Εθνικό Και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Κατεύθυνσης Θεωρητικών Μαθηματικών

Χορδική μετρική και επεκτάσεις της άλγεβρας του δίσκου σε πολλές μιγαδικές μεταβλητές

Διπλωματική εργασία

Κ. Μακρίδης

Επιβλέπων καθηγητής:
Β. Νεστορίδης

Αθήνα
29 Μαΐου 2013

στο βαφτιστήρι μου, το Δούλη
ο νονός σου

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της συγκεκριμένης εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή Β. Νεστορίδη για τη βοήθεια που μου πρόσφερε απλόχερα σε όλα τα επίπεδα της συνεργασίας μας. Αισθάνομαι ότι ένα ευχαριστώ είναι λίγο για την συμβολή του στην προσπάθεια να γίνω καλύτερος.

Σημαντική υπήρξε ακόμα η βοήθεια που έλαβα κατά τη συγγραφή της εργασίας από τους εξής ανθρώπους, στους οποίους οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ:

Γ. Αλεξόπουλος, Δ. Γατζούρας, Ν. Δάρας, Κ. Καραγιάννης, Ν. Καραντζάς, Γ. Κουμουλλής, Μ. Μανωλάκη, Μ. Παπατριανταφύλλου, E. Abakoumov, R. Aron, K. Ecker, P.M. Gauthier, J. Globevnik, G. Knese, S. Krantz, L. Lempert και N.Sibony.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τη Θέα για την αδιάκοπη στήριξη και συμπαράσταση τους καθ' όλη τη διάρκεια της προσπάθειας μου.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή 1
2 Μερικά προαπαιτούμενα 4
3 Σύνολα μοναδικότητας για την άλγεβρα του πολύδισκου 10
4 Σφαιρική προσέγγιση σε πολύδισκους 16
5 Η περίπτωση της Ευκλείδειας μπάλας του $\mathbb{C}^n$ 18
6 Βιβλιογραφία 21

1 Εισαγωγή

Αν D είναι ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος στο $\mathbb{C}$ και $\overline{D}$ η κλειστή θήκη του, τότε το σύνολο των ομοιομόρφων ορίων πολυωνύμων στο $\overline{D}$ (ως προς τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{C}$) είναι η γνωστή άλγεβρα του δίσκου $A(\overline{D})$, δηλαδή το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ οι οποίες είναι συνεχείς στο $\overline{D}$ και ολόμορφες στο D.

Από το θεώρημα Privalov, κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq \partial D = T$ θετικού μέτρου είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D})$, δηλαδή αν $f, g \in A(\overline{D})$ με $f_{|K} \equiv g_{|K}$, τότε $f \equiv g$. Αυτή η έννοια του συνόλου μοναδικότητας είναι συμβατή με τις αντίστοιχες στα [3] και [10]. Στην πραγματικότητα, ισχύει και το αντίστροφο: ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq T$ είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D})$ αν και μόνο αν το K έχει θετικό μέτρο.

Επεκτείνουμε μερικά από τα προηγούμενα αποτελέσματα στις πολλές μιγαδικές μεταβλητές, όταν το $\overline{D}$ αντικατασταθεί με το $\overline{D}^I$ (όπου το I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο) ή με την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\overline{B}_n$ του $\mathbb{C}^n$.

Αρχικά, εξετάζουμε το σύνολο των ομοιόμορφων ορίων των πολυωνύμων ως προς τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική στα $\overline{D}^I$ και $\overline{B}_n$. Ως γνωστόν, κάθε πολυώνυμο εξαρτάται από ένα πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών (και μόνο), ακόμα και αν το I είναι ένα άπειρο σύνολο. Έτσι βρίσκουμε τις κλάσεις $A(\overline{D}^I)$ και $A(\overline{B}_n)$ αντίστοιχα.

Η κλάση $A(\overline{D}^I)$ περιέχει ακριβώς όλες τις συναρτήσεις $f : \overline{D}^I \to \mathbb{C}$, οι οποίες είναι συνεχείς στο $\overline{D}^I$ (όπου το $\overline{D}^I$ θεωρείται εφοδιασμένο με την καρτεσιανή τοπολογία) και χωριστά, σαν συναρτήσεις μίας μεταβλητής, ανήκουν στην $A(\overline{D})$.

Η κλάση $A(\overline{B}_n)$ περιέχει ακριβώς όλες τις συναρτήσεις $f : \overline{B}_n \to \mathbb{C}$, οι οποίες είναι συνεχείς στο $\overline{B}_n$ και ολόμορφες στην ανοικτή μπάλα B_n.

Από το θεώρημα Hartogs, αν το I είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε οποιαδήποτε συνάρτηση f η οποία είναι ολόμορφη στο D^I αναλύεται (τοπικά) σε δυναμοσειρά (στο D^I). Στην περίπτωση που το I είναι άπειρο σύνολο, δεν χρειαζόμαστε ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά καθώς η συνέχεια και η χωριστή ολομορφία είναι αρκετές και απαραίτητες για τους σκοπούς μας.

Θεωρούμε το σύνολο T^I (όπου $T = \partial D$) και εισάγουμε την έννοια του πότε ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq T^I$ είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^I)$. Αποδεικνύουμε ότι αν ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq T^I$ έχει θετικό μέτρο (ως προς το φυσιολογικό μέτρο γινόμενο στο T^I([5], [13])), τότε το K είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^I)$. Αυτό βασίζεται στο θεώρημα Privalov ([12]) μαζί με κάποιες μορφές του θεωρήματος Fubini ([11]). Επίσης, δίνουμε μερικά παραδείγματα συμπαγών συνόλων $K \subseteq T^I$ με μηδενικό μέτρο τα οποία είναι σύνολα μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^I)$, όταν το I περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Το σύνορο ∂B_n της μοναδιαίας μπάλας του $\mathbb{C}^n$ έχει επίσης ένα φυσιολογικό

μέτρο. Εισάγουμε την έννοια του συνόλου μοναδικότητας για την $A(\overline{B}_n)$ (για συμπαγή υποσύνολα του ∂B_n) και αποδεικνύουμε ότι αν ένα σύνολο $K \subseteq \partial B_n$ έχει θετικό μέτρο, τότε το K είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{B}_n)$. Αν $n \geq 2$, το αντίστροφο δεν ισχύει.

Στη συνέχεια, επαναλαμβάνουμε όλα τα ανωτέρω αντικαθιστώντας τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική με τη χορδική μετρική χ στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Εξετάζουμε το σύνολο των ομοιόμορφων ορίων πολυωνύμων στα $\overline{D}^I$ και $\overline{B}_n$ ως προς τη χορδική μετρική χ. Έτσι, βρίσκουμε τις κλάσεις $\tilde{A}(\overline{D}^I)$ και $\tilde{A}(\overline{B}_n)$ αντίστοιχα. Η κλάση $\tilde{A}(\overline{D})$ περιέχει την $A(\overline{D})$ και είναι γνησίως μεγαλύτερη, καθώς περιέχει τη συνάρτηση $\frac{1}{1-z}$ η οποία δεν ανήκει στην $A(\overline{D})$. Για την ακρίβεια, μια συνάρτηση
$f : \overline{D} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ανήκει στην $\tilde{A}(\overline{D})$ αν και μόνο αν $f \equiv \infty$ ή η f είναι συνεχής στο $\overline{D}$, $f(D) \subseteq \mathbb{C}$ και η f είναι ολόμορφη στο D ([2], [16]).

Ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq T = \partial D$ είναι σύνολο μοναδικότητας για την $\tilde{A}(\overline{D})$ αν και μόνο αν έχει θετικό μέτρο. Επιπλέον, η κλάση $\tilde{A}(\overline{D}^I)$ περιέχει όλες τις συναρτήσεις $f : \overline{D}^I \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ οι οποίες είναι συνεχείς στο $\overline{D}^I$ (όπου το $\overline{D}^I$ θεωρείται εφοδιασμένο με την καρτεσιανή τοπολογία) και χωριστά για κάθε μεταβλητή ανήκουν στην $\tilde{A}(\overline{D})$.

Εισάγουμε την έννοια του συνόλου μοναδικότητας για την $\tilde{A}(\overline{D}^I)$ για συμπαγή σύνολα $K \subseteq T^I$ ($T = \partial D$) και αποδεικνύουμε ότι αν το K έχει θετικό μέτρο, τότε είναι σύνολο μοναδικότητας για την $\tilde{A}(\overline{D}^I)$. Αν το I περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, το αντίστροφο δεν ισχύει. Από τη σχέση $A(\overline{D}^I) \subseteq \tilde{A}(\overline{D}^I)$ έπεται ότι κάθε σύνολο μοναδικότητας για την $\tilde{A}(\overline{D}^I)$ είναι επίσης σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^I)$. Δεν γνωρίζουμε αν το αντίστροφο ισχύει ή όχι.

Αν θεωρήσουμε τις κλάσεις $A(\overline{D}^I)$ και $\tilde{A}(\overline{D}^I)$ εφοδιασμένες με τις φυσιολογικές μετρικές τους, τότε αυτές γίνονται πλήρεις μετρικοί χώροι. Στην πραγματικότητα, η $A(\overline{D}^I)$ είναι μία άλγεβρα Banach. Επιπλέον, η σχετική τοπολογία της $A(\overline{D}^I)$ ως υπόχωρου της $\tilde{A}(\overline{D}^I)$ συμπίπτει με τη φυσιολογική τοπολογία της $A(\overline{D}^I)$ και μάλιστα το σύνολο $A(\overline{D}^I)$ είναι ανοικτό και πυκνό στο $\tilde{A}(\overline{D}^I)$.

Τέλος, βρίσκουμε παρόμοια αποτελέσματα όταν το $\overline{D}^I$ αντικατασταθεί με το $\overline{B}_n$. Σημειώνουμε ότι για τις αποδείξεις των κύριων αποτελεσμάτων για την μπάλα $\overline{B}_n$ χρησιμοποιούμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το $\overline{D}^n$.

Αναφέρουμε ότι η μέθοδος απόδειξης των βασικών αποτελεσμάτων είναι παρόμοια για τις κλασικές άλγεβρες που ορίζονται με τη βοήθεια της Ευκλείδειας μετρικής καθώς και για τις καινούργιες κλάσεις συναρτήσεων που ορίζονται με τη βοήθεια της χορδικής μετρικής. Οι κύριες αποδείξεις προκύπτουν από συνδυασμό του θεωρήματος Privalov με το θεώρημα Fubini και μας οδηγούν φυσιολογικά σε μορφές του θεωρήματος Fubini για άπειρο το πλήθος μεταβλητών (αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο), κάποιες από τις οποίες είναι ανοικτά προβλήματα ([11], [14]).

Δίνουμε ακόμα παραδείγματα συναρτήσεων που ανήκουν στις προηγούμενες κλάσεις. Για παράδειγμα, αν

$$f((z_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j}{j^2} \text{ για κάθε } (z_j)_{j=1}^{\infty} \in \overline{D}^{\mathbb{N}}$$

τότε $f \in A(\overline{D}^{\mathbb{N}})$.

Η προηγούμενη συνάρτηση f ανήκει στην $A(\overline{D}^{\mathbb{N}})$ και η εικόνα της είναι φραγμένη, άρα, αν $c \in \mathbb{C}$ με το $|c|$ να είναι αρκετά μεγάλο, τότε η συνάρτηση $c + f$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $\overline{D}^{\mathbb{N}}$. Έτσι, η συνάρτηση $\frac{c+f(z_1,z_2,\dots)}{1-z_1}$ ανήκει επίσης στην $\tilde{A}(\overline{D}^{\mathbb{N}})$ και εξαρτάται από όλες τις μεταβλητές $z_1, z_2, \dots$.

Ένα ανοικτό ερώτημα είναι η μελέτη της δομής των στοιχείων των $\tilde{A}(\overline{D}^{I})$ και $\tilde{A}(\overline{B}_n)$. Οι περιπτώσεις των $A(\overline{D}^{I})$ και $A(\overline{B}_n)$έχουν ήδη μελετηθεί αν το I είναι πεπερασμένο σύνολο. Τι συμβαίνει όμως όταν το I είναι άπειρο σύνολο; Υπάρχει χαρακτηρισμός των συνόλων μηδενισμού (zero sets) των στοιχείων των $A(\overline{D}^{I})$, $A(\overline{B}_n)$ και $\tilde{A}(\overline{D}^{I})$, $\tilde{A}(\overline{B}_n)$ όταν το I είναι άπειρο σύνολο; Τι ισχύει σχετικά με τα συμπαγή σύνολα παρεμβολής (interpolation sets) των προηγούμενων κλάσεων όταν θεωρήσουμε τη χορδική μετρική χ; Τι συμβαίνει με τα σύνολα κορυφής (peak sets); ([18], [19]).

Ο R. Aron σημείωσε ότι στην περίπτωση όπου το σύνολο I είναι άπειρο, οι συναρτήσεις που ανήκουν στην άλγεβρα $A(\overline{D}^{I})$ είναι ολόμορφες με τη συνήθη έννοια ολομορφίας σε ανοικτά υποσύνολα απειροδιάστατων χώρων Banach. Δηλαδή, μία συνάρτηση f πρέπει και αρκεί να είναι ολόμορφη σαν συνάρτηση μίας μιγαδικής μεταβλητής αν περιορισθεί σε οποιαδήποτε " μιγαδική ευθεία " που τέμνει το ανοικτό πεδίο ορισμού και επιπλέον να είναι norm - συνεχής. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε μία norm - ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του c_0 η οποία επιπλέον είναι ολόμορφη στην ανοικτή μοναδιαία μπάλα του c_0, τότε αυτή επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε στοιχείο της $A(\overline{D}^{\mathbb{N}})$. Επιπλέον ισχύει και το αντίστροφο. Έτσι, η έννοια της ολομορφίας στην οποία καταλήγουμε είναι συμβιβαστή με τη συνήθη έννοια απειροδιάστατης ολομορφίας. Ακόμη, η δική μας έννοια ολομορφίας εξαρτάται φαινομενικά από το σύστημα συντεταγμένων, άλλα τελικά κάτι τέτοιο δεν ισχύει.

Μία κατεύθυνση έρευνας για το μέλλον θα ήταν να εξεταστούν τα αντίστοιχα στις μοναδιαίες μπάλες άλλων απειροδιάστατων χώρων Banach όπως π.χ οι ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$.

Επίσης, σχετικά θέματα είναι η συνοριακή μελέτη φραγμένων ολομόρφων συναρτήσεων στο $D^{\mathbb{N}}$, που είναι η μοναδιαία μπάλα του $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$, ή σε μοναδιαίες μπάλες άλλων απειροδιάστατων χώρων Banach, καθώς επίσης και η μελέτη των " συνόρων " τέτοιων αλγεβρών συναρτήσεων. Αυτά σχετίζονται με τα άρθρα [1],

[4] και [7] και με άλλα άρθρα που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία των τελευταίων άρθρων.

Τέλος, αναφέρουμε ότι ο N. Sibony ήταν ο πρώτος που σημείωσε ότι το αποτέλεσμα μοναδικότητας που αποδεικνύουμε για τις κλασικές άλγεβρες που ορίζονται με τη βοήθεια της Ευκλείδειας μετρικής είναι άμεσο πόρισμα της ανισότητας Jensen. Η μέθοδός μας αποφεύγει τη θεωρία των μέτρων Jensen και δίνει το αποτέλεσμα τόσο στις κλασικές άλγεβρες όσο και στις καινούργιες κλάσεις που ορίζονται με τη βοήθεια της χορδικής μετρικής. Η απόδειξή μας είναι σχετικά στοιχειώδης και βασίζεται (κυρίως) στο θεώρημα Privalov.

Η μέθοδος των μέτρων Jensen δεν εφαρμόζεται κατά προφανή τρόπο σε αυτές τις καινούργιες κλάσεις συναρτήσεων. Αυτό οδηγεί σε περαιτέρω μελέτη σχετικά με το αν η κλάση $\tilde{A}(\overline{D}) \setminus \{\infty\}$ περιέχεται στην κλάση του Nevanlinna ή αν υπάρχει γνήσια θετικό (απολύτως συνεχές) μέτρο πιθανότητας μ στο T ώστε για κάθε $f \in \tilde{A}(\overline{D})$ να ισχύει $log|f| \in L^1(\mu)$.

Μία πιό προσεκτική μελέτη των δημοσιευμένων εργασιών σε σχετικά θέματα δίνει απάντηση στα τελευταία ερωτήματα. Στο άρθρο [6] αποδεικνύεται ότι η κλάση $\tilde{A}(\overline{D}) \setminus \{\infty\}$ περιέχεται στην κλάση του Nevanlinna. Σχετικό με αυτά είναι και το [8]. Έτσι λοιπόν για κάθε $f \in \tilde{A}(\overline{D}) \setminus \{0, \infty\}$ ο $log|f|$ είναι ολοκληρώσιμος στη μοναδιαία περιφέρεια ως προς το κανονικοποιημένο μονοδιάστατο μέτρο Lebesgue $\frac{\partial\theta}{2\pi}$. Ένα προφανές πόρισμα είναι ότι κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq T$ με θετικό μέτρο είναι σύνολο μοναδικότητας για την κλάση $\tilde{A}(\overline{D})$, γεγονός το οποίο έπεται και από το θεώρημα Privalov για την $\tilde{A}(\overline{D})$.

Στη συνέχεια μπορούμε να ακολουθήσουμε την αποδεικτική διαδικασία της παρούσης εργασίας, ώστε με τη βοήθεια παραλλαγών του θεωρήματος Fubini να καταλήξουμε στο ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του T^I με θετικό μέτρο είναι σύνολο μοναδικότητας για την κλάση $\tilde{A}(\overline{D}^I)$. Αλλά είναι όμως ενδιαφέρον να δει κανείς αν ισχύει ότι ο $log|f|$ είναι ολοκληρώσιμος στο T^I ως προς το μέτρο γινόμενο $\prod \frac{\partial\theta}{2\pi}$ για κάθε συνάρτηση $f \in \tilde{A}(\overline{D}) \setminus \{0, \infty\}$. Αυτό ίσως αποτελεί αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

2 Μερικά προαπαιτούμενα

Το θεώρημα Mergelyan λέει ότι αν $K \subseteq \mathbb{C}$ είναι ένα συμπαγές σύνολο με το $\mathbb{C} \setminus K$ να είναι συνεκτικό, τότε κάθε συνάρτηση $f \in A(K)$ μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από πολυώνυμα ως πρός τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{C}$ ([17]), όπου η άλγεβρα $A(K)$ περιέχει ακριβώς όλες τις συναρτήσεις $f : K \to \mathbb{C}$ που είναι συνεχείς στο K και ολόμορφες στο K° (αν $K^\circ = \emptyset$, τότε $A(K) = C(K)$). Αν λοιπόν $K \subseteq \mathbb{C}$ είναι ένα συμπαγές σύνολο με το $\mathbb{C} \setminus K$ να είναι συνεκτικό, τότε η $A(K)$ συμπίπτει με τα ομοιόμορφα όρια πολυωνύμων στο K ως προς τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{C}$.

Η απόδειξη του θεωρήματος του Mergelyan στη γενική περίπτωση είναι δύσκολη. Αν όμως το σύνολο K είναι ένας συμπαγής δίσκος με ακτίνα r, $(0 < r < < +\infty)$ τότε η απόδειξη είναι στοιχειώδης.

Ας συμβολίσουμε με D τον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο και με $\overline{D}$ την κλειστή θήκη του. Έστω ακόμα $T = \partial D$ η μοναδιαία περιφέρεια και $\frac{\partial\theta}{2\pi}$ να είναι το κανονικοποιημένο μονοδιάστατο μέτρο Lebesgue στο T. Τότε έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1. (Privalov) Έστω f μία ολόμορφη συνάρτηση στο D και $J \subseteq T$ ένα μετρήσιμο σύνολο θετικού (μονοδιάστατου) μέτρου. Αν για κάθε $\zeta \in J$ το μη εφαπτομενικό όριο της $f(z)$ καθώς $D \ni z \to \zeta$ υπάρχει και είναι ίσο με μηδέν, τότε $f \equiv 0$.

Ορισμός 2.2. Έστω $K \subseteq T$ ένα συμπαγές σύνολο. Τότε το K λέγεται σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D})$, αν για κάθε $f, g \in A(\overline{D})$ με $f_{|K} \equiv g_{|K}$ να είναι $f \equiv g$.

Έπεται από το θεώρημα 2.1 ότι αν $K \subseteq T$ είναι ένα συμπαγές σύνολο θετικού μέτρου, τότε το K είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D})$.

Αν $F \subseteq T$ είναι ένα συμπαγές σύνολο μηδενικού μέτρου, τότε υπάρχει μία συνάρτηση (peak function) $\phi \in A(\overline{D})$ τέτοια ώστε $\phi_{|F} \equiv 1$ και $|\phi(z)| < 1$ για κάθε $z \in \overline{D} \setminus F$ ([9], [12]). Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο F δεν είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D})$. Συνεπώς, ισχύει το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.3. Έστω $K \subseteq T$ ένα συμπαγές σύνολο. Τότε το K είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D})$, αν και μόνο αν το K έχει θετικό μέτρο.

Στη μιγαδική ανάλυση μίας μεταβλητής, συχνά έχουμε να κάνουμε με συναρτήσεις που παίρνουν ακόμα και την τιμή ∞. Για να μιλήσουμε για ομοιόμορφη σύγκλιση για τέτοιες συναρτήσεις χρειάζεται να αντικαταστήσουμε τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{C}$ με μία μετρική στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Εφόσον όλες οι μετρικές στο συμπαγή χώρο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ συμβιβαστές με τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ είναι ομοιόμορφα ισοδύναμες, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μία οποιαδήποτε εξ' αυτών. Μία τέτοια μετρική είναι η γνωστή χορδική μετρική χ στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Αυτή η μετρική στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ επάγεται μέσω της στερεογραφικής προβολής της Ευκλείδειας μετρικής του $\mathbb{R}^3$ περιορισμένη στη σφαίρα
$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

- $\chi(a, b) = \frac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}$ αν $a, b \in \mathbb{C}$
- $\chi(a, \infty) = \chi(\infty, a) = \frac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}$ αν $a \in \mathbb{C}$
- $\chi(\infty, \infty) = 0$.

Ένα ανοικτό ερώτημα είναι ποία μορφή παίρνει το θεώρημα του Mergelyan, αν η συνήθης Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{C}$ αντικατασταθεί από τη χορδική μετρική στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ([16]). Όμως, είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε την απάντηση σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Μία τέτοια περίπτωση είναι αν το σύνολο K είναι ένας συμπαγής δίσκος με ακτίνα r $(0 < r < +\infty)$.

Ορισμός 2.4. Μία συνάρτηση $f : \overline{D} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ανήκει στην κλάση $\tilde{A}(\overline{D})$ αν και μόνο αν $f \equiv \infty$ ή $f(D) \subseteq \mathbb{C}$, η $f_{|D}$ είναι ολόμορφη και για κάθε $\zeta \in T = \partial D$, το όριο $\lim\limits_{z \to \zeta} f(z)$ υπάρχει στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Σημείωση 2.5. Είναι ισοδύναμο να πούμε ότι μία συνάρτηση $f \in \tilde{A}(\overline{D})$ αν και μόνο αν η f είναι ταυτοτικά ∞ ή η $f : \overline{D} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ είναι συνεχής (ως προς τη χορδική μετρική), $f(D) \subseteq \mathbb{C}$ και η $f_{|D}$ είναι ολόμορφη. Επιπλέον $A(\overline{D}) \subseteq \tilde{A}(\overline{D})$ και $A(\overline{D}) \neq \tilde{A}(\overline{D})$ διότι η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ανήκει στη διαφορά $\tilde{A}(\overline{D}) \setminus A(\overline{D})$.

Θεώρημα 2.6. ([16]) Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \overline{D} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Τότε $f \in \tilde{A}(\overline{D})$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{p_n\}_{n \geq 1}$ (μίας μεταβλητής) τέτοια ώστε:

$$\sup\{\chi(p_n(z), f(z)) : |z| \leq 1\} \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

Από τα ανωτέρω έχουμε ότι η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1-z}$ μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο D από πολυώνυμα ως προς τη χορδική μετρική χ στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, αλλά όχι ως προς τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{C}$.

Από το θεώρημα Privalov, έχουμε ότι αν $f, g \in \tilde{A}(\overline{D})$ συμπίπτουν σε ένα σύνολο $K \subseteq T$ θετικού μέτρου, τότε $f \equiv g$. Αν $F \subseteq T$ είναι ένα συμπαγές σύνολο μηδενικού μέτρου, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $\phi \in A(\overline{D}) \subseteq \tilde{A}(\overline{D})$, με $\phi_{|F} \equiv 1$ και $|\phi(z)| < 1$ για κάθε $z \in \overline{D} \setminus F$ ([9], [12]). Έτσι, οι συναρτήσεις ϕ και 1 ανήκουν στην $\tilde{A}(\overline{D})$, συμπίπτουν στο F και δεν είναι ταυτοτικά ίσες.

Ορισμός 2.7. Έστω $K \subseteq T$ ένα συμπαγές σύνολο. Το K λέγεται σύνολο μοναδικότητας για την $\tilde{A}(\overline{D})$, αν για κάθε $f, g \in \tilde{A}(\overline{D})$ με $f_{|K} \equiv g_{|K}$ να είναι $f \equiv g$.

Σύμφωνα με την προηγούμενη συζήτηση, έχουμε δείξει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.8. Ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq T$ είναι σύνολο μοναδικότητας για την $\tilde{A}(\overline{D})$ αν και μόνο αν το K έχει θετικό μέτρο. Συνεπώς, τα σύνολα μοναδικότητας για $\tilde{A}(\overline{D})$ συμπίπτουν με εκείνα για την $A(\overline{D})$.

Σημειώνουμε ότι με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την κλάση

$\tilde{A}(\overline{D}(w,r))$ για οποιονδήποτε συμπαγή δίσκο με κέντρο w και ακτίνα r, $(0 < < r < +\infty)$.

Σκοπός μας είναι να επεκτείνουμε μερικά από τα προηγούμενα αποτελέσματα σε πολλές μιγαδικές μεταβλητές και πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση των πολύδισκων ή της Ευκλείδειας μπάλας.

Έστω I ένα τυχαίο σύνολο με τουλάχιστον 2 στοιχεία. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $\overline{D}^I$ εφοδιασμένο με την καρτεσιανή τοπολογία. Τα βασικά ανοικτά σύνολα του $\overline{D}^I$ είναι της μορφής $\prod_{i\in I} Y_i$ όπου κάθε $Y_i \subseteq \overline{D}$ είναι ανοικτό σύνολο στο $\overline{D}$ και $Y_i = \overline{D}$ για κάθε $i \in I$, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο το πλήθος δεικτών. Έπεται εύκολα ότι αν σταθεροποιήσουμε οποιοδήποτε $\zeta \equiv (\zeta_i)_{i\in I} \in \overline{D}^I$, τότε το σύνολο

$$X = \bigcup_{\substack{F\subseteq I \\ F \text{ πεπερασμένο}}} \overline{D}^F \times \prod_{i\in I\setminus F} \{\zeta_i\}$$

είναι πυκνό στο $\overline{D}^I$.

Αν το σύνολο I είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο, τότε το σύνολο $\overline{D}^I$ είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος και σύμφωνα με το θεώρημα Tychonoff, συμπαγής, έτσι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \overline{D}^I \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, για κάθε μετρικό χώρο Y, ειδικά αυτό ισχύει για $Y = \mathbb{C}$ ή $Y = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Αν όμως το σύνολο I είναι υπεραριθμήσιμο, τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια μετρική στο $\overline{D}^I$.

Σημειώνουμε ότι το $\overline{D}^I$ έχει μία ομοιόμορφη δομή και καθώς παραμένει ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος (από το θεώρημα Tychonoff) θα μπορούσε κάποιος να αποδείξει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \overline{D}^I \to Y$ (όπου $Y = \mathbb{C}$ ή $Y = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) είναι αυτόματα ομοιόμορφα συνεχής. Θα αποφύγουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την αποδεικτική κατεύθυνση, αποδεικνύοντας όμως το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.9. Έστω I ένα άπειρο σύνολο, αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο. Έστω ακόμα $f : \overline{D}^I \to Y$ μία συνεχής συνάρτηση, όπου (Y,d) είναι ένας αυθαίρετος μετρικός χώρος και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $F \subseteq I$ τέτοιο ώστε για κάθε $\zeta \equiv (\zeta_i)_{i\in I} \in \overline{D}^I$, η συνάρτηση $g : \overline{D}^I \to Y$ με $g(z) = f(w(z))$, όπου $w(z) = (w_i(z))_{i\in I} \in \overline{D}^I$, με

$$w_i(z) = \begin{cases} \zeta_i & \text{για } i \in I\setminus F \\ z_i & \text{για } i \in F \end{cases}$$

για κάθε $z \equiv (z_i)_{i\in I} \in \overline{D}^I$ ικανοποιεί τη σχέση $d(f(z), g(z)) < \varepsilon$ για όλα τα

$z \in \overline{D}^I$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\overline{D}^I$ και συνεπώς, για κάθε $\tau \equiv (\tau_i)_{i\in I} \in \overline{D}^I$ υπάρχει μία βασική ανοικτή περιοχή V_τ του τ τέτοια ώστε $d(f(\tau), f(\sigma)) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $\sigma \in V_\tau$. Από τη συμπάγεια του $\overline{D}^I$ έχουμε ότι $V_{\tau^1} \cup \cdots \cup V_{\tau^m} = \overline{D}^I$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και για κάποια $\tau^1, \ldots, \tau^m \in \overline{D}^I$. Για κάθε $k \in \{1, \ldots, m\}$ υπάρχουν ένα πεπερασμένο σύνολο $F_k \subseteq I$ και $\delta_k > 0$ τέτοια ώστε $V_{\tau^k} = \{z \equiv (z_i)_{i\in I} \in \overline{D}^I : |z_i - {\tau_i}^k| < \delta_k$ για κάθε $i \in F_k\}$.

Θέτουμε $F = F_1 \cup \cdots \cup F_m$ και έστω $\zeta \equiv (\zeta_i)_{i\in I} \in \overline{D}^I$ ένα τυχαίο (αλλά σταθεροποιημένο) στοιχείο του $\overline{D}^I$. Για κάθε $z \equiv (z_i)_{i\in I} \in \overline{D}^I$ θέτουμε $w(z) \equiv$ $\equiv (w_i(z))_{i\in I} \in \overline{D}^I$, με

$$w_i(z) = \begin{cases} \zeta_i & \text{για } i \in I \setminus F \\ z_i & \text{για } i \in F. \end{cases}$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε κάποιο $z \equiv (z_i)_{i\in I} \in \overline{D}^I$, τότε από τη σχέση $\overline{D}^I =$ $= V_{\tau^1} \cup \cdots \cup V_{\tau^m}$, έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $k \in \{1, \ldots, m\}$ τέτοιο ώστε $z \in V_{\tau^k}$. Τότε, για $i \in F_k$ έχουμε ότι $|z_i - {\tau_i}^k| < \delta^k$. Έπεται ότι $|w_i(z) - {\tau_i}^k| < \delta^k$ για κάθε $i \in F_k$ διότι $F_k \subseteq F$ και $w_i(z) = z_i$ για όλα τα $i \in F$.

Συνεπώς $w(z) \in V_{\tau^k}$ και άρα $d(f(w(z)), f(\tau^k)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Όμως $z \in V_{\tau^k}$ και έτσι έχουμε ότι $d(f(z), f(\tau^k)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Από τη σχέση $g(z) = f(w(z))$ για κάθε $z \in \overline{D}^I$ και την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $d(f(w(z)), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Ένα άμεσο πόρισμα της πρότασης 2.9 είναι το ακόλουθο (γνωστό) αποτέλεσμα.

Πόρισμα 2.10. Έστω I ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο και $f : \overline{D}^I \to Y$ μία συνεχής συνάρτηση, όπου (Y, d) είναι ένας αυθαίρετος μετρικός χώρος. Τότε η f εξαρτάται από ένα αριθμήσιμο το πλήθος μεταβλητών και μόνο.

Απόδειξη. Από την πρόταση 2.9 έχουμε ότι για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $F_n \subseteq I$ και μία συνάρτηση $g_n : \overline{D}^I \to Y$ η οποία εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες του F_n τέτοια ώστε $d(f(z), g_n(z)) < \frac{1}{n}$ για όλα τα $z \in \overline{D}^I$. Θέτουμε $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και το ζητούμενο έπεται. □

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Hartogs ([15]) έχουμε ότι αν $\Omega \subseteq G^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$, τότε η f αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο οποιοδήποτε σημείο $\zeta \in \Omega$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα σε κάθε κλειστό πολύδισκο

με κέντρο το σημείο $\zeta \in \Omega$ ο οποίος περιέχεται στο Ω αν και μόνο αν η f είναι χωριστά ολόμορφη ως προς κάθε μεταβλητή. Με παρόμοιο τρόπο έχουμε ότι η σύγκλιση της ανωτέρω δυναμοσειράς είναι ομοιόμορφη και απόλυτη σε κάθε κλειστή (Ευκλείδεια) μπάλα η οποία περιέχεται στο Ω ([18], [19]).

Αναφέρουμε ακόμα ότι αν $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων, όπου κάθε X_i είναι εφοδιασμένος με ένα κανονικό μέτρο Borel (πιθανότητας) μ_i, τότε στο (συμπαγές) καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ ορίζεται ένα κανονικό μέτρο γινόμενο Borel (πιθανότητας) $\mu = \prod_{i\in I} \mu_i$ (όπου ο χώρος $\prod_{i\in I} X_i$ θεωρείται εφοδιασμένος με την καρτεσιανή τοπολογία) ([5]). Στην περίπτωση που το σύνολο I είναι πεπερασμένο, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Fubini. Αν όμως το I είναι άπειρο αριθμήσιμο, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα του Jessen ([11]).

Θεώρημα 2.11. (Jessen) Με τις ανωτέρω προϋποθέσεις, έστω ότι $I = \mathbb{N}$ και $f \in L^1(\mu)$. Τότε υπάρχει ένα μετρήσιμο σύνολο $J \subseteq \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, με $\mu(J) = 1$ και αν για κάθε $\zeta \equiv (\zeta_m)_{m\in\mathbb{N}} \in J$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $z \equiv (z_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ θέσουμε $g_{\zeta,n}(z) = f(w_{\zeta,n}(z))$, όπου $(w_{\zeta,n}(z)) \equiv (w_{\zeta,n}(z))_{m\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ με

$$(w_{\zeta,n}(z))_m = \begin{cases} z_m & \text{για } m \leq n \\ \zeta_m & \text{για } m > n \end{cases}$$

τότε έχουμε ότι

$$\int g_{\zeta,n}(z)\mathrm{d}\mu(z) \xrightarrow{n\to+\infty} \int f(z)\mathrm{d}\mu(z)$$

για όλα τα $\zeta \in J$.

Θα εφαρμόσουμε αυτά τα αποτελέσματα στην περίπτωση όπου $X_i = T$ και μ_i είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue $\frac{\partial\theta}{2\pi}$ στο T.

Επεκτάσεις του θεωρήματος 2.11 έχουν γίνει από την D. Maharam ([14]) στην περίπτωση όπου το σύνολο I είναι υπεραριθμήσιμο και καλά διατεταγμένο. Ωστόσο, δεν γνωρίζουμε αν παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν όταν το όριο λαμβάνεται ως προς το κατευθυνόμενο σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του I με σχέση διάταξης αύτη του εγκλεισμού. Θα μπορούσαμε ενδεχομένως να αποδείξουμε το εξής:

" Έστω$\{X_i\}_{i\in I}$, $\{\mu_i\}_{i\in I}$ όπως ανωτέρω, όπου το I είναι ένα άπειρο σύνολο. Έστω ακόμα $f : \prod_{i\in I} X_i \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\zeta \in \prod_{i\in I} X_i$ $(\zeta \equiv (\zeta_i)_{i\in I})$ και για κάθε πεπερασμένο σύνολο $F \subseteq I$ θέτουμε:

$$g_{\zeta,F}(z) = f(w_{\zeta,F}(z))$$

όπου:

$$(w_{\zeta,F}(z))_i = \begin{cases} z_i & \text{αν } i \in F \\ \zeta_i & \text{αν } i \in I \setminus F. \end{cases}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $F_\varepsilon \subseteq I$, τέτοιο ώστε για κάθε πεπερασμένο σύνολο F, με $F_\varepsilon \subseteq F \subseteq I$ και κάθε $\zeta \in \prod_{i\in I} X_i$ να είναι $|\int g_{\zeta,F}(z)\mathrm{d}\mu(z) - \int f(z)\mathrm{d}\mu(z)| < \varepsilon.$"

Δεν γνωρίζουμε αν το προηγούμενο αποτέλεσμα ισχύει αν f είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_K οποιουδήποτε συμπαγούς συνόλου $K \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ ή, πιο γενικά, αν $f \in L^1(\mu)$. Σίγουρα για κάποια τέτοια επέκταση, θα μπορούσε κανείς να απαιτήσει το αποτέλεσμα να ισχύει σχεδόν για όλα τα $\zeta \in \prod_{i\in I} X_i$ και ότι το σύνολο F_ε να εξαρτάται από το ζ. Αυτό το ερώτημα είναι ανοικτό, ακόμα και στην περίπτωση όπου $I = \mathbb{N}$

Αν θεωρήσουμε το ακόλουθο ασθενέστερο αποτέλεσμα, δηλαδή ότι σχεδόν για όλα τα $\zeta \in \prod_{i\in I} X_i$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε πεπερασμένο σύνολο $F \subseteq I$ υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο F' με $F \subseteq F' \subseteq I$ τέτοιο ώστε $|\int g_{\zeta,F'}(z)\mathrm{d}\mu(z) - \int f(z)\mathrm{d}\mu(z)| < \varepsilon$, τότε έχουμε την εξής κατάσταση. Αν το σύνολο I είναι αριθμήσιμο, το ζητούμενο ισχύει από το θεώρημα 2.11. Στην υπεραριθμήσιμη περίπτωση όμως, δεν γνωρίζουμε την απάντηση.

3 Σύνολα μοναδικότητας για την άλγεβρα του πολύδισκου

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε το συμπαγή χώρο $\overline{D}^I$, όπου $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ και I είναι ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο, εφοδιασμένο με την καρτεσιανή τοπολογία.

Ένα πολυώνυμο στο $\overline{D}^I$ είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα μονονύμων

$$p(z) = \sum_{a\in F} c_a z_{i_1(a)}^{k_1(a)} \cdots z_{i_{M(a)}(a)}^{k_{M(a)}(a)}$$

όπου το F είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, $M(a) \in \mathbb{N}$ για κάθε $a \in F$, $i_j(a) \in I$ και $k_j(a) \in \mathbb{N}$ για όλα τα $j = 1, \ldots, M(a), a \in F, c_a \in \mathbb{C}$ για όλα τα $a \in F$ και $z \equiv (z_i)_{i\in I} \in \overline{D}^I$.

Συνεπώς, το πολυώνυμο p εξαρτάται από ένα πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών και μόνο, ακόμα και αν το σύνολο I είναι άπειρο.

Ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε το σύνολο των ομοιόμορφων ορίων ακολουθιών πολυωνύμων $\{p_n\}_{n\geq 1}$ στο $\overline{D}^I$ ως προς τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{C}$, όπου ο βαθμός κάθε πολυωνύμου p_n και το σύνολο των μεταβλητών από το οποίο εξαρτάται μπορούν να διαφέρουν.

Πρόταση 3.1. Έστω $f : \overline{D}^I \to \mathbb{C}$ μία συνάρτηση. Τότε υπάρχει μία ακολουθία πολυωνύμων $\{p_n\}_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε:

$$\sup\{|p_n(z) - f(z)| : z \in \overline{D}^I\} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι συνθήκες 1) και 2), όπου:

1) η f είναι συνεχής στο $\overline{D}^I$

2) για κάθε $i_0 \in I$ και για κάθε $z \equiv (z_i)_{i\in I} \in \overline{D}^I$ η συνάρτηση $\overline{D} \in w \to f(\zeta(w)) \in \mathbb{C}$ ανήκει στην άλγεβρα $A(\overline{D})$, όπου $\zeta(w) \equiv (\zeta_i(w))_{i\in I} \in \overline{D}^I$ με

$$\zeta_i(w) = \begin{cases} w & \text{αν } i = i_0 \\ z_i & \text{αν } i \in I \setminus \{i_o\}. \end{cases}$$

Απόδειξη. Είναι άμεσο ότι αν $p_n \xrightarrow{n \to +\infty} f$ ομοιόμορφα στο $\overline{D}^I$, τότε η f ικανοποιεί τα 1) και 2).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f ικανοποιεί τα 1) και 2) και έστω ακόμα $\varepsilon > 0$. Αρκεί λοιπόν να βρούμε ένα πολυώνυμο p στο $\overline{D}^I$ τέτοιο ώστε $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$ για κάθε $z \in \overline{D}^I$.

Θεωρούμε αρχικά ότι το σύνολο I είναι πεπερασμένο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $I = \{1, \ldots, N\}$ και ότι η $f : \overline{D}^N \to \mathbb{C}$ ικανοποιεί τις συνθήκες 1) και 2). Το σύνολο $\overline{D}^N$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και έτσι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Συνεπώς, υπάρχει $r \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $|f(z) - f(rz)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $z \in \overline{D}^N$. Από τη συνθήκη 2) σε συνδυασμό με το θεώρημα Hartogs ([15]), η συνάρτηση f αναλύεται (τοπικά) σε δυναμοσειρά με κέντρο το σημείο $0 = (0, \ldots, 0)$. Η σύγκλιση της ανωτέρω δυναμοσειράς προς τη συνάρτηση f είναι απόλυτη και ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό πολύδισκο με κέντρο το 0 που περιέχεται στο D^I. Πιο συγκεκριμένα, για κάποιο τέτοιο μερικό άθροισμα q της δυναμοσειράς είναι $|q(w) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $w = (w_1, \ldots, w_N)$ με $|w_j| \leq r$, διότι $r < 1$. Έπεται ότι $|p(z) - f(z)| < \varepsilon$ για κάθε $z \in \overline{D}^N$, όπου $p(z)$ είναι το πολυώνυμο $p(z) = q(rz)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη στην περίπτωση που το σύνολο I είναι πεπερασμένο.

Ας υποθέσουμε τέλος ότι το I είναι άπειρο σύνολο και ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες 1) και 2). Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να βρούμε ένα πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $|p(z) - f(z)| < \varepsilon$ για κάθε $z \in \overline{D}^I$. Από την πρόταση 2.9 μπορούμε να βρούμε ένα $\zeta \in \overline{D}^I$ και ένα πεπερασμένο σύνολο $F \subseteq I$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση $g : \overline{D}^I \to \mathbb{C}$, με τύπο $g(z) = f(w(z))$, όπου $w(z) \equiv (w_i(z))_{i\in I} \in \overline{D}^I$ με

$$w_i(z) = \begin{cases} z_i & \text{αν } i \in F \\ \zeta_i & \text{αν } i \in I \setminus F. \end{cases}$$

ικανοποιεί τη σχέση $|g(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $z \in \overline{D}^I$. Η συνάρτηση g εξαρτάται από πεπερασμένο το πλήθος μεταβλητές (και μόνο) και επάγει μία συνάρτηση στο $\overline{D}^F$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες 1) και 2). Από το πρώτο σκέλος της απόδειξης, μπορούμε να βρούμε ένα πολυώνυμο p (στο $\overline{D}^F$, το οποίο επάγει ένα πολυώνυμο στο $\overline{D}^I$) τέτοιο ώστε $|p(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ στο $\overline{D}^I$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται με χρήση της τριγωνικής ανισότητας.

□

Η M. Μανωλάκη ρώτησε αν η συνθήκη 2) της πρότασης 3.1 συνεπάγεται τη συνθήκη 1) (της ίδιας πρότασης). Ο P.M. Gauthier έδωσε αρνητική απάντηση για αυτό το ερώτημα στην αρμονική περίπτωση. Το ακόλουθο αντιπαράδειγμα για το $\overline{D}^2$ στην ολόμορφη περίπτωση οφείλεται στον G. Knese.

Θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση (πηλίκο πολυωνύμων δύο μεταβλητών)

$$f(z,w) = \begin{cases} \frac{2zw-z-w}{2-z-w} & \text{αν } |z| \leq 1, |w| \leq 1 \text{ και } (z,w) \neq (1,1) \\ -1 & \text{αν } (z,w) = (1,1). \end{cases}$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τη συνθήκη 2) της πρότασης 3.1, αλλά δεν ικανοποιεί τη συνθήκη 1), διότι για $z = \overline{w} = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$ $f(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = 1 \neq -1 = f(1,1)$ και η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο $(1,1)$ σαν συνάρτηση ορισμένη στο $\overline{D}^2$.

Ο R. Aron πρόσθεσε ότι στην περίπτωση που το σύνολο I είναι άπειρο, αρκεί να θεωρήσουμε σαν f ένα μη συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στο $\ell^\infty(I)$.

Ορισμός 3.2. Το σύνολο $A(\overline{D}^I)$ περιέχει ακριβώς όλες τις συναρτήσεις $f : \overline{D}^I \to \mathbb{C}$ οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες 1) και 2) της πρότασης 3.1.

Είναι σχετικά απλό να διαπιστώσει κανείς ότι η $A(\overline{D}^I)$ είναι μία άλγεβρα Banach και περιέχει ακριβώς τα ομοιόμορφα όρια των ακολουθιών πολυωνύμων στο $\overline{D}^I$ ως προς τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{C}$.

Από την αρχή του μεγίστου μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι το σύνολο T^I όπου $T = \partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ είναι ένα σύνορο για την $A(\overline{D}^I)$, δηλαδή, για κάθε $f \in A(\overline{D}^I)$ υπάρχει ένα στοιχείο $\zeta \in T^I$ τέτοιο ώστε $|f(\zeta)| \geq |f(z)|$ για κάθε $z \in \overline{D}^I$. Ισοδύναμα, ο περιορισμός

$$\pi_{T^I} : A(\overline{D}^I) \ni f \to f_{|T^I} \in C(T^I)$$

είναι ισομετρία.

Ορισμός 3.3. Ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq T^I$ λέγεται σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^I)$, αν για κάθε $f, g \in A(\overline{D}^I)$ με $f_{|K} \equiv g_{|K}$ να είναι $f \equiv g$. Ισοδύναμα, ο περιορισμός

$$\pi_K : A(\overline{D}^I) \ni f \to f_{|K} \in C(K)$$

να είναι $1-1$.

Σημείωση 3.4. Ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq T^I$ λέγεται σύνολο κορυφής (peak set) για την $A(\overline{D}^I)$), αν υπάρχει συνάρτηση $\phi \in A(\overline{D}^I)$ τέτοια ώστε $\phi_{|K} \equiv 1$ και $|\phi(z)| < 1$ για κάθε $z \in \overline{D}^I \setminus K$ ([18]).

Μπορεί κανείς να διαπιστώσει σχετικά απλά ότι αν ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq$ $\subseteq T^I$ είναι σύνολο κορυφής (για την $A(\overline{D}^I)$)), τότε δεν μπορεί να είναι σύνολο μοναδικότητας (για την ίδια κλάση). Ακόμα, αν $I = \{1, 2\}$, τότε το συνολο $K =$ $= \{1\} \times T \subseteq T^2 \subseteq \overline{D}^2$ είναι συμπαγές και δεν είναι ούτε σύνολο κορυφής, αλλά ούτε και σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^I) \equiv A(\overline{D}^2)$.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(z_1, z_2) = \frac{1+z_1}{2}$ βλέπουμε ότι $f_{|K} \equiv 1$ αλλά $f \not\equiv 1$, συνεπώς το σύνολο K δεν μπορεί να είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^2)$. Ακόμα, αν για τη συνάρτηση $g \in A(\overline{D}^2)$ ισχύει $g_{|K} \equiv 1$, έπεται εύκολα ότι $g(1, 0) = 1$ και συνεπώς το σύνολο K δεν μπορεί να είναι ούτε σύνολο κορυφής . Οι προηγούμενες παρατηρήσεις μπορούν εύκολα να μεταφερθούν στην περίπτωση όπου το σύνολο I είναι αυθαίρετο και περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία.

Θεώρημα 3.5. Έστω $K \subseteq T^I$ ένα συμπαγές σύνολο με $\mu(K) > 0$, όπου με μ συμβολίζουμε το μέτρο γινόμενο στο T^I των κανονικοποιημένων μέτρων Lebesgue $\frac{d\theta}{2\pi}$ σε κάθε παράγοντα T του T^I. Τότε το σύνολο K είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^I)$.

Απόδειξη. Αν το σύνολο I είναι μονοσύνολο, τότε το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα Privalov (θεώρημα 2.1, θεώρημα 2.3).

Αν το σύνολο I είναι πεπερασμένο, τότε το ζητούμενο έπεται με επαγωγή σε συνδυασμό με τα θεωρήματα Fubini και Privalov. Πράγματι, αν το σύνολο $K \subseteq T^n$ έχει θετικό n - διάστατο μέτρο, τότε από το θεώρημα Fubini υπάρχει ένα σύνολο $J \subseteq T^{n-1}$ θετικού μέτρου (διάστασης $n-1$) τέτοιο ώστε για κάθε $y \in J$ το σύνολο $\{x \in T : (x, y) \in K\} \equiv A^y$ να έχει θετικό μέτρο (διάστασης 1).

Αν $f, g \in A(\overline{D}^n)$ με $f_{|K} \equiv g_{|K}$, τότε $f_{|A^y \times \{y\}} \equiv g_{|A^y \times \{y\}}$ για κάθε $y \in J$. Επειδή το σύνολο A^y έχει θετικό μέτρο, από το θεώρημα Privalov έχουμε ότι $f_{|\overline{D} \times \{y\}} \equiv g_{|\overline{D} \times \{y\}}$ με την τελευταία σχέση να ισχύει για κάθε $y \in J$. Από την κανονικότητα του μέτρου μ βρίσκουμε ένα συμπαγές σύνολο $R \subseteq J$ θετικού μέτρου. Από την επαγωγική υπόθεση, το σύνολο R είναι σύνολο μοναδικότητας (για την

$A(\overline{D}^{n-1})$) και άρα $f_{|\{z\}\times\overline{D}^{n-1}} \equiv g_{|\{z\}\times\overline{D}^{n-1}}$ για κάθε $z \in \overline{D}$. Συνεπώς, $f \equiv g$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη στην περίπτωση που το σύνολο I είναι πεπερασμένο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σύνολο I είναι άπειρο αριθμήσιμο και έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $I = \mathbb{N}$. Θεωρούμε ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq T^I$ θετικού μέτρου. Επειδή το μέτρο γινόμενο είναι ένα κανονικό μέτρο Borel ([5]), εφαρμόζεται η επέκταση του θεωρήματος Fubini από τον Jessen (θεώρημα 2.11) στην χαρακτηριστική συνάρτηση χ_K (του K) η οποία είναι μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, υπάρχει ένα μετρήσιμο σύνολο $J \subseteq T^I$ μέτρου 1, τέτοιο ώστε για κάθε $\zeta \in J$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots)$ η ακολουθία $(\mu_n(E_n))_{n\geq 1}$, όπου:

$$E_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in T^n : (z_1, \dots, z_n, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \dots) \in K\}$$

να συγκλίνει στο $\mu(K) > 0$ (όπου μ είναι το μέτρο γινόμενο στο $T^{\mathbb{N}}$ των $\frac{d\theta}{2\pi}$ σε κάθε παράγοντα T και μ_n είναι το μέτρο γινόμενο στο T^n). Σταθεροποιούμε ένα $\zeta \in J$. Εφόσον υπάρχει ένα n_o τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ τα σύνολα E_n να έχουν θετικό μέτρο, από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στην πεπερασμένη περίπτωση έχουμε ότι κάθε σύνολο $E_n \subseteq T^n$ είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^n)$, για $n \geq n_0$.

Έστω $f, g \in A(\overline{D}^{\mathbb{N}})$ με $f_{|K} \equiv g_{|K}$. Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n, g_n : \overline{D}^n \to \mathbb{C}$ οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$f_n(z_1, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_n, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \dots) \text{ και}$$

$$g_n(z_1, \dots, z_n) = g(z_1, \dots, z_n, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \dots)$$

για κάθε $(z_1, \dots, z_n) \in \overline{D}^n$. Παρατηρούμε ότι $f_{n|E_n} \equiv g_{n|E_n}$ για κάθε $n \geq 1$.

Επειδή το E_n είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^n)$ (για $n \geq n_0$), έχουμε ότι $f_n \equiv g_n$ για κάθε $n \geq n_0$ και συνεπώς είναι $f_{|A} \equiv g_{|A}$ όπου:

$$A = \bigcup_{n\geq n_0} \overline{D}^n \times \{\zeta_{n+1}\} \times \{\zeta_{n+2}\} \times \cdots$$

με το σύνολο A να είναι πυκνό στο $\overline{D}^{\mathbb{N}}$ (ως προς την καρτεσιανή τοπολογία).

Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς και συμπίπτουν σε ένα πυκνό σύνολο έχουμε ότι $f \equiv g$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη στην άπειρη αριθμήσιμη περίπτωση.

Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση όπου το σύνολο I είναι υπεραριθμήσιμο. Είναι γνωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f \in A(\overline{D}^I)$ εξαρτάται από αριθμήσιμο το πλήθος μεταβλητές και μόνο (πόρισμα 2.10). Έστω $K \subseteq T^I$ ένα συμπαγές σύνολο με $\mu(K) > 0$. Έστω ακόμα $f, g \in A(\overline{D}^I)$ με $f_{|K} \equiv g_{|K}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $f \equiv g$.

Αν $F \subseteq I$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο τέτοιο ώστε οι συναρτήσεις f και g να εξαρτώνται μόνο από μεταβλητές με δείκτες στο σύνολο F, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τις f, g σαν συναρτήσεις στην $A(\overline{D}^F)$ με $f_{|S} \equiv g_{|S}$, όπου $S \subseteq T^F$ είναι η προβολή του K στο $\overline{D}^F$, το οποίο είναι ένα συμπαγές σύνολο. Από τον ορισμό του μέτρου γινόμενου έχουμε ότι $\mu_F(S) \geq \mu_I(K) > 0$, διότι $K \subseteq S \times T^{I \setminus F}$ και $T^{I \setminus F}$ έχει μέτρο 1, όπου μ_F and μ_I είναι τα μέτρα γινόμενα στα T^F and T^I, αντίστοιχα. Συνεπώς, $\mu_F(S) > 0$. Από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στην αριθμήσιμη περίπτωση έχουμε ότι $f \equiv g$ σαν στοιχεία της $A(\overline{D}^F)$, το οποίο εύκολα συνεπάγεται ότι $f \equiv g$ στην $A(\overline{D}^I)$, επειδή οι συναρτήσεις f και g εξαρτώνται μόνο από τις μεταβλητές με δείκτες στο σύνολο F. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. □

Σημείωση 3.6. Στην περίπτωση όπου το σύνολο I είναι υπεραριθμήσιμο, μπορεί κανείς να δείξει ότι ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq T^I$ είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^I)$ αν και μόνο αν για κάθε άπειρο αριθμήσιμο σύνολο $F \subseteq I$ η προβολή του K στο T^F είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^F)$.

Παράδειγμα 3.7. Αν το σύνολο I περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, τότε υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq T^I$ το οποίο είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^I)$ και έχει μηδενικό μέτρο.

Σκιαγραφούμε την απόδειξη του παραδείγματος για την $A(\overline{D}^2)$, η οποία μπορεί εύκολα να μεταφερθεί στη γενική περίπτωση, όπου το σύνολο I περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Έστω $J = [0, 1]$, $J \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ και $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Θέτουμε $A_n = \{(e^{iq_n}, e^{iy}) : 0 \leq y \leq a_n\} \subseteq T^2$ και $K = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup \{(e^{ix}, e^{i \cdot 0}) : x \in J\} \subseteq T^2$. Είναι σχετικά απλό να διαπιστώσει κανείς ότι το σύνολο K είναι συμπαγές και έχει μέτρο μηδέν (διάστασης 2). Έστω $f, g \in A(\overline{D}^2)$ τέτοιες ώστε $f_{|K} \equiv g_{|K}$. Εφόσον το (μονοδιάστατο) μέτρο του συνόλου $\{e^{iy} \in T : (e^{iq_n}, e^{iy}) \in \in A_n\}$ είναι $a_n = \frac{1}{n} > 0$, από το θεώρημα Privalov (θεώρημα 2.1, θεώρημα 2.3) έπεται ότι $f(e^{iq_n}, w) = f(e^{iq_n}, w)$ για κάθε $w \in \overline{D}$. Από τη συνέχεια των συναρτήσεων f και g και επειδή το σύνολο $J \cap \mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $J = [0, 1]$, έπεται ότι $f_{|S} \equiv g_{|S}$ όπου $S = \{(e^{ix}, e^{iy}) : 0 \leq x \leq 1 \text{ και } 0 \leq y \leq 2\pi\}$.
Το 2 - διάστατο μέτρο του συνόλου S είναι θετικό και συνεπώς, από το θεώρημα 3.5 έπεται ότι το S είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^2)$. Συνεπώς, $f \equiv g$.

Πρόταση 3.8. Έστω $I \neq \emptyset$ και $(I_j)_{j \in J}$ μία διαμέριση του I. Για κάθε $j \in J$ θεωρούμε ένα συμπαγές σύνολο $K_j \subseteq T^{I_j}$ το οποίο υποθέτουμε ότι είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^{I_j})$. Τότε το (συμπαγές) σύνολο

$$K = \prod_{j \in J} K_j \subseteq \prod_{j \in J} T^{I_j} \equiv T^I$$

είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^I)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση όπου το σύνολο J περιέχει ακριβώς δύο στοιχεία, $J = \{1, 2\}$. Έστω $f, g \in A(\overline{D}^I)$ και $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Υποθέτουμε ότι $f_{|K_1 \times K_2} \equiv g_{|K_1 \times K_2}$, όπου $K_1 \subseteq T^{I_1}$ και $K_2 \subseteq T^{I_2}$ είναι σύνολα μοναδικότητας για τις $A(\overline{D}^{I_1})$ και $A(\overline{D}^{I_2})$ αντίστοιχα. Έστω $\zeta \in K$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\zeta_1 \in K_1$ και $\zeta_2 \in K_2$ ένα σταθεροποιημένο σημείο. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(\cdot, \zeta_2) \in A(\overline{D}^{I_1})$, $g(\cdot, \zeta_2) \in A(\overline{D}^{I_1})$ για τις οποίες υποθέτουμε ότι συμπίπτουν στο K_1. Το K_1 είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^{I_1})$, συνεπώς $f(z, \zeta_2) = g(z, \zeta_2)$ για κάθε $z \in A(\overline{D}^I)$ και αυτό για όλα τα $\zeta_2 \in K_2$. Χρησιμοποιώντας ότι το K_2 είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^{I_2})$ λαμβάνουμε με όμοιο τρόπο ότι $f(z, w) = g(z, w)$ για κάθε $(z, w) \in \overline{D}^I = \overline{D}^{I_1} \times \overline{D}^{I_2}$. Συνεπώς, το $K = K_1 \times K_2$ είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}^{I_1 \cup I_2})$.

Αν το σύνολο J είναι πεπερασμένο, το ζητούμενο έπεται εύκολα με επαγωγή, διότι $K_1 \times \cdots \times K_n = (K_1 \times \cdots \times K_{n-1}) \times K_n$.

Ας υποθέσουμε τέλος ότι το σύνολο J είναι άπειρο. Έστω $f, g \in A(\overline{D}^I)$ και ας υποθέσουμε ότι συμπίπτουν στο σύνολο $K = \prod_{j \in J} K_j$. Θα δείξουμε ότι $f \equiv g$. Σταθεροποιούμε ένα $\zeta \equiv (\zeta_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} K_j$, $\zeta_j \in K_j$. Από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στην πεπερασμένη περίπτωση, έχουμε ότι $f_{|A} \equiv g_{|A}$, όπου:

$$A = \bigcup_{\substack{F \subseteq J \\ F \text{πεπερασμένο}}} \overline{D}^{\bigcup_{j \in F} I_j} \times \prod_{j \in J \setminus F} \{\zeta_j\}.$$

Επειδή κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $I = \cup_{j \in J} I_j$ περιέχεται στην ένωση $\bigcup_{j \in F} I_j$ για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $F \subseteq J$, έπεται ότι το σύνολο A είναι πυκνό στο $\overline{D}^I$. Από την συνέχεια των συναρτήσεων f και g, συμπεραίνουμε ότι $f \equiv g$. Η απόδειξη είναι πλήρης.

□

4 Σφαιρική προσέγγιση σε πολύδισκους

Σε αυτή την ενότητα, όπως και στην προηγούμενη, θεωρούμε γινόμενα της μορφής $\overline{D}^I$ (όπου το I είναι τυχαίο σύνολο) και ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε τα ομοιόμορφα όρια πολυωνύμων στο $\overline{D}^I$ ως προς τη χορδική μετρική χ στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Πρόταση 4.1. Έστω $f : \overline{D}^I \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ μία συνάρτηση. Τότε υπάρχει μία ακολουθία πολυωνύμων $\{p_n\}_{n \geq 1}$ τέτοια ώστε:

$$\sup\{\chi(p_n(z), f(z)) : z \in \overline{D}^I\} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι συνθήκες $1')$ και $2')$, όπου:

$1')$ η f είναι συνεχής στο $\overline{D}^I$

$2')$ για κάθε $j_0 \in I$ και για κάθε $z \equiv (z_j)_{j\in I} \in \overline{D}^I$, η συνάρτηση $\overline{D} \ni w \to f(\zeta(w)) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ανήκει στην $\tilde{A}(\overline{D})$, όπου $\zeta(w) \equiv (\zeta_j(w))_{j\in I} \in \overline{D}^I$ με

$$\zeta_j(w) = \begin{cases} w & \text{αν } j = j_0 \\ z_j & \text{αν } j \in I \setminus \{j_o\}. \end{cases}$$

Η απόδειξη της πρότασης είναι παρόμοια με αυτή της πρότασης 3.1. Η μόνη διαφορά είναι στην πεπερασμένη περίπτωση, όπου το σύνολο I περιέχει ακριβώς N στοιχεία ($N \in \mathbb{N}$), όπου έχουμε $\chi(f(z), f(rz)) < \frac{\varepsilon}{2}$ αντί της $|f(z) - f(rz)| < < \frac{\varepsilon}{2}$. Επιπλέον, η ανισότητα $|q(w) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $w = (w_1, ..., w_N)$, $|w_j| \leq \leq r$ συνεπάγεται ότι $\chi(q(w), f(w)) < \frac{\varepsilon}{2}$, αφού $\chi(a, b) \leq |a - b|$ για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$. Το ζητούμενο έπεται από την τριγωνική ανισότητα, στην περίπτωση που η συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες $1')$ και $2')$, με $f(\overline{D}^I) \subseteq \mathbb{C}$.

Αν έχουμε ότι $f(\zeta) = \infty$ για κάποιο $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ με $|\zeta_i| < 1$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, N\}$, τότε από μία εφαρμογή του θεωρήματος Hurwitz έχουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(\{\infty\}) \cap D^N$ είναι ανοικτό στο D^N ($D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$). Το ίδιο σύνολο όμως είναι και κλειστό (στο D^N) στη σχετική τοπολογία και το D^N είναι συνεκτικό σύνολο, έπεται ότι αν $f(\zeta) = \infty$ για κάποιο εσωτερικό σημείο, τότε $f \equiv \infty$.

Στη γενική περίπτωση όπου το σύνολο I μπορεί να είναι και άπειρο, αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες $1')$ και $2')$ και $f(\zeta) = \infty$ για κάποιο $\zeta \equiv (\zeta)_{i\in I} \in D^I$, τότε, από τον προηγούμενο συλλογισμό συνάγουμε ότι $f_{|A} \equiv \infty$, όπου:

$$A = \bigcup_{\substack{F \subseteq J \\ F \text{πεπερασμένο}}} \overline{D}^F \times \prod_{j \in J \setminus F} \{\zeta_j\}.$$

Επειδή το σύνολο A είναι πυκνό στο $\overline{D}^I$ και η f είναι συνεχής, έπεται ότι $f \equiv \infty$ και η f μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από τα σταθερά πολυώνυμα $p_n = n$ για κάθε n.

Ορισμός 4.2. Η $\tilde{A}(\overline{D}^I)$ περιέχει ακριβώς όλες τις συναρτήσεις $f : \overline{D}^I \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ οι οποίες ικανοποιούν τις ιδιότητες $1')$ και $2')$ της πρότασης 4.1.

Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει, η $\tilde{A}(\overline{D}^I)$ συμπίπτει με το σύνολο των ομοιομόρφων ορίων πολυωνύμων στο $\overline{D}^I$ ως προς τη χορδική μετρική χ. Επιπλέον, αν η $f \in \tilde{A}(\overline{D}^I)$ ικανοποιεί τη σχέση $f(\zeta) = \infty$ για κάποιο $\zeta \equiv (\zeta_i)_{i\in I} \in D^I$, έπεται ότι $f \equiv \infty$. Επίσης, είναι εμφανές ότι $A(\overline{D}^I) \subseteq \tilde{A}(\overline{D}^I)$.

Ορισμός 4.3. Ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq T^I$ λέγεται σύνολο μοναδικότητας για την κλάση $\tilde{A}(\overline{D}^I)$, αν για κάθε συναρτήσεις $f, g \in \tilde{A}(\overline{D}^I)$ με $f_{|K} \equiv g_{|K}$ να είναι $f \equiv g$.

Εφόσον $A(\overline{D}^I) \subseteq \tilde{A}(\overline{D}^I)$, είναι άμεσο ότι κάθε σύνολο μοναδικότητας για την $\tilde{A}(\overline{D}^I)$ είναι σύνολο μοναδικότητας και για την $A(\overline{D}^I)$. Δεν γνωρίζουμε αν το αντίστροφο ισχύει ή όχι. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα που έχουμε για την $\tilde{A}(\overline{D}^I)$ είναι παρόμοια με αυτά για την $A(\overline{D}^I)$. Οι αποδείξεις είναι παρόμοιες, κυρίως λόγω του θεωρήματος Privalov: αν $f, g \in \tilde{A}(\overline{D})$ είναι δύο συναρτήσεις που συμπίπτουν σε ένα υποσύνολο του T με θετικό μέτρο, τότε $f \equiv g$. Συνεπώς, διατυπώνουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.4. Έστω $K \subseteq T^I$ ένα συμπαγές σύνολο με $\mu(K) > 0$. Τότε το K είναι ένα σύνολο μοναδικότητας για την $\tilde{A}(\overline{D}^I)$.

Το σύνολο K του παραδείγματος 3.7 έχει ισχύ και στην περίπτωση των $\tilde{A}(\overline{D}^2)$ και (πιο γενικά) $\tilde{A}(\overline{D}^I)$. Με όμοιο τρόπο διαπιστώνει κανείς ότι γινόμενα συνόλων μοναδικότητας για τις $\tilde{A}(\overline{D}^{I_j})$ είναι σύνολα μοναδικότητας για την $\tilde{A}(\overline{D}^I)$ για οποιαδήποτε διαμέριση $(I_j)_{j\in J}$ του I. Η απόδειξη είναι όμοια με εκείνη της πρότασης 3.8.

5 Η περίπτωση της Ευκλείδειας μπάλας του $\mathbb{C}^n$

Στη συγκεκριμένη ενότητα επεκτείνουμε τα αποτελέσματα των ενοτήτων 3 και 4 αντικαθιστώντας το σύνολο $\overline{D}^I$ με την Ευκλείδεια μπάλα

$$\overline{B}_n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1^2| + \ldots + |z_n^2| \leq 1\} \text{ του } \mathbb{C}^n.$$

Αρκετές από τις αποδείξεις είναι παρόμοιες με τις αντίστοιχες των προηγούμενων ενοτήτων, καθώς το ανάπτυγμα Taylor μίας συνάρτησης πολλών μεταβλητών συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στην ίδια συνάρτηση, όχι μόνο σε κάθε κλειστό πολύδισκο που περιέχεται στο (ανοικτό) σύνολο ολομορφίας Ω της συνάρτησης, αλλά και σε κάθε κλειστή μπάλα με το συγκεκριμένο κέντρο, η οποία περιέχεται στο Ω ([19]).

Το σύνολο των ομοιομόρφων ορίων πολυωνύμων στο $\overline{B}_n$ (ως προς τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική στο $\mathbb{C}$) είναι η άλγεβρα $A(\overline{B}_n)$, ενώ αν αντικαταστήσουμε την Ευκλείδεια μετρική με τη χορδική μετρική χ στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, τότε λαμβάνουμε την κλάση $\tilde{A}(\overline{B}_n)$.

Ορισμός 5.1. Η $A(\overline{B}_n)$ περιέχει ακριβώς όλες τις συναρτήσεις $f : \overline{B}_n \to \mathbb{C}$, οι οποίες είναι συνεχείς στο $\overline{B}_n$ και για κάθε $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \overline{B}_n$ και για κάθε k, με $1 \leq k \leq n$, αν θέσουμε:

$$B_{z,k} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < \sqrt{1 - (|z_1|^2 + \ldots + |z_{k-1}|^2 + |z_{k+1}|^2 + \ldots + |z_n|^2)}\}$$

τότε η συνάρτηση $\overline{B}_{z,k} \ni w \to f(z_1, \ldots, z_{k-1}, w, z_{k+1}, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}$ ανήκει στην $A(\overline{B}_{z,k})$.

Ορισμός 5.2. Η $\tilde{A}(\overline{B}_n)$ περιέχει ακριβώς όλες τις συναρτήσεις $f : \overline{B}_n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ οι οποίες είναι συνεχείς στο $\overline{B}_n$ και για κάθε $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \overline{B}_n$ και για κάθε k, με $1 \leq k \leq n$, αν θέσουμε:

$$B_{z,k} = \{w \in \mathbb{C} : |w| < \sqrt{1 - (|z_1|^2 + \ldots + |z_{k-1}|^2 + |z_{k+1}|^2 + \ldots + |z_n|^2)}\}$$

τότε η συνάρτηση $\overline{B}_{z,k} \ni w \to f(z_1, \ldots, z_{k-1}, w, z_{k+1}, \ldots, z_n) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ανήκει στην $\tilde{A}(\overline{B}_{z,k})$.

Σημειώνουμε ότι η κλάση $A(\overline{D}(z, r))$ (αντίστοιχα η $\tilde{A}(\overline{D}(z, r))$) για $z \in \mathbb{C}$ και $r = 0$ περιέχει ακριβώς όλες τις (σταθερές) συναρτήσεις $f : \{z\} \to \mathbb{C}$ (αντίστοιχα $f : \{z\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$).

Σημείωση 5.3. Αν η συνάρτηση $f \in \tilde{A}(\overline{B}_n)$ ικανοποιεί τη συνθήκη $f(\zeta) = \infty$ για κάποιο $\zeta \in B_n$, τότε $f \equiv \infty$, διαφορετικά έχουμε ότι $f(B_n) \subseteq \mathbb{C}$ και η f είναι ολόμορφη στο B_n (ισοδύναμα, από το θεώρημα Hartogs, η f είναι χωριστά ολόμορφη).

Ορισμός 5.4. Έστω $K \subseteq \partial B_n$ ένα συμπαγές σύνολο, όπου:

$$\partial B_n = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : |\zeta_1|^2 + \ldots + |\zeta_n|^2 = 1\}.$$

Το K λέγεται σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{B}_n)$ (αντίστοιχα για την $\tilde{A}(\overline{B}_n)$), αν και μόνο αν, για κάθε δύο συναρτήσεις $f, g \in A(\overline{B}_n)$ (αντίστοιχα $f, g \in \tilde{A}(\overline{B}_n)$) με $f_{|K} \equiv g_{|K}$, να είναι $f \equiv g$.

Επειδή $A(\overline{B}_n) \subseteq \tilde{A}(\overline{B}_n)$, έπεται ότι κάθε συνολο μοναδικότητας για την $\tilde{A}(\overline{B}_n)$ είναι σύνολο μοναδικότητας και για την $A(\overline{B}_n)$. Δεν γνωρίζουμε όμως αν το αντίστροφο ισχύει ή όχι.

Σημείωση 5.5. Το σύνολο $X = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \partial B_n : |z_j| > 0$ για κάθε $j = = 1, \ldots, n\}$ μπορεί να γραφτεί και ως:

$$X = \bigcup_{(r_1,\ldots,r_{n-1})\in G} X_{r_1,\ldots,r_{n-1}}$$

όπου:

- $X_{r_1,\ldots,r_{n-1}} = \{(r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_{n-1}e^{i\theta_{n-1}}, r_n e^{i\theta_n}) \in \partial B_n : \theta_j \in \mathbb{R},$ για κάθε $j = 1, \ldots, n\}$
- $G = \{(r_1, \ldots, r_{n-1}) \in (0, +\infty)^{n-1} : r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2 < 1\}$
- $r_n = \sqrt{1 - (r_1^2 + \ldots + r_{n-1}^2)}$.

Το σύνολο $X_{r_1,\ldots,r_{n-1}} \cong T^n$ είναι το διακεκριμένο σύνορο του πολύδισκου $\overline{D}(0, r_1) \times \cdots \times \overline{D}(0, r_n)$, το οποίο είναι υποσύνολο του $\overline{B}_n$.

Έστω $K \subseteq \partial B_n$ με $K \cap X_{r_1,\ldots,r_{n-1}} \neq \emptyset$ για κάποιο $(r_1, \ldots, r_{n-1}) \in G$ και ας υποθέσουμε ότι η τομή $K \cap X_{r_1,\ldots,r_{n-1}}$ $(\subseteq T_{r_1} \times \cdots \times T_{r_n})$ είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{D}(0, r_1) \times \cdots \times \overline{D}(0, r_n))$ (ή για την $(\tilde{A}(\overline{D}(0, r_1) \times \cdots \times \overline{D}(0, r_n))$ αντίστοιχα), όπου:

$$T_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\} = rT \text{ για κάθε } r > 0.$$

Τότε ισχύει το ακόλουθο:

Αν $f, g \in A(\overline{B}_n)$ (ή $f, g \in \tilde{A}(\overline{B}_n)$ αντίστοιχα) με $f_{|K} \equiv g_{|K}$, τότε σύμφωνα με τα αποτελέσματα των ενοτήτων 3 και 4 έχουμε ότι

$$f_{|\overline{D}(0,r_1)\times\cdots\times\overline{D}(0,r_n)} \equiv g_{|\overline{D}(0,r_1)\times\cdots\times\overline{D}(0,r_n)}.$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή αναλυτικής συνέχισης σε πολλές μιγαδικές μεταβλητές έπεται τελικά ότι $f \equiv g$. Συνεπώς, το K είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{B}_n)$ (ή για την $\tilde{A}(\overline{B}_n)$ αντίστοιχα).

Θεώρημα 5.6. Αν $K \subseteq \partial B_n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο θετικού μέτρου στην υπερεπιφάνεια $\partial B_n = \mathbb{R}^{2n-1}$ ((πραγματικής) διάστασης $2n - 1$), τότε το K είναι συνολο μοναδικότητας για τις $A(\overline{B}_n)$ και $\tilde{A}(\overline{B}_n)$.

Απόδειξη. Το φυσιολογικό μέτρο στο ∂B_n έχει τη μορφή:

$$q(r_1, \ldots, r_{n-1}, e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})\mathrm{d}\theta_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}\theta_n \cdot \mathrm{d}r_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}r_{n-1}$$

όπου η συνάρτηση q είναι μία θετική C^∞ συνάρτηση στο

$$G = \{(r_1, \ldots, r_{n-1}) \in (0, +\infty)^{n-1} : r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2 < 1\}.$$

Από το θεώρημα Fubini για τη χαρακτηριστική συνάρτηση χ_K του K, έπεται ότι υπάρχει ένα $(r_1, \ldots, r_{n-1}) \in G$ τέτοιο ώστε το σύνολο $K \cap X_{r_1,\ldots,r_{n-1}}$ να έχει θετικό μέτρο (διάστασης n). Συνεπώς, από τα αντίστοιχα αποτελέσματα των παραγράφων 3 και 4, η προηγούμενη τομή είναι σύνολο μοναδικότητας για τον πολύδισκο $\overline{D}(0, r_1) \times \cdots \times \overline{D}(0, r_n)$. Από την προηγούμενη συζήτηση έπεται ότι το K είναι σύνολο μοναδικότητας για την $A(\overline{B}_n)$ (ή για την $\tilde{A}(\overline{B}_n)$ αντίστοιχα). Η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Τέλος, σημειώνουμε ότι υπάρχουν αρκετά παραδείγματα συνόλων $K \subseteq \partial B_n$ τα οποία είναι σύνολα μοναδικότητας για την $\tilde{A}(\overline{B}_n)$ και έχουν μηδενικό μέτρο, για παράδειγμα, έστω $K = X_{r_1,\ldots,r_{n-1}}$ για κάποιο $(r_1, \ldots, r_{n-1}) \in G$.

Βιβλιογραφία

[1] R. Aron, D. Carando, T.W Gamelin, S. Lassalle, M.Maestre. Cluster values of analytic functions on a Banach space. Math. Ann. 353 (2012), No. 2, 293 - 303.

[2] L. Brown, P.M. Gauthier, W. Hengartner. Continuous boundary behavior for functions defined in the open unit disc. Nagoya, Math. J. 57 (1975), p. 45 - 49.

[3] L. Carleson. Sets of uniqueness for functions regular in the unit disc. Acta Mathematica 87 (1952), p. 323 - 345.

[4] B.J Cole, T.W Gamelin. Representing measures and Hardy spaces for infinite polydisk algebra. Proc. London Math. Soc. (3) 53 (1986), No. 1, 112 - 142.

[5] G. Folland. Real Analysis, Modern techniques and their applications. 2nd edition 1999, Wiley series of Texts.

[6] P.M. Gauthier, W. Hengartner. Local harmonic majorants of functions sub - harmonic in the unit disc. J. Analyse Math. 26 (1973), 405 - 412.

[7] J. Globevnik. In boundaries for polydisc algebras in infinite dimensions. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 85 (1979), No. 2, 291 - 303.

[8] M. Heins. The boundary values of meromorphic functions having bounded Nevanlinna characteristic. J. Analyse Math. 18 (1967), 121 - 131.

[9] K. Hoffman. Banach Spaces of Analytic Functions. Dept. of Mathematics M.I.T, Prentice - Hall, Englwood Cliffs, W.I.

[10] S.V. Hruscev. Sets of uniqueness for the Gervey classes. Arkiv för Matematik (1977), vol. 15, issue 1 - 2, p.253 - 304.

[11] B. Jessen. The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions. Acta Mathematica, 1934, p. 249 - 322.

[12] P. Koosis. An introduction to H_p spaces. Cambridge Univ. Press, 1998.

[13] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης. Θεωρία μέτρου. Εκδόσεις συμμετρία, Αθήνα 2005.

[14] D. Maharam. On two theorems of Jessen. Proc. A.M.S (1958), p. 995 - 999.

[15] R. Narashiman. Several Complex Variables, Chicago Lectures in Mathematics.

[16] V. Nestoridis. An extension of disc algebra I. Bull. London Math. Soc. 44 (2012) No4, p. 775 - 788.

[17] W. Rudin. Real and Complex analysis. McGraw - Hill NY (1966).

[18] W. Rudin. Function Theory in Polydiscs. N.Y Amsterdam 1969, W.A Benjamin.

[19] W. Rudin. Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. Classics in Mathematics, Springer - Verlag, 2008.