

**ΜΑΡΙΑ ΧΟΥΛΛΗ**

**ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ  
SYLVESTER-HADAMARD ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

Διπλωματική Εργασία για το Μεταπτυχιακό  
Δίπλωμα Ειδίκευσης στην κατεύθυνση  
"Εφαρμοσμένα Μαθηματικά"



Τμήμα Μαθηματικών  
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα, Φεβρουάριος 2015



Η παρούσα Διπλωματική Εργασία  
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών  
για την απόκτηση του  
**Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης**  
στα  
Εφαρμοσμένα Μαθηματικά  
που απονέμει το  
**Τμήμα Μαθηματικών** του  
**Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.**  
Εγκρίθηκε την ....., από Εξεταστική Επιτροπή,  
αποτελούμενη από τους:

<b>Όνοματεπώνυμο</b>	<b>Βαθμίδα</b>	<b>Υπογραφή</b>
Μητρούλη Μαριλένα (*)	Αναπλ.Καθηγήτρια	.....
Δουγαλής Βασίλειος	Καθηγητής	.....
Δρακόπουλος Μιχάλης	Επικ.Καθηγητής	.....

(\*) επιβλέπουσα καθηγήτρια

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κα Μαριλένα Μητρούλη, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή της κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου.

Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητή κ. Βασίλειο Δουγαλή και Επίκουρο Καθηγητή κ. Μιχάλη Δρακόπουλο για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους.

Ακόμα, δεν πρέπει να παραλείψω το Τμήμα Μαθηματικών και τη Γραμματεία του Τμήματος για την αμέριστη βοήθεια και τη στήριξη.

Ευχαριστώ τους φίλους/φίλες μου για την ηθική υποστήριξή τους και τη βοήθειά τους, όπου αυτή ήταν απαραίτητη.

Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, Ιωάννη και Μαρίνα Χούλλη για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Αφιερώνω αυτή την εργασία στην μητέρα μου και στον πατέρα μου.

Μαρία Χούλλη

# Περιεχόμενα

<b>Πρόλογος</b>	<b>7</b>
<b>1 Εισαγωγικές έννοιες</b>	<b>9</b>
1.1 Ιδιοτιμή και ιδιοδιάνυσμα πίνακα . . . . .	9
1.2 Αλγεβρική πολλαπλότητα . . . . .	9
1.3 Τάξη πίνακα . . . . .	10
1.4 Ταυτοτικός Πίνακας . . . . .	10
1.5 Αντίστροφος και ανάστροφος πίνακας . . . . .	11
1.6 Συμμετρικός πίνακας . . . . .	11
1.7 Ίχνος πίνακα . . . . .	12
1.8 Γινόμενο Kronecker πινάκων . . . . .	12
1.9 Ευθύ άθροισμα πινάκων . . . . .	13
1.10 Αλλαγές προσήμου διανύσματος . . . . .	14
1.11 Σύμβολα του Landau . . . . .	14
<b>2 Πίνακες Sylvester-Hadamard</b>	<b>17</b>
2.1 Ορισμός του πίνακα Hadamard . . . . .	17
2.2 Ο πίνακας Sylvester-Hadamard τάξης $2^n$ . . . . .	18
2.3 Άλλοι τρόποι κατασκευής του πίνακα $H_n$ . . . . .	21
2.3.1 Ahmed και Rao (1975) . . . . .	21
2.3.2 Henderson (1978) . . . . .	22
2.3.3 Lee και Kaveh (1986) . . . . .	23
2.4 Φασματική Ανάλυση του πίνακα $H_n$ . . . . .	24
2.5 Ιδιοτιμές του πίνακα $H_n$ . . . . .	24
2.6 Ιδιοδιανύσματα του πίνακα $H_n$ . . . . .	26
2.6.1 Ένα ιδιοδιάνυσμα του $H_n$ . . . . .	26
2.6.2 Ένας πρώτος τρόπος παραγωγής ενός συνόλου ορθο- γώνιων ιδιοδιανυσμάτων . . . . .	27
2.6.3 Ένας ακόμα τρόπος παραγωγής ενός συνόλου ορθο- γώνιων ιδιοδιανυσμάτων . . . . .	40
<b>3 Μετασχηματισμός Hadamard και αλγόριθμοι</b>	<b>53</b>
3.1 Γενικές πληροφορίες . . . . .	53
3.2 Μία πρώτη παραγοντοποίηση . . . . .	54
3.3 Ένας πρώτος αλγόριθμος . . . . .	55
3.4 Διακριτός Κλασματικός Μετασχηματισμός Hadamard . . . . .	60
3.4.1 Ορισμός . . . . .	60
3.4.2 Ο αλγόριθμος . . . . .	62

3.4.3 Υπολογιστική Πολυπλοκότητα . . . . .	68
<b>4 Αριθμητικά αποτελέσματα</b>	<b>75</b>
4.1 Μέθοδοι παραγωγής των ιδιοδιανυσμάτων του $\mathbf{H}_n$ . . . . .	75
4.2 Μετασχηματισμός Hadamard . . . . .	77
<b>5 Εφαρμογές</b>	<b>81</b>
5.1 Ένα παράδειγμα από τη Στατιστική . . . . .	81
5.2 Συναρτήσεις Walsh . . . . .	85
<b>A' Κώδικας</b>	<b>89</b>

# Πρόλογος

Οι πίνακες Hadamard πήραν την ονομασία τους από τον Γάλλο μαθηματικό **Jacques Salomon Hadamard** (8 Δεκεμβρίου 1865 – 17 Οκτωβρίου 1963). Η συνεισφορά του ήταν μεγάλη σε διάφορους τομείς των Μαθηματικών, όπως στη Θεωρία Αριθμών, τη Θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων, τη Διαφορική Γεωμετρία και τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. Αυτό φαίνεται και από την πλειάδα μαθηματικών ανακαλύψεων που έχουν πάρει το όνομά του, εκτός φυσικά από τους πίνακες Hadamard. Μερικές από αυτές είναι το δυναμικό σύστημα Hadamard, η ανισότητα Hadamard, το Θεώρημα Hadamard τριών κύκλων και ο χώρος Hadamard.

Οι **πίνακες Hadamard** έχουν ασκήσει μια γοητεία τον τελευταίο ενάμησι αιώνα στο μαθηματικό κόσμο. Παρ'ότι είναι εμφανώς εύκολοι στην περιγραφή, πανταχού παρόντες και χρηστικοί, εξακολουθεί να μην έχει απαντηθεί το εξής σημαντικό ερώτημα: υπάρχουν σε όλες τις δυνατές τάξεις; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό πιστεύεται πως είναι "ναι", χωρίς όμως να έχει καταφέρει να αποδειχθεί μέχρι σήμερα. Μάλιστα, η **Εικασία του Hadamard**, ότι για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  υπάρχει ένας πίνακας Hadamard τάξης  $4n$ , παραμένει ένα από τα μεγαλύτερα άλυτα προβλήματα των Μαθηματικών. Στην καθημερινή ζωή, η πρακτική χρήση των πινάκων Hadamard είναι συνεχής και εμφανώς ορατή.

Η σημασία των **ορθογώνιων πινάκων**, στους οποίους συγκαταλέγονται και οι πίνακες Hadamard, στα σύγχρονα διακριτά μαθηματικά και τις εφαρμογές τους είναι πολύ γνωστή. Σε πολλά εφαρμοσμένα προβλήματα είναι απαραίτητη η χρήση πινάκων Hadamard.

Οι έρευνες σχετικά με τους πίνακες Hadamard συνδέονταν αρχικά με **προβλήματα γραμμικής άλγεβρας** (για παράδειγμα, με την εύρεση μέγιστης ορίζουσας). Αργότερα, προέκυψε ότι οι εφαρμογές των πινάκων Hadamard συνδέονται με τη μεταφορά πληροφοριών μέσω (μη γραμμικών) ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και με μία σειρά ζητημάτων από τη θεωρία πληροφοριών (όπως συμπίεση πληροφοριών και κωδικοποίηση χωρίς θόρυβο, βέλτιστη γραμμική ανίχνευση ενός σήματος μέσω θορύβου, κατασκευή καναλιών πολλαπλής πρόσβασης), στα οποία οι πίνακες Hadamard έχουν ασκήσει σημαντική επιρροή. Επιπλέον, προέκυψε ότι υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στους πίνακες Hadamard και τη Στατιστική, όπου χρησιμοποιώντας τους σε στατιστικές τεχνικές συμβάλλουν σημαντικά και στις Τηλεπικοινωνίες. Ένας ακόμα κλάδος στον οποίο έχουν φανεί χρήσιμοι

οι πίνακες Hadamard είναι αυτός της Κρυπτογραφίας και Κρυπτανάλυσης.

Ιστορικά, ο πρώτος που ασχολήθηκε με τους πίνακες Hadamard ήταν ο **James Joseph Sylvester**, ο οποίος το 1867 πρότεινε μια αναδρομική μέθοδο για την κατασκευή πινάκων Hadamard τάξης  $2^k$ .

Το 1933, ο **Paley** απέδειξε ότι η τάξη οποιουδήποτε πίνακα Hadamard διαιρείται με το 4. Το αντίστροφο της Πρότασης αυτής είναι η Εικασία του Hadamard, που αναφέρθηκε νωρίτερα.

Σήμερα, υπάρχουν αρκετές γνωστές μέθοδοι για την παραγωγή πινάκων Hadamard. Ορισμένες από αυτές είναι οι: Williamson, Baumert-Hall-Goethals-Seidel, Paley-Wallis-Whiteman, καθώς και οι προσεγγίσεις των Golay-Turyn, Plotkin και J.Wallis.



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγικές έννοιες

### 1.1 Ιδιοτιμή και ιδιοδιάνυσμα πίνακα

Η θεωρία που ακολουθεί βρίσκεται στο [2].

**Ορισμός 1.1.1** Έστω πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Αν υπάρχουν  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  με  $x \neq 0$ , τέτοια ώστε  $Ax = \lambda x$ , θα πούμε ότι το  $\lambda$  είναι μια **ιδιοτιμή** του πίνακα  $A$  και το  $x$  ένα **ιδιοδιάνυσμα** του πίνακα  $A$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ .

**Πρόταση 1.1.2** Έστω  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:

- i) Το  $\lambda$  είναι μια ιδιοτιμή του  $A$ .
- ii) Υπάρχει  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $x \neq 0$ , τέτοιο ώστε  $(A - \lambda I)x = 0$ .
- iii)  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

**Απόδειξη:**

$i) \Leftrightarrow ii)$  Είναι προφανές ότι  $Ax = \lambda x$  αν και μόνο αν  $(A - \lambda I)x = 0$ .

$ii) \Leftrightarrow iii)$  Ένα γραμμικό ομογενές τετραγωνικό σύστημα έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν η ορίζουσα των συντελεστών είναι ίση με μηδέν. Άρα, υπάρχει  $x \neq 0$  με  $(A - \lambda I)x = 0$  αν και μόνο αν  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

□

### 1.2 Αλγεβρική πολλαπλότητα

Όπως βλέπουμε στο [5], η σχέση  $\det(A - \lambda I)$  αποτελεί ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$ . Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του

πίνακα  $A$ .

Αντίστοιχα, η εξίσωση  $\det(A - \lambda I) = 0$  που είδαμε στην Πρόταση 1.1.2 ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα  $A$ .

Επομένως, οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του.

**Ορισμός 1.2.1** Η **αλγεβρική πολλαπλότητα** μιας ιδιοτιμής  $\lambda$  ενός πίνακα  $A$  είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής αυτής ως ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

### 1.3 Τάξη πίνακα

Στο [8] συναντάμε την παρακάτω θεωρία:

**Ορισμός 1.3.1** Η **τάξη** ενός πίνακα  $A$  ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα  $A$ .

**Παρατήρηση:**

Εντελώς αντίστοιχα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την τάξη ενός πίνακα  $A$  ως τον μέγιστο αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του  $A$ .

Αυτό συμβαίνει διότι ο μέγιστος αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών ενός πίνακα  $A$  είναι πάντα ίσος με τον μέγιστο αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα.

Ο λόγος που ισχύει η πρόταση αυτή είναι η σχέση  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ .

### 1.4 Ταυτοτικός Πίνακας

Ο ταυτοτικός πίνακας ορίζεται στο [1] ως εξής:

**Ορισμός 1.4.1** Έστω  $I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$  ο  $n \times n$  πίνακας για τον οποίο ισχύει:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Ο πίνακας αυτός ονομάζεται **ταυτοτικός πίνακας**.

Συχνά, όταν υπονοείται το  $n$ , γράφουμε απλά  $I$  αντί του  $I_n$ .

## 1.5 Αντίστροφος και ανάστροφος πίνακας

Η θεωρία που ακολουθεί βρίσκεται στο [1]:

**Ορισμός 1.5.1** Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ο πίνακας  $A$  λέγεται **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει τετραγωνικός πίνακας  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , τέτοιος ώστε να ισχύει  $AB = BA = I_n$ . Ένας τέτοιος πίνακας  $B$  λέγεται **αντίστροφος** του  $A$ .

**Πρόταση 1.5.2** Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε, ο  $A$  έχει ένα μοναδικό αντίστροφο, τον οποίο θα συμβολίζουμε με  $A^{-1}$ .

**Απόδειξη:**

Έστω ότι για τους πίνακες  $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ισχύει:

$$AB = BA = I_n \text{ και } AC = CA = I_n.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων, έχουμε:

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C.$$

□

**Ορισμός 1.5.3** Έστω  $n, m$  δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί και  $A = (a_{ij})$  ένας  $n \times m$  πίνακας με στοιχεία από το  $\mathbb{R}$ . Τότε, ο  $m \times n$  πίνακας  $A^T = A' = (b_{ij})$  που ορίζεται θέτοντας  $b_{ij} = a_{ji}$  για κάθε ζεύγος  $(i, j)$  με  $1 \leq i \leq m$  και  $1 \leq j \leq n$ , λέγεται **ανάστροφος** του  $A$ .

## 1.6 Συμμετρικός πίνακας

Σύμφωνα με το [1], ο συμμετρικός πίνακας ορίζεται ως εξής:

**Ορισμός 1.6.1** Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  λέγεται **συμμετρικός**, αν ισχύει  $A = A^T$ . Λέγεται δε **αντισυμμετρικός**, αν ισχύει  $A = -A^T$ .

**Παράδειγμα:**

Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός, ενώ ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι αντισυμμετρικός.

## 1.7 Ίχνος πίνακα

Ο ακόλουθος ορισμός βρίσκεται στο [11]:

**Ορισμός 1.7.1** Το ίχνος ενός τετραγωνικού  $n \times n$  πίνακα  $A = [\alpha_{ij}]$  ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του  $A$ . Δηλαδή,

$$\text{trace}(A) = \alpha_{11} + \dots + \alpha_{nn} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}.$$

## 1.8 Γινόμενο Kronecker πινάκων

Οι ακόλουθες πληροφορίες για το γινόμενο Kronecker πινάκων παρουσιάζονται στο [11]:

**Ορισμός 1.8.1** Έστω ένας  $m \times n$  πίνακας  $A$  και ένας  $k \times l$  πίνακας  $B$ . Τότε, το **γινόμενο Kronecker** (γνωστό και ως γινόμενο τελεστών ή ευθύ γινόμενο) των πινάκων  $A$  και  $B$  είναι ένας  $mk \times nl$  πίνακας και συμβολίζεται  $A \otimes B$ . Ορίζεται ως:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

όπου το  $a_{ij}$  αντιπροσωπεύει το  $ij$ -οστό στοιχείο του πίνακα  $A$ .

Ακολουθούν κάποιες βασικές ιδιότητες του γινομένου Kronecker πινάκων:

1.

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) \quad (1.2)$$

2.

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \quad (1.3)$$

όπου ο  $C$  είναι  $n \times q$  πίνακας και ο  $D$  είναι  $l \times s$  πίνακας.

3.

$$A \otimes D = (AI_n) \otimes (I_l D) = (A \otimes I_l)(I_n \otimes D) \quad (1.4)$$

όπου ο  $I_j$  αντιπροσωπεύει τον  $j \times j$  ταυτοτικό πίνακα.

4.

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \quad (1.5)$$

5.

$$\det(A \otimes B) = \det(B \otimes A) = (\det(A))^s (\det(B))^r \quad (1.6)$$

όπου οι  $A, B$  είναι τετραγωνικοί πίνακες,  $r \times r$  και  $s \times s$  αντίστοιχα.

Επίσης, στο [10] αναφέρεται το εξής Λήμμα:

**Λήμμα 1.8.2** Έστω ένας πίνακας  $C = A \otimes B$ , όπου  $A$  και  $B$  δύο δοσμένοι τετραγωνικοί πίνακες. Τότε, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $C$  είναι τα γινόμενα των ιδιοτιμών των πινάκων  $A$  και  $B$ .

## 1.9 Ευθύ άθροισμα πινάκων

Στο [17] υπάρχουν τα παρακάτω σχετικά με το ευθύ άθροισμα πινάκων:

**Ορισμός 1.9.1** Το ευθύ άθροισμα συμβολίζεται με  $\oplus$ . Έστω ότι έχουμε  $N$  πίνακες, τους  $A_0, A_1, \dots, A_{N-1}$ , όχι απαραίτητα των ίδιων διαστάσεων. Τότε το **ευθύ άθροισμα** ορίζεται ως εξής:

$$A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_{N-1} = \begin{bmatrix} A_0 & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Το ευθύ άθροισμα έχει τις εξής ιδιότητες:

1.

$$(A_0 A_1) \oplus (A_2 A_3) = (A_0 \oplus A_2)(A_1 \oplus A_3) \quad (1.8)$$

2.

$$|A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_{N-1}| = \prod_{i=0}^{N-1} |A_i| \quad (1.9)$$

αν κάθε πίνακας  $A_i, i = 0, \dots, N-1$ , είναι τετραγωνικός πίνακας.

3. Το ευθύ άθροισμα  $A_0 \oplus A_1$  δύο ορθογώνιων πινάκων  $A_0$  και  $A_1$  είναι επίσης ορθογώνιος πίνακας.

## 1.10 Αλλαγές προσήμου διανύσματος

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν κάποιοι ορισμοί από τα [6] και [12], που θα χρειαστούν στη συνέχεια:

**Ορισμός 1.10.1** Έστω το διάνυσμα  $v_N = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})^T$ . Λέμε ότι το  $v_N$  έχει **αλληλαγή προσήμου στο  $n$**  αν  $v_n v_{n+1} < 0$  για  $n = 0, 1, \dots, N-2$  ή αν  $v_n = 0$  και  $v_{n-1} v_{n+1} < 0$  για  $n = 0, 1, \dots, N-2$ .

Επίσης, λέμε ότι το  $v_N$  έχει  **$k$  αλληλαγές προσήμου** αν έχει αλληλαγή προσήμου σε  $k$  στοιχεία του.

**Ορισμός 1.10.2** Έστω ένας  $n \times n$  πίνακας  $H$ . Ορίζουμε ως **φάσμα προσήμου γραμμών** (στηλών) του  $H$  ως τον αριθμό των αλληλαγών προσήμου που εμφανίζονται στις γραμμές (στήλες) του.

**Ορισμός 1.10.3** Έστω ένας  $n \times n$  πίνακας  $H$ . Λέμε ότι ο  $H$  έχει **πλήρες φάσμα προσήμου γραμμών** (στηλών) αν στο φάσμα προσήμου γραμμών (στηλών) υπάρχουν όλοι οι ακέραιοι  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  σε κάποια σειρά.

**Ορισμός 1.10.4** Έστω μια ακολουθία διανυσμάτων. Λέμε πως στα διανύσματα αυτά χρησιμοποιείται **διάταξη ακολουθίας** αν το  $k$ -οστό διάνυσμα έχει  $k$  αλληλαγές προσήμου.

## 1.11 Σύμβολα του Landau

Η θεωρία που ακολουθεί βρίσκεται στο [15].

Με  $\mathbb{N}$  συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Με  $\mathbb{R}^+$  συμβολίζουμε το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.

**Ορισμός 1.11.1** Έστω  $f$  και  $g$  δύο συναρτήσεις από το σύνολο  $\mathbb{N}$  στο σύνολο  $\mathbb{R}^+$ . Λέμε ότι  $f(n) = O(g(n))$ , εάν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι  $c$  και  $n_0$  τέτοιοι ώστε για κάθε ακέραιο  $n \geq n_0$  να ισχύει

$$f(n) \leq cg(n).$$

Όταν  $f(n) = O(g(n))$ , λέμε ότι η  $g(n)$  αποτελεί **άνω φράγμα** της  $f(n)$ , ή ακριβέστερα, **ασυμπτωτικό άνω φράγμα** της  $f(n)$ , για να τονίσουμε ότι αγνοούμε τους σταθερούς συντελεστές.

Σε περιγραφικό επίπεδο, η σχέση  $f(n) = O(g(n))$  σημαίνει ότι, αν παραβλέψουμε διαφορές μέχρι κάποιον σταθερό πολλαπλασιαστικό παράγοντα, η  $f$  είναι μικρότερη ή ίση της  $g$ .

**Ορισμός 1.11.2** Έστω  $f$  και  $g$  δύο συναρτήσεις από το σύνολο  $\mathbb{N}$  στο σύνολο  $\mathbb{R}^+$ . Λέμε ότι  $f(n) = o(g(n))$ , εάν ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Με άλλα λόγια, η έκφραση  $f(n) = o(g(n))$ , σημαίνει ότι, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό  $\epsilon > 0$ , υπάρχει ακέραιος  $n_0$  τέτοιος ώστε  $f(n) < \epsilon g(n)$  για κάθε  $n \geq n_0$ .





## Κεφάλαιο 2

# Πίνακες Sylvester-Hadamard

### 2.1 Ορισμός του πίνακα Hadamard

Σύμφωνα με το [17], ένας πίνακας Hadamard ορίζεται ως εξής:

**Ορισμός 2.1.1** Ένας πίνακας Hadamard  $= (h_{ij})$  ορίζεται ως ένας τετραγωνικός  $n \times n$  πίνακας, ο οποίος έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Όλες οι τιμές του πίνακα είναι  $\pm 1$ ,
2. Κάθε δύο διακριτές γραμμές του πίνακα είναι ορθογώνιες, δηλαδή  $\forall i, j, i \neq j, \text{ ισχύει } \sum_k h_{ik}h_{jk} = 0$ .

**Πρόταση 2.1.2** Οι δύο παραπάνω συνθήκες απαιτούν για να υπάρχει ένας πίνακας Hadamard, το  $n$  να είναι πολλαπλάσιο του 4.

#### Απόδειξη:

Προκειμένου να αποδείξουμε την Πρόταση αυτή, θεωρούμε ένα πίνακα Hadamard για τον οποίο  $n > 2$ . Κάθε γραμμή ενός τέτοιου πίνακα, εξαιρώντας τη γραμμή που έχει μόνο στοιχεία 1 (ή -1), πρέπει να έχει ακριβώς  $n/2$  στοιχεία 1 και  $n/2$  στοιχεία -1. Για να επιτευχθεί η ορθογωνιότητα, για κάθε δύο διακριτές γραμμές  $i$  και  $j$ , εκτός από τη γραμμή που έχει μόνο στοιχεία 1 (ή -1), πρέπει να υπάρχουν  $n/4$  στήλες όπου τα στοιχεία των γραμμών  $i$  και  $j$  είναι και τα δύο +1,  $n/4$  στήλες όπου τα στοιχεία των γραμμών  $i$  και  $j$  είναι +1 και -1 αντίστοιχα,  $n/4$  στήλες όπου τα στοιχεία των γραμμών  $i$  και  $j$  είναι -1 και +1 αντίστοιχα και  $n/4$  στήλες όπου τα στοιχεία των γραμμών  $i$  και  $j$  είναι και τα δύο -1.

Συνεπώς, δε μπορεί να υπάρχει ένας πίνακας Hadamard για  $n$  μεγαλύτερο του 2, το οποίο να μην είναι πολλαπλάσιο του 4.

□

### Παρατήρηση:

Ισοδύναμα, μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα Hadamard  $H$  τάξης  $n$  ως ένα τετραγωνικό πίνακα με στοιχεία  $\{1, -1\}$  που ικανοποιεί τη σχέση ορθογωνιότητας:

$$HH^T = H^T H = nI_n.$$

## 2.2 Ο πίνακας Sylvester-Hadamard τάξης $2^n$

Αυτή είναι η κύρια μορφή του πίνακα Hadamard τάξης  $2^n$  που θα μας απασχολήσει.

Όπως βλέπουμε στο [17], η μορφή αυτή παράγεται χρησιμοποιώντας ένα αναδρομικό γινόμενο Kronecker. Συγκεκριμένα, ο πίνακας Hadamard που μας ενδιαφέρει ονομάζεται πίνακας **Sylvester-Hadamard** από τον Sylvester (1867), συμβολίζεται με  $H_n$  και προκύπτει από την αναδρομική σχέση:

$$H_n = H_1 \otimes H_{n-1}, \quad (2.1)$$

όπου

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Εναλλακτικά, η αναδρομική σχέση (2.1) μπορεί να γραφτεί:

$$H_n = \begin{bmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Επομένως, για  $n = 2$  και  $n = 3$  αντίστοιχα, έχουμε:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

και

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας Sylvester-Hadamard  $H_n$  έχει ορισμένες σημαντικές ιδιότητες:

1. Είναι συμμετρικός πίνακας.
2. Έχει μηδενικό ίχνος.
3. Τα στοιχεία της πρώτης γραμμής και της πρώτης στήλης είναι πάντα θετικά.
4. Τα στοιχεία σε όλες τις υπόλοιπες γραμμές και στήλες είναι μισά θετικά και μισά αρνητικά.
5. Κάθε πίνακας Sylvester-Hadamard τάξης  $2^n$  έχει **πλήρες φάσμα προσήμου** γραμμής και στήλης  $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ .

Επίσης, ο πίνακας Sylvester-Hadamard συνδέεται στενά με τις **συναρτήσεις Walsh**.

**Πρόταση 2.2.1** *Ο αντίστροφος του πίνακα Sylvester-Hadamard  $H_n$  είναι ο  $H_n^{-1} = \frac{1}{2^n} H_n^T$ , όπου  $H_n^T$  ο ανάστροφος του  $H_n$ .*

#### Απόδειξη:

Η απόδειξη μπορεί να γίνει με επαγωγή.

Από τη σχέση (2.2), μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι:

$$H_1 H_1^T = H_1 H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_2 .$$

Έστω τώρα ότι ισχύει  $H_n H_n^T = 2^n I_{2^n}$ .

Τότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} H_{n+1} H_{n+1}^T &= H_{n+1} H_{n+1} = (H_1 \otimes H_n)(H_1 \otimes H_n) = (H_1 H_1) \otimes (H_n H_n) = \\ &= (2I_2) \otimes (2^n I_{2^n}) = 2^{n+1} (I_2 \otimes I_{2^n}) = 2^{n+1} I_{2^{n+1}} . \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει  $H_n H_n^T = 2^n I_{2^n} \Rightarrow H_n \left( \frac{1}{2^n} H_n^T \right) = I_{2^n} \Rightarrow H_n^{-1} = \frac{1}{2^n} H_n^T$ .

□

Σχόλιο: Προφανώς, αφού ο  $H_n$  είναι συμμετρικός, ισχύει  $H_n = H_n^T$ , άρα μπορούμε να γράψουμε  $H_n^{-1} = \frac{1}{2^n} H_n$ .

Στο σημείο αυτό, να τονίσουμε ότι η παραπάνω μορφή του πίνακα  $H_n$  είναι μη κανονικοποιημένη.

Η αντίστοιχη **κανονικοποιημένη μορφή** του πίνακα Sylvester-Hadamard  $H_n$  τάξης  $2^n$  είναι η εξής:

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{bmatrix} = H_1 \otimes H_{n-1}, \quad (2.7)$$

για  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Πρόταση 2.2.2** Ο κανονικοποιημένος πίνακας  $H_n$  είναι ορθογώνιος, δηλαδή ο αντίστροφος του πίνακα  $H_n$  είναι ο  $H_n^{-1} = H_n^T$ , όπου  $H_n^T$  ο ανάστροφος του  $H_n$ .

#### Απόδειξη:

Εντελώς αντίστοιχα με την απόδειξη της Πρότασης 2.2.1, θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή.

Αρχικά, για τον  $H_1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} H_1 H_1^T &= H_1 H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} 2I_2 = \\ &= I_2. \end{aligned}$$

Έστω τώρα ότι ισχύει  $H_n H_n^T = I_{2^n}$ .

Τότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.7) έχουμε:

$$\begin{aligned} H_{n+1} H_{n+1}^T &= H_{n+1} H_{n+1} = (H_1 \otimes H_n)(H_1 \otimes H_n) = (H_1 H_1) \otimes (H_n H_n) = \\ &= (I_2) \otimes (I_{2^n}) = (I_2 \otimes I_{2^n}) = I_{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει  $H_n H_n^T = I_{2^n} \Rightarrow H_n^{-1} = H_n^T$ .

□

Από'δω και πέρα, όταν χρησιμοποιείται η κανονικοποιημένη μορφή του πίνακα  $H_n$ , θα αναφέρεται ρητά.

## 2.3 Άλλοι τρόποι κατασκευής του πίνακα $H_n$

Εκτός από την κατασκευή του Sylvester που αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, έχουν βρεθεί και άλλοι τρόποι κατασκευής των πινάκων Hadamard. Ενδεικτικά, κάποιои από αυτούς ακολουθούν παρακάτω:

### 2.3.1 Ahmed και Rao (1975)

Οι Ahmed και Rao έδωσαν στο [4] έναν εκθετικό ορισμό για τον  $H_n$ , γράφοντάς τον απευθείας ως:

$$H_n = (h_{ij}) = (-1)^{\langle i, j \rangle} \quad (2.8)$$

όπου το  $\langle i, j \rangle$  είναι το modulo-δύο εσωτερικό γινόμενο των δύο κανονικών δυαδικών αναπαραστάσεων των  $i$  και  $j$ .

#### Παράδειγμα:

Θα εξηγήσουμε αναλυτικά την κατασκευή του  $H_2$ .

Καταρχήν, τα  $i, j$  θα πάρουν τις τιμές 0, 1, 2, 3, των οποίων η δυαδική αναπαράσταση είναι:

$$\begin{aligned} (0)_{10} &= (0, 0)_2 \\ (1)_{10} &= (0, 1)_2 \\ (2)_{10} &= (1, 0)_2 \\ (3)_{10} &= (1, 1)_2. \end{aligned}$$

Έτσι, ο πίνακας που προκύπτει από το modulo-δύο εσωτερικό γινόμενο των δυαδικών αναπαραστάσεων  $\langle i, j \rangle$  είναι ο:

	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	0	0	0	0
(0, 1)	0	1	0	1
(1, 0)	0	0	1	1
(1, 1)	0	1	1	0

Τελικά λοιπόν, από τη σχέση  $H_2 = (h_{ij}) = (-1)^{i,j}$ ,  $i, j = 0, 1, 2, 3$ , προκύπτει ο πίνακας:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 2.3.2 Henderson (1978)

Ο Henderson κατέγραψε στο [7] μια ενδιαφέρουσα παραγοντοποίηση του  $H_n$ , η οποία περιγράφεται παρακάτω:

Αρχικά, κατασκευάζουμε τον  $2^n \times n$  πίνακα  $B_n$ , ο οποίος αναπαριστά μια αρίθμηση από πάνω προς τα κάτω σε κανονική δυαδική μορφή, ξεκινώντας από το μηδέν, κάνοντας χρήση των μηδέν και ένα. Έτσι,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

και

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Για να βρούμε τον  $H_n$ , υπολογίζουμε το modulo-2 γινόμενο  $B_n B_n^T$  και στη συνέχεια μετατρέπουμε τα 1 σε -1 και τα 0 σε 1.

**Παράδειγμα:**

$$B_1 B_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = H_1 \quad (2.11)$$

και

$$\begin{aligned} B_2 B_2^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = H_2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

### 2.3.3 Lee και Kaveh (1986)

Μία ακόμα αναδρομική παραγοντοποίηση του  $H_n$  σε αραιούς πίνακες οφείλεται στους Lee και Kaveh και βρίσκεται στο [9].

Η αναδρομή αυτή βασίζεται σε μια ιδιότητα της άλγεβρας του γινομένου Kronecker πινάκων, η οποία έχει δοθεί στο Κεφάλαιο 1.

Η αναδρομή βασίζεται στην ιδιότητα:

$$H_n = (H_1 \otimes I_{2^{n-1}})(I_2 \otimes H_{n-1}), \quad (2.13)$$

όπου  $I_k$  είναι ο ταυτοτικός πίνακας τάξης  $k$ .

Η ιδιότητα αυτή προκύπτει χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.3) και (2.1) ως εξής:

$$H_n = H_1 \otimes H_{n-1} = (H_1 \cdot I_2) \otimes (I_{2^{n-1}} \cdot H_{n-1}) = (H_1 \otimes I_{2^{n-1}})(I_2 \otimes H_{n-1}).$$

Για λόγους γενίκευσης, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (2.13) ως εξής:

$$H_n = (I_1 \otimes H_1 \otimes I_{2^{n-1}})(I_2 \otimes H_{n-1}), \quad (2.14)$$

όπου  $I_1$  είναι η βαθμωτή μονάδα.

Ο όρος  $I_2 \otimes H_{n-1}$  της σχέσης (2.14) μπορεί να γραφτεί:

$$\begin{aligned} I_2 \otimes H_{n-1} &= I_2 \otimes (H_1 \otimes H_{n-2}) = I_2 \otimes [(H_1 \cdot I_2) \otimes (I_{2^{n-2}} \cdot H_{n-2})] = \\ &= I_2 \otimes [(H_1 \otimes I_{2^{n-2}})(I_2 \otimes H_{n-2})] = \\ &= (I_2 \otimes H_1 \otimes I_{2^{n-2}})(I_2 \otimes I_2 \otimes H_{n-2}) = \\ &= (I_2 \otimes H_1 \otimes I_{2^{n-2}})(I_4 \otimes H_{n-2}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Από τις σχέσεις (2.14), (2.15), είναι πλέον ξεκάθαρο ότι ισχύει:

$$H_n = \prod_{i=1}^n (I_{2^{i-1}} \otimes H_1 \otimes I_{2^{n-i}}). \quad (2.16)$$

Αφού ο  $H_n$  είναι συμμετρικός, δηλαδή  $H_n = H_n^T$ , προκύπτει ότι ισχύει η επιπλέον σχέση:

$$H_n = \prod_{i=1}^n (I_{2^{n-i}} \otimes H_1 \otimes I_{2^{i-1}}). \quad (2.17)$$

## 2.4 Φασματική Ανάλυση του πίνακα $H_n$

Όπως βλέπουμε και στο [17], η **φασματική ανάλυση** ενός πίνακα, γνωστή και ως **διαγωνοποίηση** του πίνακα, είναι στην πραγματικότητα η παραγοντοποίηση ενός πίνακα στο γινόμενο τριών άλλων πινάκων, που αποτελούνται από τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του.

Σύμφωνα με το **Φασματικό Θεώρημα**, κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας (στους οποίους συμπεριλαμβάνεται και ο πίνακας Hadamard τάξης  $N = 2^n$ ), μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$H_n = Z_n \Lambda_n Z_n^T = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k z_{n,k} z_{n,k}^T, \quad (2.18)$$

όπου ο πίνακας  $\Lambda_n$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας τάξης  $2^n$ , του οποίου τα διαγώνια στοιχεία είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $H_n$ :

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & 0 \\ & \lambda_1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

και ο πίνακας  $Z_n$  είναι ένας πίνακας, του οποίου οι στήλες είναι τα κανονικοποιημένα ορθογώνια ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_n$ :

$$Z_n = [ z_{n,0} \mid z_{n,1} \mid \dots \mid z_{n,N-1} ]. \quad (2.20)$$

## 2.5 Ιδιοτιμές του πίνακα $H_n$

Έστω  $H_n$  πίνακας Sylvester-Hadamard τάξης  $2^n$ . Στο [17] βλέπουμε ότι:

**Πρόταση 2.5.1** Οι  $2^n$  ιδιοτιμές του πίνακα  $H_n$  είναι οι εξής:

- i)  $2^{n-1}$  ιδιοτιμές είναι  $+2^{n/2}$ ,
- ii)  $2^{n-1}$  ιδιοτιμές είναι  $-2^{n/2}$ .



**Απόδειξη:**

Η απόδειξη της Πρότασης θα βασιστεί στο Λήμμα 1.8.2.

Ο πίνακας  $H_n$ , όπως γνωρίζουμε, προκύπτει από την αναδρομική σχέση  $H_n = H_1 \otimes H_{n-1}$ , όπου ο  $H_1$  είναι ο πίνακας:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Εύκολα υπολογίζεται ότι ο  $H_1$  έχει 2 ιδιοτιμές, οι οποίες είναι  $+2^{1/2}$  και  $-2^{1/2}$ .

Γνωρίζοντας λοιπόν τις ιδιοτιμές του πίνακα  $H_1$  και εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.8.2 στην αναδρομική σχέση (2.1), προκύπτει ότι οι μισές ιδιοτιμές του  $H_n$  είναι  $+2^{n/2}$  και οι άλλες μισές είναι  $-2^{n/2}$ , που είναι και το ζητούμενο.

□

Προφανώς, αφού ο πίνακας  $H_n$  έχει  $2^n$  ιδιοτιμές, και ο αντίστοιχος κανονικοποιημένος  $H_n$  θα έχει  $2^n$  ιδιοτιμές. Για την ακρίβεια:

**Πρόταση 2.5.2** *Οι  $2^n$  ιδιοτιμές του κανονικοποιημένου πίνακα  $H_n$  είναι οι εξής:*

- i)  $2^{n-1}$  ιδιοτιμές είναι 1,
- ii)  $2^{n-1}$  ιδιοτιμές είναι -1.

**Απόδειξη:**

Η απόδειξη μπορεί και πάλι να βασιστεί στο Λήμμα 1.8.2.

Αυτή τη φορά, ο πίνακας  $H_1$  όπως έχει οριστεί παραπάνω είναι ο:

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

άρα οι δύο ιδιοτιμές του πίνακα  $H_1$  είναι οι 1 και -1.

Εφαρμόζοντας και πάλι το Λήμμα 1.8.2 στην αναδρομική σχέση (2.7) προκύπτει ότι οι μισές ιδιοτιμές του κανονικοποιημένου  $H_n$  είναι 1 και οι άλλες μισές είναι -1.

□

## 2.6 Ιδιοδιανύσματα του πίνακα $H_n$

### 2.6.1 Ένα ιδιοδιάνυσμα του $H_n$

Στην παράγραφο αυτή, θα περιγραφεί η διαδικασία υπολογισμού ενός από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Hadamard  $H_n$ , όπως παρουσιάζεται στο [16].

Ο πίνακας  $H_n$  είναι τάξης  $2^n$ , άρα ο πίνακας έχει  $2^n$  ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές που υπολογίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

Όπως ήδη είδαμε, ο  $H_n$  έχει δύο ιδιοτιμές, τις  $+2^{n/2}$  και  $-2^{n/2}$ , αλγεβρικής πολλαπλότητας  $2^{n-1}$  έκαστη.

Επομένως, για κάθε μία από τις παραπάνω ιδιοτιμές πρέπει να βρεθούν  $2^{n-1}$  ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα, τα οποία να είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Στη διαδικασία αυτή θα μας βοηθήσει το παρακάτω Θεώρημα:

**Θεώρημα 2.6.1** Έστω  $x_n$  ένα ιδιοδιάνυσμα του  $H_n$  που αντιστοιχεί στη θετική ιδιοτιμή  $2^{n/2}$ . Τότε, το

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} x_n \\ (-1 + \sqrt{2})x_n \end{bmatrix}$$

είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του  $H_{n+1}$  που αντιστοιχεί στη θετική ιδιοτιμή  $2^{(n+1)/2}$ .

#### Απόδειξη:

Κατ'αρχήν, εφόσον το  $x_n$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $H_n$  που αντιστοιχεί στη θετική ιδιοτιμή  $2^{n/2}$ , ισχύει η σχέση  $H_n x_n = 2^{n/2} x_n$ .

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ (-1 + \sqrt{2})x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}H_n x_n \\ (2 - \sqrt{2})H_n x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cdot 2^{n/2} x_n \\ (2 - \sqrt{2})2^{n/2} x_n \end{bmatrix} = 2^{(n+1)/2} \begin{bmatrix} x_n \\ (-2 + \sqrt{2})x_n \end{bmatrix}.$$

Η σχέση αυτή αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Το Θεώρημα 2.6.1 είναι πολύ χρήσιμο, αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραχθούν γρήγορα τα στοιχεία ενός ιδιοδιανύσματος.

Το πρώτο βήμα είναι να εξάγουμε το ιδιοδιάνυσμα  $x_1$  του πίνακα  $H_1$ .

Κάτι τέτοιο είναι απλό και προκύπτει

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Τώρα, από το Θεώρημα 2.6.1 βλέπουμε πως το ιδιοδιάνυσμα  $x_n$  μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$x_n = [a_0 + \sqrt{2}b_0, a_1 + \sqrt{2}b_1, a_2 + \sqrt{2}b_2, \dots, a_{2^n-1} + \sqrt{2}b_{2^n-1}]^T, \quad (2.21)$$

όπου τα  $\{a_i, b_i\}$  είναι ζεύγη ακεραίων.

Πιο συγκεκριμένα, το  $x_n$  παίρνει τη γενική μορφή

$$x_n = [q^0, q^1, q^1, q^2, q^1, \dots, q^n]^T, \quad (2.22)$$

όπου  $q = \sqrt{2} - 1$ .

Στο σημείο αυτό γίνεται εμφανής μια πολύ σημαντική ιδιότητα:

$$a_{2k+1} + \sqrt{2}b_{2k+1} = (-1 + \sqrt{2})(a_{2k} + \sqrt{2}b_{2k}).$$

Εξισώνοντας τα ρητά και τα άρρητα μέρη, προκύπτει ότι:

$$a_{2k+1} = 2b_{2k} - a_{2k}, \quad (2.23)$$

$$b_{2k+1} = a_{2k} - b_{2k}. \quad (2.24)$$

Μία επιπλέον σχέση που προκύπτει από το Θεώρημα 2.6.1 είναι η εξής:

$$a_{(2^i)k} + \sqrt{2}b_{(2^i)k} = a_k + \sqrt{2}b_k \text{ για κάθε ακέραιο } i \geq 0.$$

Γνωρίζοντας τα παραπάνω, έχουμε πλέον όλα τα εργαλεία για να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα  $x_n$  χωρίς να αναπτύξουμε τις δυνάμεις του  $q$ .

## 2.6.2 Ένας πρώτος τρόπος παραγωγής ενός συνόλου ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων

Το Θεώρημα 2.6.1 μας επιτρέπει να υπολογίσουμε μόνο ένα ιδιοδιάνυσμα τάξης  $2^{n+1}$ . Για να μπορέσουμε να παράγουμε ένα σύνολο ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων, θα ακολουθηθεί η παρακάτω διαδικασία, που παρουσιάζεται στο [16]:

Ορίζουμε αναδρομικά μία ακολουθία  $2^n \times 2^n$  πινάκων  $E_n$  ως εξής:

$$E_0 = [-1] ,$$

$$E_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix} , \quad n \geq 0 ,$$

όπου το 0 αντιπροσωπεύει τον μηδενικό  $2^n \times 2^n$  πίνακα.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας  $E_n$  είναι συμμετρικός για  $n$  άρτιο και αντισυμμετρικός για  $n$  περιττό.

**Θεώρημα 2.6.2** *Ισχύει η σχέση  $E_n H_n = (-1)^n H_n E_n$ .*

**Απόδειξη:**

Με επαγωγή προκύπτει ότι ισχύει η σχέση  $E_n^2 = (-1)^n I_{2^n}$ .

Πράγματι:

Για  $n = 1$ , έχουμε:  $E_0^2 = (-1)(-1) = 1 = (-1)^0$ .

Έστω ότι ισχύει  $E_{n-1}^2 = (-1)^{n-1} I_{2^{n-1}}$ .

Τότε:

$$\begin{aligned} E_n^2 &= \begin{bmatrix} 0 & E_{n-1} \\ -E_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_{n-1} \\ -E_{n-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & -E_{n-1}^2 \end{bmatrix} = \\ &= -E_{n-1}^2 I_{2^n} = -(-1)^{n-1} I_{2^n} = (-1)^n I_{2^n} , \end{aligned}$$

που αποδεικνύει την επαγωγή.

Επίσης, μέσω πράξεων, βλέπουμε εύκολα ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$E_0 H_0 E_0 = H_0, \quad E_1 H_1 E_1 = H_1.$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι το εργαλείο της επαγωγής, θα καταλήξουμε στη ζητούμενη σχέση.

Έστω ότι ισχύει  $E_n H_n E_n = H_n$ .

Τότε:

$$\begin{aligned} E_{n+1} H_{n+1} E_{n+1} &= \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} E_n H_n E_n & E_n H_n E_n \\ E_n H_n E_n & -E_n H_n E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix} = H_{n+1}, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει την επαγωγή.

Γνωρίζοντας όλα τα παραπάνω λοιπόν, έχουμε:

$$E_n H_n E_n = H_n \Rightarrow E_n H_n E_n^2 = H_n E_n \Rightarrow$$

$$E_n H_n (-1)^n I_{2^n} = H_n E_n \Rightarrow E_n H_n = (-1)^n H_n E_n.$$

□

Το επόμενο μας βήμα είναι να ορίσουμε για κάθε  $k = 0, 1, \dots, n$  τον πίνακα  $P_{nk}$ , ο οποίος αποτελείται από το ευθύ άθροισμα  $2^{n-k}$  πινάκων  $E_k$ :

$$P_{nk} = E_k \oplus E_k \oplus \dots \oplus E_k.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει  $P_{nk} = P_{nk}^T$  αν το  $k$  είναι άρτιος και  $P_{nk} = -P_{nk}^T$  αν το  $k$  είναι περιττός.

**Θεώρημα 2.6.3** *Ισχύει η σχέση  $P_{nk}H_nP_{nk}^T = (-1)^k H_n$ .*

**Απόδειξη:**

Εκτελούμε τον ακόλουθο μπλοκ πολλαπλασιασμό:

$$\begin{bmatrix} E_k & & & \\ & E_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k & H_k & \dots & H_k \\ H_k & -H_k & \dots & -H_k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ H_k & -H_k & \dots & \pm H_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_k^T & & & \\ & E_k^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_k^T \end{bmatrix}.$$

Για το κάθε μπλοκ ισχύει  $E_k(\pm H_k)E_k^T = (-1)^k(\pm H_k)$  λόγω του Θεωρήματος 2.6.2 και το ζητούμενο προκύπτει.

□

**Θεώρημα 2.6.4** *Ο πίνακας  $P_{nk}$  έχει την ενδιαφέρουσα αντιμεταθετική ιδιότητα:*

$$P_{nk}P_{nj} = P_{nj}P_{nk}, \quad (2.25)$$

για κάθε  $k$  και  $j$ .

**Απόδειξη:**

Έστω  $n > k > j$ . Τότε:

$$P_{nk}P_{nj} = \begin{bmatrix} E_k & & & \\ & E_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j & & & \\ & E_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_j \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} E_k(E_j \oplus \dots \oplus E_j) & & & \\ & E_k(E_j \oplus \dots \oplus E_j) & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_k(E_j \oplus \dots \oplus E_j) \end{bmatrix}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$E_k(E_j \oplus \dots \oplus E_j) = (E_j \oplus \dots \oplus E_j)E_k.$$

Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση με την οποία ορίσαμε τον πίνακα  $E_n$ , βλέπουμε ότι ο  $E_k$  μπορεί να εκφραστεί με όρους του  $E_j$  ( $j < n$ ) ως εξής:

$$E_k = \begin{bmatrix} & & & \pm E_j \\ & & \pm E_j & \\ & & \ddots & \\ \pm E_j & & & \end{bmatrix},$$

όπου το εκάστοτε πρόσθετο του  $E_j$  μπορεί να προσδιοριστεί από την αναδρομή. Έτσι:

$$\begin{aligned} E_k(E_j \oplus \dots \oplus E_j) &= \\ \begin{bmatrix} & & & \pm E_j \\ & & \pm E_j & \\ & & \ddots & \\ \pm E_j & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j & & & \\ & E_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} & & & \pm E_j^2 \\ & & \pm E_j^2 & \\ & & \ddots & \\ \pm E_j^2 & & & \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} E_j & & & \\ & E_j & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & \pm E_j \\ & & \pm E_j & \\ & & \ddots & \\ \pm E_j & & & \end{bmatrix} &= (E_j \oplus \dots \oplus E_j)E_k, \end{aligned}$$

που ήταν και το ζητούμενο. □

Έχοντας ορίσει όλα τα παραπάνω, μπορούμε πλέον να παράγουμε ένα σύνολο ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων του  $H_n$ .

Στην προηγούμενη παράγραφο υπολογίσαμε ένα ιδιοδιάνυσμα του  $H_n$ , το  $x_n$ . Για λόγους αναγνωστικής ευκολίας, θέτουμε  $v_1 = x_n$ .

**Θεώρημα 2.6.5** Ορίζουμε το σύνολο των διανυσμάτων  $\{v_i\}$ ,  $2 \leq i \leq 2^n$ , μέσω του αναδρομικού τύπου:

$$v_i = Q_{i-1}v_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq 2^n \quad (2.26)$$

όπου

$$Q_{2^r(2k+1)} = P_{n(r+1)}, \quad k \geq 0. \quad (2.27)$$

Τότε τα  $\{v_i\}$  είναι ιδιοδιανύσματα του  $H_n$ .

**Απόδειξη:**

Από τον τρόπο που έχουν οριστεί τα  $v_i$ , προκύπτει εύκολα ότι ισχύει:

$$v_i = P_\pi v_1,$$

όπου  $P_\pi$  είναι το κατάλληλο γινόμενο των πινάκων  $P_{nk}$ .

Τώρα, πολλαπλασιάζοντας με τον  $H_n$  και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.6.3, έχουμε:

$$H_n v_i = H_n P_\pi v_1 = (-1)^k P_\pi H_n v_1 = \lambda P_\pi v_1 = \lambda v_i,$$

όπου  $k$  κατάλληλος ακέραιος και  $\lambda$  η ιδιοτιμή του  $H_n$  που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα  $v_1$ , συμπεριλαμβανομένου του προσήμου.

Αφού λοιπόν ισχύει η σχέση  $H_n v_i = \lambda v_i$ , το  $v_i$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $H_n$  και αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ .

□

Το μόνο που μας μένει τώρα είναι να αποδείξουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα  $\{v_i\}$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους:

**Θεώρημα 2.6.6** *Ισχύει ότι  $v_i^T v_j = 0$  για  $i \neq j$ .*

**Απόδειξη:**

Εύκολα βλέπουμε ότι το γινόμενο  $v_i^T v_j$  μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$v_1^T (P_{ni_1} P_{ni_2} \cdots P_{ni_m}) v_1. \quad (2.28)$$

Πράγματι:

Έστω  $k = \max(i_1, i_2, \dots, i_m)$ .

Γνωρίζοντας ότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα που είδαμε στη σχέση (2.25), μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να επιλέξουμε  $k = i_1$ .

Τώρα:

$$P_{ni_1} P_{ni_2} \cdots P_{ni_m} = \begin{bmatrix} E_k B_k & & & \\ & E_k B_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_k B_k \end{bmatrix},$$

όπου

$$B_k = \begin{bmatrix} E_{i_2} & & & \\ & E_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{i_2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} E_{i_m} & & & \\ & E_{i_m} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{i_m} \end{bmatrix}.$$

Τώρα, το  $v_1$  μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$v_1 = \begin{bmatrix} D_k & & & \\ & D_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k1} \\ z_{k2} \\ \vdots \\ z_{km} \end{bmatrix},$$

όπου  $m = 2^{n-k}$  και τα διανύσματα  $z_{kj}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , είναι τάξης  $2^k$ .

Ο πίνακας  $D_k$  μπορεί να οριστεί αναδρομικά ως εξής:

$$D_k = \begin{bmatrix} D_{k-1} & 0 \\ 0 & D_{k-1} \end{bmatrix}, \quad k \geq 2,$$

με

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Αν παρατηρήσουμε τη δομή του  $v_1$ , όπου  $v_1 = x_n$ , και τη δομή του πίνακα  $D_k$ , βλέπουμε ότι το διάνυσμα  $z_{kj}$  μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη, όπου το δεύτερο μέρος είναι η σταθερά  $(-1 + \sqrt{2})$  επί το πρώτο μέρος. Δηλαδή:

$$z_{kj} = \begin{bmatrix} z'_{kj} \\ (-1 + \sqrt{2})z'_{kj} \end{bmatrix}.$$

Στο σημείο αυτό, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (2.28) στην εξής μορφή:

$$v_1^T (P_{ni_1} P_{ni_2} \cdots P_{ni_m}) v_1 = \sum_{j=1}^m z_{kj}^T D_k E_k B_k D_k z_{kj}. \quad (2.29)$$

Επιπλέον, το γινόμενο  $E_k B_k$  μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$E_k B_k = \begin{bmatrix} 0 & E_{k-1} \\ -E_{k-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{k-1} & 0 \\ 0 & B_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E_{k-1} B_{k-1} \\ -E_{k-1} B_{k-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} z_{kj}^T D_k E_k B_k D_k z_{kj} &= \\ & \begin{bmatrix} z_{(k-1)j}^T & (-1 + \sqrt{2})z_{(k-1)j}^T \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & D_{k-1} E_{k-1} B_{k-1} D_{k-1} \\ -D_{k-1} E_{k-1} B_{k-1} D_{k-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{(k-1)j} \\ (-1 + \sqrt{2})z_{(k-1)j} \end{bmatrix} = \\ & (-1 + \sqrt{2})z_{(k-1)j}^T D_{k-1} E_{k-1} D_{k-1} z_{(k-1)j} - \\ & -(-1 + \sqrt{2})z_{(k-1)j}^T D_{k-1} E_{k-1} D_{k-1} z_{(k-1)j}. \end{aligned} \quad (*)$$



Από τις ιδιότητες του πίνακα  $P_{nk}$  προκύπτει ότι:

$$(E_{k-1}B_{k-1})^T = \mp E_{k-1}B_{k-1}. \quad (2.30)$$

Στην πρώτη περίπτωση, κάθε όρος στη σχέση (2.29) μηδενίζεται (διότι  $\alpha^T A \alpha = 0$  όταν ο  $A$  είναι αντισυμμετρικός).

Στη δεύτερη περίπτωση, οι δύο όροι της σχέσης (\*) είναι ίσοι, επομένως η (2.29) είναι επίσης ίση με μηδέν.

Άρα, σε κάθε περίπτωση το άθροισμα στη σχέση (2.29) είναι μηδέν, που συνεπάγεται ότι και η σχέση (2.29) είναι μηδέν.

Συνεπώς, ισχύει η ορθογωνιότητα.

□

## Αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος που υλοποιεί την παραπάνω διαδικασία παραγωγής ενός συνόλου ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $H_n$  είναι ο εξής:

1. Υπολόγισε ένα ιδιοδιάνυσμα  $x_n$  του πίνακα  $H_n$  χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.6.1.
2. Θέσε  $v_1 = x_n$ .
3. Υπολόγισε τους πίνακες  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq 2^n - 1$ , χρησιμοποιώντας τη σχέση  $Q_{2^r(2k+1)} = P_{n(r+1)}$ .
4. Χρησιμοποίησε την αναδρομική σχέση  $v_i = Q_{i-1}v_{i-1}$ ,  $2 \leq i \leq 2^n$ , για να υπολογίσεις τα υπόλοιπα ορθογώνια ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_n$ .

Στο **Παράρτημα** υπάρχει ο κώδικας σε **MATLAB** που υλοποιεί τον αλγόριθμο.

## Υπολογιστική πολυπλοκότητα

Θα υπολογίσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ακολουθώντας τα βήματά του.

Έτσι, έχουμε:

1. Στο βήμα αυτό γίνεται ο υπολογισμός ενός ιδιοδιανύσματος  $x_n$  του πίνακα  $H_n$ . Ο υπολογισμός αυτός ισοδυναμεί με τον υπολογισμό των συντελεστών  $a_1, b_1, \dots, a_{2^n-1}, b_{2^n-1}$  σύμφωνα με τη σχέση (2.21), οι οποίοι υπολογίζονται μέσω των σχέσεων (2.23), (2.24). Κάθε τέτοιος υπολογισμός απαιτεί 1 flop, άρα συνολικά χρειάζονται  $2 \cdot (2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$  flops.
2. Το βήμα αυτό δεν απαιτεί πράξεις για να εκτελεστεί, άρα τα flops που απαιτούνται είναι 0.
3. Στο βήμα αυτό υπολογίζονται οι πίνακες  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq 2^n - 1$ . Αρχικά, πρέπει να υπολογιστούν οι πίνακες  $E_i$ , οι οποίοι λόγω του ορισμού τους απαιτούν  $2^{i-1}$  flops. Έπειτα, για τον υπολογισμό των πινάκων  $P_{nk}$  χρειάζονται  $2^{k-1} \cdot 2^{n-k} = 2^{n-1}$  flops. Άρα, για να υπολογιστούν όλοι οι πίνακες  $Q_i$  που είναι  $2^n - 1$  στο πλήθος και υπολογίζονται μέσω της σχέσης  $Q_{2^r(2k+1)} = P_{n(r+1)}$  χρειάζονται  $(2^n - 1)2^{n-1} = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$  flops.
4. Στο τελευταίο βήμα υπολογίζονται τα ιδιοδιανύσματα  $v_i$  μέσω της σχέσης  $v_i = Q_{i-1}v_{i-1}$ ,  $2 \leq i \leq 2^n$ . Πρόκειται δηλαδή για έναν πολλαπλασιασμό ενός  $2^n \times 2^n$  πίνακα με ένα διάνυσμα μήκους  $2^n$ . Τα flops που απαιτούνται για κάθε τέτοιο πολλαπλασιασμό είναι  $2^n 2^n = 2^{2n}$  και τα ιδιοδιανύσματα που θα υπολογιστούν είναι  $2^n - 1$ , άρα τα συνολικά flops θα είναι  $(2^n - 1)2^{2n} = 2^{3n} - 2^{2n}$ .

Τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου προσθέτοντας τα flops όλων των βημάτων που απαιτούνται.

Έτσι:

$$\begin{aligned} \text{Υπολογιστική πολυπλοκότητα} &= 2^{n+1} - 2 + 0 + 2^{2n-1} - 2^{n-1} + 2^{3n} - 2^{2n} \\ &= 2^{3n} - 2^{2n} + 2^{2n-1} + 2^{n+1} - 2^{n-1} - 2 \\ &= O(2^{3n}) = O(N^3), \end{aligned}$$

όπου  $N = 2^n$ .

### Αριθμητικό παράδειγμα 1:

Έστω ο πίνακας Hadamard  $H_3$  τάξης  $2^3$ :

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Θα μελετήσουμε αναλυτικά τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_3$ .

#### Ιδιοτιμές:

Όσον αφορά τις ιδιοτιμές του πίνακα  $H_3$ , προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 2.5.1 ότι είναι οι εξής:

4 ιδιοτιμές με την τιμή  $+2^{3/2} = +\sqrt{8}$  και

4 ιδιοτιμές με την τιμή  $-2^{3/2} = -\sqrt{8}$ .

Άρα, ο πίνακας  $\Lambda_3$  με τις ιδιοτιμές του πίνακα  $H_3$  είναι:

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{8} \end{bmatrix}.$$

#### Ιδιοδιανύσματα:

Πρέπει να προσδιορίσουμε  $2^3 = 8$  ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_3$ .

Από το Θεώρημα 2.6.1 μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρώτο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $H_3$ .

Πράγματι, γνωρίζοντας ότι ένα ιδιοδιάνυσμα  $x_1$  του  $H_1$  είναι το

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

και χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση του Θεωρήματος 2.6.1, έχουμε:

$$x_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ (-1 + \sqrt{2})x_1 \end{bmatrix} = [q^0 \quad q^1 \quad q^1 \quad q^2]^T$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} x_2 \\ (-1 + \sqrt{2})x_2 \end{bmatrix} = [q^0 \quad q^1 \quad q^1 \quad q^2 \quad q^1 \quad q^2 \quad q^2 \quad q^3]^T,$$

όπου  $q = \sqrt{2} - 1$ .

Χρησιμοποιώντας ακόμα τις σχέσεις (2.23), (2.24), είναι εύκολο να υπολογίσουμε το  $x_3$  χωρίς να αναπτύξουμε τις δυνάμεις του  $q$ .

Πράγματι, έχουμε:

$$q^0 = 1, \text{ άρα } a_0 = 1, b_0 = 0.$$

$$\begin{aligned} a_1 = 2b_0 - a_0 = 0 - 1 & \Rightarrow a_1 = -1 \\ b_1 = a_0 - b_0 = 1 - 0 & \Rightarrow b_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 = 2b_1 - a_1 = 2 + 1 & \Rightarrow a_2 = 3 \\ b_2 = a_1 - b_1 = -1 - 1 & \Rightarrow b_2 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 = 2b_2 - a_2 = -4 - 3 & \Rightarrow a_3 = -7 \\ b_3 = a_2 - b_2 = 3 + 2 & \Rightarrow b_3 = 5. \end{aligned}$$

Επομένως, το ιδιοδιάνυσμα  $x_3$  είναι το παρακάτω:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \\ -1 + \sqrt{2} \\ 3 - 2\sqrt{2} \\ -1 + \sqrt{2} \\ 3 - 2\sqrt{2} \\ 3 - 2\sqrt{2} \\ -7 + 5\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Στο σημείο αυτό, θέτουμε  $v_1 = x_3$ , ώστε να χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο (2.26) του Θεωρήματος 2.6.5 για να υπολογίσουμε και τα υπόλοιπα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_3$ .

Για τον υπολογισμό του ιδιοδιανύσματος  $v_2$ , ο αναδρομικός τύπος (2.26)

μας δίνει:

$$v_2 = Q_1 v_1 ,$$

όπου ο πίνακας  $Q_1$  προσδιορίζεται μέσω της σχέσης (2.27):

$$Q_1 = Q_{2^0(2\cdot 0+1)} = P_{3(0+1)} = P_{31} .$$

Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε τον πίνακα  $P_{31}$ , ο οποίος αποτελείται από  $2^{3-1} = 2^2 = 4$  πίνακες  $E_1$ .

Δηλαδή:

$$P_{31} = E_1 \oplus E_1 \oplus E_1 \oplus E_1 .$$

Ο πίνακας  $E_1$  τώρα έχει οριστεί ως εξής:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & E_0 \\ -E_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Επομένως:

$$Q_1 = P_{31} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & -1 & & \\ & 0 & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Τελικά, το ιδιοδιάνυσμα  $v_2$  του πίνακα  $H_3$  είναι το:

$$v_2 = Q_1 v_1 = [ -q^1 \quad q^0 \quad -q^2 \quad q^1 \quad -q^2 \quad q^1 \quad -q^3 \quad q^2 ]^T .$$

Στο σημείο αυτό, ας ελέγξουμε και την ορθογωνιότητα των δύο ιδιοδιανυσμάτων που έχουν υπολογιστεί.

Έχουμε:

$$v_1^T v_2 = [ q^0 \quad q^1 \quad q^1 \quad q^2 \quad q^1 \quad q^2 \quad q^2 \quad q^3 ] \begin{bmatrix} -q^1 \\ q^0 \\ -q^2 \\ q^1 \\ -q^2 \\ q^1 \\ -q^3 \\ q^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$v_1^T v_2 = -q^0 q^1 + q^0 q^1 - q^1 q^2 + q^1 q^2 - q^1 q^2 + q^1 q^2 - q^2 q^3 + q^2 q^3 \Rightarrow$$

$$v_1^T v_2 = 0 .$$

Συνεπώς, τα ιδιοδιανύσματα  $v_1$  και  $v_2$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Εντελώς αντίστοιχα, μπορούμε να υπολογίσουμε το ιδιοδιάνυσμα  $v_3$  του πίνακα  $H_3$ .

Συγκεκριμένα:

$$v_3 = Q_2 v_2 ,$$

όπου

$$Q_2 = Q_{2^1(2 \cdot 0 + 1)} = P_{3(1+1)} = P_{32} .$$

Όμως,

$$P_{32} = E_2 \oplus E_2 \quad (2^{3-2} = 2 \text{ πίνακες } E_2)$$

και

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Επομένως,

$$Q_2 = P_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

και τελικά

$$v_3 = Q_2 v_2 = [ -q^1 \quad -q^2 \quad q^0 \quad q^1 \quad -q^2 \quad -q^3 \quad q^1 \quad q^2 ]^T .$$

Όσον αφορά την ορθογωνιότητα:

$$v_1^T v_3 = [ q^0 \quad q^1 \quad q^1 \quad q^2 \quad q^1 \quad q^2 \quad q^2 \quad q^3 ] \begin{bmatrix} -q^1 \\ -q^2 \\ q^0 \\ q^1 \\ -q^2 \\ -q^3 \\ q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$v_1^T v_3 = -q^0 q^1 - q^1 q^2 + q^0 q^1 + q^1 q^2 - q^1 q^2 - q^2 q^3 + q^1 q^2 + q^2 q^3 \Rightarrow$$

$$v_1^T v_3 = 0 ,$$

και

$$v_2^T v_3 = \begin{bmatrix} -q^1 & q^0 & -q^2 & q^1 & -q^2 & q^1 & -q^3 & q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q^1 \\ -q^2 \\ q^0 \\ q^1 \\ -q^2 \\ -q^3 \\ q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$v_2^T v_3 = q^1 q^1 - q^0 q^2 - q^0 q^2 + q^1 q^1 + q^2 q^2 - q^1 q^3 - q^1 q^3 + q^2 q^2 \Rightarrow$$

$$v_2^T v_3 = q^2 - q^2 - q^2 + q^2 + q^4 - q^4 - q^4 + q^4 \Rightarrow$$

$$v_2^T v_3 = 0 .$$

Πράγματι, το σύνολο που έχουμε φτιάξει μέχρι τώρα αποτελείται από ορθογώνια ιδιοδιανύσματα.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, βρίσκουμε ότι τα υπόλοιπα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_3$  είναι τα εξής:

$$v_4 = Q_3 v_3 = \begin{bmatrix} q^2 & -q^1 & -q^1 & q^0 & q^3 & -q^2 & -q^2 & q^1 \end{bmatrix}^T ,$$

$$\text{όπου } Q_3 = Q_{2^0(2 \cdot 1 + 1)} = P_{31} ,$$

$$v_5 = Q_4 v_4 = \begin{bmatrix} -q^1 & -q^2 & -q^2 & -q^3 & q^0 & q^1 & q^1 & q^2 \end{bmatrix}^T ,$$

$$\text{όπου } Q_4 = Q_{2^2(2 \cdot 0 + 1)} = P_{33} = E_3 ,$$

$$v_6 = Q_5 v_5 = \begin{bmatrix} q^2 & -q^1 & q^3 & -q^2 & -q^1 & q^0 & -q^2 & q^1 \end{bmatrix}^T ,$$

$$\text{όπου } Q_5 = Q_{2^0(2 \cdot 2 + 1)} = P_{31} ,$$

$$v_7 = Q_6 v_6 = \begin{bmatrix} q^2 & q^3 & -q^1 & -q^2 & -q^1 & -q^2 & q^0 & q^1 \end{bmatrix}^T ,$$

$$\text{όπου } Q_6 = Q_{2^1(2 \cdot 1 + 1)} = P_{32} ,$$

$$v_8 = Q_7 v_7 = \begin{bmatrix} -q^3 & q^2 & q^2 & -q^1 & q^2 & -q^1 & -q^1 & q^0 \end{bmatrix}^T ,$$

$$\text{όπου } Q_7 = Q_{2^0(2 \cdot 3 + 1)} = P_{31} .$$

Ελέγχοντας τη σχέση  $v_i^T v_j = 0$  για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς  $i$  και  $j$  είναι εύκολο να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι έχει δημιουργηθεί ένα σύνολο ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $H_3$ .

Στο σημείο αυτό, να τονίσουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που βρήκαμε δεν είναι κανονικοποιημένα.

Διαιρώντας το κάθε ιδιοδιάνυσμα  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , με τη νόρμα του  $\|v_i\|$ , προκύπτει το κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα  $z_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ .

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε ότι ισχύει:

$$c = \|v_i\|^2 = 1 + 3q^2 + 3q^4 + q^6, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Επομένως, ο πίνακας  $Z_3$  με τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$Z_3 = \frac{1}{\sqrt{c}}V_3 = \frac{1}{\sqrt{c}} \begin{bmatrix} q^0 & -q^1 & -q^1 & q^2 & -q^1 & q^2 & q^2 & -q^3 \\ q^1 & q^0 & -q^2 & -q^1 & -q^2 & -q^1 & q^3 & q^2 \\ q^1 & -q^2 & q^0 & -q^1 & -q^2 & q^3 & -q^1 & q^2 \\ q^2 & q^1 & q^1 & q^0 & -q^3 & -q^2 & -q^2 & -q^1 \\ q^1 & -q^2 & -q^2 & q^3 & q^0 & -q^1 & -q^1 & q^2 \\ q^2 & q^1 & -q^3 & -q^2 & q^1 & q^0 & -q^2 & -q^1 \\ q^2 & -q^3 & q^1 & -q^2 & q^1 & -q^2 & q^0 & -q^1 \\ q^3 & q^2 & q^2 & q^1 & q^2 & q^1 & q^1 & q^0 \end{bmatrix}.$$

Έχοντας βρει τώρα τις ιδιοτιμές και τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_3$ , μπορούμε να γράψουμε τη φασματική του ανάλυση:

$$H_3 = Z_3 \Lambda_3 Z_3^T = \frac{1}{c} V_3 \begin{bmatrix} \sqrt{8} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\sqrt{8} \end{bmatrix} V_3^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Πράγματι, ο πίνακας που προκύπτει είναι ο πίνακας Hadamard  $H_3$ .

□

### 2.6.3 Ένας ακόμα τρόπος παραγωγής ενός συνόλου ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων

Στην παράγραφο αυτή, θα αναπτυχθεί η αναδρομική μέθοδος των [6] και [13], που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγει τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Hadamard τάξης  $2^{n+1}$ , μέσω των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα



τάξης  $2^n$ , χωρίς τη χρήση βοηθητικών πινάκων (όπως ήταν στην προηγούμενη παράγραφο οι  $E_n, P_{nk}$ ).

**Λόγω ευκολότερης προσέγγισης, εδώ θα χρησιμοποιηθεί η κανονικοποιημένη μορφή του πίνακα  $H_n$ .**

Μια αναδιατύπωση του Θεωρήματος 2.6.1 είναι η εξής Πρόταση:

**Πρόταση 2.6.7** *Αν το  $v_{n,k}$  είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του  $H_n$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ , τότε το*

$$\hat{v}_{n+1,k} = \begin{bmatrix} v_{n,k} \\ (-1 + \sqrt{2})v_{n,k} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

*θα είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του  $H_{n+1}$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ . Η ιδιοτιμή  $\lambda$  μπορεί να είναι είτε 1, είτε -1.*

**Απόδειξη:**

Η απόδειξη ακολουθεί ακριβώς την ίδια διαδικασία με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.1.

□

Μια επιπλέον Πρόταση μπορεί στο σημείο αυτό να μας δώσει ένα ακόμα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $H_{n+1}$ .

Συγκεκριμένα:

**Πρόταση 2.6.8** *Αν το  $v_{n,k}$  είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του  $H_n$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ , τότε το*

$$\tilde{v}_{n+1,k} = \begin{bmatrix} (1 - \sqrt{2})v_{n,k} \\ v_{n,k} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

*θα είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του  $H_{n+1}$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $-\lambda$ . Η ιδιοτιμή  $\lambda$  μπορεί να είναι είτε 1, είτε -1.*

**Απόδειξη:**

Κατ'αρχήν, εφόσον το  $v_{n,k}$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $H_n$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ , ισχύει η σχέση  $H_n v_{n,k} = \lambda v_{n,k}$ .

Τώρα, έχουμε:

$$\begin{aligned} H_{n+1} \tilde{v}_{n+1,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \sqrt{2})v_{n,k} \\ v_{n,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{2})H_n v_{n,k} \\ -\sqrt{2}H_n v_{n,k} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (2 - \sqrt{2})\lambda v_{n,k} \\ -\sqrt{2}\lambda v_{n,k} \end{bmatrix} = -\lambda \tilde{v}_{n+1,k}, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

□

Οι Προτάσεις 2.6.7 και 2.6.8, μπορούν να μας δώσουν μια αναδρομική μέθοδο για την παραγωγή των ιδιοδιανυσμάτων τάξης  $2^{n+1}$  μέσω των ιδιοδιανυσμάτων τάξης  $2^n$ .

Τα δύο αρχικά ιδιοδιανύσματα για τη μέθοδο αυτή είναι τα:

$$v_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix}, \quad v_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

όπου τα  $v_{1,0}$ ,  $v_{1,1}$  είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_1$ .

Η παρακάτω Πρόταση επαληθεύει την ορθογωνιότητα των ιδιοδιανυσμάτων των πινάκων Hadamard που παράγονται από τις Προτάσεις 2.6.7 και 2.6.8.

**Πρόταση 2.6.9** Η παρακάτω ορθογωνιότητα ισχύει για τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων Hadamard:

1. Τα ιδιοδιανύσματα  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\tilde{v}_{n+1,l}$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους ( $0 \leq k, l \leq 2^n - 1$ ).
2. Αν τα ιδιοδιανύσματα  $v_{n,k}$  και  $v_{n,l}$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους, τότε και τα ιδιοδιανύσματα  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\tilde{v}_{n+1,l}$  θα είναι ορθογώνια μεταξύ τους ( $k \neq l, 0 \leq k, l \leq 2^n - 1$ ).
3. Αν τα ιδιοδιανύσματα  $v_{n,k}$  και  $v_{n,l}$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους, τότε και τα ιδιοδιανύσματα  $\tilde{v}_{n+1,k}$  και  $\hat{v}_{n+1,l}$  θα είναι ορθογώνια μεταξύ τους ( $k \neq l, 0 \leq k, l \leq 2^n - 1$ ).

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned} 1. \hat{v}_{n+1,k}^T \tilde{v}_{n+1,l} &= \begin{bmatrix} v_{n,k}^T & (-1 + \sqrt{2})v_{n,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \sqrt{2})v_{n,l} \\ v_{n,l} \end{bmatrix} = \\ &= (1 - \sqrt{2})v_{n,k}^T v_{n,l} + (-1 + \sqrt{2})v_{n,k}^T v_{n,l} = 0. \end{aligned}$$

Άρα, τα  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\tilde{v}_{n+1,l}$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

2. Αφού τα ιδιοδιανύσματα  $v_{n,k}$  και  $v_{n,l}$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους, ισχύει:  $v_{n,k}^T v_{n,l} = 0$ .

Τώρα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{v}_{n+1,k}^T \hat{v}_{n+1,l} &= \begin{bmatrix} v_{n,k}^T & (-1 + \sqrt{2})v_{n,k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n,l} \\ (-1 + \sqrt{2})v_{n,l} \end{bmatrix} = \\ &= v_{n,k}^T v_{n,l} + (-1 + \sqrt{2})^2 v_{n,k}^T v_{n,l} = 0. \end{aligned}$$

Άρα, τα  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\hat{v}_{n+1,l}$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

3. Η ορθογωνιότητα των  $\tilde{v}_{n+1,k}$  και  $\hat{v}_{n+1,l}$  αποδεικνύεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που αποδείχθηκε η ορθογωνιότητα των  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\hat{v}_{n+1,l}$  στην περίπτωση (2).

□

Όσον αφορά την πληρότητα:

Χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις 2.6.7 και 2.6.8, κάθε ιδιοδιάνυσμα  $v_{n,k}$  τάξης  $2^n$  μπορεί να παράγει δύο νέα ιδιοδιανύσματα τάξης  $2^{n+1}$ . Έτσι, το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων τάξης  $2^{n+1}$  θα είναι διπλάσιο σε σχέση με το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων τάξης  $2^n$ . Στο αρχικό βήμα ( όπου  $n = 1$  ), ξεκινάμε με δύο ιδιοδιανύσματα, όπως είδαμε στη σχέση (2.33).

Επομένως, τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Hadamard τάξης  $2^n$  που παράγονται μέσω της αναδρομικής μεθόδου θα είναι ακριβώς  $2^n$ .

Τελικά, τα παραγόμενα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια και πλήρη.

□

Τώρα, μπορούμε να διατυπώσουμε μερικές ακόμα Προτάσεις σχετικές με την αναδρομική μέθοδο παραγωγής ιδιοδιανυσμάτων του  $H_n$ .

**Πρόταση 2.6.10** *Αν το ιδιοδιάνυσμα  $v_{n,k}$  τάξης  $2^n$  έχει  $k$  αλληλαγές προσήμου, τότε το πλήθος των αλληλαγών προσήμου των  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\tilde{v}_{n+1,k}$  είναι  $2k$  και  $2k + 1$ , όχι απαραίτητα κατ'αντιστοιχία.*

**Απόδειξη:**

Εφόσον τα δύο μισά των  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\tilde{v}_{n+1,k}$  προέρχονται απευθείας από το  $v_{n,k}$ , οι αλλαγές προσήμου των  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\tilde{v}_{n+1,k}$  είναι τουλάχιστον  $2k$  και το πολύ  $2k + 1$ . Η αλλαγή προσήμου στη σύζευξη του πρώτου και του δεύτερου μισού των  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\tilde{v}_{n+1,k}$  θα καθορίσει τις συνολικές αλλαγές προσήμου.

Έστω  $v_{n,k}(m)$  το  $m$ -οστό στοιχείο του  $v_{n,k}$ , όπου  $m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ . Αφού το πρώτο και το τελευταίο στοιχείο του  $v_{n,k}$  θα γίνουν τα δύο μεσαία στοιχεία των  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\tilde{v}_{n+1,k}$ , τα πρόσημα τους θα είναι αυτά που θα καθορίσουν τις αλλαγές προσήμου των  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\tilde{v}_{n+1,k}$ .

Όλοι οι συνδυασμοί των προσήμων για το πρώτο και το τελευταίο στοιχείο φαίνονται στους παρακάτω πίνακες:

$v_{n,k}(0)$	$v_{n,k}(N - 1)$	$\hat{v}_{n+1,k}(N - 1)$	$\tilde{v}_{n+1,k}(N)$	<i>changes</i>
+	+	+	+	$2k$
+	-	-	+	$2k + 1$
-	+	+	-	$2k + 1$
-	-	-	-	$2k$

$v_{n,k}(0)$	$v_{n,k}(N-1)$	$\tilde{v}_{n+1,k}(N-1)$	$\tilde{v}_{n+1,k}(N)$	changes
+	+	-	+	$2k+1$
+	-	+	+	$2k$
-	+	-	-	$2k+$
-	-	+	-	$2k+1$

όπου  $N = 2^n$ .

Όπως προκύπτει από τις σχέσεις (2.31) και (2.32) που όρισαν τα  $\hat{v}_{n+1,k}$  και  $\tilde{v}_{n+1,k}$ , καθώς επίσης και από το γεγονός ότι ισχύει  $-1 + \sqrt{2} > 0$  και  $1 - \sqrt{2} < 0$ , το πρόσημο του  $v_{n,k}(0)$  είναι ίδιο με το πρόσημο των  $\hat{v}_{n+1,k}(N)$  και  $\tilde{v}_{n+1,k}(N)$ . Επίσης, το πρόσημο του  $v_{n,k}(N-1)$  είναι ίδιο με το πρόσημο του  $\hat{v}_{n+1,k}(N-1)$  και αντίθετο με το πρόσημο του  $\tilde{v}_{n+1,k}(N-1)$ .

Η διαφορά προσήμου ανάμεσα στα  $\hat{v}_{n+1,k}(N-1)$  και  $\hat{v}_{n+1,k}(N)$  είναι αυτή που θα δημιουργήσει μία επιπλέον αλλαγή προσήμου στο  $\hat{v}_{n+1,k}$ . Αντίστοιχα, το ίδιο ισχύει και για το  $\tilde{v}_{n+1,k}$ .

Φαίνεται λοιπόν και στον παραπάνω πίνακα ότι ανάλογα με την περίπτωση, θα καταλήξουν να έχουν  $2k$  αλλαγές προσήμου το ένα ιδιοδιάνυσμα και  $2+1$  αλλαγές προσήμου το άλλο, που ήταν και το ζητούμενο.

□

**Πρόταση 2.6.11** Έστω  $N = 2^n$ . Το πλήθος των αλλαγών προσήμου στα  $v_{n,k}$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) είναι από 0 μέχρι  $N-1$ .

#### Απόδειξη:

Η Πρόταση 2.6.11 μπορεί να αποδειχθεί με τη μέθοδο της επαγωγής.

Για  $n = 1$ , μπορούμε να δούμε από τη σχέση (2.33) ότι τα διανύσματα  $v_{1,0}$  και  $v_{1,1}$  έχουν 0 και 1 αλλαγές προσήμου αντίστοιχα.

Έστω ότι ισχύει για την περίπτωση  $n = m$ , έστω δηλαδή ότι το πλήθος των αλλαγών προσήμου στα  $v_{m,k}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ ) είναι από 0 μέχρι  $2^m - 1$ .

Τότε, για την περίπτωση  $n = m+1$  μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.6.10, ότι το πλήθος των αλλαγών προσήμου θα είναι από 0 μέχρι  $2^{m+1} - 1$ , που αποδεικνύει το ζητούμενο.

□

**Πρόταση 2.6.12** Οι απόλυτες τιμές των στοιχείων των  $v_{n,k}$  είναι της μορφής  $(\sqrt{2} - 1)^m$ , όπου  $m = 0, 1, \dots, n$ .

### Απόδειξη:

Η απόδειξη της Πρότασης αυτής είναι εύκολη και βασίζεται στις Προτάσεις 2.6.7 και 2.6.8 που ορίζουν τα ιδιοδιανύσματα  $\hat{v}_{n,k}$  και  $\tilde{v}_{n,k}$ .

Άλλωστε, την ιδιότητα αυτή την είχαμε ξανασυναντήσει στη σχέση (2.22).

□

### Αριθμητικό παράδειγμα 2:

Από τη σχέση (2.33) παρατηρούμε ότι τα διανύσματα  $v_{1,0}$  και  $v_{1,1}$  έχουν 0 και 1 αλλαγές προσήμου αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.31) και (2.32), παίρνουμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_2$ :

$$\hat{v}_{2,0} = \begin{bmatrix} 1 \\ q \\ q \\ q^2 \end{bmatrix}, \tilde{v}_{2,0} = \begin{bmatrix} -q \\ -q^2 \\ 1 \\ q \end{bmatrix}, \hat{v}_{2,1} = \begin{bmatrix} -q \\ 1 \\ -q^2 \\ q \end{bmatrix}, \tilde{v}_{2,1} = \begin{bmatrix} q^2 \\ -q \\ -q \\ 1 \end{bmatrix},$$

όπου  $q = \sqrt{2} - 1$  ( $q > 0$ ).

Παρατηρούμε ότι οι αλλαγές προσήμου στα παραπάνω διανύσματα είναι 0, 1, 3, 2 αντίστοιχα.

Επόμενως, για να δημιουργηθεί ένα σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $H_2$  με διάταξη ακολουθίας, τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα πρέπει να αριθμηθούν με τον εξής τρόπο:

$$v_{2,0} = \hat{v}_{2,0}, \quad v_{2,1} = \tilde{v}_{2,0}, \quad v_{2,2} = \tilde{v}_{2,1}, \quad v_{2,3} = \hat{v}_{2,1}.$$

Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές των ιδιοδιανυσμάτων αυτών, όπως προκύπτει από τις Προτάσεις 2.6.7 και 2.6.8, είναι:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι για  $n = 3$  τα ιδιοδιανύσματα του  $H_3$  με διάταξη ακολουθίας έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} v_{3,0} &= \hat{v}_{3,0}, & v_{3,1} &= \tilde{v}_{3,0}, & v_{3,2} &= \tilde{v}_{3,1}, & v_{3,3} &= \hat{v}_{3,1}, \\ v_{3,4} &= \hat{v}_{3,2}, & v_{3,5} &= \tilde{v}_{3,2}, & v_{3,6} &= \tilde{v}_{3,3}, & v_{3,7} &= \hat{v}_{3,3}. \end{aligned}$$

και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_0 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_7 = -1.$$

□

Λαμβάνοντας υπόψιν το Αριθμητικό παράδειγμα 2, είναι εύκολο να εξάγουμε έναν **γενικό τύπο** υπολογισμού των ιδιοδιανυσμάτων του  $H_{n+1}$  με διάταξη ακολουθίας και είναι ο παρακάτω:

$$\begin{cases} v_{n+1,4l} = \hat{v}_{n+1,2l} \\ v_{n+1,4l+1} = \tilde{v}_{n+1,2l} \\ v_{n+1,4l+2} = \tilde{v}_{n+1,2l+1} \\ v_{n+1,4l+3} = \hat{v}_{n+1,2l+1} \end{cases} \quad (2.34)$$

για  $l = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ , και αντίστοιχα για τις ιδιοτιμές:

$$\lambda_k = (-1)^k, \quad (2.35)$$

για  $k = 0, 1, \dots, 2^{n+1} - 1$ .

### Κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα

Τα ιδιοδιανύσματα που παρήχθησαν στην προηγούμενη υποπαράγραφο δεν είναι κανονικοποιημένα.

Προκειμένου να τα κανονικοποιήσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε την ευκλείδια νόρμα του διανύσματος  $v_{n,k}$ , την οποία θα συμβολίζουμε  $\|v_{n,k}\|$ , και το παρακάτω Λήμμα:

**Λήμμα 2.6.13** *Για οποιοδήποτε  $N = 2^n$ , ισχύει η σχέση:*

$$\|v_{n,k}\|^2 = (1 + q^2)^n, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2.36)$$

όπου  $q = \sqrt{2} - 1$ .

### Απόδειξη:

Η απόδειξη της σχέσης (2.36) θα γίνει επαγωγικά.

Για  $n = 1$ , έχουμε:

$$\|v_{1,0}\|^2 = \|v_{1,1}\|^2 = 1 + q^2, \text{ δηλαδή}$$

$$\|v_{1,k}\|^2 = (1 + q^2)^1, \quad k = 0, 1.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει  $\|v_{n,k}\|^2 = (1 + q^2)^n$ .

Τότε:

$$\|\hat{v}_{n+1,k}\|^2 = \|\tilde{v}_{n+1,k}\|^2 = \|v_{n,k}\|^2(1 + q^2) = (1 + q^2)^{n+1},$$

για κάθε  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Εφόσον κάθε ένα από τα διανύσματα  $v_{n+1,l}$  για  $l = 0, 1, \dots, 2N - 1$  είναι είτε  $\hat{v}_{n+1,k}$ , είτε  $\tilde{v}_{n+1,k}$  για κάποιο  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , ισχύει:

$$\|v_{n+1,l}\|^2 = (1 + q^2)^{n+1},$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Θέτοντας τώρα  $c = 1 + q^2$  και λαμβάνοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Hadamard τάξης  $N = 2^n$ , θα έχουν τη μορφή:

$$z_{n,k} = \frac{v_{n,k}}{\|v_{n,k}\|} = \frac{v_{n,k}}{\sqrt{c^n}}. \quad (2.37)$$

### Αριθμητικό Παράδειγμα 2 (συνέχεια):

Γνωρίζοντας τις ιδιοτιμές και τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_3$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη φασματική του ανάλυση.

Έχουμε ήδη υπολογίσει παραπάνω τις 8 ιδιοτιμές του πίνακα  $H_3$ .

Έτσι, ο πίνακας  $\Lambda_3$  με τις ιδιοτιμές του  $H_3$  είναι:

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Όσον αφορά τώρα τα ιδιοδιανύσματα, είδαμε παραπάνω ότι είναι τα εξής:

$$\begin{aligned}
v_{3,0} = \hat{v}_{3,0} &= \begin{bmatrix} 1 \\ q \\ q \\ q^2 \\ q \\ q^2 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix}, v_{3,1} = \tilde{v}_{3,0} = \begin{bmatrix} -q \\ -q^2 \\ -q^2 \\ -q^3 \\ 1 \\ q \\ q \\ q^2 \end{bmatrix}, v_{3,2} = \tilde{v}_{3,1} = \begin{bmatrix} q^2 \\ q^3 \\ -q \\ -q^2 \\ -q \\ -q^2 \\ 1 \\ q \end{bmatrix}, \\
v_{3,3} = \hat{v}_{3,1} &= \begin{bmatrix} -q \\ -q^2 \\ 1 \\ q \\ -q^2 \\ -q^3 \\ q \\ q^2 \end{bmatrix}, v_{3,4} = \hat{v}_{3,2} = \begin{bmatrix} q^2 \\ -q \\ -q \\ 1 \\ q^3 \\ -q^2 \\ -q^2 \\ q \end{bmatrix}, v_{3,5} = \tilde{v}_{3,2} = \begin{bmatrix} -q^3 \\ q^2 \\ q^2 \\ -q \\ q^2 \\ -q \\ -q \\ 1 \end{bmatrix}, \\
v_{3,6} = \tilde{v}_{3,3} &= \begin{bmatrix} q^2 \\ -q \\ q^3 \\ -q^2 \\ -q \\ 1 \\ -q^2 \\ q \end{bmatrix}, v_{3,7} = \hat{v}_{3,3} = \begin{bmatrix} -q \\ 1 \\ -q^2 \\ q \\ -q^2 \\ q \\ -q^3 \\ q^2 \end{bmatrix}, \text{ όπου } q = \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}$$

Άρα, ο πίνακας  $V_3$  με τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_3$  είναι:

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 & -q & q^2 & -q & q^2 & -q^3 & q^2 & -q \\ q & -q^2 & q^3 & -q^2 & -q & q^2 & -q & 1 \\ q & -q^2 & -q & 1 & -q & q^2 & q^3 & -q^2 \\ q^2 & -q^3 & -q^2 & q & 1 & -q & -q^2 & q \\ q & 1 & -q & -q^2 & q^3 & q^2 & -q & -q^2 \\ q^2 & q & -q^2 & -q^3 & -q^2 & -q & 1 & q \\ q^2 & q & 1 & q & -q^2 & -q & -q^2 & -q^3 \\ q^3 & q^2 & q & q^2 & q & 1 & q & q^2 \end{bmatrix}.$$

Επίσης, από τη σχέση (2.37) που μας δίνει τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_3$ , προκύπτει ότι ο πίνακας  $Z_3$  με τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$Z_3 = \frac{1}{\sqrt{c^3}} \begin{bmatrix} 1 & -q & q^2 & -q & q^2 & -q^3 & q^2 & -q \\ q & -q^2 & q^3 & -q^2 & -q & q^2 & -q & 1 \\ q & -q^2 & -q & 1 & -q & q^2 & q^3 & -q^2 \\ q^2 & -q^3 & -q^2 & q & 1 & -q & -q^2 & q \\ q & 1 & -q & -q^2 & q^3 & q^2 & -q & -q^2 \\ q^2 & q & -q^2 & -q^3 & -q^2 & -q & 1 & q \\ q^2 & q & 1 & q & -q^2 & -q & -q^2 & -q^3 \\ q^3 & q^2 & q & q^2 & q & 1 & q & q^2 \end{bmatrix},$$



όπου  $c = 1 + q^2$ .

Τελικά, η φασματική ανάλυση του πίνακα  $H_3$  είναι:

$$H_3 = Z_3 \Lambda_3 Z_3^T$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^3}} \begin{bmatrix} 1 & -q & q^2 & -q & q^2 & -q^3 & q^2 & -q \\ q & -q^2 & q^3 & -q^2 & -q & q^2 & -q & 1 \\ q & -q^2 & -q & 1 & -q & q^2 & q^3 & -q^2 \\ q^2 & -q^3 & -q^2 & q & 1 & -q & -q^2 & q \\ q & 1 & -q & -q^2 & q^3 & q^2 & -q & -q^2 \\ q^2 & q & -q^2 & -q^3 & -q^2 & -q & 1 & q \\ q^2 & q & 1 & q & -q^2 & -q & -q^2 & -q^3 \\ q^3 & q^2 & q & q^2 & q & 1 & q & q^2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{c^3}} \begin{bmatrix} 1 & -q & q^2 & -q & q^2 & -q^3 & q^2 & -q \\ q & -q^2 & q^3 & -q^2 & -q & q^2 & -q & 1 \\ q & -q^2 & -q & 1 & -q & q^2 & q^3 & -q^2 \\ q^2 & -q^3 & -q^2 & q & 1 & -q & -q^2 & q \\ q & 1 & -q & -q^2 & q^3 & q^2 & -q & -q^2 \\ q^2 & q & -q^2 & -q^3 & -q^2 & -q & 1 & q \\ q^2 & q & 1 & q & -q^2 & -q & -q^2 & -q^3 \\ q^3 & q^2 & q & q^2 & q & 1 & q & q^2 \end{bmatrix}^T \Rightarrow$$

$$H_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

που είναι πράγματι ο κανονικοποιημένος πίνακας Hadamard  $H_3$ .

□

## Αλγόριθμος

Ο αλγόριθμος που υλοποιεί αυτή τη διαδικασία παραγωγής ενός συνόλου ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $H_n$  είναι ο εξής:

1. Αποθήκευσε τα δύο ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_1$ , τα οποία δίνονται από τη σχέση (2.33).
2. Μέσω αναδρομικής διαδικασίας, υπολόγισε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_n$ , χρησιμοποιώντας τα ήδη γνωστά ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_{n-1}$  στις σχέσεις (2.31) και (2.32).
3. Χρησιμοποίησε τον τύπο (2.34) προκειμένου να προκύψει ένα σύνολο ιδιοδιανυσμάτων με διάταξη ακολουθίας.

Στο **Παράρτημα** υπάρχει ο κώδικας σε **MATLAB** που υλοποιεί τον αλγόριθμο.

## Υπολογιστική πολυπλοκότητα

Θα υπολογίσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ακολουθώντας τα βήματά του.

Έτσι, έχουμε:

1. Στο πρώτο βήμα απλά αποθηκεύονται τα ήδη γνωστά ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_1$ , διαδικασία για την οποία δεν απαιτούνται flops.
2. Στο βήμα αυτό υπολογίζονται τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_n$  μέσω των σχέσεων (2.31) και (2.32).

Κάθε μία από τις σχέσεις μας δίνει  $2^{n-1}$  ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_n$  μέσω των ιδιοδιανυσμάτων του  $H_{n-1}$ . Κάθε τέτοιος υπολογισμός απαιτεί  $2^{n-1}$  flops, άρα οι δύο τύποι θα μας δώσουν συνολικά  $2^n$  νέα ιδιοδιανύσματα, ο υπολογισμός των οποίων απαιτεί  $2^n \cdot 2^{n-1} = 2^{2n-1}$  flops.

Η διαδικασία είναι αναδρομική, οπότε υπολογίζονται όλα τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων  $H_2$  έως  $H_{n-1}$  για να προκύψουν τα ιδιοδιανύσματα του  $H_n$ .

Επομένως, τα flops που απαιτεί όλη η διαδικασία είναι:

$$\begin{aligned} 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2n-3} + 2^{2n-1} &= \sum_{m=2}^n 2^{2m-1} = \frac{1}{2} \left( \sum_{m=0}^n 4^m - 4^0 - 4^1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} - 1 - 4 \right) = \frac{2}{3} \cdot 2^{2n} - \frac{16}{6}. \end{aligned}$$

3. Στο τελευταίο βήμα του αλγορίθμου γίνεται αντιμετάθεση των ιδιοδιανυσμάτων που έχουν ήδη βρεθεί, μέσω του τύπου (2.34).

Η αντιμετάθεση είναι μια διαδικασία που δεν απαιτεί flops.

Τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου προσθέτοντας τα flops όλων των βημάτων που απαιτούνται.

Έτσι:

$$\begin{aligned} \text{Υπολογιστική πολυπλοκότητα} &= 0 + 2^{2n} - \frac{16}{6} + 0 = 2^{2n} - \frac{16}{6} \\ &= O(2^{2n}) = O(N^2), \end{aligned}$$

όπου  $N = 2^n$ .



## Κεφάλαιο 3

# Μετασχηματισμός Hadamard και αλγόριθμοι

### 3.1 Γενικές πληροφορίες

Βλέπουμε στο [17] ότι ο Μετασχηματισμός Hadamard  $y$  ενός  $2^n \times 1$  διανύσματος  $x$  ορίζεται ως:

$$y = H_n x. \quad (3.1)$$

Ένας απλός υπολογισμός της σχέσης (3.1) απαιτεί  $O(2^{2n})$  αριθμητικές πράξεις.

Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί ταχύτερες μέθοδοι για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Hadamard, όπως έχει γίνει και με άλλους παρόμοιους μετασχηματισμούς, όπως είναι ο μετασχηματισμός Fourier και ο διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου.

Οι περισσότεροι από αυτούς τους γρήγορους αλγόριθμους βασίζονται στην παραγοντοποίηση:

$$H_k = \begin{bmatrix} I_{2^{k-1}} & I_{2^{k-1}} \\ I_{2^{k-1}} & -I_{2^{k-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{k-1} & 0 \\ 0 & H_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

όπου  $I_{2^{k-1}}$  είναι ο ταυτοτικός πίνακας και  $0$  ο μηδενικός πίνακας, και οι δύο τάξης  $2^{k-1}$ .

## 3.2 Μία πρώτη παραγοντοποίηση

Σύμφωνα με το [17], προκειμένου να γίνει η παραγοντοποίηση του πίνακα  $H_n$ , θα χρειαστεί αρχικά να οριστούν κάποιοι πίνακες.

Ορίζουμε λοιπόν:

$$C_{n-k} = \begin{bmatrix} I_{2^{n-k}} & I_{2^{n-k}} \\ I_{2^{n-k}} & -I_{2^{n-k}} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (3.3)$$

και

$$\begin{aligned} B_n &= C_{n-1} \\ B_{n-1} &= C_{n-2} \oplus C_{n-2} \\ &\vdots \\ B_1 &= C_0 \oplus C_0 \oplus \cdots \oplus C_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

όπου  $\oplus$  είναι το ευθύ άθροισμα.

**Πρόταση 3.2.1** *Ο πίνακας  $H_n$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:*

$$H_n = B_n B_{n-1} \cdots B_1. \quad (3.5)$$

**Απόδειξη:**

Όπως είδαμε στη σχέση (3.2), ο  $H_n$  γράφεται:

$$\begin{aligned} H_n &= \begin{bmatrix} I_{2^{n-1}} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & -I_{2^{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{n-1} & 0 \\ 0 & H_{n-1} \end{bmatrix} = C_{n-1}(H_{n-1} \oplus H_{n-1}) = \\ &= B_n \left( \begin{bmatrix} I_{2^{n-2}} & I_{2^{n-2}} \\ I_{2^{n-2}} & -I_{2^{n-2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{n-2} & 0 \\ 0 & H_{n-2} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} I_{2^{n-2}} & I_{2^{n-2}} \\ I_{2^{n-2}} & -I_{2^{n-2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{n-2} & 0 \\ 0 & H_{n-2} \end{bmatrix} \right) = \\ &= B_n (C_{n-2}(H_{n-2} \oplus H_{n-2}) \oplus C_{n-2}(H_{n-2} \oplus H_{n-2})) = \\ &= B_n ((C_{n-2} \oplus C_{n-2})(H_{n-2} \oplus H_{n-2} \oplus H_{n-2} \oplus H_{n-2})) = \\ &= B_n B_{n-1} (H_{n-2} \oplus H_{n-2} \oplus H_{n-2} \oplus H_{n-2}) = \dots = B_n B_{n-1} \cdots B_1, \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα (1.8) του ευθέως αθροίσματος.

□

Ακόμα, γνωρίζουμε ότι ο πίνακας  $H_n$ , καθώς και οι πίνακες  $\{B_j\}$ , όπου  $j = 1, 2, \dots, n-1$ , είναι συμμετρικοί πίνακες.

Επομένως:

$$\begin{aligned} H_n = H_n^T &= (B_n B_{n-1} \cdots B_1)^T = B_1^T \cdots B_{n-1}^T B_n^T \\ &= B_1 B_2 \cdots B_n. \end{aligned}$$

Εύκολα προέκυψε λοιπόν ότι άλλη μία παραγοντοποίηση του  $H_n$  είναι η εξής:

$$H_n = B_1 B_2 \cdots B_n. \quad (3.6)$$

### 3.3 Ένας πρώτος αλγόριθμος

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την παραγωγή μιας πολύ σημαντικής παραγοντοποίησης του πίνακα  $H_n$  που υπάρχει στο [17], η οποία οδηγεί σε έναν πολύ χρήσιμο αλγόριθμο για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Hadamard.

**Πρόταση 3.3.1** *Ο πίνακας  $H_n$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:*

$$H_n = A^n \quad (3.7)$$

όπου ο πίνακας  $A$  ορίζεται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

**Απόδειξη:**

Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού βασίζεται σε τρεις πολύ γνωστές ιδιότητες των μεταθετικών πινάκων:

1. Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα από δεξιά με έναν μεταθετικό πίνακα μεταθέτει τις στήλες του πίνακα.
2. Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα από αριστερά με έναν μεταθετικό πίνακα μεταθέτει τις γραμμές του πίνακα.

3. Ο αντίστροφος ενός μεταθετικού πίνακα είναι ο ανάστροφός του.

Λαμβάνοντας υπόψιν την τρίτη ιδιότητα και τη σχέση (3.5), μπορούμε να γράψουμε τον  $H_n$  ως εξής:

$$H_n = B_n P_{n-1} (P_{n-1}^T B_{n-1} P_{n-2}) (P_{n-2}^T B_{n-2} P_{n-3}) \dots (P_1^T B_1), \quad (3.9)$$

όπου οι  $\{P_i\}$  είναι μεταθετικοί πίνακες.

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$A = P_1^T B_1 \quad (3.10)$$

$$A = P_{n-k}^T B_{n-k} P_{n-k-1}, \quad k = 1, \dots, n-2 \quad (3.11)$$

$$A = B_n P_{n-1} \quad (3.12)$$

όπου

$$P_{n-k}^T = (P_1^T)^{n-k} = (P^T)^{n-k} \quad (3.13)$$

και

$$P^n = I, \quad (3.14)$$

όπου  $I$  ο ταυτοτικός πίνακας.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να ορίσουμε τον πίνακα  $P$ .

**Ορισμός 3.3.2** Ο πίνακας  $P$  είναι ένας μετασχηματισμός ενός διανύσματος  $x$  τάξης  $N = 2^n$ , όπου

$$x^T = \left[ x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{\frac{N}{2}-1} \mid x_{\frac{N}{2}} \quad x_{\frac{N}{2}+1} \quad \dots \quad x_{N-2} \quad x_{N-1} \right] \quad (3.15)$$

τέτοιος ώστε να προκύψει

$$Px = y \quad (3.16)$$

όπου

$$y^T = \left[ x_0 \quad x_{\frac{N}{2}} \quad x_1 \quad x_{\frac{N}{2}+1} \quad \dots \quad x_{\frac{N}{4}+\frac{N}{2}-1} \mid x_{\frac{N}{4}} \quad x_{\frac{N}{4}+\frac{N}{2}} \quad \dots \quad x_{\frac{N}{2}-1} \quad x_{N-1} \right]. \quad (3.17)$$

Ο  $N \times N$  μεταθετικός πίνακας  $P$  μπορεί να γραφτεί αναλυτικά ως συνένωση δύο  $N \times \frac{N}{2}$  πινάκων ως εξής:

$$P = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (3.18)$$



Εύκολα προκύπτει ότι ισχύει η σχέση  $P^n = I$ , όπου  $I$  ο ταυτοτικός πίνακας, αφού  $n$  περιστροφές του διανύσματος έχουν ως αποτέλεσμα το αρχικό διάνυσμα.

Έτσι, ισχύει η σχέση  $PP^{n-1} = I$ .

Δηλαδή, από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι για τον αντίστροφο του πίνακα  $P$  ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$P^{-1} = P^T = P^{n-1} \quad (3.19)$$

Στο σημείο αυτό, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$P^T B_1 = A.$$

Πράγματι:

$$P^T B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} = A.$$

Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός του  $B_1$  από αριστερά με τον  $P^T$  μεταθέτει τις διαδοχικές γραμμές του  $B_1$  στο πρώτο και το δεύτερο μισό του πίνακα  $A$  αντίστοιχα.

Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε επίσης ότι ισχύει  $P^T B_2 P = B_1$ , που φαίνεται από τα παρακάτω:

$$\begin{aligned}
P^T B_2 P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = B_1.
\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός από αριστερά με τον  $P^T$  και από δεξιά με τον  $P$  επιλέγουν τις γραμμές  $(0, 2, 4, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1)$  και τις στήλες  $(0, 2, 4, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1)$  αντίστοιχα, έχοντας σαν αποτέλεσμα τον  $B_1$ .

Επομένως,  $P^T(P^T B_2 P) = P^T B_1 = A$ , ή  $(P^T)^2 B_2 P = A$ .

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο τη διαδικασία αυτή, προκύπτει ότι:

$$(P^T)^k B_k P^{k-1} = A, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1,$$

που αποδεικνύει τη σχέση (3.11).

Μένει να αποδείξουμε την ισχύ της σχέσης (3.12).

Όπως είδαμε στη σχέση (3.19), ισχύει  $P^{n-1} = P^T$ .

Επομένως, έχουμε:



### Υπολογιστική Πολυπλοκότητα:

Από τη μορφή αυτή φαίνεται ότι προκύπτει ένας γρήγορος μετασχηματισμός που απαιτεί μόνο  $O(n \cdot 2^n) = (N \log_2 N)$  αριθμητικές πράξεις, όπου  $N = 2^n$ .

### Αριθμητικό παράδειγμα 3:

Έστω το διάνυσμα  $x = [1, 4, -2, 3, 0, 1, 4, -1]^T$ .

Υπολογίζοντας άμεσα το μετασχηματισμό Hadamard, βρίσκουμε:

$$y = H_3 x = [10, -4, 2, -4, 2, -12, 6, 8]^T.$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που περιγράψαμε παραπάνω, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

$x$	Column1	Column2	$y$
1	5	6	10
4	1	4	-4
-2	1	-8	2
3	3	4	-4
0	-3	4	2
1	-5	-2	-12
4	-1	2	6
-1	5	-6	8

Όπως βλέπουμε, η τελευταία στήλη, δηλαδή το  $y$ , περιέχει το ίδιο διάνυσμα μ'αυτό που προέκυψε από την άμεση μέθοδο.

□

## 3.4 Διακριτός Κλασματικός Μετασχηματισμός Hadamard

### 3.4.1 Ορισμός

Στην παράγραφο αυτή, θα αναφερθούμε σε μία πιο γενικευμένη μορφή του μετασχηματισμού Hadamard που υπάρχει στο [6] και θα αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού του.

**Από'δω και στο εξής, θα χρησιμοποιηθεί ο κανονικοποιημένος πίνακας Hadamard  $H_n$ .**

Ο **διακριτός κλασματικός μετασχηματισμός Hadamard** (DFRHT) είναι μία γενίκευση του διακριτού μετασχηματισμού Hadamard (DHT), με μία πρόσθετη κλασματική παράμετρο.

Ας ορίσουμε όμως πρώτα τον διακριτό μετασχηματισμό Hadamard:

Ο ορισμός του διακριτού μετασχηματισμού Hadamard βασίζεται στην φασματική ανάλυση του πίνακα Hadamard.

**Ορισμός 3.4.1** Ο πίνακας τάξης  $2^n$  του διακριτού κλασματικού μετασχηματισμού Hadamard με πραγματική παράμετρο  $\alpha$  είναι μία δύναμη του πίνακα του διακριτού μετασχηματισμού Hadamard, δηλαδή:

$$H_n^\alpha = Z_n \Lambda_n^\alpha Z_n^T = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k^\alpha z_{n,k} z_{n,k}^T. \quad (3.20)$$

Προφανώς, για  $\alpha = 0$  ο πίνακας DFRHT γίνεται ο ταυτοτικός πίνακας, ενώ για  $\alpha = 1$  γίνεται ο πίνακας DHT.

Γενικά, ένας πίνακας DFRHT έχει μιγαδικές τιμές.

Είναι επίσης εμφανές ότι για τον υπολογισμό του διακριτού κλασματικού πίνακα Hadamard είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $H_n$ .

Χρησιμοποιώντας τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα με διάταξη ακολουθίας, όπως έχουν οριστεί από τις σχέσεις (2.34) και (2.37), η φασματική ανάλυση του πίνακα Hadamard τάξης  $N = 2^n$  μπορεί να γραφτεί:

$$H_n = Z_n \Lambda_n Z_n^T = \frac{1}{c^n} V_n \Lambda_n V_n^T, \quad (3.21)$$

όπου  $\Lambda_n$  είναι ο διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία

$$\lambda_k = (-1)^k = e^{-ik\pi}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.22)$$

Επομένως, ο πίνακας DFRHT θα πάρει τη μορφή:

$$H_n^\alpha = \frac{1}{c^n} V_n \Lambda_n^\alpha V_n^T, \quad (3.23)$$

όπου

$$\lambda_k^\alpha = e^{-ik\pi\alpha}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.24)$$

### 3.4.2 Ο αλγόριθμος

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον διακριτό κλασματικό μετασχηματισμό Hadamard για ένα διάνυσμα  $x_n$  μήκους  $N = 2^n$ .

Συμβολίζοντας  $y_n^\alpha$  το αποτέλεσμα, θα έχουμε:

$$y_n^\alpha = H_n^\alpha x_n. \quad (3.25)$$

Θεωρώντας ως δεδομένο ότι ο πίνακας  $H_n^\alpha$  έχει δοθεί, οι πράξεις που απαιτούνται για να υπολογιστεί το αποτέλεσμα είναι  $N^2$  πολλαπλασιασμοί μιγαδικών αριθμών και  $N(N-1)$  προσθέσεις μιγαδικών αριθμών.

Αν το  $x_n$  είναι διάνυσμα πραγματικών αριθμών, τότε απαιτούνται  $2N^2$  πολλαπλασιασμοί πραγματικών αριθμών και  $2N(N-1)$  προσθέσεις πραγματικών αριθμών.

Όμως, αν χρησιμοποιήσουμε την παραγοντοποίηση (3.23) και παραγοντοποιήσουμε τους πίνακες  $V_n$  και  $V_n^T$  σε ένα γινόμενο αραιών πινάκων με μικρό πλήθος μη-μηδενικών στοιχείων, το μέγεθος των αριθμητικών πράξεων μπορεί να μειωθεί σημαντικά.

Η παραγοντοποίηση ενός πίνακα είναι συνήθως δυνατή όταν ο πίνακας αυτός έχει κατάλληλη δομή. Γι'αυτό και θα εξετάσουμε τη δομή των πινάκων  $V_n$ .

Για να το πετύχουμε, θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα:

#### Αριθμητικό παράδειγμα 4:

Οι πίνακες  $V_n$  για  $n = 1, 2, 3$  είναι οι εξής:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & -q \\ q & 1 \end{bmatrix},$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & -q & q^2 & -q \\ q & -q^2 & -q & 1 \\ q & 1 & -q & -q^2 \\ q^2 & q & 1 & q \end{bmatrix},$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 & -q & q^2 & -q & q^2 & -q^3 & q^2 & -q \\ q & -q^2 & q^3 & -q^2 & -q & q^2 & -q & 1 \\ q & -q^2 & -q & 1 & -q & q^2 & q^3 & -q^2 \\ q^2 & -q^3 & -q^2 & q & 1 & -q & -q^2 & q \\ q & 1 & -q & -q^2 & q^3 & q^2 & -q & -q^2 \\ q^2 & q & -q^2 & -q^3 & -q^2 & -q & 1 & q \\ q^2 & q & 1 & q & -q^2 & -q & -q^2 & -q^3 \\ q^3 & q^2 & q & q^2 & q & 1 & q & q^2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $V_1$  έχει μία συγκεκριμένη δομή.

Ας ασχοληθούμε τώρα με τη δομή του πίνακα  $V_2$ .

Αν εναλλάξουμε τη δεύτερη με την τέταρτη στήλη του  $V_2$  και στη συνέχεια, στον πίνακα που έχει προκύψει εναλλάξουμε την τρίτη με την τέταρτη στήλη, το αποτέλεσμα που θα πάρουμε θα είναι ο πίνακας:

$$\overline{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -q & -q & q^2 \\ q & 1 & -q^2 & -q \\ q & -q^2 & 1 & -q \\ q^2 & q & q & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & -qV_1 \\ qV_1 & V_1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας  $V_2$  διαφέρει από τον πίνακα  $\overline{V}_2$  μόνο στη διάταξη των στηλών. Επομένως, ο πίνακας  $V_2$  μπορεί να προκύψει πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα  $\overline{V}_2$  από δεξιά με τον μεταθετικό πίνακα  $P_2$ . Δηλαδή:

$$V_2 = \overline{V}_2 P_2,$$

όπου

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τώρα, ας κάνουμε το ίδιο και για τον πίνακα  $V_3$ . Αν εφαρμόσουμε τις ακόλουθες εναλλαγές στηλών:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

θα πάρουμε ως αποτέλεσμα τον πίνακα:

$$\overline{V}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -q & -q & q^2 & -q & q^2 & q^2 & -q^3 \\ q & 1 & -q^2 & -q & -q^2 & -q & q^3 & q^2 \\ q & -q^2 & 1 & -q & -q^2 & q^3 & -q & q^2 \\ q^2 & q & q & 1 & -q^3 & -q^2 & -q^2 & -q \\ q & -q^2 & -q^2 & q^3 & 1 & -q & -q & q^2 \\ q^2 & q & -q^3 & -q^2 & q & 1 & -q^2 & -q \\ q^2 & -q^3 & q & -q^2 & q & -q^2 & 1 & -q \\ q^3 & q^2 & q^2 & q & q^2 & q & q & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{V}_2 & -q\overline{V}_2 \\ q\overline{V}_2 & \overline{V}_2 \end{bmatrix}.$$

Όπως και πριν, ισχύει η εξής σχέση:

$$V_3 = \overline{V}_3 P_3,$$

όπου

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Αφού εξετάσαμε στο παραπάνω παράδειγμα τη δομή των πινάκων  $V_1, V_2, V_3$ , μπορούμε να γενικεύσουμε τις παρατηρήσεις αυτές για την περίπτωση  $N = 2^n$ .

Ο πίνακας  $V_k$  λοιπόν μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$V_k = \overline{V}_k P_k \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.26)$$

Για  $n = 1$ , μπορούμε να γράψουμε:

$$V_1 = \overline{V}_1 P_1,$$

όπου  $P_1$  είναι ο ταυτοτικός πίνακας τάξης 2, δηλαδή:

$$P_1 = I_2.$$

Όσον αφορά το μεταθετικό πίνακα  $P_k$  τάξης  $2^k$ , μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά από τον πίνακα  $P_{k-1}$  τάξης  $2^{k-1}$ , χρησιμοποιώντας τον εξής κανόνα:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_k = S_k \begin{bmatrix} P_{k-1} & 0 \\ 0 & P_{k-1} J_{k-1} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

για  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Ο πίνακας  $S_k$  είναι ο **μεταθετικός πίνακας τέλειας μετάθεσης** τάξης  $2^k$ , δηλαδή ο πίνακας που χωρίζει ένα σύνολο αποτελούμενο από άρτιο πλήθος στοιχείων σε δύο μέρη και τα εναλλάσσει.

Αυτό μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n \\ 1 & n+1 & 2 & n+2 & \dots & 2n \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας  $J_k$  είναι ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης  $2^k$  με μονάδες στη δευτερεύουσα διαγώνιο και μηδενικά σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις.

Για παράδειγμα:



$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν λοιπόν γράψουμε τον πίνακα  $V_n$  ως το γινόμενο  $\bar{V}_n P_n$  και συμπεριλάβουμε τον παράγοντα που είναι υπεύθυνος για την κανονικοποίηση των ιδιοδιανυσμάτων στον πίνακα  $\Lambda_n^\alpha$ , η σχέση (3.23) θα γίνει:

$$H_n^\alpha = \bar{V}_n P_n \tilde{\Lambda}_n^\alpha P_n^T \bar{V}_n^T \quad (3.28)$$

όπου

$$\tilde{\Lambda}_n^\alpha = \frac{1}{c^n} \Lambda_n^\alpha. \quad (3.29)$$

Ο πίνακας  $V_n$  μπορεί να παραχθεί αναδρομικά ως εξής:

$$\bar{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -q \\ q & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_{k+1} = \begin{bmatrix} \bar{V}_k & -q\bar{V}_k \\ q\bar{V}_k & \bar{V}_k \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

για  $k = 1, 2, \dots, n-1$ .

Η κατασκευή αυτή του πίνακα  $\bar{V}_n$  διευκολύνει την παραγοντοποίηση, λόγω της σχέσης:

$$\bar{V}_{k+1} = \begin{bmatrix} I_{2^k} & -qI_{2^k} \\ qI_{2^k} & I_{2^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_k & 0I_{2^k} \\ 0I_{2^k} & \bar{V}_k \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

όπου  $I_{2^k}$  είναι ο ταυτοτικός πίνακας τάξης  $2^k$ .

Στο σημείο αυτό, να τονίσουμε ότι η ύπαρξη των μεταθετικών πινάκων  $P_n$  και  $P_n^T$  στη σχέση (3.28) δεν αυξάνει το πλήθος των αριθμητικών πράξεων για τον υπολογισμό του DFRHT σε σχέση με τη σχέση (3.23), αφού ο πολλαπλασιασμός με τους πίνακες αυτούς το μόνο που κάνει είναι να εναλλάσσει τις στήλες του αρχικού πίνακα.

Τώρα, θα αναφερθούμε σε μία Πρόταση που θα μας βοηθήσει στην περαιτέρω παραγοντοποίηση των πινάκων  $V_n$ :

**Πρόταση 3.4.2** Έστω μία ακολουθία πινάκων  $(W_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , τάξης  $2^k$  που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$W_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$W_k = \begin{bmatrix} aW_{k-1} & bW_{k-1} \\ cW_{k-1} & dW_{k-1} \end{bmatrix}, \quad 2 \leq k \leq n. \quad (3.33)$$

Τότε, ο πίνακας  $W_n$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$W_n = R_n^{(n)} R_n^{(n-1)} \dots R_n^{(1)}, \quad (3.34)$$

όπου  $(R_n^{(k)})$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  είναι ένας ψευδο-διαγώνιος πίνακας τάξης  $2^n$  της μορφής:

$$R_n^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{2^k} & & & \\ & A_{2^k} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{2^k} \end{bmatrix} = I_{2^{n-k}} \otimes A_{2^k}, \quad (3.35)$$

όπου το σύμβολο  $\otimes$  αναφέρεται στο γινόμενο Kronecker και οι υποπίνακες  $A_{2^k}$  που βρίσκονται στη διαγώνιο του πίνακα  $R_n^{(k)}$  δίνονται από τη σχέση:

$$A_{2^k} = \begin{bmatrix} aI_{2^{k-1}} & bI_{2^{k-1}} \\ cI_{2^{k-1}} & dI_{2^{k-1}} \end{bmatrix} = W_1 \otimes I_{2^{k-1}}. \quad (3.36)$$

### Απόδειξη:

Έστω  $\check{W}_n^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , μία ακολουθία ψευδο-διαγώνιων πινάκων της μορφής:

$$\check{W}_n^{(k)} = \begin{bmatrix} W_k & & & \\ & W_k & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & W_k \end{bmatrix} = I_{2^{n-k}} \otimes W_k. \quad (3.37)$$

Για τους πίνακες αυτούς, ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$\check{W}_n^{(k+1)} = R_n^{(k+1)} \check{W}_n^{(k)} \quad (3.38)$$

και

$$\check{W}_n^{(n)} = W_n, \quad (3.39)$$

οι οποίες προκύπτουν από τον ορισμό του πίνακα  $W_n$  και από τις ειδικές κατασκευές των πινάκων  $R_n^{(k)}$  και  $\check{W}_n^{(k)}$ .

Επίσης, ισχύει η ακόλουθη παραγοντοποίηση:

$$\check{W}_n^{(k)} = R_n^{(k)} R_n^{(k-1)} \dots R_n^{(1)}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (3.40)$$

Η σχέση (3.40) θα αποδειχθεί με την επαγωγική μέθοδο:

Για  $k = 1$ , έχουμε:

$$\check{W}_n^{(1)} = R_n^{(1)} = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & d & & & 0 \\ & & a & b & \\ & & c & d & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a & b \\ & & & & c & d \end{bmatrix} = I_{2^{n-1}} \otimes W_1.$$

Έστω τώρα ότι ισχύει η σχέση:

$$\check{W}_n^{(k)} = R_n^{(k)} R_n^{(k-1)} \dots R_n^{(1)} \text{ για κάποιο } k.$$

Γνωρίζοντας ότι ισχύει η σχέση (3.38), έχουμε:

$$R_n^{(k+1)} \left( R_n^{(k)} R_n^{(k-1)} \dots R_n^{(1)} \right) = R_n^{(k+1)} \check{W}_n^{(k)} = \check{W}_n^{(k+1)},$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο της επαγωγικής μεθόδου.

Τέλος, παίρνοντας τη σχέση (3.40) για  $k = n$  και γνωρίζοντας ότι ισχύει η σχέση (3.39), έχουμε:

$$\check{W}_n^{(n)} = R_n^{(n)} R_n^{(n-1)} \dots R_n^{(1)} \Rightarrow W_n = R_n^{(n)} R_n^{(n-1)} \dots R_n^{(1)},$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Για τον πίνακα  $\bar{V}_n$ , οι συνθήκες της Πρότασης 3.4.2 ικανοποιούνται για  $a = d = 1$ ,  $b = -q$  και  $c = q$ . Στην περίπτωση αυτή, έχουμε:

$$W_1 = V_1 = \begin{bmatrix} 1 & -q \\ q & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, ο πίνακας  $\bar{V}_n$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$\bar{V}_n = R_n^{(n)} R_n^{(n-1)} \dots R_n^{(1)} \quad (3.41)$$

όπου

$$R_n^{(k)} = I_{2^{n-k}} \otimes V_1 \otimes I_{2^{k-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.42)$$

Για τον πίνακα  $\bar{V}_n^T$ , οι συνθήκες της Πρότασης 3.4.2 ικανοποιούνται για  $a = d = 1$ ,  $b = q$  και  $c = -q$ . Στην περίπτωση αυτή, έχουμε:

$$W_1 = V_1^T = \begin{bmatrix} 1 & q \\ -q & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, ο πίνακας  $\bar{V}_n^T$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$\bar{V}_n^T = \tilde{R}_n^{(n)} \tilde{R}_n^{(n-1)} \dots \tilde{R}_n^{(1)} \quad (3.43)$$

όπου

$$\tilde{R}_n^{(k)} = I_{2^{n-k}} \otimes V_1^T \otimes I_{2^{k-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.44)$$

Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψιν την παραγοντοποίηση των πινάκων  $\bar{V}_n$  και  $\bar{V}_n^T$  όπως προέκυψε από την Πρόταση 3.4.2, μπορούμε να καταλήξουμε σε μία υπολογιστική διαδικασία που περιγράφει έναν γρήγορο διακριτό κλασματικό μετασχηματισμό Hadamard για το διάνυσμα  $x_n$  με μήκος  $N = 2^n$ , η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

$$y_n^\alpha = R_n^{(n)} R_n^{(n-1)} \dots R_n^{(1)} P_n \tilde{\Lambda}_n^\alpha P_n^T \tilde{R}_n^{(n)} \tilde{R}_n^{(n-1)} \dots \tilde{R}_n^{(1)} x_n. \quad (3.45)$$

Στο **Παράρτημα** υπάρχει ο κώδικας σε **MATLAB** που υλοποιεί τον αλγόριθμο.

### Παρατήρηση:

Η παραπάνω παραγοντοποίηση του πίνακα Hadamard  $H_n$  είναι επίσης κατάλληλη και για τον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων του  $H_n$ .

Πράγματι, από τις σχέσεις (3.23) και (3.45) φαίνεται ότι ισχύει

$$V_n = R_n^{(n)} R_n^{(n-1)} \dots R_n^{(1)} P_n. \quad (3.46)$$

### 3.4.3 Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Θα εκτιμήσουμε την υπολογιστική πολυπλοκότητα όσον αφορά το απαιτούμενο πλήθος πολλαπλασιασμών και προσθέσεων για τον υπολογισμό του DFRHT.

Ο υπολογισμός του διακριτού κλασματικού μετασχηματισμού Hadamard για ένα διάνυσμα  $x_n$  μήκους  $N = 2^n$  με πραγματικές τιμές, υποθέτοντας ότι ο πίνακας  $H_n^\alpha$  όπως ορίστηκε από τη σχέση (3.23) έχει δοθεί, απαιτεί  $N^2 = 2^{2n}$  πολλαπλασιασμούς ενός μιγαδικού με έναν πραγματικό αριθμό και  $N(N-1) = 2^n(2^n-1)$  προσθέσεις μιγαδικών αριθμών.

Κάθε πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού με έναν πραγματικό αριθμό απαιτεί δύο πολλαπλασιασμούς πραγματικών αριθμών και κάθε πρόσθεση δύο μιγαδικών αριθμών απαιτεί δύο προσθέσεις πραγματικών αριθμών.

Επομένως, το πλήθος των πολλαπλασιασμών πραγματικών αριθμών και των προσθέσεων πραγματικών αριθμών που απαιτούνται για τον υπολογισμό του DFRHT χρησιμοποιώντας την απλή μέθοδο αντιστοιχεί σε  $2^{2n+1}$

και  $2^{n+1}(2^n - 1)$  αντίστοιχα.

Δηλαδή, η υπολογιστική πολυπλοκότητα της απλής μεθόδου είναι  $O(N^2)$ .

**Πρόταση 3.4.3** Η υπολογιστική πολυπλοκότητα του DFRHT όπως υπολογίζεται από τον αλγόριθμο (3.45) είναι  $O(n \cdot 2^n) = O(N \log_2 N)$ .

#### Απόδειξη:

Θα περιγράψουμε τον υπολογισμό της υπολογιστικής πολυπλοκότητας σε βήματα, για την καλύτερη κατανόηση της απόδειξης:

1. Ο πολλαπλασιασμός ενός πίνακα πραγματικών τιμών  $\tilde{R}_n^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , με ένα διάνυσμα πραγματικών τιμών  $x_n$  απαιτεί  $2^n$  πολλαπλασιασμούς πραγματικών αριθμών και  $2^n$  προσθέσεις πραγματικών αριθμών. Έτσι, ο υπολογισμός του γινομένου  $\tilde{R}_n^{(n)} \tilde{R}_n^{(n-1)} \dots \tilde{R}_n^{(1)} x_n$  απαιτεί  $n2^n$  πολλαπλασιασμούς πραγματικών αριθμών και  $n2^n$  προσθέσεις πραγματικών αριθμών. Το αποτέλεσμα είναι ένα διάνυσμα πραγματικών τιμών.
2. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο πολλαπλασιασμός του μεταθετικού πίνακα  $P_n^T$  με το διάνυσμα που έχει προκύψει δεν απαιτεί αριθμητικές πράξεις.
3. Στη συνέχεια, υπολογίζεται το γινόμενο του διαγώνιου πίνακα μιγαδικών τιμών  $\tilde{\Lambda}_n^\alpha$  (υποθέτουμε ότι για προκαθορισμένη παράμετρο  $\alpha$ , τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα έχουν ήδη υπολογιστεί) με το διάνυσμα πραγματικών τιμών που έχει προκύψει. Ο υπολογισμός του γινομένου αυτού απαιτεί  $2^{n+1} - 1$  πολλαπλασιασμούς πραγματικών αριθμών (Η πρώτη ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_0^\alpha$  είναι πάντα πραγματικός αριθμός). Το αποτέλεσμα είναι ένα διάνυσμα μιγαδικών τιμών.
4. ο πολλαπλασιασμός του μεταθετικού πίνακα  $P_n$  με το διάνυσμα που έχει προκύψει δεν απαιτεί αριθμητικές πράξεις.
5. Έπειτα, το διάνυσμα που έχει προκύψει πολλαπλασιάζεται με τους πίνακες  $R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, \dots, R_n^{(n)}$ . Κάθε ένας απ'αυτούς τους πολλαπλασιασμούς απαιτεί  $2^{n+1}$  πολλαπλασιασμούς πραγματικών αριθμών και  $2^{n+1}$  προσθέσεις πραγματικών αριθμών. Άρα, όλοι μαζί οι πολλαπλασιασμοί πινάκων απαιτούν  $n2^{n+1}$  πολλαπλασιασμούς πραγματικών αριθμών και  $n2^{n+1}$  προσθέσεις πραγματικών αριθμών.
6. Αθροίζοντας όλα τα παραπάνω, προκύπτει ότι το σύνολο των αριθμητικών πράξεων για τον υπολογισμό του DFRHT μεγέθους  $2^n$  χρησιμοποιώντας το γρήγορο αλγόριθμο είναι  $(3n + 2)2^n - 1$  πολλαπλασιασμοί πραγματικών αριθμών και  $3n2^n$  προσθέσεις πραγματικών αριθμών. Επομένως, η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι  $O(n \cdot 2^n) = O(N \log_2 N)$ .

□

## Παρατήρηση:

Σύμφωνα με την παραπάνω απόδειξη και τη σχέση (3.46), η υπολογιστική πολυπλοκότητα που απαιτείται για να υπολογιστούν τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_n$  είναι  $O(N^2 \log_2 N)$ .

Πράγματι, το γινόμενο δύο πινάκων  $R_n^{(k)}, R_n^{(j)}$  απαιτεί  $2^n 2^{n+1} = 2^{2n+1}$  πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις αντίστοιχα. Το πλήθος των πινάκων  $R_n^{(k)}$  είναι  $n$ , άρα το πλήθος των πολλαπλασιασμών πινάκων που πρέπει να γίνουν είναι  $n - 1$ .

Έτσι, τελικά η **υπολογιστική πολυπλοκότητα** για τον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων είναι:

$$(n - 1)2^{2n+1} = O(n \cdot 2^{2n}) = O(N^2 \log_2 N).$$

## Αριθμητικό παράδειγμα 5:

Θα παρουσιαστούν στο σημείο αυτό οι πίνακες που πρέπει να υπολογιστούν για την περίπτωση  $n = 3$ :

Σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο, πρέπει να υπολογιστεί το διάνυσμα:

$$y_3^\alpha = R_3^{(3)} R_3^{(2)} R_3^{(1)} P_3 \tilde{\Lambda}_3^\alpha P_3^T \tilde{R}_3^{(3)} \tilde{R}_3^{(2)} \tilde{R}_3^{(1)} x_3.$$

Ο πίνακας  $P_3$  έχει ήδη παρουσιαστεί στο αριθμητικό παράδειγμα 4 και είναι ο :

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Όσον αφορά τους υπόλοιπους πίνακες, είναι οι παρακάτω:

$$R_3^{(3)} = I_1 \otimes V_1 \otimes I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q \\ q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3^{(2)} = I_2 \otimes V_1 \otimes I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3^{(1)} = I_4 \otimes V_1 \otimes I_1 = \begin{bmatrix} 1 & -q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_3^{(3)} = I_1 \otimes V_1^T \otimes I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q \\ -q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_3^{(2)} = I_2 \otimes V_2^T \otimes I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_3^{(1)} = I_4 \otimes V_1^T \otimes I_1 = \begin{bmatrix} 1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{και τέλος, } \tilde{\Lambda}_3^\alpha = \frac{1}{c^3} \begin{bmatrix} \lambda_0^\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3^\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7^\alpha \end{bmatrix},$$

$$\text{όπου } c = 1 + (\sqrt{2} - 1)^2, \lambda_0^\alpha = e^{-0i\pi\alpha}, \lambda_1^\alpha = e^{-1i\pi\alpha}, \lambda_2^\alpha = e^{-2i\pi\alpha}, \\ \lambda_3^\alpha = e^{-3i\pi\alpha}, \lambda_4^\alpha = e^{-4i\pi\alpha}, \lambda_5^\alpha = e^{-5i\pi\alpha}, \lambda_6^\alpha = e^{-6i\pi\alpha}, \lambda_7^\alpha = e^{-7i\pi\alpha}.$$

Γνωρίζοντας όλους τους παραπάνω πίνακες, μπορούμε να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του  $H_3^\alpha$  μέσω της σχέσης (3.46). Πράγματι:

$$V_3 = R_3^{(3)} R_3^{(2)} R_3^{(1)} P_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -q \\ q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ = \begin{bmatrix} 1 & -q & q^2 & -q & q^2 & -q^3 & q^2 & -q \\ q & -q^2 & q^3 & -q^2 & -q & q^2 & -q & 1 \\ q & -q^2 & -q & 1 & -q & q^2 & q^3 & -q^2 \\ q^2 & -q^3 & -q^2 & q & 1 & -q & -q^2 & q \\ q & 1 & -q & -q^2 & q^3 & q^2 & -q & -q^2 \\ q^2 & q & -q^2 & -q^3 & -q^2 & -q & 1 & q \\ q^2 & q & 1 & q & -q^2 & -q & -q^2 & -q^3 \\ q^3 & q^2 & q & q^2 & q & 1 & q & q^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{όπου } q = \sqrt{2} - 1.$$



Έτσι, από τις στήλες του πίνακα  $V_3$  μπορούμε να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_3^\alpha$ , που είναι:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ q \\ q \\ q^2 \\ q \\ q^2 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -q \\ -q^2 \\ -q^2 \\ -q^3 \\ 1 \\ q \\ q \\ q^2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} q^2 \\ q^3 \\ -q \\ -q^2 \\ -q \\ -q^2 \\ 1 \\ q \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -q \\ -q^2 \\ 1 \\ q \\ -q^2 \\ -q^3 \\ q \\ q^2 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} q^2 \\ -q \\ -q \\ 1 \\ q^3 \\ -q^2 \\ -q^2 \\ q \end{bmatrix},$$

$$v_6 = \begin{bmatrix} -q^3 \\ q^2 \\ q^2 \\ -q \\ q^2 \\ -q \\ -q \\ 1 \end{bmatrix}, v_7 = \begin{bmatrix} q^2 \\ -q \\ q^3 \\ -q^2 \\ -q \\ 1 \\ -q^2 \\ q \end{bmatrix}, v_8 = \begin{bmatrix} -q \\ 1 \\ -q^2 \\ q \\ -q^2 \\ q \\ -q^3 \\ q^2 \end{bmatrix}.$$

Επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε τη φασματική ανάλυση του πίνακα  $H_3^\alpha$ , που θα είναι:

$$H_3^\alpha = V_3 \tilde{\Lambda}_3^\alpha V_3^T = R_3^{(3)} R_3^{(2)} R_3^{(1)} P_3 \tilde{\Lambda}_3^\alpha P_3^T \tilde{R}_3^{(3)} \tilde{R}_3^{(2)} \tilde{R}_3^{(1)} \Rightarrow$$

$$H_3^\alpha = \frac{1}{c^3} \begin{bmatrix} 1 & -q & q^2 & -q & q^2 & -q^3 & q^2 & -q \\ q & -q^2 & q^3 & -q^2 & -q & q^2 & -q & 1 \\ q & -q^2 & -q & 1 & -q & q^2 & q^3 & -q^2 \\ q^2 & -q^3 & -q^2 & q & 1 & -q & -q^2 & q \\ q & 1 & -q & -q^2 & q^3 & q^2 & -q & -q^2 \\ q^2 & q & -q^2 & -q^3 & -q^2 & -q & 1 & q \\ q^2 & q & 1 & q & -q^2 & -q & -q^2 & -q^3 \\ q^3 & q^2 & q & q^2 & q & 1 & q & q^2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_0^\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3^\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7^\alpha \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & q & q & q^2 & q & q^2 & q^2 & q^3 \\ -q & -q^2 & -q^2 & -q^3 & 1 & q & q & q^2 \\ q^2 & q^3 & -q & -q^2 & -q & -q^2 & 1 & q \\ -q & -q^2 & 1 & q & -q^2 & -q^3 & q & q^2 \\ q^2 & -q & -q & 1 & q^3 & -q^2 & -q^2 & q \\ -q^3 & q^2 & q^2 & -q & q^2 & -q & -q & 1 \\ q^2 & -q & q^3 & -q^2 & -q & 1 & -q^2 & q \\ -q & 1 & -q^2 & q & -q^2 & q & -q^3 & q^2 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες της φασματικής ανάλυσης που προέκυψαν είναι οι ίδιοι με τους πίνακες  $V_3, \Lambda_3$  και  $V_3^T$  του Αριθμητικού Παραδείγματος 2, αν εξαιρέσουμε τον εκθέτη  $\alpha$  του πίνακα  $\Lambda_3^\alpha$ .

Έτσι, για  $\alpha = 1$ , προκύπτει ο κανονικοποιημένος πίνακας  $H_3$  που βρήκαμε και στο Αριθμητικό Παράδειγμα 2, δηλαδή:

$$H_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του  $\alpha$ , προκύπτει ο πίνακας DFRHT.

□

## Κεφάλαιο 4

# Αριθμητικά αποτελέσματα

Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα αριθμητικά αποτελέσματα όλων των μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί στα προηγούμενα Κεφάλαια.

Για το σκοπό αυτό, θα χρησιμοποιηθεί ο κώδικας που υπάρχει στο **Παράρτημα** της διπλωματικής εργασίας.

### 4.1 Μέθοδοι παραγωγής των ιδιοδιανυσμάτων του $H_n$

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν και θα σχολιαστούν τα αριθμητικά αποτελέσματα των τριών μεθόδων που βρίσκονται στις υποπαραγράφους 2.6.2, 2.6.3 και 3.4.2 και υπολογίζουν τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων  $H_n$ .

Πριν την παρουσίαση του Πίνακα 1, ακολουθούν κάποια στοιχεία που θα βοηθήσουν στην κατανόηση και τη μελέτη του:

Στην **1η στήλη** του Πίνακα 1 καταγράφεται η τάξη του εκάστοτε πίνακα Hadamard (π.χ. εαν  $n = 6$ , τότε ο πίνακας Hadamard  $H_n$  είναι τάξης  $2^6 = 64$ ).

Στη **2η στήλη**, καταγράφεται ο αριθμός των flops που χρειάζονται για να υπολογιστούν τα ιδιοδιανύσματα του  $H_n$  χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που παρουσιάζεται στην υποπαραγράφο 2.6.2. Το όνομα της στήλης *eigenvectors\_first* αντιστοιχεί στο όνομα του προγράμματος (συνάρτησης MATLAB) που βρίσκεται στο Παράρτημα και υλοποιεί τη μέθοδο αυτή.

Στην **3η στήλη**, καταγράφεται ο αριθμός των flops που χρειάζονται για να υπολογιστούν τα ιδιοδιανύσματα του  $H_n$  χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που παρουσιάζεται στην υποπαραγράφο 2.6.3. Το όνομα της στή-

λης *eigenvectors* αντιστοιχεί στο όνομα του προγράμματος (συνάρτησης MATLAB) που βρίσκεται στο Παράρτημα και υλοποιεί τη μέθοδο αυτή.

Στην **4η στήλη**, καταγράφεται ο αριθμός των flops που χρειάζονται για να υπολογιστούν τα ιδιοδιανύσματα του  $H_n$  χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που παρουσιάζεται στην υποπαράγραφο 3.4.2. Το όνομα της στήλης *DFRHT\_eigen* αντιστοιχεί στο όνομα του προγράμματος (συνάρτησης MATLAB) που βρίσκεται στο Παράρτημα και υλοποιεί τη μέθοδο αυτή.

Ακολουθεί ο Πίνακας 1 με τα αριθμητικά αποτελέσματα:

$2^n$	<i>eigenvectors_first</i>	<i>eigenvectors</i>	<i>DFRHT_eigen</i>
$n = 1$	6	2	2
$n = 2$	57	10	34
$n = 3$	481	35	258
$n = 4$	3969	133	1538
$n = 5$	32257	521	8194
$n = 6$	260097	2065	40962
$n = 7$	2088961	8225	196610
$n = 8$	16744449	32833	917506
$n = 9$	<b>134086657</b>	131201	4194306
$n = 10$	$1.0732 \cdot 10^9$	524545	18874370
$n = 11$	$8.5878 \cdot 10^9$	2097665	83886082
$n = 12$	$6.8711 \cdot 10^{10}$	8389633	<b>369098754</b>
$n = 13$	—	33556481	$1.6106 \cdot 10^9$
$n = 14$	—	<b>134221825</b>	—

Πίνακας 1

### Παρατηρήσεις:

1. Στην υποπαράγραφο 2.6.2 η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου που αντιστοιχεί στο πρόγραμμα *eigenvectors\_first* βρέθηκε πως είναι  $O(N^3)$ . Μελετώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα της στήλης 2 του Πίνακα 1 διαπιστώνεται ότι πράγματι τα flops αντιστοιχούν σ'αυτή την υπολογιστική πολυπλοκότητα.
2. Στην υποπαράγραφο 2.6.3 η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου που αντιστοιχεί στο πρόγραμμα *eigenvectors* βρέθηκε πως είναι  $O(N^2)$ . Μελετώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα της στήλης 3 του Πίνακα 1 διαπιστώνεται ότι πράγματι τα flops αντιστοιχούν σ'αυτή την υπολογιστική πολυπλοκότητα.
3. Τέλος, στην υποπαράγραφο 3.4.2 η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου που αντιστοιχεί στο πρόγραμμα *DFRHT\_eigen* βρέθηκε πως είναι  $O(N^2 \log_2 N)$ . Μελετώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα της στήλης 4 του Πίνακα 1 διαπιστώνεται ότι πράγματι τα flops αντιστοιχούν σ'αυτή την υπολογιστική πολυπλοκότητα.

4. Βλέπουμε από τον Πίνακα 1 πως η μέθοδος *eigenvectors\_first* δίνει τη δυνατότητα να υπολογιστούν μέχρι και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Hadamard τάξης  $2^{12} = 4096$  (ανάλογα βέβαια και με τις δυνατότητες του εκάστοτε υπολογιστή), η μέθοδος *DFRHT\_eigen* υπολογίζει μέχρι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Hadamard τάξης  $2^{13} = 8192$  και μετά ξεπερνά τα όρια μνήμης, ενώ η μέθοδος *eigenvectors* υπολογίζει άνετα μέχρι και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Hadamard τάξης  $2^{14} = 16384$ !
5. Παρατηρούμε ακόμα από τον Πίνακα 1 ότι τα flops που απαιτούνται για να υπολογίσει η μέθοδος *eigenvectors\_first* τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Hadamard τάξης  $2^9 = 512$  είναι ίσα με τα flops που χρειάζεται η μέθοδος *eigenvectors* για να υπολογίσει τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Hadamard τάξης  $2^{14} = 16384$  και περίπου ίσα με τα flops που χρειάζεται η μέθοδος *DFRHT\_eigen* για να υπολογίσει τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Hadamard τάξης  $2^{12} = 4096$ .

### Συμπέρασμα:

Λαμβάνοντας υπόψιν τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 1 και γνωρίζοντας ότι η μέθοδος *eigenvectors* που παρουσιάστηκε στην υποπαράγραφο 2.6.3 δεν απαιτεί χρήση ενδιάμεσων πινάκων για την παραγωγή ενός συνόλου ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα Hadamard  $H_n$  (όπως συμβαίνει με τη μέθοδο *eigenvectors\_first* που χρησιμοποιεί τους πίνακες  $E_k, P_{nk}$  και  $Q_n$ ), συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος *eigenvectors* υπερτερεί σημαντικά σε σχέση με την *eigenvectors\_first*.

Η μέθοδος *DFRHT\_eigen* υπελαίρει σημαντικά σε σχέση με τη μέθοδο *eigenvectors\_first*, αλλά όχι σε σχέση με τη μέθοδο *eigenvectors*. Η μέθοδος *eigenvectors* έχει την καλύτερη υπολογιστική πολυπλοκότητα από τις 3 μεθόδους, γι'αυτό και είναι η προτιμότερη όσον αφορά την εύρεση ιδιοδιανυσμάτων.

## 4.2 Μετασχηματισμός Hadamard

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν και θα σχολιαστούν τα αριθμητικά αποτελέσματα των τριών μεθόδων που βρίσκονται στις υποπαραγράφους 3.3, 3.4.1 και 3.4.2 και υπολογίζουν το μετασχηματισμό Hadamard.

Πριν την παρουσίαση του Πίνακα 2, ακολουθούν κάποια στοιχεία που θα βοηθήσουν στην κατανόηση και τη μελέτη του:

Στην **1η στήλη** του Πίνακα 2 καταγράφεται η τάξη του εκάστοτε πίνακα Hadamard (π.χ. εαν  $n = 6$ , τότε ο πίνακας Hadamard  $H_n$  είναι τάξης  $2^6 = 64$ ).

Στη **2η στήλη**, καταγράφεται ο αριθμός των flops που χρειάζονται για να υλοποιηθεί ο μετασχηματισμός Hadamard χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που παρουσιάζεται στην υποπαράγραφο 3.4.1. Το όνομα της στήλης *HT* αντιστοιχεί στο όνομα του προγράμματος (συνάρτησης MATLAB) που βρίσκεται στο Παράρτημα και υλοποιεί τη μέθοδο αυτή.

Στην **3η στήλη**, καταγράφεται ο αριθμός των flops που χρειάζονται για να υλοποιηθεί ο μετασχηματισμός Hadamard χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που παρουσιάζεται στην παράγραφο 3.3. Το όνομα της στήλης *HT\_faster* αντιστοιχεί στο όνομα του προγράμματος (συνάρτησης MATLAB) που βρίσκεται στο Παράρτημα και υλοποιεί τη μέθοδο αυτή.

Στην **4η στήλη**, καταγράφεται ο αριθμός των flops που χρειάζονται για να υλοποιηθεί ο μετασχηματισμός Hadamard χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που παρουσιάζεται στην υποπαράγραφο 3.4.2. Το όνομα της στήλης *DFRHT* αντιστοιχεί στο όνομα του προγράμματος (συνάρτησης MATLAB) που βρίσκεται στο Παράρτημα και υλοποιεί τη μέθοδο αυτή.

Ακολουθεί ο Πίνακας 2 με τα αριθμητικά αποτελέσματα:

<b>2<sup>n</sup></b>	<b>HT</b>	<b>DFRHT</b>	<b>HT_faster</b>
<i>n</i> = 1	16	9	2
<i>n</i> = 2	56	31	8
<i>n</i> = 3	208	87	24
<i>n</i> = 4	800	223	64
<i>n</i> = 5	3136	543	160
<i>n</i> = 6	12416	1279	384
<i>n</i> = 7	49408	2943	896
<i>n</i> = 8	197120	6655	2048
<i>n</i> = 9	<b>787456</b>	14847	4608
<i>n</i> = 10	3147776	32767	10240
<i>n</i> = 11	12587008	71679	22528
<i>n</i> = 12	50339840	155647	49152
<i>n</i> = 13	201342976	335871	106496
<i>n</i> = 14	—	<b>720895</b>	229376
<i>n</i> = 15	—	—	<b>491520</b>

Πίνακας 2

### Παρατηρήσεις:

1. Στην υποπαράγραφο 3.4.1 η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου που αντιστοιχεί στο πρόγραμμα HT βρέθηκε πως είναι  $O(N^2)$ . Μελετώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα της στήλης 2 του Πίνακα 2 διαπιστώνεται ότι πράγματι τα flops αντιστοιχούν σ'αυτή την υπολογιστική πολυπλοκότητα.
2. Αντίστοιχα, στην παράγραφο 3.3 η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου που αντιστοιχεί στο πρόγραμμα HT\_faster βρέθηκε πως

είναι  $O(N \log_2 N)$ . Μελετώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα της στήλης 3 του Πίνακα 2 διαπιστώνεται ότι πράγματι τα flops αντιστοιχούν σ'αυτή την υπολογιστική πολυπλοκότητα.

3. Επιπλέον, στην υποπαράγραφο 3.4.2 η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου που αντιστοιχεί στο πρόγραμμα DFRHT βρέθηκε πως είναι  $O(N \log_2 N)$ . Μελετώντας τα αριθμητικά αποτελέσματα της στήλης 4 του Πίνακα 2 διαπιστώνεται ότι πράγματι τα flops αντιστοιχούν σ'αυτή την υπολογιστική πολυπλοκότητα.
4. Παρατηρούμε ότι οι μέθοδοι DFRHT και HT\_faster έχουν και οι δύο υπολογιστική πολυπλοκότητα  $O(N \log_2 N)$ , όμως στον Πίνακα 2 ο αριθμός των flops είναι μικρότερος για το πρόγραμμα HT\_faster σε σχέση με το πρόγραμμα DFRHT.

#### **Γιατί λοιπόν να προτιμήσουμε τη μέθοδο DFRHT;**

Η ειδοποιός διαφορά ανάμεσα στις δύο μεθόδους είναι πως η μέθοδος HT\_faster είναι μεν καλή όσον αφορά την υπολογιστική πολυπλοκότητα, όμως υπολογίζει το μετασχηματισμό Hadamard. Αντίθετα, η μέθοδος DFRHT αποτελεί μία γενίκευση του μετασχηματισμού Hadamard, αφού υπολογίζει το διακριτό κλασματικό μετασχηματισμό Hadamard.

Επιπλέον, η μέθοδος DFRHT μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε και τα **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα  $H_n$ , κάτι που δεν ισχύει για τη μέθοδο HT\_faster.

5. Όπως ειπώθηκε παραπάνω και για τη μέθοδο DFRHT, έτσι και η μέθοδος HT υπολογίζει τη γενικευμένη περίπτωση του μετασχηματισμού Hadamard, δηλαδή το διακριτό κλασματικό μετασχηματισμό Hadamard.
6. Ο λόγος για τον οποίο αυξάνονται σίγουρα τα flops στην περίπτωση του διακριτού κλασματικού μετασχηματισμού Hadamard είναι πως σε πολλές περιπτώσεις προκύπτουν πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς, τις οποίες πρέπει να λάβουμε υπόψιν στην υπολογιστική πολυπλοκότητα των αντίστοιχων μεθόδων.
7. Βλέπουμε από τον Πίνακα 2 πως η μέθοδος HT δίνει τη δυνατότητα να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Hadamard μέχρι και για τον πίνακα Hadamard τάξης  $2^{13} = 8192$  (ανάλογα πάντα και με τις δυνατότητες του εκάστοτε υπολογιστή), η μέθοδος DFRHT υπολογίζει το μετασχηματισμό Hadamard μέχρι και για τον πίνακα Hadamard τάξης  $2^{14} = 16384$ , ενώ η μέθοδος HT\_faster κατάφερε να υπολογίσει εύκολα και το μετασχηματισμό Hadamard για τον πίνακα Hadamard τάξης  $2^{15} = 32768$ !
8. Παρατηρούμε ότι ενώ δεν απαιτούνται πολλά flops για τον υπολογισμό της μεθόδου DFRHT για  $n = 14$ , δεν προχωρήσαμε στο επόμενο βήμα. Ο λόγος είναι ο χρόνος που χρειάστηκε το πρόγραμμα για να εκτελέσει το βήμα αυτό (περίπου 1,5 ώρα), που πιθανόν να οφείλεται στη διαχείριση μνήμης του υπολογιστή.

9. Τέλος, από τον Πίνακα 2 προκύπτει ότι τα flops που απαιτούνται για να υπολογίσει η μέθοδος *HT* το μετασχηματισμό Hadamard τάξης  $2^9 = 512$  είναι περίπου ίσα με τα flops που χρειάζεται η μέθοδος *DFRHT* για να υπολογίσει το μετασχηματισμό Hadamard τάξης  $2^{14} = 16384$ , ενώ είναι λίγο περισσότερα από τα flops που χρειάζεται η μέθοδος *HT\_faster* για να υπολογίσει το μετασχηματισμό Hadamard τάξης  $2^{15} = 32768$ .

### **Συμπέρασμα:**

Λαμβάνοντας υπόψιν τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 2 και όλες τις παραπάνω παρατηρήσεις, συμπεραίνουμε ότι η απόφαση για τη βέλτιστη μέθοδο εξαρτάται από τον υπολογισμό που θέλουμε να κάνουμε.

Σε περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε έναν απλό μετασχηματισμό Hadamard, η καλύτερη επιλογή είναι προφανώς η μέθοδος που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 3.3 και αντιστοιχεί στο πρόγραμμα *HT\_faster*.

Αν ο υπολογισμός που πρέπει να γίνει αφορά διακριτό κλασματικό μετασχηματισμό Hadamard, τότε η καλύτερη επιλογή είναι η μέθοδος που παρουσιάστηκε στην υποπαραγράφο 3.4.2 και αντιστοιχεί στο πρόγραμμα *DFRHT*.



## Κεφάλαιο 5

# Εφαρμογές

Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν περιληπτικά κάποιες από τις εφαρμογές των πινάκων Sylvester-Hadamard.

### 5.1 Ένα παράδειγμα από τη Στατιστική

Σύμφωνα με το [3], οι παραγοντικοί σχεδιασμοί χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε πειράματα που περιλαμβάνουν αρκετούς παράγοντες, όπου είναι αναγκαία η μελέτη της κοινής επίδρασης των παραγόντων στην απόκριση.

Μία σημαντική ειδική περίπτωση είναι όταν έχουμε  $k$  παράγοντες, τον καθένα σε δύο μόνο στάθμες. Αυτές οι στάθμες μπορεί να είναι ποσοτικές (π.χ. δύο τιμές θερμοκρασίας, πίεσης, χρόνου), ή ποιοτικές (π.χ. δύο μηχανές, δύο χειριστές, η "υψηλή" και η "χαμηλή" στάθμη ενός παράγοντα, ή ακόμα και η παρουσία και η απουσία ενός παράγοντα).

Μια πλήρης επανάληψη ενός τέτοιου σχεδιασμού απαιτεί  $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^k$  παρατηρήσεις, γι'αυτό και λέγεται  **$2^k$  παραγοντικός σχεδιασμός**.

Υποθέτουμε ότι:

1. οι παράγοντες είναι σταθεροί,
2. οι σχεδιασμοί είναι πλήρως τυχαιοποιημένοι, και
3. ικανοποιούνται οι συνήθεις υποθέσεις κανονικότητας.

Επιπλέον, επειδή υπάρχουν μόνο 2 στάθμες για κάθε παράγοντα, πρέπει να υποθέσουμε ότι η απόκριση είναι προσεγγιστικά γραμμική πάνω στο εύρος που επιλέγονται οι στάθμες του παράγοντα.

Ο  $2^k$  σχεδιασμός είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στα αρχικά στάδια της πειραματικής εργασίας, όταν υπάρχουν πολλοί παράγοντες που πρέπει να εξεταστούν, καθώς μας εφοδιάζει με το μικρότερο αριθμό εκτελέσεων (runs)

με τις οποίες οι  $k$  παράγοντες πρέπει να μελετηθούν σε έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό.

## Ο $2^2$ σχεδιασμός

Υποθέτουμε ότι μας ενδιαφέρουν δύο παράγοντες A και B, ο καθένας σε δύο στάθμες.

### Παράδειγμα:

Θεωρούμε την εξέταση πάνω στην επίδραση της συγκέντρωσης της αντίστασης και της ποιότητας του καταλύτη στον χρόνο αντίδρασης μιας χημικής διαδικασίας.

Έστω ότι η συγκέντρωση της αντίστασης είναι ο παράγοντας A, και έστω ότι οι δύο στάθμες που μας ενδιαφέρουν είναι 15% και 25%.

Ο καταλύτης είναι ο παράγοντας B, με την υψηλή στάθμη να συμβολίζει τη χρήση δύο θηκών του καταλύτη και τη χαμηλή στάθμη να συμβολίζει τη χρήση μίας μόνο θήκης.

Το πείραμα επαναλαμβάνεται 3 φορές και τα δεδομένα είναι τα παρακάτω:

Συνδυασμός αγωγής	Επανάληψη ( $n$ )			Σύνολο
	I	II	III	
A χαμηλή, B χαμηλή	28	25	27	80
A υψηλή, B χαμηλή	36	32	32	100
A χαμηλή, B υψηλή	18	19	23	60
A υψηλή, B υψηλή	31	30	29	90

Συνήθως, η επίδραση ενός παράγοντα συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο λατινικό γράμμα. Έτσι, το "A" αναφέρεται στην επίδραση του παράγοντα A, το "B" αναφέρεται στην επίδραση του παράγοντα B και το "AB" αναφέρεται στην αλληλεπίδραση AB.

Στον  $2^2$  σχεδιασμό η χαμηλή και η υψηλή στάθμη των A και B συμβολίζονται με "-" και "+" αντίστοιχα, στους άξονες των A και B.

Έτσι, το "-" στον άξονα του A παριστάνει τη χαμηλή στάθμη της συγκέντρωσης (15%), ενώ το "+" παριστάνει την υψηλή στάθμη (25%). Το "-" στον άξονα του B παριστάνει τη χαμηλή στάθμη του καταλύτη, ενώ το "+" συμβολίζει την υψηλή στάθμη.

Οι τέσσερις συνδυασμοί αγωγών στο σχεδιασμό συνήθως παριστάνονται με μικρά γράμματα. Η υψηλή στάθμη οποιουδήποτε παράγοντα στο συνδυασμό αγωγής συμβολίζεται με το αντίστοιχο μικρό γράμμα και η χαμηλή στάθμη συμβολίζεται με την απουσία του αντίστοιχου γράμματος.

Επομένως:

- Το "a" παριστάνει το συνδυασμό αγωγής του A στην υψηλή στάθμη και του B στη χαμηλή στάθμη.
- Το "b" παριστάνει το συνδυασμό αγωγής του A στη χαμηλή στάθμη και του B στην υψηλή στάθμη.
- Το "ab" παριστάνει το συνδυασμό αγωγής του A στην υψηλή στάθμη και του B στην υψηλή στάθμη.
- Το (1) χρησιμοποιείται για να συμβολίσουμε και τους δύο παράγοντες στη χαμηλή στάθμη.

Είναι συχνά εύχρηστο να γράφουμε τους συνδυασμούς αγωγών με τη σειρά (1), a, b, ab. Αυτή θα αναφέρεται σαν **τυπική διάταξη**.

Χρησιμοποιώντας αυτή την τυπική διάταξη, παρατηρούμε ότι οι συντελεστές των αντιθέσεων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των επιδράσεων είναι:

Επιδράσεις	(1)	a	b	ab
A	-1	+1	-1	+1
B	-1	-1	+1	+1
AB	+1	-1	-1	+1

Οι συντελεστές της αντίθεσης για την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης, είναι ακριβώς το γινόμενο των αντίστοιχων συντελεστών για τις δύο κύριες επιδράσεις.

Ο συντελεστής της αντίθεσης είναι πάντοτε +1 ή -1 και ο Πίνακας 3 που ακολουθεί με θετικά και αρνητικά πρόσημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του κατάλληλου προσήμου για κάθε συνδυασμό αγωγών.

Οι τίτλοι των στηλών του Πίνακα 3 είναι οι κύριες επιδράσεις (A, B), η αλληλεπίδραση AB και το I, το οποίο παριστάνει το σύνολο ή το μέσο ολόκληρου του πειράματος. Σημειώνουμε ότι η στήλη που αντιστοιχεί στο I έχει μόνο θετικά πρόσημα.

Οι γραμμές δείχνουν τους συνδυασμούς των αγωγών.

Συνδυασμός αγωγής	Παραγοντική επίδραση			
	I	A	B	AB
(1)	+	-	-	+
a	+	+	-	-
b	+	-	+	-
ab	+	+	+	+

Πίνακας 3

Για να βρούμε την αντίθεση για την εκτίμηση οποιασδήποτε επίδρασης, απλώς πολλαπλασιάζουμε τα πρόσημα στην κατάλληλη στήλη του πίνακα με τον αντίστοιχο συνδυασμό αγωγών και προσθέτουμε.

Για παράδειγμα, για να εκτιμήσουμε το A, η αντίθεση είναι  $-(1)+a-b+ab$ .

### Παρατήρηση:

Αν στον Πίνακα 3 αντικαταστήσουμε τα + με 1 και τα - με -1, παρατηρούμε ότι ο πίνακας που προκύπτει είναι ένας πίνακας Hadamard τάξης  $2^2$ !

Ο αντίστοιχος πίνακας για τον  $2^3$  σχεδιασμό είναι:

	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	+	-	-	-	-
c	+	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	+	-	-	+	+	-	-
bc	+	-	+	-	+	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Πίνακες που κατασκευάζονται με αυτό τον τρόπο ονομάζονται **πίνακες Yates Hadamard**.

Αν συμβολίσουμε τον πίνακα Yates Hadamard τάξης  $2^k$  με Y, για τον πίνακα αυτό ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες, όπως βλέπουμε στο [12]:

1. Οι στήλες του Y είναι ανά δύο ορθογώνιες.
2. Κάθε στήλη του Y (εκτός από την πρώτη στήλη I) έχει  $2^{k-1}$  στοιχεία 1 και  $2^{k-1}$  στοιχεία -1.
3. Ο πολλαπλασιασμός μίας στήλης του Y με τη στήλη I αφήνει τη στήλη αναλλοίωτη.
4. Το γινόμενο δύο στηλών του Y είναι επίσης στήλη του πίνακα, δηλ. το σύνολο των στηλών είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό.
5. Ο Y έχει μία βάση από  $k$  διανύσματα στήλης,  $[y_k, y_{k-1}, \dots, y_1]$ . Η κατασκευή Yates παράγει τις υπόλοιπες  $2^k - k - 1$  στήλες, παίρνοντας τα  $\binom{k}{i}$  δυνατά γινόμενα των  $k$  διανυσμάτων της βάσης, για  $i = 1, 2, \dots, k$ . Από τη γνωστή διωνυμική ταυτότητα  $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = 2^k$ , ξέρουμε ότι θα πάρουμε συνολικά  $2^k$  διανύσματα στήλες. Για  $i = 0$ , θα πάρουμε τη

στήλη  $I$  με όλα τα στοιχεία  $1$ , ενώ για  $i = 1$  θα πάρουμε τα ίδια τα  $k$  διανύσματα στήλες της βάσης.

6. Ο  $Y$  έχει πλήρες φάσμα προσήμου στηλών.

Επίσης, ισχύει το εξής Θεώρημα για τους πίνακες Yates Hadamard, όπως βλέπουμε στο [12]:

**Θεώρημα 5.1.1** *Ο πίνακας Yates Hadamard τάξης  $2^k$  είναι H-ισοδύναμος με τον πίνακα Sylvester-Hadamard τάξης  $2^k$ .*

Πότε όμως δύο πίνακες ονομάζονται H-ισοδύναμοι;

Ο παρακάτω ορισμός βρίσκεται στο [12]:

**Ορισμός 5.1.2** *Δύο πίνακες ονομάζονται **H-ισοδύναμοι** αν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο μέσω μιας ακολουθίας των εξής πράξεων:*

1. αντιμετάθεση δύο οποιωνδήποτε γραμμών ή/και στηλών,
2. πολλαπλασιασμό οποιασδήποτε γραμμής ή/και στήλης με  $-1$ .

Από όλα τα παραπάνω, προκύπτει ότι οι πίνακες Yates Hadamard συνδέονται άμεσα με τους πίνακες Sylvester-Hadamard που μας έχουν απασχολήσει.

### **Παρατήρηση:**

Η ιδιότητα του πλήρους φάσματος προσήμου στηλών είναι σημαντική, αφού μπορεί να φανεί χρήσιμη σε διάφορες εφαρμογές των πινάκων Sylvester-Hadamard (και κατά συνέπεια των πινάκων Yates Hadamard), σε τομείς όπως είναι η Χημεία και η Στατιστική.

## **5.2 Συναρτήσεις Walsh**

Οι συναρτήσεις Walsh έχουν σημαντικές εφαρμογές στις Τηλεπικοινωνίες και την επεξεργασία σήματος.

Επίσης, όπως θα δούμε στη συνέχεια, συνδέονται στενά με τους πίνακες Sylvester-Hadamard.

Όπως βλέπουμε στο [14], υπάρχουν αρκετοί επίσημοι ορισμοί των συναρτήσεων Walsh που συναντώνται στη βιβλιογραφία (π.χ. Szabatin (1982), Yarlagadda και Hershey (1997)).

Εδώ, θα δοθεί ο ορισμός των συναρτήσεων Walsh στο διάστημα  $[0, 1]$ .

Συμβολίζοντας τις συναρτήσεις Walsh ως  $Wal(i, t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ,  $t \in [0, 1]$ , ισχύουν γι'αυτές οι ακόλουθες σχέσεις:

$$Wal(0, t) = x_0(t) = 1, 0 \leq t \leq 1$$

$$Wal(1, t) = x_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.5 \\ -1, & 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$Wal(2, t) = x_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.25 \quad \text{και} \quad 0.75 \leq t \leq 1 \\ -1, & 0.25 \leq t \leq 0.75 \end{cases}$$

$$Wal(3, t) = x_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.25 \quad \text{και} \quad 0.5 \leq t < 0.75 \\ -1, & 0.25 \leq t < 0.5 \quad \text{και} \quad 0.75 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

και αναδρομικά, για  $m = 1, 2, \dots$  και  $k = 1, \dots, 2^{m-1}$  ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$Wal(2^{m-1} + k - 1, t) = x_m^k(t),$$

όπου για τη συνάρτηση  $x_m^k(t)$  ισχύουν οι παρακάτω αναδρομικές σχέσεις:

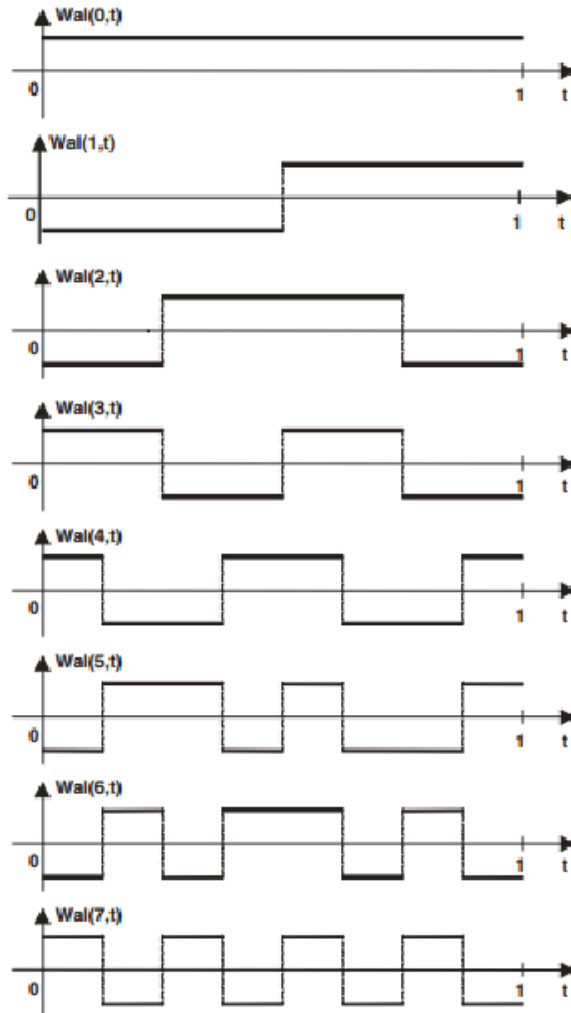
$$x_{m+1}^{2k-1}(t) = \begin{cases} x_m^k(2t), & 0 \leq t < 0.5 \\ (-1)^{k+1} x_m^k(2t-1), & 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$x_{m+1}^{2k}(t) = \begin{cases} x_m^k(2t), & 0 \leq t < 0.5 \\ (-1)^k x_m^k(2t-1), & 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$x_{m+1}^k(t) = \begin{cases} x_m^k(2t), & 0 \leq t < 0.5 \\ (-1)^k x_m^k(2t-1), & 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Αυτοί οι αναδρομικοί τύποι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις Walsh για οποιαδήποτε τιμή των  $m$  και  $k$ .

Στην Εικόνα 1 που ακολουθεί, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση των 8 πρώτων συναρτήσεων Walsh,  $Wal(i, t)$ ,  $i = 0, \dots, 7$ ,  $t \in [0, 1]$ .



Εικόνα 1

Οι συναρτήσεις Walsh μπορούν επίσης να οριστούν χρησιμοποιώντας τους πίνακες Sylvester-Hadamard.

Χρησιμοποιώντας έναν τέτοιο πίνακα τάξης  $2^m$ , έστω  $H_m$ , μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις  $Wal(0,t)$  έως  $Wal(2^m - 1,t)$  με τον ακόλουθο τρόπο:

Εάν διαιρέσουμε το διάστημα  $[0,1]$  σε  $2^m$  διαστήματα

$$\left[0, \frac{1}{2^m}\right), \left[\frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}\right), \dots, \left[\frac{2^m - 1}{2^m}, 1\right],$$

τότε η συνάρτηση Walsh που ορίζεται από την  $i$ -οστή γραμμή του πίνακα

$H_m$  παίρνει την τιμή 1 στο διάστημα  $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$  αν:  $H_m(i, k+1) = 1$ , αλλιώς παίρνει την τιμή -1.

Το παρακάτω παράδειγμα αναδεικνύει τη χρησιμότητα της μεθόδου που περιγράφηκε παραπάνω για την παραγωγή συναρτήσεων Walsh.

### Αριθμητικό Παράδειγμα 6:

Ο πίνακας  $H_3$  είναι ο εξής:

$$H_3 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} H_1 & H_1 & H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 & H_1 & -H_1 \\ \hline H_1 & H_1 & -H_1 & -H_1 \\ H_1 & -H_1 & -H_1 & H_1 \end{array} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Συγκρίνοντας τις γραμμές του  $H_3$  με την Εικόνα 1, είναι εύκολο να δούμε ότι η αντιστοίχιση ανάμεσα στον  $H_3$  και τις συναρτήσεις Walsh είναι η ακόλουθη:

$$[H_3|Wal] = \left[ \begin{array}{cccccccc|l} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & Wal(0,t) \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & Wal(7,t) \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & Wal(3,t) \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & Wal(4,t) \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & Wal(1,t) \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & Wal(6,t) \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & Wal(2,t) \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & Wal(5,t) \end{array} \right].$$

Γενικά, η  $i$ -οστή γραμμή του πίνακα  $H_m$  προσδιορίζει τη συνάρτηση  $Wal(k, t)$ , όπου  $k$  είναι ο αριθμός των αλλαγών προσήμου της γραμμής αυτής.



## Παράρτημα Α΄

### Κώδικας

Για να γραφτεί ο παρακάτω κώδικας έχει χρησιμοποιηθεί το προγραμματιστικό πακέτο **MATLAB**.

Ακολουθεί η υλοποίηση όλων των αλγορίθμων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα Κεφάλαια, σύμφωνα με τη σειρά εμφάνισής τους:

#### Παράγραφος 2.6.1:

Η συνάρτηση `one_eigenvector` που ακολουθεί βασίζεται στο Θεώρημα 2.6.1 και υπολογίζει ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $H_n$ .

```
function [x, flops] = one_eigenvector(n, flops)

x=zeros(2^n,1);
q=sqrt(2)-1;
flops=flops+1;

if 2^n==2
    x=[1; q];
else
    x=[one_eigenvector(n-1,flops); q*one_eigenvector(n-1,flops)];
    flops=flops+2^(n-1);
end
```

#### Παράγραφος 2.6.2:

Η συνάρτηση `eigenvectors_first` που ακολουθεί υλοποιεί τη μέθοδο της παραγράφου 2.6.2 και υπολογίζει ένα σύνολο ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $H_n$ .

```

function [Y,flops] = eigenvectors_first(n)

[x,flops]=one_eigenvector(n,0);
Y=zeros(2^n);
Y(:,1)=x;

for i=2:2^n
    [Q,fl]=Q_matrix(i-1,n);
    flops=flops+fl;
    Y(:,i)=Q*Y(:,i-1);
    flops=flops+2^(2*n);
end

```

**όπου:**

οι πίνακες  $Q\_matrix$ ,  $P\_matrix$  και  $E$  ορίζονται επίσης στην παράγραφο 2.6.2 ως  $Q_n$ ,  $P_{nk}$  και  $E_n$  και αντιστοιχούν στις παρακάτω συναρτήσεις:

```

function [T,flops] = Q_matrix(m,n)

if mod(m,2)==1
    r=0;
else
    if floor(log2(m))==log2(m)
        r=log2(m);
    else
        r=1;
    end
end
end

```

---

```

[T,flops]=P_matrix(n,r+1);

function [T,flops] = P_matrix(n,k)

m=2^(n-k);
flops=0;

T = zeros(2^n);
for i = 1:2^k:2^n
    T(i:i+2^k-1,i:i+2^k-1)=E(k);
    flops=flops+2^(k-1);
end

```

---

```

function T = E(n)

```

```

N=2^n;
T=zeros(N);

if n==0
    T(1,1)=-1;
else
    T=[zeros(N/2) E(n-1); -E(n-1) zeros(N/2)];
end

```

### Παράγραφος 2.6.3:

Η συνάρτηση `eigenvectors` που ακολουθεί υλοποιεί τη μέθοδο της παραγράφου 2.6.3 και υπολογίζει ένα σύνολο ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα  $H_n$ .

```
function [V,flops] = eigenvectors(n,flops)
```

```

N=2^n;
q = sqrt(2)-1;
flops=flops+1;
V=zeros(N);

if N==2
    V(:,1) = [1; q];
    V(:,2) = [-q; 1];
    flops=flops+1;
else
    T = eigenvectors(n-1,flops);
    j=1;
    for i=1:2:N/2
        V(:,j) = [T(:,i); q*T(:,i)];
        V(:,j+1) = [-q*T(:,i); T(:,i)];
        V(:,j+2) = [-q*T(:,i+1); T(:,i+1)];
        V(:,j+3) = [T(:,i+1); q*T(:,i+1)];
        j=j+4;
        flops=flops+4*(N/2)+1;
    end
end
end

```

### Παράγραφος 3.3:

Η συνάρτηση `HT_faster` που ακολουθεί υλοποιεί τη μέθοδο της παραγράφου 3.3 και υπολογίζει το μετασχηματισμό Hadamard.

```
function [y,flops] = HT_faster(x)
```

```

N = length(x);
n = log2(N);

M = zeros(N,n);

M(:,1) = x;
k=1;
p=N/2;
flops=0;
for j=2:n+1
    for i=1:p
        M(i,j)=M(k,j-1)+M(k+1,j-1);
        M(i+p,j)=M(k,j-1)-M(k+1,j-1);
        k=k+2;
        flops=flops+2;
    end
    k=1;
end
y=M(:,n+1);

```

### Παράγραφος 3.4.1:

Η συνάρτηση HT που ακολουθεί υλοποιεί τη μέθοδο της παραγράφου 3.4.1 και υπολογίζει το (διακριτό κλασματικό) μετασχηματισμό Hadamard.

```

function [y,flops] = HT(x,a)

n = log2(length(x));

Z = normalized(n);

y = Z*Lamda(n,a)*Z'*x;

flops=(2^n)*(2^n)+2*2^n+2*(2^n)*(2^n);

```

#### όπου:

η συνάρτηση normalized υπολογίζει τα κανονικοποιημένα ορθογώνια ι-διοδιανύσματα του πίνακα  $H_n$ , ενώ ο πίνακας Lamda ορίζεται στην παράγραφο 3.4.1 ως  $\Lambda_n$  και αντιστοιχεί στην παρακάτω συνάρτηση:

```

function Z = normalized(n)

[V,flops]=eigenvectors(n,0);
q=sqrt(2)-1;
c=1+q^2;
r=c^n;

```

```
Z=V/sqrt(r);
```

---

```
function T = Lamda(n,a)
T = zeros(2^n);
for k=0:2^n-1
    lamda_a(k+1) = exp(-i*k*pi*a);
    T(k+1,k+1) = lamda_a(k+1);
end
T = sparse(T);
```

### Παράγραφος 3.4.2:

Η συνάρτηση DFRHT που ακολουθεί υλοποιεί τη μέθοδο της παραγράφου 3.4.2 και υπολογίζει το (διακριτό κλασματικό) μετασχηματισμό Hadamard.

```
function [y,flops] = DFRHT(x,a)
n = log2(length(x));
q=sqrt(2)-1;
V1 = [1 -q; q 1];
V2 = V1';
y=x;
flops = 0;
for i=1:n
    y=R(n,i,V2)*y;
    flops = flops+2^n;
end
y=P(n)*Lamda_tilde(n,a)*P(n)'*y;
flops = flops +2^(n+1)-1;
for i=1:n
    y=R(n,i,V1)*y;
    flops = flops+2^(n+1);
end
```

#### **όπου:**

οι πίνακες Lamda\_tilde, P και R ορίζονται επίσης στην παράγραφο 3.4.2 ως  $\tilde{\Lambda}_n^\alpha$ ,  $P_n$  και  $R_n^{(k)}$  και αντιστοιχούν στις παρακάτω συναρτήσεις:

```

function T = Lamda_tilde(n,a)

T = zeros(2^n);
q = sqrt(2)-1;
c = 1+q^2;
for k=0:2^n-1

    lamda_a(k+1) = exp(-i*k*pi*a);

    T(k+1,k+1) = lamda_a(k+1);
end
T = (1/(c^n))*T;
T = sparse(T);

```

---

```

function T = P(n)

J = zeros(2^(n-1));
for i=1:2^(n-1)

    J(i,2^(n-1)-i+1)=1;
end

S=zeros(2^n);
S(1:2:2^n-1,1:2^(n-1))=eye(2^(n-1));
S(2:2:2^n,2^(n-1)+1:2^n)=eye(2^(n-1));

if n==1

    T = eye(2);
else

    T = S*[P(n-1) zeros(2^(n-1)) ; zeros(2^(n-1)) P(n-1)*J];
end
T = sparse(T);

```

---

```

function M = R(n,k,V)

A = [eye(2^(k-1))*V(1,1) eye(2^(k-1))*V(1,2);
eye(2^(k-1))*V(2,1) eye(2^(k-1))*V(2,2)];
M = zeros(2^n);
for i=1:2^k:2^n

    M(i:i+2^k-1,i:i+2^k-1) = A;
end
M=sparse(M);

```

---

**Παρατήρηση:**

Με βάση το (διακριτό κλασματικό) μετασχηματισμό Hadamard, μπορεί να δημιουργηθεί και η συνάρτηση DFRHT\_eigen, η οποία υπολογίζει τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $H_n$ .

```
function [V,flops] = DFRHT_eigen(n,a)
```

```
q=sqrt(2)-1;
```

```
V1 = [1 -q; q 1];
```

```
V=P(n);
```

```
flops=2;
```

```
for i=1:n
```

```
    V=R(n,i,V1)*V;
```

```
    if (i~=1)
```

```
        flops = flops+2^(2*n+1);
```

```
    end
```

```
end
```

---





# Βιβλιογραφία

- [1] Δ.Βάρσος, Δ.Δεριζιώτης, Μ.Μαλιάκας, Σ. Παπασταυρίδης, Ε. Ράπτης, Ο.Ταλέλλη. Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, Τόμος Α. Εκδόσεις Σοφία. 2003.
- [2] Δ.Βάρσος, Δ.Δεριζιώτης, Μ.Μαλιάκας, Ο.Ταλέλλη. Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, Τόμος Β. Εκδόσεις Σοφία. 2008.
- [3] Χ. Κουκουβίνος. Γραμμικά μοντέλα και σχεδιασμοί. Έκδοση Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. 2005.
- [4] N.U. Ahmed, K.R. Rao. Orthogonal transforms for digital signal processing. Springer-Verlag New York, Inc. 1975.
- [5] A. Bose, A. Dey. The wonderful world of eigenvalues. Math unlimited: Essays in Mathematics, Enfield, New Hampshire: Science Publishers. 2010.
- [6] A. Cariow, D. Majorkowska-Mech. Fast algorithm for discrete fractional Hadamard transform. Numerical Algorithm. Open Access. 2014.
- [7] K.W. Henderson. Suggested Standard Forms for Certain Real Hadamard Matrices. IEEE Transactions on Computers. 1978.
- [8] R. Horn, C. Johnson. Matrix Analysis, 2nd edition. Cambridge University Press. 2013.
- [9] M.H. Lee, M. Kaveh. Fast Hadamard Transform Based on a Simple Matrix Factorization. IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing. 34, 6, pp 1666 - 1667. 1986.
- [10] S.R. Lee, J.S. No, Eun-Ho Shin, Habong Chung. On Eigenvalues of Row-Inverted Sylvester Hadamard Matrices. Results in Mathematics. 54, 1-2, 117-126. 2009.
- [11] C. Meyer. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Siam. 2000.
- [12] M. Mitrouli. A sign test for detecting the equivalence of Sylvester Hadamard matrices. Numerical Algorithms. 57, 2, 169-186. 2011.
- [13] S.C. Pei, M.H. Yeh. Discrete fractional Hadamard transform. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. 3, 179 - 182. 1999.

- [14] J. Seberry, B. Wysocki, T. Wysocki. On some applications of Hadamard matrices. *Metrika*, 62, 221-239. 2005.
- [15] M. Sipser. Εισαγωγή στη θεωρία υπολογισμού. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. 2007.
- [16] R. Yarlagadda, J. Hershey. A note on the eigenvectors of Hadamard matrices of order  $2^n$ . *Linear Algebra Appl.* 45, 43-53. 1982.
- [17] R. Yarlagadda, J. Hershey. *Hadamard Matrix Analysis and Synthesis: With Applications to Communications and Signal/Image Processing*. Springer. 1997.