ΑΓΓΕΛΙΚΗ Ν. ΛΙΑΝΟΥ

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα και η ταχύτητα σύγκλισης αυτού

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Π.Μ.Σ.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
ΑΝ. ΚΑΘ.
ΠΑΠΑΔΑΤΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΑΘΗΝΑ 2012

Αντί Προλόγου

Εκφράζω τις θερμότερες ευχαριστίες μου προς τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Νικόλαο Παπαδάτο για την ουσιαστική βοήθεια και την υποστήριξη που μου προσέφερε κατά την εκπόνηση της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας.

Ευχαριστώ θερμά, επίσης, την Επίκουρη καθηγήτρια κ. Ευτυχία Βαγγελάτου και τον Επίκουρο καθηγητή κ. Δημήτριο Χελιώτη, για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην Τριμελή Εξεταστική επιτροπή.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 0

Εισαγωγή

0.1 Ιστορική αναδρομή στη Θεωρία των Οριακών Θεωρημάτων

Στη Θεωρία Πιθανοτήτων, οι τύποι που είναι ακριβείς και συγχρόνως κατάλληλοι για υπολογισμούς, αποτελούν μάλλον εξαίρεση. Το γεγονός αυτό καθιστά αναγκαία την χρησιμοποίηση προσεγγίσεων των κατανομών πιθανοτήτων και των σχετικών χαρακτηριστικών συναρτήσεων, για τις οποίες ενδιαφερόμαστε. Οι προσεγγίσεις αυτές που πρέπει αφενός να είναι βολικές για τους αριθμητικούς υπολογισμούς, και αφετέρου να μπορούν να εγγυηθούν την απαιτούμενη προσεγγιστική ακρίβεια, δεν είναι άλλο από τα οριακά θεωρήματα, που κατά συνέπεια, αποτελούν το σπουδαιότερο, για τις εφαρμογές, μέρος της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Μεταξύ των θεωρημάτων αυτών, σημαντική θέση κατέχουν, όσα αφορούν σε ακολουθίες κατανομών αθροισμάτων ανεξάρτητων τ.μ. (που μπορούν να παίρνουν τιμές σε διάφορους χώρους). Αυτά προσέλκυσαν το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών, για πολλές δεκαετίες από την εποχή της εμφάνισής τους, (το πρώτο μισό του XIX αιώνα), οφείλονται δε κυρίως, στην ανάπτυξη της θεωρίας σφαλμάτων. (Η πρώτη γραμμική προσέγγιση τού λάθους, κατά τη μέτρηση μιας τ.μ., είναι ένα άθροισμα ανεξάρτητων και 'μικρών κατά πιθανότητα' τ.μ., οι οποίες αντιπροσωπεύουν τους παράγοντες του λάθους).

Το πρώτο οριακό θεώρημα στην ιστορία της Θεωρίας Πιθανοτήτων, οφείλεται στον σπουδαίο Ελβετό μαθηματικό J. Bernoulli (1654-1705) και περιέχεται στο βιβλίο του 'Ars conjectandi', που δημοσιεύτηκε 8 χρόνια μετά τον θάνατό του (1713).
Το Θεώρημα Bernoulli, που σήμερα αναφέρεται ως Νόμος Μεγάλων Αριθμών, δεν είναι μόνο ιστορικά ενδιαφέρον, αλλά αποκαλύπτει, στη περαιτέρω ανάπτυξή του, έναν από τους πιο σημαντικούς 'νόμους του σύμπαντος ', δηλαδή ότι η 'τυχαιότητα' στην εμφάνιση ενός τυχαίου γεγονότος, αίρεται μετά από την επανάληψη του πειράματος, υπό τις ίδιες συνθήκες, n φορές, για μεγάλο n· δηλ. 'οριακά', το γεγονός εμφανίζεται με 'νομοτελειακή κανονικότητα'.

Εξ άλλου όλη η επιστημολογική αξία της Θεωρίας Πιθανοτήτων βασίζεται σε αυτό· δηλ. η μαθηματική πιθανότης θα ήταν 'άκαρπη' αν δεν έβρισκε την πραγματοποίησή της στην 'οριακή συχνότητα' εμφάνισης τυχαίου γεγονότος (η πραγματοποίηση είναι 'προσεγγιστική' πάντα, αλλά γίνεται αυθαίρετα ακριβής και αξιόπιστη όσο μεγαλώνει ο αριθμός των επαναλήψεων.)

Το βιβλίο του Bernoulli είναι το σημαντικότερο εξ όσων γράφτηκαν αυτή την εποχή και αφορούσαν στην αναλυση τυχαίων γεγονότων, όπως των Montmort (1708), Moivre (1718), Simpson (1740), Bayes (1768)· και μάλιστα, η χρονονολογία δημοσίευσής του (1713) θεωρείται ως η αρχή της ιστορίας της Θεωρίας Πιθανοτήτων, ενώ τα έργα των Pascal και Fermat (1679) αν και συνέβαλαν στην εξέλιξη των Πιθανοτήτων (με τους στοιχειώδεις αριθμητικούς υπολογισμούς, σχετικά με πειράματα τύχης), ανήκουν στην προϊστορία της.

Μια σύντομη ανασκόπηση των κυριωτέρων αποτελεσμάτων στη Θεωρία των Οριακών Θεωρημάτων για αθροίσματα ανεξαρτήτων τ.μ., από την εποχή που ήρθε στο φως το βιβλίο του Bernoulli, ως το 1949 που δημοσιεύτηκε η θεμελιώδους σημασίας μονογραφία των Gnedenko-Kolmogorov, θα ήταν πολύ χρήσιμη μεθοδολογικά (όπως είναι πάντα οι ιστορικές αναφορές) περιγράφοντας, εξ άλλου, το εννοιολογικό πεδίο στο οποίο θα κινηθούμε (μέσα στα πλαίσια μιας διπλωματικής εργασίας).

Τα πρώτα οριακά θεωρήματα αφορούν στην απλή περίπτωση όπου οι $X_j, j = 1, \ldots, n$ είναι i.i.d με $P(X_j = 1) = p$ και $P(X_j = 0) = 1 - p$.

Το θεωρημα Bernoulli ήταν ισοδύναμο με το ακόλουθο:

Θεώρημα 0.1.1. *Έστωσαν $X_j, j = 1, \ldots, n$ i.i.d τ.μ. με $P(X_j = 1) = p$, $P(X_j = 0) = 1 - p$, $0 < p < 1$ και θεωρούμε τα αθροίσματα $S_m = X_1 + \ldots + X_m - A_m$, A_m πραγματικοί αριθμοί με $A_m = mp$ σε αυτά τα αθροίσματα. Τότε ισχύει,*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_m - A_m}{m} \xrightarrow{d} 0 \tag{0.1.1}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{X_1 + \ldots + X_m}{m} \xrightarrow{d} p, \ m \to +\infty \tag{0.1.2}$$

Το αποτέλεσμα αυτό του Bernoulli, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, αντανακλά τον πολύ γνωστό 'εμπειρικό νόμο', σύμφωνα με τον οποίο, η συχνότης της εμφανισης κάποιου ενδεχομένου M σε μια σειρά m όμοιων και ανεξαρτήτων δοκιμών, γίνεται σταθερά, όσο μεγαλώνει το m, και θεωρούμε αυτή τη σταθερά ως την θεωρητική πιθανότητα του ενδεχομένου M.

Το 1783 ο De Moivre έκανε το επόμενο σπουδαίο βήμα στη Θεωρία των Οριακών Θεωρημάτων, το γνωστό δηλαδή θεώρημα De Moivre-Laplace, που σήμερα ονομάζουμε Κ.Ο.Θ., διατυπώνεται δε ως:

Θεώρημα 0.1.2. *Έστωσαν $X_j, j = 1, \dots, n$ i.i.d τ.μ. με $P(X_j = 1) = p$ και $P(X_j = 0) = 1 - p$. Τότε*

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m - mp}{\sqrt{mpq}} \xrightarrow{d} N \tag{0.1.3}$$

όπου N τ.μ. με σ.κ. την τυποποιημένη κανονική $\Phi(x)$, ή ισοδύναμα

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_m - mp)(x\sqrt{mpq}) \underset{m \to +\infty}{\to} \Phi(x)$$

Το προηγούμενο θεώρημα απεδείχθη από τους de Moivre-Laplace με μεθόδους ασυμπτωτικής ανάλυσης της Διωνυμικής κατανομής (που είναι η κατανομή του S_m στην προκείμενη περίπτωση).

Μαζί με το Θ. 0.1.2 απεδείχθη και το λεγόμενο τοπικό οριακό θεώρημα:

Θεώρημα 0.1.3. *Υπό τις υποθέσεις του Θεωρ. 0.1.2, αν $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ισχύει η ασυμπτωτική σχέση, για $m \to +\infty$:*

$$P_m(k) = P(X_1 + \dots + X_m = k) = \frac{\Phi(\frac{k-mp}{\sqrt{mpq}})}{\sqrt{mpq}}(1 + o(1)) \tag{0.1.4}$$

όπου Φ η τυποποιημένη κανονική κατανομή. Ισχύει δε, ομοιόμορφα, για όλους τους ακεραίους k από την ακολουθία των διαστημάτων $mp + a\sqrt{mpq} < k < mp + b\sqrt{mpq}$.

Το ενδιαφέρον για κανονικότητες των τύπων (0.1.1) και (0.1.3), ήταν έντονο καθόλη τη διάρκεια του XIX αιώνα.
Το 1837 ο Poisson επέτυχε να επεκτείνει τον τύπο (0.1.1) στην περίπτωση όπου $P(X_j = 1) = p_j$, $P(X_j = 0) = 1 - p_j$, $0 < p_j < 1$, $j = 1, 2, \dots, m$ και $A_m = p_1 + \dots + p_m = EX_1 + \dots + EX_m$.
Οι σχέσεις του τύπου (0.1.1) ονομάσθηκαν υπό του Poisson Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (N.M.A) και ο όρος έγινε αποδεκτός στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Αργότερα όταν ο N.M.A θεμελιώθηκε κάτω από γενικώτερες αρχικές συνθήκες, το Θεώρ. 0.1.1 αναφέρετο ως N.M.A του Bernoulli και η γενικευση που επετεύχθη υπό του Poisson, ως N.M.A Poisson.

Μια άλλη αξιοσημείωτη επιτυχία του Poisson το 1837, είναι το θεώρημα που περιέχει προσεγγίσεις των πιθανοτήτωντων 'σπανίων ενδεχομένων' σε μια σειρά ανεξαρτήτων και ομοίων δοκιμών.

Στα θεωρήματα 0.1.1 και 0.1.3, η προσεγγιση που δίδεται είναι τόσο λιγότερο αποτελεσματική όσο μικρότερη είναι η πιθανότης p. Αποδεικνύεται δε ότι στην περίπτωση μικρού p, μια άλλη κατανομή θα μπορούσε να εφαρμοσθή αντί της κανονικής.

Το ακόλουθο θεώρημα, γνωστό ως θεώρημα Poisson, απαντά στο θέμα αυτό:

Θεώρημα 0.1.4. *Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία i.i.d. τ.μ. με κατανομή $P(X_j = 1) = p$, $P(X_j = 0) = 1 - p$ εξαρτώμενη από τις πραγματικές παραμέτρους $\lambda > 0$ και ακέραιο*

$r > \lambda$ τέτοιον ώστε $p = \lambda/r$. Αν σταθεροποιήσουμε το λ, ενώ $r \to +\infty$, τότε $\forall$ ακέραιο $k \geq 0$ ισχύουν οι ακόλουθες οριακές σχέσεις:

$$P_r(k) = \Pi_k(\lambda)(1 + o(1))$$

όπου $\Pi_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$ (κατανομή Poisson).

Το Θ. 0.1.4 είναι η τοπική εκδοχή του οριακού Θ. Poisson. Ισχύει και η ολοκληρωτική για $S_r = X_1 + \ldots + X_r$ και $A_r = 0$ δηλ. $(X_1 + \ldots + X_r)(x) \to \sum_{k<x} \Pi_k(\lambda)$, $\forall x > 0$.

Το Θ. Poisson απεδείχθη πολύ χρήσιμο για την λύση ποικίλων πρακτικών προβλημάτων, η δε κατανομή Poisson παίζει κεντρικό ρόλο στη Θεωρία Οριακών Θεωρημάτων για αθροίσματα ανεξ. τ.μ.

Ο Chebyshev, το 1867, στο έργο του 'On Mean Values', δημοσιευθέν στο περιοδικό 'The Mathematical Collection' (Matematich-eskii Sbornik) απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα (N.M.A του Chebyshev).

Θεώρημα 0.1.5. *Υποθέτομε ότι οι ανεξαρτητες τ.μ. $X_j, j = 1, \ldots, m$ έχουν πεπερασμένες ροπές 2ης τάξης (άρα και 1ης τάξης) και είναι φραγμένες από μία σταθερά K με $A_m = EX_1 + \ldots + EX_m$. Τότε*

$$\frac{X_1 + \ldots + X_m - (EX_1 + \ldots + EX_m)}{m} \xrightarrow{d} 0, \ m \to \infty$$

Ο Chebyshev επέτυχε επίσης να αποδείξη το Θ. 0.1.2, με διαφορετικό μέθοδο από αυτήν των de Moivre-Laplace. Στο έργο του 'On two Theorems on Probability' πρότεινε μία νέα προσέγγιση που αργότερα ονομάσθηκε μέθοδος των ροπών.

Δυστυχώς, η απόδειξη που πρότεινε ο Chebyshev, δεν έγινε πλήρως κατανοητή. Ο Μαθητής του Markov ολοκλήρωσε αυτό το έργο 20 χρόνια αργότερα και συνέβαλε τα μέγιστα στην ανάπτυξη της Θεωρίας Οριακών Θεωρημάτων και της Θεωρίας Πιθανοτήτων, εφόσον το έργο του περιείχε σοβαρά επιχειρήματα υπέρ της δυνατότητος γενίκευσης του Θ. de Moivre-Laplace.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι ήδη αυτή την εποχή ο Chebyshev έθεσε θέμα 'βελτίωσης ' των οριακών προσσεγγίσεων της κατανομής των $S_m = X_1 + \ldots + X_m - A_m$, στη σχέση (0.1.3) του Θ. 0.1.2 και πρότεινε να προστεθή στην κατανομή Φ, ενα πεπερασμένο τμήμα από κάποιες σειρές εξαρτώμενες από το m. Οι σειρές που χρησιμοποιήθηκαν από τον Chebyshev για την κατασκευή 'βελτιωμένων προσεγγίσεων' είναι γνωστές σήμερα ως Chebyshev-Cramer series ή the Edgeworth-Cramer expansions.

Το έργο του Chebyshev αποτέλεσε κίνητρο για πολλούς μαθηματικούς να μελετήσουν σοβαρά τα προβλήματά του με αποτέλεσμα, όχι μόνο να περιορισθούν στην τελειοποίηση των προτεινομένων υπ' αυτού μεθόδων, αλλά να αναζητήσουν νέες προσεγγίσεις στο κύριο πρόβλημα (γενίκευση του Θ. de Moivre-Laplace).

Ήταν ο μαθητής του Lyapunov, που κατήγαγε την μεγαλύτερη επιτυχία προς αυτή την κατεύθυνση, το 1900, παρουσιάζοντας, στο έργο του 'On one Proposition of Probability Theory' τις δυνατότητες της μεθόδου του, των χαρακτηριστικών συναρτήσεων, με σκοπό τη γενίκευση του Θ. de Moivre-Laplace που υπερέβαινε κατά τη γενικότητα της το θεώρημα που είχε προσπαθήσει να αποδείξη ο Chebyshev.

Το πολύ σπουδαίο επίτευγμα του Lyapunov, γνωστο ως το Κ.Ο.Θ[1] δίδεται από το

Θεώρημα 0.1.6. *Θεωρούμε την ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ.* $X_1, X_2, \ldots$ *και* $0 < \delta \leq 1$. *Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή*

$$b_m = E|X_1 - EX_1|^{2+\delta} + \ldots + E|X_m - EX_m|^{2+\delta}$$

είναι πεπερασμένη $\forall m = 1, 2, \ldots$ *και θέτουμε*

$$A_m = EX_1 + \ldots + EX_m, \ \epsilon_m = \frac{b_m}{\beta_m^{2+\delta}}, \ \beta_m^2 = VX_1 + \ldots + VX_m.$$

Τότε, για $m \to \infty$
i) για $\delta < 1$,

$$\eta_m = \sup\{|U_m(x\beta_m) - \Phi(x)| : x \in \mathbb{R}\} = O(\epsilon_m) \tag{0.1.5}$$

όπου U_m *είναι η σ.κ. της* $X_1 + \ldots + X_m - A_m$.
ii) για $\delta = 1$,

$$\eta_m = O(\epsilon_m |\log(\epsilon_m)|) \tag{0.1.6}$$

Το αποτέλεσμα του Lyapunov, υπερέβη τις προσδοκίες των μαθηματικών της εποχής, ως προς τη γενίκευση του Θ. de Moivre-Laplace. Επιπλέον δε ήταν η πρώτη 'βελτίωση' του, εφόσον περιείχε την έννοια της ταχύτητος σύγκλισης των κατανομών $U_m(x\beta_m)$ στην $\Phi(x)$.
Η μέθοδος των χ.σ., ανακάλυψη του Lyapunov είναι ένα από τα πιο δυνατά αναλυτικά εργαλεία της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

Τα επιτεύγματα του Lyapunov, συνεπληρώθησαν με τα έργα του Markov πού αφορούσαν στην ανάλυση ακολουθιών αθροισμάτων εξηρτημένων τ.μ.. Το μοντέλο αλληλοεξαρτώμενων τ.μ., που πήρε το όνομα Markov's chains, έγινε η βάση για μιά πολύ σπουδαία για τις εφαρμογές ερευνητική κατεύθυνση.

Το πρώτο τέταρτο αυτού του αιώνα μπορεί να ονομασθή ως η περίοδος της Μαθηματικης Θεμελίωσης της Θεωρίας Πιθανοτήτων που ολοκληρώθηκε από τη δημιουργία των αξιωμάτων της, στο φημισμένο έργο του Kolmogorov, 'Foundations of the Theory of Probability', που δημοσιεύθηκε για πρώτη φορά, στη Γερμανία, το 1933.

Ενώ το 2ο μισό του πεπερασμένου αιώνα, τα περισσότερα αποτελέσματα στη Θεωρία Πιθανοτήτων συνδέονται με ονόματα Ρώσων μαθηματικών, μετά την εμφάνιση των έργων των Lyapunov και Markov, τα προβλήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων προκαλούν το ενδιαφέρον μεγάλων μαθηματικών από άλλες χώρες.

[1] Με τον όρο Κ.Ο.Θ εννοούμε ένα πλήθος θεωρηματων με κοινό χαρακτηριστικό την (συνήθως) ασθενή σύγκλιση αθροισμάτων τ.μ. προς την τυποποιημένη κανονική κατανομή, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}), x \in \mathbb{R}$.

Ο Σκανδιναβός μαθηματικός Lindeberg (1922) και ο Γάλλος μαθηματικός P. Lévy (1926), μελέτησαν οριακά θεώρήματα για κανονικοποιημένα αθροίσματα

$$\tilde{S}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\beta_n} - A_n,\ A_n \in \mathbb{R},\ \beta_n > 0,\ \beta_n = \sqrt{VX_1 + \ldots + VX_n}$$

Υπέθεσαν δε τα εξής:
1) Οι προσθετέοι $\{X_j, j \geq 1\}$ στα αθροίσματα S_n είναι ανά δυο ανεξάρτητα.
2) $\beta_n \to \infty$ ώστε $\forall \epsilon > 0$, $\sup_{1\leq j\leq n} P\{|X_j| > \beta_n \epsilon\} \underset{n\to\infty}{\to} 0$
(συνθήκη απειροστής μικρότητας, (infinite smallness),αγγλιστί).

Οι συνθήκες 1) και 2) ορίζουν το λεγόμενο μοντέλο Lindeberg-Lévy. Επιπλέον αυτών των συνθηκών, υποθέτουν ότι $EX_j = 0,\ EX_j = \sigma_j^2 < \infty,\ j = 1, 2, \ldots, m$.
Ο Lindeberg το 1922 απέδειξε το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 0.1.7. *(Lindeberg) Αν επιπλέον των προηγούμενων υποθέσεων, έχουμε,*

$$\forall t > 0\ \frac{1}{\beta_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|>t\beta_n} x^2 dG_j(x) \to 0,\ n \to \infty \tag{0.1.7}$$

(συνθήκη Lindeberg)
όπου G_j: η σ.κ. της $X_j, j = 1, \ldots, n$ τότε, οι σ.κ. $F_n(x)$ των κανονικοποιημένων αθροισμάτων $\tilde{S}_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{\beta_n}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην τυποποιημένη κανονική κατανομη $\Phi(x)$ δηλ

$$p(F_n, \Phi) = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \to 0,\ n \to \infty \tag{0.1.8}$$

Σημειώνουμε ότι η συνθήκη Lindeberg εξασφαλίζει την συνθήκη ασυμπτωτικά αμελητέων διασπορών των μεταβλητών δηλ.

$$\max_{1\leq j\leq n} \frac{\sigma_j^2}{\beta_n^2} \to 0,\ n \to \infty \tag{0.1.9}$$

Το Θ. 0.1.7 απεδείχθη λίγο αργότερα (1926) από τον S-N. Bernshtein με άλλη μέθοδο.

Ο Αμερικανός μαθηματικός W. Feller απέδειξε ότι η συνθήκη Lindeberg είναι όχι μόνο ικανή αλλά και αναγκαία ως προς την ισχύ του συμπεράσματος του Θ. Lindeberg, δηλαδή ως προς τις (0.1.8),(0.1.9). Δηλαδή είναι κριτήριο για την ασυμπτωτική κανονική προσέγγιση των κατανομών των αθροισμάτων, δηλαδή είναι κριτήριο του Κ.Ο.Θ που πλέον ονομάζεται Κ.Ο.Θ Lindeberg-Feller, και γενικεύει τα θεωρήματα Moivre-Laplace και Lyapunov.

Το θεώρημα Lyapunov και τα παραδείγματα ακολουθιών ανεξαρτήτων τ.μ. για τα οποία δεν ισχύει το Κ.Ο.Θ τα κατασκευασθέντα και μελετηθέντα από τον Markov, εύλογα έθεσαν το ζήτημα ύπαρξης οριακών θεωρημάτων που συνδέονται όχι με την κανονική, αλλά με άλλες κατανομές. Το θεώρημα Poisson καταδεικνύει την ανάγκη μελέτης του ζητήματος αυτού.

Η μονογραφία 'Calcul des Probabilites' (1925) του Lévy αποτέλεσε σημαντική πρόοδο στη Θεωρία Οριακών Θεωρημάτων. Ο Lévy θεώρησε την περίπτωση αθροισμάτων i.i.d τ.μ. με $A_m = am,\ a = ct$. Κατάφερε δε να περιγράψει την κλάση $\mathcal{M}$ των *σ.κ.* $G(x)$ που εμφανίζονται ως όρια στην σχέση

$$U_m(x\beta_m) \xrightarrow{d} G(x),\ m \to \infty \tag{0.1.10}$$

όπου β_m σταθερές επιλεγόμενες από τον μελετητή· ονόμασε δε την κλάση $\mathcal{M}$ stable laws (σήμερα strictly stable laws). Απεδείχθη ότι κάθε $G \in \mathcal{M}$ ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση

$$G(\frac{x}{a}) \star G(\frac{x}{b}) = G(x),\ x \in \mathbb{R} \tag{0.1.11}$$

όπου $a, b > 0$ και $a^a + b^a = 1$.

Η (0.1.11) μεταφρασμένη στη γλώσσα των *χ.σ.* όπου $f(t)$ η *χ.σ.* της $G(x)$, γίνεται

$$f(at)f(bt) = f(t),\ t \in \mathbb{R} \tag{0.1.12}$$

Η εξίσωση αυτή δεν προσδιορίζει μονοσήμαντα την $f(t)$ αλλά προσδιορίζει την κλάση $\mathcal{M}$ μέσα στο σύνολο όλων των συναρτήσεων κατανομής. Επιπλέον δίνει τη δυνατότητα αναλυτικής έκφρασης της $f(t)$, πράγμα που επιτρέπει την περιγραφή των οριακών κατανομών με ορους *χ.σ.* και σε πιο γενικές περιπτώσεις από αυτές που θεώρησε ο Lévy. Έτσι, έχει διαμορφωθεί πλέον η αντίληψη για την <u>γενίκευση του προβλήματος των οριακών θεωρημάτων για αθροίσματα ανεξάρτητων τ.μ.</u>

Ο Andrei Nikolaevich Kolmogorov, ένας από τους πιο μεγάλους μαθηματικούς του XX αιώνος, στο άρθρο του 'On the General Form of a Homogeneous Stochastic Process' που παρουσίασε το 1932 έδωσε το εναρκτήριο λάκτισμα για την ανάπτυξη μιας απο τις πιο σπουδαίες θεωρίες στις Πιθανότητες, <u>την κλασσική θεωρία των οριακών θεωρημάτων</u>.

Με τα λαμπρά επιτεύγματα της, η Θεωρία Πιθανοτήτων, κέρδισε την αναγνώριση και τον σεβασμό του επιστημονικού κόσμου. Ωστόσο οι βασικές εργασίες πίσω από αυτά τα επιτεύγματα, όπως τα οριακά θεωρηματα των Bernoulli, de Moivre, Poisson, Chebyshev, Lyapunov, Markov, Lévy, Bernshtein δεν είχαν ακόμη ενοποιηθεί σε μια γενική θεωρια. Περί το 1930 όμως, έγινε κατανοητή από όλους η ανάγκη δημιουργίας ενιαίας θεωρίας των οριακών θεωρημάτων, της <u>Γενικής Θεωρίας των Οριακών Θεωρημάτων</u>.

Το πρόβλημα της κατασκευής μιας <u>Γενικής Θεωρίας των Οριακών Θεωρημάτων</u> περιγράφηκε (γύρω στο 1930) ως ακολούθως:

Έστω μια τριγωνική ακολουθία $X_{n1}, X_{n2}, \ldots$ κάθε μία από τις οποίες απαρτίζεται από ανεξάρτητες τ.μ. με αντίστοιχες *σ.κ.* $F_{nj}, j \geq 1$ ή *χ.σ.* f_{nj} που είναι γνωστές και ικανοποιουν την συνθηκη απειροστής μικρότητος (UN) [2]

$$\forall \epsilon > 0 \ \sup\{P(|X_{nj}| > \epsilon) : j \geq 1\} \to 0, \ n \to \infty$$

Θεωρούμε τα $S_n = X_{n1} + X_{n2} + \ldots + A_n, \ n \geq 1$ όπου A_n σταθερές επιλεγόμενες από τον μελετητή, με *σ.κ.* $F_n, n \geq 1$. Τίθενται τα επόμενα 2 προβλήματα:
I) Περιγραφή της κλάσης $\mathcal{B}$ των πιθανών οριακών κατανομών (για $n \to \infty$) για τα αθροίσματα S_n των οποίων οι όροι ικανοποιούν την UN συνθήκη.
II) Κατασκευή κριτηρίου (υπό την UN συνθήκη) της ασθενούς σύγκλισης της ακολουθίας των *σ.κ.* F_n σε μια προκαθορισμένη *σ.κ.* G, από την κλάση $\mathcal{B}$.

Ο Kolmogorov έχοντας επηρεασθεί από το άρθρου του σημαντικού Ιταλού στατιστικού Bruno de Finetti στο οποίο εισήχθη (1929) η έννοια των ομογενών διαδικασιών με ομογενείς προσαυξήσεις (ουσιαστικά ισοδύναμη με την έννοια των άπειρα διαιρετών κατανομών), ήταν ο πρώτος που διείδε την ευθεία σχέση μεταξύ των διαδικασιών του de Finetti δηλ. της κλάσης $\mathcal{C}$ των (infinitely divisible laws) και της κλάσης $\mathcal{B}$. Επίσης ήταν ο πρώτος που έκανε σπουδαίο βήμα προς την κατασκευή μιας Γενικής Θεωριας των Οριακών Θεωρημάτων.

Ο de Finetti είχε επιτύχει δια των *χ.σ.* να περιγράψει ένα μικρό μόνο μέρος της κλάσης $\mathcal{C}$ (infinitely divisible laws). Σύμφωνα με τον ορισμό μια *σ.κ.* G ανήκει στην $\mathcal{C}$ αν $\forall$ ακέραιο $n \geq 2$, $\exists$ μία *σ.κ.* $G_n(x)$ ώστε $G = G_n \star G_n \star \ldots \star G_n$ (n-πλή συνέλιξη). Η κλάση $\mathcal{C}$ έμελλε να παίξει κεντρικό ρόλο στη Θεωρια Οριακών Θεωρημάτων.

Πολλοί μαθηματικοί ενδιαφέρθηκαν για το πρόβλημα της κατασκευής μιάς γενικής θεωρίας. Ο Lévy (1934) επέτυχε πλήρη περιγραφή της κλάσης $\mathcal{C}$ δια των *χ.σ.* και το 1938 ο Khintchin απέδειξε ότι οι κλάσεις $\mathcal{C}$ και $\mathcal{B}$ συμπίπτουν, επιβεβαιώνοντας την αρχική εικασία του Kolmogorov γι΄ αυτές τις κλάσεις.

Μέχρι το 1950 το πρόβλημα της κατασκευής μιας γενικής θεωρίας είχε σχεδόν πλήρως λυθεί. Ως εκ τούτου η επίκαιρη εμφάνιση της μονογραφίας των Gnedenko και Kolmogorov (1954) ήταν κατά μία έννοια η τελική σύνοψις των αποτελεσμάτων, και μάλιστα κατά τρόπον θαυμάσιο ως προς τη συλλογή του υλικού αλλα και την παρουσίασή του. Το βιβλίο αυτό για πολλά χρόνια αποτελούσε το σημείο αναφοράς για όλους τους μαθηματικούς που ενδιαφέρονταν για τα οριακά θεωρήματα αθροισμάτων τ.μ.

Η εξέλιξη και ο εμπλουτισμός με νέες ιδέες και στοιχεία, της Οριακής Θεωρίας, συνεχίζεται.

[2] uniform asymptotic negligibility ή infinite smallness

Κεφάλαιο 1

Άπειρα διαιρετές κατανομές (infinitely divisible distr. (i.d))

Ένα από τα δύο βασικά ζητήματα της Γενικής Θεωρίας των Οριακών θεωρημάτων (όπως έχουμε ήδη αναφέρει), αφορά στον προσδιορισμό της κλάσης των οριακών κατανομών των αθροισμάτων τ.μ. (που ικανοποιούν την συνθ. Απειροστής Μικρότητος (UN),συμβ.). Απεδείχθη ότι η κλάση αυτή περιέχει όλες τις i.d κατανομές (μία από αυτές είναι η $N(0,1)$).

1.1 Άπειρα διαιρετές χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Ορισμός 1.1.1. *Μια τ.μ. X, η κατανομή της F_X και η χ.σ. f_X, λέγονται άπειρα διαιρετές (infinitely divisible (i.d)) αν $\forall n \geq 1$, $\exists$ i.i.d. τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ώστε $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ή ισοδύναμα $F_X = F_{X_1} \star \ldots \star F_{X_n}$ (n-πλή συνέλιξη) και $f_X = (f_{X_n})^n$, όπου f_{X_n} είναι η χ.σ.. (που εξαρτάται από το n) της X_n.*

Ο τύπος $f_n(t) = f_{X_n}(t) = (f_X(t))^{1/n}$ με τις επιπλέον ιδιότητες:
(1) $f_{X_n}(0) = 1$ και (2) $f_{X_n}(t)$ συνεχής, επιτρέπουν τον μονοσήμαντο προσδιορισμό των $f_{X_n}(t)$ σε κάθε διάστημα του t που περιέχει το $t = 0$ και στο οποίο $f_X(t) \neq 0$.

Σημαντικά παραδείγματα i.d κατανομών είναι οι γνωστές κατανομές:

(α) Η κανονική $N(a, \sigma^2)$· εφόσον η χ.σ. $f(t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a}{n}t - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2})^n = (f_{X_n}(t))^n$ όπου $f_{X_n} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a}{n}t - \frac{\sigma^2 t^2}{n}})$ είναι η χ.σ.. της $N(\frac{a}{n}, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2)$.

(β) Η κατανομή Poisson με $P(X = ak + b) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $\lambda > 0$ σταθερά, a, b πραγματικές σταθερές, $k = 0, 1, 2, \ldots$ έχει χ.σ.. $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}at + \lambda(\mathrm{e}^{ibt} - 1)}$ και $\forall n$, η $f_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a}{n}t + \frac{\lambda}{n}(\mathrm{e}^{ibt} - 1)}$ είναι χ.σ.. μιας Poisson κατανομής.

(γ) Η Gamma (a, b) κατανομή έχει χ.σ. $f(t) = (1 - \frac{\mathrm{i}t}{b})^{-a}$, ενώ η $f_n(t) = (1 - (\mathrm{i}t/b))^{-a/n}$, $\forall n$ είναι χ.σ. μιας Gamma $(a/n, b)$ κατανομής.

Πρόταση 1.1.2. *Η χ.σ. μιας i.d κατανομής δεν μηδενίζεται πουθενά.*

Απόδειξη.
Έστω $F(x)$ μια i.d κατανομή και $f(t)$ η $\chi.\sigma.$ αυτής. Τότε $f(t) = (f_n(t))^n$, $\forall n$ όπου $f_n(t)$ κάποια $\chi.\sigma.$ Λόγω συνέχειας της $\chi.\sigma.$ $f(t)$, υπάρχει ένα διάστημα $|t| \leq a$, στο οποίο $f(t) \neq 0$. Είναι προφανές ότι $f_n(t) \neq 0$ επίσης, στο ίδιο διάστημα. Για αρκετά μεγάλο n, η ποσότης $|f_n(t)| = |f(t)|^{1/n}$ μπορεί να πλησιάση το 1, όσο κοντά θέλουμε, ομοιόμορφα στο t ($|t| \leq a$, βλ. Θ1 ΠΡΤ).
Ας θεωρήσουμε 2 i.i.d τ.μ. η_1 και η_2 με $\sigma.\kappa.$ $F(x)$ και την $\eta = \eta_1 - \eta_2$. Τότε η $\chi.\sigma.$ της η είναι:

$$f^\star(t) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\eta_1-\eta_2)}) = |E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\eta_1})|^2 = |f(t)|^2$$

Δηλ. το τετράγωνο της απόλυτης τιμής μιας $\chi.\sigma.$ είναι επίσης $\chi.\sigma.$
Επειδή μια πραγματική $\chi.\sigma.$ είναι

$$f(t) = \int \cos(tx) dF(x)$$

μπορούμε να έχουμε την ανισότητα:

$$\begin{aligned} 1 - f(2t) &= \int (1 - \cos(2xt)) dF(x) = 2 \int \sin^2(xt) dF(x) \\ &= 2 \int (1 - \cos(xt))(1 + \cos(xt)) dF(x) \\ &\leq 4 \int (1 - \cos(xt)) dF(x) = 4(1 - f(t)) \end{aligned}$$

Από την προηγούμενη, προκύπτει η

$$1 - |f_n(2t)|^2 \leq 4(1 - |f_n(t)|^2)$$

Από την τελευταία, για αρκετά μεγάλο n και $|t| \leq a$ έχουμε,

$$\begin{aligned} 1 - |f_n(2t)| &\leq 1 - |f_n(2t)|^2 \\ &\leq 4(1 - |f_n(t)|^2) \\ &\leq 4(2\epsilon - \epsilon^2) \\ &< 8\epsilon \end{aligned}$$

καθώς, αν $|t| \leq a$, $|f_n(t)| = |f(t)|^{1/n} = |\exp(\log(f(t))/n)| > 1 - \epsilon$, για όλα τα αρκετά μεγάλα n.

Επομένως, στο διάστημα $|t| \leq 2a$,

$$1 - |f(t)|^2 < 8\epsilon$$

δηλαδή για μεγάλο n, η συνάρτηση $f_n(t)$ δεν μηδενίζεται στο διάστημα $|t| \leq 2a$, οπότε και η $f(t)$, επίσης.
Όμοια δείχνουμε ότι $f(t) \neq 0$ στο διάστημα $|t| < 4a$ κ.ο.κ. Έτσι $f(t) \neq 0$ παντού.

Λήμμα 1.1.3. *Αν $f(t)$ παντού μη μηδενική συνεχής μιγαδική συνάρτηση στο $[-T, T]$ με $f(0) = 1$, υπάρχει μοναδική (μονότιμη) συνεχής συνάρτηση $\lambda(t)$ στο $[-T, T]$ με $\lambda(0) = 0$ και $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Επιπλέον, το διάστημα $[-T, T]$ μπορεί να αντικατασταθεί από το $(-\infty, +\infty)$.*

Ορισμός 1.1.4. *Η συνάρτηση $\lambda(t)$ που ορίζεται από το Λ. 1.1.3 λέγεται διακεκριμένος (distinguished) λογάριθμος της $f(t)$ και συμβολίζεται $Logf(t)$. Επίσης $\exp(\lambda(t)/n)$ λέγεται διακεκριμένη n-οστή ρίζα της $f(t)$ και συμβολίζεται $f^{1/n}(t)$.*

Λήμμα 1.1.5. *Έστωσαν f, f_k, όπως στο Λ. 1.1.3. Αν $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο $[-T, T]$, τότε $Logf_k - Logf \to 0$ ομοιόμορφα στο $[-T, T]$.*

Πρόταση 1.1.6. *Μια $\chi.\sigma.$ $f(t)$ είναι i.d. αν και μόνο αν η διακεκριμένη n-οστη ρίζα της, $f^{1/n}(t) = \mathrm{e}^{Logf(t)/n}$, είναι μια $\chi.\sigma.$ $\forall n \geq 1$.*

Απόδειξη.
Αν η f είναι i.d, τότε $f = f_n^n$, $n \geq 1$, οπότε οι f και f_n δεν μηδενίζονται πουθενά· επομένως οι διακεκριμένες n-οστές ρίζες και οι λογάριθμοι ορίζονται καλώς (Λ. 1.1.3). Επιπλέον

$$\mathrm{e}^{Logf} = f = f_n^n = \mathrm{e}^{nLogf_n}$$

ώστε

$$Logf(t) = nLogf_n(t) + 2\pi \mathrm{i} k(t)$$

με $k(t)$ ακέραιο. Εφ'οσον $Logf$ και $Logf_n$ συνεχείς και μηδενίζονται στο 0, έπεται $k(t) = 0$. Όθεν $Logf_n = Logf^{1/n}$ δηλ. $f_n = f^{1/n}$.
Αντίστροφα, αν η διακεκριμένη n-οστή ρίζα της f υπάρχει, και είναι μια $\chi.\sigma.$ $\forall n \geq 1$, $f = \mathrm{e}^{Logf} = \left(\mathrm{e}^{Logf/n}\right)^n$ δείχνει ότι f είναι i.d.

Πρόταση 1.1.7. *Ένα πεπερασμένο γινόμενο i.d $\chi.\sigma.$ είναι i.d.. Επιπλέον, αν οι i.d $\chi.\sigma.$ f_k τείνουν στη f, $k \to \infty$ και f είναι μια $\chi.\sigma.$, τότε η οριακή $\chi.\sigma.$ f είναι i.d.*

Απόδειξη.
Προφανώς, αν $f = f_n^n$, $\psi = \psi_n^n$, $n \geq 1$ τότε $f \cdot \psi = (f_n \cdot \psi_n)^n$, $n \geq 1$. Επομένως, το γινόμενο δύο και (επαγωγικά) πεπερασμένου αριθμού i.d. $\chi.\sigma.$ είναι i.d..
Υποθέτουμε τώρα ότι οι i.d. $\chi.\sigma.$ $f_k \to f$, f μία $\chi.\sigma.$ Τότε οι i.d. $\chi.\sigma.$

$$\psi_k(t) = |f_k(t)|^2 = f_k(t) f_k(-t) \to \psi(t) = |f(t)|^2$$

όπου η $\psi(t)$ είναι $\chi.\sigma.$ Συνεπώς $\psi_k^{1/n}$ ως θετική n-οστή ρίζα της θετικής συνάρτησης ψ_k, τείνει για $k \to \infty$ στην μη αρνητική ρίζα $\psi^{1/n}$ της μη αρνητικής συνάρτησης ψ. Επειδή για $n \geq 1$, $\psi_k^{1/n}$ είναι μια ακολουθία $\chi.\sigma.$ των οποίων το όριο $\psi^{1/n}$ είναι συνεχής στο $t = 0$ η $\psi^{1/n}$ είναι μια $\chi.\sigma.$ για $n \geq 1$. Επομένως η ψ είναι i.d και όθεν μη μηδενική παντού. Συνεπώς, f παντού μη μηδενική και επομένως ορίζεται ο $Logf$. Τότε από το Λήμμα 1.1.5,

$$f_k^{1/n} - f^{1/n} = f^{1/n}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(Logf_k - Logf)} - 1\right) \to 0,\ n \geq 1$$

και επειδή $f^{1/n}$ είναι συνεχής στο $t = 0$ (Θ.1 και Θ.2 ΠΡΤ) είναι μια $\chi.\sigma.$ $\forall n \geq 1$, οπότε f είναι i.d (Π. 1.1.6).

Πρόταση 1.1.8. *Η κλάση των i.d κατανομών συμπίπτει με την κλάση των οριακών κατανομών πεπερασμένων συνελίξεων κατανομών Poisson.*

Απόδειξη.
Το ότι κάθε τέτοιο όριο είναι i.d., έπεται από την Π. 1.1.7.
Αντίστροφα, αν f είναι i.d, ώστε $f = f_n^n,\ n \geq 1$, τότε

$$n(f_n(t) - 1) = n\left(\mathrm{e}^{(Logf)/n} - 1\right) \to Logf$$

$$\left(n(f^{1/n} - 1) = n(\mathrm{e}^{(Logf)/n} - 1) = n(1 + \frac{logf}{n} + o(1/n) - 1) \underset{n\to\infty}{\to} logf\right)$$

Δηλ. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n(f_n(t)-1)} = f(t)$.
Τώρα,

$$n(f_n(t) - 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\mathrm{e}^{itu} - 1)dF_n(u),\ n \geq 1$$

και έστω ένα δίκτυο

$$-\infty < -M_n = u_{n,1} < u_{n,2} < \ldots < u_{n,k_n+1} = M_n < +\infty$$

του οποίου τα σημεία είναι σημεία συνεχείας της F_n και τέτοια ώστε

$$\max_j (u_{n,j+1} - u_{n,j}) \leq \frac{1}{2n^3}$$

και

$$\int_{|u|\geq M_n} dF_n(u) \leq \frac{1}{4n^2}$$

Τότε για $|t| \leq n$, διαλέγοντας

$$\lambda_{n,j} = n[F_n(u_{n,j+1}) - F_n(u_{n,j})] = \int_{u_{n,j}}^{u_{n,j+1}} ndF_n(u)$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{u_{n,j}}^{u_{n,j+1}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}-1)ndF_n(u)\right. &- \left.\lambda_{n,j}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu_{n,j}}-1)\right| \qquad (1.1.1)\\
&= \left|\int_{u_{n,j}}^{u_{n,j+1}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu_{n,j}})ndF_n(u)\right|\\
&\leq \int_{u_{n,j}}^{u_{n,j+1}} \left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(u_{n,j}-u)}\right| ndF_n(u) \qquad (1.1.2)\\
&\leq \int_{u_{n,j}}^{u_{n,j+1}} |t(u_{n,j}-u)|ndF_n(u)\\
&\leq \int_{u_{n,j}}^{u_{n,j+1}} |t|\max_j(u_{n,j+1}-u_{n,j})ndF_n(u)\\
&\leq n\cdot n\frac{1}{2n^3}\int_{u_{n,j}}^{u_{n,j+1}} dF_n(u)\\
&= \frac{1}{2n}\int_{u_{n,j}}^{u_{n,j+1}} dF_n(u)
\end{aligned}$$

καθώς $|e^{itu}-1| \leq \min\{|tu|,2\}$ στην (1.1.2). Επομένως για $|t| \leq n$, αθροίζοντας τις (1.1.1) για $1 \leq j \leq k_n$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}-1)ndF_n(u)\right. &- \left.\sum_{j=1}^{k_n}\lambda_{n,j}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu_{n,j}}-1)\right|\\
&= |\int_{|u|\geq M_n} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}-1)ndF_n(u)\\
&+ \sum_{j=1}^{k_n}\int_{u_{n,j}}^{u_{n,j+1}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}-1)ndF_n(u)\\
&- \sum_{j=1}^{k_n}\lambda_{n,j}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu_{n,j}}-1)|\\
&\leq \int_{|u|\geq M_n} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}-1|ndF_n(u) \qquad (1.1.3)\\
&+ \sum_{j=1}^{k_n}|\int_{u_{n,j}}^{u_{n,j+1}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}-1)ndF_n(u)\\
&- \lambda_{n,j}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu_{n,j}}-1)|\\
&\leq 2n\int_{|u|\geq M_n} dF_n(u)\\
&+ \sum_{j=1}^{k_n}\frac{1}{2n}\int_{u_{n,j}}^{u_{n,j+1}} dF_n(u)\\
&\leq \frac{2n}{4n^2}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, για $|t| \leq n$ και αρκετά μεγάλο n,

$$\begin{aligned}
\left| \mathrm{e}^{n(f_n(t)-1)} \right. &- \left. \prod_{j=1}^{k_n} \mathrm{e}^{\lambda_{n,j}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu_{n,j}}-1)} \right| \\
= |\exp(\sum_{j=1}^{k_n} \lambda_{n,j}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu_{n,j}} - 1)) &- \exp(n(f_n(t)-1))| \\
= |\mathrm{e}^{n(f_n(t)-1)}| &\times \\
&\times \left| \frac{\exp(\sum_{j=1}^{k_n} \lambda_{n,j}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu_{n,j}} - 1))}{\exp(n(f_n(t)-1))} - 1 \right| \\
= |\mathrm{e}^{n(f_n(t)-1)}| &\times \\
&\times \left| \exp\left(\sum_{j=1}^{k_n} \lambda_{n,j}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu_{n,j}} - 1) \right. \right. \\
&- \left. \left. \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1) n dF_n(u) \right) - 1 \right| \\
&\leq 2|f(t)|2(\mathrm{e}^{1/n} - 1) = o(1) \qquad (1.1.4)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\forall t \in \mathbb{R}$, από (1.1.4)

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{n(f_n(t)-1)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{k_n} \mathrm{e}^{\lambda_{n,j}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu_{n,j}}-1)}$$

($\mathrm{e}^{\lambda_{n,j}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu_{n,j}}-1)}$ είναι $\chi.\sigma.$ της Poisson κατανομής).

Παραδείγματα.
α) Η συνάρτηση $f(t) = (1-b)(1-b\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{-1}$ $(0 < b < 1)$ είναι η $\chi.\sigma.$ μιας i.d κατανομής. Πράγματι, απο την $f(t) = (1-b)\sum_{n=0}^{\infty} b^n \mathrm{e}^{int}$ συμπεραίνουμε ότι η $f(t)$ είναι η $\chi.\sigma.$ μιας τ.μ X που παίρνει μόνο μη αρνητικές ακέραιες τιμές με πιθανότητες

$$P(X = n) = (1-b)b^n, \ n = 0, 1, \ldots .$$

Υπολογίζεται ότι

$$\log f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} - 1)\frac{b^k}{k}$$

όπου κάθε όρος του αθροίσματος είναι ο λογάριθμος της $\chi.\sigma.$ μιας Poisson κατανομής.

β) Έστω $\zeta(\sigma) = \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)$ η Riemann zeta συνάρτηση για $\sigma > 1$ που ορίζεται ως

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

ή το γινόμενο Euler

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

που εκτείνεται πάνω σε όλους τους πρώτους αριθμούς.

$\forall \sigma > 1$, η συνάρτηση

$$f(t) = \frac{\zeta(\sigma + \mathrm{i}t)}{\zeta(\sigma)}$$

είναι η $\chi.\sigma.$ μιας i.d κατανομής. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \log f(t) &= \sum_p [\log(1 - p^{-\sigma}) - \log(1 - p^{-\sigma - \mathrm{i}t})] \\ &= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-m\sigma}(p^{-\mathrm{i}mt} - 1)}{m} \\ &= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-m\sigma}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt\log p} - 1)}{m} \end{aligned}$$

όπου το $\sum_p$ εκτείνεται πάνω σε όλους τους πρώτους αριθμούς. Κάθε δε, όρος του αθροίσματος, είναι ο λογάριθμος της $\chi.\sigma.$ μιας Poisson κατανομής.

1.2 Κανονική Αναπαράσταση (Canonical Representation) της $\chi.\sigma.$ μιας i.d τ.μ.

Έστω γ πραγματική σταθερά και $G(u)$ αύξουσα αριστερά συνεχής συνάρτηση με $G(-\infty) = 0$ και $G(\infty) < \infty$. Θέτουμε

$$\psi(t) = \mathrm{i}\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2}) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) \tag{1.2.5}$$

Στο σημείο $u = 0$, η τιμή της συνάρτησης υπό το ολοκλήρωμα ορίζεται (λόγω συνεχείας) ως

$$\lim_{u \to 0} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} = -\frac{t^2}{2}$$

Λήμμα 1.2.1. *Η συνάρτηση* $\mathrm{e}^{\psi(t)}$ *είναι μια i.d* $\chi.\sigma.$

Απόδειξη.
$\forall\ 0 < \epsilon < 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} &\int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) \\ &\qquad = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi_k} - 1 - \frac{\mathrm{i}t\xi_k}{1+\xi_k^2} \right) \frac{1+\xi_k^2}{\xi_k^2})[G(u_{k+1}) - G(u_k)] \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

όπου $\epsilon = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = \frac{1}{\epsilon}$, $u_k < \xi_k < u_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$ και

$$\max_k (u_{k+1} - u_k) \to 0,\ k \to \infty$$

Όμως, κάθε όρος του αθροίσματος, είναι του τύπου $\mathrm{i}a_{n_k}t + \lambda_{n_k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tb_{n_k}} - 1)$, όπου

$$\lambda_{n_k} = \frac{1+\xi_k^2}{\xi_k^2})[G(u_{k+1}) - G(u_k)]$$

$$b_{n_k} = \xi_k,\ a_{n_k} = -\frac{\lambda_{n_k}\xi_k}{1+\xi_k^2}$$

δηλ. είναι ο λογάριθμος μιας $\chi.\sigma.$ της Poisson κατανομής.
Το όριο του αθροίσματος (ισότητα (1.2.6) ανωτέρω) είναι συνεχής συνάρτηση. Επομένως, είναι ο λογάριθμος της $\chi.\sigma.$ κάποιας κατανομής (Θ. 2 ΠΡΤ). Από την Π. 1.1.7, η κατανομή αυτή είναι i.d.
Παίρνοντας lim για $\epsilon \to 0$ το

$$I_1 = \int_{u>0} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)$$

είναι ο λογάριθμος μιας i.d $\chi.\sigma.$. Ομοίως, συμπεραίνουμε ότι

$$I_2 = \int_{u<0} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)$$

είναι ο λογάριθμος μιας i.d $\chi.\sigma.$
Προφανώς

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}dG(u) = I_1 + I_2 - \frac{t^2}{2}[G(0+) - G(0-)] \tag{1.2.7}$$

και η συνάρτηση $-\frac{t^2}{2}[G(0+) - G(0-)]$ είναι ο λογάριθμος της $\chi.\sigma.$ μιας Κανονικής Κατανομής. Επομένως (Π. 1.1.7), το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)$$

είναι ο λογάριθμος μιας i.d κατανομής.

Απομένει να πουμε ότι $\mathrm{i}\gamma t$, $\forall$ πραγματική σταθερά γ, είναι ο λογάριθμος της $\chi.\sigma.$ μιας εκφυλισμένης κατανομής η οποία είναι i.d ($f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma t} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma t/n})^n = (f_n(t))^n$).

Τις συναρτήσεις $G(t)$ και $\psi(t)$ (1.2.5) συσχετίζουμε με τις

$$\Lambda(x) = \int_{-\infty}^{x} (1 - \frac{\sin y}{y})(\frac{1+y^2}{y^2})dG(y) \tag{1.2.8}$$

και

$$\lambda(t) = \psi(t) - \int_0^1 \frac{\psi(t+h) - \psi(t-h)}{2}dh \tag{1.2.9}$$

Έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \frac{\mathrm{i}tx}{1+x^2}) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \cos(hx) - 1 - \frac{\mathrm{i}tx}{x^2} \right) dh \right] \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (1.2.8), έχουμε

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} d\Lambda(x) \tag{1.2.10}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, $\forall x$ και $0 < c_1 < c_2 < +\infty$,

$$c_1 \leq \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \leq c_2 \tag{1.2.11}$$

έπεται λοιπόν ότι η $\Lambda(x)$ είναι αύξουσα και φραγμένη. Από την (1.2.10) συμπεραίνουμε ότι η $\lambda(t)$ είναι $\chi.\sigma.$

Λήμμα 1.2.2. *Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των συναρτήσεων ψ (1.2.5) και των ζευγών (γ, G) όπου γ πραγματική σταθερά και G μια αύξουσα φραγμένη συνάρτηση με $G(-\infty) = 0$.*

Απόδειξη.
Από την (1.2.5) ένα αυθαίρετο ζεύγος (γ, G) προσδιορίζει μοναδικά την ψ. Μια αυθαίρετη συνάρτηση $\psi(t)$ προσδιορίζει μοναδικά τη $\lambda(t)$ η οποία είναι $\chi.\sigma.$ Από την (1.2.10) και το Θ.3 ΠΡΤ η $\lambda(t)$ προσδιορίζει την $\Lambda(x)$, και αυτή, την συνάρτηση

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2 d\Lambda(y)}{(1+y^2)(1 - \sin y/y)} \tag{1.2.12}$$

λόγω της (1.2.11).
Είναι δε προφανές ότι οι συναρτήσεις ψ και G προσδιορίζουν μοναδικά την σταθερά γ. Χρησιμοποιώντας το Λ. 1.2.2, συμβολίζουμε $\psi = (\gamma, G)$.

Λήμμα 1.2.3. *Υποθέτουμε ότι,*

$$\psi_n(t) = \mathrm{i}\gamma_n t + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \frac{\mathrm{i}tx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG_n(x) \tag{1.2.13}$$

όπου γ_n,$G_n(u)$ όπως στην (1.2.5), $n = 1, 2, \ldots$. Αν $\gamma_n \to \gamma$ και $G_n \rightrightarrows G$ (Ορς 1 ΠΡΤ) τότε $\psi_n(t) \to \psi(t)$. Αν $\psi_n(t) \to \psi(t)$, όπου $\psi(t)$ συνεχής στο $t = 0$, τότε $\exists$ θετική σταθερά γ και αύξουσα φραγμένη συνάρτηση $G(u)$ ώστε $\gamma_n \to \gamma$, $G_n \rightrightarrows G$ και $\psi = (\gamma, G)$.

Απόδειξη.
Ο ευθύς ισχυρισμός έπεται από το Θ.5 ΠΡΤ.
Αντιστρόφως, μια συνάρτηση $\mathrm{e}^{\psi(t)}$ συνεχής στο $t = 0$ είναι το lim μιας ακολουθίας i.d $\chi.\sigma.$ (Λ. 1.2.1). Από Θ.2 ΠΡΤ και Π.1.1.7, η $\mathrm{e}^{\psi(t)}$ είναι i.d $\chi.\sigma.$. Επομένως, από Π. 1.1.2, έχουμε $\mathrm{e}^{\psi(t)} \neq 0 \ \forall t$, οπότε $\psi(t)$ πεπερασμένη και $\psi_n(t) \to \psi(t)$ ομοιόμορφα, σε ένα αυθαίρετο πεπερασμένο διάστημα. Τότε

$$\begin{aligned} \lambda_n(t) &= \psi_n(t) - \int_0^1 \frac{\psi_n(t+h) - \psi_n(t-h)}{2} dh \to \lambda(t) \\ \text{όπου } \lambda(t) &= \psi(t) - \int_0^1 \frac{\psi(t+h) - \psi(t-h)}{2} dh \qquad (1.2.14) \end{aligned}$$

Μέσω της (1.2.14) και της (1.2.10), χρησιμοποιώντας την συνέχεια της $\lambda(t)$ και Θ.2 ΠΡΤ, παίρνουμε $\Lambda_n \to \Lambda$.
Επειδή $\lambda_n(0) \to \lambda(0)$ και $\lambda_n(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Lambda(x)$, $\lambda(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Lambda(x)$ έχουμε $\Lambda_n(-\infty) \to \Lambda(-\infty)$ και $\Lambda_n(+\infty) \to \Lambda(+\infty)$, δηλ. $\Lambda_n \rightrightarrows \Lambda$.
Από τις (1.2.11), (1.2.12) και Θ.5 ΠΡΤ έπεται ότι $G_n \rightrightarrows G$.
Από το ίδιο θεώρημα (Θ.5 ΠΡΤ)

$$\mathrm{i}\gamma_n t \to \psi(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \frac{\mathrm{i}tx}{1+x^2}) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x), \ \forall t.$$

Έπεται ότι υπάρχει ένα όριο $\lim \gamma_n = \gamma$. Τώρα απο το ευθύ, $\psi = (\gamma, G)$.

Θεώρημα 1.2.4. *Μια συνάρτηση $f(t)$ είναι i.d, $\chi.\sigma.$, τότε και μόνον τότε αν*

$$f(t) = \exp\left(\mathrm{i}\gamma t + \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \frac{\mathrm{i}tx}{1+x^2}) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x)\right) \qquad (1.2.15)$$

όπου γ θετική σταθερά, $G(x)$ αύξουσα, φραγμένη συνάρτηση και η συνάρτηση υπό το ολοκλήρωμα ισούται με $-t^2/2$ για $x = 0$.

Απόδειξη.
Από το Λ. 1.2.1, αρκεί να δείξουμε ότι μια αυθαίρετη i.d $\chi.\sigma.$, μπορεί να γραφεί στον τύπο (1.2.15). Από Π. 1.1.2 $f(t) \neq 0 \ \forall t$. Θεωρούμε λοιπόν $Logf(t)$· επειδή $f(t) = f_n^n(t)$, $\forall n$ όπου $f_n(t)$ είναι $\chi.\sigma.$,

$$Logf(t) = nLogf_n(t) = nLog(1 + (f_n(t) - 1)) = \lim_n [n(f_n(t) - 1)]$$

(βλ. Π. 1.1.8).
Συμβολιζουμε $F_n(x)$ την $\sigma.\kappa.$ που αντιστοιχεί στην $\chi.\sigma.$ $f_n(t)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} Logf(t) &= \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1) dF_n(x) \\ &= \lim_n \left(\mathrm{i}t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx}{1+x^2} dF_n(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \frac{\mathrm{i}tx}{1+x^2}) dF_n(x)\right) \\ &= \lim_n \psi_n(t), \ \forall t \end{aligned}$$

όπου $\psi_n(t)$ ορίζεται από την (1.2.13), και

$$\gamma_n(t) = n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dF_n(x),\ G_n(x) = n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^2}dF_n(y).$$

Από Λ. 1.2.3, από την σχέση $\psi_n(t) \to Logf(t)$ και την συνέχεια του $Logf(t)$ στο $t = 0$, έπεται ότι υπάρχει πραγματική σταθερά γ και μια αύξουσα και φραγμένη συνάρτηση $G(x)$ ώστε $\gamma_n \to \gamma$, $G_n \rightrightarrows G$ και $Logf(t) = (\gamma, G)$.

Η εξίσωση (1.2.15) λέγεται τύπος Lévy-Khintchine, η συνάρτηση $G(x)$ (όπου $G(-\infty) = 0$) λέγεται Lévy-Khintchine φασματική συνάρτηση (Lévy-Khintchine spectral function).

Το Λ. 1.2.2 και το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγονται οτι η παράσταση μιάς i.d $\chi.\sigma.$ $f(t)$ (τύπος 1.2.15) είναι μοναδική εφόσον η (1.2.15) προσδιορίζει την γ κατά μοναδικό τρόπο, καθώς και την συνάρτηση $G(x)$, μέσω της $f(t)$.

Οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις της (1.2.15) είναι ιδιαίτερα αξιοπρόσεκτες.

Παράδειγμα 1.
Εάν m θετικός αριθμός και

$$G(x) = \begin{cases} m,\ x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases}$$

Τότε από την (1.2.15) παίρνουμε

$$\log(\psi(t)) = \mathrm{i}ta - t^2m/2$$

δηλ. $\psi(t)$ είναι η $\chi.\sigma.$ της κανονικής κατανομής $N(a, m)$. Από την μοναδικότητα (Λ. 1.2.2), καμμία άλλη φασματική συνάρτηση δεν οδηγεί στην κανονική κατανομή.

Παράδειγμα 2.
Έστω $C \neq 0$ και $D > 0$, και $\psi(t)$ $\chi.\sigma.$ Poisson κατανομής δηλ. $\log\psi(t) = a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\beta} - 1)$, $a > 0, \beta \neq 0$. Αν η φασματική συνάρτηση είναι:

$$G(x) = \begin{cases} D,\ x \geq c \\ 0,\ x < c \end{cases}$$

τότε από τον υπολογισμό της (1.2.15) με $G(x)$ την ανωτέρω, παίρνουμε $a = 2D$, $\beta = C = 1$, δηλ. $\gamma = a/2$,

$$G(u) = \begin{cases} 0,\ u \leq 1 \\ a/2,\ u > 1 \end{cases}$$

μοναδικά.

Δίνουμε δύο ακόμη, ενδιαφέροντα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.
Έστω X τ.μ. με την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, $0 < p < 1$ δηλ. $P(X = k) = pq^{k-1}$, $k = 1, 2 \ldots$ $q = 1 - p$. Η X έχει i.d κατανομή. Πράγματι, η $\chi.\sigma.$ της X είναι:

$$\psi(t) = p \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tk} q^{k-1} = \frac{(1-q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - q\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$$

Από το ανάπτυγμα Taylor του $\log(1 - z)$ έχουμε

$$\log \psi(t) = \mathrm{i}t + p \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk} - 1) \frac{q^k}{k}$$

Επειδή κάθε όρος του αθροίσματος είναι ο λογάριθμος της $\chi.\sigma.$ μιας Poisson κατανομής (η οποία είναι i.d.), από τις Π. 1.1.7 και Π. 1.1.8, έπεται ότι το άπειρο άθροισμα, παράγει μια i.d. κατανομή, της οποίας η συνέλιξη με την εκφυλισμένη κατανομή που αντιστοιχεί στη $\chi.\sigma.$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, παραμένει i.d. κατανομή.
Δηλ. η Γεωμετρική κατανομή είναι i.d.

Παράδειγμα 4.
Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(t) = \frac{1-b}{1+a} \frac{1 + a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{1 - b\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}, \ 0 < a \leq b < 1.$$

Η $f(t)$ είναι συνεχής, $f(0) = 1$ και

$$f(t) = \frac{1-b}{1+a} \left(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + (1 + ab) \sum_{n=0}^{\infty} b^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \right)$$

Δηλ. η $f(t)$ είναι η $\chi.\sigma.$ μιάς τ.μ. που παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές από το -1 ως $+\infty$·
Επιπλέον:

$$P(X = -1) = \frac{1-b}{1+a} a$$

$$P(X = n) = \frac{1-b}{1+a} (1 + ab) b^n, \ n = 0, 1, \ldots$$

Η $f(t)$ δεν είναι i.d $\chi.\sigma.$ Πράγματι,

$$\begin{aligned} \log f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n-1} \frac{a^n}{n} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} - 1) + \frac{b^n}{n} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} - 1)) \\ &= \mathrm{i}\gamma t + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1 + u^2}) \frac{1 + u^2}{u^2} dG(u) \end{aligned}$$

όπου όπως υπολογίζεται $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n + (-1)^n a^n}{1 + n^2}$ και $G(u)$ είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης με άλματα στα σημεία $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ με ορίσματα

$$\frac{nb^n}{n^2 + 1}, \ u = +n$$

$$(-1)^{n-1}\frac{na^n}{n^2+1},\ u=-n$$

Επομένως $G(u)$ δεν είναι μονότονη και ως έκ τούτου λόγω και της μοναδικότητος, δεν μπορεί να είναι $\chi.\sigma.$ μιας i.d. κατανομής. Τώρα η συζυγής συνάρτηση της $f(t)$

$$\bar{f}(t)=\frac{1-b}{1+a}\,\frac{1+a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}$$

είναι μια $\chi.\sigma.$ και

$$\log\bar{f}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b^n}{n}(\mathrm{e}^{-int}-1)+(-1)^{n-1}\frac{a^n}{n}(\mathrm{e}^{int}-1)\right)$$

Θα δείξουμε ότι

$$g(t)=f(t)\bar{f}(t)=|f(t)|^2$$

είναι η $\chi.\sigma.$ μιας i.d κατάνομης. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\log g(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(b^n+(-1)^{n-1}a^n)(\mathrm{e}^{-int}-1)\\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(b^n+(-1)^{n-1}a^n)(\mathrm{e}^{int}-1)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1-\frac{\mathrm{i}tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)\end{aligned}$$

όπου $G(x)$ είναι αύξουσα που παρουσιάζει άλματα στα σημεία $\pm1,\pm,\pm3,\ldots$· τα άλματα στα σημεία $+n$ και $-n$ είναι ίσα, τα ορίσματα είναι

$$\frac{n}{1+n^2}(b^n+(-1)^{n-1}a^n),\ n>0.$$

Οριζουμε τις συναρτήσεις $M(u)$ και $N(u)$ και τη σταθερά σ^2, θέτοντας

$$\begin{cases}M(u)=\displaystyle\int_{-\infty}^{u}\frac{1+x^2}{x^2}dG(x),\ u<0\\ N(u)=-\displaystyle\int_{u}^{\infty}\frac{1+x^2}{x^2}dG(x),\ u>0\\ \sigma^2=G(0+)-G(0-)\end{cases}\tag{1.2.16}$$

Οι συναρτήσεις $M(u)$ και $N(u)$ είναι:
1) αύξουσες στα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ αντίστοιχα
2) είναι συνεχείς στα σημεία, και μόνο σε αυτά, στα οποία η $G(u)$ είναι συνεχής
3) ικανοποιούν τις σχέσεις $M(-\infty)=N(+\infty)=0$ και

$$\int_{-\epsilon}^{0}u^2dM(u)+\int_{0}^{\epsilon}u^2dN(u)<+\infty,\ \forall\epsilon>0.$$

Αντίστροφα, οποιεσδήποτε 2 συναρτήσεις $M(u)$ και $N(u)$ που ικανοποιούν 1) και 3) και οποιαδήποτε σταθερά $\sigma > 0$, καθορίζουν μέσω των (1.2.16) την $\chi.\sigma.$ μιας i.d. κατανομής. Η (1.2.15), με όρους των $M(u)$ και $N(u)$, γράφεται στον ακόλουθο τύπο

$$\begin{aligned} f(t) = \exp\Bigg[\mathrm{i}\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} &+ \int_{-\infty}^{0}\left(\mathrm{e}^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)dM(u) \\ &+ \int_{0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u)\Bigg] \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

που ονομάζεται <u>τύπος Lévys</u>. Τελικά, ο τύπος Lévy's-Khintchine, μπορεί να γραφεί επίσης ως:

$$\begin{aligned} \log f(t) &= \mathrm{i}\gamma(\tau)t - (\sigma^2 t^2/2) + \int_{-\infty}^{-\tau}(\mathrm{e}^{itu} - 1)dM(u) \\ &+ \int_{-\tau}^{0}(\mathrm{e}^{itu} - 1 - \mathrm{i}ut)dM(u) + \int_{0}^{\tau}(\mathrm{e}^{itu} - 1 - \mathrm{i}ut)dN(u) \\ &+ \int_{\tau}^{+\infty}(\mathrm{e}^{itu} - 1)dN(u) \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

όπου $M(u)$ και $N(u)$ όπως στην (1.2.16), τ μια αυθαίρετη σταθερά επιλεγμένη ούτως ώστε τ και $-\tau$ είναι σημεία συνεχείας των $N(u)$ και $M(u)$ αντίστοιχα. Η σχέση μεταξύ $\gamma(\tau)$ και γ στον τύπο (1.2.15), δίδεται στην

$$\gamma(\tau) = \gamma + \int_{|u|<\tau} u dG(u) - \int_{|u|\geq\tau} u^{-1} dG(u) \tag{1.2.19}$$

Οι τύποι Lévy και Lévy-Khintchine είναι γενικεύσεις του τύπου Kolmogorov που επενοήθη από τον ίδιο (1932), για i.d. κατανομές με πεπερασμένες διασπορές. Αποδεικνύεται ότι σε αυτή τη περίπτωση η $F(x)$ είναι i.d, τότε και μόνον τότε, αν

$$\log f(t) = \mathrm{i}\gamma t + \int(\mathrm{e}^{itu} - 1 - \mathrm{i}ut)\frac{1}{u^2}dK(u) \tag{1.2.20}$$

όπου γ σταθερά και η συνάρτηση $K(u)$ είναι αύξουσα και φραγμένη (και $K(-\infty) = 0$). Η παράσταση αυτή είναι μοναδική. Ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει ότι σε αυτή την περίπτωση ισχύουν:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\log f(t)|_{t=0} &= \mathrm{i}EX = \mathrm{i}\gamma \\ \frac{d^2}{dt^2}\log f(t)|_{t=0} &= -V(X) = -\int dK(u) \end{aligned}$$

δηλ. $\gamma = EX$ και $K(+\infty) = V(X)$. (πιθανοθεωρητική ερμηνεία των γ και $K(u)$).

Παράδειγμα.

Οι κανονικές παραστάσεις της Κανονικής Κατανομής και της Poisson μέσω των τύπων

Lévy και Kolmogorov είναι:
α) Κανονική $N(a,\sigma^2)$. Θέτουμε:

$$\gamma = a, M(u) = 0, N(u) = 0, \sigma = \sigma \quad (\tau\upsilon\pi o\varsigma\ Levy)$$

$$\gamma = a, K(u) = \begin{cases} 0, & u \le 0 \\ \sigma^2, & u > 0 \end{cases} \qquad (\tau\upsilon\pi o\varsigma\ Kolmogorov)$$

β) Poisson κατανομή με $\chi.\sigma.$ $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)}$.

$$\gamma = \lambda/2, \sigma = 0, M(u) = 0, N(u) = \begin{cases} -\lambda, & u \le 1 \\ 0, & u > 1 \end{cases} \qquad (\tau\upsilon\pi o\varsigma\ Levy)$$

$$\gamma = \lambda, K(u) = \begin{cases} 0, & u \le 1 \\ \lambda, & u > 1 \end{cases} \qquad (\tau\upsilon\pi o\varsigma\ Kolmogorov)$$

Από την μοναδικότητα των Παραστάσεων προκύπτει ότι ουδεμία άλλη φασματική συνάρτηση μπορεί να οδηγήσει στις συγκεκριμένες κατανομές.

1.3 Συνθήκες για την σύγκλιση των i.d κατανομών

Θεώρημα 1.3.1. *Η ακολουθία των i.d κατανομών $\{F_n(x)\}$ συγκλίνει στην κατανομή (οριακή) $F(x)$ αν και μονο αν για $n \to \infty$*
1) $G_n(u) \to G(u)$, $G_n(+\infty) \to G(+\infty)$.
2) $\gamma_n \to \gamma$.

Απόδειξη.
Αναγκαία Συνθήκη. Υποθέτουμε $F_n(x) \xrightarrow{d} F(x)$. Τότε $f_n(t) \to f(t)$ (Θ.4 ΠΡΤ). Εφόσον $f_n(t)$ και $f(t)$ δεν μηδενίζονται για οποιοδήποτε t, έχουμε

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \mathrm{i}\gamma_n t + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} dG_n(u) \\ &\overset{n\to\infty}{\to} \mathrm{i}\gamma t + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2} dG(u). \end{aligned}$$

Από αυτήν συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} Ref_n(t) &= \int (\cos(ut) - 1)\frac{1+u^2}{u^2} dG_n(u) \\ &\to \int (\cos(ut) - 1)\frac{1+u^2}{u^2} dG(u) \end{aligned}$$

Αν αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{G_n(x)\}$ είναι συμπαγές, τότε παίρνοντας μια συγκλίνουσα υπακολουθία του

$$G_{n_k}(x) \xrightarrow{d} G^\star(x)$$

θα έχουμε

$$\int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}dG_{n_k}(u) \overset{n\to\infty}{\to} \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}dG^\star(u)$$

Όμως ισχύει:

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\gamma_{n_k}t + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}dG_{n_k}(u) \\ &\overset{n\to\infty}{\to} \mathrm{i}\gamma t + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{1+u^2})\frac{1+u^2}{u^2}dG(u) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η ακολουθία γ_{n_k} έχει ένα όριο $\gamma^\star$ αλλά, λόγω της μοναδικότητας της παράστασης του τύπου Lévy-Khintchine, έπεται ότι $\gamma^\star = \gamma$, $G^\star(u) = G(u)$.
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\{G_n(x)\}$ συμπαγές. Πράγματι, βάσει του Θ.7 ΠΡΤ, πρέπει να δειχθεί ότι:
α) $G_n(+\infty)$ είναι φραγμένη και
β) $\int_{|u|>T} dG_n(u) \to 0$, $T \to \infty$.

Απόδειξη. α):
Θέτουμε

$$A_n = \int_{|u|\le 1} dG_n(u), B_n = \int_{|u|>1} dG_n(u), C_n = A_n + B_n = \int dG_n(u)$$

Έστω $0 \le t \le 2$. Είναι προφανές ότι $\forall \epsilon > 0$ και αρκετά μεγάλο n,

$$-\log|f(t)| + \epsilon \ge \int_{|u|\le 1} (1-\cos(tu))\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u)$$

και

$$-\log|f(t)| + \epsilon \ge \int_{|u|>1} (1-\cos(tu))\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u)$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις:

$$I_n(t) = \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u) \xrightarrow{d} \log f(t).$$

άρα

$$\mathrm{Re} I_n(t) \xrightarrow{d} \log|f(t)|$$

Για $|u| \le 1$,

$$\frac{1-\cos u}{u^2} > 1/3.$$

Επομένως η πρώτη ανισότητα δίνει

$$-\log|f(1)|+\epsilon > \frac{A_n}{3}$$

Παίρνοντας στο διάστημα $0 \le t \le 2$, τη μέση τιμή στα δύο μέλη της δεύτερης ανισότητας, παίρνουμε

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 \log|f(t)|dt+\epsilon \ge \int_{|u|>1}(1-\frac{\sin(2u)}{2u})dG_n(u) \ge \frac{B_n}{2} \tag{1.3.21}$$

Επειδή $\log|f(1)|$, $\frac{1}{2}\int_0^2 \log|f(t)|dt < \infty$, έπεται $A_n+B_n = G_n(+\infty)$ είναι φραγμένη.

Απόδειξη. β):
$\forall\ \epsilon > 0$ και για αρκετά μεγάλο n,

$$-\log|f(t)|+\epsilon \ge \int_{|u|\ge T}(1-\cos(tu))dG_n(u).$$

Παίρνοντας μέσες τιμές στα 2 μέλη της προηγούμενης, στο διάστημα $0 \le t \le 2/T$ ($T \ge 1$), έχουμε

$$-\frac{T}{2}\int_0^{2/T} \log|f(t)|dt+\epsilon \ge \int_{|u|\ge T}(1-\frac{T\sin(2u/T)}{2u})dG_n(u)$$

Αλλά για $|u| \ge T$,

$$1-\frac{T\sin(2u/T)}{2u} \ge 1/2$$

και για $T \ge T_0$,

$$\left|\frac{T}{2}\int_0^{2/T} \log|f(t)|dt\right| \le \max_{0\le t\le 2/T}|\log|f(t)|| < \epsilon$$

Επομένως για $T \ge T_0$, από την (1.3.21) παίρνουμε

$$\int_{|u|\ge T} dG_n(u) \le 4\epsilon,\ \forall \epsilon > 0$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση

$$-\frac{T}{2}\int_0^{2/T} \log|f(t)|dt+\epsilon < 2\epsilon \text{ άρα } 2\epsilon > \frac{B_n}{2} = \frac{1}{2}\int_{|u|>T} dG_n(u).$$

Ικανή Συνθήκη

Πράγματι, από τις συνθήκες του θεωρήματος, έπεται ότι $f_n(t) \to f(t)$, $\forall t$, και απο το Θ.4 ΠΡΤ έπεται το ζητούμενο.

Το επόμενο θεώρημα είναι αναδιατύπωση του προηγούμενου, χρησιμοποιώντας όμως τον τύπο του Lévy.

Θεώρημα 1.3.2. *Η ακολουθία των i.d. κατανομών $\{F_n(x)\}_n$ συγκλίνει στην κατανομή (οριακή) $F(x)$ αν και μονο αν:*
i) $M_n(u) \to M(u)$, $N_n(u) \to N(u)$ στα σημεία συνεχείας των συναρτήσεων $M(u)$ και $N(u)$.
ii» $\gamma_n(\tau) \to \gamma(\tau)$
iii)

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(\int_{-\epsilon}^{0} u^2 dM_n(u)\right. &+ \left.\sigma_n^2 + \int_0^{\epsilon} u^2 dN_n(u)\right) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\int_{-\epsilon}^{0} u^2 dM_n(u) + \sigma_n^2 + \int_0^{\epsilon} u^2 dN_n(u)\right) \\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $M_n(u)$, $N_n(u)$, $M(u)$, $N(u)$ και οι σταθερές σ_n, $\gamma_n(\tau)$, σ, γ ορίζονται από τις (1.2.16) και (1.2.19) για τις κατανομές $F_n(x)$ και $F(x)$, αντίστοιχα.

Απόδειξη.
Έστω $F_n \xrightarrow{d} F$.
Ότι οι συνθήκες (i) και (ii) είναι αναγκαίες, προκύπτει, από την αναγκαιότητα της συνθήκης $G_n \xrightarrow{d} G$ του προηγούμενου θεωρήματος, τους τύπους που ορίζουν $M(u)$, $N(u)$ και $\gamma(\tau)$ και το Θ.6 ΠΡΤ.
Έστωσαν $-\epsilon$ και ϵ σημεία συνεχείας των συναρτήσεων $M_n(u)$, $M(u)$ και $N_n(u)$, $N(u)$. Τότε, θέτοντας

$$\begin{aligned} I_n(\epsilon) = G_n(\epsilon) - G_n(\epsilon-) &= \int_{-\epsilon}^{0}\frac{u^2}{1+u^2}dM_n(u) + \sigma_n^2 + \int_0^{\epsilon}\frac{u^2}{1+u^2}dN_n(u) \\ \Bigg(M_n(u) = \int_{-\infty}^{u}\frac{1+z^2}{z^2}dG_n(z) &\Rightarrow dM_n(u) = \frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u) \\ \int_{-\epsilon}^{0}\frac{u^2}{1+u^2}\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u) &= G_n(0) - G_n(\epsilon-)\Bigg)\end{aligned}$$

και

$$I(\epsilon) = G(\epsilon) - G(-\epsilon) = \int_{-1}^{u}\frac{u^2}{1+u^2}dM(u) + \sigma^2 + \int_0^{1}\frac{u^2}{1+u^2}dN(u)$$

έχουμε (Θ.6 ΠΡΤ)

$$I_n(\epsilon) \to I(\epsilon),\ n\to\infty \tag{1.3.22}$$

Από τις σχέσεις

$$\frac{1}{1+\epsilon^2}\int_{-\epsilon}^{0} u^2 dM_n(u) \le \int_{-\epsilon}^{0}\frac{u^2}{1+u^2}dM_n(u) \le \int_{-\epsilon}^{0} u^2 dM_n(u)$$

και

$$\frac{1}{1+\epsilon^2}\int_{0}^{\epsilon} u^2 dN_n(u) \le \int_{0}^{\epsilon}\frac{u^2}{1+u^2}dN_n(u) \le \int_{0}^{\epsilon} u^2 dN_n(u)$$

(που είναι προφανείς), συμπεραίνουμε ότι,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\epsilon^2}\Big(\int_{-\epsilon}^{0} u^2 dM_n(u) + \sigma_n^2 \quad &+ \quad \int_0^{\epsilon} u^2 dN_n(u)\Big) \\ &\leq \quad I_n(t) \\ &\leq \quad \int_{-\epsilon}^{0} u^2 dM_n(u) + \sigma_n^2 \\ &+ \quad \int_0^{\epsilon} u^2 dN_n(u) \end{aligned} \tag{1.3.23}$$

Από τις (1.3.22), (1.3.23) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\bar{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{1+\epsilon^2}\Big(\int_{-\epsilon}^{0} u^2 dM_n(u) \quad &+ \quad \sigma_n^2 \\ &+ \quad \int_0^{\epsilon} u^2 dN_n(u)\Big) \\ &\leq \quad I(\epsilon) \\ &\leq \quad \bar{\lim}_{n\to\infty}\Big(\int_{-\epsilon}^{0} u^2 dM_n(u) \\ &+ \quad \sigma_n^2 \\ &+ \quad \int_0^{\epsilon} u^2 dN_n(u)\Big).\end{aligned}$$

Βεβαίως οι ίδιες ανισότητες ισχύουν και για τα $\underline{\lim} = \liminf$.
Καθώς $\epsilon \to 0$, και τα δύο μέρη της προηγούμενης ανισότητος έχουν το ίδιο όριο· δηλ. $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) = \sigma^2$.
Έτσι απεδείχθη η αναγκαιότης και της συνθήκης iii).
Θα δείξουμε τώρα ότι οι συνθήκες i), ii), iii) είναι ικανές. Προς τούτο, αρκεί να δειχθεί οτι οι i), ii), iii) συνεπάγονται τις συνθήκες του Θ. 1.3.1.
Πραγματι,

$$G_n(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2} dM_n(x) \to \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2} dM(x) = G(u), \;\; u<0, n\to\infty \tag{1.3.24}$$

στα σημεία συνεχείας της $M(u)$ και επομένως στα σημεία συνεχείας της $G(u)$, επίσης. Από (1.3.24) προκύπτει ότι

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} G_n(\epsilon-) = G(0-) \tag{1.3.25}$$

Από την (1.3.23) έχουμε

$$\begin{aligned}
G_n(\epsilon-) &+ \frac{1}{1+\epsilon^2}\Big(\int_{-\epsilon}^{0} u^2 dM_n(u) + \sigma_n^2 \\
&+ \int_0^{\epsilon} u^2 dN_n(u)\Big) \\
&\leq G_n(\epsilon+) \\
&\leq G_n(\epsilon-) + \Big(\int_{-\epsilon}^{0} u^2 dM_n(u) \\
&+ \sigma_n^2 + \int_0^{\epsilon} u^2 dN_n(u)\Big)
\end{aligned}$$

(από ορισμό $I_n(\epsilon)$ και τις (1.3.23).
Από την συνθήκη iii) και (1.3.25) έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} \bar{\lim}_{n\to\infty} G_n(\epsilon+) &= \lim_{\epsilon\to 0} \underline{\lim}_{n\to\infty} G_n(\epsilon+) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \underline{\lim}_{n\to\infty} G_n(\epsilon-) + \sigma^2 \\
&= G(0-) + \sigma^2 = G(0+)
\end{aligned}$$

(Από (1.3.25) και $\lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) = \sigma^2$). Τώρα, $\forall u_1 > 0$ και $u_2 > 0$ σημεία συνεχείας της $G(u)$

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2}{1+u^2} dN_n(u) \to \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2}{1+u^2} dN(u) \tag{1.3.26}$$

(Θ.6 ΠΡΤ) ώστε, για ϵ σημείο συνεχείας της $N(u)$

$$\begin{aligned}
\bar{\lim}_{n\to\infty} G_n(u) &= \lim_{\epsilon\to 0} \bar{\lim}_{n\to\infty}\Big(G_n(\epsilon) + \int_{\epsilon}^{u} \frac{u^2}{1+u^2} dN_n(u)\Big) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \underline{\lim}_{n\to\infty}\Big(G_n(\epsilon) + \int_{\epsilon}^{u} \frac{u^2}{1+u^2} dN_n(u)\Big) \\
&= \underline{\lim}_{n\to\infty} G_n(u) = G(u),\ u > 0
\end{aligned} \tag{1.3.27}$$

Δηλ. δείξαμε ότι $G_n(u) \to G(u), n \to \infty$ στα σημεία συνεχείας της $G(u)$.
Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}
G_n(+\infty) = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{u^2}{1+u^2} dM_n(u) &+ \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^2} dN_n(u) \\
+ \int_{-\epsilon}^{0} \frac{u^2}{1+u^2} dM_n(u) + \sigma_n^2 + \int_0^{\epsilon} \frac{u^2}{1+u^2} dN_n(u)
\end{aligned} \tag{1.3.28}$$

Από τις (1.3.24),(1.3.26),(1.3.27),(1.3.28) συμπεραίνουμε ότι για $n \to \infty$

$$G_n(+\infty) \to G(+\infty)$$

Η συνθήκη 2) του Θ. 2.3.1 προκύπτει από συνθήκες του θεωρήματος αυτού (και το Θ.6 ΠΡΤ), τα προηγούμενα αποτελέσματα και τον τύπο που ορίζει το $\gamma(t)$.

Θεώρημα 1.3.3. *Η ακολουθία των i.d κατανομών $F_n(x)$ με πεπερασμένες διασπορές συγκλίνει σε μια κατανομή $F(x)$ και οι διασπορές των $F_n(x)$ συγκλίνουν στη διασπορά της οριακής $F(x)$ αν και μονο αν*
1) $K_n(u) \xrightarrow{d} K(u)$, $K_n(+\infty) \to K(+\infty)$
2) $\gamma_n \to \gamma$, $n \to \infty$
όπου οι συναρτήσεις $K_n(u)$ και $K(u)$, γ_n και γ ορίζονται από τον τύπο Kolmogorov για τις $F_n(x)$ και $F(x)$.

Απόδειξη.
Εάν ισχύουν οι συνθήκες 1) και 2), τότε

$$\log f_n(t) = \mathrm{i}\gamma_n t + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)\frac{1}{u^2}dK_n(u) \overset{n\to\infty}{\to} \mathrm{i}\gamma t + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)\frac{1}{u^2}dK(u) \tag{1.3.29}$$

($f_n(t)$ οι $\chi.\sigma.$ των i.d $\sigma.\kappa.$ $F_n(t)$) και $K_n(+\infty) = V(X_n) \to V(X) = K(+\infty)$. Τότε από Θ.4 ΠΡΤ έχουμε ότι $F_n(x) \xrightarrow{d} F(x)$ όπου $F(x)$ έχει $\chi.\sigma.$ την $f(t)$ η οποία είναι i.d. κατανομή από την Π. 1.1.7.
Έστω τώρα ότι $F_n(x) \xrightarrow{d} F(x)$. Τότε (Θ.4 ΠΡΤ) $f_n(t) \to f(t)$· Συνεπώς

$$\begin{aligned} \log f_n(t) &= \mathrm{i}\gamma_n t + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)\frac{1}{u^2}dK_n(u) \to \log f(t) \\ &= \mathrm{i}\gamma + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)\frac{1}{u^2}dK(u) \end{aligned} \tag{1.3.30}$$

Υποθέτουμε δε ότι $V_{F_n}(X_n) \to V_F(X)$· τότε έπεται

$$K_n(+\infty) \to K(+\infty) \tag{1.3.31}$$

(σχόλια μετά την (1.2.20) ανωτέρω) Προφανώς για κάθε $\forall t \neq 0$, έχουμε

$$\mathrm{i}\gamma_n + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)\frac{1}{tu^2}dK_n(u) \overset{n\to\infty}{\to} \mathrm{i}\gamma + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)\frac{1}{tu^2}dK(u) \tag{1.3.32}$$

Έστω τώρα, ότι $t \to 0$. Τότε από την ανισότητα $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}ut} - 1 - \mathrm{i}tu| \le \frac{1}{2}t^2u^2$, έπεται

$$\left| \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)\frac{1}{tu^2}dK_n(u) \right| \le \frac{|t|}{2}\int dK_n(u)$$

και $\int dK_n(u) < \infty$.
Συνεπώς τα ολοκληρώματα στην (1.3.32) τεινουν στο μηδέν και $\gamma_n \to \gamma$.
Όπως στην απόδειξη του Θ. 1.3.1 επιλέγουμε από την ακολουθία $\{K_n(u)\}$, μία υπακολουθία $K_{n_k}(u)$ που συγκλίνει σε μια αύξουσα συνάρτηση $\bar{K}(u)$ σε κάθε σημείο συνεχείας της τελευταίας.
Δείχνουμε τώρα ότι,

$$\int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)u^{-2}dK_{n_k}(u) \to \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)u^{-2}d\bar{K}(u) \tag{1.3.33}$$

Αν η $\bar{K}(u)$ είναι συνεχής στα σημεία $-B$ και B τότε (Θ.6 ΠΡΤ) για ένα σταθεροποιημένο t και αρκετα μεγάλο K, έχουμε

$$\left| \int_{|u|\leq B} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)u^{-2} dK_{n_k}(u) - \int_{|u|\leq B} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)u^{-2} d\bar{K}(u) \right| \leq \epsilon/2 \quad (1.3.34)$$

Επίσης

$$\begin{aligned} L_k &= \left| \int_{|u|>B} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)u^{-2} dK_{n_k}(u) \right| \\ &\leq \frac{2|t|}{B} \int_{|u|\geq B} dK_{n_k}(u) \\ &\leq \frac{2|t|}{B} \sup_k K_{n_k}(+\infty) \end{aligned}$$

και

$$L = \left| \int_{|u|>B} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \mathrm{i}tu)u^{-2} d\bar{K}(u) \right| \leq \frac{2|t|}{B} \bar{K}(+\infty)$$

(χρησιμοποιώντας την $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1 - \mathrm{i}x| \leq \min\{x^2/2, 2|x|\}$).
Αλλά $K_n(+\infty)$ είναι φραγμένη. Οπότε για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και t, μπορούμε να έχουμε:

$$|L_k| < \frac{\epsilon}{4}, |L| < \frac{\epsilon}{4} \quad (1.3.35)$$

παίρνοντας αρκετά μεγάλο B. Από τις (1.3.34), (1.3.35) έπεται η (1.3.33).
Από τη μοναδικότητα της αναπαράστασης Kolmogorov, $\bar{K}(u) = K(u)$. Λαμβάνοντας υπόψιν την (1.3.31), παίρνουμε

$$K_{n_k}(u) \xrightarrow{d} K(u).$$

Δηλ. κάθε ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $K_{n_k}(u)$ συγκλίνει στην $K(u)$. Συνεπώς $K_n(u)$ συγκλίνει στην $K(u)$.
Δείξαμε την αναγκαιότητα των συνθηκών και έτσι το θεώρημα απεδείχθη.

Κεφάλαιο 2

Γενικά Οριακά Θεωρηματα για αθροίσματα ανεξάρτητων τ.μ.

2.1 Οριακές κατανομές με πεπερασμένες διασπορές

Το πρόβλημα της φύσεως (των ιδιοτήτων) των οριακών *σ.κ.* για αθροίσματα ανεξάρτητων τ.μ, μπορεί, στην πιο γενική του μορφή, να διατυπωθή ως εξής:
$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ ακολουθία τ.μ. όπου κάθε

$$S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nk_n},\ 1 \leq k \leq k_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

και κάθε μεμονωμένος προσθετέος X_{nj} του S_n συμβάλλει 'πολύ λίγο' στο συνολικό άθροισμα S_n (για μεγάλα n) έτσι ώστε αυτό να αποτελείται αναγκαστικά από 'πολλούς αμελητέους ανεξάρτητους προσθετέους '. Η ιδιότητα του κάθε X_{nj} να είναι αμελητέος εκφράζεται με τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.1.1. *Οι τ.μ. X_{nk} λέγονται απειροστές (infinitesimal) , εάν*

$$\forall \epsilon > 0,\ \sup_{1 \leq k \leq k_n} P(|X_{nk}| \geq \epsilon) \overset{n \to \infty}{\to} 0.$$

ισοδύναμα λέμε ότι οι X_{nk} ικανοποιούν την συνθήκη απειροστής μικρότητος (infinite smallness)

Ορισμός 2.1.2. *Οι τ.μ. X_{nk} λέγονται ασυμπτωτικά σταθερές (asymptotically constants), αν είναι δυνατόν να βρούμε σταθερές a_{nk} ώστε*

$$\forall \epsilon > 0, \sup_{1 \leq k \leq k_n} P(|X_{nk} - a_{nk}| \geq \epsilon) \overset{n \to \infty}{\to} 0$$

Λήμμα 2.1.3. *Οι τ.μ. X_{nk} είναι απειροστές τότε και μόνον τότε, αν*

$$\sup_{1 \leq k \leq k_n} \int \frac{x^2}{1 + x^2} dF_{nk}(x) \to 0, n \ \to \infty.$$

Πρόταση 2.1.4. *Αναγκαία συνθήκη, για να είναι οι τ.μ. X_{nk} απειροστές, είναι*

$$\sup_{1\le k\le k_n} |f_{nk}(t)-1| \to 0,\ n\to\infty$$

όπου f_{nk} η χ.σ. της X_{nk}.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\forall\epsilon>0,\ \sup_{1\le k\le k_n}|f_{nk}-1| &= \sup_{1\le k\le k_n}|\int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1)dF_{nk}(x)| \\
&= \sup_{1\le k\le k_n}\int_{|x|<\epsilon}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1|dF_{nk}(x) \\
&+ 2\sup_{1\le k\le k_n}\int_{|x|\ge\epsilon}dF_{nk}(x) \\
&\le \epsilon|t|+2\sup_{1\le k\le k_n}P(|X_{nk}|\ge\epsilon) \overset{n\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε ότι ($|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1|\le\min\{|x|,2\}$) και ότι X_{nk} infinitesimal)

Θα θεωρήσουμε σε αυτή την παράγραφο, την τριγωνική ακολουθία $X_{n1}, X_{n2},\ldots,X_{nk_n}$ όπου οι $\{X_{nj}, 1\le j\le k_n\}$ είναι ανεξάρτητες και υπόκεινται στις συνθήκες:
α) $\sup_{1\le k\le k_n} P(|X_{nk}-EX_{nk}|\ge\epsilon) \overset{n\to\infty}{\to} 0,\ \forall\epsilon>0$
β) Οι X_{n_k} έχουν πεπερασμένες διασπορές και

$$V(\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk})=\sum_{k=1}^{k_n}V(X_{nk})\le C$$

C σταθερά ανεξάρτητη του n.

Στην μελέτη των οριακών κατανομών για τα αθροίσματα

$$X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nk_n}-A_n \tag{2.1.1}$$

όπου A_n κατάλληλα επιλεγμένες σταθερές X_{n_k} έχουν πεπερασμένες διασπορές, η περίπτωση κατά την οποίαν, όχι μόνο οι οριακές κατανομές των αθροισμάτων (2.1.1) συγκλίνουν σε μιαν οριακή κατανομή, αλλά επίσης οι διασπορές των αθροισμάτων συγκλίνουν στη διασπορά της οριακής κατανομής παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον: Επομένως, η παρουσία και η σημασία της συνθήκης β) είναι προφανής.

Θεώρημα 2.1.5. *Η ακολουθία των σ.κ. των αθροισμάτων $X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nk_n}-A_n$ από ανεξάρτητες τ.μ. που υπόκεινται στις συνθήκες α) και β) και για κατάλληλα επιλεγμένες σταθερές A_n, συγκλίνει σε μια (οριακή) κατανομή τότε και μόνον τότε, αν η ακολουθία 'συγκεκριμένων' κατανομών (συνοδεύουσες κατανομές (accompanying distributions)) συγκλίνει. Οι 'συγκεκριμένες ' αυτές κατανομές είναι i.d. και οι λογάριθμοι των χ.σ. τους ορίζονται ως:*

$$\psi_n(t)=-\mathrm{i}A_nt+\sum_{k=1}^{k_n}\left(\mathrm{i}tEX_{nk}+\int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1)dF_{nk}(x+EX_{nk})\right) \tag{2.1.2}$$

όπου F_{nk} σ.κ. της X_{n_k}. Οι οριακές κατανομές των 2 ακολουθιών συμπίπτουν.

Απόδειξη. Η *χ.σ.* των αθροισμάτων (2.1.1) είναι:

$$f(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA_n} \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t).$$

Από τα Θ. 4 ΠΡΤ, για τη σύγκλιση των κατανομών των (2.1.1) σε μια οριακή κατανομή, αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι ότι,

$$f_n(t) \to f(t), \ n \to +\infty \tag{2.1.3}$$

όπου $f(t)$ η *χ.σ.* της οριακής κατανομής. Συμβολίζοντας την *σ.κ.* των τ.μ. $X'_{nk} = X_{nk} - EX_{nk}$ με *σ.κ.* F'_{nk}, η (2.1.3) μπορεί να μετασχηματισθή στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA_n + \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{i}tEX_{nk}} \prod_{k=1}^{k_n} f'_{nk}(t) \to f(t) \tag{2.1.4}$$

Θέτομε,

$$f'_{nk}(t) - 1 = a_{nk}(t) = a_{nk}.$$

Από (2.1.3) και την Πρόταση 2.1.4, έχομε

$$\sup_{1 \le k \le k_n} |a_{nk}| \to 0.$$

Επομένως, θεωρώντας ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό διάστημα του t, μπορούμε να υποθέσωμε ότι, $\forall n \ge n_0$, για κάποιο n_0, $\sup_{1\le k \le k_n} |a_{nk}| < 1/2$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} |\log f'_{nk}(t) - a_{nk}| &= |\log(1 + a_{nk}) - a_{nk}| \\ &\le \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s} |a_{nk}|^s \\ &\le \frac{1}{2} \sum_{s=2}^{\infty} |a_{nk}|^s \\ &= \frac{1}{2} (\frac{|a_{nk}|^2}{1 - |a_{nk}|}) < |a_{nk}|^2 \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Επειδή

$$\int x dF'_{nk}(x) = EX'_{nk} = 0$$

$$a_{nk} = \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1) dF'_{nk}(x) = \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \mathrm{i}tx) dF'_{nk}(x).$$

Αλλά $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \mathrm{i}tx| \le \frac{t^2x^2}{2}, \left(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \mathrm{i}tx| \le \min\{\frac{t^2x^2}{2}, 2|t||x|\} \right)$$

οπότε

$$|a_{nk}| \le \frac{t^2}{2} \int x^2 dF'_{nk}(x) = \frac{t^2}{2} V X_{nk} \tag{2.1.6}$$

Από τις (2.1.4),(2.1.5),(2.1.6) και την συνθήκη β),

$$
\begin{aligned}
|\log f_n(t) + \mathrm{i}tA_n - \sum_{k=1}^{k_n}\Big(\mathrm{i}tEX_{nk} + \int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1)dF'_{nk}(x)\Big)| &= \\
|\sum_{k=1}^{k_n}\Big(\log f'_{nk}(t) - \int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1)dF'_{nk}(x)\Big)| &\leq \\
\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2 &\leq \\
\frac{t^2}{2}\sup_{1\leq k\leq k_n}|a_{nk}|(\sum_{k=1}^{k_n}VX_{nk}) &\leq \\
\frac{ct^2}{2}\sup_{1\leq k\leq k_n}|a_{nk}|.
\end{aligned}
$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, $\log(f_n(t)) - \psi_n(t) \to 0$ (εφόσον $\mathrm{e}^{\psi_n(t)}$ είναι $\chi.\sigma.$ και συνεπώς ≤ 1). Άρα $f_n(t) \to \mathrm{e}^{\psi_n(t)}$ που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Οι Π. 1.1.2 και Π. 1.1.7 συνεπάγονται το ακόλουθο:

Πόρισμα 2.1.6. *Οι οριακές κατανομές των αθροισμάτων $X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nk_n}-A_n$ ανεξάρτητων τ.μ. που υπόκεινται στις συνθήκες α) και β), ειναι i.d.*

Αν θεωρήσωμε την συνάρτηση

$$K_n(u) = \sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u} x^2 dF_{nk}(x)dx \tag{2.1.7}$$

η οποία είναι προφανώς αύξουσα, ικανοποιεί την συνθήκη $K_n(-\infty) = 0$, και από την συνθήκη β), η $K_n(+\infty)$ είναι φραγμένη, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την 2.1.2 ώστε να πάρει τη μορφή:

$$\psi_n(t) = -\mathrm{i}A_nt + \mathrm{i}t(\sum_{k=1}^{k_n}EX_{nk}) + \int(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}-1)u^{-2}dK_n(u) \tag{2.1.8}$$

Θεώρημα 2.1.7. *Η ακολουθία κατανομών των αθροισμάτων $X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nk_n}-A_n$ ανεξαρτήτων τ.μ. που ικανοποιούν την συνθήκη α) και για κατάλληλα επιλεγμένες σταθερές A_n, συγκλίνει σε μια οριακή κατανομή και οι διασπορές αυτών των αθροισμάτων συγκλίνουν στη διασπορά της οριακής κατανομής τότε και μόνο τότε αν, υπάρχει μια αύξουσα συνάρτηση $K(u)$ ώστε*

$$K_n(u) \xrightarrow{d} K(u),\ n\to\infty$$

όπου $K_n(u)$ ορίζεται από την (2.1.7).

Οι σταθερές A_n μπορούν να επιλεγούν σύμφωνα με τον τύπο

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} EX_{nk} - \gamma + o(1), \ \gamma \text{ σταθερά}$$

Ο λογάριθμος της χ.σ. της οριακής κατανομής δίδεται από τον τύπο Kolmogorov, γ σταθερό και συνάρτηση $K(u)$ όπως μόλις ορίσθηκαν.

Απόδειξη. Από την $K_n(u) \to K(u)$, έπεται ότι $K_n(+\infty) = \sum_{k=1}^{k_n} VX_{nk}$ είναι φραγμένη· επομένως πληρούνται οι συνθήκες α) και β). Από το προηγούμενο θεώρημα, μπορούμε να περιορισθούμε στην εύρεση συνθηκών για την ύπαρξη οριακής κατανομής, για i.d κατανομές, οι λογάριθμοι των χ.σ. των οποίων δίδονται από την (2.1.8). Όπως γνωρίζουμε, αυτή η οριακή κατανομή είναι επίσης i.d.
Τώρα, τα αποδεικτέα προκύπτουν από τις (2.1.7), (2.1.8) ως άμεση συνέπεια του Θ. 1.3.3. Πράγματι, η συνθήκη $K_n(u) \to K(u)$ συμπίπτει με την συνθήκη 1) του Θ. 1.3.3, ενώ η συνθήκη 2) του ιδίου θεωρήματος, μπορεί να γραφή ως

$$\gamma_n = -A_n + \sum_{k=1}^{k_n} \int x dF_{nk}(x) \to \gamma, \ n \to \infty$$

όπου γ είναι σταθερά που καθορίζεται από τον τύπο Kolmogorov για την οριακή κατανομή.
Από τη συνθήκη αυτή, βλέπομε ότι τα A_n μπορούν να επιλεγούν όπως δηλώνεται από το θεώρημα.

Ως εφαρμογή του θεωρήματος που μόλις αποδείξαμε, θεωρούμε τις συνθήκες για σύγκλιση στην κανονική κατανομή.

Θεώρημα 2.1.8. *Η ακολουθία των σ.κ. των $X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nk_n}-A_n$ ανεξάρτητων τ.μ. $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}$ για κατάλληλες σταθερές A_n, συγκλίνει στην κανονική $N(0,1)$ κατανομή, και οι διασπορές των αθροισμάτων συγκλίνουν στο 1, οι δε μεταβλητές $X_{nk} - EX_{nk}$ είναι απειροστές τότε και μόνο τότε, αν $\forall \epsilon > 0$ ισχύουν:*
(1) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geq\epsilon} x^2 dF_{nk}(x+EX_{nk}) \to 0, n \to \infty$
(2)$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\epsilon} x^2 dF_{nk}(x+EX_{nk}) \to 1, n \to \infty$
όπου F_{nk} σ.κ. της X_{nk}.

Απόδειξη. Από την συνθήκη (1) του Θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι οι μεταβλητές $X_{nk} - EX_{nk}$, είναι απειροστές. Πράγματι, $\forall \epsilon > 0$ έχομε

$$\begin{aligned} \sup_{1\leq k\leq k_n} P(|X_{nk} - EX_{nk}| \geq \epsilon) &= \sup_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|\geq\epsilon} dF_{nk}(x+EX_{nk}) \\ &= \epsilon^{-2} \sup_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|\geq\epsilon} x^2 dF_{nk}(x+EX_{nk}) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

Τώρα, οι συνθήκες (1) και (2) μαζί, αποδεικνύουν ότι ισχύει η γενική συνθήκη β). Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι για την $N(0,1)$ ισχύει:

$$\gamma = 0,\ K(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ 1, & u > 0 \end{cases}$$

Στην περίπτωση μας, οι συνθήκες $K_n(u) \to K(u)$ του Θεωρήματος 2.1.7 μπορούν να γραφούν ως:

(1′) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{u} x^2 dF_{nk}(x + EX_{nk}) \xrightarrow{d} \begin{cases} 0, & u < 0 \\ 1, & u > 0 \end{cases}$

(2′) $\sum_{k=1}^{k_n} \int x^2 dF_{nk}(x + EX_{nk}) \overset{n\to\infty}{\to} 1$

Όμως οι συνθήκες (1′) και (2′) είναι ισοδύναμες με τις συνθήκες (1) και (2) του θεωρήματος.

Μια ιδιαίτερα σημαντική εκδοχή του προηγούμενου θεωρήματος, αφορά στην περίπτωση που $\forall n$

$$\sum_{k=1}^{k_n} VX_{nk} = 1.$$

Κάτω από αυτή την συνθήκη, για την σύγκλιση των *σ.κ.* των αθροισμάτων (2.1.1) στην $N(0,1)$ κατανομή αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι

$$\forall \epsilon > 0\ \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \geq \epsilon} x^2 dF_{nk}(x + EX_{nk}) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \tag{2.1.9}$$

Αν επιπλέον, $\forall k, \forall n\ EX_{nk} = 0$ τότε η (2.1.9) γράφεται:

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \geq \epsilon} x^2 dF_{nk}(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Ούτως οδηγούμεθα στο ακόλουθο:

Θεώρημα 2.1.9. *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ακολουθία ανεξαρτήτων τ.μ. με σ.κ. της X_k, την $F_k(x)$.*
Οι σ.κ. των κανονικοποιημένων αθροισμάτων

$$S_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k)}{s_n},\ s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \tag{2.1.10}$$

συγκλίνουν στην $N(0,1)$ και οι προσθετέοι $X_k - EX_k$ είναι απειροστοί, τότε και μόνον τότε, αν ισχύει η συνθήκη Lindeberg:

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \epsilon s_n} x^2 dF_k(x + EX_k) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Θα αποδείξουμε τώρα το Θεώρημα 2.1.9 για τριγωνικές ακολουθίες τ.μ. Συγκεκριμένα, θα αποδείξωμε το Κ.Ο.Θ. των Lindeberg-Feller για τριγωνικές ακολουθίες τ.μ. $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}$, $n = 1, 2 \ldots$ όπου $\{X_{nj}, 1 \leq j \leq k_n\}$ ανεξάρτητες που επιπλέον ικανοποιούν τα εξής:

$$EX_{nj} = 0, \sigma_{nj}^2 = EX_{nj}^2 < \infty, s_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^2 > 0 \tag{2.1.11}$$

Έχομε, λοιπόν:

Θεώρημα 2.1.10. *α) Εαν η τριγωνική ακολουθία (2.1.1) ικανοποιεί τις (2.1.11) και την συνθήκη Lindeberg:*

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|X_{nj}|>\epsilon s_n} X_{nj}^2 dF_{nj}(x) = 0$$

τότε

$$\frac{X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n}}{(\sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^2)^{1/2}} = \frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{d} N(0,1), \ n \to \infty \tag{2.1.12}$$

(θεώρημα Lindeberg)
β) Εάν η τριγωνική ακολουθία (2.1.1) ικανοποιεί τις (2.1.11) και επιπλέον την συνθήκη απειροστής μικρότητος (infinite smallness):

$$\forall \epsilon > 0, \max_{1\leq j\leq k_n} P(\frac{|X_{nj}|}{s_n} \geq \epsilon) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \tag{2.1.13}$$

Τότε αν $\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$, έπεται ότι η τριγωνική ακολουθία ικανοποιεί την συνθήκη Lindeberg

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος Lindeberg-Feller θα χρειαστούμε τα επόμενα:

Λήμμα 2.1.11. *Εαν $z_1, z_2, \ldots, z_m$ και $w_1, w_2, \ldots, w_m$ είναι τυχόντες μιγαδικοί αριθμοί με $|z_j| \leq 1, |w_j| \leq 1$ $\forall j = 1, 2, \ldots, m$ τότε*

$$|w_1 w_2 \ldots w_m - z_1 z_2 \ldots z_m| \leq \sum_{j=1}^{m} |w_j - z_j|$$

Λήμμα 2.1.12. *Εαν $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ τότε $|\mathrm{e}^x - 1 - x| \leq x^2$.*

Πρόταση 2.1.13. *Εάν ικανοποιείται η συνθήκη Lindeberg τότε ισχύει και η συνθήκη ασυμπτωτικά αμελητέων διασπορών:*

$$\frac{1}{s_n^2} \max_{1\leq j\leq k_n} \sigma_{nj}^2 \to 0, \ n \to \infty$$

Απόδειξη. $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \sigma_{nj}^2 = EX_{nj}^2 &= E[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| < \epsilon s_n)] \\ &+ E[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \geq \epsilon s_n)] \\ &\leq \epsilon^2 s_n^2 + \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \geq \epsilon s_n)] \end{aligned}$$

Επειδή το άνω φράγμα της ανωτέρω σχέσης είναι ανεξάρτητο του $j \in \{1, 2, \ldots, k_n\}$ έπεται ότι

$$\frac{1}{s_n^2} \max_{1 \leq j \leq k_n} \sigma_{nj}^2 \leq \epsilon^2 + \frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} E[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \geq \epsilon s_n)] \to \epsilon^2, \ n \to \infty$$

Επειδή $\epsilon > 0$ αυθαίρετο, έπεται το συμπέρασμα.

Επιπλέον να πούμε ότι η σχέση 2.1.13 ικανοποιείται από οποιαδήποτε ακολουθία ικανοποιεί την συνθήκη Lindeberg διότι από την Πρόταση 2.1.13 και την ανισότητα Chebyshev:

$$P(|X_{nj}|/s_n \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2}$$

έπεται

$$\max_{1 \leq j \leq k_n} P(|X_{nj}|/s_n \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{s_n^2} \max_{1 \leq j \leq k_n} \sigma_n^2, \ n \to \infty$$

Απόδειξη. Θεωρήματος 2.1.10 (συνέχεια)
Η απόδειξη του α) παραλείπεται επειδή είναι μακροσκελής. Περιέχεται στο [9], σελίδα 308.
β) Κατ' αρχήν υποθέτουμε (Θεωρούμε την:

$$\{\bar{X}_{nj} = \frac{X_{nj}}{s_n}, \ 1 \leq j \leq k_n, \ n \geq 1\}$$

μια νέα τριγωνική ακολουθία με $E\bar{X}_{nj} = 0$, $Var(\bar{X}_{nj}) = \bar{\sigma}_{nj}^2 = \frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2}$ και $\bar{s}_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n} \bar{\sigma}_{nj}^2 = 1$, από τον Ορς του s_n). Απο την γνωστή ανισότητα

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1| \leq 2\epsilon[\min\{|x|, 2\}]$$

συνάγομε ότι

$$|\phi_{nk}(t) - 1| \leq 2E[\min\{1, |tX_{nk}|\}]$$

όπου ϕ_{nk} η $\chi.\sigma.$ της τ.μ. X_{nk}. Αλλά

$$\min\{1, |tX_{nk}|\} \leq |tX_{nk}| I(|X_{nk}| < \epsilon) + 1 \cdot I(|X_{nk}| \geq \epsilon)$$

οπότε

$$\begin{aligned} |\phi_{nk}(t) - 1| &\leq 2E(|tX_{nk}| I(|X_{nk}| < \epsilon)) + 2E(I(|X_{nk}| \geq \epsilon)) \\ &\leq 2\epsilon|t| + 2P(|X_{nk}| \geq \epsilon) \end{aligned}$$

Αλλά από την (2.1.13) προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le k_n} |\phi_{nk}(t)-1| \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Τώρα από την ανισότητα

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1-\mathrm{i}x| \le \min\{2|x|, \frac{1}{2}x^2\}$$

λαμβάνουμε

$$|\phi_{nk}(t)-1| \le t^2\sigma_{nk}^2.$$

Επειδή από υποθέση

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^{k_n} \sigma_{nk}^2 = 1$$

και

$$\sum_{k=1}^{k_n} |\phi_{nk}(t)-1|^2 \le \max_k |\phi_{nk}(t)-1| \sum_k |\phi_{nk}(t)-1|$$

έπεται ότι,

$$\sum_{k=1}^{k_n} |\phi_{nk}(t)-1|^2 \to 0,\ n\to\infty, \forall t \tag{2.1.14}$$

Αν $|z|\le 1$ τότε

$$|\mathrm{e}^{z-1}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re} z-1} \le 1$$

Επομένως, από Λήμμα 2.1.11, για $z_k = \mathrm{e}^{\phi_{nk}-1}$ και $w_n = \phi_{nk}(\tau)$,έχομε

$$|\mathrm{e}^{\sum_k(\phi_{nk}(t)-1)} - \prod_k \phi_{nk}(t)| \le \sum_k |\mathrm{e}^{\phi_{nk}(t)-1} - \phi_{nk}(t)| \tag{2.1.15}$$

Αν $|z|\le 1/2$ τότε $|\mathrm{e}^z-1-z|\le |z|^2$ (Λ. 2.1.12) και για μεγάλο n, $|\phi_{nk}(t)-1|\le \frac{1}{2}$ οπότε το δεξί μέλος της (2.1.15) είναι το πολύ $\sum_k |\phi_{nk}-1|^2$. Επειδή $S_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ (εξ υποθέσεως) και λόγω της (2.1.14), προκύπτει ότι

$$\prod_k \phi_{nk}(t) \to \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

Επειδή $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, παίρνοντας απόλυτες τιμές και μετά λογάριθμο, οδηγούμεθα στην

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{Re}(\phi_{nk}(t)-1) - \frac{1}{2}t^2 \tag{2.1.16}$$

Όμως το $\mathrm{Re}(\phi_{nk}(t)-1)$ είναι $E(\cos(tX_{nk})-1)$ οπότε η (2.1.16) δίδει:

$$\sum_{k=1}^{k_n} E(\cos(tX_{nk}) - 1 + \frac{t^2X_{nk}^2}{2}) \to 0,\ n\to\infty \tag{2.1.17}$$

και επειδή $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ η ολοκληρωτέα ποσότης είναι μη αρνητική και ισχύει

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|X_{nk}|\geq\epsilon} (\frac{1}{2}t^2 X_{nk}^2 - 2)dP \geq (\frac{t^2}{2} - \frac{2}{\epsilon^2}) \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|X_{nk}|\geq\epsilon} X_{nk}^2 dP \tag{2.1.18}$$

Δοθέντος $\epsilon > 0$, επιλέγουμε t αρκετά μεγάλο ώστε ο πρώτος παράγων στο δεξί μέλος της (2.1.18) είναι θετικός. Από την (2.1.17), το αριστερό μέλος της (2.1.18) τείνει επίσης στο μηδέν, οπότε και το άθροισμα στο δεξί μελος της (2.1.18) τείνει ομοίως.

2.2 Γενική Μορφή Οριακών Θεωρημάτων-Ικανές και Αναγκαίες συνθήκες σύγκλισης

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι σε όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα εξετάζουμε τα τυποποιημένα αθροίσματα S_n/s_n με μέσο 0 και διασπορά 1 (και φυσικά υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι δεύτερες ροπές των αρχικών τ.μ.). Σε αυτές τις περιπτώσεις και με την υπόθεση της απειροστής μικρότητος, είδαμε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για σύγκλιση προς την τυποποιημένη κανονική είναι η συνθήκη Lindeberg. Εντούτοις είναι δυνατόν να ισχύη το Κ.Ο.Θ. χωρίς την συνθήκη Lindeberg (ακόμα και χωρίς να υπάρχουν οι δεύτερες ροπές των υπο μελέτη τ.μ.). Φυσικά σε αυτήν την περίπτωση, θα αναζητούσαμε κανονικοποιούσες σταθερές $a_n \in \mathbb{R}$ και $b_n > 0$ ώστε:

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι $a_n = ES_n$ ή ότι $b_n = \sqrt{Var(S_n)}$ (είπαμε ότι οι διασπορές μπορεί να μην υπάρχουν).
Θα παρουσιάσουμε τέτοια θεωρήματα παρακάτω.

Το επόμενο θεώρημα, δείχνει ότι ακόμα και στην γενική περίπτωση όπου δεν απαιτείται η ύπαρξη των διασπορών των τ.μ. υπάρχει μια σημαντική ανισότητα ανάλογη της συνθήκης β) της Παραγράφου 1, γεγονός που μας δίνει τη δυνατότητα να διατηρούμε την ιδέα της απόδειξης των θεωρημάτων της Παραγράφου 1 και στην γενική περίπτωση.

Λήμμα 2.2.1. *Αν οι τ.μ. X_{nk} (βλ. 2.1.1) ϵίναι ασυμπτωτικά σταθϵρές (Ορς 2.1.2), τότϵ ϵίναι δυνατόν να θέσομϵ στον Ορς 2.1.2 $a_{nk} = m_{nk}$ όπου m_{nk} διάμϵσος της X_{nk} $(P(X_{nk} \geq m_{nk}) \geq \frac{1}{2}$ και $P(X_{nk} \leq m_{nk}) \geq \frac{1}{2})$
, δηλαδή ισχύϵι:*

$$\sup_{1\leq k\leq k_n} |m_{nk} - a_{nk}| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \tag{2.2.19}$$

Απόδειξη. Παραλείπεται.

Θεώρημα 2.2.2. *Αν για κάποιϵς κατάλληλα ϵπιλϵγμένϵς σταθϵρές A_n, οι σ.κ. των αθροισμάτων $X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n} - A_n$ των ανϵξάρτητων τ.μ. X_{nk}, συγκλίνουν σϵ* *ένα όριο, τότε υπάρχει μια στσθερά $C < \infty$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + m_{nk}) < C \tag{2.2.20}$$

όπου m_{nk} διάμεσος της X_{nk}.

Απόδειξη. Παραλείπεται.

Θεώρημα 2.2.3. *Αν για κάποιες κατάλληλα επιλεγμένες σταθερές A_n οι σ.κ. των αθροισμάτων $X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n} - A_n$ εξ ανεξαρτήτων απειροστών τ.μ., συγκλίνουν σε ένα όριο για $n \to \infty$, τότε υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε*

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + a_{nk}) < C$$

όπου $a_{nk} = \int_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x)$ και τ οποιαδήποτε θετική σταθερά.

Απόδειξη. Σημειώνουμε πρώτα ότι, επειδή X_{nk} απειροστές τ.μ., ισχύουν οι σχέσεις

$$\sup_{1 \le k \le k_n} |a_{nk}| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \tag{2.2.21}$$

$$\sup_{1 \le k \le k_n} |m_{nk}| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \tag{2.2.22}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
|a_{nk}| = |\int_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x)| &\le \int_{|x|\le\epsilon} |x| dF_{nk}(x) \\
&+ \int_{\epsilon<|x|\le\tau} |x| dF_{nk}(x) \\
&\le \epsilon \int_{|x|\le\epsilon} dF_{nk}(x) + \tau \int_{|x|\ge\epsilon} dF_{nk}(x) \\
&\le \epsilon P(|X_{nk}| \le \epsilon) + \tau P(|X_{nk}| \ge \epsilon) \\
&\le \epsilon + \tau P(|X_{nk}| \ge \epsilon)
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ και n αρκετά μεγάλο, μπορούμε να πάρωμε $\sup_{1\le k\le k_n} |a_{nk}|$ όσο μικρό θέλομε.

Τώρα, από Λ. 2.2.1 και την (2.2.21), βλέπομε εύκολα ότι

$$\sup_{1 \le k \le k_n} |m_{nk}| \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Από στοιχειώδη ανισότητα $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ συμπεραίνουμε ότι για αρκετά μεγάλο n,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x+a_{nk}) &= \int \frac{(x+m_{nk}-a_{nk})^2}{1+(x+m_{nk}-a_{nk})^2} dF_{nk}(x+m_{nk}) \\
&\le \int \frac{2x^2}{1+(x+m_{nk}-a_{nk})^2} dF_{nk}(x+m_{nk}) \\
&+ \int \frac{2(m_{nk}-a_{nk})^2}{1+(x+m_{nk}-a_{nk})^2} dF_{nk}(x+m_{nk}) \\
&\le C_1 \int \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x+m_{nk}) + 2(m_{nk}-a_{nk})^2
\end{aligned}$$

Εκτιμούμε τώρα την $(m_{nk}-a_{nk})^2$. Για αρκετά μεγάλο n έχομε,

$$\begin{aligned}
(m_{nk}-a_{nk})^2 &= \Big(\int_{|x|<\tau} (x-m_{nk}) dF_{nk}(x) - \int_{|x|\ge\tau} m_{nk} dF_{nk}(x)\Big)^2 \\
&\le 2\Big(\int_{|x+m_{nk}|<\tau} |x| dF_{nk}(x+m_{nk})\Big)^2 + 2\Big(\int_{|x+m_{nk}|\ge\tau} m_{nk} dF_{nk}(x+m_{nk})\Big)^2 \\
&\le 2\Big(\int_{|x|<2\tau} |x| dF_{nk}(x+m_{nk})\Big)^2 + 2m_{nk}^2\Big(\int_{|x|>\tau/2} dF_{nk}(x+m_{nk})\Big)^2
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας ανισότητα Cauchy στην προηγούμενη, λαμβάνουμε

$$(a_{nk}-m_{nk})^2 \le 2\int_{|x|<2\tau} x^2 dF_{nk}(x+m_{nk}) + 2m_{nk}^2 \int_{|x|>\tau/2} dF_{nk}(x+m_{nk})$$

Από τις προηγούμενες ανισότητες και το Θεώρημα 2.2.2, έπεται η αποδεικτέα.

Θεώρημα 2.2.4. *Οι σ.κ. των αθροισμάτων $X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nk_n}-A_n$ ανεξαρτήτων και απειροστών τ.μ. και για κατάλληλες σταθερές A_n, συγκλίνουν σε μια οριακή κατανομή ανν οι i.d. κατανομές (που λέγονται συνοδεύουσες (accompanying laws)) οι λογάριθμοι των χ.σ. των οποίων, δίδονται από τον τύπο:*

$$\psi_n(t) = -\mathrm{i}A_n t + \sum_{k=1}^{k_n} (\mathrm{i}ta_{nk} + \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1) dF_{nk}(x+a_{nk})) \tag{2.2.23}$$

συγκλίνουν. Εδώ,

$$a_{nk} = \int_{|x|\le\tau} x dF_{nk}(x), \ \tau > 0 \text{ σταθερά} \tag{2.2.24}$$

Οι οριακές κατανομές των δύο ακολουθιών συμπίπτουν.

Απόδειξη. Οι *σ.κ.* των αθροισμάτων $X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nk_n}-A_n$ συγκίνουν σε ένα όριο ανν

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA_n} \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) \to f(t), \ n \to \infty \tag{2.2.25}$$

όπου $f(t)$ η $\chi.\sigma.$ της οριακής κατανομής και $f_n(t)$ η $\chi.\sigma.$ του αθροίσματος $X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nk_n}-A_n$. Συμβολίζουμε $F'_{nk}(x)=F_{nk}(x+a_{nk})$, όπου a_{nk} ορίζεται από την (2.2.24).
Τότε η (2.2.25) μπορεί να γραφή ως

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tA_n+\mathrm{i}t\sum_{k=1}^{k_n}a_{nk}}\prod_{k=1}^{k_n}f'_{nk}(t)\to f(t),\ n\to\infty.$$

Θέτομε,

$$f'_{nk}(t)-1=b_{nk}$$

Επειδή οι τ.μ. X_{nk} είναι απειροστές, έπεται ότι

$$\sup_{1\le k\le k_n}|b_{nk}|\overset{n\to\infty}{\to}0 \tag{2.2.26}$$

Τότε

$$\log(f'_{nk}(t))=\log(1+b_{nk})=b_{nk}-\frac{1}{2}b_{nk}^2+\frac{1}{3}b_{nk}^3-\ldots$$

(από το ανάπτυγμα του log σε σειρά). Όθεν για αρκετά μεγάλο n, έχομε

$$\begin{aligned}|\sum_{k=1}^{k_n}\log f'_{nk}(t)-\sum_{k=1}^{k_n}b_{nk}| &\le \sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s}|b_{nk}|^s\\ &\le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k_n}\frac{|b_{nk}|^2}{1-|b_{nk}|}\\ &\le \sup_{1\le k\le k_n}|b_{nk}|\sum_{k=1}^{k_n}|b_{nk}| \qquad (2.2.27)\end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}|b_{nk}| &= |\int_{|x|<\tau}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1-\mathrm{i}tx)dF'_{nk}(x)\\ &+ \int_{|x|\ge\tau}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1)dF'_{nk}(x)\\ &+ \mathrm{i}t\int_{|x|\ge\tau}xdF'_{nk}(x)|\\ &\overset{(*)}{\le} \frac{|t|^2}{2}\int_{|x|<\tau}x^2dF'_{nk}(x)+2\int_{|x|\ge\tau}dF'_{nk}(x)\\ &+ |t||\int_{|x|<\tau}xdF'_{nk}(x)| \qquad (2.2.28)\end{aligned}$$

$$(*)\ (|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1-\mathrm{i}t|\le\min\{|t|^2/2,2|t|\},\ |\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1|\le\min\{|t|,2\})$$

Εκτιμούμε τώρα το

$$\int_{|x|<\tau} x dF'_{nk}(x)$$

Για αρκετά μεγάλο n (τέτοιο ώστε $|a_{nk}| < \tau/2$)

$$\begin{aligned} \left|\int_{|x|<\tau} x dF'_{nk}(x) - \int_{|x+a_{nk}|<\tau} x dF'_{nk}(x)\right| &\overset{(+)}{\leq} \int_{\tau/2<|x|<3\tau/2} |x| dF'_{nk}(x) \\ &\leq \frac{3\tau}{2} \int_{|x|>\tau/2} dF'_{nk}(x) \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

όπου για την (+) χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις

$$||x| - |a_{nk}|| \leq \tau \Rightarrow |a_{nk}| - \tau \leq |x| \leq \tau + |a_{nk}| \leq 3\tau/2$$

και

$$|a_{nk}| \leq \tau/2 \Rightarrow \tau - |a_{nk}| \geq \tau - \tau/2 = \tau/2$$

οπότε

$$\tau/2 \leq |x| \leq 3\tau/2.$$

Προσέτι

$$\begin{aligned} \left|\int_{|x+a_{nk}|<\tau} x dF'_{nk}(x)\right| &\overset{(**)}{=} \left|\int_{|x|<\tau} (x - a_{nk}) dF_{nk}(x)\right| \\ &= \left|\int_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x) - a_{nk}\int_{|x|<\tau} dF_{nk}(x)\right. \\ &- \int_{|x|\geq\tau} a_{nk} dF_{nk}(x) \\ &+ \left.\int_{|x|\geq\tau} a_{nk} dF_{nk}(x)\right| \\ &= \left|\int_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x) - a_{nk}\right. \\ &+ \left.\int_{|x|\geq\tau} a_{nk} dF_{nk}(x)\right| \\ &= \left|a_{nk}\int_{|x|>\tau} dF_{nk}(x)\right| \\ &\leq \tau/2 \int_{|x|\geq\tau/2} dF'_{nk}(x) \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

όπου η (∗∗) λόγω αλλαγής μεταβλητής.
Από τις (2.2.29), (2.2.30) προκύπτει

$$\left|\int_{|x|<\tau} x dF'_{nk}(x)\right| \leq 2\tau \int_{|x|>\tau/2} dF'_{nk}(x) \quad (2.2.31)$$

Για να αποδείξουμε την αναγκαιότητα των συνθηκών του θεωρήματος, παρατηρούμε ότι, από το Θεώρημα 2.2.3, αν οι *σ.κ.* των αθροισμάτων $X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n} - A_n$ συγκλίνουν σε ένα όριο, τότε

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int \frac{x^2}{1+x^2} dF'_{nk}(x) < C \tag{2.2.32}$$

Συνεπώς, έχομε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\tau} x^2 dF'_{nk}(x) &\leq (1+\tau)^2 \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\tau} \frac{x^2}{1+x^2} dF'_{nk}(x) \\ &\leq (1+\tau)^2 C\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geq\tau} dF'_{nk}(x) &\leq \frac{(1+\tau)^2}{\tau^2} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geq\tau} \frac{x^2}{1+x^2} dF'_{nk}(x) \\ &\leq \frac{(1+\tau)^2}{\tau^2} C\end{aligned}$$

Από τις (2.2.28) και (2.2.31) λαμβάνομε,

$$\sum_{k=1}^{k_n} |b_{nk}| \leq \left(\frac{(1+\tau)^2}{2}|t|^2 + 2\frac{(1+\tau)^2}{\tau^2} + 2\frac{|t|(4+\tau^2)}{\tau}\right)C$$

όπου C σταθερά. Από τις (2.2.26) και (2.2.27) συνάγεται, για $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}|\log f_n(t) - \psi_n(t)| &= |(-\mathrm{i}tA_n + \mathrm{i}t\sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} + \sum_{k=1}^{k_n} \log f'_{nk}(t)) \\ &- (-\mathrm{i}tA_n + \mathrm{i}t\sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} + \sum_{k=1}^{k_n} b_{nk})| \\ &= |\sum_{k=1}^{k_n} \log f'_{nk}(t) - \sum_{k=1}^{k_n} b_{nk}| \overset{n\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Επειδή $\mathrm{e}^{\psi_n(t)}$ είναι *χ.σ.* και επομένως δεν υπερβαίνει το 1 (modulo), έχομε

$$f_n(t) - \mathrm{e}^{\psi_n(t)} \to 0 \tag{2.2.33}$$

Η (2.2.33) αποδεικνύει την αναγκαιότητα των συνθηκών του θεωρήματος.

Για να αποδείξουμε το ικανό των συνθηκών του θεωρήματος, πρέπει επίσης να εκτιμήσωμε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{k_n} |b_{nk}|.$$

Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι για τις i.d. κατανομές που ορίζονται από την (2.2.23), θέτομε αναγκαίως,

$$G_n(u) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2} dF'_{nk}(x)$$

στον τύπο των Lévy και Khintchine. Ως εκ τούτου, αν οι οριζόμενες από την (2.2.23) κατανομές συγκλίνουν σε ένα όριο, από το Θεώρημα 1.3.1, έχομε

$$\int dG_n(u) = \sum_{k=1}^{k_n} \int \frac{x^2}{1+x^2} dF'_{nk}(x) \overset{n\to\infty}{\to} \int dG(u)$$

όπου $G(u)$ είναι η μονότονη συνάρτηση η οριζόμενη από τον τύπο των Lévy και Khintchine για την οριακή κατανομή.
Επομένως, αν οι συναρτήσεις (2.2.23) συγκλίνουν σε ένα όριο, έχομε την σχέση (2.2.32) επίσης. Ως εκ τούτου από τις (2.2.26) και (2.2.27) συμπεραίνουμε πάλι ότι ισχύει η (2.2.33).
Ούτως η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώθηκε.

Το προηγούμενο θεώρημα είναι εξαιρετικά σημαντικό, διότι μας επιτρέπει, προκειμένου να μελετήσουμε τα αθροίσματα $X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n} - A_n$ από ανεξάρτητες και απειροστές τ.μ. με αυθαίρετες σ.κ. F_{nk}, να τα αντικαταστήσουμε με το $\bar{X}_{n1} + \bar{X}_{n2} + \ldots + \bar{X}_{nk_n} - A_n$ από i.d. τ.μ. $\bar{X}_{n_k}$. Το αποτέλεσμα αυτό έγινε η βάση για την ανάπτυξη της θεωρίας των οριακών κατανομών των αθροισμάτων ανεξάρτητων τ.μ.

Μια πρώτη συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι το ακόλουθο θεμελιώδες

Θεώρημα 2.2.5. *Η $F(x)$ είναι σ.κ. των αθροισμάτων $X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n} - A_n$ από απειροστές και ανεξάρτητες τ.μ. σε κάθε σειρά ανν $F(x)$ είναι i.d.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το Θεώρημα 2.2.4 και την Πρόταση 1.1.7.

Επομένως, έχουμε το σημαντικό αποτέλεσμα: Η κλάση των οριακών κατανομών για τα αθροίσματα $X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n} - A_n$ από ανεξάρτητες και απειροστές τ.μ. συμπίπτει με την κλάση των i.d. κατανομών.

Θεώρημα 2.2.6. *Οι σ.κ. των αθροισμάτων $X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n} - A_n$ ανεξαρτήτων και απειροστών τ.μ. με κατάλληλες σταθερές A_n, συγκλίνουν σε μια σ.κ. $F(x)$, ανν:*
1) Στα σημεία συνέχειας των $M(u)$ και $N(u)$

$$\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) \to M(x), \ x < 0$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(x) - 1) \to N(x), \ x > 0$$

για $n \to \infty$.
2)

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n}((\int_{|x|<\epsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int_{|x|<\epsilon} x dF_{nk}(x))^2)) &= \\
\lim_{\epsilon \to 0} \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n}(\int_{|x|<\epsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int_{|x|<\epsilon} x dF_{nk}(x))^2) &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

όπου οι συναρτήσεις $M(u), N(u)$ *και η σταθερά* σ^2, *καθορίζονται από τον τύπο του Lévy για* $F(x)$. *Οι σταθερές* A_n *καθορίζονται από τον τύπο*

$$
A_n = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\epsilon} x dF_{nk}(x) - \gamma_n(\tau)
$$

$\gamma_n(\tau)$ *συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

Απόδειξη. Παραλείπεται (Gnedenko-Kolmogorov, 1954).

2.3 Συνθήκες σύγκλισης στην κανονική κατανομή

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα θεωρήματα μπορούμε να αποδείξουμε τη σύγκλιση των σ.κ. των αθροισμάτων ανεξαρτήτων και απειροστών τ.μ. στην κανονική κατανομή. Θα δούμε ότι τα γενικά θεωρήματα που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, μας επιτρέπουν να αποδείξουμε εύκολα τα σπουδαιότερα θεωρήματα της θεωρίας πιθανοτήτων.

Θεώρημα 2.3.1. *Αν οι σ.κ. των αθροισμάτων* $X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n} - A_n$ *των απειροστών τ .μ.* X_{nk} $(1 \le k \le k_n)$ *οι οποίες είναι ανεξάρτητες σε κάθε σειρά, συγκλίνουν, τότε η σχέση*

$$
\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\ge\epsilon} dF_{nk}(x) \to 0, \ (n \to \infty) \tag{2.3.34}
$$

ικανοποιείται $\forall \epsilon > 0$ *ανν η οριακή κατανομή είναι κανονική.*

Απόδειξη. Εφόσον από υπόθεση, υπάρχει μια οριακή κατανομή, από Θ. 2.2.6, έχομε:

$$
1) \sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} dF_{nk}(x) \to M(x), \ x < 0
$$

$$
2) \sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(x) - 1) = -\sum_{k=1}^{k_n} \int_{x}^{+\infty} dF_{nk}(x) \to N(x), \ x > 0.
$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν ικανοποιείται η (2.3.34) τότε $M(x) \equiv 0$, $N(x) = 0$ και συνεπώς η οριακή κατανομή είναι η κανονική.
Αντίστροφα, αν η οριακή κατανομή είναι κανονική, τότε $M(x) \equiv 0$, $N(x) \equiv 0$ και επομένως, από τις 1) και 2), έπεται ότι ισχύει η σχέση (2.3.34) αποδεικνύοντας το θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.2. *Οι σ.κ. των* $X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nk_n}-A_n$ *ανεξαρτήτων τ.μ.* X_{nk} $(1 \leq k \leq k_n)$ *και για κατάλληλες σταθερές* A_n*, συγκλίνουν στην* $N(0,1)$ *και οι* X_{nk} $(1 \leq k \leq k_n)$ *είναι απειροστές, ανν*

$$1) \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geq\epsilon} dF_{nk}(x) \to 0$$

$$2) \sum_{k=1}^{k_n} (\int_{|x|\geq\epsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int_{|x|<\epsilon} x dF_{nk}(x))^2) \to 1$$

ικανοποιούνται $\forall\epsilon > 0$ *για* $n \to \infty$.

Απόδειξη. Η συνθήκη 1) έπεται ότι οι X_{nk} είναι απειροστές. Πράγματι, $\forall\epsilon > 0$ και για $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\sup_{1\leq k\leq k_n} P(|X_{nk}| > \epsilon) &= \sup_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|>\epsilon} dF_{nk}(x) \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\epsilon} dF_{nk}(x) \stackrel{n\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Εαν ισχύει και η 2), χρησιμοποιώντας το Θ. 2.2.6, εφόσον από την 1) αυτού του θεωρήματος λαμβάνουμε την πρώτη συνθήκη των 1) του Θ. 2.2.6, για $M(x) = 0$ και τη δεύτερη για $N(x) = 0$, έπεται ότι η οριακή κατανομή είναι η $N(0,1)$.
Αντίστροφα, αν η οριακή κατανομή είναι η $N(0,1)$ τότε αν θέσωμε $\sigma^2 = 1$, $\gamma(\tau) = 0, M(-u) \equiv N(u) \equiv 0$ από το Θ. 2.2.6, έχομε:

$$\forall x > 0, \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|u|>x} dF_{nk}(u) \leq \sum_{k=1}^{k_n} (1 - F_{nk}(x) + F_{nk}(-x)) \to M(-x) + N(x) = 0.$$

Επομένως ικανοποιείται η συνθήκη 1) του θεωρήματος 2.3.2.

Επιπλέον, $\forall \epsilon'$ $(0 < \epsilon' < \epsilon)$ έχομε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{k_n}\left(\int_{|x|<\epsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\epsilon} x dF_{nk}(x)\right)^2\right) &= \quad (2.3.35)\\
\sum_{k=1}^{k_n}\left(\int_{[|x|<\epsilon']\cup[\epsilon'<|x|<\epsilon]} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{[|x|<\epsilon']\cup[\epsilon'<|x|<\epsilon]} x dF_{nk}(x)\right)^2\right) &= \\
\sum_{k=1}^{k_n}\Big[\int_{|x|<\epsilon'} x^2 dF_{nk}(x) + \int_{\epsilon'\leq|x|<\epsilon} x^2 dF_{nk}(x) &- \\
-\left(\int_{|x|<\epsilon'} x dF_{nk}(x) + \int_{\epsilon'\leq|x|<\epsilon} x dF_{nk}(x)\right)^2\Big] &= \\
\sum_{k=1}^{k_n}\Big[\int_{|x|<\epsilon'} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|\leq\epsilon'} x dF_{nk}(x)\right)^2\Big] &+ \quad (2.3.36)\\
\sum_{k=1}^{k_n}\Big[\int_{\epsilon'\leq|x|<\epsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{\epsilon'\leq|x|<\epsilon} x dF_{nk}(x)\right)^2\Big] &- \quad (2.3.37)\\
2\sum_{k=1}^{k_n}\left(\int_{|x|<\epsilon'} x dF_{nk}(x)\right)\left(\int_{\epsilon'\leq|x|\leq\epsilon} x dF_{nk}(x)\right) & \quad (2.3.38)
\end{aligned}$$

Τώρα

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{k=1}^{k_n}\Big(\int_{\epsilon'\leq|x|<\epsilon} x^2 dF_{nk}(x) &- \left(\int_{\epsilon'\leq|x|<\epsilon} x dF_{nk}(x)\right)^2\Big) \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_n}\int_{\epsilon'\leq|x|<\epsilon} x^2 dF_{nk}(x) \\
&\leq \epsilon^2\sum_{k=1}^{k_n}\int_{\epsilon'\leq|x|<\epsilon} dF_{nk}(x) \\
&\leq \epsilon^2\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|>\epsilon'} dF_{nk}(x) \qquad (2.3.39)
\end{aligned}$$

και

$$2\sum_{k=1}^{k_n}\left|\int_{|x|<\epsilon'} x dF_{nk}(x)\right|\left|\int_{\epsilon'\leq|x|\leq\epsilon} x dF_{nk}(x)\right| \leq 2\epsilon\epsilon'\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\geq\epsilon'} dF_{nk}(x) \qquad (2.3.40)$$

Η δεύτερη ανισότητα της προηγουμένης σχέσης δικαιολογείται ως εξής:

$$\left|\int_{|x|<\epsilon'} x dF_{nk}(x)\right| \leq \int_{|x|<\epsilon'} |x| dF_{nk}(x) \leq \epsilon' \int_{|x|<\epsilon'} dF_{nk}(x).$$

Όμοια,

$$\left|\int_{\epsilon'\leq|x|<\epsilon} x dF_{nk}(x)\right| \leq \epsilon \int_{\epsilon'\leq|x|<\epsilon} dF_{nk}(x).$$

Επειδή

$$\epsilon' \int_{|x|\leq\epsilon'} dF_{nk}(x) = \epsilon' P(|X| < \epsilon') \leq 1$$

και

$$\{\epsilon' \leq |x| < \epsilon\} \subset \{|x| \geq \epsilon'\}$$

έπεται:

$$\epsilon' \int_{|x|<\epsilon'} dF_{nk}(x) \cdot \epsilon \int_{\epsilon'\leq|x|<\epsilon} dF_{nk}(x) \leq \epsilon'\epsilon \int_{|x|>\epsilon'} dF_{nk}(x)$$

Τώρα από την συνθήκη 1) οι (2.3.39) και (2.3.40) τείνουν στο 0 για $n \to \infty$. Επομένως $\forall\epsilon > 0$ και $\forall\epsilon' > 0$ οι (2.3.37) και (2.3.38) τείνουν στο 0 για $n \to \infty$ οπότε,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} (\int_{|x|<\epsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int_{|x|<\epsilon} x dF_{nk}(x))^2) &= \\ \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} (\int_{|x|<\epsilon'} x^2 dF_{nk}(x) - (\int_{|x|<\epsilon'} x dF_{nk}(x))^2)\end{aligned}$$

δηλαδή το $\limsup$ δεν εξαρτάται από το ϵ. Το ίδιο ισχύει και για το $\liminf$ των (2.3.35) και (2.3.36).

Επομένως από τις συνθήκες του θεωρηματος 2.2.6, $\forall\epsilon > 0$ όχι μόνο το $\limsup$ και $\liminf$ της (2.3.35) υπάρχουν, αλλά και το $\lim$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} (\int_{|x|<\epsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int_{|x|<\epsilon} x dF_{nk}(x))^2) = 1 \ (= \sigma^2)$$

Έχομε δείξει έτσι και τον αντίστροφο ισχυρισμό

Θα παρουσιάσουμε ένα ακόμη θεώρημα που αφορά τη σύγκλιση των *σ.κ.* αθροισμάτων ανεξαρτήτων τ.μ. στην Κανονική κατανομή. Το ικανό των συνθηκών που δηλώνει το θεώρημα απεδείχθη το 1926 απο S.N.Bernstein και το αναγκαίο από Feller το 1935.

Θεώρημα 2.3.3. *Για μια ακολουθία ανεξαρτήτων τ.μ.* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *είναι δυνατόν να βρεθούν πραγματικές σταθερές* A_n *και* $B_n > 0$ *ώστε οι σ.κ. των αθροισμάτων*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{B_n} - A_n \to N(0,1),\ n \to \infty \tag{2.3.41}$$

και οι προσθετέοι $X_{nk} = X_k/B_n, 1 \leq k \leq k_n, n = 1, 2, \ldots$ *να είναι απειροστοί, ανν: υπάρχει μια ακολουθία σταθερών* C_n *με* $C_n \to \infty$ *ώστε*

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>C_n} dF_k(x) \to 0$$

$$\frac{1}{c_n^2} \sum_{k=1}^{n} (\int_{|x|<C_n} x^2 dF_k(x) - (\int_{|x|<C_n} x dF_k(x))^2) \to \infty,\ n \to \infty \tag{2.3.42}$$

Απόδειξη. Από υπόθεση, οι τ.μ. $X_{nk} = X_k/B_n$ είναι απειροστές οπότε μπορούμε να κάνουμε χρήση του θεωρήματος 2.3.2. Επειδή δε $F_{nk} = F_k(B_n x)$ οι συνθήκες 1) και 2) του θεωρήματος 2.3.2 παίρνουν τη μορφή:

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\epsilon B_n} dF_k(x) \to 0$$

$$2) \quad \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} (\int_{|x|<\epsilon B_n} x^2 dF_k(x) - (\int_{|x|<\epsilon B_n} x dF_k(x))^2) \to 1,\ n \to \infty.$$

Προφανώς, μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία

$$\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

ώστε $\epsilon_n B_n \to \infty$ και

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\epsilon_n B_n} dF_k(x) \to 0$$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} (\int_{|x|<\epsilon_n B_n} x^2 dF_k(x) - (\int_{|x|<\epsilon_n B_n} x dF_k(x))^2) \to 1,\ n \to \infty$$

Θέτοντας $\epsilon_n B_n = C_n$, παίρνουμε την (2.3.42).
Αντίστροφα, Έστω ότι οι (2.3.42) ικανοποιούνται. Θέτομε

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} (\int_{|x|<C_n} x^2 dF_k(x) - (\int_{|x|<C_n} x dF_k(x))^2)$$

Από την ισότητα αυτή και την δεύτερη συνθήκη θεωρήματος, συμπεραίνομε

$$C_n = o(B_n)$$

Όθεν, $\forall \epsilon > 0$ και αρκετά μεγάλο n,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>C_n} dF_k(x) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\epsilon B_n} dF_k(x)$$

$$(C_n = o(B_n) \Rightarrow C_n \leq \epsilon B_n \Rightarrow [|x| > \epsilon B_n] \subset [|x| > C_n],\ \forall \epsilon > 0, n \geq n(\epsilon))$$

Επομένως από πρώτη συνθήκη του θεωρήματος

$$\forall \epsilon > 0,\ \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\epsilon B_n} dF_k(x) \to 0,\ n \to \infty \tag{2.3.43}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} (\int_{C_n \leq |x| < \epsilon_n B_n} x^2 dF_k(x) \quad &- \quad (\int_{C_n \leq |x| < \epsilon_n B_n} x dF_k(x))^2) \\ &\leq \quad \epsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\geq C_n} dF_k(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad (2.3.44) \\ ([C_n \leq |x| < \epsilon B_n] \quad &\subseteq \quad [|x| \geq C_n]) \qquad (2.3.45) \end{aligned}$$

και

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}|\int_{|x|<C_n} xdF_k(x)|\,|\int_{C_n\le|x|<\epsilon_n B_n} xdF_k(x)| \overset{(2.3.40)}{\le}$$
$$\frac{\epsilon B_n C_n}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\ge C_n} dF_k(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad (2.3.46)$$

Άπό (2.3.44) και (2.3.46) και τον ορισμό των B_n, βλέπομε ότι $\forall\epsilon>0$,

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}(\int_{|x|<\epsilon B_n} x^2dF_k(x)-(\int_{|x|<\epsilon B_n} xdF_k(x))^2)\to 1,\ n\to\infty$$

Εφόσον η (2.3.43) συνεπάγεται ότι οι X_k/B_n $(1\le k\le k_n)$ είναι απειροστές μπορούμε να αναχθούμε στο θεώρημα 2.3.2.
Επομένως οι συνθήκες (2.3.44) και (2.3.46) συνεπώς και οι συνθήκες (2.3.42) του θεωρήματος, είναι ικανές για τη σύγκλιση των αθροισμάτων στην κανονική κατανομή $N(0,1)$.

2.4 Domains of Attraction για stable κατανομές.

Όπως έχομε ήδη αναφέρει, η 'κλασσική' μελέτη του προβλήματος των οριακών κατανομών αθροισμάτων ανεξαρτήτων τ.μ. επικεντρώνεται, κυρίως, στην αναζήτηση των συνθηκών που εξασφαλίζουν την ισχύν
i) του Ν.Μ.Α. και
ii) του Κ.Ο.Θ.,
έως ότου ο A. Khintchine διευρύνει το πλαίσιο μελέτης (1936) θέτοντας το γενικό πρόβλημα, προσδιορισμού της κλάσης των οριακών κατανομών, των αθροισμάτων

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}X_k-A_n \qquad (2.4.47)$$

για κατάλληλες σταθερές $B_n>0$ και A_n. Βεβαίως, ήταν αναγκαίο για τη λύση και του προβλήματος αυτού, να τεθούν λογικοί περιορισμοί, όπως ότι οι τ.μ.

$$X_{nk}=X_k/B_n,\ n=1,2,\ldots$$

είναι ασυμπτωτικά σταθερές.

Είναι προφανές ότι κάτω από αυτήν την υπόθεση, κάθε οριακή κατανομή των αθροισμάτων (2.4.47) είναι i.d. Ωστόσο το αντίθετο δεν αληθεύει· δηλαδή υπάρχουν i.d. κατανομές, που δεν μπορούν να είναι οριακές για τα αθροίσματα (2.4.47) για οποιαδήποτε επιλογή σταθερών $B_n>0$ και A_n και για οποιαδήποτε επιλογή της ακολουθίας $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$
Ακολουθώντας, λοιπόν, τον A. Khintchine θα λέμε ότι η κατανομή $F(x)$ ανήκει στην κλάση 'L' αν είναι δυνατόν να βρούμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων τ.μ. τέτοιων ώστε:

(1) Για κατάλληλες σταθερές $B_n > 0$ οι $\sigma.\kappa.$ των αθροισμάτων (2.4.47) συγκλίνουν στην $F(x)$ και
(2) Οι τ.μ. $X_{nk} = X_k/B_n$ $(1 \leq k \leq n)$ είναι ασυμπτωτικά σταθερές.

Να σημειώσουμε εδώ ότι χ.β.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι τ.μ. $X_{nk} = X_k/B_n$ είναι απειροστές. Πράγματι, αν X_{nk} είναι ασυμπτωτικά σταθερές, θέτοντας

$$\bar{X}_{nk} = X_{nk} - m_{nk} = \frac{X_k - m_k}{B_n}$$

όπου m_{nk} και m_k διάμεσοι των X_{nk} και X_k αντίστοιχα και

$$A'_n = A_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{B_n}$$

βλέπομε ότι η κλάση των οριακών κατανομών των αθροισμάτων (2.4.47) ασυμπτωτικά σταθερών προσθετέων $X_{nk} = \frac{X_k}{B_n}$ συμπίπτει με την κλάση των οριακών κατανομών του αθροίσματος (2.4.47) με απειροστούς προσθετέτους

$$\bar{X}_{nk} = \frac{X_k - m_k}{B_n}.$$

Ο P. Lévy έδωσε πλήρη χαρακτηρισμό της κλάσης L σε απάντηση του ζητήματος που έθεσε ο Khintchine. (Έτσι αναπτύχθηκε μια ενδιαφέρουσα θεωρία αφορώσα στις οριακές κατανομές της κλάσης L).

Θα παρουσιάσουμε ένα ακόμα οριακό θεώρημα που αφορά στα κανονικοποιημένα αθροίσματα

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{B_n} - A_n \tag{2.4.48}$$

ανεξαρτήτων και ισόνομων τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$

Να συμπληρώσουμε εδώ ότι η λύση στο πρόβλημα προσδιορισμού όλων των πιθανών οριακών κατανομών των αθροισμάτων (2.4.48) (που εντάσσεται στα πλαίσια της Γενικής Οριακής Θεωρίας), χρειάζεται την εισαγωγή μιας νέας έννοιας.

Ορισμός 2.4.1. *Η σ.κ. λέγεται stable αν σε κάθε $a_1 > 0, b_1, a_2 > 0, b_2$ αντιστοιχούν σταθερές $a > 0$ και b τέτοιες ώστε*

$$F(a_1 x + b_1) \star F(a_2 x + b_2) = F(ax + b) \ (\star : \text{ συνέλιξη})$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι η κανονική κατανομή είναι stable.

Θεώρημα 2.4.2. *Η σ.κ. $F(x)$ είναι οριακή για τα αθροίσματα (2.4.48) ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. τότε και μόνον τότε αν είναι stable*

Το θεμελιώδες πρόβλημα, προσδιορισμού των οριακών κατανομών για i.i.d. προσθετέους, έχει πλήρως λυθεί. Δηλαδή οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες που πρέπει να πληρούνται από την $F(x)$ ώστε να υπάρχει οριακή κατανομή για τα αθροίσματα (2.4.48) έχουν διευκρινισθεί. Το θεώρημα που θα αποδείξουμε τώρα είναι ένα από τα πολλά που συνιστούν τη λύση του ανωτέρω περιγραφομένου προβλήματος.

Προς τούτο,
Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ τ.μ. με σ.κ. $F(x)$.
Αν για κατάλληλες σταθερές A_n και B_n οι σ.κ. των αθροισμάτων (2.4.48) συγκλίνουν για $n \to \infty$, στη σ.κ. $V(x)$, τότε λέμε ότι η $F(x)$ είναι attracted στην $V(x)$.
Όλες οι σ.κ. που είναι attracted στην $V(x)$ αποτελούν το domain of attraction της σ.κ. $V(x)$.
Όλες οι stable κατανομές και μόνον αυτές έχουν μη κενό domain of attraction. Ένα σημαντικό πρόβλημα στη θεωρία των stable σ.κ., είναι ο προσδιορισμός του domain of attraction αυτού.

Θεώρημα 2.4.3. *Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ ανήκει στο domain of attraction μιας τυποποιημένης κανονικής κατανομής τότε και μόνον τότε αν, για $C \to \infty$,*

$$\frac{C^2 \displaystyle\int_{|x|>C} dF(x)}{\int_{|x|<C} x^2 dF(x)} \to 0 \tag{2.4.49}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι αν η διασπορά μιας κατανομής είναι πεπερασμένη τότε η $F(x)$ ικανοποιεί την (2.4.49) και επιπλέον ανήκει στο domain of attraction της κανονικής κατανομής. Πράγματι, για $C \to \infty$,

$$C^2 \int_{|x|>C} dF(x) \leq \int_{|x|>C} x^2 dF(x) \to 0$$

και συγχρόνως,

$$C^2 \int_{|x|<C} dF(x) \to \int x^2 dF(x) > 0$$

Από τις δυο προηγούμενες σχέσεις, έπεται η (2.4.49).
Τώρα, θέτομε

$$a = \int x dF(x),\ \sigma^2 = \int (x-a)^2 dF(x),\ B_n^3 = n\sigma^2.$$

Τότε $\forall r > 0$ και για $n \to \infty$,

$$\frac{1}{B_n^2} \int_{|x|>rB_n} (x-a)^2 dF(x) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{|x|>r\sigma\sqrt{n}} (x-a)^2 dF(x) \to 0.$$

Τότε από θεώρημα 2.1.8 έπεται ότι η $F(x)$ ανήκει στο domain of attraction της κανονικής $N(0,1)$.
Θεωρούμε τώρα την περίπτωση των ς.κ. $F(x)$ με άπειρες διασπορές. Δηλαδή έχομε, για $C \to \infty$,

$$\int_{-C}^{C} x^2 dF(x) \to \infty \tag{2.4.50}$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι αν ισχύει η (2.4.50) για $C \to \infty$,

$$(\int_{-C}^{C} xdF(x))^2 = o(\int_{-C}^{C} x^2 dF(x)) \tag{2.4.51}$$

Πράγματι, έστω $z(x)$ μια θετική συνάρτηση, μη φραγμένη για $x \to \pm\infty$ τέτοια ώστε,

$$M = \int z^2(x) dF(x)$$

είναι πεπερασμένο. Τότε από ανισότητα Cauchy,

$$\begin{aligned}
(\int_{-C}^{C} xdF(x))^2 &= (\int_{-C}^{C} z(x)\frac{x}{z(x)} dF(x))^2 \\
&\leq \int_{-C}^{C} z^2(x) dF(x) \int_{-C}^{C} \frac{x^2}{z^2(x)} dF(x) \\
&\leq M \int_{-C}^{C} \frac{x^2}{z^2(x)} dF(x).
\end{aligned}$$

Από αυτήν την ανισότητα, έπεται η (2.4.51). Σύμφωνα με θεώρημα 2.3.3, η $F(x)$ ανήκει στο domain of attraction της κανονικής κατανομής, ανν υπάρχει μια ακολουθία σταθερών C_n ($C_n \to \infty$ για $n \to \infty$) ώστε,

$$n \int_{|x|>C_n} dF(x) \to 0, \ n \to \infty \tag{2.4.52}$$

και

$$\frac{n}{C_n^2}[\int_{|x|<C_n} x^2 dF(x) - (\int_{|x|<C_n} xdF(x))^2] \to \infty \ (n \to \infty) \tag{2.4.53}$$

Από τα προηγουμένως αποδειχθέντα για *σ.κ.* με άπειρες διασπορές, η (2.4.53) μπορεί να γραφεί απλούστερα, για $n \to \infty$,

$$\frac{n}{C_n^2} \int_{|x|<C_n} x^2 dF(x) \to \infty \tag{2.4.54}$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι οι (2.4.52) και (2.4.54) συνεπάγονται την (2.4.49). Ας σημειώσουμε πρώτα, ότι εφόσον $C_n \to \infty, n \to \infty$ για κάθε αρκετά μεγάλο C, μπορεί να βρεθεί ένα n ώστε,

$$C_n \leq C \leq C_{n+1}.$$

Τώρα, για λόγους συντομίας, εισάγουμε τους συμβολισμούς:

$$\chi(C) = \int_{|x|>C} dF(x), \ H(C) = \frac{1}{C^2} \int_{|x|<C} x^2 dF(x)$$

Εύκολα βλέπομε ότι

$$H(C_{n+1}) - \chi(C_n) \leq H(C) \leq H(C_n) + \chi(C_n)$$

και επίσης

$$\chi(C_{n+1}) \leq \chi(C) \leq \chi(C_n)$$

Από τις προηγούμενες ανισότητες έχομε,

$$\frac{(n+1)\chi(C_{n+1})}{\frac{n+1}{n}[nH(C_n)+n\chi(C_n)]} \leq \frac{\chi(C)}{H(C)} \leq \frac{n\chi(C_n)}{\frac{n}{n+1}[(n+1)H(C_{n+1})-n\chi(C_n)]}$$

Από τις (2.4.52) και (2.4.54), το πρώτο και το τελευταίο κλάσμα τείνει στο 0 για $n \to \infty$. Επομένως ισχύει η (2.4.49).
Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι η (2.4.49) είναι ικανή συνθήκη δηλαδή είναι δυνατόν να καθορίσουμε μια ακολουθία σταθερών C_n με $C_n \to \infty$ για $n \to \infty$ για την οποία οι (2.4.51) και (2.4.52) ικανοποιούνται ταυτόχρονα. Γι᾽ αυτό λαμβάνομε ένα αυθαίρετο $\delta > 0$ και θέτομε,

$$C_n(\delta) = \inf_C\{C:\ n\chi(C) \leq \delta\} = \inf_C\{C:\ n\int_{|x|>C} dF(x) \leq \delta\}$$

Εφόσον από υπόθεση,

$$\int x^2 dF(x) = +\infty$$

είναι προφανές ότι $C_n(\delta) \to \infty$, $n \to \infty$. Από την (2.4.49) για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ και για $n \geq n(\delta,\epsilon)$,

$$nH(\frac{1}{2}C_n(\delta)) > \frac{\delta}{\epsilon}$$

Επειδή,

$$H(\frac{1}{2}C_n(\delta)) = \frac{4}{C_n^2(\delta)}\int_{|x|<\frac{C_n(\delta)}{2}} x^2 dF(x) = 4H(C_n(\delta))$$

για $n \geq n(\delta,\epsilon)$,

$$nH(C_n(\delta)) > \frac{\delta}{4\epsilon}$$

Επομένως, $\forall\delta > 0$, για $n \to \infty$,

$$nH(C_n(\delta)) \to \infty$$

Κατά συνέπεια είναι δυνατόν να επιλέξουμε μια ακολουθία δ_n συγκλίνουσα στο μηδέν ώστε $nH(C_n(\delta_n)) \to \infty$, $n \to \infty$. Από την

$$n\chi(C) = n\int_{|x|>C} dF(x) \leq \delta$$

εχομε

$$n\chi(C_n(\delta_n)) \leq \delta_n \to 0,\ n \to \infty$$

δηλαδή

$$n\int_{|x|>C_n} dF(x) \to 0,\ n \to \infty$$

και

$$\frac{n}{C_n^2}\int_{|x|<C_n} x^2 dF(x) \to \infty$$

Δείξαμε ότι η (2.4.49) συνεπάγεται τις σχέσεις (2.4.52) και (2.4.54) έτσι το θεώρημα απεδείχθη.

Κεφάλαιο 3

Απόσταση της κατανομής αθροίσματος ανεξαρτήτων τ.μ. και της $N(0,1)$

Η σημασία του Κ.Ο.Θ. είναι, προφανώς, μεγαλύτερη για τις εφαρμογές, αν, τόσο ο ρυθμός προσέγγισης της κανονικότητος (ταχύτης σύγκλισης), όσο και ένα ακριβές φράγμα στο σφάλμα προσέγγισης, για σταθερό n, είναι γνωστά. Το τελευταίο μάλιστα, όπως διατυπώνεται στο θεώρημα Berry - Esseen, παρουσιάζει μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον.

Η ταχύτης σύγκλισης, άρχισε να προσελκύει το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών, από το 1900, ότε εδημοσιεύθη το θεώρημα Lyapunov. Το σημαντικότερο δε αποτέλεσμα ως προς το θέμα αυτό, επετεύχθη από τον Αμερικάνο μαθηματικό A. Berry, το 1941 και από τον Σουηδό μαθηματικό C.G. Esseen το 1945. Απέδειξαν, ότι αν οι X_j είναι i.i.d, με $EX_j = 0,\ VX_j = \sigma^2$ και $EX_j^3 = \beta < +\infty$ τότε υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ ώστε,

$$\sup_x |F_n(x) - \phi(x)| \leq \frac{C\beta n^{-1/2}}{\sigma^3},\ n \geq 1 \tag{3.0.1}$$

Επίσης εδείχθη οτι αν οι X_j, δεν έχουν κοινή κατανομή, τότε

$$\sup_x |F_n(x) - \phi(x)| \leq \frac{CM_n}{B_n^3}, \tag{3.0.2}$$

όπου

$$M_n = \beta_1 + \ldots + \beta_n,\ \beta_j = EX_j^3,\ j \geq 1$$
$$B_n = (\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2)^{1/2}$$

Περαιτέρω προσπάθειες στα πλαίσια του προβλήματος αυτού συνδέθηκαν με την ακριβή τιμή της σταθεράς C στην (3.0.2) ή τουλάχιστον μια ικανοποιητική εκτίμηση της.

Ο Esseen έδειξε ότι $C \leq 7,5$. Ο Bergstrom έδωσε το φράγμα $C \leq 4,8$. Ο Takano για την περίπτωση i.i.d. κατανομών, $C \leq 2,031$. Ο Zolotarev παρουσίασε μια ανισότητα που επιτρέπει να εκτιμήσουμε την προσέγγιση δύο αθροισμάτων ανεξαρτήτων τ.μ., με τη βοήθεια της οποίας έδειξε, διαδοχικά, ότι $C \leq 1,322$ και $C \leq 0,9051$, ενώ για την περίπτωση i.i.d τ.μ., $C \leq 1,301$ και $C \leq 0,8197$. Η προταθείσα υπό του Zolotarev μέθοδος ανεπτύχθη περαιτέρω στα έργα των Van Beek και Shiganov που απέδειξαν ότι $C \leq 0,7975$ και $C \leq 0,7915$ αντιστοίχως. Για αθροίσματα ισόνομων τ.μ. ο Shiganov παρουσίασε το φράγμα $C \leq 0,7655$, το οποίο βελτιώθη το 2006 από την Shevtsova, για αυτήν την περίπτωση, και έγινε $C \leq 0,7056$. O I.S. Tyurin (2009) δίδει τις εκτιμήσεις, $C \leq 0,6379$ για την γενική περίπτωση και $C \leq 0,5894$ για i.i.d τ.μ. Και η προσπάθεια για βελτίωση των εκτιμήσεων συνεχίζεται επιτυχώς· η πιο πρόσφατη εργασία του Ilya Tyurin δείχνει ότι $C \leq 0,4785$ για το κλασσικό Berry-Esseen θεώρημα και $C \leq 0,5606$ για την μη i.i.d περίπτωση.

3.1 Φραγμένη κύμανση και μετασχηματισμός Fourier-Stieltjes

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $F(x)$ μια μη φθίνουσα φραγμένη συνάρτηση και $G(x)$ μια πραγματική, φραγμένης κύμανσης συνάρτηση, με*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} dF(x), \ g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} dG(x)$$

οι αντίστοιχοι Fourier-Stieltjes μετασχηματισμοί των F, G· έστω επίσης $F(-\infty) = G(-\infty)$. Τότε, $\forall b > 1/2\pi$, ισχύει:

$$\begin{aligned} \sup_x |F(x) - G(x)| \ &\leq \ b \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt \\ &\quad + bT \sup_x \int_{|y| \leq c(b)/T} |G(x+y) - G(x)| dy \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

όταν T θετικός αυθαίρετος αριθμός και $c(b)$ θετική σταθερά εξαρτώμενη από το b.
· Στην 3.1.3 μπορούμε να θέσωμε τον $c(b)$ ίσο με την ρίζα της εξίσωσης

$$\int_0^{c(b)/4} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8b}$$

Απόδειξη. Έστω $T > 0$ και $a > 0$. Θεωρούμε την αντίστροφη τριγωνική κατανομή με πυκνότητα

$$q(x) = \frac{1 - \cos Tx}{\pi T x^2}$$

και $\chi.\sigma.$,

$$v(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, \ |t| < T \\ 0, \ |t| \geq T \end{cases}$$

Θέτομε τώρα,

$$p(x) = \frac{T}{\pi}\frac{1-\cos[Tx-a]}{(Tx-a)^2}$$

Εφόσον $p(x+\frac{a}{T}) = q(x)$, η συνάρτηση $p(x)$ είναι η πυκνότητα της κατανομής με $\chi.\sigma$

$$h(t) = \begin{cases} (1-\frac{|t|}{T})\mathrm{e}^{\mathrm{i}ta/T}, \ |t| < T \\ 0, \ |t| \geq T \end{cases}$$

Προφανώς

$$p(x) = \frac{T}{2\pi}(\sin((Tx-a)/2)/(Tx-a)/2)^2 \leq T/2\pi, \ \forall x, a, T \tag{3.1.4}$$

Θέτομε,

$$\gamma = \gamma(a) = \int_0^{2a/T} p(x)dx$$

Τότε (με αλλαγή μεταβλητής $(Tx-a)/2 = u$)

$$\gamma = \frac{2}{\pi}\int_0^{a/2}\frac{\sin^2 u}{u^2}du \tag{3.1.5}$$

Η συνάρτηση $F(x)$ είναι αύξουσα, οπότε,

$$F(x)\int_0^{2a/T} p(x)dx \leq \int_x^{x+(2a/T)} F(u)p(u-x)du$$

επομένως,

$$\begin{aligned} F(x) &\leq \frac{1}{\gamma}\int_x^{x+(2a/T)} F(u)p(u-x)du \\ &= G(x) + \frac{1}{\gamma}\int_x^{x+(2a/T)}(G(u)-G(x))p(u-x)du \\ &+ \frac{1}{\gamma}\int_x^{x+(2a/T)}(F(u)-G(u))p(u-x)du \\ &\leq G(x) + \frac{T}{2\pi\gamma}\int_0^{2a/T}|G(x+y)-G(x)|dy \\ &+ \frac{1}{\gamma}\int_x^{x+(2a/T)}(F(u)-G(u))p(u-x)du \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

$$\begin{aligned} \Bigg(\int_x^{x+(2a/T)}(G(u)-G(x))p(u-x)du &\leq \int_x^{x+(2a/T)}|(G(u)-G(x))p(u-x)|du \\ &\leq \frac{T}{2\pi\gamma}\int_0^{2a/T}|G(x+y)-G(x)|dy \end{aligned}$$

αλλαγή μεταβλητής και χρησιμοποιώντας την (3.1.4) $\Big)$

Κατασκευάζομε τώρα τις συναρτήσεις (συνελίξεις),

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-z)p(z)dz, \; F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+z)p(z)dz,$$

Επίσης

$$G_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-z)p(z)dz, \; G_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x+z)p(z)dz,$$

Έχομε τώρα,

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)p(x-u)du, \; F_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)p(u-x)du,$$

και οι $\chi.\sigma.$ των F_1 και F_2 είναι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} dF_1(x) = f(t)h(t) = f(t)h_1(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} dF_2(x) = f(t)h(-t) = f(t)h_2(t)$$

Επίσης, με όμοιο τρόπο παίρνομε,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} dG_1(x) = g(t)h(t) = g(t)h_1(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} dG_2(x) = g(t)h(-t) = g(t)h_2(t)$$

Επειδή $h(t) = 0$ για $|t| > T$ και οι συναρτήσεις $F_k(x), G_k(x)$ είναι συνεχείς, από τον τύπο αντίστροφης έχομε,

$$F_k(x) - F_k(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{T}^{-T} \frac{e^{-\mathrm{i}tx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}}{-\mathrm{i}t} f(t)h_k(t)dt \tag{3.1.7}$$

και

$$G_k(x) - G_k(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{T}^{-T} \frac{e^{-\mathrm{i}tx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}}{-\mathrm{i}t} g(t)h_k(t)dt \tag{3.1.8}$$

για κάθε x, y και $k = 1, 2$. Υποθέτομε τώρα ότι

$$\int_{-T}^{T} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt < \infty$$

εφόσον διαφορετικά, η (3.1.3) ισχύει τετριμμένα. Τότε η $h_k(t)[(f(t) - g(t))/(-\mathrm{i}t)]$ είναι ολοκληρώσιμη και επομένως από Λήμμα Riemann-Lebesgue (Λ.1 ΠΡΤ) έχομε,

$$\lim_{y \to -\infty} \int_{-T}^{T} \frac{f(t) - g(t)}{-\mathrm{i}t} h_k(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty} dt = 0$$

Αλλά η $F(-\infty) = G(-\infty)$ συνεπάγεται ότι, για $k = 1$ και $k = 2$, $F_k(-\infty) = G_k(-\infty)$. Από τις (3.1.7) και (3.1.8) για $y \to -\infty$ έχομε,

$$F_k(x) - G_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{f(t)-g(t)}{-\mathrm{i}t}h_k(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}dt,\ (k=1,2)$$

Τώρα, από την προηγούμενη σχέση, από τις εκφράσεις των $F_k(x), G_k(x)$ ως συνελίξεις των F, G αντίστοιχα, αλλά και το ότι $|h_k(t)| \le 1\ \forall t$, λαμβάνομε τις σχέσεις,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}(F(u)-G(u))p(x-u)du\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt$$

και

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}(F(u)-G(u))p(u-x)du\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt,\ \forall x$$

Θέτομε $\Delta = \sup_x |F(x) - G(x)|$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x}^{x+(2a/T)}(F(u)-G(u))p(u-x)du\right| &\le \left|\int_{-\infty}^{\infty}(F(u)-G(u))p(u-x)du\right| \\
&+ \Delta\int_{-\infty}^{x}p(u-x)du + \Delta\int_{x+(2a/T)}^{\infty}p(u-x)du \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt + \Delta\Big(\int_{-\infty}^{x}p(u-x)du \\
&+ \int_{x+(2a/T)}^{\infty}p(u-x)du\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt + \Delta\Big(\int_{-\infty}^{0}p(x)dx \\
&+ \int_{2a/T}^{\infty}p(x)dx + \int_{0}^{2a/T}p(x)dx - \int_{0}^{2a/T}p(x)dx\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt \\
&+ \Delta(1 - \int_{0}^{2a/T}p(x)dx) \qquad (3.1.9)
\end{aligned}$$

Από τις (3.1.6) και (3.1.9) λαμβάνομε,

$$\begin{aligned}
F(x) - G(x) &\le \frac{T}{2\pi\gamma}\int_{0}^{2a/T}|G(x+y)-G(x)|dy \\
&+ \frac{1}{2\pi\gamma}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt + \Delta\big(\frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma}\big) \qquad (3.1.10)
\end{aligned}$$

Τώρα φράσσομε την $F(x)-G(x)$ από κάτω. Πράγματι, με όμοιο τρόπο βρίσκομε,

$$
\begin{aligned}
F(x) &\geq \frac{1}{\gamma}\int_{x-(2a/T)}^{x} F(u)p(x-u)du \\
&= G(x) + \frac{1}{\gamma}\int_{x-(2a/T)}^{x} (G(u)-G(x))p(x-u)du \\
&+ \frac{1}{\gamma}\int_{x-(2a/T)}^{x} (F(u)-G(u))p(x-u)du \\
&\geq G(x) - \frac{T}{2\pi\gamma}\int_{-2a/T}^{0} |G(x+y)-G(x)|dy \\
&- \frac{1}{2\pi\gamma}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt - \Delta\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right), \ \forall x
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$
\begin{aligned}
F(x)-G(x) &\geq -\frac{T}{2\pi\gamma}\int_{-2a/T}^{0} |G(x+y)-G(x)|dy \\
&- \frac{1}{2\pi\gamma}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt - \Delta\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)
\end{aligned} \tag{3.1.11}
$$

Τελικά, από τις (3.1.10) και (3.1.11), έχομε,

$$
\begin{aligned}
\sup_x |F(x)-G(x)| &\leq \frac{T}{2\pi\gamma}\sup_x \int_{|y|\leq 2a/T} |G(x+y)-G(x)|dy \\
&+ \frac{1}{2\pi\gamma}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt \\
&+ \frac{1-\gamma}{\gamma}\sup_x |F(x)-G(x)|
\end{aligned}
$$

Από την (3.1.5) έπεται ότι $0<\gamma<1$ $\forall a>0$ και $\lim_{a\to+\infty}\gamma(a)=1$. Επομένως, διαλέγοντας a αρκετά μεγάλο μπορούμε να εξασφαλίσωμε ότι $\gamma>1/2$. Τότε,

$$
\begin{aligned}
\Delta &\leq \frac{1}{2\pi(2\gamma-1)}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|dt \\
&+ \frac{T}{2\pi(2\gamma-1)}\sup_x \int_{|y|\leq 2a/T} |G(x+y)-G(x)|dy
\end{aligned} \tag{3.1.12}
$$

Υποθέτομε ότι $b>\frac{1}{2\pi}$ δίδεται.
Ορίζομε γ από την εξίσωση $2\pi(2\gamma-1)b=1$ ώστε $1/2<\gamma<1$. Τότε στην (3.1.12) μπορούμε για a να θέσωμε την λύση της εξίσωσης

$$2\gamma(a)-1=\frac{1}{2\pi b} \text{ ή } \int_0^{a/2}\frac{\sin^2 u}{u^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8b}$$

Ούτως προκύπτει η ζητούμενη σχέση (3.1.3).

Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.1.1 δίδεται από το ακόλουθο,

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω $F(x)$ μια αύξουσα συνάρτηση, $G(x)$ διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, $f(t)$ και $g(t)$ οι αντίστοιχοι Fourier Stieltjes μετασχηματισμοί. Υποθέτομε ότι*

$$F(-\infty) = G(-\infty),\ F(+\infty) = G(+\infty),\ |G'(x)| \leq C$$

Τότε $\forall b > 1/2\pi$ έχομε

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq b \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt + \frac{r(b)C}{T} \tag{3.1.13}$$

όπου T θετικός αριθμός αυθαιρέτος και $r(b)$ θετική σταθερά εξαρτώμενη μόνο από b.

3.2 Οι Ανισότητες Esseen και Berry-Esseen

Στην παράγραφο αυτή δίνεται η εκτίμηση κατά Berry και Esseen, της απόστασης μεταξύ της κανονικής κατανομής και της κατανομής του αθροίσματος ανεξαρτήτων τ.μ. (μη εκφυλισμένων).

Λήμμα 3.2.1. *Έστωσαν $X_1, \ldots X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $EX_j = 0, E|X_j|^3 < \infty, j = 1, \ldots, n$. Θέτομε,*

$$\sigma_j^2 = EX_j^2,\ B_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2,\ L_n = B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} E|X_j|^3$$

Αν $f_n(t)$ η χ.σ. της τ.μ. $B_n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} X_j$ τότε,

$$|f_n(t) - \mathrm{e}^{-t^2/2}| \leq 16 L_n |t|^3 \mathrm{e}^{-t^2/3} \tag{3.2.14}$$

για $|t| \leq (4\Lambda_\nu)^{-1}$.

Απόδειξη. Αρχίζομε με την περίπτωση όπου $|t| \geq \frac{1}{2} L_n^{-1/3}$. Τότε $8L_n|t|^3 \geq 1$, οπότε αρκεί να δειχθή ότι

$$|f_n(t)|^2 \leq \mathrm{e}^{-2t^2/3} \tag{3.2.15}$$

εφόσον η (3.2.15) συνεπάγεται ότι

$$|f_n(t) - \mathrm{e}^{-t^2/2}| \leq |f_n(t)| + \mathrm{e}^{-t^2/2} \leq \mathrm{e}^{-t^2/3} + \mathrm{e}^{-t^2/2} \leq 2\mathrm{e}^{-t^2/3}$$

και έτσι

$$|f_n(t) - \mathrm{e}^{-t^2/2}| \leq 2\mathrm{e}^{-t^2/3} \leq 16 L_n |t|^3 \mathrm{e}^{-t^2/3}$$

Αποδεικνύουμε λοιπόν την (3.2.15). Έστω $v_j(t) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_j}), j = 1, 2, \ldots, n$. Η τ.μ. $\bar{X}_j = X_j - Y_j$ με Y_j ανεξάρτητης της X_j και ισόνομη, έχει χ.σ. $|v_j(t)|^2 (= v_j \cdot \bar{v}_j)$ και

διασπορά $2\sigma_j^2$.
Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις ανισότητες

$$|\cos u - \frac{1}{3} + \frac{u^2}{2}| \leq \frac{|u|^3}{6}$$

$$|x-y|^3 \leq 4(|x|^3 + |y|^3)$$

$$\mathrm{e}^x \geq x+1$$

και επειδή η $|v_j(t)|^2$ είναι πραγματική, ισχύει

$$\begin{aligned}
|v_j(t)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t(x_j - y_j))dF_{n_j}(x_j)dF_{n_j}(y_j) \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big(1 - \frac{t^2}{2}(x_j^2 - 2X_jy_j + y_j^2) + \frac{2}{3}|t|^3(|x_j|^3 \\
&+ |y_j|^3)\Big)dF_{n_j}(x_j)dF_{n_j}(y_j) \\
&= 1 - \sigma_j^2 t^2 + \frac{4}{3}|t|^3 E|x_j|^3 \\
&\leq \exp(-\sigma_j^2 t^2 + \frac{4}{3}E|x_j|^3|t|^3)
\end{aligned}$$

Επομένως στο διάστημα $|t| \leq \frac{1}{4L_n}$,

$$\begin{aligned}
|f_n(t)|^2 &= \prod_{j=1}^{n} |v_j(t/\sqrt{B_n})|^2 \\
&\leq \exp((t/\sqrt{B_n})^2 \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 + \frac{4}{3}|t/\sqrt{B_n}|^3 \sum_{j=1}^{n} E|X_j|^3) \\
&= \exp(-t^2 + \frac{4}{3}L_n|t|^3) \\
&\leq \exp(-\frac{2}{3}t^2)
\end{aligned}$$

Έτσι η (3.2.15) απεδείχθη.
Υποθέτομε τώρα ότι $|t| \leq 1/4L_n$ και $|t| < \frac{1}{2}L_n^{-1/3}$. Τότε

$$\frac{(EX_j^2)^{1/2}}{\sqrt{B_n}}|t| \leq \frac{(E|X_j|^3)^{1/3}}{\sqrt{B_n}}|t| < \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} E|X_j|^3}{(\sqrt{B_n})^3}\right)^{1/3}|t| = L_n^{1/3}|t| < \frac{1}{2} \tag{3.2.16}$$

από ανισότητα Lyapounov, για $j = 1, 2, \ldots, n$. Αναπτύσσομε κατά Taylor την $v_j(t/\sqrt{B_n})$

$$v_j(t/\sqrt{B_n}) = 1 - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2B_n} + \theta_j \frac{E|X_j|^3}{6B_n^{3/2}}|t|^3, \ |\theta_j| \leq 1$$

χρησιμοποώντας και την (3.2.16) ώστε,

$$|1 - v_j(\frac{t}{\sqrt{\beta_n}})| = \left|\frac{\sigma_j^2}{2B_n} + \theta_j \frac{E|X_j|^3}{6B_n^{3/2}}|t|^3\right| < 1/6, \ |\theta_j| \leq 1$$

Τώρα, από το ανάπτυγμα Taylor (του $\log(1-x)$)

$$\begin{aligned}\log v_j(t/\sqrt{B_n}) &= -\frac{\sigma_j^2 t^2}{2B_n} + \theta_j \frac{E|X_j|^3}{6B_n^{3/2}}|t|^3 \\ &+ \frac{\theta_j}{2}\Big(-\frac{\sigma_j^2 t^2}{2B_n} + \theta_j \frac{E|X_j|^3}{6B_n^{3/2}}|t|^3\Big)\end{aligned}$$

Αλλά,

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_j^4 t^4}{4B_n^2} + \Big(\frac{E|X_j|^3|t|^3}{6B_n^{3/2}}\Big)^2 &\leq \Big(\frac{\sigma_j|t|}{4\sqrt{B_n}} + \frac{E|X_j|^3}{36B_n^{3/2}}|t|^3\Big)\frac{E|X_j|^3|t|^3}{B_n^{3/2}} \\ &\leq \Big(\frac{1}{4\cdot 2} + \frac{1}{8\cdot 36}\Big)\frac{E|X_j|^3|t|^3}{B_n^{3/2}}\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\log v_j(t/\sqrt{B_n}) &= -\frac{\sigma_j^2 t^2}{2B_n} + \theta_j(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{288})\frac{E|X_j|^3|t|^3}{B_n^{3/2}} \\ &= -\frac{\sigma_j^2 t^2}{2B_n} + \frac{\theta_j}{2}\frac{E|X_j|^3|t|^3}{B_n^{3/2}}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\log f_n(t) &= -\frac{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 t^2}{2B_n} + \frac{\theta_j \sum_{j=1}^n E|X_j|^3|t|^3}{2B_n^{3/2}} \\ &= -\frac{t^2}{2} + \theta_j \frac{L_n}{2}|t|^3, \ |\theta_j| \leq 1\end{aligned}$$

Τώρα, από την $|t| < \frac{1}{2}L_n^{-1/3}$ έπεται ότι,

$$\exp(\frac{1}{2}L_n|t|^3) < \exp(\frac{1}{2}\frac{1}{8}) = \exp(1/16) < 2$$

και προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}|f_n(t) - \mathrm{e}^{-t^2/2}| &\leq \mathrm{e}^{-t^2/2}|\mathrm{e}^{\theta L_n|t|^3/2} - 1| \\ &\overset{(*)}{\leq} \frac{L_n|t|^3}{2}\exp(-\frac{t^2}{2} + \frac{L_n|t|^3}{2}) \\ &\leq L_n|t|^3\mathrm{e}^{-t^2/2}\end{aligned}$$

$\Big((*)|e^z - 1| \leq |z|\mathrm{e}^{|z|}\Big)$. Από την προηγούμενη προκύπτει άμεσα η (3.2.14).

Θεώρημα 3.2.2. *Έστωσαν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. ώστε $EX_j = 0, E|X_j|^3 < \infty, j = 1, 2, \ldots, n$. Θέτομε,*

$$\sigma_j^2 = EX_j^2, \ B_n = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \ F_n(x) = P(B_n^{-1/2}\sum_{j=1}^n X_j < x), \ L_n = B_n^{-3/2}\sum_{j=1}^n E|X_j|^3$$

Τότε,

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq AL_n \tag{3.2.17}$$

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις $F_n(x)$ και $\Phi(x)$ ικανοποιούν τις συνθήκες του Θεωρήματος 3.1.2 και $\sup_x |\phi'(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Θέτομε $b = 1/\pi$, $T = 1/4L_n$ οπότε από την (3.1.13) βρίσκομε,

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq L_n/4} \left| \frac{f_n(t) - \mathrm{e}^{-t^2/2}}{t} \right| dt + A_1 L_n$$

όπου $f_n(t)$ η $\chi.\sigma.$ της $F_n(x)$.
Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.1, λαμβάνομε την (3.2.17).
Η (3.2.17) ονομάζεται Ανισότητα Esseen.

Το επόμενο θεώρημα που αφορά σε i.i.d τ.μ. είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.2.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστωσαν $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = \sigma^2 > 0$, $E|X_1|^3 < \infty$. Θέτομε $p = \frac{E|X_1|^3}{\sigma^3}$. Τότε,*

$$\sup_x |P(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j < x) - \Phi(x)| \leq \frac{Ap}{\sqrt{n}} \tag{3.2.18}$$

Απόδειξη. Άμεση από το Θεώρημα 3.2.2.

Η (3.2.18) ονομάζεται Ανισότης Berry - Esseen.

Η υπόθεση $EX_j = 0, j = 1, 2, \ldots, n$ στα θεωρήματα 3.2.2 και 3.2.3 δεν περιορίζει τη γενικότητα, εφόσον θέτοντας $Y_j = X_j - EX_j, j = 1, 2, \ldots$ εφαρμόζομε τα θεωρήματα στις $Y_j, j = 1, 2, \ldots$.

3.3 Γενικεύσεις της ανισότητας Esseen

Έστω G το σύνολο των συναρτήσεων ωρισμένων για όλα τα x, που ικανοποιούν τις συνθήκες:
α) $g(x)$ μη αρνητική , άρτια και αύξουσα στο διάστημα $x > 0$.
β) $\frac{x}{g(x)}$ αύξουσα στο $x > 0$.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστωσαν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. τέτοιες ώστε $EX_j = 0, E(X_j^2 g(X_j)) < \infty$ για $j = 1, 2, \ldots, n$ και για κάποια $g \in G$. Θέτομε,*

$$\sigma_j^2 = EX_j^2,\ B_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2,\ F_n(x) = P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{B_n^{1/2}} < x \right)$$

Τότε,

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{A}{B_n g(\sqrt{B_n})} \sum_{j=1}^{n} E(X_j^2 g(X_j)) \tag{3.3.19}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε για $j = 1, \ldots, n$ τις τ.μ.

$$\bar{X}_j = \begin{cases} X_j, \ |X_j| < \sqrt{B_n} \\ 0, \ |X_j| \geq \sqrt{B_n} \end{cases}$$

Θέτομε,

$$\bar{a}_j = E\bar{X}_j, \ \bar{\sigma}_j^2 = E\bar{X}_j^2 - (E\bar{X}_j)^2$$

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} \bar{\sigma}_j^2, \ V_j(x) = P(X_j < x)$$

Επειδή $EX_j = 0$ έχομε,

$$\begin{aligned}
0 \ &\leq \ \sigma_j - \bar{\sigma}_j^2 = \int_{|X| \leq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) + \int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) \\
&- \ \int_{|X| < \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) + (\int_{|X| < \sqrt{B_n}} x dV_j(x))^2 \\
&= \ \int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) + (\int_{|X| < \sqrt{B_n}} x dV_j(x))^2 \\
&\overset{(\cdot)}{\leq} \ \int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) + \int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) \\
&= \ 2\int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) \\
&= \ 2\int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 \frac{g(x)}{g(x)} dV_j(x) \\
&\leq \ \frac{2}{g(\sqrt{B_n})} \int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 g(x) dV_j(x) \\
&\leq \ \frac{2}{g(\sqrt{B_n})} E(X_j^2 g(X_j)), \ j = 1, \ldots, n
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

$\Big((\cdot) EX_j = 0 \Rightarrow (\int_{|X| < \sqrt{B_n}} x dV_j(x))^2 = (-\int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x dV_j(x))^2$

και $\int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x dV_j(x))^2 \leq \int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) \Big)$ από ανισότητα Lyapunov.

Τώρα, αν $\bar{B}_n \leq \frac{1}{4} B_n$

$$\begin{aligned}
B_n - \frac{1}{4}B_n \ &= \ \frac{3}{4}B_n \leq B_n - \bar{B}_n \\
&\leq \ \frac{2}{g(\sqrt{B_n})} \sum_{j=1}^{n} E(X_j^2 g(X_j)) \\
&\Rightarrow \ 1 \leq \frac{8}{3B_n g(\sqrt{B_n})} \sum_{j=1}^{n} E(X_j^2 g(X_j))
\end{aligned}$$

Επομένως η (3.3.19) ικανοποιείται με $A = 8/3$ (εφόσον $|F_n(x) - \Phi(x)| < 1$). Θα υποθέσωμε λοιπόν ότι $\bar{B}_n > \frac{1}{4}B_n$. Θέτομε,

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{B_n}}\sum_{j=1}^{n} X_j,\ Y_n = \frac{1}{\sqrt{\bar{B}_n}}\sum_{j=1}^{n} X_j,\ \bar{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{\bar{B}_n}}\sum_{j=1}^{n}(\bar{X}_j - \bar{a}_j)$$

Ισχύει ότι,

$$[Z_n < x] \subset [Y_n < x] \cup (|X_1| \geq \sqrt{B_n}) \cup \ldots \cup (|X_n| \geq \sqrt{B_n})$$

και

$$[Y_n < x] \subset [Z_n < x] \cup (|X_1| \geq \sqrt{B_n}) \cup \ldots \cup (|X_n| \geq \sqrt{B_n})$$

ούτως προκύπτει

$$\begin{aligned}
\sup_x |F_n(x) - P(Y_n < x)| &= \sup_x |P(Z_n < x) - P(Y_n < x)| \\
&\leq \sup_x |P(Y_n < x) + \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| \geq \sqrt{B_n}) - P(Y_n < x)| \\
&= \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| \geq \sqrt{B_n})
\end{aligned}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
P(Y_n < x) &= P(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sqrt{\bar{B}_n}} < x) \\
&= P(\frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j - \sum_{j=1}^{n} E\bar{X}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}} < x - \frac{\sum_{j=1}^{n} E\bar{X}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}}) \\
&= P(\bar{Z}_n < x - \frac{\sum_{j=1}^{n} E\bar{X}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}})
\end{aligned}$$

Έχομε

$$\begin{aligned}
|F_n(x) - \Phi(x)| &\leq |F_n(x) - P(\bar{Z}_n < x - \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}})| \\
&+ |P(\bar{Z}_n < x - \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}}) - \Phi(x - \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}})| \\
&+ |\Phi(x - \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}}) - \Phi(x)| \qquad (3.3.21)
\end{aligned}$$

Θέτομε

$$T_1 = \sup_x |P(\bar{Z}_n < x - \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}}) - \Phi(x - \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}})|$$

$$T_2 = \sup_x |\Phi(x - \frac{\sum_{j=1}^n \bar{a}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}}) - \Phi(x)|$$

$$T_3 = \sum_{j=1}^n P(|X_j| \geq \sqrt{B_n})$$

Από το Θεώρημα 3.2.2,

$$T_1 \leq \frac{A_1}{\bar{B}_n^{3/2}} \sum_{j=1}^n E|\bar{X}_j - \bar{a}_j|^3$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} E|\bar{X}_j - \bar{a}_j|^3 &\leq 4(E|\bar{X}_j|^3 + |\bar{a}_j|^3) \\ &\leq 8E|\bar{X}_j|^3 \\ &= 8\int_{|X|<\sqrt{B_n}} \frac{|x|}{g(x)} x^2 g(x) dV_j(x) \\ &= \frac{8\sqrt{B_n}}{g(\sqrt{B_n})} E(X_j^2 g(X_j)) \end{aligned}$$

Επομένως, από την ανισότητα $\bar{B}_n > \frac{1}{4} B_n$ βρίσκομε

$$T_1 \leq \frac{A_2}{B_n g(\sqrt{B_n})} \sum_{j=1}^n E(X_j^2 g(X_j)) \tag{3.3.22}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι επόμενες στοιχειώδεις ανισότητες είναι αληθείς:

$$\sup_x |\Phi(px) - \Phi(x)| \leq \begin{cases} \frac{p-1}{\sqrt{2\pi e}}, & p \geq 1 \\ \frac{(1/p)-1}{\sqrt{2\pi e}}, & 0 < p < 1 \end{cases} \tag{3.3.23}$$

$$\sup_x |\Phi(x+q) - \Phi(x)| \leq \frac{|q|}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.3.24}$$

Από αυτές προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sup_x |\Phi(\sqrt{\frac{B_n}{\bar{B}_n}}x - \frac{\sum_{j=1}^n \bar{a}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}}) - \Phi(\sqrt{\frac{B_n}{\bar{B}_n}}x) \\
&+ \Phi(\sqrt{\frac{B_n}{\bar{B}_n}}x - \Phi(x))| \\
&\leq \sup_x |\Phi(\sqrt{\frac{B_n}{\bar{B}_n}}x - \frac{\sum_{j=1}^n \bar{a}_j}{\sqrt{\bar{B}_n}}) - \Phi(\sqrt{\frac{B_n}{\bar{B}_n}}x)| \\
&+ \sup_x |\Phi(\sqrt{\frac{B_n}{\bar{B}_n}}x - \Phi(x))| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{\sqrt{\bar{B}_n}}|\sum_{j=1}^n \bar{a}_j|) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sqrt{\frac{B_n}{\bar{B}_n}} - 1) \qquad (\sqrt{\frac{B_n}{\bar{B}_n}} \geq 1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sqrt{\frac{B_n}{\bar{B}_n}} - 1 + \frac{|\sum_{j=1}^n \bar{a}_j|}{\sqrt{\bar{B}_n}})
\end{aligned}$$

Έχομε δε

$$\begin{aligned}
|\bar{a}_j| &= |\int_{|X|\geq\sqrt{B_n}} x dV_j(x)| \\
&\leq |\int_{|X|\geq\sqrt{B_n}} x \frac{x}{g(|x|)} \frac{g(x)}{x} dV_j(x)| \\
&\leq \int_{|X|\geq\sqrt{B_n}} |x|^2 |g(x)| \frac{1}{|x||g(x)|} dV_j(x) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{B_n} g(\sqrt{B_n})} \int_{|X|\geq\sqrt{B_n}} |x|^2 g(x) dV_j(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{B_n} g(\sqrt{B_n})} E(X_j^2 g(X_j))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{B_n}{\bar{B}_n}} - 1 &= \frac{B_n - \bar{B}_n}{\sqrt{\bar{B}_n}(\sqrt{B_n} + \sqrt{\bar{B}_n})} \\
&\leq \frac{(3/4)B_n}{(1/4)B_n + (1/2)\sqrt{B_n}\sqrt{B_n}} = 1 \\
&\overset{(\star)}{\leq} \frac{A_3}{B_n g(\sqrt{B_n}) \sum_{j=1}^n E(X_j^2 g(X_j))}
\end{aligned}$$

$(\star)$ από (3.3.20). Επομένως,

$$T_2 \leq \frac{A_4}{B_n g(\sqrt{B_n}) \sum_{j=1}^n E(X_j^2 g(X_j))} \tag{3.3.25}$$

Από ανισότητα Chebyshev, η T_3 συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} P(|X_j| \geq \sqrt{B_n}) &\leq \frac{\sum_{j=1}^{n} E|X|}{\sqrt{B_n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_{j=1}^{n} \int |x| \frac{x}{x} \frac{g(x)}{g(x)} dV_j(x) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{B_n}\sqrt{B_n} g(\sqrt{B_n})} \sum_{j=1}^{n} E(X_j^2 g(X_j))\end{aligned}$$

Άρα

$$T_3 \leq \frac{1}{B_n g(\sqrt{B_n})} \sum_{j=1}^{n} E(X_j^2 g(X_j)) \tag{3.3.26}$$

Από τις ανισότητες (3.3.21), (3.3.22), (3.3.25), (3.3.26) έπεται η (3.3.19).

Παρατήρηση
Αν $0 < \delta \leq 1$, η συνάρτηση $g(x) = |x|^{\delta}$ ανήκει στο σύνολο G. Τότε το Θεώρημα 3.3.1 συνεπάγεται το Θεώρημα 3.2.2 και το ακόλουθο Θεώρημα, το οποίο αποτελεί γενίκευσή του.

Θεώρημα 3.3.2. *Έστωσαν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $EX_j = 0, E|X_j|^{2+\delta} < \infty$ για κάποιο θετικό $\delta \leq 1$ και $j = 1, 2, \ldots, n$. Τότε,*

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{A}{B_n^{1+(\delta/2)}} \sum_{j=1}^{n} E|X_j|^{2+\delta} \tag{3.3.27}$$

όπου B_n και $F_n(x)$ ορίζονται όπως στο Θεώρημα 3.3.1.

Στο Θεώρημα 3.3.1 δεν υπετέθη η ύπαρξη ροπών 3ης τάξης, όμως υπετέθη η ύπαρξη διασπορών. Μπορούμε να γενικεύσωμε την Ανισότητα Esseen χωρίς πρόσθετες υποθέσεις περί της ύπαρξης ροπών.

Έστωσαν ανεξάρτητες τ.μ. με σ.κ. $V_1(x), \ldots, V_n(x)$. Υποθέτομε ότι,

$$-\infty < t_1 < \tau_1 \leq +\infty, \ldots, -\infty < t_n < \tau_n \leq +\infty$$

Επίσης, ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς

$$b_j = \int_{t_j < x < \tau_j} x^2 dV_j(x) - (\int_{t_j < x < \tau_j} x dV_j(x))^2,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

είναι διάφορος του μηδενός.
Αν t_j και τ_j είναι πεπερασμένα, τα ολοκληρώματα υπάρχουν και είναι πεπερασμένα. Αν $t_j = -\infty$ ή $\tau_j = +\infty$, τότε θα πρέπει να εξασφαλίσωμε ότι τα ολοκληρώματα υπάρχουν και είναι πεπερασμένα.

Θεωρούμε τις τ.μ.

$$\bar{X}_j = \begin{cases} X_j, \ t_j < X_j < \tau_j \\ 0, \ X_j \le t_j \text{ ή } X_j \ge \tau_j \end{cases}$$

όπου $j = 1, 2, \ldots, n$.

Είναι προφανές ότι οι $b_j, \ j = 1, 2, \ldots, n$ είναι οι διασπορές των τ.μ. $\bar{X}_j$.
Θέτομε

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} E\bar{X}_j = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_j < x < \tau_j} x dV_j(x), \ N_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\Delta_n = \sup_x |P(\frac{1}{\sqrt{N_n}} \sum_{j=1}^{n} (\bar{X}_j - E\bar{X}_j) < x) - \Phi(x)|,$$

$$\Gamma_n = \sum_{j=1}^{n} [P(X_j \le t_j) + P(X_j \ge \tau_j)]$$

Θεώρημα 3.3.3. *Με τα προηγούμενα δεδομένα για όλους τους θετικούς πραγματικούς a και b, έχομε*

$$\begin{aligned} \sup_x |P(\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n} X_j - b < x) - \Phi(x)| \ &\le \ \Delta_n + \Gamma_n + \frac{|ab - M_n|}{\sqrt{2\pi N_n}} \\ &+ \ \frac{1}{2\sqrt{2\pi \mathrm{e}}} |1 - \frac{N_n}{a^2}| \max\{1, \frac{a^2}{N_n}\} \quad (3.3.28) \end{aligned}$$

Απόδειξη. Το ενδεχόμενο $[\sum_{j=1}^{n} X_j < x]$ συνεπάγεται το ενδεχόμενο

$$(\sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j < x) \cup (X_1 \le t_1) \cup (X_1 \ge \tau_1) \cup \ldots \cup (X_n \le t_n) \cup (X_n \ge \tau_n)$$

και το ενδεχόμενο $[\sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j < x]$ συνεπάγεται το

$$(\sum_{j=1}^{n} X_j < x) \cup (X_1 \le t_1) \cup (X_1 \ge \tau_1) \cup \ldots \cup (X_n \le t_n) \cup (X_n \ge \tau_n)$$

Κατά συνέπεια,

$$|P(\sum_{j=1}^{n} X_j < x) - P(\sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j < x)| \le \sum_{j=1}^{n} |P(X_j \le t_j) + P(X_j \ge \tau_j)| = \Gamma_n, \ \forall x \quad (3.3.29)$$

Θέτομε,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{N_n}} \sum_{j=1}^{n} (\bar{X}_j - E\bar{X}_j), \ Z_n = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n} X_j - b$$

Έχομε,

$$\begin{aligned} |P(Z_n < x) - \Phi(x)| &\leq |P(Z_n < x) - P(\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n}\bar{X}_j - b < x) \\ &+ |P(\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n}\bar{X}_j - b < x) - \Phi(px+q)| \\ &+ |\Phi(px+q) - \Phi(px)| + |\Phi(px) - \Phi(x)| \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

$\forall$ πραγματικό p, q και x.
Για $p = \frac{a}{\sqrt{N_n}}$, $q = \frac{ab-M_n}{\sqrt{N_n}}$, έχομε,

$$|P(\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n}\bar{X}_j - b < x) - \Phi(px+q)| = |P(Y_n < px+q) - \Phi(px+q)| \leq \Delta_n,\ \forall x \tag{3.3.31}$$

Θέτομε

$$T_1 = \sup_x |\Phi(x+q) - \Phi(x)|,\ T_2 = \sup_x |\Phi(px) - \Phi(x)|$$

Τότε από τις (3.3.30) και (3.3.31), λαμβάνομε,

$$\sup_x |P(\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n}X_j - b < x - \Phi(x)| \leq \Delta_n + \Gamma_n + T_1 + T_2 \tag{3.3.32}$$

Οι ανισότητες (3.3.23) και (3.3.24) συνεπάγονται ότι:

$$T_1 \leq \frac{|ab - M_n|}{\sqrt{2\pi N_n}} \tag{3.3.33}$$

$$T_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{e}}}(\frac{a}{\sqrt{N_n}} - 1),\ \text{για } a \geq \sqrt{N_n}$$

$$T_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{e}}}(\frac{\sqrt{N_n}}{a} - 1),\ \text{για } a < \sqrt{N_n}$$

Έχομε δε,

$$\frac{a}{\sqrt{N_n}} - 1 = \frac{a^2 - N_n}{\sqrt{N_n}(a + \sqrt{N_n})} \leq \frac{1}{2}(\frac{a^2}{N_n} - 1) \text{ για } a \geq \sqrt{N_n}$$

και

$$\frac{\sqrt{N_n}}{a} - 1 = \frac{N_n - a^2}{a(a + \sqrt{N_n})} \leq \frac{1}{2}(\frac{N_n}{a^2} - 1) \text{ για } a < \sqrt{N_n}$$

Επομένως,

$$T_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi \mathrm{e}}}|1 - \frac{N_n}{a^2}| \max\{1, \frac{a^2}{N_n}\} \tag{3.3.34}$$

και από τη (3.3.32), (3.3.33) και (3.3.34) λαμβάνομε την (3.3.28).

Όταν οι t_j και τ_j, στο προηγούμενο θεώρημα, επιλέγονται να είναι πεπερασμένοι, οι τ.μ. $\bar{X}_j$ έχουν ροπές αυθαίρετης τάξεως και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τα θεωρήματα (3.2.2), (3.3.1) και (3.3.2) για να εκτιμήσουμε τη Δ_n στην (3.3.28). Από το Θεώρημα (3.2.2) π.χ. έχομε

$$\Delta_n \leq \frac{A}{N_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} E|\bar{X}_j - E\bar{X}_j|^3 \tag{3.3.35}$$

Ειναι εύκολο να δείξωμε ότι η ανισότης (3.3.28), μετά την αντικατάσταση του Δ_n από την (3.3.35), αποτελεί μια γενίκευση των ανισοτήτων (3.2.17), (3.3.19) και (3.3.27).

Θεώρημα 3.3.4. *Έστωσαν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $EX_j = 0, EX_j^2 < \infty,\ j = 1, 2, \ldots$. Θέτομε,*

$$V_j(x) = P(X_j < x)$$

$$B_n = \sum_{j=1}^{n} EX_j^2, F_n(x) = P(\frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_{j=1}^{n} X_j < x)$$

$$\Lambda_n(\epsilon) = \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| \geq \epsilon\sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x)$$

$$l_n(\epsilon) == \frac{1}{B_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| \leq \epsilon\sqrt{B_n}} |x|^3 dV_j(x)$$

Τότε

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq A(\Lambda_n(\epsilon) + l_n(\epsilon)),\ \forall \epsilon > 0 \tag{3.3.36}$$

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξομε την (3.3.36) για $\epsilon = 1$. Στο Θεώρημα 3.3.3. Θέτομε $a = \sqrt{B_n}$, $b = 0$, $-t_j = \tau_j = \sqrt{B_n}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Επειδή δε

$$N_n \leq B_n(\int_{t_j \leq X_j < \tau_j} x^2 dV_j(x) \leq \int x^2 dV_j(x))$$

$$|1 - \frac{N_n}{B_n}| \max\{1, \frac{B_n}{N_n}\} = \frac{B_n}{N_n} - 1 \tag{3.3.37}$$

Αν $N_n < \frac{1}{4} B_n$,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} B_n \quad &\leq \quad B_n - N_n = \sum_{j=1}^{n} [\int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) + (\int_{|X| < \sqrt{B_n}} x dV_j(x))^2] \\
&\overset{EX_j = 0}{=} \quad \sum_{j=1}^{n} [\int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) + (-\int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x dV_j(x))^2] \\
&\leq \quad \sum_{j=1}^{n} [\int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) + \int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x)] \\
&= \quad 2 \sum_{j=1}^{n} \int_{|X| \geq \sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) \qquad (3.3.38)
\end{aligned}$$

οπότε, $1 \leq \frac{8}{2}\Lambda_n(1)$ και η (3.3.36) ισχύει με $A = \frac{8}{3}$.

Θεωρούμε τωρα την περίπτωση όπου $N_n > \frac{1}{4}B_n$. Από την (3.3.35) έπεται,

$$\begin{aligned}
\Delta_n &\leq \frac{8A}{N_3^{3/2}} E|\bar{X}_j|^3 \\
&\leq \frac{8A}{B_n^{3/2}/8} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|<\sqrt{B_n}} |x|^3 dV_j(x) \\
&= \frac{64A}{B_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|<\sqrt{B_n}} |x|^3 dV_j(x) \\
&= A_1 l_n(1) \qquad (3.3.39)
\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
\Gamma_n &= \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|\geq\sqrt{B_n}} dV_j(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|\geq\sqrt{B_n}} \frac{x^2}{x^2} dV_j(x) \\
&\leq \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|\geq\sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) \\
&= \Lambda_n(1) \qquad (3.3.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|M_n|}{\sqrt{N_n}} &= \frac{|\sum_{j=1}^{n} E\bar{X}_j|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} V(\bar{X}_j)}} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{B_n}} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|\geq\sqrt{B_n}} |x| dV_j(x) \\
&\leq 2\Lambda_n(1) \qquad (3.3.41)
\end{aligned}$$

Από την (3.3.28), (3.3.37), (3.3.38) και (3.3.39), (3.3.40), (3.3.41) προκύπτει ότι

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq A(\Lambda_n(1) + l_n(1))$$

Επομένως εδείχθη η (3.3.36) για $\epsilon = 1$.

Έστω τώρα, ϵ ένας αυθαίρετος θετικός αριθμός. Αν $\epsilon < 1$ τότε,

$$\begin{aligned}
\Lambda_n(1) &= \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|\geq\sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) \\
&\leq \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|\geq\epsilon\sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) \\
&= \Lambda_n(\epsilon)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} l_n(1) - l_n(\epsilon) &= \frac{1}{B_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|<\sqrt{B_n}} |x|^3 dV_j(x) \\ &- \frac{1}{B_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|<\epsilon\sqrt{B_n}} |x|^3 dV_j(x) \\ &= \frac{1}{B_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\epsilon\sqrt{B_n}\leq|X|<\sqrt{B_n}} |x|^3 dV_j(x) \\ &\leq \frac{\sqrt{B_n}}{B_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|\geq\epsilon\sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) \\ &= \Lambda_n(\epsilon) \end{aligned} \tag{3.3.42}$$

Αν $\epsilon > 1$ τότε,

$$\begin{aligned} l_n(1) &= \frac{1}{B_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|<\sqrt{B_n}} |x|^3 dV_j(x) \\ &\leq \frac{1}{B_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{|X|\leq\epsilon\sqrt{B_n}} |x|^3 dV_j(x) \\ &= l_n(\epsilon) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \Lambda_n(1) &= \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \Bigg(\int_{\sqrt{B_n}\leq|X|<\epsilon\sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) \\ &+ \int_{|X|\geq\epsilon\sqrt{B_n}} x^2 dV_j(x) \Bigg) \\ &\leq l_n(\epsilon) + \Lambda_n(\epsilon) \end{aligned} \tag{3.3.43}$$

Από τις (3.3.42) και (3.3.43) προκύπτει,

$$\Lambda_n(1) + l_n(1) \leq 2\Lambda_n(\epsilon) + 2l_n(\epsilon),\ \forall\epsilon > 0$$

Επομένως ικανοποιείται η (3.3.36) για $A = 2$.

Κεφάλαιο 4

Ασυμπτωτικά Αναπτύγματα στο Κ.Ο.Θ.

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά, για $n \to \infty$, της απόστασης μεταξύ της *σ.κ.* $F_n(x)$ των κανονικοποιημένων αθροισμάτων των n πρώτων όρων της ακολουθίας $\{X_j, j \geq 1\}$ εξ. i.i.d τ.μ. (με $EX_j = 0, j \geq 1$, χ.β.γ) και της κανονικής κατανομής $\Phi(x)$, στο Κ.Ο.Θ., μελετήθηκε πρώτα από τον Chebyshev. Στο πολύ σημαντικό άρθρο του, του 1887, ο Chebyshev παρουσιάζει το ακόλουθο ανάπτυγμα της διαφοράς $F_n(x) - \Phi(x)$:

$$F_n(x) - \Phi(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Q_1(x)}{n^{1/2}} + \frac{Q_2(x)}{n} + \ldots + \frac{Q_j(x)}{n^{j/2}}\right) \tag{4.0.1}$$

όπου $Q_j(x)$ πολυώνυμα, με συντελεστές εξαρτώμενους μόνο από τις πρώτες $j+2$ ροπές των τ.μ. Να σημειώσωμε ότι στη βάση του αναπτύγματος (4.0.1), βρίσκεται η πιο γενική ιδέα που οφείλεται επίσης στον Chebyshev, της ανάπτυξης μιας αυθαίρετης συναρτησης σε σειρά πολυωνύμων, των Chebyshev-Hermite πολυωνύμων.

Το ανάπτυγμα (4.0.1) μελετήθηκε μετά τον Chebyshev, από τους Bruns και Charlier, από πιθανοθεωρητική άποψη. Ενδελεχώς, μελετήθηκε από τον Edgeworth (και παρουσιάσθηκε στο περίφημο άρθρο του: "The law of error"). Συγκεκριμένα, τα Αναπτύγματα Edgeworth (Edgeworth Expansions), παρέχουν πρόσθετες πληροφορίες για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της απόστασης $F_n(x) - \Phi(x)$ (για i.i.d. τ.μ. με μηδενική μέση τιμή), αλλά μόνον όταν υπάρχουν ροπές μεγαλύτερης τάξης δηλαδή όταν $E|X_k|^m < \infty$ για $m \geq 3$. Ιδιαίτερα, υποθέτοντας ότι οι τ.μ. είναι συνεχείς, (ή απλά non-lattice, Ορς. 3 ΠΡΤ), ένα ανάπτυγμα Edgeworth $m-2$ τάξης, για $n \to \infty$, είναι:

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P(N(0,\sigma^2) \leq x) + \sum_{k=1}^{[m-2]} \frac{Q_k(x)}{n^{k/2}} + o(n^{-[m-2]/2}) \tag{4.0.2}$$

4.1 Τυπική κατασκευή αναπτυγμάτων

Στη παράγραφο αυτή δίνομε ορισμούς, παρατηρήσεις και αναπτύγματα συναρτήσεων, προαπαιτούμενα όλα, τόσο για το παρόν, όσο και για το επόμενο κεφάλαιο.

Αν η τ.μ. X με $\chi.\sigma.$ $f(t)$, έχει ροπή (περί το 0) κάποιας τάξης $k, k \in \mathbb{Z}$, τότε από Π. 1 ΠΡΤ, υπάρχουν οι πρώτες k παραγωγοί της $f(t)$, καθώς και της $\log f(t)$ στο $t = 0$. Επομενώς, ο αριθμός

$$\gamma_k = \frac{1}{\mathrm{i}^k} | \frac{d^k}{dt^k} \log f(t) | \Big|_{t=0}$$

υπάρχει, και ονομάζεται ημιαναλλοίωτη (semiinvariant) ή cumulant τάξης k, της τ.μ. X και συνιστά ένα αριθμητικό χαρακτηριστικό της τ.μ., σημαντικό όσο και η ροπή. Σχετίζεται δε, άμεσα με αυτήν εφόσον, ως αποδεικνύεται, οι ημιαναλλοίωτες ως μια τάξη k προσδιορίζονται μοναδικά από τις ροπές ως προς την ίδια τάξη.

Από ορισμό των ημιαναλλοιώτων, αν $f(t)$ η $\chi.\sigma.$ κατανομής με ροπή a_k (τάξης k) τότε,

$$\log f(t) = \sum_{n=1}^{k} \frac{\gamma_n}{n!} (\mathrm{i}t)^n + o(|t|^k), \ t \to 0 \tag{4.1.3}$$

(ανάπτυγμα Taylor της $\log f(t)$) οπότε, και από το Ανάπτυγμα Taylor της $\chi.\sigma.$ $f(t)$ για $t \to 0$ συνάγομε,

$$\log(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (\mathrm{i}t)^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (\mathrm{i}t)^n \tag{4.1.4}$$

Παρατηρήσεις

i) Οι ημιαναλλοίωτες τάξης k, του αθροίσματος ανεξ. τ.μ. ισούται με το άθροισμα των ημιαναλλοιώτων τάξης k των τ.μ.(αν υπάρχουν), εφόσον η $\chi.\sigma.$ του αθροίσματος ανεξαρτήτου τ.μ. ισούται με το γινόμενο των $\chi.\sigma.$ των τ.μ.

ii) Αν γ_k ημιαναλλοίωτος τάξης k μιας τ.μ. X και γ_k της $X' = aX + b, \ a, b$ σταθερές, τότε, $\gamma_1' = a\gamma_1 + b$ και $\gamma_k' = a^k \gamma_k, \ \forall k \geq 2$.

iii) Η (4.1.4) συνεπάγεται τον ακόλουθο τύπο που επιτρέπει την έκφραση των ημιαναλλοιώτων οποιασδήποτε τάξης k συναρτήσει των ροπών (περί το 0) $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$\gamma_k = k! \sum (-1)^{m_1 + \ldots + m_k - 1} (m_1 + \ldots + m_k - 1)! \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{m_l!} (a_l / l!)^{m_l} \tag{4.1.5}$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους $m_i, i = 1, \ldots, k$ που ικανοποιούν την $m_1 + 2m_2 + \ldots + km_k = k$.

Έστω τώρα, $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ακολουθία ανεξαρτήτου τ.μ. με ροπές αυθαίρετης τάξης και $EX_n = 0, \forall n$. Θέτομε, $\beta_n = \sum_{j=1}^{n} EX_j^2$ (εξαιρούμε την περίπτωση που όλες οι X_n είναι εκφυλισμένες). Άρα $\beta_n > 0$ για αρκετά μεγάλο n (και θεωρούμε μόνο τέτοια n).

Έστω επίσης $\gamma_{\nu,n}$, η ημιαναλλοίωτος τάξης ν και $v_n(t)$ ή $\chi.\sigma.$ της X_n και $f_n(t)$ η $\chi.\sigma.$ της $Z_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sqrt{\beta_n}}$.

Από την (4.1.3) προκύπτει

$$\begin{aligned}
\log f_n(t) &= \sum_{j=1}^{n} \log v_j(\frac{t}{\sqrt{\beta_n}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu j}}{\nu!}(\mathrm{i}\frac{t}{\sqrt{\beta_n}})^{\nu} \\
&= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{n^{(\nu-2)/2} \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_{\nu j}}{\nu! n^{(\nu-2)/2} \beta_n^{\nu/2}} (\mathrm{i}t)^{\nu} \\
&= \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu n}}{\nu! n^{(\nu-2)/2}} (\mathrm{i}t)^{\nu} \qquad (4.1.6)
\end{aligned}$$

όπου $\lambda_{\nu n} = \frac{n^{(\nu-2)/2} \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_{\nu j}}{\beta_n^{\nu/2}}$. Σημειώνομε ότι $\lambda_{21} = 1$, οπότε η προηγούμενη συνεπάγεται,

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2} \exp(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_{s+2,n}}{(s+2)! n^{\nu/2}} (\mathrm{i}t)^{s+2}) \qquad (4.1.7)$$

Ορίζομε, $P_{\nu n}(u)$ τον συντελεστή του z^{ν} στο ανάπτυγμα της συνάρτησης, $\exp(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_{s+2,n}}{(s+2)!} u^{s+2} z^s)$ σε δυνάμεις του z, δηλαδή έχομε,

$$\exp(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_{s+2,n}}{(s+2)!} u^{s+2} z^s) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{\nu n}(u) z^{\nu} \qquad (4.1.8)$$

και από τις σχέσεις (4.1.7), (4.1.8) λαμβάνομε

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{P_{\nu n}(\mathrm{i}t)}{n^{\nu/2}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \qquad (4.1.9)$$

Συγκρίνοντας, το ανάπτυγμα της $f_n(t)$ στην (4.1.9) με το σχετικό ανάπτυγμα της αντίστοιχης $\sigma.\kappa.$ $F_n(x)$ σε δυναμοσειρά του $\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Q_{\nu n(x)}}{n^{\nu/2}}$$

συμπεραίνομε,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} dQ_{\nu n}(x) = P_{\nu n}(\mathrm{i}t) \mathrm{e}^{-t^2/2} \qquad (4.1.10)$$

Υποθέτομε, τώρα, ότι υπάρχει η $\sigma.\pi\pi.$ της $F_n(x) : \ P_n(x) = \frac{d}{dx} F_n(x)$. Με συνήθη παραγώγιση, λαμβάνομε,

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_{\nu n}(x)}{n^{\nu/2}}$$

όπου $q_{\nu n} = \frac{d}{dx} Q_{\nu n}(x)$ οπότε από (4.1.10) έχομε,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} q_{\nu n}(x) dx = P_{\nu n}(\mathrm{i}t)\mathrm{e}^{-t^2/2} \tag{4.1.11}$$

Θα βρούμε τώρα μια ρητή έκφραση για τις συναρτήσεις $P_{\nu n}(\mathrm{i}t), Q_{\nu n}(x)$ και $q_{\nu n}(x)$, χωρίς αναφορά στη σύγκλιση της σειράς στην οποία εμφανίζονται.

Θα χρειασθούμε το ακόλουθο,

Λήμμα 4.1.1. *Υποθέτομε οτι οι συναρτήσεις $y = y(x)$ και $z = z(y)$, έχουν παραγώγους τάξης $\nu \geq 1$. Τότε,*

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} z(y(x)) = \nu! \sum \frac{d^s z(y)}{dy^s}|_{y=y(x)} \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} (\frac{1}{m!} \frac{d^m y(x)}{dx^m})^{k_m}$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις $(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ των εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \nu &= k_1 + 2k_2 + \ldots + \nu k_\nu \\ s &= k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ([10]).

Σημειώνομε, παρεμπιπτόντως, ότι από το προηγούμενο Λήμμα, για $y(t) = f(t)$ και $Z(y) = \log y$ μπορούμε να λάβωμε την εξίσωση (4.1.5).

Θέτοντας στο Λήμμα 4.1.1, $z = \mathrm{e}^y$ και $y = y(x) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s x^s$, βρίσκομε,

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} a_s x^s\right)|_{x=0} = \nu! \sum \prod_{m=1}^{\nu} \frac{a_m^{k_m}}{k_m!}$$

Τότε, από τη (4.1.8) λαμβάνομε

$$P_{\nu n}(\mathrm{i}t) = \sum \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} (\frac{\lambda_{m+2,n} (\mathrm{i}t)^{m+2}}{(m+2)!})^{k_m} \tag{4.1.13}$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της (4.1.12). Από την (4.1.13) έπεται οτι το πολυώνυμο $P_{\nu n}(\mathrm{i}t)$ είναι βαθμού 3ν με συντελεστές εξαρτώμενους από τις ημιαναλλοίωτες των τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τάξης όχι μεγαλύτερης από $\nu + 2$.

Από την ισότητα $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} d\Phi(x) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$, με διαδοχικές παραγοντικές ολοκληρώσεις, λαμβάνομε,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} d\Phi^{(r)}(x) = (-\mathrm{i}t)^r \mathrm{e}^{-t^2/2}, \; r = 0, 1, \ldots$$

Παρατηρούμε τώρα οτι λόγω της προηγουμένης σχέσεως, η (4.1.10) ικανοποιείται εαν ορίσωμε $Q_{\nu n}(x)$ να είναι το $P_{\nu n}(\mathrm{i}t)$ αντικαθιστώντας κάθε δύναμη $(\mathrm{i}t)^r$, με $(-1)^r \frac{d^r}{dx^r}\Phi(x), r = 0, 1, \ldots$.
Δηλαδή έχομε,

$$Q_{\nu n}(x) = \sum (-1)^{\nu+2s} \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} \left(\frac{\lambda_{m+2,n}}{(m+2)!}\right)^{k_m} \frac{d^{\nu+2s}}{dx^{\nu+2s}} \Phi(x) \tag{4.1.14}$$

όπου η άθροιση εκτείνεται σε όλες τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της (4.1.12) και $s = k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu$

Η (4.1.14) μπορεί να γραφή σε κάπως διαφορετικό τύπο. Θεωρούμε τα πολυώνυμα Chebyshev-Hermite βαθμού m:

$$H_m(x) = (-1)^m \mathrm{e}^{x^2/2} \frac{d^m}{dx^m} \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Έχομε,

$$H_m(x) = m! \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k x^{m-2k}}{k!(m-2k)!2^k}, \ \forall m \geq 0$$

Τα πρώτα 5 Chebysher-Hermite πολυώνυμα είναι:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= x \\ H_2(x) &= x^2 - 1 \\ H_3(x) &= x^3 - 3x \\ H_4(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x \end{aligned}$$

Ισχύει δε

$$\frac{d^m}{dx^m}\Phi(x) = (-1)^{m-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} H_{m-1}(x)$$

Επομένως, από την προηγούμενη σχέση και την (4.1.14) έχομε,

$$Q_{\nu n}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \sum H_{\nu+2s-1}(x) \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} \left(\frac{\lambda_{m+2,n}}{(m+2)!}\right)^{k_m} \tag{4.1.15}$$

όπου η άθροιση εκτείνεται σε όλες τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της (4.1.12) και $s = k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu$.
Συνεπώς, το πολυώνυμο $Q_{\nu n}(x) = M_{3\nu-1,n}(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$ όπου $M_{3\nu-1,n}(x)$ είναι βαθμού $3\nu - 1$ στο x με συντελεστές εξαρτώμενους μόνο από τις ημιαναλλοίωτες των τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μέχρι και συμπεριλαμβανομένης της τάξης $\nu + 2$.

Θέτοντας $a_{kj} = EX_j^k$ και χρησιμοποιώντας τις ισότητες (4.1.5), (4.1.14) και την σχέση $\lambda_{\nu n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \gamma_{\nu j}}{\beta^{\nu/2} n^{-(\nu-2)/2}}$ βρίσκομε ότι

$$\frac{Q_{1n}(x)}{n^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \frac{H_2(x)}{6\beta_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} a_{3j}$$

$$\frac{Q_{2n}(x)}{n^{1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\left(\frac{H_5(x)}{72\beta_n^3}(\sum_{j=1}^n a_{3j})^2 + \frac{H_3(x)}{24\beta_n^2}\sum_{j=1}^n(a_{4j} - 3a_{2j}^2)\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{Q_{3n}(x)}{n^{3/2}} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\Bigg(\frac{H_8(x)}{1296\beta_n^{9/2}}(\sum_{j=1}^n a_{3j})^2 \\ &+ \frac{H_6(x)}{144\beta_n^{7/2}}\sum_{j=1}^n a_{3j}\sum_{j=1}^n(a_{4j} - 3a_{2j}^2) \\ &+ \frac{H_4(x)}{120\beta_n^{5/2}}(a_{5j} - 10a_{3j}a_{2j})\Bigg)\end{aligned}$$

Από τον ορισμό των Chebyshev-Hermite πολυωνύμων έπεται ότι,

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{e}^{-x^2/2}H_{m-1}(x)) = -\mathrm{e}^{-x^2/2}H_m(x),\ \forall m \geq 1$$

Εφόσον δε, $q_{\nu n}(x) = \frac{d}{dx}Q_{\nu n}(x)$, συνάγεται ότι,

$$q_{\nu n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\sum H_{\nu+2s}(x)\prod_{m=1}^{\nu}\frac{1}{k_m!}(\frac{\lambda_{m+2,\nu}}{(m+2)!})^{k_m} \tag{4.1.16}$$

όπου η άθροιση εκτείνεται σε όλες τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της (4.1.12) και $s = k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu$.
Προφανώς, $q_{\nu n}(x) = N_{3\nu,n}(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$, όπου $N_{3\nu,n}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού 3ν στο x, με συντελεστές εξαρτωμένους μόνο από τις ημιαναλλοίωτες των τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ έως και συμπεριλαμβανομένης της τάξης $\nu + 2$.

Θεωρούμε τώρα την ιδιαίτερη περίπτωση όπου οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι i.i.d με διασπορά σ^2 και $EX_1 = 0$. Σε αυτή τη περίπτωση από την $\lambda_{\nu n} = \frac{\sum_{j=1}^n \gamma_{\nu j}}{\beta_n^{\nu/2}m^{-(\nu-2)/2}}$ λαμβάνομε,

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_\nu = \frac{\gamma_\nu}{\sigma^\nu}$$

για $\nu > 2$ όπου γ_ν ημιαναλλοίωτη τάξης ν της τ.μ. X_1. Οι δε (4.1.13), (4.1.15), (4.1.16) παίρνουν αντιστοίχως, τη μορφή:

$$P_\nu(\mathrm{i}t) = \sum\prod_{m=1}^{\nu}\frac{1}{k_m!}(\frac{\gamma_{m+2}(\mathrm{i}t)^{m+2}}{(m+2)!\sigma^{m+2}})^{k_m} \tag{4.1.17}$$

$$Q_\nu(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\sum H_{\nu+2s-1}(x)\prod_{m=1}^{\nu}\frac{1}{k_m!}(\frac{\gamma_{m+2}}{(m+2)!\sigma^{m+2}})^{k_m} \tag{4.1.18}$$

$$q_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\sum H_{\nu+2s}(x)\prod_{m=1}^{\nu}\frac{1}{k_m!}(\frac{\gamma_{m+2}}{(m+2)!\sigma^{m+2}})^{k_m} \tag{4.1.19}$$

όπου η άθροιση όπως έχει ήδη δηλωθεί.

4.2 Αναπτύγματα Edgeworth της σ.κ. αθροίσματος i.i.d. τ.μ.

Στην παράγραφο αυτή μελετάμε, την ασυμπτωτική συμπεριφορά για $n \to \infty$ του υπολοίπου,

$$R_k^{(n)}(x) = F_n(x) - \Phi(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}[\frac{Q_1(x)}{n^{1/2}} + \ldots + \frac{Q_k(x)}{n^{k/2}}]$$

με προϋπόθεση την υπαρξη ροπών υψηλότερης από 2 τάξης, δηλαδή υποθέτομε ότι $E|X_k|^k < \infty$ για $k \geq 3$. Η υπόθεση αυτή χαρακτηρίζει τα 'κλασσικά' αναπτύγματα Edgeworth.

Θα διατυπώσουμε τα Λήμματα που θα χρειαστούμε για την απόδειξη των επομένων Θεωρημάτων.

Λήμμα 4.2.1. *Έστωσαν ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $EX_j = 0, EX_j^2 = \sigma^2, j = 1, 2, \ldots, n$. Θέτομε $B_n = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2, L_{kn} = B_n^{-k/2} \sum_{j=1}^n E|X_j|^k, k \geq 3$. Αν $3 \leq m \leq k$, τότε $L_{mn}^{1/m-2} \leq L_{kn}^{1/k-2}$.*

Απόδειξη. Παραλείπεται.

Λήμμα 4.2.2. *Υποθέτομε ότι η συνάρτηση $y = y(x)$ έχει μια παράγωγο τάξης $\nu \geq 1$. Τότε,*

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} y^n(x) = \nu! \sum_{k=1}^{\min(\nu,n)} \sum * \frac{n!}{(n-k)!} y^{n-k}(x) \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} (\frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m} y(x))^{k_m}$$

όπου $\sum *$ εκτείνεται σε όλες τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις των εξισώσεων

$$\begin{aligned} \nu &= k_1 + 2k_2 + \ldots + \nu k_\nu \\ k &= k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu \end{aligned}$$

(θεωρούμε εδώ $0^0 = 1$)

Απόδειξη. Προκύπτει από το Λήμμα 4.1.1.

Σε όλα τα επόμενα Λήμματα, θεωρούμε ότι $c(s)$ είναι θετική σταθερά εξαρτώμενη μόνο από το s, και παίρνει διαφορετικές τιμές σε διαφορετικούς τύπους ή ακόμη σε διαφορετικά μέρη της ίδιας ανισότητος.

Λήμμα 4.2.3. *Έστω X τ.μ. με χ.σ. $v(t)$. Υποθέτομε ότι $EX = 0, EX^2 = \sigma^2 > 0, E|X|^s = \beta_s < \infty$, για $s \geq 3 (\in \mathbb{Z})$. Γράφομε $f_n(t) = v^n(t/\sigma\sqrt{n})$. Τότε, στο διάστημα, $|t| < \sqrt{n}(s^3/\beta^3)^{1/s-2}$ έχομε την ανισότητα,*

$$\left| \frac{d^m}{dt^m} \left(f_n(t) - \mathrm{e}^{-t^2/2} \{1 + \sum_{\nu=1}^{s-3} \frac{P_\nu(\mathrm{i}t)}{n^{\nu/2}} \} \right) \right| \leq c(s) \frac{\beta_s}{\sigma_s n^{(s-2)/2}} (|t|^{s-m} + |t|^{3(s-1)+m}) \mathrm{e}^{-t^2/12}$$

για $m = 0, 1, \ldots, s-1$. $P_\nu(t)$ είναι το πολυώνυμο της (4.1.17).

Απόδειξη. (παραλείπεται, [10]).

Λήμμα 4.2.4. *Έστω τ.μ. X με $EX = 0, EX^2 = \sigma^2 < \infty$. Θέτομε,*

$$Y_n = \begin{cases} X, & |X| < \sigma\sqrt{n} \\ 0, & |X| \geq \sigma\sqrt{n} \end{cases}$$

και έστω $V_n(x)$ η σ.κ. της τ.μ. $Y_n, n = 1, 2, \ldots$. Τότε για κάθε ακέραιο m και n έχομε,

$$|V_n^{*n}(x\sigma\sqrt{n}) - \Phi(x)| \leq \frac{c(m)}{(1+|x|)^m}$$

όπου V_n^{*n} είναι η n-πλή συνέλιξη της Y_n.

Απόδειξη. (παραλείπεται, [10])

Λήμμα 4.2.5. *Έστω X τ.μ. με $EX = 0, 0 < EX^2 = \sigma^2 < \infty, V(x) = P(X < x)$. Έστω Y_n η τ.μ. του Λήμματος 4.2.4 με σ.κ. $V_n(x)$. Θέτομε,*

$$Y_{n,x} = \begin{cases} X, & |X| < \sigma\sqrt{n}(1+|x|) \\ 0, & |X| \geq \sigma\sqrt{n}(1+|x|) \end{cases}$$

και $Z_{n,x} = X - Y_{n,x}$. Αν $E|X|^k < \infty$ για ακέραιο $k \geq 2$ τότε

$$\begin{aligned} |V^{*n}(x\sigma\sqrt{n}) - V_n^{*n}(x\sigma\sqrt{n})| \leq\ & c(k)\Bigg(\frac{E|Z_{n,x}|^k}{\sigma^k n^{(k-2)/2}(1+|x|^k)} \\ & + \frac{E|Y_{n,x}|^{k+1} - E|Y_n|^{k+1}}{\sigma^{k+1} n^{(k-1)/2}(1+|x|^{k+1})},\ \forall n, \forall x\Bigg) \end{aligned}$$

Απόδειξη. (παραλείπεται,[10])

Λήμμα 4.2.6. *Έστω $G(x)$ μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης (στο $\mathbb{R}$) και έστω $g(t)$ ο F-S μετασχηματισμός της. Υποθέτομε $\lim_{|x|\to\infty} G(x) = 0$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m dG(x) < \infty$ για ακέραιο $m \geq 1$. Τότε, $x^m G(x)$ είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης (στο $\mathbb{R}$) και έχομε*

$$(-\mathrm{i}t)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} d(x^m G(x)) = m! \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-t)^\nu}{\nu!} \frac{d^\nu}{dt^\nu} g(t)$$

Λήμμα 4.2.7. *Έστω $F(x)$ αύξουσα συνάρτηση και $G(x)$ διαφορίσιμη συνάρτηση φραγμένης κύμανσης (στο $\mathbb{R}$). Έστω $F(-\infty) = G(-\infty), F(+\infty) = G(+\infty)$ και $f(t), g(t)$ οι F-S μετασχηματισμοί τους, αντιστοίχως. Υποθέτομε ότι,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^s |d(F(x) - G(x))| < \infty$$

και

$$|G'(x)| \leq K(1+|x|)^{-s} \ (-\infty < x < \infty)$$

για κάποιο $s \geq 2$ *και σταθερά* k. *Τότε,*

$$\begin{aligned} |F(x) - G(x)| &\leq c(s)(1+|x|)^{-s}\bigg(\int_{-T}^{T} |(f(t) - g(t))/t| dt \\ &+ \int_{-T}^{T} |\delta_s(t)/t| dt + \frac{K}{T}\bigg), \ \forall x, \forall T > 1 \end{aligned}$$

όπου $\delta_s(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} d(x^s(F(x) - G(x_)))$.

Οι αποδείξεις όλων των ανωτέρω λημμάτων βρίσκονται στο Βιβλίο του V.V. Petrov, [10].

Θεωρούμε μια ακολουθία i.i.d τ.μ. $\{X_n : n \geq 1\}$ με κοινή σ.κ. $V(x)$ και $E(X_1) = 0, E(X_1^2) = \sigma^2, v(t) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_1}), F_n(x) = P(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j < x)$ σε όλα τα επόμενα θεωρήματα αυτής της παραγράφου.

Θεώρημα 4.2.8. *Αν* $E|X_1|^k < \infty$ *για κάποιο ακέραιο* $k \geq 3$, *τότε* $\forall x, n$

$$\begin{aligned} |F_n(x) - \Phi(x) - \sum_{\nu=1}^{k-2} \frac{Q_\nu(x)}{n^{\nu/2}}| &\leq c(k)\bigg(\sigma^{-k} n^{-(k-2)/2} (1+|x|^{-k}) \int_{|y| \geq \sigma\sqrt{n}(1+|x|)} |y|^k dV(y) \\ &+ \sigma^{-k-1} n^{-(k-1)/2} (1+|x|^{-k-1}) \int_{|y| < \sigma\sqrt{n}(1+|x|)} |y|^{k+1} dV(y) \\ &+ (\sup_{|t| \geq \delta} |v(t)| + \frac{1}{2n})^n n^{k(k+1)/2} (1+|x|)^{-k-1} \bigg) \qquad (4.2.20) \end{aligned}$$

Εδώ $\delta = \frac{\sigma^2}{12E|X_1|^3}$ *και* $c(k)$ *θετική σταθερά εξαρτώμενη μόνο από* k. *Οι συναρτήσεις* $Q_\nu(x)$ *ως έχουν ορισθεί στην (4.1.18).*

Απόδειξη. Έστω X τ.μ. με κατανομή ίδια με αυτή της X_1. $\forall n \geq 1$ θέτομε,

$$Y_n = \begin{cases} X, \ |X| < \sigma\sqrt{n} \\ 0, \ |X| \geq \sigma\sqrt{n} \end{cases}$$

$Z_n = X - Y_n$, $V_n(X) = P(Y_n < x)$, $\sigma_n^2 = E(Y_n - EY_n)^2$, $W_n(x) = P(Y_n - EY_n < x)$, $w_n(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} dW_n(x)$, και επιπλέον $V(x) = P(X < x)$, $G_n(x) = W_n^{*n}(x\sigma\sqrt{n})$, $g_n(t) = w_n^n(t/\sigma_n\sqrt{n})$. Θεωρούμε ακόμη τις συναρτήσεις $Q_{\nu,n}(x)$ κατασκευασμένες με τον γνωστό τρόπο, από τις ημιαναλλοίωτες των τ.μ. $Y_n - EY_n$. Ούτως έχομε,

$$Q_{\nu,n}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \sum H_{\nu+2s-1}(x) \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} (\frac{\gamma_{m+2,n}}{(m+2)!\sigma_n^{m+2}})^{k_m}$$

όπου η άθροιση εκτείνεται σε όλες τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της $k_1 + 2k_2 + \ldots + \nu k_\nu = \nu$. $H_r(x)$ το Chebyshev-Hermite πολυώνυμο βαθμού r, $\gamma_{m+2,n}$ ημιαναλλοίωτος τάξης $m+2$ της τ.μ. $Y_n - EY_n$ και $s = k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu$. Θέτομε,

$$U_k(x) = \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{k-2} \frac{Q_\nu(x)}{n^{\nu/2}}$$

$$U_{l,n}(x) = \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{l-2} \frac{Q_{\nu n}(x)}{n^{\nu/2}},\ l = 3, 4, \ldots$$

και $u_k(t)$, $u_{l,n}(t)$ οι μετασχηματισμοί F-S των $U_k(x), U_{l,n}(t)$ αντιστοίχως. Θέτομε, επίσης

$$L_{\nu,n} = \sigma^{-\nu} n^{-(n-2)/2} E|Y_n|^\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots$$

$$\Lambda_{\nu,n} = \sigma^{-\nu} n^{-(\nu-2)/2} E|Z_n|^\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, k$$

$$p_n = \frac{\sigma}{\sigma_n},\ q_n = -\frac{E|Y_n|}{\sigma_n}\sqrt{n}$$

Θα δείξωμε πρώτα ότι, $\forall n$ τέτοιο ώστε $\Lambda_{k,n} < 1/4$ και $\forall x$,

$$|U_k(x) - U_{k+1,n}(p_n x + q_n)| \leq c(k)(\Lambda_{k,n} + L_{k+1,n})\mathrm{e}^{-x^2/8} \tag{4.2.21}$$

Αν $\Lambda_{k,n} < 1/4$ τότε

$$\sigma^{-k} n^{-(k-2)/2} E|Z_n|^k < 1/4$$

οπότε

$$E|Z_n|^k < (1/4)\sigma^k n^{(k-2)/2} \tag{4.2.22}$$

Από ορισμό του σ_n^2 έπεται ότι,

$$\frac{\sigma_n^2}{\sigma^2} = 1 - \frac{1}{\sigma^2} E Z_n^2 - \frac{1}{\sigma^2}(EY_n)^2 \tag{4.2.23}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= EX^2 = \int_{|X| \geq \sigma\sqrt{n}} x^2 dV(x) + \int_{|X| < \sigma\sqrt{n}} x^2 dV(x) \\
&= EZ_n^2 + EY_n^2 \\
&\Rightarrow EX^2 - EZ_n^2 - (EY_n)^2 \\
&= EZ_n^2 + EY_n^2 - EZ_n^2 - (EY_n)^2 \\
&= EY_n^2 - (EY_n)^2 = \sigma_n^2
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{\sigma_n^2}{\sigma^2} = \frac{EX^2 - EZ_n^2 - (EY_n)^2}{\sigma^2} = 1 - \frac{EZ_n^2}{\sigma^2} - \frac{EY_n^2}{\sigma^2}$$

Ισχύουν οι σχέσεις:

$$EZ_n^2 \leq \sigma^{-k+2} n^{-(k+2)/2} E|Z_n|^k \tag{4.2.24}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
EZ_n^2 &= \int_{|x|\geq\sigma\sqrt{n}} Z_n^2 = \int_{|x|\geq\sigma\sqrt{n}} x^2 dV(x) \\
&= \int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}} \frac{x^2|x|^{k-2}}{|x|^{k-2}} dV(x) \\
&\leq \sigma^{-k+2} n^{-(k-2)/2} \int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}} |x|^k dV(x) \\
&= \sigma^{-k+2} n^{-(k-2)/2} E|Z_n|^k
\end{aligned}$$

και

$$|EY_n| = |EZ_n| \leq \sigma^{-k+1} n^{-(k-1)/2} E|Z_n|^k \tag{4.2.25}$$

Πράγματι,

$$EY_n = \int_{|X|<\sigma\sqrt{n}} X dV(x),\ EZ_n = \int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}} X dV(x)$$

Αλλά $EX = 0$ (υπόθεση). Οπότε,

$$\int_{|X|<\sigma\sqrt{n}} X dV(x) = -\int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}} X dV(x) \stackrel{|\cdot|}{\to} |EY_n| = |EZ_n|$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
|EZ_n| &\leq E|Z_n| = \int_{|X|<\geq\sqrt{n}} |X| dV(x) \\
&\leq \int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}} (X^2/|X|) dV(x) \\
&\leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}} X^2 dV(x) \\
&= \sigma^{-1} n^{-1/2} EZ_n^2 \\
&\leq \sigma^{-1} n^{-1/2} \sigma^{-k+2} n^{-(k-2)/2} E|Z_n|^k \\
&= \sigma^{-k+1} n^{-(k-1)/2} E|Z_n|^k
\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε την προηγούμενη σχέση). Από τις (4.2.22), (4.2.23), (4.2.24), (4.2.25) οδηγούμεθα στις ανισότητες:

$$\frac{11}{16} \leq \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2} \leq 1 \tag{4.2.26}$$

και

$$1 - (\frac{\sigma_n}{\sigma})^\ell \leq \ell(1 - \frac{\sigma_n}{\sigma}) \leq \frac{5}{4}\ell\Lambda_{k,n},\ \ell = 1, 2, \ldots \tag{4.2.27}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_n^2}{\sigma^2} &= 1-\frac{1}{\sigma^2}EZ_n^2-\frac{1}{\sigma^2}(EY_n)^2\\
&\geq 1-\frac{1}{\sigma^2}EZ_n^k\sigma^{-k+2}n^{-(k/2)+1}-\frac{1}{\sigma^2}(E|Z_n|^k)^2\sigma^{-2k+2}n^{-k+1}\\
&\geq 1-\frac{1}{4}\sigma^k n^{(k/2)-1}\sigma^{-2}\sigma^{-k}\sigma^2 n^{-(k/2)+1}-\frac{1}{4}\sigma^k n^{(k/2)-1}\sigma^{-2}\sigma^{-2k}\sigma^2 n^{-k+1}E|Z_n|^k\\
&= \frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sigma^{-k}n^{-k/2}E|Z_n|^k\\
&= \frac{12}{16}-\frac{1}{4}\sigma^{-k}n^{-k/2}E|Z_n|^k\\
&\geq \frac{12}{16}-\frac{1}{16}\sigma^{-k}n^{-k/2}\sigma^k n^{k/2}n^{-1}\\
&= \frac{12}{16}-\frac{1}{16n}\\
&\geq \frac{12}{16}-\frac{1}{16}\\
&= \frac{11}{16}
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\frac{11}{16}\leq\frac{\sigma_n^2}{\sigma^2}$ και

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= EX^2=\int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}}X^2dV(x)+\int_{|X|<\sigma\sqrt{n}}X^2dV(x)\\
&\geq \int_{|X|<\sigma\sqrt{n}}X^2dV(x)\\
&= EY_n^2\\
&\geq EY_n^2-(EY_n)^2\\
&= \sigma_n^2
\end{aligned}$$

Άρα $\frac{\sigma_n^2}{\sigma}\leq 1$. Έτσι εδείχθη η (4.2.26).

Τώρα,

$$\begin{aligned}
1-(\frac{\sigma_n}{\sigma})^\ell &= (1-\frac{\sigma_n}{\sigma})(1^\ell+1^{\ell-2}\frac{\sigma_n}{\sigma}\\
&+ 1^{\ell-3}(\frac{\sigma_n}{\sigma})^2+\ldots+(\frac{\sigma_n}{\sigma})^{\ell-1})\\
&\leq (1-\frac{\sigma_n}{\sigma})(1+|\frac{\sigma_n}{\sigma}|\\
&+ |\frac{\sigma_n}{\sigma}|^2+\ldots+|\frac{\sigma_n}{\sigma}|^{\ell-1})\\
&\leq (1-\frac{\sigma_n}{\sigma})(1+1+\ldots+1)\\
&= \ell(1-\frac{\sigma_n}{\sigma})\\
&\leq \frac{5}{4}\ell\Lambda_{k,n},\ \ \ell=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

Επιπλέον ισχύουν:

$$E|Y_n| \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} EZ_n^2 \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{4.2.28}$$

και

$$E|Y_n|^\nu \leq (\sigma\sqrt{n})^{\nu-2} EY_n^2 \leq \sigma^\nu n^{(\nu-2)/2},\ \nu = 2, 3, \ldots \tag{4.2.29}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
|EY_n| &= |EZ_n| \leq E|Z_n| \\
&= \int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}} |X| dV(x) = \int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}} \frac{X^2}{|X|} dv(x) \\
&\leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}} X^2 dv(X) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}} Z_n^2 dV(x) \\
&= \frac{EZ_n^2}{\sigma\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{\sigma^2}{\sigma\sqrt{n}} \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

$$(EZ_n^2 = \int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}} X^2 dV(x) \leq \int X^2 dV(x) = EX^2 = \sigma^2)$$

και

$$\begin{aligned}
E|Y|^\nu &= \int |Y_n|^\nu dV_n(y) = \int_{|X|<\sigma\sqrt{n}} |X|^\nu dV(x) \\
&= \int_{|X|<\sigma\sqrt{n}} |X|^2 |X|^{\nu-2} dV(x) \\
&\leq (\sigma\sqrt{n})^{\nu-2} \int_{|X|<\sigma\sqrt{n}} |X|^2 dV(x) \\
&= (\sigma\sqrt{n})^{\nu-2} EY_n^2 \\
&\leq \sigma^{\nu-2} n^{(\nu-2)/2} \int X^2 dV(x) \\
&= \sigma^{\nu-2}\sigma^2 n^{(\nu-2)/2} \\
&= \sigma^\nu n^{(\nu-2)/2},\ \nu = 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Εδείχθη λοιπόν η (4.2.29).

Τώρα,από τις (4.2.25), (4.2.28) και (4.2.29) λαμβάνομε,

$$\begin{aligned}
|E(Y_n - EY_n)^\nu - EY_n^\nu| &= |E(\sum_{\ell=0}^{\nu}(-1)^\ell \binom{\nu}{\ell}(EY_n)^\ell Y_n^{\nu-\ell} - Y_n^\nu)| \\
&= |E(\sum_{\ell=1}^{\nu}(-1)^\ell \binom{\nu}{\ell}(EY_n)^\ell Y_n^{\nu-\ell})| \\
&= |\sum_{\ell=1}^{\nu}(-1)^\ell \binom{\nu}{\ell}(EY_n)^\ell EY_n^{\nu-\ell}| \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{\nu}\binom{\nu}{\ell}|EY_n|^\ell E|Y_n^{\nu-\ell}| \\
&= (\sum_{\ell=1}^{\nu-1}\binom{\nu}{\ell}|EY_n|^\ell E|Y_n^{\nu-\ell}| + |EY_n|^\nu) \\
&= |EY_n|(\sum_{\ell=1}^{\nu-1}\binom{\nu}{\ell}|EY_n|^{\ell-1} E|Y_n^{\nu-\ell}| + |EY_n|^{\nu-1}) \\
&\leq \sigma^{-k+1}n^{-(k-1)/2}E|Z_n|^k[\sum_{\ell=1}^{\nu-1}\binom{\nu}{\ell}(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^{\ell-1}\sigma^{\nu-\ell}n^{(\nu-\ell-2)/2} + (\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^{\nu-1}] \\
&= \sum_{\ell=1}^{\nu-1}\binom{\nu}{\ell}\sigma^{\nu-k}n^{(\nu-k)/2}n^{-\ell}E|Z_n|^k + \sigma^{\nu-k}n^{(\nu-k)/2}n^{-\nu+1}E|Z_n|^k \\
&= \sigma^{\nu-k}n^{(\nu-k)/2}E|Z_n|^k(\sum_{\ell=1}^{\nu-1}\binom{\nu}{\ell}n^{-\ell} + n^{-\nu+1}) \\
&\leq 2^\nu \sigma^{\nu-k}n^{(\nu-k)/2}E|Z_n|^k,\ \nu = 1, 2, \ldots, k
\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

όπου η τελευταία ανισότης προκύπτει από την σχέση,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\nu-1}\binom{\nu}{\ell}(\frac{1}{n})^\ell + (\frac{1}{n})^{\nu-1} &\overset{(\frac{1}{n})^{\nu-1}\leq 1}{\leq} \sum_{\ell=1}^{\nu-1}\binom{\nu}{\ell}(\frac{1}{n})^\ell + 1 \\
&= \sum_{\ell=0}^{\nu-1}\binom{\nu}{\ell}(\frac{1}{n})^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{\nu-1}\binom{\nu}{\ell}\cdot 1 \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{\nu}\binom{\nu}{\ell} \\
&= 2^\nu
\end{aligned}$$

Ισχύουν

$$
\begin{aligned}
EX^{\nu} &= \int X^{\nu} dV(x) \\
&= \int_{|X| \geq \sigma\sqrt{n}} X^{\nu} dV(x) + \int_{|X| < \sigma\sqrt{n}} X^{\nu} dV(x) \\
&= \int_{|X| \geq \sigma\sqrt{n}} Z_n^{\nu} dV(z) + \int_{|X| < \sigma\sqrt{n}} Y_n^{\nu} dV_n(y) \\
&= EZ_n^{\nu} + EY_n^{\nu} \qquad (4.2.31)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
|EX^{\nu} - EY_n^{\nu}| &= |EZ_n^{\nu}| \leq= \int_{|X| \geq \sigma\sqrt{n}} |X|^{\nu} dV(x) \\
&= \int_{|X| \geq \sigma\sqrt{n}} |X|^{\nu} \frac{|X|^{k-\nu}}{|X|^{k-\nu}} dV(x) \\
&\leq [\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}]^{k-\nu} \int_{|X| \geq \sigma\sqrt{n}} |X|^{k} dV(x) \\
&= (\sigma\sqrt{n})^{\nu-k} E|Z_n|^{k} \qquad (4.2.32)
\end{aligned}
$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τις (4.2.30) και (4.2.32)

$$
\begin{aligned}
|E(Y_n - EY_n)^{\nu} - EX^{\nu}| &= |E(Y_n - EY_n)^{\nu} - EY_n^{\nu} - EZ_n^{\nu}| \\
&\leq |E(Y_n - EY_n)^{\nu} - EY_n^{\nu}| + E|Z_n^{\nu}| \\
&\leq 2^{\nu}\sigma^{\nu-k} n^{(\nu-k)/2} E|Z_n|^{k} + \sigma^{\nu-k} n^{(\nu-k)/2} E|Z_n|^{k} \\
&= (2^{\nu}+1)\sigma^{\nu-k} n^{(\nu-k)/2} E|Z_n|^{k} \qquad (4.2.33)
\end{aligned}
$$

Τώρα, από τις (4.2.22), (4.2.26) και (4.2.29) έχομε

$$
\begin{aligned}
E|Y_n - EY_n|^{\nu} &= E|\sum_{\ell=0}^{\nu} (-1)^{\ell} \binom{\nu}{\ell} Y_n^{\nu-\ell} (EY_n)^{\ell}| \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{\nu} \binom{\nu}{\ell} E|Y_n|^{\nu-\ell} E|Y_n|^{\ell} \\
&= 2^{\nu} E|Y_n|^{\nu} \leq 2^{\nu}\sigma^{\nu} n^{(\nu-2)/2} \\
&< 2^{\nu} \frac{4^{\nu}}{3^{\nu}} \sigma_n^{\nu} n^{(\nu-2)/2} \\
&= \frac{8^{\nu}}{3^{\nu}} \sigma_n^{\nu} n^{(\nu-2)/2} \\
&< 3^{\nu} \sigma_n^{\nu} n^{(\nu-2)/2} \qquad (4.2.34)
\end{aligned}
$$

όπου η προτελευταία ανισότης έπεται από την σχέση

$$
\sigma^{\nu} < \frac{4^{\nu}}{3^{\nu}} \sigma_n^{\nu}
$$

που προκύπτει από την

$$\frac{11}{16} < \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{3,31}{4} < \frac{\sigma_n}{\sigma} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{\sigma_n}{\sigma} \Rightarrow \frac{3^\nu}{4^\nu} < \frac{\sigma_n^\nu}{\sigma^\nu}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} E|X|^\nu &= E|Y_n|^\nu + E|Z_n|^\nu \leq \sigma^\nu n^{(\nu-2)/2} + \sigma^{\nu-k} n^{(\nu-k)/2} \\ &\leq \sigma^\nu n^{(\nu-2)/2} + \sigma^\nu n^{\nu-2} \\ &= 2\sigma^\nu n^{(\nu-2)/2} \end{aligned} \tag{4.2.35}$$

Από τις (4.2.26), (4.2.27), (4.2.33), (4.2.34) προκύπτει

$$\begin{aligned} n^{-\nu/2}|\sigma_n^{-\nu} E(Y_n - EY_n)^\nu - \sigma^{-\nu} EX^\nu| &\leq \sigma^{-\nu} n^{-\nu/2} |E(Y_n - EY_n)^\nu - EX^\nu| \\ &+ \sigma^{-\nu} n^{-\nu/2} |1 - \frac{\sigma_n^\nu}{\sigma^\nu}| E|Y_n - EY_n|^\nu \\ &\leq c(\nu) n^{-1} \Lambda_{k,n} \end{aligned}$$

για $\nu = 1, 2, \ldots, k$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} n^{-\nu/2}|\sigma_n^{-\nu} E(Y_n &- EY_n)^\nu - \sigma^{-\nu} EX^\nu| = \\ &= n^{-\nu/2}|\sigma_n^{-\nu} E(Y_n - EY_n)^\nu + \sigma^{-\nu} E(Y_n - EY_n)^\nu - \sigma^{-\nu} E(Y_n - EY_n)^\nu - \sigma^{-\nu} EX^\nu| \\ &\leq n^{-\nu/2}[(|\sigma^{-\nu} E(Y_n - EY_n)^\nu - EX^\nu)| + |\sigma_n^{-\nu} E(Y_n - EY_n)^\nu - \sigma^{-\nu} E(Y_n - EY_n)^\nu|] \\ &\leq n^{-\nu/2}(\sigma^{-\nu}|E(Y_n - EY_n)^\nu - EX^\nu| + E|Y_n - EY_n|^\nu |1 - (\frac{\sigma_n}{\sigma})^\nu| \frac{1}{\sigma_n^\nu}) \\ &\leq n^{-\nu/2}(\sigma^{-\nu}\sigma^{\nu-k} n^{(\nu-k)/2} E|Z_n|^k (2^\nu + 1) + 2^\nu \frac{\sigma^\nu}{\sigma_n^\nu} \frac{5\nu}{4} n^{(\nu-2)/2} \Lambda_{k,n}) \\ &= n^{-\nu/2}(\sigma^{-k} n^{\nu/2} \frac{n^{-(k-2)/2}}{n} E|Z_n|^k (2^\nu + 1) + (\frac{2\sigma}{\sigma_n})^\nu \frac{5\nu}{4} n^{\nu/2} \frac{1}{n} \Lambda_{k,n}) \\ &= n^{-\nu/2}(\sigma^{-\nu}\sigma^{\nu-k} n^{(\nu-k)/2} E|Z_n|^k (2^{\nu+1}) + 2^\nu \frac{\sigma}{\sigma_n^\nu} \frac{5\nu}{4} + n^{(\nu-2)/2} \Lambda_{k,n}) \\ &= n^{-\nu/2} n^{\nu/2} \frac{1}{n}((2^\nu + 1)\Lambda_{k,n} + (\frac{2\sigma}{\sigma_n})^\nu \frac{5\nu}{4} \Lambda_{k,n}) \\ &= \frac{1}{n} \Lambda_{k,n} c(\nu),\ \nu = 1, 2, \ldots, k \end{aligned} \tag{4.2.36}$$

όπου $c(v) = \max\{2^\nu + 1, (\frac{2\sigma}{\sigma_n})^\nu \frac{5\nu}{4}\}$

Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $\forall m \in \mathbb{Z}$ και $m \geq 1$, έχουμε

$$|a^m - b^m| \leq m|a - b| \max\{|a|^{m-1}, |b|^{m-1}\}$$

επομένως

$$\begin{aligned}
|(\sigma_n^{-\nu}n^{-\nu/2}E(Y_n-EY_n)^\nu)^\ell &- (\sigma^{-\nu}n^{-\nu/2}EX^\nu)^\ell| \\
&\le \ell n^{-\nu/2}|\sigma_n^{-\nu}E(Y_n-EY_n)^\nu - \sigma^{-\nu}EX^\nu| \times \\
&\times \max\{(|\sigma_n^{-\nu}E|Y_n-EY_n|^\nu)^{\ell-1}, (\sigma^{-\nu}|EX^\nu|)^{\ell-1}\} \\
&\le kc(\nu)n^{-1}\Lambda_{k,n}(\frac{2\sigma}{\sigma_n})^{\nu(k-1)}(n^{(\nu-2)(k-1)/2}) \\
&\le n^{-1}c(k)\Lambda_{k,n} \qquad (4.2.37)
\end{aligned}$$

για $\nu, \ell = 1, 2, \ldots, k$

Θέτουμε

$$a_\nu = EX^\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots)$$
$$a_{\nu,n} = E(Y_n - EY_n)^\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

Από τον τύπο (4.1.5) έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_{\nu,n}}{\sigma_n^\nu n^{\nu/2}} - \frac{\gamma_\nu}{\sigma^\nu n^{\nu/2}} &= \nu! \sum \frac{(-1)^{s-1}(s-1)!}{s_1!\ldots s_\nu!(1!)^{s_1}\ldots(\nu!)^{s_\nu}} \\
&\times \sum_{\ell=1}^{\nu}(\frac{a_{1,n}}{\sigma_n n^{1/2}})^{s_1}\ldots(\frac{a_{\ell-1,n}}{\sigma_n^{\ell-1}n^{(\ell-1)/2}})^{s_{\ell-1}}\left((\frac{a_{\ell,n}}{\sigma_n^\ell n^{\ell/2}})^{s_\ell} - (\frac{a_\ell}{\sigma^\ell n^{\ell/2}})^{s_\ell}\right) \\
&\times (\frac{a_{\ell+1}}{\sigma^{\ell+1}n^{(\ell+1)/2}})^{s_{\ell+1}}\ldots(\frac{a_\nu}{\sigma^\nu n^{\nu/2}})^{s_\nu}
\end{aligned}$$

όπου το εξωτερικό άθροισμα εκτείνεται σε όλες τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις των εξισώσεων $s_1 + 2s_2 + \ldots + \nu s_\nu = \nu$ και $s = s_1 + \ldots + s_\nu$.

Οπότε, από τις (4.2.34), (4.2.35), (4.2.36) και (4.2.37) βρίσκομε ότι

$$\left|\frac{\gamma_{\nu,n}}{\sigma_n^\nu n^{\nu/2}} - \frac{\gamma_\nu}{\sigma^\nu n^{\nu/2}}\right| \le \frac{c(\nu)}{n}\Lambda_{k,n}$$

$\nu = 1, 2, \ldots, k$ και

$$\left|(\frac{\gamma_{\nu,n}}{\sigma_n^\nu n^{\nu/2}})^\ell - (\frac{\gamma_\nu}{\sigma^\nu n^{\nu/2}})^\ell\right| \le \frac{c(k)}{n}\Lambda_{k,n}$$

$\nu, \ell = 1, 2, \ldots, k$

Οι δύο προηγούμενες σχέσεις με τους τύπους για $Q_{\nu(x)}$ και $Q_{\nu,n}(x)$, μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε $\forall \nu \le k-2$ και $\forall x$ ότι

$$\begin{aligned}
& n^{-\nu/2}|Q_\nu(x) - Q_{\nu,n}(x)| \\
= & \left|\sum \frac{(-1)^{\nu+2s}}{s_1!\ldots s_\nu!(1!)^{s_1}\ldots(\nu!)^{s_\nu}}\sum_{\ell=1}^{\nu}(\frac{\gamma_3}{\sigma^3 n^{1/2}})^{s_1}\ldots(\frac{\gamma_{\ell+1}}{\sigma_n^{\ell+1}n^{(\ell-1)/2}})^{s_{\ell-1}}\right. \\
\times & \left[(\frac{\gamma_{\ell+2}}{\sigma^{\ell+2}n^{\ell/2}})^{s_\ell} - (\frac{\gamma_{\ell+2,n}}{\sigma_n^{\ell+2}n^{\ell/2}})^{s_\ell}\right] \\
\times & \left.(\frac{\gamma_{\ell+3,n}}{\sigma_n^{\ell+3}n^{(\ell+1)/2}})^{s_{\ell+1}}\ldots(\frac{\gamma_{\nu+2,n}}{\sigma_n^{\nu+2}n^{\nu/2}})^{s_\nu} \times \frac{d^{\nu+2s}}{dx^{\nu+2s}}\Phi(x)\right| \\
\le & \ c(k)\Lambda_{k,n}\mathrm{e}^{-x^2/4}
\end{aligned}$$

Επομένως, από τους ορισμούς των $U_k(x)$ και $U_{k,n}(x)$, έχομε

$$|U_k(x) - U_{k,n}(x)| \leq c(k)\Lambda_{k,n}\mathrm{e}^{-x^2/4}, \ \forall x, \forall n \tag{4.2.38}$$

Έχομε

$$\begin{aligned}
\frac{d^\ell}{dx^\ell}\Phi(x + p_n x + q_n - x) &- \frac{d^\ell}{dx^\ell}\Phi(x) \\
&= (p_n x + q_n - x) \times \\
&\times \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\Phi(x + \theta|p_n x + q_n - x|)
\end{aligned} \tag{4.2.39}$$

όπου $|\theta| \leq 1$.

Χρησιμοποιώντας τις (4.2.22), (4.2.26), (4.2.27) και τον ορισμό των p_n και q_n βρίσκομε ότι

$$\begin{aligned}
|p_n x + q_n - x| &= |\frac{\sigma}{\sigma_n}x - \frac{EY_n}{\sigma_n}\sqrt{n} - x\frac{\sigma_n}{\sigma_n}| \\
&= |\frac{x(\sigma - \sigma_n)}{\sigma_n}\frac{\sigma}{\sigma_n} + \frac{\sqrt{n}EY_n}{\sigma}\frac{\sigma}{\sigma_n}| \\
&\leq \frac{\sigma}{\sigma_n}\left((1 - \frac{\sigma_n}{\sigma})|x| + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|EY_n|\right) \\
&\leq \frac{4 \cdot 5}{\sqrt{11} \cdot 4}\Lambda_{k,n}|x| \\
&+ \frac{4}{\sqrt{11}}n^{1/2}\sigma^{-1}\sigma^{-k+1}n^{-(k-1)/2}E|Z_n|^k \\
&= \frac{5|x|}{\sqrt{11}}\Lambda_{k,n} + \frac{4}{\sqrt{11}}\sigma^{-k}n^{-(k-2)/2}E|Z_n|^k \\
&= \frac{5|x|}{\sqrt{11}}\Lambda_{k,n} + \frac{4}{\sqrt{11}}\Lambda_{k,n} \\
&= \frac{5|x| + 4}{\sqrt{11}}\Lambda_{k,n}
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$|p_n x + q_n - x| \leq \frac{5|x| + 4}{\sqrt{11}}\Lambda_{k,n} \tag{4.2.40}$$

Επίσης ισχύει η σχέση

$$(|x| - |p_n x + q_n - x|)^2 \geq x^2 - 2|x||p_n x + q_n - x| \geq \frac{2}{7}x^2 - 1$$

αφού $\Lambda_{k,n} < 1/4$.

Οπότε

$$-(|x| - |p_n x + q_n - x|)^2 \leq -\frac{2}{7}x^2 - 1 \leq -\frac{2}{7}x^2 \tag{4.2.41}$$

$$\Rightarrow \exp(-\{(|x| - |p_n x + q_n - x|)^2\}/2) \leq \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{7}} \tag{4.2.42}$$

Από τις (4.2.39),(4.2.40),(4.2.42) λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
|\frac{d^\ell}{dx^\ell}(\Phi(p_n x+q_n)-\Phi(x))| &\leq |p_n x+q_n-x||\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}}\Phi(x+\theta|p_n x+q_n-x|)| \\
&\leq \frac{5|x|+4}{\sqrt{11}}\Lambda_{k,n}\mathrm{e}^{-x^2/7} \\
&= c(\ell)\Lambda_{k,n}\mathrm{e}^{-x^2/7},\ \ell=0,1,\ldots \qquad (4.2.43)
\end{aligned}
$$

Από τον ορισμό του $U_{k,n}(x)$ την (4.2.43) και την (4.1.14), έχομε,

$$
\begin{aligned}
|U_{k,n}(p_n x+q_n)-U_{k,n}(x)| &= |\Phi(p_n x+q_n)+\sum_{\nu=1}^{k-2}\frac{Q_{\nu,n}}{n^{\nu/2}}(p_n x+q_n)-\Phi(x)-\sum_{\nu=1}^{k-2}\frac{Q_{\nu,n}}{n^{\nu/2}}(x)| \\
&\leq |\Phi(p_n x+q_n)-\Phi(x)|+\sum_{\nu=1}^{k-2}\frac{|Q_{\nu,n}(p_n x+q_n)-Q_{\nu,n}(x)|}{n^{\nu/2}} \\
&\leq |\frac{d^0}{dx^0}(\Phi(p_n x+q_n)-\Phi(x))|+\sum_{\nu=1}^{k-2}\frac{1}{n^{\nu/2}}\sum\prod_{m=1}^{\nu}\frac{1}{k_m!}\left(\frac{\lambda_{m+2,n}}{(m+2)!}\right)^{k_m} \\
&\times |\frac{d^{\nu+2s}}{dx^{\nu+2s}}(\Phi(p_n x+q_n)-\Phi(x))| \\
&\leq c(0)\Lambda_{k,\nu}\mathrm{e}^{-x^2/7}+c_1(k)\sum c(\nu+2s)\Lambda_{k,\nu}\mathrm{e}^{-x^2/7} \\
&\leq c_2(k)\Lambda_{k,\nu}\mathrm{e}^{-x^2/8} \qquad (4.2.44)
\end{aligned}
$$

$(\mathrm{e}^{-x^2/7}<\mathrm{e}^{-x^2/8})$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.1.14) και τις σχέσεις (4.2.43) για $\theta=1$, (4.2.40), (4.2.34) και (4.2.29) λαμβάνομε

$$
\begin{aligned}
n^{-\frac{k-1}{2}}|Q_{k-1,n}(p_n x+q_n)| &\leq n^{-\frac{k-1}{2}}c_1|\frac{d^{k-1+2s}}{dx^{k-1+2s}}(\Phi(p_n x+q_n))| \\
&\leq n^{-\frac{k-1}{2}}c_1\frac{c(k)\Lambda_{k,\nu}\mathrm{e}^{-x^2/8}}{c_2\Lambda_{k,\nu}} \\
&= n^{-\frac{k-1}{2}}\frac{c_1}{c_2}c(k)\mathrm{e}^{-x^2/8}\sigma_n^{-k-1}E|Y_n-EY_n|^{k+1} \\
&\leq c(k)\mathrm{e}^{-x^2/8}n^{-\frac{(k-1)}{2}}\sigma^{-k-1}2^{k+1}E|Y_n|^{k+1} \\
&\leq c(k)\mathrm{e}^{-x^2/8}n^{-\frac{(k-1)}{2}}\sigma^{-k-1}3^{k+1}E|Y_n|^{k+1} \\
&\leq c(k)3^{k+1}L_{k+1,n}\mathrm{e}^{-x^2/8} \qquad (4.2.45)
\end{aligned}
$$

Από την (4.2.38), και τις (4.2.45) και (4.2.44), έχομε

$$\begin{aligned}
|U_k(x) - U_{k+1,n}(p_n x + q_n)| &= |U_{k,n}(x) - U_k(x) - U_{k,n}(x) \\
&+ U_{k,n}(p_n x + q_n) - U_{k,n}(p_n x + q_n) \\
&+ U_{k+1,n}(p_n x + q_n)| \\
&\leq |U_{k,n}(x) - U_k(x)| + |U_{k,n}(p_n x + q_n) \\
&- U_{k,n}(x)| \\
&+ |U_{k+1,n}(p_n x + q_n) - U_{k,n}(p_n x + q_n)| \\
&\leq c_1(k)\Lambda_{k,n}\mathrm{e}^{-x^2/4} + c_2(k)\Lambda_{k,n}\mathrm{e}^{-x^2/8} + |\frac{Q_{k-1,n}(p_n x + q_n)}{n^{\frac{k-1}{2}}}| \\
&\leq c_1(k)\Lambda_{k,n}\mathrm{e}^{-x^2/8} + c_2(k)\Lambda_{k,n}\mathrm{e}^{-x^2/8} + c_3(k)3^{k+1}L_{k+1,n}\mathrm{e}^{-x^2/8} \\
&\leq c(k)(\Lambda_{k,n} + L_{k+1,n})\mathrm{e}^{-x^2/8}
\end{aligned}$$

όπου $c(k) = \max\{c_1(k), c_2(k), c_3(k)\}$. Ούτως εδείχθη η (4.2.21).

Αποδεικνύουμε τώρα το θεώρημα, πρώτα υπό τη βοηθητική συνθήκη,

$$\Lambda_{k,n} < 1/4$$

Ισχύει ότι

$$V_n^{*n}(x\sigma\sqrt{n}) = W_n^{*n}(x\sigma\sqrt{n} - nEY_n) = G_n(p_n x + q_n)$$

εφόσον

$$\begin{aligned}
V_n^{*n}(x\sigma\sqrt{n}) &= P(nY_n < x\sigma\sqrt{n}) \\
&= P(nY_n - nEY_n < x\sigma\sqrt{n} - nEY_n) \\
&= P(n(Y_n - EY_n) < x\sigma\sqrt{n} - nEY_n) \\
&= W_n^{*n}(x\sigma\sqrt{n} - nEY_n) \\
&= W_n^{*n}[(\frac{\sigma}{\sigma_n}x - \frac{EY_n\sqrt{n}}{\sigma_n})\sigma_n\sqrt{n}] \\
&= G_n(\frac{\sigma}{\sigma_n}x - \frac{EY_n\sqrt{n}}{\sigma_n}) \\
&= G_n(p_n x + q_n)
\end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
|F_n(x) - U_k(x)| &= |P(\sum_{j=1}^{n} X_j < x\sigma\sqrt{n}) - \Phi(x) - \sum_{\nu=1}^{k-2}\frac{Q_\nu(x)}{n^{\nu/2}}| \\
&\leq |V^{*n}(x\sigma\sqrt{n}) - V_n^{*n}(x\sigma\sqrt{n})| + |G_n(p_n x + q_n) - U_{k+1,n}(p_n x + q_n)| \\
&+ |U_{k+1,n}(p_n x + q_n) - U_k(x)| \qquad (4.2.46)
\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\Lambda_{k,n} &= \sigma^{-k}n^{-(k-2)/2}\int_{|X|\geq\sigma\sqrt{n}}|X|^k dV(x)\\ &\leq \sigma^{-k}n^{-(k-2)/2}\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\int_{\sigma\sqrt{n}\leq|y|\leq\sigma\sqrt{n}(1+|x|)}|y|^{k+1}dV(y)\\ &+ \int_{|y|\geq\sigma\sqrt{n}(1+|x|)}|y|^k dV(y)\Big) \qquad (4.2.47)\end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε ότι, από (4.2.21), (4.2.47) και το Λήμμα 4.2.5, έπεται ότι το άθροισμα του πρώτου και τρίτου όρου στο δεξιό μέλος της (4.2.46), δεν υπερβαίνει την ποσότητα στο δεξιό μέλος της αποδεικτέας (4.2.20)

Πράγματι, από το Λήμμα 4.2.5 έχουμε

$$|V^{*n}(x\sigma\sqrt{n})-V_n^{*n}(x\sigma\sqrt{n})|\leq c(k)\Big(\frac{E|Z_{n,x}|^k}{\sigma^k n^{(k-2)/2}(1+|x|)^k}+\frac{E|Y_{n,x}|^{k+1}}{\sigma^{k+1}n^{(k-1)/2}(1+|x|)^{k+1}}\Big)$$

Ακόμα, από (4.2.21) και (4.2.47) έχουμε

$$\begin{aligned}|U_k(x)-U_{k+1,n}(p_nx+q_n)| &\leq c(k)\Big(\frac{1}{\sigma^{k+1}n^{(k-1)/2}}\int_{\sigma\sqrt{n}\leq|y|\leq\sigma\sqrt{n}(1+|x|)}|y|^{k+1}dV(y)\\ &+ \frac{1}{\sigma^k n^{(k-2)/2}\sigma\sqrt{n}}\int_{|y|\geq\sigma\sqrt{n}(1+|x|)}|y|^{k+1}dV(y)\\ &+ \frac{1}{\sigma^{k+1}n^{k/2}}E|Y_n|^{k+1}\Big)\\ &\leq c(k)\Big(\frac{1}{\sigma^{k+1}n^{(k-1)/2}}\int_{|y|\geq\sigma\sqrt{n}}|y|^{k+1}dV(y)+\frac{E|Y_n|^{k+1}}{\sigma^{k+1}n^{(k-1)/2}}\Big)\\ &= c(k)\Big(\frac{E|Z_n|^{k+1}}{\sigma^{k+1}n^{(k-1)/2}}+\frac{E|Y_n|^{k+1}}{\sigma^{k+1}n^{(k-1)/2}}\Big)\\ &= c(k)\frac{E|Z_n|^{k+1}+E|Y_n|^{k+1}}{\sigma^{k+1}n^{(k-1)/2}}\\ &= c(k)\frac{E|X_n|^{k+1}}{\sigma^{k+1}n^{(k-1)/2}} \text{ από την (4.2.31)}\\ &= c(k)\frac{2\sigma^{k+1}n^{(k-1)/2}}{\sigma^{k+1}n^{(k-1)/2}} \text{ από την (4.2.35)}\\ &= 2c(k)\equiv c_1(k)\end{aligned}$$

Έτσι εδείχθη ο ισχυρισμός. Απομένει λοιπόν να βρούμε ένα φράγμα για την

$$|G(p_nx+q_n)-U_{k+1,n}(p_nx+q_n)|$$

Γι' αυτό, στο Λήμμα 4.2.7 θετουμε $F(x)=G_n(p_nx+q_n)$, εφόσον $G_n(x)$ αύξουσα, $G(x)=U_{k+1,n}(p_nx+q_n)$, εφόσον $U_{k+1,n}(x)$ διαφορίσιμη και φραγμένης κύμανσης. $s=k+1$, $T=T_n$

$$T_n=3^{k+2}B_{k+2,n}^{-1},\ B_{\nu,n}=\sigma_n^{-\nu}n^{-(\nu-2)/2}E|Y_n-EY_n|^\nu,\ \nu=1,2,\dots$$

Από (4.2.34) έχομε $B_{\nu,n} < 3^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ ώστε $T_n > 1$.

Επιπλέον,

$$|U'_{k+1,n}(x)| < K(1 + |x|)^{-k-1}$$

όπου η K εξαρτάται μόνο από το k.

Θέτοντας

$$\delta_l(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} d(x^l(G_n(x)) - U_{k+1,n}(x)),\ l = 0, 1, \dots$$

Από το Λήμμα 4.2.7 λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
|G_n(p_n x + q_n) - U_{k+1,n}(p_n x + q_n)| &\leq \frac{c(k)}{(1 + |p_n x + q_n|)^{k+1}} \times \\
&\times \left(\int_{-T_n}^{T_n} \frac{1}{|t|} | \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} d(G_n(p_n x + q_n)) \right. \\
&- U_{k+1,n}(p_n x + q_n))| dt \\
&+ \int_{-T_n}^{T_n} \frac{1}{|t|} | \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} d(x^{k+1}(G_n(p_n x + q_n)) \\
&- U_{k+1,n}(p_n x + q_n))| dt \\
&+ \left. \frac{K B_{k+2,\nu}}{3^{k+2}} \right) \\
&= \frac{\tilde{c}(k)}{(1 + |p_n x + q_n|)^{k+1}} \times \left(\int_{-T_n}^{T_n} |\frac{\delta_0(t)}{t}| dt \right. \\
&+ \left. \int_{-T_n}^{T_n} |\frac{\delta_{k+1}(t)}{t}| dt + B_{k+2,n} \right) \qquad (4.2.48)
\end{aligned}$$

Θα εκτιμήσουμε τώρα το $\int_{-T_n}^{T_n} |\frac{\delta_{k+1}(t)}{t}| dt$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.6 (εφόσον η συνάρτηση $G_n(p_n x + q_n)) - U_{k+1, p_n x + q_n}(x)$ πληροί τις υποθέσεις του), αρκεί να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα

$$I_\nu = \int_{-T_n}^{T_n} |\frac{d^\nu}{dt^\nu}(g_\nu(t) - v_{k+1,n}(t))| |t|^{\nu-k-2} dt,\ \nu = 0, 1, \dots, k+1$$

όπου $g_n(t)$ και $v_{k+1,n}(t)$ οι μετασχηματισμοί Fourier-Stieltjes για τις G_n και $U_{k+1,n}$ αντίστοιχα.

Όμως από το Λήμμα 4.2.3 (για $s = k + 2$) έχομε

$$\int_{|t| < B_{k+2,\nu}^{-1/k}} |\frac{d^\nu}{dt^\nu}(g_\nu(t) - v_{k+1,n}(t))| |t|^{\nu-k-2} dt \leq c(k) B_{k+2,n}$$

Αποδεικνύεται ότι έχομε την ίδια εκτίμηση για το ολοκλήρωμα

$$\int_{B_{k+2,\nu}^{-1/k} \leq |t| < T_n} |\frac{d^\nu}{dt^\nu} v_{k+1,n}(t))| |t|^{\nu-k-2} dt$$

Επομένως,

$$I_\nu \leq c(k)B_{k+2,n} + \int_{B_{k+2,\nu}^{-1/k} \leq |t| < T_n} |\frac{d^\nu}{dt^\nu} g_n(t)||t|^{\nu-k-2} dt \tag{4.2.49}$$

Θέτοντας $y = w_n(t/\sigma_n\sqrt{n})$ στο Λήμμα 4.2.2 (όπου $w_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} dW_n(x)$ και $W_n(x) = P(Y_n - EY_n < x)$) οδηγούμεθα στην ισότητα

$$\begin{aligned} \frac{d^\nu}{dt^\nu} g_n(t) &= \nu! \sum_{r=1}^{\min(\nu,n)} \sum{}' \frac{n!}{(n-r)!} w_n^{n-r}(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}}) \times \\ &\times \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{r_m!}(\frac{1}{m!}\frac{d^m}{dt^m} w_n(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}}))^{r_m} \end{aligned}$$

όπου η άθροιση $\sum'$ εκτείνεται πάνω σε όλες τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + \ldots + \nu r_\nu &= \nu \\ r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu &= r \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να εκτιμήσουμε το

$$\int_{B_{k+2,n}^{-1/k} \leq |t| < T_n} |\frac{d^\nu}{dt^\nu} g_n(t)||t|^{\nu-k-2} dt$$

προκειμένου, μέσω της (4.2.46) να καταλήξωμε στην αποδεικτέα σχέση (4.2.20).

Ισχύουν οι ανισότητες:

(i):

$$\begin{aligned} |\frac{d}{dt} w_n(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}})| &= |E(\frac{Y_n - EY_n}{\sigma_n\sqrt{n}} \exp(\frac{\mathrm{i}t(Y_n - EY_n)}{\sigma_n\sqrt{n}})| \\ &= |E(\frac{Y_n - EY_n}{\sigma_n\sqrt{n}} \exp(\frac{\mathrm{i}t(Y_n - EY_n)}{\sigma_n\sqrt{n}}) - \frac{Y_n - EY_n}{\sigma_n\sqrt{n}})| \\ &= |E(\frac{Y_n - EY_n}{\sigma_n\sqrt{n}}(\exp\frac{\mathrm{i}t(Y_n - EY_n)}{\sigma_n\sqrt{n}} - 1))| \\ &\leq E(\frac{|Y_n - EY_n||t|}{\sigma_n\sqrt{n}} \frac{|Y_n - EY_n|}{\sigma_n\sqrt{n}}) \\ &= E\frac{|Y_n - EY_n)|^2|t|}{\sigma_n^2 n} \\ &= \frac{|t|}{n} \\ &\leq \frac{|t|}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

(ii):

$$\begin{aligned}
|\frac{d^\nu}{dt^\nu}w_n(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}})| &= |E(\frac{\mathrm{i}^\nu(Y_n-EY_n)^\nu}{(\sigma_n\sqrt{n})^\nu}|\exp\frac{\mathrm{i}t(Y_n-EY_n)}{\sigma_n\sqrt{n}})| \\
&\le E|\frac{\mathrm{i}^\nu(Y_n-EY_n)^\nu}{(\sigma_n\sqrt{n})^\nu}|\exp\frac{\mathrm{i}t(Y_n-EY_n)}{\sigma_n\sqrt{n}}| \\
&= E|Y_n-EY_n|^\nu\sigma_n^{-\nu}n^{-\nu/2} \\
&\le E|Y_n-EY_n|^\nu\sigma_n^{-\nu}n^{-\nu/2}\frac{n}{n} \\
&\le E|Y_n-EY_n|^\nu\sigma_n^{-\nu}n^{-(\nu-2)/2}\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}B_{\nu,n},\ \nu=2,3,\dots
\end{aligned}$$

(χρησιμοποιώντας την σχέση $\frac{d^k}{dt^k}\phi(t)=E((\mathrm{i}x)^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}))$. Από την (4.2.34) και τις ανισότητες (i) και (ii) προκύπτει:
(iii):

$$|\frac{d^\nu}{dt^\nu}g(t)|\le c(\nu)(1+|t|^\nu)|w_n(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}})|^{n-\min(\nu,n)},\ \nu=1,2,\dots$$

Από ορισμό του $B_{\nu,n}=\sigma_n^{-\nu}n^{-(\nu-2)/2}E|Y_n-EY_n|^\nu$ και την ανισότητα Lyapunov, προκύπτει ότι

$$B_{3,n}=\frac{E|Y_n-EY_n|^3}{\sigma_n^3n^{1/2}}\ge\frac{(E|Y_n-EY_n|^2)^{3/2}}{\sigma_n^3n^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{n}},\ \forall n$$

Τώρα,από την ανισότητα $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1-\mathrm{i}tx|\le\frac{1}{2}t^2x^2$ και την $B_{3,n}\ge\frac{1}{\sqrt{n}},\forall n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|w_n(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}})-1| &= |E[\exp(\frac{\mathrm{i}t(Y_n-EY_n)}{\sigma_n\sqrt{n}})-1]| \\
&= |E[\exp(\frac{\mathrm{i}t(Y_n-EY_n)}{\sigma_n\sqrt{n}})-1-\frac{\mathrm{i}t(Y_n-EY_n)}{\sigma_n\sqrt{n}}]| \\
&\le E|\frac{1}{2}t^2(\frac{Y_n-EY_n}{\sigma_n\sqrt{n}})^2| \\
&= \frac{t^2}{2\sigma_n^2n}E|Y_n-EY_n|^2 \\
&= \frac{t^2}{2n}
\end{aligned}$$

Από την προηγούμενη, για $|t|\le\sqrt{n}$ συνάγουμε ότι,

$$||w_n(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}})|-1|\le\frac{t^2}{2n}\le\frac{1}{2}\Rightarrow|w_n(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}})|\ge\frac{1}{2}$$

Ως εκ τούτου

$$\sup_{|t|\ge B_{3,n}^{-1}}|w_n(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}})|\ge\frac{1}{2} \tag{4.2.50}$$

και για $\nu = 0, 1, \ldots, k+1$ έχομε

$$\sup_{|t| \geq B_{3,n}^{-1}} |w_n(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}})|^{n-\min(\nu,n)} = \begin{cases} 1, \ \min(\nu, n) = n \\ \sup_{|t| \geq B_{3,n}^{-1}} |w_n(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}})|^{n-\nu}, \ \min(\nu, n) = \nu \end{cases}$$

Αλλά

$$\sup_{|t| \geq B_{3,n}^{-1}} |w_n(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}})|^{-\nu} \leq 2^{k+1}, \ \nu = 0, 1, \ldots, k+1$$

(από την (4.2.50)) και συνεπώς,

$$\left(\sup_{|t| \geq B_{3,n}^{-1}} |w_n(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}})| \right)^{n-\nu} \leq 2^{k+1} (\sup_{|t| \geq B_{3,n}^{-1}} |w_n(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}})|)^n, \ \nu = 0, 1, \ldots, k+1$$

Επιπλέον, από $|t| \leq n^{1/2}$ και (iii) έπεται ότι

$$\begin{aligned} \int_{B_{3,n}^{-1} \leq |t| < T_n} |\frac{d^\nu}{dt^\nu} g_n(t)||t|^{\nu-k-2} dt &\leq c(k) (\sup_{|t| \geq B_{3,n}^{-1}} |w_n(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}})|)^n \\ &\times \int_{B_{3,n}^{-1} \leq |t| < T_n} (1 + |t|^\nu)|t|^{\nu-k-2} dt \\ &\leq c(k) (\sup_{|t| \geq (\sigma_n \sqrt{n} B_{3,n})^{-1}} |w_n(t)|)^n n^{k(k+1)/2} \end{aligned} \tag{4.2.51}$$

Από τις (4.2.26), (4.2.34), (4.2.35) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \sigma_n \sqrt{n} B_{3,n} &= \sigma_n n^{1/2} \sigma_n^{-3} n^{-1/2} E|Y_n - EY_n|^3 \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} E|Y_n - EY_n|^3 \\ &< \frac{16}{11\sigma^2} 8E|Y_n|^3 \\ &< \frac{12}{\sigma^2} E|X|^3 \end{aligned}$$

Τώρα, η $\Lambda_{k,n} < 1/4$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \sigma\sqrt{n}} dV(x) &\leq \sigma^{-k} n^{-k/2} n \frac{1}{n} \int_{|x| \geq \sigma\sqrt{n}} |x|^k dV(x) \\ &< \sigma^{-k} n^{-(k-2)/2} \frac{1}{n} \int_{|x| \geq \sigma\sqrt{n}} |x|^k dV(x) \\ &= \frac{\Lambda_{k,n}}{n} < \frac{1}{4n} \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}|w_n(t)| &= |E\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY_n}| = |\int_{|x|<\sigma\sqrt{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} dV(x) + \int_{|x|\geq\sigma\sqrt{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t0} dV(x)| \\ &\leq |v(t)| + 2\int_{|x|\geq\sigma\sqrt{n}} dV(x) \\ &\leq |v(t)| + \frac{2}{4n} \\ &= |v(t)| + \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\sup_{|t|\geq(\sigma_n\sqrt{n}B_{3,n})^{-1}} |w_n(t)| \leq \sup_{|t|\geq\frac{\sigma^2}{12}E|X|^3} |v(t)| + \frac{1}{2n} \tag{4.2.52}$$

Από ανισότητα Lyapunov, έπεται ότι,

$$|EX|^3 \leq (E|X|)^3 \leq E|X|^3$$

και επομένως

$$\{|t| \geq \sigma_n\sqrt{n}B_{3,n}^{-1}\} \subset \{|t| \geq \frac{\sigma^2}{12E|X|^3}\} \subset \{|t| \geq \frac{\sigma^2}{12|EX|^3}\}$$

Θα δείξουμε τώρα, ότι,

$$|g_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t^2/6}, \text{ για } |t| < B_{3,n}^{-1}$$

Πράγματι, έχουμε ότι $g_n(t) = w_n^n(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}})$ Έστωσαν τώρα, Z, Z' ανεξάρτητες τ.μ. κάθε μία από τις οποίες έχει $\chi.\sigma.$ την $w_n(t)$, οπότε $Z - Z'$ έχει $\chi.\sigma.$ την $|w_n(t)|^2$ και ισχύει η σχέση

$$\log(|w_n(t)|^2) = \log(1 + (|w_n(t)|^2 - 1)) \leq |w_n(t)|^2 - 1$$

(από την ανισότητα $\frac{x-1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1$ θέτοντας όπου x, $1 + (|w_n(t)|^2 - 1)$).

Τώρα, από το ανάπτυγμα Taylor της $\chi.\sigma.$ $|w_n(t)|^2$ της τ.μ. $Z - Z'$, έχομε,

$$|w_n(t)|^2 - 1 = \frac{-t^2}{2}E(Z - Z')^2 + \frac{\theta|t|^3}{6}E|Z - Z'|^3 \tag{4.2.53}$$

όπου

$$\begin{aligned}E(Z - Z')^2 &= Var(Z - Z') + (E(Z - Z'))^2 = Var(Z - Z') \\ &= VarZ + VarZ' = 2Var(Y_n - EY_n) \\ &= 2\sigma_n^2\end{aligned}$$

$(E(Z-Z') = EZ - EZ' = 0$ αφού $EZ = EZ'$ και $EZ' = EZ = E(Y_n - EY_n) = 0)$

$$\begin{aligned}
E|Z-Z'|^3 &= E(|Z-Z'|(Z-Z')^2) \\
&\leq E((|Z|+|Z'|)|Z-Z'|^2) \\
&= 2E(|Z|(Z-Z')^2)\ (\star) \\
&= 2E(|Z|Z^2) - 4E(|Z|ZZ') + 2E(|Z|Z'^2) \\
&= 2E|Z|^3 + 2E(|Z|Z'^2)\ (\star\star) \\
&= 2E|Z|^3 + 2E|Z|E(Z'^2) \\
&= 2E|Z|^3 + 2E|Z|E(Z^2) \\
&= 2E|Z|^3 + 2E|Z|E|Z|^2 \\
&\leq 2E|Z|^3 + 2(E|Z|^3)^{1/3}(E|Z|^3)^{2/3} \\
&= 2E|Z|^3 + 2E|Z|^3 = 4E|Z|^3
\end{aligned}$$

όπου η $(\star)$ ισχύει γιατί οι τ.μ. $|Z||Z-Z'|^2$ και $|Z'||Z-Z'|^2$ έχουν ίδια $\chi.\sigma$ και η $(\star\star)$ διότι $E(|Z|ZZ') = 0$. Επομένως (από την (4.2.53)) έχομε

$$\log(|w_n(t)|) \leq \frac{-t^2}{2}\sigma_n^2 + \frac{|t|^3}{3}E|Z|^3$$

Αν $|t| < B_{3,\nu}^{-1}$,

$$\begin{aligned}
|g_n(t)| &= \exp(n\log|w_n(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}})|) \\
&\leq \exp(-\frac{t^2 n\sigma_n^2}{2\sigma_n^2 n} + \frac{|t|^3 n}{3\sigma_n^3 n^{3/2}}E|Z|^3) \\
&= \exp(-\frac{t^2}{2} + \frac{|t|^3 E|Z|^3}{3\sigma_n^3 n^{1/2}}) \\
&= \exp(-\frac{t^2}{2} + \frac{|t|^3}{3}B_{3,n}) \\
&= \exp(-\frac{t^2}{6}(3 - 2|t|B_{3,n})) \\
&< \exp(-\frac{t^2}{6}(3-2)) \\
&= \exp(-t^2/6)
\end{aligned}$$

$(E|Z|^3 = E|Y_n - EY_n|^3$ αφού Z και $Y_n - EY_n$ έχουν ίδια $\chi.\sigma.)$
Από Λήμμα 4.2.1

$$B_{k+2,n}^{-1/k} \leq B_{3,n}^{-1}$$

Έπεται (χρησιμοποιώντας το φράγμα της $|g_n(t)|$)

$$\int_{B_{k+2,n}^{-1/k}}^{B_{3,n}^{-1}} |\frac{d^\nu}{dt^\nu}g_n(t)||t|^{\nu-k-2}dt \leq c(k)B_{k+2,n},\ \nu = 0,1,\ldots,k+1 \tag{4.2.54}$$

Από την (4.2.51) και την (4.2.54) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\int_{B_{k+2,n}^{-1/k}\le|t|\le T_n|}|\frac{d^\nu}{dt^\nu}g_n(t)||t|^{\nu-k-2}dt &= \int_{B_{k+2,n}^{-1/k}\le|t|\le B_{3,n}^{-1}}|\frac{d^\nu}{dt^\nu}g_n(t)||t|^{\nu-k-2}dt\\ &+ \int_{B_{3,n}^{-1}\le|t|\le T_n|}|\frac{d^\nu}{dt^\nu}g_n(t)||t|^{\nu-k-2}dt\\ &\le c(k)(B_{k+2,n}+n^{k(k+1)/2}\sup_{|t|\ge(\sigma_n\sqrt{n}B_{3,n})^{-1}}|w_n(t)|)\end{aligned}$$

Επομένως, από την (4.2.49), έχομε

$$\int_{-T_n}^{T_n}|\frac{\delta_{k+1}(t)}{t}|dt\le c(k)(B_{k+2,n}+n^{k(k+1)/2}\sup_{|t|\ge(\sigma_n\sqrt{n}B_{3,n})^{-1}}|w_n(t)|) \tag{4.2.55}$$

Όμοια εκτίμηση με αυτή που δίνει η (4.2.55), έχομε και για το

$$\int_{-T_n}^{T_n}|\frac{\delta_0(t)}{t}|dt$$

Από την (4.2.48) προκύπτει ότι

$$|G_n(p_nx+q_n)-U_{k+1,n}(p_nx+q_n)|\le\frac{c(k)}{(1+|p_nx+q_n|)^{k+1}}(B_{k+2,n}+n^{k(k+1)/2}\sup_{|t|\ge(\sigma_n\sqrt{n}B_{3,n})^{-1}}|w_n(t)|) \tag{4.2.56}$$

Απο τον ορισμό των p_n,q_n και χρησιμοποιώντας την (4.2.26), βρίσκομε ότι

$$1+|p_nx+q_n|\ge\frac{1}{2}+\frac{1}{6}|x|$$

Επίσης, η (4.2.26) και η $|Y_n|<\sigma\sqrt{n}$, συνεπάγονται την σχέση

$$\begin{aligned}B_{k+2,n} &= \sigma_n^{-k-2}n^{-k/2}E|Y_n-EY_n|^{k+2}\\ &\le 2^{k+2}\sigma_n^{-k-2}n^{-k/2}E|Y_n|^{k+2}\ (\star)\\ &\le 3^{k+2}\sigma^{-k-2}n^{-k/2}E|Y_n|^{k+2}\ (\star\star)\\ &\le 3^{k+2}\sigma^{-k-1}n^{-(k-1)/2}E|Y_n|^{k+1}\end{aligned}$$

όπου η $(\star)$ ισχύει καθώς $\frac{\sigma_n}{\sigma}>\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$ και η $(\star\star)$ ισχύει καθώς

$$|Y_n|<\sigma\sqrt{n}\Rightarrow\int|Y_n|^{k+1}|Y_n|\le E|Y_n|^{k+1}\sigma\sqrt{n}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.2.46), τον ισχυρισμό που διατυπώνεται αμέσως μετά την (4.2.47), τις σχέσεις (4.2.50) και (4.2.54) και τις δύο προηγούμενες εκτιμήσεις, οδηγούμεθα στην αποδεικτέα σχέση (4.2.20).

Αν $\Lambda_{k,n}\ge\frac{1}{4}$, τότε για $\nu\le k-2$ έχομε

$$\begin{aligned}n^{-\nu/2}|Q_\nu(x)| &\le c(k)\sigma^{-\nu-2}n^{\nu/2}E|X|^{\nu+2}\mathrm{e}^{-x^2/4}\\ &\le c(k)(1+\Lambda_{k,n})\mathrm{e}^{-x^2/4}\le 5c(k)\Lambda_{k,n}\mathrm{e}^{-x^2/4}\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 4.2.4 και 4.2.5, την (4.2.47) και την υπόθεση $\Lambda_{k,n} \geq \frac{1}{4}$, λαμβάνομε την (4.2.20).

Παρατήρηση

Αν $\limsup_{|t|\to\infty} |v(t)| < 1$ τότε για οποιοδήποτε $\delta > 0$, $\sup_{|t|\geq\delta} |v(t)| < 1$ οπότε ο παράγοντας $(\sup_{|t|\geq\delta} |v(t)| + \frac{1}{2n})^n$ φθίνει ταχύτερα από το n^{-p} για οποιοδήποτε $p > 0$.

Άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος 4.2.8 αποτελούν τα επόμενα θεωρήματα, τα οποία δίνομε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.2.9. *Υποθέτομε ότι* $\limsup_{|t|\to\infty} |v(t)| < 1$ *και* $E|X_1|^r < \infty$ *για κάποιο* $r \geq 3$. *Τότε υπάρχει θετική συνάρτηση* $\mathcal{E}(u)$ *τέτοια ώστε* $\lim_{u\to+\infty} \mathcal{E}(u) = 0$ *και*

$$|F_n(x) - \Phi(x) - \sum_{\nu=1}^{[r]-2} \frac{Q_\nu(x)}{n^{\nu/2}}| \leq \frac{\mathcal{E}(\sqrt{n}(1+|x|))}{n^{(r-2)/2}(1+|x|)^r}$$

Θεώρημα 4.2.10. *Αν* $\limsup_{|t|\to\infty} |v(t)| < 1$ *και* $E|X_1|^k < \infty$ *για κάποιο ακέραιο* $k \geq 3$, *τότε*

$$(1+|x|)^k |F_n(x) - \Phi(x) - \sum_{\nu=1}^{k-2} \frac{Q_\nu(x)}{n^{\nu/2}}| = o(\frac{1}{n^{(k-2)/2}})$$

ομοιόμορφα στο $x, x \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 4.2.11. *Αν* $\limsup_{|t|\to\infty} |v(t)| < 1$ *και* $E|X_1|^k < \infty$ *για κάποιο ακέραιο* $k \geq 3$, *τότε*

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{k-2} \frac{Q_\nu(x)}{n^{\nu/2}} + o(\frac{1}{n^{(k-2)/2}})$$

ομοιόμορφα στο $x, x \in \mathbb{R}$

Κεφάλαιο 5

Βελτιωμένα αναπτύγματα στο Κ.Ο.Θ. για **Heavy-tailed** πυκνότητες πιθανοτήτων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάσαμε τα Αναπτύγματα Edgeworth, που όπως είδαμε, παρέχουν πρόσθετες πληροφορίες για το υπόλοιπο $o(1)$, στο Κ.Ο.Θ.:

$$P(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x) = P(N(0,1) \leq x) + o(1), \ \forall x \in \mathbb{R}, n \uparrow \infty$$

(όπου $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\{X_n\}_{n\geq 1}$ i.i.d. τ.μ. με $EX_j = 0$, $V(X_j) = \sigma^2$) μόνον όταν υπάρχουν ροπές ανώτερης τάξης, δηλαδή αν $E|X_k|^m < \infty$ για $m \geq 3$ με X_k συνεχείς (ή απλώς non-lattice) κατανομές.
Θυμίζουμε, ότι ένα ανάπτυγμα Edgeworth τάξης $[m-2]$, για $n \to \infty$ είναι:

$$P(\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{\sqrt{n}} \leq x) = P(N(0,\sigma^2) \leq x) + \sum_{k=1}^{[m-2]} \frac{Q_k(x)}{n^{k/2}} + o(n^{-[m-2]/2}) \tag{5.0.1}$$

Στο παρόν κεφάλαιο, συνεχίζουμε τη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του υπολοίπου $o(1)$ στο Κ.Ο.Θ. για $n \uparrow \infty$, δίνοντας επιπλέον διορθωτικούς όρους στο Ανάπτυγμα Edgeworth και περαιτέρω μείωση της τάξης του σφάλματος $o(n^{-[m-2]/2})$ στη γενική περίπτωση regularly varying κατανομών με αποκλίνουσες ροπές. Οι επιπλέον αυτοί διορθωτικοί όροι μπορούν να εκφρασθούν σε απλή κλειστή μορφή με όρους ειδικών συναρτήσεων (Dawson's Integral and parabolic cylinder συναρτήσεις) και έχουν ποιοτικές διαφορές εξαρτώμενες, από τον αριθμό των διαθέσιμων ροπών (αν είναι άρτιος ή περιττός, ακέραιος ή πραγματικός) και ακόμη από το αν οι κατανομές είναι συμμετρικές ή όχι. Η προσέγγιση στο ζήτημα της κατασκευής των αναπτυγμάτων Edgeworth τα οποία θα συζητήσουμε, είναι η συνήθης. Δηλαδή πρώτα αναπτύσσομε μια κατάλληλη σειρά (Gram-Charlier series) για τον μετασχηματισμό Fourier και μετά εφαρμόζουμε Αντιστροφή. Η δομή των αποτελεσμάτων που θα παρουσιάσουμε αφορά πρώτα σε συμμετρικές κατανομές και κατόπιν επεκτείνεται σε πιο γενικές (regularly varying) πυκνότητες.

Στην Παράγραφο 1, δίνουμε τους αναγκαίους ορισμούς και προτάσεις, επαναλαμβάνομε τα (ήδη αναφερθέντα στο Κεφ. 4) συνήθη αναπτύγματα Edgeworth. Στην παράγραφο 2 διατυπώνομε τα κύρια θεωρήματα του Κεφαλαίου στις παραγράφους 3 και 4 δίνομε την απόδειξη των θεωρημάτων αυτών.

5.1 Regularly varying συναρτήσεις και ιδιότητές τους

Δια λόγους ευκρίνειας και έμφασης των αποτελεσμάτων ως προς τις ποιοτικές διαφορές των επιπλέον διορθωτικών όρων στο Ανάπτυγμα Edgeworth, είναι αναγκαίο να κάνουμε ορισμένες υποθέσεις. Έτσι θεωρούμε i.i.d τ.μ. $X_k.k \geq 1$ με $EX_1 = 0, Var(X_1) = 1$ και regularly varying πυκνότητα, σύμφωνα με τον εξής ορισμό.

Ορισμός 5.1.1. *Μια (μετρήσιμη) συνάρτηση $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ είναι κανονικά ομαλά κυμαινόμενη (rgularly varying) στο ∞ με δείκτη p (σμβ. $v \in RV_p$) αν για $x > 0$,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{v(tx)}{v(t)} = x^p$$

Ο δείκτης p ονομάζεται εκθέτης της κύμανσης (exponent of variation) στο ∞.

Μπορούμε (με προφανείς αλλαγές) να μιλήσουμε για regular variation στο 0. Πράγματι, προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ότι $v(x)$ είναι regularly varying στο ∞ ανν $v(x^{-1})$ είναι regularly varying στο 0.
Αν $p = 0$, η v ονομάζεται slowly varying. Οι slowly varying συναρτήσεις συμβολίζονται $L(x)$. Αν η v είναι regularly varying στο p, τότε $v(x)/x^p$ είναι regularly varying στο 0 (άμεσο από τον ορισμό). Έτσι θέτοντας $L(x) = v(x)/x^p$, βλέπουμε ότι είναι πάντοτε δυνατό να παρουσιάσουμε μια p-varying συνάρτηση ως $x^p L(x)$

Υποθέτουμε, συγκεκριμένα ότι η πυκνότητα των X_k που θεωρούμε είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{-(1+\beta)} L_+(x) I(x \geq 0) \\ &+ (1+x)^{-(1+\gamma)} L_-(x) I(x < 0) \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

όπου $\beta, \gamma > 2$ και $L_+(\cdot), L_-(\cdot)$ είναι slowly varying στο ∞ (δηλαδή

$$L_\pm(cb)/L_\pm(b) \to 1,\ b \to \infty)$$

Υποθέτομε επίσης $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\theta)| d\theta < +\infty$ όπου $\Phi(\theta)$ η χ.σ. της X_k και $\psi(\theta) = \log(\phi(\theta))$. Για $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,\ n \geq 1$, θέτομε $\phi_n(\theta) = E(\exp(\mathrm{i}\theta S_n/n^{1/2})) = \phi^n(\theta/n^{1/2})$ (εφόσον οι $X_n, n \geq 1$ είναι i.i.d).

Επίσης, $\psi_n(\theta) = \log(\phi_n(\theta)) = n\psi(\theta/n^{1/2})$. Επειδή $\psi'(0) = 0$, για σταθεροποιημένο $\theta \in \mathbb{R}$ έχομε

$$n\psi(\theta/n^{1/2}) = \sum_{j=2}^{m} \frac{k_j(\mathrm{i}\theta)^j}{j! n^{j/2-1}} + o(\frac{\theta^m}{n^{m/2-1}})$$

αν $m < \min\{\beta, \gamma\}$, όπου τα K_j είναι οι ημιαναλλοίωτες (cumulants) της X_k (βλ. 4.1.1)

$$
\begin{aligned}
\phi_n(\theta) = \phi^n(\theta/n^{1/2}) &= E(\exp(\mathrm{i}\theta S_n/n^{1/2})) \\
= \exp(\log(\phi_n(\theta))) &= \exp(n\psi(\theta/n^{1/2})) \\
&= \exp(-\theta^2/2)\exp(\sum_{j=3}^{m}\frac{K_j(\mathrm{i}\theta)^j}{j!n^{j/2-1}} + o(\frac{1}{n^{m/2-1}})) \\
&= \exp(-\theta^2/2)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{j=3}^{m}\frac{K_j(\mathrm{i}\theta)^j}{j!n^{j/2-1}} + o(\frac{1}{n^{m/2-1}})\right)^k\right) \\
&= \exp(-\theta^2/2)\left(1+\sum_{q=3}^{m}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}\xi_{k,q}(\theta)\frac{1}{n^{q/2-1}} + o(\frac{1}{n^{m/2-1}})\right)
\end{aligned}
\tag{5.1.3}
$$

όπου $\xi_{k,q}$ είναι ο συντελεστής του $\frac{1}{n^{q/2-1}}$ στο ανάπτυγμα της $\left(\sum_{j=3}^{q}\frac{K_j(\mathrm{i}\theta)^j}{j!n^{j/2-1}}\right)^k$. Επομένως η άθροιση στην (5.1.3) έχει πρώτο όρο $K_3(\mathrm{i}\theta)^3/n^{1/2}$, δεύτερο όρο τον $(K_3^2(\mathrm{i}\theta)^6/72+K_4(\mathrm{i}\theta)^4/4!)(\frac{1}{n})$ κ.ο.κ. (βλ. (4.1.7) και (4.1.11): $\xi_{k,q}(\theta) = P_\nu(\mathrm{i}\theta)$). Υπενθυμίζομε (βλ. Παράγραφος 4.1) ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $(-\mathrm{i}\theta)^k\exp(-\theta^2/2)$ ισούται με $\frac{d^k n(x)}{dx^k}$ όπου $n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)$ και επομένως

$$
\frac{d^k n(x)}{dx^k} = n(x)(-1)^k H_k(x)
$$

όπου $H_k(x)$ το k-οστό Hermite πολυώνυμο. Κατά συνέπειαν, παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier εις αμφότερα τα μέλη της (5.1.3) συνάγομε ότι η πυκνότης $f_{S_n/n^{1/2}}$ της τ.μ. $S_n/n^{1/2}$ ικανοποιεί

$$
f_{S_n/n^{1/2}}(x) = n(x) + n(x)\sum_{k=3}^{m} n^{(-k/2)+1}G_k(x) + o(n^{(-m/2)+1}) \tag{5.1.4}
$$

όπου $G_k(x)$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ $3k$, και που εξαρτάται μόνον από τις k πρώτες ημιαναλλοίωτες (cumulants) της X_j (βλ. (4.1.17): $G_k(x) \equiv q_v(x)$).

Ο στόχος μας είναι να διακριβώσωμε την συνεισφορά του όρου $o(n^{-(m/2)+1})$ του σφάλματος στην (5.1.4), και το πρόβλημα είναι ότι τα συνακόλουθα $G_k(x)$ (για $k \geq \min\{\beta,\gamma\}$) εμπεριέχουν ροπές ή (cumulants) που δεν ορίζονται για X_j. Η λυσιτελής ιδέα είναι να θέσομε $\psi(\theta) = \mathfrak{x}(\theta)+\xi(\theta)$ όπου $\mathfrak{x}(\cdot)$ είναι αναλυτική συνάρτηση σε μια περιοχή του 0, ενώ η $\xi(\cdot)$ είναι μη αναλυτική συνάρτηση. Η διαχείρηση της αναλυτικής συνιστώσας $\mathfrak{x}(\cdot)$, οδηγεί στο σύνηθες Ανάπτυγμα Edgeworth όπως στην (5.1.4) επομένως το καίριο ζήτημα είναι η ανάλυση του $\xi(\cdot)$ η οποία, όπως θα δούμε, παράγει τα κύρια θεωρήματα 1 και 2 του παρόντος κεφαλαίου τα οποία επεκτείνουν την (5.1.4).

Μια χρήσιμη ιδιότητα του $L_\pm$ (για λόγους απλούστευσης L) και απαραίτητη για τα επόμενα, δίδεται στην ακόλουθη

Πρόταση 5.1.2. *Ισχύει ότι*

$$L(x) = o(J_L(x)),\ x \to \infty \tag{5.1.5}$$

όπου η συνάρτηση $J_L(x)$ ορίζεται ως

$$J_L(x) = \int_1^x \frac{L(u)}{u} du \tag{5.1.6}$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\theta)| d\theta < \infty$ και το Πορ. 1 ΠΡΤ, έπεται ότι $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Τότε η (5.0.2) συνεπάγεται ότι $L_\pm$ είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ με $L_+(0) = L_-(0)$. Τώρα, χρησιμοποιώντας το Λήμμα Fatou και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής έχομε

$$\begin{aligned}
\liminf_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_1^x \frac{L(u)}{u} du}{L(x)} &= \liminf_{x\to\infty} \int_1^x \frac{L(u)}{L(x)u} du \\
&\overset{u=xs}{=} \liminf_{x\to\infty} \int_{1/x}^1 \frac{L(xs)x}{L(x)sx} ds \\
&= \liminf_{x\to\infty} \int_{1/x}^1 \frac{L(xs)}{L(x)} \frac{1}{s} ds \\
&\geq \int_{1/x}^1 \liminf_{x\to\infty} \frac{L(xs)}{L(x)} \frac{1}{s} ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{s} ds = +\infty
\end{aligned}$$

Έτσι εδείχθη η (5.1.5).

Δύο ειδικές συναρτήσεις, αναγκαίες για τα επόμενα, ορίζονται ως:
Ολοκλήρωμα Dawson $D(z)$:

$$D(z) = \mathrm{e}^{-z^2} \int_0^z \mathrm{e}^{t^2} dt \tag{5.1.7}$$

Και η Κλασσική παραβολική κυλινδρική συνάρτηση (classical parabolic cylinder function) $D_v(z)$ με παράμετρο v ώστε $\mathrm{Re}(v) > -1$:

$$D_v(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{e}^{z^2/4} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2/2} t^v \cos(zt - \frac{v\pi}{2}) dt \tag{5.1.8}$$

Μερικές, χρήσιμες για τα επόμενα, ιδιότητες των regularly varying συναρτήσεων δίδονται στις ακόλουθες προτάσεις:

Θεώρημα 5.1.3. *(Karamata)*
α) Αν $p \geq -1$ τότε $v \in RV_p$ συνεπάγεται ότι $\int_0^x v(t)dt \in RV_{p+1}$ και

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xv(x)}{\int_0^x v(t)dt} = p+1$$

Αν $p < -1$ (ή $p = -1$ και $\int_x^\infty v(s)ds < \infty$) τότε $v \in RV_p$ συνεπάγεται ότι $\int_x^\infty v(t)dt < \infty$, $\int_x^\infty v(t)dt \in RV_{p+1}$ και

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xv(x)}{\int_x^\infty v(t)dt} = -p-1$$

β)Αν η v ικανοποιεί

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xv(x)}{\int_0^x v(t)dt} = \lambda \in (0,\infty)$$

τότε $v \in RV_{\lambda-1}$. Αν $\int_x^\infty v(t)dt < \infty$ και

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xv(x)}{\int_x^\infty v(t)dt} = \lambda \in (0,\infty)$$

τότε $v \in RV_{-\lambda-1}$.

Απόδειξη. Παραλείπεται (βλ. [11]).

Πόρισμα 5.1.4. *(Αναπαράσταση Karamata) Η L είναι slowly varying ανν μπορεί να παρασταθεί ως*

$$L(x) = c(x)\exp(\int_1^x t^{-1}\epsilon(t)dt)\ (a) \to 0$$

για $x > 0$, όπου $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\epsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ και $\lim_{x\to\infty} c(x) = c \in (0,\infty)$ (b), $\lim_{t\to\infty}\epsilon(t)$ (c)

Απόδειξη. Αν η L έχει την παράσταση (a) τότε είναι slowly varying εφόσον για $x > 1$

$$\lim_{t\to\infty} L(tx)/L(t) = \lim_{t\to\infty}(c(tx)/c(t))\exp(\int_x^{tx} s^{-1}\epsilon(s)ds)$$

Δοθέντος $\epsilon > 0$, υπάρχει t_0 (από την (c)), ώστε $-\epsilon < \epsilon(t) < \epsilon,\ t \geq t_0$. Επομένως,

$$-\epsilon\log(x) = -\epsilon\int_x^{tx} s^{-1}ds \leq \int_t^{tx} s^{-1}\epsilon(s)ds \leq \epsilon\int_t^{tx} s^{-1}ds = \epsilon\log(x)$$

Εκ της προηγούμενης έπεται

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{tx} s^{-1}\epsilon(s)ds = 0 \text{ και } \lim_{t\to\infty}\frac{L(tx)}{L(t)} = 1$$

Δηλαδή η L είναι slowly varying.
Αντίστροφα, υποθέτομε ότι $L \in RV_0$. Από το Θεώρημα (Karamata) έπεται

$$b(x) := xL(x)/\int_0^X L(s)ds \to 1,\ x \to \infty$$

Έχομε,

$$L(x) = x^{-1}b(x)\int_0^x L(s)ds$$

Θέτομε $\epsilon(x) = b(x) - 1$· έτσι $\epsilon(x) \to 0,\ x \to \infty$ και

$$\begin{aligned}
\int_1^x t^{-1}\epsilon(t)dt &= \int_1^x (L(t)/\int_0^t L(s)ds)dt - \log(x) \\
&= \int_1^x d(\log(\int_0^1 L(s)ds)) - \log(x) \\
&= \log(\frac{1}{x}\int_0^x L(s)ds/\int_0^1 L(s)ds)
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\exp(\int_1^x t^{-1}\epsilon(t)dt) &= \frac{1}{x}\int_0^x L(s)ds/\int_0^1 L(s)ds \\
&= L(x)/(b(x)\int_0^1 L(s)ds)
\end{aligned}$$

Τελικά

$$\begin{aligned}
L(x) &= b(x)\int_0^1 L(s)ds \exp(\int_1^x t^{-1}\epsilon(t)dt) \\
&= c(x)\exp(\int_1^x t^{-1}\epsilon(t)dt)
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 1
Αν $v \in RV_p$ τότε η v έχει την παράσταση

$$v(x) = c(x)\exp(\int_1^x t^{-1}p(t)dt)$$

όπου $c(\cdot)$ ικανοποιεί τη (b) και $\lim_{t\to\infty} p(t) = p$. Αυτό προκύπτει από το Πόρ. (5.1.4) θέτοντας $v(x) = x^p L(x)$ και χρησιμοποιώντας την παράσταση για την L.

Πρόταση 5.1.5. *Αν $v \in RV_p, p \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε για $x \geq 1$ και $t \geq t_0$*

$$(1-\epsilon)x^{p-\epsilon} < \frac{v(tx)}{v(t)} < (1+\epsilon)x^{p+\epsilon} \tag{5.1.9}$$

για $\epsilon > 0$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση Karamata (Πόρ. 5.1.4) και την Παρατήρηση 1, έχομε

$$v(tx)/v(x) = (c(tx)/c(t))\exp(\int_0^x s^{-1}p(ts)ds)$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα, εφόσον μπορούμε να επιλέξουμε t_0 ώστε $t > t_0$ συνεπάγεται

$$p-\epsilon < p(ts) < p+\epsilon,\ s>1$$

οπότε

$$(p-\epsilon)\log(x) = (p-\epsilon)\int_1^x s^{-1}ds \le \int_1^x p(ts)s^{-1}ds \le (p+\epsilon)\int_1^x s^{-1}ds = (p+\epsilon)\log(x)$$

και η ζητουμένη έπεται.

Πρόταση 5.1.6. *Έστω L slowly varying συνάρτηση που είναι συνεχής στο $[0,\infty)$. Τότε $\forall\delta>0$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\eta>0$ τέτοιο ώστε για $0<\theta<\eta$,*

$$\frac{L(\frac{x}{\theta})}{L(\frac{1}{\theta})} \le \begin{cases} cx^{\delta},\ x>1 \\ cx^{-\delta},\ x\ge 1 \end{cases} \tag{5.1.10}$$

όπου c μια θετική σταθερά.

Απόδειξη. Από την (5.1.9), υπάρχει $c>0$ τέτοιο ώστε,

$$(1-\delta)x^{-\delta} \le \frac{L(xt)}{L(t)} \le (1+\delta)x^{-\delta},\ \forall x\ge 1, t\ge c \tag{5.1.11}$$

Ιδιαίτερα, η πρώτη ανισότης στην (5.1.10) ισχύει με $\eta=\frac{1}{c}$. Εφόσον η L είναι slowly varying έχομε $t^{\delta}L(t)\to\infty$ για $t\to\infty$· έτσι υπάρχει $b>c$ ώστε $t^{\delta}L(t)\ge 1,\ \forall t\ge b$ Επειδή η L είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ έχομε $a := \sup_{t\in[0,b]} L(t) < \infty$.

Έστω τώρα $0<x\le 1$ και $t\ge b$ δεδομένο. Αν $xt\ge b$, έχομε $L(xt)\le \frac{1}{1-\delta}x^{-\delta}L(t)$ (αντικαθιστώντας t με xt και x με $1/x$ στην πρώτη ανισότητα της (5.1.11).
Αν $xt\le b$ έχομε,

$$L(xt)\le a\le at^{\delta}L(t)\le ab^{\delta}x^{-\delta}L(t)$$

Επομένως, θέτοντας $c=\frac{1}{1-\delta}+ab^{\delta}$ έχομε

$$L(xt)\le cx^{-\delta}L(t)$$

για κάθε $0<x\le 1$ και για όλα τα $t\ge b$ που αποδεικνύει τη δεύτερη ανισότητα στην (5.1.10) με $\eta=1/b$. Θέτοντας $\eta=\frac{1}{c}\Lambda(\frac{1}{b})$ παίρνουμε πλήρες το αποτέλεσμα.

5.2 Τα κύρια θεωρήματα

Στην παράγραφο αυτή διατυπώνομε τα δυο κύρια θεωρήματα του παρόντος κεφαλαίου, ήτοι το Θ. 5.2.1 που αφορά στη γενική περίπτωση της μη συμμετρικής πυκνότητας (το οποίο θα αποδειχθεί στο τέλος του κεφαλαίου) και το Θ. 5.2.2 που αναφέρεται σε τ.μ. με συμμετρική πυκνότητα (η απόδειξη του οποίου αποτελεί το αντικείμενο της §5.3). Διατυπώνομε ακόμη μια πρόταση η οποία δίνει την ανάλυση του $\psi(\theta)$ (που αποδεικνύεται επίσης στη §5.3)

Θεώρημα 5.2.1. *Έστωσαν $\{X_k, k \geq 1\}$ i.i.d. τ.μ. με $EX_1 = 0, V(X_1) = 1$ και πυκνότητα σύμφωνα με την (5.1.2). Επίσης υποθέτομε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\theta)| d\theta < \infty$ Για σταθεροποιημένο $x > 0$, έχομε*

$$f_{S_n/n^{1/2}}(x) = \eta(x)\left(1 + \sum_{3 \leq j < \min(\beta,\gamma)} \frac{G_j(x)}{n^{j/2-1}}\right) + F(x,n) + o(F(x,n))$$

για $n \to \infty$ όπου $G_j(x)$, $j < \min(\beta,\gamma)$ είναι οι σύνηθεις Edgeworth συντελεστές (βλ. σχόλια μετά την 5.1.3) και $F(x,n)$ ορίζεται σύμφωνα με τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\beta = \gamma = \alpha$. *Τότε:*
-Για άρτιο α έχουμε:

$$\begin{aligned} F(x,n) &= \frac{1}{\Gamma(a+1)n^{\alpha/2-1}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} H_a(x)(J_{L_+}(n^{1/2}x)) + \right. \\ &+ \left. J_{L_-}(n^{1/2}x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} D(x/\sqrt{2})(L_+(n^{1/2}x) - L_-(n^{1/2}x))\right) \end{aligned}$$

-Για περιττό α:

$$\begin{aligned} F(x,n) &= \frac{1}{\Gamma(a+1)n^{\alpha/2-1}}\left[\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} H_a(x)(J_{L_+}(n^{1/2}x)) - \right.\right. \\ &- \left.\left. J_{L_-}(n^{1/2}x)\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} D(x/\sqrt{2})\left(L_+(n^{1/2}x) + L_-(n^{1/2}x)\right)\right] \end{aligned}$$

-Για α μη ακέραιο:

$$\begin{aligned} F(x,n) &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{\Gamma(a+1)\sin(\alpha\pi) n^{\alpha/2-1}}\left(D_\alpha(x) L_+(n^{1/2}x) + \right. \\ &+ \left. D_\alpha(-x) L_-(n^{1/2}x)\right) \end{aligned}$$

Περίπτωση 2: $\beta < \gamma$. *Τότε:*

$$F(x,n) = \begin{cases} \frac{H_\beta(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\beta+1)} \frac{J_{L_+}(n^{1/2}x)}{n^{\beta/2-1}}, & \beta \in \mathbb{Z} \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{D_\beta(x)\mathrm{e}^{-x^2/4}}{\Gamma(\beta+1)\sin(\beta\pi)} \frac{L_+(n^{1/2}x)}{n^{\beta/2-1}}, & \beta \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

<u>*Περίπτωση 3:*</u> *$\beta > \gamma$. Τότε:*

$$F(x,n) = \begin{cases} \frac{H_\gamma(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma+1)}\frac{J_{L_-}(n^{1/2}x)}{n^{\gamma/2-1}}, \ \gamma \in 2\mathbb{Z} \\ -\frac{H_\gamma(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\Gamma(\gamma+1)}\frac{J_{L_-}(n^{1/2}x)}{n^{\gamma/2-1}}, \ \gamma \in 2\mathbb{Z}+1 \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{D_\gamma(-x)\mathrm{e}^{-x^2/4}}{\Gamma(\gamma+1)\sin(\gamma\pi)}\frac{L_-(n^{1/2}x)}{n^{\gamma/2-1}}, \ \gamma \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

όπου $H_k(z), D(z), D_v(z)$ είναι, αντιστοίχως, τα Hermite πολυώνυμα τάξης k, ολοκλήρωμα Dawson και κλασσική παραβολική κυλινδρική συνάρτηση με παράμετρο v.

Να σημειώσουμε ότι το θεώρημα αυτό δηλώνει το αποτέλεσμα για $x > 0$. Για $x < 0$, θεωρούμε απλώς $-X_k$ και $-S_n/n^{1/2}$, και το αποτέλεσμα ανάγεται στη περίπτωση $x > 0$.

Το προηγούμενο αποτέλεσμα, μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε, θεωρώντας πρώτα την συμμετρική πυκνότητα και κατόπιν διασπώντας την μη συμμετρική πυκνότητα σε περιττές και άρτιες συναρτήσεις τις οποίες χειριζόμαστε χωριστά, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για την συμμετρική περίπτωση. Για τη συμμετρική περίπτωση δηλαδή $\beta = \gamma = \alpha$ και $L \equiv L_+ \equiv L_-$, έχομε την ακόλουθη κομψότερη διατύπωση του αποτελέσματος.

Θεώρημα 5.2.2. *Έστωσαν $\{X_k, k \geq 1\}$ i.i.d τ.μ. με $Var(X_1) = 1$ και συμμετρική πυκνότητα $f(x) = (1+|x|)^{-(\alpha+1)}L(|x|)$, $\alpha > 2$. Επιπλέον υποθέτομε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(\theta)|d\theta < \infty$. Τότε για σταθεροποιημένο $x \in \mathbb{R}$ έχομε*

$$\begin{aligned} f_{S_n/n^{1/2}}(x) &= \eta(x)\Bigg(1 + \sum_{3\leq j<\alpha, j\in 2\mathbb{Z}} \frac{G_j(x)}{n^{j/2-1}}\Bigg) + \\ &+ \begin{cases} \frac{L(n^{1/2}x)}{n^{\alpha/2-1}}G_\alpha(x) + o(\frac{L(n^{1/2}x)}{n^{\alpha/2-1}}), \ \alpha \notin 2\mathbb{Z} \\ \frac{J_L(n^{1/2}x)}{n^{\alpha/2-1}}G_\alpha(x) + o(\frac{J_L(n^{1/2}x)}{n^{\alpha/2-1}}), \ \alpha \in 2\mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

για $n \to \infty$, όπου J_L ορίζεται ώς στην (5.1.6). Εδώ $G_j(x)$ είναι οι συνήθεις Edgeworth συντελεστές (βλέπε σχόλια μετά την 5.1.3) ενώ $G_\alpha(x)$ ορίζεται ως:

$$G_\alpha(x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}D(\frac{x}{\sqrt{2}}), \ a \in 2\mathbb{Z}+1 \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{\Gamma(a+1)\sin(\alpha\pi)}(D_\alpha(x) + D_\alpha(-x)), \ a \notin \mathbb{Z} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\Gamma(a+1)}H_\alpha(x), \ a \in 2\mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.2.12}$$

και $D(z), D_v(z), H_k(z)$ είναι, αντιστοίχως, Dawson's ολοκλήρωμα, κλασσική παραβολική κυλινδρική συνάρτηση με παράμετρο v, Hermite πολυώνυμο τάξης k.

Όπως ήδη αναφέραμε στην αρχή του Κεφαλαίου, η ανάλυση του προηγούμενου αποτελέσματος, εμπλέκει τη συμπεριφορά της μη αναλυτικής συνιστώσας ξ του $\phi(\theta)$. Σχετική είναι η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 5.2.3. *Έστω μια συμμετρική πυκνότης (όπως στο Θεώρημα 5.2.2) Έχομε,*

$$\psi(\theta) = \mathfrak{r}(\theta) + \xi(\theta) + o(\xi(\theta)) \tag{5.2.13}$$

όπου,

$$\mathfrak{r}(\theta) = \sum_{1 \leq j < a, j \in 2\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{j/2} K_j}{j!} \theta^j \tag{5.2.14}$$

είναι το σύνηθες ανάπτυγμα Taylor ως τη μεγαλύτερη σε τάξη ροπή, και

$$\xi(\theta) = \begin{cases} -\frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)}|\theta|^\alpha L(\frac{1}{|\theta|}), & a \notin 2\mathbb{Z} \\ \frac{2(-1)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha+1)}|\theta|^\alpha J_L(\frac{1}{|\theta|}), & a \in 2\mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.2.15}$$

είναι η μη αναλυτική συνιστώσα του $\psi(\theta)$. Η J_L ορίζεται ώς στην (5.1.6).

Με τη διάσπαση του $\psi(\theta)$ και λόγω συμμετρικότητος της πυκνότητος, λαμβάνομε, (όπως στην 5.1.3),

$$\begin{aligned} E(\exp(i\theta S_n/n^{1/2})) &= \exp(-\theta^2/2)\Bigg(1 + \sum_{q=3}^{m}\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!}\xi_{k,q}(\theta)\frac{1}{n^{q/2-1}} \\ &+ n\xi(\frac{\theta}{n^{1/2}}) + o(n\xi(\frac{\theta}{n^{1/2}})) \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Το ολοκλήρωμα Dawson και οι άλλες ειδικές συναρτήσεις, προκύπτουν τότε ως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $\mathrm{e}^{-\theta^2/2}|\theta|^\alpha$ που εμφανίζεται στο μη αναλυτικό όρο της προηγουμένης έκφρασης.

Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, παρουσιάζονται οι αναγκαίες λεπτομέρειες για την ανάλυση του $\xi(\theta)$ καθώς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier που απαιτείται για την απόδειξη του Θ. 5.2.2 και κατόπιν του Θ. 5.2.1.

5.3 Συμμετρική πυκνότης

Η επιδίωξη μας στη παράγραφο αυτή είναι η απόδειξη του Θ. 5.2.2. Η προσέγγιση που υιοθετούμε είναι η ήδη περιγραφείσα στην εισαγωγή του Κεφαλαίου, δηλαδή αναπτύσσομε την $\chi.\sigma.$ μιας συμμετρικής regularly varying πυκνότητος (επομένως και της γεννήτριας συνάρτησης των cumulants) και ακολούθως έναν αντίστοφο μετασχηματισμό Fourier. Δια λόγους μεθοδολογικούς εξετάζομε πρώτα, με λεπτομέρειες τη φύση της προσέγγισης σε ένα απλούστερο παράδειγμα, αυτό της συμμετρικής Pareto πυκνότητος.

Παράδειγμα 5.3.1. *(Pareto πυκνοτητα) Θεωρούμε εδώ, ότι*

$$f(x) = \frac{a_f}{1 + |x|^{1+\alpha}}, \ x \in \mathbb{R} \tag{5.3.17}$$

όπου a_f κανονικοποιούσα σταθερά της $f(x)$. π.χ. αν $a_f = \pi/\sqrt{2}$ αν $\alpha = 3$.

Με αυτήν έχομε την απλούστερη έκφραση του αναπτύγματος.

Πρόταση 5.3.2. *Για τ.μ. με πυκνότητα την (5.3.17) ή χ.σ. παίρνει την μορφή*

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= 1 + \sum_{2\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{j/2} m_j \theta^j}{j!} \\ &+ \begin{cases} \frac{-\pi a_f}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\frac{a\pi}{2})}|\theta|^\alpha + o(|\theta|^\alpha), & a \notin 2\mathbb{Z} \\ \frac{-2(-1)^{\alpha/2} a_f}{\Gamma(\alpha+1)}|\theta|^\alpha \log(|\theta|) + o(|\theta|^\alpha \log(|\theta|)), & a \in 2\mathbb{Z} \end{cases}\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

για $\theta \to 0$, όπου m_j είναι η $j-$οστή ροπή της τ.μ.

Η απόδειξη της πρότασης διακρίνεται σε 4 περιπτώσεις: α περιττός, α άρτιος και μη ακέραιος με ακέραιο μέρος περιττό και άρτιο. Κάθε περίπτωση εμπλέκει την εύρεση μιας ασυμπτωτικής έκφρασης για ένα ολοκλήρωμα, όπως τα επόμενα. Επίσης σημειώνομε ότι εφόσον η πυκνότης είναι συμμετρική, η $\chi.\sigma.$ είναι πραγματική και συμμετρική. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε χ.β.γ. $\theta > 0$. Επιπλέον θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\sim$ για σχέση ισοδυναμίας, π.χ. $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x)/g(x) \to 1$ για $x \searrow 0$ (ή $x \nearrow \infty$).

Λήμμα 5.3.3. *Για $\theta \searrow 0$ έχομε 4 ασυμπτωτικές ισότητες:*
Περίπτωση 1: *α περιττός.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}-1)}{1+|x|^{1+\alpha}}dx \sim -\pi\theta \tag{5.3.19}$$

Περίπτωση 2: *α άρτιος.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx \sim -2\mathrm{i}\theta\log(\theta) \tag{5.3.20}$$

Για a μη ακέραιο, συμβολίζομε $q = [a]$ το ακέραιο μέρος του a. Τότε

Περίπτωση 3: *q άρτιος.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{q}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}-1)}{1+|x|^{1+\alpha}}dx \sim 2\theta^{\alpha-q}\Gamma(-\alpha+q)\cos((-\alpha+q)\pi/2) \tag{5.3.21}$$

Περίπτωση 4: *q περιττός*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{q}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx \sim 2\mathrm{i}\theta^{\alpha-q}\Gamma(-\alpha+q)\sin((-\alpha+q)\pi/2) \tag{5.3.22}$$

Απόδειξη. Περίπτωση 1: α περιττός. Εφόσον α περιττός, η ολοκληρωτέα είναι συμμετρική συνάρτηση και μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}-1)}{1+|x|^{1+\alpha}}dx &= 2\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}(\cos(\theta x)-1)}{1+x^{1+\alpha}}dx \\ &\overset{u=\theta x}{=} 2\theta\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}(\cos u - 1)}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du\end{aligned} \tag{5.3.23}$$

με αλλαγή μεταβλητής στη δεύτερη ισότητα.

Επειδή

$$\left|\frac{u^{\alpha-1}(\cos u - 1)}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}\right| \leq \frac{1}{u^2}|\cos u - 1|$$

και $\frac{1}{u^2}|\cos u - 1|$ είναι ολοκληρώσιμη, από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Θ.Κ.Σ.) έχομε

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}(\cos u - 1)}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du \to \int_0^{+\infty} \frac{\cos u - 1}{u^2}du = -\pi/2 \tag{5.3.24}$$

για $\theta \to 0$.

Από τις (5.3.23),(5.3.24) έπεται η 5.3.19.

Περίπτωση 2: α άρτιος. Επειδή η $\frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+|x|^{\alpha+1}}$ είναι περιττή συνάρτηση. Έχομε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}(\cos(\theta x)+\mathrm{i}\sin(\theta x))}{1+|x|^{1+\alpha}}dx \\
&= 2\mathrm{i}\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\sin(\theta x)}{1+x^{1+\alpha}}dx \\
&\overset{u=\theta x}{=} 2\mathrm{i}\theta\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du
\end{aligned} \tag{5.3.25}$$

(με αλλαγή μεταβλητής $u = \theta x$ στην τελευταία ισότητα). Γράφουμε

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du \tag{5.3.26}$$

Τώρα,

$$\int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du \leq \left|\int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}dx < \infty \tag{5.3.27}$$

Ακόμη έχουμε,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du &= \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}(u - \frac{u^3}{3!} + \ldots + (-1)^{\nu}\frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\cos(kx))}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du \\
&= \int_0^1 \frac{u^{\alpha}}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du \\
&\quad + \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}(-\frac{u^3}{3!}+R_2(u))}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du \\
&= \int_0^1 \frac{u^{\alpha}}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du + R(\theta)
\end{aligned} \tag{5.3.28}$$

όπου $0 < k < 1$, $R_2(u) = (-1)^2 \frac{u^5}{5!}\cos(kx)$ και $|R_2(u)| \leq \frac{|u|^5}{5!} \leq \frac{1}{5!}$ (ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $\sin u$ στο $[0,1]$). Επίσης,

$$\begin{aligned}
|R(\theta)| &= \left| \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}(-\frac{u^3}{3!} + R_2(u))}{\theta^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} du \right| \\
&\leq \frac{1}{3!} \int_0^1 \frac{u^{\alpha+2}}{\theta^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} du \\
&+ \frac{1}{5!} \int_0^1 \frac{u^{\alpha+4}}{u^{1+\alpha}} du \\
&\leq C \int_0^1 \frac{u^{\alpha+2}}{\theta^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} du \\
&\leq C \int_0^1 u du = O(1) \qquad (5.3.29)
\end{aligned}$$

όπου C θετική σταθερά (εφόσον $\int_0^1 u^3 du < \infty$) και

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{u^\alpha}{\theta^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} du &= \frac{1}{\alpha+1} \int_0^1 \frac{d(\theta^{1+\alpha} + u^{1+\alpha})}{\theta^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} \\
&= \frac{1}{\alpha+1} \log(\theta^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}) \Big|_0^1 \sim -\log(\theta) \qquad (5.3.30)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{\alpha+1}\log(\theta^{1+\alpha}+1) \sim \log(1)$ εφόσον από την $0 < \theta x < 1$, και την δεύτερη ισότητα της (5.3.25), έπεται $0 < \theta < 1$ οπότε $\theta^{1+\alpha} << 1$ για $a > 2$.

Από τις (5.3.25),(5.3.26),(5.3.27),(5.3.28),(5.3.29) και (5.3.30) έπεται η (5.3.20).

Περίπτωσεις 3 και 4: α μη ακέραιος με q άρτιο και περιττό.
Η απόδειξη είναι όμοια με τις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. Για q άρτιο, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} - 1)}{1 + |x|^{1+\alpha}} dx &= 2\int_0^{+\infty} \frac{x^q(\cos(\theta x) - 1)}{1 + x^{1+\alpha}} dx \\
&\overset{u=\theta x}{=} 2\theta^{\alpha-q} \int_0^{+\infty} \frac{u^q(\cos u - 1)}{\theta^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} du
\end{aligned}$$

Τώρα,

$$\left| \frac{u^q}{\theta^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} (\cos u - 1) \right| \leq \left| \frac{\cos u - 1}{u^{1+\alpha-q}} \right|$$

και επειδή η τελευταία είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, από το θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης λαμβάνομε,

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}(\cos u - 1)}{\theta^{1+\alpha} + u^{1+\alpha}} du \to \int_0^{+\infty} \frac{(\cos u - 1)}{u^{1+\alpha-q}} du$$

για $\theta \to 0$. Επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} - 1)}{1 + |x|^{1+\alpha}} dx \sim 2\theta^{\alpha-q} \int_0^{+\infty} \frac{(\cos u - 1)}{u^{1+\alpha-q}} du \qquad (5.3.31)$$

Για q περιττό, έχομε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^q e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx &= 2i\int_0^{+\infty} \frac{x^q \sin(\theta x)}{1+x^{1+\alpha}}dx \\
&\overset{u=\theta x}{=} 2i\theta^{\alpha-q}\int_0^{+\infty} \frac{u^q \sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du \\
&\sim 2i\theta^{\alpha-q}\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1+\alpha-q}}du \qquad (5.3.32)
\end{aligned}$$

και η ασυμπτωτική ισότης προκύπτει όμοια από το θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Χρησιμοποιώντας την,

$$\int_0^{+\infty} u^{z-1}(e^{iu}-1)du = \Gamma(z)e^{iz\pi/2}, \; -1 < \mathrm{Re}(z) < 0$$

παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u - 1}{u^{1+\alpha-q}}du = \Gamma(-\alpha+q)\cos((-\alpha+q)\pi/2) \qquad (5.3.33)$$

και

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u^{1+\alpha-q}}du = \Gamma(-\alpha+q)\sin((-\alpha+q)\pi/2) \qquad (5.3.34)$$

Από τις (5.3.31) και (5.3.33), (5.3.32) και (5.3.34) προκύπτουν οι αποδεικτέες σχέσεις, για q άρτιο, q περιττό αντίστοιχα.

Τώρα θα αποδείξουμε την Πρόταση 5.3.2. Η απόδειξη βασικά μετατρέπει την (5.3.18) σε εκφράσεις με όρους των προηγούμενων 4 ολοκληρωμάτων μέσω πολλαπλής χρήσης του κανόνος L'Hospital.

Απόδειξη Πρότασης 5.3.2

Αρκεί να θεωρήσουμε $\theta > 0$. Πάλι θεωρούμε περίπτωση προς περίπτωση:

Περίπτωση 1: α περιττός.

Εφαρμόζοντας κανόνα L'Hospital διαδοχικά για $\alpha - 1$ φορές, έχομε

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_f e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx - 1 - \sum_{1\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^j}{j!}}{\theta^\alpha} &= \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_f ix e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx - \sum_{1\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^{j-1}}{(j-1)!}}{\alpha\theta^{\alpha-1}} &= \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_f (ix)^2 e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx - \sum_{2\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^{j-2}}{(j-2)!}}{\alpha(\alpha-1)\theta^{\alpha-2}} &= \\
\vdots \quad &\vdots \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_f (ix)^{\alpha-1} e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx - \sum_{a-1\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^{j-a+1}}{(j-a+1)!}}{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(\alpha-2)]\theta^{\alpha-(\alpha-1)}} &= \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_f (ix)^{\alpha-1} e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx - (-1)^{(\alpha-1)/2}m_{\alpha-1}\theta^{\alpha-1-(\alpha-1)}}{\alpha!\theta} &= \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_f (i^2)^{(\alpha-1)/2} x^{\alpha-1} e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx - (-1)^{(\alpha-1)/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}a_f\theta^0}{1+|x|^{1+\alpha}}}{\alpha!\theta} &= \\
\frac{(-1)^{(\alpha-1)/2}a_f}{\alpha!}\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}(e^{i\theta x}-1)}{1+|x|^{1+\alpha}}dx}{\theta} &= \\
\frac{(-1)^{(\alpha-1)/2}}{\alpha!}a_f(-\pi) &= \\
\frac{(-1)^{(\alpha+1)/2}a_f\pi}{\alpha!} &= \\
\frac{(-1)\pi a_f(-1)^{(\alpha+1)/2}}{\Gamma(a+1)\sin(\alpha\pi/2)}
\end{aligned}$$

Δηλαδή εδείξαμε

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_f e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx - 1 - \sum_{1\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^j}{j!} + \frac{\pi a_f(-1)^{(\alpha+1)/2}\theta^\alpha}{\Gamma(a+1)\sin(\alpha\pi/2)}}{\theta^\alpha} = 0$$

Ισοδύναμα,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_f e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx = 1 + \sum_{1\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^j}{j!} - \frac{\pi a_f\theta^\alpha}{\Gamma(a+1)\sin(\alpha\pi/2)} + o(\theta^\alpha)$$

όπου το τελευταίο βήμα της απόδειξης έπεται από την (5.3.19). Να σημειώσουμε ότι το ολοκλήρωμα σε κάθε βήμα είναι πεπερασμένο εφόσον υπάρχουν οι ροπές εως και $\alpha - 1$ τάξης.

Περίπτωση 2: α άρτιος.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση,

$$\frac{d^m}{dt^m}t^\alpha\log(t) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)t^{\alpha-m}\log(t) + \gamma_{\alpha-m}t^{\alpha-m}$$

για $m = 1, \ldots, \alpha - 1$, όπου $\gamma_{\alpha-m}$ σταθερές και εφαρμόζοντας τον κανόντα L'Hospital για $\alpha - 1$ φορές, όπως ακριβώς στην Περίπτωση 1, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_f e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}} dx - 1 - \sum_{1\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{j/2} m_j \theta^j}{j!}}{\theta^\alpha \log\theta} &= \\
\lim_{\theta\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_f i x e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}} dx - \sum_{1\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{j/2} m_j \theta^{j-1}}{(j-1)!}}{\alpha\theta^{\alpha-1} \log\theta + \theta^{\alpha-1}} &= \\
\vdots &\ \vdots \\
\lim_{\theta\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_f (ix)^{\alpha-1} e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}} dx}{\alpha!\theta\log\theta + \gamma_1\theta} &= \\
\frac{a_f i^{\alpha-1}}{\alpha!} \lim_{\theta\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}} dx}{\theta\log\theta} &= \\
\frac{a_f i^{\alpha-1}(-2) i\theta\log\theta}{\alpha!\theta\log\theta} &= \\
-\frac{2(-1)^{\alpha/2} a_f}{\alpha!}
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα, χρησιμοποιήθηκε η (5.3.20).

Ούτως εδείχθη ότι

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_f e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}} dx &= 1 + \sum_{1\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{j/2} m_j \theta^j}{j!} \\
&- \frac{2(-1)^{\alpha/2} a_f \theta^\alpha \log\theta}{\Gamma(a+1)} + o(\theta^\alpha \log\theta)
\end{aligned}$$

Περίπτωση 3 και 4: α όχι ακέραιος με $q = [\alpha]$ άρτιο και περιττό.

Ακολουθώντας την ίδια γραμμή απόδειξης όπως στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε:

Για q άρτιο,

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_f e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx - 1 - \sum_{1\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^j}{j!}}{\theta^\alpha} &= \\
\vdots &\ \vdots \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{a_f i^q\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^q(e^{i\theta x}-1)}{1+|x|^{1+\alpha}}dx}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-q+1)\theta^{\alpha-q}} &= \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{(-1)^{q/2}a_f\Gamma(\alpha-q+1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^q(e^{i\theta x}-1)}{1+|x|^{1+\alpha}}dx}{\Gamma(\alpha+1)\theta^{\alpha-q}} &= \\
\frac{(-1)^{q/2}a_f\Gamma(\alpha-q+1)}{\Gamma(\alpha+1)}2\Gamma(-\alpha+q)\cos((-\alpha+q)\pi/2) &\overset{(\star)}{=} \\
\frac{2(-1)^{q/2}\pi a_f\cos((-\alpha+q)\pi/2)}{\Gamma(\alpha+1)\sin((-\alpha+q)\pi)} &= \\
\frac{2(-1)^{q/2}\pi a_f\cos((-\alpha+q)\pi/2)}{\Gamma(\alpha+1)2\sin((-\alpha+q)\pi/2)\cos((-\alpha+q)\pi/2)} &= \\
-\frac{(-1)^{q/2}\pi a_f}{\Gamma(\alpha+1)\sin((\alpha-q)\pi/2)} &= \\
-\frac{(-1)^{q/2}\pi a_f}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)\cos(q\pi/2)} &= \\
-\frac{\pi a_f}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)} &
\end{aligned}$$

$(\star)$ Χρησιμοποιήσαμε την σχέση της συνάρτησης Γάμμα $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$.

Για q περιττό,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_f e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx - 1 - \sum_{1\le j<a, j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^j}{j!}}{\theta^\alpha} &= \\
\vdots &\;\vdots \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{a_f i^q\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^q e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-q+1)\theta^{\alpha-q}} &= \\
\frac{(-1)^{(q+1)/2}a_f\Gamma(\alpha-q+1)}{\Gamma(\alpha+1)}2\Gamma(-\alpha+q)\sin((q-\alpha)\pi/2) &= \\
\frac{2(-1)^{(q+1)/2}\pi a_f\sin((-\alpha+q)\pi/2)}{\Gamma(\alpha+1)\sin((-\alpha+q)\pi)} &= \\
\frac{(-1)^{(q+1)/2}\pi a_f}{\Gamma(\alpha+1)\cos((-\alpha+q)\pi/2)} &= \\
\frac{(-1)^{(q+1)/2}\pi a_f}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)\sin(q\pi/2)} &= \\
-\frac{\pi a_f}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)}
\end{aligned}
$$

Στην απόδειξη των Περιπτώσεων 3 και 4 χρησιμοποιήθη το Λ. 5.3.3 ((5.3.21) και (5.3.22)), οι τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

και η σχέση της συνάρτησης Γάμμα:

$$
\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}
$$

$$
\Bigg(\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s+t)}s^{-z}t^{z-1}dsdt \overset{u=s+t, v=t/s}{=} \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u}v^{z-1}dudv/(1+v) \\
&= \int_0^\infty v^{z-1}/(1+v)dv = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\Bigg)
\end{aligned}
$$

5.4 Regularly Varying πυκνότης

Στην Παράγραφο αυτή επεκτείνομε το αποτέλεσμα της Π. 5.3.2, σε πυκνότητες με regularly varying ουρά, του τύπου

$$
f(x) = \frac{L(|x|)}{1+|x|^{1+a}},\ x\in(-\infty,\infty) \tag{5.4.35}
$$

όπου L συνεχής slowly varying συνάρτηση στο $[0,\infty)$.

Πρόταση 5.4.1. *Η χ.σ. τ.μ. με πυκνότητα του τύπου 5.4.35 παίρνει τη μορφή*

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= 1+\sum_{2\le j<\alpha, j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^j}{j!}\\ &+ \begin{cases}\frac{-\pi}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\frac{a\pi}{2})}|\theta|^\alpha L(\frac{1}{|\theta|})+o(|\theta|^\alpha L(\frac{1}{|\theta|})), & a\notin 2\mathbb{Z}\\ \frac{2(-1)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha+1)}|\theta|^\alpha J_L(\frac{1}{|\theta|})+o(|\theta|^\alpha J_L(\frac{1}{|\theta|})), & a\in 2\mathbb{Z}\end{cases}\end{aligned} \tag{5.4.36}$$

Για να αποδείξουμε την Π. 5.4.1, θα χρειασθούμε το επόμενο Λήμμα, αντίστοιχο του Λ. 5.3.3, για regularly varying πυκνότητα

Λήμμα 5.4.2. *Για $\theta\searrow 0$, έχομε τις ακόλουθες τέσσερεις ασυμπτωτικές ισότητες:*
Περίπτωση 1: α περιττός.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}L(|x|)(e^{i\theta x}-1)}{1+|x|^{1+\alpha}}dx\sim -\pi\theta L(\frac{1}{\theta}) \tag{5.4.37}$$

Περίπτωση 2: α άρτιος.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}L(|x|)e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx\sim -2i\theta J_L(\frac{1}{\theta}) \tag{5.4.38}$$

όπου η J_L ορίζεται όπως στην (5.1.6)
Θέτομε $q=[\alpha]$: ακέραιο μέρος του α.
Περίπτωση 3: q άρτιος.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{q}L(|x|)(e^{i\theta x}-1)}{1+|x|^{1+\alpha}}dx\sim -2\theta^{\alpha-q}L(\frac{1}{\theta})\Gamma(-\alpha+q)\cos(\frac{-\alpha+q}{2}\pi)$$

Περίπτωση 4: q περιττός.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{q}L(|x|)e^{i\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx\sim -2i\theta^{\alpha-q}L(\frac{1}{\theta})\Gamma(-\alpha+q)\sin(\frac{-\alpha+q}{2}\pi)$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το Λήμμα πάλι περίπτωση προς περίπτωση.
Περίπτωση 1: α περιττός. Ακολουθώντας την ίδια γραμμή απόδειξης όπως στο Λ. 5.3.3, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}L(|x|)(e^{i\theta x}-1)}{1+|x|^{1+\alpha}}dx &\overset{u=\theta x}{=} 2\theta\int_0^\infty\frac{u^{\alpha-1}L(\frac{u}{\theta})}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}(\cos u-1)du \\ &= 2\theta L(\frac{1}{\theta})\int_0^\infty\frac{u^{\alpha-1}}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}\frac{L(\frac{u}{\theta})}{L(\frac{1}{\theta})}(\cos u-1)du\end{aligned} \tag{5.4.39}$$

Χρησιμοποιώντας την Π. 5.1.6 για αρκετά μικρό θ ,μπορούμε να επιλέξουμε $0 < \delta < 1$ ώστε

$$
\begin{aligned}
\frac{u^{\alpha-1}}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}\frac{L(\frac{u}{\theta})}{L(\frac{1}{\theta})}(1-\cos u) &\leq \frac{1}{u^2}\frac{L(\frac{u}{\theta})}{L(\frac{1}{\theta})}(1-\cos u)\\
&\leq \frac{C(1-\cos u)}{u^{2+\delta}}\left(I(u\leq 1)+\frac{C}{u^{2-\delta}}I(u>1)\right)
\end{aligned}
$$

για $C > 0$ σταθερά και αρκετά μικρό θ.

Να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση στο δεξιό μέλος της δεύτερης ανισότητος είναι ολοκληρώσιμη· επίσης από τον ορισμό της slow variation έχομε,

$$\frac{L(\frac{u}{\theta})}{L(\frac{1}{\theta})} \to 1,\ \theta \to 0\ \forall u > 0$$

οπότε,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{u^{\alpha-1}}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}\frac{L(\frac{u}{\theta})}{L(\frac{1}{\theta})}(1-\cos u) = \frac{1}{u^2}(1-\cos u)$$

και από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

$$\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}\frac{L(\frac{u}{\theta})}{L(\frac{1}{\theta})}(\cos u-1)du \to -\int_0^\infty \frac{1}{u^2}(1-\cos u)du = -\pi/2 \qquad (5.4.40)$$

για $\theta \to 0$. Συνεπώς από (5.4.39) και (5.4.40) προκύπτει η (5.4.37).

Περίπτωση 2: α άρτιος. Έχομε

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}L(|x|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx &\overset{(*)}{=} 2\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}L(x)\sin\theta x}{1+x^{1+\alpha}}dx\\
&\overset{u=\theta x}{=} 2\mathrm{i}\theta\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}L(u/\theta)\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du\\
&= 2\mathrm{i}\theta\Bigg(\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}L(u/\theta)\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du\\
&+ \int_1^\infty \frac{u^{\alpha-1}L(u/\theta)\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du\Bigg) \qquad (5.4.41)
\end{aligned}
$$

όπου η $(*)$ ισχύει καθώς η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο πρώτο ολοκλήρωμα είναι περιττή.

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα της προηγούμενης σχέσης, επιλέγοντας $0 < \delta < 1$ απο Π. 5.1.6,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_1^\infty \frac{u^{\alpha-1}L(u/\theta)\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du\right| &= \left|L(1/\theta)\int_1^\infty \frac{u^{\alpha-1}L(u/\theta)\sin u}{(\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha})L(1/\theta)}du\right|\\
&\leq L(1/\theta)\int_1^\infty \frac{u^{\alpha-1}Cu^\delta}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du\\
&\leq M_1 L(1/\theta) \qquad (5.4.42)
\end{aligned}
$$

για C θετική σταθερά, $M_1 > 0$ για αρκετά μικρό θ. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, γράφουμε

$$\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}L(u/\theta)\sin u}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du = \int_0^1 \frac{u^{\alpha}L(u/\theta)}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du + R(\theta)$$

όπου

$$R(\theta) = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}L(u/\theta)(-\frac{u^3}{3!}+R_2(u))}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du$$

$$R_2(u) = (-1)^2\frac{u^5}{5!}\cos kx$$

$$|R_2(u)| \leq \frac{u^5}{5!} \leq \frac{1}{5!}$$

(ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $\sin u$ στο $[0,1]$)

Τώρα, χρησιμοποιώντας την Π. 5.1.6 για $0 < \delta < 2$, θ αρκετά μικρό, και ακολουθώντας την ίδια γραμμή απόδειξης όπως στην περίπτωση 2 του Λ. 5.3.3, λαμβάνομε

$$|R(\theta)| \leq M_2 L(1/\theta)\int_0^1 \frac{u^{\alpha+2}u^{-\delta}}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du \leq M_3 L(1/\theta) \tag{5.4.43}$$

για $M_2, M_3 > 0$

$$\left(\int_0^1 \frac{u^{\alpha+2}u^{-\delta}}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du \leq \int_0^1 u^{1-\delta}du < \infty\right)$$

Πάλι με αλλαγή μεταβλητής $x = u/\theta$, λαμβάνομε

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{u^{\alpha}L(u/\theta)}{\theta^{1+\alpha}+u^{1+\alpha}}du &= \int_0^{1/\theta}\frac{x^\alpha L(x)}{1+x^{1+\alpha}}dx \\ &\sim \int_0^{1/\theta}\frac{L(x)}{x}dx \\ &= J_L(1/\theta) \end{aligned} \tag{5.4.44}$$

Από τις (5.4.41),(5.4.42),(5.4.43) ,(5.4.44) προκύπτει η (5.4.38).

Περίπτωση 3 και 4: α μη ακέραιος, $q = [\alpha]$ άρτιος και περιττός.
Ακολουθώντας την ίδια γραμμή απόδειξης με αυτήν του Λ. 5.3.3 λαμβάνομε το αποτέλεσμα.

Αποδεικνύουμε τώρα την Π. 5.4.1. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν για την Pareto πυκνότητα.

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε $\theta > 0$ και υποθέτουμε ότι α, άρτιος.
Από την (5.1.5) έχομε ότι $L(1/\theta) = o(J_L(1/\theta))$ για $\theta \searrow 0$ και η J_L είναι συνεχώς διαφορίσιμη με

$$\frac{d}{d\theta}(\theta^\beta J_L(1/\theta)) = \theta^{\beta-1}(\beta J_L(1/\theta) - L(1/\theta)),\ \forall\beta > 0$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx-1-\sum_{1\le j<a,j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^j}{j!}}{\theta^{\alpha}J_L(1/\theta)} &= \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L(x)\mathrm{i}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx-\sum_{1\le j<a,j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^{j-1}}{(j-1)!}}{\theta^{\alpha-1}(\alpha J_L(1/\theta)-L(1/\theta))} &\overset{(*)}{=} \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L(x)\mathrm{i}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx-\sum_{1\le j<a,j\in 2\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{j/2}m_j\theta^{j-1}}{(j-1)!}}{\theta^{\alpha-1}\alpha J_L(1/\theta)} &= \\
\vdots\quad &\vdots \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L(x)(\mathrm{i}x)^{\alpha-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx-(-1)^4\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)\dots[(\alpha-(\alpha-2))]}{(\alpha-2)!}m_{\alpha-2}}{J_L(1/\theta)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(\alpha-3)]\theta^2} &= \\
\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{i}^{\alpha-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L(x)x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx}{\alpha!\theta J_L(1/\theta)} &= \\
\frac{(-1)^{(\alpha-1)/2}}{\alpha!}\lim_{\theta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L(x)x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+|x|^{1+\alpha}}dx}{\theta J_L(1/\theta)} &= \\
\frac{(-1)^{(\alpha-1)/2}2\mathrm{i}\theta J_L(1/\theta)}{\alpha!\theta J_L(1/\theta)} &\overset{(**)}{=} \\
\frac{2(-1)^{\alpha/2}}{\alpha!}
\end{aligned}
$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την (5.1.5) και στην $(**)$ χρησιμοποιήσαμε την (5.4.38).

Υποθέτουμε τώρα ότι α δεν είναι άρτιος. Έστω k ο μικρότερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του α και έστω $q=k+1$, αν k περιττός και $q=k+2$, αν k άρτιος.

Θέτομε,

$$R_0(\theta)=\phi(\theta)-\sum_{0\le j\le\alpha}m_j\frac{(\mathrm{i}\theta)^j}{j!}$$

την διαφορά στην (5.4.36) και $L_\theta(x)=\frac{L(x/\theta)}{L(1/\theta)}$. Επιπλέον, έστω

$$E_k(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\sum_{j-0}^{k}\frac{(\mathrm{i}x)^j}{j!}$$

και

$$
\begin{aligned}
C_k(x) &= \frac{E_k(x)+E_k(-x)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\cos x + \mathrm{i}\sin x - \sum_{j=0}^{k} \frac{(\mathrm{i}x)^j}{j!} \\
&+ \cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j(\mathrm{i}x)^j}{j!} \Bigg) \\
&= \cos x - \sum_{0\le j\le k/2}^{k} \frac{(-1)^j (x)^{2j}}{(2j)!}
\end{aligned}
$$

Τότε $\exists b > 0$ τέτοιο ώστε $|C_k(x)| \le b(1+|x|^k)|$ και $C_k(x) \le b|x|^q$. Εφόσον α δεν είναι άρτιος ακέραιος, έχομε $k < \alpha < q$ και επιλέγουμε ένα $\delta > 0$ τόσο μικρό ώστε $0 < \delta < \min\{\alpha - k, q - \alpha\}$. Από Π. 5.1.6, υπάρχουν $C, \eta > 0$ ώστε για $0 < \theta \le \eta$ έχομε

$$L_\theta(x) \le C x^\delta \text{ για } x \ge 1$$

$$L_\theta(x) \le C x^{-\delta} \text{ για } 0 < x \le 1$$

Τότε έχουμε $k + \delta - \alpha - 1 < -1$ και

$$x^{-\alpha-1} L_\theta(x) |C_k(x)| \le C b x^{k+\delta-\alpha-1} \text{ για } x \ge 1 \tag{5.4.45}$$

Ακόμα $q - \delta - \alpha - 1 > -1$ και

$$x^{-\alpha-1} L_\theta(x) |C_k(x)| \le C b x^{q+\delta-\alpha-1} \text{ για } 0 < x \le 1 \tag{5.4.46}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας και τη συμμετρία της $f(x)$, έχομε

$$
\begin{aligned}
\phi(\theta) - \sum_{0\le j\le\alpha, j\in 2\mathbb{Z}} \frac{(\mathrm{i}\theta)^j}{j!} m_j &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} dx - \sum_{0\le j\le\alpha, j\in 2\mathbb{Z}} \frac{(\mathrm{i}\theta)^j}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} x^j f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Bigg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} - \sum_{0\le j\le\alpha, j\in 2\mathbb{Z}} \frac{(\mathrm{i}x\theta)^j}{j!} \Bigg) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) E_k(\theta x) dx \\
&= \int_{0}^{\infty} f(x) C_k(\theta x) dx \\
&\overset{\theta x = y}{=} \frac{1}{\theta} \int_0^\infty f(x/\theta) C_k(x) dx \\
&= \theta^\alpha L(1/\theta) \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{1+\alpha} + x^{1+\alpha}} C_k(x) L_\theta(x) dx
\end{aligned}
$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\theta^{1+\alpha}+x^{1+\alpha}}C_k(x)L_\theta(x)\right| &\leq \frac{1}{\theta^{1+\alpha}+x^{1+\alpha}}|C_k(x)|L_\theta(x)\\
&\leq x^{-\alpha-1}|C_k(x)|L_\theta(x)\\
&\leq \begin{cases} Cbx^{k+\delta-\alpha-1}, \ x\geq 1\\ Cbx^{q-\delta-\alpha-1}, \ 0<x\leq 1\end{cases}
\end{aligned}$$

από τις (5.4.45),(5.4.46) και οι τελευταίες είναι ολοκληρώσιμες. Επίσης

$$L_\theta(x)=\frac{L(x/\theta)}{L(1/\theta)}\to 1, \ x\to 0$$

Έτσι, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\lim_{\theta\searrow 0}\int_0^\infty \frac{1}{\theta^{1+\alpha}+x^{1+\alpha}}C_k(x)L_\theta(x)dx=\int_0^\infty x^{-1-\alpha}C_k(x)dx$$

Θέτοντας $L(x)=1$, από τη μοναδικότητα του ορίου και χρησιμοποιώντας την (5.3.18) έχομε

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}C_k(x)dx=-\frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)}$$

Έτσι προκύπτει η (5.4.36) για α μη άρτιο.

Μπορούμε τώρα να αποδείξομε την Π. 5.2.3.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη (Π. 5.4.1) θέτοντας $\psi=\log\phi$ και εφαρμόζοντας ανάπτυγμα Taylor. Το καίριο σημείο της απόδειξης αυτής είναι να επιβεβαιώσουμε ότι ο μη αναλυτικός όρος στην ϕ είναι ο μόνος όρος αυτής της τάξης στο ανάπτυγμα της ψ.

5.5 Απόδειξη του κυριωτέρου θεωρήματος για συμμετρική πυκνότητα

Θα αποδείξουμε σε αυτή την παράγραφο το κύριο θεώρημα για την συμμετρική περίπτωση, ήτοι το Θ. 5.2.2. Για αυτό θα χρειαστούμε τα ολοκληρώματα που δίνονται στο επόμενο Λήμμα, τα οποία αντιστοιχούν στην Fourier αντιστροφή του μη αναλυτικού παράγοντα των αναπτυγμάτων που μελετήσαμε στις παραγράφους §3 και §4.

Λήμμα 5.5.1.

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}|\theta|^\alpha d\theta=\begin{cases}2\sqrt{2}(-1)^{(\alpha-1)/2}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}D(\frac{x}{\sqrt{2}}), \ a\in 2\mathbb{Z}+1\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-x^2/4}\sec(\alpha\pi/2)(D_\alpha(x)+D_\alpha(-x)), \ a\notin\mathbb{Z}\\ (-1)^{\alpha/2}\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2/2}H_\alpha(x), \ a\in 2\mathbb{Z}\end{cases}$$

όπου $D(z), D_\nu(z)$ και $H_k(z)$ είναι, αντίστοιχα, το ολοκλήρωμα Dawson, η κλασσική παραβολική κυλινδρική συνάρτηση με παράμετρο ν, και το πολυώνυμο Hermite k τάξης.

Απόδειξη. Παραλείπεται.

Συνεχίζομε με την

<u>Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.2</u> Έστω η έκφραση της $\chi.\sigma.$ της τ.μ. X_1

$$\psi(\theta) = \mathfrak{x}(\theta) + \xi(\theta) + R(\theta)$$

με χ και ξ ως στις (5.2.14) και (5.2.15) και R είναι ο όρος του λάθους (υπόλοιπο). Επίσης θεωρούμε την

$$\lambda(\theta) = \mathfrak{x}(\theta) + \frac{\theta^2}{2} + \xi(\theta)$$

που είναι η έκφραση της $\chi.\sigma.$, αλλά περικεκομμένη ως προς τον πρώτο όρο και το υπόλοιπο.

Έστω

$$w_n(\theta) = \sum_{k=0}^{[\alpha/2-1]} \frac{(n\lambda(\theta/\sqrt{n}))^k}{k!}$$

και $q_n(\theta)$ το ανάπτυγμα της $w_n(\theta)$ έως τάξη

$$\begin{cases} \frac{1}{n^{\alpha/2-1}} L(n^{1/2}/|\theta|), \ \alpha \notin 2\mathbb{Z} \\ \frac{1}{n^{\alpha/2-1}} J_L(n^{1/2}/|\theta|), \ \alpha \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

Με άλλα λόγια,

$$\begin{aligned} q_n(\theta) &= 1 + \sum_{4\le j\le \alpha} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k!}\xi_{k,j}(\theta) \frac{1}{n^{j/2-1}} \\ &+ \begin{cases} \frac{-\pi|\theta|^\alpha L(n^{1/2}/|\theta|)}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2) n^{\alpha/2-1}}, \ \alpha \notin 2\mathbb{Z} \\ \frac{2(-1)^{\alpha/2}|\theta|^\alpha J_L(n^{1/2}/|\theta|)}{\Gamma(\alpha+1) n^{\alpha/2-1}}, \ \alpha \in 2\mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

όπου $\xi_{k,j}(\theta)$ ορίζονται στην (5.1.3).

θέτομε $r_n(\theta) = w_n(\theta) - q_n(\theta)$ ως το υπόλοιπο στο ανάπτυγμα της περικεκομμένης $\chi.\sigma.$ $n\lambda(\theta/\sqrt{n})$ της $S_n/\sqrt{n}$. Με εύκολο υπολογισμό, μέσω του αναπτύγματος διαπιστώνομε ότι ο όρος του λάθους $r_n(\theta)$ είναι άθροισμα όρων της μορφής $P_k(\theta, n)n^{-k}$ όπου $k \geq \frac{\alpha}{2}-1$ και $P_k(\theta, n)$ είναι άθροισμα όρων της μορφής

$$c|\theta|^b \times \begin{cases} \left(\frac{L(n^{1/2})}{|\theta|}\right)^d, \ \alpha \notin 2\mathbb{Z} \\ \left(\frac{J_L(n^{1/2})}{|\theta|}\right)^d, \ \alpha \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

για $c \in \mathbb{R}, b > 0, d \in \mathbb{N}$ (σημειώνομε ότι για $k = \alpha/2 - 1$, οι όροι στο $P_k(\theta, n)$ πρέπει να έχουν $d = 0$).

Η κεντρική ιδέα της αποδεικτικής γραμμής που θα ακολουθήσωμε είναι, να δείξωμε πρώτα ότι το

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}} q_n(\theta) d\theta$$

είναι μια καλή προσέγγιση της

$$f_{S_n/\sqrt{n}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x+n\psi(\theta/\sqrt{n})} d\theta$$

και κατόπιν, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Λ. 5.4.2, θα διαπιστώσωμε ότι η προσέγγιση αυτή είναι αυτή που δίδεται στο Θ. 5.2.2.
Προς τούτο θεωρούμε,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x+n\psi(\theta/\sqrt{n})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}} q_n(\theta)]dx\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x}||\mathrm{e}^{n\psi(\theta/\sqrt{n})} - \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}} q_n(\theta)| d\theta \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} |\mathrm{e}^{n\psi(\theta/\sqrt{n})} - \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}} q_n(\theta)| d\theta \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{\theta\notin(-\delta\sqrt{n},\delta\sqrt{n})} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}} |q_n(\theta)| d\theta \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{\theta\notin(-\delta\sqrt{n},\delta\sqrt{n})} \left|\phi(\theta/\sqrt{n})\right|^n d\theta \quad (5.5.47)
\end{aligned}$$

για οποιοδήποτε δ, λόγω των σχέσεων

$$\mathrm{e}^{n\psi(\theta/\sqrt{n})} = \phi_n(\theta) = \phi^n(\theta/\sqrt{n})$$

$$\psi_n(\theta) = \log\phi_n(\theta) = n\psi(\theta/\sqrt{n})$$

Αργότερα θα επιλέξουμε την τιμή του δ ώστε να φράξομε το σφάλμα.

Θεωρούμε, πρώτα, το τρίτο ολοκλήρωμα στην (5.5.47). Δεδομένου οιουδήποτε δ και με την υπόθεση non-lattice κατανομών (Ορς 3 ΠΡΤ), επειδή $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\theta)|d\theta < \infty$, από Λήμμα Riemann-Lebesque (Λ.1 ΠΡΤ) έχουμε $\phi(\theta) \to 0$ για $\theta \to \pm\infty$ οπότε μπορούμε να βρούμε $\tau_\delta < 1$ ώστε $|\phi(y)| \le \tau_\delta$ για κάθε $y > \delta$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\theta\notin(-\delta\sqrt{n},\delta\sqrt{n})} \left|\phi(\theta/\sqrt{n})\right|^n d\theta &\le \\
\tau_\delta^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{\theta\notin(-\delta\sqrt{n},\delta\sqrt{n})} \left|\phi(\theta/\sqrt{n})\right| d\theta &= \\
o(n^{-p}),\ \forall p > 0
\end{aligned}$$

Εξετάζομε τώρα το δεύτερο ολοκλήρωμα της (5.5.47). Ισχύει ότι $\forall\beta \ge 0$,

$$\int_{\theta\notin(-\delta\sqrt{n},\delta\sqrt{n})} \mathrm{e}^{-\theta^2/2}\theta^\beta d\theta = o(n^{-p}),\ \forall p > 0 \qquad (5.5.48)$$

Επίσης για οποιοδήποτε $\alpha > 2$ και slowly varying συνάρτηση U,

$$\begin{aligned}\int_{\theta\notin(-\delta\sqrt{n},\delta\sqrt{n})} \mathrm{e}^{-\theta^2/2}|\theta|^{\alpha}U(n^{1/2}/|\theta|)d\theta &\leq \\ C_q\int_{\theta\notin(-\delta\sqrt{n},\delta\sqrt{n})} \mathrm{e}^{-\theta^2/2}n^{q/2}U(1/\theta)|\theta|^{\alpha}d\theta &\leq \\ C_q\int_{\theta\notin(-\delta\sqrt{n},\delta\sqrt{n})} \mathrm{e}^{-\theta^2/2}|\theta|^{\alpha-q}n^{q/2}d\theta &= \\ o(n^{-p}) & \end{aligned} \tag{5.5.49}$$

$\forall q > 0$ και C_q θετική σταθερά εξαρτώμενη από q και $p > 0$ αυθαίρετο. Στην πρώτη ανισότητα, χρησιμοποιήσαμε την Π. 5.1.6, δηλαδή την σχέση,

$$\frac{U(n^{1/2}/|\theta|)}{U(1/|\theta|)} \leq C_q n^{q/2}$$

και στην δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την σχέση,

$$(1/|\theta|)^{-q}U(1/|\theta|) \leq 1$$

εφόσον $(1/|\theta|)^{-q}U(1/|\theta|) \to 0$ για $1/|\theta| \to 0$ και η $U(1/|\theta|)$ είναι slowly varying στο 0. Από το ανάπτυγμα της $q_n(\theta)$ με τις παρατηρήσεις, (5.5.48) και (5.5.49) συμπεραίνομε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα στην (5.5.47) είναι $o(n^{-p})$, $\forall p > 0$.

Θεωρούμε τώρα το πρώτο ολοκλήρωμα της (5.5.47) και έχομε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}}|\mathrm{e}^{n\psi(\theta/\sqrt{n})} - \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}}q_n(\theta)|d\theta &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}}|\mathrm{e}^{n\psi(\theta/\sqrt{n})+\frac{\theta^2}{2}} - w_n(\theta)|d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}}|r_n(\theta)|d\theta \end{aligned} \tag{5.5.50}$$

Από τις παρατηρήσεις μας επί του $r_n(\theta)$ δηλαδή ότι μπορεί να γραφή ως άθροισμα των $P_k(\theta,n)n^{-k}$ με τις προαναφερθείσες συνθήκες σχετικά με τα P_k και k, μαζί με το δεδομένο ότι $\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}}|\theta|^b d\theta < \infty$ για $b > 0$ και τις slowly varying συναρτήσεις L και J_L να μεταβάλωνται πιο αργά από οποιοδήποτε πολυώνυμο, μπορούμε να διαπιστώσωμε ότι,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2}}|r_n(\theta)|d\theta = \begin{cases} o(L(n^{1/2})/n^{\alpha/2-1}), & \alpha \notin 2\mathbb{Z} \\ o(J_L(n^{1/2})/n^{\alpha/2-1}), & \alpha \in 2\mathbb{Z}\end{cases} \tag{5.5.51}$$

Θεωρούμε τώρα το πρώτο ολοκλήρωμα. Θα χρησιμοποιήσωμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned}|\mathrm{e}^{\alpha} - \sum_{j=0}^{\gamma}\frac{\beta^j}{j!}| &\leq |\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{\beta}| + |\mathrm{e}^{\beta} - \sum_{j=0}^{\gamma}\frac{\beta^j}{j!}| \\ &\leq (|\alpha-\beta| + \frac{|\beta|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)!})\mathrm{e}^{\max\{\alpha,\beta\}}\end{aligned} \tag{5.5.52}$$

όπου στη δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιούμε το θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού καθώς και τον όρο του υπολοίπου στο ανάπτυγμα Taylor της e^{β}. Μπορούμε, ακόμη, να βρούμε δ αρκετά μικρό ώστε για $\theta \in [-\delta, \delta]$, έχομε

$$|\psi(\theta) + \frac{\theta^2}{2}| \leq \frac{\theta^2}{4} \text{ και } |\lambda(\theta)| \leq \frac{\theta^2}{4} \tag{5.5.53}$$

σχέσεις που συνεπάγονται ότι για $\theta \in [-\delta\sqrt{n}, \delta\sqrt{n}]$ έχομε

$$|n\psi(\theta/\sqrt{n}) + \frac{\theta^2}{4}| \leq \frac{\theta^2}{4}$$

και

$$|n\lambda(\theta/\sqrt{n})| \leq \frac{\theta^2}{4}$$

Χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις (5.5.52) και (5.5.53), λαμβάνομε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{\theta^2}{2}} |e^{n\psi(\theta/\sqrt{n})+\frac{\theta^2}{2}} - w_n(\theta)| d\theta &= \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{\theta^2}{2}} |e^{n\psi(\theta/\sqrt{n})+\frac{\theta^2}{2}} - \sum_{k=0}^{[\alpha/2-1]} \frac{(n\lambda(\theta/\sqrt{n}))^k}{k!}| d\theta &\leq \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{\theta^2}{2}} |n\psi(\theta/\sqrt{n}) + \frac{\theta^2}{2} - n\lambda(\theta/\sqrt{n})| e^{\frac{\theta^2}{4}} d\theta &+ \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{\theta^2}{2}} |\frac{n\lambda(\theta/\sqrt{n})}{([\alpha/2-1]+1)!}|^{[\alpha/2-1]+1} d\theta &= \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{\theta^2}{4}} |nR(\frac{\theta}{\sqrt{n}})| d\theta &+ \\
\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{\theta^2}{4}} |\frac{n\lambda(\theta/\sqrt{n})}{([\alpha/2-1]+1)!}|^{[\alpha/2-1]+1} d\theta &
\end{aligned} \tag{5.5.54}$$

Τώρα επειδή

$$\lambda(\theta) = o(\theta^{2+p})$$

για $\theta \in [-\delta\sqrt{n}, -\delta\sqrt{n}]$ και κάποιο μικρό $p > 0$, είναι εύκολο να δούμε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα στην (5.5.54)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{\theta^2}{4}} |\frac{n\lambda(\theta/\sqrt{n})}{([\alpha/2-1]+1)!}|^{[\alpha/2-1]+1} d\theta = o(\frac{1}{n^{\alpha/2-1}}) \tag{5.5.55}$$

Ακόμη έχομε

$$R(\theta) = \begin{cases} o(|\theta|^{\alpha} L(1/|\theta|)), \ \alpha \notin 2\mathbb{Z} \\ o(|\theta|^{\alpha} J_L(1/|\theta|)), \ \alpha \in 2\mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.5.56}$$

Υποθέτομε τώρα ότι α είναι μη άρτιος. Για δεδομένο $\epsilon > 0$, μπορούμε να επιλέξωμε δ αρκετά μικρό, ώστε για $\theta \in [-\delta, \delta]$,

$$R(\theta) \leq \epsilon|\theta|^{\alpha} L(1/|\theta|)$$

σχέση, που συνεπάγεται ότι για $\theta \in [-\delta\sqrt{n}, \delta\sqrt{n}]$,

$$nR(\theta/\sqrt{n}) \leq \epsilon \frac{|\theta|^\alpha}{n^{\alpha/2-1}} L(n^{1/2}/|\theta|)$$

Επομένως, για το πρώτο ολοκλήρωμα της (5.5.54) έχομε,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} |nR(\frac{\theta}{\sqrt{n}})| d\theta \leq \epsilon \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} \frac{|\theta|^\alpha}{n^{\alpha/2-1}} L(n^{1/2}/|\theta|) d\theta \tag{5.5.57}$$

Τώρα από την Π. 5.1.6, μπορούμε να επιλέξουμε $M > 0$ και οποιαδήποτε $p_1, p_2 > 0$ ώστε

$$\frac{L(\frac{n^{1/2}}{|\theta|})}{L(n^{1/2})} \leq \begin{cases} C|\theta|^{-p_1}, \ |\theta| < 1 \\ C|\theta|^{p_2}, \ |\theta| \geq 1 \end{cases}$$

για $n > M$.
Επειδή η συνάρτηση $C|\theta|^{\pm\alpha}$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\frac{L(\frac{n^{1/2}}{|\theta|})}{L(n^{1/2})} \to 1, \ n \to \infty \tag{5.5.58}$$

για όλα τα σταθεροποιημένα μη μηδενικά θ, (L slowly varying), από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχομε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} \frac{|\theta|^\alpha}{n^{\alpha/2-1}} L(n^{1/2}/|\theta|) d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} |\theta|^\alpha \frac{L(n^{1/2}/|\theta|)}{L(n^{1/2})} \frac{L(n^{1/2})}{n^{\alpha/2-1}} d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} |\theta|^\alpha \frac{L(n^{1/2}/|\theta|)}{L(n^{1/2})} \frac{L(n^{1/2})}{n^{\alpha/2-1}} d\theta \\ &= \frac{L(n^{1/2})}{n^{\alpha/2-1}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} |\theta|^\alpha \frac{L(n^{1/2}/|\theta|)}{L(n^{1/2})} d\theta \\ &\sim \frac{L(n^{1/2})}{n^{\alpha/2-1}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} |\theta|^\alpha d\theta \end{aligned} \tag{5.5.59}$$

για $n \to \infty$, εφόσον από την (5.5.58)

$$\mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} |\theta|^\alpha \frac{L(n^{1/2}/|\theta|)}{L(n^{1/2})} \stackrel{n\to\infty}{\to} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} |\theta|^\alpha$$

Τώρα από τις (5.5.57) και (5.5.59) προκύπτει,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} |nR(\theta/\sqrt{n})| d\theta}{L(n^{1/2})/n^{\alpha/2-1}} \leq \epsilon C$$

όπου C θετική σταθερά[1]. Επειδή ϵ αυθαίρετο, λαμβάνομε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta\sqrt{n}}^{\delta\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} |nR(\theta/\sqrt{n})| d\theta &= o(L(n^{1/2})/n^{\alpha/2-1}) && (5.5.60) \\ &= o(L(n^{1/2}x)/n^{\alpha/2-1}) && (5.5.61) \end{aligned}$$

[1] $C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{4}} |\theta|^\alpha d\theta$

για οποιοδήποτε σταθεροποιημένο x.

Η περίπτωση για α άρτιο, είναι η ίδια μόνο που η συνάρτηση L αντικαθισταται από την J_L που είναι επίσης slowly varying συνάρτηση.

Από τις σχέσεις: (5.5.47), (5.5.50), (5.5.51), (5.5.54), (5.5.55), (5.5.61) συμπεραίνουμε ότι,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x+n\psi(\theta/\sqrt{n})} &- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}q_n(\theta))d\theta = \\ &= \begin{cases} o(L(n^{1/2}x)/n^{\alpha/2-1}), & \alpha\notin 2\mathbb{Z} \\ o(J_L(n^{1/2}x)/n^{\alpha/2-1}). & \alpha\in 2\mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.5.62}$$

Δηλαδή εδείξαμε ότι $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}q_n(\theta)d\theta$ είναι καλή προσέγγιση της

$$f_{S_n/\sqrt{n}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x+n\psi(\theta/\sqrt{n})}d\theta$$

Θα υπολογίσωμε τώρα το

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}q_n(\theta)d\theta$$

Έχομε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}q_n(\theta)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}\Bigg(1+\sum_{4\le j<\alpha}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k!}\xi_{k,j}(\theta)\frac{1}{n^{j/2-1}} \\ &+ \begin{cases} \frac{-\pi|\theta|^\alpha L(n^{1/2}/|\theta|)}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)n^{\alpha/2-1}}, & \alpha\notin 2\mathbb{Z} \\ \frac{2(-1)^{\alpha/2}|\theta|^\alpha J_L(n^{1/2}/|\theta|)}{\Gamma(\alpha+1)n^{\alpha/2-1}}, & \alpha\in 2\mathbb{Z} \end{cases}\Bigg)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}\Bigg(1+\sum_{4\le j<\alpha}\sum_{k=1}^{j}\frac{\xi_{k,j}(\theta)}{k!n^{j/2-1}} \\ &+ n\xi(\frac{\theta}{n^{1/2}})\Bigg)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}\Bigg(1+\sum_{4\le j<\alpha}\sum_{k=1}^{j}\frac{\xi_{k,j}(\theta)}{k!n^{j/2-1}}\Bigg)d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}n\xi(\frac{\theta}{n^{1/2}})d\theta \\ &= \eta(x)+\eta(x)\sum_{3\le j<\alpha, j\in 2\mathbb{Z}}\frac{G_j(x)}{n^{j/2-1}} \qquad (\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}n\xi(\frac{\theta}{n^{1/2}})d\theta \end{aligned} \tag{5.5.63}$$

όπως προκύπτει από τις (5.1.3), (5.1.4), (5.2.16) με G_j τους συνήθεις Edgeworth συντελεστές. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}} n\xi(\frac{\theta}{n^{1/2}})d\theta$$

Έχομε,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}} n\xi(\frac{\theta}{n^{1/2}})d\theta \quad =$$

$$\begin{cases} \frac{-\pi}{2\pi\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)n^{\alpha/2-1}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}|\theta|^\alpha L(n^{1/2}/|\theta|)d\theta, \ \alpha\notin 2\mathbb{Z} \\ \frac{2(-1)^{\alpha/2}}{2\pi\Gamma(\alpha+1)n^{\alpha/2-1}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}|\theta|^\alpha J_L(n^{1/2}/|\theta|)d\theta, \ \alpha\in 2\mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.5.64}$$

Τώρα, από την (5.5.58) και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, για α περιττό έχομε,

$$\begin{aligned}
\frac{-\pi}{2\pi\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)n^{\alpha/2-1}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}|\theta|^\alpha L(n^{1/2}/|\theta|)d\theta &= \\
\frac{-\pi L(n^{1/2})}{2\pi\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)n^{\alpha/2-1}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}|\theta|^\alpha \frac{L(n^{1/2}/|\theta|)}{L^{n^{1/2}}}d\theta &\sim \\
\frac{-\pi L(n^{1/2}x)}{2\pi\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha\pi/2)n^{\alpha/2-1}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}|\theta|^\alpha d\theta &= \\
\frac{-\pi L(n^{1/2}x)}{\alpha!2\pi\sin(\alpha\pi/2)n^{\alpha/2-1}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x-\frac{\theta^2}{2}}|\theta|^\alpha d\theta &= \\
\frac{-\pi L(n^{1/2}x)}{\alpha!2\pi\sin(\alpha\pi/2)n^{\alpha/2-1}}2\sqrt{2}(-1)^{(\alpha-1)/2}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}D(x/\sqrt{2}) &= \\
-\frac{\sqrt{2}}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}D(x/\sqrt{2})\frac{L(n^{\alpha/2}x)}{n^{\alpha/2-1}} &
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το Λ. 5.5.1.
Επίσης χρησιμοποιήσαμε ότι

$$o(L(n^{1/2}x)/n^{\alpha/2-1}) = o(L(n^{1/2})/n^{\alpha/2-1})$$

για οποιοδήποτε σταθεροποιημένο x.

Για α μη ακέραιο και άρτιο, χρησιμοποιούμε βασικά, τα ίδια αποδεικτικά επιχειρήματα, με την slowly varying συνάρτηση $J_L(x)$ αντί της $L(x)$.

Έτσι από τις σχέσεις (5.5.62), (5.5.63), (5.5.64) και τα αποτελέσματα του Λ. 5.5.1 εδείχθη το Θ. 5.2.2.

5.6 Μη συμμετρική πυκνότης

Με τα αποτελέσματα για συμμετρική πυκνότητα δεδομένα, μπρούμε να γενικεύσωμε στη μη συμμετρική περίπτωση, που διατυπώθηκε στο Θ. 5.2.1. Η κύρια ιδέα είναι να γράψωμε τη μη συμμετρική πυκνότητα $f(x)$, ως

$$f(x) = s(x) + r(x)$$

όπου,

$$r(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \tag{5.6.65}$$

είναι συμμετρική συνάρτηση, και

$$s(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \tag{5.6.66}$$

είναι περιττή συνάρτηση.

Η συμμετρική πυκνότης r είναι εύκολα διαχειρίσιμη με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου και η περιττή συνάρτηση s μπορεί επίσης εύκολα να αντιμετωπισθή με μια μικρή τροποποίηση.

Σχετικά έχομε την ακόλουθη,

Πρόταση 5.6.1. *Για μια τ.μ. με πυκνότητα,*

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{-1-\beta} L_+(x) I(x \geq 0) \\ &+ (1-x)^{-1-\gamma} L_-(-x) I(x < 0) \end{aligned} \tag{5.6.67}$$

μπορούμε να διασπάσωμε τη πυκνότητα της ως

$$f(x) = r(x) + s(x)$$

όπου r και s όπως στις (5.6.65) και (5.6.66) αντίστοιχα. Τότε οι r και s είναι regularly varying και έχουν την ίδια τάξη $\alpha \equiv \min\{\beta, \gamma\}$ και γράφομε,

$$r(x) = \frac{L_r(x)}{1+|x|^{1+\alpha}}, \; s(x) = \frac{L_s(x)}{1+|x|^{1+\alpha}}, \; -\infty < x < \infty \tag{5.6.68}$$

όπου L_r είναι άρτια και L_s περιττή και είναι αμφότερες συνεχείς, slowly varying συναρτήσεις.
Επίσης ορίζομε,

$$m_n^{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n r(x)dx, \; m_n^{(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n s(x)dx$$

για $0 \leq n \leq \alpha - 1$, ως ροπές των r και s.
Η cumulant γεννήτρια συνάρτηση παίρνει τη μορφή,

$$\psi(\theta) = \mathfrak{x}(\theta) + \xi(\theta) + o(\xi(\theta))$$

όπου $\mathfrak{x}(\theta) = 1 + \sum_{1 \leq j < \alpha} k_j \frac{(\mathrm{i}\theta)^j}{j!}$ είναι το σύνηθες ανάπτυγμα Taylor έως και το μεγαλύτερης τάξης cumulant, και

$$\xi(\theta) = \begin{cases} \frac{2\mathrm{i}^\alpha|\theta|^\alpha}{\Gamma(a+1)}\Bigg(J_{L_r}(1/|\theta|) \pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2} L_s(1/|\theta|)\Bigg), \; \alpha \in 2\mathbb{Z} \\ \frac{2\mathrm{i}^\alpha|\theta|^\alpha}{\Gamma(a+1)}\Bigg(\pm J_{L_s}(1/|\theta|) + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} L_r(1/|\theta|)\Bigg), \; \alpha \in 2\mathbb{Z}+1 \\ \frac{-2\pi|\theta|^\alpha}{\Gamma(a+1)\sin(\alpha\pi)}\Bigg(\cos(\alpha\pi/2) L_r(1/|\theta|) \mp \mathrm{i}\sin(\alpha\pi/2) L_s(1/|\theta|)\Bigg), \; \alpha \notin \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.6.69}$$

είναι η μη αναλυτική συνιστώσα του $\psi(\theta)$. Εδώ $\pm$ και $\mp$ και τα δύο αναφέρονται στις περιπτώσεις όπου $\theta > 0$ ή $\theta < 0$.

Απόδειξη. Προφανώς οι r και s είναι regularly varying έχουν την ίδια τάξη και είναι συνεχείς. Ορίζομε $\phi_r(x)$ και $\phi_s(x)$ τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις των r και s αντίστοιχα. Εφόσον η r είναι συμμετρική, αποδεικνύεται (όπως και στην Π. 5.4.1) ότι,

$$\begin{aligned} \phi_r(\theta) &= 1 + \sum_{2\le j<\alpha, j\in 2\mathbb{Z}} m_j(r)\frac{(\mathrm{i}\theta)^j}{j!} \\ &+ \begin{cases} \frac{-\pi|\theta|^\alpha}{\Gamma(a+1)\sin(\alpha\pi/2)} L_r(1/|\theta|) + o(|\theta|^\alpha L_r(1/|\theta|)), & \alpha \notin 2\mathbb{Z} \\ \frac{2(-1)^{\alpha/2}|\theta|^\alpha}{\Gamma(a+1)} J_{L_r}(1/|\theta|) + o(|\theta|^\alpha J_{L_r}(1/|\theta|)), & \alpha \in 2\mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned} \tag{5.6.70}$$

Θεωρούμε τώρα την περιττή συνάρτηση s. Σημειώνομε ότι ο ρόλος που παίζει ένας περιττός και άρτιος α (ή q) αντιστρέφεται λόγω περιττής (αντί άρτιας) συνάρτησης. Επίσης σημειώνομε ότι $\phi_s(\theta) = -\phi_s(-\theta)$. Επομένως αρκεί να δειχθή το αποτέλεσμα για $\theta > 0$ (τότε η περίπτωση $\theta < 0$ έπεται). Ακολουθώντας την ίδια αποδεικτική γραμμή όπως στην Π. 5.4.1, έχομε

$$\begin{aligned} \phi_s(\theta) &= \sum_{1\le j<\alpha, j\in 2\mathbb{Z}+1} m_j^{(s)}\frac{(\mathrm{i}\theta)^j}{j!} \\ &+ \begin{cases} \frac{\mathrm{i}\pi|\theta|^\alpha}{\Gamma(a+1)\cos(\alpha\pi/2)} L_s(1/|\theta|) + o(|\theta|^\alpha L_s(1/|\theta|)), & \alpha \notin 2\mathbb{Z}+1 \\ \frac{2\mathrm{i}^\alpha|\theta|^\alpha}{\Gamma(a+1)} J_{L_s}(1/|\theta|) + o(|\theta|^\alpha J_{L_s}(1/|\theta|)), & \alpha \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases} \end{aligned} \tag{5.6.71}$$

για $\theta > 0$.
Προσθέτοντας τις (5.6.70) και (5.6.71) και μεταφέροντας την παράσταση στην cumulant γεννήτρια συνάρτηση, (όπως στην απόδειξη της Π. 5.2.3), λαμβάνομε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Θα χρειασθούμε επίσης το αντίστοιχο του Λ. 5.5.1, για περιττή συνάρτηση.

Λήμμα 5.6.2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x - \frac{\theta^2}{2}}(\pm|\theta|^\alpha)d\theta = \begin{cases} 2\sqrt{2}\mathrm{i}^{\alpha+1}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}D(x/\sqrt{2}), & a \in 2\mathbb{Z} \\ -\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{i}^\alpha H_\alpha(x), & a \in 2\mathbb{Z}+1 \\ \mathrm{i}\sqrt{\pi/2}\csc(\alpha\pi/2)\mathrm{e}^{-x^2/4}[D_\alpha(x) - D_\alpha(-x)], & a \notin \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.6.72}$$

όπου $D(z), H_k(z)$ και $D_\nu(z)$ είναι, αντίστοιχα, ολοκλήρωμα Dawson, πολυώνυμο Hermite τάξης k και η κλασσική παραβολική κυλινδρική συνάρτηση με παράμετρο ν. Εδώ

$$\pm|\theta|^\alpha = \begin{cases} |\theta|^\alpha, & \theta > 0 \\ -|\theta|^\alpha, & \theta < 0 \end{cases}$$

Δίνομε εδώ την απόδειξη του (ενός από τα δύο κύρια θεωρήματα του παρόντος κεφαλαίου) θεωρήματος 5.2.1.

Απόδειξη Θεωρήματος 5.2.1

Από την (5.6.67) μπορούμε να γράφωμε τις L_r και L_s ως

$$L_r(x) = \frac{1}{2}[L_+(|x|) + L_-(|x|)]$$

$$L_s(x) = \pm\frac{1}{2}[L_+(|x|) - L_-(|x|)]$$

όταν $\beta = \gamma$,

$$L_r(x) \sim \frac{1}{2}L_+(|x|),\ L_s(x) \sim \pm\frac{1}{2}L_+(|x|) \tag{5.6.73}$$

όταν $\beta < \gamma$

$$L_r(x) \sim \frac{1}{2}L_-(|x|),\ L_s(x) \sim \mp\frac{1}{2}L_-(|x|)$$

όταν $\beta > \gamma$, όπου τα $\pm$ και $\mp$ πρόσημα αντιστοιχούν στα $x \geq 0$ και $x < 0$. Αντικαθιστώντας τις L_r και L_s με τις (5.6.73) προχωρούμε στην απόδειξη όπως και στο Θ. 5.2.2 χρησιμοποιώντας το Λ. 5.6.2.

Κεφάλαιο 6

Φράγμα για τη σταθερά στο 'κατά μέσον' Κ.Ο.Θ

Στο Κεφάλαιο 3, τονίσαμε την σπουδαιότητα του Θεωρήματος Berry-Esseen· Πράγματι, η γνώση ενός ακριβούς φράγματος στο σφάλμα προσέγγισης, στο Κ.Ο.Θ., το καθιστά εφαρμόσιμο, ενώ από μόνο του, ως καθαρά ασυμπτωτικό θεώρημα, δεν παρέχει καμμιά χρηστική πληροφορία.

Πολλοί μαθηματικοί, εθεώρησαν φράγματα τύπου Berry-Esseen, χρησιμοποιώντας άλλες μετρικές και ιδιαίτερα φράγματα στον L^p. Για $p = 1$, η τιμή

$$||F - G||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)| dx$$

μετρά την απόσταση μεταξύ των *σ.κ.* F και G (γνωστή και ως μετρική Kantarovich ή απόσταση Wasserstein ή μετρική Gini) και παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, εφόσον από την ανισότητα

$$||F - G||_p^p \leq ||F - G||_\infty^{p-1} ||F - G||_1$$

προκύπτει ότι από τη μελέτη των L^1-φραγμάτων σε συνδυασμό με ένα τύπου L^∞, εξασφαλίζονται L^p-φράγματα $\forall p \in (1, +\infty)$

Είναι χρήσιμο να επισημάνωμε ότι η ορθή τοποθέτηση των προβλημάτων ασυμπτωτικής προσέγγισης τ.μ. από κάποιές άλλες, απαιτεί αναλυτικό και πλήρη προσδιορισμό της 'προσέγγισης ', διευκρινίζοντας ζητήματα, όπως π.χ. αν η προσέγγιση αφορά τ.μ. που ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητος, αν αφορά τις *σ.κ.* των τ.μ. κ.λ.π. Συνήθως το θέμα αυτό αντιμετωπίζεται με τον ορισμό κάποιας τοπολογίας στο σύνολο των υπό θεώρηση αντικειμένων, μέσω της απόστασης μεταξύ ζευγών στοιχείων. Ιδιαιτέρως, αν εκτός από το ποιοτικό ζήτημα 'προσέγγιση ή μη προσέγγιση' ενδιαφερόμαστε και για τον ρυθμό προσέγγισης, η έννοια της απόστασης είναι καθοριστική και είναι αναγκαίο να εισαχθή προκαταβολικά.

Πληροφορίες περί του τρόπου ορισμού αποστάσεων στα σύνολα τ.μ. με λογικό τρόπο, και των ιδιοτήτων τους, καθώς και των μεθόδων εφαρμογής τους, καθώς και των μεθόδων εφαρμογής τους σε προβλήματα προσέγγισης, αποτελούν το αντικείμενο ενός πολύ νέου κλάδου της Θεωρίας Πιθανοτήτων, αυτού των Πιθανοθεωρητικών μετρικών.

Αποτελέσματα με τη χρήση της L^1 μετρικής είναι γνωστά ως 'κατά μέσον' Κ.Ο.Θ. (mean central limit theorems).

Ο C. Esseen στο άρθρο του: 'On Mean Central limit theorems' (1958) μελετώντας τον ρυθμό προσέγγισης της κανονικότητος στο Κ.Ο.Θ., μέσω της L^1 νόρμας, για $X_1, X_2, \dots$ ακολουθία i.i.d. τ.μ. με $EX_1 = 0, EX_1^2 = \sigma^2, E|X_1|^3 < \infty$ και $\sigma.\kappa.$ $F(x)$, απέδειξε ότι $\forall$ τέτοια F, υπάρχει πεπερασμένο όριο,

$$A(F) = \lim_{n\to\infty} n^{1/2}||F_n - \Phi||_1$$

όπου $F_n(x)$ η $\sigma.\kappa.$ της $\frac{X_1+\dots+X_n}{\sigma\sqrt{n}}$, $\forall n$.

Μάλιστα, ο Zolotarev (On Asymptotically best constants in refinements on Mean limit Theorems) έδωσε ρητή έκφραση στο $A(F)$, αποδεικνύοντας ότι,

$$A(F) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\int_{-1/2}^{1/2} du \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\omega}{2}(1-x^2) + hu|\mathrm{e}^{-x^2/2}dx$$

όπου $\omega = \frac{|EX^3|}{3\sigma^2}$ και h είναι το span της $\sigma.\kappa.$ F, αν η F είναι lattice και $h = 0$, διαφορετικά.

Επίσης, για να κατασκευάσει ομοιόμορφες εκτιμήτριες ως προς όλες αυτές τις $\sigma.\kappa.$ F, εισήγαγε την ποσότητα

$$B = \sup_{F\in\mathcal{F}_\sigma} \frac{\sigma^3 A(F)}{E|X|^3}$$

όπου $\mathcal{F}_\sigma$, $\sigma \in (0,\infty)$ το σύνολο των $\sigma.\kappa.$ των τ.μ. με $EX_1 = 0, EX_1^2 = \sigma^2, E|X_1|^3 < \infty$ και απέδειξε ότι $B = 1/2$.

Στα επόμενα θεωρούμε το $\mathcal{F}_\sigma$, $\sigma \in (0,\infty)$ όπως περιγράφεται εδώ.

6.1 Μέθοδος Stein - Zero bias μετασχηματισμός

Τα φράγματα τύπου Berry-Esseen, της απόστασης μεταξύ μιας τ.μ. και της κανονικής προσέγγισης της, αντιμετωπίζονται και με τη χρήση της μεθόδου Stein. Αυτή βασίζεται στην κατασκευή βοηθητικών τ.μ. (coupling), όπως οι zero bias και οι size bias couplings, οι οποίες χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό των εν λόγω φραγμάτων.

Η Μέθοδος Stein ([22],[23]) χρησιμοποιεί χαρακτηριστικές εξισώσεις για να φράξη το σφάλμα κατά την προσέγγιση μιας κατανομής από μία άλλη, δεδομένη. Για την κανονική προσέγγιση ισχύει ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε και μόνον τότε αν

$$E(X-\mu)f(X) = \sigma^2 Ef'(X) \tag{6.1.1}$$

(Stein εξίσωση για την κανονική κατανομή) για όλες τις απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις f για τις οποίες $E|f'(X)| < \infty$.

Δοθείσης μιας συνάρτησης h (test function) έστω $Nh = Eh(Z)$ όπου $Z \sim N(0,1)$. Αν X είναι κοντά στη $N(\mu, \sigma^2)$, τότε $Eh[(X-\mu)/\sigma] - Nh$ θα είναι κοντά στο μηδέν και $E[(X-\mu)f(X) - \sigma^2 f'(X)]$ θα είναι κοντά στο μηδέν για μια μεγάλη κλάση συναρτήσεων h και f αντίστοιχα. Είναι φυσικό τότε δεδ7ομένης της h, να συσχετισθούν οι συναρτήσεις h και f μέσω της διαφορικής εξίσωσης,

$$h[(x-\mu)/\sigma] - Nh = (x-\mu)f(x) - \sigma^2 f'(x) \tag{6.1.2}$$

η λύση, ως προς f, της οποίας δίδει την δυνατότητα υπολογισμού της $Eh[(X-\mu)/\sigma]-Nh$ από την $E[(X-\mu)f(X) - \sigma^2 f'(X)]$ για αυτή την f.

Αποδεικνύεται ότι για οποιαδήποτε τ.μ. W μηδενικού μέσου και πεπερασμένης διασποράς σ^2, υπάρχει τ.μ. W^*, τέτοια ώστε για κάθε απόλυτα συνεχή συνάρτηση f, για την οποία $E|Wf(W)| < \infty$,

$$EWf(W) = \sigma^2 Ef'(W^*) \tag{6.1.3}$$

με πυκνότητα

$$\rho(\omega) = \begin{cases} \sigma^{-2}E(W \cdot 1\{W > \omega\}), \ \omega \geq 0 \\ \sigma^{-2}E(-W \cdot 1\{W < \omega\}), \ \omega < 0 \end{cases}$$

Ορισμός 6.1.1. *Έστω W τ.μ. με μηδενικό μέσο και πεπερασμένη διασπορά σ^2. Λέμε ότι η W^* έχει την $W-$zero biased κατανομή, αν για όλες τις απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις f με $E|Wf(W)| < \infty$,*

$$E(Wf(W)) = \sigma^2 E(f'(W^*))$$

Η ύπαρξη της zero-biased κατανομής για οποιοδήποτε τέτοιο W επιβεβαιώνεται εύκολα. Πράγματι, για δεδομένη $g \in C_c$ (:σύνολο συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα) θέτομε $G = \int_0^\omega g$. Η ποσότητα

$$T_g = \sigma^{-2}E(WG(W))$$

υπάρχει, εφόσον $EW^2 < \infty$, και ορίζει ένα γραμμικό τελεστή, $T : C_c \to \mathbb{R}$. Για να δούμε επιπλέον ότι T είναι θετικός, παίρνουμε $g \geq 0$. Τότε G είναι αύξουσα και ως εκ τούτου οι W και $G(W)$ είναι θετικά συσχετισμένες. Επομένως, $EWG(W) \geq EWEG(W) = 0$ και T θετικός. Επικαλούμενοι τώρα, το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, έχομε

$$T_g = \int g dv$$

για κάποιο μοναδικό, Radon μέτρο v, το οποίο είναι μέτρο πιθανότητος, εφόσον $T1 = 1$. Έπεται, ότι η $W-$zero biased κατανομή έχει πάντοτε πυκνότητα, ο τύπος της οποίας δίνεται στο Λήμμα 1, παρακάτω.

Υπολογίζοντας την (6.1.2) σε μια τ.μ. W μηδενικού μέσου, διασποράς σ^2 και παίρνοντας Μέση Τιμή στα 2 μέλη της, χρησιμοποιώντας και την (6.1.3), λαμβάνομε,

$$\begin{aligned} E(h(W/\sigma)) - Nh &= E[\sigma^2 f'(W) - Wf(W)] & (6.1.4) \\ &= \sigma^2[Ef'(W) - Ef'(W^*)] & (6.1.5) \end{aligned}$$

για μια μεγάλη κλάση συναρτήσεων h και f και $Nh = Eh(Z/\sigma)$.

Από την (6.1.5) συμπεραίνομε ότι η διαφορά μεταξύ της W και της κανονικής ($N(0, \sigma^2)$) όπως προσδιορίζεται από την h (tested on h), ισούται με την απόσταση μεταξύ της W και της W^* όπως προσδιορίζεται από την f'. Επομένως (βλ. [22]) η W είναι κανονική ανν $W \stackrel{d}{=} W^*$, ισοδύναμα

$$W \sim N(0, \sigma^2) \text{ ανν } EWf(W) = \sigma^2 Ef'(W) \tag{6.1.6}$$

για όλες τις απόλυτα συνεχείς f με $E|Zf(Z)| < \infty$.

Είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό που χαρακτηρίζεται από την $EWf(W) = \sigma^2 Ef'(W^*)$ ως μια συνάρτηση $W \to W^*$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των κατανομών με μηδενικό μέσο και διασπορά σ^2 που έχει, ως προκύπτει από την (6.1.6), μοναδικό σταθερό σημείο την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2. Έπεται ότι ένα κατά προσέγγιση σταθερό σημείο, θα ήταν κατά προσέγγιση η κανονική κατανομή και μπορούμε να μετρήσωμε την απόσταση της κατανομής του W από την κανονική, από την απόσταση μεταξύ της W και της zero bias W^*.

Το επόμενο Λήμμα, παρουσιάζει κάποιους από τις σημαντικές ιδιότητες του zero bias μετασχηματισμού.

Λήμμα 6.1.2. *Έστω W τ.μ. με μηδενική μέση τιμή και μη μηδενική πεπερασμένη διασπορά σ^2 · έστω επίσης W^* τ.μ. με την $W-$zero bias κατανομή σύμφωνα με τον ορισμό 6.1.3. Τότε ισχύουν:*
i) Η κανονική τ.μ. με μηδενικό μέσο είναι το μοναδικό σταθερό σημείο του zero-bias. μετασχηματισμού.
ii) Η zero-bias κατανομή είναι μονοκόρυφη γύρω από το μηδέν με συνάρτηση πυκνότητος,

$$p(w) = \sigma^{-2} E[W, W > \omega].$$

Έπεται ότι το στήριγμα της W^* είναι η κλειστή κυρτή θήκη του στηρίγματος της W και η W^* είναι φραγμένη όταν η W είναι φραγμένη.
iii) Ο μετασχηματισμός Zero-bias διατηρεί τη συμμετρία.
iv) $\sigma^2 E(W^*)^n = EW^{n+2}/(n+1)$, για $n \geq 1$.
v) Έστωσαν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $EX_i = 0$ και $EX_i^2 = \sigma_i^2$. Θέτομε, $W = X_1 + \ldots X_n$ και $EW^2 = \sigma^2 (= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$. Έστω I τυχαίος δείκτης ανεξάρτητος των X_i τέτοιος ώστε,

$$P(I = i) = \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}$$

Έστω,

$$W_i = W - X_i = \sum_{j \neq i} X_j$$

τότε $W_I + X_I^* = W - X_I + X_I^* = W^*$ είναι τ.μ. με την $W-$zero biased κατανομή. Δηλαδή αν $W = \sum_{i=1}^n X_i$, το άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. μηδενικού μέσου και πεπερασμένης διασποράς, μπορούμε να επιτύχωμε την $W-$zero biased κατανομή, αντικαθιστώντας μια τ.μ. X_i επίλεγμένη με πιθανότητα ανάλογη της διασποράς της, από μία

τ.μ. X_i^* *έχουσα την* X_i-*zero biased κατανομή, ανεξάρτητα από* $\{X_j, j \neq i\}$.
vi) Έστω X *τ.μ. μηδενικού μέσου με διασπορά* σ_X^2 *και κατανομή* F. *Έστω* $(\hat{X}', \hat{X}'')$ *με κατανομή,*

$$\hat{F}(\hat{x}', \hat{x}'') = \frac{(\hat{x}' - \hat{x}'')^2}{2\sigma_X^2} F(\hat{X}')F(\hat{X}'')$$

Τότε, με V *ανεξάρτητη από τις* $\hat{x}', \hat{x}''$ *ομοιόμορφη στο* $[0,1]$ *η* $V\hat{X}' + (1-V)\hat{X}''$ *έχει την* $X-$*zero biased κατανομή.*

Απόδειξη.
i) Είναι άμεσο από τον Ορισμό 6.1.1 και τον κατά Stein χαρακτηρισμό 6.1.6.
ii) Η συνάρτηση $p(w)$ είναι αύξουσα για $\omega < 0$ και φθίνουσα για $\omega > 0$. Αφού $EW = 0$, η $p(w)$ έχει όριο μηδέν για $\omega \to \infty$ και $\omega \to -\infty$. Οπότε είναι μη αρνητική και μονοκόρυφη γύρω από το μηδέν. Ότι η p ολοκληρώνει στην 1 και είναι η πυκνότης της W^* που ικανοποιεί τον Ορισμό 6.1.1, έπεται από την μοναδικότητα (βλ. Σχόλια μετά τον ορισμό 6.1.1) και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini χωριστά στην $E[f'(W^*) : W^* \geq 0]$ και $E[f'(W^*) : W^* < 0]$, χρησιμοποιώντας

$$E[W : W > \omega] = -E[W : W \leq \omega]$$

που προκύπτει από $EW = 0$.
ii) Αν ω είναι σημείο συνεχείας της $\sigma.\kappa.$ μιας συμμετρικής W,

$$E[W : W > \omega] = E[-W : -W > \omega] = -E[W : W < -\omega] = E[W : W > -\omega]$$

χρησιμοποιώντας $EW = 0$. Ως εκ τούτου υπάρχει μια έκδοση της $d\omega$ πυκνότητος της W^*, που είναι η ίδια στο ω και $-\omega$ για όλα σχεδόν τα $\omega[d\omega]$· οπότε η W^* είναι συμμετρική.
iv) Αντικαθιστώντας στην (6.1.3) $W^{n+1}/(n+1)$ για $f(W)$, έχουμε $EW^{n+2}/(n+1) = \sigma^2 E(W^*)^n$.
v) χρησιμοποιώντας ότι οι $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες και την (6.1.3), για τις X_i αντικαθιστώντας την W έχουμε,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 Ef'(W^*) &= EWf(W) = \sum_{i=1}^n EX_i f(W) \\
&= \sum_{i=1}^n EX_i f(W_i + X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n EX_i^2 f'(W_i + X_i^*) \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} Ef'(W_i + X_i^*) \\
&= \sigma^2 Ef'(W_I + X_I^*).
\end{aligned}$$

Επομένως για όλες τις διαφορίσιμες f, έχουμε

$$Ef'(W^*) = Ef'(W_I + X_I^*)$$

και το αποτέλεσμα έπεται.
vi)

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 Ef'(V\hat{X}' + (1-V)\hat{X}'') &= \sigma_X^2 E\int_0^1 f'[u(\hat{X}'-\hat{X}'') + \hat{X}'']du \\
&= \sigma_X^2 E(\frac{1}{\hat{X}'-\hat{X}''} \times \\
&\times \int_{\hat{X}''}^{\hat{X}'} f'[u(\hat{X}'-\hat{X}'') + \hat{X}'']d[u(\hat{X}'-\hat{X}'') + \hat{X}'']) \\
&= \sigma_X^2 E(\frac{f(\hat{X}') - f(\hat{X}'')}{\hat{X}'-\hat{X}''}) \\
&= \frac{1}{2}E(X'-X'')[f(X')-f(X'')] \\
&= EX'f(X') - EX''f(X') \\
&= EXf(X) \\
&= \sigma_X^2 Ef'(X^*).
\end{aligned}$$

Άρα, για όλες τις ομαλές f, $Ef'(U\hat{X}' + (1-U)\hat{X}'') = Ef'(X^*)$.

Μπορούμε να διεισδύσουμε περισσότερο στη φύση του μετασχηματισμού zero-bias, παρατηρώντας τη δράση του επί της κατανομής της τ.μ. X που παίρνει τις τιμές +1,-1 με ίση πιθανότητα. Υπολογίζοντας τη συνάρτηση πυκνότητας της $X-$zero biased τ.μ. X^*, σύμφωνα με το Λήμμα (6.1.2) ii), βρίσκουμε ότι η X^* είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-1,1]$. Ένας όμοιος υπολογισμός για την διακριτή, μηδενικού μέσου τ.μ. X που παίρνει τις τιμές $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, δείχνει ότι η X-zero biased κατανομή είναι μίξη ομοιόμορφων πάνω στα διαστήματα $[x_i, x_{i+1}]$. Από τα δύο αυτά παραδείγματα, μπορούμε να καταλάβουμε πως μια ομοιόμορφη τ.μ. V εμπλέκεται στο Λήμμα (6.1.2) vi). Αξίζει να παρατηρήσωμε επίσης, ότι η ιδιότητα iv), για $n=1$ δίδει ότι $EW^* = 0$ όταν $EW^3 = 0$.

Το ακόλουθο παράδειγμα δίδει τον τρόπο κατασκευής φράγματος στο Κ.Ο.Θ. βάσει του Λήμματος (6.1.2) v) και των φραγμάτων στην λύση f της δ.ε. (6.1.2) για μια συνάρτηση h με k φραγμένες παραγώγους (βλ. Barbour A. (1990): Stein's method for diffusion approximation. Probab. Theory Related fields 84 (297-322) και Götze F. (1991): On the rate of convergence in the multivariate CLT. Ann. Probab. 19 (724-739))

Παράδειγμα 6.1.3. *Θεωρούμε ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ όχι κατ' ανάγκην ισόνομες, με $EX_i = 0$ και $Var(X_i) = \sigma_i^2, i = 1, 2, \ldots, n$ και ισχύουν (Barbour και Götze)*

$$||f^{(j)}|| \leq (j\sigma^j)^{-1}||h^{(j)}||,\ j = 1, 2, \ldots, k \tag{6.1.7}$$

Από Λήμμα (6.1.2) v) χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τ.μ. W^* με την $W-$zero biased κατανομή. Δηλαδή επιλέγομε τυχαίο δείκτη I με πιθανότητα ανάλογη του σ_i^2 (όπως Λήμμα (6.1.2) v)) και αντικαθιστούμε την X_I από μία ανεξάρτητη X_I^*με την X_I-zero biased κατανομή. Τώρα, επειδή $EWf(W) =$

$\sigma^2 Ef'(W^*)$, *χρησιμοποιώντας τις (6.1.7) έχουμε,*

$$\begin{aligned} |E[h(W/\sigma) - Nh]| &= |E[Wf'(W) - \sigma^2 f''(W)]| \\ &= \sigma^2 |E[f''(W^*) - f''(W)]| \\ &\leq \sigma^2 ||f^{(3)}|| E|W^* - W| \\ &\leq \frac{1}{3\sigma} ||h^{(3)}|| E|X_I^* - X_I| \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ανισότης προκύπτει από τις (6.1.7) και ότι f'' είναι φραγμένος τελεστής· και η δεύτερη ανισότης προκύπτει από τις (6.1.7) και την σχέση

$$W^* - W = W - X_I + X_I^* - W = X_I^* - X_I.$$

Τώρα από την (6.1.3), χρησιμοποιώντας την

$$E|X_I^* - X_I| \leq E|X_I^*| + E|X_I|$$

και την συνάρτηση $f(x) = x^2 sgn(x)$, λαμβάνομε $E|X_i^*| = \frac{1}{2} E|X_i|^3$. Χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να υποθέσωμε ότι οι τ.μ. είναι scaled οπότε $EX_I^2 = 1$. Έτσι από ανισότητα Hölder έχομε $E|X_I| \leq 1 \leq E|X_I|^3$. Τελικά, εφόσον $EW^2 = n = \sigma^2$

$$\begin{aligned} |E[h(W/\sigma) - Nh]| &\leq \frac{3}{2} E|X_I|^3 \frac{1}{3\sigma} ||h^{(3)}|| \\ &= \frac{||h^{(3)}|| E|X_I|^3}{2\sigma}. \end{aligned}$$

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι η απόσταση μεταξύ μιας μηδενικού μέσου και πεπερασμένης διασποράς, τ.μ. W και μιας μηδενικού μέσου, κανονικής με την ίδια διασπορά, φράσσεται από την απόσταση μεταξύ της W και μίας W^* με την $W-$zero biased κατανομή, ωρισμένες σε ένα κοινό χώρο πιθανότητος.

Θεώρημα 6.1.4. *Έστω W μια μηδενικού μέσου με διασπορά σ^2 και υποθέτουμε (W, W^*) ότι ορίζονται σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας ώστε η W^* έχει την $W-$zero biased κατανομή. Τότε για όλες τις συναρτήσεις h (test function) με τέσσερεις φραγμένες παραγώγους,*

$$\begin{aligned} |E[h(W/\sigma) - Nh]| &\leq \frac{1}{3\sigma} ||h^{(3)}|| \sqrt{E[E((W^* - W)/W)^2]} \\ &+ \frac{1}{8\sigma^2} ||h^{(4)}|| E(W^* - W)^2. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Παραλείπεται (βλ. [18]).

Το ακόλουθο Πόρισμα, εφαρμογή του Θεωρήματος (6.1.4) στο άθροισμα ανεξαρτήτων και ισόνομων τ.μ., δείχνει πως ο μετασχηματισμός zero-bias, οδηγεί σε ένα φράγμα του σφάλματος προσέγγισης για ομαλές συναρτήσεις, τάξης $1/n$, κάτω από πρόσθετες υποθέσεις σχετικές με τις ροπές, μεταξύ και των οποίων περιλαμβάνεται η μηδενική τρίτη ροπή.

Πόρισμα 6.1.5. *Έστωσαν $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. τ.μ. μηδενικού μέσου, διασποράς 1 με μηδενική τρίτη ροπή και τέταρτη ροπή πεπερασμένη. Θέτομε $W = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Τότε για οποιαδήποτε συνάρτηση h με τέσσερεις φραγμένες παραγώγους,*

$$|E[h(W/\sqrt{n}) - Nh]| \leq \frac{1}{n}[\frac{1}{3}||h^{(3)}|| + \frac{1}{6}||h^{(4)}||EX^4].$$

Απόδειξη. Παραλείπεται (βλ. [18]).

Εντελώς ανάλογα αποτελέσματα με τα ήδη αναφερθέντα στην Παράγραφο αυτή και άλλα που δεν αναφέρονται, προκύπτουν από την χρήση του size-bias μετασχηματισμού

Ορισμός 6.1.6. *Για μια μη αρνητική τ.μ. W με πεπερασμένη μέση τιμή $EW = \mu$, λέμε ότι η τ.μ. W^* έχει την $W-$size biased κατανομή αν ικανοποιεί την*

$$EWf(W) = \mu Ef(W^*)$$

για όλες τις f για τις οποίες $E|Wf(W)| < \infty$ και $E|f(W^*)| < \infty$.

Οι size biased κατανομές είναι πολύ γνωστές στη Δειγματοληπτική Θεωρία και στην Ανανεωτική Θεωρία.

Το ακόλουθο θεώρημα (μονοδιάστατη εκδοχη του κυρίου αποτελέσματος στη θεωρία των size-biased κατανομών), δείχνει την σχέση μιας size-biased κατανομής με την κανονική προσέγγιση.

Θεώρημα 6.1.7. *Έστω W μη αρνητική τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή $EW = \mu, Var(W) = \sigma^2$ και έστω W^* ωρισμένη στον ίδιο χώρο πιθανότητας με την W και με την $W-$size biased κατανομή. Τότε, για οποιαδήποτε κατα τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη h,*

$$\begin{aligned} |E[h(\{W-\mu\}/\sigma) - Nh]| &\leq 2||h||\frac{\mu}{\sigma^2}\sqrt{Var[E(W^*-W)/W]} \\ &+ ||h'||\frac{\mu}{\sigma^3}E(W^*-W)^2 \end{aligned}$$

όπου $||\cdot||$ η supremum νόρμα και $Nh = Eh(Z)$ με Z την τυποποιημένη κανονική μεταβλητή.

Απόδειξη. Παραλείπεται (βλ. [21]).

Εν συντομία θα αναφέρωμε βασικά αποτελέσματα ανάλογα με αυτά της zero-biased περίπτωσης κατανομών (που έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα).

Κατασκευή μιας $W-$size biased τ.μ. W^*
όταν $W = X_1 + \ldots + X_n,\ X_i, i = 1, \ldots, n$ τ.μ.

Αν $X_i, i = 1, \ldots, n$ μη αρνητικές i.i.d τ.μ. πεπερασμένης μέσης τιμής, τότε η W^* μπορεί να κατασκευασθή, αν αντικατασταθή οποιοσδήποτε όρος του αθροίσματος, έστω X_1 από μία ανεξάρτητη τ.μ. X_1^* με την X_1-size biased κατανομή, δηλ. $W^* = X_1^* + \ldots + X_n$.

Αν $X_i, i = 1, \ldots, n$ μη i.i.d. τ.μ. τότε η W^* μπορεί να κατασκευασθή, αντικαθιστώντας X_I με X_I^* όπου ο τυχαίος δείκτης I επιλέγεται ανεξάρτητα, με κατανομή

$$P(I = i) = \frac{EX_i}{\sum EX_j}$$

και προσαρμόζοντας τις υπόλοιπες τ.μ. στην δεσμευμένη κατανομή τους, δεδομένης της τιμής του X_I.

Μια ειδική περίπτωση αυτής της ιδέας είναι η διαδικασία Midzuno's, όπου μια size biased μεταβλητή χρησιμοποιείται στην κατασκευή unbiased ratio εκτιμητών στη δειγματοληψία σε πεπερασμένο πληθυσμό.

Σχέση size biased τ.μ. με την κανονική προσέγγιση (μονοδιάστατη περίπτωση)

Δεδομένης μιας τ.μ. W και μιας (test) συνάρτησης h, μπορούμε να υπολογίσουμε την $E[h(\{W - \mu\}/\sigma) - Nh]$ υπολογίζοντας την ποσότητα $E[f'(W) - (W - \mu/\sigma^2)f(W)]$ όπου f είναι η φραγμένη λύση της εξίσωσης Stein,

$$f'(w) - (w - \mu/\sigma^2)f(w) = h(w - \mu/\sigma) - Nh$$

Αν η W^* έχη την $W-$size biased κατανομή και επομένως ικανοποιεί την $EWf(W) = EWEf(W^*)$, λαμβάνομε

$$\begin{aligned} E[h(W - \mu/\sigma)] - Nh &= E[f'(W) - (W - \mu/\sigma^2)f(W)] \\ &= E[f'(W) - (\mu/\sigma^2)\{f(W^*) - f(W)\}]. \end{aligned}$$

Όλα τα αποτελέσματα σχετικά με τις size-bias κατανομές όπως και για τις zero bias τοιαύτες, ισχύουν και για την πολυδιάστατη περίπτωση (βλ. [21] και [18]).

6.2 L^1-απόσταση μεταξύ δυο συναρτήσεων κατανομής

Η L^1 απόσταση μεταξύ των *σ.κ.* F και G,

$$||F - G||_1 = \int_{-\infty}^{infty} |F(t) - G(t)| dt$$

γνωστή και ως απόσταση Wasserstein ή μετρική Kantarovic, αποδεικνύεται ([24]) ότι παρίσταται ισοδύναμα ως ακολούθως,

$$||F - G||_1 = \inf E|X - Y| \tag{6.2.8}$$

όπου το infimum εκτείνεται πάνω σε όλες τις τ.μ. (couplings) X και Y που ορίζονται σε κοινό χώρο πιθανότητος και έχουν περιθώριες κατανομές F και G αντίστοιχα.

Από την (6.2.8) προκύπτει η σχέση

$$||F - F^*|| \leq E|W^* - W|$$

για οποιοδήποτε ζεύγος (coupling) (W, W^*) όπου F^* είναι η σ.κ. της W^* και F η σ.κ. της W. Το επόμενο θεώρημα είναι τώρα άμεσο.

Θεώρημα 6.2.1. *Έστω W τ.μ. μηδενικού μέσου, διασποράς 1 με σ.κ. F και έστω W^* τ.μ. με την zero biased κατανομή ωρισμένη στον ίδιο χώρο πιθανότητος με την W. Τότε, με Φ την σ.κ. της τυποποιημένης κανονικής, ισχύει*

$$||F - \Phi|| \leq 2E|W - W^*|$$

Επίσης ισχύουν οι εξής δυο ισοδύναμες εκφράσεις της L^1-απόστασης μεταξύ δύο τ.μ. X και Y στο $\mathbb{R}$.

Αν $\mathcal{L} = \{h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : |h(x) - h(y)| \leq |y - x|\}$ τότε

$$||Y - X||_1 = \sup_{h \in L} |E[h(Y) - h(X)]| \tag{6.2.9}$$

ή ισοδύναμα με

$$\mathcal{F} = \{f : f \text{ απόλυτα συνεχής }, f'(0) = f(0) = 0, f' \in L\}$$

ισχύει

$$||Y - X||_1 = \sup_{f \in \mathcal{F}} |E[f'(Y) - f'(X)]| \tag{6.2.10}$$

Το ακόλουθο Λήμμα δείχνει την πολύ ισχυρή σχεση μεταξύ της κανονικής προσέγγισης μιας τ.μ. W και της απόστασης Wasserstein μεταξύ των W και W^*.

Λήμμα 6.2.2. *Έστω W τ.μ. με $EW = 0$, $Var(W) < \infty$ και W^* τ.μ. με την $W-$zero biased κατανομή και N κανονική μεταβλητή με ίδια διασπορά με την W. Τότε,*

$$||W - N||_1 \leq 2||W - W^*||_1.$$

Απόδειξη. Επειδή $\sigma^{-1} d(X, Y) = d(\sigma^{-1}X, \sigma^{-1}Y)$ και $\sigma^{-1}W^* = (\sigma^{-1}W)^*$ (από ορισμό της W^*), μπορούμε να υποθέσωμε ότι $Var(W) = 1$. Από την (6.2.8) έχουμε

$$\inf_{(Y,X)} E|Y - X| = d(Y, X) \tag{6.2.11}$$

όπου το infimum εκτείνεται σε όλα τα (Y, X) ορισμένες σε κοινό χώρο πιθανότητος, με τις δεδομένες περιθώριες. Παίρνομε W, W^* για να επιτύχωμε το infimum $d(W, W^*)$.

Για μια διαφορίσιμη συνάρτηση h (test function) με $\sigma^2 = 1$ ο Stein ([22]) δείχνει ότι η λύση f της (6.1.2) είναι 2 φορές διαφορίσιμη με $||f''|| \leq 2||h'||$, όπου $||\cdot||$ supremum νόρμα. Τώρα, πηγαίνοντας από αριστερά στα δεξιά στην (6.1.5), εφαρμόζοντας την προηγούμενη ανισοτική σχέση και την (6.2.11) έχομε,

$$\begin{aligned} |Eh(W) - Nh| &\leq ||f''||E|W - W^*| && (6.2.12)\\ &\leq 2||h'||E|W - W^*| && (6.2.13)\\ &= 2||h'||d(W, W^*) && (6.2.14) \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις $h \in \mathcal{L}$ είναι απόλυτα συνεχείς με $||h'|| \leq 1$, επομένως λαμβάνοντας supremum πάνω στις $h \in \mathcal{L}$ στο αριστερό μέρος της (6.2.14), χρησιμοποιώντας και την (6.2.9) η απόδειξη συμπληρώνεται.

Λήμμα 6.2.3. *Για F, G σ.κ. των X, Y, αντιστοίχως και $V \sim U(0,1)$, ισχύει*

$$||F - G||_1 = E|F^{-1}(V) - G^{-1}(V)|. \tag{6.2.15}$$

Επιπλέον, για οποιαδήποτε $a \geq 0$ και $b \in \mathbb{R}$ όπου $F_{a,b}$ και $G_{a,b}$ οι σ.κ. των $aX + b$ και $aY + b$ αντιστοίχως,

$$||F_{a,b} - G_{a,b}||_1 = a||F - G||_1. \tag{6.2.16}$$

Απόδειξη. Παραλείπεται (βλ. [24])

Παρατήρηση: Η συνέπεια του Λήμματος (6.2.3) είναι ότι στην (6.2.8) η L^1-αποστάση ως infimum, πάντοτε επιτυγχάνεται.

Θεώρημα 6.2.4. *Έστω $X_i, i = 1, \ldots, n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $EX_i = 0, i = 1, \ldots, n$ και $Var(X_i) = \sigma_i^2, i = 1, \ldots, n$ που ικανοποιούν $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = 1$ και έστω*

$$W = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Τότε για F συνάρτηση κατανομής της W και Φ σ.κ. της τυποποιημένης κανονικής,

$$||F - \Phi||_1 \leq 2E|X_I - X_I^*| \tag{6.2.17}$$

όπου X_i^* είναι οποιαδήποτε τ.μ. έχουσα την X_i-zero biased κατανομή, ανεξάρτητη από τις $\{X_j, j \neq i\}, i = 1, \ldots, n$ και I είναι ένας τυχαίος δείκτης, ανεξάρτητος των $\{X_i, X_i^*, i = 1, \ldots, n\}$ με κατανομή $P(I = i) = \sigma_i^2$. Έστωσαν G_i και G_i^* σ.κ. των X_i και X_i^* αντιστοίχως. Τότε,

$$||F - \Phi||_1 \leq 2\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 ||G_i^* - G_i||_1. \tag{6.2.18}$$

Ιδιαίτερα, όταν $W = \sum_{i=1}^n X_i/\sqrt{n}$ για $X, X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. μηδενικού μέσου, διασποράς 1 και σ.κ. G,

$$||F - \Phi||_1 \leq [2/\sqrt{n}]||G^* - G||_1 \tag{6.2.19}$$

και G^* η σ.κ. της X^*, μπορεί να εκφρασθή ως

$$G^*(X) = E[X(X - x)1(X \leq x)]. \tag{6.2.20}$$

Απόδειξη. Από Λήμμα (6.1.2) v), έχομε $W^* - W = X_I^* - X_I$ με I τυχαίο δείκτη με κατανομή

$$P(I = i) = \frac{\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}$$

Επομένως η (6.2.17) προκύπτει από το Θεώρημα 6.2.1.

Έστωσαν τώρα $V_i, i = 1, 2, \ldots, n$ συλλογή τμ. i.i.d. $U(0, 1)$ και θέτομε,

$$(X_i, X_i^*) = (G_i^{-1}(V_i), G_i^{*-1}(V_i)), \; i = 1, 2, \ldots, n$$

(αντίστροφος μετασχηματισμός πιθανότητος). Τότε Λήμμα 6.2.3 συνεπάγεται,

$$E|X_i^* - X_i| = ||G_i^* - G_i||_1.$$

Παίρνοντας μέσο όρο στο δεξιό μέρος της (6.2.17) επί του I, λαμβάνουμε,

$$||F - \Phi||_1 \leq 2E|X_I^* - X_I| = 2\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 E|X_i^* - X_i| = 2\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 ||G_i^* - G_i||_1$$

δηλαδή εδείχθη η (6.2.18).

Αν οι τ.μ. είναι i.i.d., $\sigma_i^2 = 1/n$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2.3, έχομε

$$2\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 ||G_i^* - G_i||_1 = 2\frac{n}{n}||G_{1/\sqrt{n}}^* - G_{1/\sqrt{n}}||_1 = [2/\sqrt{n}]||G^* - G||_1$$

δηλαδή την (6.2.19).

Τώρα, από το Λήμμα 6.1.2 ii), για τ.μ. X μηδενικού μέσου και διασποράς 1, η *σ.κ.* G^* της X^* είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue, με πυκνότητα $P^*(X) = -E[X1(X \leq x)]$. Επομένως η *σ.κ.* της X^* είναι

$$\begin{aligned} G^*(X) &= -E[X \int_{-\infty}^x 1(X \leq u)du] \\ &= -E[X \int_X^x du 1(X \leq x)] \\ &= E[X \int_X^x du 1(X \leq x)] \\ &= E(X(X - x)1(X \leq x)). \end{aligned}$$

Η εφαρμογή των (6.2.19) και (6.2.20) σε ιδιαίτερες περιπτώσεις οδηγεί στο ακόλουθο,

Πόρισμα 6.2.5. *Έστωσαν $B_1 \ldots, B_n$ i.i.d Bernoulli με $p \in (0, 1), q = 1 - p$ και $X_i = (B_i - p)/\sqrt{pq}$. Τότε για τη σ.κ. του αθροίσματος $W = (\sum_{i=1}^n X_i)/\sqrt{n}$ που έχει Διωνυμική $B(n, p)$ κατανομή, $\forall n = 1, 2, \ldots$ ισχύει*

$$||F - \Phi||_1 \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}} = \frac{E|X_1|^3}{\sqrt{n}}$$

$(E|X_1|^3 = \frac{p^2+q^2}{\sqrt{pq}})$

Για F σ.κ. του αθροίσματος $W = (\sum_{i=1}^{n} V_i)/\sqrt{n}$ όπου $V_1, V_2, \ldots, V_n$ i.i.d. τ.μ. με $E(V_i) = 0, Var(V_i) = 1$ και ομοιόμορφη κατανομή $U[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ $\forall n = 1, 2, \ldots$ ισχύει

$$||F - \Phi||_1 \leq \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n}} = \frac{E|V_1|^3}{3\sqrt{n}}$$

$(E|V_1|^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4})$

Αν X είναι οποιαδήποτε τ.μ. με $EX = 0, Var(X) = \sigma_1^2$ με σ.κ. G και Z τ.μ. ανεξάρτητη της X με κατανομή την κανονική $N(0, \sigma_2^2)$ τότε αν $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$, η σ.κ. F του $W = X + Z$ (διασποράς $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$), ικανοποιεί

$$||F - \Phi||_1 \leq 2\sigma_1^2 ||G^* - G||_1$$

Απόδειξη. Για $X = \frac{B-p}{\sqrt{pq}}$, από την (6.2.20) του Θεωρήματος 6.2.4, έχομε

$$G^*(X) = \frac{pq}{\sqrt{pq}}(x + \frac{p}{\sqrt{pq}})$$

για $x \in [-\frac{p}{\sqrt{pq}}, \frac{q}{\sqrt{pq}}]$ δηλαδή η X^* είναι ισόνομη με την $\frac{V-p}{\sqrt{pq}}$, όπου $V \sim U[0, 1]$. Επομένως, από το Λήμμα 6.2.3,

$$\begin{aligned} ||G^* - G||_1 &= ||\frac{V-p}{\sqrt{pq}} - \frac{B-p}{\sqrt{pq}}||_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{pq}}||V - B||_1 \\ &= \frac{p^2+q^2}{2\sqrt{pq}} \end{aligned}$$

και το αποτέλεσμα έπεται από την (6.2.19) του Θεωρήματος 6.2.4.

Για την ομοιόμορφη κατανομή $U[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, η (6.2.20) του Θεωρήματος 6.2.4 δίδει,

$$G^*(x) = -\frac{\sqrt{3}x^3}{36} + \frac{\sqrt{3}x}{4} + \frac{1}{2}, \; x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

Τώρα

$$||G^* - G||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |G^*(t) - G(t)| dt = \ldots = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

και εφαρμόζοντας την (6.2.19) του Θεωρήματος 6.2.4 έχομε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Ο τρίτος ισχυρισμός του Πορίσματος έπεται από την (6.2.18) του Θεωρήματος 6.2.4 για $n = 2$ και το δεδομένο ότι η κανονική τ.μ. είναι ένα σταθερό σημείο του μετασχηματισμού zero bias.

6.3 Το κύριο Θεώρημα

Στην Παράγραφο αυτή διατυπώνουμε το κύριο θεώρημα αυτού του Κεφαλαίου, που είναι ακριβώς Θεώρημα τύπου Berry-Esseen για το 'κατά μέσον' Κ.Ο.Θ. και αποδεικνύουμε το μέρος i) αυτού.

Η απόδειξη του Θεωρήματος βασίζεται στη Μέθοδο Stein και σε όλα τα σχετικά με αυτην εννοιολογικά εργαλεία. Ιδιαίτερα χρησιμοποιούμε τον zero bias μετασχηματσμό και τον υπολογισμό ενός Stein συναρτησοειδούς $((B(G))$, και τις ιδιότητες του.

Θεώρημα 6.3.1. *Έστωσαν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $EX_j = 0$, $EX_j^2 = \sigma_j^2$ και σ.κ. $G_1 \in \mathcal{F}_{\sigma_1}, \ldots, G_n \in \mathcal{F}_{\sigma_n}, n \in \mathbb{N}$· έστω επίσης F_n η σ.κ. της*

$$W = \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

όπου $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. Τότε,
i) $||F_n - \Phi||_1 \leq \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^n E|X_i|^3$.
Ιδιαίτερα, αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι ισόνομες με σ.κ. $G \in \mathcal{F}_\sigma$,

$$||F_n - \Phi||_1 \leq \frac{E|X_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.
ii) για την περίπτωση όπου όλες οι τ.μ. είναι i.i.d. με σ.κ. G, θέτοντας

$$C_m = \inf\{C : \frac{\sqrt{n}\sigma^3||F_n - \Phi||_1}{E|X|^3} \leq C, \forall G \in \mathcal{F}_1, n \geq m\} \tag{6.3.21}$$

ισχύει ότι $C_1 \leq 1$, για το άνω φράγμα του C_1

$$C_1 \geq \frac{2\sqrt{\pi}(2\Phi(1) - 1) - (\sqrt{\pi} + \sqrt{2}) + 2\mathrm{e}^{-1/2}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = 0,535377\ldots \tag{6.3.22}$$

για το κάτω φράγμα.

Προφανώς η ακολουθία $\{C_m\}_{m\geq 1}$ είναι φθίνουσα ως προς m και μη αρνητική, οπότε έχει όριο, έστω C_∞.

Θέτομε,

$$B(G) = \frac{2\sigma^2||G^* - G||_1}{E|X|^3} \tag{6.3.23}$$

όπου $G^*(X) = \sigma^{-2}E[X(X-x)1(X \leq x)]$ είναι η (zero-biased) κατανομή της τ.μ. X^*, coupling της τ.μ. X, με $EX = 0, Var(X) = \sigma^2$. Οι ιδιότητες κυρτότητος του συναρτησοειδούς $B(G)$ που εξαρτώνται από τη συμπεριφορά του zero-bias μετασχηματισμού πάνω στις μίξεις, αποτελούν το κλειδί της απόδειξης του Θεωρήματος 6.3.1.

Για την απόδειξη του του i) Θεωρήματος 6.3.1 θα χρειαστούμε την επόμενη,

Πρόταση 6.3.2. *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.3.1, έχομε*

$$||F_n - \Phi||_1 \leq \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} B(G_i) E|X_i|^3.$$

Απόδειξη. Αντικαθιστούμε στην 6.2.18 του Θεωρήματος 6.2.4 τα σ_i^2 με σ_i^2/σ^2 και τα $||G_i^* - G_i||_1$ με $\frac{1}{\sigma}||G_i^* - G_i||_1$. Τότε, χρησιμοποιώντας και τον ορισμό του $B(G)$,

$$\begin{aligned} ||F_n - \Phi||_1 &\leq 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} \frac{1}{\sigma} ||G_i^* - G_i||_1 \\ &= \frac{1}{\sigma^3} 2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 ||G_i^* - G_i||_1 \frac{E|X_i|^3}{E|X_i|^3} \\ &= \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} B(G_i) E|X_i|^3 \end{aligned}$$

Για το σύνολο $\mathcal{F}$ των μη τετριμμένων κατανομών με μηδενική μέση τιμή και πεπερασμένες ροπές τρίτης τάξης, θέτομε

$$B(\mathcal{F}) = \sup_{G \in \mathcal{F}} B(G) \tag{6.3.24}$$

Θα χρειασθούμε επίσης, το επόμενο

Λήμμα 6.3.3. *Για όλα τα $\sigma \in (0, \infty)$,*

$$B(\mathcal{F}_\sigma) = 1.$$

Απόδειξη. Παραλείπεται.

Απόδειξη. i) του Θεωρήματος 6.3.1.
Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 6.3.2 και το Λήμμα 6.3.3.

Κλεινουμε την παράγραφο αυτή με τρία Λήμματα απαραίτητα για τα επόμενα.

Λήμμα 6.3.4. *Για $a \geq 0$, $b > 0$ και $l > 0$ έχομε*

$$\int_0^l |(a+b)\frac{u}{l} - a| du = \frac{1}{2} \frac{a^2 + b^2}{a + b} \tag{6.3.25}$$

Λήμμα 6.3.5. *Έστω G η κατανομή μιας μη τετριμμένης και μηδενικού μέσου τ.μ. X με στήριγμα εκ δύο σημείων $x < y$. Τότε η X^* είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[x, y]$ και*

$$EX^2 = -xy, \; E|X|^3 = -\frac{xy(y^2 + x^2)}{y - x}$$

και

$$||L(X^*) - L(X)||_1 = \frac{1}{2} \frac{y^2 + x^2}{y - x}$$

όπου $L(X)$ η σ.κ. της X.
Ιδιαίτερα $B(G) = 1$ και $B(\mathcal{F}_1) \geq 1$.

Απόδειξη. Επειδή η G είναι μη τετριμμένη έχει θετική διασπορά. Έτσι η πυκνότης g^* της G^* στο u, που όπως αποδεικνύεται (ως Θεώρημα 6.2.4) είναι ανάλογη στην ποσότητα $E[X1(X > u)]$, είναι μηδενική έξω από το $[x, y]$ και σταθερή εντός αυτού. Έτσι, $G^*(\omega) = \frac{\omega - x}{y - x}$ για $\omega \in [x, y]$. Ότι η G έχει μηδενική μέση τιμή συνεπάγεται ότι τα σημεία x και y του στηρίγματος ικανοποιούν $x < 0 < y$ και ότι η G δίδει θετικές πιθανότητες $\frac{y}{y-x}$ και $-\frac{x}{y-x}$ στα x και y αντίστοιχα. Οι ταυτότητες των ροπών είναι άμεσες.

Τώρα κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $u = \omega$ και εφαρμόζοντας την (6.3.25) με $a = \frac{y}{y-x}$, $b = -\frac{x}{y-x}$ και $l = y - x$, έχομε,

$$||L(X^*) - L(X)||_1 = \int_x^y |\frac{\omega - x}{y - x} - \frac{y}{y - x}| d\omega = \frac{1}{2}\frac{y^2 + x^2}{y - x}.$$

Από την (6.3.23) τώρα λαμβάνομε $B(G) = 1$.

Λήμμα 6.3.6. *Έστω $G \in \mathcal{F}_\sigma$ για κάποιο $\sigma \in (0, \infty)$, έστω G η σ.κ. της X και για $a \neq 0$, έστω G_a η σ.κ. της aX. Τότε,*

$$B(G_a) = B(G)$$

και ιδιαίτερα,

$$B(\mathcal{F}_\sigma) = B(F_1)$$

για όλα τα $\sigma \in (0, \infty)$.

Απόδειξη. Ότι η aX^* έχει ίδια κατανομή με την $(aX)^*$ έπεται από τον ορισμό της X^* (6.1.3). Οι ταυτότητες $\sigma_{aX}^2 = a^2\sigma_X^2$, $E|aX|^3 = |a|^3 E|X|^3$ και η

$$||L(aX) - L(aY)||_1 = |a| ||L(X) - L(Y)||_1$$

(από την βαθμωτή ιδιότητα της L^1-απόστασης) όπου $L(X)$ η σ.κ. της X συνεπάγονται, χρησιμοποιώντας και την (6.3.23),

$$B(G_a) = B(G).$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται από

$$\{B(G) : G \in \mathcal{F}_\sigma\} = \{B(G) : G \in \mathcal{F}_1\}$$

6.4 Αναγωγή σε κατανομές με στήριγμα 3 σημείων

Στην παράγραφο αυτή, χρησιμοποιούμε μια ιδιότητα συνέχειας του $B(G)$ για να δείξωμε ότι το supremum του επί της $\mathcal{F}_1$, επιτυγχάνεται σε κατανομές πεπερασμένου στηρίγματος. Εκμεταλλευόμενοι μια ιδιότητα τύπου κυρτότητος, του zero bias μετασχηματισμού, πάνω στις μίξεις κατανομών που έχουν ίσες διασπορές, μειώνουμε την υπολογιστική δυσκολία, ανάγοντας τον υπολογισμό του supremum, πάνω στο D_3, που είναι το σύνολο των κατανομών μηδενικού μέσου και διασποράς 1, με στήριγμα το πολύ τριών σημείων.

Έστω (S, Σ) μετρήσιμος χώρος και $\{m_s\}_{s \in S}$ μια οικογένεια μέτρων πιθανότητος στο $\mathbb{R}$ τέτοιων ώστε για κάθε Borel υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}$, η συνάρτηση

$$S \to [0,1] : s \to m_s(A)$$

είναι μετρήσιμη. Αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητος στον (S, Σ) η συνολοσυνάρτηση

$$m_\mu(A) = \int_S m_s(A) d\mu(s)$$

είναι ένα <u>μέτρο πιθανότητος</u>, ονομάζεται δε η <u>μ μίξη των $\{m_s\}_{s \in S}$</u>.

Συμβολίζουμε με E_μ και E_s τις μέσες τιμές ως προς τα μέτρα m_μ και m_s και έστω X_μ και X_s οι τ.μ. με κατανομές m_μ και m_s αντιστοίχως. Για παράδειγμα, για όλες τις συναρτήσεις f που είναι ολοκληρώσιμες ως προς μ, έχουμε

$$\begin{aligned} E_\mu f(X) = \int f(X) dm_\mu &= \int f(X) \int dm_s(s) d\mu(s) \\ &= \int \int f(X) dm_s(s) d\mu(s) \\ &= \int E_s f(X) d\mu(s). \end{aligned}$$

Την προηγούμενη μπορούμε επίσης να γράψωμε ως

$$Ef(X_\mu) = \int Ef(X_s) d\mu(s).$$

Ιδιαίτερα, αν $\{m_s\}_{s \in S}$ ειναι οικογένεια κατανομών μηδενικού μέσου με $\sigma_s^2 = EX_s^2$ διασπορές και απόλυτες τρίτες ροπές $\gamma_s = E|X_s^3|$, η μίξη κατανομών m_μ έχει διασπορά σ_μ^2 και τρίτη απόλυτη ροπή γ_μ που δίδονται ως

$$\sigma_\mu^2 = \int_S \sigma_s^2 d\mu(s), \ \gamma_\mu = \int_S \gamma_s d\mu$$

όπου μπορεί και τα δύο να είναι άπειρα.

Σημειώνουμε οτι $\sigma_\mu^2 < \infty$ συνεπάγεται $\sigma_s^2 < \infty$ μ-σχεδόν βέβαια και ως εκ τούτου η m_s^*, η m_s zero biased κατανομή, υπάρχει μ-σχεδόν βέβαια.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η zero biased κατανομή μιας μίξης είναι μια μίξη zero biased κατανομών.

Θεώρημα 6.4.1. *Έστω $\{m_s\}_{s\in S}$ μια οικογένεια κατανομών στο $\mathbb{R}$, μηδενικού μέσου και μ ένα μέτρο πιθανότητος στο S τέτοιο ώστε η διασπορά σ_μ^2 της μίξης κατανομών είναι θετική και πεπερασμένη. Τότε m_μ^*, η m_μ zero biased κατανομή, υπάρχει και δίδεται από τη μίξη*

$$m_\mu^* = \int m_s^* dv$$

όπου $dv/d\mu = \sigma_s^2/\sigma_\mu^2$. Ιδιαίτερα, $v = \mu$ ανν σ_s^2 είναι σταθερά, μ-σχεδόν βέβαια.

Απόδειξη. Η κατανομή m_μ^* υπάρχει εφόσον m_μ έχει μηδενικό μέσο και μη μηδενική πεπερασμένη διασπορά. Έστω X_μ^* τ.μ. που έχει την m_μ-zero biased κατανομή και έστω Y τ.μ. με κατανομή m_μ^*. Για οποιαδήποτε απόλυτα συνεχή συνάρτηση f για την οποία υπάρχουν οι παρακάτω μέσες τιμές, έχομε

$$\begin{aligned}
\sigma_\mu^2 Ef'(X_\mu^*) &= EX_\mu f(X_\mu) \\
&= \int EX_s f(X_s) d\mu \\
&= \int \sigma_s^2 Ef'(X_s^*) d\mu \\
&= \sigma_{\mu^2} \int Ef'(X_s^*) dv \\
&= \sigma_\mu^2 Ef'(Y)
\end{aligned}$$

Εφόσον, λοιπόν, $Ef'(X_\mu^*) = Ef'(Y)$ για όλες αυτές τις f , συμπεραίνομε ότι $X_\mu^* \stackrel{d}{=} Y$ (X_μ^* και Y έχουν ίδια κατανομή).

Θυμίζομε έναν ισοδύναμο τύπο της L^1 απόστασης ((6.2.9),(6.2.10)),

$$||F - G||_1 = \sup_{f\in\mathcal{L}} |Ef(X) - Ef(Y)| \tag{6.4.26}$$

όπου

$$\mathcal{L} = \{f : |f(x) - f(y)| \leq |x - y|\}$$

X και Y τ.μ. με κατανομές F και G αντιστοίχως.

Με μια μικρή αυθαιρεσία ως προς τον συμβολισμό, γράφομε $B(X)$ αντί $B(G)$ όταν η X έχη κατανομή G.

Θεώρημα 6.4.2. *Αν X_μ είναι η μ-μίξη μιας οικογένειας $\{X_s : s \in S\}$ τ.μ. μηδενικού μέσου, διασποράς 1, ικανοποιεί την $E|X_\mu^3| < \infty$, τότε*

$$B(X_\mu) \leq \sup_{s\in S} B(X_s) \tag{6.4.27}$$

Αν C είναι μια οικογένεια, μηδενικού μέσου και πεπερασμένης διασποράς 1, τ.μ., με πεπερασμένες απόλυτες τρίτες ροπές και $D \subset C$ τέτοιο ώστε κάθε κατανομή στη C μπορεί να παρασταθή ως μίξη κατανομών στη D, τότε

$$B(C) = B(D). \tag{6.4.28}$$

Απόδειξη. Επειδή οι διασπορές σ_s^2 των X_s είναι σταθερές, η κατανομή X_μ^* είναι η μ-μίξη των $\{X_s : s \in S\}$, από το Θεώρημα 6.4.1. Επομένως, εφαρμόζοντας την (6.4.26), έχομε

$$\begin{aligned} ||L(X_\mu^*) - L(X_\mu)||_1 &= \sup_{f \in \mathcal{L}} |Ef(X_\mu^*) - Ef(X_\mu)| \\ &= \sup_{f \in \mathcal{L}} |\int_S Ef(X_s^*)d\mu - \int_S Ef(X_s)d\mu| \\ &\leq \sup_{f \in \mathcal{L}} \int_S |Ef(X_s^*) - Ef(X_s)|d\mu \\ &\leq \int_S ||L(X_s^*) - L(X_s)||_1 d\mu \qquad (6.4.29) \end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι $Var(X_\mu) = \int_S EX_s^2 d\mu = 1$ εφαρμόζοντας την (6.4.29), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} B(X_\mu) &= \frac{2||L(X_\mu^*) - L(X_\mu)||_1}{E|X_\mu^3|} \\ &\leq \frac{2\int_S 2||L(X_s^*) - L(X_s)||_1 d\mu}{E|X_\mu^3|} \\ &= \frac{\int_S B(X_s)E|X_s^3|}{E|X_\mu^3|} d\mu \\ &\leq \sup_{s \in S} B(X_s) \frac{\int_S E|X_s^3| d\mu}{E(X_\mu^3)} \\ &= \sup_{s \in S} B(X_s). \end{aligned}$$

$(\int_S E|X_s^3|d\mu = E(X_\mu^3))$.
Έτσι το πρώτο συμπέρασμα εδείχθη.

Τώρα όσον αφορά στην (6.4.28), από τον ορισμό του $B(G)$ και τη (6.4.26), έχομε ότι $B(D) \leq B(C)$. Η αντίστροφη ανισότης, δηλαδή $B(C) \leq B(D)$, προκύπτει από την (6.4.27).

Παρατήρηση. Το αποτέλεσμα του θεωρήματος δεν ισχύει όταν θεωρήσουμε μίξεις τ.μ. με άνισες διασπορές. Ιδιαίτερα, αν $X_s \sim N(0, \sigma_s^2)$ και σ_s^2 δεν είναι σταθερά ως προς s, τότε X_μ είναι μίξη κανονικών με άνισες διασπορές και δεν είναι κανονική. Ως εκ τούτου, σε αυτή την περίπτωση έχομε $B(X_\mu) > 0$, ενώ $B(X_s) = 0$ για όλα τα s.

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα (6.4.2) με σκοπό να αναγάγωμε τον υπολογισμό του $B(\mathcal{F}_1)$ σε κατανομές πεπερασμένου στηρίγματος, θα χρειασθούμε μια ιδιότητα συνεχείας του zero bias μετασχηματισμού, που δίδεται στο επόμενο Λήμμα.

Συμβολίζουμε $X_n \xrightarrow{d} X$,την σύγκλιση της X_n στη X κατά κατανομή.

Λήμμα 6.4.3. *Έστωσαν X και $X_n, n = 1, 2, \ldots$ τ.μ. μηδενικού μέσου και πεπερασμένων μη μηδενικών διασπορών. Αν*

$$X_n \xrightarrow{d} X, \ \lim_{n \to \infty} EX_n^2 = EX^2$$

τότε,

$$X_n^* \xrightarrow{d} X^*$$

Απόδειξη. Παραλείπεται (Goldstein L. (2009), A probabilistic proof of the Lindaberg-Feller CLT. American Mathematical Monthly 116, 45-60).

Με χρήση του Λήμματος 6.4.3, μπορούμε να αποδείξωμε την ακόλουθη ιδιοτητα συνεχείας του συναρτησοειδούς $B(X)$.

Λήμμα 6.4.4. *Έστω X και $X_n, n \in \mathbb{N}$ τ.μ. μηδενικού μέσου με πεπερασμένες μη μηδενικές απόλυτες ροπές τρίτης τάξεως. Αν*

$$X_n \xrightarrow{d} X,\ \lim_{n\to\infty} EX_n^2 = EX^2,\ E|X_n^3| \to E|X^3|$$

τότε

$$B(X_n) \to B(X),\ n \to \infty.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα (6.4.3), έχομε $X_n^* \xrightarrow{d} X^*$. Έστω V ομοιόμορφα κατανεμημένη τ.μ.· θέτομε

$$(Y, Y_n, Y^*, Y_n^*) = (F_X^{-1}(V), F_{X_n}^{-1}(V), F_{X^*}^{-1}(V), F_{X_n^*}^{-1}(V))$$

όπου F_W συμβολίζει την *σ.κ.* της W. Τότε $Y \stackrel{d}{=} X$, $Y_n \stackrel{d}{=} X_n$, $Y^* \stackrel{d}{=} X^*$ και $Y_n^* \stackrel{d}{=} X_n^*$ (αντίστροφος Μετασχηματισμός πιθανότητος). Επιπλέον από τις $X_n \xrightarrow{d} X$ και $X_n^* \xrightarrow{d} X^*$ και το Θεώρημα 8 ΠΡΤ, $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y$, $Y_n^* \xrightarrow{a.s.} Y^*$, και από (6.2.15) του Λήμματος 6.2.3,

$$||L(X_n^*) - L(X_n)||_1 = E|Y_n^* - Y_n|$$

και

$$||L(X^*) - L(X)||_1 = E|Y^* - Y|$$

όπου $L(W)$ η *σ.κ.* της τ.μ. W.

Από την (6.1.3) με $f(x) = x^2 sgn(x)$ βρίσκομε, για μια τ.μ. έστω Y

$$E|Y^3| = 2Var(Y)E|Y^*|$$

Επομένως, για $n \to \infty$, έχομε

$$EY_n^2 = EX_n^2 \to EX^2 = EY^2$$

και

$$\begin{aligned} E|Y_n^*| = \frac{E|Y_n^3|}{2E|Y_n^2|} &= \frac{E|X_n^3|}{2E|X_n^2|} \\ &\stackrel{n\to\infty}{\to} \frac{E|X^3|}{2E|X^2|} \\ &= \frac{E|Y^3|}{2E|Y^2|} \\ &= E|Y^*|. \end{aligned}$$

Συνεπώς από Θεώρημα 9 ΠΡΤ, οι $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{Y_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες, οπότε $\{Y_n^* - Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Επειδή δε $Y_n^* - Y_n \stackrel{a.s.}{\to} Y^* - Y$ για $n \to \infty$, έχομε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} ||L(X_n^*) - L(X_n)||_1 &= \lim_{n\to\infty} E|Y_n^* - Y_n| \\ &= E|Y^* - Y| \\ &= ||L(X^*) - L(X)||_1. \end{aligned} \tag{6.4.30}$$

Συνδυάζοντας την (6.4.30) με την σύγκλιση των διασπορών και των απολύτων τρίτων ροπών όπως δηλώνονται στην υπόθεση του Λήμματος, και την (6.3.23), η απόδειξη συμπληρώνεται.

Τα επόμενα δύο Λήμματα δανείζονται πολλά από το Θεώρημα 2.1 στο άρθρο Hoeffoing, W. (1955), Annals of Mathematical Statistics 26, 268-275.

Λήμμα 6.4.5. *$B(\mathcal{F}_1) = B(\cup_{m\geq 3} D_m)$ όπου D_m συμβολίζει την οικογένεια όλων των κατανομών μηδενικού μέσου διασποράς 1 με στήριγμα το πολύ m σημείων.*

Απόδειξη. Θέτομε $\mathcal{M}$ την οικογένεια των κατανομών στην $\mathcal{F}_1$ που έχουν συμπαγές στήριγμα. Δείχνομε πρώτα ότι

$$B(\mathcal{F}_1) \leq B(\mathcal{M}) \tag{6.4.31}$$

Πράγματι, έστω $L(X) \in \mathcal{F}_1$ δίδεται και για $n \in \mathbb{N}$, θέτομε $Y_n = X1_{|x|\leq n}$. Προφανώς $Y_n \stackrel{d}{\to} X$. Επειδή $E|X^3| < \infty$ και $|Y_n^p| \leq |X^p|$, $\forall p \geq 0$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$EY_n \to EX = 0 \tag{6.4.32}$$

$$EY_n^2 \to EX^2 = 1,\ E|Y_n^3| \to E|X^3|,\ n \to \infty$$

Θέτομε

$$X_n = Y_n - EY_n. \tag{6.4.33}$$

Τότε, $X_n = Y_n - EY_n \stackrel{d}{\to} X - 0 = X$ (από θεώρημα Slutsky's). Έτσι, λόγω των (6.4.32) ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 6.4.4, οπότε

$$B(X_n) \to B(X),\ n \to \infty$$

με $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. Έτσι εδείχθη η (6.4.31).

Θεωρούμε τώρα $L(X) \in \mathcal{M}$ έτσι ώστε $|x| \leq M$ a.s. για κάποιο $M > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω

$$Y_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k}{2^n} 1(\frac{k-1}{2^n} < X \leq \frac{k}{2^n}).$$

Επειδή $|X| \leq M$ a.s., κάθε Y_n έχει στήριγμα με πεπερασμένο αριθμό σημείων και είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Προφανώς ισχύει $Y_n \to X$ a.s. και οι (6.4.32) ισχύουν από το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης. Ορίζοντας X_n από την (6.4.33), οι υποθέσεις του Λήμματος 6.4.4 ικανοποιούνται, οπότε

$$B(X_n) \to B(X),\ n \to \infty$$

με

$$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \cup_{m\geq 3} D_m \tag{6.4.34}$$

δείχνοντας $B(\mathcal{M}) \leq B(\cup_{m\geq 3} D_m)$. Συνδυάζοντας την ανισότητα αυτή με την (6.4.31), λαμβάνομε $B(\mathcal{F}_1) \leq B(\cup_{m\geq 3} D_m)$. Η αντίστροφη της τελευταίας ανισότητος είναι προφανής· επομένως $B(\mathcal{F}_1) = B(\cup_{m\geq 3} D_m)$.

Λήμμα 6.4.6. *Κάθε κατανομή στο $\cup_{m\geq 3} D_m$ μπορεί να εκφραστεί ως πεπερασμένη μίξη D_3 κατανομών.*

Απόδειξη. Το Λήμμα ισχύει τετριμμένα για $m = 3$· υποθέτουμε ότι ισχύει για όλους τους ακέραιους από 3 εώς $m-1$ και θα το δείξωμε για $m = 3$.

Η κατανομή κάθε $X \in D_m$ προσδιορίζεται από τις τιμές του στηρίγματος $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ και ένα διάνυσμα πιθανότητος $\underline{P} = (p_1, \ldots, p_m)$. Αν κάποιες από τις συνιστώσες του $\underline{P}$ είναι μηδενικές, τότε $X \in D_k$ για $k < m$ και η επαγωγή θα περαιώνετο· Έτσι υποθέτομε ότι όλες οι συνιστώσες του $\underline{P}$ είναι γνήσια θετικές. Επειδή $X \in D_m$, το διάνυσμα $\underline{P}$ πρέπει να ικανοποιή

$$A\underline{P} = \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_m^2 \end{pmatrix}$$

(αφού το $\underline{P}$ είναι διάνυσμα πιθανότητος, η μέση τιμή είναι μηδενική και η διασπορά 1.)

Επειδή $A \in \mathbb{R}^{3\times m}$ με $m > 3$, $kerA \neq \{0\}$ δηλαδή υπάρχει $\underline{v}$ με

$$A\underline{v} = 0, \;\; \underline{v} = (v_1, \ldots, v_m) \tag{6.4.35}$$

Επειδή $\underline{v} \neq 0$ και η εξίσωση που προκύπτει από την πρώτη σειρά του A είναι $\sum_{i=1}^m v_i = 0$, το διάνυσμα $\underline{v}$ περιέχει θετικές και αρνητικές τιμές. Επειδή δε, το διάνυσμα $\underline{P}$ έχει γνήσια θετικές συνιστώσες, οι αριθμοί t_1 και t_2 δίδονται από τις,

$$t_1 = \inf\{t > 0 : \min_i (p_i + tv_i) \geq 0\}$$

και

$$t_2 = \inf\{t > 0 : \min_i (p_i - tv_i) \geq 0\}$$

είναι γνήσια θετικοί. Σημειώνουμε ότι, τα

$$\underline{P}_1 = \underline{P} + t_1\underline{v} \text{ και } \underline{P}_2 = \underline{P} - t_2\underline{v}$$

ικανοποιούν

$$A\underline{P}_1 = A(\underline{P} + t\underline{v}) = A\underline{P} = c = A(\underline{P} - t_2\underline{v}) = A\underline{P}_2$$

λόγω της (6.4.35), και έτσι τα $\underline{P}_1, \underline{P}_2$ είναι διανύσματα πιθανότητος εφόσον οι συνιστώσες τους είναι μη αρνητικοί και αθροίζουν στην μονάδα. Επιπλέον οι αντίστοιχες κατανομές έχουν μηδενική μέση τιμή και διασπορά 1 και σε καθένα από τα δύο αυτά διανύσματα, τουλάχιστον μια συνιστώσα έχει γίνει μηδέν. Επομένως το διάνυσμα $\underline{P} = (p_1, \ldots, p_m)$ μπορεί να εκφρασθή ως η μίξη

$$\underline{P} = \frac{t_2}{t_1 + t_2}\underline{P}_1 + \frac{t_1}{t_1 + t_2}\underline{P}_2$$

διανυσμάτων πιθανότητος με στήριγμα το πολύ $m-1$ σημείων. Από αυτό συνάγεται ότι η X είναι η μίξη δυο κατανομών στη D_{m-1} και έτσι συμπληρώνεται η επαγωγή.

Θεώρημα 6.4.7.

$$B(\mathcal{F}_1) = B(D_3).$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.4.2 και των Λημμάτων 6.4.5 και 6.4.6.

Λόγω του προηγούμενου αποτελέσματος, μπορούμε να περιορίσουμε την προσοχή μας στην D_3.

6.5 Φράγμα για τις D_3 κατανομές

Το Λήμμμα 6.3.6 και το Θεώρημα 6.4.7 συνεπάγονται ότι

$$B(\mathcal{F}_\sigma) = B(\mathcal{F}_1) = B(D_3)$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος που ακολουθεί, θα χρειαστούμε το επόμενο,

Λήμμα 6.5.1. *Έστω $x < y < 0 < z$ και m_1,m_0 οι μοναδικές μηδενικού μέσου κατανομές με στήριγμα $\{x, z\}$,$\{y, z\}$ αντιστοίχως δηλαδή,*

$$m_1(\{\omega\}) = \begin{cases} \frac{z}{z-x}, \ \omega = x \\ \frac{-x}{z-x}, \ \omega = z \\ 0, \ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$m_0(\{\omega\}) = \begin{cases} \frac{z}{z-y}, \ \omega = y \\ \frac{-y}{z-y}, \ \omega = z \\ 0, \ \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε

$$||m_1^* - m_0||_1 \leq ||m_1^* - m_1||_1. \tag{6.5.36}$$

Απόδειξη. Έστωσαν F_1, F_0 και F_1^* οι σ.κ. των m_1, m_0 και m_1^* αντιστοίχως. Από Λήμμα 6.3.5, m_1^* ειναι ομοιόμορφη επί του $[x,z]$. Υπάρχουν δυο περιπτώσεις, εξαρτώμενες από τα σχετικά ορίσματα των $F_1^*(y) = \frac{y-x}{z-x}$ και $F_0(y) = \frac{z}{z-y}$.

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $F_1^*(y) \leq F_0(y)$ ή ισοδύναμα,

$$y(x+z) \leq y^2 + z^2 \tag{6.5.37}$$

από το Λήμμα 6.3.5, έχομε

$$\begin{aligned} ||m_1^* - m_1||_1 = \frac{z^2+x^2}{2(z-x)} &= \frac{(z^2+x^2)(z-y)^2}{2(z-x)(z-y)^2} \\ &= \frac{z^4 - 2yz^3 + y^2z^2 + x^2z^2 - 2c^2yz + x^2y^2}{2(z-x)(z-y)^2} \\ &= \frac{(z^4 - 2yz^3 + x^2z^2 - 2x^2yz) + y^2z^2 + x^2y^2}{2(z-x)(z-y)^2}. \end{aligned} \tag{6.5.38}$$

Θέτοντας $J_1 = [x,y)$ και $J_2 = [y,z]$ έχομε $||m_1^* - m_0||_1 = I_1 + I_2$ όπου

$$I_i = \int_{J_i} |F_1^*(\omega) - F_0(\omega)| d\omega, \ i = 1,2$$

Επειδή $F_1^*(\omega) \geq 0 = F_0(\omega)$ για όλα τα $\omega \in J_1$,

$$I_1 = \int_x^y \frac{\omega - x}{z-x} d\omega = \frac{1}{2}\frac{(y-x)^2}{z-x} = \frac{(y-x)^2(z-y)^2}{2(z-x)(z-y)^2}. \tag{6.5.39}$$

Δεδομένου ότι $F_1^*(y) < F_0(y)$, εφαρμόζοντας το Λήμμα 6.3.4, με $a = \frac{z}{z-y} - \frac{y-x}{z-x}$, $b = \frac{-y}{z-y}$ και $l = z-y$, μετά την αλλαγή μεταβλητής $u = \omega - y$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_y^x |\frac{\omega - x}{z-x} - \frac{z}{z-y}| d\omega \\ &= \frac{z-y}{2}\frac{(\frac{z}{z-y} - \frac{y-x}{z-x})^2 + (\frac{y}{z-y})^2}{1 - \frac{y-x}{z-x}} \\ &= \frac{1}{2}(z-x)[(\frac{z}{z-y} - \frac{y-x}{z-x})^2 + (\frac{y}{z-y})^2] \\ &= \frac{[z(z-x) - (y-x)(z-y)]^2 + [y(z-x)]^2}{2(z-x)(z-y)^2} \\ &= \frac{(y^2+z^2)(z-x)^2 - 2z(z-x)(y-x)(z-y) + (y-x)^2(z-y)^2}{2(z-x)(z-y)^2} \end{aligned} \tag{6.5.40}$$

Προσθέτοντας τις (6.5.39) και (6.5.40), έχουμε

$$\begin{aligned} ||m_1^* - m_0||_1 &= \frac{(y^2+z^2)(z-x)^2 - 2z(z-x)(y-x)(z-y) + 2(y-x)^2(x-y)^2}{2(z-x)(z-y)^2} \\ &= \frac{(z^4 - 2yz^3 + x^2z^2 - 2x^2yz) + 5y^2z^2 + 3x^2y^2 - 4xy^3}{2(z-x)(z-y)^2} \\ &+ \frac{4xy^2z - 4xyz^2 + 2y^4 - 4y^3z}{2(z-x)(z-y)^2} \end{aligned} \tag{6.5.41}$$

Τώρα, αφαιρώντας (6.5.41) από την (6.5.38) και παρατηρώντας ότι οι όροι εντός των παρενθέσεων στους παρονομαστές των δύο αυτών εκφράσεων είναι ίσοι, βρίσκομε ότι

$$\begin{aligned} ||m_1^* - m_1||_1 - ||m_1^* - m_0||_1 &= \\ \frac{-4y^2z^2 - 2x^2y^2 + 4xy^3 - 4xy^2z + 4xyz^2 - 2y^4 + 4y^3z}{2(z-x)(z-y)^2} &= \\ \frac{-y(y-x)[y^2 + 2z^2 - y(x+2z)]}{2(z-x)(z-y)^2} & \end{aligned} \tag{6.5.42}$$

Ο αριθμητής στην (6.5.42) είναι θετικός αφού $-y > 0$ και $y - x > 0$. Για τον υπόλοιπο όρο η (6.5.37) δίδει

$$y^2 + 2z^2 - y(x+2z) = y^2 + 2z^2 - yz - y(x+z) \geq z(z-y) \geq 0.$$

Επομένως, η (6.5.42) είναι θετική. Έτσι εδείχθη η (6.5.36), για την περίπτωση όπου $F_1^*(y) \leq F_0(y)$.

Για την περίπτωση όπου $F_1^*(y) > F_0(y)$, έχομε $F_1^*(\omega) \geq F_0(\omega)$ για όλα τα $\omega \in [x, z)$, αφού $F_0(\omega)$ είναι μηδέν στο $[x, y)$ και ισούται με $F_0(y)$ στο $[y, z)$ και $F_1^*(\omega)$ είναι αύξουσα στο $[y, z)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} ||m_1^* - m_0||_1 &= \int_x^z |F_1^*(\omega) - F_0(\omega)| d\omega \\ &= \int_x^z \frac{\omega - z}{z - x} d\omega - \int_y^z \frac{z}{z-y} d\omega \\ &= \frac{1}{2}\frac{(z-x)^2}{z-x} - z \\ &= \frac{1}{2}(z-x) - z \\ &= -\frac{x+z}{2} \end{aligned}$$

Τώρα, εφόσον $(x+z)(x-z) = x^2 - z^2 \leq x^2 + z^2$ και $z - x > 0$, χρησιμοποιώντας Λήμμα 6.3.5, συνάγομε

$$||m_1^* - m_0||_1 = -\frac{x+z}{2} \leq \frac{x^2+z^2}{2(z-x)} = ||m_1^* - m_1||_1$$

Ούτως εδείχθη η (6.5.36) όταν $F_1^*(y) > F_0(y)$· κατά συνέπεια και το Λήμμα.

Θεώρημα 6.5.2.

$$B(D_3) = 1$$

Απόδειξη. Το Λήμμα 6.3.5, δείχνει ότι $B(X) = 1$ όταν το στήριγμα της X αποτελείται από δύο σημεία· έτσι $B(D_3) \geq 1$ και το μόνο που απομένει να θεωρήσουμε ότι το στήριγμα της X έχει τρία θετικά σημεία. Πρώτα θα δείξομε ότι

$$B(X) \leq 1 \tag{6.5.43}$$

όταν το στήριγμα της $X \in D_3$, περιέχει τρία θετικά μη μηδενικά σημεία x, y, z.

$EX = 0$ συνεπάγεται ότι $x < 0 < z$. Αφού αποδείξομε την (6.5.43), χειριζόμαστε την περίπτωση όπου $y = 0$, με έναν ισχυρισμό συνέχειας.

Έστω X με στήριγμα αποτελούμενο από τα $x < y < z$ με $y \neq 0$. Από το Λήμμα 6.3.6, έπεται ότι $B(X) = B(-X)$, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε $x < y < 0 < z$.

Έστωσαν m_1 και m_0 οι μοναδικές κατανομές μηδενικού μέσου με στηρίγματα εκ των $\{x, z\}$ και $\{y, z\}$ αντιστοίχως· και έστω ακόμη ότι $L(X_1) = m_1$ και $L(X_0) = m_0$. Επειδή γενικών, κάθε μηδενικού μέσου κατανομή, που δεν έχει μάζα στο μηδέν, μπορεί να παρασταθή ως μίξη κατανομών μηδενικού μέσου εκ δύο σημείων (όπως στην Skorohod αναπαράσταση), θέτομε

$$L(X_a) = am_1 + (1 - a)m_0. \tag{6.5.44}$$

Τότε έχομε $L(X) = L(X_a)$ για κάποιο $a \in [0, 1]$· πράγματι, για τη δεδομένη X, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $\frac{P(X=x)}{P(X_1=x)} \in (0, 1)$ και ότι η (6.5.44) ισχύει όταν το a παίρνει αυτή την τιμή. Ως εκ τούτου, για να αποδείξουμε την (6.5.43) αρκεί να δείξομε ότι

$$B(X_a) \leq 1, \ \forall a \in [0, 1]. \tag{6.5.45}$$

Από το Λήμμα 6.3.5,

$$EX_1^2 = -zx, \ EX_0^2 = -zy \tag{6.5.46}$$

και από την (6.5.44), η διασπορά της X_a, δίδεται από την

$$\begin{aligned} EX_a^2 &= aEX_1^2 + (1 - a)EX_0^2 \\ &\quad \text{(γραμμικότης ολοκληρώματος)} \\ &= -[azx + (1 - a)zy] \\ &= -z[ax + (1 - a)y]. \end{aligned} \tag{6.5.47}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.4.1, με $S = \{0, 1\}$ και μ να είναι το μέτρο πιθανότητας που αποδίδει μάζες a και $1 - a$, στα σημεία 1 και 0 αντιστοίχως, και λόγω των (6.5.46) και (6.5.47), η m_a^*, X_a zero biased κατανομή, δίδεται από την μίξη,

$$m_a^* = bm_1^* + (1 - b)m_0^* \tag{6.5.48}$$

όπου $b = ax/(ax + (1 - a)y)$. Επειδή $x < y < 0$, έχομε

$$\frac{b}{1 - b} = \frac{a}{1 - a}\frac{x}{y} > \frac{a}{1 - a}$$

οπότε $b > a$. Έστωσαν F_0, F_1, F_1^* και F_0^* οι *σ.κ.* των m_1, m_0, m_1^* και m_0^* αντιστοίχως. Έστω V η τυποποιημένη ομοιόμορφη τ.μ.· από τον αντίστροφο μετασχηματισμό πιθανότητος, μπορούμε να έχωμε

$$(Y_1, Y_0, Y_1^*, Y_0^*) = (F_1^{-1}(V), F_0^{-1}(V), F_1^{*-1}(V), F_0^{*-1}(V)).$$

Τότε $Y_i \overset{d}{=} X_i$ και $Y_i^* \overset{d}{=} X_i^*$ για $i \in \{1,2\}$ και από την (6.2.15), όλα τα ζεύγη των τ.μ. Y_1, Y_0, Y_1^*, Y_0^* επιτυγχάνουν την L^1-απόσταση μεταξύ των αντίστοιχων κατανομών τους. Έστω, τώρα, (Y_a, Y_a^*) ωρισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητες με κοινή κατανομή που δίδεται από την μίξη

$$L(Y_a, Y_a^*) = aL(Y_1, Y_1^*) + (1-b)L(Y_0, Y_0^*) + (b-a)L(Y_0, Y_1^*)$$

Τότε (Y_a, Y_a^*) έχει περιθώριες κατανομές $Y_a \overset{d}{=} X_a$ και $Y_a^* \overset{d}{=} X_a^*$. Επομένως, από την 6.2.8, έχομε

$$||m_a^* - m_a||_1 \le a||m_1^* - m_1||_1 + (1-b)||m_0^* - m_0||_1 + (b-a)||m_1^* - m_0||_1 \quad (6.5.49)$$

Το Λήμμα 6.3.5 δείχνει ότι $G(X_i) = 1$, δηλαδή $E|X_i^3| = 2EX_i^2||m_i^* - m_i||_1$ για $i = 1, 2$· έτσι από την (6.5.44) έπεται,

$$E|X_a|^3 = 2[aEX_1^2||m_1^* - m_1||_1 + (1-a)EX_0^2||m_0^* - m_0||_1]$$

και από τις (6.5.46), (6.5.47), (6.5.48), βρίσκομε

$$\begin{aligned} \frac{E|X_a^3|}{2EX_a^2} &= \frac{ax||m_1^* - m_1||_1 + (1-a)y||m_0^* - m_0||_1}{ax + (1-a)y} \\ &= b||m_1^* - m_1||_1 + (1-b)||m_0^* - m_0||_1. \end{aligned} \quad (6.5.50)$$

Από το Λήμμα 6.5.1 προκύπτει ότι το δεξί μέλος της επομένως και το αριστερό μέλος της (6.5.49) είναι φραγμένα από την (6.5.50), δηλαδή ότι

$$B(X_a) = \frac{2EX_a^2||m_a^* - m_a||_1}{E|X_a|^3} \le 1.$$

Έτσι συμπληρώνεται η απόδειξη της (6.5.45) επομένως και της (6.5.43).

Τελικά, θεωρούμε την περίπτωση όπου η μηδενικού μέσου τ.μ. X έχει θετικό στήριγμα $\{x, 0, z\}$ με $x < 0 < z$ και $P(X = 0) = q \in (0,1)$. Για $n \in \mathbb{N}$, έστω $Y_n = X + n^{-1}1(X = 0)$ και $X_n = Y_n - EY_n$. Για $n \to \infty$, βλέπομε ότι $Y_n \overset{a.s.}{\to} X$ και

$$EY_n = EX + n^{-1}P(X = 0) = \frac{q}{n} \to 0$$

οπότε $X_n \overset{a.s.}{\to} X$. Επειδή οι $X_n, n = 1, 2, \ldots$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, από το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης έπεται ότι οι υποθέσεις του Λήμματος 6.4.4 ικανοποιούνται. Συνεπώς

$$B(X_n) \to B(X), \ n \to \infty.$$

Για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $1/n < x$, η σ.κ. της X_n έχει θετικό στήριγμα από τρία μη μηδενικά διακεκριμένα σημεία, $x - \frac{q}{n} < \frac{1-q}{n} < z - \frac{q}{n}$ οπότε, από την (6.5.43), $B(X_n) \le 1$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως και για το όριο $B(X)$ ισχύει $B(X) \le 1$ ($X \in D_3$). Από το αποτέλεσμα αυτό και την $B(D_3) \ge 1$ έπεται $B(D_3) = 1$.

6.6 Το κατώτερο φράγμα της σταθεράς στο 'κατά μέσον' Κ.Ο.Θ.

Από την (6.3.21), με $m = 1$ και $L(X) = G \in \mathcal{F}_1$ έχομε,

$$||F_n - \Phi||_1 \leq \frac{C_1 E|X^3|}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ιδιαίτερα, για $n = 1$,

$$C_1 \geq \frac{||F_1 - \Phi||_1}{E|X^3|} = \frac{||G - \Phi||_1}{E|X^3|} \tag{6.6.51}$$

Λόγω του θεωρήματος 6.4.7, και του Λήμματος 6.3.5 (ότι οι κατανομές δύο σημείων επιτυγχάνουν το supremum του $B(G)$), για $p \in (0, 1)$, θέτομε

$$X = \frac{\xi - p}{\sqrt{pq}}$$

όπου ξ η Bernoulli τ.μ. με $P(\xi = 1) = p = 1 - P(\xi = 0)$. Η *σ.κ.* G_p της X, δίδεται ως,

$$G_p(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq -\sqrt{\frac{p}{q}} \\ q, \ -\sqrt{\frac{p}{q}} < x < \sqrt{\frac{p}{q}} \\ 1, \ \sqrt{\frac{p}{q}} < x \end{cases}$$

Επομένως η L^1-απόσταση μεταξύ της G_p και της τυποποιημένης κανονικής είναι,

$$||G_p - \Phi||_1 = \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{p}{q}}} \Phi(x)dx + \int_{-\sqrt{\frac{p}{q}}}^{\sqrt{\frac{p}{q}}} |\Phi(x) - q|dx + \int_{\sqrt{\frac{p}{q}}}^{\infty} |\Phi(x) - 1|dx.$$

Επειδή $G_p \in \mathcal{F}_1$ για όλα τα $p \in (0, 1)$ και $E|X^3| = \frac{p^2+q^2}{\sqrt{pq}}$, θέτοντας

$$\psi(p) = \frac{\sqrt{pq}}{p^2 + q^2} ||G_p - \Phi||_1$$

για $p \in (0, 1)$, η ανισότης (6.6.51) δίδει $C_1 \geq \psi(p)$, για όλα τα $p \in (0, 1)$. Για $p = 1/2$ έχομε,

$$\begin{aligned} C_1 \geq \psi(1/2) &= \frac{\sqrt{1/4}}{(1/4) + (1/4)} ||G_p - \Phi||_1 \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}[2\Phi(1) - 1] - (\sqrt{\pi} + \sqrt{2}) + 2\mathrm{e}^{-1/2}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \\ &= 0.535377\ldots \end{aligned}$$

Δηλαδή εδείχθη η (6.3.22). Έτσι η απόδειξη του κυρίου θεωρήματος του Κεφαλαίου 6, ολοκληρώθηκε.

Κατάλογος συντομεύσεων και Συμβολισμών

$\tau.\mu.$:	τυχαία μεταβλητή
$\sigma.\kappa.$:	συνάρτηση κατανομής
$\sigma.\pi.\pi.$:	συνάρτηση πυκνότητος πιθανότητος
$\chi.\sigma.$:	χαρακτηριστική συνάρτηση
$a.s.$:	σχεδόν βέβαια (*almost surely*)
$\sigma.\pi.$:	σχεδόν παντού
$i.d.$:	άπειρα διαιρετές (*infinitely divisible*)
$i.i.d.$:	ανεξάρτητες και ισόνομες (τ.μ.) (*independent identically distributed*)
$\sigma.\mu.\beta.$:	συμβολίζεται
ανν :	τότε και μόνο τότε αν
$K.O.\Theta.$:	Κεντρικό Οριακό Θεώρημα
$N.M.A.$:	Νομος Μεγάλων Αριθμών
$O.\rho.\varsigma.$:	Ορισμός
Θ :	Θεώρημα
$\Pi.$:	Πρόταση
$\Lambda.$:	Λήμμα
$\Pi.o\rho.$:	Πόρισμα
$\Pi.P.T.$:	Παράρτημα
“d'' :	κατά κατανομή
$\stackrel{“d''}{\to}$:	σύγκλιση κατά κατανομή
$\rightrightarrows$:	πλήρης σύγκλιση
$\overline{lim}$:	$\limsup$
$\underline{lim}$:	$\liminf$

Σύμβαση.
Το διακριτικό ΠΡΤ παραπέμπει στο Παράρτημα.

Μερικές Συμβάσεις

1) Το διακριτικό ΠΡΤ παραπέμπει στο Παράρτημα.
2) Ο αριστερά της τελείας (·) αριθμός, από τους δύο που χαρακτηρίζουν μία σχέση, παραπέμπει σε παράγραφο(§) ενός κεφαλαίου, ενώ ο δεξιά της τελείας, αριθμεί τη σχέση.
3) Όταν ο διψήφιος χαρακτηρισμός αφορά σε σχέση διαφορετικού κεφαλαίου από αυτό στο οποίο συναντάται, συνοδεύεται από το διακριτικό Κεφ(·) στα δεξιά του.
4) Σχέση που θα χρησιμοποιηθή μόνο εντός του συγκεκριμένου Θεωρήματος, ή Πρότασης ή Λήμματος στο οποίο παρουσιάζεται, χαρακτηρίζεται από μικρό γράμμα του αλφαβήτου.

Παράρτημα

Θεώρημα 1 Οποιαδήποτε $\chi.\sigma.$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη. ([9], σελ. 262)

Θεώρημα 2 Ας υποθέσουμε ότι η $\{F_n, n \geq 1\}$ είναι μια ακολουθία $\sigma.\kappa.$ με $\chi.\sigma.$ $\{\phi_n, n \geq 1\}$ και έστω ότι $\lim_n \phi_n(t) = \phi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$. (Η ϕ δεν υποτέθηκε $\chi.\sigma.$ αλλά είναι απλά το κατά σημείο όριο των $\chi.\sigma.$ ϕ_n, το οποίο υπετέθη πως υπάρχει). Τότε, ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να υπάρχει $\sigma.\kappa.$ F τέτοια ώστε $F_n \xrightarrow{d} F$ είναι η εξής:
(i) Η οριακή συνάρτηση $\phi(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$.
Μια δεύτερη ικανή συνθήκη είναι η εξής:
(ii) Η ακολουθία $\{F_n, n \geq 1\}$ είναι σφιχτή.
Όταν η (i) ή η (ii) ικανοποιείται, τότε η ϕ είναι η $\chi.\sigma.$ της οριακής $\sigma.\kappa.$ F.

Απόδειξη. ([1], σελ. 360)

Θεώρημα 3 (Τύπος αντιστροφής της $\chi.\sigma.$)
Αν η τ.μ. X έχη $\sigma.\kappa.$ F_X και $\chi.\sigma.$ ϕ_X, τότε $\forall a \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{C\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-C}^{C} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tb}}{\mathrm{i}t} \phi_X(t)dt \\
&\qquad = \frac{1}{2}[F_X(b) + F_X(-b) - F_X(a) - F_X(a-)] \\
&\qquad = P(a < X < b) + \frac{1}{2}[P(X = a) + P(X = b)]
\end{aligned}$$

Απόδειξη. ([9], σελ. 267)

Πόρισμα 1 Αν $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|dt < \infty$, τότε για $-\infty < a < b < \infty$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tb}}{\mathrm{i}t} \phi(t)dt = P(a < X < b) + \frac{1}{2}[P(X = a) + P(X = b)] = F(b) - F(a)$$

όπου η αντίστοιχη $\sigma.\kappa.$ F είναι απόλυτα συνεχής με φραγμένη συνεχή πυκνότητα

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \phi(t)dt$$

Απόδειξη. ([2], σελ. 288)

Θεώρημα 4 (Συνεχείας των *χ.σ.*)
Θεωρούμε τις *σ.κ.* $\{F_n, n \geq 1\}$ και F με αντίστοιχες *χ.σ.* $\{\phi_n, n \geq 1\}$ και ϕ. Τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε

$$F_n \xrightarrow{d} F$$

είναι η

$$\phi_n \to \phi(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη. ([9], σελ. 273)

Πρόταση 1(Σχέση *χ.σ.* και ροπών)
Έστω X μια τ.μ. με *χ.σ.* ϕ.
i) Αν $E|X|^k < \infty$ για κάποιο ακέραιο $k \geq 1$ τότε η ϕ είναι k φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν,
α) $\phi^{(k)}(t) = \mathrm{i}^k E(X^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx})$
β) $\phi^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k E(X^k)$
γ) $\phi(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!} E(X^n) + o(t^k), \ t \to 0$
όπου ο συμβολισμός $o(t^k)$, καθώς $t \to 0$, δηλώνει κάποια (οποιαδήποτε) μιγαδική συνάρτηση $f(t)$, τέτοια ώστε

$$f(t)/t^k \to 0, \text{ καθώς } t \to 0$$

ii) Αν $E|X|^k < \infty \ \forall k = 1, 2 \ldots$ και

$$\lim_k (|t|^k \frac{E|X|^k}{k!}) = 0$$

τότε

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!} E(X^n)$$

Απόδειξη. ([9], σελ. 282)

Ορισμός 1Αν $F(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$ είναι φραγμένες και αύξουσες συναρτήσεις, τότε η ακολουθία $\{F_n(x)\}$ συγκλίνει ασθενώς στην $F(x)$ ή η $\{F_n(x)\}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην $F(x)$ και συμβολίζουμε $F_n \xrightarrow{d} F$, αν $F_n(x) \to F(x)$ σε κάθε σημείο συνεχείας της $F(x)$.
Τώρα, αν $F_n \xrightarrow{d} F$ και $F(-\infty) \to F(-\infty)$, $F(+\infty) \to F(+\infty)$, λέμε ότι η $F_n(x)$ συγκλίνει πλήρως στην $F(x)$ και γράφουμε $F_n \rightrightarrows F$.

Θεώρημα 5(Περίπτωση θεωρήματος Helly)
Αν $g(x)$ συνεχής συνάρτηση και φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και $F(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$ φραγμένες, αύξουσες και $F_n \rightrightarrows F$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x)$$

Απόδειξη. ([10])

Ορισμός 2 Έστωσαν μ_n και μ μέτρα πιθανότητος στον $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$. Η ακολουθία μ_n συγκλίνει ασθενώς (weakly) στο μ και συμβολίζουμε $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$, αν

$$\int f(x)\mu_n(dx) \to \int f(x)\mu(dx)$$

για κάθε f πραγματική, συνεχή και φραγμένη στο $\mathbb{R}^d$.

Θεώρημα 6 Αν $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$ και αν $g(x)$ είναι συνεχής και φραγμένη, τότε,

$$\int_A g(x)\mu_n(dx) \xrightarrow{d} \int_A g(x)\mu(dx)$$

Απόδειξη. ([7], σελ. 32)

Θεώρημα 7 Για να είναι το σύνολο S των *σ.κ.*, συμπαγές (conditionally compact) στο $\mathbb{R}$, αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι, οι

$$F(x) \to 0,\ x \to -\infty$$

$$F(x) \to 1,\ x \to +\infty$$

να ικανοποιούνται στο S ομοιόμορφα.

Απόδειξη. ([7], σελ. 37-38)

Λήμμα 1 (Riemann-Lebesgue)
Αν η συνάρτηση g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\gamma(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta x} g(x)dx$$

τότε

$$\gamma(\zeta) \to 0,\ \text{για}\ \zeta \to \pm\infty$$

Απόδειξη. ([6], σελ. 486)

Θεώρημα 8 Αν $F_n \xrightarrow{d} F_\infty$ (ασθενής σύγκλιση), τότε υπάρχουν τ.μ. $Y_n, 1 \leq n \leq \infty$ με *σ.κ.* F_n ώστε $Y_n \to Y_\infty$ a.s..

Απόδειξη. ([4], σελ. 85)

Θεώρημα 9 (Ομοιόμορφης Ολοκληρωσιμότητας)
i) Ας θεωρήσουμε μια ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη ακολουθία τ.μ. $\{X_n, n \geq 1\}$ και ας υποθέσωμε ότι $X_n \to X$ με πιθανότητα 1. Τότε ισχύουν τα εξής:
α) Η X είναι ολοκληρώσιμη (δηλ. $E|X| < +\infty$)
β) $EX_n \to EX$
γ) $E|X_n - X| \to 0$

ii) Εάν $X_n \geq 0$, $X_n \to X$ με πιθανότητα 1, $EX < \infty$, $EX_n < \infty$ $\forall n \geq 1$ και $EX_n \to EX$, τότε η ακολουθία $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη. ([9], σελ. 177)

Θεώρημα 10 (Φραγμένης σύγκλισης)
Αν $\mu(\Omega) < \infty$ και $\{f_n, n \geq 1\}$ ομοιόμορφα φραγμένες και $f_n \to f$ *σ.π.*, τότε

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

Απόδειξη. ([1], σελ. 214)

Θεώρημα 11 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue)
Εάν οι μετρήσιμες συναρτήσεις X_n, X και Y είναι τέτοιες ώστε $\lim_n X_n = X$ *σ.π.*, $|X_n| \leq |Y|$ *σ.π.* και $\int |Y| d\mu < \infty$, τότε η X είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα,

$$\lim_n \int X_n d\mu = \int X d\mu$$

και

$$\lim_n \int |X_n - X| d\mu = 0$$

Απόδειξη. ([9] σελ. 141, [8] σελ. 76)

Θεώρημα 12 (Μονότονης Σϋγκλισης του Lebesgue)
Αν η ακολουθία των μετρήσιμων συναρτήσεων $X_n \geq 0$ είναι αύξουσα, $n = 1, 2, \ldots$ και $X = \lim X_n$ τότε,

$$\int X d\mu = \lim_n \int X_n d\mu$$

Απόδειξη. ([9] σελ. 130, [8] σελ. 69)

Θεώρημα 13 (Λήμμα Fatou)
Αν $X_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ τυχούσα ακολουθία μετρήσιμων, τότε

$$\int \liminf_n X_n d\mu \leq \liminf_n \left(\int X_n d\mu\right)$$

Απόδειξη. ([9] σελ. 132, [8] σελ. 70)

Θεώρημα 14 (Theorem Slutsky
Έστω ότι $X_n \xrightarrow{d} X$ και $Y_n \xrightarrow{d} c$, $c \in \mathbb{R}$ σταθερά. Τότε ισχύουν:
i) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
ii) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
iii) Αν $c \neq 0$, τότε $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c$

Ορισμός 3 Μία διακριτή κατανομή μιας τ.μ. X είναι lattice κατανομή, εάν υπάρχουν αριθμοί a και $h > 0$ ώστε κάθε δυνατή τιμή της X μπορεί να παρασταθεί ως $a + kh$,

όπου k διατρέχει τους ακεραίους (όχι κατά ανάγκην όλους).
Ο αριθμός h ονομάζεται όρισμα (span) της κατανομής. Πχ Bernoulli κατανομή, Poisson κατανομή.

Βιβλιογραφία

[1] Billingsley P., *Probability and Measure*. Wiley, New York, (2nd ed., 1986.

[2] Chow Y.S., Teicher H.. *Probability Theory: Independence, interchangeability, Martingales*. Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 1988.

[3] Chung K. L., *A course in Probability Theory.* Academic Press New York, (2nd ed.) 1974.

[4] Durettt R., *Probability: Theory and Examples*. Duxburry Press, (2nd ed.), 1996.

[5] Feller W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol. I.* Wiley, New York 1957.

[6] Feller W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications Vol. II.* Wiley, New York 1966.

[7] Gnedenko V. and Kolmogorov A.N., *Limit Distributions for sums of Independent Random Variables.* Addison-Wesley, Reading Mass. 1954.

[8] Κουμουλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ., *Θεωρία Μέτρου*. Συμμετρία, Αθήνα 1988.

[9] Παπαδάτος Δ. Ν., *Θεωρία Πιθανοτήτων*. Αθήνα 2006.

[10] Petrov V.V., *Sums of Independent Random Variables*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. New York 1996.

[11] Resnick, S. I. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes.* Springer, Berlin 1987

[12] Shiryayev A.N. *Probability.* Springer-Verlag, New York 1984.

[13] Χαραλαμπίδης Χ. *Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές, Τ. 1.* Συμμετρία, Αθήνα 1990.

[14] Χαραλαμπίδης Χ. *Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές, Τ. 2.* Συμμετρία, Αθήνα 1991.

[15] Zolotarev M.V. *Modern Theory of Summation of Random Variables.* V.S.P. Utrecht, The Netherlands 1997.

[16] Lam H., Blanchet, J., Bazant, Z.M. *Corrections to the Central Limit Theorem for Heavy-tailed Probability Densities*. J. Theor. Probabil. Vol.24 (2011), pp. 895-927

[17] Goldstein, L. *Bounds on the constant in the mean Central Limit Theorem*. The Annals of Probability, Vol.38 No. 4 (2010), pp. 1672-1689

[18] Goldstein, L., Reinert, G. *Stein's method and the Zero bias Transformation with Applications to Simple Random Sampling*. The Annals of Applied Probability, Vol.7 No. 4 (1997), pp. 1888-1930

[19] Goldstein, L. *Normal Approximation for Hierarchical structures*. The Annals of Applied Probability, Vol.14 No. 4 (2004), pp. 1950-1969

[20] Goldstein, L. L^1 *bounds in Normal Approximation*. The Annals of Probability, Vol.35 No. 5 (2007), pp. 1888-1930

[21] Goldstein, L. and Rinott, Y. *Multivariate normal approximations by Stein's method and size bias couplings*. J. Applic. Probabil., Vol.33 (1996), pp. 1-17

[22] Stein, C. *Approximate Computation of Expectations*. Institute of Mathematical Statistics. Lecture Notes-Monography Series, Vol.7

[23] Stein, C. *A bound for the Error in the Normal Approximation to the Distribution of a sum of Dependent Random Variables*. Proc. Sixth Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab. Vol II: Probability Theory. Univ. California Press. Berkeley CA, pp. 583-602

[24] Rachev, S.T. *The Monge-Kantarovich transference Problem and its Stochastic Applications*. Theory Probab. Applic. Vol 29 (1984), pp. 674-678

[25] Erickson, R.V. L^1 *bounds for Asymptotic Normality of m-dependent sums using Stein's technique*. The Annals of Probability. Vol 2 (1974), pp. 522-529