ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΛΥΟΥΣΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΤΕΛΕΣΤΩΝ ΓΙΑ ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΕ ΑΠΕΙΡΟΔΙΑΣΤΑΤΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αβαράκης Δημήτριος

ΑΘΗΝΑ, 2014

Πρόλογος

Η θεωρία των ημιομάδων μίας παραμέτρου των γραμμικών τελεστών σε χώρους Banach ξεκίνησε το πρώτο μισό του προηγούμενου αιώνα, απέκτησε τον πυρήνα της το 1948 με την παραγωγή του θεωρήματος Hille - Yosida, και επέτυχε την πρώτη κορυφή της με την έκδοση 1957 του βιβλίου ”Semigroups and Functional Analysis” από τον E. Hille και R.S. Phillips. Στη δεκαετία του 1970 και του ’80, χάρη στις προσπάθειες πολλών μαθηματικών η θεωρία έφτασε σε μια κατάσταση πληρότητας, η οποία εκπροσωπείται επαρκώς στις μονογραφίες E.B. Davies [Dav80], I.A. Goldstein [Gol85], A. Pazy [Paz83], και άλλα.
Σήμερα, η κατάσταση χαρακτηρίζεται από πολλαπλές εφαρμογές αυτής της θεωρίας, όχι μόνο στους παραδοσιακούς τομείς, όπως μερικές διαφορικές εξισώσεις ή στοχαστικές διαδικασίες. Οι ημιομάδες έχουν γίνει σημαντικά εργαλεία για την μελέτη Ολοκληρωτικών - διαφορικών εξισώσεων και συναρτησιακών διαφορικών εξισώσεων,τόσο στην κβαντική μηχανική όσο και στην απειροδιάστατη θεωρία ελέγχου. Οι μέθοδοι των ημιομάδων εφαρμόζονται με μεγάλη επιτυχία σε συγκεκριμένες εξισώσεις που προκύπτουν, π.χ. στη δυναμική του πληθυσμού ή τη θεωρία των μεταφορών. Είναι λοιπόν λογικό πώς η εν λόγω θεωρία αντιμετωπίζει μεγάλο ανταγωνισμό από άλλες προσεγγιστικές μεθόδους σε όλα αυτά τα πεδία, όμως λόγω των εργαλείων που προσφέρει η συναρτησιακή ανάλυση, αποκτά πλεονέκτημα. Συγκεκριμένα η θεωρία των ημιομάδων φραγμένων γραμμικών τελεστών λόγω της ιδιότητας των ημιομάδων και της ισχυρής συνέχειας σε κατάλληλο τοπολογικό χώρο, έχουν μεγάλο ενδιαφέρον στην μελέτη διαφόρων προβλημάτων.
Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία θα εξετάσουμε το αφηρημένο πρόβλημα Cauchy, το οποίο μοντελοποιεί ευρεία κλάση προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων, υπό τη σκοπιά της θεωρίας των ημιομάδων φραγμένων και γραμμικών τελεστών. Συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο θα αναφέρουμε βασικούς ορισμούς τελεστών και βασικά στοιχεία ανάλυσης σε χώρους Banach. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα αναλύσουμε πλήρως τα θεωρήματα Hille - Yosida, Lumer - Phillips και Stone,τα οποία μας δίνουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη απειροστού γεννήτορα μιας ημιομάδας ή ομάδας. Επίσης θα εξετάσουμε τις ιδιότητες του επιλύοντα τελεστή, ο οποίος μας δίνει έναν τύπο για την κατασκευή της λύ-

σης του προβλήματος. Έπειτα θα μελετήσουμε τις αναλυτικές ημιομάδες οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή σε προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων παραβολικού τύπου καθώς και τη θεωρία των ομάδων οι οποίες σχετίζονται άμεσα με το θεώρημα Stone. Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο θα δώσουμε κάποια παραδείγματα - εφαρμογές της θεωρίας που αναπτύχθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο, ενώ παράλληλα θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη και μοναδικότητα κλασσικής, ισχυρής και ήπιας λύσης για το αφηρημένο πρόβλημα Cauchy. Τέλος θα δώσουμε μερικές εφαρμογές φυσικών προβλημάτων που σχετίζονται με τον ηλεκτρομαγνητισμό και την εξίσωση θερμότητας,και χρησιμοποιώντας τη θεωρία που έχουμε αναπτύξει θα εξάγουμε τις λύσεις των εν λόγω προβλημάτων και θα μελετήσουμε την καλή τους τοποθέτηση.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Ιωάννη Στρατή για την επίβλεψη της παρούσας εργασίας και την επιστημονική και ηθική του υποστήριξη. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής καθηγητή κ. Χριστόδουλο Αθανασιάδη και αναπληρωτή καθηγητή κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη για τη βοήθεια τους και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους. Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον μεταδιδακτορικό ερευνητή κ. Κωνσταντίνο Λιάσκο για τις ενδιαφέρουσες συζητήσεις και παρατηρήσεις του σε θέματα θεωρίας τελεστών και τον κ. Κωνσταντίνο Καραγιάννη για την βοήθεια του σε θέματα συγγραφής στο LaTex.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ορισμοί και στοιχεία ανάλυσης σε χώρους Banach

1.1 Γραμμικοί τελεστές σε χώρους Banach

Ορισμός 1.1.1. Έστω E, F χώροι Banach. Ένας μη φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον E στον F είναι μία γραμμική απεικόνιση $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ που ορίζεται σε ένα γραμμικό υπόχωρο $D(A) \subset E$ με τιμές στον F. Το σύνολο $D(A)$ καλείται πεδίο ορισμού του A. Ο A καλείται φραγμένος (συνεχής) αν $D(A) = E$ και αν υπάρχει σταθερά

$$c \geq 0 : \|Au\| \leq c\|u\| \; \forall u \in E.$$

Έτσι ορίζουμε την νόρμα του τελεστή A ως:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup \frac{\|Au\|}{\|u\|}, u \neq 0.$$

Ορισμός 1.1.2. Ένας γραμμικός τελεστής A καλείται κλειστός αν $\forall \{x_n\} \in D(A)$ με $x_n \to x$ και $Ax_n \to y$ έπεται ότι $y = Ax$ και $x \in D(A)$.

Ορισμός 1.1.3. Έστω $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ ένας γραμμικός τελεστής. Ο A καλείται πυκνά ορισμένος αν $\overline{D(A)} = X$.

Ορισμός 1.1.4. Έστω A ένας τελεστής πυκνά ορισμένος σε ένα χώρο Hilbert. Ο (Ερμιτιανός) συζυγής τελεστής A^* ορίζεται από την εξίσωση

$$< Af, g > = < f, A^*g >, \forall f \in D(A), g \in D(A^*).$$

Σχόλιο. Ο παραπάνω ορισμός αναδιατυπώνεται ως εξής:

$$g \in D(A^*) \iff f \mapsto < Af, g >$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στο $D(A)$ (το οποίο επεκτείνουμε μέσω συνέχειας στο $\overline{D(A)} = H$). Συνεπώς

$$\exists! h \in H : < Af, g > = < f, h > \forall f \in D(A).$$

Σε αυτή την περίπτωση λόγω του θεωρήματος αναπαράστασης Riesz ορίζουμε $A^* g = h$.

Σχόλιο. Ο συζυγής τελεστής είναι πάντα κλειστός. Όμως το πεδίο ορισμού του μπορεί να μην είναι πυκνό στο δυικό χώρο.Στην περίπτωση όπου έχουμε αυτοπαθή χώρο (π.χ. $L^p, 1 < p < \infty$) για έναν κλειστό τελεστή με πεδίο ορισμού πυκνό στο χώρο έχουμε ότι και το πεδίο ορισμού του συζυγούς τελεστή θα είναι πυκνό στον δυικό χώρο.

Σχόλιο. Για τον συζυγή τελεστή ισχύει ότι $\sigma(A^*) = \sigma(A)$ και $R(\lambda, A^*) = (R(\lambda, A))^*$.

Ορισμός 1.1.5. Έστω H ένας χώρος Hilbert. Ένας μη φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ καλείται μονότονος αν ικανοποιεί την σχέση

$$< Au, u > \geq 0, \forall u \in D(A),$$

ενώ καλείται μεγιστικά μονότονος αν επιπλέον $\text{Ran}(I + A) = H,$ ισοδύναμα αν $\forall f \in H \; \exists \; u \in D(A)$ τέτοιο ώστε $u + Au = f$.

Ορισμός 1.1.6. Έστω $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ ένας μη φραγμένος γραμμικός τελεστής πυκνά ορισμένος στον H. Ο A καλείται συμμετρικός αν

$$< Au, v > = < u, Av > \;\; \forall u, v \in D(A)$$

και αυτοσυζυγής αν επιπλέον $D(A^*) = D(A)$. Τότε φυσικά έπεται ότι $A^* = A$.

Σχόλιο. Στην περίπτωση των φραγμένων τελεστών οι έννοιες της αυτοσυζυγίας και της συμμετρίας ταυτίζονται. Επίσης να επισημάνουμε ότι αν ο τελεστής A είναι μεγιστικά μονότονος τότε ο A είναι συμμετρικός $\Leftrightarrow$ ο A είναι αυτοσυζυγής.

Ορισμός 1.1.7. Έστω X χώρος Banach και X^* ο δυικός του. Ένας τελεστής $A : D(A) \subset X \to X$ καλείται αποσβεστικός αν $\forall x \in D(A)$ έπεται ότι

$$\exists x^* \in X^* : \text{Re} < Ax, x^* > \leq 0.$$

όπου $< .,. >$ το δυικό ζεύγος. Αν έχουμε χώρο Hilbert τότε λόγω του θεωρήματος αναπαράστασης Riesz έπεται ότι Re $< Ax, x > \leq 0$.

Σχόλιο. Τις περισσότερες φορές για να εξετάσουμε αν ένας τελεστής είναι αποσβεστικός αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η σχέση $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$ $, \forall x \in D(A)$ και $\lambda > 0$.

Ορισμός 1.1.8. Έστω A ένας τελεστής σε ένα χώρο Hilbert . Ο A καλείται αντιαυτοσυζυγής αν $A^* = -A$.

Σχόλιο. Στην περίπτωση όπου έχουμε μιγαδικό χώρο Hilbert H ο τελεστής A είναι αντιαυτοσυζυγής $\iff$ iA είναι αυτοσυζυγής.

Ορισμός 1.1.9. Ο τελεστής A καλείται μοναδιαίος (unitary) αν $A^* = A^{-1}$. Με άλλα λόγια ο A είναι μοναδιαίος αν είναι ισομετρία και επί.

Σχόλιο. Σημειώνουμε ότι ένας τελεστής A είναι ισομετρία αν $\|Ax\| = \|x\|,\ \forall x \in X$, ενώ ο A είναι επί αν $\mathrm{Ran}(A)$ είναι κλειστό και πυκνό σύνολο.

Ορισμός 1.1.10. Έστω Δ ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου. Μία οικογένεια $J(\lambda), \lambda \in \Delta$, φραγμένων γραμμικών τελεστών στον χώρο Banach X που ικανοποιεί την σχέση $J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu)\ \forall \lambda, \mu \in \Delta$ καλείται ψευδοεπιλύων τελεστής στο Δ.

Ορισμός 1.1.11. Έστω $\mathcal{L}(E, E)$ ο χώρος των φραγμένων γραμμικών τελεστών από το E στο E . Ένας τελεστής $P : E \longrightarrow E$ καλείται ορθογώνια προβολή $\iff P = P^2 = P^*$.

1.2 Φάσμα

Ορισμός 1.2.1. Ορίζουμε

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \to X \text{ να είναι ένα προς ένα και επί } \}$$

το επιλύον σύνολο και το συμπλήρωμά του $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$, το φάσμα του A.

Ορισμός 1.2.2. Έστω $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$, ένας κλειστός τελεστής. Καλούμε σημειακό φάσμα του A το σύνολο $P_\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A$ να μην είναι 1-1$\}$. Επίσης, κάθε $\lambda \in P_\sigma(A)$ καλείται ιδιοτιμή και κάθε $0 \neq x \in D(A)$ που ικανοποιεί την σχέση $\lambda x - Ax = 0$ καλείται ιδιοδιάνυσμα του A.

Ορισμός 1.2.3. Έστω $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$, ένας κλειστός τελεστής. Καλούμε προσεγγιστικό σημειακό φάσμα του τελεστή το σύνολο $A_\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A$ να μην είναι 1-1 ή $\mathrm{Ran}(\lambda I - A)$ να μην είναι κλειστό στον X$\}$.

Ορισμός 1.2.4. Έστω $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$, ένας κλειστός τελεστής. Καλούμε συμπληρωματικό φάσμα του το σύνολο $R_\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Ran}(\lambda I - A)$ να μην είναι πυκνό στον X$\}$.

Σχόλιο. Προφανώς εύκολα βλέπουμε ότι $P_\sigma(A) \subset A_\sigma(A)$.Το προσεγγιστικό σημειακό φάσμα αποτελεί γενίκευση του σημειακού φάσματος και έχει το πλεονέκτημα ότι δεν είναι κενό εκτός βέβαια αν $\sigma(A) = \varnothing$ ή $\sigma(A) = \mathbb{C}$. Επίσης σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς εξάγουμε την σχέση $\sigma(A) = A_\sigma(A) \bigcup R_\sigma(A)$.

Ορισμός 1.2.5. Έστω $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ ένας τελεστής μη φραγμένος. Ορίζουμε τον επιλύοντα τελεστή ως :

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1} \ \forall \lambda \in \rho(A),$$

όπου $\rho(A)$ το επιλύον σύνολο του A.

Σχόλιο. Στην περίπτωση όπου ο τελεστής A είναι φραγμένος, ο επιλύων τελεστής μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά, πράγμα που φυσικά δεν ισχύει όταν ο τελεστής είναι μη φραγμένος (γενική περίπτωση). Συνεπώς θα αναζητήσουμε μια αναπαράστασή του μέσα από μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

1.3 Ημιομάδες γραμμικών τελεστών

Ορισμός 1.3.1. Έστω X ένας χώρος Banach. Μία μονοπαραμετρική οικογένεια $T(t), 0 \leq t < \infty$, φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον X καλείται C_0 ημιομάδα φραγμένων γραμμικών τελεστών στον X αν

(i) $T(0) = I$

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall \, t, s \geq 0$

(iii) $\lim\limits_{t \to 0} T(t)x = x \quad \forall \, x \in X$.

Σχόλιο. Έστω X ένας χώρος Banach. Μία μονοπαραμετρική οικογένεια $T(t)$, $-\infty < t < \infty$ φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον X καλείται C_0 ομάδα φραγμένων γραμμικών τελεστών στον X αν η δεύτερη σχέση του παραπάνω ορισμού ισχύει $\forall \, t, s \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.3.2. Ο γραμμικός τελεστής A που ορίζεται ως

$$Ax := \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

και έχει πεδίο ορισμού $D(A) = \{x \in X : \text{να υπάρχει το παραπάνω όριο}\}$ καλείται απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$.

Ορισμός 1.3.3. Έστω $T(t)$ μια C_0 ημιομάδα φραγμένων γραμμικών τελεστών. Η ημιομάδα αυτή καλείται συστολική αν $\|T(t)\| \leqslant 1$.

Ορισμός 1.3.4. Λέμε ότι ένας γραμμικός τελεστής $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ καλείται sectorial αν υπάρχουν σταθερές $\omega \in \mathbb{R}, \ \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi), M > 0$ έτσι ώστε:

(i) $\rho(A) \supset S_{\theta,\omega} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \omega, |\arg(\lambda - \omega)| < \theta \ \}$

(ii) $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda-\omega|}$, $\lambda \in S_{\theta,\omega}$.

Σχόλιο. Κάθε sectorial τελεστής A είναι κλειστός διότι $\rho(A) \neq \emptyset$.

Ορισμός 1.3.5. Έστω $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < argz < \phi_2 \ , \ \phi_1 < 0 < \phi_2\}$ και $T(z)$ φραγμένος γραμμικός τελεστής $\forall z \in \Delta$. Η οικογένεια $\{T(z)\}$ καλείται αναλυτική ημιομάδα στο Δ αν:

(i) $z \mapsto T(z)$ αναλυτική στο Δ

(ii) $T(0) = I$ και $\|T(z)x - x\| \longrightarrow 0$ καθώς $z \to 0$, $z \in \Delta$, $\forall x \in X$

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), \forall z_1, z_2 \in \Delta$.

Σχόλιο. Η ημιομάδα $T(z)$ καλείται αναλυτική αν είναι αναλυτική σε κάποιο τομέα Δ που περιέχει το σύνολο $[0, \infty)$ και ο περιορισμός της στον πραγματικό άξονα είναι μία C_0 ημιομάδα. Συνεπώς είναι λογικό να ενδιαφερόμαστε για την επέκταση μιας δοσμένης C_0 ημιομάδας σε αναλυτική ημιομάδα σε κάποιο τομέα Δ γύρω από τον μη αρνητικό άξονα των πραγματικών αριθμών.

1.4 Στοιχεία ανάλυσης σε χώρους Banach

Ορισμός 1.4.1. Θεωρούμε συναρτήσεις $x(t)$ ορισμένες σε ένα διάστημα $[0, T]$ του πραγματικού άξονα και με σύνολο τιμών ένα χώρο Banach E. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής στο σημείο t_0 αν $\|x(t) - x(t_0)\| \to 0$ καθώς $t \to t_0$ και συνεχής στο διάστημα $[0, T]$ αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[0, T]$.

Σχόλιο. Το σύνολο $C(E; [0, T])$ είναι χώρος Banach εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|x\|_{C(E;[0,T])} = \max\|x(t)\|_E \quad \forall 0 \leqslant t \leqslant T$. Σύγκλιση με την παραπάνω νόρμα σημαίνει ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[0, T]$.

Ορισμός 1.4.2. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $x(t)$ έχει δεξιά (αριστερή) παράγωγο στο σημείο t_0 αν

$$\exists y \in E : \|\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - y\| \to 0,$$

καθώς $\Delta t \to 0^+ (\Delta t \to 0^-)$. Γράφουμε τότε ότι$\frac{d_+x(t_0)}{dt} = y \quad (\frac{d_-x(t_0)}{dt} = y)$. Αν λοιπόν η δεξιά και η αριστερή παράγωγος υπάρχουν και συμπίπτουν τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη στο σημείο t_0 και η παράγωγος της σε αυτό το σημείο είναι : $x'(t_0) = \frac{dx(t_0)}{dt} = y$.

Σχόλιο. Μία συνάρτηση $x(t)$ είναι διαφορίσιμη σε ένα διάστημα αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο t_0 του διαστήματος.Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x'(t)$ είναι ένας χώρος Banach. Αν είναι και συνεχής τότε λέμε ότι η $x'(t)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε με ανάλογο τρόπο την έννοια της $n-$ οστής παραγώγου.

Ορισμός 1.4.3. Έστω G ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου και E ένας χώρος Banach. Θα λέμε ότι το στοιχείο x_0' είναι η παράγωγος της συνάρτησης $x(z)$ στο σημείο z_0 αν

$$\|\frac{x(z_0+\Delta z)-x(z_0)}{\Delta z}-x_0'\| \to 0 \text{ καθώς } \Delta z \to 0.$$

Σχόλιο. Η συνάρτηση $x(z)$ καλείται αναλυτική στην περιοχή G αν έχει παράγωγο σε κάθε σημείο αυτής της περιοχής. Συνεπώς σε μια γειτονιά του σημείου $x_0 \in G$ η συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά

$$x(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

όπου οι συντελεστές a_n είναι στοιχεία του χώρου E και δίνονται από τη σχέση $a_n=\frac{1}{n!}x^{(n)}(z_0)$. Επίσης ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε δυναμοσειρά του παραπάνω τύπου ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση της οποίας το σύνολο σύγκλισης είναι ένας κύκλος με ακτίνα r η οποία δίνεται από τον τύπο $\frac{1}{r}=\overline{\lim}_{n\to\infty}\|a_n\|^{\frac{1}{n}}$ (τύπος Cauchy-Hadamard).

Σχόλιο. Αν η συνάρτηση $x(z)$ είναι αναλυτική στο G τότε για κάθε γραμμικό συναρτησιακό f η βαθμωτή συνάρτηση $f(x(z))$ είναι αναλυτική στοG. Το αντίστροφο ισχύει επίσης. Συνεπώς μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τις αναλυτικές συναρτήσεις με σύνολο τιμών ένα χώρο Banach από τις βαθμωτές αναλυτικές συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε το θεώρημα Liouville: αν $x(z)$ είναι ακέραια (ολόμορφη στο $\mathbb{C}$) και φραγμένη τότε είναι αναγκαστικά σταθερή. Επίσης η νόρμα $\|x(z)\|$ μιας αναλυτικής στοG συνάρτησης $x(z)$ είναι λογαριθμικά υφαρμονική συνάρτηση στο G και ορίζεται ως $\|x(z)\|=\sup_{\|f\|=1}|f(x(z))|$. Για τον ορισμό της υφαρμονικής συνάρτησης βλέπε [3].

Ορισμός 1.4.4. Έστω ότι η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,T]$. Τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα αυτής ως:

$$\int_a^b x(t)dt := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N} x(t_k)\Delta t_k.$$

Σε αυτή την περίπτωση το όριο το αντιλαμβανόμαστε υπό την έννοια της σύγκλισης που σχετίζεται με την νόρμα του εν λόγω χώρου Banach E, καθώς η διάμετρος της διαμέρισης $a=t_0<t_1<....<t_N=b$ τείνει στο μηδέν.

Σχόλιο. Όπως και στην κλασσική ανάλυση ισχύει ότι

$$\| \int_a^b x(t)dt \| \leq \int_a^b \|x(t)\| dt.$$

Επίσης αν η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής στο $[a, \infty)$ τότε ισχύει ότι :

$$\int_a^\infty x(t)dt = \lim_{b \to \infty} \int_a^b x(t)dt.$$

Αν φυσικά το όριο που σχετίζεται με την νόρμα του χώρου E υπάρχει τότε λέμε ότι το ανωτέρω ολοκλήρωμα συγκλίνει, ενώ συγκλίνει απολύτως αν

$$\int_a^\infty \|x(t)\| dt < \infty.$$

Ορισμός 1.4.5. Με ανάλογο τρόπο όπως στον προηγούμενο ορισμό μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε μία περιοχή G του μιγαδικού επιπέδου κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης Jordan Γ που κείται σε αυτή την περιοχή.Αν επιπλέον η συνάρτηση είναι αναλυτική στο G τότε από τον τύπο του Cauchy έχουμε ότι

$$x(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{x(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ορισμός 1.4.6. Έστω $x(t)$ συνεχής στο $[0, \infty)$ με τιμές σε ένα χώρο Banach E που ικανοποιεί την σχέση $\|x(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Τότε για $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ το ολοκλήρωμα

$$X(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} x(t)dt,$$

συγκλίνει απολύτως. Η συνάρτηση $X(\lambda)$ με τιμές στον χώροE και αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ καλείται μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $x(t)$.

Σχόλιο. Τις περισσότερες φορές ενδιαφερόμαστε για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Συνεπώς $\forall t > 0$ ορίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό ως

$$x(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{a - i\infty}^{a + i\infty} \frac{X(\lambda)}{\lambda} \mathrm{e}^{\lambda t} d\lambda \right),$$

όπου $a > \max(\omega, 0)$.

Ορισμός 1.4.7. Έστω A ένας τελεστής ο οποίος δεν είναι κλειστός. Τότε ο A έχει κλειστή επέκταση $\iff$ $x_n \to 0, (x_n \in D(A))$ και $Ax_n \to y$ έπεται ότι $y = 0$. Η ελάχιστη κλειστή επέκταση του τελεστή A καλείται κλειστή θήκη και συμβολίζεται με $\overline{A}$. Αν ο A έχει κλειστή επέκταση τότε αν $x_n \to x$ $(x_n \in D(A))$ και $Ax_n \to y$ έπεται ότι $y = \overline{A}x$, δηλαδή $\forall x \in D(A)$

$$\overline{A} \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} Ax_n.$$

Σχόλιο. Αν ο τελεστής A είναι κλείσιμος τότε έχουμε ότι:

(i) $\overline{A}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(Ax)$

(ii) $\overline{A}\int x(t)dt = \int Ax(t)dt$

Αν τώρα ο τελεστής A είναι κλειστός ($A = \overline{A}$) τότε στην θέση του $\overline{A}$ στις παραπάνω σχέσεις έχουμε τον τελεστή A. Άρα βλέπουμε εύκολα πόσο χρήσιμη υπόθεση είναι το γεγονός πως ο τελεστής A είναι κλειστός.

Σχόλιο. Ένας κλειστός τελεστής A που ορίζεται σε ολόκληρο το χώρο Banach E είναι φραγμένος, λόγω του θεωρήματος κλειστού γραφήματος. Επίσης αν ο A είναι κλειστός και υπάρχει ο A^{-1} τότε και ο A^{-1} είναι κλειστός, ενώ αν ο A^{-1} είναι φραγμένος τότε ο A είναι κλειστός.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε δυο πολύ χρήσιμα θεωρήματα στη θεωρία ημιομάδων τα οποία μας δίνουν τη λύση στο αφηρημένο πρόβλημα Cauchy. Επίσης θα εξετάσουμε αρκετές χρήσιμες προτάσεις ανάλογα με τον χαρακτηρισμό της κάθε ημιομάδας (π.χ. συστολική), αλλά και του απειροστού της γεννήτορα.

Κεφάλαιο 2

Ημιομάδες φραγμένων γραμμικών τελεστών

2.1 Ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα

Θεώρημα 2.1.1. *Ένας γραμμικός τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας ομοιόμορφα συνεχούς ημιομάδας $T(t) \iff A$ φραγμένος.*

Σχόλιο. Η παραπάνω περίπτωση είναι ιδανική καθώς τα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε ο απειροστός γεννήτορας είναι μη φραγμένος και συνεπώς το καλύτερο που μπορούμε να ελπίζουμε είναι να παράγει μια ισχυρά συνεχή ημιομάδα (C_0 ημιομάδα). Να σημειώσουμε ότι η ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα της παραπάνω πρότασης αναφέρεται στην ομοιόμορφη τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω A ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο Banach X. Θέτουμε

$$T(t) = \mathrm{e}^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

Το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης συγκλίνει στην ομοιόμορφη τοπολογία $\forall\ t \geq 0$ και ορίζει για κάθε t, ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή $T(t)$. Εύκολα βλέπουμε ότι $T(0) = I$ και $T(t+s) = T(t)T(s)$. Επίσης

$$\|T(t) - I\| \leq t\|A\|\mathrm{e}^{t\|A\|}$$

και

$$\|\frac{T(t) - I}{t} - A\| \leq \|A\|\|T(t) - I\|$$

Συνεπώς βλέπουμε ότι η ημιομάδα $T(t)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα φραγμένων γραμμικών τελεστών και ο τελεστής A είναι ο απειροστός της γεννήτορας.

Έστω τώρα αντίστροφα ότι $T(t)$ είναι μια ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα φραγμένων τελεστών στον χώρο X. Σταθεροποιούμε $\rho > 0$ αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $\|I - \rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds\| < 1$.Τότε έχουμε ότι $\rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds$ είναι αντιστρέψιμο και άρα $\int_0^\rho T(s)ds$ είναι αντιστρέψιμο. Επίσης έχουμε ότι

$$h^{-1}(T(h) - I)\int_0^\rho T(s)ds = h^{-1}(\int_0^\rho T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds) =$$

$$= h^{-1}(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds)$$

και συνεπώς παίρνουμε ότι

$$h^{-1}(T(h) - I) = (h^{-1}\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - h^{-1}\int_0^h T(s)ds)(\int_0^\rho T(s)ds)^{-1}.$$

Καθώς λοιπόν $h \to 0$ βλέπουμε ότι η ποσότητα $h^{-1}(T(h) - I)$ συγκλίνει κατά νόρμα και συνεπώς ισχυρά στο φραγμένο γραμμικό τελεστή

$$(T(\rho) - I)(\int_0^\rho T(s)ds)^{-1},$$

ο οποίος είναι και ο απειροστός γενήτορας της ημιομάδας $T(t)$. □

Λήμμα 2.1.2. *Έστω $T(t)$ μια ομοιόμορφα συνεχής ημιομάδα φραγμένων γραμμικών τελεστών. Τότε*

(i) Υπάρχει σταθερά $\omega \geq 0 : \|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.

(ii) Υπάρχει μοναδικός φραγμένος γραμμικός τελεστής A τέτοιος ώστε $T(t) = e^{tA}$.

(iii) Ο τελεστής A του (ii) είναι ο απειροστός γενήτορας της ημιομάδας $T(t)$.

(iv) Η απεικόνιση $t \mapsto T(t)$ είναι διαφορίσιμη στην ομοιόμορφη τοπολογία και ισχύει ότι $\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$.

2.2 Ισχυρά συνεχής ημιομάδα

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση της ισχυρά συνεχούς ημιομάδας που αποτελεί το βασικό μας εργαλείο,στην προσπάθεια να μελετήσουμε την λύση του αφηρημένου προβλήματος Cauchy.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω $T(t)$ μια C_0 ημιομάδα. Τότε υπάρχουν σταθερές $\omega \geq 0, M \geq 1 : \|T(t)\| \leq Me^{\omega t},\ \forall\ 0 \leq t < \infty$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $\|T(t)\|$ να είναι φραγμένη $\forall\ 0 \leq t \leq \eta$. Αν αυτό δεν ισχύει τότε υπάρχει ακολουθία $\{t_n\} : t_n \geq 0, \lim_{n\to\infty} t_n = 0$ και $\|T(t_n)\| \geq n$. Από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος έπεται ότι για κάποιο $x \in X$, $\|T(t_n)\|$ είναι μη φραγμένη, και άρα έχουμε άτοπο λόγω της ισχυρής συνέχειας της ημιομάδας $T(t)$. Συνεπώς $\|T(t)\| \leq M$, $0 \leq t \leq \eta$. Αφού όμως $\|T(t)\| = 1$ τότε $M \geq 1$. Θέτουμε $\omega = \eta^{-1}\log M \ \geq 0$. Τότε δεδομένου $t \geq 0$ έχουμε ότι $t = n\eta + \delta$ όπου $0 \leq \delta < \eta$ και από την ιδιότητα της ημιομάδας έχουμε ότι

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq MM^{\frac{t}{\eta}} = M\mathrm{e}^{\omega t}.$$

□

Λήμμα 2.2.2. *Έστω $T(t)$ μια C_0 ημιομάδα και A ο απειροστός της γεννήτορας. Τότε ισχύουν τα παρακάτω :*

(i) $\forall x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

(ii) $\forall x \in X$, *έπεται ότι* $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ *και*

$$A\left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

(iii) $\forall x \in D(A)$, *έπεται ότι* $T(t)x \in D(A)$ *και*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

(iv) $\forall x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(y)Ax dy = \int_s^t AT(y)x dy.$$

Λήμμα 2.2.3. *Έστω A ο απειροστός γεννήτορας μιας C_0 ημιομάδας $T(t)$. Τότε ο τελεστής A είναι κλειστός και ισχύει ότι $\overline{D(A)} = X$.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds.$$

Από τη σχέση (ii) του προηγούμενου λήμματος έπεται ότι $x_t \in D(A)$ και από την σχέση (i) έπεται ότι $x_t \to x$, καθώς $t \to 0$. Άρα $\overline{D(A)} = X$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο τελεστής A είναι κλειστός. Έστω λοιπόν $\{x_n\} \in D(A), x_n \to x$ και $Ax_n \to y$ καθώς $n \to \infty$. Από τη σχέση (iv) του προηγούμενου λήμματος έπεται ότι

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_nds.$$

Συνεπώς για $n \to \infty$ έχουμε ότι

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds$$

και διαιρώντας με $t > 0$ καθώς $t \to 0$ βλέπουμε ότι $x \in D(A)$ και $Ax = y$. □

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω $T(t), S(t)$ C_0 ημιομάδες φραγμένων γραμμικών τελεστών με απειροστούς γεννήτορες A, B αντιστοίχως. Αν $A = B$ τότε $T(t) = S(t)$ $\forall t \geq 0$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in D(A) = D(B)$.Από τη σχέση (iii) του λήμματος 2.2.2 έπεται ότι η απεικόνιση $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ είναι διαφορίσιμη. Συνεπώς έχουμε ότι

$\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x = -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x =$

$-T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.$

Άρα η απεικόνιση $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ είναι σταθερή και οι τιμές της στα σημεία $s = 0$ και $s = t$ είναι οι ίδιες. Συνεπώς $T(t)x = S(t)x \;\; \forall x \in D(A)$. Όμως έχουμε ήδη δείξει ότι $\overline{D(A)} = X$ και οι ημιομάδες $T(t), S(t)$ είναι φραγμένες και άρα από το θεώρημα Banach- Steinhaus έχουμε ότι $T(t)x = S(t)x \;\; \forall x \in X$. □

Σχόλιο. Έχουμε δείξει ότι αν ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$ τότε $\overline{D(A)} = X$. Στην πραγματικότητα ισχύει ότι το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ είναι πυκνό στο χώρο X.

2.3 Θεώρημα Hille - Yosida

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε ένα από τα πιο βασικά θεωρήματα στη θεωρία ημιομάδων το οποίο μας δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να αποτελεί ο τελεστής A τον απειροστό γεννήτορα μιας C_0 συστολικής ημιομάδας. Ξεκινώντας θα δώσουμε μια ειδική μορφή του εν λόγω θεωρήματος και παρακάτω θα διατυπώσουμε και τη γενικότερη εκδοχή του.

Θεώρημα 2.3.1. *(Hille-Yosida) Ένας γραμμικός μη φραγμένος τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας C_0 συστολικής ημιομάδας $T(t), t \geq 0$ αν και μόνο αν*

(i) *A κλειστός και $\overline{D(A)} = X$*

(ii) *$\mathbb{R}^+ \subseteq \rho(A)$ και $\forall \lambda > 0$ ισχύει ότι $\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Αν A είναι ο απειροστός γεννήτορας της C_0 συστολικής ημιομάδας $T(t)$ τότε είναι προφανώς κλειστός και πυκνά ορισμένος. Έτσι $\forall \lambda > 0$ και $x \in X$ ορίζουμε

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

Αφού η απεικόνιση $t \mapsto T(t)x$ είναι συνεχής και ομοιόμορφα φραγμένη το ανωτέρω ολοκλήρωμα υπάρχει, και ορίζει έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή $R(\lambda)$ ο οποίος ικανοποιεί την σχέση

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|.$$

Επίσης $\forall h > 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}(T(t+h)x - T(t)x)dt = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{h}\int_0^h \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned}$$

Καθώς λοιπόν $h \to 0$ το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης συγκλίνει στο $\lambda R(\lambda)x - x$. Άρα $\forall x \in X$ και $\lambda > 0$,έπεται ότι $R(\lambda)x \in D(A)$ και $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$ ή ισοδύναμα

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I.$$

Επίσης $\forall x \in D(A)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)Ax dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} AT(t)x dt = \\ &= A\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x dt\right) = AR(\lambda)x. \end{aligned}$$

Να σημειωθεί ότι στο παραπάνω προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την κλειστότητα του τελεστή A. Συνεπώς έπεται ότι

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \forall x \in D(A)$$

και άρα

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} \ \forall \lambda > 0.$$

$\square$

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο μέλος του θεωρήματος Hille- Yosida θα χρειαστούμε κάποια βοηθητικά λήμματα.

Λήμμα 2.3.2. *Έστω ότι ο τελεστής A ικανοποιεί τις υποθέσεις (i) και (ii) του θεωρήματος Hille - Yosida και $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Τότε*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x \ , \forall x \in X.$$

Ορίζουμε τώρα τους συντελεστές Yosida ως εξής

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda; A) = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I, \ \forall \lambda > 0.$$

Λήμμα 2.3.3. *Έστω ότι ο τελεστής A ικανοποιεί τις υποθέσεις (i) και (ii) του θεωρήματος Hille- Yosida. Αν A_λ είναι οι συντελεστές Yosida του A τότε ισχύει ότι*

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax \ , \forall x \in D(A).$$

Λήμμα 2.3.4. *Έστω ότι ο τελεστής A ικανοποιεί τις υποθέσεις (i) και (ii) του θεωρήματος Hille - Yosida. Αν A_λ είναι οι συντελεστές Yosida του τελεστή A τότε ο A_λ είναι ο απειροστός γεννήτορας της ομοιόμορφα συνεχούς συστολικής ημιομάδας e^{tA_λ}. Επίσης, $\forall x \in X, \ \lambda, \mu > 0$ έχουμε ότι*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) Τώρα είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τα παραπάνω λήμματα το δεύτερο μέρος του θεωρήματος Hille-Yosida. Έστω $x \in D(A)$, τότε

$$\|\mathrm{e}^{tA_\lambda}x - \mathrm{e}^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\|.$$

Λόγω της παραπάνω σχέσης και του δεύτερου λήμματος έχουμε ότι $\forall x \in D(A)$, $\mathrm{e}^{tA_\lambda}x$ συγκλίνει καθώς $\lambda \to \infty$ και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε φραγμένα διαστήματα. Αφού $\overline{D(A)} = X$ και $\|\mathrm{e}^{tA_\lambda}x\| \leq 1$ έπεται ότι

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda}x = T(t)x, \ \forall x \in X.$$

Συνεπώς βλέπουμε εύκολα ότι $T(0) = I$, ικανοποιείται η ιδιότητα της ημιομάδας λόγω της παραπάνω σχέσης και $\|T(t)\| \leq 1$. Επίσης η απεικόνιση $t \mapsto T(t)x$ είναι συνεχής $\forall t \geq 0$, ως το ομοιόμορφο όριο των συνεχών συναρτήσεων $t \mapsto e^{tA_\lambda}x$. Άρα η ημιομάδα $T(t)$ είναι C_0 συστολική ημιομάδα στον X. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξή μας αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας της ημιομάδας $T(t)$. Έστω $x \in D(A)$, τότε

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}(\mathrm{e}^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{sA_\lambda}A_\lambda x ds = \int_0^t T(s)Axds.$$

Έστω τώρα ότι ο τελεστής B είναι ο απειροστός γεννήτορας της ημιομάδας $T(t)$ και έστω ότι $x \in D(A)$. Διαιρώντας την παραπάνω σχέση με $t > 0$ και παίρνοντας το όριο $t \to 0$ έχουμε ότι $x \in D(B)$ και $Bx = Ax$. Άρα $B \supseteq A$. Όμως αφού ο B είναι ο απειροστός γεννήτορας της ημιομάδας $T(t)$, έπεται από τις υποθέσεις (i), (ii) του θεωρήματος ότι $1 \in \rho(B)$. Υποθέτουμε ότι $1 \in \rho(A)$. Αφού όμως $B \supseteq A$ τότε $(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X$, και συνεπώς $D(B) = (I - B)^{-1}X = D(A)$. Άρα $A = B$. □

Σχόλιο. Αν A είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας συστολικής C_0 ημιομάδας $T(t)$ τότε ισχύει ότι:

(i) $T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda}x \;, \forall x \in X$

(ii) $\rho(A) \supseteq \{\lambda : \mathrm{Re}\lambda > 0\}$ και $\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}$

Θα δώσουμε τώρα και μια από τις παραλλαγές του θεωρήματος Hille-Yosida που αποτελεί μια γενίκευση του θεωρήματος που αποδείξαμε παραπάνω.

Λήμμα 2.3.5. *Ο γραμμικός τελεστής A παράγει μια C_0 ημιομάδα $T(t)$ που ικανοποιεί την σχέση $\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \iff$*

(i) A κλειστός και $\overline{D(A)} = X$

(ii) $\rho(A) \supseteq \{\lambda :\ Im\lambda = 0,\ \lambda > \omega\}$ και ισχύει η εκτίμηση $\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda-\omega}$

Στην συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα ακόμη σημαντικό θεώρημα το οποίο επάγεται από το θεώρημα Hille- Yosida και χαρακτηρίζει και αυτό με τη σειρά του τον απειροστό γεννήτορα μιας συστολικής C_0 ημιομάδας.

2.4 Θεώρημα Lumer - Phillips

Θεώρημα 2.4.1. *(Lumer - Phillips) Έστω A ένας γραμμικός τελεστής, πυκνά ορισμένος στο χώρο Banach X. Τότε ισχύουν τα παρακάτω :*

(i) Αν ο τελεστής A είναι αποσβεστικός και $\exists \lambda_0 > 0 : Ran(\lambda_0 I - A) = X$ τότε ο A είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας C_0 συστολικής στον χώρο X, ημιομάδας.

(ii) Αν ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας C_0 συστολικής ημιομάδας τότε $Ran(\lambda I - A) = X, \ \forall \lambda > 0$ και ο A είναι αποσβεστικός.

Απόδειξη. (i) Έστω $\lambda > 0$. Τότε λόγω της αποσβεστικότητας του τελεστή A έχουμε ότι $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\| \ \forall \lambda > 0, \ x \in D(A)$. Αφού $\mathrm{Ran}(\lambda_0 I - A) = X$ έπεται από την παραπάνω σχέση για $\lambda = \lambda_0$ ότι ο γραμμικός τελεστής $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ είναι φραγμένος και συνεπώς κλειστός. Όμως τότε ο τελεστής $\lambda_0 I - A$ είναι κλειστός και συνεπώς ο A είναι κλειστός. Αν $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) = X, \ \forall \lambda > 0$ τότε

$$\rho(A) \supseteq (0, \infty) \text{ και } \|R(\lambda; A)\| \leq \lambda^{-1}.$$

Άρα από το θεώρημα Hille - Yosida έπεται ότι ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας C_0 συστολικής ημιομάδας. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη απομένει να δείξουμε ότι $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) = X, \ \forall \lambda > 0$. Θεωρούμε το σύνολο

$$\Lambda = \{\lambda : 0 < \lambda < \infty \text{ και } \mathrm{Ran}(\lambda I - A) = X\}.$$

Έστω $\lambda \in \Lambda$. Τότε λόγω της σχέσης $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|$ έπεται ότι $\lambda \in \rho(A)$. Αφού το επιλύον σύνολο του A είναι ανοικτό τότε μια γειτονιά του λ ανήκει στο σύνολο $\rho(A)$. Η τομή αυτής της γειτονιάς με τον πραγματικό άξονα ανήκει στο σύνολο Λ, και άρα το Λ είναι ανοικτό. Έστω $\{\lambda_n\} \in \Lambda, \ \lambda_n \to \lambda, \ \lambda > 0$. Τότε

$$\forall y \in X \ \ \exists x_n \in D(A) : \lambda_n x_n - A x_n = y.$$

Έτσι έπεται ότι $\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|y\| \leq C, \ \ C > 0$. Επίσης

$$\lambda_m \|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_m (x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| = |\lambda_n - \lambda_m| \ \|x_n\| \leq C |\lambda_n - \lambda_m|.$$

Συνεπώς x_n είναι ακολουθία Cauchy. Έστω τώρα $x_n \to x$. Τότε έχουμε ότι

$$A x_n \to \lambda x - y.$$

Όμως αφού ο τελεστής A είναι κλειστός έχουμε ότι

$$x \in D(A) \text{ και } \lambda x - Ax = y.$$

Άρα $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) = X$ και $\lambda \in \Lambda$. Έτσι Λ κλειστό στο $(0, \infty)$ και αφού $\lambda_0 \in \Lambda$ από υπόθεση έπεται ότι $\Lambda = (0, \infty)$.

(ii) Αν ο A είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας συστολικής C_0 ημιομάδας τότε από το θεώρημα Hille - Yosida έπεται ότι $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ και άρα $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) = X \ , \forall \lambda > 0$.

Έστω $x \in D(A)$. Τότε έχουμε λόγω της ανισότητας Cauchy–Schwarz ότι

$$| < T(t)x, x^* > | \leq \|T(t)x\| \, \|x^*\| \leq \|x\|^2.$$

Άρα

$$\text{Re} < T(t)x - x, x^* >= \text{Re} < T(t)x, x^* > -\|x\|^2 \leq 0,$$

και διαιρώντας με $t > 0$ και παίρνοντας όριο $t \to 0$ έπεται ότι

$$\text{Re} < Ax, x^* > \leq 0 \ .$$

□

Στη συνέχεια διατυπώνουμε κάποια λήμματα τα οποία σχετίζονται με την αποσβεστικότητα του τελεστή A και δίνουν ιδιαιτέρως χρήσιμα αποτελέσματα.

Λήμμα 2.4.2. *Έστω A ένας κλειστός και πυκνά ορισμένος γραμμικός τελεστής. Αν οι τελεστές A, A^* είναι αποσβεστικοί τότε ο A είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας συστολικής C_0 ημιομάδας στον χώρο Banach X.*

Λήμμα 2.4.3. *Έστω A ένας αποσβεστικός τελεστής στον χώρο Banach . Τότε ισχύουν τα παρακάτω :*

(i) Αν $\exists \lambda_0 > 0$ τέτοιο ώστε $Ran(\lambda_0 I - A) = X$ τότε $Ran(\lambda I - A) = X \ , \forall \lambda > 0$.

(ii) Αν ο τελεστής A είναι κλείσιμος τότε ο $\overline{A}$ είναι αποσβεστικός.

(iii) Αν $\overline{D(A)} = X$ τότε ο A είναι κλείσιμος.

Θεώρημα 2.4.4. *Έστω A ένας αποσβεστικός τελεστής για τον οποίο ισχύει ότι $Ran(I - A) = X$. Αν ο χώρος X είναι αυτοπαθής τότε $\overline{D(A)} = X$.*

Απόδειξη. Έστω $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $< x^*, x >= 0 \ , \forall x \in D(A)$. Θα δείξουμε ότι $x^* = 0$. Αφού $\text{Ran}(I - A) = X$ αρκεί να δείξουμε ότι $< x^*, x - Ax >= 0 \ , \forall \in D(A)$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι

$$< x^*, Ax >= 0 \ , \forall x \in D(A).$$

Έστω $x \in D(A)$,τότε υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}$ τέτοια ώστε

$$x = x_n - (1/n)Ax_n.$$

Αφού $Ax_n = n(x_n - x) \in D(A)$ τότε

$$x_n \in D(A^2) \text{ και } Ax = Ax_n - (1/n)A^2 x_n.$$

Άρα έπεται ότι $Ax_n = (I - (1/n)A)^{-1}Ax$.

Όμως τότε εύκολα βλέπουμε ότι ότι $\|(I-(1/n)A)^{-1}\| \leq 1$ και συνεπώς $\|Ax_n\| \leq \|Ax\|$. Επίσης,

$$\|x_n - x\| \leq 1/n \; \|Ax_n\| \leq 1/n \; \|Ax\|$$

και άρα έχουμε ότι $x_n \to x$. Όμως αφού $\|Ax_n\| \leq C$ και ο χώρος X είναι αυτοπαθής τότε υπάρχει υπακολουθία Ax_{n_k} της Ax_n τέτοια ώστε $A_{n_k} \rightharpoonup y$. Αφού ο A είναι κλειστός έπεται ότι $y = Ax$. Τέλος, αφού $< x^*, z >= 0, \; \forall \; z \in D(A)$, έχουμε ότι

$$< x^*, Ax_{n_k} >= n_k < x^*, x_{n_k} - x >= 0.$$

Αφήνοντας $n_k \to \infty$ έπεται ότι $< x^*, Ax >= 0, \forall x \in D(A)$. Άρα $x^* = 0$, πράγμα που μας δείχνει ότι $\overline{D(A)} = X$. $\square$

Σχόλιο. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η αυτοπάθεια του χώρου παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στο παραπάνω θεώρημα καθώς αν ο χώρος δεν είναι αυτοπαθής (πχ οι χώροι L^1 , L^∞) δεν μπορούμε να έχουμε σαν συμπέρασμα ότι ο τελεστής μας είναι πυκνά ορισμένος. Για να δώσουμε βάση στα λεγόμενα μας δίνουμε ένα αντιπαράδειγμα : Έστω $X = C([0,1])$ εφοδιασμένος με τη supremum νόρμα, $D(A) = \{u : u \in C^1([0,1]), u(0) = 0$ και $Au = u' \; \forall \; u \in D(A)$. Τότε $\forall f \in X$ η εξίσωση $\lambda u - Au = f$ έχει μοναδική λύση (θεωρία Fredholm) η οποία δίνεται από τη σχέση

$$u(x) = \int_0^x e^{\lambda(\xi - x)} f(\xi) d\xi.$$

Έτσι βλέπουμε ότι η Ran$(\lambda I - A) = X$. Όμως,

$$\lambda |u(x)| \leq (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) \; \|f\| \leq \|\lambda u - Au\|$$

και παίρνοντας το supremum πάνω σε όλα τα $x \in [0,1]$ στην παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι $\lambda \|u\| \leq \|\lambda u - Au\|$, γεγονός που μας δείχνει ότι ο τελεστής A είναι αποσβεστικός. Όμως $\overline{D(A)} = \{u : u \in X \; , u(0) = 0\} \; \neq X = C([0,1])$ διότι ο χώρος $C([0,1])$ δεν είναι προφανώς αυτοπαθής.

Έως τώρα έχουμε χαρακτηρίσει πλήρως τον απειροστό γεννήτορα μιας C_0 συστολικής ημιομάδας μέσα από τα θεωρήματα που διατυπώσαμε. Στην συνέχεια στόχος μας είναι να δώσουμε έναν επαρκή χαρακτηρισμό για τον απειροστό γεννήτορα μιας C_0 ημιομάδας η οποία δεν θα είναι κατ΄ανάγκη συστολική. Προς τούτο θα διατυπώσουμε τα παρακάτω λήμματα και θεωρήματα.

2.5 Χαρακτηρισμός απειροστού γεννήτορα

Θεώρημα 2.5.1. *Ένας γραμμικός τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας C_0 ημιομάδας $T(t)$ που ικανοποιεί την σχέση $\|T(t)\| \leq M$ $(M \geq 1)$, $\iff$*

(i) A *κλειστός και* $\overline{D(A)} = X$.

(ii) $[0, \infty) \subset \rho(A)$ *και ισχύει η εκτίμηση*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq M/\lambda^n \quad , \forall \lambda > 0 \; , n = 1, 2, ...$$

Θεώρημα 2.5.2. *Ένας γραμμικός τελεστής* A *είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας* C_0 *ημιομάδας* $T(t)$ *η οποία ικανοποιεί τη σχέση* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \iff$

(i) A *κλειστός και* $\overline{D(A)} = X$

(ii) $[\omega, \infty) \subset \rho(A)$ *και ισχύει η εκτίμηση* $\|R(\lambda; A)^n\| \leq M/(\lambda - \omega)^n \quad , \forall \lambda > \omega \quad , n = 1, 2, ...$

Απόδειξη. Η συνθήκη πως κάθε λ πραγματικός με $\lambda > \omega$ ανήκει στο επιλύον σύνολο του τελεστή A μαζί με την εκτίμηση (ii) μας δίνουν ότι κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ ανήκει στο επιλύον σύνολο και ισχύει ότι $\|R(\lambda; A)^n\| \leq M/(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^n \quad , \mathrm{Re}\lambda > \omega \; , n = 1, 2, ...$ Ξεκινώντας λοιπόν την απόδειξη ορίζουμε

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) x dt.$$

Αφού $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$, τότε η παραπάνω ποσότητα είναι καλώς ορισμένη για κάθε λ που ικανοποιεί τη σχέση $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Με αντίστοιχο επιχείρημα όπως στην απόδειξη του θεωρήματος Hille - Yosida έχουμε ότι $R(\lambda) = R(\lambda; A)$. Έστω ότι $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Τότε έχουμε ότι

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda; A)x = \frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) x dt = -\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) x dt.$$

Επαγωγικά συνεχίζοντας καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A)x = (-1)^n \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) x dt.$$

Λόγω της ταυτότητας $R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda) R(\lambda; A) R(\mu; A)$, έπεται ότι $\forall \lambda > 0$ η απεικόνιση $\lambda \mapsto R(\lambda; A)$ είναι ολόμορφη και ισχύει η σχέση

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda; A) = -R(\lambda; A)^2.$$

Επαγωγικά και πάλι βλέπουμε ότι

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}.$$

Συνεπώς

$$R(\lambda; A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) x dt$$

και άρα

$$\|R(\lambda; A)^n x\| \leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} \mathrm{e}^{(\omega - \mathrm{Re}\lambda)t} \|x\| dt = \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^n} \|x\|.$$

□

Σχόλιο. Να σημειώσουμε πως όπως και στην περίπτωση μιας C_0 συστολικής ημιομάδας έτσι και εδώ (γενικότερη περίπτωση) ισχύει ότι

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda} x \quad ,$$

όπου A_λ οι συντελεστές Yosida που αντιστοιχούν στον τελεστή A. Επίσης θυμίζουμε ότι αφού ο τελεστής A_λ είναι φραγμένος τότε παράγει μια ομοιόμορφα συνεχή ημιομάδα.

Έως τώρα όλα τα αποτελέσματα που έχουμε εξετάσει αφορούν τις ημιομάδες φραγμένων, γραμμικών τελεστών. Στα παρακάτω θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στις ομάδες φραγμένων γραμμικών τελεστών και θα εξετάσουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα που αφορούν τόσο τις ίδιες όσο και τον απειροστό τους γεννήτορα.

Σχόλιο. Προτού ξεκινήσουμε την μελέτη των ομάδων να σημειώσουμε πως ο απειροστός τους γεννήτορας ορίζεται ως

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad , \forall x \in D(A),$$

σε αντίθεση με τον ορισμό του απειροστού γεννήτορα μιας ημιομάδας στην οποία για το ανωτέρω όριο ισχύει ότι $t \to 0^+$.

Σχόλιο. Αν $T(t)$ είναι C_0 ομάδα φραγμένων τελεστών τότε προφανώς $T(t)$ είναι και C_0 ημιομάδα με απειροστό γεννήτορα A. Επίσης για $t \geq 0 \quad , S(t) = T(-t)$ είναι και αυτή C_0 ημιομάδα με απειροστό γεννήτορα τον τελεστή $-A$. Συνεπώς αν $T(t)$ είναι C_0 ομάδα φραγμένων τελεστών τότε οι τελεστές $A, -A$ είναι οι απειροστοί γεννήτορες των C_0 ημιομάδων $T_+(t),\ T_-(t)$. Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο όπου $T(t) = T_+(t)$, $t \geq 0$ και $T(t) = T_-(-t)$, $t \leq 0$.

2.6 Ομάδες/Θεώρημα Stone

Θεώρημα 2.6.1. *Ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ομάδας φραγμένων τελεστών $T(t)$ που ικανοποιεί την σχέση $\|T(t)\| \leq Me^{\omega\|t\|} \iff$*

(i) A *κλειστός και* $\overline{D(A)} = X$

(ii) *Κάθε* λ *τέτοιο ώστε* $|\lambda| > \omega$ *ανήκει στο επιλύον σύνολο του τελεστή* A *και για αυτά τα* λ *ισχύει ότι* $\|R(\lambda; A)^n\| \leq M(|\lambda| - \omega)^{-n} \quad , n = 1, 2, ...$

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Αφού ο A είναι ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ομάδας $T(t)$ τότε οι τελεστές $A, -A$ είναι οι απειροστοί γεννήτορες των C_0 ημιομάδων που ικανοποιούν την εκτίμηση $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$. Συνεπώς από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι ο τελεστής A είναι κλειστός και πυκνά ορισμένος, και η εκτίμηση της σχέσης (ii) ισχύει για $\lambda > \omega$. Επίσης αφού ο τελεστής $-A$ είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας C_0 ομάδας και ισχύει ότι $R(\lambda; A) = -R(-\lambda; A)$ τότε έπεται ότι $\sigma(-A) = -\sigma(A)$ και ικανοποιείται η συνθήκη (ii) για $-\lambda < -\omega$.

($\Longleftarrow$) Έστω τώρα ότι οι συνθήκες (i) και (ii) ικανοποιούνται. Τότε οι τελεστές $A, -A$ είναι οι απειροστοί γεννήτορες των C_0 ημιομάδων $T_+(t), T_-(t)$ αντιστοίχως και ισχύει ότι $\|T_{+-}(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$. Οι ημιομάδες $T_+(t), T_-(t)$ αντιμετατίθενται αφού οι τελεστές e^{tA_λ} και e^{-tA_μ} αντιμετατίθενται και ισχύει ότι

$$T_+(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} \mathrm{e}^{tA_\lambda} x$$

και

$$T_-(t)x = \lim_{\mu \to \infty} \mathrm{e}^{-tA_\mu} x.$$

Αν $W(t) = T_+(t)T_-(t)$ τότε $W(t)$ είναι C_0 ημιομάδα φραγμένων τελεστών, για $t \geq 0$. Συνεπώς $\forall x \in D(A) = D(-A)$ έχουμε ότι

$$\frac{W(t)x - x}{t} = T_-(t)\frac{T_+(t)x - x}{t} + \frac{T_-(t)x - x}{t} \to Ax - Ax = 0 \quad ,$$

καθώς $t \to 0$. Άρα $\forall x \in D(A)$ έχουμε ότι $W(t)x = x$. Όμως αφού $\overline{D(A)} = X$ και $W(t)$φραγμένος τότε έχουμε από το θεώρημα Banach-Steinhaus ότι

$$W(t) = I \text{ ή } T_-(t) = (T_+(t))^{-1}.$$

Ορίζοντας λοιπόν τον τελεστή $T(t)$ σύμφωνα με το παραπάνω σχόλιο, έπεται ότι αποτελεί μια C_0 ομάδα φραγμένων τελεστών που ικανοποιεί τη σχέση $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega\|t\|}$. □

Λήμμα 2.6.2. *Έστω* $T(t)$ C_0 *ημιομάδα φραγμένων τελεστών. Αν για κάθε* $t > 0$ *υπάρχει ο τελεστής* T^{-1} *και είναι φραγμένος τότε* $S(t) = T(t)^{-1}$ *είναι* C_0 *ημιομάδα φραγμένων τελεστών με απειροστό γεννήτορα* $-A$. *Επιπλέον αν ορίσουμε*

$$U(t) = T(t) \quad , t \geq 0 \textit{ και } U(t) = T(-t)^{-1} \quad , t \leq 0$$

τότε $U(t)$ *είναι* C_0 *ομάδα φραγμένων τελεστών.*

Απόδειξη. Η ιδιότητα της ημιομάδας ικανοποιείται αφού

$$S(t+s) = T(t+s)^{-1} = (T(t)T(s))^{-1} = T(s)^{-1}T(t)^{-1} = S(s)S(t).$$

Θα αποδείξουμε την ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας $S(t)$. Για $s > 0$ έχουμε ότι $\mathrm{Ran}(T(s)) = X$. Έστω $x \in X$, $s > 1$. Τότε υπάρχει $y \in X$ τέτοιο ώστε $T(s)y = x$. Για $t < 1$ έχουμε ότι

$$\|T(t)^{-1}x - x\| = \|T(t)^{-1}T(t)T(s-t)y - T(s)y\| = \|T(s-t)y - T(s)y\| \to 0 \ \ , t \to 0.$$

Συνεπώς η ημιομάδα $S(t)$ είναι ισχυρά συνεχής. Για $x \in D(A)$ έπεται ότι

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(t)^{-1}x - x}{t} = \lim_{t \to 0} T(t) \frac{T(t)^{-1}x - x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x - T(t)x}{t} = -Ax.$$

Άρα ο τελεστής $-A$ είναι ο απειροστός γεννήτορας της ημιομάδας $S(t)$. □

Θεώρημα 2.6.3. *Έστω $T(t)$ μια C_0 ημιομάδα φραγμένων τελεστών. Αν $0 \in \rho(T(t_0))$ για κάποιο $t_0 > 0$ τότε $0 \in \rho(T(t))$, $\forall t > 0$ και η ημιομάδα $T(t)$ μπορεί να εμφυτευθεί σε C_0 ομάδα.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα αρκεί να δείξουμε ότι $0 \in \rho(T(t))$, $t > 0$. Αφού $0 \in \rho(T(t_0))$, $T(t_0)^n = T(nt_0)$ είναι $1-1$ για κάθε $n \geq 1$. Έστω ότι $T(t)x = 0$. Επιλέγοντας n τέτοιο ώστε $nt_0 > t$ έχουμε ότι

$$T(nt_0)x = T(nt_0 - t)T(t)x = 0,$$

το οποίο μας δίνει ότι $x = 0$. Συνεπώς $T(t)$ είναι $1-1$ $\forall t > 0$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $\mathrm{Ran}(T(t)) = X$, $\forall t > 0$. Αυτό είναι προφανές για $t \leq t_0$ αφού από την ιδιότητα της ημιομάδας έπεται ότι

$$R(T(t)) \supset R(T(t_0)) \ , \forall t \leq t_0.$$

Για $t > t_0$, θέτουμε $t = kt_0 + t_1$, με $0 \leq t_1 \leq t_0$. Τότε

$$T(t) = T(t_0)^k T(t_1)$$

και συνεπώς και πάλι $\mathrm{Ran}(T(t)) = X$. Έτσι αφού $T(t)$ είναι $1-1$ και $\mathrm{Ran}(T(t)) = X$, $\forall t > 0$, έπεται από το θεώρημα κλειστού γραφήματος ότι $0 \in \rho(T(t))$ $\forall t > 0$. □

Θεώρημα 2.6.4. *Έστω $T(t)$ C_0 ημιομάδα φραγμένων τελεστών. Αν για κάποιο $s_0 > 0$ ο τελεστής $T(s_0) - I$ είναι συμπαγής τότε $T(t)$ είναι αντιστρέψιμη για κάθε $t > 0$ και μπορεί να εμφυτευθεί σε μια C_0 ομάδα.*

Απόδειξη. Λόγω του παραπάνω θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής $T(s_0)$ είναι αντιστρέψιμος. Έστω αντίθετα ότι ο τελεστής $T(s_0)$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε $0 \in \sigma(T(s_0))$ και από την υπόθεση μας αφού $T(s_0) - I$ είναι συμπαγής έπεται ότι το 0 είναι ιδιοτιμή του $T(s_0)$ πεπερασμένης πολλαπλότητας. Έστω $x \neq 0$ τέτοιο ώστε $T(s_0)x = 0$. Θέτουμε $s_1 = s_0/2$ και βρίσκουμε ότι $T(s_1)T(s_1)x = T(s_0)x = 0$. Άρα το 0 είναι ιδιοτιμή του $T(s_1)$. Συνεχίζοντας επαγωγικά ορίζουμε ακολουθία $\{s_n\}$, $s_n \to 0$ έτσι ώστε το 0 να είναι ιδιοτιμή του $T(s_n)$. Έτσι βλέπουμε ότι $\mathrm{Ker}(T(s)) \subset \mathrm{Ker}(T(t))$, $\forall s \leq t$. Ορίζουμε

$$Q_n = \mathrm{Ker}(T(s_n)) \bigcap \{x : \|x\| = 1\}.$$

Βλέπουμε ότι η ακολουθία Q_n είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών και κλειστών υποσυνόλων του X. Αφού $\mathrm{Ker}(T(s_0))$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε Q_0 είναι συμπαγής και συνεπώς $\bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n \neq \emptyset$. Αν λοιπόν $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n$ τότε $\|T(s_n)x - x\| = \|x\| = 1 \quad , \forall s_n$. Όμως $s_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, και συνεπώς η παραπάνω σχέση έρχεται σε αντίφαση με την ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας $T(t)$. Άρα $T(s_0)$ αντιστρέψιμος. $\square$

Λήμμα 2.6.5. *Έστω A ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$ στον χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Τότε $T^*(t)$ είναι C_0 ημιομάδα στον χώρο $\mathcal{H}$ της οποίας απειροστός γεννήτορας είναι ο τελεστής A^*.*

Απόδειξη. $T(t+s)^* = [T(t)T(s)]^* = T(s)^*T(t)^* \quad , \forall t, s \in \mathbb{R}^+$. Επίσης $T(0)^* = I^* = I$. Για να δείξουμε την ισχυρή συνέχεια της ημιομάδας T^* υποθέτουμε για αρχή ότι για κάποιο πραγματικό αριθμό ω ισχύει ότι

$$\|T(t)^*\| = \|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{\omega t} \quad , t \in \mathbb{R}^+.$$

Τότε για $f \in \mathcal{H}$ έχουμε ότι

$$\|T(t)^*f - f\|^2 =< T(t)^*f - f, T(t)^*f - f >=$$

$$= \|T(t)^*f\|^2 + \|f\|^2 - < f, T(t)f > - < T(t)f, f > .$$

Λόγω της παραπάνω σχέσης και της ισχυρής συνέχειας της ημιομάδας $T(t)$ έπεται ότι

$$\limsup_{t \to 0} \|T(t)^*f - f\| = 0.$$

Άρα $T(.)^*f$ είναι συνεχής ως προς το όρισμα. Συνεπώς λόγω της σχέσης (4.1) και της ιδιότητας της ημιομάδας έπεται ότι $T(.)^*f \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}),\ \forall f \in \mathcal{H}$. Άρα T^* είναι μια C_0 ημιομάδα στον χώρο $\mathcal{H}$. Έστω τώρα ότι ο τελεστής B είναι ο απειροστός της γεννήτορας. Τότε για $f \in D(A),\ g \in D(B)$, έχουμε ότι

$$< Af, g >= \lim_{t \to 0} < t^{-1}[T(t) - I]f, g >= \lim_{t \to 0} < f, t^{-1}[T(t)^* - I]g >=< f, Bg > .$$

Συνεπώς βλέπουμε ότι $B \subset A^*$. Όμως αν $g \in D(A^*)$ τότε $\forall f \in D(A)$ έχουμε ότι

$$< f, T(t)^*g - g >=< T(t)f - f, g >=$$

$$= \int_0^t < AT(s)f, g > \ ds = \int_0^t < T(s)f, A^*g > \ ds = \int_0^t < f, T(s)^*A^*g > \ ds.$$

Άρα

$$T(t)^*g - g = \int_0^t T(s)^*A^*g \ ds.$$

Διαιρώντας με t και παίρνοντας το όριο $t \to 0$ έχουμε ότι $A^* \subset B$. Άρα $A^* = B$. □

Λήμμα 2.6.6. *$T(t)$ είναι μια αυτοσυζυγής C_0 ημιομάδα στον χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ αν και μόνο αν ο απειροστός της γεννήτορας A είναι αυτοσυζυγής.*

Θεώρημα 2.6.7. *(Stone) Ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ομάδας μοναδιαίων τελεστών $\{U(t)\}$ στον χώρο $\mathcal{H}$ $\iff$ ο τελεστής A είναι αντιαυτοσυζυγής,δηλαδή $A^* = -A$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω ότι ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ομάδας μοναδιαίων τελεστών $U(t)$. Τότε λόγω της ιδιότητας της ομάδας και λόγω του ότι $U^* = U^{-1}$, έπεται ότι

$$t^{-1}[U(-t)f - f] = t^{-1}(U(t)^*f - f).$$

Λόγω του θεωρήματος Lumer - Phillips για $t \to 0$ έχουμε ότι $f \in D(A) \iff f \in D(A^*)$ και $A^*f = -Af$. Συνεπώς ο τελεστής A είναι αντιαυτοσυζυγής.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι $A^* = A^{-1}$. Τότε $\forall f \in D(A)$ έχουμε ότι

$$< Af, f >=< f, A^*f >= - < f, Af >= - \overline{< Af, f >}.$$

Άρα Re $< Af, f >= 0$, $\forall f \in D(A)$. Έτσι οι τελεστές $A, -A$ είναι αποσβεστικοί. Επίσης $D(A) = \mathcal{H}$, αφού έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει ο συζυγής τελεστής A^*, και A κλειστός αφού κάθε συζυγής τελεστής είναι κλειστός. Για να δείξουμε το τελευταίο υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{g_n\}$, $g_n \in D(A^*)$ τέτοια ώστε $g_n \to g$, $A^*g_n \to h$. Τότε $\forall f \in D(A)$ έχουμε ότι

$$< Af, g >= \lim_{n\to\infty} < Af, g_n >= \lim_{n\to\infty} < f, A^*g_n >=< f, h > .$$

Συνεπώς $g \in D(A^*)$ και $A^*g = h$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $1, -1 \in \rho(A)$. Έτσι θα έχουμε από το θεώρημα Lumer - Phillips ότι οι τελεστές $A, -A$ αποτελούν τους απειροστούς γεννήτορες των C_0 συστολικών ημιομάδων $U_-(t), U_+(t)$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $(I \pm A)f = g$. Τότε λόγω της αυτοπάθειας έχουμε ότι

$$\|f\|^2 = \text{Re} < f, g > \leq \|f\| \ \|g\|.$$

Συνεπώς οι τελεστές $I \pm A$ είναι 1-1 και ισχύει ότι $\|(I \pm A)^{-1}\| \leq 1$. Όμως το σύνολο τιμών $\text{Ran}(I \pm A) = D[(I \pm A)^{-1}]$ είναι κλειστό,μιας και οι τελεστές $(I \pm A)^{-1}$ είναι κλειστοί και φραγμένοι. Συνεπώς μας απομένει να δείξουμε ότι $\overline{\text{Ran}(I \pm A)} = \mathcal{H}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει g τέτοιο ώστε $g \in \big(\text{Ran}(I \pm A)\big)^{\perp}$. Αυτό μπορούμε να το υποθέσουμε καθώς αφού το σύνολο

$\text{Ran}(I \pm A)$ είναι κλειστό ισχύει ότι

$$\mathcal{H} = \text{Ran}(I \pm A) \oplus [\text{Ran}(I \pm A)]^{\perp}.$$

Έτσι $\forall f \in D(A)$ έχουμε ότι $< (I \pm A)f, g >= 0$. Άρα έπεται ότι

$$g \in D(A^*) = D(A) \text{ και } (I \pm A^*)g = 0,$$

δηλαδή $A^*g = -Ag = \pm g$. Συνεπώς $\text{Re} < Ag, g >= \pm\|g\|^2$ και αφού

$\text{Re} < Ag, g >= 0$ έπεται ότι $g = 0$. Ο τελεστής A παράγει την C_0 συστολική ομάδα $U(t)$, η οποία δίνεται από την σχέση

$$U(t) = U_+(t) \ , t \in \mathbb{R}^+ \ \ , U(t) = U_-(t) \ , -t \in \mathbb{R}^+.$$

Όμως αφού $U(t)^{-1} = U(-t)$ και $\|U(t)\| \ , \|U(-t)\| \leq 1$ τότε ο τελεστής $U(t)$ είναι επί και ισομετρία. Άρα είναι μοναδιαίος. $\square$

Θεώρημα 2.6.8. *Έστω ότι ο τελεστής A αποτελεί τον απειροστό γεννήτορα μιας C_0 ημιομάδας $T(t)$ σε ένα αυτοπαθή χώρο Banach $\mathcal{X}$. Τότε $T^* = \{T(t)^* : t \in \mathbb{R}^+\}$ είναι μια C_0 ημιομάδα στον χώρο $\mathcal{X}^*$,η οποία έχει ως απειροστό της γεννήτορα τον τελεστή A^*.*

Λήμμα 2.6.9. *Έστω A ένας γραμμικός και πυκνά ορισμένος τελεστής σε ένα χώρο Banach X. Αν $\lambda \in \rho(A)$ τότε $\lambda \in \rho(A^*)$ και*

$$R(\lambda; A^*) = R(\lambda; A)^*.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του συζυγή τελεστή έχουμε ότι $(\lambda I - A)^* = \lambda I^* - A^*$, όπου I^* είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον χώρο $\mathcal{X}^*$. Αφού όμως ο επιλύων τελεστής $R(\lambda; A)$ είναι φραγμένος έπεται ότι και ο τελεστής $R(\lambda; A)^*$ είναι φραγμένος στον χώρο $\mathcal{X}^*$. Αρχικά θα δείξουμε ότι ο τελεστής $\lambda I^* - A^*$ είναι 1-1. Αν για κάποιο $x^* \neq 0$, ισχύει ότι $(\lambda I^* - A^*)x^* = 0$ τότε

$$0 =< (\lambda I^* - A^*)x^*, x >=< (\lambda I - A)x, x^* > \ \ \forall x \in D(A).$$

Όμως αφού $\lambda \in \rho(A)$, έπεται ότι $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) = \mathcal{X}$ και συνεπώς $x^* = 0$ και $\lambda I^* - A^*$ είναι 1-1. Αν τώρα $x \in \mathcal{X}$, $x^* \in D(A^*)$ τότε

$$< x^*, x >=< x^*, (\lambda I - A)R(\lambda; A)x >=< (\lambda I^* - A^*)x^*, R(\lambda; A)x >$$

και συνεπώς

$$R(\lambda; A)^*(\lambda I^* - A^*)x^* = x^* \quad , \forall x^* \in D(A^*). \tag{2.1}$$

Από την άλλη πλευρά αν $x^* \in \mathcal{X}^*$ και $x \in D(A)$ τότε

$$< x^*, x >=< x^*, R(\lambda; A)(\lambda I - A)x >=< R(\lambda; A)^* x^*, (\lambda I - A)x >$$

πράγμα που δείχνει ότι

$$(\lambda I^* - A^*)R(\lambda; A)^* x^* = x^* \quad , \forall x^* \in \mathcal{X}^*. \tag{2.2}$$

Άρα από τις σχέσεις (2.1),(2.2) έπεται ότι $\lambda \in \rho(A^*)$ και $R(\lambda; A^*) = R(\lambda; A)^*$.

□

2.7 Αναλυτικές ημιομάδες

Στην έβδομη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου θα αναφερθούμε σε μια ειδική περίπτωση των ημιομάδων, τις λεγόμενες αναλυτικές ημιομάδες. Αυτή η κατηγορία βρίσκει σημαντικές εφαρμογές σε προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων (παραβολικού τύπου, όπως η εξίσωση θερμότητας). Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στο γεγονός πως αν ο απειροστός γεννήτορας της ημιομάδας είναι sectorial τότε η λύση του προβλήματος Cauchy δίνεται από μια αναλυτική ημιομάδα. Επίσης έως τώρα έχουμε θεωρήσει ημιομάδες με πεδίο ορισμού τον θετικό ημιάξονα των πραγματικών αριθμών ενώ σε αυτό το μέρος θα θεωρήσουμε την επέκταση του πεδίου ορισμού σε μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου η οποία περιέχει τον μη αρνητικό άξονα των πραγματικών αριθμών. Για λόγους ευκολίας θα περιοριστούμε σε μια ειδική κατηγορία αυτών των περιοχών, που αποτελούνται από γωνίες γύρω από τον θετικό άξονα των πραγματικών αριθμών. Ξεκινώντας θα υπενθυμίσουμε την ειδική περίπτωση όπου ο τελεστής A είναι φραγμένος και έπειτα θα επεκταθούμε και στην περίπτωση όπου ο τελεστής A είναι μη φραγμένος.

Θεωρούμε λοιπόν το αφηρημένο πρόβλημα Cauchy

$$u'(t) = Au(t) \quad , u(0) = x.$$

Λήμμα 2.7.1. *Έστω A ένας φραγμένος τελεστής σε ένα χώρο Banach . Τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ συγκλίνει ομοιόμορφα πάνω σε φραγμένα διαστήματα. Θέτοντας*

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n x}{n!},$$

ο περιορισμός της συνάρτησης $u(t)$ στο διάστημα $[0, \infty)$ αποτελεί τη μοναδική λύση του προβλήματος Cauchy.

Απόδειξη. Για να βρούμε τη λύση του προβλήματος Cauchy αρκεί να βρούμε τη λύση της ισοδύναμης ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$v(t) = x + \int_0^t Av(s)\, ds, t \geq 0, \tag{2.3}$$

όπου $v(t) : [0, \infty) \to X$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Συνεπώς για να δείξουμε ότι η $u(t)$ ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση σταθεροποιούμε το διάστημα $[0, T]$ και ορίζουμε

$$u_0(t) = x \ , u_{n+1}(t) = x + \int_0^t Au_n(s)\, ds \ , n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} x \ \ , n \in \mathbb{N}.$$

Αφού όμως

$$\left\| \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \frac{T^k \|A\|^k}{k!} \ \ , t \in [0, T]$$

έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} t^k A^k / k!$ συγκλίνει στον χώρο των φραγμένων τελεστών, ομοιόμορφα ως προς $t \in [0, T]$. Επίσης η ακολουθία $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στη συνάρτηση $u(t)$ ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, T]$. Παίρνοντας όριο $n \to \infty$ στη σχέση (2.4) έχουμε ότι $u(t)$ λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.3). Στη συνέχεια της απόδειξης θα δείξουμε ότι η λύση αυτή είναι και μοναδική. Προς τούτο έστω ότι υπάρχουν δυο λύσεις u, v. Τότε

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|A\| \int_0^t \|u(s) - v(s)\|\, ds$$

και λόγω της ανισότητας Gronwall έχουμε ότι $u = v$. □

Σχόλιο. Όπως και σε πεπερασμένες διατάσεις ορίζουμε την ημιομάδα

$$T(t) := \mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \ \ , t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Αν όμως ο τελεστής A δεν είναι φραγμένος η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}$ δεν είναι σίγουρο ότι συγκλίνει ακόμη και για $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D(A^k)$. Για παράδειγμα θεωρούμε τον χώρο $X = C\big([0, 1]\big)$ και τον τελεστή $Af = f'$ με πεδίο ορισμού

$D(A) = C^1\big([0,1]\big)$. Συνεπώς θα δώσουμε μια διαφορετική (ολοκληρωτική) αναπαράσταση της λύσης μας η οποία μας καλύπτει και στην περίπτωση όπου ο τελεστής A είναι μη φραγμένος.

Θεώρημα 2.7.2. *Έστω $A \in \mathcal{L}(x)$ και $\gamma \in \mathbb{C}$, ένας κύκλος με κέντρο το 0 και ακτίνα $r \geq \|A\|$. Τότε ισχύει ότι*

$$T(t) = e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{t\lambda} R(\lambda; A)\, d\lambda \ , t \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Απόδειξη. Λόγω της σχέσης (2.5) έπεται ότι

$$R(\lambda; A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}} \quad , |\lambda| > \|A\|.$$

Άρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{e}^{t\lambda} R(\lambda; A)\, d\lambda &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_\gamma \lambda^n R(\lambda; A)\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\int_\gamma \lambda^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty} A^k \int_\gamma \lambda^{n-k-1}\, d\lambda \\
&= \mathrm{e}^{tA}.
\end{aligned}$$

όπου τα ολοκληρώματα στις τελευταίες σειρές ισούται με $2\pi i$ αν $n = k$ και 0 αλλού. Σημειώνουμε ότι η εναλλαγή της ολοκλήρωσης με την άθροιση επιτρέπεται λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης. □

Σχόλιο. Αν τώρα έχουμε το μη ομογενές πρόβλημα Cauchy

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \ , 0 \leq t \leq T, \ \ u(0) = x,$$

τότε η λύση του δίνεται από τη σχέση

$$u(t) = \mathrm{e}^{tA}x + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} f(s)\, ds \ \ , t \in [0, T]$$

και προφανώς είναι μοναδική.

Έτσι είμαστε πλέον σε θέση να θεωρήσουμε και να εξετάσουμε την γενικότερη περίπτωση όπου ο τελεστής μας είναι μη φραγμένος. Έχοντας κατά νου τους ορισμούς της αναλυτικής ημιομάδας και του sectorial τελεστή που διατυπώσαμε στον πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσουμε την αντίστοιχη θεωρία, με σκοπό πάντα να εξετάσουμε τις συνθήκες που θα μας οδηγήσουν στην λύση του αφηρημένου προβλήματος Cauchy. Συνεπώς δίνουμε κάποια βασικά λήμματα και θεωρήματα που χαρακτηρίζουν πλήρως τις αναλυτικές ημιομάδες και τους sectorial τελεστές που αντιστοιχούν σε αυτές.

Λήμμα 2.7.3. *Έστω $r > 0, \eta \in (\pi/2, \theta)$. Ορίζουμε την καμπύλη $\gamma_{r,\eta}$ ως εξής :*

$$\gamma_{r,\eta} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |arg\lambda| = \eta,\ |\lambda| \geq r\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |arg\lambda| \leq \eta,\ |\lambda| = r\}.$$

Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} e^{t\lambda} R(\lambda; A)\, d\lambda \ \ , t > 0. \tag{2.7}$$

Αν ο τελεστής A είναι sectorial τότε το ανωτέρω ολοκλήρωμα είναι καλώς ορισμένο και ανεξάρτητο των $r > 0$ και $\eta \in (\pi/2, \theta)$.

Απόδειξη. Αρχίζοντας την απόδειξή μας παρατηρούμε ότι για κάθε $t > 0$ η απεικόνιση $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{t\lambda} R(\lambda; A)$ είναι ολόμορφη στον τομέα $S_{\theta,\omega}$. Επίσης για κάθε $\lambda = \omega + r\mathrm{e}^{i\theta}$, ισχύει ότι

$$\|\mathrm{e}^{t\lambda} R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \exp(\omega t) \exp(tr \cos \eta) \frac{M}{r}, \tag{2.8}$$

για κάθε λ που ανήκει στις δυο ημιευθείες. Συνεπώς το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Επιλέγοντας τώρα $r' > 0$, $\eta' \in (\pi/2, \theta)$, θεωρούμε το ολοκλήρωμα κατά μήκος της καμπύλης $\gamma_{r',\eta'} + \omega$. Ορίζουμε επίσης ως D την περιοχή ανάμεσα στις καμπύλες $\gamma_{r',\eta'} + \omega$ και $\gamma_{r,\eta} + \omega$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $D_n = D \cap \{|z - \eta| \leq \eta\}$. Τότε έπεται από το θεώρημα Cauchy ότι

$$\int_{\partial D_n} \mathrm{e}^{t\lambda} R(\lambda; A)\, d\lambda = 0.$$

Λόγω της εκτίμησης (2.8) τα ολοκληρώματα πάνω στα δυο τόξα που περιέχονται στο σύνολο $\{|z - \omega| = \eta\}$ τείνουν στο 0 καθώς $n \to \infty$ και συνεπώς έχουμε ότι

$$\int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} \mathrm{e}^{t\lambda} R(\lambda; A)\, d\lambda = \int_{\gamma_{r',\eta'}+\omega} \mathrm{e}^{t\lambda} R(\lambda; A)\, d\lambda.$$

$\square$

Σχόλιο. Λόγω του ορισμού του sectorial τελεστή A μπορούμε να ορίσουμε τον φραγμένο γραμμικό τελεστή e^{tA} μέσα από την ολοκληρωτική σχέση (2.7), η οποία αποτελεί γενίκευση της σχέσης (2.6). Επίσης η φορά της καμπύλης $\gamma_{r,\eta}$ είναι αντίστροφη της φοράς των δεικτών του ρολογιού.

Θεώρημα 2.7.4. *Έστω A ένας sectorial τελεστής και e^{tA} όπως ορίστηκε στη σχέση (2.7). Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $e^{tA}x \in D(A^k)\ \ \forall t > 0\ , x \in X\ , k \in \mathbb{N}$. *Αν* $x \in D(A^k)$ *τότε*

$$A^k e^{tA} x = e^{tA} A^k x\ , t \geq 0.$$

(ii) $e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}\ \forall t, s \geq 0.$

(iii) Υπάρχουν σταθερές $M_0, M_1, M_2, ...$ *τέτοιες ώστε*

(a) $\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(x)} \leq M_0 e^{\omega t}\ , t > 0.$

(b) $\|t^k (A - \omega I)^k e^{tA}\|_{\mathcal{L}(x)} \leq M_k e^{\omega t}\ , t > 0.$

(iv) Η συνάρτηση $t \mapsto e^{tA}$ *ανήκει στον χώρο* $C^\infty\big((0, \infty); \mathcal{L}(x)\big)$, *και ισχύει ότι*

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{tA} = A^k e^{tA}\ \ , \forall k \in \mathbb{N}\ , t > 0.$$

Επίσης η συνάρτηση έχει αναλυτική επέκταση e^{zA} *στον τομέα* $S_{\theta-\pi/2,0}$ *και για* $z = \rho e^{ia} \in S_{\theta-\pi/2,0}\ , \theta' \in (\pi/2, \theta - a)$ *ισχύει ότι*

$$e^{zA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,\theta'} + \omega} e^{\lambda z} R(\lambda; A)\, d\lambda.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\omega = 0$, αλλιώς αντικαθιστούμε όπου A τον τελεστή $A - \omega I$.

(i) Έστω $k = 1$. Τότε αφού ο A είναι κλειστός έπεται από γνωστό λήμμα ότι e^{tA} ανήκει στο σύνολο $D(A)$ για κάθε $x \in X$ και ισχύει ότι

$$A\mathrm{e}^{tA} x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,\eta}} \mathrm{e}^{t\lambda} A R(\lambda; A) x\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r,\eta}} \lambda \mathrm{e}^{t\lambda} R(\lambda; A) x\, d\lambda, \qquad (2.9)$$

αφού

$$AR(\lambda; A) = \lambda R(\lambda; A) - I\ , \forall \lambda \in \rho(A)\ , \text{και} \int_{\gamma_{r,\eta}} \mathrm{e}^{t\lambda}\, d\lambda = 0.$$

Επίσης αν $x \in D(A)$ τότε ισχύει ότι $A\mathrm{e}^{tA}x = \mathrm{e}^{tA}Ax$,αφού $AR(\lambda;A)x = R(\lambda;A)Ax$. Συνεχίζοντας επαγωγικά το παραπάνω επιχείρημα παίρνουμε ότι $\mathrm{e}^{tA}x \in D(A^k)$ $,\forall k \in \mathbb{N}$. Επίσης ισχύει ότι

$$A^k\mathrm{e}^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}} \lambda^k \mathrm{e}^{t\lambda} R(\lambda;A)\,d\lambda.$$

(ii) Αφού

$$\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_{r,\eta}} \mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda;A)\,d\lambda \int_{\gamma_{2r,\eta'}} \mathrm{e}^{\mu s}R(\mu;A)\,d\mu,$$

με $\eta' \in (\pi/2,\eta)$ χρησιμοποιώντας την ταυτότητα που ικανοποιεί ο επιλύων τελεστής έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA} &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_{r,\eta}} \int_{\gamma_{2r,\eta'}} \mathrm{e}^{\lambda t+\mu s}\frac{R(\lambda;A)-R(\mu;A)}{\mu-\lambda}\,d\lambda d\mu \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_{r,\eta}} \mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda;A)\,d\lambda \int_{\gamma_{2r,\eta'}} \mathrm{e}^{\mu s}\frac{d\mu}{\mu-\lambda} \\
&\quad - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\gamma_{2r,\eta'}} \mathrm{e}^{\mu s}R(\mu;A)\,d\mu \int_{\gamma_{r,\eta}} \mathrm{e}^{\lambda t}\frac{d\lambda}{\mu-\lambda} \\
&= \mathrm{e}^{(t+s)A}.
\end{aligned}$$

Στο παραπάνω έχουμε χρησιμοποιήσει ότι

$$\int_{\gamma_{2r,\eta'}} \mathrm{e}^{\mu s}\frac{d\mu}{\mu-\lambda} = 2\pi \mathrm{e}^{s\lambda} \quad ,\lambda \in \gamma_{r,\eta}$$

καθώς και ότι

$$\int_{\gamma_{r,\eta}} \mathrm{e}^{\lambda t}\frac{d\lambda}{\mu-\lambda} = 0 \quad ,\mu \in \gamma_{2r,\eta'}.$$

(iii) Σε αυτό το μέρος της απόδειξης χρειάζεται προσοχή καθώς αν θέλουμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα $\|\mathrm{e}^{tA}\|$, ολοκληρώνοντας την ποσότητα

$\|\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda;A)\|$ κατά μήκος της καμπύλης $\gamma_{r,\eta}$ έχουμε μια ανωμαλία κοντά στο σημείο $t=0$ διότι η ολοκληρώσιμη ποσότητα φράσσεται από $M/|\lambda|$ για $|\lambda|$ αρκετά μικρό . Συνεπώς θέτουμε $\lambda t = \xi$ στη σχέση (2.7) και έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{rt,\eta}} \mathrm{e}^{\xi} R\left(\frac{\xi}{t};A\right)\frac{d\xi}{t} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}} \mathrm{e}^{\xi} R\left(\frac{\xi}{t};A\right)\frac{d\xi}{t} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\Bigg(\int_{r}^{\infty} \mathrm{e}^{\rho \mathrm{e}^{i\eta}} R\left(\frac{\rho \mathrm{e}^{i\eta}}{t};A\right)\frac{\mathrm{e}^{i\eta}}{t}d\rho \\
&\quad - \int_{r}^{\infty} \mathrm{e}^{\rho \mathrm{e}^{-i\eta}} R\left(\frac{\rho \mathrm{e}^{-i\eta}}{t};A\right)\frac{\mathrm{e}^{-i\eta}}{t}d\rho \\
&\quad + \int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{e}^{r\mathrm{e}^{ia}} R\left(\frac{r\mathrm{e}^{ia}}{t};A\right) ir\mathrm{e}^{ia}\frac{da}{t}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Έτσι έπεται ότι

$$
\|\mathrm{e}^{tA}\| \leq \frac{1}{\pi}\int_{r}^{\infty} M\mathrm{e}^{\rho\cos\eta}\ \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} M\mathrm{e}^{\rho\cos a}da.
$$

Επίσης λόγω του ότι $\|AR(\lambda;A)\| \leq M+1 \ \ ,\forall \lambda \in \gamma_{r,\eta}$ έχουμε ότι

$$
\|A\mathrm{e}^{tA}\| \leq \frac{M+1}{\pi}\int_{r}^{\infty} \mathrm{e}^{rt\cos\eta}\ d\rho\ + \frac{(M+1)r}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta} \mathrm{e}^{rt\cos a}\ da.
$$

Άρα για $r \to 0$ παίρνουμε την εκτίμηση

$$
\|A\mathrm{e}^{tA}\| \leq \frac{M+1}{\pi|\cos\eta|t} := \frac{N}{t} \ \ ,t>0.
$$

Όμως αφού οι τελεστές A και e^{tA} αντιμετατίθενται, δηλαδή $A\mathrm{e}^{tA}x = \mathrm{e}^{tA}Ax,\ \forall x \in D(A)$ έπεται ότι

$$
A^k\mathrm{e}^{tA} = (A\mathrm{e}^{\frac{t}{k}A})^k \ \ ,\forall k \in \mathbb{N}
$$

και συνεπώς παίρνουμε την εκτίμηση

$$
\|A\mathrm{e}^{tA}\|_{\mathcal{L}(x)} \leq (Nkt^{-1}) := M_k t^{-k}.
$$

(iv) Λόγω της σχέσης (2.9) έπεται ότι

$$
\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}} \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda;A)\ d\lambda = A\mathrm{e}^{tA} \ \ ,t>0.
$$

Ομοίως έχουμε ότι
$$\frac{d^k}{dt^k}\mathrm{e}^{tA} = A^k\mathrm{e}^{tA} \quad ,t > 0.$$
Έστω τώρα ότι δίνεται $0 < a < \theta - \pi/2$ και θέτουμε $\eta = \theta - a$. Η συνάρτηση
$$z \mapsto e^{zA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}} \mathrm{e}^{z\lambda}R(\lambda; A)d\lambda \ ,$$
είναι καλώς ορισμένη και ολόμορφη στον τομέα
$$S_a = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \ , |\mathrm{arg} z| < \theta - \pi/2 - a\}.$$
Συνεπώς αν $\lambda = \xi\mathrm{e}^{i\eta}$ και $z = \rho\mathrm{e}^{i\phi}$, έχουμε ότι $\mathrm{Re}(z\lambda) = \xi\rho\cos(\eta + \phi) \leq -c\xi\rho$, για κατάλληλο $c > 0$. Άρα αφού η ένωση των συνόλων $S_a \quad ,0 < a < \theta - \pi/2$, είναι το σύνολο $S_{\theta-\pi/2,0}$, τότε έπεται το ζητούμενο. $\square$

Σχόλιο. Το αποτέλεσμα (iv) του παραπάνω θεωρήματος είναι πολύ ενδιαφέρον καθώς ακόμα και αν οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος Cauchy παρουσιάζουν ιδιομορφίες (δεν είναι αρκετά λείες), η λύση του προβλήματος θα είναι αρκετά λεία. Στην πραγματικότητα μάλιστα ισχύει ότι η λύση μας θα είναι απεριόριστα διαφορίσιμη συνάρτηση. Επίσης αν A είναι ένας sectorial τελεστής τότε η συνάρτηση $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ αποτελεί μια αναλυτική ημιομάδα η οποία παράγεται από τον τελεστή A. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την συμπεριφορά της αναλυτικής ημιομάδας καθώς $t \to 0^+$ κατ΄αντιστοιχία με τα θεωρήματα που διατυπώσαμε στην περίπτωση της C_0 ημιομάδας.

Θεώρημα 2.7.5. *Έστω ότι ο sectorial τελεστής A παράγει μια αναλυτική ημιομάδα e^{tA}. Τότε ισχύουν τα παρακάτω :*

(i) Αν $x \in \overline{D(A)}$, τότε έπεται ότι
$$\lim_{t\to 0^+} e^{tA}x = x.$$
Επίσης ισχύει και το αντίστροφο,δηλαδή αν $y = lim_{t\to 0^+}e^{tA}x$ υπάρχει, τότε $x \in \overline{D(A)}$ και $y = x$.

(ii) Για κάθε $x \in X$, $t > 0$ έχουμε ότι $\int_0^t e^{sA}xds \in D(A)$ και μάλιστα
$$A\int_0^t e^{sA}xds = e^{tA}x - x.$$
Αν επιπλέον η συνάρτηση $s \mapsto Ae^{sA}x$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $(0, \epsilon)$ για $\epsilon > 0$, τότε έπεται ότι
$$e^{tA}x - x = \int_0^t Ae^{sA}xds \quad ,t \geq 0.$$

(iii) *Αν $x \in D(A)$ και $Ax \in \overline{D(A)}$, τότε*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{tA}x - x}{t} = Ax.$$

Επίσης ισχύει και το αντίστροφο.

(iv) *Αν $x \in D(A)$ και $Ax \in \overline{D(A)}$ τότε ισχύει ότι*

$$\lim_{t\to 0^+} Ae^{tA}x = Ax.$$

Απόδειξη. (i) Προτού αρχίσουμε την απόδειξη σημειώνουμε πως δεν μπορούμε να θεωρήσουμε το όριο $t \to 0^+$ της ποσότητας $\mathrm{e}^{tA}x$ όπως αυτή ορίστηκε μέσα από τη σχέση (2.7) μιας και η εκτίμηση $\|R(\lambda; A)\| \leq M/|\lambda - \omega|$ δεν επαρκεί για να χρησιμοποιήσουμε κάποιο θεώρημα σύγκλισης. Θεωρούμε λοιπόν ότι $x \in D(A)$. Σταθεροποιούμε ξ, r τέτοια ώστε $\omega < \xi \in \rho(A)$ $, 0 < r < \xi - \omega$, και θέτουμε $y = \xi x - Ax$, έτσι ώστε $x = R(\xi; A)y$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA}x = \mathrm{e}^{tA}R(\xi; A)y &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} \mathrm{e}^{t\lambda}R(\lambda; A)R(\xi; A)y d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} \mathrm{e}^{t\lambda}\frac{R(\lambda; A)}{\xi - \lambda}y d\lambda \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} \mathrm{e}^{t\lambda}\frac{R(\xi; A)}{\xi - \lambda}y d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} \mathrm{e}^{t\lambda}\frac{R(\lambda; A)}{\xi - \lambda}y d\lambda.
\end{aligned}$$

Συνεπώς αφού $\|R(\lambda; A)y/(\xi - \lambda)\| \leq C|\lambda|^{-2}$ $, \forall \lambda \in \gamma_{r,\eta} + \omega$, έχουμε ότι

$$\lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{tA}x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r,\eta}+\omega} \frac{R(\lambda; A)}{\xi - \lambda}y d\lambda = R(\xi; A)y = x.$$

Η δεύτερη ισότητα έπεται από το θεώρημα Cauchy ολοκληρώνοντας πάνω στην καμπύλη $\{\lambda \in \gamma_{r,\eta} + \omega : |\lambda - \omega| \leq n\} \cup \{|\lambda - \omega| = n \text{ , } \arg(\lambda - \omega \in [-\eta, \eta]\}$ και παίρνοντας όριο $n \to \infty$. Αφού όμως $D(A)$ πυκνό στο $\overline{D(A)}$ και $\|\mathrm{e}^{tA}\|$ φραγμένη από μια σταθερά ανεξάρτητη του t τότε έχουμε ότι $\lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{tA}x = x$ $, \forall x \in \overline{D(A)}$.

Αντίστροφα τώρα αν $y = \lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{tA}x$, τότε $y \in \overline{D(A)}$ αφού $\mathrm{e}^{tA}x \in D(A)$, $\forall\, t > 0$ και

$$R(\xi; A)y = \lim_{t\to 0^+} R(\xi; A)\mathrm{e}^{tA}x = \lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{tA}R(\xi; A)x = R(\xi; A)x \ ,$$

αφού $R(\xi;A)x \in D(A)$. Άρα $y = x$.

(ii) Έστω $\xi \in \rho(A)$ και $x \in X$. Τότε για κάθε $\varepsilon \in (0,t)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^t \mathrm{e}^{sA}xds &= \int_\varepsilon^t (\xi - A)R(\xi;A)\mathrm{e}^{sA}xds \\ &= \xi \int_\varepsilon^t R(\xi;A)\mathrm{e}^{sA}xds - \int_\varepsilon^t \frac{d}{ds}(R(\xi;A)\mathrm{e}^{sA}x)ds \\ &= \xi R(\xi;A)\int_\varepsilon^t \mathrm{e}^{sA}xds - \mathrm{e}^{tA}R(\xi;A)x + \mathrm{e}^{\varepsilon A}R(\xi;A)x.\end{aligned}$$

Αφού όμως $R(\xi;A)x \in D(A)$, παίρνοντας το όριο $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε τελικά ότι

$$\int_0^t \mathrm{e}^{sA}xds = \xi R(\xi;A)\int_0^t \mathrm{e}^{sA}xds - R(\xi;A)(\mathrm{e}^{tA}x - x).$$

Άρα έπεται ότι $\int_0^t \mathrm{e}^{sA}xds \in D(A)$ και

$$(\xi - A)\int_0^t \mathrm{e}^{sA}xds = \xi\int_0^t \mathrm{e}^{sA}xds - (\mathrm{e}^{tA}x - x).$$

(iii) Αν $x \in D(A)$ και $Ax \in \overline{D(A)}$ τότε έπεται ότι

$$\frac{\mathrm{e}^{tA}x - x}{t} = \frac{1}{t}A\int_0^t \mathrm{e}^{sA}xds = \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}^{sA}Axds.$$

Αφού η απεικόνιση $s \mapsto \mathrm{e}^{sA}Ax$ είναι συνεχής στο $[0,t]$, λόγω του (i) έχουμε ότι $\lim_{t\to 0^+}(\mathrm{e}^{tA}x - x)/t = Ax$.

Αντίστροφα τώρα αν υπάρχει το όριο $z := \lim_{t\to 0^+}(\mathrm{e}^{tA}x - x)/t$, τότε $\lim_{t\to 0^+}\mathrm{e}^{tA}x = x$, και συνεπώς $x, z \in \overline{D(A)}$. Επίσης για κάθε $\xi \in \rho(A)$ έχουμε ότι

$$R(\xi;A)z = \lim_{t\to 0^+} R(\xi;A)\frac{\mathrm{e}^{tA}x - x}{t} ,$$

και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (ii) παίρνουμε ότι

$$R(\xi;A)z = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}R(\xi;A)A\int_0^t \mathrm{e}^{sA}xds = \lim_{t\to 0^+}(\xi R(\xi;A) - I)\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}^{sA}xds.$$

Όμως αφού $x \in \overline{D(A)}$, η συνάρτηση $s \mapsto e^{sA}x$ είναι συνεχής στο $s = 0$ και άρα

$$R(\xi;A)z = \xi R(\xi;A)x - x.$$

Ειδικότερα μάλιστα, $x \in D(A)$ και $z = \xi x - (\xi - A)x = Ax$.

(iv) Έπεται από το (i), διότι $A\mathrm{e}^{tA}x = \mathrm{e}^{tA}Ax \ \ ,\forall x \in D(A)$. $\square$

Λήμμα 2.7.6. *Έστω $A : D(A) \subset X \to X$ ένας sectorial τελεστής. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $Re\lambda > \omega$ έχουμε ότι*

$$R(\lambda; A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{tA} dt.$$

Σχόλιο. Για κάθε $t \geq 0$, ο τελεστής e^{tA} είναι $1-1$. Θα αποδείξουμε τώρα λοιπόν τον ισχυρισμό μας. Προφανώς ο τελεστής $\mathrm{e}^{0A} = I$ είναι $1-1$. Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν $t_0 > 0$, $x \in X$ τέτοια ώστε $\mathrm{e}^{t_0 A}x = 0$. Τότε για $t \geq t_0$ έπεται ότι $\mathrm{e}^{(t-t_0)A}\mathrm{e}^{t_0 A}x = 0$. Αφού όμως η συνάρτηση $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}x$ είναι αναλυτική ,τότε $\mathrm{e}^{tA}x \equiv 0$ στο $(0, +\infty)$. Άρα έπεται ότι $R(\lambda; A)x = 0 \quad , \forall \lambda > \omega$ και λόγω του μονοσημάντου του μετασχηματισμού Laplace έπεται ότι $x = 0$.

Λήμμα 2.7.7. *Έστω $A : D(A) \subset X \to X$ ένας γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \geq \omega\} \subseteq \rho(A)$ και*

$$\|\lambda R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(x)} \leq M \quad , Re\lambda > \omega,$$

όπου $\omega \geq 0$, $M \geq 1$. Τότε ο τελεστής A είναι sectorial.

Σχόλιο. Το παραπάνω λήμμα μας δίνει επαρκείς συνθήκες για να είναι ο τελεστής μας sectorial. Προφανώς είναι ασθενέστερες του ορισμού του sectorial τελεστή, όμως βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή σε μερικούς ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές ορισμένους σε κατάλληλους συναρτησιακούς χώρους.

Λήμμα 2.7.8. *Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert και $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ένας αυτοσυζυγής και αποσβεστικός τελεστής. Τότε ο A είναι sectorial τελεστής με τυχόν $\theta < \pi$ και $\omega = 0$.*

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Έστω λοιπόν $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$. Τότε αφού ο τελεστής A είναι αυτοσυζυγής έπεται ότι

$$< Ax, x > = < x, A^* x > = < x, Ax > = \overline{< Ax, x >}.$$

Άρα έχουμε ότι $< Ax, x > \in \mathbb{R}$. Συνεπώς για κάθε $x \in D(A)$ έπεται λόγω της αποσβεστικότητας του τελεστή ότι

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 = (a^2 + b^2)\|x\|^2 - 2a < x, Ax > + \|Ax\|^2 \geq b^2\|x\|^2.$$

Συνεπώς αν $b \neq 0$ τότε ο τελεστής $\lambda I - A$ είναι $1-1$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο τελεστής είναι επί. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathrm{Ran}(A)$ είναι κλειστό και πυκνό στον χώρο $\mathcal{H}$. Έστω λοιπόν $\{x_n\} \in D(A)$ τέτοια ώστε η ποσότητα $\lambda x_n - Ax_n$ να συγκλίνει, καθώς $n \to \infty$. Λόγω της ανισότητας

$$\|(\lambda I - A)(x_n - x_m)\|^2 \geq b^2\|x_n - x_m\|^2 \quad , n, m \in \mathbb{N}$$

έπεται ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι Cauchy ,και με παρόμοιο τρόπο και η ακολουθία $\{Ax_n\}$ είναι Cauchy επίσης. Άρα υπάρχουν $x, y \in \mathbb{H}$ τέτοια ώστε $x_n \to x$ και $Ax_n \to y$. Όμως αφού ο τελεστής A είναι αυτοσυζυγής, τότε είναι κλειστός και άρα

$$x \in D(A), Ax = y \text{ και } \lambda x_n - Ax_n \to \lambda x - Ax \in \text{Ran}(\lambda I - A).$$

Άρα το πεδίο τιμών $\text{Ran}(\lambda I - A)$ είναι κλειστό. Αν τώρα $y \in (\text{Ran}(\lambda I - A))^{\perp}$ τότε για κάθε $x \in D(A)$ έπεται ότι $< y, \lambda x - Ax >= 0$. Άρα $y \in D(A^*) = D(A)$ και $\overline{\lambda} y - A^* y = \overline{\lambda} y - Ay = 0$. Αφού ο τελεστής $\overline{\lambda} I - A$ είναι $1-1$, τότε $y = 0$ και συνεπώς $\overline{\text{Ran}(\lambda I - A)} = \mathcal{H}$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $\sigma \subset (-\infty, 0]$. Αν $\lambda > 0$ και $x \in D(A)$ έχουμε ότι

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda < x, Ax > + \|Ax\|^2 \geq \lambda^2 \|x\|^2 \ ,$$

και επιχειρηματολογώντας όπως πριν έχουμε ότι $\lambda \in \rho(A)$. Έστω τώρα $\lambda = \rho \mathrm{e}^{i\theta} \ \ , \rho > 0 \ , -\pi < \theta < \pi$. Θεωρούμε $x \in \mathcal{H}$ και $u = R(\lambda; A)x$. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση $\lambda u - Au = x$ με $\mathrm{e}^{-i\theta/2}$ και παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με το u έχουμε ότι

$$\rho \mathrm{e}^{i\theta/2} \|u\|^2 - \mathrm{e}^{-i\theta/2} < Au, u >= \mathrm{e}^{-i\theta/2} < x, u >,$$

από την οποία παίρνοντας το πραγματικό μέρος έπεται ότι

$$\rho \cos(\theta/2) \|u\|^2 - \cos(\theta/2) < Au, u >= \text{Re}(\mathrm{e}^{-i\theta/2} < x, u >) \leq \|x\| \|u\|.$$

Άρα αφού $\cos(\theta/2) > 0$ και $< Au, u > \leq 0$ έπεται ότι

$$\|u\| \leq \frac{\|x\|}{|\lambda| \cos(\theta/2)},$$

όπου $\theta = \text{arg}\lambda$. $\square$

Θεώρημα 2.7.9. *Έστω $T(t)$ μια ομοιόμορφα φραγμένη C_0 ημιομάδα φραγμένων και γραμμικών τελεστών. Έστω επίσης A ο απειροστός της γεννήτορας και $0 \in \rho(A)$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) Η ημιομάδα $T(t)$ μπορεί να επεκταθεί σε αναλυτική ημιομάδα σε κάποιο τομέα $\Delta_\delta = \{z : |argz| < \delta\}$ και η ημιομάδα $T(z)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη σε κάθε κλειστό υποσύνολο $\overline{\Delta}_{\delta'} \ \ , \delta' < \delta$, του τομέα Δ_δ.

(ii) Υπάρχουν $0 < \delta < \pi/2$ και $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\rho(A) \supset \Sigma := \{\lambda : |arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}$$

και ισχύει η εκτίμηση

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \ \ , \forall \lambda \in \Sigma \ , \lambda \neq 0.$$

(iii) Η ημιομάδα $T(t)$ είναι διαφορίσιμη για κάθε $t > 0$ και υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t} \ ,\forall t > 0.$$

Απόδειξη. $(ii) \Longrightarrow (iii)$

Έστω ότι ο τελεστής A ικανοποιεί το (ii). Τότε έπεται ότι

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda, \tag{2.10}$$

όπου Γ είναι μια καμπύλη η οποία αποτελείται από τις καμπύλες $\rho \mathrm{e}^{i\theta}$ και $\rho \mathrm{e}^{-i\theta}$ $,0 < \rho < \infty$ και $\pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta$. Η καμπύλη Γ έχει φορά τέτοια ώστε το $\mathrm{Im}\lambda$ να αυξάνεται κατά μήκος της. Προφανώς το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.10) συγκλίνει στο χώρο $B(X)$ για κάθε $t > 0$. Διαφορίζοντας λοιπόν τη σχέση (2.10) ως προς t έχουμε ότι

$$T'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda. \tag{2.11}$$

Όμως με τη σειρά του και το ολοκλήρωμα (2.11) συγκλίνει στο χώρο των φραγμένων τελεστών $B(X)$ αφού ισχύει ότι

$$\|T'(t)\| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} M\mathrm{e}^{-\rho\cos\theta t} d\rho = \left(\frac{M}{\pi\cos\theta}\right)\frac{1}{t}.$$

Άρα $T(t)$ διαφορίσιμη ημιομάδα για κάθε $t > 0$ και επιπλέον ισχύει ότι

$$\|AT(t)\| = \|T'(t)\| \leq C/t \ ,t > 0. \tag{2.12}$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$

Αφού $T(t)$ διαφορίσιμη για κάθε $t > 0$, έχουμε ότι

$$\|T^{(n)}(t)\| = \|T'(t/n)^n\| \leq \|T'(t/n)\|^n.$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα και λόγω των σχέσεων (2.12), και αφού $n!\mathrm{e}^n \geq n^n$ έχουμε σαν αποτέλεσμα ότι

$$\frac{1}{n!}\|T^{(n)}(t)\| \leq \left(\frac{C\mathrm{e}}{t}\right)^n.$$

Θεωρούμε στη συνέχεια τη δυναμοσειρά

$$T(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n. \tag{2.13}$$

Η ανωτέρω σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο χώρο $B(X)$ για $|z-t| \leq k(t/\mathrm{e}C)$, $\forall\ k < 1$. Συνεπώς η ημιομάδα $T(z)$ είναι αναλυτική στον τομέα $\Delta = \{z : |\text{argz}| < \arctan(1/Ce)\}$. Προφανώς για $z \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $T(z) = T(t)$, γεγονός που μας δείχνει ότι η ημιομάδα $T(z)$ αποτελεί επέκταση της $T(t)$ στον τομέα Δ. Λόγω λοιπόν της αναλυτικότητας, η ημιομάδα $T(z)$ ικανοποιεί την ιδιότητα της ημιομάδας και λόγω της σχέσης (2.13) βλέπουμε ότι $T(z)x \to x\ \ , z \to 0$ στον τομέα Δ. Επίσης αν περιοριστούμε σε ένα κλειστό υποσύνολο

$$\overline{\Delta}_\varepsilon = \{z : |\text{argz}| \leq \arctan((1/C\mathrm{e}) - \varepsilon)\}$$

του τομέα Δ βλέπουμε ότι $T(z)$ ομοιόμορφα φραγμένη στο σύνολο $\overline{\Delta}_\varepsilon$. □

Σχόλιο. Στο τελευταίο μέρος της απόδειξης χρησιμοποιήσαμε ότι αν η ημιομάδα $T(t)$ είναι παραγωγίσιμη C_0 ημιομάδα, τότε είναι και απεριόριστα διαφορίσιμη για $t > 0$, στην ομοιόμορφη τοπολογία. Επίσης αν A είναι ο απειροστός της γεννήτορας τότε ισχύει ότι

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(T'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \quad , n = 1, 2, 3.....$$

Σχόλιο. Μέσα από την απόδειξη βλέπουμε επίσης ότι αν ισχύει η εκτίμηση $\|AT(t)\| \leq C/t$ τότε η ημιομάδα $T(t)$ μπορεί να επεκταθεί σε αναλυτική ημιομάδα σε κάποιο τομέα γύρω από τον θετικό άξονα των πραγματικών αριθμών. Αν επιπλέον η σταθερά C είναι αρκετά μικρή τότε η ημιομάδα $T(t)$ γίνεται αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, πράγμα που δείχνει ότι ο τελεστής A είναι φραγμένος.

Θεώρημα 2.7.10. *Έστω A ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Τότε η ημιομάδα $T(t)$ είναι αναλυτική αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές $C > 0$, $\Lambda \geq 0$ τέτοιες ώστε*

$$\|AR(\lambda; A)^{n+1}\| \leq \frac{C}{n\lambda^n} \ \ , \forall\lambda > n\Lambda \ \ , n = 1, 2, ... \tag{2.14}$$

Απόδειξη. Λόγω του θεωρήματος (2.7.15) έπεται ότι η ημιομάδα $T(t)$ είναι αναλυτική αν και μόνο αν είναι διαφορίσιμη για $t > 0$ και υπάρχουν σταθερές $C_1 > 0$ και $\omega_1 > 0$ τέτοιες ώστε

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C_1}{t}\mathrm{e}^{\omega_1 t} \ \ , t > 0. \tag{2.15}$$

Αν ο τελεστής A ικανοποιεί τη σχέση (2.14) τότε για $\lambda > n\Lambda$ και $x \in D(A)$ έχουμε ότι

$$\|AR(\lambda;A)^{n+1}x\| = \|R(\lambda;A)^{n+1}Ax\| \leq \frac{C}{n\lambda^n}\|x\|. \tag{2.16}$$

Επιλέγοντας $t < 1/\Lambda$ και αντικαθιστώντας $\lambda = n/t$ στη σχέση (2.16) έπεται ότι

$$\left\|A\left(\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};A\right)\right)^{n+1}x\right\| = \left\|\left(\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};A\right)\right)^{n+1}Ax\right\| \leq \frac{C}{t}\|x\| \quad ,\forall x \in D(A).$$

Παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ έπεται λόγω της κλειστότητας του A ότι

$$|AT(t)x\| \leq \frac{C}{t}\|x\| \quad ,\forall x \in D(A)\ , 0 < t < 1/\Lambda. \tag{2.17}$$

Όμως αφού $\overline{D(A)} = X$ και $AT(t)$ κλειστός, έπεται ότι η σχέση (2.17) ισχύει για κάθε $x \in X$. Συνεπώς υπάρχουν σταθερές $C_1 > 0$ και $\omega_1 > 0$ τέτοιες ώστε να ισχύει η σχέση (2.15) και η ημιομάδα $T(t)$ να είναι αναλυτική.

Αντίστροφα τώρα διαφορίζοντας n φορές ως προς λ τη σχέση

$$R(\lambda;A)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)xdt$$

παίρνουμε ότι

$$R(\lambda;A)^{(n)}x = (-1)^n n! R(\lambda;A)^{n+1}x = (-1)^n \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)xdt. \tag{2.18}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή A και στα δυο μέλη της σχέσης (2.18) και εκτιμώντας το δεξιό μέλος, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.15) έπεται ότι

$$n!\|AR(\lambda;A)^{n+1}x\| \leq C_1\left(\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-(\lambda-\omega_1)t}dt\right)\|x\| = \frac{C_1}{(\lambda-\omega_1)^n}(n-1)!\|x\|.$$

Άρα για $\lambda > n\Lambda$ έπεται ότι

$$\|AR(\lambda;A)^{n+1}\| \leq \frac{C_1}{n\lambda^n}\left(\frac{1}{1-\frac{\omega_1}{\Lambda n}}\right)^n \leq \frac{C_2}{n\lambda^n}.$$

□

Σχόλιο. Το παραπάνω θεώρημα είναι αρκετά δύσκολο να εφαρμοστεί καθώς απαιτεί την εκτίμηση της n- οστής δύναμης του επιλύοντα τελεστή. Επίσης μας δίνει έναν χαρακτηρισμό του απειροστού γεννήτορα A της αναλυτικής ημιομάδας $T(t)$ μέσω της εκτίμησης του επιλύοντα τελεστή μόνο για πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ, σε αντίθεση με το θεώρημα (2.7.15) όπου $\lambda \in \mathbb{C}$.

Θεώρημα 2.7.11. *Έστω $T(t)$ μια ομοιόμορφα φραγμένη C_0 ημιομάδα. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η ημιομάδα $T(t)$ είναι αναλυτική σε κάποιο τομέα γύρω από τον μη αρνητικό άξονα των πραγματικών αριθμών.*

(ii) $\forall \zeta \in \mathbb{C}\ ,\zeta \neq 1\ ,|\zeta| \geq 1$ *υπάρχουν θετικές σταθερές K, δ τέτοιες ώστε $\zeta \in \rho(T(t))$ και*

$$\|(\zeta I - T(t))^{-1}\| \leq K \ \ ,\forall 0 < t < \delta.$$

(iii) *Υπάρχουν $\zeta \in \mathbb{C}\ ,|\zeta| = 1$ και θετικές σταθερές K, δ έτσι ώστε να ισχύει η εκτίμηση*

$$\|(\zeta I - T(t))x\| \geq \frac{1}{K}\|x\| \ \ ,\forall x \in X\ ,0 < t < \delta.$$

Σχόλιο. Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει έναν διαφορετικό χαρακτηρισμό της αναλυτικής ημιομάδας $T(t)$ ο οποίος βασίζεται στην συμπεριφορά της ημιομάδας κοντά στη φασματική της ακτίνα, σε αντίθεση με τα προηγούμενα θεωρήματα τα οποία βασίζονταν σε εκτιμήσεις του επιλύοντα τελεστή της ημιομάδας $T(t)$. Κλείνοντας την παράγραφο θα διατυπώσουμε δυο λήμματα που χαρακτηρίζουν και αυτά τις αναλυτικές ημιομάδες.

Λήμμα 2.7.12. *Έστω $T(t)$ μια C_0 ημιομάδα. Αν*

$$\limsup_{t \to 0} \|I - T(t)\| < 2, \tag{2.19}$$

τότε η ημιομάδα $T(t)$ είναι αναλυτική σε κάποιο τομέα γύρω από τον μη αρνητικό άξονα των πραγματικών αριθμών.

Απόδειξη. Από τη σχέση (2.19) έπεται ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$\|I - T(t)\| \leq 2 - \varepsilon \ \ ,0 < t < \delta.$$

Όμως τότε θα έχουμε ότι

$$\|(-I - T(t)x\| \geq 2\|x\| - \|(I - T(t)x\| \geq \varepsilon\|x\| \ \ ,\forall 0 < t < \delta.$$

Έτσι λόγω του θεωρήματος (2.7.20(iii)) για $\zeta = -1$, έπεται ότι η ημιομάδα $T(t)$ είναι αναλυτική. □

Σχόλιο. Το παραπάνω λήμμα μας δείχνει ότι η συμπεριφορά της ποσότητας $\|I - T(t)\|$ στο σημείο $t = 0$ μας εξασφαλίζει την αναλυτικότητα της ημιομάδας $T(t)$ σε μια γωνία γύρω από τον μη αρνητικό άξονα των πραγματικών αριθμών. Συνεπώς είναι λογικό να αναρωτηθούμε αν ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η ημιομάδα είναι αναλυτική μπορούμε να έχουμε σαν αποτέλεσμα μια σχέση της μορφής (2.19); Δυστυχώς η απάντηση είναι αρνητική, αλλά αν επιβάλουμε κάποια επιπλέον συνθήκη για τον χώρο Banach και κάποια ακόμη συνθήκη στην ημιομάδα τότε γίνεται καταφατική. Προς τούτο λοιπόν έχουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.7.13. *Έστω ότι $T(t)$ είναι μια αναλυτική συστολική ημιομάδα σε έναν ομοιόμορφα κυρτό χώρο Banach X. Τότε ισχύει ότι*

$$\limsup_{t\to 0} \|I - T(t)\| < 2.$$

Απόδειξη. Αφού $T(t)$ συστολική ημιομάδα τότε έπεται ότι

$$\|I + T(t)\| \leq 2.$$

Αν λοιπόν ισχύει ότι

$$\limsup_{t\to 0} \|I - T(t)\| = 2 \ ,$$

τότε υπάρχουν ακολουθίες $\{x_n\}$ και $\{t_n\}$ τέτοιες ώστε $\|x_n\| = 1 \ , t_n \to 0$ και

$$\|(I - T(t_n))x_n\| \geq 2 - 1/n. \tag{2.20}$$

Όμως αφού $\|T(t_n)x_n\| \leq 1$, έπεται από τη σχέση (2.20) και την ομοιόμορφη κυρτότητα του χώρου X, ότι

$$\|(I + T(t_n))x_n\| \to 0 \ , n \to \infty.$$

Αυτό προφανώς έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα (2.7.20 (ii)). Άρα ισχύει ότι

$$\limsup_{t\to 0} \|I - T(t)\| < 2.$$

□

2.8 Εκθετική αναπαράσταση

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα θεώρημα το οποίο μας δίνει και αυτό μια αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος Cauchy. Σε αυτή την περίπτωση όμως δεν χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace αλλά δίνουμε μια αναπαράσταση μέσω της εκθετικής συνάρτησης e^{tA}, όπου εξετάζουμε την γενικότερη περίπτωση στην οποία ο τελεστής A δεν είναι φραγμένος. Προφανώς στην ιδανική περίπτωση όπου ο τελεστής A είναι φραγμένος, έχουμε ότι $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$.

Θεώρημα 2.8.1. *Έστω $T(t)$ C_0 ημιομάδα στον χώρο Banach X. Αν A είναι ο απειροστός γεννήτορας της ημιομάδας $T(t)$ τότε ισχύει ότι*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^n x = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t}\, R\big(\frac{n}{t}; A\big) \right]^n x \quad ,\forall x \in X, \tag{2.21}$$

όπου το όριο είναι ομοιόμορφο για κάθε t που ανήκει σε φραγμένο διάστημα.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$. Έχουμε ήδη δει ότι για Re$\lambda > \omega$ η συνάρτηση $R(\lambda; A)$ είναι αναλυτική ως προς λ και αποτελεί τον μετασχηματισμό Laplace της ημιομάδας $T(t)$, δηλαδή

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\, T(s)x\, ds \quad ,\forall x \in X \quad (8.7).$$

Παραγωγίζοντας n φορές ως προς λ και θέτοντας $s = vt$ και $\lambda = n/t$ έχουμε ότι

$$R\left(\frac{n}{t}; A\right)^{(n)} x = (-1)^n t^{n+1} \int_0^\infty (v\mathrm{e}^{-v})^n T(tv)x\, dv.$$

Όμως

$$R(\lambda; A)^{(n)} = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}$$

και συνεπώς

$$\left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}; A\right)\right]^{n+1} x = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty (v\mathrm{e}^{-v})^n T(tv)x\, dv.$$

Παρατηρώντας ότι

$$\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty (v\mathrm{e}^{-v})^n\, dv = 1$$

εξάγουμε το συμπέρασμα

$$\left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}; A\right)\right]^{n+1} x - T(t)x = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty (v\mathrm{e}^{-v})^n\, [T(vt)x - T(t)x]\, dv \tag{2.22}$$

Δοθέντος $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $0 < a < 1 < b < \infty$ τέτοια ώστε για $t \in [0, t_0]$ να έχουμε ότι

$$\|T(tv)x - T(t)x\| \leq \varepsilon \;, \quad a \leq v \leq b.$$

Παίρνουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.22) και το σπάμε σε τρία ολοκληρώματα I_1, I_2, I_3. Τότε έχουμε ότι

$$\|I_1\| \leq \frac{n^{n+1}}{n!}(a\mathrm{e}^{-a})^n \int_0^a \|T(vt)x - T(t)x\| \, dv,$$

$$\|I_2\| \leq \varepsilon \frac{n^{n+1}}{n!} \int_a^b (v\mathrm{e}^{-v})^n \, dv < \varepsilon \, ,$$

$$\|I_3\| = \left\| \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty (v\mathrm{e}^{-v})^n \, (T(tv)x - T(t)x \, dv \right\|.$$

Στις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιήσαμε ότι η ποσότητα $v\mathrm{e}^{-v}$ είναι μη φθίνουσα για $0 \leq v \leq 1$ και μη αύξουσα για $v \geq 1$. Αφού επιπλέον $v\mathrm{e}^{-v} < \mathrm{e}^{-1}$ για $v \neq 1$ τότε $\|I_1\| \to 0$ ομοιόμορφα ως προς $t \in [0, t_0]$ καθώς $n \to \infty$. Επιλέγοντας $n > \omega t$ στο ολοκλήρωμα I_3 έχουμε ότι $\|I_3\| \to 0$, ομοιόμορφα ως προς $t \in [0, t_0]$ καθώς $n \to \infty$. Συνεπώς

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}; A \right) \right]^{n+1} x - T(t)x \right\| \leq \varepsilon$$

Αφού όμως $\varepsilon > 0$ τυχαίο έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}; A \right) \right]^{n+1} x = T(t)x.$$

Όμως λόγω του λήμματος (2.3.2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}; A \right) x = x$$

και άρα η σχέση (2.21) έπεται. □

Σχόλιο. Η σχέση (2.21) του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να μας δώσει μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία της λύσης του προβλήματος Cauchy. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, έστω ότι ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = x.$$

Αντικαθιστούμε το παραπάνω πρόβλημα και παίρνουμε την ισοδύναμη διατύπωση

$$\frac{u_n\left(\frac{jt}{n}\right) - u_n\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} = Au_n\left(\frac{jt}{n}\right), \quad u_n(0) = x$$

η οποία αποτελεί μια καλή προσέγγιση του προβλήματος Cauchy. Το καινούργιο πρόβλημα μπορεί εύκολα να λυθεί και η λύση του δίνεται από τη σχέση

$$u_n(t) = \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x \ ,$$

όπου η ακολουθία $\{u_n(t)\}$ αποτελεί μια προσέγγιση της λύσης $u(t)$ του αρχικού μας προβλήματος. Λόγω του θεωρήματος (2.8.1) έχουμε ότι $u_n(t) \to T(t)x$ καθώς $n \to \infty$. Συνεπώς αν $x \in D(A)$ τότε $T(t)x$ είναι η μοναδική λύση του αρχικού προβλήματος και άρα οι λύσεις των εξισώσεων διαφορών συγκλίνουν στη λύση του προβλήματος Cauchy. Αν τώρα $x \notin D(A)$ τότε δεν είναι σίγουρο πως υπάρχει λύση. Όμως και πάλι οι λύσεις των εξισώσεων διαφορών συγκλίνουν στην ποσότητα $T(t)x$, η οποία καλείται γενικευμένη λύση του προβλήματος Cauchy.

Στην επόμενη παράγραφο θα ασχοληθούμε με την έννοια του ψευδοεπιλύοντα τελεστή $J(\lambda)$ και θα εξετάσουμε τις υποθέσεις κάτω από τις οποίες υπάρχει ένας πυκνά ορισμένος, κλειστός γραμμικός τελεστής A έτσι ώστε ο τελεστής $J(\lambda)$ να αποτελεί τον επιλύοντα τελεστή του A. Υπενθυμίζουμε ότι αν $\Delta \subset \mathbb{C}$, μια οικογένεια $J(\lambda)$ φραγμένων γραμμικών τελεστών στον χώρο Banach X η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda) - J(\mu) \ \ , \lambda, \mu \in \Delta, \tag{2.23}$$

καλείται ψευδοεπιλύων τελεστής στο Δ. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό μας ενδιαφέρει η εν λόγω θεωρία διότι ο επιλύων τελεστής είναι φραγμένος, εν αντιθέσει με τον τελεστή A ο οποίος είναι μη φραγμένος εν γένει. Ξεκινώντας λοιπόν, διατυπώνουμε το ακόλουθο βασικό λήμμα.

2.9 Ψευδοεπιλύων τελεστής

Λήμμα 2.9.1. *Έστω $\Delta \subset \mathbb{C}$. Αν $J(\lambda)$ είναι ψευδοεπιλύων τελεστής στο Δ τότε $J(\lambda)J(\mu) = J(\mu)J(\lambda)$. Επίσης τόσο ο πυρήνας $N(J(\lambda))$ όσο και η εικόνα Ran$(J(\lambda))$ είναι ανεξάρτητα του $\lambda \in \Delta$, με τον πυρήνα $N(J(\lambda))$ να αποτελεί ένα κλειστό υπόχωρο του X.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του ψευδοεπιλύοντα τελεστή έπεται ότι οι τελεστές $J(\lambda), J(\mu)$ αντιμετατίθενται $\forall \lambda, \mu \in \Delta$. Ξαναγράφοντας τον ορισμό παίρνουμε ότι

$$J(\lambda) = J(\mu)\big[I + (\mu - \lambda)J(\lambda)\big]$$

πράγμα που μας δείχνει ότι $\mathrm{Ran}(J(\mu)) \supset \mathrm{Ran}(J(\lambda))$ και λόγω συμμετρίας ισχύει και το αντίθετο. Συνεπώς $\mathrm{Ran}(J(\lambda)) = \mathrm{Ran}(J(\mu))$. Ομοίως έχουμε ότι $N(J(\lambda)) = N(J(\mu))$. Η κλειστότητα του πυρήνα είναι προφανής. $\square$

Θεώρημα 2.9.2. *Έστω $\Delta \subset \mathbb{C}$ και $J(\lambda)$ ο ψευδοεπιλύων τελεστής στο Δ. Τότε ο $J(\lambda)$ είναι ο επιλύων τελεστής του μοναδικού πυκνά ορισμένου και κλειστού γραμμικού τελεστή $A \iff N(J(\lambda)) = \{0\}$ και $\overline{Ran(J(\lambda))} = X$.*

Απόδειξη. Προφανώς αν $J(\lambda)$ είναι ο επιλύων τελεστής του πυκνά ορισμένου, κλειστού τελεστή A τότε $N(J(\lambda)) = \{0\}$ και $\mathrm{Ran}(J(\lambda)) = D(A)$. Άρα αφού $\overline{D(A)} = X$ τότε έπεται το ζητούμενο. Έστω τώρα αντιθέτως ότι $N(J(\lambda)) = \{0\}$ και $\overline{\mathrm{Ran}(J(\lambda))} = X$. Τότε ο $J(\lambda)$ είναι 1-1. Έστω $\lambda_0 \in \Delta$, ορίζουμε

$$A = \lambda_0 I - J(\lambda_0)^{-1}. \tag{2.24}$$

Ο τελεστής A είναι γραμμικός, κλειστός και το πεδίο ορισμού του είναι πυκνό στον X, αφού $D(A) = \mathrm{Ran}(J(\lambda_0))$. Από τον ορισμό του A έπεται ότι

$$\lambda_0 I - A)J(\lambda_0) = J(\lambda_0)(\lambda_0 I - A) = I. \tag{2.25}$$

Συνεπώς $J(\lambda_0) = R(\lambda_0; A)$. Αν τώρα $\lambda \in \Delta$ τότε έπεται ότι $(\lambda I - A)J(\lambda) = \big((\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - A)\big)J(\lambda) = \big((\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - A)\big)J(\lambda_0)[I - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda)] = I + (\lambda - \lambda_0)[J(\lambda_0) - J(\lambda) - (\lambda - \lambda_0)J(\lambda)J(\lambda_0)] = I$. Ομοίως έπεται ότι $J(\lambda)(\lambda I - A) = I$. Άρα $J(\lambda) = R(\lambda; A) \quad, \forall \lambda \in \Delta$. $\square$

Θεώρημα 2.9.3. *Έστω $\Delta \subset \mathbb{C}$ μη φραγμένο, και $J(\lambda)$ ο ψευδοεπιλύων τελεστής στο Δ. Αν Ran$(J(\lambda))$ πυκνό στον X και υπάρχει ακολουθία $\{\lambda_n\} \in \Delta$ τέτοια ώστε $|\lambda_n| \to \infty$ και*

$$\|\lambda_n J(\lambda_n)\| \leq M, \tag{2.26}$$

όπου M σταθερά, τότε $J(\lambda)$ είναι ο επιλύων τελεστής ενός μοναδικού και πυκνά ορισμένου κλειστού γραμμικού τελεστή A.

Απόδειξη. Από τη σχέση (2.26) έπεται ότι $\|J(\lambda_n)\| \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Έστω $\mu \in \Delta$. Από τη σχέση (2.23) έπεται ότι

$$\|(\lambda_n J(\lambda_n) - I)J(\mu)\| \to 0 \quad , n \to \infty.$$

Συνεπώς αν $x \in \mathrm{Ran}(J(\mu))$ έχουμε ότι

$$\lambda_n J(\lambda_n)x \to x \quad , n \to \infty. \tag{2.27}$$

Αφού $\overline{\mathrm{Ran}(J(\mu))} = X$ και $\lambda_n J(\lambda_n)$ ομοιόμορφα φραγμένοι έχουμε ότι η σχέση (2.27) ισχύει για κάθε $x \in X$. Αν $x \in N(J(\lambda))$ τότε $\lambda_n J(\lambda_n)x = 0$ και από τη σχέση (2.27) παίρνουμε ότι $x = 0$. Έτσι $N(J(\lambda)) = \{0\}$ και $J(\lambda)$ είναι ο επιλύων τελεστής του A, ο οποίος είναι ένας γραμμικός, κλειστός και πυκνά ορισμένος τελεστής, λόγω του θεωρήματος (2.9.2). $\square$

Λήμμα 2.9.4. *Έστω $\Delta \subset \mathbb{C}$ μη φραγμένο και $J(\lambda)$ ο ψευδοεπιλύων τελεστής στο Δ. Αν υπάρχει ακολουθία $\{\lambda_n\} \in \Delta$ τέτοια ώστε $|\lambda_n| \to \infty \ \ , n \to \infty$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n J(\lambda_n)x = x \ \ , \forall x \in X, \tag{2.28}$$

τότε $J(\lambda)$ είναι ο επιλύων τελεστής του μοναδικού, πυκνά ορισμένου και κλειστού τελεστή A.

Απόδειξη. Από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος και τη σχέση (2.28) έπεται ότι ισχύει η σχέση (2.26). Από το λήμμα (2.9.1) γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\mathrm{Ran}(J(\lambda))$ είναι ανεξάρτητο του $\lambda \in \Delta$ και συνεπώς η σχέση (2.28) μας δείχνει ότι $\overline{\mathrm{Ran}(J(\lambda))} = X$. Άρα αφού ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος (2.9.3), τότε $J(\lambda)$ είναι ο επιλύων τελεστής του A. □

2.10 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της αναπαράστασης της ημιομάδας $T(t)$ με όρους του απειροστού της γεννήτορα. Αυτό έχει πολύ μεγάλη σημασία, ιδιαιτέρως σε εφαρμογές στις μερικές διαφορικές εξισώσεις όπου $\forall x \in D(A)$ η λύση του αφηρημένου προβλήματος Cauchy

$$\frac{du}{dt} - Au = 0 \text{ , με αρχική συνθήκη } \ u(0) = x,$$

δίνεται από τη σχέση $u(t) = T(t)x$. Άρα δεδομένου του απειροστού γεννήτορα A θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια αναπαράσταση της ημιομάδας $T(t)$, η οποία θα μας οδηγήσει στη λύση του προβλήματος Cauchy. Έτσι για να διατυπώσουμε αυτή την αναπαράσταση θα χρειαστούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Αρχίζοντας λοιπόν την διερεύνησή μας διατυπώνουμε κάποια βοηθητικά λήμματα.

Λήμμα 2.10.1. *Έστω B ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αν $\gamma > \|B\|$ τότε*

$$e^{tB} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda; B) d\lambda.$$

Σχόλιο. Η σύγκλιση του παραπάνω ολοκληρώματος αναφέρεται στην ομοιόμορφη τοπολογία (τοπολογία νορμών), διότι ο τελεστής B είναι φραγμένος και συνεπώς παράγει μια ομοιόμορφα συνεχή ημιομάδα $T(t) = \mathrm{e}^{tB}$.

Λήμμα 2.10.2. *Έστω A ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$. Έστω επίσης $\mu \in \mathbb{R} \ , \mu > \omega \ge 0$, και*

$A_\mu = \mu A R(\mu; A) = \mu^2 R(\mu; A) - \mu I$, οι συντελεστές Yosida του τελεστή A. Τότε για Re$\lambda > \omega\mu/(\mu - \omega)$ έχουμε ότι

$$R(\lambda; A_\mu) = (\lambda + \mu)^{-1}(\mu I - A) R\left(\frac{\mu\lambda}{\mu + \lambda}; A\right)$$

και

$$\|R(\lambda; A_\mu)\| \leq M \left(Re\lambda - \frac{\omega\mu}{\mu - \omega} \right)^{-1}.$$

Επίσης για Re$\lambda > \epsilon + \omega\mu/(\mu - \omega)$ και $\mu > 2\omega$ υπάρχει σταθερά $C = C(M, \epsilon)$ τέτοια ώστε $\forall x \in D(A)$ να ισχύει ότι

$$\|R(\lambda; A_\mu)x\| \leq \frac{C}{|\lambda|}(\|x\| + \|Ax\|).$$

Λήμμα 2.10.3. *Έστω A τελεστής όπως στο προηγούμενο λήμμα και $\lambda = \gamma + i\eta$, όπου $\gamma > \omega + \epsilon$, σταθεροποιημένο. Τότε $\forall x \in X$ ισχύει ότι*

$$\lim_{\mu \to \infty} R(\lambda; A_\mu)x = R(\lambda; A)x$$

και $\forall Y > 0$ το όριο είναι ομοιόμορφο ως προς η, όπου $|\eta| \leq Y$.

Κεφάλαιο 3

Προβλήματα αρχικών τιμών σε χώρους Banach

3.1 Αφηρημένο πρόβλημα Cauchy

Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων του προβλήματος αρχικών τιμών (Cauchy) τόσο στην περίπτωση του ομογενούς όσο και στην περίπτωση του μη ομογενούς αυτόνομου προβλήματος. Επίσης θα διατυπώσουμε πέρα από τον ορισμό της κλασσικής λύσης και άλλους ορισμούς όπως ήπια και ισχυρή λύση.

Έστω λοιπόν το αφηρημένο πρόβλημα Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{3.1}$$

όπου X είναι ένας χώρος Banach, A ένας γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $A : D(A) \subset X \to X$ και $x \in X$. Δίνουμε παρακάτω τον ορισμό της κλασσικής λύσης του προβλήματος.

Ορισμός 3.1.1. Η συνάρτηση $u(t) : [0, +\infty) \to X$ καλείται κλασσική λύση του προβλήματος αν είναι συνεχής για $t \geq 0$, συνεχώς διαφορίσιμη, $u(t) \in D(A)$ για $t > 0$ και ικανοποιεί την εξίσωση καθώς και την αρχική συνθήκη.

Σχόλιο. Στην περίπτωση φυσικά όπου $x \notin \overline{D(A)}$,τότε λόγω του ότι η $u(t)$ είναι συνεχής στο 0 και $u(t) \in D(A)$ για $t > 0$, έπεται ότι δεν υπάρχει λύση για το πρόβλημα.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω A ένας πυκνά ορισμένος και γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $\rho(A) \neq 0$. Το πρόβλημα Cauchy έχει μοναδική λύση $u(t)$ συνεχώς διαφορίσιμη στο $[0, \infty)$ για κάθε αρχική τιμή $x \in D(A)$ αν και μόνο αν ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$.*

Σχόλιο. Η υπόθεση πως ο A είναι ο απειροστός γεννήτορας παίζει σημαντικό ρόλο στην διαφορισιμότητα της λύσης μας για κάθε $x \in D(A)$. Όμως μπορούμε να αποδείξουμε πως μπορούμε να εισάγουμε μια άλλη έννοια λύσης για το πρόβλημα χωρίς αυτή την υπόθεση για την οποία φυσικά θα έχουμε χάσει την διαφορισιμότητα.

Απόδειξη. Αν ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$ τότε σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο έπεται ότι $T(t)x$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος για κάθε $x \in D(A)$. Επιπλέον η λύση αυτή είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $[0, \infty)$ και ισχύει μάλιστα ότι

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον λοιπόν παρουσιάζει η αντίστροφη κατεύθυνση. Έστω λοιπόν ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση η οποία είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $[0, \infty)$ για κάθε αρχική τιμή $x \in D(A)$. Τότε θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$. Συμβολίζουμε τη λύση αυτή ως $u(t; x)$. Για κάθε $x \in D(A)$ ορίζουμε τη νόρμα γραφήματος ως: $|x|_G = \|x\| + \|Ax\|$. Εφόσον $\rho(A) \neq 0$ τότε ο A είναι κλειστός. Συνεπώς ο χώρος $D(A)$ εφοδιασμένος με τη νόρμα γραφήματος γίνεται χώρος Banach,τον οποίο συμβολίζουμε με $[D(A)]$. Έστω επίσης ο χώρος Banach $X_{t_0} := \{f : [0, t_0] \to [D(A)], f \text{συνεχείς}\}$, εφοδιασμένος με την supremum νόρμα. Θεωρούμε την απεικόνιση $S : [D(A)] \to X_{t_0}$ που ορίζεται ως $Sx = u(t; x) \forall t \in [0, t_0]$.

Λόγω της γραμμικότητας του προβλήματος και της μοναδικότητας της λύσης έπεται ότι ο τελεστής S είναι γραμμικός και ορίζεται σε όλο το χώρο $[D(A)]$. Θα δείξουμε ότι είναι και κλειστός. Έστω λοιπόν $\{x_n\} \in [D(A)]$ τέτοια ώστε $x_n \to x$ στο $[D(A)]$ και $Sx_n \to v$ στον X_{t_0}. Τότε λόγω της κλειστότητας του A και της σχέσης

$$Sx_n = u(t; x_n) = x_n + \int_0^t Au(y; x_n)dy$$

έπεται ότι για $n \to \infty$

$$v(t) = x + \int_0^t Av(y)dy$$

Άρα $v(t) = u(t; x) = Sx$ και $x \in [D(A)]$. Όμως αφού ο S είναι κλειστός έπεται από το θεώρημα κλειστού γραφήματος ότι S φραγμένος και ισχύει η εκτίμηση

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} |u(t; x)|_G \leq C|x|_G. \tag{3.2}$$

Ορίζουμε στη συνέχεια την απεικόνιση $T(t) := [D(A)] \to [D(A)]$ ως $T(t)x = u(t; x)$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο τελεστής $T(t)$ ικανοποιεί την ιδιότητα της ημιομάδας. Όμως από τη σχέση (3.2) βλέπουμε ότι $T(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για κάθε $t \in [0, t_0]$. Αυτό συνεπάγεται ότι η ημιομάδα μπορεί να επεκταθεί μέσω της σχέσης

$$T(t)x = T(t - nt_0)T(t_0)^n x \ \ , nt_0 \leq t \leq (n_0 + 1)t$$

σε μια ημιομάδα στο χώρο $[D(A)]$ η οποία ικανοποιεί την εκτίμηση

$$|T(t)x|_G \leq Me^{\omega t}|x|_G.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι τελεστές , αντιμετατίθενται,δηλαδή ότι

$$T(t)Ay = AT(t)y \ \ \forall y \in D(A^2). \tag{3.3}$$

Θέτοντας

$$v(t) = y + \int_0^t u(s; Ay)ds$$

έχουμε ότι

$$v'(t) = u(t; Ay) = Ay + \int_0^t \frac{d}{ds}u(s; Ay)ds = A\Big(y + \int_0^t u(s; Ay)ds\Big) = Av(t).$$

Αφού $v(0) = y$ έπεται λόγω της μοναδικότητας της λύσης του (3.1) ότι $v(t) = u(t; y)$ και συνεπώς $Au(t; y) = v'(t) = u(t; Ay)$.

Λόγω του ότι $\overline{D(A)} = X$ και αφού $\rho(A) \neq 0$ έπεται ότι $\overline{D(A^2)} = X$. Έστω τώρα $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\lambda_0 \neq 0$ φιξαρισμένο,και $y \in D(A^2)$.

Αν $x = (\lambda_0 I - A)y$ τότε από τη σχέση (3.3) έπεται ότι $T(t)x = (\lambda_0 I - A)T(t)y$ και άρα έχουμε ότι

$$\|T(t)x\| = \|(\lambda_0 I - A)T(t)y\| \leq C|T(t)y|_G \leq C_1 \mathrm{e}^{\omega t}|y|_G.$$

Όμως

$$|y|_G = \|y\| + \|Ay\| \leq C_2\|x\|$$

πράγμα που μας δείχνει ότι

$$\|T(t)x\| \leq C_2 \mathrm{e}^{\omega t}\|x\|.$$

Συνεπώς η ημιομάδα $T(t)$ μπορεί να επεκταθεί μέσω συνέχειας σε όλο το χώρο X. Έπειτα από αυτή την επέκταση η ημιομάδα γίνεται ισχυρά συνεχής. Τελειώνοντας την απόδειξή μας θα δείξουμε ότι ο τελεστής A αποτελεί τον απειροστό γεννήτορα της ισχυρά συνεχούς ημιομάδας $T(t)$. Έστω ότι ο τελεστής A_1 είναι ο απειροστός γεννήτορας της ημιομάδας $T(t)$. Αν $x \in D(A)$ τότε $u(t; x) = T(t)x$ και άρα από τις υποθέσεις που έχουμε κάνει έπεται ότι

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x \ \ , t \geq 0.$$

Όμως επειδή $\frac{d}{dt}T(t)x|_{t=0} = Ax$ τότε έπεται ότι $A \subset A_1$. Έστω ότι $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ και $y \in D(A^2)$. Τότε λόγω της σχέσης (3.3) και αφού $A \subset A_1$ έχουμε ότι

$$\mathrm{e}^{-\lambda t}AT(t)y = \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)Ay = \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)A_1y.$$

Ολοκληρώνοντας από 0 μέχρι ∞ έπεται ότι

$$AR(\lambda; A_1)y = R(\lambda; A_1)y.$$

Όμως $A_1R(\lambda; A_1)y = R(\lambda; A_1)A_1y$ και άρα έπεται ότι

$$AR(\lambda; A_1)y = A_1R(\lambda; A_1)y \quad , \forall y \in D(A^2).$$

Όμως αφού $A_1R(\lambda; A_1)$ ομοιόμορφα φραγμένοι, A κλειστός και $D(A^2)$ πυκνό στον X έπεται από το θεώρημα Banach-Steinhaus ότι

$$AR(\lambda; A_1)y = A_1R(\lambda; A_1)y \quad , \forall y \in X.$$

Έτσι έχουμε ότι $D(A) \supset \mathrm{Ran}(R(\lambda; A_1)) = D(A_1)$ και άρα $A \supset A_1$. Άρα $A = A_1$. □

Θεώρημα 3.1.3. *Έστω A ο απειροστός γεννήτορας μιας διαφορίσιμης ημιομάδας $T(t), \forall t \geq 0$. Τότε για κάθε $x \in X$ το πρόβλημα (3.1) έχει μοναδική κλασσική λύση.*

Λήμμα 3.1.4. *Έστω A ο απειροστός γεννήτορας μιας αναλυτικής ημιομάδας $T(t), \forall t \geq 0$. Τότε το πρόβλημα (3.1) έχει μοναδική κλασσική λύση για κάθε $x \in X$.*

Σχόλιο. Βλέπουμε λοιπόν από τα παραπάνω πως αν ο τελεστής A παράγει μια αναλυτική ή διαφορίσιμη ημιομάδα τότε το αφηρημένο πρόβλημα Cauchy θα έχει μοναδική κλασσική λύση για κάθε αρχική τιμή $x \in X$. Στην περίπτωση όμως κατά την οποία παράγεται ισχυρά συνεχής ημιομάδα τότε και πάλι έχουμε μοναδική λύση για το πρόβλημα μας αλλά για κάθε αρχική τιμή $x \in D(A)$, όπου $D(A)$ πυκνό στον χώρο Banach . Επίσης αν $x \notin D(A)$ τότε εν γένει δεν υπάρχει λύση κλασσική. Αυτό μας οδηγεί στο να διατυπώσουμε μια γενικευμένη έννοια της λύσης του προβλήματος Cauchy.

Ορισμός 3.1.5. Μια συνεχής συνάρτηση $u(t)$ στο διάστημα $[0, \infty)$ καλείται γενικευμένη ή ήπια λύση του προβλήματος Cauchy αν υπάρχει ακολουθία $\{x_n\} \in D(A)$ τέτοια ώστε $x_n \to u(0)$ και $T(t)x_n \to u(t)$ ομοιόμορφα σε φραγμένα διαστήματα.

Σχόλιο. Εύκολα βλέπουμε ότι η ήπια λύση δεν εξαρτάται από την ακολουθία $\{x_n\}$, είναι μοναδική και αν $u(0) \in D(A)$ τότε μας δίνει τη λύση (κλασσική) του προβλήματος. Συνεπώς το πρόβλημα (3.1) έχει γενικευμένη λύση για κάθε $x \in X$, η οποία προφανώς είναι η $T(t)x$.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις διάφορες μορφές λύσης που συναντούμε στο μη ομογενές πρόβλημα Cauchy.Θεωρούμε λοιπόν το πρόβλημα

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{3.4}$$

όπου $f : [0, T] \to X$.Υποθέτουμε ότι το ομογενές πρόβλημα έχει μοναδική λύση για κάθε $x \in D(A)$ και ότι ο τελεστής A είναι ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$.

Ορισμός 3.1.6. Η συνάρτηση $u(t) : [0, T] \to X$ είναι η (κλασσική) λύση του προβλήματος (3.4) στο διάστημα $[0, T]$ αν είναι συνεχής στο $[0, T]$, συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0, T)$, $u(t) \in D(A)$ $\forall 0 < t < T$ και ικανοποιεί το πρόβλημα (3.4) στο $[0, T]$.

Θα δούμε τώρα σταδιακά τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για να εξασφαλίσουμε ύπαρξη και μοναδικότητα ήπιας και κλασσικής λύσης του προβλήματος (3.4).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(s) = T(t - s)u(s)$, η οποία είναι διαφορίσιμη για κάθε $0 < s < t$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Αν $f \in L^1(0, T; X)$ τότε η ποσότητα $T(t - s)f(s)$ είναι ολοκληρώσιμη και άρα εξάγουμε τη σχέση

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{3.5}$$

Συνεπώς δίνουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.1.7. *Αν $f \in L^1(0, T; X)$ τότε για κάθε $x \in X$ το πρόβλημα (3.4) έχει το πολύ μια λύση. Αν λοιπόν υπάρχει αυτή η λύση τότε δίνεται από τη σχέση (3.5).*

Σχόλιο. Λόγω του παραπάνω λήμματος παίρνουμε αφορμή να ορίσουμε τη γενικευμένη ή ήπια λύση του προβλήματος (3.4) κατ'αντιστοιχία του ορισμού που δώσαμε στην περίπτωση του ομογενούς προβλήματος.

Ορισμός 3.1.8. Έστω A ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$. Έστω $x \in X$ και $f \in L^1(0,T;X)$. Η συνάρτηση $u \in C([0,T];X)$ η οποία δίνεται από τη σχέση

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

καλείται ήπια λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (3.4) στο $[0,T]$.

Σχόλιο. Λόγω του παραπάνω ορισμού εύκολα βλέπουμε ότι αν $f \in L^1(0,T;X)$ τότε το πρόβλημα (3.4) έχει μοναδική ήπια λύση.Στόχος μας είναι να επιβάλουμε επιπλέον συνθήκες στην $f(t)$ ώστε η ήπια λύση να είναι και κλασσική και έτσι να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα της ύπαρξης λύσης του (3.4). Για αρχή λοιπόν θα δείξουμε ότι η συνέχεια της f δεν επαρκεί για να έχουμε κλασσική λύση.

Έστω $x \in X$ τέτοιο ώστε $T(t)x \notin D(A)$ $\forall t \geq 0$. Θέτουμε $f(s) = T(s)x$. Τότε $f(s)$ συνεχής για κάθε $s \geq 0$. Θεωρούμε επίσης το πρόβλημα

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + T(t)x, \quad t > 0 \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Θα δείξουμε ότι το πρόβλημα (3.6) δεν έχει λύση (κλασσική) παρά το γεγονός πως $u(0) = 0 \in D(A)$. Πράγματι, η ήπια λύση του δίνεται από τη σχέση

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)xds = tT(t)x.$$

Όμως η ποσότητα $tT(t)x$ δεν είναι διαφορίσιμη για $t > 0$ και συνεπώς δεν μπορεί να αποτελεί λύση του (3.6). Συνεπώς έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.9. *Έστω A ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$. Έστω επίσης $f \in L^1(0,T;X)$ συνεχής στο διάστημα $[0,T]$ και*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad ,0 \leq t \leq T. \tag{3.7}$$

Τότε το πρόβλημα(3.4) έχει μοναδική λύση $u(t)$ στο $[0,T]$για κάθε $x \in D(A)$ αν ικανοποιείται μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) $v(t)$ *συνεχώς διαφορίσιμη στο* $[0,T]$

(ii) $v(t) \in D(A)$ $\forall 0 < t < T$ *και* $Av(t)$ *συνεχής στο* $[0,T]$.

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Αν το πρόβλημα (3.4) έχει λύση για $x \in D(A)$ τότε προφανώς η λύση δίνεται από τη σχέση (3.5). Συνεπώς η συνάρτηση $v(t) = u(t) - T(t)x$ είναι διαφορίσιμη για $t > 0$ και ισχύει ότι $v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$. Προφανώς $v'(t)$

συνεχής στο $[0,T]$ και άρα ικανοποιείται η πρόταση (i). Επίσης αν $x \in D(A)$ τότε $T(t)x \in D(A)$ και άρα $v(t) = u(t) - T(t)x \in D(A)$ για $t > 0$ και $Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax$ συνεχής στο $[0,T]$. Άρα ικανοποιείται και η πρόταση (ii).

($\Longleftarrow$) Για $h > 0$ ισχύει η σχέση

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \tag{3.8}$$

Συνεπώς για $h \to 0$ ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης τείνει στην $f(t)$ λόγω της συνέχειας της $f(t)$. Αν $v(t)$ συνεχώς διαφορίσιμη στο $[0,T]$ τότε από την σχέση (3.8)έπεται ότι $v(t) \in D(A)$ για $0 < t < T$ και $Av(t) = v'(t) - f(t)$. Όμως $u(0) = 0$ και άρα $u(t) = T(t)x + v(t)$ είναι η λύση του (3.4) για κάθε $x \in D(A)$. Αν τώρα $v(t) \in D(A)$ πάλι από τη σχέση (3.8) έπεται ότι υπάρχει η δεξιά παράγωγος της $v(t)$ και δίνεται από τη σχέση $D^+v(t) = Av(t) + f(t)$. Όμως αφού $D^+v(t)$ είναι συνεχής τότε $v(t)$ συνεχώς διαφορίσιμη και $v'(t) = Av(t) + f(t)$. Επειδή $v(0) = 0$ έπεται ότι $u(t) = T(t)x + v(t)$είναι η λύση του (3.4) για κάθε $x \in D(A)$. □

Σχόλιο. Σαν απόρροια του παραπάνω θεωρήματος έχουμε τα παρακάτω λήμματα τα οποία με τη σειρά τους μας εξασφαλίζουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της κλασσικής λύσης του μη ομογενούς αυτόνομου προβλήματος Cauchy.

Λήμμα 3.1.10. *Έστω A ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$. Αν $f(s)$ συνεχώς διαφορίσιμη στο διάστημα $[0,T]$ τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.4)έχει λύση στο $[0,T]$ για κάθε $x \in D(A)$.*

Λήμμα 3.1.11. *Έστω A ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$ και $f \in L^1(0,T;X)$ συνεχής στο διάστημα $[0,T]$. Αν $f(s) \in D(A)$ για $0 < s < T$ και$Af(s) \in L^1(0,T;X)$ τότε για κάθε $x \in D(A)$ το πρόβλημα (3.4) έχει λύση στο $[0,T]$.*

Σχόλιο. Συγκρίνοντας τα δυο παραπάνω λήμματα βλέπουμε πως η συνθήκη της συνεχούς διαφορισιμότητας της συνάρτησης $f(s)$ είναι ισοδύναμη με τις υποθέσεις $f \in L^1(0,T;X)$ συνεχής στο διάστημα $[0,T]$, $f(s) \in D(A)$ για $0 < s < T$ και$Af(s) \in L^1(0,T;X)$.

Απόδειξη. Λόγω των υποθέσεων εύκολα συνεπάγεται πως για $s > 0$ η συνάρτηση $T(t-s)f(s) \in D(A)$ και η ποσότητα $AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ είναι ολοκληρώσιμη. Συνεπώς η συνάρτηση $v(t)$ που ορίζεται από τη σχέση (3.7) ανήκει στο πεδίο ορισμού του A και για $t > 0$ ισχύει ότι

$$Av(t) = A\int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds.$$

Όμως η συνάρτηση $Av(t)$ είναι συνεχής, και άρα έπεται το συμπέρασμα λόγω του θεωρήματος (2.2.2 (ii)). $\square$

Ορισμός 3.1.12. Η συνάρτηση $u(t)$ που είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο διάστημα $[0, T]$ και $u'(t) \in L^1(0, T; X)$ καλείται ισχυρή λύση του προβλήματος (3.4) αν $u(0) = x$ και $u'(t) = Au(t) + f(t)$σχεδόν παντού στο $[0, T]$.

Σχόλιο. Προφανώς αν $u(t)$ είναι ισχυρή λύση και $f \in L^1(0, T; X)$ τότε είναι και ήπια λύση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το αντίστροφο,δηλαδή κάτω από ποιες υποθέσεις η ήπια λύση είναι και ισχυρή; Την απάντηση δίνει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.13. *Έστω A ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$, $f \in L^1(0, T; X)$ και*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Το πρόβλημα (3.4) έχει ισχυρή λύση $u(t)$ στο διάστημα $[0, T]$ αν ικανοποιείται μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) $v(t)$ *διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο* $[0, T]$ *και* $v'(t) \in L^1(0, T; X)$

(ii) $v(t) \in D(A)$*σχεδόν παντού στο* $[0, T]$ *και* $Av(t) \in L^1(0, T; X)$.

Σχόλιο. Σαν αποτέλεσμα του παραπάνω έχουμε τα ακόλουθα λήμματα που μας εξασφαλίζουν την μοναδικότητας της ισχυρής λύσης για το μη ομογενές πρόβλημα Cauchy.

Λήμμα 3.1.14. *Έστω A ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$. Αν $f(t)$ είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στο $[0, T]$ και $f' \in L^1(0, T; X)$ τότε το πρόβλημα (3.4) έχει μοναδική ισχυρή λύση στο $[0, T]$ για κάθε $x \in D(A)$.*

Λήμμα 3.1.15. *Έστω X ένας αυτοπαθής χώρος Banach και A ο απειροστός γεννήτορας της C_0 ημιομάδας $T(t)$. Αν $f(t)$ Lipschitz συνεχής στο $[0, T]$ τότε για κάθε $x \in D(A)$ το πρόβλημα (3.4) έχει μοναδική ισχυρή λύση στο $[0, T]$ η οποία δίνεται από τη σχέση*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Σχόλιο. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση καλείται Lipschitz συνεχής αν

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C|x - y| \quad , x, y \in [0, T].$$

Επίσης αν ο χώρος Banach X είναι αυτοπαθής (ή ανακλαστικός) τότε κάθε φραγμένη ακολουθία έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία, όπου η ασθενής σύγκλιση αναφέρεται στη σύγκλιση ως προς εσωτερικό γινόμενο. Παράδειγμα ανακλαστικού χώρου είναι όλοι οι L^p χώροι για $p \neq 1, \infty$.

3.2 Εφαρμογές θεωρίας ημιομάδων

Σε αυτό το μέρος της παρούσας εργασίας θα δώσουμε κάποια παραδείγματα τα οποία χρησιμοποιούν τις μεθόδους που έχουμε αναπτύξει μέχρι στιγμής, σε συγκεκριμένους χώρους Banach, όπως για παράδειγμα οι χώροι L^p και οι χώροι Sobolev. Ειδικότερα θα δώσουμε ένα παράδειγμα παραβολικού τύπου στο οποίο θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Hille - Yosida,ένα παράδειγμα με την εξίσωση θερμότητας σε μη φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, όπου θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των αναλυτικών ημιομάδων ,και ένα παράδειγμα με τις εξισώσεις Maxwell στο οποίο θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Stone.

Παράδειγμα 3.2.1. *Θεωρούμε την εξίσωση θερμότητας*

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \Delta u(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.9}$$

όπου fείναι μια δοσμένη συνάρτηση στον χώρο Banach , $X = L^p(\mathbb{R}^N)$,$1 \leq p < \infty$, ή $X = C_b(\mathbb{R}^N)$. Για να δώσουμε λοιπόν μια αναπαράσταση της λύσης της εξίσωσης θερμότητας θα χρησιμοποιήσουμε, φορμαλιστικά τουλάχιστον, τον μετασχηματισμό Fourier $\hat{u}(t,\xi)$ της συνάρτησης u , ως προς τη χωρική μεταβλητή x. Έτσι παίρνουμε το ισοδύναμο πρόβλημα:

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t,\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(t,\xi), & t > 0, \xi \in \mathbb{R}^N \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

το οποίο έχει λύση $\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-|\xi|^2 t}$. Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό έχουμε ότι $u = T(.)f$, όπου η ημιομάδα θερμότητας $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ δίνεται από τον τύπο Gauss - Weierstrass :

$$T(t)f)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy \quad ,t > 0 \ , x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.10}$$

όπου

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης θερμότητας.

Συνεπώς θα αποδείξουμε ότι η σχέση (3.10) αποτελεί τη λύση του προβλήματος (3.9) και ορίζει μια αναλυτική ημιομάδα της οποίας ο απειροστός γεννήτορας είναι ο sectorial Λαπλασσιανός τελεστής στον χώρο X.

(a) Παρατηρούμε ότι $T(t)f = G_t * f$, *όπου*

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_t(x)dx = 1 \quad , t > 0.$$

Λόγω της ανισότητας Young έπεται ότι

$$\|T(t)f\|_p \leq \|f\|_p \quad , t > 0, 1 \leq p \leq +\infty.$$

Όμως αφού $G_t \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq +\infty$, *έπεται ότι* $u(t,x) \in C^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R}^N)$. *Αφού όμως* $\frac{\partial G_t}{\partial t} = \Delta G_t$, *τότε η συνάρτηση* u *αποτελεί τη λύση της εξίσωσης θερμότητας στο χώρο* $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^N$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $T(t)f \to f$ *στον* X *καθώς* $t \to 0^+$, *αν* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *ή* $f \in BUC(\mathbb{R}^N)$ *(φραγμένες και ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις).*

Αν λοιπόν $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *τότε έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}
\|T(t)f - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} G_t(y)f(x-y)dy - f(x)\Big|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} G_t(y)[f(x-y) - f(x)]dy\Big|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} G_1(v)[f(x-\sqrt{t}v) - f(x)]dv\Big|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} G_1(v)|f(x-\sqrt{t}v) - f(x)|^p dv dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} G_1(v) \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-\sqrt{t}v) - f(x)|^p dx dv.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε δυο φορές ότι $\int_{\mathbb{R}^N} G_t(x)dx = 1$, *μαζί με την ανισότητα Holder, αν* $p > 1$. *Επίσης η συνάρτηση* $\phi(t,v) := \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-\sqrt{t}v) - f(x)|^p dx$, *τείνει στο* 0, *καθώς* $t \to 0^+$, *για κάθε* v *και έχει ένα άνω φράγμα την ποσότητα* $2^p\|f\|_p^p$. *Συνεπώς από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι*

$$\|T(t)f - f\|_p^p \to 0 \quad , t \to 0^+.$$

Αν τώρα $f \in BUC(\mathbb{R}^N)$, *έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |T(t)f - f| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} G_t(y)|f(x-y) - f(x)|dy \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} G_1(v)|f(x-\sqrt{t}v) - f(x)|dv \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} G_1(v) \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x-\sqrt{t}v) - f(x)|dv.
\end{aligned}$$

Και πάλι όμως η η συνάρτηση $\phi(t,v) := \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-\sqrt{t}v) - f(x)|^p dx$, *τείνει στο* 0, *καθώς* $t \to 0^+$, *για κάθε* v, *λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της* f *και έχει ένα άνω φράγμα, την ποσότητα* $2\|f\|_\infty$. *Συνεπώς και πάλι από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι* $T(t)f - f$ *τείνει στο* 0, *καθώς* $t \to 0^+$, *με τη supremum νόρμα.*

Αν $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$, *χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα με πριν έπεται ότι* $T(t)f \to f,\ t \to 0^+$, *ομοιόμορφα πάνω σε συμπαγή σύνολα. Ειδικότερα η συνάρτηση* $(t,x) \mapsto (T(t)f)(x)$, *είναι συνεχής και φραγμένη στο* $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^N$.

(b) Αν $f \in X$, *η συνάρτηση*

$$R(\lambda)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) f dt$$

είναι καλώς ορισμένη και ολόμορφη στο ημιεπίπεδο $\Pi := \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$. *Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση* $t \mapsto T(t)f$ *είναι συνεχής από το* $[0,+\infty)$ *στον* X, *αν* $X = L^p(\mathbb{R}^N)$, *και φραγμένη και συνεχής από το* $(0,+\infty)$ *στον* X, *αν* $X = C_b(\mathbb{R}^N)$. *Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση* $R(.)$ *ικανοποιεί την ταυτότητα του επιλύοντα τελεστή. Συνεπώς για* $\lambda \neq \mu\ \ , \lambda, \mu \in \Pi$ *έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}
R(\lambda)R(\mu)f &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) \int_0^\infty e^{-\mu s} T(s) f ds dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t - \mu s} T(t+s) f dt ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu s} T(\sigma) f \int_0^\sigma e^{(\mu-\lambda)t} dt d\sigma \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu s} T(\sigma) f \frac{e^{(\mu-\lambda)\sigma} - 1}{\mu - \lambda} d\sigma \\
&= \frac{1}{\mu - \lambda} (R(\lambda)f - R(\mu)f).
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο τελεστής $R(\lambda)$ *είναι* $1-1,\ \forall \lambda \in \Pi$. *Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχουν* $f \in X\ \ , \lambda_0 \in \Pi$, *τέτοια ώστε* $R(\lambda_0)f = 0$. *Λόγω της ταυτότητας που ικανοποιεί ο επιλύων τελεστής έπεται ότι* $R(\lambda)f = 0\ , \forall \lambda \in \Pi$.

Άρα για κάθε $g \in X'$ *έχουμε ότι*

$$< R(\lambda)f, g > = \int_0^\infty e^{-\lambda t} < T(t)f, g > dt \ \ , \lambda \in \Pi.$$

Όμως αφού η ποσότητα $< R(\lambda)f, g >$ *είναι ο μετασχηματισμός Laplace της βαθμωτής συνάρτησης* $t \mapsto < T(t)f, g >$, *έπεται ότι* $< T(t)f, g > \equiv 0$, *στο διάστημα* $(0,+\infty)$, *και άρα* $T(t)f \equiv 0$, *στο διάστημα* $(0,+\infty)$. *Συνεπώς για* $t \to 0^+$, *παίρνουμε ότι* $f = 0$. *Άρα έχουμε ότι υπάρχει τελεστής* $A : D(A) \subset X \to X$, *ο οποίος είναι γραμμικός και ισχύει ότι* $\rho(A) \supset \Pi$ *και* $R(\lambda; A) = R(\lambda)\ \ , \lambda \in \Pi$.

(c) Θα δείξουμε ότι ο τελεστής A είναι sectorial στον X και ότι $T(t) = e^{tA}$, $\forall t > 0$. Έτσι λοιπόν για $Rez > 0$, $f \in X$, ορίζουμε $T(z)f = G_z * f$, όπου

$$G_z(x) = \frac{1}{(4\pi z)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4z}} \quad , \int_{\mathbb{R}^N} |G_z(x)| dx = \left(\frac{|z|}{Rez} \right)^{N/2}.$$

Λόγω της ανισότητας Young έπεται ότι $\|T(z)f\|_p \leq (\cos\theta_0)^{-N/2} \|f\|_p$, αν $z \in S_{\theta_0,0}$ και $\theta_0 < \pi/2$. Επιπλέον αφού $G_z \to G_{z_0}$ στον $L^1(\mathbb{R}^N)$, καθώς $z \to z_0$, λόγω του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης, έπεται ότι η απεικόνιση $z \mapsto T(z)f$ είναι συνεχής από το ημιεπίπεδο Π στον χώρο X. Έτσι για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, έπεται ότι

$$< T(z)f, g >= \frac{1}{(4\pi z)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{4z}} < f(. - y), g > dy.$$

Άρα η απεικόνιση $z \mapsto T(z)f$ είναι ολόμορφη από το ημιεπίπεδο Π στον $L^p(\mathbb{R}^N)$. Στην περίπτωση όπου $p = +\infty$, $X = C_b(\mathbb{R}^N)$ η απεικόνιση $z \mapsto T(z)f$ είναι ολόμορφη και πάλι στο Π, για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε μια εκτίμηση για τον επιλύοντα τελεστή στο ημιεπίπεδο $\{Rez > 0\}$. Αν λοιπόν $\lambda = a + ib$, $a > 0, b \geq 0$, έχουμε από το ολοκληρωτικό θεώρημα Cauchy ότι

$$R(\lambda; A)f = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) f dt = \int_\gamma e^{-\lambda z} T(z) f dz \ ,$$

όπου $\gamma = \{z = x - ix \ , x \geq 0\}$.

Άρα έπεται ότι

$$\|R(\lambda; A)f\|_p \leq 2^{N/2} \|f\|_p \int_0^{+\infty} e^{-(a+b)x} dx \leq \frac{1}{a+b} (\sqrt{2})^{N/2} \|f\|_p \leq \frac{2^{N/4}}{|\lambda|} \|f\|_p.$$

Αν $b \leq 0$, έχουμε την ίδια εκτίμηση θεωρώντας την καμπύλη

$\bar{\gamma} = \{z = x + ix \ , x \geq 0\}$.

Άρα λόγω του λήμματος (2.7.12) έπεται ότι A sectorial στον X. Έστω ότι e^{tA} είναι η αναλυτική ημιομάδα που παράγεται από τον τελεστή A. Τότε για $Re\lambda > 0$, έχουμε ότι

$$R(\lambda; A)f = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{tA} f dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) f dt.$$

Συνεπώς για κάθε $f \in X$, $g \in X'$, έπεται ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} < e^{tA} f, g > dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} < T(t) f, g > dt.$$

Άρα αφού οι μετασχηματισμοί Laplace των βαθμωτών συναρτήσεων
$t \mapsto < e^{tA}f, g >$, $t \mapsto < T(t)f, g >$ *συμπίπτουν έπεται ότι*
$< e^{tA}f, g > = < T(t)f, g >$. *Όμως αφού* f, g *τυχόντα έπεται ότι* $e^{tA} = T(t)$.

(d) Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο τελεστής A αποτελεί μια επέκταση του τελεστή Laplace, ορισμένου στον χώρο $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, *αν* $X = L^p(\mathbb{R}^N)$ *και ορισμένου στον χώρο* $C_b^2(\mathbb{R}^N)$, *αν* $X = C_b(\mathbb{R}^N)$. *Ξεκινώντας λοιπόν θεωρούμε τον χώρο* $X = L^p(\mathbb{R}^N)$. *Ο χώρος Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *είναι αναλλοίωτος κάτω από κάθε* $T(t)$, *και πυκνός στον* $L^p(\mathbb{R}^N)$, *διότι περιέχει τον χώρο* $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. *Σημειώνουμε ότι ο χώρος Schwartz ορίζεται ως :*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) := \{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : |x|^\alpha |D^\beta f(x)| \to 0 \ , |x| \to +\infty \ , \forall \alpha, \beta \text{ πολυδείκτες}\}.$$

Συνεπώς για $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, *έπεται ότι* $u := T(.)f$ *ανήκει στον χώρο*
$C^2([0, +\infty) \times \mathbb{R}^N)$ *,στην ουσία ανήκει στον χώρο* $C^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}^N)$,
και ισχύει ότι $u_t = \Delta u = T(t)\Delta f$. *Συνεπώς*

$$\frac{u(t, x) - u(0, x)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t u_t(s, x)ds = \frac{1}{t}\int_0^t \Delta u(s, x)ds \to \Delta f(x) \quad , t \to 0^+,$$

σημειακά , αλλά και στον $L^p(\mathbb{R}^N)$, *γιατί*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \|\Delta u(s, .) - \Delta f\|_p ds \le \sup_{0<s<t} \|T(s)\Delta f - \Delta f\|_p.$$

Άρα $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset D(A)$ *και* $Au = \Delta u$, $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Έστω τώρα $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ *και* $u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *τέτοια ώστε* $u_n \to u$ *στον* $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. *Τότε* $Au_n = \Delta u_n \to \Delta u$ *, στον* $L^p(\mathbb{R}^N)$, *και αφού ο A είναι κλειστός (διότι* $\rho(A) \neq 0$ *) έπεται ότι* $u \in D(A)$ *και* $Au = \Delta u$.

Στην περίπτωση όπου $X = C_b(\mathbb{R}^N)$, *επιχειρηματολογούμε λίγο διαφορετικά, καθώς ο χώρος Schwartz δεν είναι πυκνός στον* $C_b(\mathbb{R}^N)$. *Χρησιμοποιούμε λοιπόν τις ισότητες*

$$T(t)\Delta f = \Delta T(t)f = \frac{\partial}{\partial t}T(t)f,$$

οι οποίες ισχύουν σημειακά στο $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^N$. *Θέτοντας* $g = f - \Delta f$, *έχουμε ότι*

$$\begin{aligned} R(1, A)g &= \int_0^{+\infty} e^{-t}T(t)(f - \Delta f)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}(I - \Delta)T(t)fdt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(I - \frac{\partial}{\partial t}\right)T(t)fdt \\ &= f. \end{aligned}$$

λόγω ολοκλήρωσης κατά μέρη και χρησιμοποιώντας ότι $T(t)f \to f$, σημειακά καθώς $t \to 0^+$. Άρα έπεται ότι $f \in D(A)$ και $Af = \Delta f$.

(e) Αν $N = 1$, ξέρουμε ήδη ότι $D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R})$, για $X = L^p(\mathbb{R})$ και $D(A) = C_b^2(\mathbb{R})$, για $X = C_b(\mathbb{R})$. Το πρόβλημα για την εύρεση του πεδίου ορισμού γίνεται δυσκολότερο όταν $N > 1$. Στην περίπτωση όπου $X = L^p(\mathbb{R}^N)$ $, 1 < p < \infty$, έπεται ότι $D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Όμως η απόδειξη για $p \neq 2$, είναι αρκετά δύσκολη. Για $p = 1, W^{2,1}(\mathbb{R}^N) \neq D(A)$, ενώ επίσης για $p = +\infty$ $, C_b^2(\mathbb{R}^N) \neq D(A)$. Στο τελευταίο μέρος του παραδείγματος μας θα αποδείξουμε ότι αν $X = L^2(\mathbb{R}^N)$, τότε $D(A) = H^2(\mathbb{R}^N)$. Έστω λοιπόν ότι $X = L^2(\mathbb{R}^N)$. Τότε έχουμε ότι

$$D(A) = \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)},$$

ως προς τη νόρμα γραφήματος $u \mapsto \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, η οποία είναι ασθενέστερη προφανώς από την H^2- νόρμα. Θα δείξουμε ότι οι δυο παραπάνω νόρμες είναι ισοδύναμες στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Πράγματι σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι το πεδίο ορισμού $D(A)$ είναι η κλειστότητα του χώρου $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ στον $H^2(\mathbb{R}^N)$, δηλαδη ο χώρος $H^2(\mathbb{R}^N)$. Το πιο σημαντικό είναι να δείξουμε ότι

$$\|D_{ij}u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad , \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \quad , i, j = 1, \cdots, N$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}
\|D^2 u\|_2^2 &= \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} D_{ij} u \overline{D_{ij} u} dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} D_{ijj} u \overline{D_i u} dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} D_{ii} u \overline{D_{jj} u} dx \\
&= \|\Delta u\|_2^2.
\end{aligned}$$

Ομοίως υπολογίζεται και η νόρμα $\|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^N}$. Επίσης για κάθε $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$, έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \overline{u} dx = -\int_{\mathbb{R}^N} |Du|^2 dx,$$

και άρα $\|Du\|_2^2 \leq \|\Delta u\|_2 \, \|u\|_2$.

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα ακόμη παράδειγμα προβλήματος παραβολικού τύπου, το οποίο χρησιμοποιεί το θεώρημα Hille - Yosida για να εξάγει τη λύση του προβλήματος.

Παράδειγμα 3.2.2. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο. Θεωρούμε $U_T = U \times (0,T]$, όπου $T > 0$, σταθεροποιημένο. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} u_t + Lu = 0 & \text{στο } U_T \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{στο } U \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Θεωρούμε επίσης ότι ο τελεστής L δίνεται σε μορφή απόκλισης, δηλαδή

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u,$$

καθώς και ότι οι συντελεστές και τα δεδομένα του προβλήματος είναι αρκετά λείες συναρτήσεις, δηλαδή $a_{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T), f \in L^2(U_T), g \in L^2(U)$. Ακόμη υποθέτουμε ότι ο τελεστής L ικανοποιεί τη συνθήκη ελλειπτικότητας (βλέπε [3]) και ότι το σύνορο ∂U είναι αρκετά ομαλό. Έστω λοιπόν $X = L^2(U)$. Θέτουμε

$$D(A) := H_0^1(U) \cap H^2(U),$$

και ορίζουμε τον τελεστή

$$Au = -Lu \quad , \forall u \in D(A).$$

Προφανώς ο τελεστής A είναι μη φραγμένος και γραμμικός στον χώρο X. Στα επόμενα θα χρειαστούμε και την ανισότητα (ενεργειακή εκτίμηση)

$$\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)},$$

όπου $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$, και $B[.,.]$ η διγραμμική μορφή που σχετίζεται με τον τελεστή L, και δίνεται από τη σχέση

$$B[u,v,t] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(.,t)u_{xi}v_{xj} + \sum_{i=1}^{n} b_i(.,t)u_{xi}v + c(.,t)uv dx \quad , \forall u,v \in H_0^1(U).$$

Θα δείξουμε ότι ο τελεστής A, παράγει μια $\gamma-$ συστολική ημιομάδα $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ στον χώρο $L^2(U)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Hille - Yosida. Προφανώς για το πεδίο ορισμού $D(A)$ ισχύει ότι $\overline{D(A)} = L^2(U)$, δηλαδή ο τελεστής A είναι πυκνά ορισμένος. Θα δείξουμε ότι είναι και κλειστός. Έστω λοιπόν μια ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset D(A)$, τέτοια ώστε

$$u_k \to u \quad , Au_k \to f \text{ , στον } L^2(U).$$

Τότε λόγω θεωρήματος ομαλότητας (H^2 ομαλότητα του συνόρου) έπεται ότι

$$\|u_k - u_l\|_{H^2(U)} \leq C(\|Au_k - Au_l\|_{L^2(U)} + \|u_k - u_l\|_{L^2(U)}) \ \ ,\forall k, l.$$

Συνεπώς η ακολουθία u_k είναι Cauchy στον $H^2(U)$ και επιπλέον $u_k \to u$ στον $H^2(U)$. Άρα $u \in D(A)$ και αφού $Au_k \to Au$ στον $L^2(U)$ (λόγω του ότι $u_k \to u$ στον $H^2(U)$), έπεται ότι $f = Au$.

Θεωρούμε για κάθε $\lambda \geq \gamma$, το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{στο } U \\ u = 0 & \text{στο } \partial U \end{cases}$$

Τότε το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in H_0^1(U)$, για κάθε $f \in L^2(U)$. Λόγω της θεωρίας ελλειπτικής ομαλότητας στην πραγματικότητα έχουμε ότι $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$. Άρα $u \in D(A)$. Όμως αφού $Lu + \lambda u = f$ και $Au = -Lu$, έπεται ότι

$$\lambda u - Au = f.$$

Άρα ο τελεστής $(\lambda I - A) : D(A) \to X$ είναι $1-1$ και επί,για κάθε $\lambda \geq \gamma$. Συνεπώς έπεται ότι $\rho(A) \supset [\gamma, \infty)$. Θεωρούμε στην συνέχεια τη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος (3.11) :

$$B[u, v] + \lambda(u, v) = (f, v) \ \ ,\forall v \in H_0^1(U).$$

Θέτοντας $v = u$ και χρησιμοποιώντας την ενεργειακή εκτίμηση έχουμε ότι για $\lambda > \gamma$ ισχύει ότι

$$(\lambda - \gamma)\|u\|^2_{L^2(U)} \leq \|f\|_{L^2(U)}\|u\|_{L^2(U)}.$$

Άρα έπεται ότι αφού $u = R(\lambda, A)f$, ισχύει η εκτίμηση

$$\|R(\lambda, A)f\|_{L^2(U)} \leq \frac{1}{\lambda - \gamma}\|f\|_{L^2(U)}.$$

Το ανωτέρω φράγμα ισχύει για κάθε $f \in L^2(U)$ και άρα έπεται ότι

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \gamma} \ \ .$$

Σχόλιο. Η θεωρία των ημιομάδων μας δίνει έναν ωραίο τρόπο κατασκευής της λύσης του παραβολικού τύπου προβλήματός μας. Όμως έχει και ένα μειονέκτημα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε υποθέσει ότι οι συντελεστές a_{ij}, b_i, c του τελεστή L είναι ανεξάρτητοι του χρόνου. Άρα στην περίπτωση όπου έχουμε εξάρτηση από το χρόνο των συντελεστών η θεωρία των ημιομάδων δεν χρησιμοποιείται, και χρησιμοποιούμε ένα ισχυρότερο εργαλείο, τη μέθοδο Galerkin. Όμως με αυτή τη μέθοδο ”χάνουμε” την ομαλότητα της λύσης, τουλάχιστον μέχρι τη διατύπωση της ελλειπτικής θεωρίας ομαλότητας.

3.3 Εφαρμογές στον Ηλεκτρομαγνητισμό

Σε αυτή την παράγραφο στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις εξισώσεις Maxwell, οι οποίες περιγράφουν τη διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, πλαισιωμένες από τις καταστατικές εξισώσεις ενός μη ομογενούς υλικού. Το σύστημα αυτών των εξισώσεων μαζί με αρχικές και συνοριακές τιμές αποτελεί πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, το οποίο θέλουμε να μετατραπεί σε πρόβλημα Cauchy. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Stone για να δείξουμε ότι ο τελεστής Maxwell παράγει μια ομάδα μοναδιαίων τελεστών σε κατάλληλο συναρτησιακό χώρο. Τέλος θα διατυπώσουμε κάποια θεωρήματα που μας εξασφαλίζουν κατά πόσο θα έχουμε κλασσική ή ισχυρή λύση για το πρόβλημά μας.

Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^3$, με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Ως γνωστόν οι εξισώσεις του Maxwell που περιγράφουν ηλεκτρομαγνητικά πεδία στο Ω έχουν τη μορφή:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}D - \mathrm{curl}H &= -J_e && (1) && \text{(νόμος του Ampere)}\\
\frac{\partial}{\partial t}B + \mathrm{curl}E &= -J_m && (2) && \text{(νόμος του Faraday)}\\
\mathrm{div}D &= p_e && (3) && \text{(ηλεκτρικός νόμος Gauss)}\\
\mathrm{div}B &= p_m && (4) && \text{(μαγνητικός νόμος Gauss)}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(Ma)}$$

όπου E η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, H η ένταση του μαγνητικού πεδίου, D η ηλεκτρική διέγερση, B η μαγνητική διέγερση, J_e η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος, J_m η πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος, p_e η πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου και p_m η πυκνότητα του μαγνητικού φορτίου. Τα τέσσερα πρώτα μεγέθη είναι άγνωστα ενώ τα τέσσερα τελευταία θεωρούνται γνωστά.

Όλες οι παραπάνω ποσότητες είναι συναρτήσεις τεσσάρων μεταβλητών της μορφής $F(t, x)$, $t \geq 0,\ x \in$, όμως όπως παρατηρούμε, τα πρώτα έξι είναι διανυσματικά πεδία του $\mathbb{R}^3$ ενώ τα δύο τελευταία είναι βαθμωτά.

Οι νόμοι του Gauss (εξισώσεις (3) και (4)) δεν προσφέρουν ουσιαστικές πληροφορίες για την εύρεση των E, H, D, B, αφού υποθέτοντας ότι αυτά είναι κλάσεως C^2 (αντίστοιχα τα J_e, J_m, p_e, p_m κλάσεως C^1) και εφαρμόζοντας τον τελεστή της απόκλισης div στις (1), (2) και της παραγώγισης ως προς το χρόνο $\dfrac{\partial}{\partial t}$ στις (3), (4), παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{div}(1) - \frac{\partial}{\partial t}(3) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}p_e + \mathrm{div}J_e = 0 && \text{(ηλεκτρική εξίσωση συνέχειας)}\\
\mathrm{div}(2) - \frac{\partial}{\partial t}(4) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}p_m + \mathrm{div}J_m = 0 && \text{(μαγνητική εξίσωση συνέχειας)}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

Όπως βλέπουμε οι εξισώσεις (3.12) δεν περιέχουν άγνωστες ποσότητες του συστήματος (Ma), απλά προσφέρουν κάποιες συνθήκες συμβατότητας μεταξύ των γνωστών ποσοτήτων που έτσι κι αλλιώς πρέπει πάντα να ισχύουν σε οποιοδήποτε σύστημα (νόμοι διατήρησης ηλεκτρικού και μαγνητικού φορτίου). Έτσι λοιπόν το σύστημα (Ma), λόγω της έλλειψης εξισώσεων ικανών να συντελέσουν στην επίλυσή του, συμπληρώνεται με δύο διανυσματικές εξισώσεις του τύπου:

$$\left.\begin{array}{c} D = D(E, H) \\ B = B(E, H) \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

οι οποίες ονομάζονται **καταστατικές εξισώσεις** και αποτελούν ουσιαστικά τη μαθηματική περιγραφή του μέσου που καταλαμβάνει το χωρίο Ω. Πρόκειται, συνήθως, για σχέσεις που εξάγονται κατόπιν πειραματικής μελέτης και μπορεί να είναι αλγεβρικής, διαφορικής ή ολοκληρωτικής μορφής, καθώς και συνδυασμοί αυτών. Ο στόχος μας σε αυτή την παράγραφο, ως εφαρμογή του Κεφαλαίου 2 είναι να αναζητήσουμε συνθήκες κάτω υπό τις οποίες το πρόβλημα σε ένα γραμμικό μη ομογενές μέσο είναι ισχυρά και κλασσικά τοποθετημένο.

Οι συναρτησιακοί χώροι

Στην προσπάθειά μας να μετατρέψουμε τις εξισώσεις (Ma), σε ένα αντιπροσωπευτικό γι' αυτές πρόβλημα αρχικών τιμών, θα πρέπει να αναζητήσουμε ένα κατάλληλο συναρτησιακό περιβάλλον στο οποίο θα δρα -υπό την έννοια των κατανομών- ο διαφορικός τελεστής curl.

Για το σκοπό αυτό, πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη των συστημάτων, θα αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσματα τα οποία είναι αναγκαία για τη μελέτη προβλημάτων ηλεκτρομαγνητισμού.

Οι χώροι $H(\mathbf{curl};\Omega)$, $H(\mathbf{curl}0;\Omega)$ και $H_0(\mathbf{curl};\Omega)$.

Ο χώρος $H(\text{curl};\Omega)$ είναι το μεγιστικό πεδίο ορισμού του curl, θεωρούμενου ως γραμμικού τελεστή στον $L^2(\Omega)$:

$$H(\text{curl};\Omega) := \left\{U \in L^2(\Omega)^3 :\ \text{curl}U \in L^2(\Omega)^3\right\}$$

Γνωρίζουμε ότι ο τελεστής αυτός είναι πυκνά ορισμένος και κλειστός. Μάλιστα, εφοδιάζοντας το χώρο $H(\text{curl};\Omega)$ με τη νόρμα του γραφήματος

$$\|U\|_{H(\text{curl};\Omega)} := \left(\|U\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\text{curl}U\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

αυτός καθίσταται χώρος Hilbert. Θέτουμε ακόμη

$$H(\text{curl}0;\Omega) := \ker(\text{curl}) = \left\{U \in L^2(\Omega)^3 :\ \text{curl}U = 0\right\}$$

Μια συνάρτηση $U \in H(\text{curl}0;\Omega)$ ονομάζεται αστρόβιλο πεδίο. Επίσης θεωρούμε το χώρο

$$H_0(\text{curl};\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H(\text{curl};\Omega)} = \{U \in H(\text{curl};\Omega) : \ U \times n = 0 \ \text{ στο } \ \partial\Omega\} \, .$$

Οι παραστάσεις $\gamma_\times(E) = E \times n$ στο $\partial\Omega$ και $\gamma_\times(H) = H \times n$ στο $\partial\Omega$ αποκτούν νόημα και αυτές μέσω της θεωρίας ίχνους αν το $\gamma_\times$ θεωρηθεί ως γραμμικός και φραγμένος τελεστής μεταξύ των χώρων $H(\text{curl};\Omega)$ και $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Έτσι λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι

$$H_0(\text{curl};\Omega) = ker(\gamma_\times), \quad \text{όπου} \quad \gamma_\times \in \mathcal{L}(H(\text{curl};\Omega),\ H^{-1/2}(\partial\Omega)).$$

Σημειώνουμε ότι όλες οι διανυσματικές ταυτότητες που ισχύουν στις "κλασσικά" παραγωγίσιμες συναρτήσεις αποδεικνύεται ότι ισχύουν και για τις συναρτήσεις που ανήκουν στους παραπάνω χώρους.

3.4 Το πρόβλημα σε γραμμικό μη ομογενές μέσο

Υποθέτουμε ότι το φαινόμενο που περιγράφουν οι εξισώσεις του Maxwell λαμβάνουν χώρα στο Ω, για $t > 0$, όπου Ω είναι ένα ανοικτό και φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^3$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$.
Οι εξισώσεις (Ma), με τις αρχικές συνθήκες

$$E(0,x) = E_0, \quad H(0,x) = H_0,$$

και τις συνοριακές συνθήκες ενός ηλεκτρικά τέλειου αγωγού

$$E \times n = 0, \quad \text{στο } \ \partial\Omega,$$

όπου n είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$, υπό τις καταστατικές εξισώσεις ενός γραμμικού μη ομογενούς μέσου

$$D = \varepsilon E$$
$$B = \mu H$$

οδηγούν στο ακόλουθο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών για τα E, H:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon E) - \text{curl}H &= -J_e \ \text{ στο } \ \Omega, \ t > 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mu H) + \text{curl}E &= -J_m \ \text{ στο } \ \Omega, \ t > 0, \\ E \times n &= 0, \ \text{ στο } \ \partial\Omega, \ t > 0, \\ E(\cdot,0) = E_0, \ H(\cdot,0) &= H_0 \ \text{ στο } \ \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Θέλοντας να μελετήσουμε -υπό την έννοια των κατανομών ως προς το χώρο- το παραπάνω πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών, θεωρούμε το χώρο $\mathbf{H} = L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$, ο οποίος είναι χώρος Hilbert αν εφοδιαστεί με το εσωτερικό γινόμενο

$$\left(\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathbf{H}} = \int_\Omega (\varepsilon\phi_1 \cdot \overline{\phi_2} + \mu\psi_1 \cdot \overline{\psi_2})\ dx,$$

και τους πυκνούς σ' αυτόν υπόχωρους

$$H(\text{curl};\Omega) = \left\{ U \in L^2(\Omega)^3 :\ \text{curl}U \in L^2(\Omega)^3 \right\} \quad \text{και}$$

$$H_0(\text{curl};\Omega) = \{ U \in H(\text{curl};\Omega) :\ U \times n = 0\ \text{ στο }\ \partial\Omega \}.$$

Ορίζουμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} \varepsilon I_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu I_3 \end{pmatrix}$,

όπου I_3 είναι ο 3×3 ταυτοτικός πίνακας και $\mathbf{0}$ είναι ο μηδενικός πίνακας. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό:

$$\mathscr{E} = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix},\ \mathscr{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \text{curl} \\ -\text{curl} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} -J_e \\ -J_m \end{pmatrix}$$

το σύστημα (3.14) λαμβάνει τη γενική μορφή ενός προβλήματος αρχικών τιμών στον $\mathbf{H}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(A\mathscr{E}) &= M\mathscr{E} + F \\ \mathscr{E}(0) &= \mathscr{E}_0 \end{aligned} \right\} \tag{3.15}$$

όπου για τα $A,\ M,\ F$ υποθέτουμε ότι:

(**H**1) Τα $\varepsilon,\ \varepsilon^{-1}$ και $\mu,\ \mu^{-1}$ είναι θετικές και φραγμένες συναρτήσεις του $x \in \Omega$.

(**H**2) $M : D(M) = H_0(\text{curl};\Omega) \times H(\text{curl};\Omega) \to \mathbf{H}$.

(**H**3) $F \in L^1([0,T];\ \mathbf{H})$.

3.4.1 Επίλυση του προβλήματος Cauchy

Πολλαπλασιάζοντας τώρα με τον πίνακα A^{-1} (ο οποίος υπάρχει από την (**H**1)), το πρόβλημα (3.15) παίρνει τη μορφή ενός προβλήματος αρχικών τιμών για μια ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση, στο χώρο $\mathbf{H}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathscr{E} &= \mathscr{M}\mathscr{E} + \mathscr{F} \\ \mathscr{E}(0) &= \mathscr{E}_0 \end{aligned} \right\} \tag{3.16}$$

όπου $\mathscr{M} = A^{-1}M,\ ,\ \mathscr{F} = A^{-1}F$ και $D(\mathscr{M}) = D(M)$.

Εύκολα βλέπουμε ότι ο τελεστής $i\mathscr{M}$ είναι αυτοσυζυγής (βλέπε [6]). Αυτό σημαίνει ότι ο πυκνά ορισμένος τελεστής $\mathscr{M}$ είναι αντι-αυτοσυζυγής, άρα από το θεώρημα του Stone ο $\mathscr{M}$ είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας ορθομοναδιαίας ομάδας τελεστών (**unitary group**) $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ στον **H**.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις υποθέσεις $(\mathbf{H}1) - (\mathbf{H}3)$ του προβλήματος (3.15), συμπεραίνουμε ότι για το πρόβλημα (3.16) ισχύουν τα ακόλουθα:

(A1) Ο τελεστής $\mathscr{M} : D(\mathscr{M}) \to \mathbf{H}$ είναι ο απειροστός γεννήτορας μιας ορθομοναδιαίας ομάδας τελεστών $T(t), t \geq 0$ στον **H**, δηλ. ισχύει ότι $||T(t)||_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} = 1$, για κάθε $t \in [0, T]$.

(A2) $\mathscr{F} \in L^1([0,T];\ \mathbf{H})$.

(A3) $\mathscr{E}_0 \in \mathbf{H}$

Παρατηρήσεις 1. α). Με τις κατάλληλες υποθέσεις το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να συμπεριλάβει την περίπτωση που $\Omega = \mathbb{R}^3$, αφού ο τελεστής $\mathscr{M} : H(\text{curl};\mathbb{R}^3)\times H(\text{curl};\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^2(\mathbb{R}^3)^3$ διατηρεί την ιδιότητα $(A1)$.

Θεώρημα 3.4.1. *Το πρόβλημα* (3.16)*, υπό τις υποθέσεις (A1)-(A3), είναι ήπια καλώς τοποθετημένο. Η ήπια λύση δίνεται σε από τον τύπο*

$$\mathscr{E}(t) = T(t)\mathscr{E}_0 + \int_0^t T(t-s)\mathscr{F}(s)\,ds,\ \ 0 \leq s \leq t \leq T$$

*όπου $T(t),\ t \geq 0$ είναι η μοναδιαία ομάδα τελεστών στον **H**, που παράγεται από τον τελεστή $\mathscr{M} : H_0(curl;\Omega) \times H(curl;\Omega) \to \boldsymbol{H}$.*

Για την ισχυρή λύση του προβλήματος (3.16) ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος* (3.4.1)*. Υποθέτουμε ότι επιπλέον ισχύουν:*

$(A2)'$ *$\mathscr{F}(t) \in D(\mathscr{M})$ σ.π. στο $[0,T]$ και $\mathscr{M}\mathscr{F} \in L^1([0,T];\ \boldsymbol{H})$*

$(A3)'$ $\mathscr{E}_0 \in D(\mathscr{M})$

Τότε το πρόβλημα (3.16) *είναι ισχυρά καλώς τοποθετημένο.*

Επιπλέον, για κλασσική λύση του προβλήματος (3.16) έχουμε το επόμενο:

Θεώρημα 3.4.3. *Έστω ότι η* $(A3)'$ *ισχύει και ότι η* $(A2)'$ *ισχύει για κάθε* $t \in [0, T]$. *Ας υποθέσουμε ότι:*

(A4) $\mathscr{F}$ *είναι συνεχής στο* $[0, T]$.

Τότε το πρόβλημα (3.16) *κλασσικά καλώς τοποθετημένο.*

Τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν γενικά για $t \geq 0$ και όχι μόνο για $t \in [0, T]$, αρκεί οι υποθέσεις που σχετίζονται με την $\mathscr{F}$ να ισχύουν για $t \geq 0$.

Για την απόδειξη των παραπάνω θεωρημάτων βλέπε [9].

Βιβλιογραφία

[1] H. Brezis *"Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations",* Springer, New York, 2010

[2] K. Engel, R. Nagel *"One- Prameter Semigroups for Linear Evolution Equations",* Springer, Graduate Texts in Mathematics, New York, 2000

[3] L.C Evans *"Partial Differential Equations",* Graduate Studies in Mathematics Volume 19 American Mathematical Society, Providence, R.I, 2010

[4] J. Goldstein *"Semigroups of Linear Operators and Applications",* Oxford University Press, 1985

[5] M. Haase *"The Functional Calculus for Sectorial Operators",* Birkhauser, Basel, 2006

[6] R. Leis *"Initial Boundary Problems in Mathematical Physics",* Teubner Wiley, Stuttgart, 1986

[7] L. Lorenzi, A. Lunardi, D. Pallara, G. Metafune *"Analytic Semigroups and Reaction- Diffusion Problems",* Internet Seminars 2004-2005, http:www.math.unipr.it/ lunardi/

[8] I.V. Melnikova, A. Filinkov *"Abstract Cauchy Problems: Three Aproaches",* Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Chapman Hall, Boca Raton, 2001

[9] A. Pazy *"Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations",* Springer, New York, 1983

[10] M. Reed, B. Simon *"Methods of Modern Mathematical Physics, vol1" rev.ed, Academic Press, New York, 1980*

[11] G.F.Roach, I.G.Stratis, A.N.Yannacopoulos *“Mathematical Analysis of Deterministic and Stohastic Problems in Complex Media Electromagnetics”,Princeton U.P, Princeton, Oxford, 2012*