Το παράδειγμα και το αντιπαράδειγμα στην διδασκαλία και στην κατανόηση των μαθηματικών

Σπυριδούλα Μύγα

Διπλωματική εργασία

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα – 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 19η Ιουλίου 2016 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Β. Φαρμάκη	Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Ι. Θωμαΐδη	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Ευχαριστίες

Για την παρούσα διπλωματική εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμότατα τον καθηγητή μου κο Ιωάννη Θωμαΐδη για την καθοδήγησή του, την αμέριστη συμπαράσταση και κατανόησή του και τον χρόνο που αφιέρωσε σε αυτήν την εργασία. Η βοήθειά του ήταν πολύτιμη και η καθοδήγησή του και οι γνώσεις του θα είναι για μένα σημείο αναφοράς.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου και επιβλέποντα κο Θεοδόση Ζαχαριάδη για την βοήθειά του καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας και την κατανόησή του. Όπως επίσης και την καθηγήτριά μου κα Δέσποινα Πόταρη για την στήριξή της όλα τα χρόνια του μεταπτυχιακού και τη συμμετοχή της στην τριμελή επιτροπή.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω την υπεύθυνη γραμματείας του ΠΜΣ κα Ελένη Κλη για την συμπαράστασή της, την κατανόησή της και την πολύτιμη βοήθειά της.

Τέλος θέλω να πω ένα τεράστιο ευχαριστώ στην οικογένειά μου για τον αγώνα τους για μένα όλα αυτά τα χρόνια και την επιμονή τους σε κάθε μου προσπάθεια, στο σύζυγό μου Πέτρο για την αγάπη του και την στήριξή του και στο γιο μου Νικόλα που έκανε όλη αυτή την προσπάθεια ακόμα πιο όμορφη.

Στον Πέτρο….

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Αυτό που θα μας απασχολήσει στην παρούσα διπλωματική εργασία είναι να μελετήσουμε τον ρόλο των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων στην μάθηση αλλά και τον ρόλο τους στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών και πώς αυτά τα δύο μπορούν να συνδεθούν για να βοηθήσουν στην διδασκαλία των μαθηματικών.

Θέλοντας να συνδέσουμε το γεγονός της εξέλιξης μιας μαθηματικής ιδέας και της εμφάνισης καινοτομιών στην ιστορία των μαθηματικών, και την αντίδραση των μαθητών μιας τυπικής τάξης μαθηματικών με την εμφάνιση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων που ανατρέπουν μια εικασία ή την προγενέστερη γνώση, θα αναλύσουμε και τις δύο αυτές διαδικασίες εξέλιξης και θα προσπαθήσουμε να καταγράψουμε κάποια κοινά χαρακτηριστικά αυτών και να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα. Σκοπός αυτής της ανάλυσης είναι να εξετάσουμε εάν ο ιστορικός παραλληλισμός μπορεί να βοηθήσει στην λειτουργία και στην κατανόηση του ρόλου των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων και αν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την καλύτερη κατανόηση των νέων εννοιών ή θεωρημάτων.

Στο κεφάλαιο 1 αναλύουμε το θεωρητικό πλαίσιο του παραδείγματος και του αντιπαραδείγματος. Παρουσιάζουμε τις κατηγορίες των παραδειγμάτων βάσει της χρησιμότητας και της αποτελεσματικότητάς τους αλλά και τις κατηγορίες των παραδειγμάτων βάσει της κατασκευής τους, όπως παραδείγματα που κατασκευάζονται από τους μαθητές. Σε αυτό το πρώτο κεφάλαιο παρατηρούμε τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα μέσα από το πρίσμα της διδασκαλίας των μαθηματικών σε μία τυπική τάξη. Όταν χρησιμοποιούμε τον όρο ‘τυπική τάξη μαθηματικών’ θα αναφερόμαστε σε μία αίθουσα διδασκαλίας με μαθητές οι οποίοι θα διδάσκονται το μάθημα των μαθηματικών.

Για να μπορέσει να γίνει κατανοητή η σημασία των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών σημαντικό είναι να αναλύσουμε αρχικά τα πρότυπα εξέλιξης των μαθηματικών μέσα από αλλαγές και ανασκευές. Στο κεφάλαιο 2 θα παρουσιάσουμε τα πρότυπα αλλαγής των μαθηματικών και θα αναλύσουμε το κατά πόσο μπορούμε να συναντήσουμε επαναστάσεις στην ιστορία των μαθηματικών όπως συναντάμε στις υπόλοιπες επιστήμες. Ακόμη θα εξετάσουμε την εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών στον χρόνο μέσα από την εννοιλογική αλλαγή.

Στο κεφάλαιο 3 αρχικά αναφέρουμε γνωστά σε εμάς παραδείγματα αλλαγών που οδήγησαν στην ανάπτυξη των μαθηματικών με τη μορφή που τα γνωρίζουμε σήμερα. Αναφέρουμε τον τρόπο με τον οποίο πολλά γνωστά μαθηματικά αντικείμενα – είτε έννοιες, είτε εικασίες, είτε ολόκληροι νέοι τομείς των μαθηματικών – έκαναν την εμφάνισή τους. Επίσης περιγράφουμε την αντίδραση των εκάστοτε σύγχρονων μαθηματικών σε αυτές τις νέες ιδέες. Εδώ μπορεί να γίνει ο παραλληλισμός με τα αντιπαραδείγματα που συναντούν οι μαθητές στην τάξη και αρνούνται να δεχτούν ως ακατάλληλους τους κανόνες που είχαν μέχρι και εκείνη τη στιγμή στο μυαλό τους.

Για αυτόν τον λόγο εξετάζουμε τη χρήση μιας ιστορικής μελέτης ως εργαλείο ερμηνείας μαθησιακών προβλημάτων. Στην εξέταση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του “ιστορικού παραλληλισμού” και ιδιαίτερα τις δύο όψεις (θετική και αρνητική) που έχει αναδείξει η έρευνα των Θωμαΐδη και Τζανάκη (2007).

Μετά από την ιστορική μελέτη και αφού έχουμε εντοπίσει κοινά χαρακτηριστικά στην εξέλιξη των μαθηματικών και σε μια τυπική τάξη μαθηματικών θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε το κατά πόσο μια ιστορική μελέτη μέσω του ιστορικού παραλληλισμού μπορεί να μας βοηθήσει στην κατανόηση και τη λειτουργία του ρόλου των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων. Επίσης στη συνέχεια πιο γενικά θα προσπαθήσουμε να ξεκαθαρίσουμε κατά πόσο η χρήση πρωτότυπων ιστορικών κειμένων μπορεί να συμβάλλει στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Κεφάλαιο 1

Η σημασία της χρήσης του παραδείγματος και του αντιπαραδείγματος στην διδασκαλία των μαθηματικών

Τα παραδείγματα είναι ένα αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών και ένα σημαντικό στοιχείο των ειδικών γνώσεων (Rissland - Michener, 1978). Αρχικά θα πρέπει να δώσουμε τον ορισμό του παραδείγματος και στη συνέχεια να αναλύσουμε τη σημασία τους.

Όπως έχουν γράψει οι Zodik και Zaslavsky (2008) με τον όρο παράδειγμα εννοούμε μία ειδική περίπτωση κάποιας γενικότερης κλάσης από την οποία μπορούμε να αιτιολογήσουμε έναν ισχυρισμό και να γενικεύσουμε. Η αλληλεπίδραση μεταξύ γενικεύσεων και ειδικών περιπτώσεων – παραδειγμάτων – αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών. Οι Bills και Rowland το 2009 στο άρθρο τους *Examples, generalisation and proof* αναφέρουν ότι η επαγωγική αυτή συλλογιστική (από το παράδειγμα στην γενίκευση) με ψευδο-βιωματικό χαρακτήρα κινητοποιεί τους μαθητές και προσδίδει έναν αυθεντικό αέρα ‘ανακάλυψης’ σε μία τάξη μαθηματικών. Οι μαθητές νιώθουν ότι μόνοι τους καταλήγουν στον γενικό ισχυρισμό μέσα από την χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων. Μάλιστα υποστηρίζουν ότι η δραστηριότητα αυτή ξεπερνά σε όφελος τον εμπειρικό τρόπο εφόσον η επεξήγηση είναι στη διάθεση του μαθητή ως κάποιου είδους διαρθρωτική γενίκευση. Αυτό βοηθά και στην καλύτερη κατανόηση του ίδιου του ισχυρισμού από τον μαθητή μιας και είναι σε θέση να τον επεξηγήσει ο ίδιος πλήρως μέσα από τα παραδείγματα που τον οδήγησαν σε αυτόν. Πολύ σημαντικό ρόλο σε αυτή τη διαδικασία γενίκευσης παίζει η επιλογή κατάλληλων παραδειγμάτων. Ένα γενικό παράδειγμα το οποίο με επιτυχία ‘υποδεικνύει’ την γενικότητα για το κοινό (Mason και Prim, 1984) έχει την ποιότητα μιας τέτοιας διαρθρωτικής γενίκευσης.

Μορφές παραδείγματος

Το παράδειγμα μπορούμε να το συναντήσουμε σε διάφορες μορφές:

• Ως απεικόνιση μιας έννοιας ή μίας αρχής.

• Να αντιπροσωπεύει έναν γενικό ορισμό ή ένα θεώρημα.

• Με τη μορφή λυμένων ασκήσεων.

• Σαν ασκήσεις για εξάσκηση των μαθητών.

• Ως αντιπρόσωποι κάποιων κλάσεων που χρησιμοποιούνται για επαγωγική συλλογιστική.

• Με τη μορφή ειδικών περιπτώσεων.

Στην έννοια του παραδείγματος οι Zodik και Zaslavsky περιλαμβάνουν και τα μη-παραδείγματα αλλά και τα αντιπαραδείγματα. Καθεμιά κατηγορία από τις παραπάνω χρησιμοποιείται με διαφορετικό σκοπό και σε διαφορετικές περιπτώσεις μαθηματικών αντικειμένων. Η κατηγορία των μη-παραδειγμάτων χρησιμοποιείται στην περίπτωση ορισμών και στην κατανόηση εννοιών και ο ρόλος τους είναι να αναδείξουν τα κρίσιμα χαρακτηριστικά της εκάστοτε έννοιας. Τα μη-παραδείγματα είναι παραδείγματα τα οποία υποδεικνύουν τα όρια μιας έννοιας ή τις απαραίτητες συνθήκες. Τα αντιπαραδείγματα τα συναντάμε σε μαθηματικούς ισχυρισμούς και τα χρησιμοποιούμε για ανασκευές αυτών.

Αυτή η κατηγορία παραδειγμάτων ουσιαστικά δείχνει ότι μια εικασία είναι λανθασμένη. Οι δύο τελευταίες κατηγορίες είναι κατάλληλες για να οξύνουν τις διακρίσεις και να καταστήσουν βαθύτερη την κατανόηση ενός μαθηματικού αντικειμένου.

Μελέτες σχετικά με το πώς οι άνθρωποι μαθαίνουν από λυμένα παραδείγματα επισημαίνουν το κατά πόσο συμβάλλουν τα πολλά παραδείγματα με ποικίλους τρόπους στη μάθηση. (Atkinson *et al.* 2000) Τα κατάλληλα παραδείγματα βοηθούν στην κατανόηση της δομής σε βάθος και όχι μόνο στην εστίαση σε επιφανειακά χαρακτηριστικά. Επίσης μελέτες που ασχολούνται με τον σχηματισμό μιας έννοιας έχουν αναδείξει το ρόλο τέτοιων προσεκτικά επιλεγμένων παραδειγμάτων και μη-παραδειγμάτων. Τα παραδείγματα αυτά βοηθούν στην διάκριση μεταξύ των κρίσιμων και μη κρίσιμων χαρακτηριστικών μιας έννοιας και ενθαρρύνουν την κατασκευή πλούσιων εννοιολογικών εικόνων και χώρων παραδειγμάτων.

Ο Larry Sowder (1980) επίσης ασχολήθηκε με τη σημασία των παραδειγμάτων στη

διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Συνοψίζοντας αποτελέσματα πολλών ερευνών καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η παθητική στάση των μαθητών απέναντι στα παραδείγματα και τους ορισμούς που δίνονται σε αυτούς έτοιμοι δεν καταλήγει αναγκαστικά σε βαθιά κατανόηση της έννοιας.

Μάλιστα δίνει μεγάλη έμφαση στο γεγονός ότι για να καταφέρουν οι μαθητές να χρησιμοποιούν και να δηλώνουν έναν ορισμό έχοντας πλήρως αντιληφθεί το νόημά του θα πρέπει πρώτα να έχουν αποκτήσει με εμπειρία στη διάκριση των παραδειγμάτων και μη παραδειγμάτων αλλά και να είναι ικανοί να κατασκευάσουν από μόνοι τους τα δικά τους παραδείγματα. Αυτό το γεγονός το αναλύουμε και στην επόμενη παράγραφο. Ο Sowder επίσης διαχωρίζει τα παραδείγματα σε παραδείγματα ‘έννοιας’ και παραδείγματα ‘διαδικασίας’. Είναι προφανής η βάση για αυτόν τον διαχωρισμό.

Γίνεται σαφώς με κύριο χαρακτηριστικό το μαθηματικό αντικείμενο στο οποίο ένα παράδειγμα αναφέρεται.

1.1 Κατασκευή παραδειγμάτων από τους ίδιους τους μαθητές

Όπως τονίζουν οι Watson και Mason η μάθηση ενισχύεται σε μεγάλο βαθμό όταν καλούνται οι μαθητές να κατασκευάσουν τα δικά τους παραδείγματα. Πράγματι θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ακόμη περισσότερο και να πούμε ότι μέχρι να καταφέρουν οι μαθητές να κατασκευάσουν το δικό τους παράδειγμα δεν έχουν εκτιμήσει πλήρως την έννοια.

Κάποια από τα χαρακτηριστικά της δημιουργίας παραδειγμάτων είναι τα εξής:

1. Η δημιουργία των παραδειγμάτων είναι υποκειμενική και περιστασιακή και εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις προγενέστερες γνώσεις, την εμπειρία και την προδιάθεση του κάθε ατόμου ξεχωριστά. Μάλιστα σε αυτό παίζει πολύ μεγάλο ρόλο και η διατύπωση της εκάστοτε εντολής που καθοδηγεί τον μαθητή στη δημιουργία παραδείγματος. Οι χώροι παραδειγμάτων κυριαρχούνται από κάποιες ισχυρές εικόνες μερικές από τις οποίες μπορεί να είναι και σχεδόν καθολικές. Αυτό το συμπέρασμα βγαίνει όταν παρατηρούμε ότι διαφορετικοί μαθητές αντιδρούν διαφορετικά και δημιουργούν διαφορετικά παραδείγματα σε ίδιες διδακτικές καταστάσεις. Ακόμη ως και ο ίδιος μαθητής σε διαφορετικές περιπτώσεις διδασκαλίας έχει διαφορετική αντίδραση.

2. Η αντίληψη της γενίκευσης στην οποία οδηγεί το παράδειγμα είναι υποκειμενική. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, στον ορισμό της έννοιας του παραδείγματος, το παράδειγμα είναι μια ειδική περίπτωση μιας γενικότερης κλάσης. Έχουμε δηλαδή την εφαρμογή μιας επαγωγικής διαδικασίας κατά την οποία από το παράδειγμα - δηλαδή από το ειδικό - προσπαθούμε να γενικεύσουμε (γενικό).Υπάρχει περίπτωση όμως διαφορετικοί μαθητές να δούνε το ίδιο παράδειγμα να αντιπροσωπεύει διαφορετικές γενικότερες κλάσεις, να ακολουθήσουν δηλαδή μια διαφορετική επαγωγική διαδικασία που θα τους οδηγήσει σε διαφορετική γενίκευση. Πολλές φορές κάποιες ειδικές περιπτώσεις αποδεικνύονται να είναι παραδείγματα γενικών περιπτώσεων νέων για τον μαθητή.

3. Τα παραδείγματα συνήθως δεν είναι απομονωμένα. Αντίθετα οι μαθητές αντιλαμβάνονται ολόκληρη την κλάση της οποίας τα παραδείγματα αυτά μπορεί να αποτελούν μια ειδική περίπτωση. Ως εκ τούτου αποτελούν αυτό που λέμε ένα παράδειγμα χώρου. Οι μαθητές λοιπόν όσον αφορά στην παρατήρηση έρχονται σε επαφή με έναν χώρο παραδειγμάτων ο οποίος προκύπτει ύστερα από προτροπές και καθοδηγήσεις και είναι η αντίδρασή τους σε μια δεδομένη διδακτική κατάσταση. Όταν μιλάμε για αυτόν τον χώρο παραδειγμάτων πρέπει οπωσδήποτε να λάβουμε υπόψη μας ότι οι μαθητές και τα μαθήματα στο διδακτικό περιβάλλον είναι αλληλένδετα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι χώροι αυτοί παραδειγμάτων να μην αποτελούν απλές λίστες με παραδείγματα. Αντίθετα αυτό το γεγονός τους προσδίδει μία εσωτερική, ιδιοσυγκρασιακή δομή και είναι αυτή η δομή που ευθύνεται για τα παραδείγματα τα οποία παράγονται. Το περιεχόμενο αυτών των χώρων και οι δομές τους όπως είδαμε πριν είναι υποκειμενικές και διαφέρουν κατά περίσταση. Μία άλλη αξιοσημείωτη διαφορά είναι ότι δύο χώροι στην περιοχή των μαθηματικών όπως αυτοί της άλγεβρας και της γεωμετρίας, οι οποίοι είναι δομημένοι με τον ίδιο τρόπο, προσεγγίζονται με εντελώς διαφορετικό τρόπο όσον αφορά στα παραδείγματά τους.

4. Οι χώροι παραδειγμάτων μπορούν να εξερευνηθούν ή να επεκταθούν από τους μαθητές με τη βοήθεια ή χωρίς εξωτερικών ερεθισμάτων. Μέσα από συγκεκριμένες ερωτήσεις που θέτουν οι καθηγητές στους μαθητές οι μαθητές φτάνουν να ανακαλύψουν αυτούς τους χώρους παραδειγμάτων. Μπορούν αν τους διευρύνουν και να τους επεκτείνουν ψάχνοντας κατά περίπτωση ιδιόμορφα παραδείγματα τα οποία μπορούν να αποτελέσουν τη δίοδο σε νέες κλάσεις παραδειγμάτων. Αυτό μπορεί να συμβεί με το να δοθούν περαιτέρω περιορισμοί οι οποίοι θα αφορούν σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των παραδειγμάτων αλλάζοντας μια κλειστή ερώτηση σε ανοιχτή.

Τα μαθηματικά γνωρίζουμε ότι είναι μια ‘κονστρουκτιβιστική’ δραστηριότητα και γίνεται πιο πλούσια όταν οι μαθητές καταφέρνουν να ‘οικοδομούν’ από μόνοι τους

αντικείμενα, σχέσεις, ερωτήματα, προβλήματα και νοήματα. Τα παραδείγματα και η ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν τέτοια δείχνει ότι όλοι οι μαθητές είναι ικανοί να κατασκευάσουν από μόνοι τους μαθηματικά αντικείμενα. Η δραστηριότητα αυτή επίσης είναι δυνατόν να παρακινήσει και μαθητές οι οποίοι σε διαφορετική περίπτωση θα είχαν μια παθητική και αδιάφορη στάση. Το να επιλέγουν οι μαθητές από μόνοι τους παραδείγματα είναι παρακινητικό, δημιουργεί αυτοπεποίθηση όπως και το να σε εμπιστεύονται για τις επιλογές αυτές.

Υπάρχουν συχνά πολλά κλασικά και συμβατικά παραδείγματα τα οποία παρουσιάζουν οι καθηγητές στους μαθητές τα οποία θα έχουν εκπληρώσει το σκοπό τους και θα μπορούν μετά να τα χρησιμοποιήσουν και οι ίδιοι μαθητές μόνο εάν τα έχουν νιώσει πλήρως, τα εσωτερικεύσουν και τα εντάξουν και στους δικούς τους χώρους παραδειγμάτων.

Οι Zazkis και Chernoff (2007) χαρακτηρίζουν το παράδειγμα ως ένα μέσο για την αντιμετώπιση των παρανοήσεων των μαθητών. Η επεξήγηση μιας καινούριας έννοιας ή ενός ισχυρισμού είναι μία ιδιαίτερα απαιτητική εργασία που στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στην επιλογή παραδειγμάτων από τον διδάσκοντα. Ακόμη η κατασκευή ενός παραδείγματος δεν μπορεί να είναι αποτέλεσμα ενός αλγορίθμου. Ως εκ τούτου η εργασία για την κατασκευή τους απαιτεί πειραματισμό και κατανάλωση αρκετού χρόνου. Ο χρόνος αυτός συμβάλλει σε μεγάλο βαθμό στην ανάπτυξη μιας διαίσθησης του τι πραγματικά είναι αυτό που ενισχύει ή ακυρώνει την εφαρμογή ενός ορισμού ή που διαψεύδει μια πρόταση.

Ακόμη οι Leinhardt, Zaslavsky και Stein (1990) γράφουν:

Οι επεξηγήσεις αποτελούνται από τις ενορχηστρώσεις επιδείξεων, αναλογικών παραστάσεων και παραδειγμάτων. Ένα κύριο χαρακτηριστικό των επιδείξεων είναι η χρήση καλά κατασκευασμένων παραδειγμάτων, παραδειγμάτων που δίνουν το νόημα αλλά περιορίζουν τη γενίκευση, παραδειγμάτων τα οποία εξισορροπούνται από ισχύουσες ή αντίστροφες περιπτώσεις.

Οι Peled και Zaslavsky (1997) διακρίνουν τρείς τύπους (αντι-)παραδειγμάτων που χρησιμοποιούνται από τους καθηγητές μαθηματικών ανάλογα με την επεξηγηματική τους ισχύ: τα ειδικά παραδείγματα, τα ημιγενικά και τα γενικά παραδείγματα. Ισχυρίζονται ότι τα γενικά αντιπαραδείγματα προσφέρουν επεξηγήσεις και παρέχουν βαθιά γνώση ως προς το γιατί ένας ισχυρισμός δεν είναι αληθής καθώς και ιδέες για το πώς να παράγονται περισσότερα αντιπαραδείγματα για τον ίδιο ισχυρισμό.

1.2 Κατηγορίες παραδειγμάτων

Μια αρχή, είτε αυτή είναι ο συγγραφέας ενός βιβλίου μαθηματικών είτε ο καθηγητής στην τάξη, υποθέτει ότι ο μαθητής θα χρησιμοποιήσει ένα παράδειγμα πάντα σύμφωνα με τις προθέσεις του συγγραφέα, ο οποίος θα καθοδηγήσει την σκέψη του. Ο Michener (1978) περιγράφει διαφορετικά είδη παραδειγμάτων τα οποία τα διακρίνει με βάση την χρήση τους στη διδασκαλία και στη μάθηση. Τα είδη αυτά είναι τα εξής:

• ***Τα αρχικά παραδείγματα (εκκίνησης)***

Αυτά τα παραδείγματα είναι αυτά από τα οποία βασικά προβλήματα, ορισμοί και αποτελέσματα μπορούν να υποτεθούν στην αρχή της διδασκαλίας μιας θεωρίας. Αυτά τα παραδείγματα μπορούν στη συνέχεια να αναχθούν στην γενική περίπτωση χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν είναι κατανοητά και δεν μπορούν να σταθούν και από μόνα τους.

• ***Τα αναφορικά παραδείγματα***

Τα παραδείγματα αυτά τα συνιστούν οι τετριμμένες περιπτώσεις οι οποίες είναι ευρέως εφαρμόσιμες και μπορούν να συνδεθούν με διάφορες έννοιες και αποτελέσματα. Στο βιβλίο των Watson και Mason δίνεται ως παράδειγμα ο R^2, ο οποίος χώρος

χρησιμοποιείται γενικότερα ως τετριμμένη περίπτωση για να δοθεί η αίσθηση του πώς λειτουργούν τα πράγματα στην πραγματική ανάλυση

• ***Τα πρότυπα παραδείγματα (model)***

Οι γενικές περιπτώσεις οι οποίες συνοψίζουν προσδοκίες και υποθέσεις σχετικά με έννοιες και θεωρήματα.

• ***Τα αντιπαραδείγματα***

Αυτά έχουν ως σκοπό την αυστηρή διάκριση μεταξύ των εννοιών και καταδεικνύουν την μη καθολικότητα των αποτελεσμάτων παραθέτοντας περιπτώσεις στις οποίες δεν ισχύουν.

Όπως αναφέραμε παραπάνω η διάκριση αυτή γίνεται από την πλευρά του διδάσκοντα. Πολλές φορές όμως δεν είναι ξεκάθαρο στους μαθητές για ποιο είδος παραδείγματος μιλάμε παρά τις προθέσεις του καθηγητή. Άλλωστε είναι γνωστό ότι υπάρχουν πολλοί ανησυχητικοί παράγοντες ανάμεσα στην πρόθεση του δασκάλου και στην αντίληψη του μαθητή. Η διάκριση μεταξύ ενός αρχικού παραδείγματος και ενός πρότυπου παραδείγματος είναι πολλές φορές πολύ δύσκολη από τους μαθητές. Εάν ο εκπαιδευόμενος έχει συναντήσει το αρχικό παράδειγμα ξανά, αλλά σε κάποιο άλλο πλαίσιο, τότε είναι πιθανό να το χρησιμοποιήσει ως πρότυπο παράδειγμα από την έναρξη της διδασκαλίας. Ως εκ τούτου μπορεί να συνδέσει την καινούρια έννοια σε ένα σωρό προηγούμενες γνώσεις ήδη δομημένες. Μέσα από τη διαδικασία της διδασκαλίας ο Michener παρατήρησε ότι όταν εκείνη χρησιμοποιούσε συχνά παραδείγματα για καθαρά παιδαγωγικούς λόγους τότε και οι ίδιοι οι μαθητές υιοθετούσαν αυτή τη συνήθεια και χρησιμοποιούσαν κι εκείνοι. Μάλιστα χρησιμοποιούσαν παραδείγματα για να βρουν αντιπαραδείγματα. Επίσης χρησιμοποιούσαν τα ίδια παραδείγματα που τους έδινε η διδάσκουσα για να εξηγήσουν περαιτέρω την κατανόησή τους.

Δεν χρειάζεται να είναι κάποιος έμπειρος μαθηματικός για να καταλάβει την αξία του παραδείγματος, ιδιαίτερα ενός παραδείγματος το οποίο εμπνέει αυτοπεποίθηση και μπορεί να θεωρηθεί ως υποδειγματικό.

1.3 Μη παραδείγματα και αντιπαραδείγματα

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα τα μη παραδείγματα υποδεικνύουν τα σύνορα μιας έννοιας ή τις απαραίτητες συνθήκες που πρέπει να ισχύουν. Τα αντιπαραδείγματα όμως είναι κάτι διαφορετικό, είναι παραδείγματα που δείχνουν ότι μια εικασία είναι λανθασμένη. Ως εκ τούτου ένα μη παράδειγμα μπορεί να αποτελέσει αντιπαράδειγμα ότι μια συνθήκη είναι απαραίτητη να ισχύει. Μία τέτοια περίπτωση που μπορούμε να αναφέρουμε σαν παράδειγμα είναι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί. Το να βρούμε έναν άρρητο αριθμό σημαίνει να βρούμε ένα μη παράδειγμα για τους ρητούς αριθμούς. Αυτό δείχνει ότι δεν είναι όλοι οι αριθμοί ρητοί. Όταν έχουμε λοιπόν την υπόθεση ότι όλοι οι αριθμοί είναι ρητοί τότε το $\sqrt{3}$ και ο π είναι αντιπαραδείγματα.

Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι τα μη παραδείγματα πρέπει να αντιμετωπίζονται σαν παραδείγματα αλλά ως ένδειξη ότι μπορεί να συναντήσουμε διαφορετικές περιπτώσεις.

Τα πρώτα παραδείγματα που παρουσιάζει ένας καθηγητής στην τάξη συνήθως είναι πολύ απλά. Επειδή αυτή είναι η πρώτη επαφή των μαθητών με μια νέα έννοια ή ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο συχνά οι μαθητές χρησιμοποιούν τα απλά αυτά παραδείγματα για τον προσδιορισμό αυτού. Η μη πολυπλοκότητα αυτών των παραδειγμάτων έχει σαν αποτέλεσμα οι μαθητές να μένουν με μια ελλιπή και περιορισμένη αντίληψη της νεοεισαχθείσας έννοιας, ώστε ακόμη και η παρουσία κάποιων μη παραδειγμάτων να τους κάνει ελάχιστη εντύπωση.

Ο Des MacHale (1986) υποστηρίζει ότι οι μαθητές έχουν την τάση να απορρίπτουν παραδείγματα που τους προκαλούν ανησυχία. Δηλαδή συχνά απορρίπτουν παραδείγματα και μαθηματικά αντικείμενα που έρχονται σε σύγκρουση με τις μέχρι τώρα αντιλήψεις τους. Αυτό μπορεί να συμβαίνει υποσυνείδητα και να έχει σαν αποτέλεσμα κάποια όχι και τόσο κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα από τον διδάσκοντα να μην είναι αντιληπτά από τους μαθητές ή ακόμη και να απορρίπτονται ως διαφορετικά.

Ο Allan Bell (1976) ανέφερε ότι οι μαθητές συχνά δεν αναγνωρίζουν την σημασία των αντιπαραδειγμάτων και δεν ανασκευάζουν απαραίτητα τις εικασίες ή τις αποδείξεις τους εάν ανακύψει ένα παράδειγμα.

Οι μαθητές συναντώντας ένα αντιπαράδειγμα στη διδασκαλία είναι πολύ δύσκολο να αντιταχθούν στους ήδη γνώριμους σε εκείνους κανόνες. Ένα τέτοιο παράδειγμα στην διδασκαλία των μαθηματικών είναι η πράξη του πολλαπλασιασμού. Όταν οι μαθητές πολλαπλασιάσουν τον αριθμό 4 με το κλάσμα 1/2 παρατηρούν ότι το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός μικρότερος από τον αρχικό κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τον ήδη γνώριμο σε εκείνους κανόνα ότι ‘ο πολλαπλασιασμός δίνει πάντα κάτι μεγαλύτερο’. Παρόλα αυτά οι μαθητές δεν είναι διατεθειμένοι να παραδεχτούν ότι αυτός ο κανόνας είναι ακατάλληλος.

O Fischbein το 1987 ανέφερε ότι υπάρχουν πρωτόγονες διαισθήσεις στους μαθητές οι οποίες δεν μεταβάλλονται, μόνο επικαλύπτονται, οι πρωτόγονες δηλαδή διαισθήσεις δεν μετακινούνται. Αυτό σημαίνει ότι ανά πάσα στιγμή μπορεί να έρθουν στην επιφάνεια. Αυτή η διαδικασία της απόρριψης είναι μια διαδικασία που οι άνθρωποι την συναντούν και σε άλλους τομείς της καθημερινής τους ζωής. Αυτό σημαίνει ότι αναγνωρίζουν τις εξαιρέσεις σε έναν κανόνα αλλά δεν θεωρούν ότι τον αμφισβητούν. Για παράδειγμα όπως αναφέραμε παραπάνω στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού δεν καταρρίπτεται ο κανόνας ότι πάντα με την πράξη του πολλαπλασιασμού παίρνουμε μεγαλύτερο αποτέλεσμα.

Ένα άλλο παράδειγμα στο οποίο φαίνεται η άρνηση των μαθητών να απαρνηθούν τον κανόνα είναι στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού του 1,5 με το 10. Ο κανόνας εδώ για τους μαθητές είναι ότι όταν πολλαπλασιάζουμε με το 10 προσθέτουμε απλά ένα μηδενικό στο τέλος. Εδώ όμως δεν ισχύει ο κανόνας αυτός γιατί ισχύει στους ακέραιους αλλά και οι μαθητές δεν θα τον απαρνηθούν.

Θα ήταν αφελές να προσποιηθούμε ότι δεν περιμένουμε από τους μαθητές να κάνουν γενίκευση σε τέτοιους κανόνες, είτε αυτό γίνει ρητά από τους μαθητές είτε σιωπηρά..

Αυτή η γενίκευση των κανόνων που θα κάνουν οι μαθητές βασίζεται στην εμπειρία τους μιας και μέχρι τώρα δεν θα έχουν συναντήσει περιπτώσεις στις οποίες οι κανόνες αυτοί δεν ισχύουν. Αυτός είναι και ο ρόλος των μη παραδειγμάτων. Τα μη παραδείγματα σηματοδοτούν τη στιγμή όπου στη λογική των μαθητών περιορίζεται το πεδίο εφαρμογής αυτής της γενίκευσης. Ουσιαστικά προειδοποιούν τον μαθητή για περιπτώσεις στις οποίες οι προηγούμενες υποθέσεις και διαισθήσεις τους δεν ισχύουν πλέον σε ολόκληρη τη γενικότερη κλάση.

Όταν σε μια εικασία συναντήσουμε ένα αντιπαράδειγμα το πιο πιθανό είναι να υπάρχει μια ολόκληρη κλάση από αυτά τα οποία να καταρρίπτουν την εικασία αυτή. Συνεπώς θα μπορούσε κανείς να ανταποκριθεί με το να αμφιβάλλει για την αρχική εικασία ή τον αρχικό ορισμό και να αρχίσει να την σκέφτεται εκ νέου. Ένα τέτοιο αντιπαράδειγμα είναι να ζητήσουμε από τους μαθητές να αφαιρέσουν το 6 από το 4. Αυτό το αντιπαράδειγμα έρχεται σε αντίθεση με την εικασία ότι αφαιρούμε πάντα τους μικρότερους αριθμούς από τους μεγαλύτερους. Παρόλα αυτά, μέσω αυτής της σύγκρουσης οδηγούνται οι μαθητές στην εισαγωγή μιας νέας έννοιας η οποία είναι οι αρνητικοί αριθμοί. Ουσιαστικά αυτά τα αντιπαραδείγματα ωθούν τους μαθητές να επανεξετάσουν την αρχική εικασία ούτως ώστε να την εντάξουν στο ‘σχήμα’ τους σύμφωνα με τους όρους του Piaget. Οι Duffin και Simpson το 1999 χαρακτήρισαν τα αντιπαραδείγματα ως ‘αντιφατικά’.

Ψάχνοντας κάποιος για μη-παραδείγματα μπορεί να βοηθήσει κάποιον να κατανοήσει και να εκτιμήσει μια εικασία βαθύτερα. Εκτός όμως από την ίδια την εικασία κατανοεί κάποιος καλύτερα και τις προϋποθέσεις που είναι απαραίτητες γι’ αυτήν. Μια τέτοια διαδικασία αναζήτησης θα μπορούσε να γίνει μέσα στον ίδιο χώρο παραδειγμάτων ή θα μπορούσε κάποιος να προχωρήσει και περισσότερο σε μία επέκταση αυτού του χώρου. Αν οι μαθητές λοιπόν μιας τάξης είναι τολμηροί με τα παραδείγματα και προχωρήσουν σε μια τέτοιου είδους έρευνα είναι φυσικό κάποια στιγμή να συναντήσουν και τα μη παραδείγματα φτάνοντας στα άκρα του φάσματος της επιτρεπόμενης αλλαγής για την εικασία. Τα μη-παραδείγματα μπορεί στην αρχή να τους φανούν ως απλά παραδείγματα ή ως παραδείγματα τα οποία καταδεικνύουν την σημασία των προϋποθέσεων.

Όσον αφορά στην εξυπηρετικότητα των αντιπαραδειγμάτων για την εννοιολογική κατασκευή μέσα από την παρουσίασή τους στους μαθητές υπάρχει μεγάλη διαμάχη μεταξύ των ερευνητών. Ο Randall Charles (1980) υποστηρίζει ότι μια εικασία άξια να ερευνηθεί είναι ότι τα μη παραδείγματα είναι πιο χρήσιμα διδακτικά για την κατανόηση μιας δύσκολης έννοιας ενώ τα παραδείγματα είναι πιο χρήσιμα διδακτικά για την κατανόηση μιας σχετικά πιο ‘εύκολης’ έννοιας. Επίσης η Rina Hershkowitz (1989) διαπίστωσε ότι οι μαθητές δίνουν περισσότερη προσοχή και βρίσκουν πιο ενδιαφέροντα τα παραδείγματα παρά τα μη-παραδείγματα. Κατά την άποψη των Watson και Mason οι μαθητές οι οποίοι είναι ενεργοί στο να εξερευνούν χώρους παραδειγμάτων κάποια στιγμή αναπόφευκτα θα συναντήσουν μη-παραδείγματα εννοιών και αντιπαραδείγματα εικασιών.

Κεφάλαιο 2

Η εξέλιξη των μαθηματικών

μέσα από αλλαγές και ανασκευές

2.1 Πρότυπα αλλαγής στην ιστορία των μαθηματικών

Μέσα από την ιστοριογραφία των μαθηματικών παρατηρούμε ότι επαναστάσεις και αλλαγές που έχουν συμβεί στα μαθηματικά ανά τους αιώνες είτε έχουν συμβεί με διαφορετικούς τρόπους είτε έχουν ως αφορμές διαφόρων ειδών ερεθίσματα. Ο Crowe το 1975 στο άρθρο του *Ten “Laws” concerning patterns of change in the history of Mathematics* αναφέρει 10 πρότυπα αλλαγών που μπορεί να συναντήσουμε στην ιστορία των μαθηματικών και αυτή η κατηγοριοποίηση γίνεται βάσει διαφόρων χαρακτηριστικών. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το άρθρο του Mehrtens για να επεξηγήσουμε αυτούς τους νόμους.

1. Δημιουργία ολοκληρωτικά νέων μαθηματικών εννοιών. Αυτές οι νέες έννοιες, όπως για παράδειγμα το πρώτο μη ευκλείδειο σύστημα μπορεί να προκύψουν ως αντίλογος σε μακρόχρονες και επίπονες προσπάθειες των ίδιων των μαθηματικών που δημιούργησαν την αρχική έννοια.

2. Υπάρχουν νέες μαθηματικές έννοιες που ερχόμενες σε αντίθεση με τις μέχρι τότε γνώσεις της επιστημονικής κοινότητας δημιουργούν εμπόδια στο να τις αποδεχτούν και αυτό να μην συμβαίνει παρά αρκετά χρόνια αργότερα. Αυτό μπορεί να συμβαίνει παρά την προφανή λογική των εννοιών αυτών. Ο Crowe αναφέρει ως παράδειγμα τις τετραγωνικές ρίζες των αρνητικών αριθμών των οποίων η επίσης η αποδοχή από την επιστημονική κοινότητα έγινε 300 χρόνια αργότερα. (1543 - 1830) Μάλιστα ενδιάμεσα αυτές οι έννοιες μπορεί να συναντούν ισχυρή αντίσταση και τάσεις υποτίμησης με ανάλογους χαρακτηρισμούς όπως στην προηγούμενη περίπτωση και να αποκτούν ισχυρούς πολέμιους. Αναφέρει επίσης χαρακτηρισμούς αυτών των εννοιών από εκείνους που διαφωνούσαν μαζί τους για να μας μεταφέρει το κλίμα. Στην ιστοριογραφία δηλαδή μπορεί να συναντήσουμε έντονους χαρακτηρισμούς όπως κατανόητο, ανεξήγητο, φανταστικό, αδύνατο .

3. Πολλές φορές η λογική, η συνέπεια και η αυστηρότητα ανάγκαζαν τους επιστήμονες των μαθηματικών να απορρίπτουν νεοεμφανιζόμενες έννοιες οι οποίες μπορεί σήμερα να είναι αποδεκτές. Η χρησιμότητά τους οδήγησε εν καιρώ τους μαθηματικούς στο να τις αποδεχτούν παρά την έντονη διαφωνία τους με αυτές. (μιγαδικοί αριθμοί)

4. Η αυστηρή διατύπωση που συναντάμε σε εγχειρίδια μαθηματικών σε διαφόρους τομείς δεν ήταν κάτι που υπήρχε από την αρχή. Αντίθετα ήταν κάτι που συνέβαινε σε βάθος χρόνου μιας και οι πρωτοπόροι μαθηματικοί σε κάθε τομέα δεν το επεδίωκαν αλλά αναγκαστικά εφαρμόστηκε από μεταγενέστερους μαθηματικούς στον ίδιο τομέα και από τα επανειλημμένα ερωτήματα που έθεταν εκείνοι. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η ταχεία ανάπτυξη των αυστηρών ορισμών και αποδείξεων στην ανάλυση η οποία ήταν αποτέλεσμα των ενοχλητικών ερωτήσεων που τέθηκαν από ανυπόμονους μαθητές όπως έδειξε η J. Grabiner (1974).[1]

Ο Moris Kline (1974) υποστηρίζει ότι:

…είναι ασφαλές να πούμε ότι καμία απόδειξη μέχρι και το 1800 σε κάθε τομέα των μαθηματικών, εκτός ίσως από τη θεωρία των αριθμών δεν μπορεί αν θεωρηθεί ως ικανοποιητική για τα δεδομένα του 1900. Τα δεδομένα του 1900 δεν είναι αποδεκτά σήμερα.

5. Στα μαθηματικά παρατηρούμε ότι η γνώση έχει πολλά επίπεδα. Για την ακρίβεια υπάρχει μία βαθύτερη έννοια μεταφυσικού η οποία δεν γίνεται αντιληπτή από τους ίδιους τους επιστήμονες αλλά παρόλα αυτά εκφράζεται στα γραπτά τους και στην διδασκαλία τους με τρόπο ουσιαστικό. Οι ίδιοι οι μαθηματικοί μπορεί να αγνοούν την ύπαρξη νέων εννοιών αλλά αυτές να εμφανίζονται στις λογικές διαδικασίες που ακολουθούν και να αποτυπώνονται στα γραπτά τους. Ακόμη πολλές φορές στους ίδιους προκύπτει η αναγκαιότητα εισαγωγής των νέων αυτών εννοιών. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι οι μιγαδικοί αριθμοί.

[1] Στο τρίτο κεφάλαιο θα συνδυάσουμε αυτό το πρότυπο αλλαγής στην ιστορία των μαθηματικών με το βιβλίο του Lakatos στο οποίο συναντάμε ξεκάθαρα την απροσδιοριστία της αναζήτησης για αυστηρότητα.

6. Πολύ σημαντικό ρόλο στο κατά πόσο εύκολα θα δεχόταν η εκάστοτε μαθηματική κοινότητα μια νέα έννοια διαδραματίζει και η μέχρι τότε φήμη του δημιουργού της. Όσο πιο γνωστός ήταν μέχρι τότε ένας μαθηματικός και όσο μεγαλύτερης αναγνώρισης τύγχανε από την υπόλοιπη μαθηματική κοινότητα τόσο πιο εύκολο ήταν από τους συναδέλφους του να δεχτούν την πρότασή του για μια καινούρια έννοια, ειδικά αν αυτή η έννοια ήταν και αντίθετη στις μέχρι τότε παραδόσεις. Τέτοια παραδείγματα στην ιστοριογραφία των μαθηματικών υπάρχουν αρκετά.

Ένα από αυτά είναι και αυτό του Grassmann και του βιβλίου του *Ausdehnungslehre* (1844). Ο Grassmann ήταν καθηγητής σε σχολείο και οι δημοσιεύσεις του ήταν ελάχιστες οπότε δεν ήταν γνωστός. Το βιβλίο του όταν δημοσιεύτηκε έλαβε μία μόνο κριτική και αυτή η κριτική ήταν από τον ίδιο. Σχεδόν είκοσι χρόνια αργότερα και πριν το βιβλίο του χρησιμοποιηθεί για ανακύκλωση μία ομάδα αναγνωστών το ανακάλυψε και έτσι έγινε γνωστό. Αντίθετα την ίδια περίπου περίοδο (1853) το βιβλίο του Hamilton *Lectures on Quaternions* έγινε ευρέως αποδεκτό και γνωστό και έλαβε εξαιρετικές κριτικές ακόμα και από ανθρώπους που δεν το διάβασαν καν, στηριζόμενοι στην μέχρι τότε φήμη του, μιας και ο Hamilton ήταν ήδη διάσημος για αρκετά μέχρι τότε και επιβεβαιωμένα αποτελέσματά του. Παρόλα αυτά και τα δύο αυτά έργα σήμερα τα έχουμε αποδεχτεί και αποτελούν μάλιστα και κλασικά έργα των μαθηματικών.

7. Οι νέες έννοιες συχνά προκύπτουν μέσα σε σημαντικά πλαίσια. Πολλές φορές αυτά τα πλαίσια επειδή είναι μεγάλης σημασίας όχι μόνο δεν βοηθούν την έννοια να γίνει αποδεκτή από μια μαθηματική κοινότητα αλλά στέκονται εμπόδιο. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η θεωρία του Hamilton και ένα άλλο η θεωρία του Grassmann. Οι δύο αυτές θεωρίες αρχικά προέκυψαν μέσα σε ένα φιλοσοφικό πλαίσιο το οποίο στάθηκε εμπόδιο στην αποδοχή των δύο αυτών θεωριών. Για να γίνουν αποδεκτές οι έννοιες θα πρέπει να απομακρυνθούν αυτά τα πλαίσια από την μαθηματική κοινότητα.

8. Στα μαθηματικά μπορεί να συμβαίνουν πολλές ανεξάρτητες ανακαλύψεις μιας νέας έννοιας. Αυτό το γεγονός αποτελεί τον κανόνα και όχι την εξαίρεση. Το συναντάμε συχνά διότι, όπως αναφέραμε και στον νόμο ‘2’, μπορεί μια νέα ανακάλυψη να μην γίνει άμεσα αποδεκτή από την υπόλοιπη μαθηματική κοινότητα της εποχής αλλά να περάσουν αρκετά χρόνια για να συμβεί αυτό. Αυτό είδαμε ότι συνέβη στην περίπτωση των τετραγωνικών ριζών μιας αρνητικής ποσότητας οι οποίες έκαναν την εμφάνισή τους το 1543 και δεν έγιναν αποδεκτές νωρίτερα από το 1830. Επίσης στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών συναντάμε πολλές προσπάθειες για να δικαιολογήσουν την αναγκαιότητά τους στην ιστορία των μαθηματικών. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα οχτώ μεγάλοι μαθηματικοί να διεκδικούν την ανακάλυψη των δύο κυρίων μεθόδων εύρεσής τους.

Αυτός ο νόμος εν μέρει δικαιολογείται και από τον νόμο ‘7’. Στον νόμο ‘7’ περιγράψαμε ότι εξαιτίας του πλαισίου μέσα στο οποίο δημιουργείται μια έννοια μπορεί να καθυστερήσει η αποδοχή της από την υπόλοιπη μαθηματική κοινότητα. Αυτό το γεγονός μπορεί να γίνει αιτία να ανακαλυφθεί η νέα έννοια από διαφορετικούς επιστήμονες ανεξάρτητα και σε διαφορετικές χρονικές περιόδους.

9. Ένα βασικό χαρακτηριστικό των μαθηματικών είναι η μεγάλη ποικιλία τεχνικών που διαθέτουν ώστε να καταφέρνουν να ξεπερνούν κάθε εμπόδιο το οποίο μπορεί να δημιουργήσει μια κρίση. Διαθέτουν ένα μεγάλο ρεπερτόριο εργαλείων με τα οποία μπορούν και αντιμετωπίζουν ή αποφεύγουν τυχούσες ’ανωμαλίες’ που προκύπτουν από λογικές αντιφάσεις. Ο Lakatos στο βιβλίο του *Proofs and Refutations (1976)αναφέρεται σε μία τέτοια τεχνική και την ονομάζει ‘*monster-barring*’ δηλαδή ‘γέννηση τεράτων’.*

10. Ο τελευταίος νόμος του Crowe και αυτός που έγινε αφορμή για πολλές συζητήσεις είναι ότι κατά τον Crowe δεν μπορούν ποτέ να συμβούν επαναστάσεις στα μαθηματικά. Αυτός ο νόμος βασίζεται στο γεγονός ότι το ελάχιστο χαρακτηριστικό που πρέπει να έχει μία καινοτομία για να χαρακτηριστεί ως επανάσταση είναι ότι θα πρέπει μια προηγούμενη μαθηματική οντότητα να ανατραπεί ή να απορριφθεί αμετάκλητα. Στις επόμενες παραγράφους κάνουμε εκτενή αναφορά στις μαθηματικές επαναστάσεις και στις απόψεις πολλών επιστημόνων για αυτές.

2.2 Ιστοριογραφία των μαθηματικών

2.2.1 Οι έννοιες του Kuhn και η εφαρμοσιμότητά τους στα μαθηματικά

Ο Kuhn θέλοντας να δημιουργήσει ένα εννοιολογικό πλαίσιο για την δομή και εξέλιξη των επιστημών εισάγει κάποιες νέες έννοιες, τις οποίες εξετάζει ο Mehrtens αν είναι εφαρμόσιμες και στην επιστήμη των μαθηματικών. Εμείς θα μελετήσουμε τις απόψεις του Mehrtnes μόνο για τις εφαρμογές τους στα μαθηματικά.

Κατά τον Kuhn διακρίνονται δύο είδη ανάπτυξης-εξέλιξης των επιστημών, το είδος της ‘ομαλής’ και το είδος της ‘επαναστατικής’ εξέλιξης. Κατά την ‘ομαλή’ εξέλιξη οι επιστήμονες επιλέγουν να επιλύσουν προβλήματα που είναι σχετικά και επιλύσιμα. Αυτά τα προβλήματα δεν αντιτίθενται στις μέχρι τώρα επιστημονικές αξίες και πεποιθήσεις του αλλά προχωρούν την επιστήμη και παρουσιάζουν κάτι νέο. Παρόλα αυτά όπως διαβάζουμε στο άρθρο του Mehrtens ο ίδιος ο Kuhn αναφέρει ότι:

The type of research where no spectacular problems turn up is “strenuous and devoted attempt to force nature into the conceptual boxes supplied by professional education”

Δηλαδή ότι:

Το είδος της έρευνας όπου μη θεαματικά προβλήματα κάνουν την εμφάνισή τους είναι μια επίπονη και αφοσιωμένη προσπάθεια να εξαναγκάσουμε τη φύση να υπακούσει σε εννοιολογικά πλαίσια τα οποία παρέχονται από την επαγγελματική εκπαίδευση.

Αντίθετα κατά την ‘επαναστατική’ εξέλιξη παρουσιάζονται κάποιων ειδών ‘ανωμαλίες’ οι οποίες ταράζουν τις μέχρι τώρα αντιλήψεις των επιστημόνων και στην προσπάθεια να τις αιτιολογήσουν καταλήγουν σε κάτι νέο και ριζοσπαστικό. Η αντιμετώπιση που έχουν αυτού του είδους οι ανωμαλίες από την εκάστοτε επιστημονική κοινότητα συνήθως είναι να προσπαθήσουν να τις φέρουν στα μέτρα τους και να τις προσαρμόσουν στις μέχρι τότε αρχές που διέπουν την επιστήμη τους. Αν αυτό δεν επιτευχθεί τότε κλονίζονται οι πεποιθήσεις τους. Συνήθως τέτοιου είδους προβλήματα μόλις προκύπτουν τοποθετούνται στο ‘συρτάρι’ για τις επόμενες γενιές οι οποίες ίσως διαθέτουν καταλληλότερα εργαλεία για την επίλυσή τους.

Οι επαναστάσεις στις επιστήμες δεν είναι θεμελιώδεις αλλαγές στην κοσμοθεωρία που συμβαίνουν μια φορά στα 100 χρόνια, αλλά αποτελούν όπως αναφέρει ο Kuhn *ένα μελετημένο είδος εννοιολογικής αλλαγής το οποίο συναντάται συχνά στις επιστήμες και είναι θεμελιώδες για την πρόοδό τους*. Γενικότερα ο Kuhn προσεγγίζει το μοντέλο της αλλαγής στις επιστήμες από μία κοινωνιολογική σκοπιά και αυτό διαφαίνεται στους διαχωρισμούς του.

Ο Mehrtens ξεκινάει να διερωτάται και να αναλύει το κατά πόσο υπάρχουν επαναστάσεις στα μαθηματικά και μάλιστα διαφοροποιεί την άποψή του από εκείνη του Crowe που παραθέσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, κάτι το οποίο αναλύουμε διεξοδικά στην επόμενη παράγραφο. Εκτός όμως από τις επαναστάσεις εξετάζει και την εφαρμοσιμότητα των υπόλοιπων εννοιών του πλαισίου που είχε δημιουργήσει ο Kuhn στα μαθηματικά και όλες οι έννοιες αυτές μας αφορούν μιας και συμβάλλουν η καθεμιά με τον τρόπο της στην αλλαγή της επιστήμης των μαθηματικών και συνεπώς και στην εξέλιξή τους.

Το κύριο στοιχείο με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι οι ριζικές αλλαγές και επαναστάσεις οι οποίες άμα τη εμφανίσει τους ήρθαν σε σύγκρουση με τις παραδοσιακές αρχές και αξίες της μαθηματικής κοινότητας της αντίστοιχης εποχής οπότε μέσα από το άρθρο του Mehrtens θα επιλέξουμε τις έννοιες αυτές που είναι σημαντικές για αυτές τις συγκρούσεις.

Μία πρώτη έννοια η οποία κατά τον Kuhn παίζει σημαντικό ρόλο στο μοντέλο της επιστημονικής ανάπτυξης είναι η έννοια της ‘κρίσης’. Ο Mehrtens υποστηρίζει ότι σε μια δεδομένη μαθηματική κοινότητα υπάρχουν φαινόμενα κατά το οποία οι κοινές μέχρι πρότινος παραδοχές ενός συνόλου επιστημόνων αμφισβητούνται και αυτό φυσικά θέτει σε κίνδυνο και την σταθερότητα (κοινωνικά) της μαθηματικής κοινότητας. Στόχος μας είναι να βρούμε στην ιστοριογραφία των μαθηματικών τέτοιου είδους φαινόμενα ώστε να αιτιολογήσουμε την ύπαρξη αυτής της έννοιας και στην επιστήμη των μαθηματικών όπως και στις υπόλοιπες επιστήμες. Επίσης αναρωτιόμαστε αν μπορούν να συντελεστούν κρίσεις στα μαθηματικά όπως συντελούνται σε άλλες επιστήμες. Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ο Crowe στον νόμο ‘9’ και ο Lakatos τονίζει ότι οι μαθηματικοί έχουν μια μεγάλη ποικιλία από τρόπους επίλυσης των προβλημάτων κάτι που μπορεί να οδηγήσει σε βασικές κρίσεις. Επίσης υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθηματικών θεωριών και αρχών αλλά και η ποικιλία των επιστημόνων είναι κάτι που ακόμη μπορεί να οδηγήσει σε κρίση αλλά περιορισμένης έκτασης, μπορεί να οδηγήσει δηλαδή σε μια κρίση μεταξύ των επιστημόνων για παράδειγμα που εμπλέκονται και όχι σε ολόκληρη τη μαθηματική κοινότητα. Τα μαθηματικά επίσης είναι μια επιστήμη η οποία έχει έντονες αλληλεπιδράσεις και με άλλες επιστήμες όπως η φυσική, κάτι το οποίο μπορεί με τη συμβολή της μιας σε θέματα της άλλης να προκαλέσει και πάλι κάποια κρίση.

Η έννοια της ‘ανωμαλίας’ είναι ένα φαινόμενο το οποίο αντίκειται στις προσδοκίες μιας μαθηματικής κοινότητας βάσει των αρχών που συμμερίζεται. Αυτό την καθιστά μία σημαντική έννοια όσον αφορά στην αξιολόγηση του παρασκηνίου και των καινοτομιών που έλαβαν χώρα στην ιστορία των μαθηματικών. Ένα πολύ σημαντικό παράδειγμα που μπορούμε να αναφέρουμε αν ανατρέξουμε στην ιστοριογραφία των μαθηματικών είναι το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη.

Το πέμπτο αίτημα δεν συμφωνούσε με τα υπόλοιπα αυταπόδεικτα αξιώματα και αιτήματα. Αυτό οδήγησε στο να εγκαταλειφθεί η πεποίθηση της μίας και μοναδικής γεωμετρίας. Ο Lakatos στο βιβλίο του αναφέρεται στην μέθοδο που ‘γεννά τέρατα’ και παραθέτει το πρωτότυπο χωρίο του Poincare που αιτιολογεί αυτή την ονομασία. Το χωρίο αυτό έχει ως εξής:

Η λογική γεννά μερικές φορές τέρατα. Επί μισόν αιώνα είδαμε να εμφανίζονται παράξενες συναρτήσεις που δείχνουν να προσπαθούν να μοιάζουν όσο γίνεται λιγότερο με τις τίμιες συναρτήσεις οι οποίες εξυπηρετούν κάποιο σκοπό...... Ως τώρα μια νέα *συνάρτηση επινοούνταν για κάποιον πρακτικό σκοπό, σήμερα τις επινοούμε με δηλωμένο στόχο να απορρίψουμε τους συλλογισμούς των πατέρων μας, και κανείς δεν θα αντλήσει από αυτές τίποτα περισσότερο.... Αν η λογική ήταν ο μόνος οδηγός για ένα δάσκαλο, θα έπρεπε να αρχίζει τη διδασκαλία του με τις πιο γενικές συναρτήσεις, δηλαδή με τις πιο παράξενες. Και ο αρχάριος θα έπρεπε να καταπιαστεί με αυτό το μουσείο τεράτων.*

Κατά τον Mehrtens η έννοια της ανωμαλίας δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην επιστήμη των μαθηματικών διότι δεν μπορεί να αποτελέσει κάποιο ισχυρό εργαλείο για ιστορικές έρευνες. Παρόλα αυτά η χρήση της έννοιας 'ανωμαλία' είναι σχετική και μπορεί να αποτελέσει ένα εργαλείο με το οποίο μπορούν να γίνουν διασυνδέσεις μεταξύ των καινοτομιών και του μέχρι πρότινος πλαισίου που επικρατούσε σε μια μαθηματική κοινότητα.

Οι περισσότερες γνωστές μας μαθηματικές διαδικασίες γίνονται με έναν 'κανονικό' (normal) και συγκαταβατικό τρόπο ο οποίος διέπεται από τους κανόνες οι οποίοι είναι αποδεκτοί και έχει σαν στόχο του την επίλυση συνηθισμένων και γνωστών προβλημάτων. Αυτή είναι η έννοια της 'ομαλής' επιστήμης όπως την περιγράφει ο Kuhn. Οι μαθηματικές αυτές διαδικασίες που αποτελούν κατά τον Mehrtens τα 'ομαλά' μαθηματικά μπορεί να γίνονται για να συμπληρώσουν μια θεωρία η οποία ήταν ήδη γνωστή και είχε κάποια κενά, να γίνει γενίκευση κάποιων ήδη γνωστών και ήδη αποδεκτών εννοιών αλλά και να τονίσει την σημασία που έχουν οι συνθήκες ενός ήδη αποδεδειγμένου θεωρήματος ή ακόμα να τις κάνει πιο αυστηρές. Το να αναζητήσουμε στην ιστορία των μαθηματικών παραδείγματα που αποτελούν 'ομαλή' επιστήμη ενέχει κάποιο κίνδυνο. Αυτό συμβαίνει γιατί επικεντρωνόμαστε στα μαθηματικά που έχουν γίνει από μεγάλους και γνωστούς μαθηματικούς και μπορεί να παραβλέψουμε ίσως κάποια ακόμη μαθηματικά που έχουν γίνει με 'ομαλό' τρόπο. Η σημασία αυτής της έννοιας είναι τεράστια και για την επιστήμη των μαθηματικών μιας και για να καταλήξουμε στην τελική εκδοχή μιας θεωρίας η οποία θα είναι κομψή, ολοκληρωμένη και ορθή θα πρέπει απαραίτητα να περάσει μια περίοδος τέτοιου είδους 'ομαλής' έρευνας. Η έννοια αυτή της 'ομαλότητας' αποτελεί κι αυτή μια σχετική έννοια κατά τον Mehrtens μιας και το μόνο που μπορεί να κάνει είναι να συνδέσει μια μαθηματική διαδικασία με τις σύγχρονες 'νόρμες' εργασίας πάνω στα μαθηματικά.

Το σύνολο των εννοιών που υπάρχουν σε όλες τις επιστήμες όπως και στα μαθηματικά είναι πολύ σημαντικό διότι είναι αυτό με το οποίο οτιδήποτε έρχεται σε αντίθεση (ή με τα χαρακτηριστικά του) δημιουργείται η σύγκρουση η οποία είναι και καθοριστική στην εξέλιξη των μαθηματικών. Μια σημαντική έννοια που συναντάμε στην ιστορία των μαθηματικών είναι η έννοια της συνάρτησης. Οι μαθηματικές έννοιες είναι αυτές που καθορίζουν για τους επιστήμονες τι υπάρχει στα μαθητικά και είναι αυτές που θέτουν τα όρια των πεποιθήσεων. Άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι έννοιες είναι αυτές που είναι καθοριστικές και υποδεικνύουν τον 'ομαλό' τρόπο εξέλιξης των μαθηματικών, με την έννοια της 'κανονικότητας' που περιγράψαμε προηγουμένως.

Τέλος και ίσως και η πιο σημαντική έννοια για το θέμα με το οποίο θέλουμε να ασχοληθούμε είναι η έννοια των παραδειγμάτων, της οποίας η αρχική έννοια του Kuhn ήταν τελείως διαφορετική από αυτή που γνωρίζουμε σήμερα και από αυτή που θα περιγράψουμε εδώ. Τα παραδείγματα αναφέρονται από τον Mehrtens με τον όρο paradigms ή exemplars και αποτελούν γνωστά ανάμεσα στους μαθηματικούς υποδείγματα που δομούν την αντίληψή τους και καθοδηγούν την έρευνά τους.

Ο Mehrtens για να μας αποτυπώσει την σημασία που δίνει στον όρο paradigm αναφέρει πως θα ήθελε με αυτόν τον όρο να αποκαλεί όλα τα μεγάλα επιτεύγματα που δεσπόζουν στην εξέλιξη των μαθηματικών με πολλούς τρόπους και για μεγάλη χρονική περίοδο.

Ο τρόπος με τον οποίο κάνουμε χρήση σήμερα του όρου 'παράδειγμα' είναι παραπλήσιος με αυτήν την έννοια και θα μπορούσαμε να πούμε ότι και στη διδασκαλία τα παραδείγματα είναι εξίσου σημαντικά. Θα μπορούσαμε να πούμε αντίστοιχα ότι και τα παραδείγματα που δίνονται μέσα από την διδασκαλία των μαθηματικών είναι αυτά που δομούν την αντίληψη μιας έννοιας από τους μαθητές και στη συνέχεια τους καθοδηγούν για την αντιμετώπιση παρόμοιων μαθηματικών καταστάσεων. Το παράδειγμα είναι κάτι περισσότερο από τη λύση ενός προβλήματος. Μέσα στο

παράδειγμα μπορεί να περικλείονται βασικές έννοιες ή το παράδειγμα να αποτελεί μια πρότυπη λύση προβλήματος. Μπορεί όμως και να αποτελεί έναν συγκεκριμένο νέο συμβολισμό και ορολογία. Επίσης το παράδειγμα παίζει τόσο καθοριστικό ρόλο που μπορεί να δημιουργήσει μια νέα αξία.
Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύσαμε στο θεωρητικό πλαίσιο της έννοιας των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων στη διδακτική των μαθηματικών και ακόμη ποιους τύπους παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων μπορεί να συναντήσουμε. Ο Mehrtens στο άρθρο του σαν υποδείγματα (exemplars) αναφέρει τους πιο περιορισμένους τύπους παραδειγμάτων.

Όπως αναφέραμε και στο πρώτο κεφάλαιο ένας τύπος παραδείγματος τον οποίο ο Mehrtens αναφέρει ως υπόδειγμα είναι η γεωμετρική αναπαράσταση γενικότερα και εδώ αναφέρεται το παράδειγμα των μιγαδικών αριθμών. Παρατηρούμε ότι μέσω της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών σαν ένα τρόπο αναπαράστασής τους και στη συνέχεια με την αλγεβρικοποίηση του προβλήματος κατάφεραν να καταλήξουν στη θεωρία του Hamilton. Από αυτό μπορούμε να βγάλουμε ως συμπέρασμα ότι πολλά υποδείγματα δείχνουν ένα χαρακτηριστικό της εξέλιξης των μαθηματικών, ότι τα υποδείγματα σε έναν τομέα των μαθηματικών μπορούν να δρουν από κάποιες συγκεκριμένες απόψεις ως υποδείγματα-παραδείγματα σε έναν άλλο τομέα των μαθηματικών. Παρατηρούμε λοιπόν μέσα από το άρθρο αυτό ότι η σημασία των παραδειγμάτων με την έννοια που το ορίζει ο Mehrtens για την επιστήμη των μαθηματικών κατά την έννοια του Kuhn είναι τεράστια και ο πιο σημαντικός λόγος για αυτό είναι ότι μπορούν να αποτελέσουν το έναυσμα για την ανακάλυψη μιας νέας έννοιας, άγνωστης μέχρι τότε. Μπορούμε δηλαδή να πούμε αν αναλογιστούμε αυτό το συμπέρασμα ότι η χρήση των παραδειγμάτων με αυτή την επιστημολογική έννοια, η οποία δεν απέχει πολύ από την σημερινή έννοια του όρου ‘παράδειγμα’, μπορεί να παίξει καθοριστικό ρόλο στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών και στην ανάπτυξή τους.

Εκτός όμως από την δημιουργία μιας νέας έννοιας τα παραδείγματα μπορεί να είναι τόσο σημαντικά και αντιπροσωπευτικά ώστε να επηρεάσουν και να καθοδηγήσουν ως ένα μεγάλο βαθμό τους μεταγενέστερους μαθηματικούς. Ο Mehrtens αναφέρει ως παραδείγματα και σημαντικά για αυτόν μαθηματικά επιτεύγματα τα οποία καθοδήγησαν την έρευνα μεταγενέστερων μαθηματικών αρχικά τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, έπειτα τις διαδικασίες του Αρχιμήδη για τον λογισμό, το έργο *Laws of Thought* του Boole και άλλα παρόμοια έργα. Την τελευταία έννοια και την πιο σημαντική, την έννοια των επαναστάσεων στα μαθηματικά την αναλύουμε στην επόμενη παράγραφο.

2.2.2. Οι επαναστάσεις στα μαθηματικά

Μεγάλο ερώτημα έχει αποτελέσει στην φιλοσοφία των μαθηματικών το κατά πόσο συντελούνται μαθηματικές επαναστάσεις στα μαθηματικά ανάλογες με αυτές που συναντούμε στις υπόλοιπες επιστήμες. Το θέμα αυτό αναλύεται διεξοδικά στο βιβλίο του Ronald Gilles, *Revolution in Mathematics*, στο οποίο παρουσιάζονται οι απόψεις διαφόρων επιστημόνων όπως ο Crowe, ο Dauben και ο Mehrtens αλλά και άλλων οι οποίοι παραθέτουν παραδείγματα μέσα από την ιστοριογραφία των μαθηματικών και σχολιάζουν το κατά πόσο αυτά τα παραδείγματα που αναφέρουν αποτελούν μαθηματικές επαναστάσεις για την εποχή τους. Τέτοια παραδείγματα θα αναλύσουμε παρακάτω. Όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο ο Crowe στο άρθρο του για τους 10 νόμους που διέπουν το πρότυπο αλλαγής στην επιστήμη των μαθηματικών υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη στην οποία δεν μπορούν να συμβούν επαναστάσεις. Πριν αναλύσουμε το σκεπτικό του Crowe όπως εκείνος μας το παρουσιάζει στο άρθρο του θα παραθέσουμε τις απόψεις τριών μεγάλων επιστημόνων τις οποίες ο Crowe συμμερίζεται.

Η πρώτη άποψη από την ιστορία των μαθηματικών έρχεται από τον Fourier, όπως αναφέρει ο Crowe (1975), ο οποίος έγραψε το 1822 στο έργο του, *Αναλυτική θεωρία της θερμότητας* για τα μαθηματικά:

... αυτή η δύσκολη τέχνη σχηματίζεται αργά, αλλά διατηρεί κάθε αρχή που κάποτε απέκτησε, μεγαλώνει και δυναμώνει από μόνη της εν μέσω πολλών παραλλαγών και λαθών του ανθρώπινου νου.

Η επόμενη άποψη ανήκει στον Hankel ο οποίος με την ίδια ένταση έγραψε το 1869:

Στις περισσότερες επιστήμες η μία γενιά γκρεμίζει όσα έχτισε η προηγούμενη... Στα μαθηματικά και μόνο κάθε γενιά κτίζει μια άλλη ιστορία με την παλιά δομή. [Moritz 1942, 14].

Τέλος και πιο πρόσφατα ο Truesdell (1919-2000) (J. Dauben, *Conceptual revolutions and the history of mathematics: Two studies in the growth of knowledge*. In Gillies, D., editor, Revolutions in Mathematics, pages 49–71. Clarendon Press, Oxford.)δήλωσε ότι:

ενώ η φαντασία και η επινόηση είναι η ψυχή της μαθηματικής έρευνας δεν έχει υπάρξει ακόμα επανάσταση.

Και ο Hankel και ο Truesdell έγραφαν συνειδητά με βαθιά γνώση και των μαθηματικών αλλά και της ιστορίας τους.

Ο Crowe με τη σειρά του όσον αφορά στις μαθηματικές επαναστάσεις διακρίνει δύο ειδών ανακαλύψεις που μπορεί αν συναντήσει κανείς γενικότερα στις επιστήμες. Το ένα είδος είναι οι ‘μετασχηματιστικές’ ανακαλύψεις και το άλλο είδος είναι οι ‘διαμορφωτικές’. Η διάκριση γίνεται βάσει του πώς χρησιμοποιούνται στις νέες ανακαλύψεις οι ήδη υπάρχουσες θεωρίες και έννοιες.

Στις μετασχηματιστικές ανακαλύψεις ουσιαστικά αντικαθιστούν πλήρως τις προηγούμενες και γι’ αυτό το λόγο κατά μία έννοια θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν και ως 'επαναστατικές'. Οι προηγούμενες θεωρίες και έννοιες σε αυτήν την περίπτωση απομακρύνονται και την θέση τους παίρνουν οι νέες έννοιες. Αντίθετα οι διαμορφωτικές ανακαλύψεις χρησιμοποιούν ως βάση τις προηγούμενες γνώσεις και πάνω σε αυτές με κάποιες αλλαγές δημιουργούν κάτι καινούριο.

Είναι σαφές ότι ο Crowe κατατάσσει τις μαθηματικές καινοτομίες στη δεύτερη κατηγορία. Για να στηρίξει τον ισχυρισμό του αυτόν φέρνει ως παράδειγμα τις μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες οι οποίες με την εμφάνισή τους δεν αναίρεσαν την Ευκλείδεια αλλά με αυτή ως αφετηρία και βάση αναπτύχθηκαν.

Οι Lakoff και Nunez το 2000 χρησιμοποιώντας την περίπτωση της έννοιας του αριθμού υποστήριξαν ότι τα μαθηματικά διαφέρουν από τις υπόλοιπες επιστήμες μιας και σε αυτά δεν μπορούμε ποτέ να συναντήσουμε επαναστατικές αλλαγές. Όπως υποστηρίζουν η εννοιολογική αλλαγή στα μαθηματικά συντελείται διατηρώντας την δομή των ήδη υπαρχουσών εννοιών σαν βάση και χτίζοντας πάνω σε αυτή τις νέες έννοιες.

Οι Βοσνιάδου και Βαμβακούση προσεγγίζοντας το θέμα των επαναστάσεων στα μαθηματικά από την σκοπιά της εννοιολογικής αλλαγής δηλώνουν ότι αν κάποιος θέλει να δώσει απάντηση στο ερώτημα *Υπάρχουν εννοιολογικές αλλαγές στα μαθηματικά;* θα πρέπει πρώτα να ορίσει τι εννοούμε λέγοντας 'επανάσταση'. Επίσης αναφέρουν ότι με αυτήν την προσέγγιση, η εννοιολογική αλλαγή μπορεί να είναι εφαρμόσιμη σε μαθηματικές έννοιες αλλά όχι σε θεωρίες. Η Dunmore το 1992 στην εργασία της με τίτλο: 'Meta-level revolutions in mathematics' (*Revolutions in mathematics, p.209-226*) με ένα παρόμοιο επιχείρημα υποστήριξε ότι υπάρχουν περιπτώσεις στην επιστήμη των μαθηματικών σε ένα μετα-επίπεδο όπου παλιότερες απόψεις απομακρύνθηκαν. Παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων είναι οι αρνητικοί αριθμοί και οι μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες.

Η άποψη του Mehrtens για τις επαναστάσεις στα μαθηματικά είναι πολύ ενδιαφέρουσα και μας την αναλύει, αρχικά σε αντιδιαστολή με αυτή του Crowe. Ο Mehrtens και στο άρθρο του το 1976 αλλά και στο μεταγενέστερο άρθρο του: *Appendix (1992): Revolutions reconsidered,* το οποίο εμπεριέχεται στον τόμο *Revolutions in mathematics,* 1992 (p.42-48), ο ίδιος χαρακτηριστικά αναφέρει ότι παρά την πάροδο τόσων χρόνων συμφωνεί με τον νεότερο εαυτό του, δεν συμφωνεί με τον Crowe ότι δεν μπορούν να υπάρξουν επαναστάσεις στα μαθηματικά και μάλιστα σχολιάζει την δήλωση του Crowe για τον ρόλο της πρόθεσης ‘σε’ από την φράση *Επανάσταση στα μαθηματικά*. Ο Crowe υποστηρίζει ότι η πρόθεση ‘σε’ είναι κρίσιμη όταν μιλάμε για τις μαθηματικές επαναστάσεις μιας και παίζει ρόλο σε ποιον τομέα των μαθηματικών θεωρεί κάποιος ότι τις συναντούμε, για παράδειγμα πρέπει να διευκρινίσουμε αν μιλάμε για επαναστάσεις στο συμβολισμό, στην μεθοδολογία, στην ονοματολογία ή ακόμα και στην ιστοριογραφία.

Ο Mehrtens λοιπόν δίνει ως παράδειγμα το θεώρημα Taylor το οποίο είναι ένα τεράστιο μαθηματικό κατόρθωμα και έγινε ευρέως αποδεκτό από την πρώτη μέρα της δημοσίευσής του. Το θεώρημα Taylor δεν έχει την ίδια μορφή σήμερα με εκείνη που είχε όταν πρωτοδημοσιεύτηκε. Αυτό μπορεί να συμβαίνει διότι πολλές έννοιες οι οποίες υπάρχουν στο θεώρημα Taylor είναι τελείως διαφορετικές σήμερα σε σχέση με το 1715, όπως η έννοια της ‘συνάρτησης’. Σήμερα η συνάρτηση και η ανάλυση σε άπειρες διαστάσεις έχει την βάση της στη γενική τοπολογία.

Ένα ακόμη παράδειγμα είναι το βιβλίο του van der Waerden *Modern Algebra* του 1930 και η σύγκρισή του με βιβλία άλγεβρας ενός αιώνα πριν (1830). Οι διαφορές είναι τεράστιες στο συμβολισμό, στην ονοματολογία και στη μεθοδολογία, γεγονός που κάποιος δεν μπορεί να αγνοήσει. Μία έννοια δεν ορίζεται μόνο από το ορθό της περιεχόμενο αλλά και από τα περιβάλλοντα στα οποία χρησιμοποιείται

Ελάχιστες θεωρίες έχουν ανατραπεί πλήρως. Οι περισσότερες μαθηματικές θεωρίες στο πέρασμα των χρόνων είτε έχουν χάσει το αντικείμενό τους είτε έχουν πάρει τέτοια μορφή η οποία δεν θυμίζει σε τίποτα την αρχική τους. Μπορεί δηλαδή να μην υπάρχει πια καμία ομοιότητα μιας έννοιας στη σημερινή της μορφή με την μορφή με την οποία πρωτο-ανακαλύφτηκε και ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η σύγκριση της κλασικής άλγεβρας με την μοντέρνα άλγεβρα και ο μετασχηματισμός ο οποίος έχει επέλθει στην πρώτη για να φτάσει στη σύγχρονη μορφή.

Εν κατακλείδι ο Mehrtens θέλοντας να δώσει έναν τρόπο να αναγνωρίζουμε τις επαναστάσεις που συντελούνται στα μαθηματικά χρησιμοποιεί ως βασικό εργαλείο τον ορισμό της έννοιας της ‘ομαλότητας’ ή ‘κανονικότητας’ (normal) στα μαθηματικά. Η πρότασή του είναι να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την έννοια για να καταφέρουμε με κάποιον τρόπο να αξιολογήσουμε τις καινοτομίες που συναντούμε στα μαθηματικά και να κρίνουμε εάν αυτές θα μπορούσαν να αποτελέσουν κάποιου είδους επανάσταση. Ο τρόπος είναι να συνδέσουμε την καινοτομία με το σύγχρονο μαθηματικό υπόβαθρο της εποχής και να δούμε εάν μπορεί αυτή η καινοτομία να συνδεθεί με τις νόρμες αυτές των κανονικών μαθηματικών. Εάν μπορούν να συνδεθούν τότε η καινοτομία θα αποτελεί ένα κομμάτι της ‘ομαλότητας’ αυτής διαφορετικά προσπαθούμε να το αντιμετωπίσουμε διαφορετικά για να ανακαλύψουμε τί είναι αυτό που δεν είναι φυσιολογικό και να βρούμε το λόγο για τον οποίο συμβαίνει αυτό. Στο άρθρο του το 1992 αναφέρει ότι:

Η επανάσταση είναι μία μεταφορά όταν εφαρμόζεται στις επιστήμες.

2.3 Η εξέλιξη των μαθηματικών ιδεών

2.3.1 Η Εννοιολογική αλλαγή

Προτού προχωρήσουμε παρακάτω θα πρέπει να δούμε την ανάπτυξη των μαθηματικών ως επιστήμη μέσα από εννοιολογικές ανακατασκευές. Η εννοιολογική αλλαγή είναι κάτι που μπορούμε να συναντήσουμε πολύ έντονα στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης είτε το μελετήσουμε από ιστορική σκοπιά είτε μέσα από την έννοια της διδασκαλίας των μαθηματικών σε μία σύγχρονη τυπική τάξη. Το θέμα της εννοιολογικής αλλαγής στην εκπαιδευτική διαδικασία αλλά και τις δυσκολίες που μπορεί να συναντήσουν οι μαθητές το έχει αναλύσει ο Brousseau στη θεωρία του για τα επιστημολογικά εμπόδια. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Brousseau:

… τα εμπόδια τα οποία χαρακτηρίζονται ως επιστημολογικά είναι αυτά που δεν μπορούν και δεν πρέπει να αποφευχθούν, ακριβώς επειδή έχουν καθοριστικό ρόλο στην ίδια την μάθηση, ενώ παράλληλα μπορούν και να εντοπιστούν στην ιστορική εξέλιξη των ίδιων των εννοιών. Το εμπόδιο αντιστέκεται σε περιστασιακές εμφανίσεις αντιφάσεων, σε καινούριες καταστάσεις και στη βελτίωση έτσι της γνώσης. Μπορεί να ξεπεραστεί μόνο σε ειδικές διδακτικές καταστάσεις απόρριψης και αυτή η απόρριψη είναι συστατικό στοιχείο της γνώσης (Brousseau,1997).

Ο Brian Greer στο άρθρο του *The growth of mathematics through conceptual restructuring* (2004) μας παραθέτει μερικά αίτια τα οποία κατά τη γνώμη του είναι υπεύθυνα για τις περιορισμένες αντιλήψεις μιας ιδέας οι οποίες εμποδίζουν την επίτευξη της εννοιολογικής αλλαγής. Κατά τον Greer ένα από τα αίτια για την εμφάνιση αυτών των περιορισμένων αντιλήψεων είναι η εξελικτική κληρονομία και οι πρώιμες εμπειρίες. Από τα πρώτα στάδια της ύπαρξης του ανθρώπου υπάρχουν εμπειρίες οι οποίες εμποδίζουν στη συνέχεια την εισαγωγή νέων εννοιών οι οποίες έρχονται σε αντίθεση με τις ήδη υπάρχουσες. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι οι φυσικοί αριθμοί και η επέκτασή αυτών σε ρητούς και στη συνέχεια σε πραγματικούς.

Στην περίπτωση της διδασκαλίας για παράδειγμα οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν μια έννοια η οποία εμπεριέχει και την έννοια της πυκνότητας μιας και μέχρι τότε η αντίληψη των μαθητών για τους αριθμούς ήταν κάτι το διακριτό και το διαδοχικό. Αναφέρεται μάλιστα ότι αυτή η συγκεκριμένη αντίληψη μπορεί να οφείλεται σε μια εμπειρία τόσο πρώιμη όσο η βρεφική περίοδος του ανθρώπου και η διαδοχικότητα και η διακριτότητα αυτή να οφείλεται στην διαδοχικότητα και διακριτότητα των παλμών της καρδιάς της μητέρας. Οι Lakoff και Nunez υποστηρίζουν ότι οι πρώιμες κοινωνικές και φυσικές εμπειρίες ενισχύουν κατά πολύ την έννοια των φυσικών αριθμών και πολύ λιγότερο τις μετέπειτα μαθηματικές ανακαλύψεις για την επέκτασή τους (2000).

Ένα ακόμη αίτιο και αρκετά σημαντικό κατά τον Greer για τις περιορισμένες αυτές αντιλήψεις είναι η έκθεση σε περιορισμένο αριθμό παραδειγμάτων. Οι Βοσνιάδου και

Βαμβακούση στο άρθρο τους για την κατανόηση των ρητών από τους μαθητές και στην εννοιολογική αλλαγή αναφέρουν ότι η εκτεταμένη εμπειρία των μαθητών στην διακριτότητα των φυσικών αριθμών καθιστά δύσκολη για εκείνους την κατανόηση της ιδιότητας της πυκνότητας που συναντάμε στους ρητούς. Η περιορισμένη δηλαδή εμπειρία στην πυκνότητα των ρητών εμποδίζει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια των ρητών.

Αυτό θα μπορούσε να αποφευχθεί με τη χρήση περισσότερων παραδειγμάτων πάνω στην ιδιότητα της πυκνότητας. Σε ένα ακόμη άρθρο τους οι Βοσνιάδου και Σταφυλίδου σχολιάζουν πάλι την εννοιολογική αλλαγή αλλά ως θέμα πραγματεύονται τα κλάσματα και την περιορισμένη αντίληψη αυτών ως μικρότερα από τη μονάδα. Η χρήση πολλών λέξεων στην καθημερινότητα είναι πολύ διαφορετική από τον τρόπο που οι ίδιες λέξεις χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα πολλών ειδών νοητικές συγκρούσεις οι οποίες λόγω της προγενέστερης εμπειρίας των μαθητών είναι αδύνατον να αποφευχθούν, ακόμη και αν η διδασκαλία στηρίζεται από ένα τεράστιο θεωρητικό πλαίσιο εννοιών και θεωρημάτων. Πολλές φορές μάλιστα η διδασκαλία στην τάξη όχι μόνο δεν καταφέρνει να εξομαλύνει τις νοητικές συγκρούσεις αλλά λόγω της χρήσης ενός φορμαλιστικού τρόπου διδασκαλίας εντείνει κιόλας το πρόβλημα.

Με αυτό το θέμα, με το ότι δηλαδή η διδασκαλία στην τάξη πολλές φορές εντείνει το ήδη υπάρχον πρόβλημα από τις προγενέστερες εμπειρίες, ασχολήθηκαν στο άρθρο τους *Students' overreliance on linearity: An effect on school-like word problems* οι Van Dooren, De Bock, Janssens και Verschaffel το 2005. Αναφέρουν στο άρθρο τους σχετικά με την γραμμικότητα ότι η έλλειψη παράθεσης αντιπαραδειγμάτων για την πανταχού παρουσία του γραμμικού μοντέλου κατά την διάρκεια της διδασκαλίας μέσα στη τυπική τάξη μαθηματικών εντείνει τις νοητικές συγκρούσεις και εμποδίζει την εννοιολογική αλλαγή αντί να διορθώνει τις περιορισμένες αντιλήψεις των μαθητών λόγω των εμπειριών τους από την καθημερινότητά τους. Το συμπέρασμα μάλιστα του άρθρου τους έχει να κάνει με το κατά πόσο είναι δυνατή η θεραπεία τέτοιων περιορισμένων αντιλήψεων και συστήνουν ότι η πρόληψη είναι σαφώς καλύτερη από την θεραπεία του προβλήματος.

2.3.2 Εννοιολογικές επαναστάσεις

Ο Joseph Dauben στο άρθρο του *Conceptual Revolutions* παρουσιάζοντας δύο παραδείγματα τα οποία θα αναλύσουμε και στο τρίτο κεφάλαιο, την Πυθαγόρεια ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών και την ανάπτυξη της συνολοθεωρίας από τον Cantor, αναλύει τις επαναστάσεις στις μαθηματικές έννοιες που μπορούν να συμβούν. Αναφέρει μάλιστα ότι λόγω της ιδιαίτερης φύσης της επιστήμης των μαθηματικών, δεν συμβαίνει πάντα μια παλιότερη αρχή να καταρρίπτεται. Πολύ συχνά όμως θεωρήματα και ανακαλύψεις παλαιότερων χρόνων στα μαθηματικά υποβιβάζονται σε σημαντικά χαμηλότερες θέσεις ως αποτέλεσμα μιας εννοιολογικής επανάστασης η οποία φέρνει στην επιφάνεια μια νέα θεωρία ή μαθηματική αρχή.

Κατά τον Dauben οι μαθηματικές ανακαλύψεις είναι συσσωρευτικές. Καθώς αναπτύσσεται μια θεωρία, με την πάροδο του χρόνου και με τη χρήση όλο και καλύτερων εργαλείων θα γίνεται πληρέστερη. Οι λύσεις που θα δίνονται στα προβλήματα θα είναι όλο και πιο ολοκληρωμένες. Αυτό σε βάθος χρόνου μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα να ανοίξουν νέοι ορίζοντες σε μια μαθηματική διαδικασία και να δοθούν σε αυτή νέες θεωρίες που μπορούν να χαρακτηριστούν ως ‘επαναστατικές’.

Το βασικό χαρακτηριστικό στην πρόοδο των μαθηματικών ως επιστήμη ο Dauben θεωρεί την ανάλυση και για την καλύτερη κατανόηση την παρομοιάζει με το μικροσκόπιο. Όπως το μικροσκόπιο περνά από μικρότερο επίπεδο ανάλυσης σε μεγαλύτερο έτσι και με το πέρασμα του χρόνου οι μαθηματικοί κάθε γενιάς εμβαθύνουν όλο και περισσότερο σε μια έννοια. Μπορούν να ισχυριστούν λοιπόν ότι κατανοούν περισσότερα από τις προγενέστερες μαθηματικές κοινότητες και αναπτύσσουν πιο τελειοποιημένες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων εφόσον έχουν στην κατοχή τους όλο και καλύτερα εργαλεία από τις προηγούμενες γενιές μαθηματικών και με τις νέες αυτές τελειοποιημένες τεχνικές καταφέρνουν να καταλήγουν και σε μεγαλύτερα και ισχυρότερα αποτελέσματα. Το αποτέλεσμα όλης αυτής της διαδικασίας είναι νέες προσεγγίσεις στις μαθηματικές θεωρίες και ευρύτερα πλαίσια στη μαθηματική γνώση. Ακόμη περισσότερο αυτές οι διαδικασίες με την όλο και μεγαλύτερη ανάλυση μπορούν πολλές φορές να καταλήξουν και σε καινούριους ακόμη τομείς έρευνας των μαθηματικών αλλά και σε νέες μαθηματικές αρχές.

Πολλές φορές κατά την διάρκεια της εξέλιξης των μαθηματικών προκύπτουν έννοιες και θεωρίες εντελώς αντίθετες με τις ήδη υπάρχουσες και αυτό προκαλεί δυσφορία στους υποστηρικτές των προηγούμενων εννοιών. Ο Dauben δηλώνει ότι ίσως αυτό να είναι και μια νέα έννοια η οποία να αποτελεί την καλύτερη ‘ποιοτικά’ επανάσταση στα μαθηματικά, δηλαδή ο βαθμός στον οποίο έρχεται σε σύγκρουση μια νέα έννοια με τις προγενέστερες μαθηματικές έννοιες είναι δείγμα για το πόσο επαναστατική μπορεί να θεωρηθεί η καινοτομία. Αυτό μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα η νέα έννοια να αντικαταστήσει εκείνες με τις οποίες ερχόταν σε αντίθεση και να εδραιώσει και τις προσδοκόμενες δυνατότητες για εξέλιξη.

Το συμπέρασμα λοιπόν του Dauben μέσα από τη μελέτη του παραδείγματος της Πυθαγόρειας ανακάλυψης των ασυμμέτρων μεγεθών και του παραδείγματος της ανάπτυξης της συνολοθεωρίας από τον Cantor είναι ότι η επιστημονική κοινότητα των μαθηματικών μπορεί να δεχθεί ‘επαναστάσεις’ μέσω της ανακάλυψης ριζικά καινούριων εννοιών οι οποίες δεν θα ήταν δυνατόν να αναπτυχθούν στα πλαίσια της προηγούμενης θεωρίας. Σε κάθε τέτοια περίπτωση η προηγούμενη μορφή των μαθηματικών δεν θα είναι έχει το ίδιο ενδιαφέρον σε σύγκριση με την νέα μορφή και τις επαναστατικές ιδέες που αυτή θα περιέχει.

Κεφάλαιο 3

Το παράδειγμα και το αντιπαράδειγμα στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών

3.1 Ιστορική αναδρομή στον όρο ‘παράδειγμα’ – Η χρήση του μέσα στην ιστορία των μαθηματικών

Ο όρος παράδειγμα συναντάται με την ελληνογενή ονομασία ‘paradigm’ στην θεωρία του Kuhn για τις επιστήμες και είναι μάλιστα και από τις πιο σημαντικές έννοιες. Τα ‘paradigms’ είναι παραδείγματα που μοιράζονται οι μαθηματικοί, τα οποία δομούν την αντίληψή τους αλλά και καθοδηγούν την έρευνά τους. Ο Mehrtens όπως αναφέραμε νωρίτερα δηλώνει πως θα ήθελε να χρησιμοποιεί τον όρο ‘paradigm’ για επιτεύγματα τα οποία κυβερνούν την ανάπτυξη των μαθηματικών με πολλούς τρόπους και για μεγάλη χρονική περίοδο.

Σε αυτό το μέρος θα ασχοληθούμε με ιστορικές αναφορές στον όρο παράδειγμα, αλλά και με το πότε κάνουν την εμφάνισή τους τα παραδείγματα και πώς χρησιμοποιήθηκαν ανά τους αιώνες.

Από τα πρώτα μαθηματικά κείμενα που έχουμε σήμερα στα χέρια μας, όπως αιγυπτιακούς παπύρους, βαβυλωνιακές πινακίδες αλλά και αργότερα αντίγραφα των αυθεντικών κινέζικων χειρογράφων, παρατηρούμε ότι γίνεται εκτεταμένη χρήση του επεξεργασμένου παραδείγματος με σκοπό να αναδειχθούν κάποιες ‘διαδικασίες’, ή αυτά που αργότερα ονομάστηκαν αλγόριθμοι ή κανόνες σε μεσαιωνικά και μεταγενέστερα κείμενα. μέχρι που φτάσαμε στον 16ο αιώνα στον οποίο οι συγγραφείς μαθηματικών κειμένων πλέον δικαιολογούν πλήρως την παρουσία των παραδειγμάτων στα κείμενά τους. Μάλιστα συχνά δηλώνουν, είτε ρητά είτε σιωπηρά, την τεράστια σημασία τους, τον ρόλο και την χρησιμότητά τους στην διαδικασία της διδασκαλίας.

Αν θέλουμε να ανακαλύψουμε τις προγενέστερες παιδαγωγικές θεωρίες αυτό μπορεί να συμβεί μόνο μέσα από την μελέτη των μαθηματικών κειμένων που γράφονταν εκείνη την εποχή. Βέβαια μπορούμε να συναντήσουμε μαθηματικά κείμενα στα οποία είναι σαφείς οι παιδαγωγικές θεωρίες μιας και οι συγγραφείς έχουν φροντίσει να τις ομολογήσουν ρητά αλλά και μαθηματικά κείμενα στα οποία πρέπει με κάποιο τρόπο να εκτιμήσουμε μόνοι μας τις παιδαγωγικές θεωρίες μιας και υπονοούνται μέσα από τον τρόπο με τον οποίο γράφουν τα κείμενα αυτά οι μαθηματικοί της εποχής αλλά και με τον τρόπο που οργανώνουν το υλικό τους. Ακόμη μέσα από αυτά τα κείμενα μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως κανόνες οι οποίοι αναφέρονται ρητά ή συμβολικά (με τη χρήση συμβόλων). Επίσης συναντούμε λυμένα παραδείγματα και ασκήσεις τα οποία μπορούμε και να ομαδοποιήσουμε. Αυτό που είναι πολύ σημαντικό στη διδασκαλία αλλά και στη μάθηση είναι η σειρά με την οποία όλα αυτά τα εργαλεία θα χρησιμοποιηθούν. Η αλήθεια είναι ότι οι κανόνες, τα λυμένα παραδείγματα, οι ασκήσεις και τα σχόλια θα μπορούσαν να παρουσιαστούν με διαφορετική σειρά και αυτό πράγματι έχει συμβεί στο πέρασμα των αιώνων.

Ανά τους αιώνες δηλαδή έχουν εφαρμοστεί όλες οι λογικές σειρές αυτών των χαρακτηριστικών που θα μπορούσαν να εφαρμοστούν - δηλαδή πρώτα ο γενικός κανόνας, στη συνέχεια τα παραδείγματα και μετά οι λυμένες ασκήσεις ή πρώτα τα λυμένα παραδείγματα, έπειτα οι ασκήσεις και συνοψίζοντας με τους γενικούς κανόνες ή πρώτα τα λυμένα παραδείγματα έπειτα οι γενικευμένοι κανόνες και τέλος οι εργασίες για εξάσκηση. Ωστόσο κανένας από αυτούς τους τρόπους δεν υπήρξε καθολικά αποδεκτός ώστε να καταφέρει να εδραιωθεί στη διδασκαλία, αν και μερικοί επέμειναν λίγο περισσότερο από τους υπόλοιπους - μάλιστα κάποιοι τρόποι από αυτούς χρησιμοποιούνταν συνεχόμενα και για σχεδόν έναν αιώνα.

Μερικοί συγγραφείς 'ανακατεύουν' διαφορετικά είδη προβλημάτων ή προβλήματα που φαίνονται διαφορετικά ώστε να αναγκάσουν τον μαθητή να εργαστεί ώστε να κατατάξει σε διαφορετικές κατηγορίες. Επίσης άλλοι συγγραφείς επιλέγουν ασκήσεις μόνο σύμφωνα με την τεχνική που χρησιμοποιείται.

Αυτή η κίνηση έχει δύο ερμηνείες από την πλευρά του καθηγητή, η πρώτη ίσως είναι ότι θέλει να τονίσει την καθολικότητα της τεχνικής και να δώσει την αίσθηση της γενικότητας και η άλλη – η οποία είναι και η πιο πιθανή – είναι ότι θέλει ο μαθητής να εξασκηθεί τόσο πολύ ο μαθητής στην συγκεκριμένη τεχνική ώστε να η απόδοσή του να είναι άριστη όταν κληθεί να αντιμετωπίσει μια τέτοιου είδους άσκηση.Από τα τέλη του 19ου και τις αρχές του 20ου αιώνα στα μαθηματικά κείμενα πλέον οι παιδαγωγικές αρχές δεν υπονοούνταν πλέον αλλά ήταν σαφείς. Αναζητώντας τον λόγο που ξεκίνησε να συμβαίνει αυτό καταλήγουμε στο ότι η στροφή αυτή στις παιδαγωγικές αρχές ίσως να προέρχεται από την επιθυμία των συγγραφέων να προσελκύσουν περισσότερους αναγνώστες στα κείμενά τους. Οι καθηγητές αναζητώντας περισσότερες παιδαγωγικές προσεγγίσεις στρέφονταν λοιπόν σε βιβλία που είχαν σαφείς νέες παιδαγωγικές αρχές, οπότε και οι συγγραφείς πουλούσαν περισσότερα βιβλία.

Κατά το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα παρατηρείται τεράστια άνθηση στην μαθηματική εκπαίδευση. Οι παιδαγωγικές αρχές μετατράπηκαν από απλά ερευνητικά ερωτήματα σε αποτελεσματικότητα. Πρόσφατες έρευνες σχετικά με την αντίληψη των παραδειγμάτων από τους μαθητές έρχονται για να προσθέσουν περισσότερες πληροφορίες. Παρακάτω στοχεύουμε στο να αποτυπώσουμε το πώς τα λυμένα παραδείγματα και τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν σχεδιαστεί και έχουν χρησιμοποιηθεί.

Η Robson (2000) γράφει ότι από το 2500 π.Χ. περίπου και μετά υπάρχουν ενδείξεις από σχολικές πήλινες πινακίδες που αποτελούν έγγραφα που έχουν συνταχθεί για εξάσκηση και όχι για εργασία. Κάποιες άλλες βαβυλωνιακές πινακίδες απεικονίζουν απλούς υπολογισμούς μετά από κάποια προβλήματα και μάλιστα υπάρχουν και κάποιες δηλώσεις οι οποίες είναι δείγματα μιας γενικότητας. Η γενικότητα αυτή συνδέεται με εκείνο που αναφέραμε στα προηγούμενα κεφάλαια για τα λυμένα παραδείγματα, μια γενικότητα δηλαδή της διαδικασίας όπου θα χρησιμοποιηθεί ξανά σε παρόμοιες καταστάσεις. Τέτοιες φράσεις που συναντούμε σε αυτές τις πινακίδες ως δείγματα γενικότητας είναι φράσεις όπως: ‘η πράξη όπως προκύπτει’,’ο τρόπος υπολογισμού του’, ‘κάντε το έτσι’ ή ‘έτσι γίνεται’ (Gillings, 1982). Όταν παρατηρεί κανείς αυτές τις φράσεις είναι λογικό να υποθέσει ότι οι συγγραφείς μαθηματικών κειμένων εκείνης της εποχής ήταν οικείοι με γενικές αρχές ‘παιδαγωγικής’ και σαφώς είχαν γνώση ότι αυτά τα παραδείγματα που προόριζαν ως πρότυπα μια ς διαδικασίας θα χρησιμοποιούνταν από τους αρχάριους για περαιτέρω εξάσκηση. Όσον αφορά τις πινακίδες οι οποίες είναι γραμμένες σε σφηνοειδή γραφή έχει παρατηρηθεί ότι είναι αρκετά λακωνικές. Παρόλα αυτά είμαστε σε θέση να υποθέσουμε ότι δημιουργήθηκαν ώστε να καταγράψουν μόνο παρατηρήσεις οι οποίες θεωρούνταν από τους συγγραφείς ιδιαίτερα σημαντικές. Κατά συνέπεια και λόγω της λακωνικότητας η φράση ‘η πράξη όπως προκύπτει’ που συναντούμε σε αυτές δεν μπορεί να αποτελεί απλά ένα σχόλιο, αλλά για να καταγράφτηκε θα αποτελεί μία άλλη σημαντική πληροφορία. Αυτό το γεγονός μας δείχνει ότι ο συγγραφέας κάθε άλλο παρά στον υπολογισμό ήθελε να δώσει μεγαλύτερη σημασία. Προφανώς οι συγγραφείς αυτών των μαθηματικών κειμένων ήθελαν να τονίσουν την παιδαγωγική διαδικασία που χρησιμοποιούνταν μέσα από την παρουσίαση λυμένων παραδειγμάτων. Βέβαια οι μέθοδοι είναι κάτι πολύ δύσκολο να επισημανθούν ρητά μιας και οι αρχάριοι το μόνο που μπορούν να δουν είναι το συγκεκριμένο παράδειγμα. Οι μαθητές βυθίζονται σε λεπτομέρειες και εξαιτίας αυτού δεν καταφέρνουν να δουν την διαδικασία αυτή ως ‘διαδικασία’ παιδαγωγική.

Ένα παράδειγμα επίλυσης προβλήματος απο βαβυλωνιακές πινακίδες είναι ο υπολογισμός του εμβαδού του κύκλου. (Robson, 2008) Μία τέτοια πινακίδα για παράδειγμα είναι η **YBC 7302.** Όπως αναφέρει η Βαρβέρη στη διπλωματική της εργασία (2009) η πινακίδα είναι κυκλικού σχήματος διαμέτρου 6 cm. Πρόκειται δηλαδή για μία πινακίδα που εύκολα κρατάει ένας μαθητευόμενος γραφέας στην παλάμη του προκειμένου να λύσει ένα δοσμένο πρόβλημα. Η Robson έχει προτείνει ότι αυτού του είδους οι πινακίδες με άλλοτε σωστές και άλλοτε λανθασμένες λύσεις συγκεκριμένων προβλημάτων χρησίμευαν ως **«πρόχειρο»** για τους μαθητευόμενους γραφείς. Το πρόβλημα λοιπόν που απεικονίζεται στην πινακίδα είναι η εύρεση του εμβαδού ενός κύκλου δεδομένου ότι η περιφέρεια είναι ίση με 3.

Ο Πλάτων αναρωτήθηκε πώς μπορούμε να κατανοήσουμε βασικά χαρακτηριστικά όπως είναι το χρώμα, το σχήμα ή οποιοδήποτε αφηρημένο ουσιαστικό (αντικείμενο). Εάν δούμε παραδείγματα άσπρου και ακούσουμε να αποκαλούνται λευκά μοιραία θα κατασκευάσουμε την δική μας άποψη του τι είναι λευκό και στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια με τέτοιο τρόπο ώστε να καταφέρουμε να συνεννοούμαστε με τους γύρω μας. Για να το καταλάβουμε καλύτερα έθεσε το ερώτημα του πώς μπορούμε να περιγράψουμε σε ένα τυφλό άτομο την έννοια του λευκού όταν το άτομο αυτό έχει να στηριχτεί μόνο στον ορισμό και σε κάτι ‘αφηρημένο’. Έχουμε λοιπόν να κάνουμε με ένα προφανές παράδοξο το οποίο πρέπει να επιλυθεί από οποιαδήποτε ‘κονστρουκτιβιστική’ θεώρηση της μάθησης.

Το ερώτημα είναι λοιπόν πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε κάτι το οποίο οι μαθητές δεν γνωρίζουν. Φυσικά αυτό αποτελεί παράδοξο μόνο αν υπάρχει μια σταθερή έννοια για το ’λευκό’ η οποία είναι ανεξάρτητη από τον γνώστη και αυτό που έχουν να κάνουν οι μαθητές είναι να προσπαθήσουν να καταλάβουν την πραγματική έννοια.

Ο Εμάνουελ Καντ είχε μια παρόμοια οπτική την οποία μπορούμε να συνοψίσουμε ως εξής: Μια σειρά εμπειριών δεν σημαίνει ότι απαραίτητα προσθέτει κάτι στην μαθησιακή διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι το να κάνει ένας μαθητής πιστά τις εργασίες και να ακολουθεί τα πρότυπα που έχει συναντήσει δεν συνιστά απαραίτητα κάτι το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε μεταγνωστική αλλαγή. Δηλαδή συνειδητοποιούμε πώς το να καταφέρνουμε να επιλύουμε κάτι δεν αναδεικνύει απαραίτητα ή εισάγει μια γενικότερη μέθοδο. Το να καταφέρνουμε μέσα από μια ή δύο ειδικές περιπτώσεις να φτάνουμε στο γενικό απαιτεί σίγουρα περισσότερα. Αυτό σημαίνει ότι η εμπειρία που αποκτούμε από το να λύνουμε πολλά παραδείγματα δεν σημαίνει απαραίτητα ότι συνιστά και εμπειρία με την σωστή έννοια της λέξης. Κάτι περισσότερο απαιτείται.

Την περιγραφή αυτή της ιδιαίτερης διαδικασίας την έχουν περιγράψει πολλοί συγγραφείς. Ο Piaget για παράδειγμα το 1972 επινόησε τον όρο αναστοχαστική αφαίρεση (reflective abstraction) για να περιγράψει το να στέκεται κάποιος πίσω από τη δράση και να συνειδητοποιεί τους λόγους για τους οποίους γίνεται η κάθε πράξη. Ο Ed Dubinsky και ο Gary Levin το 1986 και ο Dubinsky το 1991 ανέπτυξαν την θεωρία του Piaget, αναφέρθηκαν σε ενέργειες σε μεταγενέστερο στάδιο οι οποίες μπορούν να χαρακτηριστούν ως διαδικασίες οι οποίες μέσα από την επανάληψη γίνονται αντικείμενα τα οποία στη συνέχεια αποκτούν σημασία με συμβολικό τρόπο. Οι μεταβολές αυτές συνεπάγονται και απαιτούν διάκριση των χαρακτηριστικών, των σχέσεων και των ιδιοτήτων, όπως περιγράφει ο Pierre van Hiele. Η Anna Sfard για να περιγράψει την διαδικασία κατά την οποία μία πράξη ή διαδικασία γίνεται αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών από μόνη της χρησιμοποιεί την λέξη 'πραγμοποίηση' (reification).

Ο Mason το 1989 προσπάθησε να συλλάβει αυτή τη διαδικασία της αφαίρεσης ως μία 'λεπτή στροφή της προσοχής'. Ο Eddie Gray και ο David Tall το 1994 επινόησαν τον όρο 'procept' για να εκφράσουν την ανάπτυξη μιας διαδικασίας σε ένα μαθηματικό αντικείμενο. Για παράδειγμα η πρόσθεση δύο αριθμών είναι μια διαδικασία, κατα την οποία το αποτέλεσμα, ειδικά όταν εκφράζεται συμβολικά ως x + y, διατηρεί την έννοια της διαδικασίας ενώ επίσης αποτελεί και ένα αντικείμενο, την απάντηση. Πολλοί άλλοι συγγραφείς (Bruner, 1966, Floyd, Burton, James και Mason, 1981) έχουν κατασκευάσει αρκετά παρόμοιους κύκλους οι οποίοι περιλαμβάνουν τις πράξεις, την άρθρωση και τον συμβολισμό για να ενισχύσουν την δημιουργία περισσότερου εκπαιδευτικού υλικού.

Το να μπορεί ένας μαθητής να μετράει από έναν αριθμό δεν σημαίνει ότι ο μαθητής αυτός ξέρει να μετράει γενικά, ακόμα κι αν τον όρο 'μετρώ' τον χρησιμοποίησε και ο διδάσκοντας γι αυτήν την διαδικασία. Αυτή η διπλή αντίληψη μιας έκφρασης, δηλαδή η διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί και η απάντηση είναι θεμελιώδης για τα μοντέρνα μαθηματικά.

Παρακάτω θα μελετήσουμε τις άμεσες θεωρίες και τις υπονοούμενες πρακτικές στην διδασκαλία των μαθηματικών. Οι συγγραφείς του μεσαίωνα δεν ήταν αντίθετοι στις εντολές που βρήκε ο Richard Gillings το 1982 σε αιγυπτιακές και βαβυλωνιακές πηγές. Από το βιβλίο των Watson και Mason, ο Girolamo Gardano γράφοντας στα λατινικά το περίφημο έργο του *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraics* περιλαμβάνει φράσεις όπως:

In accordance with these demonstrations, we will formulate three rules and we attach a jingle in order to help remember them; we have used a variety of examples so that you *may understand that the same can be done in other cases and will be able to try them out for the two rules that follow, even though we will there be content with only two examples; It must always be observed as a general rule . . . ; So let this be an example to you; by this is shown the modus operandi in questions of proportion, particularly; in such cases.*

Η φράση αυτή σημαίνει:

Σύμφωνα με αυτές τις δηλώσεις, θα διατυπώσουμε τρεις κανόνες και δίνουμε ένα ηχητικό σχήμα, που θα ας βοηθάει να τους θυμόμαστε, έχουμε χρησιμοποιήσει μια ποικιλία παραδειγμάτων, ώστε να μπορείτε να καταλάβετε ότι το ίδιο μπορεί να γίνει και σε άλλες περιπτώσεις και θα είστε σε θέση να δοκιμάσετε τους δύο κανόνες που ακολουθούν, αν και θα είμαστε πλήρης και με δύο όνο παραδείγματα. Αυτό θα πρέπει πάντα να τηρείται ως γενικός κανόνας... Οπότε αυτό ας είναι ένα παράδειγμα για εσάς. Από αυτό φαίνεται το modus operandi σε ζητήματα αναλογιών ειδικά, σε τέτοιες περιπτώσεις.

Φαίνεται ότι οι μαθητές αναμένεται να διακρίνουν τις διαστάσεις της πιθανής μεταβολής σε μια σειρά παραδειγμάτων, έτσι ώστε να εκτιμήσουν την πλήρη γενικότητα. Ο Cardano επίσης αναγνώρισε έμμεσα ότι μερικές φορές είναι πολύ περίπλοκο να δηλώσουν μια γενική μέθοδο, όπως για παράδειγμα στο ακόλουθο απόσπασμα:

Ακολουθεί ένα παράδειγμα αυτού [ένα πρόβλημα το οποίο απαιτεί τη χρήση δύο άγνωστων ποσοτήτων], το οποίο θα μπορούσαμε αλλιώς με δυσκολία να εξηγήσουμε.

Με την πάροδο του χρόνου υπήρχαν όλο και περισσότερα βιβλία αριθμητικής και άλγεβρας και συνέχιζαν να βγαίνουν ακόμη περισσότερα. Όσο λοιπόν τα κείμενα τα οποία ήταν διαθέσιμα γίνονταν όλο και περισσότερα οι συγγραφείς θέλησαν να το αιτιολογήσουν αυτό το γεγονός. Η αιτιολόγησή τους αυτή πολύ συχνά περιελάμβανε την διεκδίκηση όλο και περισσότερων παιδαγωγικών αρχών. Ο Thomas Hylle το 1600 στο έργο του *The Arte of Vulgar Arithmetic* παρατήρησε τα παραδείγματα να παίζουν έναν καθοριστικό ρόλο στην διαδικασία της μάθησης γράφοντας:

... η ποικιλία των παραδειγμάτων είναι από τα πιο διαφωτιστικά χαρακτηριστικά στην μάθηση.

Στις διαλέξεις του σχετικά με την Άλγεβρα που έγιναν την περίοδο 1673-1683, και δημοσιεύτηκαν το 1707 ως *Arithmetica Universalis* ο Isaac Newton (βλ. Whiteside, 1972, σελ. 129-157) παρουσίασε 19 λυμένα παραδείγματα αντιπαραθέτοντας τη διατύπωση του προβλήματος από τη μια πλευρά με μετάφραση σε αλγεβρική μορφή από την άλλη, επιλύοντας κάθε τύπο γενικά και με συγκεκριμένα νούμερα. Σε αυτό το κομμάτι ο Newton φαίνεται να αναγνωρίζει την αξία των λυμένων παραδειγμάτων. Μετά το πρώτο λυμένο παράδειγμα παρατήρησε:

Ωστόσο για να μπορώ να αναπτύξω μια οικειότητα με αυτή τη μέθοδο και να καταφέρω να μετασχηματίσω τα προβλήματα αυτού του είδους σε μία εξίσωση και να το καταστήσω αυτό σαφές - και εφόσον οι δεξιότητες αποκτούνται πιο εύκολα από τα παραδείγματα παρά από την απλή διδασκαλία - θεώρησα σωστό να παραθέσω τις λύσεις από τα παραπάνω προβλήματα.

Φαίνεται λοιπόν πόσο αναγνώριζε την αξία και τον ρόλο των επιτυχημένων παραδειγμάτων. Παρουσίασε στη συνέχεια τα προβλήματά του και τα έλυσε σε γενικές γραμμές, καταλήγοντας σε έναν γενικό τύπο επίλυσης. Μετά από όλα αυτά είναι φυσικό να συμπεράνουμε ότι ο Νεύτωνας είχε την αίσθηση του πόσο δύσκολο μπορεί να είναι για κάποιους αναγνώστες να φτάσουν στην γενικότητα. Οπότε θεωρούσε ότι μια στρατηγική μέσω επίδειξης (παραδειγμάτων) να ήταν αποτελεσματική.

Οι ασκήσεις ως λυμένα παραδείγματα μπορούν να επιτύχουν δύο πράγματα, το πρώτο είναι να αποκτήσει ο μαθητής άνεση στην λύση τέτοιου είδους προβλημάτων και το δεύτερο είναι η εννοιολογική κατανόηση. Οι συγγραφείς των μαθηματικών κειμένων λοιπόν τον 19ο αιώνα, οι οποίοι μπορεί να είχαν αναγνωρίσει αυτό το διπλό σκοπό των λυμένων παραδειγμάτων, είχαν επιδοθεί στη συλλογή συνόλων ασκήσεων - στην κατασκευή και στην οργάνωσή τους - ακόμα κι όταν το μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας γινόταν από συνήθεια.

Έχει ενδιαφέρον η φράση του Cardano 'τώρα ας θέσουμε τα δικά μας προβλήματα'. Ο Cardano θεωρούσε ότι το γεγονός ότι κατασκεύασε δικά του προβλήματα τον ωφέλησε πάρα πολύ και πίστευε ότι και οι υπόλοιποι θα μπορούσαν να βγουν κερδισμένοι μέσα από μια τέτοια εμπειρία.

Αυτού του είδους τον συλλογισμό τον συναντάμε και σε μία πρόταση του Polya ο οποίος ύστερα από μια σειρά ασκήσεων οι οποίες δημιουργούσαν γενικεύσεις ξεκινώντας από μια αρχική ιδέα έκλεισε το κεφάλαιο με την πρόταση:

Να δημιουργήσουν κάποια προβλήματα παρόμοια με, αλλά και διαφορετικά από τα προβλήματα που προτείνονται σε αυτό το βιβλίο - ειδικότερα τέτοια ώστε να μπορούν να τα λύσουν.

Ίσως και να μην είναι έκπληξη το γεγονός ότι, ανάμεσα σε τόσες πολλές συμβουλές που έχει δώσει ο Polya, σε αυτήν την συγκεκριμένη συμβουλή δεν έχει δοθεί τόση έμφαση. Για τους περισσότερους αναγνώστες είναι μάλλον ασαφές τι είχε ο Polya στο μυαλό του. Και αυτό συμβαίνει γιατί δεν έχει δώσει ο ίδιος μεγάλη έμφαση στην διαδικασία μέσα από την οποία επιτύγχανε ο ίδιος τις εσωτερικές γενικεύσεις του.

Έτσι την ενεργό εμπλοκή των μαθητευομένων με παραδείγματα, κυρίως μέσω παρουσίασης λυμένων προβλημάτων, παρατηρούμε ότι την συναντούμε πολύ συχνά στην ιστορία της διδασκαλίας των μαθηματικών. Επίσης υπάρχουν ακόμα πρώιμες περιπτώσεις συγγραφέων μαθηματικών κειμένων οι οποίοι στηρίζουν το παράδειγμα με τη μορφή λυμένων προβλημάτων αλλά και την δημιουργία άλλων μορφών παραδειγμάτων.

Στα προηγούμενα κεφάλαια προσεγγίσαμε τα παραδείγματα από την διδακτική τους πλευρά και αναφέραμε ότι το παράδειγμα είναι μια αλληλεπίδραση του 'ειδικού' με το 'γενικό'. Δηλαδή από το παράδειγμα , το οποίο αποτελεί μια ειδική περίπτωση κάποιας γενικότερης κλάσης, προσπαθούμε να φτάσουμε στην γενίκευση. Όλο αυτό λοιπόν συνιστά μια επαγωγική (inductive) μέθοδο.

Ιστορικά ο De Morgan (1831) ήταν αυτός που μεταμόρφωσε το εκπαιδευτικό σκηνικό στην διδασκαλία των μαθηματικών στην Αγγλία. Ειδικότερα υποστήριξε ότι οι μαθητές θα πρέπει να συμμετέχουν πιο ενεργά στην διδασκαλία των μαθηματικών, να κάνουν ακόμη και θεωρητικές παρατηρήσεις για μαθηματικά φαινόμενα και στον τομέα των παραδειγμάτων – ο οποίος και μας ενδιαφέρει – θα μπορούσαν να επιλέξουν παραδείγματα οι ίδιοι. Δίνοντας προσοχή στο τι συμβαίνει όταν οι μαθητές παίρνουν πρωτοβουλία και κάνουν την δική τους επιλογή αριθμών, φαίνεται να είναι ένα γεγονός πολύ σημαντικό για να αποκτήσουν μεγαλύτερη κατανόηση. O De Morgan τόνισε :

... όχι αμέσως με κάθε αριθμό, αλλά με τη λήψη κάποιων παραδειγμάτων, που βασίζονται στη λογική, και με την παραγωγή ενός αποτελέσματος ... εξίσου καλό για κάθε αριθμό…

και

... τοποθετώντας τους αριθμούς κατά βούληση αντί για γράμματα στις αλγεβρικές εκφράσεις, και τον υπολογισμό των τιμών τους για να μάθουν τη διαφορά μεταξύ παρόμοιων αλγεβρικών παραστάσεων, οι οποίες συχνά συγχέονται, όπως $(a + b)^2$ *και* $a^2 + b^2$. Η γενίκευση είναι το τέλος και ο σκοπός της ενασχόλησης με συγκεκριμένα παραδείγματα. O De Morgan αναφέρει ακόμη :

Στη γεωμετρία ... οποιαδήποτε πρόταση μπορεί να αποδειχθεί με ασφάλεια από τους συλλογισμούς σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ... όχι τόσο στην άλγεβρα η οποία παρουσιάζει ένα μίγμα από γενικές και ειδικές καταστάσεις.

O De Morgan υποστήριξε τη διδασκαλία των αρχών, αντί των κατευθύνσεων σε ειδικές περιπτώσεις, και προέτρεψε τους συγγραφείς να συμπεριλάβουν περισσότερες ασκήσεις για εξάσκηση και να παράσχουν *'καλύτερες διευκολύνσεις για να διορθώνουν τον καθηγητή όποτε αυτό ήταν απαραίτητο.'* O De Morgan σε αντίθεση με πολλούς επιστήμονες της εποχής του πίστευε ότι η καλύτερη περίπτωση διδασκαλίας ήταν να δοθεί ένα πρόβλημα στην αρχή της διδασκαλίας και μέσω επιχειρημάτων να δομηθεί από αυτό ο κανόνας (επαγωγικά). (Yeldham, 1936)

Ο De Morgan δείχνοντας συμπάθεια στους καθηγητές που ψάχνουν να βρουν ένα επαρκές σύνολο ασκήσεων για τους μαθητές τους και προσπαθώντας να τους διορθώσει έγραψε τα ακόλουθα:

I have also added 6 or 7 examples to each rule accompanied by the answer. These will be enough for any single pupil, but may not be considered sufficient for a school. To obviate this objection, I proceed to collect some expeditious modes of forming questions of which the answers should be readily known.

Έχω προσθέσει επίσης 6 ή 7 παραδείγματα για κάθε κανόνα συνοδευόμενα από την απάντηση. Αυτά θα είναι αρκετά για κάθε ένα μαθητή, αλλά δεν μπορούν να θεωρηθούν επαρκή για το σχολείο. Για να αποφύγουμε αυτή την αντίρρηση, προχωρώ μαζεύοντας μερικούς ταχείς τρόπους σχηματισμού ερωτήσεων των οποίων οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι εύκολα γνωστές. (Yeldham, 1936)

Όσον αφορά στην άποψη του De Morgan ότι οι μαθητές θα πρέπει να φτάσουν στο σημείο να επιλέγουν παραδείγματα και οι ίδιοι, ο ίδιος έγραψε:

He cannot learn that a particular fact holds good for all numbers unless by having it shown that it holds good for some numbers, and that for those some numbers he may substitute others, and use the same demonstration. Until he can do this himself he does not understand the principle, and he can never do this except by seeing the rule explained and trying it himself on small numbers.

Δεν μπορεί να μάθει (ο μαθητής) ότι ένα συγκεκριμένο γεγονός είναι καλό για όλους τους αριθμούς, εκτός και αν δείξει ότι ισχύει για μερικούς αριθμούς και ότι για αυτούς τους αριθμούς μπορεί να αντικαταστήσει κάποιους άλλους χρησιμοποιώντας την ίδια απόδειξη. Μέχρι να μπορεί να το κάνει αυτό και ο ίδιος, δεν έχει κατανοήσει την αρχή και ποτέ δεν μπορεί να το κάνει αυτό, εκτός από το να δει πώς εξηγείται ο κανόνας και να το προσπαθήσει και ο ίδιος με μικρούς αριθμούς.

Όπως παρατηρούμε, και όπως αναλύσαμε και στο 1ο κεφάλαιο, ο De Morgan θα συμφωνούσε με το ότι το να φτάσει ένας μαθητής να κατασκευάζει μόνος του κατάλληλα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα για μία μαθηματική πρόταση, θεώρημα ή έννοια είναι πολύ σημαντικό καθώς σημαίνει ότι έχει φτάσει να κατανοήσει πλήρως αυτήν την αρχή και να την χρησιμοποιήσει οπουδήποτε χρειαστεί. Πρότεινε δηλαδή πριν ο μαθητής εφαρμόσει έναν συγκεκριμένο αλγόριθμο για την επίλυση προβλημάτων να αποκτήσει πρώτα αφθονία εμπειρίας όσον αφορά στα παραδείγματα. Αντί να δοθεί μια θεωρητική προσέγγιση δηλαδή σε ένα θέμα συνιστούσε μια επαγωγική προσέγγιση και έγραφε:

…να αντλήσει τους κανόνες από την παρατήρηση πολλών αποτελεσμάτων, όχι από μια οποιαδήποτε θεωρία.

Οι δημιουργοί από τότε εξακολουθούν να ψάχνουν κάτι που θα ονομάζαμε πέτρα του φιλοσόφου για τους δασκάλους, δηλαδή αναζητούν μια προσέγγιση που θα παράγει την κατανόηση και όχι μια κατευθυνόμενη απάντηση. Ο David Hilbert ήταν αδιαμφισβήτητα ένας μαθηματικός με την μεγαλύτερη επίδραση στα μαθηματικά του 20ου αιώνα. Μαθαίνουμε για εκείνον μέσα από έναν άλλο μεγάλο μαθηματικό με μεγάλη επιρροή που κάποτε υπήρξε συνάδελφός του, τον Richard Courant. Ο Courant έγραψε:

He [Hilbert] was a most concrete, intuitive mathematician who invented, and very consciously used a principle; namely, if you want to solve a problem first strip the problem of everything that is not essential. Simplify it, specialize it as much as you can without sacrificing its core. Thus it becomes simple, as simple as can be made, without losing any of its punch, and then you solve it. The generalization is a triviality which you don't have to pay much attention to. This principle of Hilbert's proved extremely useful for him and also for others who learned it from him. Unfortunately, it has been forgotten. (Courant, 1981)

‘O Hilbert ήταν ένας πάρα πολύ συγκεκριμένος, διαισθητικός μαθηματικός που εφεύρε, και χρησιμοποίησε πολύ συνειδητά μια αρχή, δηλαδή αν θέλετε να λύσετε ένα πρόβλημα πρώτα αφαιρέστε από το πρόβλημα καθετί που δεν είναι απαραίτητο. Απλοποιήστε το, εξειδικεύστε το όσο μπορείτε χωρίς να θυσιάζει τον πυρήνα του. Έτσι καθίσταται απλό, όσο πιο απλό μπορεί να γίνει, χωρίς να χάσει τίποτα από τη δυναμική του και στη συνέχεια το λύνετε. Η γενίκευση είναι κάτι το τετριμμένο που δεν χρειάζεται να του δώσουμε μεγάλη σημασία. Αυτή η αρχή του Hilbert αποδείχτηκε πολύ χρήσιμη για τον ίδιο αλλά και για τους άλλους που έμαθαν από αυτόν. Δυστυχώς όμως ξεχάστηκε.

Αυτό που προσπάθησε ο Hilbert να κάνει ήταν να καταφέρει να δημιουργήσει ένα επιτυχημένο παράδειγμα για εκείνον. Αυτό το παράδειγμα για τον Hilbert θα ήταν όσο απλό θα μπορούσε να γίνει, διατηρώντας τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά του αλλά θα ήταν απογυμνωμένο από τα περιττά.

O George Polya, ο οποίος ήταν ένας πολυγραφότατος μαθηματικός αλλά και ένας εκπαιδευτικός με πολύ καίριες ιδέες για την διδασκαλία των μαθηματικών, έκανε συχνά χρήση των παραδειγμάτων. Είχε διαχωρίσει τα παραδείγματα σε κατηγορίες και χρησιμοποιούσε χαρακτηρισμούς για αυτά όπως ‘ακραίο’ (extreme), ‘ηγετικό’ (leading) και ‘αντιπροσωπευτικό’ (representative).

Τους χαρακτηρισμούς του αυτούς τους δανείστηκαν και πολλοί μεταγενέστεροι συγγραφείς μαθηματικών κειμένων ή κειμένων για την διδασκαλία των μαθηματικών. Για παράδειγμα για να εξηγήσει την έννοια του ‘ακραίου’ παραδείγματος ανέφερε την περίπτωση του κανόνα του πολλαπλασιασμού ότι πάντα το αποτέλεσμα είναι κάτι μεγαλύτερο από το αρχικό ποσό, ένας κανόνας με τον οποίο οι μαθητές – όπως έχουμε ήδη αναφέρει – είναι ήδη αρκετά εξοικειωμένοι. Αναφέρει λοιπόν ότι στην περίπτωση αυτού του κανόνα θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα ‘ακραίο’ παράδειγμα ώστε οι μαθητές να μεταβούν στην άλλη άκρη του προβλήματος και να συναντήσουν κάτι που συμβαίνει μεν λιγότερο συχνά από ότι ο κανόνας αλλά δεν παύει να συμβαίνει, όπως το ότι ο πολλαπλασιασμός με το μηδέν ‘εξαφανίζει’ τα πάντα. Έτσι λοιπόν καταλήγει ότι τα ακραία παραδείγματα διαψεύδουν τις προσδοκίες μας, μας ενθαρρύνουν να αμφισβητήσουμε πέρα από τη σημερινή εμπειρία μας και μας προετοιμάζουν για νέες εννοιολογικές αντιλήψεις.

Έτσι λοιπόν και στην περίπτωση των μαθηματικών οι μαθητές πρέπει να ανακαλύψουν το νόημα στα παραδείγματα που τους παρουσιάζονται από τους καθηγητές. Στην πορεία της διδασκαλίας χρησιμοποιούν τους όρους που οι ίδιοι οι καθηγητές τους χρησιμοποιούν για να περιγράψουν τις γενικές έννοιες. Η τελική προσδοκία είναι οι μαθητές να καταφέρουν να κατασκευάσουν νέα ‘μαθηματικά’ αντικείμενα και οι αντιλήψεις που θα έχουν τελικά να είναι όμοιες με εκείνες των καθηγητών τους.

Τα λυμένα παραδείγματα και τα παραδείγματα που δίνονται στον μαθητή ως εξάσκηση για να εργαστεί πάνω σε αυτά έπαιξαν τεράστιο ρόλο στη διδασκαλία (και ως εκ τούτου και στη μάθηση) των μαθηματικών ανά τους αιώνες. Είτε με βάση την εμπειρία της μάθησης, είτε την εμπειρία της διδασκαλίας, ή και τα δύο οι συγγραφείς μαθηματικών κειμένων μέσα στην ιστορία των μαθηματικών έχουν χρησιμοποιήσει τα παραδείγματα σε μεγάλο βαθμό με πολλούς τρόπους, είτε ξεκινώντας με παράδειγμα και στη συνέχεια να γενικεύουν με τους κανόνες, είτε να δίνονται πρώτα οι κανόνες και στη συνέχεια να επεξηγούνται αυτοί με παραδείγματα. Τα σημερινά βιβλία δεν αναφέρουν σχεδόν ποτέ ποιος τρόπος χρησιμοποιείται παιδαγωγικά. Ίσως να έχουν σκοπό να δουλέψουν οι μαθητές με αρκετά λυμένα παραδείγματα, κάτι που θα τους βοηθήσει να αναγνωρίζουν κλάσεις προβλημάτων και ερωτημάτων και θα μπορούν να εργαστούν με αυτά και να τα επιλύσουν.

Ένα άλλο είδος χρήσης παραδειγμάτων που συναντάμε στην βιβλιογραφία είναι η μεγάλη σημασία του για να εμβαθύνουν οι μαθητές σε μια έννοια, σε ένα θεώρημα ή σε μια πρόταση. Παρατηρούμε ότι οι συγγραφείς μαθηματικών κειμένων πολύ συχνά ενθάρρυναν τους μαθητές να καταπιαστούν με παραδείγματα και να τα χρησιμοποιήσουν.

Παρόλα αυτά όμως συναντάμε πολύ σπάνια τους συγγραφείς να ζητάνε από τους εκπαιδευόμενους ξεκάθαρα να γενικεύσουν μέσω των παραδειγμάτων ή ακόμη και να χρησιμοποιήσουν τα δικά τους παραδείγματα.

Εκτός όμως από την εμβάθυνση σε μια έννοια, πολλές φορές είναι απαραίτητο να συντελεστεί εννοιολογική αλλαγή, κάτι που είναι σημαντικό όχι μόνο για την διδασκαλία των μαθηματικών αλλά και για την εξέλιξή τους ως επιστήμη. Μέσα από την κατανόηση της εννοιολογικής αλλαγής μπορεί να γίνει σημαντική αναβάθμιση του τρόπου διδασκαλίας και σε αυτό φυσικά μπορούν να παίξουν καίριο ρόλο τα παραδείγματα όπως αναλύσαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο. Ιστορικά, μάλιστα, υπάρχουν πολλά ντοκουμέντα που μας ενημερώνουν για αυτό το γεγονός, για τις προσπάθειες δηλαδή βελτίωσης της διδασκαλίας των μαθηματικών μέσω της κατανόησης της εννοιολογικής αλλαγής. (Kaput,1994 και Piaget & Garcia, 1989)

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα αυτό που μας απασχολεί είναι να βρούμε πόσο όμοιες είναι οι αντιδράσεις και η αντίσταση των μαθητών στην εννοιολογική αλλαγή με αυτές που συναντάμε στην ιστοριογραφία των μαθηματικών ειδικά τις αντιδράσεις σε νέες έννοιες, αντίθετες στις μέχρι τότε πεποιθήσεις. Υπάρχουν πολλά τέτοια παραδείγματα στην ιστορία των μαθηματικών. Μερικά από αυτά τα ιστορικά παραδείγματα θα συναντήσουμε σε επόμενη ενότητα και θα τα συγκρίνουμε με αντιδράσεις μαθητών μέσα στην τάξη στην εμφάνιση αντιπαραδειγμάτων και στην ανάγκη για εννοιολογική αλλαγή.

3.2 Περιπτώσεις παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων που οδήγησαν σε ανασκευές εννοιών και θεωρημάτων

Μέσα στο πέρασμα των χρόνων στην περίπτωση της εξέλιξης των μαθηματικών συναντούμε πολλές φορές περιπτώσεις σθεναρής αντίστασης στο να ενταχθούν νέες έννοιες στο σύνολο των μαθηματικών αντικειμένων, ειδικότερα όταν οι έννοιες αυτές έρχονται σε σύγκρουση με τις ήδη υπάρχουσες.

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η αντίσταση στην εννοιολογική αλλαγή για να γίνουν δεκτοί οι αρνητικοί ακέραιοι (Fischbein,1987). Συναντούμε χαρακτηρισμούς όπως “παράλογο”, “αντίθετο” κ.ά. Ακόμη και μέχρι το 1831, που είναι σχετικά πρόσφατη χρονολογία για εμάς θα μπορούσε ένας μαθηματικός να γράψει ότι “3 – 8” είναι κάτι το “παράλογο”. Αυτό το παράδειγμα είναι μία πολύ καλή περίπτωση για να μας δείξει πόσο αντίσταση συναντούσε μια νέα μαθηματική έννοια, ειδικά όταν αυτή ερχόταν σε αντίθεση με τις καθημερινές εμπειρίες και στην συγκεκριμένη περίπτωση με τις καθημερινές συναλλαγές. Υπάρχει ένα τεράστιο κενό μεταξύ των λειτουργικά ισοδύναμων μαθηματικών εννοιών και της αποδοχής τους από τα επίσημα μαθηματικά. Ο Fischbein (1987) για την συγκεκριμένη περίπτωση μάλιστα παραθέτει την παρατήρηση του Glaeser (1981) ότι η “παράνομη” χρήση κάποιων “σκηνοθετημένων” αριθμών μπορεί να προηγείται έως και 1600 χρόνια πριν την απόλυτη μαθηματική τους κατανόηση.

Καθ’ όλη την ιστορική καταγραφή, είναι εύκολο κανείς να παρατηρήσει το ρόλο των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων, είτε σαν αναπαραστάσεις, είτε σαν επανάσταση στους συμβολισμούς, είτε σαν φυσικές παρατηρήσεις και άλλα γνωστικά εργαλεία. Παίζουν κεντρικό ρόλο επεκτείνοντας το πεδίο των μαθηματικών οντοτήτων. Ένα παράδειγμα του συμβολισμού είναι αυτό του Descartes ο οποίος από το να γράφουμε ‘’2A cubus’’ εισήγαγε το 2^3.

Ένα ακόμη παράδειγμα από την ιστοριογραφία των μαθηματικών στο οποίο μια “ανωμαλία” σε σχέση με τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις κάνει την εμφάνισή της είναι οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες. Ο όρος ‘ανωμαλία’ ουσιαστικά είναι ένας σχετικός όρος. Αναφέρεται στην σχέση μεταξύ ενός φαινομένου και του μαθηματικού υπόβαθρου αλλά και τις προσδοκίες των μαθηματικών της εκάστοτε εποχής.

Αυτό τον καθιστά μια σημαντική έννοια η οποία μας βοηθάει να συσχετίσουμε το ήδη υπάρχον μαθηματικό υπόβαθρο με τις καινοτομίες στα μαθηματικά. Το πέμπτο αίτημα δεν ήταν σύμφωνο με τα υπόλοιπα αιτήματα, δεν είχε το χαρακτηριστικό του 'αυταπόδεικτου'. Αυτό ήταν αφορμή να οδηγηθούν στην πεποίθηση ότι δεν υπάρχει μια και μοναδική γεωμετρία.

Μια λιγότερη γνωστή καινοτομία για την εποχή της στον τομέα των μαθηματικών είναι η επινόηση των ιδεωδών από τον Kummer και τον Dedekind. Ο Kummer προσπάθησε να αποδείξει το θεώρημα του Fermat (το οποίο αποτελούσε από μόνο του μία 'ανωμαλία'). Οι μέθοδοι που χρησιμοποίησε ο Kummer ήταν μέθοδοι οι οποίες αποκτήθηκαν μόνο πρόσφατα στη σφαίρα των *σύνθετων ακεραίων*. Σύνθετους ονομάζουμε τους ακεραίους που έχουν κι άλλους διαιρέτες εκτός από τον εαυτό τους και τη μονάδα, δηλαδή τους ακεραίους που δεν είναι πρώτοι. Είχε την προσδοκία ότι οι μέθοδοι και τα θεωρήματα της θεωρίας των φυσικών αριθμών θα μπορούσαν να επεκταθούν και στους αλγεβρικούς ακεραίους. Έτσι λοιπόν κατέληξε στην εσφαλμένη ιδέα ότι κι αυτοί μπορούν να αναλυθούν μοναδικά σε πρώτους παράγοντες. Έπειτα από το λάθος του , το οποίο του το υπέδειξε ο Dirichlet, προσπάθησε να απομακρύνει αυτή την ανωμαλία και ανακάλυψε τα πρώτα ιδεώδη.

Ύστερα από τον Kummer ο Dedekind, συνεχίζοντας την έρευνα που είχε ξεκινήσει ο Kummer, προσπάθησε να κατασκευάσει μια γενική θεωρία για τους αλγεβρικούς αριθμούς βασιζόμενος πάνω στην ήδη υπάρχουσα κλασική θεωρία αριθμών στη μορφή που είχε από τον Gauss και τον Dirichlet. Προχωρώντας στην έρευνά του προέκυψαν νέες 'ανωμαλίες' με αποτέλεσμα κάποια στιγμή να καταλήξει στην ανακάλυψη της έννοιας του ιδεώδους και ολοκληρώνοντας τη θεωρία στα 'πεδία' και στις ισοδυναμίες (modules). Μετά από πολλά χρόνια επίπονης προσπάθειας κατέληξε σε μια παρέκκλιση από το μέχρι τότε μαθηματικό υπόβαθρο. Συνεπώς η αλγεβρική θεωρία αριθμών ήταν το αποτέλεσμα των βασικών αρχών στην θεωρία αριθμών οι οποίες πολύ νωρίτερα είχαν καθιερωθεί από τον Gauss και από τις 'ανωμαλίες' που προέκυψαν αναδεικνύοντας νέα πεδία στους αλγεβρικούς αριθμούς. Αυτό το παράδειγμα μας φανερώνει τον πολύ σημαντικό ρόλο των ‘ανωμαλιών’ που μπορούν να προκύψουν κατά την έρευνα των μαθηματικών. Τέτοιες ανωμαλίες μπορεί να εμφανίζονται με τη μορφή ενός αντιπαραδείγματος.

Ένα τελευταίο παράδειγμα το οποίο προέρχεται από έναν εντελώς διαφορετικό τομέα των μαθηματικών είναι αυτό της εμφάνισης της θεωρίας πιθανοτήτων. Αυτό το γεγονός αποτελεί αίνιγμα για τους ερευνητές κυρίως διότι η πιθανολογική σκέψη υπήρχε πολλούς αιώνες και μάλιστα ήταν ενσωματωμένη σε κοινωνικές πρακτικές όπως τα τυχερά παιχνίδια, το δίκαιο και η θρησκεία. (Greer και Mukhopadhyay)

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που οι ‘ανωμαλίες’ αφορούν ένα μέρος και όχι μια ολόκληρη μαθηματική κοινότητα. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η απόδειξη του Schroder για την ανεξαρτησία της κατανομής στην αξιωματική άλγεβρα του Boole. Στη συνέχεια ο Peirce τον οποίο ο Schroder θαύμαζε, σε ένα άρθρο του επιβεβαίωσε αυτό το θεώρημα αλλά παρέλειψε την απόδειξη. Αυτό ο Schroder το θεώρησε παράλογο και για αυτό το λόγο καταπιάστηκε με το θέμα. Μετά από έρευνες κατέληξε σε έναν διαχωρισμό αυτού σε δύο περιπτώσεις από τις οποίες την μία την απέδειξε αλλά η άλλη μετά από έρευνες αποδείχτηκε μη αποδείξιμη. Όλες αυτές οι έρευνες τον οδήγησαν στο να διευκρινίσει τις εφαρμογές της δομής αυτών των αξιωμάτων. Παρόλα αυτά όμως, παρότι δηλαδή η ‘ανωμαλία’ που συνάντησε τον οδήγησε σε ενδιαφέρουσες ανακαλύψεις, οι ανακαλύψεις αυτές δεν είχαν καμία επίδραση στην συνολική ιστορία των μαθηματικών και για 30 χρόνια κανείς δεν ενδιαφέρθηκε. Όμως η μοντέρνα αξιωματική μέθοδος την καθιέρωσε ως μια σταθερή διαδικασία.

Η αντίδραση μιας μαθηματικής κοινότητας σε ένα τέτοιο αντιπαράδειγμα εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Ο πιο σημαντικός από αυτούς είναι το πόσο ισχυρές είναι οι πεποιθήσεις οι οποίες αντικρούονται από την ‘ανωμαλία’ που προκύπτει. Όσο περισσότερα χρόνια περνάνε πιστεύοντας στις συγκεκριμένες αρχές, τόσο περισσότερο αυτές ισχυροποιούνται. Ο Lakatos αναφέρει κάτι αντίστοιχο στην αρχή του βιβλίου του *Proofs and refutations* που αφορά όμως εικασίες οι οποίες δύσκολα καταρρίπτονται μέσα σε μια τάξη μαθηματικών από την παρουσία ενός αντιπαραδείγματος. Όσο πιο δύσκολο είναι να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα σε μια εικασία τόσο αυτή κατά κάποιο τρόπο ισχυροποιείται.

Στο μαθηματικό υπόβαθρο των πυθαγορείων η εμφάνιση των ασύμμετρων μεγεθών πρέπει να ήταν σκανδαλώδης. Βέβαια στην περίπτωση των πυθαγορείων το μαθηματικό υπόβαθρο περιλάμβανε ολόκληρη τη σχολή των πυθαγορείων.

Άρα ένα σημαντικό χαρακτηριστικό που συναντάμε και στην περίπτωση της αντίδρασης μιας μαθηματικής κοινότητας αλλά και στην περίπτωση της αντίδρασης μιας τάξης μαθητών που διδάσκονται μαθηματικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι το πόσο βαθειά ριζωμένες είναι μέσα στους μαθητές οι προηγούμενες αντιλήψεις αλλά και στους μαθηματικούς οι προηγούμενες έννοιες. Αυτό το στοιχείο είναι κάτι το οποίο μπορεί να χαρακτηρίσει σε μεγάλο βαθμό μια αντίδραση.

Στην περίπτωση της ανακάλυψης των ασύμμετρων μεγεθών, ένα σχόλιο στο Βιβλίο 10 των Στοιχείων του Ευκλείδη αντανακλά τη βαρύτητα της ανακάλυψης των μεγεθών αυτών. Είναι δύσκολο για εμάς να κατανοήσουμε πόσο δύσκολο θα ήταν για τους μαθηματικούς εκείνης της εποχής να εκτιμήσουν κάτι το οποίο κανείς δεν μπορούσε να ορίσει και να ονομάσει. Για αυτό το λόγο δόθηκε στη διαγώνιο ο χαρακτηρισμός ‘άλογον’. Σε αυτό το πλαίσιο είναι εύκολο να κατανοήσει κανείς το σχόλιο:

Τέτοιο φόβο είχαν αυτοί οι άντρες από την θεωρία των αρρήτων, που ήταν κυριολεκτικά η ανακάλυψη του ‘αδιανόητου’. (Joseph Dauben, 1992)

Το μέγεθος της αντίστασης σε μία καινούρια έννοια είναι ένα πάρα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό της εξέλιξης των μαθηματικών. Αυτό συμβαίνει γιατί το μέτρο της αντίστασης στην νέα έννοια μπορεί να ληφθεί και ως μέτρο για την επαναστατική ποιότητα μιας καινοτομίας. Μάλιστα ίσως και να μην υπάρχει καλύτερο δείγμα επαναστατικότητας για μία νέα έννοια από την αντίσταση που θα συναντήσει.

3.3.1 Το ζήτημα του θετικού και αρνητικού παραλληλισμού

Για να κατανοήσουμε πώς η χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, τα οποία οδήγησαν σε ανασκευές εννοιών και θεωρημάτων στην εξέλιξη των μαθηματικών, στην διδασκαλία των μαθηματικών μπορούν να βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών είναι σημαντικό να θίξουμε το ζήτημα του ιστορικού παραλληλισμού και να αναλύσουμε τον 'θετικό' και τον 'αρνητικό' παραλληλισμό. Το ζήτημα του παραλληλισμού μεταξύ της εξέλιξης των μαθηματικών και της εννοιολογικής ανάπτυξης μέσα σε μια τυπική τάξη μαθηματικών.

Για αυτή την ανάλυση θα χρησιμοποιήσουμε το άρθρο των Θωμαΐδη και Τζανάκη (2007) για την αντίληψη των μαθητών αλλά και την ιστορική εξέλιξη της σχέσης διάταξης στην αριθμογραμμή. Στο άρθρο για τον παραλληλισμό εξετάζεται η ύπαρξη ενδιαφερουσών ομοιοτήτων μεταξύ των δυσκολιών των μαθητών στην κατανόηση της διάταξης των αρνητικών αριθμών και στην υπέρβαση της αντίληψης ότι οι αριθμοί εκφράζουν υπαρκτές ποσότητες και των εμποδίων που ανέκυψαν από τον 17ο έως και τον 19ο αιώνα. Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα που τίθεται στο άρθρο είναι το κατά πόσο μπορούμε να εμπιστευτούμε τον (αυστηρό) παραλληλισμό ως βασικό εργαλείο για να κατανοήσουμε το κατά πόσο οι μαθητές καταλαβαίνουν μια μαθηματική έννοια ή μέθοδο και τι δυσκολίες μπορεί να αντιμετωπίσουν .

Για την ιστορική εξέλιξη της σχέσης διάταξης των αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή στο άρθρο παραβάλλονται οι ιδέες των Descartes, Newton και Bolzano. Έπειτα για την σύγκριση αυτής της ιστορικής εξέλιξης με την διαδικασία κατανόησης που βιώνουν οι μαθητές κατασκευάζεται από τους ερευνητές ένα φύλλο εργασίας με διαδικασίες παρόμοιες με αυτές της ιστορικής εξέλιξης.

Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη υποενότητα, υπάρχουν ομοιότητες στις δύο διαδικασίες, δηλαδή στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών και στην διαδικασία της διδασκαλίας των μαθηματικών σε μια τυπική τάξη. Μία από αυτές είναι ότι μεγάλο ρόλο στις αντιδράσεις των μεγάλων μαθηματικών κάθε εποχής αλλά και των μαθητών μέσα στην τυπική τάξη παίζει το πόσο βαθιά ριζωμένες είναι οι προγενέστερες γνώσεις και αντιλήψεις σε αυτούς. Αυτό το γεγονός αποτελεί ένα δείγμα ‘θετικού παραλληλισμού

Μέσα από την μελέτη των απαντήσεων των μαθητών στο άρθρο των Θωμαΐδη και Τζανάκη και την σύγκρισή τους με τα επιστημολογικά εμπόδια που ανέκυψαν στην ιστορική εξέλιξη των εννοιών παρατηρήθηκαν από τους ερευνητές σημαντικές ομοιότητες μεταξύ των δύο διαδικασιών. Όμως κατά πόσο αυτός ο αυστηρός παραλληλισμός μπορεί να είναι παραγωγικός;

Μετά την μελέτη των απαντήσεων των μαθητών οι Θωμαΐδης και Τζανάκης καταλήγουν στο ότι ο αυστηρός παραλληλισμός των δύο διαδικασιών είναι αβάσιμος μιας και ισχυροί διδακτικοί παράγοντες παρεμβαίνουν και περιορίζουν τις προσεγγίσεις των μαθητών και τις απαντήσεις τους. Τέτοιοι ισχυροί διδακτικοί παράγοντες είναι η ανομοιογένεια στον πληθυσμό μιας τάξης, η ανάγκη προετοιμασίας των μαθητών για τις εισαγωγικές εξετάσεις, οι χρονικοί περιορισμοί λόγω αναλυτικού προγράμματος, οι υποχρεώσεις για κάποιου είδους αξιολόγηση κ.ά. Όλοι αυτοί οι λόγοι οδηγούν τους μαθητές να ακολουθούν κάποιες αλγοριθμικές διαδικασίες για να φτάσουν στον ισχυρισμό είτε αυτές ταιριάζουν σε ερώτηση που έχει τεθεί από τον διδάσκοντα είτε όχι. Αυτοί οι διδακτικοί παράγοντες περιορίζουν τις ομοιότητες μεταξύ της παραδοσιακής διδασκαλίας και της ιστορικής εξέλιξης μιας έννοιας. Για παράδειγμα οι μαθηματικοί του παρελθόντος δεν δίσταζαν να παρακάμψουν υποτιθέμενα εμπόδια και να υιοθετήσουν εναλλακτικούς και αποτελεσματικούς τρόπους διάταξης ασύμβατους με την ποσοτική φύση των αριθμών. Ο Stein (1987, p.2) γράφει ότι κάτω από τέτοιους περιορισμούς είναι πολύ ευκολότερο να διδάξεις την εκτέλεση ενός αλγορίθμου παρά την ικανότητα να αναλύεις. Αυτή η εκμετάλλευση αυτών των ομοιοτήτων λοιπόν θα πρέπει να γίνει με προσοχή.

Αυτός ο ισχυρισμός αποτελεί μια αρνητική απάντηση για το ερευνητικό ερώτημα που τίθεται στην αρχή του άρθρου. Οι όποιες ομοιότητες μεταξύ των αντιλήψεων των μαθητών, των δυσκολιών και των λαθών, και των επιστημολογικών εμποδίων που συνάντησαν οι μαθηματικοί του παρελθόντος πιθανότατα περιορίζονται εξαιτίας των διδακτικών παραγόντων που προαναφέραμε που αφορούν τις συνθήκες διδασκαλίας. Οπότε εδώ συναντάμε και την έννοια του αρνητικού παραλληλισμού.

Για να κατανοήσουμε ακόμα καλύτερα την έννοια του "αρνητικού" και του "θετικού" παραλληλισμού θα αναφέρουμε τα αποτελέσματα της έρευνας που έγινε σε μαθητές 1ης Λυκείου (16 χρονών) όπως παρουσιάζεται στο άρθρο των Θωμαΐδη και Τζανάκη (2007). Το φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές για την εμπειρική μελέτη πραγματεύεται την σχέση διάταξης στην αριθμητική γραμμή και την άλγεβρα των ανισοτήτων. Εμείς θα ασχοληθούμε με τις σωστές απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στο ερώτημα 3 του φύλλου εργασίας το οποίο είναι το εξής:

'Εάν α, β, γ είναι τρεις αρνητικοί ακέραιοι ποιός είναι ο μικρότερος ακέραιος που μπορεί να προστεθεί στους α, β, γ ώστε να γίνουν όλοι θετικοί.'

Η ορθή απάντηση είναι το $\mu + 1$ όπου $\mu = \max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\}$. Οι σωστές απαντήσεις των μαθητών έχουν τις ακόλουθες μορφές:

1. Ο αριθμός ο οποίος είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερος από την απόλυτη τιμή του μικρότερου από τους δοθέντες α, β, γ.

2. Ο αριθμός ο οποίος είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερος από τον αντίθετο του μικρότερου από τους δοθέντες α, β, γ.

3. Ο αριθμός ο οποίος είναι ο επόμενος μεγαλύτερος ακέραιος από τον μικρότερο από τους δοθέντες α, β, γ, εάν αυτοί ανήκαν στους θετικούς.

4. Ένας αριθμός μεγαλύτερος από τον αντίθετο του μικρότερου δοθέντος ακεραίου.

5. Ο αντίθετος του μικρότερου αριθμού. Αυτό σημαίνει ότι εάν $\alpha > \beta > \gamma$ τότε ο μικρότερος ακέραιος είναι $-\gamma$.

6. Ο αντίθετος του μικρότερου αριθμού.

Παρατηρούμε τα εξής:

α. Πολλές απαντήσεις των μαθητών υποδηλώνουν μια σύγχυση των εννοιών ‘μεγαλύτερος’ και ‘μικρότερος’ όταν έχουμε να κάνουμε με τους αρνητικούς αριθμούς, κάτι που όμως ήταν και ένα σημαντικό γνωστικό εμπόδιο στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.

β. Από την άλλη μαθητές απάντησαν σωστά με τρόπο παρόμοιο με εκείνον του Descartes, χωρίς να έχουν το ίδιο μαθηματικό υπόβαθρο με εκείνον και την ίδια εμπειρία.

γ. Ένας μεγάλος αριθμός μαθητών δεν έδωσε σωστή απάντηση κάτι που δείχνει ότι όταν από τους μαθητές ζητηθεί κάτι το οποίο δεν έχουν αυστηρά διδαχθεί στην τάξη εκείνοι παραιτούνται και δεν προσπαθούν. Αυτό είναι ένα γεγονός το οποίο δεν συμβαίνει με τους δημιουργικούς μαθηματικούς στην ιστορία των μαθηματικών.

Αυτές λοιπόν οι απαντήσεις των μαθητών θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι δείγματα και αρνητικού αλλά και θετικού παραλληλισμού. Οι ομοιότητες της διαδικασίας της μάθησης με την διαδικασία της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών σαφώς και δεν θα μπορούσαν να θεωρηθούν τυχαίες παρά μόνο ένα δείγμα *θετικού παραλληλισμού*.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ένας αριθμός μαθητών είναι ικανός να ανταπεξέλθει σε νέες καταστάσεις , πιθανότατα με έναν ιδιοσυγκρασιακό τρόπο ο οποίος είναι διαφορετικός από ότι θα περιμέναμε με βάσει τα όσα έχουν επίσημα διδαχθεί στην τάξη. Πολλοί δηλαδή μαθητές δίνουν σωστές απαντήσεις παρακάμπτοντας και μη χρησιμοποιώντας όσα έχουν διδαχθεί. Παρατηρούμε ότι οι μαθητές επιστρατεύουν ιδέες νέες για αυτούς παραπλήσιες με εκείνες των Newton, Descartes ή του Euler. (Thomaidis and Tzanakis, 2007)

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα - Προτάσεις

4.1 Συμπεράσματα

Πρώτα θα αναλύσουμε τα συμπεράσματα μας για το πρώτο ερώτημα που τέθηκε στην εισαγωγή, δηλαδή για το κατά πόσο μια ιστορική μελέτη μέσω του ιστορικού παραλληλισμού μπορεί να μας βοηθήσει στην κατανόηση του ρόλου και της λειτουργίας των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων.

Μετά από την ιστορική μελέτη αρχικά δεν πρέπει να διαφύγει της προσοχής μας το γεγονός ότι οι μαθηματικοί του παρελθόντος, κάποιες στιγμές, αντιμετώπισαν σημαντικά προβλήματα στην εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας, τα οποία συνιστούν σημαντικές δυσκολίες και για τους σημερινούς μαθητές. (Θωμαΐδης, Τζανάκης 2000)

Στην αντιδιαστολή αυτών των δύο περιπτώσεων, της τυπικής τάξης αλλά και της εξέλιξης των μαθηματικών μέσα σε μία μαθηματική κοινότητα μέσα στο χρόνο, παρατηρούμε ότι υπάρχουν πολλά κοινά χαρακτηριστικά αλλά διαφαίνεται και μία τεράστια απαίτηση που έχουμε από τους μαθητές. Ζητάμε από αυτούς να κάνουν ένα τεράστιο γνωστικό άλμα και να καλύψουν ίσως και αιώνες ιστορικά για την κατανόηση και αποδοχή μιας νέας έννοιας. Ζητάμε δηλαδή μια διαδικασία εννοιολογικής αλλαγής η οποία ιστορικά να κράτησε μια μεγάλη χρονική περίοδο, οι μαθητές να την φέρουν εις πέρας μόλις σε λίγες διδακτικές ώρες.

Αυτό το τεράστιο γνωστικό άλμα που ζητάμε από τους μαθητές να καλύψουν γίνεται ακόμη πιο δύσκολο κάτω από ορισμένες διδακτικές συνθήκες και με την παρέμβαση κάποιων διδακτικών παραγόντων όπως είναι η ανομοιογένεια του πληθυσμού μιας τάξης, η προετοιμασία των μαθητών για τις εισαγωγικές τους εξετάσεις κ.ά. Αυτοί οι διδακτικοί παράγοντες όπως προαναφέραμε αναγκάζουν τους καθηγητές να υιοθετούν έναν πιο φορμαλιστικό τρόπο διδασκαλίας με τη χρήση κάποιων αλγορίθμων οι οποίοι δεν εγγυώνται την κατανόηση της νέας έννοιας η του νέου θεωρήματος.

Στην περίπτωση του παραδείγματος και του αντιπαραδείγματος η ίδια η φύση των μαθηματικών δείχνει ότι οι μαθηματικοί πρέπει να κάνουν διαρκείς εννοιολογικές προσαρμογές, καθώς νέα συστήματα εισάγονται με τον ίδιο τρόπο που οι επιστήμονες πρέπει να κάνουν εννοιολογικές προσαρμογές σε περιόδους αλλαγής ‘paradigm’ (Kuhn, 1970).

Γνωρίζοντας λοιπόν οι μαθητές τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν σπουδαίοι μαθηματικοί στο παρελθόν και ότι για να ξεπεραστούν μερικές από αυτές χρειάστηκαν ακόμα και εκατοντάδες χρόνια, οι μαθητές θα αποκτήσουν αυτοπεποίθηση και άνεση (Jankvist 2009). Αυτό μπορεί να αποτελέσει ένα δείγμα θετικού παραλληλισμού.

Εκτός από τα παραπάνω, η ιστορία μπορεί να παίξει το ρόλο ενός γνωστικού εργαλείου υποστήριξης της πραγματικής μάθησης των Μαθηματικών, αφού μπορεί να μας προσφέρει μια διαφορετική άποψη για μια μαθηματική ενότητα, αλλά και ένα διαφορετικό τρόπο παρουσίασης της (Jahnke 2001, Kleiner 2001)

Επίσης η ιστορία μπορεί να βοηθήσει τους καθηγητές των Μαθηματικών να δουν μέσα από τα μάτια των μαθητών τους διάφορα μαθηματικά θέματα, αλλά και τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές τους (Jankvist 2009).

Η απλότητα και η φιλικότητα μπορεί να βρεθεί και σε άλλες πρωτότυπες πηγές, όπου διαπρεπείς μαθηματικοί εξηγούν αναλυτικά πως σκέφτηκαν για να καταλήξουν στα συμπεράσματα τους για βασικούς μαθηματικούς νόμους, τους οποίους αρκετοί σύγχρονοι διδάσκοντες και σχεδιαστές σύγχρονων αναλυτικών προγραμμάτων, αποτυγχάνουν να εξηγήσουν αποτελεσματικά στους σημερινούς μαθητές. Δύο τέτοια χαρακτηριστικά παραδείγματα αναφέρει ο Θωμαΐδης (Θωμαΐδης 2009). Αρχικά τον τρόπο με τον οποίο ο François Viète εξηγεί τον κανόνα των προσήμων όταν απαλείφουμε παρενθέσεις στην Άλγεβρα και στη συνέχεια τον τρόπο με τον οποίο ο Leonhard Euler εξηγεί τον κανόνα των προσήμων στον πολλαπλασιασμό δύο αρνητικών αριθμών (δηλαδή, το γινόμενο αρνητικού επί αρνητικό είναι θετικός). Βλέπουμε λοιπόν ότι η ανάγνωση πρωτότυπων πηγών μπορεί να προσφέρει στους διδάσκοντες και στους διδασκόμενους λογικές εξηγήσεις σε θέματα που ο φορμαλισμός αποτυγχάνει και φυσικά να εμπλουτίσει το διδακτικό ρεπερτόριο των διδασκόντων.

Μέσω της ιστορίας των μαθηματικών και της μελέτης σχετικών ιστορικών παραδειγμάτων οι διδασκόμενοι θα έχουν την ευκαιρία να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά δεν καθοδηγούνται μόνο από χρησιμοθηρικούς λόγους.

Για να συμβούν όλα αυτά όμως και για να μπορέσει η χρήση πρωτότυπων κειμένων να συμβάλλει στη διδασκαλία μιας έννοιας ή ενός θεωρήματος απαραίτητη προϋπόθεση είναι οι ίδιοι οι καθηγητές να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν αυτό το εργαλείο, δηλαδή τα πρωτότυπα κείμενα μαθηματικών.

Ένας ακόμη τρόπος χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στην τυπική τάξη είναι μέσω ερευνητικών projects Niss (2001), όπως αναφέρει ο Μπιζμπιανος στη διπλωματική του εργασία.(2011). Η φιλοσοφία αυτών των projects είναι ότι κάθε μαθηματικός πρέπει να έχει σχηματίσει την άποψη ότι τα μαθηματικά ως επιστημονικό πεδίο έχουν τον δικό τους χώρο στην κοινωνία και στον ανθρώπινο πολιτισμό. Οι Tzanakis, Arcavi *et al* (2000) υποστηρίζουν ότι τα ερευνητικά ερωτήματα, οι διερευνήσεις και οι διαδικασίες των projects αυτών έχουν στενή ομοιότητα με τα πρωτότυπα ερευνητικά projects που δημοσιεύονται σε επιστημονικά περιοδικά. Αυτό θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι ένα ακόμη δείγμα “θετικού” παραλληλισμού.

4.2 Προτάσεις

Ένα τυπικό επιχείρημα είναι ότι η ιστορία μπορεί να αποτελέσει έναν παράγοντα κινητοποίησης των μαθητών στο θέμα της μάθησης και της μελέτης των Μαθηματικών, αφού μπορεί να διεγείρει και να διατηρήσει το ενδιαφέρον των μαθητών στο υπό μελέτη μαθηματικό θέμα (Farmaki, Paschos 2007)

O Jankvist υποστηρίζει ότι η πλέον κατάλληλη προσέγγιση μέσω της οποίας είναι δυνατό να επιτευχθεί η καλλιέργεια βαθύτερης γνώσης και συνείδησης για τα μαθηματικά, μέσω των ενδογενών και εξωγενών χαρακτηριστικών της μαθητικής δραστηριότητας είναι η προσέγγιση βασει οριοθετημένων ενοτήτων .(Μπιζμπιάνος, 2011)

Οι δάσκαλοι των Μαθηματικών πρέπει να είναι σε θέση να σχεδιάζουν ιστορικά επιχειρήματα με σκοπό να επιλέξουν την κατάλληλη, για τους μαθητές, γένεση της έννοιας και να κατασκευάσουν ή να εφεύρουν διδακτικές καταστάσεις που παρέχουν αυτή τη γένεση (Jankvist 2009).

Μία πρόταση χρήση της ιστορίας ως εργαλείο για την εκμάθηση των μαθηματικών είναι όπως διαβάζουμε στο άρθρο των Τζανάκη, Arcavi *et al.* είναι η εκμάθηση των μαθηματικών με βάση μια διδακτική και μαθησιακή προσέγγιση εμπνεόμενη από την ιστορία.

Όπως αναφέρει ο Μίλτος Μπιιζμπιάνος στη διπλωματική του εργασία, αυτή είναι ουσιαστικά η γενετική προσέγγιση της διδασκαλίας και της εκμάθησης των Μαθηματικών. Η μέθοδος αυτή δεν είναι, ούτε αυστηρά επαγωγική, ούτε τυπικά ιστορική, αφού θεμελιώδεις θέσεις της είναι ότι, ένα μαθηματικό θέμα μπορεί να μελετηθεί από κάποιον διδασκόμενο μόνο όταν αυτός έχει ενδιαφερθεί και κινητοποιηθεί για το συγκεκριμένο θέμα και ότι ο διδασκόμενος μπορεί να μάθει κάποιο μαθηματικό θέμα μόνο την κατάλληλη στιγμή στη χρονική διαδικασία της πνευματικής του ανάπτυξης και εξέλιξης. Αυτό σημαίνει ότι τα ερωτήματα και τα προβλήματα με τα οποία "ασχολήθηκε" ο συγκεκριμένος τομέας των Μαθηματικών έχουν αποσαφηνιστεί και κατανοηθεί επαρκώς (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Γίνεται λοιπόν φανερή και στους διδασκόμενους η "αναγκαιότητα του μαθηματικού αντικειμένου" (necessity of the subject) για την απάντηση τέτοιων ερωτημάτων και τη λύση τέτοιων προβλημάτων, οι οποίοι πλέον κατανοώντας τις ιδιότητες και τις μεθόδους που συνδέονται με το μαθηματικό αντικείμενο είναι πλέον ικανοί και να απαντήσουν στα ερωτήματα αυτά και να λύσουν παρόμοια προβλήματα. Οι Tzanakis, Arcavi et al υποστηρίζουν ότι η "αναγκαιότητα του μαθηματικού αντικειμένου" αποτελεί τον κεντρικό πυρήνα του μαθηματικού νοήματος που αποδίδεται σ' αυτό από το διδασκόμενο (Tzanakis, Arcavi et al 2000). Στη γενετική προσέγγιση η έμφαση είναι μικρότερη στη χρήση θεωριών, μεθόδων και εννοιών και μεγαλύτερη στο πως οι θεωρίες, μέθοδοι και έννοιες απαντούν σε συγκεκρι- μένα προβλήματα και ερωτήματα.

Από αυτήν την άποψη, η ιστορική διάσταση αυξάνει σημαντικά τις πιθανότητες για μια σφαιρική και σε βάθος κατανόηση του μαθηματικού αντικειμένου, σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα (Tzanakis, Arcavi et al 2000):

1. Κάθε δάσκαλος των Μαθηματικών, ακόμα κι αν δεν είναι ιστορικός των Μαθηματικών, πρέπει να γνωρίζει τα βασικά σημεία της ιστορικής εξέλιξης του θέματος το οποίο διδάσκει.

2. Τα κρίσιμα βήματα αυτής της ιστορικής εξέλιξης είναι τα ερωτήματα, τα προβλήματα και οι ιδέες κλειδιά που άνοιξαν νέες διαδρομές στην επιστημονική μαθηματική έρευνα.

3. Τα προηγούμενα κρίσιμα βήματα ανακατασκευάζονται ώστε να γίνουν κατάλληλα για τη διδασκαλία τους μέσα στην τάξη.

4. Τα ανακατασκευασμένα κρίσιμα βήματα δίνονται ως μια ακολουθία ιστορικών προβλημάτων αυξανόμενης δυσκολίας, προκειμένου ο διδασκόμενος να κτίζει τη γνώση του πάνω στα προηγούμενα. Η μορφή των προβλημάτων αυτών μπορεί να κλιμακωθεί από πολύ απλές ασκήσεις τεχνικού χαρακτήρα μέχρι ανοικτά ερωτήματα, που μπορούν να αποτελέσουν μέρος από μία εργασία (project) που θα πραγματοποιηθεί από μια ομάδα μαθητών.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε τον ρόλο των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών αλλά και τον ρόλο τους στην ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών. Μέσα από το πρίσμα της ιστορικής μελέτης των μαθηματικών μελετάμε το κατά πόσο ο παραλληλισμός των δύο διαδικασιών , της διαδικασίας της μάθησης και της διαδικασίας της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών, μπορεί να βοηθήσει στην βαθύτερη κατανόηση μαθησιακών προβλημάτων αλλά και στο να υπερπηδήσουν οι μαθητές γνωστικά εμπόδια τα οποία προκύπτουν. Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε το μέγεθος της συμβολής ενός ιστορικού παραλληλισμού σημαντικό είναι να εντοπίσουμε κοινά χαρακτηριστικά των δύο διαδικασιών, τα οποία αποτελούν δείγμα θετικού παραλληλισμού, αλλά και διαφορές οι οποίες συνιστούν αρνητικό παραλληλισμό. Τέλος γίνεται αναφορά σε προτάσεις και τρόπους με τους οποίους η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να γίνει εργαλείο στην διδασκαλία των μαθηματικών.

Summary

In the present thesis we study the role of the example and the counterexample in mathematics' teaching process and their contribution in the evolution of mathematics. Through the prism of an historical study of mathematics we study how much a *'parallelism'* of the two processes, the process of mathematics education and the process of the evolution of mathematics in time, could contribute in a deeper understanding of learning disabilities and also help the students overcome obstacles in the path of knowledge. To be able to study the amount of contribution of an historical parallelism it is important to find common features of the two processes, something that we could say that is a clue for positive parallelism, or differences which conclude to negative parallelism. Finally we present some suggestions and ways of how the history of mathematics could be a useful tool in the process of mathematics' teaching.

Βιβλιογραφία

[1] D. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis*, Classroom Resource Materials, Mathematical Association of America (2007).

[2] I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press (1976).

[3] D. Gilles, *Revolutions in Mathematics*, Oxford University Press (1992)

[4] T. Kuhn, *The structure of scientific revolutions*, The University of Chicago Press (1970)

[5] A. Watson, J. Mason, *Mathematics as a constructive activity: Learners Generating Examples*, Lawrence Erlbaum Associates (2005)

[6] D. Hilbert, *The foundation of Geometry*, Chicago The Open Court Publishing Company (1902)

[7] L. P. Steffe, *Epistemological foundations of mathematical experience*, Springer (1991)

[8] Courant, R*, Reminiscences from Hilbert's Gottingen* (1981)

[9] J. Sanderfur, J. Mason, G.J. Stylianides, A. Watson, *Generating and using examples in the proving process,* Educational Studies in Mathematics *(*2013*)*

[10] R. Zazkis, E. J. Chernoff, *What makes a counterexample exemplary?,* Educational Studies in Mathematics (2008)

[11] L. Bills, T. Rowland, *Examples, generalization and proof*, Advances in Mathematics Education (2009)

[12] B. Greer, *The growth of mathematics through conceptual restructuring,* Learning and instruction 14 (2004)

[13] J. V. Grabiner, *Is Mathematical Truth Time-Dependent?* , The American Mathematical Monthly, Vol. 81 (1974)

[14] O. Linnet, *Epistemological Challenges to Mathematical Platonism*, Philosophical Studies (2006)

[15] J. Mason, S. Klymchuk, *Counterexamples in Calculus*, ZDM Mathematics Education (2009)

[16] B. Pedemonte, O. Buchbinder, *Examining the role of examples in proving processes through the cognitive lens: the case of triangular numbers* (2011)

[17] O. Zaslavsky, *What knowledge is involved in Choosing and Generating Useful Instructional Examples*, WG2 of the Symposium for celebration of the centennial of ICMI, Rome, March 2008

[18] I. Zodik, O. Zaslavsky, *Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom*, Educational Studies in Mathematics, (2008)

[19] I. Zodik, O. Zaslavsky, *Mathematics Teachers' Choices of Examples that Potentially Support or Impede Learning (2007)*

[20] X. Zhu, H. Simon, *Learning Mathematics from examples and by doing, The Artificial intelligence and Psychology Project,* (1987)

[21] H. Mehrtens, *T.S. Kuhn's Theories and Mathematics: A discussion paper on the 'New Historiography' of Mathematics*, Historia Mathematica 3 (1976)

[22] M.J. Crowe, *The 'Laws' Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics*, Historia Mathematica 2 (1975)

[23] C. Konold, D. K. Johnson, *Epistemological foundations of mathematical experience* (1991)

[24] D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (1991)

[25] T.S. Kuhn, *The structure of scientific revolutions* (1970)

[26] C. Tzanakis, Y. Thomaidis, *Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks*, For the Learning of Mathematics, 20(1), pp. 44 – 55. (2000)

[27] E. Rissland Michener, *Understanding understanding Mathematics,* Cognitive Science Volume 2, Issue 4, pages 361–383, October 1978

[28] Sowder, L. (1980). *Concept and principle learning.* In R. Shumway (Ed.), Research in mathe-matics education (pp. 244-285). Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics.

[29] G.Leinhardt, O. Zaslavsky, M.K. Stein, *Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching*, Review of Educational Research, Vol. 60, No. 1 (Spring, 1990), pp. 1-64

[30] I Peled, O Zaslavsky, *Counter-Examples That (Only) Prove and Counter-Examples That (Also) Explain.* FOCUS on Learning Problems in mathematics 19 (3), 49-61

[31] Dauben, J. (1992b*). Conceptual revolutions and the history of mathematics: Two studies in the growth of knowledge*. In Gillies, D., editor, Revolutions in Mathematics, pages 49–71. Clarendon Press, Oxford.

[32] Fischbein E., Intuition *in Science and Mathematics: An Educational Approach*, Higher Education Vol. 17, No. 6 (1988), pp. 735-737.

[33] Θωμαΐδης Γ., *Η ιστορία των μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διακτικές επιλογές και δραστηριότητες: η περίπτωση των αρνητικών αριθμών*, στο Βαμβακούση Ξ. ,Θωμαΐδης Γ., Πάσχος Θ.(eds), Αξιοποίηση της Ιστοριας των μαθηματικών στη Διδασκαλία των μαθηματικών. Επιστημονική ένωση για τη Διδακτική των μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, pp. 193-219 (2009)

[34] Tzanakis C., Arcavi A., et al, *Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic syrvey* , in J. Fauvel and J Van Maanen (eds), History in mathematics Education. The ICMI Study, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, pp. 201-240(2000)

[35] Kleiner I., *History of the infinitely small and the infinitely large in calculus*, Educational studies in Mathematics, 48, pp.137-174 (2001)

[36] Gillings R. J., *Mathematics in the time of Pharaos*,New York: Dover publications (1982)

[37] Farmaki V., Paschos T., *Employing genetic moments in the history of mathematics in classroom activities*, Educational Studies in Mathematics 66, pp. 83-106 (2007)

[38] Brousseau G., *Theory of didactical situations in mathematics*, New York: Kluwer Academic Publishers (1997)

[39] Janet M Duffin, Adrian P Simpson, *A search for understanding*, The Journal of Mathematical Behavior, vol. 18, issue 4, pp. 415 – 427

[40] RI **Charles,** *Exemplification and characterization moves in the classroom teaching of geometry concepts*, Journal for Research in Mathematics Education, **1980**

[41] Hershkowitz, Rina, *Visualization in Geometry--Two Sides of the Coin.*, Focus on Learning Problems in Mathematics, *v11 n1-2 p61-76 Win-Spr 1989*

[42] G **Lakoff**, RE **Núñez,** *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*, (2000)

[43] Jahnke N. H., *Canttor's cardinal and ordinal infinities: an epistemological and didactic view*, Educational Studies in mathematics, 48, pp. 175-197 (2001)

[44] Βοσνιαδου Σ., Βαμβακούση Ξ., Σκοπελίτη Ε., *Το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής στην ψυχολογία* (2008)

[45] W **Van Dooren**, D **De Bock**, D Janssens, Verschafell, *STUDENTS' OVERRELIANCE ON LINEARITY: AN EFFECT OF SCHOOL-LIKE WORD PROBLEMS?*, PME (2005)

[46] Ed Dubinsky, *Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics, Epistemological Foundations of Mathematical Experience* Part of the series Recent Research in Psychology pp 160-202 (1991)

[47] J. Mason, *Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention*, For the learning of mathematics, vol. 9, issue 2, pp.2-8 (1989)

[48] E. Gray, D. Tall, Duality, Ambiguity, and Flexibility*: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic*, Journal for Research in Mathematics Education Vol. 25, No. 2 (Mar., 1994), pp. 116-140

[49] Yeldham , *Teaching Of Arithmetic Through Four Hundred Years (1535-1935)*, published by John Harrap, London 1936

[50]R. Courant, *Reminiscences from hilbert's göttingen*, 1981

[51] Piaget, Garcia, *Psychogenesis and the history of science*, Columbia Univesrity Press, 1989

[52] Kaput J., *Missing value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns.*,*(*Research in Mathematics Education Series) (1994), pp. 235-287

[53] Μίλτος Μπιζμπιάνος, *Διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των μαθηματικών, Η περίπτωση της γεωμετρίας* (Διπλωματική εργασία, 2011)

[54] Δεσποινα Βαρβέρη, *Ο κύκλος και η μέτρησή του, μια διαδρομή στα αρχαία μαθηματικά* (Διπλωματική εργασία, 2009)

[55] Γιάννης Πλατάρος, Η *διδασκαλία του απειροστικού λογισμού μέσω αντιπαραδειγμάτων* (Διπλωματική εργασία, 2004)

[56] Κανελλοπούλου Μαρία, *Η σημασία του παραδείγματος και του αντιπαραδείγματος στη διδασκαλία των μαθηματικών (*Διπλωματική εργασία, 2012)