Φαινόμενο συντονισμού σε διπλές χρονοσειρές

Φώτης Μπαϊρακτάρης ΑΜ:201124

Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής Θ. Αποστολάτος

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Σκοπός της Εργασίας

Σε πολλά φυσικά συστήματα, υπάρχει το πρόβλημα ότι δεν μπορούμε να τα ολοκληρώσουμε ακριβώς, έτσι καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους για να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά κάποιων ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν. Μία από τις μεθόδους που είναι ευρέως διαδεδομένες είναι η ανάλυση σε δύο χρονικές κλίμακες. Πρόκειται για κλίμακες που σχετίζονται με χαρακτηριστικούς χρόνους του συστήματος, και απέχουν τάξεις μεγέθους μεταξύ τους, ώστε να μπορούμε να συσχετίσουμε διαφορετικές συμπεριφορές του συστήματος με κάποια από τις δύο με σαφή τρόπο.

Ένα παράδειγμα που έχει ιδιαίτερη εφαρμογή στην Αστροφυσική είναι τα EMRI's (Extreme Mass Ratio Inspirals). Πρόκειται για συστήματα δύο μαζικών σωμάτων, το μαζικότερο από τα οποία είναι μία μελανή οπή Kerr, ενώ το δεύτερο μπορεί να είναι οποιοδήποτε συμπαγές αντικείμενο, η γεωμετρία γύρω από το οποίο είναι επίσης Kerr . Σε τέτοια συστήματα, η αρχική προσέγγιση που γίνεται είναι η θεώρηση ότι το συμπαγές αντικείμενο κινείται όπως ένα σωματίδιο που βρίσκεται στο χωρόχρονο της μεγάλης. Έπειτα η αλληλεπίδραση των βαρυτικών πεδίων των δύο σωμάτων εισάγεται ως εξωτερική δύναμη στις εξισώσεις κίνησης (κάτι σαν ανάδραση ακτινοβολίας). Τέτοια συστήματα θεωρούνται από τις καλύτερες πιθανές πηγές βαρυτικών κυμάτων, για αυτό και έχει ιδιαίτερη σημασία να υπάρχει ένα μοντέλο που να μπορεί να μας προβλέψει με ακρίβεια τις κυματομορφές που θα παραχθούν. Για να μπορούν να ανιχνευθούν βαρυτικά κύματα, θέλουμε μεγάλη ακρίβεια στη διαφορά φάσης μεταξύ του πραγματικού κύματος και του μοντέλου μας. Ενδεικτικά, η διακριτική ικανότητα των καλύτερων ανιχνευτών που υπάρχουν αυτή τη στιγμή, δεν ανιχνεύει κυματομορφές που έχουν διαφορά φάσης της τάξης του ενός κύκλου στους χίλιους. Επομένως, κάθε διόρθωση στο μοντέλο που μπορεί να βελτιώσει την ακρίβεια είναι απαραίτητη.

Η μέθοδος της ανάλυσης σε δύο χρονικές κλίμακες μπορεί να βοηθήσει πολύ στην εξαγωγή κυματομορφών στα EMRI's. Οι χρόνοι που χρησιμοποιούνται είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος που το συμπαγές αντικείμενο κάνει έναν πλήρη "κύκλο" γύρω από την μαζική οπή (μικρή χρονική κλίμακα), και ο χρόνος στον οποίο αλλάζει μία από τις διατηρούμενες ποσότητες κατά την κίνηση ενός σωματιδίου σε μελανή οπή Kerr. Η αλλαγή αυτή συμβαίνει λόγω της δύναμης που δέχεται το συμπαγές σώμα λόγω της παραμόρφωσης του βαρυτικού πεδίου της μελανής οπής. Στο εξής, θα ονομάζουμε τη μικρή χρονική κλίμακα "γρήγορο χρόνο", τη μεγάλη "αργό χρόνο", και τη δύναμη που ασκείται στη μικρή μελανή οπή "δύναμη ανάδρασης".

Σχετικά πρόσφατα, δημοσιεύθηκε [1] μία εργασία η οποία ανέφερε πως το φαινόμενο του συντονισμού, το οποίο μπορεί να συμβεί σε ένα σύστημα δύο σωματιδίων στη γενική σχετικότητα, μπορεί να προκαλέσει μεγάλα σφάλματα στον υπολογισμό της φάσης των κυματομορφών. Προτάθηκε μία διαφορετική αντιμετώπιση του προβλήματος, διαμορφώνοντας κατάλληλα την ανάλυση σε δύο χρονικές κλίμακες. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να εξηγηθεί η ανάλυση, να εκτιμηθεί το μέγεθος των σφαλμάτων, και να παρουσιαστεί ένα μηχανικό ανάλογο το οποίο θα μπορεί να μας δώσει μία πειστική απάντηση για την ακρίβεια και εγκυρότητα της μεθόδου.

1.2 Γενικά για τις μεθόδους εξαγωγής κυματομορφών

Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία, έχουμε τη μάζα του συμπαγούς αντικειμένου να είναι αρκετά μικρότερη από τη μάζα της μελανής οπής. Ορίζουμε λοιπόν την παράμετρο

$$\varepsilon \equiv \frac{\mu}{M} << 1$$

όπου μ είναι η μάζα του συμπαγούς αντικειμένου, και M η μάζα της οπής. Αυτή η παράμετρος θα παίξει ρόλο στη συνέχεια στον ορισμό του αργού χρόνου. Το σύστημα μονάδων που θα χρησιμοποιήσουμε λέγεται γεωμετρικό, και χρησιμοποιείται ευρέως στις εφαρμογές της ΓΘΣ. Σε αυτό το σύστημα ο χρόνος και η μάζα έχουν τις ίδιες μονάδες. Αυτό θα χρησιμεύσει στην ποσοτική εξήγηση κάποιων μεγεθών.

Σε μικρές χρονικές κλίμακες $\sim M$, το συμπαγές αντικείμενο κινείται σε μία γεωδαισιακή του χωρόχρονου Kerr της μαζικής οπής. Η κίνηση τότε έχει τα τρία γνωστά ολοκληρώματα σωματιδίου που κινείται σε χωρόχρονο Kerr, δηλαδή την ενέργεια E, την στροφορμή L_z και την σταθερά Carter Q. Σε μεγαλύτερες χρονικές κλίμακες $\sim M/\varepsilon$, η δύναμη ανάδρασης αρχίζει να παίζει σημαντικό ρόλο και τα ολοκληρώματα της κίνησης αρχίζουν να εξελίσσονται αδιαβατικά με τον χρόνο (οι μεγαλύτεροι χρόνοι θα αναφέρονται ως χρονικές κλίμακες δύναμης ανάδρασης). Στην περίπτωσή μας δεν θα απασχολήσει η εσωτερική δομή του λιγότερου μαζικού αντικειμένου, η οποία στις περισσότερες περιπτώσεις μπορεί να αγνοηθεί [2], συνεπώς θα θεωρηθεί ως σημειακό αντικείμενο. Ακολουθεί μία συνοπτική περιγραφή των μεθόδων εξαγωγής κυματομορφών στα EMRI's.

1.2.1 Μέθοδοι εξαγωγής κυματομορφών

Αριθμητικές μέθοδοι

Οι αριθμητικές μέθοδοι δεν έχουν εφαρμοστεί ακόμα στην περίπτωση $\varepsilon << 1$. Η πιο κοντινή προσέγγιση που έχει γίνει είναι για $\varepsilon \sim 1$, αλλά όσο το ε μικραίνει αρχίζουν να εμφανίζονται διάφορα προβλήματα: i)Οι χρονικές κλίμακες της τροχιάς και της δύναμης ανάδρασης διαφέρουν κατά ένα παράγοντα $1/\varepsilon$. Αυτό οδηγεί σε ένα μεγάλο αριθμό κύκλων του κύματος, το οποίο με τη σειρά του οδηγεί σε εξαιρετικά μεγάλο χρόνο υπολογισμού. ii)Υπάρχει διαφορά και στις χωρικές κλίμακες. Το "σημειακό αντικείμενο" είναι μικρότερο της μαζικής μελανής οπής κατά ένα παράγοντα ε. iii) Το σημαντικότερο πρόβλημα με αυτή τη μέθοδο είναι ότι στη ζώνη όπου το βαρυτικό πεδίο του συμπαγούς αντικειμένου είναι ισχυρό, η διαταραχή στη μετρική η οποία είναι υπεύθυνη για τη δύναμη ανάδρασης είναι τάξης ε. Επειδή χρειάζεται τα σφάλματα στη δύναμη ανάδρασης να είναι τάξης ε, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η απαιτούμενη ακρίβεια στη διαταραχή της μετρικής είναι τάξης ε^2. Αυτές οι δυσκολίες δείχνουν ότι οι αριθμητικές μέθοδοι φαίνεται εξαιρετικά δύσκολο να εφαρμοστούν στο άμεσο μέλλον, εκτός εάν αναπτυχθεί κάποια διαφορετική τεχνική, η οποία θα επιταχύνει κατά πολύ τους υπολογισμούς.

Χρήση Μετά-Νευτώνειων Μεθόδων

Με τη χρήση προσεγγίσεων που βασίζονται σε επέκταση της Νευτώνειας φυσικής μπορούν να εξαχθούν κυματομορφές που έχουν την ίδια ποιοτική συμπεριφορά με τις πραγματικές [2]. Ένας άλλος τρόπος να γίνει αυτό είναι υβριδικές μέθοδοι που περιέχουν κάποια μετά-

Νευτώνεια στοιχεία [3,4,5]. Ενώ αυτές οι μέθοδοι δεν επαρκούν για την ανίχνευση και ακριβή ανάλυση των σημάτων, έχουν αποδειχθεί χρήσιμες για την προσέγγιση της ανιχνευσιμότητας των συμβάντων της τροχιάς για τους ανιχνευτές LIGO [6] και LISA[3,7]. Το πλεονέκτημά τους είναι ότι μπορούν να υπολογιστούν σχετικά γρήγορα.

Θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται εδώ και πολλά χρόνια για τον υπολογισμό βαρυτικών κυματομορφών που εκπέμπονται από σωματίδια τα οποία κινούνται σε γεωδαισιακές του χωρόχρονου της μελανής οπής [8,9,10,11,12]. Πρόσφατα [13,14,15] έχει επεκταθεί και σε πιο γενικές τροχιές, χωρίς τον περιορισμό να αποτελούν γεωδαισιακές καμπύλες. Ωστόσο, το μεγάλο μειονέκτημα της θεωρίας διαταραχών πρώτης τάξης είναι ότι παράγει "στιγμιαίες" κυματομορφές που αγνοούν τη δύναμη ανάδρασης. Αυτό οδηγεί σε σφάλμα φάσης μετά από χρόνο $\sim M/\sqrt{\varepsilon}$, οπότε η χρησιμότητα της μεθόδου είναι περιορισμένη.

Θεωρία διαταραχών δεύτερης τάξης

Μία πολύ καλύτερη προσέγγιση από την προηγούμενη είναι η δεύτερης τάξης θεωρία διαταραχών [16,17,18]. Σε αυτή την τάξη, στην εξίσωση κίνησης του σωματιδίου στις γεωδαισιακές πρέπει να προστεθεί (ως εξωτερική διέγερση) η δύναμη ανάδρασης, που προκύπτει από την παραμόρφωση του χωρόχρονου του συμπαγούς αντικειμένου. Αν και είναι γνωστή μία αναλυτική έκφραση για τη δύναμη αυτή [19,20], είναι εξαιρετικά δύσκολο να χρησιμοποιηθεί για αριθμητικούς υπολογισμούς στην περίπτωση της Kerr, επειδή είναι περίπλοκο το να ομαλοποιηθεί η συμπεριφορά του πεδίου της δύναμης ανάδρασης.

Όταν ολοκληρωθούν οι υπολογισμοί, αυτή η μέθοδος θα είναι καλή προσέγγιση για τον υπολογισμό της τροχιάς και των κυματομορφών, αλλά μόνο σε μικρές χρονικές κλίμακες. Όπως και στην θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης, μετά από χρόνο $\sim M/\sqrt{\varepsilon}$ [21,22] θα έχουμε μεγάλο σφάλμα στη φάση. Επομένως, πρέπει κανείς να στραφεί σε άλλες μεθόδους για να περιγράψει πλήρως ένα σύστημα μελανής οπής-συμπαγούς σώματος.

Χρήση νόμων διατήρησης

Αυτή η μέθοδος επιτρέπει την παρακολούθηση ολόκληρης της τροχιάς, ανεξάρτητα από χρονικές κλίμακες, για ειδικές περιπτώσεις τροχιών. Χρησιμοποιείται θεωρία διαταραχών για να υπολογιστούν οι ροές της ενέργειας E και της στροφορμής L_z στο άπειρο και κοντά στον ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής για γεωδαισιακές τροχιές. Έπειτα μέσω των νόμων διατήρησης, μπορεί να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής αυτών των ποσοτήτων. Για κυκλικές τροχιές και τροχιές στο ισημερινό επίπεδο, μπορεί να βρεθεί και ο ρυθμός μεταβολής της σταθεράς Carter Q. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε όλα τα στοιχεία που μας περιγράφουν την τροχιά. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή αποτυγχάνει για γενικές περιπτώσεις τροχιών, καθώς δεν υπάρχει παγκόσμιος νόμος διατήρησης που να σχετίζεται με τη σταθερά Carter.

Αδιαβατική προσέγγιση

Μέσω της αδιαβατικής προσέγγισης μπορεί κανείς να βρει μία έκφραση για τον χρονικό ρυθμό μεταβολής της σταθεράς Carter Q [13,24,25 ,26,27]. Αυτό οδηγεί, σε συνδυασμό με την παραπάνω μέθοδο των νόμων διατήρησης, σε πλήρη προσδιορισμό της τροχιάς του συστήματος. Αυτή η μέθοδος άρχισε να χρησιμοποιείται όταν ο Mino [23] παρατήρησε ότι στο αδιαβατικό όριο, χρειάζεται μόνο η χρονική μέση τιμή του μη συντηρητικού σκέλους της δύναμης ανάδρασης πρώτης τάξης,το οποίο είναι σχετικά απλό να υπολογιστεί. Αυτή η μέθοδος δεν παρουσιάζει τις υπολογιστικές δυσκολίες που σχετίζονται με την ομαλοποίηση της δύναμης, όταν υπολογίζεται η πλήρης έκφραση της πρώτης τάξης δύναμης ανάδρασης.

Συμπέρασμα

Όλες οι ανωτέρω μέθοδοι αποδεικνύονται επαρκείς είτε μόνο για συγκεκριμένα τμήματα της τροχιάς, είτε για τροχιές που έχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι μία καλά ορισμένη προσεγγιστική μέθοδος η οποία να δίνει ένα μοναδικό, συνεπές αποτέλεσμα για την κυρίαρχης τάξης κυματομορφή. Επίσης, για την εξαγωγή παραμέτρων, είναι απαραίτητο να υπολογιστεί η φάση της κυματομορφής πέρα από την κυρίαρχη τάξη. Για αυτό το λόγο χρειάζεται μία μαθηματικά στέρεη μέθοδος, όπως η ανάλυση σε δύο χρονικές κλίμακες, που θα περιγραφεί παρακάτω.

1.2.2 Η μέθοδος ανάλυσης σε δύο χρονικές κλίμακες

Θα γίνει τώρα μία ποιοτική εξήγηση αυτής της μεθόδου, ως εισαγωγή για την ανάλυση που θα ακολουθήσει. Για την καλύτερη περιγραφή των δύο χρονικών κλιμάκων, θα χρησιμοποιηθεί το παράδειγμα ενός EMRI. Η χρονική κλίμακα της ακτινοβολίας ανάδρασης $\sim M/\varepsilon$ είναι πολύ μεγαλύτερη από τη χρονική κλίμακα που κάνει το μικρό σώμα να περιστραφεί γύρω από τη μαζική μελανή οπή $\sim M$. Η εξίσωση κίνησης μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\sigma\rho}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = \varepsilon a^{(1)\nu} + \varepsilon^2 a^{(2)\nu} + O(\varepsilon^3)$$

η οποία μπορεί να αναχθεί [2] στο σύστημα εξισώσεων

$$\frac{dq_a}{d\tau} = \omega_a(J_\sigma) + \varepsilon g_a^{(1)}(q_r, q_\theta, J_\sigma) + \varepsilon^2 g_a^{(2)}(q_r, q_\theta, J_\sigma) + O(\varepsilon^3)$$

$$\frac{dJ_\lambda}{d\tau} = \varepsilon G^{(1)}_\lambda(q_r, q_\theta, J_\sigma) + \varepsilon^2 G^{(2)}_\lambda(q_r, q_\theta, J_\sigma) + O(\varepsilon^3)$$

Εδώ οι τρεις από τις μεταβλητές J_λ είναι οι διατηρούμενες ποσότητες κατά την κίνηση του σωματίου σε γεωδαισιακές, διαιρεμένες με τη μάζα του. Οι άλλες δύο είναι η μάζα και το spin της μελανής οπής:

$$J_\lambda = (E/\mu, L_z/\mu, Q/\mu^2, M, a)$$

Οι μεταβλητές $q_a = (q_r, q_\theta, q_\phi, q_t)$ είναι ένα σύνολο γενικευμένων γωνιακών μεταβλητών, οι οποίες είναι συζυγείς στις μεταβλητές Boyer-Lindquist του χωρόχρονου Kerr [2]. Οι q_r, q_θ, q_ϕ αυξάνουν κατά 2π μετά από έναν "κύκλο" κίνησης των μεταβλητών r, θ, ϕ αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις $\omega_a(J_\sigma)$ είναι οι συχνότητες των αντίστοιχων μεταβλητών σε γεωδαισιακή κίνηση στη μετρική Kerr. Οι συναρτήσεις $g^{(1)}_a, G^{(1)}_\lambda$ δεν είναι πλήρως γνωστές ακόμη. Προσδιορίζονται από τον όρο πρώτης τάξης της επιτάχυνσης ανάδρασης [21,22]. Ομοίως, οι $g^{(2)}_a, G^{(2)}_\lambda$ δεν είναι γνωστές, και προσδιορίζονται εν μέρει από τους όρους της δεύτερης τάξης επιτάχυνσης ανάδρασης [28,29,30,31,32].

Η διαδικασία που θα ακολουθηθεί θα αναλυθεί στην επόμενη ενότητα. Τα βασικά σημεία της είναι:

• Ορίζουμε τον αργό χρόνο $\tilde{\tau} \equiv \varepsilon\tau$

• Κατασκευάζουμε ένα σύνολο συναρτήσεων του αργού χρόνου $\psi^{(0)}_a(\tilde{\tau})$, $\mathcal{J}^{(0)}_\lambda(\tilde{\tau})$,$\psi^{(1)}_a(\tilde{\tau})$,$\mathcal{J}^{(1)}_\lambda(\tilde{\tau})$. Αυτές θα ορίζονται από διαφορικές εξισώσεις που θα περιέχουν τις συναρτήσεις $\omega_a, g^{(1)}_a, G^{(1)}_\lambda, g^{(2)}_a, G^{(2)}_\lambda$. Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες του ε.

• Ορίζουμε ένα σύνολο βοηθητικών συναρτήσεων φάσης ψ_a ως

$$\psi_a(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\psi^{(0)}_a(\varepsilon\tau) + \psi^{(1)}_a(\varepsilon\tau) + O(\varepsilon)$$

Το σύμβολο $O(\varepsilon)$ αναφέρεται στο όριο $\varepsilon \to 0$ σε σταθερό $\tilde{\tau} = \varepsilon\tau$.

• Μία τάξη μετά το αδιαβατικό πρόβλημα, η λύση είναι:

$$q_a(\tau, \varepsilon) = \Psi_a + O(\varepsilon)$$

$$J_\lambda(\tau, \varepsilon) = \mathcal{J}^0_\lambda(\varepsilon\tau) + \varepsilon\mathcal{J}^1_\lambda(\varepsilon\tau) + H_\lambda[\psi_r, \psi_\theta, \mathcal{J}^0_\sigma(\varepsilon\tau)] + O(\varepsilon^2)$$

όπου τα σύμβολα $O(\varepsilon)$ και $O(\varepsilon^2)$ αναφέρονται στο όριο $\varepsilon \to 0$ σε σταθερά $\tilde{\tau}$ και Ψ_a. Η συνάρτηση H_λ είναι περιοδική στα δύο πρώτα ορίσματά της και μπορεί να υπολογιστεί από τη συνάρτηση G^1_λ, όπως θα φανεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματική ανάλυση

2.1 Γενική περίπτωση συστήματος με ασθενή διαταραχή

Έστω ένα σύστημα που μπορεί να περιγραφεί από N μεταβλητές φάσεως και M μεταβλητές δράσης:

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), ..., q_N(t))$$
$$\mathbf{J}(t) = (J_1(t), J_2(t), ..., J_M(t))$$

και περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{dq_a}{dt} = \omega_a(\mathbf{J}, \tilde{t}) + \varepsilon g_a(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}, \varepsilon), 1 \leq a \leq N, (2.1.1a)$$
$$\frac{dJ_\lambda}{dt} = \varepsilon G_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}, \varepsilon), 1 \leq \lambda \leq M. (2.1.1\beta)$$

Η μεταβλητή $\tilde{t} \equiv \varepsilon t$ είναι ο αργός χρόνος. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις που εκφράζουν την εξωτερική δύναμη g_a και G_λ μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$g_a(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} g_a^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t})\varepsilon^{s-1} = g_a^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}) + \varepsilon g_a^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}) + O(\varepsilon^2),$$

$$G_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} G_\lambda^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}) = G_\lambda^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}) + \varepsilon G_\lambda^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}) + O(\varepsilon^2).$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\omega_a, g_a^{(s)}.G_\lambda^{(s)}$ είναι ομαλές συναρτήσεις σε όλες τις μεταβλητές τους, και ότι οι συχνότητες ω_a δεν μηδενίζονται ποτέ. Τέλος, οι συναρτήσεις g_a, G_λ υποθέτουμε ότι είναι περιοδικές για κάθε q_a με περίοδο 2π:

$$g_a(\mathbf{q} + 2\pi\mathbf{k}, \mathbf{J}, \tilde{t}) = g_a(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}), 1 \leq a \leq N,$$
$$G_\lambda(\mathbf{q} + 2\pi\mathbf{k}, \mathbf{J}, \tilde{t}) = G_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}), 1 \leq \lambda \leq M,$$

όπου $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_N)$ είναι μία οποιαδήποτε N-άδα ακέραιων αριθμών. Ο χειρισμός των εξισώσεων διαφέρει εάν το σύστημα έχει έναν ή περισσότερους βαθμούς ελευθερίας, για αυτό θα μελετηθεί ξεχωριστά η κάθε περίπτωση.

2.2 Συστήματα με έναν βαθμό ελευθερίας

Για συστήματα με έναν βαθμό ελευθερίας οι εξισώσεις (2.1.1) ανάγονται στις ακόλουθες:

$$\dot{q}(t) = \omega(J, \tilde{t}) + \varepsilon g(q, J, \tilde{t}, \varepsilon), (2.2.1a)$$

$$\dot{J} = \varepsilon G(q, J, \tilde{t}, \varepsilon)(2.2.1\beta)$$

Τα αναπτύγματα σε δυνάμεις του ε των συναρτήσεων αυτών γίνονται

$$g(q, J, \tilde{t}, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} g^{(s)}(q, J, \tilde{t})\varepsilon^{s-1} = g^{(1)}(q, J, \tilde{t}) + g^{(2)}(q, J, \tilde{t})\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$G(q, J, \tilde{t}, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} G^{(s)}(q, J, \tilde{t})\varepsilon^{s-1} = G^{(1)}(q, J, \tilde{t}) + G^{(2)}(q, J, \tilde{t})\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Επίσης, η περιοδικότητα των συναρτήσεων εκφράζεται πλέον ως εξής:

$$g(q + 2\pi k, J, \tilde{t}) = g(q, J, \tilde{t}),$$

$$G(q + 2\pi k, J, \tilde{t}) = G(q, J, \tilde{t}),$$

με k τυχαίο ακέραιο αριθμό.

2.2.1 Αναπτύγματα Fourier των δυνάμεων

Οι παραπάνω συνθήκες περιοδικότητας θα ισχύουν σε κάθε τάξη του αναπτύγματος σε δυνάμεις του ε:

$$g^{(s)}(q + 2\pi k, J, \tilde{t}) = g^{(s)}(q, J, \tilde{t}),$$

$$G^{(s)}(q + 2\pi k, J, \tilde{t}) = G^{(s)}(q, J, \tilde{t}).$$

Επομένως οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να αναπτυχθούν κατά Fourier:

$$g^{(s)}(q, J, \tilde{t}) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_k^{(s)}(J, \tilde{t})e^{ikq},$$

$$G^{(s)}(q, J, \tilde{t}) = \sum_{-\infty}^{\infty} G_k^{(s)}(J, \tilde{t})e^{ikq},$$

όπου

$$g_k^{(s)}(J, \tilde{t}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dq e^{-ikq} g^{(s)}(q, J, \tilde{t}),$$

$$G_k^{(s)}(J, \tilde{t}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dq e^{-ikq} G^{(s)}(q, J, \tilde{t}).$$

Τώρα, για κάθε συνάρτηση $f = f(q)$ (εννοείται ότι μπορεί να εξαρτάται και από άλλες μεταβλητές), ορίζουμε το συμβολισμό

$$< f > \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(q)dq$$

για τη μέση τιμή της και

$$\hat{f}(q) \equiv f(q) - < f >$$

για το υπόλοιπο κομμάτι. Προκύπτουν οι ταυτότητες:

$$< f_{,q} >= 0, < \hat{f} >= 0$$

$$< fg >=< \hat{f}\hat{g} > + < f >< g >$$

για κάθε περιοδικές συναρτήσεις $f(q), g(q)$. Επίσης για κάθε περιοδική συνάρτηση f, ορίζεται ένας τελεστής ολοκλήρωσης ως εξής:

$$(\mathcal{I}\hat{f})(q) \equiv \sum_{k \neq 0} \frac{f_k}{ik} e^{ikq},$$

όπου $f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dq e^{-ikq} f(q)$ είναι οι συντελεστές Fourier της f. Αυτός ο τελεστής ικανοποιεί τις ταυτότητες:

$$(\mathcal{I}\hat{f})_{,q} = \hat{f},$$

$$< (\mathcal{I}\hat{f})\hat{g} >= - < \hat{f}(\mathcal{I}\hat{g}) >,$$

$$< \hat{f}(\mathcal{I}\hat{f}) >= 0.$$

Από τους παραπάνω ορισμούς και την ανάλυση Fourier προκύπτει ότι:

$$< g^{(s)}(q, J, \tilde{t}) >= g_0^{(s)}(q, J, \tilde{t}), \hat{g}^{(s)}(q, J, \tilde{t}) = \sum_{k \neq 0} g_k^{(s)}(J, \tilde{t}) e^{ikq},$$

$$< G^{(s)}(q, J, \tilde{t}) >= G_0^{(s)}(q, J, \tilde{t}), \hat{G}^{(s)}(q, J, \tilde{t}) = \sum_{k \neq 0} G_k^{(s)}(J, \tilde{t}) e^{ikq}$$

2.2.2 Λύση με διπλή χρονοσειρά

Η υπόθεση που θα γίνει για τη λύση μας είναι ότι τα q και J εκφράζονται ως ασυμπτωτικές σειρές του ε συναρτήσει δύο διαφορετικών μεταβλητών, του αργού χρόνου $\tilde{t} = \varepsilon t$ και μίας μεταβλητής φάσης Ψ (γρήγορος χρόνος). Η εξάρτηση των παραμέτρων του προβλήματος από το Ψ είναι περιοδική με περίοδο 2π. Επομένως, τα q και J γράφονται:

$$q(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s q^{(s)}(\Psi, \tilde{t}) = q^{(0)}(\Psi, \tilde{t}) + \varepsilon q^{(1)}(\Psi, \tilde{t}) + O(\varepsilon^2),$$

$$J(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s J^{(s)}(\Psi, \tilde{t}) = J^{(0)}(\Psi, \tilde{t}) + \varepsilon J^{(1)}(\Psi, \tilde{t}) + O(\varepsilon^2).$$

Οι όροι του αναπτύγματος που αναφέρονται σε μεταβλητές δράσης $J^{(s)}$ είναι περιοδικοί στο Ψ με περίοδο 2π:

$$J^{(s)}(\Psi + 2\pi, \tilde{t}) = J^{(s)}(\Psi, \tilde{t})$$

Επιλέγουμε όταν το Ψ αυξάνει κατά 2π, η μεταβλητή φάσης q να αυξάνει επίσης κατά 2π. Οπότε για τα $q^{(s)}$ θα έχουμε:

$$q^{(0)}(\Psi + 2\pi, \tilde{t}) = q^{(0)}(\Psi, \tilde{t}) + 2\pi,$$

$$q^{(s)}(\Psi + 2\pi, \tilde{t}) = q^{(s)}(\Psi, \tilde{t}), s \geq 1.$$

Εδώ είναι χρήσιμο να ορίσουμε και τη συνάρτηση που εκφράζει το χρονικό ρυθμό μεταβολής του Ψ:$\Omega = \frac{d\Psi}{dt}$. Υποθέτουμε ότι μεταβάλλεται αργά με το χρόνο, οπότε θα εξαρτάται μόνο από τον αργό χρόνο $\tilde{t}$ και το ε. Συνεπώς, μπορεί να έχει και αυτό ένα ανάπτυγμα σε δυνάμεις του ε της μορφής:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \Omega(\tilde{t}, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega^{(s)}(\tilde{t}) = \Omega^{(0)}(\tilde{t}) + \varepsilon\Omega^{(1)}(\tilde{t}) + O(\varepsilon^2)$$

Με αυτή την εξίσωση προσδιορίζεται το Ψ συναρτήσει των $\Omega^{(s)}$, με απροσδιοριστία σταθερών ολοκλήρωσης. Δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε αυτές τις σταθερές ώστε να προκύψει

$$q^{(s)}(0, \tilde{t}) = 0, \forall s, \tilde{t}$$

Αυτό δεν θα επηρεάσει τις τελικές λύσεις των $q(t, \varepsilon)$ και $J(t, \varepsilon)$, καθώς θα προκύψουν και νέες σταθερές ολοκλήρωσης για τις συναρτήσεις $q^{(s)}(\Psi, \tilde{t}), J^{(s)}(\Psi, \tilde{t})$ όπως θα φανεί παρακάτω.

Εδώ αξίζει να αναφέρουμε λίγο το λόγο που κάνουμε αυτές τις υποθέσεις και γιατί έχουμε αναπτύξει όλα τα μεγέθη σε σειρές του ε. Σε πρόβλημα ενός βαθμού ελευθερίας δεν υπάρχει το φαινόμενο του συντονισμού, το οποίο αλλάζει τη μορφή των σειρών, όπως θα φανεί σε επόμενη ενότητα. Η λύση των εξισώσεων κίνησης στην περίπτωσή μας είναι μία απεικόνιση από τα (t, ε) στα (q, J). Αυτή η απεικόνιση περιέχει δυναμική σε δύο διαφορετικές χρονικές κλίμακες, τη γρήγορη ~ 1 και την αργή $\sim 1/\varepsilon$. Αυτή η απεικόνιση μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο σαν σύνθεση δύο απεικονίσεων

$$(t, \varepsilon) \to (\Psi, \tilde{t}, \varepsilon) \to (q, J)$$

Με αυτό τον τρόπο, η πρώτη απεικόνιση περιέχει όλα τα φαινόμενα στη "γρήγορη" χρονική κλίμακα, και χαρακτηρίζεται από την αργά μεταβαλλόμενη συχνότητα $\Omega(\tilde{t}, \varepsilon)$, και η δεύτερη απεικόνιση περιέχει μόνο τη δυναμική που εξελίσσεται στην "αργή" χρονική κλίμακα.

2.2.3 Ανάλυση των εξισώσεων σε τάξεις του ε

Εδώ θα είναι χρήσιμο να αναφερθεί ότι εφόσον απεικονίζουμε την πραγματική χρονική κλίμακα t σε δύο νέες κλίμακες $\tilde{t}, \Psi$ θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας σε όσες εξισώσεις περιέχουν χρονική παράγωγο:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \Psi} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \Omega(\tilde{t})\frac{\partial}{\partial \Psi}$$

Επιστρέφοντας λοιπόν στις εξισώσεις κίνησης (2.2.1) αυτές θα γίνουν:

$$(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}+\Omega(\tilde{t})\frac{\partial}{\partial\Psi})(q^{(0)}(\Psi,\tilde{t})+\varepsilon q^{(1)}(\Psi,\tilde{t})+\varepsilon^2 q^{(2)}(\Psi,\tilde{t})+O(\varepsilon^3))=\omega(J,\tilde{t})+\varepsilon(g^{(1)}(q,J,\tilde{t})$$

$$+g^{(2)}(q,J,\tilde{t})\varepsilon+O(\varepsilon^2)),$$

$$(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}+\Omega(\tilde{t})\frac{\partial}{\partial\Psi})(J^{(0)}(\Psi,\tilde{t})+\varepsilon J^{(1)}(\Psi,\tilde{t})+\varepsilon^2 J^{(2)}(\Psi,\tilde{t})+O(\varepsilon^3))=\varepsilon(G^{(1)}(q,J,\tilde{t})$$

$$+G^{(2)}(q,J,\tilde{t})\varepsilon+O(\varepsilon^2))$$

Οπότε καταλήγουμε στις εξισώσεις:

• Μηδενική τάξη:

$$\Omega(\tilde{t})q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})=\omega(J,\tilde{t}),$$

$$\Omega(\tilde{t})J^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})=0$$

• Πρώτη τάξη:

$$q^{(0)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t})+\Omega(\tilde{t})q^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})=g^{(1)}(q,J,\tilde{t}),$$

$$J^{(0)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t})+\Omega(\tilde{t})J^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})=G^{(1)}(q,J,\tilde{t})$$

• Δεύτερη τάξη:

$$q^{(1)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t})+\Omega(\tilde{t})q^{(2)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})=g^{(2)}(q,J,\tilde{t}),$$

$$J^{(1)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t})+\Omega(\tilde{t})J^{(2)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})=G^{(2)}(q,J,\tilde{t})$$

Εισάγοντας τώρα και το ανάπτυγμα της συνάρτησης Ω σε δυνάμεις του ε, παίρνουμε την ακόλουθη μορφή των εξισώσεων:

• Μηδενική τάξη:

$$\Omega^{(0)}(\tilde{t})q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})=\omega(J,\tilde{t}),$$

$$\Omega^{(0)}(\tilde{t})J^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})=0$$

• Πρώτη τάξη:

$$\Omega^{(1)}(\tilde{t})q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+\Omega^{(0)}(\tilde{t})q^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+q^{(0)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t})=g^{(1)}(q,J,\tilde{t}),$$

$$\Omega^{(1)}(\tilde{t})J^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+\Omega^{(0)}(\tilde{t})J^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+J^{(0)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t})=G^{(1)}(q,J,\tilde{t})$$

• Δεύτερη τάξη:

$$\Omega^{(2)}(\tilde{t})q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+\Omega^{(1)}(\tilde{t})q^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+\Omega^{(0)}(\tilde{t})q^{(2)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+q^{(1)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t})=g^{(2)}(q,J,\tilde{t}),$$

$$\Omega^{(2)}(\tilde{t})J^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+\Omega^{(1)}(\tilde{t})J^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+\Omega^{(0)}(\tilde{t})J^{(2)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+J^{(1)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t})=G^{(2)}(q,J,\tilde{t})$$

Όμως, αυτή η μορφή δεν είναι ιδιαίτερα βολική για τους υπολογισμούς μας. Ο λόγος είναι ότι ακόμη οι ποσότητες $\omega, g^{(1)}.G^{(1)}, g^{(2)}, G^{(2)}$ εξαρτώνται από τα q, J και όχι από κάποιους όρους των αναπτυγμάτων τους. Αυτό θα οδηγούσε σε ένα σφάλμα, το μέγεθος του οποίου δεν θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε, διότι δεν ξέρουμε τη συμπεριφορά των ανώτερων όρων του αναπτύγματος. Για αυτό θα κάνουμε το εξής: κάθε ποσότητα που πρέπει να υπολογιστεί θα υπολογίζεται με βάση τις λύσεις του αδιαβατικού προβλήματος (μηδενική τάξη ως προς ε), δηλαδή τα $q^{(0)}, J^{(0)}$. Αυτό προφανώς και θα οδηγήσει σε κάποιο σφάλμα, για αυτό θα αναπτύξουμε κατά Taylor τα $\omega, g^{(s)}, G^{(s)}$. Δηλαδή θα έχουμε:

$$\omega(J,\tilde{t}) = \omega(J^{(0)},\tilde{t}) + \omega_{,J}(J^{(0)},\tilde{t})(J(\Psi,\tilde{t}) - J^{(0)}(\Psi,\tilde{t})) + \omega_{,JJ}(J^{(0)},\tilde{t})(J(\Psi,\tilde{t}) - J^{(0)}(\Psi,\tilde{t}))^2 + O(\varepsilon^3)$$

$$\begin{aligned} g^{(1)}(q,J,\tilde{t}) &= g^{(1)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t}) + g^{(1)}_{,J}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})(J(\Psi,\tilde{t}) - J^{(0)}(\Psi,\tilde{t})) \\ &+ g^{(1)}_{,q}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})(q(\Psi,\tilde{t}) - q^{(0)}(\tilde{t})) + O(\varepsilon^2) \\ G^{(1)}(q,J,\tilde{t}) &= G^{(1)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t}) + G^{(1)}_{,J}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})(J(\Psi,\tilde{t}) - J^{(0)}(\Psi,\tilde{t})) \\ &+ G^{(1)}_{,q}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})(q(\Psi,\tilde{t}) - q^{(0)}(\tilde{t})) + O(\varepsilon^2) \\ g^{(2)}(q,J,\tilde{t}) &= g^{(2)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t}) + O(\varepsilon) \\ G^{(2)}(q,J,\tilde{t}) &= G^{(2)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t}) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

Και επειδή

$$q(\Psi,\tilde{t}) - q^{(0)}(\tilde{t}) = \varepsilon q^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) + \varepsilon^2 q^{(2)}(\Psi,\tilde{t}) + O(\varepsilon^3),$$

$$J(\Psi,\tilde{t}) - J^{(0)}(\tilde{t}) = \varepsilon J^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) + \varepsilon^2 J^{(2)}(\Psi,\tilde{t}) + O(\varepsilon^3)$$

τελικά προκύπτει:

$$\omega(J,\tilde{t}) = \omega(J^{(0)},\tilde{t}) + \varepsilon\omega_{,J}(J^{(0)},\tilde{t})J^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) + \varepsilon^2(\omega_{,J}(J^{(0)},\tilde{t})J^{(2)}(\Psi,\tilde{t}) + \omega_{,JJ}(J^{(0)},\tilde{t}){J^{(1)}}^2(\Psi,\tilde{t})) + O(\varepsilon^3),$$

$$\begin{aligned} g^{(1)}(q,J,\tilde{t}) &= g^{(1)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t}) + \varepsilon(g^{(1)}_{,J}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})J^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) + g^{(1)}_{,q}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})q^{(1)}(\Psi,\tilde{t})) + O(\varepsilon^2), \\ G^{(1)}(q,J,\tilde{t}) &= G^{(1)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t}) + \varepsilon(G^{(1)}_{,J}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})J^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) + G^{(1)}_{,q}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})q^{(1)}(\Psi,\tilde{t})) + O(\varepsilon^2), \\ g^{(2)}(q,J,\tilde{t}) &= g^{(2)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t}) + O(\varepsilon), \\ G^{(2)}(q,J,\tilde{t}) &= G^{(2)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t}) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

Οπότε τώρα μπορούμε να καταλήξουμε στην τελική μορφή των εξισώσεων:

- Μηδενική τάξη:

$$\Omega^{(0)}(\tilde{t})q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) = \omega(J^{(0)},\tilde{t}),$$
$$\Omega^{(0)}(\tilde{t})J^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) = 0$$

- Πρώτη τάξη:

$$\Omega^{(1)}(\tilde{t})q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + \Omega^{(0)}(\tilde{t})q^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + q^{(0)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t}) = \omega_{,J}(J^{(0)},\tilde{t})J^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) + g^{(1)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t}),$$

$$\Omega^{(1)}(\tilde{t})J^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + \Omega^{(0)}(\tilde{t})J^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + J^{(0)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t}) = G^{(1)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})$$

- Δεύτερη τάξη:

$$\Omega^{(2)}(\tilde{t})q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + \Omega^{(1)}(\tilde{t})q^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + \Omega^{(0)}(\tilde{t})q^{(2)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + q^{(1)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t}) = \omega_{,JJ}(J^{(0)},\tilde{t}){J^{(1)}}^2(\Psi,\tilde{t})$$

$$+ g^{(1)}_{,J}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})J^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) + g^{(1)}_{,q}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})q^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) + g^{(2)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t}),$$

$$\Omega^{(2)}(\tilde{t})J^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + \Omega^{(1)}(\tilde{t})J^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + \Omega^{(0)}(\tilde{t})J^{(2)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + J^{(1)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t}) =$$

$$G^{(2)}(q^{(0)}, J^{(0)}, \tilde{t}) + G^{(1)}_{,J}(q^{(0)}, J^{(0)}, \tilde{t})J^{(1)}(\Psi, \tilde{t}) + G^{(1)}_{,q}(q^{(0)}, J^{(0)}, \tilde{t})q^{(1)}(\Psi, \tilde{t})$$

Για την περαιτέρω διευκόλυνση της ανάλυσής μας, θα συμβολίσουμε τη μέση τιμή των q και J ως εξής:

$$\mathcal{J}^{(s)}(\tilde{t}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J^{(s)}(\Psi, \tilde{t})d\Psi, s \geq 0,$$

$$\mathcal{Q}^{(s)}(\tilde{t}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q^{(s)}(\Psi, \tilde{t})d\Psi, s \geq 1$$

Για το $q^{(0)}$ δεν θα χρησιμοποιηθεί αυτός ο συμβολισμός, διότι δεν θα μας διευκολύνει κάπου, καθώς έχει νόημα μόνο για τις μεταβλητές που έχουν την περιοδικότητα στην αύξηση του Ψ κατά 2π. Οπότε πλέον μπορούμε να ορίσουμε:

$$J^{(s)}(\Psi, \tilde{t}) = \mathcal{J}^{(s)}(\tilde{t}) + \hat{J}^{(s)}(\Psi, \tilde{t}), s \geq 0,$$

$$q^{(s)}(\Psi, \tilde{t}) = \mathcal{Q}^{(s)}(\tilde{t}) + \hat{q}^{(s)}(\Psi, \tilde{t}), s \geq 1$$

Πλέον οι εξισώσεις μπορούν να έρθουν σε μορφή ώστε να αναλυθεί ξεχωριστά η κάθε τάξη.

Μηδενική τάξη

Οι εξισώσεις σε μηδενική τάξη είναι, όπως γράφτηκαν παραπάνω:

$$\Omega^{(0)}(\tilde{t})q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi, \tilde{t}) = \omega(J^{(0)}, \tilde{t}),$$

$$\Omega^{(0)}(\tilde{t})J^{(0)}_{,\Psi}(\Psi, \tilde{t}) = 0$$

Η δεύτερη εξίσωση μας δείχνει ότι το $J^{(0)}(\Psi, \tilde{t})$ είναι ανεξάρτητο του Ψ. Αυτό σημαίνει ότι $J^{(0)}(\Psi, \tilde{t}) = \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t})$ Τώρα η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$\Omega^{(0)}(\tilde{t})q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi, \tilde{t}) = \omega\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}, \tilde{t}) \Rightarrow q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi, \tilde{t}) = \frac{\omega\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}, \tilde{t})}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}(= f(\tilde{t}))$$

Αυτό μας δείχνει ότι το $q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi, \tilde{t})$ είναι ανεξάρτητο του Ψ, αφού ισούται με μία συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από τον αργό χρόνο $\tilde{t}$. Επομένως είναι εύκολο να ολοκληρωθεί η παραπάνω εξίσωση και να δώσει:

$$q^{(0)}(\Psi, \tilde{t}) = \frac{\omega\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}, \tilde{t})}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}\Psi + \mathcal{Q}^{(0)}(\tilde{t}),$$

με το $\mathcal{Q}^{(0)}(\tilde{t})$ να ορίζει μία συνάρτηση του αργού χρόνου. Τώρα, σε αυτή την εξίσωση θα επιβάλλουμε τη συνθήκη περιοδικότητας για το $q^{(0)}(\Psi, \tilde{t})$ καθώς και τις αρχικές συνθήκες για τα $q^{(s)}$:

$$q^{(0)}(\Psi + 2\pi, \tilde{t}) = q^{(0)}(\Psi, \tilde{t}) + 2\pi,$$

$$q^{(s)}(0, \tilde{t}) = 0$$

Αυτές οι συνθήκες μας δίνουν τελικά ότι

$$\omega(\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{t}) = \Omega^{(0)}(\tilde{t}),$$

$$\mathcal{Q}^{(0)}(\tilde{t}) = 0,$$

$$q^{(0)}(\Psi, \tilde{t}) = \Psi$$

Πρώτη τάξη

Με τα αποτελέσματα της προηγούμενης ανάλυσης, η εξίσωση πρώτης τάξης για το J

$$\Omega^{(1)}(\tilde{t})J^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + \Omega^{(0)}(\tilde{t})J^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + J^{(0)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t}) = G^{(1)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})$$

γράφεται:

$$\Omega^{(0)}(\tilde{t})J^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) = -\mathcal{J}^{(0)}_{,\tilde{t}}(\tilde{t}) + G^{(1)}(\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να μας δώσει δύο διαφορετικές εξισώσεις με ανάλυση Fourier. Έχει ένα κομμάτι που δεν εξαρτάται από το Ψ:

$$\mathcal{J}^{(0)}_{,\tilde{t}}(\tilde{t}) = G^{(1)}_0(\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})$$

και ένα που εξαρτάται από αυτό:

$$\Omega^{(0)}(\tilde{t})\hat{J}^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) = \hat{G}^{(1)}(\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})$$

Η λύση της δεύτερης εξίσωσης δίνεται με τη βοήθεια του τελεστή ολοκλήρωσης

$$\hat{J}^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) = \frac{1}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}(\mathcal{I}\hat{G}^{(1)})(\Psi) \Rightarrow$$

$$\hat{J}^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) = \sum_{k\neq 0}\frac{G^{(1)}_k(\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})e^{ik\Psi}}{ik\Omega^{(0)}(\tilde{t})}$$

Η εξίσωση πρώτης τάξης για το q:

$$\Omega^{(1)}(\tilde{t})q^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + \Omega^{(0)}(\tilde{t})q^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) + q^{(0)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t}) = \omega_{,J}(\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})J^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) + g^{(1)}(\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})$$

με τη βοήθεια του $q^{(0)} = \Psi$ και των άλλων αποτελεσμάτων μηδενικής τάξης γίνεται:

$$\Omega^{(0)}(\tilde{t})q^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) - \omega_{,J}(\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})J^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) = -\Omega^{(1)}(\tilde{t}) + g^{(1)}(\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}).$$

Πάλι αυτή η εξίσωση μπορεί να σπάσει σε μέση τιμή (ως προς το Ψ) και στο υπόλοιπο κομμάτι,ως εξής:

$$\Omega^{(1)}(\tilde{t}) = \omega_{,J}(\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t}) + g^{(1)}_0(\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}),$$

$$\hat{q}^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t}) = \frac{1}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}[\omega_{,J}(\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t},\tilde{t}))\hat{J}^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) + \hat{g}^{(1)}(\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})]$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή ολοκλήρωσης, η παραπάνω εξίσωση δίνει

$$\hat{q}^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) = \frac{1}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}[\omega_{,J}(\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})\mathcal{I}\hat{J}^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) + \mathcal{I}\hat{g}^{(1)}(\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})],$$

η οποία τελικά μας δίνει:

$$\hat{q}^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) = \frac{1}{{\Omega^{(0)}}^2(\tilde{t})}\omega_{,J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{I}^2\hat{G}^{(1)}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}] + \frac{1}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}\mathcal{I}\hat{g}^{(1)}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

Δεύτερη τάξη

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση δεύτερης τάξης για το J:

$$\Omega^{(2)}(\tilde{t})J^{(0)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+\Omega^{(1)}(\tilde{t})J^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+\Omega^{(0)}(\tilde{t})J^{(2)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+J^{(1)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t})=$$

$$G^{(2)}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})+G^{(1)}_{,J}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})J^{(1)}(\Psi,\tilde{t})+G^{(1)}_{,q}(q^{(0)},J^{(0)},\tilde{t})q^{(1)}(\Psi,\tilde{t})$$

και το γεγονός ότι $q^{(0)}=\Psi$, $J^{(0)}=\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t})$, έχουμε:

$$\Omega^{(1)}(\tilde{t})J^{(1)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+\Omega^{(0)}(\tilde{t})J^{(2)}_{,\Psi}(\Psi,\tilde{t})+J^{(1)}_{,\tilde{t}}(\Psi,\tilde{t})=$$

$$G^{(2)}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]+G^{(1)}_{,J}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]J^{(1)}(\Psi,\tilde{t})+G^{(1)}_{,q}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]q^{(1)}(\Psi,\tilde{t})$$

Μας ενδιαφέρει μόνο η μέση τιμή αυτής της εξίσωσης, δηλαδή:

$$\mathcal{J}^{(1)}_{,\tilde{t}}(\tilde{t})=G^{(2)}_0[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]+G^{(1)}_{0,J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t})+<\hat{J}^{(1)}(\Psi,\tilde{t})\hat{G}^{(1)}_{,J}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>$$

$$+<\hat{q}^{(1)}(\Psi,\tilde{t})\hat{G}^{(1)}_{,q}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>$$

Αυτή η εξίσωση προκύπτει έτσι επειδή τα αναπτύγματα των $\hat{J}^{(1)}(\Psi,\tilde{t})$ $\hat{G}^{(1)}_{,J}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$ και $\hat{q}^{(1)}(\Psi,\tilde{t})\hat{G}^{(1)}_{,q}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$ θα έχουν και μηδενικό όρο (μέση τιμή), λόγω του πολλαπλασιασμού όρων που θα έχουν αντίθετα k στα αναπτύγματα, δηλαδή για παράδειγμα $G^{(1)}_k e^{ikq}J^{(1)}_{-k}e^{-ikq}=G^{(1)}_k J^{(1)}_{-k}$ θα ήταν ένας από τους όρους του αναπτύγματος αυτού που είναι ανεξάρτητοι του Ψ. Επίσης, η μέση τιμή του $G^{(1)}_{,q}\mathcal{Q}^{(1)}$ μηδενίζεται, διότι η μία συνάρτηση εξαρτάται μόνο από το $\tilde{t}$, ενώ ο μόνος όρος της $G^{(1)}$ που δεν έχει εξάρτηση από το Ψ μηδενίζεται λόγω της παραγώγισης ως προς τα q. Αντίθετα, η παραγώγιση ως προς τα J δεν προκαλεί κάτι τέτοιο, αφού όλα τα $G^{(1)}_k$ εξαρτώνται από τα J, και έτσι ο όρος $G^{(1)}_{0,J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t})$ επιβιώνει. Χρησιμοποιώντας τώρα τις εξισώσεις πρώτης τάξης

$$\hat{J}^{(1)}(\Psi,\tilde{t})=\frac{(\mathcal{I}\hat{G}^{(1)}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})},$$

$$\hat{q}^{(1)}(\Psi,\tilde{t})=\frac{1}{{\Omega^{(0)}}^2(\tilde{t})}\omega_{,J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})]\mathcal{I}^2\hat{G}^{(1)}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]+\frac{1}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}\mathcal{I}\hat{g}^{(1)}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

η παραπάνω εξίσωση γίνεται :

$$\mathcal{J}^{(1)}_{,\tilde{t}}(\tilde{t})=G^{(2)}_0[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]+G^{(1)}_{0,J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t})+\frac{<\hat{G}^{(1)}(\Psi,\tilde{t})\hat{G}^{(1)}_{,J}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}$$

$$+\frac{<\hat{G}^{(1)}_{,q}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\omega_{,J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t})]\mathcal{I}^2\hat{G}^{(1)}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>}{{\Omega^{(0)}}^2(\tilde{t})}+\frac{<\hat{G}^{(1)}_{,q}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{I}\hat{g}^{(1)}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}$$

Τώρα θα εξετάσουμε τους όρους $<\hat{G}^{(1)}_{,q}\mathcal{I}\hat{g}^{(1)}>$ και $<\hat{G}^{(1)}_{,q}\mathcal{I}^2\hat{G}^{(1)}>$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $<(\mathcal{I}\hat{f})\hat{g}>=-<\hat{f}(\mathcal{I}\hat{g})>$ ο πρώτος όρος γίνεται:

$$-<\mathcal{I}\hat{G}^{(1)}_{,q}\hat{g}^{(1)}>,$$

και τώρα με την ιδιότητα $(\mathcal{I}\hat{f})_{,q}=\hat{f}$, λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$-<\hat{G}^{(1)}\hat{g}^{(1)}>$$

Ο δεύτερος όρος, πάλι με την ιδιότητα $<(\mathcal{I}\hat{f})\hat{g}>=-<\hat{f}(\mathcal{I}\hat{g})>$, γίνεται:

$$-<\mathcal{I}\hat{G}^{(1)}_{,q}\mathcal{I}\hat{G}^{(1)}$$

Έπειτα με χρήση της ιδιότητας $(\mathcal{I}\hat{f})_{,q}=\hat{f}$, γίνεται ως εξής:

$$-<\hat{G}^{(1)}\mathcal{I}\hat{G}^{(1)}>$$

και τέλος με την ιδιότητα $<\hat{f}(\mathcal{I}\hat{f})>=0$ αυτός ο όρος μηδενίζεται. Έτσι, καταλήγουμε στην τελική μορφή της εξίσωσης για το $\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t})$:

$$\mathcal{J}^{(1)}_{,\tilde{t}}(\tilde{t})-G^{(1)}_{0,J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t})=G^{(2)}_0[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]+\frac{<\hat{G}^{(1)}(\Psi,\tilde{t})\hat{G}^{(1)}_{,J}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}$$

$$-\frac{<\hat{G}^{(1)}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\hat{g}^{(1)}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}$$

2.2.4 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Αυτό που χρειαζόμαστε από την προηγούμενη ανάλυση είναι τα αποτελέσματα σε δύο τάξεις: τη μηδενική (αδιαβατική) και την τάξη ε. Εδώ θα αναλυθούν λίγο καλύτερα τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας.

Αδιαβατική τάξη

Η μεταβλητή δράσης δίνεται από την εξίσωση

$$J^{(0)}(\Psi,\tilde{t})=\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t})$$

όπου το $\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t})$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}}=G^{(1)}_0[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

Η μεταβλητή φάσης μηδενικής τάξης δίνεται από την

$$q^{(0)}(\Psi,\tilde{t})=\Psi$$

και η γωνιακή ταχύτητα Ω που προσδιορίζει τη μεταβλητή Ψ σε μηδενική τάξη είναι

$$\Omega^{(0)}(\tilde{t})=\omega[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

Η αδιαβατική προσέγγιση μπορεί να εξαχθεί και με έναν πιο απλό τρόπο:(i)Κρατάμε μέχρι όρους ε στις εξισώσεις κίνησης

$$\dot{q}(t)=\omega(J,t)+\varepsilon g^{(1)}(q,J,t),$$

$$\dot{J}(t)=\varepsilon G^{(1)})(q,J,t)$$

(ii)Παραλείπουμε τον όρο $g^{(1)}$ στην εξίσωση για τη μεταβλητή φάσης. (iii)Αντικαθιστούμε τον όρο $G^{(1)})(q,J,t)$ στην εξίσωση για τη μεταβλητή δράσης με τη μέση τιμή του ως προς q.

Πρώτη τάξη

Η μεταβλητή δράσης πρώτης τάξης δίνεται από

$$J^{(1)}(\Psi, \tilde{t}) = \frac{\mathcal{I}\hat{G}^{(1)}[\Psi, \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{t}]}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})} + \mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t})$$

Η μέση τιμή της $\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t})$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} - \frac{\partial G_0^{(1)}}{\partial J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{t}]\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t}) = G_0^{(2)} + \frac{< \frac{\partial \hat{G}^{(1)}}{\partial J}\mathcal{I}\hat{G}^{(1)} >}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})} - \frac{< \hat{G}^{(1)}\hat{g}^{(1)} >}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, όλες οι ποσότητες υπολογίζονται στα $q = q^{(0)} = \Psi, J = J^{(0)} = \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t})$. Η διόρθωση πρώτης τάξης στη γωνιακή ταχύτητα Ω είναι

$$\Omega^{(1)}(\tilde{t}) = \frac{\partial \omega}{\partial J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{t}]\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t}) + g_0^{(1)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{t}]$$

Τέλος, ο όρος πρώτης τάξης στο ανάπτυγμα της γωνιακής μεταβλητής είναι

$$q^{(1)}(\psi, \tilde{t}) = \hat{q}^{(1)}(\psi, \tilde{t}) + \mathcal{Q}^{(1)}(\tilde{t})$$

όπου

$$\hat{q}^{(1)}(\Psi, \tilde{t}) = \frac{1}{{\Omega^{(0)}}^2(\tilde{t})}\frac{\partial \omega}{\partial J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{t})]\mathcal{I}^2\hat{G}^{(1)}[\Psi, \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{t}] + \frac{1}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}\mathcal{I}\hat{g}^{(1)}[\Psi, \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{t}]$$

και

$$\mathcal{Q}^{(1)}(\tilde{t}) = -\hat{q}^{(1)}(0, \tilde{t})$$

2.3 Συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας

Στην περίπτωση που το σύστημα έχει πολλούς βαθμούς ελευθερίας, η ανάλυση που θα γίνει θα έχει κάποιες διαφορές σε σχέση με το σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας. Οι εξισώσεις κίνησης είναι, όπως αναφέρθηκε παραπάνω:

$$\frac{dq_a}{dt} = \omega_a(\mathbf{J}, \tilde{t}) + \varepsilon g_a(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}, \varepsilon), 1 \leq a \leq N,$$

$$\frac{dJ_\lambda}{dt} = \varepsilon G_\lambda(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}, \varepsilon), 1 \leq \lambda \leq M.$$

Θα μπορούσε κανείς να πει ότι δεν θα αλλάξει κάτι στην ανάλυση, και τα αναπτύγματα των λύσεων θα είναι ίδια με την προηγούμενη περίπτωση. Και πράγματι, αυτό συμβαίνει απουσία συντονισμών. Εάν όμως το σύστημα μπορεί να περάσει από συντονισμό, τότε η ανάλυση πρέπει να είναι διαφορετική. Η κύρια διαφορά είναι ότι τα q_a, J_λ τώρα θα χρειαστεί να αναπτυχθούν σε δυνάμεις όχι του ε, αλλά του $\sqrt{\varepsilon}$, ενώ οι όροι δύναμης θα αναπτυχθούν όπως και πριν. Όπως θα δούμε, οι εξισώσεις με τις ριζικές δυνάμεις του ε θα είναι ομογενείς όταν δεν υπάρχουν συντονισμοί. Εάν υπάρχουν όμως, αποκτούν όρους ”πηγές”, και πλέον θα οδηγούσε σε μεγάλο σφάλμα το να μην τους συμπεριλάβουμε. Πριν την ανάλυση, θα δωθεί ένα επιχείρημα που δικαιολογεί την ανάπτυξη σε δυνάμεις του $\sqrt{\varepsilon}$.

Ανάπτυγμα κοντά σε συντονισμό

Θα ακολουθήσουμε εδώ ένα παράδειγμα από το βιβλίο των Kevorkian και Cole [33]. Έστω ένα σύστημα που μπορεί να γραφεί σε κανονική μορφή ως εξής:

$$\frac{dP}{dt} = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k(P, \tilde{t}) e^{ikQ}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma(\tilde{t}) + \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(P, \tilde{t}) e^{ikQ}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το σύστημα παρουσιάζει συντονισμό στο χρόνο $\tilde{t} = \tilde{t_0}$ και ότι η συνάρτηση $\sigma(\tilde{t})$ μηδενίζεται στην περιοχή $\tilde{t} \sim \tilde{t_0}$ και παρουσιάζει ένα ανάπτυγμα της μορφής

$$\sigma(\tilde{t}) \simeq \mu_1(\tilde{t} - \tilde{t_0}) + \mu_{12}(\tilde{t} - \tilde{t_0})^2 + O(\tilde{t} - \tilde{t_0})^3$$

Αυτή η περίπτωση είναι αρκετή για να συμπεριλάβει τους συντονισμούς της μορφής $\omega \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}$. Τώρα, για να εκτιμηθεί η συμπεριφορά του συστήματος στην περιοχή του συντονισμού, εισάγουμε έναν νέο χρόνο

$$\hat{t} = \frac{\tilde{t} - \tilde{t_0}}{\varepsilon^a} = \varepsilon^{1-a} t - \frac{\tilde{t_0}}{\varepsilon^a} \Rightarrow d\hat{t} = \varepsilon^{1-a} dt$$

Θα συμβολίσουμε τις ποσότητες κοντά στο συντονισμό $\hat{P}(\hat{t}, \varepsilon) = P(t, \varepsilon), \hat{Q}(\hat{t}, \varepsilon) = Q(t, \varepsilon)$. Με αυτά τα δεδομένα οι εξισώσεις κοντά σε συντονισμό γίνονται:

$$\varepsilon^{1-a} \frac{d\hat{P}}{d\hat{t}} = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k(\hat{P}, \tilde{t_0}) e^{ik\hat{Q}} + O(\varepsilon^{1+a})$$

$$\varepsilon^{1-a} \frac{d\hat{Q}}{d\hat{t}} = \mu_1 \varepsilon^a \hat{t} + \mu_{12} \varepsilon^{2a} \hat{t}^2 + \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(\hat{P}, \tilde{t_0}) e^{ik\hat{Q}}$$

Διαιρώντας αυτές τις εξισώσεις με τον όρο ε^{1-a}, θέλουμε ο όρος $\mu_1 \varepsilon^{2a-1} \hat{t}$ να μην εξαρτάται από το ε. Αυτό συμβαίνει διότι πρέπει το ανάπτυγμα να έχει παρόμοια μορφή με τις μετασχηματισμένες μεταβλητές, συνεπώς ο πρώτος όρος που στο ανάπτυγμα του $Q(t)$ ήταν ανεξάρτητος του ε, πρέπει στο ανάπτυγμα του $\hat{Q}(\hat{t})$ να παραμείνει έτσι. Επομένως $a = 1/2$. Και για να έχουμε ένα ανάπτυγμα το οποίο θα είναι επαρκές για όλο το χρονικό φάσμα, θα αναπτύξουμε όλη τη λύση σε δυνάμεις του $\sqrt{\varepsilon}$. Έτσι, μακριά από συντονισμούς θα παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα, και κατά τους συντονισμούς θα λαμβάνουμε την πληροφορία που μας λείπει από τις εξισώσεις των ριζικών όρων του ε.

2.3.1 Αναπτύγματα Fourier των όρων δύναμης

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η συνθήκη περιοδικότητας

$$g_a(\mathbf{q}+2\pi\mathbf{k},\mathbf{J},\tilde{t}) = g_a(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t}), 1 \leq a \leq N,$$

$$G_\lambda(\mathbf{q}+2\pi\mathbf{k},\mathbf{J},\tilde{t}) = G_\lambda(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t}), 1 \leq \lambda \leq M,$$

επεκτείνεται σε κάθε όρο του αναπτύγματος ως προς ε, άρα έχουμε:

$$g_a^{(s)}(\mathbf{q}+2\pi\mathbf{k},\mathbf{J},\tilde{t}) = g_a^{(s)}(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t}), 1 \leq a \leq N,$$

$$G_\lambda^{(s)}(\mathbf{q}+2\pi\mathbf{k},\mathbf{J},\tilde{t}) = G_\lambda^{(s)}(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t}), 1 \leq \lambda \leq M$$

Επομένως, μπορούμε πάλι να αναπτύξουμε κατά Fourier αυτές τις δυνάμεις:

$$g_a^{(s)}(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t}) = \sum_{\mathbf{k}} g_{a\mathbf{k}}^{(s)}(\mathbf{J},\tilde{t}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}},$$

$$G_\lambda^{(s)}(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t}) = \sum_{\mathbf{k}} G_{\lambda\mathbf{k}}^{(s)}(\mathbf{J},\tilde{t}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}$$

όπου

$$g_{a\mathbf{k}}^{(s)}(\mathbf{J},\tilde{t}) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N q e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} g_a^{(s)}(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t}),$$

$$G_{\lambda\mathbf{k}}^{(s)}(\mathbf{J},\tilde{t}) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N q e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} G_\lambda^{(s)}(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t})$$

Εδώ έχουν χρησιμοποιηθεί οι συμβολισμοί

$$\sum_{\mathbf{k}} = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_N=-\infty}^{\infty},$$

$$\int d^N q = \int_0^{2\pi} dq_1 \dots \int_0^{2\pi} dq_N,$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{q} = \sum_{a=1}^{N} k_a q_a$$

Πάλι για κάθε πολλαπλά περιοδική συνάρτηση $f = f(\mathbf{q})$, ορίζουμε το συμβολισμό

$$< f > \equiv \frac{1}{(2\pi)^N}\int d^N q f(\mathbf{q})$$

για τη μέση τιμή της και

$$\hat{f}(\mathbf{q}) \equiv f(\mathbf{q}) - < f >$$

για το υπόλοιπο κομμάτι. Προκύπτουν οι ταυτότητες:

$$< \frac{\partial f}{\partial q_a} > = 0, < \hat{f} > = 0$$

$$< fg > = < \hat{f}\hat{g} > + < f > < g >$$

για κάθε πολλαπλά περιοδικές συναρτήσεις $f(\mathbf{q}), g(\mathbf{q})$. Επίσης για κάθε πολλαπλά περιοδική συνάρτηση f και κάθε διάνυσμα $\mathbf{v} = (u_1, ..., u_N)$, ορίζεται ένας τελεστής ολοκλήρωσης ως εξής:

$$(\mathcal{I}_{\mathbf{v}}\hat{f})(\mathbf{q}) \equiv \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \frac{f_{\mathbf{k}}}{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}},$$

όπου $f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{(2\pi)^N} d^N q e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}} f(\mathbf{q})$ είναι οι συντελεστές Fourier της f. Αυτός ο τελεστής ικανοποιεί τις ταυτότητες:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}\cdot\nabla\hat{f}) = \hat{f},$$

$$< (\mathcal{I}_{\mathbf{v}}\hat{f})\hat{g} >= - < \hat{f}(\mathcal{I}_{\mathbf{v}}\hat{g}) >,$$

$$< \hat{f}(\mathcal{I}_{\mathbf{v}}\hat{f}) >= 0.$$

Από τους παραπάνω ορισμούς και την ανάλυση Fourier προκύπτει ότι:

$$< g_a^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}) >= g_{a\mathbf{0}}^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}), \hat{g}_a^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}) = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} g_{a\mathbf{k}}^{(s)}(\mathbf{J}, \tilde{t}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}},$$

$$< G_\lambda^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}) >= G_{\lambda\mathbf{0}}^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}), \hat{G}_\lambda^{(s)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}, \tilde{t}) = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} G_{\lambda\mathbf{k}}^{(s)}(\mathbf{J}, \tilde{t}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}$$

2.3.2 Λύση με διπλή χρονοσειρά

Και σε αυτή την περίπτωση θα γίνει η ίδια υπόθεση με πριν ότι τα q_a και J_λ εκφράζονται ως ασυμπτωτικές σειρές του ε συναρτήσει δύο διαφορετικών μεταβλητών, του αργού χρόνου $\tilde{t} = \varepsilon t$ και του γρήγορου $\mathbf{\Psi}$. Εδώ τα Ψ_a είναι τόσα όσα και τα q_a, για αυτόν το λόγο θα γράφουμε το Ψ ως άνυσμα. Η εξάρτηση των παραμέτρων του προβλήματος από τα Ψ_a είναι περιοδική με περίοδο 2π. Επομένως, τα q_a και J_λ γράφονται:

$$q_a(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} q_a^{(n/2)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) = q_a^{(0)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) + \sqrt{\varepsilon} q_a^{(1/2)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) + \varepsilon q_a^{(1)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) + \varepsilon^{3/2} q_a^{(3/2)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) + O(\varepsilon^2),$$

$$J_\lambda(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} J_\lambda^{(n/2)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) = J_\lambda^{(0)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) + \sqrt{\varepsilon} J_\lambda^{(1/2)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) + \varepsilon J_\lambda^{(1)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) + \varepsilon^{3/2} J_\lambda^{(3/2)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) + O(\varepsilon^2).$$

Και πάλι οι όροι του αναπτύγματος που αναφέρονται σε μεταβλητές δράσης $J_\lambda^{(s)}$ είναι περιοδικοί στα Ψ_a με περίοδο 2π:

$$J_\lambda^{(s)}(\mathbf{\Psi} + 2\pi\mathbf{k}, \tilde{t}) = J_\lambda^{(s)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t})$$

όπου $\mathbf{k}$ είναι μία τυχαία N-άδα ακεραίων. Επιλέγουμε όταν τα Ψ_a αυξάνουν κατά 2π, η συζυγής μεταβλητή φάσης q_a να αυξάνει επίσης κατά 2π. Οπότε για τα $q_a^{(s)}$ θα έχουμε:

$$q_a^{(0)}(\mathbf{\Psi} + 2\pi\mathbf{k}, \tilde{t}) = q_a^{(0)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) + 2\pi k_a,$$

$$q_a^{(s)}(\mathbf{\Psi} + 2\pi\mathbf{k}, \tilde{t}) = q_a^{(s)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}), s \geq 1.$$

Θα ορίσουμε και πάλι τις συναρτήσεις που εκφράζουν το χρονικό ρυθμό μεταβολής των Ψ_a:$\Omega_a = \frac{d\Psi_a}{dt}$. Υποθέτουμε πάλι ότι μεταβάλλεται αργά με το χρόνο, οπότε θα εξαρτάται μόνο από τον αργό χρόνο $\tilde{t}$ και το ε. Συνεπώς, μπορούν να έχουν και αυτά αναπτύγματα σε δυνάμεις του ε της μορφής:

$$\frac{d\Psi_a}{dt} = \Omega_a(\tilde{t},\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2}\Omega^{(n/2)}(\tilde{t}) = \Omega_a^{(0)}(\tilde{t}) + \sqrt{\varepsilon}\Omega_a^{(1/2)}(\tilde{t}) + \varepsilon\Omega_a^{(1)}(\tilde{t}) + \varepsilon^{3/2}\Omega_a^{(3/2)}(\tilde{t}) + O(\varepsilon^2)$$

Έτσι προσδιορίζονται τα Ψ_a συναρτήσει των $\Omega_a^{(s)}$, με απροσδιοριστία σταθερών ολοκλήρωσης. Δίχως βλάβη της γενικότητας πάλι μπορούμε να επιλέξουμε αυτές τις σταθερές ώστε να προκύψει

$$q_a^{(s)}(\mathbf{0},\tilde{t}) = 0, \forall s, \tilde{t}$$

Και πάλι, όπως στην περίπτωση ενός βαθμού ελευθερίας, δεν θα επηρεαστούν οι τελικές μας λύσεις.

2.3.3 Ανάλυση των εξισώσεων σε τάξεις του ε

Σε αυτή την περίπτωση απεικονίζουμε την πραγματική χρονική κλίμακα t σε δύο νέες κλίμακες $\tilde{t}, \mathbf{\Psi}$ όπου το $\mathbf{\Psi}$ έχει N συνιστώσες. Ο κανόνας της αλυσίδας τώρα γίνεται:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \Psi_\beta} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \Omega_\beta(\tilde{t})\frac{\partial}{\partial \Psi_\beta}$$

όπου εννοείται η αθροιστική σύμβαση Einstein για επαναλαμβανόμενους δείκτες. Οι εξισώσεις κίνησης τώρα θα γίνουν:

$$(\varepsilon\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \Omega_\beta(\tilde{t})\frac{\partial}{\partial \Psi_\beta})(q_a^{(0)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + \sqrt{\varepsilon}q_a^{(1/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + \varepsilon q_a^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + \varepsilon^{3/2}q_a^{(3/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + \varepsilon^2 q_a^{(2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + O(\varepsilon^{5/2})) = \omega_a(\boldsymbol{J},\tilde{t})$$

$$+\varepsilon(g_a^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + g_a^{(2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})\varepsilon + O(\varepsilon^2)),$$

$$(\varepsilon\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \Omega_\beta(\tilde{t})\frac{\partial}{\partial \Psi_\beta})(J_\lambda^{(0)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + \sqrt{\varepsilon}J_\lambda^{(1/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + \varepsilon J_\lambda^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + \varepsilon^{3/2}J_\lambda^{(3/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + \varepsilon^2 J_\lambda^{(2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + O(\varepsilon^{5/2})) =$$

$$\varepsilon(G_\lambda^{(1)}(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t}) + G_\lambda^{(2)}(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t})\varepsilon + O(\varepsilon^2))$$

Σε αυτή την ενότητα θα χρησιμοποιηθούν τα βήματα της προηγούμενης ανάλυσης με τα αναπτύγματα των $\Omega_\beta(\tilde{t})$ ως προς $\sqrt{\varepsilon}$ και τα Taylor των $\omega_a, g_a^{(s)}, G_\lambda^{(s)}$ για να φτάσουμε στην τελική μορφή των εξισώσεων. Θα αναλυθεί μόνο το ανάπτυγμα Taylor :

$$\omega_a(\mathbf{J},\tilde{t}) = \omega_a(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t}) + \omega_{a,J_\lambda}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(J_\lambda - J_\lambda^{(0)}) + \frac{1}{2}\omega_{a,J_\lambda J_\mu}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(J_\lambda - J_\lambda^{(0)})(J_\mu - J_\mu^{(0)}) +$$

$$\frac{1}{6}\omega_{a,J_\lambda J_\mu J_\sigma}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(J_\lambda - J_\lambda^{(0)})(J_\mu - J_\mu^{(0)})(J_\sigma - J_\sigma^{(0)}) + \frac{1}{24}\omega_{a,J_\lambda J_\mu J_\sigma J_\tau}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(J_\lambda - J_\lambda^{(0)})(J_\mu - J_\mu^{(0)})(J_\sigma - J_\sigma^{(0)})(J_\tau - J_\tau^{(0)})$$

$$g_a^{(1)}(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t}) = g_a^{(1)}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t}) + g_{a,q_\beta}^{(1)}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(q_\beta - q_\beta^{(0)}) + g_{a,J_\lambda}^{(1)}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(J_\lambda - J_\lambda^{(0)}) +$$

$$\frac{1}{2}g_{a,q_\beta q_\gamma}^{(1)}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(q_\beta - q_\beta^{(0)})(q_\gamma - q_\gamma^{(0)}) + \frac{1}{2}g_{a,q_\beta J_\lambda}^{(1)}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(q_\beta - q_\beta^{(0)})(J_\lambda - J_\lambda^{(0)}) +$$

$$\frac{1}{2}g^{(1)}_{a,J_\lambda J_\mu}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(J_\lambda-J^{(0)}_\lambda)(J_\mu-J^{(0)}_\mu)$$

$$G^{(1)}_\lambda(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t})=G^{(1)}_\lambda(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})+G^{(1)}_{\lambda,q_\beta}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(q_\beta-q^{(0)}_\beta)+G^{(1)}_{\lambda,J_\lambda}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(J_\lambda-J^{(0)}_\lambda)+$$
$$\frac{1}{2}G^{(1)}_{\lambda,q_\beta q_\gamma}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(q_\beta-q^{(0)}_\beta)(q_\gamma-q^{(0)}_\gamma)+\frac{1}{2}G^{(1)}_{\lambda,q_\beta J_\lambda}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(q_\beta-q^{(0)}_\beta)(J_\lambda-J^{(0)}_\lambda)+$$
$$\frac{1}{2}G^{(1)}_{\lambda,J_\lambda J_\mu}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})(J_\lambda-J^{(0)}_\lambda)(J_\mu-J^{(0)}_\mu)$$

Με παρόμοιο τρόπο με την ανάλυση σε περίπτωση ενός βαθμού ελευθερίας, οι όροι διαφορών των $q-q^{(0)}$, $J-J^{(0)}$ αναλύονται σε δυνάμεις του $\sqrt{\varepsilon}$. Οπότε, καταλήγουμε στη συνεισφορά κάθε όρου ως εξής.Πρώτα για το ω:

- Τάξη ε^0:

$$\omega_a(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})$$

- Τάξη $\varepsilon^{1/2}$:

$$\omega_{a,J_\lambda}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1/2)}_\lambda$$

- Τάξη ε^1:

$$\omega_{a,J_\lambda}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1)}_\lambda+\frac{1}{2}\omega_{a,J_\lambda J_\mu}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1/2)}_\lambda J^{(1/2)}_\mu$$

- Τάξη $\varepsilon^{3/2}$:

$$\omega_{a,J_\lambda}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(3/2)}_\lambda+\omega_{a,J_\lambda J_\mu}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1/2)}_\lambda J^{(1)}_\mu+\frac{1}{6}\omega_{a,J_\lambda J_\mu J_\sigma}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1/2)}_\lambda J^{(1/2)}_\mu J^{(1/2)}_\sigma$$

- Τάξη ε^2:

$$\omega_{a,J_\lambda}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(2)}_\lambda+\frac{1}{2}\omega_{a,J_\lambda J_\mu}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1)}_\lambda J^{(1)}_\mu+\frac{1}{2}\omega_{a,J_\lambda J_\mu J_\sigma}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1)}_\lambda J^{(1/2)}_\mu J^{(1/2)}_\sigma+$$
$$\frac{1}{24}\omega_{a,J_\lambda J_\mu J_\sigma J_\tau}(\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1/2)}_\lambda J^{(1/2)}_\mu J^{(1/2)}_\sigma J^{(1/2)}_\tau$$

Έπειτα για το $g^{(1)}_a$:

- Τάξη ε^1:

$$g^{(1)}_a(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})$$

- Τάξη $\varepsilon^{3/2}$:

$$g^{(1)}_{a,q_\beta}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})q^{(1/2)}_\beta+g^{(1)}_{a,J_\lambda}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1/2)}_\lambda$$

- Τάξη ε^2:

$$g^{(1)}_{a,q_\beta}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})q^{(1)}_\beta+g^{(1)}_{a,J_\lambda}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1)}_\lambda+\frac{1}{2}g^{(1)}_{a,q_\beta q_\gamma}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})q^{(1/2)}_\beta q^{(1/2)}_\gamma+\frac{1}{2}g^{(1)}_{a,J_\lambda J_\mu}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1/2)}_\lambda J^{(1/2)}_\mu$$
$$+g^{(1)}_{a,q_\beta J_\lambda}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})q^{(1/2)}_\beta J^{(1/2)}_\lambda$$

Τέλος για το $G^{(1)}_\lambda$:

- Τάξη ε^1:

$$G^{(1)}_\lambda(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})$$

- Τάξη $\varepsilon^{3/2}$:

$$G^{(1)}_{\lambda,q_\beta}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})q^{(1/2)}_\beta+G^{(1)}_{\lambda,J_\mu}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1/2)}_\mu$$

• Τάξη ε^2:

$$G^{(1)}_{\lambda,q_\beta}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})q^{(1)}_\beta+G^{(1)}_{\lambda,J_\mu}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1)}_\mu+\frac{1}{2}G^{(1)}_{\lambda,q_\beta q_\gamma}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})q^{(1/2)}_\beta q^{(1/2)}_\gamma+\frac{1}{2}G^{(1)}_{\lambda,J_\sigma J_\mu}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})J^{(1/2)}_\sigma J^{(1/2)}_\mu$$

$$+G^{(1)}_{\lambda,q_\beta J_\mu}(\mathbf{q^{(0)}},\mathbf{J^{(0)}},\tilde{t})q^{(1/2)}_\beta J^{(1/2)}_\mu$$

Τώρα μπορούμε να καταλήξουμε στην τελική μορφή των εξισώσεων κίνησης:

• Τάξη ε^0:

$$\Omega^{(0)}_\beta q^{(0)}_{a,\Psi_\beta}=\omega_a,$$

$$\Omega^{(0)}_\beta J^{(0)}_{\lambda,\Psi_\beta}=0$$

• Τάξη $\varepsilon^{1/2}$:

$$\Omega^{(0)}_\beta q^{(1/2)}_{a,\Psi_\beta}=-\Omega^{(1/2)}_\beta q^{(0)}_{a,\Psi_\beta}+\omega_{a,J_\lambda}J^{(1/2)}_\lambda,$$

$$\Omega^{(0)}_\beta J^{(1/2)}_{\lambda,\Psi_\beta}=-\Omega^{(1/2)}_\beta J^{(0)}_{\lambda,\Psi_\beta}$$

• Τάξη ε^1 :

$$\Omega^{(0)}_\beta q^{(1)}_{a,\Psi_\beta}=-\Omega^{(1/2)}_\beta q^{(1/2)}_{a,\Psi_\beta}-\Omega^{(1)}_\beta q^{(0)}_{a,\Psi_\beta}-q^{(0)}_{a,\tilde{t}}+\omega_{a,J_\lambda}J^{(1)}_\lambda+\frac{1}{2}\omega_{a,J_\lambda J_\mu}J^{(1/2)}_\lambda J^{(1/2)}_\mu+g^{(1)}_a,$$

$$\Omega^{(0)}_\beta J^{(1)}_{\lambda,\Psi_\beta}=-\Omega^{(1/2)}_\beta J^{(1/2)}_{\lambda,\Psi_\beta}-\Omega^{(1)}_\beta J^{(0)}_{\lambda,\Psi_\beta}-J^{(0)}_{\lambda,\tilde{t}}+G^{(1)}_\lambda$$

• Τάξη $\varepsilon^{3/2}$:

$$\Omega^{(0)}_\beta q^{(3/2)}_{a,\Psi_\beta}=-\Omega^{(1/2)}_\beta q^{(1)}_{a,\Psi_\beta}-\Omega^{(1)}_\beta q^{(1/2)}_{a,\Psi_\beta}-\Omega^{(3/2)}_\beta q^{(0)}_{a,\Psi_\beta}-q^{(1/2)}_{a,\tilde{t}}+\omega_{a,J_\lambda}J^{(3/2)}_\lambda+\omega_{a,J_\lambda J_\mu}J^{(1/2)}_\lambda J^{(1)}_\mu+$$

$$\frac{1}{6}\omega_{a,J_\lambda J_\mu J_\sigma}J^{(1/2)}_\lambda J^{(1/2)}_\mu J^{(1/2)}_\sigma+g^{(1)}_{a,q_\beta}q^{(1/2)}_\beta+g^{(1)}_{a,J_\lambda}J^{(1/2)}_\lambda,$$

$$\Omega^{(0)}_\beta J^{(3/2)}_{\lambda,\Psi_\beta}=-\Omega^{(1/2)}_\beta J^{(1)}_{\lambda,\Psi_\beta}-\Omega^{(1)}_\beta J^{(1/2)}_{\lambda,\Psi_\beta}-\Omega^{(3/2)}_\beta J^{(0)}_{\lambda,\Psi_\beta}-J^{(1/2)}_{\lambda,\tilde{t}}+G^{(1)}_{\lambda,J_\mu}J^{(1/2)}_\mu+G^{(1)}_{\lambda,q_\beta}q^{(1/2)}_\beta$$

• Τάξη ε^2 :

$$\Omega^{(0)}_\beta q^{(2)}_{a,\Psi_\beta}=-\Omega^{(1/2)}_\beta q^{(3/2)}_{a,\Psi_\beta}-\Omega^{(1)}_\beta q^{(1)}_{a,\Psi_\beta}-\Omega^{(3/2)}_\beta q^{(1/2)}_{a,\Psi_\beta}-\Omega^{(2)}_\beta q^{(0)}_{a,\Psi_\beta}-q^{(1)}_{a,\tilde{t}}+g^{(2)}_a+g^{(1)}_{a,q_\beta}q^{(1)}_\beta+g^{(1)}_{a,J_\lambda}J^{(1)}_\lambda+$$

$$\frac{1}{2}g_{a,q_\beta q_\gamma}q^{(1/2)}_\beta q^{(1/2)}_\gamma+\frac{1}{2}g_{a,J_\lambda J_\mu}J^{(1/2)}_\lambda J^{(1/2)}_\mu+g_{a,q_\beta J_\lambda}q^{(1/2)}_\beta J^{(1/2)}_\lambda+\omega_{a,J_\lambda}J^{(2)}_\lambda+\frac{1}{2}\omega_{a,J_\lambda J_\mu J_\sigma}J^{(1)}_\lambda J^{(1/2)}_\mu J^{(1/2)}_\sigma$$

$$+\frac{1}{2}\omega_{a,J_\lambda J_{mu}}J^{(1)}_\lambda J^{(1)}_\mu+\omega_{a,J_\lambda J_\mu}J^{(1/2)}_\lambda J^{(3/2)}_\mu+\frac{1}{24}\omega_{a,J_\lambda J_\mu J_\sigma J_\tau}J^{(1/2)}_\lambda J^{(1/2)}_\mu J^{(1/2)}_\sigma J^{(1/2)}_\tau,$$

$$\Omega^{(0)}_\beta J^{(2)}_{\lambda,\Psi_\beta}=-\Omega^{(1/2)}_\beta J^{(3/2)}_{\lambda,\Psi_\beta}-\Omega^{(1)}_\beta J^{(1)}_{\lambda,\Psi_\beta}-\Omega^{(3/2)}_\beta J^{(1/2)}_{\lambda,\Psi_\beta}-\Omega^{(2)}_\beta J^{(0)}_{\lambda,\Psi_\beta}-J^{(1)}_{\lambda,\tilde{t}}+G^{(2)}_\lambda+G^{(1)}_{\lambda,q_\beta}q^{(1)}_\beta+G^{(1)}_{\lambda,J_\mu}J^{(1)}_\mu+$$

$$\frac{1}{2}G_{\lambda,q_\beta q_\gamma}q^{(1/2)}_\beta q^{(1/2)}_\gamma+\frac{1}{2}G_{\lambda,J_\mu J_\sigma}J^{(1/2)}_\mu J^{(1/2)}_\sigma+G_{\lambda,q_\beta J_\mu}q^{(1/2)}_\beta J^{(1/2)}_\mu$$

Εννοείται ότι όλες οι ποσότητες που είναι συναρτήσεις των $\mathbf{q},\mathbf{J}$ υπολογίζονται στα $\mathbf{q}^{(0)},\mathbf{J}^{(0)}$. Τώρα μπορούμε και πάλι να προχωρήσουμε στην ανάλυση των εξισώσεων σε κάθε τάξη.

Τάξη ε^0

Οι εξισώσεις μηδενικής τάξης μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\Omega^{(0)}_{\beta}(\tilde{t})q^{(0)}_{a,\Psi_\beta}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \omega_a[\mathbf{J}^{(0)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}),\tilde{t}],$$

$$\Omega^{(0)}_{\beta}(\tilde{t})J^{(0)}_{\lambda,\Psi_\beta}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = 0$$

Χρησιμοποιώντας την πολλαπλή περιοδικότητα του $\mathbf{J}^{(0)}$ ως προς τα $\mathbf{\Psi}$ μπορούμε με ανάλυση Fourier να γράψουμε τη δεύτερη εξίσωση ως

$$\sum_{\mathbf{k}}[i\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})\cdot\mathbf{k}]J^{(0)}_{\lambda\mathbf{k}}(\tilde{t})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Psi}} = 0.$$

Για N-άδες που δεν παρουσιάζουν συντονισμό έχουμε

$$\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})\cdot\mathbf{k} \neq 0$$

εκτός εάν $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Αυτό σημαίνει ότι $J^{(0)}_{\lambda\mathbf{k}}(\tilde{t}) = 0$ για όλα τα μη μηδενικά $\mathbf{k}$ στα οποία δεν παρουσιάζεται συντονισμός. Εδώ θα γίνει μία διαφοροποίηση από το paper των Hinderer,Flanagan [2]. Η συνθήκη συντονισμού $\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})\cdot\mathbf{k} = 0$, μαζί με την υπόθεση ότι ο κάθε συντονισμός είναι στιγμιαίος, μας υποδεικνύει ότι, εάν θέλαμε τα $J^{(0)}_{\lambda\mathbf{k}}(\tilde{t})$ να είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου $\tilde{t}$, θα έπρεπε να μηδενίζονται παντού. Εδώ θα θεωρηθεί ότι δεν θέλουμε αυστηρά να είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου, αλλά μπορεί κατά το συντονισμό να κάνουν ένα άλμα. Η τιμή του άλματος θα προσεγγιστεί στη συνέχεια για μία σχετικά απλή περίπτωση. Παρόλα αυτά, θα εξετάζουμε τις εξισώσεις μακριά από συντονισμούς, και θα δεχτούμε ότι τότε $\mathbf{J}^{(0)}_{\lambda}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t})$. Τώρα, όσον αφορά τα $q^{(0)}_a$, είναι επακόλουθο της συνθήκης περιοδικότητας ότι η συνάρτηση $q^{(0)}_a(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) - \Psi_a$ είναι πολλαπλά περιοδική ως προς τα $\mathbf{\Psi}$. Οπότε το $q^{(0)}_a(\mathbf{\Psi},\tilde{t})$ μπορεί να γραφεί

$$q^{(0)}_a(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \Psi_a + \mathcal{Q}^{(0)}_a(\tilde{t}) + \hat{q}^{(0)}_a(\mathbf{\Psi},\tilde{t})$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη γραφή, η πρώτη εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\Omega^{(0)}_a(\tilde{t}) + \sum_{\mathbf{k}}[i\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})\cdot\mathbf{k}]\hat{q}^{(0)}_{a\mathbf{k}}(\tilde{t})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Psi}} = \omega_a[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

Το κομμάτι $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ μας δίνει την εξίσωση

$$\omega_a[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}] = \Omega^{(0)}_a(\tilde{t})$$

. Το κομμάτι $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ θα μας δώσει, μακριά από συντονισμούς, με το ίδιο επιχείρημα με πριν, ότι $\hat{q}^{(0)}_{a\mathbf{k}}(\tilde{t}) = 0$. Οπότε

$$q^{(0)}_a(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \Psi_a + \mathcal{Q}^{(0)}_a(\tilde{t})$$

Και επειδή έχουμε κάνει την παραδοχή ότι $q^{(s)}_a(\mathbf{0},\tilde{t}) = 0$, τελικά θα έχουμε

$$q^{(0)}_a(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \Psi_a$$

Τάξη $\varepsilon^{1/2}$

Η εξίσωση τάξης $\sqrt{\varepsilon}$ για το J μπορεί να γραφεί

$$\Omega_\beta^{(0)}(\tilde{t})J_{\lambda,\Psi_\beta}^{(1/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=0$$

Με επιχειρήματα παρόμοια με της προηγούμενης ανάλυσης, μπορούμε να δεχθούμε ότι $J_\lambda^{(1/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})$ εκτός από κάποια άλματα σε συντονισμούς. Τώρα, χρησιμοποιώντας τις λύσεις που έχουμε παράγει, η εξίσωση τάξης $\sqrt{\varepsilon}$ για το q γράφεται:

$$\Omega_\beta^{(0)}(\tilde{t})q_{a,\Psi_\beta}^{(1/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=\omega_{a,J_\lambda}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})-\Omega_a^{(1/2)}(\tilde{t})$$

Πάλι μπορούμε από αυτή την εξίσωση να πάρουμε δύο διαφορετικές: τη μέση τιμή της και το εξαρτώμενο από το $\mathbf{\Psi}$ κομμάτι. Έχουμε δηλαδή:

$$\Omega_a^{(1/2)}(\tilde{t})=\omega_{a,J_\lambda}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})$$

$$\Omega_\beta^{(0)}(\tilde{t})\hat{q}_{a,\Psi_\beta}^{(1/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=0$$

Οπότε πάλι μπορούμε να πούμε ότι μακριά από συντονισμούς $\hat{\mathbf{q}}^{(1/2)}=0$, άρα $q_a^{(1/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=\mathcal{Q}_a^{(1/2)}(\tilde{t})$ και επειδή $q_a^{(s)}(\mathbf{0},\tilde{t})=0$ έχουμε τελικά

$$q_a^{(1/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=0$$

εκτός από πιθανά άλματα σε συντονισμό.

Τάξη ε^1

Η εξίσωση τάξης ε για το J μπορεί να γραφεί, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες λύσεις:

$$\Omega_\beta^{(0)}(\tilde{t})J_{\lambda,\Psi_\beta}^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=-\mathcal{J}_{\lambda,\tilde{t}}^{(0)}(\tilde{t})+G_\lambda^{(1)}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

Χωρίζοντας και αυτήν την εξίσωση σε μέση τιμή και "ταλαντωτικό" κομμάτι:

$$\frac{d\mathcal{J}_\lambda^{(0)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}}=G_{\lambda\mathbf{0}}^{(1)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

$$\Omega_\beta^{(0)}(\tilde{t})\hat{J}_{\lambda,\Psi_\beta}^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=\hat{G}_\lambda^{(1)}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

Χρησιμοποιώντας ανάλυση Fourier, η λύση της δεύτερης εξίσωσης γράφεται

$$\hat{J}_\lambda^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{R}^c(\tilde{t})}\frac{G_{\lambda\mathbf{k}}^{(1)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]}{i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{\Omega^{(0)}}(\tilde{t})}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{\Psi}}+\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{R}(\tilde{t})}J_{\lambda\mathbf{k}}^{(1)}(\tilde{t})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{\Psi}}$$

Ο πρώτος όρος αποτελεί άθροισμα σε $\mathbf{k}$ που δεν παρουσιάζουν συντονισμό, ενώ ο δεύτερος όρος στα υπόλοιπα που παρουσιάζουν. Δεχόμενοι ότι τα άλματα του συντονισμού θα παρασταθούν με όρους πηγής στις εξισώσεις, μπορούμε να γράφουμε

$$\hat{J}_\lambda^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}}\frac{G_{\lambda\mathbf{k}}^{(1)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]}{i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{\Omega^{(0)}}(\tilde{t})}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{\Psi}}$$

όπου θεωρήθηκε πάλι ότι οι όροι του συντονισμού είναι γενικά μηδενικοί, εκτός από μία μικρή περιοχή στο συντονισμό, για την οποία θα εισαχθούν ειδικοί όροι πηγής. Έχουμε τελικά

$$J_\lambda^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})}\hat{G}_\lambda^{(1)}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}] + \mathcal{J}_\lambda^{(1)}(\tilde{t})$$

Η εξίσωση πρώτης τάξης για το q, απλοποιώντας με τις υπάρχουσες λύσεις, γίνεται

$$\Omega_\beta^{(0)}(\tilde{t})q_{a,\Psi_\beta}^{(1)} = g_a^{(1)}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}] - \Omega_a^{(1)}(\tilde{t}) + \omega_{a,J_\lambda}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]J_\lambda^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + \frac{1}{2}\omega_{a,J_\lambda J_\mu}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})\mathcal{J}_\mu^{(1/2)}(\tilde{t})$$

Πάλι η εξίσωση αυτή σπάει σε εξαρτώμενο και ανεξάρτητο του $\mathbf{\Psi}$ κομμάτι:

$$\Omega_a^{(1)}(\tilde{t}) = g_{a\mathbf{0}}^{(1)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}] + \omega_{a,J_\lambda}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\lambda^{(1)}(\tilde{t}) + \frac{1}{2}\omega_{a,J_\lambda J_\mu}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})\mathcal{J}_\mu^{(1/2)}(\tilde{t})$$

$$\hat{q}_a^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \omega_{a,J_\lambda}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})}\hat{J}_\lambda^{(1)}[\mathbf{\Psi},\tilde{t}] + \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})}\hat{g}_a^{(1)}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

και με τη λύση της προηγούμενης εξίσωσης για το $\hat{J}^{(1)}$:

$$\hat{q}_a^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \omega_{a,J_\lambda}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})}\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})}\hat{G}_\lambda^{(1)}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}] + \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})}\hat{g}_a^{(1)}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

Τάξη $\varepsilon^{3/2}$

Η εξίσωση τάξης $\varepsilon^{3/2}$ για το J μπορεί να γραφεί, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες λύσεις:

$$\Omega_\beta^{(0)}(\tilde{t})J_{\lambda,\Psi_\beta}^{(3/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = -\Omega_\beta^{(1/2)}(\tilde{t})J_{\lambda,\Psi_\beta}^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) - \mathcal{J}_{\lambda,\tilde{t}}^{(1/2)}(\tilde{t}) + G_{\lambda,J_\mu}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\mu^{(1/2)}(\tilde{t})$$

Η μέση τιμή αυτής της εξίσωσης δίνει

$$\frac{d\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = G_{\lambda\mathbf{0},J_\mu}^{(1)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\mu^{(1/2)}(\tilde{t})$$

Εδώ δεν θα χρειαστούμε το υπόλοιπο κομμάτι της εξίσωσης. Έπειτα, η εξίσωση τάξης $\varepsilon^{3/2}$ για το q γράφεται:

$$\Omega_\beta^{(0)}(\tilde{t})q_{a,\Psi_\beta}^{(3/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = -\Omega_\beta^{(1/2)}(\tilde{t})q_{a,\Psi_\beta}^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) - \Omega_a^{(3/2)}(\tilde{t}) + \omega_{a,J_\lambda}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]J_\lambda^{(3/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})$$

$$+\omega_{a,J_\lambda J_\mu}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})J_\mu^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) +$$

$$\frac{1}{6}\omega_{a,J_\lambda J_\mu J_\sigma}[\mathbf{\Psi},\tilde{t}]\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})\mathcal{J}_\mu^{(1/2)}(\tilde{t})\mathcal{J}_\sigma^{(1/2)}(\tilde{t}) + g_{a,J_\lambda}^{(1)}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]^{(1)}\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})$$

Η μέση τιμή αυτής της εξίσωσης δίνει μία εξίσωση για το $\Omega_\beta^{(3/2)}(\tilde{t})$ και το υπόλοιπο κομμάτι για το $\hat{\mathbf{q}}^{(3/2)}$. Δεν χρειαζόμαστε καμία από τις δύο, καθώς η ανάλυσή μας θα περιοριστεί σε όρους μίας τάξης πέραν του αδιαβατικού προβλήματος.

Τάξη ε^2

Η μέση τιμή της εξίσωσης δεύτερης τάξης για το J, μετά από τις απλοποιήσεις που δίνουν οι προηγούμενες λύσεις, μας δίνει τη διαφορική εξίσωση για το $\mathcal{J}^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})$:

$$\frac{d\mathcal{J}_\lambda^{(1)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}}=\frac{\partial G_{\lambda\mathbf{0}}^{(1)}}{\partial J_\mu}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\mu^{(1)}(\tilde{t})+G_{\lambda\mathbf{0}}^{(2)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_{\lambda\mathbf{0}}^{(1)}}{\partial J_\mu \partial J_\sigma}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\mu^{(1/2)}(\tilde{t})\mathcal{J}_\sigma^{(1/2)}(\tilde{t})$$

$$+<\hat{q}_a^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})\frac{\partial \hat{G}_\lambda^{(1)}}{\partial \Psi_a}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>+<\hat{J}_\mu^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})\frac{\partial \hat{G}_\lambda^{(1)}}{\partial J_\mu}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις λύσεις που βρήκαμε νωρίτερα για τα $\hat{q}_a^{(1)}$ και $\hat{J}_\lambda^{(1)}$, αυτή η εξίσωση γράφεται

$$\frac{d\mathcal{J}_\lambda^{(1)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}}-\frac{\partial G_{\lambda\mathbf{0}}^{(1)}}{\partial J_\mu}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\mu^{(1)}(\tilde{t})=G_{\lambda\mathbf{0}}^{(2)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_{\lambda\mathbf{0}}^{(1)}}{\partial J_\mu \partial J_\sigma}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\mu^{(1/2)}(\tilde{t})\mathcal{J}_\sigma^{(1/2)}(\tilde{t})$$

$$+<\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}(\tilde{\mathbf{t}})}\hat{G}_\mu^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})\frac{\partial \hat{G}_\lambda^{(1)}}{\partial J_\mu}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>+<\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}(\tilde{\mathbf{t}})}\hat{g}_a^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})\frac{\partial \hat{G}_\lambda^{(1)}}{\partial q_a}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>$$

$$+\frac{\partial \omega_a}{\partial J_\mu}<\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}(\tilde{\mathbf{t}})}\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}(\tilde{\mathbf{t}})}\hat{G}_\mu^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})\frac{\partial \hat{G}_\lambda^{(1)}}{\partial q_a}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]>$$

2.3.4 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Εδώ θα γίνει η ανάλυση με τις εξισώσεις που βρέθηκαν παραπάνω, μέχρι τάξης ε.

Αδιαβατική τάξη

Οι μεταβλητές δράσης δίνονται από την εξίσωση

$$J_\lambda^{(0)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=\mathcal{J}_\lambda^{(0)}(\tilde{t})$$

όπου τα $\mathcal{J}_\lambda^{(0)}(\tilde{t})$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\mathcal{J}_\lambda^{(0)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}}=G_{\lambda\mathbf{0}}^{(1)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

Οι γωνιακές μεταβλητές δίνονται από τη σχέση

$$q_a^{(0)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})=\Psi_a$$

και ο όρος μηδενικής τάξης της γωνιακής ταχύτητας δίνεται από την

$$\Omega_a^{(0)}(\tilde{t})=\omega_a[\mathcal{J}_\lambda^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

Εδώ φαίνεται ότι μπορούν να αναπαραχθούν αυτές οι εξισώσεις με τον ίδιο τρόπο που μπορούσε να γίνει και στην περίπτωση ενός βαθμού ελευθερίας: i) Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης μέχρι όρους ε. ii) Στην εξίσωση για τις γωνιακές μεταβλητές, παραλείπουμε τους όρους δύναμης $g_a^{(1)}$. iii) Στην εξίσωση για τις μεταβλητές δράσης, αντικαθιστούμε τους όρους δύναμης με τις μέσες τιμές τους ως προς $\mathbf{q}$.

Τάξη $\sqrt{\varepsilon}$

Οι μεταβλητές δράσης δίνονται από την εξίσωση

$$J_\lambda^{(1/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})$$

όπου τα $\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} - \frac{\partial G_{\lambda\mathbf{0}}^{(1)}}{\partial J_\mu}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\mu^{(1/2)}(\tilde{t}) = 0$$

Αυτή η εξίσωση θα γίνει μη ομογενής όταν συμπεριλάβουμε το φαινόμενο του συντονισμού. Οι γωνιακές μεταβλητές δίνονται από την

$$q_a^{(1/2)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = 0$$

Τέλος, η γωνιακή ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$\Omega_a^{(1/2)}(\tilde{t}) = \frac{\partial \omega_a}{\partial J_\lambda}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})$$

Φαίνεται ότι εάν αγνοήσουμε το συντονισμό, οι ποσότητες

$$\mathcal{J}^{(0)} + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{J}^{(1/2)}$$

και

$$\mathbf{\Omega}^{(0)} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{\Omega}^{(1/2)}$$

ικανοποιούν τις ομογενείς εξισώσεις που δίνει η ανάλυση του αδιαβατικού προβλήματος μέχρι $O(\sqrt{\varepsilon})$. Αυτό σημαίνει ότι το να τεθούν οι όροι $\mathcal{J}^{(1/2)}$ και $\mathbf{\Omega}^{(1/2)}$ ίσοι με το μηδέν δεν θα επηρέαζε τίποτα, σε ένα πρόβλημα χωρίς συντονισμό. Φαινόταν εξάλλου και από την προηγούμενη ανάλυση, ότι οι ημιακέραιες δυνάμεις του ε χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά και μόνο για αυτό το φαινόμενο. Χρειάζεται προσοχή στις αρχικές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος, διότι εάν οι όροι αυτοί τεθούν μηδέν αρχικά, θα παραμείνουν έτσι. Για αυτό οι αρχικές μας συνθήκες στο επόμενο κεφάλαιο θα έχουν μη μηδενικούς όρους στην δύναμη $\varepsilon^{1/2}$.

Τάξη ε

Η μεταβλητή δράσης δίνεται από την εξίσωση:

$$J_\lambda^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})}\hat{G}_\lambda^{(1)}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}] + \mathcal{J}_\lambda^{(1)}(\tilde{t})$$

Η ποσότητα $\mathcal{J}_\lambda^{(1)}(\tilde{t})$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\mathcal{J}_\lambda^{(1)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} - \frac{\partial G_{\lambda\mathbf{0}}^{(1)}}{\partial J_\mu}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\mu^{(1)}(\tilde{t}) = G_{\lambda\mathbf{0}}^{(2)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G_{\lambda\mathbf{0}}^{(1)}}{\partial J_\mu \partial J_\sigma}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\mu^{(1/2)}(\tilde{t})\mathcal{J}_\sigma^{(1/2)}(\tilde{t})$$

$$+ < \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}(\tilde{\boldsymbol{t}})}\hat{G}_\mu^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})\frac{\partial \hat{G}_\lambda^{(1)}}{\partial J_\mu}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}] > + < \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}(\tilde{\boldsymbol{t}})}\hat{g}_a^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})\frac{\partial \hat{G}_\lambda^{(1)}}{\partial q_a}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}] >$$

$$+\frac{\partial \omega_a}{\partial J_\mu} < \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}(\tilde{\boldsymbol{t}})}\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}(\tilde{\boldsymbol{t}})}\hat{G}_\mu^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})\frac{\partial \hat{G}_\lambda^{(1)}}{\partial q_a}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}] >$$

Ο όρος πρώτης τάξης στη διόρθωση της γωνιακής ταχύτητας δίνεται από:

$$\Omega_a^{(1)}(\tilde{t}) = g_{a\mathbf{0}}^{(1)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]+\omega_{a,J_\lambda}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\lambda^{(1)}(\tilde{t})+\frac{1}{2}\omega_{a,J_\lambda J_\mu}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})\mathcal{J}_\mu^{(1/2)}(\tilde{t})$$

Τέλος, η γωνιακή μεταβλητή πρώτης τάξης γράφεται

$$q_a^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \hat{q}_a^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) + \mathcal{Q}_a^{(1)}(\tilde{t})$$

όπου το $\hat{q}_a^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t})$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\hat{q}_a^{(1)}(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) = \omega_{a,J_\lambda}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})}\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})}\hat{G}_\lambda^{(1)}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]+\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})}\hat{g}_a^{(1)}[\mathbf{\Psi},\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

και το $\mathcal{Q}_a^{(1)}(\tilde{t})$ ορίζεται ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες:

$$\mathcal{Q}_a^{(1)}(\tilde{t}) = -\hat{q}_a^{(1)}(\mathbf{0},\tilde{t})$$

Πλέον έχουμε τις εξισώσεις για όλη την ανάλυση οποιουδήποτε προβλήματος σε πρώτη τάξη πέραν του αδιαβατικού. Θα χρησιμοποιηθούν στην επόμενη ενότητα και για να γίνουν υπολογισμοί με ένα σχετικά απλό παράδειγμα.

2.3.5 Το φαινόμενο του συντονισμού

Οι εξισώσεις όρων $\sqrt{\varepsilon}$ αλλάζουν και εμφανίζουν όρους πηγής όταν υπάρχει συντονισμός. Έχουμε πληροφορία ως τώρα [1] για την μία εξίσωση, αυτήν για το $\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}$:

$$\frac{d\mathcal{J}_\lambda^{(1/2)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} - \frac{\partial G_{\lambda\mathbf{0}}^{(1)}}{\partial J_\mu}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}_\mu^{(1/2)}(\tilde{t}) = \Delta J_\lambda^{(1/2)}\delta(t)$$

Ο όρος $\Delta J_\lambda^{(1/2)}$ μπορεί να υπολογιστεί ως εξής. Στις αρχικές εξισώσεις κίνησης, συγκεκριμένα αυτήν για το J_λ:

$$\frac{dJ_\lambda}{dt} = \varepsilon G_\lambda^{(1)}(\mathbf{q},\mathbf{J},\tilde{t}) + O(\varepsilon^2)$$

γράφουμε το $d\tilde{t} = \varepsilon dt$, και χρησιμοποιώντας ανάλυση Fourier και την εξίσωση μηδενικής τάξης

$$\frac{d\mathcal{J}_\lambda^{(0)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = G_{\lambda\mathbf{0}}^{(1)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

προκύπτει:

$$\frac{d(J_\lambda(\mathbf{\Psi},\tilde{t}) - \mathcal{J}_\lambda^{(0)}(\tilde{t}))}{d\tilde{t}} = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} G_{\lambda\mathbf{k}}^{(1)}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}$$

Η ολοκλήρωση της διαφοράς αυτής τώρα θα μας δώσει το άλμα στα J_λ, και σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να δεχτούμε ότι ο κυρίαρχος όρος θα είναι το άλμα στο $J_\lambda^{(1/2)}$. Έχουμε

$$\Delta J_\lambda^{(1/2)} = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda\mathbf{k}}^{(1)}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}d\tilde{t}$$

Τώρα μπορούμε να αναπτύξουμε τα q κατά Taylor γύρω από την τιμή του συντονισμού. Θα είναι:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_r + \boldsymbol{\omega}_r \tilde{t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{r,\tilde{t}}\tilde{t}^2 + ...$$

δηλαδή θα έχουμε για το ανάπτυγμα

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_r + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}_r\tilde{t} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}_{r,\tilde{t}}\tilde{t}^2 + ...$$

και επειδή στον συντονισμό έχουμε $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}_r = 0$ τελικά θα είναι

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_r + \frac{1}{2}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}_{r,\tilde{t}}\tilde{t}^2 + ...$$

Θα προσεγγίσουμε το αποτέλεσμα αμελώντας όρους μεγαλύτερης τάξης ως προς τις παραγώγους των $\boldsymbol{\omega}$. Έχουμε:

$$\Delta J_\lambda^{(1/2)} = \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \int_{-\infty}^{\infty} G^{(1)}_{\lambda\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q_r}} e^{\frac{i}{2}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}_{r,\tilde{t}}\tilde{t}^2} d\tilde{t}$$

θα μας απασχολήσει μόνο η περίπτωση που έχουμε συντονισμό σε ένα $\mathbf{k}_r$, όπου προφανώς θα έχουμε και στα πολλαπλάσιά του. Οπότε, ονομάζοντας $\mathbf{k}\cdot\mathbf{q_r} = \chi_{res}$ και $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}_{r,\tilde{t}} = \alpha$ το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\Delta J_\lambda^{(1/2)} = \sum_{s\neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} G^{(1)}_{\lambda s\mathbf{k}_r} e^{is\chi_{res}} e^{\frac{i}{2}\alpha s\tilde{t}^2} d\tilde{t}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι γνωστό και οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\Delta J_\lambda^{(1/2)} = \sum_{s\neq 0} \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha s|}} exp[sgn(\alpha s)\frac{i\pi}{4} + is\chi_{res}] G^{(1)}_{\lambda s\mathbf{k}_r}$$

όπου όλες οι ποσότητες έχουν υπολογιστεί με την αδιαβατική λύση στο χρόνο t_r του συντονισμού.

Έχοντας τώρα αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να προχωρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο με αριθμητικές προσομοιώσεις πάνω σε κάποια απλά προβλήματα, και να ελέγξουμε την εγκυρότητα της μεθόδου.

Κεφάλαιο 3

Έλεγχος της μεθόδου με παραδείγματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ελεγχθεί η μέθοδος με δύο απλά παραδείγματα ταλαντωτή με μη γραμμική διέγερση (ώστε να μπορεί να επιτευχθεί συντονισμός). Πρώτα θα εξεταστεί η περίπτωση ενός βαθμού ελευθερίας και έπειτα η περίπτωση των δύο. Συντονισμός θα υπάρξει μόνο στην τελευταία. Θα μελετηθεί η περίπτωση του $\varepsilon = 0,001$, που μπορεί να θεωρηθεί χαρακτηριστική μίας μικρής παραμέτρου. Έτσι κι αλλιώς, θέλουμε να εξετάσουμε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων μας σε σχέση με το ε^{-1}, οπότε η ακριβής τιμή της παραμέτρου δεν μας ενδιαφέρει, όσο είναι αρκούντως μικρή.

3.1 Παράδειγμα ενός βαθμού ελευθερίας

Έστω το σύστημα εξισώσεων

$$\dot{q} = \omega(J) + \varepsilon g^{(1)}(q, J)$$

$$\dot{J} = \varepsilon G^{(1)}(q, J)$$

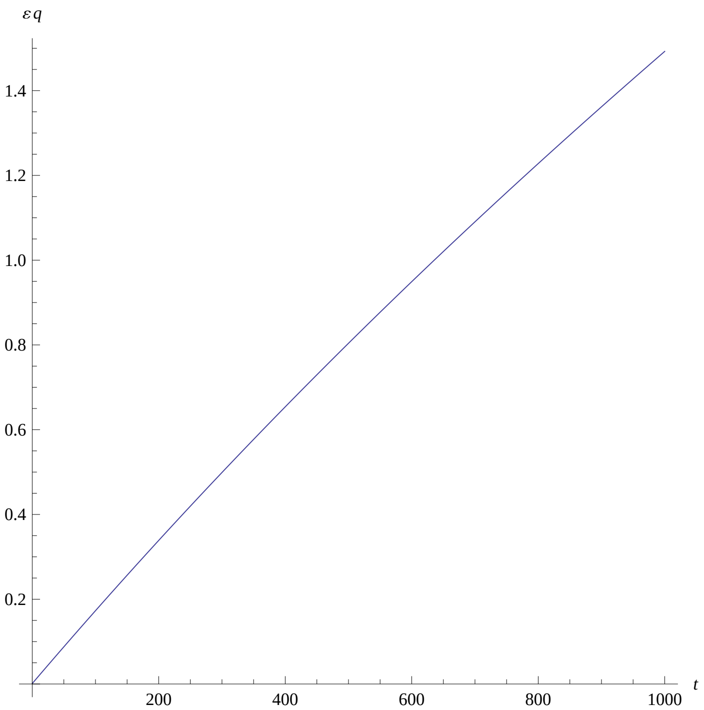
με τις συναρτήσεις να έχουν τη μορφή

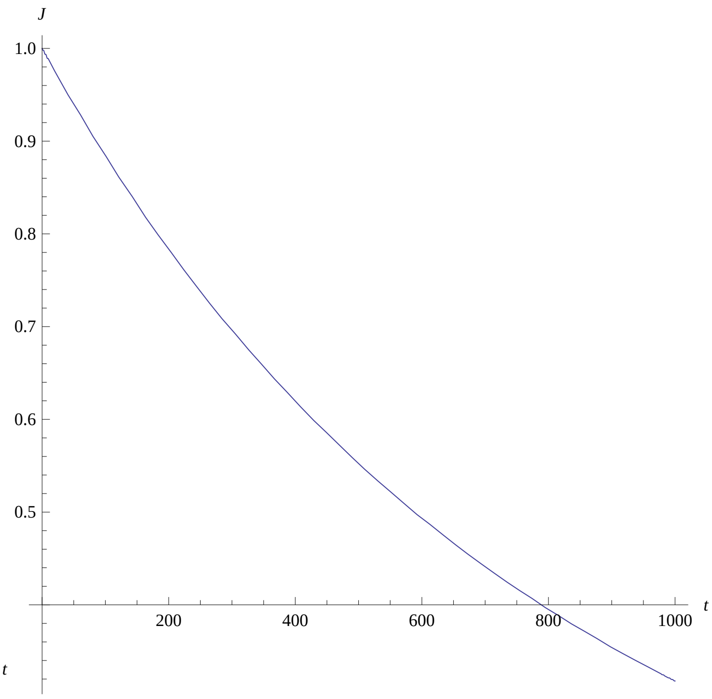
$$\omega(J) = 1 + J - J^2/4,$$

$$g^{(1)}(q, J) = sin(q)/J,$$

$$G^{(1)}(q, J) = -J - J^2/4 - Jcos(q) - J^2 sin(q)$$

Μαζί με τις αρχικές συνθήκες $q(0) = 1, J(0) = 1$ και με την παράμετρο $\varepsilon = 10^{-3}$, η ακριβής λύση του συστήματος δίνεται στο παρακάτω γράφημα.





Βλέπουμε σε αυτά τα διαγράμματα ότι μετά από χρόνο $1/\varepsilon$, η μεταβλητή δράσης J είναι $O(1)$, ενώ η γωνιακή μεταβλητή q είναι $O(1/\varepsilon)$. Τώρα, για να έχουμε μέτρο σύγκρισης, θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις για την αδιαβατική προσέγγιση και την προσέγγιση τάξης ε. Εδώ θα χρειαστούμε τα αποτελέσματα από την ανάλυση συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας:

$$J^{(0)}(\Psi,\tilde{t}) = \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t})$$

$$\frac{d\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = G_0^{(1)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

$$q^{(0)}(\Psi,\tilde{t}) = \Psi$$

$$\Omega^{(0)}(\tilde{t}) = \frac{d\psi^{(0)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \omega[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

$$J^{(1)}(\Psi,\tilde{t}) = \frac{\mathcal{I}\hat{G}^{(1)}[\Psi,\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})} + \mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t})$$

$$\frac{d\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} - \frac{\partial G_0^{(1)}}{\partial J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t}) = G_0^{(2)} + \frac{< \frac{\partial \hat{G}^{(1)}}{\partial J}\mathcal{I}\hat{G}^{(1)} >}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})} - \frac{< \hat{G}^{(1)}\hat{g}^{(1)} >}{\Omega^{(0)}(\tilde{t})}$$

$$\Omega^{(1)}(\tilde{t}) = \frac{d\psi^{(1)}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \frac{\partial \omega}{\partial J}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]\mathcal{J}^{(1)}(\tilde{t}) + g_0^{(1)}[\mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}),\tilde{t}]$$

Είναι προφανές ότι στο παρόν πρόβλημα έχουμε:

$$\hat{G}^{(1)}(q,J) = -Jcos(q) - J^2 sin(q)$$

$$\hat{g}^{(1)}(q,J) = sin(q)/J$$

$$G_0^{(1)}(J) = -J - J^2/4$$

$$g_0^{(1)}(J) = 0$$

$$G^{(2)}(q,J) = 0$$

$$\omega_{,J}(J) = 1 - J/2$$

Για να προχωρήσουμε, πρέπει να υπολογιστούν οι ποσότητες $\mathcal{I}cos(q)$, $\mathcal{I}sin(q)$, $< cos^2(q) >$, $< sin^2(q) >$, $< sin(q)cos(q) >$. Για αυτό πρέπει να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier του ημιτόνου και του συνημιτόνου. Έχουμε

$$sin(q)_k = \int_0^{2\pi} dq e^{-ikq} sin(q)/2\pi = \int_0^{2\pi} dq e^{-ikq}(e^{iq} - e^{-iq})/4i\pi$$

Οπότε

$$sin(q)_1 = 1/2i, sin(q)_{-1} = -1/2i, sin(q)_k = 0, \forall k, |k| \neq 1$$

Δηλαδή έχουμε

$$\mathcal{I}sin(q) = 1/2i(1/i)e^{iq} - 1/2i(-1/i)e^{-iq} = -\frac{e^{iq} - e^{-iq}}{2} = -cos(q)$$

Παρόμοια

$$cos(q)_k = \int_0^{2\pi} dq e^{-ikq} cos(q)/2\pi = \int_0^{2\pi} dq e^{-ikq}(e^{iq} + e^{-iq})/4\pi \Rightarrow$$

$$cos(q)_1 = 1/2, cos(q)_{-1} = 1/2, cos(q)_k = 0, \forall k, |k| \neq 1 \Rightarrow$$

$$\mathcal{I}cos(q) = 1/2(1/i)e^{iq} + 1/2(-1/i)e^{-iq} = \frac{e^{iq} - e^{-iq}}{2i} = sin(q)$$

Τώρα

$$< cos^2(q) >= 1/2\pi \int_0^{2\pi} dq(1+cos(2q))/2 = 1/2, < sin^2(q) >= 1/2\pi \int_0^{2\pi} dq(1-cos(2q))/2 = 1/2,$$

$$< sin(q)cos(q) >= 1/2\pi \int_0^{2\pi} dq(sin(2q))/2 = 0$$

Άρα έχουμε

$$\mathcal{I}\hat{G}^{(1)}(q, J) = J^2 cos(q) - Jsin(q)$$

$$< \hat{G}^{(1)}\hat{g}^{(1)} >=< -cos(q)sin(q) > + < -Jsin^2(q) >= -J/2$$

$$< \hat{G}^{(1)}_{,J}\mathcal{I}\hat{G}^{(1)} >=< (-cos(q) - 2Jsin(q))(J^2 cos(q) - Jsin(q) >= J^2/2$$

Και εφόσον όλες οι ποσότητες υπολογίζονται στα $q = q^{(0)} = \Psi, J = J^{(0)} = \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t})$, οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{d\psi^{(0)}}{d\tilde{t}} = 1 + \mathcal{J}^{(0)} - (\mathcal{J}^{(0)})^2/4$$

$$\frac{d\mathcal{J}^{(0)}}{d\tilde{t}} = -\mathcal{J}^{(0)} - (\mathcal{J}^{(0)})^2/4$$

$$\frac{d\psi^{(1)}}{d\tilde{t}} = (1 - \mathcal{J}^{(0)}/2)\mathcal{J}^{(1)}$$

$$\frac{d\mathcal{J}^{(1)}}{d\tilde{t}} = -(1 + \mathcal{J}^{(0)}/2)\mathcal{J}^{(1)} + \frac{\mathcal{J}^{(0)}(\mathcal{J}^{(0)} + 1)}{2[1 + \mathcal{J}^{(0)} - (\mathcal{J}^{(0)})^2/4]}$$

Επομένως, οι λύσεις της αδιαβατικής προσέγγισης και της προσέγγισης τάξης ε θα είναι:

$$q_{ad}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\psi^{(0)}(\varepsilon t)$$

$$J_{ad}(t,\varepsilon) = \mathcal{J}^{(0)}(\varepsilon t)$$

$$q_{p1a}(\varepsilon,t) = \varepsilon^{-1}\psi^{(0)}(\varepsilon t) + \psi^{(1)}(\varepsilon t)$$

$$J_{p1a}(\varepsilon t) = \mathcal{J}^{(0)}(\varepsilon t) + \varepsilon\mathcal{J}^{(1)}(\varepsilon t) + \varepsilon H[\mathcal{J}^{(0)}(\varepsilon t), q_{p1a}(\varepsilon,t)]$$

όπου

$$H(\mathcal{J},q) = \frac{\mathcal{J}^2 cosq - \mathcal{J} sinq}{\omega(\mathcal{J})}$$

Στην προσέγγιση τάξης ε, υπολογίζουμε τις ποσότητες στο q_{p1a} επειδή αυτή είναι η πιο καλή προσέγγιση του $q^{(0)} = \Psi$, εφόσον οι όροι του $q^{(1)}$ είναι ανώτερης τάξης από την προσέγγιση που κάνουμε εδώ. Το μόνο που μένει είναι να ορίσουμε αρχικές συνθήκες στο πρόβλημά μας. Αυτές θα είναι

$$q(0) = \varepsilon^{-1}\psi^{(0)}(0) + \psi^{(1)}(0)$$

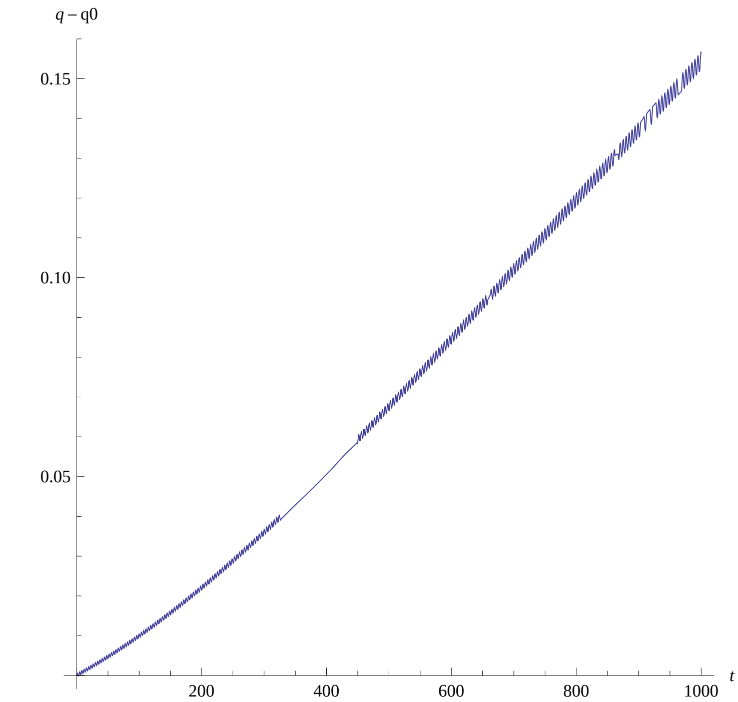
$$J(0) = \mathcal{J}^{(0)}(0) + \varepsilon\mathcal{J}^{(1)}(0) + \varepsilon H[J(0), q(0)]$$

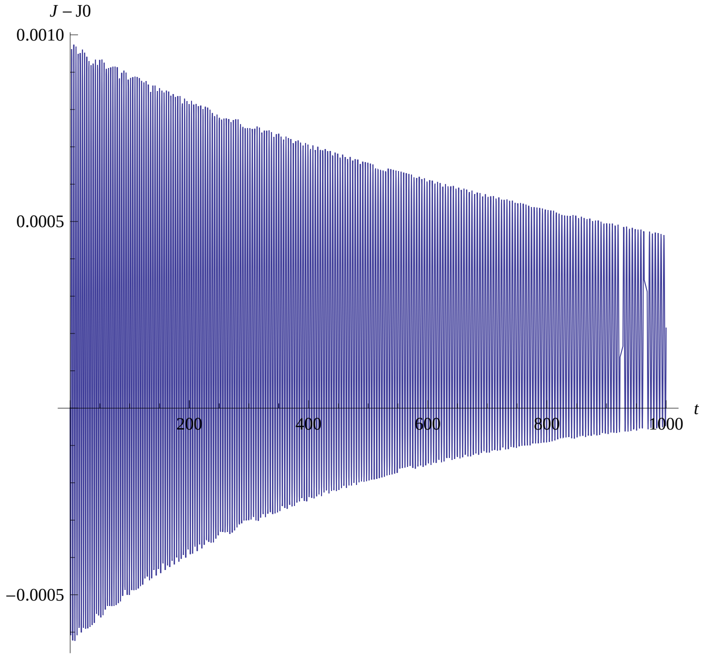
Λύνουμε αυτές τις εξισώσεις θέτοντας $\psi^{(0)}(0) = 0, \psi^{(1)}(0) = q(0) = 1, \mathcal{J}^{(0)}(0) = J(0) = 1, \mathcal{J}^{(1)}(0) = -H[J(0), q(0)]$. Αυτή θα είναι η προσέγγιση τάξης ε, η οποία αναμένεται να είναι η πιο ακριβής. Η αδιαβατική προσέγγιση θα περιλαμβάνει μόνο τις εξισώσεις

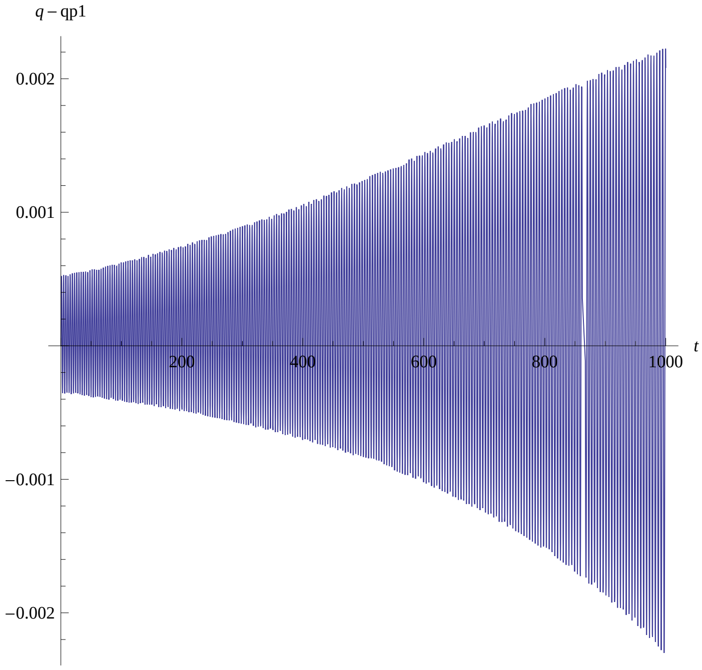
$$\frac{d\psi^{(0)}}{d\tilde{t}} = 1 + \mathcal{J}^{(0)} - (\mathcal{J}^{(0)})^2/4$$

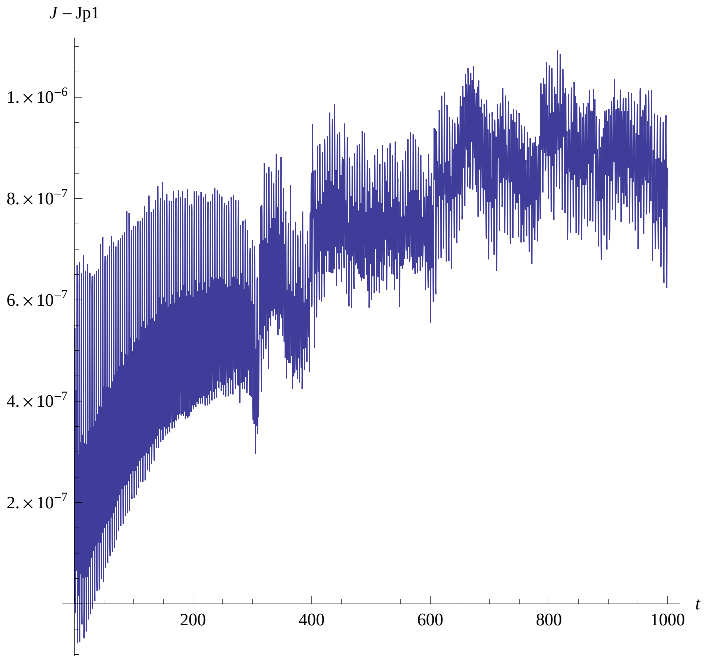
$$\frac{d\mathcal{J}^{(0)}}{d\tilde{t}} = -\mathcal{J}^{(0)} - (\mathcal{J}^{(0)})^2/4$$

με αρχικές συνθήκες $\psi^{(0)}(0) = \varepsilon, \mathcal{J}^{(0)}(0) = 1$. Ακολουθούν τα διαγράμματα των σφαλμάτων της κάθε προσέγγισης.









Φαίνεται ότι στην αδιαβατική προσέγγιση, μετά από χρόνο $1/\varepsilon$, έχουμε σφάλμα τάξης ε για το J, και σφάλμα τάξης 1 για το q. Στην προσέγγιση τάξης ε, η ακρίβεια έχει βελτιωθεί κατά μία τάξη μεγέθους, δίνοντας σφάλμα τάξης ε^2 για το J, και σφάλμα τάξης ε για το q. Αυτά τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα, οπότε μπορεί να βγει το συμπέρασμα ότι η προσέγγιση είναι έγκυρη στην περίπτωση ενός βαθμού ελευθερίας.

3.2 Παράδειγμα δύο βαθμών ελευθερίας

Το παράδειγμα που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ θα μοιάζει πολύ με το προηγούμενο ως προς τους όρους δύναμης, αλλά θα είναι τέτοιο ώστε να παρουσιάζει συντονισμό. Τώρα το σύστημα εξισώσεων θα είναι:

$$\dot{q}_1 = \omega_1(J_1) + \varepsilon g_1^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{J})$$

$$\dot{J}_1 = \varepsilon G_1^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{J})$$

$$\dot{q}_2 = \omega_2(J_2) + \varepsilon g_2^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{J})$$

$$\dot{J}_2 = \varepsilon G_2^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{J})$$

Οι συναρτήσεις τώρα θα έχουν την εξής μορφή:

$$\omega_1(J_1) = 1 + J_1 - J_1^2/4,$$

$$g_1^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = sin(3q_1 - 2q_2)/J_1,$$

$$G_1^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = -J_1 - J_1^2/4 - J_1 cos(3q_1 - 2q_2) - J_1^2 sin(3q_1 - 2q_2)$$

$$\omega_2(J_2) = 3/2 + J_2 - J_2^2/4,$$

$$g_2^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = sin(-3q_1 + 2q_2)/J_2 = -sin(3q_1 - 2q_2)/J_2,$$

$$G_2^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = -2J_2 - J_2^2/4 - J_2 cos(-3q_1 + 2q_2) - J_2^2 sin(-3q_1 + 2q_2) =$$

$$-2J_2 - J_2^2/4 - J_2 cos(3q_1 - 2q_2) + J_2^2 sin(3q_1 - 2q_2)$$

Θα υπολογιστούν πρώτα οι ποσότητες που θα χρειαστούμε στη συνέχεια. Αυτές είναι οι εξής : $\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})} sin(3q_1 - 2q_2), \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})} cos(3q_1 - 2q_2), < cos^2(3q_1 - 2q_2) >, < sin^2(3q_1 - 2q_2) >, < sin(3q_1 - 2q_2) cos(3q_1 - 2q_2) >$
Έχουμε

$$sin(3q_1 - 2q_2)_{k_1 k_2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dq_1 dq_2 e^{-ik_1 q_1} e^{-ik_2 q_2} sin(3q_1 - 2q_2) =$$

$$\frac{1}{8i\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dq_1 dq_2 e^{-ik_1 q_1} e^{-ik_2 q_2} (e^{3iq_1} e^{-2iq_2} - e^{-3iq_1} e^{2iq_2}) \Rightarrow$$

$$sin(3q_1 - 2q_2)_{3,-2} = 1/2i$$

$$sin(3q_1 - 2q_2)_{-3,2} = -1/2i$$

$$sin(3q_1 - 2q_2)_{k_1,k_2} = 0, (k_1 k_2) \neq (\pm 3, \mp 2)$$

$$cos(3q_1 - 2q_2)_{k_1 k_2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dq_1 dq_2 e^{-ik_1 q_1} e^{-ik_2 q_2} cos(3q_1 - 2q_2) =$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dq_1 dq_2 e^{-ik_1 q_1} e^{-ik_2 q_2} (e^{3iq_1} e^{-2iq_2} + e^{-3iq_1} e^{2iq_2}) \Rightarrow$$

$$cos(3q_1 - 2q_2)_{3,-2} = 1/2$$

$$cos(3q_1 - 2q_2)_{-3,2} = 1/2$$

$$cos(3q_1 - 2q_2)_{k_1,k_2} = 0, (k_1 k_2) \neq (\pm 3, \mp 2)$$

Δηλαδή

$$\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})} sin(3q_1-2q_2) = (1/2i)\frac{e^{i(3q_1-2q_2)}}{i(3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)})} - (1/-2i)\frac{e^{-i(3q_1-2q_2)}}{i(3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)})} = -cos(3q_1-2q_2)/(3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)})$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})} cos(3q_1-2q_2) = (1/2)\frac{e^{i(3q_1-2q_2)}}{i(3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)})} - (1/2)\frac{e^{-i(3q_1-2q_2)}}{i(3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)})} = sin(3q_1-2q_2)/(3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)})$$

Και οι μέσες τιμές θα είναι

$$< cos^2(3q_1-2q_2) >= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} dq_1 dq_2 \frac{1+cos(6q_1-4q_2)}{2} = 1/2$$

$$< sin^2(3q_1-2q_2) >= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} dq_1 dq_2 \frac{1-cos(6q_1-4q_2)}{2} = 1/2$$

$$< sin(3q_1-2q_2)cos(3q_1-2q_2) >= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} dq_1 dq_2 [sin(6q_1-4q_2)]/2 = 0$$

Με αυτά τα δεδομένα μπορούμε να υπολογίσουμε όρους που θα εμφανιστούν στη συνέχεια:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})} \hat{G}_1^{(1)}[\mathbf{\Psi}, \mathcal{J}_1^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{t}] = \frac{1}{3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)}}(-\mathcal{J}_1^{(0)} sin(3\Psi_1-2\Psi_2) + (\mathcal{J}_1^{(0)})^2 cos(3\Psi_1-2\Psi_2))$$

$$\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})} \hat{G}_2^{(1)}[\mathbf{\Psi}, \mathcal{J}_2^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{t}] = \frac{1}{3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)}}(-\mathcal{J}_2^{(0)} sin(3\Psi_1-2\Psi_2) - (\mathcal{J}_2^{(0)})^2 cos(3\Psi_1-2\Psi_2))$$

$$< \frac{\partial \hat{G}_1^{(1)}}{\partial J_1}\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}}\hat{G}_1^{(1)} >= \frac{1}{3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)}} < [-cos(3\Psi_1-2\Psi_2) - 2\mathcal{J}_1^{(0)} sin(3\Psi_1-2\Psi_2)][(-\mathcal{J}_1^{(0)} sin(3\Psi_1-2\Psi_2) +$$

$$(\mathcal{J}_1^{(0)})^2 cos(3\Psi_1-2\Psi_2))] >= \frac{[(\mathcal{J}_1^{(0)})^2]/2}{3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)}}$$

$$< \frac{\partial \hat{G}_2^{(1)}}{\partial J_2}\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}}\hat{G}_2^{(1)} >= \frac{1}{3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)}} < [-cos(3\Psi_1-2\Psi_2) + 2\mathcal{J}_2^{(0)} sin(3\Psi_1-2\Psi_2)][(-\mathcal{J}_2^{(0)} sin(3\Psi_1-2\Psi_2) -$$

$$(\mathcal{J}_2^{(0)})^2 cos(3\Psi_1-2\Psi_2))] >= \frac{[-(\mathcal{J}_2^{(0)})^2]/2}{3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)}}$$

$$< \frac{\partial \hat{G}_1^{(1)}}{\partial q_1}\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}}\hat{g}_1^{(1)} > + < \frac{\partial \hat{G}_1^{(1)}}{\partial q_2}\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}}\hat{g}_1^{(2)} >=< [(3\mathcal{J}_1^{(0)} sin(3\Psi_1-2\Psi_2) - 3(\mathcal{J}_1^{(0)})^2 cos(3\Psi_1-2\Psi_2))][-$$

$$\frac{cos(3\Psi_1-2\Psi_2)}{\mathcal{J}_1^{(0)}(3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)})}] > + < [(-2\mathcal{J}_1^{(0)} sin(3\Psi_1-2\Psi_2) + 2(\mathcal{J}_1^{(0)})^2 cos(3\Psi_1-2\Psi_2))][\frac{cos(3\Psi_1-2\Psi_2)}{\mathcal{J}_2^{(0)}(3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)})}] >$$

$$= (3\mathcal{J}_1^{(0)}/2 + (\mathcal{J}_1^{(0)})^2/\mathcal{J}_2^{(0)})\frac{1}{3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)}}$$

$$< \frac{\partial \hat{G}_2^{(1)}}{\partial q_1}\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}}\hat{g}_1^{(1)} > + < \frac{\partial \hat{G}_2^{(1)}}{\partial q_2}\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}}\hat{g}_1^{(2)} >=< [(3\mathcal{J}_2^{(0)} sin(3\Psi_1-2\Psi_2) + 3(\mathcal{J}_2^{(0)})^2 cos(3\Psi_1-2\Psi_2))][-$$

$$\frac{cos(3\Psi_1-2\Psi_2)}{\mathcal{J}_1^{(0)}(3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)})}] > + < [(-2\mathcal{J}_2^{(0)} sin(3\Psi_1-2\Psi_2) - 2(\mathcal{J}_2^{(0)})^2 cos(3\Psi_1-2\Psi_2))][\frac{cos(3\Psi_1-2\Psi_2)}{\mathcal{J}_2^{(0)}(3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)})}] >$$

$$= (3(\mathcal{J}_2^{(0)})^2/2\mathcal{J}_1^{(0)} - \mathcal{J}_2^{(0)})\frac{1}{3\Omega_1^{(0)}-2\Omega_2^{(0)}}$$

$$< \frac{\partial \hat{G}_1^{(1)}}{\partial q_1} \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}} \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}} \hat{G}_1^{(1)} > = < [3Js - 3J^2 c][Jc + J^2 s] > = 3/2(J^3 - J^3) = 0$$

$$< \frac{\partial \hat{G}_2^{(1)}}{\partial q_2} \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}} \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}} \hat{G}_2^{(1)} > = < [-2Js - 2J^2 c][Jc - J^2 s] > = J^3 - J^3 = 0$$

Στους τελευταίους δύο υπολογισμούς, χρησιμοποιήθηκαν οι συντομογραφίες για τα J, sin, cos. Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στις εξισώσεις κίνησης.

Όπως είναι επιλεγμένοι οι όροι δύναμης, θα οδηγήσουν σε συντονισμό όταν ο λόγος των συχνοτήτων γίνει 3/2. Θα γίνουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Η πρώτη θα αγνοήσει τα φαινόμενα του συντονισμού, και θα αξιοποιηθεί ανάλυση μέχρι την αδιαβατική τάξη . Η δεύτερη θα είναι ανάλυση μέχρι την ίδια τάξη, και θα χρησιμοποιείται το άλμα στο συντονισμό βάσει της σχέσης που αποδείχθηκε στο κεφάλαιο 2. Θα φανεί ότι η δεύτερη προσέγγιση είναι κατά πολύ ανώτερη της πρώτης.

Οι εξισώσεις κίνησης είναι οι εξής:

$$\frac{d\mathcal{J}_1^{(0)}}{d\tilde{t}} = G_{\mathbf{10}}^{(1)} = -\mathcal{J}_1^{(0)} - (\mathcal{J}_1^{(0)})^2/4$$

$$\Omega_1^{(0)} = \frac{d\psi_1^{(0)}}{d\tilde{t}} = 1 + \mathcal{J}_1^{(0)} - (\mathcal{J}_1^{(0)})^2/4$$

$$\frac{d\mathcal{J}_2^{(0)}}{d\tilde{t}} = G_{\mathbf{20}}^{(1)} = -2\mathcal{J}_2^{(0)} - (\mathcal{J}_2^{(0)})^2/4$$

$$\Omega_2^{(0)} = \frac{d\psi_2^{(0)}}{d\tilde{t}} = 3/2 + \mathcal{J}_2^{(0)} - (\mathcal{J}_2^{(0)})^2/4$$

$$\frac{d\mathcal{J}_1^{(1/2)}}{d\tilde{t}} - \frac{\partial G_{\mathbf{10}}^{(1)}}{\partial J_1} \mathcal{J}_1^{(1/2)} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{J}_1^{(1/2)}}{d\tilde{t}} + (1 + \mathcal{J}_1^{(0)}/2)\mathcal{J}_1^{(1/2)} = 0$$

$$\Omega_1^{(1/2)} = \frac{d\psi_1^{(1/2)}}{d\tilde{t}} = \frac{\partial \omega_1}{\partial J_1} \mathcal{J}_1^{(1/2)} = (1 - \mathcal{J}_1^{(0)}/2)\mathcal{J}_1^{(1/2)}$$

$$\frac{d\mathcal{J}_2^{(1/2)}}{d\tilde{t}} - \frac{\partial G_{\mathbf{20}}^{(1)}}{\partial J_2} \mathcal{J}_2^{(1/2)} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{J}_2^{(1/2)}}{d\tilde{t}} + (2 + \mathcal{J}_2^{(0)}/2)\mathcal{J}_2^{(1/2)} = 0$$

$$\Omega_2^{(1/2)} = \frac{d\psi_2^{(1/2)}}{d\tilde{t}} = \frac{\partial \omega_2}{\partial J_2} \mathcal{J}_2^{(1/2)} = (1 - \mathcal{J}_2^{(0)}/2)\mathcal{J}_2^{(1/2)}$$

$$J_\lambda^{(1)}(\mathbf{\Psi}, \tilde{t}) = \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}(\tilde{t})} \hat{G}_\lambda^{(1)}[\mathbf{\Psi}, \mathcal{J}^{(0)}(\tilde{t}), \tilde{t}] + \mathcal{J}_\lambda^{(1)}(\tilde{t})$$

$$\frac{d\mathcal{J}_1^{(1)}}{d\tilde{t}} - \frac{\partial G_{\mathbf{10}}^{(1)}}{\partial J_1} \mathcal{J}_1^{(1)} = G_{\mathbf{10}}^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_{\mathbf{10}}^{(1)}}{\partial J_1^2} (\mathcal{J}_1^{(1/2)})^2$$

$$+ < \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}(\tilde{\boldsymbol{t}})} \hat{G}_1^{(1)} \frac{\partial \hat{G}_1^{(1)}}{\partial J_1} > + < \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}} \hat{g}_a^{(1)} \frac{\partial \hat{G}_1^{(1)}}{\partial q_a} >$$

$$+ \frac{\partial \omega_a}{\partial J_\mu} < \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}} \mathcal{I}_{\mathbf{\Omega^{(0)}}} \hat{G}_\mu^{(1)} \frac{\partial \hat{G}_1^{(1)}}{\partial q_a} > \Rightarrow$$

$$\frac{d\mathcal{J}_1^{(1)}}{d\tilde{t}} + (1 + \mathcal{J}_1^{(0)}/2)\mathcal{J}_1^{(1)} = -\frac{(\mathcal{J}_1^{(1/2)})^2}{4} + \frac{(\mathcal{J}_1^{(0)})^2/2 + 3\mathcal{J}_1^{(0)}/2 + (\mathcal{J}_1^{(0)})^2/\mathcal{J}_2^{(0)}}{3\Omega_1^{(0)} - 2\Omega_2^{(0)}}$$

$$\Omega_1^{(1)} = g_{\mathbf{10}}^{(1)} + \omega_{1,J_1} \mathcal{J}_1^{(1)} + \frac{1}{2} \omega_{1,J_1 J_1} \mathcal{J}_1^{(1/2)} \mathcal{J}_1^{(1/2)} \Rightarrow$$

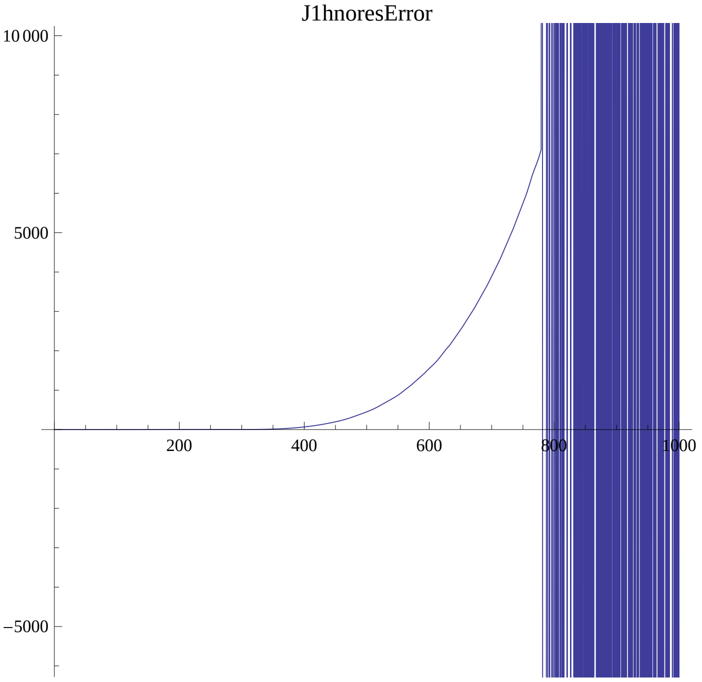
$$\Omega_1^{(1)} = \frac{d\psi_1^{(1)}}{d\tilde{t}} = (1 - \mathcal{J}_1^{(0)}/2)\mathcal{J}_1^{(1)} - (\mathcal{J}_1^{(1/2)})^2/4$$

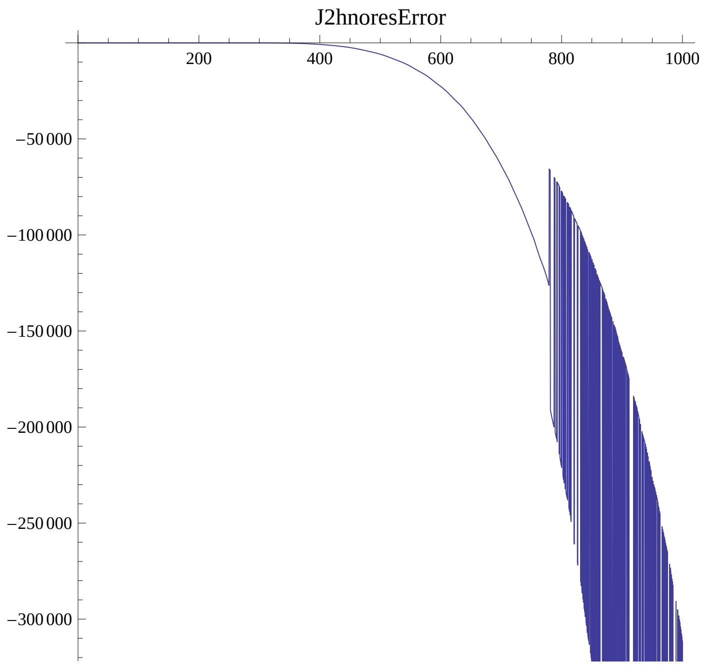
Παρόμοια

$$\frac{d\mathcal{J}_2^{(1)}}{d\tilde{t}} + (2+\mathcal{J}_2^{(0)}/2)\mathcal{J}_2^{(1)} = -\frac{(\mathcal{J}_2^{(1/2)})^2}{4} + \frac{-(\mathcal{J}_2^{(0)})^2/2 - \mathcal{J}_2^{(0)} + 3(\mathcal{J}_2^{(0)})^2/2\mathcal{J}_1^{(0)}}{3\Omega_1^{(0)} - 2\Omega_2^{(0)}}$$

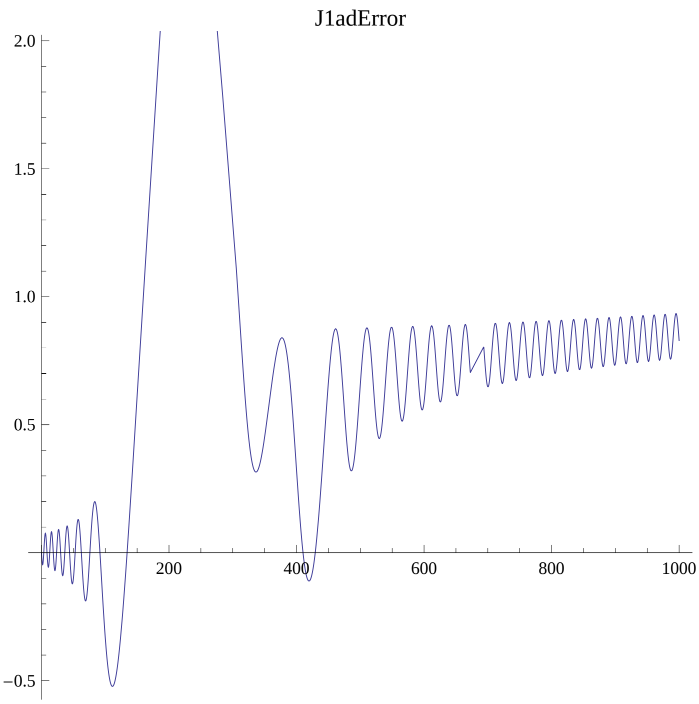
$$\Omega_2^{(1)} = \frac{d\psi_2^{(1)}}{d\tilde{t}} = (1 - \mathcal{J}_2^{(0)}/2)\mathcal{J}_2^{(1)} - (\mathcal{J}_2^{(1/2)})^2/4$$

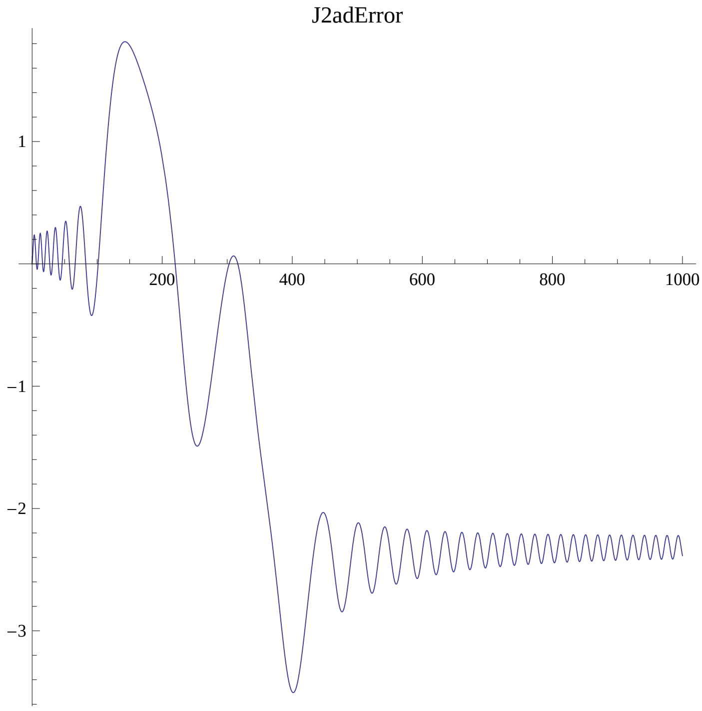
Τώρα που υπάρχουν όλες οι εξισώσεις κίνησης, μπορούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής αρχικές συνθήκες:$q_1(0) = q_2(0) = 1, J_1(0) = 1, J_2(0) = 3$ Αυτές οι συνθήκες θα εκφραστούν στην ανάλυση τάξης ε ως εξής:$\psi_1^{(0)}(0) = \psi_1^{(1/2)}(0) = \psi_2^{(0)}(0) = \psi_2^{(1/2)}(0) = 0, \psi_1^{(1)}(0) = \psi_2^{(1)}(0) = 1, \mathcal{J}_1^{(0)} = 0,9, \mathcal{J}_2^{(0)} = 6,857, \mathcal{J}_1^{(1/2)} = 0,1/\varepsilon^{1/2}, \mathcal{J}_2^{(1/2)} = -3,857/\varepsilon^{1/2}, \mathcal{J}_1^{(1)} = -\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}}\hat{G}_1^{(1)}[1,0,9,6,857], \mathcal{J}_2^{(1)} = -\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}}\hat{G}_2^{(1)}[1,0,9,6,857]$ όπου τα ορίσματα στις τελευταίες δύο συναρτήσεις $\mathcal{I}_{\mathbf{\Omega}^{(0)}}\hat{G}_a^{(1)}$ είναι τα $[3q_1(0) - 2q_{2(0)}, \mathcal{J}_1^{(0)}, \mathcal{J}_2^{(0)}]$. Θα παρουσιάσουμε πρώτα τα αποτελέσματα της πρώτης προσέγγισης (χωρίς τον συντονισμό). Το πιο μικρό σφάλμα ήταν αυτό που φαίνεται στις παρακάτω εικόνες (αριστερά για το J_1, δεξιά για το J_2).



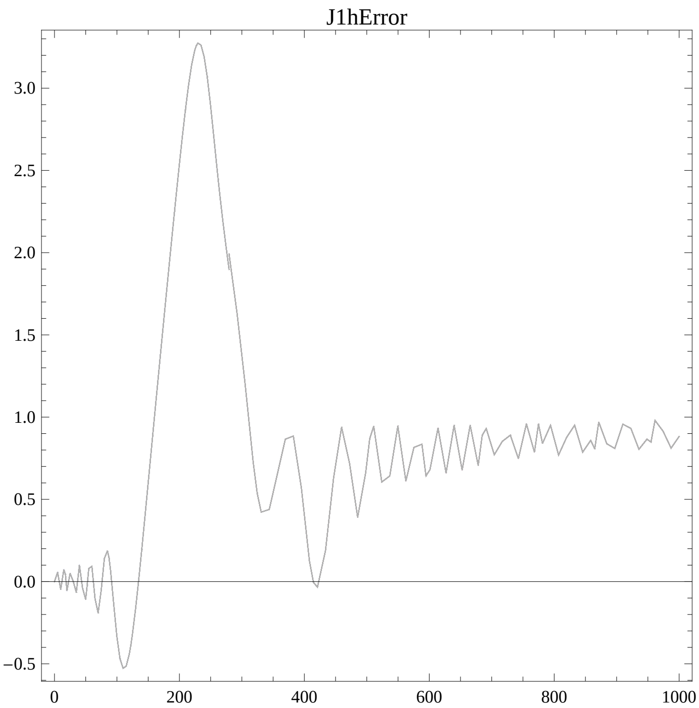


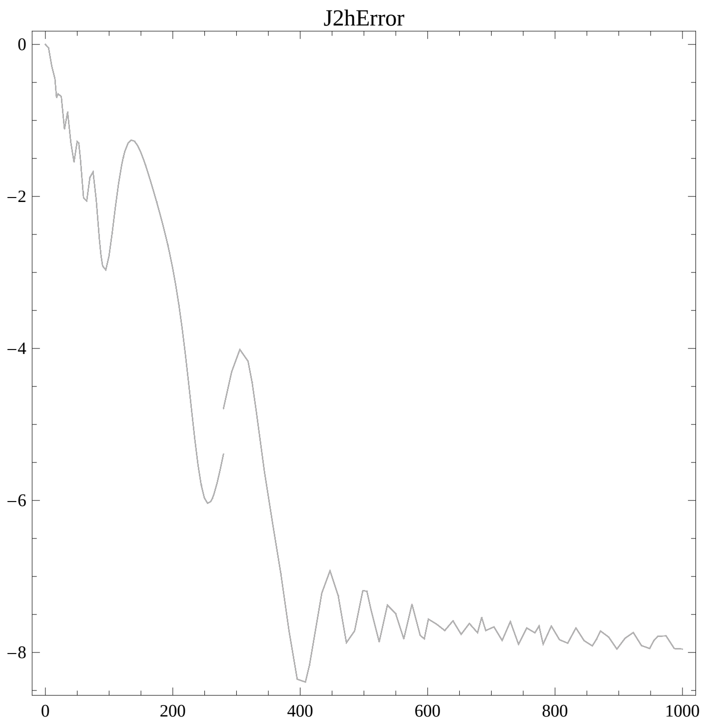
Φαίνεται ότι το σφάλμα είναι εξαιρετικά μεγάλο σε αυτή την περίπτωση, οπότε πρέπει να γίνουν βελτιώσεις. Το επόμενο βήμα είναι η αδιαβατική προσέγγιση με το άλμα στο συντονισμό. Το σφάλμα στα J(αριστερά το 1, δεξιά το 2) φαίνεται στις παρακάτω εικόνες:



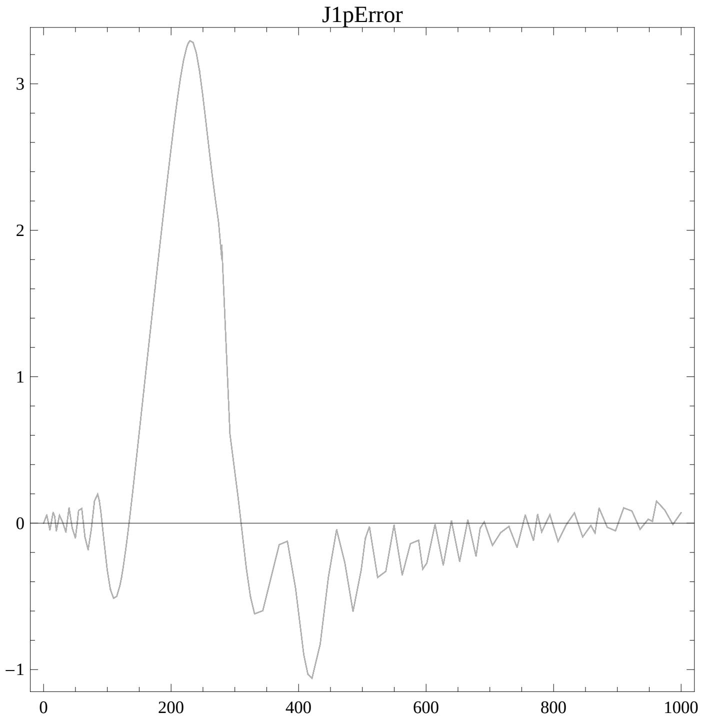


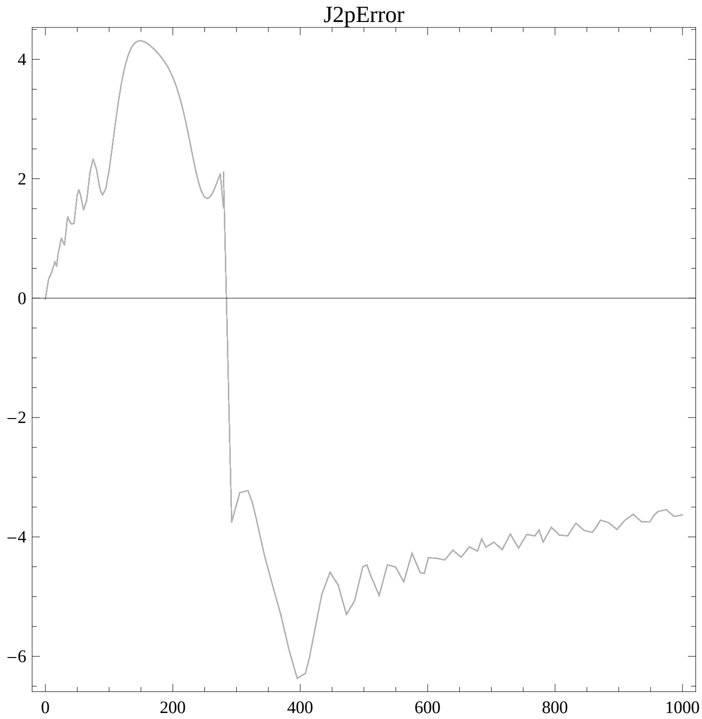
Δεν φαίνεται να υπάρχει μεγάλη βελτίωση. Ας δούμε τώρα την επόμενη προσέγγιση (μέχρι όροι τάξης $\sqrt{\varepsilon}$):





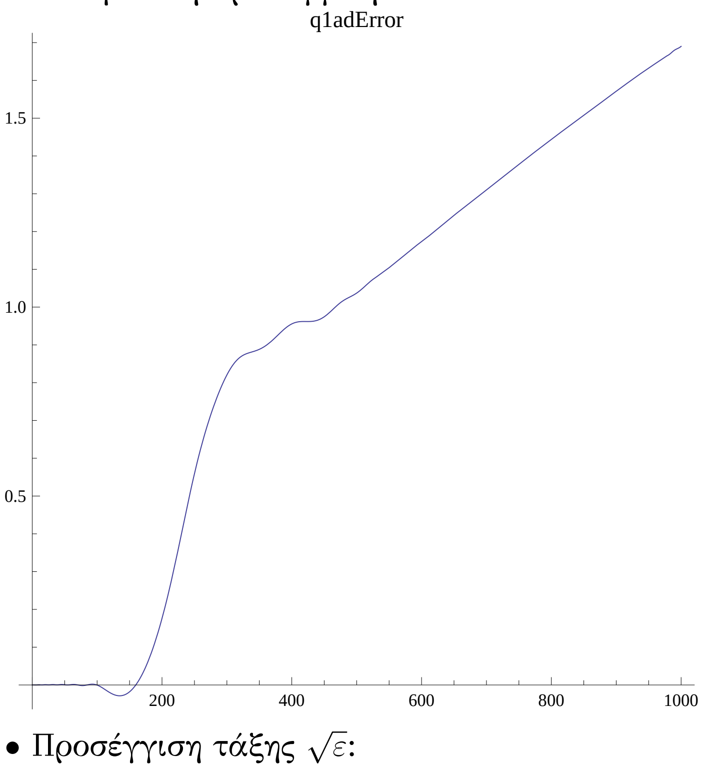
Τέλος, η τελευταία προσέγγιση προκύπτει από την ανάλυση μέχρι τάξης ε:

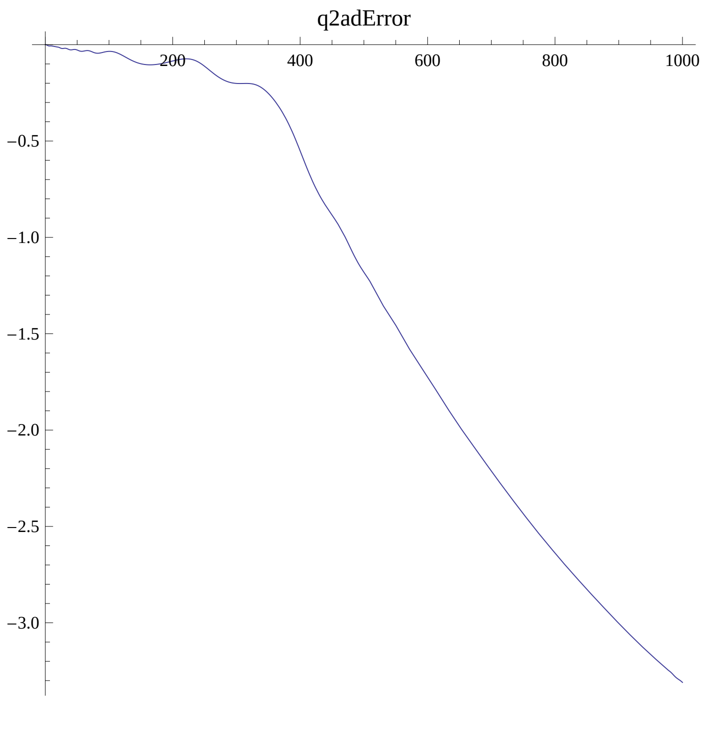




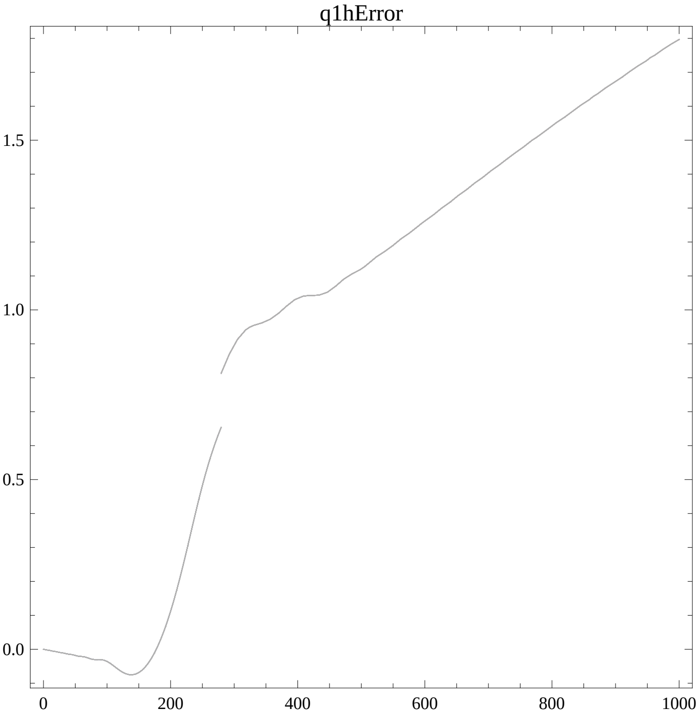
Αυτό που φαίνεται είναι ότι η αδιαβατική προσέγγιση είναι η καλύτερη από όλες. Να τονίσουμε εδώ ότι το σφάλμα στην τελευταία προσέγγιση γίνεται μικρότερο όσο βελτιώνουμε την ακρίβεια της μεθόδου ολοκλήρωσης (η ολοκλήρωση έγινε με Mathematica, και την υπορουτίνα ExplicitRungeKutta της μεθόδου FixedStep). Απλώς, μετά από κάποιο σημείο, ο χρόνος ολοκλήρωσης ήταν πολύ μεγάλος και το πρόγραμμα μπορεί να πάγωνε. Αυτή η προσέγγιση είναι η καλύτερη που επετεύχθη χωρίς να χρειαστούν ώρες για τον υπολογισμό. Το σφάλμα στα q ακολουθεί μία κάπως διαφορετική συμπεριφορά. Έχουμε:

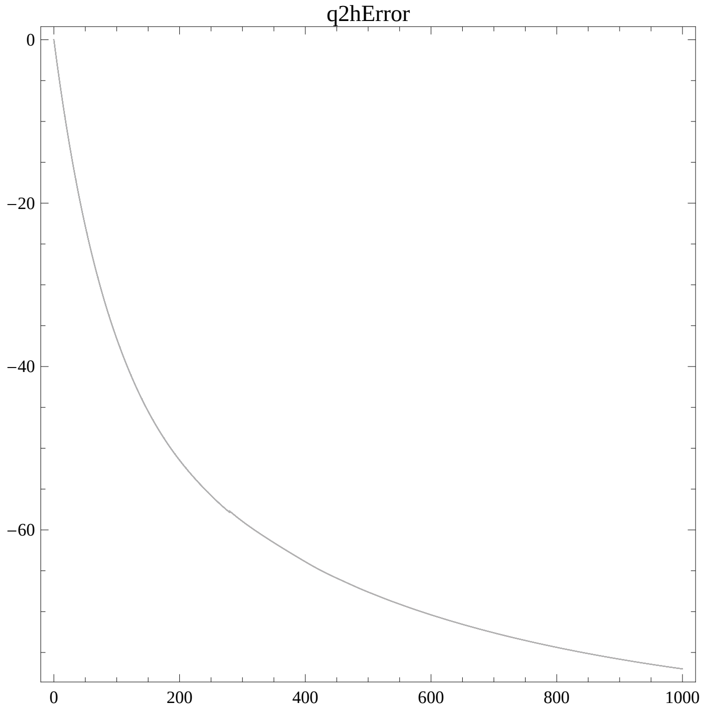
- Αδιαβατική προσέγγιση:



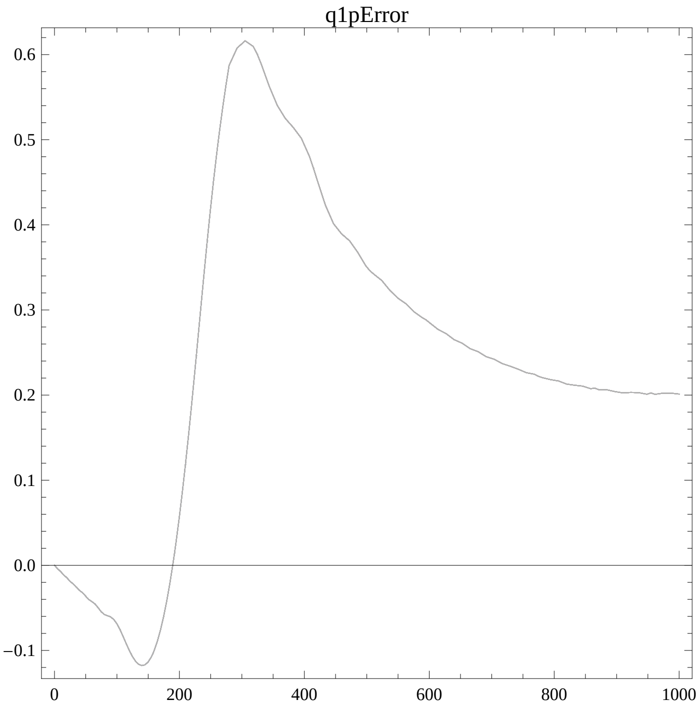


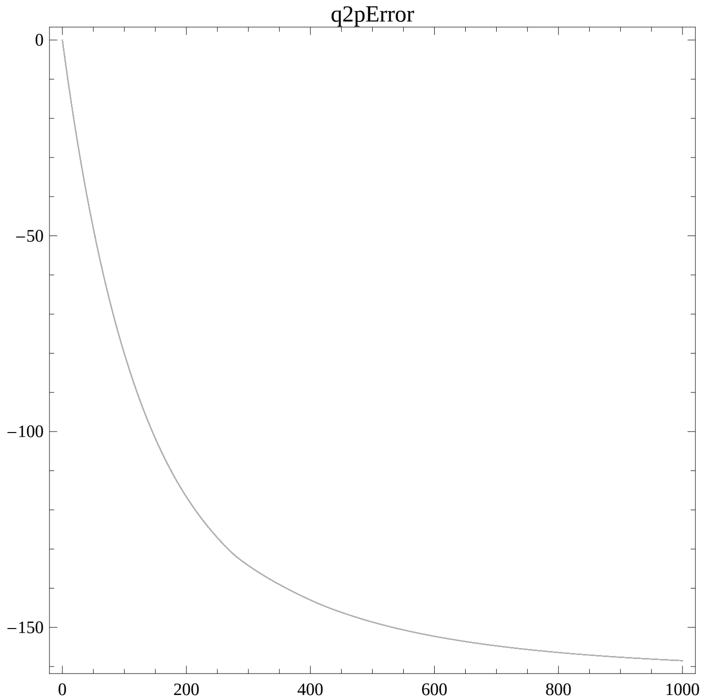
- Προσέγγιση τάξης $\sqrt{\varepsilon}$:





• Προσέγγιση τάξης ε:





Ο συντονισμός ήταν περίπου στο χρόνο $t \approx 279$. Από τα αποτελέσματα αυτά μπορούμε να αντλήσουμε χρήσιμα συμπεράσματα.

3.3 Συζήτηση των αποτελεσμάτων

Αφού έγινε η ανάλυση και φάνηκαν τα αποτελέσματα της κάθε προσέγγισης, μπορούμε να πούμε τα εξής. Καταρχάς, η μέθοδος δουλεύει εξαιρετικά απουσία συντονισμών, όπως φαίνεται από το παράδειγμα ενός βαθμού ελευθερίας.

Στο παράδειγμα με τον συντονισμό τώρα, η προσέγγιση φαίνεται να δουλεύει αρκετά καλά στο να αναπαράγει το φυσικό πρόβλημα.

Ωστόσο, δεν φαίνεται να μας προσφέρει κάτι η ανάλυση σε υψηλότερες τάξεις, κάτι που δεν ήταν αναμενόμενο εκ πρώτης όψεως. Αυτό σημαίνει προφανώς ότι το άλμα στα $\mathscr{J}^{(1/2)}$ που χρησιμοποιήσαμε δεν ήταν αρκετό. Χρειαζόταν και το άλμα σε άλλες ποσότητες. Επίσης, ο ακριβής προσδιορισμός του άλματος αυτού χρειαζόταν και ακρίβεια τάξης 1 στη φάση κατά τον συντονισμό, την οποία δεν είχαμε. Για την ακρίβεια, για να υπολογιστεί η φάση χ_{res} με ακρίβεια μονάδας μετά το συντονισμό, χρειάζονται τα άλματα τάξης ε στα J_λ και τάξης 1 στα q_a [1,2]. Για αυτά δεν είχαμε μαθηματικές εκφράσεις προς το παρόν. Σε κάθε περίπτωση, στην αδιαβατική προσέγγιση, το σφάλμα στη φάση αυξάνει με τον χρόνο, οπότε χρειάζεται μία ανώτερης τάξης ανάλυση. Επίσης, φαίνεται ότι ο συντονισμός επηρρεάζει τις ανώτερες τάξεις, οπότε ενισχύεται το συμπέρασμα ότι η ανάλυση δεν είναι λάθος, αλλά είναι ακόμη ελλιπής.

[1]:Eanna E. Flanagan and Tanja Hinderer, Transient resonances in the inspirals of point particles into black holes, arXiv:1009.4923v3[gr-qc],10.1103/PhysRevLett.109.071102

[2]:Eanna E. Flanagan and Tanja Hinderer, Two timescale analysis of extreme mass ratio inspirals in Kerr. I. Orbital Motion,Phys.Rev.D78:064028,2008,arXiv:0805.3337v2 [gr-qc]

[3]:L. Barack and C. Cutler, "LISA capture sources: Approximate waveforms, signal-to- noise ratios, and parameter estimation accuracy", Phys. Rev. D 69, 082005 (2004)

[4]:K. Glampedakis, S. A. Hughes, and D. Kennefick, "Approximating the inspiral of test bodies into Kerr black holes", Phys. Rev. D 66, 064005 (2002)

[5]:S. Babak, H. Fang, J. R. Gair, K. Glampedakis, and S. A. Hughes, "'Kludge' gravitational waveforms for a test-body orbiting a Kerr black hole", Phys. Rev. D 75, 024005 (2007)

[6]:D. A. Brown et al., "Gravitational waves from intermediate-mass-ratio inspirals for ground-based detectors", Phys. Rev. Lett. 99, 201102 (2007)

[7]:J. R. Gair et al., "Event rate estimates for LISA extreme mass ratio capture sources", Class. Quantum Grav. 21, S1595 (2004)

[8]:S. A. Teukolsky, "Perturbations of a rotating black hole.I. Fundamental equations for gravitational electromagnetic, and neutrino field perturbations", Astrophys. J.185, 635 (1973)

[9]:C. Cutler, D. Kennefick, and E. Poisson, "Gravitational radiation reaction for bound motion around a Schwarzschild black hole", Phys. Rev. D 50, 3816 (1994)

[10]:M.Shibata, "Gravitational waves by compact stars orbiting around rotating supermassive black holes", Phys.Rev. D 50, 6297 (1994)

[11]:K. Glampedakis and D. Kennefick, "Zoom and whirl: Eccentric equatorial orbits around spinning black holes and their evolution under gravitational radiation reaction", Phys. Rev. D 66,044002 (2002)

[12]:S. A. Hughes, "The evolution of circular, non-equatorial orbits of Kerr black holes due to gravitational-wave emission", Phys. Rev. D 61, 084004 (2000)

[13]:S. A. Hughes, S. Drasco, E. E. Flanagan, and J. Franklin, "Gravitational radiation reaction and inspiral waveforms in the adiabatic limit", Phys. Rev.Lett. 94, 221101 (2005)

[14]:S. Drasco and S. A. Hughes, "Gravitational wave snapshots of generic extreme mass ratio inspirals", Phys.Rev. D 73, 024027 (2006)

[15]:S. Drasco, "Verifying black hole orbits with gravitational spectroscopy", arXiv:0711.4644 [gr-qc]

[16]:M. Campanelli and C. O. Lousto, "Second order gauge invariant gravitational perturbations of a Kerr black hole", Phys. Rev. D 59, 124022 (1999)

[17]:R. Gleiser, C. Nicasio, R. Price, and J. Pullin, "Gravitational radiation

from Schwarzschild black holes: the second-order perturbation formalism", Phys. Rep. 325,41 (2000)

[18]:C. O. Lousto and H. Nakano, "Regular second order perturbations of binary black holes: The extreme mass ratio regime", 0804.3824

[19]:Y. Mino, M. Sasaki, and T. Tanaka, "Gravitational radiation reaction to a particle motion", Phys. Rev. D55,3457 (1997)

[20]:T. C. Quinn and R. M. Wald, "An axiomatic approach to electromagnetic and gravitational radiation reaction of particles in curved spacetime", Phys. Rev. D56, 3381 (1997)

[21]:E. Flanagan, 2002, presentation at the workshop on radiation reaction in General Relativity, Penn State, May

[22]:Y. Mino, "Adiabatic Expansion for a Metric Perturbation and the Condition to Solve the Gauge Problem for the Gravitational Radiation Reaction Problem",Progress of Theoretical Physics 115, 43 (2006)

[23]:Y. Mino, "Perturbative Approach to an orbital evolution around a Supermassive black hole", Phys. Rev. D 67, 084027 (2003) [24]:S. Drasco, E. E. Flanagan, and S. A. Hughes, "Computing inspirals in Kerr in the adiabatic regime. I: The scalar case", Class. Quant. Grav. 22, S801 (2005)

[25]:N. Sago, T. Tanaka, W. Hikida, and H. Nakano, "Adiabatic Radiation Reaction to Orbits in Kerr Spacetime", Progress of Theoretical Physics 114, 509 (2005)

[26]:N. Sago, T. Tanaka, W. Hikida, K. Ganz, and H. Nakano, "Adiabatic Evolution of Orbital Parameters in Kerr Spacetime", Progress of Theoretical Physics 115, 873 (2006)

[27]:S. Drasco and N. Sago, 2008, in preparation

[28]:E. Rosenthal, "Construction of the second-order gravitational perturbations produced by a compact object", Phys. Rev. D 73, 044034 (2006)

[29]:E. Rosenthal, "Second-order gravitational self-force", Phys. Rev. D 74, 084018 (2006)

[30]:C. R. Galley, Radiation Reaction and Self-Force in Curved Spacetimes in a Field Theory Approach, PhD thesis, University of Maryland, 2007

[31]:C. R. Galley and B. L. Hu, "Self-force on extreme mass ratio inspirals via curved spacetime effective field theory", arXiv:0801.0900

[32]:C. R. Galley, 2008, presentation at the 11th Eastern Gravity Meeting, Penn State, May 2008

[33]:J. Kevorkian and J. D. Cole, Multiple scale and singular perturbation methods Springer, New York, 1996