ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ:

ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ : ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΟΓΡΑΦΙΑ ΤΩΝ ΚΙΝΕΖΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ Ι. ΖΩΓΡΑΦΟΥ
Α.Μ.008/12

Επιβλέπων καθηγητής:

Ιωάννης Χριστιανίδης, Καθηγητής τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε., Πρόεδρος τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε. , Ε.Κ.Π.Α.

Μέλη εξεταστικής επιτροπής:

Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος, Καθηγητής τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε., Πρόεδρος μεταπτυχιακού Ι.Φ.Ε.Τ. τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε. , Ε.Κ.Π.Α.

Θεόδωρος Αραμπατζής, Καθηγητής τμήμα Μ.Ι.Θ.Ε. , Ε.Κ.Π.Α.

Περιεχόμενα:

1. Ιστοριογράφοι σελ3-27

2. Κινέζικα Μαθηματικά σελ28-60

2.1 Κινέζικα Βιβλία σελ28-44

2.2 Κινέζικα Παραδείγματα σελ44-60

2.2.1 Η μέθοδος Fangcheng σελ44-50

2.2.2 Ο κανόνας Dayan σελ51-54

2.2.3 Εξαγωγή Ριζών σελ54-57

2.2.4 Τεχνικές Gougou σελ57-59

2.2.5 Εξαγωγή ρίζας με γεωμετρικό τρόπο σελ59-60

3. Διάλογος πάνω στην απόδειξη στα κινεζικά μαθηματικά σελ61-81

Βιβλιογραφία /άρθρα/ιστοσελίδες σελ81-84

1. Ιστοριογράφοι

Zhou dynasty	1046–256 π.Χ.
Qin dynasty	221–207 π.Χ.
Former Han	206 π.Χ. – 9 μ.Χ.
Xin dynasty	9–23 μ.Χ.
Latter Han	25–220 μ.Χ.
Three Kingdoms period	220–280
Jin dynasty	265–420
Six Dynasties	220 ή 222–589
Sui dynasty	581–617
Tang dynsaty	618–907
Song dynasty	960–1279
Yuan Dynasty	1271 – 1368
Ming dynasty	1368– 1648
Qing dynasty	1648– 1912

Πίνακας 1[1]

Παρότι, η ιστορία της Κίνας είναι πολύ μεγάλη, είναι πολύ δύσκολο να βρεθούν πληροφορίες για πολλά πολιτισμικά πεδία που χάθηκαν στο χρόνο. Όσο πιο παλιό είναι το πεδίο που διερευνάται, τόσο πιο δύσκολα βρίσκονται πληροφορίες για αυτό. Το ίδιο ισχύει και για το πεδίο των μαθηματικών. Τα μαθηματικά ήταν είναι και θα είναι βασικό στοιχείο της καθημερινής ζωής σε κάθε πολιτισμό πάνω στη γη. Δεν σταμάτησαν ούτε θα σταματήσουν να καλλιεργούνται και να αναπτύσσονται, και όταν ασχολούμαστε με αρχαίους πολιτισμούς, στην προκειμένη περίπτωση, όπως είναι αυτός που αναπτύχθηκε στην Κίνα είναι πάρα πολύ δύσκολη η συλλογή πληροφοριών σχετικά με τις παραδοσιακές μεθοδολογίες και τεχνικές που χρησιμοποιούνταν από τον συγκεκριμένο πολιτισμό για την επίλυση διαφόρων

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Warring_States_period (προσπέλαση: 15/03/2015). Για τις δυναστείες της Κίνας και τις αντίστοιχες χρονικές περιόδους, μπορεί κάποιος να ενημερωθεί στη συγκεκριμένη ιστοσελίδα.

προβλημάτων. Η δυσκολία στην περίπτωση του κινεζικού πολιτισμού σε αντίθεση με τον ελληνικό είναι ότι οι μαθηματικές τους τεχνικές είχαν για πάρα πολλά χρόνια ξεχαστεί.

Στη διάρκεια της δυναστείας των Ming (明) (1368–1648), οι μαθηματικοί στην Κίνα είχαν ξεχάσει τις 'αλγεβρικές'[2] μεθόδους που ανέπτυξαν οι προκάτοχοί τους στις περιόδους των δυναστειών Song (ή Songchao/宋朝) και Yuan (ή Yuanchao 元朝)[3]. Θα επανέρχονταν στο φως μόνο κατά τη διάρκεια της κυριαρχίας των Qing (清) (1648–1912) μετά την συμβολή του Mei Wending (Μεϊ Γουέντινγκ) (梅文鼎) (1633–1721), και του εγγονού του Mei gu cheng 梅穀成 (πέθανε το 1763), οι οποίοι θεωρούνται ως οι πρωτοπόροι της "Μαθηματικής Αναγέννησης" που έλαβε χώρα την εποχή των Qing στην Κίνα. Οι δύο τους είναι σημαντικοί για την ιστορία της Κίνας επειδή επανέφεραν στο προσκήνιο αρχαία κείμενα που θεωρούνταν πως είχαν χαθεί[4]. Ο Mei Wending συγκεκριμένα θεωρούνταν ένας από τους πιο αξιοθαύμαστους μαθηματικούς της δυναστεία των Qing (1644–1911)[5].

Με την μεσολάβηση των Mei ξεκίνησε η ενασχόληση των νεότερων Κινέζων ερευνητών με τα αρχαία μαθηματικά κείμενα. Ωστόσο, θα έπαιρνε χρόνια μέχρι κάποιος να καταλάβει τις αρχαίες τεχνικές. Ενδεικτικά ο πρώτος που κατάλαβε την τεχνική του κανόνα Da-yen – μία μέθοδο που συνήθως στα σύγχρονα βιβλία χαρακτηρίζεται ως 'αλγεβρική' και για την οποία θα μιλήσουμε παρακάτω–, ήταν ο Chang dun ren (張敦仁) (1754–1834), ο οποίος έγραψε πάνω σε αυτόν τον κανόνα ένα βιβλίο με τίτλο "Qiu yi suanshu" (求一算術, Μαθηματική μέθοδος για εύρεση της ενότητας, Mathematical method for seeking unity) το 1803[6]. Σαράντα χρόνια μετά τον θάνατο του Mei gu cheng.

Στην περιοχή της Ευρώπης από την άλλη, τα μαθηματικά της Κίνας παρέμεναν ένα άγνωστο πεδίο τον 18ο αι. Υπάρχει μία αναφορά στα κινέζικα μαθηματικά από τον J. F. Montucla (1725–1799)[7], στο έργο του *Histoire des Mathématiques* (πρώτη

[2] Ο χαρακτηρισμός των μεθόδων ως 'αλγεβρικών' είναι του Libbrecht.

[3] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*. Cambridge: MIT Press, 1973, σ. 294. Και Josheph Needham: *Science and Civilisation in China*, Cambridge: Cambridge University Press, 1959, σ. 51. (Mathematics and the Science of the Heavens and the Earth, vol. 3)

[4] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, σ. 44. Και σ. 294, υποσημείωση 5.

[5] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese Mathematics*, μτφρ. S. S. Wilson. Berlin: Springer, 1997, σ. 43.

[6] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ. 297.

[7] http://data.bnf.fr/12127574/jean-etienne_montucla/ (προσπέλαση: 07/03/2015)

έκδοση Παρίσι, 1758). Η αναφορά αυτή όμως, πρέπει να σημειωθεί ότι δεν αφορά τις γνήσιες κινέζικες τεχνικές αλλά προσθήκες ευρωπαϊκών μεθόδων που είχαν μεταφερθεί από τους Ιησουίτες ιεραποστόλους στην Κίνα και είχαν γίνει δεκτές στο κινεζικό μαθηματικό σύστημα[8]. Με μία εξαίρεση την αναφορά κάποιων κινεζικών απόψεων για το αστρονομικό σύστημα, που μνημονεύει ένας διάσημος ιστορικός από το Παρίσι, ο Jean Baptiste Du Halde (1674–1743), ο οποίος είχε ασχοληθεί, μεταξύ άλλων, και με την αστρονομία[9]. Ο ίδιος ήταν Ιησουίτης αλλά δεν είχε ταξιδέψει στην Κίνα, είχε όμως συλλέξει τις πληροφορίες άλλων ιεραποστόλων που είχαν συμμετάσχει σε αποστολές στην Κίνα και συνέγραψε μία τετράτομη εγκυκλοπαίδεια με βάση αυτές τις περιγραφές, με τίτλο *Description géographique, historique, chronologique, politique, et physique de l'empire de la Chine et de la Tartarie chinoise, enrichie des cartes générales et particulieres de ces pays, de la carte générale et des cartes particulieres du Thibet, & de la Corée; & ornée d'un grand nombre de figures & de vignettes gravées en tailledouce*. Paris: J-B Mercier, 1735[10].

Η πρώτη ουσιαστική αναφορά στα μαθηματικά της Κίνας γίνεται το 1838 από τον Guillaume Libri (1803-1869), ο οποίος έφερε στη δημοσιότητα πολύ περιγραφικά τα περιεχόμενα του *Suanfa tongzong* (算法統宗)[11](1592) (General Source of Computational Methods) του Cheng Dawei[12] (程大位, 1533-1606)[13]. Για το βιβλίο είχε πληροφορηθεί από τον μεγαλύτερο, όπως τον περιγράφει ο Martzloff, σινολόγω της εποχής του, τον Stanislas Julien (1797-1873)[14]. Για το έργο *Suanfa tongzong*, αναφέρει ότι "ήταν το μόνο έργο κινεζικών μαθηματικών που ήταν γνωστό στην Ευρώπη και το οποίο οι ιεραπόστολοι είχαν αφήσει ανέπαφο"[15].

Την επόμενη χρονιά (1839) ακολούθησε ο Edouard Biot (1803-1850)[16], με τον οποίο σηματοδοτείται η έναρξη της ενασχόλησης με την Ιστορία των κινεζικών μαθηματικών στην Ευρώπη. Ο E. Biot ήταν ένας Γάλλος σινολόγος[17], γιος του Jean-

---

[8] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese Mathematics,* σ. 3-4
[9] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese Mathematics,* σ. 4.

[10] http://fr.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_Du_Halde (προσπέλαση: 07/03/2015) και http://www.archive.org/stream/generalhistoryof01duha#page/n13/mode/1up (28/02/2015, 21:56)

[11] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese mathematics,* σ. 4.

[12] Jean-Claude Martzloff: A History of Chinese mathematics, σ. 20.

[13] http://riccilibrary.usfca.edu/listSubject.aspx?subjectID=466 (13/03/2015)

[14] Jean-Claude Martzloff: A History of Chinese mathematics, σ. 4.

[15] "the only work of Chinese mathematics known in Europe to which the missionaries have not contributed."Jean-Glaude Martzloff (1997), : *A History of Chinese mathematics,,* σ. 4.

[16] http://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Biot(01/03/2015, 17:57)

[17] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese

Baptiste Biot (1774–1862), ο οποίος είχε επίσης ασχοληθεί με την Κίνα και τα μαθηματικά της, όπως και με την Ινδία. Ο πατέρας του μάλιστα υποστήριζε την Κινέζικο και Ινδικό πολιτισμό σε αντίθεση με τον Αραβικό ανοίγοντας μία αντιπαράθεση 40 χρόνων με τον Sedillot, ο οποίος εξίσου δογματικά υποστήριζε την Αραβική ιδεολογία[18]. (Για τον Sedillot θα μιλήσουμε εκτενέστερα παρακάτω.) Στο δρόμο του πατέρα του ο Edouard Biot, ασχολήθηκε και εκείνος με την Κίνα κάνοντας πολύ σημαντική δουλειά. Εξέδωσε στην εφημερίδα *Journal Asiatique*, το 1839, μία περιγραφή των περιεχομένων του *Suanfa tongzong*. Στο άρθρο του παρουσιάζει το πρόβλημα του Sunzi (孙子), που περιλαμβάνεται στο *Suanfa tongzong*, αλλά δεν δίνει την λύση του. Αυτή πρέπει να ήταν η πρώτη επαφή της Ευρώπης με το λεγόμενο «κινεζικό θεώρημα των υπολοίπων» (Chinese remainder theorem)[19]. Επίσης, εξέδωσε μία σειρά από καλογραμμένες μελέτες, όπου μέσα σε αυτές μίλησε για την κινέζικη αρίθμηση και για τη κινέζικη εκδοχή του θεωρήματος του τρίγωνου του Πασκάλ, (όπως θεωρήθηκε από πολλούς)[20].

Η πιο σημαντική ωστόσο, δημοσίευση ήταν από τον Βρετανό προτεστάντη[21] ιεραπόστολο και συγγραφέα[22] Alexander Wylie (1815-1887)[23] το 1852 στο έργο του “Jottings on Science of the Chinese” στο *North China Herald*. Στο άρθρο του μπόρεσε να μεταφέρει πληροφορίες από διάφορα κινέζικα έργα όπως το *Suanjing shi shu* (算徑十書) “δέκα υπολογιστικοί κανόνες”, της δυναστείας των Tang, το shushu jiuzhang (数书九章) (mathematical treatise in nine sections), της δυναστείας των Song και να δώσει πληροφορίες για κινέζικα θεωρήματα όπως τη κινεζική εκδοχή του θεωρήματος των υπολοίπων, την κινεζική εκδοχή όπως ονομάστηκε από πολλούς ιστορικούς του θεωρήματος Horner και την κινεζική άλγεβρα (σύμφωνα με ορισμένους μελετητές) του 13ου αι.[24] Μέσα σε όσα έγγραψε περιλαμβάνεται και ο κανόνας Da yan (大衍), του *Sunzisuanjing* (孙子算经) που γράφτηκε τον 5ο αιώνα[25]. Για πρώτη φορά εξηγείται ο κανόνας Da yan (大衍) που αναφέρεται και από τον Qin

Mathematics: the past 25 years”, *Llull* 26 (2003), σ. 431.

[18] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*,2012, Cambridge United Press, σ.275.

[19] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ. 310.

[20] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese mathematics,* σ. 4.

[21] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese mathematics,* σ. 4.

[22] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “*The history of Chinese Mathematics: the past 25 years*”, σ. 431.

[23] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese mathematics,* σ. 4. (η χρονολογία είναι από τον Martzloff).

[24] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese mathematics,* σ. 4.

[25] http://en.wikipedia.org/wiki/The_Mathematical_Classic_of_Sunzi

Jiu Shao （秦九 韶）[26], στο έργο του shushu jiuzhang (数书九章), έναν σπουδαίο μαθηματικό της δυναστείας των Song, που έζησε στις αρχές του 13ου αιώνα[27], αλλά με το έργο του θα ασχοληθούμε παρακάτω εκτενέστερα. Ο Wylie έκανε ένα από τα καλύτερα έργα πάνω στον κινέζικο πολιτισμό και σίγουρα η αξία του είναι αναγνωρίσιμη, ο Libbrecht όμως αναφέρει ότι έκανε ένα λάθος με αποτέλεσμα να μεταφερθεί και μία λάθος πληροφορία πάνω στην αστρονομία του έργου του Qin Jiu Shao, όπου ισχυρίζεται ότι και για τους αστρονομικούς υπολογισμούς του χρησιμοποιεί τον κανόνα Dayen. Όπως αναφέρει ο Libbrecht αυτό ισχύει μόνο για ένα πρόβλημα και το λάθος του Wyllie θεωρεί ότι ίσως να οφείλεται στο ότι δεν διάβασε ολόκληρο το βιβλίο του Qin Jiu Shao[28].

Ο Wylie, αντεπεξήλθε τόσο καλά στο έργο του για δύο πολύ βασικούς λόγους. Πέρα του γεγονότος ότι γνώριζε τη δουλειά του Chang dun ren που είχε εκδοθεί το 1803[29], ήταν γενικότερα σε πλεονεκτική θέση συγκριτικά με τους άλλους ιστορικούς της εποχής του, καθώς είχε πρόσβαση στις πρωτότυπες κινέζικες πηγές ο ίδιος[30]. Ως ιεραπόστολος, που ήταν βρισκόταν στην Κίνα και είχε επαφές και με τον μεγαλύτερο Κινέζο μαθηματικό εκείνης της εποχής τον Li Shanlan （李善蘭）, (1811-1882)[31].

Το άρθρο του μεταφράστηκε στα Γερμανικά από τον Johann Christoph Biernatzki (1795–1840)[32] στην εφημερίδα, *Journal für reine und angewandte Mathematik* σε συνεργασία με τον E. Biot[33] το 1856 και στα Γαλλικά από τους O. Terquem το 1863 και J. Bertrand το 1869[34] και παρότι έγινε προσβάσιμο στον Ευρωπαϊκό κόσμο, και επηρέασε ιστορικούς όπως οι Hankel, Zeuthen, Vacca και Moritz Cantor[35], η παράληψη του Qiu - yi (求一), από τον Biernatzki, που είναι η μέθοδος επίλυσης συστημάτων ισοτιμιών (congruences), οδήγησε σε κάποιες παρερμηνείες της θεωρίας των Κινέζων. Για παράδειγμα ο Moritz Cantor (1829–1920)[36] θεώρησε λανθασμένα ότι οι ισοτιμίες (congruences) λύνονται υποθετικά[37] με

[26] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, σ.311.

[27] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.22.

[28] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.311.

[29] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.311.

[30] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, σ.317.

[31] Jean-Claude Martzloff : *A History of Chinese mathematics*, σ.4.

[32] http://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Christoph_Biernatzki (προσπέλαση: 07/03/2015)

[33] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions,*2012, Cambridge United Press, σ.275.

[34] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.314.

[35] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese mathematics*, σ. 4.

[36] Το πλήρες όνομα και η χρονολογία είναι από την Karine Chemla, *The history of*

τη μέθοδο δοκιμής και λάθους[38] και αμφέβαλλε για την εγκυρότητα του κινέζικου κανόνα. Ο Κανόνας υπερασπίστηκε από τον Matthiessen, ο οποίος τον παρομοίασε με τον με τον τύπο του Gauss[39]. Το 1863, είχε μάλιστα, στείλει και ένα γράμμα στον Cantor, διορθώνοντας το λάθος του Biernatzki και ενημερώνοντας τον Cantor για την ομοιότητα - όπως θεώρησε ο Mathiessen - του κανόνα με τον τύπο του Gauss. Για καθαρά ιστορικούς λόγους ενημερώνουμε ότι ο Cantor είχε σπουδάσει στο Gottingen μαθηματικά μαζί με τον Carl Gauss[40]. Ο Matthiessen ήταν ένας μαθηματικός που συνέβαλλε πολύ στη διόρθωση των λαθών του Biernatzki, αλλά και ο ίδιος στο τέλος μπερδεύτηκε από τα λάθη του Biernatzki[41]. Ένα ενδεικτικό παράδειγμα είναι ότι στο κείμενο του Qin Jiu Shao (秦九韶), αναφέρεται ένας μοναχός με το όνομα I-Hsing (pinyin:Yi Xing, 一行) και υπάρχει και η ονομασία μίας κλασσικής κινέζικης μεθόδου μαντείας (divination) που λέγεται I-Ching (pinyin: Yi Jing 易經 /易经), στη μετάφραση του Biernatzki, είναι και τα δύο I King[42]. Αυτό μπέρδεψε τον Matthiessen, και θεώρησε ότι στο πρώτο πρόβλημα που ο Qin Jiu Shao χρησιμοποιούσε τους όρους, το I-Hsing αφορούσε τους αριθμούς των εργαζομένων που θα έχτιζαν τα αναχώματα αντί για την τεχνική I-Ching (Yi Jing). Δυστυχώς τα λάθη αυτά μεταφέρθηκαν και από τον Dickson στο έργο του *History of the Theory of Numbers*[43].

Ο Olry Terquem (1782–1862)[44] μετέφρασε το άρθρο του Biernatzki στα Γαλλικά το 1863 και εξήγησε τον κανόνα του Sunzi, αλλά δυστυχώς δεν μπόρεσε να το καταλάβει[45].

Ο Joseph Louis François Bertrand (1822 – 1900)[46] έκανε ακόμα μία Γαλλική

Mathematical proof in ancient traditions, σ.278.

37 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.312.

38 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.312, υποσημείωση 16.

39 J. Needham (1959), *Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth,* Cambridge University Press, Cambridge, σελ121.

40 Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions,* σ.279 και η χρονολογία από http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss (προσπέλαση: 07/03/2015)

41 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.313.

42 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.313. Υποσημείωση 21.

43 J. Needham: *Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth,* σ.121. Υποσημείωση b.

44 http://fr.wikipedia.org/wiki/Olry_Terquem_(math%C3%A9maticien) (προσπέλαση: 07/03/2015)

45 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.314.

46 http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Louis_Fran%C3%A7ois_Bertrand (προσπέλαση: 07/03/2015)

μετάφραση του άρθρου του Biernatzki το 1869, αλλά δεν είναι ακριβής. Είναι μία ελεύθερη μεταφορά του πρωτοτύπου, στην οποία δεν αναφέρεται ούτε το όνομα του Wylie[47].

Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε ότι παρά τα όποια λάθη, τις παραλείψεις και τις ασάφειες, χάρη σε αυτούς μπόρεσαν να έρθουν τα κινέζικα μαθηματικά στην Ευρώπη και να ασκήσουν μεγάλη επιρροή σε Ιστορικούς του 19ου και 20ου αι[48].

Το 1874 υπάρχει μία ακόμα έκδοση που αφορά τα κινέζικα μαθηματικά από τον Hermann Hankel (1839 – 1873)[49], ο οποίος αναφέρεται σε αυτά στο παράρτημα του έργου του Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Οι πηγές του όμως περιορίζονται στους Gaubil, Biot και Biernatzki. Ο Hankel μέσα στα άλλα ασχολείται με τον κανόνα dayan και θεωρεί ότι είναι ταυτόσημος με την Ινδική μέθοδο Kuttaka, χωρίς όμως, κατά τον Libbrecht, να φέρνει και τα πιο αδιαμφισβήτητα στοιχεία. Ο Mathiessen διαφωνεί με την άποψη αυτή[50].

Η συμβολή του Mathiessen ήταν σημαντική και εμπλεκόταν και με το έργο άλλων, οπότε έχει αναφερθεί νωρίτερα[51], αλλά όχι εκτενώς. Ο λόγος είναι η επιλογή να αναφερθούν οι συγγραφείς χρονολογικά σε σχέση με τη χρονολογία των εκδόσεών τους. Ο Mathiessen εξέδωσε το έργο του δύο χρόνια μετά τον Hankel, το 1876 και ήταν ο πρώτος που μπόρεσε να καταλάβει την πραγματική σημασία του κανόνα Dayan. Αναφέρθηκε ήδη, ότι ο Mathiessen έπεσε σε λάθη που είχε κάνει ο Biernatzki στη μετάφραση του άρθρου του Wylie. Αυτό συνέβη επειδή δεν είχε πρόσβαση σε άλλες πηγές πέραν του άρθρου του Biernatzki. Ωστόσο, κατέληξε σε πολύ σημαντικά μαθηματικά συμπεράσματα. Ενδεικτικά να αναφέρουμε ότι εξήγησε σωστά το λεγόμενο θεώρημα του υπολοίπου, παρότι δεν ήξερε τη μέθοδο qiu yi (求一), για την επίλυση των congruences, αφού ο Biernatzki, όπως ειπώθηκε[52] παρέλειψε να την αναφέρει[53]. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα[54] ο Mathiessen βρήκε ομοιότητα ανάμεσα στον κανόνα Dayan και τον κανόνα του Gauss. Θεώρησε μάλιστα ότι η ομοιότητα ήταν τόσο μεγάλη σε βαθμό που αναρωτήθηκε μάλιστα από που προήλθε ο κανόνας του Gauss. Όπως αναφέρει ο Libbrecht, δεν προήλθε από τον κινέζικο κανόνα Dayan, καθώς αυτός ήταν γνωστός στην Ευρώπη περίπου το 1550, αλλά ο Matthiessen δεν

---

47 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.314.

48 Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese mathematics,* σ. 5.

49 http://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Hankel (προσπέλαση : 07/03/2015)

50 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.315.

51 Σελ6 παρόντος κεφαλαίου.

52 Σελ5-6 παρόντος κεφαλαίου.

53 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.315.

54 Σελ6 παρόντος κεφαλαίου.

γνώριζε τις υπόλοιπες εξελίξεις στην Ευρώπη, με εξαίρεση το πρόβλημα του Ισαάκ Αργυρού και το βιβλιάριο του J. C. Schafer[55]. Αυτό σημαίνει ότι δεν είχε επαρκές πληροφορίες για να καταλήξει σε έγκυρα συμπεράσματα. Ο mathiessen έκανε και ο ίδιος μία σύγκριση με την Ινδική μέθοδο Kuttaka[56], αλλά η άποψή του διαφωνούσε με αυτή του Hankel[57]. Επίσης, ήταν ο πρώτος που κατάλαβε ποια ήταν η λύση στην περίπτωση των περιττών συντελεστών (moduli prime) και διατύπωσε ποιες είναι οι συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για την επίλυση αυτού του είδους προβλημάτων. Ακόμα σημειώνει ότι η μέθοδος αυτή δεν είχε βρεθεί από τον Gauss[58]. Τέλος, στο "Uber eine antike Auflosung des sogenannten Retproblems in moderner Darstellung", ZMNU το 1879 και το 1882, έδωσε πλήρη εξήγηση του παραπάνω ζητήματος με χρήση σύγχρονου αλγεβρικού συμβολισμού και απόδειξε τον κανόνα Dayan[59].

Την επιθυμία για την ενασχόληση με την Ιστορία εμφύσησε στον Cantor ο Moritz Abraham Stern (29 June 1807 – 30 January 1894)[60], ένας καθηγητής του στο Gottingen, όπου σπούδαζε μαθηματικά ο Cantor μαζί με τον Carl Gauss. Έπαιξαν όμως ρόλο και κάποιες διαλέξεις του Arneth που είχε ακούσει στο Heidelberg το 1848[61]. Ο Cantor στο "Vorlesungen uber die Geschichte der Mathematik", το 1880, αφιερώνει ένα κεφάλαιο στα κινέζικα μαθηματικά[62]. Για να το γράψει αυτό έπρεπε να βασιστεί σε πληροφορίες του E. Biot και του Biernatzki[63]. Όπως είδαμε αρχικά το 1858, θεωρούσε ότι ο κανόνας Dayan δεν είναι έγκυρος, καθώς ο Biernatzki είχε παραλείψει πληροφορίες από το άρθρο του Wylie, αλλά αυτό διορθώθηκε μετά την επικοινωνία που είχε ο Mathiessen μαζί του και αφού διάβασε κάποια άρθρα του. Στο βιβλίο του ο Cantor αναγνωρίζει την αξία του κινέζικου κανόνα[64].

Θα αναφερθούν μέσα στη ιστοριογραφική εξιστόρηση δύο ακραίοι συγγραφείς, που παρότι η συμβολή τους θεωρείται από πολλούς συζητήσιμη, υπήρξαν και άφησαν τη δική τους άποψη στο χώρο. Ο ένας είναι ο Louis Amelie Sedillot (1808–75)[65] με

[55] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.316.

[56] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.316.

[57] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.315.

[58] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.316.

[59] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.317.

[60] http://en.wikipedia.org/wiki/Moritz_Abraham_Stern (προσπέλαση: 07/03/2015)

[61] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions,* σ.279.

[62] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.317.

[63] J. Needham: *Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth,* σ.1.

[64] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.317.

[65] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, σ.274.

τον οποίο θα ασχοληθούμε στην παρούσα παράγραφο και ο άλλος είναι ο Van Hee, με τον οποίο θα ασχοληθούμε λίγο παρακάτω.

O Louis Amelie Sedillot (1808–75), γιος του Jean Jacques Sedillot's (1777–1832), ο οποίος είχε ασχοληθεί με τον Αραβικό πολιτισμό και τα μαθηματικά του[66]. Ο Louis Amelie Sedillot ως προς τα κινέζικα μαθηματικά τοποθετήθηκε εντελώς αντίθετα από την παραδοσιακή άποψη των σινολόγων του 18ου αι. Στράφηκε ενάντια στην άποψη του J. B. Biot (πατέρα του E. Biot, όπως είδαμε παραπάνω) για το ζήτημα των πρώιμων ή μη, έργων των Κινέζων πάνω στα μαθηματικά και την αστρονομία και ισχυρίστηκε, εντελώς αυθαίρετα, ότι οι Κινέζοι δεν έκαναν ποτέ οι ίδιοι κάτι αξιόλογο στα μαθηματικά και όλη την γνώση τους την είχαν λάβει από τους Έλληνες[67]. Ήδη από το 1834, ο L. A. Sedillot είχε διακηρύξει την αυθεντικότητα του Αραβικού τρόπου σκέψης. Είχε βασίσει την άποψή του αυτή στην ανακάλυψη από τους Άραβες της τρίτης ανισότητας του Φεγγαριού (the third inequality of the moon), 600 χρόνια πριν από τον Tycho Brahe[68].

Η επόμενη έκδοση έρχεται από τον Hieronymus Georg Zeuthen (1839–1920)[69] στο “Die Geschichte der Mathematik im Alternum und im Mittelalter” το 1893[70], αλλά παρότι έχει κάνει μία εξαιρετική δουλειά η οποία θα γίνει και εγχειρίδιο για τους φοιτητές μαθηματικών στο Denmark[71], δεν δίνει μεγάλη βαρύτητα στα κινέζικα μαθηματικά[72].

Το 1905 έχουμε τον Giovanni Enrico Eugenio Vacca (1872 – 1953)[73] που μιλάει για τα κινέζικα μαθηματικά στο άρθρο του “Sulla Mathematica degli antichi Cinese”[74]. Μέσα στις διάφορες εκδώσεις του ασχολήθηκε και με ένα ποίημα του Tufu, με επιστημονικό ενδιαφέρον πάνω στην τοπολογία, που μέχρι τότε κανένας δυτικός μελετητής δεν είχε προσέξει[75].

---

66 Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, σ.274.

67 J. Needham: *Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth*, σ.1.

68 Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, σ.275.

69 Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions,* σ.278.

70 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.317.

71 Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions,* σ.279.

72 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.317.

73 http://en.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Vacca (προσπέλαση: 07/03/2015)

74 U. Libbrecht, *Chinese mathematics in the thirteenth Century,* 1973, σελ317.

75 J. Needham: *Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth,* σ.112 και υποσημείωση b.

Η επόμενη μελέτη που έρχεται στη δημοσιότητα είναι από τον Αμερικανό Ιστορικό μαθηματικό[76] David Eugene Smith (1860 – 1944)[77] το 1912 και θα εμφανιστεί στο "Scientific monthly"[78] και είναι η πληρέστερη περιγραφή των κινέζικων μαθηματικών ιστορικά[79] μέχρι, όπως θεωρώ, την εμφάνιση του Needham. Ο Smith εξέδωσε δύο τόμους για την ιστορία των μαθηματικών στην Κίνα, όπου ο πρώτος αναφερόταν στα χρονολογικά ζητήματα και ο δεύτερος είχε διάφορα θέματα των κινέζικων μαθηματικών[80]. Ο Smith είχε βρεθεί ο ίδιος στην Κίνα καθώς και στην Ιαπωνία, όπου γνώρισε τον Yoshio Mikami (1875 – 1950)[81]. Ήταν ο δεύτερος δυτικός άνθρωπος που έγραψε για την ιστορία των κινέζικων μαθηματικών και είχε πρόσβαση στις γνήσιες κινέζικες πηγές. Το άρθρο του με τον τίτλο "Chinese mathematics" υποστήριζε τον αυτόχθονο χαρακτήρα των κινέζικων μαθηματικών[82]. Πολλές πληροφορίες του πρέπει να βασίστηκαν στον Mikami, που δούλευε πάνω στο δικό του έργο εκείνη την περίοδο το "The Development of Mathematics in China and Japan"[83]. Το έργο του Dirk Jan Struik (September 30, 1894 – October 21, 2000)[84], ενέπνευσε τον καθηγητή Li Di, ο οποίος ήταν καθηγητής της Ιστορίας των κινέζικων μαθηματικών που δούλευε στο ινστιτούτο της Ιστορίας της επιστήμης στη βαθύτερη Μογγολία στο πανεπιστήμιο Normal και σε συνεργασία με μαθητές του έβγαλαν μία σειρά από βιβλία - πηγές. Πάνω στα κινέζικα μαθηματικά. Τα κείμενα αυτά ανέφεραν μόνο τα πιο σημαντικά και ενδιαφέροντα σημεία από τα αρχαία έργα[85].

Ένα κομβικό σημείο στην ιστορία είναι ο Yoshio Mikami(1875 - 1950), ο Ιαπωνέζος ερευνητής των κινέζικων μαθηματικών, ο οποίος ενώ έγραφε το έργο του βοήθησε και τον Smith όπως είδαμε παραπάνω[86]. Το 1913 εξέδωσε το έργο του "The Development of Mathematics in China and Japan"[87] . Παρότι Γιαπωνέζος, πήρε την

---

[76] Jean-Claude Martzloff : *A History of Chinese mathematics,* σ.5.

[77] http://en.wikipedia.org/wiki/David_Eugene_Smith (προσπέλαση: 07/03/2015)

[78] U. Libbrecht: *Chinese mathematics in the thirteenth Century,* σ.317.

[79] J. Needham: *Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth*, σ.1.

[80] J. Needham: *Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth*, σ.1.

[81] http://en.wikipedia.org/wiki/Yoshio_Mikami (προσπέλαση: 07/03/2015)

[82] U. Libbrecht, *Chinese mathematics in the thirteenth Century*, 1973, σελ317.

[83] U. Libbrecht, *Chinese mathematics in the thirteenth Century*, 1973, σελ318.

[84] http://en.wikipedia.org/wiki/Dirk_Jan_Struik (προσπέλαση:07/03/2015)

[85] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 462.

[86] Σελ10 παρόντος κεφαλαίου.

[87] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.318.

πρωτοβουλία και το έγραψε στα Αγγλικά. Ο Mikami, λόγω της καταγωγής του είχε την ικανότητα να διαβάζει τις πρωτότυπες πηγές, αλλά δυστυχώς οι συγκυρίες δεν βοήθησαν. Εκείνη την περίοδο οι Ιαπωνικές βιβλιοθήκες είχαν ελλείψεις σε βιβλία όποτε είχε δυσκολίες να βρει τις πρωτότυπες πηγές. Αυτό εξηγεί γιατί το έργο του βασίζεται στο έργο του Ruan Yuan (阮元) που αφορούσε βιοβιβλιογραφικές σημειώσεις διαφόρων σημαντικών προσωπικοτήτων που ασχολήθηκαν με Ημερολογιακούς και Μαθηματικούς Υπολογισμούς και σε μικρότερο βαθμό στα χρονικά των δυναστειών. Ένα σημαντικό μειονέκτημα του Mikami είναι ότι δεν διαχωρίζει τους μύθους από τα ιστορικά γεγονότα[88]. Ένα ακόμα αρνητικό με το βιβλίο του Mikami είναι ότι αναφέρεται (όπως και άλλοι ιστορικοί του κλάδου αναφέρονται), στα κινέζικα ονόματα με μία λατινική εκδοχή για να περιγράψουν την προφορά, αλλά η λατινική εκδοχή του Mikami δεν είχε καμία σχέση με το πώς προφέρονταν πραγματικά. Περιλάμβανε επίσης, πάρα πολλά τυπογραφικά λάθη που το καθιστούν δύσκολο στην ανάγνωσή του[89].

Ωστόσο, ο Needham τοποθετείται αρκετά σωστά ως προς τον Mikami, όταν λέει ότι παρά τις όποιες κριτικές και αν του έχουν γίνει, παραμένει γεγονός ότι είχε μία πολύ σημαντική θέση στο χώρο[90]. Παρότι, ο τρόπος που διερευνάται επιστημονικά ένα αντικείμενο έχει αλλάξει μέχρι σήμερα και ακόμα και το έργο του Needham, θεωρείται ότι είναι παλιό σε σχέση με αυτό της Chemla για παράδειγμα, είναι σημαντικό το έργο το οποίο προσέφεραν όλοι οι παλιότεροι συγγραφείς στην επιστημονική κοινότητα αυτού του κλάδου. Η εξέλιξη άλλωστε έχει τη σημασία ότι το παλιό τροποποιείται και βελτιώνεται. Άρα το νέο σε κάτι πρέπει να βασιστεί. Παρότι πρέπει να υπάρχει ένας διαχωρισμό της σύγχρονης μελέτης με την παλιά. Δεν γίνεται να ασκήσουμε κριτική στο έργο κάποιου που είχε διεκπεραιώσει τη δουλειά του στις αρχές του προηγούμενου αιώνα όπως ο Mikami. Όλες οι επιστημονικές μέθοδοι πρέπει να εξελίσσονται, αλλά δεν πρέπει να ασκείται κριτική στην ποιότητα του έργου που γράφτηκε έναν αιώνα πριν, καθώς ίσχυαν άλλα δεδομένα, ακόμα και για το τι εννοούμε επιστήμη. Σίγουρα τα έργα που ακολούθησαν όπως του Martzloff και της Chemla είναι πολύ καλύτερα δομημένα από αυτά που προϋπήρξαν, αλλά για να υπάρξουν αυτά έπρεπε να υπάρξει δημοσίευση των κινέζικων έργων από άτομα του παρελθόντος με όποιο τρόπο εκείνα κρίνανε σωστό. Οι επόμενοι συγγραφείς έχουν πολλά να προσφέρουν και θα βασιστούν και στους παλαιότερους συγγραφείς.

---

[88] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese mathematics,* σ. 5.

[89] J. Needham: *Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth,* σ.2, υποσημείωση b.

[90] J. Needham: *Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth,* σ.2 κείμενο.

Ο επόμενος συγγραφέας σε χρονολογική σειρά ήταν ο L.Van Hee(1873 - 1951), ο οποίος εξέδωσε τις πρώτες σειρές από άρθρα πάνω στα κινέζικα μαθηματικά το 1911. Σε ένα άρθρο του περιγράφει και την indeterminate analysis στην Κίνα. Η συμβολή του όμως, ο Libbrecht λέει πως είναι συζητήσιμη[91]. Ο λόγος είναι ότι ο Βέλγος Ιησουίτης υπερασπίστηκε δογματικά την θέση ότι οι Κινέζοι είχαν δανειστεί τα πάντα από άλλους λαούς[92], όπως η Ινδία, η Αραβία ή η Ευρώπη και λέει ότι "είναι απίθανο οτιδήποτε στα κινέζικα μαθηματικά να είναι γνήσιο"[93]. Ο βασικός του σκοπός είναι η επικρότηση της Ιησουιτικής αποστολής στην Κίνα[94]. Για τον λόγω αυτό ο Martzloff συνιστά το έργο του Van Hee, αλλά και αυτών που ενέπνευσε να χρησιμοποιείται με προσοχή[95]. Ο τρόπος με τον οποίο έγραψε το έργο του ήταν καθαρά δογματικός.

Θεωρώ πως πρέπει να σημειωθεί μία ασάφεια πάνω στο ζήτημα του Van Hee. Ο Libbrecht στην υποσημείωση 58(3), στη σελίδα 319, (Chinese mathematics in the thirteenth Century, 1973) αναφέρει ότι υπάρχουν πολλές ενδείξεις πως παρότι ήξερε πολύ καλά την κινέζικη γλώσσα δεν καταδέχτηκε να διαβάσει τα πρωτότυπα κείμενα, αλλά προτίμησε δευτερογενείς πηγές[96], από την άλλη όμως στη σελίδα 320 και υποσημείωση 58(4) αναφέρει ότι είχε επιρροή στους Ιστορικούς της εποχής του επειδή είχε πρόσβαση σε πρωτότυπα κινέζικα κείμενα[97]. Ο Needham στις σελίδα 30 - 31 που κάνει ανάλυση του βιβλίου Hai Dao Suan Qing((海岛算经), αναφέρει ότι η μετάφραση έγινε από τον Van Hee. Επίσης, στη σελίδα 45, αναφέρει ότι παρότι δεν υπάρχει μετάφραση του Tshe Yuan Hai Ching (pinyin: Ceyuan haijing/測圓海鏡) του Li Ye (李冶/1192–1279)[98], εξήντα τέσσερα αλγεβρικά προβλήματα του I Ku Yen Tuan μεταφράστηκαν από τον Van Hee. Υπάρχουν τέτοιου είδους αναφορές και σε άλλα σημεία του βιβλίου του. [Science and civilisation in China,Mathematics and the science of the heavens and the earth, (vol3, 1959)][99]. Οπότε θεωρώ ότι είχε πρόσβαση στα πρωτότυπα κείμενα της Κίνας, απλά έδειχνε μεγάλη υποτίμηση προς τον συγκεκριμένο λαό και ίσως να βασιζόταν σε έργα άλλων Κινέζων συγγραφέων που

[91] U. Libbrecht, *Chinese mathematics in the thirteenth Century*,1973, σελ319.

[92] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese mathematics,* σ. 5.

[93] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.319 υποσημείωση 58(1).

[94] Αυτ.,σελ320 υποσημείωση (4).

[95] Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese mathematics,* σ. 5.

[96] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.319.

[97] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.320.

[98] http://en.wikipedia.org/wiki/Li_Ye_(mathematician) (προσπέλαση: 08/03/2015)

[99] J. Needham: *Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth*, σ.30-31 και σελ45.

ανέφεραν τμήματα άλλων έργων.

Έχει ασκηθεί μεγάλη κριτική στον Van Hee, αλλά θα περιοριστώ στο να αναφέρω την άποψη του Needham και του Martzloff. Ο Needham, παρά την ίδια άποψη που έχει για τον Van Hee, ότι υποστηρίζει τους Ιεραποστόλους, θεωρεί ότι συνέβαλλε παραταύτα στην Ιστορία των κινέζικων μαθηματικών. Καθώς στον τρίτο τόμο της σειράς του "Science and civilisation in China,Mathematics and the science of the heavens and the earth", αναφέρει ότι ο van Hee, έχει κάνει μία ανάλυση πάνω στη μεγάλη συλλογή για τις βιογραφίες των μαθηματικών (ChhouJen Chuan) από τον Juan Yuan (ή Ruan Yuan/阮元) [100] το 1799, η οποία δεν είναι εντελώς χωρίς αξία, και επίσης, παροτρύνει τον αναγνώστη να μελετήσει παρά τα όποια λάθη και τα σχόλια του Mikami[101].

Ο Martzloff εφιστά την προσοχή στη χρήση των κειμένων του και όσων επηρέασε. Θεωρώ ότι συνέβαλλε, για τον λόγω αυτό τον αναφέρω, αλλά η προσφορά του θα ήταν μεγαλύτερη αν δεν είχε μία δογματική προσέγγιση του θέματος.

Ο Florian Cajori (1859 – 1930)[102] ήταν ένας συγγραφέας όπου βασίστηκε στον Mikami για το άρθρο του "A History of Mathematics", που εξέδωσε το 1919[103] και κάνει μία σχετικά σύντομη περιγραφή των κινέζικων μαθηματικών[104].

Ο επόμενος σε χρονολογική σειρά έκδοσης ήταν ο Leonard Eugene Dickson (1874 – 1954)[105] με το έργο του "History of the Theory of Numbers"(1919 -1920). Είναι το πρώτο έργο πάνω στη θεωρία των αριθμών, το οποίο ασχολείται και με τις συμβολές των Κινέζων μαθηματικών σε αυτό το αντικείμενο.. Βασίζεται πάνω στα έργα των πιο αξιόπιστων ιστορικών της εποχής του όπως ο Wylie, ο Matthiessen και ο Mikami. Δυστυχώς, όμως επαναλαμβάνει τα λάθη του Matthiessen[106]. Ο Dickson ασχολήθηκε μεταξύ άλλων και με το πρόβλημα του Sunzi, δηλαδή με το πρόβλημα των υπολοίπων, που το συνδέει με τον Νικόμαχο τον Γερασηνό, αλλά όπως λέει ο Needham, αυτή η σύνδεση είναι λάθος, αφού το εν λόγω πρόβλημα περιέχεται στην έκδοση του Νικομάχου από τον Hoche, ο οποίος το αποδίδει στον Βυζαντινό Ισαάκ

---

[100] http://www.snipview.com/q/Ruan%20Yuan (προσπέλαση: 08/03/2015)

[101] Josheph Needham,*Science and civilisation in China,Mathematics and the science of the heavens and the earth,* vol3, σ.3.

[102] http://en.wikipedia.org/wiki/Florian_Cajori (προσπέλαση: 07/03/2015)

[103] U. Libbrecht: Chinese Mathematics in the thirteen century, σ.324.

[104] Josheph Needham,*Science and civilisation in China,Mathematics and the science of the heavens and the earth,* vol3, σ.1.

[105] http://en.wikipedia.org/wiki/Leonard_Eugene_Dickson (προσπέλαση: 07/03/2015)

[106] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, σ.322.

Αργυρό, ο οποίος έζησε πολλούς αιώνες μετά τον Sunzi[107].

Μία σειρά από άρθρα υπάρχουν ανάμεσα στο 1921 - 1929, από τον Gino Benedetto Loria (1862 – 1954)[108]. Δυστυχώς, όμως είναι ένας από αυτούς που επηρέασε ο Van Hee[109], με αποτέλεσμα να εκφράζει φοβερή καχυποψία για τη γνώση των Κινέζων πάνω στα μαθηματικά[110].

O Johannes Tropfke (1866 - 1939)[111] το 1922, εξέδωσε σε τέσσερις τόμους το *Geschichte der Elementarmathematik* και μέσα στα άλλα ασχολήθηκε με την απροσδιόριστη ανάλυση (indefinite analysis)[112] και με τη Γεωμετρία στην Κίνα, σε σχέση με την οποία ασχολήθηκε ιδιαίτερα με το έργο του Liu Hui[113].

Έχουμε ξανά αναφερθεί στον D. E. Smith[114] ο οποίος το 1912 στο "Scientific monthly", δημοσίευσε ένα άρθρο για τα κινέζικα μαθηματικά.[115] To 1923-1925, εξέδωσε τον πρώτο τόμο της *History of Mathematics* , όπου πραγματεύεται τα κινέζικα μαθηματικά[116]. Και το 1931 εξέδωσε ακόμα ένα άρθρο με τίτλο "Unsettled Questions concerning the Mathematics of China" το οποίο δημοσιεύεται στο περιοδικό *Scientific Monthly*, όπου πραγματεύεται ζητήματα πάνω στα πρώτα άρθρα του. Το άρθρο λέει ο Libbrecht, ότι γράφτηκε υπό την επιρροή συγγραφέων όπως ο Van Hee και ο Loria[117].

Το 1927 ο George Sarton (1884–1956)[118] εξέδωσε το "Introduction to the History of Science", όπου ασχολήθηκε με τον Qin Jiu Shao[119].

---

107 Josheph Needham,*Science and civilisation in China,Mathematics and the science of the heavens and the earth,* vol3, σ.34, υποσημείωση a.

108 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.322 και πλήρες όνομα και ημερομηνία γέννησης και θανάτου από http://en.wikipedia.org/wiki/Gino_Loria (προσπέλαση: 07/03/2015)

109 Αυτ., σελ323.

110 Josheph Needham,*Science and civilisation in China,Mathematics and the science of the heavens and the earth,* vol3, 1959, σελ1 υποσημείωση e.

111 http://universal_lexikon.deacademic.com/311651/Tropfke (προσπέλαση: 07/03/2015)

112 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.324.

113 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 433 - 434.

114 Σελ10, παρόντος κεφαλαίου.

115 Βλέπε προηγουμένως, σ. 10.

116 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.323.

117 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.324.

118 http://en.wikipedia.org/wiki/George_Sarton (προσπέλαση: 07/03/2015)

119 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.325.

Το 1930 στη Ρωσία γίνεται η έκδοση ενός άρθρου από τον A. V. Marakuev με τίτλο "Istorija razvitija mathematiki v Kitae, a takze v Japonii" (Ιστορία των μαθηματικών σε Κίνα και Ιαπωνία)[120].

Το 1951 στο "Geschichte der Mathematik" των Becker και Hofmann, παρότι μεταγενέστερο, ο Libbrecht παρατηρεί ότι δεν πρόσεξαν του σχολιασμούς των διάφορων ιστορικών πριν από αυτούς, με αποτέλεσμα να επαναλαμβάνουν ακόμα και τα λάθη του Smith[121].

Το 1955 ο Ρώσος Adol'f Pavlovich Yushkevich(1906 - 1993) από τη Ρώσικη Ακαδημία των Επιστημών[122] εξέδωσε το "O dostizenijax kitajskix ucenyx v oblasti mathematiki" (Πάνω στις επιτυχίες των Κινέζων μελετητών στο πεδίο των μαθηματικών). Πέντε χρόνια αργότερα, το 1960, σε συνεργασία με τον B. A. Rosenfeld εξέδωσε στα Γερμανικά το "Die Mathematik der Lander des Ostens im Mittelalter" και ακόμα μία δουλειά την ίδια περίοδο στα Ρώσικα, η οποία θα εμφανιζόταν στα Αγγλικά πολύ σύντομα μετά την Ρώσικη έκδοσή της, με τον τίτλο "A History of Mathematics in the Middle ages"[123]. Το ενδιαφέρον των Ρώσων ερευνητών εξηγείται και από το γεγονός ότι η Κομμουνιστική Κίνα πριν ανοίξει τις επαφές της στους δυτικούς είχε περισσότερες επαφές με τη Σοβιετική Ένωση. Εξαιτίας του πολιτικού κλίματος οι Ρώσοι ερευνητές ήταν πιο εύκολο να εισαχθούν σε πανεπιστημιακές υποτροφίες και γενικά να έχουν επαφή με την Κίνα για ερευνητικούς σκοπούς κατά το 1950[124]. Οπότε μας εκπλήσσει ότι ακόμα και στην πρώτη έκδοσή του ο Yushkevich βασίζεται σε κινέζικες πηγές του Li Yen (李冶）και του Ch'ien Pao-tsung[125] και όχι στα πρωτότυπα έργα που αναφέρουν στα έργα τους[126]. Το πιο χαρακτηριστικό κομμάτι στη δουλειά του είναι ότι προσπαθεί να δώσει μία αντικειμενική περιγραφή πάνω στα κινέζικα μαθηματικά, χωρίς προκαταλήψεις για το επίπεδο επιτυχίας των Κινέζων στα μαθηματικά[127].

Από μαθηματικής άποψης, αναφέρει ο Libbrecht, ένα πολύ σημαντικό άρθρο

---

[120] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.325.

[121] Αυτ., σελ325.

[122] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 431.

[123] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.325.

[124] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 431.

[125] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, σ.325.

[126] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 432.

[127] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, σ.325.

εκδόθηκε από τον K. Mahler με τίτλο “On the Chinese Remainder Theorem” το 1957[128].

Στο “History of Mathematics” του J.F. Scott το 1958 υπάρχει επίσης, μία μικρή σύνοψη στα Κινέζικα μαθηματικά που βασίζεται ολοκληρωτικά στον Mikami[129].

Το 1959 έχουμε την εμφάνιση του Noel Joseph Terence Montgomery Needham, (1900 – 1995)[130] με τον τρίτο τόμο της σειράς “Science and civilisation in China” από βιβλία που εξέδωσε, με τίτλο “Mathematics and the science of the heavens and the earth”[131]. Το πολύχρονο σχέδιό του ξεκίνησε μετά τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο[132]. Ο Needham έκανε ο ίδιος πρωτογενή έρευνα πάνω στην Κίνα και ανέτρεξε στις πρωτότυπες πηγές των αρχαίων έργων και σε πολλές περιπτώσεις έκανε νέα προσωπική του έρευνα[133]. Μία πολύ σημαντική άποψη που εκφράζεται από τον Needham είναι ότι η σύγχρονη επιστήμη είναι κατ’ ουσίαν διεθνής και βασίζεται στην συνεισφορά των λαών από διάφορες εποχές, μία άποψη που συνδέει την ανάπτυξη των μαθηματικών στην Κίνα με τις κοινωνικοπολιτικές της δομές[134]. Το έργο του υλοποιήθηκε σε συνεργασία με τον Wang Ling (王玲, 1917 ή 1918–1994)[135], ομότιμο καθηγητής του τμήματος της Ιστορία της Άνω Ανατολής στο εθνικό πανεπιστήμιο της Αυστραλίας στην Canbera[136]. Ο Wang είχε κάνει το διδακτορικό του πάνω στο “Chiu Chang Suan shu” (Nine Chapters on Mathematical Procedures) και την ιστορία των κινέζικων μαθηματικών κατά τη διάρκεια της δυναστείας των Han συνεργατικά με το Trinity College και το Cambridge, 1956. Οι θέσεις του όμως παραμένουν ανέκδοτες[137].

Ο Γερμανός Kurt Vogel(1888 - 1985) είχε συστηματικές επαφές με τον Yushkevich και ένα από τα κοινά τους προβλήματα ήταν η μεταφορά των

---

128 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.325-326.

129 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.326.

130 http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Needham (προσπέλαση: 08/03/2015)

131 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.326.

132 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 431.

133 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, σ.326.

134 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 431.

135 http://en.wikipedia.org/wiki/Wang_Ling_(historian) (προσπέλαση: 08/03/2015)

136 Josheph Needham, *Science and civilisation in China,Mathematics and the science of the heavens and the earth,* vol3, 1959, στις αναφορές έκδοσης στην αρχή του βιβλίου.

137 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 437.

μαθηματικών προβλημάτων της Κίνας στον Αραβικό κόσμο. Ο Vogel δημοσίευσε μία Γερμανική έκδοση πάνω στο Nine Chapters on Mathematical Procedures (Jiu zhang suan shu) το 1968[138].

Από την ίδια Ακαδημία με τον Yushkevich η Iranovna Berezkina το 1960 μετέφρασε και συζήτησε το έργο του 7ου αι. "Ten Mathematical Classics (Suan Jing shi shu)" και εξέδωσε την πρώτη γενική πραγματεία της το 1980 στη Ρωσία για τα Κινέζικα μαθηματικά[139].

Ο Charles Coulston Gillispie (1918-)[140] έκανε τη γενική επιμέλεια της κλασσικής εγκυκλοπαίδειας "Dictionary of scientific biography", που περιλαμβάνει 16 τόμους και εκδόθηκε ανάμεσα στο 1970 και 1980. Στο έργο αυτό προστέθηκαν δύο ακόμα συμπληρωματικοί τόμοι το 1990[141].

Ο Frank Swetz είναι καθηγητής μαθηματικών και εκπαίδευσης στο Πανεπιστήμιο της Pensylvania State University, με ειδικό ενδιαφέρον στην Ιστορία των Κινέζικων μαθηματικών. Το έργο του περιλάμβανε διάφορες μεταφράσεις μέσα σε αυτές μία μετάφραση του "hai dao suan Jing" (海岛算经 - The sea Island Mathematical Classic) καθώς και το κεφάλαιο 9 από το Jiu Zhang suan shu (The nine chapters on Mathematical Procedures). Ο Swetz έκανε επίσης εκδώσεις σε επίπεδο που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για διδασκαλία σε τάξη όπως το "The Amazing Chiu Chang Suan Shu", που εξέδωσε το 1972 , και το "The 'Piling up of squears'in Ancient China", που εξέδωσε το1977[142].

Ο Jock Hoe διδάσκει στο Πανεπιστήμιο Massey στην Νέα Ζηλανδία. Διεκπεραίωσε το διδακτορικό του στο Πανεπιστήμιο του Παρισιού. Ανάμεσα στα έργα του στην ιστορία των κινέζικων μαθηματικών στην αγγλική γλώσσα είναι και το "A Problem in the Siyuan yujian: The Jade Mirror of the Four Unknowns," που έκδωσε το 1972[143].

---

[138] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 432.

[139] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 431-432.

[140] http://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Coulston_Gillispie (προσπέλαση: 07/03/2015)

[141] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 438.

[142] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 447.

[143] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 449.

Ο Βέλγος Ερευνητής Ulrich Libbrecht (1928-)[144] ανέλυσε έξι μαθηματικά χειρόγραφα που βρέθηκαν από τους σινολόγω Paul Pelliot και αρχαιολόγω Sir Aurel Stein, στις αρχές του 20ου αι στις σπηλιές του Dunhiang (Gansu) και Turfan(Xinjiang). Δίνει σημαντικό υλικό που σχετίζεται με την μετρολογία και τις δεκαδικές αξίες και τη μαθηματική ορολογία γενικότερα. Το μεγάλο του έργο Chinese Mathematics in the Thirteen Century που εξέδωσε στα αγγλικά το 1973, βασίζεται στο έργο του Qin Jiu Shao (1257 μ. Χ.) Mathematical treatise in Nine Sections. Το εν λόγω έργο θεωρείται ως το πιο σημαντικό έργο της περιόδου της δυναστείας των Song. Αφορά μία γενίκευση εξαγωγής ριζών, η οποία απαντά σε τετραγωνικές εξισώσεις με θετικούς, αρνητικούς, δεκαδικούς και integral συντελεστές[145].

Ο Donalt B. Wagner, έγγραψε την διατριβή του πάνω στην απόδειξη στα αρχαία κινέζικα μαθηματικά με τίτλο "Proof in Ancient Chinese Mathematics: Liu Hui on the volumes of Rectilinear Solids", μία θέση που παρουσίασε στο πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης το 1975. Έχει γράψει ένα σημαντικό αριθμό άρθρων σχετικά με τον Liu Hui(劉徽) και ειδικά για θέματα που αφορούν τον υπολογισμό του "π" και την εύρεση του όγκου μία σφαίρας[146].

Ο B.L.van der Waerden (1903 – 1996)[147] το 1983, αφιέρωσε δύο ενότητες από το έργο του "Geometry and Algebra in Ancient Civilizations", στις οποίες αναφέρεται εκτενώς στα κινέζικα μαθηματικά περιλαμβάνοντας τις μετρήσεις του Liu Hui πάνω στον κύκλο καθώς και τις μεθόδους του για την εύρεση των τμημάτων (volumes) μίας πυραμίδας και μίας σφαίρας[148].

Χρονολογικά επόμενος είναι ο Alexei Volkov, ο οποίος ήταν διδακτορικός μαθητής του Yushkevich[149] στο ινστιτούτο για την ιστορία της Επιστήμης στην Μόσχα, το 1988 ολοκλήρωσε τη διατριβή του "Matematika v drevnem Kitae III - VII vv" (Μαθηματικά στην αρχαία Κίνα κατά τη διάρκεια του 3ου-7ου αιώνα μ.Χ.). Επιπλέον, έχει κάνει εκδώσεις σε Ρωσία, Γαλλία και Αγγλία και μέσα στα έργα του

[144] http://en.wikipedia.org/wiki/Ulrich_Libbrecht (προσπέλαση:03/07/2015)

[145] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 436.

[146] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 444.

[147] http://en.wikipedia.org/wiki/Bartel_Leendert_van_der_Waerden (προσπέλαση: 07/03/2015)

[148] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 439.

[149] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 432.

έχει αφιερώσει έναν αριθμό μελετών πάνω στον υπολογισμό του “π”[150].

Ο Josheph W. Dauben (1944 -)[151] το 1988 στις ενωμένες πολιτείες της Αμερικής μετά από μία τετράμηνη ανταλλαγή υπό την Αιγίδα της U.S. National Academy of Sciences και της Chinese Academia Sinica, ανέλαβε σημαντική μελέτη της Κινεζικής γλώσσας και της Ιστορίας των κινέζικων μαθηματικών. Εργάστηκε και με δύο Κινέζους αποφοίτους στη Νέα Υόρκη τον Horng Wann - Sheng και Xu Yibao, στο διδακτορικό πρόγραμμα της Ιστορίας, στο Graduate Center of the City University. Ο Dauben μέσα στα άλλα στο έργο του “The Pythagorean Theorem’ and Chinese Mathematics of the Jiu Zhang Suan Shu”, που εξέδωσε το 1992, ασχολείται με την απόδειξη στα κινεζικά μαθηματικά. Ο Dauben επίσης, ενδιαφέρεται για την εισροή των σύγχρονων μαθηματικών στην Κίνα και έχει γράψει διάφορα έργα πάνω στο ζήτημα αυτό ενδεικτικά ένα από αυτά είναι το “Internationalizing Mathematics East and West: Individuals and Institutions in the Emergence of a Modern Mathematical Community in China”[152].

Στο Παρίσι, πάνω στην Ιστορία των Κινέζικων μαθηματικών και της αστρονομίας στην Κίνα, εργάζονται οι Karine Chemla (1957-)[153], Catherine Jami και Jean - Claud Martzloff(1943-)[154], ανάμεσα σε άλλους. Ο τελευταίος είναι γνωστός για το το συνοπτικό έργο του “A history of Chinese Mathematics” που εκδόθηκε πρώτη φορά το 1988 στα Γαλλικά και το 1997 στα Αγγλικά. Οι θέσεις του διδακτορικού του Martzloff βασίστηκαν στο έργο του μαθηματικού και αστρονόμου του 17ου αι στην Κίνα, Mei Wending (1633 - 1721). Το τελευταίο κομμάτι του δημοσιευμένου έργου του (“A history of Chinese Mathematics”), ασχολείται με τη σύνθεση που κάνει ο Mei Wending με την αρχαία κινέζικη γεωμετρία και την Ευκλείδια γεωμετρία[155].

Η Catherine Jami θεωρείται η κύρια Δυτική αυθεντία στην ιστορία των μαθηματικών της Κίνας για το διάστημα της ύστερης δυναστείας των Ming και της πρώιμης δυναστείας των Qing (16ος με 18ος)αι.. Το διδακτορικό της ήταν πάνω στην ανάπτυξη τριγωνομετρικών κατασκευών σε σειριακές δυνάμεις του Ming Antu, και ο τίτλος της εργασίας της είναι “Les methodes rapides pour la trigonometrie et le

[150] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 448.

[151] http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Dauben (προσπέλαση: 07/03/2015)

[152] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 446.

[153] http://fr.wikipedia.org/wiki/Karine_Chemla (προσπέλαση: 08/03/2015)

[154] http://de.wikipedia.org/wiki/Jean-Claude_Martzloff (προσπέλαση: 08/03/2015)

[155] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 435.

rapport precis du cercle (1774). Tradition chinoise et apport occidental en mathematiques" Memoires de L'Institut des Hautes Etudes Chinoise, στο Κολέγιο της Γαλλίας. Μελέτησε την αλληλεπίδραση των δυτικών μαθηματικών με την κινέζικη παράδοση με ένα εξτερναλιστικό τρόπο. Πολλά από τα άρθρα της Jami αφορούν τους ιεραποστόλους και τις δραστηριότητές τους στην αυλή του αυτοκράτορα Kangxi, τις κοινωνικοπολιτικές δομές και έπαιξε σημαντικό ρόλο στην μεταφορά της επιστημονικής γνώσης στην Κίνα.[156]

Από τις πιο ενεργές σινολόγους της εποχής μας, η Karine Chemla, έκανε το διδακτορικό της πάνω στο έργο του 1248 του LiYe με τίτλο LiYe 's Ce yuan hai jing(Sea Mirror of Circle Measurements), όπου αναλύει τη σχέση μεταξύ της περιγραφής της μεθόδου και τις λεπτομέρειες της μεθόδου στο πλαίσιο της πολυωνυμικής άλγεβρας που χρησιμοποιήθηκε για να λυθούν γεωμετρικά προβλήματα[157]. Έχει γράψει πάρα πολλά έργα μέσα στα οποία και το "Les neuf chapitres sur les procedures mathematiques et leurs commentaire", "De la resolution des systemes d'equations lineares", αλλά υπάρχουν και έργα της μετεφρασμένα στα Αγγλικά όπως το "The History of Mathematical Proof In Ancient Traditions"[158].

Το 1999 η Andrea Breard από τη Γερμανία, διδακτορική μαθήτρια της Chemla, εξέδωσε στο διδακτορικό της, τις θέσεις της στο κομμάτι της κινέζικης επιστήμης: Re- Kreation eines mathematuschen Konzeptes im chinesishen Diskurs, το οποίο μάλιστα ήταν δίτομο. Αφορά την ιστορία της αριθμητικής και η άποψή της είναι μία διαχρονική οπτική για τη μελέτη της ανάπτυξης των μαθηματικών θεωριών από τον πρώτο μέχρι τον 19ο αι. Συζητάει τα μαθηματικά ζητήματα των σειριακών αριθμών; μέσα από ένα εννοιολογικό οικοδόμημα πυλώνων, διακριτών αντικειμένων τα οποία ανταποκρίνονται σε τελικές προσθέσεις[159].

Το 1999 Ο Jose Antonio Cervera στο έργο του , "Los misioneros Espanoles como Yia para los Intercambios Cientificos y Culturales entre el Extremo Oriente y Europa en los Siglos XVI y XVII", αφιερώθηκε στο ζήτημα των Ισπανών ιεραποστόλων στην Κίνα και προσδιορίστηκε συγκεκριμένα στο πεδίο των

---

[156] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 436.

[157] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 434.

[158] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 435.

[159] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", σ. 434.

μαθηματικών και της αστρονομίας[160].

Ο Roger Hart είναι μέλος του τμήματος Ιστορίας των Ασιατικών σπουδών στο Πανεπιστήμιο του Τέξας στο Austin. Η δουλειά του επικεντρώνεται κυρίως στις δυναστείες των Ming και αρχές των Qing πάνω στα μαθηματικά. Μέσα στα πολλά έργα που έχει γράψει είναι και “Translating the Untranslatable: From Copula to Incommensurable Worlds”, που εξέδωσε το 2000. Στις διάφορες ερευνητικές του ασχολίες είναι και το πρόβλημα της μετάφρασης των Στοιχείων του Ευκλείδη από τα Λατινικά στα Κινέζικα[161].

Ο Peter Engelfriet από την Ολλανδία εργάστηκε στο διδακτορικό του πάνω στις κινέζικες μεταφράσεις των στοιχείων του Ευκλείδη. Το διδακτορικό του εκδόθηκε στα Αγγλικά μέσα στο οποίο έχει μεταφράσει τα αρχαία κινέζικα κείμενα των 6 βιβλίων στα σύγχρονα κινέζικα[162].

Ο Benno van Dalen μέλος του ινστιτούτου Ιστορίας της επιστήμης στο Πανεπιστήμιο Johann Wolfgang Goethe University στην Φρανκφούρτη της Γερμανίας. Στην πιο πρόσφατη δουλειά του “Islamic and Chinese Astronomy under the Mongols: a little - known Case of transmission”, ασχολήθηκε με την ιστορία της κινέζικης αστρονομίας και των αστρονομικών πινάκων που σχετίζονται με θέματα μεταφορών ιδεών ανάμεσα σε Κίνα και σε Αραβικούς και Περσικούς ομιλόγλωσσους πολιτισμούς[163].

Ο Christopher Cullen, είναι ο διευθυντής του Ερευνητικού κέντρου Needham του Cambridge. Μέσα στα έργα του είναι και το “How Can We Do the Comparative History of Mathematics? Proof in Liu Hui and the Zhou Bi” το οποίο εξέδωσε το 1995 και ασκεί κριτική πάνω στη χρήση της λέξης “απόδειξη”, στα κινέζικα μαθηματικά από τους J.W. Crossley A.W.-C. Lun σε ένα άρθρο τους που αφιέρωσαν στην “απόδειξη” στα κινέζικα μαθηματικά[164].

Ο Sir Geoffrey Ernest Richard Lloyd (1933 -)[165], το 1996 έγγραψε το

[160] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 439.

[161] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 446 - 447.

[162] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 436.

[163] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 442.

[164] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 445.

[165] http://en.wikipedia.org/wiki/G._E._R._Lloyd (προσπέλαση: 08/03/2015)

“Adversaries and Authorities: Investigations into Ancient Creek and Chinese Science” όπου στο έβδομο κεφάλαιο ασχολείται με τη διαφορετική προσέγγιση του άπειρου στην Κίνα και την Ελλάδα. Επίσης, πιο γενικά για την ιστορία των μαθηματικών έχει γράψει στο “Learning by numbers”, Extreme - Orient, Extreme - Occident, το οποίο εκδόθηκε το 1994. Ένα ακόμα έργο του είναι το “Finitive and Infinitive in Greece and in China”, του 1996[166].

Ο John N. Crossley (1937-)[167]στην Αυστραλία σε συνεργασία με τον Anthony W.-C. Lun στην ίδια χώρα, μετέφρασαν δύο σημαντικά έργα στα Αγγλικά. Συγκεκριμένα τα έργα των Li Yan και Du Shiran “Chinese Mathematics, A Concise History” το 1987 και μαζί με τον Shen Kangshen, εξέδωσαν μία μετάφραση με σχολιασμό με τίτλο “The Nine Chapters on the Mathematical Art - Companion and Commentary” το 1999. Τέλος, έγραψαν ένα έργο για το ζήτημα της απόδειξης στα πρώιμα κινέζικα μαθηματικά το “The Logic of Liu Hui and Euclid as Exemplified in Their proofs of the Volume of a Pyramid,” που εξέδωσαν το 1994[168].

Ολοκληρώνοντας την πλευρά της Ευρώπης, θα αναφερθούμε στο άρθρο των Andrea Eberhard - Bread, Joseph W. Dauben και Hu Yibao, του 2003 με τίτλο “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years” στο περιοδικό Llull, τόμο 26, όπου ήταν και ένα από τις πηγές που βασίστηκε και αυτή η μελέτη, το οποίο κάνει μία εκτενή ιστοριογραφική αναφορά πάνω στα κινέζικα μαθηματικά από το 1978 μέχρι το 2003 που γράφτηκε.

Θα δούμε και τις εξελίξεις από την πλευρά των Κινέζων μελετητών, καθώς χωρίς τη συμβολή τους η πρόοδος της μελέτης των κινέζικων μαθηματικών θα ήταν αδύνατη. Για τον λόγω αυτό πρέπει να αναφερθούμε οπωσδήποτε σε κάποιους, αλλά καθώς θα μελετήσουμε κυρίως τον Ευρωπαϊκό τρόπο προσέγγισης των κινέζικων μαθηματικών και της Ιστορίας τους θα αναφερθούμε ενδεικτικά μόνο σε κάποιους από αυτούς, χωρίς να σημαίνει ότι το έργο των υπολοίπων δεν είναι σημαντικό.

Ο Li Yen(1892 - 1963), έκανε μεγάλες βιβλιογραφικές συμβολές, και αναφέρθηκε και σε άλλα μαθηματικά θέματα όπως ο κανόνας Dayan[169].

Ο Ang Tian - Se έγγραψε τη διδακτορική του διατριβή στο Πανεπιστήμιο της

166 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 445.

167 http://en.wikipedia.org/wiki/John_Newsome_Crossley (προσπέλαση: 08/03/2015)

168 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 449.

169 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.326-327.

Μαλαισίας, το 1969 με τίτλο “Study of the mathematical manual of Chang Ch’iu - chien” το οποίο όμως δεν εξέδωσε. Μετέπειτα έγραψε διάφορα άρθρα πάνω στον υπολογισμό της Αστρονομίας και το ζήτημα υπολογισμού της δεξιάς γωνίας των τριγώνων[170].

Ο Wu Wen - tsun (Wu WenJun/Wu Wenchun) (吴文俊, 1919 -)[171]στην Κίνα, είναι τοπολόγος και θεωρητικός της απόδειξης (proof theorist)[172]. Κατά τη διάρκεια της πολιτισμικής επανάστασης στην Κίνα μελέτησε αρχαία μαθηματικά κείμενα και ανακάλυψε ότι ένα βασικό χαρακτηριστικό των παραδοσιακών κινέζικων μαθηματικών είναι αυτό που ονόμασε “μηχανοποιημένοι αλγόριθμοι” (“mechanization of algorithms”)[173]. Στο έργο του “Recent Studies on the History of Chinese Mathetics,” (που εξέδωσε το 1986), υποστηρίζει δύο αρχές. Πρώτον, ότι όλα τα συμπεράσματα πρέπει να στηρίζονται στα πρωτότυπα κείμενα και δεύτερον, ότι όλα τα συμπεράσματα πρέπει να στηρίζονται στην κατανόηση ότι την αρχαία εποχή είχαν τα ανάλογα μέσα. Κοινώς να τα αξιολογούμε ανάλογα της εποχής τους[174]. Τέλος, το έργο του αναγνωρίστηκε από την Κινεζική κυβέρνηση και πρέπει να αναφέρουμε ότι με την αμοιβή που έλαβε από ως επιβράβευση για το έργο του, έφτιαξε ένα πρόγραμμα που το ονόμασε “Silk road project,” το οποίο υποστηρίζει την έρευνα και τη μελέτη της μεταφοράς της μαθηματικής γνώσης ανάμεσα στην Κίνα και σε άλλους πολιτισμούς[175].

Ο Ho Peng -Yoke, ο οποίος πλέον βρίσκεται στην Αυστραλία, έχει συντάξει βιογραφίες διαφόρων Κινέζων μαθηματικών ανάμεσα σε αυτούς και για τους “Ch’in Chiu-Shao”[Qin Jiu Shao] και “Chu Shih chieh”, [Zhu Shijie], που περιλαμβάνονται στο έργο του “Dictionary of scientific biography”[176].

---

170 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 450.

171 http://en.wikipedia.org/wiki/Wu_Wenjun (προσπέλαση: 08/03/2015)

172 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 450.

173 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 460.

174 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 453.

175 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 460.

176 Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 450.

Η Lam Lay Yong(蓝丽蓉, 1936 -)[177], είναι ομότιμη καθηγήτρια του Εθνικού Πανεπιστημίου της Σινγκαπούρης και έχει ασχοληθεί αρκετά μέσα στα έργα της με τον 13ο αι. Κάποια από τα έργα της είναι το “Critical Study of Yang Hui Suan fa, a 13th - Century Mathematical Treatise” που εξέδωσε το 1977 και μαζί με τον Ang Tian - Se το “Fleeting footsteps. Tracing in conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China”, το οποίο εξέδωσε το 1992.

Ο Siu Man - Keung, διδάσκει στο Πανεπιστήμιο του Hong Kong, και έχει γράψει σε ζητήματα που σχετίζονται με την εκπαίδευση και την ιστορία των μαθηματικών, ως παράδειγμα αναφέρουμε το έργο που δημοσίευσε το 1995 με τίτλο “Mathematics education in Ancient China: What lesson do we learn from it?”[178].

Στην Ταϊβάν ο Horng Wann-sheng, έγραψε την διατριβή του πάνω στον Li Shanlan το 1991, με τίτλο “Li Shanlan, The Impact of Western Mathematics in China During the late Nineteenth Century” στο Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης. Επίσης, έχει γράψει εκτενώς άρθρα πάνω στα αρχαία και σύγχρονα μαθηματικά[179].

Ο Lih Ko-Wei (Li Guo - Wei), καθηγητής των μαθηματικών στην Ακαδημία Sinica στην Nangang, της Ταϊβάν έχει γράψει διάφορα έργα πάνω στα αρχαία, αλλά και στα σύγχρονα κινέζικα μαθηματικά όπως το “From one Gnomon to two Gnomons: A methodological Study of the method of double differences,”, το 1993[180].

Ο Xu Yibao έκανε το διδακτορικό του πάνω στο άπειρο στο Πρόγραμμα ιστορίας στο Graduate Center του City University της Νέας Υόρκης. Το 1991 ολοκλήρωσε το μεταπτυχιακό του στην Ιστορία των Κινέζικων μαθηματικών υπό την εποπτεία του Li Di στο Πανεπιστήμιο Inner Mongolia Normal στο Huhehot, της Κίνας. Πέραν των άρθρων του στο θέμα, έχει γράψει στα Αγγλικά ένα έργο το “Chinese - U. S. Mathematical relations: 1859 - 1949”, το οποίο εξέδωσε το 2002[181].

Ο Ch’ien Pao - tsun, ο οποίος θεωρείται ισάξιος με τον LiYen ασχολήθηκε με τον κανόνα Dayen, σε διάφορα έργα του και το 1966 εξέδωσε μία μονογραφία του πάνω στις περιόδους των Sung και Yuan. Πάνω σε αυτό βασίστηκε σε μεγάλο βαθμό

[177] http://en.wikipedia.org/wiki/Lam_Lay_Yong (προσπέλαση: 08/03/2015)

[178] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 452.

[179] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 452.

[180] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 453.

[181] Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: “The history of Chinese Mathematics: the past 25 years”, σ. 448.

και το βιβλίο “Chinese mathematics in the thirteenth Century” του Libbrecht που εξέδωσε το 1973[182].

Στο παρόν κεφάλαιο είδαμε τα ιστοριογραφικά στοιχεία όσων ασχολήθηκαν με τα κινεζικά μαθηματικά. Έχοντας την εικόνα αυτή στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνει μία σύντομη ιστοριογραφική αναφορά στα αρχαία κινεζικά βιβλία ώστε να αναφερθεί από πού μπόρεσαν να πάρουν το υλικό για να συντάξουν τα έργα τους οι σύγχρονοι συγγραφείς, καθώς θα υπάρξει αναφορά πολύ συνοπτικά στα κινεζικά μαθηματικά για να δοθεί μία εικόνα περί του τι ήταν αυτό που μελέτησαν οι παραπάνω συγγραφείς. Στο δεύτερο σκέλος του δευτέρου κεφαλαίου, θα αναφερθούν κάποια βασικά στοιχεία για τα κινεζικά μαθηματικά.

2. Κινέζικα Μαθηματικά

2.1 Κινέζικα Βιβλία Μαθηματικών

Έχοντας αναφερθεί στο ιστοριογραφικό ζήτημα, καθώς είναι σημαντικό να γνωρίζουμε σε ποιους ανθρώπους η Ευρώπη βασίζει τη γνώση της για τα κινεζικά μαθηματικά, μπορούμε να προχωρήσουμε στα βασικά αρχαία κινέζικα βιβλία με τα οποία έχει ασχοληθεί η Ευρώπη. Μετά την επιγραμματική αναφορά στα βιβλία συνέχεια θα γίνει μία επιλεγμένη παρουσίαση κάποιων αρχαίων μεθόδων των Κινέζικων μαθηματικών.

[182] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century,* σ.327.

Στο κομμάτι που θα ασχοληθούμε με τα βιβλία δεν θα κάνουμε εκτενή αναφορά, καθώς δεν είναι στόχος της παρούσας εργασίας η περαιτέρω ιστορική μελέτη των αρχαίων βιβλίων. Τα βιβλία θα παρουσιαστούν από το έργο του Jean Glaude Martzloff, "A History of Chinese mathematics" (1997)(σελ13-17, κεφάλαιο *2o The Historical Context*), αλλά εντελώς αναφορικά. Στο δεύτερο κομμάτι του παρόντος κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με την παρουσίαση των αρχαίων κινέζικων μαθηματικών μεθόδων, όπου θα γίνει εκτενή αναφορά σε αυτά, δίνοντας ακόμα και παραδείγματα όπως βρίσκονται σε ευρωπαϊκές πηγές. Παρότι, όμως θα εξηγηθούν οι μέθοδοι δεν θα αναφερθούμε στο συγκεκριμένο σημείο σε ενδεχόμενες διαφωνίες πάνω σε αυτές από τους διάφορους ιστορικούς, καθώς αυτό είναι κάτι που θα γίνει στο τρίτο κεφάλαιο.

Ο λόγος της παρουσίασης είναι κυρίως για διευκόλυνση του αναγνώστη ώστε να υπάρχει μία γενική εικόνα των όσων θα πραγματευτούμε στο τρίτο κεφάλαιο.

ΒΙΒΛΙΑ:

Από τον 11ο αιώνα π.Χ. Μέχρι τον δεύτερο αιώνα μ.Χ. (ξεκινώντας από το πιο πρόσφατο) .

Βιβλία	**Μεταφρασμένος τίτλος**	**Συγγραφέας**	**Δυναστεία**	**Περίοδος**
Du Zhong Suanshu - 杜忠算術[184]Υπολογιστικές μέθοδοι - Computational Prescriptions[185].	Δεν υπάρχει[186]	Zhang Cang 張蒼[187] Βάσει της Hanshu yiwen zhi 漢書藝文志 βιβλιογραφίας, η οποία είναι η αρχαιότερη σωζόμενη στην Κίνα από τον Ban Gu 班固 [188]	Former Han (206 π.Χ.- 8 μ.Χ.)	152 π.Χ.[189]
Xu Shang suanshu 許商算術 Υπολογιστικές μέθοδοι του Σου Σανγκ - Computational Prescriptions of Xu Shang	Δεν υπάρχει[190]	Xu Shang - 許商 Ο Dauben αναφέρει ότι βρίσκεται στην βιβλιογραφία Hanshu[191].	Former Han	Έζησε τον 1ος αιώνας π. Χ. [192]
Zhoubi	Υπάρχει. Είναι	Άγνωστος	Άγνωστη	

[184] http://www.chinaknowledge.de/History/Han/personszhangcang.html (προσπέλαση: 20/05/2015)
[185] Jean Glaude Martzloff , *A History of Chinese mathematics*, (1997),σελ13.
[186] Jean Glaude Martzloff , *A History of Chinese mathematics*, (1997),σελ14.
[187] http://www.chinaknowledge.de/History/Han/personszhangcang.html , (προσπέλαση:20/05/2015)
[188] http://www.chinaknowledge.de/Literature/Science/hanshuyiwenzhi.html, (προσπέλαση: 20/05/2015)
[189] http://www.chinaknowledge.de/History/Han/personszhangcang.html , (προσπέλαση:20/05/2015)
[190] Jean Glaude Martzloff , *A History of Chinese mathematics*, (1997),σελ13.
[191] http://donwagner.dk/SAW/SAW.html (προσπέλαση:20/05/2015)
[192] http://donwagner.dk/SAW/SAW.html , (προσπέλαση :13/03/2015)

suanjing - 周髀算經 Δυναστεία των Τσου Κανόνας των υπολογισμών με Γνώμονα - Zhou Dynasty Canon of Gnomonic Computations*	μία συλλογή βιβλίων όπου υπάρχουν διχογνωμίες για την χρονολογία του. Κάποιοι ισχυρίζονται ότι ξεκίνησε την δυναστεία των Han και κάποιοι τη δυναστεία των Zhou. Δεν γνωρίζουμε συγγραφείς ή σχολιαστές που το αναπαρήγαγαν [193].	συγγραφέας	χρονολογία διχογνωμία από πολλούς ανάμεσα σε δυναστείες Han και Zhou[194]	
Jiuzhang suanshu - 九章算術 Εννέα κεφάλαια των μαθηματικών- Computational Prescriptions in Nine Chapters	Αντίγραφο. Καταστράφηκε το πρωτότυπο στην πυρά, μαζί με άλλα, μετά από διαταγή του αυτοκράτορα Qin Shi Huang το 213[195].	Διάφοροι σχολιαστές. Από τους πιο διάσημους ήταν ο Liu Hui.	Χάνεται στους μύθους η χρονολογία του αρχικού βιβλίου[196].	

(Πίνακας 1)

* Στο παρόν βιβλίο υπάρχει διχογνωμία για την μετάφραση του τίτλου ανάμεσα στον Martzloff και τον Needham.

Κατά τις περιόδους 3ος-6ος αι. τα μαθηματικά των Κινέζων αποκτούν μία πιο θεωρητική μορφή[197].

Στην περίοδο μεταξύ 6ου - 10ου αι μ.Χ. στις δυναστείες των Sui (518-617) και των Tang (618-907), έχουμε δέκα έργα που θα αναφερθούν στο πινάκα 2, τα οποία

[193] Christofer Cullen, Astronomy and mathematics in ancient China The Zhou Bi suan jing, Needham research institute Cambridge, Cambridge University Press, 1996, σελ.xi.
[194] Christofer Cullen, Astronomy and mathematics in ancient China The Zhou Bi suan jing, Needham research institute Cambridge, Cambridge University Press, 1996, σελ.xi.
[195] Joseph W. Dauben, “Ancient Chinese mathematics: the (Jiu Zhang Suan Shu) vs Euclid's Elements. Aspects of proof and the linguistic limits of knowledge”, Pergamon, International Journal of Engineering Science, vol36, 1998, Σελ1341.
[196] Joseph W. Dauben, “Ancient Chinese mathematics: the (Jiu Zhang Suan Shu) vs Euclid's Elements. Aspects of proof and the linguistic limits of knowledge”, Pergamon, International Journal of Engineering Science, vol36, 1998, Σελ1341.
[197] Jean Glaude Martzloff , *A History of Chinese mathematics*, (1997),σελ14.

μαζί με τα Zhoubi suanjing 周髀算經και το Jiuzhang suanshu 九章算術, που έχουμε αναφέρει στον πίνακα 1, χρησιμοποιούνταν για διδακτικούς σκοπούς στο guozixue 国子学 (School for the Sons of the State - Σχολείο για τους γιους της πολιτείας.). Τα έργα αυτά χρονολογούνται μετά τη δυναστεία των Han, με εξαίρεση το Zhoubi suanjing και το Jiuzhang suanshu και είναι γνωστά από το έργο suanjing shi shu (算经十书) - (Δέκα υπολογιστικοί κανόνες - Ten Commputational Canons) του Li Chufeng (李淳风 602－670)[198]. Το συγκεκριμένο έργο, περιλαμβάνει 12 έργα συνολικά, τα δύο Zhoubi suanjing και το Jiuzhang suanshu που έχουν ήδη αναφερθεί και δέκα ακόμα που θα αναφερθούν στον παρακάτω πίνακα 2.

ΒΙΒΛΙΑ

Από τον 3ο-10ο αι μ. Χ.

Βιβλία	**Στοιχεία**	**Συγγραφέας**	**Δυναστεία**	**Περίοδος**

[198] Jean Glaude Martzloff , *A History of Chinese mathematics*, (1997),σελ16 και http://en.wikipedia.org/wiki/The_Ten_Computational_Canons (προσπέλαση 15/03/2015)

Sandeng shu 三等数 Η τέχνη των τριών βαθμών ένδειξης για μεγάλους αριθμούς βασιζόμενοι σε μεγάλα επίπεδα - the art of the three degrees - notation for large numbers based on three different scales)	Υπάρχει. Ενδεικτικά: στο Suanjing Shi Shu 算经十书 ,(Δέκα υπολογιστικοί κανόνες) μία συλλογή βιβλίων για εκπαιδευτικούς σκοπούς που δημιουργήθηκε το 656 και αντιγράφτηκε πολλές φορές με πρώτη εκτύπωσή του το 1084 και επανεκδόθηκε στα τέλη του 18ου αιώνα[199].	Li Chunfeng (李淳风 602－670) είναι αυτός που την συγκρότησε για πρώτη φορά[200].	Tang	656
Zhuishu 綴術 Χαμένο αναφορά μόνο[201]	Δεν υπάρχει είναι γνωστό από αναφορά τίτλου στο Suanjing Shi Shu 算经十书, Στους Δέκα υπολογιστικούς κανόνες μόνο αναφορά.	Zu Chongzhi 祖沖之	Tang dynasty	8ος αι[202].

[199] Christoph J. Scriba - Peter Schreiber, 5000 Years of Geometry Mathematics in History and Culture, Birkhauser Springer Basel , London, 2015, Σελ122.

[200] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* vol265, springer Paris, Σελ170.

[201] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* σελ173, υποσημείωση 9.

[202] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* vol265, springer Paris, σελ173 υποσημείωση 9.

Xiahou Yang suanjing 夏候陽 算经 Ο υπολογιστικός κανόνας του Σιάοχου Γιάνγκ - Xiahou Yang's Computational Canon	Δεν υπάρχει είναι γνωστό από αναφορά τίτλου στο Suanjing Shi Shu 算经十书, Στους Δέκα υπολογιστικούς κανόνες μόνο αναφορά.	Xiahou Yang 夏候陽	Tang dynasty	8ος αι[203].
Jigu suanjing 緝古算經 Υπολογιστικός κανόνας της συνέχειας των αρχαίων (τεχνικών) - Computational Canon of the Continuation of Ancient [Techniques]	Υπάρχει. Ενδεικτικά: στο Siku quanshu 四庫全書 συλλογή βιβλίων που έγινε με υπεύθενο τον Mei Wending, ο οποίος έκανε ένα πρόγραμμα συλλογής αρχαίων βιβλίων και ανακατασκευής τους[204].	Wang Xiaotong 王孝通	Tang dynasty	Αρχές 7ου αι.

[203] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science*, vol265, springer Paris, σελ206.
[204] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science*, vol265, springer Paris, σελ148-149.

Wucao suanjing 五曹算經 Υπολογιστικός κανόνας των 5 κυρίων ενοτήτων (Computational Canon of the Five Administrative Sections)	Υπάρχει. Ενδεικτικά: στο Suanjing Shi Shu 算经十书 ,(Δέκα υπολογιστικοί κανόνες) μία συλλογή βιβλίων για εκπαιδευτικούς σκοπούς που δημιουργήθηκε το 656 και αντιγράφτηκε πολλές φορές με πρώτη εκτύπωσή του το 1084 και επανεκδόθηκε στα τέλη του 18ου αιώνα[205].	Zhen Luan 甄鸾[206]	Έξι δυναστείες	6ος αι[207].

[205] Christoph J. Scriba - Peter Schreiber, 5000 Years of Geometry Mathematics in History and Culture, Birkhauser Springer Basel , London, 2015, Σελ122.
[206] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* vol265, springer Paris, σελ206.
[207] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* vol265, springer Paris, σελ206.

Wujing suanshu 五經算術 Υπολογιστικοί κανόνες των πέντε κλασικών - Computational Rules of the Five Classics	Υπάρχει. Ενδεικτικά: στο Suanjing Shi Shu 算经十书 ,(Δέκα υπολογιστικοί κανόνες) μία συλλογή βιβλίων για εκπαιδευτικούς σκοπούς που δημιουργήθηκε το 656 και αντιγράφτηκε πολλές φορές με πρώτη εκτύπωσή του το 1084 και επανεκδόθηκε στα τέλη του 18ου αιώνα[208].	Zhen Luan 甄鸾 [209]	Έξι δυναστείες	6ος αι.
Zhang Qiujian suanjing 張邱建算经 Υπολογιστικός κανόνας του Τσζανγκ ΤσιούΤζιαν - Zhang Qiujian's Computational Canon	Υπάρχει. Ενδεικτικά: στο Siku quanshu 四庫全書 συλλογή βιβλίων που έγινε με υπεύθενο τον Mei Wending, ο οποίος έκανε ένα πρόγραμμα συλλογής αρχαίων βιβλίων και ανακατασκευής τους[210].	Zhen Luan 甄鸞註 [211] σχολιαστής.	Έξι δυναστείες	Τέλος 5ου αι.

[208] Christoph J. Scriba - Peter Schreiber, 5000 Years of Geometry Mathematics in History and Culture, Birkhauser Springer Basel , London, 2015, Σελ122.
[209] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* vol265, springer Paris, σελ206.
[210] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* vol265, springer Paris, σελ148-149.
[211] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* vol265, springer Paris, σελ160.

Sunzi suanjing 孙子算经 Υπολογιστικός κανόνας του Σούντζι - Sunzi's Computational Canon	Υπάρχει. Ενδεικτικά: στο Suanjing Shi Shu 算经十书 ,(Δέκα υπολογιστικοί κανόνες) μία συλλογή βιβλίων για εκπαιδευτικούς σκοπούς που δημιουργήθηκε το 656 και αντιγράφτηκε πολλές φορές με πρώτη εκτύπωσή του το 1084 και επανεκδόθηκε στα τέλη του 18ου αιώνα[212].	Sunzi - 孙子	Έξι δυναστείες	5ος αι. - 400μ.Χ[213].

[212] Christoph J. Scriba - Peter Schreiber, 5000 Years of Geometry Mathematics in History and Culture, Birkhauser Springer Basel , London, 2015, Σελ122.
[213] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* vol265, springer Paris, σελ205.

Shushu jiyi 數術記遺 Σημειώσεις πάνω στις παραδόσεις αριθμητικό - νουμερολικών διαδικασιών - Notes on the Traditions of Arithmo-Numerological Processes).	Υπάρχει. Ενδεικτικά: στο Suanjing Shi Shu 算经十书 ,(Δέκα υπολογιστικοί κανόνες) μία συλλογή βιβλίων για εκπαιδευτικούς σκοπούς που δημιουργήθηκε το 656 και αντιγράφτηκε πολλές φορές με πρώτη εκτύπωσή του το 1084 και επανεκδόθηκε στα τέλη του 18ου αιώνα[214].	Han 漢 , Xu Yue 徐岳 , Bei Zhou 北周 , Zhen Luan 甄鸞 註[215]	Han dynasty	2ος - 3ος αι. μ.Χ. (αρχές τρίτου αι.)[216]

214 Christoph J. Scriba - Peter Schreiber, 5000 Years of Geometry Mathematics in History and Culture, Birkhauser Springer Basel , London, 2015, Σελ122.

215 Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* vol265, springer Paris, σελ160 τα ονόματα και σελ318 υποσημείωση58 η χρονολογία

216 Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* σελ318, υποσημείωση58 η χρονολογία

Haidao suanjing (海岛算经)Υπολογιστικός κανόνας νησιού - Sea Island Computational Canon	Υπάρχει. Ενδεικτικά: στο Suanjing Shi Shu 算经十书 ,(Δέκα υπολογιστικοί κανόνες) μία συλλογή βιβλίων για εκπαιδευτικούς σκοπούς που δημιουργήθηκε το 656 και αντιγράφτηκε πολλές φορές με πρώτη εκτύπωσή του το 1084 και επανεκδόθηκε στα τέλη του 18ου αιώνα[217].	Liu Hui 刘徽 (μαθηματικός, σχολιαστής του JZSS, τέλος του τρίτου αιώνα)		3ος αι[218].

Πίνακας2.

Στην περίοδο ανάμεσα στον 10ο και τον 12ο αιώνα είναι δύσκολο να βρει κάποιος τα πρωτότυπα κείμενα. Ωστόσο, υπάρχουν βιβλιογραφίες που αναφέρουν γύρω στα 50 νέα έργα που μπορούν να τοποθετηθούν εκείνη την περίοδο. Από τα έργα αυτά μπορεί να ανακληθεί ένας μικρός αριθμός πληροφοριών από δευτερογενείς πηγές μετέπειτα έργων που τα αναφέρουν[219]. Από τους τίτλους τους ο Martzloff αναφέρει ότι τα έργα αυτά, μάλλον είναι μικρής σημασίας και αφορούν στοιχειώδη αριθμητική.

Ο Shen Gua/Shen Kuo 沈括(1031-1095), για παράδειγμα, στο έργο του Meng xi bitan (夢溪筆談 / 梦溪笔谈), μία διάσημη συλλογή σημειώσεων με λακωνικές παραγράφους πάνω στα μαθηματικά, αναφέρει τύπους που δεν περιλαμβάνονται στο έργο "Δέκα υπολογιστικοί κανόνες", αλλά ο Martzloff αναφέρει ότι δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερη καινοτομία[220].

Μερικά ακόμα ενδεικτικά παραδείγματα είναι οι συγγραφείς του 11ο και 12 αι Jiǎ Xiàn (賈憲/贾宪) (περίπου 1010-1070 μ.Χ.)[221] και Liu Yi 刘益 1113 μ.Χ.[222] που φαίνεται να γνώριζαν μία μέθοδο που από σύγχρονους μελετητές συσχετίστηκε με το θεώρημα για το τρίγωνο του Πασκάλ και γνώριζαν ακόμα μία μέθοδο που επίσης από πολλούς συσχετίστηκε με τη μέθοδο Ruffini-Horner, μαζί με ένα σύνολο τεχνικών

217 Christoph J. Scriba - Peter Schreiber, 5000 Years of Geometry Mathematics in History and Culture, Birkhauser Springer Basel , London, 2015, Σελ122.
218 Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* σελ205.
219 Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997,σελ16
220 Αυτ., Σελ16.
221 http://en.wikipedia.org/wiki/Jia_Xian, για χρονολογία γέννησης (προσπέλαση: 16/03/2015)
222 http://en.wikipedia.org/wiki/Yang_Hui, για χρονολογία (προσπέλαση: 16/03/2015)

υπολογιστικής άλγεβρας. Οι γνώσεις μας για τα παραπάνω είναι περιορισμένες καθώς βασίζονται σε συγκεχυμένες πληροφορίες που βρίσκονται σε αποσπάσματα έργων του 13ου αιώνα όπως αυτές του Yang Hui (楊輝) ή του Zhu Shijie's (朱世杰). Παραδείγματος χάριν, ο Yang Hui στο έργο του Tianmu bilei chengchu jiefa (田畝比類乘除捷法) του 1275 , αναφέρει τον Liu Yi, ο οποίος έζησε γύρω στο 1113 μ.Χ. και τα *αλγεβρικά προβλήματα,* όπως χαρακτηρίζει ο Martzloff, δευτέρου βαθμού που είχε ο Liu Yi δημιουργήσει. Επίσης, σε ένα από τα εισαγωγικά σημειώματα των βιβλίων Siyuan yujian[223] (四元玉鉴) (Ο πολύτιμος καθρέφτης με τα τέσσερα στοιχεία - The Precious Mirror of the Four unknowns by matrix methods Elements)[224]του Zhu Shijie[225] (朱世杰) , υπάρχει μία λίστα τίλων των "αρχαίων" έργων, τα οποία όλα έχουν πλέον χαθεί. Αυτά τα έργα ο Martzloff ισχυρίζεται ότι πραγματεύονταν διάφορες αλγεβρικές τεχνικές μεταξύ ενός μέχρι τεσσάρων αγνώστων. Η μέθοδος του τριγώνου του Πασκάλ, όπως χαρακτηρίστηκε από πολλούς Ευρωπαίους ιστορικούς, που εμφανίζεται στην αρχή του βιβλίου του Zhu Shijie αναφέρεται ως η "gufa/古法" , δηλαδή η "αρχαία μέθοδος"[226]. Η αναφορά του και μάλιστα με αυτόν τον χαρακτηρισμό υποδεικνύει ότι η αντίστοιχη κινεζική εκδοχή του θεωρήματος του τριγώνου του Πασκάλ ήταν κατανοητή ήδη από τον 12ο αι[227].

(Τα έργα αυτά, είναι προσβάσιμα στον Ευρωπαϊκό κόσμο από εκδώσεις του 19ου αι.)[228].

Η περίοδος ανάμεσα στο 1247 και το 1303, δίνει πολύ περισσότερες πληροφορίες για τα μαθηματικά και έχουμε καλύτερη εικόνα. Το επίπεδο των μαθηματικών έργων , ο Martzloff το χαρακτηρίζει πολύ υψηλότερο από αυτό του Li Chunfeng (李淳风 602 —670) το suanjing shishu[229](算经十书)*.

* Δέκα υπολογιστικοί κανόνες - Ten Commputational Canons

Παραθέτονται τα βιβλία και οι τίτλοι τους ως ανωτέρω στο πίνακα 3.

<u>ΒΙΒΛΙΑ</u>

Από το 1303 μέχρι το 1247.

Βιβλία	**Μεταφρασμένος τίτλος**	**Συγγραφέας**	**Δυναστεία**	**Περίοδος**
Έργο πάνω στην σφαιρική τριγωνομετρία	Έργο πάνω στην σφαιρική τριγωνομετρία	Guo Shoujing 郭守敬	Yuan dynasty	1231-1316[230]

[223] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997,σελ17.
[224] George Gheverghese Joseph, The Crest of the Peacock , Non-European Roots of Mathematics, Princeton University Press, Princeton & Oxford, 3η έκδοση, 2011, Σελ192.
[225] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997,σελ17.
[226] Jean Glaude Martzloff , *A History of Chinese mathematics*, 1997,σελ17.
[227] J. Needham , Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth, Σελ134.
[228] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ17.
[229] Αυτ. Σελ17.
[230] Εκείνη την περίοδο έζησε πληροφορίες για έτος γέννησης και θανάτου από http://hua.umf.maine.edu/China/astronomy/tianpage/0018Guo_Shoujing6603w.html, (προσπέλαση: 17/03/2015)

Siyuan yujian 四元玉鉴 Καθρέφτης από νεφρίτη των τεσσάρων στοιχείων (αγνώστων) - Jade Mirror of the Four Origins [= unknowns]	Υπάρχει. Ενδεικτικά και σε μετάφραση του Jock Hoe, τον 20 αι[231].	Zhushijie 朱世杰	Yuan dynasty	1303
Suanxue qimeng - 算学启蒙 Εισαγωγή στην υπολογιστική επιστήμη - Introduction to the Computational Science	Υπάρχουν[232].	Zhushijie 朱世杰	Yuan dynasty	1299
Yang Hui suanfa - 杨辉算法 πλήρες τίτλος: Suanfa Tongbian Benmo - 算法通變本末 [234]Μαθηματικά του Γιανγκ Χουή	Υπάρχει σε κινεζική μετάφραση από Κορεάτικη έκδοση το πρωτότυπο έχει χαθεί[235].	Yang Hui - 杨辉	Yuan dynasty	1275

[231] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997,σελ8.
[232] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997,σελ33.
[234] http://en.wikipedia.org/wiki/Yang_Hui, (προσπέλαση 17/03/2015)
[235] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997,σελ106.

Tianmu bilei chengchu jiefa - 田畝比類乘除捷法 (Στο συγκεκριμένο έργο έχουμε αναφορά του Liu Yi[236].) Practical rules for arithmetic for surveying[238].	Υπάρχει. Ενδεικτικά: σε σύντομη έκδοση του 19ου αιώνα[239].	Yang Hui - 杨辉	Yuan dynasty	1275
Yigu yanduan 益古演段 Παλιές μαθηματικές τεχνικές στην επέκταση πεδίων - Old mathematics in expanded sections[240]	Υπάρχει. Ενδεικτικά: στο Siku quanshu 四庫全書 συλλογή βιβλίων που έγινε με υπεύθενο τον Mei Wending, ο οποίος έκανε ένα πρόγραμμα συλλογής αρχαίων βιβλίων και ανακατασκευής τους[241].	Lizhi 李治	Song dynasty	1259
Ceyuan haijing 测圆海镜) Καθρέφτης όπως ο ωκεανός αντανακλά τους κύκλους [των παραδείσων] [χαραγμένα και οριοθετημένα] - Mirror like the	Υπάρχει. Ενδεικτικά: στο Siku quanshu 四庫全書 συλλογή βιβλίων που έγινε με υπεύθενο τον Mei Wending, ο οποίος έκανε ένα πρόγραμμα συλλογής	Lizhi 李治 (ή Liye 李冶)	Song dynasty	1248

[236] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ17.
[238] C.J. Scriba, J. W. Dauben writing the history of mathematics Its historical development Birkhauser Verlag Basel, Boston, Berlin, Σελ303
[239] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997,σελ17.
[240] http://en.wikipedia.org/wiki/Yigu_yanduan, (προσπέλαση: 17/03/2015)
[241] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science,* vol265, springer Paris, σελ160.

ocean, reflecting [the heaven] of circles [inscribed and circumscribed	αρχαίων βιβλίων και ανακατασκευής τους[242].			
shu shu jiu zhang 数书九章 Computational Techniques in Nine Chapters	Υπάρχει ενδεικτικά: στο Siku quanshu 四庫全書 συλλογή βιβλίων που έγινε με υπεύθενο τον Mei Wending, ο οποίος έκανε ένα πρόγραμμα συλλογής αρχαίων βιβλίων και ανακατασκευής τους[243].	Qin Jiu Shao 秦九韶	Song dynasty	1247[244]

Πίνακας 3

Άλλα σημαντικά έργα μετέπειτα συγγραφέων είναι και μία εγκυκλοπαίδεια πάνω στην αριθμητική με τίτλο Jiuzhang suanfa bilei daquan (九章算法比类大全[245]- Fully Comprehensive [Collection of] Computational Methods in Nine Chapters with [New Problems and Rules] Devised by Analogy with [Ancient Problems and Rules]), του Wu Jing, που δημιούργησε το 1450 στη δυναστεία των Ming, η οποία περιείχε μέσα στα άλλα, όλα τα προβλήματα από το Jiuzhang suanshu[246].

Επίσης, το 1592 έχουμε το Suanfa tongzong (General Source of Computational Methods) του Cheng Dawei, που ήδη έχει αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο, το οποίο περιλαμβάνει μία συλλογή από αριθμητικά έργα και έχει επανεκδοθεί πάρα πολλές φορές ακόμα και στον 20αι. Το εν λόγω έργο είναι γνωστό ακόμα και στην Ιαπωνία και το Βιετνάμ[247].

Στη δυναστεία των Ming (τέλη του 16ου αι. και αρχές του 17ου αι.), η Κίνα έρχεται σε επαφή με τους Δυτικούς και εκείνη την περίοδο έχουμε την εμφάνιση του Matteo Ricci (1552-1610)[248]. Ο Matteo Ricci ανακάλυψε ότι το ημερολόγιο της Κίνας

[242] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science*, vol265, springer Paris, σελ160.
[243] Florence Bretelle-Establet, *Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science*, vol265, springer Paris, σελ160.
[244] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*. Cambridge: MIT Press, 1973, σελ2.
[245] http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B9%9D%E7%AB%A0%E8%AF%A6%E6%B3%A8%E6%AF%94%E7%B1%BB%E7%AE%97%E6%B3%95%E5%A4%A7%E5%85%A8 (προσπέλαση: 18/03/2015)
[246] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ20.
[247] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ20.
[248] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ20.

είχε λάθη. Εκείνη την περίοδο κυριαρχούσε η δυναστεία των Ming, η οποία ήθελε να διορθώσει το ημερολόγιο. Ο Matteo Ricci πήρε την ευκαιρία και χρησιμοποίησε τα ευρωπαϊκά μαθηματικά στο πεδίο της αστρονομίας ως μέσο για να εκχριστιανίσει την Κίνα[249]. Το ημερολόγιο του Matteo Ricci προκάλεσε μεγάλες αναταραχές ανάμεσα στο Χριστιανικό και Κινέζικο κόσμο, αλλά εν τέλη έγινε δεκτό από τους Ming, λόγω της εγκυρότητας των προβλέψεων των εκλείψεων που έγιναν στις 15 Δεκεμβρίου του 1610 και στις 21 Ιουνίου του 1629[250]. Από εκείνη την περίοδο και μετά συνεχίστηκαν να γράφονται έργα, αλλά ξεκινάνε πλέον οι Ευρωπαϊκές επιρροές. Οπότε θα σταματήσουμε την αναφορά μας στα βιβλία και θα προχωρήσουμε στην επεξήγηση κάποιων χαρακτηριστικών και πολυσυζητημένων στην Ευρώπη κινεζικών μεθόδων για τις μαθηματικές πράξεις στα μαθηματικά.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

2.2 Κινεζικά Παραδείγματα

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου θα γίνει αναφορά μερικών από τις πλέον πολυσυζητημένες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων που βρέθηκαν σε διάφορα κινεζικά έργα και έγιναν γνωστές στην Ευρώπη. Δεν θα γίνει στο μέρος αυτό καμία πραγμάτευση περί προέλευσης των μεθόδων που θα δείξουμε παρακάτω, θα περιοριστούμε στην απλή αναφορά τους.

Από τις μεθόδους που έγιναν γνωστές στην Ευρώπη θα δοθεί μεγαλύτερο βάρος στο πεδίο της αριθμητικής, ενώ στο πεδίο της γεωμετρίας θα γίνει αναφορά μόνο σε δύο τεχνικές, η μία εκ των δύο θα είναι επέκταση ενός προβλήματος που θα επιλυθεί νωρίτερα και αφορά την εξαγωγή ριζών. Θα αναφερθούμε στη μέθοδο Fangcheng, στον κανόνα Dayan, στη μέθοδο zeng-cheng(增-乘) και στο πεδίο της γεωμετρία στις τεχνικές gougu.

Πρέπει να αναφερθεί ότι οι συγγραφείς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία όπως ο Needham, ο Martzlof, ο Libbrecht κ.α. Χρησιμοποιούν πολύ τους όρους "άλγεβρα" και "εξίσωση". Ακολουθώντας όμως ένα αυστηρό πλαίσιο ορισμού της "άλγεβρας" από τους Oaks και Alkhateeb που υποστηρίζουν ότι μία αλγεβρική λύση πρέπει να πληρεί τα εξής κριτήρια (1) τοποθέτηση μίας εξίσωσης σε όρους αλγεβρικών αριθμών (2) απλοποίηση μίας εξίσωσης σε έναν από τους βασικούς τύπους και (3) χρήση της επίσημης διαδικασίας για να φτάσουμε στην απάντηση του προβλήματος[251], τα οποία δεν πληρούνται στην περίπτωση των κινεζικών μαθηματικών, δεν μπορεί στα πλαίσια αυτής της εργασίας να γίνει διαχωρισμός ανάμεσα σε τρία πεδία αριθμητική, άλγεβρα και γεωμετρία, όπως κάνουν και οι προαναφερθέντες συγγραφείς. Ο διαχωρισμός θα υπάρξει ανάμεσα σε δύο πεδία, το ένα θα είναι η αριθμητική και το άλλο η γεωμετρία.

Από κάποιους ιστορικούς υπάρχουν στοιχεία που υποστηρίζουν ότι το αρχαιότερο εγχειρίδιο άλγεβρας είναι τα "Αριθμητικά" και προέρχεται από τον Διόφαντο τον 3ο αι μ. Χ. η άποψη αυτή μπορεί να στηριχτεί στον Henk Bos, ο οποίος εξηγεί ότι " η Άλγεβρα αναφέρεται σε αυτές τις μαθηματικές θεωρίες και πρακτικές

[249] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ21.
[250] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ22.
[251] Ιωάννης Χριστιανίδης, "Historia Mathematica", vol. 34, 2007, σελ291.

που εμπλέκουν αγνώστους και / ή indeterminates, που χρησιμοποιούνται στις αλγεβρικές πράξεις, εμπλέκουν εξισώσεις και πραγματεύονται είτε αριθμούς είτε γεωμετρικά μεγέθη είτε μεγέθη σε ένα πεδίο με πιο ευρεία έννοια."[252] Κατά συνέπεια ο Διόφαντος κάνει υπολογισμούς με τον άγνωστο, δίδοντάς του και κάποιους συμβολισμούς όπως το "ς", οπότε μπορούμε να μιλήσουμε για άγεβρα[253]. Από την άλλη όμως, στα κινεζικά μαθηματικά δεν υφίσταται αυτή η δομή επίλυσης προβλημάτων. Παρότι υπάρχουν άγνωστοι στα προβλήματα, όλες οι πράξεις γίνονται καθαρά με αριθμούς που θα μπορούσαμε να τους χαρακτηρίσουμε συντελεστές των αγνώστων αλλά , όπως θα δούμε παρακάτω, δεν είναι οι ίδιοι οι άγνωστοι που εμπλέκονται στις πράξεις. Ο διαχωρισμός που θα γίνει ωστόσο, ανάμεσα στα πεδία της αριθμητικής και της άλγεβρας, δεν είναι κατακριτέος, ακόμα και στην περίπτωση, που κάποιος στηρίζει την άποψη της ύπαρξης άλγεβρας ή εξισώσεων στα κινέζικα μαθηματικά, αφού πάλι βάσει του Henk Bos,: "Όσο πραγματεύεται αριθμούς η άλγεβρα είναι μέρος της αριθμητικής.[254]" . Αυτό μας δίνει την ελευθερία των χαρακτηρισμών κάποιων πράξεων ως "άλγεβρα" ή "εξίσωση" για λόγους ευκολίας κατά τις απόψεις των όποιων συγγραφέων αναφερθούν στο πλαίσιο της αριθμητική, έχοντας πάντα κατά νου ότι δεν μιλάμε για "άλγεβρα" ή "εξίσωση", αλλά για καθαρές αριθμητικές πράξεις. Οπότε ο διαχωρισμός στα δύο και όχι σε τρία πεδία θεωρώ ότι είναι έγκυρος και οι - διατηρώντας όλες τις επιφυλάξεις- όροι που θα χρησιμοποιηθούν δεν αντιστοιχούν σε κάτι διαφορετικό από την αριθμητική αν θεωρήσουμε ότι η άλγεβρα ανήκει στην αριθμητική.

Θα πρέπει να γίνει μία σημείωση. Ο Διόφαντος έζησε τον 3ο αι μ.Χ. Ίσως και νωρίτερα[255]. Από πολλούς θεωρείται ότι μαζί του ξεκινάει η άλγεβρα. Οι Κινέζοι μαθηματικοί, δεν κάνουν πράξεις με αγνώστους και δεν χρησιμοποιούν συμβολισμούς για τον χαρακτηρισμό των αγνώστων. Υπάρχει ωστόσο και η αντίθετη άποψη. Ο Needham στο κεφάλαιο 19, υποπαράγραφο 8, στον τρίτο τόμο της σειράς "Science and civilisation in China" εξηγεί ένα σύστημα συμβολισμών υπό την ονομασία Tianyuan(天元）, την οποία χαρακτηρίζει ως άλγεβρα[256].Ο Martzloff, στο βιβλίο του "A History of Chinese mathematics" στο κεφάλαιο *13th-Century Chinese Algebra: the Tianyuan Shu* αναφέρει ότι τον 13ο αι μ.Χ. αναπτύχθηκε στην Κίνα η άλγεβρα υπό την ονομασία Tian yuan και κάνει μία ανάλυση των συμβολισμών επιλύοντας και ένα πρόβλημα[257]. Ο Martzloff θεωρεί ότι η προέλευσή της tianyuan είναι αποτέλεσμα επιρροών από άλλες χώρες[258]. Ο Martzloff υποστηρίζει ότι παρά τις επαφές της Κίνας με τους Άραβες δεν υπάρχει ομοιότητα της Tianyuan με την αραβική μέθοδο[259]. Ωστόσο, όχι μόνο από τον Martzloff, αλλά και από διάφορους συγγραφείς μπορούμε να δούμε ότι υπήρχαν επαφές της Κίνας με άλλους λαούς,

[252]Ιωάννης Χριστιανίδης, "Historia Mathematica", vol. 34, 2007, σελ303.
[253] Ιωάννης Χριστιανίδης, *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών*, πανεπιστημιακές εκδώσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003, σελ108.
[254] Ιωάννης Χριστιανίδης, "Historia Mathematica", vol. 34, 2007, σελ303
[255] Ιωάννης Χριστιανίδης, "Historia Mathematica", vol. 34, 2007, σελ290.
[256] J. Needham , Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth, Cambridge University Press, Cambridge, 1959, σελ129-133.
[257] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ258-271.
[258] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ104.
[259] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ258.

όπως και με τους Άραβες[260].

Κατά την άποψή μου ενδέχεται να υπάρχει μία πρώιμη μορφή ανάπτυξης συμβολισμών των αγνώστων τον 13ο αιώνα, χωρίς απαραίτητα να χρειάζεται να τους εντάξουμε στο πεδίο της άλγεβρας. Το σύστημα των κινεζικών μαθηματικών είναι τοποθετικό (θα το δούμε παρακάτω). Ανάλογα με τη θέση που βρισκόταν ο κάθε αριθμός, χρησιμοποιούνταν για συγκεκριμένη πράξη. Το ίδιο μπορεί να συμβαίνει και με τη δήλωση των αγνώστων, θα μπορούσαν να εκφραστούν τοποθετικά, όπως ισχυρίζονται οι Martzloff και Needham. Αν κάνουμε μία σύνδεση γεγονότων δεν είναι αδύνατο να ξεκίνησε η Κίνα τον 13ο αιώνα να αναπτύσσει μία μορφή άλγεβρας. Να αναφέρουμε ότι από τον 7ο αιώνα μ.Χ. Έχουμε μία φοβερή ανάπτυξη των Ισλαμικών χωρών η οποία οδήγησε στη μετάφραση πολλών επιστημονικών, φιλοσοφικών και μαθηματικών κειμένων[261]. Μέσα σε αυτά είναι και η μετάφραση του έργου του Διοφάντου. Τα "Αριθμητικά" του Διόφαντου, αποτελούνται από 13 βιβλία, αλλά δέκα είναι αυτά που έχουν σωθεί μέχρι σήμερα τα τέσσερα εκ των οποίων είναι σε πρωτότυπο ελληνικό κείμενο και τα έξι σε Αραβική μετάφραση του 9ου αιώνα[262]. Δεν είναι απίθανο λοιπόν, εφόσον, υπάρχει αυτή η ανάπτυξη στον Αραβικό κόσμο, η Κίνα να είχε έρθει σε επαφή με τους Άραβες και να επηρεάστηκε από την επιστημονική εξέλιξή τους σε διάφορους τομείς. Μέσα σε αυτούς είναι και η ανάπτυξη του συστήματος της άλγεβρας. Η Κίνα δεν είναι παράλογο να διατηρήσει τη δική της μεθοδολογία στην διεκπεραίωση των υπολογισμών, αλλά να ενσωματώσει σε αυτούς μία ακόμα μέθοδο, αυτή των συμβολισμών ακόμα και τον πράξεων ανάμεσα σε σύμβολα αλλά πάντα με τοποθετικό τρόπο. Κοινώς μπορεί να επηρεάστηκε από τους Άραβες και να δανείστηκε στοιχεία από την άλγεβρα, αλλά τα ενσωμάτωσε στη δική της μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων. Οπότε, ενδέχεται μετά από ένα συνδυασμό κατά τον οποίο διατηρήθηκε ο τοποθετικός τρόπος υπολογισμών κατά την παράδοση του κινεζικού πολιτισμού να ενσωματώθηκαν οι αλγεβρικές επιρροές από Αραβικούς πολιτισμούς και να ανέπτυξαν το δικό τους συμβολικό σύστημα τοποθετικής φύσης φέρνοντάς το στα πλαίσιο του δικού τους πολιτισμού. Άλλωστε οι αριθμητικές πράξεις είναι ίδιες σε όλο τον κόσμο είτε γράφεις τον αφαιρέτη ορθογώνια είτε οριζόντια είτε διαγώνια δεν έχει σημασία. Το νόημα της πράξης της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, της πρόσθεσης μένει το ίδιο. Το ίδιο θεωρώ ότι ισχύει και στην περίπτωση που ανάλογα της θέσης μίας ράβδου δηλώνεται ο κάθε άγνωστος.

Ωστόσο, πέραν από ένα τοποθετικό σύστημα συμβολισμών, που αναπτύχθηκε στην Κίνα τον 13ο αιώνα δεν θα τοποθετηθώ στην ύπαρξη η μη της άλγεβρας εκείνης της περιόδου στην Κίνα, παρότι δεν το θεωρώ αδύνατο, αλλά λόγω μεγάλης διαμάχης πάνω στους όρους "εξίσωση" και "άλγεβρα" στην οποία δεν θέλω να εμπλακώ θα διατηρήσω τη θέση ότι τον 13ο αιώνα μ.Χ. έχουμε την ανάπτυξη ενός συστήματος που πλέον δηλώνει του αγνώστους τοποθετικά.

---

[260] Ενδεικτικά Βλέπε: Martzloff *A History of Chinese mathematics*, 1997, κεφάλαιο 10 και Needham υποκεφάλαιο *influences and transmitions ,* του κεφαλαίου 19.

[261] Ιωάννης Χριστιανίδης, *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών*, πανεπιστημιακές εκδώσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003, σελ113.

[262] Ιωάννης Χριστιανίδης, *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών*, πανεπιστημιακές εκδώσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003, σελ108.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ:

2.2.1 Η μέθοδος Fangcheng (方程)

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή από διάφορες αναφορές σε ιστορικά κείμενα όπως από την αναφορά της στο 8ο κεφάλαιο του jiuchang suanshu που είχε γράψει ο Qin Jiu Shao[263] τον 13ο αι. καθώς και από άλλους συγγραφείς όπως ο Liu Hui[264] που έζησε τον 3ο αι μ.Χ. αλλά και από τον Yang Hui[265] που έζησε τον ίδιο αιώνα με τον Qin Jiu Shao. Ο όρος στα σύγχρονα κινέζικα σημαίνει "εξίσωση[266]"ωστόσο, οι πράξεις είναι καθαρά αριθμητικές όπως θα δούμε παρακάτω, οπότε δεν μπορούμε να ερμηνεύσουμε την μέθοδο επίλυσης ως "εξίσωση". Κατά τον Needham η μετάφραση για την χρήση του όρου εκείνης της περιόδου είναι ο τρόπος υπολογισμού με πινακοποίηση "The way of calculating by tabulation[267]". Βάσει της συγκεκριμένης μεθόδου τα διάφορα στοιχεία τοποθετούνταν σε ένα πίνακα με ορθογώνιες στήλες. Το κεφάλαιο, που βρίσκεται η συγκεκριμένη μέθοδος, πραγματεύεται κατά την εξήγηση του Needham παράλληλες γραμμικές εξισώσεις χρησιμοποιώντας θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Θεωρείται ως η πιο πρώιμη αναφορά σε αρνητικούς αριθμούς στην ιστορία. Ενδεικτικά το τελευταίο κεφάλαιο αναμειγνύει τέσσερις - κατά τον Needham - εξισώσεις και πέντε αγνώστους που προμηνύει απροσδιόριστο αριθμό - όπως αναφέρει ο Needham -εξισώσεων[268]. (Να διευκρινίσουμε όπως θα δούμε παρακάτω ότι στο πρόβλημα υπάρχουν άγνωστοι που ζητούνται, αλλά δεν παίρνουν μέρος στις πράξεις.)

Η μέθοδος επίλυσης αυτού του είδους προβλημάτων αφορά απλές αριθμητικές πράξεις χωρίς την εμπλοκή δυνάμεων. Για να γίνει καλύτερη η παρουσίαση της μεθόδου θα γίνει μία μικρή επεξήγηση των όρων που χρησιμοποιούνταν στα κινεζικά μαθηματικά όπως αναφέρεται στο βιβλίο του Qin Jiu Shao από το σχολιαστή του Liu Hui. Για την διεκπεραίωση των υπολογισμών κατασκευάζουμε στήλες στις οποίες τοποθετούμε αριθμούς -μετρητικές ράβδους. Βάσει του λεξιλογίου του Liu Hui η δεξιά στήλη ονομάζεται "σύνολο" (zong / 总) ή "διαιρετέος" (πραγματικό) (dividend) (shi / 實) . Ο λόγος που χρησιμοποιείται στον τελευταίο όρο, ο συγκεκριμένος χαρακτηρισμός ("διαιρετέος") είναι επειδή ο στόχος των υπολογιστικών διαδικασιών της μεθόδου είναι να μειώσει τις πράξεις σε βαθμό τέτοιο που να δίνεται το αποτέλεσμα μέσω μίας απλής διαίρεσης όπου το στοιχείο στη στήλη shi θα έχει το ρόλο του διαιρετέου[269].

Οι επόμενες στήλες ακολουθούν από τα αριστερά βάσει της κινέζικης γραφής

---

[263] J. Needham , Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth, Cambridge University Press, Cambridge, 1959, σελ26.
[264] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ251.
[265] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ250.
[266] Zhu Shengpeng, Wang Xiaoying, *Συνοπτικό Κινεζοελληνικό Λεξικό* , SISU, Σαγκάη, 2000, Σελ159
[267] J. Needham , Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth, Cambridge University Press, Cambridge, 1959, σελ26.
[268] J. Needham , Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth, Cambridge University Press, Cambridge, 1959, σελ26.
[269] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ251.

που ξεκινάει από τα δεξιά προς τα αριστερά. Η πρώτη στήλη βάσει των σημειώσεων του Liu Hui δημιουργείται από την πρώτη συνθήκη του προβλήματος και οι υπόλοιπες από ακόλουθες συνθήκες που θέτει το πρόβλημα. Στο ερώτημα που φυσικά δημιουργείται, περί του πόσες στήλες χρειάζονται για να επιλυθεί το εκάστοτε πρόβλημα, ο Liu Hui (σχολιαστής, όχι συγγραφέας) στο Jiuzhang suanshu στο 8ο κεφάλαιο, λέει ότι κατασκευάζουμε τόσες στήλες όσα είναι και τα άγνωστα στοιχεία που έχουμε. Οι στήλες δημιουργούνται με τρόπο τέτοιο ώστε να μπορεί να γίνει επίλυσή τους με χρήση μετρητικών ράβδων[270]. Το κεφάλαιο 8 φέρει τον τίτλο της μεθόδου, δηλαδή Fangcheng[271].

Παρακάτω θα το δείξουμε σχηματικά με τη δική μας γραφή για να γίνει πιο κατανοητό[272]:

$\alpha_{\nu 1}...\alpha_{\iota 1}...\alpha_{11}$ πρώτο άγνωστο στοιχείο

$\alpha_{\nu 2}...\alpha_{\iota 1}...\alpha_{11}$ δεύτερο άγνωστο στοιχείο

... .

$\alpha_{\nu\nu}...\alpha_{\iota\nu}...\alpha_{1\nu}$ νιοστό τρίτο στοιχείο

$\beta_{\nu}...\beta_{\iota}...\beta_{1}$ διαιρέτες

Το συγκεκριμένο "σχήμα" στα σύγχρονα Ευρωπαϊκά μαθηματικά εκφράζεται ως παρακάτω[273]:

$$\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + ... + \alpha_{1\nu}\chi_\nu = \beta_1$$

$$\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + ... + \alpha_{2\nu}\chi_\nu = \beta_2$$

....

$$\alpha_{\nu 1}\chi_1 + \alpha_{\nu 2}\chi_2 + ... + \alpha_{\nu\nu}\chi_\nu = \beta_\nu.$$

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου θα δούμε το πρώτο πρόβλημα από το 8ο κεφάλαιο του jiuzhang suanshu, λυμένο για να κατανοήσουμε καλύτερα πώς εφαρμόζεται. Θα το παρουσιάσουμε στο μεγαλύτερο βαθμό όπως το αναφέρει και ο Martzloff στο βιβλίο του "A History of Chinese mathematics" και προτιμάται για την κατανόηση της μεθόδου συγκριτικά με παραδείγματα που φέρουν άλλοι συγγραφείς, όπως ο Libbrecht στο "Mathematics in the thirteen century" στο κεφάλαιο 10, λόγω της ευκολίας που φέρουν οι μικροί αριθμοί του προβλήματος. Επειδή ωστόσο, δεν το ολοκληρώνει, απλά δείχνει μέρος της μεθοδολογίας, οι υπόλοιπες πράξεις είναι διατυπωμένες στη γνωστή αριθμητική μας γλώσσα, χωρίς να γίνεται παρουσίαση

[270] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ251.
[271] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, 1973, σελ154 υποσημείωση 15.
[272] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ252.
[273] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ252.

σχηματική ακολουθώντας τη μεθοδολογίας όπως αναφέρεται στο “Jiu Zhang Suan Shu and the Gauss Algorithm for Linear Equations” του Yuan Yan Xiang στη σελίδα 13. Χωρίς αυτό να σημαίνει ότι το έργο άλλων συγγραφέων όπως και του προαναφερθέντα δεν είναι αξιόλογο.

Το μεταφράζω αυτούσιο το πρόβλημα όπως αναφέρεται στον Martzloff, “A History of Chinese mathematics” σελ252:

“Υποθέστε ότι έχουμε 3 δέματα υψηλής ποιότητας δημητριακών, 2 δέματα μεσαίας ποιότητας δημητριακών και ένα κουτί χαμηλής ποιότητας δημητριακών, που ανέρχονται σε 39 dou （度[274]) σιτηρών. [υποθέστε ότι επίσης έχουμε] 2 δέματα υψηλής ποιότητας δημητριακών, 3 μεσαίας ποιότητας και 1 χαμηλής ποιότητας, που ανέρχονται σε 34 dou （度) σιτηρών. 1 δέσμη υψηλής ποιότητας δημητριακών, 2 μεσαίας και 3 χαμηλής ποιότητας που ανέρχονται στα 26 dou （度) σιτηρών.

Ερώτηση: πόσα dou （度) σιτηρών σε μία δέσμη υψηλής - μεσαίας και χαμηλής ποιότητας υπάρχουν, αντιστοίχως;[275]”

Απάντηση:
1 δέσμη υψηλής ποιότητας δημητριακών: 9 du (度) 1/4
1 δέσμη μεσαίας ποιότητας δημητριακών: 4 du (度) 1/4
1 δέσμη χαμηλής ποιότητας δημητριακών: 2 du (度) 3/4

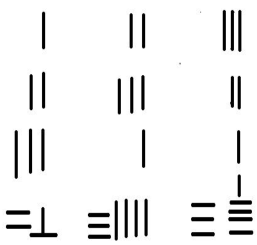
Στη σύγχρονη αλγεβρική μορφή του το πρόβλημα μεταφράζεται ως εξής:

$$\boxed{\begin{array}{c} 3\chi+2\psi+\zeta=39 \\ 2\chi+3\psi+\zeta=34 \\ X+2\psi+3\zeta=26 \end{array}}$$

Πίνακας 4

Βάσει της κινέζικη μεθόδου το πρόβλημα αναπαρίσταται ως εξής:

[274] Οι μονάδες μόνο είναι από: U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, 1973, σελ76
[275] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ252



Σχήμα1[276]

1	2	3	Υψηλή
2	3	2	Μεσαία
3	1	1	Χαμηλή
26	34	39	Σιτηρά

Πίνακας5[277]

Μόλις οι ράβδοι μπουν σε αυτή τη μορφή οι υπολογισμοί μπορούν να ξεκινήσουν.

Η μέθοδος του πολλαπλασιασμού ονομάζεται “biancheng” (偏乘) και της αφαίρεσης “zhichu” (直除).

<u>Η διαδικασία των πράξεων.</u> Για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα 5 με τους οικείους σε μας, αραβικούς αριθμούς. Από τις τρεις στήλες που υπάρχουν στον πίνακα 5, η κεντρική θα κινηθεί περισσότερο. Όλα τα ψηφία της θα πολλαπλασιαστούν με τον πρώτο αριθμό στην δεξιά στήλη (εδώ το 3) και στη συνέχεια το αποτέλεσμα του κάθε ψηφίου θα αφαιρεθεί από τα ψηφία που υπάρχουν στη στήλη που είναι πάλι δεξιά. Η αφαίρεση θα γίνει σε κάθε ψηφίο της κεντρικής στήλης με το κάθε απέναντι ψηφίο της δεξιάς. Όχι μόνο με τον πρώτο αριθμό(3).

Δηλαδή:

1	2	3	2*3=6	6-3=3	3-3=0	Κενό*
2	3	2	3*3=9	9-2=7	7-2=5	5
3	1	1	1*3=3	3-1=2	2-1=1	1
26	34	39	34*3=102	102-39=63	63-39=24	24

Πίνακας 6[278]

Οπότε ο αρχικός πίνακας 5 παίρνει τη μορφή:

1			3
2	5		2
3	1	1	
26	24	39	

Πίνακας 7[279]

* Να σημειώσουμε ότι στη χρήση μετρητικών ράβδων δήλωναν το μηδέν με το κενό[280].

Πριν συνεχίσουμε τη διαδικασία, πρέπει να σημειώσουμε ότι τα νούμερα είναι

276 Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ253.
277 Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ253.
278 Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ253.
279 Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ254.
280 J. Needham , Science and civilization in China, vol. 3, Mathematics and the sciences of the heavens and the earth, Cambridge University Press, Cambridge, 1959, σελ126 υποσημείωση f.

τοποθετημένα κατά αυτόν τον τρόπο επειδή όπου υπάρχει νούμερο στην αρχαία Κίνα χρησιμοποιούσαν ράβδους. Οπότε έπρεπε να υπάρχει κενό ανάμεσα στους “αριθμούς” για να τοποθετούνται οι επονομαζόμενες μετρητικές ράβδοι με τρόπο τέτοιο ώστε να μην εμπλέκονται μεταξύ τους και αλλοιώνονται οι τιμές. Στο σχήμα1 μπορεί κανείς να δει πώς ήταν τοποθετημένες οι ράβδοι. Ο πίνακας 5 είναι η μεταφορά των θέσεων των αριθμών όπως συμβολίζονται από τις ράβδους.

Η διαδικασία που έγινε με την πρώτη στήλη θα επαναληφθεί με την τελευταία αριστερά στήλη και έχουμε ως ακολούθως:

1 3 2 5 2 3 1 1 26 24 39	1*3=3 3 2*3=6 5 2 3*3=9 1 1 26*3=78 24 39	3-3=0 3 6-2=4 5 2 9-1=8 1 1 78-39=39 24 39	3 4 5 2 8 1 1 39 24 39

Πίνακας 8[281]

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την μεσαία στήλη και την αριστερή, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που ακολουθούσαμε με την πρώτη στήλη και τις υπόλοιπες. Δηλαδή θα χειριστούμε την δεύτερη στήλη σαν να είναι η πρώτη. Ο στόχος μας είναι να απλοποιήσουμε την πρώτη στήλη, μηδενίζοντας **ακόμα ένα ψηφίο** ώστε να έχουμε δύο μόνο. Αλλά το στάδιο της απλοποίησης θα το δούμε στο επόμενο βήμα αναλυτικά.

Οπότε έχουμε την ακόλουθη διαδικασία:

3 4 5 2 8 1 1 39 24 39	3 4*5=20 5 2 8*5=40 1 1 39*5=195 24 39	3 20-5=15 5 2 40-1=39 1 1 195-24=171 24 39

Πίνακας 9[282]

Οπότε η τελική μορφή του πίνακα 9 είναι:

		3
15	5	2
39	1	1
171	24	39

Πίνακας 10[283]

Η επόμενη διαδικασία όμως είναι διαφορετική από αυτή που ακολουθούσαμε μέχρι τώρα. Όταν έχουμε αυτή τη μορφή στις πράξεις επιθυμούμε την απλοποίηση. Η απλοποίηση γίνεται με την πράξη της αφαίρεσης. Αφαιρούμε την κεντρική στήλη από την τελευταία αριστερή. Στο σημείο αυτό ως στόχο έχουμε να μείνουν στην τελευταία αριστερή στήλη 2 μόνο αριθμοί. Υπάρχει ακόμα ένα βήμα το οποίο θα δούμε στη συνέχεια.

[281] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ254.
[282] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ254.
[283] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ254.

Οπότε έχουμε:

3 15 5 2 39 1 1 171 24 39	3 15-5=10 5 2 39-1=38 1 1 171-24=147 24 39	3 10 5 2 38 1 1 147 24 39

Πίνακας 11[284]

3 10 -5=5 5 2 38 -1=37 1 1 147-24=123 24 39	3 5 5 2 37 1 1 123 24 39	3 5-5=0 5 2 37-1=36 1 1 123-24=99 24 39

Πίνακας 12[285]

3 5 2 36 1 1 99 24 39

Πίνακας 13[286]

Στο σημείο αυτό στον πίνακα 13 έχουμε τα δύο ψηφία που μας ενδιαφέρουν. Έχουμε φέρει το σύστημα σε *τριγωνική μορφή*. Βάσει του Liu Hui έχουμε την πληροφορία ότι το 36 και το 99 παίζουν το ρόλο του διαιρέτη και το 99 του διαιρετέου. Άρα τα σιτηρά χαμηλής ποιότητας ο άγνωστος σε μας έχουν την τιμή[287] :

Σιτηρά χαμηλής ποιότητας $=99/36 \;= 2\frac{3}{4}$ 288

(α)

Το επόμενο βήμα είναι να πάμε στην κεντρική στήλη και να πολλαπλασιάσουμε το 1 με το αποτέλεσμα που βρήκαμε το $2\frac{3}{4}$. Αφού το κάνουμε αυτό το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού το αφαιρούμε από τον τελευταίο αριθμό που στην κεντρική στήλη είναι το 24 και το διαιρούμε με τον αριθμό που βρίσκεται στην κορυφή δηλαδή τον 5. Οπότε σε σύγχρονη μετάφραση έχουμε το αποτέλεσμα των σιτηρών μεσαίας ποιότητας:

Σιτηρά μεσαίας ποιότητας$=\dfrac{24-1*2\frac{3}{4}}{5}=4\frac{1}{4}$ (β)[289]

Για να βρούμε τα σιτηρά υψηλής ποιότητας πάμε στην πρώτη στήλη στα δεξιά,

[284] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ254.
[285] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ254.
[286] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ254.
[287] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ254.
[288] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ254.
[289] http://www.math.uiuc.edu/documenta/vol-ismp/10_yuan-ya-xiang.pdf (προσπέλαση:23/3/2015)

δηλαδή στην αρχική στήλη που κατασκευάσαμε. Παίρνουμε τον δεύτερο από την κορυφή αριθμό το 2 και το πολλαπλασιάζουμε με το αποτέλεσμα που βρήκαμε στην (β), στα μεσαίας ποιότητας σιτηρά που είναι $4\frac{1}{4}$. Στη συνέχεια τον τρίτο σε σειρά αριθμό από την κορυφή το 1 και το πολλαπλασιάζουμε με το αποτέλεσμα που βρήκαμε στο ζ, δηλαδή τα σιτηρά χαμηλής ποιότητας που είναι το $2\frac{3}{4}$. Τα αποτελέσματα αυτών τα αφαιρούμε από το 39 που είναι το τελευταίο νούμερο στην δεξιά στήλη. Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης αυτής διαιρείται με το 3 που είναι ο αριθμός στην κορυφή της δεξιάς στήλης. Οπότε σε σύγχρονη μετάφραση για λόγους συντομίας, έχουμε την τιμή των σιτηρών υψηλής ποιότητας:

$$\text{Σιτηρά υψηλής ποιότητας}=\frac{39-2*4\frac{1}{4}-1*2\frac{3}{4}}{3}=9\frac{1}{4} \qquad (\gamma)^{290}$$

Σημείωση: οι μετρητικές ράβδοι χρησιμοποιούνταν πάνω σε ένα πίνακα που ονομαζόταν “μετρητικός πίνακας”. Ανάλογα με τα στάδια των πράξεων χρειάζονταν η κατασκευή νέων πινάκων. Ο κάθε πίνακας ανάλογα με τη σειρά που κατασκευαζόταν είχε διαφορετική ονομασία ώστε να μην υπάρχει σύγχυση μεταξύ των πινάκων. Ο κάθε πίνακας ολοκληρωνόταν κάθε φορά που οι πράξεις θα έφταναν στην πράξη της διαίρεσης[291]. Οι ονομασίες των πινάκων με σειρά κατασκευής τους ήταν dinglu (定率)[292], gantu(干圖)， gongtu (宫圖）[293] , zhitu (支 圖)[294] και runtu(閏圖)[295], (όπου 圖 μπορεί να σημαίνει σχέδιο, σχήμα ή εικόνα).

Στην περίπτωση που συνέβαινε να μην καταλήξουμε σε τριγωνική μορφή όπως στον πίνακα 14, που εκφράζει ένα πρόβλημα από το Jiu zhang suan shu (το 8-3)[296] :

1		2
	3	1
4	1	
1	1	1

Πίνακας 14 (JZSS problem 8-3)[297]

Έχουμε τη δυσκολία ότι δεν θα μπορούσαμε να αφαιρέσουμε το 2 από το 1 ή το 1 από το τίποτα ή ακόμα το 2 από το 1. Δεν είναι πάντα σίγουρο ότι όλες οι αφαιρέσεις μπορούν να διεκπεραιωθούν με απευθείας πράξη. Αυτό το πρόβλημα

290 http://www.math.uiuc.edu/documenta/vol-ismp/10_yuan-ya-xiang.pdf (προσπέλαση:23/3/2015)
291 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, 1973, σελ157 - 158.
292 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, 1973, σελ156.
293 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, 1973, σελ158.
294 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, 1973, σελ158.
295 U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, 1973, σελ160.
296 Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ256.
297 Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ256.

επιλύθηκε εύκολα, αφού ακόμα και στην εποχή που γράφτηκε το εν λόγω βιβλίο αναγράφεται η λύση όπου γίνεται η χρήση δύο άλλων ειδών αριθμών των θετικών και αρνητικών. Η μέθοδος για τους αρνητικούς και θετικούς αριθμούς ονομαζόταν zheng fu shu (正負数). Ο Martzloff μεταφράζει την έκφραση αυτή ως "ο κανόνας των θετικών και αρνητικών αριθμών" [298].

Στην περίπτωση της διαίρεσης στο τέλος των υπολογισμών όταν συνέβαινε ο διαιρέτης να ήταν μηδέν, η διαίρεση ήταν αδύνατη. Για να επιλυθεί ένα τέτοιο πρόβλημα χρειαζόταν να βασιστούν όχι μόνο σε πάρα πολλές αλγεβρικές πράξεις αλλά και σε λεκτικούς υπολογισμούς[299].

Τέλος, Ένα ακόμα πρόβλημα που υπήρχε ήταν οι πολλές πράξεις. Για παράδειγμα αν έπρεπε να αφαιρέσουμε το 27 από το 125.172 μέχρι να καταλήξουμε στο μηδέν θα χρειαζόμασταν 4.363 αφαιρέσεις! Για τον λόγω αυτό ο Liu Hui προσπάθησε να απλοποιήσει τη μέθοδο fangcheng[300], αλλά ενδεχόμενα εξαιτίας των απροσδόκητων εμποδίων που αντιμετώπισε αποφάσισε να διευρύνει το φάσμα των τεχνικών της μεθόδου[301]. Παραδείγματος χάριν, στο 8-18 πρόβλημα του Jiuzhang suanshu, περιγράφει μία μέθοδο με τον τίτλο "νέα μέθοδος fangcheng" (fangcheng xin shu/方程 新数), κατά την οποία συνιστά τη μείωση κάποιων από των δεξιών στηλών σε ένα αριθμητικό ζήτημα αναλογικής κατανομής[302].

2.2.2 Κανόνας Dayan (大衍)

Ο πολυσυζητημένος αυτός κανόνας αφορά την επίλυση παράλληλων αόριστων γραμμικών εξισώσεων με τη γενική αλγοριθμική μορφή $N \equiv \rho_1(\bmod a) \equiv \rho_2(\bmod \beta) \equiv \rho 3(\bmod \gamma) \equiv \ldots \equiv \rho_\nu(\bmod \nu)$ [303]. Κάποιοι μελετητές του έργου του Qin Jiu Shao, θεωρούν τον κανόνα αυτό σαν συνέχεια της αστρονομικής μεθόδου fangcheng[304]. Ο κανόνας Dayan (大衍), είναι το επονομαζόμενο θεώρημα υπολοίπου[305]. Τα βασικά βήματα του κανόνα, σε σύγχρονη μεταφορά τους, είναι τέσσερα[306]:

1) Μετατροπή των moduli σε ακέραιους.
2) Αναγωγή των moduli σε ζευγάρια πρώτων moduli
3) Επίλυση των αναλόγων του τύπου $\alpha\chi \equiv 1(\bmod m)$, [ουσιαστικά τη μέθοδο qiuyi (求一), εύρεση ενότητας που αναφέραμε στο κεφάλαιο 1]
4) Ολοκλήρωση των υπολογισμών όπως ανωτέρω - βήμα (3).*

Θα δώσουμε ένα παράδειγμα της εφαρμογής του κανόνα φέρνοντας ως

[298] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ256.
[299] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ256.
[300] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ256.
[301] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ257.
[302] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ257.
[303] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, 1973, σελ214.
[304] http://sourcedb.ihns.cas.cn/cn/ihnsthesis/201109/t20110930_3357833.html, (προσπέλαση: 23/03/2015)
[305] U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*, 1973, σελ214.
[306] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ314.

παράδειγμα το τρίτο πρόβλημα του πρώτου κεφαλαίου από το Shushu Jiuzhang, όπως δίδεται από τον Martzloff, στο *A History of Chinese mathematics*, στις σελ315-319.

Το πρόβλημα αφορά 4 πολιτείες που έχουν αποφασίσει να φτιάξουν ένα δρόμο. Δίδονται τα ποσά που διαθέτει η κάθε χώρα η Α=138600, η Β= 146300, η Γ= 192500 και η Δ= 184800. Προσφέρεται ανά ημέρα το ποσό των 770 guan. Στο πρόβλημα ζητείται να υπολογιστεί το ποσό που θα διαθέσει η κάθε πολιτεία, ανάλογα με το χρόνο που θα δαπανηθεί για να κατασκευαστεί σύμφωνα με τις ανάγκες της πολιτείας τμήμα του δρόμου. Ο κάθε εργάτης προχωράει 60 τετραγωνικά πόδια - chi (尺) τη μέρα. Όταν θα τελειώσουν οι εργάτες τις κάθε πολιτείας θα έχουν προχωρήσει η Α=54 zhang[(丈), 1zhang = 10 chi - πόδια) , η Β=57 zhang , η Γ=75 zhang και η Δ=72 zhang[307]. (代人名县财力数，得甲，乙丙，丁名县每日筑提长度分别为 54 丈， 57 丈，75 丈，72 丈。)[308].

Η λύση στο πρώτο σκέλος δίδεται από τον τύπο[309]:

Ποσό (ανάλογα με το μήκος του δρόμου κάθε πόλης)= αριθμός εργατών x ημερήσια εργασία του κάθε εργάτη =$\frac{\text{Χρήματα κάθε χώρας}}{\text{770 guan}}$ x $\frac{\text{60 τετραγωνικά πόδια}}{\text{20 πόδια}}$

Ο Martzloff, ασχολείται με το δεύτερο σκέλος, που αφορά το συνολικό μήκος που έχουν προχωρήσει οι εργάτες το δρόμου σε κάθε πολιτεία. Ψάχνει να βρει Ελάχιστο μήκος που θα κατασκευάσει η κάθε χώρα. Για να το πετύχουμε αυτό ψάχνουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των τιμών του μήκους, για να απλοποιηθούν οι τιμές του. Η διαδικασία εξηγείται παρακάτω. Διατυπώνει τη λύση με τρόπο τέτοιο όπου κάνει χρήση της σύγχρονης γλώσσας.

Τα δεδομένα που έχουμε στο δεύτερο σκέλος είναι:

Οι συντελεστές του μήκους που είναι 54,57,75,72.

Η διαδικασία ξεκινάει με την αναζήτηση του Μέγιστου κοινού παρονομαστή ΜΚΠ(54,57,75,72)=3, το οποίο υπολογίζεται με τη χρήση επαναλαμβανόμενων αφαιρέσεων. Το αποτέλεσμα που βρίσκεται (δηλαδή το 3) χρησιμοποιείται για να μειώσει τις τιμές όλων των συντελεστών εκτός του μικρότερου που είναι το 54. Οπότε έχουμε:

(54,57,75,72)→(54,19,25,24)[310].

* (a) Conversion of the moduli into integers.

(b) Reduction of the moduli into pairwise coprime moduli

307 (http://vdisk.weibo.com/s/BZmINETwDfrpe)(προσπέλαση:24/03/2015) - 数学丛书.-.[古典数学].[秦九韶与数书九章].pdf Σελ168-169.

308 (http://vdisk.weibo.com/s/BZmINETwDfrpe)(προσπέλαση:24/03/2015) - 数学丛书.-.[古典数学].[秦九韶与数书九章].pdf Σελ168-169.

309 (http://vdisk.weibo.com/s/BZmINETwDfrpe)(προσπέλαση:24/03/2015) - 数学丛书.-.[古典数学].[秦九韶与数书九章].pdf Σελ169.

310 Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ315.

(c) Solution of congruences of the type ax 1 (mod m) (dayan rule for searching for unity).
(d) Completion of the calculations as above (congruence..)[311]

Στη συνέχεια παίρνουμε τα νούμερα κατά ζεύγη με σκοπό να βρούμε τον νέο Μέγιστο κοινό παρονομαστή. Έχοντας για σταθερό νούμερο το τελευταίο ψηφίο στα δεξιά (εδώ το 24) εξετάζουμε κάθε αριθμό σε σχέση με αυτόν αρχίζοντας από τον αμέσως επόμενο αριστερά, δηλαδή τον 25. Αν ο ΜΚΔ(χ,ψ)=δ≠1 το ζεύγος αντικαθίσταται από το (χ,ψ/δ). Διαιρούμε λοιπόν το μεγαλύτερο αριθμό του ζεύγους με το ΜΚΠ. Μόλις ολοκληρωθεί αυτό το μέρος της διαδικασίας παίρνουμε τους νέους αριθμούς και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία ξεκινώντας με τον δεύτερο από τα δεξιά, εδώ τον 25 και τον εξετάζουμε με τα απλοποιημένα νούμερα, τέλος θα εξετάσουμε τον πρώτο δεξιά με τον τελευταίο αριστερά. Η διαδικασία στο βήμα αυτό θα γίνει με μία μικρή διαφοροποίηση. Αν δ ≠1 το ζευγάρι (χ,ψ) αντικαθίσταται με το (χ/δ,ψδ). Στην παρούσα υπόθεση η τεχνική αυτή ανταποκρίνεται στους ακόλουθους υπολογισμούς:

ΜΚΔ(24,25)=1
ΜΚΔ(24,19)=1
ΜΚΔ(24,54)=6 όπου (24,54)→(24,9) και (54,19,25,24)→(9,19,25,24)

ΜΚΔ(25,19)=1
ΜΚΔ(25,9)=1
ΜΚΔ(19,9)=1

ΜΚΔ(24,9)=3 όπου (24,9)→(8,27) και (9,19,25,24)→(27,19,25,8)

Οι τελικές τιμές των συντελεστών είναι (27,19,25,8)[312]

Η σχηματική παρουσίαση της κλασικής μεθόδου, να υπενθυμίσουμε γινόταν με τις μετρητικές ράβδους και οι πράξεις γινόντουσαν σε στήλες όπως είδαμε παραπάνω στο σχήμα 1.

Θα αναφερθούμε λίγο στη γλώσσα που χρησιμοποιεί ο Qin Jiu Shao. Ο συντελεστής του αγνώστου που ψάχνουμε ονομάζεται qi(奇) και ο συντελεστής μ του congruence ονομάζεται yanmu（衍母）(παρονομαστής)[313]. Ο όρος πλεόνασμα χρησιμοποιείται γιατί υπάρχει αριθμός που είναι υπόλοιπο του συντελεστή μ, πριν τους υπολογισμούς το πλεόνασμα είχε επιλεχθεί να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Το yan (衍) στο yanmu είναι για να υπενθυμίζει ότι είμαστε ακόμα στο πλαίσιο του κανόνα dayan. Ο όρος yanmu σημαίνει μητέρα της επέκτασης, καθώς το mu σημαίνει μητέρα, και έχει το ρόλο του παρονομαστή[314].

Σε μία άλλη αναπαράστασή του κανόνα dayan μπορούμε να δούμε ένα πρόβλημα

[311] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ314.
[312] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ315.
[313] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ316.
[314] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ316.

επίλυσής του από τον Qin Jiu Shao που ψάχνουμε να βρούμε τη λύση των συντελεστών 3778732 1 ≡(mod 499067) μπορούμε να το αναπαραστήσουμε στον παρακάτω πίνακα[315].

S	0	1	2	3	4	5	7	8	9	10
q_s		1	3	8	2	12	1	1	6	11
r_s			121194	14291	6866	158	85	73	12	1
P_s	1	1	4	33	70	2689	3562	6251	41068	499067
Q_s	0	1	3	25	53	2036	2697	4733	31095	377873

Στον παραπάνω πίνακα τα P_s, q_s και r_s προσδιορίζονται από τις αναγραφόμενες τιμές. Επιπροσθέτως $Q_0=0$ και $Q_s=q_sQ_{s-1}+Q_{s-2}$. Το P_s/Q_s είναι οι συγκλίνουσες της επέκτασης του 377873/499067 σε συνεχόμενες κατασκευές[316]. Εδώ $r_{10}=1$ και η λύση προσδιορίζεται αν πάρουμε τον τύπο: $χ=(r_9-1)P_9+P_s=11×41068+6251=457999$[317].
Το τελικό στάδιο των υπολογισμών δεν χρειάζεται περαιτέρω ανάπτυξη[318].

2.2.3 Εξαγωγή ριζών.

Το 4ο κεφάλαιο του Jiu Zhang έχει τον τίτλο shaoguang, το shao 小, σημαίνει σύντομο και το guang ευρύ 晄. Το κεφάλαιο περιλαμβάνει 24 προβλήματα που αφορούν τον υπολογισμό έκτασης της γης. Μέσα σε αυτά έχουμε και προβλήματα που αφορούν την εξαγωγή τετραγωνικών και κυβικών ριζών. Βάσει των σχολιαστών Liu Hui και Yang Hui η εξαγωγή ριζών πηγάζει από τη γεωμετρία[319].

Θα δούμε την τεχνική μέσα από την επίλυση ενός προβλήματος:
Υπάρχει μία [τετραγωνισμένη] περιοχή 71.824 [τετραγωνικά] bu. Ποια είναι η πλευρά του το τετραγώνου; Απάντηση: 268 bu[320].

Θα ξεκινήσουμε κατασκευάζοντας τα βήματα ενός αλγόριθμου όπως τον χαρακτηρίζει ο George Gheverghese Joseph για να βρει την τετραγωνική ρίζα του 71.824[321].

Στα αριστερά του κάθε διαγράμματος ο George Gheverghese Joseph έχει βάλει

[315] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ318.
[316] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ318.
[317] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ318.
[318] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ318.
[319] George Gheverghese Joseph, "The crest of the peacock, non European roots, 3rd edition, 2011, Princeton University press, Princeton &Oxford, σελ219.
[320] Στο κείμενο δίδετε μόνο η απάντηση. Η λεπτομερή περιγραφή της επίλυσης του προβλήματος προέρχεται από την εγκυκλοπαίδεια του 15ου αι Yong Luo Da Dian, που αναπαράγει τα σχόλια του Yang Hui που είχε κάνει στο Jiu Zhang. Η συγκεκριμένη εγκυκλοπαίδεια περιλαμβάνει 11.095 τόμους από τους οποίους έχουν επιβιώσει περίπου 370. Το πρόβλημα προέρχεται από το βιβλίο του George Gheverghese Joseph, σελ219, το ίδιο και το παρόν σχόλιο.

[321] George Gheverghese Joseph, "The crest of the peacock, non European roots", σελ219.

την αλγεβρική σύγχρονη μεταφορά των πράξεων. Θα το μεταφέρουμε ως έχει για λόγους ευκολίας. Το N είναι αριθμός που η τετραγωνική ρίζα του είναι τριών διαστάσεων ακέραιος και οι a, b, g είναι ψηφία που συμβολίζουν εκατοντάδες, δεκάδες και ενότητες αντιστοίχως. Οπότε αν η τετραγωνική ρίζα του N είναι τρισδιάστατος αριθμός, τότε a=100a, b=10b, g=c [322].

Η κινεζική διαδικασία μπορεί να συνοψιστεί στα παρακάτω βήματα:

1ον: Βγάλε τις μετρητικές ράβδους και τοποθέτησε τες για χρήση. Αυτή ήταν η πρωταρχική κίνηση πριν ξεκινήσουν οι υπολογισμοί. Τα κενά “κελιά” αναπαριστούσαν το μηδέν[323].

2ον: Βρες την τιμή των “εκατοντάδων” στοιχείων της τετραγωνικής ρίζας (δηλαδή σε σύγχρονη μεταφορά από George Gheverghese Joseph a= 100a). Στο παράδειγμα αυτό το a=200 και τοποθετείται στη πρώτη στήλη “αποτελεσμάτων”. Μετακίνησε τις “μεταφέρσιμες μετρητικές ράβδους”(“carrying rod”) στην τέταρτη στήλη στη θέση των “δέκα χιλιάδων”. Πολλαπλασίασε την τιμή της “μεταφέρσιμης μετρητικής ράβδου” με a=2 και τοποθέτησε το αποτέλεσμα,2, στη στήλη για το “τετράγωνο στοιχείο”. Πολλαπλασίασε τη στήλη του “τετράγωνου στοιχείου” με a = 2 και αφαίρεσε το αποτέλεσμα από τον “δοθέντα αριθμό”: 71,824 - 2(20,000) = 31,824[324].

3ον: Πολλαπλασίασε την τιμή του a για να πάρεις 2a(400) και εισήγαγε το ως νέο “τετραγωνικό στοιχείο” στην τρίτη στήλη μετά μετακίνησε τις καταχωρήσεις σου ένα βήμα πίσω. Κάνε τις αναγκαίες αντιστοιχίες στις “μετρητικές ράβδους”, με το να μετακινήσεις τις καταχωρήσεις δύο θέσεις μπροστά. Οι αξίες των “δεκάδων” λαμβάνονται με τον υπολογισμό των αξιών του b ώστε να έχουμε 4,000b + 100b2 λιγότερο ή ίσο του 31,824[325].

4ον: Το αποτέλεσμα του b = 6 και της “μεταφέρσιμης ράβδου”, όταμ προστίθεται στο “τετραγωνικό στοιχείο” στην τρίτη στήλη δίνει πράξη της μορφής 2a + b. Μετά το b πολλαπλασιάζεται με το νέο “τετραγωνικό στοιχείο”(2a + b) και αφαιρείται από τον δοθέντα αριθμό ($N - a^2$)[326].

Συνεχίζοντας αυτή τη γραμμή λογικής καταλήγουμε στις θέσεις με τις “ενότητες” (g = c) και βρίσκουμε ότι είναι 8. Οπότε η τετραγωνική ρίζα του 71,824 είναι η 268.

Σχηματικά η όλη διαδικασία αναπαρίσταται ως ακολούθως:

322 George Gheverghese Joseph, “The crest of the peacock, non European roots”, σελ219.
323 George Gheverghese Joseph, “The crest of the peacock, non European roots”, σελ221.
324 George Gheverghese Joseph, “The crest of the peacock, non European roots”, σελ221.
325 George Gheverghese Joseph, “The crest of the peacock, non European roots”, σελ221.
326 George Gheverghese Joseph, “The crest of the peacock, non European roots”, σελ221.

Αποτέλεσμα						
Δοθείς αριθμός	N	7	1	8	2	4
Τετραγωνικό στοιχείο						
Μεταφέρσιμη ράβδος	1					1

Αποτέλεσμα	α			2		
Δοθείς αριθμός	$(\mathrm{N}-a^2)$	3	1	8	2	4
Τετραγωνικό στοιχείο	α	2				
Μεταφέρσιμη ράβδος	1	1				

Αποτέλεσμα	Α+β			2	6	
Δοθείς αριθμός	$(\mathrm{N}-a^2)$	3	1	8	2	4
Τετραγωνικό στοιχείο	2α		4			
Μεταφέρσιμη ράβδος	1			1		

Αποτέλεσμα	a+β		2	6	
Δοθείς αριθμός	$\mathrm{N}-a^2$ – b(2a + b)	4	2	2	4
Τετραγωνικό στοιχείο	2(α+β)		4	6	
Μεταφέρσιμη ράβδος	1		1		

Αποτ έλεσμα	Α+β		2	6	
Δοθε ίς αριθμός	$\mathrm{N}-(\alpha+\beta)^2$	4	2	2	4
Τετρ αγωνικό στοιχείο	2(α+β)	5	2		
Μετ αφέρσιμ η ράβδος	1		1		

Αποτ έλεσμα	Α+β+γ		2	6	8
Δοθε ίς αριθμός	$\mathrm{N}-(\alpha+\beta)^2$	4	2	2	4
Τετρ αγωνικό στοιχείο	2(α+β)		5	2	
Μετ αφέρσιμ η ράβδος	1				1

Αποτ έλεσμα	Α+β+γ	2	6	8
Δοθε ίς αριθμός	$\mathrm{N}-(\alpha+\beta)^2 -$ c[2(a + b) + c]			
Τετρ αγωνικό στοιχείο	2(α+β)+γ	5	2	8
Μετ αφέρσιμ η ράβδος	1			1

Πίνακας 15[327]

2.2.4 Τεχνικές gougu （句股）。

Ο όρος gougu δεν συμβολίζει ένα θεώρημα, αλλά ένα σύνολο τεχνικών για να βρει κάποιος την υποτείνουσα[328]. Μία από αυτές θα εξετάσουμε στην παράγραφο αυτή. Στα σχόλια που κάνει ο Liu Hui στο Jiuzhang suanshu εξηγεί πώς να

[327] George Gheverghese Joseph, “The crest of the peacock, non European roots”, σελ222-223.
[328] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ297.

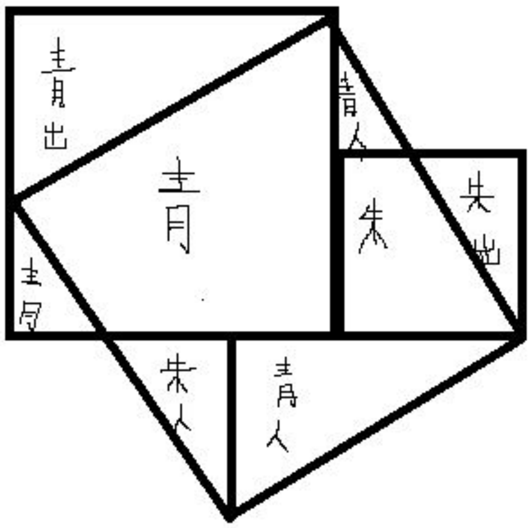
αποδείξουμε ότι το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός τετραγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο των άλλων δύο πλευρών του[329]. (Είπαμε και νωρίτερα ότι το gou είναι η βάση και το gu είναι το πόδι.)

O Liu Hui εξηγεί μία από τις τεχνικές gougu ως εξής:

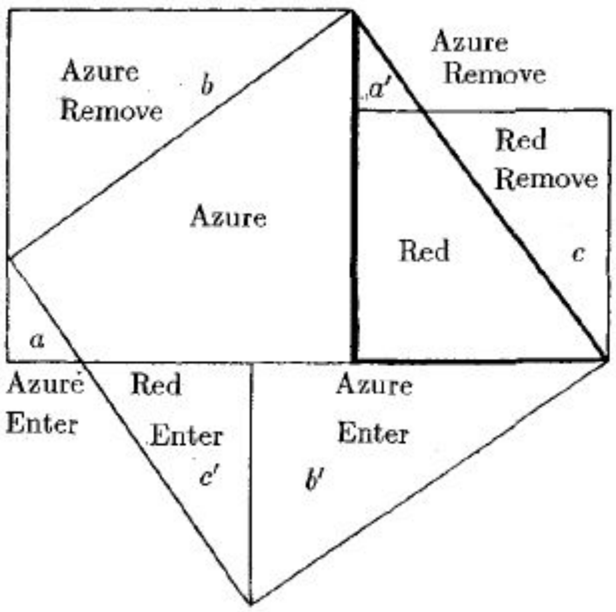
句自乘扁朱方，股自乘扁青方，命出人相補， 客從 其類， 因就其餘不移動也。 合成弦方之幂。

gou zicheng wei zhu fang, gu zicheng wei qing mi, ling churu xiangbu, ge cong qi lei, yin jiu qi yu bu yidong ye. hecheng xian fang zhi mi [. . .]。

"Βάση τετραγώνου φτιάχνει κόκκινο τετράγωνο. Πόδι τετραγώνου φτιάχνει γαλάζιο τετράγωνο. Εφάρμοσε την "έξω - μέσα εναλλάξ τεχνική επιδιόρθωσης" σε σχέση με τις κατηγορίες που ανήκουν τα κομμάτια παίρνοντας το πλεονέκτημα του γεγονότος ότι αυτό που υπολείπεται δεν μετακινείται από την επιφάνεια της υποτείνουσας*.".



[329] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ296.



Σχήμα 4[330]

BASE-SQUARED makes the red square, LEG-SQUARED makes the azure square. Let the OUT-IN MUTUAL PATCHING [technique] [be] applied according to the categories to which [these pieces] belonga4 by taking advantage of the fact that what remains does not move and form the surface of the hypotenuse[331].

Το qing(青) είναι το γαλάζιο χρώμα και το zhu (朱) είναι το φωτεινό κόκκινο, το chu （出）, δηλώνει κίνηση.

Το κείμενο θα μπορούσε να μεταφραστεί και με άλλους τρόπους από αυτόν που χρησιμοποιούμε εδώ. Η μετάφραση αυτή βασίζεται στο βιβλίο του Martzloff (A History of Chinese mathematics, 1997, Σελ296 -297), που βασίζεται σε μία από τις μεταφράσεις που υπάρχουν, καθώς το πρωτότυπου έχει χαθεί. Ο Martzloff αναφέρει ότι μη έχοντας τα πρωτότυπα κείμενα, δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε σίγουρα συμπεράσματα πάνω στην ακριβή μεθοδολογία του Liu Hui. Ο τρόπος επίλυσης είναι μόνο ένας από τους πολλούς. Ο Martzloff λέει ότι είναι εμφανές ότι η απόδειξη του Liu Hui αφορά απόδειξη με κατασκευαστικό τρόπο[332].

2.2.5 Εξαγωγή ρίζας με γεωμετρικό τρόπο

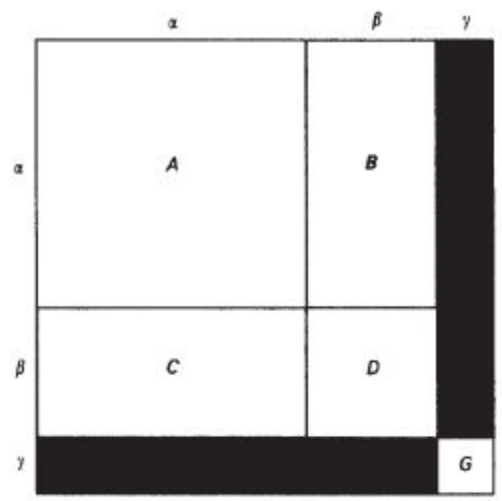
Θα πάρουμε πάλι το πρόβλημα που λύσαμε στις σελίδες 19-22 και θα δούμε πώς λύνεται γεωμετρικά παρακάτω στον πίνακα 16. Ξεκινάμε κατασκευάζοντας ένα τετράγωνο με κάθε πλευρά να είναι ίση με a = 200 bu και στη συνέχεια μία περιοχή με έκταση A = 40,000 τετραγωνικά bu. Προσθέτουμε δύο ακόμα ορθογώνιες περιοχές

[330] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ297.
[331] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ296.
[332] Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ297.

με διαστάσεις 200 με 60. (B = ab, C = ab)[333].

Κατά αυτόν τον τρόπο έχουμε μία συνδυασμένη περιοχή 24.000. Για να ολοκληρωθεί μία τετραγωνική φιγούρα, προσθέτουμε ένα μικρότερο τετράγωνο πλευράς 60 και έκταση 3.600($D = b^2$). Η έκταση του μεγάλου τετραγώνου είναι A + B + C + D, δηλαδή 40,000 + 24,000 + 3,600= 67,600. Σχετικά κοντά με τον 71,824 τον αριθμό που ψάχνουμε με μία διαφορά 4,224. Φαίνεται να είναι το ίδιο με την περιοχή των δύο ορθογωνίων (μαύρων) λωρίδων με διαστάσεις 260 με 8 (E = F = (a + b)g) και το μικρό τετράγωνο πλευράς 8 ($G = \gamma^2$): 2(260 ×8) + 82,4224[334].

Οπότε η γεωμετρική αναπαράσταση της διαδικασίας για εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας του 71,824 είναι ανάλογη του να βρεθεί το μήκος της πλευράς μίας τετραγωνικής περιοχής 71,824 τετραγωνικών bu. Στο πινακάκι 16 φαίνεται ότι η πλευρά έχει μήκος a + b + g = 200 + 60 + 8 = 268 bu[335].



Πίνακας 16[336].

[333] George Gheverghese Joseph, "The crest of the peacock, non European roots", σελ223-224.
[334]George Gheverghese Joseph, "The crest of the peacock, non European roots", σελ223-224.
[335]George Gheverghese Joseph, "The crest of the peacock, non European roots", σελ224.
[336]George Gheverghese Joseph, "The crest of the peacock, non European roots", σελ224.

3. <u>Διάλογος πάνω στην απόδειξη στα κινεζικά μαθηματικά</u>

Το τελευταίο μέρος της παρουσίασης των ιστορικών των κινεζικών μαθηματικών θα γίνει αφιερωθεί στο ζήτημα της απόδειξης. Θα γίνει αναπόφεκτα μία συζήτηση ανάμεσα στα ελληνικά και κινεζικά μαθηματικά, για δύο βασικούς λόγους. Ο πρώτος είναι ότι στην Ευρώπη είμαστε πιο εξοικειωμένοι με τα ελληνικά μαθηματικά, οπότε βάσει αυτής της οπτικής μπορεί κάποιος που έρχεται σε επαφή με τα κινεζικά μαθηματικά να θεωρήσει δικαιολογημένα ότι δεν υπάρχει απόδειξη σε αυτά, κάτι το οποίο βάσει της κλασικής άποψης είναι σωστό. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι η ύπαρξη ή η ανυπαρξία απόδειξης στο πεδίο των μαθηματικών, φανερώνει έναν τρόπο σκέψης ενός πολιτισμού. Οπότε αξίζει και στις δύο περιπτώσεις να συζητηθεί.

Στο κομμάτι αυτό θα συζητηθούν δύο εκ δια μέτρου αντίθετες απόψεις. Η πρώτη του Joseph W. Dauben που εξέδωσε στο τεύχος 36 του περιοδικού "Pergamon" το 1998, βασίζεται στην κλασσική άποψη της μη ύπαρξης της αξιωματικής απόδειξης στην Κίνα και ερευνά τα αίτια που έφεραν αυτό το αποτέλεσμα. Από την άλλη πλευρά θα αναφέρουμε την άποψη περί ύπαρξης απόδειξης στα κινεζικά μαθηματικά που υποστηρίζει η Karine Chemla, την οποία θα αναπτύξουμε όπως την παρουσιάζει στο βιβλίο "The history of Mathematical proof in ancient tranditions" που εξέδωσε το 2012. Το εν λόγω βιβλίο, επί της ουσίας, αφορά μία σύμπραξη πολλών συγγραφέων, ανάμεσά τους και η Karine Chemla, με την οποία θα ασχοληθούμε παρακάτω.

Για την καλύτερη κατανόηση των ζητημάτων της που θα πραγματευτούμε παρακάτω αρχικά επιβάλλεται να αναφερθεί ο ορισμός της απόδειξης ώστε να μπορέσουν να ακολουθήσουν ομαλά στη συνέχεια οι δύο απόψεις.

<u>Λίγα λόγια για το Jiu Zhang Suan Shu.</u>

Οι Chemla και Dauben βασίζουν την άποψή τους στο βιβλίο Jiu Zhang Suan Shu. Μέχρι στιγμής, στην παρούσα εργασία ελάχιστα έχουν αναφερθεί για το εν λόγω βιβλίο[337]. Εφόσον, θα αποτελέσει τη βάση, πάνω στην οποία θα εκφράσουν την άποψή τους περί απόδειξης στα κινεζικά μαθηματικά, και των δύο ιστορικών, χρειάζεται να γίνει μία περαιτέρω ενημέρωση για το βιβλίο αυτό.

Το Jiu Zhang Suan Shu, σημαίνει "Εννέα κεφάλαια στην τέχνη των μαθηματικών". Είναι ένα από τα αρχαιότερα έργα στην ιστορία των κινεζικών μαθηματικών, το οποίο αποτελείται από εννέα κεφάλαια και για τον λόγω αυτό έχει και τον συγκεκριμένο τίτλο. Αυτό το έργο θεωρείται ότι περιλαμβάνει κάποια από τα αρχαιότερες μαθηματικές τεχνικές του κινεζικού πολιτισμού[338]. Η προέλευση του Jiu Zhang Suan Shu, από κάποιους θεωρείται ότι χάνεται στους μύθους, καθώς βρίσκεται στην πρώιμη καταγεγραμμένη περίοδο της κινεζικής ιστορίας[339].

---

[337] Παρούσα εργασία σελίδα 28.
[338] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1340. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προσπέλαση:09/06/2015).
[339] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1341. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

Βάσει αυτής της άποψης ο κίτρινος αυτοκράτορας, Huang Di[340], που έζησε τον 27ο αιώνα π.Χ. Ανέθεσε στον υπουργό του Li Shou, την σύνθεση του Jiu Zhang Suan Shu. Δυστυχώς, όμως το πρωτότυπο έχει χαθεί. Το 213 π. Χ. Ο αυτοκράτορας Qin Shi Huang (221±207 π.Χ.), ο οποίος φημιζόταν για τον τεράστιο στρατό του στο Xi'an Yang, διέταξε όλα τα βιβλία της Αυτοκρατορίας να καούν.Αυτό έχει σαν συνέπεια, παρότι κάποια έργα μπορεί να διατηρήθηκαν λαθραία ή να μνημονεύονται και αργότερα να ανακατασκευάστηκαν, η αποκατάσταση των κειμένων να περιλαμβάνει ανακρίβειες. Στην περίπτωση των μαθηματικών οι αποκλίσεις από το πρωτότυπο αφορούν την προσθήκη μετέπειτα καινοτομιών και νέων τεχνικών, οι οποίες ενδέχεται να έχουν ενσωματωθεί σαν να ήταν μέρος του πρωτοτύπου.[341]

Ο Dauben ωστόσο, λέει ότι η μετέπειτα ιστορία των εννέα κεφαλαίων είναι σχεδόν τόσο αβέβαιη όσο και η προέλευσή του. Στην Δυτική Δυναστεία των Χαν(206 π.Χ.±24 μ.Χ.), σε μία περίοδο που γίνονταν μεγάλες προσπάθειες για την αποκατάσταση των χαμένων κλασικών έργων όλων των ειδών, έχουμε την πρώτη αναθεώρηση του Jiu Zhang Suan Shu, από τον Zhang Cang, κάποια στιγμή του 2ου αιώνα π.Χ.. Στη συνέχεια πάλι σε κλίμα διάσωσης των κλασικών έργων, το Jiu Zhang Suan Shu, αναθεωρήθηκε μετά από εκατό χρόνια από τον Geng Shou Chang. Οι δύο αυτοί μελετητές, ο Dauben αναφέρει, ήταν αυτοκρατορικοί υπουργοί που ανέλαβαν την ανακατασκευή των Εννέα Κεφαλαίων[342].

Ο Liu Hui θεωρείται ο πιο διάσημος μαθηματικός της Κίνας, ο οποίος έζησε την περίοδο των τριών βασιλείων (220±280μ.Χ.), και είναι ένας από τους πολλούς που ανακατασκεύασαν το Jiu Zhang Suan Shu με σκοπό την συντήρησή του. Η σπουδαιότητα του συγκεκριμένου μαθηματικού έγκειται στο ότι όταν επιμελήθηκε αυτός το συγκεκριμένο έργο, έκανε εκτενή σχολιασμό και έτσι ξεκίνησε μία παράδοση “σχολιασμών” των κλασικών έργων. Αυτή η κίνησή του να σχολιάσει τα αρχαία κείμενα επαναλήφθηκε ξανά από τον Li Chun Feng, που έζησε στη δυναστεία των Tang (618±907μ. Χ.), κατά την οποία και πάλι γινόταν συντήρηση των κλασικών έργων, πλέον με σχολιασμό[343].

Η παλαιότερη εκδοχή των Εννέα κεφαλαίων που έχει επιβιώσει είναι σε ένα ξύλινο τμήμα για εκτύπωση (wood block printing) της Νότιας δυναστείας των Σονγκ, όπου περιλαμβάνει τα πρώτα πέντε βιβλία και χρονολογείται περίπου το 1213 μ. Χ.. Το συγκεκριμένο τμήμα είναι περισσότερο γνωστό από από το αντίγραφό του στην βιβλιοθήκη της Σαγκάης.Η παλαιότερη εκδοχή των Εννέα κεφαλαίων που έχει επιβιώσει είναι σε ένα ξύλινο τμήμα για εκτύπωση (wood block printing) της Νότιας δυναστείας των Σονγκ, όπου περιλαμβάνει τα πρώτα πέντε βιβλία και χρονολογείται περίπου το 1213 μ. Χ.. Το συγκεκριμένο τμήμα είναι περισσότερο γνωστό από από το

[340] Το όνομά του σημαίνει κίτρινος (Huang -黄）.
[341] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1341. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).
[342] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1341. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).
[343] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1341. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

αντίγραφό του στην βιβλιοθήκη της Σαγκάης. Από εκεί και ύστερα πολλές άλλες εκδώσεις υπάρχουν που βασίζονται στην ολοκληρωμένη βιβλιοθήκη των τεσσάρων κλάδων της λογοτεχνίας που εξέδωσε ο Dai Zhen. Ο Dai Zhen έζησε στη δυναστεία των Qing, και αντέγραψε το περιεχόμενο του έργου του από τη Μεγάλη εγκυκλοπαίδεια της Yong-le Reign Period της δυναστεία των Ming (Το έργο του "ολοκληρωμένη βιβλιοθήκη των τεσσάρων κλάδων της λογοτεχνίας" είναι γνωστό και ως έκδοση Dai)[344].

Τα πιο διάσημα σχόλια είναι αυτά από τον Liu Hui (263 μ.Χ.), τον Li Chung-Feng (656 μ.Χ) και ένα από τον Zu Chong-Zhi (429±500μ.Χ.). Γράφτηκαν κατά τη διάρκεια των Βορίων και Νοτίων δυναστειών αλλά τώρα έχουν χαθεί[345].

Τα περιεχόμενα και η Χρήση του.

Το Jiu Zhang Suan Shu περιλαμβάνει 256 μαθηματικά προβλήματα[346] και ήταν το βασικό έργο που χρησιμοποιήθηκε το οποίο όπως αναφέρει ο Dauben κυριάρχησε στην εκπαίδευση των διοικητικών υπαλλήλων της Κίνας για πάνω από μία χιλιετηρίδα, και ήταν στενά συνδεδεμένο με το γραφειοκρατικό κυβερνητικό σύστημα[347]. Κατά συνέπεια ήταν αφιερωμένο σε προβλήματα τα οποία οι διοικητικοί υπάλληλοι είχαν να λύσουν. Είχε επίσης, συντριπτική επιρροή πάνω στους συγγραφείς των επόμενων αιώνων, και ο Dauben αναφέρει ότι σχεδόν όλοι οι επόμενοι μαθηματικοί βασίστηκαν στην ορολογία του και τις ιδέες του συγκεκριμένου έργου[348].

Με αυτή την έννοια ότι τα Εννέα Κεφάλαια κυριάρχησαν στην Κίνα όπως τα"Στοιχεία" του Ευκλείδη, που κυριάρχησε στα Δυτικά μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν ως το ομόλογο των "Στοιχείων" του Ευκλείδη[349]. Από αρκετές απόψεις ωστόσο, τα δύο έργα, λέει ο Dauben ότι εντυπωσιάζουν πολύ περισσότερο για τις διαφορές τους παρά για τις ομοιότητές τους. Ο Dauben λέει, "Το κείμενο του Ευκλείδη διακρίνεται για την λιτότητα της αξιωματικής μεθόδου του, ξεκινώντας με το αφηρημένο και εξιδανικεύοντας τις ερμηνείες ενώ συνέχιζε με αξιώματα και κατέληγε σε μία εξελικτικά δομημένη σειρά αποδείξεων, οδηγώντας, μέσω των δεκατριών διασωθέντων βιβλίων, σε μερικά αξιοσημείωτα αποτελέσματα πάνω στα

344 J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1341. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

345 J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1341. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

346 http://download.springer.com/static/pdf/615/art%253A10.1007%252FBF01273370.pdf?originUrl=http%3A%2F%2Flink.springer.com%2Farticle%2F10.1007%2FBF01273370&token2=exp=1433862120~acl=%2Fstatic%2Fpdf%2F615%2Fart%25253A10.1007%25252FBF01273370.pdf%3ForiginUrl%3Dhttp%253A%252F%252Flink.springer.com%252Farticle%252F10.1007%252FBF01273370*~hmac=2acb33f3649d8f3a29aad8a331008f43da6ee0cbde08bcc3edfd37300cc413fe (προσπέλαση 09/06/2015).

347 J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1341. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

348 J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1342. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

349 J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1342. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

πεντάεδρα (κάποιες τα ονομαζόμενα Πλατωνικά πολύεδρα).”*[350]. Τα Εννέα κεφάλαια από την άλλη όπως αναφέρει ο Dauben, είναι περισσότερο προσγειωμένα στα πρακτικά ζητήματα. Τα προβλήματα που πραγματεύονται συχνά οδηγούν σε λύσεις, οι οποίες είναι τόσο δύσκολες στον υπολογισμό όσο και στην θεωρητική τους διατύπωση[351].

* “Euclid's text is renowned for the austerity of its axiomatic method, beginning with abstract, idealized definitions and proceeding from axioms and postulates to a progressively arranged series of proofs, leading, through the thirteen books that survive, to some remarkable results on the five regular (sometimes called Platonic) polyhedra.”(Dauben, σελ1342).

Άποψη Dauben:

Ο Dauben στο άρθρο του “Ancient Chinese mathematics: the (Jiu Zhang Suan Shu) vs Euclid's Elements. Aspects of proof and the linguistic limits of knowledge”, ασχολείται με το βιβλίο Jiu Zhang Suan Shu και το συγκρίνει με την Ευκλείδεια γεωμετρία. Στο ίδιο βιβλίο βασίζει και η Karine Chemla όπως θα δούμε παρακάτω και τη δική της άποψη για την ύπαρξη απόδειξης στα κινεζικά μαθηματικά. Ο κυριότερος σχολιαστής, είδαμε παραπάνω, αλλά και στο δεύτερο κεφάλαιο ότι ήταν ο Liu Hui[352].

Εφόσον, το συγκρίνει με την Ευκλείδεια γεωμετρία ο Dauben, ασχολείται με το ένατο κεφάλαιο του Jiu Zhang Suan Shu, που πραγματεύεται τις τεχνικές`Gou-Gu", τα οποία αφορούν ζητήματα γεωμετρίας[353], όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2, συγκεκριμένα αφορούν ένα σύνολο τεχνικών για την εύρεση της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου[354]. Το κεφάλαιο 9 περιλαμβάνει 24 προβλήματα, και έχει τον τίτλο των τεχνικών που πραγματεύεται, δηλαδή Gou-Gu (Gou - βάση,Gu -πόδι). Από τους σχολιασμούς του Liu Hui, προκύπτει ότι η βάση gou είναι η μικρή πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου, και το πόδι - gu είναι η μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου. Ο Martzloff για το συγκεκριμένο κεφάλαιο του Jiu Zhang Suan Shu, ισχυρίζεται ότι όλα τα προβλήματα κάνουν εφαρμογή, όπως ο Martzloff χαρακτηρίζει, του “Πυθαγορείου θεωρήματος”. Συγκεκριμένα ο Martzloff λέει ότι στα προβλήματα 1-4 γίνεται χρήση του “Πυθαγορείου θεωρήματος”, στα επόμενα δέκα (5-15) χρησιμοποιούν κανόνες που προέρχονται από το θεώρημα για να λύσουν προβλήματα με ορθογώνια τρίγωνα και στα προβλήματα 15-16 προσδιορίζουν την πλευρά (π.χ. Αν είναι διάμετρος) τετραγώνου (ή κύκλου) μέσα στο ορθογώνιο ή μετράνε τις

[350] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1342. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).
[351] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1342. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).
[352] Παρούσα εργασία σελίδα 28.
[353] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1342. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).
[354] Παρούσα εργασία, σελ58.

αποστάσεις έμμεσα. Οι υπολογισμοί που εμπλέκονται βασίζονται σε παρόμοιες ιδιότητες[355].

Ο Dauben πριν αναφερθεί στην κινεζική τεχνική Gou-gu δίνει τον ορισμό του Πυθαγορείου θεωρήματος βάσει του οποίου έχουμε ότι για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας. Ο Dauben αναφέρει ότι η πρόταση αυτή στην αλγεβρική της μορφή είναι γνωστή ως $α^2 + β^2 = γ^2$, όπου α,β είναι οι δύο κάθετες πλευρές του τετραγώνου[356].

Παρότι όπως θα δούμε υπάρχουν διαφορές στον συλλογισμό των τεχνικών Gou -gu, καταλήγουν στο αποτέλεσμα που δίνει το Πυθαγόρειο θεώρημα. Για τον λόγω αυτό οι τεχνικές Gou -gu, παρομοιάζονται συχνά με το Πυθαγόρειο θεώρημα. Ο τρόπος όμως καταλήγουν στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι διαφορετικός. Θα μπορούσαμε να πούμε όπως τον χαρακτηρίζει ο Dauben ότι είναι μία μορφή "απλής βασικής απόδειξης"*. (Πρέπει να σημειωθεί ότι ως προς τις τεχνικές Gou -gu, τα όποια συμπεράσματα των ιστορικών βγαίνουν από τον σχολιασμό του Liu Hui.)

*For example, if one looks at the method Liu Hui follows in his commentary on the Nine Chapters, one ®nds that he is very careful to explain each formula given for areas and volumes, and that these ``explanations'' are very much like simple, basic proofs[357].

Ο Dauben για να εξηγήσει τις τεχνικές Gou-gu και πώς εφαρμόζονταν δίνει ένα παράδειγμα από το Jiu Zhang Suan Shu, που αφορά το έκτο πρόβλημα και βρίσκεται στο ένατο κεφάλαιο.

J.W. Dauben / International Journal of Engineering Science 36 (1998) 1339–1359 1343

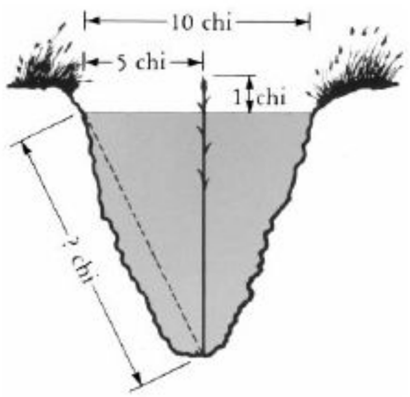


Fig. 2. Problem 6, Chapter 9 of the 九章算術 (*Jiu Zhang Suan Shu, Nine Chapters on the Art of Mathematics*).

355 Jean Glaude Martzloff, *A History of Chinese mathematics*, 1997, Σελ134-135.

356 J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1343. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

357 J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1350. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

Σχήμα 1[358]

Παραθέτω αυτούσια την εκφώνηση του προβλήματος 6 , του κεφαλαίου 9 του Jiu Zhang Suan Shu, όπως δίδεται από τον Dauben:

"Στο **κέντρο** ενός νερόλακκου που είναι δέκα τσι **διάμετρος**, μία ένα καλάμι ανεβαίνει ένα τσι πάνω από την επιφάνεια του νερού. Όταν τραβάμε το καλάμι στην ακτή, του νερόλακκου, το καλάμι φτάνει την **περίμετρο**. Πόσο είναι μήκος που έχει το καλάμι*; "(Dauben, σελ1343)

*In the middle of a pond that is ten chi in diameter, a reed grows one chi above the surface of the water. When pulled toward the edge of the pond, the reed just reaches the perimeter. How long is the reed?[359]

Ο Dauben εξηγεί ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι απλή εφαρμογή των τεχνικών Gou - gu.[360]

Χωρίς να απομακρυνθούμε από τις τεχνικές Gou -gu, θα αναφερθούμε σε μία ακόμα τεχνική που χρησιμοποιούνταν πάνω στα γεωμετρικά σχήματα, η οποία είναι γνωστή ως τεχνική "μέσα-έξω" και θα την περιγράψουμε όπως την παρουσιάζει ο Dauben, στην αναφορά του σε ένα ακόμα πρόβλημα από το κεφάλαιο 9. Βάσει του συγκεκριμένου προβλήματος έχουμε την εφαρμογή της τεχνικής "μέσα- έξω" και στην συνέχεια την εφαρμογή των τεχνικών Gou -gu[361].

Η τεχνική "μέσα έξω" αφορούσε την μετακίνηση τμημάτων πάνω σε ένα σχέδιο που σχετιζόταν με το εκάστοτε πρόβλημα. Η μέθοδος αυτή ο Dauben ισχυρίζεται ότι χρησιμοποιούνταν σαν αξίωμα από τους αρχαίους Κινέζους μαθηματικούς[362].

Στο παράδειγμα που δίνει ο Dauben γίνεται καθαρή η χρήση των δύο τεχνικών.

Η εκφώνηση του προβλήματος από τον Liu Hui, όπως δίδεται από τον Dauben:

*"Το τετράγωνο Gou, είναι το κόκκινο τετράγωνο, το τετράγωνο Gu είναι το μπλε τετράγωνο. Αν βάλεις τα κομμάτια αυτά μέσα και έξω ανάλογα με τον τύπο τους θα συνθέσουν το ένα το άλλο, μετά τα υπόλοιπα (από τα κομμάτια) να μην μετακινηθούν. Συνέθεσε το τετράγωνο Xian, παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα θα βρεθεί η Xian (η υποτείνουσα)."**

[358] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1343. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

[359] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1343. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

[360] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1343. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

[361] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1344. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

[362] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1344. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

*The Gou-square is the red square [, Zhu Fang], the Gu -square is the blue square [,Qing Fang]. Putting pieces inside and outside according to their type will complement each other, then the rest (of the pieces) do not move. Composing the Xian-square, taking the square root will be Xian (the hypotenuse)[363]. (Dauben, σελ1344.)

Δυστυχώς, το σχέδιο, ο Dauben αναφέρει πως δεν υπάρχει πλέον, οπότε το ανακατασκευάζει, μεταφράζοντας το πρόβλημα σε σύγχρονους όρους, αλλά εφαρμόζει τις ίδιες τεχνικές που περιγράφει ο Liu Hui, . Οπότε έχουμε:

Ο Dauben λέει ότι εφαρμόζοντας το θεώρημα "μέσα - έξω", ως συμπληρωματικό θεώρημα της τεχνικής Gou-Gu, στο πρόβλημα και ακολουθώντας τις υποδείξεις του Liu Hui, στους σχολιασμούς του για τις τεχνικές Gou-Gu, καταλήγουμε στο ότι το άθροισμα των τετραγώνων (ADEB και BFGC), βασίζεται σε κάθε "πόδι" του ορθογώνιου τριγώνου ABC, που δημιουργεί τα τετράγωνα ADEB και BFGC, (δηλαδή το AB και BC). Το τετράγωνο των δύο ευθυγράμμων τμημάτων (AB και BC) είναι ίσο με τα τετράγωνα ADEB και BFGC, αντιστοίχως και είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας (AC), και ισούται με το τετράγωνο AHJC[364].

Βάσει όσον περιγράφει ο Dauben, γίνεται χρήση της τεχνικής "μέσα - έξω" βάσει της οποίας αν μετακινήσουμε εκείνα τα κομμάτια των δύο μικρών τετραγώνων ADEB και BFGC, τα οποία είναι έξω από το μεγάλο τετράγωνο AHJC, στο εσωτερικό του, μπορούμε να δούμε ότι συμπληρώνουν την εσωτερική επιφάνεια του AHJC, με ακρίβεια. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ενωμένες περιοχές των δύο μικρών τετραγώνων είναι ίσες προς τη μεγαλύτερη του AHJC. Εφόσον, οι περιοχές είναι σε άθροισμα ίσες με τις τετραγωνικές πλευρές του τριγώνου, το άθροισα των ποδιών των τετραγώνων (δηλαδή το AB και BC) είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας[365].

[363] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1344. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

[364] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1344. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

[365] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1344. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

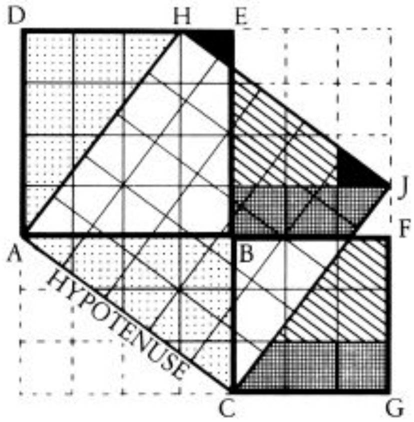


Fig. 5. The 弦圖 [*Xian Tu* = hypotenuse diagram], based upon the figure from the Southern Song edition of the 周髀算經 (*Zhou Bi Suan Jing, The Arithmetical Classic of the Zhou Gnomon*), from the copy in the Shanghai Library, facsimile edition: Shanghai: Wen Wu Chu Ban She (Wen Wu Publishing House), 1981, p. 3.

Σχήμα4[366]

Η ύπαρξη μίας απλής βασικής απόδειξης στην Κίνα από τον Λιού Χουή.

Με μία πρώτη ματιά, λέει ο Dauben, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει αξιωματική απόδειξη στην Κίνα. Ωστόσο, αν κάνουμε μία πιο προσεκτική έρευνα, θα αρχίσουμε να αμφιβάλλουμε, λέει χαρακτηριστικά ο Dauben και φέρνει για παράδειγμα την μέθοδο που ακολουθεί ο Liu Hui, στους σχολιασμούς του.

Βάσει του Dauben, στις εξηγήσεις του Liu Hui, υπάρχει προσεκτική εξήγηση στα ζητήματα των εκτάσεων και των όγκων και ο Dauben ισχυρίζεται ότι μοιάζουν πολύ σαν "απλές βασικές αποδείξεις"(" like simple, basic proofs."Dauben, σελ1350.).

Ο Dauben, βάσει της μελέτης του D. B. Wagner πάνω στον Liu Hui, αναφέρει ότι στην αρχή των σχολιασμών του ο Liu Hui, περιγράφει τις μεθόδου του σε μία σύντομη εισαγωγή[367].

Ένας παράγοντας που σίγουρα επηρέασε στο να μην αναπτυχθεί η αξιωματική απόδειξη στην Κίνα ήταν και η έλλειψη μίας δομής σε κάθε πεδίο (μαθηματικό, φιλοσοφικό ή λογικής γενικότερα), που να βασίζεται πάνω στα αντιγεγονικά[368] γεγονότα[369]. Η αντιγεγονική σκέψη είναι στενά συνδεδεμένη με τη δημιουργία θεωρητικών σεναρίων από την αφαίρεση μέρους ειδικών ιδιοτήτων ή πράξεων από

[366] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1345. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

[367] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1350. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

[368] Counterfactual= αντιγεγονικό, δηλαδή αντί του γεγονότος που έχει συμβεί. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε "Μοναδολογία" του Leibnize.

[369] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1353. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

διάφορες έννοιες. Για παράδειγμα “κοινωνία”, “κοινωνικότητα”/ “πιθανόν”, “πιθανότητα”[370].

Παραταύτα, υπάρχουν κάποιες τεχνικές που ως ένα βαθμό ξεπερνούσαν τον περιορισμό αυτό[371]. Επίσης, ο Dauben αναφέρει ότι ο χαρακτήρας 主 (zhu) για μία πρόταση ή δήλωση, είχε στενές σχέσεις με τη Φιλοσοφία των Mo-Zi (墨子), όπως φαίνεται από τις διαμάχες των Mo-Zi. Ο Dauben λέει ότι ο Liu Hui, αναφέρει αυτές τις διαμάχες οπότε πρέπει να ήταν ενήμερος αυτών και του ήταν οικείες οι μεθοδολογικές ιδέες και η ορολογία των Mo-Zi[372]. Υπό αυτήν την οπτική, λέει ο Dauben, μπορούμε να μελετήσουμε τη θεωρία του Liu Hui για τη διαίρεση του όγκου, τη μεταφέρω αυτούσια:

“Η πρόταση προκύπτει από άμεσα αίτια, αναπτύσσεται με γενικούς νόμους ή θεωρία και κατευθύνεται(χειραγωγείται) με εφαρμογή στις ίδιες τάξεις (πραγμάτων)...Αν και οι τρεις αυτές συνθήκες ικανοποιούνται, τότε είναι ευδόκιμο να καθιερωθεί μία πρόταση”*.

* “The proposition comes out from direct causes; develops with general laws or theory; and is manipulated by applying to the same class of [things]. . . If these three conditions are all satisfied, then it is suficient to establish the proposition. . .”[373].

Ο Dauben, καταλήγει:

Εν συντομία ο Liu Hui, φαίνεται να αντανακλά ένα ενδιαφέρον στη γενική συστηματική προσέγγιση για να εδραιώσει τις γεωμετρικές “περιγραφές” του. Δεν είναι απλά ζήτημα, μερικών παραδειγμάτων που οδηγούν μία γενίκευση, αλλά μία συνειδητοποίηση ότι κάποιες βαθύτερες αρχές εξυπηρετούν στο να εδραιώσουν “αίτια” σχετιζόμενα με τους “νόμους” που αποτελούν τη βάση των “προτάσεων”[374]. *

*”In short, Liu Hui does seem to re¯ect an interest in a general systematic approach to establish his geometric ``demonstrations.'' It is not simply a matter of a few examples giving rise to a generalization, but a realization that some deeper principles serve to establish ``causes'' related to ``laws'' that underlie ``propositions.''” (Dauben,σελ 1351.)

Πρέπει να σημειωθεί κάτι πολύ σημαντικό. Το ότι στα κινεζικά μαθηματικά δεν

[370] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1354. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).
[371] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1354. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).
[372] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1350. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).
[373] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1351. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προπέλαση: 09/06/2015).

[374] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1351. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προσπέλαση: 09/06/2015).

βρίσκουμε σε προχωρημένο στάδιο την αξιωματική απόδειξη δεν σημαίνει ότι δεν υπήρχαν ικανοί μαθηματικοί στην Κίνα.

Ένα καλό παράδειγμα είναι η περίπτωση της εύρεσης της τιμής του “π” στην Κίνα από τον Liu Hui. Όπως αναφέρει ο Dauben, ο Liu Hui, χρησιμοποιεί μία μέθοδο παρόμοια με του Αρχιμήδη, κατά την οποία παίρνει ένα κανονικό πολύγωνο για να υπολογίσει την τιμή του π.

Ο Liu Hui, περιγράφει την διαδικασία ως ακολούθως (το μεταφέρω αυτούσιο όπως δίδεται από τον Dauben):

“Σε όσο πιο μικρά τμήματα τέμνουμε (τον κύκλο) τόσο λιγότερο θα χάσουμε από το εμβαδόν του κύκλου. Το ακριβές εμβαδόν του κύκλου λαμβάνεται όταν τα τμήματα στα οποία τέμνεται (ο κύκλος) καταλήγουν να είναι απειροστά” [375].*

“The finer we cut the segments, the less will be the loss in our calculation of the area of the circle. The exact area of the circle is obtained when such segments so cut off come to be infinitesimals [37].

.” (Dauben, σελ1351.)

Ο Liu Hui, πρώτος βρήκε την τιμή του π, χρησιμοποιώντας ένα πολύγωνο 192 πλευρών, το οποίο του έδωσε την τιμή του π 3.14 64/625, που είναι περίπου 3.141024. Στη συνέχεια, πήρε ένα πολύγωνο μέσα σε κύκλο 3072 πλευρών. Από τους υπολογισμούς που έκανε βρήκε μία νέα τιμή για το π, η οποία ήταν 3927/1250 = 3.1416. . . [376].

[375] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1351. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προσπέλαση: 09/06/2015).

[376] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1351. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προσπέλαση: 09/06/2015).

Fig. 8. Slicing π more finely: one of Dai Zhen's illustrations for the 九章算術 (*Jiu Zhang Suan Shu, The Nine Chapters on the Art of Mathematics*), where Liu Hui's method of approximating the value of π by inscribing regular polygons is demonstrated.

Σχήμα5[377].

Παρότι μοιάζει με την απόδειξη του Αρχιμήδη, η διαφορά του αποδεικνύει ότι επιθυμούσαν το πρακτικό μέρος των μαθηματικών. Ο Liu Hui, δίνει ένα κατασκευαστικό μετρητικό παράδειγμα, το οποίο έχει συνέπεια με την ιδέα ότι οι Κινέζοι μαθηματικοί σταματούσαν σε ότι είχε μόνο πρακτική αξία. Είναι εμφανές ότι οι Κινέζοι μαθηματικοί είχαν την ικανότητα να προχωρήσουν σε μη πρακτικά πλαίσια, αλλά αυτό το πεδίο των μαθηματικών δεν τους ενδιέφερε να το ασκήσουν. Ο Dauben, λέει ότι φαίνεται το ενδιαφέρον για περαιτέρω διερεύνηση ήταν μεμονωμένο και απασχολούσε κυρίως τον Liu Hui. Ίσως για τον λόγω αυτό και εφόσον, τα μαθηματικά της Κίνας δεν ενδιαφέρονταν για κάτι μη πρακτικό, να μην προχώρησε περαιτέρω η γεωμετρία στην Κίνα. Από την άλλη ο Dauben, ισχυρίζεται ότι ίσως το έργο του Liu Hui, να ήταν τόσο περιεκτικό, που να μην δημιουργήθηκε η ανάγκη να υπάρξει περαιτέρω ανάπτυξη στην γεωμετρία[378].

Ο Dauben, αναφέρει ότι γενικότερα, οι Κινέζοι μαθηματικοί, αντί να ακολουθήσουν μία μέθοδο κατασκευής θεωρητικών και λογικών προβληματισμών, ανέπτυξαν μία πλούσια παράδοση, εμπειρικής παρατήρησης. Η παράδοσή τους σε καμία περίπτωση δεν ήταν θεωρητικής προέλευσης. Η εμπειρική τους παράδοση ήταν στενά συνδεδεμένη με τον κόσμο της φυσικής εμπειρίας και των πρακτικών

---

377 J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1352. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προσπέλαση: 09/06/2015).

378 J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1352. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προσπέλαση: 09/06/2015).

εφαρμογών και δεν άφηνε περιθώριο να κατασκευάσουν και να δοκιμάσουν καθαρά θεωρητικά μοντέλα εξήγησης των θεωρητικών οικοδομημάτων[379]. Ως προς τη γλωσσική δομή της γλώσσας ο Dauben, εξηγεί ότι σε ένα πολύ βασικό πλαίσιο σύλληψης και γλωσσικής κατασκευής, οι Κινέζοι απέρριψαν την κατασκευή αφηρημένων εννοιών, ειδικά σε περιπτώσει που τέτοιου είδους γλωσσικές κατασκευές μπορεί να οδηγούσαν σε αντιγεγονικά γεγονότα ή όταν η κατάστασή τους ήταν καθαρά θεωρητική και δεν ανταποκρίνονταν σε τίποτα που να έχει πρακτική εφαρμογή.

Στο σημείο αυτό θα μεταφέρω αυτούσια την δήλωση του Κονφουκιανού φιλόσοφου του 3ου αιώνα π.Χ. Xun-Zi, που αφορά το έργο του Gong Sun Long, όπως δίδεται στον Dauben, ώστε να φανεί καλύτερα η πολιτισμική άποψη του λαού της Κίνας.

"“Δεν υπάρχει λόγος γιατί τα προβλήματα “σκληρότητας” και “λευκότητας”, και “αρεστότητας” και “δυσαρεστότητας”, “λεπτότητας” ή “μη λεπτότητας”, δεν θα έπρεπε να διερευνώνται , αλλά ο ανώτερος άνθρωπος δεν τα συζητάει, σταματάει στο όριο της επιζητούμενου θέματος.(profitable discourse).[380]’”*.

There is no reason why problems of ``hardness'' and ``whiteness,'' ``likeness'' and ``unlikeness,'' ``thickness'' or ``no thickness,'' should not be investigated, but the superior man does not discuss them; he stops at the limit of profitable discourse.” (Dauben, σελ1357.)

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα από τα όσα υποστηρίζει ο Dauben, ότι ο πολιτισμός που αναπτύχθηκε στην Κίνα δεν ενδιαφερόταν για το θεωρητικό μέρος των μαθηματικών, οπότε και δεν ανέπτυξαν μία αξιωματικής μορφής απόδειξη. Ωστόσο βρίσκουμε κάποιους βασικούς κανόνες της μορφής της αξιωματικής απόδειξης στο έργο που κυριάρχησε στην Κίνα για πάνω από χίλια χρόνια το Jiu Zhang Suan Shu από τον τρίτο αιώνα και έπειτα που το επιμελήθηκε ο Liu Hui. Το Jiu Zhang Suan Shu με αυτούς τους όρους μπορούμε να το θεωρήσουμε κομμάτι του πολιτισμού της. Οι Κινέζοι μαθηματικοί ήταν ενήμεροι για τους βασικούς κανόνες της μορφής της αξιωματικής απόδειξης που ανέπτυξε ο Liu Hui και τους αποδέχτηκαν στις μαθηματικές τους γνώσεις.

Κλείνοντας με την άποψη του Dauben, μπορούμε να πούμε ότι παρότι υπήρχε δεν υπήρχε γενικευμένο ενδιαφέρον για την ανάπτυξη μίας αξιωματικής απόδειξης στα κινεζικά μαθηματικά, μπορούμε να βρούμε κάποια στοιχεία της, στο βασικό μαθηματικό έργο της Κίνας από τον Liu Hui.

“Εν συντομία ο Liu Hui, να αναπτύσσει ένα ενδιαφέρον σε μία γενικευμένη συστηματική προσέγγιση με σκοπό να εδραιώσει τις γεωμετρικές του “κατασκευές”. Δεν είναι μόνο ζήτημα μερικών παραδειγμάτων, που οδηγούν σε μία γενίκευση, αλλά μία γενίκευση που προέρχεται από κάποιες βαθύτερες αρχές που χρησιμοποιούνται

[379] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1356. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προσπέλαση: 09/06/2015).
[380] J.W. Dauben, “International Journal of Engineering Science”, Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1357. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προσπέλαση: 09/06/2015).

για να εδραιώσουν αιτίες που σχετίζονται με με "νόμους" οι οποίοι αποτελούν τη βάση των προτάσεων."[381].*

*"In short, Liu Hui does seem to re¯ect an interest in a general systematic approach to establish his geometric ``demonstrations." It is not simply a matter of a few examples giving rise to a generalization, but a realization that some deeper principles serve to establish ``causes" related to ``laws" that underlie ``propositions."" (Dauben, σελ1351.)

<u>Man - Keung Siu</u>

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μία πολύ σύντομη αναφορά σε μία ακόμα άποψη που θέλει τα κινεζικά μαθηματικά να λαμβάνουν την έννοια της απόδειξης με διαφορετικό τρόπο. Συγκεκριμένα η άποψη αυτή βλέπει τις αποδείξεις στην Κίνα ως επεξηγήσεις. Μία άποψη που προσεγγίζει πολύ τον πολιτισμό τους. O Man - Keung Siu, στο άρθρο του "Proof and Pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang suan shu", που εξέδωσε στον 24 τόμου του "Educational Studies in Mathematics" το 1993, έχει και αυτός σαν βάση για την ανάπτυξη των επιχειρημάτων του το Jiu Zhang suan shu.

Στο άρθρο του πραγματεύεται την άποψη ότι οι αποδείξεις που υπάρχουν στο Jiu Zhang suan shu, και συγκεκριμένα στους σχολιασμούς του Liu Hui, στους οποίους θα βασιστεί είχαν διαφορετικό ρόλο από αυτών των αρχαίων Ελλήνων. Υποστηρίζει τον ρόλο της απόδειξης ως κάθε επεξηγηματική σημείωση που χρησιμεύει στο να πείσει και να διαφωτίσει τον αναγνώστη[382]. Στην πρότασή του αυτή φέρνει το επιχείρημα του Wilder, ο οποίος ισχυρίζεται ότι "Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτό που συνθέτει την "απόδειξη" διαφέρει από πολιτισμό σε πολιτισμό, όπως από εποχή σε εποχή.[383]" *

*"We must not forget that what constitutes 'proof' varies from culture to culture, as well as from age to age." (Man - Keung Siu, σελ346.).

Ουσιαστικά ο Man - Keung Siu, προτείνει να δούμε τι θα μπορούσε να χαρακτηριστεί "απόδειξη" στον πολιτισμό της Κίνας. Υποστηρίζει υπό αυτή τη σκοπιά ότι ο Liu Hui, πιθανότατα να έψαχνε για "συνέχεια [του θεωρήματος] με το σώμα του αποδεκτού αποτελέσματος" κατά την κατασκευή των εναλλακτικών αποδείξεων που κατέγραφε[384]. O Man - Keung Siu, ισχυρίζεται ότι "αν ο μόνος ρόλος της απόδειξης (στα κινεζικά μαθηματικά) ήταν η επαλήθευση, δεν θα υπήρχε κανένα όφελος με το να δίδονται πολλές διαφορετικές αποδείξεις του ίδιου θεωρήματος. Αλλά οι διαφορετικές αποδείξεις εξυπηρετούν κυρίως στο να πείσουν για την

[381] J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1351. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da (προσπέλαση: 09/06/2015).

[382] Man - Keung Siu, "Proof and Pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang suan shu", τόμος 24 "Educational Studies in Mathematics" ,Kluwer Academrc Publishers. Printed in the Netherlands,1993, σελ346.

[383] Man - Keung Siu, "Proof and Pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang suan shu", τόμος 24 "Educational Studies in Mathematics" ,Kluwer Academrc Publishers. Printed in the Netherlands,1993, σελ346.

[384] Με την έννοια που ορίζει ο Man - Keung Siu, τον όρο "απόδειξη".

ορθότητα της λύσης, αλλά επίσης και να διαφωτίσουν[385].”*.

*“If the only role of a proof were verification. nothing would be gained by giving different proofs of the same theorem. But different proofs serve not merely to convince but also to enlighten.” (Man - Keung Siu, Σελ352.).

Η άποψη της Karine Chemla:

Είδαμε την άποψη του Dauben, ο οποίος βρίσκει στο έργο Jiu Zhang Suan Shu, στα σχόλια του Liu Hui κάποιους βασικούς κανόνες της αξιωματικής απόδειξης, παρά το γεγονός ότι εν γένει δεν υπάρχει αυτό το είδος απόδειξης στα κινεζικά μαθηματικά. Στη συνέχεια εν συντομία αναφέραμε την άποψη του Man - Keung Siu, που προτείνει να ερευνήσουμε την απόδειξη σε τοπικό επίπεδο και να δούμε με ποιους όρους μπορούμε να ορίσουμε την απόδειξη στην Κίνα. Ο ίδιος προτείνει τις εξηγήσεις των σχολίων και ειδικά του Liu Hui, ως αποδείξεις.

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε μία αρκετά ριζοσπαστική άποψη, αυτή της Karine Chemla, βάσει της οποίας τα κινεζικά μαθηματικά έχουν έναν συγκεκριμένο τύπο απόδειξης που τον ονομάζει “αλγεβρική απόδειξη σε αλγοριθμικό πλαίσιο.”[386]. Όπως και οι άλλοι δύο ιστορικοί η Chemla, στο βιβλίο “The history of Mathematical proof in ancient tranditions” που εξέδωσε το 2012, συνάγει τα συμπεράσματά της από το Jiu Zhang Suan Shu, όπου όπως και οι προηγούμενοι βασίζεται κατά κύριο λόγω στον Liu Hui.

Η Chemla, αναφέρει ότι “εκτός από ελάχιστα Ελληνικά γεωμετρικά κείμενα, δεν υπήρχαν καθόλου αποδείξεις στις αρχαίες μαθηματικές πηγές που να έχουν επικρατήσει μέχρι σήμερα[387]”.* Επίσης, ισχυρίζεται ότι “αν εξαιρέσουμε την ιδιαίτερα παράξενη θεωρία που βρίσκουμε στα “βιβλία αριθμητικών” του Ευκλείδη ή στα “Αριθμητικά” του Διόφαντου, η κανονική ιστορία έχει λίγα να πει πάνω στο πώς οι μαθηματικοί ανέπτυξαν τις αποδείξεις για προτάσεις που σχετίζονται με αριθμούς και υπολογισμούς.”[388].**

Παρότι, λέει η Chemla ότι, δεν έχουμε πολλές πληροφορίες γα το πώς οι μαθηματικοί ανέπτυξαν τις αποδείξεις για τις προτάσεις που σχετίζονται με αριθμούς και υπολογισμούς, “δεν υπάρχει αμφιβολία ότι όλες οι κοινωνίες είχαν αριθμητικά συστήματα και ανέπτυξαν μέσα υπολογισμού με αυτά.[389]”*** Βάσει αυτού του ζητήματος διερωτάται κατά πόσο “μπορούμε να πιστέψουμε ότι η απόδειξη της ορθότητας των αλγορίθμων δεν ήταν το χαρακτηριστικό μέσο για το Αθηναϊκούς δημόσιους υπολογισμούς ή για την κινέζικη γραφειοκρατεία” και επίσης, διερωτάται κατά πόσο “μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο έλεγχος αυτών των υπολογισμών γινόταν

[385] Man - Keung Siu, “Proof and Pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui’s commentary on Jiu Zhang suan shu”, τόμος 24 “Educational Studies in Mathematics” ,Kluwer Academrc Publishers. Printed in the Netherlands,1993, σελ352.
[386] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.47.
[387] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.9.
[388] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.9.
[389] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.9-10.

μόνο με τη μέθοδο δοκιμής και λάθους."[390].****

---

* " One could add that the assumption that outside the few Greek geometrical texts listed above, there were no proofs at all in ancient mathematical sources has become predominant today."(Chemla, σελ9.)

** "If we exclude the quite peculiar kind of number theory to be found in the 'arithmetic books' of Euclid's Elements , or in Diophantus' Arithmetics , the standard history has little to say about how practitioners developed proofs for statements related to numbers and computations."(Chemla, σελ9.)

***Yet there is no doubt that all societies had number systems and developed means of computing with them.(Chemla, Σελ9-10)

****Can we believe that proving the correctness of these algorithms was not a key issue for Athenian public accounts or for the Chinese bureaucracy? Could these rely on checks left to trial and error?(Chemla, Σελ10)

Η Chemla, Θεωρεί ότι λείπει μία ολόκληρη ενότητα της πρώιμης ιστορίας της απόδειξης, καθώς έχουμε έλλειψη των γνώσεων για τις περισσότερες παραδόσεις και δεν έχει γίνει έρευνα πάνω στον τύπο απόδειξης που αναφέρεται σε θεωρήματα που αφορούν αριθμούς ή αλγόριθμους[391]. * Ο λόγος που δεν υπάρχουν αυτά τα στοιχεία περί απόδειξης σε σχέση με θεωρήματα πάνω σε αριθμούς ή αλγορίθμους, κατά την Chemla, είναι ότι κάποια μέρη της κοινότητας της Ιστορίας και της Φιλοσοφίας της επιστήμης(ανάμεσα σε άλλους), έχουν απορρίψει τον ισχυρισμό ύπαρξης αποδείξεων στις Βαβυλωνιακές, Κινεζικές ή Ινδικές πηγές στο όνομα των Ελληνικών γεωμετρικών κειμένων[392].**

Για να διερευνήσει το όλο ζήτημα περί απόδειξης στον Κινεζικό πολιτισμό, η Chemla, στηρίζεται σε δύο υποθέσεις. Η πρώτη θέλει την ανάγνωση του κειμένου της απόδειξης ως κείμενο απόδειξης, χωρίς να εστιάζεται στην τεχνικές που έπρεπε να ληφθούν για την εδραίωση της αλήθειας μίας πρότασης, αλλά να εστιάζεται μόνο στις τεχνικές που υπάρχουν. Ενδεχομένως, βάσει αυτής της υπόθεσης, λέει η Chemla, η απόδειξη να ασχολείται με το πώς σχηματίστηκαν οι τεχνικές που προέκυψαν και μπορεί το ενδιαφέρον για τον τρόπο που σχηματίστηκαν οι τεχνικές που προέκυψαν να ήταν ένα από τα κίνητρα που έπαιξαν ρόλο στην κατασκευή αποδείξεων με σαφήνεια στην καταγραφή τους. Ισχυρίζεται μάλιστα πως, κάποιος μπορεί να κάνει ένα ακόμα βήμα πιο μακριά και να διερωτηθεί γιατί από όσο είναι γνωστό στην αρχαία Ελλάδα οι μέθοδοι που ερευνώνται δεν ήταν είχαν κάποιο όνομα, αλλά ούτε αναλύονταν δεύτερη φορά.[393]***

Η δεύτερη υπόθεση που κάνει και την οποία βασίζει στην πρώτη είναι ότι αν η καταγραφή των αποδείξεων γινόταν απλά και μόνο για να καταγράψουν τις τεχνικές που οδήγησαν στο αποτέλεσμα[394], το οποίο επιθυμούν να χρησιμοποιήσουν περαιτέρω, τότε οι γενικές τεχνικές κατά την Chemla, θα έπρεπε να έχουν εκφραστεί

[390] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.10.
[391] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.10.
[392] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.14.
[393] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.30-31.
[394](το οποίο είναι αυτό που αναγνωρίζουν πολλοί ως μία αποδεδειγμένη μαθηματική πρόταση, στην περίπτωση των ελληνικών μαθηματικών)

μέσω των αποδείξεων συγκεκριμένων προτάσεων, οπότε και θα ήταν αυτές οι συγκεκριμένες και αποδεδειγμένες προτάσεις το κίνητρο για την έκφραση των αποδείξεων. Εν ολίγοις, η Chemla, θεωρεί ότι κάποιες αποδείξεις γράφτηκαν για να διαβαστούν ως ένα είδος παραδείγματος[395].****

*"Clearly, there is a whole section missing in the early history of proof as it took shape in the last centuries. In fact, there appear two correlated absences in the narrative we are analysing: on the one hand, most traditions are missing, while on the other hand, proofs of a certain type are lacking. Is it because we have no evidence for this kind of proof? Such is not the case, and it will come as no surprise to discover that most of the chapters on proof that follow address precisely those theorems dealing with numbers or algorithms." (Chemla, Σελ10).

"Th is is, in my view, the simple device by which Greek geometrical writings have become so central to the discussion of proof that they cannot possibly be challenged, and this position lies at the core of the recent rejection of the claim that Babylonian, Chinese or Indian sources contained proofs by some part of the **community of history and philosophy of science (among others)." (Chemla, Σελ14.).

***"An initial hypothesis can be formulated with respect to these methods: it is by reading the text of a proof per se and not merely as establishing the truth of a proposition that such techniques could be grasped. Th e hypothesis accounts for how the techniques brought to light took shape. It may also account for one of the motivations at play in making proofs explicit and writing them down. One can go one step further and speculate about why, as far as we know, in ancient Greece the methods in question were neither named, nor analysed in any second-order discussion.". (Chemla, σελ30-31).

****"Th is point leads me to a second hypothesis with respect to the text of a proof: were not some of the proofs written down with the purpose of displaying a given technique which they put into play? In that case, general techniques would have been expressed through the proofs of particular propositions and thereby also motivated the expression of these proofs in writing. In other words, some proofs were to be read as a kind of **paradigm** , making a statement of more general validity than a fi rst reading would indicate." (Chemla, σελ31).

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η Chemla, εξετάζει το ζήτημα κατά κάποιο τρόπο όπως ο Man - Keung Siu, με τη διαφορά ότι ο Man - Keung Siu, προσεγγίζει το ζήτημα της απόδειξης στην Κίνα, σε τοπική έρευνα και με σεβασμό στη διαφορετικότητα του εκάστοτε πολιτισμού. Όπως είδαμε ο Man - Keung Siu, θεωρεί τις αποδείξεις του Liu Hui ως επεξηγήσεις που σκοπό είχαν να πείσουν και να διαφωτίσουν τον αναγνώστη. Με έναν παρόμοιο τρόπο, η Chemla, θέτει ως βάση πως τα κείμενα των αποδείξεων, ανεξαρτήτως χώρας και πολιτισμού, είναι απλή καταγραφή των τεχνικών για περαιτέρω ενασχόληση του αναγνώστη μαθηματικού και ίσως κάποιες από αυτές τις αποδείξεις να είναι όπως το βλέπει η Chemla παραδείγματα. Διαφοροποιείται με την άποψη του ο Man - Keung Siu, κυρίως ως προς το ζήτημα του ότι έχουν γραφτεί για να πείσουν κάποιον και θεωρεί ότι οι αποδείξεις είναι περισσότερο ζήτημα κατανόησης[396].*

Πριν μιλήσει για το είδος απόδειξης που εκείνη προτείνει, θα ασχοληθεί με τα μαθηματικά διάφορων πολιτισμών, μέσα σε αυτά και τα μαθηματικά της αρχαίας Ελλάδας με σκοπό όσα δεν έχουν αλγοριθμική μορφή να δείξει ότι σχετίζονται με κάποιον τρόπο με αλγορίθμους, καθώς στην θεωρία της ο αλγόριθμος αποτελεί τη βάση των μαθηματικών όλων των πολιτισμών: " One could add that the assumption that outside the few Greek geometrical texts listed above, there were no proofs at all in ancient mathematical sources has become predominant today."(Chemla, σελ9.)"Yet

[395] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.31.
[396] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.41.

there is no doubt that all societies had number systems and developed means of computing with them.” (Chemla, Σελ9-10) “Can we believe that proving the correctness of these **algorithms** was not **a key issue** for Athenian public accounts or for the Chinese bureaucracy? ”(Chemla, Σελ10).” . Θα κοιτάξει να βρει έναν τύπο απόδειξης που να ανταποκρίνεται σε όλους του λαούς και να έχει παγκόσμια ισχύ. Ο συγκεκριμένος τύπος απόδειξης θα αφορά την πλειοψηφία των αρχαίων λαών και του αρχαίους Έλληνες και θα έχει αλγοριθμική βάση. Εφόσον, θεωρεί ότι η απόδειξη έχει αλγοριθμική βάση, πρέπει να μπορέσει να δείξει ότι όλα τα μαθηματικά σε όλους τους λαούς είναι αλγόριθμοι. Σε όσα από την άλλη δεν γίνεται ούτε καν να παραλληριστούν με αλγόριθμους εξηγεί γιατί τα απορρίπτει στη θεωρία της. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε τη συλλογιστική της για κάποιους από τους πολιτισμούς που πραγματεύεται και θα φέρουμε κάποια παραδείγματα για το πώς στηρίζει τον αλγόριθμο έναντι άλλων τύπων αποδείξεων.

Για τα “Στοιχεία” του Ευκλείδη, αναφέρει ότι “το γεγονός ότι ο αλγόριθμος επιλύει σωστά το πρόβλημα είναι η απόφανση που πρέπει να αποδειχτεί, σε αντίθεση με ό,τι βρίσκουμε στα “Στοιχεία” του Ευκλείδη, όπου οι αποδείξεις κυρίως ασχολούνται με την αλήθεια των θεωρημάτων.”[397].** Για τα “Αριθμητικά” του Διοφάντου, η Chemla, ισχυρίζεται ότι η δομή επίλυσης προβλημάτων των “Αριθμητικών”, η οποία εμπεριέχει χρήση των πράξεων σε προτάσεις ισότητας και εισαγωγικά σύμβολα τα οποία διεξάγουν αυτές τις πράξεις, διαφέρουν συγκριτικά με άλλους παραδοσιακούς σχηματισμούς που έχουν τη μορφή της αλγοριθμικής επίλυσης, των οποίων η ορθότητα έπρεπε να είναι και ήταν, εδραιωμένη. Ωστόσο, ισχυρίζεται ότι μπορεί να τραβηχτούν πολλές παράλληλες γραμμές ανάμεσα στα “Αριθμητικά” και άλλα κείμενα, τα οποία όλα έχουν να κάνουν με πράξεις και πράξεις πάνω στις πράξεις[398].***

---

*“However, these texts demonstrate that one motivating interest in proofs and their transcription in one way or another may have been not only – or perhaps not at all – to convince someone of the truth of a statement but to make one understand the statement.” (Chemla, Σελ41).

**“Th e fact that the algorithm correctly solves the problem is the statement to be proved, in contrast to what we fi nd in Euclid’s Elements , where proofs mainly deal with the truth of theorems.” (Chemla, Σελ39).

***“From another viewpoint, Diophantus’ text can be contrasted with other types of problem texts, which also attest to mathematical work on and with operations or computations. Several of the following chapters consider types of writing of the latter kind. Both the use of operations on statements of equality and the introduction of symbols to carry out these operations found in the Arithmetics contrast with what other traditions formatted as algorithmic solutions to problems, for which the correctness needed to be, and was, established. Even if these other writings bear witness to other means of proof, via other techniques and in pursuit of other goals, many parallels can be drawn between the Arithmetics and these other texts. Th ese texts all deal with operations and operations on operations, illustrating how diff erent modes of manipulating mathematical operations were devised in history.” (Chemla, Σελ38).

---

[397] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.39.
[398] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.38.

Εξετάζει τους αλγόριθμους των Μεσοποταμίων, βάσει της οπτικής του Høyrap, βάσει της οποίας η Chemla, ισχυρίζεται ότι "ότι τα κείμενα των αλγορίθμων δεν περιλαμβάνουν μόνο συγκεκριμένες περιγραφές για πράξεις που πετυχαίνουν αδιαφάνεια, αλλά επίσης, περιλαμβάνουν στοιχεία του συλλογισμού που αναπτύσσουν κατά μήκος της πρότασης του αλγορίθμου"[399] . * Εξετάζει τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων, για τα οποία λέει ότι: "Η πιθανότητα ότι κάποιες αποδείξεις αποσκοπούν στην παροχή μίας "κατανόησης" αναδύει μία αναγκαία ερώτηση, για την οποία η υπόθεση των Βαβυλωνίων επιτρέπει περαιτέρω διερεύνηση: Τι τεχνικές ή κατασκευές είχαν επινοήσει για να παράσχουν την "κατανόηση" των αλγορίθμων στο δικό τους περιβάλλον των γραφών;"[400].**

Τέλος, ως προς τα κινεζικά μαθηματικά η Chemla, κάνει μία σύγκριση ανάμεσα στα κείμενα Susa και τα κινεζικά μαθηματικά κείμενα και ισχυρίζεται ότι ο παραλληρισμός μεταξύ γεωμετρικών σχεδίων των και προβλημάτων στα κείμενα Susa, μπορεί να γίνει τόσο καλά όσο με τον τρόπο χρήσης των γεωμετρικών προβλημάτων και θυμίζει συναρπαστικά την υπόθεση κάποιων κινεζικών μαθηματικών πηγών, βάσει των οποίων δύο απόψεις μπορούν να εδραιωθούν[401].

Πρώτον, τα προβλήματα δεν ήταν μόνο μία ερώτηση που έπρεπε να διατυπωθεί, αλλά ως παραδείγματα που επίσης ήταν, "παρήσχαν ένα σημαντικό πεδίο για μετάφραση των πράξεων ενός αλγορίθμου ή των πράξεων που απαιτούνταν για την ορθότητα της απόδειξης. Δεύτερον, όπως όλα τα προβλήματα παρείχαν συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα, γεωμετρικές φιγούρες που εμφάνιζαν συγκεκριμένες διαστάσεις, και χρησιμοποιούνταν με τέτοιον τρόπο για να κάνουν σαφή το νόημα των πράξεων"[402]. ****

Η Chemla, θεωρεί ότι "οι σχολιασμοί εξετάζουν πώς οι αρχαίοι αναγνώστες προσέγγιζαν τα κλασικά όπως ήταν"[403].***** Βάσει αυτής της οπτικής ισχυρίζεται ότι "οι σχολιαστές διάβαζαν το κείμενο του αλγορίθμου με διαφάνεια (transparent) και έδιναν με ακρίβεια τους λόγους και περιείχαν σαφήνεια στην εξήγησή τους.[405]"******

---

*"More accurately, when we examine Mesopotamian texts such as those with which Høyrap establishes his point from this perspective, we observe that the texts of algorithms do not only contain specifi c prescriptions for operations that achieve transparency, but also contain elements of the reasoning that develops along the statement of the algorithm. Again, widening the corpus of proofs under consideration leads us to deeper insights into how a proof can be formulated."(Chemla, σελ40).

**"Th e possibility that some proofs aim at providing an 'understanding' raises an essential question, for which the Babylonian case allows further inquiry: what techniques or dispositifs were devised to provide an 'understanding' of the algorithms in the milieus of scribes?"(Chemla, Σελ41).

***"We hold that these explanations reveal how the context of geometrical problems may have provided situations as well as numerical values with which the understanding of the eff ect of operations could be grasped. Th e texts from Susa also reveal how diagrams with highly particular dimensions were used in the same way. Th is parallel between geometrical fi gures and

[399] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.40.
[400] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.41.
[401] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.41.
[402] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.41-42.
[403] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.47.
[405] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.48.

problems, as well as this way of using geometrical problems, compellingly evokes the case of some Chinese mathematical sources, about which two points can be established." (Chemla, Σελ41).

**** "Firstly, the problems were not only a question to be addressed, but, as the paradigms that they were, they also provided a semantic fi eld for interpreting the operations of the algorithm or the operations required for the proof of correctness. Secondly, just as problems provided particular numerical data, geometrical fi gures displayed simple dimensions, and they were used in the same way to make explicit the meaning of operations." (Chemla, Σελ41-42).

***** "First of all, the commentaries attest to how ancient readers approached the classic as such." (Chemla, Σελ47).

****** "However, it is crucial that, with respect to this Chinese document,the commentators did read the text of the algorithm as transparent and made precisely these reasons explicit in their exegesis. 'Transparency' can thus also be shown to correspond to an actor's category." (Chemla, Σελ48).

Ο ΤΥΠΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΗΣ CHEMLA:

Για να γίνει πιο κατανοητός ο τύπος απόδειξης που η Chemla προτείνει, θα αναφερθούμε σε μία υποσημείωση που δίνει στο κείμενό της, πάνω στο τρόπο που πρέπει να εκλαμβάνουμε την απόδειξη ενός αλγορίθμου. Αρχικά θα μεταφράσουμε αυτούσιο το κείμενο της υποσημείωσης και στη συνέχεια θα το εξηγήσουμε, γιατί είναι πολύ δύσκολο να γίνει κατανοητό μόνο του.

Αυτούσια μετάφραση της υποσημείωσης 45 στη σελίδα 40, του "The history of Mathematical proof in ancient traditions":

"Όταν κάποιος μιλάει για "ορθότητα" ενός αλγορίθμου. Πάνω σε αυτό το θέμα, μπορεί να είναι βοηθητικό να ξεκαθαρίσω δύο σημεία σχετικά με αυτό που συχνά διαβάζω σε παραπλανητικά σχόλια. **Πρώτον, το κείμενο ενός αλγορίθμου είναι η απόφανση (statement) που πρέπει να αποδειχτεί και όχι η απόδειξή του.** Είναι σε αυτή τη βάση διαχωρισμού, που κάποιος μπορεί να σχηματίσει την άποψη ότι στους πίνακες της Μεσοποταμίας, τα δύο κείμενα (η **απόφανση (statement)** του αλγόριθμου και ο σχηματισμός της απόδειξης), μπλέκονται το ένα με το άλλο. Επιπλέον, για να το αντιληφθούμε απαιτεί συγκεκριμένο ανάγνωσμα, κατά το οποίο δύο επίπεδα εννοιών διακρίνονται στην απόφανση **(statement)** του αλγόριθμου.

Δεύτερον, ο σκοπός στην απόδειξη της ορθότητας ενός αλγορίθμου δεν είναι μόνο να δείξουμε ότι ο αλγόριθμος αποδίδει μία συγκεκριμένη τιμή- ή ότι εδραιώνει πόσο έγκυρη ή μη είναι η τιμή- αλλά επίσης, να εδραιώσει ότι η αλληλουχία **(sequence)** των πράξεων προβλέπουν αποδόσεις των επιθυμητών ποσοτήτων. Οπότε η απεικόνιση των αλγορίθμων μόνο σε συσχετισμό με τις προσεγγίσεις είναι διπλά παραπλανητικός."[406].*

---

* "One speaks of the 'correctness' of the algorithm. On this theme, it may be helpful to clarify two points about which I oft en read misleading comments. **Firstly, the text of an algorithm is the statement to be proved and not its proof.** It is on the basis of this distinction that one can make the point that in Mesopotamian tablets, the two texts (the statement of the algorithm and the formulation of its proof) merged with each other. Moreover, to perceive this requires a specifi c reading, whereby two layers of meaning are discerned in the statement of the algorithm.

Secondly, the aim in proving the correctness of an algorithm is not only to show that the algorithm yields an exact value – or to establish how accurate or inaccurate the value is – but also to establish that the **sequence** of

[406] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.40. Υποσημείωση 45.

operations prescribed yields the desired magnitude . So the depiction of algorithms only in association to approximations is doubly misleading.” (Chemla, Σελ40 - υποσημείωση 45.)

Παρατηρούμε στο κείμενό της ότι υπάρχει ένας διαχωρισμός ανάμεσα σε **statement** και σε **sequence.** Ο πρώτος όρος εμπεριέχει μεγαλύτερη βαρύτητα οπότε θεωρώ ότι είναι η απόφανση, ενώ ο δεύτερος που δεν εμπεριέχει τόσο μεγάλη βαρύτητα, θεωρώ ότι είναι η σειρά - αλληλουχία των μαθηματικών πράξεων.

Η Chemla ισχυρίζεται “ότι μέσω ενός κειμένου στο οποίο τα μαθηματικά έχουν δουλευτεί στην βάση των αλγορίθμων, η ενότητα της απόδειξης αναπαριστά την αλγεβρική απόδειξη.”[407]. *

* “My claim is that, within a context in which mathematics was worked out on the basis of algorithms, this section of the proof represents a practice of algebraic proof.” (Karine Chemla, σελ49).

Στο σημείο αυτό θα δοθεί και ο ορισμός της Chemla, για την αλγεβρική απόδειξη, ώστε να γνωρίζουμε πώς η Chemla την αντιλαμβάνεται. (Να σημειωθεί ότι οι παρενθέσεις είναι δικές μου προσθήκες για την καλύτερη κατανόηση του νοήματος):

“*Λέγοντας αλγεβρική απόδειξη, εννοώ, σε αυτό το πλαίσιο, μια απόδειξη η οποία εκκινεί από μια δήλωση μιας ισότητας, που έχει εδραιωθεί εκ των προτέρων κατά τρόπο που δεν μας ενδιαφέρει εν προκειμένω, και κατόπιν μετασχηματίζει αυτήν την αρχική ισότητα ως τέτοια κατά έγκυρο τρόπο σε άλλες ισότητες, μέχρι να προκύψει η επιθυμητή ισότητα*[408].” **

**“By algebraic proof, I mean, in this context, a proof that starts from a statement of equality, fi rst established in a given way that is not of interest here and then transforms this original equality as such and in a valid way into other equalities, until the desired equality is obtained.” (Karine Chemla, σελ49).

Αφού ορίζει πώς βλέπει την αλγεβρική απόδειξη καταλήγει:

“Το πρώτο κομμάτι του ισχυρισμού μου είναι ότι οι σχολιαστές κατέγραφαν τις αποδείξεις με ακρίβεια αυτού του είδους, με μόνη διαφορά ότι ήταν οι αλγόριθμοι και όχι οι εξισώσεις που μεταμορφώνονταν. Θα έπρεπε λοιπόν, να έχουμε μία μορφή αλγεβρικής απόδειξης σε ένα αλγοριθμικό πλαίσιο.[409]”***

*** “Th e fi rst part of my claim is thus that the commentaries record proofs of precisely this kind, with the the only diff erence being that algorithms, and not equalities, are transformed. We would then have a form of algebraic proof in an algorithmic Format.” ((Karine Chemla, Σελ49-50).

<u>Συμπεράσματα:</u>

Είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο τρεις απόψεις. Η μία του Dauben, που υποστήριζε την ύπαρξη αξιωματικής απόδειξης στην Κίνα σε μία βασική και όχι ανεπτυγμένη μορφή, την δεύτερη του Man - Keung Siu, που εξέταζε τις αποδείξεις ως εξηγήσεις,

[407] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, σ.49.
[408] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, σ.49.
[409] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, σ.49-50.

των σχολιαστών και αναφέρθηκε στον Liu Hui και την τρίτη άποψη αυτή της Karine Chemla, που προτείνει έναν εξολοκλήρου διαφορετικό τύπο απόδειξης, ο οποίος ενσωματώνει, τον κινεζικό, τον ινδικό, αλλά και άλλους πολιτισμούς. Παρότι η Karine Chemla, ισχυρίζεται ότι η άποψη της κοινότητας των Ιστορικών και των φιλοσόφων προτιμάει να θεωρεί ότι δεν υπάρχουν αποδείξεις που δεν είναι της μορφής των Ελληνικών γεωμετρικών κειμένων. Εφόσον στα Ελληνικά γεωμετρικά κείμενα έχουμε το είδος της αξιωματικής απόδειξης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ίσως αναφέρεται σε αυτό το είδος. "Th is is, in my view, the simple device by which Greek geometrical writings have become so central to the discussion of proof that they cannot possibly be challenged, and this position lies at the core of the recent rejection of the claim that Babylonian, Chinese or Indian sources contained proofs by some part of the community of history and philosophy of science (among others)." (Chemla, Σελ14.). Μπορεί, λοιπόν να υπάρχει ένας άλλος τύπος απόδειξης. Ωστόσο, χρειάζεται να τεθεί το ερώτημα: Δεν πρέπει να διερευνηθούν τα αίτια που δεν υπήρξε κάποιος συγκεκριμένος τύπος απόδειξης όπως της αξιωματικής; Ο Dauben, στο άρθρο του καταλήγει στην ύπαρξη της βασικής μορφής αξιωματικής απόδειξης μέσα από τη διερεύνηση του γιατί δεν υπάρχει αυτός ο τύπος απόδειξης στην Κίνα, βάσει του πολιτισμού της. Φυσικά και πρέπει να διερευνηθεί. Όπως η αξιωματική απόδειξη, θα μπορούσαμε να έχουμε ακόμα κάποιους τύπους που να εξέταζαν το θέμα από διαφορετική σκοπιά. Αυτό ωστόσο, δεν θα σήμαινε ότι η αξιωματική απόδειξη θα έπρεπε να σταματήσει να διερευνάται. Η αξιωματική απόδειξη είναι μέρος του αρχαίου Ελληνικού πολιτισμού, αναπόφεκτα θα έπρεπε να μελετηθεί σε συνάρτηση με τον συγκεκριμένο πολιτισμό.

Ωστόσο, ως προς το ζήτημα της απόδειξης που προτείνει η Karine Chemla, δηλαδή η "αλγεβρική απόδειξη σε αλγοριθμικό περιεχόμενο", υπάρχουν πολλά ζητήματα που χρήζουν διερεύνηση καθώς έτσι όπως είναι αυτή τη στιγμή έχει πολλά κενά. Κάποια από αυτά είναι το ζήτημα του "παραδείγματος" που θέτει η Karine Chemla. Δεν ορίζει πότε μία λύση ενός προβλήματος είναι παράδειγμα και πότε εξήγηση. Ποια είναι τα όρια και πώς διαχωρίζουμε την απόδειξη - παράδειγμα και πώς διαχωρίζουμε την απόδειξη - λύση. Αν όλες οι λύσεις είναι παραδείγματα τότε όλες οι λύσεις πρέπει να είναι αποδείξεις-παραδείγματα. Όταν όμως λέει ότι κάποιες από αυτές τις λύσεις μπορούν να διαβαστούν ως παραδείγματα, "some proofs were to be read as a kind of **paradigm[410]"**, τότε οι υπόλοιπες λύσεις τι είναι; Χρειάζεται οπωσδήποτε κάποιος περαιτέρω προσδιορισμός για του τι ακριβώς εννοεί η Karine Chemla, παράδειγμα και πώς το ορίζει.

Επίσης, ο τύπος απόδειξης που προτείνει, κατά την άποψή μου δεν δίνει έμφαση στη διαφορετικότητα του κάθε πολιτισμού. Από τη μία ένας γενικός κανόνας για την απόδειξη που περιλαμβάνει τους περισσότερους λαούς μπορεί να θεωρηθεί ως κίνηση σεβασμού όλων των λαών, αλλά δεν αναδεικνύει την πολιτισμική διαφορά και ο σεβασμός πρέπει να βασίζεται στην διαφορετικότητα και όχι στην εξίσωση όλων των λαών κάτω από μία φόρμουλα. Κατά την άποψή μου ο τύπος απόδειξης της Karine Chemla, θα έπρεπε να αναδεικνύει περισσότερο τη λογική του κινεζικού πολιτισμού, αλλά και των υπολοίπων, καθώς με τον τύπο αυτό, η βασική αξιωματική σκέψη που

[410] Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, 2012, Cambridge United Press, σ.31.

βρίσκει ο Dauben, χάνεται. Σε μεταγενέστερη έρευνα της Karine Chemla, ελπίζουμε ότι θα έχει καλύψει αυτές τα προβληματικά κενά στη θεωρία της και ο τύπος απόδειξης που προτείνει να είναι σε πιο γερά θεμέλια.

Στην παρούσα φάση και με τα δεδομένα που έχουμε θεωρώ ότι μία προσέγγιση που θα έβρισκε τη χρυσή τομή που θα αναδείκνυε τον κινέζικο πολιτισμό με τον ανάλογο σεβασμό στη διαφορετικότητα και θα ερευνούσε το ζήτημα της απόδειξης, θα ήταν μία προσέγγιση όπως του Dauben που αναζητάει τα αίτια πίσω από την μη ύπαρξη αξιωματικής απόδειξης σε συνδυασμό με την άποψη του Man - Keung Siu, που μιλάει καθαρά σε τοπικό επίπεδο και προσδιορίζει έργο, ακόμα και σχολιαστή.

<u>Βιβλιογραφία:</u>

U. Libbrecht: *Chinese Mathematics in the thirteen century*. Cambridge: MIT Press, 1973.

Josheph Needham: *Science and Civilisation in China*, Cambridge: Cambridge University Press, 1959.

Jean-Claude Martzloff: *A History of Chinese Mathematics*, μτφρ. S. S. Wilson. Berlin: Springer, 1997.

Karine Chemla, *The history of Mathematical proof in ancient traditions*, Cambridge United Press,2012.

Christofer Cullen, *Astronomy and mathematics in ancient China The Zhou Bi suan jing,* Needham research institute Cambridge, Cambridge University Press, 1996.

Christoph J. Scriba - Peter Schreiber, *5000 Years of Geometry Mathematics in History and Culture*, Birkhauser Springer Basel , London, 2015.

C.J. Scriba, J. W. Dauben writing the history of mathematics Its historical development Birkhauser Verlag Basel, Boston, Berlin,

Florence Bretelle-Establet, Looking at it from Asia: The processes that shaped the sources of history of Science, Llull, vol265, springer Paris

George Gheverghese Joseph, The Crest of the Peacock , Non-European Roots of Mathematics, Princeton University Press, Princeton & Oxford, 3η έκδοση, 2011, Ιωάννης Χριστιανίδης, *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών*, πανεπιστημιακές εκδώσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2003,

Zhu Shengpeng, Wang Xiaoying, *Συνοπτικό Κινεζοελληνικό Λεξικό* , SISU, Σανγκάη, 2000.

C. Clapham, J. Nicholson, *The concise Oxford dictionary*, Oxford University Press, 4η έκδοση, 2009.

Άρθρα:

Andrea Eberhard-Bread, Joseph W. Dauben, Hu Yibao: "The history of Chinese Mathematics: the past 25 years", *Llull* 26 (2003). Σελίδες 429-474.

Joseph W. Dauben, "Ancient Chinese mathematics: the (Jiu Zhang Suan Shu) vs Euclid's Elements. Aspects of proof and the linguistic limits of knowledge", Pergamon, International Journal of Engineering Science, vol36, 1998. Σελίδες 1339-1359.

Man - Keung Siu, "Proof and Pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang suan shu", τόμος 24 "Educational Studies in Mathematics" ,Kluwer Academrc Publishers. Printed in the Netherlands,1993, Σελ345-357

Ιωάννης Χριστιανίδης, "The way of Diophantus: Some clarifications on Diophantus' method of solution", Historia Mathematica, vol. 34, 2007, σελίδες 289–305.

Ιστοσελίδες:

http://en.wikipedia.org/wiki/Warring_States_period
http://data.bnf.fr/12127574/jean-etienne_montucla/
http://fr.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_Du_Halde
http://www.archive.org/stream/generalhistoryof01duha#page/n13/mode/1up
http://en.wikipedia.org/wiki/The_Mathematical_Classic_of_Sunzi
http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss
http://fr.wikipedia.org/wiki/Olry_Terquem_(math%C3%A9maticien)
http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Louis_Fran%C3%A7ois_Bertrand
http://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Hankel
http://en.wikipedia.org/wiki/Moritz_Abraham_Stern
http://en.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Vacca
http://en.wikipedia.org/wiki/David_Eugene_Smith
http://en.wikipedia.org/wiki/Yoshio_Mikami
http://en.wikipedia.org/wiki/Dirk_Jan_Struik
http://en.wikipedia.org/wiki/Li_Ye_(mathematician)
http://www.snipview.com/q/Ruan%20Yuan
http://en.wikipedia.org/wiki/Florian_Cajori
http://en.wikipedia.org/wiki/Leonard_Eugene_Dickson
http://en.wikipedia.org/wiki/Gino_Loria

http://universal_lexikon.deacademic.com/311651/Tropfke
http://en.wikipedia.org/wiki/George_Sarton
http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Needham
http://en.wikipedia.org/wiki/Wang_Ling_(historian)
http://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Coulston_Gillispie
http://en.wikipedia.org/wiki/Ulrich_Libbrecht
http://en.wikipedia.org/wiki/Bartel_Leendert_van_der_Waerden
http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Dauben
http://fr.wikipedia.org/wiki/Karine_Chemla
http://de.wikipedia.org/wiki/Jean-Claude_Martzloff
http://en.wikipedia.org/wiki/G._E._R._Lloyd
http://en.wikipedia.org/wiki/John_Newsome_Crossley
http://en.wikipedia.org/wiki/Wu_Wenjun
http://en.wikipedia.org/wiki/Lam_Lay_Yong
http://www.chinaknowledge.de/History/Han/personszhangcang.html
http://www.chinaknowledge.de/History/Han/personszhangcang.html
http://www.chinaknowledge.de/Literature/Science/hanshuyiwenzhi.html
http://www.chinaknowledge.de/History/Han/personszhangcang.html
http://donwagner.dk/SAW/SAW.html
http://en.wikipedia.org/wiki/The_Ten_Computational_Canons
http://en.wikipedia.org/wiki/Jia_Xian,
http://en.wikipedia.org/wiki/Yang_Hui,
http://hua.umf.maine.edu/China/astronomy/tianpage/0018Guo_Shoujing6603w.html,
http://en.wikipedia.org/wiki/Yang_Hui,
http://en.wikipedia.org/wiki/Yigu_yanduan,
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B9%9D%E7%AB%A0%E8%AF%A6%E6%B3%A8%E6%AF%94%E7%B1%BB%E7%AE%97%E6%B3%95%E5%A4%A7%E5%85%A8
http://www.math.uiuc.edu/documenta/vol-ismp/10_yuan-ya-xiang.pdf
http://sourcedb.ihns.cas.cn/cn/ihnsthesis/201109/t20110930_3357833.html,
(http://vdisk.weibo.com/s/BZmINETwDfrpe)
J.W. Dauben, "International Journal of Engineering Science", Pergamon,τόμος36,1998, σ. 1341. http://ac.els-cdn.com/S0020722598000366/1-s2.0-S0020722598000366-main.pdf?_tid=e24808cc-0eb5-11e5-9959-00000aacb360&acdnat=1433861185_8bcc6807ffbca8ef4527faa915d917da