ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Το πέρασμα από την Επιχειρηματολογία στην Απόδειξη στη Γεωμετρία: Ο Ρόλος της Οπτικοποίησης

ΚΑΡΑΤΡΑΣΟΓΛΟΥ ΑΘΑΝΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΠΟΤΑΡΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΑΘΗΝΑ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)Πόταρη Δέσποινα (επιβλέπουσα Καθηγήτρια)	Αν. Καθηγήτρια	……
2)Ζαχαριάδης Θεοδόσιος	Αν. Καθηγητής	……
3)Σπύρου Παναγιώτης	Επίκ. Καθηγητής	……

Στην Εύη, τον Μάκη
Και την Λένα

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Την επιβλέπουσα της διπλωματικής μου εργασίας κα Δέσποινα Πόταρη για την καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές, την αμέριστη βοήθεια και την υπομονή της καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησής της

- Τον Αναπληρωτή Καθηγητή Θ. Ζαχαριάδη και τον Επίκουρο Καθηγητή Π. Σπύρου που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή

- Τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα για τον χρόνο που διέθεσαν και την πολύτιμη βοήθειά τους στην πραγματοποίησή της

- Τους συμφοιτητές και φίλους που απέκτησα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, και ιδιαίτερα την Λίνα και την Μαρία για την συμπαράστασή τους και τις όμορφες στιγμές που μοιραστήκαμε

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΕΛΙΔΑ

Περίληψη 6
Εισαγωγή 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ
1.1 Θεωρίες Εξέλιξης του Γεωμετρικού Συλλογισμού
1.1.1 Εισαγωγή: Η φύση της Γεωμετρίας 8
1.1.2 Στάδια Γεωμετρικής Κατανόησης του Piaget 9
1.1.3 Μοντέλο των Επιπέδων Γεωμετρικής Σκέψης των Van Hieles 10
1.1.4 Επίπεδα Γεωμετρικού Συλλογισμού κατά Battista 14
1.1.5 Μοντέλο Γεωμετρίας των Houdement & Kuzniak..... 16
1.1.6 Θεωρία των Σχηματοποιημένων Εννοιών κατά Fischbein 18
1.1.7 Γνωστικό Μοντέλο του Duval 19
1.2 Οπτικοποίηση και Γεωμετρία
1.2.1 Εισαγωγή: Ιστορική αναδρομή στην οπτική προσέγγιση 23
1.2.2 Η δομή της οπτικοποίησης 25
1.2.3 Η φύση και ο ρόλος της οπτικοποίησης..... 27
1.2.4 Οι δυσκολίες γύρω από την οπτικοποίηση 31
1.3 Από την Επιχειρηματολογία στην Απόδειξη
1.3.1 Εισαγωγή: Η φύση της απόδειξης 36
1.3.2 Λειτουργίες και Μέθοδοι της απόδειξης 37
1.3.3 Η σχέση επιχειρηματολογίας και απόδειξης 40
1.3.4 Η οπτικοποίηση στην απόδειξη: η περίπτωση του δυναμικού περιβάλλοντος 45
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ
2.1 Ερευνητικό Πρόβλημα & Ερευνητικά Ερωτήματα 49
2.2 Φάσεις της Έρευνας 49
2.2.1 Πρώτη Φάση της Έρευνας 49
2.2.2 Δεύτερη Φάση της Έρευνας 54
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
3.1 Προφίλ Μαθητών..... 61
3.2 Ανάλυση της Επιχειρηματολογίας της 1ης Δραστηριότητας..... 63
3.3 Ανάλυση της Επιχειρηματολογίας της 2ης Δραστηριότητας 89
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ
4.1 Συμπεράσματα- Συζήτηση 107

Αναφορές-Βιβλιογραφία 114
Παράρτημα 119

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε για να οδηγήσει στην απονομή Μεταπτυχιακού Διπλώματος από το Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα «Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών». Η έρευνα που πραγματεύεται έχει στόχο να διερευνήσει το ρόλο της οπτικοποίησης στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού, την διαμόρφωση εικασιών και την δόμηση αποδείξεων. Στην έρευνα συμμετείχαν έξι μαθητές Α' Λυκείου (τρεις οπτικοί- τρεις μη οπτικοί), οι οποίοι επιλέχθηκαν βάση του Βαθμού Οπτικότητάς τους, και τα δεδομένα συλλέχτηκαν από την ανάλυση των συνεντεύξεων σε δύο μη τυπικά γεωμετρικά προβλήματα. Από τα αποτελέσματα της έρευνας έγινε φανερό ότι η οπτικοποίηση ενισχύει την επιχειρηματολογία και την αποδεικτική διαδικασία όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν ευέλικτα τόσο τον οπτικό όσο και τον αναλυτικό- μη οπτικό συλλογισμό, ενώ ούτε η οπτική ούτε η αναλυτική προσέγγιση από μόνες τους δεν εξασφαλίζουν πάντοτε την κατασκευή των επιθυμητών αποδείξεων.

Λέξεις Κλειδιά: Οπτικοποίηση, Επιχειρηματολογία, Απόδειξη

This research study was carried out in order to lead to the award of a Postgraduate Diploma in "Didactics and Methodology in Mathematics." This research study focuses on the role of visualization as a component in the development of geometrical reasoning, the formulation of a conjecture and the construction of a proof. The six 10th grade students were selected considering their Mathematical Visuality Score (three visualizers and three non-visualizers) and the data were collected by the analysis of two task-based interviews. The findings indicate that students' proving activity is enhanced by visualization in case that student can easily switch back and forth between visual and analytical reasoning, whilst neither the visual approach nor the analytical approach can ensure successful proofs on their own.

Key Words: Visualization, Reasoning, Proof

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εξ απαρχής της Μαθηματικής Επιστήμης η απόδειξη κατέχει και διαδραματίζει έναν μείζουσας σημασίας ρόλο στην εξασφάλιση της εγκυρότητας και της αλήθειας μιας μαθηματικής πρότασης. Η αποδεικτική διαδικασία κατέχει, επίσης, σημαίνοντα ρόλο στην μαθηματική σχολική πραγματικότητα και είναι ένα αναπόσπαστο τμήμα της διδασκαλίας, ιδιαιτέρως της Γεωμετρίας, καθώς μέσα από την κατασκευή αποδείξεων αναλύεται, οργανώνεται και οικοδομείται η γεωμετρική γνώση. Ωστόσο, όπως επιβεβαιώνεται από την ίδια την ιστορία των μαθηματικών, τις έρευνες στον τομέα της απόδειξης και τη σχολική πρακτική η διδασκαλία και εκμάθηση της απόδειξης συναντά σημαντικές δυσκολίες σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Τις τελευταίες δεκαετίες ένα σημαντικό μέρος της ερευνητικής κοινότητας έχει στρέψει το ενδιαφέρον της στην συμβολή της οπτικοποίησης, άμεσα άλλωστε συνυφασμένης με την ίδια τη φύση της Γεωμετρίας, στη διδασκαλία και το ρόλο που αυτή μπορεί να διαδραματίσει στην επιχειρηματολογία και τη δόμηση των αποδείξεων. Επιπλέον, η ραγδαία ανάπτυξη των νέων τεχνολογιών και οι προτάσεις για ενσωμάτωση των λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας ως εργαλεία οπτικοποίησης στη μαθησιακή διαδικασία, με στόχο την ενίσχυση της κατανόησης και κατασκευής των γεωμετρικών αποδείξεων από τους μαθητές, εγείρουν προβληματισμούς που οι ερευνητές καλούνται να εξετάσουν.

Αντιμετωπίζοντας την αποδεικτική διαδικασία ως ένα σύνολο επιχειρημάτων που πρέπει να ενυπάρχουν σε κάθε μαθηματικό εγχείρημα, στόχος της παρούσας έρευνας είναι να διερευνήσει την εξέλιξη του γεωμετρικού συλλογισμού κατά την αποδεικτική διαδικασία, μέσα από το πρίσμα της οπτικοποίησης. Ιδιαιτέρως η ενασχόληση με μη-τυπικά γεωμετρικά προβλήματα ενθαρρύνει τους μαθητές να διαμορφώσουν εικασίες, να διερευνήσουν και να επιχειρηματολογήσουν για την ορθότητά τους και τέλος, να συνθέσουν μια τυπική μαθηματική απόδειξη. Η ανάλυση της επιχειρηματολογίας των μαθητών είναι μια προσπάθεια εξαγωγής συμπερασμάτων για τον τρόπο συμβολής της οπτικοποίησης στην αποδεικτική διαδικασία, τόσο σε οπτικούς όσο και σε μη οπτικούς μαθητές.

Η εργασία δομείται σε τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης και περιλαμβάνει μια αναδρομή στις κύριες θεωρίες ανάπτυξης του γεωμετρικού συλλογισμού, την σχέση μεταξύ οπτικοποίησης και Γεωμετρίας και ολοκληρώνεται με την σύνδεση της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης μέσα από την οπτική προσέγγιση. Στο δεύτερο μέρος αναλύεται διεξοδικά η μεθοδολογία της έρευνας, η οποία πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις. Τέλος, στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα και συμπεράσματα της έρευνας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Θεωρίες Ανάπτυξης του Γεωμετρικού Συλλογισμού

1.1.1 Εισαγωγή: Η φύση της Γεωμετρίας

Η Γεωμετρία είναι ένα πολύπλοκα συνδεδεμένο δίκτυο εννοιών, συλλογισμών και αναπαραστασιακών συστημάτων που στόχο έχουν να δομήσουν εννοιολογικά και αναλύσουν τα φυσικά και φανταστικά χωρικά περιβάλλοντα (Battista, 2007). Ο γεωμετρικός συλλογισμός περιλαμβάνει, πάνω απ' όλα, τη δημιουργία και χρήση τυπικών εννοιολογικών συστημάτων για να διερευνηθούν το σχήμα και ο χώρος.

Η γεωμετρική σκέψη συνδέεται άμεσα με τον χωρικό συλλογισμό, δηλαδή την ικανότητα να «δει» κανείς, να διερευνήσει και να αναστοχαστεί πάνω σε χωρικά αντικείμενα, νοερές εικόνες, σχέσεις και μετασχηματισμούς. Επιπλέον, περιλαμβάνει την ικανότητα αποκωδικοποίησης των νοητικών αυτών διεργασιών με οπτικό τρόπο και την κωδικοποίησή τους σε άλλης μορφής νοητικούς χειρισμούς. Κατ' επέκταση η σημασία του χωρικού συλλογισμού δεν είναι μόνο να τροφοδοτεί με δεδομένα τη γεωμετρική σκέψη, αλλά και να παρέχει όλα τα απαραίτητα γνωστικά εργαλεία για τη γεωμετρική ανάλυση.

Όσον αφορά στη δομή της χωρικής ικανότητας οι απόψεις που συναντώνται στη βιβλιογραφία διίστανται σχετικά με την μονοδιάστατη ή μη οντότητα του χωρικού συλλογισμού. Ο Γαγάτσης (2008) παρουσιάζει τις απόψεις μια σειράς ερευνητών (McGee, Linn & Peterson, Lohmann, Kimura) που ορίζουν την ικανότητα αντίληψης των εννοιών του χώρου μέσω μιας σειράς παραγόντων που δίνουν έμφαση σε διαφορετικές πτυχές της διαδικασίας. Ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που εντοπίζεται στις περισσότερες μελέτες είναι η οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου που αναφέρεται στην ικανότητα αντίληψης και νοερού χειρισμού των γεωμετρικών αντικειμένων.

Οι ερευνητές συχνά αναγνωρίζουν δύο είδη γεωμετρικών αντικειμένων, το σχέδιο (drawing), στο οποίο αποδίδουν υλική οντότητα, και το σχήμα (figure), το οποίο νοείται ως θεωρητικό αντικείμενο. Ο Battista (2007) αντιλαμβάνεται τα γεωμετρικά αντικείμενα ως νοητές οντότητες οι οποίες εμπλέκονται συνειδητά ή μη στο γεωμετρικό συλλογισμό. Αναγνωρίζει δε πέντε είδη τέτοιων αντικειμένων που σχετίζονται με τη γεωμετρική και χωρική σκέψη: το φυσικό αντικείμενο, το αντικείμενο των αισθήσεων, το αντικείμενο αισθητηριακής αντίληψης (νοητική

εικόνα), το εννοιολογικό αντικείμενο και τον ορισμό της έννοιας. Οτιδήποτε δεν εμπίπτει στα παραπάνω είδη αποτελεί μια αναπαράσταση.

Γίνεται κατανοητό από τα παραπάνω ότι η Γεωμετρία είναι άρρηκτα συνυφασμένη με τον γεωμετρικό συλλογισμό. Στη βιβλιογραφία συναντώνται ποικίλες απόψεις και θεωρίες σχετικά με την εξέλιξή του και το ρόλο του στη σχολική πρακτική. Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται μια εξελικτική πορεία των κυριότερων θεωριών ανάπτυξής του, ξεκινώντας από τα στάδια γεωμετρικής κατανόησης του Piaget και ολοκληρώνεται με το γνωστικό μοντέλο του Duval.

1.1.2 Στάδια Γεωμετρικής Κατανόησης του Piaget

Ο ψυχολόγος και φιλόσοφος Jean Piaget, του οποίου το όνομα ταυτίστηκε με την Γενετική Επιστημολογία, υποστήριξε ότι η γνωστική ανάπτυξη του ατόμου ακολουθεί μια προκαθορισμένη πορεία η οποία χαρακτηρίζεται από τέσσερα διαφορετικά στάδια: το αισθησιοκινητικό, το προεννοιολογικό, το στάδιο των συγκεκριμένων λογικών ενεργειών και το στάδιο των τυπικών λογικών ενεργειών. Δεδομένου ότι ο όρος στάδιο χρησιμοποιείται στην αναπτυξιακή ψυχολογία για να υποδηλώσει ποιοτικές αλλαγές στον τρόπο οργάνωσης της συμπεριφοράς του ατόμου, κάθε στάδιο αποτελείται από διαφορετική δομή γνώσης και χαρακτηρίζεται από διαφορετικές συμπεριφορές.

Η μελέτη των J. Piaget και B. Inhelder (1967) προσέγγισε την ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού και της αποδεικτικής διαδικασίας μέσα από τρία στάδια γεωμετρικής κατανόησης που συμπίπτουν με τη βιολογική ανάπτυξη των μαθητών. Σύμφωνα με τον Piaget, η ικανότητα κατασκευής μιας τυπικής απόδειξης περνά από διάφορα στάδια, αναπτύσσεται με την πάροδο του χρόνου και συνδέεται με τα στάδια γνωστικής ανάπτυξης (Clements & Battista,1992).

Τα στάδια κατανόησης του Piaget συνοψίζονται ως εξής (Piaget & Inhelder, 1967, Battista & Clements, 1995):

Στάδιο1: Στο στάδιο αυτό η σκέψη των μαθητών ηλικίας 7 ή 8 ετών στερείται αναστοχασμού, συστηματικότητας και λογικής. Η συλλογή των πληροφοριών που διαθέτουν επεξεργάζεται ανεξάρτητα χωρίς να γίνονται συνδέσεις, η εξερεύνηση γίνεται κατά τρόπο τυχαίο χωρίς συγκεκριμένο πλάνο, ενώ τα συμπεράσματα μπορεί συχνά να είναι αντιφατικά. Στο τέλος του σταδίου αυτού η σκέψη των μαθητών κατευθύνεται ώστε οι ιδέες να αρχίσουν να ενσωματώνονται σε ένα πιο ενοποιημένο πλαίσιο.

Στάδιο2: Στο στάδιο αυτό βρίσκονται μαθητές των ηλικιών 7-8 έως 11-12 ετών. Οι μαθητές αρχίζουν να διατυπώνουν υποθέσεις και προσπαθούν να αιτιολογήσουν τους συλλογισμούς τους. Παρόλα αυτά, κάνουν εκτιμήσεις και αιτιολογούν λογικά μόνο όταν τα επιχειρήματά τους επαληθεύονται από όσα τους είναι ήδη γνωστά από τον εμπειρικό κόσμο.

Στάδιο3: Στο τελευταίο στάδιο, οι μαθητές ηλικίας 11-12 ετών και άνω αντιλαμβάνονται την αναγκαιότητα της λογικής απόδειξης. Είναι σε θέση να αναπτύξουν παραγωγικούς συλλογισμούς βασισμένοι στις υποθέσεις και κατ' επέκταση είναι ικανοί να χειριστούν ένα μαθηματικό σύστημα.

Η μετάβαση από το ένα στάδιο στο επόμενο έχει διαπραγματευτικό χαρακτήρα, συνδέεται άμεσα με την κοινωνική αλληλεπίδραση και προϋποθέτει την επικοινωνία και την επιχειρηματολογία ως μέσο για την επίτευξη γνωσιακών και μαθησιακών στόχων. Σύμφωνα με τον Piaget «η απόδειξη είναι αποτέλεσμα αντιπαράθεσης» καθώς η επικοινωνία των σκέψεων μας είναι αυτή που παράγει την αμφιβολία και ενισχύει την επιθυμία για απόδειξη (Piaget 1924, αναφορά στους Battista & Clements,1995). Συνεπώς, η επαφή μεταξύ των μαθητών βοηθά να συνειδητοποιήσουν τις σκέψεις τους, να κατανοήσουν τους ορισμούς των εννοιών που χρησιμοποιούν και να αποκτήσουν την ικανότητα ενδοσκόπησης των νοητικών τους διεργασιών με απώτερο στόχο την κατασκευή μιας ακολουθίας λογικών επιχειρημάτων χωρίς ασυνέπειες.

Η θεωρία του Piaget περιγράφει τον τρόπο που η σκέψη γενικότερα εξελίσσεται από μη συστηματική σε εμπειρική και τέλος σε λογική-παραγωγική. Ειδικότερα, η θεωρία των Van Hieles ασχολείται με την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης διαμέσου διαφόρων επιπέδων νόησης υπό την επίδραση του αναλυτικού προγράμματος σπουδών.

1.1.3 Μοντέλο των Επιπέδων Γεωμετρικής Σκέψης των Van Hieles

Το μοντέλο της Γεωμετρικής Σκέψης των Van Hieles αποτελεί ένα πλαίσιο περιγραφής της εξέλιξης της γεωμετρικής σκέψης και ειδικότερα της παραγωγής γεωμετρικών εννοιών και μαθηματικών συμπερασμάτων μέσα από την προσέγγιση πέντε βασικών επιπέδων σκέψης από τα οποία διέρχονται οι μαθητές κατά τη πορεία τους από την απλή αναγνώριση του σχήματος μέχρι την ικανότητα σύνθεσης μιας τυπικής γεωμετρικής απόδειξης (Van Hiele, 1986). Σύμφωνα με τη θεωρία Van Hiele η μάθηση αντιμετωπίζεται ως μια ασυνεχής διαδικασία που χαρακτηρίζεται από ποιοτικώς διαφορετικά επίπεδα σκέψης, τα οποία ακολουθούν συγκεκριμένη σειρά και είναι αυστηρά ιεραρχημένα (Battista, 2007). Κατά τον Usiskin (1982) η

θεωρία συνοψίζεται σε τρεις βασικές πτυχές: την ύπαρξη των πέντε διακριτών επιπέδων σκέψης, τις ιδιότητες κάθε επιπέδου και τις συνθήκες μετάβασης από κάθε επίπεδο στο αμέσως επόμενο.

Τα πέντε επίπεδα γεωμετρικού συλλογισμού κατά Van Hiele, που μπορούν να φτάσουν έως και τα οκτώ διακριτά επίπεδα σύμφωνα με άλλους μελετητές, περιγράφονται ως εξής (Clements & Battista,1992 , Γαγάτσης, 2008):

-***Επίπεδο 0 (Επίπεδο προ-Αναγνώρισης/*** *Pre-recognition):* Οι Clements & Battista (1992) πρότειναν την ύπαρξη του «προ-αναγνωριστικού» επιπέδου 0, το οποίο προηγείται του Οπτικού Επιπέδου 1. Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές αναγνωρίζουν μόνο ένα υποσύνολο των οπτικών χαρακτηριστικών ενός σχήματος και αδυνατούν να αναγνωρίσουν τα κοινά σχήματα.

-***Επίπεδο 1 (Οπτικό Επίπεδο ή Επίπεδο Ολικής Ανάλυσης/*** *Visual):* Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα σχήματα ως ενιαίες ολότητες και δεν αποδίδουν σε αυτά γεωμετρικές ιδιότητες. Η αναγνώρισή των γεωμετρικών μορφών γίνεται οπτικά συνεπώς η αναπαράστασή τους είναι νοητική με τη μορφή οπτικών εικόνων. Στο επίπεδο αυτό κυριαρχεί η αντίληψη και όχι ο συλλογισμός.

-***Επίπεδο 2 (Περιγραφικό ή Αναλυτικό Επίπεδο/*** *Descriptive-Analytic):* Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα σχήματα ως σύνολο ιδιοτήτων. Είναι σε θέσει πλέον να ανακαλύψουν, να περιγράψουν και να ονομάσουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, όχι όμως να τις ορίσουν τυπικά ή να διακρίνουν τις σχέσεις ανάμεσά τους. Καθοριστικό εργαλείο στο επίπεδο αυτό αποτελεί η γλώσσα που χρησιμοποιείται.

-***Επίπεδο 3 (Άτυπο Παραγωγικό Επίπεδο/*** *Abstract-Relational):* Οι μαθητές διατάσσουν λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους, αντιλαμβάνονται τον ρόλο του ορισμού, διακρίνουν τις επαρκείς και αναγκαίες συνθήκες που απαιτούνται για μια έννοια και προβάλλουν άτυπα επιχειρήματα προς αιτιολόγηση του συλλογισμού τους. Είναι σε θέση να αναπτύξουν απλές παραγωγικές συλλογιστικές διαδικασίες, αλλά όχι να κατανοήσουν ή να συνθέσουν μια τυπική απόδειξη.

-***Επίπεδο 4 (Τυπικό Αξιωματικό Επίπεδο/*** *Formal deduction):* Οι μαθητές αντιλαμβάνονται την παραγωγική διαδικασία ως ένα μέσο κατασκευής και ανάπτυξης της γεωμετρικής θεωρίας στα πλαίσια ενός συστήματος αξιωμάτων. Στο επίπεδο αυτό κατανοούν τη σημασία της αφαίρεσης, το ρόλο των ορισμών, των αξιωμάτων και των θεωρημάτων και ως εκ τούτου είναι ικανοί να αναπαράγουν και να συνθέσουν τυπικές γεωμετρικές αποδείξεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών η ουσιαστική μελέτη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που ξεκινά στην Α’ τάξη του Λυκείου προϋποθέτει και απαιτεί το συγκεκριμένο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.

-***Επίπεδο 5 (Αυστηρό/*** *Rigor-mathematical):* Οι μαθητές αναγνωρίζουν την ανάγκη για αυστηρότητα και πραγματοποιούν αφαιρετικούς παραγωγικούς συλλογισμούς. Στο επίπεδο αυτό είναι σε θέσει να κατανοήσουν τις μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες, να εργαστούν σε διάφορα αξιωματικά επίπεδα και να τα συγκρίνουν.

Παράλληλα με την ύπαρξη των επιπέδων, κυρίαρχο ρόλο στη θεωρία των Van Hieles κατέχουν και οι ιδιότητες τους (Usiskin, 1982). Συγκεκριμένα, τα επίπεδα κατανόησης ενός γεωμετρικού θεωρήματος είναι εκ φύσεως επαγωγικά. Ως εκ τούτου ένας μαθητής διέρχεται μέσα από διάφορα επίπεδα συλλογισμού και για να προωθηθεί σε ένα ανώτερο επίπεδο σκέψης πρέπει απαραιτήτως να έχει περάσει από το προηγούμενο (***σταθερή αλληλουχία****/fixed sequence*), ενώ παράλληλα οι ιδέες και έννοιες που εισάγονται και βρίσκονται σε λανθάνουσα κατάσταση σε κάθε επίπεδο συλλογισμού κατανοούνται πλήρως στο αμέσως επόμενο επίπεδο (***διαδοχικότητα****/ adjacency*). Επιπλέον, κάθε επίπεδο χαρακτηρίζεται από δικά του γλωσσικά σύμβολα και δίκτυα σχέσεων (***διάκριση****/ distinction*) κατ' επέκταση άτομα που παράγουν συλλογισμούς σε διαφορετικά επίπεδα είναι δύσκολο να αλληλοκατανοηθούν (***διαχωρισμός****/separation*).

Το πέρασμα από όλα τα επίπεδα κατά τρόπο διαδοχικό είναι υποχρεωτικό ενώ η επίτευξή του απαιτεί χρόνο και εμπειρία για την ανάπτυξη του κατάλληλου λεξιλογίου και των απαιτούμενων ειδών συλλογισμού. Οι Van Hieles (1986) διατείνονται πως η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εκμάθηση και ιδιαιτέρως στην αποδεικτική διαδικασία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έγκειται στο γεγονός ότι βρίσκονται σε επίπεδο κατώτερο από αυτό στο οποίο διδάσκονται ή το οποίο απαιτείται από το πρόγραμμα σπουδών, ισχυρισμός που επιβεβαιώνεται και από την έρευνα της Senk (1989). Συνεπώς, σε αντίθεση με τον Piaget, βασική πεποίθηση τους είναι ότι η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο δεν είναι μια φυσική διαδικασία, αλλά αποτέλεσμα κατάλληλης διδακτικής προσέγγισης και μεθοδολογίας καθώς η αποτυχία των μαθητών αποδίδεται στην έλλειψη της απαραίτητης γεωμετρικής εμπειρίας. Για τον λόγο αυτό ο Usiskin (1982) συγκαταλέγει τη μαθησιακή διαδικασία που οδηγεί στην πλήρη κατανόηση (***επίτευξη****/ attainment*) ανάμεσα στις χαρακτηριστικές ιδιότητες των επιπέδων.

Το θεωρητικό μοντέλο μαθησιακής διαδικασίας του P.M. Van Hiele (1959) που οδηγεί στην πλήρη κατανόηση στο επόμενο ανώτερο επίπεδο έχει πέντε φάσεις κατά προσέγγιση, όχι όμως με αυστηρή ακολουθία (Usiskin 1982, Mason, 2009):

-Στη ***φάση της διερεύνησης*** (inquiry) οι μαθητές εμπλέκονται σε διάλογο σχετικά με τη δραστηριότητα και το αντικείμενο μελέτης. Ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα να ελέγξει τις υπάρχουσες γνώσεις, ενώ παράλληλα τίθενται ερωτήματα και εισάγεται το κατάλληλο λεξιλόγιο με στόχο την εξοικείωσή τους με το γεωμετρικό αντικείμενο.

-Στη ***φάση του κατευθυνόμενου προσανατολισμού*** (directed orientation) οι μαθητές έρχονται σε επαφή και εξερευνούν το αντικείμενο μελέτης μέσα από προσεκτικά επιλεγμένες και δομημένες δραστηριότητες οι οποίες θα τους οδηγήσουν βαθμιαία στην ανακάλυψη δομών και εννοιών.

-Στην τρίτη ***φάση της έκφρασης- επεξήγησης*** (explanation) ο ρόλος του εκπαιδευτικού περιορίζεται στην εισαγωγή της κατάλληλης τεχνικής ορολογίας ενώ οι μαθητές περιγράφουν τα όσα έχουν ήδη διαπιστώσει, ανταλλάσουν απόψεις και αναπτύσσουν περισσότερο ακριβή γλωσσικά μέσα για να τις επεξηγήσουν.

-Η τέταρτη ***φάση της ελεύθερης διερεύνησης*** (free orientation) απαιτεί από τους μαθητές να επεξεργαστούν δραστηριότητες ελεύθερα, να χρησιμοποιήσουν τις δημιουργικές τους δυνατότητες και να λάβουν αποφάσεις καθώς καλούνται να αντιμετωπίσουν σύνθετες δραστηριότητες, με ανοικτούς στόχους και εναλλακτικές λύσεις.

-Τέλος, στη ***φάση της ολοκλήρωσης*** (integration) η νεοαποκτηθείσα γνώση ανακεφαλαιώνεται και ενσωματώνεται στο υπάρχον σύνολο γνώσεων και ικανοτήτων, δημιουργώντας ένα νέο πλέγμα σχέσεων.

Η φιλοδοξία των Van Hieles ήταν να προσφέρουν ένα γενικό πλαίσιο μέσα στο οποίο να γίνεται κατανοητή η ποικιλία των διαφορετικών τρόπων σκέψης των μαθητών, η εφαρμογή του οποίου να αυξήσει την αποτελεσματικότητα τόσο της διδασκαλίας όσο και των αναλυτικών προγραμμάτων γενικότερα. Παρόλα αυτά το μοντέλο Van Hiele πολύ σύντομα αποτέλεσε αντικείμενο έντονης κριτικής εξαιτίας της αυστηρότητάς του και ανέγειρε ερωτήματα σχετικά με την ακριβή φύση, τον αριθμό των επιπέδων και το κατά πόσο η διακριτότητά τους θεωρείται δεδομένη.

Το βασικότερο επιχείρημα είναι ότι η πρόοδος των μαθητών δεν φαίνεται να παρουσιάζει άλματα από το ένα διακριτό επίπεδο στο άλλο, αλλά αντιθέτως λαμβάνει χώρα με μικρά προοδευτικά βήματα (Battista, 2007). Έρευνες, μάλιστα, έχουν δείξει ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύσσουν παράλληλα διαφορετικά επίπεδα γεωμετρικού συλλογισμού (Battista, 2001, Lehrer et al, 1998). Επιπλέον, η έρευνα των Gutierrez & Jaime (1998) ανέδειξε ότι οι μαθητές μπορούν να έχουν διαφορετικό βαθμό κατοχής κάθε επιπέδου, που κυμαίνεται από χαμηλής μέχρι πλήρης κατανόησης, γεγονός που αποτελεί εμπόδιο τόσο στη μαθησιακή όσο και την αποδεικτική διαδικασία. Στη σχολική πραγματικότητα, η διάσταση των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης μεταξύ του διδάσκοντα και των μαθητών, που έχει επισημανθεί και από τους Van Hieles, συχνά αποτελεί τροχοπέδη για την πλήρη κατοχή ενός χαμηλότερου επιπέδου καθώς απαιτείται από αυτούς να απαντούν σε ένα υψηλότερο επίπεδο σκέψης χωρίς την κατάλληλη γεωμετρική εμπειρία προεξοφλώντας την «συρρίκνωση του επιπέδου».

1.1.4 Επίπεδα Γεωμετρικού Συλλογισμού κατά Battista

Ο Battista (2007) επεξεργάστηκε τα επίπεδα Van Hiele και πρότεινε ένα εναλλακτικό πλαίσιο μέσα στο οποίο να εντοπίζεται προσεκτικά η πρόοδος των μαθητών κατά τη μετάβασή τους από τις άτυπες διαισθητικές έννοιες των επίπεδων σχημάτων μέχρι το τυπικό εννοιολογικό σύστημα, βασισμένο σε ιδιότητες, που χρησιμοποιείται από τους μαθηματικούς. Η επεξεργασία αυτή διευρύνει σημαντικά τα επίπεδα των Van Hieles σε δύο περιοχές, την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης βασισμένης σε ιδιότητες των σχημάτων και της εξαγωγής συμπερασμάτων που σχετίζονται με τις ιδιότητες αυτές.

Αναλυτικότερα, τα επίπεδα του Γεωμετρικού Συλλογισμού και τα επιμέρους στάδια αυτών παρουσιάζονται ως εξής (Battista 2007, Borrow 2000):

-***Επίπεδο1 Εικονικός-Ολιστικός Συλλογισμός*** *(Visual-Holistic Reasoning):* Οι μαθητές αναγνωρίζουν, περιγράφουν και αιτιολογούν σχετικά με τα σχήματα και γενικότερα τα γεωμετρικά αντικείμενα, βασισμένοι στην εικόνα τους, αντιμετωπίζοντας τα ως οπτικές ολότητες. Συχνά αναφέρονται σε πρωτοτυπικές μορφές (ισχυρίζονται ότι ένα σχήμα είναι παραλληλόγραμμο επειδή "μοιάζει με πόρτα") ή επηρεάζονται από τον προσανατολισμό των σχημάτων (αναγνωρίζουν το τετράγωνο μόνο όταν οι πλευρές του είναι κάθετες και οριζόντιες). Διακρίνονται δε δύο στάδια τέτοιου συλλογισμού τα:

1.1 ***Στάδιο Αναγνώρισης*** (Pre-Recognition) κατά το οποίο οι μαθητές αδυνατούν να διακρίνουν κοινά σχήματα.

1.2 ***Στάδιο Αναγνώρισης*** (Recognition) κατά το οποίο αναγνωρίζουν σωστά πολλά κοινά σχήματα.

-***Επίπεδο2 Αναλυτικός-Συστατικός Συλλογισμός*** *(Analytic-Componential Reasoning):* Οι μαθητές προσεγγίζουν, αντιλαμβάνονται και προσδιορίζουν τα σχήματα περιγράφοντας τα επιμέρους στοιχεία τους και τις χωρικές σχέσεις μεταξύ αυτών. Η ανάλυση αυτή, ωστόσο, ποικίλει σε εμβάθυνση, ξεκινώντας από την άτυπη και ανακριβή ανάλυση του σταδίου 2.1 και καταλήγει στην τυπική γεωμετρική ανάλυση του σταδίου 2.3, το οποίο αντιστοιχεί στο επίπεδο2 του μοντέλου Van Hiele. Τα επιμέρους στάδια του συλλογισμού αυτού είναι τα εξής:

2.1 ***Στάδιο Οπτικού Συστατικού Συλλογισμού*** (Visual-informal componential reasoning) κατά το οποίο οι μαθητές αναφέρονται στα συστατικά και τις ιδιότητες των σχημάτων άτυπα και εικονικά. Οι περιγραφές τους, τόσο για τα συστατικά των σχημάτων (συχνά μετρούν τον αριθμό των πλευρών ή των γωνιών) όσο και για τις μεταξύ τους χωρικές σχέσεις (για παράδειγμα ισχυρίζονται ότι οι γωνίες πρέπει να είναι "τετράγωνες"), περιλαμβάνουν σχεδόν αποκλειστικά λεξιλόγιο που σχετίζεται με τις εμπειρίες τους από τον φυσικό κόσμο και ποικίλει όσον αφορά στην ακρίβεια, την συνοχή και την συνέπεια.

2.2 ***Στάδιο Άτυπου και μη επαρκή Τυπικού Συστατικού Συλλογισμού*** (Informal and insufficient-formal componential reasoning) κατά το οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν ένα συνδυασμό άτυπων και τυπικών χαρακτηρισμών για να περιγράψουν τις ιδιότητες των σχημάτων. Στους τυπικούς συλλογισμούς τους χρησιμοποιούν γεωμετρικές έννοιες και όρους που έχουν διδαχθεί, ωστόσο στο στάδιο αυτό δεν επαρκούν για τον πλήρη προσδιορισμό ενός σχήματος. Για παράδειγμα, μπορούν να ισχυριστούν ότι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τις "απέναντι πλευρές του ίσες" (λογικός ισχυρισμός) και τις "γωνίες του τετράγωνες" (άτυπος συλλογισμός). Αν και συχνά ανακαλούν ιδιότητες από κλάσεις σχημάτων, ο συλλογισμός τους εξακολουθεί να βασίζεται σε οπτικά δεδομένα και πολλές από τις περιγραφές τους είναι αποτέλεσμα απλής παρατήρησης των σχημάτων.

2.3 ***Στάδιο Τυπικού Συλλογισμού βασισμένου σε Ιδιότητες*** (Sufficient formal property-based reasoning) κατά το οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν αποκλειστικά γεωμετρικές έννοιες και ορολογία για να περιγράψουν και να δομήσουν εννοιολογικά τα σχήματα μέσα από ένα σύνολο ιδιοτήτων. Για παράδειγμα, στο στάδιο αυτό ο όρος «ορθογώνιο παραλληλόγραμμο» αναφέρεται σε μία κλάση σχημάτων η οποία περιέχει όλες τις κοινές ιδιότητες που οι μαθητές έχει συνδέσει με το σύνολο των ορθογωνίων. Ωστόσο, αυτό το σύνολο των ιδιοτήτων αποτελεί στο σημείο αυτό μία λίστα από όλα τα οπτικά χαρακτηριστικά που έχουν συνδεθεί με ένα συγκεκριμένο τύπο σχήματος, ασυσχέτιστων τόσο μεταξύ τους όσο και με τις υποκλάσεις τους, αν και ορθώς διατυπωμένων γεωμετρικά.

-***Επίπεδο3 Σχεσιακός-Συμπερασματικός Συλλογισμός βασισμένος σε Ιδιότητες*** *(Relational-Inferential Property-Based Reasoning)*: Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό κάνουν συσχετισμούς και εξάγουν συμπεράσματα αναφορικά με τις γεωμετρικές ιδιότητες των σχημάτων, ισχυριζόμενοι για παράδειγμα ότι "αν ένα σχήμα έχει την ιδιότητα Χ, έχει επίσης και την ιδιότητα Υ". Δημιουργούν ομάδες ιδιοτήτων, εξειδικεύουν τα σχήματα χωρίς απαραίτητα να ονομάζουν όλες τους τις ιδιότητες, διαμορφώνουν στοιχειώδης ορισμούς και διακρίνουν ανάμεσα σε ικανές και αναγκαίες συνθήκες. Σε αντίθεση με το προηγούμενο επίπεδο που οι μαθητές χρησιμοποιούν τις γεωμετρικές ιδιότητες, στο επίπεδο3 καλούνται να επεξεργαστούν και να χειριστούν τις ιδιότητες αυτές. Ο συλλογισμός αυτός διακρίνεται στα ακόλουθα στάδια:

3.1 ***Στάδιο Εμπειρικών Σχέσεων*** (Empirical relations) κατά το οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν εμπειρικά δεδομένα για να συμπεράνουν ότι αν ένα σχήμα έχει την ιδιότητα Χ, τότε έχει και την ιδιότητα Υ.

3.2 ***Στάδιο Ανάλυσης των Συστατικών*** (Componential Analysis) κατά το οποίο οι μαθητές αναλύουν κάθε σχήμα σε επιμέρους συστατικά, είτε σχεδιάζοντας τα είτε κατασκευάζοντάς τα νοητά, ώστε να συμπεράνουν πως όταν ένα σχήμα έχει μια ιδιότητα Χ, τότε και η ιδιότητα Υ πρέπει να ισχύει. Για παράδειγμα, οι μαθητές συμπεραίνουν πως αν ένα τετράπλευρο έχει όλες του τις γωνίες ορθές τότε πρέπει

οι απέναντι πλευρές του να είναι ίσες σχεδιάζοντας ένα ζεύγος άνισων πλευρών και παρατηρώντας οπτικά ότι οι γωνίες που σχηματίζονται δεν είναι ορθές.

3.3 ***Στάδιο των Λογικών Συνεπαγωγών*** (Logical Inference) κατά το οποίο οι μαθητές πραγματοποιούν λογικές συνεπαγωγές βασιζόμενοι σε ιδιότητες σχημάτων και όχι πλέον σε εικόνες. Για παράδειγμα, μπορεί κάποιος να ισχυριστεί ότι επειδή ένα τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές ίσες τότε οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. Στο στάδιο αυτό αρχίζουν να διατυπώνουν ισχυρισμούς απαραίτητους για την ιεραρχική ταξινόμηση των σχημάτων, όχι όμως σε επίπεδο ικανοποιητικό για να αναδομήσουν τα εννοιολογικά δίκτυα που αφορούν στα σχήματα. Παρόλα αυτά, η επιχειρηματολογία των μαθητών χαρακτηρίζεται "τοπικά λογική" καθώς ο παραγωγικός τους συλλογισμός βασίζεται σε προτάσεις που έχουν προηγουμένως γίνει αποδεκτές βάση εμπειρίας, διαίσθησης ή αυθεντίας.

3.4 ***Στάδιο Ιεραρχικών Ταξινομήσεων βασισμένων σε λογικές συνεπαγωγές*** (Hierarchical shape classification based on logical inference) κατά το οποίο οι μαθητές αναδομούν και αναγνωρίζουν τη λογική ιεραρχία στην ταξινόμηση των σχημάτων και προβάλλουν λογικά επιχειρήματα για να δικαιολογήσουν την ιεράρχηση αυτή. Γίνεται πλέον σαφές όχι μόνο γιατί το τετράγωνο είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αλλά και το ότι είναι ένα απαραίτητο μέρος της επιχειρηματολογίας. Η νέα αυτή γνώση δεν πηγάζει αποκλειστικά από εμπειρικά και διαισθητικά δεδομένα, προκύπτει μέσα από παραγωγικό συλλογισμό.

-***Επίπεδο4 Τυπική Παραγωγική Απόδειξη*** *(Formal Deductive Proof):* Οι μαθητές κατανοούν και κατασκευάζουν τυπικές γεωμετρικές αποδείξεις. Στο πλαίσιο ενός αξιωματικού συστήματος, παράγουν μια ακολουθία επιχειρημάτων που αιτιολογούν λογικά ένα συμπέρασμα ως συνέπεια των δεδομένων. Επιπλέον αναγνωρίζουν διαφορές μεταξύ εννοιών, ορισμών , αξιωμάτων και θεωρημάτων.

1.1.5 Μοντέλο Γεωμετρίας των Houdement & Kuzniak

Σύμφωνα με τους Houdement & Kuzniak (2003) η προσέγγιση των Van Hieles, βασισμένη στην ανάπτυξη της κατανόησης του σχήματος και την επεξεργασία τους, είναι ως ένα βαθμό ορθή, ωστόσο αυστηρά γραμμική και ανεπαρκής για να ερμηνεύσει τα εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την εκμάθηση της Γεωμετρίας. Οι ίδιοι ανέπτυξαν ένα θεωρητικό πλαίσιο που στηρίζεται σε μια επιστημολογική προσέγγιση της γεωμετρίας, βασισμένη στη μελέτη τόσο της φιλοσοφίας όσο και των μαθηματικών και διδακτικών κειμένων, ενώ επισημαίνουν πως η μελέτη τους εκτός από θεωρητικές έχει και εμπειρικές προεκτάσεις από τη μακρόχρονη έρευνά τους πάνω στη διδασκαλία της γεωμετρίας και την κατάρτιση των εκπαιδευτικών.

Οι Houdement & Kuzniak (2003) προτείνουν ότι η στοιχειώδης γεωμετρία μπορεί να διακριθεί σε τρία διαφορετικά παραδείγματα γεωμετρίας ως εξής:

-***ΓεωμετρίαI (Εμπειρική Γεωμετρία*** */ Natural Geometry):* Συνδέεται άμεσα με τη διαίσθηση και τον πραγματικό φυσικό κόσμο. Η διαίσθηση συχνά ταυτίζεται με την άμεση αντίληψη και το βασισμένο σε πραγματικά εργαλεία πείραμα, όπως ο χάρακας καθώς τα αντικείμενα της Γεωμετρίας αυτής είναι υλικά αντικείμενα.

-***ΓεωμετρίαII (Εμπειρική Αξιωματική Γεωμετρία*** */ Natural Axiomatic Geometry):* Βασίζεται στους υποθετικούς παραγωγικούς νόμους που διέπουν το αξιωματικό σύστημα της, το οποίο ωστόσο δεν είναι ολοκληρωμένο καθώς προκύπτει από ένα σύνολο ορισμών και αξιωμάτων όσο το δυνατόν πλησιέστερο στον χώρο των αισθήσεων. Τα αντικείμενα της Γεωμετρίας αυτής είναι θεωρητικά καθώς απορρέουν από αξιώματα και ορισμούς.

-***ΓεωμετρίαIII (Τυπική Αξιωματική Γεωμετρία*** */ Formalist Axiomatic Geometry):* Το αξιωματικό της σύστημα δεν σχετίζεται πλέον με τον πραγματικό κόσμο και δεν στηρίζεται με οποιοδήποτε τρόπο στις αισθήσεις. Το είδος της συλλογιστικής είναι όμοιο με αυτό της Γεωμετρίας II αλλά το σύστημα των αξιωμάτων είναι πλήρες και ανεξάρτητο από ενδεχόμενες εφαρμογές στον πραγματικό κόσμο. Το μοναδικό κριτήριο της Γεωμετρίας αυτής είναι η συνέπεια (απουσία αντιφάσεων).

Ο παρακάτω πίνακας προσφέρει μια δυναμική αντιστοιχία της θεωρίας των Van Hieles με την προσέγγιση των Houdement & Kuzniak.

<table>
<tr><th></th><th>ΓεωμετρίαI</th><th>ΓεωμετρίαII</th><th>ΓεωμετρίαIII</th><th></th></tr>
<tr><td>Επίπεδο 1
Οπτικό</td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td><td rowspan="3">Εμπειρική Βάση
(Διαίσθηση και πείραμα)</td></tr>
<tr><td>Επίπεδο 2
Περιγραφικό-Αναλυτικό</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Επίπεδο 3
Άτυπο Παραγωγικό</td><td colspan="2">Μετάβαση 1</td><td></td></tr>
<tr><td>Επίπεδο 4
Τυπικό Αξιωματικό</td><td></td><td colspan="2">Μετάβαση 2</td><td rowspan="2">Θεωρητική Βάση
(Παραγωγικός Συλλογισμός)</td></tr>
<tr><td>Επίπεδο 5
Αυστηρό</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

(Πίνακας 1.1: Αντιστοιχία της θεωρίας των Επιπέδων Van Hiele με το μοντέλο Γεωμετρίας των Houdement & Kuzniak)

Η ΓεωμετρίαI αντιστοιχίζεται στα τρία πρώτα επίπεδα Van Hiele που περιλαμβάνουν τη διαίσθηση, το πείραμα και τον συλλογισμό πάνω σε υλικά αντικείμενα, δηλαδή αντικείμενα ιδωμένα κάτω από φυσικούς περιορισμούς. Η Γεωμετρία II περιλαμβάνει το τυπικό αξιωματικό επίπεδο, παραμένει ωστόσο στο

στάδιο της μετάβασης καθώς η σύνδεσή της με τον φυσικό κόσμο εξακολουθεί να είναι σημαντική. Τέλος, η ΓεωμετρίαIII αποτελεί το αυστηρότερο επίπεδο απαλλαγμένο από τη σύνδεσή του με τη διαίσθηση. Γίνεται, λοιπόν, σαφές ότι το πέρασμα από τη μία Γεωμετρία στην άλλη είναι μία περίπλοκη διαδικασία και απαιτεί αλλαγή θεωρίας καθώς οι δύο μεταβάσεις είναι διαφορετικής φύσης. Η πρώτη αφορά τη φύση των αντικειμένων και του χώρου, ενώ αντιθέτως η τελευταία έχει περισσότερο επιστημολογικό χαρακτήρα.

Η προσέγγιση των Houdement & Kuzniak παρουσιάζει μια κοινή συλλογιστική με το πλαίσιο που προτάθηκε για τη διδασκαλία και εκμάθηση της Γεωμετρίας από την Μαθηματική Ένωση του Ηνωμένου Βασιλείου (1923) και συνοψίζεται περιληπτικά σε τρία στάδια. Το Στάδιο Α είναι διαισθητικό και κυριαρχεί η πειραματική εργασία, στο Στάδιο Β εισάγεται ο παραγωγικός συλλογισμός αλλά η διαίσθηση είναι αυτή που εξακολουθεί να γεφυρώνει τα λογικά χάσματα και τέλος, στο Στάδιο Γ κυριαρχεί η ακρίβεια και αυστηρότητα (Jones, 1998). Επομένως, και υπό αυτή τη θεωρητική προσέγγιση υποστηρίζεται η άποψη των Van Hieles πως η αρχική ενασχόληση με τη Γεωμετρία πρέπει να γίνεται με τρόπο διαισθητικό και διερευνητικό θέτοντας τις βάσεις για υψηλότερα επίπεδα αφαίρεσης (Van Hiele, 1986).

1.1.6 Θεωρία των Σχηματοποιημένων Εννοιών κατά Fischbein

Η διδασκαλία και η εκμάθηση της Γεωμετρίας είναι συνυφασμένη με την ύπαρξη του γεωμετρικού σχήματος. Μάλιστα, η χρησιμότητά του στην επίλυση μιας γεωμετρικής δραστηριότητας είναι αναμφισβήτητη καθώς προσφέρει τη διαισθητική βάση διερεύνησης των σχέσεων και ιδιοτήτων (Duval, 1995). Στο γεωμετρικό συλλογισμό, ωστόσο, το γεωμετρικό σχήμα, ως ένα νοητικό αντικείμενο, δεν αποτελεί ούτε μια καθαρή εικόνα ούτε μια καθαρή έννοια (Mariotti, 1997). Πλήθος ερευνών (Duval, 1988, Fischbein, 1993, Laborde, 1994 κα) διαπιστώνουν ότι σε κάθε σχήμα, συνυπάρχουν δύο βασικοί παράγοντες: η υλική του υπόσταση και οι αντίστοιχες νοερές αναπαραστάσεις που προκύπτουν από την οπτική του επεξεργασία (αντιληπτική προσέγγιση), καθώς και η εννοιολογική του υπόσταση βασισμένη στις ιδιότητες ενός αυστηρού αξιωματικού συστήματος (μαθηματική προσέγγιση).

Η έννοια του γεωμετρικού σχήματος κατά τον Fischbein (1993) εμπεριέχει τρεις κατηγορίες νοερών οντοτήτων: τον ορισμό (definition), την εικόνα (image) και την σχηματοποιημένη έννοια (figural concept). Κάθε γεωμετρικό σχήμα είναι κάτι παραπάνω από μία οπτική εικόνα ή μια γεωμετρική κατασκευή, αποτελεί μία νοερή δομή που κατέχει ταυτόχρονα εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Επισημαίνει

χαρακτηριστικά ότι τα αντικείμενα της έρευνας και των γεωμετρικών συλλογισμών είναι οι νοητικές οντότητες, οι αποκαλούμενες σχηματοποιημένες έννοιες, οι οποίες απεικονίζουν ταυτόχρονα ιδιότητες του χώρου (σχήμα, θέση, μέγεθος) και διαδικασίες εννοιολογικής φύσης, όπως αφαίρεση, γενίκευση, εξιδανίκευση. Για παράδειγμα, ένα τρίγωνο αποτελεί ταυτόχρονα ένα σχήμα, μια αναπαράσταση στο χώρο και μία έννοια που υπάγεται σε τυπικούς περιορισμούς. Όταν τα σχήματα και οι έννοιες εναρμονίζονται πλήρως σε μια σχηματοποιημένη έννοια, τότε επιτυγχάνεται το υψηλότερο επίπεδο του γεωμετρικού συλλογισμού (Fischbein & Nachlielli, 1998 αναφορά στον Γαγάτση, 2008).

(Σχήμα 1.2:Το γεωμετρικό σχήμα και οι νοερές του οντότητες σύμφωνα με τον Fischbein)

Συνεπώς, σε κάθε γεωμετρικό συλλογισμό ενυπάρχουν δύο ανεξάρτητες και καθορισμένες οντότητες, οι σχηματικές αναπαραστάσεις και οι ιδεατές γεωμετρικές έννοιες, οι οποίες οφείλουν να αλληλεπιδρούν ούτως ώστε να υποκινούν τη σκέψη. Υπό αυτήν την έννοια, οι δυσκολίες που συχνά αντιμετωπίζουν οι μαθητές στον χειρισμό γεωμετρικών καταστάσεων οφείλονται στη διάσταση ή τη ρήξη μεταξύ οπτικού και εννοιολογικού μέρους του αντικειμένου οδηγώντας τους σε αδιέξοδο (Mariotti, 1997).

1.1.7 Γνωστικό Μοντέλο του Duval

Ο Γάλλος ψυχολόγος Duval, σε αντίθεση με τη θεωρία των επιπέδων γεωμετρικού συλλογισμού των Van Hieles, εξετάζει τη γεωμετρική σκέψη μέσα από τη γνωστική της σκοπιά. Στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει τη λειτουργία ενός σχήματος υποστηρίζει ότι δεν υπάρχουν μόνο η αντιληπτική και η μαθηματική προσέγγιση καθώς διακρίνει τέσσερις τύπους κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος και παρουσιάζει ένα αυστηρά δομημένο πλαίσιο ανάλυσης τους (Duval, 1995, Jones,1998, Γαγάτσης, 2008):

(α) ***Αντιληπτική Κατανόηση*** *(perceptual apprehension):* Ο τύπος αυτός σχετίζεται με την αισθητηριακή κατανόηση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Αναφέρεται στην

συνολική κατανόηση του ως στατικής γεωμετρικής μορφής και την διάκριση υποομάδων του σχήματος, πιθανών άσχετων με την κατασκευή του.

(β) ***Σειριακή Κατανόηση*** *(sequential apprehension):* Η κατασκευή ή η περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος δεν εμπίπτει πλέον σε αισθητηριακούς νόμους, αλλά υπακούει σε μαθηματικούς και τεχνικούς περιορισμούς που υπαγορεύουν και ελέγχουν την κατασκευαστική πρακτική.

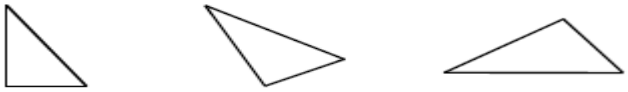
(γ) ***Λεκτική Κατανόηση*** *(discursive apprehension):* Ο ακριβής προσδιορισμός των μαθηματικών σχέσεων ενός γεωμετρικού σχήματος δεν είναι δυνατός μόνο μέσα από την αντιληπτική κατανόηση και απαιτεί επιπλέον εννοιολογικό υπόβαθρο και λεκτική διατύπωση.

(δ) ***Λειτουργική Κατανόηση*** *(operative apprehension):* Ο τύπος αυτός περιλαμβάνει φυσικούς ή νοητούς μετασχηματισμούς και αναδιοργάνωση του σχήματος που εξασφαλίζουν την κατανόηση σχέσεων μη ορατών από την αντιληπτική κατανόηση και υποστηρίζουν τη λύση ενός σύνθετου γεωμετρικού προβλήματος. Διακρίνονται δε τρία είδη τέτοιων μετασχηματισμών (Duval, 1999):

-***Μερολογικός*** *(mereologic)* στον οποίο το αρχικό σχήμα διασπάται σε επιμέρους και αναδιοργανώνεται σε ένα διαφορετικό ενιαίο σχήμα ή εμφανίζεται σε νέα υποσχήματα.

-***Οπτικός*** *(optic)* ο οποίος επιτρέπει την σμίκρυνση, μεγέθυνση ή αλλαγή προσανατολισμού ενός σχήματος χωρίς να έχει υποστεί κάποια αλλαγή. Επίπεδα σχήματα μπορούν να θεωρηθούν τοποθετημένα στον τρισδιάστατο χώρο ή να τους προσδοθεί η αίσθηση του βάθους.

-***Αλλαγή Θέσης*** *(place way)* η οποία επιτρέπει την αλλαγή του προσανατολισμού του σχήματος μόνο στο επίπεδο, αποτελώντας τον ασθενέστερο μετασχηματισμό.



Ουσιαστικά, αυτό το είδος κατανόησης διαφέρει από την στατική αντιληπτική κατανόηση καθώς το δοθέν σχήμα αποτελεί το εναρκτήριο σημείο ώστε ο μαθητής

να εξερευνήσει άλλους συσχετισμούς που μπορούν να γίνουν ορατοί μέσα από τους οπτικούς χειρισμούς, συσχετισμοί οι οποίοι μπορούν να αποτελέσουν την ευρετική στρατηγική για ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Η χάραξη μιας βοηθητικής γραμμής, για παράδειγμα, αποτελεί ξεκάθαρο δείγμα της λειτουργικής κατανόησης.

Επιπλέον, η λειτουργική κατανόηση δεν μπορεί να εμφανίζεται ανεξάρτητη από τις άλλες, σε αντίθεση με την αντιληπτική και λεκτική κατανόηση οι οποίες συχνά λειτουργούν αυτόνομα. Από διδακτικής σκοπιάς ο Duval υποστηρίζει ότι τα δύο τελευταία είδη πρέπει να προϋπάρχουν προτού ο μαθητής φτάσει στο στάδιο της λειτουργικής κατανόησης. Μάλιστα, η μαθηματική θεώρηση των σχημάτων πρέπει να θεωρείται αποτέλεσμα άρρηκτης συνεργασίας μεταξύ των διαφορετικών διαδικασιών κατανόησης σε βάθος χρόνου.

Εκτός από τους χειρισμούς των γεωμετρικών εικόνων και σχημάτων, η απόκτηση ενός υψηλού επιπέδου γεωμετρικού συλλογισμού προϋποθέτει επιπλέον την ύπαρξη τριών ειδών γνωστικών λειτουργιών:

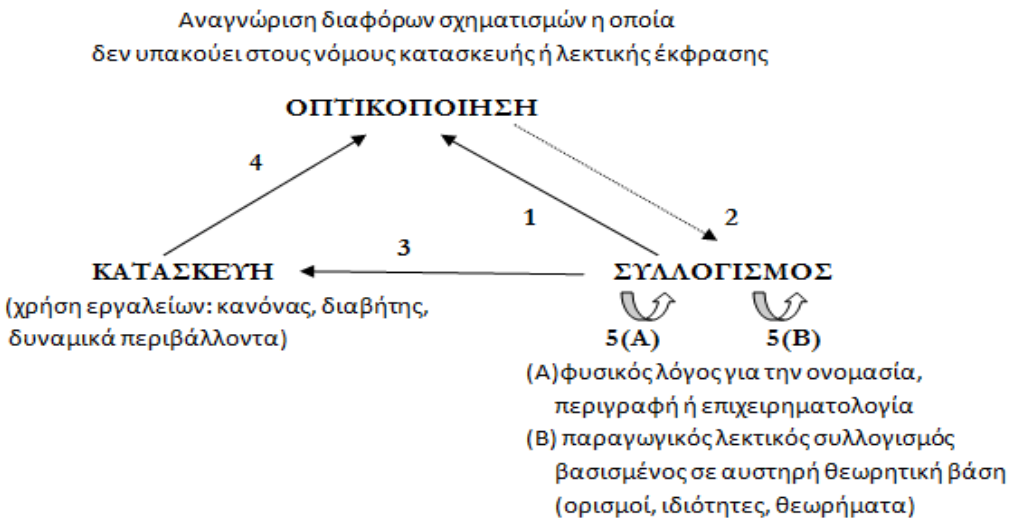
(1) ***Διαδικασίες Οπτικοποίησης*** *(visualization processes)*, όπως η οπτική αναπαράσταση μιας γεωμετρικής πρότασης. Διακρίνεται στην *εικονική* και την *μη-εικονική* οπτικοποίηση (Duval, 2004 αναφορά στον Γαγάτση, 2008). Κατά την εικονική οπτικοποίηση οι μαθητές αναγνωρίζουν ένα σχήμα ταυτίζοντάς το με τη πρωτοτυπική του μορφή, μπορούν να περιγράψουν τις ιδιότητές του αλλά όχι και να διακρίνουν σχέσεις μεταξύ τους. Επισημαίνεται δε ότι όταν η διδασκαλία της γεωμετρίας ξεκινά με την απλή αναγνώριση σχημάτων που βασίζεται στην οπτική αντίληψη οι μαθητές τείνουν να μένουν προσκολλημένοι σε αυτή τη μορφή οπτικοποίησης. Αντιθέτως, η μη-εικονική οπτικοποίηση καθιστά ικανούς τους μαθητές να προβούν σε οπτικές διασπάσεις και αναδιοργανώσεις των επιμέρους τμημάτων ενός σχήματος που επιτρέπουν την εξερεύνηση και επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος, λόγος για τον οποίο προτείνεται η ένταξη συναφών δραστηριοτήτων από την πρώτη σχολική ηλικία.

(2) ***Διαδικασίες Κατασκευής*** *(construction processes)* οι οποίες αναφέρονται στη χρήση φυσικών μαθηματικών εργαλείων, όπως ο κανόνας και ο διαβήτης, ή ακόμα βασικών εργαλείων ενός δυναμικού υπολογιστικού περιβάλλοντος.

(3) ***Διαδικασίες Συλλογισμού*** *(reasoning processes)* θεωρούνται οι γνωστικές διαδικασίες που ενεργοποιούνται κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Ουσιαστικά πρόκειται για λεκτικές, κυρίως, διαδικασίες που αφορούν στην επέκταση της γνώσης, την επεξήγηση και την απόδειξη.

Οι παραπάνω λειτουργίες μπορούν να υπάρξουν ως αυτόνομες διαδικασίες, όπως για παράδειγμα οι διαδικασίες οπτικοποίησης και κατασκευής. Χαρακτηριστικά, η οπτικοποίηση δεν οδηγεί απαραίτητα σε κάποια κατασκευή, αλλά ακόμα και όταν συμβαίνει οι διαδικασίες κατασκευής εξαρτώνται ουσιαστικά από τις σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών ιδιοτήτων και των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν. Ωστόσο, σύμφωνα με τον Duval οι τρεις γνωστικές διαδικασίες είναι στενά συνδεδεμένες και η συνεργασία τους κρίνεται απαραίτητη για την κατάκτηση της Γεωμετρίας. Επισημαίνει, δε ότι στο πλαίσιο του αναλυτικού προγράμματος σπουδών θα πρέπει οι τρεις διαδικασίες να αναπτύσσονται ξεχωριστά, ενώ οι δραστηριότητες θα πρέπει να υποστηρίζουν ποικιλία διαδικασιών οπτικοποίησης και διαφορετικές διαδικασίες συλλογισμού (Jones, 1998).

Το δίκτυο των σχέσεων και συνδέσεων μεταξύ των γνωστικών λειτουργιών κατά την ενασχόληση με μια γεωμετρική δραστηριότητα μπορεί να περιγραφεί με το παρακάτω σχήμα. Η διαδρομή 2 σημαίνεται με κουκίδες για να επισημάνει ότι η οπτικοποίηση δεν υποστηρίζει πάντα την επιχειρηματολογία, ενώ αντίστοιχα οι διαδρομές 5Α και 5Β διευκρινίζουν ότι η επιχειρηματολογία μπορεί να αναπτυχθεί ανεξάρτητα από τις άλλες δύο λειτουργίες.



(Σχήμα 1.3: Δίκτυο γνωστικών αλληλεπιδράσεων στη γεωμετρική δραστηριότητα)

1.2 Οπτικοποίηση και Γεωμετρία

1.2.1 Εισαγωγή: Ιστορική αναδρομή στην οπτική προσέγγιση

Η έννοια της οπτικοποίησης δεν αποτελεί εφεύρεση και ενδιαφέρον των τελευταίων ετών. Όπως επισημαίνει ο Rival (1987) τα διαγράμματα εμφανίζονται τόσο παλιά στην ιστορία των Μαθηματικών, όσο αυτά καθαυτά τα μαθηματικά. Εξαιρουμένης της Γεωμετρίας, που ανέκαθεν ήταν έντονα συνυφασμένη με τη χρήση των εικόνων, πολλοί κλάδοι των μαθηματικών βασίστηκαν στη χρήση διαγραμμάτων προκειμένου να αναπτυχθούν και να εξελιχθούν.

Για τους Πυθαγόρειους η οπτικοποίηση ήταν σύμφυτη με την εξάσκηση των μαθηματικών. Οι πρώτοι κιόλας Πυθαγόρειοι για την μελέτη των αριθμών και των μεταξύ τους σχέσεων συνήθιζαν να τους αναπαριστούν με βότσαλα και μικρές πέτρες τοποθετημένες κατάλληλα σε μια επίπεδη επιφάνεια. Για τον Πλάτωνα οι μόνες απόλυτα πραγματικές οντότητες είναι οι ιδέες και αυτές μπορούν να γνωσθούν άμεσα, γνώση που πολλές φορές είναι δύσκολη έως αδύνατη χωρίς τη βοήθεια της αισθητηριακής αντίληψης. Ιδιαίτερα εμφατικός για το ρόλο της εικόνας, τονίζει ότι η χρήση σχημάτων, γραμμών και εικόνων σχετίζεται με την αισθητηριακή παρατήρηση και υποβοηθά την ανακάλυψη και σύλληψη των ιδεών (Αναπολιτάνος, 2005). Επιπλέον, η αναλογική μέθοδος χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα από τον Αρχιμήδη ως ένα θεμελιώδες εργαλείο για τις μαθηματικές του ανακαλύψεις, αλλά και από μεταγενέστερους μαθηματικούς όπως ο Bernoulli που πρότεινε μια αναλογική λύση στο πρόβλημα της βραχυστόχρονης καμπύλης (Acta Eruditorum, Ιούνιος 1696).

Ο Λογισμός του 17^{ου} αιώνα γεννιέται και αναπτύσσεται με έντονες τις επιρροές του οπτικού στοιχείου, σε μια συνεχή αλληλεπίδραση με τα γεωμετρικά προβλήματα. Η δημιουργία, άλλωστε, της Αναλυτικής Γεωμετρίας αποτελεί ίσως μια προσπάθεια συνδυασμού της Γεωμετρίας των αρχαίων Ελλήνων, άρρηκτα συνδεδεμένης με τη χρήση εικόνων, και της καλά δομημένης άλγεβρας της εποχής εκείνης (Guzman, 2002). Ο Descartes στο έργο του Regulae ad directionem ingenii, περιγράφει κανόνες που ευκρινώς εμπεριέχουν διαδικασίες οπτικοποίησης, ενώ παράλληλα δίνει έμφαση στο διαφορετικό ρόλο που διαδραματίζουν οι εικόνες και τα διαγράμματα στην μαθηματική σκέψη. Ακόμη και ο Isaak Newton, στον οποίον αποδίδεται κατά το ήμισυ η «ανακάλυψη» του Απειροστικού Λογισμού, δεν απέδειξε τα θεμελιώδη θεωρήματά του σύμφωνα με τα πρότυπα των αυστηρών τυπικών αποδείξεων που έχουν επικρατήσει, αλλά χρησιμοποίησε ισχυρισμούς που βασίζονταν σε μεγάλο βαθμό στην εικόνα και τη διαίσθηση (Rival, 1987). Αλλά και ο πολύ νεότερός του Cauchy, συνήθιζε να διατυπώνει τις αρχές του αλγεβρικά και στη συνέχεια να τις δικαιολογεί γεωμετρικά θέλοντας να εξαφανίσει την άλγεβρα σαν

βάση του λογισμού, αποκηρύσσοντας έτσι την πρακτική της εποχής του (Γιαννακούλιας, 2006). Ο Davis (1993) σημειώνει πως «ο Lagrange έχει εκφράσει την πεποίθησή του ότι η ικανότητα της παρατήρησης είναι εξέχουσας σημασίας για τον μαθηματικό, ενώ ο Gauss έχει αποκαλέσει τα μαθηματικά επιστήμη της όρασης».

Στο τέλος του 18^{ου} αιώνα, η φιλόδοξη διαισθητική προσέγγιση των μαθηματικών μέσα από τη χρήση νοητικών εικόνων και διαγραμμάτων, παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων αντιμετωπίστηκε με δυσπιστία καθώς αποδείχτηκε σε ορισμένες περιπτώσεις ανακριβής και παραπλανητική. Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση της σχέσης των συνεχών και διαφορίσιμων συναρτήσεων. Ο Newton αντιμετωπίζοντας το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης ως μια συνεχή γραμμή χωρίς κενά, διαπίστωσε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση έχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο να είναι διαφορίσιμη. Ο Weierstrass (1872), ο οποίος και καθιέρωσε την αριθμητικοποίηση του απειροστικού λογισμού, απέδειξε την ύπαρξη μιας συνεχούς και σε κανένα σημείο διαφορίσιμης συνάρτησης με αποκλειστική χρήση αλγεβρικού συμβολισμού και κανενός απολύτως γραφήματος, δίνοντας στον απειροστικό λογισμό εκείνη τη λογική αυστηρότητα που οι δημιουργοί του αναζητούσαν για αιώνες. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο ίδιο συμπέρασμα είχε καταλήξει και ο Bolzano μερικές δεκαετίες νωρίτερα (1934) περιγράφοντας την συνάρτηση του όχι αλγεβρικά, αλλά με μία σειρά γραφημάτων που συνεχίζονταν απείρως, εργασία που δεν έγινε ευρέως γνωστή (Rival, 1987). Επιπροσθέτως, θεμελιώδεις έννοιες όπως αυτές του ορίου, της παραγώγου και του ολοκληρώματος εξακολουθούσαν να στερούνται κατάλληλου ορισμού. Η αμφισβήτηση του ρόλου της διαίσθησης στην μαθηματική ανακάλυψη συνέχισε να ενισχύεται από λανθασμένα ή ελλιπώς αποδεδειγμένα θεωρήματα όπως το Θεώρημα των Τεσσάρων Χρωμάτων ή το Θεώρημα κλειστών Καμπυλών του Jordan.

Η οπτική προσέγγιση τέθηκε υπό αμφισβήτηση ακόμα και για την ίδια τη Γεωμετρία. Η αμφιβολία γεννήθηκε γύρω από το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη, για το οποίο πολλοί μαθηματικοί αποπειράθηκαν να αποδείξουν ότι έπεται από τα προηγούμενα αιτήματα καταλήγοντας σε ισοδύναμα αξιώματα, απλούστερα στη διατύπωση και προφανέστερα στη διαίσθηση. Για δύο χιλιάδες χρόνια, κανείς δεν κατάφερε να προσφέρει μια αυστηρή απόδειξή του παρά την οπτική του απλότητα. Μόλις το 1832 και 1829, οι Bolyai και Lobachevsky αντίστοιχα, περιέγραψαν μια γεωμετρία στην οποία ισχύουν τα τέσσερα πρώτα αιτήματα του Ευκλείδη, όχι όμως και το πέμπτο. Και οι δύο συμμερίστηκαν την άποψη ότι η Υπερβολική Γεωμετρία, αν και δύσκολα γίνεται αντιληπτή διαισθητικά, μπορούσε να περιγράψει τον φυσικό κόσμο κατά τρόπο εξίσου επαρκή με την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Η συστηματική προσπάθεια για συνέπεια και αυστηρότητα κατά τη διάρκεια του 19^{ου} και 20^{ου} αιώνα είχε ως αποτέλεσμα ο φορμαλισμός και ο παραγωγικός

συλλογισμός να επικρατήσει ανάμεσα στα μέλη της μαθηματικής κοινότητας, ακόμα και στη μέθοδο διδασκαλίας πολλών χωρών καθώς αποτέλεσε την κυρίαρχη δομή των πανεπιστημιακών συγγραμμάτων και όχι μόνο. Στην εισαγωγή του εγχειριδίου μέσης εκπαίδευσης "Γραμμική Άλγεβρα και Βασική Γεωμετρία" του Jean Dieudonne συναντάται το απόσπασμα «Έχω αποφασίσει να μην εισάγω καμία εικόνα στο κείμενο… Είναι θεμιτό να απελευθερωθούν οι μαθητές από τον ζουρλομανδύα των παραδοσιακών εικόνων όσο το δυνατόν γρηγορότερα» (Guzman, 2002).

Τις τελευταίες δεκαετίες, παράλληλα με την ανάπτυξη της τεχνολογίας, παρατηρείται μια τάση ανανέωσης του ενδιαφέροντος για τον ρόλο της οπτικοποίησης στη μαθηματική δραστηριότητα, τη διδασκαλία και την εκμάθηση τόσο από μέρους των ερευνητών όσο και των διδασκόντων. Το 1988 ο Bishop παρουσίασε στο 12° Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) μια ανασκόπηση των ερευνών που είχαν προηγηθεί αναφορικά με την οπτικοποίηση στην μαθηματική εκπαίδευση. Έως και σήμερα, πλήθος αποτελεσμάτων σχετικά με την αποτελεσματικότητα της οπτικοποίησης στη μαθησιακή διαδικασία και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές , την αλληλεπίδραση της με την τεχνολογία και το ρόλο της στην απόδειξη έχουν δημοσιευθεί σε επιστημονικά περιοδικά και διεθνή συνέδρια (Presmeg, 2006).

1.2.2 Η δομή της οπτικοποίησης

Η λέξη οπτικοποίηση χρησιμοποιείται στον καθημερινό λόγο για να περιγράψει τον σχηματισμό μιας νοητικής εικόνας, ενώ παράλληλα πλήθος ερευνών στον τομέα της ψυχολογίας έχουν εστιάσει στην ικανότητα του υποκειμένου να σχηματίζει και να χειρίζεται τις εικόνες αυτές. Όσον αφορά στη μαθηματική οπτικοποίηση, ωστόσο, το ενδιαφέρον στρέφεται στην ικανότητα των μαθητών να σχεδιάζουν ένα κατάλληλο διάγραμμα για να αναπαραστήσουν μία μαθηματική έννοια ή ένα μαθηματικό πρόβλημα, και να χρησιμοποιούν το διάγραμμα αυτό ως όχημα για να επιτύχουν την κατανόηση. Για τους Zimmermann & Cunningham (1991) δεν έχει νόημα να μιλάμε για την οπτικοποίηση ενός διαγράμματος που σημαίνει απλά τον σχηματισμό μιας νοητικής του εικόνας, αλλά για την οπτικοποίηση ενός προβλήματος που συνεπάγεται την βαθύτερη κατανόησή του μέσα από ένα διάγραμμα ή μια οπτική εικόνα. Η σύνθετη δομή της έννοιας της οπτικοποίησης απαρτίζεται από τρείς βασικές συνιστώσες- τις νοητικές εικόνες, τις διαδικασίες και τις δεξιότητες της οπτικοποίησης- οι οποίες σχετίζονται με τη δημιουργία και τη χρήση των νοητικών αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας (Dreyfus, 1991).

Για την επιστήμη των μαθηματικών, ο όρος νοητική εικόνα (mental image) χρησιμοποιείται για να περιγράψει την νοερή κατασκευή ενός αντικειμένου με τη βοήθεια αντιληπτικών και διαισθητικών μέσων, για την κατασκευή της οποίας -σε αντίθεση με μια στατική εικόνα- ο νους κατέχει ενεργό ρόλο (Battista, 2007). Σύμφωνα, επίσης, με την Presmeg (2006) νοητική εικόνα καλείται το νοερό σχήμα που απεικονίζει μια οπτική ή χωρική μαθηματική πληροφορία, ορισμός ιδιαίτερα ευρύς ώστε να περιλαμβάνει όλες τις «εικόνες στο μυαλό». Συλλογές από τέτοιες εικόνες (imagery), τις οποίες οι μαθητές μπορούν να ανακατασκευάζουν, να μετασχηματίζουν και να αναλύουν, αποτελούν τα βασικά αντικείμενα που οδηγούν στην οπτικοποίηση και επιτρέπουν την πραγματοποίηση των απαραίτητων συνδέσεων.

Η Presmeg (2006), σε έρευνά της ανάμεσα σε 54 οπτικούς μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, διακρίνει πέντε τύπους εικόνων, που χαρακτηρίζονται από διαφορετικό τρόπο δημιουργίας και χειρισμού. Με φθίνουσα σειρά συχνότητας εμφάνισης αναγνώρισε : (α) *τις πραγματικές εικόνες (concrete image)* οι οποίες είναι στατικές, πλούσιες και λεπτομερείς και αποτυπωμένες στο μυαλό, (β) *τις μνημονικές εικόνες (memory images of formula)* οι οποίες αφορούν στην οπτική ανάκληση κάποιου μαθηματικού τύπου απομνημονευμένου από τα σχολικά εγχειρίδια ή τον πίνακα, (γ) *τις πρότυπες εικόνες (pattern images)* οι οποίες απεικονίζουν καθαρές σχέσεις που εμφανίζονται σε διαγράμματα όπως ο πολλαπλασιασμός καρτεσιανού γινομένου, (δ) *τις κιναισθητικές εικόνες (kinaesthetic images)* που δημιουργούνται ή μετασχηματίζονται ως αποτέλεσμα φυσικών κινήσεων ή δραστηριοτήτων και τέλος (ε) *τις δυναμικές εικόνες (dynamic images)* που δημιουργούνται στο μυαλό με την κίνηση ή τον μετασχηματισμό μιας στατικής εικόνας.

Μια ευρύτερη διάκριση προτείνεται από πολλούς μελετητές, ανάμεσά τους οι Lakoff & Johnson και Wheatley (Battista, 2007), οι οποίοι διαχωρίζουν τις συλλογές νοητικών εικόνων στις «πλούσιες» εικόνες (rich images) και τα εικονικά σχήματα (image schemata). Οι «πλούσιες» εικόνες είναι στατικές, καθορισμένες και περιεκτικές σε οπτικές πληροφορίες, σε αντίθεση με τα εικονικά σχήματα που αναπαριστάνουν χωρικές σχέσεις και μπορούν να μετασχηματιστούν ποικιλοτρόπως. Τα εικονικά σχήματα , δομές που ομοιάζουν σημαντικά με αυτές που η Presmeg αποκαλεί πρότυπες εικόνες, οργανώνουν τις νοητικές αναπαραστάσεις σε ένα επίπεδο περισσότερο γενικό και αφηρημένο από αυτό στο οποίο διαμορφώνονται συγκεκριμένες νοητικές εικόνες.

Η επεξεργασία των νοητικών εικόνων και η σύνδεσή τους με τα αναπαριστώμενα αντικείμενα πραγματοποιείται μέσα από δύο σχετικές διαδικασίες, όπως επισημαίνει ο Bishop (1983, αναφορά στον Γαγάτση, 2008): (α) *την **οπτική επεξεργασία πληροφοριών** (visual processing)* η οποία επιτρέπει την

μετατροπή των αφηρημένων και χωρίς σχήμα δεδομένων, σε οπτικές εικόνες, όπως και την μετατροπή των νοητικών εικόνων σε άλλης μορφής και (β) *την **ερμηνεία των πληροφοριών από σχήματα** (interpreting figural information)* που αναφέρεται στη διαδικασία ανάγνωσης, ανάλυσης και κατανόησης των διαφόρων αναπαραστάσεων του χώρου. Οι διαδικασίες αυτές μπορούν να υλοποιηθούν και να οδηγήσουν στη δόμηση μαθηματικών ιδεών και τη βαθύτερη κατανόηση, όταν οι μαθητές έχουν αναπτύξει συγκεκριμένες δεξιότητες αντίληψης του χώρου. Ο Del Grande (1987), ανακεφαλαιώνοντας τις εργασίες των Frostig & Horne (1964) και Hoffer (1977), αναφέρεται σε επτά δεξιότητες που φαίνεται να σχετίζονται με την ακαδημαϊκή ανάπτυξη της Γεωμετρίας:

- ***Αντίληψη του πλαισίου του σχήματος*** *(figure-ground perception)*: είναι η δεξιότητα αναγνώρισης ενός σχήματος, απομονώνοντάς το από ένα περίπλοκο σύνολο σχέσεων και μη σχετικών οπτικών ερεθισμάτων που συνυπάρχουν
- ***Αντιληπτική σταθερότητα*** *(perceptual constancy):* είναι η δεξιότητα αναγνώρισης των σταθερών και αναλλοίωτων ιδιοτήτων ενός σχήματος, όπως το μέγεθος και το σχήμα, ανεξάρτητα από τη θέση ή τον προσανατολισμό του και η ανάπτυξή της οφείλεται σε ένα βαθμό σε εμπειρίες που αποκτώνται μέσα από δραστηριότητες γεωμετρικής φύσης
- ***Αντίληψη της θέσης στο χώρο*** *(position-in-space perception):* είναι η δεξιότητα συσχέτισης ενός αντικειμένου, μιας εικόνας ή μιας νοητικής εικόνας στο χώρο
- ***Αντίληψη των σχέσεων στο χώρο*** *(perception of spatial relationship):* είναι η δεξιότητα συσχέτισης διαφορετικών αντικειμένων, εικόνων και νοητικών εικόνων μεταξύ τους
- ***Νοερή περιστροφή*** *(mental rotation):* είναι η δεξιότητα παραγωγής και διαμόρφωσης δυναμικών νοητικών εικόνων
- ***Οπτική διάκριση*** *(visual discrimination):* είναι η δεξιότητα σύγκρισης διαφορετικών μαθηματικών αντικειμένων, εικόνων και νοητικών εικόνων, και αναγνώρισης των ομοιοτήτων και διαφορών τους
- ***Οπτική μνήμη*** *(visual memory):* είναι η δεξιότητα ακριβούς ανάκλησης ενός αντικειμένου που δεν είναι πλέον ορατό και η συσχέτιση των χαρακτηριστικών του με άλλα αντικείμενα, ορατά ή μη

1.2.3 Η φύση και ο ρόλος της οπτικοποίησης

Παρόλο που οι σχέσεις μεταξύ της οπτικοποίησης, των νοητικών εικόνων και της μαθηματικής εκπαίδευσης έχει αποτελέσει το αντικείμενο πολλών ερευνών, δεν υπάρχει γενική συμφωνία σχετικά με την ορολογία που πρέπει να χρησιμοποιείται στον τομέα αυτό. Πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν το όρο «χωρική σκέψη» όταν αναφέρονται στην οπτικοποίηση, ενώ ο όρος «οπτική εικόνα» συναντάται στη

βιβλιογραφία με διαφορετικά νοήματα (Gutierrez, 1996). Ιδιαίτερη σύγχυση προκαλεί ο ορισμός της οπτικοποίησης αναφορικά με το αν αποτελεί μια εξωτερική πράξη ανάγνωσης εικόνων ή περιλαμβάνει περισσότερο σύνθετες εσωτερικές διαδικασίες.

Ο Guzman (2002) χαρακτηρίζει οπτικοποίηση την μελέτη των δυνατών διακριτών αναπαραστάσεων ενός αντικειμένου με σκοπό μια περισσότερο αποτελεσματική προσέγγιση των αφηρημένων σχέσεων που διέπουν το αντικείμενο. Διακρίνει τέσσερα είδη οπτικοποίησης, με αναφορές κυρίως στην Ανάλυση: την ισομορφική, την ομομορφική, την αναλογική και τη διαγραμματική. Ανάμεσά τους κυρίαρχη θέση καταλαμβάνει η ισομορφική οπτικοποίηση στην οποία τα αντικείμενα έχουν πλήρη αντιστοιχία με τις αναπαραστάσεις τους και κατ' επέκταση οι οπτικοί χειρισμοί ενός αντικειμένου μπορούν να μετασχηματιστούν σε αφηρημένες μαθηματικές σχέσεις. Στην ομομορφική οπτικοποίηση υπάρχουν στοιχεία της αναπαράστασης, που αν και δεν αντιστοιχίζονται πλήρως με τις σχέσεις μεταξύ των αφηρημένων αντικειμένων, προωθούν τις μαθηματικές διαδικασίες της εικασίας και απόδειξης. Ευρύτατα γνωστή στους μαθηματικούς ανά τους αιώνες, η αναλογική οπτικοποίηση έγκειται στην νοητή αντικατάσταση των μελετώμενων αντικειμένων με μαθηματικά αντικείμενα των οποίων η συμπεριφορά είναι γνωστή και ο χειρισμός περισσότερο προσιτός. Τέλος, η διαγραμματική οπτικοποίηση, περισσότερο συμβολική και υποκειμενική από τα άλλα είδη, αποτελεί την αναπαράσταση των νοητών αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων μέσω διαγραμμάτων που υποστηρίζουν τις μαθηματικές διεργασίες.

Ο Duval (1999) υποστηρίζει πως οπτικοποίηση είναι η δημιουργία μιας αναπαράστασης που επιτρέπει με μια μόνο ματιά την διάκριση και αναγνώριση του αναπαριστώμενου και επισημαίνει ότι δεν υπάρχει κατανόηση χωρίς οπτικοποίηση. Διακρίνει, επίσης, δυο είδη τέτοιων αναπαραστάσεων: τις σημειωτικές αναπαραστάσεις που παράγονται σκοπίμως από τη χρήση σημειωτικών συστημάτων, όπως εικόνες και διαγράμματα και τις φυσικές αναπαραστάσεις που προκύπτουν ακούσια με τρόπο φυσικό μέσα από όνειρα, φωτογραφίες ή αντανακλάσεις. Ο Bishop (1989) επισημαίνει ότι η ικανότητα της οπτικοποίησης περιλαμβάνει την μετάφραση των αφηρημένων σχέσεων και μη-σχηματοποιημένων πληροφοριών σε οπτικές αναπαραστάσεις και συλλογές εικόνων. Για την Presmeg (2006) η οπτικοποίηση περιλαμβάνει διαδικασίες κατασκευής και μετασχηματισμού τόσο των νοητικών συλλογών εικόνων όσο και όλων των αναπαραστάσεων χωρικής φύσης που εμπλέκονται στην ενασχόληση με τα μαθηματικά. Ο Arcavi (2003) προσεγγίζοντας την έννοια της οπτικοποίησης περισσότερο αφαιρετικά την αντιμετωπίζει ως μία μέθοδο «για να ειδωθεί το μη ορατό» στα δεδομένα, τα σύμβολα και τις λέξεις, την επίλυση προβλημάτων, ακόμα και την απόδειξη.

Ο ουσιαστικότερος, ωστόσο, ορισμός που σκιαγραφεί πλήρως όλες τις πτυχές τόσο της πολύπλοκης φύσης όσο και της σημασίας της οπτικοποίησης στη σχολική πρακτική, και υιοθετείται από τους Zimmermann & Cunningham (1991), Arcavi (2003), Hershkowitz et al. (1989), είναι ο εξής:

> Οπτικοποίηση είναι η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, ερμηνείας, χρήσης και αναστοχασμού πάνω σε σχέδια, εικόνες και διαγράμματα, στο μυαλό, το χαρτί ή τα δυναμικά περιβάλλοντα, με σκοπό την απεικόνιση και επικοινωνία πληροφοριών, την ανάπτυξη νέων ιδεών και την προαγωγή των νοημάτων.

Παράλληλα, η οπτικοποίηση συνδέεται στενά με τη διαισθητική προσέγγιση όπως γίνεται αντιληπτό από τις διάφορες θεωρίες ανάπτυξης του γεωμετρικού συλλογισμού, κυρίως του Fischbein και του Duval. Οι Zimmermann & Cunningham (1991) τονίζουν ότι η οπτικοποίηση είναι ανώτερη από την όραση (vision) καθώς εμπεριέχει την κατανόηση, και μάλιστα εκείνου του είδους την κατανόηση που προέρχεται από τη «διαίσθηση η οποία διαμορφώνεται μέσα από εικόνες στα μάτια του νου». Η διαίσθηση στην οποία αναφέρονται δεν πρόκειται για ένα επιφανειακό υποκατάστατο της κατανόησης, αλλά για το είδος της διαίσθησης που διαπερνά την καρδιά μιας ιδέας, δίνει βάθος και νόημα στην κατανόηση, χρησιμεύει ως αξιόπιστος οδηγός στην επίλυση προβλημάτων και εμπνέει δημιουργικές ανακαλύψεις. Οι Fujita, Jones & Yamamoto(2004) συμπληρώνουν ότι η γεωμετρική διαίσθηση, αν και δεν μπορεί να ορισθεί με ακρίβεια, περιλαμβάνει τη δημιουργία και χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων στο νου, την αναγνώριση γεωμετρικών ιδιοτήτων και την συσχέτιση των εικόνων με έννοιες και θεωρήματα της γεωμετρίας με σκοπό την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Κοινή συνισταμένη όλων των ορισμών που δίδονται αναφορικά με την έννοια της οπτικοποίησης είναι ο σημαντικός ρόλος που κατέχει στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών: δίνει νόημα στις μαθηματικές έννοιες και τις σχέσεις μεταξύ τους, οξύνει την κατανόηση των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, αποτελεί εργαλείο και οδηγό για την εξερεύνηση των μαθηματικών προβλημάτων, εμπνέει και ενισχύει την μαθηματική ανακάλυψη. Ο Fischbein χαρακτηριστικά υποστηρίζει ότι ο ρόλος μιας οπτικής εικόνας δεν είναι μόνο να οργανώνει τα δεδομένα σε δομές με νόημα, αλλά αποτελεί τον βασικό παράγοντα που καθοδηγεί την αναλυτική ανάπτυξη μιας μαθηματικής λύσης. Στο ίδιο πλαίσιο ο ρόλος της οπτικοποίησης είναι να υποστηρίζει και να οπτικοποιεί την φορμαλιστική γλώσσα των μαθηματικών, να γεφυρώνει το χάσμα ανάμεσα στις λογικές λύσεις και την λανθασμένη κατά πολλούς διαίσθηση, και κυρίως να αναδεικνύει και να επιλύει εννοιολογικά κενά ή παρερμηνείες που μια τυπική απόδειξη εύκολα παρακάμπτει (Arcavi, 2003).

Ιδιαίτερα αμφιλεγόμενος είναι ο ρόλος της οπτικοποίησης στη δόμηση των αυστηρών αποδείξεων καθώς πολλοί ερευνητές σημειώνουν ότι μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα ή να υποβαθμίσει την σημασία της απόδειξης . Οι Barwise & Etchemendy (1991) στον αντίποδα επισημαίνουν χαρακτηριστικά ότι:

> «Παρά την προφανή σημασία των οπτικών εικόνων στις ανθρώπινες γνωστικές δραστηριότητες, η οπτική αναπαράσταση παραμένει πολίτης δεύτερης κατηγορίας τόσο στη θεωρία όσο και στην πρακτική των μαθηματικών. Ιδιαιτέρως, όλοι έχουμε μάθει να απαξιώνουμε αποδείξεις που κάνουν σημαντική χρήση διαγραμμάτων, γραφημάτων ή άλλων μη-λεκτικών μορφών αναπαράστασης, περιφρόνηση την οποία κληρονομούμε στους μαθητές… Ωστόσο, οι οπτικές μορφές αναπαράστασης μπορεί να είναι σημαντικές ως νόμιμα στοιχεία μιας μαθηματικής απόδειξης».

Επιπλέον, η οπτική προσέγγιση αποτελεί τη βάση για τη δημιουργία εικασιών η αποδοχή ή απόρριψη των οποίων συμβάλει και καθοδηγεί τη δόμηση μιας φορμαλιστικής απόδειξης. Συνεπώς, ο οπτικός συλλογισμός δεν υποστηρίζει απλά την μαθηματική ανακάλυψη και απόδειξη, αλλά πρέπει να αναπτυχθεί ως ένα πλήρως αποδεκτός τρόπος συλλογισμού, συμπεριλαμβανομένων και των μαθηματικών θεωρημάτων (Dreyfus, 1991). Ο Rival (1987) δίνοντας έμφαση στην επικοινωνιακή πτυχή των αποδείξεων αναφέρει ότι η απόδειξη είναι ένα επιχείρημα που καταφέρνει να πείσει τους συνομιλητές και για να νοείται απόδειξη πρέπει να επιτυγχάνει και να διατηρεί την κοινωνική αποδοχή. Με την έννοια αυτή, λιγότερα αυστηρά επιχειρήματα που κάνουν χρήση διαγραμμάτων και απευθύνονται στη διαίσθηση, είναι μερικές φορές οι πιο επιτυχημένες αποδείξεις.

Τέλος, τα μαθηματικά έχουν χαρακτηριστεί ως η επιστήμη των κανονικοτήτων (Steen) ή ως η επιστήμη των αφηρημένων σχεσιακών ιδεών (Thomas), ορισμοί που αναδεικνύουν ότι η φύση των μαθηματικών συνδέεται άμεσα με τη γενίκευση αφηρημένων ιδεών γι’ αυτό και ο ρόλος της είναι εξέχουσας σημασίας για την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Η γενίκευση είναι μια γνωστική και δυναμική διαδικασία που περιλαμβάνει την αφαίρεση από ένα συγκεκριμένο περιεχόμενο, την αναγνώριση ομοιοτήτων, δομών και σχέσεων, την ανακατασκευή των μαθηματικών αντικειμένων και την αφομοίωσή τους σε ένα νέο ευρύτερο γνωστικό τομέα, τα αντικείμενα του οποίου παρουσιάζουν κοινά χαρακτηριστικά με το αρχικό περιεχόμενο. Η δημιουργία σχέσεων μεταξύ κανονικοτήτων (pattern) ανάμεσα σε διαφορετικές καταστάσεις ή παραδείγματα αποτελεί το επαγωγικό βήμα για τη διαμόρφωση του γενικού που οδηγεί στην ενοποίηση των γνώσεων και τη συσχέτιση εννοιών. Αν τα μαθηματικά είναι η επιστήμη των κανονικοτήτων είναι φυσικό κανείς να ψάχνει τους πιο αποτελεσματικούς τρόπους για να οπτικοποιεί τις κανονικότητες αυτές και να χρησιμοποιεί δημιουργικά την οπτικοποίηση για να επιτύχει την κατανόηση. Γίνεται, λοιπόν, σαφές ότι ο σπουδαιότερος ίσως ρόλος της οπτικοποίησης είναι να υποστηρίζει την γενίκευση μέσα από τη χρήση

αφηρημένων μορφών εικόνων, όπως οι πρότυπες ή οι δυναμικές εικόνες (Presmeg, 1999).

1.2.4 Οι δυσκολίες γύρω από την οπτικοποίηση

Φαίνεται να υπάρχει μία ευρεία συμφωνία ανάμεσα στα μέλη της μαθηματικής ερευνητικής κοινότητας σχετικά με την κεντρική σημασία της οπτικοποίησης στην εκμάθηση και την πρακτική των μαθηματικών, γεγονός που πηγάζει από την αναγνώριση της οπτικοποίησης όχι μόνο ως μέσου απλής αναπαράστασης αλλά και ως βασικού στοιχείου της συλλογιστικής, της επίλυσης προβλημάτων, ακόμη και της απόδειξης. Εξακολουθούν, βέβαια, να υπάρχουν πολλά ανοικτά ζητήματα σχετικά με την οπτικοποίηση στην μαθηματική εκπαίδευση που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία και χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής. Σύμφωνα με τους Eisenberg & Dreyfus (1991) οι δυσκολίες γύρω από την οπτικοποίηση μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες: τις πολιτισμικές, γνωστικές και κοινωνιολογικές.

Οι πολιτισμικές δυσκολίες αναφέρονται στις αξίες και πεποιθήσεις γύρω από το τί περιλαμβάνει η πρακτική των μαθηματικών, τί είναι νόμιμο και αποδεκτό και τί όχι, ειδικότερα σε ότι αφορά το αμφιλεγόμενο θέμα των οπτικών αποδείξεων. Η διαμάχη αυτή στους κόλπους της μαθηματικής κοινότητας και οι αυστηρές δηλώσεις «αυτό δεν είναι μαθηματικά» είναι πιθανό να διεισδύσει στην τάξη, μέσω του διδακτικού υλικού ή των εκπαιδευτικών, να διαμορφώσει την έμφαση και το πνεύμα τους και να οδηγήσει σε αυτό που η Presmeg αποκαλεί «υποτίμηση της οπτικοποίησης», αφήνοντας μικρά περιθώρια ενσωμάτωσης και αναβάθμισης της ως αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής πρακτικής. Την αναγκαιότητα της οπτικής προσέγγισης τονίζει ο Dreyfus (1991), ο οποίος υποστηρίζει ότι συχνά είναι αναπόφευκτο να καταφύγει κανείς στο σχήμα και να επιχειρηματολογήσει οπτικά καθώς δεν είναι δυνατόν να γίνει κατανοητή μια απόδειξη, όσο λεπτομερώς κι αν είναι αναπτυγμένη λεκτικά, αν δεν την «δει» έστω με τα μάτια του μυαλού. Ένα ακόμα ζήτημα εγείρει ο Fischbein (1999) σε έρευνά του η οποία αναδεικνύει ότι οι μαθητές δεν συμμερίζονται την ανάγκη να αποδείξουν με τρόπο αυστηρό έναν διαισθητικά προφανή ισχυρισμό, υποβαθμίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τη σημασία της τυπικής απόδειξης. Ο ίδιος, ωστόσο, αντιτείνει ότι η διαισθητική απόδειξη μιας ιδιότητας, που προκύπτει ενδεχομένως μέσω εικόνων, δεν αναιρεί την ανάγκη να λάβει μια τυπική μορφή σύμφωνη με την παραγωγική και φορμαλιστική δομή των μαθηματικών. Αντιθέτως, η διαισθητική αυτή προσέγγιση αποτελεί συχνά τη βάση πάνω στην οποία οικοδομείται μια αυστηρή απόδειξη.

Ένας ικανός αριθμός γνωστικών δυσκολιών που εντοπίζονται στη βιβλιογραφία μπορούν να διατυπωθούν σε μία απλοϊκή εκδοχή: κατά πόσο η οπτική προσέγγιση

είναι πιο εύκολη και πιο ασφαλής. Τόσο το υψηλό εννοιολογικό υπόβαθρο που απαιτεί η οπτικοποίηση όσο και η απουσία ασφαλών διαδικαστικών οδών που συχνά προσφέρει η συμβολική προσέγγιση αποθαρρύνει τους μαθητές και ενδεχομένως και τους εκπαιδευτικούς με το αιτιολογικό ότι είναι επισφαλής. Εμφανίζονται, δε, γνωστικά εξαρτημένοι από τους αλγορίθμους και τις διαδικασίες και αρνούνται να αναγνωρίσουν τα πλεονεκτήματα της οπτικοποίησης μιας μαθηματικής κατάστασης (Eisenberg & Dreyfus, 1991 , Rosken & Rolken, 2006). Έχει ήδη επισημανθεί ότι η οπτικοποίηση δεν είναι απλή όραση, το να βλέπει κανείς δεν σημαίνει απαραίτητα ότι κατανοεί. Τα λόγια του Goethe «δεν γνωρίζουμε αυτά που βλέπουμε, βλέπουμε αυτά που γνωρίζουμε» υπογραμμίζουν ακριβώς ότι η απόδοση νοήματος και η κατανόηση των διαγραμμάτων απαιτούν σύνθετες γνωστικές διαδικασίες αποκωδικοποίησης τους και εννοιολογικές δομές. Η πτυχή αυτή αναδεικνύει ότι η οπτικοποίηση μπορεί να είναι προφανής για έναν εκπαιδευτικό αλλά όχι για ένα μαθητή ή ακόμα ότι η απόδοση νοήματος μπορεί να διαφέρει μεταξύ των μαθητών. Ο Whiteley (2004) τονίζει ότι «από τη στιγμή που δημιουργούμε αυτό που βλέπουμε, μπορούμε και να αλλάξουμε αυτό που βλέπουμε» μέσα από συνεχή γνωστική καθοδήγηση και εξάσκηση. Παρόλα αυτά, ακόμη και όταν η οπτικοποίηση πληροί τις γνωστικές προϋποθέσεις είναι δυνατόν να προκύψει σύγκρουση ανάμεσα στη διαισθητική λύση και την ορθή λογική λύση δημιουργώντας παρερμηνείες ή λανθασμένα συμπεράσματα, γεγονός που επαληθεύεται από την ίδια την ιστορία των μαθηματικών. Η πιθανότητα, ωστόσο, να οδηγήσει σε λάθη δεν θα έπρεπε να μειώνει στο ελάχιστο τον ουσιαστικό της ρόλο και να αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα καθώς ακόμα και η φορμαλιστική προσέγγιση ενδέχεται να υποκρύπτει λάθη, πλάνες και ελλιπή συλλογισμό (Guzman, 2002).

Μια επιπλέον γνωστική δυσκολία αποτελεί η αδυναμία ευέλικτης μετάφρασης και μετακίνησης μεταξύ των οπτικών και αναλυτικών αναπαραστάσεων μιας έννοιας, διαδικασίες οι οποίες θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ο πυρήνας της μαθηματικής κατανόησης. Ο Dreyfus (1991) ανακεφαλαιώνοντας μια σειρά ερευνών σχετικών με την αντιμετώπιση δυσκολιών αναφέρεται στην έλλειψη δεξιότητας των μαθητών να δουν ένα διάγραμμα με διαφορετικούς τρόπους, στη δυσκολία να αναγνωρίσουν τους μετασχηματισμούς που υπονοούνται και κυρίως στην έλλειψη σύνδεσης μεταξύ οπτικοποίησης και αναλυτικής σκέψης. Οι Rosken & Rolka (2006) σε έρευνά τους σχετικά με τον γεωμετρικό ορισμό της έννοιας του ολοκληρώματος διαπιστώνουν ότι συχνά η οπτική προσέγγιση δεν οδηγεί σε ορθή λύση του προβλήματος καθώς στερείται γνωστικής ευελιξίας μεταξύ οπτικών και αλγοριθμικών τεχνικών. Κατ' επέκταση η γνωστή ρήση «μια εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις» αποκτά αξία μόνο όταν η εικόνα αποτελεί προϊόν στοχαστικής σκέψης και αφορμή για τη μετακίνηση μεταξύ πολλαπλών αναπαραστασιακών συστημάτων, ενώ ο Duval (1999) επισημαίνει ότι η επιτυχής οπτικοποίηση απαιτεί ειδική

εκπαίδευση για τον τρόπο οπτικοποίησης κάθε αναπαραστασιακού συστήματος. Γεγονός είναι ότι η κατανόηση και ο χειρισμός πολλαπλών αναπαραστάσεων αποτελεί μια μακρόπνοη, μη-γραμμική και δύσκολη διαδικασία για τους μαθητές, με αποτέλεσμα να καταφεύγουν στις λιγότερο απαιτητικές διαδικαστικές μεθόδους.

Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται και δυσκολίες που αφορούν αυτή καθ' αυτή τη χρήση των εικόνων. Οι Zodik & Zaslavsky (2007) εντοπίζουν ότι η ιδιαιτερότητα των διαγραμμάτων και η τάση των μαθητών να αντιλαμβάνονται συγκεκριμένα διαγράμματα ως πρότυπα περιορίζουν τις συλλογές εικόνων για κάποιο αντικείμενο ή έννοια και εγκλωβίζουν τη σκέψη σε πρωτοτυπικές μορφές. Παράλληλα, είναι γεγονός ότι οι μαθητές ακόμα και αν διαθέτουν ένα ευρύ φάσμα διακριτών αναπαραστάσεων προτιμούν τη χρήση πρωτοτυπικών μορφών εξαιτίας της εξοικείωσής τους με αυτές μέσα από τη διδασκαλία. Η εκτεταμένη, δε, χρήση στερεοτυπικών αναπαραστάσεων οδηγεί σε «γεωμετρική ακαμψία» (geometrical rigidity), δηλαδή αδυναμία νοητικής αναγνώρισης και χειρισμού γεωμετρικών σχημάτων που δεν συμπίπτουν με την πρωτοτυπική τους μορφή ή στα οποία εφαρμόζεται μια ισομετρία ή ένας μετασχηματισμός που εν μέρει ή πλήρως μεταβάλλει τη θέση του (Acuna & Larios, 2008). Μια ακόμη δυσκολία που παρατηρείται είναι η αδυναμία των μαθητών να «δουν» ένα διάγραμμα με διαφορετικούς τρόπους, να μετακινήσουν την προσοχή τους από συγκεκριμένα μέρη ενός διαγράμματος στο σύνολό του και αντίστροφα. Ο Arcavi (2003) υπογραμμίζει ότι αυτό που μπορεί να «δει» κανείς σε μια οπτική εικόνα δεν εξαρτάται μόνο από τις γνώσεις του, αλλά και από το πλαίσιο μέσα στο οποίο το μελετά. Είναι πιθανό, σε διαφορετικά πλαίσια, τα ίδια οπτικά αντικείμενα να αποκτούν διαφορετικό νόημα ακόμα και για τους ειδικούς. Στις παραπάνω δυσκολίες η Presmeg (1986) προσθέτει πως μια ασαφής εικόνα μπορεί να εμφανίζεται επίμονα, εμποδίζοντας την πρόοδο της σκέψης, και είναι αναγκαίο να συνοδευτεί από διαδικασίες αυστηρής αναλυτικής σκέψης προκειμένου να είναι χρήσιμη. Χαρακτηριστικά για την αμφιθυμία της οπτικοποίησης είναι τα λόγια του Tall (1994, αναφορά στους Rosken & Rolka, 2006): «Είναι αυτή η ποιότητα της χρήσης εικόνων χωρίς να γίνεται κανείς υποχείριο αυτών που προσφέρει ένα σημαντικό πλεονέκτημα στους εκπαιδευτικούς αλλά δημιουργεί σημαντική δυσκολία στους μαθητές».

Οι κοινωνιολογικές δυσκολίες αφορούν θέματα που άπτονται άμεσα της διδασκαλίας των μαθηματικών. Οι Eisenberg & Dreyfus (1991) υποστηρίζουν ότι η διδασκαλία πρέπει να υποστεί μια «διδακτική μεταφορά» που εν συντομία αναφέρεται στους μετασχηματισμούς που υφίσταται η γνώση όταν από τον επιστημονικό και ακαδημαϊκό της χαρακτήρα προσαρμόζεται σε γνώση κατάλληλη για διδασκαλία. Η διαδικασία αυτή, εκ φύσεως, τεμαχίζει και αριθμητικοποιεί τη γνώση, στερώντας της μια ποικιλία διασυνδέσεων. Επιπλέον, η Presmeg (2006) στην

τριετή έρευνά της σχετικά με τους παράγοντες που επηρεάζουν τη χρήση των οπτικών εικόνων μέσα στη σχολική τάξη κατέληξε σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα που αφορούσαν τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς. Αναπάντεχα, περισσότερο επιτυχείς με τους οπτικούς μαθητές ήταν οι εκπαιδευτικοί πεποίθηση των οποίων ήταν ότι στόχος είναι πάντοτε η γενίκευση και οι οπτικές μέθοδοι πρέπει να εγκαταλειφτούν μόλις εξυπηρετήσουν τον αρχικό σκοπό τους, καθώς επέτρεπαν στους μαθητές να χρησιμοποιούν την προτιμώμενη οπτική προσέγγιση τουλάχιστον στην αρχική μαθηματική επεξεργασία ώστε να υπερπηδήσουν το εμπόδιο της γενίκευσης. Υποστηρίζει, μάλιστα, ότι οι καθηγητές που χρησιμοποιούσαν οπτικές μεθόδους στη διδασκαλία τους θα ήταν περισσότερο επιτυχείς αν ήταν καλύτερα ενημερωμένοι για τις παγίδες που η οπτικοποίηση και η γενίκευση ελλοχεύουν. Τέλος, η μη-οπτική διδασκαλία και τάση αποδοκιμασίας της μεθόδου είχε ως αποτέλεσμα τις χαμηλές επιδόσεις των μαθητών και την προσπάθεια στείρας απομνημόνευσης διαδικασιών. Η απροθυμία άλλωστε των μαθητών να χρησιμοποιήσουν οπτικές αναπαραστάσεις συχνά είναι αποτέλεσμα της υποβάθμισης της οπτικοποίησης τόσο από τον εκπαιδευτικό και τη διδασκαλία του, όσο και από το ίδιο το πρόγραμμα σπουδών που παρέχει ελλιπή εξάσκηση της δεξιότητας αυτής. Επιπροσθέτως, προσπαθώντας να ερμηνεύσει την υποεκπροσώπηση των οπτικών μαθητών ανάμεσα στους άριστους μιας σχολικής τάξης εντοπίζει ότι είναι πιθανό η ίδια η φύση των μαθηματικών να ευνοεί της μη οπτικές μεθόδους, είναι όμως σίγουρο ότι το πρόγραμμα σπουδών που επιβάλει αυστηρούς χρονικούς περιορισμούς, εξεταστοκεντρική αξιολόγηση και έμφαση στη φορμαλιστική διδασκαλία οδηγεί στην εξάρτηση από την ταχύτητα και την ευκολία των διαδικαστικών μεθόδων (Presmeg, 1986).

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούν μη οπτικές μεθόδους στην επίλυση προβλημάτων δεν είναι πάντοτε αυτοί που αδυνατούν να χρησιμοποιήσουν την οπτική προσέγγιση. Η προτίμηση για μαθηματική οπτικοποίηση ακολουθεί την κατανομή του Gauss στους περισσότερους σχολικούς πληθυσμούς συνεπώς υπάρχουν κάποιοι μαθητές για τους οποίους η οπτικοποίηση δεν αποτελεί επιλογή καθώς δεν νιώθουν την ανάγκη για να αναπτύξουν αυτή τη λειτουργία της νόησης (Presmeg, 1985). Επιπλέον, υπάρχουν μαθητές που ενώ κατέχουν τη δεξιότητα της χρήσης των οπτικών μεθόδων, προτιμούν να μην την χρησιμοποιούν χάριν ευκολίας (Kruteskii, 1976 , Presmeg, 1986). Προφανώς, όταν ένα θέμα διδάσκεται για πρώτη φορά η οπτική παρουσίαση ενισχύει την κατανόηση, ωστόσο η εξάσκηση στη διαδικασία ή τον τύπο οδηγεί σε τέτοιο βαθμό εξοικείωσης που η εικόνα δεν είναι πλέον απαραίτητη. Τέλος, ο Kruteskii, σε έρευνά του για τους μαθηματικά χαρισματικούς μαθητές, επισημαίνει ότι απαραίτητη πτυχή και πλεονέκτημα της μαθηματικής σκέψης είναι οι μαθητές να έχουν διαθέσιμες οπτικές και μη οπτικές λειτουργίες κατά την αντιμετώπιση των προβλημάτων ώστε σε κάθε περίπτωση να επιλέγουν

την καταλληλότερη. Την ισορροπία αυτή μεταξύ οπτικών και λεκτικών λειτουργιών ο McKim αποκαλεί αμφιδέξια σκέψη (ambidextrous thinking) .

Ολοκληρώνοντας, τα αποτελέσματα της έρευνας γύρω από την οπτικοποίηση στην μαθηματική εκπαίδευση κάνουν παραπάνω από σαφές τόσο τον θεμελιώδη ρόλο της στην κατανόηση και την μαθηματική ανακάλυψη, όσο και τα προβλήματα που αυτή μπορεί να δημιουργήσει, υπενθυμίζοντας ότι η χρήση της δεν πρέπει να είναι πανάκεια. Η πλήρης κατανόηση των δυσκολιών της εμπλουτίζουν τις γνώσεις των εκπαιδευτικών για τις πτυχές της μαθηματικής σκέψης και αναμφίβολα εξυπηρετούν την πρόοδο. Κρίνεται σκόπιμο τα νέα προγράμματα σπουδών και οι καινοτόμες πρακτικές στην τάξη να δίνουν εκ νέου έμφαση στην αξία της οπτικοποίησης με τέτοιο τρόπο ώστε να ενισχύεται η αμφιδέξια σκέψη, θέτοντάς την κεντρικό άξονα στη διδασκαλία των μαθηματικών.

1.3 Από την Επιχειρηματολογία στην Απόδειξη

1.3.1 Εισαγωγή: Η φύση της απόδειξης

Η μελέτη της φιλοσοφίας και της ιστορίας των μαθηματικών κατά τους αιώνες αναδεικνύει την ύπαρξη πολλών και αντικρουόμενων απόψεων σχετικά με το ρόλο και κυρίως το χαρακτήρα της απόδειξης. Η διαμάχη αυτή έχει τις ρίζες της στη διαφορετική απόδοση νοήματος στην έννοια της απόδειξης, αυτής ανάμεσα στους όρους του «διαφωτίζω» και του «πείθω». Ο όρος «διαφωτίζω», συνδέεται άμεσα με τον εμπειρισμό και τη διαίσθηση και αναφέρεται σε εκείνες τις αποδεικτικές διαδικασίες στις οποίες η επιχειρηματολογία περιέχει λογικά κενά ή είναι ατελής, ωστόσο το συμπέρασμα είναι εμφανές και βέβαιο βάσει των μαρτυριών (του σχήματος, των αισθήσεων κλπ). Αντιθέτως, ο όρος «πείθω» αναφέρεται στη λογική της μη αντιφατικότητας των αποδεικτικών διαδικασιών, στην αυστηρότητα και τον φορμαλισμό που πρέπει να τις διέπουν και αποτελεί έως και σήμερα την κυρίαρχη αντίληψη για την έννοια της απόδειξης.

Την περίοδο των λογικών μαθηματικών του $6^{ου}$-$5^{ου}$ π.Χ. αιώνα, οι αποδεικτικές μέθοδοι ήταν διαισθητικές και εμπειρικές κάτω από την επιρροή των σοφιστών, υποστηρικτών των αισθήσεων, και των Πυθαγορείων. Η πρώτη σημαντική ρήξη στο χώρο της απόδειξης δημιουργήθηκε κατά τον $4^{ο}$ και $3^{ο}$ π.Χ. αιώνα όταν κάτω από την επίδραση των Ελεατών φιλοσόφων και του Πλάτωνα αναδείχθηκε η ανάγκη χειρισμού ιδεατών αντικειμένων που η οπτική προσέγγιση δεν μπορούσε να ικανοποιήσει. Οι Ελεάτες, φύση αντίθετοι με την εμπειρική γνώση και τον κόσμο των αισθήσεων, χρησιμοποίησαν την έμμεση αποδεικτική διαδικασία ενώ ο κύριος εκπρόσωπός τους Παρμενίδης, πρώτος δημιούργησε ένα εκτεταμένο παραγωγικό επιχείρημα θέτοντας μια θεμελιώδη αντίθεση μεταξύ των αισθήσεων και ενός αφηρημένου επιχειρήματος (Szabo 1973, Lloyd 1979 αναφορά στην Δημητριάδου). Μια παρόμοια επιστημολογική ρήξη σημειώθηκε πολλούς αιώνες αργότερα κατά τον $18^{ο}$ και $19^{ο}$ αιώνα με την επικράτηση της ανάλυσης, των αυστηρών μεθόδων και την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών. Ιδιαιτέρως, η αξιωματική θεμελίωση του Hilbert είναι αυστηρή και απαλλαγμένη από την προφάνεια και την οπτική αναπαράσταση. Στο πλαίσιο αυτό, η απόδειξη λαμβάνεται ως μια φορμαλιστική διαδικασία που προκύπτει από ένα συνεπές, ανεξάρτητο και πλήρες αξιωματικό σύστημα βασισμένο σε τυπικά λογικούς κανόνες.

Η παραδοσιακή άποψη για τον ρόλο της απόδειξης αποτυπώνεται εύστοχα από τον Griffiths (2000, αναφορά στον Weber, 2003) σύμφωνα με τον οποίο η απόδειξη είναι μια τυπική και λογική πορεία συλλογισμού που αρχίζει με ένα σύνολο αξιωμάτων και μέσω λογικών βημάτων οδηγείται σε ένα συμπέρασμα, με σκοπό την απόδειξη ενός θεωρήματος. Ωστόσο, στη βιβλιογραφία συναντώνται πλήθος ορισμών που υποδεικνύουν ότι η απόδειξη είναι κάτι παραπάνω από την απλή

μαθηματική επιβεβαίωση ενός θεωρήματος καθώς εμπεριέχει και κοινωνική πτυχή. Σύμφωνα με τους Davis & Hersh (Hersh, 1993) η απόδειξη πρέπει να νοείται ως ένα επιχείρημα που κατασκευάζεται για να πείθει έναν μαθηματικό που γνωρίζει το θέμα, ενώ για τον Balacheff είναι μια επεξήγηση δεκτή από την μαθηματική κοινότητα, σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Ωστόσο, οι Davis & Hersh υπογραμμίζουν τη δυσκολία να προσδιοριστεί τι είδους επιχείρημα αποτελεί μια έγκυρη απόδειξη για τη μαθηματική κοινότητα καθώς στην περίπτωση που ένα επιχείρημα δεν γίνει δεκτό ως απόδειξη, αυτό δεν εξαρτάται μόνο από τη λογική του δομή, αλλά και από τον τρόπο που διαμορφώθηκε το επιχείρημα ώστε να γίνει πειστικό, ακριβές και σαφές (Hanna, 1990).

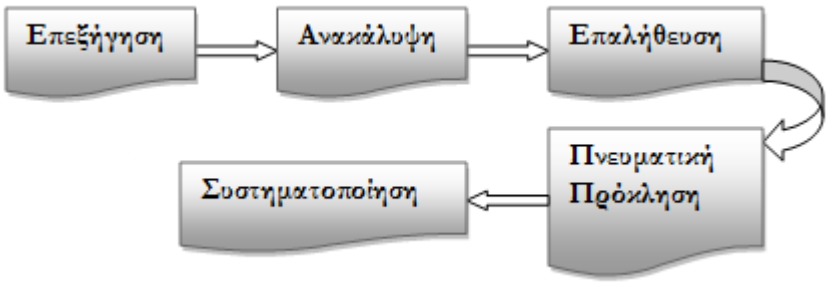
1.3.2 Λειτουργίες και Μέθοδοι της απόδειξης

Γίνεται αντιληπτό ότι τόσο η μαθηματική κοινότητα όσο και οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η εδραίωση της αλήθειας ενός επιχειρήματος είναι μόνο ένας από τους λόγους για την κατασκευή μιας απόδειξης. Στη βιβλιογραφία συναντώνται πλήθος εναλλακτικών στόχων μιας απόδειξης και αναλύονται οι λειτουργίες που αυτή διαδραματίζει μέσα στη σχολική πρακτική (Hanna 1990 & 2000, Hersh 1993, de Villiers, 1990, Weber,2003).

- **Η απόδειξη ως μέσο επαλήθευσης και αιτιολόγησης** (verification-justification): Η παραδοσιακή και πιστή στο φορμαλισμό άποψη υποστηρίζει ότι η απόδειξη είναι η διαδικασία επιβεβαίωσης της ορθότητας, εγκυρότητας και ισχύος ενός γεωμετρικού ισχυρισμού με σκοπό την εξάλειψη κάθε αμφιβολίας για την αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης.
- **Η απόδειξη ως μέσο επεξήγησης** (explanation): Η επεξήγηση μπορεί να θεωρηθεί συνώνυμη με τη βαθύτερη επίγνωση του γιατί μια εικασία, πρόταση ή ιδιότητα είναι αληθής. Ο Hersh (1993) επισημαίνει ότι «η καλύτερη απόδειξη είναι αυτή που βοηθάει να γίνει κατανοητό το νόημα του θεωρήματος που αποδεικνύεται για να διαπιστωθεί όχι μόνο ότι είναι αληθινό αλλά και γιατί είναι αληθινό».
- **Η απόδειξη ως μέσο συστηματοποίησης** (systematization): Η απόδειξη προσφέρει το απαραίτητο πλαίσιο μέσα στο οποίο αρχικώς ανεξάρτητα αποδεικτικά στοιχεία μπορούν να οργανωθούν και να ενταχθούν σε ένα πλήρες και ενοποιημένο σύνολο που υπακούει σε κοινά αποδεκτούς νόμους και κανόνες. Η οργάνωση, δε, των στοιχείων αυτών σε ένα παραγωγικό σύστημα μπορεί να αναδείξει επιχειρήματα τα οποία είναι εσφαλμένα ή ελλιπή.
- **Η απόδειξη ως μέσο ανακάλυψης** (discovery): Η διερεύνηση των λογικών συνεπειών ενός ορισμού ή ενός αξιωματικού συστήματος καθιστά εφικτή τη ανάπτυξη νέων γεωμετρικών αποτελεσμάτων και μαθηματικών θεωριών.

- **Η απόδειξη ως μέσο επικοινωνίας** (communication): Η απόδειξη αποτελεί το προϊόν αλληλεπίδρασης, διαλόγου και κοινωνικής διαπραγμάτευσης μέσα σε μια σχολική τάξη. Η επικοινωνιακή αυτή πτυχή της απόδειξης την υποβάλει σε μια διαδικασία συνεχούς κριτικής και επανεξέτασης μέσα από την οποία αποσαφηνίζονται τυχόν σφάλματα, παρανοήσεις ή αμφισβητήσεις.
- **Η απόδειξη ως μέσο πνευματικής πρόσκλησης** (intellectual challenge): Η απόδειξη προσφέρει αυτήν τη διανοητική πρόκληση που είναι συνώνυμη με την αυτοπραγμάτωση και την εσωτερική ευχαρίστηση και αποτελεί τη βάση για να εξεταστεί η διανοητική αντοχή και η ευστροφία του μαθηματικού.
- **Η απόδειξη ως μέσο ανάπτυξης της διαίσθησης** (developing intuition): Η εξέταση των λογικών συνεπαγωγών ενός ορισμού ή μιας γεωμετρικής πρότασης ή ιδιότητας μπορεί να ενισχύσει την ανάπτυξη της εννοιολογικής ή διαισθητικής κατανόησης του μελετώμενου αντικειμένου.
- **Η απόδειξη ως μέσο διερεύνησης** (exploration) της έννοιας ενός ορισμού ή των συνεπειών μιας υπόθεσης.
- **Η απόδειξη ως κατασκευή** (construction) μιας εμπειρικής θεωρίας.
- **Η απόδειξη ως ενσωμάτωση γνώσεων** (incorporation) σε ένα νέο πλαίσιο και η εξέταση αυτής από μια νέα οπτική.

Είναι σαφές ότι οι λειτουργίες της απόδειξης δεν έχουν όλες την ίδια βαρύτητα στην εκμάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η Hanna (2000) υποστηρίζει ότι οι λειτουργίες της επαλήθευσης, συνώνυμη με την εγκυρότητα ενός επιχειρήματος, και της επεξήγησης, συνώνυμη με την παραδοχή ή μη της αλήθειάς του, αποτελούν θεμελιώδεις λειτουργίες με τις οποίες πρέπει να εισάγεται ένας μαθητής στη διδασκαλία της απόδειξης καθώς είναι αποτέλεσμα της ιστορικής ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης. Ωστόσο, σύμφωνα με τον de Villiers (1999) η εισαγωγή αυτή δεν πρέπει να καθυστερεί αδικαιολόγητα καθώς μια απόδειξη πρέπει να είναι αποτέλεσμα μιας σπειροειδούς προσέγγισης των διαφόρων λειτουργιών της.



(Σχήμα 1.4: Σπειροειδής προσέγγιση των λειτουργιών της απόδειξης κατά τον de Villiers)

Κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος οι μαθητές αναπτύσσουν διαφορετικά είδη συλλογισμού για την παραγωγή μιας αποδεκτής απόδειξης, τα οποία μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες ως εξής:

- Ο ***παραγωγικός συλλογισμός*** (deductive argumentation) αρχίζει από έναν γενικό κανόνα και καταλήγει σε ένα ειδικό συμπέρασμα μέσα από μια λογική αλυσίδα συλλογισμών στην οποία κάθε βήμα προκύπτει από το επόμενο. Ως εκ τούτου η παραγωγική απόδειξη είναι μια απλή διαδικασία εξαγωγής συμπεράσματος που ακολουθεί προηγούμενες γνώσεις και στηρίζεται σε αυτές.
- Ο ***επαγωγικός συλλογισμός*** *(inductive* argumentation*)* αρχίζει από μία ειδική περίπτωση και ολοκληρώνεται με έναν γενικό κανόνα. Συνεπώς, κατά την επαγωγική απόδειξη μια κοινή ιδιότητα μεταξύ διαφορετικών παραδειγμάτων, περιπτώσεων ή μοτίβων που επαναλαμβάνονται αποτελεί τη βάση για γενίκευση και εξαγωγή συμπερασμάτων.
- Ο ***απαγωγικός συλλογισμός*** *(abductive* argumentation*)* σύμφωνα με τον Pierce προκύπτει όταν κάποιος συμπεραίνει από τα αποτελέσματα την αιτία. Δηλαδή «παρατηρεί τα γεγονότα και αναζητά μια θεωρία για να τα εξηγήσει». Ο γενικός τύπος της απαγωγής είναι: το γεγονός Α παρατηρείται, αν το C είναι αληθές τότε το Α θα μπορούσε να είναι αληθές, έτσι είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το C είναι αληθές.

Στην σχολική πρακτική των μαθηματικών συναντώνται ένας σημαντικός αριθμός μεθόδων αποδείξεων, οι κυριότερες από τις οποίες συνοψίζονται ως εξής:

- **Ευθεία Απόδειξη:** Στην *ευθεία απόδειξη*, το συμπέρασμα καθιερώνεται με το λογικό συνδυασμό των αξιωμάτων, των ορισμών και των προηγούμενων θεωρημάτων.
- **Απόδειξη με Επαγωγή:** Στην *απόδειξη με μαθηματική επαγωγή*, αποδεικνύεται πρώτα μια "βασική περίπτωση", και στη συνέχεια χρησιμοποιείται ένας "επαγωγικός κανόνας" για να δείξει μια (συχνά άπειρη) σειρά από άλλες περιπτώσεις. Αφού η βασική περίπτωση είναι αληθής, η απειρότητα των άλλων περιπτώσεων θα πρέπει επίσης να ισχύει, ακόμα κι αν δεν μπορούν όλες να αποδειχθούν ευθέως λόγω του άπειρου αριθμού τους.

  Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής ορίζει ότι:

Έστω $N = \{ 1, 2, 3, 4, ... \}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών και $P(n)$ μια μαθηματική πρόταση που περιέχει τον φυσικό αριθμό n που ανήκει στο N, έτσι ώστε *(i)* $P(1)$ ισχύει, δηλαδή, $P(n)$ να είναι αλήθεια για $n = 1$ *(ii)* $P(m + 1)$ ισχύει όταν $P(m)$ ισχύει, δηλαδή $P(m)$ συνεπάγεται ότι $P(m + 1)$. Τότε, $P(n)$ ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς n.

- **Απόδειξη με Ανάλυση και Σύνθεση:** Στην *απόδειξη με ανάλυση* γίνεται δεκτή εξαρχής η αλήθεια της πρότασης P. Από αυτήν συνάγεται η αλήθεια μιας

πρότασης ή μιας αλυσίδας προτάσεων. Εάν οι τελευταίες προτάσεις είναι αληθείς, τότε προφανώς και η αρχική πρόταση P είναι αληθής εφόσον μπορούμε να αναχθούμε σε αυτήν συνθετικά από τις προηγούμενες προτάσεις.

- **Απόδειξη με Εξάντληση:** Στην *απόδειξη με εξάντληση*, το συμπέρασμα δείχνεται διαιρώντας το σε έναν πεπερασμένο αριθμό περιπτώσεων, και αποδεικνύοντας την κάθε μια ξεχωριστά. Η μέθοδος αυτή είναι κοινή πρακτική κυρίως στον τομέα της θεωρίας αριθμών όπου απαιτείται ο έλεγχος όλων των περιπτώσεων.
- **Απόδειξη με Αντιμετάθεση:** Η *απόδειξη με αντιμετάθεση* δείχνει το συμπέρασμα "αν *P* τότε *Q*" αποδεικνύοντας το ισοδύναμο αντιθετοαντίστροφο "αν *όχι P* τότε *όχι Q*".
- **Απόδειξη με Εις Άτοπον Απαγωγή:** Στην *απόδειξη με εις άτοπον απαγωγή* δείχνεται ότι αν κάποια πρόταση ήταν ψευδής, τότε συμβαίνει μια λογική αντίφαση, επομένως η αρχική πρόταση θα πρέπει να είναι αληθής.
- **Μη Κατασκευαστική Απόδειξη / Απόδειξη Ύπαρξης:** Στην *απόδειξη ύπαρξης* δείχνεται ότι ένα αντικείμενο πρέπει να υπάρχει, χωρίς να εξηγήσει πώς βρίσκεται ένα τέτοιο αντικείμενο. Συχνά ταυτίζεται με την απόδειξη με εις άτοπον απαγωγή, όπου η μη ύπαρξη του αντικειμένου αποδεικνύεται αδύνατη.
- **Κατασκευαστική Απόδειξη / Απόδειξη με Αντιπαράδειγμα:** Η *κατασκευαστική απόδειξη* περιλαμβάνει την κατασκευή ενός παραδείγματος με την ιδιότητα να δείχνει ότι υπάρχει κάτι που έχει την ζητούμενη ιδιότητα. Συνήθως, η κατασκευαστική απόδειξη αποδεικνύει τη μη ορθότητα μιας πρότασης, ενώ το παράδειγμα που κατασκευάζεται λέγεται *αντιπαράδειγμα*.

  Αναμφίβολα η χρήση των παραδειγμάτων στην αποδεικτική διαδικασία εμπλουτίζει τον τρόπο διδασκαλίας, ενισχύει την κατανόηση σε βάθος και σε πληρότητα των μαθηματικών εννοιών, άρει παρανοήσεις, διορθώνει νοητικά μοντέλα και αποτελεί εφαλτήριο για την απόδειξη αν νοηθεί ως μια μακρόπνοη διαδικασία εικασιών και αντιπαραδειγμάτων. Οι Zazkis & Chernoff (2008) υποστηρίζουν ότι τα αντιπαραδείγματα είναι ένα συστατικό υψηλού επιπέδου γνώσης που ωθούν τους μαθητές να επανεξετάσουν τις αντιλήψεις και πεποιθήσεις τους σχετικά με τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων και εξυπηρετούν τη δημιουργία της γνωστικής σύγκρουσης, απαραίτητη για την ύπαρξη εννοιολογικής αλλαγής.

1.3.3 Η σχέση επιχειρηματολογίας και απόδειξης

Η απόδειξη αναμφίβολα αποτελεί ένα αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής πρακτικής και κατ' επέκταση η αναζήτηση των διαδικασιών που συνεπάγεται τη δόμησή της αποτελεί ένα βασικό αντικείμενο μελέτης της ερευνητικής κοινότητας τα τελευταία τριάντα τουλάχιστον χρόνια (Balacheff 1987, Duval,1991, Boero et all,2010 κα). Οι περισσότερες από τις μελέτες έχουν εστιάσει στη φύση των

σχέσεων μεταξύ της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης αναδεικνύοντας διαφορετικές οπτικές, καθώς κάποιες από αυτές επισημαίνουν τις ουσιαστικές διαφορές τους σε κοινωνικό, επιστημολογικό και λογικό επίπεδο ενώ οι περισσότερο πρόσφατες φωτίζουν τη συνέχεια που πρέπει να υφίσταται μεταξύ τους.

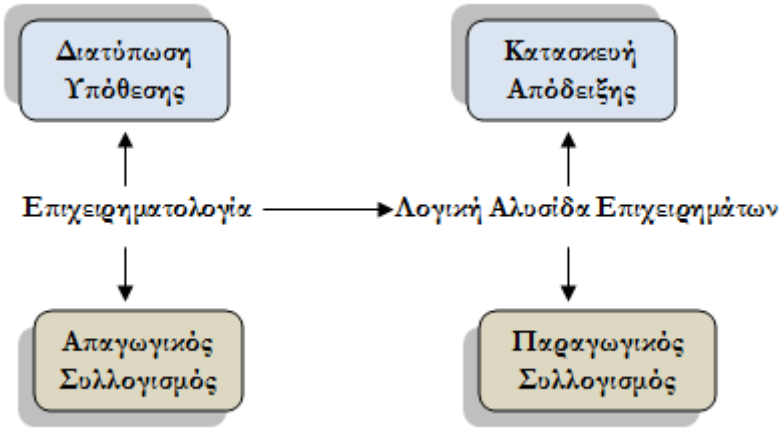
Η σχέση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη σχέση μεταξύ εικασίας και έγκυρου επιχειρήματος. Όπως εύστοχα επισημαίνει ο Balacheff (1999) η επιχειρηματολογία είναι για την εικασία ότι και το μαθηματικό θεώρημα για την απόδειξη. Στην πραγματικότητα, μία εικασία μπορεί να προκύψει χωρίς την παρουσία οποιουδήποτε είδους επιχειρηματολογίας, προερχόμενη απευθείας από ένα σχήμα ή την διαίσθηση. Ιδανικά, η εικασία είναι μια δήλωση που συνδέεται με ένα σύνολο εννοιών και ορισμών μέσα στο οποίο η δήλωση είναι δυνητικά αληθής όταν επιτρέπεται η κατασκευή ενός επιχειρήματος που να την ικανοποιεί (Balacheff, 1994 αναφορά στην Pedemonte, 2000). Η εικασία μετατρέπεται σε ένα έγκυρο επιχείρημα όταν κάποιο μαθηματικό θεώρημα επιτρέπει την κατασκευή μιας απόδειξης που να το επαληθεύει. Συνεπώς, όταν μια δήλωση που εκφράζει μια εικασία επικυρώνεται μέσα από μια μαθηματική θεωρία, τότε μια απόδειξη έχει δομηθεί.

Μια σειρά μελετών εστιάζουν στην επιστημολογική διάκριση μεταξύ της μαθηματικής απόδειξης και άλλων μορφών διαδικασιών απόδειξης αναδεικνύοντας μια δυνητική σύγκρουση μεταξύ της εμπειρικής και τυπικής απόδειξης. Η πιθανή αυτή απόκλιση έχει επισημανθεί από τον Duval ο οποίος υπογραμμίζει τη διαφορά ανάμεσα στις διαδικασίες της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης (Mariotti, 2006). Σύμφωνα με τον Duval η ρήξη μεταξύ του σημασιολογικού και θεωρητικού επιπέδου της απόδειξης είναι αναπόφευκτη όταν η απόδειξη ως μια ρητορική διαδικασία που στόχο έχει να πείσει έναν συνομιλητή έρχεται σε αντίθεση με τις απαιτήσεις μιας μαθηματικής απόδειξης ως μια λογική αλληλουχία επιχειρημάτων με θεωρητική εγκυρότητα. Αυτή ακριβώς η ρήξη εξηγεί γιατί οι μαθητές δεν κατανοούν την αναγκαιότητα μιας απόδειξης όταν υπάρχει μια επιχειρηματολογία που να επαληθεύει έναν ισχυρισμό. Μια τέτοια σύγκρουση μπορεί να αποτελέσει ένα επιστημολογικό εμπόδιο για τους μαθητές, για την υπερπήδηση του οποίου απαιτείται η αναγνώριση της ύπαρξης της πολύπλοκης σχέσης μεταξύ των δύο διαδικασιών (Balacheff, 1999).

Στον αντίποδα, οι σχέσεις μεταξύ της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης αποτέλεσαν το αντικείμενο πολλών ερευνών και από γνωστική σκοπιά. Υπάρχουν ερευνητές που επισημαίνουν ότι είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη οι συνδέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ της εικασίας και απόδειξης, παρά τις προφανείς διαφορές των δύο διαδικασιών (Garuti et all, 1996, Boero et al, 1996, Pedemonte, 2000). Οι εν λόγω έρευνες έχουν υπογραμμίσει την συνέχεια που υπάρχει μεταξύ

της επιχειρηματολογίας, ως διαδικασία παραγωγής δηλώσεων, και της κατασκευής μιας απόδειξης, ως διαδικασία λογικής δόμησης των επιχειρημάτων. Μάλιστα, η γνωστική αυτή συνέχεια έχει αναλυθεί και περιγραφεί στη βιβλιογραφία με τον όρο *γνωστική ενότητα* ως εξής (Boero et al, 1996):

> Κατά τη διάρκεια της παραγωγής μιας υπόθεσης ο μαθητής προοδευτικά επεξεργάζεται τη διατύπωση της υπόθεσής του αναπτύσσοντας μια εντατική λογική επιχειρηματολογία η οποία αναμιγνύεται λειτουργικά με την προσπάθεια αιτιολόγησης της ευλογοφάνειας των επιλογών του. Κατά τη διάρκεια του επόμενου σταδίου της παρουσίασης των αποδείξεων, ο μαθητής συνδέει με αυτή τη διαδικασία μερικά από τα προηγούμενα παραχθέντα επιχειρήματα οργανώνοντάς τα σε μια λογική αλυσίδα.



(Σχήμα 1.5: Σχηματική Αναπαράσταση της λειτουργίας της Γνωστικής Ενότητας)

Οι έρευνες πάνω στο θέμα της γνωστικής ενότητας (Garuti et al, 1996 , Boero et al, 1996 , Mariotti, 2001) επισημαίνουν ότι η απόδειξη είναι περισσότερο προσιτή στους μαθητές όταν εξαρτάται από την ανάπτυξη μιας λογικής επιχειρηματολογίας για την κατασκευή μιας υπόθεσης. Ως εκ τούτου, η διδασκαλία της απόδειξης, δηλαδή η συνήθης πρακτική της παρουσίασης και όχι κατασκευής της, φαίνεται αναποτελεσματική και τα ανοιχτά γεωμετρικά προβλήματα που απαιτούν από τους μαθητές να διατυπώσουν μια εικασία κρίνονται περισσότερο κατάλληλα. Επιπλέον, οι Boero et al προτείνουν ότι η διαδικασία παραγωγής μιας εικασίας μπορεί να είναι το προϊόν μιας δυναμικής διερεύνησης μέσα από την οποία κάποια στιγμή αναγνωρίζεται μια κανονικότητα ή λογική συνέπεια, η οποία αργότερα θα αποκοπεί από τη φάση της διερεύνησης και θα λάβει την μορφή μιας υπόθεσης από λογική σκοπιά.

Η Pedemonte (2007) αναγνωρίζοντας ότι το μοντέλο της γνωστικής ενότητας δεν καλύπτει όλες τις πτυχές μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης, ανέπτυξε

ένα θεωρητικό πλαίσιο μέσα στο οποίο να αναλύεται και να συγκρίνεται η επιχειρηματολογία που υποστηρίζει μια υπόθεση και την αντίστοιχη απόδειξη σε ανοικτά γεωμετρικά προβλήματα. Η σύγκριση αυτή αναλύει την συνέχεια ή μη μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης κάτω από δύο οπτικές: το αναφορικό σύστημα (referential system) και τη δομή (structure). Με τον όρο αναφορικό σύστημα νοείται όλο το αναπαραστασιακό σύστημα (γλώσσα, σχήματα, ευρετικές στρατηγικές) και γνωστικό σύστημα (έννοιες, ορισμοί, θεωρήματα) που χρησιμοποιείται τόσο στη φάση της επιχειρηματολογίας όσο και της απόδειξης. Η δομή αναφέρεται στις λογικές γνωστικές σχέσεις που διέπουν τις δηλώσεις και τα επιχειρήματα, ήτοι την παραγωγική, επαγωγική ή απαγωγική δομή τους. Η θεωρία της γνωστικής ενότητας αναφέρεται μόνο στο αναφορικό σύστημα καθώς συνέχεια στο σύστημα αυτό παρατηρείται όταν κάποιες εκφράσεις, σχήματα ή θεωρήματα που χρησιμοποιούνται τελικώς στην απόδειξη έχουν ήδη αναφερθεί στην προηγούμενη επιχειρηματολογία που υποστηρίζει μια εικασία. Δομική, ωστόσο, συνέχεια μεταξύ της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης επιτυγχάνεται όταν οι δύο διαδικασίες χαρακτηρίζονται από την ίδια λογική δομή.

Προκειμένου να αναλυθεί και να συγκριθεί το αναφορικό σύστημα και η δομή ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη δύναται να χρησιμοποιηθεί το τριαδικό μοντέλο του Toulmin. Η εγγύηση σε μια γεωμετρική απόδειξη μπορεί να είναι ένα αξίωμα, ορισμός ή θεώρημα. Αν η εγγύηση είναι βασισμένη σε κάποιο μαθηματικό κανόνα τότε παρατηρείται γνωστική συνέχεια μεταξύ των δύο διαδικασιών καθώς ο κανόνας αντικαθίσταται με κάποιο γεωμετρικό θεώρημα στη δόμηση της απόδειξης. Στην περίπτωση που ο κανόνας δεν είναι ορθός ή ακριβής τότε τρεις πιθανές περιπτώσεις αναγνωρίζονται: ο μαθητής να μην κατασκευάσει κάποια απόδειξη συνεπώς δεν υπάρχει ενότητα, ο μαθητής να κατασκευάσει μια λανθασμένη απόδειξη βασισμένη στον λανθασμένο κανόνα οπότε και παρατηρείται γνωστική ενότητα ή ο μαθητής να εγκαταλείψει τον λανθασμένο κανόνα και να τον αντικαταστήσει με κάποιο επιχείρημα που να τον οδηγήσει σε ορθή απόδειξη. Στην τελευταία περίπτωση υπάρχει μεν γνωστική σύγκρουση αλλά έχει κατασκευαστεί μια επιτυχής επιχειρηματολογία.

Η ανάλυση αυτή ανέδειξε ότι η συνέχεια μεταξύ των επιχειρημάτων που υποστηρίζουν μια εικασία και της απόδειξης στο αναφορικό σύστημα είναι εξαιρετικά συχνή, ωστόσο είναι απαραίτητο να καλυφθεί μία δομική απόσταση μεταξύ των δύο, από μια απαγωγική επιχειρηματολογία σε μια παραγωγική απόδειξη. Ειδικά σε ότι αφορά τη γεωμετρία, το δομικό αυτό χάσμα δύσκολα γεφυρώνεται ωθώντας τους μαθητές να παράγουν λαθεμένες αποδείξεις καθώς η μετάβαση από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη απαιτεί σχετικές δομικές αλλαγές (Pedemonte, 2007). Η φυσική αυτή δομική συνέχεια μεταξύ ενός απαγωγικού επιχειρήματος και μιας απαγωγικής απόδειξης αποτελεί μια ουσιαστική δυσκολία για τη δόμηση μιας τυπικής απόδειξης. Ιδιαιτέρως η

επαγωγική επιχειρηματολογία απέχει σημαντικά από τη δομή μιας παραγωγικής απόδειξης καθώς μια σύνδεση μεταξύ τους επιτυγχάνεται μόνο όταν η επιχειρηματολογία περιέχει την «γενική περίπτωση». Οι Harel & Sowder (αναφορά στη Mariotti, 2006) αναγνωρίζουν δύο είδη επιχειρημάτων που σχετίζονται με τον επαγωγικό συλλογισμό και περιγράφονται ως εξής:

- Η γενίκευση επιτυγχάνεται όταν αναγνωρίζεται ένα γενικό μοτίβο που διέπει αυτό καθ' αυτό το αποτέλεσμα (result pattern generalization). Για παράδειγμα, μέσα από μια σειρά από αριθμητικούς υπολογισμούς αναγνωρίζεται η κανονικότητα του αποτελέσματος.
- Η γενίκευση πηγάζει από την ίδια τη διαδικασία που οδηγεί στο αποτέλεσμα (process pattern generalization). Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να παρατηρήσει την κανονικότητα της διαδικασίας που οδηγεί στο αποτέλεσμα ή μια αλυσίδα βημάτων που συσχετίζουν το αποτέλεσμα.

Στο πλαίσιο αυτό, όταν μια εικασία προκύπτει από τη γενίκευση του αποτελέσματος απαιτείται από τον μαθητή να γεφυρώσει το δομικό κενό των δύο συλλογισμών και να πραγματοποιήσει μια σχεδόν αυθαίρετη μετάβαση από την επαγωγική επιχειρηματολογία στην παραγωγική απόδειξη. Αντιθέτως, ένας συλλογισμός που υποστηρίζει τη γενίκευση της διαδικασίας είναι δυνατόν να προσφέρει την παραγωγική βάση πάνω στην οποία θα οικοδομηθεί μία απόδειξη.

Προκειμένου να ερμηνευτούν οι πιθανές αιτίες για την ύπαρξη ή μη της γνωστικής ενότητας, οι Boero et al (2010) πρόσφατα ενσωμάτωσαν την ανάλυση του Habermas για την ορθολογική συμπεριφορά (rational behavior) στις λογικές πρακτικές μιας απόδειξης. Ο Habermas διακρίνει τρεις αλληλένδετες συνιστώσες μιας εκλογικευμένης συμπεριφοράς: την επιστημική (epistemic), την τελεολογική (teleological) και την επικοινωνιακή (communicative). Στο πλαίσιο αυτό οι Boero et al διέκριναν στις πρακτικές μιας απόδειξης την επιστημική πτυχή η οποία συνίσταται στην συνειδητή επικύρωση των επιχειρημάτων σύμφωνα με κοινά αποδεικτούς και νόμιμους τρόπους συλλογισμού, την τελεολογική πτυχή συνυφασμένη στον χαρακτήρα της απόδειξης ως επίλυση γεωμετρικού προβλήματος και αφορά όλες τις συνειδητές επιλογές του λύτη προκειμένου να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα και τέλος την επικοινωνιακή πτυχή η οποία συνίσταται στην συνειδητή τήρηση των κανόνων που διασφαλίζουν τόσο την επικοινωνία όλων των συλλογιστικών επιπέδων όσο και τη συμμόρφωση των τελικών αποδείξεων με τα δεδομένα της μαθηματικής κουλτούρας.

Οι Arzarello & Sabena (2011) αντιλαμβάνονται το μοντέλο των Boero et al ως ένα μοντέλο που περιγράφει τους συνειδητούς περιορισμούς σχετικά με τις τρεις συνιστώσες της εκλογικευμένης συμπεριφοράς και αναγνωρίζει δύο επίπεδα επιχειρηματολογίας: το βασικό επίπεδο (ground level) έμφυτο στην ιδιαίτερη φύση των τριών πτυχών που αναγνωρίζονται στις πρακτικές μιας απόδειξης και το μετα-επίπεδο (meta-level) έμφυτο στην επίγνωση των περιορισμών που διέπουν τις τρεις

αυτές πτυχές. Βασισμένοι σε αυτή τη διάκριση, εισάγουν την έννοια της μετα-γνωστικής ενότητας ως την γνωστική συνέχεια μεταξύ των δύο επιπέδων επιχειρηματολογίας, ιδιαιτέρως μεταξύ της τελεολογικής συνιστώσας του μετα-επιπέδου και της επιστημικής συνιστώσας του βασικού επιπέδου. Σε αντίθεση με την αναφορική και δομική γνωστική ενότητα που προτείνεται από την Pedemonte και εστιάζει σε διαχρονικές διαδικασίες της επιχειρηματολογίας και απόδειξης, η μετα-γνωστική ενότητα αναφέρεται στην συγχρονική ολοκλήρωση μεταξύ των δύο επιπέδων επιχειρηματολογίας. Συνεπώς, η έλλειψη αλληλουχίας μεταξύ των δύο επιπέδων δυσχεραίνει τις διαδικασίες απόδειξης και δημιουργεί γνωστικές συγκρούσεις.

1.3.4 Η οπτικοποίηση στην απόδειξη: η περίπτωση του δυναμικού περιβάλλοντος

Η οπτικοποίηση είναι μια αφαιρετική διαδικασία που δεν κάνει χρήση της εικόνας με τη κλασική έννοια, αλλά του νοητικού σχήματος της εικόνας γι' αυτό και η παρουσία ενός διαγράμματος δεν είναι πάντοτε απαραίτητη. Η οπτικοποίηση, συνεπώς, ενός νοητικού σχήματος περιλαμβάνει την οργάνωση των μεμονωμένων δεδομένων και την ανάπτυξη ενός πολυκλαδικού συστήματος μέσα στο οποίο οι πληροφορίες αποκτούν μία ενισχυμένη βάση που λειτουργεί καταλυτικά στη διαδικασία της επιχειρηματολογίας και κατ' επέκταση της απόδειξης. Λειτουργεί ως πυρήνας συστημικών προεκτάσεων έτσι ώστε οι βοηθητικές εικόνες που δημιουργούν τα νοητικά σχήματα να αποτελούν ένα γνωστικό εργαλείο ανακάλυψης για τον μαθητή. Επιπλέον, οι νοητικές εικόνες, τα διαγράμματα και οι οπτικές αναπαραστάσεις αποτελούν απαραίτητα συστατικά ενός επιτυχημένου επιχειρήματος και είναι ικανά να μεταβιβάσουν τη διορατικότητα και τη γνώση (Hanna, 2000).

Δεδομένου ότι οι υπολογιστές έχουν αυξήσει σημαντικά τις δυνατότητες της οπτικής απεικόνισης το ενδιαφέρον της ερευνητικής κοινότητας έχει στραφεί στην πιθανή συμβολή των δυναμικών περιβάλλοντων στη δόμηση τυπικών αποδείξεων καθώς αποτελεί ένα επαναστατικό μέσο που υποστηρίζει την ανάπτυξη της γεωμετρικής κατανόησης, υποβοηθά την διερεύνηση των γεωμετρικών σχηματισμών και παρέχει το περιβάλλον μέσα στο οποίο η διαμόρφωση των εικασιών γίνεται περισσότερο προσιτή για τους μαθητές και αποκτά νόημα. Η Hanna (2000) υποστηρίζει ότι το λογισμικό έχει τη δυναμική να ενθαρρύνει τόσο τη διερεύνηση όσο και την απόδειξη καθώς διευκολύνει σημαντικά τους μαθητές να θέσουν και να ελέγξουν τις υποθέσεις τους. Επιπλέον, οι Haddas & Hershcovitz (1998) επισημαίνουν ότι η χρήση των υπολογιστών έχει ανοίξει νέα σύνορα στη διδασκαλία της γεωμετρίας καθώς βοηθά τους μαθητές να διευρύνουν την οπτική

τους για την απόδειξη συνδέοντας την άτυπη επιχειρηματολογία με την τυπική απόδειξη. Τέλος, οι Raman & Weber (2006) υποστηρίζουν ότι μέσα από το δυναμικό περιβάλλον ενισχύεται επιπλέον η «ιδέα κλειδί» που είναι απαραίτητη για να γεφυρώσει τη διαισθητική και διερευνητική επιχειρηματολογία με την τυπική απόδειξη καθώς κάνει σαφή τον στόχο που πρέπει να επιτευχθεί και παρέχει τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν ώστε ένα επιχείρημα να πάρει την μορφή μιας αποδεικτικής πρότασης.

Η παραδοσιακή διδασκαλία, μέσα στην οποία ένα μαθηματικό επιχείρημα είναι αληθές μόνο αν μπορεί να αποδειχθεί, φαίνεται να υποστηρίζει ότι η απόδειξη είναι η μόνη αρχή για την καθιέρωση της ισχύος μιας πρότασης. Ωστόσο, έρευνες των de Villiers (1999) και Hanna (2000) έχει αναδείξει ότι για τους μαθητές η βεβαιότητα πριν από την απόδειξη αποτελεί συχνά κίνητρο και προϋπόθεση για την εύρεση της. Στις περιπτώσεις αυτές η συμβολή του δυναμικού περιβάλλοντος είναι κάτι παραπάνω από απλή επαλήθευση αλλά ενισχύει τη λειτουργία της επεξήγησης και της διανοητικής πρόκλησης. Η εμπειρική επαλήθευση μιας υπόθεσης και η εξέταση ικανού αριθμού παραδειγμάτων σίγουρα παρέχει ένα ισχυρό αίσθημα βεβαιότητας για την εγκυρότητά της χωρίς όμως να εξασφαλίζει μια ικανοποιητική επίγνωση για το πώς και το γιατί η υπόθεση είναι αληθής. Ερευνητικά αποτελέσματα των de Villiers και Jones (2000) επισημαίνουν ότι ακόμα και αρχάριοι μαθητές δεν αρκούνται στην απλή επιβεβαίωση αλλά στη πλειοψηφία τους επιδεικνύουν την ανάγκη να επεξηγήσουν με μαθηματική γλώσσα όσα απεικονίζονται στην οθόνη. Οι μαθηματικές αυτές επεξηγήσεις μέσω του μαθηματικού συλλογισμού διαρθρώνονται σε μία τυπική γεωμετρική απόδειξη που η ίδια πλέον παρέχει τη βεβαιότητα για την αλήθεια των γεωμετρικών αντικειμένων. (Jones, 2000).

Είναι γεγονός ότι το πέρασμα από τη διερευνητική γεωμετρία σε μια παραγωγική απόδειξη δεν είναι ούτε απλή ούτε αυθόρμητη. Οι Hoyles & Healy (1999, αναφορά στους Christou et al., 2004) διαπιστώνουν ότι παρόλο που το δυναμικό περιβάλλον ενισχύει τον καθορισμό και την αναγνώριση διαφόρων γεωμετρικών ιδιοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων, συχνά όταν οι μαθητές καλούνται να παράξουν μια γεωμετρική απόδειξη εγκαταλείπουν τις προηγούμενες γεωμετρικές κατασκευές. Το γεγονός αυτό επισημαίνει ότι υπάρχουν περιπτώσεις που η επιχειρηματολογία αυτή είναι βοηθητική μόνο στην κατανόηση του προβλήματος και δεν συμβάλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να κατασκευάζουν αποδείξεις, θέτοντας ένα χάσμα ανάμεσα στην δυναμική γεωμετρία και την απόδειξη. Η γεφύρωση του χάσματος ανάμεσα στην επαγωγική διερεύνηση και την παραγωγική απόδειξη είναι εφικτή όταν οι μαθητές παρακινηθούν και ενισχυθούν με κατάλληλες ερωτήσεις προκειμένου να αναζητήσουν εξηγήσεις για τις εικασίες τους έτσι ώστε να κατασκευάσουν ένα παραγωγικό επιχείρημα σαν μια προσπάθεια επεξήγησης και όχι επαλήθευσης

(Christou, 2004). Την σημασία των «γιατί» ερωτήσεων έχει επισημάνει και η Mariotti (2006) καθώς η υπέρβαση της λειτουργίας της απλής επαλήθευσης της αλήθειας ενός επιχειρήματος ανοίγει το δρόμο για μια ουσιαστική γεωμετρική επιχειρηματολογία.

Στο πλαίσιο αυτό η συμβολή των ανοικτών ή μη τυπικών γεωμετρικών προβλημάτων είναι σημαντική καθώς η επίλυση ενός προβλήματος είναι το αρχικό βήμα για την ανάπτυξη της κατανόησης μιας μαθηματικής απόδειξης. Ένα ανοικτό πρόβλημα είναι μια κατάσταση που απαιτεί διερεύνηση, δημιουργία και έλεγχο εικασιών, επιχειρηματολογία και συστηματοποίηση των συμπερασμάτων για την κατασκευή μιας απόδειξης, διαδικασίες που μπορούν με επιτυχία να εμφανιστούν μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες μέσα σε ένα δυναμικό περιβάλλον (de Villiers, 1999). Η δυναμική φύση του λογισμικού και η αμεσότητα που προσφέρει ενισχύουν την πνευματική πρόκληση, επιτρέπουν τις συνδέσεις με τις προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες, υποστηρίζουν την ανακάλυψη νέων αποτελεσμάτων και διαμορφώνουν ένα γενικευμένο και συστηματοποιημένο πλαίσιο μέσα στο οποίο το πρόβλημα αποκτά νόημα.

Η οπτικοποίηση και η χρήση των υπολογιστών, παρά την αδιαμφισβήτητη συμβολή τους στην εξέλιξη της επιχειρηματολογίας και τη δόμηση της απόδειξης, δεν θεωρείται πανάκεια και δεν αποτελεί υποκατάστατο της παραδοσιακής απόδειξης καθώς υπόκειται ακόμα σε αυστηρούς περιορισμούς κατά τα πρότυπα της μαθηματικής κοινότητας. Επιπλέον, έχει επισημανθεί ότι οι υπέρμαχοι της φορμαλιστικής απόδειξης θεωρούν την οπτική προσέγγιση τροχοπέδη στην συλλογιστική διαδικασία καθώς η προφάνεια και η επιβεβαίωση της αλήθειας απομακρύνουν τους μαθητές από την ανάγκη να την αποδείξουν. Χαρακτηριστικά η Hanna(2000) καταγράφει τις απόψεις των ερευνητών σχετικά με το ρόλο της οπτικοποίησης στην απόδειξη:

- ✓ Ο Francis (1996) υποστηρίζει ότι ο οπτικός συλλογισμός δεν μπορεί να αναγνωρίζεται ως ίσης αξίας με τον προτασιακό, ενώ θεωρεί παράλογο ο πειραματισμός να αντικαταστήσει την αυστηρότητα των μαθηματικών
- ✓ Ο Palais (1999) αναγνωρίζει ότι η οπτικοποίηση με ή χωρίς την χρήση υπολογιστικού περιβάλλοντος αποτελεί ενισχυτικό παράγοντα για τις αυστηρές φορμαλιστικές αποδείξεις, ωστόσο οι οπτικές αναπαραστάσεις δεν μπορούν να γίνουν αποδεκτές ως νόμιμες αποδείξεις
- ✓ Οι Borwein & Jorgenson (1997) επισημαίνουν ότι μια οπτική αναπαράσταση που συνιστά μια απόδειξη δεν είναι τίποτα παραπάνω από μια στατική εικόνα, η οποία δεν φανερώνει την συλλογιστική πορεία μιας προτασιακής διαδικασίας απόδειξης και δεν κάνει ορατές τις συνδέσεις που είναι απαραίτητες.

Προσεγγίζοντας με μια κριτική ματιά το ρόλο της οπτικοποίησης στην απόδειξη πρέπει να τονιστεί ότι σε καμία περίπτωση δεν μειώνει και δεν υποκαθιστά τον κυρίαρχο ρόλο της τυπικής απόδειξης στη μαθηματική θεωρία και πρακτική. Η οπτική προσέγγιση γίνεται αντιληπτή ως το όχημα που γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης προσφέροντας στους μαθητές το περιβάλλον μέσα στο οποίο μπορούν να εξερευνήσουν, να πειραματιστούν, να διατυπώσουν και να απορρίψουν εικασίες που σε καμία περίπτωση δεν συνιστούν απόδειξη ούτε μπορούν να την αντικαταστήσουν. Στόχος της οπτικοποίησης δεν είναι να «δουν» οι μαθητές αλλά να προκαλέσει τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν γιατί ένας ισχυρισμός είναι αληθής, βεβαιότητα που προσφέρει μόνο μια αναλυτική απόδειξη. Άλλωστε το να «δει» κανείς δεν συνεπάγεται απαραίτητα την κατανόηση. Ρόλος του σύγχρονου εκπαιδευτικού είναι να δημιουργήσει στους μαθητές την ανάγκη επεξήγησης των εικασιών τους με μαθηματική γλώσσα και διερεύνησης της αιτίας της αλήθειάς τους, διαδικασία που ιδανικά οδηγεί στη σύνθεση μιας τυπικής απόδειξης ως λογική συνέπεια και αλληλουχία γνωστών αποτελεσμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1 Ερευνητικό Πρόβλημα & Ερευνητικά Ερωτήματα

Η παρούσα έρευνα εντάσσεται στην κατηγορία των διερευνητικών ερευνών και στόχο έχει να διερευνήσει την εξέλιξη του γεωμετρικού συλλογισμού κατά το πέρασμα από την εικασία στην απόδειξη, μέσα από το πρίσμα της οπτικοποίησης.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που εξετάζονται είναι τα εξής:

1. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις μπορούν να αναγνωριστούν κάποια μοτίβα αλληλεπίδρασης μεταξύ οπτικού και λογικού συλλογισμού;

2. Πώς υποστηρίζεται το πέρασμα από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη με τη βοήθεια της οπτικής προσέγγισης;

2.2 Φάσεις της έρευνας

Η έρευνα διεξήχθη σε ένα τμήμα Α' Λυκείου ενός Γενικού Ενιαίου Λυκείου του Νομού Αττικής, δυναμικής είκοσι δύο (22) μαθητών και η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε δύο φάσεις. Στην πρώτη προπαρασκευαστική φάση συμμετείχε το σύνολο των μαθητών του τμήματος, ενώ για τη δεύτερη φάση της έρευνας, κατά την οποία διερευνήθηκαν τα ερευνητικά ερωτήματά της, επιλέχθηκαν έξι (6) μαθητές με κριτήριο το Βαθμό Οπτικότητας (Mathematical Visuality Score) που προέκυψε από την επεξεργασία των δεδομένων της πρώτης φάσης.

2.2.1 Πρώτη Φάση της Έρευνας

Ερευνητικό Εργαλείο:

Η πρώτη φάση της έρευνας περιελάμβανε την συμπλήρωση ερωτηματολογίων, στα οποία οι μαθητές κλήθηκαν να επιλύσουν με όποιο τρόπο επιθυμούσαν δώδεκα λεκτικά προβλήματα, από τις απαντήσεις των οποίων εξήχθη ο Βαθμός Οπτικότητας (MVS) κάθε μαθητή.

Το ερωτηματολόγιο έχει σχεδιαστεί από την κα Norma Presmeg, Καθηγήτρια του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου του Ιλινόις, από την οποία δόθηκε η άδεια μετάφρασης και αναπαραγωγής του καθώς κρίθηκε ότι εξυπηρετεί τις

ανάγκες της παρούσας έρευνας. Το ερωτηματολόγιο έχει χρησιμοποιηθεί ευρύτατα σε έρευνες αναφορικά με την οπτικοποίηση και την επιχειρηματολογία (Presmeg 1986, 2006) και έχει στόχο να υπολογίσει τον Βαθμό Οπτικότητας (MVS) του ερωτώμενου. Διαχωρίζεται, δε, σε δύο μέρη: το πρώτο μέρος αποτελείται από έξι λεκτικά προβλήματα τα οποία οι μαθητές καλούνται να ολοκληρώσουν σε τριάντα λεπτά, ενώ το δεύτερο μέρος αποτελείται από δώδεκα λεκτικά προβλήματα που θα πρέπει να επιλυθούν σε διάρκεια μιας ώρας. Ο Βαθμός Οπτικότητας κάθε μαθητή προκύπτει από τις απαντήσεις των δεκαοκτώ σε σύνολο προβλημάτων.

Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης έρευνας χρησιμοποιήθηκε μόνο το δεύτερο μέρος του πρωτότυπου ερευνητικού εργαλείου το οποίο ακόμα και μεμονωμένο εξασφαλίζει ασφαλή συμπεράσματα για το Βαθμό Οπτικότητας. Ο Βαθμός Οπτικότητας αποτελεί το κριτήριο βάση του οποίου έγινε η επιλογή των μαθητών για την συμμετοχή τους στη δεύτερη φάση της έρευνας.

Πιλοτική Έρευνα:

Το δεύτερο μέρους του ερωτηματολογίου μεταφράστηκε και δόθηκε σε μία ανεξάρτητη ομάδα έξι μαθητών, φοιτούντων σε τάξεις από Γ' Γυμνασίου μέχρι Β' Λυκείου, οι οποίοι κατέγραψαν τις παρατηρήσεις τους σχετικά με την ευκολία κατανόησης των προβλημάτων και των εκφραστικών μέσων που χρησιμοποιήθηκαν. Λαμβάνοντας υπόψη τις παρατηρήσεις των μαθητών έγιναν οι απαραίτητες τροποποιήσεις και διαμορφώθηκε το τελικό ερωτηματολόγιο που περιελάμβανε δώδεκα λεκτικά προβλήματα.

Μετά τον σχεδιασμό της τελικής μορφής του, το ερωτηματολόγιο δόθηκε σε μία ομάδα πέντε μαθητών Α' Λυκείου, επιλεγμένους αναλογικά με τις επιδόσεις τους, στους οποίους ζητήθηκε να δώσουν ολοκληρωμένες απαντήσεις για κάθε ένα από τα προβλήματα που ασχολήθηκαν στην διάρκεια μιας ώρας. Κατόπιν ζητήθηκε η άποψη τους σχετικά με τη διαδικασία στην οποία είχαν συμμετάσχει. Από την ανάλυση των απαντήσεων προέκυψε ένας μεγάλος και μη αναμενόμενος αριθμός αναπάντητων προβλημάτων, ενώ στο σύνολό τους οι μαθητές διατύπωσαν την άποψη ότι ο όγκος των προβλημάτων ήταν κουραστικός και η ενασχόλησή τους με τα τελευταία κατά σειρά προβλήματα ήταν επιφανειακή.

Δεδομένων των ενδείξεων ότι τα δώδεκα προβλήματα αποτελούν έναν μεγάλο αριθμό για να ασχοληθούν οι μαθητές αποτελεσματικά στη διάρκεια μίας διδακτικής ώρας, επιλέχθηκε ο διαχωρισμός του ερωτηματολογίου σε δύο μέρη, αποτελούμενο από έξι λεκτικά προβλήματα ανάλογης δυσκολίας έκαστο.

Συμμετέχοντες:

Στην πρώτη φάση της έρευνας συμμετείχε το σύνολο των μαθητών του τμήματος.

Διαδικασία:

Η πρώτη φάση της έρευνας ήταν συνολικής διάρκειας δύο διδακτικών ωρών, οι οποίες επιλέχθηκαν με διαφορά μιας εβδομάδας μεταξύ τους.

Στην πρώτη συνάντηση οι μαθητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες, στην κάθε μία από τις οποίες δόθηκε διαφορετικό μέρος του ερωτηματολογίου. Κλήθηκαν να απαντήσουν σε όλα τα προβλήματα του ερωτηματολογίου που τους δόθηκε όσο πιο αναλυτικά μπορούσαν. Κατόπιν, σε κάθε μαθητή που ολοκλήρωνε τη διαδικασία μοιράστηκε ένα συνοδευτικό ερωτηματολόγιο. Το συνοδευτικό έγγραφο αποτελούνταν από πιθανές διαδικασίες επίλυσης για κάθε ένα από τα προβλήματα που είχαν επεξεργαστεί και ζητήθηκε να επιλέξουν για κάθε πρόβλημα τον τρόπο ή τους τρόπους επίλυσης που ήταν εγγύτεροι στη δική τους λύση. Για κάθε πρόβλημα υπήρχε επιπλέον κενός χώρος συμπλήρωσης, σε περίπτωση που καμία από τις προτεινόμενες διαδικασίες επίλυσης δεν κάλυπτε τους μαθητές. Η διαδικασία ολοκληρώθηκε σε περίπου 55 λεπτά.

Στην δεύτερη συνάντηση σε κάθε ομάδα μαθητών δόθηκε το δεύτερο αντίστοιχο μέρος του ερωτηματολογίου που έμενε να επεξεργαστούν. Η διαδικασία ήταν πανομοιότυπη με την προηγούμενη και ολοκληρώθηκε στον ίδιο περίπου χρόνο.

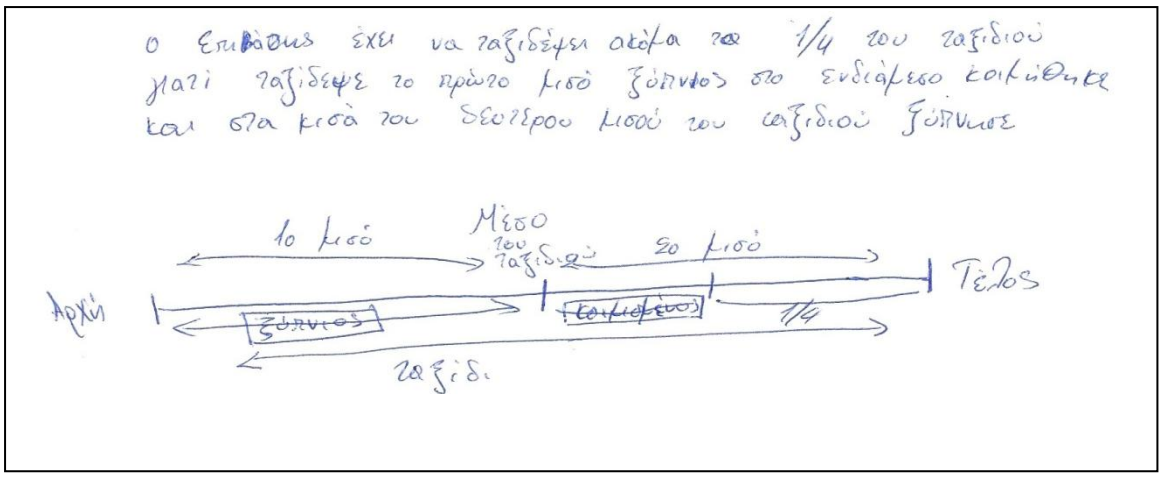
Ανάλυση ερωτηματολογίων:

Για την εξαγωγή του Βαθμού Οπτικότητας συνεκτιμήθηκαν τόσο οι επιλογές των μαθητών στο συνοδευτικό έγγραφο, όσο και οι ιδιόχειρες απαντήσεις των μαθητών σε κάθε πρόβλημα.

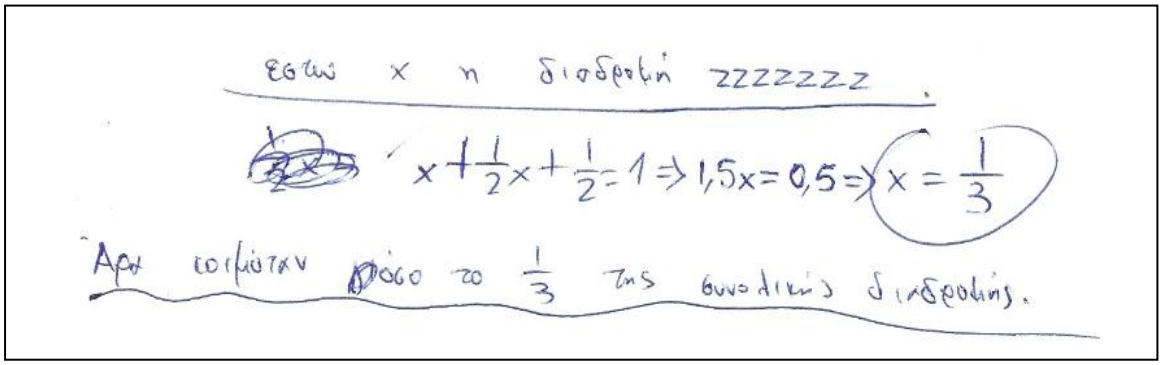
Κάθε οπτικός τρόπος επίλυσης που είτε αποτυπωνόταν στο χαρτί με κάποιο διάγραμμα ή σχήμα είτε δηλωνόταν ως νοερή εικόνα, βαθμολογήθηκε με 2. Κάθε αλγεβρικός τρόπος επίλυσης έλαβε το βαθμό 0. Στις περιπτώσεις που οι μαθητές δήλωσαν ότι επέλεξαν έναν συνδυασμό των παραπάνω διαδικασιών η λύση εκλήφθηκε ως οπτική και δόθηκε ο βαθμός 2. Τέλος, σε τυχόν αναπάντητα προβλήματα ή απαντήσεις που ήταν ανεπαρκείς και ασαφείς ως προς την αιτιολόγηση δόθηκε ο βαθμός 1. Ως εκ τούτου, ο Βαθμός Οπτικότητας κυμαίνεται από 0-24.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.5

Ένας επιβάτης που είχε ήδη ταξιδέψει τη μισή διαδρομή του ταξιδιού αποκοιμήθηκε. Όταν ξύπνησε είχε ακόμα να ταξιδέψει την μισή απόσταση από αυτή που είχε ταξιδέψει όσο ήταν κοιμισμένος. Ποιο μέρος όλου του ταξιδιού ήταν κοιμισμένος;



(Εικόνα 2.1: Παράδειγμα απάντησης που έλαβε 2 βαθμούς στο MVS)



(Εικόνα 2.2: Παράδειγμα απάντησης που έλαβε 0 βαθμούς στο MVS)

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να γίνει σαφής η ορολογία που υιοθετήθηκε και χρησιμοποιείται σε όλη την έρευνα. Οι ορισμοί αυτοί έχουν διατυπωθεί από την Presmeg και βασίζονται σε μελέτες των Moses και Suwarsono (Presmeg, 1986).

Μια ***οπτική μέθοδος επίλυσης*** *(visual method)* περιλαμβάνει τη χρήση οπτικών συλλογών εικόνων, με την παρουσία ή μη ενός διαγράμματος, ως απαραίτητο μέρος της διαδικασίας επίλυσης, ακόμα και αν η αλγεβρική μέθοδος χρησιμοποιείται επίσης.

Μια ***μη οπτική μέθοδος επίλυσης*** *(nonvisual method)* δεν περιλαμβάνει καμίας μορφής οπτικές εικόνες ως απαραίτητο μέρος της διαδικασίας επίλυσης.

Η ***Μαθηματική Οπτικότητα*** ενός ατόμου είναι ο βαθμός στον οποίο ένα άτομο προτιμά να χρησιμοποιεί οπτικές μεθόδους κατά την ενασχόληση του με προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν είτε με οπτικές είτε με μη οπτικές μεθόδους.

Οπτικοί *(visualisers)* καλούνται οι μαθητές που προτιμούν να χρησιμοποιούν οπτικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, σε προβλήματα τα οποία μπορούν να επιλυθούν τόσο με οπτικές ή μη οπτικές μεθόδους.

Μη-οπτικοί *(nonvisualisers)* καλούνται οι μαθητές οι οποίοι δεν προτιμούν να χρησιμοποιούν οπτικές μεθόδους σε τέτοιου είδους προβλήματα.

Αποτελέσματα:

Είναι προφανές ότι για λόγους δεοντολογίας και διασφάλισης της ανωνυμίας των μαθητών δόθηκε ένας κωδικός αναγνώρισης. Τα βαθμολογικά αποτελέσματα της πρώτης φάσης συγκεντρώνονται στον παρακάτω πίνακα:

	ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΜΑΘΗΤΗ	MV SCORE	ΑΝΑΛΟΓΙΑ Σ/Λ	ΕΠΙΔΟΣΗ ΑΝΩ ΤΟΥ ΜΕΤΡΙΟΥ
1		11	9 Σ - 3 Λ	✓
2		10	9 Σ - 3 Λ	✓
3		12	9 Σ - 3 Λ	✓
4		9	6 Σ - 6 Λ	✓
5	**Γ**	**7**	**8 Σ - 4 Λ**	✓
6	**Α**	**17**	**2 Σ - 10 Λ**	✓
7		7	8 Σ - 4 Λ	✓
8	**Θ**	**7**	**1 Σ - 11 Λ**	
9		8	3 Σ - 9 Λ	✓
10*		14	3 Σ - 9 Λ	
11		9	5 Σ - 7 Λ	✓
12		11	6 Σ - 6 Λ	✓
13	**Δ**	**5**	**6 Σ - 6 Λ**	✓
14		11	1 Σ - 11 Λ	
15		13	2 Σ - 10 Λ	

16	**Β**	**16**	**5 Σ - 7 Λ**	✓
17		14	5 Σ - 7 Λ	
18	**Ζ**	**16**	**2 Σ - 10 Λ**	
19*		11	1 Σ - 11 Λ	
20		15	5 Σ - 7 Λ	
21		8	7 Σ - 5 Λ	✓
22*		12	2 Σ - 10 Λ	

(Πίνακας 2.3: Πίνακας βαθμολογικών αποτελεσμάτων πρώτης φάσης)

Σημειώσεις:

1. Οι μαθητές που εμφανίζονται με * είχαν πολύ υψηλό ποσοστό αναπάντητων ερωτήσεων, ως εκ τούτου το αποτέλεσμα του Βαθμού Οπτικότητας κρίνεται πλασματικό.

2. Η εκτίμηση της επίδοσης των μαθητών (βλ. στήλη "ΕΠΙΔΟΣΗ ΑΝΩ ΤΟΥ ΜΕΤΡΙΟΥ") έγινε από τον διδάσκοντα του τμήματος.

Μετά την ανάλυση των ερωτηματολογίων επιλέχθηκαν να συμμετάσχουν στην επόμενη φάση τρεις οπτικοί μαθητές με αρκετά υψηλό MVS και τρεις μη-οπτικοί μαθητές με τα χαμηλότερα MVS. Σε κάθε μία από τις δύο ομάδες μαθητών επιλέχθηκε από ένας συμμετέχοντας με χαμηλή σχολική επίδοση, όπως εκτιμήθηκε από τον διδάσκοντα του τμήματος.

2.2.2 Δεύτερη Φάση της Έρευνας

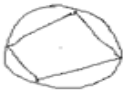
Ερευνητικό Εργαλείο:

Στη δεύτερη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκαν ατομικές ημι-δομημένες συνεντεύξεις πάνω σε δύο μη-τυπικά γεωμετρικά προβλήματα, τα οποία είναι τα ακόλουθα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1^{Η}

Ένας συμμαθητής σου καταλήγει στο παρακάτω συμπέρασμα αλλά δεν είναι απόλυτα σίγουρος.

«Παίρνω έναν κύκλο με κέντρο το Ο.»



«Εγγράφω τυχαίο τετράπλευρο με τις κορυφές του πάνω στον κύκλο.»

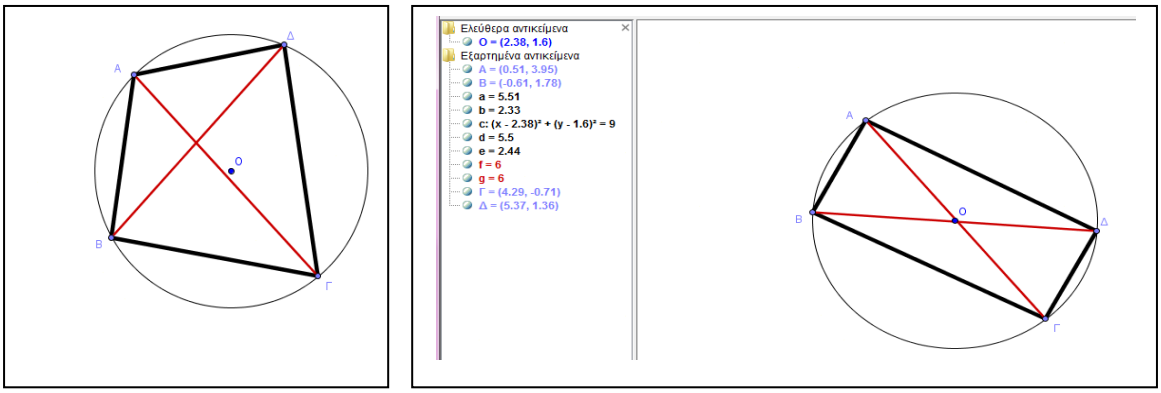
«Σχεδιάζω τις διαγώνιές του. Αυτές διέρχονται από το κέντρο Ο.»

***«Άρα**, αφού το τετράπλευρο που σχεδίασα είναι τυχαίο, σε κάθε τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο οι διαγώνιές του θα διέρχονται από το κέντρο. Έτσι δεν είναι;»*

- Συμφωνείς μαζί του;
- Τι θα του έλεγες για να τον πείσεις;

Στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας η οπτικοποίηση λαμβάνεται ως η ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν, να μετασχηματίζουν και να αναλύουν εικόνες και νοητικές εικόνες. Βασικός, δε, ρόλος της είναι να απεικονίσει και να επικοινωνήσει πληροφορίες, να αναπτύξει ιδέες και νοήματα και να χρησιμοποιήσει κατάλληλα τις εικόνες με σκοπό την μαθηματική ανακάλυψη και την κατανόηση.

Στόχος της πρώτης δραστηριότητας είναι να διερευνήσει αν ο μαθητής μπορεί να δημιουργήσει μια συλλογή εικόνων αντιπροσωπευτική για το πρόβλημα και σε ποιο βαθμό μπορεί αυτή η συλλογή να φωτίσει την "ιδέα- κλειδί" και να δημιουργήσει μια εικασία ικανή να αποτελέσει βάση για μια τυπική απόδειξη. Η πρώτη ερώτηση αποσκοπεί στην ανάπτυξη της οπτικοποίησης, μέσα από την οποία ο μαθητής θα αποδεχτεί ή θα απορρίψει τον ισχυρισμό, και την ενίσχυση μιας επιχειρηματολογίας ικανής να εξηγήσει την επιλογή αυτή του μαθητή. Η δεύτερη ερώτηση της δραστηριότητας εξετάζει κατά πόσο και με ποιες προϋποθέσεις η προηγούμενη επιχειρηματολογία του μαθητή μπορεί να υποστηρίξει την επιθυμητή δομή μιας τυπικής απόδειξης, στην προκειμένη περίπτωση μιας πρότασης βασισμένης σε γεωμετρικά επιχειρήματα. Η πρώτη δραστηριότητα ολοκληρώνεται με την μελέτη του ίδιου προβλήματος μέσα στο δυναμικό περιβάλλον του προγράμματος Geogebra, όπου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν, να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν εικασίες που έχουν ήδη διατυπώσει και να αναστοχαστούν πάνω στην επιχειρηματολογία που έχουν αναπτύξει. Η διαδικασία αυτή, μέσα από την επιβεβλημένη οπτικοποίηση, επιθυμεί να εξετάσει σε ποιες περιπτώσεις και υπό ποιες συνθήκες μπορεί το περιβάλλον του υπολογιστή να διευκολύνει το πέρασμα από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη.



(Εικόνα 2.4: Εικόνες από την αναπαράσταση της 1ης Δραστηριότητας στο δυναμικό περιβάλλον του Geogebra)

Σημείωση: Μέσα στο περιβάλλον του Geogebra οι μαθητές ήταν δυνατό να χρησιμοποιήσουν τη «Βοήθεια», δηλαδή την αριστερή στήλη όπου υπήρχαν όλα τα αριθμητικά δεδομένα του σχήματος, όπως το μέγεθος των πλευρών, των διαμέτρων ή των γωνιών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2Η

Ένα τετράγωνο έχει δύο διαγώνιες, ένα πεντάγωνο έχει πέντε διαγώνιες, ενώ ένα εξάγωνο έχει εννέα.
α) Μπορείς να βρεις πόσες διαγώνιες έχει ένα επτάγωνο; Εξήγησε αναλυτικά τι σκέφτηκες.
β) Μπορείς να βρεις έναν τύπο που να υπολογίζει τον αριθμό των διαγωνίων ενός ν-γώνου; Εξήγησε πώς κατέληξες σε αυτόν.

Όπως, έχει επισημανθεί η οπτικοποίηση είναι αποτελεσματική όταν μπορεί να υποστηρίξει τη γενίκευση, ενώ η μαθηματική γενίκευση αναγνωρίζεται και σε περισσότερο αφαιρετικές μορφές εικόνων, όπως αυτή των πρότυπων εικόνων. Στόχος της δεύτερης δραστηριότητας είναι να διερευνήσει αν ο μαθητής μπορεί, μέσα από έναν μικρό αριθμό συγκεκριμένων διαγραμμάτων, να ανακαλύψει ένα μοτίβο που συνδέει τον αριθμό των διαγωνίων με τον αριθμό των κορυφών έκαστου πολυγώνου και να καταφέρει να γενικεύσει το μοτίβο αυτό σε μια αλγεβρική σχέση που ισχύει για κάθε πολύγωνο. Το μοτίβο αυτό είναι εξαιρετικά δύσκολο να βρεθεί με καθαρά αλγεβρική προσέγγιση, ενώ η χρήση απλών οπτικών συλλογισμών που έπονται άμεσα από τον τρόπο σχεδίασης των διαγραμμάτων αποτελεί χρήσιμο εργαλείο στα χέρια των μαθητών. Η πρώτη ερώτηση επιθυμεί να ενισχύσει την οπτικοποίηση του μαθητή με απώτερο στόχο να παρατηρήσει μια κοινή διαδικασία στην χάραξη των διαγωνίων πάνω στην οποία θα οικοδομηθεί η

στρατηγική εύρεσης του αριθμού τους. Η δεύτερη ερώτηση εξετάζει τις προϋποθέσεις κατά τις οποίες μια στρατηγική μεταφράζεται σε μια ορθή αλγεβρική σχέση και τον τρόπο με τον οποίο διασφαλίζεται η γενική της ισχύ.

Συμμετέχοντες:

Στη δεύτερη φάση της έρευνας συμμετείχαν έξι μαθητές οι οποίοι επιλέχθηκαν βάση του Βαθμού Οπτικότητας (MVS) που προέκυψε από την ανάλυση της πρώτης φάσης. Από αυτούς οι μισοί εμφάνισαν την χαμηλότερη βαθμολογία στον πίνακα μέτρησης του Βαθμού Οπτικότητας της τάξης 5-7 και κατατάσσονται στην κατηγορία των μη οπτικών μαθητών, ενώ οι υπόλοιποι έλαβαν τις υψηλότερες βαθμολογίες της τάξης 16-17 και κατατάσσονται στην κατηγορία των οπτικών μαθητών.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές που επιλέχτηκαν ως αντιπροσωπευτικοί κάθε κατηγορίας παρουσιάζουν ποικιλία ως προς την αναλογία των Σωστών και Λάθος απαντήσεων. Επιπλέον, σε κάθε κατηγορία επιλέχθηκε να συμμετέχει στις συνεντεύξεις ένας μαθητής που ο διδάσκων του τμήματος κατέταξε στους έχοντας επιδόσεις κάτω του μετρίου.

Διαδικασία:

Κάθε συμμετέχων στη δεύτερη φάση της έρευνα έλαβε μέρος σε δύο συνεντεύξεις διάρκειας 30-40 λεπτών έκαστη, καθώς οι δύο δραστηριότητες επιλέχθηκε να συζητηθούν ξεχωριστά.

Οι συνεντεύξεις που αφορούν στην πρώτη γεωμετρική δραστηριότητα δομούνται σε τρείς βασικούς θεματικούς άξονες: το στάδιο της οπτικοποίησης το οποίο ολοκληρώνεται όταν ο μαθητής αναγνωρίσει ότι ο ισχυρισμός δεν είναι πάντοτε αληθής, το στάδιο επιχειρηματολογίας και ανάπτυξης εικασίας το οποίο ολοκληρώνεται με τη διατύπωση μιας απόδειξης και τέλος το στάδιο του δυναμικού περιβάλλοντος στο οποίο είναι επιθυμητή η τροποποίηση τόσο της επιχειρηματολογίας όσο και της απόδειξης όταν είναι απαραίτητη.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται ένα βασικό πρωτόκολλο ερωτήσεων πάνω στο οποίο κινήθηκαν οι συνεντεύξεις της πρώτης δραστηριότητας. Ο ερευνητής έχει από βοηθητικό έως καθοδηγητικό ρόλο όταν κρίνεται απαραίτητο στα δύο πρώτα στάδια, ενώ η συμμετοχή του στο τελευταίο στάδιο είναι επιθυμητό να είναι υποστηρικτική.

Στάδιο Οπτικοποίησης	Τι πιστεύεις; Πώς είσαι σίγουρος γι' αυτό; Είναι κάτι που το γνωρίζεις από τη θεωρία ή απλά μπορείς να το διαπιστώσεις από το σχήμα; Έχεις κάποια εικόνα στο μυαλό σου; Μπορείς να μου την περιγράψεις; Μπορείς να μου την σχεδιάσεις; Μπορείς να επιβεβαιώσεις με κάποιο τρόπο τον ισχυρισμό σου; Τι παρατηρείς; Μπορείς να φέρεις μερικά δικά σου παραδείγματα; Τι παρατηρείς; Υπάρχουν κάποια τετράπλευρα για τα οποία να ισχύει/ να μην ισχύει αυτό που ισχυρίζεται ο συμμαθητής σου;
Στάδιο Επιχειρηματολογίας & Ανάπτυξης Εικασίας	Σε ποιες περιπτώσεις ισχύει/ δεν ισχύει αυτό που ισχυρίζεται ο συμμαθητής σου; Τα σχήματα που έχεις σχεδιάσει πώς διαφέρουν από αυτό του συμμαθητή σου; Έχουν κάτι κοινό; Στα σχήματα που έχεις σχεδιάσει μπορείς να διακρίνεις κάποιες ομοιότητες/διαφορές; Μπορείς να διακρίνεις κάποιες κοινές ιδιότητες των τετραπλεύρων που ικανοποιούν/δεν ικανοποιούν τον ισχυρισμό; Που οφείλονται οι κοινές ιδιότητες;
Στάδιο Δυναμικού Περιβάλλοντος	Μπορείς να μου περιγράψεις τι παρατηρείς; Που οφείλεται αυτό; Τι έχεις να παρατηρήσεις για το είδος των τετραπλεύρων που σχηματίζονται; Που οφείλεται αυτό; Παρατηρείς κάτι κοινό/ κάτι που να παραμένει σταθερό; Τι είναι αυτό που αλλάζει σε κάθε περίπτωση; Πως εξηγείται;

Οι συνεντεύξεις της δεύτερης δραστηριότητας δεν κινήθηκαν σε διακριτούς θεματικούς άξονες. Ρόλος του ερευνητή ήταν να δημιουργήσει την ανάγκη στο μαθητή να εστιάσει στην διαδικασία χάραξης των διαγωνίων (οπτική μέθοδος) και όχι στο αποτέλεσμα (αλγεβρική μέθοδος) με σκοπό την υιοθέτηση μιας στρατηγικής που να μπορεί να μεταφραστεί σε αλγεβρική σχέση. Στις περιπτώσεις που ο μαθητής αδυνατεί να εστιάσει στη διαδικασία ο ερευνητής δύναται να την υποδεικνύει για να αποτελέσει βάση για την ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας.

Ένα βασικό πρωτόκολλο ερωτήσεων για τη δεύτερη δραστηριότητα παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Έμφαση στη Διαδικασία	Μπορείς να μου περιγράψεις τι ακριβώς κάνεις; Πόσες βρήκες; Πώς είσαι σίγουρος ότι είναι τόσες και δεν σου ξέφυγε καμία; Πώς θα μπορούσες να χρησιμοποιήσεις τις πληροφορίες που δίνονται; Πώς χρησιμοποιείς τις πληροφορίες που σου δίνονται; Πώς έφερες τις διαγώνιες; Τυχαία ή ακολούθησες κάποια στρατηγική; Πιστεύεις ότι είναι σημαντικό να σχεδιάσουμε τις διαγώνιες με κάποια στρατηγική και όχι τυχαία; Γιατί; Μπορείς να μου περιγράψεις ποια στρατηγική ακολουθείς για να είσαι σίγουρος ότι δεν σου διαφεύγει καμία διαγώνιος; Μήπως θα μας βοηθούσε αν ασχολούμασταν με κάθε κορυφή ξεχωριστά/ φέρναμε από κάθε κορυφή όσες μπορούμε;
Αλγεβρικό Μοτίβο	Υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στις γωνίες του πολυγώνου και τις διαγώνιες που διέρχονται από αυτές; Ισχύει αυτό σε όλες τις περιπτώσεις; Πώς μπορείς να χρησιμοποιήσεις τα συμπεράσματα αυτά για να δώσεις μια απάντηση στο ερώτημα β; Τι συμβολισμούς πρέπει να χρησιμοποιήσεις;

<u>Ανάλυση αποτελεσμάτων:</u>

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε η ποιοτική ανάλυση περιεχομένου με στόχο τη διερεύνηση των τάσεων που εμφάνισαν οι μαθητές κατά το πέρασμα από την επιχειρηματολογία στην απόδειξη. Ακριβώς αυτή η διερευνητική φύση της έρευνας κατεύθυνε επαγωγικά τις θεματικές κατηγορίες στις οποίες επικεντρώθηκε η ανάλυση των συνεντεύξεων. Η δημιουργία των θεματικών κατηγοριών προέκυψε μέσα από την ανάλυση των συνεντεύξεων σε δύο βασικά στάδια.

Αρχικά, το απομαγνητοφωνημένο κείμενο κάθε συνέντευξης εξετάστηκε στην ολότητά του, και μέσα από μία συστηματική ανάγνωση και κωδικοποίηση καταγράφηκε η πορεία όλων των συλλογισμών που προέκυψαν. Η διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε για κάθε δραστηριότητα ξεχωριστά. Το αρχικό αυτό στάδιο μεταφέρθηκε σε ένα λογιστικό φύλλο Excel. Η καταγραφή έγινε τόσο κάθετα, κάθε στήλη αντιπροσώπευε τη συλλογιστική πορεία ενός μαθητή, όσο και οριζόντια

καθώς κάθε ομάδα γραμμών αντιπροσώπευε τη συλλογιστική πορεία όλων των μαθητών στο επιλεγμένο στάδιο. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αυτής επιχειρήθηκε η μελέτη των δεδομένων σε δύο ευρείες αρχικές κατηγορίες, της επιχειρηματολογίας των οπτικών και μη οπτικών μαθητών.

Όπως ήταν αναμενόμενο, πολλοί από τους διαλόγους μεταξύ των συμμετεχόντων και του ερευνητή περιείχαν αρκετές επισημάνσεις και διευκρινήσεις που δεν είχαν άμεση σχέση με τις δραστηριότητες ή επεξηγήσεις που αφορούσαν γνωστικά κενά των μαθητών και ήταν απαραίτητες για τη συνέχεια της διαδικασίας. Στη δεύτερη φάση της ανάλυσης απομονώθηκε η συλλογιστική πορεία των μαθητών που σχετίζονταν με τη δραστηριότητα και ανταποκρίνονταν στα ερευνητικά ερωτήματα. Η καταγραφή έγινε σε ένα νέο λογιστικό φύλλο Excel, με όμοια οριζόντια και κάθετη δομή. Από την ανάλυση αυτής της διαδικασίας προέκυψαν οι θεματικές κατηγορίες βάση των οποίων αναλύθηκε η επιχειρηματολογία των μαθητών και εξήχθησαν τα αποτελέσματα της έρευνας.

A	B	C	D	E	F	G
	17 (2Σ-10Λ)	*16 (5Σ-7Λ)*	*16 (2Σ-10Λ)*	*7 (8Σ-4Λ)*	*7 (1Σ-11Λ)*	*5 (6Σ-6Λ)*
ΟΠΤΙΚ	**Αποδέχεται** τον ισχυρισμό (γρ. 4)	**Αποδέχεται** τον ισχυρισμό (γρ. 10)	Αναγνωρίζει ότι οι **διαγώνιες που διέρχονται από το κέντρο θα είναι ίσες** (γρ. 4,5) καθώς **φαίνεται από το σχήμα** (γρ. 10)	**Αποδέχεται** τον ισχυρισμό θέτοντας κάποιο περιορισμό (γρ.2)	**Αποδέχεται** τον ισχυρισμό (γρ. 3) και δίνει εξαιρετικά **ασαφής αιτιολόγηση** (γρ. 11,12)	**Δεν αποδέχεται** τον ισχυρισμό (γρ. 3)
	Ανακαλεί από τη θεωρία ότι οι **διαγώνιες που διέρχονται από το κέντρο είναι ίσες** (γρ. 7,8) καθώς είναι **διάμετροι του κύκλου** (γρ. 15)	Καλείται να επιβεβαιώσει τον ισχυρισμό της. Φτιάχνει σχήμα για να ελέγξει την ισχύ του και διαπιστώνει ότι **οι διαγώνιοί του δεν είναι διάμετροι** (γρ. 16,17)	**Αποδέχεται** τον ισχυρισμό χωρίς βεβαιότητα (γρ. 17)	Αναγνωρίζει ότι **πρέπει να υπάρχουν** τετράπλευρα στα οποία οι διαγώνιοι **δεν διέρχονται από το κέντρο** (γρ. 10)	Καλείται να επιβεβαιώσει τον ισχυρισμό του. Σχεδιάζει παρόμοια τετράγωνα (γρ. 22, 29,30) και επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό του	Αναγνωρίζει ότι μπορεί το τετράπλευρο να **μην περιέχει το κέντρο** (γρ. 6). Το επιβεβαιώνει σχεδιάζοντας το **αντιπαράδειγμα** (γρ. 10,11)
	Εξακολουθεί να αποδέχεται τον ισχυρισμό (γρ. 17)	Διαπιστώνει ότι ο ισχυρισμός **κάποιες φορές ισχύει.** Ισχυρίζεται ότι μπορεί να είναι **τραπέζιο ή ορθογώνιο** (γρ. 24,25)	Καλείται να επιβεβαιώσει τον ισχυρισμό του. Φέρνει σχήμα που οι διαγώνιες να διέρχονται αλλά αμφιβάλει για την ορθότητά του (γρ. 23,24)	Σχεδιάζει τυχαίο τετράπλευρο και διαπιστώνει ότι οι διαγώνιες δεν διέρχονται από το κέντρο. Αμφιβάλει για την ορθότητα του κύκλου (γρ. 19)	Προκαλείται να φτιάξει ένα τυχαίο τετράπλευρο στο οποίο **μετακινεί το κέντρο του κύκλου στο σημείο τομής των διαγωνίων** (γρ. 37,38)	Αναγνωρίζει ότι ο ισχυρισμός του συμμαθητή **κάποιες φορές μπορεί να ισχύει** (γρ. 13)
	Καλείται να επιβεβαιώσει την άποψή της. Σχεδιάζει δύο περιπτώσεις που διέρχονται από το κέντρο και **αναγνωρίζει ότι δεν ισχύει σε κάθε τυχαίο τετράπλευρο** (γρ. 34)	Αναζητά περαιτέρω ισχυροποίηση της εικασίας της με σχήμα, σχεδιάζοντας πρώτα τις διαγώνιες του (γρ. 27). Θεωρεί ότι είναι τραπέζιο (ωστόσο μοιάζει με τετράγωνο) (γρ. 30,31)	Αναγνωρίζει την **ισότητα των ακτίνων** (γρ. 29-31) και υπάρχει η **έννοια της διχοτόμησης των διαγωνίων** (γρ. 33, 36, 41) χωρίς να μπορεί να αιτιολογήσει.	Σχεδιάζει κύκλο και τοποθετεί τα σημεία ώστε να σχηματιστεί **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** (γρ. 25)	Αναζητά περιατέρω έλεγχο με νέο σχήμα στο οποίο παρατηρεί ότι δεν διέρχονται από το κέντρο (γρ. 44)	Πιστεύει ότι οι διαγώνιες διέρχονται από το κέντρο όταν το τετράπλευρο δεν έχει καμία πλευρά παράλληλη (γρ.15).

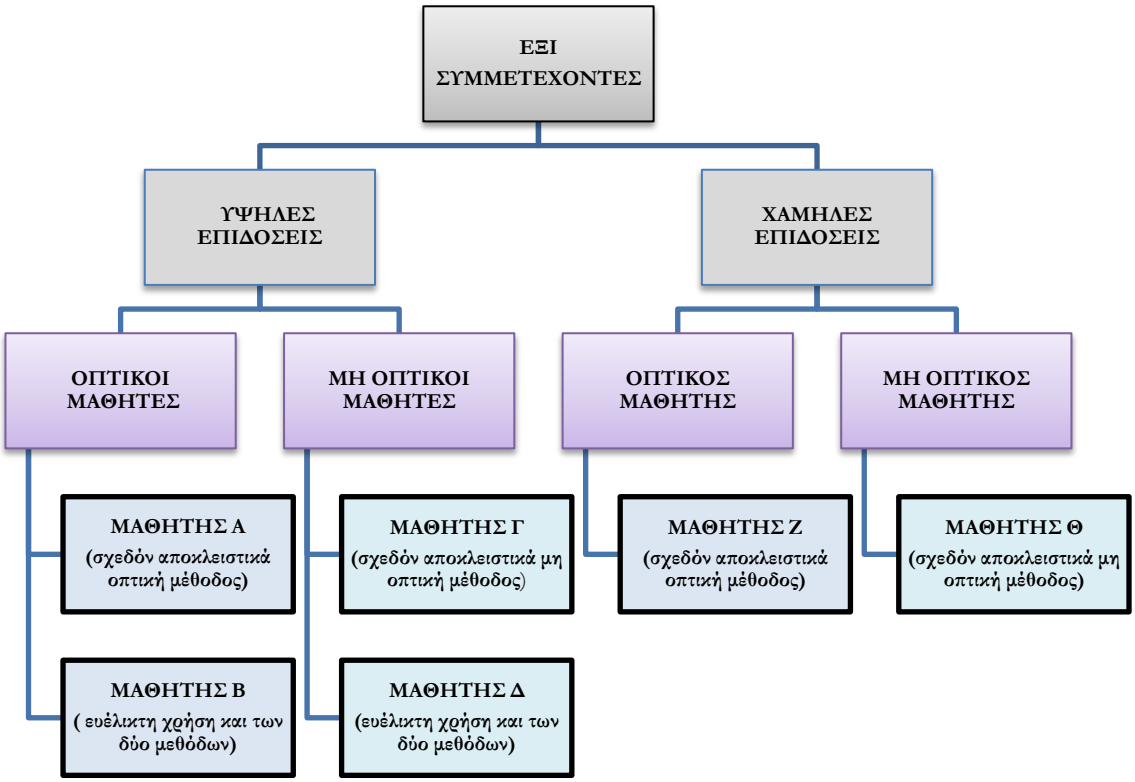
(Εικόνα 2.5: Απόσπασμα του Λογιστικού Φύλλου Δραστηριότητα 1-Πρώτη Φάση)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Προφίλ Μαθητών

Προκειμένου να κατανοηθεί σε βάθος η επιχειρηματολογία των μαθητών που συμμετείχαν στη δεύτερη φάση της έρευνας είναι χρήσιμο να σκιαγραφηθούν τα προφίλ των μαθητών, όπως αυτά προέκυψαν εξετάζοντας το Βαθμό Οπτικότητάς (MVS) τους στην πρώτη φάση της έρευνας, και την ανάλυση των θεματικών κατηγοριών στη δεύτερη και τελευταία φάση αυτής.



(Οργανόγραμμα 3.1: Σχηματική Αναπαράσταση των προφίλ των μαθητών)

Μαθητής Α*:* Ένας οπτικός μαθητής με ιδιαίτερα υψηλό MVS και υψηλές σχολικές επιδόσεις. Από την αναλογία των Σωστών και Λάθος απαντήσεων (2Σ-10Λ) γίνεται αισθητό ότι η οπτική προσέγγιση σε μεγάλο ποσοστό δεν οδηγεί στα επιθυμητά ορθά αποτελέσματα. Η τάση του μαθητή να χρησιμοποιεί σχεδόν αποκλειστικά την οπτική μέθοδο στην επίλυση προβλημάτων επαληθεύτηκε και κατά την ενασχόληση με τις γεωμετρικές δραστηριότητες.

Μαθητής Β: Ένας οπτικός μαθητής με υψηλό MVS και εξίσου υψηλές σχολικές επιδόσεις. Η αναλογία των Σωστών και Λάθος απαντήσεων (5Σ-7Λ) κυμαίνεται κοντά στο μέσο όρο που σημειώθηκε από το σύνολο της τάξης. Η ανάλυση των δύο γεωμετρικών δραστηριοτήτων ανέδειξε την ικανότητα του μαθητή να χρησιμοποιεί με σχετική ευελιξία τόσο την οπτική όσο και τη μη οπτική μέθοδο επίλυσης.

Μαθητής Γ*:* Ένας μη οπτικός μαθητής με χαμηλό MVS και υψηλές σχολικές επιδόσεις. Η αναλογία των Σωστών και Λάθος απαντήσεων (8Σ-4Λ) ήταν η καλύτερη επίδοση που παρατηρήθηκε ανάμεσα στους μη οπτικούς μαθητές και η δεύτερη καλύτερη στο σύνολο της τάξης. Η τάση του μαθητή να χρησιμοποιεί σχεδόν αποκλειστικά μη οπτικές μεθόδους στην επίλυση προβλημάτων επαληθεύτηκε και κατά την ενασχόληση με τις δύο γεωμετρικές δραστηριότητες.

Μαθητής Δ*:* Ένας μη οπτικός μαθητής με χαμηλό MVS και υψηλές σχολικές επιδόσεις. Η αναλογία των Σωστών και Λάθος απαντήσεων (6Σ-6Λ) κυμαίνεται κοντά στο μέσο όρο που σημειώθηκε από το σύνολο της τάξης. Η ανάλυση των δύο γεωμετρικών δραστηριοτήτων ανέδειξε την ικανότητα του μαθητή να χρησιμοποιεί με μεγάλη ευκολία και ευελιξία τόσο τις οπτικές όσο και τις μη οπτικές μεθόδους επίλυσης.

Μαθητής Ζ*:* Ένας οπτικός μαθητής με υψηλό MVS και σχολικές επιδόσεις κάτω του μετρίου. Η αναλογία των Σωστών και Λάθος απαντήσεων (2Σ-10Λ) είναι ιδιαίτερα χαμηλή και πιθανόν δικαιολογείται από το επίπεδο επίδοσής του. Η τάση του να χρησιμοποιεί οπτικές μεθόδους επίλυσης ήταν σε μεγάλο βαθμό αποτελεσματική κατά την ενασχόληση με την πρώτη δραστηριότητα, αλλά όχι το ίδιο επιτυχής με τη δεύτερη.

Μαθητής Θ: Ένας μη οπτικός μαθητής με χαμηλό MVS και σχολικές επιδόσεις κάτω του μετρίου. Η αναλογία των Σωστών και Λάθος απαντήσεων (1Σ-11Λ) είναι η χαμηλότερη που παρατηρήθηκε σε επίπεδο τάξης και πιθανόν δικαιολογείται από τις χαμηλές σχολικές επιδόσεις του. Η τάση του να χρησιμοποιεί μη οπτικές μεθόδους επίλυσης ήταν εν μέρει αποτελεσματική κατά την ενασχόληση με τη δεύτερη δραστηριότητα, χωρίς να παρατηρείται το ίδιο στην πρώτη.

3.2 Ανάλυση της Επιχειρηματολογίας της 1ης Δραστηριότητας

Ακολουθεί η ανάλυση της επιχειρηματολογίας των μαθητών στην πρώτη δραστηριότητα. Κάθε ανάλυση διακρίνεται σε τρία μέρη: τη φάση της οπτικοποίησης, τη φάση της δημιουργίας εικασίας και την τελευταία φάση του δυναμικού περιβάλλοντος. Στο τέλος της δεύτερης φάσης ζητείται από τους μαθητές να καταγράψουν την απόδειξη που θα έδιναν ως απάντηση στην δραστηριότητα. Μετά το τέλος της τρίτης φάσης και τη μεσολάβηση του δυναμικού περιβάλλοντος ζητείται από τους μαθητές να επανεξετάσουν την απόδειξη και να προβούν σε όποιες διορθώσεις κρίνουν απαραίτητες.

Μαθητής *Α (MVS 17)*

<u>ΦΑΣΗ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ</u>

Ο μαθητής Α μετά την σχολαστική ανάγνωση της δραστηριότητας αποδέχεται τον ισχυρισμό. Με αφορμή την οπτική εικόνα της δραστηριότητας και στην προσπάθειά του να εξηγήσει την άποψή του, αναφέρεται σε δομικά στοιχεία του σχήματος τα οποία είναι δυνατόν να αποτελέσουν και ιδέες κλειδί για την απόδειξη.

> Α: …από τη στιγμή που πήρε ένα τυχαίο τετράπλευρο μέσα σε αυτόν τον κύκλο και έφερε τις διαγώνιές του, ξέρουμε ότι οι διαγώνιες που διέρχονται μέσα από ένα κέντρο είναι ίσες…Γιατί είναι διάμετροι του κύκλου…

Ο μαθητής ωστόσο εμμένει στην άποψή του με περισσότερη βεβαιότητα. Ζητώντας επαλήθευση για την άποψή του και σχεδιάζοντας παραδείγματα που υποθέτει ότι επιβεβαιώνουν τον ισχυρισμό αντιλαμβάνεται ότι αυτός δεν μπορεί να ισχύει για κάθε τυχαίο τετράπλευρο.

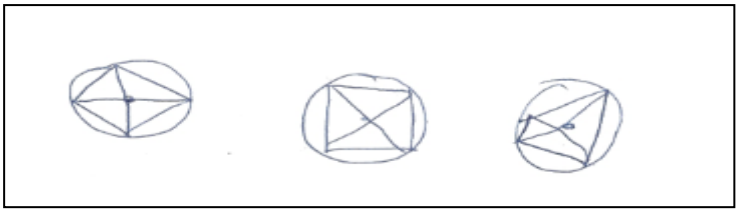
> Ε[1]: Εδώ το τετράπλευρο που κάνεις είναι τελείως τυχαίο;
> Α: Όχι..
> Ε: Το έχεις κάνει να μοιάζει με κάποιο συγκεκριμένο τετράπλευρο;
> Α: Να μοιάζει… Τι άλλο να κάνω;… Α! Όχι σε κάθε τυχαίο τετράπλευρο!

Σχεδιάζοντας ακολούθως ένα αντιπαράδειγμα καταλήγει πως ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος (εικόνα 3.2).

> Α: Όχι. Δεν ισχύει. Μάλλον, δεν ισχύει όλες τις φορές!

---

[1]Σημειώνεται ότι στα απομαγνητοφωνημένα αποσπάσματα το γράμμα Ε αποδίδεται στον ερευνητή, ενώ τα υπόλοιπα γράμματα αποτελούν την ονομασία των μαθητών, όπως παρουσιάστηκε στο οργανόγραμμα.



(Εικόνα 3.2: Παραδείγματα που δόθηκαν από τον μαθητή Α)

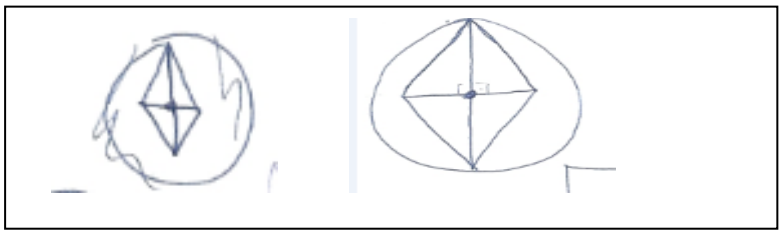
ΦΑΣΗ ΕΙΚΑΣΙΑΣ

Στη συνέχεια, ο μαθητής μελετά προσεκτικά τα σχήματα που έχει μπροστά του, αρχίζει να παρατηρεί ομοιότητες και διαφορές, και διατυπώνει συμπεράσματα σχετικά με τις διαγώνιές τους σε καθαρά οπτικό επίπεδο.

Α: Λογικά οι διαγώνιες περνάνε από το κέντρο όταν οι πλευρές (δείχνει τις πλευρές του τετραγώνου) είναι ίσες περίπου….. Τετράγωνο! Άρα οι διαγώνιες θα περνάνε από το κέντρο και θα είναι ίσες μόνο όταν θα είναι τετράγωνο.
Ε: Η μόνη περίπτωση είναι το τετράπλευρο να είναι τετράγωνο;
Α: Και παραλληλόγραμμο[2]… Παραλληλόγραμμο, τετράγωνο… Και ρόμβος;

Όταν του ζητείται να αιτιολογήσει τον τελευταίο ισχυρισμό επικαλείται την προηγούμενη θεωρητική του γνώση χωρίς να μπορεί να εξηγήσει περαιτέρω και επιστρέφει εκ νέου στη μελέτη των σχημάτων.

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις πως κατέληξες στο συμπέρασμα αυτό;
Α: Το ξέρω από τη θεωρία μου. Ότι λογικά… Αυτό με βοηθάει πιο πολύ (τετράγωνο). Γιατί στο τετράγωνο οι πλευρές του είναι ίσες, άρα και οι διαγώνιές του είναι ίσες…. και ότι άλλα στοιχεία έχουν θα είναι ίσα.
Ε: Στην περίπτωση του ρόμβου τι ισχύει;
Α: Έχουμε περισσότερα στοιχεία αν θυμάμαι. Κάτσε να το πάρω λογικά. Εδώ πάλι οι διαγώνιες είναι ίσες (δείχνει στο σχήμα). Και δημιουργούνται ορθογώνια τρίγωνα. Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και…



(Εικόνα 3.3: Παραδείγματα ρόμβων που μελετά ο μαθητής Α)

[2]Σημειώνεται ότι στην επιχειρηματολογία όλων των μαθητών η αναφορά στα «παραλληλόγραμμα» αφορά μόνο τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Κανένας από τους μαθητές δεν αναφέρθηκε σε πλάγια παραλληλόγραμμα.

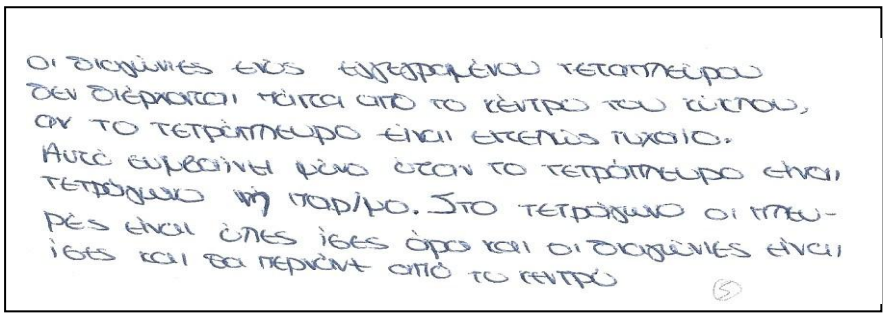
Εξετάζοντας επισταμένως τις διαγώνιες των σχημάτων και γράφοντάς τες επανειλημμένως με το στυλό προκύπτει το ερώτημα αν η ισότητα των διαγωνίων αποτελεί επαρκή συνθήκη.

Α: Να ρωτήσω κάτι; Οι διαγώνιες θα είναι ίσες, αλλά αυτό σημαίνει ότι θα περνάνε και από το κέντρο;

Αναζητώντας απάντηση στο ερώτημα που προέκυψε επιστρέφει στη μελέτη του τετραγώνου.

Α: Χωρίζονται σε τέσσερα ίσα τρίγωνα.
Ε: Πώς ξέρεις ότι τα τρίγωνα είναι ίσα;
Α: Αν ναι! Οι διαγώνιες τέμνονται στο κέντρο. Άρα, οι διαγώνιες πρέπει να είναι ίσες και να διχοτομούνται. Αλλά αφού περνάνε από το κέντρο του κύκλου και θα είναι ίσες και θα διχοτομούνται.

Ο μαθητής, έχοντας ήδη επισημάνει όλα τα απαραίτητα στοιχεία για τη δόμηση μιας απόδειξης, παραθέτει την παρακάτω απόδειξη στην οποία αφενός δεν περιλαμβάνονται τα στοιχεία αυτά, αφετέρου δεν έχει μια σαφή επιχειρηματολογία. Επιπλέον, εστιάζεται στην αιτιολόγηση μόνο της περίπτωσης του τετραγώνου χρησιμοποιώντας οπτικές παρατηρήσεις χωρίς επεξήγηση.


Οι διαγώνιες ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου δεν διέρχονται πάντα από το κέντρο του κύκλου, αν το τετράπλευρο είναι εντελώς τυχαίο. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το τετράπλευρο είναι τετράγωνο ή παραλ/μο. Στο τετράγωνο οι πλευρές είναι όλες ίσες όρθο και οι διαγώνιες είναι ίσες και θα περνάνε από το κέντρο

ΦΑΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Στη φάση αυτή ο μαθητής Α επιβεβαιώνει τους ισχυρισμούς σχετικά με τις διαγώνιες που έχει ήδη διατυπώσει στην προηγούμενη φάση και παρατηρεί το εύρος των τετραπλεύρων που σχηματίζονται. Εξακολουθεί, επίσης, να διαχωρίζει το τετράγωνο από τα υπόλοιπα παραλληλόγραμμα.

Α: Αν κουνήσω το Α ή το Β οι διαγώνιες άλλες φορές περνάνε και άλλες όχι. Να, αν το βάλω έτσι είναι παραλληλόγραμμο. Και έτσι μπορεί να γίνει τετράγωνο και ρόμβος. …….
Α: Είναι πάρα πολλά αυτά που περνάνε… Βασικά, πάντα θα είναι παραλληλόγραμμο απλά κάποιες φορές θα είναι τετράγωνο….. γίνεται τετράγωνο όταν (οι διαγώνιες) είναι κάθετες.

Όταν καλείται να εξηγήσει πότε οι διαγώνιες θα διέρχονται από το κέντρο, εξετάζει από την αρχή τα τετράπλευρα που σχηματίζονται και παρατηρεί:

> Α: Για να είναι ίσες θα περνάνε από το κέντρο αφού είναι διάμετροι στον κύκλο. Αλλά μπορεί να είναι ίσες ακόμα και αν δεν περνάνε από το κέντρο. ……
> Α: Είναι ίσες, αλλά δεν φτάνει μόνο αυτό… Και αυτές είναι ακτ… Βασικά, πρέπει να περνάνε από το κέντρο και να διχοτομούνται γιατί αυτά είναι ακτίνες.

Ολοκληρώνοντας, ζητείται από τον μαθητή να επανεξετάσει την απόδειξη που έγραψε και να προβεί σε διορθώσεις αν κρίνει ότι είναι απαραίτητες.

> Α: Μμμ.. Ναι. Εδώ πρέπει να γράψω ότι συμβαίνει σε όλα τα παραλληλόγραμμα.
> Ε: Δεν πρέπει να εξηγήσεις γιατί συμβαίνει; Επειδή απλά το βλέπουμε;

> Α: Όχι. Θα του έλεγα ότι αυτό συμβαίνει στα παραλληλόγραμμα και τα τετράγωνα γιατί οι διαγώνιες που περνάνε από το κέντρο είναι ίσες και διχοτομούνται ενώ στα υπόλοιπα τετράπλευρα δεν περνάνε από το κέντρο αφού δεν διχοτομούνται.

Ο μαθητής Α, ένας «οπτικός» μαθητής με ιδιαίτερα υψηλό MVS, φαίνεται να δεσμεύεται από την οπτική εικόνα που του δίνεται αποδεχόμενος τον ισχυρισμό και μόνο μέσα από μια σειρά παραδειγμάτων καταλήγει σε ένα αντιπαράδειγμα ικανό να απορρίψει τον ισχυρισμό. Στις φάσεις της οπτικοποίησης και εικασίας αξιοποιεί πλήρως τα πλεονεκτήματα της οπτικής προσέγγισης ανακαλύπτοντας και αιτιολογώντας τις βασικές ιδέες κλειδιά που θα αποτελέσουν βάση για τη δόμηση της απόδειξης, χωρίς ωστόσο να γίνεται αναφορά ή σύνδεση με τις αντίστοιχες θεωρητικές γνώσεις που διαθέτει. Κάθε φορά που του ζητείται να αιτιολογήσει σε θεωρητική βάση επιστρέφει στην μελέτη των σχημάτων για να αναζητήσει την απάντηση. Η τρίτη φάση του δυναμικού περιβάλλοντος ενισχύει τη βεβαιότητα του για τα συμπεράσματα στα οποία έχει ήδη καταλήξει λειτουργώντας ως επιβεβαιωτικός παράγοντας, χωρίς όπως φαίνεται να προσφέρει νέα δεδομένα στην επιχειρηματολογία του. Τέλος, η αρχική απόδειξη δίνεται με τη μορφή συμπεράσματος, απουσιάζει πλήρως η επιχειρηματολογία και η γενίκευση καθώς μελετάται μόνο η περίπτωση του τετραγώνου. Μετά τη μεσολάβηση του δυναμικού περιβάλλοντος ο μαθητής παραθέτει μια απαγωγική απόδειξη στην οποία διαφαίνεται ότι έχει δημιουργηθεί η ανάγκη να αιτιολογήσει και σε θεωρητική βάση τα οπτικά επιχειρήματα που είχαν προηγηθεί. Ωστόσο, η υπεργενίκευση στην οποία προβαίνει είναι προβληματική καθώς φαίνεται να εξάγεται μόνο μέσα από την οπτική παρατήρηση.

ΜΑΘΗΤΗΣ Β (MVS 16)

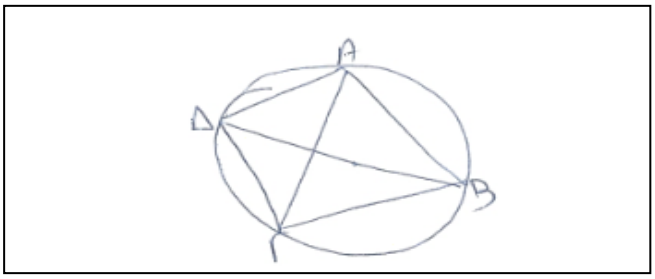
ΦΑΣΗ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ο μαθητής Β προτού τοποθετηθεί για την ορθότητα ή μη του ισχυρισμού αναλύει δομικά το σχήμα που του έχει δοθεί. Μετά την ανάλυση αυτή καταλήγει ότι ο ισχυρισμός της δραστηριότητας είναι ορθός.

Β: Λοιπόν, εφόσον το τετράπλευρο.. εφόσον οι κορυφές του τετραπλεύρου είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο;
Ε: Το τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο, για να είναι εγγεγραμμένο πρέπει οι κορυφές του να…
Β: είναι πάνω στον κύκλο. Οπότε, οι διαγώνιές του θα είναι οι διάμετροι του κύκλου οι οποίοι περνάνε από το κέντρο Ο.
…
Ε: Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγεις; Ισχύει πάντα αυτό που ισχυρίζεται ο συμμαθητής σου;
Β: Ναι. Εφόσον οι κορυφές είναι στον κύκλο…

Όταν ζητείται από τον μαθητή να επιβεβαιώσει την άποψή του σχεδιάζει τυχαία ένα αντιπαράδειγμα που ανατρέπει τα λεγόμενά του (εικόνα 3.4). Συμπεραίνει, τότε, ότι ο ισχυρισμός της δραστηριότητας δεν ισχύει για όλα τα τετράπλευρα.

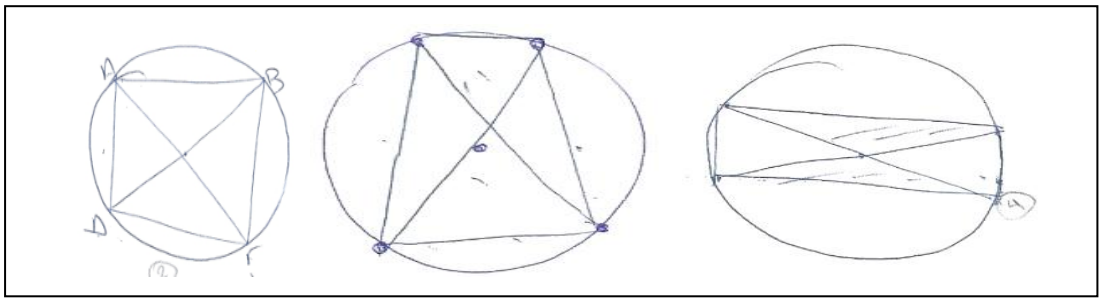
Β: Έφτιαξα ένα τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Θα φέρω τις διαγώνιές του και… Ναι. Δεν περνάνε. Βασικά αυτό (δείχνει διαγώνιο ΑΓ) δεν είναι διάμετρος. Το ΑΓ δεν περνάει από το κέντρο, δεν είναι δηλαδή διάμετρος και δεν εφάπτεται κιόλας στο κέντρο.
Ε: Δεν τέμνονται μάλλον εννοείς;
Β: Ναι, ναι δεν τέμνονται.
Ε: Συνεπώς αυτό που λέει ο συμμαθητής σου δεν ισχύει;
Β: Πάντα δεν είναι! Κάποιες φορές μπορεί να είναι. Όταν είναι τραπέζιο ή ορθογώνιο; Να κάνω ένα άλλο;



(Εικόνα 3.4: Αντιπαράδειγμα που φέρει ο μαθητής Β)

Ο μαθητής αναζητά περαιτέρω επιβεβαίωση και σχεδιάζει μια σειρά σχημάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι πρώτα σχεδιάζει δυο διαμέτρους του κύκλου και έπειτα σχηματίζει το τετράπλευρο.

Β: (σχεδιάζει πρώτα τις διαγώνιες να διέρχονται από το κέντρο και μετά σχηματίζει το τετράπλευρο) Έκανα ένα τραπέζιο.
Ε: Μμ, εμένα δεν μου μοιάζει πολύ με τραπέζιο μάλλον με..
Β: Με τετράγωνο; Όχι τετράγωνο δεν είναι σίγουρα γιατί η ΑΒ είναι μεγαλύτερη από την ΑΔ.
Ε: Και με τις διαγώνιες τι γίνεται;
Β: Περνάνε από το κέντρο.
…
Β: Ναι. Οκ, αυτό είναι τραπέζιο. Οι διαγώνιοι… δεν περνάνε. Να κάνω άλλο ένα;
Ε: Όπως θέλεις!
Β: (σχεδιάζει πρώτα τις διαγώνιες) Είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Και περνάνε κιόλας.
Ε:Μπορείς να βγάλεις κάποιο συμπέρασμα;
Β: Εεεε.. Το ισοσκελές τραπέζιο δεν είναι, το παραλληλόγραμμο είναι και… το τετράγωνο μπορεί να είναι…



(Εικόνα 3.5: Παραδείγματα τραπεζίων και παραλληλογράμμων που σχεδιάζει ο μαθητής Β)

ΦΑΣΗ ΕΙΚΑΣΙΑΣ

Στη φάση αυτή ζητείται από τον μαθητή να εντοπίσει ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στα σχήματα που έχει σχεδιάσει. Για να επεξηγήσει τις παρατηρήσεις του δεν βασίζεται σε οπτικά δεδομένα, αλλά επιλέγει να ανακαλέσει θεωρητικές γνώσεις που διαθέτει.

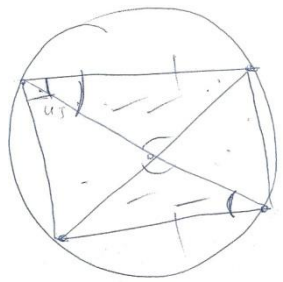
Β: Ναι. Αυτά εδώ (δείχνει τετράγωνο και ορθογώνιο παραλ/μο) είναι ορθογώνια. Αυτό έχει όλες τις γωνίες ορθές , το τετράγωνο έχει όλες τις γωνίες ορθές. Εμμμ… οι διαγώνιοι τέμνονται στο κέντρο του κύκλου… Και όλα είναι παραλληλόγραμμα.
Ε: Μπορούμε να το εξηγήσουμε με κάποιο τρόπο αυτό;
Β:…. Διότι, επειδή ακριβώς είναι ορθή η γωνία οι διαγώνιοι είναι και διχοτόμοι της γωνίας και όλες οι γωνίες είναι ίσες μοίρες, δηλαδή 45, 45,45.
Ε: Πώς είμαστε σίγουροι ότι ισχύει αυτό;
Β: Γιατί ξέρουμε στα παραλληλόγραμμα οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.
Ε: Στα υπόλοιπα σχήματα είμαστε σίγουροι ότι οι διαγώνιες δεν διχοτομούν τις γωνίες;

Β: Εδώ οι γωνίες είναι ίδιων μοιρών (ορθογώνιο παραλ/μο), εδώ δεν ισχύει αυτό (τραπέζιο) δεν είναι 90μοίρες, δεν ξέρουμε πόσο είναι οι γωνίες φυσικά αν δεν ξέρω ότι δεν είναι ισοσκελές.
Ε: Και το γεγονός ότι δεν ξέρουμε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες του μας εξασφαλίζει ότι δεν μπορεί η διαγώνιος να τις διχοτομεί;
Β:…. Όχι μάλλον.

Το γνωστικό κενό που δημιουργήθηκε δεν είναι ακόμα ικανό να στρέψει την επιχειρηματολογία του μαθητή σε άλλη κατεύθυνση. Επιμένει να χρησιμοποιεί τη διαστρεβλωμένη γνώση που έχει ανακαλέσει, ταυτίζει τα δεδομένα με το συμπέρασμα και κινείται αμφίδρομα μεταξύ τους.

Β: Τα τετράπλευρα που εγώ πιστεύω ότι περνάνε από το κέντρο είναι τα ορθογώνια, είτε είναι τετράγωνα, είτε είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα κτλ, διότι οι διαγώνιοι είναι και διάμ…, διχοτομούν τις γωνίες και εφόσον έχουν μία ορθή γωνία θα είναι και όλες ορθές και οι γωνίες θα είναι 45μοιρών.
Ε: Έχεις δύο σχήματα στα οποία οι διαγώνιοι διέρχονται από το κέντρο και άλλα δύο που δεν διέρχονται. Υπάρχει κάτι άλλο που μπορείς να παρατηρήσεις για τις διαγώνιες;
Β: Δημιουργούν ίσα τρίγωνα. αυτό (το τρίγωνο) είναι ίσο με αυτό, όπως και αυτά τα δύο ενώ εδώ (τραπέζιο) δεν είναι ίσα παρά μόνο όταν είναι ισοσκελές το τετράπλευρο.
Ε: Πώς είμαστε σίγουροι ότι σε αυτές τις περιπτώσεις τα τρίγωνα είναι ίσα;
Β: Προφανώς για να περνάνε οι διαγώνιοι από το κέντρο το τετράπλευρο θα πρέπει να είναι ορθογώνιο, να έχει μία τουλάχιστον ορθή γωνία… όλες να είναι ορθές με αποτέλεσμα οι διαγώνιοι να είναι και διχοτόμοι των γωνιών. Άρα θα είναι και τα τρίγωνα αυτά ίσα.

Ο μαθητής παραθέτει μια απόδειξη η οποία βασίζεται στα κριτήρια ισότητας των τριγώνων, στην οποία θεωρεί δεδομένο ότι οι διαγώνιοι διέρχονται από το κέντρο στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει απέχει από αυτό που έχει ζητηθεί.



Διότι, εφόσον είναι παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες, οι γωνίες αυτές είναι κατακορυφήν άρα είναι ίσες , και αφού οι διαγώνιοι διχοτομούν.. όχι είπαμε δεν είμαστε σίγουροι, αυτές εδώ οι γωνίες είναι ίσες ως εντός εναλλάξ, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα…

ΦΑΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Μέσα στο δυναμικό περιβάλλον και με τη βοήθεια του μετρητή γωνιών ο μαθητής απορρίπτει τελικά την ισχυρή αντίληψη που είχε διαμορφωθεί μέσα από την διαστρεβλωμένη ανάκληση των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων.

Ε: Μπορείς να ελέγξεις αν ισχύει ο ισχυρισμός σου πως σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.
Β: Οκ. Αυτό είναι τετράγωνο.. Ναι, ναι. Όπως φαίνεται ισχύει.
Ε: Μπορείς να ελέγξεις αν υπάρχουν άλλα τετράπλευρα στα οποία οι διαγώνιοι να διχοτομούν τις γωνίες τους;
Β: (πειραματίζεται αρκετή ώρα) Είναι δύσκολο να το πετύχω ακριβώς αλλά… Νομίζω όχι;
Ε: Στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα δηλαδή δεν ισχύει;
Β: (σχηματίζει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) Ωχ.. Πώς γίνεται;…
…
Β:… Δηλαδή αυτό συμβαίνει μόνο στα τετράγωνα; Άρα αυτό που έγραψα πριν δεν ισχύει….

Η σύγκρουση αυτή τον οδηγεί να μελετήσει εκ νέου τη δραστηριότητα εγκαταλείποντας τελείως τους ισχυρισμούς που είχε χρησιμοποιήσει. Αρχικά ανακαλύπτει το εύρος των τετραπλεύρων τα οποία ικανοποιούν τον ισχυρισμό και έπειτα εστιάζει σε δομικές παρατηρήσεις που επεξηγούν την ιδιότητά τους αυτή. Κάθε μία από τις παρατηρήσεις αυτές επιλέγει να τις επαληθεύει οπτικά και εν συνεχεία τις αιτιολογεί θεωρητικά.

Β: Κάθε φορά που βάζω τις διαγώνιες να περνάνε από το κέντρο σχηματίζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Και μπορώ να το κάνω πολύ πολύ μικρό…
Ε: Υπάρχει κάποιο στοιχείο που να παραμένει σταθερό σε όλα αυτά τα τετράπλευρα;
Β: Ότι είναι διαγώνιοι στο κέντρο… Μήπως εννοείτε ότι είναι διάμετροι;
Ε: Μπορείς να συνεχίσεις; Τι άλλα συμπεράσματα μπορείς να βγάλεις;
…
Ε: Σε τι διαφέρει αυτό το τετράπλευρο με τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που είδαμε πριν;
Β: Δεν έχει τις γωνίες του ορθές… Ούτε οι πλευρές του είναι παράλληλες και… τι άλλο; Εεε, δεν είναι πια διάμετροι του κύκλου.
Ε: Μπορείς να εξηγήσεις γιατί συμβαίνει αυτό;
Β: Γιατί… (βάζει πάλι τις διαγώνιες να διέρχονται από το κέντρο και πειραματίζεται).. Επειδή οι διαγώνιοι είναι και οι διάμετροι και είναι ίσες μεταξύ τους;
…
Β: Οκ. Αν βάλω τις διαγώνιες να περνάνε από το κέντρο τότε είναι ίσες… Όμως και στο ισοσκελές τραπέζιο πρέπει να είναι ίσες (σχηματίζει έπειτα το τραπέζιο για να το επιβεβαιώσει). Ναι, έτσι είναι.
(φέρνει πάλι τις διαγώνιες να διέρχονται από το κέντρο και μετακινεί σιγά σιγά τα σημεία ώστε να σχηματίζονται τυχαία τετράπλευρα) Πρέπει να περνάνε και από το κέντρο, από το κέντρο….

….

Β: Τέμνονται ακριβώς στη μέση ενώ όταν μετακινήσω το Β δεν περνάει από το μέσο της ΑΓ που είναι το κέντρο.

…

Β: … Για να είναι οι διαγώνιοι… Για να είναι παραλληλόγραμμο πρέπει οι διαγώνιοι να είναι διάμετροι και να τέμνονται και οι δύο στο κέντρο…. Άρα το ΟΑ, ΟΒ και αυτά (δείχνει ΟΓ και ΟΔ) είναι και αυτά ίσα γιατί είναι ακτίνες του κύκλου. Ενώ ακόμα και ένα σημείο να μετακινήσω δεν είναι πια ακτίνες άρα δεν είναι και ίσα όλα μεταξύ τους.

Ο μαθητής αναθεωρεί πλήρως την απόδειξη που έχει γράψει. Στη φάση αυτή διατυπώνει μια πλήρη απόδειξη, δομημένη ως προς τα επιχειρήματα και το συμπέρασμα, επισημαίνοντας και όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Β: Οι διαγώνιοι διέρχονται από το κέντρο όταν το τετράπλευρο είναι κάποιο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο γιατί τότε είναι διάμετροι του κύκλου και τέμνονται ακριβώς στη μέση… Μπορούμε να πούμε ότι διχοτομούνται; Ενώ, αν οι διαγώνιοι δεν περνάνε από το κέντρο τότε σίγουρα δεν διχοτομούνται και το τετράπλευρο είναι τυχαίο ή ισοσκελές τραπέζιο.

Ο μαθητής Β είναι ένας οπτικός μαθητής ο οποίος φαίνεται να χρησιμοποιεί τόσο οπτικές όσο και μη-οπτικές μεθόδους επίλυσης, όχι όμως με την ίδια ευκολία. Η φάση της οπτικοποίησης περιορίζεται στην εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με το είδος των τετραπλεύρων που δύναται να ικανοποιούν τον ισχυρισμό. Στη δεύτερη φάση ο μαθητής εγκαταλείπει κάθε οπτική μέθοδο και στηρίζει την επιχειρηματολογία του σε θεωρητικές γνώσεις. Η ανάκληση εσφαλμένων γνώσεων και η διαρκής ανακύκλωσή τους δημιουργεί γνωστικά κενά, όμως ο μαθητής εξακολουθεί να τις χρησιμοποιεί προκειμένου να αιτιολογήσει τις παρατηρήσεις του. Μόνο όταν το περιβάλλον του υπολογιστή δημιουργεί οπτική σύγκρουση με τα προηγούμενα επιχειρήματα, ο μαθητής επιστρέφει στις οπτικές μεθόδους για την ανάλυση της δραστηριότητας. Αρχικά παρατηρεί και επαληθεύει οπτικά δομικά χαρακτηριστικά των σχημάτων που αποτελούν τις ιδέες κλειδιά και έπειτα επεξηγεί σε θεωρητική βάση. Τέλος, παρατηρώντας την πρώτη απόδειξη του μαθητή γίνεται φανερό ότι συγχέει τα δεδομένα με το ζητούμενο σε μια προσπάθεια να δημιουργήσει μια απόδειξη που συμβαδίζει με τις αποδείξεις που ζητούνται στη σχολική πρακτική. Η ανασκευασμένη απόδειξη αποτελεί μια επιθυμητή απόδειξη στην οποία αναφέρονται τα απαραίτητα επιχειρήματα και οι πιθανές περιπτώσεις τετραπλεύρων που σχηματίζονται.

ΜΑΘΗΤΗΣ Γ (MVS 7)

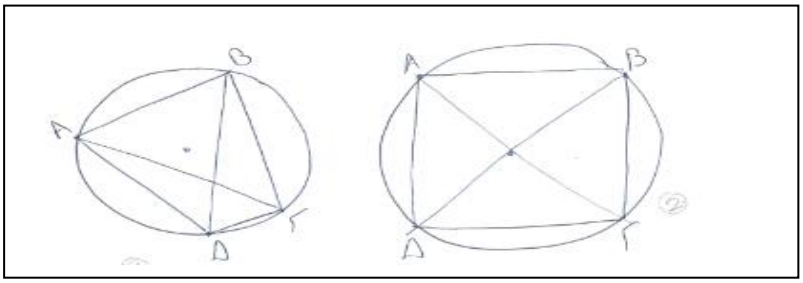
ΦΑΣΗ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ο μαθητής Γ διαβάζοντας την δραστηριότητα αποδέχεται με αμφιβολίες τον ισχυρισμό και αναγνωρίζει ότι είναι πιθανόν να υπάρχουν τετράπλευρα που να μην τον ικανοποιούν.

Γ: Ναι συμφωνώ μαζί του. Αν είναι τυχαίο και όντως περνάνε από το κέντρο..
Ε: Αν είναι όντως τυχαίο τετράπλευρο; Δηλαδή μπορεί να μην είναι τυχαίο;
Γ: Εεε ναι.. Μπορεί να το έφτιαξε έτσι ώστε οι διαγώνιοι να περνάνε από το κέντρο.
Ε: Δηλαδή υπάρχουν και άλλα τετράπλευρα που ενδέχεται οι διαγώνιοι να μην περνάνε από το κέντρο;
Γ: Λογικά θα υπάρχουν και κάποια που δεν περνάνε..

Για να επιβεβαιώσει αυτή του την αντίληψή ζητά να σχεδιάσει κάποια παραδείγματα. Σχεδιάζει αρχικά ένα αντιπαράδειγμα και το αντιμετωπίζει με δυσπιστία αναζητώντας κάποιο λάθος στο σχήμα του. Ακολούθως, επιθυμεί να σχεδιάσει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το οποίο εικάζει ότι ικανοποιεί τον ισχυρισμό της δραστηριότητας (εικόνα 3.6).

Γ: Έφτιαξα έναν κύκλο, πήρα τέσσερα τυχαία σημεία και μετά έφερα τις πλευρές. Το τετράπλευρο είναι τελείως τυχαίο και δεν περνάνε από το κέντρο. Άρα… Μήπως ο κύκλος μου δεν ήταν σωστός;
Ε: Δηλαδή τι θα μπορούσε να είναι λάθος στον κύκλο σου;
Γ: Μπορώ να κάνω και άλλο ένα;
Ε: Τα σημεία σου τα βάζεις τυχαία;
Γ: Προσπαθώ να είναι παραλληλόγραμμο. Ορθογώνιο. Σε αυτό περνάνε. Άρα σε μερικά ισχύει και σε μερικά όχι.



(Εικόνα 3.6: Αντιπαράδειγμα και παραλληλόγραμμο που σχεδιάζει ο μαθητής Γ)

Ο μαθητής ισχυρίζεται ότι ο ισχυρισμός της δραστηριότητας ικανοποιείται στα «συμμετρικά σχήματα» στα οποία συγκαταλέγει το τετράγωνο και το ρόμβο.

Ε: Γιατί προσπάθησες να κάνεις συγκεκριμένα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;

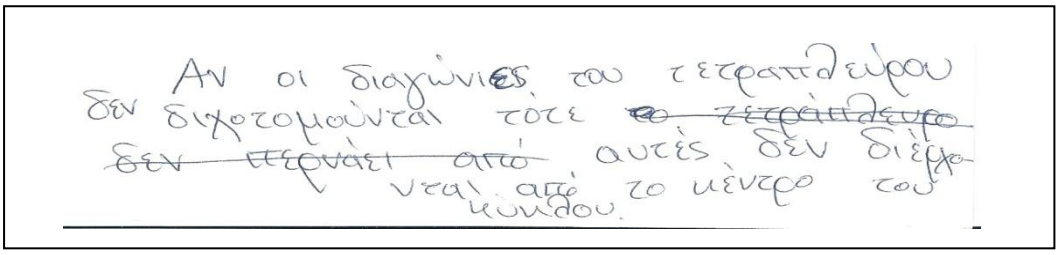
Γ: Γιατί είναι πιο συμμετρικό και υπέθεσα ότι μπορεί να περνάει από το κέντρο.
Ε: Μίλησες για συμμετρικά σχήματα. Ποια άλλα συμμετρικά σχήματα ξέρεις;
Γ:… Ρόμβος; Βασικά ο ρόμβος είναι το ίδιο, και το τετράγωνο. Αν κάνω έναν ρόμβο (σχεδιάζει) ναι, περνάνε.

ΦΑΣΗ ΕΙΚΑΣΙΑΣ

Στη φάση της εικασίας ο μαθητής αναζητά ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στα σχήματα. Είναι φανερό ότι η οπτική παρατήρηση έχει περιορισμούς για τον μαθητή και χρησιμοποιείται σε ένα βασικό επίπεδο. Όταν η οπτικοποίηση δεν μπορεί να του εξασφαλίσει σίγουρες απαντήσεις η μέθοδος αυτή εγκαταλείπεται, επιστρέφει στη θεωρητική του γνώση και επικαλείται το θεώρημα ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων.

Γ: Λοιπόν. Πρώτα απ' όλα στο σχήμα. Έχουν τις γωνίες τους ίσες, οι διαγώνιοι τους φαίνονται ίσοι; Όχι είναι ίσοι αφού είναι ακτίνες του κύκλου. Άρα ναι, σε αυτά δεν είναι ίσοι γιατί δεν είναι ακτίνες του κύκλου αφού δεν περνάνε από το κέντρο.
Ε: Βγάζεις κάποιο συμπέρασμα απ' όλα αυτά;
Γ: Ότι κάθε τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του περνάνε από τον κύκλο, περνάνε από το κέντρο του κύκλου είναι ίσο;
Ε: Ίσο με τι;
Γ: … Κάτσε να το πάρω από την αρχή. Στα τετράγωνα.. Στα παραλληλόγραμμα.. Όχι. Να κάνω άλλο ένα. Ναι, ωραία και στα παραλληλόγραμμα περνάνε. Λοιπόν, στα παραλληλόγραμμα και τα τετράγωνα οι διαγώνιες περνάνε από το κέντρο γιατί είναι ίσες.
Ε: Αν οι διαγώνιες δεν περνάνε από το κέντρο είμαστε σίγουροι ότι αποκλείεται να είναι ίσες;
Γ: Εεε αυτό δεν το ξέρω σίγουρα. Θα μπορούσαν νομίζω..
Ε: Αν είναι ίσες γιατί δεν διέρχονται από το κέντρο όπως στα παραλληλόγραμμα;
Γ: … Καλά, τέλος πάντων ξέρουμε από τι θεωρία ότι στα παραλληλόγραμμα οι διαγώνιες είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα, όταν οι διαγώνιοι είναι διάμετροι του κύκλου το τετράπλευρο θα είναι κάποιο παραλληλόγραμμο.

Η απόδειξή του μαθητή στο τέλος της φάσης είναι αρκετά ελλιπής εν συγκρίσει με την τελευταία του επιχειρηματολογία, απουσιάζουν τα θεωρητικά επιχειρήματα και δεν γίνεται αναφορά στο είδος των τετραπλεύρων που μπορούν να σχηματιστούν. Επιπλέον, στην απόδειξη γίνεται αναφορά μόνο στη διχοτόμηση των διαγωνίων και όχι στην ισότητά τους, παρότι είχε ήδη διατυπωθεί.


Αν οι διαγώνιες του τετραπλεύρου δεν διχοτομούνται τότε ~~το τετράπλευρο δεν περνάει από~~ αυτές δεν διέρχονται από το κέντρο του κύκλου.

ΦΑΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Στη φάση αυτή ο μαθητής επιβάλλεται να χρησιμοποιήσει την οπτική προσέγγιση για να επιβεβαιώσει ή να διορθώσει προηγούμενα επιχειρήματά του. Και σε αυτή την περίπτωση η αξιοποίηση της μεθόδου δεν είναι ουσιαστική, ενώ δείχνει απρόθυμος να ελέγξει ισχυρισμούς που έχουν προκύψει βασισμένοι στη θεωρητική γνώση.

Γ: (πειραματίζεται αρκετή ώρα σιωπηλός) Λοιπόν , ναι.. Αν μετακινήσω το Α μπορώ να φτιάξω πολλά παραλληλόγραμμα που περνάνε από το κέντρο γιατί οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Μόλις μετακινήσω το Γ έστω και λίγο το τετράπλευρο δεν είναι παραλληλόγραμμο γιατί η γωνία αυτή δεν είναι ορθή.
Ε: Προηγουμένως μου είπες ότι στα παραλληλόγραμμα οι διαγώνιες είναι ίσες και διχοτομούνται. Ως προς την ισότητα τους έχεις να παρατηρήσεις κάτι;
Γ: Ε αφού περνάνε από το κέντρο θα είναι ίσες.
Ε: Μπορείς να ελέγξεις αν υπάρχουν τετράπλευρα που οι διαγώνιες είναι ίσες αλλά δεν περνάνε από το κέντρο;
Γ: Μμμμ.. Να δω λίγο…Να εδώ νομίζω είναι περίπου ίσες. Τραπέζιο φαίνεται αλλά… Να ανοίξω λίγο τη βοήθεια.. Ναι καλά το κατάλαβα στο ισοσκελές τραπέζιο.
Ε: Αυτό δεν είναι ένα συμμετρικό σχήμα;
Γ: Είναι.. Αλλά οι διαγώνιοι δεν διχοτομούνται.
Ε: Υπάρχει περίπτωση οι διαγώνιοι να διχοτομούνται αλλά να μην είναι ίσες;
Γ: Να διχοτομούνται και να μην είναι ίσες; Όχι! Για να διχοτομούνται πρέπει να τέμνονται στο μέσο άρα αναγκαστικά θα είναι όλα ίσα αφού είναι ακτίνες του κύκλου.
Ε: Θες να ελέγξεις να δεις αν ισχύει;
Γ: (κουνάει αδιάφορα τα σημεία) Δεν γίνεται. Αφού πρέπει να είναι ίσες και να διχοτομούνται. Ίσες είναι μόνο όταν περνάνε από το κέντρο. Αλλιώς δεν θα είναι διάμετροι.

Η τελευταία απόδειξη που παραθέτει έχει εκ νέου την μορφή συμπεράσματος, είναι όμως βελτιωμένη ως προς το περιεχόμενο. Αυτή την φορά γίνεται αναφορά στα τετράπλευρα που ικανοποιούν τον ισχυρισμό αλλά εξακολουθεί να απουσιάζει η θεωρητική επεξήγηση από την επιχειρηματολογία του, παρά το γεγονός ότι έχει επισημανθεί νωρίτερα.

Γ: Ναι, λοιπόν ότι αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει σε τυχαίο τετράπλευρο, γίνεται μόνο στα παραλληλόγραμμα επειδή οι διαγώνιες σε αυτά διχοτομούνται.

Ο μαθητής Γ είναι ένας μη-οπτικός μαθητής με MVS της τάξης του 7, για τον οποίο η οπτική μέθοδος επίλυσης δεν φαίνεται να αποτελεί ενδεδειγμένη επιλογή. Στη φάση της οπτικοποίησης διατηρεί αποστάσεις από την οπτική εικόνα της δραστηριότητας, απορρίπτει ουσιαστικά τον ισχυρισμό και προχωρά μέχρι την αναγνώριση των σχημάτων που τον ικανοποιούν, χαρακτηρίζοντάς τα

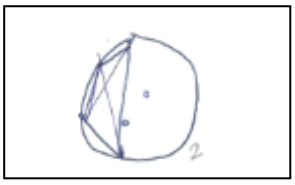
«συμμετρικά», χωρίς να αναφέρεται σε δομικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες των σχημάτων. Στη διάρκεια της δεύτερης φάση αξιοποιεί τα οπτικά σχήματα ως ένα βαθμό, και όταν η μέθοδος αυτή δεν του προσφέρει επιπλέον πληροφορίες εγκαταλείπει την μελέτη των σχημάτων και ανατρέχει αβίαστα στην ασφαλή θεωρητική του γνώση. Στην τελευταία φάση αρκείται σε γενικές παρατηρήσεις χωρίς να προσθέτει ουσιαστικά στοιχεία στην επιχειρηματολογία του, στηριζόμενος ενδεχομένως στην ισχύ της θεωρητικής του γνώσης. Αναγνωρίζει δε ότι μοναδική συνθήκη για να ισχύει ο ισχυρισμός είναι η διχοτόμηση των διαγωνίων χωρίς την ανάγκη να το επιβεβαιώσει με τη βοήθεια του δυναμικού περιβάλλοντος, περιοριζόμενος όμως αυστηρά στην οπτική εικόνα του κύκλου. Η πρώτη απόδειξη που παραθέτει έχει τη μορφή συμπεράσματος, παρότι έχει ήδη αναφερθεί στην κατάλληλη ιδιότητα των ορθογωνίων παραλληλογράμμων για να αιτιολογήσει τις παρατηρήσεις του. Ακόμα, όμως και μετά τη φάση του δυναμικού περιβάλλοντος η απόδειξη χαρακτηρίζεται από φτωχή επεξήγηση παρά το γεγονός ότι τα απαραίτητα επιχειρήματα είχαν διατυπωθεί και επεξηγηθεί πλήρως λεκτικά.

ΜΑΘΗΤΗΣ Δ (MVS 5)

ΦΑΣΗ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

Ο μαθητής Δ απορρίπτει εξαρχής τον ισχυρισμό έχοντας στο μυαλό του ένα ισχυρό αντιπαράδειγμα (εικόνα 3.7).

Δ: … Όχι, δεν συμφωνώ.
Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις γιατί;
Δ: Πρώτα απ’ όλα αφού λέει ότι είναι τυχαίο το τετράπλευρο και εγγεγραμμένο στον κύκλο μπορούμε να το κάνουμε έξω από το κέντρο του κύκλου.
Ε: Μπορείς να μου σχεδιάσεις το σχήμα που έχεις στο μυαλό σου;
Δ: Ας πούμε αυτό. Εδώ οι διαγώνιοι δεν περνάνε από το κέντρο αφού το κέντρο δεν είναι μέσα στο τετράπλευρο.

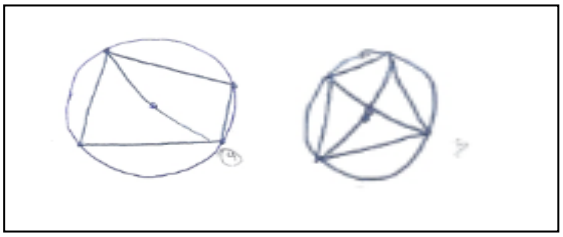


(Εικόνα 3.7: Αντιπαράδειγμα που σχεδιάζει ο μαθητής Δ)

Ακολούθως ο μαθητής αναγνωρίζει ότι υπάρχουν τετράπλευρα που δύναται να ικανοποιούν τον ισχυρισμό. Διατυπώνει διάφορους ισχυρισμούς για τους οποίους

δεν επικαλείται κάποια προηγούμενη θεωρητική γνώση και ελέγχει την ορθότητά τους με τη βοήθεια των σχημάτων.

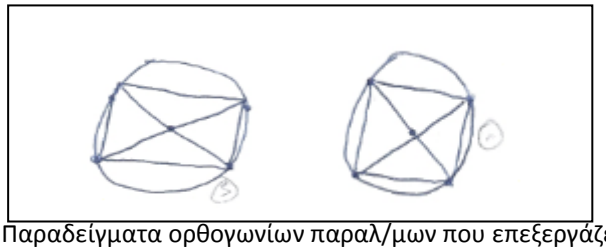
Ε: Πολύ ωραία. Συνεπώς αυτό που ισχυρίζεται ο συμμαθητής σου δεν ισχύει ποτέ;
Δ: Όχι, κάποιες φορές μπορεί να ισχύει….
Ε: Πότε πιστεύεις ότι μπορεί να ισχύει;
Δ: Πιθανόν όταν στο τετράγωνο καμιά από τις πλευρές του δεν είναι παράλληλη με κάποια άλλη;
Ε: Τότε τι γίνεται με τις διαγώνιες του τετραπλεύρου; Διέρχονται ή όχι από το κέντρο;
Δ: Περνάνε από το κέντρο.
Ε: Αυτό το γνωρίζεις από κάποιο θεώρημα; Έχεις κάποια εικόνα στο μυαλό σου;
Δ: Όχι. Σκέφτηκα ότι εδώ (σχήμα τραπεζίου) αυτές οι δύο (δείχνει πλευρές) είναι παράλληλες και δεν περνάνε από το κέντρο (δείχνει διαγώνιες) άρα μπορεί όταν είναι όλες παράλληλες να περνάνε από το κέντρο.
Ε: Μπορείς με κάποιο τρόπο να ελέγξεις αν ισχύει αυτό που λες;
Δ: Να κάνω άλλο σχήμα; Είναι τραπέζιο και αυτό.
Ε: Τι γίνεται με τις διαγώνιες;
Δ: Περνάνε νομίζω.. Ή όχι; Την έκανα εγώ να περνάει. Δεν περνάει.



(Εικόνα 3.8: Παραδείγματα τραπεζίων που σχεδιάζει ο μαθητής Δ)

Ο μαθητής διαπιστώνει ότι τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ικανοποιούν το ισχυρισμό της δραστηριότητας χρησιμοποιώντας μάλιστα μια δυναμική συλλογή εικόνων.

Ε: Συνεπώς, μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι ποτέ δεν διέρχονται από το κέντρο;
Δ: Όχι, στο τετράγωνο νομίζω περνάνε.
Ε: Πώς το σκέφτηκες αυτό;
Δ: Γιατί όσο πιο πολύ μοιάζει σε τετράγωνο τόσο πλησιάζουν οι διαγώνιοι στο κέντρο.
Ε: Μπορούμε να το ελέγξουμε αν ισχύει;
Δ: (σχεδιάζει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο) Ναι περνάνε.
Ε: Αυτό που σχεδίασες τι είναι;
Δ: Τετράγ… Όχι, δεν είναι. Ορθογώνιο μου μοιάζει. Να σχεδιάσω ένα τετράγωνο;
Νομίζω και εδώ περνάνε. Να τις φέρω κιόλας;



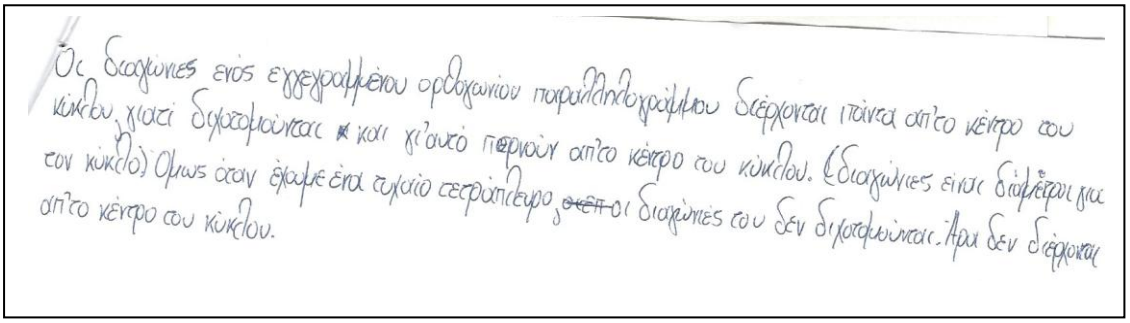
(Εικόνα 3.9: Παραδείγματα ορθογωνίων παραλ/μων που επεξεργάζεται ο μαθητής)

ΦΑΣΗ ΕΙΚΑΣΙΑΣ

Στη φάση της εικασίας ο μαθητής κινείται ευέλικτα ανάμεσα στη θεωρητική και την οπτική προσέγγιση. Οι δύο μέθοδοι φαίνεται να αλληλοσυμπληρώνονται και ο μαθητής χρησιμοποιεί όποια από τις δύο του είναι περισσότερο χρήσιμη κάθε φορά.

> Δ: Ναι, καταρχήν όλες οι πλευρές είναι παράλληλες. Επίσης, οι γωνίες που δημιουργούνται μεταξύ δύο πλευρών είναι όλες ορθές. Ενώ στα άλλα οι γωνίες δεν είναι ορθές και έχουν μόνο δύο πλευρές παράλληλες. Άρα, όταν είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα οι διαγώνιοι διέρχονται από το κέντρο.
> Ε: Μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό;
> Δ: Μήπως επειδή οι διαγώνιοι διχοτομούνται;
> Ε: Πώς είμαστε σίγουροι ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται;
> Δ: Γιατί….. Γιατί ξέρουμε ότι στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα οι διαγώνιες είναι ίσες και διχοτομούνται.
> …
> Δ:…. Ά, μισό λεπτό. Αφού η διαγώνιος είναι η διάμετρος του κύκλου αυτές είναι ίσες. Και το μισό της διαμέτρου είναι οι ακτίνες, δηλαδή αυτό το κομμάτι είναι ίσο με αυτό, και αυτό με αυτό (δείχνει ακτίνες) άρα όλες είναι ίσες μεταξύ τους.
> Ε: Μπορείς να βγάλεις κάποιο συμπέρασμα από όλα αυτά;
> Δ: Ναι… Επειδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου είναι… διχοτομούνται και τέμνονται στη μέση που είναι το κέντρο του κύκλου σχηματίζονται ορθογώνια παραλληλόγραμμα, τετράγωνα ή ρόμβος. Ενώ σε ένα τυχαίο τετράπλευρο όπου δεν είναι όλες οι ευθείες παράλληλες δεν διχοτομούνται οι διαγώνιοι οπότε δεν περνάνε από το κέντρο.

Η απόδειξη που παραθέτει ο μαθητής κάνει αναφορά σε όλες τις πιθανές περιπτώσεις τετραπλεύρων που ικανοποιούν ή μη τον ισχυρισμό, ενώ παράλληλα η επιχειρηματολογία του παρουσιάζει μια θεωρητική βάση.


Οι διαγώνιες ενός εγγεγραμμένου ορθογωνίου παραλληλογράμμου διέρχονται πάντα από το κέντρο του κύκλου, γιατί διχοτομούνται και γι'αυτό περνούν από το κέντρο του κύκλου. (Διαγώνιες είναι διάμετροι μια τον κύκλο) Όμως όταν έχουμε ένα τυχαίο τετράπλευρο ~~ενεπ~~ οι διαγώνιες του δεν διχοτομούνται. Άρα δεν διέρχονται από το κέντρο του κύκλου.

ΦΑΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Η τρίτη φάση αποτελεί το περιβάλλον μέσα στο οποίο ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει το δυναμικό μοντέλο σχημάτων που είχε ήδη στο μυαλό του. Σε κάθε βήμα της επιχειρηματολογίας του είναι έντονη η συνέπεια μεταξύ οπτικού και μη-οπτικού συλλογισμού. Ακόμα και όταν η ορθότητα της θεωρητικής γνώσης δεν είναι βέβαιη, η οπτική παρατήρηση αποτελεί διέξοδος για τον μαθητή.

Δ: Όπως αν και να κουνήσω τα σημεία όταν φτιάξω τις διαγώνιες να διέρχονται από το κέντρο τότε σχηματίζεται πάντα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αν οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα σχηματίζεται τετράγωνο. Ενώ αν κουνήσω το Α ή το Γ και έστω και μία φύγει από το κέντρο σχηματίζεται ένα τυχαίο παραλληλόγραμμο.
Ε: Πώς μπορούμε να το εξηγήσουμε αυτό;
Δ: Γιατί όταν οι διαγώνιοι, αφού είναι διάμετροι του κύκλου, περνάνε από το κέντρο διχοτομούνται. Και αφού διχοτομούνται τα τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα.
Ε: Η μοναδική περίπτωση…
Δ: Βασικά αφού διχοτομούνται πρέπει να είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα; Ή όχι; Όχι σε όλα τα παραλληλόγραμμα διχοτομούνται.
Ε: Η μοναδική περίπτωση να διχοτομούνται οι διαγώνιοι είναι να διέρχονται από το κέντρο;
Δ: Εεεε…νομίζω ναι; Δηλαδή πώς να γίνεται αυτό; Να διχοτομούνται αλλά να μην είναι ίσες;…..
Ε: Αυτό ακριβώς! Υπάρχει περίπτωση να συμβαίνει αυτό;
Δ: …. Ξέρω ‘γω.. Η μια να 6 δηλαδή και η άλλη 3; …(πειραματίζεται αρκετή ώρα μετακινώντας τα σημεία) Στον κύκλο δεν γίνεται νομίζω, αλλά γενικά μπορεί να γίνει. Ας πούμε η μία να είναι 6 και η άλλη 4 και να περνάνε από το μέσο.
Ε: Έχεις κάποια εικόνα στο μυαλό σου; Τι τετράπλευρο μπορεί να σχηματιστεί σε αυτή την περίπτωση;
Δ: Ένα τυχαίο. Σίγουρα δεν θα είναι ορθογώνιο. Α! Κατάλαβα ναι. Στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα οι διαγώνιες είναι ίσες και διχοτομούνται. Μέσα στον κύκλο όμως για να διχοτομούνται πρέπει να περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Γιατί αλλιώς δεν θα είναι ίσες.

Στο τέλος της φάσης αυτής, ο μαθητής επιθυμεί να συμπληρώσει την απόδειξή του και παραθέτει μια απόλυτα επιθυμητή παραγωγική απόδειξη . Αυτή τη φορά τα επιχειρήματα αιτιολογούνται σε θεωρητική βάση, η οποία έγινε περισσότερο ξεκάθαρη κατά την μελέτη της δραστηριότητας μέσα στο δυναμικό περιβάλλον.

Δ: Λοιπόν, όταν οι διαγώνιες διέρχονται από το κέντρο διχοτομούνται και είναι ίσες ως διάμετροι του κύκλου και το εγγεγραμμένο τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αν, όμως, οι διαγώνιες δεν είναι ίσες τότε… ούτε θα περνάνε από το κέντρο… και ούτε θα διχοτομούνται και θα έχουμε ένα τυχαίο τετράπλευρο.

Ο μαθητής Δ, ένας μη-οπτικός μαθητής με αρκετά χαμηλό MVS, χειρίζεται με ιδιαίτερη ευκολία τόσο τις οπτικές όσο και τις μη οπτικές μεθόδους επίλυσης. Στην φάση της οπτικοποίηση απορρίπτει τον ισχυρισμό και χρησιμοποιεί ένα δυναμικό μοντέλο για να επιλέξει τα τετράπλευρα τα οποία ικανοποιούν τον ισχυρισμό. Τόσο στη φάση της εικασίας όσο και στη τελευταία φάση είναι έκδηλη η μετακίνηση ανάμεσα στις δύο μεθόδους επίλυσης με τέτοιον τρόπο ώστε να αλληλοσυμπληρώνονται και να δίνουν απαντήσεις στα διφορούμενα σημεία. Και οι δύο αποδείξεις που ο μαθητής παραθέτει αναγνωρίζουν όλες τις πιθανές περιπτώσεις τετραπλεύρων και επιχειρηματολογούν σε θεωρητική βάση. Αξίζει, βέβαια, να σημειωθεί ότι η επιχειρηματολογία αυτή είναι σαφέστερα διατυπωμένη και αποκτά παραγωγική δομή μετά την παρέμβαση του υπολογιστικού περιβάλλοντος.

Μαθητής *Ζ (MVS 16)*

<u>ΦΑΣΗ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ</u>

Ο μαθητής Ζ αποδέχεται τον ισχυρισμό και αναλύοντας την συλλογιστική του αναφέρεται στην ισότητα των διαγωνίων που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου. Ωστόσο, υποστηρίζει ότι η ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα από το σχήμα.

Ζ: Λογικά εφόσον έχουμε πάρει το κέντρο του κύκλου εδώ και εφόσον είναι τυχαίο το τετράπλευρο, οι διαγώνιες οι οποίες τέμνονται στο κέντρο του κύκλου θα είναι ίσες. Εφόσον είναι στο κέντρο. Τώρα, δεν ξέρω αν είναι σωστό…
Ε: Πώς είσαι σίγουρος ότι οι διαγώνιες που διέρχονται από το κέντρο είναι ίσες;
Ζ: Επειδή ξέρουμε ότι το Ο εδώ είναι το κέντρο του κύκλου εφόσον πάρουμε τις διαγώνιες θα είναι ίσες.
Ε: Αυτό είναι κάτι που το ξέρεις από κάποιο κανόνα ή θεώρημα;
Ζ: Ναι… Βασικά, φαίνεται στο σχήμα.

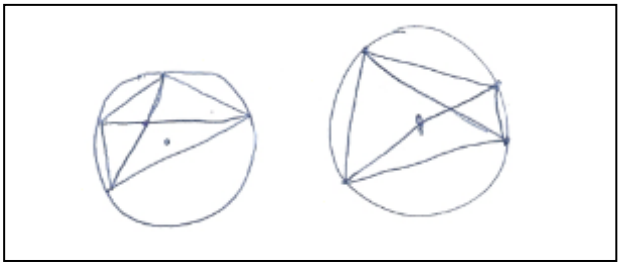
Προκειμένου να επαληθεύσει την άποψή του καλείται να σχεδιάσει δικά του παραδείγματα. Αναλύοντας τα δομικά χαρακτηριστικά του σχήματος αναφέρεται στην ιδέα της διχοτόμησης, διαισθητικά και αυτή τη φορά, χωρίς να μπορεί να το αιτιολογήσει θεωρητικά. Αργότερα, μάλιστα, επικαλείται τη μνημονική συλλογή εικόνων που διαθέτει από την επίλυση παρόμοιων ασκήσεων.

Ε: Ωραία. Αυτό το τετράπλευρο που έκανες είναι τυχαίο; Είναι κάποιο συγκεκριμένο;
Ζ: Όχι είναι τυχαίο. Απλά δεν μου έχει βγει καλά το σχήμα και δεν ξέρω αν έχω πάρει καλά το κέντρο του κύκλου.
Ε: Με τις διαγώνιες τι γίνεται; Τι παρατηρείς;

Ζ: Περνάνε από το κέντρο. Ξεκινάμε από εδώ (μια κορυφή) το περνάμε από το κέντρο και φτάνει εδώ (φέρνει διαγώνιο). Το ίδιο και από την άλλη. Αν ονομάσουμε Α, Β, Γ, Δ και αυτό το ονομάσουμε Ο πχ, το Α με το Ο θα είναι ίσο (δείχνει ακτίνα ΟΒ), το Β με το Ο θα είναι ίσο γιατί είναι στο κέντρο (δείχνει ακτίνα ΟΓ), καθώς και το Γ και το Δ (δείχνει υπόλοιπες ακτίνες).
Ε: Πώς είμαστε σίγουροι ότι τα τμήματα αυτά θα είναι ίσα;
Ζ: Γιατί οι διαγώνιοι περνάνε από το κέντρο;
Ε: Και επειδή περνάνε από το κέντρο ξέρουμε σίγουρα ότι τα τμήματα αυτά είναι ίσα;
Ζ: Ναι, γιατί χωρίζονται στη μέση.
Ε: Και πώς ξέρουμε ότι χωρίζονται στη μέση;
Ζ: Γιατί…. Πάντα στις ασκήσεις αυτά τα παίρνουμε ίσα.

Στη συνέχεια, ο μαθητής φέρει μια σειρά όμοιων σχημάτων για να επιβεβαιώσει τον ισχυρισμό. Ακόμα και όταν του υποδεικνύεται να σχεδιάσει ένα διαφορετικό σχήμα, όπως στην περίπτωση του τραπεζίου, μεταφέρει το κέντρο του κύκλου στο σημείο τομής των διαγωνίων. Τελικά, κατορθώνει να διαπιστώσει ότι ο ισχυρισμός της δραστηριότητας δεν είναι πάντα αληθής.

Ε: Αν κάνεις πέντε-έξι περιπτώσεις θα ισχύει πάντα;
Ζ: Νομίζω.. ναι!
Ε: Θέλεις να δοκιμάσεις για να σιγουρευτούμε;
Ζ: Έτσι περίπου.. Και εδώ περνάνε… Και αν κάνω αυτό περνάνε και εδώ.
Ε: Μήπως τα τετράπλευρα που σχεδίασες μοιάζουν αρκετά μεταξύ τους; Προσπάθησε να κάνεις κάτι διαφορετικό.
Ζ: Είναι κάπως διαφορετικό αυτό. Εδώ… (φέρνει τις διαγώνιες) περνάνε (μεταφέρει το κέντρο στο σημείο τομής των διαγωνίων).
Ε: Περνάνε ή τις έκανες εσύ να περνάνε; (εικόνα 3.10)
Ζ: Εγώ. Να κάνω άλλο ένα; …Και εδώ ας πούμε δεν ισχύει. Αν πάρουμε τις διαγώνιες δεν θα τερματίσουν στο κέντρο του κύκλου. Όχι, όχι δεν περνάνε. Οπότε δεν ισχύει αυτό που λέω.
Ε: Δεν ισχύει, λοιπόν, ποτέ ο ισχυρισμός του συμμαθητή σου;
Ζ: Όχι, μερικές φορές ισχύει.



(Εικόνα 3.10: Αντιπαραδείγματα που φέρει ο μαθητής Ζ)

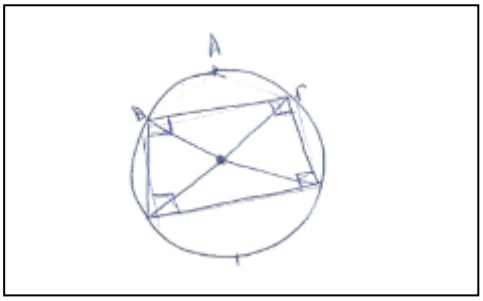
ΦΑΣΗ ΕΙΚΑΣΙΑΣ

Στη φάση αυτή ο μαθητής καλείται να αναγνωρίσει ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των σχημάτων που έχει σχεδιάσει. Παρότι η ιδέα της διχοτόμησης και ισότητας εξακολουθούν να υπάρχουν δεν αξιοποιούνται με κάποιο τρόπο και το ενδιαφέρον του μαθητή εστιάζεται σε γενικά χαρακτηριστικά των σχημάτων, όπως το μέγεθος του κύκλου ή τη θέση του κέντρου.

Ζ: Σε αυτά (δείχνει σχήματα εγγεγραμμένων τετραγώνων) είναι ένας μικρός κύκλος, δεν είναι σαν και αυτόν που είναι μεγάλος, είναι περίπου το ίδιο σχήμα, απλά κάποιες φορές περιστρέφεται ας πούμε, εεεε τι άλλο.. Μμμμ.. αυτά μπορώ να βρω.
Ε: Σε σύγκριση με αυτό (δείχνω τραπέζιο) τι διαφορές υπάρχουν;
Ζ: Είναι πιο μεγάλος κύκλος, έχω πάρει τυχαία σημεία, απλά εδώ έχουμε βάλει πιο κοντά αυτά τα δύο σημεία, τι άλλο; Η διαφορά είναι ότι κόβονται στο κέντρο, ενώ εδώ όχι.
Ε: Γιατί σε αυτό το σχήμα οι διαγώνιες διέρχονται από το κέντρο ενώ εδώ όχι;
Ζ: Γιατί ο κύκλος είναι πιο μικρός και οι ακτίνες που μπορούμε να πάρουμε είναι…
Ε: Έχει σχέση δηλαδή το μέγεθος του κύκλου; Κάνε ένα μεγαλύτερο κύκλο και προσπάθησε να φτιάξεις περίπου το ίδιο σχήμα.
Ζ: Περνάνε. Άρα δεν έχει σχέση ο κύκλος. Μήπως έχει σχέση το που βάζουμε το κέντρο.

Μετά από αρκετή ώρα ο μαθητής εντοπίζει ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στο είδος του τετραπλεύρου και τις διαγώνιες του. Εξακολουθεί να αναφέρεται στην διχοτόμηση και ισότητα των διαγωνίων διαισθητικά χωρίς όμως να μπορεί να δημιουργήσει κάποια εικασία.

Ζ: Νόμιζα ότι είναι ανάλογα με τον κύκλο. Και ανάλογα που παίρνουμε τα σημεία παίζει μεγάλο ρόλο.
Ε: Ανάλογα που παίρνουμε τα σημεία. Μπορείς να μου το εξηγήσεις λίγο περισσότερο αυτό;
Ζ: (εγγεγραμμένο τετράγωνο) Να αν βάλουμε εδώ το Α, το ΑΒ και το ΑΓ αν είναι ίσα θα κόβονται στη μέση οι διαγώνιοι.
Ε: Στο σχήμα αυτό (ορθ. παραλληλόγραμμο) θα ισχύει το ίδιο;
Ζ: Αν βάλουμε εδώ σημεία τότε αυτό (ΟΑ) και αυτό (ΟΒ) θα είναι ίσα. Και αυτά (ΟΓ, ΟΔ) … (εικόνα 3.11)
Ε: Μπορείς να βγάλεις κάποιο συμπέρασμα;
Ζ: Εεεε… Ότι οι διαγώνιοι κόβονται στο κέντρο;
Ε: Στην περίπτωση αυτή τι τετράπλευρα μπορούν να σχηματιστούν;
Ζ: Όλα τα τετράπλευρα. Αφού ήταν τυχαία όλα.
Ε: Αν παρατηρήσουμε τα τετράπλευρα στα οποία οι διαγώνιες διέρχονται από το κέντρο, μήπως μπορούμε να αναγνωρίσουμε κάποια γνωστά τετράπλευρα;
Ζ: Εεεε ναι. Εδώ και εδώ είναι τετράγωνο, εδώ τραπέζιο και εδώ ρόμβος; Βασικά όλα τα ξέρουμε. Άρα, σε αυτά που ξέρουμε περνάνε από το κέντρο.



(Εικόνα 3.11: Μελέτη των ιδιοτήτων του ορθογωνίου παραλ/μου)

ΦΑΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Ο μαθητής Ζ στο περιβάλλον του υπολογιστή έχει τη δυνατότητα να παρατηρήσει όλες τις περιπτώσεις τετραπλεύρων και να διαπιστώσει ότι τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ικανοποιούν τον ισχυρισμό. Η ορολογία που χρησιμοποιεί εξακολουθεί να είναι συγκεχυμένη.

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις τι ακριβώς σκέφτεσαι;
Ζ: Αν φέρω το Α εδώ και το Β εδώ οι διαγώνιες περνάνε από το κέντρο. (σχηματίζει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο)
Ε: Τι σχήμα είναι αυτό που σχηματίζεται;
Ζ: Τετράγωνο.
Ε: Μπορείς να βρεις άλλες περιπτώσεις που οι διαγώνιες του να διέρχονται από το κέντρο;
Ζ: (Πειραματίζεται αρκετή ώρα, φτιάχνει παραλληλόγραμμα με μικρή διαφορά πλευρών) Εεεε, είναι όλα τετράγωνα.
Ε: Είσαι σίγουρος ότι αυτό εδώ είναι τετράγωνο;
Ζ: Είναι λίγο πιο μεγάλο. Όλες πάλι είναι παράλληλες..
…
Ε: Τι γίνεται όταν οι διαγώνιες δεν διέρχονται από το κέντρο; Μπορείς να δοκιμάσεις;
Ζ: (πειραματίζεται μετακινώντας όλα τα σημεία). Να εδώ περνάνε αφού μοιάζει με το παραλληλόγραμμο. Βασικά δεν περνάνε όταν τα τετράπλευρα δεν είναι συγκεκριμένα.
Ε: Για ποιο λόγο πιστεύεις ότι ισχύει αυτό;
Ζ: (σχηματίζει ένα τετράγωνο) Εδώ και εδώ είναι οι γωνίες ορθές. Και….οι πλευρές είναι παράλληλες.

Όταν καλείται να εξηγήσει το φαινόμενο που παρατηρεί φαίνεται πως οι έννοιες της ισότητας και διχοτόμησης αποκτούν περισσότερο νόημα και χρησιμοποιούνται στο εξής περισσότερο συνειδητά, χωρίς ωστόσο να γίνεται αναφορά σε θεωρητικές γνώσεις.

Ε: Πώς μπορούμε να το εξηγήσουμε αυτό; Τι συμβαίνει όταν οι διαγώνιες διέρχονται από το κέντρο;
Ζ:…Είναι ίσες και το ΟΑ, το Ο με το Β και τα άλλα θα είναι ίσα.

Ε: Μπορείς να σκεφτείς γιατί σε ένα παραλληλόγραμμο διέρχονται από το κέντρο και εδώ όχι;
Ζ: Γιατί σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι ακτίνες αυτές εδώ είναι όλες ίσες, οπότε άμα πάρουμε τις ακτίνες αυτές εδώ και….Εφόσον πάνω σε αυτές τις ακτίνες φτιάχνονται και οι πλευρές θα είναι περίπου…θα είναι παράλληλες, ίσως να είναι και ίσες, δεν ξέρω..
Ε: Μπορείς να βγάλεις κάποιο συμπέρασμα από όλα αυτά; Πότε οι διαγώνιοι διέρχονται από το κέντρο και πότε όχι…
Ζ: Περνάνε όταν οι διαγώνιοι χωρίζονται ακριβώς στη μέση και είναι όλα ίσα.
Ε: Και τι είδους τετράπλευρα μπορούν να σχηματιστούν;
Ζ:….
Ε: Για παράδειγμα μπορεί να είναι τραπέζιο;
Ζ: Όχι, γιατί είναι άλλο είδος παραλληλογράμμου. Πρέπει να είναι πιο… Ξέρουμε ότι σε ένα τραπέζιο δεν έχουμε ίσες πλευρές, σε καμία περίπτωση ΑΔ δεν είναι ίσο με το ΒΓ (έχει σχηματίσει τραπέζιο)
Ε: Με τις διαγώνιες τι μπορείς να παρατηρήσεις διαφορετικό από πριν;
Ζ: Ότι δεν κόβονται στη μέση αφού δεν περνάνε από το κέντρο.

Ο μαθητής στο τέλος της τρίτης φάσης κατορθώνει να παραθέσει μια απόδειξη που να διαθέτει τα βασικά επιχειρήματα και το συμπέρασμα, χωρίς να γίνεται καμία αναφορά σε γεωμετρικά θεωρήματα ή ιδιότητες.

Ζ: Γιατί για να περνάνε από το κέντρο αυτό γίνεται στα παραλληλόγραμμα γιατί εκεί όλες οι πλευρές είναι παράλληλες γιατί οι διαγώνιες πρέπει να είναι ίσες και να χωρίζονται στη μέση.

Ο μαθητής Ζ, είναι ένας οπτικός μαθητής με χαμηλές σχολικές επιδόσεις, όπως άλλωστε διακρίνεται και από τη δυσκολία να χρησιμοποιήσει την κατάλληλη ορολογία αλλά και να επεξηγήσει τα επιχειρήματά του. Από την πρώτη κιόλας φάση της οπτικοποίησης ο μαθητής παρατηρεί δομικά χαρακτηριστικά των σχημάτων και αναφέρεται στις ιδιότητες της ισότητας και διχοτόμησης σε οπτική και διαισθητική βάση. Οι ιδιότητες αυτές δεν αξιοποιούνται στη φάση της εικασίας καθώς η επιχειρηματολογία του μαθητή εστιάζεται σε διάφορα γενικά και δευτερεύοντα χαρακτηριστικά των σχημάτων που οδηγούν σε αδιέξοδο. Η φάση αυτή ολοκληρώνεται όταν ο μαθητής αντιλαμβάνεται ότι η διέλευση των διαγωνίων από το κέντρο σχετίζεται άμεσα με το είδος των τετραπλεύρων που μπορούν να σχηματιστούν από αυτές, χωρίς να έχει κατορθώσει να αναγνωρίσει το είδος αυτών που ικανοποιούν τον ισχυρισμό και φυσικά να δημιουργήσει κάποια εικασία. Το δυναμικό περιβάλλον του υπολογιστή δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να παρατηρήσει όλο το εύρος των τετραπλεύρων που επαληθεύουν ή όχι τον ισχυρισμό και να διαπιστώσει ποια από τα στοιχεία τους παραμένουν σταθερά. Στο

πλαίσιο αυτό οι ιδιότητες της ισότητας και διχοτόμησης αποκτούν νόημα και δικαιολογούνται οπτικά, χωρίς βέβαια να οδηγούν στην ανάκληση κάποιας θεωρητικής γνώσης που δεν γνωρίζουμε άλλωστε σε ποιο βαθμό υφίσταται. Η απόδειξη που παραθέτει, μετά το τέλος της τρίτης φάσης, περιέχει τουλάχιστον τα δύο βασικά επιχειρήματα που αναμέναμε.

Μαθητής *Θ (MVS 7)*

ΦΑΣΗ ΟΠΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

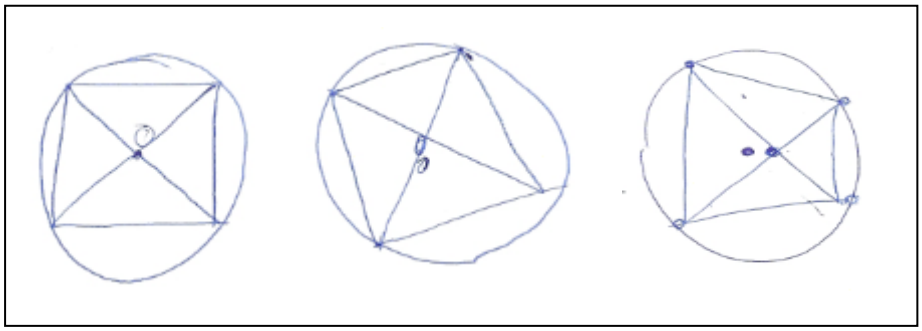
Ο μαθητής Θ μετά την ανάγνωση της δραστηριότητας αποδέχεται τον ισχυρισμό. Στην προσπάθειά του να αιτιολογήσει την απάντηση του χρησιμοποιεί ιδιαιτέρως ασαφή επιχειρήματα.

Θ: …Συμφωνώ μαζί του.
Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις γιατί;
Θ: Αφού περνάνε από το κέντρο.. Ένα τυχαίο τετράπλευρο;
Ε: Ναι, τυχαίο είναι..
Θ: …
Ε: Μας πειράζει η λέξη τυχαίο;
Θ: Ναι γιατί και ο κύκλος δεν είναι… Είναι τυχαίος κύκλος και δεν ξέρουμε… Αφού έχουμε πάρει το Ο, και κάνουμε το τετράπλευρο μέσα στον κύκλο οι διαγώνιες που θα φέρουμε θα ισαπέχουν μεταξύ τους;
Ε: Τι εννοείς ότι θα ισαπέχουν μεταξύ τους;
Θ: Ότι θα έχουν ίδιο….

Όταν ζητείται από τον μαθητή να επαληθεύσει την άποψή του μέσα από κάποια παραδείγματα φέρει μια σειρά όμοιων σχημάτων και μόνο μετά από υπόδειξη του σχήματος κατορθώνει να διακρίνει ένα αντιπαράδειγμα. Διαπιστώνει τελικά ότι η διέλευση των διαγωνίων από το κέντρο του κύκλου σχετίζεται με το είδος των τετραπλεύρων.

Ε: Αυτό το τετράπλευρο που σχημάτισες είναι κάποιο τυχαίο;
Θ: Είναι τετράγωνο.
Ε: Με τις διαγώνιες του, λοιπόν, τι γίνεται;
Θ: Ναι, περνάνε.
Ε: Θα κάνεις μερικά ακόμα παραδείγματα;
Θ: Τυχαίο τώρα;
…
Ε: Αυτό που σχεδίασες μοιάζει αρκετά με τα προηγούμενα δεν νομίζεις;
Θ: Ε ναι, μοιάζει.

Ε: Υπάρχει κάποιος λόγος που τα έκανες να μοιάζουν με τετράγωνο;
Θ: Όχι, όπως βγαίνουν.
Ε: Να σου σχεδιάσω εγώ έναν κύκλο; Βάλε τέσσερα τυχαία σημεία όπου θέλεις και μετά ένωσέ τα. Τι παρατηρείς;
Θ: Δεν περνάνε!.. Όχι περνάνε (μετακινεί το κέντρο του κύκλου στο σημείο τομής των διαγωνίων)..
…
Θ: Ναι, ναι δεν περνάνε.
Ε: Λοιπόν, τι ισχύει τελικά; Ποιος έχει δίκιο;
Θ: Είναι ανάλογα με το σχήμα;
Ε: Δηλαδή θέλεις να μου το εξηγήσεις λίγο περισσότερο;
Θ: Υπάρχουν σχήματα που περνάνε και άλλα που δεν περνάνε.



(Εικόνα 3.12: Παραδείγματα και αντιπαραδείγματα που φέρει ο μαθητής Θ)

ΦΑΣΗ ΕΙΚΑΣΙΑΣ

Προσπαθώντας ο μαθητής να εντοπίσει ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των σχημάτων υποστηρίζει ότι οι διαγώνιες διέρχονται από το κέντρο στα «καθορισμένα σχήματα». Αργότερα, διαπιστώνει ότι δεν αρκεί το σχήμα να είναι γνωστό αλλά πρέπει και οι πλευρές του να είναι ίσες, χωρίς να μπορεί να αιτιολογήσει τον ισχυρισμό αυτόν.

Θ: Εδώ το σχήμα που έχουμε είναι καθορισμένο ενώ στα υπόλοιπα δεν ξέρουμε τι είναι.
Ε: Όταν λες καθορισμένο τι εννοείς;
Θ: Εδώ ξέρουμε ότι είναι ένα τετράγωνα ενώ στα άλλα σχήματα δεν ξέρουμε.
Ε: Όμως και αυτό το σχήμα είναι καθορισμένο αφού ξέρουμε ότι είναι ένα τραπέζιο.
Θ: Ναι, αλλά… Εδώ (τραπέζιο) οι πλευρές δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους ενώ στο τετράγωνο είναι όλες ίσες.
Ε: Η ισότητα των πλευρών μας εξασφαλίζει ότι οι διαγώνιοι διέρχονται από το κέντρο;
Θ: Ναι γιατί και μέσα στο κύκλο θα απέχει ίδιο.
Ε: Δηλαδή τι θα απέχει ίδιο. Μπορείς να μου δείξεις;
Θ: …

Μετά από αρκετές συγκρίσεις ο μαθητής διακρίνει ότι τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα θα ικανοποιούν τον ισχυρισμό της δραστηριότητας.

Ε: Για να δούμε. Η μόνη περίπτωση οι διαγώνιες να διέρχονται από το κέντρο είναι να είναι τετράγωνο;
Θ: Όχι. Αλλά πρέπει να είναι.. Κάποιο καθορισμένο πρέπει να έχουμε. Όχι να παίρνουμε τυχαία σημεία, πρέπει….
Ε: Μπορείς να μου πεις μερικά καθορισμένα σχήματα;
Θ: Το τετράγωνο.. Τα οποία να ισαπέχουν το ίδιο; Βασικά αυτό.
Ε: Όταν λες να ισαπέχουν. Ποια τμήματα να ισαπέχουν;
Θ: Αυτό να είναι ίσο με αυτό και αυτό με αυτό (δείχνει απέναντι πλευρές τετραγώνου)
Ε: Δηλαδή να είναι ίσες οι πλευρές του τετραπλεύρου.
Θ: Ναι.
Ε: Είναι απαραίτητο να έχουν όλες τις πλευρές ίσες;
Θ: Ένα ζεύγος. Το τετράγωνο έχει και τις τέσσερις αλλά δεν είναι απαραίτητο.
Ε: Σε ποια σχήματα συμβαίνει αυτό;
Θ: Στα παραλληλόγραμμα;

Στην προσπάθειά του να επεξηγήσει τις προηγούμενες παρατηρήσεις του φέρει ασαφή επιχειρήματα και ασύνδετους γεωμετρικούς όρους. Μετά από υψηλή καθοδήγηση διακρίνει την ισότητα των διαγωνίων όμως η επισήμανση αυτή δεν είναι αρκετή για να δημιουργηθεί κάποια εικασία.

Ε: Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στα παραλληλόγραμμα οι διαγώνιες διέρχονται από το κέντρο. Μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό;
Θ: Ναι. Αν είναι τυχαίο το τετράπλευρο οι διαγώνιες δεν διέρχονται, ενώ εδώ στο τετράπλευρο άμα το διπλώσουμε θα πέσει το ένα πάνω στο άλλο και θα μας δείξει ότι ισαπέχουν.
…
Ε: Για τις διαγώνιες μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα;
Θ: Οι διαγώνιες θα είναι ίσες μεταξύ τους;
Ε: Αυτό πώς μπορούμε να το εξηγήσουμε;
Θ: Επειδή είναι κατακορυφήν; Όχι. Δεν μου έρχεται.
Ε: Το γεγονός ότι δουλεύουμε σε έναν κύκλο μπορεί να μας βοηθήσει;
Θ:…Μήπως είναι περίοδος; Όχι.
Ε: Ωστόσο είσαι σίγουρος ότι είναι ίσες;
Θ: Ναι. Αφού περνάνε από εκεί που τέμνονται θα είναι ίσες.
…
Ε: Στο σχήμα αυτό (ισοσκελές τραπέζιο) οι διαγώνιες θα μπορούσαν να είναι ίσες;
Θ: Ναι. Ίσες είναι.
Ε: Τότε γιατί δεν διέρχονται από το κέντρο του κύκλου; Υπάρχει και κάποιο άλλο στοιχείο που να παίζει ρόλο;
Θ: Το σχήμα μέσα. Δεν θυμάμαι τώρα. Για την γωνία μήπως;

ΦΑΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Το περιβάλλον του υπολογιστή δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να παρατηρήσει όλο το εύρος των τετραπλεύρων που μπορούν να σχηματιστούν. Ωστόσο, μέσα από τα δυναμικά αυτά σχήματα δημιουργείται η εντύπωση ότι οι διαγώνιες που διέρχονται από το κέντρο δεν είναι πάντα ίσες.

Θ: (μετακινεί τα σημεία) Όταν βάζω τα σημεία κοντά οι διαγώνιοι περνάνε από το κέντρο. Αν κουνήσω το Γ, τα σημεία δεν ισαπέχουν και οι διαγώνιοι δεν περνάνε.
Ε: Μπορείς να παρατηρήσεις τι είδους τετράπλευρα σχηματίζονται σε κάθε περίπτωση;
Θ: Ναι εδώ σχηματίζεται τετράγωνο, ενώ όταν μετακινώ κάποιο σημείο το τετράπλευρο δεν είναι καθορισμένο, είναι κάποιο τυχαίο.
Ε: Δηλαδή η μοναδική περίπτωση να διέρχονται οι διαγώνιες από το κέντρο είναι όταν το τετράπλευρο είναι τετράγωνο;
Θ: (πειραματίζεται αρκετά φτιάχνοντας πολύ μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμα) Όχι είναι πάρα πολλά αυτά που περνάνε. Όταν οι διαγώνιες είναι μεγάλες σχηματίζονται παραλληλόγραμμα, ενώ όταν μικραίνουν γίνεται τετράγωνο.
Ε: Τι εννοείς όταν οι διαγώνιες είναι μεγάλες;
Θ: Εδώ είναι (φτιάχνει ορθ. παραλληλόγραμμο) μεγαλύτερες από το τετράγωνο.
Ε: Προηγουμένως ωστόσο είχαμε πει ότι οι διαγώνιες είναι ίσες. Τι ισχύει από τα δύο;
Θ:….

Ο μαθητής ανακαλύπτει σύντομα την οπτική αυτή απάτη με τη βοήθεια της μέτρησης και εστιάζει το ενδιαφέρον του στην ισότητα των διαγωνίων που διέρχονται από το κέντρο, αιτιολογώντας το και θεωρητικά.

Ε: Αν θέλεις μπορούμε να ανοίξουμε τη βοήθεια και να δούμε το μήκος τους σε κάθε περίπτωση. Τι παρατηρείς;
Θ: Ότι πάντα είναι ίσες όταν περνάνε από το κέντρο ενώ στα τυχαία τετράπλευρα δεν είναι.
Ε: Μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί είναι ίσες;
Θ: Γιατί περνάνε από το κέντρο.
Ε: Και αυτό σημαίνει ότι όσες περνάνε από το κέντρο θα είναι ίσες;
Θ:…… Μήπως επειδή είναι διάμετροι;
Ε: Υπάρχει περίπτωση οι διαγώνιες να είναι ίσες αλλά να μην διέρχονται από το κέντρο; Μπορείς να το ελέγξεις;
Θ: (πειραματίζεται)…Ε ναι.. Εδώ γίνεται (φτιάχνει ισοσκελές τραπέζιο)
Ε: Μπορείς λοιπόν να βγάλεις κάποιο συμπέρασμα για το είδος των τετραπλεύρων και τις διαγώνιες τους;
Θ: Όταν διέρχονται από το κέντρο τα τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα ή τετράγωνα, ενώ είναι τυχαία όταν δεν περνάνε.

Ο μαθητής προκειμένου να αιτιολογήσει τις παρατηρήσεις του αναπτύσσει μια κυκλική επιχειρηματολογία μεταξύ της ισότητας των διαγωνίων και του είδους των

τετραπλεύρων που σχηματίζονται χωρίς τελικά να διακρίνει τα δεδομένα από τα ζητούμενα.

Ε: Μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί όταν οι διαγώνιοι είναι διάμετροι του κύκλου σχηματίζονται τετράγωνα;
Θ: Γιατί είναι ίσες.
Ε: Πολύ ωραία. Πρέπει δηλαδή οι διαγώνιες να είναι ίσες για να διέρχονται από το κέντρο. Όμως στην περίπτωση αυτή (φτιάχνω ισοσκελές τραπέζιο) μπορούμε να δούμε ότι οι διαγώνιες είναι ίσες αλλά δεν διέρχονται από το κέντρο. Μπορείς να βγάλεις κάποιο συμπέρασμα;
Θ: Εεε… Δεν περνάνε γιατί δεν είναι διάμετροι του κύκλου.
Ε: Για να σχηματιστεί ένα τετράγωνο αρκεί οι διαγώνιες να είναι ίσες;
Θ: Όχι. Πρέπει και να περνάνε από το κέντρο.
Ε: (φτιάχνω δυο κύκλους, στον έναν σχηματίζω τετράγωνο και στο άλλο ισοσκελές τραπέζιο) Μπορούμε να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις για τις διαγώνιες;
Θ: Εεεε… Εδώ είναι ίσες αφού περνάνε από το κέντρο, ενώ εδώ… Όχι και εδώ είναι ίσες αλλά δεν περνάνε από το κέντρο.
Ε: Εκτός λοιπόν από την ισότητα μήπως χρειαζόμαστε κάποιο ακόμα στοιχείο που να μας εξασφαλίζει ότι οι διαγώνιες να διέρχονται από το κέντρο;
Θ: Να είναι διάμετροι…

Η απόδειξη που παραθέτει περιέχει μόνο το συμπέρασμα που έχει προκύψει από την οπτική παρατήρηση, ενώ απουσιάζει πλήρως η επιχειρηματολογία.

Θ:… Για να διέρχονται από το κέντρο πρέπει να είναι διάμετροι του κύκλου και αυτό συμβαίνει στα παραλληλόγραμμα και τα τετράγωνα. Στα τυχαία τετράπλευρα δεν περνάνε από το ίδιο σημείο.

Ο μαθητής Θ είναι ένας μη-οπτικός μαθητής με χαμηλό MVS της τάξης του 7 και χαμηλή σχολική επίδοση. Στη φάση της οπτικοποίησης αποδέχεται εξαρχής τον ισχυρισμό, επιμόνως φέρει παρόμοια παραδείγματα που τον ικανοποιούν και μόνο μετά από υπόδειξη ενός αντιπαραδείγματος διαπιστώνει ότι αυτός δεν ισχύει για όλα τα τετράπλευρα. Τόσο στην πρώτη φάση, όσο και στη φάση της εικασίας ο μαθητής χρησιμοποιεί ασύνδετους με τη δραστηριότητα γεωμετρικούς όρους, ενώ η ιδιαίτερα ασαφής επιχειρηματολογία του δεν εστιάζεται σε κάποιο δομικό στοιχείο των σχημάτων. Ακόμα και η καθοδηγούμενη παρατήρηση της ισότητα των διαγωνίων δεν αποτελεί βάση για τη δημιουργία κάποιας εικασίας, αλλά αντιμετωπίζεται το ίδιο χαοτικά με τις υπόλοιπες γεωμετρικές αναφορές. Μόνο μέσα στο περιβάλλον του υπολογιστή η ισότητα αυτή αποκτά νόημα και αιτιολογείται θεωρητικά. Στο μεγαλύτερο μέρος της τρίτης φάσης η επιβεβλημένη οπτικοποίηση δεν φαίνεται να βοηθά ή να προσθέτει κάποια στοιχεία στην

επιχειρηματολογία του μαθητή καθώς αυτός αναλώνεται σε μια διαρκή ανακύκλωση της παρατήρησης ότι «οι διαγώνιες που διέρχονται από το κέντρο είναι διάμετροι του κύκλου και είναι ίσες». Σαν λογική συνέπεια, η απόδειξη που παραθέτει έχει τη μορφή οπτικού συμπεράσματος χωρίς την παρουσία επιχειρηματολογίας ή θεωρητικής βάσης.

3.3 Ανάλυση της Επιχειρηματολογίας της 2^{ης} Δραστηριότητας

Μαθητής *Α (MVS 17)*

Ο μαθητής Α ξεκινά με το σχεδιασμό ενός επταγώνου και φέρει τις διαγώνιές του με τυχαίο τρόπο, επισημαίνοντας συγχρόνως ότι δεν μπορούμε να φέρουμε διαγώνιες προς κάθε κορυφή.

Α: Διαγώνιες τώρα. Μία, δύο, τρεις.. Είναι διαγώνιες αυτές;
Ε: Πώς φέρουμε μία διαγώνιο;
Α: Από μία κορυφή φέρνουμε ευθεία σε μια άλλη. Μια, δυο, τρεις, τέσσερις…ωωω! Έχει πάρα πολλές!... Εννέα.. Όχι δεν είναι αυτή, δεν είναι.
Ε: Γιατί δεν είναι διαγώνιος;
Α: Γιατί αυτή είναι δίπλα του. Είναι πλευρά. Λοιπόν, εννέα, δέκα. Να συνεχίσω;

Προκειμένου να χρησιμοποιήσει τις πληροφορίες που του δίνονται σχεδιάζει και τα υπόλοιπα πολύγωνα φέροντας διαγώνιες με τυχαίο τρόπο. Αντιλαμβανόμενος ότι ο τρόπος αυτός δεν είναι ασφαλής αναζητεί μία στρατηγική που να διασφαλίζει ότι έχουν χαραχθεί όλες οι διαγώνιες.

Α: Να σχεδιάσω το πεντάγωνο; Έχει μια, δυο,…πέντε!
Ε: Τις διαγώνιες πως τις έφερες; Τυχαία;
Α: Ναι. Από όποια κορυφή έβλεπα.
Ε: Ωραία. Συνέχισε, τι άλλο θα ήθελες να κάνεις;
Α: Και στο εξάγωνο το ίδιο θα έκανα. Κάθε φορά πρέπει να τις μετράω. Αλλά αν είναι πάρα πολλές πάλι…
…
Α: Θα μπορούσαμε να χωρίσουμε το επτάγωνο σε δύο μέρη, να φέρουμε αυτή για παράδειγμα. Αν φέρουμε τις πιο κύριες θα χωριστούν σε δύο μέρη, θα πάρουμε αυτό εδώ.. Μοιάζει με παραλληλόγραμμο, όχι με τραπέζιο. Θα πάρουμε από κάθε κορυφή όσες γίνονται, και μετά αφού τελειώσουμε με αυτό το σχήμα πάμε στο άλλο και κάνουμε ακριβώς το ίδιο πράγμα… Ή μπορούμε να το χωρίσουμε σε τρίγωνα..
Ε: Παρατήρησε το σχήμα που έκανες. Είσαι σίγουρη ότι έφερες όλες τις διαγώνιες;
Α: …Έχουμε αυτή, και αυτή. Αα, έχουμε κι άλλες.
Ε: Δεν δείχνει πολύ αποτελεσματικός ο τρόπος αυτός.

Α: Όχι.

Ο μαθητής χρησιμοποιεί μια καθαρά οπτική στρατηγική που σύντομα αποδεικνύεται ανεπαρκής. Επανεξετάζοντας, μετά από παρότρυνση, τα δεδομένα της δραστηριότητας εστιάζει την προσοχή του στη διαδικασία χάραξης διαγωνίων.

Α: Το τετράγωνο έχει δύο. Δηλαδή από κάθε κορυφή η απέναντι κορυφή έχει μόνο μία. Δηλαδή εδώ τις ενώνει μία. Και το ίδιο από την άλλη.
Ε: Ωραία. Για συνέχισε.
Α: Το πεντάγωνο τώρα. Λοιπόν, το πεντάγωνο έχει πέντε. Άρα δεν μπορεί να συμβεί το ίδιο. Η μια που θα περισσέψει, βασικά όλες τους θα πάνε σε όσες μπορούνε, στις απέναντί τους. Δηλαδή αυτή εδώ πέρα (κορυφή) πάει σε αυτή και αυτή (φέρνει διαγώνιες στις απέναντι κορυφές).
…
Α: Ναι ότι κάθε κορυφή πηγαίνει σε όσες απέναντι μπορεί, στα πιο μεγάλα..
Ε: Τι εννοείς σε όσες μπορεί; Υπάρχουν κάποιες που δεν μπορεί;
Α: Αυτή η κορυφή έχει απέναντι κορυφή αυτή και αυτή (δείχνει απέναντι κορυφές) και αποκλείουμε αυτές (δείχνει τις δύο διπλανές)… Άρα οι δύο ακριανές, οι δυο διπλανές. Εδώ έχει απέναντι κορυφή αυτή και αυτή (δείχνει απέναντι κορυφές) και αποκλείουμε αυτές (δείχνει τις δύο διπλανές)… Άρα συμβαίνει παντού το ίδιο.

Αναλύοντας διαδικαστικά τη δραστηριότητα διαμορφώνει εύκολα τη στρατηγική επίλυσής της.

Α: Άρα ουσιαστικά ασχολούμαστε με την κάθε κορυφή, βρίσκουμε ποιες είναι οι απέναντι κορυφές, τις ενώνουμε και ασχολούμαστε έτσι με κάθε κορυφή.
Ε: Εσύ όμως δεν ασχολήθηκες με όλες τις κορυφές στην τελευταία περίπτωση. Σταμάτησες στην τρίτη.
Α: Ναι, γιατί τις άλλες τις είχα ήδη φέρει.

Ο μαθητής αντιμετωπίζει εμφανή δυσκολία να συνδέσει τις οπτικές του παρατηρήσεις με τον λογικό αλγεβρικό συμβολισμό.

Α: Από κάθε κορυφή φέρνω όσες είναι και οι απέναντί της. Πώς θα το συμβολίσω αυτό; Για παράδειγμα στο επτάγωνο μπορώ να φέρω όσες είναι οι απέναντι κορυφές, πέντε, όχι τέσσερις. Ναι είναι τέσσερις γιατί αποκλείονται αυτές οι δύο. Στο εξάγωνο μπορώ να φέρω τρεις, στο πεντάγωνο μπορώ…. Α! μήπως είναι κάθε φορά δύο λιγότερες;
Ε: Τρεις λιγότερες από τι;
Α: Τρεις λιγότερες από τις κορυφές, γιατί αποκλείονται πάντα οι δύο διπλανές.
…
Ε: Ωραία. Σε ένα ν-γωνο πόσες διαγώνιες μπορούμε να φέρουμε από κάθε κορυφή;
Α: ν. Σε ένα τετράγωνο μπορούμε μία, σε ένα πεντάγωνο δύο, σε ένα ν-γωνο μπορούμε ν!
Ε: Δηλαδή σε ένα τετράγωνο μπορούμε να φέρουμε τέσσερις διαγώνιες;

Α: Όχι, μία. ν δια 2…ν δια… Όχι.. Στο τετράγωνο θέλει μία, στο πεντάγωνο θέλει δύο, στο εξάγωνο θέλει ν.. Έχει κάτι να κάνει με τις γωνίες αυτό;

…

Α: Λογικά. Στο πεντάγωνο ας πούμε μπορούμε να φέρουμε δύο διαγώνιες αφού αποκλείουμε τις δυο.. Σε ένα ν-γωνο μπορώ να φέρω όσες γωνίες έχει το ν-γωνο και αποκλείονται όμως οι διπλανές της.

Ε: Άρα πόσες θα είναι οι απέναντι κορυφές;

Α: ν-2

Μάλιστα, στη φάση αυτή η έμφαση στην οπτικοποίηση είναι τόσο ισχυρή ώστε οι αλγεβρικές σχέσεις που σταδιακά διαμορφώνονται ελέγχονται αποκλειστικά και μόνο μέσα από την μελέτη της διαδικασίας χάραξης των διαγωνίων η οποία αποτυγχάνει να περιγράψει πλήρως το ζητούμενο μοτίβο.

Ε: Μπορείς να ελέγξεις αν αυτό ισχύει και για τα υπόλοιπα πολύγωνα;

Α: Ισχύει. Αφού πάντα αποκλείουμε τις δύο διπλανές κορυφές. Δεν μπορούμε να φέρουμε εκεί.

Ε: Συνολικά σε όλο το πολύγωνο πόσες διαγώνιες μπορούμε να φέρουμε;

Α: Σε ένα πολύγωνο.. Λογικά θα κάνουμε το πολύγωνο επί ν-2.

Ε: Μπορείς να μου γράψεις τον τύπο αυτό;

Α: ν. ν-2

…

Ε: Μπορείς να ελέγξεις αν ισχύει για τα πολύγωνα που έχουμε σχεδιάσει;

Α: Να κάνω ένα καινούργιο ή σε αυτά;

Ε: Όπως θέλεις.

Α: Θα κάνω ένα μεγάλο (σχεδιάζει ένα εννιάγωνο). Ωραία από κάθε κορυφή αποκλείονται πάντα οι δύο διπλανές κορυφές, άρα ν-2. Μετά θα το κάνω αυτό για όλες τις κορυφές, δηλαδή θα πολλαπλασιάσω με το ν. Άρα, ναι ισχύει ο τύπος.

Ο μαθητής Α, όπως είχε γίνει φανερό και στην ανάλυση της πρώτης δραστηριότητας, χρησιμοποιεί σχεδόν κατ' αποκλειστικό τρόπο την οπτική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων. Αρχικά, στην προσπάθειά του να ανακαλύψει το μοτίβο που κρύβεται πίσω από τον υπολογισμό των διαγωνίων προτείνει μια καθαρά οπτική στρατηγική, αυτή της κατάτμησης του πολυγώνου σε μικρότερα γνωστά πολύγωνα. Η οπτική απόρριψή της οδηγεί στη προσεκτική μελέτη της διαδικασίας χάραξης των διαγωνίων που εύκολα αποκαλύπτει το μοτίβο στο οποίο αυτή υπάγεται. Παρά την αναγνώριση όλων των απαραίτητων προϋποθέσεων η μετάφρασή του σε μία αλγεβρική σχέση είναι ιδιαίτερα προβληματική. Η τάση χρησιμοποίησης της οπτικής μεθόδου είναι μάλιστα τόσο ισχυρή ώστε η σχέση αυτή να επαληθεύεται μόνο μέσα από την οπτική παρατήρηση, η οποία όμως είναι ανεπαρκής καθώς δεν γίνεται αντιληπτό από τον μαθητή ότι καταμετρά τις διαγώνιες δύο φορές, οδηγώντας τον σε λανθασμένο αποτέλεσμα.

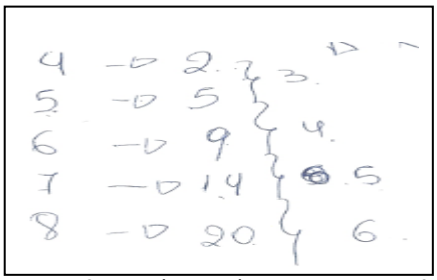
Μαθητής *Β (MVS 16)*

Ο μαθητής Β ξεκινά με το σχεδιασμό του επταγώνου. Φέρει τις διαγώνιες με στρατηγική και αμέσως διαμορφώνει ένα μοτίβο για τον υπολογισμό των διαγωνίων του.

Ε: Μπορείς να μου περιγράψεις τι κάνεις;
Β: Από μία κορυφή παίρνω…Εμ, ξεκινάω κορυφή, κορυφή. Από αυτή την κορυφή (πρώτη κορυφή) φέρνω τέσσερις. (σχεδιάζει και στη δεύτερη κορυφή μόνο) Από κάθε κορυφή φέρνω τέσσερις, άρα επειδή έχω επτά κορυφές φέρνω 4επί 7, 28.

Ελέγχοντας το μοτίβο σε ένα πεντάγωνο αντιλαμβάνεται ότι αυτό δεν είναι ορθό και αναγνωρίζει το λάθος της διπλής καταμέτρησης των διαγωνίων σε αυτό. Ωστόσο, καταφεύγει σε μία αριθμητική αναζήτηση του μοτίβου εγκαταλείποντας τη διαδικαστική ανάλυση των σχημάτων.

Ε: Είναι κάτι που σε προβληματίζει;
Β: Ότι κάποιες είναι κοινές. Αυτής της κορυφής, αυτή εδώ πέρα με αυτή την έχω φέρει. Άρα… Δεν είναι. Είναι 6 (κορυφές), 3επί 6 18 αλλά αυτό έχει 9….. Ναι, γιατί αυτή εδώ πέρα την είχα φέρει πριν και έχει μόνο δύο…. Να δοκιμάσω κάποιο άλλο; (σχεδιάζει πεντάγωνο και φέρνει διαγώνιες)….. (εγκαταλείπει το σχήμα και αρχίζει να γράφει)
Ε: Αυτό που γράφεις τι ακριβώς είναι;
Β: … (εικόνα 3.13)… Εδώ ανάμεσα στο πεντάγωνο και το τετράγωνο, έχουν μία διαφορά 3 διαγωνίων. Ανάμεσα στο 5και το 6 έχουν μία διαφορά 4διαγωνίων. Δηλαδή, όσο αυξάνουμε τις κορυφές και ξεκινώντας από τη διαφορά των τριών διαγωνίων, εδώ που πάμε από το 5 στο 6 αυξάνουμε έναν αριθμό δηλαδή πάμε στο 4, από το 6 στο 7 λογικά θα πάει στο 5.
Ε: Συνεπώς πόσες διαγώνιες έχει ένα επτάγωνο;
Β: Άρα, θα είναι 14. Στο οκτάγωνο θα είναι 6, άρα θα έχει 20….
Ε: Πολύ ωραία. Για να δούμε τώρα. Με αυτόν τον τρόπο που έκανες τώρα βρήκες ότι το επτάγωνο έχει 14διαγώνιες, ενώ σχεδιάζοντάς το πριν κατέληξες στο συμπέρασμα ότι έχει 28. Ποιο από τα δύο είναι σωστό;
Β: Ναι στην ουσία έχω βρει 28 αλλά μέτραγα κι άλλη φορά. Δηλαδή, έφερνα ΑΓ πχ αλλά έφερνα και ΓΑ, γι’ αυτό μου βγήκε τόσο.



(Εικόνα 3.13: Αριθμητική προσέγγιση του αποτελέσματος)

Ο μαθητής αντιλαμβανόμενος ότι η αριθμητική μέθοδος είναι αρκετά χρονοβόρα για ένα πολύγωνο με μεγάλο αριθμό γωνιών, επιστρέφει και διατυπώνει πλέον με ασφάλεια τη στρατηγική που προέκυψε μέσα από την ανάλυση της διαδικασίας.

Β: Στην αρχή σκέφτηκα πόσες διαγώνιες μπορούμε να φέρουμε από κάθε κορυφή, μετά μέτρησα πόσες κορυφές είχα, στη συγκεκριμένη περίπτωση 7, και μετά πολλαπλασίασα επί 4. Αλλά δεν ισχύει;
Ε: Ναι, κάτι μάλλον έχουμε παραλείψει εκεί. Για ποιο λόγο ο τρόπος αυτός μας οδηγεί σε λάθος;
Β: Επειδή μέτρησα τις διαγώνιες δύο φορές. Θα διαιρέσω μήπως δια 2;
Ε: Για ποιο λόγο θα το κάνουμε αυτό;
Β: Γιατί έχω προσθέσει.. το αποτέλεσμα που βρήκα από τις πραγματικές διαγώνιες επί δύο γιατί τις μέτρησα δυο φορές

Ο μαθητής προκειμένου να μετατρέψει τη στρατηγική αυτή σε μια αλγεβρική σχέση χρησιμοποιεί με αρκετή ευελιξία τόσο την οπτική όσο και την αριθμητική προσέγγιση με τέτοιο τρόπο ώστε αυτές να αλληλοσυμπληρώνονται.

Ε: Μπορούμε τώρα να σκεφτούμε έναν τύπο που να υπολογίζει τις διαγώνιες ενός ν-γώνου;
Β: Ωραία. Θα είναι ν….ν επί τις διαγώνιες που μπορώ να φέρω σε αυτή δια 2. Αλλά το θέμα είναι πώς θα δώσει σε κάποιον να καταλάβει ότι από κάθε κορυφή πρέπει να φέρω κάποιες διαγώνιες.
…
Β: Στο εξάγωνο και το πεντάγωνο ισχύει 6 κορυφές δια 2.
Ε: Ισχύει και στο πεντάγωνο αυτό;
Β: Ναι.. Όχι. Είναι 2,5. Ναι και αυτό σωστό. …….
Ε: Μήπως μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί στο πεντάγωνο μπορούμε να φέρουμε δύο διαγώνιες από κάθε κορυφή και όχι τέσσερις ή πέντε;
Β: Δεν γίνεται γιατί το ΑΒ και το ΕΑ είναι ουσιαστικά και οι διαγώνιες που μπορούμε να φέρουμε, δηλαδή με την πλευρά είναι ίδια.
Ε: Ισχύει το ίδιο και με τα υπόλοιπα πολύγωνα;
Β: Εεε και στο επτάγωνο ναι, σε όλα ισχύει σε όλα. Άρα κάθε φορά αφαιρούμε δύο; Από κάθε κορυφή αφαιρούμε δύο πλευρές. Εδώ για παράδειγμα είναι 5-2 (πεντάγωνο), στο εξάγωνο είναι 6… 6-2 επίσης. Όχι. Μία, δύο (μετράει διπλανές πλευρές). Δεν βγαίνει. Πρέπει να αφαιρέσουμε το τρία. Εδώ στο επτάγωνο.. μπορώ να φέρω 4 άρα από το 7 μένουν 3. Και στο πεντάγωνο έχω 5 και φέρνω 2 άρα πάλι τρία.
…
Ε: Υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στον αριθμό των κορυφών του πολυγώνου και στο αριθμό των διαγωνίων που μπορούμε να φέρουμε από κάθε κορυφή;
Β: Εεε… Όπως είπαμε κάθε φορά αφαιρούμε το τρία. Δηλαδή ν-3;
Ε: Για ποιο λόγο ισχύει αυτή η σχέση; Μπορούμε να το εξηγήσουμε;
Β: Γιατί… Γιατί επαληθεύεται από τα πολύγωνα αυτά και…

Τέλος, η επεξήγησή του τύπου που παραθέτει ο μαθητής είναι ακριβής, διακρίνεται ωστόσο μια δυσκολία στον συμβολισμού του.

Ε: Ποιος είναι ο τύπος λοιπόν που υπολογίζει τον αριθμό των διαγωνίων ενός ν-γώνου;
Β: ν-3.ν/2
…
Β: Λοιπόν, κανονικά εφόσον ξέρει το σχήμα, πχ θα είναι 40κορυφών; Θα έφερνε από μία κορυφή τις αντίστοιχες διαγώνιες και θα έβλεπε ότι από την κορυφή από την οποία έχει φέρει διαγώνιες…πρέπει να αφαιρέσει σύνολο τρεις κορυφές. Άρα, από των αριθμό των κορυφών που έχω αφαιρώ τις τρεις κορυφές που ουσιαστικά δεν συμμετέχουν στο να φέρω διαγώνιες, πολλαπλασιάζει επί το ν…. επί το ν ναι για να βρω απ' όλες τις κορυφές πόσες είναι, αλλά επειδή ουσιαστικά αυτό δεν ισχύει γιατί εγώ διαιρώ…. γιατί κάποιες διαγώνιοι είναι κοινές από άλλες κορυφές, διαιρώ δια δύο.

Ο μαθητής Β είναι ικανός να χρησιμοποιεί τόσο την οπτική όσο και την μη οπτική προσέγγιση κατά την επίλυση προβλημάτων. Στην περίπτωση της δεύτερης δραστηριότητας οι δύο μέθοδοι συνεργάζονται ομαλά και χρησιμοποιούνται με ευελιξία. Η ανάλυση της διαδικασίας στην οποία προβαίνει ο μαθητής κατά τη χάραξη των διαγωνίων διαμορφώνει άμεσα ένα μοτίβο για τον υπολογισμό τους. Όταν το μοτίβο αυτό αποδεικνύεται ανακριβές καταφεύγει στην αριθμητική αναζήτηση του μέσα από την οποία προκύπτει η διόρθωσή του. Σε κάθε περίπτωση που η οπτική μέθοδος υστερεί, η λογική μέθοδος επιστρατεύεται για να δώσει την απάντηση και τα συμπεράσματά της αποκτούν νόημα μέσα από την οπτικοποίηση. Η αλγεβρική σχέση στην οποία καταλήγει ο μαθητής παρουσιάζει λάθη ως προς τον συμβολισμό της, όμως η επεξήγησή είναι πλήρης και ορθά δομημένη.

Μαθητής *Γ (MVS 7)*

Ο μαθητής Γ ξεκινά από το σχεδιασμό ενός τετραγώνου και μεταβαίνοντας στο πεντάγωνο φέρει τις διαγώνιες με στρατηγική. Είναι φανερή η τάση του να βρει μία αριθμητική φόρμουλα που να συμβαδίζει με τις οπτικές του παρατηρήσεις.

Γ: Φτιάχνω ένα τετράπλευρο, και τις δύο διαγώνιες. …Τώρα έκανα ένα πεντάγωνο και έφερα τις πέντε διαγώνιες. (σχηματίζει διαγώνιες με στρατηγική)
Ε: Τις διαγώνιες τις έφερες τυχαία;
Γ: Εεεε ναι. Έφερα από κάθε γωνία δύο, στις γωνίες που δεν…Καταλάβατε..
Ε: Σε ποιες γωνίες εννοείς;
Γ: Σε αυτές που μπορώ, γιατί σε αυτές εδώ τις δίπλα δεν μπορώ.
…

Γ: Καταρχάς αφού προσθέτω μία γωνία από κάθε κορυφή θα περνάει, θα πρέπει να φέρω ακόμα μια (διαγώνιο) από κάθε γωνία. Οπότε έχει 6 (το εξάγωνο) συν 4, 11. Όχι.. Ώπα, δεν έβαλα και αυτές. 19

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις τι ακριβώς μετράς;

Γ: Μετράω τις γραμμές που φέρνω από κάθε γωνία.

Ε: Στο εξάγωνο τι μέτρησες ακριβώς;

Γ: Από κάθε κορυφή φέρνω τρεις και συνολικά εεε 9. Όχι. Ναι, και συνολικά 9.

…

Γ: Από κάθε κορυφή φέρνω τη διαγώνιο και μετράει σε αυτή που έχει σταλθεί.

Ε: Ισχύει το ίδιο και στο πεντάγωνο;

Γ: Έχει πέντε, σε κάθε κορυφή φέρνουμε δύο και συνολικά πέντε. Άρα, φέρνουμε μία από κάθε κορυφή;

Ε: Μία από κάθε κορυφή;

Γ: Ναι μία θα φέρουμε, μία από δω, μία από δω, μία από εδώ..(κοιτάει κυκλικά τις κορυφές) Όχι, δύο, δύο.

Ε: Στο επτάγωνο τι συμβαίνει;

Γ: Στο επτάγωνο…Στο τετράγωνο φέρνουμε μία , στο πεντάγωνο δύο, στο εξάγωνο τρεις άρα στο επτάγωνο φέρνουμε τέσσερις.

Ε: Έχεις κάποιο σχήμα στο μυαλό σου;

Γ: Όχι. Λογικά το πήρα.

Σχεδιάζοντας το επτάγωνο διαμορφώνει αμέσως μία στρατηγική επίλυσης της δραστηριότητας. Η στρατηγική αυτή με ευκολία μεταφράζεται σε αλγεβρική σχέση μέσα όμως από αριθμητική επαλήθευση, ενώ με δυσκολία επεξηγείται οπτικά.

Γ: (σχηματίζει το επτάγωνο και φέρνει τις τέσσερις διαγώνιες από τη μία κορυφή) Λοιπόν, είναι 28.

Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις τι ακριβώς σκέφτηκες;

Γ: Ναι. Από κάθε κορυφή μπορούμε να φέρουμε 4, άρα 4επι 7 κορυφές 28.

…

Γ: Άρα από κάθε κορυφή μπορούμε να φέρουμε ν-3 διαγώνιες.

Ε: Το ν-3 μπορείς να μου εξηγήσεις πώς προέκυψε;

Γ: …Στο επτάγωνο είναι 7-4=3, στο εξάγωνο 6-3=3, στο πεντάγωνο 5-2=3 άρα κάθε φορά είναι 3 λιγότερες από τις γωνίες

Ε: Πώς είμαστε σίγουροι ότι αυτό ισχύει για όλα τα πολύγωνα και όχι μόνο για αυτά τα συγκεκριμένα;

Γ: Γιατί… Γιατί μερικές γων.., με γραμμές… όχι. Γιατί μερικές γωνίες σχηματίζονται από αυτό;

Ε: Τι εννοείς σχηματίζονται από αυτό;

Γ: Να δεν μπορώ να φέρω στις διπλανές, στις γειτονικές γωνίες και σε αυτή

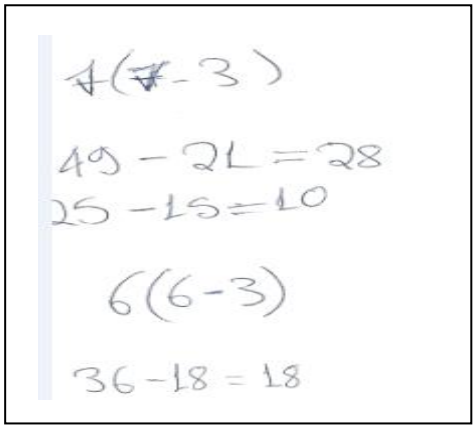
…

Ε: Μπορείς δηλαδή να μου γράψεις έναν τύπο που μπορεί να υπολογίσει τις διαγώνιες του ν-γώνου;

Γ: …ν.(ν-3)

Ο μαθητής ζητά να επαληθεύσει το αποτέλεσμα. Διαπιστώνει αριθμητικά ότι τα αποτελέσματα δεν επιβεβαιώνουν τα δεδομένα που προκύπτουν από τα σχήματα και προβαίνει στις απαραίτητες διορθώσεις.

Γ: Να υπολογίσω λίγο; 10; Ναι… (εικόνα 3.14)
Ε: Υπάρχει κάποιο πρόβλημα;
Γ: Πρέπει να κάνουμε κάποια αλλαγή στον τύπο…. Κάτσε…Τι να αφαιρέσουμε άλλη μια κορυφή;
Ε: Εξήγησε μου λίγο περισσότερο τι σκέφτηκες.
Γ:…. Δεν μπορώ να καταλάβω…(επαληθεύει αριθμητικά τον τύπο για εξάγωνο) Δια 2!
Ε: Για ποιο λόγο πρέπει να διαιρέσουμε με το 2;
Γ: Γιατί… Βασικά γιατί έτσι βγαίνουν τα νούμερα.



(Εικόνα 3.14: Αριθμητική προσέγγιση του αποτελέσματος)

Προκύπτει άμεσα το ερώτημα αν ο τύπος στον οποίο κατέληξε ο μαθητής ισχύει για όλα τα πολύγωνα. Παρά το γεγονός ότι δεν μπορεί να τον επεξηγήσει με κάποιο τρόπο οπτικά, εκφράζει την πεποίθησή του για την ορθότητά του βασιζόμενος στην επαλήθευση των αποτελεσμάτων.

Ε: Υπάρχει κάποια λογική εξήγηση γιατί να διαιρέσουμε τον τύπο με το δύο;
Γ: Βασικά, εεε…. Δεν ξέρω, δεν ξέρω αλλά είμαι σίγουρος ότι είναι έτσι.
…
Γ: Ο τύπος είναι ν.(ν-3)/2. Από τις γωνίες που έχει πρέπει να αφαιρέσει 3 για να βρει πόσες διαγώνιες διέρχονται από κάθε κορυφή. Τον αριθμό που βρίσκει πρέπει να τον πολλαπλασιάσει με τις γωνίες και αυτό να το διαιρέσει με δύο.

Ο μαθητής Γ είναι ένας μη-οπτικός μαθητής που έδειξε τη σαφή προτίμησή του στη χρήση μη οπτικών μεθόδων και στις δύο δραστηριότητες που κλήθηκε να ασχοληθεί. Ο μαθητής φέρει τις διαγώνιες με στρατηγική μελετώντας τη διαδικασία χάραξής τους και αυτό είναι αρκετό για να διαμορφώσει ένα μοτίβο υπολογισμού των διαγωνίων. Το μοτίβο επιβεβαιώνεται αριθμητικά και οι απαραίτητες διορθώσεις γίνονται με στόχο να επαληθεύονται τα δεδομένα της δραστηριότητας.

Οι διορθώσεις αυτές είναι αποτέλεσμα αριθμητικής δοκιμής και επαλήθευσης χωρίς να συνοδεύονται από οποιαδήποτε οπτική επεξήγηση παρά μόνο από τη βεβαιότητα που προσφέρουν οι μαθηματικοί υπολογισμοί. Ο μαθητής καταλήγει σε μια ορθά συμβολισμένη αριθμητική σχέση υπολογισμού των διαγωνίων εκφράζοντας τη πεποίθησή του ότι επαληθεύεται για όλα τα πολύγωνα, χωρίς ωστόσο να μπορεί να αιτιολογήσει πως εξασφαλίζεται η γενίκευση αυτή.

Μαθητής *Δ (MVS 5)*

Ο μαθητής Δ ξεκινά με το σχεδιασμό του τετραγώνου και συνεχίζει με τα υπόλοιπα πολύγωνα φέροντας τις διαγώνιες με στρατηγική.. Αναγνωρίζει ότι δεν μπορεί να φέρει διαγώνιες προς όλες τις κορυφές και άμεσα διαμορφώνει ένα μοτίβο υπολογισμού τους.

Δ: Λοιπόν, παίρνω πέντε σημεία, φτιάχνω το πεντάγωνο και θα φέρω τις διαγώνιες. Από κάθε σημείο φέρνω στις απέναντι γωνίες….Σε αυτές που είναι… προσκείμενες τις λέμε; Δεν μπορούμε να φέρουμε σε αυτές που είναι στην ίδια πλευρά.
Ε: Μπορείς να συνεχίσεις;
Δ: Λοιπόν, επτά σημεία…(σχηματίζει το επτάγωνο)…Μία, δύο, τρεις, τέσσερις,….(ψιθυρίζει αριθμούς 4,8,12)
Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις αυτό που σκέφτεσαι;
Δ: Από αυτή τη κορυφή έχουμε τέσσερις, και από τις άλλες έχουμε τέσσερις και για να μην φέρω τις διαγώνιες μετράω... κανονικά. Κάνω άθροισμα συν 4 ανά κορυφή.
Ε: Πόσες είναι συνολικά λοιπόν;
Δ: Πόσες έχουμε ακόμα, δυο, τρεις, έξι (μετράει κορυφές από τις οποίες δεν έχει φέρει διαγώνιο)… 24 ακόμα, και 4 αυτές 28.
Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις τον τρόπο που σκέφτηκες μέχρι τώρα;
Δ: Επειδή ξέρω ότι από εδώ διέρχονται τέσσερις, πολλαπλασίασα με τον αριθμό των άλλων κορυφών.

Επαληθεύοντας το μοτίβο στο οποίο κατάληξε σε ένα πεντάγωνο αντιλαμβάνεται ότι δεν είναι απόλυτα ορθό, ενώ προβαίνει αμέσως στη διόρθωσή του επεξηγώντας το παράλληλα με τρόπο οπτικό.

Δ: Να φτιάξω πάλι το πεντάγωνο; Λοιπόν, από κάθε κορυφή διέρχονται δύο…
Ε: Και συνολικά το πεντάγωνο πόσες διαγώνιες έχει;
Δ: 8, όχι.. 6.. γιατί κόλλησα τώρα; 10, 10 συγνώμη.
Ε: Τόσες έχεις σχεδιάσει;

Δ: …. Νομίζω…(αρχίζει και γράφει με το στυλό πάνω από τις διαγώνιες). Εδώ την μία την έχουμε ήδη φέρει (μόλις φτάνει στην τρίτη κορυφή) και εδώ (στην τέταρτη κορυφή) και εδώ τις έχουμε έτοιμες ήδη (στην πέμπτη κορυφή)… Γι' αυτό…
Ε: Όταν λες γι' αυτό τι ακριβώς εννοείς;
Δ: Γι' αυτό υπολόγισα δέκα, επειδή τις μέτρησα δύο φορές. Άρα, το επτάγωνο έχει 14.
Ε: Αυτό πώς προέκυψε;
Δ: Διαίρεσα το 28 με το δύο γιατί τις μετρούσα δύο φορές.

Στην προσπάθειά του να μεταφράσει το οπτικό μοτίβο σε μια αλγεβρική σχέση ο μαθητής Δ χρησιμοποιεί με ευελιξία την οπτική και αλγεβρική προσέγγιση, με τέτοιο τρόπο ώστε οι παρατηρήσεις που προκύπτουν από τη μια μέθοδο προσέγγισης να αποκτούν νόημα μέσα στη δεύτερη.

Δ: Τύπο ε; …. Δεν ξέρω πώς να συμβολίσω το πόσες μπορώ να φέρω από κάθε κορυφή. …
Δ: Εεε επειδή… αφαιρούμε τις γωνίες που είναι στην ίδια πλευρά με την γωνία που φέραμε τις διαγώνιες;
Ε: Ισχύει αυτό για όλα τα πολύγωνα;
Δ: Ναι.. Εδώ που είχαμε πέντε, ας πούμε από αυτό, φέραμε δύο. 5 μείον 3, αυτά τα τρία (δείχνει μία κορυφή και τις διπλανές της) 2. Και στο τετράγωνο ισχύει το ίδιο, 4 μείον αυτές τις 3, 2.
Ε: Σε ένα ν-γωνο με ν κορυφές πόσες διαγώνιες θα…
Δ: ν πλην… Πώς μπορώ να συμβολίσω;….. ν-3 απ' ότι κατάλαβα θα είναι.
Ε: Μπορείς να μου γράψεις έναν τύπο που να υπολογίζει τις διαγώνιες που θα διέρχονται από ένα πολύγωνο;
Δ: Α ναι! ν-3 μέσα σε παρένθεση επί ν….
Ε: Μπορείς να….
Δ: (επαληθεύει αριθμητικά τον τύπο) 5-3=2 επί 5, 10… 6-3=3 επί 6, δεκαοκτώ …δια δύο τότε μήπως γιατί βλέπω πώς… είναι το διπλάσιο
Ε: Υπάρχει κάποια εξήγηση γι' αυτό; Στις δύο αυτές περιπτώσεις ισχύει, πώς είμαστε σίγουροι ότι ισχύει για όλα τα πολύγωνα;
Δ: …. Γιατί νομίζω, όπως είπαμε πριν μία κορυφή με μία άλλη μπορεί να έχει την ίδια διαγώνιο και εμείς την μετράμε δύο φορές.

Ο μαθητής καταλήγει σε έναν ορθό τύπο τόσο στη δομή όσο και στη συμβολική του μορφή. Παράλληλα διαπιστώνει την ισχύ του τύπου για όλα τα πολύγωνα καθώς τον αιτιολογεί αναλύοντας και διαδικαστικά το μοτίβο του.

Δ: Από την κάθε κορυφή ενός ν- γώνου φέρνουμε διαγώνιες στις υπόλοιπες κορυφές. Θα παρατηρήσουμε ότι η κορυφή δεν θα έχει με τις δύο διπλανές της γωνίες. Άρα, από τον αριθμό των γωνιών ν θα αφαιρέσουμε τις 3 που δεν έχουν διαγώνιες μεταξύ τους. Όμως, αυτό δεν συμβαίνει μόνο με μία κορυφή αλλά με όλες, οπότε τη διαφορά αυτή θα την πολλαπλασιάσουμε με τον αριθμό των γωνιών ν. Όμως κάθε διαγώνιος είναι ευθύγραμμο

τμήμα μεταξύ δύο κορυφών και γι' αυτό πρέπει να την μετρήσουμε μόνο μία φορά. Άρα τη σχέση ν(ν-3) τη διαιρέσουμε δια δύο.

Ο μαθητής Δ είναι η περίπτωση ενός μη-οπτικού μαθητή, με χαμηλό μάλιστα MVS της τάξης του 5, ο οποίος όμως χρησιμοποιεί τόσο την οπτική όσο και τη μη οπτική προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων με επιτυχία. Και στην περίπτωση της δεύτερης δραστηριότητας, όπως άλλωστε είχε παρατηρηθεί και στην ανάλυση της πρώτης, ο μαθητής επιλέγει τη μέθοδο που του διασφαλίζει περισσότερο πλούσιες και ασφαλείς πληροφορίες σε κάθε περίπτωση. Σχεδιάζοντας τις διαγώνιες κάθε πολυγώνου με στρατηγική και παρατηρώντας τη διαδικασία χάραξής τους καταλήγει εύκολα σε ένα μοτίβο υπολογισμού τους. Όταν το μοτίβο αποδεικνύεται λανθασμένο μέσα από οπτική επαλήθευση αναζητά και πάλι την απάντηση στη μελέτη της διαδικασίας. Καλούμενος να γράψει μια αλγεβρική σχέση που να υπολογίζει τον αριθμό των διαγωνίων, χρησιμοποιεί την αριθμητική προσέγγιση τόσο για την εύρεσή της όσο και την επαλήθευσή της, προβαίνοντας πάντα στην αιτιολόγησή της μέσα από τα σχήματα. Η αλγεβρική σχέση που καταλήγει παρουσιάζει ορθό συμβολισμό και επεξηγείται πλήρως μέσα από την ανάλυση της διαδικασίας χάραξης των διαγωνίων.

Μαθητής *Ζ (MVS 16)*

Ο μαθητής Ζ φέρει τις διαγώνιες με τυχαίο τρόπο και απλώς επαληθεύει τα δεδομένα της δραστηριότητας χωρίς να παρατηρήσει κάποια κοινή διαδικασία στη χάραξή τους. Στην περίπτωση του επταγώνου ισχυρίζεται διαισθητικά ότι θα έχει λιγότερες διαγώνιες από τα προηγούμενα αλλά γρήγορα ανακαλεί τον ισχυρισμό.

Ζ: Στο επτάγωνο, μάλιστα. Επτάγωνο τώρα. Το επτάγωνο τώρα, εφόσον αυτό έχει εννέα το επτάγωνο θα έχει λιγότερες γιατί… Πώς να το εξηγήσω τώρα;
Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις γιατί πιστεύεις ότι το επτάγωνο έχει λιγότερες διαγώνιες από το εξάγωνο;
Ζ:….. Καλύτερα να το φτιάξω. Δεν έχω ξαναφτιάξει επτάγωνο.
Ε: Τις διαγώνιες τις φέρνεις τυχαία;
Ζ: Ναι. Δεν ξέρω αν είναι και σωστές. Δεν έχω ξαναφτιάξει επτάγωνο.
Ε: Είσαι σίγουρος ότι τις έχεις φέρει όλες;
Ζ: Δεν ξέρω είναι και πολλές.

Η μέθοδος της απλής χάραξης των διαγωνίων αρχίζει να αμφισβητείται και ο μαθητής Ζ αναζητεί μία ικανοποιητική στρατηγική. Προτείνει την κατάτμηση του

επταγώνου σε γνωστά πολύγωνα, όμως σύντομα η στρατηγική αποδεικνύεται λανθασμένη.

Ζ: Α, ναι.. Εδώ έχουμε ένα πεντάγωνο. Θα μπορούσαμε αν δεν έχουμε τραβήξει αυτές τις γραμμές να τα πάμε σύμφωνα με τα πάνω περίπου.
Ε: Εξήγησέ μου λίγο περισσότερο τι εννοείς.
Ζ: Να κάνω ένα άλλο σχήμα. Θα πάρω επτά σημεία. Θα μπορούσαμε να πάρουμε αυτή τη διαγώνιο εδώ και αυτό που μένει είναι ένα πεντάγωνο. Άμα τραβήξουμε τις διαγώνιες (σχεδιάζει) … και είναι και άλλη μία είπαμε ότι έχουμε πέντε.. Τρεις, τέσσερις και άλλη μία μας μένει. Αν πάρουμε από εδώ, όχι.. Τώρα στο κάτω που δεν είναι ακριβώς τετράπλευρο, είναι… τραπέζιο μπορούμε να πούμε θα μπορούσαμε να φέρουμε και εδώ (σχεδιάζει). Αυτές είναι.
Ε: Είσαι σίγουρος ότι αυτές είναι όλες όσες μπορείς να φέρεις;
Ζ: Γενικά; Μπορώ να φέρω και από εδώ και εδώ.. Τώρα δεν ξέρω.. Έχει και από εδώ!

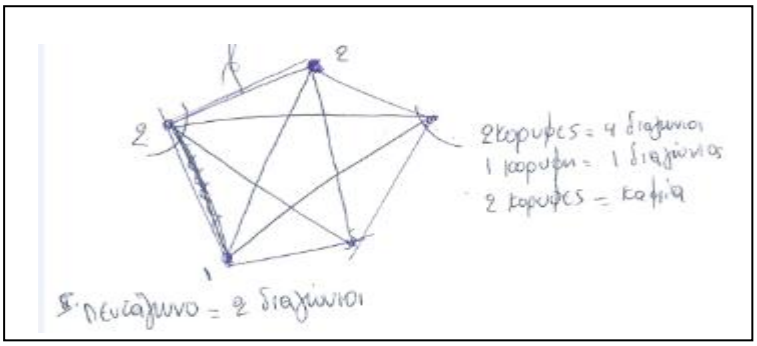
Ο μαθητής μόνο μετά από υπόδειξη μελετά τη διαδικασία χάραξης των διαγωνίων. Η μελέτη αυτή τον οδηγεί στη διαμόρφωση ενός μοτίβου για τον υπολογισμό τους.

Ε: Για παράδειγμα να ξεκινήσουμε από μια κορυφή και να είμαστε σίγουροι ότι τις φέραμε όλες.
Ζ: Ναι μπορούμε να το κάνουμε..(σχεδιάζει νέο) Μπορούμε να ξεκινήσουμε από εδώ (μια κορυφή του επταγώνου) και να φέρουμε αρκετές.
Ε: Πόσες μπορούμε να φέρουμε;
Ζ: Από αυτό το σημείο; Εεε.. μια, δύο, τρεις, τέσσερις,.. τέσσερις.. Από εδώ (πηγαίνει στην διπλανή κορυφή) πάλι τέσσερις. (πηγαίνει στην τρίτη και δεν τις σχεδιάζει όλες) Και από εδώ τέσσερις, βασικά σε όλες τέσσερις.
Ε: Γιατί μπορούμε να φέρουμε τέσσερις και όχι επτά για παράδειγμα;
Ζ: Γιατί είναι πολύ κοντινά τα σημεία αυτά (δείχνει διπλανές κορυφές) και δεν μπορούμε να πάρουμε διαγώνιες. Εδώ δεν γίνεται ας πούμε να πάρουμε.
Ε: Άρα, από κάθε…
Ζ: Δηλαδή 28 έχει…
Ε: Πώς το βρήκες το 28;
Ζ: Είπα τέσσερις που μπορούμε επί επτά κορυφές.

Επαληθεύοντας το παραπάνω μοτίβο στην περίπτωση του πενταγώνου αντιλαμβάνεται ότι είναι ελλιπές και αναγνωρίζει το σημείο της διαδικασίας το οποίο χρειάζεται διόρθωση.

Ε: Και σε όλο το πεντάγωνο πόσες μπορούμε να φέρουμε;
Ζ: Δέκα.. Όχι αφού είπαμε πέντε.
Ε: Όμως , το σχεδίασες πριν και βρήκες πέντε. Πώς γίνεται αυτό;
Ζ: Πέντε; Ναι σωστό και αυτό. Λοιπόν από εδώ φέρνουμε δύο, και από εδώ δύο, από εδώ μία και σε αυτές…καμία
Ε: Πως γίνεται αυτό; Πριν είπαμε ότι από κάθε μία μπορούμε να φέρουμε δύο.

Ζ: Εεεε.. Α, γιατί τις έχουμε ήδη φέρει. Για να ήταν δέκα έπρεπε να ξαναμετρήσουμε αυτές εδώ, αλλά δεν τις μετράμε. Θα πρέπει να βρούμε τις δύο κορυφές που φέρνουνε δύο, τη μια κορυφή που φέρνει μια και αυτές να μην τις μετρήσουμε καθόλου. Άρα, δύο επί δύο συν μια επί μία και μηδέν μας κάνει πέντε. (εικόνα 3.15)



(Εικόνα 3.15: Οπτικές παρατηρήσεις του μαθητή Ζ)

Παρόλο που αναγνωρίζει ότι κάποιες από τις διαγώνιες έχουν καταμετρηθεί δύο φορές με το μοτίβο που έχει διαμορφώσει είναι αδύνατον να προβεί στη διόρθωσή του. Η επιχειρηματολογία του περιορίζεται μόνο στο πόσες διαγώνιες μπορούν να διέλθουν από κάθε κορυφή. Ακόμα και με υψηλή καθοδήγηση, ο μαθητής δεν καταφέρνει να υπερπηδήσει το εμπόδιο που προέκυψε και αναλώνεται σε γενικές και διαισθητικές παρατηρήσεις.

Ε: Να το σκεφτούμε λίγο από την αρχή. Από κάθε κορυφή πόσες μπορούμε να φέρουμε;
Ζ: Πάντα μπορούμε λιγότερες διαγώνιες.
Ε: Λιγότερες από τι;
Ζ: Από το πόσες είναι οι γωνίες.
Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις γιατί συμβαίνει αυτό;
Ζ: Γιατί εδώ και εδώ δεν μπορούμε να φέρουμε (δείχνει διπλανές κορυφές)
Ε: Πόσες λιγότερες διαγώνιες δηλαδή μπορούμε να φέρουμε;
Ζ: Στο πεντάγωνο..τρεις.. Όχι, έχουμε πέντε και μπορούμε δύο. Δηλαδή, μπερδεύτηκα τώρα. Εεεε τρεις λιγότερες. Σε ένα εξάγωνο φέρνουμε τρεις άρα τρεις λιγότερες..
…
Ε: Πώς είσαι σίγουρος ότι ισχύει σε όλα τα πολύγωνα αυτό; Μπορείς να μου το εξηγήσεις σύμφωνα με αυτά που λέγαμε πριν;
Ζ: Μήπως με τα νούμερα αυτά κάνουμε κάτι; Δεν… Εδώ ισχύει σίγουρα. Τώρα δεν ξέρω για όλα αν ισχύει.
…
Ε: Ωραία, βρήκαμε πώς μπορούμε να φέρουμε από κάθε κορυφή. Για να υπολογίσουμε πόσες μπορούμε να φέρουμε συνολικά σε όλο το πολύγωνο τι θα κάνουμε;
Ζ: Θα πούμε επί τις γωνίες.
Ε: Αυτός ο τρόπος όμως μας οδήγησε σε λάθος προηγουμένως.
Ζ: Ναι γιατί κάποιες τις μετράει δύο φορές.
Ε: Μήπως μπορούμε να κάνουμε κάτι ώστε να μην τις μετράμε δυο φορές;

Ζ: Εεεε… Να πολλαπλασιάζουμε με λιγότερες κορυφές;
Ε: Πόσες λιγότερες; Όσες θέλουμε;
Ζ:…..Δεν ξέρω. Σίγουρα είναι λιγότερες από αυτές που θα υπολογίσουμε.

Επιπλέον, αντιμετωπίζει μεγάλη δυσκολία να αντιληφθεί την έννοια ενός ν-γώνου και αδυνατεί να γενικεύσει το μοτίβο που έχει παρατηρήσει για όλα τα πολύγωνα.

Ε: Σε ένα ν-γωνο πόσες διαγώνιες διέρχονται από κάθε κορυφή;
Ζ: Τι είναι αυτό;
Ε: Ένα πολύγωνο που δεν ξέρουμε πόσες ακριβώς κορυφές έχουμε. Το ν μπορεί να είναι ένα αριθμός όπως το 6, το 7, το 8 κτλ και να σχηματίζεται ένα εξάγωνο, ένα επτάγωνο, ένα οκτάγωνο.
…
Ζ: Σε ένα ν-γωνο δεν μπορώ να φέρω εδώ, άρα… Μπορώ να φέρω τρεις διαγώνιες; Έχω κολλήσει στο τρία εγώ. Βέβαια ανάλογα και τα σημεία, δηλαδή αν είναι απέναντι τα σημεία, αν είναι δίπλα όπως εδώ δεν μπορώ να φέρω. Τώρα δεν ξέρω…Δεν έχω και το σχήμα. Μήπως σε κάθε κορυφή μπορούμε να φέρουμε έξι διαγώνιες;
…
Ζ: Σε ένα ν-γωνο από κάθε κορυφή μπορούμε να φέρουμε τρεις. Ένα ν-γωνο; Εφόσον δεν έχουμε πάρει συγκεκριμένα σημεία και δεν έχουμε φτιάξει ένα σχήμα θα μπορούσαμε να πάρουμε τρεις διαγώνιες από κάθε συγκεκριμένο σημείο.. Αλλά πάλι δεν ξέρω.. Δεν είναι συγκεκριμένο το σχήμα.

Στην ανάλυση της πρώτης δραστηριότητας έγινε φανερό ότι ο μαθητής Ζ, ένας μαθητής χαμηλών επιδόσεων με προτίμηση στην οπτική προσέγγιση, μπορεί να αξιοποιήσει την οπτικοποίηση και να καταλήξει σε κάποια ορθά συμπεράσματα. Στη δραστηριότητα αυτή ο μαθητής φέρει αρχικά τις διαγώνιες με τυχαίο τρόπο και προτείνει μια καθαρά οπτική στρατηγική, αυτή της κατάτμησης των πολυγώνων σε μικρότερα. Μόνο μετά από υπόδειξη ακολουθεί μια στρατηγική στη χάραξη των διαγωνίων, παρατηρεί τη διαδικασία και διαμορφώνει ένα μοτίβο για τη χάραξή τους. Ο μαθητής μέσα από την οπτική παρατήρηση αναγνωρίζει τις δύο βασικές συνθήκες που πρέπει να λάβει υπόψη του για την εύρεση του σωστού μοτίβου ωστόσο δεν μπορεί να τις μεταφράσει σε μια ορθή στρατηγική ή αλγεβρική σχέση, ακόμα και μετά από υψηλή καθοδήγηση. Όταν το μοτίβο που έχει προτείνει αποδεικνύεται ελλιπές, οι διορθώσεις που προτείνει είναι γενικές και διαισθητικές χωρίς να έχουν σαφή προσανατολισμό. Τέλος, ο μαθητής δεν φαίνεται να αντιλαμβάνεται την έννοια ενός ν-γωνου, αναζητώντας ένα σχήμα για να αποκτήσει μορφή, και δεν κατάφερε να γενικεύσει συμβολικά το μοτίβο που εντόπισε για το πλήθος των διαγωνίων ανά κορυφή.

Μαθητής *Θ (MVS 7)*

Ο μαθητής Θ ξεκινά με τον σχεδιασμό ενός τετραγώνου και συνεχίζει με το πεντάγωνο. Αντιμετωπίζει κάποιες δυσκολίες σχετικές με την έννοια και τη χάραξη των διαγωνίων. Τελικά σχεδιάζει τις διαγώνιες με τυχαίο τρόπο έτσι ώστε να επαληθεύονται τα δεδομένα της δραστηριότητας. Στη χάραξη των διαγωνίων ενός εξαγώνου γίνεται αντιληπτό ότι δεν μπορεί να φέρει διαγώνιες προς όλες τις κορυφές.

Θ: Δεν μπορούμε να φέρουμε παντού.
Ε: Τι εννοείς δεν μπορούμε να φέρουμε παντού;
Θ: Γιατί θα είναι ύψος; Αν το φέρουμε κατακόρυφα.
Ε: Ναι αλλά μας ενδιαφέρει να φέρουμε τα ύψη σε αυτήν την περίπτωση;
Θ:……
Ε: Εμείς εξετάζουμε τις διαγώνιες έτσι; Για να φέρουμε τις διαγώνιες τι κάνουμε;
Θ: Ενώνουμε τις τελίτσες (κορυφές του σχήματος)
Ε: Ωραία. Μπορούμε να ενώσουμε όλες τις κορυφές μεταξύ τους;
Θ: Ναι.
Ε: Είσαι σίγουρος ότι μπορούμε να τις ενώσουμε όλες μεταξύ τους;
Θ: Ε ναι. Από εδώ ενώνουμε αυτή και αυτή (δείχνει μόνο απέναντι κορυφές)
Ε: Γιατί δεν μου δείχνεις αυτήν την κορυφή (δείχνω διπλανή)
Θ: Ε πώς θα γίνει; Η διαγώνιος θα πάει έτσι; Δεν γίνεται.

Ο μαθητής θεωρεί απαραίτητη προϋπόθεση να γνωρίζει τον αριθμό των διαγωνίων για τη χάραξή του και δεν είναι δυνατόν να δει κάποια στρατηγική στη χάραξή τους.

Ε: Είσαι σίγουρος ότι τις έφερες όλες;
Θ: Όχι.
Ε: Μήπως μπορούμε να βρούμε κάποιο τρόπο για να είμαστε σίγουροι ότι τις φέραμε όλες;
Θ: Θα φέρω όσες βλέπω και αν δεν έχω φτάσει τον αριθμό θα ξανακοιτάξω.
Ε: Στο επτάγωνο όμως δεν ξέρεις πόσες είναι οι διαγώνιές του. Πώς θα είσαι σίγουρος ότι θα τις φέρεις όλες; Μήπως μπορούμε να βρούμε κάποιον άλλο τρόπο;
Θ: …. Ε δεν μου έρχεται κάτι.

Μετά από υπόδειξη σχεδιάζει ένα εξάγωνο, αρχίζει να μελετά κάθε κορυφή του ξεχωριστά και να διατυπώνει τις παρατηρήσεις του. Αντιλαμβάνεται, επιπλέον, ότι κάποιες διαγώνιες έχουν ήδη χαραχθεί.

Θ: Δηλαδή τι να κάνω; Να ξεκινήσω από την κορυφή;
Ε: Ναι. Για πάμε να δούμε αν μας βοηθά ο τρόπος αυτός.
Θ: (εξάγωνο) Από εδώ μπορούμε να φέρουμε αυτή και αυτή. Και αυτή. Τρεις δηλαδή.

Ε: Σε ποιες κορυφές δεν μπορούμε να φέρουμε διαγώνιες;
Θ: Σε αυτές εδώ (δείχνει δυο διπλανές)
…
Ε: Μπορείς να βγάλεις κάποιο συμπέρασμα;
Θ: Ότι είναι εννιά.
Ε: Πώς είσαι σίγουρος;
Θ: Αφού μου το δίνει η άσκηση.
Ε: Εσύ όμως ασχολήθηκες μόνο με τις τρεις κορυφές. Με τις άλλες τι γίνεται;
Θ: Τι δηλαδή να φέρω και από εδώ;
Ε: Μπορείς να δεις τι γίνεται με τις άλλες κορυφές;
Θ: … Αφού εδώ δεν γίνεται πάλι. Αφού έχω φέρει τη διαγώνιο από εδώ μέχρι εδώ το ίδιο αποτέλεσμα έχω.
Ε: Και αυτό συμβαίνει και με τις υπόλοιπες κορυφές;
Θ: Ναι. Τις έχω ήδη φέρει.

Την ίδια μέθοδο χρησιμοποιεί και στην περίπτωση του επταγώνου. Ισχυρίζεται ότι μπορεί για να υπολογίσει τον αριθμό των διαγωνίων αρκεί να βρει από ποιες κορυφές διέρχονται διαγώνιες. Η στρατηγική αυτή γρήγορα αποδεικνύεται λανθασμένη και αναθεωρείται.

Θ: (σχεδιάζει επτάγωνο) Τέσσερις από εδώ. Τέσσερις και εδώ. Άρα από κάθε κορυφή μπορώ να φέρω τέσσερις. Άρα, θα είναι δώδεκα;
Ε: Μπορείς να μου εξηγήσεις γιατί;
Θ: Θα είναι δώδεκα γιατί μόνο τρεις (κορυφές) χρειαζόμαστε αφού μετά άμα φέρουμε τις τρεις θα συμπίπτουν όλες μεταξύ τους.
Ε: Το έλεγξες αυτό. Είσαι σίγουρος ότι χρειάζεται να φέρουμε μόνο από τρεις κορυφές τις διαγώνιες;
Θ: Νομίζω ναι.
Ε: Για παράδειγμα από αυτή την κορυφή τις έχουμε φέρει όλες; (υποδεικνύω κορυφή)
Θ: Όχι. Έχει άλλες δύο. Γιατί τις δύο τις έχω ξαναφέρει. Και από εδώ μπορώ να φέρω μία.

Μετά από την απόρριψη της προηγούμενης στρατηγικής, ο μαθητής επιστρέφει στη μελέτη του εξαγώνου και γράφει κάποιες αριθμητικές πράξεις προσπαθώντας να προσεγγίσει το αποτέλεσμα μέσα από ένα αλγεβρικό μοτίβο. Επιβεβαιώνοντας ότι το μοτίβο αυτό επαληθεύεται και στην περίπτωση του πενταγώνου ισχυροποιείται και εφαρμόζεται με βεβαιότητα και στην περίπτωση του επταγώνου.

Θ: 3 επί 6…18 το εξάγωνο;
Ε: Πως υπολόγισες ότι οι διαγώνιες θα είναι 16;
Θ: Είπα ότι μπορούμε να φέρουμε τρεις (διαγώνιες) από κάθε κορυφή. Άρα σε 6 κορυφές θα είναι 18
Ε: Όμως η δραστηριότητα μας λέει ότι το εξάγωνο έχει εννέα διαγώνιες. Τι έχουμε κάνει λάθος;
Θ: Α ναι! Δια δύο βγαίνει!

Ε: Μπορούμε όμως να εξηγήσουμε γιατί πρέπει να διαιρέσουμε με δύο.
Θ: Γιατί βγαίνουν τα νούμερα. Και στο πεντάγωνο είναι έτσι 2 επί 5 κάνει 10, δια 2 ορίστε 5.
Ε: Συνεπώς, μπορείς να…
Θ: Άρα τέσσερις που έχουμε εδώ (επτάγωνο) επί 7 μας κάνει 28.. Και δια δυο.. Έχει 13 το επτάγωνο.

Ο μαθητής εκφράζει την πεποίθησή του ότι αφού το μοτίβο που κατέληξε εφαρμόζεται στα πολύγωνα της δραστηριότητας, θα ισχύει για κάθε πολύγωνο. Ωστόσο το μοτίβο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο όταν ξέρουμε πόσες διαγώνιες διέρχονται από κάθε κορυφή. Η ανατροπή αυτή τον οδηγεί να αναζητήσει έναν τρόπο υπολογισμού τους. Ο υπολογισμός και σε αυτή τη περίπτωση γίνεται με αριθμητική προσέγγιση.

Ε: Ωραία στο συγκεκριμένο πολύγωνο μπορούμε να φέρουμε τέσσερις διαγώνιες. Στο εξάγωνο πόσες μπορούμε να φέρουμε;
Θ: Τρεις.
Ε: Γιατί μπορούμε να φέρουμε τρεις και όχι τέσσερις για παράδειγμα;
Θ: Γιατί έχει λιγότερες κορυφές. Και στο πεντάγωνο πόσες μπορούμε δύο.
Ε: Εκτός του ότι έχει λιγότερες κορυφές μπορούμε να παρατηρήσουμε κάτι άλλο;
Θ: …
Ε: Υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στον αριθμό των κορυφών και τον αριθμό των διαγωνίων που μπορούμε να φέρουμε από κάθε κορυφή;
Θ: Έχει….Κάθε φορά προσθέτω μία.

Ο μαθητής θεωρεί απαραίτητη προϋπόθεση για τον υπολογισμό των διαγωνίων τον σχεδιασμό του πολυγώνου ακόμα και όταν αυτό έχει μεγάλο αριθμό κορυφών.

Ε: Σε ένα εικοσάγωνο θα συμβαίνει το ίδιο;
Θ: Θα σχεδιάσουμε το εικοσάγωνο και θα μετρήσουμε πόσες διαγώνιες έχει κάθε κορυφή. Μετά θα πολλαπλασιάσουμε με το 20 και θα διαιρέσουμε με δυο.

Τέλος, δεν κατανοεί την έννοια του ν-γώνου και αδυνατεί να συμβολίσει με κάποια αλγεβρική σχέση το μοτίβο εύρεσης των αριθμών των διαγωνίων ενός πολυγώνου.

Ε: Σε ένα ν-γωνο τι θα συμβαίνει;
Θ: Σε ένα ν-γωνο; Δηλαδή;
Ε: Ένα ν-γωνο είναι ένα πολύγωνο με ν κορυφές. Αν ν είναι ο αριθμός 5 θα είναι το πεντάγωνο. Αν ν είναι ο αριθμός 6 θα είναι το εξάγωνο.
Θ: Ε ωραία.. Το ίδιο πράγμα. Θα το σχεδιάσουμε και θα μετρήσουμε τις κορυφές…
Ε: Αν δεν ξέρουμε ποιος αριθμός είναι ο ν μπορούμε να βρούμε έναν τύπο που αρχικά να υπολογίζει τον αριθμό των διαγωνίων που φέρουμε από κάθε κορυφή;
Θ: Αν δεν ξέρουμε το ν όχι. Ποιο πολύγωνο θα είναι; Πώς θα το σχεδιάσουμε;

Για τον μαθητή Θ, έναν μη-οπτικό μαθητή με χαμηλές σχολικές επιδόσεις, η αξιοποίηση της οπτικοποίησης υπόκειται σε αρκετούς περιορισμούς όπως προέκυψε από την ανάλυση της πρώτης δραστηριότητας. Στην περίπτωση της δεύτερης δραστηριότητας, ο μαθητής σχεδιάζει πολύγωνα και απλώς επιβεβαιώνει τα δεδομένα που δίνονται, χωρίς να αναγνωρίζει κάποια κοινή διαδικασία. Μετά από υπόδειξη μελετά τη διαδικασία χάραξης των διαγωνίων και κατορθώνει να παρατηρήσει τις δυο απαραίτητες προϋποθέσεις για τη διαμόρφωση της ζητούμενης αριθμητικής σχέσης. Η οπτική μέθοδος φαίνεται αναποτελεσματική καθώς οδηγεί τον μαθητή σε εσφαλμένα συμπεράσματα και εγκαταλείπεται χάριν μιας αριθμητικής προσέγγισης για την εύρεση του μοτίβου. Η στρατηγική που προκύπτει μέσα από την προσέγγιση είναι ορθή, και ισχυροποιείται με την επαλήθευση στα υπόλοιπα πολύγωνα, θεωρεί όμως αναγκαίο τον σχεδιασμό του πολυγώνου. Το γεγονός ότι το μοτίβο δεν μπορεί να επεξηγηθεί με τη βοήθεια των σχημάτων σε συνδυασμό με την απουσία της γενίκευσης, κάνει αδύνατη την μετάφραση του μέσα από μια αλγεβρική σχέση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

4.1 Συμπεράσματα- Συζήτηση

Η πρώτη φάση της έρευνας, μέσα από την οποία προέκυψε ο Βαθμός Οπτικότητας κάθε μαθητή, αποτέλεσε το κριτήριο επιλογής των έξι μαθητών που συμμετείχαν στη δεύτερη και ουσιαστική φάση των συνεντεύξεων. Η συζήτηση που ακολουθεί είναι βασισμένη στην κατηγοριοποίηση των μαθητών όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση των αποτελεσμάτων. Ο οπτικός μαθητής Α και ο μη-οπτικός μαθητής Γ παρατηρήθηκε ότι παρουσιάζουν σαφή προτίμηση σε μια μέθοδο προσέγγισης. Ιδιαίτερη αίσθηση κάνει η περίπτωση του μαθητή Α ο οποίος εμφάνισε τον υψηλότερο Βαθμό Οπτικότητας, ταξινομήθηκε από τον διδάσκοντα της τάξης ανάμεσα στους μαθητές υψηλών επιδόσεων, ωστόσο η αναλογία σωστών και λάθος απαντήσεων ήταν μόλις 2Σ-10Λ, σε αντίθεση με τον μαθητή Γ που είχε αναλογία 8Σ-4Λ. Ο οπτικός μαθητής Β και ο μη οπτικός μαθητής Δ, είναι μαθητές υψηλών επιδόσεων, που φάνηκε ότι μπορούν να χρησιμοποιούν με ευελιξία και τις δύο μεθόδους συλλογισμού, ενώ εμφάνισαν μέτριες επιδόσεις στην πρώτη φάση της έρευνας. Τέλος, ο οπτικός μαθητής Ζ και μη οπτικός Θ παρουσίασαν πολύ χαμηλές επιδόσεις στην πρώτη φάση, που δικαιολογείται εν μέρει από τις χαμηλές σχολικές τους επιδόσεις.

Η ισχυρή δέσμευση του μαθητή Α από την οπτική προσέγγιση επαληθεύεται μέσα από την ανάλυση των δύο δραστηριοτήτων. Στην πρώτη δραστηριότητα η επιχειρηματολογία του μαθητή στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στις οπτικές παρατηρήσεις και επιλέγεται κάθε φορά που του ζητείται να επεξηγήσει τους ισχυρισμούς του. Μόνο όταν η οπτική προσέγγιση παρέχει στον μαθητή απόλυτη βεβαιότητα για την ορθότητα τους, επιλέγει να τεκμηριώσει και θεωρητικά τα επιχειρήματά του. Παρόλα αυτά, η απόδειξη που παραθέτει είναι σε μορφή συμπεράσματος, αποτέλεσμα των οπτικών παρατηρήσεων, και δεν εμφανίζει γνωστική συνέχεια με την προηγούμενη επιχειρηματολογία του. Η φάση του δυναμικού περιβάλλοντος ενώ, ουσιαστικά λειτουργεί ως επιβεβαιωτικός παράγοντας της φάσης της εικασίας και δεν προσφέρει νέα επιχειρήματα, δρα ενισχυτικά στη παραγωγή της απόδειξης καθώς τελικά ο μαθητής παραθέτει μια απαγωγική μεν απόδειξη η οποία, όμως, διαθέτει θεωρητική επιχειρηματολογία. Στη δεύτερη δραστηριότητα, ο μαθητής χρησιμοποιεί αποκλειστικά και μόνο οπτικό συλλογισμό για την παραγωγή της ζητούμενης αλγεβρικής σχέσης, προσεγγίζοντας την μέσα από την ανάλυση της διαδικασίας. Ωστόσο, οδηγείται σε λάθος γιατί αποτυγχάνει να παρατηρήσει και να εντάξει στο μοτίβο το στοιχείο της διπλής καταμέτρησης των διαγωνίων καθώς κάθε του επαλήθευση περιέχει οπτική πλάνη.

Τέλος, η προσέγγιση του μαθητή μέσα από την ανάλυση της διαδικασίας παρέχει τη βεβαιότητα για την ισχύ της αλγεβρικής σχέσης σε όλα τα πολύγωνα.

Στον αντίποδα, ο μαθητής Γ δείχνει σαφή προτίμηση στη χρήση των μη οπτικών μεθόδων. Στην πρώτη δραστηριότητα είναι προφανές ότι ο οπτικός συλλογισμός εγκαταλείπεται σύντομα ως επισφαλής και μη ικανός να παρέχει απαντήσεις, και η επιχειρηματολογία του μαθητή στρέφεται στην ανάκληση θεωρητικών γνώσεων. Παρά την ακριβή λεκτική θεωρητική επιχειρηματολογία, η απόδειξη που παραθέτει ο μαθητής δεν παρουσιάζει γνωστική συνέχεια καθώς δίδεται με την μορφή συμπεράσματος, μέσα από την οπτική παρατήρηση, απουσιάζοντας πλήρως η επιχειρηματολογία. Η ενασχόληση του μέσα στο δυναμικό περιβάλλον είναι επιφανειακή καθώς η βεβαιότητα των θεωρητικών γνώσεων δεν δημιουργεί την ανάγκη οπτικής εξερεύνησης της δραστηριότητας. Η απόδειξη που διατυπώνει στο τέλος της τρίτης φάσης είναι βελτιωμένη, όμως εξακολουθεί να απουσιάζει η θεωρητική επιχειρηματολογία παρότι ήταν ρητά εκπεφρασμένη σε όλες τις προηγούμενες φάσεις. Κατά παρόμοιο τρόπο, ο οπτικός συλλογισμός χρησιμοποιείται από τον μαθητή μόνο ως εναρκτήριο και βοηθητικό βήμα και στην δεύτερη δραστηριότητα. Μόλις άρχισε να διαμορφώνεται ένα μοτίβο υπολογισμού των διαγωνίων η ανάλυση της διαδικασίας εγκαταλείπεται πλήρως χάριν της αριθμητικής προσέγγισης του αποτελέσματος. Η ζητούμενη αλγεβρική σχέση διαμορφώνεται μέσα από τη διαδικασία αριθμητικής δοκιμής και επαλήθευσης, ωστόσο ο μαθητής δεν μπορεί να παρέχει εγγυήσεις για την γενική ισχύ της παρά τη διαισθητική βεβαιότητά του.

Ο μαθητής Β είναι ένας οπτικός μαθητής που χρησιμοποιεί με σχετική ευελιξία τόσο τον οπτικό όσο και τον λογικό συλλογισμό. Κατά την ανάλυση της πρώτης δραστηριότητας, παρά το γεγονός ότι στη φάση της οπτικοποίησης αναλύει δομικά τα σχήματα και κάνει οπτικές παρατηρήσεις, όταν καλείται να επιχειρηματολογήσει εγκαταλείπει πλήρως τον οπτικό συλλογισμό επιλέγοντας να ανακαλέσει τις θεωρητικές του γνώσεις. Παρά τα γνωστικά κενά που δημιουργούνται στην επιχειρηματολογία του εξαιτίας της εσφαλμένης γνώσης που χρησιμοποιεί, εμμένει σε αυτή δείχνοντας μεγάλη εμπιστοσύνη στον λογικό του συλλογισμό. Η απόδειξη που παραθέτει παρουσιάζει μεν γνωστική συνέχεια ως προς το αναφορικό σύστημα, περιέχει όμως σημαντικές αστοχίες καθώς κινείται αμφισήμαντα μεταξύ των δεδομένων και του ζητούμενου συμπεράσματος. Η φάση του δυναμικού περιβάλλοντος, προσφέρει την απαραίτητη γνωστική σύγκρουση ώστε ο μαθητής να αναθεωρήσει πλήρως την προηγούμενη επιχειρηματολογία του. Ο οπτικός και ο λογικός συλλογισμός βρίσκονται σε συνεχή αλληλεπίδραση καθώς κάθε οπτική παρατήρηση αποκτά νόημα μέσα από την θεωρητική επεξήγηση. Η απόδειξη, τέλος, που διατυπώνεται είναι μία πλήρης και λογικά δομημένη παραγωγική απόδειξη. Η ίδια ευέλικτη χρήση των δύο προσεγγίσεων αποτυπώνεται και στη δεύτερη δραστηριότητα. Η ανάλυση της διαδικασίας και η αριθμητική

προσέγγιση του αποτελέσματος αλληλοσυμπληρώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται τόσο η ορθή αλγεβρική σχέση όσο και η αιτιολόγηση της γενικής ισχύς της.

Η ίδια άνεση και ευελιξία στην μετακίνηση μεταξύ οπτικού και λογικού συλλογισμού παρατηρείται και στον μη οπτικό μαθητή Δ. Και στις δύο δραστηριότητες τόσο η οπτική, όσο και η μη οπτική προσέγγιση βρίσκονται σε αλληλουχία και ομαλή συνεργασία και επιλέγονται από τον μαθητή ανάλογα με το είδος και την ασφάλεια των πληροφοριών που παρέχουν. Κάθε φορά που η μία μέθοδος αποτυγχάνει να δώσει ασφαλείς πληροφορίες ή δημιουργεί γνωστικά κενά, ο μαθητής καταφεύγει στην άλλη για να αναζητήσει ή να επαληθεύσει τις απαντήσεις. Όσον αφορά στην σχέση επιχειρηματολογίας και απόδειξης, αξίζει να σημειωθεί ότι στην πρώτη δραστηριότητα, ο μαθητής παραθέτει εξ αρχής μια δομημένη απόδειξη με θεωρητικά επιχειρήματα που παρουσιάζει γνωστική συνέχεια με την απαγωγική επιχειρηματολογία του. Η φάση του δυναμικού περιβάλλοντος δρα εξαιρετικά υποστηρικτικά ως προς τη δομή και την επιχειρηματολογία του, καθώς ο μαθητής αναδιατυπώνει μια παραγωγική απόδειξη, πλήρης ως προς το περιεχόμενο και την επιχειρηματολογία σε θεωρητικό πλαίσιο. Ομοίως, στη δεύτερη δραστηριότητα η ανάλυση της διαδικασίας και η συνεχής επαλήθευση μέσα από την αριθμητική προσέγγιση προσφέρει τη βεβαιότητα στον μαθητή για την ορθότητα του αλγεβρικού μοτίβου και την γενική του ισχύ.

Ο μαθητής Ζ είναι ένας οπτικός μαθητής χαμηλών επιδόσεων και κατ' επέκταση περιορισμένων θεωρητικών γνώσεων, όπως έγινε ιδιαίτερα φανερό στην πρώτη δραστηριότητα. Παρά το γεγονός, ότι ο μαθητής εστιάζει σε δομικά στοιχεία των σχημάτων και αναγνωρίζει, έστω και διαισθητικά, την ισότητα και διχοτόμηση των διαγωνίων δεν καταφέρνει να αξιοποιήσει τις παρατηρήσεις αυτές σε μια λογική επιχειρηματολογία, καθώς το ενδιαφέρον του στρέφεται σε διάφορα ασύνδετα χαρακτηριστικά των σχημάτων. Στη φάση της εικασίας κατορθώνει μόνο να αναγνωρίσει τα τετράπλευρα που ικανοποιούν τον ισχυρισμό μέσα από την οπτική παρατήρηση. Ωστόσο, μέσα στο δυναμικό περιβάλλον, οι έννοιες της διχοτόμησης και ισότητας φαίνεται να αποκτούν νόημα και να περιλαμβάνονται ως βασικά συστατικά της επιχειρηματολογίας του μαθητή. Στο τέλος, μάλιστα, της φάσης αυτής διατυπώνει μια σχετικώς δομημένη απόδειξη με επιχειρήματα, τα οποία όμως προκύπτουν μέσα από την οπτική παρατήρηση καθώς σε κανένα σημείο της επιχειρηματολογίας δεν έγινε φανερή κάποια σύνδεση με προηγούμενες θεωρητικές γνώσεις. Ομοίως, και στη δεύτερη δραστηριότητα ο μαθητής δείχνει τη σαφή προτίμησή του στη χρήση οπτικών διαδικασιών επίλυσης. Μετά από αρκετή καθοδήγηση στρέφεται στην ανάλυση της διαδικασίας χάραξης των διαγωνίων. Παρά το γεγονός ότι η ανάλυση αυτή προσφέρει στον μαθητή την απαραίτητη επιχειρηματολογία, δεν καταφέρνει να διαμορφώσει μια στρατηγική

για τον υπολογισμό τους και να την αποτυπώσει σε μια αλγεβρική σχέση. Επιπλέον, δεν ήταν δυνατόν να χειριστεί την έννοια του ν-γωνου συνεπώς δεν ήταν δυνατό να αποφανθεί για την γενική ισχύ του μοτίβου που εντόπισε για τον υπολογισμό του πλήθους των διαγωνίων ανά κορυφή, θεωρώντας απαραίτητη προϋπόθεση την ύπαρξη ενός σχήματος.

Η έλλειψη θεωρητικού υποβάθρου αποτελεί εμπόδιο και για τον μη οπτικό μαθητή Θ. Ιδιαιτέρως στην πρώτη δραστηριότητα, ο μαθητής δεν μπορεί να επωφεληθεί και να αναπτύξει μια επιχειρηματολογία βασισμένη στον οπτικό συλλογισμό, καθώς η προσοχή του δεν εστιάζεται σε δομικά συστατικά των σχημάτων. Μετά από υψηλή καθοδήγηση αναγνωρίζει την ισότητα των διαγωνίων στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, παρατήρηση που δεν είναι ικανή να διαμορφώσει μια εικασία και να προωθήσει την επιχειρηματολογία. Μέσα στο δυναμικό περιβάλλον του υπολογιστή, η επιβεβλημένη οπτικοποίηση δεν φαίνεται να ενισχύει σημαντικά την επιχειρηματολογία του, αντιθέτως δημιουργεί και μια οπτική πλάνη ως την ισότητα των διαγωνίων που διέρχονται από το κέντρο. Κατά τη φάση αυτή, ο μαθητής κατορθώνει να εστιάσει στην ισότητα τουλάχιστον των διαγωνίων ως απαραίτητο στοιχείο της επιχειρηματολογίας του, δικαιολογώντας το και θεωρητικά. Ακολούθως επιδίδεται σε μια κυκλική επιχειρηματολογία όπου τα δεδομένα και το ζητούμενο ταυτίζονται. Η απόδειξη που διατυπώνει δίδεται σε μορφή συμπεράσματος μέσα από την οπτική παρατήρηση, απουσιάζοντας πλήρως η επιχειρηματολογία. Στη δεύτερη δραστηριότητα, η συλλογιστική πορεία του μαθητή παρουσιάζει σημαντικές ομοιότητες με αυτή του μη οπτικού μαθητή Γ. Η οπτική προσέγγιση μέσα από την ανάλυση της διαδικασίας χάραξης των διαγωνίων αποτελεί μόνο ένα βοηθητικό βήμα για την αρχική διαμόρφωση του μοτίβου. Στη συνέχεια, ο οπτικός συλλογισμός εγκαταλείπεται πλήρως και ο μαθητής μέσα από τη διαδικασία δοκιμής και επαλήθευσης διαμορφώνει μία στρατηγική εύρεσης των διαγωνίων σε ένα γνωστό πολύγωνο, θεωρώντας απαραίτητο τον σχεδιασμό του. Επιπλέον, ο μαθητής αντιμετωπίζει δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του ν-γώνου και δεν καταφέρνει να γενικεύσει το μοτίβο αυτό σε μια αλγεβρική σχέση.

Είναι σαφές ότι η οπτικοποίηση δεν αποτελεί πανάκεια και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί με την ίδια επιτυχία από όλους τους μαθητές. Η ισορροπία μεταξύ οπτικών και λογικών λειτουργιών που χαρακτηρίζει τους μαθητές Β και Δ, και ο McKim αποκαλεί αμφιδέξια σκέψη (ambidextrous thinking), αποτελεί πλεονέκτημα της μαθηματικής σκέψης και φαίνεται να ενισχύει την διαμόρφωση εικασιών, την επιχειρηματολογία και κατ' επέκταση την παραγωγή αποδείξεων. Το γεγονός, μάλιστα, ότι ο μαθητής Δ είναι ένας μη οπτικός μαθητής επαληθεύει τους Presmeg (1986) και Kruteskii (1976), που υποστηρίζουν πως συχνά μαθητές παρόλο που διαθέτουν τη δεξιότητα της οπτικής μεθόδου επιλέγουν να μην την χρησιμοποιούν χάριν ευκολίας ή καταλληλότητας. Για τους δύο μαθητές, ο οπτικός και λογικός συλλογισμός φαίνεται να αλληλεπιδρούν σε κάθε βήμα της αποδεικτικής

διαδικασίας με τρόπο αμφίδρομο, ενισχύοντας τελικά την κατασκευή μιας παραγωγικής απόδειξης.

Στον αντίποδα, ο μαθητής Γ φαίνεται γνωστικά εξαρτημένος από την λογική και αλγοριθμική διαδικασία, αρνούμενος να αναγνωρίσει τα πλεονεκτήματα της οπτικοποίησης, φαινόμενο που έχουν αναδείξει και οι Eisenberg & Dreyfus (1991) και Rosken & Rolken (2006). Είναι φανερό ότι ο μαθητής Γ αντιμετώπισε με δυσπιστία και επισφάλεια την οπτική προσέγγιση καταφεύγοντας στην ασφάλεια των θεωρητικών και διαδικαστικών οδών. Η οπτική προσέγγιση χρησιμοποιείται μόνο επιφανειακά και εγκαταλείπεται πλήρως όταν ο λογικός συλλογισμός βρίσκει πρόσφορο έδαφος. Αντιθέτως, για τον μαθητή Α η οπτικοποίηση ήταν ο παράγοντας που παρείχε εγκυρότητα και επιβεβαίωση στις εικασίες και τα επιχειρήματά του. Ο οπτικός συλλογισμός χρησιμοποιείται σχεδόν κατ' αποκλειστικότητα και μόνο όταν η βεβαιότητα που παρέχεται από τις οπτικές παρατηρήσεις είναι ισχυρή πραγματοποιείται η σύνδεση με τον λογικό συλλογισμό, παρατήρηση που συμβαδίζει με τα λεγόμενα του Jones (2000). Η σχεδόν αποκλειστική και άκαμπτη χρήση των προτιμώμενων προσεγγίσεων δεν φαίνεται να εξασφαλίζει πάντοτε το επιθυμητό λογικό πέρασμα από την εικασία στην απόδειξη.

Αναφορικά με τους μαθητές Ζ και Θ, η αδυναμία τους να «δουν» τα σχήματα με διαφορετικές οπτικές και να μετακινήσουν την προσοχή τους από τα επιμέρους στοιχεία του διαγράμματος στο σύνολο και αντίστροφα, αποτελεί σημαντικό εμπόδιο στον συλλογισμό τους. Άλλωστε η αξιοποίηση των εικόνων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις προηγούμενες γνώσεις και, όπως επισημαίνεται από τους Arcavi (2003) και Presmeg (1986) πρέπει να συνοδεύεται από διαδικασίες αναλυτικής σκέψης προκειμένου να είναι αποτελεσματική. Στους δύο μαθητές δεν αναγνωρίζεται κάποια μορφή αλληλεπίδρασης μεταξύ οπτικού και λογικού συλλογισμού, καθώς ο καθένας χρησιμοποιεί σχεδόν κατ' αποκλειστικό τρόπο την προτιμητέα μέθοδο. Είναι, όμως, αξιοσημείωτο ότι ιδιαιτέρως στην πρώτη δραστηριότητα ο οπτικός μαθητής Ζ κατορθώνει να διατυπώσει μια δομημένη λογική απόδειξη, μετά και τη χρήση του δυναμικού περιβάλλοντος, ενώ αντιθέτως για τον μαθητή Θ η οπτικοποίηση δεν αποτελεί υποστηρικτικό εργαλείο για την αποδεικτική διαδικασία.

Η ανάλυση της επιχειρηματολογίας των μαθητών κατά την διαμόρφωση εικασιών και την παραγωγή αποδείξεων στην πρώτη δραστηριότητα είναι σε απόλυτη συμφωνία με τις έρευνες της Pedemonte (2007) σχετικά με τη γνωστική συνέχεια. Στη πλειοψηφία των μαθητών παρατηρείται συνέχεια στο αναφορικό σύστημα, όχι όμως και στη δομή. Το γνωστικό χάσμα μεταξύ απαγωγικής επιχειρηματολογίας και παραγωγικής απόδειξης γεφυρώνεται μόνο στις αποδείξεις των μαθητών Β και Δ, μετά και την μεσολάβηση του δυναμικού περιβάλλοντος. Επιπλέον, ο μαθητής Α παραθέτει μια απαγωγική απόδειξη που παρουσιάζει

γνωστική συνέχεια με την προηγούμενη επιχειρηματολογία του, σε αντίθεση με τον μαθητή Γ όπου η απόδειξη που παραθέτει χαρακτηρίζεται από πολύ φτωχή επιχειρηματολογία σε σύγκριση με τη λεκτική του επιχειρηματολογία. Τέλος, ο μαθητής Ζ κατορθώνει να δομήσει μια απαγωγική απόδειξη σε αντιστοιχία με τα οπτικά επιχειρήματα που είχαν προηγηθεί σε αντίθεση με τον μαθητή Θ που αναλώνεται σε μια κυκλική επιχειρηματολογία, όπου τα δεδομένα και το συμπέρασμα ταυτίζονται.

Από την ανάλυση της επιχειρηματολογίας της δεύτερης δραστηριότητας γίνεται κατανοητό ότι η γενίκευση που πηγάζει μέσα από την ανάλυση της διαδικασίας προσφέρει τη παραγωγική βάση πάνω στην οποία μπορεί να οικοδομηθεί μια απόδειξη, όπως επισημαίνεται και από την Mariotti (2006). Και σε αυτή την περίπτωση, η αμφιδέξια σκέψη των μαθητών Β και Δ εξασφάλισε την πιο ολοκληρωμένη επιχειρηματολογία τόσο ως προς το αποτέλεσμα όσο και τη γενική ισχύ του. Οι οπτικοί μαθητές Α και Ζ που χρησιμοποίησαν κατ' αποκλειστικότητα την οπτική μέθοδο μέσα από την παρατήρηση της κανονικότητας της διαδικασίας δεν κατόρθωσαν να ξεπεράσουν τα οπτικά εμπόδια που εμφανίστηκαν και οδηγήθηκαν σε λανθασμένο αποτέλεσμα. Αντιθέτως, οι μη οπτικοί μαθητές Γ και Θ αναγνώρισαν την κανονικότητα του αποτελέσματος μέσα από μια σειρά υπολογισμών, χωρίς όμως να μπορούν να επιβεβαιώσουν την γενική ισχύ του μοτίβου που προέκυψε.

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει αναφορά στη συμβολή της οπτικοποίησης στην επιχειρηματολογία, ιδιαιτέρως στη φάση του δυναμικού περιβάλλοντος. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις των μαθητών Ζ και Θ εξαιτίας των περιορισμένων θεωρητικών γνώσεων. Ο οπτικός μαθητής Ζ, μέσα στο περιβάλλον του υπολογιστή, κατορθώνει να ανακαλύψει τις ιδέες κλειδί απαραίτητες για να γεφυρώσουν τη διαισθητική του επιχειρηματολογία με την τυπική απόδειξη, όπως έχει επισημανθεί και από τους Ramon & Weber (2006), και τέλος να δομήσει μια ικανοποιητική απόδειξη, όχι όμως και να πραγματοποιήσει συνδέσεις με προηγούμενες θεωρητικές γνώσεις. Παράλληλα, ο μη-οπτικός μαθητής Θ δεν αξιοποιεί σε μεγάλο βαθμό την επιβεβλημένη οπτικοποίηση παρά μόνο στην αναγνώριση της ισότητας των διαγωνίων, χωρίς να κατορθώσει να παράγει μια αλυσίδα λογικών επιχειρημάτων που να δομήσουν μια απόδειξη. Επιπλέον, παρά τους φόβους των πολέμιων της χρήσης των νέων τεχνολογιών στη σχολική πρακτική κανένας από τους μαθητές δεν θεώρησε αυταπόδεικτο έναν διαισθητικά προφανή ισχυρισμό που επαληθεύεται οπτικά και αριθμητικά από τα εργαλεία του δυναμικού περιβάλλοντος. Αντιθέτως, στην πλειοψηφία τους επιδεικνύουν την ανάγκη να αιτιολογήσουν με μαθηματική γλώσσα και λογικούς ισχυρισμούς όσα απεικονίζονταν στην οθόνη. Τέλος, η συμβολή του υπολογιστή ήταν σημαντική ακόμα και στη μορφή των τελικών αποδείξεων. Η απόδειξη του μαθητή Α δόθηκε αρχικά με τη μορφή οπτικού συμπεράσματος, ενώ εξελίχθηκε σε μια ολοκληρωμένη

απόδειξη με απαγωγική δομή και θεωρητικά επιχειρήματα στο τέλος της τρίτης φάσης. Για τον μαθητή Β η συμβολή της τρίτης φάσης ήταν εξαιρετικά σημαντική καθώς μετέτρεψε μια πλήρως λανθασμένη απόδειξη σε μια παραγωγική απόδειξη, με θεωρητική επιχειρηματολογία και διερεύνηση όλων των πιθανών τετραπλεύρων. Αλλά, ακόμα και για τον μαθητή Δ, η πλήρης κατά τ 'άλλα απαγωγική απόδειξη της φάσης της οπτικοποίησης, μετετράπη σε μια επιθυμητή παραγωγική απόδειξη στο τέλος της τρίτης φάσης.

Συνοψίζοντας την παρούσα εργασία, η οπτικοποίηση είναι δυνατόν να ενισχύσει την κατανόηση, να βελτιώσει την απόδοση νοήματος και να επηρεάσει τη μορφή των επιχειρημάτων που οι μαθητές παρέχουν κατά την αποδεικτική διαδικασία, αφού προηγουμένως έχουν απολέσει τη βεβαιότητα της δεδομένης αλήθειας των γεωμετρικών ισχυρισμών. Ωστόσο, κάθε μορφής οπτικοποίηση για να είναι επιτυχής και να οδηγεί στην κατασκευή μιας απόδειξης που υπόκειται στα δεδομένα της μαθηματικής κοινότητας πρέπει να συνοδεύεται και να υποστηρίζεται από αυστηρές λογικές διαδικασίες. Η ευέλικτη μετακίνηση μεταξύ του οπτικού και λογικού συλλογισμού και η αμφιδέξια σκέψη φαίνεται να γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης και να εξασφαλίζει την δόμηση των επιθυμητών αποδείξεων. Παρά το πλήθος των ερευνητικών αποτελεσμάτων για τη συμβολή της οπτικοποίησης στην θεμελίωση και ανάπτυξη της γνώσης, τόσο τα αναλυτικά προγράμματα όσο και η πρακτική πολλών διδασκόντων εξακολουθούν να ενισχύουν την αυστηρά φορμαλιστική, αλγοριθμική και λογική επιχειρηματολογία οδηγώντας τους μαθητές σε εξάρτηση από απομνημονευτικές διαδικασίες και μεθοδολογίες, αποκλείοντάς τους ουσιαστικά από το να έρθουν σε επαφή με τα πλεονεκτήματα της οπτικοποίησης. Θα ήταν, ίσως, χρήσιμος ο επαναπροσδιορισμός του ρόλου της διδασκαλίας της απόδειξης αλλά και του ρόλου του μαθητή στην μαθηματική πρακτική, και η ενίσχυση της αμφιδέξιας σκέψης μέσα από κατάλληλα διαμορφωμένες μη-τυπικές δραστηριότητες.

Η παρούσα εργασία εξέτασε το αν και υπό ποιες συνθήκες η οπτικοποίηση μπορεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια των μαθητών κατά την αποδεικτική διαδικασία. Έγινε φανερό, ότι η ισορροπημένη χρήση των οπτικών και λογικών συλλογισμών είναι εξαιρετικά βοηθητική. Παράλληλα, από μόνη της οπτικοποίηση δεν μπορεί να αποτελέσει εργαλείο, όπως άλλωστε και η έμφαση μόνο στην αναλυτική σκέψη δεν εξασφαλίζει απαραιτήτως την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Ωστόσο, το ζήτημα που ανακύπτει είναι ποια μέθοδος διδασκαλίας μπορεί να εξασφαλίσει και να ενισχύσει την ισορροπημένη και αμφίδρομη χρήση των δύο μεθόδων και την ανάπτυξη των δύο δεξιοτήτων παρά την προσωπική προτίμηση των μαθητών. Επιπλέον, ενδιαφέρον παρουσιάζει και η διερεύνηση του τρόπου ενίσχυσης της οπτικοποίησης κατά την εισαγωγή των νέων εννοιών ώστε η λογική και οπτική προσέγγιση να ενυπάρχουν και να μην νοούνται από τους μαθητές ως διαδικασίες διαφορετικής διάστασης.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναπολιτάνος, Α. Δ. (2005). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών* (σελ 11-45). Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα.

Acuna, C. A. & Larios, V. O. (2008). *Prototypes and learning of geometry: A reflection on its pertinence and its causes.* Topic Study Group 20 Visualization in Teaching and Learning Mathematics at the 11th International Congress of Mathematical Education (ICME 11). Mexico.

Arcavi, A. (2003). *The role of visual represantations in the learning of mathematics.* Educational Studies in Mathematics, 53,pp 215-241.

Arzarello, F. & Sabena, C. (2011). *Meta-Cognitive Unity in Indirect Proofs*. CERME 7 Congress. Rzeszów, Polonia.

Balacheff, N. (1999). *Is argumentation an obstacle ? Invitation to a debate...* International Newsletter on the Teaching and Learning of the Mathematical Proof. May/June

Barwise, J. & Etchemendy J. (1991). *Visual Information and Valid Reasoning*. In Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds.), Visualization in Teaching and Learning Mathematics (pp.9-24). Mathematical Association of America.

Battista, M. & Clements, D. (1995). *Geometry and Proof.* Mathematics Teacher,88(1),pp. 48-54.

Battista, M. T. (2007). *The development of Geometrical and Spatial Thinking*. In NCTM Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, vol. 2, pp.843-908.

Boero, P., Garuti, R. & Mariotti, M.A. (1996). *Some Dynamic Mental Processes Underlying Producing and Proving Conjectures.* Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 121-128. Valencia, Spain.

Boero, P. , Douek, N. , Morselli, F. , Pedemonte, B. (2010). *Argumentation and Proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation.* Proceedings of the 34th Conference Of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 179-209. Belo Horizonte, Brazil.

Γαγάτσης, Α.,Δεληγιάννη, Ε.,Ηλία, Ι.,Μονογυιού, Α. & Παναούρα, Α. (2008). *Η Εννοιολογική Κατανόηση Γεωμετρικού Σχήματος από μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου.* Προβλήματα Μάθησης στα Μαθηματικά κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο:Κλάσματα-Δεκαδικοί-Γεωμετρία, σ. 315-365.

Γαγάτσης, Α.,Δεληγιάννη, Ε.,Ηλία, Ι.,Μονογυιού, Α. & Παναούρα, Α. (2008). *Θέματα Διδακτικής της Γεωμετρίας.* Προβλήματα Μάθησης στα Μαθηματικά κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο:Κλάσματα-Δεκαδικοί-Γεωμετρία,σ. 77-88.

Γιαννακούλιας, Ε. (2006). *Απειροστικός Λογισμός: Η ιστορική του εξέλιξη από τον 5^{ο} π.Χ έως και τον 19^{ο} αιώνα.* Αθήνα.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. & Pitta-Pantazi, D. (2004). *Proofs Through Exploration in Dynamic Geometry Environments.* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 215-222. Bergen, Norway.

Clements, D. & Battista, M (1992). *Geometry and Spatial Reasoning.* In D. Grouws, ed. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,(pp. 420-464). New York: Macmillan Publishing Co.

Δημητριάδου, Ε. *Απόψεις Μαθηματικών Λυκείου για τη σημασία και το ρόλο της απόδειξης στη διδασκαλία των Μαθηματικών.* Ηλεκτρονική Έκδοση.

de Villiers, M. D. (1990). *The role and function of proof in mathematics.* Pythagoras, 24, 17-24.

de Villiers, M. D. (1999). *The role and function of proof with Sketchpad. Rethinking Proof with Sketchpad*. Key Curriculum Press.

Del Grante, J. J. (1987). *Spatial Perception and Primary Geometry.* In M. M. Lindquist (Ed.) Learning and Teaching Geometry, K-12, pp. 127-135. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dreyfus, T. (1991). *On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education.* In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the 15th PME International Conference, 1, 33-48.

Duval, R. (1995). *Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings*. In R. Suttherland & J. Mason (eds), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education (pp. 142-157), Berlin: Springer.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.* In F. Hitt & M. Santos (Eds.) Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, I, 3-26. Mexico.

Eisenberg, T., & Dreyfus T. (1991). *On the reluctance to visualize in mathematics.* In W. Zimmermann, & S. Cunningham S. (Eds.) Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Fishbein, E. (1993). *The theory of figural concepts.* Educational Studies in Mathematics, 24, pp. 139 -162.

Fischbein E., (1999). *Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning*. Educational Studies in Mathematics 38, 11-50.

Fujita, T., Jones, K. and Yamamoto, S. (2004). *Geometrical intuition and the learning and teaching of geometry.* Topic Study Group on the teaching of geometry at the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, Denmark, 4-11, July.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. & Mariotti, M.A. (1996). *Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems.* Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 113-120. Valencia, Spain.

Gutierrez, A. & Jaime, A. (1998). *On the assessment of the van Hiele levels of reasoning.* Focus on Learning Problems in Mathematics, 20 (2/3), 27-47.

Guzman M. (2002). *The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis*. Proceedings of the International Conference on theTeaching of Mathematics at the Undergraduate Level (2nd) SE066909.

Haddas N. & Hershkowitz R. (1998). *Proof in geometry as an explanatory and convincing tool.* Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Stellenbosh, South Africa. Vol 3, pp. 25 - 32.

Hanna, G. (1990). *Some pedagogical aspects of proof.* Interchange, 21(1), 6-13.

Hanna, G. (2000). *Proof, Explanation and Exploration: An Overview.* Educational Studies in Mathematics, 44 (1-2),5-23.

Hersh, R. (1993). *Proving is convincing and explaining.* Educational Studies in Mathematics, 24(4), 389-399.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2003). *Elementary geometry split into different geometrical paradigms.* In M. Mariotti (Ed.), Proceedings of CERME 3, Bellaria Italy.

Jones, K. (1998). *Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning.* Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 18(1&2), 29-34.

Jones, K. & Bills, C. (1998). *Visualisation, Imagery and the Development of Geometrical Reasoning.* Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 18(1-2), 123-128.

Jones, K. (2000). *Providing a Foundation for Deductive Reasoning: student's interpretations when using Dynamic Geometry Software and their Evolving Mathematical Explanations.* Educational Studies in Mathematics, 44 (1-2), pp.55-85.

Marriotti, M. A. (1995). *Images and concepts in Geometrical Reasoning.* In R. Sutherland & J. Mason (Eds), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, 97-116. Berlin: Springer.

Mariotti, M. A. (2006). *Proof And Proving In Mathematics Education Introduction.* In Gutierrez & Boero (eds.). Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, pp. 173-204.

Mason, M. (2009). *The van Hiele Levels of Geometric Understanding.* Professional Handbook for Teachers, Geometry: Explorations and applications, pp. 1-5.

Νικολουδάκης Εμμ. & Μπαραλής Γ.(2008). *Βελτίωση των δεξιοτήτων του Hoffer με τη βοήθεια του συνδυασμού της Θεωρίας Επιπέδων Γεωμετρικής Σκέψης του van Hiele και της Γνωστικής Μαθητείας*. Πρακτικά του 25^{ου} Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε, σ. 689-709.

Pedemonte, B. (2000). *Some Cognitive Aspects of the Relationship between Argumentation and Proof*. International Newsletter on the Teaching and Learning of the Mathematical Proof. November/ December

Pedemonte, B. (2007). *How can the relationship between Argumentation and Proof be analysed*? Educational Studies, 66(1), 23-41.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1967). *The Child's Conception of Space*, pp. 375-418. New York: W.W. Norton

Presmeg N. C. (1986). *Visualization and Mathematical Giftedness*. Educational Studies in Mathematics, 17, 297-311.

Presmeg, N. C. (1999). *On Visualization and Generalization in Mathematics*. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, pp. 151-155.

Presmeg, N. C. (2006). *Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics.* In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, pp. 205-235.

Raman, M. & Weber, K. (2006). *Key Ideas and Insights in the context of Three High School Geometry Proofs.* Mathematics Teacher, Vol. 99, No. 9.

Rival, I. (1987). *Picture Puzzling: Mathematicians are discovering the Power of Pictorial Reasoning*. The Sciences, 27, pp. 41-46.

Rosken, B. & Rolka, K. (2006). *A picture is worth a 1000 words-The Role of Visualization in Mathematics Learning*. Proceedings of the 30th International Conference on the Psychology of Mathematics, Vol. 4, pp. 457-464. Czech Republic.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project. Chicago: University of Chicago, Department of Education.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press.

Weber, K. (2003). *Students' Difficulties with Proof*. Mathematical Association of America. Ηλεκτρονική Έκδοση.

Whiteley, W. (2004). *Visualization in mathematics: Claims and questions towards a research program.* Paper presented at the 10th International Congress of Mathematical Education, Copenhagen, Denmark.

Zazkis, R. & Chernoff, E. (2008). *What makes a Counterexample Exemplary?* Educational Studies in Mathematics, 68, pp. 195-208.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Editor's Introduction: What is Mathematical Visualization?*. In Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds.), Visualization in Teaching and Learning Mathematics (pp.1-8). Mathematical Association of America.

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2007). *Is a Visual Example in Geometry always helpful?* Proceedings of the 31th International Conference on the Psychology of Mathematics, Vol. 4, pp. 265-272. Korea.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

(1)

Α' ΜΕΡΟΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....

ΤΜΗΜΑ:.....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: .....

ΟΔΗΓΙΕΣ

(1) Γράψτε τις απαντήσεις σας στον ειδικό χώρο που σας δίνεται για κάθε πρόβλημα στο φύλλο απαντήσεων. Ο χώρος είναι αρκετός ώστε μέρος αυτού να χρησιμοποιηθεί και ως πρόχειρο.

(2) Για κάθε πρόβλημα εξηγήστε τον συλλογισμό σας όσο περισσότερο μπορείτε.

(3) Ασχοληθείτε με **όλα** τα προβλήματα.

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.1

Μία νταλίκα που μεταφέρει αυτοκίνητα αποτελείται από τρία άνισα τμήματα. Το μήκος όλης της νταλίκας είναι 450μέτρα. Το μήκος του πρώτου και του δεύτερου τμήματος μαζί είναι 350μέτρα. Ενώ το μήκος του δεύτερου και του τρίτου τμήματος μαζί είναι 250μέτρα. Ποιο είναι το μήκος του **κάθε τμήματος**;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.2

Σε έναν αγώνα δρόμου ο Γιάννης είναι 10μέτρα μπροστά από τον Πέτρο. Ο Θωμάς είναι 4μέτρα μπροστά από τον Δημήτρη ενώ ο Δημήτρης είναι 3μέτρα μπροστά από τον Πέτρο. Πόσα μέτρα μπροστά από τον Θωμά είναι ο Γιάννης;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.3

Ένας ξυλοκόπος πριονίζει κάθε μεγάλο κορμό μήκους 16μέτρων σε μικρότερους κορμούς μήκους 2μέτρων. Αν κάθε πριόνισμα διαρκεί δύο λεπτά, πόση ώρα θα χρειαστεί ο ξυλοκόπος για να παράγει οκτώ μικρούς κορμούς από έναν μεγάλο κορμό;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.4

Ένα βάζο με μαρμελάδα ζυγίζει 8 κιλά. Η μισή μαρμελάδα χύθηκε από το βάζο και τώρα το βάζο και το περιεχόμενό του ζυγίζουν 4,5 κιλά. Ποιο είναι το βάρος του βάζου;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.5

Σε ένα μπουκάλι υπήρχε δύο φορές περισσότερο γάλα από όσο υπήρχε σε ένα άλλο. Όταν αφαιρέσαμε 20 λίτρα γάλα από κάθε μπουκάλι, τότε στο πρώτο μπουκάλι έμεινε τρεις φορές περισσότερο γάλα από αυτό που έμεινε στο δεύτερο μπουκάλι. Πόσο γάλα υπήρχε αρχικά σε κάθε μπουκάλι;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.6

Δέκα δαμάσκηνα ζυγίζουν όσο τρία βερίκοκα και ένα μανγκο. Έξι δαμάσκηνα και ένα βερίκοκο ζυγίζουν όσο ένα μανγκο. Πόσα δαμάσκηνα ζυγίζουν όσο ένα μανγκο;

(2)

Α' ΜΕΡΟΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....

ΤΜΗΜΑ:.....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: .....

ΟΔΗΓΙΕΣ

(1) Γράψτε τις απαντήσεις σας στον ειδικό χώρο που σας δίνεται για κάθε πρόβλημα στο φύλλο απαντήσεων. Ο χώρος είναι αρκετός ώστε μέρος αυτού να χρησιμοποιηθεί και ως πρόχειρο.

(2) Για κάθε πρόβλημα εξηγήστε τον συλλογισμό σας όσο περισσότερο μπορείτε.

(3) Ασχοληθείτε με **όλα** τα προβλήματα.

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.1

Ένα μπαλόνι πρώτα ανέβηκε σε ύψος 200μέτρων από το έδαφος, έπειτα κινήθηκε 100μέτρα ανατολικά και μετά έπεσε 100μέτρα. Στη συνέχεια ταξίδεψε 50μέτρα ανατολικά και τέλος έπεσε κάθετα στο έδαφος. Πόσο μακριά από την αρχική του θέση βρέθηκε το μπαλόνι ;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.2

Η ηλικία μιας μητέρας είναι επτά φορές μεγαλύτερη από την ηλικία της κόρης της. Η διαφορά μεταξύ τους είναι 24 χρόνια. Πόσο χρονών είναι η κάθε μία τους;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.3

Αρχικά, η τιμή ενός κιλού ζάχαρη ήταν τρεις φορές μεγαλύτερη από την τιμή ενός κιλού αλάτι. Αργότερα, η τιμή του ενός κιλού αλάτι αυξήθηκε κατά το μισό της αρχικής του τιμής, ενώ η τιμή της ζάχαρης δεν άλλαξε. Αν η τιμή του αλατιού είναι τώρα 30 λεπτά το κιλό, ποια είναι η τιμή του ενός κιλού ζάχαρη;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.4

Μερικά σπουργίτια κάθονται σε δύο δέντρα και κάθε δέντρο έχει τον ίδιο αριθμό σπουργιτιών. Δύο σπουργίτια πετάνε από το πρώτο δέντρο **στο δεύτερο δέντρο**. Πόσα **περισσότερα** σπουργίτια από το πρώτο δέντρο έχει τώρα το δεύτερο δέντρο;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.5

Ένας επιβάτης που είχε ήδη ταξιδέψει τη μισή διαδρομή του ταξιδιού αποκοιμήθηκε. Όταν ξύπνησε είχε ακόμα να ταξιδέψει την μισή απόσταση από αυτή που είχε ταξιδέψει όσο ήταν κοιμισμένος. Ποιο μέρος όλου του ταξιδιού ήταν κοιμισμένος;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.6

Αν τοποθετήσουμε μία ολόκληρη τούρτα πάνω στη μια πλευρά μιας ζυγαριάς και στην άλλη πλευρά τοποθετήσουμε τα τρία τέταρτα της τούρτας και ένα βάρος ¾ του κιλού, τότε η ζυγαριά ισορροπεί. Πόσο ζυγίζει ολόκληρη η τούρτα;

(1)

Β' ΜΕΡΟΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....

ΤΜΗΜΑ:.....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: .....

ΟΔΗΓΙΕΣ

Στο ερωτηματολόγιο αυτό καλείστε να κρίνετε ποια μαθηματική διαδικασία ακολουθήσατε για να λύσετε κάθε ένα από τα προβλήματα. Για κάθε πρόβλημα δίνονται τρεις ή περισσότερες πιθανές απαντήσεις.

Προσοχή!!! *Δεν έχει σημασία αν έχετε ολοκληρώσει τις λύσεις σας ή όχι και αν οι λύσεις σας είναι σωστές ή λανθασμένες.*

(1) Για κάθε πρόβλημα βάλτε ένα ✓ στο αντίστοιχο κουτάκι της λύσης που εσείς χρησιμοποιήσατε ή είναι πιο κοντά σε αυτή που χρησιμοποιήσατε.

Αν η λύση σας μοιάζει με δύο από αυτές που δίνονται βάλτε ✓ και στα δύο αντίστοιχα κουτάκια.

(2) Αν καμία από τις λύσεις που δίνονται δεν είναι παρόμοια με αυτή που εσείς χρησιμοποιήσατε τότε βάλτε ✓ στο κουτάκι "Καμία από τις παραπάνω".

Στην περίπτωση αυτή εξηγήστε όσο πιο καθαρά μπορείτε τη λύση σας στον ειδικό χώρο που υπάρχει.

Πρόβλημα Β.1

1η Λύση:

Για να λύσω το πρόβλημα φαντάστηκα πώς θα ήταν το φορτηγό που μεταφέρει αυτοκίνητα και μετά υπολόγισα το μήκος του κάθε τμήματος.

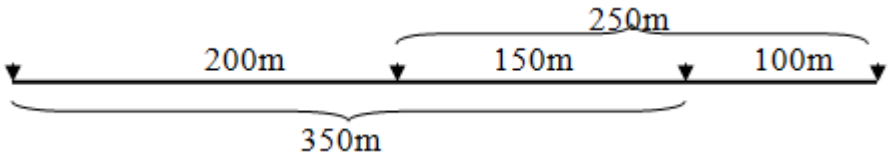
Μήκος του τρίτου τμήματος=450-350=100μέτρα

Μήκος του πρώτου τμήματος=450-250=200μέτρα

Άρα, το μήκος του δεύτερου τμήματος=150μέτρα

2η Λύση:

Σχεδίασα ένα διάγραμμα που αναπαριστά το φορτηγό και μετά υπολόγισα το μήκος κάθε τμήματος.



Το μήκος του πρώτου τμήματος είναι 200μέτρα, του δεύτερου τμήματος είναι 150μέτρα και του τρίτου τμήματος είναι 100 μέτρα.

3η Λύση:

Για να λύσω το πρόβλημα ούτε φαντάστηκα ούτε ζωγράφισα καμία εικόνα.

Έβγαλα συμπεράσματα μόνο από τα δεδομένα του προβλήματος:

Το μήκος του φορτηγού είναι 450 m x+y+z = 450

Το πρώτο και δεύτερο τμήμα μαζί είναι 350m x+y = 350

Συμπέρασμα: Το μήκος του τρίτου τμήματος=450-350=100m z = 100

Το δεύτερο και τρίτο τμήμα μαζί είναι 250m y+z = 250

Συμπέρασμα: Το μήκος του πρώτου τμήματος=450-250=200m x = 200

Άρα, το μήκος του δεύτερου τμήματος = 450-200-100=150m y = 150

Καμία από τις παραπάνω

.....

.....

.....

.....

.....

.....

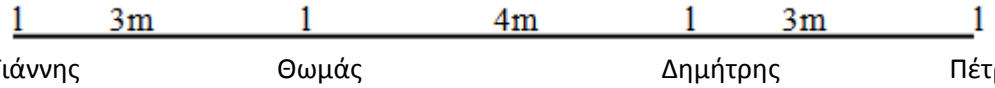
Πρόβλημα Β.2

☐ **1η Λύση:**

Φαντάστηκα με το μυαλό μου τα τέσσερα παιδιά και υπολόγισα την απόσταση μεταξύ του Γιάννη και του Θωμά. Ο Γιάννης είναι 3μέτρα μπροστά από τον Θωμά.

☐ **2η Λύση:**

Σχεδίασα ένα διάγραμμα που αντιστοιχεί στα τέσσερα παιδιά και υπολόγισα την απόσταση μεταξύ του Γιάννη και του Θωμά.



Ο Γιάννης είναι 3μέτρα μπροστά από τον Θωμά.

☐ **3η Λύση:**

Έλυσα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μόνο τα δεδομένα του προβλήματος:

Ο Θωμάς είναι 4m μπροστά από τον Δημήτρη και ο Δημήτρης είναι 3m μπροστά από τον Πέτρο.

Συμπέρασμα: Ο Θωμάς είναι 7m μπροστά από τον Πέτρο.

Ο Γιάννης είναι 10m μπροστά από τον Πέτρο.

Συμπέρασμα: Ο Γιάννης είναι 3m μπροστά από τον Θωμά.

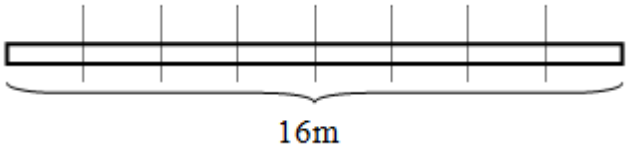
☐ **Καμία από τις παραπάνω**

……
……
……
……
……
……

Πρόβλημα Β.3

☐ **1η Λύση:**

Για να λύσω το πρόβλημα σχεδίασα ένα διάγραμμα που αναπαριστά έναν μεγάλο κορμό που κόβετε σε 8 μικρότερους κορμούς.



Από το διάγραμμα φαίνεται ότι χρειάζονται 7 πριονίσματα για να παράγουμε 8 μικρούς κορμούς. Άρα, ο χρόνος που χρειάζεται ο ξυλοκόπος είναι 7Χ2=14 λεπτά

☐ **2η Λύση:**

Για να λύσω το πρόβλημα ακολούθησα τη διαδικασία της 1ης Λύσης αλλά σχεδίασα το διάγραμμα στο μυαλό μου.

☐ **3η Λύση:**

Έλυσα το πρόβλημα με επεξήγηση. Αν ένας μεγάλος κορμός είχε μήκος μεγαλύτερο από 16m, κάποιος θα χρειαζόταν 8 πριονίσματα για να κόψει 8 μικρούς κορμούς. Αλλά το τελευταίο πριόνισμα δεν χρειάζεται, οπότε 7 μόνο πριονίσματα είναι απαραίτητα.
Ο ξυλοκόπος χρειάζεται δηλαδή 7Χ2=14 λεπτά.

☐ **Καμία από τις παραπάνω**

……
……
……
……
……
……

Πρόβλημα Β.4

1η Λύση:

Έλυσα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας σύμβολα και εξισώσεις:

Έστω x κιλά το βάρος του βάζου.

Τότε το βάρος της μαρμελάδας είναι (8-x) κιλά.

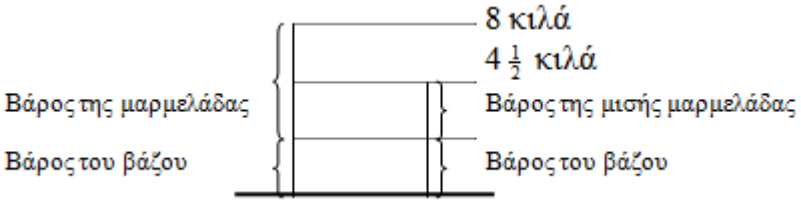
Το βάρος της μισής μαρμελάδας που χύθηκε είναι $\frac{1}{2}$ (8-x) κιλά.

Τότε, x + $\frac{1}{2}$ (8-x)=4$\frac{1}{2}$. Δηλαδή x=1.

Άρα, το βάρος του βάζου είναι 1 κιλό.

2η Λύση:

Σχεδίασα ένα διάγραμμα που αναπαριστά τα αντίστοιχα βάρη.



Από το διάγραμμα, το βάρος της μισής μαρμελάδας είναι 8-4$\frac{1}{2}$ =3$\frac{1}{2}$ κιλά.

Άρα, το βάρος της μαρμελάδας είναι 7 κιλά, και το βάρος του βάζου είναι 1 κιλό.

(Ή απευθείας από το διάγραμμα, το βάρος του βάζου είναι 4$\frac{1}{2}$ -3$\frac{1}{2}$ =1 κιλό)

3η Λύση:

Έκανα την ίδια διαδικασία με τη 2η Λύση αλλά σχεδίασα το διάγραμμα στο μυαλό μου.

4η Λύση:

Έκανα την ίδια διαδικασία με τη 2η Λύση, αλλά δεν χρησιμοποίησα καθόλου κάποιο διάγραμμα ή εικόνα.

Καμία από τις παραπάνω

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Πρόβλημα Β.5

1η Λύση:

Έλυσα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας σύμβολα και εξισώσεις.

Έστω x λίτρα και 2x λίτρα οι αρχικές ποσότητες γάλατος στα δύο μπουκάλια.

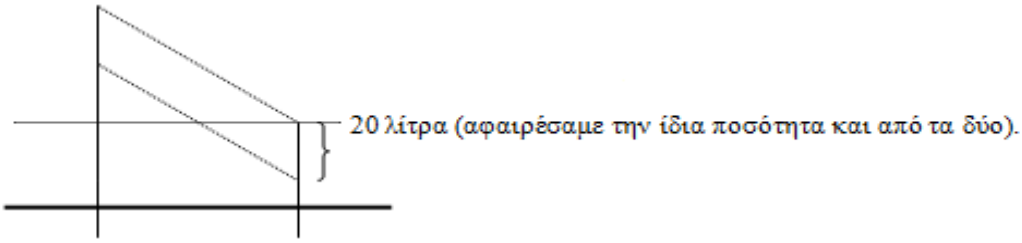
Αφού αφαιρέσαμε το γάλα έμειναν (x-20) και (2x-20) λίτρα γάλα αντίστοιχα.

Τότε $3(x-20)=2x-20 \rightarrow x=40$

Άρα, οι αρχικές ποσότητες γάλατος ήταν 40 και 80 λίτρα αντίστοιχα.

2η Λύση:

Σχεδίασα ένα διάγραμμα που αναπαριστά τις ποσότητες του γάλατος σε κάθε μπουκάλι.



Από το διάγραμμα φαίνεται ότι, αφού αφαιρέσαμε το γάλα, το πρώτο μπουκάλι περιέχει τρεις φορές περισσότερο γάλα από το δεύτερο. Η ποσότητα που μένει στο δεύτερο μπουκάλι είναι 20 λίτρα. Άρα, οι αρχικές ποσότητες είναι 40 και 80 λίτρα.

3η Λύση:

Ακολούθησα την ίδια διαδικασία με την 2η Λύση, αλλά σχεδίασα το διάγραμμα στο μυαλό μου.

Καμία από τις παραπάνω

……
……
……
……
……
……

Πρόβλημα Β.6

☐ **1η Λύση:**

Έλυσα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας σύμβολα και εξισώσεις:

Έστω x το βάρος ενός δαμάσκηνου και y το βάρος ενός βερίκοκου.

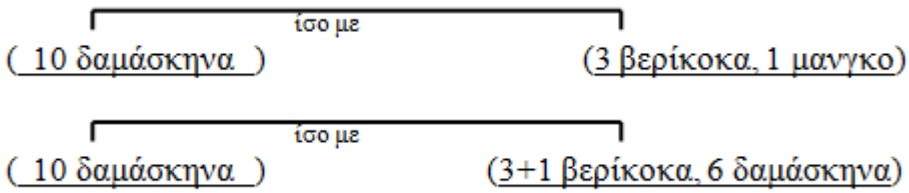
Τότε το βάρος ενός μανγκο είναι (6x+y)

Δηλαδή 10x=3y + (6x+y), άρα x=y

Επίσης, το βάρος ενός μανγκο είναι 6x +x = 7x δηλαδή 7 δαμάσκηνα.

☐ **2η Λύση:**

Έλυσα το πρόβλημα σχεδιάζοντας ένα διάγραμμα που αναπαριστά τα βάρη.



Από κάθε πλευρά αφαιρούμε 6 δαμάσκηνα. Τότε 4 δαμάσκηνα έχουν το ίδιο βάρος με 4 βερίκοκα. Δηλαδή 1 δαμάσκηνο ζυγίζει όσο και 1 βερίκοκο. Το 1 μανγκο ζυγίζει 6 δαμάσκηνα και 1 βερίκοκο, το οποίο είναι ίσο με το βάρος 7 δαμάσκηνων.

☐ **3η Λύση:**

Ακολούθησα την ίδια διαδικασία με την 2η Λύση, αλλά σχεδίασα το διάγραμμα στο μυαλό μου.

☐ **4η Λύση:**

Έλυσα το πρόβλημα με αιτιολόγηση, χωρίς να φανταστώ καμία εικόνα.

Ένα μανγκο ζυγίζει όσο 6 δαμάσκηνα και 1 βερίκοκο.

Τότε, 10 δαμάσκηνα ζυγίζουν όσο 3 βερίκοκα, 6 δαμάσκηνα και 1 δαμάσκηνο.

Δηλαδή, 4 δαμάσκηνα ζυγίζουν όσο 4 βερίκοκα.

Τέλος, ένα μανγκο ζυγίζει όσο 7 δαμάσκηνα.

☐ **Καμία από τις παραπάνω**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

---

(2)

Β' ΜΕΡΟΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....

ΤΜΗΜΑ:.....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: .....

ΟΔΗΓΙΕΣ

Στο ερωτηματολόγιο αυτό καλείστε να κρίνετε ποια μαθηματική διαδικασία ακολουθήσατε για να λύσετε κάθε ένα από τα προβλήματα. Για κάθε πρόβλημα δίνονται τρεις ή περισσότερες πιθανές απαντήσεις.

Προσοχή!!! *Δεν έχει σημασία αν έχετε ολοκληρώσει τις λύσεις σας ή όχι και αν οι λύσεις σας είναι σωστές ή λανθασμένες.*

(1) Για κάθε πρόβλημα βάλτε ένα ✓ στο αντίστοιχο κουτάκι της λύσης που εσείς χρησιμοποιήσατε ή είναι πιο κοντά σε αυτή που χρησιμοποιήσατε.

Αν η λύση σας μοιάζει με δύο από αυτές που δίνονται βάλτε ✓ και στα δύο αντίστοιχα κουτάκια.

(2) Αν καμία από τις λύσεις που δίνονται δεν είναι παρόμοια με αυτή που εσείς χρησιμοποιήσατε τότε βάλτε ✓ στο κουτάκι "Καμία από τις παραπάνω".

Στην περίπτωση αυτή εξηγήστε όσο πιο καθαρά μπορείτε τη λύση σας στον ειδικό χώρο που υπάρχει.

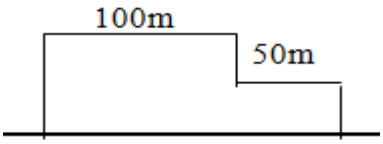
Πρόβλημα Β.1

1η Λύση:

Φαντάστηκα τη διαδρομή που ακολούθησε το μπαλόνι και μετά υπολόγισα την απόσταση από εκεί που ξεκίνησε μέχρι εκεί που έφτασε.
Βρήκα ότι η απόσταση είναι 100+50=150μέτρα.

2η Λύση:

Σχεδίασα ένα διάγραμμα που αναπαριστά τη διαδρομή που ακολούθησε το μπαλόνι και μετά υπολόγισα την απόσταση από εκεί που ξεκίνησε μέχρι εκεί που έφτασε.



Η απόσταση είναι=100+50=150m

3η Λύση:

Για να λύσω το πρόβλημα παρατήρησα ποιες πληροφορίες ήταν χρήσιμες για να λύσω το πρόβλημα (χωρίς να φανταστώ καθόλου τη διαδρομή που ακολούθησε το μπαλόνι).
Έτσι η απόσταση από το σημείο που ξεκίνησε μέχρι το σημείο που έφτασε το μπαλόνι ήταν 100m+50m=150m.

Καμία από τις παραπάνω

……
……
……
……
……
……

Πρόβλημα Β.2

1η Λύση:

Έλυσα το πρόβλημα δοκιμάζοντας διάφορες τιμές:

	Ηλικία κόρης	Ηλικία μητέρας	
2 χρονών	26χρονών	Όχι	
	3 χρονών	27χρονών	Όχι
	4 χρονών	28χρονών	Ναι

Άρα η ηλικία της κόρης είναι 4 έτη και της μητέρας 28 έτη.

2η Λύση:

Έλυσα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας σύμβολα και εξισώσεις:

Έστω ότι η ηλικία της κόρης είναι x έτη.

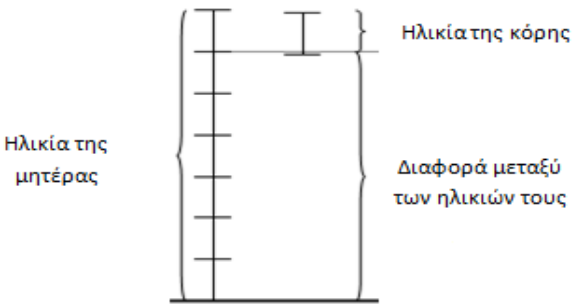
Τότε η ηλικία της μητέρας είναι 7x έτη.

Η διαφορά τους είναι 24 χρόνια άρα 7x-x=24.Δηλαδή 6x=24 και x=4.

Τότε η κόρη είναι 4 ετών και η μητέρα 28 ετών.

3η Λύση:

Σχεδίασα ένα διάγραμμα που αναπαριστά τις ηλικίες.



Από το διάγραμμα, η διαφορά των ηλικιών τους είναι 6 ίσα τμήματα, συνολικά 24 χρόνια.

Άρα, κάθε τμήμα αντιστοιχεί σε 4 χρόνια. Η ηλικία της κόρης είναι 4 χρόνια και της μητέρας 28 χρόνια.

4η Λύση:

Σχεδίασα στο μυαλό μου ένα διάγραμμα σαν αυτό της 3ης Λύσης και εξήγησα ότι τα 6 τμήματα αντιστοιχούν σε 24 χρόνια, άρα το ένα τμήμα αντιστοιχεί σε 4 χρόνια (με ή χωρίς τη χρήση συμβόλων). Έτσι η ηλικία της κόρης είναι 4 έτη και της μητέρας 28 έτη.

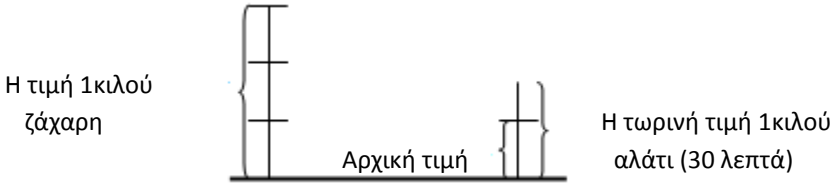
Καμία από τις παραπάνω

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Πρόβλημα Β.3

☐ **1η Λύση:**

Έλυσα το πρόβλημα σχεδιάζοντας ένα διάγραμμα που αναπαριστά τις τιμές της ζάχαρης και του αλατιού.



Όπως φαίνεται από το διάγραμμα μετά την αύξηση της τιμής του αλατιού, η τιμή ενός κιλού ζάχαρη είναι διπλάσια από την τιμή ενός κιλού αλάτι.
Άρα, η τιμή ενός κιλού ζάχαρη είναι 60λεπτά.

☐ **2η Λύση:**

Χρησιμοποίησα την ίδια μέθοδο με την 1η Λύση, αλλά σχεδίασα το διάγραμμα στο μυαλό μου και όχι στο χαρτί.

☐ **3η Λύση:**

Έλυσα το πρόβλημα επεξηγώντας τα δεδομένα.
Η τιμή ενός κιλού αλάτι είναι τώρα 30λεπτά. Άρα 1 ½ φορές της προηγούμενης τιμής, δηλαδή η προηγούμενη τιμή ήταν 20λεπτά το κιλό.
Έτσι η τιμή της ζάχαρης είναι 3Χ20=60λεπτά.

☐ **4η Λύση:**

Έλυσα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας σύμβολα και εξισώσεις:

Έστω ότι η αρχική τιμή του αλατιού ήταν x λεπτά το κιλό.

Η τιμή της ζάχαρης ήταν τότε 3x λεπτά το κιλό.

Μετά την αύξηση η τιμή του αλατιού είναι 1,5x λεπτά το κιλό.

Άρα, η τιμή ενός κιλού ζάχαρη είναι διπλάσια από την τωρινή τιμή του αλατιού, δηλαδή 2Χ30=60 λεπτά.

☐ **Καμία από τις παραπάνω**

……
……
……
……
……
……

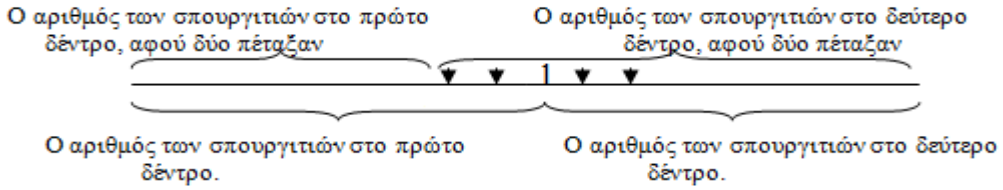
Πρόβλημα Β.4

1η Λύση:

Έλυσα το πρόβλημα με επεξήγηση. Αφού δύο σπουργίτια πέταξαν από το πρώτο δέντρο στο δεύτερο, το πρώτο δέντρο είχε δύο λιγότερα σπουργίτια από πριν, ενώ το δεύτερο δέντρο είχε δύο σπουργίτια περισσότερα από πριν.
Άρα, το δεύτερο δέντρο έχει τώρα τέσσερα περισσότερα σπουργίτια από το πρώτο.

2η Λύση:

Σχεδίασα ένα διάγραμμα:



Το δεύτερο δέντρο έχει τέσσερα περισσότερα σπουργίτια από το πρώτο.

3η Λύση:

Χρησιμοποίησα την ίδια μέθοδο με τη 2η Λύση ,αλλά σχεδίασα το διάγραμμα στο μυαλό μου και όχι στο χαρτί.

4η Λύση:

Έλυσα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα. Π.χ. αν υποθέσουμε ότι σε κάθε δέντρο υπήρχαν αρχικά 8 σπουργίτια. Αφού δύο σπουργίτια πέταξαν από το πρώτο δέντρο στο δεύτερο, στο πρώτο δέντρο έμειναν 8 σπουργίτια ενώ το δεύτερο έχει 10. Άρα, το δεύτερο δέντρο έχει 4 περισσότερα σπουργίτια από το πρώτο.

5η Λύση:

Έλυσα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας σύμβολα και εξισώσεις:

Έστω x ο αριθμός των σπουργιτιών σε κάθε δέντρο.

Αφού δύο σπουργίτια πέταξαν από το πρώτο δέντρο στο δεύτερο, στο πρώτο δέντρο έμειναν (x-2) σπουργίτια, ενώ το δεύτερο δέντρο έχει (x+2) σπουργίτια.

Η διαφορά τους είναι (x+2)-(x-2)=4 σπουργίτια.

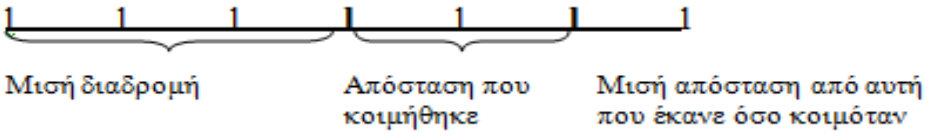
Καμία από τις παραπάνω

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Πρόβλημα Β.5

☐ **1η Λύση:**

Σχεδίασα ένα διάγραμμα που αναπαριστά την απόσταση που ταξίδεψε ο επιβάτης.



Από το διάγραμμα, αν όλη η διαδρομή αποτελείται από 6 μέρη, ο επιβάτης κοιμήθηκε τα 2 μέρη, δηλαδή το 1/3 του συνολικού ταξιδιού.

☐ **2η Λύση:**

Ακολούθησα την ίδια διαδικασία με την 1η Λύση αλλά σχεδίασα το διάγραμμα στο μυαλό μου.

☐ **3η Λύση:**

Έλυσα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας σύμβολα και εξισώσεις:

Έστω x μέρη η απόσταση που κοιμήθηκε ο επιβάτης.

Όταν ξύπνησε, απέμενε απόσταση $\frac{1}{2}$ x μέρη.

Άρα, η μισή διαδρομή του ταξιδιού ήταν x+$\frac{1}{2}$ x

ενώ ολόκληρο το ταξίδι ήταν 2(x+$\frac{1}{2}$ x)=3x μέρη.

Δηλαδή ο επιβάτης κοιμήθηκε το 1/3 της συνολικής διαδρομής.

☐ **Καμία από τις παραπάνω**

……
……
……
……
……
……

Πρόβλημα Β.6

☐ **1η Λύση**:

Έλυσα το πρόβλημα σχεδιάζοντας ένα διάγραμμα που αναπαριστά τα αντικείμενα.

Αν αφαιρέσουμε τα ¾ της τούρτας και από τις δύο πλευρές, το ¼ της τούρτας είναι ίσο με τα ¾ του κιλού. Άρα, η τούρτα ζυγίζει 3 κιλά.

☐ **2η Λύση:**

Ακολούθησα την ίδια διαδικασία με την 1η Λύση, αλλά σχεδίασα το διάγραμμα στο μυαλό μου.

☐ **3η Λύση:**

Έλυσα το πρόβλημα χρησιμοποιώντας σύμβολα και εξισώσεις:

Έστω x κιλά το βάρος ολόκληρης της τούρτας.

Τότε $x=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$. Άρα, x=3.

Δηλαδή, το βάρος της τούρτας είναι 3 κιλά.

☐ **4η Λύση:**

Έλυσα το πρόβλημα χωρίς να χρησιμοποιήσω κάποιο διάγραμμα ή εικόνα:

Σκέφτηκα ότι το ¼ ολόκληρης της τούρτας ζυγίζει ¾ του κιλού. Άρα, ολόκληρη η τούρτα ζυγίζει 3 κιλά.

☐ **Καμία από τις παραπάνω**

……
……
……
……
……
……

Γ' ΜΕΡΟΣ

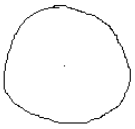
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:…….

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:…….

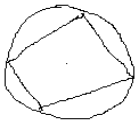
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
ΜΗ ΤΥΠΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (ΑΤΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1^{Η}

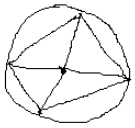
Ένας συμμαθητής σου καταλήγει στο παρακάτω συμπέρασμα αλλά δεν είναι απόλυτα σίγουρος.



«Εγγράφω τυχαίο κύκλο με κέντρο το Ο.»



«Παίρνω τυχαίο τετράπλευρο με τις κορυφές του πάνω στον κύκλο.»



«Σχεδιάζω τις διαγώνιές του. Αυτές διέρχονται από το κέντρο Ο.»

***«Άρα**, αφού το τετράπλευρο που σχεδίασα είναι τυχαίο, σε κάθε τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο οι διαγώνιές του θα διέρχονται από το κέντρο. Έτσι δεν είναι;»*

- Συμφωνείς μαζί του;
- Τι θα του έλεγες για να τον πείσεις;

Γ' ΜΕΡΟΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:…….

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:…….

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
ΜΗ ΤΥΠΙΚΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (ΑΤΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ)

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2^{Η}

Ένα τετράγωνο έχει δύο διαγώνιες, ένα πεντάγωνο έχει πέντε διαγώνιες, ενώ ένα εξάγωνο έχει εννέα.
α) Μπορείς να βρεις πόσες διαγώνιες έχει ένα επτάγωνο; Εξήγησε αναλυτικά τι σκέφτηκες.
β) Μπορείς να βρεις έναν τύπο που να υπολογίζει τον αριθμό των διαγωνίων ενός ν-γώνου; Εξήγησε πώς κατέληξες σε αυτόν.