Διπλωματικη εργασια

Θέμα: «*Το όριο συνάρτησης στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση*»

Αποστόλου Νικόλαος
Α.Μ. 201219

Ιούνιος 2016 Αθήνα

Η παρούσα Διπλωματική εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 28η Ιουνίου 2016 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
• Θ.Ζαχαριάδης (επιβλέπων)	Καθηγητής
• Δ.Πόταρη	Καθηγήτρια
• Γ.Ψυχάρης	Επίκ.Καθηγητής

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποίηθηκε υπό την καθοδήγηση **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενης από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
• Θ.Ζαχαριάδης (επιβλέπων)	Καθηγητής
• Δ.Πόταρη	Καθηγήτρια
• Γ.Ψυχάρης	Επίκ.Καθηγητής

Περιεχόμενα

1 Ιστορική αναδρομή της έννοιας του ορίου 3

2 Εμπόδια κατανόησης της έννοιας του ορίου 30

3 Στρεβλές αντιλήψεις των μαθητών-φοιτητών για την έννοια του ορίου 43

4 Προτάσεις για την άρση των δυσκολιών στην κατανόηση της έννοιας του ορίου 72

Κεφάλαιο 1

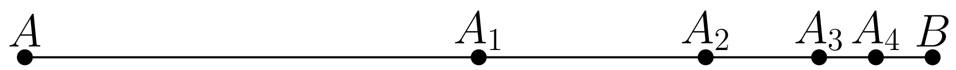
Ιστορική αναδρομή της έννοιας του ορίου

Για να φθάσει η μαθηματική κοινότητα στον σύγχρονο ορισμό του ορίου απαιτήθηκαν προσπάθειες δύο χιλιετιών. Το όριο ως έννοια αναπτύχθηκε, σύμφωνα με τον Cornu(1991), στην προσπάθεια επίλυσης κυρίως τριών τύπων προβλημάτων:

- γεωμετρικά προβλήματα (υπολογισμού εμβαδού χωρίου και μήκους καμπύλης με τη μέθοδο την «εξάντλησης»)
- υπολογισμός σειρών και του ρυθμού σύγκλισής τους
- προβλήματα διαφόρισης (που πηγάζουν από την εύρεση σχέσης δύο ποσοτήτων που τείνουν ταυτοχρόνως στο μηδέν)

Το όριο στην αρχαιότητα Οι πρώτες εμφανίσεις απείρων διαδικασιών χρονολογούνται στην Αρχαία Ελλάδα. Μια τέτοια αφορμή δόθηκε με τα παράδοξο του φιλοσόφου Ζήνωνα του Ελεάτη, δύο από τα οποία είναι όμοια μεταξύ τους, και παρουσιάζονται παρακάτω.

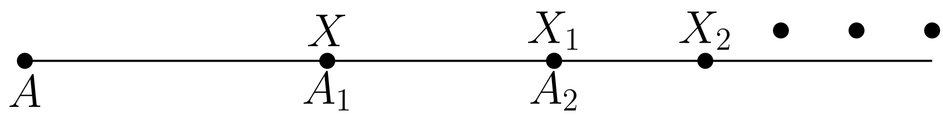
1. Ας υποθέσουμε ότι ένας δρομέας θέλει να διανύσει την απόσταση AB. Τότε πρέπει πρώτα να διανύσει την $AA_1 = AB/2$ (βλέπε σχήμα 1.1). Στη συνέχεια για να διανύσει την A_1B θα πρέπει πρώτα να διανύσει την $A_1A_2 = A_1B/2 = AB/4$. Έπειτα για να διανύσει την A_2B χρειάζεται να διανύσει πρώτα την $A_2A_3 = A_2B/2 = AB/8$ και ούτω καθεξής. Σύμφωνα με το Ζήνωνα μια τέτοια διαδικασία είναι αδύνατη, γιατί, για να διανύσει ο δρομέας την πεπερασμένη απόσταση AB, θα πρέπει να περάσει από ένα άπειρο πλήθος σημείων, δηλαδή να ολοκληρώσει μια άπειρη διαδικασία μεταβάσεων.



Σχήμα 1.1: Η απόσταση AB ως άθροισμα απείρων τμημάτων.

2. Αν τρέξουν σε αγώνα ο γοργοπόδαρος Αχιλλέας και η χελώνα, και δοθεί ένα προβάδισμα στην χελώνα για λόγους δικαιοσύνης, τότε ο Αχιλλέας δε θα ξεπεράσει ποτέ την χελώνα. Πράγματι, έστω ότι ο Αχιλλέας

ξεκινάει από το σημείο A και η χελώνα ξεκινάει συγχρόνως από ένα πιο προχωρημένο σημείο X. Όταν ο Αχιλλέας φτάσει στο σημείο A_1, που είναι το σημείο εκκίνησης X από το οποίο ξεκίνησε αρχικά η χελώνα, τότε η τελευταία θα βρίσκεται σε ένα πιο προχωρημένο σημείο X_1. Όταν δε ο Αχιλλέας φτάσει στο σημείο A_2, που ταυτίζεται με το X_1, στο οποίο βρισκόταν προηγουμένως η χελώνα, αυτή πάλι θα βρίσκεται σε ένα πιο προχωρημένο σημείο X_2 και ούτω καθεξής (βλέπε σχήμα 1.2). [Αναπολιτάνος (2009) σελ. 59,60]



Σχήμα 1.2: Η πορεία του Αχιλλέα και της χελώνας κατά τον Ζήνωνα τον Ελεάτη.

Μια ακόμη περίπτωση εμφάνισης του ορίου στην Αρχαία Ελλάδα είναι η **ανθυφαίρεση** (ή ανταναίρεση) της διαγωνίου ενός τετραγώνου με την πλευρά του. Στην αρχαία Ελλάδα παρουσιάστηκε το πρόβλημα της μέτρησης ενός μεγέθους α που συνίσταται στη σύγκριση του α με ένα μέγεθος ϵ που μπορούσε να θεωρηθεί ως *μονάδα*. [Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, Σίδερης (2005), σελ. 165] Έτσι η μέτρηση του μεγέθους α

ανάγεται στην εύρεση ενός (φυσικού) αριθμού κ τέτοιου ώστε $\alpha = \kappa\epsilon$. Ένα μέγεθος χ είναι ένα *κοινό μέτρο* των μεγεθών α, β αν υπάρχουν αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\alpha = \kappa\chi$ και $\beta = \lambda\chi$. Δύο τέτοια μεγέθη λέγονται *σύμμετρα*. Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες είχαν ανακαλύψει μια αποτελεσματική διαδικασία εύρεσης του κοινού μέτρου δύο μεγεθών α, β γνωστής ως ανθυφαίρεσης που εκτίθεται στο βιβλίο VII των στοιχείων του Ευκλείδη. Η διαδικασία αυτή είναι σήμερα πιο γνωστή ως ο αλγόριθμος του Ευκλείδη και με την υπόθεση ότι $\alpha > \beta$ εκτελείται ως εξής: αφαιρούμε διαδοχικά το β από το α όσες φορές είναι δυνατόν, έστω π_1, και κρατάμε το (τελικό) υπόλοιπο $\upsilon_1 < \beta$. Αν $\upsilon_1 = 0$ τότε το β είναι ένα κοινό μέτρο των α, β. Διαφορετικά τα β, υ_1 παίρνουν τη θέση των α, β αντιστοίχως και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία στα β, υ_1. Έστω $\upsilon_2 < \upsilon_1$, όπου υ_2 το υπόλοιπο της ακέραιας διαίρεσης του β με το υ_1. Αν $\upsilon_2 = 0$, τότε το υ_1 είναι ένα κοινό μέτρο των α, β, αλλιώς, συνεχίζουμε ομοίως. Σε σύγχρονη γλώσσα η ανθυφαίρεση των α, β συμβολίζεται με ανθ(α, β) και είναι η πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία αριθμών $\pi_1, \pi_2, \ldots$ (δηλαδή ανθ$(\alpha, \beta) = [\pi_1, \pi_2, \ldots])$

που δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\alpha = \pi_1\beta + \upsilon_1, \quad 0 < \upsilon_1 < \beta \tag{1.1}$$

$$\beta = \pi_2\upsilon_1 + \upsilon_2, \quad 0 < \upsilon_2 < \upsilon_1 \tag{1.2}$$

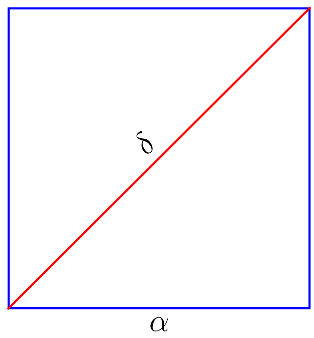
$$\upsilon_1 = \pi_3\upsilon_2 + \upsilon_3, \quad 0 < \upsilon_3 < \upsilon_2 \tag{1.3}$$

$$\vdots$$

$$\upsilon_{n-2} = \pi_n\upsilon_{n-1} + \upsilon_n, \quad 0 \leq \upsilon_n < \upsilon_{n-1} \tag{1.n}$$

$$\vdots$$

[Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, Σίδερης (2005), σελ. 165,166],[Νεγρεπόντης (2012)] Από την περιγραφή της παραπάνω διαδικασίας γίνεται φανερό ότι, αν η ανθυφαίρεση των α, β τερματίζεται σε έστω n βήματα, δηλαδή $\upsilon_n = 0$, τότε το υ_{n-1} είναι ένα κοινό μέτρο των α, β. Πράγματι, αν η διαδικασία τερματίζεται σε έστω n βήματα, τότε η σχέση $(1.n)$ δηλώνει ότι το υ_{n-1} διαιρεί το υ_{n-2}. Έπειτα από την $(1.n-1)$ προκύπτει ότι το υ_{n-1} διαιρεί το υ_{n-3}. Στη συνέχεια από την $(1.n-2)$ προκύπτει ότι το υ_{n-1} διαιρεί το υ_{n-4}. Προχωρώντας ομοίως παίρνουμε ότι το υ_{n-1} διαιρεί τα δ, α, δηλαδή είναι ένα κοινό μέτρο τους. Από την άλλη μεριά, αν τα μεγέθη α, β είναι σύμμετρα, τότε από τον ορισμό προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa}{\lambda}$ για κάποιους αριθμούς κ, λ. Αφού $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\kappa}{\lambda}$, αποδεικνύεται ότι ανθ$(\alpha, \beta) =$ ανθ(κ, λ). Βεβαίως η ανθ(κ, λ) τερματίζεται σε το πολύ λ βήματα. Επομένως οι αρχαίοι Έλληνες είχαν ως κριτήριο της συμμετρίας δύο τμημάτων τον τερματισμό της ανθυφαίρεσής τους [ιδέα πιθανότατα του Θεαίτητου (415-369 π.Χ.)] που αποδεικνύεται στην πρόταση 2 του βιβλίου X των στοιχείων του Ευκλείδη. [Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, Σίδερης (2005), σελ. 166], [Νεγρεπόντης (2012)] Ο Πυθαγόρας (571-496 π.Χ.) όμως ανακάλυψε την ασυμμετρία της διαγωνίου δ και της πλευράς του α (βλέπε σχήμα 1.3).



Σχήμα 1.3: Η ασυμμετρία της διαγωνίου δ ενός τετραγώνου πλευράς α.

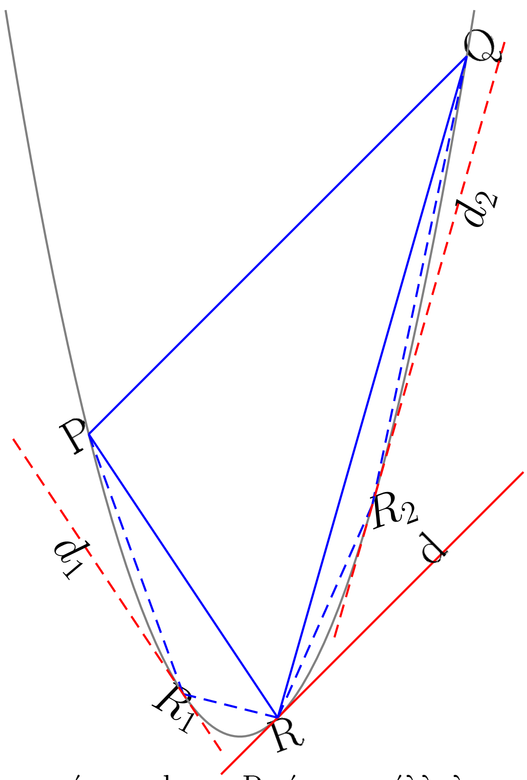
Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας έγινε ως εξής:
από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $\delta^2 = 2\alpha^2 > \alpha^2 \Rightarrow$
$\delta > \alpha \Rightarrow \boxed{\delta = \alpha + \upsilon_1}$ για κάποιο $\boxed{\upsilon_1 > 0}$
$\Rightarrow \delta^2 = (\alpha + \upsilon_1)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 2\alpha\upsilon_1 + \upsilon_1^2 (1) \Rightarrow$
$\alpha^2 > 2\alpha\upsilon_1 \Rightarrow \boxed{\alpha > 2\upsilon_1 > \upsilon_1} \Rightarrow$
$\boxed{\alpha = 2\upsilon_1 + \upsilon_2}$ για κάποιο $\boxed{\upsilon_2 > 0} \Rightarrow$
$\alpha^2 = (2\upsilon_1 + \upsilon_2)^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2\alpha\upsilon_1 + \upsilon_1^2 = 4\upsilon_1^2 + 4\upsilon_1\upsilon_2 + \upsilon_2^2 \Leftrightarrow$
$\upsilon_1^2 = 2\upsilon_1\upsilon_2 + \upsilon_2^2 (2) \Rightarrow \upsilon_1^2 > 2\upsilon_1\upsilon_2 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 > 2\upsilon_2 > \upsilon_2}$
$\Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 2\upsilon_2 + \upsilon_3}$ για κάποιο $\boxed{\upsilon_3 > 0}$.
Κάπου εδώ οι Πυθαγόρειοι αντελήφθησαν, ότι η διαδικασία περιάγεται σε βρόγχο, γεγονός που αποδίδεται βεβαίως στην ομοιότητα της μορφής των σχέσεων (1), (2). Συγκεντρώνοντας τις αλγεβρικές σχέσεις που είναι σε πλαίσιο έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\delta &= \alpha + \upsilon_1, \quad 0 < \upsilon_1 < \alpha \\
\alpha &= 2\upsilon_1 + \upsilon_2, \quad 0 < \upsilon_2 < \upsilon_1 \\
\upsilon_1 &= 2\upsilon_2 + \upsilon_3, \quad 0 < \upsilon_3 < \upsilon_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

που σημαίνει ότι $\alpha\nu\vartheta(\delta, \alpha) = [1, 2, 2, \dots] = [1, \overline{2}]$. [Νεγρεπόντης (2012)]

Οι οριακές διαδικασίες είχαν αναπτυχθεί σε μεγάλο βαθμό από τους αρχαίους Έλληνες στην μέθοδο της «εξάντλησης» που εφευρέθηκε για την μέτρηση μη στοιχειωδών επιφανειών και όγκων.[Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, Σίδερης (2005), σελ. 166] Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί την τεχνική της «θηλιάς». Η «θηλιά» στηρίζεται στο εξής λήμμα: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $a - \epsilon < b < a + \epsilon$, για κάθε $\epsilon > 0$, τότε $a = b$. Βεβαίως, ελλείψει αρνητικών αριθμών στην Αρχαία Ελλάδα το λήμμα παίρνει την ισοδύναμη μορφή: Αν a αριθμός τέτοιος ώστε $0 \leq a < \epsilon$, για κάθε $\epsilon > 0$, τότε $a = 0$. [Burn(2005)] Η προϋπόθεση $0 \leq a < \epsilon$ της τελευταίας εκδοχής του λήμματος εξασφαλίζεται στην αρχαία Ελλάδα με την ύπαρξη κατάλληλου $n \in \mathbb{N}$, τέτοιου ώστε, σύμφωνα με τον μεν Ευκλείδη (350-270 π.Χ.) να ισχύει $(\frac{1}{2})^n < \epsilon$ (πρόταση X.1), σύμφωνα με τον δε Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.) να ισχύει $\frac{1}{n} < \epsilon$ (**συνθήκη Αρχιμήδη-Ευδόξου**). Αρκετές είναι οι σημαντικές ευρέσεις που επιτεύχθηκαν έτσι στην αρχαία Ελλάδα, άλλες με χρήση της πρότασης X.1 και άλλες με τη συνθήκη του Αρχιμήδη. Με χρήση της πρότασης X.1 ο Εύδοξος (407-335 π.Χ.) αποδεικνύει στο βιβλίο XII του Ευκλείδη τα παρακάτω θεωρήματα:

Πρόταση XII.2 Ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων ισούται με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους.
Πρόταση XII.5-7 Ο όγκος πυραμίδας είναι ίσος με το ένα τρίτο του εμβαδού της βάσης της επί το ύψος της.
Πρόταση XII.10 Ο όγκος κώνου είναι ίσος με το ένα τρίτο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος του.
Πρόταση XII.18 Ο λόγος των όγκων δύο σφαιρών ισούται με το λόγο των κύβων των διαμέτρων τους. [Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, Σίδερης (2005), σελ 166], [Burn(2005)]



Σχήμα 1.4: Η εφαπτόμενη d στο R είναι παράλληλη στη χορδή PQ.

Ο Αρχιμήδης στην προσπάθεια του να υπολογίσει εμβαδά επιπέδων χωρίων περικλειόμενων από καμπύλες έκανε χρήση της μεθόδου «εξάντλησης» και είχε αναπτύξει

μεγάλη επιδεξιότητα στην τεχνική της «θηλιάς». Ακολουθούν δύο σημαντικά παραδείγματα εφαρμογής της τεχνικής αυτής. [Burn(2005)]
Ο Αρχιμήδης στον *Τετραγωνισμό της παραβολής* κατάφερε να υπολογίσει το εμβαδόν παραβολικού χωρίου. Συγκεκριμένα, απέδειξε ότι αν P,Q είναι τυχαία σημεία της παραβολής και R το σημείο εκείνο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη d είναι παράλληλη στη χορδή PQ, τότε για το εμβαδόν $S = (\widehat{PRQ})$ του παραβολικού χωρίου ισχύει $S = \frac{4}{3}A$, όπου $A := \triangle(PRQ)$. [Burn(2005)]

<u>Απόδειξη</u>: Ας είναι $y = x^2$ η εξίσωση της παραβολής και p,q,r οι τετμημένες των P,Q,R αντίστοιχα. Τότε $d \parallel PQ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{x=r} = \lambda_{PQ} \Leftrightarrow 2r = \frac{q^2-p^2}{q-p} \Leftrightarrow r = \frac{p+q}{2}$.
Άρα έχουμε $A = \triangle(PRQ) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} p-r & p^2-r^2 \\ q-r & q^2-r^2 \end{vmatrix}\right| =$
$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} p-r & p^2-r^2 \\ 0 & p^2+q^2-2r^2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|p-r||p^2+q^2-2r^2| = \frac{|p-q|^3}{8}$.
Αν R_1, R_2 είναι τα σημεία της παραβολής με τετμημένες r_1, r_2 αντίστοιχα τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες d_1, d_2 στα R_1, R_2 να είναι παράλληλες στις χορδές PR,RQ αντιστοίχως (βλέπε σχήμα 1.4), τότε πάλι

$$r_1 = \frac{p+r}{2}, r_2 = \frac{r+q}{2} \quad \text{και} \quad \left.\begin{array}{rcl} \triangle(PR_1R) &=& \frac{|p-r|^3}{8} \\ \triangle(RR_2Q) &=& \frac{|q-r|^3}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\triangle(PR_1R) + \triangle(RR_2Q) = \frac{|p-r|^3}{8} + \frac{|q-r|^3}{8} = \frac{|p-\frac{p+q}{2}|^3}{8} + \frac{|q-\frac{p+q}{2}|^3}{8} = \frac{|p-q|^3}{64} + \frac{|p-q|^3}{64} = \frac{|p-q|^3}{32} = \frac{1}{4}\frac{|p-q|^3}{8} = \frac{1}{4}A$. Άρα

$\triangle(PRQ)+[\triangle(PR_1R)+\triangle(RR_2Q)] = A+\frac{1}{4}A$. Επομένως, αν είναι R_3, R_4, R_5, R_6 τα σημεία της παραβολής στα οποία οι αντίστοιχες εφαπτόμενες d_3, d_4, d_5, d_6 είναι παράλληλες στις χορδές αντιστοίχως, τότε πάλι θα είναι $[\triangle(PR_3R_1)+\triangle(R_1R_4R)]+[\triangle(RR_5R_2)+\triangle(R_2R_6Q)] = \frac{1}{4}\triangle(PR_1R)+\frac{1}{4}\triangle(RR_2Q) = \frac{1}{4}\left[\triangle(PR_1R)+\triangle(RR_2Q)\right] = \frac{1}{4}\frac{1}{4}A = \left(\frac{1}{4}\right)^2 A$. Συνεπώς $\triangle(PRQ)+[\triangle(PR_1R)+\triangle(RR_2Q)]+[(\triangle(PR_3R_1)+\triangle(R_1R_4R))+(\triangle(RR_5R_2)+\triangle(R_2R_6Q))] = A+\frac{1}{4}A+\left(\frac{1}{4}\right)^2 A$. Συνεχίζοντας ομοίως παίρνουμε το συνολικό εμβαδόν των τριγώνων αυτών

$$\triangle(PRQ)+[\triangle(PR_1R)+\triangle(RR_2Q)]$$
$$+[\triangle(PR_3R_1)+\triangle(R_1R_4R)+\triangle(RR_5R_2)+\triangle(R_2R_6Q)]+$$
$$\cdots+[\triangle(PR_{2^n-1},R_{2^{n-1}-1})+\cdots+\triangle(R_{2^n-2},R_{2^{n+1}-2},Q)] =$$
$$A+\frac{1}{4}A+\left(\frac{1}{4}\right)^2A+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^nA = \left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]A =$$
$$\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}A = \frac{4}{3}A-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^nA$$

Αν $S \neq \frac{4}{3}A$ τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $S < \frac{4}{3}A \Leftrightarrow \frac{4}{3}A - S > 0$

Τότε για την ακολουθία $(r_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ με $r_n := \left(\frac{1}{4}\right)^n A$, έχουμε $r_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}A = \frac{1}{4}r_{n-1} < \frac{1}{2}r_{n-1}, n = 1,2,\ldots$. Επομένως για $\epsilon := \frac{4}{3}A - S > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $r_k < \frac{4}{3}A - S \Rightarrow \frac{1}{3}r_k < r_k < \frac{4}{3}A - S \Rightarrow$
$S < \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}r_k = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^kA$ που είναι προφανώς άτοπο.

- $S > \frac{4}{3}A \Leftrightarrow S - \frac{4}{3}A > 0$

Τότε το παραλληλόγραμμο PQST με το μέσο της πλευράς ST, να είναι το R (βλέπε σχήμα 1.5) είναι κατασκευάσιμο. Πράγματι, η ευθεία που διέρχεται από το R και είναι παράλληλη στη χορδή PQ είναι κατασκευάσιμη από την πρόταση I.31 του Ευκλείδη. Επιπλέον η διχοτόμηση του τμήματος PQ είναι δυνατή από την πρόταση I.9 του Ευκλείδη. Εξάλλου, το μέσο K της χορδής PQ ανήκει στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το R. Τώρα, από την πρόταση I.41 του Ευκλείδη έχουμε

$(\widehat{PRQ}) < \square(PQST) \Leftrightarrow (\widehat{PRQ}) < 2\triangle(PRQ) \Leftrightarrow$

$S < 2A \Leftrightarrow S-A < \frac{S}{2}$. Ομοίως $\left.\begin{array}{rcl} (\widehat{PR_1R}) & < & 2\triangle(PR_1R) \\ (\widehat{RR_2Q}) & < & 2\triangle(RR_2Q) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow (\widehat{PR_1R}) + (\widehat{RR_2Q}) < 2[\triangle(PR_1R) + \triangle(RR_2Q)] \Leftrightarrow$

$S - A < 2\frac{1}{4}A \Leftrightarrow S - A - \frac{1}{4}A < \frac{S-A}{2}$.

Ομοίως $\left.\begin{array}{rcl} (\widehat{PR_3R_1}) & < & 2\triangle(PR_3R_1) \\ (\widehat{R_1R_4R}) & < & 2\triangle(R_1R_4R) \\ (\widehat{RR_5R_2}) & < & 2\triangle(RR_5R_2) \\ (\widehat{R_2R_6Q}) & < & 2\triangle(R_2R_6Q) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$(\widehat{PR_3R_1}) + (\widehat{R_1R_4R}) + (\widehat{RR_5R_2}) + (\widehat{R_2R_6Q}) <$

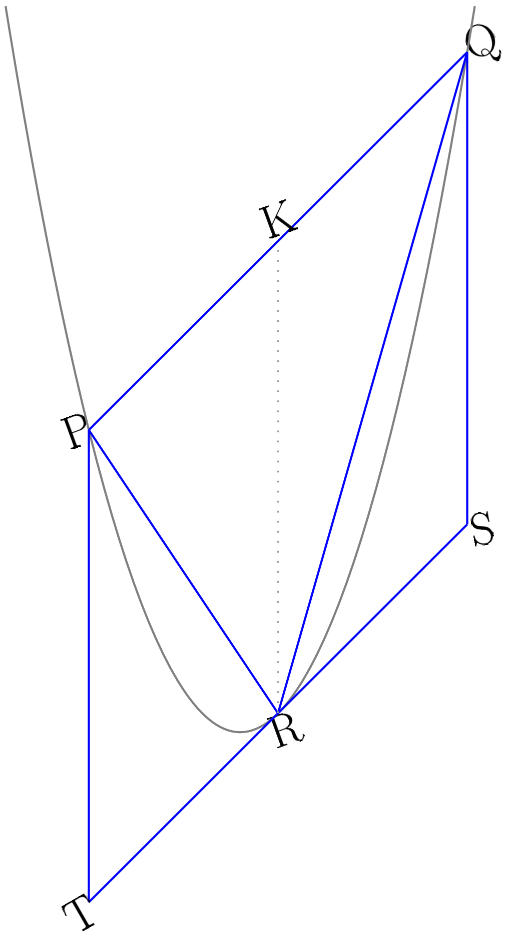
$2[\triangle(PR_3R_1)+\triangle(R_1R_4R)+\triangle(RR_5R_2)+\triangle(R_2R_6Q)] \Leftrightarrow$

$S-A-\frac{1}{4}A < 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 A \Leftrightarrow S-A-\frac{1}{4}A-\left(\frac{1}{4}\right)^2 A < \frac{S-A-\frac{1}{4}A}{2}$.

Έτσι, αν θεωρήσουμε την ακολουθία $(r_n)_{n=-1,0,1,2,\ldots}$, όπου $r_{-1} := S, r_0 := S - A, r_1 := S - A - \frac{1}{4}A$, $r_2 := S - A - \frac{1}{4}A - \left(\frac{1}{4}\right)^2 A, \ldots$, έχουμε ότι $r_n < \frac{r_{n-1}}{2}, n = 0, 1, 2, \ldots$. Από την πρόταση X.1 του Ευκλείδη προκύπτει λοιπόν ότι για $\epsilon := S - \frac{4}{3}A > 0$

υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει
$S - A - \frac{1}{4}A - \left(\frac{1}{4}\right)^2 A - \cdots - \left(\frac{1}{4}\right)^k A < S - \frac{4}{3}A \Leftrightarrow$
$A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^k A > \frac{4}{3}A \Leftrightarrow$
$\frac{4}{3}A - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k A > \frac{4}{3}A \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k A < 0$ που είναι προφανώς άτοπο.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $S = \frac{4}{3}A$. [Burn(2005)]



Σχήμα 1.5: Η πλευρά ST του παραλληλογράμμου PQST έχει μέσο το R.

Η έλικα του Αρχιμήδη δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την εξίσωση $r = a\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, όπου a σταθερός θετικός αριθμός. Σύμφωνα με τον Burn(2005), ο Αρχιμήδης μελέτησε την εν λόγω καμπύλη και κατάφερε να υπολογίσει το εμβαδόν S της περιεχόμενης από την καμπύλη επιφάνειας. Στη δική μας μελέτη θα περιορίσουμε για προφανείς λόγους τη γωνία στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με $2\pi a$ είναι ο ελάχιστης ακτίνας κύκλος από την οικογένεια των ομόκεντρων κύκλων που έχουν κέντρο την αρχή των αξόνων και περικλείουν εξολοκλήρου την έλικα. Διαιρούμε τον κύκλο αυτό, που έχει εμβαδόν ίσο με $C = 4a^2\pi^3$, σε n ίσους κυκλικούς τομείς. Εφόσον, η ακτίνα της σπείρας είναι ευθέως ανάλογη της γωνίας που προοδευτικά αυξάνεται, σημειώνουμε ότι στον υπ΄ αριθμόν $i+1$ τομέα, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, ο αντίστοιχος κυκλικός τομέας με τη μεγαλύτερη ακτίνα που περικλείεται στην έλικα, είναι αυτός που έχει ακτίνα $a\frac{2\pi i}{n}$, ενώ ο αντίστοιχος κυκλικός τομέας με τη μικρότερη ακτίνα που περικλείει την έλικα, είναι αυτός που έχει ακτίνα $\frac{a2\pi(i+1)}{n}$ (βλέπε σχήμα 1.6).

Συνεπώς $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(a\frac{2\pi i}{n}\right)^2 \frac{2\pi}{n} < S < \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left[a\frac{2\pi(i+1)}{n}\right]^2 \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow$

$\frac{4a^2\pi^3}{n^3} \sum\limits_{i=0}^{n-1} i^2 < S < \frac{4a^2\pi^3}{n^3} \sum\limits_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 \Leftrightarrow$

$\frac{4a^2\pi^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} < S < \frac{4a^2\pi^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Leftrightarrow$

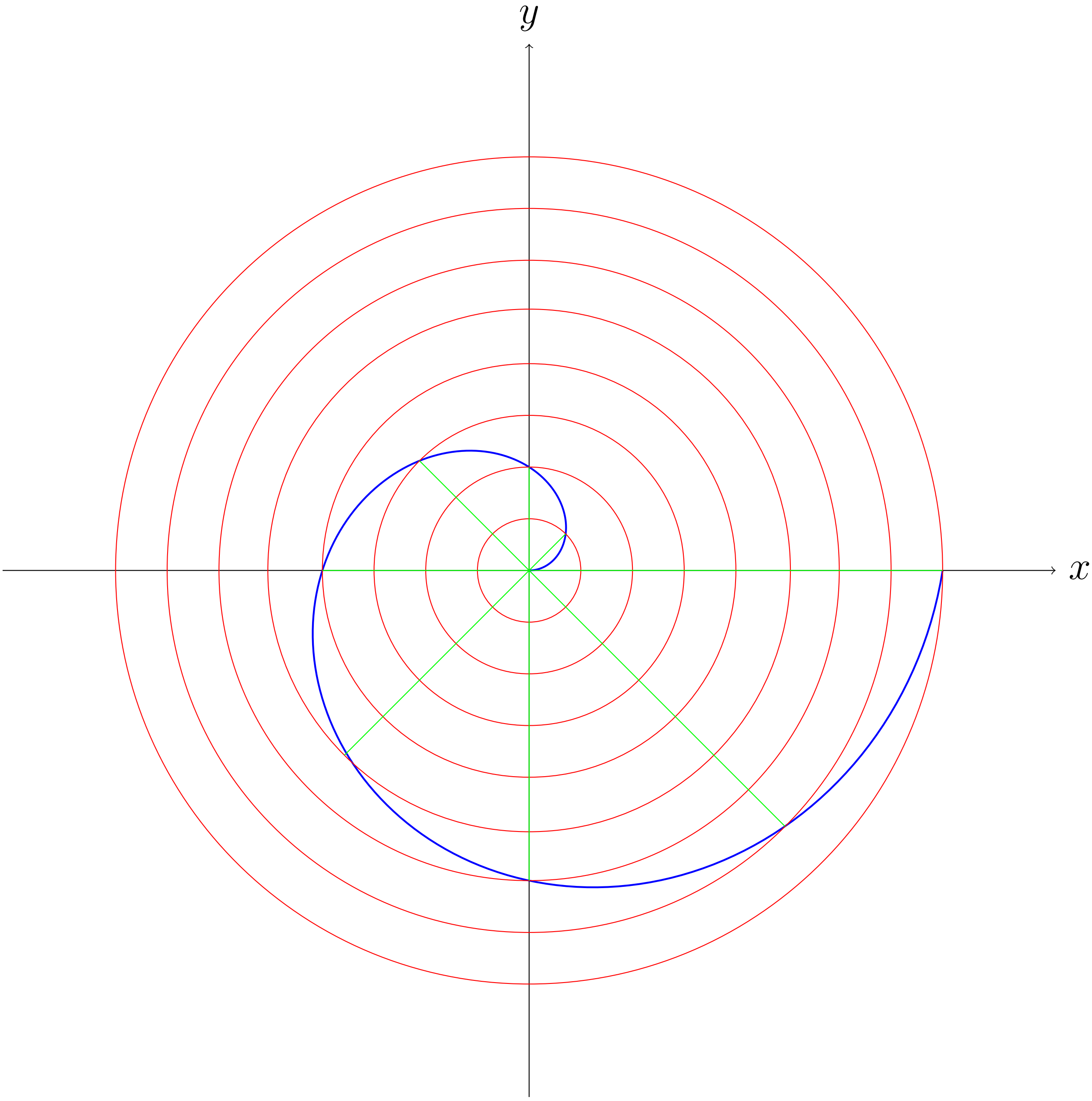
$\frac{2a^2\pi^3}{3}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) < S < \frac{2a^2\pi^3}{3}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) \Leftrightarrow$

$\frac{2a^2\pi^3}{3}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) - \frac{4a^2\pi^3}{3} < S - \frac{4a^2\pi^3}{3} <$

$\frac{2a^2\pi^3}{3}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) - \frac{4a^2\pi^3}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{2a^2\pi^3}{3}\left[(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})-2\right] < S - \frac{4a^2\pi^3}{3} <$
$\frac{2a^2\pi^3}{3}\left[(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})-2\right] \Leftrightarrow$
$\frac{C}{3}(\frac{1}{2n^2}-\frac{3}{2n}) < S - \frac{C}{3} < \frac{C}{3}(\frac{1}{2n^2}+\frac{3}{2n}) \stackrel{\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n}}{\Longrightarrow}$
$-\frac{2C}{3n} < S - \frac{C}{3} < \frac{2C}{3n} \stackrel{\text{Αρχιμήδειο αξίωμα}}{\Longrightarrow} S - \frac{C}{3} = 0 \Leftrightarrow S = \frac{C}{3}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείει η Αρχιμήδεια έλικα είναι ίση με το ένα τρίτο του εμβαδού της επιφάνειας του κύκλου εκείνου, που ανήκει στην οικογένεια των ομόκεντρων κύκλων που έχουν κέντρο την αρχή των αξόνων και περικλείουν την έλικα, αλλά έχει την ελάχιστη ακτίνα. [Burn(2005)]



Σχήμα 1.6: Η έλικα του Αρχιμήδη μεταξύ των ομόκεντρων κύκλων.

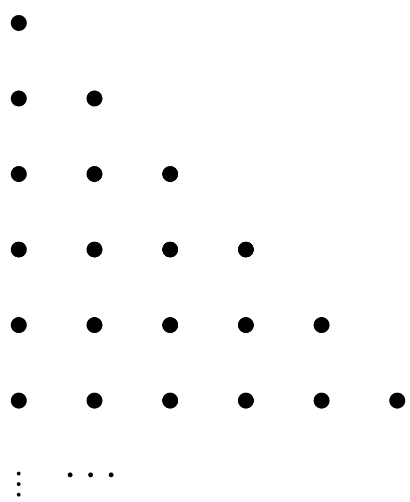
Το όριο από τον 17ο αιώνα και μετά Οι μέθοδοι των αρχαίων Ελλήνων κυριάρχησαν στην χρήση των οριακών διαδικασιών τουλάχιστον μέχρι και το 16ο αιώνα. Το 1604 ο Ιταλός Luca Valerio(1553-1618) στην πρόταση VI του έργου του «De Centro Gravitatis solidorum libri tres» επιχειρεί τον τετραγωνισμό τυχαίας καμπύλης του επιπέδου. Παρόμοια μονοπάτια με τον Valerio βάδισε ο Φλαμανδός μηχανικός Simon Stevin (1548-1620). Ο Stevin ασχολήθηκε με τα κέντρα βάρη σχημάτων. Στο έργο του στη στατική το 1856 απέδειξε ότι το κέντρο βάρους ενός τριγώνου κείται σε μία διάμεσό του. Ο John Wallis (1616-1703) στα δύο βιβλία του «De sectionibus conicis tractatus» (1655) και «Arithmetica Infinitorum» (1656) περνάει από το γεωμετρικό στο αριθμητικό πλαίσιο. Προκειμένου να αποδείξει τον τύπο του εμβαδού του τριγώνου εισάγει για πρώτη φορά το σύμβολο ∞ θεωρώντας απείρου πλήθους παραλληλογράμμων ίδιου ύψους ίσου με $\frac{1}{\infty}$. Για «απειροστά» κάνει λόγο και ο Cavalieri (1598-1647) που αντιλαμβάνονταν κάθε επιφάνεια ως την ένωση μιας δέσμης απείρου πλήθους παραλλήλων γραμμών έτσι ώστε η απόσταση δύο διαδοχικών να είναι σταθερή, και ομοίως, κάθε στερεό ως την ένωση μιας δέσμης παραλλήλων επιπέδων έτσι ώστε η απόσταση δύο διαδοχικών να είναι σταθερή. [Boyer(1959), σελ.104,105,170] Τα «απειροστά» είναι «μικροί» θετικοί αριθμοί που υπεισέρχονται σε μια εξίσωση, που στην τελική της μορφή μπορούν να αγνοηθούν.

Επιπλέον, ο Cavalieri φτάνει στην απόδειξη του ισοδυνάμου του θεωρήματος $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}, n = 1, 2, \ldots$, ενώ ο Evangelista Torricelli (1608-1647) του γενικότερου για $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$. Η μέθοδος των δύο ανδρών ούσα καθαρά γεωμετρική, στηρίχθηκε στα «απειροστά». Στην ίδια χρονική περίοδο ο Roberval (1602-1675) φθάνει στην απόδειξη του ίδιου αποτελέσματος κατά έναν διαφορετικό τρόπο πιθανόν καθ΄ υπόδειξην του Fermat (1601-1665). Συνδυάζοντας λοιπόν αλγεβρικά και γεωμετρικά μεγέθη, ίσως κατ΄ επιρροήν των Πυθαγορείων και ιδιαίτερα του Νικομάχους του Γερασηνού (60-120 μ.Χ.), έφθασε σε μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα απόδειξη. Θεώρησε το παρακάτω τρίγωνο (βλέπε σχήμα 1.7), στο οποίο πρώτα παρατήρησε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1 \\
3 &= \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{2}2 \\
6 &= \frac{1}{2}3^2 + \frac{1}{2}3 \\
10 &= \frac{1}{2}4^2 + \frac{1}{2}4 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

και γενικά σε κάθε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο στο οποίο το κάθε σκέλος του είναι ίσο με $n, n = 1, 2, \ldots$

κουκίδες ισχύει η σχέση $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$. Στηριζόμενος στην αντίληψη ότι το τρίγωνο αποτελείται από άπειρες τέτοιες ευθείες και συνεπώς για «μεγάλα» n ο όρος $\frac{1}{2}n$ που αντιπροσωπεύει το ήμιση του κάθε σκέλους του τριγώνου δε λαμβάνεται υπόψιν (συγκρινόμενο με τον όρο $\frac{1}{2}n^2$ που αντιπροσωπεύει το εμβαδόν του τριγώνου). Δεδομένου ότι το τρίγωνο είναι το ήμιση του τετραγώνου, έφθασε στο αποτέλεσμα $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$. Ο Roberval συνέχισε το συλλογισμό αυτό προκειμένου να φθάσει στο αποτέλεσμα $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. [Boyer(1959), σελ.141,142,143,144]



Σχήμα 1.7: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο με σκέλος n κουκίδων ισχύει η σχέση: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

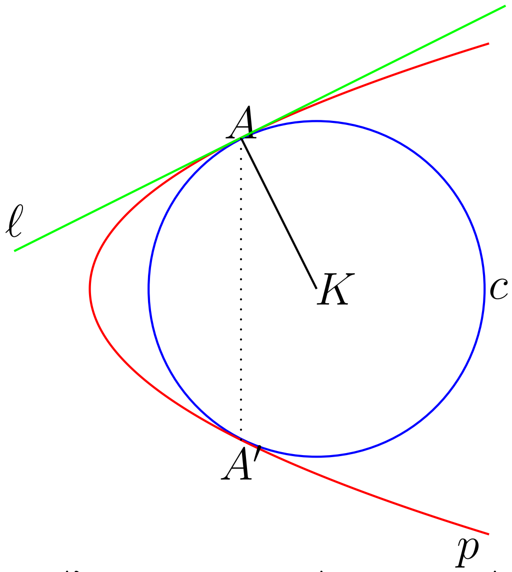
Ο Fermat για την απόδειξη του ίδιου αποτελέσματος φέρεται να έχει χρησιμοποιήσει το 1636 την ανισότητα: $1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1} >$

$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m$. Όμως και ο Pascal (1623-1662) αιτιολόγησε το ίδιο αποτέλεσμα υπολογίζοντας αθροίσματα όρων αριθμητικής προόδου $n -$ οστής τάξης και αγνοώντας τους όρους κατώτερης τάξης. Οι Fermat,Torricelli και Rene Descartes (1596-1665), ασχολήθηκαν με την εφαπτομένη της παραβολής, μάλιστα ο Fermat έδωσε το 1636 τον ορισμό της εφαπτομένης της παραβολής. Ο Rene Descartes έδωσε τον παρακάτω τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης της παραβολής p που δίνεται από την εξίσωση $y^2 = ax, a \neq 0$ στο σημείο της $A(a,a)$. Θεωρούμε τον κύκλο c που έχει το κέντρο του στον άξονα $x'x$, έστω ότι $K(h,0)$ (h υπό προσδιορισμό) αυτό, και διέρχεται από το A (βλέπε σχήμα 1.8). Τότε για τον c έχουμε:

$$\begin{array}{ll} (x-h)^2 + y^2 = r^2 & r \text{ η ακτίνα του } c \\ (a-h)^2 + a^2 = r^2 & \text{το A ανήκει στον } c \end{array}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι
$c : x^2 + y^2 - 2hx + 2ah - 2a^2 = 0$. Η εύρεση των κοινών σημείων των c, p οδηγεί στην ως προς x εξίσωση:
$x^2 + ax - 2hx + 2ah - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + (a-2h)x + 2a(h-a) = 0$ με διακρίνουσα την
$(2h-3a)^2 \geq 0$ και ρίζες (όχι κατ΄ ανάγκην διακριτές) τις $a, 2h-2a$. Βεβαίως η εξίσωση της p επιβάλλει
$ax \geq 0 \Leftrightarrow a(2h-2a) \geq 0 \Leftrightarrow |h| \geq |a|$. Ορίζουμε το h έτσι ώστε η τελευταία εξίσωση της τομής των c, p να έχει μοναδική ρίζα, που σημαίνει ότι οι c, p έχουν δύο

κοινά σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$. Αυτό συμβαίνει όταν η διακρίνουσα είναι μηδέν, δηλαδή $(2h-3a)^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{3}{2}a$. Φέρουμε την ευθεία ℓ που είναι κάθετη στην ακτίνα KA του c για $h = \frac{3}{2}a$ στο A. Τότε η ℓ είναι η εφαπτόμενη ευθεία της p στο A. [Boyer(1959), σελ.149,159,166,167]



Σχήμα 1.8: Οι καμπύλες c, p και η κοινή τους εφαπτόμενη ευθεία ℓ στο A.

Πριν το 1644 ο Fermat μελέτησε τον τετραγωνισμό, τον κυβισμό και την εύρεση του κέντρου βάρους των καμπυλών με εξίσωση $a^m y^n = b^n x^m$ που είχαν όμως μελετηθεί και από τους Cavalieri,Torricelli,Roberval και Pascal. Με την εφαπτομένη σε καμπύλη ασχολήθηκε και ο Torricelli. Ο Andre Tacquet (1612-1660) στο έργο του Cylindricorum et annularium libri IV έδωσε 4 αποδείξεις της πρότασης σύμφωνα με την οποία ο όγκος σφαίρας είναι ίσος με αυτόν μιας κυλινδρικής σφήνας με βάση ίση με το ήμιση του μεγίστου κύκλου της σφαίρας και ύψος ίσο με την περιφέρεια της σφαίρας. Το θεώρημα αυτό είχε δοθεί από ένα πλήθος μαθηματικών μεταξύ των οποίων ο Johannes Kepler (1571-1630). Ο Isaac Barrow (1630-1677) βελτίωσε την μέθοδο υπολογισμού της εφαπτόμενης μιας καμπύλης γραμμής του Fermat, μολονότι την είχε γνωρίσει εμμέσως, πιθανότατα μέσω των Christiaan Huygens (1629-1695) και James Gregory (1638-1675). Επίσης ο Tacquet στο έργο του Arithmetiacae theoria el praxis το 1656 εξήγησε το παράδοξο του Αχιλλέα με όρους γεωμετρικής προόδου. [Boyer(1959), σελ.139, 140,160,189]

Από τα παραπάνω συνάγουμε το συμπέρασμα ότι οι μαθηματικοί του 17ου αιώνα είχαν ασχοληθεί με την επίλυση πρακτικών προβλημάτων όπως τα προβλήματα κίνησης, η εύρεση εφαπτομένης ευθείας μιας καμπύλης γραμμής, ο υπολογισμός εμβαδού μεταξύ καμπυλών γραμμών και όγκου στερεών σχημάτων και η εύρεση του κέντρου βάρους διαφόρων σχημάτων, εργαζόμενοι πολλές φορές παράλληλα, αλλά ανεξάρτητα, με παρόμοια προβλήματα ή ακόμα και με ακριβώς το ίδιο πρόβλημα. Ο τρόπος που εργάζονταν ήταν προσαρμοσμένος στη φύση του συγκεκριμένου θέματος και απαιτούσε ευρηματικότητα και δεξιοτεχνία είτε ακολουθούσε την γεωμετρική οδό, είτε την αλγεβρική, είτε κάποιο συνδυασμό τους. Απουσίαζει λοιπόν το γενικό θεωρητικό πλαίσιο με τη βοήθεια του οποίου ο εν δυνάμει λύτης των παραπάνω προβλημάτων θα μπορούσε να τα αντιμετωπίσει με ενιαίο και μεθοδικό τρόπο.[Boyer(1959), σελ.187]

Στο δεύτερο μισό του 17ου αιώνα λοιπόν είχε ωριμάσει ο καιρός για την οργάνωση των ιδεών και μεθόδων της απειροστής αναλυσης σε ένα νέο αντικείμενο, που θα χαρακτηρίζονταν από μια ειδική μεθοδολογία. Ο μεν Fermat δεν το έκανε, καθώς απέτυχε να γενικεύσει τις μεθόδους του και να αναγνωρίσει ότι το πρόβλημα της εφαπτομένης και αυτό του τετραγωνισμού, είναι το ένα το αντίστροφο του άλλου. Ο δε Barrow δεν το έκανε, μολονότι ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε την ενωτική σημασία του αντιστρόφου των προβλημάτων εφαπτομένης και τετραγωνισμού, γιατί δε συνειδητοποίησε ότι τα θεωρήματά του ήταν η βάση για το νέο αντικείμενο. Οι Isaac Newton (1643-1727) και Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) εργαζόμενοι ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον εφηύραν σχεδόν συγχρόνως ενιαία εφαρμόσιμες διαδικασίες, που κατ΄ ουσίαν είναι αυτές που χρησιμοποιούμε και σήμερα στον απειροστικό λογισμό και συνέβαλαν στην ύστερη λογική ανάπτυξη των εννοιών της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Τα γεωμετρικά αναπτύγματα που οδηγούν στον λογισμό με ρευστές ποσότητες του Newton δε διαφέρουν ουσιαστικά από τον λογισμό με απειροστά του Leibniz. Δεν είναι υπερβολή να τους θεωρήσουμε εφευρέτες του νέου αντικειμένου. Ωστόσο δεν είναι υπεύθυνοι για τις ιδέες και τους ορισμούς που χρησιμοποιούμε τώρα, καθώς αυτοί χρειάστηκαν δύο αιώνες επιπλέον εργασίας προς την κατεύθυνση αυτή. Οι ανακαλύψεις τους οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στους προγενέστερους τους και κυρίως σε αυτούς του 17ου αιώνα. Ο Leibniz συμβόλιζε τα αθροίσματα των απειροστών αρχικά ως $\int x$ και κατόπιν καθ' υπόδειξιν των αδερφών Bernoulli ως $\int xdx$. Τις διαφορές των απειροστών τις συμβόλιζε αρχικά ως $\frac{x}{d}$ και έπειτα ως dx. Ο Newton ομολόγησε ότι έφτασε στις πρώτες ανακαλύψεις του στη ανάλυση και στα ρευστά επηρεαζόμενος από τις αρχές της επαγωγής και παρεμβολής που εμφανίζονται στο βιβλίο Arithmetica Infinitorum του Wallis. [Boyer(1959), σελ.188,189,190,205]

Η έννοια της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος περιείχαν στα πρώτα στάδια της εξέλιξής τους κάποιες ασάφειες, που οφείλονταν κυρίως στην αδυναμία των μαθηματικών να διαπραγματευτούν με λογική αυστηρότητα την έννοια του απείρως μικρού και του απείρως μεγάλου. Αυτή η αδυναμία οδηγούσε πολλούς να αμφισβητούν τα θεμέλια πάνω στα οποία στηρίζονταν το οικοδόμημα της μαθηματικής ανάλυσης και να συνδέουν τα εντυπωσιακά αποτελέσματα με ορισμένες μεταφυσικές ερμηνείες. Οι μαθηματικοί προσπάθησαν να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες εισάγοντας την ιδέα του ορίου με την οποία αρχικά εκφράζονταν η δυνατότητα μιας μεταβαλλόμενης ποσότητας να προσεγγίζει επ' άπειρον μια σταθερή ποσότητα χωρίς στην πραγματικότητα να την φτάνει ποτέ. Ο Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) όρισε το 1765 αυτήν την έννοια στην «Εγκυκλο-

παίδεια» του Diderot ως εξής: «Ένα μέγεθος ονομάζεται **όριο** ενός άλλου, όταν το δεύτερο μπορεί να προσεγγίζει το πρώτο σε μια απόσταση οσοδήποτε μικρή, αν και ένα μέγεθος δεν μπορεί να ξεπερνά το μέγεθος που προσεγγίζει έτσι ώστε η διαφορά μιας τέτοιας ποσότητας από το όριο της να είναι εντελώς αμελητέα». [Ανδρεαδάκης,Κατσαργύρης,Μετής,Μπρουχούτας,Παπασταυρίδης,Πολύζος (2004), σελ. 207] Σύμφωνα λοιπόν με αυτόν τον ορισμό, που περικλείει την έννοια της κίνησης ως μια διαδικασία προσέγγισης, ο αριθμός 2 είναι το όριο της ακολουθίας
$1.9 \quad 1.99 \quad 1.999 \quad 1.9999 \quad \cdots$
αλλά όχι και της ακολουθίας $1.9 \quad 1.99 \quad 2 \quad 2 \quad \cdots$
(γιατί αυτή «φτάνει» το 2), ούτε όριο της ακολουθίας $1.9 \quad 2.01 \quad 1.9999 \quad 2.0001 \quad \cdots$ (γιατί αυτή ξεπερνάει το 2). Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν την έννοια αυτή του ορίου φαίνεται χαρακτηριστικά στο επόμενο παράδειγμα στο οποίο ο Sylvestre Francois Lacroix (1765-1843) αποδεικνύει το 1810 ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax}{x+a} = a$:

«Έστω ότι δίνεται η συνάρτηση $\frac{ax}{x+a}$ στην οποία υποθέτουμε ότι το x αυξάνεται θετικά χωρίς τέλος. Διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή με το x βρίσκουμε $\frac{a}{1+\frac{a}{x}}$, ένα αποτέλεσμα που δείχνει καθαρά ότι η συνάρτηση θα παραμένει πάντοτε μικρότερη από το a αλλά θα προσεγγίζει συνεχώς αυτήν την τιμή, αφού το μέρος $\frac{a}{x}$ μειώνεται όλο και περισσότερο και μπορεί να μειωθεί όσο θέλουμε. Η διαφορά ανάμεσα στο δοθέν κλάσμα και την τιμή a εκφράζεται ως $a - \frac{ax}{x+a} = \frac{a^2}{x+a}$, και επομένως γίνεται ολοένα και πιο μικρή, όσο το x γίνεται μεγαλύτερο και μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε ποσότητα, οσοδήποτε μικρή. Συνεπώς το δοθέν κλάσμα μπορεί να προσεγγίζει το a όσο κοντά θέλουμε: άρα το a είναι το όριο της συνάρτησης $\frac{ax}{x+a}$ ως προς την αόριστη αύξηση του x».Για να τυποποιήσουν οι μαθηματικοί αυτήν την μακροσκελή περιγραφική διαδικασία, προσπάθησαν να αποσυνδέσουν την έννοια του ορίου από την έννοια της κίνησης και να την ορίσουν με καθαρά αριθμητικούς όρους, έτσι ώστε να γίνει ένα αντικείμενο μαθηματικού λογισμού. [Ανδρεαδάκης,Κατσαργύρης,Μετής,Μπρουχούτας,Παπασταυρίδης,Πολύζος (2004), σελ. 208]

Ο Augustin Louis Cauchy (1789-1857) όρισε αυτό, που σήμερα λέμε όριο στο βιβλίο του Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique, που εκδόθηκε το 1821 ως εξής: «Όταν οι διαδοχικές τιμές που αποδίδονται σε μια μεταβλητή, προσεγγίζουν μια σταθερή τιμή, έτσι ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτή όσο λίγο επιθυμούμε, τότε το τελευταίο λέγεται όριο όλων των άλλων». Αυτός ήταν ο πιο ξεκάθαρος ορισμός της έννοιας του ορίου μέχρι τότε. Βεβαίως οι μαθηματικοί που ακολούθησαν αναζήτησαν έναν πιο επίσημο και ακριβή ορισμό. Ο Cauchy δεν έκανε λόγο για απειροστά, αλλά για την ίδια τη μεταβλητή: «Θα λέμε ότι μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή, όταν η αριθμητική τιμή της μειώνεται απείρως κατά τέτοιο τρόπο που να συγκλίνει στο όριο μηδέν». Ο ορισμός της συνέχειας του Cauchy ήταν ο εξής: «η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής μεταξύ δοθέντων ορίων, αν μεταξύ αυτών μια απείρως μικρή αύξηση i στην μεταβλητή x παράγει πάντα μια απείρως μικρή αύξηση $f(x+i)-f(x)$ στην ίδια τη συνάρτηση». Ο τελευταίος ορισμός είναι όμοιος με αυτόν που είχε διατυπώσει ο Bernhard Bolzano(1781-1848) αλλά δεν είχε ποτέ δημοσιοποιηθεί. [Boyer(1959), σελ. 268,273] Ο Cauchy, όπως και ο Bolzano, προσπάθησε να αποδείξει το θεώρημά του σύμφωνα με το οποίο κάθε ακολουθία είναι συγκλίνουσα ακολουθία αν και μόνο αν είναι Cauchy. Επίσης στο Cours d'analyse όρισε το $\sqrt{2}$ ως το όριο της ακολουθίας $1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414, \ldots$. Επιπλέον, όρισε την παράγωγο μιας συνάρτησης χρησιμοποιώντας την διατύπωση του Bolzano: έστω η συνάρτηση $y = f(x)$, μια αύξηση $\Delta x = i$ και ο τύπος $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$. Το όριο αυτής της αναλογίας (αν υπάρχει), καθώς το i προσεγγίζει το 0, το συμβόλισε με $f'(x)$ και το ονόμασε παράγωγο του y ως προς x. Επιπλέον, ο Cauchy αποκατέστησε το ολοκλήρωμα: για μια συνάρτηση $y = f(x)$ συνεχή στο διάστημα $[x_0, x_n]$ διατύπωσε το χαρακτηριστικό άθροισμα των γινομένων $S_n = (x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(x_n-x_0)f(x_{n-1})$. Αν οι απόλυτες τιμές των διαφορών $x_{i+1} - x_i$ μειώνονται απείρως αυξανομένου του n, τότε η τιμή του S_n θα «προσεγγίσει μια συγκεκριμένη τιμή» S, που θα εξαρτάται μονοσήμαντα από τον τύπο της συνάρτησης και τα άκρα x_0, x_n, ενώ το όριο θα λέγεται πεπερασμένο ολοκλήρωμα. Τέλος, απέδειξε ότι δοθείσης μιας συνεχούς συνάρτησης f η συνάρτηση F που δίνεται από τον τύπο $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ έχει ως παράγωγο την f. [Boyer(1959), σελ.269,279,280,281]

Το αποτέλεσμα της προσπάθειας της μαθηματικής κοινότητας για αυστηροποίηση του ορισμού του ορίου υπήρξε ο σημερινός «στατικός» ορισμός με τη βοήθεια των ανισοτήτων και της απόλυτης τιμής, που διατυπώθηκε από τον Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) στα μέσα του 19ου αιώνα. Με αυτόν τον τρόπο η έννοια του ορίου απογυμνώθηκε από κάθε στοιχείο εποπτείας, αλλά έγινε έτσι δυνατόν να αποδειχθούν με λογική αυστηρότητα οι ιδιότητες των ορίων και να τυποποιηθεί η διαδικασία υπολογισμού τους. [Ανδρεαδάκης,Κατσαργύρης,Μετής,Μπρουχούτας,Παπασταυρίδης,Πολύζος (2004), σελ. 208] Ο ορισμός του Weierstrass δεν μιλάει για προσέγγιση. Αρκετοί συγγραφείς προ του Weierstrass είχαν ορίσει τη μεταβλητή σαν μια ποσότητα ή ένα μέγεθος που δεν είναι σταθερό. Σύμφωνα με τον Boyer(1959)(σελ.286) ο Weierstrass επετέθη στην έκφραση του Cauchy ότι η μεταβλητή *προσεγγίζει* ένα όριο και κατάφερε να αποσυνδέσει με επιτυχία την έννοια της μεταβλητής από την έννοια της κίνησης.

Κεφάλαιο 2

Εμπόδια κατανόησης της έννοιας του ορίου

Τα εμπόδια κατανόησης του ορίου αξίζουν να μελετηθούν προκειμένου να αναγνωρισθούν οι δυσκολίες των μαθητών/φοιτητών κατά τη μαθησιακή διαδικασία, ώστε να αναπτυχθούν στη συνέχεια οι στρατηγικές διδασκαλίας. Σύμφωνα με τον Cornu(1991), τα εμπόδια διακρίνονται σε *γενετικά* και *ψυχολογικά*, που εμφανίζονται κατά την προσωπική ανάπτυξη του μαθητή/φοιτητή, τα *διδακτικά* που δημιουργούνται από τον ιδιαίτερο τρόπο διδασκαλίας του καθηγητή, και τα *επιστημολογικά* που οφείλονται στον φύση αυτή αυτής καθευατήν των μαθηματικών εννοιών. Κατά τον Cornu(1991), ο Gaston Bachelard το 1938 ισχυρίστηκε ότι για τη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας είναι υψίστης σημασίας η πρόβλεψη των πιθανών εμποδίων, ειδικότερα των ενδημικών επιστημολογικών εμποδίων, όρος εισαχθείς από τον ίδιο το Γάλλο φιλόσοφο: «Πρέπει να θέσουμε το πρόβλημα της επιστημονικής γνώσης με όρους εμποδίων. Δεν είναι το θέμα της θεώρησης των εξωτερικών εμποδίων, όπως η πολυπλοκότητα και η παροδικότητα των επιστημονικών φαινομένων, ούτε να ελεεινολογήσουμε την ένδεια των ανθρωπίνων αισθήσεων. Στην απόκτηση γνώσης τα εμπόδια προξενούν αναπόφευκτα επιβράδυνση στο ρυθμό μάθησης και γνωστικές δυσκολίες. Είναι υπεύθυνα για τη στασιμότητα ή ακόμη και την παλινδρόμηση της μάθησης, και πρέπει να αντιληφθούμε τα αίτια αυτής της αδράνειας, τα οποία ονομάζουμε επιστημολογικά εμπόδια. Αντιμετωπίζουμε τη νέα γνώση μέσω της σύγκρουσης με την παλαιά και κατά την διαδικασία αυτή πρέπει να καταστρέψουμε τις προηγούμενες αρρωστημένες ιδέες.» Σύμφωνα με τον Cornu(1991), ο Guy Brousseau ορίζει το επιστημολογικό εμπόδιο ως τη γνώση που λειτουργεί ικανοποιητικά σε ένα συγκεκριμένο πεδίο δραστηριότητας, και επομένως εγκαθιδρύεται, αλλά αποτυγχάνει να αποδώσει σε ένα άλλο πλαίσιο, όπου δυσλειτουργεί και οδηγεί σε αντιφάσεις. Έτσι καθίσταται απαραίτητη η αντικατάστασή της από μια πιο επαρκή και πλήρη γνώση. Η διαδικασία αυτή της αποσαφήνισης του εμποδίου και της απόρριψης της παλαιάς γνώσης είναι απαραίτητη πριν την αναδόμηση της γνώσης. Η Sierpinska(1987) θεωρεί ότι ένα επιστημολογικό εμπόδιο δύναται να γίνει διττό. Η υπέρβαση ενός τέτοιου εμποδίου δεν επιβάλλει την αντίθετη άποψη, αλλά υποδέχεται μια νέα άποψη που συμβιώνει με την παλαιά. Αυτό σημαίνει ότι ο φοιτητής πρέπει να αποστασιοποιηθεί και να αναλύσει τα μέσα που χρησιμοποιήθηκαν για τη λύση των προβλημάτων προκειμένου να τυποποιήσει τις υποθέσεις που είχε σιωπηρά δεχθεί και να συνειδητοποιήσει τις πιθανές ανταγωνιστικές εικασίες.

Σύμφωνα με τον Bachelard τα επιστημολογικά εμπόδια εμφανίζονται τόσο κατά την ιστορική ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης όσο και κατά την εκπαιδευτική πρακτική [Cornu(1991)]. Κατά τον Bachelard τα επιστημολογικά εμπόδια έχουν τα εξής σημαντικά χαρακτηριστικά:

- είναι αναπόφευκτες και ουσιαστικές συνιστώσες της υπό απόκτησης γνώσης
- βρίσκονται τουλάχιστον κατά μέρος στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας

Κατά τον Cornu(1991) υπάρχουν τέσσερα σημαντικά εμπόδια στην ιστορική ανάπτυξη της έννοιας του ορίου:

1. Η αποτυχία σύνδεσης της γεωμετρίας με τους αριθμούς.
   Κατά την αρχή του Ευδόξου του Κνίδου δοθέντων δύο ανίσων μεγεθών λαμβάνοντας το ήμιση του πρώτου, στη συνέχεια το ήμιση αυτού, και ούτω καθεξής, θα πάρουμε κάποια στιγμή ένα μέγεθος μικρότερο του δευτέρου. Με βάση αυτό και με τη μέθοδο της εξάντλησης για δοθέν $\epsilon > 0$ αποδείχθηκε ότι υπάρχει ένα κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο του οποίου το εμβαδόν είναι μικρότερο του αυτού του κύκλου κατά λιγότερο από ϵ. Επίσης, αν A_1, A_2 είναι τα

εμβαδά δύο κύκλων με ακτίνες r_1, r_2 αντιστοίχως, τότε αποκλείωντας τις περιπτώσεις $\frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2}$ και $\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$ απομένει η περίπτωση $\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$. Σε καθένα από τα παραπάνω προβλήματα δόθηκε λύση εφαρμοσμένη σε γεωμετρικά μεγέθη και όχι σε αριθμούς με χρήση ενός ειδικού επιχειρήματος σε γεωμετρικό πλαίσιο. Απούσης λοιπόν της γέφυρας από την γεωμετρική ερμηνεία στην αριθμητική, υπάρχει ένα χάσμα μέχρι την έννοια του αριθμητικού ορίου. [Cornu(1991)]

2. Η έννοια του απείρως μεγάλου και απείρως μικρού. Στην ιστορία της έννοιας του ορίου συναντάμε συχνά την έννοια των απείρως μικρών ποσοτήτων. Σύμφωνα με τον Cornu(1991), ο Newton έκανε λόγο για την «ψυχή φευγαλέων ποσοτήτων» όταν εξαφανίζονται, για να μπορέσει να υπολογίσει έτσι την «τελική σχέση» τους. Ο Leonhard Euler (1707-1783) χρησιμοποίησε ελεύθερα την έννοια του απείρως μικρού, που μπορεί, όταν είναι κατάλληλο να θεωρηθεί ίσο με 0. Από την άλλη πλευρά ο d'Alembert αμφισβήτησε την νομιμότητα της ύπαρξης και χρήσης των απείρως μικρών και αναζήτησε τρόπους να απομακρυνθούν από το διαφορικό λογισμό. Δικαιολογώντας τη θέση αυτή ισχυρίσθηκε ότι μια ποσότητα είναι κάτι ή τίποτα, και δεν μπορεί να είναι συγχρόνως και τα δύο. Χαρακτήρισε την υπόθεση της ύπαρξης μιας ενδιάμεσης κατάστασης ως ένα άγριο όνειρο. Κατά τον

Cornu(1991) ο Cauchy έκανε επίσης χρήση της έννοιας του απειροστού και συγκεκριμένα στην διατύπωση της συνέχειας μιας συνάρτησης. Δεν περιορίστηκε όμως στην χρήση της έννοιας του απειροστού, αλλά προέβη και στην εξήγησή της: «μια μεταβλητή ποσότητα γίνεται απείρως μικρή, όταν η αριθμητική τιμή του μειώνεται απεριόριστα κατά τρόπο που να συγκλίνει στο όριο μηδέν». Η αντίληψη σύμφωνα με την οποία το ϵ παριστάνει έναν αριθμό, που δεν είναι μεν μηδέν, είναι δε μικρότερος από όλους τους θετικούς αριθμούς, παρατηρείται και σήμερα σε φοιτητές. Επίσης κάποιοι φοιτητές θεωρούν ότι το $0.999\cdots$ είναι ο «τελευταίος αριθμός πριν το 1» (χωρίς να είναι ίσος με το 1). Αντιστοίχως υπάρχει η πεποίθηση κάποιων φοιτητών ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από όλους τους άλλους (χωρίς να είναι άπειρος). [Cornu(1991)]

3. Η μεταφυσική όψη της έννοιας του ορίου.
   Η δυσκολία εισαγωγής της έννοιας του ορίου φαίνεται στην ιστορική της πορεία να έχει σχέση με τη μεταφυσική και την φιλοσοφία. Σύμφωνα με τον Cornu(1991), οι μαθηματικοί από τους αρχαίους Έλληνες μέχρι τον d'Alembert υπήρξαν φειδωλοί με την έννοια του απείρου. Ο d'Alembert έγραψε «Μπορεί κανείς να κάνει εύκολα διαφορικό λογισμό παραλείποντας τα υπόλοιπα της μεταφυσικής του απείρου.» Ο Lagran-

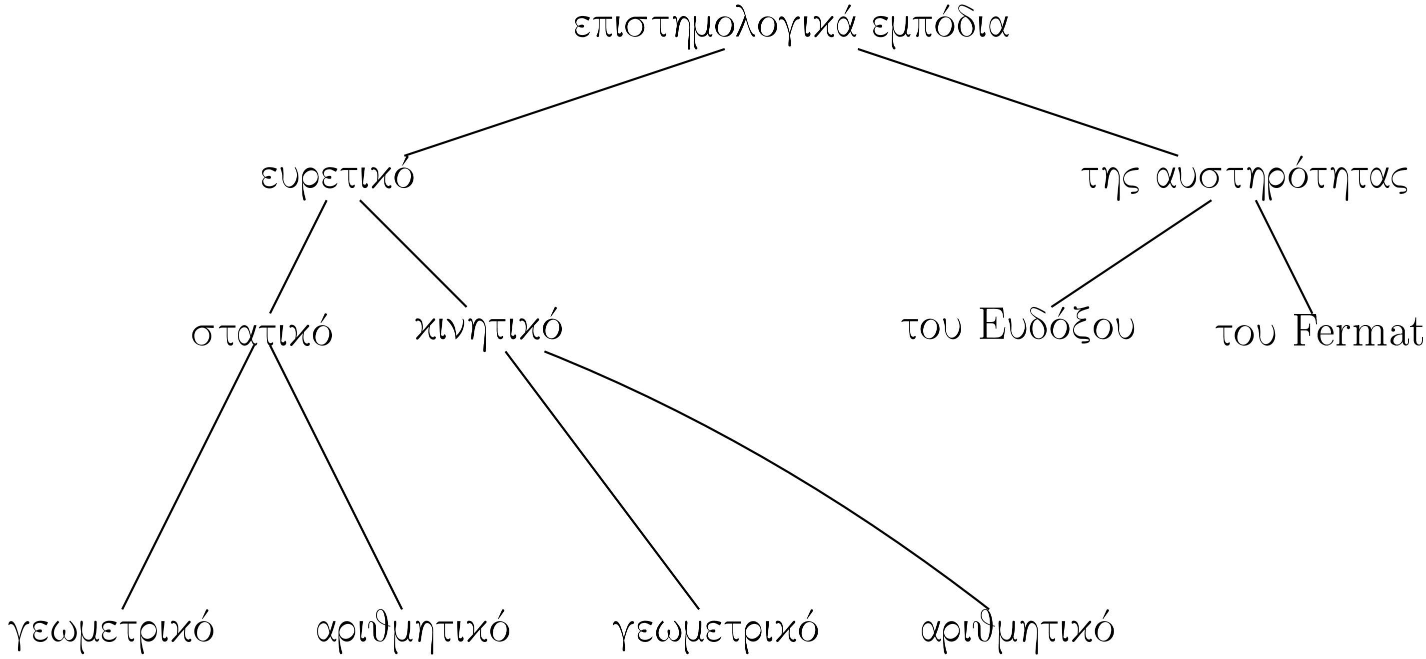
ge εξέφρασε έναν παρόμοιο φόβο για την μεταφυσική οπτική. Στην ανατολή της σταδιοδρομίας του νόμιζε ότι μπορούσε να επιτύχει την αυστηρότητα στη χρήση των απειροστών, αλλά στη συνέχεια αναθεώρησε την άποψη αυτή, καθώς είδε ότι τα απειροστά του Leibniz δεν είχαν ικανοποιητική μεταφυσική βάση. Έτσι αναδιατύπωσε τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού και κατέφυγε στις σειρές με καθαρά αλγεβρικούς όρους. Εντούτοις ούτε στις σειρές που είχαν παραδοθεί, σύμφωνα με τον Cornu(1991), από τον Euler στον Lagrange κατάφερε ο τελευταίος να διατυπώσει αυστηρή θεωρία (Cajori(1980), page 257) Κατά την ιστορική ανάπτυξη της έννοιας του ορίου οι μαθηματικοί ήρθαν αντιμέτωποι με ανυπέρβλητες δυσκολίες. Η μεταφυσική οπτική της έννοιας του ορίου εμφανίζεται και σήμερα στους φοιτητές. Σε κάποια συνέντευξη κάποιος φοιτητής είπε: «Δεν είναι στην πραγματικότητα μαθηματικά», καθώς ο απειροστικός λογισμός, ακόμη και στην εισαγωγή του, δε στηρίζεται πλέον στην απλή αριθμητική και την άλγεβρα. Κάποιοι φοιτητές έχουν δυσκολία στη διαχείριση του ορίου. Κάποιες φράσεις ενδεικτικές φράσεις φοιτητών είναι «δεν είναι αυστηρό, αλλά λειτουργεί», «δεν υπάρχει», «είναι πολύ αφηρημένο», «η μέθοδος είναι σωστή δεδομένου ότι ικανοποιούμαστε με μια προσεγγιστική τιμή».Το εμπόδιο αυτό κάνει την κατανόηση της έννοιας του ορίου ιδιαιτέρως δύσκολη, καθώς το όριο δεν μπορεί να υπολογισθεί αμέσως με την χρήση γνωστών αλγεβρικών μεθόδων.[Cornu(1991)] Η άποψη της Sierpinska(1987) είναι ότι στο νου πολλών φοιτητών το άπειρο δεν είναι υπαρκτό παρά μόνο ποσοτικά. Έτσι το άπειρο χαλιναγωγείται και η μεταφυσική του οπτική εξαφανίζεται.

4. Επιτυγχάνεται το όριο ή όχι;
Αφενός ο Benjamin Robins (1707-1751) εκτίμησε ότι το όριο δεν μπορεί να επιτευχθεί, όπως συμβαίνει με τα εγγεγραμμένα στον κύκλο κανονικά πολύγωνα διαβεβαιώνοντας ότι «δίνουμε το όνομα τελικό μέγεθος σε ένα όριο που μια μεταβλητή θα μπορούσε να πλησιάσει οσοδήποτε κοντά, χωρίς να γίνει απολύτως ίση με αυτό.» Αφετέρου ο James Jurin (1684-1750) ισχυρίστηκε ότι «η τελική σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων είναι αυτή που επιτυγχάνεται, όταν οι ποσότητες αλληλοεξουδετερώνονται». Ο d'Alembert επέμεινε ότι «το όριο ποτέ δε συμπίπτει με την ποσότητα της οποίας είναι όριο, αλλά η ποσότητα μπορεί να πλησιάσει όσο κοντά επιθυμούμε στο όριο». Η συζήτηση αυτή είναι και σήμερα επίκαιρη μεταξύ των φοιτητών. Σε μια συζήτηση κάποιος φοιτητής ρώτησε «όταν το n τείνει στο 0, δεν είναι ίσο με το 0»; Ο παρακάτω διάλογος μεταξύ δύο φοιτητών είναι χαρακτηριστικός:
φοιτητής 1:«όσο πιο πολύ το n αυξάνεται, τόσο πιο πολύ το $\frac{1}{n}$ πλησιάζει το μηδέν.»

φοιτητής 2:«όσο θα ήθελε κανείς;»
φοιτητής 1:«όχι, γιατί κάποια στιγμή θα συναντηθούν.» [Cornu(1991)]

Αξιοσημείωτα όμως είναι τα επιστημολογικά εμπόδια που εμφανίζονται στα σύγχρονα μαθηματικά. Η εισαγωγή την ανάλυσης του Weierstrass γραμμένης σε τυπική μαθηματική γλώσσα απέτυχε να εξαφανίσει τα απειροστά που κυριάρχησαν στον πριν από αυτόν μαθηματικό πολιτισμό. Υπάρχει ακόμη και σήμερα η χρήση δυναμικής γλώσσας της μορφής «μεταβλητές που τείνουν στο 0» ή «αυθαίρετα μικρό» παρόμοιας με αυτής του Cauchy. Η επιστροφή των λογικά βασισμένων απειροστών στην εργασία του Abraham Robinson (1918-1974) μόλις το 1966 άνοιξε εκ νέου τον ασκό του Αιώλου, παρά την εκτίμηση του τελευταίου ότι η εισαγωγή ενός επεκτεταμένου συνόλου των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένου με απειροστά θα έδινε τέλος στο σχίσμα τριών αιώνων. Επιπλέον η εισαγωγή των ηλεκτρονικών υπολογιστών στην εκπαιδευτική και ερευνητική ζωή, έφερε την ανάγκη πεπερασμένων αλγορίθμων κατασκευής των εννοιών.[Cornu(1991)]
Η ίδια η φύση του ορισμού παράγει δυσκολίες στην εκμάθηση και κατανόησή του. Είναι αναγκαίο να εξαχθούν από τον ορισμό ορθές και αξιόπιστες εικόνες της έννοιας του ορίου. Όπως όλοι οι επίσημοι ορισμοί στα μαθηματικά, έτσι και αυτός του ορίου έχει οπτικές γωνίες που προκαλούν εικόνες στο νου, συγχρόνως όμως είναι «δημοκρατικός» ως προς την τεκτονική των εικόνων και μι-

νιμαλιστικός ως προς την διατύπωση, σύμφωνα με την Mamona-Downs(2002). Επομένως ο ορισμός μεγιστοποιεί το πλήθος των τρόπων που μπορεί να γίνει αντιληπτός. Το πρόβλημα κατανόησης του φοιτητή είναι διττό: αφενός, το μινιμαλιστικό ύφος του ορισμού προσφέρει ένα εύρος εικόνων που μπορούν να γίνουν αντιληπτές, ενώ συγχρόνως απαιτεί ώριμη σκέψη στην κατασκευή της έννοιας του ορισμού. Αφετέρου, το περιεχόμενο του ορισμού περιλαμβάνει μεταγνωστικές διαδικασίες όπως λογική αυστηρότητα, συντομία, ακρίβεια, σαφήνεια και ευκολία στην εφαρμογή, καθώς και γνωστικές οπτικές στον σχεδιασμό του ορισμού. [Mamona-Downs(2002)]
Τα επιστημολογικά εμπόδια στην κατανόηση της έννοιας του ορίου κατά την Sierpinska(1987) διακρίνονται, σύμφωνα με το δενδροδιάγραμμα που ακολουθεί (βλέπε σχήμα 2.1) στο «ευρετικό» και στο «της αυστηρότητας». Το ευρετικό διακρίνεται στο «στατικό» και το «κινητικό», ενώ το «της αυστηρότητας» στο «του Ευδόξου» και «του Fermat». Τέλος, καθένα από τα «στατικο» και «κινητικό» διακρίνονται στο «γεωμετρικό» και το «αριθμητικό».



Σχήμα 2.1: Η διάκριση των επιστημολογικών εμποδίων στην κατανόηση του ορίου σύμφωνα με την Sierpinska.

Το «ευρετικό» εμπόδιο στερείται αυστηρότητας. Εδώ η μετακίνηση δεν είναι μαθηματική διαδικασία, αλλά μια μέθοδος εύρεσης, που οδηγεί σε ανακαλύψεις, χάρις σε μια αιτιολόγηση βασισμένη σε ένα ατελές συμπέρασμα.

Το «ευρετικό στατικό» εμπόδιο περιλαμβάνει διαισθήσεις απαλλαγμένες από την κίνηση. Η εύρεση του ορίου είναι η εύρεση κάποιου του οποίου μόνο οι προσεγγίσεις είναι γνωστές.

Το «ευρετικά κινητικό εμπόδιο» περιλαμβάνει διαισθήσεις συνδεδεμένες με την ιδέα της κίνησης. Η εύρεση του ορίου είναι η εύρεση κάποιου καθώς προσεγγίζουμε το άπειρο. [Sierpinska(1987)]

Το «της αυστηρότητας» εμπόδιο συσχετίζεται με υπερβολική ή λαθεμένη αυστηρότητα.

Το «του Ευδόξου» εμπόδιο Εδώ η μετάβαση στο όριο δεν είναι μαθηματική διαδικασία, αλλά μια αυστηρή μέθοδος απόδειξης συγκεκριμένων σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων.

Το «του Fermat» εμπόδιο Εδώ η μετάβαση στο όριο είναι μια μαθηματική λειτουργία που συνίσταται στην αντικατάσταση αριθμών στις μεταβλητές και στην παράλειψη τιμών αμελητέων σε σχέση με άλλες. [Sierpinska(1987)]

Σύμφωνα με την Sierpinska(1987), οι 4 κύριες πηγές απ΄ όπου πηγάζουν τα επιστημολογικά εμπόδια κατανόησης του ορίου από τους φοιτητές είναι η αντίληψή τους για τα εξής: την επιστημονική γνώση, το άπειρο, τη συνάρτηση, τους πραγματικούς αριθμούς.

Η επιστημονική γνώση. Κατά τη Sierpinska(1987), οι φοιτητές θεωρούν ότι τα μαθηματικά είναι μια εμπειρική επιστήμη, ένα επίσημο παιχνίδι συμβόλων! Ο κύριος στόχος τους είναι η απόδειξη θεωρημάτων.

Το άπειρο. H Sierpinska(1987) μας διαβεβαιώνει ότι το άπειρο δεν υπάρχει στο νου των φοιτητών, παρά μόνο ως ποσότητα.

H συνάρτηση. H Sierpinska(1987) σημειώνει ότι πεποίθηση αρκετών φοιτητών είναι ότι η συνάρτηση ταυτίζεται με το σύνολο τιμών της και την αναλυτική της έκφραση που πάντα υπάρχει.

Οι πραγματικοί αριθμοί. H Sierpinska(1987) θεωρεί ότι πολλές από τις δυσκολίες των φοιτητών στην κατανόηση του ορίου πηγάζουν από την ελλιπή, μεμονωμένη ή στρεβλή αντίληψη των πραγματικών αριθμών.

	ευρετικό				της αυστηρότητας	
	στατικό		κινητικό		Ευδόξου	Fermat
	γεωμετρικό	αριθμητικό	γεωμετρικό	αριθμητικό		
Γ	+	+	+	+	+	+
Α	+	+	+	+	+	+
Σ	+	+	+	+		+
Π	+		+			

Σχήμα 2.2: H σχέση των πηγών των επιστημολογικών εμποδίων ατην κατανόηση του ορίου σε σχέση με τους τύπους των επιστημολογικών εμποδίων σύμφωνα με την Sierpinska. Γ: η επιστημονική γνώση, Α: το άπειρο, Σ: η συνάρτηση, Π: οι πραγματικοί αριθμοί.

Οι πηγές αυτές που μόλις περιεγράφησαν (Γ: η επιστημονική γνώση, Α: το άπειρο, Σ: η συνάρτηση, Π: οι πραγματικοί αριθμοί) δίνονται σε σχέση με τους τύπους των επιστημολογικών εμποδίων, που διέκρινε η Sierpinska(1987) στον παραπάνω πίνακα (βλέπε σχήμα 2.2).

Σε κάθε περίπτωση τα εμπόδια κατανόησης του ορίου εμφανίζονται στην πορεία διδασκαλίας της έννοιας του ορίου και πρέπει να ληφθούν υπόψιν από τον διδάσκοντα, προκειμένου να αρθούν οι δυσκολίες κατανόησης της έννοιας από τους φοιτητές και να προχωρήσει ταχύτερα και βαθύτερα η διαδικασία της μάθησης.

Κεφάλαιο 3

Στρεβλές αντιλήψεις των μαθητών-φοιτητών για την έννοια του ορίου

Οι πιο σημαντικές αντιλήψεις των διδασκομένων για την έννοια του ορίου, έτσι όπως αυτές εμφανίζονται στην έρευνα, είναι μεταξύ άλλων οι παρακάτω:

- **Η σύγκλιση στο όριο είναι γνησίως μονότονη**

  Μία ενδιαφέρουσα έρευνα στην οποία αναδεικνύεται η προκειμένη άποψη για το όριο διεξήχθη σε δημόσιο πανεπιστήμιο των μεσοδυτικών Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής το 2004 από τον Roh(2008). Η έρευνα αυτή είχε σκοπό να αναδείξει τη σχέση μεταξύ της εικόνας που έχουν οι φοιτητές στο νου τους για το όριο ακολουθίας και του ορισμού του ορίου ακολουθίας. Τέσσερις διδάσκοντες παρέδωσαν λογισμό στους φοιτητές βιολογίας στο 1ο τρίμηνο και λογισμό στους φοιτητές μηχανικής στο 3ο και το 4ο τρίμηνο. Προαπαιτούμενα για τα μαθήματα αυτά είναι η άλγεβρα και ο απειροστικός προ-λογισμός. Με τη σειρά τους αυτά τα μαθήματα απειροστικού λογισμού είναι προαπαιτούμενα για την πραγματική ανάλυση που έχει να κάνει με τον αυστηρό ορισμό του ορίου. Επομένως οι φοιτητές που συμμετείχαν στη μελέτη αυτή είχαν ήδη συναντήσει όρια και δει το σύμβολο του ορίου, αλλά όχι και τον αυστηρό ορισμό. Για την διαλογή των συμμετεχόντων στην έρευνα όλοι οι υποψήφιοι πήραν έκαστος το ίδιο και με την ίδια σειρά σύνολο δομημένων ερωτήσεων. [Roh(2008)] Τα κριτήρια με τα οποία επελέγησαν οι υποκείμενοι στην έρευνα φοιτητές είναι:

- να είναι εξοικειωμένοι με το συμβολισμό του ορίου, αλλά όχι και με αυστηρές αποδείξεις που κάνουν χρήση του ορισμού!
- να μπορούν δοθέντος ενός δείκτη της ακολουθίας να βρίσκουν τον αντίστοιχο όρο της και αντιστρόφως δοθείσης μιας τιμής της ακολουθίας να βρίσκουν τους αντίστοιχους δείκτες!
- να είναι σε θέση να διαβάζουν και να σχεδιάζουν ένα γράφημα!
- να είναι σε θέση να εκφράσουν τις ιδέες τους καθαρά και επεξηγηματικά.

Από τους 33 εγγεγραμμένους φοιτητές του λογισμού (21 της μηχανικής και 12 της βιολογίας) επιλέχθηκαν 12 με τα πιο πάνω κριτήρια εκ των οποίων οι 11 ολοκλήρωσαν την συνέντευξη. Αντί των πραγματικών ονομάτων τους χρησιμοποιούνται ψευδώνυμα που αρχίζουν από το γράμμα E για τους φοιτητές της μηχανικής (engineering) και το B για τους φοιτητές της βιολογίας (biology).
Μια σειρά από ωριαίες και βασισμένες σε εργασία συνεντεύξεις διεξήχθη μία φορά την εβδομάδα για 5 εβδομάδες. Στους φοιτητές δόθηκαν 5 τύποι ακολουθιών: γνησίως μονότονη και φραγμένη, μη φραγμένη, σταθερή, μη μονότονη και συγκλίνουσα και, μη μονότονη και αποκλίνουσα. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων ζητήθηκε από τους φοιτητές να παραστήσουν τις ακολουθίες τόσο αριθμητικά όσο και γραφικά. Ακόμη, τους ζητήθηκε να αποφανθούν για την οριακή συμπεριφορά κάθε ακολουθίας από κάθεμία από τις δύο αυτές αναπαραστάσεις της. [Roh(2008)]

Εκτός της αριθμητικής και γραφικής αναπαράστασης της ακολουθίας ζητήθηκε από τους φοιτητές να χρησιμοποιήσουν τις $\epsilon -$ λωρίδες. Κάθε $\epsilon -$ λωρίδα ήταν μια λωρίδα που είχε το δικό της σταθερό πλάτος και ήταν από ημιδιαφανές χαρτί, έτσι ώστε οι φοιτητές να μπορούν να παρατηρούν το γράφημα της ακολουθίας δι΄ αυτής. Στο μέσο της διερχόταν μια κόκκινη γραμμή. Οι φοιτητές κλήθηκαν να χρησιμοποίησουν

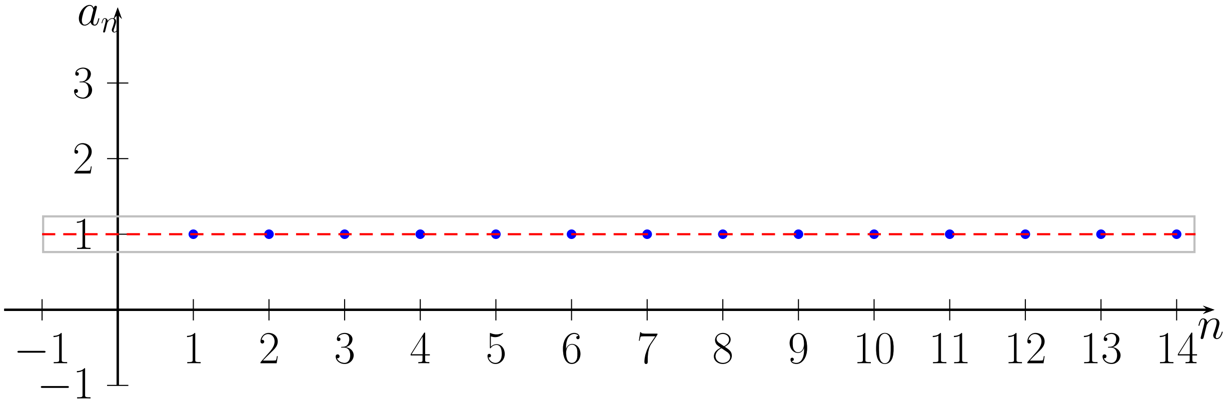
$\epsilon -$ λωρίδες διαφόρων πλατών και να τις χρησιμοποίησουν έτσι ώστε η κόκκινη γραμμή τους να συμπέσει με το πιθανό όριο μιας ακολουθίας. Στη συνέχεια τους ζητήθηκε να παρατηρήσουν το πλήθος των σημείων του γραφήματος της ακολουθίας που είναι εντός ή εκτός της $\epsilon -$ λωρίδων και να καθορίσουν το πλήθος των σημείων της ακολουθίας που είναι εκτός των $\epsilon -$ λωρίδων και αυτών που είναι εντός. Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα οι φοιτητές είχαν την ευκαιρία της οπτικοποίησης της σχέσης του ϵ με το N στον ορισμό του ορίου της ακολουθίας. [Roh(2008)]

Μετά από αρκετό πειραματισμό με τα γραφήματα των ακολουθιών και τις $\epsilon -$ λωρίδες προτάθηκαν στους φοιτητές οι δύο ακόλουθοι ορισμοί:

- $\epsilon -$ **λωρίδα ορισμός A:** Μία σταθερή τιμή L είναι το όριο μιας ακολουθίας, όταν άπειρα σημεία του γραφήματος της ακολουθίας καλύπτονται από κάθε $\epsilon -$ λωρίδα που καλύπτει το L.
- $\epsilon -$ **λωρίδα ορισμός B:** Μια σταθερή τιμή L είναι το όριο μιας ακολουθίας, όταν μόνο πεπερασμένου πλήθους σημεία του γραφήματος της ακολουθίας δεν καλύπτονται από κάθε $\epsilon -$ λωρίδα που καλύπτει το L.

Οι παραπάνω ορισμοί παρουσιάστηκαν στους φοιτητές ως υποθετικές δηλώσεις φοιτητών του απειροστικού λογισμού προς διάλυση κάθε προκατάληψης.

Κάποιοι φοιτητές απάντησαν ότι κανένας από τους ορισμούς της $\epsilon -$ λωρίδας δεν είναι κατάλληλος για το όριο. Για παράδειγμα ο Brian, αφού ζωγράφισε μια σταθερή ακολουθία (βλέπε σχήμα 3.1), επεσήμανε ότι όλοι οι όροι επικαλύπτονται από μια ευθεία γραμμή που δε θα μπορούσε να είναι το όριο της ακολουθίας.
Brian: «$a_n = 1$.»
Συνεντευξιαστής: «Αυτή η ακολουθία έχει όριο;»
Brian: «Θέλω να πω όχι, γιατί θα ήταν μια ευθεία γραμμή, πάντα τα σημεία θα ήταν 1.»
Συνεντευξιαστής: «Πώς μπορείς να το πεις αυτό;»
Brian: «Γιατί δεν προσεγγίζει κανένα αριθμό.»
Συνεντευξιαστής: «Τι εννοείς λέγοντας προσεγγίζει;»
Brian: «Η τιμή είναι πάντα ακριβώς 1, άρα υπάρχει [...] Μαντεύω ότι ο ορισμός του ορίου είναι να προσεγγίζει έναν αριθμό, αλλά όχι να τον φθάνει.»
Συνεντευξιαστής: «Εντάξει.»
Brian: «Αυτή η ακολουθία δε προσεγγίζει έναν αριθμό, αλλά είναι ήδη εκεί. Άρα και τότε δεν αλλάζει ποτέ την τιμή από την τιμή 1.»

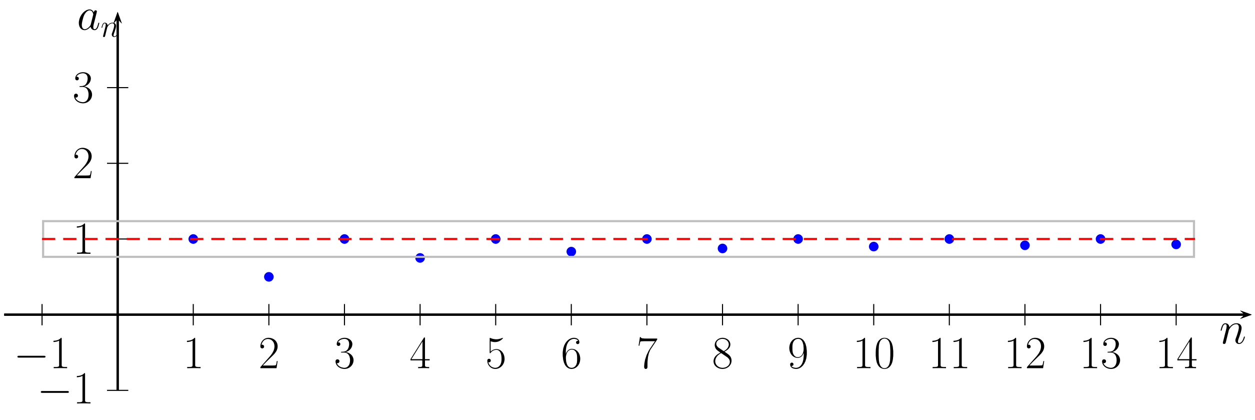


Σχήμα 3.1: Το γράφημα της ακολουθίας $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $a_n = 1$, με μια $\epsilon-$ λωρίδα.

Ο Brian απέρριψε τους δύο ορισμούς και στην ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με αλγεβρικό τύπο $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ 1 - \frac{1}{n}, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$ (βλέπε σχήμα 3.2), εφόσον παρατήρησε ότι μόνο πεπερασμένου πλήθους όροι μένουν εκτός της $\epsilon-$λωρίδας. Έτσι αναγνώρισε ότι η κεντρική γραμμή γύρω από την οποία συγκεντρώνονται οι όροι της ακολουθίας είναι και εδώ αυτή με εξίσωση $y = 1$. [Roh(2008)]

Brian:«Εντάξει. Άρα υπάρχει n. Εντάξει. Άρα ένα $[a_1]$ θα είναι στο 1. Δύο $[a_2]$ θα είναι στο $\frac{1}{2}$. Τρία $[a_3]$ θα είναι στο 1. Τέσσερα $[a_4]$ θα είναι $\frac{3}{4}$. Πέντε $[a_5]$ θα είναι 1. Έξι $[\frac{1}{6}]$ θα είναι ένα μικρό κλάσμα. Άρα μια $\epsilon-$λωρίδα καλύπτει το 1, υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων έξω από τη λωρίδα γεγονός που θα λειτουργήσει για αυτό [B]. Και ένα άπειρο πλήθος σημείων καλύπτονται από τη λωρίδα γεγονός που θα

λειτουργήσει για το [A]. Αλλά...»
Συνεντευξιαστής: «Άρα εννοείς ότι το 1 είναι ένα όριο της ακολουθίας;»
Brian: «Χμμ. Ακόμη διαφωνώ ότι μια ευθεία γραμμή είναι το όριο μιας ακολουθίας.»
Παρατηρούμε ότι ο Brian, και κατ΄ επέκταση όλοι όσοι απέρριψαν αμφοτέρους τους ορισμούς, θεωρούν ότι η σύγκλιση της ακολουθίας είναι αποδεκτή μόνο όταν η ακολουθία είναι γνησίως μονότονη (με συνέπεια να προσεγγίζει ολοένα και περισσότερο στο supremum ή στο infimum του πεδίου τιμών της). Στηριζόμενος σε αυτήν την προκατάληψη ο Brian απορρίπτει αμφότερους τους ορισμούς που ικανοποιούνται από τη σταθερή ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με αλγεβρικό τύπο $a_n = 1$. Εν συνεχεία παγιώνει την προκατάληψή του, καθώς ούτε η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ με αλγεβρικό τύπο $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 1 - \frac{1}{n}, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$ είναι γνησίως μονότονη, ενώ ικανοποιεί και τους δύο ορισμούς. [Roh(2008)]



Σχήμα 3.2: Το γράφημα της ακολουθίας $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $a_n = 1, n = 1, 3, 5, \ldots$ και $a_n = 1 - \frac{1}{n}, n = 2, 4, 6, \ldots$, με μια $\epsilon -$ λωρίδα.

– **Μια ακολουθία έχει όριο το α ανν κάθε περιοχή του α περιέχει απείρους όρους της** Στην έρευνα του Roh(2008) που προηγήθηκε, αναφέρθηκε ότι δόθηκαν στους φοιτητές οι παρακάτω ορισμοί:

$\epsilon -$ **λωρίδα ορισμός A:** Μία σταθερή τιμή L είναι το όριο μιας ακολουθίας, όταν άπειρα σημεία του γραφήματος της ακολουθίας καλύπτονται από κάθε $\epsilon -$ λωρίδα που καλύπτει το L.

$\epsilon -$ **λωρίδα ορισμός B:** Μια σταθερή τιμή L είναι το όριο μιας ακολουθίας, όταν μόνο πεπερασμένου πλήθους σημεία του γραφήματος της ακολουθίας δεν καλύπτονται από κάθε $\epsilon -$ λωρίδα που καλύπτει το L.

Στην αρχή πολλοί φοιτητές δεν μπορούσαν να διακρίνουν μεταξύ των δύο ορισμών. Για παράδειγμα η Elena σκέφτηκε ότι οι δύο ορισμοί συνεπάγονται ο ένας τον άλλον, εφόσον καθώς άπειροι όροι της ακολουθίας εντός της $\epsilon -$ λωρίδας σημαίνει ότι μόνο πεπερασμένου πλήθους είναι εκτός αυτής. Το παρακάτω απόσπασμα αποκαλύπτει την αντίληψή της:
Συνεντευξιαστής: «Αυτές οι περιγραφές φαίνονται διαφορετικές.»
Elena: «Υπάρχει διαφορά. Αλλά το ένα κάπως συνεπάγεται το άλλο.»
Συνεντευξιαστής: «Εννοείς ότι ο φοιτητής Α συνεπάγεται το φοιτητή Β και ο φοιτητής Β συνεπάγεται το φοιτητή Α;»
Elena: «Ναι, γιατί αυτό που λες, ότι υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων εντός του γραφήματος, είναι σαν να λες ότι υπάρχουν πεπερασμένο πλήθος σημείων έξω, ξέρεις.»
Αυτή η απόκριση δείχνει να οφείλεται στο ότι οι φοιτητές δεν έχουν συνειδητοποιήσει ότι αν $U \subseteq \mathbb{N}$ και U άπειρο, τότε το $\mathbb{N} - U$ δεν είναι κατ΄ ανάγκην πεπερασμένο. Κάποιοι φοιτητές ίσως έχουν, και εδώ, κατά νου τις συγκλίνουσες, και ειδικότερα τις μονότονες ακολουθίες, για τις οποίες οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Πάντως η φαινομενική ισοδυναμία των δύο ορισμών ήταν για αρκετά υποκείμενα της έρευνας μόνο προσωρινή. [Roh(2008)]

– **Το όριο είναι μια προσεγγιστική διαδικασία που δεν αντιπροσωπεύεται από έναν αριθμό**

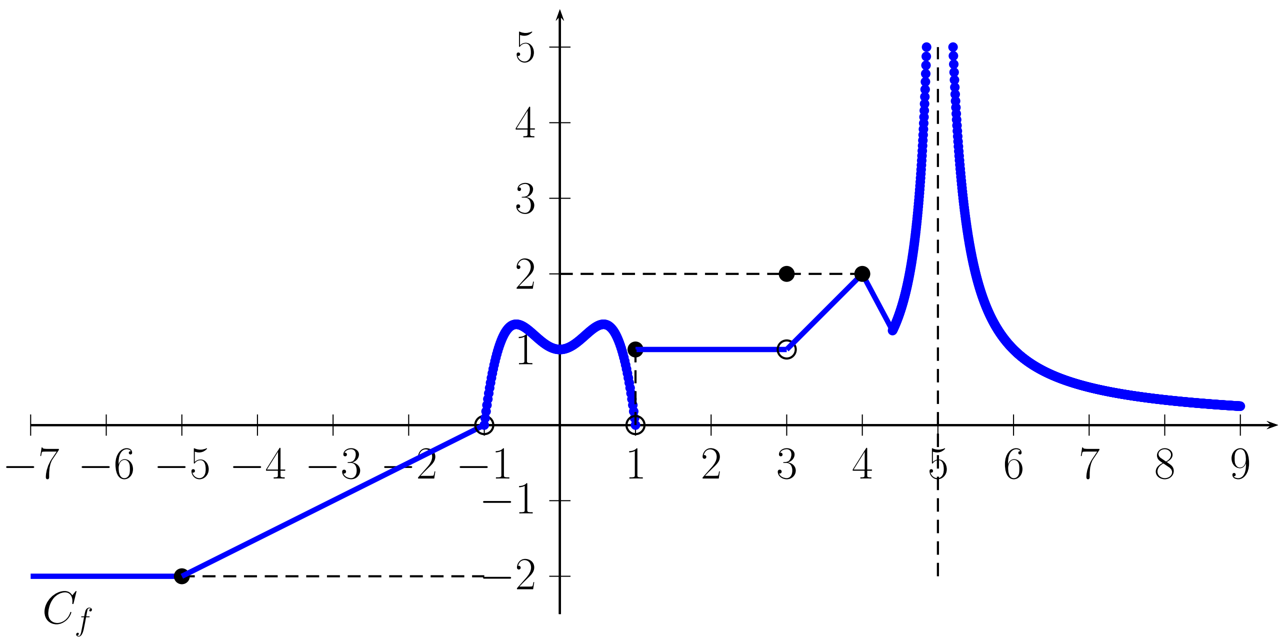
Η αντίληψη αυτή εμφανίζεται σε μια έρευνα που διεξήχθη σε μεγάλο πανεπιστήμιο των μεσοδυτικών Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής. [Gucler(2013)] Τα υποκείμενα της έρευνας ήταν αρχάριοι φοιτητές που είχαν παρακολουθήσει 8 μαθήματα λογισμού διάρκειας 50 λεπτών έκαστο. Οι φοιτητές αυτοί διδάχθηκαν την έννοια του ορίου και της συνέχειας μιας συνάρτησης. Ο διδάσκων έκανε χρήση γραφημάτων συναρτήσεων για την εισαγωγή ορισμών, καθώς και επίδειξη αλγεβρικών τεχνικών για τον υπολογισμό ορίων. Κατά τη διάρκεια των μαθημάτων αυτών δεν υπήρξε διάδραση μεταξύ των φοιτητών, ενώ και η διάδραση μεταξύ μαθητών και διδάσκοντα περιορίστηκε σε τυπικά πλαίσια. Οι απαντήσεις των εμπλεκόμενων φοιτητών εδόθησαν γραπτώς ή σε συνέντευξη.

Η πρώτη ερώτηση της έρευνας έδινε σε 23 φοιτητές 6 δηλώσεις σχετικές με το χαρακτήρα του ορίου. Οι φοιτητές κλήθηκαν να τις χαρακτηρίσουν ως ορθές ή ψευδείς και να δικαιολογήσουν την επιλογή τους σε κάθε περίπτωση. [Gucler(2013)] Τα αποτελέσματα των απαντήσεων των υποκειμένων της έρευνας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (βλέπε σχήμα 3.3).

Δήλωση: Το όριο...	Οπτική ορίου	Α Ψ
1. περιγράφει πώς η συνάρτηση κινείται, καθώς το x κινείται προς ένα σταθερό σημείο.	Δυναμική-θεωρητική	20 3
2. είναι αριθμός ή σημείο πέρα από το οποίο η συνάρτηση δε μπορεί να πάει.	Συνοριακή	6 17
3. είναι αριθμός που οι $y-$ τιμές της συνάρτησης είναι αυθαίρετα κοντά, αν περιορίσεις τις $x-$ τιμές.	Τυπική	16 7
4. είναι αριθμός ή σημείο που η συνάρτηση πλησιάζει αλλά ποτέ δε φτάνει.	Απρόσιτη	13 10
5. είναι μια προσέγγιση που μπορεί να γίνει όσο ακριβής θέλεις.	Προσεγγιστική	12 11
4. ορίζεται θέτοντας αριθμούς ολοένα και πιο κοντά σε δοθέν αριθμό μέχρι να φτάσεις το όριο.	Δυναμική-πρακτική	9 14

Σχήμα 3.3: Αποτελέσματα απαντήσεων στις 6 δηλώσεις.

Ακολούθως επελέγησαν 4 από τους παραπάνω 23 φοιτητές για συνέντευξη, στην οποία κλήθηκαν να σχολιάσουν το $\lim_{x\to 0} f(x)$, δοθείσης της γραφικής παράστασης της f που φαίνεται στο σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f.

Οι φοιτητές που επελέγησαν ήταν οι Amy, Keith, Jessica και Harry. Η Amy επελέγη, γιατί έδειξε σημάδια δυσκολίας που στηρίζονται στη δυναμική θεώρηση του ορίου. Δεν έδωσε καμία απάντηση που να χαρακτηρίζει το όριο σαν αριθμό. Ο Keith επελέγη ως ο μοναδικός φοιτητής που επέλεξε την επίσημη δήλωση ως τον καλύτερο χαρακτηρισμό του ορίου. Οι φοιτητές Jessica και Harry επελέγησαν γιατί αμφιταλαντεύονταν μεταξύ της αντίληψης ότι το όριο είναι διαδικασία και της αντίληψης ότι είναι αριθμός. [Gucler(2013)] Το απόσπασμα της συνέντευξης που ακολουθεί αναδεικνύει τις απόψεις τους:

Συνεντευξιαστής: «Τι μπορείτε να πείτε λοιπόν για το όριο της συνάρτησης, καθώς το x πλησιάζει το 0;» [δείχνει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$].

Amy: «Πλησιάζει το 1.» [γράφει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$].

Harry: «Επομένως αυτό είναι το όριο, καθώς το x πλησιάζει το 0.» [δείχνει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$]. «Η $y-$ τιμή είναι 1.» [δείχνει την $y-$ τιμή της συνάρτησης στο $x = 0$].

Συνεντευξιαστής: «Ποιό είναι λοιπόν το όριο αυτής της συνάρτησης;»

Harry: «Πλησιάζει το 1. Προσεγγίζει ολοένα και περισσότερο το 1.» [γράφει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$].

Συνεντευξιαστής: «Τι μπορείτε να πείτε για το όριο στην περίπτωση αυτή;» [δείχνει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$].

Jessica: «1.» [γράφει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$]. «Αλλά το όριο δεν είναι μόνο ένας αριθμός.»

Συνεντευξιαστής: «Τι είναι;»

Jessica: «Το όριο περιγράφει μια διαδικασία! Δεν είναι μόνο ένας αριθμός. Περιγράφει ολόκληρη τη διαδικασία που αυτό το σημείο [δείχνει το x στο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$] κατευθύνεται.»

Συνεντευξιαστής: «Τι μπορείτε να πείτε για το όριο της συνάρτησης;» [δείχνει το $\lim_{x \to 0} f(x)$].
Keith: «Πρόκειται να γίνει ίσο με 1.» [το λέει διστακτικά].
Συνεντευξιαστής: «Γιατί;»
Keith: « Το όριο από δεξιά πλησιάζει το 1 και από αριστερά πλησιάζει το 1, άρα το όριο θα πρέπει να είναι ίσο με 1.»

Είναι αξιοσημείωτο ότι οι φοιτητές διατυπώνουν τη φράση ότι «το όριο πλησιάζει έναν αριθμό» αντί της δόκιμης έκφρασης ότι *οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν έναν αριθμό*. Μέσα από τη συνέντευξη προκύπτει ότι οι φοιτητές, αναφέρουν το όριο της συνάρτησης, κάποιες φορές σαν αριθμό, ενώ πιο συχνά σαν μετακινούμενη μεταβλητή. Συνεπώς οι φοιτητές τείνουν να επιδοκιμάζουν περισσότερο την άποψη ότι «το όριο είναι μια διαδικασία», παρά την άποψη ότι «το όριο είναι ένας αριθμός». Ο διδάσκων ενθάρρυνε την περιγραφή της διαδικασίας υπολογισμού ενός ορίου κατά τη διάρκεια των μαθημάτων και διέκρινε την οριακή διαδικασία από την οριακή τιμή, χωρίς ωστόσο μεγάλη επιτυχία στο ακροατήριό του. [Gucler(2013)]

– **Υπάρχουν απείρως μικροί και απείρως μεγάλοι αριθμοί**

Μια έρευνα που καταδεικνύει την προκατάληψη αυτή κάποιων φοιτητών διεξήχθη το 2010 με την συμμετοχή 233 φοιτητών. [Ely(2010)] Το ερωτηματολόγιο παραδόθηκε στους φοιτητές ακριβώς την πρώτη μέρα παρακολούθησης του 1ου ή 2ου εξαμήνου της ετήσιας σειράς μαθημάτων διαφορικού λογισμού και ολοκληρωτικού λογισμού. Οι αποκρίσεις των φοιτητών χρησιμοποιήθηκαν προκειμένου να καταγραφούν οι αντιλήψεις τους για διάφορες έννοιες του απειροστικού λογισμού όπως τα όρια, τις συναρτήσεις, τη συνέχεια, την ευθεία των πραγματικών αριθμών. 6 από τους φοιτητές, 2 αγόρια και 4 κορίτσια μετείχαν στις ακόλουθες συνεντεύξεις, ο κύριος σκοπός των οποίων, ήταν η διασαφήνιση των αντιλήψεων τους για την κατηγοριοποίησή τους. Κάθε συνέντευξη ήταν κατά μέσο όρο ημίωρη και ηχογραφήθηκε. Η επιλογή των 6 φοιτητών έγινε με την προϋπόθεση της διαθεσιμότητας και της αντιπροσωπευτικότητας των απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο. Έτσι, για καθένα από τους 6 φοιτητές ετοιμάστηκε διαφορετικό σύνολο ερωτήσεων. Ωστόσο στην ερώτηση 6 του ερωτηματολογίου, που είναι μια ερώτηση σωστού λάθους και φαίνεται παρακάτω, το 83% των ερωτηθέντων απάντησαν ότι η 6b είναι αληθής. Ζητήθηκαν λοιπόν περαιτέρω διευκρινίσεις για την επιλογή αυτή από όλους τους συνεντευξιαζόμενους. [Ely(2010)]

Ερώτηση 6

6. Σωστό ή Λάθος	
a Σ Λ	Είναι πιθανό να διαλέξουμε δύο διαφορετικά σημεία στην ευθεία των πραγματικών αριθμών που αγγίζουν το ένα το άλλο.
b Σ Λ	Είναι πιθανό να διαλέξουμε δύο διαφορετικά σημεία στην ευθεία των πραγματικών αριθμών που είναι απείρως κοντά το ένα το άλλο.

Ανάμεσα στους φοιτητές που συμμετείχαν στις συνεντεύξεις ήταν και η Sarah μια δευτεροετής φοιτήτρια της οποίας ο απειροστικός λογισμός του λυκείου την απάλλαξε από τον Απειροστικό Λογισμό I στο πανεπιστήμιο. Όταν έλαβε μέρος στις συνέντευξη είχε αρχίσει την παρακολούθηση του Απειροστικού Λογισμού II, ενώ το προηγούμενο έτος είχε παρακολουθήσει τα Διακριτά Μαθηματικά. Στο πανεπιστήμιο οι Απειροστικοί Λογισμοί I και II δεν απαιτούν από τους φοιτητές την κατασκευή αποδείξεων. Ο Απειροστικός Λογισμός I πραγματεύεται όρια, παραγώγους και ολοκληρώματα, ενώ ο Απειροστικός Λογισμός II περισσότερα ολοκληρώματα, ακολουθίες, σειρές, παραμετρικές εξισώσεις και κάποιες διαφορικές εξισώσεις. Ο λόγος επιλογής παρουσίασης της συνέντευξης με την Sarah ήταν οι εκπληκτικές και άκρως ενδιαφέρουσες απαντήσεις της σχετικά με την ευθεία των πραγματικών αριθμών και οι ακόλουθες αυθόρμητες ερωτήσεις του ερευνητή που τις προκάλεσαν. Κατά τη συνέντευξη με την Sarah ανέκυψαν θέματα για τα οποία ο ερευνητής δεν είχε προετοιμαστεί. Γι΄ αυτό διενεργήθηκε άλλη μία συνέντευξη με την Sarah. Κάθεμία από αυτές διήρκησε περίπου 45 λεπτά. [Ely(2010)]

Ο ερευνητής ξεκινάει την συνέντευξη με την ερώτηση 6 του αρχικού ερωτηματολογίου. Στην 6a απάντησε ότι είναι λάθος. Την ίδια απάντηση είχε δώσει και στο αρχικό ερωτηματολόγιο μαζί με το 90% των συμμετεχόντων. Δικαιολόγησε την απάντησή της ως εξής: «Μπορείς να το διχοτομείς συνεχώς, να το κόβεις στο ήμιση και ξανά, αλλά πάντα θα υπάρχει ένα μικρό διάστημα μεταξύ τους». Στην ερώτηση 6b απάντησε ότι είναι σωστό. Όταν ο συνεντευξιαστής της ζήτησε ένα παράδειγμα δύο αριθμών που είναι «απείρως κοντά ο ένας στον άλλο», τότε απάντησε «3.999999 επαναλαμβανομένου συνεχώς και του 4». [Ely(2010)] Τότε επηκολούθησε ο εξής διάλογος:

Συνεντευξιαστής:«Εντάξει. Μπορείς να βρείς έναν άλλο αριθμό που είναι απείρως κοντά σε αμφότερους αυτούς τους αριθμούς; Είναι πιθανόν να βρείς έναν άλλο αριθμό που είναι απείρως κοντά σε αμφότερους αυτούς τους αριθμούς;»

Sarah:« Ναι, γιατί η επανάληψη είναι, δεν ξέρεις πόσο επαναλαμβάνεται. Αν πρόκειται να επαναμβάνεται αενάως, θα υπάρχει πάντα περισσότερο στο άπειρο. Μπορείς να προσθέσεις ένα 1 στο άπειρο. Επομένως μπορείς να προσθέσεις ένα 9 στα άπειρα 9 που έρχονται.»

Συνεντευξιαστής:« Εντάξει. Πώς θα μπορούσες να γράψεις τους δύο διαφορετικούς αριθμούς που είναι σαν αυτούς; Ή αν μπορείς, δεν ξέρω.»

Sarah:«Πώς θα μπορούσες...;»

Συνεντευξιαστής:«Πώς θα μπορούσες να το εξηγήσεις; Σαν...»

Sarah:«Εννοείτε σαν... Λοιπόν θα μπορούσες να πείς τρία τελεία εννιά εννιά εννιά οσαδήποτε επαναλαμβανομένου για πάντα στο άπειρο, και του 4. Και τότε μεταξύ τους είναι ένα σαν το τρία τελεία εννιά εννιά εννιά οσαδήποτε στο άπειρο, προστιθέμενου [παύση] ενός απείρως μικρού αριθμού.»

Συνεντευξιαστής:« Προστιθέμενου ενός απείρως μικρού αριθμού;»

Sarah:« Ναι, χα-χαχ [γελάει].»

Η παρανόηση εδώ πιθανόν οφείλεται στην σύγχυση της έκφρασης «απείρως κοντά», που χρησιμοποιείται στην καθομιλουμένη, με την έκφραση «πολύ κοντά». Για παράδειγμα ένας άλλος συνεντευξιαζόμενος φοιτητής ισχυρίστηκε ότι οι αριθμοί 1.001 και 1.002 είναι «απείρως κοντά», αλλά οι αριθμοί 1.1 και 1.2 δεν είναι. Εντούτοις η Sarah επιλέγει παραδείγματα με άπειρα 9 για να εκφράσει το «απείρως κοντά». Η προσπάθειά της να δικαιολογήσει την απάντησή της στην ερώτηση 6b αναδεικνύει την άτυπη αντίληψή της σύμφωνα με την οποία υπάρχουν αριθμοί που είναι απείρως κοντά ο ένας στον άλλον. [Ely(2010)]

Η Sarah στην ερώτηση αν υπάρχουν αριθμοί μεταξύ των $0.\overline{9}$ και 1 αναζητάει έναν «απείρως μικρό» (θετικό) αριθμό που αν προστεθεί στον $0.\overline{9}$ θα δώσει αποτέλεσμα μικρότερο του 1. Δίνει λοιπόν διστακτικά τον 0.000...1, και σπεύδει να ομολογήσει πως «δεν είναι στην πραγματικότητα αριθμός». Αν λοιπόν η Sarah ταύτιζε την έκφραση «απείρως κοντά» με την έκφραση «πολύ κοντά», δε θα χρειάζονταν να επινοήσει «αριθμούς» σαν τον 0.000...1. Επομένως η Sarah φαίνεται να αναπτύσσει ένα συμβολισμό για να εκφράσει το «απείρως κοντά» και τους «απείρως μικρούς » αριθμούς. [Ely(2010)] Στην συνέχεια δίνεται μια δεύτερη ευκαιρία στην Sarah να βρει έναν αριθμό μεταξύ των $0.\overline{9}$ και 1 και αποκρίνεται απείρως μικροί αριθμοί δίνοντας για παράδειγμα ξανά τον 0.000...1. Ο διάλογος έπειτα εξελίσσεται ως εξής:

Συνεντευξιαστής:«Εντάξει, απείρου πλήθους μηδενικών. Και μετά ένα. Εντάξει, λοιπόν, νομίζω, ναι, αυτό είναι που είπες προηγουμένως, και ήθελα να βεβαιωθώ ότι...»
Sarah:«Ναι, όσα εννιά υπάρχουν εδώ [δείχνει το 0.999...] άλλα τόσα μηδενικά υπάρχουν εδώ [δείχνει το 0.000...1]
Συνεντευξιαστής:«Σωστά, και αν υπάρχουν άπειρα εδώ, τότε είναι άπειρα εδώ;»
Sarah:«Ναι.»
Συνεντευξιαστής:«Εντάξει. Χμ, τώρα σε ρωτάω, υπάρχουν άλλοι αριθμοί μεταξύ εκεί και εδώ [μεταξύ 1 και 0.9 επαναλαμβανόμενο]; Σαν...;»
Sarah:«Χμ, ίσως ένα ίσως ακόμη μικρότερο, σαν... χαχαχα [γράφει 0.000...01].»
Συνεντευξιαστής:«Εντάξει...»
Sarah:«Αν μπορείς να το κάνεις αυτό.»
Συνεντευξιαστής:«Όχι, ότι πόσοι αριθμοί υπάρχουν μεταξύ εδώ και εδώ; [δείχνει το 0.999... και 1]»
Sarah:«Ένα απείρως μικρό, ένα άπειρο πλήθος απείρως μικρών αριθμών.»

Σύμφωνα με τον Ely(2010), η ελαστικότητα των αντιλήψεων της Sarah οφείλεται στις απόψεις της για τον τρόπο που διδάσκονται τα μαθηματικά στο σχολείο:

Sarah:«... πολλά πράγματα που νομίζω, σαν, τα μαθηματικά είναι απλώς κανόνες και απομνημόνευση των κανόνων, και για αυτό νομίζω ότι είναι σημαντικό να έχουμε, γιατί οι φοιτητές των μαθηματικών αυτό που κάνουν είναι αυτό που κάνω και εγώ: μελετώντας για μια εξέταση των μαθηματικών είναι σαν αποστηθίζεις κανόνες, δεν πειράζει γιατί υπάρχουν εκεί κανόνες, απλώς τους αποστηθίζεις, έτσι ώστε να μπορείς να χρησιμοποιήσεις τον τύπο στην εξέταση και να πάρεις ένα A. Ξέρεις; Αλλά είναι σημαντικό για τα παιδιά να σκέφτονται τις έννοιες τους. Γι΄ αυτό είναι καλό για μένα, βλέπεις, γιατί δεν ξέρω τις έννοιες.»

Η Sarah δεν αποδέχεται στην πραγματικότητα την ισότητα $0.999\cdots = 1$, καθώς κάτι τέτοιο θα συγκρούονταν με τις αντιλήψεις της για τους απείρως μικρούς αριθμούς. Γνωρίζει βεβαίως ότι θα πρέπει να έχει πρόσβαση στις επίσημες μαθηματικές ιδέες προκειμένου να πάρει καλούς βαθμούς. Όμως οι δικές της αντιλήψεις υποβόσκουν στο σχολικό περιβάλλον αναλλοίωτες και αποκαλύφθηκαν στην διάρκεια της συνέντευξης μόνο μετά από τις επίμονες διαβεβαιώσεις του ερευνητή ότι ενδιαφέρονταν να τις ακούσει με ειλικρίνεια. Μετά την συνέντευξη η Sarah ερωτηθείσα από που πήρε τις ιδέες αυτές, απάντησε ότι δεν προέρχονται από την τάξη, αλλά ήταν ο δικός της τρόπος σκέψης. Οι αντιλήψεις της Sarah έχουν κοινά σημεία αλλά και διαφορές με την θεωρία των απειροστών που ανέπτυξαν οι Leibniz και Robinson. Βεβαίως η Sarah αναπτύσσει το δικό της «σύστημα» προϊούσης της συνέντευξης. [Ely(2010)]

– Το όριο μιας συνάρτησης στο x_0 δε συνδέεται με τις τιμές της «κοντά» στο x_0

Τα υποκείμενα της έρευνας αποτελούνται από 63 φοιτητές που συμπλήρωσαν το 1ο εξάμηνο σπουδών στο τμήμα Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Ανατολίας της Τουρκίας. [Cetin(2008)] Σύμφωνα με τη διδακτέα ύλη της σχολής η έννοια του ορίου διδάσκεται στο πρώτο εξάμηνο στο μάθημα Απειροστικό Λογισμός Ι. Το μάθημα διδάσκεται επί 14 εβδομάδες με 6 ώρες ανά εβδομάδα εκ των οποίων οι 2 αφιερώνονται στην επίλυση ασκήσεων. Η επιτυχία στο μάθημα κρίνεται από δύο ενδιάμεσες και μια τελική εξέταση. Η πειραματική ομάδα αποτελούνταν από φοιτητές που είχαν λάβει βαθμό τουλάχιστον CC στον Απειροστικό Λογισμός Ι που είναι ο ελάχιστος βαθμός επιτυχίας στο πανεπιστήμιο της Ανατολίας. [Cetin(2008)]

Η επεξήγηση του ορίου στο πλαίσιο του Απειροστικού Λογισμού Ι περιλαμβάνει:

- Πρώτα δίνονται στους φοιτητές πολλά παραδείγματα συναρτήσεων σε καθένα από τα οποία έχει οριστεί ένα σταθερό σημείο 'a' και κατόπιν αιτείται από τους φοιτητές να βρούν τις εικόνες της κάθε συνάρτησης στα 'x' σημεία. Αυτά τα 'x' σημεία ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης κοντά στο 'a' σημείο. Στη συνέχεια ακολουθείται μια συζήτηση με τους φοιτητές για τις μεταβολές στις τιμές της συνάρτησης (καθώς μεταβάλλεται το 'x¨).
- Ένα άλλο αποτέλεσμα αυτών των συζητήσεων είναι η διατύπωση του ορισμού μιας συνάρτησης f στο a: «αν η $f(x)$ ορίζεται για όλα τα κοντά στο a, εκτός ενδεχομένως από το ίδιο το σημείο, και αν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το $f(x)$ είναι όσο κοντά θέλουμε στο L λαμβάνοντας το x αρκούντως κοντά στο a, τότε λέμε ότι η $f(x)$ προσεγγίζει το L, καθώς το x προσεγγίζει το a, και γράφουμε $\lim_{x\to a} f(x) = L$».
- Μετά την διατύπωση του γενικού ορισμού του ορίου συζητούνται τα όρια των βασικών συναρτήσεων και δίνονται κάποιες συμβουλές για την απλοποίηση των υπολογισμών των ορίων.

Δύο ερωτηματολόγια μοιράστηκαν στους φοιτητές. Στο πρώτο δίνονται 4 διαφορετικές συναρτήσεις μια τριγωνομετρική, μια ρητή, μια εκθετική και μια λογαριθμική και ζητείται από τους φοιτητές να υπολογίσουν προσεγγιστικά τις τιμές των συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία. Δεν επιτράπηκε η χρήση υπολογιστή πράξεων. Στο δεύτερο ερωτηματολόγιο οι φοιτητές πρέπει να υπολογίσουν τα όρια των ίδιων συναρτήσεων σε σημεία που είναι κοντά στα σημεία προσέγγισης του ερωτηματολογίου 1. Ο διαθέσιμος χρόνος ήταν 30 λεπτά για κάθε ερωτηματολόγιο. Οι απαντήσεις των φοιτητών αναλύθηκαν λεπτομερώς από τον αναλυτή. Τα δύο φαίνονται ερωτηματολόγια φαίνονται παρακάτω:

Ερωτηματολόγιο 1

Ερώτηση 1.1	$f(x) = \frac{\sin x}{x}$,	$f(0.015) \cong\ ?$
Ερώτηση 1.2	$g(x) = \frac{2x^3-6x^2-7}{x^3+x^2}$,	$g(10873) \cong\ ?$
Ερώτηση 1.3	$h(x) = \frac{1}{1000 \ln x}$,	$h(0.03) \cong\ ?$
Ερώτηση 1.4	$k(x) = 16e^{-x} + 14$,	$k(2718281) \cong\ ?$

Ερωτηματολόγιο 2

Ερώτηση 2.1	$f(x) = \frac{\sin x}{x}$,	$\lim_{x \to 0} f(x) =\ ?$
Ερώτηση 2.2	$g(x) = \frac{2x^3-6x^2-7}{x^3+x^2}$,	$\lim_{x \to \infty} g(x) =\ ?$
Ερώτηση 2.3	$h(x) = \frac{1}{1000 \ln x}$,	$\lim_{x \to 0^+} h(x) =\ ?$
Ερώτηση 2.4	$k(x) = 16e^{-x} + 14$,	$\lim_{x \to \infty} k(x) =\ ?$

Δεδομένου ότι δεν διατίθεται υπολογιστής αλγεβρικών πράξεων, οι πράξεις στο ερωτηματολόγιο 1 είναι ιδιαίτερα επίπονες και ανιαρές ή ακόμη και αδύνατες, χωρίς τη χρήση του ορίου. Στο ερωτηματολόγιο 2 αξιολογείται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων των απαντήσεων των φοιτητών.[Cetin(2008)] Αναλόγως με τις απαντήσεις των φοιτητών στο ζεύγος των πρώτων, των δεύτερων, των τρίτων και των τέταρτων στα δύο ερωτηματολόγιο τα υποκείμενα της έρευνας διακρίθηκαν σε 4 ομάδες:

ομάδα A: Οι φοιτητές της ομάδας αυτής προσπάθησαν να βρουν την προσεγγιστική τιμή της συνάρτησης κάνοντας χρήση του ορίου στο ερωτηματολόγιο 1 και επιπλέον υπολόγισαν σωστά το όριο αυτό στο ερωτηματολόγιο 2.

ομάδα B: Οι φοιτητές της ομάδας αυτής προσπάθησαν να βρουν την προσεγγιστική τιμή της συνάρτησης κάνοντας χρήση του ορίου στο ερωτηματολόγιο 1 και επιπρσθέτως υπολόγισαν εσφαλμένα το ίδιο όριο στο ερωτηματολόγιο 2.

ομάδα C: Οι φοιτητές της ομάδας αυτής προσπάθησαν να βρουν την προσεγγιστική τιμή της συνάρτησης κάνοντας αντικατάσταση ή δεν μπόρεσαν καν να λύσουν το πρόβλημα στο ερωτηματολόγιο 1 και επιπλέον υπολόγισαν σωστά τα όριο στο ερωτηματολόγιο 2.

ομάδα D: Οι φοιτητές της ομάδας αυτής προσπάθησαν να βρουν την προσεγγιστική τιμή της συνάρτησης κάνοντας αντικατάσταση ή δεν μπόρεσαν καν να λύσουν το πρόβλημα στο ερωτηματολόγιο 1 και επιπλέον υπολόγισαν λανθασμένα το όριο στο ερωτηματολόγιο 2.

Τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν μετά την αξιολόγηση των απαντήσεων στις ερωτήσεις 1.1 και 2.1 εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα (βλέπε σχήμα 3.5). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το 63.5% των υποκειμένων στην ερώτηση 1.1 δεν σκέφτηκαν την χρήση του ορίου, ενώ ήταν σε θέση να το υπολογίσουν σωστά στην ερώτηση 2.1. Από την άλλη μεριά μόλις το 25.3% θεώρησαν το αντίστοιχο όριο στην ερώτηση 1.1 και υπολόγισαν το αντίστοιχο όριο με ακρίβεια στην ερώτηση 2.1. [Cetin(2008)]

	πλήθος φοιτητών	%
Ομάδα A	16	25.3
Ομάδα B	-	-
Ομάδα C	40	63.5
Ομάδα D	7	11.2

Σχήμα 3.5: Η απόδοση των υποκειμένων στις ερωτήσεις 1.1 και 2.1.

Τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν μετά την αξιολόγηση των απαντήσεων στις ερωτήσεις 1.2 και 2.2 εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα (βλέπε σχήμα 3.6). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το 81% των υποκειμένων στην ερώτηση 1.2 δεν έκαναν χρήση του ορίου, ενώ ήταν σε θέση να το υπολογίσουν σωστά στην ερώτηση 2.2. Αφετέρου μόλις το 19% θεώρησαν το αντίστοιχο όριο στην ερώτηση 1.2 και υπολόγισαν το αντίστοιχο όριο με ακρίβεια στην ερώτηση 2.2.

	πλήθος φοιτητών	%
Ομάδα A	12	19
Ομάδα B	-	-
Ομάδα C	51	81
Ομάδα D	-	-

Σχήμα 3.6: Η απόδοση των υποκειμένων στις ερωτήσεις 1.2 και 2.2.

Τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν μετά την αξιολόγηση των απαντήσεων στις ερωτήσεις 1.3 και 2.3 εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα (βλέπε σχήμα 3.7). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το 68.2% των υποκειμένων στην ερώτηση 1.3 δεν έκαναν χρήση του ορίου, ενώ ήταν σε θέση να το υπολογίσουν σωστά στην ερώτηση 2.3. Αφετέρου μόλις το 8% θεώρησαν το αντίστοιχο όριο στην ερώτηση 1.3 και υπολόγισαν το αντίστοιχο όριο με ακρίβεια στην ερώτηση 2.3. [Cetin(2008)]

	πλήθος φοιτητών	%
Ομάδα A	5	8
Ομάδα B	2	3.2
Ομάδα C	43	68.2
Ομάδα D	13	20.6

Σχήμα 3.7: Η απόδοση των υποκειμένων στις ερωτήσεις 1.3 και 2.3.

Τα δεδομένα που συγκεντρώθηκαν μετά την αξιολόγηση των απαντήσεων στις ερωτήσεις 1.4 και 2.4 εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα (βλέπε σχήμα 3.8). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το 76.1% των υποκειμένων στην ερώτηση 1.4 δεν έκαναν χρήση του ορίου, ενώ ήταν σε θέση να το υπολογίσουν σωστά στην ερώτηση 2.4. Από την άλλη πλευρά μόλις το 11.2% θεώρησαν το αντίστοιχο όριο στην ερώτηση 1.4 και υπολόγισαν το αντίστοιχο όριο σωστά στην ερώτηση 2.4.

	πλήθος φοιτητών	%
Ομάδα A	7	11.2
Ομάδα B	-	-
Ομάδα C	48	76.1
Ομάδα D	8	12.7

Σχήμα 3.8: Η απόδοση των υποκειμένων στις ερωτήσεις 4.1 και 4.2.

Σύμφωνα με τον Cetin(2008), τα αποτελέσματα της παρούσης έρευνας καταδεικνύουν ότι ακόμη και φοιτητές που γνωρίζουν τις τεχνικές υπολογισμού βασικών ορίων, δεν είναι σε θέση να εφαρμόσουν αυτήν τη γνώση στον κατά προσέγγιση υπολογισμό τιμών μιας συνάρτησης. Με άλλα λόγια οι φοιτητές έχουν δυσκολία στην κατανόηση και χρήση του ορίου. Για μεγάλο ποσοστό φοιτητών ο υπολογισμός του ορίου είναι απλώς μια μηχανική αλγεβρική διαδικασία που δε συσχετίζεται με προβλήματα προσέγγισης. Ενδέχεται οι φοιτητές να βλέπουν τον απειροστικό λογισμό σαν μια συλλογή από θεωρήματα και διαδικασίες που πρέπει να απομνημονευθούν και εφαρμόσουν. Έτσι αντιλαμβάνονται το όριο ως μια διαδικασία που εφαρμόζεται σε δοσμένη συνάρτηση και δίνει ως αποτέλεσμα ένα $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Για παράδειγμα στη δεύτερη άσκηση οι φοιτητές εφήρμοσαν μηχανικά τον κανόνα υπολογισμού του ορίου στο ∞ για ρητές συναρτήσεις. Εφόσον λοιπόν $\deg(2x^3 - 6x^2 - 7) = 3 = \deg(x^3 + x^2)$ έγραψαν $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2$. Όταν όμως τους ζητήθηκε να υπολογίσουν προσεγγιστικά την τιμή $g(10873)$ απέτυχαν να δώσουν μια ικανοποιητική απάντηση, γιατί, προφανώς δεν έχουν συνδέσει το όριο της συνάρτησης με τις προσεγγιστικές της τιμές της συνάρτησης. [Cetin(2008)]

Κεφάλαιο 4

Προτάσεις για την άρση των δυσκολιών στην κατανόηση της έννοιας του ορίου

Οι διδακτικές προτάσεις των ερευνητών για την αντιμετώπιση των δυσκολιών στην κατανόηση της έννοιας του ορίου είναι κυρίως οι εξής:
Η πρώτη πρόταση συσχετίζεται με την επεξεργασία του ορισμού και την επιμονή σε αυτόν. Έχει ήδη αναφερθεί, ότι ο ορισμός είναι από τη φύση του δυσνόητος και απαιτητικός για τον ανώριμο νου του πρωτοετή φοιτητή. Σύμφωνα με την Przenioslo(2004), ένας φοιτητής μπορεί μετά την παρουσίαση του ορισμού, να σχηματίσει εντυπώσεις και να εσωτερικεύσει εικόνες, κάποιες από τις οποίες είναι αποτέλεσμα πλάνης. Για την πλειονότητα των φοιτητών ο ορισμός δεν αποτελεί το πιο σημαντικό εργαλείο επίλυσης των προβλημάτων. Μάλιστα αρκετοί φοιτητές, που έχουν παρακολουθήσει ολόκληρη την σειρά των μαθημάτων του απειροστικού λογισμού, εμφανίζονται να αγνοούν το ρό-

λο του ορισμού στα μαθηματικά. [Przenioslo(2004)] Η Mamona-Downs(2002) προτείνει για την κατανόηση του ορισμού τα εξής τρία διδακτικά βήματα:

1. Πρόκληση και ανάπτυξη εικόνων μέσα από ανακύπτοντα θέματα στο περιβάλλον της σχολικής τάξης.

2. Εισαγωγή του επισήμου ορισμού και ανάλυσή του σε αντιπαράθεση με τα θέματα που συζητήθηκαν στο 1. Παρουσίαση ενός ειδικού παραδείγματος.

3. Ανάκληση και έγκριση απόψεων που ακούστηκαν στο 1. σε σύγκριση με τον επίσημο ορισμό, και ιδιαίτερα μέσα από το παράδειγμα στο 2.

Στο βήμα 1. θα μπορούσαν να δοθούν εργασίες στους μαθητές που εγείρουν τις, υποτιθέμενες από την βιβλιογραφία της έρευνας, προϋπάρχουσες αντιλήψεις των φοιτητών για το όριο. Η παραπάνω πορεία επεξεργασίας του ορισμού μπορεί να αποτελέσει ένα κατάλληλο πρότυπο στο οποίο μπορεί να εξηγηθεί με σαφήνεια και επάρκεια η σύγκρουση μεταξύ της «δυναμικής προσεγγιστικής» εικόνας και της «στατικής», που καταδεικνύεται από τον ορισμό. Τη σύγκρουση των δύο αυτών εικόνων είχε θίξει ο Aleksandr Yakovlevich Khinchin(1894-1959) το 1958. [Mamona-Downs(2002)] Ανάλογη αντιμετώπιση προτείνει και ο Cornu(1991). Σύμφωνα με τον Cornu(1991), διάφορα πειράματα έχουν δείξει ότι οι φοιτητές, στους οποίους εδόθησαν διάφορες κατάλληλες δραστηριότητες πριν την εισαγωγή του ορίου, βοηθήθηκαν να συνειδητοποιήσουν τις αυθόρμητες ιδέες και εικόνες τους. Οι ιδέες τους αυτές θα πρέπει να οπωσδήποτε να αναδυθούν κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας. Κατά αυτόν τον τρόπο οι φοιτητές έμαθαν να είναι προσεκτικοί στις εκφράσεις τους, σεβόμενοι το ακριβές νόημα των λέξεων που χρησιμοποιούσαν. Αυτή η τεχνική απεδείχθη ικανή να βοηθήσει τους φοιτητές να χτίσουν τη γνώση τους (Cornu(1983), Robert 1982a). [Cornu(1991)]

Στη δημιουργία των εικόνων βαρυσήμαντος είναι ο ρόλος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων. Είναι αναγκαίο, οι φοιτητές να δουν ένα πλήθος παραδειγμάτων συναρτήσεων, που θα καλύψουν κάθε περίπτωση σύγκλισης ή απόκλισης. Καθώς δίνονται αυτά τα παραδείγματα, η σχέση μεταξύ της τιμής του ορίου και των τιμών της συνάρτησης πρέπει να εξηγηθεί μέσω των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων. Έτσι, οι φοιτητές διευκολύνονται στην παρατήρηση των μεταβολών της συμπεριφοράς της συνάρτησης και στην κατανόηση της σχέσης μεταξύ της τιμής του ορίου και των τιμών της συνάρτησης μέσω οπτικών μέσων. Δια της οπτικοποίησης δημιουργούνται ευκολότερα και ακριβέστερα εικόνες στο νου των φοιτητών. [Cetin(2009)]

Μία πρόσθετη παράμετρος στη διδασκαλία του ορίου είναι το πλαίσιο της μαθησιακής διαδικασίας και το πλαίσιο λύση-προβλημάτων μπορεί να γίνει αποδοτικό. Σύμφωνα με την PrzeniosIo(2004), η εισαγωγή της έννοιας του ορίου ως λύσης ενός καταλλήλως επιλεγμένου προβλήματος μπορεί να είναι βοηθητική. Κατά τον Cornu(1991), η παρουσίαση καταστάσεων στις οποίες το όριο γίνεται χρήσιμο εργαλείο, και αποτελεί μέρος της απάντησης στο δοθέν πρόβλημα, είναι απαραίτητη. Η άποψη του Cetin(2009) είναι, οι λύσεις προβλημάτων που οδηγούν στην κατανόηση, είναι πιθανότατα πιο αποτελεσματικές από το στείρο υπολογισμό ορίων, και μάλιστα μέσα από διαδικασίες (παραγοντοποίηση, απλοποίηση, κανόνας L'Hospital κτλ), που επαναλαμβάνονται μηχανικά σε μεγάλο βαθμό. Τα προβλήματα που μπορούν να τεθούν στους φοιτητές θα μπορούσαν να περιλάβουν προσεγγιστικό ή ακριβή υπολογισμό απόστασης ή χρόνου σε πραγματικά προβλήματα ή τη συμπλήρωση σχεδίων-προτύπων. Θέματα τέτοιας φύσης εξοικειώνουν τους μαθητές με την μοντελοποίηση των μαθηματικών και αποκαλύπτουν τις εφαρμογές τους.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Boyer C.B.(1959) The History of Calculus and its Conceptual Development, re-printed by Dover New York.

Burn B.(2005) 'The vice:some historically inspired and proof-generated steps to limits of sequences' Educational studies in Mathematics.

Cetin N.(2008) 'The performance of undergraduate students in the limit concept'International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Volume. 40, No. 3, 15, 323-330

Cornu, B.(1991) 'Limits', in D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 153-166.

Ely R.(2010) Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals, Journal for Research in Mathematics Education Volume. 41, No. 2, pp. 117-146

Gucler B.(2013) 'Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom' Educational Studies in Mathematics 82:439-453

Mamona-Downs J.(2002) 'Letting the intuitive bear on the formal; A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence' Educational Studies in Mathematics 48:259-288

Przenioslo M.(2004) 'Images of the limit of function in the course of mathematical studies at the university' Educational Studies in Mathematics 55: 103-132, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Roh K.H.(2008) 'Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence' Educational Studies in Mathematics 69: 217-233

Sierpinska A.(1987) ' Humanities students and epistemological obstacles related to limits' Educational Studies in Mathematics, 18, 371-397.

Ελληνική βιβλιογραφία

Αναπολιτάνος Δ.(2009) Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μετής Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ.(2004) Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης, Αθήνα(ΟΕΔΒ)

Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ., Σίδερης Π. (2005) Ευκλείδεια Γεωμετρία α΄ και β΄ ενιαίου λυκείου, Αθήνα(ΟΕΔΒ)

Νεγρεπόντης Σ.(2012) Σημειώσεις μαθήματος Ιστορία των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών-στοιχεία του Ευκλείδη