ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ-ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Τρόποι με τους οποίους η εικασία μπορεί να οδηγήσει στην απόδειξη μέσω εργαλείων δυναμικού χειρισμού»

Μιχαλοπούλου Κατερίνα

Επιβλέπων καθηγητής:
Κυνηγός Χρόνης

Αθήνα, Ιούνιος 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την…………………..   από Εξεταστική Επιτροπή

αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Κυνηγός Χρόνης (επιβλέπων καθηγητής)	Καθηγητής	……………………
2) Ζαχαριάδης Θεοδόσιος	Καθηγητής	……………………
3) Πόταρη Δέσποινα	Αν.Καθηγήτρια	……………………

«We prove our results because they're there».

George Herbert Leigh Mallory

Στον Μπάμπη…

Στην Πολίνα…

Στην Ιωάννα…

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΕΛΙΔΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

ΣΧΗΜΑΤΑ

ΣΕΛΙΔΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι, αφενός, να διερευνήσει και να αναπτύξει τους τρόπους παραγωγής εικασιών , εμπλέκοντας τους συμμετέχοντες σε μια σειρά από πραγματικές γεωμετρικές καταστάσεις με βάση τις δυνατότητες λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (Sketchpad). Αφετέρου, να διαπιστωθεί αν και με ποιο τρόπο οι εικασίες αυτές οδηγούν στην αναγκαιότητα κατασκευής της απόδειξης και αν τελικά, αυτή η προσέγγιση μάθησης συμβάλει στη βελτίωση της στάσης των μαθητών απέναντι στην γεωμετρία και ειδικότερα στη γεωμετρική απόδειξη.

Στην εργασία τρεις πρωτοετείς φοιτητές μαθηματικού τμήματος και δεκάξι μαθητές της πρώτης τάξης λυκείου συμμετέχουν σε δύο διαφορετικές δραστηριότητες τύπου «ανοικτό πρόβλημα».

Ο στόχος της κάθε δραστηριότητας εστιάζει στη διαδικασία : δράση–εικασία –υπόθεση –απόδειξη/διάψευση, ως μια εναλλακτική προσέγγιση στην εισαγωγή των μαθητών στη γεωμετρική θεωρία και στη γεωμετρική σκέψη.

Οι μαθητές πειραματίζονται, εξερευνούν μεταβάλλουν διδακτικά σχεδιασμένα γεωμετρικά σχήματα δυναμικά και παρατηρούν τι μεταβάλλεται και τι μένει σταθερό, διατυπώνουν, ανασκευάζουν και επαναδιατυπώνουν εικασίες.

Λέξεις κλειδιά: δυναμικό περιβάλλον, ανοικτό πρόβλημα, σύρσιμο, εικασία, απόδειξη.

ABSTRACT

The purpose of this paper is both to explore and develop ways of generating conjectures, involving participants in a series of real geometric situations based on the capabilities of dynamic geometry software (Sketchpad). Secondly, to determine whether and how these conjectures lead to the necessity of proof construction, and if finally, this learning approach helps to improve students' attitudes toward geometry and particularly, geometric proof.

In this paper, three first-year students of Mathematics Department and sixteen students in first grade high school, participate in two different type activities "open problem".

The aim of the activity focuses on the process: action- conjecture-hypothesis,-proof / refutation, as an alternative approach to introduce students to the geometric theory and geometric thinking.

The students experiment, explore, modify didactical designed geometrical schemes dynamically, observe and note, what changes and what remains constant, formulate, and reformulate refuting conjectures.

Keywords: dynamic environment, open problem, dragging, conjecture, proof.

ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στο **πρώτο** κεφάλαιο, επανεξετάζεται η βιβλιογραφία και αναφέρονται μερικά βασικά ζητήματα καθώς και αντιλήψεις που κυριαρχούν σχετικά με την απόδειξη και τη διδασκαλία της απόδειξης στη σχολική τάξη. Αναφέρονται επίσης στρατηγικές που επηρεάζουν τη μάθηση καθώς και ο ρόλος των εικασιών στην αποδεικτική διαδικασία με τη χρήση δυναμικού λογισμικού γεωμετρίας(Sketchpad).

Το **δεύτερο** κεφάλαιο, περιγράφει λεπτομερώς τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα, τη διαδικασία, τα κριτήρια επιλογής των συμμετεχόντων και τις απομαγνητοφωνημένες συζητήσεις των ομάδων εστίασης, κατά την εξέλιξη των δραστηριοτήτων

Στο **τρίτο** κεφάλαιο, αναλύονται τα δεδομένα της μελέτης και γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων και τέλος,

Το **τέταρτο** κεφάλαιο, αναφέρεται στα συμπεράσματα και τα θέματα που αφορούν στους περιορισμούς της έρευνας στις επιπτώσεις και στις προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1.1 Έννοιες και Λειτουργίες της απόδειξης

Στα ελληνικά λεξικά η λέξη «αποδεικνύω» σημαίνει: «φανερώνω την αλήθεια λόγου ή πράγματος»

Ο Reuben Hersh (1993, p.391) στο άρθρο του «Proving is convincing and explaining» παρουσιάζει τρεις έννοιες της απόδειξης:

(a) η πρώτη είναι η γλωσσική έννοια: “prove” =δοκιμάζω, προσπαθώ, καθορίζω την πραγματική κατάσταση των πραγμάτων, που προέρχεται από το λατινικό probare, και είναι συγγενής με το "probe= ανιχνεύω/ διερευνώ", "probation= απόδειξη", "probable= πιθανό ", "probity= ακεραιότητα /ευθύτητα" .

Στα μαθηματικά, η «απόδειξη» έχει δύο σημασίες: Η δεύτερη μαθηματική ("working") έννοια, είναι:

(b) Ένα επιχείρημα που πείθει τους ειδικούς.

Η τρίτη μαθηματική ("logic") λογική έννοια, είναι:

(c) Μια ακολουθία μετασχηματισμών επίσημων προτάσεων, που διεξάγεται σύμφωνα με τους κανόνες της λογικής.

Ορισμένοι ερευνητές (π.χ. Hanna, 2000), θεωρούν ότι οι παρακάτω λειτουργίες της απόδειξης στη γεωμετρία, εξυπηρετούν έναν αριθμό σκοπών στην μαθηματική εκπαίδευση:

- επαλήθευση (επικύρωση/ ορθότητα/ αλήθεια της δήλωσης)
- εξήγηση (η απάντηση στο ερώτημα “γιατί;" η διερεύνηση γιατί είναι αλήθεια)

• πεποίθηση (άρση αμφιβολίας)

• συστηματοποίηση (τοποθέτηση μαθηματικών αποτελεσμάτων σε ένα ευρύτερο πλαίσιο /η διοργάνωση διαφόρων αποτελεσμάτων σε ένα αφαιρετικό σύστημα αξιωμάτων, σημαντικές έννοιες και θεωρήματα)

• ανακάλυψη (η επινόηση ή εφεύρεση νέων αποτελεσμάτων)

• επικοινωνία (η μετάδοση της μαθηματικής γνώσης και κατανόησης)

• κατασκευή της εμπειρικής θεωρίας

• εξερεύνηση της έννοιας του ορισμού ή των συνεπειών μιας υπόθεσης

• ενσωμάτωση ενός γνωστού γεγονότος σε ένα νέο πλαίσιο και ως εκ τούτου προβολή της από μια νέα προοπτική.

Ο De Villiers (2004) αναφέρεται σε μια άλλη λειτουργία της απόδειξης, η οποία εξυπηρετεί τη λειτουργία της αυτοπραγμάτωσης και εκπλήρωσης και υπό την έννοια αυτή θα μπορούσε να διαδραματίσει το ρόλο της πνευματικής πρόκλησης (self-realization / fulfillment) που προέρχεται από τη διαδικασία κατασκευής της απόδειξης.

1.2 Η υφιστάμενη κατάσταση στη διδασκαλία της γεωμετρικής απόδειξης

Παρά τις σημαντικές προσπάθειες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου τα τελευταία χρόνια, τα μαθηματικά στο εκπαιδευτικό μας σύστημα συνεχίζουν να εκλαμβάνονται από την κοινωνία ως ένα κατακερματισμένο γνωστικό αντικείμενο, μια θεωρητική γνώση που διδάσκεται κυρίως μετωπικά με άξονα την απομνημόνευση των αφηρημένων ορισμών και θεωρημάτων της θεωρίας και την εξάσκηση στη λύση ασκήσεων με στόχο αποκλειστικά την αντιμετώπιση των εξετάσεων. (Κυνηγός, 2007).

Το γεγονός ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν την αναγκαιότητα της απόδειξης, το αντιμετωπίζουν όλοι οι καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και αναγνωρίζεται χωρίς εξαίρεση, σε όλη την εκπαιδευτική έρευνα, ως ένα σημαντικό πρόβλημα στη διδασκαλία της απόδειξης.

Ποιος δεν έχει ακόμη γευτεί την εμπειρία της απογοήτευσης όταν έρχεται αντιμέτωπος με τους μαθητές που ρωτάνε «γιατί πρέπει να αποδειχθεί αυτό;»…ειδικά όταν πρόκειται για μια πρόταση που είναι οπτικά εμφανής ή μπορεί εύκολα να καθοριστεί εμπειρικά. Σύμφωνα με τον Freudenthal, τα προβλήματα των μαθητών με την απόδειξη δεν θα πρέπει απλά να αποδοθούν στην επιβράδυνση της γνωστικής ανάπτυξης (για παράδειγμα, στην αδυναμία να σκεφτούν λογικά), αλλά μάλλον στο ότι οι μαθητές δεν μπορούν να δουν τη λειτουργία (έννοια, σκοπό και χρησιμότητα) της απόδειξης. (de Villiers, M. 1999)

Παρόλα αυτά ,όλοι ή τουλάχιστον οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί μαθηματικών έχουν υιοθετήσει στο παρελθόν -και εξακολουθούν ακόμα και σήμερα-ένα παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας στο οποίο η μάθηση είναι συχνά παθητική, αφηγηματική και επαναλαμβανόμενη. Οι μαθητές ακούν ορισμούς ,θεωρήματα και θεωρητικές αποδείξεις των θεωρημάτων συμμετέχοντας ως παθητικοί ακροατές σε μια «τελετουργική» δραστηριότητα και κατανοώντας, ίσως, μόνο την κανονικότητα στους χειρισμούς των συμβόλων, αλλά όχι τις ιδέες που τα καθιστούν αληθή.

Πολλοί πιστεύουν ότι τα μαθηματικά-ειδικά στις προχωρημένες τάξεις του λυκείου είναι ένας «αφηρημένος χώρος» ξεκομμένος από τα πραγματικά προβλήματα.

Συχνά σε ερωτήματα των μαθητών, δίνονται δογματικές απαντήσεις του είδους «γιατί έτσι είναι», ή «δεν ξέρω ακριβώς το γιατί, αλλά ξέρω ότι έτσι είναι το σωστό», κλπ, που απορρέουν συνήθως από ορισμούς, αξιώματα και κανόνες και όχι απαραίτητα από γνήσια κατανόηση. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, η εγκυρότητα της απάντησης παρέχεται από μια τυπική απόδειξη και όχι απαραίτητα από το νόημα.

Όμως το νόημα (δηλαδή, οι μεστές νοήματος ανθρώπινες ιδέες) είναι εκείνο που καθιστά τα μαθηματικά αυτό που είναι και τούτο το νόημα δεν είναι αυθαίρετο, δεν είναι το αποτέλεσμα καθαρώς κοινωνικών συμβάσεων. (Núñez ,2000)

Όσον αφορά στην απόδειξη, ο Moore (1994)επισημαίνει: «η μετάβαση στην απόδειξη είναι απότομη και αυτή η απότομη μετάβαση προς την απόδειξη αποτελεί πηγή δυσκολιών για πολλούς μαθητές, ακόμη και για όσους έχουν κάνει ανώτερη δουλειά με ευκολία σε χαμηλότερου επιπέδου μαθήματα μαθηματικών» ...

Ένας άλλος παράγοντας που καθιστά τη μετάβαση προς την απόδειξη τόσο δύσκολη, είναι το τυπικό περιβάλλον της τάξης, που περιγράφεται από τον Lampert (1990, σ. 32], ως εξής: «Στην τάξη, ο δάσκαλος και το βιβλίο είναι η αρχή, και τα μαθηματικά δεν είναι ένα θέμα που δημιουργείται ή διερευνάται. Η αλήθεια δίνεται στις εξηγήσεις του δασκάλου και τις απαντήσεις του βιβλίου .Δεν υπάρχει «ζιγκ-ζαγκ» ανάμεσα σε εικασίες και επιχειρήματα για την εγκυρότητα τους...» (Furinghetti, F. & Paola, D.: 2003)

Αυτή η παραδοσιακή προσέγγιση για την απόδειξη, έχει στο παρελθόν αφήσει πολλούς φοιτητές απογοητευμένους με τη διαδικασία της απόδειξης (Battista & Clements, 1995).

Η Senk (1989) αναφέρει, ότι η γεωμετρική απόδειξη είναι ανάμεσα στα πιο δύσκολα και αντιπαθητικά θέματα μαθηματικών, για τους μαθητές του λυκείου στις Ηνωμένες Πολιτείες.

Στο άρθρο "The Mathematical Experience"των Philip Davis and Reuben Hersh υπάρχει ο παρακάτω χαρακτηριστικός διάλογος μεταξύ ενός φοιτητή και του «Ιδεατού Μαθηματικού» (Ι.Μ). :

Φοιτητής: Κύριε, τι είναι μαθηματική απόδειξη;

Ι.Μ.: ...Δεν το ξέρετε ;... απόδειξη είναι αυτό που παρατηρείτε να κάνω στον πίνακα τρεις φορές την εβδομάδα για τρία χρόνια! ....Ξέρετε την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του μαθηματικού λογισμού-ή το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας;

Φοιτητής: ..... Αυτό που ρωτάω δεν είναι παραδείγματα απόδειξης, είναι ο ορισμός της απόδειξης. Διαφορετικά, πώς μπορώ να πω ποια παραδείγματα είναι σωστά;

Ι.Μ. : Λοιπόν, όλο αυτό το πράγμα είχε ξεκαθαρίσει από τον επιστήμονα της λογικής Tarski, και από κάποιους άλλους, ίσως Russell ή Peano.... ,αυτό που πρέπει να κάνετε είναι να γράψετε τα αξιώματα της θεωρίας σε μια επίσημη γλώσσα με ένα κατάλογο συμβόλων ή αλφάβητου. Στη συνέχεια να γράψετε την υπόθεση του θεωρήματος με τον ίδιο συμβολισμό και να δείξετε ότι μπορείτε να μετατρέψετε την υπόθεση βήμα προς βήμα, χρησιμοποιώντας τους κανόνες της λογικής, μέχρι να φτάσετε στο συμπέρασμα. Αυτό είναι απόδειξη.

Ο Thomas Tymoczko (1943-1996) επεσήμανε ότι αν όλη η μαθηματική δραστηριότητα ταίριαζε μ' αυτή την περιγραφή, τότε τα μαθηματικά θα ήταν μια πολύ περιορισμένη επιστήμη, αγνοώντας στην πραγματικότητα το μαθηματικό περιεχόμενο. (Hanna, G. 1990)

Επιπλέον, από τους μαθητές δεν ζητείται ποτέ να δικαιολογήσουν τη γνώση τους, η αλήθεια της οποίας θεωρείται άμεση και αυτονόητη, δηλαδή διαισθητική (Fischbein, 1987). Κατά συνέπεια, με την έναρξη του λυκείου, οι μαθητές έχουν γενικά ένα διαισθητικό γεωμετρικό υπόβαθρο, βασισμένο στην οπτική εμπειρική επιχειρηματολογία, που πρέπει να αναδιοργανωθεί σύμφωνα με μια επαγωγική προσέγγιση. Δικαίως αναρωτιούνται γιατί θα πρέπει να αποστηθίσουν μια απόδειξη, προκειμένου να επιβεβαιώσουν κάτι που ισχύει εδώ και χιλιάδες χρόνια αλλά και μια κατάσταση που είναι «αυτονόητη» και «προφανής» σε ένα «διαισθητικό » επίπεδο.

Η λεπτή σχέση μεταξύ της διαισθητικής γνώσης και της θεωρητικής της συστηματοποίησης είναι συνήθως πολύ δύσκολο να διαχειριστεί: οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν το νέο σε σχέση με το παλιό. Στην πραγματικότητα, είναι πολύ δύσκολο να κατανοηθεί γιατί γνωστές ιδιότητες θα πρέπει να τεθούν υπό αμφισβήτηση και γιατί χρησιμοποιούνται μεγάλα επιχειρήματα για την υποστήριξη της αλήθεια τους, που είναι τόσο προφανής. (Mariotti, 2001)

Οι Mingus και Grassl (1999) περιγράψανε την « στάση εμπόδιο» που αφορά στην επίσημη απόδειξη και εμποδίζει τους μαθητές από την ανάληψη του κινδύνου για αιτιολόγηση ή εξήγηση του σκεπτικού τους στην τάξη. Η στάση αυτή χαρακτηρίζεται από απογοήτευση και μια απαξίωση για την απόδειξη, προκαλεί τους μαθητές να παραιτηθούν πριν καν προσπαθήσουν να γράψουν μια απόδειξη. Αυτή η επικείμενη στάση και η αδυναμία να κάνουν απόδειξη, είναι μια σοβαρή ανεπάρκεια στη μαθηματική κατάρτιση του μαθητή (αναφορά σε John M. Gillis,2005)

1.3 Ο επαναπροσδιορισμός του ρόλου της απόδειξης

Ο Leron (1983),εξέφρασε την ανησυχία ότι οι περισσότερες από τις αποδείξεις που υπάρχουν στα βιβλία συμβάλλουν ελάχιστα ή και καθόλου στην επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών και πρότεινε, ότι οι εν λόγω μαθηματικές παρουσιάσεις θα ήταν πολύ περισσότερο κατανοήσιμες, αν η απόδειξη ήταν δομημένη σε σύντομες αυτόνομες ενότητες, όπου κάθε μια θα τόνιζε μία συγκεκριμένη ιδέα

Αποδοκιμάζοντας την διδασκαλία της γεωμετρίας ως περιορισμένη και που εμπνέεται από επαγωγική απόδειξη, ο Volmink (1988) θέλοντας να τονίσει τη σημασία της επικοινωνιακής λειτουργίας της απόδειξης, υποστήριξε ότι η εκπαίδευση στα μαθηματικά θα εξυπηρετούνταν καλύτερα εάν το αναλυτικό πρόγραμμα μπορούσε να δώσει μεγαλύτερη έμφαση στα κοινωνικά κριτήρια για την αποδοχή μιας μαθηματικής αλήθειας, σε βάρος των καθαρά τυπικών αυτών (G. Hanna, 1990)

«... Φαίνεται ότι η απόδειξη είναι μια μορφή του λόγου, ένα μέσο επικοινωνίας μεταξύ των ατόμων που κάνουν τα μαθηματικά...»

(Volmink ,1990)

Όπως αναφέρει ο Schoenfeld (1994), «…αν οι μαθητές μεγάλωσαν σε μια μαθηματική κουλτούρα, όπου ο διάλογος, διαμέσου του οποίου σκέφτονταν και πείθονταν ήταν σημαντικά μέρη της εμπλοκής με τα μαθηματικά, τότε οι αποδείξεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως ένα φυσικό μέρος των μαθηματικών τους »(Eric J.Knuth, 2002).

Όμως μια αυστηρή απόδειξη, με δεδομένη την εγκυρότητά της από την άποψη της τυπικής προέλευσης, γίνεται πραγματικά πειστική, νόμιμη και πολυτιμότερη μόνο αν οδηγεί στην πραγματική μαθηματική κατανόηση (Hanna, 2000)…[..] και λειτουργεί ως ένα επεξηγηματικό εργαλείο, ώστε να ασκήσει το ρόλο της ως μορφή μαθηματικής αιτιολόγησης (Hanna, 2000)

Σύμφωνα με τον Reuben Hersh μια «μαθηματική απόδειξη μπορεί να πείσει και συνεπώς μπορεί να εξηγήσει. Στη μαθηματική έρευνα, ο κύριος ρόλος της είναι να πείσει. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ο κύριος ρόλος της είναι να εξηγήσει».

Για τους εκπαιδευτικούς, υπάρχουν σημαντικά πλεονεκτήματα που μπορούν να προκύψουν από την επιλογή επεξηγηματικών αποδείξεων, που σε κάθε περίπτωση στοχεύει στην αλλαγή της στάσης των μαθητών απέναντι στην απόδειξη και στη «συναίνεση της μαθητικής κοινότητας». (Heinze & Reiss, 2003)

Βεβαίως δεν μπορεί κανείς να βρει πάντα μια επεξηγηματική απόδειξη για κάθε θεώρημα που επιθυμεί να παρουσιάσει. Σε πολλά μαθηματικά θέματα, μερικά θεωρήματα πρέπει να αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας αντίφαση, μαθηματική επαγωγή ή άλλες μη επεξηγηματικές μεθόδους.

Ο Edwards (1997)   εισήγαγε τον όρο «εννοιολογικό έδαφος πριν από την απόδειξη» υποδεικνύοντας ότι η εικασία, η επαλήθευση, η εξερεύνηση και η εξήγηση αποτελούν τα απαραίτητα στοιχεία που προηγούνται των τυπικών αποδείξεων. Το εννοιολογικό έδαφος παρέχει την αρένα για την κατασκευή των διαισθητικών ιδεών, που μπορούν στη συνέχεια να δοκιμαστούν και να επιβεβαιωθούν μέσω τυπικών μεθόδων και είναι η βάση για μια βαθύτερη κατανόηση της απόδειξης. Αυτή η προσέγγιση αντικατοπτρίζει την "οιονεί εμπειρική" άποψη των μαθηματικών σύμφωνα με την οποία, η κατανόηση, οδηγεί από τις εικασίες και επαληθεύσεις των μαθητών, στις τυπικές αποδείξεις. (Chazan,1993)

Ο ρόλος λοιπόν της απόδειξης επαναπροσδιορίζεται και υπάρχει μια τάση απομάκρυνσης από τις «αυστηρές» αποδείξεις.

Από τη σκοπιά αυτή, της επεξήγησης και της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών μέσω της απόδειξης, η αναζήτηση πιο αποτελεσματικών τρόπων διδασκαλίας της είναι μια σημαντική πρόκληση.

1.4 Ο ρόλος της εικασίας στην πορεία προς την απόδειξη

Μια εναλλακτική προσέγγιση είναι η παραγωγή εικασίας ως προοίμιο της τυπικής αφαιρετικής απόδειξης.

Η ανακάλυψη των γεωμετρικών στοιχείων μέσω της εικασίας μπορεί να οδηγήσει σε επίσημες και άτυπες αιτιολογήσεις του γιατί οι εικασίες είναι αληθινές, θέτοντας έτσι τις βάσεις για την αφαιρετική απόδειξη.

Αυτή η διαδικασία προϋποθέτει διαίσθηση, οπτικοποίηση, εξερεύνηση, διερεύνηση, πειραματισμό, δοκιμή, επίδειξη, αλληλεπίδραση από την πλευρά των μαθητών, δηλαδή δημιουργία κατάλληλου περιβάλλοντος στη σχολική τάξη, από την πλευρά του εκπαιδευτικού. Οι μαθητές σ’ ένα τέτοιο περιβάλλον μπορούν να εξερευνούν γεωμετρικές καταστάσεις και να αντλούν τις δικές τους εικασίες αντί να στηρίζονται στο δάσκαλο ή το βιβλίο για να τους πει τις μαθηματικές αλήθειες.

Ας έχουμε κατά νου, ότι το κύριο μέλημα δεν είναι μόνο το τι είναι αληθές στα μαθηματικά, αλλά το τι σημαίνουν οι μαθηματικές ιδέες, και γιατί οι μαθηματικές αλήθειες είναι αληθείς, δυνάμει του τι σημαίνουν. Η κενή νοήματος αλήθεια και η μεστή νοήματος κατανόηση, αποτελούν θεμελιώδεις συνιστώσες πολλών συζητήσεων που αφορούν τη φύση των μαθηματικών, η οποία αφορά ανθρώπινες ιδέες και όχι απλώς τυπικές αποδείξεις, αξιώματα και ορισμούς (οι αποδείξεις, τα αξιώματα και οι ορισμοί συνιστούν μόνο ένα μέρος των μαθηματικών, που επίσης κατανοείται μέσω επακριβών συνόλων ιδεών). Αυτές οι ιδέες είναι θεμελιωμένες σε χαρακτηριστικούς του ανθρώπινου είδους, γνωσιακούς και σωματικούς μηχανισμούς της καθημερινότητας, καθιστώντας συνεπώς, τα μαθηματικά, ένα ανθρώπινο εγχείρημα και όχι μια πλατωνική και υπερβατική οντότητα.(Núñez ,2000)

Είναι γεγονός ότι η παραδοσιακή προσέγγιση για την αξιωματική απόδειξη δεν προϋποθέτει ή προϋποθέτει ελάχιστα την παραγωγή εικασίας. Η χρήση της εικασίας ως μέσο διδασκαλίας έρχεται σε αντίθεση με την παραδοσιακή παιδαγωγική απομνημόνευση και την απόδειξη ήδη γνωστών γεωμετρικών θεωρημάτων.

Τα μεταρρυθμιστικά μέτρα στον τομέα της εκπαίδευσης των μαθηματικών δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στην επαγωγική διαδικασία της εξερεύνησης και της εικασίας. Μαθηματικές εικασίες σχηματίζονται από την παρατήρηση των δεδομένων, αναγνώριση μοτίβων (patterns) και δημιουργία γενικεύσεων. Αυτές οι γενικεύσεις είναι αναπόδεικτες προτάσεις βασισμένες σε επαγωγικό συλλογισμό. (Serra, 1997).

Το πρότυπο του NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) «Λογική και απόδειξη» για όλους τους μαθητές από το νηπιαγωγείο μέχρι το λύκειο περιλαμβάνει τα εξής τέσσερα στοιχεία:

- Ν' αναγνωρίζουν την λογική και την απόδειξη ως θεμελιώδεις πτυχές των μαθηματικών.
- Να κάνουν και να διερευνούν μαθηματικές εικασίες.
- Ν' αναπτύσσουν και ν' αξιολογούν μαθηματικά επιχειρήματα και αποδείξεις.
- Να επιλέγουν και να χρησιμοποιούν διαφόρους τρόπους συλλογισμού και μεθόδους απόδειξης. (NCTM, 2000, σ.56)

Όπως φαίνεται από τον κατάλογο αυτό, συνιστάται η πρακτική της εικασίας να είναι αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας της απόδειξης. Η εικασία και η ανεπίσημη αιτιολόγηση πρέπει να προετοιμάζουν τους μαθητές για την πιο αυστηρή πράξη της παραγωγικής απόδειξης στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Το μαθηματικό πλαίσιο εργασίας που προσφέρεται για τους μαθητές, όταν αυτοί διατυπώνουν εικασίες, μπορεί να καθορίσει πράγματι την ποιότητα των εικασιών τους και την πεποίθηση στις εικασίες που σχηματίζουν.

Οι εικασίες μερικές φορές αποδεικνύονται αληθινές, ενίοτε αποδεικνύονται ψευδείς. Αλλά υπάρχουν μερικές γνωστές εικασίες που αντιστάθηκαν τόσο στην απόδειξη όσο και στη διάψευση.

Ένα παράδειγμα είναι η περίφημη εικασία του Goldbach.[1] (G. Hanna and Ed Barbeau, 2002)

Ο De Villiers (1992) αναφέρθηκε σε μια μελέτη σχετικά με την πεποίθηση των μαθητών για δεδομένες μαθηματικές εικασίες. Διαπιστώθηκε ότι η πλειοψηφία των παιδιών βάσιζε την πεποίθησή της για την αλήθεια των δεδομένων προτάσεων στην αυθεντία του δασκάλου ή / και στο διδακτικό βιβλίο και όχι στην προσωπική τους πεποίθηση. Επίσης διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές μπορεί να μην είναι επαρκώς προετοιμασμένοι να εικάσουν από μόνοι τους, όταν τους παραδίδεται απλά ένα έγγραφο μαθηματικών καταστάσεων (De Villiers M., 1992).Χρειάζονται ένα κατάλληλο περιβάλλον που προωθεί την πράξη της εικασίας μέσω πειραματισμού και επιδέξιου χειρισμού.

1.5 Στρατηγικές που επηρεάζουν τη μάθηση

Ο S. Papert διατύπωσε την κατασκευαστική (constructionist) προσέγγιση για τη μάθηση σύμφωνα με την οποία : «Η μάθηση είναι αποτελεσματική όταν ο μαθητής πειραματίζεται κατασκευάζοντας ένα προϊόν που έχει νόημα για τον ίδιο».

---

[1] Το 1742 ο Πρώσος μαθηματικός Christian Goldbach (1690-1764) σε μια επιστολή προς τον Ελβετό μαθηματικόLeonard Euler (1707-1783), δήλωσε ότι "κάθε ακέραιος n μεγαλύτερος του 5 είναι το άθροισμα τριών πρώτων αριθμών". Ο Euler εξέφρασε την πίστη του στην ορθότητα αυτής της δήλωσης, αν και δεν ήταν σε θέση να το αποδείξει. (Ο Euler πρόσθεσε ότι μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ισοδύναμη με την πρόταση ότι «ακόμη και κάθε ακέραιος n μεγαλύτερος του 2 είναι το άθροισμα δύο πρώτων, "και είναι η τελευταία δήλωση που είναι τώρα γνωστή ως εικασία του Goldbach).Οι μαθηματικοί προσπάθησαν να επιλύσουν αυτή την εικασία για περίπου 250 χρόνια, αλλά καμία απόδειξη ή διάψευση δεν έχει βρεθεί.

Στην τάξη έχουμε μια κατάσταση στην οποία αρχίζουν να διαμορφώνονται οι γνώσεις. Δεν έχουμε δομημένη επιστήμη ή γνώση και οι μαθητές πρέπει να την κατασκευάσουν σταδιακά. Αυτός είναι ο τρόπος να επανεξετάσουμε την καθοδηγούμενη επανεφεύρεση του Freundenthal: να βάλουμε τους μαθητές στην κατάσταση των πρωτοπόρων μαθηματικών και να δημιουργήσουμε ένα πλαίσιο κατάλληλο για την κατασκευή του μαθηματικού αντικειμένου μέσα από την κοινωνικοποίηση, συζήτηση, ανταλλαγή ιδεών.(Furinghetti F. & Paola D.:2003)

Η αλήθεια, η απόδειξη, οι ορισμοί και οι φορμαλισμοί, θα πρέπει να διδάσκονται στο πλαίσιο των υποκείμενων ανθρώπινων ιδεών(Núñez ,2000) Στο πλαίσιο αυτό, το «εννοιολογικό έδαφος» αποτελείται από ένα εκτεταμένο σύνολο καταστάσεων (προσεκτικά σχεδιασμένων και υπό την καθοδήγηση του δασκάλου) και χειρισμών διαφορετικών διασυνδεδεμένων εννοιών και αναπαραστάσεων. Οι μαθητές, μέσω του πειραματισμού και της εξερεύνησης παρατηρώντας κανονικότητες, παράγουν εικασίες και οδηγούνται στην επικύρωση τους ή την απόρριψή τους μέσα από θεωρίες (που μπορεί να έχουν ήδη κατασκευαστεί ή βρίσκονται σε εξέλιξη).

Πιστεύουμε ότι μόνο σ˙ ένα τέτοιο περιβάλλον, οι μαθητές μπορούν να εγκαταλείψουν, όταν χρειάζεται, το αντιληπτικό επίπεδο και να εκτιμήσουν την έννοια των θεωριών, μόνο έτσι ενεργοποιείται «ο γνωσιακός μηχανισμός μέσω του οποίου το αφηρημένο κατανοείται μέσω του σαφούς»,λαμβάνει χώρα δηλ. εννοιολογική μεταφορά (conceptual metaphor)[2]

2

Η μαθηματική σκέψη χρησιμοποιεί τον όρο «εννοιολογική μεταφορά»(conceptual metaphor), όπως όταν αντιλαμβανόμαστε τους αριθμούς ως σημεία πάνω σε μια ευθεία, ή το χώρο ως σύνολα σημείων (Από το άρθρο «mathematical idea analysis» του Rafael E. Núñez ,2000) .

Ο Nunokawa (1996) προτείνει την εφαρμογή των ιδεών του Lakatos στη μαθηματική επίλυση προβλημάτων. Στη διαδικασία της απόδειξης οι μαθητές εμπλέκονται σε μια κατάσταση παρόμοια με αυτή που ο Lakatos ονομάζει (1976) προ- Ευκλείδειο, δηλαδή μια κατάσταση στην οποία το θεωρητικό πλαίσιο δεν είναι καλά καθορισμένο, ώστε να πρέπει κανείς να αναζητήσει τα « κατάλληλα» αξιώματα που επιτρέπουν την κατασκευή της θεωρίας.(Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M.A.,2010)

Ο Lakatos υποστηρίζει ότι είναι σκόπιμο να ανακτηθεί το πνεύμα των Ελλήνων γεωμετρών στη διδακτική διαδικασία . Όταν έκαναν αποδείξεις δεν ήταν μέσα σε μια θεωρία στην οποία τα αξιώματα είχαν δηλωθεί ρητά.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, που χρησιμοποίησε ο Ευκλείδης, ήταν εμπειρικές εξιδανικεύσεις [κι όχι τυποκρατικές ή δομικές αφαιρέσεις, τύπου Hilbert].(Ν. Καστάνης)

Αρχικά η αρχαία γεωμετρία αναπτύχθηκε με ένα εμπειρικό τρόπο, μέσα από μια απλοϊκή φάση δοκιμών και λαθών: ξεκίνησε από ένα σύνολο εικασιών, αφού υπήρχαν νοητικά πειράματα ελέγχου και απόδειξης (κυρίως ανάλυσης) χωρίς κανένα σίγουρο αξιωματικό σύστημα.

Σύμφωνα με το Szabo, αυτή είναι η αρχική ιδέα της απόδειξης που κατείχαν οι Έλληνες, και ονομάζεται **deiknimi.** Το deiknimi μπορεί να αναπτυχθεί με δύο τρόπους, που αντιστοιχούν στην ανάλυση και σύνθεση.

Όταν αναφερόμαστε στην ανάλυση, εννοούμε την απαγωγή που αντιστοιχεί στην αναλυτική μέθοδο των μαθηματικών, σύμφωνα με την οποία ο μαθηματικός για να αποδείξει την αλήθεια μιας πρότασης / θεωρήματος, καταπιάνεται πρώτα με ένα άλλο θεώρημα που αποδεικνύεται ευκολότερα.

Ουσιαστικά πρόκειται για την τυπική μέθοδο μαθηματικής ανακάλυψης (W.D.Ross, «Αριστοτέλης» σελ.65) αλλά και την ευρετική στρατηγική «σκέψου απλούστερα, σκέψου ανάλογα» του Polya[3]. Ο Peirce (1960), ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια της απαγωγής ως εξής:

«…Η απαγωγή εξετάζει τα γεγονότα και αναζητά μια θεωρία για να τα εξηγήσει, αλλά μπορεί να πει μόνο ένα "μπορεί να είναι", επειδή έχει μια πιθανολογική φύση. Η γενική μορφή μιας απαγωγής είναι: ένα γεγονός Α παρατηρείται, αν το C ήταν αλήθεια, τότε το Α θα ήταν σίγουρα αλήθεια, έτσι, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το C είναι αλήθεια» (Baccaglini-Frank A., 2011)

Ο Magnani (2001) περιγράφει την απαγωγή ως επεξηγηματική υπόθεση. Σύμφωνα με τον ίδιο απαγωγή είναι: «Η διαδικασία συμπεράσματος ορισμένων δεδομένων και / ή νόμων και υποθέσεων που καθιστούν κάποιες προτάσεις εύλογες ,που εξηγούν ή ανακαλύπτουν κάποιο (τελικά νέο) φαινόμενο ή παρατήρηση, είναι η διαδικασία της συλλογιστικής στην οποία επεξηγηματικές υποθέσεις σχηματίζονται και αξιολογούνται» (Baccaglini-Frank A., 2011)

Η διδακτική αντίληψη που προσφέρεται από την παραπάνω ερμηνεία του Lacatos προτείνει το ερώτημα: ποια είναι η έννοια της αναπαραγωγής του αξιωματικού συστήματος της Ευκλείδειας γεωμετρίας στη σχολική τάξη, αν οι μαθητές δεν έχουν αντιληφθεί τη σταδιακή δημιουργία αυτού του αξιωματικού συστήματος;

[3] Σύμφωνα μ 'αυτή τη στρατηγική το λιγότερο δύσκολο προηγείται του δυσκολότερου/ για την επίλυση ενός σύνθετου προβλήματος με πολλές μεταβλητές ,εξετάζουμε ένα ανάλογο πρόβλημα με λιγότερες μεταβλητές.

Έπεται από αυτή τη σκοπιά, ότι η διδασκαλία των μαθηματικών συνεπάγεται τη διδασκαλία ανθρώπινου νοήματος και τη διδασκαλία του γιατί τα θεωρήματα είναι αληθή, δυνάμει του τι πραγματικά σημαίνουν τα στοιχεία που εμπλέκονται. Για την ανάπτυξη αυτής της προσέγγισης, μας απασχολεί η μετάβαση από τη στοιχειώδη στην προηγμένη μαθηματική σκέψη.

Στο πλαίσιο αυτό τα ίδια τα μαθηματικά εκλαμβάνονται ως μια επιστήμη, που η εξέλιξή της συνίσταται στη συνεχή αμφισβήτηση και στον επαναπροσδιορισμό των αξιωματικών συστημάτων, των προβλημάτων και των λύσεών τους. Η μάθηση δε των μαθηματικών ως μια εμπειρική, υποθετικο-παραγωγική διαδικασία, όπου ζητούμενο είναι η δημιουργία και η ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές μέσα από υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, ανασκευές, αντιπαραδείγματα, συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους. (Κυνηγός, 2007)

Με άλλα λόγια προτείνεται η επανακατασκευή ενός συστήματος αξιωμάτων από τους μαθητές που αποτελείται κυρίως από την κατασκευή ρητά των δικών τους γνώσεων, πεποιθήσεων και προκαταλήψεων, μέσα από διαπραγμάτευση και συζήτηση. Η συζήτηση στην τάξη, ενορχηστρωμένη από το δάσκαλο πρέπει να οδηγεί σταδιακά τους μαθητές από την επιχειρηματολογία που χρησιμοποιείται για να πεισθούν ότι εικασία τους είναι αλήθεια, σε μια απόδειξη η οποία εξηγεί γιατί είναι αλήθεια. Μόνο έτσι θα υπάρξει δυνατότητα γνωστικής συνέχειας, σε σχέση με την παρούσα ασυνέχεια που υπάρχει στο στυλ της απόδειξης στην τάξη. Την ίδια στιγμή ως πιθανά μέσα για να δράσουν σύμφωνα με αυτές τις κατευθυντήριες γραμμές προτάσσονται: η κοινωνικοποίηση, η ανταλλαγή ιδεών, η συζήτηση. Ο μεσολαβητής είναι, φυσικά, τόσο ο δάσκαλος και οι ιστορικές πηγές, καθώς και οι μικρόκοσμοι.

(Furinghetti F. & Paola D.:2003)

1.6 Τα λογισμικά δυναμικής Γεωμετρίας υποστηρίζουν την παραγωγή εικασιών.

Σ' ένα στατικό /παραδοσιακό περιβάλλον διδασκαλίας, οι μαθητές δυσκολεύονται στη δημιουργία σχημάτων και στη μετατροπή τους με τη χρήση βοηθητικών γραμμών. Πολύ περισσότερο «δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και δεν βλέπουν σε τι ακριβώς μπορεί να τους χρησιμέψουν στη ζωή τους, μιας και συχνά φαίνονται αποστασιοποιημένες από την καθημερινότητά τους ή από κάτι χειροπιαστό στη ζωή τους. Αναπόφευκτα, χρησιμοποιείται ο τυπικός μαθηματικός φορμαλισμός και τα στατικά προτεχνολογικά μέσα έκφρασης μαθηματικών εννοιών με αποτέλεσμα να δημιουργείται ακόμα ένα εμπόδιο κατανόησης των εννοιών στους μαθητές, μιας και εκτός από τις έννοιες, έχουν να μάθουν και το πώς τις αναπαριστούμε (πόσο μάλλον το γιατί να τις αναπαριστούμε με τον τρόπο αυτό)». (Κυνηγός, 2007)

Οι Goldenberg και Cuoco, (1998, σ.357)επισημαίνουν ότι το δυναμικό γεωμετρικό περιβάλλον του λογισμικού Sketchpad (GSP) είναι ένα στοιχείο που χαρακτηρίζει την προσέγγισή μας με την απόδειξη .Το "GSP" επιτρέπει στους μαθητές να υπερβαίνουν τα δικά τους σιωπηρά όρια της τάξης τους, χωρίς την πρόθεση να το πράξουν, δημιουργώντας ένα είδος ανισορροπίας, την οποία πρέπει με κάποιο τρόπο να επιλύσουν".(αναφορά σε Olive J., 2000)

Οι Healy και Hoyles (2001) σημειώνουν ότι το Geometer' s SketchPad, επιτρέπει στο μαθητή να μεταβάλλει το σχήμα των γεωμετρικών αντικειμένων, χωρίς να χρειάζεται να κάνει το σχήμα από την αρχή κερδίζοντας έτσι χρόνο να σκεφτεί τις γεωμετρικές ιδιότητες και να ανακαλύπτει ιδιότητες των σχημάτων που δεν θα ήταν δυνατόν να προσεγγίσει με τη διάταξη μολύβι – χαρτί.

Οι μαθητές, μέσω της εξερεύνησης με αυτό το είδος λογισμικού, έχουν τη δυνατότητα να αναπτύξουν εικασίες, γενικεύοντας τα μοτίβα (patterns)που ξεδιπλώνονται κατά τη διάρκεια των εξερευνήσεων σε αλληλεπιδραστικά περιβάλλοντα γεωμετρίας.Η αναγνώριση προτύπων (patterns) μπορεί να ενθαρρυνθεί από την δυνατότητα να χειριστούν τα διαγράμματα και να παρατηρούν τις αλλαγές (NCTM, 2001), να θεωρήσουν κριτικά τα παραδείγματα, να αποφασίσουν την ισχύ ενός κανόνα και να ανακαλύψουν μαθηματικές σχέσεις, μέσω του πειραματισμού τους.

Όπως αναφέρει ο Papert στο βιβλίο του «Mind storms», στόχος του είναι να μάθουν τα παιδιά μαθηματικά εμπειρικά, όπως μαθαίνουν και τη μητρική τους γλώσσα. Αυτό που θα ήθελε ,ήταν να κάνει τα παιδιά να ζήσουν στη «μαθηματοχώρα»,όπως θα μάθαιναν γαλλικά ζώντας στη Γαλλία…..

Ο Lakatos (1976) πρότεινε ότι το πρώτο βήμα για να κάνεις ανακαλύψεις στα μαθηματικά, είναι να παράγεις εικασίες. Οι εικασίες κάνουν ενδιαφέρουσες συνδέσεις μεταξύ των γεωμετρικών εννοιών και ιδιοτήτων. Τα διαδοχικά βήματα της εικασίας, αιτιολόγησης, απόδειξης και τροποποίησης ενισχύουν δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων των μαθητών. Ως εκ τούτου, είναι πολύ σημαντικό να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να κάνουν εικασίες συστηματικά. Σύμφωνα με τους Hoyles και Healy(1999), η εξερεύνηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας (DGE), θα μπορούσε να παρακινήσει τους μαθητές να εξηγήσουν εμπειρικές εικασίες τους κατασκευάζοντας μια τυπική απόδειξη. Σε ένα DGE (π.χ.Sketchpad) οι μαθητές μπορούν εύκολα να πειστούν για την γενική ισχύ της εικασίας, βλέποντας αναλλοίωτα της γραφικής απεικόνισης, ενώ γεωμετρικά αντικείμενα υποβάλλονται σε συνεχή μετασχηματισμό (De Villiers, 2003).

Ένα δυναμικό περιβάλλον το οποίο περιέχει «αντικείμενα», όπως σημεία, γραμμές, κύκλους, καθώς και τρόπους «χειραγώγησης» των αντικειμένων, είναι ένας μικρόκοσμος (Papert,1980/ Balacheff & kaput,1996) που χτίστηκε για να μοιάσει με το μαθηματικό κόσμο της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Μια βασική πτυχή της μικρόκοσμων στη μαθηματική εκπαίδευση, είναι ότι τα «αντικείμενα» που περιλαμβάνονται προσφέρουν την ευκαιρία στον χρήστη να πειραματιστεί απευθείας με τα «μαθηματικά αντικείμενα» (Mariotti, 2005, 2006), επειδή το λογικό σκεπτικό πίσω από τα αντικείμενα στο μικρόκοσμο, έχει σχεδιαστεί για να είναι το ίδιο με εκείνο πίσω από τα πραγματικά μαθηματικά αντικείμενα που εκπροσωπούν.

Τα μαθηματικά των μικρόκοσμων είναι νέα μαθηματικά ,όπως νέο είναι και το τεχνολογικό εργαλείο[4] της γνώσης, που δεν είναι καθόλου παθητικό

---

[4] Η διάκριση μεταξύ των ιδιοτήτων ενός λογισμικού και του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιείται από ένα μαθητή θεμελιώθηκε θεωρητικά με βάση τη διάκριση του«πράγματος»-λογισμικού, το οποίο αποκαλείται «κατασκεύασμα» (artifact), και του εργαλείου (instrument).
Η λέξη εργαλείο (instrument) δείχνει ακριβώς ότι ένα κατασκεύασμα (artifact) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο με πολλούς τρόπους, ακόμη κι αν δεν σχεδιάστηκε από τον κατασκευαστή του γι' αυτή τη συγκεκριμένη χρήση. (Υλικό ΚΣΕ ΠΕ03 – Έκδοση Β')

και χρειάζεται το άτομο να παλέψει πάνω σ' αυτό και μαζί μ' αυτό, για να κατακτήσει τη γνώση. Ίσως γι' αυτό ορισμένοι σύγχρονοι επιστημολόγοι μιλούν, όχι μόνο για τις προσωπικές γνωστικές δομές του Piaget ή για περιβαλλοντικές δομές του Vigotsky, αλλά για διαπλοκή διασυνδέσεων που δομούν και επαναδομούν τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις.(Ράπτης σελ.210 α΄ τόμος)

Ο δυναμικός χειρισμός, η παρατήρηση και οι αλληλεξαρτώμενες αναπαραστάσεις είναι οι ιδιότητες των εργαλείων που ενδιαφέρουν τη διδακτική των μαθηματικών.

Τα βασικά χαρακτηριστικά τέτοιων εργαλείων είναι:

- Κατασκευή βασικών στοιχείων
- Κατασκευή σχέσεων μεταξύ στοιχείων
- Σούρσιμο – δυναμικός χειρισμός
- «Χάλασμα» σχήματος που δεν κατασκευάστηκε με βάση τις απαραίτητες ιδιότητες
- Εξάρτηση – συναρτησιακή σχέση μεταξύ αντικειμένων

(Χ. Κυνηγός, 2007).

Οι μαθητές μέσω της διαδικασίας συρσίματος στο δυναμικό περιβάλλον, μπορούν να επιβεβαιώσουν ή να απορρίψουν τις εικασίες τους. Αν οι μαθητές ανακαλύψουν αντιπαραδείγματα στις εικασίες τους κατά τη διάρκεια αυτής της δυναμικής διαδικασίας, μπορούν να προσαρμόσουν την εικασία τους μέσω ενός αντιπαραδείγματος, ή να ξεκινήσουν από την αρχή με μια νέα εικασία. Τελικά αυτή η διαδικασία της εξερεύνησης, της ανακάλυψης, και του ελέγχου, οδηγεί σε προσπάθεια να αποδείξουν την εικασία αφαιρετικά. Μια αποτυχημένη προσπάθεια στην απόδειξη ή ακόμη και ο εντοπισμός σφάλματος οδηγεί το μαθητή πίσω στο στάδιο της εικασίας όπου σε μια επιτυχημένη προσπάθεια θα τελειώσει η διαδικασία, εκτός αν ο μαθητής επιθυμεί να προβεί σε περαιτέρω εικασίες.

Το σύρσιμο υποστηρίζει την παραγωγή εικασιών: η εξερεύνηση σχημάτων μέσω μετακίνησής τους, η αναζήτηση των τρόπων με τους οποίους οι μορφές τους αλλάζουν (ή δεν αλλάζουν), επιτρέπει στους χρήστες να ανακαλύψουν τις αναλλοίωτες ιδιότητές τους. Η δυνατότητα συρσίματος, προσφέρει ανατροφοδότηση στη φάση της ανακάλυψης και με αυτό τον τρόπο παρέχει υποστήριξη στο ρόλο των αποδείξεων ως πραγματικών «εξηγήσεων» των εικασιών ή των ιδιοτήτων.(Arzarello at all, 2000)

Για να διερευνήσει κάποιος αποτελεσματικά ένα σχήμα στο Sketchpad (GSP) πρέπει να έχει ένα «ανθεκτικό»,«στιβαρό» (robust) σχέδιο στην οθόνη (Healy, 2000,Laborde, 2001, Laborde, Κυνηγός, Hollebrands και Strasser, 2006). Ένα στιβαρό σχέδιο, όταν σύρεται ή μετακινείται η εικόνα, παράγει μία και μόνο μία οικογένεια σχεδίων, που διατηρούν αμετάβλητες τις ίδιες γεωμετρικές σχέσεις .Όταν ένα στιβαρό σχέδιο είναι κατασκευασμένο, μπορεί να μετασχηματιστεί, να διερευνηθεί, και να μετρηθεί. Οι μετρήσεις αυτές μπορούν να καταγράφονται σε πίνακα κατά τη μεταφορά της διαδικασίας. Η διατύπωση εικασιών προκύπτει από την παρατήρηση αυτής της διαδικασίας και την οπτικοποίηση των υπαρχουσών σχέσεων.

Η πρακτική του συρσίματος λειτουργεί ως διαμεσολαβητής κατά τη μετάβαση από τη θεωρία στο σχήμα και από το σχήμα στη θεωρία.
Αυτές τις διαδικασίες ο Arzarello τις αναφέρει ως:

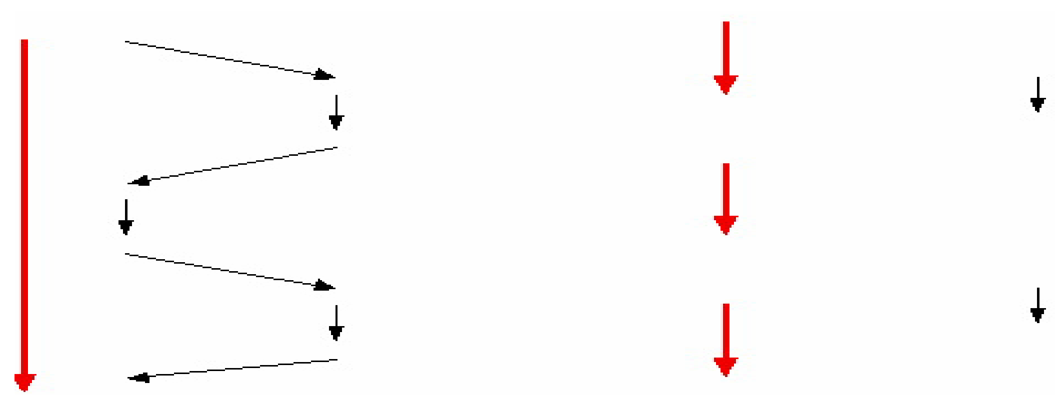
- **Ανερχόμενες** ή **ανιούσες** (ascending) διαδικασίες, από σχήματα σε θεωρία, ώστε να εξερευνήσουν ελεύθερα μια κατάσταση, αναζητώντας κανονικότητες, αμετάβλητα στοιχεία κλπ.
- **Κατερχόμενες** ή **κατιούσες** (descending) διαδικασίες από τη θεωρία στα σχήματα, ώστε να επικυρωθούν ή να απορριφθούν εικασίες, να ελεγχθούν ιδιότητες κλπ.

Η Colette Laborde αναφέρει ότι ένας έμπειρος μαθηματικός ή ένας μαθητής με προηγμένη μαθηματική σκέψη μπορούν να παράγουν το τελικό κείμενο της απόδειξης, ενώ οι περισσότεροι μαθητές δεν μπορούν να δουν τις συνδέσεις μεταξύ θεωρίας και διαγραμμάτων και να τις χρησιμοποιούν με ευχέρεια. Αυτές οι συνδέσεις μπορούν να ενισχυθούν με το Sketchpad. (Σχήμα 1, De Villiers, M., 2006)

Δυναμικό περιβάλλον Sketchpad **Στατικό περιβάλλον**

(cross-country) **(ευθεία πορεία)**

Θεωρία **Διάγραμμα** **Θεωρία** **Διάγραμμα**



Κατασκευή απόδειξης **? ?**

Σχήμα 1: Η πορεία κατασκευής της απόδειξης σε δυναμικό και στατικό περιβάλλον

Και στα δυο περιβάλλοντα, η μετάβαση ορίζεται από **απαγωγή,** όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω. Όμως στο στατικό περιβάλλον «χαρτί – μολύβι», οι απαγωγές παράγονται λόγω ευφυΐας των υποκειμένων, ενώ στο δυναμικό περιβάλλον είναι η διαδικασία συρσίματος αυτή που μπορεί να τις διαμεσολαβήσει (δες Arzarello et al., 1998). Η απαγωγή σηματοδοτεί τη μετάβαση από την εικασία στην αποδεικτική φάση, όταν συμβαίνει ένα πέρασμα από τον "αύξοντα έλεγχο" σε "φθίνοντα έλεγχο"

Η απαγωγή οδηγεί στη μετάβαση, δεδομένου ότι φαίνεται να είναι το κλειδί που επιτρέπει τους λύτες να γράψουν εικασίες σε μια λογική μορφή «αν ... τότε», μια κατάσταση η οποία είναι τώρα έτοιμη να αποδειχθεί. (Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M.A.,2009)

Οι δραστηριότητες συρσίματος προκύπτουν από την επίλυση προβλημάτων και έχουν οργανωμένα, αλλά και προσωπικά χαρακτηριστικά (Mariotti, 2001). Αποτυπώνουν επίσης τον τρόπο με τον οποίο τα υποκείμενα βλέπουν τι θεωρείται ως δοσμένο και τι υποτίθεται ότι πρέπει να βρουν. Συνιστούν ένα λεπτό γνωστικό σημείο, το οποίο έχει επίσης ένα σημαντικό διδακτικό στοιχείο.

Επιπλέον, αυτή η επαναλαμβανόμενη μεταστροφή υποστηρίζει την εξέλιξη από το αντιληπτικό προς ένα πιο θεωρητικό πλαίσιο: αυτή η εξέλιξη χαρακτηρίζεται από ένα ρυθμό από ανερχόμενες σε κατερχόμενες μορφές και τανάπαλι (Arzarello, 2000).

Οι Arzarello et al, 1998b, Olivero, 1999,Arzarello, 2001, προσδιόρισαν διαφορετικούς τύπους συρσίματος:

- **Wandering dragging** (σύρσιμο περιπλάνησης): Μετακινώντας με τυχαίο τρόπο τα βασικά σημεία πάνω στην οθόνη, χωρίς κάποιο πλάνο, ώστε να ανακαλύψουν ενδιαφέρουσες διαμορφώσεις ή κανονικότητες στα σχήματα.

- **Guided dragging** (καθοδηγούμενο σύρσιμο): Σύροντας τα βασικά σημεία του σχήματος, ώστε να του δώσουν ένα συγκεκριμένο σχήμα.
- **Dummy locus dragging** (σύρσιμο κρυφού ή τεχνητού (γεωμετρικού) τόπου): Μετακινώντας ένα βασικό σημείο ώστε το σχήμα να διατηρεί μια ιδιότητα που έχει ανακαλυφθεί. Το σημείο που μετακινείται ακολουθεί μια διαδρομή[5], ακόμα και αν οι χρήστες δεν το συνειδητοποιούν: ο τόπος δεν είναι ορατός και δεν "μιλάει" στους μαθητές, που δεν συνειδητοποιούν ότι σύρουν κατά μήκος ενός τόπου.
- **Dragging test**: Μετακινώντας συρόμενα ή ημι-συρόμενα (semi-draggable)[6] σημεία, ώστε να δουν αν το σχέδιο διατηρεί τις αρχικές του ιδιότητες. Αν ναι, τότε το σχήμα περνάει τον έλεγχο. Αν όχι, το σχέδιο δεν κατασκευάσθηκε σύμφωνα με τις γεωμετρικές ιδιότητες που θέλουν να έχει.

Αυτούς τους τύπους συρσίματος οι μαθητές τους χρησιμοποιούν για διαφορετικούς τους σκοπούς κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης ανοιχτών προβλημάτων. Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές αξιοποιούν αυτές τις διαφορετικές μορφές, ώστε να επιτύχουν διαφορετικούς στόχους, όπως το να εξερευνήσουν, να εικάσουν, να επικυρώσουν, να αιτιολογήσουν.

---

[5] Η διαδρομή παίζει σημαντικό ρόλο στην απαγωγική διαδικασία Συγκεκριμένα, η αναγνώριση μιας διαδρομής μπορεί να λειτουργήσει ως γέφυρα, προωθώντας τη διαμόρφωση μιας εικασίας. (Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M.A.,2009)

[6] Ένα ημι-συρόμενο σημείο είναι σημείο συνδεδεμένο με ένα αντικείμενο και μπορεί να μετακινείται μόνο πάνω στο αντικείμενο στο οποίο ανήκει. (Arzarello et al,2002)

Για παράδειγμα τα *wandering dragging* (σύρσιμο περιπλάνησης) και *guided dragging* (καθοδηγούμενο σύρσιμο) γενικά χρησιμοποιούνται στη φάση της διερεύνησης*, το dummy locus dragging*(σύρσιμο κρυφού ή τεχνητού (γεωμετρικού) τόπου) χαρακτηρίζει την κατασκευή μιας εικασίας και το *dragging test* χρησιμοποιείται κυρίως για να ελέγξει την εικασία. (Arzarello et al,2002)

1.7 Το τυπικό περιβάλλον της τάξης μετατρέπεται σε εργαστήριο.

Όπως προαναφέρθηκε, ένας άλλος παράγοντας που καθιστά τη μετάβαση προς την απόδειξη τόσο δύσκολη, είναι το τυπικό περιβάλλον της τάξης Σε μια εκτενή μελέτη των διαδικασιών που εμπλέκονται στη διδασκαλία μιας μαθηματικής απόδειξης, ο Balacheff (1988) επισημαίνει τη σημασία της δημιουργίας καταστάσεων στην τάξη ώστε ο μαθητής να λαμβάνει γνώση της πολυπλοκότητας του προβλήματος και της ανάγκης να παράγει έγκυρα επιχειρήματα.(Hanna, 1990)

Είναι λοιπόν έντονη η ανάγκη δημιουργίας μαθησιακών περιβαλλόντων όπου κυριαρχούν η δράση, ο διάλογος, το βίωμα, η έκφραση, η αναπαράσταση, ο πειραματισμός, η επιστημονική στάση απέναντι στη γνώση και η συμμετοχή σε πολλαπλές συλλογικότητες.(Κυνηγός, Χ. 2007).

Το στυλ της τάξης που υποστηρίζουμε για να προωθήσουμε τη μετάβαση στην απόδειξη, περιγράφεται κατάλληλα από μια μεταφορά του Pollak, που αναφέρεται στο (Lampert, σελ.41-42): «να μετακινούνται στο μαθηματικό έδαφος με ευέλικτο τρόπο », δηλαδή να κάνουν ένα είδος« **cross-country** » (διαγώνια πορεία ,διάγραμμα 1) των μαθηματικών, αντί για «περπάτημα σε μια ευθεία πορεία, που είναι επιμελώς μελετημένη μέσα στο δάσος».(Furinghetti F. & Paola D., 2003)

Τα αποτελέσματα της μαθησιακής διαδικασίας είναι μέγιστα, όταν οι μαθητές υλοποιούν δικές τους προσωπικές ιδέες (Resnick M., Ocko S. 1991, Resnick, M. 1991). Οι μαθητές έτσι ενεργοποιούνται και συμμετέχουν, αντί να είναι παθητικοί δέκτες γνώσης. Η ποιότητα της μάθησης που επιτυγχάνεται είναι ιδιαίτερα σημαντική, γιατί στηρίζεται στην διερεύνηση των γνώσεων και πεποιθήσεων που τα ίδια τα παιδιά έχουν και μπορεί να ακολουθήσει το επίπεδο της γνωστικής τους ανάπτυξης. Η νέα γνώση που προκύπτει από την διαδικασία αυτή διαφοροποιεί το ήδη διαμορφωμένο σύστημα γνώσεων του παιδιού και εντάσσεται σε αυτό. Ως εκ τούτου αποτελεί ένα μέρος λειτουργικό και χρήσιμο. Σε μία τέτοια διαδικασία δεν υπάρχουν λάθη και σωστά, υπάρχουν μόνο ευκαιρίες για μάθηση. (Κυνηγός Χ., Φράγκου Σ.,2007)

Το μάθημα που πραγματοποιείται με χρήση DGE's προσλαμβάνει εργαστηριακό χαρακτήρα, αλλάζει η διάταξη με την οποία κάθονται οι μαθητές, καθώς επίσης αλλάζει και ο ρόλος του εκπαιδευτικού- λόγω της διαμεσολάβησης του υπολογιστή-και μετατρέπεται σε διευκολυντή της γνώσης και της ανάπτυξης του μαθητή.

Η βασική τροποποίηση αφορά στην αλλαγή του καθεστώτος της αιτιολόγησης σε γεωμετρικά προβλήματα. Η τροποποίηση αυτή είναι στενά συνδεδεμένη με τη μετάβαση από μια «διαισθητική» γεωμετρία, ως μια συλλογή από εμφανείς ιδιότητες σε μια «θεωρητική» γεωμετρία, ως σύστημα σχέσεων μεταξύ καταστάσεων, επικυρωμένων από την απόδειξη.

Η σχέση με τη γεωμετρική γνώση[7]τροποποιείται από τη διαμεσολάβηση [8] , που προσφέρεται από τις ιδιομορφίες του λογισμικού. Η λειτουργία μεσολάβησης του υπολογιστή σχετίζεται με το ενδεχόμενο δημιουργίας ενός διαύλου επικοινωνίας μεταξύ του δασκάλου και του μαθητή που βασίζεται σε μια κοινή γλώσσα(Mariotti, M.A.,2001)

1.8 Συνεργατική μάθηση-Διαπροσωπικές Διεργασίες

Αυτή η προοπτική διδασκαλίας προωθεί τη συζήτηση στην τάξη, στο πλαίσιο μικρών, ανοικτών και ευέλικτων ομάδων, ενορχηστρωμένη από τον δάσκαλο. Πολιτιστικές και κοινωνικές διεργασίες αποτελούν αναπόσπαστα στοιχεία της μαθηματικής δραστηριότητας.

Τα παιδιά δουλεύοντας σε ομάδα, μπορούν να επικοινωνήσουν λεκτικά, να εξηγήσουν τις σκέψεις τους και να πείσουν για την ορθότητα των απόψεων τους. Μαθαίνουν να εκφράζουν τις απόψεις τους, να κατανοούν τις απόψεις άλλων και να συμβάλουν θετικά στην εξέλιξη μιας ιδέας. Μαθαίνουν να διαχειρίζονται με επιτυχία τα συναισθήματα τους και ιδιαίτερα αυτά που ακολουθούν τις αποτυχημένες προσπάθειες. Αποκτούν το πολύτιμο βίωμα ότι η συμβολή όλων των μελών της ομάδας είναι αναγκαία για την λύση των προβλημάτων που προκύπτουν σε όλα τα στάδια της εργασίας. (Κυνηγός Χ., Φράγκου Σ.,2007)

---

[7] Τα τελευταία χρόνια η προσοχή των ερευνητών, δεν εστιάζεται στο πόσο «αυξάνει» η γνώση αλλά στο πως αλλάζει η φύση του μαθησιακού αντικειμένου με τη χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού.

[8]Η διαμεσολάβηση είναι ένας πολύ κοινός όρος στη βιβλιογραφία σχετικά με τη χρήση των υπολογιστών στην εκπαίδευση και αναφέρεται απλά στην αόριστη δυνατότητα της προώθησης της σχέσης μεταξύ των μαθητών και της μαθηματική γνώσης.

Τα αποτελέσματα της συνεργατικής μάθησης είναι ακόμα θετικότερα, αν οι συνεργαζόμενοι μαθητές θεωρούν τον εαυτό τους ασφαλή και διαπραγματεύονται τις καταστάσεις ισότιμα (Eijl et al. 2005). Αυτός είναι ο λόγος που μαθητές, οι οποίοι άλλοτε κινούνταν στο περιθώριο της παραδοσιακής τάξης, γίνονται αποδοτικότεροι και δημιουργικοί όταν εργάζονται στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας, ξεπερνώντας συχνά τις όποιες δυσκολίες (Daniels,2004),(Α. Αϊβάζογλου, Κ. Γαβρίλης, Εν.Ε.Δι.Μ.ΙΙ).

Η επιτυχία της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας όμως δεν εξασφαλίζεται αυτόματα με την ομαδοποίηση των μαθητών σε ολιγομελείς ομάδες. Επέρχεται μετά από μεγάλες και μακρές προσπάθειες των μαθητών και εφόσον συντρέχουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:
(Ματσαγκούρας,1989:507-508)

a) θετική αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών της αμάδας

b) άμεση προσωπική επικοινωνία μεταξύ των μαθητών

c) ατομική και συλλογική ευθύνη

d) συνεχής εξάσκηση σε διαπροσωπικές δεξιότητες επικοινωνίας και συλλογικής εργασίας

e) ανομοιογένεια στη σύνθεση της ομάδας, ως προς τις μαθησιακές ικανότητες ,το στυλ μάθησης, το φύλο και τους άλλους τομείς που επηρεάζουν τη μάθηση.

f) αποκέντρωση της εξουσίας .

(Α. Ράπτης-Α .Ράπτη σελ.158 Α΄ τόμος)

1.9 Δυναμική Γλώσσα

Η Mariotti (2001) ανέλυσε το ρόλο της συζήτησης, στην εισαγωγή της ιδέας της απόδειξης με στόχο την εισαγωγή των μαθητών στη θεωρητική σκέψη με τη χρήση δυναμικού λογισμικού γεωμετρίας.

Αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο είδος συζήτησης, τη μαθηματική συζήτηση, η οποία δεν είναι μια απλή σύγκριση των διαφορετικών απόψεων, ούτε μια απλή αντίθεση ανάμεσα σε επιχειρήματα.

Το κύριο χαρακτηριστικό (Bartolini Bussi, 1999) αυτού του είδους της συζήτησης είναι η γνωστική διαλεκτική μεταξύ προσωπικών νοημάτων (Leont'ev, 1976/1959, σ. 244) και γενικών εννοιών, η οποία κατασκευάζεται και προωθείται από το δάσκαλο.

Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές που εργάζονται σε δυναμικό περιβάλλον αναπτύσσουν μια γλώσσα και ορολογία που αντικατοπτρίζει τους τύπους των αλληλεπιδράσεων που βιώνουν μέσα σ’ αυτό το περιβάλλον. Η περιγραφή εννοιών σε αυτή την περίπτωση συμπεριλαμβάνει ενεργητικά ρήματα ιδίως εκείνα που εκφράζουν κίνηση (Holzl, 1996).Η χρήση των δυναμικών λογισμικό γεωμετρίας δημιουργεί ένα δίαυλο επικοινωνίας μεταξύ του δασκάλου και του μαθητή που βασίζεται σε μια κοινή γλώσσα (Mariotti, 2001).

Η Jones (2000) αναφέρεται επίσης στην αλληλεπίδραση των μαθητών με το περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας και το πώς επηρεάζεται το σκεπτικό τους καθώς και η γλώσσα που χρησιμοποιείται στις εξηγήσεις τους :λέξεις όπως σύρσιμο ,μετακίνηση μεταβολή κλπ χρησιμοποιούνται στις μεταξύ τους συζητήσεις..)

1.10 DGE'S και ανοικτά/πραγματικά προβλήματα

Είναι γεγονός και έχει διαπιστωθεί και από προσωπική εμπειρία ότι οι περισσότεροι μαθητές έχουν πιο θετική στάση απέναντι σε μαθήματα όπως οι γλώσσες, η βιολογία, γεωλογία κλπ και γενικά περιγράφουν ως ενδιαφέροντα τα μαθήματα που έχουν μια απτή χρήση στον πραγματικό κόσμο κλπ., Αντίθετα, αναρωτιούνται: «Γιατί πρέπει να μάθουν γεωμετρία και γεωμετρική απόδειξη;»

Αυτό δείχνει ότι δεν έχουν περάσει από μια μαθησιακή εμπειρία, που να τους επιτρέπει να συνειδητοποιήσουν τη σημασία της γεωμετρίας στην καθημερινή ζωή. Επομένως, αυτό που πρέπει τώρα να αλλάξει είναι οι πεποιθήσεις των μαθητών για τη γεωμετρία και τη γεωμετρική απόδειξη και αυτό θα επιτευχθεί αν η διδασκαλία τους πραγματοποιείται μέσα από τη διαδικασία επίλυσης πραγματικών προβληματικών καταστάσεων.
Τα πρότυπα που ορίζονται από το Εθνικό Συμβούλιο των Εκπαιδευτικών των Μαθηματικών υποστηρίζουν την ιδέα συνδυασμού του λογισμικού της δυναμικής γεωμετρίας και της γεωμετρίας της καθημερινής ζωής και υπογραμμίζουν τη χρήση των μοντέλων για την εξερεύνηση γεωμετρικών ιδεών και τη συνειδητοποίηση της χρηστικότητας τους στα πλαίσια του πραγματικού κόσμου (NCTM, 2009) . Η εκμάθηση των μαθηματικών μέσα από τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων είναι βασισμένη στην ιδέα της επανα-ανακάλυψης (rediscovery).

Ο Polya (1963)υποστηρίζοντας ότι κάθε νέα γνώση στα μαθηματικά μπορεί να προκύψει μέσα από την επίλυση ενός κατάλληλα επιλεγμένου προβλήματος, δηλαδή με τη χρήση της ήδη υπάρχουσας γνώσης, θεωρεί την επανα-ανακάλυψη ως το κύριο εργαλείο για την υλοποίηση της ιδέας του Piaget για την ενεργό μάθηση (active learning).

Για τη διαδικασία της επανα-ανακάλυψης διακρίνει τρεις διαδοχικές φάσεις :την εξερεύνηση ,τη διαμόρφωση ,την αφομοίωση και τέλος το επιθυμητό κίνητρο (best motivation),δηλαδή ο καλύτερος τρόπος με τον οποίο ο δάσκαλος δημιουργεί την καλύτερη κατάσταση μάθησης προσαρμοσμένη στις σημερινές συνθήκες και ανάγκες της τάξης ,δηλαδή περιβάλλοντα κατάλληλα για εξερεύνηση, παραγωγή εικασιών και επικύρωση αυτών των εικασιών.

Η συμβολή των DGE's στην αιτιολόγηση και την απόδειξη των μαθητών είναι ιδιαίτερα εμφανής κατά την έρευνα των ανοικτών προβλημάτων, δεδομένου ότι η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την πραγματοποίηση εικασίας (Mariotti, 2006). Μια στατική εικασία σε ένα περιβάλλον «χαρτί και μολύβι» προκύπτει συνήθως με μηχανικό τρόπο ,και συχνά δεν αναδεικνύει κάποιο μαθηματικό νόημα για τους μαθητές ,αντίθετα σε ένα DGE , οι αμετάβλητες γεωμετρικές ιδιότητες και οι μετασχηματισμοί μιας κατασκευής, οδηγούν σε εικασίες, που μπορούν εύκολα να γίνουν κατανοητές.

Για το σκοπό αυτό προτείνονται ανοιχτά προβλήματα. Τα ανοικτά προβλήματα προωθούν τη μεταβίβαση της ευθύνης από το δάσκαλο στο μαθητή, συμβάλλουν στην επικοινωνία μεταξύ των μαθητών, στο πλαίσιο της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας.Επιπλέον ο κάθε μαθητής ανακαλύπτει όλες τις εναλλακτικές λύσεις με τον προσωπικό του τρόπο κατανόησης του προβλήματος, ο οποίος μπορεί να είναι διαφορετικός από των άλλων Η κατάσταση αυτή ευνοεί τη δημιουργικότητα, π.χ. την ικανότητα να ξεπεραστούν τα στερεότυπα στη μαθηματική επίλυση προβλημάτων και να παράγουν διαφορετικές απόψεις στο πλαίσιο της μαθηματικής κατάστασης.

Δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να συμμετάσχουν σε μια διαδικασία, κατά τη διάρκεια της οποίας χρησιμοποιείται ένα ευρύ φάσμα λειτουργιών της απόδειξης: η εξερεύνηση μιας κατάστασης, η παραγωγή εικασιών, η επικύρωση και η απόδειξη των εικασιών. Η σιωπηρή παραδοχή είναι, ότι οι μαθητές κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας δεν θα πρέπει να αποδείξουν κάτι που παρουσιάζεται και δεν το καταλαβαίνουν, αλλά κάτι που οι ίδιοι έχουν ανακαλύψει, επικυρώσει και έχει νόημα για αυτούς.

Τα ανοικτά προβλήματα έχουν τα εξής χαρακτηριστικά :(Arsac et al, 1988.):

- Η δήλωση του προβλήματος είναι μικρή, έτσι ώστε να μπορεί να είναι εύκολα κατανοητή, προωθεί την ανακάλυψη και όλοι οι μαθητές είναι σε θέση να ξεκινήσουν τη διαδικασία λύσης.
- Η δήλωση του προβλήματος δεν προτείνει τη μέθοδο της λύσης, ή την ίδια τη λύση, αλλά δημιουργεί μια κατάσταση διεγείροντας την παραγωγή εικασιών.
- Το πρόβλημα βρίσκεται σε ένα εννοιολογικό πεδίο με το οποίο οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι . Έτσι, οι μαθητές είναι σε θέση να κυριαρχήσουν την κατάσταση μάλλον γρήγορα και να συμμετάσχουν στις προσπάθειες της εικασίας, στο σχεδιασμό διαδρομών λύσης και την εξεύρεση αντι-παραδειγμάτων σε ένα εύλογο χρονικό διάστημα. (Furinghetti, F. & Paola, D.: 2003)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

2.1 Ερευνητικό πρόβλημα και Ερευνητικά ερωτήματα

Γνωρίζοντας και λαμβάνοντας υπόψη τις στάσεις, τις αντιλήψεις καθώς και τις ικανότητες ων μαθητών απέναντι στην παραγωγή εικασιών και στην κατασκευή της απόδειξης σ’ ένα στατικό περιβάλλον, το ενδιαφέρον της μελέτης εστιάζεται στα παρακάτω ερωτήματα :

- ποιες νέες αντιλήψεις διαμορφώνονται σ’ ένα δυναμικό περιβάλλον?
- ποιος είναι ο ρόλος του δασκάλου μέσα σ’ ένα τέτοιο περιβάλλον?
- Πως διαφοροποιείται η γλώσσα και η ορολογία που χρησιμοποιούν οι μαθητές όταν σχηματίζουν εικασίες στο δυναμικό περιβάλλον και περιγράφουν τις διάφορες τεχνικές συρσίματος που χρησιμοποιούν?
- Αυξάνεται η παραγωγή εικασιών στο δυναμικό περιβάλλον?
- Μειώνεται ή αυξάνεται ο αριθμός των ψευδών εικασιών που σχηματίζονται από τους μαθητές στα δυναμικά περιβάλλοντα γεωμετρίας?
- Όντας αντιμέτωποι με μια ψευδή εικασία, αυξάνεται η ικανότητά τους να διαμορφώσουν και να βρουν αντι-παραδείγματα ή νέες εικασίες?
- Ενισχύεται ή όχι η ανάγκη για κατασκευή γεωμετρικής απόδειξης?
- Ποια είναι η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης προσέγγισης στη βελτίωση της στάσης των μαθητών και κατά πόσο αλλάζουν οι πεποιθήσεις τους απέναντι στην γεωμετρία και ειδικότερα στη γεωμετρική απόδειξη?

Η έρευνα που ακολουθεί, περιλαμβάνει δύο εκπαιδευτικές δραστηριότητες με χρήση του λογισμικού **Sketchpad,** με στόχο την ανάπτυξη και την παραγωγή εικασιών για μια νέα προσέγγιση της διδασκαλίας της γεωμετρικής απόδειξης. Στις δραστηριότητες εμπλέκονται δύο διαφορετικές κοινότητες: α) τρεις πρωτοετείς φοιτητές μαθηματικού τμήματος και β) δεκάξι μαθητές της Α΄ λυκείου.

2.2 Πρώτη Φάση της Έρευνας-Διαδικασία

2.2.1 1η κοινότητα- συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες είναι τρεις πρωτοετείς φοιτητές του μαθηματικού τμήματος Θεσσαλονίκης: ο Λευτέρης(Λ),η Δανάη(Δ) και ο Μάριος(Μ).
Η δραστηριότητα βασίζεται σε πραγματικό πρόβλημα, η επίλυση του οποίου συνδέεται με τη γεωμετρία και τη γεωμετρική απόδειξη και πραγματοποιήθηκε το Δεκέμβριο του 2011.
Πραγματοποιήθηκαν τρεις δίωρες συναντήσεις στις 19,20 και 21 Δεκεμβρίου 2011 και χρησιμοποιήθηκαν δύο φορητοί υπολογιστές. Το Sketchpad είχε εγκατασταθεί από την προηγούμενη μέρα στους υπολογιστές και την ίδια μέρα, τους δόθηκε το έντυπο με τις οδηγίες χρήσης του λογισμικού.

2.2.2 Συμπληρωματικό υλικό

Στον κάθε φοιτητή δόθηκε:

- ένα τετράδιο για να καταγράφουν και να σημειώνουν τις υποθέσεις και τις εικασίες τους,

- ένα φύλλο εργασίας με ερωτήσεις σχετικές με τη δραστηριότητα,
- έντυπο με οδηγίες χρήσης και εξοικείωσης για το χρησιμοποιούμενο λογισμικό.

Έγινε προσπάθεια ώστε το φύλλο εργασίας σ᾽ αυτή την ομάδα να μην έχει καθοδηγητικό χαρακτήρα, αλλά να στοχεύει στην ταυτόχρονη ενασχόληση των μελών της ομάδας με το ίδιο θέμα, ώστε να είναι σε θέση να ανταλλάσουν σχετικές απόψεις και ιδέες για μια συγκεκριμένη υπόθεση ή εικασία.

Στον ένα υπολογιστή συνεργάζονταν ο Λευτέρης και η Δανάη και στο δεύτερο υπολογιστή ο Μάριος. Οι φοιτητές συζητούσαν διαρκώς μεταξύ τους και αντάλλασσαν απόψεις. Η διαδικασία άλλωστε δεν θύμιζε σε καμιά περίπτωση «μάθημα» ή «διδασκαλία»,μάλλον, μια απογευματινή συνάθροιση συμφοιτητών και φίλων.

Στη συνέχεια τους δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα[9]

[9] Η «μοντελοποίηση»του προβλήματος παραπέμπει σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, γνωστό ως πρόβλημα Steiner – Fermat. O J. Steiner διάσημος γεωμέτρης στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου στις αρχές του 19ουαιώνα αντιμετώπισε το πρόβλημα με τη μορφή κατασκευής οδικού δικτύου, ελάχιστου συνολικού μήκους, που να ενώνει τρία χωριά.Ο μεγάλος μαθηματικός Fermat έθεσε το συγκεκριμένο γεωμετρικό πρόβλημα στον Torricelli, ο οποίος και το έλυσε καθώς επίσης και οι Cavalieri και Viniani.

2.2.3 Το πρόβλημα του σταθμού παραγωγής ενέργειας

Πρόκειται να κατασκευαστεί μια μονάδα παραγωγής ενέργειας για να εξυπηρετήσει τις ανάγκες των τριών πόλεων. Κατά το σχεδιασμό της συνολικής κατασκευής πρέπει να ληφθούν υπόψη οικονομικοί και οικολογικοί περιορισμοί. Πώς θα προτείνατε να γίνει ο σχεδιασμός αυτός; Πού πρέπει να βρίσκεται η μονάδα παραγωγής ενέργειας για να χρησιμοποιηθεί η ελάχιστη ποσότητα καλωδίου υψηλής τάσης που θα τροφοδοτήσει με ηλεκτρική ενέργεια τις τρεις πόλεις?Η απώλεια ενέργειας είναι ανάλογη του μήκους του δικτύου διανομής.

Θέλουμε, λοιπόν, να προσδιορίσουμε ένα σημείο στο επίπεδο του τριγώνου, το οποίο να απέχει από τις τρεις κορυφές (πόλεις) το μικρότερο άθροισμα αποστάσεων (οικονομία ενέργειας και δαπάνης). Αν οι τρεις πόλεις εκπροσωπούνται από τις κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με την εύρεση ενός σημείου με το ελάχιστο άθροισμα των αποστάσεων του από τις τρεις πόλεις.

Στο στάδιο αυτό, τους δόθηκε το παρακάτω φύλλο εργασίας με ερωτήσεις πάνω στο πρόβλημα.

Φύλλο εργασίας

Ημερομηνία :

Όνομα :

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΣΤΑΘΜΟΥ

Μια μονάδα παραγωγής ενέργειας πρόκειται να κατασκευαστεί για να εξυπηρετήσει τις ανάγκες των τριών πόλεων. Κατά το σχεδιασμό της συνολικής κατασκευής πρέπει να ληφθούν υπόψη οικονομικοί και οικολογικοί περιορισμοί. Πώς θα προτείνατε να γίνει ο σχεδιασμός αυτός; Πού πρέπει να βρίσκεται η μονάδα παραγωγής ενέργειας για να χρησιμοποιηθεί η ελάχιστη ποσότητα καλωδίου υψηλής τάσης που θα τροφοδοτήσει με ηλεκτρική ενέργεια τις τρεις πόλεις? Η απώλεια ενέργειας είναι ανάλογη του μήκους του δικτύου διανομής.

Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ αναζητάμε τη θέση ενός σημείου Ρ, όπου το άθροισμα των αποστάσεών του από τις κορυφές Α, Β και Γ να είναι ελάχιστο.

1.Ανοιξτε ένα αρχείο Sketchpad Κατασκευάστε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρήστε ένα τυχαίο σημείο Ρ του επιπέδου του τριγώνου και μετρήστε τις αποστάσεις ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ και το άθροισμα ΡΑ+ΡΒ+ΡΓ. Χρησιμοποιήστε το μενού «πινακοποίηση» και καταγράψτε τουλάχιστο δέκα τιμές του αθροίσματος, μετακινώντας το σημείο Ρ, ώστε να πετύχετε ελαχιστοποίηση του αθροίσματος.

2. Ελέγξτε τις περιπτώσεις :

α) Το Ρ είναι εσωτερικό σημείο του τρίγωνου ΑΒΓ. Μετρήστε τις γωνίες των ακτινών ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ. Κάνετε μια εικασία για τα μέτρα των γωνιών αυτών σε σχέση με το άθροισμα ΡΑ+ΡΒ+ΡΓ. Τι παρατηρείτε ?

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

β) Το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του τρίγωνου ΑΒΓ. Ελαχιστοποιείται το άθροισμα σ˙ αυτή την περίπτωση? Αποδείξτε την εικασία σας.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

γ) Το Ρ ανήκει στην περίμετρο του τρίγωνου ΑΒΓ. Διατυπώστε τις παρατηρήσεις σας και αποδείξτε την εικασία σας .

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

3.Πως ορίζεται τελικά η θέση του σημείου Ρ?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

4.Μπορείτε να αποδείξετε την εικασία ?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

5.Μετακινείστε επίσης μια οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου ΑΒΓ. Τι συμβαίνει όταν μια γωνία του τριγώνου είναι μεγαλύτερη από 120^o? Γράψτε τις εικασίες σας για την πιθανή θέση του σημείου Ρ σ˙ αυτή την περίπτωση.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

6. Εξετάστε την περίπτωση που τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Μετακινώντας το σημείο Ρ πάνω στην ευθεία των Α, Β, Γ γράψτε τις εικασίες σας για τη θέση του σημείου Ρ που ελαχιστοποιεί το άθροισμα.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

7.Αν οι πόλεις ήταν τέσσερις σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευασθεί η μονάδα παραγωγής ενέργειας για να χρησιμοποιηθεί η ελάχιστη ποσότητα καλωδίου υψηλής τάσης που θα τροφοδοτήσει με ηλεκτρική ενέργεια τις τέσσερις πόλεις?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Η καθηγήτρια ,καθ' όλη τη διάρκεια παρακολουθούσε την εξέλιξη της δραστηριότητας, και κρατούσε σημειώσεις.Προέτρεπε τους φοιτητές να αποθηκεύουν στο Sketchpad τα στιγμιότυπα του μετασχηματισμού των σχημάτων, που προέκυπταν από το σύρσιμο και ήταν υπεύθυνα για την παραγωγή εικασιών.

2.2.3:**Κριτήρια και σκοπός επιλογής 1η κοινότητας**:

Οι συμμετέχοντες επιλέχθηκαν με βάση τρία κριτήρια:

- δήλωσαν πραγματικό ενδιαφέρον να συμμετάσχουν στην παρούσα μελέτη.
- έχουν γενικά θετική στάση απέναντι στην γεωμετρία και τη γεωμετρική απόδειξη.
- πληρούν τις προϋποθέσεις για να μελετήσουν το περιεχόμενο της προτεινόμενης προσέγγισης.

Ο σκοπός της μελέτης σ΄ αυτή την φάση ήταν να δοθούν ενδεικτικές απαντήσεις σε κάποια από τα ερωτήματα που τέθηκαν παραπάνω. Το μέγεθος του δείγματος των φοιτητών δεν είναι βέβαια δυνατόν να μας δώσει πειστικές απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα. Παρόλα αυτά αντανακλά τις πεποιθήσεις των φοιτητών απέναντι στην απόδειξη, εφόσον έχουν υπάρξει μαθητές στο πρόσφατο παρελθόν και επιπλέον είναι εν δυνάμει εκπαιδευτικοί μαθηματικών. Σημαντικό είναι επίσης ότι δεν υπήρξε περιορισμός στη επιλογή της θεματικής ενότητας του προβλήματος.

2.3 Δεύτερη Φάση της Έρευνας–Διαδικασία

2.3.1 2η κοινότητα –συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες είναι 16 μαθητές ενός τμήματος της Α’ τάξης ενός Γενικού Ενιαίου Λυκείου του Νομού Αττικής

Η δραστηριότητα πραγματοποιήθηκε το Μάρτιο του 2012

Χρησιμοποιήθηκε το σχολικό εργαστήριο σε ώρες σχολικού προγράμματος. Οι μαθητές δούλευαν ανά δύο σε κάθε υπολογιστή και έτσι δημιουργήθηκαν οκτώ ομάδες μαθητών.

2.3.2 Συμπληρωματικό υλικό

Στον κάθε μαθητή δόθηκε:

- ένα τετράδιο, για να καταγράφουν και να σημειώνουν τις υποθέσεις και τις εικασίες τους,
- ένα φύλλο εργασίας με ερωτήσεις σχετικές με τη δραστηριότητα,

- ➢ έντυπο με οδηγίες χρήσης και εξοικείωσης για το χρησιμοποιούμενο λογισμικό,
- ➢ Το σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας.

Η φάση αυτή ολοκληρώθηκε σε επτά διδακτικές ώρες.

(Η έβδομη ώρα, αφιερώθηκε σε συζήτηση με τους μαθητές , την καθηγήτρια και τον διδάσκοντα μαθηματικό της τάξης ,σχετικά με τις εντυπώσεις τους από αυτή τη διαδικασία).

Εισαγωγικά, στους μαθητές εξηγήθηκε τι θα κάνουν εφόσον για πρώτη φορά θα χρησιμοποιούσαν λογισμικό στη διδασκαλία των μαθηματικών και κατόπιν τους δόθηκαν οι οδηγίες εξοικείωσης με το Sketchpad.

Οι μαθητές, για δύο διδακτικές ώρες πειραματίστηκαν με τα εργαλεία κατασκευών βασικών γεωμετρικών σχημάτων και γνωστών γεωμετρικών τόπων (κύκλος, μεσοκάθετος, διχοτόμος). Στη συνέχεια τους δόθηκε το παρακάτω ανοικτό πρόβλημα:

2.3.3 Πρόβλημα

Σχεδιάστε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάστε ισόπλευρα τρίγωνα ΒΑΔ και ΑΓΕ στις πλευρές ΒΑ και ΑΓ αντίστοιχα, στο ημιεπίπεδο που βρίσκεται η κορυφή Α του ΑΒΓ. Κατασκευάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΒΖΓ, πλευράς ΒΓ επίσης στο ίδιο ημιεπίπεδο που βρίσκεται η κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ .

I. Βρείτε τι είδος τετράπλευρου είναι το ΑΔΖΕ.

II. Μετασχηματίστε το τρίγωνο ΑΒΓ και γράψτε τις εικασίες σας σε κάθε περίπτωση που το ΑΒΓ γίνεται: α) ισοσκελές β)ισόπλευρο γ)τα Α, Β, Γ να βρίσκονται σε ευθεία.

III. Προσπαθήστε ν' αποδείξετε τις εικασίες σας σε κάθε περίπτωση.

Δύο ομάδες μαθητών επιλέχθηκαν με βάση τις ικανότητες που επέδειξαν στη φάση εξοικείωσης με το Sketchpad και αποτέλεσαν τις ομάδες εστίασης στην παρούσα δραστηριότητα.
Ο διδάσκων μαθηματικός της τάξης, πληροφόρησε την καθηγήτρια ότι δύο από τους τέσσερις μαθητές ήταν εντελώς αδιάφοροι στο μάθημα της Γεωμετρίας ,ένας απ' αυτούς προσπαθεί αλλά «δεν τα καταφέρνει και πολύ καλά» και ο τέταρτος τα καταφέρνει αρκετά καλά και είναι ένας από τους καλούς μαθητές της τάξης.

Οι προσπάθειες των δύο παραπάνω ομάδων ηχογραφήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν. Επίσης μελετήθηκαν οι σημειώσεις και τα φύλλα εργασίας όλων των μαθητών, καθώς και οι ερωτήσεις που απεύθυναν κατά διαστήματα οι μαθητές ,για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Η καθηγήτρια καθ' όλη τη διάρκεια ,περιφερόταν από ομάδα σε ομάδα και παρακολουθούσε την εξέλιξη της δραστηριότητας, κρατώντας σημειώσεις. Προέτρεπε τους μαθητές της κάθε ομάδας, να συνεργάζονται και να χρησιμοποιούν εναλλάξ τον υπολογιστή. Απαντούσε κατά το δυνατόν μονολεκτικά, στις ερωτήσεις των μαθητών.

2.3.4 Κριτήρια και σκοπός επιλογής 2ης κοινότητας

Τα κριτήρια με τα οποία επιλέχθηκαν οι συμμετέχοντες ήταν:

- ενθουσιασμός και το ενδιαφέρον να συμμετάσχουν στην παρούσα μελέτη, εφόσον ήταν απαλλαγμένοι από το άγχος της βαθμολογίας αφενός και αφετέρου παρακινήθηκαν από την περιέργεια του καινούριου, του διαφορετικού.

- Η μάλλον αρνητική στάση απέναντι στην γεωμετρία και τη γεωμετρική απόδειξη.
- Η ανομοιογένεια στο γνωστικό επίπεδο και στον τρόπο κατανόησης και χειρισμού των γεωμετρικών εννοιών.

Με δεδομένο ότι στη μέχρι τώρα μαθητική τους ζωή έχουν βιώσει το τυπικό στατικό περιβάλλον της τάξη και είναι ακροατές μιας παραδοσιακής-φορμαλιστικής διδασκαλίας της απόδειξης, είναι ενδιαφέρον να καταγραφούν οι αντιδράσεις τους στο δυναμικό περιβάλλον και στις νέες συνθήκες μαθησιακής διαδικασίας γενικότερα.

2.4 Συλλογή δεδομένων

Όλα τα δεδομένα και στις δύο φάσεις συγκεντρώθηκαν με τους παρακάτω τρόπους:

- Καταγραφή των παρατηρήσεων της καθηγήτριας κατά την εξέλιξη των δραστηριοτήτων.
- Ηχογράφηση καθ' όλη τη διάρκεια της έρευνας, της ομάδας των φοιτητών και των δύο ομάδων των μαθητών που επιλέχθηκαν.
- Συλλογή των τετραδίων και των φύλλων εργασίας που συμπλήρωσαν οι φοιτητές και οι μαθητές.

2.5 Ανάλυση δεδομένων

- Απομαγνητοφώνηση των ηχογραφήσεων.

- Ανάλυση και μελέτη των στοιχείων που προέκυψαν από τις απομαγνητοφωνήσεις.
- Ανάλυση και μελέτη των σημειώσεων της ερευνήτριας κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων.
- Ανάλυση και μελέτη των σημειώσεων και των φύλλων εργασίας που συμπλήρωσαν οι φοιτητές και οι μαθητές.

2.6 Τεχνολογικά εργαλεία και Πεδίο της έρευνας

Χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Sketchpad για την ανάπτυξη μιας νέας προσέγγισης της διδασκαλίας της γεωμετρικής απόδειξης, μέσω δραστηριοτήτων που στοχεύουν στην παραγωγή εικασιών. Οι δραστηριότητες βασίστηκαν σε πραγματικά και ανοικτά προβλήματα, η επίλυση των οποίων συνδέεται με τη γεωμετρία και τη γεωμετρική απόδειξη.

2.7 Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στην παραπάνω διαδικασία, είναι ιδιαίτερα σημαντικός και συνίσταται στο να βοηθάει τους μαθητές να μετακινούνται από τη μία φάση στην άλλη σε κάθε δραστηριότητα. Ενεργεί δηλαδή ως διαμεσολαβητής σε όλη τη διαδικασία της μάθησης και συγκεκριμένα:

1. **Θέτει το πρόβλημα** της κάθε γεωμετρικής κατάστασης στους μαθητές.
2. **Συζητά** το πρόβλημα με τους μαθητές.
3. **Παροτρύνει** να πειραματιστούν με τη χρήση των εργαλείων του Sketchpad και να κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα που διατηρούν

αμετάβλητες τις ιδιότητες τους στη γεωμετρική διαμόρφωση παρά το σύρσιμο ενός στοιχείου τους.

4. Όταν κρίνεται απαραίτητο **επεμβαίνει** για να υποδείξει τη διαδικασία επιλογής και χρήσης συγκεκριμένων εργαλείων του λογισμικού.

5. **Ενθαρρύνει διαφορετικές διατυπώσεις** των συμπερασμάτων και των εικασιών τους, τονίζοντας να τα γράφουν στη δική τους γλώσσα.

6. **Παροτρύνει να συμμετέχουν όλοι** οι μαθητές και διαχειρίζεται τη συζήτηση μεταξύ μαθητών διαφορετικών ομάδων.

7. Ενθαρρύνει τους μαθητές να θέτουν ερωτήματα σχετικά με το περιεχόμενο της γεωμετρικής κατάστασης και να δίνουν γεωμετρικές εξηγήσεις, **τονίζοντας ότι δεν υπάρχουν «παρανοήσεις» και «λανθασμένες» αντιλήψεις**, αλλά μάλλον παραλλαγές ιδεών και εννοιολογικών αντιλήψεων.

2.8 Οι ρόλοι των μαθητών

Οι μαθητές στην προτεινόμενη προσέγγιση έχουν διάφορους ρόλους που διαφέρουν, ανάλογα με τη φάση της διερεύνησης του ανοικτού προβλήματος:

1.Κατασκευάζουν

Η διδακτική πτυχή αυτής της φάσης είναι να δοθούν κίνητρα στους μαθητές να ψάχνουν πιο βαθιά σε γεωμετρικές ιδιότητες, έννοιες και θεωρήματα ώστε η γεωμετρική κατασκευή να είναι διδακτικά σχεδιασμένη

2. Πειραματίζονται

Ο πειραματισμός και η εξερεύνηση είναι ο ρόλος που ακολουθεί την πραγματοποίηση κάθε γεωμετρικής κατάστασης ή γεωμετρικού σχεδίου,

προκειμένου οι μαθητές να διερευνήσουν τις ιδιότητες και να καταλήξουν σε διάφορα συμπεράσματα και παρατηρήσεις.
Και σ' αυτή τη φάση η διδακτική πτυχή είναι μείζονος σημασίας γιατί σε κάθε περίπτωση μπορεί να αλλάξει τη στάση των μαθητών απέναντι στη γεωμετρία. Οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι ο πειραματισμός δεν είναι απλά μια επαγγελματική εργασία, που πραγματοποιείται μόνο από γεωμέτρες και εξειδικευμένους επιστήμονες. Εδώ ο κάθε μαθητής σε συνεργασία με το άλλο μέλος της ομάδας, συζητούν και μοιράζονται τα συμπεράσματά τους. Ειδικότερα το «σύρσιμο περιπλάνησης» είναι μια εμπειρική διαδικασία, ένα σύνολο πειραμάτων εκ μέρους των μαθητών, που κεντρίζει το ενδιαφέρον τους και αυξάνει τη δημιουργικότητά τους.

3. Εικάζουν

Με βάση τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματα στην προηγούμενη φάση, ο επόμενος ρόλος των μαθητών είναι να γράψουν αυτά που παρατήρησαν , να σχηματίσουν εικασίες στην δική τους γλώσσα και να προσπαθήσουν να βελτιώσουν την κατάσταση τους κατά τη διάρκεια συζητήσεων και με τη χρήση κατάλληλης μαθηματικής γλώσσας. Αυτή η φάση θα μπορούσε να διευκολύνει τους μαθητές στην ομαλή μετάβαση από τη χρήση της δικής τους γλώσσας στη χρήση της κατάλληλης μαθηματικής γλώσσας.

4. Εξηγούν

Εδώ, οι μαθητές καλούνται να δώσουν γεωμετρικές εξηγήσεις ως προς το γιατί τα συμπεράσματά τους και οι εικασίες τους που φαίνονται οπτικά αληθείς , είναι πράγματι αλήθεια, προκειμένου να πείσουν τους άλλους.

Επιπλέον, ο δάσκαλος εδώ τονίζει ότι δεν υπάρχει μόνο μία σωστή διατύπωση για τις γεωμετρικές έννοιες και τα θεωρήματα, και ότι οι μαθητές μπορούν να διατυπώσουν συμπεράσματα γεωμετρικών δομών σε διάφορες γλώσσες, όσο η διατύπωση περιλαμβάνει βασικές γεωμετρικές ιδιότητες . Με τον τρόπο αυτό, ο δάσκαλος ενθαρρύνει τους μαθητές να διαδραματίσουν ενεργό ρόλο στην γεωμετρική τάξη, δεδομένου ότι συμμετέχουν στη διαμόρφωση θεωρημάτων και ορισμών.

5. Συνεργάζονται

Το ένα μέλος της ομάδας βοηθάει το άλλο μέλος της ίδιας ομάδας. στην υπέρβαση τυχόν μαθησιακών δυσκολιών, υπάρχει αλληλεπίδραση, οι μαθητές σκέφτονται τα αποτελέσματα και προβληματίζονται σχετικά με τα συμπεράσματα τους, προκειμένου να αυξηθούν τα οφέλη από τη διερεύνηση της γεωμετρικής κατάστασης.

Σε αυτή τη φάση, όλοι οι μαθητές καλούνται να συμμετάσχουν σε μια συζήτηση στην τάξη. Αυτή η φάση μπορεί να εξαλείψει τα αρνητικά συναισθήματα των μαθητών, αν οι παρατηρήσεις ή τα συμπεράσματά τους είναι διαφορετικά από αυτά των άλλων μελών της τάξης, ενώ οι ερωτήσεις του δάσκαλου και τα σχόλια επίσης διαδραματίζουν ζωτικό ρόλο στην παροχή ανατροφοδότησης και την ενοποίηση των απαντήσεων των φοιτητών.

6. Θέτουν σχετικά ερωτήματα

Το όφελος σ’ αυτή τη φάση δεν είναι μόνο σημαντικό για τον μαθητή ο οποίος θέτει το ερώτημα. Θα μπορούσε να είναι πολύ αποτελεσματικό τόσο για τους άλλους μαθητές στην τάξη όσο και για τον εκπαιδευτικό, καθώς του δίνει την απαιτούμενη εικόνα για τον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές και του επιτρέπει να δώσει τις κατάλληλες συμβουλές και κατευθύνσεις.

7. Κατασκευάζουν αποδείξεις

Η φάση αυτή είναι μια από τις γεωμετρικές διαδικασίες συλλογιστικής που θεωρείται η πιο δύσκολη στη γεωμετρία. Εδώ τα επιχειρήματα που αναπτύξαν προηγουμένως πρέπει τώρα να τα οργανώσουν σε μια παραγωγική αλυσίδα μέσα στα πλαίσια της θεωρίας που ήδη έχουν μάθει. Οι μαθητές προσπαθούν να κατασκευάσουν αποδείξεις και να τις διατυπώσουν βήμα προς βήμα.

Ο ρόλος της απόδειξης δεν είναι μόνο να πείσει ή να απομακρύνει την προσωπική ή κοινωνική αμφιβολία σχετικά με μια πρόταση, αλλά κυρίως να βρει τρόπους να εξηγήσει γιατί ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα που φαίνεται στην οθόνη είναι αλήθεια. (Jones, 2000)

2.9 Περιγραφή διδακτικής διαδικασίας

2.9.1 Περιγραφή της εργασίας των φοιτητών κατά την 1η φάση :

Οι φοιτητές πολύ γρήγορα εξοικειώθηκαν με το λογισμικό ,όπως ήταν άλλωστε αναμενόμενο. Ελάχιστες φορές απευθύνονταν στην καθηγήτρια και επικοινωνούσαν μεταξύ τους διαρκώς .Πολύ συχνά ήταν τα επιφωνήματα ενθουσιασμού ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που μετακινώντας τα διάφορα σημεία ανακάλυπταν κάτι νέο.

Δραστηριότητα 1:

Αφού συζήτησαν την κατάσταση, οι φοιτητές προχώρησαν στη φάση πειραματισμού. Η προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος ξεκίνησε με την σχηματική αναπαράσταση της κατάστασης που περιγράφει το πρόβλημα (αλλαγή πλαισίου) , δηλ., κατασκεύασαν τρίγωνο ΑΒΓ θεώρησαν ένα αυθαίρετο σημείο Ρ (και στις δύο οθόνες το Ρ κατασκευάστηκε από τους Λευτέρη και Μάριο εσωτερικά του τριγώνου) και άρχισαν να μετρούν το άθροισμα των αποστάσεων του Ρ από τις τρεις κορυφές του ΑΒΓ.

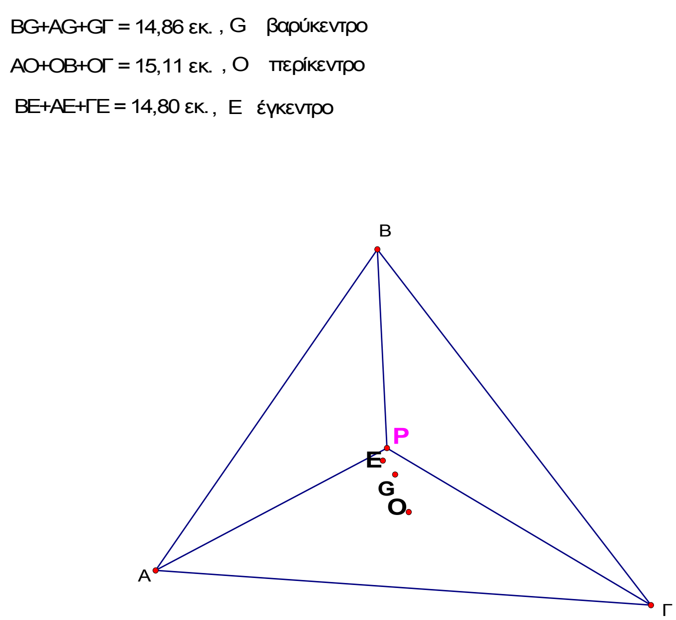
Με την λειτουργία «πινακοποίηση» άρχισαν να έχουν τις πρώτες ενδείξεις.

Δ: (απευθυνόμενη στο Λευτέρη) :...Μήπως το Ρ είναι κάποιο γνωστό σημείο του τριγώνου?.. το βαρύκεντρο ας πούμε..

Λ: ..το βαρύκεντρο είναι των διαμέσων? όχι μάλλον είναι (εννοεί το Ρ) των μεσοκαθέτων ..για να δούμε..

Κάνουν μετρήσεις ,συζητούν έντονα.

Μ: Καμία σχέση ...Σε κάθε περίπτωση είναι μεγαλύτερο(το άθροισμα)..βλέπεις (απευθύνεται στον Λ) (σχ.2)

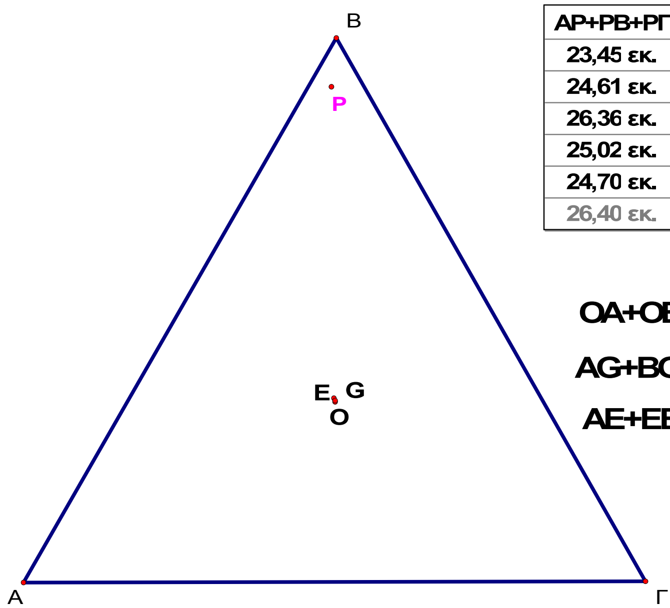


AP	FB	PΓ	PB+AP+PΓ
3,92 εκ.	2,39 εκ.	6,56 εκ.	12,87 εκ.
4,24 εκ.	2,12 εκ.	6,43 εκ.	12,79 εκ.
4,24 εκ.	2,12 εκ.	6,43 εκ.	12,79 εκ.
4,29 εκ.	1,85 εκ.	6,65 εκ.	12,79 εκ.
4,37 εκ.	1,74 εκ.	6,67 εκ.	12,79 εκ.
4,37 εκ.	1,74 εκ.	6,67 εκ.	12,79 εκ.
4,34 εκ.	1,64 εκ.	6,85 εκ.	12,83 εκ.
4,88 εκ.	1,24 εκ.	6,65 εκ.	12,78 εκ.
5,08 εκ.	1,18 εκ.	6,54 εκ.	12,80 εκ.
5,15 εκ.	1,11 εκ.	6,56 εκ.	12,82 εκ.
6,12 εκ.	2,16 εκ.	4,61 εκ.	12,89 εκ.
5,06 εκ.	3,79 εκ.	5,94 εκ.	14,79 εκ.

Σχήμα 2: Τα «γνωστά κέντρα» ενός τυχαίου τριγώνου δεν επιλύουν το πρόβλημα

Μ: αν μετακινήσεις μια κορυφή του και γίνει ισόπλευρο ? παίζει στα ισόπλευρα αλλά… πρέπει να ισχύει για όλα…βλέπετε?((σχ.3)

Ως εδώ δεν φάνηκε να έχουν καταλήξει σε κάποια εικασία για τη θέση του σημείου P. Ο Μάριος παρατηρεί σκεπτικός το παρακάτω σχήμα 3 και σύρει την κορυφή Α ώστε   το ΑΒΓ να γίνει ισόπλευρο…



AP+PB+PΓ	OA+OB+OΓ	AE+EB+EΓ	AG+BG+ΓG
23,45 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.
24,61 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.
26,36 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.
25,02 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.
24,70 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.
26,40 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.	23,45 εκ.

OA+OB+OΓ = 23,45 εκ. O περικεντρο

AG+BG+ΓG = 23,45 εκ. G βαρύκεντρο

AE+EB+EΓ = 23,45 εκ. E έγκεντρο

Σχήμα 3: Στο ισόπλευρο τρίγωνο όλα τα «γνωστά κέντρα» συμπίπτουν

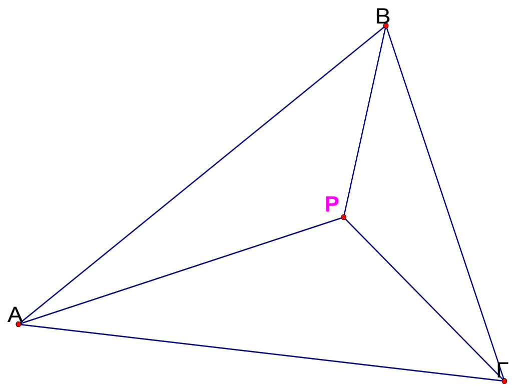
Προσπαθώντας να επιβεβαιώσουν την εικασία τους αρχίζουν να μετρούν τις γωνίες $\angle APB$, $\angle BP\Gamma$, $\angle AP\Gamma$.

Μ: Στα ισόπλευρα όλα τα γνωστά σημεία συμπίπτουν ..κοίτα… το άθροισμα είναι 23,45 εκ… αν σύρω το P και δεν ταυτίζεται με αυτά γίνεται.. μεγαλύτερο.. μήπως έχουν σχέση οι γωνίες?(απευθύνεται στην καθηγήτρια).

Κ: Μπορείτε να διαπιστώσετε αν συμβαίνει αυτό

Δραστηριότητα 2, α)

Δ: ναι …έτσι φαίνεται ,όταν οι γωνίες είναι περίπου 120ο το άθροισμα είναι μικρότερο από όλα τ' άλλα, αλλά ισχύει πάντα? (σχ.4)



ΑΡ+ΡΒ+ΡΓ = 16,19 εκ.
μέτρο∠ΑΡΒ = 120,33°
μέτρο∠ΒΡΓ = 119,42°
μέτρο∠ΑΡΓ = 120,25°

ΑΡ+ΡΒ+ΡΓ	μέτρο∠ΑΡΒ	μέτρο∠ΒΡΓ	μέτρο∠ΑΡΓ
16,57 εκ.	153,36°	98,82°	107,82°
16,36 εκ.	141,90°	104,53°	113,56°
16,36 εκ.	141,90°	104,53°	113,56°
16,39 εκ.	144,12°	106,03°	109,85°
16,41 εκ.	144,78°	107,03°	108,20°
16,33 εκ.	138,61°	112,62°	108,77°
16,30 εκ.	136,60°	113,25°	110,14°
16,30 εκ.	136,60°	113,25°	110,14°
16,27 εκ.	133,80°	114,39°	111,81°
16,19 εκ.	120,33°	119,42°	120,25°

Σχήμα 4: Παραγωγή μιας εικασίας

Έχοντας ανακαλύψει μια πιθανή αναλλοίωτη κατάσταση, οι φοιτητές στη συνέχεια, αναζητούν έναν τρόπο για να κατασκευάσουν ένα σημείο Ρ που ορίζει γωνία 120ο με κάθε ζεύγος κορυφών

Λ:…ας κατασκευάσουμε πρώτα το Ρ ..

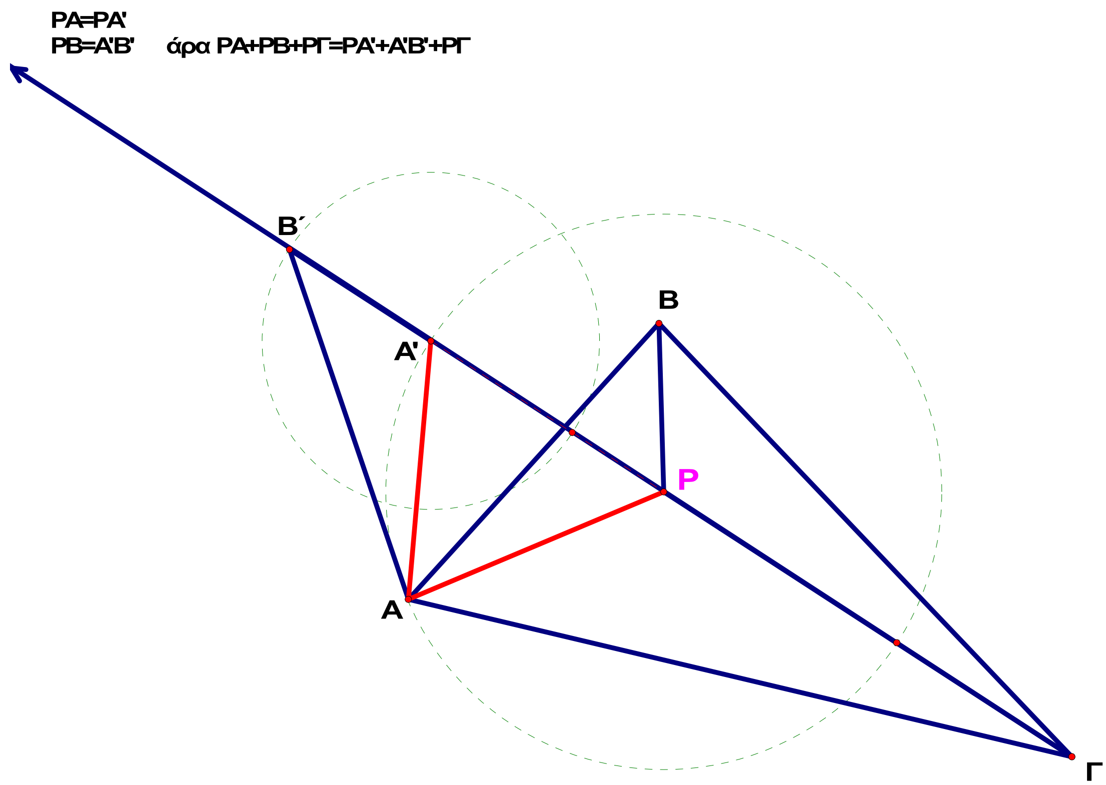
Μ: …έχετε καμιά ιδέα?

Στο σημείο αυτό γίνεται μια διαπραγμάτευση μεταξύ τους ,ο Μ ισχυρίζεται ότι, για να διαπιστώσουν αν υπάρχει το σημείο, πρέπει πρώτα να μπορούν να το κατασκευάσουν, ο Λ επιμένει ότι η εικασία είναι ένδειξη ότι υπάρχει.

Λ: …ας υποθέσουμε ότι Ρ είναι το ζητούμενο σημείο… (κοιτάει την καθηγήτρια)..μπορούμε να μεταφέρουμε με κάποιο τρόπο ..ξέρω γω… πάνω σε μια ευθεία όλα τα τμήματα

Κ: …πολύ καλή η ιδέα σου Λευτέρη… για προσπάθησε

Λ: (μιλάει με την καθηγήτρια, ενώ ο Μ και η Δ παρατηρούν την οθόνη του Μάριου)… Η πιο σύντομη διαδρομή είναι η ευθεία διαδρομή ,τα μεταφέρω (τα τμήματα ΡΑ,ΡΒ,ΡΓ) πάνω σε μια ημιευθεία και …βλέπουμε (σχ.5)



Σχήμα 5: Η προσπάθεια του Λευτέρη

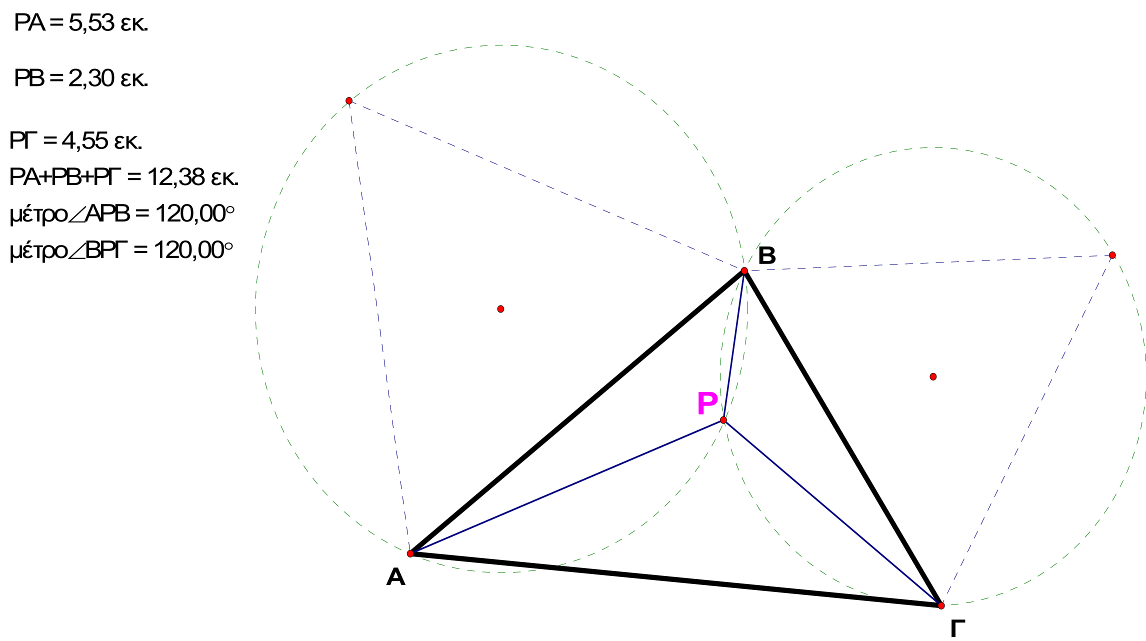
Ο Λευτέρης βρίσκεται σε αδιέξοδο **..**μετέφερε στην ημιευθεία ΓΡ τα τμήματα ΑΡ και ΡΒ γράφοντας κύκλους ίσων ακτινών

Λ: αν η γωνία ΑΡΒ είναι 120^{o}…εε**..** το τρίγωνο Α΄ΑΡ είναι ισοσκελές (ΡΑ =ΡΑ’) αλλά φαίνεται και ισόπλευρο και… (κοιτάει τις οθόνες των συμφοιτητών του)**.**

Εν τω μεταξύ, ο Μ και η Δ έχουν προχωρήσει στην κατασκευή του Ρ

Μ: Κατασκευάσαμε ισόπλευρα τρίγωνα στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου**.** Οι περιγεγραμμένοι σ ΄ αυτά κύκλοι τέμνονται σ΄ ένα σημείο Ρ

…αυτό είναι το σημείο P που ζητάμε εφόσον τα τετράπλευρα που σχηματίζονται είναι εγγράψιμα άρα οι γωνίες ∠APB , ∠BPΓ και ∠APΓ είναι 120° (σχ. 6)



Σχήμα 6: Η κατασκευή του σταθμού ηλεκτροπαραγωγής από τη Δανάη και το Μάριο

Κ: Γιατί από το σημείο P το άθροισμα των αποστάσεων είναι το ελάχιστο?

Δ: ..α.. θέλει και απόδειξη….

Ο Λευτέρης συνεχίζει την προσπάθεια του . Προϋποθέτει την ύπαρξή του ζητούμενου σημείου και προσπαθεί να το βρει. Η καθηγήτρια παρακολουθεί την οθόνη του υπολογιστή του.

Λ: …θ' αλλάξω λίγο την κατασκευή μπορώ να μεταφέρω όλο το τρίγωνο αντί για τμήματα …σωστά? ….Πώς όμως?

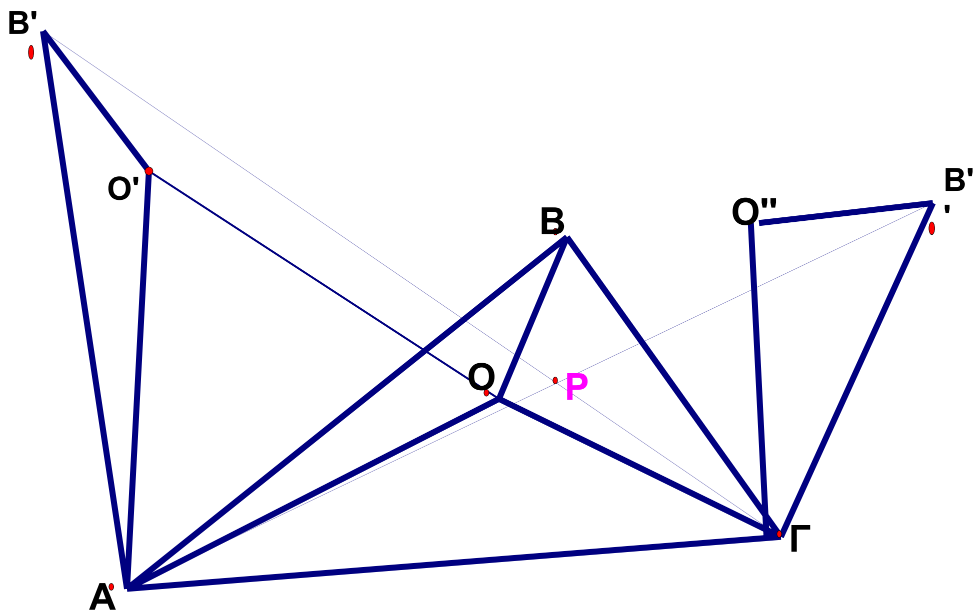
Κ:… κοίτα στο σχήμα …πού έχεις κολλήσει? …και θα καταλάβεις..

Λ: (Γυρίζει στο σχήμα που είχε αποθηκεύσει και κοιτάει τις σημειώσεις…) θέλω το τρίγωνο PAA' ισόπλευρο ,(σχ.5) …έτσι?.... νομίζω ότι το βρήκα!

Κατασκευάζει στην οθόνη το σχήμα θεωρώντας τυχαίο σημείο Ο στο εσωτερικό του τριγώνου και τις αποστάσεις ΑΟ, ΒΟ και ΓΟ. Με κέντρο το Α «περιστρέφει» το τρίγωνο ΑΟΒ κατά 60ο (βλ. Σχήμα 7).

ΟΒ+ΟΑ+ΟΓ=Β'Ο'+Ο'Ο+ΟΓ

ΟΑ+ΟΓ+ΟΒ=ΟΑ+ΟΟ''+Ο''Β



Σχήμα 7: Η τελική και επιτυχής προσπάθεια του Λευτέρη-Μια εναλλακτική λύση κατασκευής και απόδειξης του σημείου P της ελάχιστης διαδρομής.

Διαπιστώνει ότι το τρίγωνο ΑΟΟ΄ είναι ισόπλευρο, ενώ τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΟ΄Β΄ είναι ίσα, οπότε (γράφει στο τετράδιο),

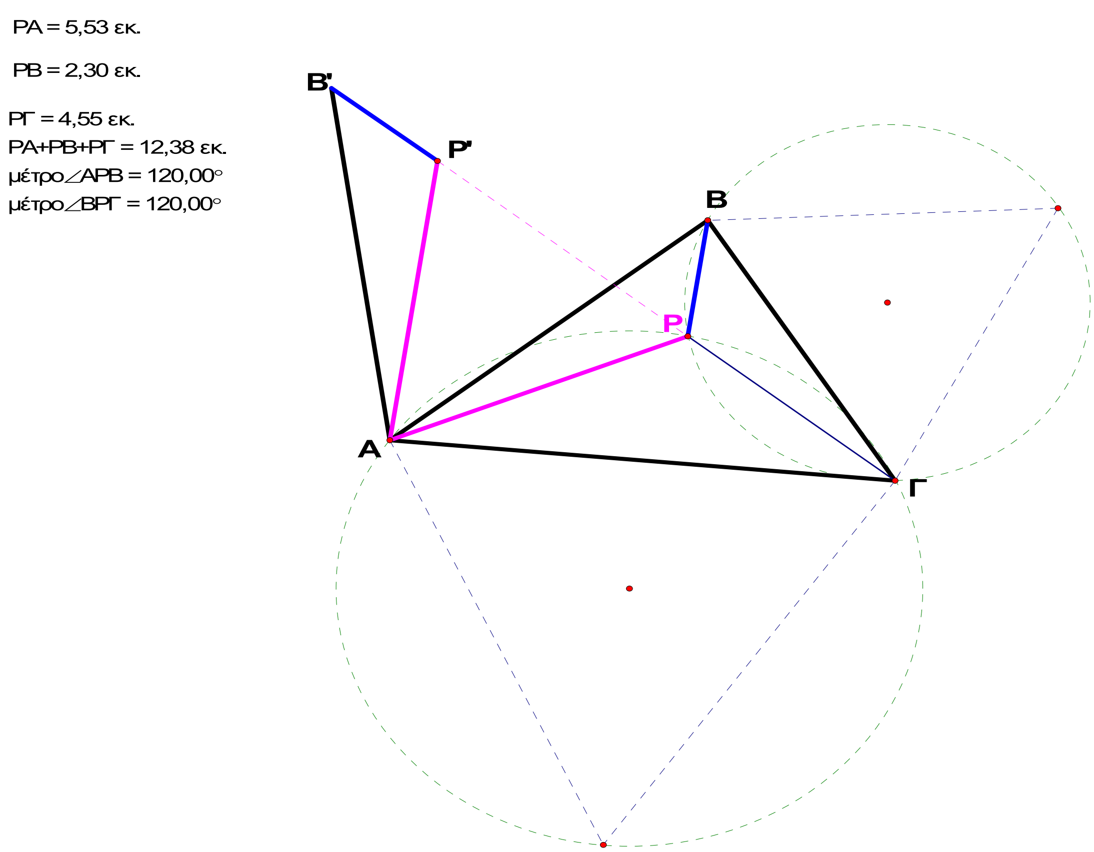
ΒΟ + ΑΟ + ΟΓ = Β΄Ο΄ + ΟΟ΄+ ΟΓ. Επειδή τα σημεία Β΄ και Γ είναι σταθερά (ανεξάρτητα από την επιλογή του Ο), το μήκος της τεθλασμένης γραμμής του δεύτερου μέλους ελαχιστοποιείται από το ευθύγραμμο τμήμα Β΄Γ. Σε ανάλογο συμπέρασμα καταλήγουμε, αν στρέψουμε το τρίγωνο ΓΟΒ περί το Γ κατά 60° όπως στο σχήμα. Επομένως το σημείο Ο με ελάχιστο άθροισμα αποστάσεων από τις κορυφές πρέπει να είναι το σημείο τομής των Β΄ ΄Α και Β΄Γ.

Ο Μάριος και η Δανάη συνεργάζονται και προσπαθούν ν' αποδείξουν την πρόταση. Έχουν κατασκευάσει το σημείο Ρ λαμβάνοντας υπόψη την εικασία, ότι το σημείο Ρ σχηματίζει γωνίες 120° με κάθε ζεύγος κορυφών

Δ: Περιστρέψαμε το ΑΒΡ (σχ.8) γύρω από το Α κατά 60° .Καθώς η περιστροφή διατηρεί το μήκος, ισχύει ΑΡ'=ΑΡ και Β'Ρ' =ΒΡ. Έτσι το ΑΡ'Ρ είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο με τη γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών ίση με 60°.Εφόσον οι παρά τη βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, και το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180, οι γωνίες βάσης πρέπει επίσης να είναι 60° . Έτσι το τρίγωνο ΑΡ'Ρ είναι ισογώνιο, και, ως εκ τούτου, ισόπλευρο. Έτσι η Ρ'Ρ είναι ίση με την ΑΡ.

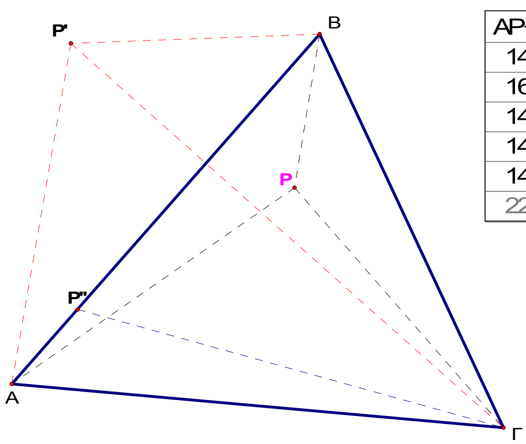
Μ: Έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω , η διαδρομή μήκους Β'Ρ'ΡΓ είναι ίση με το άθροισμα των αποστάσεων ΒΡ, ΑΡ και ΡΓ.

Η διαδρομή Β'Ρ'ΡΓ θα έχει ελάχιστο μήκος, αν και μόνο αν, η διαδρομή είναι μια ευθεία πορεία. Η περιστροφή διατηρεί τις μορφές των σχημάτων . Έτσι, η $\angle$ΑΡΒ = 120° = $\angle$ ΑΡ' Β' =120° και ως εκ τούτου $\angle$ Β'Ρ'Ρ =180° = μια ευθεία γωνία. Επίσης, εφόσον $\angle$ΑΡΓ = 120° ,η $\angle$ Ρ'ΡΓ είναι επίσης μια ευθεία γωνία. Έτσι η Β'Ρ'ΡC είναι μια ευθεία διαδρομή, όταν (και μόνο όταν) το Ρ βλέπει υπό γωνία 120° κάθε πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 8: Περιστροφή του ΑΒΡ γύρω από το Α κατά 60°

Δραστηριότητα 2 β)



P εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ

AP+PB+PΓ
14,95 εκ.
16,05 εκ.
14,83 εκ.
14,90 εκ.
14,85 εκ.
22,85 εκ.

P' εξωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ

P'A+P'B+P'Γ
22,52 εκ.
17,59 εκ.
18,15 εκ.
17,16 εκ.
17,28 εκ.
32,72 εκ.

P στην περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ

P''A+P''B+P''Γ
16,28 εκ.
17,13 εκ.
17,30 εκ.
17,37 εκ.
16,91 εκ.
25,15 εκ.

Σχήμα 9 :Η περίπτωση που το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του τριγώνου

Μ: Φαίνεται ότι όταν είναι απέξω χρειάζονται περισσότερα μέτρα(καλωδίου) αλλά….

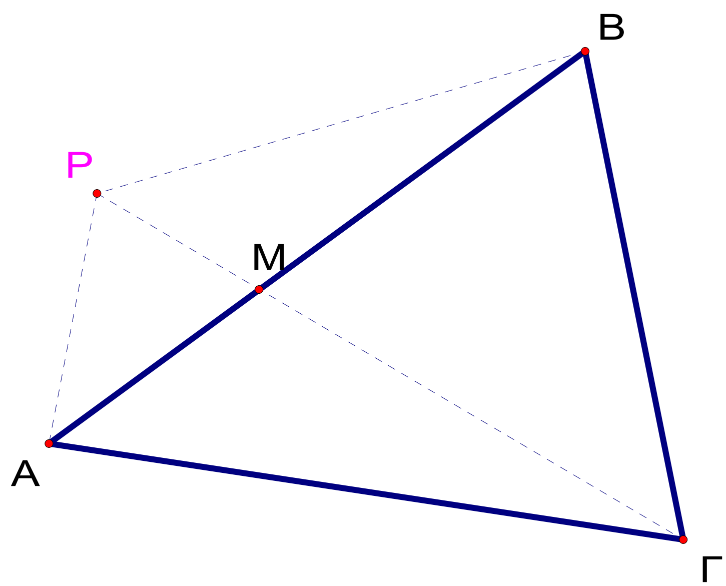
Δ:…Το Ρ δεν μπορεί να είναι εκτός του τριγώνου γιατί το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από οποιαδήποτε θέση του Ρ εντός του τριγώνου.

Ο Λευτέρης παίρνει μολύβι και χαρτί και προτείνει την παρακάτω απόδειξη:

Λ: Στο τρίγωνο ΑΓΒ το σημείο Ρ είναι εξωτερικό σημείο του. Φέρνουμε τα ΡΑ, ΡΒ και ΡΓ και έστω Μ το σημείο τομής της ΑΒ με την ΡΓ, τότε έχουμε: ΡΑ + ΡΒ + ΡΓ > ΑΒ + ΡΓ > ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ (σχ.9).

Επομένως είναι φανερό, πως οποιοδήποτε εξωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ, δεν μπορεί να είναι λύση του προβλήματος «ελάχιστης διαδρομής».

Επίσης το ίδιο ισχύει και όταν το σημείο Ρ ανήκει στην περίμετρο του τριγώνου (σχ.10).



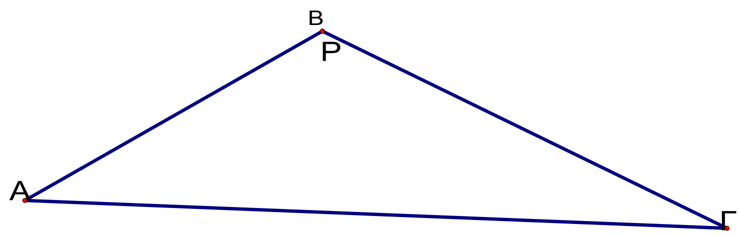
Σχήμα 10: Η περίπτωση που το Ρ ανήκει στην περίμετρο του τριγώνου

Δραστηριότητα 5

μέτρο∠ΑΒΓ = 124,35°
PB = 0,00 εκ.
PA = 8,13 εκ.
PΓ = 10,69 εκ.
PB+PA+PΓ = 18,81 εκ.

BA = 8,13 εκ.
ΒΓ = 10,69 εκ.
ΑΓ = 16,68 εκ.
BA+BΓ = 18,81 εκ.

PB+PA+PΓ	BA+BΓ
13,50 εκ.	18,81 εκ.
13,04 εκ.	
14,53 εκ.	
12,95 εκ.	
15,05 εκ.	
13,05 εκ.	
12,88 εκ.	
18,81 εκ.	



Σχήμα 11: Όταν μια γωνία του τριγώνου είναι μεγαλύτερη από 120°

Μ: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ, έχει μια γωνία, έστω την Β ίση ή μεγαλύτερη από 120° , τότε η κορυφή της γωνίας αυτής Β ταυτίζεται με το σημείο Ρ. (σχ.11) Αυτό ισχύει γιατί τότε η διαδρομή ΡΑ + ΡΒ + ΡΓ > ΡΑ + ΡΓ για κάθε Ρ διαφορετικό του Β.

Οι φοιτητές εκπλήσσονται όταν διαπιστώνουν ότι η μονάδα παραγωγής ενέργειας θα πρέπει να είναι χτισμένη στο κέντρο της πόλης Β (και όχι στο Ρ), όταν η γωνία $\angle AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από 120°!

Δραστηριότητα 6

Οι φοιτητές κατασκευάζουν το παρακάτω σχήμα:

Σχ

Σχήμα 12:Τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

Σύροντας το σημείο P πάνω στην ευθεία δημιουργείται η εικασία ότι το άθροισμα των αποστάσεων εξαρτάται από την απόσταση του σημείου P από το Β.

Η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος PA+PB+PΓ είναι ίση με το μήκος του ΑΓ και αυτό συμβαίνει όταν το P συμπίπτει με το Β .Σε κάθε άλλη θέση η τιμή του αθροίσματος PA+PB+PΓ ισούται με το μήκος του αθροίσματος ΑΓ+PB.

PA = 2,79 εκ.
PB = 0,01 εκ.
PΓ = 6,74 εκ.
PA+PΓ = 9,53 εκ.

PA+PB+PΓ = 9,53 εκ.

PB	PA+PB+PΓ
0,55 εκ.	10,07 εκ.
4,04 εκ.	13,57 εκ.
2,32 εκ.	11,85 εκ.
0,89 εκ.	10,42 εκ.
0,01 εκ.	9,53 εκ.
0,56 εκ.	10,09 εκ.
0,91 εκ.	10,43 εκ.
0,48 εκ.	10,01 εκ.
0,01 εκ.	9,53 εκ.

Σχ

Σχήμα 13: Το P συμπίπτει με το Β

Δραστηριότητα 7

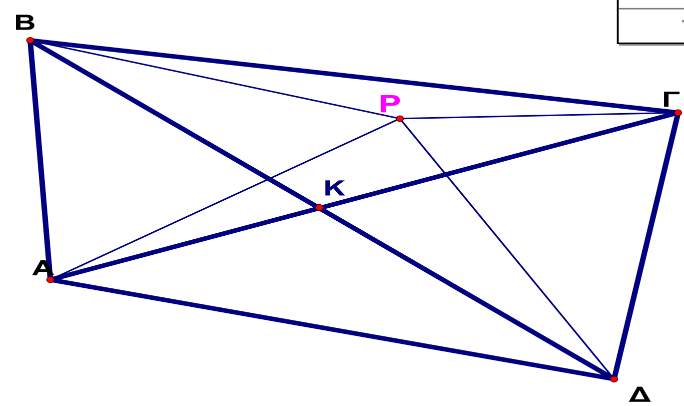
Λ: Αν Κ είναι το σημείο τομής των διαγώνιων του τετράπλευρου ΑΒΓΔ ουσιαστικά πρέπει ν' αποδείξουμε ότι ΚΑ+ΚΒ+ΚΓ+ΚΔ ≤ PA+PB+PΓ+PΔ, για κάθε σημείο P που βρίσκεται στο εσωτερικό του τετράπλευρου ΑΒΓΔ

Δ: εντάξει ....ισχύει ΑΓ=ΚΑ+ΚΓ≤ PA+PΓ και ΒΔ=ΚΒ+ΚΔ ≤PB+PΓ ...προφανές όταν το P είναι εσωτερικό του τετράπλευρου

Μ: πρέπει να διευκρινίσουμε ότι οι θέσεις των πόλεων σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο, αν όχι, τα παραπάνω δεν ισχύουν νομίζω...

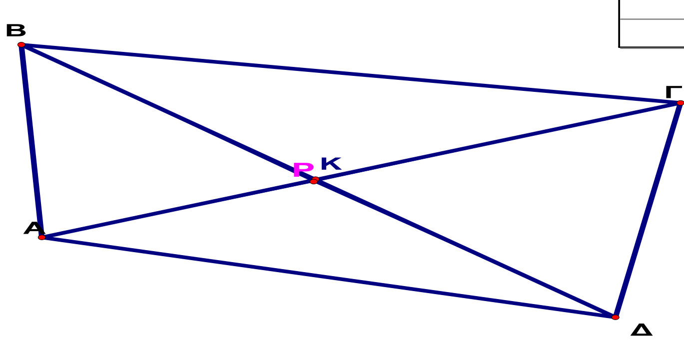
Ρ εσωτερικό σημείο του ΑΒΓΔ

ΚΑ+ΚΒ+ΚΓ+ΚΔ	ΡΑ+ΡΒ+ΡΓ+ΡΔ
19,87 εκ.	20,71 εκ.
19,87 εκ.	20,21 εκ.
19,87 εκ.	20,99 εκ.
19,87 εκ.	21,07 εκ.
19,87 εκ.	20,68 εκ.
19,87 εκ.	20,31 εκ.
19,87 εκ.	20,35 εκ.
19,87 εκ.	21,76 εκ.
19,87 εκ.	20,86 εκ.



Σχήμα 14: Η επέκταση του προβλήματος

ΚΑ+ΚΒ+ΚΓ+ΚΔ	ΡΑ+ΡΒ+ΡΓ+ΡΔ
19,87 εκ.	20,71 εκ.
19,87 εκ.	20,21 εκ.
19,87 εκ.	20,99 εκ.
19,87 εκ.	21,07 εκ.
19,87 εκ.	20,68 εκ.
19,87 εκ.	20,31 εκ.
19,87 εκ.	20,35 εκ.
19,87 εκ.	21,76 εκ.
19,87 εκ.	19,87 εκ.



Το Ρ ταυτίζεται με το σημειο τομης Κ των διαγωνίων

Σχήμα 15: Το Ρ ταυτίζεται με το σημείο τομής Κ των διαγώνιων

2.9.2 Περιγραφή της εργασίας των μαθητών κατά την 2η φάση

Πρόβλημα

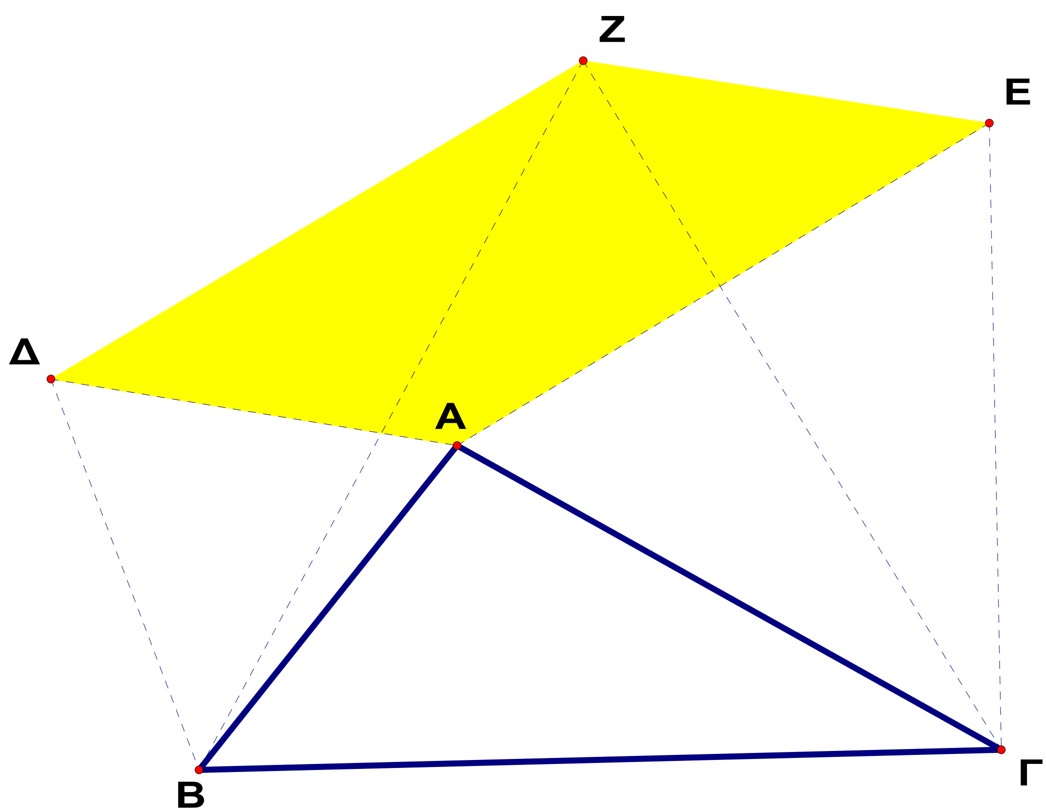
Σχεδιάστε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάστε ισόπλευρα τρίγωνα ΒΑΔ και ΑΓΕ στις πλευρές ΒΑ και ΑΓ αντίστοιχα, στο ημιεπίπεδο που βρίσκεται η κορυφή Α του ΑΒΓ. Κατασκευάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΒΖΓ πλευράς ΒΓ επίσης στο ίδιο ημιεπίπεδο που βρίσκεται η κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ.

I. Βρείτε τι είδος τετράπλευρου είναι το ΑΔΖΕ.
II. Μετασχηματίστε το τρίγωνο ΑΒΓ και γράψτε τις εικασίες σας σε κάθε περίπτωση που το ΑΒΓ γίνεται: α)ισοσκελές β)ισόπλευρο γ)τα Α, Β, Γ να βρίσκονται σε ευθεία.
III. Προσπαθήστε ν' αποδείξετε τις εικασίες σας σε κάθε περίπτωση.

Αρκετοί μαθητές προχώρησαν στη φάση της κατασκευής μη λαμβάνοντας υπόψη αυτά που τονίστηκαν στη φάση εξοικείωσης με το Sketchpad σχετικά με τις «ανθεκτικές»(robust) κατασκευές.
Αγνόησαν δηλαδή τις ιδιότητες του ισόπλευρου τριγώνου και κατασκεύασαν τρίγωνα προσπαθώντας να τα τροποποιήσουν σε «περίπου» ισόπλευρα παρατηρώντας στην οθόνη τις μετρήσεις (σχ.16)

Η καθηγήτρια παρότρυνε τους μαθητές να μετακινήσουν οποιαδήποτε κορυφή ενός τριγώνου και τα τρίγωνα έπαψαν να είναι ισόπλευρα(σχ.16)
Αυτό αύξησε την περιέργεια στους μαθητές και το ενδιαφέρον τους έγινε έντονο προκειμένου να κατασκευάσουν γεωμετρικά σχεδιασμένα ισόπλευρα τρίγωνα .

ΑΒ = 5,46 εκ.	ΒΓ = 10,61 εκ.	ΑΓ = 8,23 εκ.
ΔΑ = 5,44 εκ.	ΖΒ = 10,61 εκ.	ΕΑ = 8,21 εκ.
ΔΒ = 5,49 εκ.	ΖΓ = 10,60 εκ.	ΓΕ = 8,23 εκ.

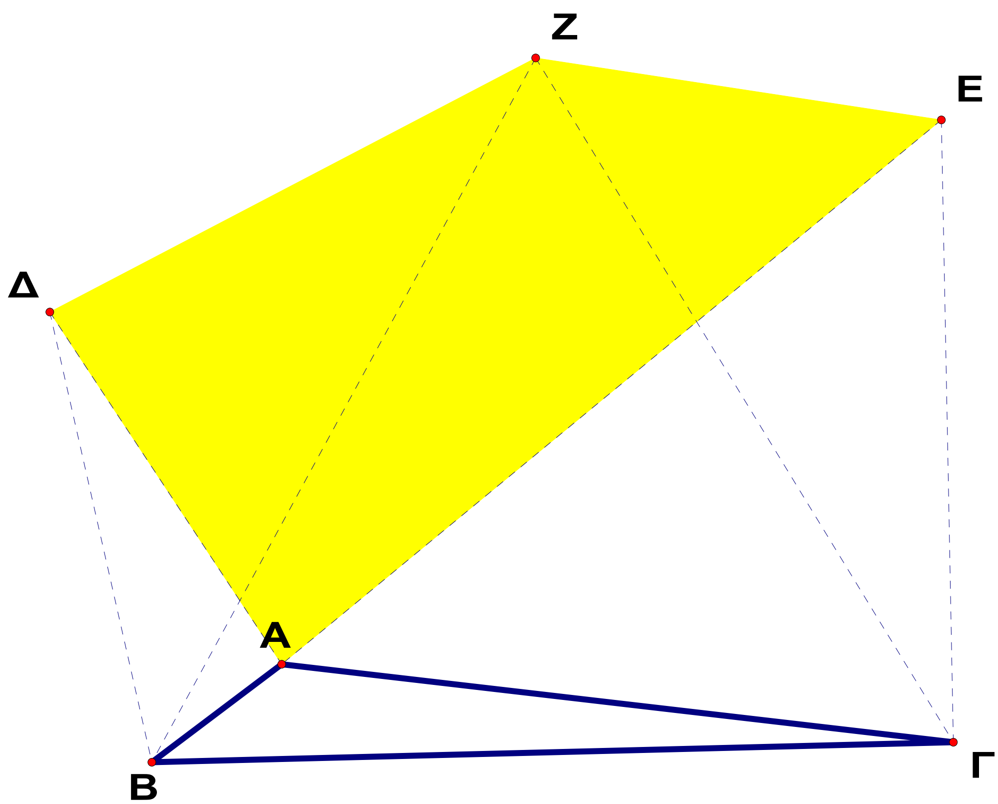


Σχήμα 16 :Κατασκευή μη «στιβαρών» ισόπλευρων τριγώνων

ΑΒ = 2,15 εκ. ΒΓ = 10,61 εκ. ΑΓ = 8,95 εκ.

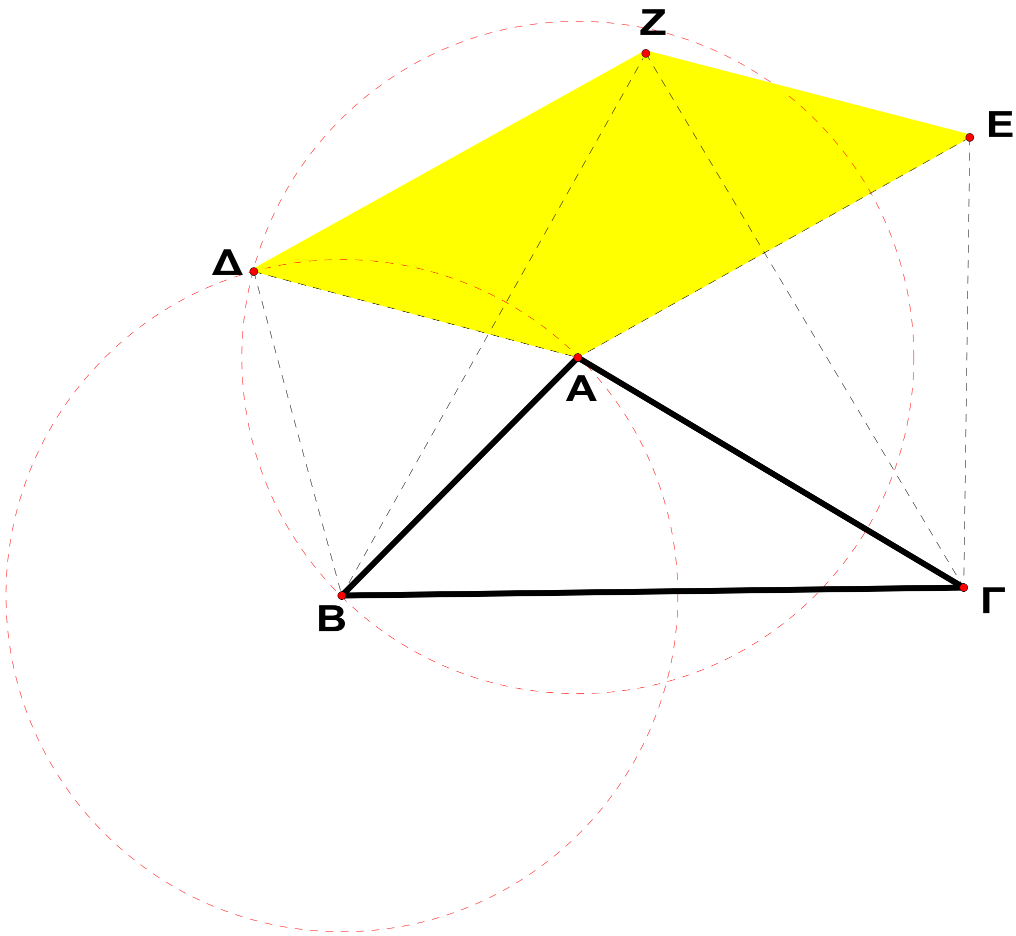
ΔΑ = 5,58 εκ. ΖΒ = 10,61 εκ. ΕΑ = 11,31 εκ.

ΔΒ = 6,10 εκ. ΖΓ = 10,60 εκ. ΓΕ = 8,23 εκ.



Σχήμα 17: Το σύρσιμο του σημείου Α «χάλασε» την κατασκευή

Οι ιδέες για ένα γεωμετρικό σχεδιασμό με βάση τις γνωστές ιδιότητες ισοπλεύρου τριγώνου οδήγησε στην παρακάτω κατασκευή (σχ.18)



Σχήμα 18 :Γεωμετρική κατασκευή στην οθόνη του Sketchpad

1ο ζεύγος: Αλέξης-Μαρία

Α: Σίγουρα πάντως είναι παρ/μο….φαίνεται (μετράει τις πλευρές και τις γωνίες του ΑΔΖΕ)

Μ: Όποιο σημείο και να σύρω …κοίτα (δείχνει τ' αποτελέσματα των μετρήσεων) παραμένει παρ/μο,…απευθύνεται στην καθηγήτρια … χρειάζεται κάτι παραπάνω για το α) ερώτημα ή να πάμε στο β?

Κ:.. ωραία ..έχετε πεισθεί ,μπορείτε όμως να εξηγήσετε γιατί είναι παρ/μο?

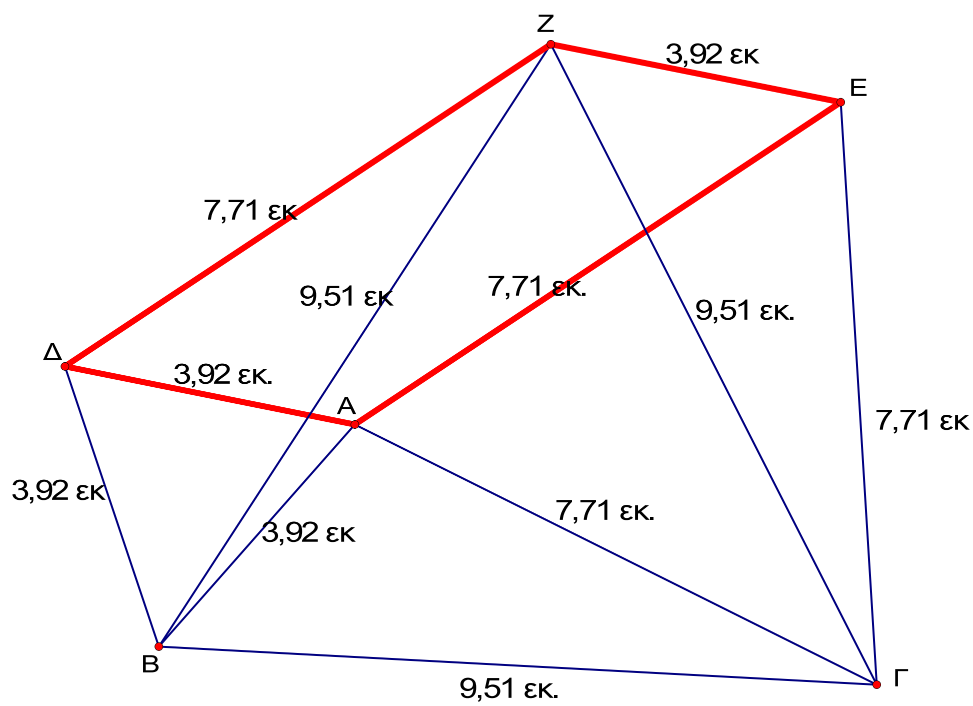
Α:…και οι απέναντι πλευρές είναι παρ/λες… (κατασκευάζει ευθεία παράλληλη στην ΔΖ που διέρχεται από το Α)…συμπίπτει με την ΑΕ

Σύροντας το σημείο Α η Μ παρατηρεί απευθυνόμενη στον Α ..

Μ: …κοίτα μετακινούνται και οι κορυφές Δ και Ε μαζί με το Α αλλά τα τρίγωνα παραμένουν ισόπλευρα ..το τριγ. ΖΒΓ δεν αλλάζει αλλά αν σύρω τη Β ή τη Γ κορυφή εντάξει ..όλα τα τρίγωνα όμως φαίνονται πάλι ισόπλευρα.

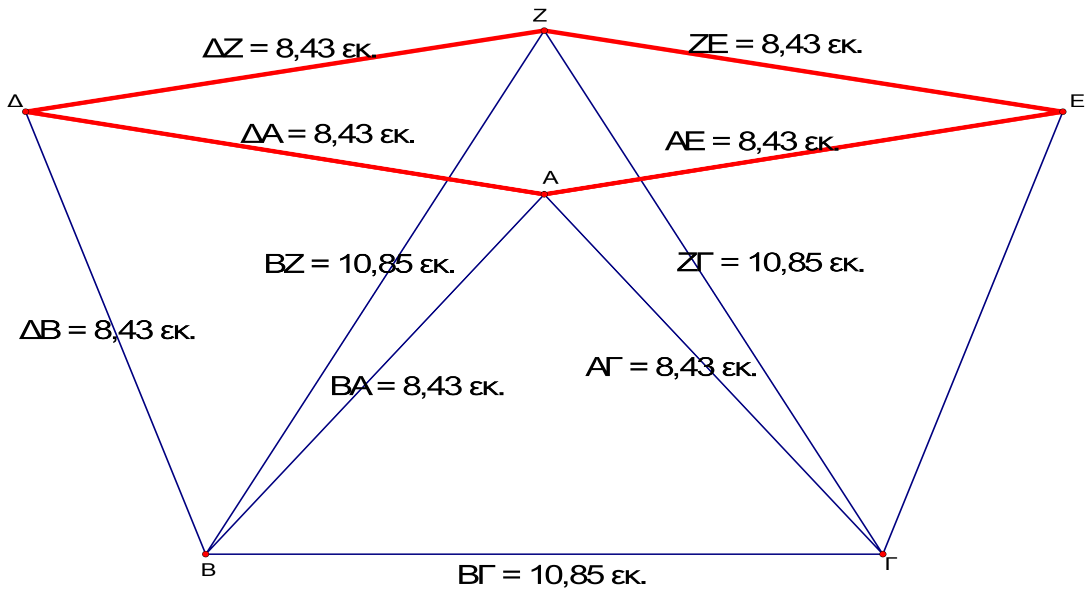
Α:...ναι.. αλλά γιατί η ΔΖ συνεχίζει να είναι ίση και παρ/λη με την ΑΕ αφού οι κορυφές Δ και Ε μετακινούνται ?

Ο Α προσπαθώντας ν' απαντήσει αποφασίζει να μετρήσει όλες τις πλευρές του σχήματος:



Σχήμα 19: Μετρήσεις των πλευρών του σχήματος

Μετακινεί την κορυφή Α ώστε το ΑΒΓ να γίνει ένα ισοσκελές τρίγωνο.



Σχήμα 20: Μετρήσεις στην περίπτωση που το ΑΒΓ γίνεται ισοσκελές τρίγωνο

Α: Το ΑΒΓ έγινε ισοσκελές και…το παραλληλόγραμμο ,ρόμβος

Μ:.. όλα τα μήκη των πλευρών είναι 8,43 εκ. εκτός από τις πλευρές του τριγώνου ΒΖΓ.

Α: Ισχύει ΑΒ= ΑΓ και τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισόπλευρα άρα ΑΔ=ΑΕ=8,43 εκ. αλλά γιατί και ΔΖ=ΖΕ=8,43 εκ.?

Μ:.. δηλ. τα ΔΒΖ, ΑΒΓ, ΑΕΓ είναι ισοσκελή τρίγωνα …

Α:.. σύροντας το Α παρατηρούμε ότι αυτά(τα ΔΒΖ και ΑΕΓ)είναι ισοσκελή μόνο όταν και το ΑΒΓ είναι ισοσκελές

Μ:. (εξηγεί γιατί όλες οι πλευρές του ΑΔΖΕ έχουν το ίδιο μήκος όταν το ΑΒΓ είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο) : (α) ισχύει ΑΔ =ΑΕ=8,43 εκ. επειδή είναι οι πλευρές των ισόπλευρων τρίγωνων.

(β) τα μήκη των ΔΖ και ΕΖ είναι 8,43 εκ. επειδή είναι πλευρές των ισοσκελών τρίγωνων ΔΒΖ και ΕΖΓ

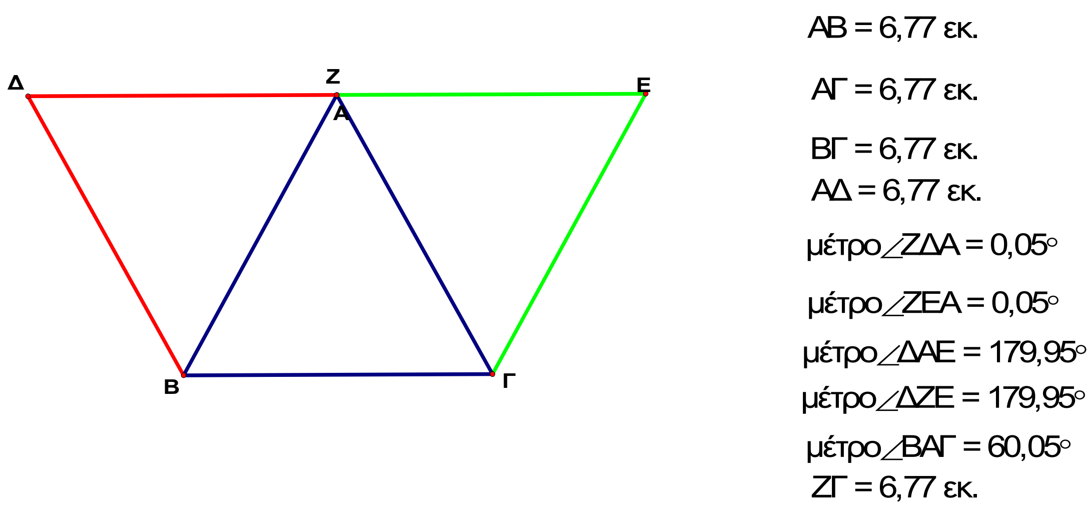
Κατά τη διάρκεια της εξήγησης, η Μ μετακίνησε ελαφρώς το σημείο Α.

Α :…(παρατηρώντας προσεκτικά την οθόνη) : α…!τα τρίγωνα ΕΖΓ, ΔΒΖ, και ΑΒΓ είναι ίσα και πάλι!

Μ: …(περιστρέφει το τρίγωνο ΑΒΓ γύρω από τα σημεία Β και Γ) ….το ΑΒΓ ταυτίζεται με το ΔΒΖ και με το ΕΖΓ .

Α: (σέρνει το σημείο Α προφανώς για να ελέγξει την εικασία του ότι τα τρίγωνα ΕΖΓ, ΔΒΖ, και ΑΒΓ είναι ίσα)

Μ: …όταν το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο…(μετά από μερικές δοκιμές και μετρήσεις)..όλα γίνονται ισόπλευρα και ίσα, αλλά δεν υπάρχει παραλληλόγραμμο(σχ.21)



Σχήμα 21: Μετρήσεις στην περίπτωση που το ΑΒΓ γίνεται ισόπλευρο τρίγωνο

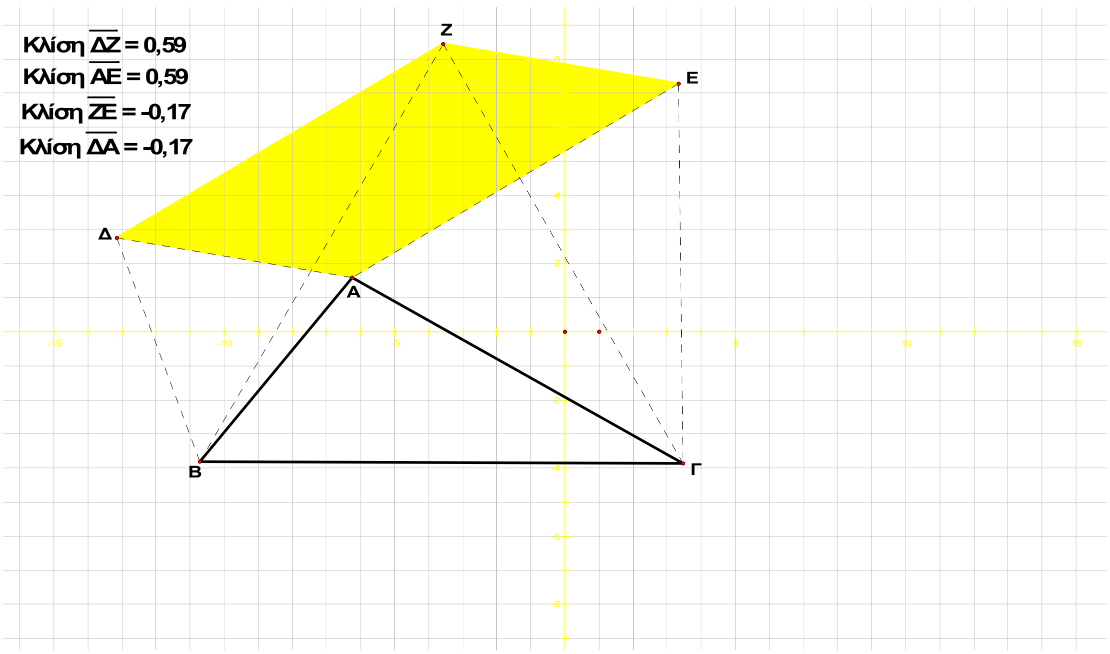
$2^{ο}$ ζεύγος: Άννα –Πέτρος

Οι μαθητές διαπίστωσαν οπτικά ότι το ΑΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο

Ο Π ελέγχει την εικασία   μετρώντας τις τέσσερις πλευρές και τις τέσσερις γωνίες του.

Π: ε… το ΑΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Α: …έτσι φαίνεται… αλλά έτσι δείχνουν και οι μετρήσεις(μετράει τις κλίσεις των ευθειών για να διαπιστώσει την παραλληλία τους!)(σχ.22)



Σχήμα 22: Μέτρηση της κλίσης δύο ευθειών για διαπίστωση παραλληλίας

Π: (αφού έσυρε κάποια σημεία (κορυφές)του τριγώνου ΑΒΓ

…εδώ ..το τρίγωνο ΑΒΓ μοιάζει ισοσκελές .

Α:..(χαλάει το ισοσκελές και παρατηρεί) :τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΖΓ φαίνονται ίσα ,να…μετακινώ το Α και πάλι ίσα φαίνονται…και αν μετρήσω …(μετράει τα μήκη της ΓΕ και ΒΔ).

Παρόλα αυτά δεν μπορεί ακόμη να βρει γιατί αυτά τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

Π: (απευθύνεται στην Άννα)… ΔΑ =ΒΑ γιατί είναι πλευρές του ίδιου ισόπλευρου τρίγωνου. Μετράει το μήκος των ΒΓ, ΓΖ και ΒΖ και κοιτάει την οθόνη.

Α: …α! ναι! η ΕΖ αντιστοιχεί στην ΒΔ και ΒΔ= ΑΔ. Γράφει στο φύλλο εργασίας την ισότητα και συνεχίζει να μετακινεί το σημείο Γ σε διάφορες θέσεις, ώσπου κάποια στιγμή το σημείο Α «πέφτει» στην πλευρά ΒΓ (σχ.23)

Π:.. Περίμενε, περίμενε εδώ…!μετακινεί ξανά το Γ και «χαλάει» η ειδική περίπτωση ,μετράει τα μήκη των ΑΒ και ΑΓ.

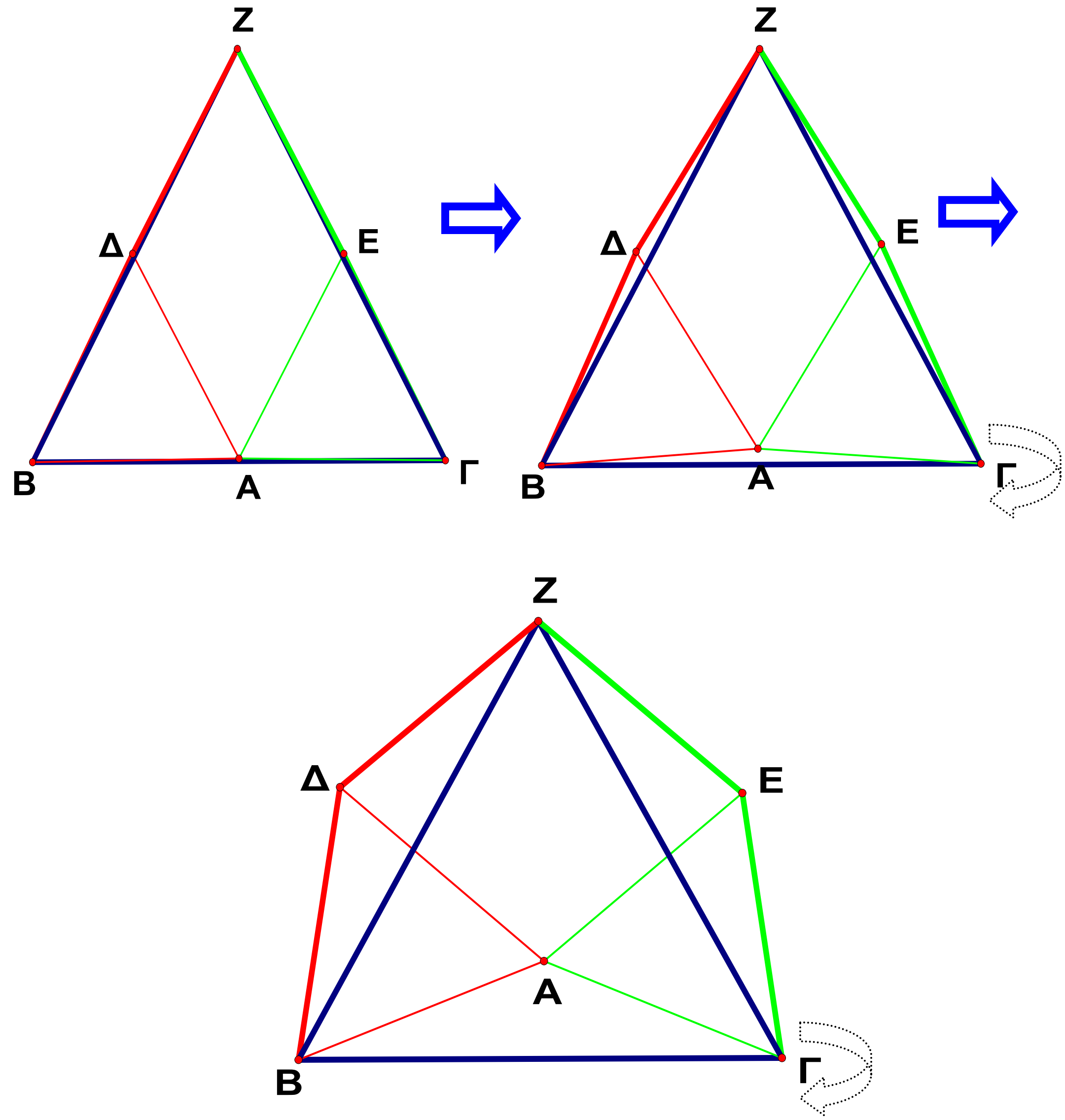
Π:.. (απευθύνεται στην Άννα) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΖ είναι ίσα και… πρέπει να δείξουμε ότι ΑΓ = ΔΖ ή η γωνία ΑΒΓ = γωνία ΔΒΖ, καθώς και ΑΒ = ΔΒ και ΒΓ = ΒΖ .. επειδή τα ΑΒΔ και ΖΒΓ είναι ισόπλευρα τρίγωνα… έτσι δεν είναι?(κοιτάει την καθηγήτρια, σημειώνει στο φύλλο εργασίας το συλλογισμό του)

Κ: …για συνέχισε…

Π: …από τις μετρήσεις που κάναμε…

Α: (απευθύνεται στον Πέτρο) σύμφωνα με το κριτήριο να δείξουμε ότι η $\angle$ΑΒΓ = $\angle$ΔΒΖ αφού ισχύει ΑΒ = ΒΔ και ΒΓ = ΒΖ .

Η Άννα μετακινεί το σημείο Δ συνεχώς καθώς και οι δύο παρατηρούν στην οθόνη πώς μεταβάλλονται τα μέτρα των $\angle$ΑΒΓ , $\angle$ΔΒΖ και $\angle$ΖΒΑ



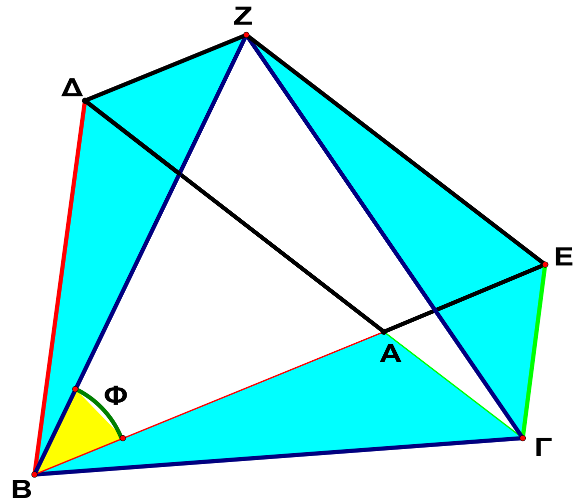
Σχήμα 23: Η μετακίνηση του σημείου Γ και τα αναδυόμενα τρίγωνα

Π: ...λοιπόν ...ναι το βρήκα! εε **..** 18+42=60 ...! Η $\angle$ ΑΒΓ = $\angle$ ΔΒΖ ,η κάθε μια έχει άθροισμα με την $\angle$ ΖΒΑ ίσο με 60^o δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι η κάθε μια ισούται με $60^o - φ$ μοίρες αυτό είναι! (σχ**.**24)

Α:...σωστά ! ο ίδιος υπολογισμός μπορεί να εφαρμοστεί στις

$\angle$ΑΒΓ και $\angle$ΕΖΓ**.**

μέτρο∠ΑΒΓ	μέτρο∠ΔΒΖ	μέτρο∠ΖΒΑ
14,59°	14,59°	45,41°
3,50°	3,50°	56,50°
31,19°	31,19°	28,81°
14,32°	14,32°	45,68°
18,40°	18,40°	41,60°
18,00°	18,00°	42,00°



Σχήμα 24: Ο ρόλος της γωνίας φ στην απόδειξη της ισότητας των τριγώνων

Μετά από αυτή τη διαπίστωση ο Πέτρος και η Άννα προχωρούν στην απόδειξη του συμπεράσματος ότι το ΑΔΖΕ είναι ένα παραλληλόγραμμο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Ανάλυση των δεδομένων της 1ης ομάδας

Η πορεία της δραστηριότητας της 1ης ομάδας ηχογραφήθηκε και απομαγνητοφωνήθηκε. Εξετάσθηκαν τα φύλλα εργασίας των τριών φοιτητών ,οι σημειώσεις τους καθώς και οι σημειώσεις της καθηγήτριας κατά την εξέλιξη της δραστηριότητας

Η εξέλιξη της διαδικασίας της ομάδας των φοιτητών μπορεί να συνοψισθεί στα παρακάτω:

- Αναπαράστησαν σχηματικά την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα (αλλαγή πλαισίου) κατασκευάζοντας το γεωμετρικό σχέδιο στην οθόνη του Sketchpad
- Συνέχισαν μετακινώντας αυθαίρετα ένα τυχαίο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου για να ανακαλύψουν κανονικότητες ή να κάνουν μερικές πρώτες υποθέσεις .Αυτό είναι το σύρσιμο περιπλάνησης (*Wandering dragging* Arzarello et al. 2002) που αναφέρθηκε στο 1ο κεφάλαιο και χρησιμοποιείται όταν κάποιος ψάχνει για καινούργιες ιδέες.
- Έκαναν μια αρχική εικασία ότι το ζητούμενο σημείο μπορεί να είναι κάποιο γνωστό σημείο του τριγώνου όπως το βαρύκεντρο, το έκκεντρο ή το περίκεντρο.
- Μετά από αυτή την εικασία, άλλαξε ο τρόπος συρσίματος και επικεντρώθηκαν στη μέτρηση των αποστάσεων του κάθε σημείου από τις κορυφές του τριγώνου

- Αποδείχθηκε, κάνοντας χρήση εργαλείων του Sketchpad,ότι η εικασία δεν μπορεί να έχει γενικευμένη ισχύ.
- Η παραπάνω εικασία αν και ψευδής, σηματοδότησε ένα άλμα στην εξερεύνηση, λειτούργησε μέσω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των φοιτητών, ως «σκαλωσιά» για να προχωρήσουν σε περαιτέρω ανακαλύψεις και εικασίες.
- Σύροντας τα βασικά σημεία ώστε να συμπίπτουν μεταξύ τους (*guided dragging* :καθοδηγούμενο σύρσιμο)και να ικανοποιούν έτσι την «αρχή της ελάχιστης διαδρομής», το τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ μετατράπηκε σε ισόπλευρο.
- Βλέποντας ο Μάριος στην οθόνη του υπολογιστή το ισόπλευρο τρίγωνο όπου τα γνωστά σημεία συμπίπτουν, συνδέει το πρόβλημα με τις γωνίες που σχηματίζει το Ρ με τις κορυφές του ΑΒΓ.
- Προσπαθώντας να διατηρήσουν αναλλοίωτη αυτή την ιδιότητα του σημείου Ρ, με χρήση του εργαλείου «πινακοποίηση» συγκρίνανε τα αθροίσματα.
- Οδηγήθηκαν έτσι σε μια νέα εικασία σύμφωνα με την οποία το ζητούμενο σημείο Ρ πιθανόν να σχηματίζει γωνία 120^{o} με τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ.
- Χρησιμοποίησαν το *dragging test* για να ελέγξουν την εικασία τους.
- Εφάρμοσαν την ευρετική του Polya για την απόδειξη του προβλήματος: η πιο σύντομη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία διαδρομή, μεταξύ τριών κλπ
- Τα εργαλεία του Sketchpad π.χ «περιστροφή», έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή του σημείου Fermat και στην απόδειξη του θεωρήματος.

- Απέκλεισαν την περίπτωση το Ρ να είναι εξωτερικό του τριγώνου ή να ανήκει στην περίμετρο του τριγώνου. Κι εδώ έπαιξε καθοριστικό ρόλο το εργαλείο «μέτρηση» γιατί το άθροισμα σ' αυτές τις περιπτώσεις θα είναι μεγαλύτερο από οποιαδήποτε θέση εντός του τριγώνου.
- Ο φοιτητές διαπιστώσαν ότι η μονάδα παραγωγής ενέργειας πρέπει να είναι χτισμένη στο κέντρο της πόλης Β (και όχι στο Ρ), όταν η γωνία ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 120^{o}!
- Έχοντας κατανοήσει πλήρως το πρόβλημα είναι πλέον εύκολο να κατανοήσουν και την επέκταση του προβλήματος όταν οι πόλεις είναι τέσσερις ώστε να σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο.

3.2 Ανάλυση των δεδομένων της 2ης ομάδας

3.2.1 Ανάλυση της πορείας προς την απόδειξη του Ζεύγους Α

Η διαδικασία απόδειξης του Ζεύγους Α μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

- Με οπτική μέθοδο βρήκαν ότι το ΑΔΖΕ είναι ένα παραλληλόγραμμο.
- Μέτρησαν τις τέσσερις πλευρές και τις τέσσερις γωνίες του ΑΔΖΕ για να επιβεβαιώσουν το συμπέρασμα.
- Έλεγξαν εάν οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.
- Έσυραν το Α και βρήκαν ότι τα Δ και Ε μπορούν να κινηθούν ανάλογα με τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ.
- Μέτρησαν όλες τις πλευρές του γεωμετρικού σχεδίου στην οθόνη.
- Βλέποντας μια ειδική περίπτωση, παρατήρησαν ότι όλες οι πλευρές, εκτός από τις πλευρές του τριγώνου ΒΖΓ έχουν το ίδιο μήκος.
- Παρατήρησαν ότι τα τρίγωνα ΕΖΓ, ΔΒΖ, και ΑΒΓ είναι ισοσκελή και οι πλευρές του ΑΕΖΔ είναι πλευρές ισοσκελούς ή ισόπλευρου τρίγωνου.

- Παρατήρησαν ότι οι μορφές των τριγώνων ΕΖΓ και ΔΒΖ εξαρτώνται από εκείνη του τριγώνου ΑΒΓ.
- Βρήκαν ότι οι απέναντι πλευρές έχουν τα ίδια μήκη λόγω κάποιου ισοσκελούς και ισόπλευρου τρίγωνου.
- Βλέποντας την κατάρριψη μιας ειδικής περίπτωσης, διαπιστώσαν ότι τα τρίγωνα ΕΖΓ, ΔΒΖ, και ΑΒΓ είναι ίσα.
- Παρατήρησαν ότι, περιστρεφόμενο το τρίγωνο ΑΒΓ γύρω από το Α ,συμπίπτει με τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΖΓ.
- Έλεγξαν με δοκιμή συρσίματος την ισότητα των ΕΖΓ, ΔΒΖ, και ΑΒΓ.
- Έψαξαν στο σχολικό βιβλίο την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο.
- Κατανόησαν γιατί η ΕΖ έχει το ίδιο μήκος με την ΑΔ, όταν αντιλήφθηκαν την ισότητα των ΕΖΓ και ΔΒΖ.
- Ανέφεραν και την παραλληλία των παραπάνω πλευρών και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το ΑΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο.
- Παρόλα αυτά δεν μπόρεσαν να αποδείξουν γιατί τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΖΓ είναι ίσα με το τρίγωνο ΑΒΓ και να ολοκληρώσουν την απόδειξη της εικασίας τους.

Παρά το γεγονός ότι, αυτό το ζευγάρι δεν μπόρεσε να ολοκληρώσει την απόδειξη του, κατάφερε να βρει την ισότητα των τριγώνων ΕΖΓ, ΔΒΖ και ΑΒΓ, η οποία είναι κρίσιμη για την απόδειξη της εικασίας τους.

Παρατηρήθηκε ότι στο συγκεκριμένο ζεύγος των μαθητών η χρήση του Sketchpad ήταν καθοριστική γιατί ο «μετασχηματισμός», η «μεταμόρφωση» του σχεδίου ως αποτέλεσμα του συρσίματος, οδήγησε τους μαθητές στην παραγωγή εμπειρικών επιχειρημάτων και εικασιών. Το Sketchpad βοήθησε τους μαθητές να ερευνήσουν και να αντιληφθούν την εξάρτηση των τριγώνων ΕΖΓ και ΔΒΖ από το ΑΒΓ, μέσα από το σύρσιμο και τις λειτουργίες μέτρησης.

Μια ορισμένη ειδική περίπτωση και η μικρή διακοπή της έπαιξε σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της απόδειξης.

Όταν οι μαθητές έκαναν το ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο, παρατήρησαν ότι τα τρίγωνα ΕΖΓ και ΔΒΖ έγιναν επίσης ισοσκελή. Η κατάρριψη της εν λόγω ειδικής περίπτωσης, τους βοήθησε να συνειδητοποιήσουν την εξάρτηση των τριγώνων ΕΖΓ και ΔΒΖ από το ΑΒΓ. Και μετά τη δεύτερη κατάρριψη αυτής της ειδικής περίπτωσης, ο Αλέξης βρήκε ότι τα τρίγωνα ΕΖΓ, ΔΒΖ και ΑΒΓ είναι ίσα. Ενώ η κατασκευή της ειδικής περίπτωσης και της πρώτης κατάρριψης ήταν συνειδητή και σκόπιμη, η δεύτερη κατάρριψη συνέβη τυχαία. Αυτό σημαίνει ότι ένα αναδυόμενο μοτίβο που εμφανίστηκε κατά τύχη στην οθόνη , έπαιξε σημαντικό ρόλο στην αποδεικτική διαδικασία του Ζεύγους Α. Τέτοιες αντιλήψεις της κατάστασης, καθώς και οι μετρήσεις στην οθόνη, διευκόλυναν την αναγνώριση και ερμηνεία των αναδυόμενων σχεδίων στην οθόνη από τους μαθητές και τους έδωσαν τη δυνατότητα να βρουν και να εξηγήσουν σημαντικές σχέσεις.

Αν και κατανόησαν την αναγκαιότητα της απόδειξης και προσπάθησαν ν' αναπτύξουν μια επιχειρηματολογία, η έλλειψη θεωρητικού υπόβαθρου αποτέλεσε εμπόδιο στη μετάβαση από την οπτική προσέγγιση και επιχειρηματολογία, σε μια μορφή τυπικής απόδειξης.

3.2.2 Ανάλυση της Απόδειξης του ζεύγος Β: Πέτρος-Άννα

Η διαδικασία απόδειξης του Ζεύγους Β μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

- Βρήκαν οπτικά ότι το ΑΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο.
- Η δοκιμή συρσίματος συνοδεύτηκε από μετρήσεις.
- Γνώριζαν τις ισότητες ΑΔ = ΕΖ και ΑΕ = ΔΖ.
- Μετά από διαρκές σύρσιμο , παρατήρησαν ότι τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΖΓ είναι ίσα.
- Γνώριζαν ότι ΔΑ = ΒΑ λόγω του ισοσκελούς ΑΒΔ
- Μέτρησαν τις ΓΕ , ΒΔ, ΒΓ, ΓΖ και ΒΖ
- Παρατήρησαν ότι η ισότητα ΕΖ = ΔΒ οδηγεί σε ΕΖ = ΑΔ
- Παρατηρώντας την κατάρριψη της ειδικής περίπτωσης, όπου τα τρία τρίγωνα είναι ισόπλευρα, παρατήρησαν ότι τρ.ΑΒΓ = τρ ΔΒΖ .
- Γνώριζαν ότι ΑΒ = ΒΔ και ΒΓ = ΒΖ βασιζόμενοι στα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΖΒΓ, και παρακολούθησαν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΖ.
- Μέτρησαν τις ∠ ΑΒΓ και ∠ ΔΒΖ
- Διαπίστωσαν ότι ∠ΑΒΔ =∠ ΖΒΓ = 60 ° και απέδειξαν ότι ∠ ΑΒΓ = ∠ ΔΒΖ .
- Ανέφεραν ότι ισχύει το κριτήριο ισότητας τριγώνων.
- Απέδειξαν την εικασία τους.

Το Ζεύγος Β απέδειξε την εικασία στο τέλος της δραστηριότητάς. Η απόδειξη ήταν βασισμένη στην διαπίστωση ότι τα τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΖ και ΕΖΓ, είναι ίσα. Αυτή η κατανόηση αναπτύχθηκε σταδιακά κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της απόδειξης.

Αρχικά παρατήρησαν ότι τρ. ΔΒΖ = τρ ΕΖΓ. Σε αυτό το σημείο, η σχέση μεταξύ αυτών των τριγώνων ήταν μια απλή υποεικασία. Στη συνέχεια φάνηκε να σχετίζουν αυτά τα τρίγωνα με τα τρία δεδομένα ισόπλευρα. Έτσι η ισότητα των ΕΖ = ΒΔ τους οδήγησε σε ΕΖ = ΑΔ. Η σχέση αυτή χρησιμοποιήθηκε στην τελική απόδειξη. Επίσης, παρακολούθησαν την ΑΒ και μέτρησαν την ΒΓ κατά τη διάρκεια αυτής της προσπάθειας, σε σχέση με τα ισόπλευρα τρίγωνα. Βλέποντας την κατάρριψη της ειδικής περίπτωσης μετά από αυτήν την προσπάθεια, διαπίστωσαν ότι τρ.ΑΒΓ= τρ.ΔΒΖ. Με βάση αυτή την υπο-εικασία (ισότητας των τρ.ΑΒΓ και ΔΒΖ), οι μαθητές εικάζουν ότι $\angle$ΑΒΓ= $\angle$ ΔΒΖ.

Η προσοχή τους σε αυτές τις γωνίες, καθώς και ότι $\angle$ΑΒΔ =$\angle$ΖΒΓ = 60 °, ενδεχομένως οδήγησε σε υπολογισμό των εν λόγω γωνιών και στην κατανόηση της σύνδεσης της $\angle$ΑΒΖ, με τις $\angle$ ΑΒΓ και $\angle$ΖΒΓ.

Η ανάλυση αυτή δείχνει ότι στο δρόμο για την τελική απόδειξη, οι μαθητές σταδιακά βρήκαν νέα στοιχεία της κατάστασης (π.χ. τριγ. ΔΒΖ και $\angle$ΖΒΓ) και νέες σχέσεις, και συνειδητοποίησαν το ρόλο που θα μπορούσε να διαδραματίσει ένα συγκεκριμένο στοιχείο σε αυτή την κατάσταση. Παρά το γεγονός ότι κάποιες σχέσεις δεν αποδείχθηκαν πλήρως όταν τις παρατήρησαν, τους κατεύθυναν σε επόμενες εξερευνήσεις και τους οδήγησαν σε πιο βαθιές αντιλήψεις μέσα από αυτές τις εξερευνήσεις.

Όταν οι μαθητές παρατήρησαν την κρίσιμη σχέση, την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ, ΔΒΖ και ΕΖΓ, το DGS φάνηκε να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο.

Ο Πέτρος πειραματιζόμενος μετασχημάτισε το τρίγωνο ΑΒΓ ώστε να μοιάζει με ισοσκελές τρίγωνο , μετά χάλασε αυτή την ειδική περίπτωση ελαφρώς και παρατήρησε ότι τρ.ΔΒΖ =τρ. ΕΖΓ. Συνειδητοποίησε ότι τρ.ΑΒΓ= τρ. ΔΒΖ, όταν το DGS έδειξε μια άλλη ειδική περίπτωση, όπου το τρ.ΑΒΓ κατέρρευσε σε ευθεία και το σημείο Α ανήκε στη ΒΓ.

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η εμφάνιση της πρώτης ειδικής περίπτωσης και η κατάρριψη της τελευταίας ειδικής περίπτωσης ήταν πέρα από τις προθέσεις των μαθητών. Αυτά τα σχέδια προέκυψαν κατά τύχη.

Τα αναδυόμενα μοτίβα φάνηκε να ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών για την κατάσταση του προβλήματος. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό πλεονέκτημα του DGS που μπορεί να παράγει ορισμένες περιπτώσεις ή να τονίζει ορισμένα στοιχεία τα οποία οι μαθητές δεν έχουν τη δυνατότητα να διερευνήσουν εκ των προτέρων. (βλ. Nunokawa, 2006)

3.3 Συνοπτικά αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα μπορούν συνοψισθούν στα παρακάτω:

Φάση 1: Κατασκευή

Σε αυτή τη φάση τόσο οι φοιτητές όσο και οι μαθητές συζήτησαν μεταξύ τους και προσπάθησαν να αναπαραστήσουν σχηματικά την κατάσταση που περιγράφει το πρόβλημα (αλλαγή πλαισίου)

Οι πρωτοετείς φοιτητές συζήτησαν τις ερμηνείες των όρων «οικονομική κατασκευή» και «προστασία του οικολογικού περιβάλλοντος» και διατυπώθηκαν τα εξής:

- Οικονομική κατασκευή είναι εκείνη που έχει το χαμηλότερο δυνατό κόστος και τη μικρότερη δυνατή απώλεια ηλεκτρικής ενέργειας.
- Οικολογική κατασκευή είναι εκείνη που έχει τις λιγότερες δυνατές επιπτώσεις (μόλυνση, αισθητική αλλοίωση κ.λπ) στο περιβάλλον.

Κατόπιν προχώρησαν στη μοντελοποίηση του προβλήματος.

Μαθητές Α΄ Λυκείου: Πολλοί απ 'αυτούς μέτρησαν τις πλευρές του ΑΒΓ σ΄ ένα τυχαίο στιγμιότυπο και κατασκεύασαν τις πλευρές των ισόπλευρων τρίγωνων, ίσες με τα αντίστοιχα μέτρα.

Η έκπληξη τους ήταν μεγάλη ,όταν το παραμικρό σύρσιμο μιας κορυφής χάλασε την κατασκευή τους και άρχισαν να ρωτάνε ποια είναι η σωστή κατασκευή. Το σχήμα 17 δείχνει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κατασκεύασαν τελικά ένα ανθεκτικό σχήμα.

Φάση 2: Προσέγγιση του προβλήματος/ Πειραματισμός

Αφού συζήτησαν την κατάσταση, οι μαθητές προχώρησαν στη φάση πειραματισμού μέσω του συρσίματος. Οι φοιτητές ξεκίνησαν μετακινώντας το σημείο Ρ σε διάφορες θέσεις στο εσωτερικό του τριγώνου και ταυτόχρονα με χρήση του μενού «πινακοποίηση» συγκρίνανε τις μετρήσεις.

Όλοι οι μαθητές έκαναν την εικασία ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και επιβεβαίωσαν τις εικασίες τους, σύροντας τις κορυφές των τριγώνων σε νέες θέσεις.

Αξιολόγησαν τις μαθηματικές εικασίες τους, όχι μόνο οπτικά, αλλά και αριθμητικά με τη μέτρηση των πλευρών και των γωνιών του τετράπλευρου, επιβεβαιώνοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο, και έτσι επαλήθευσαν την εικασία τους.

Ο Αλέξης προσπάθησε να επιχειρηματολογήσει σχετικά με την παρ/λια των πλευρών ΔΖ και ΑΕ ως εξής:«… κατασκεύασε στην οθόνη ευθεία παράλληλη στην ΔΖ που να διέρχεται από το Α και διαπίστωσε, βλέποντας το σχήμα ότι συμπίπτει με την ΑΕ.

Εντύπωση προκάλεσε το γεγονός ότι, δύο μαθητές που δεν είχαν το θεωρητικό υπόβαθρο να κατασκευάσουν «ανθεκτικά» ισόπλευρα τρίγωνα, χρησιμοποίησαν τα εργαλεία μέτρησης για την κλίση για να δείξουν ότι οι απέναντι πλευρές του παραλληλόγραμμου είναι παράλληλες(σχ.17). Κατά την εξέλιξη της δραστηριότητας παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν διαφορετικές μορφές συρσίματος, στις διάφορες φάσεις της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος.

Στην παρούσα φάση οι μαθητές χρησιμοποίησαν το σύρσιμο περιπλάνησης (*wandering dragging*) για να διερευνήσουν το πρόβλημα μέσα από την κατασκευή του και να αναδιατάξουν την κατασκευασμένη εικόνα σύροντας την προς διαφορετικές κατευθύνσεις. Αυτή η εξερεύνηση οδήγησε τους μαθητές να σχηματίσουν τις δικές τους εικασίες σχετικά με τη λύση του προβλήματος, με την απεικόνιση των μετασχηματισμών που προέκυψαν από το σύρσιμο.

Φάση 3: Παραγωγή εικασιών και υποθέσεων

Η φάση πριν από την απόδειξη

Στη φάση της διερεύνησης για την παραγωγή μιας εικασίας χρησιμοποιήθηκε τα (*wandering dragging*) (σύρσιμο περιπλάνησης) και *guided dragging* (καθοδηγούμενο σύρσιμο)

Από τη στιγμή που ανακαλύπτεται μια ιδιότητα ή παράγεται μια εικασία αλλάζει ο τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος. Είναι φανερό ότι σ' αυτή τη φάση ο τρόπος σκέψης των μαθητών προσεγγίζει την αναλυτική μέθοδο.

Οι φοιτητές στο πρόβλημα του σταθμού θεωρούν ένα σημείο P, που ικανοποιεί την «αρχή της ελάχιστης διαδρομής», στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου (που αποτελεί την απλούστερη μορφή τριγώνου) και προσδιορίζουν μια ιδιότητά του. Στη συνέχεια κατασκευάζουν το σημείο P.

Οι δύο διαφορετικοί τρόποι κατασκευής του σημείου P από τους φοιτητές γίνονται με τη βοήθεια των εργαλείων του Sketchpad

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι και στις δύο δραστηριότητες η εστίαση σε μια ειδική περίπτωση (ισόπλευρου τριγώνου στην περίπτωση των φοιτητών και ισοσκελούς τριγώνου στην περίπτωση των μαθητών), ήταν ένα κρίσιμο στοιχείο που έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της κάθε δραστηριότητας .Τα αναδυόμενα μοτίβα φάνηκε να ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών για την κατάσταση του προβλήματος

Φάση 4: Οπτική εξήγηση

Η διερεύνηση του προβλήματος, όπως έγινε στην «φάση πριν από την απόδειξη» οδήγησε τους μαθητές να πειστούν για την εγκυρότητα της εικασίας τους. Αυτή η πεποίθηση επιτεύχθηκε μόνο με τη χρήση του δυναμικού περιβάλλοντος .Αρκετοί μαθητές δεν αισθάνθηκαν την ανάγκη να προχωρήσουν σε περαιτέρω επιχειρηματολογία και χρησιμοποίησαν σχεδόν αποκλειστικά την οπτική μέθοδο στην επίλυση της δραστηριότητας.

Φάση 5:Κατασκευή απόδειξης

Δυο από τους φοιτητές (Δ και Μ) που πήραν μέρος στην πρώτη δραστηριότητα (σημείο Fermat) μετά από παρέμβαση της καθηγήτριας προχώρησαν στην απόδειξη κατανοώντας ότι μετά την κατασκευή του σημείου P, χρειάζεται περαιτέρω εξήγηση και βεβαιότητα ότι το P είναι το ζητούμενο σημείο Fermat.

Η προσπάθεια του τρίτου φοιτητή (Λ) χαρακτηρίζεται από μια μεταγνωστική ικανότητα, όπου ταυτίζονται κατά κάποιο τρόπο οι διαδικασίες της κατασκευής και της απόδειξης

Στις στρατηγικές που εφάρμοσαν οι φοιτητές , είναι αξιοσημείωτη η παρουσία των μεθόδων κοντά στο ανάλυση και τη σύνθεση, καθώς και ο ρόλος της κατασκευής ως άξονας μεταξύ των δύο μεθόδων.

Όσον αφορά στη δεύτερη δραστηριότητα αυτής της μελέτης, αρκετοί μαθητές δεν έδειξαν περαιτέρω ανάγκη για εξήγηση ότι το τετράπλευρο είναι παρ/μο, κάποιοι απ' αυτούς, μετά από παρότρυνση της καθηγήτριας προσπάθησαν ν˙ αποδείξουν, ενώ πέντε περίπου μαθητές θέλησαν να εξηγήσουν γιατί θεωρούν ότι το συγκεκριμένο αποτέλεσμα που βλέπουν στην οθόνη είναι αλήθεια και τελικά κατασκεύασαν μια τυπική απόδειξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

4.1 Συμπεράσματα –Συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα για να απαντήσουν στα συγκεκριμένα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στο 2ο κεφάλαιο. Αναφέρονται επίσης οι περιορισμοί της έρευνας και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

Στην παρούσα εργασία έγινε προσπάθεια να αναδειχθούν οι τρόποι με τον οποίους τα δυναμικά περιβάλλοντα και συγκεκριμένα το Sketchpad μπορεί να παρέχει τη δυνατότητα στους μαθητές να περάσουν σταδιακά από τη «διερευνητική» γεωμετρία στην «αφαιρετική» γεωμετρία.
Όπως αναφέρθηκε και στα αποτελέσματα, η σταδιακή αυτή μετάβαση γίνεται μέσω πέντε φάσεων α)κατασκευή β)πειραματισμός γ)παραγωγή εικασιών και επιχειρηματολογία δ) Οπτική εξήγηση και ε) απόδειξη, τα στοιχεία των οποίων αναλύθηκαν στα αποτελέσματα.

Το πλαίσιο που καθορίσαμε για να αναλύσουμε τα αποτελέσματα της έρευνας ενσωματώνει και επεκτείνει διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις που επικεντρώνονται στη λειτουργία του συρσίματος.

Σε όλες τις παραπάνω φάσεις το σύρσιμο έπαιξε καθοριστικό ρόλο μ' ένα συγκεκριμένο τρόπο παρέχοντας άμεση ανατροφοδότηση στους μαθητές, αφού τους επίτρεψε να δουν όσα περισσότερα παραδείγματα είναι απαραίτητα μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα, να κάνουν μετρήσεις και να συγκρίνουν τ' αποτελέσματα, κάτι που δεν μπορούσε να συμβεί σ' ένα παραδοσιακό στατικό περιβάλλον με χαρτί και μολύβι. Κατά τη διάρκεια αυτής της μελέτης, η καθηγήτρια σημείωσε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποίησαν το σύρσιμο.

Διαφορετικοί τύποι συρσίματος σημειώθηκαν, το καθένα με τα δικά του χαρακτηριστικά και σκοπούς. Το *τυχαίο σύρσιμο (σύρσιμο περιπλάνησης)* ήταν σποραδικό και ασταθές . Οι περισσότεροι μαθητές το χρησιμοποίησαν για σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα, παρακολουθώντας τον τρόπο που διάφορες συνιστώσες του σχήματος συμπεριφέρονταν κατά τη διάρκεια του συρσίματος και για να δοκιμαστεί η ευρωστία του σχήματος.

Σύρσιμο για αναγνώριση του μοτίβο (καθοδηγούμενο σύρσιμο): ήταν ασταθές με παύσεις για να διατηρούνται οι μετρήσεις. Αυτό το είδος της συρσίματος φάνηκε να είναι όντως απαραίτητο για να οδηγήσει σε εικασίες βασισμένες στις αλλαγές που εμφανίζονται στο σχήμα και τις μετρήσεις με παύσεις για να παρατηρήσουν και να εξετάσουν αυτές τις αλλαγές.

Σύρσιμο για ένα συγκεκριμένο σκοπό: χαρακτηρίστηκε από μικρές και προσεκτικές κινήσεις που χρησιμοποιούνται για παράγουν ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Αυτού του είδους το σύρσιμο ήταν πράγματι απαραίτητο για να βρεθούν αντι-παραδείγματα σε ψευδείς εικασίες και για δοκιμή για συγκεκριμένες ιδιότητες των σχημάτων.

Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτά τα διαφορετικά είδη συρσίματος παρατηρήθηκαν καθ' ον χρόνον οι συμμετέχοντες έβρισκαν και επιβεβαίωναν εικασίες. Τ' αποτελέσματα δείχνουν ότι ακόμα και με λίγη εκπαίδευση, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν το σύρσιμο σε ένα δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας, να βελτιώσουν σημαντικά την ικανότητά τους για πειραματισμό και εικασία στην γεωμετρία και μάλιστα σημαντικά, την πεποίθηση στις εικασίες τους, ακόμη και χωρίς την ικανότητα να κατασκευάσουν σχήματα από μόνοι τους. Η μελέτη έδειξε επίσης ότι το δυναμικό περιβάλλον προωθεί την ισότητα μεταξύ των μαθητών των διαφόρων επιπέδων επίδοσης, και ως εκ τούτου πρέπει να είναι προσβάσιμο σε όλους τους μαθητές, (NCTM, 2000, σ. 12), είναι πολύ πιο ελκυστικό για τους μαθητές και πολύ πιο ευχάριστο και οι συζητήσεις και αντιπαραθέσεις που γίνονται μεταξύ τους, έχουν σχέση με τις γεωμετρικές δραστηριότητες.

Στην αρχή της διαδικασίας οι μαθητές εξέφρασαν ελεύθερα τις απόψεις τους για το πώς θα δράσουν (brainstorming), ενώ στο τέλος διεξήχθη μια γενική συζήτηση ανάλυσης των σημαντικών γεγονότων ,ενεργειών και δυσκολιών που εμφανίστηκαν κατά την αλληλεπίδραση (debriefing session). Στις εξηγήσεις χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές γλώσσα που αντανακλά το περιβάλλον (όπως σύρσιμο ,μετακίνηση ,περιστροφή) και ως μέσο επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών και της καθηγήτριας. Οι μαθητές δεν περίμεναν από την καθηγήτρια να τους πει τι θα κάνουν.

Η καθηγήτρια είχε μόνο την ευθύνη του συντονισμού και της διαμεσολάβησης και συγκεκριμένα: Σχημάτισε τις ομάδες των μαθητών, διαχειρίστηκε το σύνολο των ομάδων και αξιοποίησε τις διαφορετικές προσεγγίσεις μεταξύ των ομάδων ,διευκολύνοντας τη μαθησιακή διαδικασία.

Το **Sketchpad** επιτρέπει στους μαθητές να χειριστούν τα διαγράμματα εύκολα, επιτρέποντας τους έτσι να επικεντρωθούν στις διάφορες σχέσεις και μοτίβα (patterns) που εμφανίζονται στην οθόνη και στις απαιτούμενες μετρήσεις (Lester 1996).

Στην παρούσα έρευνα οι μαθητές ανέπτυξαν εικασίες, γενικεύοντας τα μοτίβα (patterns)που ξεδιπλώθηκαν κατά τη διάρκεια των εξερευνήσεων στην οθόνη του Sketchpad. Η αναγνώριση προτύπων (patterns)μπορεί να ενθαρρυνθεί από την δυνατότητα να χειριστούν τα διαγράμματα και να παρατηρούν τις αλλαγές.(NCTM,2001)

Ξεδιπλώθηκαν οι δυνατότητες της δυναμικής γεωμετρίας με την ανάπτυξη του κατάλληλου μαθησιακού περιβάλλοντος, ώστε να είναι σε θέση οι μαθητές να οδηγηθούν, μέσα από τις φάσεις της εξερεύνησης, στην ανακάλυψη της δομής και των διακλαδώσεων γεωμετρικών εννοιών και θεωρημάτων και στη συνέχεια να φθάσουν στο επίπεδο της απόδειξης που απορρέει από αποδεκτές προτάσεις και είναι δυνατόν να οδηγήσει στην βεβαιότητα.

Ο De Villiers (1996) ισχυρίζεται ότι με το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας έχει αναζωογονηθεί η διδασκαλία της γεωμετρίας σε πολλές χώρες όπου η Ευκλείδεια γεωμετρία βρισκόταν σε κίνδυνο να ριχτεί στα σκουπίδια της ιστορίας!

Απ' όλα τα παραπάνω συνάγεται το συμπέρασμα ότι ο δάσκαλος είναι αυτός που καλείται να εφαρμόσει ειδικές στρατηγικές στη σχολική τάξη, προκειμένου μέσω της δραστηριότητας και τα αλληλεπίδρασης με το DGS να επιτευχθούν τα επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα.

«...Μια γνωστική διαδικασία δεν αναδύεται αυθόρμητα μέσα από την παρατήρηση αξιοθαύμαστων σχημάτων τα οποία κινούνται στην οθόνη του

υπολογιστή. Είναι δυνατόν να υλοποιηθεί σε ένα προσεκτικά οργανωμένο και προσανατολισμένο περιβάλλον για μάθηση. Αυτό σημαίνει ότι ό ρόλος του εκπαιδευτικού παραμένει πρωταρχικός και η μόνη διαφορά είναι ότι ο εκπαιδευτικός έχει πλέον στη διάθεσή του ένα σύνολο ισχυρών εργαλείων για να οργανώσει το περιβάλλον μάθησης. Αυτό, κατά μια έννοια, κάνει τον ρόλο του περισσότερο πολύπλοκο.»

Colette Laborde

Η Laborde (1998) επισημαίνει ότι θα χρειαστεί πολύς χρόνος για τους εκπαιδευτικούς να προσαρμόσουν τη διδασκαλία τους για να επωφεληθούν από την τεχνολογία. Αναφέρει τρεις τυπικές αντιδράσεις των εκπαιδευτικών στην «αναταραχή» που προκαλείται από την εισαγωγή του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας στην διδακτική-μαθησιακή κατάσταση .

a) αγνοούν την «αναταραχή» (perturbation)
b) ενσωματώνουν την αναταραχή στο σύστημα μέσω μερικών αλλαγών.
c) η αναταραχή ξεπερνιέται και χάνεται ο διαταρακτικός χαρακτήρας. (Σελ. 2)

Είναι μόνο κατά το τελευταίο στάδιο (c) όπου οι εκπαιδευτικοί κάνουν μια προσαρμογή στη διδασκαλία τους, που ενσωματώνει πραγματικά την τεχνολογία. Καθώς όλο και περισσότεροι εκπαιδευτικοί υιοθετούν την (c) αντίδραση, έχουμε τόσο την ευκαιρία όσο και την ευθύνη για την προσεκτική έρευνα των συνεπειών και των αποτελεσμάτων από την ενσωμάτωση της δυναμικής γεωμετρίας στη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας και των μαθηματικών γενικότερα.

4.2 Περιορισμοί της έρευνας

Ένας από τους σημαντικότερους περιορισμούς για τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας, ήταν το γεγονός ότι οι συμμετέχοντες, δεν γνώριζαν από πριν το Sketchpad και ενεπλάκησαν σε μια τέτοια μαθησιακή διαδικασία (συνεργατική μάθηση, δυναμικό περιβάλλον) για πρώτη φορά.

Η Jones (2001) επισήμανε τις δυσκολίες που μπορεί να έχουν οι μαθητές στην προσαρμογή στο δυναμικό περιβάλλον γεωμετρίας. Οι μαθητές επικεντρώνονται στο προϊόν της οθόνης κατά την κατασκευή του, σε βάρος του προβληματισμού. Τροποποιούν το σχήμα για να φανεί σωστό, αντί να εντοπίσουν (διορθώσουν) τα σφάλματα κατά τη διαδικασία κατασκευής.

Πράγματι, μπορεί να απαιτείται για μερικούς μαθητές ένα σημαντικό χρονικό διάστημα και εξάσκηση για να αξιοποιηθούν οι δυνατότητες του περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας, όσον αφορά τις κατάλληλες τεχνικές κατασκευής και εικασιών στη γεωμετρία.

Ένας άλλος περιορισμός είναι ο αριθμός των συμμετεχόντων, καθώς επίσης και το γεγονός ότι η καθηγήτρια δεν διδάσκει στην τάξη τους, για να γνωρίζει το γεωμετρικό υπόβαθρο των μαθητών.
Επίσης υπήρχαν και χρονικοί περιορισμοί, δεδομένου ότι πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του σχολικού ωραρίου.

4.3 Πιθανές αρνητικές συνέπειες

Η έρευνα αποκάλυψε μερικές από τις πιθανές αδυναμίες και τις παρανοήσεις των μαθητών κατά τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας . Επεσήμανε πως μπορεί να καθίσταται δυσχερής για τους μαθητές η διάκριση μεταξύ εικασιών και αποδείξεων ή μεταξύ επαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού.

Ο De Villiers (1995),επισήμανε ότι, είναι η παρέμβαση του δασκάλου, που βοηθά να οικοδομηθεί ο επαγωγικός συλλογισμός από τις παρατηρήσεις που γίνονται με το δυναμικό λογισμικό γεωμετρίας….., αν και το τελικό προϊόν δεν είναι μόνο η παραγωγή της απόδειξης.

Οι Goldenburg και Cuoco (1996) δήλωσαν τα εξής, σχετικά με τη χρήση των δυναμικών λογισμικών γεωμετρίας:

«Αν οι πιθανοί κίνδυνοι και οι παγίδες φαίνονται μεγαλύτερες και πιο πολυάριθμες από ό, τι μπορεί κανείς να φανταστεί, είναι επίσης σαφές ότι οι ευκαιρίες και τα οφέλη είναι πάρα πολύ σημαντικά για να αγνοηθούν.» …….και σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία ... «Πρέπει να έρθουμε να καταλάβουμε το νέο έδαφος καλά, έτσι ώστε η τραχύτητα (δυσκολία) του να γίνει μέρος της ομορφιάς του και όχι αφορμή για δυσφήμιση» (Σ. 30)

4.4 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Οι μαθητές που συμμετείχαν στην παρούσα εργασία δεν είχαν καμία προηγούμενη εμπειρία μάθησης της γεωμετρίας σε δυναμικό περιβάλλον. Ενδεχομένως τα αποτελέσματα να είναι διαφορετικά, αν η έρευνα πραγματοποιηθεί σε μαθητές- προχωρημένους χρήστες DGS

Προτείνεται επίσης να χρησιμοποιηθεί το Cabri ή κάποιο άλλο λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας για τον ίδιο ερευνητικό στόχο και να συγκριθούν τα αποτελέσματα.

Να αξιολογηθούν εικασίες που παράγονται από δραστηριότητες που συνδυάζουν στατικό και δυναμικό περιβάλλον.

Η αναπαραγωγή αυτής της έρευνας ή μια έρευνα παρόμοια με αυτή, που να χρησιμοποιεί ένα μεγαλύτερο δείγμα μαθητών και για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, μπορεί να παράγει διαφορετικά αποτελέσματα, να ενισχύσει και να επεκτείνει τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας .

ΑΝΑΦΟΡΕΣ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Accascina G. at all(2005)Making Bad Conjectures and Incomplete Proofs with Good Drawings within a Dynamic Geometry Environment,7th International Conference on Technology in Mathematics Teaching Bristol.

2) Antonini, S. & Mariotti, M. A.(2007) Abduction and the Explanation of Anomalies: The Case of Proof by Contradiction (Instruments and representations in the teaching and learning of mathematics: theory and practice)

3) Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments, International Reviews on Mathematical Education, Vol. 34(3), 66-72.

4) Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M.A. (2009). Conjecturing and Proving in Dynamic Geometry: the Elaboration of some Research Hypotheses. Inrpoceedings of CERME 6, Lyon, France

5) Baccaglini-Frank A., (2011) ,Abduction in Generating Conjectures in Dynamic Geometry through Maintaining Dragging, In Proceedings of CERME 7, Poland from http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/index.php

6) Battista, M.T., & Clements, D.H. (1995). Geometry and proof. Mathematics Teacher, 88, 48-54.

7) Brad Glass & Walter Deckert (2001) Making Better Use of Computer Tools in Geometry, The National Council of Teachers of Mathematics, Vol. 94, No. 3

8) Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. Educational Studies in Mathematics, 24(4), 359-387.

9) Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. & Pitta -Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. In: Proceeding of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education. Vol 2, Pp. 215-222.

10)Davis P. J. (1993) Visual Theorems, Educational Studies in Mathematics 24: 333-344.

11)De Villiers, M.(1999). The role and function of proof with Sketchpad. Rethinking Proof with Sketchpad, Key Curriculum Press. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proof.pdf.

12) De Villiers, M. (2000). Students" needs for conviction and explanation within the context of dynamic geometry. In: Pythagoras, 52, Pp. 20-23. Retrieved February 23, 2008 from: http: // mysite. mweb. co.za / residents/profmd/vim.pdf.

13)De Villiers, M. (2002). Developing Understanding for Different Roles of Proof in Dynamic Geometry. In: Prof Mat 2002, Visue, Portugal, 2-4

14)De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. In: International journal of mathematical education in science and technology, Vol. 35, No. 5 (2004), Pp. 703-724

15)De Villiers, M. (2006). Rethinking proof with The Geometer's Sketchpad. 4. Aufl. Emmeryville, CA: Key Curriculum Press.

16)De Villiers, M. (2007). Proof in Dynamic Geometry: More than Verification, from:http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_charlotte_deVilliersPaperEdit.pdf.

17)Douek N. (2007) Approaching Proof in School: From Guided Conjecturing and Proving to a Story of Proof Constructions (Instruments and representations in the teaching and learning of mathematics: theory and practice)

18)Dreyfus, T. (1999) ,Why Johnny can't prove: Educational Studies in Mathematics 38: 85-109.

19) Furinghetti, F. & Paola, D.: 2003, 'To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: a case study, Proceedings of the 27th Conference of the PME, 2, 397-404. Honolulu

20)Gawlick, T (2000) Towards a Theory of Visualization by Dynamic Geometry Software Paradigms, Phenomena, Principles

21)Gawlick, T. (2002). On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom. International Reviews on Mathematical Education, 34(3), Pp. 85 - 92. from: http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm023a5.pdf.

22)Gravina M. A.(2008) Dynamical visual proof: what does it mean? ,ICME 11 - TSG 22 Mexico

23)Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. 2001. The Role of Contradiction and Uncertainty in Promoting the Need to Prove in Dynamic Geometry Environments. Educational Studies in Mathematics. Vol. 44, Issue 1/2, p127, 24p.

24)Hanna, G (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof Interchange, Vol. 21, No. 1, 6-13 The Ontario Institute for Studies in Education

25)Hanna, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. Proceedings of the 20th Conference of the PME, 1, 21-34. Valencia, Spain.

26) Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. Educational Studies in Mathematics, Special issue on "Proof in Dynamic Geometry Environments", 44 (1-2), Pp. 5-23.

27)Healy, L. & Hoyles, C. (1998). Justifying and proving in school mathematics. London: Institute of Education, University of London.

28)Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. Proceedings of the CERME 3, Bellaria, Italian. http://www.lettredelapreuve.it/CERME3Papers/ Heinze-paper1.pdf

29)Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. Educational Studies in Mathematics, 24(4), 389-399.

30) Hölz, R. 1996. How Does “Dragging” Affect the Learning of Geometry? International Journal of Computers for Mathematical Learning 1: 169-187.

31)Holzl, R. (2001). Using Dynamic Geometry Software to Add Contrast to Geometric Situations--A Case Study. In: International Journal of Computers for Mathematical Learning, Vol. 6 N. 1, Pp. 63-86.

32)Jackiw, N. (1991). The geometer’s sketchpad (computer software). Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

33)John M. Gillis(Dissertation, 2005) An Investigation of Student Conjectures in Static and Dynamic Geometry Environments

34)Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. Educational Studies in Mathematics. 44 (1/2) , 55-85

35)Jones, K. (2001). Learning geometrical concepts using dynamic geometry software. In: Irwin, K. (ed.), Mathematics Education Research: A catalyst for change. Auckland, New Zealand, University of Auckland, Pp. 50-58.

36)Kai-Lin Yang & Fou-Lai Lin (2008) A model of reading comprehension of geometry proof, Educ. Stud. Math.

37)Καστάνης Ν.(2006) Η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών από τη σκοπιά των Εννοιολογικών Αλλαγών, ΑΠΘ

38)Κολέζα Ευγενία (2003) Νοητικές Διεργασίες Ανάπτυξης Γεωμετρικών Εννοιών, Πρακτικά 2ου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

39)Knuth, E. J. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. In: Journal for research in mathematics education, S. Vol. 33, No. 5, Pp. 379-405.

40)Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Proof in middle school: Moving beyond examples. Mathematics Teaching in the Middle School, 15(4), 206-211.

41)Κυνηγός Χ, Φράγκου Σ (2005) Πτυχές της παιδαγωγικής αξιοποίησης της Τεχνολογίας Ελέγχου στην Σχολική Τάξη: 2ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή.

42)Κυνηγός, Χ. (2006),Το Μάθημα της Διερεύνησης , Αθήνα: εκδ. Ελληνικά Γράμματα

43)Κυνηγός, Χ. (2007),Μαθηματική Εκπαίδευση ,Πρόχειρες σημειώσεις του μαθήματος Παιδαγωγικά (για τους φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος). Πανεπιστήμιο Αθηνών, Φιλοσοφική σχολή, Τμήμα Φ.Π.Ψ., Τομέας Παιδαγωγικής. Αθήνα

44)Κυνηγός Χ., Ψυχάρης Γ. , Γαβρίλης Κ., Κεΐσογλου Σ. (2008) Επιμορφωτικό Υλικό για την Επιμόρφωση των Εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης, Τεύχος 4:ΠΕ03

45)Laborde, C. (2000). Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving. In: Educational studies in mathematics, Vol. 44, No. 1/2 (2000), Pp. 151-161.

46)Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., and Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In A. Gutiérrez, P. and Boero (Eds.) Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. 275-304.

47)Larios Víctor -Osorio (2009) Geometrical Proof in the Institutional Classroom Environment, ICMI Study 19 , Taiwan.

48)Mariotti, M. A. (2000) Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. Educational Studies in Mathematics.44 (1/2),25-53

49)Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in Cabri environment. International Journal of Computers for Mathematical Learning 6 (1), 257-281.

50)Mariotti, M.A. (2006) Proof and proving in mathematics education. A. Gutiérrez & P.Boero (eds) Handbook of Research on the Psychology of

Mathematics Education, Sense Publishers, Rotterdam, The Netherlands. ISBN: 9077874194, pp. 173-204.

51)Marrades, R. & Gutierrez, A. (2000). Proofs Produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. In: Educational studies in mathematics, Vol. 44, Pp. 87-125.

52)Μείζον πρόγραμμα επιμόρφωσης- Επιμορφωτικό υλικό τόμος Δ (2012):Θέματα αξιοποίησης της ομάδας στη σχολική τάξη

53)Moore, R., 1994, 'Making the transition to formal proof', Educational Studies in Mathematics, v.27, 249-266.

54)NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Principles and Standards for School Mathematics, Commission on Standards for School Mathematics. Reston VA: NCTM. http://www.maa.org/

55)NCTM (2009). Guiding principles for mathematics curriculum and assessment. Retrieved January, 2010 from: http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=23273

56)Núñez Rafael E. (2000), Mathematical Idea Analysis: What embodied Cognitive Science can say about the Human Nature of Mathematics, Proceedings of the 24th International Conference, Psychology of Mathematics, Hiroshima, Japan, July 19 – 26, , Vol. 1, pp. 3 -22

57)Nunokawa, K.; Fukuzawa, T. (2002). Questions during problem solving with dynamic geometric software and understanding problem situations. Proceedings of the National Science Council, Republic of China, Part D: Mathematics, Science, and Technology Education, 12 (1), 31-43. from: http://nr.stpi.org.tw/ejournal/ProceedingD/v12n1/31-43.pdf

58)Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. In: Journal of mathematical behavior, Voll. 24, Pp. 325–340.

59)Nunokawa, K.& Fukuzava T. (2008),Operating on and Understanding of Problem Situations in Proving, ICME 11, Mexico

60)Olive, J. (2000). Using Dynamic Geometry Technology: Implications for Teaching, Learning & Research. In M. O. J. Thomas (Ed.) Proceedings of TIME 2000 - An International Conference on Technology in Mathematics Education, 226-235. Auckland, New Zealand.

61)Olivero, F.; Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. International journal of Computers for Mathematical Learning, 12, Pp. 135-156.

62)Papert, S. (1991) Νοητικές θύελλες, από τις εκδόσεις Οδυσσέας.

63)Patsiomitou, S., (2008). The development of students' geometrical thinking through transformational processes and interaction techniques in a dynamic geometry environment. Issues in Informing Science and Information Technology journal. Eds (Eli Cohen & Elizabeth Boyd) Vol.5 pp.353-393.Published by the Informing Science Institute Santa Rosa, California USA.

64)Polya G. (1991), «Πως να το λύσω », εκδόσεις Καρδαμίτσα.

65)Πρακτικά 2ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ, Αλεξανδρούπολη, 2007

66)Raman, M. & Weber, K. (2006). Key Ideas and Insights in the context of Three High School Geometry Proofs. Mathematics Teacher, Vol. 99, No. 9.

67)Ράπτης, Α., Ράπτης,Α.(2004) Μάθηση και διδασκαλία στην εποχή της πληροφορίας, Τόμοι Α΄,Β΄

68)Ross, W.D.(1993) «Αριστοτέλης» β΄ έκδοση: Μορφωτικό ίδρυμα Εθνικής Τράπεζας

69)S. L. Wong et al. (Eds.) (2009). A computer-assisted learning system for exploring geometry conjectures online: Proceedings of the 17th International Conference on Computers in Education. Hong Kong: Asia-Pacific Society for Computers in Education

70)S. L. Wong et al. (Eds.) (2010). Drawing Dynamic Geometry Figures with Natural Language: Proceedings of the 18th International Conference on

Computers in Education. Putrajaya, Malaysia: Asia-Pacific Society for Computers in Education.

71) Talmon V.& Yerushalmy M. (2006) Computer "Knowledge" and student's Images of Figures: The Case of Dragging, Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 5, pp. 241-248. Prague: PME.