



*Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
Τμήμα Φυσικής  
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής*

---

---

*Το πρόβλημα **Riemann** σε μαγνητισμένα  
σχετικιστικά αστροφυσικά ρευστά.  
Εφαρμογή στην αλληλεπίδραση πίδακα με  
το περιβάλλον του.*

---

---

*Κατσουλάκος Γρηγόριος  
Α.Μ: 201231*

*Επιβλέπων: Νεκτάριος Βλαχάκης*

**ΑΘΗΝΑ**  
*Απρίλιος 2015*

## Περίληψη

Η μελέτη και παρατήρηση των αστροφυσικών εκροών αποτελεί σημαντικό κλάδο στην επιστήμη της αστροφυσικής. Αν και τα τελευταία χρόνια, έχει σημειωθεί μεγάλη πρόοδος σε ότι αφορά την ερμηνεία φαινομένων που σχετίζονται με τους αστροφυσικούς πίδακες, εν τούτοις παραμένουν αναπάντητα αρκετά ερωτήματα. Κυρίως ερωτήματα που έχουν να κάνουν με τον ακριβή μηχανισμό εκκίνησης των *Jets*, καθώς και την δομή που αναπτύσσουν στο εσωτερικό τους.

Η εργασία αυτή, επιδιώκει τη μελέτη της αλληλεπίδρασης του αστροφυσικού πίδακα με το εξωτερικό γαλαξιακό υλικό. Ο αστροφυσικός πίδακας ενός ενεργού γαλαξία μπορεί να εκτείνεται σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από το κεντρικό αντικείμενο. Αν και οι αποστάσεις αυτού του μεγέθους είναι μεγαλύτερες ακόμα και από τις διαστάσεις του ίδιου του γαλαξία που φιλοξενεί το *Jet*, γίνεται σαφές από τις παρατηρήσεις, ότι οι αστροφυσικές εκροές δεν διαδίδονται στο κενό. Αντίθετα, η εκτόνωσή τους λαμβάνει χώρα είτε μέσα στο αέριο του γαλαξιακού *Bulge* είτε στο υλικό του εξωγαλαξιακού χώρου. Αποτέλεσμα αυτού, είναι η στενή αλληλεπίδραση του *Jet* με το εξωτερικό περιβάλλον.

Στο πρώτο κεφάλαιο της μελέτης, παρουσιάζουμε τις σημαντικότερες παρατηρήσεις που αφορούν τον ενεργό γαλαξία M87. Ο M87 παρουσιάζει εκτεταμένη σχετικιστική εκροή, η οποία εκπέμπει στα περισσότερα μήκη κύματος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, από το ράδιο μέχρι και τις ακτίνες γ. Λόγω της εγγύτητάς του, θεωρείται το σημείο αναφοράς για τη μελέτη αστροφυσικών εκροών, καθώς έχει παρατηρηθεί λεπτομερώς, τόσο ο πίδακας όσο και το εξωτερικό μέσο.

Η αλληλεπίδραση της μαγνητισμένης εκροής με την γαλαξιακή ατμόσφαιρα πιθανότατα καθορίζει τόσο το σχήμα και τη γεωμετρία του πίδακα όσο και την εσωτερική δομή του *Jet* που τυχόν αναπτύσσει. Αντικείμενο του δεύτερου κεφαλαίου, είναι η αναλυτική περιγραφή αυτής της αλληλεπίδρασης με τη βοήθεια του χρονοεξαρτώμενου προβλήματος *Riemann*.

Στην τρίτη θεματική ενότητα, μελετάμε το πρόβλημα *Riemann* στην κατάσταση ισορροπίας και χρησιμοποιούμε τον φορμαλισμό του προβλήματος για τη κατασκευή μοντέλων στον πίδακα του M87. Το ενδιαφέρον εστιάζεται στην περιοχή του *HST - 1 Knot*, εκεί, δηλαδή, που πραγματοποιείται η μετάβαση από παραβολικές γραμμές ροής σε κωνικές. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε δύο πιθανά σενάρια για το πως επηρεάζεται η εσωτερική δομή του *Jet*, εξαιτίας της αλλαγής του σχήματός του. Στην πρώτη εκδοχή, η αρχική εκτόνωση του πίδακα λόγω διαφοράς πιέσεων με το υλικό της ατμόσφαιρας οδηγεί στη μόνιμη παρουσία ενός *Rarefaction Wave* εντός του σχετικιστικού πίδακα. Αντίθετα,

η παρουσία ενός *Recollimation Shock* εντός της επικράτειας του *Jet* αναπαράγεται στο δεύτερο σενάριο.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζουμε προσομοιώσεις του μαγνητισμένου πίδακα μαζί με την γαλαξιακή ατμόσφαιρα. Αν και η πολική γεωμετρία των προσομοιώσεων αυτών διαφέρει από τις καρτεσιανές συντεταγμένες που χρησιμοποιήσαμε στα κεφάλαια 1 και 2, ωστόσο μπορεί κανείς να παρατηρήσει τα κύματα που σχετίζονται με το πρόβλημα *Riemann*. Σε κάθε περίπτωση, ένα *Recollimation Shock* αναπτύσσεται στο εσωτερικό του πίδακα.

Η εργασία αυτή γίνεται στα πλαίσια των μεταπτυχιακών μου υποχρεώσεων για τη λήψη του πτυχίου. Θα ήταν παράλειψη, αν δεν ευχαριστούσα θερμότατα τον καθηγητή και επιβλέποντά μου, Νεκτάριο Βλαχάκη, χωρίς την βοήθεια του οποίου η πραγματοποίηση της διπλωματικής εργασίας θα ήταν αδύνατη. Τέλος, θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον συμφοιτητή μου Δημήτριο Μήλλα για την αλληλεπίδραση και τις χρήσιμες συζητήσεις που είχαμε όλες εκείνες τις Παρασκευές στις συναντήσεις μας με τον κ. Βλαχάκη.

*Η ολοκλήρωση της Διπλωματικής εργασίας συγχρηματοδοτήθηκε μέσω του Έργου “Υποτροφίες Ι.Κ.Υ” από πόρους του ΕΠ “Εκπαίδευση και δια βίου Μάθηση”, του Ευρωπαϊκού κοινωνικού ταμείου (ΕΚΤ) του ΕΣΠΑ, 2007 – 2013.*



*“Είμαστε όλοι βουτηγμένοι στον βούρκο,*

*αλλά κάποιoi από μας κοιτάνε τα άστρα.”*

*Όσκαρ Ουάιλντ*

# Περιεχόμενα

<b>1 Παρατηρήσεις για τον ενεργό γαλαξία M87</b>	<b>2</b>
1.1 Η σχετικιστική εκροή στον M87 . . . . .	3
1.2 Η δομή του σχετικιστικού πίδακα . . . . .	4
1.3 Κινηματική συμπεριφορά του <i>Jet</i> . . . . .	9
1.4 Το σχήμα του σχετικιστικού <i>Jet</i> . . . . .	12
1.5 Μαγνητικά πεδία στον M87 . . . . .	13
1.6 Η γαλαξιακή ατμόσφαιρα του M87 . . . . .	19
<b>2 Το χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα Riemann</b>	<b>20</b>
2.1 Εισαγωγή στα <i>Shocks</i> και τα <i>Simple Waves</i> . . . . .	21
2.1.1 Υδροδυναμικά <i>Rarefaction Waves</i> . . . . .	22
2.1.2 Υδροδυναμικά <i>Shock Waves</i> . . . . .	29
2.2 Το υδροδυναμικό πρόβλημα <i>Riemann</i> . . . . .	35
2.3 Το Μαγνητοϋδροδυναμικό πρόβλημα <i>Riemann</i> . . . . .	38
2.3.1 <i>Rarefaction Waves</i> σε μαγνητισμένη εκροή . . . . .	42
2.3.2 <i>Shock Waves</i> σε μαγνητισμένη εκροή . . . . .	50
2.3.3 Μοντέλα στο πρόβλημα <i>Riemann</i> . . . . .	57
<b>3 Το στάσιμο πρόβλημα Riemann</b>	<b>63</b>
3.1 Το στάσιμο <i>Shock Wave</i> . . . . .	64
3.2 Το στάσιμο <i>Rarefaction Wave</i> . . . . .	68
3.3 Εφαρμογή του προβλήματος στο <i>Jet</i> ενός <i>AGN</i> . . . . .	75
3.3.1 1ο Μοντέλο: Στατικό <i>Rarefaction</i> στο <i>HST - 1</i> . . . . .	76
3.3.2 2ο Μοντέλο: Στατικό <i>Shock</i> στο <i>HST - 1</i> . . . . .	81
<b>4 Προσομοιώσεις μαγνητισμένης εκροής</b>	<b>88</b>
4.1 Ο κώδικας <i>PLUTO</i> . . . . .	89
4.2 <i>Jet-Environment</i> Προσομοιώσεις . . . . .	91
4.2.1 Συνοριακές συνθήκες . . . . .	91
4.2.2 Η αρχική κατάσταση της ροής . . . . .	97
4.2.3 Αποτελέσματα <i>Jet-Environment</i> προσομοιώσεων . . . . .	98

# Κεφάλαιο 1

## Παρατηρήσεις για τον ενεργό γαλαξία M87

Η ακτινοβολία, την οποία ανιχνεύουμε από τους συνηθισμένους γαλαξίες, προέρχεται κυρίως από τους αστέρες που περιέχονται στον γαλαξία και δευτερευόντως από το γαλαξιακό αέριο και τη σκόνη. Έτσι, το συνολικό φάσμα του γαλαξία, θα είναι η υπέρθεση όλων των αστρικών φασμάτων. Εφόσον, γνωρίζουμε ότι, το πλάσμα στις αστρικές ατμόσφαιρες βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, συμπεραίνουμε ότι, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία είναι θερμικής φύσης. Επομένως, το συνολικό φάσμα του γαλαξία θα είναι θερμικό και θα κατανέμεται ενεργειακά γύρω από το μέγιστο  $h\nu \approx 3k_B T$ . Πιο συγκεκριμένα, το φάσμα ενός συνηθισμένου γαλαξία κυμαίνεται από τα  $4000 \text{ \AA}$  έως και τα  $20000 \text{ \AA}$ .

Ωστόσο, υπάρχουν γαλαξίες, στους οποίους παρατηρείται ευρύτερη κατανομή της ενέργειάς τους στο φάσμα. Μάλιστα, μερικοί από αυτούς παρουσιάζουν ισχυρή εκπομπή σε όλο το φασματικό εύρος, από τα ραδιοκύματα έως και τις ακτίνες γ. Αυτή η μη θερμική ακτινοβολία πηγάζει από μια μικρή κεντρική περιοχή, η οποία ονομάζεται *ενεργός γαλαξιακός πυρήνας (AGN)* και ο γαλαξία που φιλοξενεί αυτή την περιοχή *ενεργός γαλαξίας*.

Οι *ενεργοί γαλαξίες* σχηματίζουν μια οικογένεια αρκετών τύπων *AGNs*, οι οποίοι διαφέρουν στις φασματικές τους ιδιότητες και στη λαμπρότητα. Τυπικά, η λαμπρότητα ενός *ενεργού γαλαξία*, για παράδειγμα ενός *Quasar*, μπορεί να είναι χίλιες φορές μεγαλύτερη από αυτή ενός συνηθισμένου γαλαξία. Εκτός βέβαια από την λαμπρότητα, ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των *AGNs* είναι οι γραμμές εκπομπής στο φάσμα τους και η εκτεταμένη ράδιο εκπομπή σε ορισμένους από αυτούς, η οποία συνδέεται με τα αστροφυσικά *Jets*.

Το κεφάλαιο αυτό, αποτελεί την εισαγωγή της εργασίας. Αντικείμενό του είναι η συνοπτική παρουσίαση των σημαντικότερων παρατηρήσεων του ενεργού

γαλαξία M87 και του αστροφυσικού πίδακα (*Jet*) που πηγάζει από την κεντρική περιοχή του. Παρακάτω, γίνεται λόγος για τη φύση του πίδακα. Θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα, οι πρόσφατες παρατηρήσεις σχετικά με το σχήμα του *Jet*, την εσωτερική δομή που αναπτύσσει, την παρουσία υπέρφωτης κίνησης σε τμήματα του πίδακα και φυσικά το μαγνητικό πεδίο. Επιπλέον, θα δούμε τις πιο χαρακτηριστικές ιδιότητες της γαλαξιακής ατμόσφαιρας μέσα στην οποία διαδίδεται το σχετικιστικό *Jet*.



Σχήμα 1.1: Αστροφυσική εκροή στον ενεργό γαλαξία M87.

## 1.1 Η σχετικιστική εκροή στον M87

Ο γαλαξίας M87 είναι ένας από τους εγγύτερους ενεργούς γαλαξίες, ελλειπτικού τύπου, που βρίσκεται σε απόσταση μόλις  $16.7 \text{ Mpc}$  [1]. Όπως φαίνεται στην εικόνα 1.1, ο M87 παρουσιάζει εκτεταμένη σχετικιστική εκροή, η οποία εκπέμπει στα περισσότερα μήκη κύματος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, από το ράδιο μέχρι και τις ακτίνες  $\gamma$ . Λόγω της εγγύτητάς του, θεωρείται το σημείο αναφοράς για τη μελέτη αστροφυσικών εκροών, καθώς έχει παρατηρηθεί λεπτομερώς, τόσο ο πίδακας όσο και το εξωτερικό μέσο.

Από παρατηρήσεις του τηλεσκοπίου *Hubble* στο ιονισμένο αέριο του δίσκου, έχει εκτιμηθεί η μάζα της κεντρικής μελανής οπής του γαλαξία σε  $3.2 \times 10^9 M_{\odot}$  [2]. Ωστόσο, πρόσφατη μέτρηση βασισμένη στην αστρική κινηματική δίνει τη μάζα της μελανής οπής να είναι της τάξης των  $6.6 \times 10^9 M_{\odot}$  [3]. Η τελευταία εκτίμηση, δίνει το φαινόμενο μέγεθος της ακτίνας *Schwarzschild* ( $r_s = 2GM_{\odot}/c^2$ ) να είναι περίπου της τάξης των  $r_s \approx 8 \text{ mas}$ . Η γωνία θέασης του πίδακα ως προς τη γραμμή παρατήρησης έχει υπολογιστεί σε  $\Theta_{\text{view}} \approx 14^{\circ}$



[4]. Ωστόσο, υπάρχουν διάφορες εκτιμήσεις για τη συγκεκριμένη γωνία. Σε κάθε περίπτωση, η γωνία θέασης *View* θεωρείται μικρότερη από  $20^\circ$ .

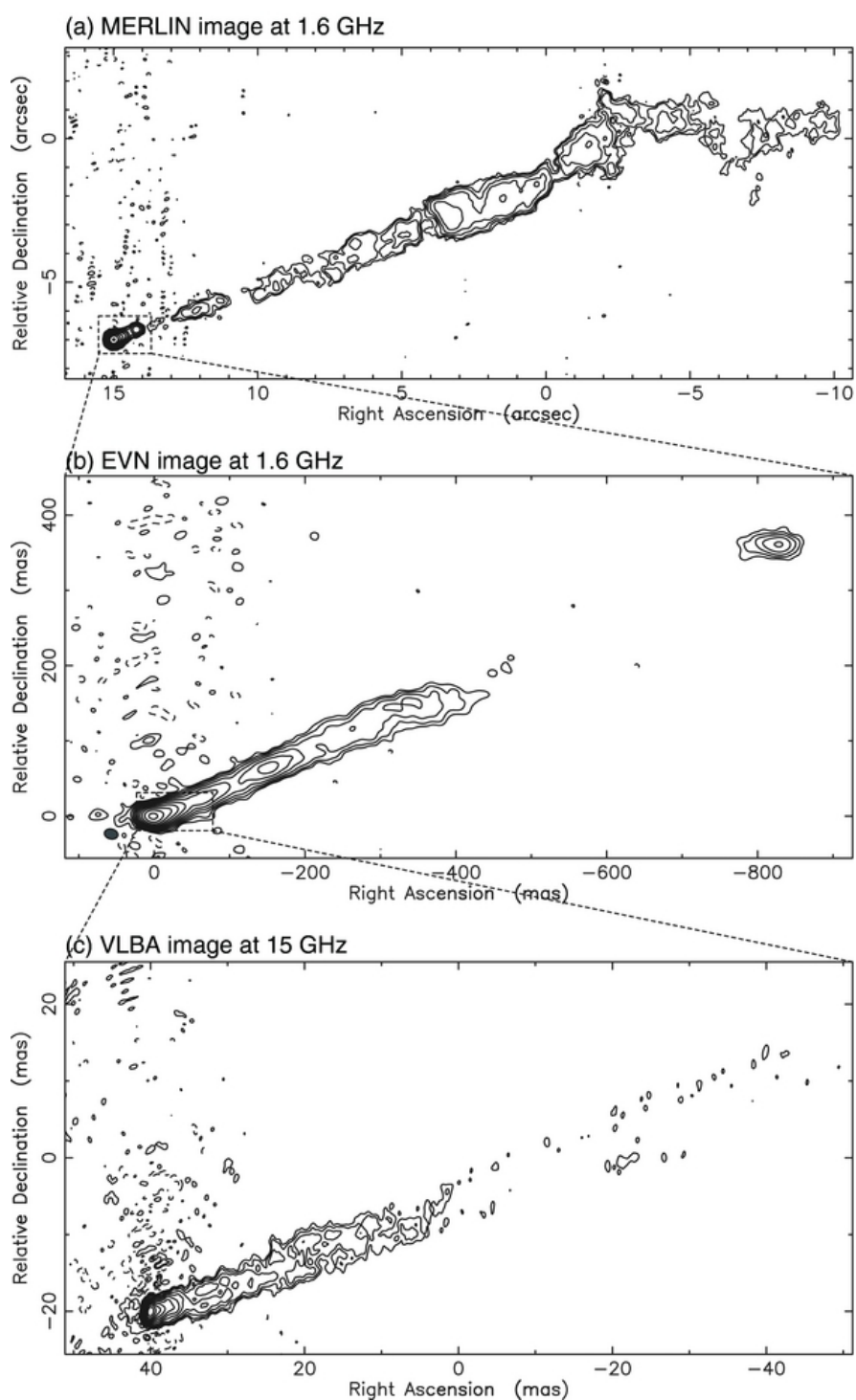
Στο σχήμα 1.2 παρουσιάζονται εικόνες του M87 στη περιοχή των ραδιοκυμάτων [5]. Οι παρατηρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα με διαφορετικές μεθόδους. Όπως παρατηρούμε, κάθε εικόνα είναι μεγέθυνση της προηγούμενης. Αρχικά, παρουσιάζεται όλο το εύρος του αστροφυσικού πίδακα από παρατηρήσεις του πειράματος *MERLIN*. Τα δεδομένα πάρθηκαν στις 9 Μαρτίου 2007 και είναι παρατηρήσεις στα 18 cm. Η επόμενη εικόνα προκύπτει από δεδομένα του *EVN* πάλι στα 18 cm, ενώ οι παρατηρήσεις πραγματοποιήθηκαν την 7η Μαρτίου 2009. Η απομονωμένη συνιστώσα της ράδιο εκπομπής σε απόσταση 900 mas από τον πυρήνα ονομάζεται *HST-1* και αντιστοιχεί στο πρώτο λαμπρό Knot δυτικά του πυρήνα στην εικόνα των παρατηρήσεων *MERLIN*. Η ακτινοβολία που ανιχνεύεται στη περιοχή των ραδιοκυμάτων, αλλά και στα υπόλοιπα μήκη κύματος, θεωρείται ότι, είναι ακτινοβολία σύγχροτρον. Όσον αφορά τις παρατηρήσεις από το *EVN*, αξίζει να σημειωθεί η συνεχής εκπομπή ακτινοβολίας σε απόσταση 500 mas από τον πυρήνα. Τέλος, η τρίτη εικόνα της εκροής είναι από το *VLBA* στα 15 GHz και απεικονίζει τη περιοχή του λαμπρού πυρήνα, ο οποίος ανιχνεύεται σε όλες τις εικόνες.

## 1.2 Η δομή του σχετικιστικού πίδακα

Όπως ήδη αναφέρθηκε παραπάνω, η εκροή του M87 έχει παρατηρηθεί εκτενώς στα ραδιοκύματα, το υπέρυθρο, το οπτικό και τις ακτίνες χ [6], [7], [8], [9], [10], [11]. Από την εικόνα 1.3 καταλήγουμε στο ότι, το *Jet* του ενεργού γαλαξία δεν παρουσιάζει ομογενή εκπομπή, αλλά αντίθετα υπάρχουν λαμπρότερες περιοχές, τις οποίες καλούμε ως *Knots*. Αξίζει να σημειωθεί ότι, η ένταση της εκπέμπουσας ακτινοβολίας διαφέρει ανάλογα με τη περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος που παρατηρούμε.

Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά του M87 είναι το φωτεινό *Knot G* (Σχήμα 1.4), που βρίσκεται σε απόσταση περίπου 78 pc από τον πυρήνα [6]. Στην περιοχή αυτή, έχει εστιάσει και το οπτικό τηλεσκόπιο *Hubble*, το οποίο παρατήρησε τη δομή του πίδακα. Πρόκειται για ένα σύμπλεγμα μικρότερων *Knots* γνωστό και ως *HST - 1*. Βρίσκεται σε απόσταση μεταξύ 62 – 72 pc από τον πυρήνα, και αποτελείται από λαμπρά τμήματα, η φαινόμενη κίνηση των οποίων είναι υπέρφωτη ( $4c - 6c$ ) [12].

Παρόμοιο προφίλ ταχυτήτων παρουσιάζουν και οι παρατηρήσεις του *VLBA* στα ραδιοκύματα. Μόνο η συνιστώσα *HST - 1d* είναι στατική και θεωρείται ως η περιοχή δημιουργίας των υπέρφωτων συνιστωσών [13]. Επιπρόσθετα, η λαμπρή περιοχή *HST - 1* παρουσιάζει έντονη δραστηριότητα στη παραγωγή



Σχήμα 1.2: Παρατηρήσεις στα ραδιοκύματα του σχετικιστικού πίδακα στον M87. **A:** Εικόνα των παρατηρήσεων MERLIN στα 18 cm. **B:** Ράδιο εκπομπή από δεδομένα του πειράματος EVN. **C:** Απεικόνιση των παρατηρήσεων από το VLBA [5].

εκλάμψεων ακτίνων  $\chi$  και  $\gamma$ .

Σε όλες τις εικόνες του M87 αναγνωρίζουμε 7 λαμπρές περιοχές *Downstream* του *HST* – 1. Το *Knot D* είναι η πιο λαμπρή συνιστώσα του πίδακα μετά το σύμπλεγμα των *Knots A – B – C*. Για την περιοχή αυτή, έχουμε αρκετές μετρήσεις της ταχύτητας. Πιο συγκεκριμένα, η ενδιάμεση περιοχή του *Knot D* (Σχήμα 1.5), είναι μια από τις πιο γρήγορες συνιστώσες του πίδακα με *proper* ταχύτητα  $4.27 \pm 0.30c$ . Αντίθετα, η λαμπρότερη δυτική περιοχή φαίνεται να επιβραδύνεται. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει στο σχήμα 1.5, η φαινόμενη κίνηση της συνιστώσας *D – East* είναι μικρή ( $0.28 \pm 0.05$ ), υποδεικνύοντας κάποιον στατικό σχηματισμό, πιθανόν κάποιο *Shock*.

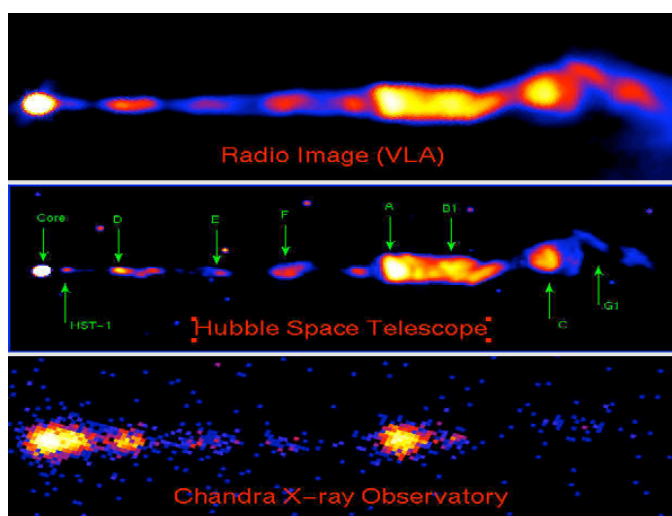
Κατευθυνόμενοι προς τα δυτικά, η επόμενη ενεργή περιοχή που συναντάμε ονομάζεται *Knot E*. Όπως και το *Knot D* έτσι και το *E* παρουσιάζει πολύπλοκη δομή. Μετρήσεις των φαινόμενων κινήσεων αυτής της περιοχής δείχνουν τη συνιστώσα *E – West* να κινείται με ταχύτητα  $1.91 \pm 0.14c$ . Παρόμοια με τη περιοχή *E*, το *Knot F* είναι η επόμενη ενεργή περιοχή του πίδακα. Αν και αρκετά πιο αμυδρή από άλλες περιοχές, παρουσιάζει φαινόμενη κίνηση με ταχύτητα  $0.36 \pm 0.14c$ .

Όσον αφορά το *Knot I* κατά μήκος του άξονα του *Jet*, παρατηρείται μια ελαφρώς αρνητική ταχύτητα ( $-0.23 \pm 0.12c$ ). Από το σχήμα 1.6 γίνεται σαφές ότι, το *Knot I* γίνεται όλο και πιο αμυδρό με το χρόνο. Η περιοχή αυτή, είναι η πιο καθαρή περίπτωση στην *Downstream* περιοχή του *HST* – 1d μιας πιθανής στατικής δομής.

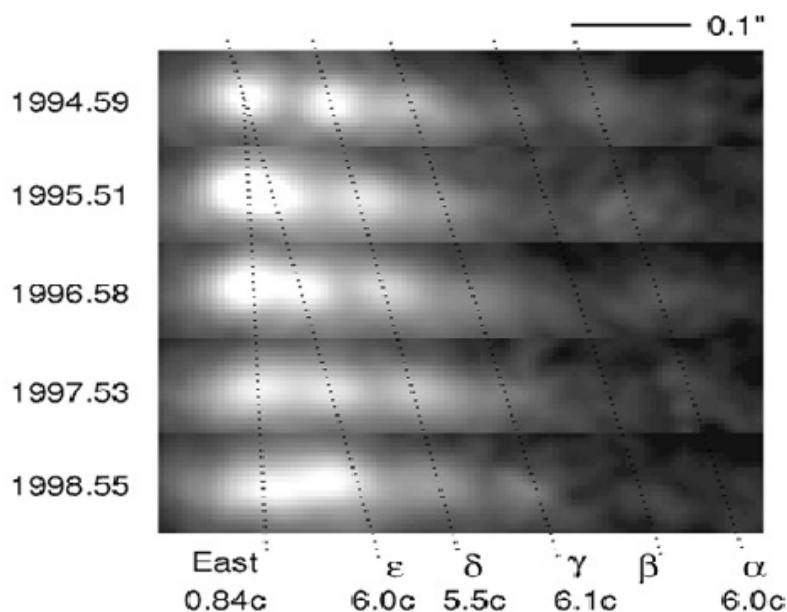
Το εξωτερικό κομμάτι του *Jet* φαίνεται να είναι πολύ πιο διαφορετικό από το εσωτερικό, για το οποίο συζητήσαμε παραπάνω. Το *Knot A* είναι ο λαμπρότερος σχηματισμός πάνω στον πίδακα, εξαιρώντας βέβαια το *HST* – 1. Έχει προταθεί ότι, στη θέση του *Knot A* βρίσκεται ένα λοξό *Shock Wave*, το οποίο διαταράσσει τη τακτική δομή του πίδακα οδηγώντας έτσι στο σχηματισμό του συμπλέγματος των *Knots B* και *C*.

Η ενεργή περιοχή *A*, φαίνεται να σχηματίζεται από πολύπλοκα μικρότερα *Knots*. Μετρήθηκε ότι, η ταχύτητα του *sub-Knot A1* είναι  $1.32 \pm 0.12c$ . Αντίθετα, για το *A2*, η ακτινική ταχύτητα είναι αρκετά μικρότερη,  $0.31 \pm 0.06c$ . Ποιοτικά, το *A-B* σύμπλεγμα είναι αρκετά ενεργό με όλο και νέες συνιστώσες να δημιουργούνται και να κινούνται με μεγάλες ταχύτητες ως προς τις παρακείμενες περιοχές. Οι συνιστώσες *B1*, *B2*, *B3* καθώς και το *Knot C*, εμφανίζουν σημαντικές φαινόμενες ταχύτητες ( $0.5 – 1.5c$ ) στην ακτινική και στην εγκάρσια κατεύθυνση.

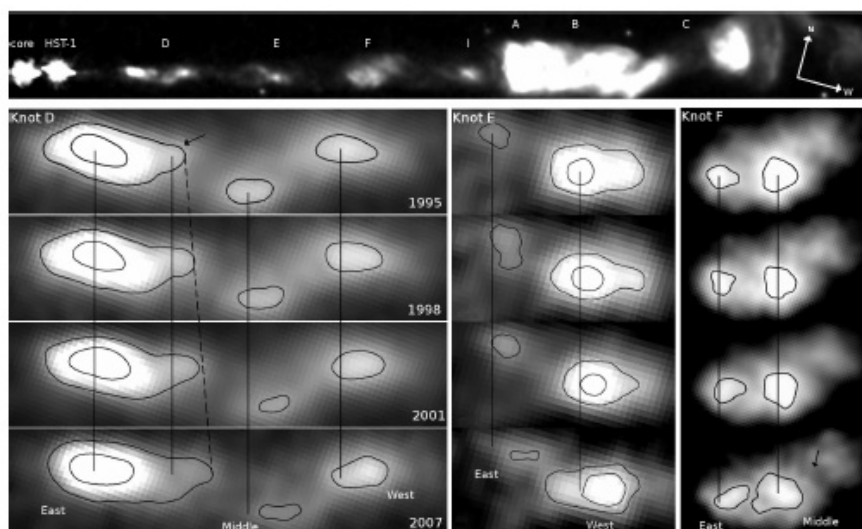
Το πιο ενδιαφέρον εύρημα, προκύπτει από το χαμηλότερο πάνελ του σχήματος 1.6, που έχουν σχεδιαστεί τα διανύσματα της ταχύτητας από το κέντρο κάθε ενεργής περιοχής. Ειδικότερα για την περιοχή *A – B – C*, ο προσανατολισμός των διανυσμάτων της ταχύτητας υποδεικνύει τη προβολή στο επίπεδο του ουρανού της ελικοειδούς κίνησης του πίδακα [14].



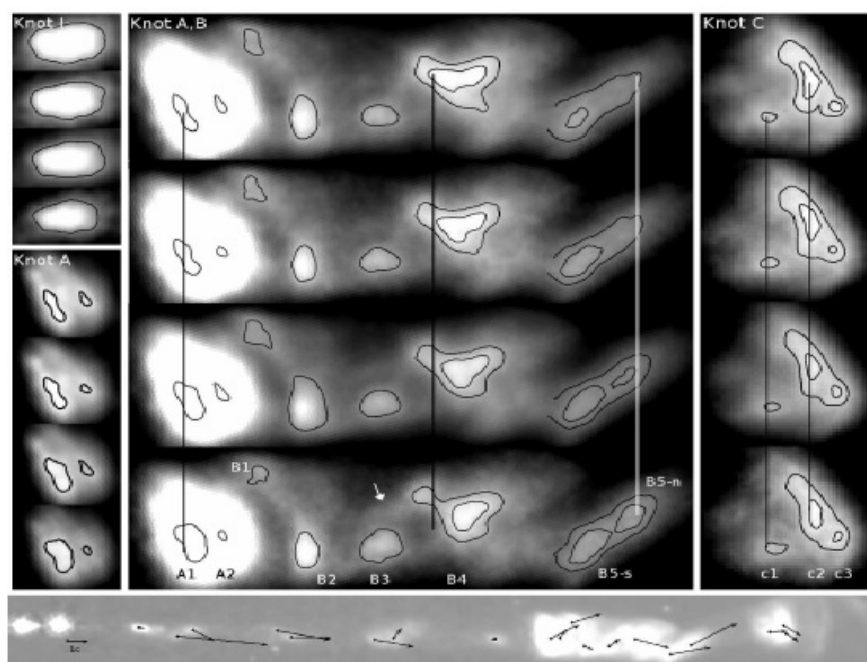
Σχήμα 1.3: Εικόνες του σχετικιστικού πίδακα στον M87 για διαφορετικά μήκη κύματος. **Πάνω:** Ο M87 στη περιοχή των ράδιο κυμάτων. **Μέση:** Άποψη του πίδακα στο οπτικό. **Κάτω:** Απεικόνιση στις ακτίνες χ. Εύκολα παρατηρούμε ότι, η ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας διαφοροποιείται στις διάφορες φασματικές περιοχές.



Σχήμα 1.4: Η περιοχή HST – 1 στο οπτικό. Τα διαδοχικά πάνελ καλύπτουν μια περίοδο μερικών ετών, έτσι ώστε να γίνει αντιληπτή η υπέρφωτη κίνηση διαφόρων συνιστωσών της ροής. Οι διακεκομμένες ευθείες έχουν προστεθεί ως γραμμές αναφοράς που ακολουθούν την κίνηση συγκεκριμένων Knots [12].



Σχήμα 1.5: Φαινόμενες κινήσεις για τα Knots του εσωτερικού τμήματος του Jet [14].



Σχήμα 1.6: Φαινόμενες κινήσεις για τα Knots του εξωτερικού τμήματος του Jet. Στο κάτω πάνελ ο προσανατολισμός των διανυσμάτων της ταχύτητας υποδεικνύει τη παρουσία ελικοειδούς κίνησης στο πίδακα [14].

### 1.3 Κινηματική συμπεριφορά του *Jet*

Η εκτίμηση της ταχύτητας σε έναν αστροφυσικό πίδακα, είναι πολύ σημαντικό μέγεθος για τη περιγραφή του. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, η φαινόμενη ταχύτητα δίνει ένα κατώτατο όριο στον παράγοντα *Lorentz* της ροής και ένα ανώτατο όριο στη γωνία υπό την οποία παρατηρούμε τον πίδακα ως προς την ακτίνα παρατήρησης.

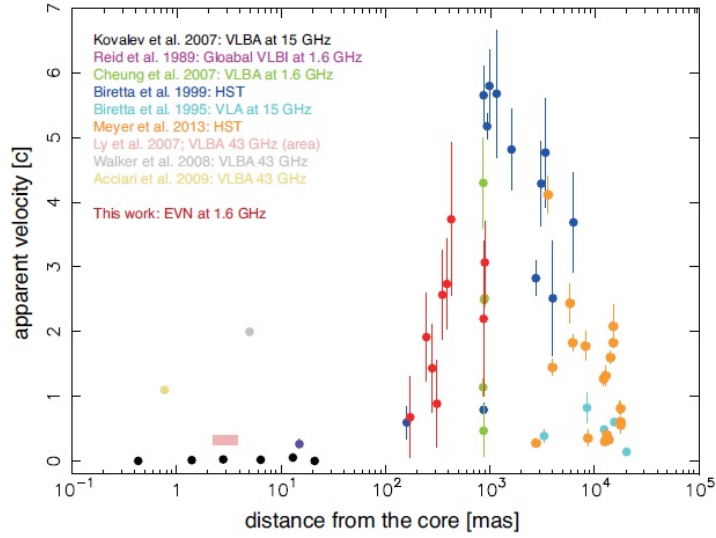
Σχεδόν όλες οι μελέτες για την *proper* κίνηση των ενεργών γαλαξιών που διαθέτουν και σχετικιστική εκροή, χρησιμοποιούν *Very-Long-Baseline-Interferometry (VLBI)*, και ειδικότερα για τον M87 έχουμε παρατηρήσει μη σχετικιστικές ταχύτητες σε απόσταση ενός *pc* κοντά στον πυρήνα. Ωστόσο, έχουν μετρηθεί και φαινόμενες ταχύτητες μεγαλύτερες του φωτός κοντά στη περιοχή του *HST - 1* και προς τα έξω [15].

Το σχήμα 1.7 συνοψίζει την παρατηρούμενη ταχύτητα για όλο το μήκος του *Jet*, όπως υπολογίστηκε σε αρκετές μελέτες. Σύμφωνα, λοιπόν, με το σχήμα 1.7, καμία ένδειξη υψηλών σχετικιστικών ταχυτήτων στην περιοχή κοντά στον πυρήνα, έως 1 *pc*, δεν καταγράφεται. Ωστόσο, μετά από αυτή την απόσταση, η ροή υπόκειται σε σταδιακή επιτάχυνση η οποία κλιμακώνεται στο *HST - 1 Knot*. Πράγματι, στο *HST - 1* παρατηρούμε τη μέγιστη τιμή που καταλαμβάνει η ταχύτητα, η οποία είναι αρκετά σχετικιστική ( $\Gamma \approx 7$ ). Πέρα από τη περιοχή του *HST - 1* και προς τα έξω παρατηρούμε τη σταδιακή αποκλιμάκωση στη ταχύτητα, παραμένοντας βέβαια σχετικιστική ( $\Gamma \approx 2$ ) ακόμα και στο *Knot C*.

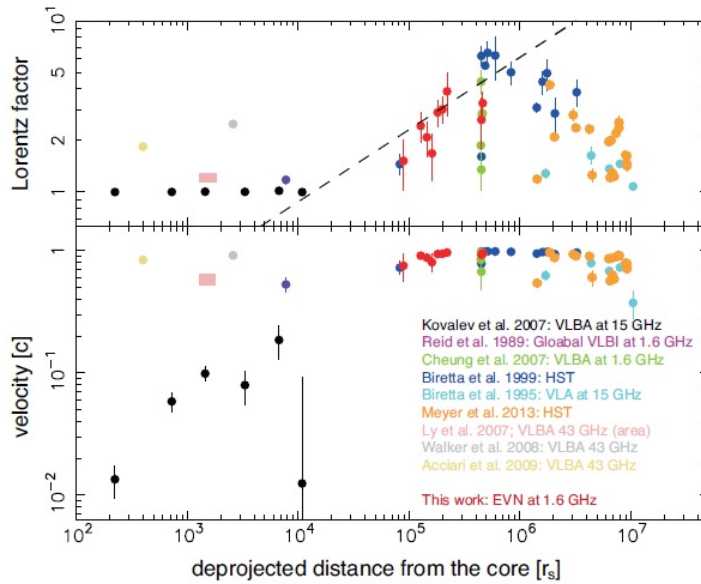
Στο σχήμα 1.8, δίνουμε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας και του αντίστοιχου παράγοντα *LORENTZ* για κάθε ενεργό τομέα σαν συνάρτηση της προβολής της απόστασης στο επίπεδο του ουρανού. Αξίζει να σημειωθεί ότι, η αύξηση στη ταχύτητα από από το μη-σχετικιστικό όριο ( $0.01c$ ) στο σχετικιστικό ( $0.97c$ ), λαμβάνει χώρα στο διάστημα  $10^2 - 10^6 r_s$ . Εάν απλοϊκά υποθέσουμε ότι, οι παρατηρούμενες ταχύτητες αντανακλούν τη συμπεριφορά της ροής, η βαθμιαία επιτάχυνση της ροής του πίδακα λαμβάνει χώρα από την απόσταση των  $200 r_s$  έως και  $5 \times 10^5 r_s$ , δηλαδή, πάνω από τρεις τάξεις μεγέθους.

Το άνοιγμα του *Jet* συναρτήσει της απόστασης από τον πυρήνα δίνεται στο σχήμα 1.9. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, υπάρχει μια ομαλή μεταβολή της γωνίας του πίδακα από τις  $60^\circ$  σε λιγότερες από  $10^\circ$  στην απόσταση των 10 *pc* [16]. Σύμφωνα με τα διαγράμματα παραπάνω, η ευθυγράμμιση και η επιτάχυνση του πίδακα λαμβάνουν χώρα στην ίδια χωρική κλίμακα ταυτόχρονα, ορίζοντας με αυτό το τρόπο τη ζώνη επιτάχυνσης [17].

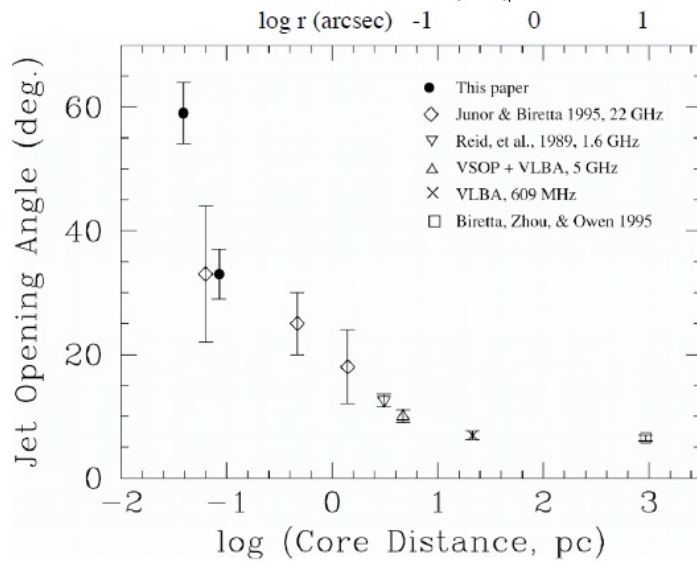
10 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΝΕΡΓΟ ΓΑΛΑΞΙΑ M87



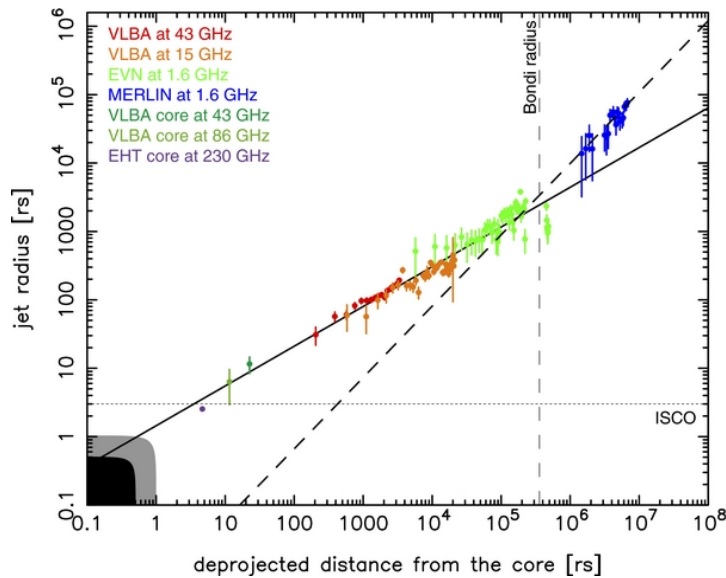
Σχήμα 1.7: Φαινόμενη ταχύτητα κατά μήκος του Jet. Έως το HST – 1 Knot συντελείται η επιτάχυνση της ροής. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, στη περιοχή του HST – 1 καταγράφεται υπέρφωτη κίνηση ( $\approx 6c$ ), η οποία αποκλιμακώνεται καθώς κινούμαστε προς τα έξω [15].



Σχήμα 1.8: Η ταχύτητα και ο παράγοντας LORENTZ της αστροφυσικής εκροής [15].



Σχήμα 1.9: Το άνοιγμα της σχετικιστικής εκροής του M87 σαν συνάρτηση της απόστασης από το πυρήνα, όπως έχει υπολογιστεί σε διάφορες μελέτες. Όπως παρατηρούμε, στα 10 πρώτα pc η ευθυγράμμιση του πίδακα ολοκληρώνεται. Υπενθυμίζουμε ότι, στην ίδια απόσταση επιτυγχάνεται και η επιτάχυνση της ροής [16].



Σχήμα 1.10: Μέτρηση της ακτίνας του πίδακα σαν συνάρτηση της προβολής της απόστασης στο επίπεδο του ουρανού. Η προσαρμογή καμπυλών πάνω στα δεδομένα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, το παραβολικό σχήμα του Jet εκφυλίζεται σε κωνικό κοντά στη περιοχή του HST – 1. Για το διάγραμμα χρησιμοποιήθηκαν συνδυασμός παρατηρήσεων στα ραδιοκύματα [5].



## 1.4 Το σχήμα του σχετικιστικού *Jet*

Στο σχήμα 1.10 παραπάνω, δίνεται η γραφική παράσταση της ακτίνας του *Jet* σαν συνάρτηση της προβολής της απόστασης στο επίπεδο του ουρανού σε μονάδες ακτίνων *Schwarzschild*. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι, ο τρόπος που έχει οριστεί η ακτίνα, δηλαδή κάθετα στον άξονα του *Jet*, δεν επηρεάζεται από το προσανατολισμό του πίδακα [5].

Σύμφωνα με το διάγραμμα προκύπτει ότι, το σχήμα του πίδακα αποτελείται από δύο διαφορετικούς νόμους δύναμης. Αρχικά, το *Jet* εκτονώνεται προς τον διαγαλαξιακό χώρο, έχοντας παραβολικό σχήμα με εκθέτη  $\alpha = 1.73 \pm 0.05$ . ( $z \propto r^\alpha$ , όπου  $r$  η ακτίνα του *Jet* και  $z$  η απόσταση πάνω στον άξονα από τον πυρήνα του πίδακα.). Το παραβολικό σχήμα διατηρείται σε απόσταση έως και  $2.5 \times 10^5 r_s$ .

Από την απόσταση  $2.5 \times 10^5 r_s$  και έπειτα, ο αστροφυσικός πίδακας του Μ87 λαμβάνει κωνικό σχήμα με εκθέτη  $\alpha = 0.96 \pm 0.1$ . Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι, ο πίδακας διαδίδεται στον γαλαξιακό χώρο με έναν απλό νόμο δύναμης για πάνω από τρεις τάξεις μεγέθους της απόστασης. Επιπρόσθετα, πρέπει να αναφέρουμε ότι, οι δύο νόμοι δύναμης που ορίζουν το σχήμα του πίδακα, διασταυρώνονται στη απόσταση των  $2.5 \times 10^5 r_s$ , δηλαδή παραπλήσια της ενεργούς περιοχής *HST* – 1 και της ακτίνας *Bondi*<sup>1</sup> ( $r_B = 3 \times 10^5 r_s$  ή 250 *pc*). Το συμπέρασμα για το σχήμα του πίδακα από το διάγραμμα 1.10 μπορεί να θεωρηθεί σαν μια σημαντική παρατήρηση, εφόσον είναι η πρώτη φορά που ανιχνεύεται κάποια μετάβαση από παραβολικές σε κωνικές γραμμές ροής σε ένα εξωγαλαξιακό σύστημα.

Εάν η πίεση  $P_{ism}$  του εξωτερικού μέσου μειώνεται πιο αργά από τη πίεση  $P_{jet}$  στο εσωτερικό του πίδακα, τότε η εκροή θα αποκτήσει σχήμα παραβολικό και σε κάποια απόσταση θα ενεργοποιηθεί ένα *Shock* επανευθυγράμμισης ή διαφορετικά *Recollimation Shock*. Από παρατηρήσεις στις ακτίνες  $\chi$ , μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για τις ιδιότητες του διαγαλαξιακού αερίου (*ISM*), όπως για παράδειγμα την ακτίνα *Bondi* ( $r_B = 250 pc$ ) και την ακτίνα του πυρήνα *King* ( $r_c = 1.4 Kpc$ ) [18], [19], [20]. Από την ακτίνα του πυρήνα *King* συμπεραίνουμε ότι, ο αστροφυσικός πίδακας του Μ87, του οποίου το μήκος εκτιμάται περίπου σε 1.5 *kpc*, βρίσκεται ολόκληρος μέσα στο διαγαλαξιακό αέριο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη συνεχή αλληλεπίδραση του πίδακα με την εξωτερική ατμόσφαιρα, εφόσον στον πίδακα ασκείται η εξωτερική πίεση του μέσου. Επιπλέον, το κωνικό σχήμα του πίδακα για περισσότερο από τρεις και πλέον τάξεις μεγέθους της απόστασης δείχνει την ομαλή και ομογενή κατανομή του διαγαλαξιακού αερίου μέσα στη σφαίρα *King*.

Το κωνικό κομμάτι του πίδακα υποδεικνύει ότι, δεν υπάρχει κάποια περαι-

<sup>1</sup>Η ακτίνα *Bondi* ορίζεται ως την ακτίνα στην οποία η ροή αποκτά υπερηχητική ταχύτητα.

τέρω ευθυγράμμιση της εκροής από την ενεργή περιοχή  $HST - 1$  έως και το *Knot A*. Αν πράγματι συμβαίνει αυτό, η συνθήκη  $P_{Jet} \geq P_{ISM}$  θα πρέπει να ισχύει. Πράγματι, όλα τα *Knots Downstream* του  $HST - 1$  φαίνεται να έχουν μεγαλύτερη πίεση από αυτή του εξωτερικού μέσου.

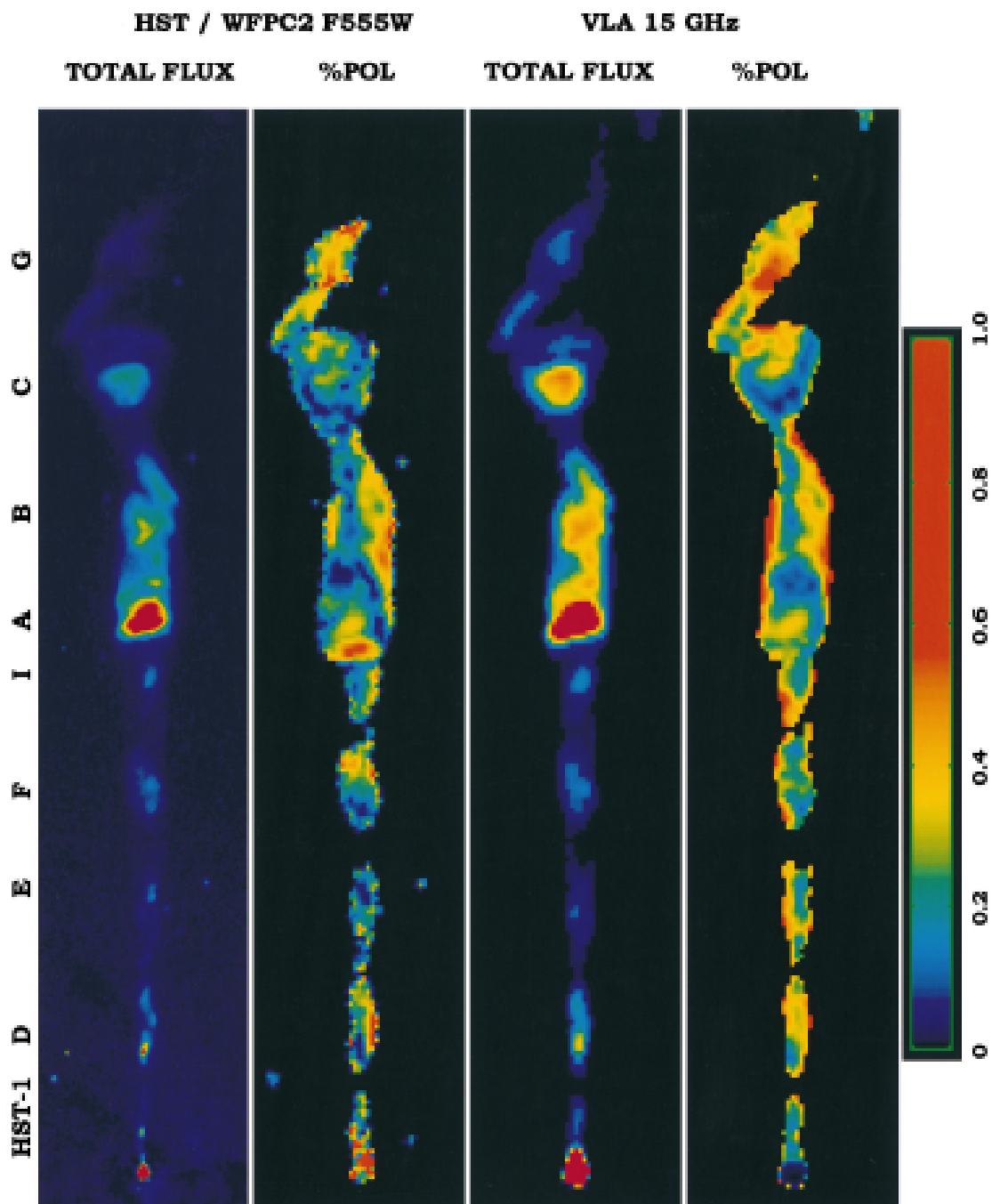
Μια τελευταία παρατήρηση από το διάγραμμα 1.10, προκύπτει για την ακτίνα του αστροφυσικού πίδακα στη περιοχή του  $HST - 1$ . Η ακτίνα του  $HST - 1$  εμφανίζεται να είναι μικρότερη από το εκτιμώμενο μέγεθος, που υπολογίζεται βάσει των δύο νόμων δύναμης. Η μέγιστη ακτίνα στη περιοχή του  $HST - 1$  είναι  $2200 \pm 30 r_s$ , ενώ κανείς μπορεί να υπολογίσει την ακτίνα περίπου σε  $3000 \pm 400 r_s$  για το κωνικό τμήμα και  $4100 \pm 200 r_s$  για το παραβολικό. Μια προφανής ερμηνεία του γεγονότος αυτού είναι ότι, σε αυτή τη περιοχή το *Jet* του M87 υπόκειται σε περαιτέρω απότομη ευθυγράμμιση.

## 1.5 Μαγνητικά πεδία στον M87

Μέχρι τώρα, αναφερθήκαμε σε παρατηρήσεις που αφορούν τον γαλαξία M87 ως προς την γενικότερη δομή του, το σχήμα και τις *proper* κινήσεις των διαφόρων συνιστωσών. Η προσέγγιση όμως, του πίδακα σαν μια απλή υδροδυναμική ροή δεν μπορεί να αναπαράγει την πλούσια δομή που αναπτύσσεται στο εσωτερικό του και να περιγράψει τη δυναμική του. Επιπρόσθετα, οι ενεργές περιοχές που περιγράψαμε παραπάνω, φαίνεται ότι, δεν σχετίζονται με αστάθειες *Kelvin-Helmholtz* [21]. Από την άλλη πλευρά, έχει γίνει σαφές ότι, τα μαγνητικά πεδία παίζουν σημαντικό ρόλο στη δυναμική του M87.

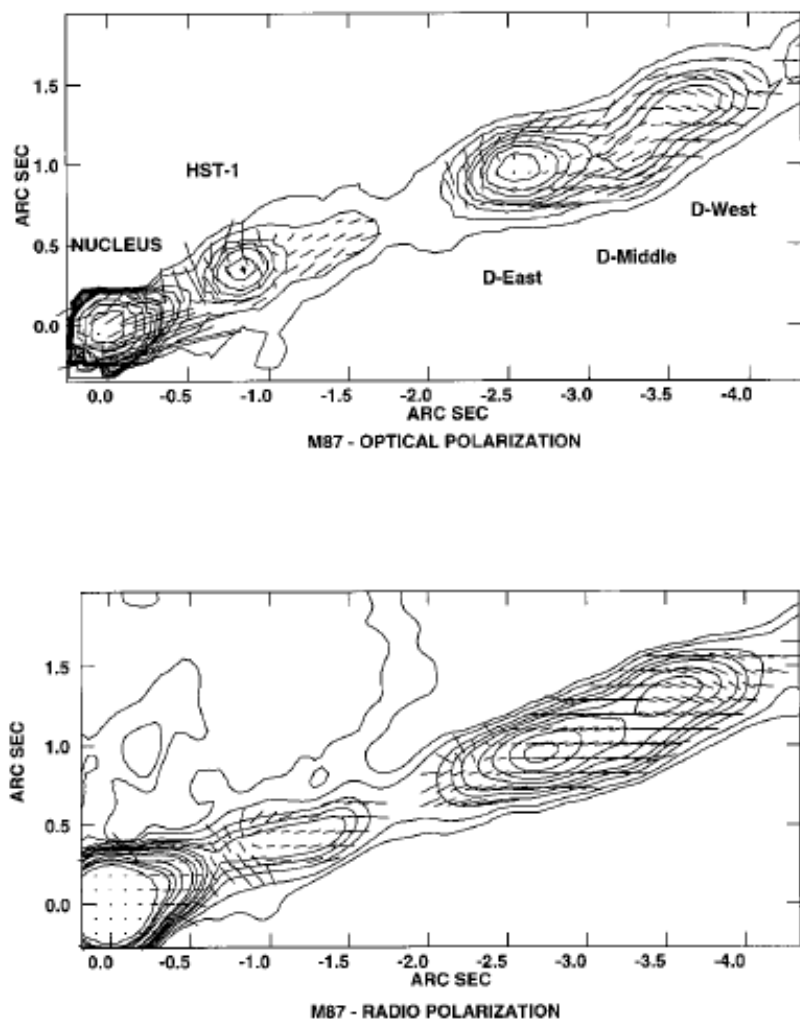
Σε αυτή τη κατεύθυνση, οι *Perlman et al.* [8] μέτρησαν την πόλωση στο οπτικό και στα στα ραδιοκύματα για τον M87. Στο σχήμα 1.11 παρουσιάζουμε χάρτες πόλωσης στο οπτικό και στη περιοχή των ραδιοκυμάτων για τον M87. Εύκολα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι, ο πίδακας του ενεργού γαλαξία είναι ισχυρά πολωμένος σχεδόν σε όλο του το εύρος. Ιδιαίτερα, ορισμένοι τομείς μέσα στα *Knots* φτάνουν σε ποσοστό πόλωσης μέχρι και 50%. Η ισχυρή και εκτεταμένη πόλωση του M87 υποδεικνύει τη παρουσία διατεταγμένου μαγνητικού μαγνητικού πεδίου παράλληλα με τη ροή του πίδακα. Οι ισχυρότερες περιοχές πόλωσης μέσα στο πίδακα παρατηρούνται στα *Knots HST-1, D, A, B*. Υπενθυμίζουμε ότι, οι περιοχές αυτές παρουσιάζουν υπέρφωτη κίνηση και ακτινοβολούν τη μεγαλύτερη λαμπρότητα.

Οι χάρτες της πόλωσης τόσο στο οπτικό όσο και στο ράδιο φαίνεται να έχουν αρκετές ομοιότητες. Ιδιαίτερα, το μαγνητικό πεδίο και στις δύο εικόνες προσανατολίζεται παράλληλα με τον άξονα του *Jet*. Βέβαια, υπάρχουν και περιοχές *upstream* των *Knots*, στις οποίες το μαγνητικό πεδίο γίνεται κάθετο στον άξονα του *Jet*. Ο προσανατολισμός του μαγνητικού πεδίου στο οπτικό είναι κάθετος ως προς τη κατεύθυνση της ροής στα *Knots HST-1, D, E, F*,



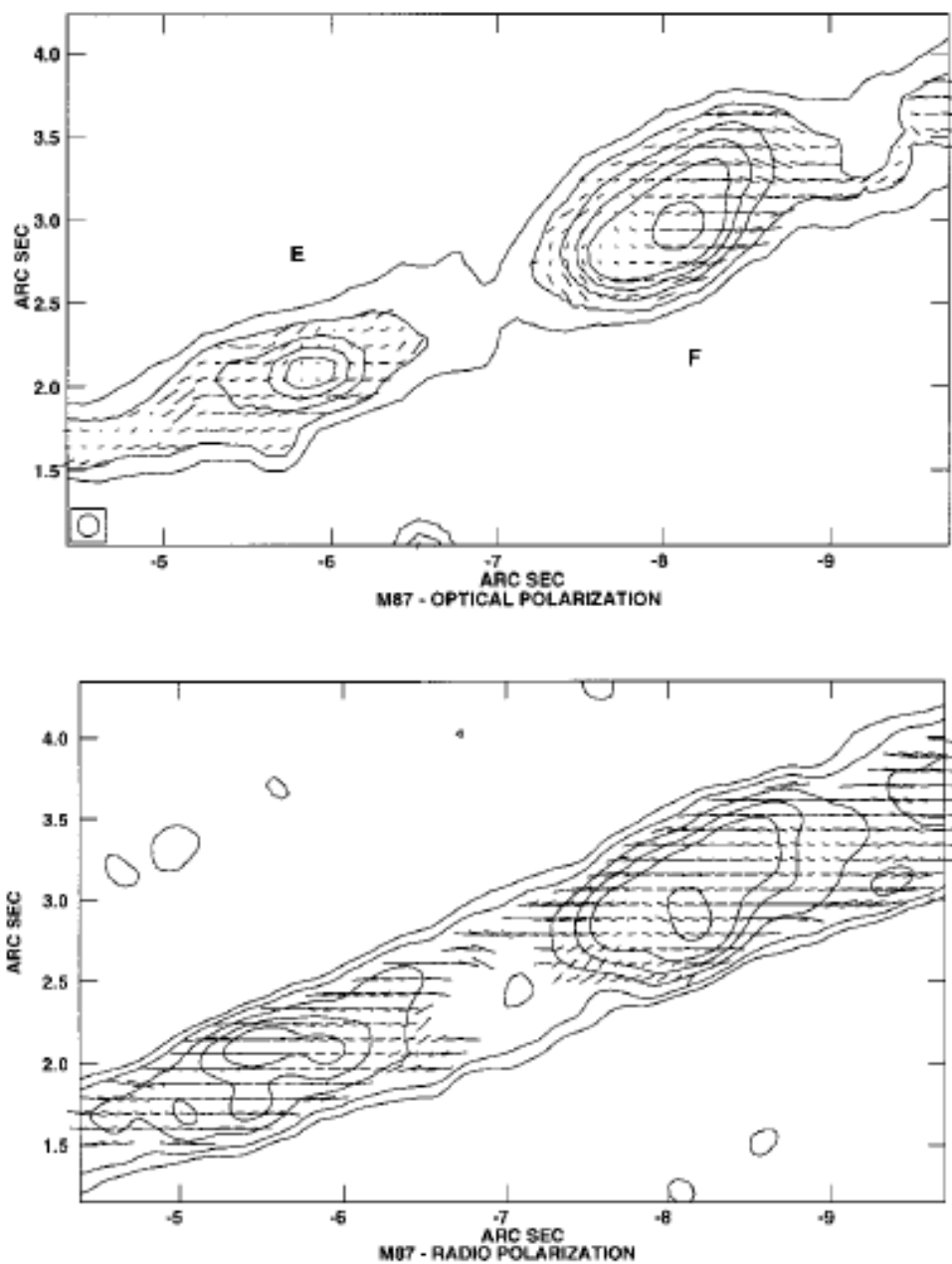
Σχήμα 1.11: Χάρτες πόλωσης του ενεργού γαλαξία M87 στο οπτικό και στη περιοχή των ραδιοκυμάτων. Οι περιοχές στις οποίες βρίσκονται τα Knots είναι ιδιαίτερα πολωμένες σε σχέση με την υπόλοιπη εκροή [8].

αλλά παραμένει παράλληλος στα ραδιοκύματα. Στις εικόνες 1.12, 1.13, 1.14, απεικονίζονται χάρτες πόλωσης για τα διάφορα *Knots*, στους οποίους έχουν προστεθεί τα διανύσματα του μαγνητικού πεδίου. Η περιοχή στα ραδιοκύματα που καλείται ως πυρήνας δεν παρουσιάζει κάποια αξιοσημείωτη πόλωση.

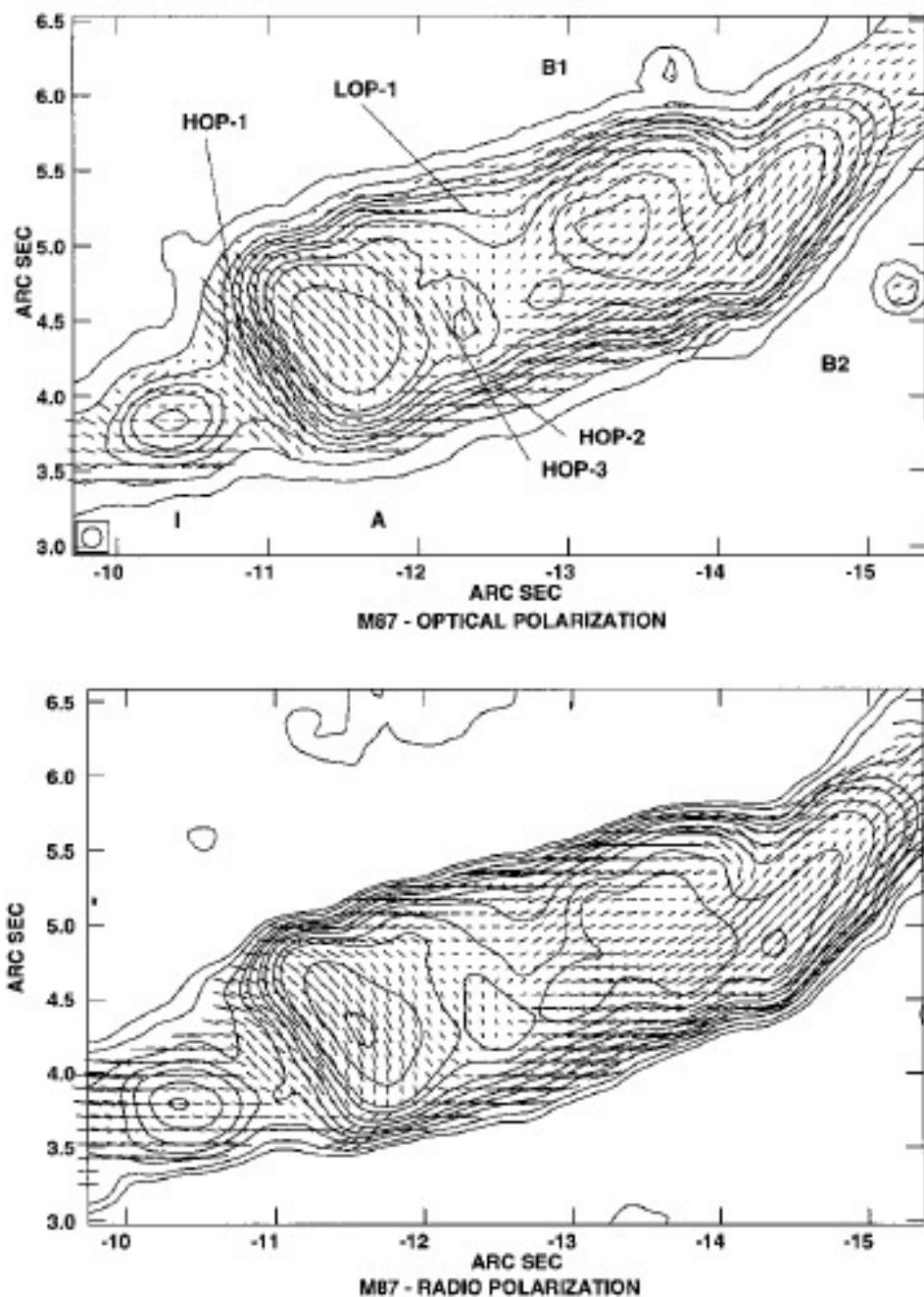


Σχήμα 1.12: Τοπολογία του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο του ουρανού για τα *Knots* HST-1 και D. Η πάνω εικόνα αναφέρεται στο οπτικό ενώ η κατώτερη στα ραδιοκύματα. Καμία αξιοσημείωτη πόλωση δεν παρατηρείται στη περιοχή του πυρήνα [8].

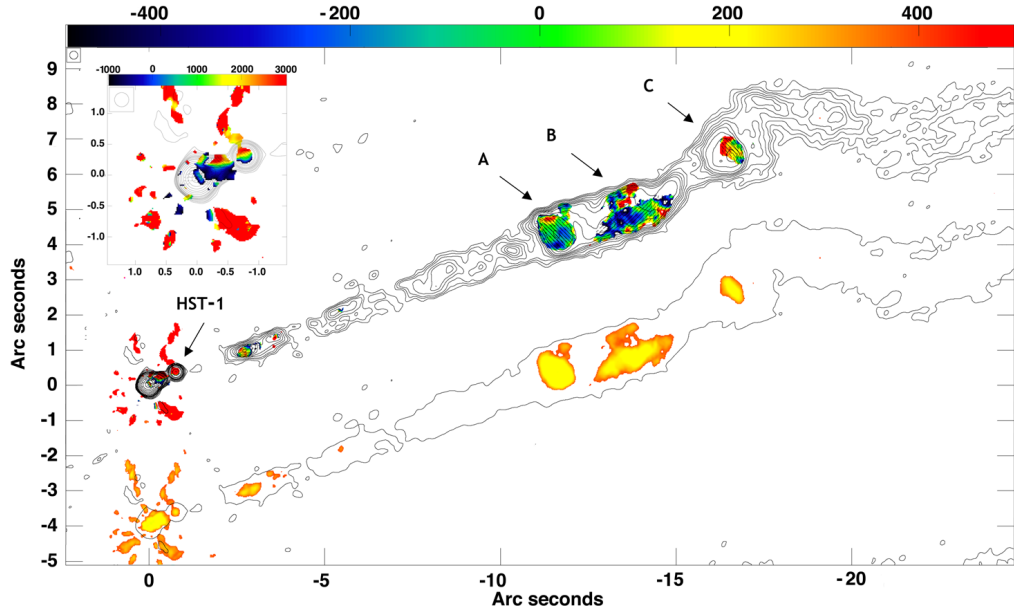
Μελετώντας το μηχανισμό της πόλωσης, μπορούμε να αποδείξουμε την παρουσία μαγνητικού πεδίου, του οποίου το διάνυσμα προβάλλεται στο επίπεδο του ουρανού. Η θεωρητική μελέτη των σχετικιστικών εκροών, απαιτεί κυρίως την παρουσία εγκάρσιου μαγνητικού πεδίου. Μέρος, δηλαδή, της εγκάρσιας



Σχήμα 1.13: Τοπολογία του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο του ουρανού για τα Knots E και F. Η ανώτερη εικόνα αναφέρεται στο οπτικό ενώ η κατώτερη στα ραδιοκύματα [8].



Σχήμα 1.14: Τοπολογία του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο του ουρανού για τα Knots A και B. Η ανώτερη εικόνα αναφέρεται στο οπτικό ενώ η κατώτερη στα ραδιοκύματα. Η απότομη αλλαγή στον προσανατολισμό του μαγνητικού πεδίου, ίσως υπονοεί την ύπαρξη κάποιου στατικού Shock Wave [8].



Σχήμα 1.15: Χάρτης του γαλαξία M87 που απεικονίζει το μέτρο της στροφής *Faraday*, υποδεικνύοντας έτσι τη παρουσία εγκάρσιου μαγνητικού πεδίου [22].

συνιστώσας του πεδίου προβάλλεται στο επίπεδο του ουρανού και παρατηρείται μέσω της πόλωσης του φωτός, ενώ το υπόλοιπο κομμάτι της αντιστοιχεί στην γραμμή παρατήρησης (*Line of Sight*). Η μέθοδος για τη μελέτη της συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου που αντιστοιχεί στην γραμμή παρατήρησης, προκύπτει από την ανάλυση της στροφής *Faraday* μέσα στη πηγή. Τέτοιους είδους παρατηρήσεις για τον M87 έγιναν σχετικά πρόσφατα [22].

Η γωνία πόλωσης περιστρέφεται σύμφωνα με τη σχέση  $\chi = \chi_0 + RM\lambda^2$ , όπου  $\chi_0$  είναι η γωνία του αρχικού επιπέδου πόλωσης,  $\lambda$  το μήκος κύματος της ακτινοβολίας και  $RM$  το μέτρο της στροφής *Faraday*, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$RM \propto \int n_e B_{los} dl \quad (1.1)$$

Η  $n_e$  είναι η πυκνότητα των ηλεκτρονίων και  $B_{los} dl$  η συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου παράλληλα στη γραμμή παρατήρησης. Εάν ο αστροφυσικός πίδακας περιέχει ελικοειδές μαγνητικό πεδίο, τότε η τοροειδής συνιστώσα του θα προκαλέσει μια βαθμίδα και πιθανότητα τη αλλαγή του πρόσημου στο μέτρο της στροφής *Faraday*  $RM$ .

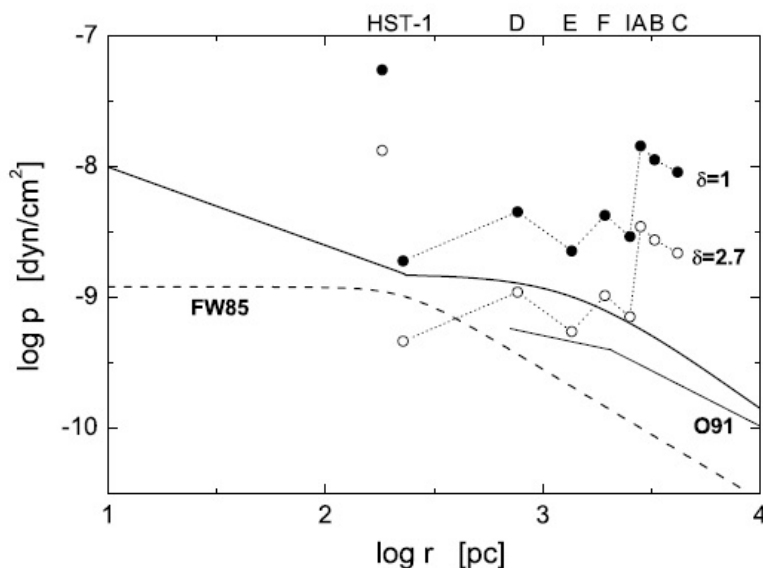
Στο σχήμα 1.15 δίνεται χάρτης του M87 που απεικονίζει το μέτρο της στροφής *Faraday* και κατ' επέκταση τη παρουσία εγκάρσιου μαγνητικού πεδίου. Ο κατώτερος χάρτης περιέχει το σφάλμα των παρατηρήσεων. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα, φαίνεται καθαρά η βαθμίδα στο μέτρο της στροφής *Faraday* στις

ενεργές περιοχές *HST* – 1, *A*, *C*.

## 1.6 Η γαλαξιακή ατμόσφαιρα του Μ87

Μέχρι στιγμής, αναφερθήκαμε σε λεπτομερείς παρατηρήσεις για όλες τις πτυχές που αφορούν τον πίδακα του ενεργού γαλαξία Μ87. Ωστόσο έχει γίνει κατανοητό, η στενή αλληλεπίδραση του πίδακα με το εξωτερικό περιβάλλον, από το οποίο περιβάλλεται. Είναι λοιπόν χρήσιμο, να αναφέρουμε συνοπτικά και μερικές από τις ιδιότητες του γαλαξιακού υλικού, μέσα στο οποίο εκτονώνεται το *Jet*. Στο σχήμα 1.16 δίνουμε το profile του λογαρίθμου της πίεσης συναρτήσει της απόστασης, όπως αυτό έχει προκύψει σε διάφορες μελέτες [6], [23], [24]. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, η πίεση του αερίου μειώνεται από τις  $10^{-8} \text{ dyn cm}^{-2}$  στις  $10^{-10} \text{ dyn cm}^{-2}$  στο διάστημα από 10 pc σε 10 kpc αντίστοιχα.

Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι, η πρώτη ενεργή περιοχή (*HST* – 1), η οποία έχει μεγαλύτερη πίεση από το αέριο, βρίσκεται πολύ κοντά στην ακτίνα *Bondi*, εκεί δηλαδή όπου το profile της πίεσης αλλάζει. Επιπρόσθετα, η περιοχή *Downstream* του *HST* – 1 φαίνεται να έχει μεγαλύτερη πίεση ως προς το εξωτερικό μέσο έως και μια τάξη μεγέθους. Ωστόσο, συμπεριλαμβάνοντας και φαινόμενα εξαιτίας της κατευθυντικότητας της ακτινοβολίας (*Beaming Effects*), προκύπτει ότι η ελάχιστη ενέργεια των *D*, *E*, *F*, *I Knots* είναι σχεδόν η ίδια με το εξωτερικό περιβάλλον.



Σχήμα 1.16: Το profile του λογαρίθμου της πίεσης συναρτήσει της απόστασης για το εξωτερικό μέσο που περιβάλλει τον πίδακα [23].



## Κεφάλαιο 2

# Το χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα Riemann

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο παρουσιάστηκαν οι σημαντικότερες παρατηρήσεις του ενεργού γαλαξία M87. Ο αστροφυσικός πίδακας ενός ενεργού γαλαξία μπορεί να εκτείνεται σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από το κεντρικό αντικείμενο. Στη περίπτωση μάλιστα του M87 η έκταση του *Jet* εκτιμάται περίπου στα 1.5 *kpc*.

Αν και οι αποστάσεις αυτού του μεγέθους είναι μεγαλύτερες ακόμα και από τις διαστάσεις του ίδιου του γαλαξία που φιλοξενεί το *Jet*, γίνεται σαφές από τις παρατηρήσεις, ότι οι αστροφυσικές εκροές δεν διαδίδονται στο κενό. Αντίθετα, η εκτόνωσή τους λαμβάνει χώρα είτε μέσα στο αέριο του γαλαξιακού *Bulge* είτε στο υλικό του εξωγαλαξιακού χώρου.

Αποτέλεσμα αυτού είναι, η στενή αλληλεπίδραση του *Jet* με το εξωτερικό περιβάλλον. Η αλληλεπίδραση αυτή καθορίζει τόσο το σχήμα και τη γεωμετρία του πίδακα όσο και την εσωτερική δομή του *Jet* που τυχόν αναπτύσσει. Για το λόγο αυτό, είναι αναγκαία η φυσική περιγραφή του φαινομένου.

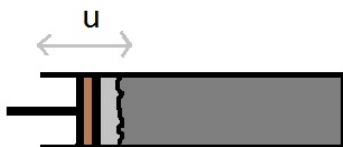
Αντικείμενο του κεφαλαίου είναι η αναλυτική περιγραφή αυτής της αλληλεπίδρασης με τη βοήθεια του προβλήματος *Riemann*. Στο πρώτο μέρος, περιγράφονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες πάνω στα μη σχετικιστικά *Shocks* και τα *Simple Waves*. Στη συνέχεια, δίνεται ο ορισμός του προβλήματος *Riemann* στην απλή υδροδυναμική περίπτωση. Η υδροδυναμική προσέγγιση δίνει τη δυνατότητα, να διατυπωθεί με σαφήνεια το πρόβλημα που θέλουμε να μελετήσουμε.

Στο δεύτερο μέρος, παρουσιάζεται η σχετικιστική εκδοχή του προβλήματος *Riemann*. Επιπλέον, αυξάνουμε τους βαθμούς ελευθερίας εισάγοντας μαγνητικό πεδίο. Υπολογίζουμε τις αναλυτικές λύσεις που περιγράφουν τα *Shocks* και τα *Simple Waves* και τις συνθέτουμε για να επιλύσουμε το χρονοεξαρτώμενο μαγνητούδροδυναμικό πρόβλημα *Riemann*. Τελικά, παραθέτουμε ενδιαφέρουσες εφαρμογές του προβλήματος που συναντώνται στην αστροφυσική.

## 2.1 Εισαγωγή στα *Shocks* και τα *Simple Waves*

Τόσο τα *Simple Waves* όσο και τα *Shocks*, αποτελούν μηχανισμούς που συναντώνται σε πολλές αστροφυσικές εφαρμογές διαφόρων ερευνητικών πεδίων. Γι' αυτό, η μελέτη τους είναι πολύ σημαντική για την κατανόηση των αστροφυσικών φαινομένων και την ερμηνεία των παρατηρήσεων. Ειδικότερα, *Shock Waves* συναντάμε σε εκρήξεις και υπολείμματα υπερκαινοφανών, στα *GRB's*, στους αστρικούς ανέμους κ.α.. Επιπρόσθετα, η παρουσία των *Shocks* επιβάλλεται στα περισσότερα αστροφυσικά μοντέλα, αφού θεωρούνται ως οι χώροι επιτάχυνσης μη θερμικών σωματιδίων που είναι υπεύθυνα για την παραγόμενη ακτινοβολία. Από την άλλη μεριά, τα *Simple Waves* έχουν προταθεί ως μηχανισμοί επιτάχυνσης αστροφυσικών ροών, όπως για παράδειγμα αυτές των *GRB's*.

Στην ενότητα αυτή, περιγράφονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες σχετικά με τα μη σχετικιστικά *Shocks* και τα *Simple Waves*. Παραταύτα, το αντικείμενο του κεφαλαίου είναι η μελέτη του χρονοεξαρτώμενου μαγνητοϋδροδυναμικού προβλήματος *Riemann*. Η μελέτη της μη σχετικιστικής εκδοχής του θα βοηθήσει στην εύκολη κατανόηση του προβλήματος που θέλουμε να επιλύσουμε. Η πορεία για την αναλυτική επίλυση του μαγνητοϋδροδυναμικού προβλήματος *Riemann*, αν και δυσκολότερη στη μαθηματική επεξεργασία, είναι παρόμοια με αυτή της απλής υδροδυναμικής περίπτωσης. Για μια αναλυτικότερη παρουσίαση των θεμάτων που παρατίθενται στην ενότητα, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις αναφορές [25] και [26].



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα μονοδιάστατης κίνησης ενός ρευστού. Το αέριο βρίσκεται έγκλειστο μέσα στον κύλινδρο στο άκρο του οποίου εφαρμόζεται ένα έμβολο. Η υπερηχητική συμπίεση του αερίου έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ενός *Shock* μέσα στη ροή. Αντίθετα, η αποσυμπίεση προκαλεί την εμφάνιση ενός *Rarefaction Wave*.

Για την μελέτη των *Shocks* και των *Simple Waves* θα θεωρήσουμε την μονοδιάστατη κίνηση ενός ρευστού το οποίο αρχικά βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Η απλούστερη πειραματική διάταξη για μια τέτοια ροή είναι να θε-

ωρήσουμε, ότι το ρευστό βρίσκεται εγκλωβισμένο σε έναν ημιάπειρο κυλινδρικό σωλήνα, όπως αυτός στο σχήμα 2.1, στο άκρο του οποίου εφαρμόζουμε ένα έμβολο. Η μονοδιάστατη ροή του αερίου προκαλείται από το έμβολο, το οποίο μπορεί να κινείται συμπιέζοντας ή αποσυμπιέζοντας το ρευστό. Όταν το έμβολο κινείται προς τα έξω με αποτέλεσμα την αποσυμπίεση του αερίου, τότε δημιουργείται ένα κύμα αραιώσης ή διαφορετικά ένα *Rarefaction Wave*. Αντίθετα, όταν το έμβολο κινείται με υπερηχητική ταχύτητα συμπιέζοντας το αέριο, τότε μέσα στη ροή σχηματίζεται ένα *Shock Wave*. Η φυσική αυτών των δύο κυμάτων περιγράφεται παρακάτω.

### 2.1.1 Υδροδυναμικά *Rarefaction Waves*

Όπως ήδη έχει ειπωθεί, για τη περιγραφή ενός *Rarefaction Wave* θα πρέπει να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το έμβολο του κυλίνδρου κινείται προς τα έξω. Αν, λοιπόν, μετακινήσουμε το έμβολο με σταθερή ταχύτητα  $u$ , τέτοια ώστε να αποσυμπιέσουμε το ρευστό, τότε τα μόρια που βρίσκονται κοντά στο έμβολο θα κινηθούν και αυτά με την ίδια ταχύτητα. Με τον τρόπο αυτό, δημιουργείται ένα αραιώμα και κατ' επέκταση μείωση της πίεσης κοντά στο έμβολο σε σχέση με το υπόλοιπο ρευστό. Αν η ταχύτητα του εμβόλου είναι μικρότερη από αυτή του ήχου, τότε η πληροφορία της μείωσης της πίεσης διαδίδεται σε όλο το ρευστό με την ταχύτητα του ήχου  $c_s$ . Σε αυτή τη περίπτωση, η πληροφορία έχει αρκετό χρόνο για να διαδοθεί και σταδιακά το ρευστό θα βρεθεί σε μια νέα κατάσταση ισορροπίας διαφορετική από την προηγούμενη. Αντίθετα, στη περίπτωση που η ταχύτητα υποχώρησης του εμβόλου είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του ήχου, έχουμε τη διάδοση ενός *Rarefaction Wave*.

Μια ροή, όπως αυτή μέσα στον κύλινδρο, μπορεί να περιγραφεί από την ταχύτητα του ρευστού και από μεγέθη όπως η πίεση και η πυκνότητα. Ωστόσο, όλες οι ποσότητες εξαρτώνται από τη χωρική συνιστώσα  $x$  και το χρόνο  $t$ , μόνο μέσω του λόγου  $\xi = x/t$ , ο οποίος έχει διαστάσεις ταχύτητας. Με άλλα λόγια, οι φυσικές ποσότητες που περιγράφουν τη ροή σε κάθε χρονική στιγμή θα είναι όμοιες, διαφέροντας μόνο στη κλίμακα κατά μήκος του άξονα  $x$ , που αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο  $t$ . Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι, εάν τα μήκη μετρώνται σε μια μονάδα μέτρησης, όπου αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο, η ροή παραμένει ίδια. Τέτοιου είδους μονοδιάστατες ροές, όπου τα μεγέθη που την περιγράφουν είναι συναρτήσεις του λόγου  $\xi = x/t$ , ονομάζονται αυτοόμοιες ροές.

Η διατήρηση της εντροπίας  $s$  για μια μονοδιάστατη ροή δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{ds}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial t} + u_x \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

Υποθέτοντας ότι, όλες οι ποσότητες εξαρτώνται μόνο από τον λόγο  $\xi = x/t$ , μπορούμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής στην 2.1 ως προς  $\xi$ . Έχοντας, λοιπόν,

υπόψη ότι,  $\partial/\partial x = (1/t)d/d\xi$  καθώς και  $\partial/\partial t = (-x/t^2)d/d\xi$  η 2.1 γράφεται:

$$(u_x - \xi) \frac{ds}{d\xi} = 0 \quad (2.2)$$

Από την 2.2 προκύπτει ότι,  $ds/d\xi = 0 \Rightarrow s = \text{σταθερό}$ , δηλαδή μια μονοδιάστατη αυτοόμοια ροή πρέπει να είναι ισοεντροπική.

Η εξίσωση συνέχειας καθώς και η εξίσωση ορμής για το ρευστό γράφονται:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.5)$$

Όπως στη περίπτωση της 2.1 μετασχηματίζουμε και τις εξισώσεις 2.4, 2.5 ως προς  $\xi$ . Έτσι, γράφονται:

$$(u_x - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} + \rho \frac{du_x}{d\xi} = 0 \quad (2.6)$$

$$(u_x - \xi) \frac{du_x}{d\xi} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\xi} = -\frac{c_s^2}{\rho} \frac{d\rho}{d\xi} \quad (2.7)$$

Εφόσον η εντροπία  $s$  είναι σταθερή, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την πίεση  $P$  στην εξίσωση 2.7 με τη σχέση  $dP = c_s^2 d\rho$ . Όπου  $c_s$ , συμβολίζουμε την ταχύτητα του ήχου. Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν τετριμμένη λύση για  $u_x = \text{σταθερό}$ ,  $\rho = \text{σταθερό}$ . Παράδειγμα μιας τέτοιας λύσης είναι μια ομογενή υδροδυναμική ροή με σταθερή ταχύτητα. Για την εύρεση μιας μη τετριμμένης λύσης των εξισώσεων μπορούμε να λύσουμε την 2.6 ως προς  $du_x/d\xi$  και να την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση 2.7. Από εκεί προκύπτει ότι  $(u_x - \xi)^2 = c_s^2$ , δηλαδή  $\xi = u_x \pm c_s$ . Κρατώντας το θετικό πρόσημο επιλέγουμε τον θετικό ημιάξονα. Τελικά, βάζοντας στην εξίσωση 2.6 όπου  $\xi$  τη σχέση  $\xi = u_x + c_s$  έχουμε ότι:

$$\rho \frac{du_x}{d\xi} = c_s \frac{d\rho}{d\xi} \quad (2.8)$$

δηλαδή, προκύπτει ότι,  $\rho du_x = c_s d\rho$ . Η ταχύτητα του ήχου είναι συνάρτηση της θερμοδυναμικής κατάστασης του ρευστού. Θεωρώντας ότι, οι θερμοδυναμικές ποσότητες που περιγράφουν την κατάσταση του ρευστού είναι η εντροπία  $s$

## 24 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΤΟ ΧΡΟΝΟΕΞΑΡΤΩΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ RIEMANN

και η πυκνότητα  $\rho$ , μπορούμε να αναπαραστήσουμε την ταχύτητα του ήχου σαν συνάρτηση της πυκνότητας, για δεδομένη εντροπία. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$u_x = \int \frac{c_s(\rho)}{\rho} d\rho = \int \frac{1}{\rho c_s} dp \quad (2.9)$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει τη γενική σχέση μεταξύ της ταχύτητας και της πυκνότητας στο κύμα. Κάθε υδροδυναμική ροή που μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση 2.9 και την  $\xi = u_x \pm c_s$  ονομάζεται *Simple Wave*<sup>1</sup>.

Χρησιμοποιώντας την έκφραση 2.9 και τη σχέση που δίνει το  $\xi$ , μπορούμε να εξάγουμε τη λύση της εξίσωσης κίνησης του ρευστού. Πράγματι, αν η ταχύτητα του ήχου συναρτήσει της πυκνότητας είναι γνωστή, τότε η ταχύτητα  $u_x$  μπορεί να υπολογιστεί και αυτή με τη σειρά της σαν συνάρτηση της πυκνότητας από την 2.9. Στη συνέχεια, από τη σχέση για το  $\xi$  προσδιορίζουμε αναλυτικά την πυκνότητα του ρευστού σαν συνάρτηση του  $\xi = x/t$ . Τελικά, γνωρίζοντας την πυκνότητα μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε θερμοδυναμική ποσότητα.

Ακολουθούμε την μαθηματική πορεία, όπως την περιγράψαμε παραπάνω<sup>2</sup>, για να δώσουμε την ακριβή λύση που συνδέει τις διάφορες θερμοδυναμικές ποσότητες, που περιγράφουν τη κατάσταση του πολυτροπικού ρευστού. Συνήθως, θεωρούμε ότι, το *Rarefaction Wave* διαδίδεται μέσα στη ροή, όπου από τη μια πλευρά το αέριο βρίσκεται σε ηρεμία. Η πλευρά αυτή αναπαριστάται από την περιοχή *I* του σχήματος 2.2. Το κύμα έχει ένα εύρος, περιοχή *II*, μέσα στο οποίο ισχύει ο φορμαλισμός που περιγράφουμε. Το μέτωπο του κύματος (*Head*) κινούμενο προς την περιοχή *I* σαρώνει τη ροή, η οποία απομακρύνεται από το *Rarefaction Wave* μέσω της περιοχής *III* (*Tail*).

Για την αδιαβατική διαδικασία  $\rho T^{\frac{1}{\gamma-1}} = \text{σταθερό}$ , η εξίσωση που συνδέει την πυκνότητα με την ταχύτητα του ήχου είναι:

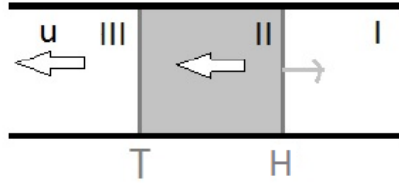
$$\rho = \rho_o \left( \frac{c_s}{c_o} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (2.10)$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση 2.10 στο ολοκλήρωμα της σχέσης 2.9 και ολοκληρώνουμε. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει ότι:

$$c_s = \frac{2}{\gamma-1} \int dc_s = \frac{2}{\gamma-1} (c_s - c_o) \quad (2.11)$$

<sup>1</sup>Στην πραγματικότητα, η σχέση που περιγράφει ένα *Simple Wave* είναι η  $\xi = (u_x \pm c_s) + f(u_x)$ . Στην περίπτωση όμως των αυτοόμοιων ροών που μελετάμε, η συνάρτηση  $f(u_x)$  είναι μηδέν.

<sup>2</sup>Θα ακολουθήσουμε την ίδια πορεία με τη διαφορά ότι, αντί να γράψουμε τη ταχύτητα του ήχου συναρτήσει της πυκνότητας, θα γράψουμε την πυκνότητα σαν συνάρτηση της τοπικής ταχύτητας του ήχου.



Σχήμα 2.2: Αναπαράσταση ενός Rarefaction Wave. Το αέριο στη περιοχή I βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας. Η περιοχή II αντιπροσωπεύει το Rarefaction μέσα στο οποίο ισχύει η ανάλυση. Το αέριο αποχωρίζεται το κύμα διαμέσου της περιοχής III. Τα βέλη δείχνουν την κίνηση του μετώπου του κύματος καθώς και της ροής. Τα γράμματα H και T αναπαριστούν το μέτωπο (Head) και το πέρας (Tail) του κύματος.

Η σταθερά ολοκλήρωσης  $c_o$  επιλέγεται με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε  $c_s = c_o$  για  $u_x = 0$ . Στη συνέχεια, εκφράζουμε όλα τα θερμοδυναμικά μεγέθη σαν συνάρτηση της ταχύτητας του αερίου, έχοντας βέβαια υπόψη ότι η ταχύτητα είναι αρνητική (βλέπε σχήμα 2.2). Έτσι έχουμε:

$$c_s = c_o - \frac{1}{2}(\gamma - 1)|u_x| \quad (2.12)$$

Η σχέση 2.12 προσδιορίζει την τοπική ταχύτητα του ήχου συναρτήσει της ταχύτητας του αερίου. Δε μένει, λοιπόν, να αντικαταστήσουμε την 2.12 στη 2.10, ώστε να υπολογίσουμε τελικά την πυκνότητα μόνο σαν συνάρτηση της ταχύτητας. Οπότε:

$$\rho = \rho_o \left( 1 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{|u_x|}{c_o} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (2.13)$$

Παρόμοια, υπολογίζουμε και την πίεση του αερίου:

$$p = p_o \left( 1 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{|u_x|}{c_o} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.14)$$

Τελικά, αντικαθιστώντας την εξίσωση 2.12 στη σχέση  $\xi = u_x + c_s$  βρίσκουμε τη σχέση που δίνει την ταχύτητα  $u_x$  σαν συνάρτηση του  $\xi$ .

$$|u_x| = \frac{2}{\gamma + 1}(c_o - \xi) \quad (2.15)$$

Οπότε, έχοντας σαν ελεύθερη παράμετρο το  $\xi$  μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα της ροής από τη σχέση 2.15 και μετέπειτα την πυκνότητα και τη πίεση της ροής από τις σχέσεις 2.13 και 2.14.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι, εξ' ορισμού, η ταχύτητα του ήχου δε μπορεί να είναι αρνητική ποσότητα. Ως εκ τούτου, από τη σχέση 2.12 συμπεραίνουμε ότι, η ταχύτητα της ροής θα πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα:

$$|u_x| \leq \frac{2c_o}{\gamma - 1} \quad (2.16)$$

δηλαδή, ένα αέριο που αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία, εκτονώνεται με τη βοήθεια ενός *Rarefaction Wave* και επιταχύνεται μέχρι μια ταχύτητα που δεν υπερβαίνει το μέτρο  $2c_o/(\gamma - 1)$ .

### Ιδιότητες των *Rarefaction Waves*

Στη συνέχεια, θέλουμε να εξάγουμε μερικές ιδιότητες των *Rarefaction Waves*. Παραγωγίζοντας τη σχέση που δίνει το  $\xi$  ως προς τη χωρική συνιστώσα  $x$  έχουμε:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{dx}(u_x + c_s) \Rightarrow t \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{d(u_x + c_s)}{d\rho} = 1 \quad (2.17)$$

Για την παραγωγή του όρου  $u_x + c_s$  ως προς την πυκνότητα, μπορούμε να δούμε ότι:

$$\frac{d(u_x + c_s)}{d\rho} = \frac{c_s}{\rho} + \frac{dc_s}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho c_s)}{d\rho} \quad (2.18)$$

Ο παράγοντας όμως  $\rho c_s$ , για τον οποίο ισχύει ότι,  $\rho c_s = \rho \sqrt{\partial p / \partial \rho} = 1 / \sqrt{-\partial V / \partial p}$ , αν παραγωγιστεί ως προς την πυκνότητα γίνεται:

$$\frac{d(\rho c_s)}{d\rho} = c_s^2 \frac{d(\rho c_s)}{d\rho} = \frac{1}{2} \rho^3 c_s^5 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right|_s \quad (2.19)$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι, ο παράγοντας  $\left| \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right|_s$  είναι θετικός. Πράγματι, θεωρώντας ότι, το υπό μελέτη αέριο είναι πολυτροπικό, μπορούμε να δείξουμε ότι η δεύτερη παράγωγος ως προς τη πίεση της πολυτροπικής σχέσης  $PV^\gamma = \text{σταθερό}$  είναι θετική. Κατ' επέκταση, μπορούμε να δούμε ότι η εξίσωση 2.19 είναι μεγαλύτερη από το μηδέν. Στη συνέχεια, από την εξίσωση 2.17, έχουμε ότι,  $\partial \rho / \partial x > 0$  για  $t > 0$ . Εφόσον,  $\partial p / \partial x = c_s^2 \partial \rho / \partial x > 0$ , συμπεραίνουμε ότι και  $\partial p / \partial x > 0$ . Επιπλέον, χρησιμοποιώντας ξανά την σχέση 2.9 βρίσκουμε ότι,  $\partial u_x / \partial x = (c_s / \rho) \partial \rho / \partial x$ , δηλαδή  $\partial u_x / \partial x > 0$ .

Τελικά, από την ανάλυση παραπάνω υπολογίσαμε τρεις ανισότητες:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} > 0 \quad (2.20)$$

Το ερώτημα που προκύπτει σε αυτό το σημείο είναι τι σημαίνουν για την περιγραφή της ροής αυτές οι τρεις ανισότητες. Για να γίνει ξεκάθαρη η φυσική σημασία των ανισοτήτων θα ήταν καλύτερο να δούμε πως μεταβάλλονται οι θερμοδυναμικές ποσότητες όχι κατά μήκος του άξονα  $x$ , αλλά στο χρόνο  $t$ , καθώς ένα συγκεκριμένο τμήμα του αερίου κινείται. Έτσι, με την βοήθεια της εξίσωσης συνέχειας μπορούμε να δούμε ότι:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial\rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.21)$$

Με βάση τη συλλογιστική αυτή, οδηγούμαστε σε δύο άλλες ανισότητες, οι οποίες είναι:

$$\frac{d\rho}{dt} < 0, \quad \frac{dp}{dt} < 0 \quad (2.22)$$

Οι παραπάνω ανισότητες δείχνουν ότι τόσο η πυκνότητα όσο και η πίεση για ένα στοιχείο του ρευστού μειώνεται καθώς αυτό κινείται. Με άλλα λόγια, η ροή αραιώνει συνεχώς. Τέτοιου είδους υδροδυναμικές ροές ονομάζονται κύματα αραιώσης ή καλύτερα *Rarefaction Waves*. Αξίζει να σημειωθεί ότι, ένα Rarefaction Wave καταλαμβάνει μόνο μια ορισμένη έκταση. Το γεγονός αυτό, φαίνεται εύκολα από τη σχέση του ξ, όπου για  $x \rightarrow \pm\infty$  η ταχύτητα γίνεται επίσης άπειρη, κάτι που είναι φυσικά αδύνατο.

### Οι χαρακτηριστικές

Για μια μονοδιάστατη ροή, η οποία δε βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, μπορούμε να εισάγουμε την έννοια των *χαρακτηριστικών*. Οι *χαρακτηριστικές* είναι οι γραμμές στο επίπεδο  $x - t$ , των οποίων η κλίση  $dx/dt$  είναι ίση με την ταχύτητα διάδοσης μικρών διαταραχών στα θερμοδυναμικά μεγέθη. Οι διαταραχές αυτές, διαδίδονται ως προς το αέριο με την ταχύτητα του ήχου, είτε στον αρνητικό είτε στο θετικό ημιάξονα του  $x$ . Ως προς ένα στατικό σύστημα συντεταγμένων οι διαταραχές μεταδίδονται με ταχύτητα  $u_x \pm c_s$ . Υπάρχουν λοιπόν, δύο κατηγορίες *χαρακτηριστικών* οι οποίες ορίζονται από τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = u_x + c_s, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_- = u_x - c_s \quad (2.23)$$

Επίσης, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι, υπάρχει και μια τρίτη οικογένεια *χαρακτηριστικών*, στις οποίες διαδίδονται διαταραχές. Η τρίτη οικογένεια δίνεται από τη σχέση:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_o = u_x \quad (2.24)$$



## 28 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΤΟ ΧΡΟΝΟΕΞΑΡΤΩΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ RIEMANN

και δεν είναι τίποτα άλλο από τις γραμμές ροής. Αξίζει να τονιστεί, ότι η ύπαρξη των χαρακτηριστικών δεν περιορίζεται μόνο στο αν η ροή είναι υπερηχητική.

### Αναλλοίωτες ποσότητες Riemann

Είδαμε παραπάνω ότι, τυχόν διαταραχές μέσα στη ροή του αερίου διαδίδονται κατά μήκος των χαρακτηριστικών στο επίπεδο  $x - t$ . Ωστόσο, μια διαταραχή μπορεί να χωριστεί σε κομμάτια, καθένα από τα οποία διαδίδεται κατά μήκος μόνο μιας χαρακτηριστικής.

Ας υποθέσουμε, ότι έχουμε μια ροή σταθερής εντροπίας. Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση συνέχειας και την εξίσωση ορμής ως:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_x \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c_s^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.26)$$

Όπου έχουμε αντικαταστήσει την πρώτη παράγωγο της πυκνότητας με την πρώτη παράγωγο της πίεσης. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν,  $p = c_s^2 \rho$  οι πρώτες παράγωγοι γράφονται:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.27)$$

Διαιρώντας την εξίσωση 2.25 με  $\pm \rho c_s$  και αντικαθιστώντας την στην 2.26 έχουμε ότι:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} \pm \frac{1}{\rho c_s} \frac{\partial p}{\partial t} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \pm \frac{1}{\rho c_s} \frac{\partial p}{\partial x} \right) (u_x \pm c_s) = 0 \quad (2.28)$$

Εισάγουμε τώρα δύο νέες συναρτήσεις:

$$J_+ = u_x + \int \frac{dp}{\rho c_s}, \quad J_- = u_x - \int \frac{dp}{\rho c_s} \quad (2.29)$$

Οι ποσότητες αυτές ονομάζονται *Αναλλοίωτες ποσότητες Riemann*. Για μια ροή με σταθερή εντροπία η πυκνότητα και η ταχύτητα του ήχου είναι ακριβείς συναρτήσεις της πίεσης. Ως εκ τούτου, τα ολοκληρώματα στην 2.29 είναι ορισμένα. Για ένα πολυτροπικό ρευστό τα *Αναλλοίωτα Riemann* γίνονται:

$$J_+ = u_x + \frac{2c_s}{\gamma - 1}, \quad J_- = u_x - \frac{2c_s}{\gamma - 1} \quad (2.30)$$

Οι εξισώσεις της κίνησης σαν συνάρτηση αυτών των ποσοτήτων παίρνουν την απλή μορφή:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u_s + c_s) \frac{\partial}{\partial x} \right] J_+ = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u_s - c_s) \frac{\partial}{\partial x} \right] J_- = 0 \quad (2.31)$$

Είναι σημαντικό να δούμε ότι, οι διαφορικοί τελεστές που δρουν πάνω στα  $J_+$  και  $J_-$  είναι απλά οι τελεστές διαφορίσης κατά μήκος των χαρακτηριστικών  $C_+$  και  $C_-$ <sup>3</sup>. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι οι *αναλλοίωτες ποσότητες Riemann* παραμένουν σταθερές κατά μήκος των χαρακτηριστικών. Το συμπέρασμα αυτό είναι πολύ σημαντικό, αφού αν γνωρίζουμε την κατάσταση του αερίου μπροστά από το κύμα, μπορούμε μέσω της σταθερότητας των *αναλλοίωτων Riemann* να υπολογίσουμε την κατάσταση της ροής πίσω από αυτό. Υπενθυμίζουμε βέβαια, ότι τα παραπάνω ισχύουν μόνο για ισοεντροπικές υδροδυναμικές ροές.

### 2.1.2 Υδροδυναμικά Shock Waves

Στη μέχρι τώρα ανάλυση, είδαμε πως συμπεριφέρεται η μονοδιάστατη ροή όταν το έμβολο που εγκλωβίζει το αέριο μέσα στον κύλινδρο κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα έξω. Η αραιώση του ρευστού είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ενός κύματος που το ονομάσαμε *Rarefaction Wave*. Στη συνέχεια θέλουμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του υδροδυναμικού ρευστού στη περίπτωση όπου το αέριο συμπιέζεται εξαιτίας της προς τα μέσα κίνησης του εμβόλου.

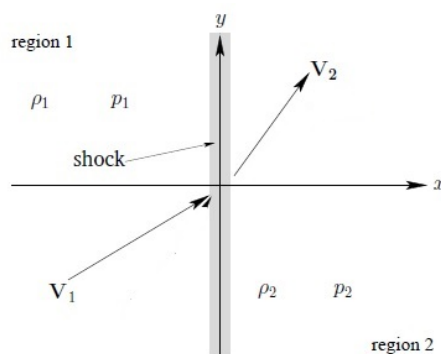
Αν μετακινήσουμε το έμβολο με σταθερή ταχύτητα  $u$ , τέτοια ώστε να συμπιέσουμε το ρευστό, τότε τα μόρια του ρευστού που βρίσκονται κοντά στο έμβολο θα κινηθούν και αυτά με την ίδια ταχύτητα. Με αυτό τον τρόπο, δημιουργείται ένα πύκνωμα, με αποτέλεσμα την αύξηση της πίεσης κοντά στο έμβολο σε σχέση με το υπόλοιπο ρευστό. Αν η ταχύτητα του εμβόλου είναι μικρότερη της ταχύτητας του ήχου, τότε η πληροφορία της αύξησης της πίεσης διαδίδεται σε όλο το ρευστό με την ταχύτητα του ήχου  $c_s$ . Η πληροφορία έχει αρκετό χρόνο ώστε να διαδοθεί και σταδιακά το ρευστό θα βρεθεί σε μια νέα κατάσταση ισορροπίας διαφορετική από την προηγούμενη. Αντίθετα, στη περίπτωση που η ταχύτητα του εμβόλου είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του ήχου, η πληροφορία δεν έχει τον απαραίτητο χρόνο για την ομαλή της διάδοση μέσα στο ρευστό. Αποτέλεσμα αυτού, είναι η δημιουργία μιας *ασυνέχειας* στα θερμοδυναμικά μεγέθη της ροής. Φαινόμενα, δηλαδή, που έχουν να κάνουν με τη συμπίεστικότητα του ρευστού γίνονται κυρίαρχα και είναι αδύνατον να τα αγνοήσουμε κατά τη μελέτη.

Μια *ασυνέχεια* σε ένα ρευστό δημιουργείται πάνω σε μια ή περισσότερες επιφάνειες. Η έννοια της ασυνέχειας έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι θερμο-

<sup>3</sup> Συμβολίζουμε την χαρακτηριστική  $(\frac{dx}{dt})_+$  ως  $C_+$  και την  $(\frac{dx}{dt})_-$  ως  $C_-$  αντίστοιχα.

## 30 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΤΟ ΧΡΟΝΟΕΞΑΡΤΩΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ RIEMANN

δυναμικές ποσότητες μεταβάλλονται ασυνεχώς καθώς διασχίζουμε την επιφάνεια, που την ονομάζουμε επιφάνεια ασυνέχειας (*Surface of discontinuity*). Εν γένει, σε μια ροή, η οποία δεν βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, μια επιφάνεια ασυνέχειας δεν παραμένει σταθερή. Για το λόγο αυτό, στην ανάλυση που κάνουμε θεωρούμε ότι η κίνηση της ασυνέχειας δεν σχετίζεται με τη κίνηση του ρευστού, έτσι ώστε τα μόρια του αερίου να μπορούν να διασχίσουν την επιφάνεια ασυνέχειας.



Σχήμα 2.3: Αναπαράσταση μιας επίπεδης υδροδυναμικής ασυνέχειας. Το ρευστό ευρισκόμενο στη περιοχή 1 με ταχύτητα  $u_1$  διασχίζει την επιφάνεια ασυνέχειας. Στη συνέχεια, η ροή αποχωρίζεται την ασυνέχεια με ταχύτητα  $u_2$  μέσω της περιοχής 2.

Στη συνέχεια, θέλουμε να υπολογίσουμε τις συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται πάνω σε μια επιφάνεια ασυνέχειας. Θεωρούμε ως σύστημα αναφοράς το σύστημα της ασυνέχειας με τον άξονα  $x$  του συστήματος προσανατολισμένο κάθετα στην επιφάνεια (Βλέπε σχήμα 2.3). Για τον υπολογισμό των σχέσεων που συνδέουν τα μεγέθη που περιγράφουν τη ροή εκατέρωθεν της ασυνέχειας θα χρησιμοποιήσουμε τρεις αρχές. Η ροή μάζας, η ροή ενέργειας και η ροή ορμής διαμέσου της ασυνέχειας επιβάλλεται να είναι συνεχείς ποσότητες.

Παρά το γεγονός ότι εντός της ασυνέχειας συμβαίνουν διαδικασίες θερμοποίησης του ρευστού που δύσκολα μπορούμε να περιγράψουμε, εν τούτοις η μάζα του αερίου, που εισέρχεται από τη μία πλευρά της ασυνέχειας θα πρέπει να είναι ίδια με αυτή που τελικά εξέρχεται από την άλλη. Το ίδιο συμβαίνει και στην ενέργεια. Ενώ το ισοζύγιο των διαφόρων μορφών ενέργειας θα αλλάξει διασχίζοντας η ροή την ασυνέχεια, το συνολικό ποσό ενέργειας που προσπίπτει στην επιφάνεια θα είναι ίσο με αυτό που απομακρύνεται από αυτή. Τελικά, για λόγους ευστάθειας θα πρέπει και η συνολική δύναμη που ασκείται στην ασυνέχεια από την περιοχή 1 κατά μήκος του άξονα  $x$  να είναι ίση με τη δύναμη που ασκείται από την πλευρά της περιοχής 2. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$[\rho u_x] = 0 \quad (2.32)$$

$$\left[ \rho u_x \left( \frac{1}{2} u^2 + Q \right) \right] = 0 \quad (2.33)$$

$$[p + \rho u_x^2] = 0 \quad (2.34)$$

Όπου έχουμε θεωρήσει ότι οι τετραγωνικές παρενθέσεις συμβολίζουν τη διαφορά της ποσότητας που εμπεριέχουν. Για παράδειγμα, η σχέση 2.32 μπορεί να γραφεί και ως  $[\rho u_x] = \rho_1 u_{1x} - \rho_2 u_{2x} = 0$ , με το δείκτη 1 και το δείκτη 2 να υποδηλώνουν τις δύο περιοχές εκατέρωθεν της ασυνέχειας (Βλέπε σχήμα 2.3). Το μέγεθος  $Q$  είναι η ενθαλπία. Επιπρόσθετα, εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι για τις συνιστώσες στη  $y$  και  $z$  κατεύθυνση ισχύει:

$$[\rho u_x u_y] = 0, \quad [\rho u_x u_z] = 0 \quad (2.35)$$

Οι εξισώσεις 2.32-2.34 σχηματίζουν ένα πλήρες σύστημα συνοριακών συνθηκών για την ασυνέχεια. Από αυτές, προκύπτουν δύο τύποι επιφανειακής ασυνέχειας.

Στη πρώτη περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ροή μάζας είναι μηδέν. Σύμφωνα με τη σχέση 2.32, αυτό σημαίνει ότι  $\rho_1 u_{1x} = \rho_2 u_{2x} = 0$ . Εφόσον οι πυκνότητες  $\rho_1$  και  $\rho_2$  είναι μη μηδενικές, έχουμε ότι  $u_{1x} = u_{2x} = 0$ . Επιβάλλοντας τη σχέση των ταχυτήτων και στις άλλες δύο συνθήκες προκύπτει ότι  $p_1 = p_2$ . Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας και της πίεσης ως προς την επιφανειακή ασυνέχεια είναι συνεχείς ποσότητες.

$$u_{1x} = u_{2x} = 0, \quad p_1 = p_2 \quad (2.36)$$

Αντίθετα, οι εφαπτομενικές συνιστώσες της ταχύτητας  $u_y, u_z$  ως προς την επιφάνεια και οι άλλες θερμοδυναμικές ποσότητες μπορούν να είναι ασυνεχείς. Μια τέτοιου είδους ασυνέχεια ονομάζεται *εφαπτόμενη ασυνέχεια* ή διαφορετικά *tangential Discontinuity*. Μια ιδιαίτερη υποπερίπτωση της *tangential Discontinuity* είναι η *Contact Discontinuity*, στην οποία η ταχύτητα εκατέρωθεν της ασυνέχειας είναι συνεχής ποσότητα αλλά της πυκνότητας όχι. Ως παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε την επιφάνεια επαφής που δημιουργείται, όταν δύο διαφορετικά ρευστά έρχονται σε επαφή.

Ο δεύτερος τύπος ασυνέχειας είναι η περίπτωση όπου η ροή μάζας είναι μη μηδενική. Αποτέλεσμα αυτού, οι ταχύτητες  $u_{1x}$  και  $u_{2x}$  να είναι επίσης μη μηδενικές. Έτσι από τη 2.35 προκύπτει ότι:

$$u_{1y} = u_{2y}, \quad u_{1z} = u_{2z} \quad (2.37)$$

δηλαδή, η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας είναι συνεχής πάνω στην επιφάνεια της ασυνέχειας. Ωστόσο, η πίεση, η πυκνότητα, και η κάθετη στην επιφάνεια ταχύτητα είναι ασυνεχείς. Εφόσον, η  $u_y$  και  $u_z$  είναι συνεχείς μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην σχέση 2.33 το τετράγωνο της ταχύτητας με  $u_x^2$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, οι συνθήκες σε αυτή τη περίπτωση έχουν τη μορφή:

$$[\rho u_x] = 0 \quad (2.38)$$

$$\left[ \frac{1}{2} u_x^2 + Q \right] = 0 \quad (2.39)$$

$$[p + \rho u_x^2] = 0 \quad (2.40)$$

Μια ασυνέχεια αυτού του είδους ονομάζεται *Shock Wave*. Όπως έχει ειπωθεί, η μελέτη των *Shocks* είναι σημαντική, αφού θεωρείται ότι, λαμβάνουν χώρα σε πολλά αστροφυσικά φαινόμενα.

### Η αδιαβατική σχέση

Αναφερθήκαμε ήδη στο γεγονός ότι, σε ένα *Shock Wave* η εφαπτομενική ταχύτητα του ρευστού είναι συνεχής. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε στην ανάλυση ότι, η εφαπτομενική ταχύτητα εκατέρωθεν του *Shock* είναι μηδέν και άρα  $u_x = u$ . Επιπλέον, επιμένουμε να εργαζόμαστε στο σύστημα ηρεμίας της ασυνέχειας, οπότε οι συνοριακές συνθήκες που γράψαμε παραπάνω γίνονται:

$$j \equiv \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.41)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (2.42)$$

$$Q_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = Q_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \quad (2.43)$$

Όπου το  $j$  συμβολίζει τη ροή μάζας στην ασυνέχεια. Παρακάτω, διαλέγουμε το θετικό πρόσημο για το  $j$ , με το ρευστό να κινείται από την περιοχή 1 προς την περιοχή 2 (Βλέπε σχήμα 2.3). Ορίζουμε την περιοχή 1 ως *Upstream region*, ενώ την περιοχή 2 ως *Downstream region*.

Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε μια σειρά από σχέσεις που υπακούουν στις παραπάνω συνοριακές συνθήκες. Χρησιμοποιώντας τους ειδικούς όγκους

$V_1 = 1/\rho_1$  και  $V_2 = 1/\rho_2$ , έχουμε από την σχέση 2.41 ότι:

$$u_1 = jV_1, \quad u_2 = jV_2 \quad (2.44)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις 2.44 στην σχέση 2.43 βρίσκουμε:

$$p_1 + j^2V_1 = p_2 + j^2V_2 \Rightarrow \quad (2.45)$$

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \quad (2.46)$$

Η σχέση 2.45 μαζί με τις εκφράσεις από την 2.44 συσχετίζουν την διάδοση του *Shock* με τις πιέσεις και τις πυκνότητες του αερίου στις δύο περιοχές που ορίζει η επιφάνεια ασυνέχειας. Εφόσον,  $j^2 > 0$  βλέπουμε ότι μπορούμε να έχουμε δύο δυνατότητες. Είτε  $p_2 > p_1$ ,  $V_1 > V_2$ , είτε  $p_2 < p_1$ ,  $V_1 < V_2$ . Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι, η πρώτη περίπτωση είναι αυτή που συναντάμε στα *Shocks*.

Αξίζει να σημειωθεί η επόμενη χρήσιμη σχέση για τη διαφορά ταχυτήτων μεταξύ των δύο περιοχών. Από την σχέση 2.44 έχουμε ότι:  $u_1 - u_2 = j(V_1 - V_2)$ . Αντικαθιστώντας στην 2.46 βρίσκουμε:

$$u_1 - u_2 = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1)}{(V_1 - V_2)}} \quad (2.47)$$

Στη συνέχεια, η 2.43 γράφεται στη μορφή:

$$Q_1 + \frac{1}{2}j^2V_1^2 = Q_2 + \frac{1}{2}j^2V_2^2 \quad (2.48)$$

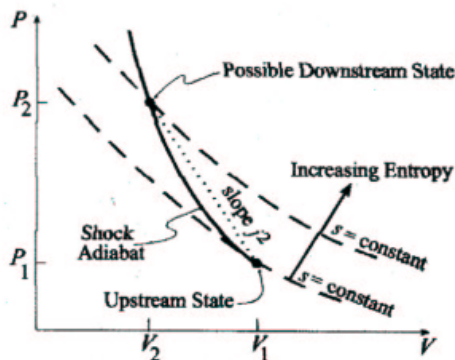
και αντικαθιστώντας στη 2.45 ξανά, προκύπτει:

$$Q_1 - Q_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0 \quad (2.49)$$

Μπορούμε να απαλείψουμε τη ενθαλπία, αντικαθιστώντας όπου  $Q$  τη έκφραση  $\epsilon + pV$ , όπου το  $\epsilon$  είναι η εσωτερική ενέργεια. Τελικά, η εξίσωση 2.49 γράφεται:

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_2 + p_1) = 0 \quad (2.50)$$

Επαναλαμβάνουμε ότι, οι παραπάνω σχέσεις έχουν ιδιαίτερη αξία, καθώς συνδέουν τα θερμοδυναμικά μεγέθη στις δύο περιοχές. Έτσι, η εξίσωση 2.49 δίνει τη σχέση μεταξύ της πίεσης  $p_2$  και του όγκου  $V_2$ , για δεδομένη κατάσταση



Σχήμα 2.4: Γραφική παράσταση της αδιαβατικής σχέσης. Το σημείο  $(p_1, V_1)$  είναι η κατάσταση που περιγράφει τη ροή στην *Upstream region*. Η καμπύλη δείχνει όλες τις πιθανές καταστάσεις που μπορεί να καταλήξει το σύστημα στη *Downstream region*. Αξίζει να τονιστεί ότι η τελική κατάσταση θα είναι μεγαλύτερης εντροπίας από την αρχική.

$(p_1, V_1)$  του αερίου στη περιοχή μπροστά από το *Shock Wave*. Η παραπάνω σχέση ονομάζεται *αδιαβατική σχέση* και η γραφική απεικόνισή της παρουσιάζεται στην εικόνα 2.4.

Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 2.4, η αδιαβατική σχέση περιγράφεται από μια καμπύλη που διέρχεται από το σημείο  $(p_1, V_1)$ , δηλαδή την αρχική κατάσταση. Διασχίζοντας η ροή το *Shock* θα βρεθεί στη περιοχή 2 η οποία θα περιγράφεται από την κατάσταση  $(p_2, V_2)$ , σημείο που πάλι θα αντιστοιχεί στη καμπύλη της αδιαβατικής. Όπως και οι υπόλοιπες θερμοδυναμικές ποσότητες, η εντροπία μεταβάλλεται ασυνεχώς στο *Shock*. Από τον δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο έχουμε ότι, η εντροπία αυξάνεται κατά τη διάρκεια της κίνησης του ρευστού. Ως εκ τούτου, η εντροπία στη περιοχή 2 θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την εντροπία στη περιοχή 1, δηλαδή  $s_1 < s_2$ . Μάλιστα, εφόσον έχουμε θεωρήσει ότι, η περιοχή 1 είναι η *Upstream region* καθώς και ότι η εντροπία αυξάνεται, το ρευστό, θα πρέπει να καταλήξει σε μια κατάσταση μεγαλύτερης πίεσης στη *Downstream region*, δηλαδή  $p_2 > p_1$ .

Βέβαια, ο πραγματικός μηχανισμός με τον οποίο η εντροπία αυξάνεται βρίσκεται σε διαδικασίες που συμβαίνουν μέσα στο πολύ λεπτό στρώμα της ασυνέχειας. Πιο συγκεκριμένα, εντός της ασυνέχειας θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν φαινόμενα όπως η θερμική αγωγιμότητα και το ιζώδες του ρευστού.

Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι, η κατακόρυφη γραμμή  $V = V_1$  έχει μοναδικό σημείο τομής με την αδιαβατική σχέση στο σημείο που αντιστοιχεί στην

αρχική κατάσταση. Αν η κατακόρυφη γραμμή  $V = V_1$  και η αδιαβατική σχέση είχαν περισσότερα από ένα σημεία τομής, τότε αυτό θα σήμαινε ότι, δύο ή περισσότερες τιμές της πίεσης θα αντιστοιχούσαν σε δεδομένο όγκο. Όμοια, η αδιαβατική σχέση διασταυρώνεται με την οριζόντια γραμμή  $p = p_1$  μόνο στο σημείο της αρχικής κατάστασης.

Τελικά, το διάγραμμα 2.4 μας δίνει ακόμα μια πληροφορία. Αν συνδέσουμε με μια χορδή το σημείο που αντιπροσωπεύει την αρχική κατάσταση  $(p_1, V_1)$  με οποιοδήποτε άλλο  $(p_2, V_2)$  που αναπαριστά τη κατάσταση πίσω από το *Shock*, τότε η κλίση αυτής της χορδής, μας δίνει τη ροή μάζας  $j$  που κατευθύνεται προς την *Downstream region*. Το γεγονός αυτό φαίνεται εύκολα αν λάβουμε υπόψη τη σχέση 2.46, δηλαδή  $(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = -j^2$ .

## 2.2 Το υδροδυναμικό πρόβλημα *Riemann*

Στη μέχρι τώρα πορεία, περιγράψαμε τη φυσική των *Shocks* και των *Simple Waves*. Καθώς τα κύματα σαρώνουν την υδροδυναμική ροή, διαμορφώνουν στο πέρασμά τους ένα διαφορετικό θερμοδυναμικό καθεστώς. Ωστόσο, η ανάλυση μας λέει ότι, εάν γνωρίζουμε τη θερμοδυναμική κατάσταση μπροστά από αυτά τα κύματα, είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε αναλυτικά και τη κατάσταση πίσω από αυτά. Πλέον, έχουμε τα απαραίτητα εργαλεία, που θα μας βοηθήσουν να ορίσουμε το πρόβλημα *Riemann*.

Ας υποθέσουμε ότι, έχουμε δύο ρευστά τα οποία τη χρονική στιγμή  $t = 0$  έρχονται σε επαφή. Αρχικά, θεωρούμε την επιφάνεια πάνω στην οποία ακουμπούν τα δύο ρευστά ως μια *Contact Discontinuity*. Εκείνη την αρχική στιγμή, οι θερμοδυναμικές ποσότητες των δύο αερίων μπορεί να έχουν οποιαδήποτε αυθαίρετη τιμή. Μεταγενέστερα όμως, μια ευσταθής *Discontinuity* θα πρέπει να υπακούει σε ορισμένες συνθήκες<sup>4</sup>.

Ας δούμε τώρα την εξέλιξη του φαινομένου. Καθώς ο χρόνος κυλά, αυτό που παρατηρούμε είναι ότι, η αρχική *Contact Discontinuity* χωρίζεται σε αρκετές ασυνέχειες. Κάθε μια από αυτές, μπορεί είναι μια από τις κατηγορίες που έχουμε περιγράψει παραπάνω, δηλαδή, *Tangential Discontinuity*, *Shock* ή *Simple Wave*. Στην πορεία, οι ασυνέχειες αυτές κινούνται μακριά η μια από την άλλη και η φυσική περιγραφή της ροής των ρευστών θα πρέπει ασφαλώς να τις συμπεριλάβει.

Επιπρόσθετα, ορίζουμε ότι, η επιφάνεια της αρχικής ασυνέχειας κείται στο επίπεδο  $y - z$ . Είναι προφανές ότι, για λόγους συμμετρίας, οι ασυνέχειες που δημιουργούνται μεταγενέστερα είναι και αυτές επίπεδες και μάλιστα κάθετες στον άξονα  $x$ . Επιπλέον, τα προφίλ των θερμοδυναμικών ποσοτήτων εντός

<sup>4</sup>Στην περίπτωση που η ασυνέχεια δεν σέβεται αυτές τις συνθήκες, παύει να είναι ασυνέχεια και τα ρευστά αναμειγνύονται.



της ροής εξαρτώνται μόνο από την  $x$  συνιστώσα και τον χρόνο  $t$ . Αποτέλεσμα αυτού, η ροή να είναι μονοδιάστατη και η ανάλυση της προηγούμενης ενότητας να μπορεί να εφαρμοστεί.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, οι ασυνέχειες που σχηματίζονται από την αρχική ασυνέχεια επαφής κινούνται μακριά από το σημείο στο οποίο σχηματίστηκαν, σαρώνοντας έτσι τα δύο ρευστά. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι, σε κάθε μια από τις δύο διευθύνσεις του άξονα  $x$ , διαδίδεται ένα, και μόνο ένα, *Shock*, ή *Rarefaction Wave*. Το ερώτημα βέβαια είναι, αν θα μπορούσαν τα δύο κύματα να διαδοθούν μόνο προς τη μια κατεύθυνση.

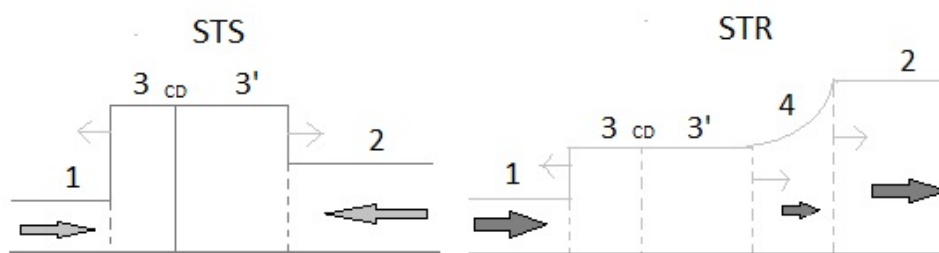
Ας υποθέσουμε λοιπόν, ότι η αρχική ασυνέχεια επαφής αποσυντίθεται σε δύο *Shocks*, τα οποία διαδίδονται στο θετικό ημιάξονα του  $x$ , με το προπορευόμενο κύμα να κινείται πιο γρήγορα. Τότε, σύμφωνα με τις γενικές ιδιότητες των *Shocks*, το προπορευόμενο κύμα κινείται ως προς το αέριο πίσω του με ταχύτητα, που είναι μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου. Από την άλλη πλευρά, το κύμα που ακολουθεί κινείται πάλι ως προς την ίδια περιοχή του αερίου με ταχύτητα που υπερβαίνει την ταχύτητα του ήχου. Ως εκ τούτου, θα συνέβαινε το παράδοξο όπου το ακόλουθο κύμα θα προσπέρναγε το προπορευόμενο. Με την ίδια ακριβώς συλλογιστική, μπορούμε να αποκλείσουμε την περίπτωση όπου ένα *Shock* και ένα *Rarefaction Wave* διαδίδονται στην ίδια κατεύθυνση. Τελικά, δύο *Rarefaction Waves*, που σχηματίστηκαν την ίδια χρονική στιγμή, δε θα μπορούσαν ποτέ να διαχωριστούν αφού η ταχύτητα των μετώπων τους είναι η ίδια.

Πλέον, η εικόνα είναι αρκετά ξεκάθαρη. Δύο ρευστά διαφορετικών πυκνοτήτων και πιέσεων έρχονται σε επαφή σχηματίζοντας αρχικά μια *Contact Discontinuity*. Η αλληλεπίδραση των δύο ρευστών στην αρχική ασυνέχεια έχει ως αποτέλεσμα το σχηματισμό δύο κυμάτων, ένα για την κάθε κατεύθυνση στον άξονα  $x$ . Αν υποθέσουμε ότι, η θερμοδυναμική κατάσταση των αερίων μπροστά από τα δύο κύματα είναι γνωστή, η έννοια του προβλήματος *Riemann*, βασίζεται στον προσδιορισμό της ενδιάμεσης κατάστασης που προκύπτει από τη διάδοση των δύο κυμάτων.

Εφόσον, γνωρίζουμε τη κατάσταση του αερίου μπροστά από τα δύο κύματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την *αδιαβατική σχέση* για τα *Shocks*, και τις *αναλλοίωτες ποσότητες Riemann* για τα *Rarefaction Waves*, ώστε να βρούμε τις δυνατές καταστάσεις, στις οποίες μπορεί να βρεθεί η ροή πίσω από αυτά. Η απάντηση στο πρόβλημα *Riemann*, έχει να κάνει με την επιλογή τελικά της θερμοδυναμικής κατάστασης, που θα οδηγήσει σε ευστάθεια την εφαιπτομενική ασυνέχεια των δύο ρευστών. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να επιβάλλουμε εξίσωση πιέσεων και ταχυτήτων στη  $x$  κατεύθυνση, εκατέρωθεν της επιφάνειας επαφής.

$$p_{d+} = p_{d-}, \quad u_{d+} = u_{d-} \quad (2.51)$$

Ο δείκτης  $d$  αναφέρεται στη *Downstream* περιοχή των δύο κυμάτων και τα πρόσημα συμβολίζουν τη προσέγγιση της ασυνέχειας από αριστερά και δεξιά αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι, ενώ οι πιέσεις εκατέρωθεν της ασυνέχειας θα είναι ίσες, η πυκνότητα γενικά θα είναι διαφορετική και θα παρουσιάζει άλμα. Προφανώς, έχει να κάνει με το γεγονός ότι, περιγράφουμε την αλληλεπίδραση δύο διαφορετικών ρευστών.



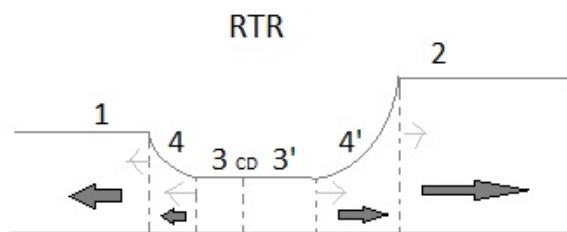
Σχήμα 2.5: **Αριστερά:** Μεταβολή της πίεσης κατά μήκος του άξονα  $x$  για το πρόβλημα Riemann της πρώτης περίπτωσης. Η ροή, μεγάλα βέλη, διασχίζει τα δύο Shocks με αποτέλεσμα την αύξηση της θερμικής πίεσης. Η ευστάθεια της Contact Discontinuity διαμορφώνεται από την εξίσωση των πιέσεων εκατέρωθεν της. **Δεξιά:** Αναπαράσταση της πίεσης για το δεύτερο συνδυασμό κυμάτων. Στη περίπτωση αυτή ένα Shock και Rarefaction Wave απομακρύνονται από το αρχικό σημείο της ασυνέχειας. Οι περιοχές 1 και 2 θεωρούνται γνωστές, ενώ οι τομείς 3 και 3' προκύπτουν από τη λύση του προβλήματος. Ως σύστημα αναφοράς έχουμε θεωρήσει αυτό της επιφανειακής ασυνέχειας.

Τρεις είναι οι δυνατές περιπτώσεις, που μπορούν να προκύψουν σε ένα πρόβλημα Riemann. Στην πρώτη περίπτωση, την οποία συμβολίζουμε  $I \rightarrow STS$  (Σχήμα 2.5 αριστερά), η αρχική ασυνέχεια δίνει δύο Shock Waves  $S$ , τα οποία διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Μεταξύ των δύο κυμάτων βρίσκεται η επαπτομενική ασυνέχεια  $T$ . Η περίπτωση αυτή είναι το αποτέλεσμα της κατά μέτωπο σύγκρουσης δύο μαζών με μεγάλη ταχύτητα. Στο σχήμα 2.5 παρουσιάζουμε τη μεταβολή της πίεσης κατά μήκος του άξονα  $x$ . Τα μεγαλύτερα βέλη δείχνουν την κίνηση της ροής, ενώ τα μικρότερα τη κίνηση των διάφορων επιφανειών.

Στη δεύτερη περίπτωση, τα δύο ρευστά βρίσκονται σχεδόν σε ηρεμία, ενώ μεταξύ τους υπάρχει μεγάλη διαφορά πίεσης. Αυτό έχει ως συνέπεια, το αέριο με τη μεγαλύτερη πίεση να εκτονώνεται, σε αυτό με τη μικρότερη και άρα να αραιώνει. Μέσα σε αυτό το ρευστό θα αναπτυχθεί ένα Rarefaction Wave. Αντίθετα, το αέριο με τη μικρότερη πίεση, συμπιέζεται βίαια προκαλώντας έτσι το σχηματισμό ενός Shock. Η περίπτωση αυτή, συμβολίζεται ως  $I \rightarrow STR$  και

αναπαριστάται στο σχήμα 2.5 δεξιά.

Η τρίτη και τελευταία περίπτωση, η οποία συμβολίζεται ως  $I \rightarrow RTR$ , περιγράφεται στο σχήμα 2.6. Στο σχήμα φαίνεται ότι, δύο *Rarefaction* κύματα διαδίδονται εκατέρωθεν της ασυνέχειας  $T$ . Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβεί όταν τα δύο ρευστά αποχωρίζονται το ένα από το άλλο με μεγάλη ταχύτητα.



Σχήμα 2.6: Μεταβολή της πίεσης κατά μήκος του άξονα  $x$  για το πρόβλημα *Riemann* με τα δύο *Rarefaction Waves*. Στο σχήμα φαίνεται το εύρος των *Rarefaction Waves* σε αντίθεση με το απότομο άλμα των *Shocks*.

Για τη σχετικιστική εκδοχή του προβλήματος *Riemann*, ο αναγνώστης θα μπορούσε να ανατρέξει στην αναφορά [27]. Ωστόσο, παρακάτω θα παρουσιάσουμε τη γενίκευση του προβλήματος εισάγοντας και μαγνητικό πεδίο. Για τη πρωτότυπη εργασία της μαγνητοϋδροδυναμικής περίπτωσης μπορεί κανείς να δει την αναφορά [28].

## 2.3 Το Μαγνητοϋδροδυναμικό πρόβλημα *Riemann*

Από τις παρατηρήσεις του πρώτου κεφαλαίου συμπεραίνουμε ότι, ο πίδακας του M87 είναι μια ισχυρά μαγνητισμένη αστροφυσική εκροή. Ως εκ τούτου, είναι αναγκαίο για την ανάλυσή μας να εισάγουμε στους υπολογισμούς το μαγνητικό πεδίο. Ιδανικά μιλώντας, για μια τρισδιάστατη εκροή θα έπρεπε να συμπεριλάβουμε υπόψιν την κίνηση της ροής και την ένταση του μαγνητικού πεδίου και στις τρεις συνιστώσες του συστήματος αναφοράς. Ωστόσο, κάτι τέτοιο είναι αρκετά επίπονο και πολλές φορές αδύνατο. Για το λόγο αυτό, θα πρέπει στοχευμένα να απλοποιήσουμε το πρόβλημα.

Υπενθυμίζουμε ότι, θέλουμε να μοντελοποιήσουμε την περιοχή του M87 γύρω από το HST1 Knot. Σύμφωνα με τη μαγνητοϋδροδυναμική θεωρία, σε αυτή την απόσταση, η εκροή έχει προ πολλού διασχίσει το γρήγορο μαγνητοχημικό σημείο, με αποτέλεσμα ο λόγος της αξιμουθιακής συνιστώσας της ταχύτητας

προς την πολοειδή να είναι αρκετά μικρότερος της μονάδας. Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα έχουμε ότι, ο λόγος της πολοειδούς συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου προς την αξιμουθιακή θα είναι και αυτός πολύ μικρότερος της μονάδας. Μπορούμε, δηλαδή, να γράψουμε ότι:

$$\frac{V_\phi}{V_p} \ll 1, \quad \frac{B_p}{B_\phi} \ll 1 \quad (2.52)$$

Με άλλα λόγια, στη περιοχή που μελετάμε, η  $\phi$  συνιστώσα της ταχύτητας και η πολοειδής του μαγνητικού πεδίου δεν επηρεάζουν τη δυναμική της εκροής και άρα μπορούμε να τις αποκλείσουμε.

Αν θεωρήσουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η τοπολογία του προβλήματος έχει ως εξής: Το επίπεδο  $x - z$  είναι το πολοειδές επίπεδο, ενώ η  $y$  συνιστώσα παίζει το ρόλο της αξιμουθιακής. Η ταχύτητα της ροής ορίζεται μόνο πάνω στο πολοειδές επίπεδο,  $u = (u_x, 0, u_z)$ . Επιπρόσθετα, η αλληλεπίδραση των δύο ρευστών, στη συγκεκριμένη περίπτωση του *Jet* και της εξωτερική ατμόσφαιρα, γίνεται κατά μήκος του άξονα  $x$ . Από τα παραπάνω, το μαγνητικό πεδίο θα βρίσκεται στη  $y$  κατεύθυνση και κατ' επέκταση θα είναι κάθετο με τη κίνηση των ρευστών.

Οι συνιστώσες της πυκνότητας ρεύματος  $J^\mu$ , του ταχυστή ενέργειας -ορμής  $T^{\mu\nu}$  και του ταχυστή Maxwell  $F^{*\mu\nu}$  για ένα ιδανικό μαγνητούδροδυναμικό ρευστό μπορούν να γράφουν ως:

$$J^\mu = \rho u_\mu \quad (2.53)$$

$$T^{\mu\nu} = \rho \hat{h} u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu} \hat{p} - b^\mu b^\nu \quad (2.54)$$

$$F^{*\mu\nu} = u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu \quad (2.55)$$

Όπου  $\rho$  η πυκνότητα στο co-moving σύστημα αναφοράς, ενώ η μετρική Minkowski σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από:  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Τα μεγέθη  $\hat{h}$  και  $\hat{p}$  είναι η ειδική ενθαλπία και η πίεση αντίστοιχα, όπου τα έχουμε τροποποιήσει με τέτοιο τρόπο, ώστε να περιέχουν και έναν επιπλέον όρο προερχόμενο από το μαγνητικό πεδίο. Οι σχέσεις, δηλαδή, που δίνουν τα μεγέθη αυτά είναι:

$$\hat{h} = 1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{b^2}{\rho} \quad (2.56)$$

$$\hat{p} = p + \frac{b^2}{2} \quad (2.57)$$

Όπου  $\gamma$  είναι ο πολυτροπικός δείκτης,  $p$  η θερμική πίεση και  $b$  το μαγνητικό πεδίο. Στην εξίσωση 2.56 οι πρώτοι δύο όροι είναι η ειδική ενθαλπία για υδροδυναμικό αέριο, όπου θεωρήσαμε ότι η εσωτερική ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$\epsilon = \frac{1}{\gamma-1}(p/\rho)$ . Επιπλέον ο όρος  $b^2/2$  είναι η μαγνητική πίεση. Καθ' όλη την επεξεργασία, θα θεωρήσουμε μονάδες μέτρησης, στις οποίες η ταχύτητα του φωτός θα είναι  $c = 1$ . Η τετρα-ταχύτητα και το τετράνυσμα του μαγνητικού πεδίου στο σύστημα του εργαστηρίου ικανοποιούν τις συνθήκες:  $u^\mu u_\mu = -1$  και  $u^\mu b_\mu = 0$ . Επιπρόσθετα, σύμφωνα με την τοπολογία που έχουμε επιλέξει να αναπαραστήσουμε, τα τετρανύσματα της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου γράφονται ως:  $u^\mu = (\Gamma, \Gamma u_x, 0, \Gamma u_z)$  και  $b^\mu = (0, 0, b, 0)$ <sup>5</sup>, με  $\Gamma$  να είναι ο παράγοντας Lorentz της ροής.

Οι εξισώσεις της ιδανικής *RMHD* αντιστοιχούν στη διατήρηση της μάζας, στη διατήρηση ενέργειας-ορμής και στις εξισώσεις του Maxwell. Οι εξισώσεις αυτές γράφονται:

$$J^\mu{}_{,\mu} = 0 \quad (2.58)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0 \quad (2.59)$$

$$F^{*\mu\nu}{}_{,\mu} = 0 \quad (2.60)$$

Η εξίσωση 2.58 μας δίνει τη διατήρηση της μάζας, δηλαδή την εξίσωση συνέχειας:

$$J^\mu{}_{,\mu} = 0 \Rightarrow \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial(\rho\Gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\Gamma u_x)}{\partial x} = 0 \quad (2.62)$$

Αντίθετα η εξίσωση ορμής, σχέση 2.59, μπορεί να γραφεί και ως:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0 \Rightarrow \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial t} + \frac{\partial T^{1\nu}}{\partial x} = 0 \quad (2.64)$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι η σχέση 2.64 μας επιστρέφει 4 εξισώσεις.

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{10}}{\partial x} = 0 \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial T^{01}}{\partial t} + \frac{\partial T^{11}}{\partial x} = 0 \quad (2.66)$$

<sup>5</sup>Ο μετασχηματισμός του τανυστή  $F^{\mu\nu}$  σε  $F^{*\mu\nu}$  μας δίνει τη δυνατότητα να γράφουμε το μαγνητικό πεδίο σαν τετράνυσμα. Το τετράνυσμα αυτό, δίνεται από τη σχέση:  $b^\mu = (\Gamma \bar{B} \frac{\bar{V}}{c}, \Gamma(\bar{B} - \frac{\bar{V}}{c} \times \bar{E}))$ , η οποία για τη τοπολογία που υιοθετήσαμε παίρνει τη μορφή παραπάνω.

$$\frac{\partial T^{02}}{\partial t} + \frac{\partial T^{12}}{\partial x} = 0 \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial T^{03}}{\partial t} + \frac{\partial T^{13}}{\partial x} = 0 \quad (2.68)$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε όλα τα στοιχεία του ταυυστή ενέργειας ορμής που υπεισέρχονται στις παραπάνω εξισώσεις και θα δείξουμε ότι τελικά επιζούν μόνο οι τρεις από τις τέσσερις. Έτσι έχουμε:

$$T^{00} = \rho \hat{h} \Gamma^2 - \hat{p} \quad (2.69)$$

$$T^{10} = \rho \hat{h} \Gamma^2 u_x \quad (2.70)$$

$$T^{01} = \rho \hat{h} \Gamma^2 u_x \quad (2.71)$$

$$T^{11} = \rho \hat{h} \Gamma^2 u_x u_x + \hat{p} \quad (2.72)$$

$$T^{02} = 0 \quad (2.73)$$

$$T^{12} = 0 \quad (2.74)$$

$$T^{03} = \rho \hat{h} \Gamma^2 u_z \quad (2.75)$$

$$T^{13} = \rho \hat{h} \Gamma^2 u_x u_z \quad (2.76)$$

Αντικαθιστώντας τις 2.69 -2.76 στις σχέσεις 2.65 -2.68 προκύπτουν τρεις εξισώσεις από τον ταυυστή ενέργειας ορμής. Έπειτα, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για τον ηλεκτρομαγνητικό ταυυστή. Έτσι έχουμε:

$$F^{*\mu\nu}{}_{,\mu} = 0 \Rightarrow \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial F^{*\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial F^{*0\nu}}{\partial t} + \frac{\partial F^{*1\nu}}{\partial x} = 0 \quad (2.78)$$

Εξαιτίας των περιορισμών που έχουμε θέσει στο πρόβλημα, τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του ταυυστή είναι τα:  $F^{*02} = \Gamma b$ ,  $F^{*12} = b u_x$ .

Από τα παραπάνω, προκύπτει ένα σύστημα 5 μερικών διαφορικών εξισώσεων. Όπως θα δούμε παρακάτω, τόσο στη περίπτωση των *Shocks* όσο και σε αυτή των *Rarefaction Waves*, θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το σύστημα προκειμένου να βρούμε τις σχέσεις που δίνουν τη θερμοδυναμική κατάσταση της ροής πίσω από τα κύματα. Τελικά, το σύστημα των εξισώσεων μπορεί να γραφεί σε πιο συμπαγή μορφή ως εξής:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0 \quad (2.79)$$

Όπου οι πίνακες  $\mathcal{D}$  και  $\mathcal{F}$  γράφονται:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \rho\Gamma \\ \rho\hat{h}\Gamma^2 u_x \\ \rho\hat{h}\Gamma^2 u_z \\ \rho\hat{h}\Gamma^2 - \hat{p} \\ \Gamma b \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} Du_x \\ S_x u_x + \hat{p} \\ S_z u_x \\ S_x \\ Bu_x \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

Όπου ορίσαμε τα μεγέθη:  $D = \rho\Gamma$ ,  $S_i = \rho\hat{h}\Gamma^2 u_i$ ,  $\tau = \rho\hat{h}\Gamma^2 - \hat{p}$  και  $B = \Gamma b$ .

### 2.3.1 Rarefaction Waves σε μαγνητισμένη εκροή

Το σύστημα των εξισώσεων, σχέση 2.79 και 2.80, περιγράφει τη συμπεριφορά ενός μαγνητισμένου σχετικιστικού ρευστού, όπου η ροή λαμβάνει χώρα στο επίπεδο  $x - z$ , κάθετα στο μαγνητικό πεδίο. Για να μελετήσουμε τη φυσική των *Rarefaction Waves* μέσα σε ένα τέτοιο αέριο, θα εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο όπως και στην απλή υδροδυναμική περίπτωση. Θα υποθέσουμε, δηλαδή, ότι η ροή είναι αυτοόμοια και κάθε θερμοδυναμικό μέγεθος θα είναι συνάρτηση μόνο του λόγου  $\xi = x/t$ . Κάνοντας αυτή την υπόθεση, μπορούμε να μετασχηματίσουμε το σύστημα των εξισώσεων σε πρώτης τάξης παραγώγους ως προς  $\xi$  αντί των  $x$  και  $t$ . Με αυτό τον τρόπο, το σύστημα της 2.79 εκφυλίζεται σε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Έχοντας, λοιπόν, υπόψιν ότι,  $\partial/\partial x = (1/t)d/d\xi$  καθώς και  $\partial/\partial t = (-x/t^2)d/d\xi$  το σύστημα της σχέσης 2.79 παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$(u_x - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} + \rho(1 + u_x \Gamma^2 (u_x - \xi)) \frac{du_x}{d\xi} + \rho \Gamma^2 u_z (u_x - \xi) \frac{du_z}{d\xi} = 0 \quad (2.81)$$

$$\Gamma^2 \hat{h} \rho (u_x - \xi) \frac{du_x}{d\xi} + b(1 - u_x \xi) \frac{db}{d\xi} + (1 - u_x \xi) \frac{dp}{d\xi} = 0 \quad (2.82)$$

$$\Gamma^2 \hat{h} \rho (u_x - \xi) \frac{du_z}{d\xi} - u_z b \xi \frac{db}{d\xi} - u_z \xi \frac{dp}{d\xi} = 0 \quad (2.83)$$

$$b(1 + u_x \Gamma^2 (u_x - \xi)) \frac{du_x}{d\xi} + b \Gamma^2 u_z (u_x - \xi) \frac{du_z}{d\xi} + (u_x - \xi) \frac{db}{d\xi} = 0 \quad (2.84)$$

$$\frac{dp}{d\xi} = h c_s^2 \frac{d\rho}{d\xi} \quad (2.85)$$

Η ποσότητα  $c_s$  είναι η ταχύτητα του ήχου και δίνεται κατά τα γνωστά από τη σχέση:

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{h} \left| \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s} \quad (2.86)$$

Το σύμβολο  $h$  είναι η ειδική ενθαλπία, στην οποία δε περιλαμβάνεται η επίδραση από το μαγνητικό πεδίο. Το σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση όταν η ορίζουσα είναι μηδέν. Επιβάλλοντας τη συνθήκη μηδενισμού προκύπτει ότι:

$$\xi^{\pm} = \frac{u_x(1 - \omega^2) \pm \omega \sqrt{(1 - u^2)[1 - u^2\omega^2 - u_x^2(1 - \omega^2)]}}{1 - u^2\omega^2} \quad (2.87)$$

Όπου  $\omega^2 = c_s^2 + u_A^2 - c_s^2 u_A^2$ . Η ποσότητα  $u_A$  δεν είναι τίποτα άλλο από την ταχύτητα *Alfvén*, δηλαδή  $u_A^2 = b^2/\rho\hat{h}$ . Τα πρόσημα συν και πλην στην σχέση 2.87 αντιστοιχούν σε κύματα *Rarefaction*, τα οποία διαδίδονται προς τα δεξιά και αριστερά αντίστοιχα. Κάνοντας κάποιες αλγεβρικές πράξεις, το σύστημα των εξισώσεων 2.81 - 2.84 μπορεί να γραφεί:

$$\Gamma^2 \hat{h} \rho (u_x - \xi) \frac{du_x}{d\xi} + b(1 - u_x \xi) \frac{db}{d\xi} + (1 - u_x \xi) \frac{dp}{d\xi} = 0 \quad (2.88)$$

$$\frac{dp}{d\xi} = hc_s^2 \frac{d\rho}{d\xi} \quad (2.89)$$

$$\hat{h} \Gamma u_z = \text{constant} \quad (2.90)$$

$$\frac{b}{\rho} = \text{constant} \quad (2.91)$$

Από τις σχέσεις 2.90, 2.91 μπορούμε να ορίσουμε τις παρακάτω σταθερές ποσότητες:

$$\mathcal{A} = \hat{h} \Gamma u_z = \text{const}, \quad \mathcal{B} = \frac{b}{\rho} = \text{const} \quad (2.92)$$

Με τη βοήθεια των εξισώσεων 2.89, 2.92 μπορούμε να απαλείψουμε το  $d\xi$ , οπότε η εξίσωση 2.88 μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{du_x}{dp} = \frac{(1 + \rho \mathcal{B}^2 / hc_s^2) (1 - \xi u_x)}{\Gamma^2 \hat{h} \rho (\xi - u_x)} \quad (2.93)$$

Παράλληλα, αντικαθιστώντας τον παράγοντα *Lorentz* στην πρώτη σχέση της 2.92, μπορούμε να υπολογίσουμε τη  $z$  συνιστώσα της ταχύτητας σαν συνάρτηση της  $x$  και της τροποποιημένης συνολικής ενθαλπίας. Έτσι βρίσκουμε ότι:

$$u_z^2 = \mathcal{A}^2 \left( \frac{1 - u_x^2}{\hat{h}^2 + \mathcal{A}^2} \right) \quad (2.94)$$



Διαφορετικά, ο παράγοντας *Lorentz* της ροής θα δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\hat{h}^2 + \mathcal{A}^2}{\hat{h}^2(1 - u_x^2)}} \quad (2.95)$$

Η σχέση 2.94 είναι χρήσιμη, αφού μας επιτρέπει να απαλείψουμε την  $u_z$  από τη εξίσωση 2.87. Πράγματι, αντικαθιστώντας τη σχέση 2.94 στην έκφραση που δίνει το  $\xi$  και ύστερα από μερικές αλγεβρικές πράξεις βρίσκουμε ότι:

$$\frac{1 - \xi u_x}{\xi - u_x} = \pm \frac{\sqrt{\hat{h}^2 + \mathcal{A}^2(1 - \omega^2)}}{\hat{h}\omega} \quad (2.96)$$

Τελικά, τοποθετώντας τις εξισώσεις 2.95 και 2.96 στην εξίσωση 2.93, βρίσκουμε την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{du_x}{1 - u_x^2} = \pm \frac{(1 + \rho \mathcal{B}^2 / hc_s^2) \sqrt{\hat{h}^2 + \mathcal{A}^2(1 - \omega^2)} dp}{\hat{h}^2 + \mathcal{A}^2} \frac{1}{\rho\omega} \quad (2.97)$$

Το αριστερό μέλος της έκφρασης 2.97 μπορεί να ολοκληρωθεί αναλυτικά. Επίσης, στο δεξί μέλος υπάρχουν θερμοδυναμικές ποσότητες και σταθερές, πράγμα που μας επιτρέπει να λύσουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα. Θεωρώντας ότι, το περιβάλλον μπροστά από το *Rarefaction Wave, Upstream Region*, βρίσκεται σε κάποια σαφώς προσδιορισμένη κατάσταση, το αποτέλεσμα από την ολοκλήρωση της σχέσης 2.97 μας επιτρέπει να βρούμε τη θερμοδυναμική κατάσταση της ροής πίσω, *Downstream Region*, από το κύμα.

Από την ολοκλήρωση, λοιπόν, της 2.97 βρίσκουμε ότι, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας ως προς την ασυνέχεια θα δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$u_{xd} = \tanh(\mathcal{E}) \quad (2.98)$$

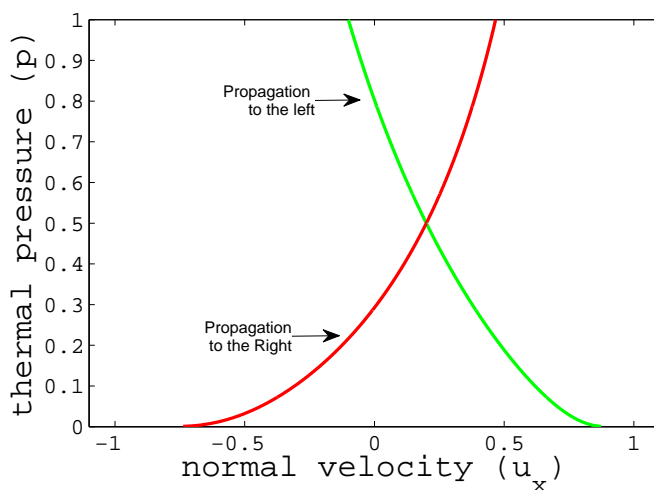
Όπου το  $\mathcal{E}$  είναι συνάρτηση της πίεσης και ισούται με:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + u_{xa}}{1 - u_{xa}} \right) \pm \int_{p_a}^{p_d} \frac{(1 + \rho \mathcal{B}^2 / hc_s^2) \sqrt{\hat{h}^2 + \mathcal{A}^2(1 - \omega^2)} dp}{\hat{h}^2 + \mathcal{A}^2} \frac{1}{\rho\omega} \quad (2.99)$$

Υπενθυμίζουμε ότι, το  $\pm$  πρόσημο αφορά *Rarefaction Waves*, που διαδίδονται είτε στο θετικό είτε στον αρνητικό ημιάξονα αντίστοιχα.

Στο σχήμα 2.7 δίνεται η γραφική απεικόνιση της σχέσης 2.98 για δύο *Rarefaction Waves* που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Η κάθετη ως προς την ασυνέχεια ταχύτητα βρίσκεται στον οριζόντιο άξονα, ενώ στον κατακόρυφο, αναπαρίσταται η θερμική πίεση. Το σημείο τομής των δύο κυμάτων, ορίζει τη

θερμοδυναμική κατάσταση της ροής, για την οποία υποθέτουμε ότι είναι αρχικά γνωστή. Αν η δοθείσα κατάσταση είναι αυτή πίσω από το κύμα, τότε μπροστά από αυτό, η ροή θα κατευθυνθεί σε περιοχή μεγαλύτερων πιέσεων. Αντίθετα, θεωρώντας ότι, η κατάσταση μπροστά από το κύμα είναι γνωστή, η ροή πίσω από αυτό θα καταλήξει σε θερμοδυναμική κατάσταση, που θα περιγράφεται από τους κλάδους χαμηλότερης πίεσης. Βέβαια, δεδομένου ότι, σε ένα πρόβλημα *Riemann* θεωρούμε πάντα γνωστή την κατάσταση στην *Upstream* περιοχή, ο κλάδος του κύματος που οδηγεί στις μεγαλύτερες πιέσεις θα απορρίπτεται ως αψύσιχος.

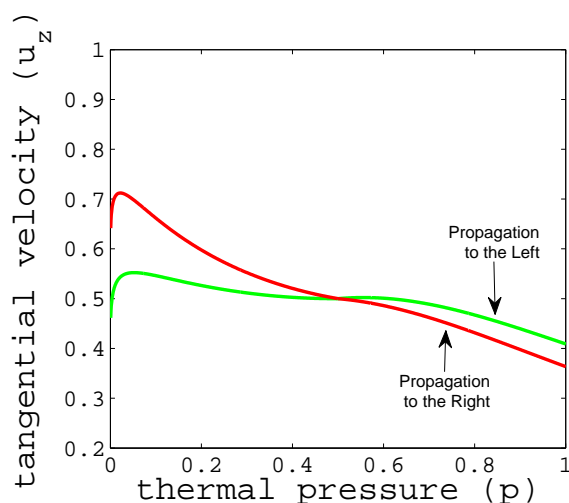


Σχήμα 2.7: Γραφική απεικόνιση των καταστάσεων που μπορεί να βρεθεί μαγνητισμένη ροή στην *Downstream* περιοχή, εξαιτίας της διάδοσης ενός *Rarefaction Wave*. Η πράσινη καμπύλη αντιστοιχεί σε κύμα *Rarefaction*, το οποίο διαδίδεται προς τα αριστερά. Αντίθετα, η κόκκινη αντιστοιχεί σε κύμα κατευθυνόμενο προς τα δεξιά. Το σημείο τομής των δύο κυμάτων ( $p_a = 0.5$ ,  $u_{xa} = 0.2$ ) είναι η αρχική κατάσταση που υποθέτουμε, η οποία χαρακτηρίζεται επιπλέον από:  $\rho = 1.0$ ,  $u_{za} = 0.5$  και  $\mathcal{B} = 2.0$ .

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2.7, μαγνητισμένη ροή πίεσης  $p_a = 0.5$  κινείται αρχικά με ταχύτητα  $u_x = 0.2$ . Θα θεωρήσουμε ότι, η κατάσταση αυτή περιγράφει το ρευστό μπροστά από το κύμα. Αν υποθέσουμε ότι, μέσα στη ροή διαδίδεται προς τα αριστερά, αντίθετα δηλαδή με την κίνηση του ρευστού στην *Upstream* περιοχή, ένα κύμα *Rarefaction*, τότε το ρευστό θα οδηγηθεί σε κατάσταση μεγαλύτερης κάθετης ταχύτητας πίσω από το κύμα. Με άλλα λόγια, η ροή υφίσταται επιτάχυνση στη  $x$  κατεύθυνση. Από την άλλη πλευρά, αν το κύμα κατευθύνεται προς τα δεξιά, η ροή *Downstream* του κύματος, είτε οδηγείται σε επιβράδυνση, είτε σε επιτάχυνση, με ταχύτητα όμως αντίθετη ως

προς την αρχική κατάσταση. Έτσι, παρατηρούμε μια ασυμμετρία των δύο κυμάτων ως προς την ευθεία  $u_x = u_{xa}$ . Το φαινόμενο είναι καθαρά σχετικιστικό, εφόσον στο Νευτώνιο όριο η συμμετρία διατηρείται.

Αξίζει να τονιστεί ότι, εργαζόμαστε στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου και όχι του κύματος. Έτσι, δεν είναι τετριμμένο να προβλέψουμε εξαρχής τι θα συμβεί στην ταχύτητα της ροής πίσω από το *Rarefaction* ή ακόμα και το *Shock Wave*.



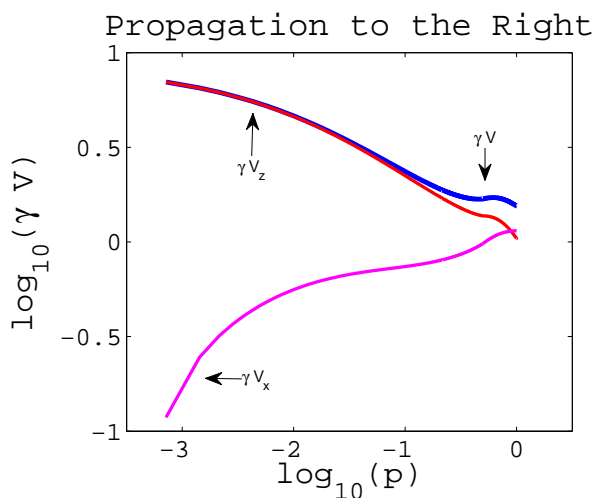
Σχήμα 2.8: Απεικόνιση των καταστάσεων που μπορεί να καταλήξει η ροή πίσω από το κύμα. Το διάγραμμα αναπαριστά τη  $u_z$  συνιστώσα συνάρτησε της θερμικής πίεσης. Τα κύματα επιφέρουν επιτάχυνση στη ροή, ο ρυθμός της οποία μειώνεται αισθητά στη περιοχή των χαμηλών πιέσεων.

Στη συνέχεια, για την ίδια περίπτωση θέλουμε να αναπαραστήσουμε γραφικά την εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας ως προς την ασυνέχεια,  $u_z$ , σαν συνάρτηση της θερμικής πίεσης. Σύμφωνα με το σχήμα 2.8, το κύμα, που διαδίδεται προς τα δεξιά, θα προκαλέσει σημαντική επιτάχυνση, στην  $z$  κατεύθυνση, στη ροή πίσω από αυτό. Η επιτάχυνση εξαιτίας του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά θα είναι ηπιότερη. Επιπρόσθετα, στην περιοχή των πολύ χαμηλών πιέσεων ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας μειώνεται σημαντικά και απότομα με αποτέλεσμα το αριστερό κύμα να υφίσταται ακόμα και επιβράδυνση ως προς την αρχική κατάσταση. Όπως και στη  $x$ , έτσι και στη  $z$  κατεύθυνση η ασυμμετρία των δύο κυμάτων είναι αισθητή.

Κοιτώντας πιο προσεκτικά τα σχήματα 2.7 και 2.8 παρατηρούμε μια αξιοσημείωτη ιδιότητα των *Rarefaction Waves*. Η επιτάχυνση της ροής πίσω από το κύμα παρουσιάζει κάποιου είδους κατευθυντικότητα. Όταν το *Rarefaction*

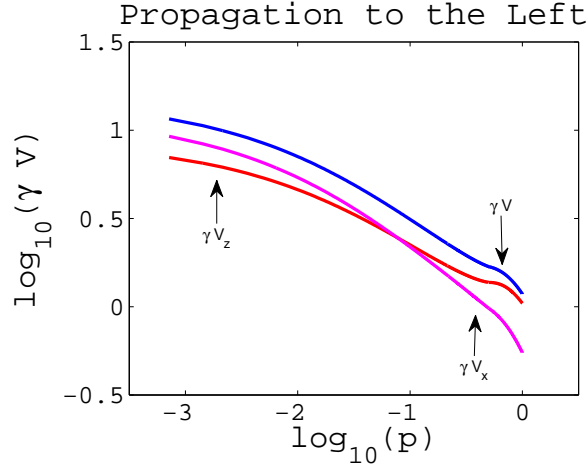
*Wave* διαδίδεται στην ίδια κατεύθυνση με τη ροή μπροστά από το κύμα, τότε η επιτάχυνση τροφοδοτείται στη  $z$  συνιστώσα της ταχύτητας (Βλέπε 2.7, 2.8 κόκκινη καμπύλη). Από την άλλη, όταν η κίνηση του κύματος είναι αντίθετη ως προς τη ροή στην *Upstream* περιοχή, η επιτάχυνση παρατηρείται στη  $x$  κατεύθυνση. Πράγματι, η  $u_x$  συνιστώσα για τη πράσινη καμπύλη παρουσιάζει ιδιαίτερη αύξηση, ενώ η επιτάχυνση στον  $z$  άξονα είναι μάλλον καχεκτική.

Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχειρήμα, μπορούμε να εξηγήσουμε τη συμπεριφορά της λύσης στη περιοχή των χαμηλών πιέσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η κόκκινη καμπύλη. Όπως βλέπουμε υπάρχουν δύο κατηγορίες καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας,  $u_x$ . Στην πρώτη, η ροή θα καθίσει σε μια κατάσταση μικρότερης ταχύτητας στον  $x$  άξονα. Μικρότερη όμως,  $u_x$  οδηγεί σε επιτάχυνση στον άξονα στον άξονα  $z$ , όπως και παρατηρούμε. Στη δεύτερη περίπτωση, η ροή οδηγείται σε μεγάλη αύξηση της κάθετης συνιστώσα της ταχύτητας, αντίθετα βέβαια με τη κίνηση της ροής μπροστά από το *Shock*. Εξαιτίας της κατευθυντικότητας της επιτάχυνσης, αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα τη παρατηρούμενη πτώση της  $u_z$  στις χαμηλές πιέσεις.



Σχήμα 2.9: Γραφική παράσταση της φαινόμενης ταχύτητας και των συνιστωσών για κύμα *Rarefaction* που διαδίδεται προς τα δεξιά. Η αρχική κατάσταση χαρακτηρίζεται από:  $p_a = 0.5$ ,  $u_{xa} = 0.5$ ,  $\rho = 1.0$ ,  $u_{za} = 0.7$  και  $\mathcal{B} = 2.0$ .

Για κάθε επιλογή της αρχικής κατάστασης, συναντάμε τη κατευθυντικότητα της επιτάχυνση για την οποία μιλήσαμε, είτε στη  $x$  είτε στη  $z$  συνιστώσα της ταχύτητας. Μάλιστα, αν η ροή επιλέξει μια κατάσταση με αρκετά σχετικιστική ταχύτητα  $u_x d$ , τότε η  $z$  συνιστώσα όχι απλώς θα παραμείνει σταθερή, αλλά θα



Σχήμα 2.10: Γραφική παράσταση της φαινόμενης ταχύτητας και των συνιστωσών για κύμα Rarefaction που διαδίδεται προς τα αριστερά. Η αρχική κατάσταση χαρακτηρίζεται από:  $p_a = 0.5$ ,  $u_{xa} = 0.5$ ,  $\rho = 1.0$ ,  $u_{za} = 0.7$  και  $\mathcal{B} = 2.0$ .

επιβραδυνθεί επιπλέον. Σε κάθε περίπτωση παρόλα αυτά, η ροή συνολικά θα οδηγηθεί σε επιτάχυνση, όπως φαίνεται και στα σχήματα 2.10 και 2.9.

Αν και στη  $u_x$  συναντάμε κατά περίπτωση μεγάλη διαφορά μεταξύ της αρχικής κατάστασης μπροστά από το κύμα με αυτή που προσδιορίζουμε, η διαφορά στην εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας είναι μικρότερη. Εύκολα εξηγείται αυτή η δυσκαμψία της  $u_z$  αν λάβουμε υπόψιν την εξίσωση 2.94. Οποιαδήποτε μεταβολή στην  $u_x$  επηρεάζει την  $u_z$  κατά ένα παράγοντα  $1 - u_x^2$ . Σε συνδυασμό με τη επιτάχυνση συνολικά της ροής, συμπεραίνουμε ότι ο παράγοντας  $\gamma u_z$  αυξάνεται πάντα με τη μείωση της πίεσης. Το γεγονός αυτό φαίνεται καθαρά στα διαγράμματα 2.10 και 2.9.

Δεδομένου ότι, ο παράγοντας  $\gamma u_z$  είναι αύξουσα συνάρτηση με τη μείωση της πίεσης, από τη σχέση 2.92 προκύπτει η μείωση της συνολικής ενθαλπίας  $\hat{h}$ . Στην ακραία περίπτωση όπου  $\hat{h} \approx 1$  η εξίσωση 2.94 γίνεται:

$$u_z^2 = \frac{\mathcal{A}^2}{1 + \mathcal{A}^2} (1 - u_x^2) \quad (2.100)$$

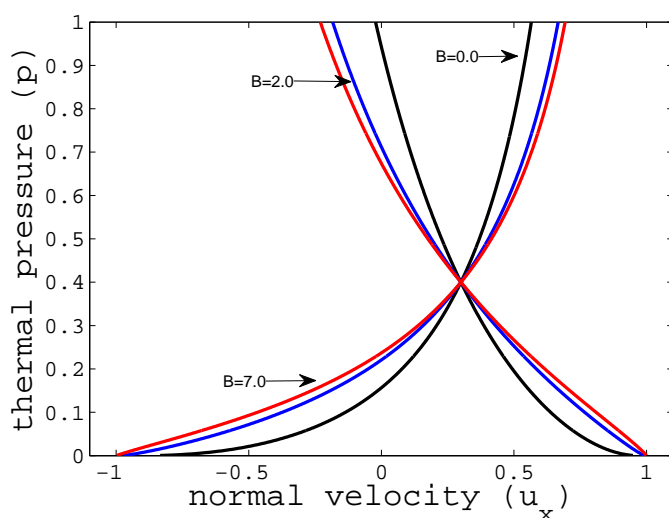
Η σχέση 2.100 μας λέει ακριβώς ότι, δε μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονη επιτάχυνση και στις δύο συνιστώσες της ταχύτητας. Επιπλέον, η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η  $u_z$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$u_{z_{max}} = \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{1 + \mathcal{A}^2}} \quad (2.101)$$

### Επίδραση του μαγνητικού πεδίου

Μέχρι τώρα, έχουμε δει τις γενικές ιδιότητες των *Rarefaction Waves*. Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον όμως, υπάρχει στις μαγνητισμένες ροές, εφόσον είναι πλέον κοινός τόπος ότι, οι αστροφυσικές εκροές είναι ισχυρά μαγνητισμένες. Προκύπτει λοιπόν το ερώτημα, για το ποια είναι η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στη δυναμική της ροής.

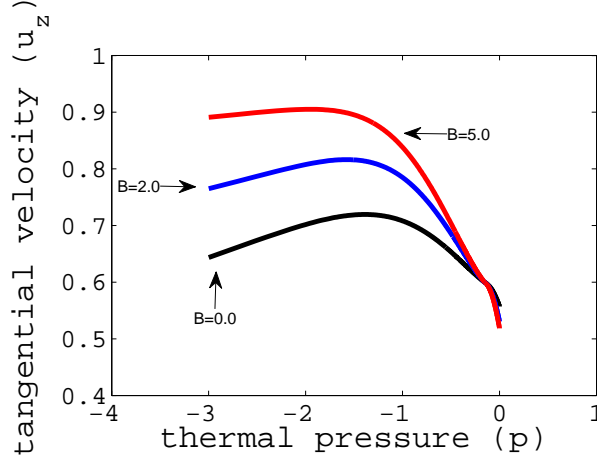
Στο σχήμα 2.11, δίνουμε τη γραφική παράσταση της θερμικής πίεσης σαν συνάρτηση της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας  $u_x$ , για δύο περιπτώσεις μαγνήτισης. Για συγκριτικούς λόγους, έχουμε σχεδιάσει και την απλή υδροδυναμική περίπτωση. Η προσθήκη μαγνητικού πεδίου αναγκάζει τη ροή πίσω από το κύμα να αποκτήσει μεγαλύτερη τιμή, τουλάχιστον σε απόλυτο μέγεθος, από αυτή της απλής υδροδυναμικής περίπτωσης. Το αποτέλεσμα αυτό, είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι, η απόλυτη τιμή της κλίσης της συνάρτησης που δίνεται από τη σχέση 2.98 στην αρχική κατάσταση  $(p_a, u_{xa})$  είναι άξουσα συνάρτηση της σταθεράς  $\mathcal{B}$ .



Σχήμα 2.11: Ζεύγη *Rarefaction Waves* για διαφορετικές τιμές μαγνήτισης,  $\mathcal{B} = 0, 2, 7$ . Η αρχική κατάσταση χαρακτηρίζεται από:  $p_a = 0.4$ ,  $u_{xa} = 0.3$ ,  $\rho = 1.0$ ,  $u_{za} = 0.0$ .

Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στην  $z$  συνιστώσα της ταχύτητας παρουσιάζεται στο σχήμα 2.12. Είναι ξεκάθαρο ότι, η προσθήκη και μόνο του μαγνητικού πεδίου εκτοξεύει την ταχύτητα της ροής σε αρκετά σχετικιστικές τιμές. Προκύπτει το ερώτημα, γιατί το μαγνητικό πεδίο επιδρά τόσο καθοριστικά στη δυναμική της ροής. Η απάντηση βρίσκεται στο γεγονός ότι, η προσθήκη

του πεδίου εισάγει στην πραγματικότητα μια επιπλέον ενεργειακή δεξαμενή στο σύστημα, από την οποία η ροή μπορεί να αντλήσει ενέργεια αυξάνοντας με αυτό τον τρόπο την ταχύτητα της.



Σχήμα 2.12: Ζεύγη Rarefaction Waves για διαφορετικές τιμές μαγνήτισης,  $\mathcal{B} = 0, 2, 5$ . Η αρχική κατάσταση χαρακτηρίζεται από:  $p_a = 0.2$ ,  $u_{xa} = 0.2$ ,  $\rho = 1.0$ ,  $u_{za} = 0.6$ .

### 2.3.2 Shock Waves σε μαγνητισμένη εκροή

Για τη μελέτη των *Shock Waves* μέσα σε μαγνητισμένη ροή, θα χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες της σχέσης 2.80. Ας υποθέσουμε ότι, έχουμε μια υπέρ-επιφάνεια  $\Sigma$  στον τετραδιάστατο χώρο *Minkowski*, στην οποία τα μεγέθη  $\rho$ ,  $u^\mu$ ,  $T^{\mu\nu}$  και  $F^{*\mu\nu}$  παρουσιάζουν ασυνέχεια. Επιπρόσθετα, θα θεωρήσουμε ότι, η υπέρ-επιφάνεια  $\Sigma$  στον τετραδιάστατο χώρο περιγράφει την διάδοση ενός κάθετου στον άξονα  $x$  *Shock*. Με τον τρόπο αυτό, μπορούμε να γράψουμε το κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο διάνυσμα  $\eta_\nu$  σαν:

$$\eta_\nu = (\Gamma_s V_s, \Gamma_s, 0, 0) \quad (2.102)$$

Όπου  $V_s$  είναι η ταχύτητα της επιφάνειας, η οποία ορίζει και τη θέση του *Shock Wave*. Επίσης, το μέγεθος  $\Gamma_s$  είναι ο παράγοντας *Lorentz* του κύματος.

Οι συνθήκες άλματος<sup>6</sup> εκατέρωθεν της υπέρ-επιφάνειας θα δίνονται από:

$$[\rho u^\mu] \eta_\mu = 0 \quad (2.103)$$

<sup>6</sup>Χρησιμοποιούμε ξανά τον συμβολισμό, που εφαρμόσαμε στα υδροδυναμικά *Shocks*.  $[\mathcal{M}] = \mathcal{M}_u - \mathcal{M}_d$

$$[T^{\mu\nu}] \eta_\mu = 0 \quad (2.104)$$

$$[F^{*\mu\nu}] \eta_\mu = 0 \quad (2.105)$$

Διαφορετικά, έχοντας υπόψιν τις εκφράσεις της 2.80, οι συνθήκες άλματος μπορούν να γραφούν σε πιο συμπαγή μορφή ως:

$$[\mathcal{D}] \Gamma_s V_s + [\mathcal{F}] \Gamma_s = 0 \quad (2.106)$$

Οι εξισώσεις 2.103 και 2.105 μας επιτρέπουν να εισάγουμε δύο αναλλοίωτες ποσότητες εκατέρωθεν της ασυνέχειας. Βλέπουμε δηλαδή ότι:

$$j \equiv \Gamma_s \rho_u \Gamma_u (V_s - u_{xu}) = \Gamma_s \rho_d \Gamma_d (V_s - u_{xd}) \quad (2.107)$$

$$f \equiv \Gamma_s b_u \Gamma_u (V_s - u_{xu}) = \Gamma_s b_d \Gamma_d (V_s - u_{xd}) \quad (2.108)$$

Η ποσότητα  $j$  αντιπροσωπεύει την ροή μάζας μέσα από την ασυνέχεια. Σύμφωνα με τον ορισμό της σχέσης 2.107, το  $j$  είναι θετικό για κύματα *Shocks*, που διαδίδονται προς τα δεξιά. Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις 2.107 και 2.108 βρίσκουμε ότι, η ποσότητα  $\mathcal{B} = b/\rho$  παραμένει σταθερή. Υπενθυμίζουμε ότι, η ίδια σχέση ισχύει και στα κύματα *Rarefaction*.

Στη συνέχεια, οι συνθήκες άλματος 2.106 με τη βοήθεια των ποσοτήτων που ορίζουμε στην 2.80 μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$[u_x] = -\frac{j}{\Gamma_s} \left[ \frac{1}{D} \right] \quad (2.109)$$

$$[\hat{p}] = \frac{j}{\Gamma_s} \left[ \frac{S_x}{D} \right] \quad (2.110)$$

$$[u_x \hat{p}] = \frac{j}{\Gamma_s} \left[ \frac{\tau}{D} \right] \quad (2.111)$$

$$\left[ \frac{S_z}{D} \right] = 0 \quad (2.112)$$

Όμοια με τα *Rarefaction Waves*, από τη σχέση 2.109 έχουμε ότι, η ποσότητα  $\mathcal{A} = \Gamma \hat{h} u_z$  παραμένει σταθερή. Αξίζει να σημειωθεί ότι, για να φτιάξουμε τις εξισώσεις 2.109 - 2.112 χρησιμοποιήσαμε ότι, η ροή μάζας μέσω που περνά μέσα από την ασυνέχεια είναι μη μηδενική.

Κάνοντας μερικές αλγεβρικές πράξεις με τις σχέσεις 2.107, 2.109 - 2.111 βρίσκουμε την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας πίσω από το κύμα. Έτσι, έχουμε:

$$u_{xd} = \frac{\hat{h}_u \Gamma_u u_{xu} + \frac{\Gamma_s (\hat{p}_d - \hat{p}_u)}{j}}{\hat{h}_u \Gamma_u + (\hat{p}_d - \hat{p}_u) \left( \frac{\Gamma_s u_{xu}}{j} + \frac{1}{\rho_u \Gamma_u} \right)} \quad (2.113)$$



Η εξάρτηση της τελικής κατάστασης από το μαγνητικό πεδίο, κρύβεται στους ορισμούς των  $\hat{p}$  και  $\hat{h}$ . Στη σχέση 2.113, δίνεται η ταχύτητα του *Shock* πίσω από αυτό σαν συναρτήση της πίεσης  $\hat{p}_d$ , της ροής μάζας  $j$  και της ταχύτητας του κύματος  $V_s$ .

Υψώνοντας στο τετράγωνο τη σχέση 2.107, βρίσκουμε μια σχέση για την ταχύτητα του κύματος.

$$V_s^\pm = \frac{\rho_u^2 \Gamma_u^2 u_{xu} \pm |j| \sqrt{j^2 + \rho_u^2 \Gamma_u^2 (1 - u_{xu}^2)}}{\rho_u^2 \Gamma_u^2 + j^2} \quad (2.114)$$

Όπου  $V_s^+$  ( $V_s^-$ ) αντιστοιχεί στην ταχύτητα για κύμα που κατευθύνεται προς τα δεξιά (αριστερά). Αντικαθιστώντας τη σχέση 2.114 στην 2.113, μπορούμε να απαλείψουμε την  $V_s$ . Προκειμένου να φτιάξουμε την αδιαβατική του *Taub* έχουμε:

$$[T^{\mu\nu}] \eta_\nu \left( (\hat{h} u_\mu)_u + (\hat{h} u_\mu)_d \right) = 0 \quad (2.115)$$

$$[\hat{h}^2] = \left( \frac{\hat{h}_d}{\rho_d} + \frac{\hat{h}_u}{\rho_u} \right) [\hat{p}] \quad (2.116)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2.116 και τους ορισμούς των  $\hat{p}$  και  $\hat{h}$ , μπορούμε μετά από πράξεις να φτιάξουμε το τριώνυμο:

$$\mathcal{K} \hat{p}^2 + \mathcal{N} \hat{p} + \mathcal{C} = 0 \quad (2.117)$$

Οι συντελεστές του τριωνύμου  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{N}$  και  $\mathcal{C}$  είναι συναρτήσεις της πυκνότητας και δίνονται από:

$$\mathcal{K} = -\frac{\gamma}{(\gamma-1)^2} \frac{1}{\rho^2} \quad (2.118)$$

$$\mathcal{N} = -\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{1}{\rho} + \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^2 \mathcal{B}^2 - \frac{5\gamma \mathcal{B}^2}{2(\gamma-1)} - \frac{\gamma \hat{p}_u}{(\gamma-1)\rho^2} + \mathcal{B}^2 + \frac{\hat{h}_u}{\rho_u} \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \hat{h}_u^2 - 1 - \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^2 \frac{\mathcal{B}^4 \rho^2}{4} + \frac{\mathcal{B}^4 \rho^2}{\gamma-1} + \frac{2-\gamma}{\gamma-1} \mathcal{B}^2 \rho \\ - \frac{\hat{p}_u}{\rho} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\hat{p}_u \mathcal{B}^2}{2} - \mathcal{B}^2 \hat{p}_u - \frac{\hat{h}_u \hat{p}_u}{\rho_u} \end{aligned} \quad (2.120)$$

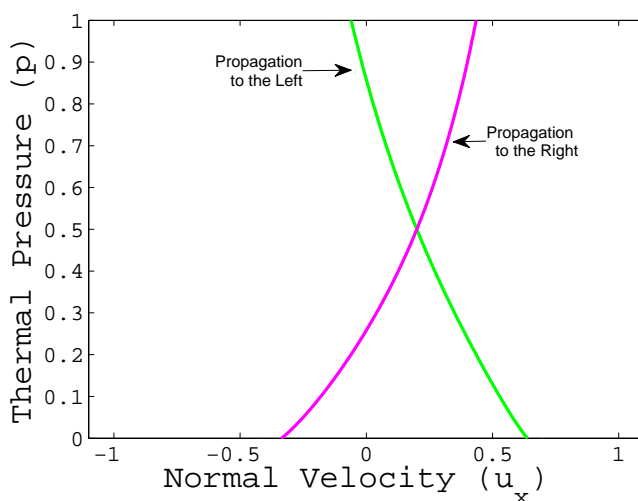
Επομένως, η λύση του τριωνύμου μας δίνει την συνολική πίεση  $\rho$  σαν συνάρτηση της πυκνότητας  $\rho$ . Βέβαια, η φυσικά αποδεκτή λύση είναι αυτή που δίνει θετικές πιέσεις συναρτήσεως της πυκνότητας  $\rho$ . Έτσι, έχουμε:

$$\hat{p} = \frac{-\mathcal{N} - \sqrt{\mathcal{N}^2 - 4\mathcal{K}\mathcal{C}}}{2\mathcal{K}} \quad (2.121)$$

Τελικά, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση 2.104 με  $\eta_\nu$  και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ροής μάζας καταλήγουμε στην εξίσωση:

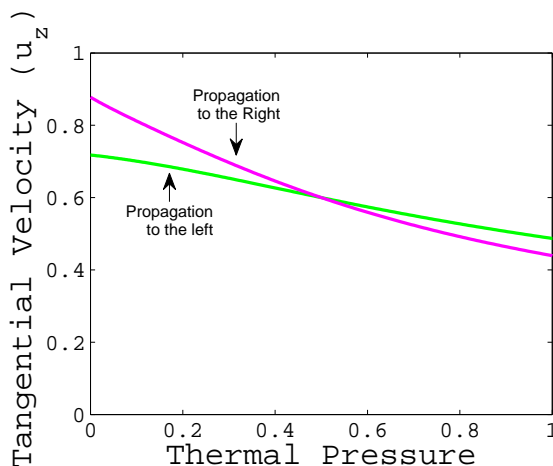
$$j^2 = \frac{\hat{p}_d - \hat{p}_u}{\frac{\hat{h}_u}{\rho_u} - \frac{\hat{h}_d}{\rho_d}} \quad (2.122)$$

Σε αυτό το σημείο της ανάλυσης, έχουμε υπολογίσει την συνολική πίεση  $p$  σαν συνάρτηση της πυκνότητας, καθώς και τη ροή μάζας συναρτήσει της πίεσης και άρα και της πυκνότητας. Αντικαθιστούμε τις 2.121 και 2.122 στην εξίσωση 2.113 και επομένως έχουμε την ταχύτητα της ροής πίσω από το κύμα μόνο σαν συνάρτηση της πυκνότητας. Έτσι, τρέχοντας την πυκνότητα σαν ελεύθερη παράμετρο μπορούμε να προσδιορίσουμε ακριβώς την κατάσταση που θα οδηγηθεί η ροή πίσω από το *Shock*.



Σχήμα 2.13: Γραφική παράσταση για δύο *Shock Waves*, που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Το σημείο τομής είναι η αρχική κατάσταση που έχουμε υποθέσει, η οποία χαρακτηρίζεται από :  $p_a = 0.5$ ,  $u_{xa} = 0.2$ ,  $\rho = 1.0$ ,  $u_{za} = 0.6$  και  $\mathcal{B} = 2.0$ .

Στο διάγραμμα 2.13 παρουσιάζουμε τη γραφική παράσταση της σχέσης 2.113. Στο σχήμα απεικονίζονται δύο *Shock Waves*, τα οποία διαδίδονται προς τα αριστερά και δεξιά αντίστοιχα. Το σημείο τομής των δύο κυμάτων είναι η αρχική κατάσταση που έχουμε υποθέσει. Θεωρώντας ότι, η δοθείσα κατάσταση είναι αυτή μπροστά από το *Shock*, η κατάσταση πίσω από το κύμα θα βρίσκεται στους κλάδους μεγαλύτερης πίεσης. Διαφορετικά, η λύση θα πρέπει να βρίσκεται στους κλάδους χαμηλών πιέσεων. Βέβαια, όπως και στην περίπτωση των *Rarefaction Waves*, στα προβλήματα *Riemann* η κατάσταση μπροστά από το



Σχήμα 2.14: Γραφική παράσταση της  $z$  συνιστώσας της ταχύτητας για δύο *Shock Waves* κινούμενα σε αντίθετες κατευθύνσεις. Η αρχική κατάσταση χαρακτηρίζεται από:  $p_a = 0.5$ ,  $u_{xa} = 0.2$ ,  $\rho = 1.0$ ,  $u_{za} = 0.6$  και  $\mathcal{B} = 2.0$ . Στο διάγραμμα παρατηρούμε την επιβράδυνση της ροής για μεγάλες τιμές της πίεσης.

κύμα παίζει το ρόλο της αρχικής κατάστασης. Έτσι, ο κλάδος της λύσης με χαμηλότερες πιέσεις από αυτή της αρχικής θα πρέπει να απορριφθεί.

Στην περίπτωση όπου, η αρχική κατάσταση περιλαμβάνει ροή κινούμενη προς τον θετικό ημιάξονα, τότε σύμφωνα με τα σχήματα 2.13 και 2.14 το κινούμενο προς τα αριστερά κύμα, πράσινη καμπύλη, θα υποστεί μείωση τόσο στην κάθετη όσο και στην εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας. Με άλλα λόγια, η ροή επιβραδύνεται ως προς την αρχική κατάσταση. Από την άλλη πλευρά, τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα για το κύμα που κινείται δεξιά, ροζ καμπύλη. Παρόλο που η  $u_{zd}$  μειώνεται, η ροή επιταχύνεται στον άξονα των  $x$ . Ο ανταγωνισμός των δύο αυτών συνιστωσών θα οδηγήσει είτε στην συνολική επιβράδυνση της ροής, είτε στη συνολική επιτάχυνση.

Κοιτώντας ακόμα μια φορά τη σχέση 2.100, η οποία ισχύει και στην περίπτωση των *Shock Waves*, βλέπουμε ότι, η συνιστώσα της ταχύτητας  $u_z$  εξαρτάται πλέον και από την συνολική ενθαλπία. Μάλιστα, εφόσον το *Shock* περιλαμβάνει διαδικασίες θερμοποίησης, η συνολική ενθαλπία θα αυξάνεται με αποτέλεσμα τη μείωση της  $u_z$ . Μένει, βέβαια, να δούμε και την εξάρτηση της από το τετράγωνο της  $u_x$ . Όπως έχουμε αναφέρει, στο κύμα που διαδίδεται αριστερά παρατηρούμε επιβράδυνση στην  $x$  κατεύθυνση. Όμως, η αύξηση του αριθμητή της 2.100 είναι πιο αργή από την αύξηση του παρανομαστή, τουλάχιστον για αρκετά μεγάλες πιέσεις. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, κατά τη διάδοση του αριστερού κύματος η  $z$  συνιστώσα της ταχύτητας να μειώνεται. Με ταυτόσημους συλλογισμούς

μπορούμε να δείξουμε ότι, και στη διάδοση προς τα δεξιά η  $u_z$  μειώνεται. Πράγματι, για την κίνηση προς τα δεξιά ενός *Shock* ο αριθμητής της 2.100 μειώνεται ενώ ο παρανομαστής αυξάνεται.

Συμπεραίνουμε ότι, η ύπαρξη ενός *Shock Wave* μέσα σε μια μαγνητισμένη ροή, επιβραδύνει την  $z$  συνιστώσα της ταχύτητας<sup>7</sup>, ενώ η συνολική συμπεριφορά της ροής έχει να κάνει με τη  $u_x$ , που είτε αυξάνεται είτε μειώνεται αισθητά.

### Ο ρόλος του μαγνητικού πεδίου

Στο σχήμα 2.15, αναπαριστάται η γραφική παράσταση της θερμικής πίεσης σαν συνάρτηση της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας  $u_x$ , για δύο περιπτώσεις μαγνήτισης. Συγκριτικά, δίνουμε και την απλή υδροδυναμική περίπτωση. Όπως παρατηρούμε, το μαγνητικό πεδίο δεν επηρεάζει σημαντικά τη δυναμική της ροής στη  $x$  κατεύθυνση. Συγκεκριμένα, η προσθήκη μαγνητικού πεδίου αναγκάζει τη ροή πίσω από το κύμα να αποκτήσει μεγαλύτερη ταχύτητα σε απόλυτο μέγεθος, σε σχέση με την απλή υδροδυναμική περίπτωση. Υπενθυμίζουμε ότι, παρόμοια ήταν η επίδραση του μαγνητικού πεδίου και στα *Rarefaction Waves*. Επιπρόσθετα, το μαγνητικό πεδίο ενισχύει την περαιτέρω επιβράδυνση της ροής στη  $z$  κατεύθυνση.

Οι σχέσεις 2.56 και 2.57, τις οποίες ορίσαμε στην αρχή της ενότητας, μας βοηθούν να γράψουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν το μαγνητισμένο ρευστό σαν να πρόκειται απλώς για ένα υδροδυναμικό αέριο. Πράγματι, στη σχέση 2.113 υπάρχουν μόνο κινηματικά και θερμοδυναμικά μεγέθη, ενώ η παρουσία του μαγνητικού πεδίου στο σύστημα έχει απορροφηθεί από τη συνολική ενθαλπία  $\hat{h}$  και τη συνολική πίεση. Το ερώτημα που θέλουμε να θέσουμε σε αυτό το σημείο είναι: Θα μπορούσε το μαγνητικό πεδίο να παίζει το ρόλο θερμοδυναμικής παραμέτρου; Με διαφορετικό τρόπο, η τοπολογία του πεδίου, δηλαδή κάθετα στη κίνηση της ροής, εισάγει απλώς έναν επιπλέον όρο στη πίεση ενισχύοντας την ή το μαγνητικό πεδίο έχει διακριτό ρόλο στο σύστημα;

Για την απάντηση του παραπάνω ερωτήματος θα ξεκινήσουμε από τη σταθερά  $\mathcal{B} = b/\rho$ . Τροποποιώντας την έχουμε:

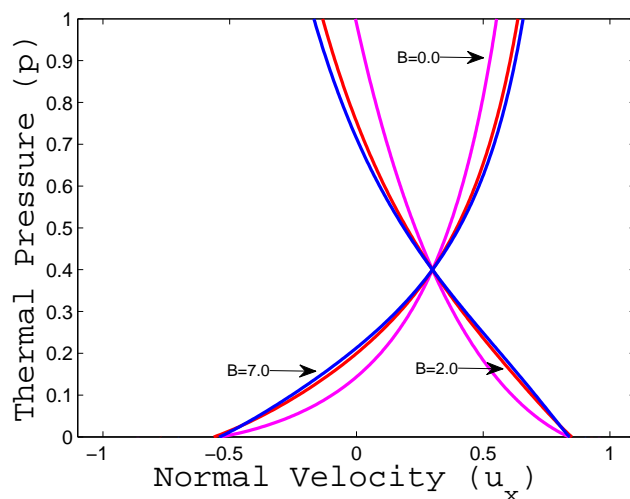
$$\mathcal{B} = \frac{b}{\rho} = \frac{2b^2}{2b\rho} = \frac{2P_F}{\mathcal{B}\rho^2} \quad (2.123)$$

$$P_B = \frac{\mathcal{B}^2}{2}\rho^2 \quad (2.124)$$

Αν ορίσουμε τη σταθερά  $\mathcal{B}^2/2$  σαν μια αδιαβατική ποσότητα  $Q_B$  τότε προκύπτει ότι:

$$P_B = Q_B\rho^2 \quad (2.125)$$

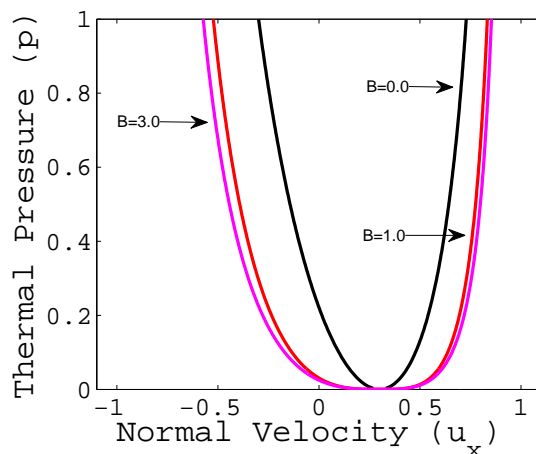
<sup>7</sup>Για πιέσεις  $\hat{p}$  λίγο μεγαλύτερες από την αρχική, η  $u_z$  παραμένει σταθερή ή παρουσιάζει μικρή αύξηση.



Σχήμα 2.15: *Shock Waves* για διαφορετικές τιμές μαγνήτισης,  $\mathcal{B} = 0, 2, 7$ . Η αρχική κατάσταση χαρακτηρίζεται από:  $p_a = 0.4$ ,  $u_{xa} = 0.3$ ,  $\rho = 1.0$ ,  $u_{za} = 0.3$ . Η προσθήκη του πεδίου επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά της ροής πίσω από το κύμα.

Η εξίσωση 2.125 μας λέει ότι, θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα σαν να είχαμε ένα υδροδυναμικό αέριο με πολυτροπικό δείκτη  $\gamma = 2.0$ . Με άλλα λόγια, το μαγνητικό πεδίο συνεισφέρει μόνο στην ενίσχυση της πίεσης. Αν πράγματι ίσχυε κάτι τέτοιο, καθώς η θερμική πίεση ενισχύεται πίσω από το *Shock* θα έπρεπε και το μαγνητικό πεδίο να ενισχύεται χωρίς όμως να επηρεάζει το θερμικό κομμάτι της πίεσης. Κάτι τέτοιο δε φαίνεται στο σχήμα 2.16, όπου η παρουσία του μαγνητικού πεδίου επηρεάζει σημαντικά τη θερμική πίεση που προκύπτει από μια κρία, αρχικά, μαγνητισμένη ροή. Αν το μαγνητικό πεδίο λειτουργούσε σαν ένα θερμοδυναμικό μέγεθος θα επηρέαζε μόνο τη μαγνητική πίεση. Το γεγονός ότι, επηρεάζει το αποτέλεσμα της θερμικής πίεσης πίσω από το *Shock* σημαίνει ότι, το πεδίο τροφοδοτεί με ενέργεια τη ροή.

Το ότι δε μπορούμε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα σαν ένα υδροδυναμικό αέριο με πολυτροπικό δείκτη 2 έχει να κάνει με τη σταθερά  $\mathcal{B} = b/\rho$  και τη φύση των *Shocks*. Στα *Shocks* δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκατέρωθεν της ασυνέχειας μια σχέση της μορφής  $P = Q\rho^\gamma$ . Ο λόγος είναι προφανής. Η εντροπία δεν διατηρείται με αποτέλεσμα το  $Q$  να είναι διαφορετικό στις δύο πλευρές του κύματος. Αντίθετα, η σταθερά  $\mathcal{B} = b/\rho$  υποδεικνύει ότι, το αδιαβατικό  $Q_B$  είναι ίδιο και στις δύο πλευρές της ροής. Ως εκ τούτου, η περιγραφή μαγνητισμένης ροής πίσω από κύμα και υδροδυναμικής ροής με πολυτροπικό δείκτη  $\gamma = 2.0$  δεν είναι ταυτόσημες.



Σχήμα 2.16: Μαγνητισμένη ροή ( $\mathcal{B} = 1, 3$ ) θερμικής πίεσης μηδέν. Η αρχική κατάσταση χαρακτηρίζεται από:  $p_a = 0.0$ ,  $u_{xa} = 0.3$ ,  $\rho = 1.0$ ,  $u_{za} = 0.6$ .

### 2.3.3 Μοντέλα στο πρόβλημα *Riemann*

Στην ενότητα 1.2 ορίσαμε την υδροδυναμική εκδοχή του προβλήματος *Riemann*. Δεδομένης πλέον, της ανάλυσης για τα *Shocks* και τα *Rarefaction Waves* μέσα σε ένα μαγνητισμένο ρευστό, μπορούμε να κατασκευάσουμε απλά μαγνητοϋδροδυναμικά προβλήματα *Riemann*. Παρακάτω, παρουσιάζουμε δυο παραδείγματα, που αφορούν τις δύο από τις τρεις περιπτώσεις των κυμάτων, που μπορούν να διαδοθούν μέσα σε δύο ρευστά όταν αυτά έρχονται αρχικά σε επαφή. Πρώτα, βρίσκουμε τη λύση του προβλήματος *Riemann* για δύο μαγνητισμένα ρευστά που συγκρούονται. Στη συνέχεια, λύνουμε το πρόβλημα για την περίπτωση, όπου δύο αρχικά ακίνητα ρευστά σε επαφή παρουσιάζουν μεγάλη διαφορά πίεσης.

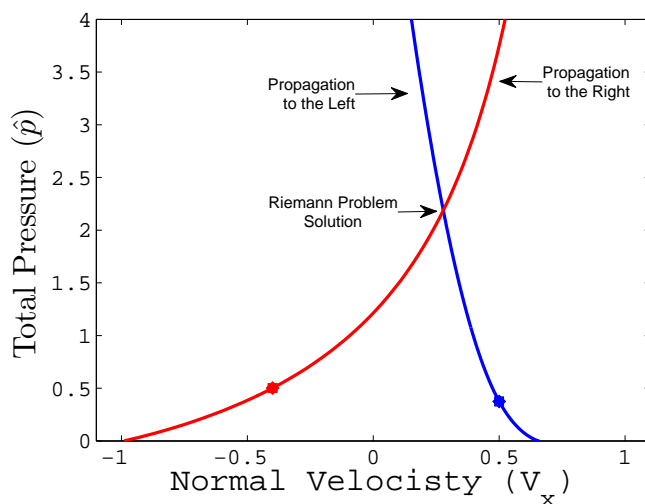
#### Σύγκρουση δυο μαγνητισμένων ροών

Ας υποθέσουμε ότι, έχουμε δύο μαγνητισμένα ρευστά, τα οποία τη χρονική στιγμή  $t = 0$  έρχονται σε επαφή. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία δύο *Shock Waves* στο σημείο της αρχικής ασυνέχειας και τη διάδοσή τους σε αντίθετες κατευθύνσεις. Η διάδοση των δύο κυμάτων ορίζει την ενδιαμέση περιοχή στα δύο ρευστά, για την οποία καλούμαστε να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά της.

Με βάση την ανάλυση προηγουμένως, θα θεωρήσουμε τις αρχικές ιδιότη-

τες των δύο ρευστών γνωστές και θα υπολογίσουμε τη πιθανή θερμοδυναμική κατάσταση που μπορεί να βρεθεί το ρευστό πίσω από κάθε κύμα. Έτσι, προκύπτει το διάγραμμα 2.17, στο οποίο έχουμε σχεδιάσει την πίεση  $\hat{p}$  πίσω από το *Shock* σαν συνάρτηση της τελικής ταχύτητας στον  $x$  άξονα. Η κόκκινη καμπύλη αφορά το *Shock* που διαδίδεται προς τα δεξιά, ενώ η πράσινη αυτό που διαδίδεται προς τα αριστερά. Τα σημεία πάνω στις καμπύλες αντιπροσωπεύουν την κατάσταση των δύο ροών μπροστά από τα δύο κύματα.

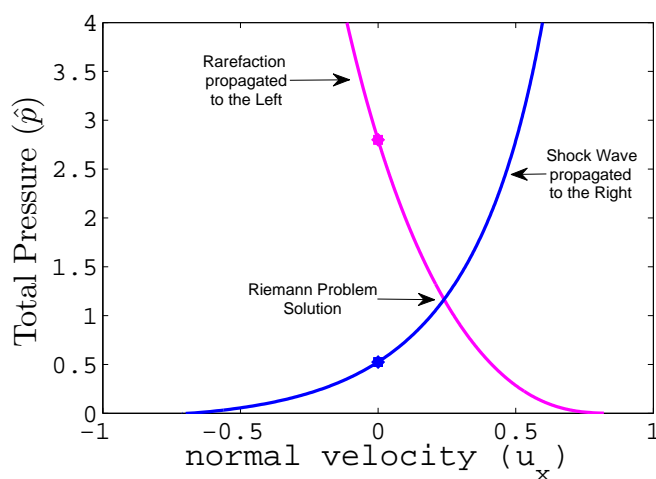
Σύμφωνα με τη παραδοχή ότι, γνωρίζουμε την κατάσταση της ροής μπροστά από το κύμα, η τελική κατάσταση πίσω από αυτό θα βρίσκεται στο μέρος της καμπύλης με πιέσεις μεγαλύτερες της  $p_u$ . Για να βρούμε όμως, τη λύση του προβλήματος *Riemann* θα πρέπει να απαιτήσουμε οι πιέσεις και οι ταχύτητες εκατέρωθεν της ασυνέχειας να είναι ίδιες. Επομένως, η λύση του προβλήματος *Riemann* θα είναι το σημείο τομής των δύο καμπυλών.



Σχήμα 2.17: Γραφική παράσταση των *Shocks* που δημιουργούνται από τη σύγκρουση δύο ρευστών. Η κατάσταση της ενδιάμεσης περιοχής των δυο ρευστών, που ορίζουν τα κύματα, προσδιορίζεται από τη λύση του προβλήματος *Riemann* και είναι το σημείο τομής των δυο καμπυλών. **Αριστερά:** Η αρχική κατάσταση της ροής χαρακτηρίζεται από:  $p_u = 0.250$ ,  $u_{xa} = 0.5$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $u_{za} = 0.8$ , και  $\mathcal{B} = 1.0$ . **Δεξιά:** Η αρχική κατάσταση της ροής χαρακτηρίζεται από:  $p_u = 0.50$ ,  $u_{xa} = -0.4$ ,  $\rho = 0.05$ ,  $u_{za} = 0.1$ , και  $\mathcal{B} = 1.0$ .

### Επαφή μαγνητισμένων ροών με διαφορετική πίεση

Στη συνέχεια δίνουμε ένα άλλο παράδειγμα για το πρόβλημα *Riemann*, που αφορά το δεύτερο συνδυασμό κυμάτων, όπως αναλύσαμε στην ενότητα 1.2. Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε δύο ρευστά ακίνητα ή έστω με μικρές σχετικές ταχύτητες, τα οποία έρχονται σε επαφή τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Το μοντέλο χαρακτηρίζεται κυρίως από τη διαφορά πίεσης μεταξύ των δύο ροών. Θεωρώντας ότι, το αέριο αριστερά έχει μεγαλύτερη πίεση από αυτό δεξιά, έχουμε ως αποτέλεσμα την εκτόνωση προς τα δεξιά της αριστερής ροής. Έτσι, το αέριο αριστερά αραιώνει και μέσα του διαδίδεται ένα *Rarefaction Wave*, ενώ το αέριο δεξιά συμπιέζεται και μέσα του αναπτύσσεται ένα *Shock*.



Σχήμα 2.18: Γραφική παράσταση του *Shock* και του *Rarefaction Wave*, που δημιουργούνται εξαιτίας της διαφοράς των αρχικών πιέσεων των δύο ρευστών. Η κατάσταση της ενδιάμεσης περιοχής των δυο ρευστών, που ορίζουν τα κύματα, προσδιορίζεται από τη λύση του προβλήματος *Riemann* και είναι το σημείο τομής των δυο καμπυλών. **Αριστερά:** Η αρχική κατάσταση της ροής χαρακτηρίζεται από:  $p_u = 0.80$ ,  $u_{xa} = 0.0$ ,  $\rho = 1.0$ ,  $u_{za} = 0.6$ , και  $\mathcal{B} = 2.0$ . **Δεξιά:** Η αρχική κατάσταση της ροής χαρακτηρίζεται από:  $p_u = 0.40$ ,  $u_{xa} = 0.0$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $u_{za} = 0.6$ , και  $\mathcal{B} = 1.0$ .

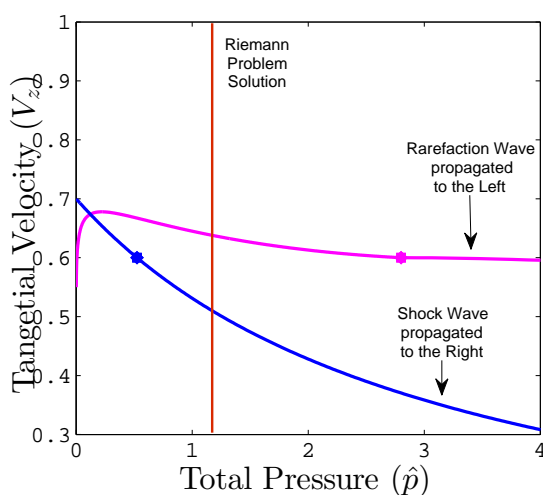
Στο σχήμα 2.18 δίνουμε τη γραφική παράσταση της πίεσης  $\hat{p}$  συναρτήσει της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας  $u_x$  για το *Rarefaction* και το *Shock*. Η μπλε καμπύλη αντιστοιχεί στο *Shock*, ενώ η καμπύλη χρώματος magenta στο *Rarefaction*. Για δεδομένη την κατάσταση μπροστά από τα δυο κύματα, στο μεν *Rarefaction* η ροή θα πρέπει να κατευθυνθεί προς τις χαμηλές πιέσεις, για



## 60 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΤΟ ΧΡΟΝΟΕΞΑΡΤΩΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ RIEMANN

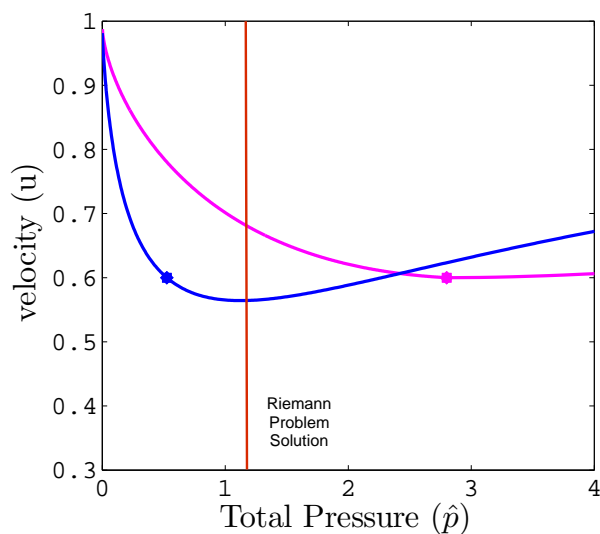
το δε *Shock* στις μεγάλες. Επαναλαμβάνουμε ότι, το σημείο τομής των δύο καμπυλών θα είναι η λύση του προβλήματος *Riemann*.

Η γραφική παράσταση για τη  $z$  συνιστώσα της ταχύτητας δίνεται στο διάγραμμα 2.19. Όπως ήδη έχουμε σχολιάσει, η ροή πίσω από το *Shock* επιβραδύνεται, ενώ πίσω από το *Rarefaction* επιταχύνεται. Τελικά, στο σχήμα 2.20 αναπαριστούμε τη συνολική ταχύτητα της ροής. Εύκολα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι, ενώ στη συγκεκριμένη περίπτωση η ροή πίσω από το *Shock* επιβραδύνεται, για μεγαλύτερη πίεση η ροή θα επιταχυνόταν.



Σχήμα 2.19: Γραφική παράσταση της  $u_z$  για το *Shock* και το *Rarefaction Wave* του προβλήματος. Η κόκκινη κατακόρυφη ευθεία ορίζει τη λύση του προβλήματος.

Επομένως, έχοντας την πίεση και την ταχύτητα που αποκτά η ροή πίσω από τα κύματα, μπορούμε να υπολογίσουμε και τις υπόλοιπες θερμοδυναμικές ποσότητες της ροής. Στο σχήμα 2.21 παρακάτω, δίνουμε ως παράδειγμα το *profile* της πίεσης κατά μήκος του άξονα  $x$  για δύο χρονικές στιγμές. Αριστερά και δεξιά στο διάγραμμα, βρίσκονται οι καταστάσεις μπροστά από το *Shock* και το *Rarefaction Wave*, όπως έχουμε υποθέσει. Επιπλέον, μπορούμε να παρατηρήσουμε το εύρος του *Rarefaction Wave* σε σχέση με το απότομο άλμα που κάνει η πίεση στο *Shock*. Η πίεση εκατέρωθεν της ασυνέχειας είναι ίση και προσδιορίζεται από τη λύση του προβλήματος *Riemann*. Αξίζει να επαναλάβουμε ότι, το *profile* της πυκνότητας θα παρουσιάζει άλμα και στην περιοχή της ασυνέχειας, εφόσον πρόκειται για δύο διαφορετικά ρευστά.

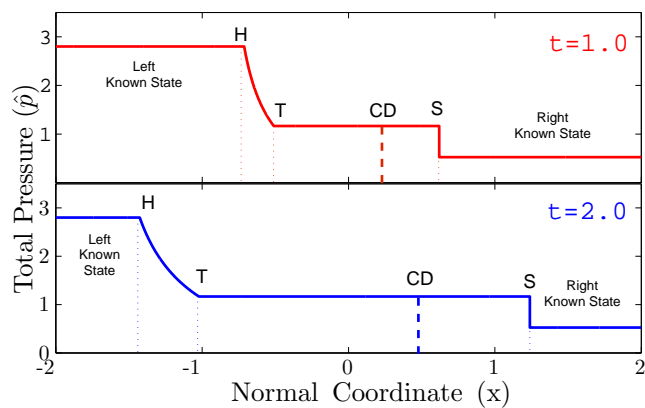


Σχήμα 2.20: Γραφική παράσταση της ταχύτητας για το *Shock* και το *Rarefaction Wave* του προβλήματος. Η κόκκινη κατακόρυφη ευθεία ορίζει τη λύση του προβλήματος.

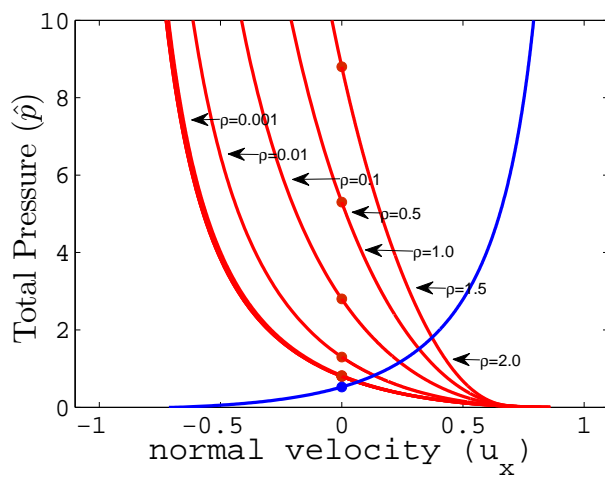
### Εξάρτηση της λύσης από τη πυκνότητα

Στο σημείο αυτό, θέλουμε να μελετήσουμε την επίδραση που έχει η πυκνότητα στον προσδιορισμό της λύσης του προβλήματος *Riemann*. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα που μόλις περιγράψαμε μεταβάλλοντας την αρχική πυκνότητα για το *Rarefaction Wave*. Τέτοιου είδους παραμετρική μελέτη, θα μας επιτρέψει να κατανοήσουμε καλύτερα πως, για παράδειγμα, αντιδρά ένας σχετικιστικός πίδακας σε διαφορετικά προφίλ πυκνοτήτων της γαλαξιακής ατμόσφαιρας.

Στην εικόνα 2.22 επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη εφαρμογή (Σχήμα 2.20) για διαφορετικές πυκνότητες του κύματος *Rarefaction*. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, στις πολύ μικρές πυκνότητες η λύση του προβλήματος *Riemann* δεν εξαρτάται καθόλου από την πυκνότητα του ρευστού μπροστά από το μέτωπο του *Rarefaction Wave*. Ωστόσο, για μεγαλύτερες τιμές της πυκνότητας βλέπουμε ότι, η λύση του προβλήματος μετατοπίζεται σε μεγαλύτερες τιμές της συνολικής πίεσης. Ως εκ τούτου, υπάρχει ένα εύρος τιμών στην πυκνότητα που καθορίζει την πίεση που θα διαμορφωθεί τελικά εκατέρωθεν της επαφής ασυνέχειας. Για παρόμοια μελέτη της επίδραση της πυκνότητα στη λύση του προβλήματος ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην αναφορά [29].



Σχήμα 2.21: Προφίλ της συνολικής πίεσης για τις χρονικές στιγμές  $t = 1.0$  και  $t = 2.0$ .



Σχήμα 2.22: Παραμετρική μελέτη για την επίδραση της πυκνότητας μπροστά από το Rarefaction Wave στον καθορισμό της λύσης του προβλήματος.

## Κεφάλαιο 3

# Το στάσιμο πρόβλημα *Riemann*

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, έγινε διεξοδική μελέτη του χρονοεξαρτώμενου προβλήματος *Riemann*. Ωστόσο, γνωρίζουμε από τις παρατηρήσεις ότι, ο M87 διατηρεί το κωνικό του σχήμα στο χώρο για περισσότερες από τρεις τάξεις μεγέθους. Το γεγονός αυτό, υποδεικνύει μια μάλλον ομαλή και ομογενής κατανομή του γαλαξιακού υλικού, μέσα στο οποίο εκτονώνεται ο πίδακας του M87. Με άλλα λόγια φαίνεται ότι, έχει παρέλθει αρκετός χρόνος από την εκκίνηση του πίδακα, ώστε έχει αποκατασταθεί πλέον η ισορροπία σε ότι αφορά τουλάχιστον την αλληλεπίδραση του πίδακα με το περιβάλλον υλικό.

Για το λόγο αυτό, είναι αναγκαία η μελέτη του στάσιμου προβλήματος *Riemann*. Η διάδοση των κυμάτων, που προκύπτουν από την αλληλεπίδραση των δύο ρευστών, επηρεάζεται σημαντικά από τα φυσικά όρια που θέτουμε στο πρόβλημα. Στην περίπτωση μας δύο είναι τα φυσικά όρια. Από την μια πλευρά, έχουμε τον άξονα του *Jet*, ενώ από την άλλη το επίπεδο του ισημερινού. Η επίδραση των ορίων πάνω στα κύματα έχει ως αποτέλεσμα την σταθεροποίηση τους και επομένως την μόνιμη παρουσία τους στην κατάσταση ισορροπίας. Επιπρόσθετα, η αναλυτική περιγραφή του προβλήματος *Riemann* στην ισορροπία, μας δίνει τη δυνατότητα σύγκρισης με τις προσομοιώσεις, που ακολουθούν στην επόμενη θεματική ενότητα.

Στο τρέχον κεφάλαιο, δίνουμε αρχικά την περιγραφή του στατικού *Shock Wave* και *Rarefaction Wave*. Στη συνέχεια, μελετάμε το στάσιμο πρόβλημα *Riemann* και χρησιμοποιούμε τον φορμαλισμό του προβλήματος για τη κατασκευή μοντέλων στον πίδακα του M87. Το ενδιαφέρον εστιάζεται στην περιοχή του *HST – 1 Knot*, εκεί δηλαδή που πραγματοποιείται η μετάβαση από παραβολικές γραμμές ροής σε κωνικές. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε δύο πιθανά σενάρια για το πως επηρεάζεται η εσωτερική δομή του *Jet* εξαιτίας της αλλαγής του σχήματος του. Στην πρώτη εκδοχή, η αρχική εκτόνωση του πίδακα λόγω

διαφοράς πιέσεων με το υλικό της ατμόσφαιρας οδηγεί στη μόνιμη παρουσία ενός *Rarefaction Wave* εντός του σχετικιστικού πίδακα. Αντίθετα, η παρουσία ενός *Recollimation Shock* εντός της επικράτειας του *Jet* αναπαράγεται στο δεύτερο σενάριο. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται σχολιάζοντας τον τρόπο με τον οποίο, τα δύο αυτά μοντέλα μπορούν να εξηγήσουν παρατηρήσεις του M87.

### 3.1 Το στάσιμο *Shock Wave*

Ας υποθέσουμε ότι, πάνω στο πολιοίδες επίπεδο  $x - z^1$  βρίσκεται ένα στατικό *Shock Wave* υπό γωνία  $\theta$  ως προς τον κάθετο άξονα  $z$ . Η μέθοδος, την οποία θα πρέπει να ακολουθήσουμε για να επιλύσουμε τις συνθήκες άλματος εκατέρωθεν του *Shock*, είναι ίδια με αυτή, που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ωστόσο, το πρόβλημα πλέον δεν είναι μονοδιάστατο αλλά διδιάστατο, καθώς η εξάρτηση από τον χρόνο δεν υπάρχει. Το σύστημα των εξισώσεων, που πρέπει να επιλύσουμε σε αυτή τη περίπτωση δε δίνεται από την εξίσωση 2.106 του προηγούμενου κεφαλαίου αλλά από την παρακάτω συμπαγή σχέση:

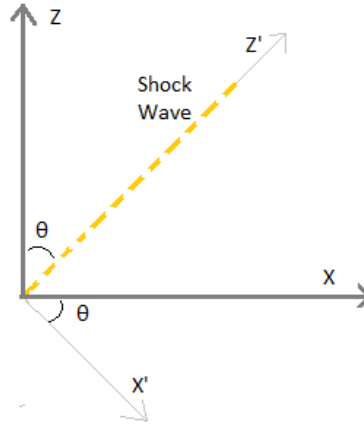
$$- [\mathcal{X}] \cos \theta + [\mathcal{Z}] \sin \theta = 0 \quad (3.1)$$

Όπου τώρα οι πίνακες  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Z}$  γράφονται ως:

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \rho \Gamma u_x \\ \hat{\rho} \hat{\Gamma}^2 u_x \\ \hat{\rho} \hat{\Gamma}^2 u_x^2 + \hat{p} \\ 0 \\ \hat{\rho} \hat{\Gamma}^2 u_z u_x \\ \Gamma b u_x \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \rho \Gamma u_z \\ \hat{\rho} \hat{\Gamma}^2 u_z \\ \hat{\rho} \hat{\Gamma}^2 u_x u_z \\ 0 \\ \hat{\rho} \hat{\Gamma}^2 u_z^2 + \hat{p} \\ \Gamma b u_z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Βέβαια, δεδομένου ότι, στην προηγούμενη ενότητα προσδιορίσαμε αναλυτικά την θερμοδυναμική κατάσταση πίσω από ένα κινούμενο *Shock*, είναι εύκολη η μετάβαση στο στατικό χρησιμοποιώντας δύο απλούς χειρισμούς. Πρώτον, όπως έχει ειπωθεί, το *Shock Wave* βρίσκεται στο επίπεδο  $x - z$  υπό γωνία  $\theta$ . Ο φορμαλισμός για το *Shock* του προηγούμενου κεφαλαίου αφορούσε κύμα, το οποίο κείται αρχικά στη θέση  $x' = x'_0$  και στη συνέχεια διαδίδεται κάθετα κατά μήκος του άξονα  $x'$ . Όπως φαίνεται στην εικόνα 3.1 παρακάτω, θεωρώντας γνωστή στο επίπεδο  $x - z$  την ταχύτητα της ροής στην *upstream* περιοχή, μπορούμε με έναν απλό μετασχηματισμό στροφής κατά γωνία  $\theta$  να περάσουμε στο σύστημα συντεταγμένων  $x' - z'$ , που είναι το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τελικά, σύμφωνα με τον

<sup>1</sup>Στα μοντέλα που θα παρουσιάσουμε, ο άξονας  $z$  θα είναι ευθεία παράλληλη με τον άξονα του πίδακα, ενώ ο άξονας  $x$  θα ορίζει το ισημερινό επίπεδο.



Σχήμα 3.1: Γραφική αναπαράσταση των δύο συστημάτων αναφοράς. Το σύστημα  $x' - z'$  είναι το ίδιο σύστημα με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το Shock βρίσκεται πάνω στον άξονα  $z'$  στη θέση  $x' = x'_0$ . Γνωρίζοντας την ταχύτητα στο επίπεδο  $x - z$  μπορούμε με έναν μετασχηματισμό στροφής κατά γωνία  $\theta$  να μεταβούμε στο σύστημα  $x' - z'$ .

μετασχηματισμό έχουμε ότι, οι συνιστώσες της ταχύτητας<sup>2</sup> θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$V'_{ux} = \cos \theta u_{ux} - \sin \theta u_{uz} \quad (3.3)$$

$$V'_{uz} = \sin \theta u_{ux} + \cos \theta u_{uz} \quad (3.4)$$

Δεύτερον, θέλουμε ένα στατικό Shock Wave στο σύστημα  $x - z$ . Μπορούμε για παράδειγμα να υποθέσουμε ότι, μέσα στον σχετικιστικό πίδακα υπάρχει κάποιο μόνιμο Shock, από το οποίο σαρώνεται όλη η εκροή. Για να επιτύχουμε ένα σταθερό κύμα δεν έχουμε να κάνουμε τίποτα άλλο από το να επιβάλλουμε στον φορμαλισμό της προηγούμενης ενότητας ότι, η ταχύτητα του κύματος είναι ίση με μηδέν. Πράγματι, θέτοντας  $V_s^\pm = 0$  και  $\Gamma_s = 1$  οι σχέσεις 2.107 και 2.109-2.111 γίνονται:

$$j = -\Gamma_u \rho_u V'_{ux} \quad (3.5)$$

$$[u'_x] = -j \left[ \frac{1}{D} \right] \quad (3.6)$$

<sup>2</sup> Ο πίνακας στροφής γράφεται ως:  $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ . Κατά συνέπεια, υπό μορφή πινάκων ο μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί ως:  $\begin{bmatrix} V'_{ux} \\ V'_{uz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{ux} \\ V_{uz} \end{bmatrix}$ . Η μετάβαση στο σύστημα συντεταγμένων  $x' - z'$  γίνεται στρέφοντας το  $x - z$  κατά γωνία  $\theta$ .

$$[\hat{p}] = j \left[ \frac{S'_x}{D} \right] \quad (3.7)$$

$$[u'_x \hat{p}] = j \left[ \frac{\tau'}{D} \right] \quad (3.8)$$

Όμοια, με την χρονοεξαρτώμενη περίπτωση, από τις 3.5-3.8 μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση που δίνει την ταχύτητα της ροής στην *downstream* περιοχή για το σύστημα  $x' - z'$ :

$$u'_{xd} = \frac{\hat{h}_u \Gamma'_u u'_{xu} + \frac{(\hat{p}_d - \hat{p}_u)}{j}}{\hat{h}_u \Gamma'_u + (\hat{p}_d - \hat{p}_u) \left( \frac{u'_{xu}}{j} + \frac{1}{\rho_u \Gamma'_u} \right)} \quad (3.9)$$

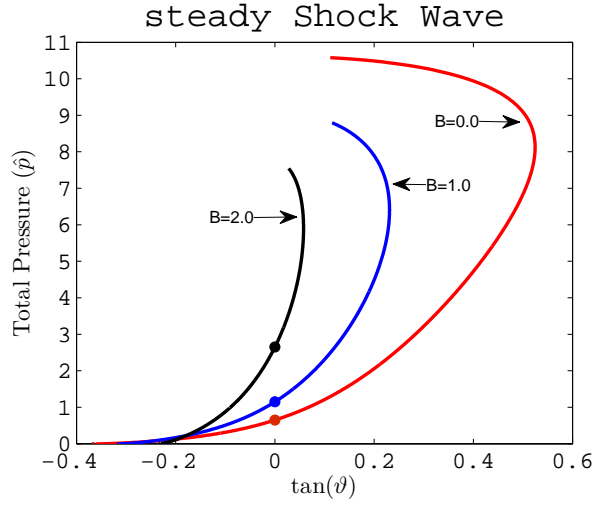
Η σχέση 3.9 υποδεικνύει ότι, η ταχύτητα της ροής στην *downstream* περιοχή είναι συνάρτηση της  $x'$  συνιστώσας της ταχύτητας μπροστά από το μέτωπο του *Shock*  $V'_{ux}$ , της συνολικής πίεσης  $\hat{p}_d$  πίσω από αυτό και της ροής μάζας  $j$ , η οποία διέρχεται από το μέτωπο. Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο με τη χρονοεξαρτώμενη περίπτωση, θέλουμε να γράψουμε την σχέση 3.9 σαν συνάρτηση μόνο μιας μεταβλητής. Συγκεκριμένα, επιλέγουμε ως ελεύθερη παράμετρο τη πυκνότητα  $\rho_d$ . Επιδιώκουμε, λοιπόν, να γράψουμε την πίεση, την ταχύτητα και την ροή μάζας σαν συναρτήσεις της πυκνότητας. Με αυτό το τρόπο, δίνοντας καθορισμένες τιμές στην πυκνότητα μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα θερμοδυναμικά μεγέθη, από τα οποία περιγράφεται η ροή μετά την διέλευση της από το μέτωπο του κύματος.

Προκειμένου να γράψουμε την συνολική πίεση πίσω από το *Shock* σαν συνάρτηση της πυκνότητας θα κάνουμε χρήση της σχέσης 2.121 του προηγούμενου κεφαλαίου.

$$\hat{p}_d = \frac{-\mathcal{N} - \sqrt{\mathcal{N}^2 - 4\mathcal{K}\mathcal{C}}}{2\mathcal{K}} \quad (3.10)$$

Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{K}$  και  $\mathcal{C}$  δίνονται από τις σχέσεις 2.118-2.120. Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να γράψουμε και τη ροή μάζας  $j$  σαν συνάρτηση της πυκνότητας. Η σχέση αυτή, προκύπτει εύκολα αν αντικαταστήσουμε τη σχέση 3.10 στη σχέση 2.122. Εφόσον, η πίεση δίνεται συναρτήσει της πυκνότητας πίσω από το *Shock* και η ροή μάζας θα είναι συνάρτηση της πυκνότητας, αφού περιέχει μέσα της την πίεση. Τελικά, από την σχέση 3.5 μπορεί κανείς να δει ότι, κατά παρόμοιο τρόπο, η ταχύτητα της ροής στο  $x' - z'$  μπροστά από το μέτωπο του κύματος είναι συνάρτηση της πυκνότητας πίσω από αυτό.

Ο μόνος συνδετικός κρίκος, που λείπει στην ανάλυση μας ως τώρα είναι ο προσδιορισμός της γωνίας του *Shock* ως προς τον άξονα  $z$ . Με γεωμετρικά επιχειρήματα μπορεί κανείς να δείξει ότι, η γωνία του κύματος στο σύστημα



Σχήμα 3.2: Γραφική παράσταση της συνολικής πίεσης ενός Shock Wave στην ισορροπία ως προς τον δυνατό προσανατολισμό της ροής ( $\tan \theta = V_x/V_z$ ). Στο γράφημα δίνεται η καμπύλη του κύματος για τρεις διαφορετικές τιμές έντασης του μαγνητικού πεδίου ( $B = 0.0, 1.0, 2.0$ ). Θεωρώντας το σημείο πάνω σε κάθε καμπύλη σαν την αρχική κατάσταση, οι περιοχές μεγαλύτερης συνολικής πίεσης πάνω στις καμπύλες είναι οι επιτρεπτές τιμές, που περιγράφουν την κατάσταση της ροής πίσω από το μέτωπο. Η αρχική κατάσταση για τις τρεις καμπύλες χαρακτηρίζεται από:  $V_{ux} = 0.0$ ,  $V_{uz} = 0.9$ ,  $P_u = 0.65$ ,  $\rho_u = 1.0$ .

αναφοράς  $x - z$  δίνεται από την σχέση:

$$\theta = \arccos \left( \frac{u'_x}{-|V|} \right) + \arctan \left( \frac{V_x}{V_z} \right) \quad (3.11)$$

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να συνοψίσουμε την πορεία που ακολουθήσαμε για την μελέτη ενός στατικού Shock, το οποίο σχηματίζει γωνία  $\theta$  ως προς τον άξονα  $z$ . Αρχικά, γνωρίζουμε την θερμοδυναμική κατάσταση της ροής ( $\rho_u$ ,  $P_u$ ,  $b_u$ ,  $\hat{h}_u$ ,  $\hat{p}_u$ ) στην *upstream* περιοχή του κύματος. Επιπρόσθετα, γνωρίζουμε την ταχύτητα και τον προσανατολισμό της ροής στο σύστημα αναφοράς  $x - z$ . Με τα δεδομένα αυτά και την πυκνότητα  $\rho_d$  πίσω από το Shock σαν μεταβλητή μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική πίεση με τη βοήθεια του τριωνύμου 3.10 που γράφουμε παραπάνω. Έπειτα, υπολογίζουμε την ροή μάζας και την  $x'$  συνιστώσα της ταχύτητας στο σύστημα  $x' - z'$ . Από τις σχέσεις 3.4 και 3.11 εξάγεται η  $z'$  συνιστώσα της ταχύτητας. Η συνέχεια είναι ίδια με αυτή του προηγούμενου κεφαλαίου. Επιλύουμε τη σχέση 3.9 με αποτέλεσμα να γνωρίζουμε τη κατάσταση της ροής μετά τη διέλευση της από Shock Wave για κάθε



τιμή της πυκνότητας  $\rho_d$ .

Στην εικόνα 3.2 αναπαριστώνται οι δυνατές καταστάσεις της συνολικής πίεσης  $\hat{p}$  της ροής *Downstream* του *Shock* σαν συνάρτηση του προσανατολισμού της ροής. Η γραφική παράσταση δίνεται για τρεις περιπτώσεις του μαγνητικού πεδίου. Αξίζει να σημειώσουμε ότι, η εφαιπόμενη της γωνίας  $\theta$  δίνεται από το λόγο  $V_x/V_z$ .

Εύκολα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι, όσο λιγότερο μαγνητισμένο είναι το αέριο τόσο τελικά μεγαλύτερη είναι η απόκλιση που υφίσταται η ροή πίσω από το *Shock Wave* σε σχέση με την κατεύθυνση που είχε η ροή μπροστά από το κύμα. Εύλογα μπορούμε να υποθέσουμε ότι, η προσθήκη μεγαλύτερης έντασης μαγνητικού πεδίου προσδίδει μεγαλύτερη αδράνεια στο ρευστό με αποτέλεσμα η όποια αλλαγή στη πορεία της ροής να καθίσταται δυσκολότερη.

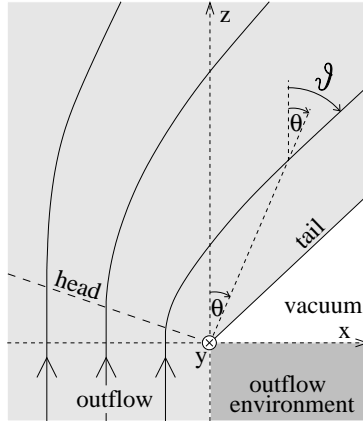
Τελικά, παρατηρούμε μια σημαντική διαφορά σε σχέση με την χρονοεξαρτώμενη περίπτωση. Είναι εμφανές ότι, για δεδομένη κατεύθυνση της ροής στην *Downstream* περιοχή ενδέχεται να υπάρχουν καμία, μία ή δύο δυνατές τιμές της πίεσης, που να είναι λύσεις του προβλήματος στην στάσιμη κατάσταση.

### 3.2 Το στάσιμο *Rarefaction Wave*

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου θα μελετήσουμε τη φυσική ενός στατικού *Rarefaction Wave*. Το πρόβλημα επιλύθηκε πρόσφατα από τους *Sapountzis & Vlahakis*, οι οποίοι εισήγαγαν την ιδέα της δημιουργίας ενός *Rarefaction Wave* μέσα στο *Jet* ενός *GRB* (εικόνα 3.3). Ο ισχυρότατος σχετικιστικός πίδακας, που δημιουργείται στο εσωτερικό του αστέρα τρυπάει την επιφάνεια του και εκτονώνεται βίαια στο αραιότερο περιβάλλον. Κατά την μετάβαση αυτή, η ροή υφίσταται περαιτέρω επιτάχυνση ( $\Gamma \approx 600$ ) εξαιτίας του *Rarefaction Wave* που δημιουργείται.

Αν και το *Rarefaction Wave* σαν μηχανισμός επιτάχυνσης για τους πίδακες των *GRB's* είναι πολλά υποσχόμενος, θα δείξουμε ότι, στην περίπτωση των ενεργών γαλαξιών δεν είναι τόσο αποδοτικός. Ωστόσο, είναι πολύ πιθανό τέτοιου είδους κύματα να βρίσκονται στο εσωτερικό πιδάκων των ενεργών γαλαξιών και να δίνουν το στίγμα τους στις παρατηρήσεις. Παρακάτω, δίνουμε συνοπτικά την πορεία που ακολουθεί κανείς για να λύσει το *Rarefaction Wave*, η οποία είναι όμοια με αυτή της χρονοεξαρτώμενης περίπτωσης. Οι πολικές συντεταγμένες ( $x = r \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ ) στο επίπεδο  $x - z$  είναι το κατάλληλο σύστημα αναφοράς. Για περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί κανείς να ανατρέξει στην αναφορά [30]<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Στην περίπτωση που μελετάμε θα ακολουθήσουμε ελαφρώς διαφορετική πορεία. Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων, θεωρώντας ως ελεύθερη μεταβλητή την πυκνότητα της ροής και όχι την γωνία  $\theta$ .



Σχήμα 3.3: Γραφική αναπαράσταση της γεωμετρίας της ροής. Ο πίδακας, που δημιουργείται στον πυρήνα, τρυπάει την επιφάνεια του αστέρα και εκτονώνεται βίαια στο εξωτερικό περιβάλλον μηδενικής σχεδόν πυκνότητας. Η εκτόνωση οδηγεί στην εμφάνιση ενός Rarefaction Wave και στην περαιτέρω επιτάχυνση της ροής [30].

Ο τρόπος, με τον οποίο δουλεύουμε στην πραγματικότητα είναι η μερική ολοκλήρωση των εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής. Βέβαια, η ολοκλήρωση όλων των εξισώσεων, ιδιαίτερα της συνιστώσας της ορμής κάθετα στη ταχύτητα της ροής, καθίσταται πολλές φορές επίπονη έως και αδύνατη να πραγματοποιηθεί. Για να ξεπεράσουμε τη δυσκολία αυτή, είναι αναγκαίο να υποθέσουμε την αυτοομοιότητα της μαγνητισμένης ροής (“Self-Similar flow”). Με άλλα λόγια, η ροή μπορεί να περιγραφεί από μια σχέση της μορφής  $\Psi = r^\lambda \psi(\theta)$ , όπου η παράμετρος  $\lambda$  για τη μελέτη του Rarefaction Wave είναι ίση με την μονάδα ( $\lambda = 1$ ). Παράλληλα, είναι βολικότερη η αντικατάσταση της συνάρτησης  $\psi(\theta)$  από την  $f(\theta)$ , η οποία ορίζεται ως  $\psi = \Psi_o(r_o f)^{-\lambda}$ . Οι παράγοντες  $\Psi_o$ ,  $r_o$  είναι σταθερές. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης  $\Psi$  έχουμε ότι:

$$r_\Psi = r_o \left( \frac{\Psi}{\Psi_o} \right)^{1/\lambda} \quad (3.12)$$

Όπου ορίσαμε ότι,  $r = r_\Psi f(\theta)$ . Η συνάρτηση  $f(\theta)$  δίνει την ακτινική απόσταση ενός σημείου πάνω σε μια γραμμή ροής από την αρχή των αξόνων. Είναι προφανές ότι, η απόσταση αυτή είναι διαφορετική για κάθε γραμμή ροής. Ωστόσο, κάθε γραμμή ροής είναι όμοια με τις υπόλοιπες και ως εκ τούτου καλούμε την ροή αυτοόμοια.

Η υπολογιστική διαδικασία επιβάλλει αρχικά τον καθορισμό των διαφόρων παραμέτρων του προβλήματος. Για την εφαρμογή του στατικού Rarefaction στα AGN's θα χρησιμοποιήσουμε τη σχετικιστική τιμή του πολυτροπικού δείκτη ( $\gamma = 4/3$ ), καθώς και ότι  $\lambda = 1$ . Επιπλέον, θα πρέπει να καθορίσουμε και

την αρχική κατάσταση της ροής πριν τη διέλευσή της από το μέτωπο του *Rarefaction Wave*. Συγκεκριμένα, δίνουμε τον παράγοντα Lorentz της ροής  $\Gamma_J$ , την μαγνήτιση της  $\sigma_J$ , την ενθαλπία  $h_J$  και την κατεύθυνση της  $\tan(\vartheta_J)$  σε κάποια αρχική γωνία  $\theta_J$  ως προς τον κάθετο άξονα  $z$ . Στη συνέχεια, μπορούμε από τις σχέσεις 14 και 23 των *Sapountzis & Vlahakis* να προσδιορίσουμε κατάλληλα την συνολική ενέργεια ανά ροή μάζας<sup>4</sup>  $\mu$  καθώς και την αρχική απόσταση  $f_J$ .

Από την σχέση 13 των *Sapountzis & Vlahakis* μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική πυκνότητα της ροής:

$$\rho_J = \frac{h_J \sigma_J}{\Phi_*^2} \quad (3.13)$$

Όπου έχουμε ότι,  $\Phi_* = \phi_\Psi / \sqrt{4\pi}$ . Ο παράγοντας  $\phi_\Psi$  είναι ολοκλήρωμα με σταθερή τιμή πάνω σε μια γραμμή ροής. Γνωρίζοντας την αρχική ενθαλπία  $h_J$  και μαγνήτιση  $\sigma_J$  της ροής και δίνοντας την τιμή του ολοκληρώματος μπορούμε να καθορίσουμε την αρχική πυκνότητα  $\rho_J$ . Έπειτα, υπολογίζουμε την αρχική θερμική πίεση  $P_J$  από τη σχέση της ενθαλπίας. Τελικά, μπορούμε να προσδιορίσουμε το αδιαβατικό  $Q$ , το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό της ενθαλπίας του ρευστού μέσα στο *Rarefaction*, από την γενική σχέση της πίεσης:

$$Q = \frac{P_J}{\rho_J^\gamma} \quad (3.14)$$

Σε αυτό το σημείο, έχουμε καθορίσει πλήρως την αρχική κατάσταση της ροής. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα σαν μεταβλητή, θα επιλύσουμε το σύστημα των εξισώσεων, όπως κάναμε και στη περίπτωση του στατικού *Shock Wave*. Το σύστημα των εξισώσεων δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

- Την ενθαλπία  $h$  του ρευστού σαν συνάρτηση της πυκνότητας,  $h = h(\rho)$ .

$$h = 1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} Q \rho^{\gamma-1} \quad (3.15)$$

- Την μαγνήτιση  $\sigma$  της ροής. Από την σχέση 13 των *Sapountzis & Vlahakis* μπορούμε να γράψουμε και αυτή την ποσότητα συναρτήσει της πυκνότητας,  $\sigma = \sigma(\rho)$ .

$$\sigma = \Phi_*^2 \frac{\rho}{h} \quad (3.16)$$

<sup>4</sup>Για εφαρμογή του μηχανισμού στα *GRB's* η συνολική ενέργεια είναι της τάξης του  $10^2 - 10^3$ , ώστε ασυμπτωτικά ο παράγοντας Lorentz της ροής να είναι της ίδια τάξης μεγέθους. Αντίθετα, η εφαρμογή στα *AGN's* απαιτεί το ολοκλήρωμα  $\mu$  να είναι της τάξης του 10.

- Την εξίσωση της κάθετης στην ταχύτητα συνιστώσας της ορμής, δηλαδή την εξίσωση *Transfield*, που δίνεται από τη σχέση 18, των *Sapountzis & Vlahakis*. Μετά από κάποιους αλγεβρικούς χειρισμούς, η σχέση 18 γίνεται:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = -\frac{(\lambda - 1)\sigma}{2 \tan(\vartheta - \theta)} \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}} \quad (3.17)$$

Όπου, οι συναρτήσεις  $\mathcal{N}$  και  $\mathcal{D}$  δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\mathcal{N} = \sigma + \frac{2}{\gamma} \frac{u_s^2}{1 + u_s^2}, \quad \mathcal{D} = \frac{1}{h^2 \sigma^2 f^2} - \sigma(1 + u_s^2) - u_s^2 \quad (3.18)$$

Εξαιτίας του γεγονότος ότι,  $\lambda = 1$  η σχέση 3.17 μηδενίζεται. Για την εύρεση μη τετριμμένης λύσης απαιτούμε να ικανοποιείται η συνθήκη  $\mathcal{D} = 0$ . Από αυτήν, μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα  $f$  που ορίσαμε παραπάνω σαν συνάρτηση της πυκνότητας,  $f = f(\rho)$ . Έτσι, έχουμε ότι:

$$f = \frac{1}{h\sigma} \frac{1}{\sqrt{\sigma(1 + u_s^2) + u_s^2}} \quad (3.19)$$

Να σημειώσουμε ότι, η συνάρτηση  $u_s$  είναι η ταχύτητα του ήχου σε *proper* μορφή και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$u_s = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)(h - 1)}{\gamma - 1 + (2 - \gamma)h}} \quad (3.20)$$

- Την εξίσωση *Bernoulli* (σχέση 23 στην εργασία που αναφερόμαστε), δηλαδή την παράλληλη στην ταχύτητα συνιστώσα της εξίσωσης της ορμής. Μετά από αλγεβρικές πράξεις η σχέση 23 γίνεται:

$$\tilde{\theta}_m = \arcsin \left( \frac{1}{h\sigma f} \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}} \right) \quad (3.21)$$

Η σχέση 3.21 μας δίνει την γωνία  $\tilde{\theta}_m$  σαν συνάρτηση της πυκνότητας, εφόσον η ενθαλπία  $h$ , η μαγνήτιση  $\sigma$ , και η συνάρτηση  $f$  είναι και αυτές συναρτήσεις της πυκνότητας,  $\tilde{\theta}_m = \tilde{\theta}_m(\rho)$ . Η γωνία της σχέσης 3.21  $\tilde{\theta}_m$  ορίζεται ως  $\tilde{\theta}_m = \vartheta - \theta$  (Σχήμα 3.3). Ακόμη, ο παράγοντας *Lorentz* μπορεί να γραφεί συναρτήσει της πυκνότητας σύμφωνα με τη σχέση  $\Gamma = \mu/(h(1 + \sigma))$ .

- Στη συνέχεια της ανάλυσης, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 3.19 για να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$  ως προς την πυκνότητα. Την παράγωγο αυτή, θα την εισάγουμε στην εξίσωση 20 των Sapountzis & Vlahakis, με σκοπό να γράψουμε την τελευταία εξίσωση του συστήματος. Η παραπάνω εξίσωση σχετίζεται με την κατεύθυνση της ροής. Συγκεκριμένα, για την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης  $f$  ισχύει:

$$\frac{df}{d\rho} = -\frac{1}{2}\mathcal{A}_I^{-\frac{3}{2}}\frac{d\mathcal{A}_I}{d\rho} \quad (3.22)$$

Όπου, η συνάρτηση  $\mathcal{A}_I$  δίνεται από την ακόλουθη σχέση,  $\mathcal{A}_I = h^2\sigma^3(1 + u_s^2) + h^2\sigma^2u_s^2$ . Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης  $\mathcal{A}_I$  ως προς τη πυκνότητα, ώστε να εκτιμήσουμε ακριβώς τη σχέση 3.22. Για την παράγωγο της  $\mathcal{A}_I$  μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{d\mathcal{A}_I}{d\rho} = \frac{d\mathcal{A}_{II}}{d\rho} + \frac{d\mathcal{A}_{III}}{d\rho} \quad (3.23)$$

Οι συναρτήσεις  $d\mathcal{A}_{III}/d\rho$  και  $d\mathcal{A}_{II}/d\rho$  είναι ιδιαίτερα μακροσκελείς και δίνονται από τις επόμενες σχέσεις<sup>5</sup>:

$$\frac{d\mathcal{A}_{II}}{d\rho} = 2h^2\sigma^3u_s\frac{du_s}{d\rho} + 3\sigma^2h^2(1 + u_s^2)\frac{d\sigma}{d\rho} + 2\sigma^3h(1 + u_s^2)\frac{dh}{d\rho} \quad (3.26)$$

$$\frac{d\mathcal{A}_{III}}{d\rho} = 2u_s h^2\sigma^2\frac{du_s}{d\rho} + 2h^2u_s^2\sigma\frac{d\sigma}{d\rho} + 2\sigma^2u_s^2h\frac{dh}{d\rho} \quad (3.27)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την σχέση 3.22 στη σχέση 20 των Sapountzis & Vlahakis, μπορούμε να υπολογίσουμε την πολική γωνία  $\theta$  (Σχήμα 3.3) σαν συνάρτηση της πυκνότητας,  $\theta = \theta(\rho)$ :

$$\theta = \int_{\rho_J}^{\rho} -\frac{\mathcal{A}_I^{-\frac{3}{2}}}{2f}\frac{d\mathcal{A}_I}{d\rho} \tan\tilde{\theta}_m d\rho + \theta_h \quad (3.28)$$

<sup>5</sup>Για τον υπολογισμό της 3.23 απαιτούνται επιπλέον οι πρώτες παράγωγοι της ενθαλπίας  $h$ , της μαγνήτισης  $\sigma$ , καθώς και της Proper ταχύτητας του ήχου:

$$\frac{dh}{d\rho} = \gamma Q\rho^{\gamma-2}, \quad \frac{d\sigma}{d\rho} = \Phi_*^2 \frac{h - \gamma Q\rho^{\gamma-1}}{h^2} \quad (3.24)$$

$$\frac{du_s}{d\rho} = \frac{\gamma(\gamma-1)Q\rho^{\gamma-2}[(\gamma-1) + (2-\gamma)h] - \gamma^2Q^2(2-\gamma)\rho^{2\gamma-3}}{[(\gamma-1) + (2-\gamma)h]^2} \quad (3.25)$$

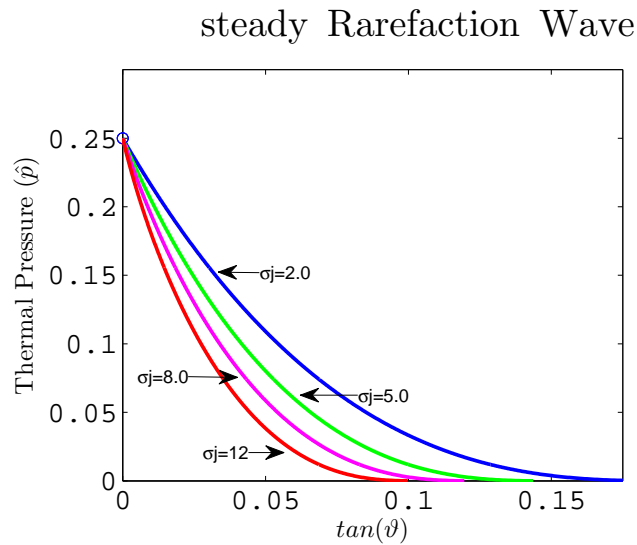
Ο όρος  $\theta_h$  είναι η γωνία στην οποία βρίσκεται το μέτωπο του *Rarefaction Wave*. Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή τη γωνία από τη σχέση  $\theta_h = \vartheta_J - \theta_{mJ}$ , οπότε η γωνία γράφεται:

$$\theta_h = \vartheta_J - \arcsin \left( \frac{1}{h_J \sigma_J f_J} \frac{1}{\sqrt{\Gamma_J^2 - 1}} \right) \quad (3.29)$$

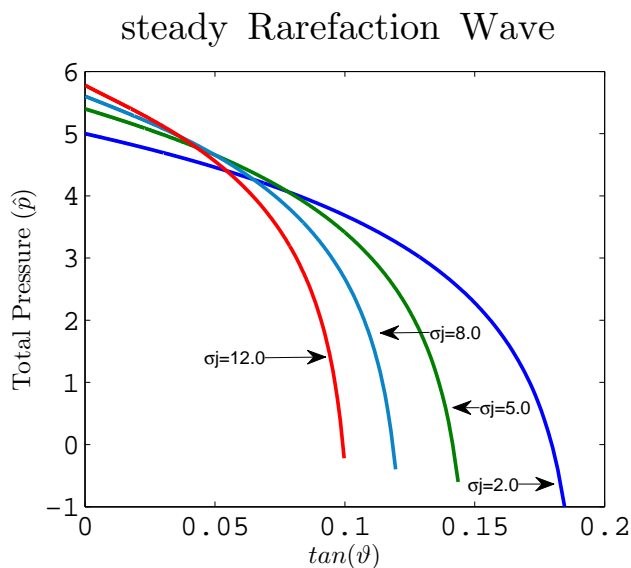
Επαναλαμβάνουμε ότι, οι παραπάνω εξισώσεις έχουν γραφεί συναρτήσει της πυκνότητας. Ως εκ τούτου, τρέχοντας την πυκνότητα σαν ελεύθερη παράμετρο μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις πιθανές καταστάσεις στις οποίες θα βρεθεί η ροή, που διέρχεται από το *Rarefaction Wave*. Όπως θα δούμε παρακάτω, η λύση του προβλήματος *Riemann* μας δίνει την τιμή της πυκνότητας, που ικανοποιεί την ισορροπία. Τελικά, γνωρίζοντας την τιμή της πυκνότητας μπορούμε από το σύστημα των εξισώσεων να εκτιμήσουμε όλες τις θερμοδυναμικές ποσότητες, από τις οποίες περιγράφεται η υπό μελέτη ροή.

Στις εικόνες 3.4 και 3.5 δίνεται γραφικά η θερμική και συνολική πίεση αντίστοιχα συναρτήσει του προσανατολισμού της ροής, όταν αυτή προσπεράσει την ουρά του *Rarefaction Wave*. Οι διαφορετικές καμπύλες αντιπροσωπεύουν διαφορετικής έντασης μαγνητικό πεδίο. Δεδομένου ότι, το *Rarefaction Wave* είναι κύμα αραιώσης, η ροή εκτονώνεται και οδηγείται σε οσοδήποτε μικρότερες πιέσεις. Το πόσο μικρή θα είναι τελικά η πίεση στην ουρά του *Rarefaction*, εξαρτάται από την πυκνότητα του περιβάλλοντος, στο οποίο εκτονώνεται ο πίδακας. Στην ακραία περίπτωση περιβάλλοντος μηδενικής πυκνότητας (η εφαρμογή για *GRB's*), όλη η ενέργεια θα τροφοδοτηθεί στην επιτάχυνση της ροής. Αντίθετα, στην περίπτωση των *AGN's*, η επιτάχυνση είναι συγκρατημένη, εξαιτίας της αντίστασης, που βρίσκει η ροή στο εξωτερικό περιβάλλον.

Τελικά, αξίζει να γίνει μια επιπρόσθετη παρατήρηση, που επίσης κάναμε στο σταθερό *Shock Wave*. Στην εικόνα 3.5 παρουσιάζουμε σε λογαριθμικό διάγραμμα την συνολική πίεση  $\hat{p}$  σε συνάρτηση των δυνατών κατευθύνσεων, που μπορεί να αποκτήσει η ροή. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, στην περιοχή των μικρών αποκλίσεων όσο εντονότερο είναι το μαγνητικό πεδίο, τόσο μεγαλύτερη είναι και η αρχική πίεση. Πράγματι, εφόσον έχουμε υποθέσει ότι, η ροή δεν διαθέτει ιδιαίτερο θερμικό περιεχόμενο ( $h_J = 1.0$ ) το μαγνητικό πεδίο είναι αυτό που θα καθορίσει την πίεση της ροής. Ωστόσο, στην περιοχή των μεγάλων αποκλίσεων βλέπουμε τελικά ότι, όσο πιο μαγνητισμένη είναι η ροή τόσο σε μικρότερες αποκλίσεις θα καταλήξει. Το μαγνητικό πεδίο προσδίδει μεγαλύτερη αδράνεια στο ρευστό με αποτέλεσμα η αλλαγή της κατεύθυνσης της ροής να καθίσταται δυσκολότερη.



Σχήμα 3.4: Γραφική παράσταση της θερμικής πίεσης  $p$  ως προς τον δυνατό προσανατολισμό της ροής μετά τη διέλευση της από το Rarefaction Wave. Οι διαφορετικές καμπύλες αφορούν διαφορετικής έντασης μαγνητικό πεδίο ( $\sigma_J = 2.0, 5.0, 8.0, 12.0$ ). Η μαγνητισμένη ροή χαρακτηρίζεται από τα εξής:  $\Gamma_J = 5.0$ ,  $\vartheta = 0.0$ ,  $h_J = 1.0001$ ,  $\rho_J = 10^5$ .



Σχήμα 3.5: Γραφική παράσταση του λογαρίθμου της συνολικής πίεσης  $\hat{p}$  ως προς τον δυνατό προσανατολισμό της ροής μετά τη διέλευση της από το Rarefaction Wave. Οι διαφορετικές καμπύλες αφορούν διαφορετικής έντασης μαγνητικό πεδίο ( $\sigma_J = 2.0, 5.0, 8.0, 12.0$ ). Η παρουσία του μαγνητικού πεδίου προσδίδει μεγαλύτερη αδράνεια στη ροή με αποτέλεσμα την μικρότερη απόκλιση της κατεύθυνσης της ροής. Η μαγνητισμένη ροή χαρακτηρίζεται από τα εξής:  $\Gamma_J = 5.0$ ,  $\vartheta = 0.0$ ,  $h_J = 1.0001$ ,  $\rho_J = 10^5$ .

### 3.3 Εφαρμογή του προβλήματος στο Jet ενός AGN

Σε αυτό το σημείο, έχουμε όλα τα απαραίτητα εργαλεία για να κατασκευάσουμε προβλήματα *Riemann* στην κατάσταση της ισορροπίας. Πλέον, έχουμε λύσει τις συνθήκες άλματος για ένα στατικό *Shock Wave*, καθώς επίσης έχουμε εκτιμήσει και τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι διάφορες θερμοδυναμικές ποσότητες μέσα σε ένα *Rarefaction Wave*. Όπως είδαμε, η μέθοδος την οποία ακολουθήσαμε στην κατάσταση της ισορροπίας, δεν διαφέρει σημαντικά από αυτήν της εξάρτησης από το χρόνο. Ωστόσο, στην ισορροπία κάνει την εμφάνισή της μια σημαντική διαφοροποίηση σε σχέση με το χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα. Ενώ, στην χρονοεξαρτώμενη περίπτωση υπάρχει ένα μόνο σημείο, το οποίο είναι η λύση του προβλήματος *Riemann*, στην ισορροπία φαίνεται να υπάρχουν μέχρι και δύο σημεία, τα οποία να είναι λύσεις του προβλήματος.

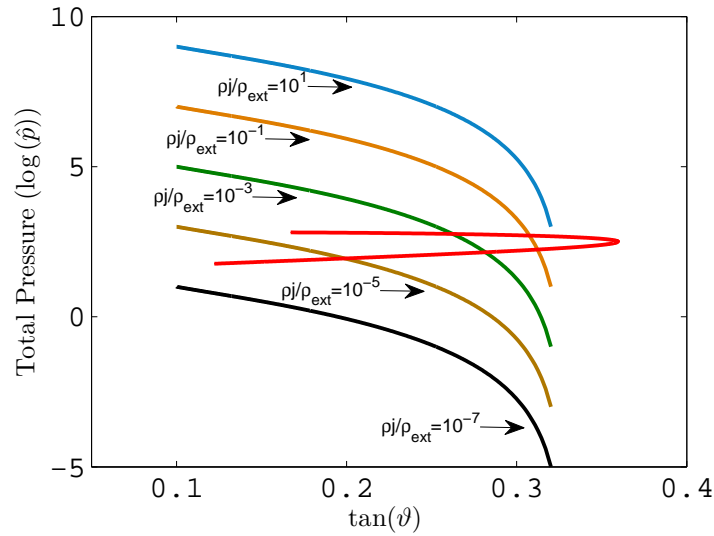
Στο σχήμα 3.6 παρακάτω, παρουσιάζουμε πέντε παραδείγματα προβλημάτων *Riemann*. Η κόκκινη καμπύλη αντιπροσωπεύει ένα *Shock* υποδεικνύοντας τις πιθανές τιμές της συνολικής πίεσης  $\hat{p}$ , στις οποίες μπορεί να βρεθεί το ρευστό μετά τη διέλευσή του από το μέτωπο του κύματος. Στον οριζόντιο άξονα αναπαρίσταται η τελική κατεύθυνση της ροής. Οι υπόλοιπες καμπύλες αναπαριστούν κύματα *Rarefaction* για διαφορετικό *contrast* πυκνοτήτων μεταξύ των δύο ρευστών. Να σημειωθεί ότι, για την εφαρμογή αυτή (Διάγραμμα 3.6) έχουμε υποθέσει ότι, ένα κύμα *Rarefaction* αναπτύσσεται στο εσωτερικό ενός μαγνητισμένου σχετικιστικού πίδακα. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, ανάλογα με τον λόγο των πυκνοτήτων  $\rho_J/\rho_{ext}$ , είναι πιθανό να έχουμε κανένα, ένα ή δύο σημεία, τα οποία θα είναι λύσεις του προβλήματος. Γεννάται, λοιπόν, το ερώτημα σχετικά με το ποιο από τα δύο σημεία επιλέγει τελικά η φύση και για ποιο λόγο. Αν και στο δεύτερο σκέλος της ερώτησης δεν είναι προφανής η απάντηση, σε ότι αφορά το πρώτο, μπορούμε να δείξουμε με τη βοήθεια προσομοιώσεων ότι, ο κώδικας επιλέγει τελικά το σημείο με την μικρότερη συνολική πίεση.

Παρακάτω, θα εφαρμόσουμε το πρόβλημα *Riemann* στους πίδακες των ενεργών γαλαξιών για δύο εκ διαμέτρου αντίθετες περιπτώσεις. Από την μια θα υποθέσουμε ότι, ένα *Rarefaction Wave* εμφανίζεται στο εσωτερικό του *Jet* εξαιτίας της υποχώρησης του περιβάλλοντος υλικού. Στη δεύτερη περίπτωση, θα μελετήσουμε την καθιερωμένη ιδέα της ύπαρξης ενός *Re-collimation Shock*, το οποίο προκαλείται από την ισχυρή πίεση του περιβάλλοντος πάνω στο *Jet*. Μελετώντας τις δύο αυτές περιπτώσεις, μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα σε σχέση με την εσωτερική δομή και την επιτάχυνση του μαγνητισμένου πίδακα. Ταυτόχρονα, θα δείξουμε πως αυτή η περιγραφή μπορεί να συνδεθεί με τις παρατηρήσεις, που αφορούν το σχήμα και την επιτάχυνση του



*Jet*, καθώς και την υπέρφωτη κίνηση που παρατηρείται.

Αξίζει να τονίσουμε ότι, για την μελέτη των δύο περιπτώσεων θα χρησιμοποιήσουμε τις παρατηρήσεις του ενεργού γαλαξία M87 ως σημείο αναφοράς. Εξαιτίας της εγγύτητάς του, ο γαλαξίας M87 αποτελεί το καλύτερο εργαστήριο για την μελέτη εξωγαλαξιακών αστροφυσικών εκροών.

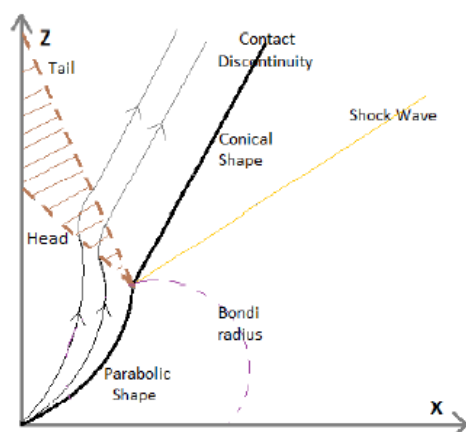


Σχήμα 3.6: Το στάσιμο πρόβλημα Riemann. Η κόκκινη καμπύλη αφορά το στατικό Shock Wave, ενώ οι υπόλοιπες αντιπροσωπεύουν το Rarefaction Wave για πέντε διαφορετικούς λόγους πυκνοτήτων μεταξύ των δύο ρευστών ( $\rho_J/\rho_{ext} = 10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}, 10^1$ ). Εύκολα βλέπει κανείς ότι, το πρόβλημα μπορεί να έχει δύο λύσεις. Τα δύο ρευστά χαρακτηρίζονται ως: **Shock:**  $C_s = 10^{-3}$ ,  $\rho_u = 10^7$ ,  $V_{ux} = 0.0$ ,  $V_{uz} = -0.003$ . **Rarefaction:**  $\Gamma_J = 4.0$ ,  $\sigma_J = 2.0$ ,  $h = 1.0001$ ,  $\vartheta_J = 0.0$ .

### 3.3.1 1ο Μοντέλο: Στατικό Rarefaction στο HST-1

Στην εισαγωγή της εργασίας παρουσιάσαμε παρατηρήσεις που αφορούν τον αστροφυσικό πίδακα του ενεργού γαλαξία M87. Από τις σημαντικότερες των παρατηρήσεων είναι αυτή των *Asada & Nakamura* που αφορά το σχήμα του *Jet* [5]. Ειδικότερα, παρατηρείται μετάβαση του σχήματος του πίδακα από παραβολικό σε κωνικό στην απόσταση που βρίσκεται η πρώτη λαμπρή περιοχή, *HST-1*. Υπενθυμίζουμε ότι, η περιοχή του *HST-1* βρίσκεται αρκετά κοντά στην εκτιμώμενη ακτίνα *Bondi*, δηλαδή στο όριο δράσης της βαρύτητας πάνω στο γαλαξιακό υλικό. Επιπλέον, άλλες μελέτες υποστηρίζουν ότι, η ενεργή περιοχή *HST-1* βρίσκεται σε μεγαλύτερη πίεση από το εξωτερικό γαλαξιακό υλικό, ακόμα και όταν ληφθούν υπόψιν τα σχετικιστικά φαινόμενα [23].

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να υποθέσουμε ότι, σε απόσταση πάνω από  $100r_c$  το ακτινικό προφίλ της πίεσης του περιβάλλοντος γαλαξιακού υλικού πέφτει γρηγορότερα σε σχέση με τη πίεση του πίδακα ( $P_{JET} > P_{ext}$ ). Αποτέλεσμα αυτού, είναι η εκτόνωση του *Jet* πάνω από αυτή την απόσταση, σε τέτοιο βαθμό, ώστε οι γραμμές ροής να γίνονται κωνικές. Στην εικόνα 3.7 δίνεται η γραφική αναπαράσταση της ιδέας που περιγράφουμε. Η αλληλεπίδραση των δύο ρευστών, δηλαδή του σχετικιστικού μαγνητισμένου πίδακα και της γαλαξιακής ατμόσφαιρας με θερμικό περιεχόμενο, συνοδεύεται από την εκτόνωση του *Jet*. Η αραιώση που προκαλείται στον πίδακα πυροδοτεί τον σχηματισμό ενός *Rarefaction Wave* στο εσωτερικό του. Στη συνέχεια, η επίδραση που δέχεται το κύμα από τα όρια της γεωμετρίας του προβλήματος το καθιστά στατικό. Με τον ίδιο τρόπο, έχουμε την εμφάνιση και ενός στατικού *Shock Wave* στην γαλαξιακή ατμόσφαιρα. Τελικά, η επιφάνεια ασυνέχειας ορίζει την επιφάνεια του πίδακα.

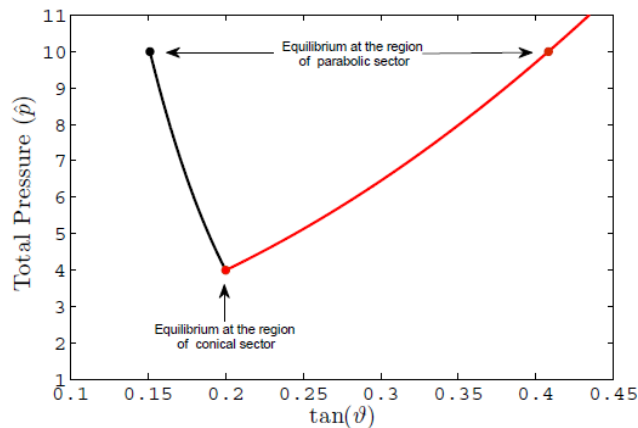


Σχήμα 3.7: Γραφική αναπαράσταση του Μοντέλου. Η αλληλεπίδραση των δύο ρευστών οδηγεί στην εκτόνωση του μαγνητισμένου πίδακα. Το σχήμα του *Jet* γίνεται κωνικό και η αραιώση στην πυκνότητα του ρευστού συνοδεύεται από την εμφάνιση ενός μόνιμου *Rarefaction Wave*. Ανάλογα, ένα στατικό *Shock Wave* εμφανίζεται στην γαλαξιακή ατμόσφαιρα που περιβάλλει το *Jet*.

Σε ότι αφορά την υπολογιστική διαδικασία, ακολουθούμε ελαφρώς διαφορετική πορεία από τα προηγούμενα παραδείγματα. Σε όλα τα προβλήματα *Riemann* έως τώρα καθορίζαμε την κατάσταση των ροών μπροστά από τα κύματα με σκοπό να εκτιμήσουμε την κατάσταση στην ενδιαμέση περιοχή πίσω από τα αυτά. Δεδομένου όμως ότι, στην περίπτωση που μελετάμε η ροή στο γαλαξιακό περιβάλλον κατευθύνεται προς το κέντρο του γαλαξία, η περιοχή αυξημένης εντροπίας δε θα είναι η περιοχή κοντά στην επιφάνεια ασυνέχειας (κωνικός

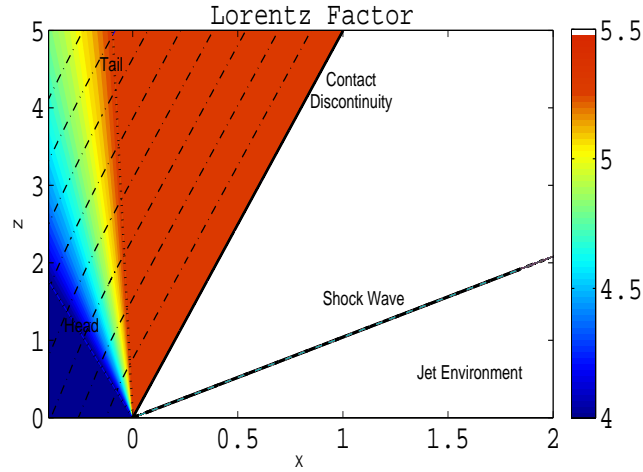
τομέας), αλλά η περιοχή του παραβολικού τομέα (Βλέπε σχήμα 3.7).

Στο σχήμα 3.8 έχουμε κατασκευάσει το μοντέλο που περιγράφουμε παραπάνω. Αρχικά, ορίζουμε την κατάσταση, στην οποία βρίσκεται η μαγνητισμένη εκροή προτού διέλθει από τον μέτωπο του *Rarefaction Wave* ( $\Gamma_J = 4.0$ ,  $\rho_J = 10$ ,  $\sigma_J = 2.0$ ,  $\vartheta_J = 0.15$ ). Στη περιοχή αυτή, η ροή ακολουθεί παραβολική πορεία, εξαιτίας του σχήματος του πίδακα. Στην συνέχεια, η ροή περνάει μέσα από το μέτωπο του *Rarefaction*. Εκεί, επιταχύνεται και ξεκινάει να αποκλίνει προς τον κωνικό τομέα. Ταυτόχρονα, το ρευστό αραιώνει. Η πορεία αυτή περιγράφεται από την μαύρη καμπύλη στο σχήμα 3.8 που είναι η καμπύλη του *Rarefaction*. Πάνω στην καμπύλη θα πρέπει να διαλέξουμε το σημείο εκείνο που αποτελεί την λύση του προβλήματος *Riemann*. Το σημείο αυτό θα αντιπροσωπεύει και την κατάσταση της γαλαξιακής ροής στον κωνικό τομέα. Από αυτό το σημείο, ακολουθούμε την καμπύλη του *Shock*, στην τιμή της πίεσης που εξασφαλίζεται η ισορροπία και στον παραβολικό τομέα. Με αυτό τον τρόπο, έχουμε προσδιορίσει την κατάσταση και των δύο ροών σε όλους τους τομείς.



Σχήμα 3.8: Κατασκευή του μοντέλου με χρήση του στάσιμου προβλήματος *Riemann*. Η μαύρη καμπύλη αναπαριστά το κύμα *Rarefaction* μέσα στον μαγνητισμένο πίδακα, ενώ η κόκκινη το *Shock* μέσα στην γαλαξιακή ατμόσφαιρα. Το μοντέλο χαρακτηρίζεται από: **Rarefaction:**  $\Gamma_J = 4.0$ ,  $\rho_J = 10$ ,  $\sigma_J = 2.0$ ,  $\vartheta_J = 0.15$ . **Shock:**  $C_s = 10^{-3}$ ,  $\rho_u = 6.65510^6$ ,  $V_{ux} = 0.0006$ ,  $V_{uz} = 0.003$ .

Στο σχήμα 3.9 παρουσιάζουμε τον παράγοντα *Lorentz* της εκροής στο πολικό επίπεδο  $x - z$ . Οι διακεκομμένες γραμμές αναπαριστούν τις γραμμές ροής του μαγνητισμένου πίδακα. Όπως μπορεί κανείς να δει, η ροή ερχόμενη από κάτω, υπό γωνία λόγω της παραβολικής διαδρομής που ακολουθούν οι ροϊκές γραμμές, χτυπά στο μέτωπο του κύματος. Από αυτό το σημείο, το ρευστό υφίσταται επιτάχυνση και οι γραμμές αποκλίνουν εξαιτίας της εκτόνωσης που



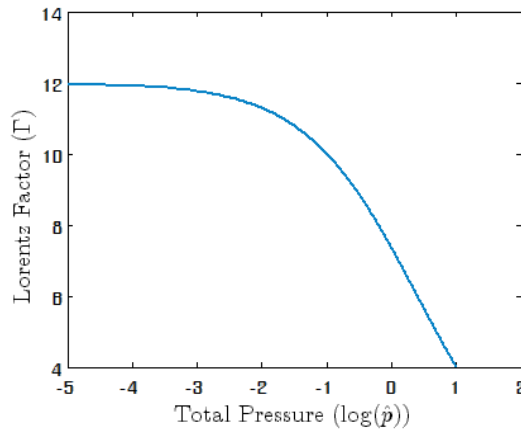
Σχήμα 3.9: Η επιτάχυνση της ροής στο πολικό επίπεδο  $x - z$ . Καθώς το μαγνητισμένο ρευστό διέρχεται από το μέτωπο του κύματος επιταχύνεται, ενώ παράλληλα αποκλίνει από την παραβολική κίνηση. Η επιτάχυνση εξακολουθεί μέχρι και την ουρά του Rarefaction, όπου οι ροϊκές γραμμές γίνονται παράλληλες με την επιφάνεια του πίδακα.

προκαλείται. Τελικά, η επιτάχυνση σταματά στην ουρά του Rarefaction, εκεί όπου οι ροϊκές γραμμές γίνονται παράλληλες με την επαφή ασυνέχειας, δηλαδή την επιφάνεια του σχετικιστικού πίδακα.

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να κάνουμε ένα σχόλιο σχετικά με την επιτάχυνση της ροής. Στο σχήμα βλέπουμε ότι, η ροή επιταχύνθηκε περίπου κατά μια μονάδα στον παράγοντα Lorentz. Γενικά, όπως θα πρόσεξε κάποιος προσεκτικός αναγνώστης, μπορούμε να ελέγξουμε την επιτάχυνση που θα δώσουμε στη ροή μετακινώντας το σημείο της λύσης του προβλήματος Riemann πάνω στην καμπύλη του Rarefaction (Σχήμα 3.8). Μετακινώντας το σημείο αυτό σε μικρότερες πυκνότητες επιτρέπουμε μεγαλύτερη εκτόνωση στη ροή και κατ'επέκταση μεγαλύτερη επιτάχυνση. Για το λόγο αυτό, ο μηχανισμός που μελετάμε είναι πολύ αποδοτικός όταν εφαρμόζεται στα GRB's. Θεωρητικά, η μέγιστη επιτάχυνση που μπορούμε να επιτύχουμε είναι:  $\Gamma_{max} = \mu$ . Αντίθετα, στην περίπτωση των AGN's δεν είναι τόσο αποδοτικός μηχανισμός. Ωστόσο, θα δούμε παρακάτω την επίδραση που μπορεί να έχει ο μηχανισμός στις παρατηρήσεις.

### Παραμετρική μελέτη του μοντέλου

Παραπάνω, εφαρμόσαμε την ιδέα για το σχηματισμό ενός Rarefaction Wave στο εσωτερικό ενός αστροφυσικού πίδακα. Είδαμε τελικά, ότι μπορούμε να ρυθμίσουμε την επιτάχυνση, η οποία θα τροφοδοτηθεί στη μαγνητισμένη εκροή,



Σχήμα 3.10: Παραμετρική μελέτη της επιτάχυνσης της ροής. Στην περιοχή των μικρών πιέσεων η επιτάχυνση γίνεται όλο και πιο έντονη.

μετακινώντας το σημείο της λύσης πάνω στην καμπύλη του *Rarefaction*. Για το λόγο αυτό, αξίζει να παρουσιάσουμε μια παραμετρική μελέτη της επιτάχυνσης.

Ας θεωρήσουμε ότι, το σημείο που δίνει τη λύση του προβλήματος *Riemann* σαρώνει όλη την έκταση της καμπύλης του *Rarefaction*, εξαιτίας της αλλαγής της πίεσης ή της πυκνότητας της γαλαξιακής ατμόσφαιρας. Με άλλα λόγια, θέλουμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του πίδακα για διαφορετικές γαλαξιακές ατμόσφαιρες<sup>6</sup>.

Στο σχήμα 3.10, σχεδιάζουμε τον παράγοντα *Lorentz* συναρτήσει της συνολικής πίεσης. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει η μείωση της συνολικής πίεσης ισοδυναμεί με την επιτάχυνση της ροής. Ειδικότερα, στην περιοχή χαμηλών πιέσεων το ρευστό επιταχύνεται όλο και πιο απότομα. Η μέγιστη τιμή, που μπορεί να λάβει ο παράγοντας *Lorentz* είναι  $\Gamma_{max} = \mu$ .

### Υπέρφωτη κίνηση-φαινόμενα προβολής

Θέλουμε να μελετήσουμε την επίδραση που έχουν τα φαινόμενα προβολής πάνω στον μηχανισμό που περιγράψαμε παραπάνω. Στην περίπτωση του γαλαξία M87 υποθέτουμε ότι, η γωνία που σχηματίζει ο άξονας του πίδακα με την γραμμή παρατήρησης είναι μικρότερη από  $20^\circ$ . Σύμφωνα με το μοντέλο, η μαγνητισμένη εκροή, που κινείται πάνω σε παραβολικές γραμμές κάτω από την περιοχή του *HST-1*, αποκλίνει πάνω από αυτήν εξαιτίας της διέλευσης της από το *Rarefaction Wave*. Κατά συνέπεια, ακριβώς λόγω της αλλαγής στο σχήμα του πίδακα θα αλλάζει κατά ανάλογο τρόπο και η γωνία παρατήρησης  $\theta_{view}$ . Στο σχήμα

<sup>6</sup> Αυτό μπορούμε να το κάνουμε δεδομένου ότι, η λύση του προβλήματος *Riemann* αφορά την εξίσωση πιέσεων εκατέρωθεν της ασυνέχειας επαφής.

3.11, παρουσιάζεται η γεωμετρία του πίδακα στην περιοχή όπου εκτονώνεται αλλάζοντας το σχήμα του. Με απλά γεωμετρικά επιχειρήματα μπορεί κανείς να υπολογίσει ότι, η γωνία παρατήρησης στον κωνικό τομέα είναι μικρότερη από ότι στον παραβολικό και δίνεται από την σχέση:

$$\vartheta_{view}^{con} = \vartheta_{view}^{par} - \vartheta + \vartheta_J \quad (3.30)$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε θεωρήσει ότι,  $\vartheta_{view}^{par} = 14^\circ$  [4].

Στο σχήμα 3.12 απεικονίζεται η φαινόμενη ταχύτητα  $\beta_{ap}$  της ροής συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης<sup>7</sup>. Είναι αξιοσημείωτη η αύξηση της φαινόμενης ταχύτητας (σχεδόν τρεις φορές μεγαλύτερη από την αρχική), καθώς κινούμαστε σε μικρότερες γωνίες. Με άλλα λόγια, όσο πιο μεγάλη είναι η εκτόνωση του πίδακα έναντι του γαλαξιακού υλικού, τόσο μεγαλύτερη φαινόμενη κίνηση θα παρατηρούμε.

Το γεγονός αυτό, μπορεί να ερμηνευθεί με απλούς συλλογισμούς. Η φαινόμενη ταχύτητα εξαρτάται από τον πραγματικό παράγοντα *Lorentz* της ροής και την γωνία παρατήρησης. Όσο πιο γρήγορη είναι η ροή τόσο μεγαλύτερη θα είναι η φαινόμενη ταχύτητα. Μάλιστα, γίνεται μέγιστη στην περιοχή των μικρών γωνιών. Στο μοντέλο, λοιπόν, που περιγράφουμε η γωνία παρατήρησης μικραίνει με ταυτόχρονη επιτάχυνση της ροής. Έτσι, η φαινόμενη κίνηση του ρευστού αυξάνεται απότομα.

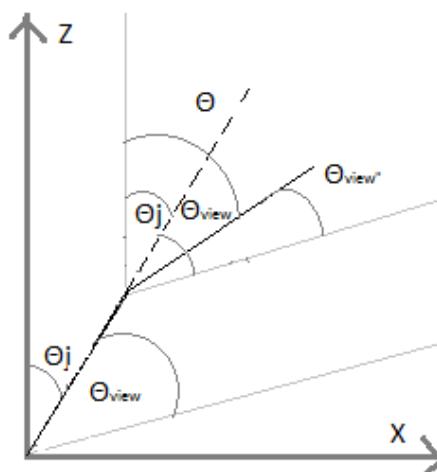
Το ερώτημα βέβαια είναι, πως το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να συνδέεται με τις παρατηρήσεις του M87. Υποθέτουμε λοιπόν ότι, η εκρηκτική δραστηριότητα που λαμβάνει χώρα στην περιοχή του *HST* – 1, οφείλεται στον μηχανισμό που περιγράψαμε. Συνιστώσα της ροής που περιέχει ενεργητικά σωματίδια προσπερνά την περιοχή του *HST* – 1. Η συνιστώσα εγκαταλείπει την παραβολική πορεία και εισερχόμενη στον κωνικό τομέα επιταχύνεται. Τα ενεργητικά σωματίδια της συνιστώσας, που συμμετέχουν στην κίνηση του κέντρου μάζας της, εκπέμπουν σε αυτή τη φάση από μικρότερη γωνία παρατήρησης. Αποτέλεσμα αυτού, ίσως να είναι οι παρατηρήσεις που δείχνουν καινούργιες συνιστώσες να ενεργοποιούνται με ταχύτητα  $\beta_{ap} \approx 6$ .

### 3.3.2 2ο Μοντέλο: Στατικό Shock στο *HST* – 1

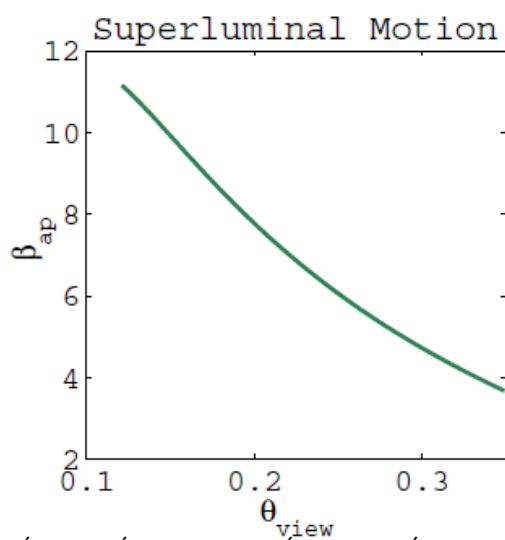
Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε μια εκ διαμέτρου αντίθετη ιδέα από αυτή που παρουσιάσαμε παραπάνω. Θα μελετήσουμε την περίπτωση, όπου στο

<sup>7</sup>Η φαινόμενη ταχύτητα υπολογίζεται από την αλγεβρική σχέση:

$$\beta_{ap} = \frac{\beta \sin \theta_{view}}{1 - \beta \cos \theta_{view}} \quad (3.31)$$



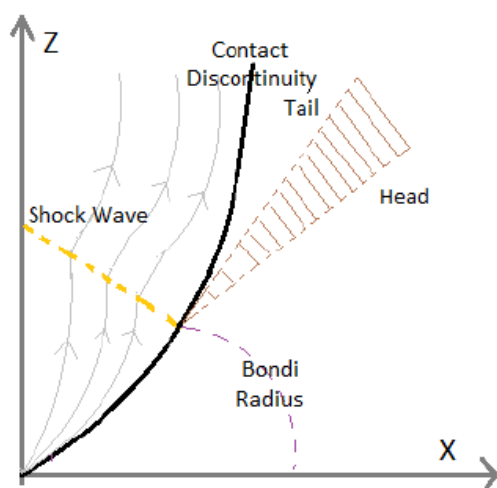
Σχήμα 3.11: Η γεωμετρία του πίδακα στην περιοχή μετάβασης από παραβολικό σε κωνικό σχήμα. Στην περίπτωση του ενεργού γαλαξία M87 η περιοχή αυτή βρίσκεται πλησίον της πρώτης ενεργής περιοχής  $HST - 1$ .



Σχήμα 3.12: Φαινόμενη κίνηση της ροής συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης. Η απότομη αύξηση στην ταχύτητα οφείλεται στην πραγματική επιτάχυνση της ροής και στην μικρότερη γωνία παρατήρησης στον κωνικό τομέα.

εσωτερικό του μαγνητισμένου πίδακα δημιουργείται ένα στατικό *Shock Wave*. Η παρουσία ενός *Shock* στην περιοχή του *HST - 1* αποτελεί κοινή πεποίθηση, δεδομένου μάλιστα τις προεκτάσεις που μπορεί να έχει σε ότι αφορά την παραγόμενη ακτινοβολία σύγχροτρον.

Στην εικόνα 3.13, παρουσιάζουμε γραφικά το δεύτερο μοντέλο που θα μελετήσουμε παρακάτω. Βασικός άξονας του μοντέλου είναι η αρχική υπόθεση ότι, το ακτινικό προφίλ της πίεσης της γαλαξιακής ατμόσφαιρας πέφτει πιο αργά από το προφίλ της πίεσης στο εσωτερικό του σχετικιστικού πίδακα. Σε μια τέτοια κατάσταση το περιβάλλον γαλαξιακό υλικό σφίγγει τον πίδακα με αποτέλεσμα την εμφάνιση ενός *Shock Wave* στο εσωτερικό του. Στη συνέχεια η αλληλεπίδραση του κύματος με τα φυσικά όρια της γεωμετρίας οδηγεί στην σταθεροποίησή του. Κατά ανάλογο τρόπο, η συμπίεση του μαγνητισμένου πίδακα ισοδυναμεί με αραιώση του γαλαξιακού υλικού. Η αραιώση αυτή με την σειρά της προκαλεί την εμφάνιση και ενός υδροδυναμικού *Rarefaction Wave*.

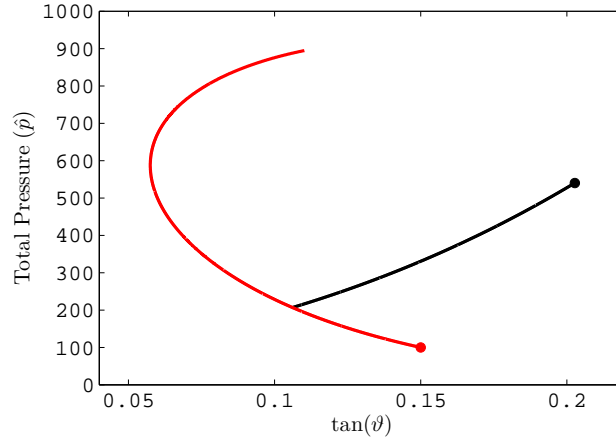


Σχήμα 3.13: Γραφική αναπαράσταση του δεύτερου μοντέλου. Η συμπίεση του σχετικιστικού πίδακα από την γαλαξιακή ατμόσφαιρα συνοδεύεται από την εμφάνιση ενός *Shock Wave* στο εσωτερικό του και από τη δημιουργία ενός *Rarefaction Wave* στο γαλαξιακό υλικό.

Στο σχήμα 3.14, παρουσιάζουμε την αριθμητική κατασκευή του μοντέλου. Η κόκκινη καμπύλη αντιπροσωπεύει το *Shock Wave* μέσα στον σχετικιστικό πίδακα. Το σημείο πάνω στην καμπύλη είναι η αρχική κατάσταση της ροής ( $\Gamma_u = 4.0$ ,  $\rho_u = 100.0$ ,  $\mathcal{B} = 0.1414^8$ ,  $C_s = 0.001$ ) πριν προσχρούσει στο μέτωπο του κύματος. Καθώς η ροή διέρχεται από το *Shock* αυξάνει το θερμικό της

<sup>8</sup> Η τιμή του  $\mathcal{B}$  ισοδυναμεί με μαγνήτιση  $\sigma_u = 2.0$



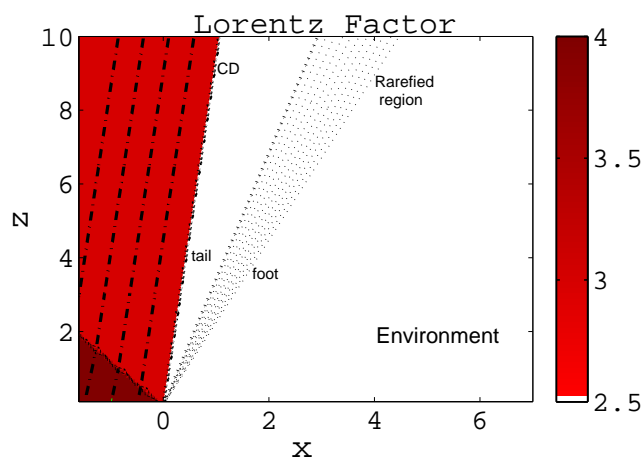


Σχήμα 3.14: Κατασκευή του δεύτερου μοντέλου με τη βοήθεια του προβλήματος Riemann. Η μαύρη καμπύλη αναπαριστά το κύμα Rarefaction μέσα μέσα στην γαλαξιακή ατμόσφαιρα, ενώ η κόκκινη το Shock μέσα στον πίδακα. Το μοντέλο χαρακτηρίζεται από: **Rarefaction:**  $\Gamma_J = 1.01$ ,  $\rho_J = 10^6$ ,  $\sigma_J = 10^{-3}$ ,  $|\vartheta_J| = -0.2$ . **Shock:**  $\Gamma_u = 4.0$ ,  $C_s = 10^{-3}$ ,  $\rho_u = 100.0$ ,  $\sigma_u = 2.0$ .

περιεχόμενο, καθώς επίσης υφίσταται επιβράδυνση. Όπως και στην περίπτωση του προηγούμενου μοντέλου, έτσι και εδώ θα πρέπει να επιλέξουμε τη λύση του προβλήματος Riemann σε μεγαλύτερη τιμή της πίεσης πάνω στη καμπύλη του Shock. Το σημείο αυτό, είναι το σημείο διασταύρωσης των καμπυλών των δύο κυμάτων και καθορίζει την κατάσταση εκατέρωθεν της επιφάνειας του πίδακα. Στην εφαρμογή που περιγράφουμε θεωρούμε ότι, η γαλαξιακή ατμόσφαιρα είναι ένας δισκοάνεμος. Η μαύρη καμπύλη αφορά το Rarefaction Wave και πάνω σε αυτή θα πρέπει να καθορίσουμε την αρχική κατάσταση, στην οποία βρίσκεται ο δισκο-άνεμος προτού διέλθει από το μέτωπο του Rarefaction Wave.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να κάνουμε ένα σχόλιο που αφορά και τα δύο μοντέλα. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι, η κατάσταση ισορροπίας αφορά τον σχετικιστικό πίδακα πάνω από την περιοχή του  $HST - 1$  και όχι κάτω από αυτή. Αυτό συμβαίνει γιατί στο μεν πρώτο μοντέλο εξασφαλίσαμε ισορροπία πιέσεων, αλλά δεν εξασφαλίσαμε τον παραλληλισμό των δύο ροών εκατέρωθεν της ασυνέχειας, στο δε δεύτερο δεν απαιτήσαμε την εξίσωση πίεσης κάτω από το  $HST - 1$ . Βέβαια, σε κάθε περίπτωση, η επιλογή των καταστάσεων θα πρέπει να γίνεται πάνω στις καμπύλες, ώστε γνωρίζοντας την κατάσταση της ροής μπροστά από τα κύματα να υπολογίζουμε και την κατάσταση πίσω από αυτά.

Ο αριθμητικός υπολογισμός μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε τον παράγοντα Lorentz του μαγνητισμένου Jet στο πολιοιδές επίπεδο  $x - z$  (Σχήμα 3.15). Όπως φαίνεται διάγραμμα στο εσωτερικό του πίδακα υπάρχει ένα Shock. Η



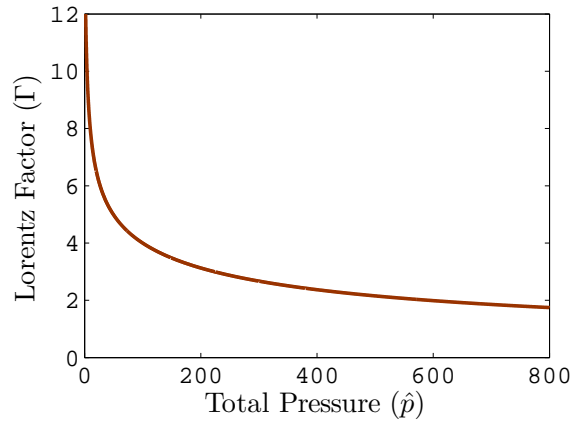
Σχήμα 3.15: Ο παράγοντας Lorentz του μαγνητισμένου πίδακα στο επίπεδο  $x - z$ . Η προσπίπτουσα στο μέτωπο του κύματος ροή επιβραδύνεται και οι γραμμές ροής συγκλίνουν προς τον άξονα.

ροή ερχόμενη από την βάση του πίδακα κινείται παραβολικά και προσκρούει στο μέτωπο του κύματος. Αυτομάτως, υφίσταται επιβράδυνση, αυξάνοντας έτσι το θερμικό της περιεχόμενο. Οι διακεκομμένες γραμμές αναπαριστούν τις γραμμές ροής στο επίπεδο  $x - z$ . Είναι εμφανές ότι, κατά την διέλευσή της, η ροή γίνεται παράλληλη με την επαφή ασυνέχειας. Προκειμένου, να επιτευχθεί ο παραλληλισμός οι ροϊκές γραμμές συγκλίνουν προς τον άξονα του πίδακα. Για αυτό και τέτοιου είδους κύματα αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως κύματα επανευθυγράμμισης (*Re-collimation Shock*).

### Παραμετρική μελέτη του μοντέλου

Παραπάνω, εφαρμόσαμε τον μηχανισμό για αυστηρά καθορισμένες τιμές των φυσικών παραμέτρων. Ωστόσο, αξίζει να παρουσιάσουμε μια παραμετρική μελέτη του παράγοντα Lorentz για να δούμε πως αντιδρά η μαγνητισμένη εκροή. Θα υποθέσουμε ξανά, ότι το σημείο της λύσης σαρώνει τη καμπύλη του *Shock* σε όλο της το εύρος, προσομοιάζοντας έτσι διαφορετικής πυκνότητας ή πίεσης γαλαξιακής ατμόσφαιρας.

Στο σχήμα 3.16, δίνεται γραφικά ο παράγοντας Lorentz της ροής μετά τη διέλευσή της από το κύμα σαν συνάρτηση της συνολικής πίεσης. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, με την αύξηση του θερμικού περιεχομένου η ροή επιβραδύνεται. Στη περιοχή χαμηλών πιέσεων, η επιβράδυνση είναι αρκετά απότομη. Αντίθετα, φαίνεται ότι ο παράγοντας Lorentz αποκτά ασυμπτωτική συμπεριφορά για μεγαλύτερες τιμές της συνολικής πίεσης.



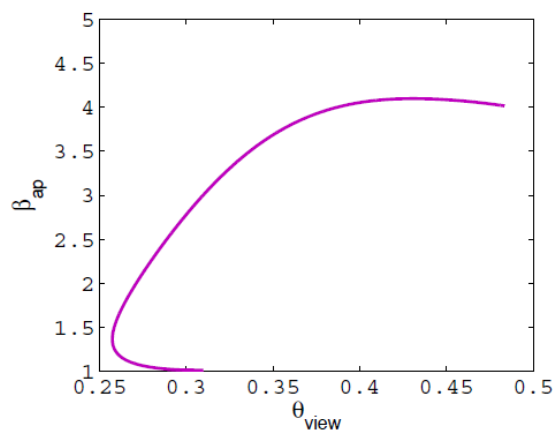
Σχήμα 3.16: Παραμετρική μελέτη του παράγοντα Lorentz. Ο σχετικιστικός πίδακας επιβραδύνεται απότομα καθώς το θερμικό περιεχόμενο της ροής αυξάνεται.

### Υπέρφωτη Κίνηση-φαινόμενα προβολής

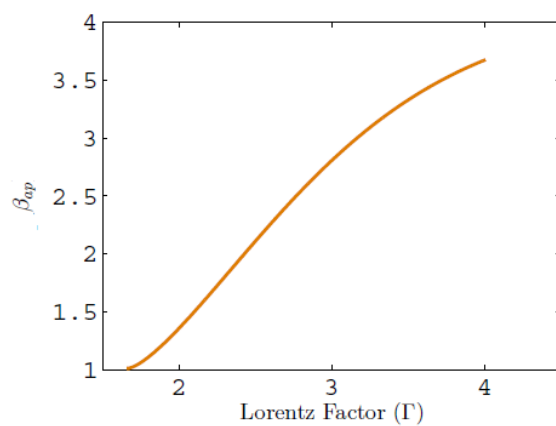
Ομοίως με το πρώτο μοντέλο, θέλουμε να μελετήσουμε την επίδραση που έχει στις παρατηρήσεις η υπόθεση περί της ύπαρξης ενός *Shock* στο εσωτερικό του M87. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε μια κινηματική μελέτη στην περιοχή του *HST* – 1, εκεί όπου θεωρείται από πολλούς ότι, βρίσκεται η θέση του *Re-collimation Shock*.

Η φαινόμενη ταχύτητα συναρτήσει της γωνίας παρατήρησης δίνεται στο σχήμα 3.17. Καθώς αυξάνεται το θερμικό περιεχόμενο της ροής η γωνία παρατήρησης αρχικά μικραίνει και στη συνέχεια μεγαλώνει. Αποτέλεσμα αυτού, είναι η απότομη στρέψη της καμπύλης στο διάγραμμα 3.17. Βέβαια, δεδομένου ότι, το ρευστό διέρχεται από το μέτωπο του κύματος επιβραδύνεται απότομα, η φαινόμενη ταχύτητα θα έχει την ίδια συμπεριφορά (Σχήμα 3.17). Με άλλα λόγια, η ιδέα για την παρουσία ενός *Shock* μέσα στο πίδακα, μπορεί να λειτουργήσει σαν μηχανισμός επιβράδυνσης της ροής. Αν και είναι δύσκολο να εστιάσουμε στην περιοχή ακριβώς του *HST* – 1 αξίζει να τονίσουμε ότι, πέρα από αυτή την απόσταση η ροή επιβραδύνεται.

Επιπλέον, η παρουσία ενός μόνιμου *Shock* στους αστροφυσικούς πίδακες είναι αρκετά ελκυστική ιδέα σε ότι έχει να κάνει με την εκπεμπόμενη ακτινοβολία. Όπως γνωρίζουμε, τα *Shocks* είναι οι περιοχές όπου, σωματίδια μέσω του μηχανισμού *Fermi* επιταχύνονται.



Σχήμα 3.17: Γραφική παράσταση της φαινόμενης ταχύτητας ως προς την γωνία παρατήρησης.



Σχήμα 3.18: φαινόμενες κινήσεις σαν συνάρτηση του πραγματικού παράγοντα Lorentz. Η φαινόμενη επιβράδυνση της ροής οφείλεται κυρίως στην πτώση του πραγματικού παράγοντα Lorentz.

## Κεφάλαιο 4

# Προσομοιώσεις μαγνητισμένης εκροής

Στα προηγούμενα δύο κεφάλαια, μελετήσαμε τη φυσική του προβλήματος *Riemann*. Σε ότι αφορά τη στάσιμη εκδοχή του προβλήματος, είδαμε πως μπορεί κανείς να την εφαρμόσει στην κατασκευή αναλυτικών μοντέλων για την περιγραφή της αλληλεπίδρασης του μαγνητισμένου πίδακα ενός AGN με την περιβάλλουσα γαλαξιακή ατμόσφαιρα. Στην παρούσα θεματική ενότητα, θα παρουσιάσουμε προσομοιώσεις της μαγνητισμένης εκροής, προκειμένου να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά τους με τα μοντέλα του προηγούμενου κεφαλαίου.

Οι προσομοιώσεις που παρουσιάζονται στη συνέχεια, σκοπό έχουν να αποτυπώσουν το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μιας μαγνητισμένης εκροής με την ατμόσφαιρα στην οποία εκτονώνονται. Για την πραγματοποίησή τους, χρησιμοποιούμε το πολικό σύστημα συντεταγμένων, ενώ ορίζουμε το πολοειδές επίπεδο  $x - z$  ως τον υπολογιστικό τομέα του προβλήματος. Εντός του υπολογιστικού κουτιού βρίσκονται δύο ρευστά. Το μαγνητισμένο ρευστό στα αριστερά αντιπροσωπεύει έναν μαγνητισμένο σχετικιστικό πίδακα. Αντίθετα, το ρευστό στα δεξιά του τομέα αναπαριστά την γαλαξιακή ατμόσφαιρα, δηλαδή, το υδροδυναμικό αέριο με το οποίο αλληλεπιδρά η μαγνητισμένη εκροή<sup>1</sup>.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, οι συγκεκριμένες προσομοιώσεις παρουσιάζουν υψηλό βαθμό δυσκολίας, δεδομένου ότι η έντονη αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο ρευστών είτε προκαλεί αναταράξεις στον πίδακα είτε αναπτύσσονται αστάθειες που εμποδίζουν τελικά την προσομοίωση να καταλήξει στην κατάσταση ισορροπίας.

Ειδικότερα, θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα για δύο διαφορετικούς τύπους γαλαξιακής ατμόσφαιρας. Στην πρώτη περίπτωση, η προσομοίωση εκκινεί χρη-

---

<sup>1</sup> Εξαιτίας της συνύπαρξης των δύο αερίων εντός του υπολογιστικού τομέα, από δω και στο εξής θα καλούμε τις προσομοιώσεις ως προσομοιώσεις *Jet-Environment*.

σιμοποιώντας *Bondi accretion* ατμόσφαιρα. Αντίθετα, στην δεύτερη εκδοχή, η αρχική κατάσταση του γαλαξιακού υλικού θα περιγράφεται από έναν υδροδυναμικό άνεμο, πιθανότατα προερχόμενο από τον δίσκο προσαύξησης. Οι προσομοιώσεις πραγματοποιήθηκαν με τη βοήθεια του κώδικα *PLUTO*, τα χαρακτηριστικά του οποίου, περιγράφονται παρακάτω. Ο κώδικας *PLUTO* είναι ένας *shock-capturing* κώδικας, σχεδιασμένος για την ολοκλήρωση των εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην αναφορά [31].

## 4.1 Ο κώδικας *PLUTO*

Όπως αναφέραμε παραπάνω, ο κώδικας *PLUTO* έχει σχεδιαστεί με σκοπό την μερική ολοκλήρωση ενός συστήματος διατηρήσιμων νόμων της μορφής:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla \cdot T(U) + S(U) \quad (4.1)$$

Όπου, το μέγεθος  $U$  αντιπροσωπεύει το σύνολο των διατηρήσιμων ποσοτήτων, το  $T(U)$  είναι ο ταυιστής των ροών και το  $S(U)$  περιγράφει τις πηγές ή τις καταβόθρες που εντάσσονται στο πρόβλημα. Η χρήση ενός ισοδύναμου διανύσματος  $V$  για την ανάθεση των αρχικών και συνοριακών συνθηκών είναι προτιμότερη. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι, οι ακριβείς εκφράσεις των  $U$ ,  $V$ ,  $T(U)$  και  $S(U)$  εξαρτάται κυρίως από το θεωρητικό πλαίσιο, στο οποίο πραγματοποιούμε την προσομοίωση. Για την μελέτη αστροφυσικών εκροών στους ενεργούς γαλαξίες το κατάλληλο πλαίσιο είναι αυτό της σχετικιστικής μαγνητοϋδροδυναμικής (*RMHD*).

Στην περίπτωση, λοιπόν, της *RMHD* το σύστημα των εξισώσεων που ολοκληρώνει αριθμητικά ο κώδικας *PLUTO* δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} D \\ \bar{m} \\ E \\ \bar{B} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} D\bar{u} \\ \omega_t \gamma^2 \bar{u}\bar{u} - \bar{b}\bar{b} + Ip_t \\ \bar{m} \\ \bar{u}\bar{B} - \bar{B}\bar{u} \end{bmatrix}^T = 0 \quad (4.2)$$

Όπου,  $D$  είναι η πυκνότητα στο σύστημα του εργαστηρίου,  $\bar{m}$  είναι η πυκνότητα ορμής και  $E$  η συνολική ενέργεια. Οι σχέσεις, από τις οποίες περιγράφονται τα μεγέθη αυτά είναι:

$$D = \gamma\rho \quad (4.3)$$

$$\bar{m} = \omega_t \gamma^2 \bar{u} - b^0 \bar{b} \quad (4.4)$$

$$E = \omega_t \gamma^2 - b^0 b^0 - p_t \quad (4.5)$$

Με  $b^0$ ,  $\bar{b}$ ,  $\omega_t$  και  $p_t$  να δίνονται από τις εξισώσεις:

$$b^0 = \gamma \bar{u} \bar{B} \quad (4.6)$$

$$\bar{b} = \frac{\bar{B}}{\gamma} + \gamma (\bar{u} \bar{B}) \bar{u} \quad (4.7)$$

$$\omega_t = \rho h + \frac{B^2}{\gamma} + (\bar{u} \bar{B})^2 \quad (4.8)$$

$$p_t = p + \frac{B^2/\gamma^2 + (\bar{u} \bar{B})^2}{2} \quad (4.9)$$

Επιπρόσθετα, το διάλυμα  $V$  περιέχει όλες τις ποσότητες και δίνεται από:  $V = (\rho, u, p, B)$ . Επομένως, για κάθε πρόβλημα θα πρέπει να ορίζουμε την αρχική κατάσταση και την κατάσταση στα σύνορα του υπολογιστικού τομέα των μεγεθών της πυκνότητα, της ταχύτητας, της πίεσης και του μαγνητικού πεδίου στο σύστημα του εργαστηρίου. Το σύστημα των εξισώσεων της σχέσης 4.2, μπορεί να κλείσει με την εξίσωση που περιγράφει την ενθαλπία του συστήματος:

$$h = 1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad (4.10)$$

Η παράμετρος  $\gamma$  είναι ο πολυτροπικός δείκτης και στη σχετικιστική περίπτωση λαμβάνει την τιμή  $\gamma = 4/3$ . Παρόλα αυτά, στις προσομοιώσεις που θα παρουσιάσουμε χρησιμοποιούμε το ισόθερμο μοντέλο με πολυτροπικό δείκτη  $\gamma = 1.001$ . Η επιλογή αυτή, έχει να κάνει κυρίως, με τον έλεγχο της εξωτερικής ατμόσφαιρας με βάση την αναλυτική λύση για την ισόθερμη περίπτωση την οποία γνωρίζουμε.

Στην ολοκλήρωση αυτής της ενότητας, αξίζει ένα σύντομο σχόλιο για μια πολύ κρίσιμη παράμετρο που αφορά όχι μόνο τον *PLUTO*, αλλά γενικότερα όλους τους μαγνητοϋδροδυναμικούς κώδικες. Το μαγνητικό πεδίο από μόνο του αυξάνει τη δυσκολία του προβλήματος για δύο κυρίως λόγους. Ο πρώτος, έχει να κάνει με το γεγονός ότι, προσθέτουμε στο σύστημα επιπλέον βαθμούς ελευθερίας, ώστε τόσο η αναλυτική όσο και η αριθμητική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της 4.2 καθίσταται δυσκολότερη.

Ο δεύτερος και σημαντικότερος λόγος, είναι η εξίσωση της μη ύπαρξης μονοπόλων,  $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ . Η εξίσωση αυτή, θα πρέπει να ικανοποιείται σε κάθε βήμα της προσομοίωσης. Ως εκ τούτου, οι κώδικες περιέχουν ρουτίνες που σκοπό έχουν τον τεχνητό έλεγχο της παραπάνω εξίσωσης. Στις προσομοιώσεις που τρέξαμε, χρησιμοποιήσαμε κυρίως την ρουτίνα των 8 κυμάτων (*Eight-Wave Formulation*)<sup>2</sup>, [32], [33].

<sup>2</sup>Βέβαια, στις προσομοιώσεις που τρέξαμε δεν χρειάζεται καμία ρύθμιση για τον έλεγχο

## 4.2 Jet-Environment Προσομοιώσεις

Έχοντας αναλύσει πλήρως το σύστημα των εξισώσεων που ολοκληρώνει ο κώδικας *PLUTO*, μπορούμε να προχωρήσουμε άμεσα στην πραγματοποίηση προσομοιώσεων. Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, θα μελετήσουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ της μαγνητισμένης εκροής ενός ενεργού γαλαξία και του γαλαξιακού υλικού για δύο διαφορετικά περιβάλλοντα. Στην πρώτη περίπτωση, η γαλαξιακή ατμόσφαιρα θα είναι τύπου *Bondi*. Σε αυτό τον τύπο υδροδυναμικής ατμόσφαιρας, το υλικό κατευθύνεται ακτινικά, εξαιτίας της βαρύτητας<sup>3</sup> προς το κέντρο του γαλαξία. Στην δεύτερη περίπτωση, θα θεωρήσουμε ότι το γαλαξιακό υλικό που περιβάλλει τον πίδακα είναι ένας υδροδυναμικός άνεμος.

Παρακάτω, θα παρουσιάσουμε προσομοιώσεις δύο διαστάσεων. Η γεωμετρία του προβλήματος, δηλαδή η ακτινική κατεύθυνση του υλικού προς και από το κέντρο του γαλαξία, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Αυτό έχει σαν συνέπεια, το πλέγμα πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση των εξισώσεων να είναι πυκνότερο στον εσωτερικό τομέα του υπολογιστικού κουτιού και αραιότερο εξωτερικά. Στην περίπτωση της ατμόσφαιρας *Bondi*, το υπολογιστικό πλέγμα αποτελείται από  $(80 \times 80)$  κελιά. Αντίθετα, στην περίπτωση της ατμόσφαιρας ανέμου, το πλέγμα είναι σχετικά πυκνότερο σε κελιά, αφού αποτελείται από  $(100 \times 100)$  σημεία.

Το αρχικό άνοιγμα του πίδακα και στις δύο προσομοιώσεις είναι  $30^\circ$ . Τέτοιο μέγεθος γωνίας δεν είναι ρεαλιστικό, όμως μας επιτρέπει να δούμε καλύτερα το εσωτερικό και την δομή που πιθανόν αναπτύσσεται μέσα σε αυτό κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Επιπλέον, ορίζουμε ότι, η ταχύτητα ήχου στην ατμόσφαιρα των δύο προβλημάτων είναι  $C_s = 0.001$ . Σε ότι αφορά το εσωτερικό του *Jet*, για καθαρά υπολογιστικούς λόγους ορίζουμε ότι, η ταχύτητα του ήχου είναι  $c_s = 0.1$ . Παρόλα αυτά, η ροή θεωρείται κρύα, εφόσον ο μαγνητικός όρος της πίεσης είναι αυτός που κυριαρχεί και τελικά επιδρά στην δυναμική του πίδακα.

### 4.2.1 Συνοριακές συνθήκες

Το σύστημα των εξισώσεων της σχέσης 4.2, αποτελείται από μερικές διαφορικές εξισώσεις υπερβολικού τύπου. Η ολοκλήρωση των εξισώσεων, απαιτεί να ορίσουμε τον υπολογιστικό τομέα μέσα στον οποίο θα υπολογίσουμε τη λύση. Στη συνέχεια, δίνοντας στα σύνορα αυτού του τομέα τα μεγέθη που περιγράφουν τη ροή στο διάνυσμα  $V$ , ο κώδικας θα χτίσει την λύση σε όλο το υπολογιστικό πλέγμα.

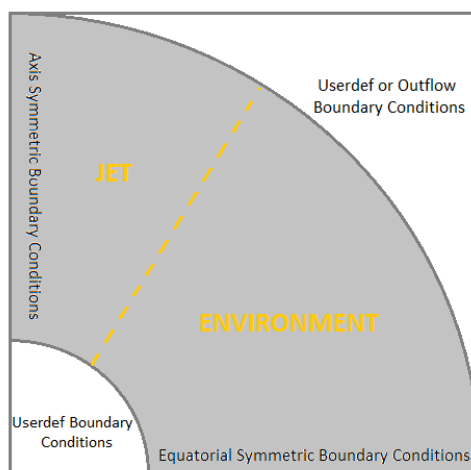
---

της  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , εφόσον έχουμε υποθέσει ότι, το μαγνητικό πεδίο διαθέτει μόνο εγκάρσια συνιστώσα, καθώς και ότι το πρόβλημα παρουσιάζει αξονική συμμετρία.

<sup>3</sup>Εισάγουμε στην εξίσωση της ορμής την Νευτώνια σχέση για την βαρύτητα.



Στο σχήμα 4.1, δίνουμε την γραφική αναπαράσταση του υπολογιστικού τομέα. Δεδομένου ότι, χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες, καθώς και ότι πραγματοποιούμε προσομοιώσεις δύο διαστάσεων, θα πρέπει να καθορίσουμε την κατάσταση της ροής σε 4 συνοριακές γραμμές. Οι γραμμές αυτές, είναι η εσωτερική ακτίνα  $r_{in}$ , η εξωτερική ακτίνα  $r_{out}$ , ο άξονας του μαγνητισμένου πίδακα και η τομή του επιπέδου του ισημερινού.



Σχήμα 4.1: Γραφική αναπαράσταση του υπολογιστικού τομέα.

Ο άξονας του *Jet* παρουσιάζει αξονική συμμετρία, ενώ η τομή του ισημερινού στο πολοειδές επίπεδο, ισημερινή. Στην εσωτερική ακτίνα καθορίζουμε μόνοι μας όλες τις ποσότητες που περιγράφουν την ροή. Για γωνίες μικρότερες των  $30^\circ$  οι συναρτήσεις ή οι τιμές των μεγεθών που δίνουμε είναι αυτές που περιγράφουν τον σχετικιστικό πίδακα. Ομοίως, σε γωνίες μεγαλύτερες των  $30^\circ$ , καθορίζουμε τις ιδιότητες που θέλουμε να έχει η ατμόσφαιρα. Έτσι, η ροή σε αυτή την περίπτωση μπορεί είτε να κατευθύνεται προς το υποτιθέμενο κέντρο του γαλαξία (ατμόσφαιρα *Bondi*) είτε προς την εξωτερική ακτίνα (Ατμόσφαιρα ανέμου). Τέλος, σε ότι αφορά την οριακή γραμμή της εξωτερικής ακτίνας, ανάλογα με τον τύπο της ατμόσφαιρας που τρέχει η προσομοίωση μπορεί να καθορίζεται είτε σαν συνοριακή γραμμή εκροής (*Outflow Condition*), είτε σαν γραμμή που καθορίζεται από τον χρήστη.

Επιστρέφουμε πάλι στην οριακή γραμμή της εσωτερικής ακτίνας του υπολογιστικού κουτιού, για να κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, στην εσωτερική ακτίνα θα ορίσουμε εμείς όλες τις ποσότητες της ροής με βάση την ιδέα που θέλουμε να δοκιμάσουμε στην προσομοίωση. Ωστόσο, υπάρχει ένα σημείο πάνω σε αυτή τη γραμμή στο οποίο πρέπει να σταθούμε. Το σημείο που βρίσκεται ακριβώς στις  $30^\circ$  παρουσιάζει ιδιαιτερότητα, μιας και εκεί πέρα πραγματοποιείται η απότομη μετάβαση από τον πίδακα

στην ατμόσφαιρα. Επιδιώκοντας η προσομοίωση να καταλήξει σε κάποια στασιμη κατάσταση, επιβάλλουμε εξίσωση πιέσεων εκατέρωθεν της διαχωριστικής επιφάνειας στην εσωτερική ακτίνα. Με αυτό τον τρόπο έχουμε ότι:

$$\rho_J = \frac{2\rho_{ext}C_s^2}{\sigma_{\theta D}} \quad (4.11)$$

Με άλλα λόγια, δίνοντας την πυκνότητα  $\rho_{ext}$  στο εξωτερικό μέσο και την μαγνήτιση  $\sigma_{\theta D}$  της ροής στην γωνία των  $30^\circ$ , μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα  $\rho_J$  μέσα στον σχετικιστικό πίδακα. Να επισημάνουμε ότι, η μαγνήτιση  $\sigma_{\theta D}$  ή γενικότερα  $\sigma$  είναι ο λόγος της ενέργειας *Poynting* προς αυτήν της ροής ( $\sigma = E_{field}/E_{flow}$ ). Ταυτόχρονα, αξίζει να σημειώσουμε ότι, η επιλογή της ταχύτητας του ήχου ρυθμίζει και τον λόγο των πυκνοτήτων μεταξύ των δύο ροών. Στην περίπτωση του M87 έχουμε επιλέξει ο λόγος πυκνοτήτων να είναι της τάξης του  $\rho_J/\rho_{ext} = 10^{-6}$ .

### Συνοριακές συνθήκες στην περίπτωση *Bondi* ατμόσφαιρας

Παρακάτω, παρουσιάζουμε συγκεντρωτικά τις συνοριακές συνθήκες, τις οποίες επιβάλλαμε στην προσομοίωση με *Bondi* ατμόσφαιρα. Αυτό, δηλαδή, που πρέπει να κάνουμε είναι να προσδιορίσουμε το διάνυσμα  $V$  Όπως αναφέραμε παραπάνω. Για τις τέσσερις συνοριακές γραμμές έχουμε:

- ***O z άξονας***

Ορίζουμε τον άξονα  $z$  ως άξονα συμμετρίας του προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι, οι μεταβλητές του προβλήματος είναι συμμετρικές ως προς αυτόν και η κάθετη ως προς την επιφάνεια συνιστώσα των διανυσματικών πεδίων αλλάζει πρόσημο. Ταυτόχρονα, η  $\phi$  συνιστώσα των διανυσματικών πεδίων αλλάζει πρόσημο. Έτσι, έχουμε ότι:

$$(\rho, p) \rightarrow (\rho, p) \quad (4.12)$$

$$(u_n, B_n) \rightarrow (-u_n, -B_n) \quad (4.13)$$

$$(u_\phi, B_\phi) \rightarrow (-u_\phi, -B_\phi) \quad (4.14)$$

$$(u_{axis}, B_{axis}) \rightarrow (u_{axis}, -B_{axis}) \quad (4.15)$$

όπου, ο δείκτης  $n$  αναφέρεται στην κάθετη συνιστώσα.

- ***H τομή του ισημερινού στο επίπεδο  $x - z$***

Ρυθμίζοντας τον κώδικα *PLUTO* σε αυτή την επιλογή, επιβάλλουμε ισημερινή συμμετρία ως προς ένα δοσμένο επίπεδο. Οι συνθήκες για τα μεγέθη που περιγράφουν την ροή είναι παρόμοια με αυτές της αξονικής

συμμετρίας, με την διαφορά βέβαια ότι, έχουμε αντιστροφή στο πρόσημο του μαγνητικού πεδίου. Έτσι, οι ποσότητες δίνονται από:

$$(\rho, p) \rightarrow (\rho, p) \quad (4.16)$$

$$(u_n, B_n) \rightarrow (-u_n, B_n) \quad (4.17)$$

$$(u_\phi, B_\phi) \rightarrow (-u_t, B_t) \quad (4.18)$$

Όπου εδώ, το σύμβολο  $t$  αναφέρεται στην εφαπτομενική ως προς το ισημερινό επίπεδο συνιστώσα.

- **Το τόξο κύκλου της εσωτερικής ακτίνας  $r_{in}$**

Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, το τόξο χωρίζεται σε δύο μέρη. Αριστερά ο σχετικιστικός πίδακας εκτείνεται μέχρι τη γωνία των  $30^\circ$ , ενώ δεξιά βρίσκεται η υδροδυναμική γαλαξιακή ατμόσφαιρα τύπου *Bondi*. Όσον αφορά, την μαγνητισμένη εκροή, οι οριακές συνθήκες θα δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$|\rho_J|_{r_{in}} = \frac{2\rho_{ext}C_s^2}{\sigma_{\theta D}} \quad (4.19)$$

$$p_J = |\rho_J|_{r_{in}} \cdot c_s^2 \quad (4.20)$$

Να υπενθυμίσουμε ότι,  $C_s$  είναι η ταχύτητα του ήχου στην ατμόσφαιρα και όχι μέσα στον πίδακα. Επίσης, ο παράγοντας  $\sigma_{\theta D}$  είναι η τιμή της μαγνήτισης στις  $30^\circ$  και έχει ρυθμιστεί κατά τρόπο τέτοιο, ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης της μαγνήτισης να είναι  $\sigma = 0.4$ . Για τα διανυσματικά μεγέθη του προβλήματος, δηλαδή την ταχύτητα και το μαγνητικό πεδίο έχουμε:

$$V_r = \sqrt{1 - \frac{1}{\Gamma^2}}, \quad V_\theta = 0.0, \quad V_\phi = 0.0 \quad (4.21)$$

$$B_r = 0.0, \quad B_\theta = 0.0, \quad B_\phi = -\sqrt{h\sigma\Gamma^2\rho_J} \quad (4.22)$$

Έχουμε υποθέσει λοιπόν ότι, στην συνοριακή γραμμή της εσωτερικής ακτίνας η ροή εκρέει ακτινικά προς τα έξω. Ο όρος  $\Gamma$  είναι ο παράγοντας *Lorentz* της ροής και για την συγκεκριμένη εφαρμογή έχει λάβει την τιμή  $\Gamma = 4.0$ . Σχετικά με την  $\phi$  συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, χρησιμοποιήσαμε την έκφραση που προκύπτει από το ολοκλήρωμα  $\mu$  στην κατάσταση ισορροπίας.

Ωστόσο, θα πρέπει να ορίσουμε την συνάρτηση που δίνει την μαγνήτιση  $\sigma$  της ροής. Χρησιμοποιούμε, λοιπόν, μια έκφραση που προκύπτει από

προγενέστερες προσομοιώσεις που έχουν γίνει, και η οποία φαίνεται να ικανοποιεί τελικά την εξίσωση *Transfield* [34]. Έτσι, για την μαγνήτιση του πίδακα στην εσωτερική ακτίνα έχουμε:

$$\sigma(\theta) = \sigma_o \mathcal{F}(\theta) \quad (4.23)$$

Όπου, η συνάρτηση  $\mathcal{F}$  έχει το σχήμα καμπάνας και δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{F} = \frac{f(\theta)}{f(\theta_D)} \quad (4.24)$$

Εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, η συνάρτηση  $\mathcal{F}$  είναι η κανονικοποιημένη εκδοχή της  $f(\theta)$ , η οποία δίνεται:

$$f(\theta) = \frac{\sin \theta}{1 + \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_m} \right)^2} \quad (4.25)$$

Η γωνία  $\theta_m = 0.25$  είναι η γωνία στην οποία η μαγνήτιση αποκτά τη μέγιστη τιμή της. Επαναλαμβάνουμε ότι, η συνάρτηση έχει κανονικοποιηθεί με την τιμή της συνάρτησης  $f$  στην επιφάνεια του πίδακα  $f = f(\theta_D)$ .

Στο σημείο που βρισκόμαστε, έχει απομείνει ο προσδιορισμός του τμήματος εκείνου πάνω στο σύνορο για γωνίες μεγαλύτερες των  $30^\circ$ . Σε αυτό το κομμάτι ρυθμίζουμε τον κώδικα σε οριακή συνθήκη *Outflow*. Αυτό σημαίνει ότι, ο κώδικας μηδενίζει μόνος του την βαθμίδα οποιουδήποτε μεγέθους αναπτύσσεται κάθετα στη συνοριακή γραμμή.

- **Το τόξο κύκλου της εξωτερικής ακτίνας  $r_{out}$**

Σε αυτή την συνοριακή γραμμή, εφαρμόζουμε την αντίθετη ιδέα από αυτή της εσωτερικής ακτίνας. Πλέον, ορίζουμε σε συνθήκη *Outflow* το προς τον άξονα  $z$  τμήμα της γραμμής, έτσι ώστε να εκτονώνεται ο πίδακας προς τα πάνω. Οι συνοριακές συνθήκες που αφορούν την ατμόσφαιρα παρουσιάζονται παρακάτω:

$$|\rho_J|_{r_{out}} = \rho_{ext} \frac{17.0}{500.0} \quad (4.26)$$

$$p_J = |\rho_J|_{r_{out}} \cdot C_s^2 \quad (4.27)$$

Θα θεωρήσουμε ότι, η ροή που αφορά την ατμόσφαιρα είναι αμιγώς υδροδυναμική και η ταχύτητα της περιγράφεται από τη σχέση:

$$V_r = -0.45 \cdot C_s, \quad V_\theta = 0.0, \quad V_\phi = 0.0 \quad (4.28)$$

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι, στο άνω σύνορο, ο μαγνητισμένος πίδακας αφήνεται ελεύθερος να προσαρμοστεί στην κατάσταση ισορροπίας όταν αυτή επέλθει. Η ελευθερία αυτή, επιτυγχάνεται με τη βοήθεια μιας ανισότητας, η οποία ελέγχει την ένταση του μαγνητικού πεδίου. Όσο, δηλαδή, η ένταση του πεδίου υπερβαίνει μια ορισμένη τιμή, τόσο ισχύει η συνθήκη *Outflow*. Σε διαφορετική περίπτωση, ενεργοποιούνται οι σχέσεις 4.26-4.28 που αφορούν την ατμόσφαιρα.

Επιπλέον να διευκρινίσουμε ότι, ο λόγος  $\frac{17.0}{500.0}$  είναι ο λόγος των αδιάστατων αποστάσεων των δύο ακτινικών συνόρων από το κέντρο του γαλαξία<sup>4</sup>.

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση των οριακών συνθηκών για το συγκεκριμένο πρόβλημα αξίζει να κάνουμε ένα ακόμη σχόλιο. Όπως θα πρόσεξε κανείς, επιλέξαμε η ροή να εκτονώνεται ακτινικά και μόνο από το κάτω όριο και η πολοειδής συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου να είναι μηδέν. Αναφερόμαστε στους ίδιους συλλογισμούς που κάναμε στην αρχή του πρώτου κεφαλαίου, λέγοντας τελικά ότι, η πολοειδής συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου και η εγκάρσια συνιστώσα της ταχύτητας είναι μικρές τόσο ώστε να μην επηρεάζεται η δυναμική του *Jet*.

### Συνοριακές συνθήκες για τον υδροδυναμικό άνεμο

Με την δεύτερη προσομοίωση που παρουσιάζουμε, επιδιώκουμε να μελετήσουμε την αντίδραση του μαγνητισμένου πίδακα όταν αυτός αλληλεπιδρά με έναν υδροδυναμικό άνεμο. Οι αλλαγές που πρέπει να γίνουν στις συνοριακές συνθήκες είναι λίγες, αφού η γεωμετρία του προβλήματος διατηρεί την αξονική και ισημερινή συμμετρία.

Ταυτόχρονα, ρυθμίζουμε την συνθήκη *Outflow* σε όλη την έκταση της συνοριακής γραμμής της εξωτερικής ακτίνας. Η εσωτερική ακτίνα είναι το μόνο σύνορο στο οποίο παρεμβαίνουμε. Ο πίδακας περιγράφεται με τις ίδιες συνθήκες της προηγούμενης εφαρμογής. Ωστόσο, σε αυτό το παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε ελαφρώς μικρότερη μαγνήτιση ( $\sigma_{max} = 0.3$ ). Επιπρόσθετα, δίνουμε μικρή εγκάρσια συνιστώσα στη ταχύτητα της ροής ( $V_\phi = 0.01V_r$ ) που όπως θα δούμε παρακάτω δεν επιδρά στο αποτέλεσμα της προσομοίωσης.

Όσον αφορά, τον υδροδυναμικό άνεμο επιβάλλουμε η πυκνότητα στο κάτω σύνορο να είναι τέτοια, ώστε ο λόγος των πυκνοτήτων μεταξύ των δύο ρευστών

<sup>4</sup>Για την εξαγωγή αυτών των τιμών θέσαμε ότι,  $r_D/r_s = 1/1000$ . Ο όρος  $r_D$ , είναι η απόσταση που ορίσαμε προκειμένου να αδιαστατικοποιήσουμε τις εξισώσεις του προβλήματος και η απόσταση  $r_s$ , είναι η ακτίνα *schwarzschild*. Επιπλέον, χρησιμοποιήσαμε την κλίμακα  $0.081pc = 140r_s$ . Σκοπός των επιλεγμένων αποστάσεων είναι ο υπολογιστικός τομέας να περιλαμβάνει την περιοχή, όπου σύμφωνα με την ανάλυση του *Bondi* η ροή γίνεται υπερηχητική.

να παραμένει της τάξης του  $10^{-6}$ . Η ακτινική ταχύτητα του ανέμου από την άλλη, είναι το 30% της ταχύτητας του ήχου μέσα στην ατμόσφαιρα.

### 4.2.2 Η αρχική κατάσταση της ροής

Έχοντας δώσει συνοριακές συνθήκες, το μόνο που απομένει για να τρέξει ο κώδικας είναι να δώσουμε αρχικές συνθήκες. Με άλλα λόγια, να ορίσουμε τη κατάσταση της ροής τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Παραταύτα, αντικειμενικός σκοπός των προσομοιώσεων είναι να καταλήξουν σε κάποια κατάσταση ισορροπίας, ώστε να μην εξαρτάται τελικά η λύση από την αρχική κατάσταση. Για τον λόγο αυτό, θα πρέπει να παρέχουμε ικανοποιητικό χρόνο, αλλά όχι τόσο ώστε να παρουσιαστούν αριθμητικά προβλήματα, εξαιτίας των πολλών βημάτων που θα έχει κάνει ο κώδικας. Η αρχική κατάσταση των ροών για τις δύο περιπτώσεις που συζητάμε δίνεται από τις σχέσεις παρακάτω. Για την μαγνητισμένη ροή, που αντιπροσωπεύει τον πίδακα ενός AGN έχουμε:

$$\rho_{Jet} = \frac{2\rho_{ext}C_s^2 r_{in}}{\sigma_{\theta D} r} \quad (4.29)$$

$$p_{Jet} = \rho_{Jet}(r) \cdot c_s^2 \quad (4.30)$$

Θα πρέπει να προσέξουμε ότι, η ταχύτητα του ήχου  $c_s$  στη σχέση 4.30 αφορά το εσωτερικό του μαγνητισμένου πίδακα. Επιπλέον, η ταχύτητα και το μαγνητικό πεδίο μπορούν να γραφούν:

$$V_r = \sqrt{1 - \frac{1}{\Gamma^2}}, \quad V_\theta = 0.0, \quad V_\phi = 0.0 \quad (4.31)$$

$$B_r = 0.0, \quad B_\theta = 0.0, \quad B_\phi = -\sqrt{\sigma\Gamma^2\rho_J} \quad (4.32)$$

Ταυτόχρονα, για τις υδροδυναμικές ατμόσφαιρες, των δύο περιπτώσεων έχουμε:

$$\rho_{ext}(r) = |\rho_{ext}|_{r_{in}} \left( \frac{r_{in}}{r} \right)^n \quad (4.33)$$

$$p_{ext}(r) = \rho_{ext}(r) \cdot C_s^2 \quad (4.34)$$

Ο εκθέτης  $n$ , καθορίζει το πόσο γρήγορα θέλουμε να μειώνεται η πυκνότητα της ροής σε σχέση με την απόσταση. Για την περίπτωση της Bondi ατμόσφαιρας, ο εκθέτης παίρνει την τιμή 1, ενώ για την περίπτωση του ανέμου<sup>5</sup> την τιμή 6. Η ταχύτητα της ροής την αρχική στιγμή είναι ίδια με αυτή που ορίσαμε στις συνοριακές γραμμές.

<sup>5</sup>Για  $n = 6$  η πίεση πέφτει ακτινικά προς τα έξω πολύ γρήγορα. Αυτό, έχει σαν αποτέλεσμα να εισάγουμε στην εξίσωση της ορμής ικανή βαθμίδα πίεσης, ώστε ο άνεμος να εκκινήσει ξεπερνώντας το εμπόδιο της βαρύτητας.

### 4.2.3 Αποτελέσματα *Jet-Environment* προσομοιώσεων

Μπορούμε, πλέον, να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις που πραγματοποιήσαμε. Έχουμε αναφέρει ότι, σκοπός των προσομοιώσεων είναι η μελέτη της αλληλεπίδρασης μεταξύ του μαγνητισμένου πίδακα και της γαλαξιακής ατμόσφαιρας. Ειδικότερα, θέλουμε να μελετήσουμε την εσωτερική δομή της σχετικιστικής ροής και να δούμε αν μπορούμε να την συσχετίσουμε με τα μοντέλα που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Παρακάτω, παρουσιάζουμε προσομοιώσεις για δύο διαφορετικούς τύπους ατμόσφαιρας. Στην πρώτη, υποθέτουμε ότι, η γαλαξιακή ατμόσφαιρα είναι τύπου *Bondi*, δηλαδή, η ροή προσροφάται ακτινικά προς το κέντρο του γαλαξία. Στην δεύτερη προσομοίωση, εφαρμόζουμε εξωτερικά έναν άνεμο, ώστε να φανεί επίσης, το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των δύο ρευστών στην γαλαξιακή ατμόσφαιρα.

#### Προσομοίωση πίδακα με *Bondi* ατμόσφαιρα

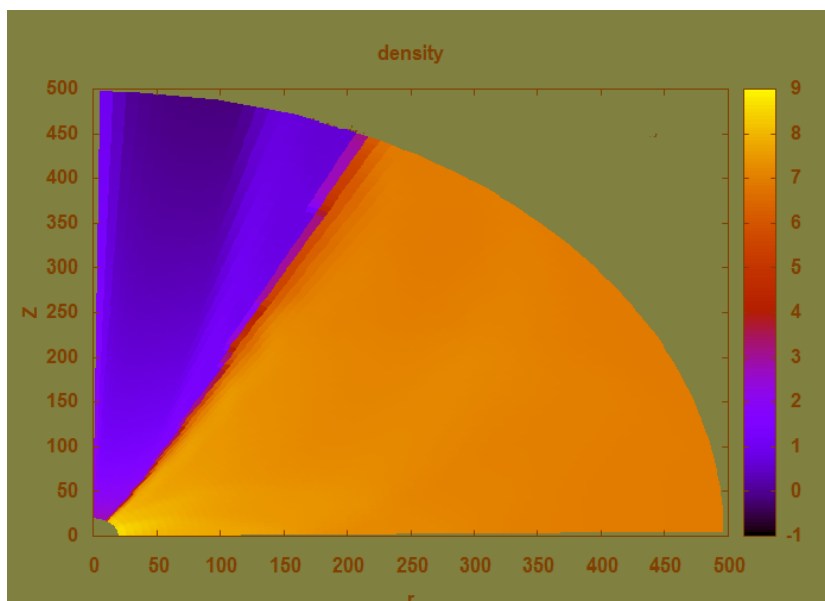
Έχει ήδη αναφερθεί ότι, η προσομοίωση ενός μαγνητισμένου πίδακα όπου περιβάλλεται από γαλαξιακή ατμόσφαιρα τύπου *Bondi*, παρουσιάζει υψηλού βαθμού δυσκολία στην πραγματοποίησή της. Επιπλέον, σημειώσαμε παραπάνω ότι, σκοπός μας είναι η προσομοίωση να καταλήξει κάποια στιγμή σε στάσιμη κατάσταση, ώστε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά της με αυτά του 3ου κεφαλαίου. Η δυσκολία, λοιπόν, για αυτού του είδους την προσομοίωση έχει να κάνει με το γεγονός ότι, δε μπορεί να οδηγηθεί ακριβώς σε στάσιμη κατάσταση.

Η προσομοίωση διήρκεσε για 4 τουλάχιστον σαρώσεις του υπολογιστικού τομέα με την ταχύτητα του γρήγορου μαγνητοηλεκτρικού κύματος ( $t_{total} = 2 \cdot 10^6$ ). Αν και ο μαγνητισμένος πίδακας έχει την τάση καθ' όλη την διάρκεια της προσομοίωσης να έρθει σε ισορροπία ως προς το εξωτερικό περιβάλλον, ποτέ δεν καταφέρνει να ισορροπήσει για λόγους που αναφέρουμε παρακάτω. Στην πραγματικότητα, υπάρχει κάποιου είδους ταλάντωση της επιφάνειας του πίδακα. Έτσι, θα μπορούσαμε να πούμε ότι, η προσομοίωση έρχεται μάλλον σε ημιευσταθή κατάσταση.

Οι κύριες αιτίες για το αποτέλεσμα αυτό, έχουν να κάνουν κυρίως με υπολογιστικά προβλήματα που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Αρχικά, η ανισότητα που έχουμε ορίσει στο εξωτερικό σύνορο του τομέα δεν δουλεύει όπως θα θέλαμε. Ταυτόχρονα, η κατεύθυνση της ροής προς το κέντρο συμφορίζει έντονα την κατάσταση, αφού η ανάκλαση του υλικού πάνω στην συνοριακή γραμμή του ισημερινού επηρεάζει την επιφάνεια του πίδακα και κατ' επέκταση την γενικότερη ισορροπία της περιοχής. Αξίζει να σημειώσουμε, τον υπερβολικά μικρό λόγο των πυκνοτήτων των δύο ρευστών, όπου αναγκάζει τον

κώδικα να τρέξει με οριακές τιμές ως προς την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων. Ωστόσο, είναι ενθαρρυντικό το γεγονός ότι, στην προσομοίωση δε παρουσιάζονται αστάθειες μεγάλης κλίμακας που θα οδηγούσαν στην κατάρρευση της προσομοίωσης.

Στην εικόνα 4.2, παρουσιάζουμε την πυκνότητα των δύο ρευστών μέσα στον υπολογιστικό τομέα. Το στιγμιότυπο που δίνουμε αναφέρεται σε χρόνο λίγο πριν τη δεύτερη σάρωση, διάστημα κατά το οποίο ο πίδακας ήταν σχετικά ευσταθής. Όπως μπορεί κανείς να δει στο σχήμα, ο λόγος των πυκνοτήτων ορίζει σαφώς και με λεπτομέρεια τον χώρο που καταλαμβάνει ο σχετικιστικός πίδακας. Επίσης, είναι ευκρινής η αύξηση της πυκνότητας μέσα στον πίδακα κοντά στην διαχωριστική επιφάνεια των δύο αερίων. Αιτία της αύξησης της πυκνότητας και κατ'επέκταση της θερμικής και συνολικής πίεσης είναι η παρουσία ενός *Shock Wave* στο εσωτερικό της μαγνητισμένης ροής. Το κύμα αυτό, είναι ακριβώς το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των δύο ρευστών και προφανώς έχει να κάνει με τη λύση του προβλήματος *Riemann*.



Σχήμα 4.2: Η πυκνότητα του σχετικιστικού πίδακα και του γαλαξιακού υλικού σε όλη την επικράτεια του υπολογιστικού τομέα. Η απεικόνιση αφορά την προσομοίωση για χρόνο  $t = 0.83 \cdot 10^6$ .

Για λόγους πληρότητας, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, ο σχετικιστικός πίδακας των προσομοιώσεων δεν είναι τόσο μαγνητισμένος ( $\sigma_{max} \approx 0.5$ ). Πράγματι, δεδομένου ότι, έχουμε υποθέσει ισόθερμο μοντέλο  $\gamma = 1.001$ , η μαγνήτιση επηρεάζεται σημαντικά από την ενθαλπία. Ωστόσο, η παράμετρος  $\beta$  του πλάσματος είναι αρκετά μικρότερη της μονάδας, επιβάλλοντας και σε αυτή



την περίπτωση, κυρίαρχη την μαγνητική συνιστώσα της πίεσης. Ταυτόχρονα, πρέπει να συμπληρώσουμε ότι, η επιτάχυνση της μαγνητισμένης εκροής δεν αποτελεί αντικείμενο του κεφαλαίου. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, παρόλο που δεν θεωρήσαμε αρκούντως μαγνητισμένο πίδακα, μπορούμε να μελετήσουμε με ασφάλεια την αλληλεπίδραση του πίδακα με το περιβάλλον του.

Στα σχήματα 4.3 και 4.4, δίνουμε τον παράγοντα *Lorentz* του μαγνητισμένου πίδακα και την  $\theta$  συνιστώσα της ταχύτητας αντίστοιχα. Ειδικότερα, ο παράγοντας *Lorentz* της ροής, που κυριαρχείται περισσότερο από την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας, υφίσταται αξιοσημείωτη μείωση κοντά στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο ρευστών. Από την άλλη πλευρά, η παρουσία ενός ημι-στάσιμου *Shock Wave* είναι εμφανής στο σχήμα 4.4, όπου η ροή επιβραδύνεται απότομα στο μέτωπο του κύματος κατά την  $\theta$  κατεύθυνση.

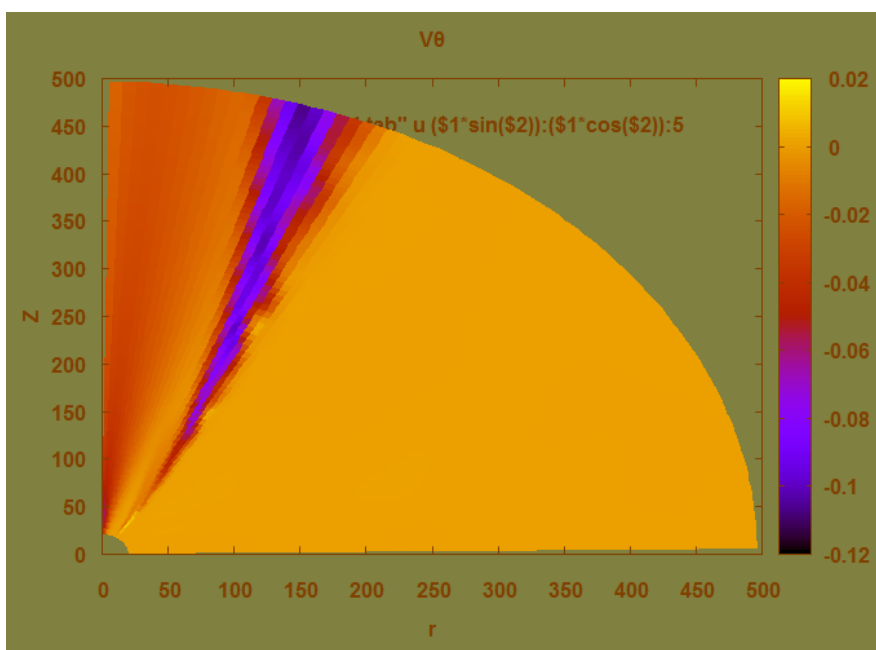
Η σχετικιστική ροή εντός του μαγνητισμένου πίδακα κατευθύνεται προς την εξωτερική ακτίνα του τομέα. Στην πορεία της, ιδιαίτερα το τμήμα της ροής που βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια του πίδακα, προσπίπτει στο μέτωπο του *Shock Wave* και επιβραδύνεται, ενώ παράλληλα συγκλίνει προς τον άξονα, όπως μας δείχνει το σχήμα 4.4. Το αποτέλεσμα αυτό, είναι το ίδιο με την μελέτη που έχουμε κάνει για το 2ο μοντέλο του προηγούμενου κεφαλαίου.

Εξαιτίας της σύγκλισης των ροϊκών γραμμών προς τον άξονα, θα ονομάζουμε το *Shock Wave* που εμφανίζεται στο εσωτερικό του πίδακα σαν ωστικό κύμα επανευθυγράμμισης (*Re-collimation Shock*). Γενικότερα, ένα *Re-collimation Shock* μεταπίπτει και αυτό στον άξονα  $z$ . Στη συνέχεια, ανακλάται από τον άξονα και γεμίζει όλο το εσωτερικό του πίδακα από τον άξονα μέχρι και την επιφάνειά του. Υποθέτουμε ότι, ο λόγος που στην προσομοίωση το κύμα δεν παρουσιάζει αυτή τη συμπεριφορά είναι, η όχι και τόσο μεγάλη πίεση που ασκεί το περιβάλλον στον σχετικιστικό πίδακα.

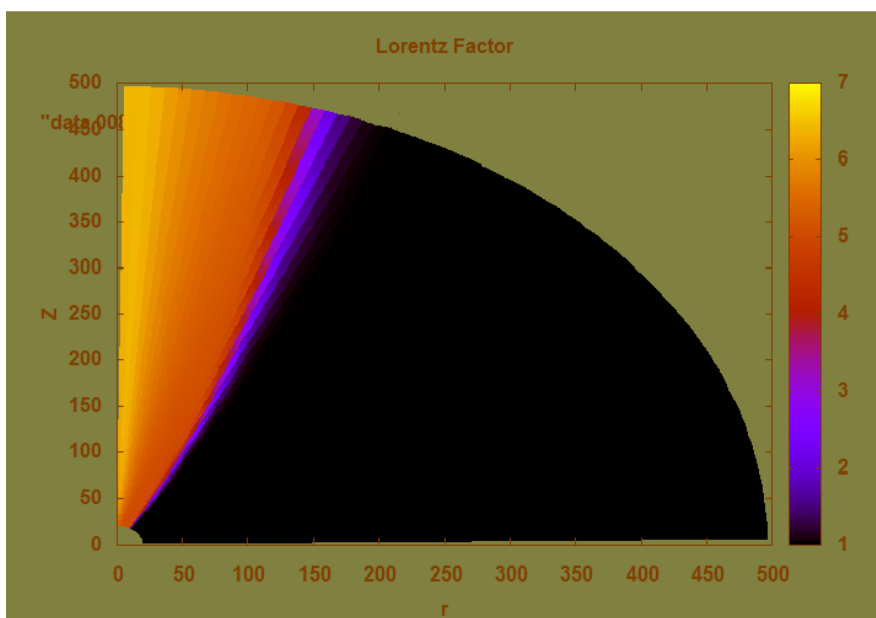
Σε ότι αφορά την επιτάχυνση της ροής, αυτή συμβαίνει πλησίον του άξονα  $z$  και είναι συμβατή με άλλες προσομοιώσεις που έχουν πραγματοποιηθεί [34], [35]. Η επιτάχυνση της ροής οφείλεται στην ευθυγράμμιση της ροής και συγκεκριμένα στον διαφορετικό τρόπο με τον οποίο στρίβουν διαδοχικές γραμμές ροής. Στην προσομοίωση που παρουσιάζουμε η επιτάχυνση δεν είναι μεγάλη, εξαιτίας του γεγονότος ότι η μαγνήτιση δεν είναι μεγάλη.

Στο σχήμα 4.5, δίνουμε την γραφική παράσταση της συνολικής πίεσης σαν συνάρτηση της πολικής γωνίας  $\theta$ . Όπως βλέπουμε, για γωνία μεγαλύτερη των  $17^\circ$  υπάρχει αύξηση της συνολικής πίεσης σαν αποτέλεσμα της διέλευσης της ροής από το *Shock Wave*.

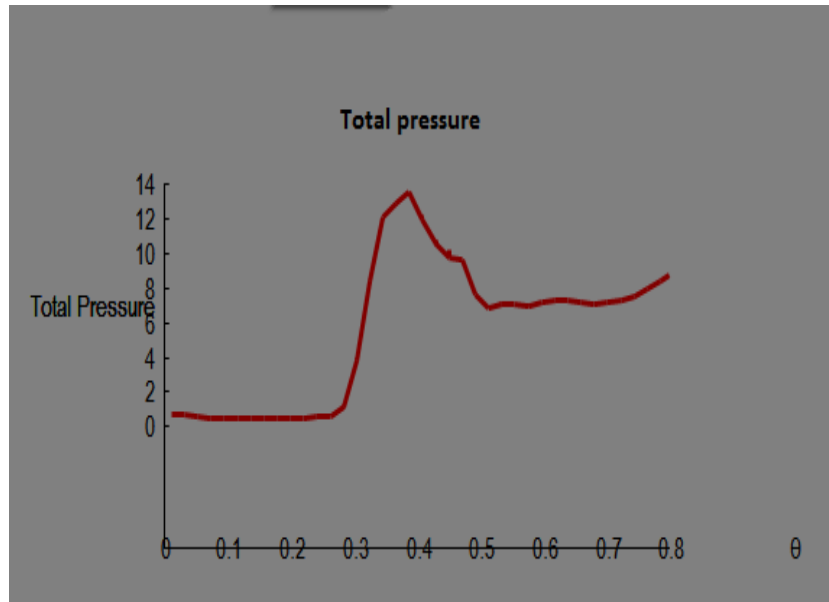
Δυστυχώς, εξαιτίας της φύσης του περιβάλλοντος που χρησιμοποιούμε στην προσομοίωση, δεν καθίσταται δυνατή η εμφάνιση και του *Rarefaction Wave*. Για το λόγο αυτό, θα παρουσιάσουμε παρακάτω την αλληλεπίδραση ενός πίδακα με υδροδυναμικό άνεμο.



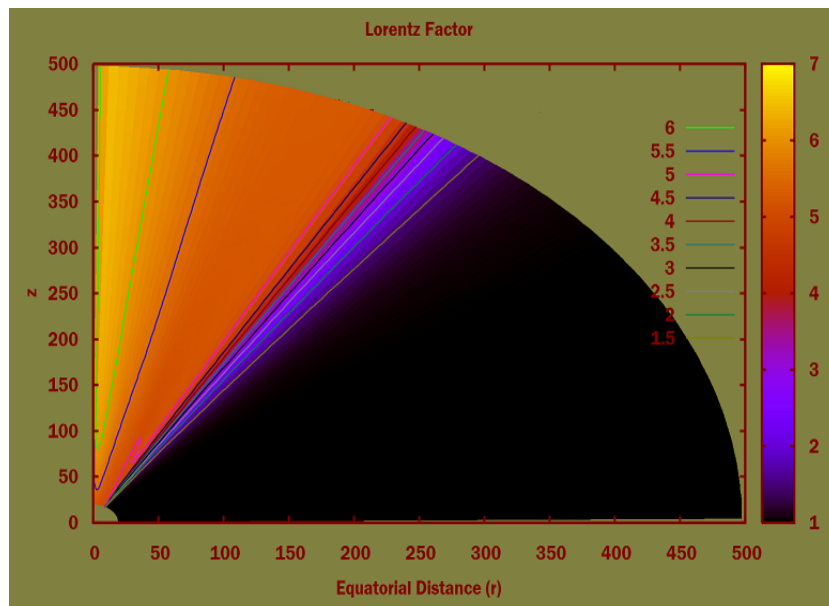
Σχήμα 4.3: Η ταχύτητα της ροής στην  $\theta$  κατεύθυνση. Στο εσωτερικό του πίδακα αναπτύσσεται ένα ημι-ευσταθές Shock Wave ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των δύο ρευστών.



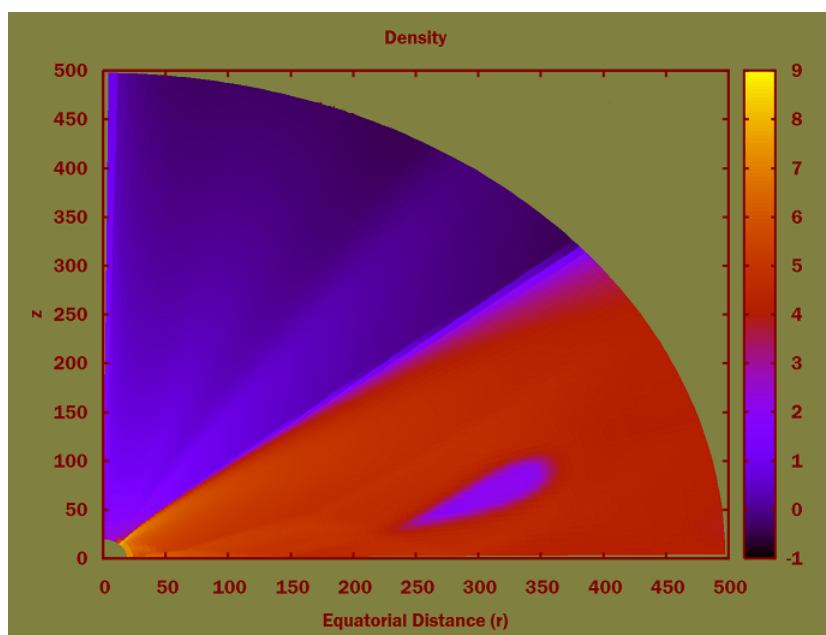
Σχήμα 4.4: Ο παράγοντας Lorentz του σχετικιστικού πίδακα. Η απεικόνιση αφορά την προσομοίωση για χρόνο  $t = 0.83 \cdot 10^6$ .



Σχήμα 4.5: Γραφική παράσταση της συνολικής πίεσης σαν συνάρτηση της πολικής γωνίας  $\theta$ .



Σχήμα 4.6: Ο παράγοντας Lorentz του σχετικιστικού πίδακα. Η απεικόνιση αφορά την προσομοίωση για χρόνο  $0.72 \cdot 10^6$ .



Σχήμα 4.7: Η πυκνότητα του σχετικιστικού πίδακα και του γαλαξιακού υλικού σε όλη την επικράτεια του υπολογιστικού τομέα. Στο σχήμα παρατηρούμε τέσσερις διακριτούς τομείς. Το αρχικό εξωτερικό περιβάλλον, το περιβάλλον, όπως διαμορφώνεται εξαιτίας της αλληλεπίδρασης της ατμόσφαιρας με τον πίδακα, την περιοχή όπου ορίζεται η επιφάνεια της σχετικιστικής ροής και η περιοχή αυξημένης εντροπίας μέσα στον πίδακα.

### Προσομοίωση πίδακα με υδροδυναμικό Άνεμο

Στην συνέχεια, παρουσιάζουμε την προσομοίωση, όπου η γαλαξιακή ατμόσφαιρα, με την οποία αλληλεπιδρά ο μαγνητισμένος πίδακας, είναι ένας υδροδυναμικός άνεμος. Αυτού του τύπου η γαλαξιακή ατμόσφαιρα, είναι χρήσιμη, προκειμένου να δούμε πως διαμορφώνεται το προφίλ, όχι μόνο του πίδακα αλλά και του περιβάλλοντος γαλαξιακού υλικού.

Η προσομοίωση διήρκησε 4 σαρώσεις του υπολογιστικού τομέα με την ταχύτητα του γρήγορου μαγνητοχηρικού κύματος ( $t_{total} = 2 \cdot 10^6$ ). Ωστόσο, η προσομοίωση γρήγορα καταλήγει σε στάσιμη κατάσταση. Στο σχήμα 4.6, δίνουμε τον παράγοντα Lorentz σε όλη την επικράτεια του υπολογιστικού τομέα. Το στιγμιότυπο που δίνουμε αναφέρεται στον χρόνο  $0.72 \cdot 10^6$ , διάστημα κατά το οποίο επέρχεται η ισορροπία.

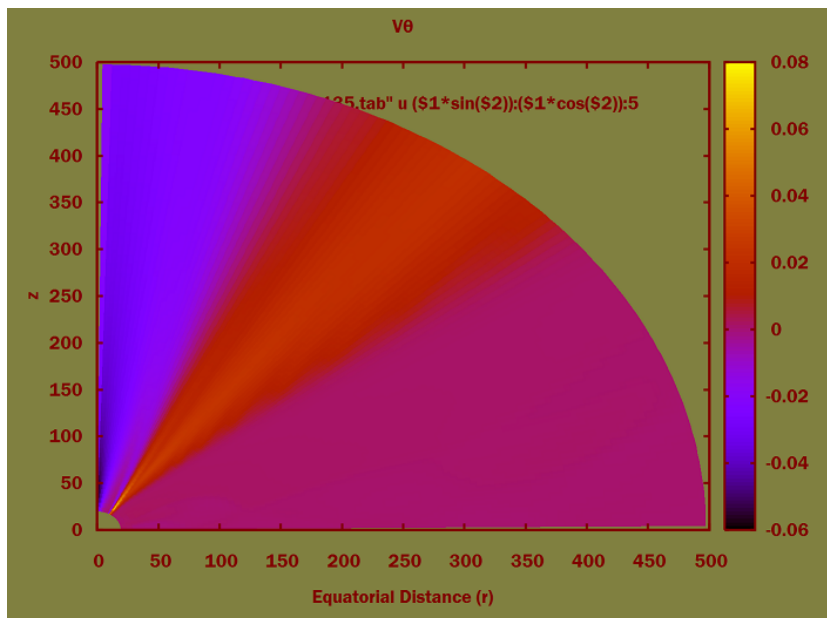
Το αποτέλεσμα του σχήματος 4.6 είναι παρόμοιο με αυτό της προηγούμενης προσομοίωσης. Όπως μπορεί κάποιος να παρατηρήσει, η διαχωριστική γραμμή μεταξύ των δύο ροών χαρακτηρίζεται από μειωμένους παράγοντες Lorentz σε σχέση με το εσωτερικό τμήμα του πίδακα. Μάλιστα, φαίνεται ότι, η γρήγορη

σχετικιστική ροή περιβάλλεται από μια πιο αργή ( $\Gamma < 5.0$ ), που όπως θα δούμε παρακάτω αφορά την περιοχή της ατμόσφαιρας όπου βρίσκεται το *Rarefaction Wave*.

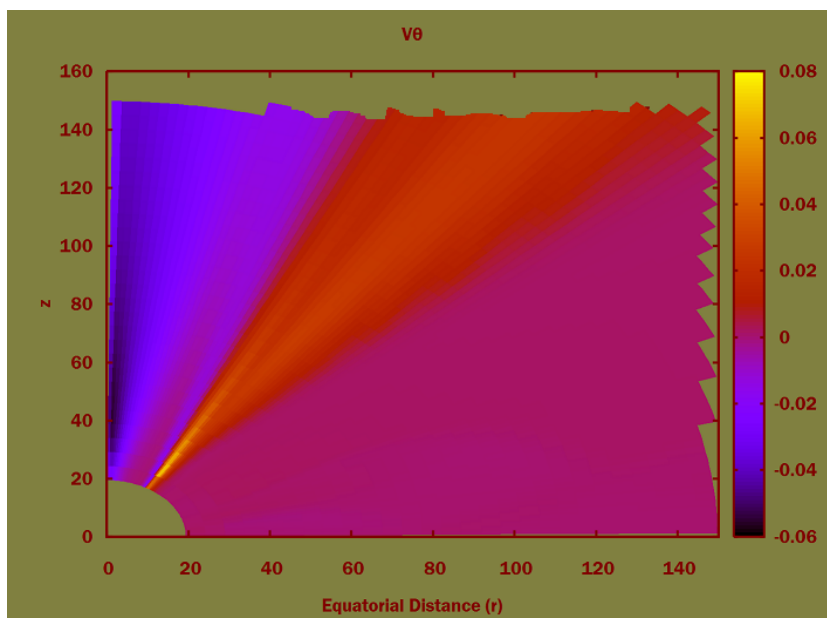
Ωστόσο, μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η απεικόνιση της πυκνότητας (Σχήμα 4.7). Σε αυτό το γράφημα, μπορούμε να διακρίνουμε τεσσέρις σημαντικές περιοχές. Ξεκινώντας από την συνοριακή γραμμή του ισημερινού, συναντάμε την εξωτερική ατμόσφαιρα, τουλάχιστον όσον αφορά την πυκνότητα, όπως την ορίσαμε στις αρχικές συνθήκες. Στην συνέχεια, ακολουθεί μια αραιωμένη περιοχή στην οποία αναγνωρίζουμε το εύρος του *Rarefaction Wave* που αναπτύσσεται στην ατμόσφαιρα. Αμέσως μετά, μια στενότερη και πιο αραιή περιοχή, στο μέσω της οποίας βρίσκεται η επαφή ασυνέχειας των δύο ρευστών, δηλαδή, η επιφάνεια του σχετικιστικού πίδακα. Ο τομέας αυτός, είναι η περιοχή, την κατάσταση της οποίας προσδιορίζουμε στο πρόβλημα *Riemann*. Τέλος, ακολουθεί μια σχετικά πυκνότερη περιοχή ως προς την πυκνότητα του υπόλοιπου πίδακα. Η περιοχή αυτή είναι η *Downstream* περιοχή του *Shock Wave* που βρίσκεται στο εσωτερικό του πίδακα.

Στις εικόνες 4.8 και 4.9 δίνουμε την ταχύτητα της ροής στην  $\theta$  κατεύθυνση. Αυτή η συνιστώσα της ταχύτητας, μας δίνει την πληροφορία για το αν η ροή συγκλίνει προς τον άξονα ή εκτονώνεται. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, η περιοχή όπου βρίσκεται η επιφάνεια του πίδακα ορίζεται με σαφήνεια. Η προσομοίωση, όμως, παρουσιάζει περισσότερο ενδιαφέρον όσον αφορά το εξωτερικό μέσο. Η αλληλεπίδραση των δύο ρευστών οδηγεί στην εμφάνιση ενός στάσιμου *Rarefaction Wave* στο εξωτερικό μέσο. Το *Rarefaction Wave* διαμορφώνει μια διαφορετική κατάσταση στην ατμόσφαιρα ως προς αυτήν που έχουμε καθορίσει στις αρχικές συνθήκες. Έτσι, αναφέραμε και παραπάνω ότι, η γρήγορη μαγνητισμένη εκροή περιβάλλεται από μια πιο αργή υδροδυναμική, που είναι πλέον το περιβάλλον του πίδακα.

Στο σχήμα 4.9, εστιάζουμε στην βάση της προσομοίωσης. Όπως μπορεί κανείς να δει, μια όχι και τόσο έντονη ασυνέχεια έχει πάρει την θέση του αναμενόμενου *Shock Wave*. Το γεγονός ότι, το κύμα εντός του πίδακα δεν είναι τόσο έντονο, έχει να κάνει με το αρχικό προφίλ της πίεσης που έχουμε υποθέσει. Να υπενθυμίσουμε ότι, η πυκνότητα στην ατμόσφαιρα αρχικά έπεφτε ως  $\rho \propto 1/r^6$ . Αποτέλεσμα της γρήγορης ακτινικής αραιώσης είναι ακριβώς η ασυνέχεια εντός του σχετικιστικού πίδακα.



Σχήμα 4.8: Η ταχύτητα της ροής στην  $\theta$  κατεύθυνση.



Σχήμα 4.9: Η ταχύτητα της ροής στην  $\theta$  κατεύθυνση. Το σχήμα εστιάζει στην βάση του πίδακα.

# Βιβλιογραφία

- [1] Jordàn, A., Côté, P., Blakeslee, J. P., et al. 2005, , ApJ, 634, 1002
- [2] Macchetto, F., Marconi, A., Axon, D. J., et al. 1997, ApJ, 489, 579
- [3] Gebhardt, K., Adams, J., Richstone, D., et al. 2011, ApJ, 729, 119
- [4] Wang, C.-C., & Zhou, H.-Y. 2009, MNRAS, 395, 301
- [5] Asada, K., & Nakamura, M. 2012, ApJ, 745, L28
- [6] Owen, F. N., Hardee, P. E., & Cornwell, T. J. 1989, ApJ, 340, 698
- [7] Sparks, W. B., Biretta, J. A., & Macchetto, F. 1996, ApJ, 473, 254
- [8] Perlman, E. S., Biretta, J. A., Zhou, F., Sparks, W. B., & Macchetto, F. D. 1999, AJ, 117, 2185
- [9] Marshall, H. L., Miller, B. P., Davis, D. S., Perlman, E. S., Wise, M., Canizares, C. R., & Harris, D. E. 2002, ApJ, 564, 683
- [10] Perlman, E. S., & Wilson, A. S. 2005, ApJ, 627, 140
- [11] Kovalev, Y. Y., Lister, M. L., Homan, D. C., & Kellermann, K. I. 2007, ApJ, 668, L27
- [12] Biretta, J. A., Sparks, W. B., & Macchetto, F. 1999, ApJ, 520, 621
- [13] Cheung, C. C., Harris, D. E., & Stawarz, L. 2007, ApJ, 663, L65
- [14] Meyer, E. T., Sparks, W. B., Biretta, J. A., et al. 2013, ApJ, 774, L21
- [15] Asada K., Nakamura M., Doi A., Nagai H., Inoue M. 2014 ApJ, 781L. 2A
- [16] W. Junor et al., 1999 Nature, 401...891J
- [17] Alan P. Marscher1 et al., 2008 Nature 452, 966 – 969

- [18] Young, A. J., Wilson, A. S., & Mundell, C. G. 2002, ApJ, 579, 560
- [19] de Matteo, T., Allen, S. W., Fabian, A. C., Wilson, A. S., & Young, A. J. 2003, ApJ, 582, 133
- [20] Allen, S. W., Dunn, R. J. H., Fabian, A. C., Taylor, G. B., & Reynolds, C. S. 2006, MNRAS, 372, 21
- [21] Hardee, P. E., Eilek, J. A., 2011, ApJ, 735, 61
- [22] J. C. Algaba, K. Asada, M. Nakamura, 2013arXiv1308.5429A
- [23] Stawarz, L., Aharonian, F., Kataoka, J., Ostrowski, M., Siemiginowska, A., & Sikora, M. 2006, MNRAS, 370, 981
- [24] Falle S. A. E. G., Wilson M. J., 1985, MNRAS, 216, 79
- [25] L.D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 1987.
- [26] Reinhard Schlickeiser, *Cosmic Ray Astrophysics*, Springer.
- [27] Marti, J. M. & Muller, E. 1994, J.Fluid Mech. **258**, 317.
- [28] R. Romero, J. M. Marti, J. A. Pons, J. M. Ibanez and J. A. Miralles, J. Fluid Mech. **544**, 323 (2005), arXiv: astro-ph/0506527.
- [29] Lyutikov M., MNRAS, 2011, 411,422.
- [30] Sapountzis k. & Vlahakis N. 2013, MNRAS, 434, 1779S
- [31] Mignone, et al. 2007, Astrophysical Journal Supplement, 170, 228
- [32] Kenneth G. Powell, NASA CR-194902 ICASE Report No. 94 – 24, April 1994, pp. 15.
- [33] Powell, et al. L 1999, Journal of Computational Physics, 154,284
- [34] Serguei S. Komissarov, et al. 2009, MNRAS, 394, 1182 – 1212
- [35] Serguei S. Komissarov, et al. 2007, MNRAS, 380, 51 – 70