η πορεία ήταν η ίδια αλλά με χρήση του ορισμού του λυκείου ο οποίος είναι πιο εύκολος στο χειρισμό του θα είχαμε απόλυτη επιτυχία. Σε απλές ασκήσεις λοιπόν οι φοιτητές χρησιμοποιούν τον ορισμό έννοιας του λυκείου, όμως σε δυσκολότερα θέματα όταν πρέπει να χρησιμοποιήσουν τον ορισμό του πανεπιστημίου δυσκολεύονται με αποτέλεσμα να βασίζονται στην εικόνα της έννοιας. Συνοψίζοντας σύμφωνα με τον Vinner, (1991), ο τρόπος σκέψης που έχει συνηθίσει ο μαθητής κυριαρχεί και έτσι δυσκολεύεται στη χρήση του τυπικού ορισμού. Στις περισσότερες περιπτώσεις στην πράξη, η αναφορά μόνο στην κυψέλη της εικόνας της έννοιας οδηγεί τον φοιτητή στην επιτυχία. Εδώ όμως δεν έχει επιτευχθεί η εννοιολογική κατανόηση του ορισμού του πανεπιστημίου με αποτέλεσμα η γνώση του να είναι επιδερμική για τους περισσότερους φοιτητές.

5.3 Οι διαφορές που παρουσιάζονται ανάμεσα σε διαφορετικά επίπεδα αναπαράστασης κατά τον έλεγχο της συνέχειας

Ορισμένοι φοιτητές όταν τους δόθηκε το γράφημα ορισμένων συναρτήσεων είχαν την ανάγκη να γράψουν με βάση αυτό τον αναλυτικό τύπο της συνάρτησης και έπειτα να κάνουν τον έλεγχο της συνέχειας. Αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται και στην έρευνα των Duru, A.et al. (2010) στην οποία οι φοιτητές φαίνεται να προτιμούν την αλγεβρική αναπαράσταση της συνάρτησης και να φέρνουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τη γραφική αναπαράσταση αυτής κατά τον έλεγχο της συνέχειας. Παρατηρήσαμε λοιπόν μία αδυναμία των φοιτητών να κάνουν χειρισμούς στον ενσαρκωμένο κόσμο.

Τα ποσοστά επιτυχίας ήταν μεγαλύτερα κατά τον χειρισμό των αναλυτικών τύπων των συναρτήσεων σε σχέση με τις γραφικές παραστάσεις, κάτι που φάνηκε και στην έρευνα των Karatas et al. (2011). Είναι σημαντικό λοιπόν η διδασκαλία της συνέχειας να εμπλουτιστεί με περισσότερες γραφικές παραστάσεις.

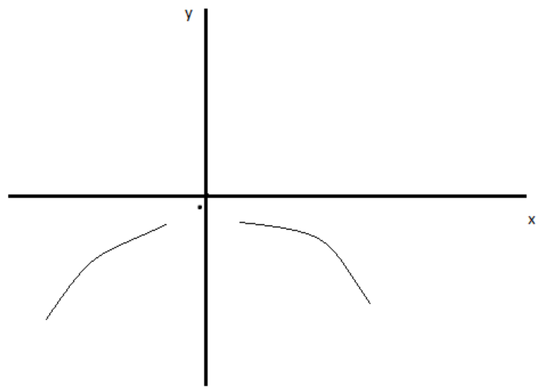
Είδαμε στις περισσότερες απαντήσεις διαφορές στο τρόπο χειρισμού των συναρτήσεων ανάλογα με το επίπεδο αναπαράστασης που δίνονταν, μάλιστα μέσα από τις συνεντεύξεις φάνηκε να μην υπάρχει σε πολλούς κάποιος συσχετισμός ανάμεσα στις γραφικές αναπαραστάσεις και τον αναλυτικό τύπο στον τρόπο που επιχειρηματολογούν όπως και στις έρευνες των Ferrini-Mundy και Graham (1994), Lauten et al. (1994). Η συγκεκριμένη έρευνα όμως έδειξε ότι πέρα από τις διαφορές στον τρόπο χειρισμού παρουσιάζονται διαφορές σε κάποιους φοιτητές ακόμα και ως προς το χαρακτηρισμό της συνέχειας. Χαρακτηριστικά όταν δόθηκε η $f(x)=x^3$ με $x\epsilon N$ με βάση το γράφημα χαρακτηρίστηκε ασυνεχής από ορισμένους φοιτητές ενώ όταν δόθηκε ο αναλυτικό τύπος της χαρακτηρίστηκε συνεχής ως πολυωνυμική.

Στη συγκεκριμένη έρευνα δόθηκε το γράφημα μίας δίκλαδης συνάρτησης και ο αναλυτικός τύπος μίας συνάρτησης η οποία είχε τα ίδια χαρακτηριστικά με το γράφημα, για μία συνεχή αλλά και μία μη συνεχή συνάρτηση. Στην περίπτωση της μη συνεχούς συνάρτησης παρουσιάστηκαν κάποιες αντιφάσεις ως προς τις απαντήσεις για το κάθε επίπεδο αναπαράστασης, στην περίπτωση της συνεχούς συνάρτησης οι αντιφάσεις δεν ήταν οι ίδιες στο πλήθος καθώς μειώθηκαν σε αισθητό βαθμό. Φαίνεται λοιπόν πέρα από το είδος της αναπαράστασης το πλήθος των αντιφάσεων ανάμεσα στα δύο είδη αναπαράστασης να επηρεάζεται από το αν η συνάρτηση είναι συνεχής.

Όπως έχει υποστηρίξει ο Cornu (1991) το επίπεδο αναπαράστασης που χρησιμοποιείται φαίνεται να έχει καταλυτικό ρόλο στον τρόπο ερμηνείας της συνέχειας. Η χρήση της έννοιας στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής δημιουργεί παρανοήσεις όταν δίνεται το γράφημα μιας συνάρτησης. Εκφράσεις όπως «σχεδιάζεται χωρίς να σηκώνουμε το μολύβι» που χρησιμοποίησε κάποιος συμμετέχοντας της έρευνας ο οποίος είναι παράλληλα καθηγητής μαθηματικών συντηρούν αυτή τη σύγχυση.

Σε συγκεκριμένα ερωτήματα παρατηρήθηκε το μοτίβο, όταν δίνονταν το γράφημα μία δίκλαδης συνάρτησης ορισμένοι φοιτητές πήγαν στο σημείο αλλαγής του τύπου και υπολόγισαν τα πλευρικά όρια χωρίς να ξέρουν τις ακριβείς τιμές, ενώ όταν δόθηκε ο αντίστοιχος αναλυτικός τύπος πάλι χρησιμοποίησαν τον ορισμό του λυκείου. Αυτό ίσως οφείλεται στο ότι οι φοιτητές είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τις διαδικασίες (άλλη μία προτίμηση της συμβολικής γραφής Duru, A.et al. (2010)) και στο ότι μία λύση η οποία βασίζεται αρκετά στο γράφημα θεωρούν ότι δεν έχει την ίδια αυστηρότητα με άλλες. Ίσως αυτό να οφείλεται όπως λένε οι Smith et al. (1993) ίσως και στην πεποίθηση κάποιων ότι η διαίσθηση πρέπει να πάψει να υπάρχει πλήρως ώστε να εξαλειφθεί η ασάφεια.

Όταν δόθηκε το γράφημα μια συνάρτησης με δύο κλάδους και ένα μεμονωμένο σημείο κάποιοι από τους φοιτητές είχαν την ανάγκη να ασχοληθούν με το μεμονωμένο σημείο κάτι το οποίο όμως δεν συνέβη όταν τους δόθηκε ο αντίστοιχος αναλυτικός τύπος. Μία άλλη διαφορά παρουσιάστηκε όταν τους δόθηκε το συγκεκριμένο γράφημα καθώς λόγω της απόστασης των δύο κλάδων δεν είχαν την



ανάγκη να ασχοληθούν με τον ορισμό του λυκείου και να εμπλέξουν τα όρια. Γενικότερα όμως , όταν δόθηκε κάποιος αντίστοιχος αναλυτικός τύπος,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x\,| > 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ένα μικρό μέρος των φοιτητών πήρε τις δύο περιπτώσεις για το απόλυτο και υπολόγισε τα πλευρικά όρια στην προσπάθειά του να εφαρμόσει τον ορισμό του λυκείου. Για ακόμη μία φορά βλέπουμε διαφορές στον τρόπο χειρισμού ανάλογα με το επίπεδο αναπαράστασης Ferrini-Mundy και Graham (1994), Lauten et al. (1994). Συγκεκριμένα τα ποσοστά αποτυχίας όταν δόθηκε ο αναλυτικός τύπος μειώθηκαν στο μισό. Ένας επιπλέον λόγος που μπορεί να συμβαίνει αυτό είναι ότι πολλές φορές ένα γράφημα «εγκλωβίζει» τον φοιτητή στην αντίληψη ότι πρέπει να είναι συνεκτικό. Είναι συχνή η χρήση οπτικών ερεθισμάτων κατά τον έλεγχο της συνέχειας και η επιχειρηματολογία με εκφράσεις όπως «μονοκόμματο γράφημα», «λείο», «απουσία απότομων στροφών», «απουσία αλμάτων» κ.α. όπως φάνηκε και στην έρευνα των Tall and Vinner (1981). Φαίνεται, λοιπόν, ότι η συνέχεια των πραγματικών συναρτήσεων τείνει να αντιμετωπίζεται γεωμετρικά (Cottrill et al., 1996).

Σύμφωνα με έρευνα του Nair (2010) ορισμένοι φοιτητές θεωρούν ότι αν μια συνάρτηση έχει για πεδίο ορισμού όλο το R τότε είναι πάντα συνεχής. Παρ' όλα αυτά όταν τους δίνεται το γράφημα μίας συνάρτησης που ισχύει κάτι τέτοιο αλλά σε ένα σημείο το γράφημα διακόπτεται και εκεί η συνάρτηση έχει ένα μεμονωμένο σημείο την χαρακτηρίζουν με ευκολία ως ασυνεχή. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα παρουσιάστηκε και στην παρούσα έρευνα, εικάζουμε πως στο άκουσμα της φράσης μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού όλο το R ο φοιτητής ανασύρει στη μνήμη του ένα συνεκτικό γράφημα, όταν όμως του δοθεί ένα γράφημα το οποίο έχει το συγκεκριμένο πεδίο ορισμού αλλά έχει και ένα μεμονωμένο σημείο αυτό τον φέρνει σε σύγκρουση με τη συνεκτική αντίληψη που έχει.

Μεγάλη σύγχυση παρουσίασαν οι φοιτητές όταν τους δόθηκε το γράφημα κάποιας συνάρτησης με μεμονωμένα σημεία. Ορισμένοι ισχυρίστηκαν πως δεν έχει νόημα η μελέτη της συνέχειας. Κάτι τέτοιο οφείλεται στην αδυναμία χρήσης του ορισμού του πανεπιστημίου, αφού προσέγγισαν το συγκεκριμένο θέμα μέσω της χρήσης του ορισμού του λυκείου αδυνατώντας όμως να τον εφαρμόσουν καθώς έλλειπαν τα σημεία συσσώρευσης. Μία άλλη ομάδα φοιτητών χαρακτήρισε ως ασυνεχή την συνάρτηση διότι έχει μεμονωμένα σημεία, ενώ κάποιοι προσπάθησαν λανθασμένα να εφαρμόσουν τον ορισμό του λυκείου. Εντύπωση προκαλεί πως ακόμη και αυτοί που την χαρακτήρισαν ως συνεχή διότι αποτελείται από μεμονωμένα σημεία αδυνατούσαν στην συνέντευξη να αποδείξουν τον ισχυρισμό τους.

Στο σημείο αυτό παρ' ότι αρχικά δεν αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης προέκυψε μία μεγάλη κατηγορία φοιτητών. Στη συγκεκριμένη κατηγορία οι φοιτητές χαρακτήρισαν τη συνέχεια κάνοντας επίκληση σε φράσεις όπως: «μεμονωμένα σημεία άρα συνεχής», «συνεχής ως πολυωνυμική», «συνεχής ως σταθερή συνάρτηση», «ασυνεχής από πυκνότητα ρητών αρρήτων», «το γράφημα δεν διακόπτεται στο πεδίο ορισμού της» αδιαφορώντας για την απόδειξη του ισχυρισμού τους και πολλές φορές μη μπορώντας ,όταν τους ζητήθηκε κατά τη συνέντευξη, να τον αποδείξουν κιόλας. Σε έρευνα των Tall and Vinner (1981), ορισμένοι χαρακτηρίζουν μια συνάρτηση ως συνεχή απλώς επειδή σε αυτή αντιστοιχεί μια εξίσωση. Επιπλέον συναρτήσεις με πολλούς κλάδους τείνουν να θεωρούνται ασυνεχείς, με αποτέλεσμα συναρτήσεις ενός τύπου να θεωρούνται συνεχείς. Για παράδειγμα σε έρευνα των Tall και Vinner, (1981) όταν δίνονταν μόνο ο αλγεβρικός τύπος π.χ. υπερβολοειδής συνάρτηση, ακόμα κι αν το γράφημά τους διακόπτεται οι φοιτητές έτειναν να χαρακτηριστούν τη συνάρτηση ως συνεχή. Στην ίδια έρευνα βλέπουμε το γεγονός οι μαθητές να απαντούν σωστά, άλλοτε με το σκεπτικό που ακολούθησαν να είναι λάθος, και άλλοτε να παρουσιάζεται πλήρη αδυναμία αιτιολόγησης της απάντησής τους π.χ., μπορεί να αποφανθούν ότι η είναι συνεχής επειδή δίνεται από έναν μόνο τύπο.

Η αποκλειστική μελέτη πολυωνυμικών και εκθετικών συναρτήσεων οι οποίες είναι ομαλές και συνεχείς οδήγησε σε μια υπεργενίκευση για την συνέχεια. Όπως λέει χαρακτηριστικά στη συνέντευξή του ο φοιτητής-καθηγητής, δεν μπορώ να το αποδείξω αλλά είναι σαν να έχω κάποια βάση δεδομένων. Όπως βλέπουμε λοιπόν οι φοιτητές πολλές φορές «απαγκιστρώνονται» σε φράσεις κενού νοήματος τις οποίες συγκρατούν στη μνήμη σαν ένα οδηγό επιβίωσης για δύσκολες καταστάσεις. Έτσι για αυτούς πάντα μια συνάρτηση με μεμονωμένα σημεία θα είναι συνεχής όπως άκουσαν στο μάθημα μη μπορώντας όμως να αιτιολογήσουν, έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι φράσεις είναι σαν ένα μαύρο κουτί το οποίο κρύβει τις διαδικασίες και τις έννοιες που μπορεί να περιέχουν. Είναι καθήκον των διδασκόντων να κάνουν αυτό το κουτί διαφανές, καθώς είναι εξίσου σημαντικό με το να έχουμε μία βάση δεδομένων είναι να ξέρουμε και τις λειτουργίες και τις έννοιες που κρύβονται πίσω από αυτά τα δεδομένα.

5.4 Μη αποδεκτές αντιλήψεις (μία προσπάθεια κατηγοριοποίησης)

Θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε συγκεκριμένες κατηγορίες αντιλήψεων για τη συνέχεια σε μια προσπάθεια ομαδοποίησης των αποτελεσμάτων. Η μεγαλύτερη κατηγορία είναι η συνεκτική αντίληψη όπου μπορεί να διακριθεί σε τρεις τύπους.

Συνεκτική αντίληψη τύπου Α: το γράφημα δεν διακόπτεται άρα είναι συνεχές

Ο Α τύπος συνεκτικής αντίληψης μπορεί να χωριστεί σε δύο υποκατηγορίες

Α1: μπορούμε να την σχεδιάσουμε μονοκονδυλιά, ως εικόνα έχει κάποια δυναμική

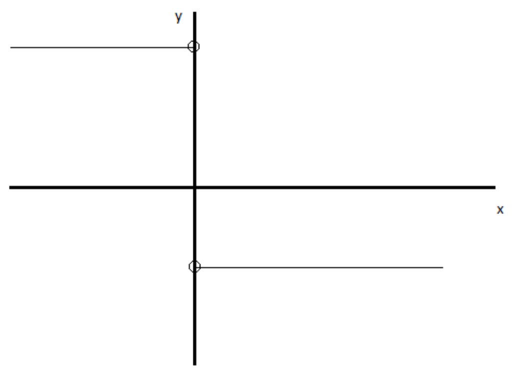
Α2: το γράφημα έχει οπές, ως εικόνα είναι στατική

Συνεκτική αντίληψη τύπου Β: μια συνάρτηση δεν ορίζεται κάπου άρα είναι ασυνεχής, για παράδειγμα κάποιοι φοιτητές είδαν ότι μια συνάρτηση δεν ορίζεται στο μηδέν άρα εκεί διακόπτεται. Η συγκεκριμένη αντίληψη, όπως προείπαμε, επικρατεί στις περιπτώσεις όπου οι φοιτητές ασχολήθηκαν με την ασυνέχεια μιας συνάρτησης.

Θα μπορούσαμε να την χωρίσουμε σε δύο υποκατηγορίες:

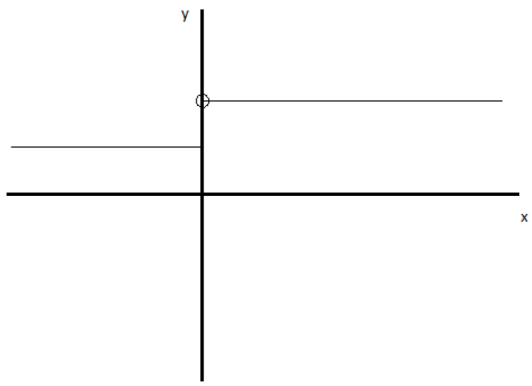
Β1: δεν ορίζεται άρα διακόπτεται σε αυτό το σημείο άρα ασυνεχής

π.χ.



Β2: παίρνει τιμές σε όλο το R άρα είναι συνεχής (παρ’ όλο που το γράφημα οπτικά διακόπτεται)

π.χ.



(η δεύτερη υποκατηγορία συναντάται αρκετά σπάνια)

Η συγκεκριμένη λανθασμένη αντίληψη μπορεί να οφείλεται σε δύο λόγους. Ένα μέρος των φοιτητών ακολουθεί τον επαγωγικό συλλογισμό, μια συνάρτηση δεν ορίζεται σε ένα σημείο άρα δεν παίρνει κάποια τιμή, επομένως διακόπτεται άρα είναι ασυνεχής (συνεκτική αντίληψη τύπου Β). Κάποιοι άλλοι φοιτητές παρουσιάζουν πλήρη σύγχυση ταυτίζοντας έννοιες όπως πεδίο ορισμού και συνέχεια με αποτέλεσμα όταν μια συνάρτηση δεν ορίζεται κάπου να θεωρείται ασυνεχής.

Συνεκτική αντίληψη τύπου Γ: Θεωρούν τη συνάρτηση ως ασυνεχή επειδή αποτελείται από μεμονωμένα σημεία, εδώ παρατηρούμε ο φοιτητής αναμένοντας για γράφημα μία γραμμή η οποία δεν διακόπτεται να χαρακτηρίζει ασυνεχή μία συνάρτηση όταν αυτή αποτελείται από ένα ή πολλά μεμονωμένα σημεία.

Ελλιπής γνώση (ή δυσκολία χρήσης) του ορισμού του λυκείου: η συγκεκριμένη παρανόηση έχει δύο υποκατηγορίες

Τα πλευρικά όρια διαφέρουν άρα είναι ασυνεχής (ενώ στο σημείο ελέγχου δεν ορίζεται η συνάρτηση).

Ή το όριο υπάρχει άρα είναι συνεχής.

Αποκλειστικά τοπική αντίληψη της έννοιας: Αρκετοί φοιτητές ενώ έλεγξαν σωστά την συνέχεια στο πιθανό σημείο ασυνέχειας παρέλειψαν να χαρακτηρίσουν τη συνάρτηση ως προς τη συνέχεια στο υπόλοιπο πεδίο ορισμού. Οι συγκεκριμένοι φοιτητές ίσως έχουν έντονες επιρροές από την έννοια του ορίου η οποία είναι καθαρά τοπική, επηρεασμένοι λοιπόν από αυτό δεν νοιώθουν την ανάγκη να επεκτείνουν τον έλεγχο σε όλα τα σημεία παρά μόνο στα σημεία επικινδυνότητας για ασυνέχεια. Μία διαφορετική ερμηνεία πως σε περιπτώσεις όπου η συνάρτηση εκτός των σημείων αλλαγής του πεδίου ορισμού είναι κάποια από αυτές που οι μαθητές ξέρουν ότι είναι πάντα συνεχής π.χ. πολυωνυμική θεωρούν περιττό να αναφερθούν στη συνέχεια.

Χρήση βάσης δεδομένων (αδυναμία απόδειξης ισχυρισμού): Συχνά οι φοιτητές όταν θέλουν να επιχειρηματολογήσουν για την συνέχεια μιας συνάρτησης ανατρέχουν σε μια βάση δεδομένων (πολυωνυμική, ρητή, μεμονωμένα σημεία, λογαριθμική, ημιτονοειδής, σταθερή κ.ά.) χαρακτηρίζοντας αυτόματα μια συνάρτηση ως συνεχή όταν ανήκει σε κάποια από τις παραπάνω κατηγορίες. Η έρευνα όμως έδειξε ότι αυτό δεν συνεπάγεται και κάποια ουσιαστική γνώση της έννοιας καθώς σε αρκετές των περιπτώσεων οι φοιτητές δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν τον ισχυρισμό τους. Βλέπουμε λοιπόν οι φοιτητές με το πέρασμα του χρόνου συγκρατούν κάποιες σημαντικές μαθηματικές προτάσεις, αυτές όμως έχουν χάσει το νόημα τους με αποτέλεσμα να πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να διερευνούμε πάντα αν μια φράση βασίζεται σε μία βαθύτερη γνώση.

Οι συγκεκριμένες λανθασμένες αντιλήψεις σε ορισμένους φοιτητές μπορεί να συνυπάρχουν.

6. Τα επίπεδα κατανόησης της έννοιας της συνέχειας

Έπειτα από τη προσεκτική μελέτη των αποτελεσμάτων και τη συσχέτισή τους με το θεωρητικό πλαίσιο προέκυψαν κάποια συγκεκριμένα επίπεδα κατανόησης της έννοιας.

Επίπεδο 0: Ο φοιτητής έχει ατελή εικόνα της έννοιας, είναι ακόμα στον ενσώματο κόσμο, δυσκολεύεται ακόμα και στις απλές διαδικασίες, εμφανίζει αρκετές από τις παρανοήσεις (συνέχεια και συνεκτικότητα το ίδιο, τοπική αντίληψη, μεμονωμένα σημεία ασυνεχής, αδυναμία χρήσης ε-δ διότι δεν ανήκει στον ενσώματο κόσμο) και γενικότερα ενσαρκώνει την έννοια.

Επίπεδο 1: Ο φοιτητής μόλις έχει εισέλθει στο διαδικασιο-εννοιολογικό κόσμο, έχει ακόμα κάποια επιρροή από τον ενσώματο κόσμο, παρουσιάζει διαφορά στην επίδοση του ανάλογα με το επίπεδο αναπαράστασης. Εμφανίζει τοπική αντίληψη για την έννοια και είναι σχετικά καλός στις διαδικαστικές ασκήσεις. Έχει γνώση του ορισμού του πανεπιστημίου αλλά πλήρη αδυναμία εφαρμογής του, αδυναμία ανάπτυξης νέων στρατηγικών, χρησιμοποίει στοιχεία της βάσης δεδομένων με απουσία αιτιολόγησης , διαχειρίζεται κάποια πράγματα του συμβολικού κόσμου με επιτυχία, δεν έχει όμως πλήρη συνείδηση των διαδικασιών και εννοιών.

Επίπεδο 2: Ο φοιτητής βρίσκεται στο κατώφλι του αξιωματικού κόσμου, δεν έχει έντονη επιρροή από τον ενσώματο κόσμο (π.χ. συνεχής =μονοκόμματη σχεδίαση), η τοπική του αντίληψη δεν είναι απαραίτητα έντονη, αξιοποιεί λιγότερο στοιχεία από τη βάση δεδομένων και μπορεί να αιτιολογήσει με μεγαλύτερη επιτυχία, κάνει ιδιαίτερα καλούς χειρισμούς σε απλές διαδικασίες, έχει άριστη γνώση των ορισμών αλλά παρουσιάζει αδυναμία στην εύρεση κατάλληλου δ σε σχέση με το ε, όπως και στην ανάπτυξη νέων στρατηγικών. Τα ποσοστά επιτυχίας ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις είναι παρόμοια, αντιλαμβάνεται πως δρα ο ορισμός του λυκείου άψογα, πως εμπλέκονται οι ιδιότητες και οι διάφορες αναπαραστάσεις, γενικά έχει συνείδηση των διαδικασιών και εννοιών και είναι σε θέση να τις δει ενοποιημένα, σκέπτεται σωστά για τα γραφήματα, αξιοποιεί όλες τις ιδιότητες πλήρως, γνωρίζει πως σχετίζονται μεταξύ τους τα διαφορετικά επίπεδα αναπαράστασης και όλα αυτά ενοποιημένα με αποτέλεσμα να διαχειρίζεται ισότιμα διαδικασίες και έννοιες άρα να ανήκει πλήρως στον 2ο κόσμο του Tall.

Επίπεδο 3: Ο φοιτητής δεν εμφανίζει τις γνωστές παρανοήσεις, δυσκολεύεται μόνο σε ιδιαιτέρως απαιτητικά θέματα π.χ. συνάρτηση Dirichlet, γνωρίζει και μπορεί να χειριστεί τον ε-δ ορισμό, δεν θεωρεί αναγκαία την εποπτεία αλλά προσεγγίζει τυπικά, αξιωματικά τα περισσότερα θέματα, συνδέει δράσεις, διαδικασίες και μετασχηματισμούς στο αντικείμενο της συνέχειας, έχει ολική αντίληψη της έννοιας και όταν κάνει ανάκληση από την βάση δεδομένων αυτή ακολουθείται με πλήρη αιτιολόγηση πάντα. Παρουσιάζει επιτυχία σε όλα τα επίπεδα αναπαράστασης, κάνει σχόλια μεταγνωστικού τύπου, μπορεί να αναπτύξει εύκολα νέες στρατηγικές και έχει δημιουργήσει ένα ενοποιημένο αντικείμενο μέσα στο οποίο σχέσεις, ιδιότητες και αναπαραστάσεις είναι τμήματα αυτού, έχει δημιουργήσει μια κλάση συνεχών συναρτήσεων η οποία ενοποιεί όλα τα χαρακτηριστικά που έχει συναντήσει για τη συνέχεια. Είναι δεδομένο πως έχει κατακτήσει την έννοια της συνέχειας στον αξιωματικό κόσμο.

Τα επίπεδα κατανόησης περιγράφουν τις γνώσεις και τις ικανότητες που έχει ένα άτομο σε κάθε επίπεδο αλλά και τον τρόπο προσέγγισης όταν προσπαθεί να αντιμετωπίσει κάποιο θέμα σχετικό με τη συνέχεια μίας συνάρτησης. Σε μερικές περιπτώσεις ένα άτομο ανάλογα με το τι αντιμετωπίζει μπορεί να εμφανίσει παρανοήσεις που ανήκουν και σε χαμηλότερο επίπεδο. Μαζί με την κατανόηση της έννοιας κάποιος φοιτητής ανεβαίνει και επίπεδο. Σε κάποιο επίπεδο αυτό που ήταν λανθάνον στο προηγούμενο μπορεί να γίνει εμφανές. Τα επίπεδα είναι αποτέλεσμα μιας διαδικασίας μάθησης η οποία οδηγεί το κάθε άτομο σε ανάλογη εξέλιξη.

Η αναγνώριση από τον καθηγητή του επιπέδου στο οποίο βρίσκεται ο κάθε φοιτητής προσφέρει ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούν να δημιουργηθούν οι κατάλληλες δραστηριότητες ώστε να γίνει η μετάβαση του κάθε φοιτητή στο επόμενο επίπεδο.

7. Βιβλιογραφία

Altiparmak, K.(2014) Impact of computer animations in cognitive learning differentiation. *International Journal of Mathematical Education in Sience and Technology, 45(8), 1146-1166.*

Baker B, Cooley LA, Trigueros M (2000). A calculus graphing schema. *J. Res. Math. Educ.*, 31(5): 557-578.

Basturk, S., Donmez, G. (2011). ‘ Mathematics Student Teachers’ Misconceptions on the Limit and Continuity Concepts’ *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education Vol. 5*, Issue 1, June 2011, pp. 225-249.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 487-500. doi: 10.1080/00207390010022590

Bridgers, L. (2006). Conceptions of continuity: An investigation of high school calculus. Teachers and their students. *Doctoral Dissertation*, Syracuse University

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 167-192. http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Duru, A., Köklü, Ö., & Jakubowski, E. (2010). Pre-service mathematics teachers’ conceptions about the relationship between continuity and differentiability of a function. *Scientific Research and Essays, 5*, 1519-1529.

Duval, R. The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), p. 1-16, 2002.

Ferrini-Mundy J, Graham KG (1994). Research in calculus learning: Understanding limits, derivatives, and integrals. In E. Dubinsky and J. Kaput (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics: Preliminary Analyses and Results*. Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 31-45.

Gray, E. & Tall, D.: (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education, Vol 26, σελ 115–141.*

Gray, E. & Tall, D.:(2001) 'Relationships between embodied objects and symbol-ic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics' *Proceedings of PME 24, Utrecht, σελ.65~72.*

Hitt, F., & Lara, H. (1999). Limits, Continuity and Discontinuity of Functions from two points of view: that of the teacher and that of the student. In Bills, L. (Ed.), *Proceedings of tha British Society for the Reasearch itno Learning Mathematics 19* (2) 49-54.

Kaput, J. Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In: Schoenfeld, A. (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum, 1994. p. 77 – 156.

Karatas, Ilhan; Guven, Bulent; Cekmez, Erdem 'A Cross-Age Study of Students' Understanding of Limit and Continuity Concepts' Boletim de Educação Matemática, vol. 24, núm. 38, abril, 2011, pp. 245-264 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil

Kathlen, M.S. (1994). *The development and validation of a categorization of misconceptions in the learning of chemistry*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Massachusetts.

Lauten AD, Graham KG, Ferrini-Mundy J (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. J. *Math. Behav*., 13(2): 225-237.

Mastorides, E., & Zaharaiades, T. (2004), Secondary mathematics teachers' knowledge concerning the concept of limit and continuity. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education, Vol. 4,* p. 481-488. Bergen, Norway.

Meel DE (1998). Honors students' calculus understandings: Comparing calculus and Mathematica and traditional calculus students. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III.* Providence: Am. Math. Society, pp. 163-215.

Nair Sarada Ginja (2010). 'College Students' Concept Images of Asymptotes, Limits, and Continuity of Rational Functions' *Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy in the Graduate School of The Ohio State*, UniversityCollege of Education and Human Ecology, The Ohio State University

Núñez, R., Edwards, L., & Filipe Matos, J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 39,* 45-65. doi: 10.1023/a:1003759711966

Strauss, A. & Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research: Grounded Theory, Procedures and Techniques.* Newbury Park, CA: Sage Publications.

Strauss, G. (1967). *The Discovery of Grounded Theory.*

Smith, J.P, diSessa, A. and Roschelle, J.: 1993/94, 'Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition', *Journal of the Learning Sciences* 3 (2), 115–163.

Takaci Durdica, Pesic Duska, Tatar Jelena: (2003) : 'An introduction to the continuity of functions using scientific workplace' *The teaching of mathematics* Vol.VI,2, σελ.105-112

Tall,D.:(2004a) 'Building Theories: The three world of mathematics' *For the learning of mathematics, vol. 24,σελ 29~32*

Tall, D.:(2004,b) 'Thinking through the three world of mathematics' *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 4, σελ. 281–288.*

Tall, D.:(2004,c) ' Introducing Three Worlds of Mathematics' *For the Learning of Mathematics, vol 23, vo 3, σελ. 29–33.*

Tall, D.:(2008b) 'The Transition to Formal Thinking in Mathematics' Αναρτημένο στην ιστοσελίδα του D. Tall:
http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html

Tall, D., & Vinner, Sh. (1981), 'Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity', *Educational Studies in Mathematics,* 12 151–169.

Vinner, S. & Hershkowitz, R.:(1980) Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Berkeley CA, σελ 177–184.

Vinner, S. (1987). Continuous functions-images and reasoning in College students: *Proceeding PME 11,* II, Montreal, 177-183.

Vinner, Sh. (1991). The role of definitins in the teaching and learning of mathematics. In Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Juter Kristina (2010). University students linking limits, derivatives, integrals and continuity: *CERME 7-*

Juter Kristina (2012). The validity of students' conceptions of differentiability and continuity: Evaluation and comparison of mathematical achievement: dimensions and perspectives : *proceedings of MADIF 8 : the eighth Swedish mathematics education research seminar*, Umeå, January 24-25, 2012 / SMDF, 2012, 121-130

Williams SR (1991). Models of limit held by college calculus students. *J. Res. Math. Educ.* 22(3): 219-236.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος Γ.:(2011*). «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Γ΄ τάξη Γενικού Λυκείου»* ΟΕΔΒ.

Νεγρεποντης, Σ. ,Γιωτόπουλος, Σ ,Γιαννακούλιας, Ε.:(1987). *Απειροστικός Λογισμός* , Τόμος 1,Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα.

Παράρτημα

Ερωτηματολόγιο

Ον/μο:

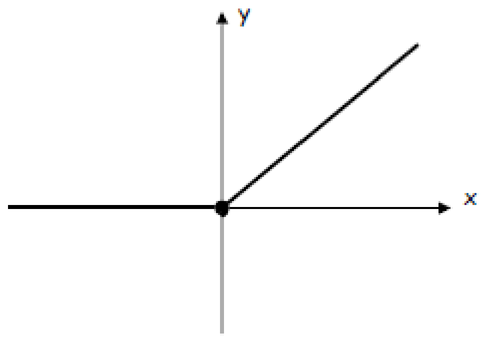
Εξάμηνο σπουδών:

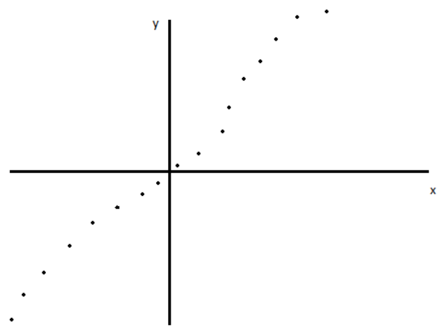
Ερωτηματολόγιο

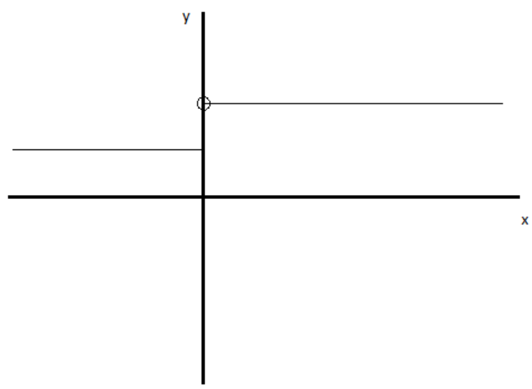
1) Τι σας έρχεται στο νου με την έννοια της συνέχειας.

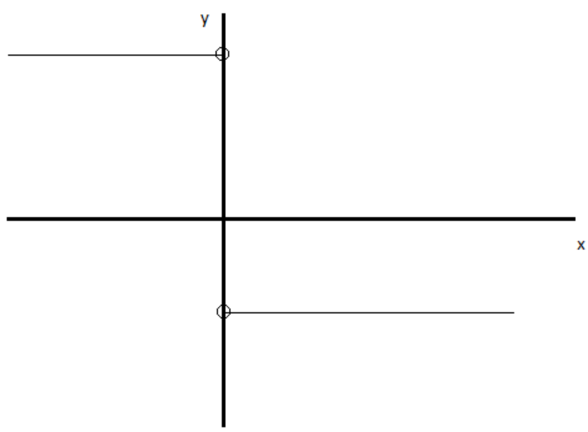
2) Δώστε τον ορισμό της συνέχειας συνάρτησης που μάθατε στο λύκειο και αυτόν που μάθατε στο πανεπιστήμιο. Οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι; (αιτιολογήστε την απάντησή σας)

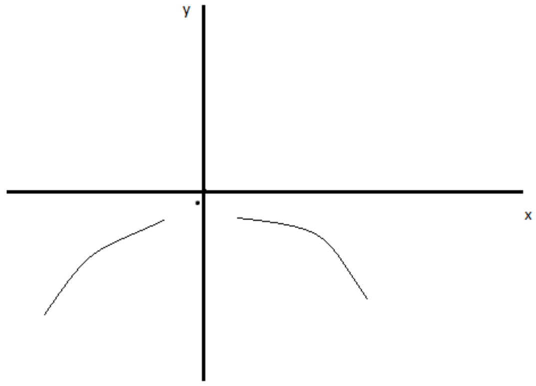
3) Ελέγξτε αν οι συναρτήσεις των γραφημάτων είναι συνεχείς. Να γίνει <u>αναλυτική αιτιολόγηση</u> των απαντήσεων.

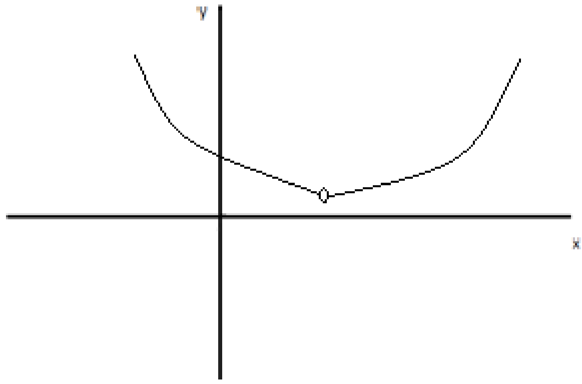



y
x


y
x


y
x


y
x



4) Να γίνει έλεγχος της συνέχειας της f(x)= x^2 στο x=3 με χρήση του ορισμού που μάθατε στο πανεπιστήμιο.

5) Να διατυπώσετε την άρνηση του ορισμού της συνέχειας.

6)

Εξετάστε αν οι δοθείσες συναρτήσεις είναι συνεχείς και αιτιολογήστε το συμπέρασμά σας.

I. $f(x) = x^3, x \in N$

II. $f(x) = \begin{cases} 5, & x > 0 \\ 13, & x \leq 0 \end{cases}$

III. $f(x) = \begin{cases} -2, & x > 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases}$

IV. $f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$

V. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ -1, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$

VI. $f(x) = \begin{cases} x^2, & |\, x \,| > 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

7) Να κυκλώσετε το Σ για κάθε σωστή πρόταση και το Λ για κάθε λάθος.

.

- Το γινόμενο και το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση και αντιστρόφως. Σ Λ
- Μια συνάρτηση είναι συνεχής μόνο αν το γράφημά της μπορεί να σχεδιαστεί χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί. Σ Λ
- Όταν μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού όλο το R τότε δεν γίνεται να είναι ασυνεχής σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της. Σ Λ
- Αν η f είναι συνεχής τότε πάντα και η IfI είναι συνεχής. Σ Λ
- Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένη. Σ Λ
- Δυο ασυνεχείς συναρτήσεις μπορούν να έχουν συνεχή σύνθεση. Σ Λ