ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τα Παραδείγματα στη Σχολική Τάξη και ο Τρόπος Διαχείρισής τους

Κωνσταντίνος Μαρκόγλου
Α.Μ. 201230

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια
Δέσποινα Πόταρη

ΑΘΗΝΑ 2014

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την Πέμπτη 10/07/2014 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Δέσποινα Πόταρη (επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Αναπληρώτρια Καθηγήτρια	……………
2) Χαράλαμπος Σακονίδης	Καθηγητής	……………
3) Θεοδόσης Ζαχαριάδης	Καθηγητής	……………

Στην οικογένειά μου
για τη στήριξή της όλα αυτά τα χρόνια

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Την επιβλέπουσα κ. Δέσποινα Πόταρη, για την ενθάρρυνση και τις γνώσεις που μου μετέδωσε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, για την άριστη συνεργασία που είχαμε, για το σημαντικό χρόνο που μου αφιέρωσε, για την υπομονή και τη συνεχή υποστήριξή της, για τις μεθοδολογικές και επιστημονικές της υποδείξεις και τη γενικότερη καθοδήγηση στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.
- Τον κ. Χαράλαμπο Σακονίδη, για το αδιάκοπο και αμέριστο ενδιαφέρον του, τις πολύτιμες συμβουλές του και την εξαιρετική συνεργασία.
- Τον κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη, που με τίμησε με τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.
- Τον εκπαιδευτικό, κ. Κώστα Στουραΐτη, που συμμετείχε στην έρευνα, για την άριστη και πολύτιμη συνεργασία του, την αφιέρωση πολύτιμου προσωπικού του χρόνου, πάνω από όλα όμως τη διάθεση και το αδιάπτωτο ενδιαφέρον του να συμμετέχει και να συνεισφέρει στην έρευνα.

Ευχαριστώ επίσης:

- Τους διδάσκοντες του Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» για την εποικοδομητική συνεργασία και τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετέδωσαν. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον κ. Γιώργο Ψυχάρη, που ήταν ο πρώτος που με ενέπνευσε να ασχοληθώ με το επιστημονικό πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών, καθώς και την κ. Διονυσία Μπακογιάννη, για την ευγενική και πρόθυμη βοήθειά της, όποτε τη χρειάστηκα.
- Τους συμφοιτητές και καλούς φίλους που απέκτησα κατά τη διάρκεια του προγράμματος αυτού για τη συνεργασία, τη στήριξη και τις αξέχαστες στιγμές που περάσαμε μαζί τα τελευταία χρόνια μέσα και έξω από το Πανεπιστήμιο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία εξετάζει το ρόλο και τη συμβολή των παραδειγμάτων που παράγονται κυρίως από τον εκπαιδευτικό, στη μάθηση και διδασκαλία των Μαθηματικών. Από τη βιβλιογραφία διαπιστώνεται ξεκάθαρα, πως τα παραδείγματα συμβάλλουν καθοριστικά στην οικειοποίηση νέων γνώσεων και στην εις βάθος κατανόηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Η μελέτη εστιάζει σε δύο κυρίαρχα σημεία: στη χρήση και κατηγοριοποίηση των παραδειγμάτων που παράγονται στο μάθημα και στην επικοινωνία που λαμβάνει χώρα στην τάξη, κατά τη διαχείριση των παραδειγμάτων αυτών. Η έρευνα αποτελεί μελέτη περίπτωσης της διδασκαλίας ενός εκπαιδευτικού σε δύο τμήματα Γ΄ Γυμνασίου. Τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν από την παρακολούθηση 12 ωρών διδασκαλίας του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού, καθώς και από τις κατ' ιδίαν συνεντεύξεις μαζί του, μετά το πέρας κάθε ώρας διδασκαλίας. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε μέσα από το συνδυασμό μιας θεμελιωμένης θεωρίας και ανάλυσης περιεχομένου. Από την ανάλυση αυτή εντοπίστηκαν συνολικά 104 παραδείγματα, τα οποία κατατάχθηκαν σε ένα πλούσιο συστημικό δίκτυο ταξινόμησης. Παράλληλα, αναδείχθηκαν τα στοιχεία και οι νόρμες επικοινωνίας που έχουν καθιερωθεί από τον εκπαιδευτικό στην τάξη και ιδιαίτερα η μορφή επικοινωνίας που αναπτύσσεται κατά την ενασχόληση των μαθητών με τα παραδείγματα.

Λέξεις κλειδιά: *παραδείγματα, επικοινωνία, κατηγορίες, δίκτυο, διαχείριση, εκπαιδευτικός*

ABSTRACT

The present paper examines the role and contribution of examples that are produced mainly by the teacher, in the learning and teaching of Mathematics. The literature clearly shows that examples play an important role in the acquisition of new knowledge and in the in-depth understanding of mathematical concepts and procedures. The study focuses on two dominant points: firstly, on the use and classification of examples produced in course and secondly, on the communication that takes place in the classroom during the management of these examples. The research is a case study of a teacher in two ninth grade classes. The data were gathered from observing 12 teaching hours of this specific teacher, as well as from individual interviews with him following each lesson. The data analysis was made by combining grounded theory analysis and content analysis. From this analysis a total of 104 examples were identified, which were then classified in a rich systemic network. At the same time, the elements and norms of communication that have been established by the teacher in class were emerged and particularly the form of communication that is developed during the engagement of students with examples.

Key Words: *examples, communication, categories, network, management, teacher*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα παραδείγματα χρησιμοποιούνται ευρέως στη μαθηματική εκπαίδευση και αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής σκέψης, διδασκαλίας και μάθησης, ενώ αποτελούν αντικείμενο μελέτης της Διδακτικής των Μαθηματικών. Η χρήση των παραδειγμάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει μακρά ιστορία, όπως προκύπτει από τις παλαιότερες καταγραφές μέχρι και τις πιο σύγχρονες πηγές (Bills et al., 2006). Από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας προκύπτει ότι στην εκκόλαψή της, η Διδακτική των Μαθηματικών είχε εστιάσει την έρευνά της στους μαθητές και ιδιαίτερα στους τρόπους με τους οποίους συντελείται η μάθηση, δίνοντας μικρή σημασία στη γνώση και στις πρακτικές των εκπαιδευτικών. Μόλις τις τελευταίες δεκαετίες άρχισε να αναδεικνύεται ο καθοριστικός ρόλος του εκπαιδευτικού σε σχέση με τη μάθηση των μαθητών. Υπάρχουν πλέον μελέτες σχετικά με τη γνώση του εκπαιδευτικού γύρω από τα μαθηματικά και τη διδασκαλία των μαθηματικών (Peled & Zaslavsky, 1996; Llinares, 2000; Ponte & Chapman, 2006; Giannakoulias, Mastorides, Potari, & Zachariades, 2010), καθώς και γύρω από τις πεποιθήσεις, τις αντιλήψεις και τις πρακτικές του (Skott, 2001; Stipek, Givvin, Salmon, & MacGyvers, 2001; Leikin & Dinur, 2007).

Ο ρόλος που διαδραματίζουν τα παραδείγματα στη διαδικασία της μάθησης τυγχάνει ιδιαίτερης προσοχής τα τελευταία χρόνια (Goldenberg & Mason, 2008; Watson & Shipman, 2008; Zazkis & Leikin, 2008). Η βιβλιογραφία στον τομέα αυτό περιλαμβάνει έρευνες για τον πλούτο και τη δομή των χώρων παραδειγμάτων των μαθητών (Watson & Mason, 2005; Goldenberg & Mason, 2008), το ρόλο των παραδειγμάτων ως παιδαγωγικά εργαλεία (Weber, Porter, και Housman, 2008) και τα παιδαγωγικά οφέλη που προκύπτουν όταν οι μαθητές παράγουν μόνοι τους παραδείγματα εννοιών (Dahlberg & Housman, 1997; Watson & Mason, 2005). Παρ’ όλα αυτά είναι άξιο απορίας, γιατί απουσιάζει σε μεγάλο βαθμό από τη σύγχρονη βιβλιογραφία, η εκτενής και αναλυτική αναφορά στο ρόλο των παραδειγμάτων που παράγονται από τον εκπαιδευτικό και στον τρόπο που αυτός τα διαχειρίζεται (Rowland, 2008). Αξίζει να σημειωθεί ότι στη διεθνή βιβλιογραφία μόλις μία έρευνα (Zodik & Zaslavsky, 2008) μελετά τα είδη των παραδειγμάτων που παράγονται από τον εκπαιδευτικό, όπως και τις υποκείμενες θεωρήσεις για τις επιλογές παραδειγμάτων κατά τη διδασκαλία του.

Μέχρι μερικές δεκαετίες πριν, τόσο η διδασκαλία των μαθηματικών όσο και η έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών περιστρέφονταν γύρω από την κονστρουκτιβιστική θεωρία μάθησης. Έμφαση δηλαδή δινόταν στην κατασκευή της γνώσης και στις νοητικές διαδικασίες του ατόμου, ενώ το έργο του δασκάλου συνίστατο στη «μεταφορά» της γνώσης στο νου του μαθητή με «όχημα» το γραπτό ή προφορικό λόγο, ενώ η έννοια της επικοινωνίας στην τάξη ήταν ανύπαρκτη (Sierpinska, 1998). Στη συνέχεια το κέντρο βάρους της εκπαίδευσης μετατοπίστηκε στην κοινωνικο-πολιτισμική θεωρία γνώσης. Σύμφωνα με αυτήν, η γλώσσα και η επικοινωνία αποτελούν κοινωνική πρακτική, δηλαδή μέσο για την επίτευξη γνωστικών, κοινωνικών και μαθησιακών στόχων. Κεντρικό χαρακτήρα έχει η Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης, που μόνο όταν αναπτύσσεται αρχίζει η μάθηση και εκδηλώνονται όλα τα στοιχεία της θεωρίας, δηλαδή η διαμεσολάβηση των συμβόλων, η εσωτερίκευση, η βοήθεια (scaffolding), κλπ. (Sierpinska, 1998). Στις μέρες μας, τα επικοινωνιακά μοντέλα και οι διδακτικές στρατηγικές που ακολουθεί ο εκπαιδευτικός, προέρχονται τις περισσότερες φορές από το συνδυασμό των δύο θεωριών.

Στο Διαπανεπιστημιακό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα της Διδακτικής των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, έχει πραγματοποιηθεί μια διπλωματική εργασία που αφορά τα παραδείγματα και τη διαχείρισή τους (Παπακανδεράκη, 2012). Η εργασία αυτή παρουσιάζει κάποια κοινά χαρακτηριστικά με την παρούσα, καθώς και οι δυο έρευνες μελετούν τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός και την επικοινωνία στην τάξη. Η εργασία της Παπακανδεράκη επικεντρώνεται, ωστόσο, κυρίως στις κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες που αναπτύσσονται στην τάξη, καθώς και στους παράγοντες που επηρεάζουν τον εκπαιδευτικό κατά τη λήψη αποφάσεων. Υπάρχουν, όμως, ακόμα πολλά αναπάντητα ερωτήματα. Μπορεί να πραγματοποιηθεί μια εκτενής ταξινόμηση των παραδειγμάτων; Πώς επηρεάζουν τα παραδείγματα την επικοινωνία στην τάξη; Ποια είναι τα είδη αλληλεπίδρασης μεταξύ καθηγητή και μαθητών που κυριαρχούν στην τάξη; Πώς επηρεάζει το περιβάλλον της τάξης, οι προσωπικές θεωρήσεις και το μορφωτικό επίπεδο του εκπαιδευτικού την επικοινωνία;

Η παρούσα έρευνα επικεντρώνεται ακριβώς στα σημεία αυτά. Τοποθετεί στο επίκεντρο τον εκπαιδευτικό και ως πρώτο ερευνητικό ερώτημα θέτει τη διερεύνηση των παραδειγμάτων που παράγονται από αυτόν κατά τη διδασκαλία και τους τρόπους που αυτά τα παραδείγματα μπορούν να ταξινομηθούν, ώστε να προκύπτουν συμπεράσματα για τις θεωρήσεις και τις πρακτικές του. Ο εκπαιδευτικός που συμμετέχει στην έρευνα αποτελεί μια ιδιαίτερη περίπτωση, καθώς είναι Υποψήφιος Διδάκτωρ της Διδακτικής των Μαθηματικών, με πολυετή διδακτική εμπειρία και ενεργή συμμετοχή στη μαθηματική κοινότητα. Το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, εστιάζει στη διερεύνηση του τρόπου διαχείρισης των παραδειγμάτων, στη σχέση της διαχείρισης αυτής με το είδος της επικοινωνίας που πραγματοποιείται στην τάξη, αλλά και την αλληλεπίδραση μεταξύ καθηγητή και μαθητών. Η απάντηση των ερωτημάτων αυτών, θεωρούμε ότι μπορεί να συνεισφέρει στη μαθηματική κοινότητα τόσο από ερευνητικής, όσο και από παιδαγωγικής σκοπιάς.

Στην εργασία αυτή, προβάλλεται στο πρώτο κεφάλαιο ο ορισμός και η φύση των παραδειγμάτων. Εξετάζεται τι είναι παράδειγμα σύμφωνα με διάφορες θεωρήσεις ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, ποια είναι η επιστημολογία του, αλλά και πότε ένα μαθηματικό αντικείμενο θεωρείται παράδειγμα. Επιχειρείται μία ιστορική ανασκόπηση του ρόλου και της χρήσης των παραδειγμάτων, από την αρχαιότητα μέχρι και την εποχή μας, ενώ επισημαίνεται η συνεισφορά των παραδειγμάτων στη μάθηση και κατανόηση των μαθηματικών. Γίνεται αναφορά στο ρόλο που έχουν τα παραδείγματα σε διάφορες θεωρήσεις σχετικές με τη μάθηση, καθώς και πώς αυτά συμβάλλουν στην εκμάθηση εννοιών, στη δημιουργία εικόνων μιας έννοιας, στη μετάβαση από τη διαδικαστική στην εννοιολογική γνώση, στη δημιουργία αντιδράσεων μάθησης και στη συντέλεση εννοιολογικής αλλαγής. Ακόμη, παρουσιάζεται η αλληλένδετη σχέση των παραδειγμάτων με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Αναδεικνύεται η δύναμη των παραδειγμάτων κατά την παραγωγή μαθηματικών αποδείξεων, τον εμπλουτισμό γνωστικών σχημάτων και την κατάρριψη των λανθασμένων εικασιών των μαθητών, υπογραμμίζονται οι κίνδυνοι που εγκυμονούν από την άστοχη χρήση τους, ενώ για το λόγο αυτό προτείνονται οδηγίες ορθής χρήσης τους από τον εκπαιδευτικό.

Ακολουθούν οι ταξινομήσεις των παραδειγμάτων που προκύπτουν από τη βιβλιογραφία. Παρουσιάζονται τα αντιπαραδείγματα και τα μη παραδείγματα, η επιστημολογία τους, καθώς και η αξία και η συνεισφορά τους στη διδασκαλία των μαθηματικών. Τα παραδείγματα διακρίνονται επίσης σε παραδείγματα έννοιας και διαδικασίας, καθώς και σε διαισθητικά και μη διαισθητικά. Γίνεται αναφορά στην έρευνα των Zodik και Zaslavsky (2008), η οποία αποτελεί τη μοναδική δημοσιευμένη έρευνα, όπου αποπειράται μια ταξινόμηση των παραδειγμάτων που παράγονται στην τάξη, γεγονός που δικαιολογεί την εκτενή επίκλησή της. Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά και στα παραδείγματα γεφύρωσης και μεταστροφής, ενώ ακόμη γίνεται λόγος για τους χώρους παραδειγμάτων, για τη σημασία τους στην παραγωγή και επίκληση παραδειγμάτων, καθώς και στα τέσσερα είδη στα οποία μπορούν να διαχωριστούν, αλλά και στα χαρακτηριστικά τα οποία διαθέτουν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζονται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα χαρακτηριστικά της επικοινωνίας στην τάξη με βάση τις δύο κύριες θεωρίες μάθησης. Επιπρόσθετα, τονίζεται η σημασία της επικοινωνίας στη διαμόρφωση κατάλληλου περιβάλλοντος στην τάξη, αλλά και οι κίνδυνοι που ελλοχεύουν από τη δημιουργία ενός ανεξέλεγκτου επικοινωνιακού περιβάλλοντος. Στη συνέχεια γίνεται αναφορά στις κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες που αναπτύσσονται σε μια τάξη μαθηματικών, στις διαφορές και στα χαρακτηριστικά τους. Τέλος, γίνεται αναφορά στη σχέση της επικοινωνίας με τη μάθηση, στα είδη της επικοινωνίας που πραγματοποιούνται στην τάξη, αλλά και των τρόπων με τους οποίους αλληλεπιδρά ο εκπαιδευτικός με την υπόλοιπη τάξη.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύεται η μεθοδολογία της έρευνας που υιοθετήθηκε. Παρέχονται πληροφορίες σχετικά με τον εκπαιδευτικό που συμμετέχει στην έρευνα, τη μέθοδο έρευνας, τη μέθοδο και τη διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων, καθώς και για τις αλλαγές που επήλθαν στην κυρίως έρευνα έπειτα από τη διεξαγωγή της πιλοτικής έρευνας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εκτίθενται τα αποτελέσματα της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, αναπτύσσεται ένα δίκτυο ταξινόμησης των παραδειγμάτων που εντοπίστηκαν κατά τη διαδικασία συλλογής δεδομένων της έρευνας. Στη συνέχεια, γίνεται αναλυτική παρουσίαση κάθε κατηγορίας, παρατίθενται χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραδειγμάτων που ανήκουν σε κάθε μια από αυτές, αλλά και διαγράμματα συχνοτήτων. Ακολουθούν οι διαπιστώσεις που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων σχετικά με τους τρόπους αλληλεπίδρασης του καθηγητή με τους μαθητές, της επικοινωνίας που διαμορφώνεται στην τάξη και τον τρόπο διαχείρισης των παραδειγμάτων από τον εκπαιδευτικό.

Στο πέμπτο κεφάλαιο πραγματοποιείται συζήτηση και εξάγονται συμπεράσματα σχετικά με τα αποτελέσματα της έρευνας, τα οποία παράλληλα συγκρίνονται με παλαιότερες έρευνες, όπου είναι εφικτό, αναδεικνύεται η συμβολή της έρευνας στη μαθηματική κοινότητα, ενώ τέλος κατατίθενται προτάσεις για μελλοντικές έρευνες και μια σύνοψη της έρευνας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{\text{Ο}}$

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

1.1. Ορισμός και Επιστημολογία του Παραδείγματος

Τα παραδείγματα αποτελούν αναπόσπαστο μέρος των Μαθηματικών και όχι ένα απλό βοήθημα για τη διδασκαλία (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson και Zaslavsky, 2006). Είναι αδιανόητο να φανταστούμε τη μάθηση και τη διδασκαλία χωρίς την επίκληση και χρήση παραδειγμάτων. Η λέξη *παράδειγμα* αναφέρεται στην απεικόνιση μιας τεχνικής, η οποία χρησιμοποιείται για να ολοκληρωθεί ένα συγκεκριμένο είδος μαθηματικής δραστηριότητας. Τέτοιου είδους παραδείγματα έχει επικρατήσει να αναφέρονται ως *"λυμένα παραδείγματα" (worked examples)* στη βιβλιογραφία (παραδείγματος χάριν, η λύση της εξίσωσης $x^2 + 2x + 1 = 0$ μπορεί να αποτελεί λυμένο παράδειγμα του τρόπου επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων). Παράλληλα όμως, η λέξη *παράδειγμα* μπορεί να αναφέρεται και σε μια συγκεκριμένη περίπτωση μιας μαθηματικής έννοιας (για παράδειγμα, το 5 είναι ένα παράδειγμα περιττού αριθμού).

Οι Zodik και Zaslavsky (2008), ορίζουν ως μαθηματικό παράδειγμα μία συγκεκριμένη περίπτωση μιας γενικότερης κατηγορίας, με την οποία κάποιος μπορεί να κατανοήσει έννοιες και να προβεί σε γενικεύσεις. Παράλληλα, σύμφωνα με τους Watson και Mason (2002a, 2002b), παράδειγμα θεωρείται οτιδήποτε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ακατέργαστο υλικό προκείμενου να πραγματοποιηθεί γενίκευση, να αναδειχθούν διαισθητικές σχέσεις, να πραγματοποιηθεί επεξήγηση αρχών και εννοιών, να αναδειχθεί διαφοροποίηση, να συντελεστεί επαγωγικός συλλογισμός, ή να γίνει εκπροσώπηση μίας μεγαλύτερης κατηγορίας. Σύμφωνα ακόμα με τους Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson, και Zaslavsky (2006), τα παραδείγματα κάθε είδους αποτελούν έναν από τους κύριους μηχανισμούς για τη σαφή απεικόνιση και τη μεταλαμπάδευση εννοιών μεταξύ καθηγητών και μαθητών (Bruner, Goodnow, & Austin, 1953; Tall & Vinner, 1981; Peled & Zaslavsky, 1997). Η εργασία αυτή βασίζεται στην πεποίθηση ότι τα παραδείγματα διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στην διδασκαλία των μαθηματικών.

Τα παραδείγματα αποτελούν μέσο διαμεσολάβησης μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων και μαθητευόμενων, ενώ παράλληλα αποτελούν τη γέφυρα που τους συνδέει με τον κόσμο των αφηρημένων ιδεών (Goldenberg & Mason, 2008). Θα μπορούσε να θεωρηθεί ως κάτι προφανές, όμως η χρήση των παραδειγμάτων είναι τόσο άρρηκτα συνδεδεμένη με τη διδασκαλία, ώστε είναι δύσκολο κανείς να απομονώσει και να διακρίνει πότε ένα αντικείμενο αποτελεί παράδειγμα. Κάθε μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα εν δυνάμει μαθηματικό παράδειγμα. Ωστόσο, προκειμένου να μετατραπεί σε παράδειγμα, απαιτείται η νοητική αλληλεπίδραση μεταξύ του ατόμου και του αντικειμένου, ώστε το άτομο να καταχωρήσει το αντικείμενο αυτό ως παράδειγμα μιας μεγαλύτερης κλάσης (Zodik & Zaslavsky, 2008).

Επιστημολογικά, η ανάγκη για ανάκληση ή κατασκευή παραδείγματος εγείρεται όταν συναντάται μια μη προφανής δήλωση ή κατάσταση. Τότε η φυσική αντίδραση είναι η κατασκευή ενός παραδείγματος, ώστε να μπορέσει να γίνει επεξεργασία του γενικού μέσα από την οικεία εμπειρία του συγκεκριμένου (Courant, 1981). Επιπλέον, όταν εγείρεται μια εικασία, η φυσική αντίδραση είναι να αναζητηθεί, αν υπάρχει, κάποιο αντιπαράδειγμα, καθώς και να χρησιμοποιηθεί ένα παράδειγμα γενικά αποδεκτό για να εξετασθεί η εγκυρότητα της εικασίας (Davis & Hersh, 1981).

Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις από ιστορικά αρχεία που υποδεικνύουν ότι τα παραδείγματα κατείχαν κεντρικό ρόλο τόσο στην ανάπτυξη των μαθηματικών αυτών καθαυτών, όσο και της Διδακτικής των Μαθηματικών. Μπορεί η υποδειγματική ή μεθοδολογική χρήση των παραδειγμάτων να είναι μια πιο σύγχρονη στρατηγική, ωστόσο η παρουσία και χρήση των παραδειγμάτων από αρχαίων χρόνων είναι αδιαμφισβήτητη.

Τα αρχαιότερα μαθηματικά στοιχεία (Αιγυπτιακοί πάπυροι, Βαβυλωνιακές πλάκες και μεταγενέστερα αντίγραφα χαμένων Κινέζικων χειρόγραφων) χρησιμοποιούν προβλήματα με λυμένα παραδείγματα για να απεικονίσουν διαδικασίες, οι οποίες μετονομάστηκαν κανόνες ή αλγόριθμοι σε πιο σύγχρονα κείμενα (Bills et al., 2006). Σύμφωνα μάλιστα με τον Gillings (1972) και τον Swetz (1987), πολλές φορές τα παραδείγματα αυτά περιέχουν σχόλια όπως «κατ’ αυτόν τον τρόπο γίνεται» ή «με αυτόν τον τρόπο μπορούν να λυθούν παρόμοια προβλήματα» ή «με την ίδια μέθοδο λύνονται όλα τα παρόμοια προβλήματα», τα οποία υποδεικνύουν ξεκάθαρα τη γενικευσιμότητα των παραδειγμάτων (Bills et al., 2006).

Έως τον 16^{ο} αιώνα, οι ευρωπαίοι συγγραφείς μαθηματικών είχαν ξεκινήσει να δικαιολογούν την ύπαρξη των παραδειγμάτων στα κείμενά τους, υποστηρίζοντας ρητά το σημαντικό ρόλο των παραδειγμάτων στη μάθηση (Bills et al., 2006). Χαρακτηριστικά ο Girolamo Cardano (1545) αναφέρει: «Χρησιμοποιήσαμε ποικιλία παραδειγμάτων έτσι ώστε να γίνει κατανοητό ότι το ίδιο μπορεί να γίνει και σε άλλες περιπτώσεις… Αυτό πρέπει πάντα να θεωρείται ως ένας γενικός κανόνας.» (Witmer, 1968).

Κατά τον 18^{ο} αιώνα, παρουσιάζονται δύο κύριες προσεγγίσεις για τη χρήση των παραδειγμάτων. Η πρώτη είναι η *αναλυτική (analytic)*, όπου οι γενικοί κανόνες δίνονταν πριν τα λυμένα παραδείγματα και η δεύτερη η *συνθετική (synthetic)*, κατά την οποία οι κανόνες δίνονταν μετά τα παραδείγματα (Bills et al., 2006). Επιπλέον, η μέθοδος εκμάθησης διαχωρίζεται σε *επαγωγική (inductive)* και σε *παραγωγική (deductive)*. Στην μεν επαγωγική, ο μαθητής οδηγείται σε γενικεύσεις εννοιών ή ενεργειών μέσω μίας γκάμας παραδειγμάτων, βλέποντας δηλαδή τη γενικότητα μέσω συγκεκριμένων περιπτώσεων. Στη δε παραγωγική, χρησιμοποιώντας μια αρχή ή έναν ορισμό ο μαθητής συνάγει το δικό του προσωπικό νόημα ή αποτέλεσμα, βλέποντας δηλαδή συγκεκριμένες περιπτώσεις του γενικού (Bills et al., 2006).

Στις αρχές του 19ου αιώνα, ο Warren Colburn θέσπισε στις ΗΠΑ την επαγωγική μέθοδο: «Η δικαιολόγηση που χρησιμοποιήθηκε για να εκτελεστούν αυτά τα μικρά παραδείγματα είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν που χρησιμοποιείται και για τα μεγάλα. Και όταν κάποιος συναντά μία δυσκολία στο να λύσει μία ερώτηση, θα την ξεπεράσει γρηγορότερα και πολύ πιο αποτελεσματικά, παίρνοντας ένα πολύ μικρό παράδειγμα του ίδιου είδους και παρατηρώντας πώς το λύνει, από το να καταφύγει σε έναν κανόνα…» (Colburn, 1826).

Κατά τα τέλη του 19ου και αρχές του 20ου αιώνα, οι ιδέες αυτές αναπτύχθηκαν περαιτέρω. Πράγματι, ο Herbert Spencer (1878) επεδίωκε οι μαθητές να ανάγουν το γενικό από προσεκτικά διατυπωμένες περιπτώσεις, κάτι που ο Alfred Whitehead συνόψισε λέγοντας ότι: «Το να δεις τι είναι γενικό μέσα στο τι είναι συγκεκριμένο και το τι είναι μόνιμο μέσα στο το τι είναι παροδικό είναι ο σκοπός της επιστημονικής σκέψης.» (Whitehead, 1911). Ασπαζόμενος την ίδια προσέγγιση, ο Pólya υποστήριξε: «…πρέπει να υιοθετήσουμε μια επαγωγική στάση, η οποία απαιτεί μια ανοδική πορεία από τις παρατηρήσεις στις γενικεύσεις και μια καθοδική πορεία από τις υψηλότερες γενικεύσεις στις πιο ακριβείς παρατηρήσεις.» (Pólya, 1945).

Την ίδια περίοδο, οι παιδαγωγικές αρχές σχετικά με τα παραδείγματα γινόντουσαν όλο και πιο σαφής. Πιο συγκεκριμένα ο MacVicar (1879) αναφέρει ότι: «Οι ασκήσεις και οι συζητήσεις που αφορούν τα παραδείγματα φαίνεται να είναι τόσο οργανωμένες και τόσο ακριβείς και ολοκληρωμένες, που περνώντας μέσα από αυτές ο μαθητής δεν είναι δυνατόν να μην αποκτήσει τέτοια γνώση των αρχών και των γεγονότων και να αποκτήσει τέτοια νοητική πειθαρχία ώστε να προετοιμαστεί κατάλληλα για τη μελέτη μαθηματικών υψηλότερου επιπέδου.» (Bills et al., 2006). Παράλληλα, κάποιοι συγγραφείς χρησιμοποιούσαν διαφορετικά είδη προβλημάτων ή προβλήματα που έμοιαζαν διαφορετικά, προκειμένου να εμπλέξουν τους μαθητές στη διαδικασία της αναγνώρισης των διαφόρων τύπων προβλημάτων. Άλλοι συνέλεγαν ποικιλία ασκήσεων είτε προσπαθώντας να αναδείξουν τη μεγαλύτερη κλάση στην οποία ανήκαν οι ασκήσεις αυτές, είτε προσπαθώντας να αποκτήσουν οι μαθητές τους μεγαλύτερη ευχέρεια και καλύτερη απόδοση (Bills et al., 2006). Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η επέκταση προηγούμενων έργων από τον Iohn Mellis (Record, 1632), η οποία αποτελεί μια συλλογή λυμένων παραδειγμάτων με μεγάλη ποικιλία στο τι είναι δεδομένο και τι ζητούμενο κάθε φορά, με στόχο να αναδειχθεί η ευρύτερη κλάση προβλημάτων που μπορούν να λυθούν με χρήση της ίδιας μεθόδου (Bills et al., 2006).

Μεγάλη ποικιλία παραδειγμάτων σχεδιάστηκε και από τον Pólya (1962), ο οποίος επεδίωκε να οδηγεί σε γενικεύσεις ξεκινώντας από απλές ιδέες. Ταυτόχρονα, ήταν υποστηρικτής της άποψης ότι η κατασκευή παραδειγμάτων από τους μαθητές μπορεί να συμβάλλει στην αποτελεσματικότερη μάθηση, κάτι που διαφαίνεται χαρακτηριστικά και από την κατάληξη ενός κεφαλαίου του: «Κατασκευάστε προβλήματα παρόμοια, αλλά διαφορετικά, από τα προβλήματα που προτείνονται σε αυτό το κεφάλαιο.» (Bills et al., 2006). Ο ρόλος των παραδειγμάτων δεν περιορίζεται όμως μόνο στην γενικευσιμότητα που παρέχουν. Ο Cardano, όπως και ο Richard Feynman αναγνωρίζουν ότι πολλές φορές τα παραδείγματα παρέχουν καλύτερη εξήγηση από κάποιον κανόνα: «Δεν μπορώ να καταλάβω τίποτα σε γενικές γραμμές, εκτός αν έχω στο μυαλό μου ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.» (Feynman, 1985). Αντίθετα η Zazkis (2001), διαπιστώνει ότι ξεκινώντας με πιο πολύπλοκα προβλήματα και αριθμούς δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να απλοποιήσουν μόνοι τους τα προβλήματα, ώστε να αποκτήσουν καλύτερα την εποπτεία τους πριν τα λύσουν. Ταυτόχρονα, τους οδηγεί να συνειδητοποιήσουν τη γενικότητα που υπονοείται από τα συγκεκριμένα παραδείγματα αλλά και την παρατήρηση της δομής τους (Bills et al., 2006).

1.2. Παραδείγματα και Μάθηση των Μαθηματικών

Η σημασία των παραδειγμάτων στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, στην κατασκευή μαθηματικών νοημάτων, στο σχηματισμό γενικεύσεων, καθώς και στη λύση προβλημάτων έχει τονιστεί τόσο από μαθηματικούς (Hilbert, Pólya, Halmos), όσο και από πιο σύγχρονους ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών. Οι Tall και Vinner (1981) υποστηρίζουν ότι: «Οι καθηγητές χρησιμοποιούν συχνά παραδείγματα για να επιδείξουν και να επικοινωνήσουν την ουσία των μαθηματικών εννοιών και τεχνικών.». Σύμφωνα με τον Pólya (1962), η εξοικείωση με τα *γενεσιουργά* (*generic)* παραδείγματα, η οποία προσφέρει μεγάλο εύρος δυνατοτήτων, είναι μέρος της διαδικασίας της κατανόησης των μαθηματικών. Την ανάγκη κάθε θεωρία μάθησης που εφαρμόζεται στα μαθηματικά να περιλαμβάνει την κατασκευή γενικεύσεων μέσω των παραδειγμάτων, τονίζουν οι Watson και Mason (2002).

Σύμφωνα με τους ίδιους, οποιαδήποτε θεωρία μάθησης δύναται να εφαρμοστεί στα μαθηματικά, θα πρέπει να δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να κατασκευάζουν γενικότητες μέσω των παραδειγμάτων. Κάτι τέτοιο θα πρέπει να γίνεται, είτε αν ο μηχανισμός μάθησης είναι η *προσαρμογή λόγου* (*discursive adaptation),* όπου υπάρχει αλληλεπίδραση καθηγητή και μαθητών έως ότου να εφαρμόζουν τις ίδιες ετικέτες στις ίδιες ομάδες παραδειγμάτων, είτε είναι ο *εκπολιτισμός κοινωνικών πρακτικών* (*enculturation of social practices),* όπου οι μαθητές απορροφούν σταδιακά την έννοια-ετικέτα μέσω της εμπλοκής με όλο και περισσότερα παραδείγματα που περιέχουν αυτή την ετικέτα, είτε είναι τέλος ο *ψυχολογικός (psychological)*, όπου οι μαθητές συγκρίνουν νέα παραδείγματα με τις υπάρχουσες γνωστικές τους δομές και τις διαμορφώνουν ώστε να περιλαμβάνουν τις νέες εμπειρίες (Watson & Mason, 2002).

Τα παραδείγματα αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι διάφορων πλαισίων και θεωριών μάθησης των μαθηματικών. Στον κλάδο της Ψυχολογίας μελετήθηκε πώς οι άνθρωποι εξάγουν έννοιες από τα παραδείγματα (Bruner et al., 1953; Wilson, 1986, 1990; Charles, 1980; Petty & Jansson, 1987). Στον τομέα της Γενετικής Επιστημολογίας γίνεται εστίαση στην επιρροή των παραδειγμάτων στα υπάρχοντα νοητικά σχήματα, μέσω των διαδικασιών της αφομοίωσης και της συμμόρφωσης (Piaget, 1970; Evans, 1973).

Βασιζόμενος στην έννοια του γνωστικού σχήματος που καθιερώθηκε από τον Piaget, ο Skemp (1969) εστιάζει στην εκμάθηση μαθηματικών εννοιών μέσω των παραδειγμάτων. Ο ίδιος υποστηρίζει ότι η επιλογή των παραδειγμάτων από τους καθηγητές αποτελεί κρίσιμο και πολύ σημαντικό ζήτημα. Παράλληλα, δίνει βάση στην έννοια του *θορύβου (noise)* ενός παραδείγματος, δηλαδή των εμφανών χαρακτηριστικών ενός παραδείγματος τα οποία δεν είναι σημαντικά για την έννοια, καθώς και στα μη παραδείγματα, τα οποία κατά τον ίδιο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δοθεί έμφαση στο διαχωρισμό μεταξύ των ζωτικών και όχι σημαντικών χαρακτηριστικών μιας έννοιας. Υποστηρίζει επίσης ότι αφού έχει σχηματιστεί μια έννοια, στη συνέχεια μπορούν να αφομοιωθούν παραδείγματα πάνω στην έννοια αυτή (Skemp, 1979). Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται σύμφωνα με τους Tall και Vinner (1981) μια ολοκληρωμένη *εικόνα της έννοιας (concept image)*. Ο Vinner (1983, 1991) αναφέρει ότι υπάρχει κενό μεταξύ της εικόνας της έννοιας που έχουν οι μαθητές και του ορισμού της έννοιας, κάτι που οφείλεται στον περιορισμένο αριθμό παραδειγμάτων στον οποίο βασίζεται η εικόνας της έννοιας αυτής. Σαν αποτέλεσμα οι εικόνες των εννοιών αφορούν κυρίως τους τομείς με τους οποίους οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι και επομένως καθίστανται περιορισμένες. Για το λόγο αυτό σύμφωνα με τους Tall και Vinner, έχει αξία η επιστράτευση των παραδειγμάτων, καθώς συντελούν στο κλείσιμο αυτού του χάσματος.

Οι Thorndike et al. (1924), υποστηρικτές του συμπεριφορισμού, χρησιμοποιούν τα παραδείγματα ως ερεθίσματα προκειμένου να προκαλέσουν *αντιδράσεις εκμάθησης (learning responses)*, κάτι που στη συνέχεια ο Gagné (1985) ανέπτυξε σε ιεραρχία συμπεριφορών αυξανόμενης πολυπλοκότητας. Ο Dienes (1960) χρησιμοποιούν έξυπνα κατασκευασμένα παιχνίδια και δομημένες καταστάσεις ως παραδείγματα μαθηματικών δομών, μέσω των οποίων οι μαθητές μπορούσαν να βιώσουν παραδείγματα πολύπλοκων μαθηματικών εννοιών μέσω των δικών τους εμπειριών, ενώ άλλοι όπως ο Anthony (1994) χρησιμοποιούν λυμένα παραδείγματα (Bills et al., 2006).

Η Sfard (1991), ακολουθώντας τον Freudenthal (1983), υποστηρίζει ότι οι μαθητές μεταβαίνουν από τη διαδικαστική στην εννοιολογική κατανόηση των εννοιών. Η μετάβαση αυτή είναι μια αργή και σταδιακή διαδικασία, η οποία συντελείται μέσω της επαναλαμβανόμενης εμπλοκής με παραδείγματα. Ο Dubinsky (1991) ανέπτυξε τη θεωρία “APOS”, σύμφωνα με την οποία η ενασχόληση με παραδείγματα αποτελεί μέρος της διαδικασίας με την οποία οι μαθητές μεταβαίνουν από ενέργειες σε διαδικασίες και από διαδικασίες σε έννοιες αντικειμένων. Το μοντέλο ανάπτυξης της κατανόησης των Pirie & Kieren (1994), εστιάζει στην κατασκευή εικόνων, αλλά ταυτόχρονα αναγνωρίζει πως η άμεση εμπειρία των παραδειγμάτων συνεισφέρει στο σχηματισμό προσωπικών εικόνων και γνώσεων. Ο Dreyfus (1991) ασχολείται με τον ρόλο των παραδειγμάτων στην αφαίρεση και πιο συγκεκριμένα στις διαφορετικές χρήσεις των παραδειγμάτων από τους μαθητές. Υποστηρίζει ότι για έναν έμπειρο μαθητή ο ορισμός και ένα μόνο παράδειγμα αρκούν προκειμένου να συντελεστεί αφαίρεση των ιδιοτήτων μιας έννοιας, ενώ για έναν λιγότερο έμπειρο μπορεί να χρειαστεί μεγάλος αριθμός προσεκτικά επιλεγμένων παραδειγμάτων (Bills et al., 2006).

Η σημασία των παραδειγμάτων γίνεται εμφανής και κατά τον σχηματισμό εννοιών. Υπάρχουν δύο κυρίαρχες θεωρίες που περιγράφουν τη σύνθετη διαδικασία σχηματισμού μιας έννοιας, η *κλασσική (classical)* και η *πρωτοτυπική (exemplar)*. Με βάση την κλασσική θεωρία, όλες οι εκφράσεις μια έννοιας μοιράζονται κοινές ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές, οι οποίες είναι κοινές και σε όλα τα παραδείγματα, αναγκαίες και επαρκείς για να ορίσουν την έννοια. Αυτή η άποψη, που εντοπίζεται μέχρι και την εποχή του Αριστοτέλη ήταν η επικρατέστερη, όμως τις δεκαετίες του 1970-1980 δέχτηκε έντονες κριτικές. Η πρωτοτυπική άποψη, υποστηρίζει την ύπαρξη ιδανικών παραδειγμάτων τα οποία ονομάζονται πρωτοτυπικά και αποτελούν βάση σύγκρισης κατά την ενσωμάτωση νέων παραδειγμάτων (Smith & Medin, 1981).

1.3. Παραδείγματα και Διδασκαλία των Μαθηματικών

Τα παραδείγματα σχετίζονται με πληθώρα δραστηριοτήτων σχετικών με τα μαθηματικά. Μάθηση, κατανόηση, διδασκαλία, σχεδιασμός προγράμματος σπουδών, όλα φαίνονται να είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με τα παραδείγματα. Για το λόγο αυτό έχουν γίνει την τελευταία δεκαετία έρευνες τόσο στα παραδείγματα που παράγονται από τους μαθητευόμενους, όσο και σε εκείνα που χρησιμοποιούνται από τους καθηγητές μέσα στη διδακτική τους πρακτική. Αξίζει ωστόσο να αναφερθεί ότι ενώ τα παραδείγματα που χρησιμοποιούν οι μαθητές αντανακλούν τη μαθηματική τους γνώση, τα παραδείγματα που χρησιμοποιούν οι καθηγητές δείχνουν όχι μόνο τη μαθηματική αλλά και την παιδαγωγική τους γνώση (Zazkis & Leikin, 2008).

Με βάση έρευνες των Bills et al. (2006), τα παραδείγματα παρέχουν εμβάθυνση και ενόραση στη φύση των μαθηματικών μέσα από τη χρησιμοποίησή τους σε πολύπλοκα έργα που επιδεικνύουν μεθόδους, στην ανάπτυξη εννοιών υποδεικνύοντας σχέσεις αλλά και σε επεξηγήσεις και αποδείξεις.

Καθώς συμβαίνει και με πολλά άλλα στοιχεία της μαθηματικής σκέψης, αυτό το οποίο προάγει τη μαθηματική σκέψη είναι η αναζήτηση των παραδειγμάτων και όχι το τελικό προϊόν. Οι Zazkis και Leikin (2008), τονίζουν τη σημασία των παραδειγμάτων και τη χρησιμότητα των χώρων παραδειγμάτων κατά τη διδασκαλία των ορισμών εννοιών. Στην έρευνά τους, συγκεκριμένα, μελετούν τον ορισμό του τετραγώνου με δείγμα μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών και συμπέραναν την αδιαμφισβήτητη σημασία των μαθηματικών ορισμών στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, καθώς και την καθοριστική συμβολή των παραδειγμάτων σε αυτήν.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συνεισφορά των παραδειγμάτων στη διαδικασία παραγωγής αποδείξεων. Πολλοί μαθητές πείθονται για γενικούς ισχυρισμούς, όχι διαβάζοντας μια τυπική απόδειξη, αλλά ελέγχοντας αν οι ισχυρισμοί αυτοί ισχύουν σε διαφορετικές μεμονωμένες περιπτώσεις. Με άλλα λόγια οι τυπικές αποδείξεις τους φαίνονται περιττές, αισθανόμενοι ότι μπορούν να εξακριβώσουν την ορθότητα ενός ισχυρισμού ελέγχοντας μερικά μόνο παραδείγματα (Weber, Porter, & Housman, 2008). Την ίδια άποψη μοιράζεται και ο Rowland (2008), ο οποίος προτείνει πως όταν παρουσιάζεται ένα γενικό θεώρημα το οποίο εφαρμόζεται σε μια κλάση αντικειμένων, να επιλέγεται ένα τυχαίο παράδειγμα των αντικειμένων αυτών. Έπειτα, να επιδεικνύεται ότι το θεώρημα ισχύει για το παράδειγμα αυτό, προσέχοντας βέβαια να μην δίνεται έμφαση σε μεμονωμένες ιδιότητες του συγκεκριμένου αντικειμένου, αλλά σε αυτές που μοιράζεται με τα υπόλοιπα αντικείμενα της κλάσης του. Μια τέτοιου είδους προσέγγιση σύμφωνα με τους Mason και Primm (1984), ονομάζεται *γενεσιουργή απόδειξη (generic proof)* του θεωρήματος. Με την παρουσίαση γενεσιουργών αποδείξεων αντί τυπικών αποδείξεων, οι μαθητές αποκτούν μεγαλύτερη κατανόηση και πείθονται περισσότερο για την ορθότητα του θεωρήματος από ότι αν εκτίθεντο αποκλειστικά και μόνο στην τυπική απόδειξη. Ακόμα, αν οι γενεσιουργές αποδείξεις παρουσιαστούν πρώτα, οι μαθητές καθίστανται περισσότερο ικανοί να κατανοήσουν αποτελεσματικότερα τις αντίστοιχες τυπικές αποδείξεις που θα τους παρουσιαστούν στη συνέχεια (Rowland, 2008). Παρ’ όλα αυτά, παρατηρείται δυσκολία των μαθητών στην αποτελεσματική χρήση παραδειγμάτων κατά την αξιολόγηση ή κατασκευή μιας απόδειξης. Η δυσκολία αυτή είναι πολύ πιθανό να πηγάζει από την έλλειψη εμπειρίας ή μαθηματικής ωριμότητας των μαθητών (Moore, 1994). Μια άλλη πιθανή αιτία μπορεί να είναι ότι οι μαθητές βλέπουν τα μαθηματικά, και συνεπώς και τις αποδείξεις, ως μια φορμαλιστική διαδικασία στην οποία περιλαμβάνονται αποκλειστικά αυστηρές μαθηματικές εκφράσεις ή κανόνες σε συγκεκριμένη μορφή (Hoyles, 1997).

Οι Giannakoulias, Mastorides, Potari, και Zachariades (2010) σε έρευνά τους μελετούν την επιχειρηματολογία που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός προκειμένου να καταρρίψει τους λανθασμένους ισχυρισμούς των μαθητών του. Πιο συγκεκριμένα, οι ερευνητές εστιάζουν στο περιεχόμενο και στη δομή της επιχειρηματολογίας των καθηγητών και στο είδος των αντιπαραδειγμάτων που επιστρατεύουν. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με το μοντέλο του Toulmin και τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν δύο μορφές επιχειρηματολογίας κατά την απόρριψη ισχυρισμών: τη χρήση αντιπαραδειγμάτων και τη χρήση ενός γενικού κανόνα ή θεωρήματος. Η χρήση θεωρημάτων θεωρείται ως ισχυρότερο εργαλείο απόρριψης ισχυρισμών, ενώ τα αντιπαραδείγματα χρησιμοποιούνται μόνο ως συμπληρωματικά των θεωρημάτων αυτών. Η συγκεκριμένη έρευνα πραγματοποιήθηκε σε υποψήφιους μεταπτυχιακούς φοιτητές σύμφωνα με τις απαντήσεις που έδωσαν στις εξετάσεις εισαγωγής τους σε Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών.

Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν παραδείγματα και μη παραδείγματα κατά τη διδασκαλία εννοιών. Θεωρούν ότι με τη χρήση παραδειγμάτων επιτυγχάνονται μεγαλύτερα επίπεδα κατανόησης, ενώ τα μη παραδείγματα συμβάλλουν στην επέκταση των συνόρων των εννοιών αυτών (Bills et al., 2006). Τα παραδείγματα αποτελούν ένα δυνατό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού, συγχρόνως όμως η χρήση τους ελλοχεύει πολλούς κινδύνους και για το λόγο αυτό ο καθηγητής πρέπει να είναι προσεκτικός όταν επιλέγει ποια παραδείγματα θα παρουσιάσει. Πρώτον, οι μαθητές τείνουν να γενικεύουν αφελώς, θεωρώντας λανθασμένα ότι άσχετες ιδιότητες ενός παραδείγματος μιας έννοιας μπορούν να γενικευθούν για κάθε αντιπρόσωπο της έννοιας αυτής. Η Hershkowitz (1990), αναφέρει ότι υπάρχει η τάση να θεμελιώνονται πολλές φορές μαθηματικές έννοιες όχι μέσω θεωρημάτων ή ορισμών, αλλά με τη χρήση πρωτοτυπικών παραδειγμάτων. Από την προσέγγιση αυτή δημιουργούνται πολλές παρανοήσεις και λάθη που προέρχονται από την γενίκευση συμπερασμάτων που προέρχονται μόνο από μεμονωμένα παραδείγματα. Επιπρόσθετα, πολλοί μαθητές θεωρούν τα αντιπαραδείγματα ως μεμονωμένες περιπτώσεις ή εξαιρέσεις που μπορούν να παραληφθούν (Watson & Mason, 2002). Ακόμα, εγκυμονεί ο κίνδυνος να θεωρήσουν τα παραδείγματα ως επιπλέον στοιχεία τα οποία πρέπει να αποστηθίσουν, αντί ως αντικείμενα που απεικονίζουν τη σημασία διάφορων όρων ή τις ιδιότητες μιας έννοιας (Watson & Mason, 2002). Επίσης, οι μαθητές μπορεί να χρησιμοποιούν τα λυμένα παραδείγματα που λαμβάνουν από τον καθηγητή ή από τα σχολικά εγχειρίδια ως απλά πρότυπα που πρέπει να ακολουθήσουν απλά αλλάζοντας κάποια νούμερα και όχι σαν οδηγούς του πώς να διαχειρίζονται αναπαραστάσεις ή να συνθέτουν δεδομένα για να φτάσουν σε λύσεις (Anthony, 1994).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι οδηγίες που προτείνουν οι Weber, Porter, και Housman (2008), για τον τρόπο που πρέπει να παρουσιάζονται τα παραδείγματα από τους καθηγητές προκειμένου να αποφεύγονται οι παραπάνω κίνδυνοι. Στην έρευνά τους παρουσιάζουν τα εξής βασικά στάδια:

- Αρχικά, ο καθηγητής παρουσιάζει ένα πρωτοτυπικό παράδειγμα. Προκειμένου ωστόσο να εξαλειφθεί ο κίνδυνος προσκόλλησης των μαθητών σε άσχετα χαρακτηριστικά, παρουσιάζεται στη συνέχεια ποικιλία παραδειγμάτων που δεν περιέχουν όλα τα άσχετα αυτά χαρακτηριστικά (Sowder, 1980).

- Έπειτα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να σκεφτούν κάποια αντιπαραδείγματα. Μπορεί ακόμα να γίνει αντιπαράθεση ενός παραδείγματος και ενός αντιπαραδείγματος που διαφέρουν σε ένα μόνο χαρακτηριστικό. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές οδηγούνται στο να εστιάσουν στα επιθυμητά χαρακτηριστικά της έννοιας (Sowder, 1980).
- Στη συνέχεια, ο καθηγητής εκτός του να περιγράφει γιατί τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί είναι ή δεν είναι αντιπρόσωποι της έννοιας που παρουσιάζει, μπορεί ακόμα να απαιτήσει έναν πιο ενεργό ρόλο από τους μαθητές. Μπορεί να τους παρουσιάσει τρόπους ή τεχνικές με τους οποίες οι μαθητές να μπορούν οι ίδιοι να παράγουν παρόμοια παραδείγματα ή αντιπαραδείγματα της έννοιας (Peled & Zaslavsky, 1997). Με τον τρόπο αυτό κάποιοι μαθητές που μπορεί να μην κατάφεραν να επινοήσουν μόνοι τους παραδείγματα, μπορούν να επωφεληθούν ή ακόμα και να εμπνευστούν από τα παραδείγματα των συμμαθητών τους.
- Τέλος, ο καθηγητής μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να κατασκευάσουν παρόμοια τέτοια παραδείγματα, ή κλάσεις τέτοιων παραδειγμάτων ή ακόμα και να δώσουν παραδείγματα σε εναλλακτικές αναπαραστάσεις (Watson & Mason, 2002), όπως για παράδειγμα σε γράφημα, αν αυτό είναι δυνατό. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να γίνει σύνδεση μεταξύ αναπαραστάσεων, αλλά και να εξερευνηθούν να όρια και το εύρος δυνατοτήτων της έννοιας.

Έναν ακόμη τρόπο με τον οποίο οι καθηγητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα παραδείγματα προκειμένου να εμπλουτίσουν τα γνωστικά σχήματα των μαθητών προτείνει η Alcock (2004). Αφού οι μαθητές εισαχθούν σε μια έννοια, στη συνέχεια μπορεί να τους δοθούν ορισμοί, θεωρήματα ή πληροφορίες που συνδέονται με την έννοια αυτή. Έπειτα, μπορούν να τους δοθούν φύλλα εργασίας που να περιέχουν αντικείμενα και να τους ζητηθεί να προσδιορίσουν τις ιδιότητες που έχουν τα θεωρήματα αυτά. Για παράδειγμα, αφού οι μαθητές εισαχθούν στην έννοια της ακολουθίας, μπορεί στη συνέχεια να τους δοθούν οι ορισμοί της συγκλίνουσας, της φραγμένης και της μονότονης ακολουθίας και να τους ζητηθεί να χαρακτηρίσουν με βάση τους ορισμούς αυτούς ένα σύνολο ακολουθιών που θα περιέχονται σε κάποιο φύλλο εργασίας (Weber et al., 2008). Καταλυτικό ρόλο στην προσέγγιση αυτή διαδραματίζει η συζήτηση που μπορεί να γίνει μεταξύ των μαθητών αλλά και μεταξύ μαθητών και καθηγητή. Με τον τρόπο αυτό δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να κατανοήσουν τους ορισμούς, να εντοπίσουν τυχόν παρανοήσεις που μπορεί να έχουν ή να αναπτύξουν, αλλά και να σχηματίσουν μαθηματικές εικασίες από την αλληλεπίδραση με τους συμμαθητές τους αλλά και μέσω της προσωπικής τους σκέψης. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να μην έχει τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζουν άλλες προσεγγίσεις που περιλαμβάνουν και την παραγωγή παραδειγμάτων από τους ίδιους τους μαθητές, είναι όμως πιο αποτελεσματική όσο αφορά τον χρόνο και εξασφαλίζει ότι οι μαθητές θα δώσουν ιδιαίτερη προσοχή στα παραδείγματα που ο καθηγητής τους θεωρεί σημαντικά (Weber et al., 2008).

Σχεδόν πάντα οι εκπαιδευτικοί έχουν την ευθύνη να δημιουργούν παραδείγματα και οι μαθητές να τα κατανοούν. Οι Watson και Shipman (2008), μελετούν πώς συμβάλλει η παραγωγή παραδειγμάτων από τους ίδιους τους μαθητές στην εκμάθηση νέων εννοιών. Συμπεραίνουν πως η παραγωγή παραδειγμάτων από τους μαθητές μπορεί να οδηγήσει στην κατανόηση νέων μαθηματικών ιδεών, τόσο σε μαθητές υψηλού επιπέδου στα μαθηματικά όσο και σε μαθητές χαμηλότερου επιπέδου. Προκειμένου βέβαια να επιτευχθούν τα επιθυμητά αποτελέσματα σε μια τέτοια προσέγγιση, απαραίτητη προϋπόθεση είναι να υπάρχει στόχος και όχι μια διερεύνηση χωρίς κατεύθυνση, καθώς και να δίνεται βαρύτητα σε δομικά στοιχεία των μαθηματικών, όπως αντίστροφο, γενίκευση, κτλ. Τέλος, κατά την παραγωγή παραδειγμάτων πρέπει να γίνει προσαρμογή των ήδη υπαρχουσών γνώσεων προκειμένου να ικανοποιούν τους νέους περιορισμούς και τις συνθήκες που εισάγονται. Προς την κατεύθυνση αυτή κινείται και η έρευνα των Watson και Mason (2002), οι οποίοι μελετούν επίσης την παραγωγή παραδειγμάτων από τους μαθητές. Από τα αποτελέσματα της έρευνάς τους προκύπτει ότι η διαδικασία παραγωγής παραδειγμάτων αποτελεί μια γνωστική διαδικασία, μια διαδικασία μάθησης, ενώ επιπρόσθετα παρέχει στους μαθητές κίνητρο να εμπλακούν ενεργά και δημιουργικά, καταβάλλοντας μεγάλη προσπάθεια στη δημιουργία μαθηματικών αντικειμένων και ιδεών. Οι Hazzan και Zazkis (1997), εστιάζουν στη σύγχυση που μπορεί να δημιουργηθεί στους μαθητευόμενους όταν τους ζητείται να παράγουν παραδείγματα. Οι συμμετέχοντες της έρευνας, οι οποίοι ήταν δάσκαλοι, κλήθηκαν να φτιάξουν παραδείγματα για τρία διαφορετικά ζητήματα και αναδείχτηκε η δυσκολία τους στη δημιουργία παραδειγμάτων καθώς και ο προβληματισμός τους για τις επιλογές τους. Οι ερευνητές συμπεραίνουν ότι είναι απαραίτητο να καλούνται οι μαθητές να κατασκευάζουν δικά τους παραδείγματα σε όλες τις ηλικίες και βαθμίδες εκπαίδευσης, ενώ ο εκπαιδευτικός οφείλει να τους ενθαρρύνει προς την διατύπωση απόψεων και εικασιών στην τάξη, καθώς και να αξιολογεί και να εμπλουτίζει τα παραδείγματα των μαθητών του.

Ανάλογες διαπιστώσεις προέρχονται και από έρευνα των Dahlberg και Housman (1997), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι ίσως είναι αποτελεσματικότερο να εισάγονται οι μαθητές σε νέες έννοιες μέσω της διαδικασίας παραγωγής παραδειγμάτων. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους δείχνουν ότι με την προσέγγιση αυτή οι μαθητές τους κατάφεραν να αποκτήσουν καλύτερη κατανόηση της έννοιας στην οποία εισάγονταν και να έχουν περισσότερες ευκαιρίες μάθησης. Τη σημασία των παραδειγμάτων στην κατανόηση εννοιών εκθειάζει και ο Paul Halmos: «Μια καλή συλλογή παραδειγμάτων, όσο μεγαλύτερη γίνεται, είναι απαραίτητη για την ξεκάθαρη κατανόηση της κάθε έννοιας, και όταν θέλω να μάθω κάτι καινούριο, η πρώτη μου δουλειά είναι να κατασκευάσω ένα.» (Halmos, 1983). Την επίδραση της μάθησης μέσω παραγωγής παραδειγμάτων από τους μαθητές στην παραγωγή αποδείξεων διερευνούν οι Iannone, Inglis, Mejia-Ramos, Simpson, και Weber (2011). Αντίθετα με τη βιβλιογραφία, τα ευρήματά τους δεν υποστηρίζουν την πεποίθηση ότι η παραγωγή παραδειγμάτων από τους μαθητές είναι μια αποτελεσματική μέθοδος για έργα παραγωγής αποδείξεων. Μάλιστα τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών αυτών φάνηκε να είναι σχεδόν όμοια με εκείνων που μελέτησαν λυμένα παραδείγματα αντί να παράγουν δικά τους. Παρόμοια αδυναμία παραγωγής αξιοσημείωτων αποτελεσμάτων παρατηρούν και στην επίδραση της μεθόδου της παραγωγής παραδειγμάτων και στην κατανόηση νέων εννοιών. Καταλήγουν μάλιστα στην αμφισβήτηση των αποτελεσμάτων της έρευνας των Dahlberg και Housman (1997), επικαλούμενοι ότι το δείγμα της έρευνας αυτής ήταν υπερβολικά μικρό ώστε να μπορούν να εξαχθούν σωστά συμπεράσματα.

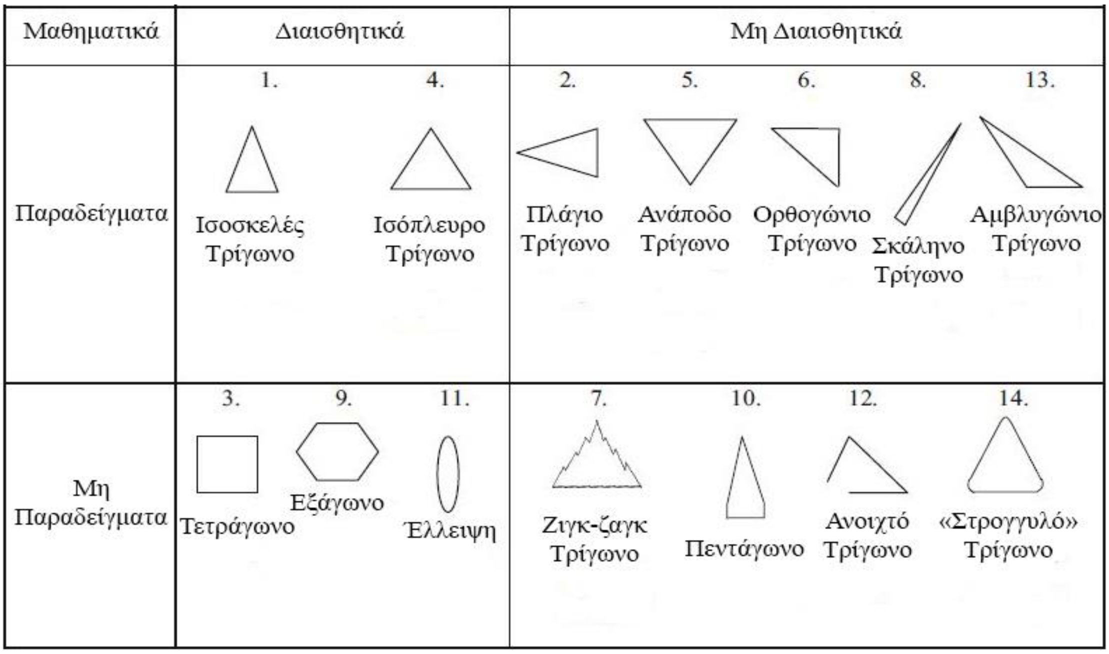
1.4. Ταξινομήσεις των Παραδειγμάτων

Όλα τα παραδείγματα δεν είναι εξίσου σημαντικά, ούτε συμβάλλουν το ίδιο στην κατανόηση ενός ατόμου. Η Michener (1978) διακρίνει τις εξής κατηγορίες παραδειγμάτων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά: αρχικά, υπάρχουν τα *παραδείγματα εκκίνησης (startup examples)*, τα οποία βοηθούν το μαθητευόμενο να προσεγγίσει μια νέα έννοια, ή δίνουν κίνητρο για έναρξη νέου θέματος. Τα παραδείγματα εκκίνησης είναι παραδείγματα που μπορούν να κατανοηθούν αυτόνομα, να αναχθούν στη γενικότερη περίπτωση και να παρέχουν μια απλή εικόνα. Έπειτα, υπάρχουν τα *παραδείγματα αναφοράς (reference examples)*, τα οποία παρέχουν ένα κοινό σημείο επαφής μέσω του οποίου συνδέονται πολλά αποτελέσματα και έννοιες. Τα παραδείγματα αυτά είναι βασικά, εφαρμόζονται ευρέως και χρησιμοποιούνται για να ελεγχθεί το επίπεδο κατανόησης κάποιου. Υπάρχουν ακόμα τα *παραδείγματα μοντέλου (model examples)* ή *γενεσιουργά παραδείγματα (generic examples)*. Σύμφωνα με τον Balacheff (1988): «Σε ένα γενεσιουργό παράδειγμα γίνονται σαφείς οι λόγοι για τους οποίους είναι αληθής ένας ισχυρισμός, μέσω διαδικασιών και μετασχηματισμών σε ένα αντικείμενο το οποίο δε βρίσκεται εκεί αυτούσιο, αλλά ως χαρακτηριστικός αντιπρόσωπος της κλάσης του.». Τα γενεσιουργά παραδείγματα προτείνουν και συνοψίζουν προσδοκίες και υποθέσεις για αποτελέσματα ή έννοιες και είναι ενδεικτικές της γενικής περίπτωσης. Είναι ευέλικτα ως προς τη δομή, ενώ λόγω της γενικής τους φύσης συνοδεύουν συχνά επιχειρήματα διατήρησης της γενικότητας. Τέλος, υπάρχουν τα *αντιπαραδείγματα (counter-examples)*, τα οποία χρησιμοποιούνται για να απορρίψουν την ορθότητα μιας πρότασης. Πολλά αντιπαραδείγματα αναφέρονται αρκετά συχνά, κάποια άλλα όμως χρησιμοποιούνται μόνο μια φορά για να ενισχύσουν ένα επιχείρημα και μετά εγκαταλείπονται. Τέτοια παραδείγματα που είναι «άπαξ λεγόμενα» σύμφωνα με τον Freudenthal (1973), δημιουργούν ελάχιστες μόνο συνδέσεις με το σύνολο γνώσεων του μαθητευόμενου και για το λόγο αυτό έχουν περιορισμένη επίδραση στη μνήμη και στην κατανόησή του.

Την παραπάνω κατηγοριοποίηση των παραδειγμάτων ήρθαν να συμπληρώσουν οι Zazkis και Leikin (2008), οι οποίες προσθέτουν και τα *μη παραδείγματα (nonexamples)*, παραδείγματα δηλαδή των οποίων λείπει τουλάχιστον ένα από τα κρίσιμα χαρακτηριστικά της έννοιας (Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008). Τα μη παραδείγματα χρησιμοποιούνται για να επισημάνουν τα κύρια χαρακτηριστικά μιας έννοιας, ενώ συμβάλλουν στον καθορισμό των ορίων της, στην υπόδειξη ρητών προϋποθέσεων ώστε να ισχύει ένα θεώρημα και στην ανάδειξη περιπτώσεων όπου μία διαδικασία μπορεί να μην εφαρμόζεται (Κανελλοπούλου, 2012). Όσο πιο πολλά κρίσιμα χαρακτηριστικά της έννοιας λείπουν από ένα μη παράδειγμα, τόσο πιο πιθανό είναι να το δεχτούν οι μαθητές διαισθητικά ως μη παράδειγμα (Tsamir et al., 2008). Η χρήση των μη παραδειγμάτων φαίνεται να ενθαρρύνει τους μαθητές να επιχειρηματολογούν «δυνατά», δίνοντας έτσι την ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να εξετάσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών (Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999). Η παλαιότερη βιβλιογραφία που αφορούσε τα μη παραδείγματα ήταν διχασμένη. Σύμφωνα με τους Petty και Jansson (1987), κάποιοι ερευνητές (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1978; Bruner & Anglin, 1973; Bruner et al., 1953) επιχειρηματολογούσαν ότι η χρήση μη παραδειγμάτων ήταν επιβλαβής και αποτελούσε τροχοπέδη στη μάθηση νέων εννοιών, ενώ κάποιοι άλλοι (Charles, 1980; Cohen & Carpenter, 1980; Cook, 1981; Dienes, 1964; Gage, 1977; Klausmeier, 1976b; Klausmeier, Ghatala, & Frayer, 1974; Shumway & Lester, 1974; Tennyson, 1973) υποστήριζαν ότι τα μη παραδείγματα μπορεί να δράσουν καταλυτικά στην κατάκτηση υψηλότερου επιπέδου κατανόησης. Ωστόσο η πιο σύγχρονη βιβλιογραφία φαίνεται να τάσσεται υπέρ των ευεργετικών επιδράσεων της χρήσης των μη παραδειγμάτων στην εκπαίδευση (Goldenberg & Mason, 2008; Zazkis & Leikin 2008). Τόσο τα μη παραδείγματα όσο και τα αντιπαραδείγματα χρησιμοποιούνται για να τονίσουν τις αντιθέσεις και να εμβαθύνουν στην κατανόηση της ουσίας μαθηματικών.

Μέσα σε ένα μαθηματικό πλαίσιο υπάρχει μικρή διαφορά μεταξύ παραδείγματος και αντιπαραδείγματος. Όλα εξαρτώνται από το πού είναι εστιασμένη η προσοχή μας και σε τί δίνουμε βάση. Έτσι, ένα παράδειγμα μιας έννοιας ή θεωρήματος αποτελεί αντιπαράδειγμα μιας παραλλαγής του ορισμού ή του θεωρήματος και το αντίστροφο. Αυτό που έχει σημασία λοιπόν είναι να γνωρίζουν οι μαθητές ποια στοιχεία ενός αντικειμένου το καθιστούν παράδειγμα και ποια χαρακτηριστικά του μπορούν να μεταβληθούν ώστε να δημιουργηθεί μια διαφορετική κλάση παραδειγμάτων ή αντιπαραδειγμάτων. Για παράδειγμα, το 0,9 αποτελεί μη παράδειγμα αριθμού του οποίου το τετράγωνο είναι μεγαλύτερο του εαυτού του, παράδειγμα ενός αριθμού που είναι θετικός που όμως το τετράγωνό του δεν είναι μεγαλύτερο του 1 ή αντιπαράδειγμα του ισχυρισμού ότι υψώνοντας στο τετράγωνο προκύπτει πάντα μεγαλύτερο αποτέλεσμα (Goldenberg & Mason, 2008).

Οι Bills et al. (2006), πραγματοποιούν μια παιδαγωγική διάκριση ανάμεσα σε *παραδείγματα έννοιας (examples of a concept)* και σε *παραδείγματα εφαρμογής μιας διαδικασίας (examples of the application of a procedure)*. Τα πρώτα αφορούν παραδείγματα τριγώνων και πολυωνύμων, ενώ τα δεύτερα παραδείγματα όπως η εύρεση του εμβαδού ενός τριγώνου ή η εύρεση των ριζών ενός πολυωνύμου. Οι ίδιοι ερευνητές επισημαίνουν ότι οι διαχωρισμοί αυτοί δεν είναι ακριβείς ούτε ξεκάθαροι, μιας και ο ίδιος *συμβολισμός (notation)* μπορεί να θεωρηθεί τόσο ως αντικείμενο όσο και ως διαδικασία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η έκφραση $y = 2x + 3$, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως παράδειγμα μιας γραμμικής εξίσωσης, αλλά και ως παράδειγμα κατασκευής του γραφήματος μιας συνάρτησης (Gray & Tall, 1994). Τα μη παραδείγματα μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες. Τα *διαισθητικά μη παραδείγματα (intuitive nonexamples)*, δηλαδή τα μη παραδείγματα τα οποία οι μαθητές αναγνωρίζουν αμέσως μέσω της διαίσθησής τους και τα *μη διαισθητικά μη παραδείγματα (non-intuitive nonexamples)*, τα οποία μοιάζουν με τα παραδείγματα και για το λόγο αυτό συχνά αναγνωρίζονται λανθασμένα ως τέτοια. Χαρακτηριστικά, παρουσιάζονται παρακάτω τα παραδείγματα και μη παραδείγματα, στην περίπτωση κατασκευής τριγώνου, που προκύπτουν από την έρευνα των Tsamir, Tirosh, και Levenson (2008):



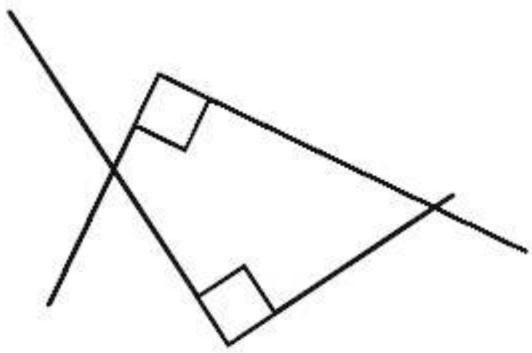
Σχήμα 1. Κατηγορίες Διαισθητικών και Μη Διαισθητικών Παραδειγμάτων και Μη Παραδειγμάτων

Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας δείχνουν ότι απαιτείται η έκθεση των μαθητών σε ποικιλία μη παραδειγμάτων, τόσο διαισθητικών όσο και μη διαισθητικών.

Οι Peled και Zaslavsky (1997) αναλύοντας τα αποτελέσματα των ερευνών τους, διαχωρίζουν τρία είδη αντιπαραδειγμάτων ως προς την επεξηγηματική τους ισχύ, τα *συγκεκριμένα (specific), ημι-γενικά (semi-general)* και *γενικά (general)* αντιπαραδείγματα. Συγκεκριμένα είναι τα αντιπαραδείγματα που αντιφάσκουν ως προς τον ισχυρισμό, χωρίς όμως να δίνουν ενδείξεις για τον τρόπο κατασκευής παρεμφερών αντιπαραδειγμάτων. Αν έχουμε για παράδειγμα τον ισχυρισμό: «Δύο ορθογώνια με ανάλογες διαγώνιες είναι όμοια», τότε ένα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα θα ήταν η κατασκευή δύο ορθογωνίων με διαφορετικές διαστάσεις που να έχουν ίσες διαγώνιους. Τα ημι-γενικά αντιπαραδείγματα παρέχουν κάποιες πληροφορίες για το σχηματισμό άλλων παραδειγμάτων, χωρίς να καλύπτουν όμως όλες τις περιπτώσεις. Για τον ισχυρισμό που αναφέραμε, ένα ημι-γενικό αντιπαράδειγμα θα ήταν η σχεδίαση δύο ορθογώνιων με ίσες διαγώνιους και με την αναφορά ότι η γωνία μεταξύ των διαγωνίων του δεύτερου ορθογωνίου είναι διπλάσια από εκείνη του πρώτου. Γενικά αντιπαραδείγματα είναι εκείνα τα οποία εξηγούν και διαφωτίζουν το λόγο για τον οποίο μια συγκεκριμένη εικασία δεν είναι ορθή, καθώς και στρατηγικές για την παραγωγή περαιτέρω αντιπαραδειγμάτων. Σχετικά με τον παραπάνω ισχυρισμό, ένα γενικό αντιπαράδειγμα, θα περιλάμβανε και αιτιολόγηση του γιατί η γωνία μεταξύ των διαγωνίων του δεύτερου ορθογωνίου είναι διπλάσια από αυτήν του πρώτου.

Οι Zodik και Zaslavsky (2008) επιδίωξαν να χαρακτηρίσουν τις υποκείμενες θεωρήσεις των καθηγητών μαθηματικών όταν επέλεγαν ή παρήγαγαν παραδείγματα, κατά τη διδασκαλία μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η έρευνά τους αποτελεί μελέτη περίπτωσης πέντε έμπειρων εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ τα δεδομένα συλλέχθηκαν από την παρακολούθηση 54 ωρών διδασκαλίας των πέντε αυτών καθηγητών. Οι μαθητές ήταν ηλικίας 13-15 ετών, ενώ πριν και μετά την παρακολούθηση των μαθημάτων πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με του καθηγητές για να ξεκαθαριστούν το πλαίσιο, οι στόχοι και οι βασικές θεωρήσεις τους.

Αρχικά διαχωρίζουν τα παραδείγματα ως προς τον βαθμό σχεδιασμού τους σε *προσχεδιασμένα (pre-planned)*, σε εκείνα δηλαδή στα οποία υπήρχε κάποια ένδειξη ότι ο εκπαιδευτικός τα είχε σκεφτεί εκ των προτέρων και σκόπευε να τα χρησιμοποιήσει στο μάθημα, καθώς και σε *αυθόρμητα (spontaneous)*, σε παραδείγματα δηλαδή που υπάρχει αποδεικτικό στοιχείο ότι η επιλογή τους στηρίχθηκε σε απόφαση της στιγμής. Η χρήση αυθόρμητων παραδειγμάτων ή αντιπαραδειγμάτων συμβαίνει συνήθως ως απάντηση σε ερωτήματα των μαθητών, ή όταν ο εκπαιδευτικός διαισθάνεται ότι οι μαθητές δεν έχουν αντιληφθεί βασικές ιδέες ή δεν έχει επιτευχθεί ο στόχος του μαθήματος. Οι εκπαιδευτικοί αποκτούν συστηματικά εμπειρίες στη γένεση αυθόρμητων παραδειγμάτων αντιμετωπίζοντας πραγματικές ή υποθετικές καταστάσεις μέσα στην τάξη και πραγματοποιώντας αναστοχασμό πάνω σε αυτές. Από τα παραδείγματα που παρήχθησαν από τον εκπαιδευτικό 52,5% αυτών ήταν προσχεδιασμένα, ενώ 47,5% αυθόρμητα. Μία περίπτωση αυθόρμητου παραδείγματος συνέβη όταν μία καθηγήτρια, είχε μεν ξεκάθαρο πλάνο μαθήματος δεν είχε όμως προετοιμάσει συγκεκριμένα παραδείγματα που να εντάξει σε αυτό. Έτσι λοιπόν κατασκεύασε παραδείγματα βήμα βήμα μπροστά στους μαθητές της, διορθώνοντας κάποια σημεία που δεν ταίριαζαν μέχρις ότου καταλήξει στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Στόχος της ήταν να δείξει ότι μια πολύπλοκη αλγεβρική έκφραση μπορεί να καταλήξει σε έναν απλό αριθμό. Για τον λόγο αυτό έφτιαξε την παράσταση $\frac{3\alpha^4 b^2 c^3 \cdot 4\alpha^3 b}{36\alpha^7 b^3 c^3}$ που κατέληγε στον αριθμό $\frac{1}{3}$. Μια ακόμα περίπτωση αυθόρμητου παραδείγματος είναι το αντιπαράδειγμα που χρησιμοποίησε μία καθηγήτρια σε ένα μάθημα Γεωμετρίας, ως απάντηση στο λανθασμένο ισχυρισμό ενός μαθητή ότι ένα τετράπλευρο με δυο απέναντι γωνίες ορθές είναι ρόμβος. Προκειμένου να πείσει το μαθητή ότι ο ισχυρισμός του δεν ήταν σωστός, δημιούργησε εκείνη τη στιγμή ένα αντιπαράδειγμα, φτιάχνοντας δυο ορθές γωνίες και μετακινώντας τις μέχρι να τμηθούν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2:



Σχήμα 2. Αυθόρμητο Παράδειγμα

Ως προς τις θεωρήσεις των καθηγητών για την επιλογή παραδειγμάτων, διακρίνουν τις ακόλουθες έξι κατηγορίες:

- *Ξεκινώντας με μια απλή ή οικεία περίπτωση (start with a simple or familiar case)*. Ο καθηγητής χρησιμοποιεί ένα παράδειγμα με την απλούστερη δυνατή μορφή και σταδιακά αυξάνει το επίπεδο δυσκολίας ή περιπλοκότητάς του. Το 40,7% των παραδειγμάτων που αναγνωρίστηκαν ανήκουν στην κατηγορία αυτή.

- *Αντιμετωπίζοντας τα λάθη των μαθητών (attend to students' errors).* Οι καθηγητές κατασκευάζουν παραδείγματα, ή αντιπαραδείγματα προκειμένου να αντιμετωπίσουν παρανοήσεις ή άλλες δυσκολίες που ξέρουν ότι θα έχουν οι μαθητές. Το 17,9% των παραδειγμάτων ανήκε σε αυτή την κατηγορία.
- *Δίνοντας προσοχή σε επιθυμητά χαρακτηριστικά (draw attention to relevant features).* Εδώ ο στόχος είναι να μειωθεί ο «θόρυβος» του παραδείγματος, των χαρακτηριστικών δηλαδή εκείνων που μπορεί να αποσπάσουν την προσοχή από τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του παραδείγματος. Εδώ βρίσκεται το 14,3% των παραδειγμάτων.
- *Αποδίδοντας γενικότητα μέσω τυχαίων επιλογών (convey generality by "random" choice).* Σε κάποιες περιπτώσεις η επιλογή τυχαίων παραδειγμάτων μπορεί να συμβάλει στην απόδοση γενίκευσης μέσω του συγκεκριμένου παραδείγματος, ενώ σε κάποιες άλλες περιπτώσεις μπορεί να αποτελέσει τροχοπέδη για την επίτευξή της. 14,3% των παραδειγμάτων ανήκαν εδώ.
- *Περιέχοντας ασυνήθιστες περιπτώσεις (include uncommon cases).* Ασυνήθιστες θεωρούνται είτε οι περιπτώσεις που έχουν δυσκολίες από μαθηματικής πλευράς, είτε περιπτώσεις οι οποίες είναι ιδιαίτερες από διδακτικής σκοπιάς. Αναγνωρίστηκε ότι 8,4% των παραδειγμάτων ανήκαν στην κατηγορία αυτή.
- *Διατηρώντας την αχρείαστη εργασία στο ελάχιστο (keeping unnecessary work to minimum).* Επιλέγονται παραδείγματα τα οποία να μην περιέχουν χρονοβόρες ή αχρείαστες πράξεις και διαδικασίες, ώστε να γίνεται εστίαση στην ουσία. 4,2% των παραδειγμάτων ανήκαν εδώ.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, τα αντιπαραδείγματα αποτελούν ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο του εκπαιδευτικού, ένα εργαλείο που του επιτρέπει να δημιουργεί γνωστικές συγκρούσεις. Τί συμβαίνει όμως όταν τα αντιπαραδείγματα που επιλέγει ο εκπαιδευτικός αποτυγχάνουν; Όταν δεν είναι επαρκή ή ικανά να δημιουργήσουν την απαραίτητη γνωστική σύγκρουση; Σε αυτή την περίπτωση, σύμφωνα με τους Zazkis και Chernoff (2008), απαιτείται ένα παράδειγμα μεταστροφής.

Οι ίδιοι ορίζουν ότι ένα παράδειγμα θεωρείται ως *παράδειγμα μεταστροφής (pivotal example)*: «Αν δημιουργεί ένα σημείο αλλαγής στη γνωστική οπτική του μαθητή ή στις προσεγγίσεις που χρησιμοποιεί κατά την επίλυση προβλημάτων. Με άλλα λόγια είναι τα παραδείγματα που βοηθούν τους μαθητές να επιτύχουν τη λεγόμενη εννοιολογική αλλαγή.». Επιπλέον, σύμφωνα ξανά με τους

Zazkis και Chernoff (2008): «Όταν ένα παράδειγμα μεταστροφής βοηθάει στην επίλυση συγκρούσεων, αναφερόμαστε σε αυτό ως *παράδειγμα γεφύρωσης (bridging example)*, δηλαδή ένα παράδειγμα που χρησιμεύει ως γέφυρα από τις αρχικές (αφελείς, λανθασμένες ή ατελείς) θεωρήσεις του μαθητή σε ορθές μαθηματικά θεωρήσεις.».

Αντίθετα με το αντιπαράδειγμα το οποίο αποτελεί μαθηματική έννοια, το παράδειγμα μεταστροφής αποτελεί παιδαγωγική έννοια. Επιπρόσθετα, ένα παράδειγμα μπορεί να καθοριστεί εκ των προτέρων ως αντιπαράδειγμα, όταν δηλαδή ικανοποιεί τους όρους μιας εικασίας οδηγεί όμως σε άτοπο συμπέρασμα. Από την άλλη μεριά, ένα παράδειγμα δεν μπορεί να καθοριστεί ως παράδειγμα μεταστροφής ή παράδειγμα γεφύρωσης a-priori, προτού εφαρμοστεί και αναγνωριστεί σε πραγματικές συνθήκες (Zazkis & Chernoff, 2008).

Προκειμένου ένα παράδειγμα να δρα ως παράδειγμα μεταστροφής, θα πρέπει να εντάσσεται μέσα στο χώρο παραδειγμάτων ενός ατόμου, αλλά ταυτόχρονα να επεκτείνει και τα όριά του (Zazkis & Chernoff, 2008). Με αλλά λόγια να είναι ένα παράδειγμα αντιπροσωπευτικό, προσβάσιμο και διαθέσιμο, που όμως να βρίσκεται εκτός του προσωπικού χώρου παραδειγμάτων του. Στο πλαίσιο αυτό, παραδείγματα που αποτυγχάνουν να δράσουν ως παραδείγματα μεταστροφής, είναι εκείνα τα οποία βρίσκονται μεν στους χώρους συμβατικών παραδειγμάτων του εκπαιδευτικού, αλλά βρίσκονται εκτός του προσωπικού χώρου παραδειγμάτων του του μαθητή (Zazkis & Chernoff, 2008). Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει ότι η έννοια των παραδειγμάτων μεταστροφής και γεφύρωσης καθίσταται εξαρτημένη από τον μαθητή, αφού ένα παράδειγμα που μπορεί να λειτουργεί ως παράδειγμα μεταστροφής για έναν μαθητή είναι πιθανόν να αποτυγχάνει να βοηθήσει κάποιον άλλον (Zazkis & Chernoff, 2008).

1.5. Χώροι Παραδειγμάτων και Χαρακτηριστικά τους

Οι Watson και Mason (2005) υποστηρίζουν ότι συνήθως τα παραδείγματα δεν είναι απομονωμένα, αλλά γίνονται αντιληπτά και βιώνονται ως μέλη δομημένων χώρων, οι οποίοι ονομάζονται *χώροι παραδειγμάτων (example spaces)*. Οι χώροι παραδειγμάτων είναι συλλογές από παραδείγματα τα οποία πληρούν μία συγκεκριμένη λειτουργία, στην οποία κάποιος έχει πρόσβαση. Επηρεάζονται από τη μνήμη και την προσωπική εμπειρία του ατόμου, ενώ σε επίπεδο μάθησης διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στο τί μπορεί να καταλάβει ο μαθητής όταν του δίνεται ένα έργο, στο τί είδους δραστηριότητες εμπλέκεται και στο πώς ερμηνεύει τα λόγια και τις ενέργειες του καθηγητή. Οι χώροι παραδειγμάτων δεν είναι λίστες, αλλά έχουν ιδιοσυγκρασιακή δομή στον τρόπο που τα μέλη και οι κλάσεις συνδέονται μεταξύ τους. Το περιεχόμενο και η δομή τους είναι ατομικά και εξαρτώνται από την εκάστοτε κατάσταση. Έτσι λοιπόν μπορεί να πραγματοποιηθεί πρόσβαση σε όμοια δομημένους χώρους με διαφορετικούς τρόπους. (Bills et al., 2006).

Οι χώροι παραδειγμάτων δεν είναι μια έννοια που έχει προκύψει πρόσφατα. Η Michener (1978) χρησιμοποίησε τον όρο για να αναφερθεί σε έναν καθολικό χώρο στον κόσμο των μαθηματικών. Αργότερα, οι Zaslavsky και Peled (1996) μελετώντας τις δυσκολίες των καθηγητών κατά την παραγωγή αντιπαραδειγμάτων, χρησιμοποιούν τους χώρους παραδειγμάτων για να αναφερθούν στη συλλογή μαθηματικών παραδειγμάτων στην οποία έχει πρόσβαση ένα άτομο. Οι Watson και Mason (2005) προωθούν τον όρο χώροι παραδειγμάτων και αναπτύσσουν τεχνικές ώστε οι μαθητές να μπορούν να ενημερωθούν και να εμπλουτίσουν τους χώρους τους οποίους μπορεί να χρησιμοποιήσουν στο μέλλον (Goldenberg & Mason, 2008).

Κατά την εξέλιξη του μαθήματος συχνά εγείρεται η ανάγκη να δράσει ο εκπαιδευτικός στη στιγμή ώστε να βρει ένα κατάλληλο παράδειγμα ώστε να μπορέσει να διαχειριστεί κάθε δυσκολία που παρουσιάζεται. Ένα πλούσιο και προσπελάσιμο πεδίο παραδειγμάτων μπορεί να διαδραματίσει καταλυτικό ρόλο στις στιγμιαίες επιλογές που κάνει ένας εκπαιδευτικός και να αυξήσει την ευελιξία τους. Παράλληλα σε περιστατικά που είναι μη αναμενόμενα, ο εκπαιδευτικός πολλές φορές βρίσκεται αντιμέτωπος με την ανάγκη παραγωγής επιπρόσθετων και διαφορετικών παραδειγμάτων από αυτά που είχε σχεδιάσει. Αυτή η ανάγκη μετατρέπεται σε μαθησιακή εμπειρία για τον εκπαιδευτικό, ο οποίος με τον τρόπο αυτό αναπτύσσει τη γνώση του για τέτοιες ανάγκες, αλλά που και αφομοιώνει τα παραδείγματα που απαιτούνται την ώρα του μαθήματος και το πώς να τα παράγει (Zodik & Zaslavsky, 2008).

Σκοπός κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, είναι οι μαθητές να διερευνούν, να αναδιοργανώνουν και να διευρύνουν το χώρο παραδειγμάτων τους. Επίσης, να αποκτούν άνεση μαζί του καθώς και με τις σχέσεις των στοιχείων που τον απαρτίζουν. Αλληλεπιδρώντας με επεκτάσεις του χώρου παραδειγμάτων του ο μαθητής μπορεί, εφόσον οδηγηθεί σωστά, να διευρύνει τους νοητικούς ορίζοντές του, καθώς και να υιοθετήσει και να εκτιμήσει νέες έννοιες (Watson & Mason, 2005). Οι χώροι παραδειγμάτων μπορούν να εξερευνηθούν ή να επεκταθούν ψάχνοντας ιδιαίτερα παραδείγματα που θα λειτουργήσουν ως γέφυρες σε νέες κλάσεις, με χρήση νέων περιορισμών προκειμένου να δοθεί έμφαση σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων, αλλάζοντας μια κλειστή απάντηση σε ανοιχτή, ή βλέποντας την απειρία μιας κλάσης η οποία αναπαρίσταται από κάτι συγκεκριμένο (Bills et al., 2006).

Οι Watson και Mason διαχωρίζουν τα εξής τέσσερα είδη των χώρων παραδειγμάτων:

- Οι *τοποθετημένοι (τοπικοί), προσωπικοί (ατομικοί) χώροι παραδειγμάτων (situated (local), personal (individual) example spaces)*, οι οποίοι ενεργοποιούνται από κάποιο έργο, νύξη, το περιβάλλον, καθώς και από πρόσφατη εμπειρία.

- Ο *προσωπικός εν δυνάμει χώρος παραδειγμάτων (personal potential example space)*, από τον οποίο προκύπτει ένας τοπικός χώρος, που αποτελείται από την προηγούμενη εμπειρία του ατόμου και μπορεί να μην είναι δομημένος με τρόπο που να επιτρέπει εύκολη πρόσβαση.
- Ο *συμβατικός χώρος παραδειγμάτων (conventional example space)*, όπως γίνεται κατανοητός από τους μαθηματικούς και όπως παρουσιάζεται στα εγχειρίδια, στον οποίο ελπίζει ο δάσκαλος να εισάγει τους μαθητές του. Οι συμβατικοί χώροι παραδειγμάτων διαχωρίζονται περαιτέρω σε ¨ειδικούς¨, οι οποίοι παρουσιάζουν πλούσια ποικιλία εξειδικευμένης γνώσης και σε ¨διδακτικούς¨, οι οποίοι παρουσιάζονται στα εγχειρίδια και χρησιμοποιούνται κυρίως στη διδασκαλία. Επίσης, οι "ειδικοί" συμβατικοί χώροι περιέχουν τόσο συμβατικά όσο και μη συμβατικά παραδείγματα (Zazkis & Leikin, 2008).
- Ο *συλλογικός και τοποθετημένος χώρος παραδειγμάτων (collective and situated example space)*, αφορά μία τάξη ή άλλη ομάδα σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, η οποία δρα ως ένας τοπικός συμβατικός χώρος.

Οι Watson και Mason (2005) χρησιμοποιούν τον όρο *διαστάσεις δυνατής αλλαγής (dimensions of possible variation)*, για να αναφερθούν στα χαρακτηριστικά ενός παραδείγματος που οι μαθητές αναγνωρίζουν ως κατάλληλα για αλλαγή, χωρίς να χαθεί η γενικότητά του. Αυτή η συνειδητοποίηση μπορεί να είναι άμεση ή να ενεργοποιηθεί από το δάσκαλο και αναφέρεται ως *εύρος της επιτρεπόμενης αλλαγής (range of permissible change)*. Αν πάρουμε για παράδειγμα το $\sqrt{2}$, το εύρος της επιτρεπόμενης αλλαγής ώστε να παραμείνει άρρητος αριθμός είναι να το πολλαπλασιάσουμε με οποιονδήποτε ρητό αριθμό εκτός του μηδενός, ή να του προσθέσουμε οποιονδήποτε ρητό αριθμό, είτε να αλλάξουμε τον αριθμό που βρίσκεται μέσα στην ρίζα και να τοποθετήσουμε οποιονδήποτε μη ακέραιο ρητό αριθμό.

Ο χαρακτηρισμός της αλλαγής ως «δυνατής», εισήχθη ως υπενθύμιση ότι διαφορετικά άτομα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές μπορεί να αντιληφθούν διαφορετικές διαστάσεις οι οποίες μπορεί να αλλάξουν. Ο όρος «εύρος των επιτρεπόμενων αλλαγών» προστέθηκε γιατί οι άνθρωποι έχουν περιορισμένη αίσθηση του πεδίου εφαρμογής της αλλαγής σε κάποια διάσταση. Σίγουρα οι εκπαιδευτικοί γνωρίζουν περισσότερες διαστάσεις και διαθέτουν μεγαλύτερο εύρος των επιτρεπόμενων αλλαγών από τους μαθητές τους.

Οι Watson και Mason (2005) μελετούν με ποιους τρόπους αποθηκεύονται τα παραδείγματα και πώς πραγματοποιείται η πρόσβαση σε αυτά. Προκειμένου να εξηγήσουν μάλιστα το μηχανισμό αυτό, χρησιμοποιούν τη μεταφορά του ντουλαπιού. Σύμφωνα με αυτήν, τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται συχνά βρίσκονται στο μπροστά μέρος, ενώ εκείνα που δε χρησιμοποιούνται τόσο βρίσκονται πιο πίσω, περιμένοντας την ευκαιρία να χρησιμοποιηθούν. Κάποια παραδείγματα μπορεί να αποκτήθηκαν κατά την εμπλοκή με ένα ενδιαφέρον αντικείμενο, ενώ άλλα κατά την πρώτη επαφή με έναν νέο ορισμό, θεώρημα ή τεχνική.

Τα παραδείγματα όμως παράχθηκαν με ευκολία ή με προσπάθεια; Ήταν αποτέλεσμα στιγμιαίας έμπνευσης ή επιλέχθηκαν από ένα πλούσιο οπλοστάσιο; Πραγματοποιείται η πρόσβαση στα παραδείγματα πάντα με τον ίδιο τρόπο; Σύμφωνα με τους Watson και Mason (2005), διαφορετικά παραδείγματα είναι διαθέσιμα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές σύμφωνα με το τί τα πυροδοτεί, ή για να χρησιμοποιήσουμε τη μεταφορά του ντουλαπιού, το τί εμφανίζεται στο μπροστινό μέρος του ντουλαπιού εξαρτάται από την τρέχουσα κατάσταση και από το τί χρησιμοποιήθηκε πρόσφατα. Με άλλα λόγια υπάρχει ανά πάσα στιγμή ένας *προσβάσιμος χώρος παραδειγμάτων (accessible example space)*, ο οποίος εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως το πλαίσιο, η αιτία πυροδότησης, αλλά και η κατάσταση του ατόμου. Συμπερασματικά οι χώροι παραδειγμάτων δεν είναι στατικοί, αλλά δυναμικοί και εξελισσόμενοι (Goldenberg & Mason, 2008).

Όπως έχουν επισημάνει οι Schwarz και Hershkowitz (1999), Tsamir et al. (2008) και Rowland (2008), η παιδαγωγική αποτελεσματικότητα των παραδειγμάτων εξαρτάται από την ευκρίνεια και τη σαφήνειά τους. Παραδείγματος χάριν, σε ένα μάθημα ο δάσκαλος διατύπωσε την εξίσωση ενός κύκλου με ακτίνα 2 και κέντρο το (α, β). Ωστόσο, ο αριθμός 4 στην εξίσωση $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=4$, θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως το διπλάσιο της ακτίνας αλλά και ως το τετράγωνό της. Συνεπώς, η επιλογή του αριθμού 2 για την ακτίνα δημιουργεί μια αχρείαστη ασάφεια και είναι πολύ πιθανόν να προκαλέσει τη δημιουργία ακατάλληλων εικασιών ως προς τη σημασία του 4. Γενικότερα, το γεγονός ότι $2+2=2\times 2$, καθιστά το 2 μια κακή επιλογή παραμέτρου (Goldenberg & Mason, 2008).

Ανάλογα προβλήματα δημιουργούνται όταν χρησιμοποιείται ως παράδειγμα αφαίρεσης το $4-2=2$ αντί του $5-2=3$ για παράδειγμα, ή το σημείο $(1,1)$ στην έννοια των συντεταγμένων (Rowland, 2008). Βέβαια, κάποιος μπορεί εκ προθέσεως να χρησιμοποιεί αυτά τα παραδείγματα προκειμένου να εξετάσει την κατανόηση των μαθητών, “προκαλώντας” τους να κάνουν λάθος συσχετισμούς. Είναι ζωτικής σημασίας λοιπόν κατά την προετοιμασία ή κατά την εξέλιξη μιας διδασκαλίας, ο εκπαιδευτικός να γνωρίζει από ποιο χώρο παραδειγμάτων μπορεί να επιλέξει παραδείγματα και να αποφεύγεται η αυθόρμητη επιλογή (Goldenberg & Mason, 2008).

Οι χώροι παραδειγμάτων αναπτύσσονται αποτελεσματικότερα μέσα σε μια τυπική τάξη, μέσα σε κοινωνικό-μαθηματικές νόρμες (Cobb & Yackel, 1996), οι οποίες ενθαρρύνουν την κατασκευή και αλληλεπίδραση εκ μέρους των μαθητών. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο προωθείται η διατύπωση εικασιών και όχι η εστίαση σε συγκριμένα ή γενικά παραδείγματα (Goldenberg & Mason, 2008). Τα παραδείγματα αναλύονται για εκείνα τα χαρακτηριστικά τους τα οποία συμβάλλουν στην εκτίμηση της γενικότητας, στην κατασκευή και την επιδιόρθωση, καθώς και στους τρόπους που παράγουν νέες κλάσεις. Οι μαθητές γνωρίζοντας ότι όσα λεχθούν θεωρούνται εικασίες που μπορεί να χρειαστούν τροποποιήσεις, οδηγούνται στην αναζήτηση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, αλλά και τρόπων αξιοποίησής τους ώστε να τροποποιήσουν τις εικασίες. Οι μαθητές που ως μέρος της στρατηγικής μάθησης και λύσης προβλημάτων τους ελέγχουν την ομοιότητα και τη διαφορά μαθηματικών αντικειμένων, αναπτύσσουν πλούσιους και εκτεταμένους χώρους παραδειγμάτων, ενώ εκείνοι που απλά αποστηθίζουν τα παραδείγματα απομένουν με περιορισμένους και αφελείς χώρους παραδειγμάτων (Goldenberg & Mason, 2008).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

Η ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

2.1. Η Σημασία της Επικοινωνίας

Η επικοινωνία στην τάξη αποτελεί αδιαμφισβήτητα ένα από τα βασικότερα θεμέλια της μαθησιακής και διδακτικής διαδικασίας. Οι νόρμες που υπαγορεύουν την επικοινωνία και το διάλογο στην τάξη μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με την προέλευση, το πλαίσιο ή το νόημα (ποιος μιλά, ποιο είναι το αντικείμενο της συζήτησης και ποιος ο σκοπός), όμως η επικοινωνία παραμένει ένα κεντρικό χαρακτηριστικό της διδασκαλίας και μάθησης (Imm & Stylianou, 2012). Σύμφωνα με τις Sfard και Kieran (2001), η επικοινωνία μεταξύ δυο προσώπων μπορεί να θεωρείται αποτελεσματική όταν: «οι διαφορετικές δηλώσεις των συνομιλητών προκαλούν απαντήσεις, οι οποίες βρίσκονται σε αρμονία με τις μετα-διαλεκτικές προσδοκίες των ομιλητών». Τοποθετώντας την επικοινωνία στην καρδιά της μαθηματικής εκπαίδευσης αλλάζει όχι μόνο ο τρόπος με τον οποίο διδάσκουμε, αλλά και ο τρόπος με τον οποίο σκεφτόμαστε εμείς οι ίδιοι για το αντικείμενο το οποίο διδάσκεται και για τη μάθηση. Η επικοινωνία δεν πρέπει να θεωρείται ως ένα απλό βοήθημα της σκέψης, αλλά ως ένα φαινόμενο ισοδύναμο της ίδιας της σκέψης (Sfard, 2001).

Δεν έχουν όμως όλα τα είδη επικοινωνίας την ίδια αξία. Σύμφωνα με τον Voigt (1985), οι συζητήσεις ή οι διάλογοι που κατευθύνονται από τον καθηγητή και αποσκοπούν στην καθοδήγηση των μαθητών, αναγκάζουν τους μαθητές να εκφράζουν αυτά που θεωρούν ότι ο καθηγητής αναμένει να ακούσει και όχι να κατασκευάζουν τα δικά τους νοήματα. Τέτοιο είδος μαθηματικού περιβάλλοντος παρέχει ελάχιστες ευκαιρίες στους μαθητές να κατασκευάσουν τα *δικά τους* μαθηματικά (Leikin & Dinur, 2007). Αντίθετα η παραγωγική επικοινωνία στην τάξη των μαθηματικών, είναι δυνατόν να διευκολύνει την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών, την κριτική τους σκέψη, αλλά και να προάγει τη συναδελφικότητα και να ενισχύσει τους δεσμούς που υπάρχουν μεταξύ τους (Lo & Wheatley, 1994; Martino & Maher, 1999). Απαραίτητη όμως προϋπόθεση προκειμένου η επικοινωνία να καθίσταται παραγωγική, είναι η διασφάλιση της συμμετοχής όλων των μαθητών από τον εκπαιδευτικό, ο οποίος είναι ταυτόχρονα υπεύθυνος για τον έλεγχο αυτής της συμμετοχής στις συζητήσεις οι οποίες λαμβάνουν χώρα στην τάξη αλλά και για να κρίνει πότε και με ποιον τρόπο κάποιος από αυτούς χρειάζεται ενθάρρυνση ή βοήθεια για να συμμετέχει. Επιπλέον, ακούγοντας ενεργά τις ιδέες και απόψεις των μαθητών του, ο καθηγητής αναδεικνύει την αξία της συμβολής κάθε μαθητή στη συλλογική σκέψη όλης της τάξης (White, 2003). Συνεπώς, ο ρόλος του καθηγητή μαθηματικών, σύμφωνα και με τις προτάσεις του NCTM

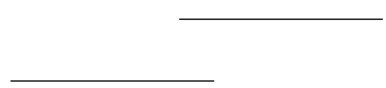
(1991), πρέπει να συμπεριλαμβάνει την έναρξη και την ενορχήστρωση της επικοινωνίας στην τάξη, θέτοντας ερωτήσεις που να προκαλούν, να ενισχύουν και να προάγουν τη σκέψη των μαθητών, ακούγοντας προσεκτικά τις ιδέες τους και ζητώντας τους να διευκρινίζουν και αιτιολογούν τις ιδέες τους (White, 2003).

Ωστόσο, υπάρχουν και έρευνες που υπογραμμίζουν τους κινδύνους της ανεξέλεγκτης επικοινωνίας στην τάξη. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι προθέσεις δίκαιης και ισότιμης κατανομής της επικοινωνίας δεν επιτυγχάνονται. Στην έρευνα που πραγματοποίησαν οι Planas και Gorgorió (2004) σε μια τάξη μαθηματικών, οι ερευνητές παρατήρησαν τη συστηματική άρνηση του καθηγητή της τάξης να δίνει ευκαιρίες σε μαθητές οι οποίοι ήταν μετανάστες, να εξηγήσουν τις απόψεις τους ή να δικαιολογήσουν τις στρατηγικές τους κατά τη λύση προβλημάτων (Hunter & Anthony, 2011). Ακόμα, οι Baxter, Woodward, & Olson (2001) αναδεικνύουν ότι στις τάξεις στις οποίες δίνεται προτεραιότητα στην επικοινωνία και τη συζήτηση, κυριαρχούν στις συζητήσεις τις περισσότερες φορές οι μαθητές υψηλών επιδόσεων, ενώ οι μαθητές χαμηλότερων επιδόσεων παραμένουν παθητικοί (Hunter & Anthony, 2011). Επιπλέον, σύμφωνα με έρευνα της Hand (2010) ελλοχεύει ο κίνδυνος για ανεπιθύμητη μάθηση. Οι μαθητές μπορεί να μάθουν λανθασμένες μαθηματικές στρατηγικές ή ακατάλληλες κοινωνικές συμπεριφορές (Hunter & Anthony, 2011). Παράλληλα, όπως τονίζει η Esmonde (2009b), συχνό είναι το φαινόμενο κάποιοι μαθητές να δυσκολεύονται ή να νιώθουν άβολα όταν τους ζητείται να εκτελέσουν μαθηματικές ενέργειες, όπως να κατασκευάσουν αναπαραστάσεις, να διατυπώσουν επιχειρήματα ή ακόμα και να εξηγήσουν το σκεπτικό τους, ιδιαίτερα αν δεν είναι εξοικειωμένοι να λειτουργούν με αυτόν τον τρόπο (Hunter & Anthony, 2011).

2.2. Ο Ρόλος της Επικοινωνίας στις Κύριες Θεωρίες Μάθησης

Η επικοινωνία βρίσκεται πάντα στο επίκεντρο της διδασκαλίας. Αποτελεί χωρίς αμφιβολία τόσο ζωτικό κομμάτι της τάξης των μαθηματικών, όσο αποτελούν και τα μαθηματικά τα ίδια. Η επικοινωνία αυτή παίρνει διαφορετικές μορφές ανάλογα με τις θεωρήσεις του εκπαιδευτικού για τα μαθηματικά, του τρόπου διδασκαλίας του, του μαθηματικού επιπέδου των μαθητών, καθώς και των κοινωνικομαθηματικών νορμών που έχουν τεθεί στην τάξη από τον εκπαιδευτικό. Σε παλαιότερες περιόδους η έρευνα εστίαζε μόνο στους τρόπους που μπορεί να επικοινωνήσει ο καθηγητής με τους μαθητές προκειμένου να τους μεταφέρει μια ιδέα ή μια έννοια. Πρόσφατα όμως η έρευνα έχει αρχίσει να περιστρέφεται γύρω από τις διαδικασίες της επικοινωνίας *μεταξύ* των μαθητών και της επικοινωνίας *με* τους μαθητές (Sierpinska, 1998). Γύρω από την επικοινωνία που πραγματοποιείται στην τάξη όμως, υπάρχουν διάφορες θεωρήσεις η καθεμιά από τις οποίες σχετίζεται με ένα διαφορετικό θεωρητικό σύστημα. Οι πιο διαδεδομένες είναι η *κονστρουκτιβιστική (constructivist)* θεωρία και η *κοινωνικοπολιτισμική (sociocultural).*

Από την οπτική των κονστρουκτιβιστών η επικοινωνία αποτελεί πρόβλημα. Μάλιστα, υπάρχει δυσκολία ακόμα και στο να περιγραφεί το φαινόμενο της επικοινωνίας, πόσο μάλλον να κατανοηθεί ή να μελετηθεί. Κάτι τέτοιο συμβαίνει, καθώς η βασική μονάδα μελέτης είναι το άτομο ξεχωριστό από το περιβάλλον του, ενώ θέματα στα οποία εστιάζεται η προσοχή είναι οι γνωστικές ικανότητές του και η ανάπτυξη του ψυχολογικού του εαυτού και των νοητικών δομών του. Ακόμα σύμφωνα με τον Piaget (1972), τον κύριο εκφραστή του κονστρουκτιβισμού, η νοητική ανάπτυξη ενός ατόμου, είναι εξαρτώμενη από την βιολογικο-νευρολογική ωρίμανση των εγκεφαλικών λειτουργιών (Sierpinska, 1998). Συνεπώς αλληλεπιδράσεις οποιασδήποτε φύσης με το περιβάλλον δεν μπορούν να επιφέρουν κανένα είδος ανάπτυξης. Κατά τον κονστρουκτιβισμό επικοινωνία μεταξύ δύο ατόμων σημαίνει μεταφορά κωδικοποιημένων σκέψεων μέσω της γλώσσας από το ένα άτομο στο άλλο. Μέσω της γλώσσας όμως, οι σκέψεις αυτές υπόκεινται σε κωδικοποίηση από τον ομιλητή, συνεπώς ο ακροατής οφείλει να αποκωδικοποιήσει το μήνυμα που δέχτηκε μέσω της γλώσσας προκειμένου να αποκτήσει πρόσβαση στις σκέψεις του ομιλητή. Ωστόσο, δεν υπάρχει καμία διασφάλιση ότι η αποκωδικοποίηση θα είναι επιτυχής ή ακριβής, συνεπώς ελλοχεύει η πιθανότητα για σφάλμα και κατ' επέκταση η επικοινωνία καθίσταται θεωρητικά αδύνατη. Δεν είναι καθόλου τυχαίο εξάλλου το σλόγκαν που επαναλαμβάνουν συνεχώς οι κονστρουκτιβιστές, ότι οι μαθητές δεν μπορεί να διδαχτούν με το «να τους πεις κάτι». Προκειμένου να γίνει κατανοητή η κονστρουκτιβιστική οπτική σχετικά με την επικοινωνία, παρατίθεται στη συνέχεια μια γνωστή Πιαζετιανή δραστηριότητα, στην οποία αρχικά ο καθηγητής δείχνει σε ένα παιδί δύο ξυλαράκια ή χάρακες, που είναι ίσα σε μήκος, τοποθετώντας το ένα πάνω στο άλλο ώστε να φανεί η ισότητά τους και στη συνέχεια τα τοποθετεί με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω στο Σχήμα 3:



Σχήμα 3. Δραστηριότητα Piaget

Το παιδί λέει ότι το πάνω αντικείμενο είναι πιο μακρύ από το κάτω. Ο καθηγητής στο σημείο αυτό θα μπορούσε απλά να αμφισβητήσει το επιχείρημα του μαθητή, λέγοντάς του πως αν τα βάλει το ένα πάνω στο άλλο θα είναι τα ίδια. Αν όμως ο καθηγητής είναι κονστρουκτιβιστής, δε θα δώσει καμία λεκτική εξήγηση στον μαθητή, καθώς πιστεύει ότι η πηγή της κατανόησης βρίσκεται στο ίδιο το άτομο. Αντίθετα, χωρίς να εκφράσει λεκτικά κάποιο επιχείρημα θα πιάσει απλά τα αντικείμενα και θα επαναλάβει την κίνηση, όπου βάζει αρχικά το ένα πάνω στο άλλο και στη συνέχεια τα χωρίζει (Sierpinska, 1998). Στο πλαίσιο της θεωρίας αυτής, ο μαθητής θεωρείται ως άτομο το οποίο προσπαθεί να δώσει νόημα στις εμπειρίες του χωρίς να εξετάζεται η σχέση του με το δάσκαλο και με τους υπόλοιπους μαθητές της τάξης. Χωρίς δηλαδή να εξετάζεται η ανάπτυξη της γνώσης σε σχέση με τα φαινόμενα επικοινωνίας στην τάξη των μαθηματικών: «Ο μαθητής μιλά, ο καθηγητής ακούει». Συνεπώς, ένα μεγάλο πρόβλημα είναι η ερμηνεία των φαινομένων στην τάξη. Εστιάζοντας την προσοχή στο μεμονωμένο μαθητή και στις νοητικές του διεργασίες, αγνοούμε ότι αυτός είναι ενταγμένος σε ένα περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσονται φαινόμενα επικοινωνίας που τον επηρεάζουν.

Ο Κονστρουκτιβισμός, απομονώνοντας τις γνωστικές δραστηριότητες από το πλαίσιό τους, απέτυχε να εξηγήσει επαρκώς τα φαινόμενα της μάθησης. Για το λόγο αυτό το κέντρο βάρους της μαθηματικής εκπαίδευσης μετατοπίστηκε στη μελέτη της διαδικασίας της μάθησης ως συμμετοχή σε ορισμένες δραστηριότητες επικοινωνιακού τύπου. Για το Vygotsky, το βασικό εκφραστή της κοινωνικοπολιτισμικής θεωρίας, η επικοινωνία αποτελεί ένα πολιτισμικό γεγονός: Αν υπάρχουν πολιτισμοί υπάρχουν λόγω της δυνατότητας επικοινωνίας και της δέσμευσης ή πρόνοιας για γνώση και αξίες από γενιά σε γενιά. Ταυτόχρονα, η γλώσσα είναι ένα πολιτισμικό εργαλείο, ένα ιδιαίτερο όργανο επικοινωνίας το οποίο συσχετίζεται με τη σκέψη. Η γλώσσα επομένως θεωρείται περισσότερο ως δραστηριότητα, μια κοινωνική πρακτική, όπου τα νοήματα των φράσεων νοηματοδοτούνται από τον τρόπο που τις χρησιμοποιούμε. Έτσι ο Vygotsky εισήγαγε τη Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (ή ZPD), ένα φαινόμενο που αναπτύσσεται μέσα στη σχολική τάξη από τη στιγμή που όλοι οι συμμετέχοντες κατανοούν ο ένας τη σκέψη του άλλου, οπότε αποκαθίσταται και μία ουσιαστική επικοινωνία μεταξύ τους. Η ZPD αποτελεί ίσως τη σημαντικότερη έννοια της θεωρίας του Vygotsky, καθώς μόνο μετά την ανάπτυξή της μπορούμε να μιλάμε για μάθηση. Ο Vygotsky, από πολύ νωρίς ανέδειξε το ρόλο που παίζουν οι σχέσεις με τους εκπαιδευτικούς και τους συνομήλικους, παίρνοντας όμως έναν εντελώς διαφορετικό δρόμο από αυτό του Piaget και βοήθησε, μαζί με αυτόν, να συγκροτηθεί τελικά ένα πολύ πιο ολοκληρωμένο σχήμα κατανόησης των διαδικασιών οικοδόμησης της γνώσης. Θεωρούσε τη γλώσσα ως το κυρίαρχο μέσο αλληλεπίδρασης ανάμεσα στον ενήλικο και το παιδί και υποστήριζε ότι μέσω αυτής μορφοποιείται η σκέψη και η συμπεριφορά του παιδιού (Sierpinska, 1998). Κατά την άποψή του το παιδί βιώνει τη γλώσσα μέσα σε συγκεκριμένα κοινωνικά συμφραζόμενα κατά τη διάρκεια των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων με ανθρώπους του περιβάλλοντός του, ενηλίκους και συνομηλίκους, προτού η γλώσσα αυτή εσωτερικευθεί και αποτελέσει μια ατομική πηγή στοχασμού και σχεδιασμού. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στο πλαίσιο αυτό είναι η οργάνωση ενός κατάλληλου περιβάλλοντος, η καθοδήγηση και η υποστήριξη των μαθητών έτσι ώστε μέσα στη ZPD, να αναπτύσσουν ανώτερες πνευματικές λειτουργίες, οι οποίες προετοιμάζουν το δρόμο για την έλευση των επιστημονικών εννοιών. Τέλος, ο Vygotsky δεν πίστευε, όπως και ο Piaget, στη δυνατότητα της λεκτικής μετάδοσης της γνώσης. Νοητικές λειτουργίες όπως η εκούσια μνήμη, η λογική μνήμη, δεν μαθαίνονται με συνταγές (Sierpinska, 1998). Επιπλέον, οι σημασίες των λέξεων δεν μπορούν να μεταδοθούν από τον ένα νου στον άλλο με τη βοήθεια άλλων λέξεων, επειδή κάθε λέξη είναι μια γενίκευση και διαφορετικοί άνθρωποι μπορούν να ενεργούν με διαφορετικούς συνειρμούς και σε διαφορετικά επίπεδα γενίκευσης. Παρ' όλα αυτά ο Vygotsky απορρίπτει τον ισχυρισμό ότι είναι αδύνατο να παρέμβεις μέσα σ' αυτήν τη διαδικασία. Απλά η παρεμβολή πρέπει να είναι πάρα πολύ διακριτική και πιο έμμεση από ότι στις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας (Sierpinska, 1998).

2.3. Κοινωνικές και Κοινωνικομαθηματικές Νόρμες

Η επικοινωνία μέσα στην τάξη και η αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών της καθορίζεται από κάποιους κανόνες τις λεγόμενες νόρμες. Οι Yackel και Cobb (1996) τις διακρίνουν στις *κοινωνικές (social)* και στις *κοινωνικομαθηματικές (sociomathematical)* νόρμες.

Με τον όρο κοινωνικές νόρμες, θεωρούν ένα σύνολο συμφωνημένων αρχών συνύπαρξης και αλληλεπίδρασης των ατόμων της τάξης που επιτελούν ένα κοινό σκοπό. Παραδείγματα από τέτοιου είδους νόρμες μέσα στην τάξη είναι ότι αναμένουμε από τους μαθητές να διατυπώνουν προσωπικές λύσεις στα προβλήματα, να εξηγήσουν και να δικαιολογήσουν τη σκέψη και τις απόψεις τους, να δέχονται και να προσπαθούν να κατανοούν τις ερμηνείες και τις λύσεις στα προβλήματα που δίνουν τα υπόλοιπα μέλη της τάξης, καθώς και να θέτουν απορίες και να εγείρουν ενστάσεις σε περιπτώσεις ασυμφωνίας.

Από την άλλη, οι κοινωνικομαθηματικές νόρμες αφορούν πτυχές των μαθηματικών συζητήσεων σχετικές με τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών και προσδιορίζουν το τι αποτελεί αποδεκτή μαθηματική συμπεριφορά στην τάξη (Yackel & Cobb, 1996). Το τι αποτελεί στα μαθηματικά διαφορετικό, εξελιγμένο, αποτελεσματικό ή κομψό, είναι παραδείγματα κοινωνικομαθηματικών νορμών. Τέτοιες νόρμες μπορεί να είναι επιπλέον το τι συνιστά μια μαθηματική λύση διαφορετική από μια άλλη, πότε μια μαθηματική λύση είναι ποιοτικά ανώτερη από κάποια άλλη, τι καθιστά μια μαθηματική λύση ως αποτελεσματική και πότε μια μαθηματική λύση μπορεί να θεωρηθεί ενδεδειγμένη. Η κατασκευή κοινωνικομαθηματικών νορμών έχει και πρακτική σημασία, καθώς αποσαφηνίζει πώς οι μαθητές αναπτύσσουν μαθηματικές πεποιθήσεις και αξίες οι οποίες συμβάλλουν στην πνευματική ανεξαρτητοποίησή τους στα μαθηματικά.

Η διαφορά μεταξύ κοινωνικών και κοινωνικομαθηματικών νορμών είναι εξαιρετικά λεπτή. Οι κοινωνικές νόρμες είναι συνηθισμένοι τύποι συμπεριφοράς, που μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε θεματική περιοχή και ως εκ τούτου δεν αφορούν μόνο τις τάξεις των μαθηματικών, ενώ οι κοινωνικομαθηματικές νόρμες είναι ειδικές για τις μαθηματικές δραστηριότητες. Παραδείγματος χάριν, η προσδοκία ότι ο μαθητής οφείλει να δικαιολογεί τις λύσεις που βρίσκει αποτελεί κοινωνική νόρμα της τάξης, ενώ το ποια δικαιολόγηση μπορεί να θεωρηθεί ως επαρκής για μια λύση αποτελεί κοινωνικομαθηματική νόρμα της τάξης. Ομοίως, η κατανόηση ότι όταν αντιμετωπίζεται ένα πρόβλημα στην τάξη, οι μαθητές οφείλουν να προτείνουν λύσεις διαφορετικές από αυτές που έχουν ήδη ειπωθεί είναι κοινωνική νόρμα, ενώ η κατανόηση του πότε μια λύση καθίσταται μαθηματικά διαφορετική από μια άλλη είναι κοινωνικομαθηματική (Yackel & Cobb, 1996).

Οι νόρμες αυτές δεν είναι προκαθορισμένα κριτήρια που εισάγονται στην τάξη απ’ έξω. Αντίθετα, είναι κατανοήσεις οι οποίες συνεχώς αναδιαμορφώνονται και τροποποιούνται από τις συνεχείς αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού. Αυτές οι νόρμες διαμορφώνονται ενεργά από κάθε κοινότητα τάξης και συνεπώς είναι δυνατόν να διαφέρουν σημαντικά από τη μια τάξη στην άλλη (Yackel & Cobb, 1996). Παράλληλα, οι νόρμες που υπάρχουν σε μια τάξη δεν είναι συνήθως εμφανείς, αλλά είναι σε ένα βαθμό συγκαλυμμένες. Για παράδειγμα, είναι κοινώς αποδεκτό και εφαρμόσιμο, ότι ένας μαθητής οφείλει να μην διακόπτει το δάσκαλο όταν μιλά, ενώ ο δάσκαλος αντιθέτως μπορεί να διακόψει το μαθητή για να τον διορθώσει ή για να διατηρήσει την τάξη στο μάθημα.

Οι ενέργειες του εκπαιδευτικού παίζουν αποφασιστικό ρόλο στο να χτίσουν οι μαθητές μια πιο εξελιγμένη κατανόηση των μαθηματικών. Επίσης, ο εκπαιδευτικός έχει τον κεντρικό ρόλο στη διαμόρφωση της ποιότητας του περιβάλλοντος της τάξης και κατ’ επέκταση στη μύηση και καθοδήγηση των μαθητών ώστε να επεξεργαστούν, να σχηματιστούν και να αναπτυχθούν οι νόρμες της τάξης. Οι νόρμες αυτές αντανακλούν τις μαθηματικές πεποιθήσεις και αξίες του ίδιου του καθηγητή, καθώς και την προσωπική του μαθηματική γνώση και κατανόηση. Ακόμα, η διαπραγμάτευση των κοινωνικομαθηματικών νορμών δημιουργεί ευκαιρίες μάθησης τόσο για τους μαθητές αλλά και για τον ίδιο τον καθηγητή, ενώ η ανάλυσή τους αποσαφηνίζει τη διαδικασία με την οποία οι εκπαιδευτικοί αναθρέφουν την ανάπτυξη της πνευματικής αυτονομίας των μαθητών (Yackel & Cobb, 1996).

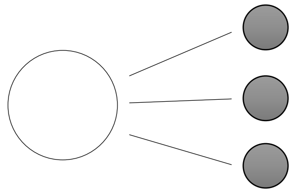
2.4. Μάθηση μέσω της Επικοινωνίας που Πραγματοποιείται στην Τάξη

Ένας από τους κύριους σύγχρονους στόχους της διδασκαλίας είναι να παρέχεται η δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να δημιουργεί κατάλληλο περιβάλλον μάθησης, στο οποίο να μπορούν να «γίνονται» και να «συζητιούνται» μαθηματικά (White, 2003). Εξάλλου, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας των Kaldrimidou, Sakonidis και Tzekaki (2010), υπάρχει διαλεκτική σχέση μεταξύ των επικοινωνιακών μοτίβων και του μαθηματικού περιεχομένου που αναπτύσσεται μέσα σε μία σχολική τάξη. Ωστόσο, πολλές φορές η δημιουργία και κυρίως η διατήρηση τέτοιου περιβάλλοντος αποδεικνύεται μια πολύπλοκη διαδικασία για τους καθηγητές. Αρχικά, αναμένεται από εκείνους να ενθαρρύνουν τους μαθητές να μοιράζονται τις ιδέες τους και να τις χρησιμοποιούν ως βάση των συζητήσεών τους. Παράλληλα όμως, οφείλουν να διασφαλίζουν ότι οι συζητήσεις αυτές είναι μαθηματικά παραγωγικές. Η δυσκολία συνεπώς έγκειται στη δυνατότητα δημιουργίας ενός περιβάλλοντος στο οποίο να υπάρχει ισορροπία μεταξύ της ελεύθερης έκφρασης και συζήτησης των ιδεών των μαθητών, που όμως να προάγει τη μάθηση συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου. Οι δυσκολίες όμως κατά τη μετακίνηση από μια δασκαλοκεντρική τάξη σε μια τάξη παραγωγικής και ελεύθερης επικοινωνίας δε σταματούν εκεί. Σε αντίθεση με την παραδοσιακή διδασκαλία όπου οι καθηγητές αρκούνταν στην παρουσίαση δεδομένων ή διαδικασιών στους μαθητές, σήμερα καλούνται, σύμφωνα με τον Smith (1996), να απομακρυνθούν από αυτόν τον τρόπο διδασκαλίας και να αναπτύξουν μια νέα αίσθηση του τι σημαίνει να διδάσκουν μαθηματικά και τι απαιτείται ώστε να καθίστανται αποτελεσματικοί και επιτυχημένοι καθηγητές μαθηματικών (Sherin, 2002). Παρά τις δυσκολίες αυτές, η ανάπτυξη μιας τέτοιου είδους τάξης μπορεί να αποτελέσει μια σπουδαία μορφή επαγγελματικής ανέλιξης, όπου δεν είναι οι μαθητές οι μόνοι οι οποίοι αναπτύσσονται και μαθαίνουν, αλλά και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί (Hufferd-Ackles, Fuson, & Sherin, 2004).

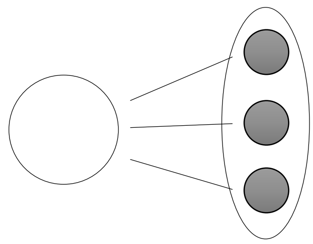
Τί μορφή μπορεί να έχει όμως η επικοινωνία στην τάξη; Οι μαθητές συνήθως κατασκευάζουν τη δική τους προσωπική αναπαράσταση του προβλήματος. Όταν ο μαθητής έχει διαμορφώσει μια προσωπική λύση, αρχίζει να ενδιαφέρεται για τις ιδέες των συμμαθητών του και αρκετές φορές αρχίζει να συζητά μαζί τους ψάχνοντας επιβεβαίωση ή ανατροφοδότηση. Όταν υπάρχει διαφωνία απόψεων, ο μαθητής καλείται να πείσει την υπόλοιπη τάξη για την εγκυρότητα της δικής του άποψης ή λύσης. Πολλές φορές μια τέτοιου είδους συζήτηση μεταξύ μαθητών συμβαίνει αυθόρμητα. Άλλες φορές, αυτός που αναλαμβάνει να τροφοδοτήσει μια συζήτηση απόψεων ή λύσεων μεταξύ των μαθητών είναι ο ίδιος ο καθηγητής. Η παρέμβαση του καθηγητή έχει στρατηγική σημασία, καθώς η συζήτηση μεταξύ μαθητών με αντικρουόμενες απόψεις μπορεί να παράγει ζωτικής σημασίας συμπεράσματα, αιτιολογήσεις ή ακόμα και να είναι η αιτία να αναδυθούν δυσκολίες ή απορίες που μπορεί οι μαθητές να έχουν (Martino & Maher, 1999).

Σύμφωνα με τους Καλρυμίδου, Τζεκάκη και Σακονίδη (2002), υπάρχουν τρία βασικά σχήματα αλληλεπίδρασης μεταξύ καθηγητή και μαθητών. Είτε ο εκπαιδευτικός απευθύνει ερωτήσεις σε συγκεκριμένους μαθητές, οι οποίοι εναλλάσσονται (Σχήμα 4α), είτε στο σύνολο της τάξης (Σχήμα

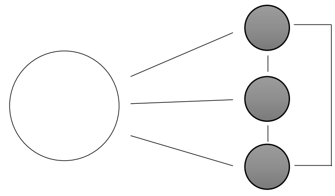
4β), είτε πραγματοποιούνται αλληλεπιδράσεις (ερωτήσεις-σχόλια-παρεμβάσεις) μεταξύ των μαθητών (Σχήμα 4γ).



Σχήμα 4α



Σχήμα 4β



Σχήμα 4γ

Οι κοινωνικοί γλωσσολόγοι οι οποίοι έχουν μελετήσει την επικοινωνία στις σχολικές τάξεις, διαπίστωσαν ότι στις περισσότερες από τις συζητήσεις στις οποίες συμμετέχει όλη η τάξη ακολουθείται μια ακολουθία που αποτελείται από τρία μέρη, η οποία είναι γνωστή ως Έναρξη-Απάντηση-Ανατροφοδότηση (Ε-Α-Α ή στα αγγλικά I-R-F): *έναρξη* που πραγματοποιείται από τον εκπαιδευτικό, *απάντηση* η οποία πραγματοποιείται από έναν ή περισσότερους μαθητές, *ανατροφοδότηση* που συντελείται από τον καθηγητή (Wells, 1993). Παράδειγμα μια τέτοιας συνομιλίας είναι το ακόλουθο: Ο καθηγητής ρωτά, «Μαρία, ποιο είναι το αποτέλεσμα της πράξης 10×5;», η Μαρία απαντά, «50» και ο καθηγητής απαντά, «Σωστά». Αξίζει να αναφερθεί ότι η επιδέξια έναρξη συζήτησης ή η διατύπωση ερωτήσεων, είναι δυνατόν να παρέχει στον καθηγητή ενόραση στο σκεπτικό και τις μαθηματικές ιδέες των μαθητών του, στοιχεία που σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να μην ήταν προσβάσιμα. Η ικανότητα αυτή μπορεί να χρειαστεί ακόμα και χρόνια για να αναπτυχθεί, καθώς απαιτεί εις βάθος γνώση τόσο των μαθηματικών όσο και του τρόπου κατανόησής τους από τους μαθητές. Ωστόσο μόλις αυτή αποκτηθεί, ο εκπαιδευτικός έχει στο οπλοστάσιό του ένα ισχυρό εργαλείο ώστε να είναι σε θέση να υποστηρίξει τους μαθητές του στη δόμηση της μαθηματικής τους γνώσης (Martino & Maher, 1999).

Πιο πρόσφατα, αυτό το παραπάνω μοντέλο άρχισε να μετασχηματίζεται. Οι μαθητές έχουν αποκτήσει ενεργό ρόλο στην επικοινωνία στην τάξη, έχουν αρχίσει να εγείρουν οι ίδιοι συζητήσεις, να απαντούν μεταξύ τους και να μοιράζονται εξηγήσεις και σκέψεις με τον καθηγητή. Σύμφωνα με τους Forman, Larreamendy-Joerns, Stein, και Brown (1998), ο ρόλος του καθηγητή σε μια τέτοια τάξη είναι να βοηθά τους μαθητές να δομούν και να οργανώνουν τις συνομιλίες τους, είτε οργανώνοντας τη σειρά με την οποία θα μιλά ο καθένας, είτε ζητώντας από τους μαθητές να αξιολογήσουν ή να αναστοχαστούν πάνω σε απόψεις που έχουν ακουστεί. Με βάση τους ίδιους, ένα από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του νέου αυτού μοντέλου, είναι η *επαναληπτικότητα*. Ο καθηγητής αναλαμβάνει να επαναλάβει και αν χρειάζεται να επεκτείνει ή να «μεταφράσει» τις απόψεις των μαθητών που ακούστηκαν, ώστε να ακουστούν και να γίνουν καλύτερα κατανοητές από όλους τους μαθητές της τάξης. Με τον τρόπο αυτό ο καθηγητής μπορεί να δώσει έμφαση σε συγκεκριμένες πτυχές μιας άποψης, να αποσαφηνίσει κάποια ορολογία, ή να συγκεντρώσει τις απόψεις που ακούστηκαν και να εξάγει ένα γενικό συμπέρασμα (Forman & Ansell, 2001). Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να παρουσιαστεί με το ακόλουθο απλό παράδειγμα: Ο καθηγητής ρωτά την τάξη, «Διαβάζεις 10 λεπτά κάθε μέρα. Πόση ώρα διαβάζεις τη βδομάδα;». Ο καθηγητής ρωτά έναν μαθητή, το Γιώργο, να εξηγήσει τη στρατηγική του:

i. Γιώργος: 10 φορές το 1 κάνει…
ii. Καθηγητής: 10 φορές το 1 κάνει.
iii. Γιώργος: 10.
iv. Καθηγητής: 10.
v. Γιώργος: 10 φορές το 7 κάνει 70.
vi. Καθηγητής: Βλέπετε κάνει 10 επί 7, γιατί η βδομάδα έχει 7 μέρες.

Στους στίχους ii και iv ο καθηγητής επαναλαμβάνει τα λόγια του Γιώργου. Ωστόσο, στο στίχο vi αποσαφηνίζει την απάντηση του Γιώργου «μεταφράζοντας» στην υπόλοιπη τάξη τη μαθηματική πράξη που έκανε με λεκτικά δεδομένα. Στο απόσπασμα αυτό φαίνεται ότι ο καθηγητής χρησιμοποιώντας την *επαναληπτικότητα* καταφέρνει να μεταφέρει το σκεπτικό του μαθητή σε όλη την τάξη (Forman & Ansell, 2001).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα παραδείγματα αποτελούν αναφαίρετο κομμάτι της διδασκαλίας των μαθηματικών, ενώ κεντρικός είναι ο ρόλος τους τόσο στα σχολικά εγχειρίδια όσο και μέσα στην τάξη των μαθηματικών. Αναφορικά με το τι συνιστά παράδειγμα, οι Zodik και Zaslavsky (2008) αναφέρουν: «θεωρητικά, κάθε μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα παράδειγμα, δηλαδή ως μια ειδική περίπτωση μιας ευρύτερης κλάσης.». Στην παρούσα έρευνα υιοθετούμε την οπτική των Watson & Mason (2002) σχετικά με το τι συνιστά μαθηματικό παράδειγμα, σύμφωνα με την οποία: «παράδειγμα είναι οτιδήποτε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρώτη ύλη, προκειμένου να επιτευχθεί γενίκευση, να αναδειχθούν διαισθητικές σχέσεις, να δοθούν διευκρινίσεις εννοιών να επιτευχθεί επαγωγικός συλλογισμός, ή να γίνει εκπροσώπηση μίας μεγαλύτερης κατηγορίας.» (Watson & Mason, 2002).

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, η παρούσα μελέτη έχει σκοπό να εξετάσει το ρόλο και τη φύση των παραδειγμάτων στη μαθηματική σκέψη, μάθηση και διδασκαλία μέσα από δύο άξονες μελέτης. Ο πρώτος άξονας αφορά τη μελέτη των παραδειγμάτων που παράγονται από τον εκπαιδευτικό σε μια τάξη μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου, μέσω της δημιουργίας ενός δικτύου ταξινόμησης των παραδειγμάτων. Ο δεύτερος άξονας αφορά τη μελέτη των τρόπων με τους οποίους ο ίδιος εκπαιδευτικός διαχειρίζεται τα παραδείγματα αυτά και του ρόλου της επικοινωνίας που αναπτύσσεται μέσα στην τάξη κατά τη διαχείριση αυτή.

Κατά τη διάρκεια της συλλογής των δεδομένων και της συστηματικής επεξεργασίας τους, καθοριστικό ρόλο κατέχει η παρατήρηση και μελέτη του είδους των παραδειγμάτων που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός, η χρονική στιγμή και οι συγκυρίες στις οποίες τα επικαλείται, ο τρόπος που τα προσεγγίζει και τα ενσωματώνει στη διδασκαλία του, αλλά και η μορφή μαθηματικής επικοινωνίας που αναπτύσσεται μέσα στην τάξη.

3.2 Συμμετέχων Έρευνας – Συλλογή Δεδομένων

Η παρούσα έρευνα βασίστηκε στην παρακολούθηση 12 ωρών διδασκαλίας μαθηματικών, σε δύο τμήματα Γ΄ Γυμνασίου σε Δημόσιο Γυμνάσιο της Αθήνας. Το τμήμα Γ΄1 αποτελείτο από 24 μαθητές, ενώ το Γ΄3 από 26. Τα μαθήματα διήρκεσαν από τις 6 Φεβρουαρίου μέχρι και τις 3 Απριλίου

2014. Ο εκπαιδευτικός που συμμετείχε στην έρευνα, υπηρετεί 15 χρόνια ως διορισμένος καθηγητής μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ προγενέστερα δίδασκε 9 χρόνια σε φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης. Είναι κάτοχος Μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών στο ΠΜΣ: «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» του Πανεπιστημίου Αθηνών, ενώ βρίσκεται σε εξέλιξη η εκπόνηση της Διδακτορικής Διατριβής του στον τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών. Ο λόγος που επιλέχθηκε ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός είναι οι εκτενείς μαθηματικές και παιδαγωγικές του γνώσεις, το έντονο ενδιαφέρον του για τα Μαθηματικά, η ανιδιοτελής προσφορά βοήθειας και η αφιέρωση προσωπικού του χρόνου για τις ανάγκες της έρευνας.

Κατά το στάδιο της συλλογής δεδομένων έγινε μαγνητοφώνηση των μαθημάτων, κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου από τον ερευνητή και επίσης δόθηκαν συνεντεύξεις από τον εκπαιδευτικό μετά το τέλος κάθε διδακτικής ώρας. Οι συνεντεύξεις αφορούσαν συζητήσεις πάνω σε κρίσιμα συμβάντα που εντοπίστηκαν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και ιδιαίτερα στα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν στο μάθημα και στον τρόπο διαχείρισής τους από τον εκπαιδευτικό. Έγινε κατά λέξη απομαγνητοφώνηση όλων των μαθημάτων που παρακολουθήθηκαν (164 σελίδες), καθώς και των συνεντεύξεων με τον εκπαιδευτικό (51 σελίδες) και κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου (28 σελίδες).

Προκειμένου να υπάρχει πιο ολοκληρωμένη εικόνα και να μπορέσουν να απαντηθούν με μεγαλύτερη εγκυρότητα και ακρίβεια τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας, επιλέξαμε τα δεδομένα να προέρχονται από δύο πηγές. Αρχικά πραγματοποιήθηκε παρατήρηση, μαγνητοσκόπηση και συλλογή σημειώσεων πεδίου τάξεων των τμημάτων της Γ΄ Γυμνασίου σε πραγματικές συνθήκες τάξης, στοιχεία τα οποία στη συνέχεια αναλύθηκαν. Παράλληλα, μετά το τέλος των μαθημάτων να πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με τον καθηγητή, οι οποίες αναφέρονταν είτε σε συγκεκριμένα περιστατικά των μαθημάτων τα οποία αφορούσαν τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας και παρουσίασαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, είτε στην επεξήγηση από πλευράς εκπαιδευτικού της επιλογής συγκεκριμένων παραδειγμάτων, αποφάσεων ή στρατηγικών.

3.3 Μέθοδος Έρευνας

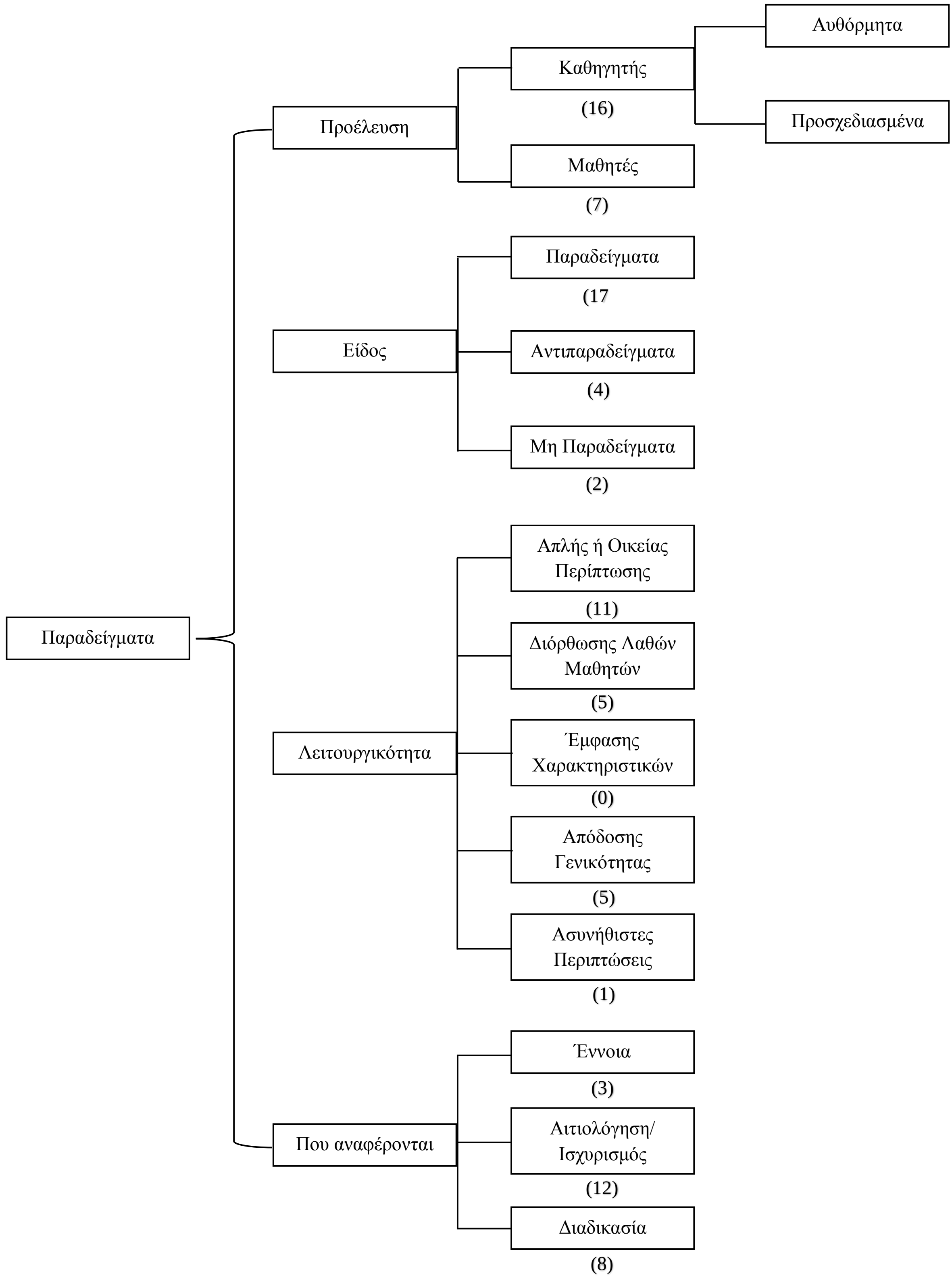
Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε είναι ποιοτική και πιο συγκεκριμένα αποτελεί μελέτη περίπτωσης του εκπαιδευτικού και της τάξης που αναφέρθηκαν παραπάνω. Ο Yin (1994) ορίζει ως μελέτη περίπτωσης «μια εμπειρική έρευνα η οποία διερευνά εις βάθος και μέσα στο πραγματικό του πλαίσιο ένα σύγχρονο φαινόμενο, ιδιαίτερα αν τα όρια μεταξύ του φαινομένου και του πλαισίου δεν είναι εντελώς ξεκάθαρα» (Yin, 1994). Η μελέτη περίπτωσης αναφέρεται στη συλλογή και παρουσίαση λεπτομερών πληροφοριών σχετικά με ένα άτομο ή μια ομάδα ατόμων για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων μόνο για το συγκεκριμένο άτομο ή τη συγκεκριμένη ομάδα και μόνο στο συγκεκριμένο πλαίσιο που εξετάζεται. Τα ευρήματα των ερευνών δεν προσφέρονται για γενικεύσεις και καθολικά συμπεράσματα και συνεπώς οποιαδήποτε συμπεράσματα προκύπτουν αφορούν αποκλειστικά και μόνο το άτομο ή την ομάδα ατόμων που μελετήθηκε. Για να γίνει μια μελέτη περίπτωσης και να εξαχθούν ασφαλή και έγκυρα αποτελέσματα απαιτείται όσο το δυνατόν πιο μακροχρόνια παρατήρηση και καλύτερη γνώση του υποκειμένου που μελετάται (Yin, 1994). Τα δεδομένα προέρχονται κυρίως από καταγραφή δεδομένων, από αρχειακά έγγραφα, από άμεση παρατήρηση ή από συμμετοχική παρατήρηση (Yin, 1994). Σύμφωνα με τον Yin (1994), μια σωστή μελέτη περίπτωσης πρέπει να έχει τα εξής πέντε χαρακτηριστικά: α) ερευνητικά ερωτήματα, β) προτάσεις, γ) μονάδα ανάλυσης, δ) προσδιορισμό του τρόπου με τον οποίο τα δεδομένα συνδέονται με τις προτάσεις και ε) κριτήρια με τα οποία ερμηνεύονται τα ευρήματα.

3.4 Πιλοτική Έρευνα

Πριν την εφαρμογή της παρούσας έρευνας κρίθηκε απαραίτητη η διεξαγωγή πιλοτικής έρευνας. Στόχος μας ήταν να επιβεβαιωθεί ότι η μέθοδος έρευνας που επιλέχθηκε, δηλαδή η παρακολούθηση των μαθημάτων στην τάξη και οι συνεντεύξεις με τον εκπαιδευτικό, ήταν η καταλληλότερη προκειμένου να επιτευχθούν οι στόχοι της έρευνας, δηλαδή ο εντοπισμός και η κατηγοριοποίηση των παραδειγμάτων που παράγονται από τον εκπαιδευτικό στην τάξη και η μελέτη του ρόλου της επικοινωνίας κατά τη διαχείρισή τους. Για την εγκυρότητα της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε στην έρευνα, δόθηκε ιδιαίτερη σημασία στον έλεγχο των μέσων συλλογής των δεδομένων και στην εξοικείωση των μαθητών στην παρουσία του ερευνητή μέσα στην αίθουσα.

Παράλληλα, υπήρξε ο προβληματισμός για το ποια από τις τάξεις στις οποίες δίδασκε ο εκπαιδευτικός θα επιλέγαμε. Για το λόγο αυτό πραγματοποιήθηκαν στο στάδιο αυτό παρακολουθήσεις τόσο σε τμήματα της Α΄ Γυμνασίου αλλά και της Γ΄ Γυμνασίου, προκειμένου να επιλεγεί η τάξη που θα συνέβαλλε στην εξαγωγή ασφαλέστερων και εγκυρότερων συμπερασμάτων. Τελικά επιλέχθηκε η Γ΄ Γυμνασίου, η οποία παρείχε μεγαλύτερη ποικιλία διαθέσιμων παραδειγμάτων για μελέτη, αλλά και περισσότερα κρίσιμα διδακτικά συμβάντα στην τάξη.

Για αυτό το στάδιο της έρευνας πραγματοποιήθηκε παρακολούθηση 5 διδακτικών ωρών οι οποίες μαγνητοφωνήθηκαν, ενώ κρατήθηκαν και σημειώσεις πεδίου. Από την ανάλυση περιεχομένου των δεδομένων εντοπίστηκαν συνολικά 23 παραδείγματα. Σε αυτό το στάδιο δεν πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με τον εκπαιδευτικό, για το λόγο αυτό η ταξινόμηση των παραδειγμάτων σε δίκτυο βασίστηκε εξ' ολοκλήρου στην ανάλυση των απομαγνητοφωνήσεων των μαθημάτων που παρακολουθήθηκαν (Bliss, Ogborn, & Grize, 1979). Η ανάλυση των δεδομένων αρχικά στηρίχθηκε σε στοιχεία μιας *θεμελιωμένης ανάλυσης (grounded analysis)* (Strauss & Corbin, 1998) και είναι η ακόλουθη:



Σχήμα 5. Δίκτυο Ταξινόμησης Παραδειγμάτων Πιλοτικής Έρευνας

Όπως φαίνεται Σχήμα 5, τα παραδείγματα χωρίστηκαν ως προς την *προέλευσή* τους, το *είδος* τους, τη *λειτουργικότητά* τους και ως προς το *που αναφέρονται*.

Σχετικά με την *προέλευσή* τους, διαχωρίστηκαν σε παραδείγματα που παράγονται από τους *μαθητές* και σε παραδείγματα που προέρχονται από τον *καθηγητή*, τα οποία με τη σειρά τους μπορεί να είναι είτε *αυθόρμητα* είτε *προσχεδιασμένα*. Η συγκεκριμένη κατηγορία θεωρήθηκε αρκετά ξεκάθαρη και διατηρήθηκε στην κυρίως έρευνα, ενώ από τα παραδείγματα που ταξινομήθηκαν σε κάθε κατηγορία υπήρχαν ισχυρές ενδείξεις για επικράτηση των παραδειγμάτων που προέρχονται από τον καθηγητή.

Ως προς το *είδος* τους, τα διαχωρίσαμε σε *παραδείγματα*, *αντιπαραδείγματα* και *μη παραδείγματα*. Από τα αποτελέσματα της πιλοτικής έρευνας, φαίνεται ότι τα παραδείγματα έχουν τον κυρίαρχο ρόλο κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών από τον συγκεκριμένο εκπαιδευτικό, ενώ σε πολύ μικρότερο βαθμό επιστρατεύονται τα αντιπαραδείγματα και τα μη παραδείγματα. Στην κυρίως έρευνα αποφασίσαμε εκτός από το είδος να διαχωρίσουμε τα παραδείγματα και ως προς τη *διαισθητικότητα*. Διαπιστώσαμε ότι το κοινό στοιχείο που μοιράζονται αυτές οι δυο κατηγορίες είναι ότι αποτελούν τα χαρακτηριστικά ενός παραδείγματος. Για το λόγο αυτό στην κυρίως έρευνα ενσωματώσαμε τις υποκατηγορίες *είδος* και *διαισθητικότητα* στην κατηγορία *χαρακτηριστικά*, όπως φαίνεται στην ενότητα 4.1 (σελ. 51) που ακολουθεί.

Ως προς τη *λειτουργικότητα*, διακρίναμε τα παραδείγματα σε *απλής ή οικείας περίπτωσης*, σε παραδείγματα *διόρθωσης λαθών των μαθητών*, σε παραδείγματα *έμφασης χαρακτηριστικών*, σε παραδείγματα *απόδοσης γενικότητας* και σε παραδείγματα *ασυνήθιστων περιπτώσεων*. Η κατηγοριοποίηση αυτή, όπως θα αναλυθεί περισσότερο στην ενότητα 4.1 (σελ. 51), προέρχεται από την έρευνα των Zodik και Zaslavsky (2008). Από την πιλοτική έρευνα προέκυψε ότι ο εκπαιδευτικός επικαλείται συχνότερα απλά ή οικεία παραδείγματα, σε μικρότερο βαθμό παραδείγματα που στόχο έχουν να διορθώσουν τους μαθητές ή να προσδώσουν γενικότητα, ενώ μόλις μία φορά εμπλέκει τους μαθητές με κάποια ασυνήθιστη περίπτωση. Παραδείγματα που να δίνουν έμφαση σε επιθυμητά χαρακτηριστικά μιας έννοιας, δεν παρατηρήθηκαν καθόλου κατά τη διάρκεια της πιλοτικής έρευνας και για το λόγο αυτό πάρθηκε η απόφαση να εξαιρεθεί αυτή η κατηγορία από το δίκτυο ταξινόμησης των παραδειγμάτων της κυρίως έρευνας. Επίσης διαπιστώθηκε, πως δεν έχει νόημα να διερευνηθεί η λειτουργικότητα των παραδειγμάτων που παράγονται από τους μαθητές, οι οποίοι τα επικαλούνται ως μέσο για την έκφραση των αποριών ή των ερωτήσεών τους. Αντίθετα, μεγάλο ενδιαφέρον είχε η μελέτη της λειτουργικότητας των παραδειγμάτων που χρησιμοποιούνται από τον εκπαιδευτικό στην τάξη και για αυτόν το λόγο στην κυρίως έρευνα η κατηγορία λειτουργικότητα τέθηκε ως υποκατηγορία της κατηγορίας καθηγητής, που παρουσιάστηκε προηγουμένως.

Σχετικά με το *πού αναφέρονται* τα παραδείγματα, διαχωρίστηκαν σε παραδείγματα που αφορούν *έννοια*, σε παραδείγματα που αναφέρονται σε *αιτιολόγηση/ισχυρισμό* και σε παραδείγματα που αφορούν *διαδικασία*. Από τα αποτελέσματα παρατηρήθηκε ότι χρησιμοποιούνται επί το πλείστον διαδικαστικά παραδείγματα, σε αντίθεση με τα παραδείγματα που αφορούν έννοια τα οποία είναι ελάχιστα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τόσο τα μαθήματα της Α΄ Γυμνασίου που παρακολουθήθηκαν για τις ανάγκες της πιλοτικής έρευνας, όσο και της Γ΄ Γυμνασίου ήταν μαθήματα Άλγεβρας, στην οποία επικρατεί σε μεγάλο βαθμό το διαδικαστικό κομμάτι των μαθηματικών. Ενώ τα παραδείγματα εννοιών και διαδικασιών ήταν αρκετά ξεκάθαρο ότι έπρεπε να ταξινομηθούν κατ' αυτόν τον τρόπο, παρατηρήθηκε μια σύγχυση κατά τη μελέτη των παραδειγμάτων που αφορούσαν αιτιολόγηση/ισχυρισμό. Έπειτα από βαθύτερη μελέτη των παραδειγμάτων αυτών, διαπιστώθηκε ότι κάποια από τα παραδείγματα αυτά μπορούσαν να ταξινομηθούν στην κατηγορία *έννοια* ή αφορούσαν κάποια *διαδικασία*, ακόμα και αν αποτελούσαν αιτιολόγηση μιας άποψης ή έναν ισχυρισμό. Για το λόγο αυτό, προτιμήθηκε η αφαίρεση της κατηγορίας αυτής και η ενσωμάτωση των παραδειγμάτων της στις άλλες δύο κατηγορίες. Επίσης, θεωρήθηκε προτιμότερο η ονομασία της κατηγορίας *πού* αναφέρονται να αλλάξει και να μετονομαστεί σε *μαθηματική δραστηριότητα*, ώστε με τον τρόπο αυτό να υποδηλώνεται ξεκάθαρα ότι η κατηγορία αυτή διαχωρίζει το είδος της μαθηματικής δραστηριότητας που αφορά τα παραδείγματα που μελετήθηκαν. Ταυτόχρονα, θεωρήθηκε ενδιαφέρον να γίνει περαιτέρω διαχωρισμός των παραδειγμάτων που αφορούν διαδικασία και για τον λόγο αυτό στην κυρίως έρευνα δημιουργήθηκαν οι υποκατηγορίες *επίλυση προβλήματος* και *αλγοριθμική διαδικασία*.

Συμπερασματικά, γίνεται φανερό ότι ενώ αρχικά η ανάλυση των δεδομένων βασίστηκε σε στοιχεία μιας θεμελιωμένης ανάλυσης (Strauss & Corbin, 1998), σε αρκετά σημεία χρησιμοποιήθηκε *ανάλυση περιεχομένου (content analysis)* προκειμένου να προκύψει η τελική διαμόρφωση των κατηγοριών του δικτύου ταξινόμησης των παραδειγμάτων.

3.5 Διαδικασία Ανάλυσης των Δεδομένων

Η ανάλυση αφορούσε αφενός τη μελέτη του συνόλου των δεδομένων που συλλέχθηκαν από την παρακολούθηση των 12 ωρών διδασκαλίας (σημειώσεις πεδίου και απομαγνητοφωνήσεις διδασκαλιών) και αφετέρου την ανάλυση των συνεντεύξεων με τον εκπαιδευτικό. Τα ονόματα των μαθητών τα οποία χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των δεδομένων είναι τυχαία για λόγους δεοντολογίας. Κατά τη μελέτη των απομαγνητοφωνήσεων των μαθημάτων, πραγματοποιήθηκε αρχικά εντοπισμός των παραδειγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν στην τάξη, αλλά και του τρόπου με τον οποίο έγινε η διαχείρισή τους. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των παραδειγμάτων που εντοπίστηκαν, καταβλήθηκε προσπάθεια να διαμορφωθεί ένα συστημικό δίκτυο ταξινόμησης παραδειγμάτων (Bliss et al., 1979). Σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση του δικτύου διαδραμάτισε η κατηγοριοποίηση που είχε προκύψει κατά το στάδιο της Πιλοτικής Έρευνας, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Επίσης αναζητήθηκαν κανονικότητες στον τρόπο διαχείρισής τους, είτε μέσω παρατήρησης επαναλαμβανόμενων συμπεριφορών, είτε εντοπίζοντας ασυνήθιστους τρόπους αντιμετώπισής τους, είτε παρατηρώντας τις μορφές επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης μεταξύ καθηγητή και μαθητών που πραγματοποιούνταν μέσα στην τάξη.

Η ανάλυση των δεδομένων αρχικά στηρίχθηκε σε στοιχεία μιας θεμελιωμένης ανάλυσης (Strauss & Corbin, 1998). Με άλλα λόγια, τα ίδια τα δεδομένα ήταν εκείνα τα οποία οδήγησαν στη γένεση των κατηγοριών στις οποίες κατατάχθηκαν. Προχωρώντας όμως στην ανάλυση των δεδομένων, υπήρξαν περιπτώσεις που στηριχθήκαμε στη θεωρία, και πιο συγκεκριμένα σε παλαιότερες έρευνες, προκειμένου να γίνει η καταλληλότερη δυνατή διαμόρφωση των κατηγοριών, πραγματοποιώντας έτσι ανάλυση περιεχομένου. Ξεκινώντας, δηλαδή, σε πολλά σημεία από τα δεδομένα προσπαθήσαμε να εντοπίσουμε κατηγορίες παραδειγμάτων, αλλά παράλληλα εντοπίσαμε μοντέλα και κατηγορίες στις οποίες μπορούσαμε να εντάξουμε τα δεδομένα μας και από τη μελέτη της θεωρίας.

Ωστόσο, υπήρξαν περιπτώσεις στις οποίες η θεωρία και τα δεδομένα που προέρχονταν από τις απομαγνητοφωνήσεις των μαθημάτων δεν επαρκούσαν για την ορθή και ξεκάθαρη διαμόρφωση των κατηγοριών. Πιο συγκεκριμένα, κατά την ταξινόμηση των παραδειγμάτων συναντήσαμε δυσκολίες στη διαμόρφωση της κατηγορίας *λειτουργία* των παραδειγμάτων, καθώς διαπιστώθηκε ότι αρκετά από αυτά ήταν δυνατόν να εντάσσονται ταυτόχρονα σε παραπάνω από μία κατηγορίες. Λόγου χάριν ένα παράδειγμα μπορεί να είχε επιλέγει από τον εκπαιδευτικό με στόχο να διορθώσει μια λανθασμένη αντίληψη των μαθητών του και ταυτόχρονα να εξάγει ένα γενικότερο συμπέρασμα, συνεπώς μπορεί να ενταχθεί ταυτόχρονα τόσο στα παραδείγματα διόρθωσης λαθών των μαθητών, όσο και στα παραδείγματα απόδοσης γενικότητας. Επίσης, είναι δυνατόν, ένα παράδειγμα το οποίο ο εκπαιδευτικός επικαλείται προκειμένου να αποδώσει γενικότητα να ανήκει ταυτόχρονα και στην κατηγορία παραδείγματος απλής ή οικείας περίπτωσης. Προκειμένου να υπερβούμε το εμπόδιο αυτό ανατρέξαμε αρχικά στο άρθρο των Zodik και Zaslavsky (2008), για να εξετάσουμε πώς εκείνοι αντιμετώπισαν ανάλογες δυσκολίες. Πουθενά όμως στο άρθρο τους δεν αναφέρεται το σκεπτικό με το οποίο κατέταξαν παραδείγματα, τα οποία θα μπορούσαν να ανήκουν σε περισσότερες από μία κατηγορίες. Έτσι κατά τη διάρκεια των προσωπικών συνεντεύξεων ρωτούσαμε τον ίδιο το διδάσκοντα ποιο ήταν το σκεπτικό με το οποίο χρησιμοποιούσε εκείνη τη στιγμή το κάθε παράδειγμα, ποια ήταν με άλλα λόγια η λειτουργία που ο ίδιος ήλπιζε ότι το παράδειγμα θα συντελέσει και με γνώμονα το κριτήριο αυτό πραγματοποιήσαμε την τελική κατάταξη των περιπτώσεων αυτών.

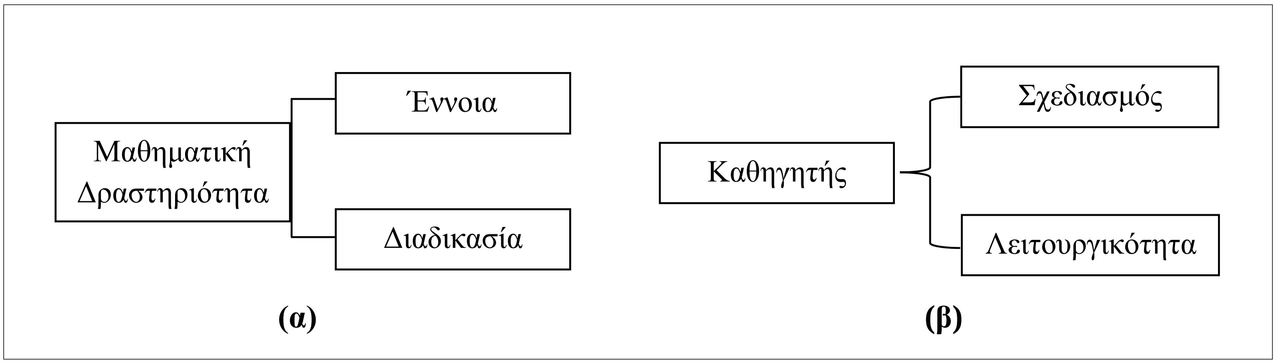
Συνοψίζοντας, αυτός ο συνδυασμός μεθόδων που ακολουθήθηκε οδήγησε σε μια συνεχή κυκλική ανατροφοδότηση μεταξύ θεωρίας, δεδομένων και κατηγοριών, η οποία διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο στην τελική διαμόρφωση της κατηγοριοποίησης των παραδειγμάτων που καταγράφηκαν στη διάρκεια της έρευνάς μας. Και αυτό γιατί η ανάλυση των δεδομένων μιας έρευνας είναι μια συνεχής διαδικασία, στην οποία κάθε παρατήρηση οδηγεί σε νέα διαμόρφωση της κατηγοριοποίησης και ως εκ τούτου οδηγεί στην εκ νέου ανάλυση των παρατηρήσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4$^{\text{Ο}}$

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Κατηγοριοποίηση Παραδειγμάτων

Προκειμένου να απαντηθεί το πρώτο ερευνητικό ερώτημα της έρευνας, κρίθηκε απαραίτητη η κατασκευή ενός συστημικού δικτύου ταξινόμησης των παραδειγμάτων (Bliss et al., 1979), που εντοπίστηκαν από τις παρακολουθήσεις των μαθημάτων στην τάξη, προκειμένου να συμπυκνωθούν και να δομηθούν τα δεδομένα. Το σύμβολο της κλειστής αγκύλης ([) χρησιμοποιείται για να δηλώσει πως όλες οι κατηγορίες είναι αποκλειστικές, ότι δηλαδή επιλέγοντας τη μία από αυτές ακυρώνονται όλες οι υπόλοιπες. Παράλληλα, το σύμβολο του άγκιστρου ({) χρησιμοποιείται για να δηλώσει πως οποιοσδήποτε αριθμός κατηγοριών, ακόμη και όλες, μπορούν να επιλεγούν ταυτόχρονα. Στο Σχήμα 6 που ακολουθεί παρατίθεται, ως παράδειγμα, ένα τμήμα του συστημικού δικτύου που αφορά τα παραδείγματα τα οποία εμφανίζονται στην τάξη, ανάλογα με τη μαθηματική δραστηριότητα την οποία αφορούν:

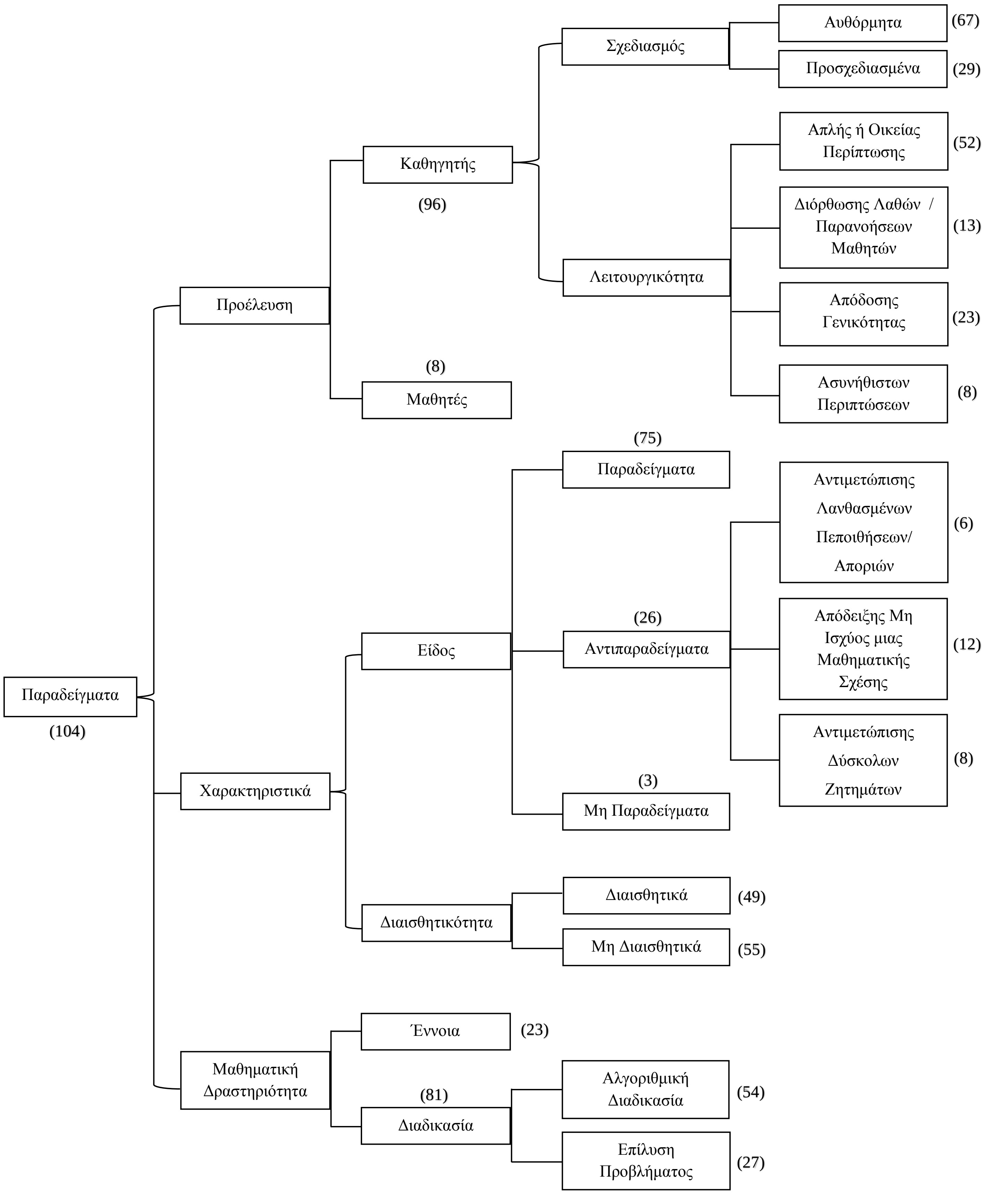


Σχήμα 6. Παραδείγματα Συστημικού Δικτύου

Η αγκύλη ([) που χρησιμοποιείται στο Σχήμα 6α, δηλώνει πως η Μαθηματική Δραστηριότητα μπορεί να είναι αποκλειστικά σχετική της Έννοιας είτε της Διαδικασίας, όμως δεν μπορεί να αφορά ταυτόχρονα και τις δύο.

Αντίθετα, η χρήση του αγκίστρου ({) στο Σχήμα 6β, δηλώνει πως τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί ο Καθηγητής μπορούν να μελετηθούν παράλληλα τόσο ως προς το Σχεδιασμό, όσο και ως προς τη Λειτουργικότητά τους ταυτόχρονα, χωρίς η μια κατηγορία να αποκλείει την άλλη.

Στη συνέχεια παρατίθεται το δίκτυο ταξινόμησης παραδειγμάτων που προκύπτει από την ανάλυση των δεδομένων της παρούσας έρευνας (Σχήμα 7):



Σχήμα 7. Δίκτυο Ταξινόμησης των Παραδειγμάτων

Τα παραδείγματα διακρίνονται ως προς την *προέλευσή* τους, τα *χαρακτηριστικά* τους και ως προς τη *μαθηματική δραστηριότητα* την οποία αφορούν.

4.1.1. Προέλευση

Ως προς την προέλευσή τους, τα παραδείγματα διαχωρίζονται σε εκείνα τα οποία προέρχονται από τον *καθηγητή* και σε εκείνα που προέρχονται από τους *μαθητές*.

4.1.1.1. Καθηγητής

Τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός τα διακρίνουμε ως προς το *σχεδιασμό* που απαιτούν και ως προς τη *λειτουργικότητά* τους.

4.1.1.1.1. Σχεδιασμός

Ως προς το σχεδιασμό, τα παραδείγματα του εκπαιδευτικού διακρίνονται σε *αυθόρμητα* και *προσχεδιασμένα*. Για το συγκεκριμένο διαχωρισμό υιοθετούμε την οπτική των Zodik και Zaslavsky (2008), σύμφωνα με την οποία αυθόρμητα θεωρούνται τα παραδείγματα για τα οποία υπάρχουν ενδείξεις ότι προκύπτουν αποκλειστικά κατά την διάρκεια της διδασκαλίας και της αλληλεπίδρασης με τους μαθητές, ενώ προσχεδιασμένα τα παραδείγματα για τα οποία υπάρχει κάποιο αποδεικτικό στοιχείο ότι ο καθηγητής τα είχε ετοιμάσει εκ των προτέρων με σκοπό να τα παρουσιάσει στο μάθημα.

- Μια περίπτωση αυθόρμητου παραδείγματος παρουσιάστηκε στο $3^{ο}$ μάθημα, όπου οι μαθητές είχαν να λύσουν την εξίσωση $\frac{1}{\alpha^2-2\alpha}+\frac{\alpha-1}{\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha-2}$. Ένας μαθητής νομίζει ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών, είναι εκείνος ο παρονομαστής ο οποίος περιέχει το α με τον μεγαλύτερο εκθέτη:

Παράδειγμα ($Π_{12}$)

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Δε θυμάμαι λέω πώς βρίσκουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ωραία! Δε θυμάμαι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Πώς βρίσκουμε το ελάχιστο; Είναι το μεγαλύτερο που είναι το πρώτο, αυτό δεν απαντάς; Ωραία! Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το μεγαλύτερο που είναι το πρώτο. Ωραία! Περίμενε... Πες μου και τώρα ποιο είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο* (γράφει $\frac{1}{\alpha^2+2\alpha}+\frac{\alpha-1}{\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha-2}$). *Όχι. Το μεγαλύτερο που είναι το πρώτο. Ε, δεν είναι το πρώτο; Ορίστε; Δηλαδή, ποιο είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο αυτωνών; Λέει αυτό. Δεν μπορώ να κρίνω. Ποιο είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών; Τώρα το άλλαξα.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Μετά, το επόμενο παράδειγμα ήταν στην άσκηση 3δ.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Όπου προσπαθούσαν στην αρχή να βρούνε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Ναι.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και εδώ υπήρχαν κάποιες δυσκολίες. Σας είπε μια μαθήτρια ότι ήταν το μεγαλύτερο. Αυτό που έχει το μεγαλύτερο παρονομαστή.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το μεγαλύτερο, ναι. Θεωρεί ότι είναι... της φαίνεται το άλφα τετράγωνο μείον δύο άλφα ότι είναι το μεγαλύτερο, σε σύγκριση με το άλφα και σε σύγκριση με το άλφα πλην δύο. Οπότε, λέει ότι αυτό είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Τώρα θέλοντας... και πήγα λες στο παράδειγμα με το άλφα..*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Αυτό εδώ που βάζατε… μισό λεπτό…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Με το άλφα τετράγωνο συν δύο άλφα. Άλλαξα αυτό για να μπορέσουμε να... δηλαδή, να συνειδητοποιήσει, δίνοντάς της δηλαδή ένα αντιπαράδειγμα ουσιαστικά σε αυτό που η ίδια θεωρεί. Θεωρεί δηλαδή, ότι το μεγαλύτερο είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Επειδή έτσι εμφανίζεται συνήθως. Δεν είναι παράλογο το παιδί αυτό που λέει ας πούμε…*

…

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Φαντάζομαι αυτό ήταν της στιγμής βέβαια, δεν το είχατε σχεδιάσει από πριν.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι, όχι. Της στιγμής. Της στιγμής.*

Ένα ακόμα αυθόρμητο παράδειγμα είχαμε στο $8^{\text{ο}}$ μάθημα, όταν μια μαθήτρια δεν μπορούσε να καταλάβει πώς γίνεται να προκύπτει ανισοτική σχέση στην οποία το 1 επί α να είναι μεγαλύτερο του 5 επί β, αφού το πρώτο έχει συντελεστή 1 ενώ το δεύτερο 5:

Παράδειγμα ($Π_{71}$)

ΜΑΘΗΤΡΙΑ: *Κύριε άμα κάνουμε τις πράξεις εκεί θα βγει 1α μεγαλύτερο του 5β, άρα δεν είναι σωστό.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Άμα κάνουμε τις πράξεις εδώ θα βγει 1α και από κει θα βγουν 5β. Αυτό το έχουμε γράψει.*
ΜΑΘΗΤΡΙΑ: *Αν είναι…*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι, δεν ρωτάει αυτό. Ρωτάει γιατί το α είναι μεγαλύτερο από το 5β; Πώς είναι δυνατόν το α να είναι μεγαλύτερο από το 5β; Αυτό μπορεί να είναι 7 και αυτό να είναι 1. Δεν είναι επειδή βλέπω 5 από εκεί, αυτό είναι μεγαλύτερο από εκείνο. Δηλαδή, σκέψου έναν αριθμό όσο μεγάλο θέλεις. Πολλαπλασίασέ τον. Εγώ ξέρω έναν μεγαλύτερο από αυτόν που είπες.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Βγήκε ένα αποτέλεσμα α μεγαλύτερο του 5β. Και ρωτάει η κοπελίτσα μπροστά πώς γίνεται το 1α να είναι μεγαλύτερο από το 5β. Που πήρατε…*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Νούμερα.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ναι, για παράδειγμα το 7 και το 1.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι. Αυτό το άκουσα εκεί, κάποιος της είπε.. το 7 το είπε κάποιος δίπλα της λέει. Πάρτο 7. Και χρησιμοποίησα και εγώ το 7. Έεε... ναι ένα νούμερο για να συνειδητοποιήσει, προφανώς έχει στο μυαλό της ότι επειδή είναι 5πλάσιο θα είναι μεγαλύτερο από το άλλο που είναι μόνο του.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Σαν διόρθωση λάθους ας πούμε;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Σαν διόρθωση λάθους ή σαν αντιπαράδειγμα αυτουνού που έχει σκεφτεί.*

- Μια περίπτωση προσχεδιασμένου παραδείγματος είχαμε στο 6ο μάθημα, όπου στόχος ήταν να γίνει εισαγωγή στην ιδιότητα των ανισοτικών σχέσεων: αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \beta < 0$. Ο καθηγητής προσπαθεί να οδηγήσει τους μαθητές στη διατύπωση γενικού κανόνα για τη σύγκριση δύο τυχαίων αριθμών:

Παράδειγμα ($Π_{38}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Σύγκρινε τον αριθμό αυτόν (γράφει α) με τον αριθμό εκείνον (γράφει β). Με αυτόν εδώ.*
ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Ααα!*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Που δεν τον ξέρεις. Με το α, με το α.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Να τον συγκρίνουμε πώς;*

…

ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *Πρέπει να συγκρίνουμε με κάποιο, δεν μπορούμε απλά έτσι…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ωραία, σύγκρινε λοιπόν το 3 με το 5.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *Είναι μικρότερο από το 5.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Είναι έτσι. Σύγκρινε λοιπόν το 3 με το -2.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 3: *Είναι μεγαλύτερο.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Σύγκρινε λοιπόν το 3 με την απόλυτη τιμή του -3.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 3: *Είναι ίσα.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μπορείς λοιπόν να μου πεις τώρα έναν κανόνα με τον οποίο συγκρίνω δύο αριθμούς; Θέλω ένα κανόνα. Θέλω ένα κανόνα.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Στην πρώτη ώρα, ξεκινήσατε ρωτώντας του μαθητές πώς συγκρίνουμε δύο αριθμούς. Και ξεκινήσατε καταρχάς και τους είπατε πώς συγκρίνουμε το 3 με το α. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος, ποιος είναι ο μικρότερος και με τι κριτήριο θα αποφανθούμε.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι. θέλω να τους οδηγήσω εδώ στη συζήτηση στην αριθμογραμμή. Να μου πούνε δηλαδή αυτό. Δεν πετυχαίνω με το 3 και το α προφανώς, γιατί σου λέει εξαρτάται από το ποιος είναι έτσι, ποιο είναι αλλιώς κλπ.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και γι' αυτό μετά πήρατε το 3 με το 5.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Και γι' αυτό μετά πήρα το 3 με το 5 ας πούμε.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και μετά δουλεύατε και με το μείον δύο, το μείον τρία…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Και μετά ξανά γυρνάω στο 3 με το α ή στο α με το β, αυτό. Προσχεδιασμένο, αυτή είναι η εισαγωγή που θέλω να κάνω. Τώρα μπορεί να μην είναι το 3 με το α, να είναι... αλλά ξεκίνησα με το 3 και το α, δεν ήθελα το 3 και το 5, ας πούμε να ξεκινήσω έτσι γιατί είναι πολύ συγκεκριμένο και θα μου πούνε…*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Κατευθείαν.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το 5 είναι μεγαλύτερο. Και θέλω να μπούνε σε μια σκέψη του τρόπου, της μεθόδου σύγκρισης και όχι του αποτελέσματος της σύγκρισης. Γι' αυτό χρησιμοποιώ το 3 και το α ας πούμε. Αλλά δεν δουλεύει και γι' αυτό το αλλάζω και ναι.*

Προσχεδιασμένο παράδειγμα χρησιμοποιήθηκε και στο $11^{ο}$ μάθημα, όταν οι μαθητές κλήθηκαν για πρώτη φορά να λύσουν μια τριγωνομετρική εξίσωση. Ο εκπαιδευτικός από την εμπειρία του γνωρίζει ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν μια παράσταση που περιέχει τριγωνομετρικούς αριθμούς ως εξίσωση, στην οποία έχουν συνηθίσει να βλέπουν μόνο μεταβλητές, για το λόγο αυτό είχε ετοιμάσει ένα παράδειγμα εκ των προτέρων:

Παράδειγμα ($Π_{89}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: (γράφει) $ημχ = 1 - ημχ$*. Η ερώτηση είναι να βρείτε την γωνία x. Να βρείτε την γωνία x, ξέροντας ότι το ημίτονο x είναι 1 μείον ημίτονο x. Να βρείτε την γωνία, συγνώμη, να βρείτε το x ξέροντας ότι* (γράφει)*, αυτό. Τι είναι αυτό;*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Ποιο;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Να βρείτε το x, ώστε* $x^2 - 2x = 0$. *Τι είναι αυτό;*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Εξίσωση.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Εξίσωση. Να βρείτε το x ώστε* $ημχ = 1 - ημχ$. *Τι είναι αυτό;*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Εξίσωση.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Εξίσωση. Όταν έχεις μια ισότητα σαν αυτή, σαν εκείνη από την οποία ψάχνεις να βρεις κάποιον άγνωστο, αυτό το πράγμα το λέμε εξίσωση. Απλώς το λέω έτσι για να καταλάβετε ότι είναι η λογική, ο τρόπος επίλυσης είναι εντελώς διαφορετικός, καμία σχέση.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Λοιπόν, στην 1η ώρα, το πρώτο παράδειγμα που εντοπίστηκε είναι όταν λύνατε μια άσκηση, την* $ημχ = 1 - ημχ$*, που φέρατε για παράδειγμα το ότι όταν έχω το* $x^2 - 2x = 0$ *ότι τι είναι αυτό; Για να τους δείξετε ότι και αυτό εξίσωση είναι ας πούμε.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Αυτό φαντάζομαι είναι κάποια οικεία περίπτωση;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Δεν ξέρω πως, δηλαδή, ουσιαστικά θέλω να παραλληλίσω. Ναι, μια οικεία περίπτωση. Δηλαδή, θέλω για να καταλάβουν την έννοια της εξίσωσης ας πούμε, να δούνε την εξίσωση τι κάναμε εκεί; Είχαμε μια ισότητα που ψάχναμε το x. Ωραία, το ίδιο κάνουμε και εδώ. Αυτό είναι; Το οικεία περίπτωση είναι;*

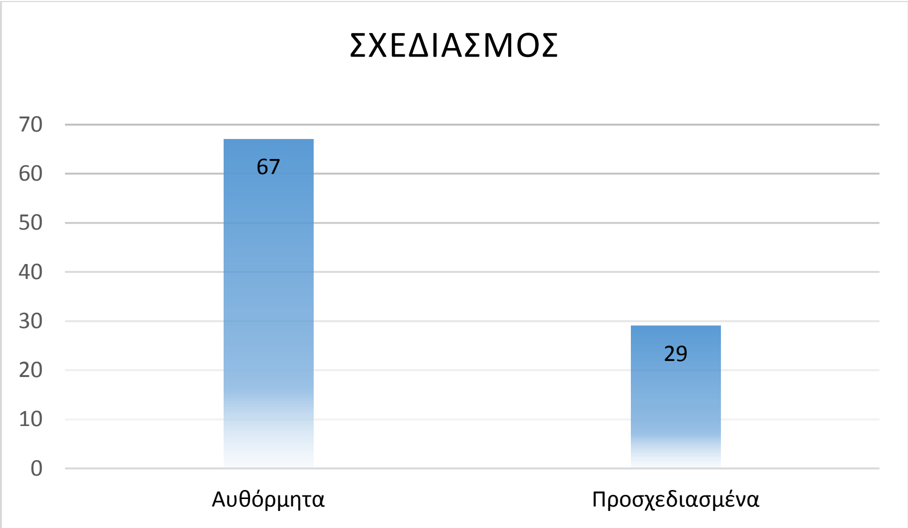
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Νομίζω ναι, ναι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτό, τέτοιο πράγμα είναι.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Της στιγμής φαντάζομαι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Θέλω να παραλληλίσω με κάτι που ήδη ξέρουνε. Της στιγμής το συγκεκριμένο. Η ιδέα να έχω μια εξίσωση δίπλα, όχι. είναι…*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Άρα το κάνετε.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι. Προμελετημένη, πώς το λένε;*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Προσχεδιασμένο* (γέλιο), *ωραία.*

Από τα παραδείγματα που χρησιμοποίησε ο εκπαιδευτικός, 67 από τα 96 (69,8%) ήταν αυθόρμητα, ενώ 29 από τα 96 (30,2%) ήταν προσχεδιασμένα.



Σχήμα 8. Κατανομή Παραδειγμάτων Ανάλογα με το Σχεδιασμό

4.1.1.1.2. Λειτουργικότητα

Σχετικά με τη λειτουργικότητά τους, τα διακρίνουμε σε παραδείγματα *απλής ή οικείας περίπτωσης*, σε παραδείγματα *διόρθωσης λαθών των μαθητών*, σε παραδείγματα *απόδοσης γενικότητας* και σε παραδείγματα *ασυνήθιστων περιπτώσεων*. Στα παραδείγματα απλής ή οικείας περίπτωσης εντάσσονται εκείνα τα οποία περιέχουν μικρούς αριθμούς ή απλές αλγεβρικές εκφράσεις, απλής μορφής αναπαραστάσεις, αναφορές σε καταστάσεις ή προβλήματα της καθημερινής ζωής με τις οποίες είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές, είτε εκφράσεις οι οποίες μπορεί μεν να είναι σύνθετες, αλλά έχουν γίνει αντικείμενο συζήτησης στην τάξη αρκετές φορές στο παρελθόν, ώστε να έχουν πλέον καταστεί οικείες στους μαθητές. Παραδείγματα διόρθωσης λαθών των μαθητών είναι τα παραδείγματα ή αντιπαραδείγματα που μπορεί να επικαλείται ο εκπαιδευτικός, προκειμένου να αντιμετωπίσει δυσκολίες που γνωρίζει ότι συναντούν συνήθως οι μαθητές ή που μπορεί να εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Στα παραδείγματα απόδοσης γενικότητας εντάσσονται εκείνα, μέσω των οποίων ο εκπαιδευτικός έχει στόχο να εξάγει συμπεράσματα ή να προβεί σε γενικεύσεις. Τέλος, παραδείγματα ασυνήθιστων περιπτώσεων θεωρούνται εκείνα τα οποία αφορούν περιπτώσεις που παρουσιάζουν κάποια ιδιαιτερότητα από μαθηματικής ή διδακτικής πλευράς.

Για τη διαμόρφωση της συγκεκριμένης κατηγοριοποίησης, στηριζόμαστε τόσο στην ανάλυση των μαθημάτων και των συνεντεύξεων με τον εκπαιδευτικό, αλλά και στην έρευνα των Zodik και Zaslavsky (2008). Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 2, οι συγκεκριμένοι ερευνητές διαχωρίζουν τα παραδείγματα ως προς τις υποκείμενες θεωρήσεις των εκπαιδευτικών, σε παραδείγματα απλής/οικείας περίπτωσης, αντιμετώπισης λαθών των μαθητών, έμφασης σε επιθυμητά χαρακτηριστικά, απόδοσης γενικότητας μέσω τυχαίων επιλογών, ασυνήθιστων περιπτώσεων, καθώς και διατήρησης της αχρείαστης εργασίας στο ελάχιστο. Από την ανάλυση των δεδομένων εντοπίζονται παραδείγματα που μπορούν να ενταχθούν σε τέσσερις από τις κατηγορίες αυτές, συνεπώς οι υπόλοιπες δεν θα αποτελέσουν μέρος της κατηγοριοποίησής μας.

- Μια χαρακτηριστική περίπτωση παραδείγματος απλής ή οικείας περίπτωσης προέκυψε κατά την 2η ώρα μαθήματος. Ζητήθηκε από τους μαθητές να υπολογίσουν τον αριθμό των ομάδων που πρέπει να υπάρχουν σε ένα πρωτάθλημα προκειμένου να προκύψουν 240 αγώνες. Λόγω της αδυναμίας των μαθητών να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα, ο καθηγητής χρησιμοποιεί ως παράδειγμα τους αγώνες που θα έδιναν τέσσερις από τους μαθητές μεταξύ τους:

Παράδειγμα ($Π_4$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Συγνώμη, συγνώμη. Ας υποθέσουμε ότι οι ομάδες είναι 4. Ο στόχος όμως δεν είναι να βρω το νούμερο με αυτό τον τρόπο. Ο στόχος είναι να καταλάβω τι παίζει για να το μεταφέρω μετά. Άρα, αν είναι 4 οι ομάδες, η 1η ομάδα πόσους αγώνες δίνει; Ο Πάρης με τον Νάσο, ένα ματς ο Πάρης με την Ελένη, ένα ματς ο Πάρης με τον Μιχάλη. Συμφωνούμε*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *3.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Έναν, δύο, τρεις.*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *3 αγώνες η κάθε ομάδα.*

Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Στην 2η ώρα είχαμε πιο πολλά παραδείγματα. Το πρώτο που εντοπίστηκε ήτανε στο πρόβλημα καταρχάς που αντιμετωπίστηκε. Όπου ζητούσαμε έναν Χι αριθμό ομάδων και εσείς για να απλουστεύσετε την περίπτωση είπατε αν ήταν 5 οι ομάδες.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, ναι. Αυτό το... αυτό είναι ένα παράδειγμα, καλά το 5 δεν έχει σημασία, θα μπορούσα να πω 3 ομάδες, 4 ομάδες, 5 ομάδες, ένα μικρό νούμερο. Αυτό είναι μια τακτική που ακολουθώ σχεδόν πάντα, σχεδόν πάντα με την έννοια ότι εντάξει, δεν ξέρω αν δουλεύει, αν υπάρχει τέτοια περίπτωση, αλλά κάθε φορά που έχουμε ένα πρόβλημα και βλέπω ότι δυσκολεύονται και αυτό είναι ένα.. που το ξέρω και από άλλες χρονιές κλπ ότι είναι ένα δύσκολο θέμα, δύσκολο πρόβλημα, βρείτε ένα.. βρείτε το ίδιο πρόβλημα, λύστε το ίδιο πρόβλημα σε πιο απλή έκδοση. Σε πιο απλή εκδοχή. Βάλε πιο μικρά νούμερα. Αν βάλεις πιο μικρά νούμερα, μπορείς να το διαχειριστείς στο μυαλό σου. Δηλαδή, μπορείς να σκεφτείς, το δίκτυο των 5 ομάδων που παίζουνε μπάλα μεταξύ τους ας πούμε. Τώρα με 15 ή να σκέφτεσαι 240 ομάδες δεν υπάρχει περίπτωση. Αυτό το κάνω με στόχο να καταλάβουν το πρόβλημα, όχι να το λύσουνε. Όπως προέκυψε…*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Άρα, είναι κατά μία έννοια προσχεδιασμένο γιατί το είχατε στο μυαλό σας.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Είναι προσχεδιασμένο ναι. Δεν είναι προσχεδιασμένη η εξέλιξη. Είδες, εμένα μου έκανε εντύπωση. Εγώ στην αρχή που έγραψα τον πίνακα, το τέσσερα επί τέσσερα, λέω τώρα βλακείες, δεν θα δουλέψει. Αλλά έτσι προέκυψε το τέσσερα επί τέσσερα μείον τέσσερα που θα μπορούσε να γίνει δέκα επί δέκα μείον δέκα που…*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ναι.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Προκειμένου να γίνει γενίκευση ας πούμε και προέκυψε η εξίσωση. Ναι. Νομίζω, νομίζω ότι έεε όσα παιδιά μπόρεσαν να το σκεφτούν, τα βοήθησε.*

Παραδείγματα απλής ή οικείας περίπτωσης είναι και τα $Π_{38}$, $Π_{89}$ που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Στην ίδια κατηγορία ανήκει και το παράδειγμα της $6^{ης}$ ώρας μαθημάτων, όπου ανακύπτει το ζήτημα του τι αποτέλεσμα προκύπτει όταν υψωθεί κάποιος αριθμός στο τετράγωνο:

Παράδειγμα ($Π_{47}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Είναι ένας αριθμός στο τετράγωνο. Ή θα είναι μηδέν στο τετράγωνο οπότε αυτό θα κάνει μηδέν, ή θα είναι οποιοσδήποτε άλλος αριθμός εκτός από το μηδέν στο τετράγωνο, θετικός ή αρνητικός, θετικός ή αρνητικός, οπότε στο τετράγωνο του, το τετράγωνο του θα είναι θετικός; Ε;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Το τετράγωνο τι θα είναι;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Θετικό. Δύο εις το τετράγωνο τι βγάζει θετικό ή αρνητικό;*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Θετικό.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Πλην δύο στο τετράγωνο;*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Θετικό.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Πλην 358 στο τετράγωνο;*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Θετικό.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Τώρα λίγο παρακάτω που λέγαμε ότι αν ένας αριθμός στο τετράγωνο είναι θετικός. Και πήραμε διάφορα νούμερα εδώ πέρα. Το δύο στο τετράγωνο, το μείον δύο στο τετράγωνο. Εντάξει φαντάζομαι καθαρά απλές περιπτώσεις για να…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Απλές περιπτώσεις απλώς για να.. γιατί πάντα έχω αυτή την αμφιβολία. Δηλαδή λέμε ένας αριθμός στο τετράγωνο θα είναι πάντα θετικός. Δεν είμαι σίγουρος ότι τα παιδιά σκέφτονται ότι αν πάρω έναν θετικό.. εγώ λέω τώρα αν πάρω έναν θετικό, και σκέφτομαι έναν θετικό. Σκέφτομαι ένα συγκεκριμένο νούμερο. Σκέφτομαι το συν δύο π.χ. και μετά λέω αν πάρω έναν αρνητικό.. δεν το λέω αλλά σκέφτομαι πάλι έναν αρνητικό. Σκέφτομαι το πλην 358 π.χ. και σκέφτομαι ότι αν το υψώσω στο τετράγωνο, το αποτέλεσμα θα είναι θετικό. Δεν ξέρω αν τα παιδιά το σκέφτονται έτσι. Δηλαδή, αν μένουμε σε μια τυπική. Γι' αυτό τα βάζω να σκεφτούνε νούμερα.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ή απλά το μαθαίνουνε παπαγαλία ότι είναι έτσι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ακριβώς. Γι' αυτό τα βάζω να σκεφτούνε νούμερα.*

- Παράδειγμα διόρθωσης λαθών των μαθητών έχουμε στην 4η ώρα μαθήματος. Οι μαθητές δε γνωρίζουν πότε οι όροι μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι στη σωστή σειρά, ώστε να βρίσκουν σωστά τη Διακρίνουσα:

Παράδειγμα ($Π_{23}$)

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Κύριε, πώς θα ξέρουμε πάντα αν οι παράγοντες της διακρίνουσας είναι πάντα στην σωστή σειρά; Γιατί αν θα κάνουμε τις πράξεις μετακινούμε και τα πάμε από την μια πλευρά στην άλλη, πώς μετά;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Άαα! Το α... εννοείς πώς θα ξέρουμε ποιο παίζει το ρόλο του α, το ρόλο του β, ωραία.*

…

ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *Έχω μια ερώτηση. Εγώ νομίζω ότι το α, β, γ λόγω της σειράς πήγαν…*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι, γιατί άμα αναποδογυρίσουμε και γράψω* $11y - 2y^2 - 5 = 0$*, δεν είναι αυτό το α (το 11), αυτό το β (το -2) και αυτό το γ (το -5). Το α… θα συνεχίσει να είναι αυτό το β, εκείνο εκεί το γ. Εντάξει;*

Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Το επόμενο είναι όταν είχανε κολλήσει λίγο οι μαθητές με την σειρά των όρων στην δευτεροβάθμια εξίσωση, εδώ που σας είπαν γιατί είναι το άλφα το μείον δύο και δεν είναι το 11, που το αντιστρέψατε επίτηδες εσείς για να το δείξετε. Έτσι;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, ναι. Εκεί, ακριβώς ναι. Έγραψα τα ίδια. Μα πώς; Έεε… τώρα αν τους έβαζα ένα άλλο παράδειγμα* (η δευτεροβάθμια εξίσωση που χρησιμοποίησε ως, είχε λυθεί προηγουμένως στην τάξη). *Μια άλλη, ας πούμε, δευτεροβάθμια με άσχετα νούμερα δεν θα καταλάβαιναν ότι είναι το ίδιο πράγμα απλώς αλλάζει η σειρά ας πούμε; Αυτό.*

Στα παραδείγματα διόρθωσης λαθών των μαθητών ανήκουν και τα παραδείγματα $Π_{12}$ και $Π_{71}$ που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Άλλη μια περίπτωση παραδείγματος διόρθωσης λαθών μαθητών είχαμε τη 12η ώρα, όπου με αφορμή τη λύση μιας εξίσωσης, προκύπτει το ερώτημα του υπολογισμού του x, αν $x^2 = a$:

Παράδειγμα ($Π_{104}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτό εδώ που έχω γράψει* (έγραψε $x^2 = 4$).
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Συγνώμη έχει ρίζα;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μάλιστα έχει. Γιατί είναι λάθος; Μόνο το 2; x τετράγωνο ίσον 4. Πόσο είναι το x;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *2*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *2 ε; Λάθος. Η ρίζα 4 κάνει 2 λάθος.*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Μείον 2*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Άαα!*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Άαα!*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Είναι το συν 2 και το πλην 2 οι λύσεις.*

Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και το τελευταίο, εντάξει τώρα άσχετα με τους τριγωνομετρικούς είναι ότι είχε προκύψει κάπου ότι το ημίτονο τετράγωνο είναι 8/9 και σας είπαν ότι είναι συν ρίζα 8/9*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, ναι, ναι.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και τους είπατε εσείς το x τετράγωνο είναι 4, και σας λένε ότι το x είναι 2. Τώρα αυτό φαντάζομαι είναι καθαρά αντιπαράδειγμα.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτό είναι αναμενόμενο πρόβλημα. Ακριβώς. Αυτό είναι ε... εγώ θα το έλεγα... εγώ θα το έλεγα περισσότερο generative αυτό το παράδειγμα. Γιατί; Από αυτό μόνο το 2 είναι που στο τετράγωνο; Ενώ αυτό με το ρίζα του 8/9 έχει θόρυβο, δηλαδή, αποσπά την προσοχή από το ρίζα του 8/9 που δεν ξέρω πόσο είναι. Ρε παιδί μου x τετράγωνο κάνει 4. Πόσο είναι το x; Μόνο το 2; Άρα αυτό οδηγεί στο να πούνε αμέσως μετά δεν είναι κάτι που δεν το ξέρουν. Λάθος το λέω. Δεν είναι κάτι που δεν το έχουν ξανακούσει, το έχουν ξανακούσει, γι' αυτό κιόλας η αντίδραση είναι άαα! ναι είναι και μείον 2. Με αυτή την έννοια μάλλον generative θα το έλεγα, δεν θα το έλεγα αντιπαράδειγμα.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Όχι, δηλαδή, άρα δεν το κάνατε...*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τους πάω σε μία... σε κάτι…*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Αλλά διορθώνετε και το λάθος των μαθητών, έτσι;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Διορθώνω το λάθος των μαθητών, βεβαίως σύμφωνοι. Αν είναι αυτό το δίλλημα, τότε το παράδειγμα αυτό πάει στο να διορθώσεις το λάθος των μαθητών.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Στο να διορθώσεις. Αλλά ως παράδειγμα, όχι ως αντιπαράδειγμα.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι ως αντιπαράδειγμα, όχι ως αντιπαράδειγμα, ως παράδειγμα. Γιατί βρίσκουνε, μπορούν να σκεφτούν, τους σπρώχνεις δηλαδή και συ λίγο. Λες ας πούμε, το λες λάθος και το λες έτσι. Δεν του λες κάτι ξέχασες, το λες λάθος, δηλαδή προσπαθώ να σοκάρω με αυτό που λέω. Ναι, όχι ως αντιπαράδειγμα. Μάλλον έτσι όπως το λες, διορθώνω το λάθος των μαθητών.*

- Μια χαρακτηριστική περίπτωση παραδείγματος απόδοσης γενικότητας εντοπίζεται την $8^{η}$ ώρα μαθήματος. Γίνεται συζήτηση σχετικά με το αν υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός που να είναι πιο κοντά από όλους τους άλλους στο 0. Τότε υπεισέρχεται η έννοια της απειρίας των ρητών αριθμών:

Παράδειγμα ($Π_{72}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Κάθε φορά που λες έναν αριθμό κοντά στο μηδέν μπορώ εγώ να βρω εγώ έναν άλλο αριθμό που να είναι πιο κοντά από αυτόν που είπες;*
ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Ναι.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτή είναι η ερώτηση.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Ναι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι. Ο Γιώργος λέει... απαντάει όχι γιατί αν σου πω το μηδέν δεν μπορείς να βρεις, έναν αριθμό που να είναι πιο κοντά στο μηδέν από το μηδέν. Αυτό λέει. Συμφωνώ. Αλλά αν αποκλείσουμε την περίπτωση να μου πεις μηδέν. Κάθε αριθμό που θα μου λες, εγώ μπορώ να βρίσκω έναν πιο κοντά από το μηδέν. Πες έναν που να νομίζεις ότι είναι. Και μετά θα τον βελτιώσεις, δεν πειράζει. Πες έναν που είναι κοντά στο μηδέν. Έναν. Εγώ λέω 0,1. Πες κάτι πιο κοντά στο 0 από το 0,1.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *0,01*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *0,01. Ωραία και εγώ λέω 0,001 και μετά θα πεις 4 μηδενικά και εγώ 5 μηδενικά. Ε, δεν μπορούμε, δεν τελειώνει ποτέ αυτό.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *0,0000000…*

ΜΑΘΗΤΗΣ 3: *Όλα συγκλίνουν με μηδέν.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Κάποτε δεν θα τελειώσεις;*

ΜΑΘΗΤΗΣ 3: *Όταν βαρεθώ.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ωραία. Ε, λοιπόν, όταν βαρεθείς, βάζω εγώ άλλο ένα μηδενικό. Ένα. Δεν θα τελειώνει αυτή η ιστορία.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Συζητήσαμε πριν με το 0 και το 1 πως θα μπορέσουμε να χωρέσουμε έναν αριθμό ενδιάμεσα κλπ και τους δώσατε διάφορα…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τώρα εδώ που έχουμε παραδείγματα; Έχουμε παραδείγματα στα νούμερα που επιλέξαμε.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Στα νούμερα.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Εντάξει, αυτά μάλλον είναι νούμερα που εξηγούν… δεν είναι ακριβώς ένα παράδειγμα είναι πολλά διαδοχικά νούμερα... δηλαδή...*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Διαδοχικά σαν περιπτώσεις.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ακριβώς. Σαν να…*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Σαν γενικές περιπτώσεις δηλαδή;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Παράδειγμα, μάλλον εγώ το θεωρώ ότι είναι παραδείγματα τα οποία ως παράδειγμα είναι το... η διαδικασία που περιγράφεις λέγοντας τα νούμερα. Πες μου ένα νούμερο; Το… μηδέν ένα, ένα; Μηδέν μηδέν ένα, μηδέν μηδέν. Αυτή η διαδικασία ίσως μπορείς να πεις ότι είναι ένα παράδειγμα. Ενώ θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω άλλη τακτική. Θα μπορούσα να τους πω πες μου τον αριθμό που* *είναι ο πιο κοντά στο μηδέν. Θα έλεγε κάποιος κάτι. Είμαι σίγουρος ότι κάποιος θα σήκωνε το χέρι του να πει όχι δεν είναι αυτός, είναι εκείνος…*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Απλά έτσι όντως…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Θα τους άφηνα δηλαδή να…*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Απλά τώρα είναι σαν γνώριμες περιπτώσεις πάλι τα νούμερα, οπότε…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, ναι, σαν γνώριμες περιπτώσεις και νομίζω βέβαια ότι η διαδικασία αυτή είναι η πώς την λέμε; Γενετική; Γενεσιουργή;*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ναι το generic.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το generic ας πούμε.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ναι, για να αποδειχτεί γενικότερα δηλαδή.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, ακριβώς. Ότι έχεις έναν αριθμό…*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Πιο πολύ γι' αυτό έγινε δηλαδή και όχι τόσο…*

Παράδειγμα απόδοσης γενικότητας εντοπίζεται και στην 11η ώρα μαθήματος. Στα πλαίσια επίλυσης ενός προβλήματος, προκύπτει το ζήτημα υπολογισμού του αθροίσματος των γωνιών ενός τετράπλευρου:

Παράδειγμα (Π95)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Παιδιά, οι γωνίες ενός τετράπλευρου, πόσες μοίρες είναι;*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Τετράπλευρου;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τετράπλευρου, πόσες μοίρες είναι;*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *4*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Είπα πόσες μοίρες, όχι πόσες είναι οι γωνίες. 4 είναι οι γωνίες. Πόσες μοίρες είναι.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *360.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τι είπες Λάμπρο;*

ΛΑΜΠΡΟΣ: *270.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *270. Τι είπες;*

ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *360.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *360.*

ΛΑΜΠΡΟΣ: *360 σόρυ.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Άαα! Είσαι σίγουρος ότι είναι 360; Μπορώ να το δω πολύ γρήγορα ως εξής.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 3: *Ένα τετράγωνο;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ένα τετράγωνο ρε παιδιά. Το χωρίζεις σε 2 τρίγωνα. Οι γωνίες του τετράπλευρου είναι αυτή και αυτή και αυτή και αυτή και αυτή και αυτή άρα είναι, οι γωνίες του τετράπλευρου είναι οι γωνίες των 2 τριγώνων μαζί. 180 και 180;*
ΜΑΘΗΤΗΣ 3: *360.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Άρα σύνολο 360.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ρωτήσατε πόσες μοίρες είναι η γωνία του τετράπλευρου, το άθροισμα τους, και το κάνατε παράδειγμα ότι φτιάχνω ένα τυχαίο και το χωρίζω σε τρίγωνα, άρα επειδή τα 2 τρίγωνα είναι τόσο…*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Εδώ θα το έλεγα ότι είναι αυτό που λέμε το generative παράδειγμα.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Η γενίκευση.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Γενίκευση, δηλαδή ένα παράδειγμα που έτσι μπορεί να υπολογίσεις όχι μόνο τετράγωνο, τετράπλευρο, οτιδήποτε. Το χωρίζω σε τρίγωνα και μετράω πόσα τρίγωνα έχω. Και αυτή είναι και η διαδικασία της απόδειξης σε αυτή του τύπου ας πούμε ότι είναι Μ πλην 2 επί 180 ότι είναι το... ναι και επί πλέον εδώ τώρα δίνοντας αυτό το παράδειγμα…*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ήτανε της στιγμής φαντάζομαι;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Της στιγμής, αυτό ήταν της στιγμής ναι. Επιπλέον, θέλω να τους βάλω και σε μια λογική ότι ρε παιδί μου εντάξει, δεν θυμάσαι, δεν είσαι σίγουρος, πώς θα το ψάξεις;*

- Μια περίπτωση παραδείγματος ασυνήθιστης περίπτωσης διακρίναμε κατά τη $2^η$ ώρα μαθήματος. Αφού λύθηκε στην τάξη μια εξίσωση που προέκυψε από ένα πρόβλημα της καθημερινότητας, ο καθηγητής επικαλέστηκε παραδείγματα με περιπτώσεις ριζών οι οποίες θα απορρίπτονταν λόγω των περιορισμών του προβλήματος:

Παράδειγμα ($Π_5$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Σε ποια περίπτωση θα απορρίπταμε μια λύση; Εδώ μας βγαίνει αρνητικό. Ωραία. Υπάρχει άλλη περίπτωση να απορρίψουμε μια λύση; Τι άλλο θα μπορούσε να μας βγει και να το απορρίψουμε;*
…

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το αρνητικό παιδιά δεν έχει νόημα, αρνητικός αριθμός ομάδων. Έτσι; Τι άλλο αποτέλεσμα θα μπορούσε να βγει ώστε να πω ότι απορρίπτονταν. Τι άλλο θα απέρριπτα;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Κλάσμα.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Άαα! Κλάσμα ή δεκαδικό που να μην βγαίνει ακέραιος. Άλλη μια περίπτωση που θα μπορούσαμε να απορρίψουμε. Άμα βγει 3, 7, 17,5, θα το απορρίψουμε.*

Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μετά ήθελα να τους δώσω την περίπτωση, όμως δεν έμεινα ικανοποιημένος από τις απαντήσεις τους. Έεε ήθελα να τους δώσω τις 2 περιπτώσεις. Καταρχήν ποιες είναι οι καταστάσεις που απορρίπτω; Στην περίπτωση αυτή θα απορρίψω αρνητικούς, θα απορρίψω…*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Κλάσματα.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Δεκαδικούς και κλάσματα κλπ. Έτσι; Γιατί θέλω πλήθος ομάδων. Ο.κ!*

Άλλο ένα παράδειγμα ασυνήθιστης περίπτωσης εντοπίστηκε την 3η ώρα των μαθημάτων, όπου γίνεται διάλογος σχετικά με το τι συμβαίνει κατά τη διαίρεση ενός αριθμού με το μηδέν:

Παράδειγμα ($Π_{10}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Γιατί δεν ορίζεται διαίρεση με το μηδέν;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Επειδή αν πάμε να το επαληθεύσουμε, όποιος αριθμός πολλαπλασιαστεί με το μηδέν, θα μας κάνει μηδέν.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τι εννοείς;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Δέκα δια δύο μηδέν... μηδέν.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι, δέκα δια δύο πόσο κάνει;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Εννοώ δέκα δια μηδέν.*

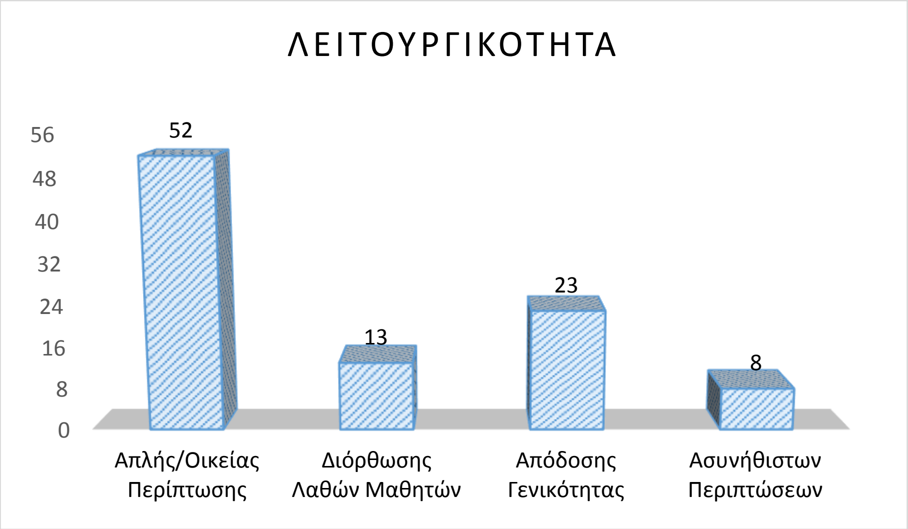
Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Λοιπόν είναι δευτέρα 10/2, είχαμε το μάθημα τώρα στο Γ2. Είχαμε αρκετά παραδείγματα. Το πρώτο-πρώτο που βρήκα, είναι στην άσκηση 2α , όπου ρωτήσατε γιατί πρέπει να πάρουμε περιορισμό για τον παρονομαστή.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και ζητούσατε αιτιολόγηση και ένας μαθητής σας είπε για παράδειγμα το δέκα δια μηδέν.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ή το πήρατε εσείς; Δεν θυμάμαι, νομίζω ότι...*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ο μαθητής, ο μαθητής, ο μαθητής.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ο μαθητής. Έεε, και το δικαιολογήσατε λοιπόν έτσι, κάνοντας την αντίστροφη πράξη.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτό είναι το συνηθισμένο παράδειγμα που έχω χρησιμοποιήσει εγώ πάρα πολλές φορές. Όχι τα νούμερα, σημασία έχει… δηλαδή, πάντα τους βάζω ένα παράδειγμα με νούμερα για να συνειδητοποιήσουν γιατί το δέκα δια δύο κάνει πέντε. Γιατί πέντε επί δύο κάνει δέκα. Γι' αυτό απάντησε κιόλας, γιατί το έχει ξανακούσει ο πιτσιρικάς. Οπότε, η επόμενη ερώτηση είναι το δέκα δια μηδέν πόσο κάνει; Δεν υπάρχει αριθμός που να πολλαπλασιαστεί με μηδέν και να κάνει 10.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Αυτό το παράδειγμα βλέπετε ότι γενικά τους πείθει;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Γενικά πείθει, ναι. Δηλαδή, η ένδειξη ότι δεν δουλεύει διαίρεση δια μηδέν επειδή κανένας πολλαπλασιασμός επί μηδέν δεν δίνει το τάδε αποτέλεσμα, αυτό πείθει.*

Κατά την ταξινόμηση των παραδειγμάτων συναντήσαμε δυσκολίες στη διαμόρφωση της κατηγορίας αυτής, αφού διαπιστώθηκε ότι ήταν δυνατόν παραδείγματα να εντάσσονται ταυτόχρονα σε παραπάνω από μία κατηγορίες. Μια τέτοια περίπτωση είναι το παράδειγμα Π_{104} που αναφέραμε προηγουμένως, το οποίο μπορεί να είχε επιλέγει από τον εκπαιδευτικό με στόχο να διορθώσει μια λανθασμένη αντίληψη των μαθητών του και ταυτόχρονα να εξάγει ένα γενικότερο συμπέρασμα, συνεπώς μπορεί να ενταχθεί ταυτόχρονα τόσο στα παραδείγματα διόρθωσης λαθών των μαθητών, όσο και στα παραδείγματα απόδοσης γενικότητας. Επίσης, είναι δυνατόν ένα παράδειγμα, όπως το Π_{47}, το οποίο ο εκπαιδευτικός επικαλείται προκειμένου να αποδώσει γενικότητα, να ανήκει ταυτόχρονα και στην κατηγορία παραδείγματος απλής ή οικείας περίπτωσης. Προκειμένου λοιπόν να μπορέσουμε να κατατάξουμε κάθε παράδειγμα σε μία μόνο κατηγορία, επιλέξαμε να στηριχθούμε στις θεωρήσεις του ίδιου του εκπαιδευτικού που τα χρησιμοποίησε.

Από τις παρακολουθήσεις των διδασκαλιών αλλά και από τις προσωπικές συνεντεύξεις με τον εκπαιδευτικό, προκύπτει ότι τα 52 από τα 96 παραδείγματα (54,2%) που χρησιμοποίησε ο καθηγητής ήταν απλής ή οικείας περίπτωσης, 13 από τα 96 (13,5%) ήταν διόρθωσης λαθών/παρανοήσεων των μαθητών, 23 από τα 96 (24%) είχαν στόχο την απόδοση γενικότητας, ενώ 8 από τα 96 (8,3%) ήταν παραδείγματα ασυνήθιστων περιπτώσεων.



Σχήμα 9. Κατανομή Παραδειγμάτων Ανάλογα με τη Λειτουργικότητα

4.1.1.2. Μαθητές

Όπως αναφέραμε, εκτός από τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός καταγράφηκαν και παραδείγματα που διατυπώθηκαν από τους μαθητές. Ένα τέτοιο παράδειγμα ήταν το Π$_{19}$ της 4^{ης} ώρας, όπου λύνεται στην τάξη η κλασματική εξίσωση: $\frac{4\omega+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$. Μια μαθήτρια ρωτά πώς θα έβρισκαν το Ε.Κ.Π. αν ήταν διαφορετικοί οι παρονομαστές:

Παράδειγμα (Π$_{19}$)

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Αν ο παρονομαστής βγάλει ωμέγα πλην δύο και είναι ωμέγα συν.. θα ακολουθούσαμε την ίδια.. εννοώ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Απλώς θα ήταν διαφορετικό το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Ποιο θα ήταν; Στην περίπτωση που ο ένας παρονομαστής ήταν ωμέγα πλην δύο και ο άλλος ήταν ωμέγα συν δύο; Ποιο θα ήταν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο;*
ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *Το ωμέγα συν δύο;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ο ένας παρονομαστής είναι ο ωμέγα πλην δύο και ο άλλος είναι ο ωμέγα συν δύο. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το ωμέγα συν δύο;*
ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *Επί το ωμέγα πλην δύο;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Άαα! Ωμέγα συν δύο, επί το ωμέγα πλην δύο.*

Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Λοιπόν, στην 1η ώρα, το πρώτο παράδειγμα που κατέγραψα είναι στην αρχή, όπου σας ρωτάει μια μαθήτρια τι θα γινότανε αν ήταν διαφορετικό το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, όπου στην αρχή είχαμε αυτή την άσκηση με τον ίδιο παρονομαστή και αυτό το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο ήτανε ο παρονομαστής και σας ρώτησε τι θα γινότανε αν είχαμε διαφορετικούς παρονομαστές. Και χρησιμοποιήσατε αυτό το παράδειγμα που απλά βάλατε έναν παρονομαστή ωμέγα πλην δύο και τον άλλον ωμέγα συν δύο.*

…

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Εμένα μου δίνει την ευκαιρία ας πούμε σε αυτή την περίπτωση να πω τι ας πούμε; Δηλαδή, μου κάνει εντύπωση αυτό γιατί σχεδόν όλα τα παραδείγματα, όλες οι ασκήσεις που λύνουμε, σχεδόν είναι τέτοιες.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Διαφορετικό.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Και μου έκανε εντύπωση αυτή η ερώτηση.*

Παράδειγμα επίσης που προέρχεται από μαθητές είναι το Π_{63} της $7^{ης}$ ώρας, όπου γίνεται συζήτηση για το αν ισχύει η ιδιότητα: $αν\ α < β, τότε\ α \cdot γ < β \cdot γ$:

Παράδειγμα (Π_{63})

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μήπως μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τις ανισότητες; Δηλαδή, αν το α είναι μεγαλύτερο από το β και το γ μεγαλύτερο από το δ, μπορώ να τα πολλαπλασιάσω κατά μέλη; Βάσω για πες ένα παράδειγμα.*

ΒΑΣΩ: *Να πω παράδειγμα... εεε... 5 μεγαλύτερο του 3.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Πέντε μεγαλύτερο από το 3.*

…

ΒΑΣΩ: *Έεε* (γέλια), *7 μεγαλύτερο του 6.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *7 μεγαλύτερο του 6. Πολλαπλασίασε τα.*

ΒΑΣΩ: *Πέντε και τρία.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *35, τρεις έξι 18.*

Στη συνέχεια ένας άλλος μαθητής αναφέρει παράδειγμα με αρνητικούς αριθμούς:

ΓΙΑΝΝΗΣ: *Αν είχαμε αρνητικούς στο 2ο μέρος.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αν είχαμε.. για σιγά, σταματήστε. Αν είχαμε αρνητικούς για πες παράδειγμα Γιάννη.*
ΓΙΑΝΝΗΣ: *Το 5 μεγαλύτερο του πλην 7, το 7 μεγαλύτερο του πλην 10.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αν κάνω πολλαπλασιασμό θα πάρω. 35 μεγαλύτερο του 70. Αυτό δεν είναι σωστό.*

Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και το τελευταίο είναι και όταν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη. Που παίρνετε διάφορα παραδείγματα εδώ πέρα, για να δείξετε ότι δεν μπορεί να βγει γενικός κανόνας.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ακριβώς. Για να δείξω ότι είναι… δεν ξέρω τώρα. Μπορούμε να πούμε ότι είναι αντιπαραδείγματα;*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Αν αντιπαραδείγματα ή όχι έ; Ή μη παραδείγματα.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μπορείς να πεις ότι είναι... μάλλον είναι.. προσπαθώ.. κοίταξε, σε διάφορες φάσεις τα χρησιμοποιώ ως αντιπαραδείγματα γιατί τα παραδείγματα αυτά τα χρησιμοποιώ μετά από κάθε... λέει κάποιος μαθητής, ααα… άρα πρέπει να είναι έτσι.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Άρα όχι.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Φτιάχνω ένα αντιπαράδειγμα.*

Από το σύνολο των παραδειγμάτων που καταγράφηκαν, 96 στα 104 (92,3%) ήταν παραδείγματα που παρήγαγε ο καθηγητής και μόλις 8 από τα 104 (7,7%) ήταν παραδείγματα που προέρχονταν από τους μαθητές.

Σχήμα 10. Κατανομή Παραδειγμάτων Ανάλογα με την Προέλευση

4.1.2. Χαρακτηριστικά

Σχετικά με τα χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων, τα διαχωρίζουμε ανάλογα με το *είδος* τους και τη *διαισθητικότητά* τους.

4.1.2.1. Είδος

Ως προς το είδος τους, τα χωρίζουμε σε *παραδείγματα, αντιπαραδείγματα* και *μη παραδείγματα.*

4.1.2.1.1. Παραδείγματα

Μια χαρακτηριστική περίπτωση απλού παραδείγματος είναι το $Π_{34}$ κατά την $5^η$ ώρα μαθημάτων, όπου ο καθηγητής παρουσιάζει την ιδιότητα *αν* $\left.\begin{matrix} α > β \\ γ > δ \end{matrix}\right\}$ τότε $α + γ > β + δ$ μέσω ενός προβλήματος της καθημερινής ζωής:

Παράδειγμα ($Π_{34}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μπαίνω σε ένα μαγαζί και θέλω να αγοράσω ένα παντελόνι και ένα πουκάμισο. Το φθηνότερο παντελόνι που έχει είναι..*
ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *25.*
ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *35.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Κάνει 30 ευρώ και το ακριβότερο 120.*
ΜΑΘΗΤΗΣ 3: *200.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το φθηνότερο παντελόνι.. Συγνώμη, το φθηνότερο πουκάμισο που υπάρχει κάνει 40 ευρώ και το ακριβότερο 200. Πόσα είναι τα λιγότερα χρήματα που θα πληρώσω. Ααα… να ξαναπώ τους αριθμούς; Γιατί; Το μυαλό σου το είχες τόση ώρα να πεις 200, 72;*
ΜΑΘΗΤΗΣ 3: *Όχι, όχι.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το φθηνότερο παντελόνι… οι τιμές των παντελονιών είναι από 30 ως 120 και οι τιμές των πουκαμίσων είναι από 40 μέχρι 150 ξέρω ΄γω.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 4: *70.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και το τελευταίο είναι αυτό το πρόβλημα με τα πουκάμισα και τα παντελόνια που είπατε.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ααα ναι.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Για την άλλη ιδιότητα.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτό τώρα δεν ήτανε προσχεδιασμένο αυτό. Αλλά θυμάμαι ότι σ' αυτό, σ' αυτή την συζήτηση είναι πολύ ενδιαφέρον, έχει μια άσκηση το βιβλίο, δεν είναι ακριβώς έτσι, αλλά αυτό είναι το πνεύμα και μου φαίνεται πολύ ενδιαφέρον γιατί πολύ εύκολα μπαίνουν τα παιδιά και λένε είδες την απάντηση, το λιγότερο 70, και αυτό μου δίνει το.. η άσκηση είναι το παντελόνι είναι το φθηνότερο τόσο, το ακριβότερο τόσο. Το πουκάμισο είναι το φθηνότερο τόσο.. μπαίνοντας μέσα να αγοράσουμε ένα έτσι και ένα αλλιώς, πόσο είναι το λιγότερο που θα πληρώσουμε και πόσο είναι το περισσότερο. Οπότε, τα βάζεις σε μια διπλή ανισότητα, δύο διπλές ανισότητες και τις προσθέτουμε. Και πολύ εύκολα τα παιδιά το λένε. Δηλαδή είναι ένα παράδειγμα το οποίο, εδώ είναι Generic νομίζω, το οποίο μας οδηγεί στην γενική διατύπωση ας πούμε της ιδιότητας. Ναι, εκείνη την ώρα προέκυψε. Εεε, με βάση βέβαια την εμπειρία άλλων χρόνων, αλλά δεν είναι προσχεδιασμένο, δεν ήταν προσχεδιασμένο αυτό. Ψάχνοντας πάντα σε αυτά μπαίνω με ένα παράδειγμα. Δηλαδή, κάνω την εισαγωγή ας πούμε σε αυτές τις ιδιότητες χρησιμοποιώντας παραδείγματα.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και μετά το γενικεύετε.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αριθμητικά, έτσι; Και μετά γενικεύω, αλλά μου φαίνεται πιο ενδιαφέρον αυτό το παράδειγμα.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Στην συγκεκριμένη περίπτωση, αυτό.*

Περιπτώσεις παραδειγμάτων είναι και τα Π_{4}, Π_{10}, Π_{19}, Π_{38}, Π_{47}, Π_{71}, Π_{72}, Π_{89}, Π_{95}, Π_{104} που παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Μια επιπλέον περίπτωση παραδείγματος είναι το Π_{69} της $8^{ης}$ ώρας, όπου μια μαθήτρια δεν μπορούσε να κατανοήσει τι είναι το σύμβολο «>»:

Παράδειγμα (Π_{69})

ΜΑΘΗΤΡΙΑ: *2α μείον 3β, αυτό εκεί πώς το λένε* (δείχνει το σύμβολο «<»)*;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτό;*
ΜΑΘΗΤΡΙΑ: *Ναι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τι ναι; Πώς το λένε;*

ΜΑΘΗΤΡΙΑ: *Δεν ξέρω. Το μεγαλύτερο* (γράφει) *δεν είναι αυτό;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Φαντάσου λοιπόν ότι αυτό που τρώει είναι το μεγάλο. 3 μικρότερο του 5 σωστό;*

ΜΑΘΗΤΡΙΑ: *Δε θυμάμαι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *7 μεγαλύτερο του 4.*

Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτά ήταν παραδείγματα, αυτά ήταν 2 συγκεκριμένα νούμερα για να καταλάβω τι δεν καταλαβαίνει. Δηλαδή, δεν ξέρω αν κατάλαβες τι λέω. Δηλαδή, για πες μου ρε παιδί μου αυτό. Δηλαδή, προσπαθώ να καταλάβω τι είναι αυτό που την κολλάει, που την… γι' αυτό το ρώτησα έτσι. Παραδείγματα είναι. Αλλά να, αυτή είναι μια κατηγορία που είναι εντελώς διαφορετική.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Εγώ, να τώρα που μου το λέτε, έτσι το έχω καταλάβει, ότι το κάνατε σαν να θέλετε να τις το αποσαφηνίσετε ας πούμε, αλλά απ' ότι μου λέτε ψάχνατε να βρείτε ακριβώς το πρόβλημα.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Έψαχνα να βρω τι δεν… τι είναι… δηλαδή να δω τι θα μου απαντήσει, για να καταλάβω που κολλάει ας πούμε.*

4.1.2.1.2. Αντιπαραδείγματα

Ως αντιπαραδείγματα θεωρούμε τις περιπτώσεις των παραδειγμάτων που στόχο έχουν να απορρίψουν την ορθότητα μιας πρότασης ή έναν ισχυρισμό σύμφωνα με την Michener (1978). Διακρίνουμε τρεις επιμέρους κατηγορίες αντιπαραδειγμάτων, τα αντιπαραδείγματα *αντιμετώπισης λανθασμένων πεποιθήσεων/αποριών,* τα αντιπαραδείγματα *απόδειξης μη ισχύος μιας μαθηματικής σχέσης* και τα αντιπαραδείγματα *αντιμετώπισης δύσκολων ζητημάτων*.

- Ο εκπαιδευτικός επιστρατεύει συχνά κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του αντιπαραδείγματα, προκειμένου να διορθώσει λανθασμένους ισχυρισμούς ή απόψεις των μαθητών του. Στο παράδειγμα $Π_3$ της $2^{ης}$ ώρας μαθημάτων, ο καθηγητής θέτει στους μαθητές ένα πρόβλημα. Να προσδιορίσουν τον αριθμό των ομάδων που πρέπει να υπάρχουν σε ένα πρωτάθλημα, ώστε να προκύπτουν 240 αγώνες. Μια μαθήτρια κάνει την εικασία ότι ο αριθμός των ομάδων που αποτελεί λύση του προβλήματος είναι 48.

Παράδειγμα (Π3)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Συγνώμη. Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες 2 αγώνες εντός και εκτός έδρας. Αν συνολικά έγιναν 240, πόσες είναι οι ομάδες;*
ΜΑΡΙΑ: Εγώ λέω ότι είναι 58.
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μάλλον δια πέντε. 48 δεν είναι πάντως. Γιατί δεν είναι;*
ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *48; Αποκλείεται.*
ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *48 δεν είναι με καμία κυβέρνηση.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Γιατί αν ήταν 48, τότε στην πρώτη Κυριακή πόσοι αγώνες θα είχανε γίνει; Στην πρώτη, η πρώτη ομάδα πόσους αγώνες θα έδινε; Θα έχει δώσει.*
…..
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Και το 60 είναι υπερβολικό. Με συγχωρείτε λίγο. Κατεβάστε λίγο τα χεράκια σας. Γιατί αρνούμαι το 60 και το 48; Αν υποθέσουμε ότι είναι 48 οι ομάδες. Προσέξτε λίγο εδώ, προσέξτε λίγο εδώ, προσέξτε λίγο εδώ. Αν ήτανε 48 οι ομάδες, ένας από αυτούς, αυτή η ομάδα, η μία από τις 48 θα έδινε 47 αγώνες με όλες τις υπόλοιπες ομάδες λέει μέσα, επί δύο. 47 επί δύο πόσο κάνει;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *94*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *94. Καταλαβαίνετε υποθέτω ότι αμέσως 94 αγώνες θα έδινε μία ομάδα. Ε δεν μπορεί όλες να είναι 240, θα βγει πολύ παραπάνω. 48 ομάδες.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και πριν φτάσουμε στο σημείο του πίνακα που κάποια μαθήτρια είχε πει ότι είναι 48 και εσείς το πιάσατε να αποδείξετε ότι δεν είναι 48.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Δεν τους είπατε όχι δεν είναι, αλλά… θα μπορούσε να πει κανείς ότι μπορεί να μην ειπώθηκε σαν παράδειγμα, μπορεί να μην είναι παράδειγμα, αλλά εγώ την ώρα εκείνη το χρησιμοποιούσα σαν παράδειγμα. Δηλαδή, είχα στο μυαλό μου ότι θα πει κάποιος ένα νούμερο και μετά πάνω σ' αυτό το νούμερο θα αρχίσω εγώ προσπαθώντας να επαληθεύσω για να συνειδητοποιήσουμε πως ακριβώς δουλεύει. Αλλά δεν δούλεψε τόσο πολύ γιατί... πως δουλεύει το πρόβλημα. Δηλαδή, 48 η ομάδα. Αν είναι 48 οι ομάδες, τότε η 1η ομάδα θα δώσει 47 αγώνες και άλλους 47 εκτός έδρας 94.*

Ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί τη λανθασμένη εικασία αυτή ως αντιπαράδειγμα, προκειμένου να δείξει στους μαθητές ότι αφενός δεν αποτελεί τη σωστή λύση του προβλήματος και αφετέρου ότι προκειμένου να επιτευχθεί η λύση του προβλήματος, απαιτείται η υιοθέτηση στρατηγικής και όχι η τυχαία αναφορά αριθμών ή πιθανών λύσεων.

Αντιπαραδείγματα ωστόσο δε χρησιμοποιούνται από τον εκπαιδευτικό μόνο για να διορθώσει λανθασμένους ισχυρισμούς ή εικασίες των μαθητών του, αλλά προκειμένου και να απαντήσει σε απορίες που οι ίδιοι του θέτουν. Στο παράδειγμα Π_{23}, που παρατέθηκε προηγουμένως, ένας μαθητής θέτει ως απορία πώς θα γνωρίζει ότι οι όροι μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι στη σωστή σειρά. Ο καθηγητής προκειμένου να αντιμετωπίσει τη δυσκολία του μαθητή χρησιμοποιεί ως αντιπαράδειγμα την εξίσωση $11y - 2y^2 - 5 = 0$, της οποίας οι όροι δεν είναι στη συνήθη σειρά προκειμένου να βρεθεί η διακρίνουσα, ενώ τους δείχνει πώς πρέπει να τους τοποθετούν στην ορθή σειρά.

- Αντιπαραδείγματα δε χρησιμοποιούνται όμως από τον εκπαιδευτικό μόνο για να διορθώσει τα λάθη των μαθητών. Αντίθετα, τα επικαλείται πολύ συχνά όταν καλείται να αποδείξει στην τάξη ότι δεν ισχύει μια μαθηματική σχέση. Τέτοια ανάγκη προκύπτει αρκετά συχνά, κυρίως στην Άλγεβρα, στα πλαίσια διατύπωσης κανόνων ή μέσα από τις ανάγκες επίλυσης μιας άσκησης. Στο παράδειγμα Π_{56} εξετάζεται στην τάξη η ορθότητα της ιδιότητας: $αν\ α < β, τότε\ αγ < βγ$. Κατόπιν προτροπής του εκπαιδευτικού γίνεται αντικατάσταση του γ με τον αριθμό -2 και παρατηρείται ότι η ιδιότητα δεν ισχύει για όλες τις περιπτώσεις. Κάτι αντίστοιχο παρατηρείται και την 5η ώρα των μαθημάτων, όπου εξετάζεται αν η ιδιότητα $\left.\begin{matrix} α > β \\ γ > δ \end{matrix}\right\} αγ > βδ$ ισχύει για διάφορες περιπτώσεις:

Παράδειγμα (Π_{35})

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Και την τελευταία ιδιότητα. Πολλαπλασιάζω (γράφει) α επί γ μεγαλύτερο του β επί δ; Σωστό. και αυτές αποδεικνύονται, αλλά αυτές θα τις δοκιμάσω με νούμερα. 3 μεγαλύτερο του 2, 5 μεγαλύτερο του 3 ξέρω ΄γω. Αν πολλαπλασιάσω... αν πολλαπλασιάσω κατά μέλη πόσο βγαίνει;*
ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *15 προς... 6.*
…
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μάλιστα. Τρία μεγαλύτερο του μείον δύο. 5 μεγαλύτερο και αυτό από το -2. Αν τα πολλαπλασιάσω, θα βγει τρεις πέντε δεκαπέντε.*
ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *Τέσσερα.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Συν τέσσερα. Ισχύει;*
ΤΑΞΗ: *Ναι.*

…

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τρία μεγαλύτερο του μείον δύο και πέντε μεγαλύτερο του μείον δέκα. Έτσι δεν είναι;*

ΤΑΞΗ: *Δεν ισχύει.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Πολλαπλασιάζω. 15 μεγαλύτερο του 20. Δεν ισχύει.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ενώ στην άλλη που πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη, το παράδειγμα. εκεί τι κάνω; Προσπαθώ να δώσω παραδείγματα που κάποιες φορές ισχύει και κάποιες φορές δεν ισχύει. Εννοώ όταν δεν είναι θετικοί και οι 4 όροι. Κάποιες φορές ισχύει και κάποιες φορές δεν ισχύει. Οπότε, δεν μπορώ να βγάλω ένα ασφαλές συμπέρασμα. Τώρα δεν είχαμε πολύ χρόνο, αλλιώς θα άξιζε να συζητήσουμε αυτό που λένε τα παιδιά αν η απόλυτη τιμή αυτουνού είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη. Ίσως άξιζε να το συζητήσουμε για να δουν ότι δεν μπορεί να βγει ένας γενικός κανόνας. Αν μπορούσα θα τον έβγαζα. Έτσι; Ή ο γενικός κανόνας είναι ταυτολογία. Δηλαδή, το α επί γ είναι μεγαλύτερο του β επί δ όταν το α επί γ είναι μεγαλύτερο του β επί δ. Οπότε δεν έχει νόημα να το κάνουν.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Εκεί δεν έχουν να πουν κάτι άλλο.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ακριβώς, ακριβώς. Ναι και εκεί ας πούμε, ουσιαστικά χρησιμοποιώ... είναι αντιπαραδείγματα; Είναι αντιπαραδείγματα του ότι δεν ισχύει γενικά, αλλά συγχρόνως είναι μπορώ να πω ας πούμε... ναι ακριβώς. Δηλαδή, έχουμε νομίζω και τις δύο λειτουργίες. Και την λειτουργία του αντιπαραδείγματος και την λειτουργία του... του παραδείγματος ότι είμαστε σε... πώς να το πω; Σε κινούμενη άμμο. Ότι εδώ δεν μπορώ να βγάλω συμπεράσματα, άρα το παρατάω. Εντάξει, μπορείς να πεις ότι όλα αυτά είναι αντιπαραδείγματα.*

Μέσω συγκεκριμένων αντιπαραδειγμάτων διαπιστώνεται η μη ορθότητα της ιδιότητας.

- Από τις συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν με τον εκπαιδευτικό, παρατηρήθηκε ότι κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας επικαλείται σε αρκετές περιπτώσεις αντιπαραδείγματα, όχι μόνο ως απάντηση σε απορίες ή λανθασμένες εικασίες των μαθητών του ή για τις ανάγκες μιας άσκησης, αλλά προκειμένου να αντιμετωπίσει ζητήματα που ο ίδιος γνωρίζει από τη διδακτική του εμπειρία, ότι συνήθως ταλανίζουν τους μαθητές. Μια τέτοια περίπτωση παρουσιάζεται τη $2^{η}$ ώρα μαθημάτων στο παράδειγμα $Π_5$ που αφορούσε το κεφάλαιο των εξισώσεων. Ο καθηγητής γνωρίζει από την εμπειρία του ότι οι μαθητές τείνουν να αποδέχονται όλες τις ρίζες μιας εξίσωσης, χωρίς να λαμβάνουν υπ' όψιν το πρόβλημα που διαπραγματεύονται και τους περιορισμούς του. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιεί ως αντιπαράδειγμα περιπτώσεις ριζών που θα απορρίπτονταν λόγω των περιορισμών του προβλήματος, προκειμένου να δείξει ότι δε γίνονται πάντα όλες οι λύσεις αποδεκτές. Μια ακόμα τέτοια περίπτωση παρατηρείται στο παράδειγμα $Π_{14}$. Ο εκπαιδευτικός είναι εξοικειωμένος με τη δυσκολία των μαθητών κατά την εύρεση του Ε.Κ.Π. αριθμών ή πολυωνύμων και ότι τείνουν να πιστεύουν ότι το Ε.Κ.Π. κάποιων αριθμών είναι ο αριθμός εκείνος που είναι μεγαλύτερος ή έχει το μεγαλύτερο εκθέτη. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιεί το ακόλουθο αντιπαράδειγμα:

Παράδειγμα ($Π_{14}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το δύο στην τρίτη επί τρία στην δευτέρα. Πρόσεξε, το αλλάζω λίγο. Παιδιά. Το αλλάζω λίγο. Του βάζω εδώ ένα συν τρία (γράφει ότι τώρα ψάχνουν να βρουν το Ε.Κ.Π. των αριθμών:* $2^2 \cdot 3 + 3^4$, $3^2 \cdot 2$, $2^3 \cdot 3^2$). *Του βάζω εδώ ένα συν τρία. Κάτσε να το φτιάξω λίγο. Συν τρία στην τετάρτη. Θα πρέπει να σκεφτώ… λέγε.*

Μαθητής 1: $2^3 \cdot 3^4$

Μαθητής 2: $2^3 \cdot 3^2 + 3$.

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Συν;*

Μαθητής 3: Πρέπει να το παραγοντοποιήσουμε.

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Α, μπράβο! Ρε παιδιά αυτό θέλω να πω.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

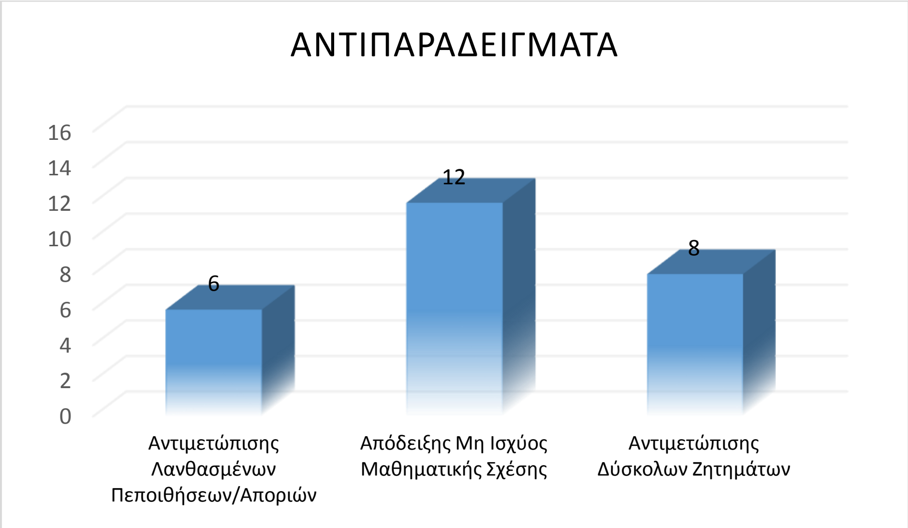
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Δεν συνειδητοποιούν παρά το ότι έχει γίνει πάρα πολύ συζήτηση, δεν συνειδητοποιούν ότι δεν είναι παράγοντες αυτοί, είναι όροι ενός αθροίσματος, γιατί δεν είναι γινόμενο. Γι' αυτό δεν είναι παράγοντες.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Δεν είναι γινόμενο.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Γι' αυτό πήγα με το συν τρία στην τετάρτη.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και όμως πολύ βλέπω, και σε άλλο τμήμα το είχα παρατηρήσει παλιότερα που είχα έρθει ότι και το άλφα συν δύο ας πούμε σκέτο να υπάρχει, σου λέει ένα επί άλφα συν δύο, άρα αυτό γιατί δεν είναι παράγοντας; Σου βάζουνε το ένα επί μπροστά μέσα σε παρένθεση.*

Από το σύνολο το αντιπαραδειγμάτων, 6 από τα 26 (23,1%) ήταν αντιμετώπισης λανθασμένων πεποιθήσεων/αποριών, 12 από τα 26 (46,2%) ήταν απόδειξης μη ισχύος μιας μαθηματικής σχέσης και 8 στα 104 (30,8%) ήταν αντιπαραδείγματα αντιμετώπισης δύσκολων ζητημάτων.



Σχήμα 11. Κατανομή Αντιπαραδειγμάτων

4.1.2.1.3. Μη Παραδείγματα

Για τα μη παραδείγματα υιοθετείται η άποψη των Zazkis και Leikin (2008), σύμφωνα με την οποία μη παραδείγματα είναι τα παραδείγματα από τα οποία απουσιάζει τουλάχιστον ένα από τα κρίσιμα χαρακτηριστικά της έννοιας που διαπραγματεύονται. Ένα χαρακτηριστικό μη παράδειγμα εντοπίστηκε στην $4^{η}$ ώρα μαθημάτων, όπου ο καθηγητής ρωτά τι είναι παράγοντας. Αρχικά δίνει ένα παράδειγμα παράγοντα και συνεχίζει με ένα μη παράδειγμα:

Παράδειγμα ($Π_{22}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τι είναι οι παράγοντες;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Είναι το αποτέλεσμα ενός γινομένου.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι δεν είναι το αποτέλεσμα ενός γινομένου. Παράγοντας είναι τα κομμάτια από τα οποία αποτελείται ένα γινόμενο.*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Αυτό ήθελα να πω.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το έξι* (γράφει) *μπορώ να το γράψω τέσσερα συν δύο. Ως άθροισμα δηλαδή. μπορώ να το γράψω και ως γινόμενο, δύο επί τρία. Το τέσσερα και το δύο δεν είναι οι παράγοντες του έξι. Την*

έκφραση παράγοντες του έξι, την χρησιμοποιούμε μόνο για τους δύο αριθμούς που πολλαπλασιάζονται και δίνουν έξι. Το δύο και το τρία. Άρα για να το λύσουμε για παράγοντες πρέπει να έχουμε γινόμενο.

Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ωραία. Το επόμενο είναι όταν τους ρωτούσατε για το τι είναι παράγοντας. Που πήρατε για παράδειγμα τον αριθμό έξι και είπατε ότι μπορώ να τον γράψω τέσσερα και δύο ή δύο επί τρία. Και είπατε ότι δύο επί τρία είναι παράγοντας, το άλλο όχι.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτό είναι ένα συνηθισμένο μου παράδειγμα. Ο αριθμός έξι επειδή είναι μικρός και εύκολα καταλαβαίνουν, δηλαδή δεν χρειάζεται πολύ ψάξιμο να δει ποιοι είναι παράγοντες του έξι. Δηλαδή, εύκολα καταλαβαίνει, είναι το έξι είναι δύο επί τρία. Αμέσως, αμέσως αυτοί είναι οι παράγοντες. Και επίτηδες... εύκολο να σκεφτείς, ας πούμε, τέσσερα συν δύο, ενώ το τέσσερα και το δύο δεν είναι οι παράγοντες του έξι. Αυτό είναι ένα παράδειγμα που χρησιμοποιώ συχνά, απλώς για να εξηγήσω την έννοια του παράγοντα.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Άρα μπορούμε να πούμε ότι το μεν δύο επί τρία είναι παράδειγμα και αυτό είναι μη παράδειγμα;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, ναι, ναι.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Το οποίο μη παράδειγμα είναι η ουσία;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, ναι. Είναι μη παράδειγμα το 4 συν 2; Ναι είναι μη παράδειγμα. Δεν νομίζω ότι είναι αντιπαράδειγμα. Δεν είμαι εξοικειωμένος με αυτή την ορολογία. Δεν είμαι πολύ εξοικειωμένος με αυτή την ορολογία.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Το μη παράδειγμα είναι ένα παράδειγμα από το οποίο να λείπει ένα βασικό χαρακτηριστικό, ας πούμε, της έννοιας, την οποία θέλω να δείξω. Ενώ το αντιπαράδειγμα είναι για να καταρρίψω, ας πούμε, το... ξέρετε.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι ναι ναι, με αυτή την διάκριση. Τότε είναι μη παράδειγμα.*

Άλλο ένα μη παράδειγμα είναι το Π_{94} στην 11^{η} ώρα μαθήματος. Ο καθηγητής ζητά από τους μαθητές, με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών πινάκων, να βρουν μια γωνία που το συνημίτονό της να έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Ζητά σκόπιμα γωνία δίνοντας το συνημίτονο, επειδή αναμένει οι μαθητές να πουν εκτός από την γωνία που θα βρουν ανατρέχοντας στον πίνακα και την παραπληρωματική της, όπως κάνουν και στην περίπτωση που τους ζητείται να βρουν τις γωνίες που έχουν συγκεκριμένη τιμή ημιτόνου:

Παράδειγμα (Π_{94})

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Πείτε μου ποια γωνία έχει συνημίτονο 0,3256.*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Η 71.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Η 71.*

ΔΗΜΗΤΡΗΣ: *Και η 180 μείον 71.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Όχι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Και η 180 λέει πλην 71.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Όχι.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Γιατί δεν είναι πλην μετά.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *Γιατί όχι;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μπορούμε να ησυχάσουμε λίγο; Μπορούμε λίγο να... το συνημίτονο ποιας γωνίας είναι 0,3276, της 71 λέει και κάποιοι είπανε και της 180 πλην 71. Και λέω εγώ.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Όχι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το συνημίτονο της 180 πλην 71, πόσο θα είναι;*

ΔΗΜΗΤΡΗΣ: *90.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι, άλλο ήθελες να πεις. Άλλο ήθελες να πεις.*

ΔΗΜΗΤΡΗΣ: *Μείον συνημίτονο.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μείον, άρα θα ήτανε μείον 0,3256. Καταλαβαίνετε τι λέω; Υπάρχει δηλαδή μόνο μία γωνία που το συνημίτονό της να είναι τόσο, μόνο μια γωνία που η εφαπτομένη της να είναι κάτι, αλλά 2 γωνίες που το ημίτονο τους να είναι τόσο. Ούτε εφαπτομένη γιατί και η εφαπτομένη είναι μηδέν. Συν το 1ο τεταρτημόριο πλην το 2ο. Συν και πλην… ο Δημήτρης λέει ότι ίσως να παίρνω και μια άλλη γωνία που να είναι το συνημίτονο της να είναι 0,3256, αλλά αυτή θα έπρεπε να είναι πάνω από 180 μοίρες. Να είναι 180 το συνημίτονο.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ναι, ναι, ναι και το επόμενο ήταν με το συνημίτονο.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Πώς το λέμε αυτό το παράδειγμα που διευκρινίζει τον γενικό κανόνα, τον τύπο ξέρω εγώ τι;*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ότι γενικεύουμε; Ότι πάμε να γενικεύσουμε;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι, ότι είναι... όχι, γιατί έχουμε γενικεύσει και ερμηνεύω, εξηγούμε... κάνουμε...*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Πάνω στον κανόνα.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Δεν ξέρω, οκ εντάξει, άρα δεν είναι κάτι… είναι η οικεία περίπτωση, είναι πάλι;*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Μάλλον ναι. Μάλλον ναι. Τώρα και εδώ πέρα το συνημίτονο που δεν ισχύει αυτό, τώρα αυτό είναι σαν αντιπαράδειγμα; Ότι σε αυτή την περίπτωση του συνημίτονου δεν ισχύει;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ένα συνημίτονο, πείτε μου τώρα ποια γωνία έχει συνημίτονο;*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ναι, εδώ πέρα δεν είναι η μία γωνία και 180 πλην αυτή την γωνία που συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Α! Ναι, ναι, ναι. Ακριβώς, ακριβώς. Είναι το αντιπαράδειγμα.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Για να δείξετε την αντίθεση.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Για να δείξω την αντίθεση ότι στο ημίτονο γίνεται να έχω... συγνώμη, στο ημίτονο έχω.. όχι γίνεται να έχω. Εντάξει, γίνεται να έχω δύο γωνίες που είναι παραπληρωματικές με το ίδιο ημίτονο, ενώ στο συνημίτονο δεν γίνεται και στην εφαπτομένη, γιατί οι παραπληρωματικές είναι αντίθετες.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Άρα είναι μη παράδειγμα, αφού δεν…*

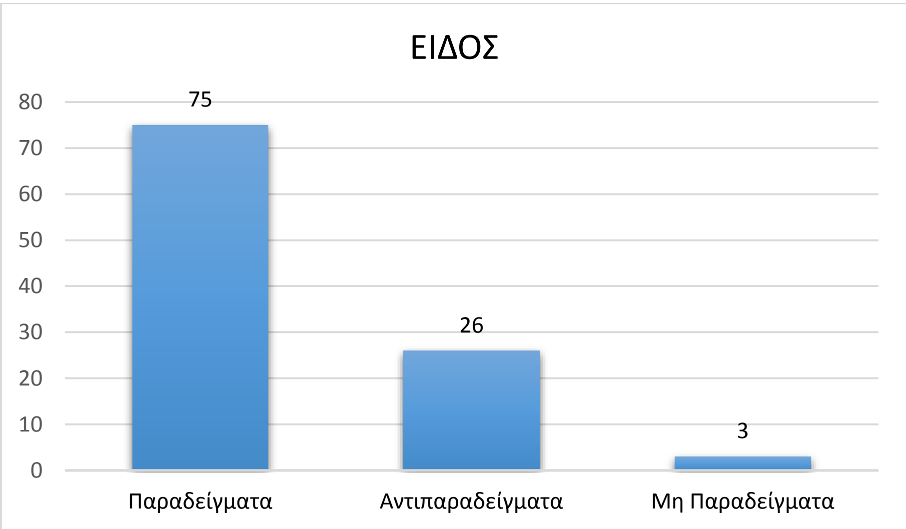
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μάλλον μη παράδειγμα.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Μάλλον είναι μη παράδειγμα, ναι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μάλλον μη παράδειγμα είναι.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Γιατί λείπει η ιδιότητα και είναι στοιχείο που...*

Από το σύνολο των παραδειγμάτων που καταγράφηκαν, 75 από τα 104 (72,1%) ήταν παραδείγματα, 26 από τα 104 (25%) ήταν αντιπαραδείγματα και 3 από τα 104 (2,9%) ήταν μη παραδείγματα.



Σχήμα 12. Κατανομή Παραδειγμάτων Ανάλογα με το Είδος

4.1.2.2. Διαισθητικότητα

Ακόμη, τα παραδείγματα διακρίνονται ανάλογα με τη διαισθητικότητα σε *διαισθητικά* και *μη διαισθητικά* παραδείγματα.

4.1.2.2.1. Διαισθητικά

Μια χαρακτηριστική περίπτωση διαισθητικού παραδείγματος εντοπίζεται κατά την 7η ώρα, όπου γίνεται συζήτηση σχετικά με τις ιδιότητες των ανισοτικών σχέσεων. Ο καθηγητής χρησιμοποιεί το μοντέλο της ζυγαριάς ως παράδειγμα για να αιτιολογήσει την πρόσθεση κοινού όρου στα δυο μέλη μιας ανίσωσης:

Παράδειγμα ($Π_{54}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Είχαμε μείνει στο αμφισβητώ και το δικαίωμά μου να περάσω από εκεί το μείον δύο χι ψι και να γίνει συν δύο χι ψι και το δικαίωμα μου να διαιρέσω με μείον ένα.*

…

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Προσθέτω στο ένα μέλος δύο χι ψι και στο άλλο μέλος δυο χι ψι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Προσθέτω και στα δύο μέλη συν δύο χι ψι, συν δύο χι ψι. Θυμάστε που πέρυσι, ας πούμε, εισάγαμε ότι έχω... με τη ζυγαριά, ότι έχω δικαίωμα να βάλω και στους δύο δίσκους το ίδιο βάρος και θα συνεχίσει η σχέση αν ισορροπεί, να ισορροπεί, αν είναι από δω το δεξιά.. το αριστερά σας πιο βαρύ και προσθέσω το ίδιο βάρος και στα δύο, θα συνεχίσει να είναι πιο βαρύ.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Μετά είναι με τη ζυγαριά που τους είπατε ότι αν γυρίσει από την μία μεριά αν βάλω πάλι πιο πολλά στην αριστερή. Που τους είπατε ότι γέρνει προς την αριστερή μεριά για μένα αν βάλω πιο πολλά κιλά στην αριστερή και λιγότερα στην δεξιά, πάλι θα μείνει στην αριστερή.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Για να δείξετε την άλλη ιδιότητα ότι προσθέτετε κατά μέλη.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι εδώ αυτή η ιδέα προήλθε από χτες. Δηλαδή χτες στο χτεσινό, στο άλλο τμήμα, δηλαδή χρησιμοποίησα το παράδειγμα με τη ζυγαριά. Εεε, μου φάνηκε ενδιαφέρον να πατήσω, να* *πατήσω δηλαδή στην αναπαράσταση που είχα από πέρυσι με τις εξισώσεις με την ζυγαριά. Με την ζυγαριά. Αυτό. Εεε... δεν ξέρω αν αυτό είναι παράδειγμα ή αν είναι.. εντάξει είναι παράδειγμα που τους λέω αν βάλω εδώ 50 κιλά και από κει 5 ας πούμε.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ναι ναι, τις τιμές.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Οκ, τα νούμερα ας πούμε.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και μετά τους είπατε όταν βάλω 50 και εκεί 1000.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ακριβώς. Ουσιαστικά κάνω επίκληση... Ακριβώς. Ουσιαστικά προσπαθώ να επικαλεστώ, ας πούμε, μια αναπαράσταση που τους είναι περισσότερο... όχι, δεν θα έλεγα οικεία. Οικεία μεν, αλλά την έχουν χρησιμοποιήσει αρκετά. Ναι. Αυτά. Δεν ξέρω.*

Από τα παραδείγματα που έχουν παρουσιαστεί μέχρι στιγμής, διαισθητικά είναι επίσης και τα $Π_3$, $Π_4$, $Π_5$, $Π_{19}$, $Π_{34}$, $Π_{35}$, $Π_{38}$, $Π_{47}$, $Π_{63}$, $Π_{69}$, $Π_{71}$, $Π_{72}$, $Π_{94}$, $Π_{95}$. Ένα επιπλέον διαισθητικό παράδειγμα εντοπίζεται κατά την 9η ώρα. Την προηγούμενη ώρα μαθήματος είχε γίνει εισαγωγή στο κεφάλαιο των συναρτήσεων. Ο καθηγητής είχε χρησιμοποιήσει τη συνάρτηση 2x+3y=25, για την οποία έγινε πίνακας τιμών και γραφική παράσταση. Την ώρα αυτή ο καθηγητής με χρήση Geogebra κατασκευάζει την ευθεία αx+βy=γ και φτιάχνει τρεις δρομείς α, β, γ. Θέτει αρχικά α=2, β=3 και γ=25 για να φέρει τη συνάρτηση στη μορφή που μελέτησαν οι μαθητές κατά την προηγούμενη ώρα μαθήματος:

Παράδειγμα ($Π_{74}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Θα μπορούσα το α να το κάνω 2 όπως ήτανε 2x, το β να το κάνω 3, το γ να το κάνω για να το κάνουμε 25 μέχρι το 10 που έχω φτάσει. Θα μπορούσαμε να αλλάξουμε τον δρομέα και να του πω μέχρι μέγιστο…*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *11.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *1000.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 3: *20.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *25 δεν θέλω ρε παιδιά;*

ΜΑΘΗΤΗΣ 4: *250.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτή* (γράφει) *είναι η ευθεία. Την βλέπετε; 2x και 3y ίσον 25.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Πήρατε τα νούμερα 2, 3, και 25 για να φτάσετε στο παράδειγμα της προηγούμενης ώρας.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μάλιστα.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Τώρα αυτό μπορούμε να το θεωρήσουμε ότι είναι παράδειγμα;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μπορούμε να το θεωρήσουμε ότι είναι παράδειγμα με την έννοια του ότι εγώ τώρα χρησιμοποιώντας το Geogebra και το αx και βx ίσον γ, συγνώμη, αx και βy ίσον γ, αλλάζω το… ενώ πριν το πλαίσιο ήταν τα δίκλινα και τα τρίκλινα.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ναι.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τώρα το πλαίσιο το αλλάζω. Δηλαδή, και τα παιδιά το καταλαβαίνουν αυτό, το συνειδητοποιούν. Αλλάζει το πλαίσιο και περνάμε από εκεί που είχαμε το πρόβλημα με τα δίκλινα και τα τρίκλινα, ένα συγκεκριμένο πρόβλημα με δωμάτια, με κρεβάτια, από εκεί φεύγουμε ξαφνικά και πηγαίνουμε αx και βy ίσον γ και με το ν υπολογιστή κλπ. Εδώ λοιπόν δεν το είχα προγραμματίσει έτσι, αλλά επειδή δεν μου βγήκε να κλείσω αυτό που είχα προγραμματίσει την πρώτη ώρα, λέω δεν πειράζει θα το κάνω μαζί με το… εκείνη την ώρα δηλαδή προέκυψε, αλλά δούλεψε και μάλλον θα το κάνω και αύριο έτσι.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ναι, είναι ωραίο, είναι ωραίο.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Δηλαδή, ξεκινάω την αx και βy ίσον γ έχοντας το 2, το 3, και το 25. Αυτό.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ωραία. Άρα θεωρείται παράδειγμα, θεωρείται αυθόρμητο απ' ότι μου λέτε και…*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Και παραπέμπω σε κάτι οικείο. Μόλις το έχουμε συζητήσει.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Σε κάτι οικείο. Ωραία, ωραία.*

4.1.2.2.2. Μη Διαισθητικά

Όσον αφορά τα μη διαισθητικά παραδείγματα, ένα από αυτά μπορεί να εντοπιστεί την 4η ώρα. Ο εκπαιδευτικός θέλοντας να οδηγήσει τους μαθητές στη σχέση: $αν\ α < β\ τότε\ α - β < 0$, τους ζητά να αναφέρουν όλους τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να συγκρίνουν δύο τυχαίους αριθμούς. Οι μαθητές παίρνουν την αριθμογραμμή και συγκρίνουν διάφορα ζεύγη αριθμών. Στη συνέχεια ο καθηγητής ρωτά πώς θα μπορούσαν να τους συγκρίνουν, αν ήταν αδύνατη η αναπαράστασή τους πάνω στην ευθεία των αριθμών και η σύγκρισή τους με βάση τη θέση τους πάνω σε αυτήν:

Παράδειγμα ($Π_{26}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Συγκρίνετε αυτό* (γράφει το $x^2 + y^2$) *με αυτό* (γράφει το $2xy$). *Κάτι πολύ πιο πολύπλοκο από ένα σκέτο α και ένα σκέτο β. Το ένα είναι ένα άθροισμα δύο τετραγώνων και το άλλο είναι το διπλάσιο γινόμενο των δύο αυτών.*

Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Δεν θυμάμαι πως εγώ το χρησιμοποιώ κάθε χρόνο προσπαθώντας να διδάξω. Κάνοντας αυτή την διδασκαλία. Μου φαίνεται πολύ ενδιαφέρον γιατί μέσα από μια συγκεκριμένη περίπτωση, προκύπτουν όλες οι υπόλοιπες. Δηλαδή, προκύπτει η ανάγκη για να συγκρίνω το χι τετράγωνο και ψι τετράγωνο με το δύο χι ψι. Προκύπτει η ανάγκη να βρω την διαφορά τους και να την συγκρίνω με το μηδέν. Προκύπτει το θέμα του α τετράγωνο ότι είναι μεγαλύτερο του μηδενός και γιατί είναι. Προκύπτει το ότι έχω δικαίωμα να προσθέσω και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό. Προκύπτουνε δηλαδή.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και είναι και η ταυτότητα.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Προκύπτουνε δηλαδή πράγματα. Ορίστε;*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Χρησιμοποιείτε και λίγο ότι είναι και ταυτότητα.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ε, όχι αν μπορούσα να βρω ένα παράδειγμα που να μην είναι έτσι, να μην είναι ταυτότητα δηλαδή, δηλαδή να μη μπλέκομαι και με κάτι παλιότερο θα μου ήταν καλύτερο.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Αχά.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Απλώς, επειδή από αυτό μπορείς να πατήσεις και να τους πεις ξέρεις μα εδώ χρησιμοποίησες μια ιδιότητα η οποία για να δούμε ισχύει; Αυτό. Δηλαδή, εδώ θα λέγαμε τι παράδειγμα, παραδείγματα, εντάξει τώρα δεν νομίζω ότι αυτό είναι ένα τέτοιο παράδειγμα, αλλά οποιοδήποτε παράδειγμα εδώ αν το χρησιμοποιούσα έτσι, θα ήτανε παράδειγμα.*

…

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Εγώ το σκέφτομαι ότι δηλαδή μέσα από αυτό το παράδειγμα προκύπτουν ερωτήματα τα οποία πάω να τα συζητήσω γενικεύοντας.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Σαν αφορμή δηλαδή για να δείξετε το επόμενο.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Σαν απόδειξη. Ακριβώς, ακριβώς. Δεν νομίζω ότι είναι το generic η ιδέα του generic παραδείγματος αυτή.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Πάντως τα παιδιά με αυτά τα παραδείγματα εδώ, ας πούμε με αυτό το τελευταίο που είναι και το πιο ενδιαφέρον ίσως, πώς τα είδατε να το δέχονται;*

…

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτό είναι λίγο... υπήρχανε στιγμές που αισθανόμουνα ότι.. πώς να το πω; Ότι δουλεύει, ότι εξηγεί πράγματα και υπήρχανε στιγμές που κόλλαγε. Ίσως είναι η επιλογή το χι τετράγωνο και ψι τετράγωνο μείον δύο χι ψι είναι…*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Λίγο βαρύ;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι. Ίσως παραπέμπει και σε άλλα πράγματα, που δεν θέλω να μπλεχτούν σ' αυτή την συζήτηση. Η ταυτότητα ας πούμε δεν θέλω, δεν έχω σκοπό να μπλεχτεί σ' αυτή τη συζήτηση.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ναι, ναι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αλλά, με ενδιαφέρει το ότι προκύπτει κάτι τετράγωνο που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Εεε... δεν ξέρω. Νομίζω ότι αρκετά παιδιά κατάλαβαν τι γίνεται ας πούμε. Κατάλαβαν και την ανάγκη να χρησιμοποιήσω την σύγκριση της διαφοράς με το μηδέν. Δηλαδή αντί να συγκρίνω το α με το β, να συγκρίνω το α πλην β με το μηδέν. Και την μεταβατική ιδιότητα, είδες που πετάχτηκε ο πιτσιρικάς και λέει αφού το α είναι μεγαλύτερο από το β και το β μεγαλύτερο από το γ.*

Στην κατηγορία των μη διαισθητικών παραδειγμάτων ανήκουν επιπρόσθετα και τα παραδείγματα $Π_{10}$, $Π_{12}$, $Π_{14}$, $Π_{19}$, $Π_{22}$, $Π_{23}$, $Π_{89}$, $Π_{94}$, $Π_{104}$ που παρατέθηκαν προηγουμένως. Ένα ακόμα μη διαισθητικό παράδειγμα είναι το $Π_{46}$, όπου ένας μαθητής υποστηρίζει πως κάθε πολυώνυμο πρέπει να λύνεται πάντα ως εξίσωση:

Παράδειγμα ($Π_{46}$)

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Δεν υπάρχει σε εξίσωση δευτέρου βαθμού να έχουμε... εξίσωση δευτέρου βαθμού μπορεί να έχει μόνο έναν… ή μπορεί να έχει παραπάνω; Αλλά δεν θα είναι πλέον ο τύπος που είναι α στην δευτέρα. Καταλάβατε;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Επειδή* (γράφει) *αυτό μου θυμίζει το* $ax^2 + \beta x^2 = 0$, *πρέπει να λύσω εξίσωση; Δεν καταλαβαίνω τι ρωτάς.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Αν θα έκανα κάτι με αυτό τον τύπο αριστερά.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι. Είναι εξίσωση; Δεν ξέρω αν σου απάντησα, αλλά δεν ξέρω τι να σου απαντήσω καλύτερα. Τι καλύτερο να σου απαντούσα. Το πρόβλημα είναι πάντως αυτό που σου είπα. Ότι κάθε φορά που βλέπω ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, δεν σημαίνει ότι έχω μια εξίσωση που πρέπει να λύσω. Παιδιά ξεκολλήστε λίγο. Αυτό είναι πολύ ωραίο. Πώς το είχα γράψει; Τρία χι τετράγωνο και πέντε χι και δύο. Αυτό είναι πολύ ωραίο. Τρία χι τετράγωνο και πέντε χι και δύο ίσον μηδέν. Και αυτό είναι πολύ ωραίο, αλλά ανεξάρτητα από την ομορφιά τους, άλλα μου λέει αυτό, άλλα μου λέει εκείνο. Τι λέει αυτό;*

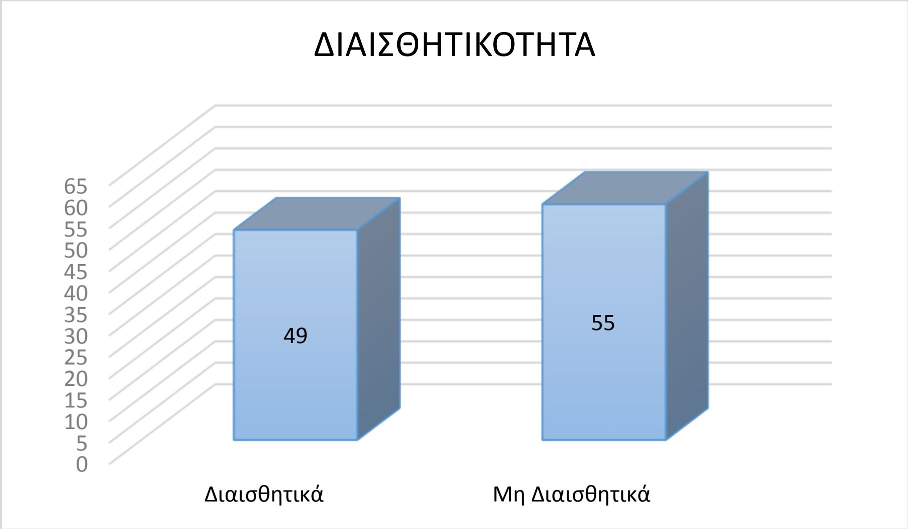
ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *Ότι όλο αυτό είναι ίσο με το μηδέν.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ότι αυτό είναι ίσο με το μηδέν. Τι λέει εκείνο; Τίποτα τρία χι τετράγωνο και πέντε χι και δύο. Αυτό λέει. Βάλε στην θέση του χι κάποιο νούμερο, να βρεις κάποιο αποτέλεσμα. Βάλε στην θέση του χι κάποιο άλλο νούμερο να βρεις κάποιο άλλο αποτέλεσμα. Βάλε κάποιο άλλο νούμερο, να βρεις κάποιο άλλο αποτέλεσμα. Εδώ όμως λέει βρες ποιο νούμερο πρέπει να βάλεις στην θέση του χι, ώστε το αποτέλεσμα να πρέπει να κάνει μηδέν; Αυτό είναι άλλο πράγμα.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Προχωρώντας μετά, κάποιος μαθητής σάς ρώτησε ότι αυτό δεν είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού, επειδή του θύμιζε... και εσείς βλέπω εδώ ότι χρησιμοποιήσατε το τρία χι τετράγωνο και πέντε χι και δύο ίσον μηδέν και είπατε ότι αυτό είναι δευτέρου βαθμού εξίσωση. Άμα δεν έχουμε το ίσον με το μηδέν, δεν είναι.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ακριβώς, ακριβώς, ακριβώς. Αυτό είναι νομίζω ένα παράδειγμα στην πρώτη κατηγορία. Δηλαδή, στην μια απλή οικεία περίπτωση που εξηγεί την διαφορά. Την διάκριση ανάμεσα στην εξίσωση.*
…
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Να βρούμε το χι; Μα τι να βρω το χι αφού δεν έχω εξίσωση. Δεν έχω μια δήλωση αυτό ίσον μηδέν δηλαδή.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Άρα, είναι σαν αντιπαράδειγμα ουσιαστικά όμως; Ή όχι; Το λέτε ότι εδώ, ναι το λύνω. Σε αυτό που λες όχι.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Δεν νομίζω ότι είναι αντιπαράδειγμα.*
…
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Θα το έλεγα μάλλον οικεία περίπτωση, οικεία κατάσταση ας πούμε για να καταλάβει, να καταλάβει την διάκριση ανάμεσα στα δύο.*

Τόσο τα διαισθητικά όσο και τα μη διαισθητικά παραδείγματα καταγράφηκαν σχεδόν με την ίδια συχνότητα, καθώς 49 από τα 104 (47,1%) παραδείγματα ήταν διαισθητικά, ενώ 55 από τα 104 (52,9%) από αυτά ήταν μη διαισθητικά.



Σχήμα 13. Κατανομή Παραδειγμάτων Ανάλογα με τη Διαισθητικότητα

4.1.3. Μαθηματική Δραστηριότητα

Τέλος διαχωρίζουμε τα παραδείγματα και ως προς τη μαθηματική δραστηριότητα, σε παραδείγματα που αφορούν *έννοια* και σε παραδείγματα που αφορούν *διαδικασία*.

4.1.3.1. Έννοια

Παράδειγμα που αφορά έννοια μπορεί να εντοπισθεί κατά την $3^{η}$ ώρα μαθημάτων, όπου γίνεται συζήτηση για το τι είναι παράγοντας. Ένας μαθητής ρωτά τον καθηγητή πότε κάτι θεωρείται παράγοντας:

Παράδειγμα ($Π_{16}$)

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Πάντως κύριε τώρα ήταν τετράγωνο δεν ήταν σε κλάσμα αν το βλέπαμε σε μια παράσταση, τότε δεν θα ήτανε δύο; Δύο διαφορετικά; Δεν θα ήταν ένα δηλαδή. Δηλαδή όταν είναι σε κλάσμα είναι ένα, αλλά άμα ήταν σε μια παράσταση δεν θα ήταν. Γράψτε τρία συν άλφα μείον δύο. Θα ήταν τρία.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τρείς οι…*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Παράγοντες.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Γι' αυτό θέλω να σε ζορίσω για να το πεις. Δεν είναι παράγοντες αυτοί. Αυτοί είναι οι όροι ενός αθροίσματος. Ένας, δύο, τρεις όροι αυτού του αθροίσματος.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ωραία. Φύγαμε και από δω. Μετά πάλι λίγο. Πάλι εδώ στους παράγοντες δηλαδή πάλι. Που σας ρωτούσε μια μαθήτρια πότε είναι παράγοντες και εσείς γράψατε το τρία συν άλφα πλην ένα, ίσον..*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτό ήταν της στιγμής. Ενώ, ας πούμε, το προηγούμενο με τους αριθμούς είναι… γενικά ακολουθώ αυτή την τακτική, εδώ ήταν της στιγμής. Είδες όμως το έθεσε η ίδια η μαθήτρια. Λέει, αν έχω το άλφα πλην ένα, βάλε και ένα μπροστά τρία. Τότε πάλι όμως… δηλαδή, πάλι αυτό το παράδειγμα εμένα με βοηθάει να εξηγήσω αυτό που θέλω. Αυτό που ζητάει η μαθήτρια δηλαδή, με βοηθάει να της εξηγήσω ότι αυτό είναι άθροισμα, δεν είναι γινόμενο. Δεν έχει παράγοντες.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ωραία. Βλέπετε ότι δηλαδή ξεκαθαρίζει το θέμα με αυτά τα παραδείγματα, έτσι; Λίγο πολύ.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τα παραδείγματα αυτά βοηθάνε. Το αν ξεκαθαρίζει το θέμα είναι μια πολύ βαριά δήλωση* (γέλια).

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Σωστό, σωστό.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Είναι δύσκολο να την κάνω δηλαδή.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Τουλάχιστον είδατε ότι η μαθήτρια, ας πούμε, πείστηκε κάπως.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, πείστηκε.*

Παραδείγματα έννοιας είναι ακόμα και τα παραδείγματα $Π_{10}$, $Π_{22}$, $Π_{46}$, $Π_{47}$, $Π_{69}$, $Π_{72}$, $Π_{95}$ που αναφέρθηκαν παραπάνω. Άλλο ένα παράδειγμα που αφορά έννοια είναι το $Π_{96}$ της $11^{ης}$ ώρας, όπου υπάρχει σύγχυση στην τάξη σχετικά με το ποιες γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές:

Παράδειγμα ($Π_{96}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι, είναι παραπληρωματικές, αφού έχουν άθροισμα 180.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Ναι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ε;* (γράφει) *συμφωνούμε; Δεν είμαι σίγουρος. Πότε 2 γωνίες λέγονται παραπληρωματικές;*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Όταν το άθροισμα τους κάνει 180 μοίρες.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Παράδειγμα;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *100 και 80, 120 και 60. 40 και 140, 90 και 90.*

Μ: 179 και 1

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ωραία. 179 και 1, ωραία.*

Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Αναφέρθηκε για τις παραπληρωματικές γωνίες…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μπράβο που τους έβαλα να πούνε τυχαία νούμερα. Εκείνη την ώρα που μου το είπαν... αυτό ήταν στιγμιαίο. Απλώς, οι απαντήσεις τους δεν μου ενέπνεαν σιγουριά ότι συνειδητοποιούν για ποιο πράγμα μιλάμε. Γι' αυτό τους είπα, πείτε μου νούμερα, για να... αυτό. Τι είναι αυτό τώρα;*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Παράδειγμα φαντάζομαι, δεν νομίζω να είναι κάτι…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μπράβο. Το οικείο ή οι οικείες.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Περιπτώσεις.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αυτό ναι.*

4.1.3.2. Διαδικασία

Τα παραδείγματα που αφορούν διαδικασία, διαχωρίζονται σε παραδείγματα που πραγματεύονται κάποια *αλγοριθμική διαδικασία* και σε παραδείγματα που ασχολούνται με τη *λύση ενός προβλήματος*. Στην πρώτη υποκατηγορία εντάσσονται τα παραδείγματα τα οποία αποσκοπούν να καθοδηγήσουν τους μαθητές στην επίλυση μιας άσκησης ή ενός προβλήματος με το οποίο έχουν εμπλακεί, ενώ στη δεύτερη παραδείγματα τα οποία περιέχουν αριθμητικές ή αλγεβρικές πράξεις και διαδικασίες.

4.1.3.2.1. Αλγοριθμική Διαδικασία

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που πραγματεύεται αλγοριθμική διαδικασία, είναι το παράδειγμα Π_{56} της $7^{ης}$ ώρας. Γίνεται συζήτηση για το αν ισχύει η ιδιότητα: $αν\ α < β, τότε\ αγ < βγ$. Οι μαθητές παίρνουν δύο περιπτώσεις εκείνη του $γ = 2$ και $γ = -2$:

Παράδειγμα (Π_{56})

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το α είναι μικρότερο από το β. Το 2α τι σχέση έχει με το 2β; Σκέψου το 2α πού θα είναι στην αριθμογραμμή.*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Στην ίδια.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ορίστε; Στην ίδια. Σκέψου λέω το 2α πού θα είναι στην αριθμογραμμή.*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Αν είναι, ας πούμε, ανά ένα εκατοστό…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Θέλω γι' αυτή τη θέση, γι' αυτό το έκανα έτσι. Πού θα έχω 2α;*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Η απόσταση του 2α θα είναι η διπλάσια απόσταση από το β;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όσο είναι αυτό, άλλο τόσο. Εδώ θα είναι το 2α, το 2β πού θα είναι; Εκεί 2β. Βλέπεις δηλαδή ότι... Μπράβο!*

…

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Και ρωτάω. Αν πολλαπλασιάσω με το μείον, μείον 2α τι σχέση έχει με το μείον 2β; Θα μου πεις, το αντίθετο. Ναι, αλλά γιατί συμβαίνει αυτό; Σκέψου στην αριθμογραμμή; Το μείον 2α πού θα πάει; Πού θα πάει το μείον 2α;*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Πάει όσο είναι από το μηδέν μέχρι το 2α, δύο φορές αλλά...*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Από την άλλη μεριά.*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Από την άλλη.*

Σκεπτικό Εκπαιδευτικού

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι. εδώ τώρα τι γίνεται. Δεν ήταν προσχεδιασμένο. Εκείνη την ώρα. Απλώς ρωτάει ένας μαθητής, δεν κατάλαβα γιατί όταν είναι αρνητικά γίνονται έτσι. Δεν εννοούσε πολύ καλά αυτό που κατάλαβα εγώ. Δεν εννοούσε ακριβώς αυτό. Εγώ κατάλαβα ότι ρε παιδί μου, ότι και να μου πεις με την απόδειξη, εγώ δεν καταλαβαίνω γιατί συμβαίνει αυτό. Πράγματι η απόδειξη δεν εξηγεί πολύ καλά. Μάλλον δίνει μια εξήγηση για το γιατί. Γιατί πλην επί πλην κάνει συν. Όταν... σύμφωνοι. Είναι όμως πιο παραστατικό το γιατί όταν χρησιμοποιήσεις την αριθμογραμμή Και εκεί δηλαδή πήγα στην αριθμογραμμή, στο παράδειγμα της αριθμογραμμής και με τα συγκεκριμένα νούμερα, για να δούμε όταν διπλασιάζω, τριπλασιάζω ξέρω εγώ, μετακινούμαι δεξιά, ενώ με το... προς τα εκεί που είναι εν πάση περιπτώσει οι αριθμοί, μη λέω δεξιά. Ενώ αν πολλαπλασιάσω με αρνητικό τουμπάρω την κατάσταση. Οπότε, το μικρότερο μπορεί να γίνει, όχι μπορεί, θα γίνει μεγαλύτερο.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Θα γίνει μεγαλύτερο. Οπότε…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Νομίζω ότι είναι ένα ωραίο παράδειγμα και με νούμερα και με όπως και να το κάνεις. Και με α και β.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και με αναπαράσταση.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή είναι ωραίο generic παράδειγμα γι' αυτό ακριβώς. Για το ότι αλλάζει η φορά, όταν πολλαπλασιάζω με αρνητικό.*

Παραδείγματα αλγοριθμικής διαδικασίας είναι επιπλέον και τα παραδείγματα $Π_{12}$, $Π_{14}$, $Π_{19}$, $Π_{23}$, $Π_{26}$, $Π_{34}$, $Π_{35}$, $Π_{38}$, $Π_{54}$, $Π_{63}$, $Π_{71}$, $Π_{104}$. Ακόμα ένα παράδειγμα που αναφέρεται σε διαδικασία εντοπίζεται στην 12η ώρα, όπου ο καθηγητής θέλει να δείξει τη σχέση $\frac{ημω}{συνω} = εφω$:

Παράδειγμα ($Π_{100}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Υπάρχει δηλαδή μια σχέση ανάμεσα στο ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη. Έχει κανέναν που…*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Το μυαλό μου.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Πολύ ωραία, δεν πειράζει. Στο πινακάκι πίσω στις 30 μοίρες το ημίτονο των 30 μοιρών είναι 0,50, είναι ½, 0,5. Ωραία;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Ναι.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ωραία. Η ελεύθερη, μάλλον, συγνώμη, δεν βολεύει το ημίτονο. Δεν βολεύει με 30. Στις 60 μοίρες. Το συνημίτονο είναι 0,5, πάρτε τα ημίτονο που είναι ημίτονο 60.*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *0,8660, όχι…*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Που είναι 0,866 και διαιρέστε το με το συνημίτονο των 60 που είναι 0,5. 0,866 επί 2. Πόσο θα βγάλει; Επί 2 εδώ, εδώ.*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Ένα κόμμα…*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Επί δύο 6 και ένα τρία. Επί δύο.*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *1,732.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Για κοιτάξτε, η εφαπτομένη των 60 μοιρών είναι 1,732;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Α, ναι.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ωραία, στην 2η ώρα ξεκινήσατε να δείχνετε τον τύπο, ότι το ημίτονο μιας γωνίας προς το συνημίτονο κάνει την εφαπτομένη. Και πήρατε για παράδειγμα τις 60 μοίρες και τους είπατε βρείτε από τον πίνακα το ημίτονο, το συνημίτονο, διαιρέστε τα να δείτε ότι βγαίνει.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Και αυτό ήταν της στιγμής.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Της στιγμής.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Δηλαδή, δεν είχα καν σκεφτεί ότι... σκεφτόμουνα να πάρω, να ξεκινήσω με σύστημα συντεταγμένων, να βάλω νούμερα, το 3, 4, 5 και να αρχίσω να διαιρώ και να κάνω και να... μου φάνηκε πολύ τεχνητό εκείνη την ώρα και μου ήρθε αυτή η ιδέα, δηλαδή, ρε παιδί μου να μπορώ να πάρω από τους πίνακες και να διαιρέσω. Να τους βάλω να διαιρέσουν από τον πίνακα. Γι' αυτό τους ρώτησα, έχετε κομπιουτεράκι; Μετά συνειδητοποιώ, με ποιους από αυτούς μπορώ να κάνω γρήγορα και έτσι προέκυψε το 0,5, ας πούμε, που είναι εύκολη. Ναι, η ιδέα είναι...*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Για να γενικεύσουμε προς τον τύπο ας πούμε;*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ακριβώς, ακριβώς, για να πάνε να γενικεύσουμε προς τον τύπο. Αυτό πράγματι, αυτό έχει πράγματι συζητήσει, συζητηθεί στην τάξη, δηλαδή δυο τρεις φορές και σε αυτό το τμήμα και στο άλλο το τμήμα και είναι η πρώτη χρονιά που συμβαίνει αυτό και μου κάνει εντύπωση. Ενώ δεν είναι καλοί οι μαθητές έχουνε, έχουνε υπάρξει παρατηρήσεις «κύριε, κάποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στο ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη».*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Το έχουν αντιληφθεί και αυτοί δηλαδή κάπως.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Στους τύπους y δια ρ, x δια ρ και y δια x. Σε αυτές τις περιπτώσεις. Ναι, γι' αυτό θεώρησα καλό να πατήσω εκεί πέρα και μετά εντάξει, έγινε, μπήκε το θέμα με τα νούμερα. Νομίζω ότι είναι αυτό, δηλαδή τα νούμερα τα οποία κάνουν οικεία μια κατάσταση η οποία φαίνεται, αλλά άμα δεν την σκεφτώ με νούμερα, δεν είμαι σίγουρος ότι καταλαβαίνω πολύ καλά τη... Αυτό.*

4.1.3.2.2. Επίλυση Προβλήματος

Παράδειγμα επίλυσης προβλήματος εντοπίζεται κατά την 8η ώρα μαθημάτων, σε ένα πρόβλημα με το οποίο είχαν εμπλακεί οι μαθητές στην ενότητα των συναρτήσεων. Το πρόβλημα αυτό αναφέρει ότι σε ένα ξενοδοχείο υπάρχουν x δίκλινα δωμάτια, y τρίκλινα δωμάτιο και 25 κρεβάτια:

Παράδειγμα (Π_{73})

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Γιατί να μην υπάρχει ένα ζευγάρι, ας πούμε, που τα δίκλινα να είναι 3; Γιατί να μην υπάρχει ένα ζευγάρι, ας πούμε, που τα δίκλινα να είναι 3;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Ναι, επειδή άμα τα τρίκλινα είναι ένας άλλος αριθμός, δεν θα μας βγάζουν ζυγό έτσι ώστε... δηλαδή άμα πάρουμε τα δίκλινα που είναι 2 κρεβάτια επί το 3. Δύο τρεις έξι. Μετά όμως χρειαζόμαστε έναν ζυγό αριθμό. Δηλαδή, το 4 για... όχι.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Για να πάμε στο 25;*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Ναι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Χρειαζόμαστε μονό αριθμό.*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Α, ναι, χρειαζόμαστε το 19.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το 19.*

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Κανένας αριθμός όμως αν πολλαπλασιαστεί με το 3 δεν βγάζει 19.*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και το τελευταίο εδώ πέρα είναι… στο πρόβλημα με τα δίκλινα και τα τρίκλινα δωμάτια, που λέτε για ποιο λόγο να μην υπάρχει ζευγάρι που τα δίκλινα να είναι 3 και τα τρίκλινα όσα είναι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, ναι, ναι.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και βγαίνει ότι πρέπει να είναι… βγαίνει το 19 τέλος πάντων και λέτε ότι… παίρνετε αυτό το νούμερο δηλαδή με το παράδειγμα εδώ πέρα. Την περίπτωση του 3.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, ναι και αυτό είναι generic, δηλαδή, generic στο συγκεκριμένο. Δηλαδή, για ποιο λόγο; Τι έχω εγώ στο μυαλό μου. Ότι, τα νούμερα αυτά...*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Όχι σαν αντιπαράδειγμα δηλαδή;*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι.*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Όχι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Εγώ τώρα θέλω με αυτό το παράδειγμα θέλω να τους βάλω να σκεφτούνε λίγο, αν και δεν είναι ακριβώς το θέμα που συζητάμε στην γραμμική εξίσωση, αλλά, θέλω να τους βάλω να σκεφτούνε αυτό που κάποια στιγμή κάποιος πετάχτηκε και είπε ότι λέει δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, ξέρω ΄γω τι. Ότι αν βάλω κάποιο νούμερο, άσχετο εκτός από αυτά που έχουμε βρει, στην θέση των δίκλινων δωματίων... ο αριθμός των δωματίων που θα μου βγαίνουνε για να καλυφτούν από τρίκλινα, δεν θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Έτσι; Εκεί λοιπόν ένα οποιοδήποτε παράδειγμα…*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Θα σας έκανε.*

Παραδείγματα που αφορούν την επίλυση ενός προβλήματος είναι και τα παραδείγματα $Π_3$, $Π_4$, $Π_5$, $Π_{74}$, $Π_{89}$, $Π_{94}$ που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Ακόμα ένα παράδειγμα του είδους αυτού είναι το παράδειγμα $Π_{68}$ της 8ης ώρας μαθημάτων. Ο καθηγητής προσπαθεί να απαντήσει σε απορία που έχουν οι μαθητές στην εξής άσκηση που είχαν για το σπίτι: «αν γ μικρότερο του μηδενός και α · γ μικρότερο ή ίσο του β · γ, τότε τι μπορούμε να πούμε για το β;»:

Παράδειγμα ($Π_{68}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το γ είναι αρνητικό, το αγ είναι μικρότερο ή ίσο από το βγ, τότε το α από το β.*

…

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, ναι ακριβώς. Αυτό, ας πούμε, πολύ συχνά εμφανίζεται όταν λύνουμε ανίσωση. Όχι ανισότητα, ανίσωση. Όταν ψάχνουμε από εκεί. Έτσι; Και παράδειγμα ξέρω εγώ μας εμφανιστεί μείον 3x μικρότερο του 42 να το κάνω να ταιριάζει και με εκείνο, διαιρώ και τα 2 μέλη με το -3, οπότε αλλάζει η φορά. 43 δια -42, δια -3. Ωραία!*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

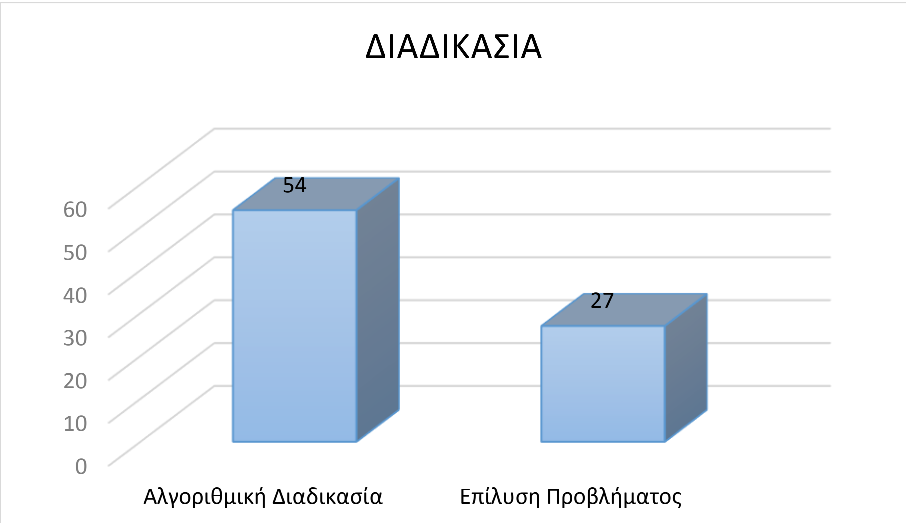
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Αυτό το αν γ μικρότερο του μηδενός και αγ μικρότερο ή ίσο του βγ, τότε να πούμε τι είναι το β.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι, ναι, ναι. Που πήρα την εξίσωση -3x…*

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Που πήρατε μια ανίσωση. Ναι.*

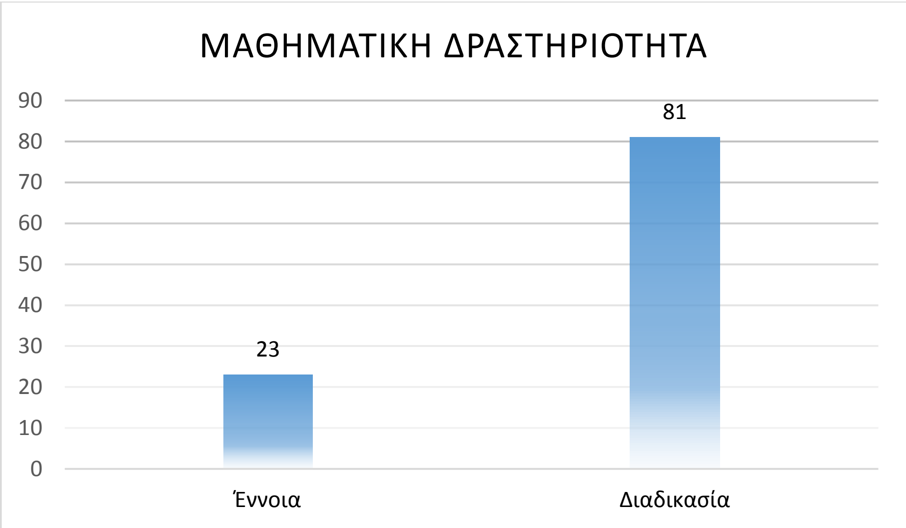
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μια ανίσωση, ναι. Αυτό είναι ένα παράδειγμα μάλλον που έχει δύο χαρακτηριστικά. Δηλαδή, από την μια μεριά εξηγεί αυτό που συζητάμε, είναι αντιπροσωπευτικό της κατάστασης που συζητάμε και από την άλλη μεριά είναι και οικείο γιατί το έχουνε συνηθίσει τα παιδιά, αυτό το κάνουνε, δεν ξέρω αν το έχουνε συνηθίσει, μπορεί να το κάνουν και λάθος, αλλά το έχουνε ακούσει πολλές φορές όταν λύνουν ανίσωση ας πούμε. Προσπαθώ δηλαδή να τους το μεταφέρω στο οικείο πλαίσιο.*

Από τα παραδείγματα διαδικασίας που μελετήθηκαν, 54 από τα 81 (66,7%) αφορούσαν αλγοριθμική διαδικασία, ενώ 27 στα 81 (33,3%) αφορούσαν επίλυση προβλήματος.



Σχήμα 14. Κατανομή Παραδειγμάτων Διαδικασίας

Τέλος, από το σύνολο των παραδειγμάτων εντοπίστηκαν 23 από τα 104 (22,1%) τα οποία αφορούσαν έννοια, ενώ 81 στα 104 (77,9%) διαδικασία.



Σχήμα 15. Κατανομή Παραδειγμάτων Ανάλογα με τη Μαθηματική Δραστηριότητα

4.2 Ο ρόλος της Επικοινωνίας κατά τη Διαχείριση των Παραδειγμάτων

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής έχουν στόχο να αναδείξουν τη σημασία των παραδειγμάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών και ταυτόχρονα να φωτίσουν πτυχές της φύσης, της χρησιμότητας, αλλά και των τρόπων χρήσης τους. Στην ενότητα 4.1 πραγματοποιήθηκε μια λεπτομερής κατηγοριοποίηση των παραδειγμάτων, ανάλογα με την προέλευσή τους, τα χαρακτηριστικά που διαθέτουν, αλλά και τη μαθηματική δραστηριότητα που αφορούν. Από την ταξινόμηση αυτή, γίνεται φανερό ότι τα παραδείγματα επιδέχονται έναν ιδιαίτερο τρόπο προσέγγισης, χρήσης και διαχείρισης από τον εκπαιδευτικό, ο οποίος κατέχει πρωτεύοντα ρόλο και ουσιαστικά καθορίζει το είδος της επικοινωνίας που συντελείται μέσα στην τάξη κατά τη διάρκεια της χρήσης τους. Προκειμένου λοιπόν να επιτευχθούν οι στόχοι της έρευνας, καθίσταται καίριας σημασίας η μελέτη του τρόπου διαχείρισής τους από τον εκπαιδευτικό, αλλά και πώς αυτά επιδρούν και επηρεάζουν τη διδασκαλία και την επικοινωνία μέσα στην τάξη.

4.2.1 Δικαιολόγηση Κάθε Άποψης κατά την Εμπλοκή με τα Παραδείγματα

Πρωταρχικό ενδιαφέρον του εκπαιδευτικού είναι η δημιουργία μιας ενεργής και συλλογικά σκεπτόμενης τάξης, στην οποία οι μαθητές να καθίστανται ικανοί να αιτιολογούν και να υπερασπίζονται τις ιδέες τους, όπως και τις μεθόδους που χρησιμοποιούν. Για το λόγο αυτό, κατά την εμπλοκή τους με παραδείγματα απαιτεί τη δικαιολόγηση των απόψεων τους, για οποιοδήποτε ζήτημα προέκυπτε κατά την ενασχόλησή τους με αυτά.

Ενδεικτικά στο παράδειγμα $Π_{10,}$ που παρουσιάστηκε και προηγουμένως (σελ. 68), ο εκπαιδευτικός αναμένει πλήρη αιτιολόγηση από το μαθητή για την αδυναμία διαίρεσης ενός αριθμού με το μηδέν:

Παράδειγμα ($Π_{10}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Γιατί δεν ορίζεται διαίρεση με το μηδέν;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Επειδή αν πάμε να το επαληθεύσουμε, όποιος αριθμός πολλαπλασιαστεί με το μηδέν θα μας κάνει μηδέν.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τι εννοείς;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Δέκα δια δύο μηδέν... μηδέν.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι, δέκα δια δύο πόσο κάνει;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Εννοώ δέκα δια μηδέν.*

Ο εκπαιδευτικός δίνει έμφαση στη δικαιολόγηση των απόψεων των μαθητών, ακόμα και αν αυτές δεν είναι απόλυτα σωστές. Λόγου χάριν στο παράδειγμα $Π_{65}$, οι μαθητές ερωτώνται αν ισχύει η ιδιότητα: $αν\ α < β, τότε\ αγ < βγ$. Ένας μαθητής προσπαθεί να βρει έναν κανόνα, ώστε η ιδιότητα αυτή να ισχύει ανεξάρτητα από το πρόσημο του γ. Ο κανόνας αυτός φαίνεται να είναι υπερβολικά πολύπλοκος και εγκαταλείπεται, ωστόσο ο μαθητής ενθαρρύνεται να τεκμηριώσει λεπτομερώς το σκεπτικό του:

Παράδειγμα ($Π_{65}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: (μετά από παραδείγματα με διάφορους αριθμούς) *Κάποτε ισχύει, κάποτε δεν ισχύει.*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Άαα! Όταν οι απόλυτες τιμές τους είναι μεγαλύτερες από το άλλο μέλος.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Για πες μας το σκεπτικό.*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Αν είναι αρνητικοί και η απόλυτη τιμή τους είναι μεγαλύτερη από αυτή του απόλυτου του πρώτου μέρους.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Σας βολεύει αυτό για κανόνας; Αν είναι αρνητική και η απόλυτη τιμή αυτουνού είναι μεγαλύτερη από αυτή δηλαδή… τι πρέπει να κάνω;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Πρέπει η απόλυτη τιμή και στα δύο να είναι μικρότερη…*

4.2.2 Τρόποι Επικοινωνίας μεταξύ Καθηγητή - Μαθητών

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι εστιάζοντας στους διαλόγους που πραγματοποιούνται μεταξύ καθηγητή και μαθητών, μπορούμε να εντοπίσουμε τόσο το μοντέλο επικοινωνίας του Wells (1993), όσο και εκείνο που προτείνεται από τους Forman et al. (1998), τα οποία αναλύονται στο Κεφάλαιο 3.

Πιο συγκεκριμένα, στο παράδειγμα $Π_3$ (σελ. 76) χρησιμοποιείται το μοντέλο Ε-Α-Α *(Έναρξη-Απάντηση-Ανατροφοδότηση)*, σύμφωνα με το οποίο ο καθηγητής θέτει ένα ερώτημα, κάποιος μαθητής απαντά και ο καθηγητής στη συνέχεια ανατροφοδοτεί τη συζήτηση στηριζόμενος στην απάντηση του μαθητή (Wells, 1993), όπως φαίνεται σε ένα απόσπασμα από το διάλογο του παραδείγματος αυτού:

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Συγγνώμη. Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες 2 αγώνες εντός και εκτός έδρας. Αν συνολικά έγιναν 240, πόσες είναι οι ομάδες;* -----------> *Έναρξη*
ΜΑΡΙΑ: *Εγώ λέω ότι είναι 58.* -----------------------------------> *Απάντηση*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μάλλον δια πέντε. 48 δεν είναι πάντως. Γιατί δεν είναι;* -----> *Ανατροφοδότηση*

Αυτό το μοντέλο επικοινωνίας παρατηρείται επίσης στο παράδειγμα $Π_5$ (σελ. 67):

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Τι άλλο αποτέλεσμα θα μπορούσε να βγει ώστε να πω ότι απορρίπτονταν. Τι άλλο θα απέρριπτα;* -------------------------------> *Έναρξη*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Κλάσμα.* -------------------------------> *Απάντηση*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Άαα! Κλάσμα ή δεκαδικό που να μην βγαίνει ακέραιος. Άλλη μια περίπτωση που θα μπορούσαμε να απορρίψουμε.* -----> *Ανατροφοδότηση*

Από την άλλη μεριά, στο παράδειγμα $Π_{43}$ φαίνεται να χρησιμοποιείται το εξελιγμένο μοντέλο, το οποίο στηρίζεται κατά κύριο λόγο στην επαναληπτικότητα. Ο καθηγητής αφού ακούσει την απάντηση του μαθητή, επαναλαμβάνει, εξηγεί και επεκτείνει περαιτέρω την απάντησή του, απευθυνόμενος όχι στο μαθητή που έδωσε την απάντηση αλλά στην υπόλοιπη τάξη (Forman et al., 1998), όπως φαίνεται και στο απόσπασμα του διαλόγου στο παράδειγμα $Π_{43}$:

ΜΑΘΗΤΗΣ: *Βασικά το χι τετράγωνο συν ψι τετράγωνο είναι μεγαλύτερο αν το χι και το ψι…*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αν το χι και το ψι;*
ΜΑΘΗΤΗΣ: *Αν το χι και το ψι είναι μεγαλύτερο από το 2.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Αν το χι και το ψι είναι μεγαλύτερο από το 2. Αυτό λέει* (το x^2+y^2) *είναι μεγαλύτερο, Αυτό* (το x^2+y^2) *είναι μεγαλύτερο από εκείνο* (το $2xy$) *αν το χι και το ψι είναι μεγαλύτερα από το 2, π.χ. αν βάλω όπου χι και όπου ψι το 10... έτσι, ωραία νούμερα. Αυτό* (το x^2+y^2) *πόσο κάνει;*

Επανάληψη και ανάλυση απάντησης μαθητή

Το μοντέλο αυτό εμφανίζεται και σε άλλα στιγμιότυπα που καταγράφηκαν, όπως στο παράδειγμα $Π_{71}$ (σελ. 56):

ΜΑΘΗΤΡΙΑ: *Κύριε άμα κάνουμε τις πράξεις εκεί θα βγει 1α μεγαλύτερο του 5β άρα δεν είναι σωστό.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Όχι δεν ρωτάει αυτό. Ρωτάει γιατί το α είναι μεγαλύτερο από το 5β; Πώς είναι δυνατόν το α να είναι μεγαλύτερο από το 5β; Αυτό μπορεί να είναι 7 και αυτό να είναι 1. Δεν είναι επειδή βλέπω 5 από εκεί, αυτό είναι μεγαλύτερο από εκείνο.*

Επανάληψη και ανάλυση απάντησης μαθήτριας

4.2.3 Παραδείγματα στα οποία Κυριαρχεί η Επικοινωνία μεταξύ Μαθητών

Κάνοντας αναστοχασμό πάνω στα είδη αλληλεπιδράσεων μεταξύ καθηγητή και μαθητών μέσα στη σχολική τάξη, τα οποία παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3, γίνεται αντιληπτό πως κατά τη διάρκεια των μαθημάτων πραγματοποιούνται κατά κύριο λόγο τα δύο πρώτα είδη αλληλεπίδρασης, είτε δηλαδή ο καθηγητής απευθύνει ερωτήσεις σε συγκεκριμένους μαθητές, είτε στο σύνολο της τάξης. Ωστόσο, ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές να αναπτύξουν επικοινωνία και να εμπλακούν με ορισμένα παραδείγματα, τρόπος ο οποίος διαφέρει ριζικά από τα παραπάνω δύο είδη και στις οποίες συντελείται το τρίτο είδος αλληλεπίδρασης.

Αρχικά, αφού θέσει το παράδειγμα, διαθέτει στους μαθητές αρκετό χρόνο προκειμένου να το σκεφτούν μόνοι τους. Στη συνέχεια αναμένει να σηκώσουν όλοι χέρια και να αρχίσουν να διατυπώνουν ο καθένας την άποψή του χωρίς να δέχεται ή να απορρίπτει κάποια από αυτές. Αντίθετα, επιτρέπει στους μαθητές να ανταλλάσσουν σκέψεις και να επιχειρηματολογεί ο καθένας γιατί θεωρεί την άποψή του σωστή, ενώ παράλληλα μέσω δικών του ερωτήσεων τους καθοδηγεί ώστε να ανακαλύψουν οι ίδιοι τη σωστή απάντηση.

Η ιδιαίτερη αυτή μορφή αλληλεπίδρασης παρατηρείται κατά την $3^{η}$ ώρα των παρακολουθήσεων, κατά την επίλυση μιας εξίσωσης στην οποία προέκυπταν μη αποδεκτές ρίζες:

Παράδειγμα ($Π_{18}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Και στην περίπτωση που λύναμε την εξίσωση και βρίσκαμε άλφα ίσον μηδέν ή άλφα ίσον..*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Δύο.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Δύο. Άλφα ίσον μηδέν ή άλφα ίσον δύο. Τι θα γινόταν; Ορίστε.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *Έχουμε βάλει περιορισμούς στην αρχή.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 3: *Σωστές και οι δύο.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 4: *Τι λες, θα ήταν αδύνατη.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 5: *Δεν θα έχει λύσεις, δεν θα ήταν αδύνατη.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 4: *Το ίδιο είναι.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Είναι το ίδιο;*

ΜΑΘΗΤΗΣ 4: *Ναι, αφού δεν έχει λύσεις είναι αδύνατη.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *Από τους περιορισμούς στην αρχή είναι αδύνατη.*

Η ίδια μορφή επικοινωνίας εντοπίζεται και κατά την $12^{η}$ ώρα μαθημάτων. Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να βρουν αν υπάρχει γωνία με συγκεκριμένες τιμές ημιτόνου και συνημιτόνου:

Παράδειγμα ($Π_{103}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Υπάρχει γωνία... υπάρχει γωνία που το ημίτονο της να είναι 0,8 και το συνημίτονο της να είναι 0,2; Με βάση αυτές τις… τους ορισμούς και αυτές τις σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών οι οποίες υποψιάζομαι ότι τις ακούσατε.*

…

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Δεν μου φαίνεται και πολύ παράλογο.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 2: *Νομίζω πως ναι…*

ΜΑΘΗΤΗΣ 3: *Εγώ πιστεύω ότι υπάρχουνε, αλλά δεν θα πω ποιες είναι, αλλά θα πω ότι θα είναι μικρότερες από 90 μοίρες επειδή το συνημίτονο…*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Μπράβο! Τι σκέφτεται; Υπάρχουν γωνίες με θετικό ημίτονο και συνημίτονο;*

ΜΑΘΗΤΗΣ 5: *Όχι.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 6: *Λάθος, υπάρχουν στο πρώτο..*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι λέει αν είναι έτσι, θα είναι στο πρώτο τεταρτημόριο. Οκ, δεκτό. Παρακάτω.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 6: *Από 90 και κάτω όμως θα είναι.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 7: *Εγώ πιστεύω ότι δεν είναι διότι... γιατί άμα δοκιμάσουμε τη σχέση* (εννοεί την $\text{ημ}^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$) *δεν βγαίνει 1.*

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Γιατί άμα δοκιμάσουμε τη σχέση δεν βγαίνει 1.*

ΜΑΘΗΤΗΣ 1: *Άαα!*

4.2.4 Σειρά Επίκλησης Παραδειγμάτων

Εστιάζοντας στη σειρά με την οποία ο εκπαιδευτικός επιλέγει να χρησιμοποιήσει παραδείγματα, γίνεται φανερό ότι υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις κατά τις οποίες τα παραδείγματα επινοούνται και χρησιμοποιούνται στη σειρά, ακολουθώντας τη μορφή αλυσίδας.

Κατά την $4^η$ ώρα μαθημάτων, ο καθηγητής αποσκοπεί να ανακαλύψουν οι μαθητές την ιδιότητα: $αν\ \alpha < \beta, τότε\ \alpha - \beta < 0$. Με άλλα λόγια ότι ένας αριθμός είναι μικρότερος από έναν άλλον όταν η διαφορά τους είναι αρνητικός αριθμός. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτός ο στόχος χρησιμοποιεί αλυσίδα παραδειγμάτων. Αρχικά, ρωτά την τάξη στο παράδειγμα $Π_{24}$, με ποιον τρόπο μπορούν να συγκριθούν δυο αριθμοί α, β:

Παράδειγμα ($Π_{24}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Καλά, με συγχωρείτε, το 3 είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από το -7;*

…

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ωραία. Το συν τρία είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από το συν πέντε;*

<u>Σκεπτικό Εκπαιδευτικού</u>

ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Ωραία. Και γι' αυτή την ώρα τα επόμενα... μισό λεπτό... είναι εκεί λίγο που συγκρίνατε τους αριθμούς.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Το 3 ή το -7 κλπ. Ναι.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Και δίνατε και άλλα νούμερα απλά δεν πρόλαβα και εγώ να τα γράψω πάνω σε εκείνη την ώρα.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ναι. Αυτό... τα νούμερα αυτά είναι... δηλαδή, θέλω να τους βάλω στο παιχνίδι να μου μιλήσουνε για την ευθεία. Η Χρύσα δεν την είδες. Παίρνει τον λόγο και λέει, μα αφού είναι το μείον επτά και το τρία. Κάνει με το χέρι της* (το κουνάει δηλαδή προς τα δεξιά)*, γι' αυτό της είπα δεν σε βλέπουνε.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Άαα καλό.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Κάνει με το χέρι της υπονοώντας την κίνηση στην δεξιά γραμμή ας πούμε. Το δεξιότερα. Ακριβώς. Αυτή είναι, αυτές ήταν οι ερωτήσεις και μετά είδες από την εξέλιξη της συζήτησης, είχα σκοπό να τους πω δύο τρία.. δύο θετικούς ξέρω ΄γω, έναν αρνητικό και έναν θετικό, δύο αρνητικούς κλπ αλλά πήγε καλά σε εκείνο το σημείο η συζήτηση και προέκυψαν όλες οι περιπτώσεις που αναδεικνύουν ότι το πιο γενικό, η πιο γενική διατύπωση είναι όσο πιο δεξιά, τόσο μεγαλύτερο. Ενώ όλες οι άλλες, αν πάρω δηλαδή ένα παράδειγμα έναν θετικό με έναν αρνητικό κλπ μπορεί να μπλέξω και με άλλες συζητήσεις του είδους οι θετικοί είναι πάντα μεγαλύτεροι από τους αρνητικούς. Οκ. Αυτό.*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Μάλιστα.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Δηλαδή, τα παραδείγματα αυτά υπηρετούσαν αυτή την γενίκευση ας πούμε...*
ΕΡΕΥΝΗΤΗΣ: *Για να γενικεύσετε.*
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Ακριβώς. Στο ότι, ότι δεξιότερα είναι μεγαλύτερο.*

Στη συνέχεια στο παράδειγμα $Π_{26}$, που αναφέρθηκε και παραπάνω (σελ. 86), ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί ένα επιπλέον παράδειγμα που περιέχει μεταβλητές αντί για αριθμούς, προκειμένου οι μαθητές να αναγκαστούν να διατυπώσουν ένα κριτήριο σύγκρισης, χωρίς την αναπαράσταση των αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή:

Παράδειγμα ($Π_{26}$)

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: *Συγκρίνετε αυτό* (γράφει το $x^2 + y^2$) *με αυτό* (γράφει το 2xy). *Κάτι πολύ πιο πολύπλοκο από ένα σκέτο α και ένα σκέτο β. Το ένα είναι ένα άθροισμα δύο τετραγώνων και το άλλο είναι το διπλάσιο γινόμενο των δύο αυτών.*

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω παραδείγματα διαδοχικά σε αλυσίδα αποσκοπεί στη διατύπωση του γενικού κανόνα.

Παράλληλα εκτός από τις αλυσίδες παραδειγμάτων, ο εκπαιδευτικός κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας χρησιμοποιεί αλυσίδες που απαρτίζονται όχι μόνο από παραδείγματα αλλά από συνδυασμό παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων. Οι αλυσίδες αυτές ξεκινούν με ένα ή περισσότερα απλά παραδείγματα, τα οποία έχουν ως στόχο να παρουσιάσουν τις πιο συνήθεις περιπτώσεις ενός φαινομένου ή τις περιπτώσεις στις οποίες επιβεβαιώνεται μια μαθηματική σχέση, κανόνας ή εικασία. Προετοιμάζουν με άλλα λόγια το έδαφος ώστε να δοθεί έμφαση στις ιδιαίτερες περιπτώσεις ή στις αντιθέσεις που θα προκύψουν από το παράδειγμα ή τα αντιπαραδείγματα που ακολουθούν στη συνέχεια.

Χαρακτηριστικές περιπτώσεις χρήσης τέτοιων αλυσίδων παρατηρούνται στο $Π_5$. Προκειμένου ο εκπαιδευτικός να δείξει ότι δε γίνονται πάντα δεκτές όλες οι λύσεις μιας εξίσωσης, χρησιμοποιεί αρχικά ένα παράδειγμα λύσης η οποία γίνεται δεκτή, ενώ στη συνέχεια αναφέρει ως αντιπαραδείγματα δυο λύσεις οι οποίες πρέπει να απορριφθούν. Κάτι ανάλογο παρατηρείται και στα παραδείγματα $Π_{12}$ και $Π_{14}$, με τη χρήση των οποίων ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να δείξει ότι το Ε.Κ.Π. αριθμών ή πολυωνύμων δεν είναι πάντα ο αριθμός ή το πολυώνυμο με το μεγαλύτερο εκθέτη. Για το λόγο αυτό δείχνει αρχικά το απλό παράδειγμα $\frac{1}{\alpha^2-2\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-2}$ στο οποίο όντως το πολυώνυμο με το μεγαλύτερο εκθέτη είναι το Ε.Κ.Π., στη συνέχεια παρουσιάζει τα αντιπαράδειγμα $\frac{1}{\alpha^2+2\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-2}$, $2^2 \cdot 3 + 3^4$, $3^2 \cdot 2$, $2^3 \cdot 3^2$ για τα οποία δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο, αλλά απαιτούν παραγοντοποίηση προκειμένου να βρεθεί το Ε.Κ.Π. τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η εργασία αυτή εστιάζεται σε δύο σημεία. Το πρώτο σημείο αφορά στα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται σε μια τάξη Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου. Μελετώντας τα παραδείγματα, εξετάσαμε ποιοι είναι οι τύποι των παραδειγμάτων που χρησιμοποιούνται στην τάξη, κυρίως από την πλευρά του εκπαιδευτικού. Το δεύτερο σημείο εστιάζει στον τρόπο με τον οποίο ο εκπαιδευτικός διαχειρίζεται τα παραδείγματα αυτά και πώς η επικοινωνία που συντελείται μέσα στην τάξη συμβάλλει στη διαχείριση αυτή. Στόχος της ενότητας αυτής είναι να γίνει σύνδεση μεταξύ των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την έρευνά μας με την υπάρχουσα βιβλιογραφία πάνω στα παραδείγματα, όσο περιορισμένη και αν είναι αυτή, απαντώντας με τον τρόπο αυτό και στα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε.

Από την ανάλυση των μαθημάτων εντοπίζονται συνολικά 104 παραδείγματα. Από αυτά τα 96 δημιουργήθηκαν από τον καθηγητή ενώ τα 8 από τους μαθητές. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι τα μαθήματα στρέφονται περισσότερο γύρω από τον εκπαιδευτικό, καθώς εκείνος έχει το ρόλο του ενορχηστρωτή και κατευθύνει την πορεία και εξέλιξη των μαθημάτων, θέτοντας περισσότερο ο ίδιος ζητήματα και προβληματισμούς στην τάξη. Το κύριο επιχείρημα στο οποίο η πλειοψηφία των καθηγητών στηρίζει τον παραδοσιακό και δασκαλοκεντρικό τρόπο διδασκαλίας είναι η έλλειψη χρόνου. Βέβαια, η κυριαρχία του δασκαλοκεντρικού μοντέλου διδασκαλίας ίσως να οφείλεται και σε πολιτισμικούς λόγους ή ακόμα και στην ανασφάλεια των εκπαιδευτικών να μην αποτύχουν οι μαθητές τους και να μη βασίζεται στο μαθηματικό πλαίσιο. Αποτελέσματα που συνάδουν με την παραπάνω διαπίστωση, εντοπίζονται και σε άλλες έρευνες. Οι Zodik και Zaslavsky (2008) διαπιστώνουν ότι περίπου το 94,5% των παραδειγμάτων στην τάξη προέρχονται από τον καθηγητή, ενώ ανάλογα αποτελέσματα έχει και η έρευνα της Παπακανδεράκη (2012), σύμφωνα με την οποία περίπου το 79% των παραδειγμάτων παράγονται από τον εκπαιδευτικό.

Σχετικά με το *σχεδιασμό* των παραδειγμάτων από τον καθηγητή, 67 στα 97 ήταν αυθόρμητα ενώ 29 στα 96 ήταν προσχεδιασμένα. Το γεγονός αυτό αντανακλά τον πλούσιο διαθέσιμο χώρο παραδειγμάτων του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού, όπως επίσης και το υψηλό επίπεδο μαθηματικής και παιδαγωγικής γνώσης που διαθέτει, καθώς η διαδικασία παραγωγής παραδειγμάτων «επί τόπου» χωρίς προετοιμασία, αποτελεί μια από τις δυσκολότερες προκλήσεις που καλείται να αντιμετωπίσει ο εκπαιδευτικός στην καθημερινή του πρακτική στην τάξη. Σε κάθε περίπτωση η επιλογή και παραγωγή των παραδειγμάτων στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στη μαθηματική γνώση των σχετικών θεμάτων (Zodik & Zaslavsky, 2008). Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα ευρήματα της έρευνας των Zodik και Zaslavsky (2008), σύμφωνα με τα οποία οι περιπτώσεις που οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποίησαν παραδείγματα της στιγμής ήταν περίπου ίσες με τις περιπτώσεις που χρησιμοποίησαν προσχεδιασμένα. Έρχονται ωστόσο σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της έρευνας της Παπακανδεράκη (2012), βάση της οποίας περίπου το 64% των παραδειγμάτων ήταν αυθόρμητα ενώ το 36% ήταν προσχεδιασμένα.

Αναφορικά με τη *λειτουργικότητα* των παραδειγμάτων, προκύπτει ότι 52 από τα 96 παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν από τον καθηγητή αποτελούν παραδείγματα απλής ή οικείας περίπτωσης, 13 από τα 96 είναι παραδείγματα διόρθωσης λαθών/παρανοήσεων των μαθητών, 23 από τα 96 ανήκουν στην κατηγορία παραδειγμάτων απόδοσης γενικότητας, ενώ 8 από τα 96 αποτελούν ασυνήθιστες περιπτώσεις. Παρατηρείται συνεπώς ότι στην πλειοψηφία των περιπτώσεων ο εκπαιδευτικός επιλέγει παραδείγματα απλής ή οικείας περίπτωσης, κάτι που έρχεται σε συμφωνία και με τα αποτελέσματα της έρευνας των Zodik και Zaslavsky (2008). Με άλλα λόγια ο εκπαιδευτικός θεωρεί ως τον αποτελεσματικότερο τρόπο κατανόησης ή αντιμετώπισης τυχόν δυσκολιών που μπορεί οι μαθητές να αντιμετωπίζουν σε κάποιο ζήτημα, την παρουσίαση μιας απλούστερης ή μιας πιο οικείας μορφής του προβλήματος ή του θέματος που διαπραγματεύονται. Τα αποτελέσματα των υπόλοιπων κατηγοριών βρίσκονται επίσης σε συμφωνία με τα αποτελέσματα των Zodik και Zaslavsky (2008). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η αρκετά συχνή εμφάνιση παραδειγμάτων που αναφέρονται σε ασυνήθιστες περιπτώσεις, καθώς παρατηρείται και ένας ιδιαίτερος τρόπος στη σειρά και τη χρονική στιγμή που επιλέγει ο καθηγητής να επικαλεστεί τα παραδείγματα αυτά. Αρχικά παρατηρείται ότι τα παραδείγματα ασυνήθιστης περίπτωσης μιας έννοιας ή μιας διαδικασίας που διαπραγματεύεται στην τάξη δε χρησιμοποιούνται εξαρχής, αλλά αντιθέτως διαδέχονται παραδείγματα συνηθισμένων περιπτώσεων που έχει επικαλεστεί προηγουμένως ο εκπαιδευτικός. Παραδείγματος χάριν προτού ο εκπαιδευτικός επικαλεστεί το παράδειγμα $Π_5$ (σελ. 67), το οποίο όπως είδαμε προηγουμένως αφορά κλασματικές ή ακέραιες ρίζες μιας εξίσωσης οι οποίες απορρίπτονται, έχει παρουσιάσει στην τάξη περίπτωση ριζών, οι οποίες γίνονται δεκτές.

Ως προς το *είδος*, διαπιστώνεται ότι 75 από τα 104 ήταν παραδείγματα, 26 από τα 104 ήταν αντιπαραδείγματα και 3 από τα 104 αποτελούσαν μη παραδείγματα. Οι συχνότητες αυτές δείχνουν ξεκάθαρα ότι τα απλά παραδείγματα χρησιμοποιούνται κατά κόρον στη διδασκαλία των μαθηματικών ενώ τα μη παραδείγματα στον ελάχιστο δυνατό βαθμό, ευρήματα που επαληθεύονται και από παλαιότερες έρευνες όπως στην έρευνα της Παπακανδεράκη (2012). Αυτό ωστόσο που προκαλεί εντύπωση, είναι ότι ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός επιστρατεύει σε μεγάλο βαθμό και αντιπαραδείγματα κατά τη διδασκαλία του (σε ποσοστό 25%), δείγμα ίσως της μαθηματικής και παιδαγωγικής του κατάρτισης, κάτι που δε συναντάται στην προϋπάρχουσα βιβλιογραφία.

Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι στην έρευνα της Παπακανδεράκη (2012), εντοπίζονται αντιπαραδείγματα σε ποσοστό μόλις 2%.

Για αυτόν το λόγο, τα *αντιπαραδείγματα* διαχωρίζονται σε τρεις επιμέρους κατηγορίες, στα αντιπαραδείγματα αντιμετώπισης λανθασμένων πεποιθήσεων/αποριών με συχνότητα 6 από τα 26, στα αντιπαραδείγματα απόδειξης μη ισχύος μιας μαθηματικής σχέσης με συχνότητα 12 στα 26, καθώς και στα αντιπαραδείγματα αντιμετώπισης δύσκολων ζητημάτων με συχνότητα 8 στα 26. Αξίζει να αναφερθεί πως η χρήση αντιπαραδειγμάτων αναγνωρίζεται ως μια από τις κύριες μεθόδους απόρριψης των λανθασμένων ισχυρισμών των μαθητών και από την έρευνα των Giannakoulias et al. (2010).

Σχετικά με τη *διαισθητικότητα* των παραδειγμάτων, διαπιστώνεται ότι τόσο τα διαισθητικά όσο και τα μη διαισθητικά παραδείγματα καταγράφονται σχεδόν με την ίδια συχνότητα, καθώς 49 στα 104 παραδείγματα ήταν διαισθητικά ενώ 55 στα 104 από αυτά ήταν μη διαισθητικά. Τα αποτελέσματα αυτά μόνο αναμενόμενα δεν είναι. Αυτό γιατί σε μαθήματα της Άλγεβρας όπως αυτά που παρακολουθήθηκαν για τις ανάγκες της έρευνας, οι μαθητές εμπλέκονται περισσότερο με εξισώσεις, παραστάσεις, μαθηματικά σύμβολα, αλγορίθμους και γενικότερα με μαθηματικά αντικείμενα, τα οποία συνδέονται με τη διαίσθηση πολύ πιο δύσκολα από ότι συμβαίνει για παράδειγμα σε μαθήματα της Γεωμετρίας. Συνεπώς, η σχεδόν όμοια συχνότητα παραγωγής διαισθητικών παραδειγμάτων όσο και μη διαισθητικών στα συγκεκριμένα μαθήματα αποτελεί ένα αξιόλογο εύρημα, που αντανακλά την προσπάθεια του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού να συμβάλλει στην, όσο το δυνατόν, αποτελεσματικότερη κατανόηση των μαθητών του.

Όσον αφορά τη *μαθηματική δραστηριότητα,* 23 από τα 104 παραδείγματα που αναλύθηκαν είχαν σχέση με κάποια μαθηματική έννοια, ενώ 81 από τα 104 είχαν σχέση με κάποια διαδικασία. Είναι γεγονός ότι όταν ο καθηγητής καλείται να διδάξει μαθηματικές έννοιες, βρίσκεται αντιμέτωπος με ένα δίλημμα Από τη μία μεριά, σύμφωνα με τον Llinares (2000), υπάρχει η επιδίωξη να επιτύχουν οι μαθητές μία σε βάθος κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, η οποία οδηγεί τον καθηγητή στην υιοθέτηση μιας εννοιολογικής προσέγγισης στη διδασκαλία του. Από την άλλη μεριά, η συμμόρφωση με το αναλυτικό πρόγραμμα, το οποίο αποσκοπεί στην εκμάθηση χειρισμού διαδικασιών, όπως και η ύπαρξη εξετάσεων, οδηγούν τον καθηγητή στην άποψη ότι οι μαθητές πρέπει να επικεντρωθούν περισσότερο στη διαδικαστική γνώση, δηλαδή στο να μάθουν οι μαθητές το πώς πρέπει να κάνουν κάτι, χωρίς να γνωρίζουν το γιατί. Υπάρχουν πολλές διαφορετικές θεωρήσεις αναφορικά με τη σχέση που έχουν τα δύο είδη γνώσης. Υπάρχουν ερευνητές που υποστηρίζουν ότι η εννοιολογική γνώση προηγείται της διαδικαστικής (Gelman, & Williams, 1998), υπάρχουν οι υποστηρικτές της αντίθετης άποψης, σύμφωνα με την οποία επέρχεται πρώτα η διαδικαστική γνώση και ακολουθεί η εννοιολογική (Siegler & Stern, 1998), ενώ υπάρχουν και εκείνοι που υποστηρίζουν ότι η βελτίωση στο ένα είδος γνώσης μπορεί να επιφέρει βελτίωση και του άλλου και ότι η σχέση μεταξύ τους είναι αμφίδρομη (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). Συμπερασματικά, δεν υπάρχει σωστή ή λάθος προσέγγιση. Ανεξάρτητα με το ποιο είδος γνώσης προηγείται, είναι κοινά αποδεκτό ότι η εννοιολογική και η διαδικαστική προσέγγιση αποτελούν δύο όψεις του ίδιου νομίσματος. Η μία δεν μπορεί να υφίσταται ή να αναπτυχθεί, αν δε συνδυάζεται με την άλλη. Το γεγονός ότι τα παραδείγματα που εντοπίζονται στην παρούσα έρευνα αφορούν κατά κύριο λόγο διαδικασία (54 από τα 81 από αυτά αφορούν κάποια αλγοριθμική διαδικασία, ενώ 27 στα 81 την επίλυση προβλήματος), μπορεί να ερμηνευθεί με πολλούς τρόπους. Είναι πιθανόν η προτίμηση αυτή να οφείλεται στις υποκείμενες θεωρήσεις του εκπαιδευτικού, σύμφωνα με τις οποίες προτεραιότητα κατά τη διδασκαλία έχει η εκμάθηση διαδικαστικών γνώσεων. Επίσης το γεγονός ότι τα μαθήματα που παρακολουθήθηκαν ήταν μαθήματα Άλγεβρας, στα οποία έχει έντονη παρουσία το διαδικαστικό στοιχείο, ίσως να ερμηνεύει εν μέρει τα αποτελέσματα ενώ δεν μπορεί να αποκλειστεί το γεγονός τα αποτελέσματα να οφείλονται και σε κάποιον πολιτισμικό παράγοντα.

Σχετικά με την επικοινωνία, υποστηρίζουμε ότι είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένη με το είδος και την ποιότητα της μαθηματικής γνώσης που αναπτύσσεται στην τάξη. Οι μαθητές επικοινωνώντας, αναπτύσσουν νοήματα, ιδέες, επιχειρήματα και προάγουν την κριτική, αλλά και μαθηματική τους σκέψη. Ο εκπαιδευτικός, ως διευκολυντής της επικοινωνίας και της μάθησης, ανήκει και ο ίδιος στην ομάδα της τάξης έχοντας πλέον ένα πιο διευρυμένο και σύνθετο, αλλά ταυτόχρονα πιο ουσιαστικό ρόλο. Ο εκπαιδευτικός προάγει την επικοινωνία μέσα και έξω από την τάξη με ξεκάθαρο τρόπο και καθορίζει, είτε ρητά είτε υπόρρητα, τις κοινωνικές και κοινωνικομαθηματικές νόρμες της τάξης.

Ιδιαίτερα κατά την ενασχόληση με τα παραδείγματα, θέτει συχνά αμφιβολίες και ερωτήματα στους μαθητές, ενθαρρύνει τη διατύπωση εικασιών και απόψεων, ακόμη και αν αυτές είναι λανθασμένες. Τους υπενθυμίζει επανειλημμένα να δικαιολογούν τους ισχυρισμούς τους, χωρίς να τους κρίνει, ενώ τους παροτρύνει να είναι ανά πάσα στιγμή έτοιμοι να υπερασπιστούν με επιχειρήματα τις απόψεις τους ενώπιον της τάξης. Είναι καταδεκτικός στις απορίες που θέτουν οι μαθητές και επιμένει στα θέματα που τους προβληματίζουν, προσπαθώντας να κατανοήσει τον τρόπο σκέψης τους και να διευκρινίσει τα ασαφή σημεία, έως ότου αυτά να γίνουν κατανοητά.

Παρ' όλο που στα μαθήματα ακολουθείται μία επικοινωνιακή προσέγγιση, η οποία αποσκοπεί στην κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές, στην παρακολούθηση της πορείας τους και την προσαρμογή του μαθήματος στις ανάγκες τους, έχει ωστόσο τα στοιχεία διδασκαλίας ενός παραδοσιακού μαθήματος. Ο εκπαιδευτικός δεν εκχωρεί την ευθύνη μάθησης των μαθηματικών στους μαθητές του. Αναλαμβάνει ο ίδιος την κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης, την ανάθεση έργων και τη διαχείριση της επικοινωνίας που συντελείται στο περιβάλλον της τάξης. Είναι υπέρμαχος της ελεύθερης διατύπωσης απόψεων, ωστόσο δεν επιτρέπει τον αποπροσανατολισμό των συζητήσεων από το εκάστοτε διδακτικό ή μαθηματικό στόχο που έχει θέσει. Στην περίπτωση που ένας μαθητής αδυνατεί να απαντήσει σε κάποιο ερώτημα, δε δίνει ο ίδιος τη σωστή απάντηση, αλλά προχωρά από τον έναν μαθητή στον άλλο «κυνηγώντας», όπως αναφέρουν χαρακτηριστικά οι Σακονίδης, κ.ά. (2001), τη σωστή απάντηση.

Αναφορικά με το χρόνο ομιλίας, παρατηρείται ότι ο λόγος του εκπαιδευτικού κατέχει συντριπτικά το μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας. Απόρροια της διαπίστωσης αυτής είναι ότι ο εκπαιδευτικός είναι εκείνος ο οποίος κατευθύνει την επικοινωνία στην τάξη, ενώ οι μαθητές συμμετέχουν κυρίως μετά από ερωτήσεις ή παροτρύνσεις του καθηγητή. Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της έρευνας των Kawanaka & Stigler (1999), τα οποία δείχνουν ότι καθηγητές στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, στη Γερμανία και στην Ιαπωνία τείνουν να μιλούν περισσότερο κατά τη διάρκεια των μαθημάτων (σε ποσοστό περίπου 85%), σε σχέση με τους μαθητές τους (ποσοστό μόλις 15%). Μόνο τυχαίο δεν είναι εξάλλου το γεγονός, ότι το Εθνικό Συμβούλιο Διδασκαλίας των Μαθηματικών των ΗΠΑ (NCTM) επισημαίνει ότι: «…οι καθηγητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται, ώστε να μειώσουν το σύνολο της ώρας που μιλούν και αντίθετα να θέτουν θέματα, τα οποία εμπλέκουν τους μαθητές σε διάλογο…» (NCTM, 1991).

Εμβαθύνοντας στο είδος της επικοινωνίας που συντελείται στην τάξη, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι επικρατούν επί το πλείστον τα δύο πρώτα είδη αλληλεπίδρασης, στα οποία ο καθηγητής απευθύνει ερωτήσεις σε συγκεκριμένους μαθητές ή στο σύνολο της τάξης. Για το λόγο αυτό, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα παραδείγματα στα οποία επικρατεί η επικοινωνία μεταξύ των μαθητών. Στις περιπτώσεις αυτές συντελείται το τρίτο είδος αλληλεπίδρασης (γ), στο οποίο κυρίαρχο ρόλο έχουν οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μαθητών, είτε αυτές έχουν τη μορφή ερωτήσεων, είτε σχολίων, είτε παρεμβάσεων. Με άλλα λόγια, παρατηρείται μια ιδιαίτερη μορφή κοινωνικής νόρμας, η οποία διαφέρει από συνήθεις νόρμες διδασκαλίας, όπου ο καθηγητής ρωτά και ένας μαθητής δίνει απάντηση. Έτσι οι μαθητές έχουν το ρόλο ισοδύναμων μελών της κοινωνίας της τάξης διαμορφώνοντας οι ίδιοι την έκβαση του μαθήματος, την εξαγωγή συμπερασμάτων και την επίτευξη αποτελεσμάτων. Ο εκπαιδευτικός δηλαδή διαμορφώνει κατάλληλα το περιβάλλον της τάξης, έτσι ώστε να μπορούν να «γίνονται» και να «συζητιούνται» μαθηματικά, που είναι ένας από τους θεμελιώδεις στόχους της διδασκαλίας (White, 2003). Τα παραδείγματα στα οποία συντελείται αυτό το είδος επικοινωνίας, δεν ανήκουν αποκλειστικά σε κάποια συγκεκριμένη κατηγορία παραδειγμάτων. Δε διαθέτουν, με άλλα λόγια, παρόμοια χαρακτηριστικά ως προς τη λειτουργικότητά τους ή ως προς τη μαθηματική δραστηριότητα με την οποία εμπλέκουν τους μαθητές. Η ομοιότητά τους έγκειται στο χρονικό σημείο του μαθήματος στο οποίο επιλέγει να τα διαχειριστεί ο εκπαιδευτικός με αυτόν τον τρόπο, καθώς εντοπίζονται κυρίως στο τέλος των μαθημάτων. Το γεγονός αυτό δεν είναι τυχαίο, καθώς η διαχείριση των παραδειγμάτων με τον τρόπο αυτό και η ανάπτυξη επικοινωνίας στην οποία κυριαρχεί η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών, απαιτεί την αφιέρωση ενός σημαντικά μεγάλου τμήματος διδακτικού χρόνου. Συνεπώς, ο καθηγητής διαχειρίζεται τα παραδείγματα με αυτόν τον τρόπο κυρίως στο τέλος των μαθημάτων, αφού έχει ολοκληρώσει τους διδακτικούς στόχους που είχε θέσει για την εκάστοτε διδακτική ώρα και εφόσον έχει στη διάθεση του τον απαραίτητο χρόνο.

Η επιλογή των παραδειγμάτων και η σειρά με την οποία χρησιμοποιούνται, έχουν καθοριστικό ρόλο και σημασία στη διδασκαλία των μαθηματικών. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέγει παραδείγματα ανάλογα με τα επιθυμητά χαρακτηριστικά που θέλει να έχουν και μπορεί να τα χρησιμοποιήσει με τη μορφή αλυσίδας, προκειμένου να βοηθήσει τους μαθητές να αποκαλύψουν ένα υποκείμενο μοτίβο κάποιου μαθηματικού φαινομένου ή για να ανακαλύψουν την ορθότητα ενός φαινομένου (Zaslavsky, Harel, & Manaster, 2006). Έχει τη δυνατότητα να τα χρησιμοποιεί σε σειρά από το εύκολο στο δυσκολότερο, για να προσδώσει αναλογία ή από το δυσκολότερο στο πιο εύκολο, για να προκαλέσει γνωστική σύγκρουση (Tsamir 2003). Παράλληλα, σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας των Petty και Jansson (1987), οι αλυσίδες (ή ακολουθίες όπως τις αναφέρουν) παραδειγμάτων συμβάλλουν καθοριστικά στη διευκόλυνση κατανόησης των εννοιών.

Αναφορικά με τον εκπαιδευτικό που συμμετέχει στην έρευνα, η φοίτησή του στο συγκεκριμένο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών της Διδακτικής των Μαθηματικών, φαίνεται πως συνέβαλλε καθοριστικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής του ταυτότητας. Επιπλέον παράγοντες, όπως η προηγούμενη εμπειρία σε φροντιστήριο, η πολυετής διδακτική του εμπειρία σε σχολεία, ο υψηλός βαθμός αναστοχασμού των διδακτικών και παιδαγωγικών επιλογών του, καθώς και η ενεργή συμμετοχή του σε σεμινάρια, συνέδρια και η ισχυρή παρουσία στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών, φαίνεται πως επιδρούν καθοριστικά στον τρόπο με τον οποίο διαχειρίζεται τα παραδείγματα που παράγονται κατά τη διάρκεια των μαθημάτων, αλλά και τις νόρμες και το είδος επικοινωνίας το οποίο διαμορφώνει στην τάξη.

Η μελέτη αυτή δημιουργεί την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα και αναδεικνύει κρίσιμα ερωτήματα ως προς τη χρηστικότητα των παραδειγμάτων, αλλά και ως προς τις διδακτικές ικανότητες του εκπαιδευτικού να τα επικαλείται και να τα διαχειρίζεται. Πώς τα ευρήματα που προκύπτουν σχετικά με τις επιλογές παραδειγμάτων των εκπαιδευτικών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε εκπαιδευτικά προγράμματα ή σε σεμινάρια επιμόρφωσης εκπαιδευτικών; Μια παράμετρος που θα είχε επίσης ενδιαφέρον να διερευνηθεί, είναι το πώς επιδρά η συμμετοχή του διδάσκοντα σε μεταπτυχιακά προγράμματα Διδακτικής των Μαθηματικών, σε συνέδρια ή σε επιμορφωτικά προγράμματα του κλάδου, στη διαμόρφωση της εκπαιδευτικής του ταυτότητας, στις διδακτικές του επιλογές και στο εκπαιδευτικό του έργο στην τάξη των μαθηματικών. Θα προέκυπταν αντίστοιχα αποτελέσματα σε διαφορετικές περιπτώσεις εκπαιδευτικών; Παράλληλα, η έρευνά μας πραγματοποιήθηκε σε ένα παραδοσιακό τυπικό περιβάλλον τάξης, στο οποίο ο εκπαιδευτικός έχει τον κεντρικό ρόλο. Θα προέκυπταν ανάλογα συμπεράσματα σχετικά με τις επιλογές παραδειγμάτων του καθηγητή και του είδους της επικοινωνίας που αναπτύσσεται στην τάξη σε άλλα περιβάλλοντα τάξης;

Στην παρούσα εργασία, αποτολμήσαμε να διερευνήσουμε και να μελετήσουμε τη σημασία και την αξία των παραδειγμάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς και τη σπουδαιότητα και το ρόλο που διαδραματίζει η επικοινωνία στην τάξη κατά τη διαχείρισή τους. Από τα αποτελέσματα της έρευνας γίνεται φανερό ότι τα παραδείγματα κατέχουν εξέχουσα θέση στην εκπαιδευτική διαδικασία και χρησιμοποιούνται από μαθητές και καθηγητές. Από την πλευρά των μαθητών, διαπιστώθηκε ότι η εμπλοκή τους με τα παραδείγματα αποτελεί αποτελεσματική στρατηγική εκμάθησης μαθηματικών, ενώ μέσα από την επικοινωνία με τους συμμαθητές και τον καθηγητή τους προάγεται η μαθηματική και κριτική τους σκέψη. Η παραγωγή και η διαχείριση των παραδειγμάτων αποτελεί παράλληλα πρόκληση και για τον εκπαιδευτικό, για τον οποίο απαραίτητη προϋπόθεση είναι οι άριστες μαθηματικές του γνώσεις, η διδακτική του εμπειρία και η επίγνωση της γνωστικού μαθηματικού υποβάθρου των μαθητών, αλλά και της ιδιαιτερότητας του κάθε ενός από αυτούς. Η παρούσα έρευνας συμβάλλει επίσης, πέραν της δημιουργίας ενός πλήρους δικτύου ταξινόμησης των παραδειγμάτων και της μελέτης του πλαισίου επικοινωνίας στην τάξη, στην κατανόηση των επιλογών του εκπαιδευτικού, στην παρατήρηση αποτελεσματικών αλλά και μη αποτελεσματικών τρόπων χρήσης των παραδειγμάτων και της επικοινωνίας στην τάξη. Πάνω από όλα, όμως, παρέχει τη δυνατότητα στον κάθε εκπαιδευτικό να αξιολογήσει τα πλεονεκτήματα και τις αδυναμίες της χρήσης του κάθε είδους παραδειγμάτων, των μεθόδων και στρατηγικών επικοινωνίας στην τάξη, αλλά και να επινοήσει τρόπους με τους οποίους μπορεί να ενσωματώσει αποτελεσματικά τα παραδείγματα στη διδασκαλία του και να δημιουργήσει ένα υγιές και αποτελεσματικό επικοινωνιακό περιβάλλον στην τάξη του.

Τέλος, το δίκτυο ταξινόμησης παραδειγμάτων που δημιουργήθηκε, όπως και οι διαπιστώσεις που προέκυψαν σχετικά με το ρόλο της επικοινωνίας κατά τη διαχείριση των παραδειγμάτων, σαφώς και αφορούν το συγκεκριμένο εκπαιδευτικό που συμμετείχε στην έρευνα και συνεπώς πρέπει να είμαστε πολύ επιφυλακτικοί για την όποια γενίκευση των αποτελεσμάτων. Παρ’ όλα αυτά, η πλούσια συλλογή παρατηρήσεων και συμπερασμάτων, η παράθεση πληθώρας παραδειγμάτων και στιγμιότυπων από την τάξη, παρέχουν αρκετά ερεθίσματα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μελλοντικές έρευνες, κυρίως όμως, να αποτελέσουν για τον εκπαιδευτικό που καλείται να διδάξει μαθηματικά, αντικείμενο προβληματισμού, αναστοχασμού και αναθεώρησης απόψεων.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Alcock, L.J., (2004). Uses of example objects in proving. In M. J.Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 17-24. Bergen, Norway.

2. Anthony, G. (1994). *The role of the worked example in learning mathematics*. In A. Jones et al. (Eds.). Hamilton, New Zealand: University of Waikato.

3. Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1978). *Educational psychology: A cognitive view* (2nd Ed.). New York: Holt, Rinehart, & Winston.

4. Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). London: Hodder & St.

5. Baxter, J., Woodward, J., & Olson, D. (2001). Effects of reform-based mathematics instruction on low achievers in five third-grade classrooms. *The Elementary School Journal, 101*, 529–549.

6. Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.). *Proceedings of the 30th PME International Conference, 1*, 126–154. Czech Republic: PME.

7. Bliss, J., Ogborn, J., & Grize, F. (1979). The Analysis of Qualitative Data. *European Journal of Science Education*, *1* (4), 427-440.

8. Bruner, J. S. & Anglin, J. M. (1973). Beyond the information given: Studies in the psychology of knowing. New York: Wiley. Charles, R. I. (1980). *Some guidelines for teaching geometry concepts. Arithmetic Teacher, 27*(8), 18-20.

9. Bruner, J. S., Goodnow, J. J. & Austin, G. A. (1953). *A study of thinking*. New York: Wiley.

10. Charles, R. (1980). Exemplification and characterization moves in the classroom teaching of geometry Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(1), 10-21.

11. Charles, R. I. (1980). Some guidelines for teaching geometry concepts. *Arithmetic Teacher, 27*(8), 18-20.

12. Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192–212.

13. Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*(3&4), 175–191.

14. Cohen, M. P. & Carpenter, J. (1980). The effects of nonexamples in geometrical concept acquisition. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 11*, 259-263.

15. Colburn, W. (1826). *Intellectual arithmetic: Upon the inductive method of instruction*. Boston, USA: Reynolds & Co.

16. Cook, W. C. (1981). The effects of negative and positive instances in teaching mathematical concepts to freshmen at Florida A & M University. *Dissertation Abstracts International, 41*, 4630A.

17. Courant, R. (1981). Reminiscences from Hilbert's Gottingen. *Mathematical Intelligencer, 3*(4), 154–164.

18. Dahlberg, R. & Housman, D. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics, 33,* 283-299.

19. Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Brighton UK: Harvester.

20. Dienes, Z. P. (1960). *Building up Mathematics*. London, UK: Hutchinson Educational.

21. Dienes, Z. P. (1964). *The power of mathematics*. London: Hutchinson Educational.

22. Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

23. Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

24. Esmonde, I. (2009b). Ideas and Identities: Supporting equity in cooperative mathematics learning. *Review of Educational Research, 79*, 1008–1043.

25. Evans, R. (1973). *Jean Piaget: The man and his ideas*. New York, USA: Dutton.

26. Feynman, R. (1985). *"Surely you're joking, Mr Feynman!": Adventures of a curious character*. New York, USA: Norton.

27. Forman, E., & Ansell, E. (2001). The multiple voices of a mathematics classroom community. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 115–142.

28. Forman, E.A., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M.K. and Brown, C.A. (1998). "You're going to want to find out which and prove it": Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction 8*(6), 527–548.

29. Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

30. Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

31. Gage, R. L. (1977). A study of the effects of positive and negative instances on the acquisition of selected algebraic concepts as a function of cognitive style. *Dissertation Abstracts International, 37*, 4929A-4930A.

32. Gagné, R. (1985). *The conditions of learning* (4th edition). New York: Holt, Rinehart and Winston.

33. Gelman, R., & Williams, E. M. (1998). Enabling constraints for cognitive development and learning: Domain specificity and epigenesis. In D. Kuhn & R. S. Siegler (Eds.), *Handbook of child psychology: Cognition, perception, and language* (5th ed., Vol. 2, pp. 575-630). New York: Wiley.

34. Giannakoulias, E., Mastoridis, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *Journal of Mathematical Behavior, 29,* 160–168.

35. Gillings, R. (1972). *Mathematics in the time of the Pharaohs*. Reprinted 1982. New York, USA: Dover.

36. Goldenberg, P., & Mason, J. (2008).Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 183-194.

37. Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116–140.

38. Halmos, P. (1983). In D. Sarasen & L. Gillman (Eds.) *Selecta: expository writing*. New York: Springer-Verlag.

39. Hand, V. M. (2010). The co-construction of opposition in a low-track mathematics classroom. *American Educational Research Journal, 47,* 97–132.

40. Hazzan, O., & Zazkis, R. (1997). Constructing Knowledge by Constructing Examples for Mathematical Concepts. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 299-306.

41. Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

42. Hoyles, C., (1997), "The curricular shaping of students' approaches to proof". *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 7-16.

43. Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(2), 81–116.

44. Hunter, R., & Anthony, G. (2011). Forging mathematical relationships in inquiry-based classrooms with Pasifika students. *Journal of Urban Mathematics Education, 4*(1), 98-119.

45. Iannone, P., Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Simpson, A. & Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics, 77,* 1-14.

46. Imm, K., & Stylianou, D.A. (2012). Talking mathematically: An analysis of discourse communities. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 130–148.

47. Kaldrimidou, M., Sakonidis, H. & Tzekaki, M. (2010). Teachers' Management of the Meaning Construction in the Mathematics Classroom. In G. Anthony & B. Grenvholm (eds.), *Teachers of Mathematics: Recruitment and Retention, Professional Development and Identity*. Swedish Society for Research in Mathematics Education.

48. Kawanaka, T., Stigler, J. (1999). Teachers' use of questions in eighth grade mathematics classroom in Germany, Japan and the United States. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(4), 255-278.

49. Klausmeier, H. J. (1976b). Instructional design and the teaching of concepts. In J.R. Levin & V.L. Allen (Eds.), *Cognitive learning in children: Theories and strategies* (pp. 191-217). New York: Academic Press.

50. Klausmeier, H. J., Ghatala, E. S., & Frayer, D. A. (1974). *Conceptual/earning and development: A cognitive view*. New York: Academic Press.

51. Leikin, R. & Dinur, S. (2007). Teacher flexibility in mathematical discussion. *Journal of Mathematical Behavior, 26,* 328-347.

52. Llinares, S. (2000). Secondary School Mathematics Teacher's Professional Knowledge: a case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: theory and practice 6* (1), 41-62.

53. Lo, J. J., & Wheatley, G. H. (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion. *Educational Studies in Mathematics, 27*(2), 145-64.

54. MacVicar, D. (1879). *A complete arithmetic, oral and written: designed for the use of common and high schools and collegiate institutes*. Montreal, Canada: Dawson Bros.

55. Martino, A. M., & Maher, C. A. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: what research practice has taught us. *Journal of Mathematical Behavior, 18,* 53–78.

56. Michener, E. (1978). Understanding mathematics. *Cognitive Science, 2,* 361–383.

57. Moore, R.C., (1994), "Making the transition to formal proof". *Educational Studies in Mathematics, 27,* 249-266.

58. National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

59. Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counterexamples that (also) explain. *FOCUS on Learning Problems in mathematics, 19*(3), 49-61.

60. Petty, O. S., & Jansson, L. C. (1987). Sequencing Examples and Nonexamples to Facilitate Concept Attainment. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(2), 112.

61. Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. New York, USA: Norton.

62. Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*, 165-190.

63. Planas, N., & Gorgorió, N. (2004). Are different students expected to learn norms differently in mathematics classroom? *Mathematics Education Research Journal, 16*, 19–40.

64. Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, SA: Princeton University Press.

65. Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (Combined edition). New York, USA: Wiley.

66. Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdeam: Sense.

67. Record, R. (1632) *The Ground of Arts: teaching the perfect worke and practise of arithmeticke, both in whole numbers and fractions*. London: Harper, Thomas.

68. Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93,* 346-362.

69. Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 149-163.

70. Schwarz, B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 362–389.

71. Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

72. Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics 46*(1-3), 13-57.

73. Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76.

74. Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 205-233.

75. Shumway, R. J., & Lester, F. R. (1974). Negative instances and the acquisition of the mathematical concepts of commutativity and associativity. *Educational Studies in Mathematics, 5*, 301-315.

76. Siegler, R. S., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology*: *General, 127*, 377-397.

77. Sierpinska, A. (1998). Three Epistemologies, Three Views of Classroom Communication: Constructivism, Sociocultural Approaches, Interactionism, in H. Steinbring M. G. Bartolini Bussi and A. Sierpinska (eds.) *Language and Communication in the Mathematics Classroom,* 30-62, Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

78. Skemp, R. (1969). *The psychology of learning mathematics*. Harmondsworth, UK: Penguin.

79. Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, learning and action*. Chichester: Wiley.

80. Skott, J. (2001). The emerging practices of a novice teacher: The roles of his school mathematics images. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4,* 328.

81. Smith, J.P. (1996). Efficacy and teaching mathematics by telling: A challenge for reform. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458–477.

82. Smith, E., & Medin, D. (1981). *Categories and concepts*. Cambridge, MA: Harvard University.

83. Sowder, L. (1980). Concept and principle learning. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 244-285). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

84. Spencer, H. (1878). *Education: intellectual, moral and physical*. London: Williams & Norgate.

85. Stipek, D., Givvin, K., Salmon, J. & MacGyvers, V. (2001). Teacher's beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education, 17,* 213-226.

86. Strauss, A. L., & Corbin, J. (1998). *Basics of Qualitative Research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd Ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

87. Swetz, F. (1987). *Capitalism and arithmetic: The New Math of the 15th century*. (Trans. Smith). LaSalle, USA: Open Court.

88. Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

89. Tennyson, R. D. (1973). Effect of negative instances in concept acquisition using a verbal learning task. *Journal of Educational Psychology, 64*, 247-260.

90. Thorndike, E., Cobb, M., Orleans, J., Symonds, P., Wald, E., & Woodyard, E. (1924). *The psychology of algebra*. New York, USA: Macmillan.

91. Tsamir, P. (2003). From "easy" to "difficult" or vice versa: The case of infinite sets. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 25,* 1-16.

92. Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 81-95.

93. Vinner, S. (1983). Concept image, concept definition and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

94. Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D.O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

95. Watson, A., & Mason, J. (2002a). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 377- 385. Norwich, UK: PME

96. Watson, A., & Mason, J. (2002b). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(2), 237-249.

97. Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

98. Watson, A., Shipman, S., (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 97- 109.

99. Weber, K., M. Porter, and D. Housman (2008). 'Worked examples and conceptual example usage in understanding mathematical concepts and proofs'. In: M. P. Carlson and C. Rasmussen (eds.): *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics*. Washington, DC: MAA, 245–252.

100. Wells, G. (1993). Reevaluating the IRF sequence: A proposal for the articulation of theories of activity and discourse for the analysis of teaching and learning in the classroom. *Linguistics and Education 5*, 1–37.

101. White, D.Y. (2003). Promoting productive mathematical classroom discourse with diverse students. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 37-53.

102. Whitehead, A. (1911). *An introduction to mathematics* (reprinted 1948). Oxford, UK: Oxford University Press.

103. Wilson, S. (1986). Feature frequency and the use of negative instances in a geometric task. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(2), 130-139.

104. Wilson, S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12,* 31-47.

105. Witmer, T. (Trans.) (1968). *Ars Magna or the Rules of Algebra,* Girolamo Cardano. New York, USA: Dover.

106. Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458-477.

107. Yin, R. K. (1984). *Case study research: Design and methods* (1st ed.). Beverly Hills, CA: Sage Publications.

108. Zaslavsky, O., Harel, G., & Manaster, A. (2006). A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 5*, 457–464. Prague, Czech Republic.

109. Zaslavsky, O. & Lavie, O. (2005). Teachers' use of instructional examples. *Paper presented at the 15th ICMI study conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics.* Águas de Lindóia, Brazil.

110. Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student-teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 67-78.

111. Zazkis, R. (2001). From arithmetic to algebra via big numbers. In H. Chick, K. Stacey, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 676-681). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

112. Zazkis, R., & Chernoff, E. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics, 68*, 195-208.

113. Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.

114. Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 165–182.

115. Κανελλοπούλου, Μ. (2012). *Η Σημασία του Παραδείγματος και του Αντιπαραδείγματος στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Διπλωματική Διατριβή, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών".

116. Παπακανδεράκη, Χ. (2012). *Μια Προσέγγιση της Κατανόησης των Διδακτικών Αποφάσεων των Εκπαιδευτικών στην Τάξη των Μαθηματικών*. Διπλωματική Διατριβή, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών".

117. Σακονίδης, Χ., Καλδρυμίδου, Μ., Τζεκάκη, Μ., (2001). Ο ρόλος του δασκάλου στη διαχείριση της μαθηματικής γνώσης. *Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου «Σχολική γνώση και διδασκαλία στην πρωτοβάθμια Εκπαίδευση».* Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.