ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Εφαπτομένη καμπύλης :

Μια διαδρομή από τον Ευκλείδη στον Απολλώνιο και τον Αρχιμήδη.

ΓΑΡΥΦΑΛΙΔΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ

Α.Μ Δ201220

Επιβλέπων συμβουλευτικής επιτροπής

Διονύσιος Λάππας, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α

Αθήνα

Ιούνιος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 28η Ιουνίου 2016 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
• Δ. Λάππα (Επιβλέπων)	Αναπλ. Καθηγητή
• Ε. Ράπτη	Καθηγητή
• Π. Σπύρου	τ.Αναπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενης από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
• Δ. Λάππα (Επιβλέπων)	Αναπλ. Καθηγητή
• Ε. Ράπτη	Καθηγητή
• Π. Σπύρου	τ.Αναπλ. Καθηγητή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή Διονύσιο Λάππα για την στήριξη και καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας. Οι παρατηρήσεις του αλλά και η βαθειά γνώση της ιστορίας των Μαθηματικών στάθηκαν πολύτιμοι αρωγοί στην επιτυχή ολοκλήρωση της εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον Καθηγητή Ευάγγελο Ράπτη καθώς και τον Επίκουρο Καθηγητή αλλά και σύμβουλό μου κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος Παναγιώτη Σπύρου για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή.

Στην Βάσω

τον Αντώνη και τον Γρηγόρη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη ……σελ.8

Abstract …….σελ.9

Κεφάλαιο 1^{ο}

Η μελέτη της εφαπτομένης στον Ευκλείδη

1.1 Η ζωή και το έργο του Ευκλείδη ……σελ.10

1.2 Η εφαπτομένη στον Ευκλείδη …….σελ.14

1.2.1 Χαρακτηριστικά του τρίτου βιβλίου του Ευκλείδη …….σελ.14

1.2.2 Ορισμοί από το πρώτο βιβλίο …….σελ.15

1.2.3 Ορισμοί από το τρίτο βιβλίο ……σελ.16

1.2.4 Προτάσεις που αφορούν την εφαπτομένη στο τρίτο βιβλίο ……..σελ.17

1.2.5 Πρόταση ΙΙΙ 32 – Γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης …….σελ.23

1.2.6 Η εφαπτομένη ως μέση ανάλογος στις προτάσεις 36 και 37 του τρίτου βιβλίου.σελ.34

1.3 Σχόλια στους ορισμούς ……..σελ.29

1.3.1 Σχόλια για την έννοια της γωνίας στα στοιχεία του Ευκλείδη – Ευθύγραμμες και μεικτές γωνίες ……...σελ.29

1.3.2 « άπτεσθαι » και « εφάπτεσθαι ». Δυο λέξεις με διαφορετική σημασία στον Ευκλείδη …….σελ.35

1.4 Σχολιασμός των προτάσεων που αφορούν την εφαπτομένη ……σελ.37

1.4.1 Σύγχρονη κατασκευή της εφαπτομένης ……σελ.42

1.4.2 Κατασκευή εφαπτομένης με τη βοήθεια των τεσσάρων σημείων που αποτελούν αρμονική τετράδα ……σελ.43

Κεφάλαιο 2^{ο}

Η εφαπτομένη στον Απολλώνιο

2.1 Λίγα λόγια για τη ζωή και το έργο του Απολλώνιου …….σελ.45

2.2 Οι κωνικές τομές πριν τον Απολλώνιο …….σελ.47

2.2.1 Οι απαρχές της θεωρίας των κωνικών τομών Ιπποκράτης- Μέναιχμος …...σελ.47

2.2.2 Ορισμός των κωνικών τομών σύμφωνα με τον Ευκλείδη ……σελ.48

2.3 Τα κωνικά του Απολλώνιου – Ονομασία των κωνικών τομών ……...σελ.49

2.4 Η κοινή μορφή των « συμπτωμάτων » των κωνικών τομών κατά τον Απολλώνιο..σελ51

2.4.1 Κατασκευή και σύμπτωμα της παραβολής ……σελ.51

2.4.2 Το σύμπτωμα της έλλειψης κατά τον Απολλώνιο ……..σελ.54

2.4.3 Το σύμπτωμα της υπερβολής κατά τον Απολλώνιο ……..σελ.55

2.5 Ορισμός της εφαπτομένης στις κωνικές τομές από τον Απολλώνιο ……σελ.56

2.5.1 Προτάσεις που αφορούν την εφαπτομένη στην παραβολή ……..σελ.56

2.5.2 Προτάσεις περί εφαπτομένης στο δεύτερο βιβλίο του Απολλώνιου ……σελ.66

2.6 Προτάσεις που αφορούν την εφαπτομένη στην έλλειψη και την υπερβολή ……σελ.71

2.6.1 Βιβλίο α΄ …….σελ.71

2.6.2 Βιβλίο β΄ …….σελ.78

2.6.3 Περί εστιών – Βιβλίο γ΄ - Ανακλαστική ιδιότητα ……..……σελ.84

2.7 Ομοιότητες και διαφορές στην προσέγγιση της έννοιας της εφαπτομένης μεταξύ του Ευκλείδη και του Απολλώνιου …….σελ.89

2.8 Η ιδιότητα εστίας – διευθετούσας που ήταν γνωστή στον Ευκλείδη ……σελ91

2.9 Εστίες – Ανακλαστική ιδιότητα των κωνικών τομών ……σελ.92

Κεφάλαιο 3^{ο}

Περί εφαπτομένης στην έλικα του Αρχιμήδη

3.1 Λίγα λόγια για τη ζωή και το έργο του Αρχιμήδη ……σελ.96

3.2 Εισαγωγή στην πραγματεία « περί ελίκων » …….σελ.98

3.3 Βασικά λήμματα στο έργο «περί ελίκων» ……σελ.99

3.4 Ορισμοί στο «περί ελίκων» ……..σελ.106

3.5 Η θεμελιώδη ιδιότητα της έλικας ……..σελ.108

3.6 Ορισμός της εφαπτομένης στην έλικα ……...σελ.111

3.7 Εύρεση της εφαπτομένης στην έλικα ……σελ.114

3.8 Σχολιασμός στο έργο του Αρχιμήδη «περί ελίκων» και η ιστοριογραφική του αποτίμηση ……...σελ.118

Κεφάλαιο 4ο

Διδακτικές προτάσεις

4.1 Αρμονική τετράδα ……..σελ.121

4.1.1 Κατασκευή εφαπτομένης σε κύκλο με τη βοήθεια της αρμονικής τετράδας …σελ.121

4.1.2 Κατασκευή εφαπτομένης σε έλλειψη και υπερβολή με την αρμονική τετράδα ……..σελ.123

4.2 Κατασκευή εφαπτομένης σε παραβολή ……σελ.124

4.3 Ανακλαστική ιδιότητα των κωνικών τομών ……σελ.124

4.3.1 Κατασκευή εφαπτομένης σε έλλειψη και υπερβολή ……σελ.124

4.4 Η τριχοτόμηση της γωνίας με τη βοήθεια της έλικας του Αρχιμήδη …….σελ.128

4.5 Η τριχοτόμηση της γωνίας με τη μέθοδο της νεύσης ……..σελ.128

4.6 Εφαρμογές των ιδιοτήτων της εφαπτομένης στις κωνικές τομές με χρήση διαφορικού λογισμού ……σελ.129

Βιβλιογραφία ……..σελ.130

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει σαν σκοπό να παρουσιάσει και να αναλύσει την πορεία της έννοιας «εφαπτομένη» στα κλασικά κείμενα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Αρχίζοντας από τον Ευκλείδη και τα Στοιχεία του, όπου η έννοια της εφαπτομένης εμφανίζεται μόνο στον κύκλο, θα εντοπιστούν οι εννοιολογικές αλλαγές από το λεκτικό επίπεδο στο μαθηματικό επίπεδο μέσω σχέσεων.

Συνεχίζουμε με τον Απολλώνιο στον οποίο έχουμε μια γενικότερη θεώρηση της έννοιας της εφαπτομένης, επεκτεινόμενη σε όλες τις κωνικές τομές. Στο δεύτερο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας, θα παρακολουθήσουμε την εξέλιξη της έννοιας της εφαπτομένης στηριζόμενοι σε χαρακτηρισμούς που κινούνται στο ίδιο πνεύμα με τον Ευκλείδη. Επιπρόσθετα, ο Απολλώνιος κάνει τη μετάβαση σε γενικότερες καμπύλες για την έννοια «εφαπτομένη» όπως είναι η έλλειψη, η υπερβολή αλλά και η παραβολή χρησιμοποιώντας ένα ισχυρότερο εργαλείο σχέσεων αυτό του διπλού λόγου.

Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο, αναλύεται η έννοια της εφαπτομένης από τον μεγαλύτερο μαθηματικό της αρχαιότητας τον Αρχιμήδη. Πιο συγκεκριμένα, αναλύουμε την έννοια της εφαπτομένης στην περίφημη έλικα του Αρχιμήδη που θεωρείται και είναι πολύ προωθημένη σε σχέση με όλα τα προηγούμενα που παρουσιάστηκαν κυρίως από τους Ευκλείδη και Απολλώνιο.

Κλείνοντας την διπλωματική, παρουσιάζονται μερικές διδακτικές προτάσεις σε μορφή ασκήσεων που αφορούν ιδιότητες των εφαπτόμενων που είδαμε μέσα από τις αποδείξεις κυρίως του Απολλώνιου αλλά και του Ευκλείδη και οι οποίες αντιμετωπίζονται με αναλυτικό τρόπο. Επίσης κάποιες άλλες αφορούν τρόπους κατασκευής εφαπτομένης σε κωνικές τομές σύμφωνα με τις ιδιότητες των κωνικών τομών όπως παρουσιάζονται από τους τρεις αυτούς μεγάλους μαθηματικούς. Επίσης προτείνονται τρόποι κατασκευής της εφαπτομένης στις κωνικές τομές με αριθμητικές μεθόδους όπως είναι η προωθημένη μέθοδος της χρήσης της αρμονικής τετράδας. Τέλος παρουσιάζονται τρόποι τριχοτόμησης μιας γωνίας με τη χρήση της έλικας του Αρχιμήδη.

Λέξεις κλειδιά: εφαπτομένη, κύκλος, κωνικές τομές, μέση ανάλογος, αρμονική τετράδα, έλικα του Αρχιμήδη, κατασκευή της εφαπτομένης.

Abstract

The present dissertation aims to present and analyze the progress of the concept of "tangent" through the classical texts of the ancient Greek maths. Starting from Euclid's and his "Elements" where the concept of the tangent appears only in the circle, we will spot the semantic changes from the verbal level to the mathematical level through algebraic relationships.

We will proceed to Apollonius who presents a more general view of the concept of the tangent which expands on all the conic sections. In the second chapter of the dissertation, where the characterizations given are conform to the Euclid's spirit, we will follow the evolution of the concept of the tangent.

In addition, Apollonius proceeds to a passage to more general curves about the concept of the tangent such as the ellipse, the hyperbola and the parabola using a more powerful implement of relationships which is the double ratio.

Finally, in the third chapter, the concept of the tangent will be analyzed according to the spirit of Archimedes, the greatest mathematician of the antiquity.

This concept is analyzed within the bounds of the perimeter of the spiral of Archimedes which is thought to be very innovative in comparison with all previous theories that were developed mainly by Euclid's and Apollonius.

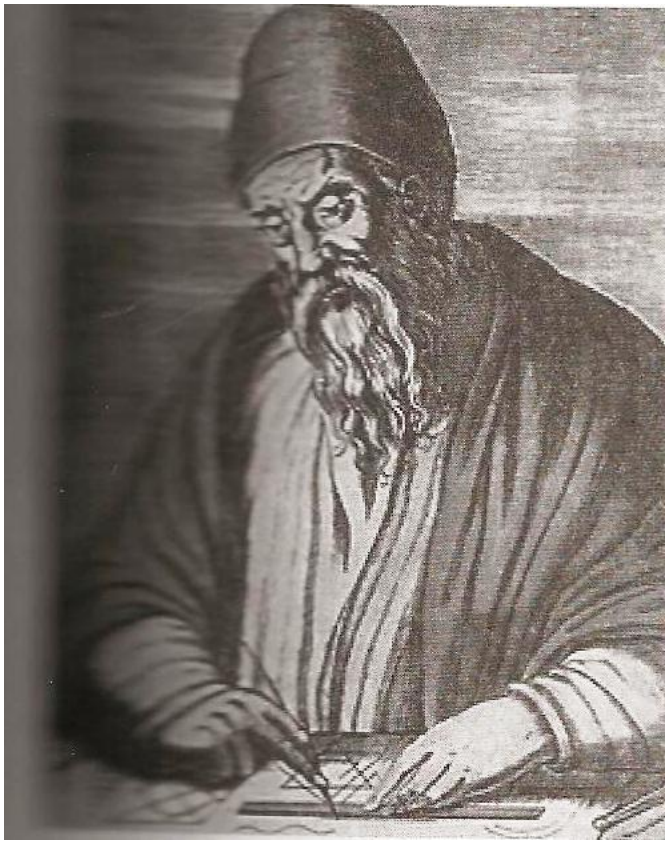
At the conclusion of the dissertation, we will present several teaching suggestions in form of exercises that refer to the properties of the tangents which we examined mainly through the proofs of Apollonius as well as Euclid's and which are examined in an analytical way. There are also others that concern the way of making a tangent in conic sections according to properties of the conic sections as they are presented by these three great mathematicians. We also propose ways of fabrication of the tangent in conic sections with algebraic methods such as the revolutionary method of the use of the harmonious quartet. Finally, we present ways of trisection of an angle using the spiral of Archimedes.

Key Words: tangent, cycle, conic sections, average ratio, double ratio, spiral of Archimedes, construction of tangent.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Η ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΣΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

1.1 Η ζωή και το έργο του Ευκλείδη.



Ο Ευκλείδης κατέχει περίοπτη θέση στην ιστορία των μαθηματικών χάρις στα *Στοιχεία,* μια επιτομή της μαθηματικής σκέψης του καιρού του αλλά και των μαθηματικών κατακτήσεων πριν από αυτόν. Η συμβολή του έργου αυτού στη μαθηματική επιστήμη ήταν τόσο σημαντική ώστε από τον Αρχιμήδη και μετά οι Έλληνες αναφέρονταν στον Ευκλείδη ως ο *Στοιχειωτής*. Τα Στοιχεία του Ευκλείδη αποτελούν δε το σπουδαιότερο έργο όλων των εποχών καθώς, μετά τη *Βίβλο*, έχει εκδοθεί και μελετηθεί περισσότερο από οποιοδήποτε επιστημονικό ή άλλο βιβλίο.

Εντούτοις πολύ λίγες πληροφορίες διασώζονται για τη ζωή του Ευκλείδη. Δεν γνωρίζουμε ούτε την ακριβή χρονολογία γέννησης και θανάτου του ούτε την πατρίδα του. Σε πολλές εκδόσεις των *Στοιχείων* μάλιστα, συγχέεται με τον Ευκλείδη τον Μεγαρείτη, φιλόσοφο και μαθητή του Σωκράτη, ο οποίος έζησε γύρω στο 400 π.χ. Ουσιαστικά ότι γνωρίζουμε προέρχεται από την αναφορά του Πρόκλου (410-485 μΧ.) σε αυτόν στα *Σχόλια* (έργο που χρονολογείται 750 περίπου χρόνια από την εποχή που έζησε ο Ευκλείδης):

> *[...]Ο Ευκλείδης δεν είναι πολύ νεότερος από αυτούς [τον Ερμότιμο τον Κολοφώνιο και τον Φίλιππο τον Μενδαίο, μαθητές του Πλάτωνα]και είναι αυτός που συγκέντρωσε τα Στοιχεία, συνέλεξε πολλά από τα θεωρήματα του Ευδόξου, τελειοποίησε πολλά από εκείνα του Θεαίτητου και παρουσίασε με αδιαμφισβήτητο τρόπο τα θέματα που ήταν χωρίς αυστηρότητα αποδεδειγμένα από τους προκατόχους του. Αυτός ο άνδρας έζησε την εποχή του Πτολεμαίου Α΄, αφού ο Αρχιμήδης, που έζησε μετά τον Πτολεμαίο Α΄, αναφέρει τον Ευκλείδη. Αναφέρεται επίσης ότι ο Πτολεμαίος ρώτησε κάποτε τον Ευκλείδη αν υπήρχε συντομότερος δρόμος για τη Γεωμετρία από τα «Στοιχεία» και ο Ευκλείδης του απάντησε ότι δεν υπάρχει «βασιλική οδός» προς τη Γεωμετρία. Επομένως είναι μεταγενέστερος των μαθητών του Πλάτωνα, αλλά προγενέστερος του Ερατοσθένη και του Αρχιμήδη[...].*[1]

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ούτε ο Πρόκλος γνώριζε τη χρονολογία γέννησης και θανάτου του Ευκλείδη. Εικάζουμε πάντως ότι η εποχή της ακμής του ήταν το 300 π.χ. Σύμφωνα με τον Πρόκλο πάντα, ο Ευκλείδης ήταν μαθητής της σχολής του Πλάτωνα όπου η σπουδή της αριθμητικής, της γεωμετρίας, της αρμονίας και της αστρονομίας αποτελούσαν προϋπόθεση για τη μελέτη της φιλοσοφίας. Αυτή η πληροφορία μάλλον επιβεβαιώνεται καθώς το έργο του Ευκλείδη βρίσκεται σε πλήρη αρμονία με την παράδοση της Σχολής: η αριθμητική και η γεωμετρία αποτελούν τα αντικείμενα των *Στοιχείων,* η αρμονία της *Κατατομής Κανόνος* και τέλος στο βιβλίο *Φαινόμενα* καταπιάνεται με την αστρονομία. Άλλωστε οι περισσότεροι γεωμέτρες που θα μπορούσαν να είναι δάσκαλοί του προέρχονταν από αυτή τη σχολή.

Στη συνέχεια ο Ευκλείδης, κατόπιν πρόσκλησης του βασιλιά Πτολεμαίου του Α΄, δίδαξε και έγραψε στο Μουσείο[2] και στη Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας που οικοδομήθηκαν από τον ίδιο τον Πτολεμαίο, με σκοπό να γίνουν το επίκεντρο των σημαντικότερων εξελίξεων της

[1] Πρόκλος, *Ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων,* σελ. 68, 6-20.
[2] «Ναός των Μουσών» δηλαδή τόπος συνάντησης των λογίων και ανταλλαγής φιλοσοφικών και λογοτεχνικών αναζητήσεων.

ελληνικής σκέψης, τόσο στον τομέα των «θετικών» όσο και των «ανθρωπιστικών» επιστημών. Ο Πτολεμαίος κατάφερε να συγκεντρώσει σπουδαίους επιστήμονες της εποχής του οι οποίοι απασχολούνταν στα ιδρύματα που προαναφέραμε είτε στον τομέα της έρευνας είτε σε αυτόν της διδασκαλίας. Ο Ευκλείδης συνεισέφερε τα μέγιστα στον δεύτερο και ανήκε σαφώς στους σπουδαίους δασκάλους της Αλεξάνδρειας καθώς δεν του αποδίδεται καμία καινούρια μαθηματική ανακάλυψη αλλά εξαίρεται η διδακτική του ικανότητα. Μια μαρτυρία του Στοβαίου μας βοηθά να καταλάβουμε την προσωπικότητά του ως δασκάλου: ένας νέος επισκέφθηκε κάποτε τον Ευκλείδη και τον παρακάλεσε να διδαχθεί από αυτόν γεωμετρία. Μόλις όμως έμαθε το πρώτο θεώρημα, ρώτησε τον Ευκλείδη: *«Και τώρα τι θα κερδίσω με το θεώρημα αυτό;»*. Τότε ο Ευκλείδης γύρισε προς τον δούλο του και του είπε: *«Δώσ' του τρεις οβολούς ώστε να κερδίσει κάτι από το θεώρημα το οποίο έμαθε».*[3]

Όσον αφορά στην προσωπικότητα του Ευκλείδη, αντλούμε στοιχεία από τον Πάππο ο οποίος τον επαινεί για την ηθική του ακεραιότητα, τη μετριοφροσύνη του και την ευμενή στάση του απέναντι σε όλους όσοι είναι ικανοί να συνεισφέρουν έστω και κατ' ελάχιστο στη μαθηματική γνώση. Ο ίδιος ο Ευκλείδης δε, παρόλο που προχώρησε σε μεγάλες αλλαγές στα βιβλία που ενέταξε στα *Στοιχεία* του, επινοώντας νέες αποδείξεις, τροποποιώντας τη διάταξη ολόκληρων τόμων κλπ., δεν διατύπωσε πουθενά ισχυρισμό περί πρωτοτυπίας, σεβόμενος προφανώς την παράδοση των προκατόχων του. Δεν έγραψε καν πρόλογο στο έργο του –όπως αντίθετα έκαναν ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος, οι οποίοι στους προλόγους των έργων τους διαχώρισαν ό,τι ήταν καινούριο σε αυτά από ό,τι ήταν ήδη γνωστό.

Αξίζει τέλος να αναφέρουμε ότι ενώ το όνομα του Ευκλείδη είναι συνώνυμο των *Στοιχείων*, το σύγγραμμα αυτό δεν αποτελεί το μοναδικό έργο του. Έγραψε επίσης άλλες δώδεκα μελέτες που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα θεμάτων όπως η οπτική, η αστρονομία, η μουσική, η μηχανική και οι κωνικές τομές. Εκτός από τα *Στοιχεία,* διασώθηκαν ως τις μέρες μας άλλα τέσσερα έργα του: τα *Δεδομένα* (ένας οδηγός για την ανάλυση των προβλημάτων της γεωμετρίας ώστε να γίνεται πιο εύκολη η ανακάλυψη αποδείξεων), τα *Φαινόμενα* (μία μελέτη για τη σφαιρική γεωμετρία που θυμίζει τη *Σφαίρα* του Αυτόλυκου), η *Οπτική* (μια από τις πρώτες μελέτες για την προοπτική ή τη γεωμετρία της άμεσης θέας) και *Περί Διαιρέσεων* (όπου π.χ. το κεφάλαιο *Διαίρεση των σχημάτων* αφορά στη διαίρεση επίπεδων μορφών). Ο Ευκλείδης

[3] Στοβαίος, *Ανθολόγιο,* τόμ. iv, σελ. 205

έγραψε επίσης τα έργα *Πορίσματα, Κώνοι* και *Περί μουσικής* που όμως δεν διασώζονται στις μέρες μας.

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη

Ο Ευκλείδης έγραψε τα *Στοιχεία* πριν από περίπου 2300 χρόνια αλλά αντίγραφα του έργου από εκείνη την εποχή ίσως να έχουν χαθεί για πάντα. Τα παλαιότερα –γνωστά- σωζόμενα αποσπάσματα ανακαλύφθηκαν στην Αίγυπτο χαραγμένα σε όστρακα. Χρονολογούνται γύρω στο 225 π.Χ. και πρόκειται για σημειώσεις σε δύο προτάσεις του δέκατου τρίτου βιβλίου. Σώζονται επίσης και τμήματα παπύρων που περιέχουν μέρη του δεύτερου βιβλίου και χρονολογούνται γύρω στο 100 π.Χ.

Το έργο εκδόθηκε επανειλημμένα και κάθε καινούριος μελετητής – εκδότης του συγγράμματος πρόσθετε τα δικά του σχόλια, υπομνήματα ή και λήμματα. Ο Θέων ο Αλεξανδρεύς επανέκδωσε τα *Στοιχεία* περίπου τον 4^{ο} αι. μ.Χ. κάνοντας σημαντικές προσθήκες (παρεμβάλλοντας ενδιάμεσα βήματα, εναλλακτικές αποδείξεις, πορίσματα κλπ.) και καθιστώντας έτσι αυτή την έκδοση την πιο σημαντική από όλες τις προηγούμενες. Τα περισσότερα δε σωζόμενα χειρόγραφα των *Στοιχείων* είναι αντίγραφα της έκδοσης του Θέωνα. Το παλαιότερο αυτών βρίσκεται σήμερα στη βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης (Bodleian Library) και χρονολογείται στο 888 μ.Χ. Στη Βιβλιοθήκη του Βατικανού φιλοξενείται επίσης αντίγραφο των *Στοιχείων* του 10^{ου} αι. μ.Χ. αλλά δεν πρόκειται για την έκδοση του Θέωνα. Αξίζει τέλος να αναφερθούμε στην προσεκτική μελέτη του δανού J. L. Heiberg ο οποίος εξέδωσε την οριστική ελληνική εκδοχή του συγγράμματος γύρω στο 1880.

Τα *Στοιχεία* αποτελούνται από δεκατρία βιβλία: τα πρώτα έξι αναφέρονται στη γεωμετρία του επιπέδου, τα επόμενα τρία στη θεωρία των αριθμών, το δέκατο στους άρρητους και τα τελευταία στη στερεομετρία. Το πρώτο βιβλίο περιέχει 23 ορισμούς και κατόπιν πέντε αιτήματα και πέντε αξιώματα ενώ το δεύτερο βιβλίο περιλαμβάνει 13 προτάσεις *γεωμετρικής άλγεβρας*. Οι μελετητές υποστηρίζουν ότι τα δύο πρώτα βιβλία αποτελούν στην ουσία παρουσίαση των μελετών των πυθαγόρειων ενώ τα δύο επόμενα που ασχολούνται με τη γεωμετρία του κύκλου αντλούν υλικό από το έργο του Ιπποκράτη της Χίου. Τα βιβλία ΙΙΙ και IV αναφέρονται στον κύκλο ενώ τα επόμενα δύο στη γενική θεωρία των αναλογιών και στην ταξινόμηση των άρρητων αριθμών. Το έβδομο, όγδοο και ένατο βιβλίο των *Στοιχείων* αναφέρονται στη θεωρία των αριθμών. Το βιβλίο Χ περιλαμβάνει 115 προτάσεις που περιέχουν γεωμετρικά ισοδύναμα των σημερινών αρρήτων αριθμών. Τέλος, το βιβλίο XI αναφέρεται στη

Στερεομετρία, το βιβλίο XII περιέχει 18 προτάσεις για τη μέτρηση σχημάτων με αυστηρές αποδείξεις που ο Αρχιμήδης αποδίδει στον Εύδοξο και το τελευταίο βιβλίο αναφέρεται στις ιδιότητες των πέντε κανονικών στερεών όπου η συμβολή του Θεαίτητου είναι σημαντική.

1.2 Η εφαπτομένη στον Ευκλείδη.

1.2.1 Χαρακτηριστικά του τρίτου βιβλίου του Ευκλείδη.

Στα δυο πρώτα βιβλία του Ευκλείδη, δεν συναντήσαμε πουθενά σε αυτά πρόταση που να αναφέρεται σε κύκλο ή σε στοιχεία αυτού. Χρησιμοποιήθηκε μόνο η έννοια του κύκλου για κάποιες κατασκευές όπως στην πρόταση 1 και 2 του πρώτου βιβλίου. Το τρίτο βιβλίο δεν έχει την ομοιογένεια του δεύτερου βιβλίου αλλά ούτε τη συνοχή των μερών του πρώτου. Αναφέρεται στις βασικές γεωμετρικές ιδιότητες κύκλων που εφάπτονται μεταξύ τους αλλά και κύκλων με ευθείες, σε σχέσεις μεταξύ εγγεγραμμένων και επίκεντρων γωνιών , σε γωνίες υπό χορδής και εφαπτομένης και σε μετρικές σχέσεις στον κύκλο.

Το βιβλίο III περιέχει 11 ορισμούς και 37 προτάσεις οι οποίες χωρίζονται στα εξής τέσσερα μέρη. Το πρώτο μέρος περιέχει προτάσεις που αφορούν χορδές τεμνόμενων ή εφαπτόμενων κύκλων και αποτελείται από τις προτάσεις 1-13. Το δεύτερο μέρος αφορά τις προτάσεις σχετικά με χορδές και εφαπτόμενες και θα σχολιαστεί διεξοδικά το μέρος των εφαπτόμενων (προτάσεις από 14-19). Το τρίτο μέρος αφορά σχέσεις με επίκεντρες και εγγεγραμμένες γωνίες καθώς και σχέσεις με γωνίες χορδής και εφαπτομένης και αποτελείται από τις προτάσεις 20-34. Τέλος, το τέταρτο και τελευταίο μέρος, περιέχει μετρικές σχέσεις στον κύκλο και είναι οι προτάσεις 35-37: σε αυτές τις προτάσεις ο Ευκλείδης κατοχυρώνει αλγεβρικά την έννοια της εφαπτομένης.

Θα ασχοληθούμε αναλυτικά με τις προτάσεις III 16, III 17, III 18, III 19 που σχετίζονται με τις ιδιότητες της εφαπτομένης και την κατασκευή της εφαπτομένης ενός κύκλου και θα εντοπίσουμε τις διαφορές με τη σύγχρονη αντιμετώπιση της κατασκευής της εφαπτομένης. Επίσης θα σχολιαστούν οι προτάσεις III 32, III 36 και III 37 οι οποίες αφορούν σχέσεις γωνιών και κυκλικών τμημάτων όπως και την ιδιότητα της μέσης αναλόγου της εφαπτομένης.

Το βιβλίο ΙΙΙ των *Στοιχείων* έχει επηρεαστεί σε μεγάλο βαθμό από τους Πυθαγόρειους. Μια ένδειξη γι'αυτό είναι το γεγονός ότι ο Ιπποκράτης ο Χίος χρησιμοποίησε αρκετές προτάσεις του βιβλίου ΙΙΙ για να πετύχει τον τετραγωνισμό των μηνίσκων. Αλλά και ο Αυτόλυκος φαίνεται ότι στο βιβλίο του «Περί κινουμένων σφαιρών» είχε χρησιμοποιήσει αρκετές από τις προτάσεις του βιβλίου ΙΙΙ. Αφού το βιβλίο του Αυτόλυκου γράφτηκε πριν τα στοιχεία αποδεικνύεται ότι οι προτάσεις αυτές ανήκουν σε προηγούμενους συγγραφείς.

Κατά τον Victor Katz πολλά από τα θεωρήματα αυτού και του επόμενου βιβλίου χρονολογούνται στην παλαιότερη περίοδο των ελληνικών μαθηματικών. Όπως προαναφέρθηκε, το έργο του Ιπποκράτη για τους μηνίσκους δείχνει ότι γνώριζε καλά τις σημαντικές ιδιότητες του κύκλου. Αν και πολλές από τις προτάσεις του βιβλίου ΙΙΙ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η οργανωτική αρχή του βιβλίου ΙΙΙ φαίνεται να είναι η κατοπινή χρήση του στην κατασκευή κανονικών πολυγώνων, τόσο εγγεγραμμένων όσο και περιγεγραμμένων σε κύκλο, που μελετώνται στο βιβλίο IV. Ειδικότερα, οι περισσότερες από τις προτάσεις από το δεύτερο μισό του βιβλίου ΙΙΙ χρησιμοποιούνται στη δυσκολότερη κατασκευή του βιβλίου IV, που είναι η κατασκευή του κανονικού πενταγώνου. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την κατασκευή αυτή με τη σειρά της στην κατασκευή ορισμένων κανονικών πολυέδρων στο βιβλίο XIII.

1.2.2 Ορισμοί από το πρώτο βιβλίο

Ορισμοί γωνίας και κύκλου από το πρώτο βιβλίο.

Ορισμός η: « Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.»

Επίπεδη γωνία είναι η κλίση μεταξύ δύο ευθειών γραμμών του επιπέδου που τέμνονται χωρίς να αποτελούν ευθεία.

Ορισμός θ: «Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.»

Όταν οι ευθείες που περιέχουν μια γωνία αποτελούν ευθεία η γωνία ονομάζεται ευθύγραμμη.

Ορισμός ι: «Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.»

Όταν μια ευθεία τέμνει άλλη ευθεία και σχηματίζει τις εφεξείς γωνίες ίσες, κάθε μια από τις ίσες γωνίες είναι ορθή και η τέμνουσα ονομάζεται κάθετος της ευθείας που τέμνει.

Ορισμός ια: «᾽Αμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.»

Η αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερη της ορθής γωνίας.

Ορισμός ιβ: «᾽Οξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.»

Η οξεία γωνία είναι μικρότερη της ορθής.

Ορισμός ιε: «Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.»

Κύκλος είναι το επίπεδο σχήμα το οποίο περιέχεται σε μια γραμμή που ονομάζεται περιφέρεια, της οποίας τα σημεία ισαπέχουν από ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.

Ορισμός ις: «Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.»

1.2.3 Ορισμοί από το τρίτο βιβλίο.

Ορισμοί ευθείας εφαπτομένης σε κύκλο και γωνία τμήματος στο τρίτο βιβλίο.

Ορισμός β: «Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.»

Η ευθεία ονομάζεται εφαπτομένη σε κύκλο, αν έχει κοινό σημείο με τον κύκλο, αλλά προεκτεινόμενη αν δεν τον τέμνει.

Ορισμός ζ: «Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.»

Γωνία τμήματος είναι η γωνία που περιέχεται μεταξύ ευθείας και κυκλικού τόξου.

1.2.4 Προτάσεις που αφορούν την εφαπτομένη στο τρίτο βιβλίο.

Πρόταση ΙΙΙ 16

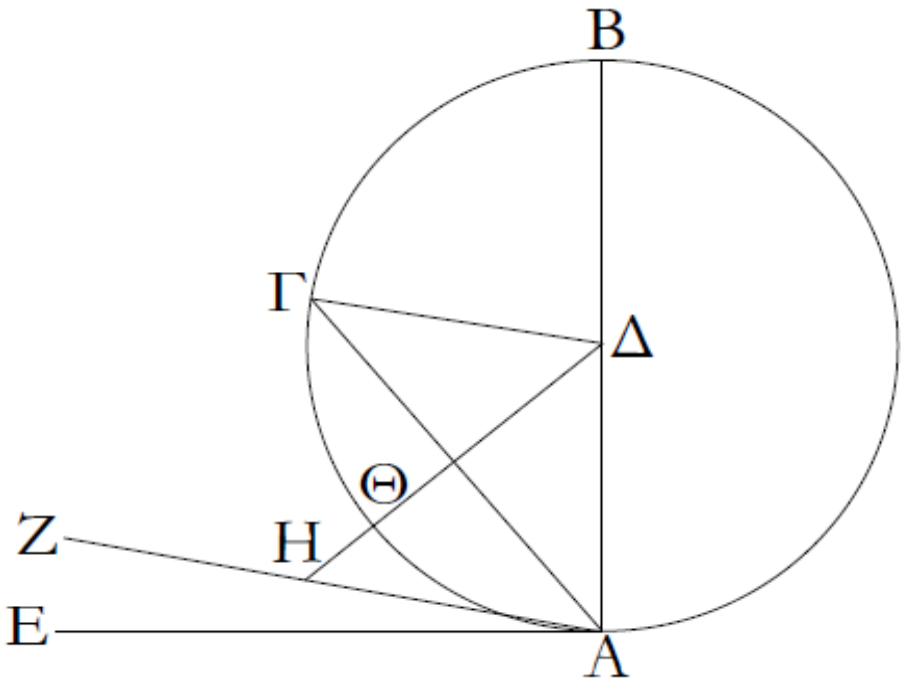
«Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.»

Η κάθετη στο άκρο της διαμέτρου κύκλου θα πέσει εκτός κύκλου και στο μέρος μεταξύ της κάθετης ευθείας στη διάμετρο και της περιφέρειας του κύκλου, άλλη ευθεία δεν μπορεί να παρεμβληθεί και η γωνία του ημικυκλίου (δηλαδή η γωνία μεταξύ διαμέτρου και ημικυκλίου) είναι μεγαλύτερη από κάθε ευθύγραμμη γωνία ενώ η υπόλοιπη (κερατοειδής γωνία) είναι μικρότερη.

Απόδειξη

Έστω ο κύκλος ΑΒΓ με κέντρο το Δ και διάμετρο ΑΒ. Θα αποδείξουμε ότι η κάθετη στο άκρο της διαμέτρου ΑΒ που άγεται από το Α θα πέσει εκτός κύκλου.

Έστω ότι είναι δυνατόν να πέσει εντός όπως η ΑΓ και έστω ότι φέρνουμε την ΔΓ. Επειδή η ΔΑ είναι ίση με τη ΔΓ από τη πρόταση Ι 5 έπεται ότι η γωνία ΔΑΓ είναι ίση με τη γωνία ΑΓΔ. Αλλά η γωνία ΔΑΓ είναι ορθή άρα και η γωνία ΑΓΔ είναι ορθή, επομένως στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε δύο ορθές γωνίες το οποίο είναι αδύνατο.



Άρα δεν είναι δυνατόν η κάθετη στη διάμετρο ΒΑ στο Α να πέφτει εντός του κύκλου. Ομοίως αποδεικνύεται ότι ούτε επί της περιφέρειας πέφτει, άρα η κάθετη στο άκρο της διαμέτρου θα πέσει εκτός κύκλου.

Έστω η κάθετη στη διάμετρο είναι η ΑΕ, θα δείξουμε ότι στο μέρος μεταξύ της ΑΕ και του τόξου ΓΘΑ δεν παρεμβάλλεται άλλη ευθεία. Έστω ότι παρεμβάλλεται μια άλλη ευθεία και είναι η ΖΑ. Φέρνουμε από το Δ την ΔΗ κάθετη στην ΖΑ. Επειδή η γωνία ΑΗΔ είναι ορθή και η γωνία ΔΑΗ είναι μικρότερη από ορθή έπεται από τη πρόταση Ι 19 ότι η ΑΔ είναι μεγαλύτερη από τη ΔΗ. Όμως η ΔΑ είναι ίση με την ΔΘ άρα η ΔΘ μεγαλύτερη από τη ΔΗ το οποίο είναι αδύνατο. Άρα στο μέρος μεταξύ της ευθείας και της περιφέρειας δεν μπορεί να παρεμβληθεί άλλη ευθεία.

Τέλος λέμε ότι και η γωνία του ημικυκλίου που περιέχεται από την ευθεία ΒΑ και το τόξο ΓΘΑ είναι μεγαλύτερη από κάθε ευθύγραμμη και ότι η υπόλοιπη που περιέχεται από το τόξο ΓΘΑ και την ευθεία ΕΑ είναι μικρότερη από κάθε ευθύγραμμη οξεία γωνία.

Διότι αν υπάρχει κάποια ευθύγραμμη γωνία που να είναι μεγαλύτερη από αυτή που περιέχεται από την ευθεία ΒΑ και το τόξο ΓΘΑ και μικρότερη από εκείνη που περιέχεται από το τόξο ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ, στο μέρος μεταξύ του τόξου ΓΘΑ και της ευθείας ΑΕ θα

παρεμβάλλεται μια ευθεία, η οποία θα κάνει την γωνία που περιέχεται από ευθείες μεγαλύτερη από αυτή που περιέχεται από την ευθεία ΒΑ και το τόξο ΓΘΑ και μικρότερη από εκείνη που περιέχεται από το τόξο ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ. Αλλά δεν παρεμβάλλεται, άρα δεν υπάρχει οξεία γωνία που περιέχεται από ευθείες μεγαλύτερη από τη γωνία που περιέχεται από την ευθεία ΒΑ και το τόξο ΓΘΑ ,ούτε μικρότερη από τη γωνία που περιέχεται από το τόξο ΓΘΑ και την ευθεία ΑΕ.

Πόρισμα : Από την παραπάνω πρόταση είναι φανερό ότι η κάθετος που άγεται στη διάμετρο κύκλου από το άκρο της εφάπτεται του κύκλου και ότι μια ευθεία εφάπτεται σε κύκλο μόνο σε ένα σημείο γιατί όπως αποδείχθηκε αυτή η ευθεία που έχει δυο κοινά σημεία με τον κύκλο πέφτει μέσα στον κύκλο.

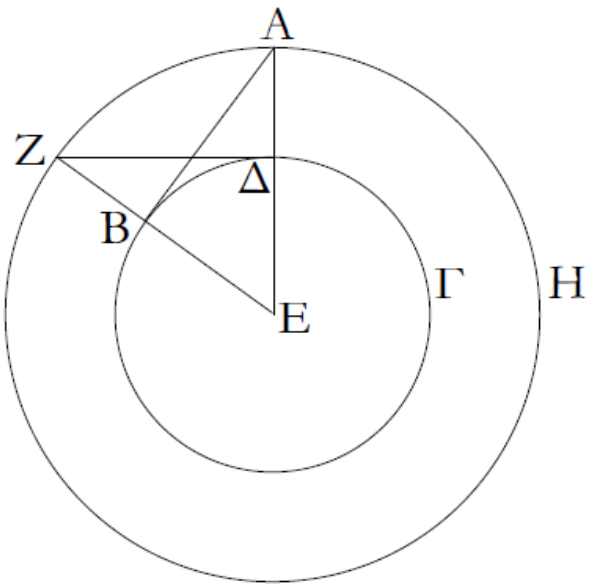
Πρόταση ΙΙΙ 17

«Απὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.»

Από δοθέν σημείο να αχθεί εφαπτομένη σε δοθέντα κύκλο.

Απόδειξη

Έστω Α το σημείο που δίνεται και ΒΔΓ ο κύκλος ,θέλουμε να κατασκευάσουμε ευθεία που να εφάπτεται στον κύκλο ΒΔΓ. Από το κέντρο του κύκλου ΒΔΓ (πρόταση ΙΙΙ 1) που το ονομάζουμε Ε φέρνουμε την ΑΕ και με κέντρο το Ε και ακτίνα ΕΑ γράφουμε κύκλο ΑΖΗ. Από το Δ φέρνουμε τη ΔΖ κάθετη στην ΕΑ και φέρνουμε τις ΕΖ και ΑΒ. Λέμε ότι από το σημείο Α έχει αχθεί η εφαπτομένη στον κύκλο ΒΓΔ.



Επειδή το Ε είναι κέντρο των κύκλων ΒΓΔ και ΑΖΗ, έπεται ότι η ΕΑ είναι ίση με την ΕΖ και ότι η ΕΔ είναι ίση με την ΕΒ. Οι δυο πλευρές ΑΕ και ΕΒ είναι ίσες με τις δυο ΖΕ και ΕΔ και περιέχουν κοινή την γωνία με κορυφή το Ε. Άρα η βάση ΔΖ είναι ίση με τη βάση ΑΒ και το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ίσο με το τρίγωνο ΕΒΑ και οι υπόλοιπες γωνίες με τις υπόλοιπες γωνίες (από τα πρόταση Ι 4). Επομένως η γωνία ΕΔΖ είναι ίση με τη γωνία ΕΒΑ. Όμως η γωνία ΕΔΖ είναι ορθή, άρα και η γωνία ΕΒΑ είναι ορθή. Η ΕΒ όμως είναι ακτίνα, και η ευθεία που άγεται κάθετα στη διάμετρο του κύκλου από το άκρο της εφάπτεται του κύκλου (πρόταση ΙΙΙ 16), άρα η ΑΒ εφάπτεται του κύκλου ΒΓΔ.

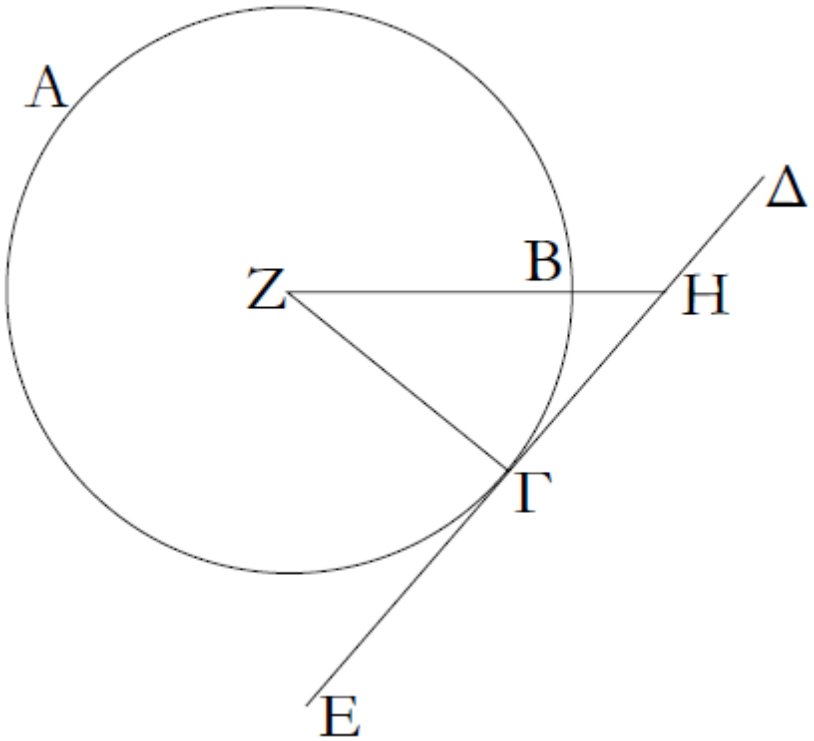
Παρατηρούμε ότι ο Ευκλείδης κατασκευάζει την εφαπτομένη του κύκλου από σημείο εκτός αυτού χρησιμοποιώντας τη συνθετική μέθοδο ξεκινώντας από τα δεδομένα και τα γνωστά και με τη βοήθεια των ορισμών των αιτημάτων και των αξιωμάτων αλλά και προτάσεων που έχουν ήδη αποδειχθεί, ακολουθεί μια επαγωγική διαδικασία, ώσπου να καταλήξει στην κατασκευή της εφαπτομένης.

Πρόταση ΙΙΙ 18

«Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.»

Αν ευθεία εφάπτεται σε κύκλο, τότε η ευθεία που συνδέει το κέντρο με το σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Απόδειξη



Έστω η ευθεία ΔΕ εφάπτεται του κύκλου ΑΒΓ στο σημείο Γ. Παίρνουμε ως Ζ το κέντρο του κύκλου και από το Ζ φέρνουμε τη ΖΓ. Λέμε ότι η ΖΓ είναι κάθετη στη ΔΕ. Γιατί αν δεν είναι, φέρνουμε από το Ζ κάθετη στη ΔΕ έστω τη ΖΗ. Επειδή η γωνία ΖΗΓ είναι ορθή, έπεται ότι η γωνία ΖΗΓ είναι οξεία (πρόταση Ι 17). Όμως απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά (πρόταση Ι 19). Άρα η ΖΓ είναι μεγαλύτερη από τη ΖΗ. Αλλά η ΖΓ είναι ίση με τη ΖΒ άρα η ΖΒ είναι μεγαλύτερη από τη ΖΗ που σημαίνει ότι η μικρότερη είναι μεγαλύτερη από τη μεγαλύτερη, που είναι αδύνατο. Άρα η ΖΗ δεν είναι κάθετη στη ΔΕ. Ομοίως

αποδεικνύεται ότι ούτε άλλη κάθετη υπάρχει εκτός από τη ΖΓ. Άρα η ΖΓ είναι κάθετη στη ΔΕ. Αποδείξαμε ότι αν μια ευθεία εφάπτεται σε κύκλο και φέρνουμε την ευθεία που ενώνει το κέντρο με το σημείο επαφής, η ευθεία που φέραμε θα είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Πορίσματα Από τη πρόταση ΙΙΙ 18 προκύπτουν άμεσα οι προτάσεις:

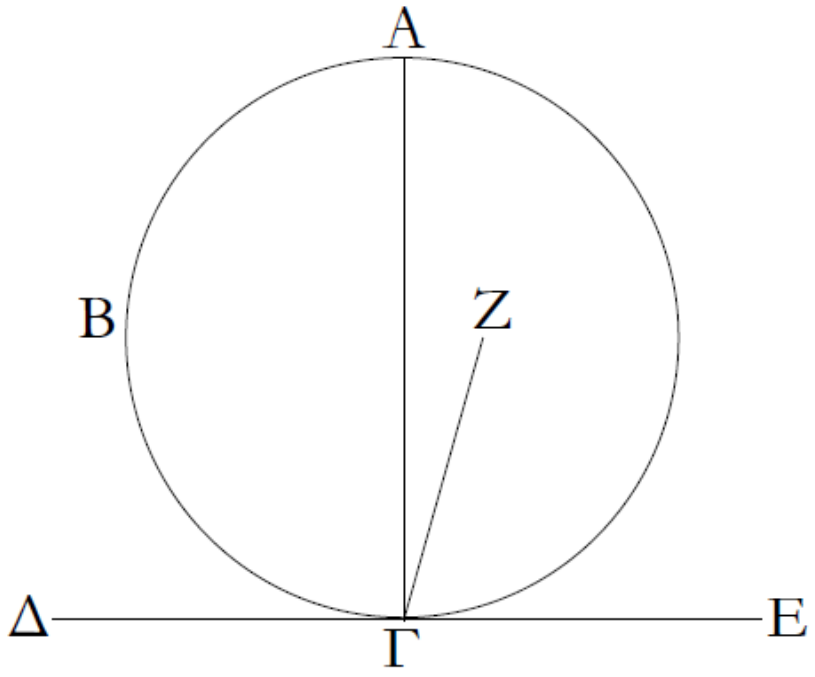
α) Οι εφαπτόμενες ενός κύκλου στα άκρα μιας διαμέτρου είναι παράλληλες.

β) Αν δυο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά η εξωτερικά, μπορούμε να φέρουμε από το σημείο επαφής μια κοινή εφαπτομένη αυτών.

Πρόταση ΙΙΙ 19

«Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς [γωνίας] εὐθεῖα γραμμή ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.»

Αν μια ευθεία εφάπτεται σε κύκλο και από το σημείο επαφής φέρουμε ευθεία γραμμή κάθετη στην εφαπτομένη, το κέντρο του κύκλου θα βρίσκεται στην ευθεία που φέραμε.



Απόδειξη

Έστω η ευθεία ΔΕ εφάπτεται του κύκλου ΑΒΓ στο σημείο Γ και από το Γ φέρνουμε κάθετη στη ΔΕ έστω τη ΓΑ, τότε λέμε ότι το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω στη ΑΓ.

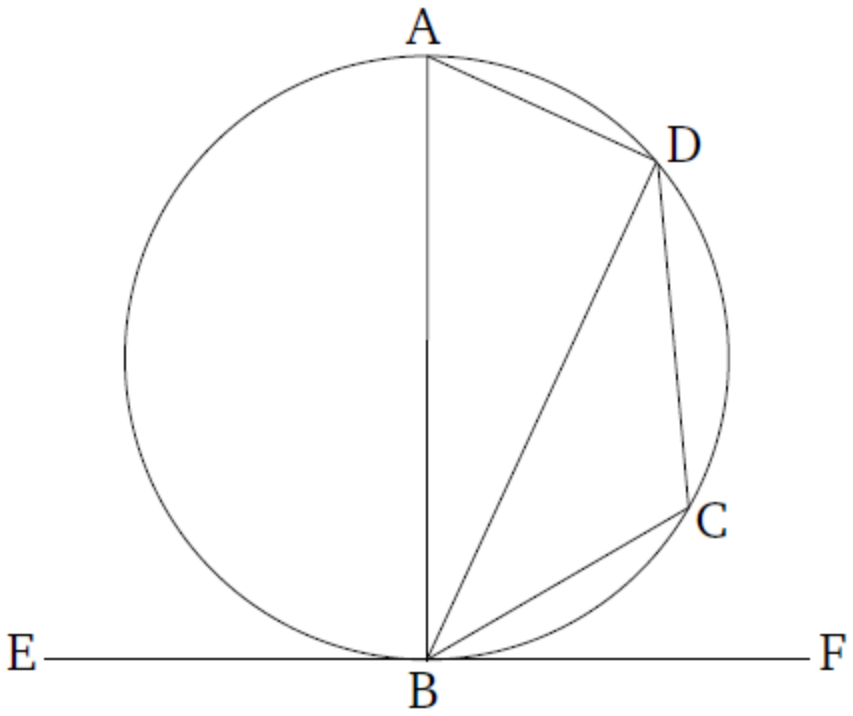
Έστω ότι δεν είναι πάνω στην ΑΓ και ότι είναι δυνατόν να είναι το σημείο Ζ και φέρνουμε τη ΓΖ. Επειδή στον κύκλο ΑΒΓ εφάπτεται η ευθεία ΔΕ και από το κέντρο έχει αχθεί προς το σημείο επαφής η ΖΓ έπεται ότι η ΖΓ είναι κάθετη στη ΔΕ (πρόταση ΙΙΙ 18) άρα η γωνία ΖΓΕ είναι ορθή. Όμως και η γωνία ΑΓΕ είναι ορθή, άρα η γωνία ΖΓΕ είναι ίση με τη γωνία ΑΓΕ, δηλαδή η μικρότερη γωνία ίση με τη μεγαλύτερη που είναι αδύνατο. Άρα το Ζ δεν είναι κέντρο του κύκλου. Ομοίως δείχνουμε ότι δεν υπάρχει άλλο κέντρο παρά μόνο επί της ΑΓ. Επομένως αν μια ευθεία εφάπτεται σε κύκλο και από το σημείο επαφής φέρουμε ευθεία γραμμή κάθετη στην εφαπτομένη, το κέντρο του κύκλου θα βρίσκεται στην ευθεία που φέραμε.

1.2.5 Πρόταση ΙΙΙ 32 - Γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης

«Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.»

Αν μια ευθεία εφάπτεται σε κύκλο, και από το σημείο επαφής φέρουμε τέμνουσα του κύκλου, οι γωνίες που σχηματίζει η ευθεία με την εφαπτομένη θα είναι ίσες με τις γωνίες που είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο και βαίνουν στο τόξο της χορδής.

Απόδειξη



Έστω η ευθεία EF εφάπτεται σε κύκλο ABCD στο σημείο B. Από το σημείο B φέρνουμε μια ευθεία BD που τέμνει τον κύκλο ABCD σε δυο σημεία. Οι γωνίες που σχηματίζει η BD με την εφαπτομένη EF είναι ίσες με τις γωνίες στα εναλλάξ τμήματα του κύκλου, δηλαδή η γωνία FBD είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζεται στο τμήμα ΒΑΔ και η γωνία EBD με τη γωνία που σχηματίζεται στο τμήμα DCB.

Από το B φέρνουμε τη BA κάθετη στην EF και στο τόξο BD παίρνουμε τυχαίο σημείο, έστω το C και φέρνουμε τις AD , DC , CB. Επειδή στον κύκλο ABCD εφάπτεται μια ευθεία , η EF στο σημείο B και από το σημείο επαφής έχει αχθεί κάθετη στην εφαπτομένη η BA, έπεται ότι το κέντρο του κύκλου ABCD βρίσκεται επί της BA (πρόταση III 19). Άρα η BA είναι διάμετρος του κύκλου άρα η γωνία ADB που βρίσκεται στο ημικύκλιο είναι ορθή (πρόταση III 31). Άρα το άθροισμα των δυο υπόλοιπων γωνιών BAD και ABD είναι μια ορθή (πρόταση I 32). Όμως και η γωνία ABF είναι ορθή άρα ισούται με το άθροισμα των γωνιών BAD και ABD. Αφαιρούμε και από τα δυο μέλη την κοινή γωνία ABD και έχουμε ότι η γωνία DBF που απομένει είναι ίση με τη γωνία BAD στο εναλλάξ τμήμα του κύκλου. Το τετράπλευρο ABCD είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο το άθροισμα των δυο απέναντι γωνιών του είναι δυο ορθές (πρόταση III 22).Αλλά και το άθροισμα των γωνιών DBF και DBE είναι δυο ορθές. Επομένως το άθροισμα των γωνιών DBF και DBE είναι ίσο με το άθροισμα των γωνιών BAD και ΒΓD,

από τις οποίες αποδείχτηκε ότι η BAD είναι ίση με τη DBF. Άρα η γωνία DBE που απομένει είναι ίση με τη γωνία DCB στο εναλλάξ τμήμα του κύκλου DCB.

Άρα αν μια ευθεία εφάπτεται σε κύκλο και από το σημείο επαφής αχθεί ευθεία που τέμνει τον κύκλο, οι γωνίες που σχηματίζει με την εφαπτομένη θα είναι ίσες με τις γωνίες που βρίσκονται στα εναλλάξ τμήματα του κύκλου.

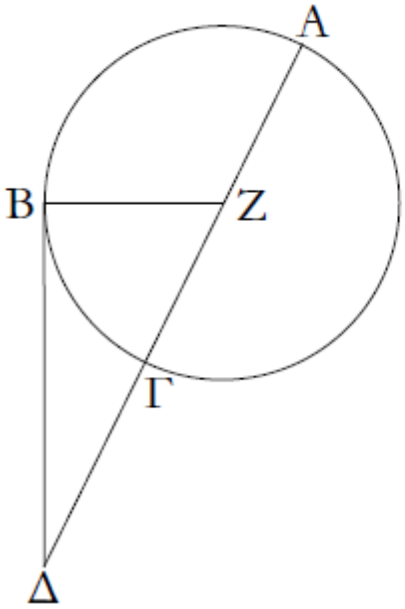
1.2.6 Η εφαπτομένη ως μέση ανάλογος στις δυο τελευταίες προτάσεις του τρίτου βιβλίου.

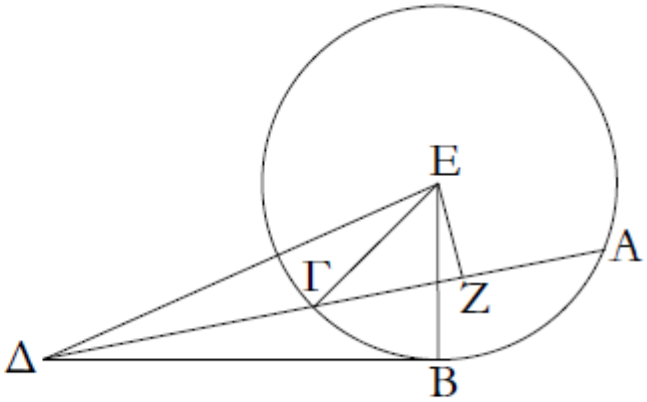
Πρόταση III 36

«Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.»

Αν από σημείο εκτός κύκλου φέρουμε δυο ευθείες, έτσι ώστε η μια να τον τέμνει και η άλλη να εφάπτεται, τότε το ορθογώνιο που περιέχεται από ολόκληρη την τέμνουσα και από το τμήμα της που βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο της πλευράς της εφαπτομένης.

Απόδειξη





Έστω ότι λαμβάνουμε ένα σημείο Δ εκτός του κύκλου ΑΒΓ και από το Δ άγονται προς τον κύκλο ΑΒΓ δυο ευθείες ,οι ΔΓ[Α] και ΔΒ και έστω ότι η ΔΓΑ τέμνει τον κύκλο και η ΔΒ εφάπτεται σε αυτόν. Λέμε τότε ότι το ορθογώνιο που περιέχεται από τις ΑΔ και ΔΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της εφαπτόμενης ΔΒ.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για τη [Δ]ΓΑ με το αν θα διέρχεται από το κέντρο ή όχι.

Έστω ότι διέρχεται από το κέντρο του κύκλου που το ονομάζουμε Ζ. Φέρνουμε τη ΖΒ και από την πρόταση ΙΙΙ 18 έπεται ότι η γωνία ΖΒΔ είναι ορθή. Επειδή η ευθεία ΑΓ τέμνεται στο μέσον από το σημείο Ζ και στη συνέχεια της βρίσκεται η ΓΔ, έπεται ότι το ορθογώνιο πλευρών ΑΔ και ΔΓ μαζί με το τετράγωνο πλευράς ΖΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΖΔ (από πρόταση ΙΙ 6). Αλλά η ΖΓ είναι ιση με τη ΖΒ , άρα το ορθογώνιο πλευρών ΑΔ και ΔΓ μαζί με το τετράγωνο πλευράς ΖΒ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΖΔ που είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΖΒ και ΒΔ από την πρόταση Ι 47. Άρα το άθροισσμα του ορθογώνιου πλευρών ΑΔ και ΔΓ με το τετράγωνο πλευράς ΖΒ ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων ΖΒ και ΒΔ. Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη το τετράγωνο της ΖΒ και μένει ότι το ορθογώνιο πλευρών ΑΔ και ΔΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της εφαπτομένης ΔΒ.

Σε σύγχρονη αλγεβρική γλώσσα έχουμε από την πρόταση ΙΙ 6 $\Delta\Gamma\cdot\Delta A + \Gamma Z^2 = Z\Delta^2$ (1)
και από το γεγονός ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο έχουμε από τη Ι 47 $BZ^2 + B\Delta^2 = Z\Delta^2$ (2)

και λόγω ότι ΒΖ=ΓΖ ως ακτίνες από τις (1) και (2) έχουμε ότι: ΔΓ·ΔΑ+$ΓΖ^2$=$ΒΖ^2 + ΒΔ^2$ άρα έχουμε ότι ΔΓ·ΔΑ =$ΒΔ^2$.

Στην δεύτερη περίπτωση έστω η τέμνουσα ΔΓΑ δεν διέρχεται από το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ. Παίρνουμε Ε το κέντρο του κύκλου και φέρνουμε την κάθετη από το Ε στην ΑΓ και την ονομάζω ΕΖ,επίσης φέρνουμε τις ΕΒ,ΕΓ,και ΕΔ. Από τη πρόταση ΙΙΙ 18 έπεται ότι η γωνία ΕΒΔ είναι ορθή. Επειδή η ευθεία ΕΖ που διέρχεται από το κέντρο τέμνει κάθετα την ΑΓΗ η οποία δεν διέρχεται από το κέντρο έπεται ότι την τέμνει στο μέσο (πρόταση ΙΙΙ 3),άρα η ΑΖ ίση με τη ΖΓ. Επειδή η ευθεία ΑΓ έχει τμηθεί στο μέσο από το Ζ και στη συνέχεια της βρίσκεται η ΓΔ, από τη πρόταση ΙΙ 6 έχουμε ότι το άθροισμα του ορθογωνίου πλευρών ΑΔ και ΔΓ με το τετράγωνο της ΖΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΖΔ.Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το τετράγωνο της ΖΕ και έπεται ότι το άθροισμα του ορθογωνίου πλευρών ΑΔ και ΔΓ με τα τετράγωνα πλευρών ΓΖ και ΖΕ είναι ισο με το άθροισμα των τετράγώνων πλευρών ΖΔ και ΖΕ.Αλλά με το άθροισμα των τετραγώνων των ΓΖ και ΖΕ ισούται το τετράγωνο της ΕΓ (από τη πρόταση Ι 47) λόγω του ότι η ΕΓΖ είναι ορθή, ενώ με το άθροισμα των τετραγώνων των ΔΖ και ΖΕ ισούται το τετράγωνο της ΕΔ. Άρα το άθροισμα του ορθογώνιου πλευρών ΑΔ και ΔΓ με το τετράγωνο της ΕΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΔ. Όμως η ΕΓ είναι ίση με την ΕΒ άρα το άθροισμα του ορθογώνιου πλευρών ΑΔ και ΔΓ με το τετράγωνο της ΕΒ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΕΔ.Αλλά το τετράγωνο της ΕΔ είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των ΕΒ και ΒΔ εφόσον η γωνία ΕΒΔ είναι ορθή (από πρόταση Ι 47).Έτσι το άθροισμα του ορθογωνίου πλευρών ΑΔ και ΔΓ με το τετράγωνο της ΕΒ ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων ΕΒ και ΒΔ.Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη το τετράγωνο της ΕΒ και αυτό που μένει είναι το ορθογώνιο πλευρών ΑΔ και ΔΓ που είναι ίσο με το τετράγωνο της ΔΒ.

Άρα αν πάρουμε ένα σημείο εκτός κύκλου και από αυτό δυο ευθείες έτσι ώστε η μια να τον τέμνει και η άλλη να εφάπτεται, το ορθογώνιο που περιέχεται από ολόκληρη την τέμνουσα και από το εκτός τμήμα της μεταξύ του σημείου και του τόξου, θα είναι ίσο με το τετράγωνο της εφαπτομένης.

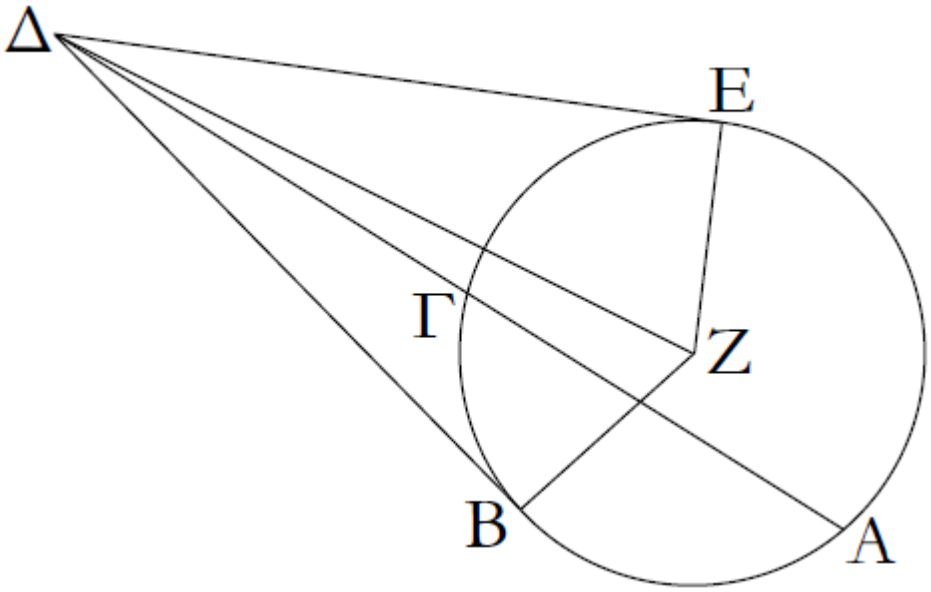
Πρόταση ΙΙΙ 37

«Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾗ δὲ τὸ ὑπὸ [τῆς] ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.»

Εάν ληφθεί ένα σημείο εκτός κύκλου και από αυτό προσπίπτουν στον κύκλο δύο ευθείες , εκ των οποίων η μια τέμνει τον κύκλο ενώ η άλλη απλά προσπίπτει, και αν το ορθογώνιο που σχηματίζεται από ολόκληρη την τέμνουσα και από το εκτός τμήμα της, το μεταξύ του σημείου και του κυρτού τόξου , είναι ίσο με το τετράγωνο της προσπίπτουσας, τότε η προσπίπτουσα θα είναι εφαπτόμενη στον κύκλο.

Απόδειξη

Έστω το σημείο Δ εκτός του κύκλου ΑΒΓ και από το Δ φέραμε δύο ευθείες ,τις ΔΓΑ και ΔΒ , προς τον κύκλο ,εκ των οποίων η ΔΓΑ να τέμνει τον κύκλο και η ΔΒ απλώς να προσπίπτει σ' αυτόν, έστω το ορθογώνιο πλευρών ΑΔ και ΔΓ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΒΔ. Λέμε ότι η ΔΒ εφάπτεται στον κύκλο.



Φέρουμε την ΔΕ εφαπτόμενη στον κύκλο ΑΒΓ και έστω Ζ το κέντρο του κύκλου ΑΒΓ και φέρνουμε τις ΖΕ, ΖΒ, και ΖΔ. Η γωνία ΖΕΔ είναι ορθή (από την πρόταση ΙΙΙ 18) και επειδή η ΔΕ εφάπτεται στον κύκλο ΑΒΓ, ενώ η ΔΓΑ τον τέμνει έπεται ότι το ορθογώνιο πλευρών ΑΔ και ΔΓ είναι ίσσο με το τετράγωνο της ΔΕ από πρόταση ΙΙΙ 36. Όμως το ορθογώνιο πλευρών ΑΔ και ΔΓ ήταν ίσο και με το τετράγωνο της ΔΒ, άρα το τετράγωνο της ΔΕ είναι ίσο με το τετράγωνο της ΔΒ άρα η ΔΕ είναι ίση με τη ΔΒ. Όμως και η ΖΕ είναι ίση με τη ΖΒ. Επομένως οι δυο ΔΕ και ΕΖ είναι ίσες με τις δύο ΔΒ και ΒΖ, ενώ και η βάση τους ΖΔ είναι κοινή, άρα και η γωνία ΔΕΖ είναι ίση με τη γωνία ΔΒΖ από την πρόταση Ι.8. Επειδή όμως η ΔΕΖ είναι ορθή θα είναι και η ΔΒΖ ορθή. Η ΖΒ αν προεκταθεί είναι διάμετρος, αλλά η ευθεία που άγεται κάθετα στη διάμετρο στο άκρο της εφάπτεται στον κύκλο από την πρόταση ΙΙΙ 16 άρα η ΔΒ εφάπτεται στον κύκλο. Ομοίως αποδεικνύεται και αν το κέντρο βρίσκεται επί της ΑΓ.

Άρα αν πάρουμε σημείο εκτός κύκλου και από αυτό προσπίπτουν στον κύκλο δύο ευθείες, εκ των οποίων η μια τέμνει τον κύκλο ενώ η άλλη απλώς προσπίπτει, και αν το ορθογώνιο που σχηματίζεται από ολόκληρη την τέμνουσα και από το εκτός τμήμα της, το μεταξύ του σημείου και του κυρτού τόξου, είναι ίσο με το τετράγωνο της προσπίπτουσας, τότε η προσπίπτουσα θα είναι εφαπτομένη στον κύκλο.

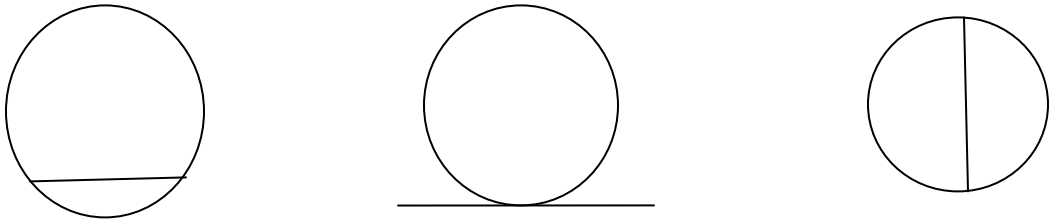
1.3 Σχόλια στους ορισμούς.

1.3.1 Σχόλια για την έννοια της γωνίας στα στοιχεία του Ευκλείδη.

Ευθύγραμμες-Μεικτές γωνίες.

Ο Ευκλείδης στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* και στον ορισμό (η) ορίζει την γωνία να είναι η κλίση μεταξύ δυο γραμμών στο επίπεδο που δεν βρίσκονται επί της ίδιας ευθείας και άπτονται μεταξύ τους. Σ' αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι ο Ευκλείδης δεν ορίζει τον όρο κλίση, και είναι η πρώτη φορά που εμφανίζεται αυτός ο όρος στα *Στοιχεία*. Επιπροσθέτως στη φράση «και μη επ'ευθείας κειμένων» στον ορισμό (η), ο Ευκλείδης θεωρεί ότι οι πλευρές της γωνίας δεν προέρχονται από την ίδια ευθεία και θέλει να αποκλείσει από τον ορισμό της γωνίας, την ευθεία γωνία που ισούται με δυο ορθές αλλά και τη μηδενική γωνία. Για τον Ευκλείδη το μέτρο μιας γωνίας δεν μπορεί να υπερβαίνει τις δυο ορθές, κάτι που επιβεβαιώνεται από την

πρόταση III 20 των *Στοιχείων*, όπου αποδεικνύεται ότι η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο. Στην απόδειξη εξετάζεται μόνο η περίπτωση που η επίκεντρη γωνία είναι μικρότερη από δυο ορθές. Ο Heath σε σχόλια του (vol 2, σελ. 48- *The thirteen books of Euclid's elements*) αναφέρει ότι ο Ήρων υποστήριζε ότι ο Ευκλείδης δεν αναγνώριζε γωνία πάνω από δύο ορθές αλλά ούτε καν την ευθεία γωνία. Από την άλλη μεριά βέβαια ο Ευκλείδης δέχεται ότι μια γωνία μπορεί να σχηματιστεί και από καμπύλες αλλά και από συνδυασμό ευθείας με καμπύλη. Για να ξεχωρίσει τις παραπάνω περιπτώσεις από τη γωνία που σχηματίζεται μόνο από ευθείες παραθέτει τον ορισμό (θ), ότι αν οι γραμμές που περιέχουν την γωνία είναι ευθείες η γωνία θα λέγεται ευθύγραμμη γωνία. Στα *Στοιχεία* οι επίπεδες γωνίες που συναντάμε σχηματίζονται είτε από ευθείες, είτε από ευθεία και περιφέρεια κύκλου (γωνία τμήματος ή γωνία ημικυκλίου) ή τέλος από την εφαπτομένη ενός κύκλου και την περιφέρεια αυτού (κερατοειδής γωνία).



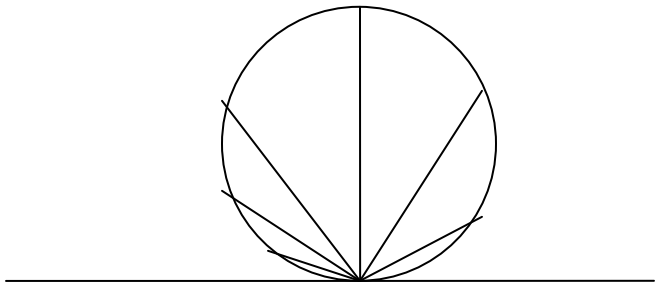
Στην αρχαία Ελλάδα, τόσο πριν όσο και μετά την εποχή του Ευκλείδη, υπήρχε μεγάλη διαμάχη σχετικά με τη φύση της «γωνίας του ημικυκλίου» και την «υπολειπόμενη γωνία» μεταξύ της περιφέρειας του ημικυκλίου και της εφαπτομένης στο άκρο της. Όπως είδαμε (βιβλίο I, ορισμός 8), η τελευταία γωνία έχει ένα αναγνωρίσιμο όνομα: «κερατοειδής γωνία». Παρόλο που αυτός ο όρος δεν απαντάται στον Ευκλείδη, χρησιμοποιείται συχνά από τον Πρόκλο, προφανώς ως ένας όρος απόλυτα κατανοητός. Παρόλο που η καλύτερη αντίληψη που έχουμε γύρω από τις αρχαίες διαμάχες πάνω σ' αυτό το θέμα προέρχεται από τον Πρόκλο, θα έπρεπε, πιστεύω, να συμπεράνουμε την επικράτησή τους την εποχή του Ευκλείδη, από αυτή την μεμονωμένη εμφάνιση των δύο «γωνιών» στα *Στοιχεία*. Προσθετικά στον ορισμό της γωνίας ενός τμήματος, φαίνεται να αποδεικνύεται ότι παρόλο που αυτές οι γωνίες αναφέρονται μόνο και μόνο για να απορριφθούν ευθύς αμέσως και ότι δεν είναι χρήσιμες στην βασική γεωμετρία.

Ο Ευκλείδης πίστευε ότι θα ήταν αναμενόμενη από μέρους του μία νύξη σε αυτές. Είναι σαν να ήθελε να αμυνθεί απέναντι στην εντύπωση ότι αδιαφορεί για ένα θέμα το οποίο οι γεωμέτρες του καιρού του περιέβαλαν με ενδιαφέρον. Εάν αυτή η εικασία είναι σωστή, η αναφορά σε αυτές τις γωνίες θα ανταποκρινόταν στην προσθήκη ορισμών τους οποίους δεν χρησιμοποιεί, π.χ. αυτούς ενός ρόμβου και ενός ρομβοειδούς.

Ο Πρόκλος δεν διστάζει να χαρακτηρίσει τη «γωνία ημικυκλίου» και την «κερατοειδή γωνία» ως πραγματικές *γωνίες*. Έτσι λέει ότι *«γωνίες περιέχονται μεταξύ μιας ευθείας γραμμής και μιας περιφέρειας κύκλου με δύο τρόπους, διότι είτε περιέχονται μεταξύ μιας ευθείας γραμμής και μιας κυρτής περιμέτρου όπως αυτής του ημικυκλίου είτε μεταξύ μιας ευθείας γραμμής και μιας κοίλης περιμέτρου όπως η κερατοειδής. Υπάρχουν μεικτές γραμμές όπως οι σπείρες και μεικτές γωνίες όπως η γωνία ενός ημικυκλίου και η κερατοειδής»*. Η δυσκολία που αντιμετώπιζαν οι αρχαίοι προκύπτει από το συγκεκριμένο στοιχείο που ο Ευκλείδης ενσωματώνει σε αυτήν την πρόταση. Αφού μία γωνία μπορεί να διχοτομηθεί από μία γραμμή, αυτό θα μπορούσε να αποτελεί μέγεθος. «Αλλά εάν είναι μέγεθος και όλα τα ομοιογενή μεγέθη τα οποία είναι πεπερασμένα είναι ανάλογα το ένα προς το άλλο, τότε όλες οι ομοιογενείς γωνίες ή μάλλον αυτές που βρίσκονται σε επιφάνειες, θα είναι ανάλογες η μία προς την άλλη, επομένως η κερατοειδής, θα είναι ανάλογη προς την ευθύγραμμη. Αλλά τα πράγματα που είναι ανάλογα το ένα προς το άλλο δύνανται, εάν πολλαπλασιαστούν, να υπερβούν το ένα το άλλο (Αξίωμα Ευδόξου-Αρχιμήδη). Επομένως η κερατοειδής γωνία θα υπερβεί κάποτε την ευθύγραμμη – πράγμα αδύνατον αφού έχει αποδειχθεί ότι η πρώτη είναι μικρότερη από κάθε ευθύγραμμη (πρόταση ΙΙΙ 16)».

Θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε την πρόταση ΙΙΙ 16 του Ευκλείδη όσον αφορά τις γωνίες «ημικυκλίου» και «κερατοειδής» σε σχέση με την εφαπτομένη. Στο πρώτο μέρος της πρότασης αποδεικνύεται πως αν φέρουμε κάθετη στο άκρο μιας διαμέτρου κύκλου τότε αυτή θα είναι εφαπτόμενη διότι δεν μπορεί να έχει δεύτερο κοινό σημείο με τον κύκλο αφού πέφτει εκτός κύκλου. Το δεύτερο μέρος της πρότασης μας δείχνει ότι δεν είναι δυνατόν να αχθεί ημιευθεία μεταξύ του κύκλου και της ευθείας, δηλαδή αποδεικνύεται η μοναδικότητα της εφαπτομένης στο άκρο της διαμέτρου. Πράγματι αν υπήρχε τέτοια ευθεία που να περνάει από το άκρο της διαμέτρου αυτή θα ήταν τέμνουσα. Άρα προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα για τις δυο μεικτές γωνίες που σχηματίζονται. Ότι οποιαδήποτε οξεία γωνία και αν σχηματίσουμε με πλευρές την διάμετρο του κύκλου και μια οποιαδήποτε χορδή (όπου το ένα άκρο θα είναι το άκρο της

διαμέτρου) αυτή η γωνία θα είναι μικρότερη από τη γωνία του ημικυκλίου. Δηλαδή η γωνία του ημικυκλίου περιέχει οποιαδήποτε οξεία γωνία με τις πλευρές που προαναφέραμε.

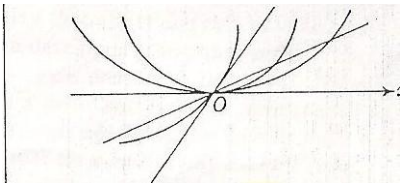


Με σύγχρονους όρους θα λέγαμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου είναι η οριακή θέση των τεμνουσών του κύκλου καθώς τα σημεία πάνω στην περιφέρεια πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο άκρο της διαμέτρου είτε από δεξιά είτε από αριστερά του.

Από την άλλη μεριά του κύκλου και μεταξύ της περιφέρειας του κύκλου και της εφαπτομένης σχηματίζεται μια γωνία με το όνομα *κερατοειδής*. Σε αυτή την γωνία δεν μπορούμε να φέρουμε οποιαδήποτε εσωτερική ημιευθεία με αρχή αυτή την κορυφή άρα δεν μπορεί να συγκριθεί με καμία ευθύγραμμη. Μπορούμε όμως να φέρουμε εσωτερικά ένα κύκλο μικρότερης ακτίνας και έτσι σχηματίζεται μια άλλη κερατοειδής που φαίνεται να είναι μεγαλύτερη από την αρχική. Βέβαια όσο πλησιάζουμε το σημείο επαφής δεν φαίνονται να διαφέρουν οι δυο γωνίες, παρόλο που η μια φαίνεται να περιέχεται στην άλλη. Είδαμε παραπάνω στα σχόλια του Heath ότι κατά τον Πρόκλο η κερατοειδής γωνία δεν έχει μέγεθος. Η βασική της ιδιότητα είναι ότι για οσοδήποτε μικρή οξεία γωνία και να πάρουμε με μια πλευρά την εφαπτομένη η άλλη πλευρά θα κόβει τον κύκλο ώστε η κερατοειδής να είναι μικρότερη από την αντίστοιχη οξεία γωνία. Λόγω αυτών των γωνιών η πρόταση III 16 αποκτά ιστορική σημασία κατά τον Heath γιατί υπήρξε αφορμή αντιπαραθέσεων από τον 13^{ο} έως τον 17^{ο} αιώνα. Χαρακτηριστικά ο Cardano (1501-1576) παρατήρησε το εξής παράδοξο για τις κερατοειδής γωνίες (Heath, σελ. 41). Έχουμε μια ποσότητα που μεγαλώνει χωρίς όριο και εννοεί την κερατοειδή γωνία που μεγαλώνει συνεχώς φτιάχνοντας εφαπτόμενους κύκλους στο σημείο επαφής με μικρότερη ακτίνα, όμως αυτή η ποσότητα παραμένει μικρότερη από μια άλλη ποσότητα που είναι η ευθύγραμμη γωνία και η οποία μικραίνει συνεχώς αφού το άλλο άκρο της χορδής μπορεί να πλησιάζει παρά πολύ κοντά το σημείο επαφής και η ευθύγραμμη γωνία να γίνει οσοδήποτε μικρή.

Από το βιβλίο του F.Klein (Elementary mathematics from an advanced standpoint Geometry σελίδα 204,205) αναφέρουμε τα εξής:

Αντιλαμβανόμαστε από τις κερατοειδείς γωνίες μεταξύ δύο καμπυλών, το κομμάτι του επιπέδου που περιλαμβάνεται μεταξύ των καμπυλών στο σημείο επαφής και θα δούμε τώρα πως αυτός ο ορισμός αποτελεί το έναυσμα για την έννοια του *μη-αρχιμήδειου μεγέθους*, π.χ. για μία έννοια η οποία δεν ικανοποιεί αυτό το αξίωμα. Θα πρέπει να περιοριστούμε εδώ σε γωνίες των οποίων μία πλευρά είναι μία σταθερή γραμμή (ο άξονας χ), του οποίου η κορυφή είναι η αρχή *O*, και των οποίων η άλλη πλευρά είναι ένας κύκλος (επίσης, αν χρειαστεί, μία ευθεία γραμμή) ο οποίος τέμνει ή εφάπτεται του άξονα χ στο *O*. Θα είναι επομένως φυσικό να ονομάσουμε μικρότερη εκείνη από τις δύο κερατοειδείς γωνίες της οποίας η ελεύθερη πλευρά παραμένει τελικά *κάτω από την* ελεύθερη πλευρά της άλλης, όταν πλησιάζουμε το *O,* π.χ. αυτή η οποία τελικά συνορεύει με το στενότερο κομμάτι του επιπέδου. Η γωνία ενός εφαπτόμενου κύκλου θα είναι επομένως πάντοτε μικρότερη από αυτήν ενός κύκλου που διασταυρώνεται ή μιας ευθείας γραμμής. Μεταξύ δύο διασταυρούμενων κύκλων, αυτός με την μεγαλύτερη ακτίνα θα σχηματίσει τη μικρότερη γωνία, αφού περνάει κάτω από την άλλη. Είναι ξεκάθαρο ότι αυτές οι συμφωνίες ορίζουν, για οποιαδήποτε από αυτές τις δύο κερατοειδείς γωνίες μας, ποια από αυτές είναι η μικρότερη και ποια η μεγαλύτερη, επομένως το σύνολο των κερατοειδών γωνιών είναι απλά ταξινομημένο, όπως κάποιος υποστηρίζει σήμερα στην θεωρία συνόλων, ακριβώς όπως στην περίπτωση του συνόλου των τακτικών πραγματικών αριθμών.



Για να υπολογίσουμε τη διαφορά μεταξύ αυτών των δύο συνόλων, πρέπει να συμφωνήσουμε σε κάτι πιο συγκεκριμένο που αφορά στη μέτρηση των κερατοειδών γωνιών. Κατ' αρχήν, ας μετρήσουμε τη γωνία μιας ευθείας γραμμής δια μέσω του *O* σε κανονικές

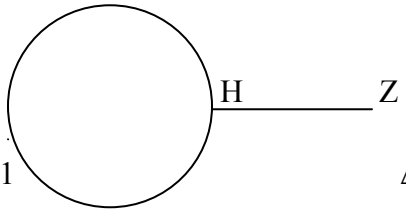
μονάδες γωνιών. Τότε, κάθε γωνία ***α*** που σχηματίζεται από έναν κύκλο εφαπτόμενο στον άξονα χ, θα είναι μικρότερη, εξ ορισμού, από κάθε γωνία που συνορεύει με δύο ευθείες γραμμές, όσο μικρή κι αν είναι, υπό την προϋπόθεση και μόνο ότι είναι διαφορετικό από το μηδέν. Τέτοια κατάσταση είναι αδύνατη, εντούτοις, στο συνεχές των τακτικών αριθμών, καθώς ένας αριθμός ***α*** διαφέρει από το μηδέν και χαρακτηρίζει το δικό μας ***α*** ως «άπειρα μικρό στην πραγματικότητα».

Προκειμένου να ακολουθήσουμε αυτό σε σχέση με το αρχιμήδειο αξίωμα, πρέπει να ορίσουμε για αυτές τις καμπυλο-γραμμικές γωνίες, *πολλαπλασιασμό με έναν ακέραιο αριθμό.* Εάν έχουμε έναν κύκλο με ακτίνα *R* που εφάπτεται στο *O*, τότε είναι φυσικό να αποδώσουμε στον εφαπτόμενο κύκλο με ακτίνα *R/n την* πολλαπλάσια του *n* γωνία. Αυτό στην πραγματικότητα συμφωνεί με τον προηγούμενο ορισμό, στο μέτρο που οι γωνίες των εφαπτόμενων κύκλων με ακτίνες *R, R/2, R/3,…* γίνονται όλο και μεγαλύτερες. Έτσι πολλαπλασιασμός της γωνίας *α* ενός εφαπτόμενου κύκλου με έναν ακέραιο αριθμό αποδίδει πάντοτε μια άλλη γωνία ενός εφαπτόμενου κύκλου και κάθε πολλαπλάσιο *na* είναι απαραίτητα μικρότερο, σύμφωνα με τον ορισμό μας για παράδειγμα, από την γωνία *b* μιας σταθερής διασταυρούμενης ευθείας, όσο μεγάλη γωνία *n* κι αν παίρνουμε. Επομένως το αξίωμα του Αρχιμήδη *δεν* ικανοποιείται και οι γωνίες των εφαπτόμενων κύκλων πρέπει να θεωρηθούν, συνεκδοχικά, ως άπειρα μικρές στην πραγματικότητα αναφορικά με τη γωνία μιας διασταυρούμενης ευθείας γραμμής. Όσον αφορά στην *κοινή (γενική) πρόσθεση* δύο τέτοιων γωνιών, αυτή θα γίνει, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό που ήδη διατυπώσαμε για τον πολλαπλασιασμό με ακέραιους αριθμούς, προσθέτοντας τις αμοιβαίες αξίες των ακτινών, οι οποίες θα χρησιμεύσουν ως μονάδες μέτρησης των άπειρα μικρών γωνιών.

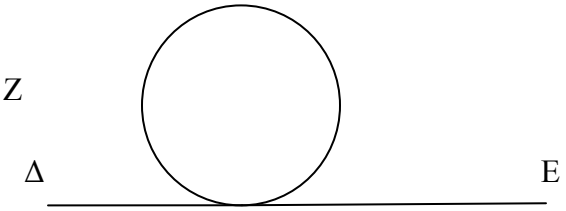
Εάν τώρα έχουμε έναν *αυθαίρετο κύκλο δια μέσω του O,* μπορούμε να θεωρήσουμε τη γωνία του ως το σύνολο της γωνίας της εφαπτομένης του με τον άξονα *χ* (υπολογισμένο με τον συνήθη τρόπο) και της δικής του άπειρα μικρής γωνίας με αυτήν την εφαπτομένη, με την έννοια που μόλις ορίσαμε. Εάν μετά κάνουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό σε αυτά τα χωριστά αθροιστικά σύνολα, θα έχουμε καθορίσει μία πλήρη μέθοδο για πράξεις με κερατοειδείς γωνίες. Όμως σε αυτόν τον τομέα το αξίωμα του Αρχιμήδη δεν ισχύει και επομένως, ίσως να εφάρμοζε κάποιος σε αυτόν τους *«λόγους»* ή τακτικούς πραγματικούς αριθμούς. Ενδεχομένως αυτό ήταν γνωστό στον Ευκλείδη (και τον Εύδοξο) και εξαίρεσε συνειδητά τέτοια συστήματα μεγεθών μέσω του αξιώματός του.

1.3.2 «Άπτεσθαι» και «εφάπτεσθαι». Δύο λέξεις με διαφορετική σημασία στον Ευκλείδη.

Σε σχόλια του Παρισινού κώδικα για τον ορισμό 2 διαβάζουμε: «Είναι διαφορετικό το «άπτεσθαι» από το «εφάπτεσθαι», αφού με τον όρο «άπτεσθαι» ο Ευκλείδης εννοούσε το τμήμα με άκρα τα Ζ,Η (σχήμα 1) ενώ με τον όρο «εφάπτεσθαι» ενοούσε την εφαπτομένη ΔΕ (σχήμα 2)



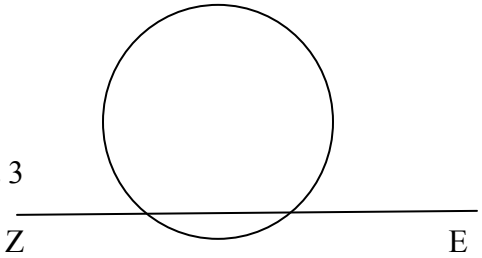
Σχήμα 1



Σχήμα 2

Τέλος ως τέμνουσα θεωρούσε τη ΖΕ» (σχήμα 3)

Σχήμα 3



Ο σχολιαστής διευκρινίζει τη διαφορά του «άπτεσθαι» και του «εφάπτεσθαι» μεταξύ της ευθείας και του κύκλου. Έτσι η ΔΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου (σχήμα 2), ενώ η ΖΗ άπτεται του κύκλου, δηλαδή έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο όμως δεν είναι εφαπτόμενη γιατί αν προεκταθούν τέμνουν τον κύκλο. Το ίδιο ισχύει και για τη ΖΕ (σχήμα 3). Στην σύγχρονη γεωμετρία ο ορισμός 2 έχει τροποποιηθεί ως εξής: *Η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου, αν και μόνο αν έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τον κύκλο.*

Ο Heath στο βιβλίο του «The thirteen books of Euclid's elements» αναφέρει ότι η φρασεολογία του Ευκλείδη δείχνει τη μόνιμη διάκριση μεταξύ του «άπτεσθαι» και του σύνθετου του «εφάπτεσθαι» όπου το μεν πρώτο σημαίνει ΄΄συναντώ΄΄(to meet) , το επόμενο το ερμηνεύει

ως ΄΄αγγίζω΄΄(to touch). Η διάκριση παρατηρήθηκε γενικά από τους Έλληνες γεωμέτρες από τον Ευκλείδη και μετά. Υπάρχουν παρόλ' αυτά εξαιρέσεις όσον αφορά στο « άπτεσθαι ». Έτσι 'άπτεσθαι' σημαίνει «αγγίζω» στον Ευκλείδη που το συναντάμε στον πέμπτο ορισμό του τέταρτου βιβλίου.

5. Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

Θα περιμέναμε εδώ να χρησιμοποιήσει τη λέξη εφάπτεσθαι αλλά ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τον όρο «άπτηται», επιβεβαιώνοντας με αυτό τον τρόπο τη δυσκολία που υπήρχε στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς να διακρίνουν τη φρασεολογία για τις δύο αυτές περιπτώσεις. Από την άλλη μεριά το «ἐφάπτεσθαι» χρησιμοποιείται από τον Αριστοτέλη σε περιπτώσεις όπου ο ορθός γεωμετρικός όρος θα ήταν «άπτεσθαι». Έτσι στα Μετεωρολογικά III 5 (375 b 9) αναφέρει ότι ο κύκλος θα περάσει δια μέσω όλων των γωνιών *(«απασών εφάψεται των γωνιών»).*

Συνεχίζοντας τα σχόλια του ο Heath, στο τέταρτο βιβλίο του Ευκλείδη και αμέσως μετά τους δυο πρώτους ορισμούς,

1. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

2. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

αναφέρει ότι αν θέλει μια αγγλική μετάφραση να είναι σαφής, πρέπει να ξεκινάει από τις ακριβείς λέξεις που χρησιμοποιούνται στα ελληνικά, όπου «κάθε πλευρά» ενός σχήματος λέγεται ότι άπτεται «κάθε γωνίας» ενός άλλου ή «κάθε γωνία» (π.χ γωνιακό σημείο) της μιας εφάπτεται (ακουμπά) σε «κάθε πλευρά» μιας άλλης.

Είναι επίσης απαραίτητο στους ορισμούς 1,2,3,5 και 6, να μεταφραστεί η ίδια ελληνική λέξη «άπτηται» με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

3. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

4. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

6. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

Παρατηρήθηκε ότι στον δεύτερο ορισμό του τρίτου βιβλίου η συνήθης έννοια του «άπτεσθαι» στον Ευκλείδη είναι «συναντώ» σε αντίθεση με το «εφάπτεσθαι» που σημαίνει «αγγίζω». Κατ' εξαίρεση, όπως στον ορισμό 5, «άπτεσθαι» σημαίνει *αγγίζω*. Αλλά εμφανίζονται δυο νέες έννοιες της λέξης, η πρώτη «άπτεται πάνω σε» όπως στους ορισμούς 1 και 3, η δεύτερη «άπτεται» όπως στους ορισμούς 2 και 6. Κάθε γωνία άπτεται μιας πλευράς ή ενός κύκλου και κάθε πλευρά ή κύκλος άπτεται μιας γωνίας ή κάθε γωνίας. Η πρώτη έννοια του «άπτεται» διευκρινίζεται στη φράση του Πάππου «*άψεται το σημεῖον θέσει δεδομένης ευθείας»* δηλαδή θα άπτεται σε ευθεία γραμμή σε δεδομένη θέση. Η έννοια του περνάει δια μέσω μοιάζει να είναι σπανιότερη (δεν τη συνάντησα στον Αρχιμήδη ή στον Πάππο) αλλά όπως υποδεικνύεται στο δεύτερο ορισμό του κεφαλαίου τρία, ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί τη σύνθετη λέξη «εφάπτεσθαι» με αυτήν την έννοια.

1.4 Σχολιασμός των προτάσεων που αφορούν την εφαπτομένη.

Οι προτάσεις III 16 έως και III 19 σχετίζονται με τις ιδιότητες των εφαπτόμενων και με τον τρόπο σχεδίασης μιας εφαπτομένης. Πιο συγκεκριμένα η πρόταση III 16 αναφέρεται στη σχεδίαση της εφαπτομένης στο άκρο μιας διαμέτρου και αποδεικνύεται η μοναδικότητα της εφαπτομένης σε αυτό το άκρο. Δηλαδή ότι μεταξύ του κύκλου και της ευθείας δεν είναι δυνατόν να παρεμβληθεί άλλη ευθεία. Στο τρίτο μέρος της πρότασης III 16 ο Ευκλείδης αναφέρεται στις μεικτές γωνίες κατά τον Πρόκλο, όπως είναι οι «γωνίες ημικυκλίου» και η «κερατοειδής γωνία». Αποδεικνύεται σε αυτό το μέρος της πρότασης ότι η γωνία με πλευρά τη διάμετρο και το ημικύκλιο είναι μεγαλύτερη από κάθε οξεία γωνία με πλευρά τη διάμετρο, ενώ η γωνία με πλευρά την εφαπτομένη και το ημικύκλιο είναι μικρότερη από κάθε ευθύγραμμη γωνία. Σε αυτό το σημείο τίθεται το ερώτημα γιατί ο Ευκλείδης κάνει λόγο για αυτές τις γωνίες και ποια η χρησιμότητα τους στην απόδειξη της πρότασης. Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο

παραπάνω ερώτημα. Στην αρχαία Ελλάδα τόσο πριν όσο και μετά την εποχή του Ευκλείδη υπήρχε μεγάλη διαμάχη σχετικά με τη φύση της «γωνίας του ημικυκλίου» και της «κερατοειδούς γωνίας». Παρόλο που αυτός ο όρος δεν απαντάται στον Ευκλείδη, χρησιμοποιείται συχνά από τον Πρόκλο και φαίνεται ότι την εποχή του Ευκλείδη επικρατούσαν αυτοί οι όροι. Έτσι ο Ευκλείδης πίστευε ότι θα ήταν αναμενόμενο από τον ίδιο μια νύξη σε αυτές τις γωνίες, σαν να ήθελε να αμυνθεί απέναντι στην εντύπωση ότι αδιαφορεί για ένα θέμα το οποίο οι γεωμέτρες του καιρού του περιέβαλαν με ενδιαφέρον.

Στην επόμενη πρόταση που αφορά στην κατασκευή εφαπτομένης από δοθέν σημείο εκτός κύκλου ο Ευκλείδης προχωράει κατευθείαν δια της μεθόδου της συνθέσεως χρησιμοποιώντας την βασική πρόταση 4 του πρώτου βιβλίου. Από την κατασκευή αυτή προκύπτει ότι από σημείο εκτός κύκλου μπορούμε να φέρουμε δυο ακριβώς εφαπτόμενες του κύκλου, οι οποίες είναι ίσες και σχηματίζουν ίσες γωνίες με την ευθεία που συνδέει το κέντρο του κύκλου με το σημείο όπως αναφέρει ο Ήρων (Heath σελίδα 44 –The thirteen books of Euclid’s elements). Προκύπτει ακόμη ότι οι δυο χορδές του εξωτερικού κύκλου που εφάπτονται στον εσωτερικό είναι ίσες. Επίσης αν δυο κύκλοι είναι ομόκεντροι και μια χορδή του μεγαλύτερου εφάπτεται στον εσωτερικό κύκλο τότε το σημείο επαφής διχοτομεί τη χορδή. Ο Ευκλείδης δεν εξετάζει την περίπτωση όπου το δοθέν σημείο ανήκει στον κύκλο, αλλά κάτι τέτοιο εξετάστηκε στην αμέσως προηγούμενη πρόταση (ΙΙΙ 16).

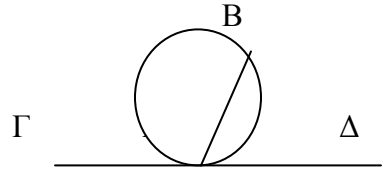
Οι δυο παρακάτω προτάσεις ΙΙΙ 18 και ΙΙΙ 19 σε πολλούς κώδικες αναφέρονται σαν αντίστροφες προτάσεις της ΙΙΙ 16. Συνολικά οι προτάσεις ΙΙΙ 16 έως ΙΙΙ 19 αποτελούν ένα κομβικό σημείο του τρίτου βιβλίου καθώς από αυτές και την ΙΙΙ 20 μπορούν να προκύψουν οι επόμενες προτάσεις του τρίτου βιβλίου. Τις προτάσεις αυτές μπορούμε να τις ενσωματώσουμε σε μια πρόταση κατά τον Heath ως εξής:

Αν ΑΒ είναι μια χορδή ενός κύκλου c και ΓΑΔ μια ευθεία τότε αν ισχύουν δυο από τις παρακάτω προτάσεις θα ισχύει και η τρίτη.

Ι) Η ΑΒ είναι κάθετη στην ΓΑΔ

ΙΙ) Η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου.

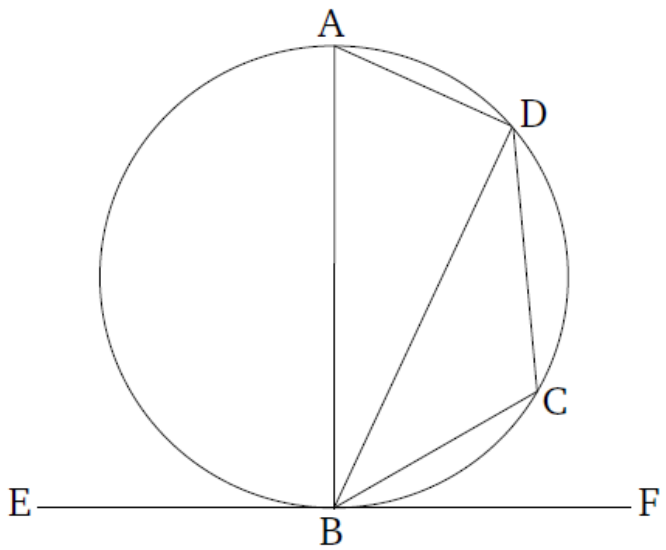
ΙΙΙ) Η ΓΑΔ είναι εφαπτομένη του κύκλου.



Η επόμενη πρόταση που εμφανίζεται η εφαπτομένη είναι η ΙΙΙ 32 όπου σχηματίζεται η γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης και είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε αυτή τη

χορδή. Αξίζει να σημειωθεί ότι ισχύει και το αντίστροφο της πρότασης ΙΙΙ 32 δηλαδή αν μια ευθεία που άγεται από το άκρο μιας χορδής ενός κύκλου σχηματίζει γωνίες ίσες με τις εγγεγραμμένες στα τόξα της χορδής, τότε η ευθεία εφάπτεται του κύκλου.

Απόδειξη



Έστω BD μια δοσμένη χορδή και EF η ευθεία που διέρχεται από το B και σχηματίζει με την BD γωνίες ίσες με τις εγγεγραμμένες που βαίνουν σε αυτό το τόξο. Φέρνουμε τη διάμετρο BA από το B και έστω C ένα σημείο του τόξου DCB που δεν περιέχει το A. Επίσης φέρνουμε τις AD, DC, CB. Από την υπόθεση η γωνία FBD είναι ίση με τη γωνία BAD και αν προσθέσουμε και στα δυο μέλη τη γωνία ABD τότε έχουμε σαν συμπέρασμα ότι η γωνία ABF είναι ίση με τη ABD και BAD. Όμως η γωνία BDA βαίνει σε ημικύκλιο άρα είναι μια ορθή γωνία, επομένως οι γωνίες που παραμένουν ABD και BAD σε άθροισμα είναι μια ορθή. Έτσι η γωνία ABF είναι και αυτή ορθή, και αφού η BA είναι διάμετρος συμπεραίνουμε από την πρόταση ΙΙΙ 16 ότι η EF εφάπτεται του κύκλου στο B.

Με την βοήθεια της πρότασης ΙΙΙ 32 μπορούμε να αποδείξουμε αρκετά σημαντικές προτάσεις που αφορούν τον κύκλο και τις εφαπτόμενες σε αυτόν όπως:

Πρόταση (Πάππου)

Αν δυο κύκλοι εφάπτονται (εσωτερικά η εξωτερικά) και μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο επαφής τέμνει τους δύο κύκλους, τα τμήματα που ορίζονται έχουν σταθερό λόγο.

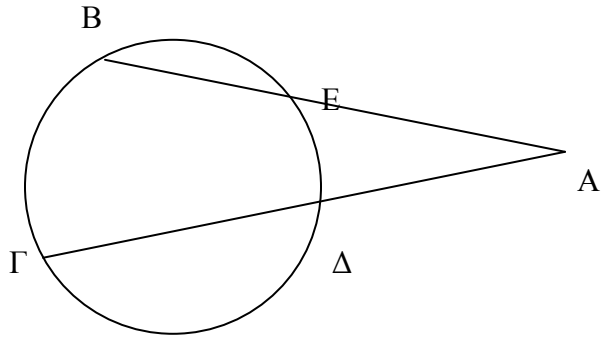
Αν δυο κύκλοι εφάπτονται (εσωτερικά η εξωτερικά) και από το σημείο επαφής Α φέρουμε τέμνουσες ΒΑΓ και ΔΑΕ, τότε η ΒΔ θα είναι παράλληλη με τη ΓΕ

Οι δυο παραπάνω προτάσεις αποδεικνύονται με τη βοήθεια της ΙΙΙ 32 και αφού πρώτα φέρουμε τη κοινή εφαπτομένη.

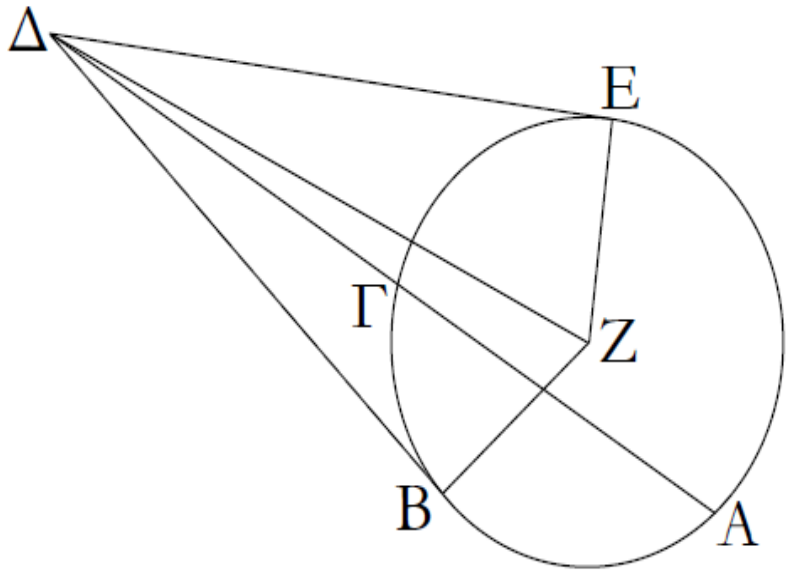
Τέλος οι δυο τελευταίες προτάσεις που αφορούν την εφαπτομένη ως μέση ανάλογο και την αντίστροφη της είναι πολύ σημαντικές και χρησίμευαν στην απόδειξη μιας σειράς προβλημάτων στη αρχαιότητα όπως στο πρόβλημα των επαφών του Απολλώνιου.

Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί δυο περιπτώσεις που τις αποδεικνύει ανεξάρτητα την μια από την άλλη : α) Όταν η τέμνουσα διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. β) Όταν η τέμνουσα δε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

Ο Heath αναφέρει σε αυτό το σημείο ότι αν Α ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου και δυο ευθείες ΑΕΒ, ΑΔΓ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ε, Β, Δ , Γ αντίστοιχα τότε το ορθογώνιο ΑΒ, ΑΕ είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο ΑΔ, ΑΓ για αυτό τον λόγο στην οριακή θέση που το Ε ταυτιστεί με το Β τότε το ορθογώνιο ΑΔ, ΑΓ θα είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο της εφαπτόμενης. Όμως ο Ευκλείδης και οι άλλοι Έλληνες γεωμέτρες δεν σκόπευαν να αποδείξουν την πρόταση ΙΙΙ 16 μέσω της γενικής απόδειξης αλλά στην οριακή περίπτωση προτίμησαν να δώσουν μια ξεχωριστή απόδειξη.



Η απόδειξη της τελευταίας πρότασης έχει το μειονέκτημα να μην κάνει γνωστό αν οι ΔΕ , ΔΒ



βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ΔΖ. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι θα πρέπει τα Β , Ε να βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ΔΖ. Ο Campanus δίνει μια άλλη απόδειξη σχεδιάζοντας την ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Ζ και τέμνει τον κύκλο στα σημεία Η και Θ. Με τη βοήθεια της πρότασης ΙΙ 6 έχουμε ότι $\Delta H \cdot \Delta \Theta + HZ^2 = \Delta Z^2$ ή $\Delta H \cdot \Delta \Theta + BZ^2 = \Delta Z^2$ ή $\Delta B^2 + BZ^2 = \Delta Z^2$ και από την πρόταση Ι 48 έπεται ότι η γωνία ΔΒΖ είναι ορθή. Άρα η προσπίπτουσα είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

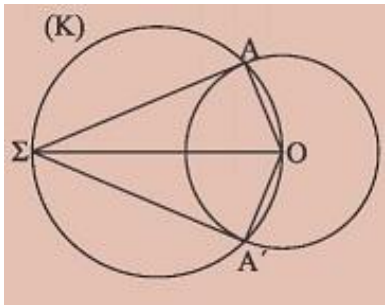
Επίσης είναι προφανής και μια απόδειξη με την απαγωγή σε άτοπο. Αν η ΔΒ δεν εφάπτεται στον κύκλο τότε θα τον τέμνει στα Η και Θ, άρα $\Delta\Gamma \cdot \Delta A = \Delta H \cdot \Delta \Theta$. Όμως $\Delta\Gamma \cdot \Delta H = \Delta B^2$ άρα $\Delta H \cdot \Delta \Theta = \Delta B^2$ που είναι άτοπο.

Τέλος παρατηρούμε ότι οι προτάσεις ΙΙΙ 36 και ΙΙΙ 37 είναι αντίστροφες. Οι προτάσεις αυτές έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον λόγω της χρησιμοποίησής τους στην απόδειξη της πρότασης IV 10 (κατασκευής ισοσκελούς τριγώνου, του οποίου η γωνία της βάσης να είναι διπλάσια από τη γωνία της κορυφής του) που έχει κομβικό ρόλο στην κατασκευή του κανονικού πενταγώνου και στη γενικότερη θεωρία της διαίρεσης τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο.

1.4.1 Σύγχρονη κατασκευή της εφαπτομένης

Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας R. Επίσης δίνεται και σημείο Σ εκτός αυτού. Να κατασκευαστεί εφαπτομένη του κύκλου η οποία να διέρχεται από το Σ.

Λύση



Ανάλυση. Ας υποθέσουμε ότι ΣΑ είναι μία εφαπτομένη του κύκλου από το Σ, όπου Α το σημείο επαφής. Φέρουμε την ακτίνα ΟΑ, οπότε η γωνία ΟΑΣ είναι ορθή και επομένως το Α είναι σημείο του γνωστού κύκλου (Κ) με διάμετρο το γνωστό τμήμα ΟΣ. Άρα το Α είναι κοινό σημείο του (Ο,R) και του (Κ). Επομένως το Α προσδιορίζεται, οπότε προσδιορίζεται και η ΣΑ.

Σύνθεση. Με διάμετρο ΟΣ γράφουμε κύκλο (Κ), ο οποίος τέμνει τον (Ο,R) στα σημεία Α και Α′. Φέρουμε τις ευθείες ΣΑ και ΣΑ′ οι οποίες είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες.

Απόδειξη. Είναι η γωνία ΟΑΣ =γωνία ΟΑ′Σ = Ορθή , ως εγγεγραμμένες στον κύκλο (Κ) οι οποίες βαίνουν σε ημικύκλια. Άρα οι ακτίνες ΟΑ και ΟΑ′ είναι κάθετες αντίστοιχα στις ΣΑ και ΣΑ′ και επομένως οι ΣΑ και ΣΑ′ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (Ο,R).

Διερεύνηση. Το πρόβλημα έχει πάντοτε δύο λύσεις, γιατί οι κύκλοι (Κ) και (Ο,R) τέμνονται αφού ο (Κ) διέρχεται από το εσωτερικό σημείο Ο και από το εξωτερικό σημείο Σ του (Ο,R).

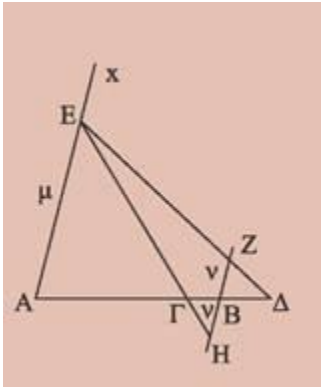
Συμπέρασμα : Από οποιοδήποτε εξωτερικό σημείο ενός κύκλου φέρονται ακριβώς δυο ευθείες εφαπτόμενες στον κύκλο.

1.4.2 Κατασκευή εφαπτομένης με τέσσερα σημεία που αποτελούν αρμονική τετράδα (συζυγή αρμονικά).

Στην παρακάτω κατασκευή θα δείξουμε πως γίνεται η διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε δοσμένο λόγο.

Κατασκευή Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, εσωτερικά και εξωτερικά , σε δοσμένο λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν γνωστά τμήματα.

Λύση



Από το Α φέρουμε μια ημιευθεία Αχ , πάνω στην οποία παίρνουμε τμήμα ΑΕ= μ. Από το Β φέρουμε ευθεία παράλληλη της Αχ και παίρνουμε πάνω σε αυτή εκατέρωθεν του Β τμήματα

ΒΖ = ΒΗ = ν. Τα σημεία Γ και Δ στα οποία οι ευθείες ΕΗ και ΕΖ τέμνουν την ευθεία ΑΒ είναι τα ζητούμενα. Πράγματι, τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΓΗΒ έχουν ανάλογες πλευρές, άρα $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{AE}{BH} = \frac{\mu}{\nu}$

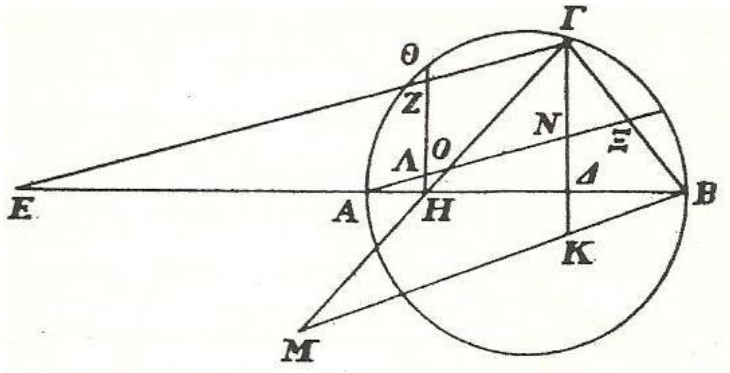
Ομοίως τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΒΖ έχουν ανάλογες πλευρές, οπότε $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{AE}{BZ} = \frac{\mu}{\nu}$.

Τα σημεία Γ και Δ , που διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά το τμήμα ΑΒ στον ίδιο λόγο, λέγονται συζυγή αρμονικά των Α και Β. Δηλαδή τα Γ και Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β, αν τα τέσσερα σημεία είναι συνευθειακά και $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$. Τα τέσσερα σημεία (Α,Β) και (Γ,Δ) λέμε ότι αποτελούν αρμονική τετράδα.

Με τη βοήθεια της παραπάνω κατασκευής θα κατασκευάσουμε την εφαπτομένη στον κύκλο, μια πρόταση που δεν υπάρχει στα στοιχεία του Ευκλείδη αλλά στα Κωνικά του Απολλώνιου και χρησιμεύει όχι μόνο για φέρουμε εφαπτόμενη στον κύκλο από σημείο εκτός αυτού, αλλά και στην έλλειψη και την υπερβολή.

Πρόταση 34 ($1^{ο}$ βιβλίο του Απολλώνιου)

Έστω ένας κύκλος διαμέτρου ΑΒ και ένα σημείο Γ πάνω στην περιφέρεια του κύκλου. Από το σημείο Γ φέρουμε την κάθετη προς τη διάμετρο ΑΒ και προσδιορίζουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε τα σημεία Ε,Α Δ, Β να αποτελούν σημεία «αρμονικής τετράδας» δηλαδή να ισχύει $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{EA}{EB}$. Τότε η ΕΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Γ.

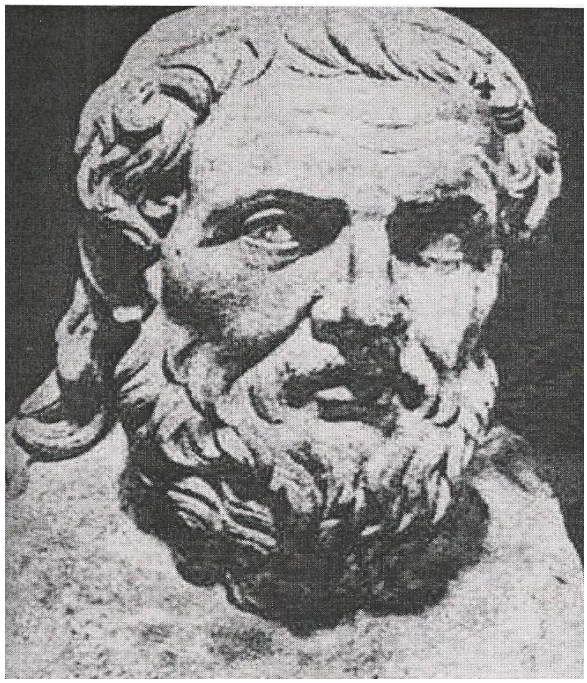


Η παραπάνω πρόταση ισχύει και για τις υπόλοιπες κωνικές τομές και η απόδειξη της θα περιγραφεί στο επόμενο κεφάλαιο που αφορά την έννοια της εφαπτομένης στα Κωνικά του Απολλώνιου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΤΟΝ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ

2.1 Λίγα λόγια για τη ζωή και το έργο του Απολλώνιου.



Η αρχαία ελληνική μαθηματική επιστήμη προσέφερε τα μέγιστα στη θεμελίωση της σύγχρονης γεωμετρίας χάρη σε τρεις σπουδαίους μαθηματικούς: τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο τον Περγαίο. Ο τελευταίος, του οποίου το έργο πάνω στις κωνικές τομές θα μας απασχολήσει στο παρόν κεφάλαιο, αποκαλείται «Μέγας Γεωμέτρης» καθώς το οκτάτομο έργο του «Κωνικά» αποτελεί το απόγειο των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Είναι δε τέτοια η πολυπλοκότητα των θεωρημάτων που αναπτύσσει εκεί, που με δυσκολία σήμερα κατανοούμε πως τα ανακάλυψε και τα απέδειξε χωρίς τους σύγχρονους αλγεβρικούς συμβολισμούς. Ο Απολλώνιος όμως υπήρξε μια πολυσχιδής επιστημονική προσωπικότητα καθώς έγινε κατ' αρχήν διάσημος για τις αστρονομικές του μελέτες αλλά συνέβαλε επίσης τα μέγιστα και στην ανάπτυξη της άλγεβρας.

Όπως λίγα είναι γνωστά για τον βίο του Ευκλείδη, έτσι και για τον Απολλώνιο γνωρίζουμε ελάχιστα. Οι περισσότερες πληροφορίες που έχουμε γι' αυτόν προέρχονται από τις

εισαγωγές των *Κωνικών*. Νεότερος κατά 25 ή 30 ίσως χρόνια του Αρχιμήδη, γεννήθηκε περίπου το 260 μΧ. (κατά άλλους μελετητές το 250 μΧ.) στην Πέργη της Παμφυλίας (μια πόλη κοντά στην Αττάλεια της Μ. Ασίας). Καταγόμενος από εύπορη οικογένεια, στάλθηκε στην Αλεξάνδρεια για σπουδές. Εκεί, κοντά στους διαδόχους και μαθητές του Ευκλείδη σπούδασε, δίδαξε και έγραψε τα έργα του. Πηγές αναφέρουν ότι επισκέφθηκε και την Πέργαμο κατόπιν πρόσκλησης του βασιλιά Αττάλου ο οποίος είχε ιδρύσει την περίφημη Βιβλιοθήκη της Περγάμου.

Ο Απολλώνιος ξεκίνησε να συγγράφει τα *Κωνικά* ενώ ήταν ακόμα πολύ νέος. Κατόπιν παρότρυνσης του φίλου του και επίσης σπουδαίου μαθηματικού Εύδημου που ήκμαζε την εποχή εκείνη στην Πέργαμο, επεξεργάστηκε εκ νέου το αρχικό κείμενο και το επανέκδωσε με βελτιώσεις. Το έργο αυτό αποτελεί το απόγειο των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών καθώς προκαλεί τον θαυμασμό με την πολυπλοκότητα και την συνθετότητα των θεωρημάτων του. Πρόκειται για μία πραγματεία όπου ο Απολλώνιος προτείνει την γονιμότερη –μέχρι σήμερα- μέθοδο μελέτης των τομών του κώνου. Αποτελείται από οκτώ βιβλία εκ των οποίων σήμερα σώζονται τα επτά : τα τρία πρώτα αποτελούν το πρωτότυπο κείμενο ενώ τα υπόλοιπα τέσσερα διασώζονται χάρις σε αραβικές μεταφράσεις.

Ο Απολλώνιος όμως ασχολήθηκε και με την επίλυση άλλων θεμάτων όπως το *Δήλιο πρόβλημα* το οποίο και έλυσε και εισήγαγε για πρώτη φορά όρους όπως *έλλειψη, υπερβολή* και *παραβολή*. Επίσης η προσφορά του στην ελληνική μαθηματική αστρονομία είναι καταλυτική, αφού εισήγαγε γεωμετρικά μοντέλα τροχιών για να εξηγήσει τις ιδιόμορφες φαινόμενες κινήσεις των πλανητών στην ουράνια σφαίρα. Τέλος άσκησε κριτική και πρότεινε βελτιώσεις στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και σε πλήθος άλλων μελετών γι' αυτό και απολάμβανε τον θαυμασμό των σύγχρονών του επιστημόνων. Αν και ο Πάππος –χωρίς να αμφισβητεί την αξία του έργου του- τον αναφέρει ως «ματαιόδοξο και υπεροπτικό», ο Απολλώνιος αποτελεί αναμφίβολα έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών μαζί με τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη σε τέτοια κλίμακα ώστε ο Leibniz να θεωρεί ότι *«εκείνος που κατανοεί τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο θαυμάζει λιγότερο τις επινοήσεις των νεωτέρων μεγάλων ανδρών»*.

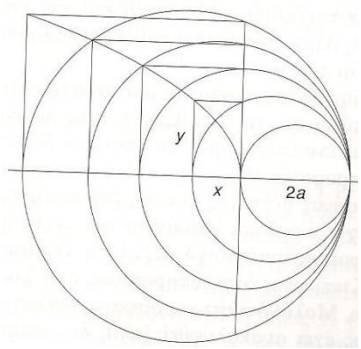
2.2 Οι κωνικές τομές πριν τον Απολλώνιο.

2.2.1 Οι απαρχές της θεωρίας των κωνικών τομών.

Ιπποκράτης – Μέναιχμος.

Τα τρια σημαντικότερα προβλήματα της αρχαιότητας ήταν ο διπλασιασμός του κύβου, η τριχοτόμηση της γωνίας και ο τετραγωνισμός του κύκλου. Το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου ή διαφορετικά το « Το Δήλιο πρόβλημα» ενδεχομένως να συνδέεται με τις απαρχές της θεωρίας των κωνικών τομών. Τον πέμπτο αιώνα π.χ.,ο Ιπποκράτης ο Χίος ανήγαγε το πρόβλημα της κατασκευής ενός κύβου με όγκο διπλάσιο από τον όγκο ενός δοθέντος κύβου ακμής α στην εύρεση δυο μέσων αναλόγων χ , y μεταξύ των μηκών α και 2α, δηλαδή στον προσδιορισμό των χ , y που ικανοποιούν τις $\frac{\alpha}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} = \frac{y}{2\alpha}$. Σε σύγχρονη ορολογία αυτό ισοδυναμεί με την ταυτόχρονη επίλυση δυο εκ των τριών εξισώσεων $\chi^2 = \alpha \cdot y$, $y^2=2\alpha\chi$, $\chi \cdot y=2\alpha^2$, οι δυο πρώτες από τις οποίες αναπαριστούν παραβολές και η τρίτη υπερβολή.Παρόλο που το πρόβλημα κατασκευής μιας μέσης αναλόγου μεταξύ δυο τμημάτων γνωστών λύνεται εύκολα με κανόνα και διαβήτη και μάλιστα η λύση του αποτελεί την ΙΙ 11 πρόταση των Στοιχείων του Ευκλείδη, εντούτις η κατασκευή δυο μέσων αναλόγων με τα συγκεκριμένα μέσα αποδείχθηκε αδύνατη αφού απαιτείται να χρησιμοποιηθούν καμπύλες διαφορετικές από ευθεία και κύκλο.

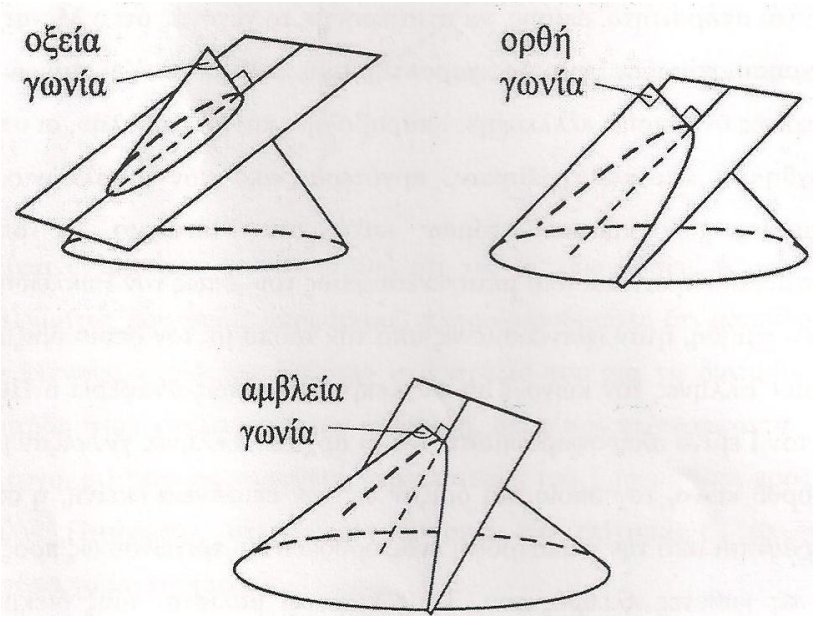
Ο Μέναιχμος (τέταρτος αιώνας π.χ.) ήταν ο πρώτος που κατασκεύασε καμπύλες οι οποίες ικανοποιούν αυτές τις αλγεβρικές ιδιότητες δείχνοντας ότι το σημείο τομής αυτών των καμπυλών δίνει τους δυο ζητούμενους μέσους και έλυσε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου. Ο Katz αναφέρει ότι δεν είναι γνωστό πως ο Μέναιχμος κατασκεύασε τις καμπύλες, αλλά η σημείο προς σημείο κατασκευή τους ήταν σίγουρα δυνατή μέσω ευκλείδειων μεθόδων. Για να κατασκευάσουμε τα σημεία μιας καμπύλης που ικανοποιεί την $y^2=2\alpha\chi$, αρκεί να επαναλάβουμε τη μέθοδο των *Στοιχείων* VI 13 πρόταση.



Ορίζουμε διαδοχικά τμήματα μήκους 2α και χ σε μια ευθεία. Κατόπιν, γράφουμε ένα ημικύκλιο με διάμετρο αυτό το ευθύγραμμο τμήμα και φέρνουμε την κάθετο στο σημείο επαφής των δυο ευθυγράμμων τμημάτων. Το μήκος της καθέτου από την περιφέρεια του κύκλου ως το σημείο επαφής είναι το μήκος y που ικανοποιεί την εξίσωση. Όταν αυτό γίνει για διάφορα μήκη χ και τα άνω άκρα των καθέτων ενωθούν μεταξύ τους, προκύπτει η ζητούμενη καμπύλη. Αν και κάθε σημείο της καμπύλης αυτής έχει κατασκευαστεί μέσω ευκλειδείων μεθόδων, ολόκληρη η καμπύλη δεν αποτελεί γνήσια κατασκευή υπό την ευκλείδεια έννοια. Σε κάθε περίπτωση, φαίνεται ότι οι κωνικές τομές εισήχθησαν ως εργαλεία για την επίλυση ορισμένων γεωμετρικών προβλήματων.

2.2.2 Ορισμός των Κωνικών σύμφωνα με τον Ευκλείδη

Έως το τέλος του τέταρτου αιώνα υπήρχαν ήδη δυο εκτενείς μελέτες για τις ιδιότητες των καμπυλών που παράγονται ως κωνικές τομές, η μια του Αρισταίου και η άλλη του Ευκλείδη. Ο τελευταίος όρισε στο βιβλίο XI των *Στοιχείων* ως κώνο το στερεό που παράγεται από την περιστροφή ενός ορθογώνιου τριγώνου ως προς μια από τις κάθετες πλευρές του. Κατόπιν ταξινομεί τους κώνους ανάλογα με την γωνία της κορυφής τους, σε ορθογώνιους, αμβλυγώνιους, και οξυγώνιους. Από το κάθε είδος κώνου παρήγαγαν ένα μόνο είδος κωνικής τομής η οποία σχηματίζεται όταν τμήσουμε τον κώνο κάθετα με ένα επίπεδο στη γενέτειρα, δηλαδή στην γενέτειρα του ορθογωνίου τριγώνου. Έτσι προκύπτουν οι τρεις κωνικές τομές : ορθογωνίου κώνου τομή (παραβολή), οξυγωνίου κώνου τομή (έλλειψη), αμβλυγωνίου κώνου τομή (υπερβολή).



2.3 Τα Κωνικά του Απολλώνιου - Ονομασία των κωνικών τομών.

Ο Απολλώνιος ήταν ο πρώτος που έδειξε συστηματικά ότι δεν είναι αναγκαίο να θεωρήσουμε τομές κάθετες προς ένα στοιχείο του κώνου και ότι από ένα μόνο κώνο μπορούμε να πάρουμε και τα τρία είδη κωνικών τομών μεταβάλλοντας την κλίση του τέμνοντος επιπέδου. Η τελευταία αυτή παρατήρηση ήταν ένα σημαντικό βήμα στη σύγκριση και σύνδεση των τριών ειδών κωνικών τομών. Μια δεύτερη σημαντική γενίκευση του Απολλώνιου ήταν ότι έδειξε ότι ο κώνος δεν χρειαζόταν να είναι ορθός δηλαδή, δεν ήταν αναγκαίο ο άξονας του να είναι κάθετος στην κυκλική του βάση αλλά μπορούσε κάλλιστα να είναι ένας κεκλιμένος ή σκαληνός κώνος. Ο Boyer αναφέρει ότι αν ο σχολιαστής των *Κωνικών*, ο Ευτόκιος, ήταν καλά πληροφορημένος μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο Απολλώνιος ήταν ο πρώτος γεωμέτρης που έδειξε ότι οι ιδιότητες αυτών των καμπυλών είναι ίδιες ανεξάρτητα από το αν προέρχονται από πλάγιους ή ορθούς κώνους. Τέλος, ο Απολλώνιος έφερε τις αρχαίες καμπύλες πιο κοντά στη σύγχρονη αντίληψη αυτών αντικαθιστώντας το μονό κώνο με το διπλό κώνο και έδωσε τον ίδιο ορισμό του κώνου που χρησιμοποιούμε και σήμερα: *«Θεωρούμε μια ευθεία η οποία διέρχεται από ένα σταθερό σημείο. Αν αυτή η ευθεία κινηθεί επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου, ο οποίος δεν βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το σημείο, έτσι ώστε να διέρχεται από κάθε σημείο της περιφέρειας του κύκλου, τότε η κινούμενη ευθεία θα σχηματίσει την επιφάνεια ενός διπλού κώνου».* Αυτή η

αλλαγή έκανε την υπερβολή, την καμπύλη με τους δυο κλάδους που γνωρίζουμε σήμερα που είναι ΄΄δυο τμήματα΄΄ μιας υπερβολής.

Για εκατόν πενήντα χρόνια οι καμπύλες αυτές είχαν συνηθισμένες ονομασίες που περέπεμπαν στον τρόπο ανακάλυψης τους, όπως προαναφέραμε. Ο Αρχιμήδης συνέχισε να χρησιμοποιεί αυτές τις ονομασίες αλλά ο Απολλώνιος ήταν αυτός που εισήγαγε τους όρους «έλλειψη»,«υπερβολή» και «παραβολή».Οι λέξεις αυτές δεν χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά στην περίπτωση αυτή, προσαρμόστηκαν από κάποια παλαιότερη χρήση τους, ίσως από τους Πυθαγόρειους που τις χρησιμοποίησαν στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με την εφαρμογή των εμβαδών. Η «έλλειψη» που δηλώνει κάποιο έλλειμα χρησιμοποιήθηκε για την περίπτωση όπου ένα ορθογώνιο δεδομένου εμβαδού, εφαρμοζόταν επάνω σε ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα και ήταν μικρότερο κατά ένα τετράγωνο ενώ η λέξη «υπερβολή» χρησιμοποιήθηκε στην περίπτωση που το ορθογώνιο ήταν μεγαλύτερο από το ευθύγραμμο τμήμα. Για την λέξη «παραβολή» που δηλώνει σύγκριση δεν αναφέρεται ούτε σε έλλειμα ούτε σε πλεόνασμα. Στην επόμενη παράγραφο που θα μελετήσουμε τις τρεις κωνικές τομές όσον αφορά τον ορισμό και τα συμπτώματα θα διαπιστώσουμε τις ιδιότητες των τριων καμπυλών, που εκφράζονται επακριβώς στη γλώσσα της πυθαγόρειας παραβολής χωρίων και οι καμπύλες καλούνται αντίστοιχα *παραβολή* όπου το ορθογώνιο παραβάλλεται επακριβώς, *υπερβολή* όπου το ορθογώνιο υπερέχει και *έλλειψις* όπου το ορθογώνιο υπολείπεται.

2.4 Η κοινή μορφή των «συμπτωμάτων» των κωνικών τομών κατά τον Απολλώνιο.

2.4.1 Κατασκευή και σύμπτωμα της παραβολής.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ᾖ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας, ἣ λόγον ἔχει πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τοῦ κώνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ π α ρ α β ο λ ή.

Η μετάφραση είναι από το βιβλίο *Απολλωνίου Κωνικά* του Ευάγγελου Σταμάτη (σελ. 231).

Αν ένα επίπεδο τμήσει έναν κώνο περνώντας από τον άξονα του, και ο ίδιος κώνος τμηθεί από ένα άλλο επίπεδο το οποίο τέμνει τη βάση του κώνου κατά μια ευθεία κάθετη προς τη βάση του τριγώνου που διέρχεται από τον άξονα και η διάμετρος της τομής είναι παράλληλη προς μια πλευρά του τριγώνου που περνά από τον άξονα, τότε το τετράγωνο της ευθείας που άγεται από την τομή του κώνου μέχρι την διάμετρο και είναι παράλληλη προς τη κοινή τομή του επιπέδου που τέμνει τον κώνο και τη βάση του κώνου είναι ίσο προς το ορθογώνιο, του οποίου μια πλευρά είναι η απόσταση (της αγόμενης ευθείας) από τη διάμετρο μέχρι την κορυφή της τομής, η άλλη δε πλευρά έχει λόγο προς την απόσταση μεταξύ της κορυφής του κώνου και την κορυφή της τομής, ίσο προς το λόγο του τετραγώνου της βάσης του δια του άξονος τριγώνου προς το ορθογώνιο που έχει πλευρές τις άλλες δυο πλευρές του αξονικού τριγώνου, και καλείται αυτή η τομή ***παραβολή***.

Έστω κώνος, του οποίου η κορυφή είναι το σημείο Α, βάση ο κύκλος ΒΓ και ας τμηθεί από ένα επίπεδο δια του άξονα και ας σχηματίσει τομή το τρίγωνο ΑΒΓ, ας τμηθεί και από άλλο επίπεδο τέμνοντας τη βάση του κώνου κατά την ευθεία ΔΕ η οποία είναι κάθετη επί της ΒΓ, και σχηματίζει τομήν στην επιφάνεια του κώνου την ΔΖΕ, η διάμετρος της τομής η ΖΗ είναι παράλληλη προς μια γενέτειρα του κώνου, έστω την ΑΓ, και από το σημείο Ζ άγεται κάθετη προς τη ΖΗ έστω η ΖΘ έτσι ώστε $\frac{\text{ΒΓ}^2}{\text{ΒΑ}\cdot\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΖΘ}}{\text{ΖΑ}}$ και παίρνουμε τυχαίο σημείο Κ επι της τομής και από το Κ άγεται προς την ΔΕ παράλληλος η ΚΛ. Τότε $\text{ΚΛ}^2 = \text{ΘΖ}\cdot\text{ΖΛ}$. Το σταθερό ΖΘ λέγεται παράμετρος της παραβολής.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι από το βιβλίο του Σταμάτη *Απολλωνίου Κωνικά* σελίδα 233 αλλά σε σύγχρονη αλγεβρική γλώσσα.

Από το σημείο Λ φέρνω παράλληλη στην ΒΓ που τέμνει τις γενέτειρες ΑΒ , ΑΓ στα σημεία Μ,Ν. Αφού από το Κ άγεται παράλληλος προς τη ΔΕ έχουμε ΚΛ παράλληλο προς τη ΔΕ και =ΒΓ , συνεπώς το επίπεδο ΚΛ,ΜΝ είναι κύκλος με διάμετρο ΜΝ.Επομένως ΚΛ είναι κάθετος στη ΜΝ και άρα $\text{ΚΛ}^2 = \text{ΛΜ}\cdot\text{ΛΝ}$.

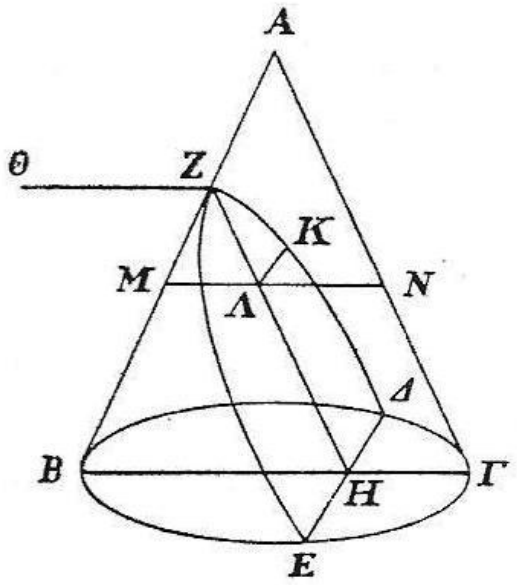
Επειδή $\frac{\text{ΒΓ}^2}{\text{ΒΑ}\cdot\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΖΘ}}{\text{ΖΑ}}$ έχουμε $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΑ}}\cdot\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΑ}} = \frac{\text{ΘΖ}}{\text{ΖΑ}}$ **(1)**

Όμως από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΜΝ και ΜΛΖ έχουμε τις εξής αναλογίες:

$\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΜΝ}}{\text{ΝΑ}} = \frac{\text{ΜΛ}}{\text{ΛΖ}}$ **(2)** $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΜΝ}}{\text{ΜΑ}} = \frac{\text{ΜΛ}}{\text{ΜΖ}} = \frac{\text{ΛΝ}}{\text{ΖΑ}}$ **(3)**

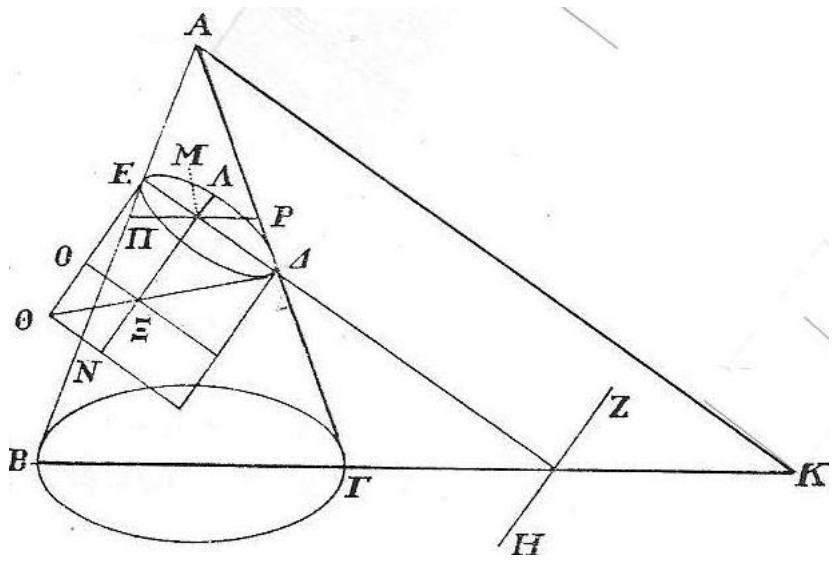
Η σχέση (1)μέσω των (2) και (3) γίνεται:$\frac{\text{ΘΖ}}{\text{ΖΑ}} = \frac{\text{ΜΛ}}{\text{ΛΖ}}\cdot\frac{\text{ΛΝ}}{\text{ΖΑ}} \Rightarrow \frac{\text{ΘΖ}}{\text{ΖΑ}}\cdot\frac{\text{ΖΛ}}{\text{ΖΛ}} = \frac{\text{ΜΛ}}{\text{ΛΖ}}\cdot\frac{\text{ΛΝ}}{\text{ΖΑ}} \Rightarrow$ ΘΖ· ΖΛ=ΜΛ· ΛΝ άρα $\text{ΚΛ}^2 = \text{ΘΖ}\cdot\text{ΖΛ}$. Το παραπάνω σύμπτωμα χαρακτηρίζει την κωνική τομή που θα την ονομάζουμε **παραβολή** και η ΘΖ η οποία είναι εκείνη που ρυθμίζει το τετράγωνο των αγομένων επι τη διάμετρο τεταγμένων λέγεται ορθία (κάθετος,παράμετρος).

Η παραπάνω σχέση μεταξύ εμβαδών τετραγώνου και ορθογωνίου είναι η σημερινή μορφή της εξίσωσης της παραβολής, $y^2 = \mathrm{p} \cdot \mathrm{x}$.



2.4.2 Το «σύμπτωμα» της έλλειψης κατά τον Απολλώνιο.

Η έλλειψη ορίστηκε από τον Απολλώνιο ως τομή της επιφάνειας ενός τυχόντος κυκλικού κώνου μ' ένα επίπεδο που τέμνει όλες τις « γενέτειρες » του.

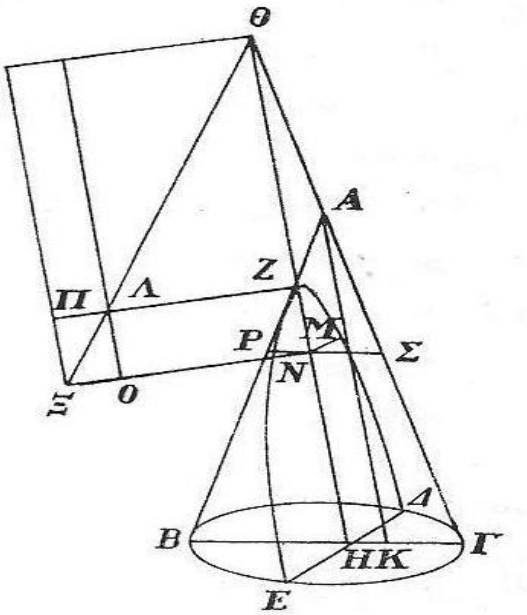


Το σύμπτωμα προκύπτει με μια διαδικασία ανάλογη με την προηγούμενη. Η ΑΚ είναι παράλληλη ΕΔ και το Κ θα έχει το ρόλο του Γ στην προηγούμενη απόδειξη. Κατ' αναλογία με την απόδειξη του συμπτώματος της παραβολής η ΖΗ είναι κάθετος στην ΒΓ, η ΕΔ είναι διάμετρος της κωνικής, η ΕΘ είναι κάθετη στην ΕΔ, και $\frac{\mathrm{AK}^2}{\mathrm{BK}\cdot\mathrm{K\Gamma}} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{E\Theta}}$ και ΛΜ παράλληλη με ΜΖ τότε $\Lambda\mathrm{M}^2 = \mathrm{EM}\cdot\Xi\mathrm{M}$. Η ΕΘ καλείται ορθία (παράμετρος) η δε ΕΔ καλείται πλαγία.

2.4.3 Το «σύμπτωμα» της υπερβολής κατά τον Απολλώνιο.

Ο Απολλώνιος θεωρούσε ως άξονα ενός κυκλικού κώνου την ευθεία που ενώνει την κορυφή του με το κέντρο της βάσης του και όριζε την υπερβολή ως τομή της επιφάνειας ενός κυκλικού κώνου μ' ένα επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα του. Συνέπεια του ορισμού είναι η εξής ιδιαιτερότητα της υπερβολής: το επίπεδο κόβει και το συμμετρικό ως προς την κορυφή κώνο, δημιουργώντας το δεύτερο κλάδο της υπερβολής, όπως τη σχεδιάζουμε σήμερα.

Το «σύμπτωμα» της υπερβολής κατά τον Απολλώνιο προκύπτει με μια διαδικασία ανάλογη με τις προηγούμενες.



Η ΔΕ είναι κάθετη με τη ΒΓ, η διάμετρος ΖΗ δεν είναι παράλληλος με τη ΑΓ αλλά φέρνουμε την ΑΚ παράλληλο με τη ΖΗ και ΖΛ κάθετη στη ΖΗ έτσι ώστε $\frac{\text{ΚΑ}^2}{\text{ΒΚ ΚΓ}} = \frac{\text{ΖΘ}}{\text{ΖΛ}}$, αν Μ τυχαίο σημείο της τομής με ΜΝ παράλληλο της ΔΕ και ΝΟΞ παράλληλο της ΖΛ τότε ισχύει ότι $\text{ΜΝ}^2 = \text{ΖΝ} \cdot \text{ΞΝ}$. Η ΖΛ καλείται παράμετρος (ορθία) της υπερβολής ενώ η ΖΘ πλαγία.

2.5 Ορισμός της εφαπτομένης στις Κωνικές τομές

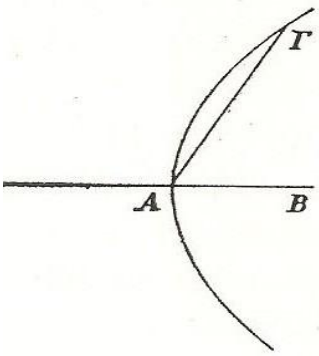
Στο πρώτο βιβλίο και στις προτάσεις 17-19, 22-29, και 31-40 οι οποίες περιέχουν τις ιδιότητες των εφαπτόμενων, ο Απολλώνιος αποδεικνύει με επιχειρηματολογία ακριβώς ίδια με του Ευκλείδη στην πρόταση III 16 για τον κύκλο, ότι αν μια ευθεία αχθεί από την κορυφή (δηλαδή από το άκρο της διαμέτρου αναφοράς) παράλληλα προς τις τεταγμένες στη διάμετρο, θα καταλήξει στο εξωτερικό της κωνικής τομής και καμία άλλη ευθεία δε μπορεί να υπάρξει μεταξύ αυτής την οποία προαναφέραμε και της κωνικής τομής.

2.5.1 Προτάσεις που αφορούν την εφαπτομένη στην παραβολή

Πρόταση 17 - α βιβλίο

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γραμμῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

ἔστω κώνου τομή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς, τουτέστι τοῦ Α σημείου, παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.



εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν κώνου τομῇ εἴληπται τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμβαλεῖ τῇ ΑΒ διαμέτρῳ καὶ δίχα τμηθήσεται ὑπ' αὐτῆς. ἡ ΑΓ ἄρα ἐκβαλλομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΑΒ· ὅπερ ἄτοπον· ἐκβαλλομένη γὰρ ἡ ΑΓ ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς γραμμῆς· ἐκτὸς ἄρα πεσεῖται· διόπερ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Η ευθεία που άγεται από την κορυφή παράλληλα προς την τεταγμένως κατηγμένη θα πέσει εκτός της τομής.

Απόδειξη

Διότι αν δεν πέσει εκτός της κωνικής τομής και είναι δυνατόν να πέσει εντός όπως η ΑΓ τότε θα συμβαίνουν τα εξής: επειδή στην κωνική τομή ελήφθη τυχαίο σημείο το Γ άρα από το Γ η εντός της τομής αγόμενη παράλληλος προς τεταγμένως κατηγμένη θα συναντήσει τη διάμετρο ΑΒ και θα τμηθεί από αυτή στο μέσο (από πρόταση 7-βιβλίο α΄). Η ΑΓ προεκτεινόμενη θα τμηθεί στο μέσο από την ΑΒ το οποίο είναι αδύνατο διότι η ΑΓ προεκτεινόμενη πέφτει εκτός της τομής. Άρα δεν θα πέσει η παράλληλος από το Α εντός της κωνικής τομής, θα πέσει εκτός, κατά συνέπεια θα είναι εφαπτομένη της παραβολής.

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε την ομοιότητα της πρότασης του Απολλώνιου για την εφαπτομένη στις κωνικές τομές με την πρόταση του Ευκλείδη ΙΙΙ 16 και ειδικότερα με το πρώτο τμήμα της πρότασης («*Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου*»). Αντίθετα, με την πρόταση που ακολουθεί, αποδεικνύει την μοναδικότητα της εφαπτομένης στον τόπο μεταξύ της εφαπτομένης και της κωνικής τομής.

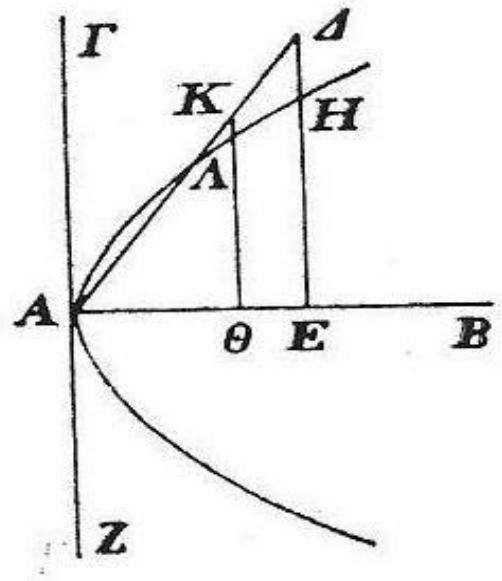
Πρόταση 32 – α βιβλίο

Ἐὰν διὰ τῆς κορυφῆς τομῆς κώνου ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τεταγμένως κατηγμένην, αὕτη ἐφάπτεται τῆς τομῆς, τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε κώνου τομῆς καὶ τῆς εὐθείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Έστω παραβολή η συγκεκριμένη κωνική της οποίας διάμετρος είναι η ΑΒ, και από το Α άγεται τεταγμένη παράλληλος η ΑΓ. Ότι η παράλληλος πέφτει εκτός της τομής έχει αποδειχθεί στην πρόταση 17.Θα δείξουμε σε αυτή την πρόταση ότι στον τόπο μεταξύ της ευθείας και της κωνικής τομής δεν θα παρεμβληθεί άλλη ευθεία.

Απόδειξη

Έστω ότι παρεμβάλλεται η ΑΔ. Ας πάρουμε τυχαίο σημείο πάνω σε αυτή το Δ και ας φέρουμε την τεταγμένη ΔΕ και έστω παράμετρος η ΑΖ.



Επειδή $\frac{\Delta E^2}{EA^2} > \frac{HE^2}{EA^2}$ από την πρόταση V 8 του Ευκλείδη

και $HE^2 = ZA \cdot AE$ από την πρόταση 11 άρα η πρώτη πρόταση γράφεται $\frac{\Delta E^2}{EA^2} > \frac{ZA \cdot AE}{EA^2} \Rightarrow$ $\frac{\Delta E^2}{EA^2} > \frac{ZA}{EA}$.

Ας γίνει τώρα ως $\frac{\Delta E^2}{EA^2} = \frac{ZA}{A\Theta}$ και από το Θ άγουμε παράλληλο προς την ΕΔ έστω την ΘΛΚ.

Επειδή είναι $\frac{\Delta E^2}{EA^2} = \frac{ZA}{A\Theta} = \frac{ZA \cdot A\Theta}{A\Theta^2}$ (1)

Επίσης και $\frac{\Delta E^2}{EA^2} = \frac{K\Theta^2}{\Theta A^2}$ (2) και $\Theta\Lambda^2 = ZA\,A\Theta$ (πρόταση 11)

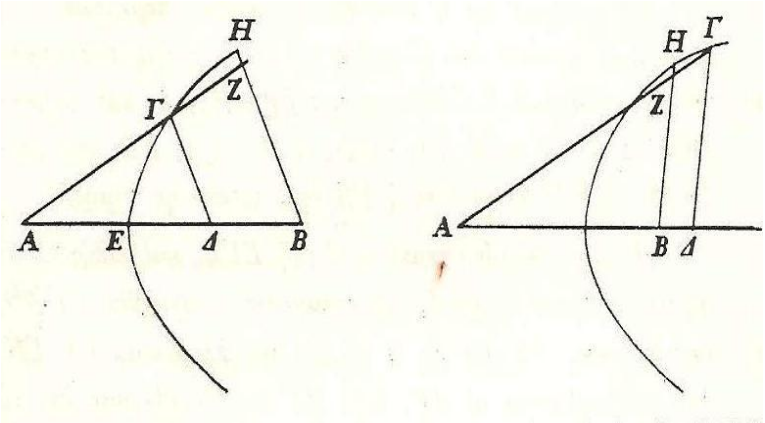
Από τις (1) και (2) μέσω της πρότασης 11έχουμε $\frac{\Lambda\Theta^2}{\Theta A^2} = \frac{K\Theta^2}{\Theta A^2}$ άρα ΚΘ=ΛΘ που είναι άτοπο.

Άρα δεν θα παρεμβληθεί στον τόπο μεταξύ της ευθείας ΑΓ και της κωνικής τομής άλλη ευθεία.

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί έναν τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης σ' ένα σημείο της παραβολής.

Πρόταση 33 – α βιβλίο

«Εάν εν παραβολή ληφθή τι σημείον, και απ' αυτού τεταγμένως επί την διάμετρον καταχθή, και τη απολαμβανομένη υπ' αυτής από της διάμετρου προς τη κορυφή τέθη ίση απευθείας απ' άκρας αυτής, η από του γενομένου σημείου επί το ληφθέν σημείον επιζευγνυμένη εφάψεται της τομής.»



Έστω η παραβολή της οποίας διάμετρος είναι η ΑΒ και ας καταχθή τεταγμένως η ΓΔ και στην προέκταση της ΕΔ παίρνουμε ίσο τμήμα με αυτήν, έστω το ΑΕ. Ενώνουμε το Α με το Γ και προεκτεινόμενη η ΑΓ θα πέσει εκτός της τομής άρα θα εφάπτεται αυτής.

Έστω προεκτεινόμενη ότι θα πέσει εντός όπως η ΓΖ και ας φέρουμε την τεταγμένη ΗΒ .

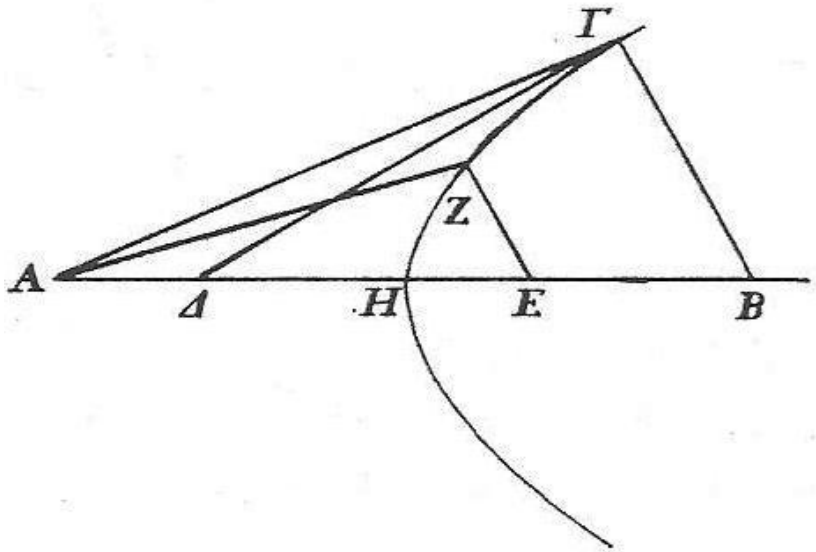
Επειδή $\frac{BH^2}{\Gamma\Delta^2} > \frac{ZB^2}{\Gamma\Delta^2}$ (V 8 – Ευκλείδης) (1) και από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΖΒ και ΑΔΓ έχουμε $\frac{BA^2}{A\Delta^2} = \frac{ZB^2}{\Gamma\Delta^2}$ (VI 4 – Ευκλείδης) (2) Επίσης από την πρόταση 20 στο πρώτο βιβλίο του Απολλώνιου ισχύει ότι $\frac{HB^2}{\Gamma\Delta^2} = \frac{BE}{\Delta E}$ (3). Άρα η (1) μέσω της (3) γίνεται $\frac{BE}{\Delta E} > \frac{ZB^2}{\Gamma\Delta^2} \overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\frac{4BE\cdot EA}{4AE\cdot E\Delta} > \frac{AB^2}{A\Delta^2}$ άρα $\frac{4BE\cdot EA}{AB^2} > \frac{4AE\cdot E\Delta}{A\Delta^2}$ το οποίο είναι άτοπο διότι ΑΕ=ΕΔ και $4AE\cdot E\Delta = A\Delta^2$ και $4BE\ EA < BA^2$ διότι το σημείο Ε δεν είναι το μέσο της ΑΒ. Έτσι η ΑΓ δεν θα πέσει εντός της τομής άρα εφάπτεται.

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί την αντίστροφη της πρότασης 33 – α βιβλίου.

Πρόταση 35 – α βιβλίο

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εὐθεῖα ἀχθεῖσα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον ἴσην ἀπολήψεται ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς τῇ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Αν μια ευθεία εφάπτεται σε παραβολή και συναντήσει την διάμετρο έξω από την κωνική τομή, η τεταγμένη που άγεται από το σημείο επαφής προς τη διάμετρο θα αποκόψει από τη διάμετρο και ως την κορυφή μια ευθεία ίση με την ευθεία που βρίσκεται μεταξύ της κορυφής και της εφαπτομένης, και στην περιοχή ανάμεσα στην εφαπτομένη και στην τομή δεν θα παρεμβάλλεται καμία ευθεία.



Έστω παραβολή της οποίας διάμετρος είναι η ΑΒ και ας αναχθεί τεταγμένως η ΒΓ και έστω εφαπτομένη της τομής η ΑΓ. Τότε θα ισχύει ότι ΑΗ = ΗΒ.

Έστω ότι δεν είναι ίσες αλλά άνισες και έστω ότι υπάρχει σημείο Ε ώστε ΑΗ = ΗΕ: φέρουμε την τεταγμένη ΕΖ και ενώνουμε την Α με την Ζ. Άρα η ΑΖ προεκτεινόμενη θα συναντήσει την ευθεία ΑΓ από την πρόταση 33 του α βιβλίου που είναι άτοπο διότι θα υπάρχουν δυο ευθείες μετά ίδια πέρατα (Ευκλείδη - κοινές έννοιες 9). Άρα δεν είναι άνισος η ΑΗ προς τη ΗΒ, άρα είναι ίσες.

Στην περιοχή μεταξύ της ευθείας ΑΓ και της τομής καμία ευθεία δεν θα παρεμβληθεί. Διότι έστω ότι παρεμβάλλεται η ΓΔ, και έστω ΗΔ = ΗΕ και ανυψώνουμε τεταγμένως την ΕΖ. Άρα η ευθεία που συνδέει το Δ με το Ζ εφάπτεται στην τομή άρα αν προεκταθεί, θα πέσει εκτός της τομής. Επομένως θα συναντήσει την ευθεία ΔΓ και θα υπάρχουν δυο ευθείες που θα έχουν τα ίδια πέρατα, πράγμα που είναι αδύνατο. Άρα στην περιοχή μεταξύ της τομής και της ευθείας δεν θα παρεμβληθεί καμία άλλη ευθεία.

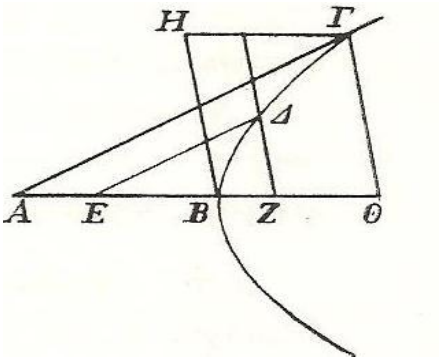
Πρόταση 42 – α βιβλίο

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εὐθεῖα καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ληφθέντος δέ τινος ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένην, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ παραλληλογράμμῳ ὑπό τε τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατημένης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

Η απόδοση της πρότασης και η απόδειξη σε σύγχρονη νεοελληνική γλώσσα από το βιβλίο (Απολλώνιου Κωνικά – Σταμάτη Ευάγγελου).

Έστω η παραβολή, της οποίας διάμετρος είναι η ΑΒ και φέρουμε την εφαπτομένη της παραβολής ΑΓ και την τεταγμένη ΓΘ. Από τυχαίο σημείο Δ της παραβολής φέρουμε τη τεταγμένη ΔΖ και από το Δ φέρουμε παράλληλο προς την ΑΓ έστω ΔΕ. Από το Γ φέρνουμε

παράλληλο προς τη ΒΖ και από το Β παράλληλο προς τη ΘΓ οι οποίες τέμνονται στο Η. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι ίσο προς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΗΖ.



Επειδή η ΑΓ εφάπτεται της τομής και φέρουμε την τεταγμένη ΓΘ θα έχουμε από την πρόταση 35 ότι ΑΒ = ΒΘ άρα ΑΘ = 2ΘΒ.Το τρίγωνο ΑΘΓ είναι ισεμβαδικό με το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΗ από την πρόταση του Ευκλείδη Ι 41.

Επειδή από την πρόταση 20 του Απολλώνιου είναι $\frac{\Gamma\Theta^2}{\Delta Z^2} = \frac{\Theta B}{BZ}$ **(1)** αλλά και

από την πρόταση VI 19 του Ευκλείδη έχουμε: $\frac{\Gamma\Theta^2}{\Delta Z^2} = \frac{\text{εμβαδον τριγώνου ΑΓΘ}}{\text{εμβαδον τριγώνου ΕΔΖ}}$ **(2)**

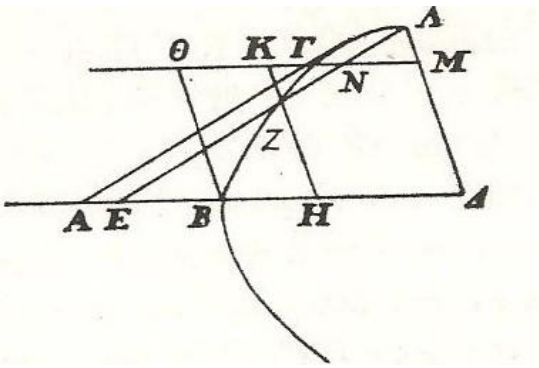
καθώς επίσης από την VI 1 του Ευκλείδη έχουμε: $\frac{\Theta B}{BZ} = \frac{\text{εμβαδόν παρ/μου ΗΘ}}{\text{εμβαδόν παρ/μου ΗΖ}}$ **(3)** άρα η σχέση (1) μέσω της (2) και (3) γράφεται: $\frac{\text{εμβαδον τριγώνου ΑΓΘ}}{\text{εμβαδον τριγώνου ΕΔΖ}} = \frac{\text{εμβαδόν παρ/μου ΗΘ}}{\text{εμβαδόν παρ/μου ΗΖ}}$ και εναλλάξ έχουμε: $\frac{\text{εμβαδον τριγώνου ΑΓΘ}}{\text{εμβαδον παρ/μου ΗΘ}} = \frac{\text{εμβαδόν τριγώνου ΕΔΖ}}{\text{εμβαδόν παρ/μου ΗΖ}}$. Επειδή το τρίγωνο ΑΘΓ είναι ισεμβαδικό με το παραλληλόγραμμο ΗΘ έχουμε σαν συμπέρασμα ότι το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισεμβαδικό με το παραλληλόγραμμο ΗΖ.

Η πρόταση 42 είναι κομβικής σημασίας διότι μαζί με την πρόταση 46 οδηγούν σε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων από την αρχική διάμετρο και την εφαπτομένη στο άκρο της, σε οποιαδήποτε διάμετρο και την εφαπτομένη στο άκρο της. Αυτό που μας δείχνει ο Απολλώνιος είναι ότι, αν ληφθεί οποιαδήποτε άλλη διάμετρος, η ιδιότητα τεταγμένης της τομής αναφορικά με αυτή τη διάμετρο έχει την ίδια μορφή όπως και αναφορικά με την αρχική διάμετρο.

Πρόταση 46 –α βιβλίο

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, ἡ διὰ τῆς ἁφῆς παράλληλος ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην δίχα τέμνει.

Έστω παραβολή, της οποίας η διάμετρος είναι η ΑΒΔ και εφάπτεται της τομής η ΑΓ, και από το Γ και προς την ΑΔ άγεται παράλληλος η ΘΓΜ και παίρνουμε πάνω στην τομή σημείο Λ και φέρνουμε προς την ΑΓ παράλληλο την ΛΝΖΕ. Ισχύει τότε ότι ΛΝ = ΝΖ

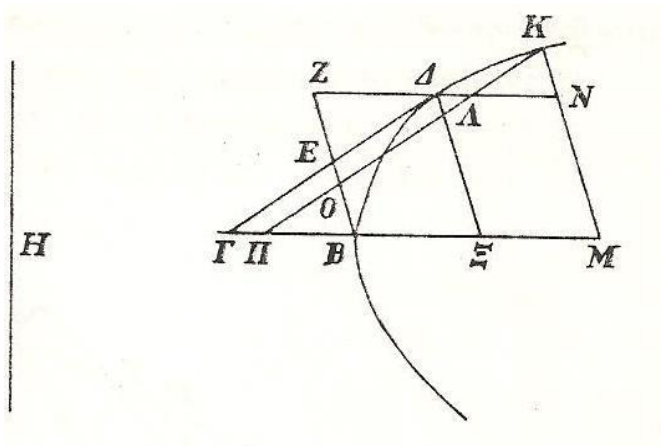


Φέρνουμε τις τεταγμένες ΒΘ, ΚΖΗ, ΛΜΔ. Σύμφωνα με την πρόταση 42 του Απολλώνιου έχουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΕΛΔ είναι ίσο με το παραλληλόγραμμο ΒΜ, το δε τρίγωνο ΕΖΗ ισεμβαδικό με το παραλληλόγραμμο ΒΚ. Άρα το παραλληλόγραμμο ΗΜ ισεμβαδικό προς το υπόλοιπο τετράπλευρο ΛΖΗΔ. Αν αφαιρεθεί και από τα δυο το κοινό μέρος δηλαδή το τετράπλευρο ΜΔΗΖΝΤ τα υπολειπόμενα τρίγωνα ΚΖΝ και ΛΜΝ είναι ισεμβαδικά. Επίσης η ΚΖ είναι παράλληλος προς τη ΛΜ και από την πρόταση IV 22 του Ευκλείδη έχουμε ΖΝ =ΛΝ.

Πρόταση 49 – α βιβλίο

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ μὲν τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ποιηθῇ, ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς παραλλήλου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλον τῇ διαμέτρῳ, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς πεπορισμένης εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ.

Έστω παραβολή με διάμετρο ΜΒΓ, εφαπτομένη τη ΓΔ, και από το Δ άγεται προς τη ΒΓ παράλληλος η ΖΝΔ, φέρνουμε την τεταγμένη ΖΒ και ο λόγος της ΕΔ προς τη ΔΖ είναι ίσος με το λόγο μιας ευθείας Η προς το διπλάσιο της ΓΔ, και έχει ληφθεί σημείο Κ πάνω στην τομή και από το Κ άγεται η παράλληλη ΚΛΠ παράλληλη προς ΓΔ. Τότε ισχύει ότι $\text{ΚΛ}^2 = \text{Η} \cdot \text{ΔΛ}$ με ΔΛ διάμετρο και Η είναι η παράμετρος.



Φέρνουμε τεταγμένες τις ΔΞ, ΚΝΜ . Επειδή η ΓΔ εφάπτεται της τομής ισχύει ότι ΓΒ = ΒΞ (από την πρόταση 35) ενώ ΒΞ = ΖΔ (από πρόταση Ευκλείδη Ι 34), άρα και ΓΒ = ΖΔ.

Επίσης από πρόταση VI 19 του Ευκλείδη έχουμε εμβαδόν τριγώνου ΕΓΒ =εμβαδόν τριγώνου ΕΖΔ. Αν και στα δυο μέλη προσθέσουμε το σχήμα ΔΕΒΜΝ τότε θα έχουμε :το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΔΓΜΝ = το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΖΜ. Αλλά από την πρόταση 42 του Απολλώνιου το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΖΜ = εμβαδόν του τριγώνου ΚΠΜ.

Αν αφαιρέσουμε το κοινό τμήμα ΛΠΜΝ και από τα δυο μέλη έχουμε: εμβαδόν τριγώνου ΚΛΝ= εμβαδόν παραλληλογράμμου ΛΓ.

Επίσης η γωνία ΔΛΠ= γωνία ΚΛΝ άρα από τον λόγο εμβαδών των δυο τριγώνων προκύπτει ότι ΚΛ ΛΝ = 2ΛΔ·ΔΓ **(1)**, και επειδή $\frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{Η}}{\text{2ΓΔ}}$ **(2)** ισχύει και από πρόταση VI 4 του Ευκλείδη $\frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΔΖ}} = \frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΛΝ}}$ **(3)** Από τις σχέσεις **(2)** και **(3)** έχουμε $\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΛΝ}} = \frac{\text{Η}}{\text{2ΓΔ}} \Rightarrow \frac{\text{ΚΛ}^2}{\text{ΚΛ}\cdot\text{ΛΝ}} = \frac{\text{Η}\cdot\text{ΔΛ}}{\text{2ΓΔ}\cdot\text{ΔΛ}} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\text{ΚΛ}^2 = \text{Η} \cdot \text{ΔΛ}$.

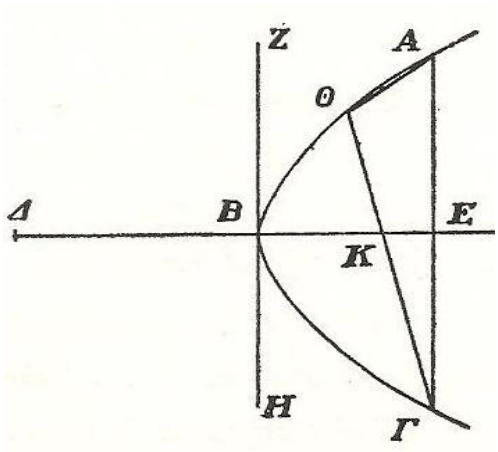
Η τελευταία δηλώνει το σύμπτωμα της παραβολής που έχει την ίδια μορφή που έχει και το σύμπτωμα της πρότασης 11 παρόλο που έχουμε νέα διάμετρο και την εφαπτομένη στο άκρο της.

2.5.2 Προτάσεις περί εφαπτομένης στο β΄ βιβλίου του Απολλώνιου.

Πρόταση 5 – βιβλίο β

Ἐὰν παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ, ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

Έστω η παραβολή ΑΒΓ της οποίας διάμετρος είναι η ΔΒΕ, και η ΖΒΗ να εφάπτεται της τομής και μια χορδή η ΑΕΓ έτσι ώστε ΑΕ = ΕΓ. Τότε η ΑΓ είναι παράλληλος της ΖΗ.

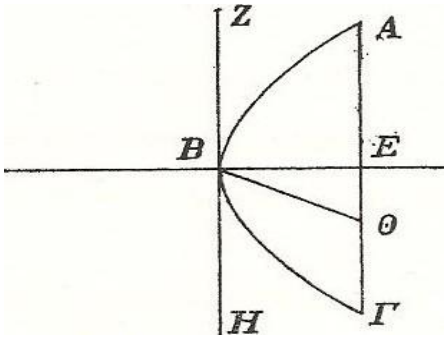


Διότι αν δεν είναι, φέρουμε από το Γ παράλληλο προς την ΖΗ έστω την ΓΘ και ενώνω το Θ με το Α. Επειδή η ΑΒΓ είναι παραβολή με διάμετρο τη ΔΕ, εφαπτομένη τη ΖΗ, και παράλληλος προς αυτήν τη ΓΘ άρα ΓΚ=ΚΘ (Πρόταση 46 - α βιβλίο).Αλλά και ΓΕ = ΕΑ. Άρα η ΑΘ είναι παράλληλος προς την ΚΕ (από την πρόταση VI 2- Ευκλείδη) που είναι άτοπο γιατί προεκτεινόμενη συναντά την ΒΔ (πρόταση 22 – α βιβλίο).

Πρόταση 7 –β βιβλίο

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ τομῇ καὶ δίχα τμηθῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

Έστω η παραβολή ΑΒΓ εφαπτομένη αυτής η ΖΗ και προς τη ΖΗ φέρνουμε παράλληλο έστω την ΑΓ και παίρνουμε το μέσο αυτής το Ε και ενώνω με το Β. Τότε η ΒΕ είναι διάμετρος της παραβολής.

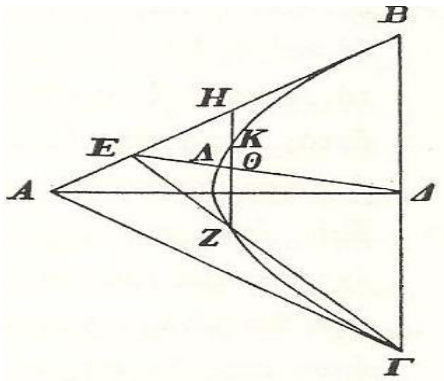


Έστω ότι δεν είναι η ΒΕ διάμετρος και είναι μια άλλη, έστω η ΒΘ άρα από τον ορισμό 4 – βιβλίο α έχουμε ότι ΑΘ = ΘΓ που είναι αδύνατο διότι ΑΕ = ΕΓ. Δεν θα είναι άρα η ΒΘ διάμετρος της τομής. Ομοίως αποδεικνύεται ότι ούτε άλλη είναι εκτός της ΒΕ.

Πρόταση 29 – βιβλίο β

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

Έστω παραβολή στην οποία δυο εφαπτόμενες στα σημεία Β και Γ τέμνονται στο Α και ενώνουμε τα σημεία Β και Γ και αφού πάρουμε το μέσο Δ του ΒΓ ενώνουμε με το Α. Τότε η ΑΔ λέγεται διάμετρος της παραβολής.

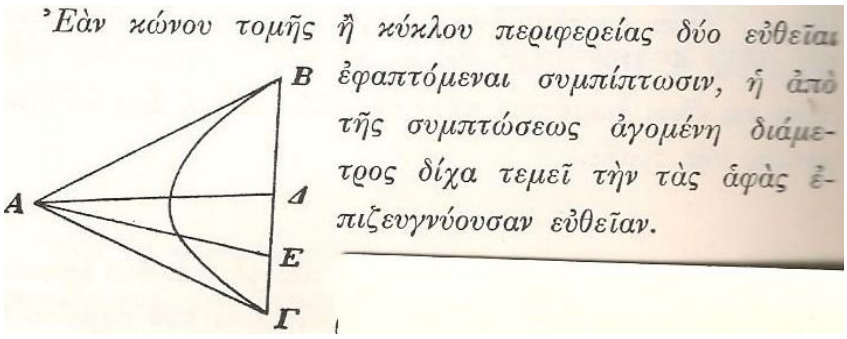


Έστω ότι η ΑΔ δεν είναι διάμετρος, και είναι διάμετρος η ΕΔ και φέρνουμε την ΕΓ η οποία θα τμήσει την τομή στο Ζ (πρόταση 35 – α βιβλίο) και από το Ζ φέρνουμε παράλληλο προς τη ΓΔΒ έστω την ΖΚΗ. Επειδή ΓΔ = ΔΒ ισχύει και η ΖΘ = ΘΗ (πρόταση IV 4 – Ευκλείδης).

Επειδή η εφαπτομένη στο Λ είναι παράλληλος προς την ΒΓ και η ΖΗ θα είναι παράλληλος προς την εφαπτομένη στο Λ. Άρα η ΖΘ = ΘΚ (από πρόταση 46 – βιβλίο α) που είναι αδύνατο, επομένως η ΔΕ δεν είναι διάμετρος. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και καμία άλλη δεν είναι διάμετρος εκτός της ΑΔ.

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί την αντίστροφη της πρότασης αυτής και διατυπώνεται από τον Απολλώνιο με τον παρακάτω τρόπο.

Πρόταση 30 – β βιβλίο



Έστω παραβολή μια κωνική τομή ΒΓ και ας φέρουμε δυο εφαπτόμενες αυτής οι οποίες τέμνονται στο Α και ας φέρουμε την ΒΓ και από το Α φέρουμε την διάμετρο της κωνικής τομής ΑΔ. Τότε ισχύει ότι ΔΒ = ΔΓ.

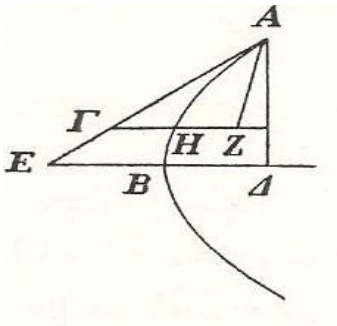
Έστω ότι δεν είναι ΔΒ = ΔΓ αλλά ισχύει ότι ΒΕ = ΕΓ και φέρνουμε την ΑΕ η οποία είναι διάμετρος της παραβολής από την πρόταση 29 – α βιβλίο. Όμως είναι και η ΑΔ που είναι άτοπο διότι οι διάμετροι θα συναντηθούν μεταξύ τους στο Α (από το πόρισμα της πρότασης 51 – α μέρος) το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν είναι ΒΕ = ΕΓ επομένως ΔΒ = ΔΓ.

Στην επόμενη πρόταση ο Απολλώνιος μας δείχνει έναν τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης από ένα σημείο εκτός της κωνικής τομής προς την κωνική τομή

Πρόταση 49 – β βιβλίο

Κώνου τομῆς δοθείσης καὶ σημείου μὴ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ σημείου εὐθεῖαν καθ' ἓν ἐπιψαύουσαν τῆς τομῆς.

Έστω η δοθείσα κωνική τομή, παραβολή της οποίας άξονας είναι ο ΒΔ. Πρέπει από δοθέν σημείο που δεν βρίσκεται εντός της τομής να αχθεί εφαπτόμενη ευθεία προς την παραβολή.



[Ανάλυσις]. Το δοθέν σημείο θα βρίσκεται ή πάνω στην γραμμή ή επί του άξονος ή στο υπόλοιπο μέρος. Έστω είναι επί της γραμμής και είναι το Α και έστω η εφαπτομένη ΑΕ και φέρνουμε κάθετο την ΑΔ. Θα είναι αυτή δεδομένη κατά την θέση (Ευκλείδεια δεδομένα 30). Και από την πρόταση 35 – α βιβλίο έχουμε ΒΕ = ΒΔ, και είναι δοθείσα η ΒΔ άρα δοθείσα και η ΒΕ. Και είναι δοθέν το Β, άρα δοθέν και το Ε (Ευκλείδου Δεδομένα 27). Αλλά και το Α είναι δοθέν άρα και η ΑΕ δοθείσα.

[Σύνθεσις]. Άγουμε από το Α κάθετος την ΑΔ και παίρνουμε ΒΔ = ΒΕ και ενώνουμε το Α με το Ε. Από την πρόταση 35 – α βιβλίου γίνεται φανερό ότι αυτή εφάπτεται της τομής.

[Ανάλυσις]. Έστω το δοθέν σημείο Ε επί του άξονος, και ας φέρουμε την εφαπτομένη ΑΕ και ας αχθεί κάθετος η ΑΔ, θα είναι λοιπόν ΒΕ = ΒΔ από πρόταση 35 – α βιβλίο. Και είναι δοθείσα η ΒΕ , άρα δοθείσα και η ΒΔ. Και είναι δοθέν το Β, άρα δοθέν και το Δ (Ευκλείδη Δεδομένα 27). Και είναι κάθετος η ΔΑ ,άρα θέσει δοθείσα η ΔΑ (Ευκλείδου δεδομένα 29).Άρα δοθέν είναι το Α. Αλλά και το Ε είναι δοθέν ,άρα η ΑΕ δοθείσα

[Σύνθεσις]. Ας πάρουμε ΒΕ = ΒΔ, και από του Δ επί της ΕΔ φέρουμε κάθετο έστω η ΔΑ και ας φέρουμε την ΑΕ. Είναι φανερό ότι η ΑΕ εφάπτεται της παραβολής. Είναι επίσης φανερό ότι και αν το δοθέν σημείο είναι το Β, η από του Β αγόμενη κάθετος εφάπτεται της τομής.

[Ανάλυσις]. Έστω το δοθέν σημείο Γ, και έστω η ΓΑ, και από το Γ προς τον άξονα άγουμε παράλληλο τη ΓΖ, είναι άρα δεδομένη κατά θέση η ΓΖ. Και από του Α επί της ΓΖ άγεται τεταγμένως η ΑΖ, θα είναι λοιπόν ΓΗ = ΖΗ. Και είναι δοθέν το Η, άρα δοθέν είναι και το Ζ. Άγουμε τεταγμένως τη ΖΑ, δηλαδή παράλληλα προς τη εφαπτομένη της κωνικής στο Η, άρα είναι δεδομένη κατά την θέσιν η ΖΑ. Είναι άρα δοθέν και το Α (Ευκλείδου δεδομένα 25),αλλά και το Γ. Είναι άρα δεδομένη κατά την θέση η ΓΑ.

[Σύνθεσις]. Φέρνουμε από το Γ παράλληλο προς τη ΒΔ έστω τη ΓΖ και παίρνω ΖΗ = ΓΗ και προς το κατά το Η εφαπτομένη άγουμε παράλληλο τη ΖΗ, και ενώνουμε τη ΑΓ. Είναι φανερό λοιπόν από την πρόταση 35 – α βιβλίο ότι η ΑΓ είναι η εφαπτομένη.

2.6 Προτάσεις στα ΄΄ Κωνικά του Απολλώνιου ΄΄ που αφορούν την εφαπτομένη στην έλλειψη και την υπερβολή.

2.6.1 Βιβλίο α΄

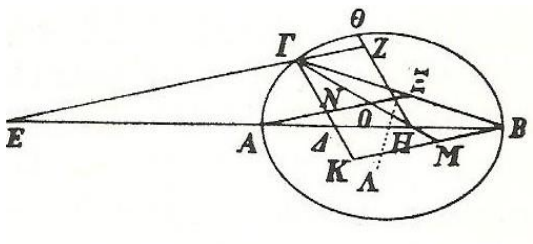
Όσον αφορά την εφαπτομένη στην έλλειψη και την υπερβολή ισχύει ότι και στην παραβολή, δηλαδή η εφαπτόμενη ευθεία σε κωνική τομή είναι αυτή που έχει ένα κοινό σημείο με την κωνική τομή και την αφήνει στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η εφαπτομένη και η κωνική τομή. Έτσι η πρόταση 17 του πρώτου βιβλίου αφορά την ύπαρξη εφαπτόμενης ευθείας και στην έλλειψη αλλά και την υπερβολή. Στην συνέχεια για να κατασκευάσει την εφαπτομένη στην έλλειψη και την υπερβολή διαφοροποιείται σε σχέση με την εφαπτομένη στην παραβολή χρησιμοποιώντας την αναλογία που την ονομάζουμε αρμονική τετράδα. Παρακάτω παραθέτουμε την πρόταση 34 του Απολλώνιου που μας δείχνει την κατασκευή της εφαπτομένης ενώ στην πρόταση 36 αποδεικνύει την μοναδικότητα της.

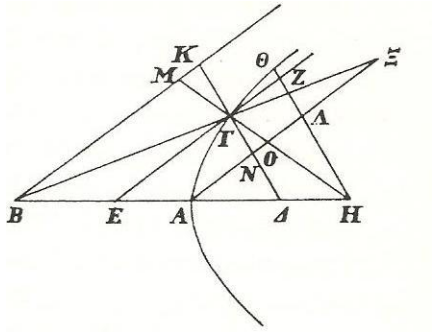
Πρόταση 34 – α βιβλίο

Ἐὰν ἐπὶ ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, καὶ ὃν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, τοῦτον ἔχῃ τὰ τμήματα τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ὥστε ὁμόλογα εἶναι τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τμήματα, ἢ τὸ ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ληφθὲν σημεῖον καὶ τὸ ἐπὶ τῆς τομῆς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Έστω υπερβολή ή έλλειψη ή περιφέρεια κύκλου της οποίας διάμετρος είναι η ΑΒ και ας πάρουμε σημείο επί της κωνικής τομής το Γ και από το Γ να φέρουμε τεταγμένη ΓΔ έτσι ώστε

να ισχύει : $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΑ}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΑ}}$ δηλαδή τα Α, Β, Δ, Ε να αποτελούν αρμονική τετράδα. Τότε η ΓΕ εφάπτεται της τομής.





Έστω ότι έτεμνε την κωνική τομή όπως η ΕΓΖ και ας καταχθεί τεταγμένως η ΗΖΘ, και ας φέρουμε παράλληλους από τα Α,Β προς την ΕΓ έστω τις ΑΛ και ΒΚ και αφού ενώσουμε τις ΔΓ, ΒΓ , ΗΓ προεκτείνουμε μέχρι τα σημεία Μ, Ξ, Κ. Επειδή ισχύει ότι $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΑ}} = \frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΑ}}$ **(1)** και από την πρόταση VI 4 του Ευκλείδη $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΑ}} = \frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΑΝ}}$ **(2)** και από πρότασεις VI 2,6 του Ευκλείδη έχουμε ότι $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΓΞ}} = \frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΞΝ}}$ **(3).** Η (1) από τις (2) και (3) γίνονται: $\frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΝΞ}} = \frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΑΝ}}$ άρα ΑΝ=ΝΞ .

Αρα ΑΝ ΝΞ >ΑΟ ΟΞ ισοδύναμα $\frac{\text{ΝΞ}}{\text{ΞΟ}} > \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΑΝ}}$ Όμως $\frac{\text{ΝΞ}}{\text{ΞΟ}} = \frac{\text{ΚΒ}}{\text{ΒΜ}}$ (πρόταση Ευκλείδη VI 4) Αρα $\frac{\text{ΚΒ}}{\text{ΒΜ}} > \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΑΝ}} \Leftrightarrow \text{ΚΒ ΑΝ} > MB\ AO \Leftrightarrow \frac{\text{ΚΒ ΑΝ}}{\text{ΓΕ}^2} > \frac{\text{ΜΒ ΑΟ}}{\text{ΓΕ}^2} \xLeftrightarrow{\text{Ευκλείδης πρόταση } V\ 8}$.

Λόγω της ομοιότητας των τριγώνων ΒΚΔ , ΕΓΔ , ΝΑΔ έχουμε $\frac{\text{ΚΒ}\cdot\text{ΑΝ}}{\text{ΓΕ}^2} = \frac{\text{ΒΔ}\cdot\text{ΔΑ}}{\text{ΔΕ}^2}$ και $\frac{\text{ΜΒ}\cdot\text{ΑΟ}}{\text{ΓΕ}^2} = \frac{\text{ΒΗ}\cdot\text{ΗΑ}}{\text{ΗΕ}^2}$ άρα $\frac{\text{ΒΔ}\cdot\text{ΔΑ}}{\text{ΔΕ}^2} > \frac{\text{ΒΗ}\cdot\text{ΗΑ}}{\text{ΗΕ}^2} \Leftrightarrow \frac{\text{ΒΔ}\cdot\text{ΔΑ}}{\text{ΒΗ}\cdot\text{ΑΗ}} > \frac{\text{ΔΕ}^2}{\text{ΗΕ}^2}$ **(4)**

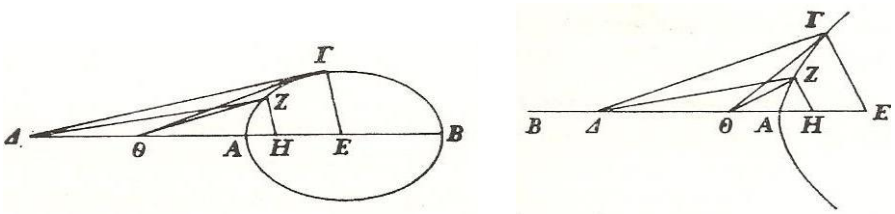
Όμως από την πρόταση 21 – Απολλώνιος έχουμε $\frac{\text{ΒΔ}\cdot\text{ΔΑ}}{\text{ΒΗ}\cdot\text{ΑΗ}} = \frac{\text{ΓΔ}^2}{\text{ΗΘ}^2}$ και από την VI 4 του Ευκλείδη έχουμε $\frac{\text{ΔΕ}^2}{\text{ΗΕ}^2} = \frac{\text{ΓΔ}^2}{\text{ΖΗ}^2}$.

Άρα η σχέση (4) γράφεται με την βοήθεια των δυο τελευταίων $\frac{\Gamma\Delta^2}{H\Theta^2} > \frac{\Gamma\Delta^2}{ZH^2}$ και τελικά καταλήγουμε ότι ΘΗ < ΖΗ που είναι αδύνατο. Άρα δεν τέμνει η ΕΓ την τομή, επομένως εφάπτεται.

Πρόταση 36 – α βιβλίο

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα συμπίπτουσα τῇ πλαγίᾳ τοῦ εἴδους πλευρᾷ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἔσται ὡς ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλαγίας πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, ὥστε τὰς ὁμολόγους συνεχεῖς εἶναι, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τοῦ κώνου τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Έστω υπερβολή, ή έλλειψη, ή περιφέρεια κύκλου, της οποίας η διάμετρος είναι η ΑΒ. Εφαπτομένη είναι η ΓΔ και φέρουμε τεταγμένη τη ΓΕ. Τότε ισχύει ότι $\frac{BE}{EA} = \frac{B\Delta}{\Delta A}$.



Διότι αν δεν ισχύει η παραπάνω σχέση και έστω ότι ισχύει ότι $\frac{B\Delta}{\Delta A} = \frac{BH}{HA}$ και ας φέρουμε την τεταγμένη ΗΖ άρα η ευθεία από το Δ προς το Ζ θα εφάπτεται της τομής απο την πρόταση 34 –α βιβλίου και προεκτεινόμενη θα συναντήσει την ΓΔ. Άρα υπάρχουν δυο ευθείες με τα ιδια πέρατα, το οποίο είναι άτοπο (κοινή έννοια 9 – Ευκλείδη) και συνεχίζει ο Απολλώνιος

αποδεικνύοντας ότι μεταξύ της τομής και της ευθείας ΓΔ δεν θα παρεμβληθεί καμία άλλη ευθεία.Διότι αν είναι δυνατόν να παρεμβληθεί η ΓΘ και να ισχύει $\frac{\text{ΒΘ}}{\text{ΘΑ}} = \frac{\text{ΒΗ}}{\text{ΗΑ}}$ και να φέρουμε την τεταγμένη ΗΖ η ευθεία από το Θ στο Ζ θα συναντήσει την ΘΓ.Άρα θα είναι των δυο ευθειών τα ιδια πέρατατο οποίο είναι αδύνατο. Άρα δεν θα παρεμβληθεί άλλη ευθεία στον τόπο μεταξύ της τομής και της ευθείας ΓΔ.

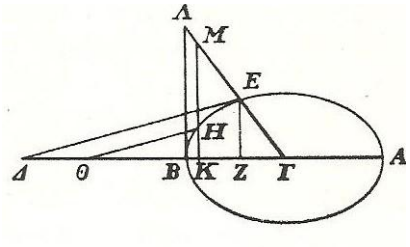
Ακολουθούν δυο σημαντικές προτάσεις οι 43 , 47 και η 50 που οδηγούν σε ένα μετασχηματισμό συνταταγμένων, από την αρχική διάμετρο και την εφαπτομένη στο άκρο της σε οποιοδήποτε διάμετρο και την εφαπτομένη στο άκρο της. Οι παραπάνω προτάσεις είναι κατ΄ αναλογίαν των προτάσεων που αφορούσαν την παραβολή και αναφέρονται στην έλλειψη και την υπερβολή.

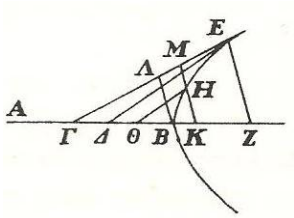
Πρόταση 43

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένην, τὸ γινόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν τρίγωνον ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, οὗ ἀποτέμνει τριγώνου ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς, ἔλασσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῷ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου πρὸς τῷ κέντρῳ τριγώνου ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ.

Έστω υπερβολή ή έλλειψη ή περιφέρεια κύκλου με διάμετρο ΑΒ, και κέντρο το Γ, και φέρουμε την εφαπτομένη της τομής ΔΕ, ενώνουμε το Γ με το Ε και φέρουμε τεταγμένη την ΕΖ, και παίρνουμε σημείο Η πάνω στην κωνική τομή. Από το Η φέρνουμε παράλληλη προς την εφαπτομένη, έστω την ΗΘ και την τεταγμένη ΗΚ. Από το Β ανυψώνουμε τεταγμένη την ΒΛ.

Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΚΜΓ διαφέρει (υπερέχει) του τριγώνου ΓΛΒ κατά το τρίγωνο ΗΚΘ.





Διότι επειδή εφάπτεται η ΕΔ και κατηγμένη την ΕΖ από την πρόταση 39 έχουμε :

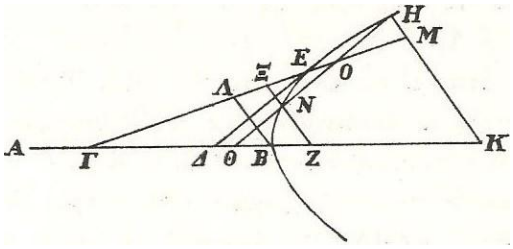
$\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΖΔ}} = \frac{\text{παράμετρος}}{\text{πλάγιος άξονας}} \cdot \frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΖΕ}}$. Όμως $\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΖΔ}} = \frac{\text{ΗΚ}}{\text{ΚΘ}}$ και $\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΖΕ}} = \frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΒΛ}}$ άρα προκύπτει ότι

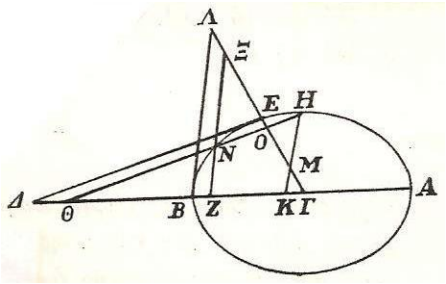
$\frac{\text{ΗΚ}}{\text{ΚΘ}} = \frac{\text{παράμετρος}}{\text{πλάγιος άξονας}} \cdot \frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΒΛ}}$ και από την πρόταση 41, το τρίγωνο ΓΚΜ διαφέρει (υπερέχει) του τριγώνου ΒΓΛ κατά το τρίγωνο ΗΘΚ.

Πρόταση 47

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ, δίχα τεμεῖ τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην.

Έστω υπερβολή ή έλλειψη ή περιφέρεια κύκλου, της οποίας διάμετρος είναι η ΑΒ και κέντρο το Γ και φέρουμε εφαπτομένη της τομής τη ΔΕ και την ΓΕ και την προεκτείνουμε. Παίρνουμε τυχαίο σημείο πάνω στην κωνική τομή έστω το Ν και δια του σημείου Ν άγεται παράλληλος προς τη ΔΕ η ΘΝΟΗ.Τότε ισχύει ότι ΝΟ = ΟΗ .





Φέρνουμε τις τεταγμένες ΞΝΖ, ΒΛ, ΗΜΚ. Από την πρόταση 43 αποδείχθηκε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΘΝΖ είναι ίσο προς το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΛΒΖΞ, άρα και το υπόλοιπο τετράπλευρο ΝΗΚΖ = προς το υπόλοιπο ΜΚΖΞ. Αν αφαιρεθεί το κοινό μέρος ΟΝΖΚΜ τότε, το υπόλοιπο, δηλαδή το τρίγωνο ΟΜΝ ισεμβαδικό με το ΝΞΟ. Τέλος η ΜΗ είναι παράλληλος προς τη ΝΞ άρα από πρόταση VI 22 του Ευκλείδη ισχύει ότι ΝΟ = ΟΗ.

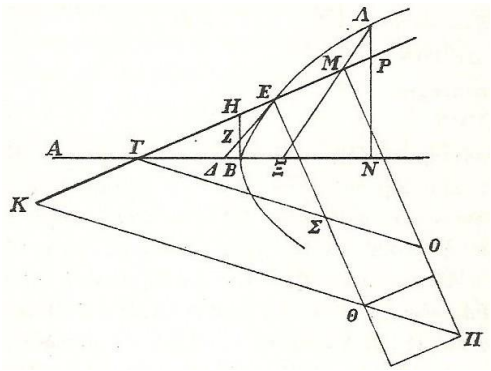
Οδηγούμαστε κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν στην περίπτωση της παραβολής, στο σύμπτωμα της έλλειψης και της υπερβολής ανεξάρτητα από το ποια διάμετρος θα επιλεγεί ως διάμετρος αναφοράς. Επομένως δεν έχει σημασία σε ποια ειδική διάμετρο και σε ποιες τεταγμένες αναφέρεται η κωνική τομή.

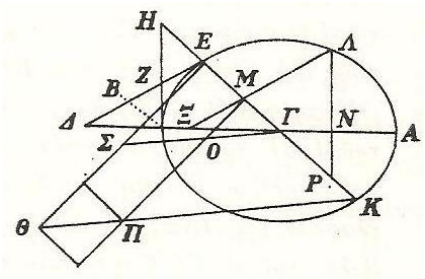
Πρόταση 50

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀναχθεῖσα εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, καὶ ποιηθῇ, ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δυνήσεταί τι χωρίον ὀρθογώνιον παρακείμενον παρὰ τὴν πορισθεῖσαν πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ᾽ αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς διπλασίας τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς πορισθείσης εὐθείας, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἐλλεῖπον.

Έστω υπερβολή ή έλλειψη ή περιφέρεια κύκλου με διάμετρο ΑΒ, κέντρο το Γ, εφαπτομένη η ΔΕ και φέρουμε την ΓΕ και προεκτείνουμε και από τα δυο μέρη και παίρνουμε ΕΓ = ΓΚ και από το Β ανυψώνουμε τεταγμένη τη ΒΖΗ, από το Ε άγεται κάθετος επί την ΕΓ η ΕΘ έτσι ώστε $\frac{\text{ΖΕ}}{\text{ΕΗ}} = \frac{\text{ΕΘ}}{2\cdot\text{ΕΔ}}$ και αφού φέρουμε την ΘΚ και πάρουμε σημείο πάνω στην κωνική

τομή έστω το Λ και φέρω παράλληλο προς την ΕΔ έστω την ΛΜΞ και τέλος προς την ΒΗ παράλληλο τη ΛΡΝ και προς την ΕΘ παράλληλο τη ΜΠ.Τότε ισχύει ότι $\Lambda M^2 = EM \cdot M\Pi$





Στην παραπάνω εξίσωση αν θέσουμε ΛΜ = y , ΕΜ = x , ΘΕ = p , και ΚΕ = d ενώ από την ομοιότητα τριγώνων ΚΕΘ και ΚΜΠ ισχύει ότι $\frac{E\Theta}{EK} = \frac{M\Pi}{KM}$ ή ΜΠ=ΚΜ $\frac{E\Theta}{EK}$ επομένως η σχέση για την **υπερβολή** γίνεται:$M\Lambda^2 = EM \cdot KM \cdot \frac{E\Theta}{EK}$ που με σύγχρονους όρους γράφεται ως εξής: $y^2 = x \cdot (x + d)\,\frac{p}{d} \Leftrightarrow y^2 = \frac{p}{d} \cdot x^2 + x \cdot p$ και παριστάνει την σημερινή εξίσωση της υπερβολής ως προς το πλαγιογώνιο σύστημα ΔΕΡ που καθορίζεται από τη διάμετρο ΚΕΡ και την εφαπτομένη στο Ε.

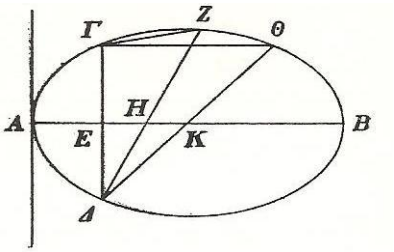
Αντίστοιχα στην ίδια εξίσωση αν θέσουμε ΛΜ = y , ΕΜ = x , ΘΕ = p , και ΚΕ = d ενώ από την ομοιότητα των τριγώνων ΚΕΘ και ΚΜΠ ισχύει ότι $\frac{E\Theta}{EK} = \frac{M\Pi}{KM}$ ή ΜΠ=ΚΜ $\frac{E\Theta}{EK}$ άρα η αντίστοιχη σχέση για **την έλλειψη** γίνεται $M\Lambda^2 = EM \cdot KM \cdot \frac{E\Theta}{EK}$ που με σύγχρονους όρους γράφεται ως εξής: $y^2 = x \cdot (d - x)\,\frac{p}{d} \Leftrightarrow y^2 = -\frac{p}{d} \cdot x^2 + x \cdot p$ και παριστάνει την σημερινή εξίσωση της υπερβολής ως προς το πλαγιογώνιο σύστημα ΔΕΡ που καθορίζεται από τη διάμετρο ΚΕΡ και την εφαπτομένη στο Ε.

2.6.2 Βιβλίο β΄

Πρόταση 6 – β βιβλίο

Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν, ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

Έστω έλλειψη με διάμετρο ΑΒ η οποία τέμνει στο μέσο Ε την ΓΔ η οποία δεν διέρχεται από το κέντρο. Τότε η εφαπτομένη της έλλειψης στο Α είναι παράλληλος στη ΓΔ.

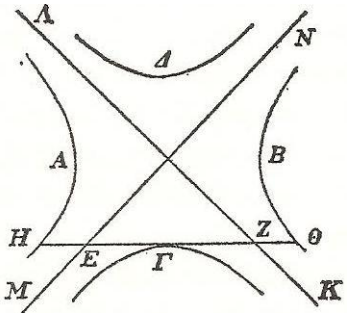


Διότι αν δεν είναι, έστω ότι είναι η ΔΖ παράλληλος προς την εφαπτομένη στο Α, άρα ΔΗ=ΖΗ (πρόταση 47 – α΄ βιβλίο).Ισχύει και ΔΕ=ΕΓ άρα η ΓΖ παράλληλος προς την ΗΕ (Ευκλείδια πρόταση VI 2) που είναι άτοπο γιατί ή το Η θα είναι κέντρο της τομής ΑΒ, άρα η ΓΖ θα συναντήσει την ΑΒ(πρόταση 23- α βιβλίο) είτε δεν θα είναι, οπότε ας πάρουμε το Κ ως κέντρο, και αφού φέρουμε τη ΔΚ προεκτείνουμε μέχρι το Θ και ενώνουμε με το Γ. Επειδή ΔΚ = ΚΘ και ΔΕ= ΕΓ άρα ΓΘ παράλληλος προς τη ΑΒ (Ευκλείδης VI 2), όμως παράλληλη προς την ΑΒ είναι και η ΓΖ, που είναι άτοπο. Άρα η εφαπτομένη στο Α είναι παράλληλος προς την ΓΔ.

Πρόταση 19 – β βιβλίο

Ἐὰν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἐπιψαύουσα, ἧς ἔτυχε τῶν τομῶν, συμπεσεῖται ταῖς ἐφεξῆς τομαῖς καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἁφήν.

Έστω κατά συζυγία αντικείμενες οι Α, Β, Γ, Δ, και η ευθεία ΕΓΖ να εφάπτεται στο Γ. Τότε προεκτεινόμενη θα συναντήσει τις τομές Α, Β και το Γ θα είναι μέσο του ΗΘ.

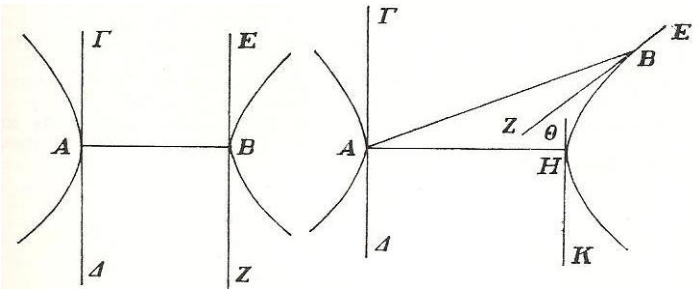


Πράγματι θα συναντήσει τις τομές Α, Β από την πρόταση 18 – α βιβλίο στα σημεία Η και Θ.Τότε ισχύει ότι ΓΗ = ΓΘ, διότι έστω οι ασύμπτωτες των τομών ΚΛ και ΜΝ. Άρα ισχύει ΕΗ=ΖΘ (Πρόταση 16 – α βιβλίο) και ΓΕ = ΓΖ (πρόταση 3- α΄ βιβλίο) άρα και ΓΗ = ΓΘ.

Πρόταση 31 – β΄ βιβλίο

Ἐὰν ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται, ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου πίπτῃ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι, ἐὰν δὲ μή, συμπεσοῦνται ἐπὶ ταὐτὰ τῷ κέντρῳ.

Έστω οι αντικείμενες τομές Α, Β και εφαπτόμενες αυτών στα σημεία Α, Β έστω οι ΓΑΔ και ΕΒΖ και η ευθεία που ενώνει τα Α και Β ας διέρχεται από το κέντρο των τομών. Τότε η ΓΔ είναι παράλληλος προς την ΕΖ.



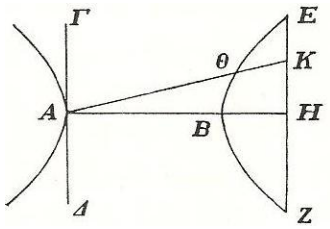
Επειδή οι τομές είναι αντικείμενες, των οποίων διάμετρος είναι η ΑΒ και στο σημείο Α εφάπτεται η ΓΔ, η αγόμενη από το Β παράλληλος προς την ΓΔ εφάπτεται της τομής (πρόταση 44 –α΄ βιβλίο). Εφάπτεται και η ΕΖ άρα η ΓΔ είναι παράλληλος της ΕΖ.

Στην περίπτωση που αχθεί διάμετρος των τομών η ΑΗ, και εφαπτομένη της τομής η ΘΚ η ΘΚ θα είναι παράλληλος προς την ΓΔ. Και επειδή οι ΕΖ, ΘΚ εφάπτονται της υπερβολής κατ΄ ανάγκη θα συναντηθούν (πρόταση 25 – α΄ βιβλίο). Και είναι παράλληλος η ΘΚ προς την ΓΔ , άρα και οι ΓΔ ,ΕΖ προεκτεινόμενες θα συναντηθούν.

Πρόταση 34 – β΄ βιβλίο

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖά τις ἐπιψαύῃ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ μέσην τὴν παράλληλον ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

Έστω οι αντικείμενες τομές Α, Β και ας εφάπτεται της Α η ευθεία ΓΔ στο σημείο Α και ας αχθεί στην άλλη τομή προς την ΓΔ παράλληλος η ΕΖ, και ας τμηθεί αυτή στο μέσο στο σημείο Η και ας φέρουμε την ΑΗ. Τότε η ΑΗ είναι διάμετρος των αντικείμενων τομών.

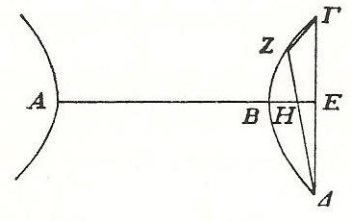


Διότι έστω ότι είναι η ΑΘΚ. Η εφαπτομένη στο Θ είναι παράλληλος προς τη ΓΔ (από πρόταση 31 – α΄ βιβλίο). Αλλά και η ΓΔ είναι παράλληλος στην ΕΖ, αρα είναι και η εφαπτομένη στο Θ παράλληλος προς την ΕΖ(πρόταση 30 – α΄ βιβλίο). Άρα είναι και ΕΚ = ΚΖ (Πρόταση 47 – α΄ βιβλίο) που είναι αδύνατο διότι η ΕΗ = ΗΖ . Δεν είναι η ΑΘ διάμετρος επομένως είναι η ΑΒ.

Πρόταση 35 – β΄ βιβλίο

Ἐὰν ἡ διάμετρος ἐν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ, ἡ ἐπιψαύουσα τῆς ἑτέρας τομῆς κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

Έστω οι αντικείμενες τομές Α, Β και διάμετρος η ΑΒ και ας τέμνει την τομή Β η ΓΔ και Ε το μέσο της ΓΔ. Τότε η εφαπτομένη της τομής στο Α είναι παράλληλος στη ΓΔ.

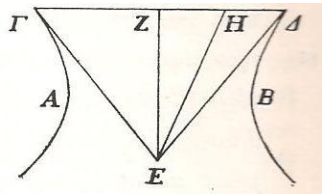


Έστω ότι προς την εφαπτομένη της τομής στο Α παράλληλος η ΔΖ, είναι άρα ΔΗ = ΗΖ (Πρόταση 48 –α΄ βιβλίο). Επίσης ΔΕ = ΕΓ. Είναι άρα ΓΖ παράλληλος προς την ΕΗ (Πρόταση Ευκλείδη VI 2) που είναι αδύνατο διότι προεκτεινόμενη θα την συναντήσει (πρόταση 22 α΄-βιβλίο). Δεν είναι άρα παράλληλος η ΔΖ προς την εφαπτομένη στο Α αλλά ούτε και καμία άλλη παρά μόνο η ΓΔ.

Πρόταση 39 – β΄ βιβλίο

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται συμπίπτουσαι, ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀγομένη δίχα τέμνει τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.

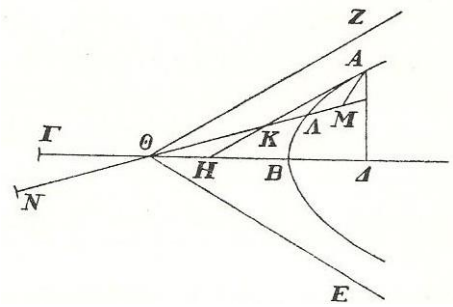
Έστω οι αντικείμενες τομές Α, Β και δυο ευθείες εφαπτόμενες των Α, Β οι ΓΕ και ΕΔ και φέρουμε τη ΓΔ και την διάμετρο ΕΖ. Ισχύει ότι ΓΖ = ΖΔ.



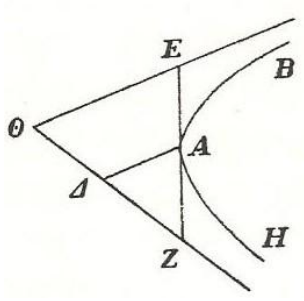
Διότι αν δεν ισχύει το παραπάνω ας τμήσουμε στο μέσο τη ΓΔ έστω στο Η και φέρουμε την ΗΕ τότε η ΗΔ είναι διάμετρος από τη πρόταση 38 – α΄ βιβλίο. Είναι και ΕΖ διάμετρος άρα το Ε είναι το κέντρο. Η συνάντησις των δυο εφαπτομένων γίνεται στο κέντρο των τομών που είναι αδύνατο από την πρόταση 32 – β΄ βιβλίο. Άρα η ΓΖ δεν είναι άνισος με τη ΖΔ επομένως είναι ίση.

Πρόταση 49 –β΄ βιβλίο

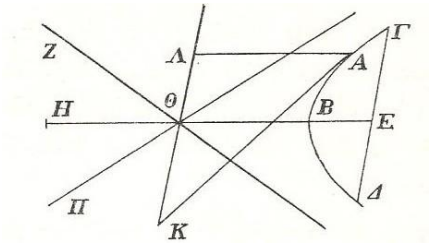
Κώνου τομῆς δοθείσης καὶ σημείου μὴ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ σημείου εὐθεῖαν καθ᾽ ἓν ἐπιψαύουσαν τῆς τομῆς.



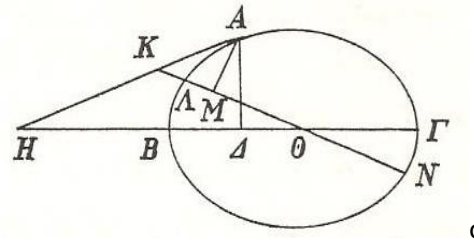
σχήμα 1



σχήμα 2



σχήμα 3



σχήμα 4

Έστω ΔΒΓ άξονας της υπερβολής, με κέντρο το Θ, και ασύμπτωτοι οι ΘΕ και ΘΖ. Το σημείο που θα αχθεί η εφαπτομένη της κωνικής τομής θα είναι είτε επί της τομής ή επί του άξονα ή εντός της γωνίας ΕΘΖ ή στον εφεξής τόπο ή επί μιας των ασυμπτώτων που περιέχουν την τομή ή στον μεταξύ τόπο των περιεχουσών την κατακορυφήν της γωνίας ΖΘΕ.

Έστω το σημείο Α ότι βρίσκεται επι της τομής. Άγουμε από το Α κάθετη την ΑΔ και έστω ο λόγος $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta B} = \frac{\Gamma H}{HB}$ και ας φέρουμε την κάθετη ΑΗ. Τότε είναι φανερό ότι η ΑΗ εφάπτεται της τομής (σχήμα 1).

Έστω το δοθέν σημείο Η βρίσκεται επι του άξονος έτσι ώστε $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta B} = \frac{\Gamma H}{HB}$ και φέρουμε την κάθετο ΑΔ και την ΑΗ η οποία πληρεί το πρόβλημα (σχήμα 1).

Έστω το δοθέν σημείο Κ στην περιοχή εντός της γωνίας ΕΘΖ και του ενός κλάδου της υπερβολής και από το Κ θα αχθεί εφαπτομένη. Θα φέρουμε την ΚΘ θα την προεκτείνουμε και θα πάρουμε ΘΝ = ΘΛ και $\frac{NK}{K\Lambda} = \frac{MN}{M\Lambda}$ και θα φέρουμε παράλληλο προς την εφαπτομένη στο Λ και θα ενώσουμε το Κ με το Α. Τότε η ΚΑ θα εφάπτεται της τομής (πρόταση 34 – α βιβλίο).

Έστω το δοθέν σημείο Ζ είναι επι των ασυμπτώτων και πρέπει να αχθεί από το Ζ εφαπτομένη στην τομή και παίρνουμε το μέσο της ΖΘ έστω το Δ και από το Δ φέρνω παράλληλο προς την ΘΕ έστω ΔΑ. Φέρνουμε την ΖΑ και επειδή ΖΔ = ΔΘ άρα και ΖΑ = ΖΕ (απο πρόταση VI 2 Ευκλείδης). Άρα από πρόταση 9 – β βιβλίο η ΖΑΕ εφάπτεται της τομής (σχήμα 2).

Έστω ότι το Κ είναι στην περιοχή μεταξύ των ασυμπτώτων και αφού φέρουμε την ΚΘ και πάρουμε σημείο Γ και φέρουμε ΓΔ παράλληλο στην ΚΘ. Έστω Ε μέσο της ΓΔ και φέρουμε την ΕΘ και ας ληφθεί η ΗΘ = ΘΒ άρα η ΗΒ είναι πλάγια συζυγής διάμετρος προς την ΚΘΛ. Ας πάρουμε προς το ¼ του ορθογωνίου που έχει για πλευρές την ΒΗ και την παράμετρο ίσο το ορθογώνιο ΚΘ·ΘΛ, και από το Λ να φέρουμε παράλληλο προς την ΒΗ και ας φέρουμε την ΚΑ.Τότε η ΚΑ εφάπτεται της τομής (σχήμα 3).

Έστω η τομή είναι έλλειψη το δοθέν σημείο Α επι της τομής και πρέπει να φέρουμε εφαπτομένη στο Α.Όπως στην πρόταση 34 – α βιβλίο φέρνουμε τη τεταγμένη ΑΔ και

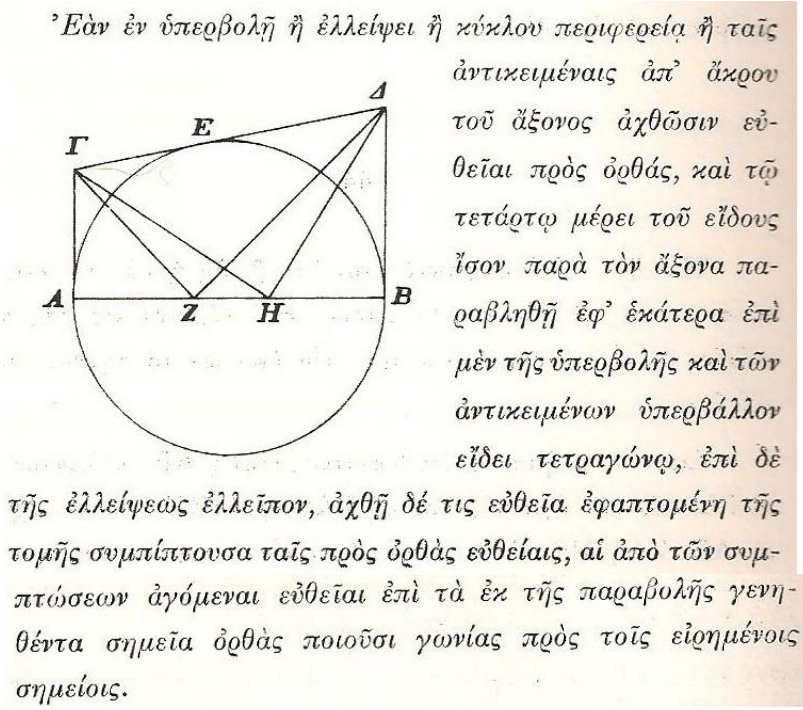
βρίσκουμε το σημείο Η επι του άξονα ΒΓ έτσι ώστε να σχηματίζει αρμονική τετράδα με τα Β, Δ, Γ. Άρα η ΑΗ εφάπτεται της τομής.

Έστω ότι το σημείο εκτός της τομής το Κ και πρέπει να φέρουμε την εφαπτομένη. Φέρνουμε την ΚΛΘ μέχρι το κέντρο Θ και προεκτείνω μέχρι το Ν. Φέρνουμε την ΑΜ τεταγμένη έτσι ώστε να είναι $\frac{\text{ΝΚ}}{\text{ΚΛ}} = \frac{\text{ΝΜ}}{\text{ΜΛ}}$. Άρα το σημείο Μ είναι δοθέν. Και η ΜΑ έχει αναχθεί τεταγμένως διότι είναι παράλληλος προς την εφαπτομένη στο Λ, άρα η ΜΑ είναι δοθείσα άρα και το Κ δοθέν άρα και η ΚΑ δοθείσα άρα η σύνθεσις του προβλήματος είναι αυτή της προηγούμενης περίπτωσης.

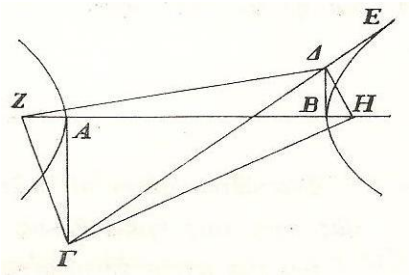
2.6.3 Περί εστιών - Βιβλίο γ΄

Οι εστιακές ιδιότητες των κεντρικων κωνικών τομών αποδεικνύονται στις προτάσεις του γ ΄ βιβλίου 45- 52 χωρίς οποιαδήποτε αναφορά στη διευθετούσα. Η εστία μιας παραβολής δεν αναφέρεται πουθενά. Οι εστίες καλούνται <<τα σημεία που προκύπτουν από την παραβολή>>(*τα εκ της παραβολής γινόμενα σημεία)*, και το νόημα της φράσης αυτής είναι ότι τα σημεία Ζ και Η λαμβάνονται επί του άξονα ΑΒ, έτσι ώστε ΑΖ·ΖΒ=ΑΗ·ΗΒ= $\frac{\rho}{4} \cdot \text{AA}'$ δηλαδή ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο παραβάλλεται στην ΑΑ΄ ως βάση ίση με το ένα τέταρτο του σχήματος, και στην περίπτωση της υπερβολής υπερέχει, ενώ στην περίπτωση της έλλειψης υπολείπεται κατά ένα τετράγωνο. Για να αποδείξουμε την ανακλαστική ιδιότητα των κωνικών τομών θα χρειαστεί να αποδείξουμε τις προτάσεις 45,46 και 47.

Πρόταση 45 - γ βιβλίο



Εστω μια εκ των τομών της οποίας άξονας είναι ο ΑΒ κάθετοι οι ΑΓ, ΒΔ και εφαπτομένη η ΓΕΔ, και προς το ¼ του σχήματος ας παρεμβληθεί προς τα δυο άκρα του άξονα το ορθογώνιο ΑΖ ΖΒ και το ΑΗ ΗΒ και ας φέρουμε τις ΓΖ , ΓΗ ,ΔΖ ,ΔΗ. Τότε η γωνία ΓΖΔ και η γωνία ΓΗΔ είναι ορθή .



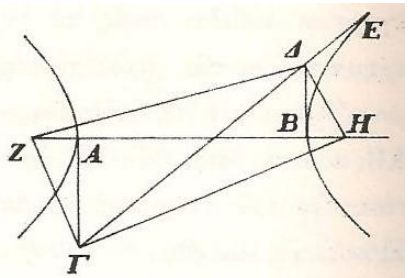
Επειδή το ΑΓ·ΒΔ = ¼ του παρά τη ΑΒ σχήματος (από πρόταση 42 – γ βιβλίο) είναι και το ΑΖ ΖΒ = ¼ του σχήματος, άρα ΑΓ· ΔΒ = ΑΖ· ΖΒ ή $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΖ}} = \frac{\text{ΖΒ}}{\text{ΒΔ}}$. Επίσης οι γωνίες Α και Β είναι ορθές οπότε η γωνία ΑΓΖ = γωνία ΒΖΔ και γωνία ΑΖΓ = γωνία ΖΔΒ. Και επειδή η γωνία ΓΑΖ είναι ορθή οι ΑΓΖ +ΑΖΓ =1 ορθή (πρόταση Ι 32- Ευκλείδη). Αποδείξαμε και ότι η γωνία ΑΓΖ

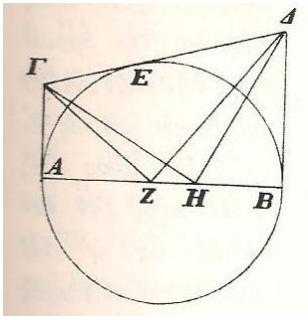
=γωνία ΔΖΒ, άρα ΓΖΑ +ΔΖΑ =1 ορθή. Επομένως η υπόλοιπος γωνία ΔΖΓ = ορθή. Ομοίως δείχνουμε ότι και η ΓΗΔ είναι ορθή.

Πρόταση 46 – γ βιβλίο

Τῶν αὐτῶν ὄντων αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις.

Η γωνία ΑΓΖ= γωνία ΔΓΗ και η γωνία ΓΔΖ = γωνία ΒΔΗ





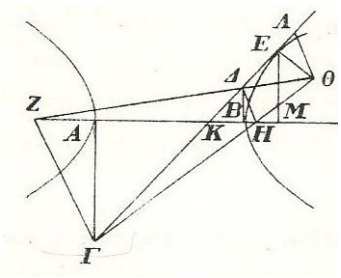
Επειδή οι γωνίες ΓΖΔ , ΓΗΔ αποδείχθησαν ορθές στην πρόταση 45 – γ βιβλίο ο κύκλος με διάμετρο τη ΓΔ θα διέλθει από τα σημεία Ζ, Η (από πρόταση ΙΙΙ 21 – Ευκλείδη), άρα η γωνία ΔΓΗ = γωνία ΔΖΗ (Πρόταση ΙΙΙ - 21 Ευκλείδη) διότι βαίνουν στο ίδιο κυκλικό τμήμα. Η γωνία ΔΖΗ = γωνία ΑΓΖ από την πρόταση 45. Άρα η γωνία ΔΓΗ= γωνία ΑΓΖ και ομοίως δείχνουμε ότι γωνία ΓΔΖ= γωνία ΒΔΗ.

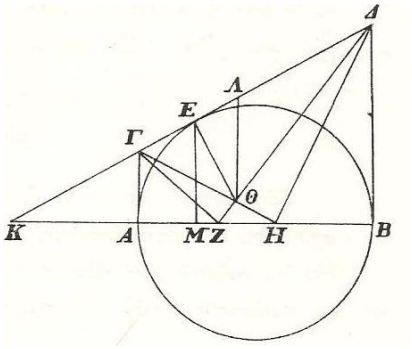
Πρόταση 47 – γ βιβλίο

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ ἐφαπτομένῃ.

Έστω μια εκ των τομών της οποίας άξονας είναι ο ΑΒ κάθετοι οι ΑΓ, ΒΔ και εφαπτομένη η ΓΕΔ, και προς το ¼ του σχήματος ας παρεμβληθεί προς τα δυο άκρα του άξονα το ορθογώνιο ΑΖ ΖΒ και το ΑΗ ΗΒ και ας φέρουμε τις ΓΖ , ΓΗ ,ΔΖ ,ΔΗ. Οι ΓΗ και ΖΔ

συναντιούνται στο Θ και οι ΓΔ και ΒΑ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Κ. Φέρουμε την ΘΕ και θα δείξουμε ότι είναι κάθετη στη ΓΔ.





Έστω ότι δεν είναι κάθετη και φέρω από το Θ κάθετη τη ΘΛ.Επειδή η γωνία ΓΔΖ =γωνία ΗΔΒ (πρόταση 46 - γ βιβλίο), επίσης είναι ίσες οι ΔΒΗ και ΔΛΘ ως ορθές άρα τα τρίγωνα ΔΗΒ και ΛΘΔ είναι όμοια. Επομένως από την Ευκλείδια πρόταση VI 4 ισχύει $\frac{\text{ΗΔ}}{\text{ΔΘ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΛ}}$ από ομοιότητα των ΗΔΘ και ΖΓΘ.

Από την ομοιότητα των ΑΖΓ και ΛΓΘ έχουμε $\frac{\text{ΖΓ}}{\text{ΓΘ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΛ}}$.

Επίσης ισχύει ότι $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΛ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΓΛ}} \xLeftrightarrow{\text{εναλλάξ πρόταση } V\ 16} \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΔΛ}}{\text{ΓΛ}}$

Από παραλλήλια ΔΒ και ΑΓ έχουμε : $\frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΚΑ}}$ (πρόταση VI 4)

Απο τις δυο τελευταίες προτάσεις έχουμε : $\frac{\text{ΔΛ}}{\text{ΓΛ}} = \frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΚΑ}}$

Άγουμε από το Ε παράλληλη προς την ΑΓ έστω την ΕΜ, θα είναι τεταγμένως κατηγμένη επι της ΑΒ και θα είναι $\frac{\text{ΒΚ}}{\text{ΚΑ}} = \frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΜΑ}}$ (πρόταση 36 – α βιβλίο). Άρα $\frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΜΑ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΓ}}$ (πρόταση VI 2- Ευκλείδης). Επομένως $\frac{\text{ΔΛ}}{\text{ΛΓ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΓ}}$ που είναι άτοπο,άρα η ΘΛ δεν είναι κάθετος ούτε και καμία άλλη εκτός της ΘΕ.

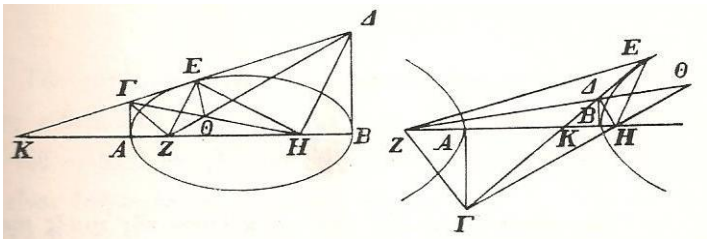
Με την βοήθεια των τριων παραπάνω προτάσεων αποδεικνύεται μια σπουδαία ιδιότητα των κωνικών τομών που λέγεται **ανακλαστική ιδιότητα** των τομών και περιγράφεται παρακάτω.

Ανακλαστική ιδιότητα των κωνικών τομών.

Πρόταση 48 – γ΄ βιβλίο

Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον, ὅτι αἱ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γινόμενα σημεῖα ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ.

Ας φέρουμε τις ΕΖ και ΕΗ. Τότε η γωνία ΓΕΖ = γωνία ΗΕΔ.Με σύγχρονη ορολογία οι εστιακές αποστάσεις του σημείου επαφής σχηματίζουν ίσες γωνίες με την εφαπτομένη στο σημείο επαφής.



Διότι επειδή οι γωνίες ΔΗΘ , ΔΕΘ είναι ορθές, ο κύκλος με διάμετρο την ΔΘ θα διέλθει από τα σημεία Ε,Η(πρόταση ΙΙΙ 31- Ευκλείδη).Άρα οι γωνίες ΔΘΗ και ΔΕΗ θα είναι ίσες διότι βαίνουν στο ίδιο κυκλικό τμήμα. Για τον ίδιο λόγο και η γωνία ΓΕΖ = γωνία ΓΘΖ.Όμως και η γωνία ΓΘΖ =γωνία ΔΘΗ ως κατακορυφήν (πρόταση Ευκλείδη Ι 15), άρα και γωνία ΓΕΖ =γωνία ΔΕΗ.

2.7 Ομοιότητες και διαφορές στην προσέγγιση της έννοιας της εφαπτομένης μεταξύ Ευκλείδη και Απολλώνιου.

Μελετώντας τις προτάσεις του Ευκλείδη και του Απολλώνιου που αφορούν την εφαπτόμενη παρατηρούμε τις εξής ομοιότητες και διαφορές. Όσον αφορά την παρουσίαση των προτάσεων, όπως πράττει ο Ευκλείδης έτσι και ο Απολλώνιος ακολουθεί την εξής δομή: πρώτα ξεκινάει με την πρόταση που αφορά την έννοια, ακολουθεί η έκθεσις, έπεται ο διορισμός, η κατασκευή, η απόδειξη και τέλος τα συμπεράσματα. Για την απόδειξη των προτάσεων τους χρησιμοποιούν και οι δύο την γνωστή αρχαία ελληνική μαθηματική μέθοδο την ΄΄εις άτοπον απαγωγή΄΄. Ο Ευκλείδης εμφανίζει την έννοια της εφαπτόμενης ευθείας στον ορισμό β΄ στο βιβλίο ΙΙΙ, σε αντίθεση με τον Απολλώνιο ο οποίος δεν αναφέρει τον ορισμό της εφαπτομένης στις κωνικές τομές παρά μόνο, στην πρόταση α΄ 17 όπου δίνει έναν τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης φέρνοντας παράλληλη στην κορυφή μιας κωνικής τομής προς την τεταγμένως κατηγμένη η οποία θα πέσει εκτός της τομής. Παραλληλίζοντας την, με την αντίστοιχη πρόταση του Ευκλείδη ΙΙΙ 16 στα *Στοιχεία,* όπου αναφέρει έναν τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης φέρνοντας την κάθετη στο άκρο της διαμέτρου του κύκλου η οποία θα πέσει εκτός του κύκλου, παρατηρούμε ότι ο Απολλώνιος ακολουθεί την μέθοδο του Ευκλείδη στην πρόταση α΄ 17. Συνεχίζοντας στην πρόταση ΙΙΙ 16 ο Ευκλείδης αποδεικνύει ότι μεταξύ του κύκλου και της ευθείας δεν είναι δυνατόν να αχθεί ημιευθεία με αρχή το άκρο της διαμέτρου. Κατά την ίδια λογική ο Απολλώνιος στην πρόταση α΄ 32 αποδεικνύει ότι στην περιοχή μεταξύ του κώνου και της ευθείας δεν παρεμβάλεται άλλη ευθεία (*....ετέρα ευθεία ού παρεμπείσεται.*).

Τα παραπάνω καταδεικνύει και ο Heath στο βιβλίο του ΄΄Treatise on Conic sections΄΄ (chapter II General characteristics 1, Adherence to Euclidean form, conceptions and language, σελίδα xcvii΄΄). Σαν παράδειγμα της προσκόλλησης του Απολλώνιου στους «ορισμούς» των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, μπορούν να αναφερθούν αυτές οι προτάσεις *Περί Κωνικών* του πρώτου βιβλίου, το οποίο πρώτο εισάγει την έννοια της εφαπτομένης. Έτσι, στο α΄ 17 έχουμε την πρόταση ότι εάν σε ένα κωνικό σχήμα τραβήξουμε μία ευθεία γραμμή διαμέσου του άκρου της διαμέτρου παράλληλα με τις τεταγμένες (άξονες) αυτής της διαμέτρου, η ευθεία γραμμή θα πέσει έξω από το κωνικό σχήμα. Και το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι πρόκειται για

εφαπτομένη. Αυτό το επιχείρημα θυμίζει τον ορισμό του Ευκλείδη περί εφαπτομένης σε κύκλο καθώς *«κάθε ευθεία γραμμή που συναντά τον κύκλο και αναπτύσσεται, δεν τέμνει τον κύκλο».* Στον Απολλώνιο, όπως επίσης και στον Ευκλείδη, υπάρχει η απόδειξη ότι καμία ευθεία γραμμή δεν πέφτει ανάμεσα στην εφαπτομένη και στην καμπύλη.

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι ο Απολλώνιος παρότι δεν δίνει τον ορισμό της εφαπτομένης των κωνικών τομών όπως έκανε ο Ευκλείδης στον κύκλο, εντούτοις κατασκευάζει την εφαπτομένη στις κωνικές τομές ακολουθώντας τη μέθοδο του Ευκλείδη όπως έκανε στην πρόταση III 16. Από τις αποδείξεις των προτάσεων III 16 του Ευκλείδη και α΄ 32 του Απολλώνιου παρατηρούμε ότι και οι δυο αποδεικνύουν την μοναδικότητα της εφαπτομένης με την «εις άτοπον απαγωγή», με τη διαφορά ότι ο Απολλώνιος φαίνεται να χρησιμοποιεί αλγεβρικό τρόπο σκέψης, για να καταλήξει σε άτοπο χρησιμοποιώντας προτάσεις του Ευκλείδη από το έκτο βιβλίο του ενώ ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την «εις άτοπον απαγωγή» αλλά όχι την αλγεβρική σκέψη του Απολλώνιου.

Συνεχίζοντας ο Απολλώνιος στην πρόταση α΄ 33 μελετάει το πρόβλημα της χάραξης των εφαπτομένων και συγκεκριμένα την εφαπτομένη σε ένα σημείο της παραβολής. Έστω ένα σημείο της παραβολής Γ και φέρουμε την κάθετο στη διάμετρο ΕΒ. Αν προεκτείνουμε τη διάμετρο κατά ΑΕ=ΕΔ τότε η ΑΓ θα εφάπτεται της παραβολής στο Γ. Με άλλα λόγια βρίσκουμε την εφαπτομένη απλά με το να προεκτείνουμε τη διάμετρο πέρα από το Ε κατά τμήμα ίσο με τη τετμημένη του σημείου επαφής και συνδέοντας το σημείο που προσδιορίζεται με αυτόν τον τρόπο με το Γ. Για τον Απολλώνιο, όπως και για τον Ευκλείδη, εφαπτομένη καμπύλης είναι μια ευθεία που αγγίζει αλλά δεν τέμνει την καμπύλη. Άρα για να το αποδείξει το αποτέλεσμα, ο Απολλώνιος χρησιμοποιεί τη μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής» (βλέπε την απόδειξη στην πρόταση α΄ 33 παραπάνω).

Ξεχωριστά, και αυτό αποτελεί μια καινοτομία για την κατασκευή της εφαπτομένης, ο Απολλώνιος μελετά την εφαπτομένη στην έλλειψη και την υπερβολή και κατ' επέκταση στον κύκλο χρησιμοποιώντας αριθμητικά μέσα και πιο συγκεκριμένα την αρμονική τετράδα σημείων. Αυτό το επιχειρεί στην πρόταση α΄ 34 όπου μας δείχνει τον τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης σ'ένα σημείο της κωνικής τομής Γ. Φέρνει την τεταγμένη στη διάμετρο της κωνικής τομής έστω Δ και προσδιορίζει το Ε ώστε το Δ και Ε να αποτελούν αρμονική τετράδα με τα άκρα της διαμέτρου. Ενώνουμε το Ε με το Γ και κατασκευάστηκε η εφαπτόμενη. Ο Απολλώνιος και σε

αυτή την περίπτωση αποδεικνύει την πρόταση με την «εις άτοπον απαγωγή» βασισμένος στις προτάσεις του Ευκλείδη των βιβλίων V και VI.

Ο Απολλώνιος ολοκληρώνει τη μελέτη των εφαπτομένων αποδεικνύοντας τα αντίστροφα αποτελέσματα της κατασκευής της εφαπτομένης στην παραβολή (α΄33) και στην έλλειψη και υπερβολή (α΄34) με τις προτάσεις α΄ 35 και α΄ 36.

Στο β΄ βιβλίο και την πρόταση 49 ο Απολλώνιος γενικεύει την κατασκευή της εφαπτόμενης σε κωνικές τομές από σημείο εκτός της κωνικής τομής προς την κωνική τομή. Αποδεικνύει ξεχωριστά για την παραβολή παίρνοντας όλες τις περιπτώσεις για το που μπορεί να βρίσκεται το σημείο χρησιμοποιώντας την πρόταση α΄ 33 και συνεχίζει με τις άλλες κωνικές τομές έλλειψη και υπερβολή χρησιμοποιώντας την πρόταση α΄ 34 και εξετάζοντας όλες τις περιπτώσεις για το που μπορεί να βρίσκεται το σημείο εκτός της κωνικής τομής. Από τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι οι κωνικές τομές είναι οι μόνες καμπύλες στο επίπεδο στις οποίες μπορούμε να φέρουμε εφαπτόμενη σε ένα δεδομένο σημείο τους χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη.

Η προωθημένη χρήση της εφαπτομένης από τον Απολλώνιο σκιαγραφείται από μια σημαντική ενότητα του α΄ βιβλίου και στις προτάσεις 41- 50, η οποία αποτελείται από προτάσεις που οδηγούν σε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων, από την αρχική διάμετρο και την εφαπτομένη στο άκρο της σε οποιαδήποτε διάμετρο και την εφαπτομένη στο άκρο της. Αυτό που αποδεικνύει ο Απολλώνιος είναι ότι αν ληφθεί οποιαδήποτε άλλη διάμετρος, η ιδιότητα τεταγμένης της κωνικής αναφορικά με αυτή τη διάμετρο έχει την ίδια μορφή όπως και αναφορικά με την αρχική διάμετρο. Επομένως η εφαπτομένη στο άκρο της διαμέτρου έχει το ρόλο του κάθετου άξονα στην σύγχρονη ορολογία.Ο Απολλώνιος απέδειξε ότι οποιοδήποτε τέτοιο σύστημα μπορεί να αποτελέσει τους άξονες μιας κωνικής τομής και αυτό αποτελεί μια μεγάλη καινοτομία σε σχέση με τη χρήση της εφαπτομένης από τον Ευκλείδη.

2.8 Η ιδιότητα εστίας – διευθετούσας που ήταν γνωστή στον Ευκλείδη.

Ο Heath στο βιβλίο «Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών» τόμος ΙΙ και στη σελίδα 158 αναφέρει ότι είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η διευθετούσα δεν εμφανίζεται καθόλου στη

μεγαλιώδη πραγματεία του Απολλώνιου *Περί κωνικών τομών*. Οι εστιακές ιδιότητες των κεντρικών κωνικών τομών δίνονται από τον Απολλώνιο, αλλά οι εστίες προκύπτουν με διαφορετικό τρόπο, δίχως την παραμικρή αναφορά στη διευθετούσα. Η εστία της παραβολής δεν εμφανίζεται καθόλου. Ενδεχομένως πρέπει να συμπεράνουμε πως ούτε το *Περί κωνικών τομών* του Ευκλείδη περιείχε την ιδιότητα εστίας – διευθετούσας, διότι σύμφωνα με τον Πάππο, ο Απολλώνιος βάσισε τα τέσσερα πρώτα βιβλία του στα τέσσερα βιβλία του Ευκλείδη και στη συνέχεια τα συμπλήρωσε με διάφορες προσθήκες. Ωστόσο ο Πάππος δίνει την πρόταση ως λήμμα στο έργο του Ευκλείδη *Περί τόπων προς επιφάνεια,* γεγονός απο το οποίο δεν μπορούμε παρά να συμπεράνουμε ότι είχε συμπεριληφθεί στην πραγματεία αυτή, χωρίς απόδειξη. Επομένως, αν ο Ευκλείδης δεν είχε λάβει την πρόταση από το έργο του *Περί κωνικών τομών* τι πιο πιθανό απο το να περιέχεται στο *Περί στερεών τόπων* του Αρισταίου;

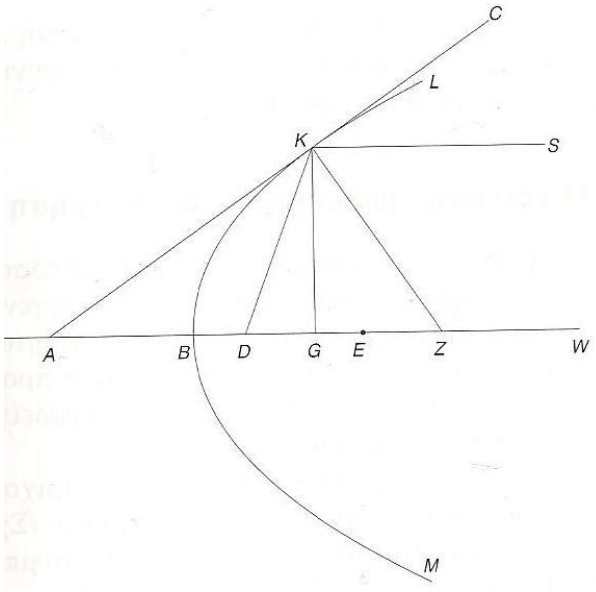
Σύμφωνα με τη διατύπωση του θεωρήματος από τον Πάππο, ο γεωμετρικός τόπος ενός σημείου τέτοιου, ώστε η απόσταση του από ένα συγκεκριμένο σημείο προς ην απόσταση του από μια σταθερή ευθεία να σχηματίζουν δοσμένο λόγο, είναι μια κωνική τομή, η οποία είναι έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή, αναλόγως του αν ο δοσμένος λόγος είναι μικρότερος, ίσος η μεγαλύτερος της μονάδας.

2.9 Εστίες – Ανακλαστική ιδιότητα των κωνικών τομών.

Στο βιβλίο γ΄, ο Απολλώνιος ασχολείται με τις εστιακές ιδιότητες της έλλειψης και της υπερβολής. Στην πρόταση 45 στο γ΄ βιβλίο ορίζει τις εστίες μιας έλλειψης ως τα σημεία Ζ και Η στον άξονα ΑΒΓ για τα οποία το ορθογώνιο με πλευρές ΑΖ και ΖΒ ισούται με το ¼ του ορθογωνίου με πλευρές την παράμετρο Η και τον άξονα ΑΒ και παρόμοια για το ορθογώνιο με πλευρές ΑΗ και ΗΒ. Ο Απολλώνιος αποκαλεί τα σημεία αυτά *«σημεία που προκύπτουν από την παραβολή»* του ορθογωνίου στον άξονα. Ο όρος *«εστίες»* χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Γιοχάνες Κέπλερ το 1604 (Katz - Ιστορία των Μαθηματικών σελίδα 144).

Με βάσει αυτόν τον ορισμό ο Απολλώνιος αποδεικνύει μια σειρά από προτάσεις που κορυφώνεται στη πολύ γνωστή ιδιότητα ότι οι ευθείες από τις δυο εστίες προς οποιαδήποτε σημείο της έλλειψης σχηματίζουν ίσες γωνίες με την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο αυτό.

Παρόλο που ο Απολλώνιος εκθέτει παρόμοια αποτελέσματα και για την υπερβολή, δεν ασχολείται με τις εστιακές ιδιότητες της παραβολής, ίσως να τις είχε μελετήσει σε προηγούμενο έργο του που δεν διεσώθηκε. Η ανάλογη πρόταση για την παραβολή, ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από την εστία της και ένα σημείο της σχηματίζει με την εφαπτομένη στο σημείο αυτό γωνία ίση με εκείνη που σχηματίζει η εφαπτομένη και η παράλλήλη προς τον άξονα ευθεία από το σημείο αυτό, αποδείχθηκε για πρώτη φορά μάλλον από τον Διοκλή (αρχές του 2^{ου} π.Χ. αι.), σύγχρονου του Απολλώνιου, σε μια πραγματεία με τίτλο *Περί πυρείων* (*Περί καυστικών κατόπτρων*), που γράφτηκε λίγα χρόνια πριν από τα *Κωνικά.* Μάλιστα η πραγματεία οφείλει τον τίτλο της σε αυτή την ιδιότητα της παραβολής. Το πρόβλημα ήταν να βρεθεί κατοπτρική επιφάνεια τέτοια ώστε, όταν τοποθετηθεί απέναντι στον ήλιο, οι ανακλώμενες ακτίνες να συναντώνται σε ένα σημείο και να προξενούν εκπύρωση. Θα ολοκληρώσουμε το θέμα των εστιών μελετώντας πως ο Διοκλής απέδειξε την εστιακή ιδιότητα της παραβολής στην πρόταση 1 της πραγματείας του. Η απόδειξη είναι από το βιβλίο του Victor Katz σελίδα 144. Δοθέντος της παραβολής LBM με άξονα BW, ορίζουμε επί του άξονα της τμήμα BE ίσο προς το ήμισυ της παραμέτρου και διχοτομούμε την BE στο D που η απόσταση του από την κορυφή είναι P/4 (σήμερα το καλούμε εστία). Απο τυχόν σημείο K της παραβολής φέρουμε την εφαπτομένη AKC που τέμνει την προέκταση του άξονα στο A, φέρουμε την KS παράλληλη προς τον άξονα και γράφουμε το τμήμα DK.Τότε η γωνία AKD=γωνία SKC.



Για να το δείξουμε θα φέρουμε πρώτα την κάθετο KG στον άξονα, από την πρόταση α΄ 33 των κωνικών έχουμε AB = BG.Φέρουμε την κάθετο από το K προς την AK που τέμνει τον άξονα στο Z. Επειδή KG^2 = AG·GZ και KG^2 = p·BG, GZ=P/2 .Άρα GZ = BE και GB = EZ, AB=EZ και τελικά AD = DZ. Επειδή το τρίγωνο AKZ είναι ορθογώνιο και το D είναι το μέσο της υποτείνουσας του, έχουμε AD = DK = DZ. Άρα γωνία DKZ =γωνία DZK. Επειδή η KS είναι παράλληλη προς την AZ έπεται ότι γωνία ZKS=γωνία DKZ. Αφαιρώντας τις ίσες αυτές γωνίες από τις ορθές ZKC και ZKA καταλήγουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα.

Επανερχόμαστε στην έλλειψη και την υπερβολή για να δείξουμε έναν τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης σε ένα σημείο της κωνικής τομής με την βοήθεια της ανακλαστικής ιδιότητας. Ουσιαστικά πρόκειται για την αντίστροφη πρόταση της ανακλαστικής ιδιότητας.

Θα την αποδείξουμε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των δυο εστιών της έλλειψης και της υπερβολής που υπάρχει στα Κωνικά στις προτάσεις γ΄ 51 και γ΄ 52. Η πρόταση γ΄ 51 δηλώνει ότι στην υπερβολή αν συνδέσουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα ένα τυχαίο σημείο με κάθε εστία, το μεγαλύτερο από αυτά τα δυο ευθύγραμμα τμήματα υπερέχει του μικρότερου κατά τον άξονα. Από την άλλη μεριά η πρόταση γ΄ 52 του Απολλώνιου δηλώνει ότι στην έλλειψη, το άθροισμα των δυο αυτών ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με τον άξονα. Διαφορετικά αν M είναι σημείο της καμπύλης και E, E΄ οι δυο εστίες, τότε για μεν την υπερβολή ισχύει (ME) – (ME΄) =2α , για δε την έλλειψη (ME) +(ME΄) =2α. Η ιδιότητα αυτή, μάλιστα, είναι η ιδιότητα με την οποία ορίζουμε τις καμπύλες αυτές στα σημερινά εγχειρίδια.

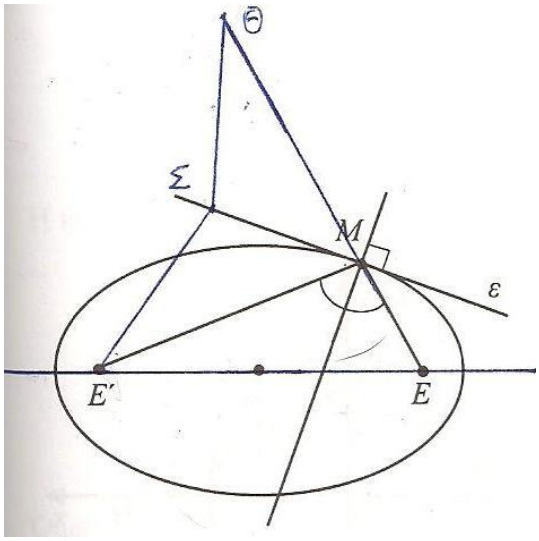
Κατασκευή εφαπτομένης έλλειψης-υπερβολής με την αντιστροφή της πρότασης της ανακλαστικής ιδιότητας.

Έστω έλλειψη με εστίες τα σημεία E και E΄ και M ένα τυχαίο σημείο της έλλειψης.Φέρνουμε τις εστιακές αποστάσεις ME και ME΄ και προεκτείνουμε την ME (η την ME΄). Κατόπιν κατασκευάζουμε την διχοτόμο της γωνίας ΘME΄. Θα αποδείξουμε ότι η διχοτόμος είναι εφαπτομένη της έλλειψης

Απόδειξη

Έστω η ευθεία Mχ διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας EME΄. Θα αποδείξουμε ότι η Mχ είναι εφαπτομένη της έλλειψης. Θα πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας και θα

δείξουμε ότι είναι εξωτερικό της κωνικής τομής, επομένως η ευθεία αυτή θα είναι η η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ. Στην προέκταση της ΜΕ΄ παίρνουμε σημείο Θ τέτοιο ώστε ΘΜ = ΜΕ΄. Από την ισότητα των τριγώνων ΘΜΣ και ΣΜΕ΄ και την πρόταση Ι 4 του Ευκλείδη προκύπτει ότι ΣΘ = ΣΕ΄. Έχουμε ότι ΣΕ΄ + ΣΕ = ΣΘ + ΣΕ



Όμως ΣΘ +ΣΕ > ΘΕ από την τριγωνική ανισότητα άρα ΣΕ΄ +ΣΕ > ΘΕ.

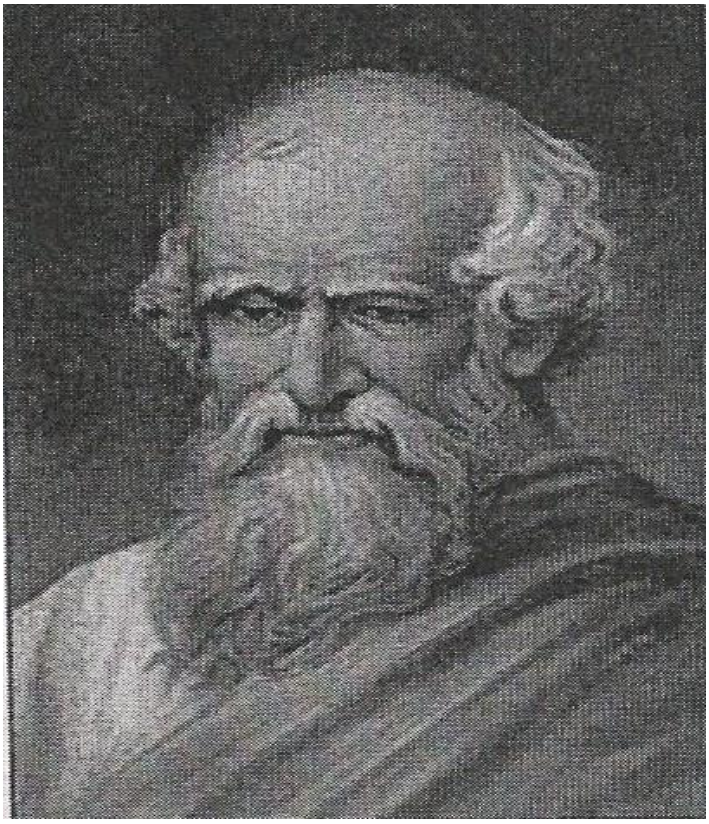
Η ΘΕ=ΜΘ +ΜΕ = ΜΕ΄+ ΜΕ =2α (από την πρόταση 52- γ΄ βιβλίο) άρα ΣΕ + ΣΕ΄ >2α που σημαίνει ότι το Σ βρίσκεται εκτός της τομής άρα η ευθεία είναι εφαπτόμενη της έλλειψης στο Μ.

Εντελώς ανάλογη είναι η πρόταση για την κατασκευή της εφαπτόμενης της υπερβολής χρησιμοποώντας την αντιστροφή της ανακλαστικής ιδιότητας της υπερβολής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

ΠΕΡΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΣΤΗΝ ΕΛΙΚΑ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

3.1 Λίγα λόγια για την ζωή και το έργο του Αρχιμήδη.



Ο Αρχιμήδης θεωρείται από πολλούς ιστορικούς ως ο σπουδαιότερος μαθηματικός της αρχαιότητας αλλά και ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Κατατάσσεται ανάμεσα στις ιδιοφυίες, το έργο των οποίων καθόρισε για πολλούς αιώνες την τύχη της επιστήμης και της ανθρωπότητας. Ο E.T.Bell τον συγκρίνει με τον Νεύτωνα και τον Γκάους. Μεταξύ του Αρχιμήδη και του Νεύτωνα μπορούν να διατυπωθούν πολλοί παραλληλισμοί όπως ότι ασχολήθηκαν με τα ίδια επιστημονικά πεδία (μαθηματικά, φυσική και αστρονομία) και επέδειξαν παρόμοια δύναμη του νου να διεισδύει στην ουσία των φαινομένων.

Ο Αρχιμήδης γεννήθηκε γύρω στο 287 π.χ στις Συρακούσες της Σικελίας. Αρχικά μαθήτευσε με τον πατέρα του, τον μαθηματικό και αστρονόμο Φειδία. Από πολύ νωρίς τα ενδιαφέροντα του εστιάστηκαν στην αστρονομία, στη μηχανική και στα μαθηματικά. Για να ολοκληρώσει τις σπουδές του, επισκέφθηκε την Αλεξάνδρεια που ήταν επιστημονικό και πολιτιστικό κέντρο. Εκεί σπούδασε τα *Στοιχεία* και τις κωνικές τομές του Ευκλείδη, τα έργα του Ευδόξου, κ.ά. Αποκατέστησε φιλικές σχέσεις με τους μεγαλύτερους επιστήμονες της Αλεξάνδρειας, ιδιαίτερα με τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο και τον αστρονόμο Κόνωνα το Σάμιο τον οποίο φαίνεται να εκτιμούσε ιδιαίτερα. Στον Κόνωνα μάλιστα έστελνε κάποια προβλήματα με ή χωρίς τις λύσεις τους, ζητώντας να τα γνωστοποιήσει και σε άλλους μαθηματικούς για να εκφέρουν την γνώμη τους η να δώσουν και δικές τους αποδείξεις. Μετά τον θάνατο του Κόνωνα κοινοποίησε τις εργασίες του στο μαθητή του Κόνωνα τον Δοσίθεο.

Η πιο γόνιμη περίοδος δράσης του Αρχιμήδη ως Μαθηματικού, θεωρητικού μηχανικού και κατασκευαστή αρχίζει μετά την επιστροφή του από τις Συρακούσες. Η δημιουργική δύναμη του Αρχιμήδη δεν εξασθενεί μέχρι και το τέλος της ζωής του.

Τη μεγαλύτερη, ωστόσο, εφευρετικότητα ανέπτυξε ο Αρχιμήδης κατά την τριετή άμυνα της πόλης των Συρακουσών εναντίον των Ρωμαίων. Ο Ιέρων, έχοντας προβλέψει ότι ο ανταγωνισμός μεταξύ Ρώμης και Καρχηδόνας θα ενέπλεκε στον πόλεμο και τις Συρακούσες, παρακάλεσε τον Αρχιμήδη να εφαρμόσει τις μηχανικές του ανακαλύψεις για την οχύρωση και άμυνα της πόλης. Πράγματι ο Αρχιμήδης ανέλαβε τη διεύθυνση της άμυνας της πόλης εναντίον των Ρωμαίων. Έτσι κατασκεύασε βλητικές μηχανές και αρπάγες με τις οποίες συλλαμβάνονταν τα ρωμαϊκά πλοία, καθώς και καυστικά κάτοπτρα με τα οποία συγκέντρωνε τις ηλιακές ακτίνες επάνω στα πλοία και τα έκαιγε. Ωστόσο ο Αρχιμήδης, πιστός στο καθαρό ερευνητικό πνεύμα, θεωρούσε τις πρακτικές εφευρέσεις κατώτερες από τη θεωρητική επιστημονική έρευνα, με αποτέλεσμα να μην αφήσει καμία περιγραφή τους.

Ο Αρχιμήδης πέθανε το 212 π.χ. κατά την άλωση των Συρακουσών από τον Μάρκελλο, παρά την ρητή διαταγή του Ρωμαίου στρατηγού να μην τον πειράξει κανείς. Όμως κατά την γενική σφαγή που ακολούθησε την πτώση της πόλης και ενώ ο Αρχιμήδης ήταν απασχολημένος με τη λύση κάποιου γεωμετρικού προβλήματος σχεδιάζοντας σχήματα στην άμμο, ένας στρατιώτης τον σκότωσε.

3.2 Εισαγωγή στην πραγματεία «Περί Ελίκων».

Στην πραγματεία αυτή ο Αρχιμήδης διατυπώνει τα κύρια αποτελέσματα σχετικά με μια καμπύλη δικής του επινόησης, τη λεγόμενη *«έλικα του Αρχιμήδη»*, την οποία ορίζει βασιζόμενος στις αρχές της κινηματικής ως εξής:

Αν μια ημιευθεία, η αρχή της οποίας παραμένει σταθερή , αναγκαστεί να περιστραφεί με σταθερή γωνιακή ταχύτητα σε ένα επίπεδο έως ότου επιστρέψει στη θέση από την οποία άρχισε η περιστροφή και αν συγχρόνως, καθώς η ημιευθεία περιστρέφεται, ένα σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος της, αρχίζοντας από την αρχή της, το σημείο θα διαγράψει στο επίπεδο μια έλικα.

Ο Αρχιμήδης ξεκινάει με την απόδειξη έντεκα βοηθητικών προτάσεων, σχετικών με την ομαλή μετατόπιση σημείου πάνω σε μια ευθεία, με το μήκος των τμημάτων που ορίζονται από κύκλους και τις εφαπτόμενες σε αυτούς και με το άθροισμα των όρων προόδων που σχηματίζονται από τα τετράγωνα ευθυγράμμων τμημάτων που διαφέρουν εξίσου το ένα από το άλλο. Αυτές οι προτάσεις από την πρώτη ως την ενδέκατη προηγούνται της αναλύσεως των ιδιοτήτων της έλικας και πιο συγκεκριμένα των προτάσεων 12 ως 20 που αναφέρονται στις θεμελιώδεις ιδιότητες της έλικας αλλά και τον ορισμό και τις ιδιότητες της εφαπτομένης της έλικας. Πριν την δωδέκατη πρόταση έχουμε επτά ορισμούς που αφορούν τον τρόπο που δημιουργήθηκε η έλικα και εισάγει τη σχετική ορολογία, δηλαδή την αρχή της έλικας, την αρχική θέση της περιστρεφόμενης ευθείας, τα διαδοχικά τμήματα που διανύει το κινητό επί της περιστρεφόμενης ευθείας, τα χωρία και τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται από τις διαδοχικές έλικες. Συνολικά στην πραγματεία *Περί Ελίκων* υπάρχουν 7 ορισμοί, 28 προτάσεις και 5 πορίσματα. Στο κεφάλαιο αυτό θα εστιάσουμε την προσοχή μας στις προτάσεις που αφορούν την εφαπτομένη στην έλικα και τις ιδιότητες αυτής.

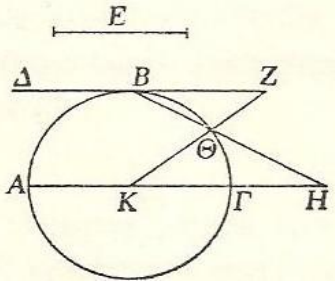
Ο Αρχιμήδης ξεκινάει την πραγματεία του με μια σειρά προτάσεων (1-4) οι οποίες είναι εισαγωγικές στο κύριο αντικείμενο της πραγματείας. Πρώτον έχουμε δυο προτάσεις σχετικές με τη ομαλή κίνηση, κατόπιν δυο απλές γεωμετρικές προτάσεις που ακολουθούνται από προτάσεις του ίδιου είδους (5-9).

3.3 Βασικά λήμματα στο έργο «Περί Ελίκων»

Τα σφοδρότερα πυρά των ιστορικών των Μαθηματικών στρέφονται κατά των βασικών λημμάτων, δηλαδή των προτάσεων 5-9 , που προηγούνται της μελέτης της έλικας και της εφαπτομένης της (δηλαδή των προτάσεων 12-20). Ο Πάππος ($3^{ος}$ αιώνας μ.Χ.) ασκεί κριτική στον Αρχιμήδη ότι εφαρμόζει πολύ χονδροειδή μέσα στις αποδείξεις του. Ο Heath στο έργο του Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών αφιερώνει στην πραγματεία *Περί ελίκων* ειδικό συμπλήρωμα [Heath 1921,II, 556-561] στο οποίο εκθέτει μιαν απλούστερη κατά την γνώμη του, απόδειξη της βασικής ιδιότητας της υπεφαπτομένης στην έλικα. Παρατηρεί επιπλέον ένα πολύ ενδιαφέρον σημείο, δηλαδή ότι ο Αρχιμήδης στην απόδειξη του χρησιμοποιεί μόνον τις προτάσεις 7 και 8 και δεν χρησιμοποιεί καθόλου τις προτάσεις 6 και 9. Ο Heath, αντίθετα, κατασκευάζει την απόδειξη του με βάση ακριβώς τις προτάσεις 6 και 9, τις οποίες θεμελιώνει εκ νέου. Ας ξεκινήσουμε με την πρόταση 5.

Πρόταση 5

Κύκλου δοθέντος καὶ εὐθείας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ἐπὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς διαχθείσας ποτὶ τὰν δοθεῖσαν ὁποιανοῦν κύκλου περιφέρειαν.

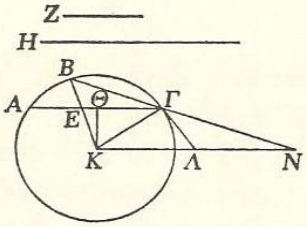


Σε ελεύθερη απόδοση, αν, δεδομένου ενός κύκλου ΑΒΓ με κέντρο το Κ, αχθεί εφαπτομένη σ΄αυτόν στο σημείο Β, τότε από το Κ μπορεί να αχθεί ευθεία ΚΘΖ, η οποία συναντά τον κύκλο στο Θ και την εφαπτομένη στο Ζ έτσι ώστε $\frac{\Theta Z}{K\Theta} < \frac{\widehat{B\Theta}}{C}$ όπου c το μήκος της περιφέρειας αυθαίρετου κύκλου.

Φέρνουμε από το κέντρο Κ παράλληλη προς την εφαπτόμενη ΔΒΖ και σχηματίζονται τα όμοια τρίγωνα ΒΘΖ και ΚΘΗ. Άρα έχουμε την εξής αναλογία $\frac{\Theta Z}{\Theta K} = \frac{B\Theta}{\Theta H}$ άρα $\frac{\Theta Z}{\Theta K} < \frac{\widehat{B\Theta}}{E}$ όπου Ε ο Αρχιμήδης θεωρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα μεγαλύτερο από το c και αναφέρει ότι η ΘΗ τοποθετείται ίση με την Ε και **νεύουσα** προς το Β. Αυτή είναι η συνήθης φρασεολογία του είδους του προβλήματος που είναι γνωστό ως **νεύσις,** όπου ένα ευθύγραμμο τμήμα δοσμένου μήκους πρέπει να τοποθετηθεί μεταξύ δυο τμημάτων ή καμπυλών σε τέτοια θέση ώστε, αν προεκταθεί, να διέρχεται από ένα δοσμένο σημείο (αυτό είναι το νόημα του όρου *νεύουσα*).

Πρόταση 6

Κύκλου δοθέντος καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτὶ τὰν περιφέρειαν αὐτοῦ ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰν ἐν τῷ κύκλῳ δεδομέναν γραμμάν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ποτιπεσούσας τοῦ ἐπὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὸ ἕτερον πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας εὐθείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ᾖ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν.



Έστω ένας κύκλος ΑΒΓ με κέντρο το Κ και μια χορδή ΑΓ μικρότερη της διαμέτρου. Στην χορδή ΑΓ φέρνουμε κάθετη από το Κ,έστω την ΚΘ και αν δοθεί οποιοσδήποτε λόγος $\frac{Z}{H} < \frac{ΘΓ}{ΘK}$ [=εφα] τότε πάντοτε μπορεί να αχθεί ευθεία ΚΕΒ έτσι ώστε $\frac{BE}{BΓ} = \frac{Z}{H} <$ εφα. Έτσι η πρόταση μας λέει ότι το $\frac{BE}{BΓ}$ μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μικρότερη της εφα.

Και αυτή την πρόταση την αποδεικνύει με τη βοήθεια νεύσης. Η απόδειξη του Αρχιμήδη συνίσταται στο εξής: Φέρνουμε την ΓΛ κάθετη στην ΚΓ, τότε από την ομοιότητα των τριγώνων ΚΘΓ και ΚΓΛ έχουμε $\frac{ΘΓ}{ΘK} = \frac{KΓ}{ΓΛ}$ = εφα όπου α είναι η γωνία ΘΚΓ που είναι ίση με τη γωνία ΓΛΚ. Αφού ο δεδομένος λόγος $\frac{Z}{H} < \frac{ΓΘ}{ΘK}$ τότε $\frac{Z}{H} = \frac{KΓ}{ΓΛ}$.

Επιλέγουμε τμήμα c τέτοιο ώστε $\frac{Z}{H} = \frac{KΓ}{C}$ και κατασκευάζουμε την εξής νεύση : βρίσκουμε ευθεία που διέρχεται από το Γ που το τμήμα της να περιλαμβάνεται ανάμεσα στο

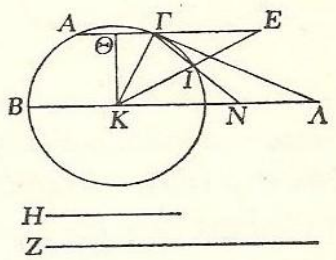
σημείο τομής της Β με την περιφέρεια και την ευθεία ΚΝ που είναι παράλληλη στην ΑΓ να ισούται με c.Το Β δεν συμπίπτει με το Γ αφού c = ΒΝ > ΓΛ. Η ευθεία ΚΒ θα είναι η ζητούμενη. Πράγματι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΚΒΝ άρα :

$$\frac{\text{ΕΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΚΒ}}{\text{ΒΝ}} = \frac{\text{ΚΓ}}{c} = \frac{Z}{\text{Η}}.$$

Η παρακάτω πρόταση συμπληρώνει την πρόταση 6. Σε αυτην αποδεικνύεται ότι αν δοθεί οποιοσδήποτε λόγος $\frac{\text{Η}}{\text{Ζ}} > \frac{\text{ΘΓ}}{\text{ΘΚ}} =$ εφα (όπου α είναι η γωνία ΘΚΓ) τότε πάντοτε μπορεί να αχθεί ευθεία ΚΙΕ, έτσι ώστε $\frac{\text{ΕΙ}}{\text{ΓΙ}} = \frac{\text{Η}}{\text{Ζ}} >$ εφα .Στην απόδειξη χρησιμοποιείται επίσης νεύση.

Πρόταση 7

Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἐκβεβλημένας δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἐναπολαφθείσας ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἐκβεβλημένας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ᾖ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν.



Φέρνουμε την ΓΛ κάθετη στην ΚΓ, τότε από την ομοιότητα των τριγώνων ΚΘΓ και ΚΓΛ έχουμε $\frac{\text{ΘΓ}}{\text{ΘΚ}} = \frac{\text{ΚΓ}}{\text{ΓΛ}}$ = εφα όπου α είναι η γωνία ΘΚΓ που είναι ίση με τη γωνία ΓΛΚ.

Αφού ο δεδομένος λόγος $\frac{\text{Η}}{\text{Ζ}} > \frac{\text{ΓΘ}}{\text{ΘΚ}}$ τότε $\frac{\text{Ζ}}{\text{Η}} > \frac{\text{ΚΓ}}{\text{ΓΛ}}$.

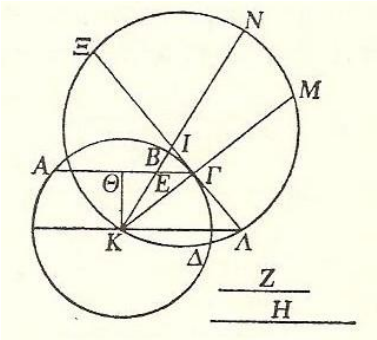
Επιλέγουμε τμήμα c τέτοιο ώστε $\frac{\text{Η}}{\text{Ζ}} = \frac{\text{ΚΓ}}{\text{C}}$ και κατασκευάζουμε την εξής νεύση : βρίσκουμε ευθεία που διέρχεται από το Γ που το τμήμα της να περιλαμβάνεται ανάμεσα στο σημείο τομής της Γ με την περιφέρεια και την ευθεία ΚΝ που είναι παράλληλη στην ΑΓ να ισούται με c. Η ευθεία ΚΙΕ θα είναι η ζητούμενη. Πράγματι το τρίγωνο ΕΙΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΚΙΝ άρα :

$$\frac{\text{ΕΙ}}{\text{ΙΓ}} = \frac{\text{ΚΙ}}{\text{ΙΝ}} = \frac{\text{ΚΓ}}{C} = \frac{H}{\text{Ζ}}.$$

Στις δυο παρακάτω προτάσεις 8 και 9 αποδεικνύονται ότι είναι δυνατόν να φέρουμε μια ευθεία ΚΕΒ η οποία να τέμνει τη χορδή ΑΓ στο Ε, τον κύκλο στο σημείο Β και την εφαπτομένη στο Γ στο σημείο Ι, έτσι ώστε $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΓΙ}} = \frac{\text{Ζ}}{\text{Η}}$ (η ΚΒ τέμνει την ΑΓ στην περίπτωση που $\frac{\text{Ζ}}{\text{Η}} < \frac{\text{ΘΓ}}{\text{ΘΚ}}$ και την προέκταση της ΑΓ στην περίπτωση που $\frac{\text{Ζ}}{\text{Η}} > \frac{\text{ΘΓ}}{\text{ΘΚ}}$ πρόταση 9).Θα αποδείξουμε την πρόταση 8, με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και η πρόταση 9.

Πρόταση 8

Κύκλου δοθέντος καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου καὶ ἄλλας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν τινα εὐθεῖαν ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ᾖ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν.



Η απόδειξη είναι από το βιβλίο του Heath «Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών» τόμος ΙΙ σελίδα 86.

Αν ο λόγος $\frac{Z}{H}$ είναι οποιοσδήποτε δοσμένος λόγος μικρότερος της $\frac{\Theta\Gamma}{\Theta K}$, ζητείται να σχεδιαστεί η ΚΕΒΙ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε, τον κύκλο στο Β και την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ στο σημείο Ι έτσι ώστε $\frac{BE}{\Gamma I} = \frac{Z}{H}$

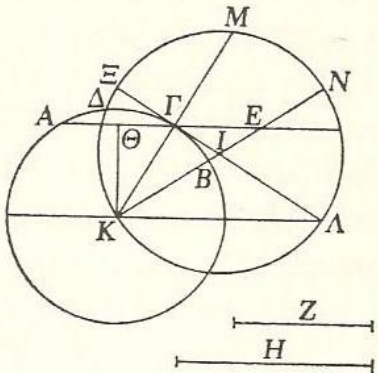
Φέρνουμε την παράλληλη από το Κ προς την ΑΓ η οποία τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ στο σημείο Λ. Από τα όμοια τρίγωνα ΘΚΛ και ΚΓΛ έχουμε : $\frac{\Theta\Gamma}{\Theta K} = \frac{K\Gamma}{\Gamma\Lambda}$ άρα $\frac{Z}{H} < \frac{K\Gamma}{\Gamma\Lambda}$. Προεκτείνουμε την ΛΓ ως το Ξ με την ΞΓ τέτοιου μήκους ώστε $\frac{Z}{H} = \frac{K\Gamma}{\Gamma\Xi}$ έτσι ώστε ΓΞ > ΓΛ. Γράφουμε τον κύκλο που ορίζεται από τα σημεία ΚΛΞ και έστω η προέκταση της ΚΓ τέμνει αυτόν τον κύκλο στο σημείο Μ. Εφόσον ΞΓ>ΓΛ, και η ΚΜ είναι κάθετη στην ΞΛ , είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε την ΙΝ ίση με την ΓΜ και νεύουσα προς το Ο (Θεωρούμε ότι η κατασκευή είναι δυνατή).Έστω η ΝΙΚ τέμνει τον αρχικό κύκλο στο σημείο Β. Τότε η ΚΕΒΙ είναι η ζητούμενη ευθεία διότι : ΞΙ·ΙΛ=ΙΚ ΙΝ=ΙΚ·ΓΜ (1)

Όμως από την παραλληλία των ΚΛ και ΕΓ έχουμε $\frac{KE}{KI} = \frac{\Lambda\Gamma}{\Lambda I}$ (2) από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ΚΕ·ΙΛ=ΚΙ·ΓΛ (3) διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (3)έχουμε

$\frac{\Xi I \cdot I\Lambda}{KE \cdot I\Lambda} = \frac{IK \cdot BK}{KI \cdot \Gamma\Lambda}$ **ή** $\frac{\Xi I}{KE} = \frac{BK}{\Gamma\Lambda}$ **ή** $\frac{\Xi I}{KE} = \frac{\Gamma\Xi}{\Gamma K}$ **ή** $\frac{\Xi I}{KE} = \frac{\Gamma\Xi}{KB}$. Συνεπώς $\frac{KB}{KE} = \frac{\Gamma\Xi}{\Xi I}$ άρα $\frac{BE}{KB} = \frac{I\Gamma}{\Gamma\Xi}$ **ή** $\frac{BE}{I\Gamma} = \frac{KB}{\Gamma\Xi} = \frac{K\Gamma}{\Gamma\Xi} = \frac{Z}{H}$

Πρόταση 9

Τῶν αὐτῶν δεδομένων καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ἐκβεβλημένας δυνατὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ποτὶ τὰν ἁφὰν τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἴ κα ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ᾖ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγομέναν.



Συνεχίζοντας στην πραγματεία περί ελίκων ο Αρχιμήδης εισάγει τους ορισμούς του, αναφορικά με την ίδια την έλικα, την αρχή, την αρχική γραμμή, την πρώτη απόσταση (=το ακτινικό διάνυσμα στο τέλος μιας περιστροφής), την δεύτερη απόσταση (= το ίσο μήκος που προστίθεται στο ακτινικό διάνυσμα κατά τη διάρκεια της δεύτερης πλήρους περιστροφής), την πρώτη επιφάνεια, τη δεύτερη επιφάνεια, τον πρώτο και τον δεύτερο κύκλο.

3.4 Ορισμοί στο «Περί ελίκων»

α΄. Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

β΄. Καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς ἀρχὰ τᾶς ἕλικος.

γ΄. Ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς, ἀφ᾽ ἃς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς.

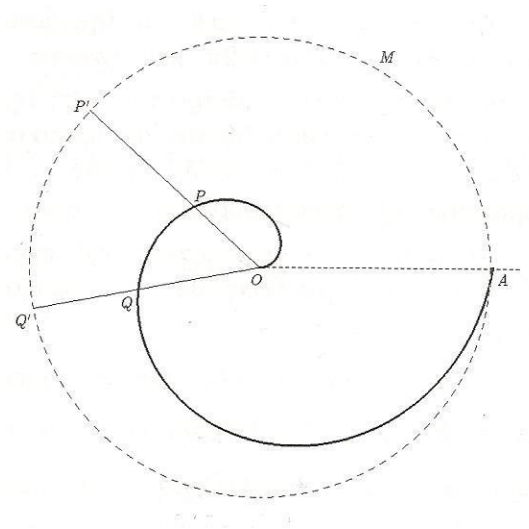
δ΄. Εὐθεῖα, ἂν μὲν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω, ἂν δ᾽ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσῃ, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν.

ε΄. Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν πρώτα, πρῶτον καλείσθω, τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας δεύτερον καλείσθω, καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω.

ς΄. Καὶ εἴ κα ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμά, τᾶς εὐθείας ταύτας τὰ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ᾽ ἅ κα ἁ περιφορὰ γένηται, προαγουμένα καλείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπόμενα.

ζ΄. Ὅ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ, ἅ ἐστιν πρώτα, πρῶτος καλείσθω, ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ τᾷ διπλασίᾳ εὐθείᾳ δεύτερος καλείσθω, καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

Ο Αρχιμήδης ορίζει την έλικα κινηματικά. Έστω ότι μια ημιευθεία περιστρέφεται ομοιόμορφα (με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού) γύρω από το σημείο Ο και ταυτόχρονα πάνω στην ημιευθεία κινείται ομοιόμορφα το σημείο Α, ξεκινώντας από το Ο. Ονομάζεται έλικα ο γεωμετρικός τόπος που γράφει το σημείο Α.



Ο Αρχιμήδης όπως και ο Δεινόστρατος, χρησιμοποιεί για τον ορισμό της καμπύλης το συνδυασμό δυο κινήσεων: της ομοιόμορφης περιστροφής και της ομοιόμορφης μετατόπισης. Η έλικα του Αρχιμήδη είναι η δεύτερη (μετά την τετραγωνίζουσα) υπερβατική καμπύλη που ήταν γνωστή στην αρχαιότητα. Ο Αρχιμήδης ονομάζει *αρχή της έλικας* το σταθερό άκρο της ευθείας και αρχή της περιφοράς την αρχική θέση της ημιευθείας. Ονομάζει *πρώτη ευθεία* την ημιευθεία που αντιστοιχεί στη γωνία φ=2π και *πρώτο κύκλο*, τον κύκλο που γράφεται με κέντρο την αρχή της έλικας και ακτίνα την πρώτη ευθεία. Με τον ίδιο τρόπο ορίζει τη *δεύτερη ευθεία* και το *δεύτερο κύκλο* ομωνύμως προς τις περιφορές. Το μέρος της έλικας που αντιστοιχεί στην πρώτη πλήρη περιφορά της ημιευθείας θα το ονομάζουμε *πρώτη στροφή της έλικας*.

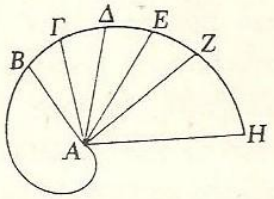
Ενώνουμε την αρχή Ο με ένα οποιοδήποτε σημείο της έλικας Ρ. Τα μέρη της έλικας που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ΟΡ, στο οποίο γίνεται η περιστροφή της ημιευθείας θα το ονομάζουμε, ακολουθώντας την ορολογία του Αρχιμήδη, *επόμενα μέρη*, ενώ αυτά που βρίσκονται προς την αντίθετη κατεύθυνση, *προηγούμενα μέρη*.

3.5 Η θεμελιώδης ιδιότητα της έλικας.

Οι προτάσεις 12,14,15 της πραγματείας του Αρχιμήδη *Περί ελίκων* δίνουν την θεμελιώδη ιδιότητα της έλικας που συνδέει το μήκος του ακτινικού διανύσματος με τη γωνία κατά την οποία η αρχική γραμμή έχει περιστραφεί από την αρχική της θέση και που αντιστοιχεί στην εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες r=α·θ. Καθώς ο Αρχιμήδης δεν αναφέρεται σε γωνίες μεγαλύτερες από π ή 2π, πρέπει, να χρησιμοποιήσει πολλαπλάσια της περιφέρειας ενός κύκλου καθώς και τόξα αυτού. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί τον *πρώτο κύκλο*. Παρακάτω παραθέτουμε τις τρεις αυτές προτάσεις στο αρχαίο κείμενο και στη συνέχεια την ελεύθερη απόδοση τους σε σύγχρονη γλώσσα.

Πρόταση 12

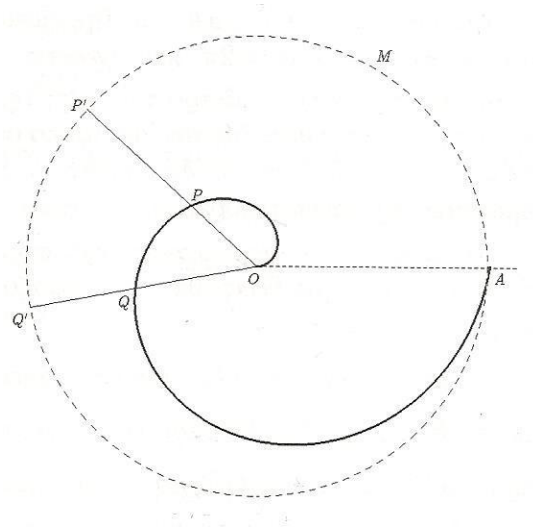
Εἴ κα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν μιᾷ περιφορᾷ ὁποιαοῦν γεγραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος εὐθεῖαι ἐμπεσῶντι ὁποιαιοῦν ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ' ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑπερέχοντι ἀλλαλᾶν.



Αν σε έλικα που διαγράφηκε σε μια περιστροφή αχθούν από την αρχή της έλικας Α οσεσδήποτε ευθείες, έτσι ώστε να σχηματίζουν μεταξύ τους ίσες γωνίες, οι ευθείες αυτές θα διαφέρουν εξίσου η μία από την άλλη.

Στις δυο παρακάτω προτάσεις 14 και 15 ο Αρχιμήδης συνάγει μια σχέση που είναι ισοδύναμη με την εξίσωση της έλικας σε πολικές συντεταγμένες: δείχνει ότι αν P και Q είναι δυο σημεία της πρώτης στροφής της έλικας, τότε $\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}} = \frac{\widehat{\mathrm{AMP}'}}{\widehat{\mathrm{AMQ}'}}$ (1) όπου $\widehat{\mathrm{AM}P'}$ και $\widehat{\mathrm{AM}Q'}$ είναι τα αντίστοιχα στα σημεία P και Q του τόξου του πρώτου κύκλου, δηλαδή του κύκλου που

γράφεται από το Ο με ακτίνα ίση προς την απόσταση μέχρι το τέλος της πρώτης στροφής της έλικας (βλέπε το παρακάτω σχήμα).



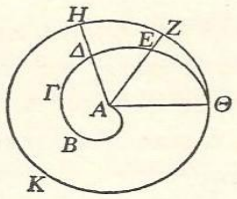
Αν P και Q είναι σημεία της νιοστής στροφής της έλικας τότε:

$\frac{OP}{OQ} = \frac{(n-1)c+\widehat{AMP'}}{(n-1)c+\widehat{AMQ'}}$ (2) όπου c είναι το μήκος της περιφέρειας του πρώτου κύκλου.

Παρατηρούμε ότι ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί στην πραγματικότητα πολικές συντεταγμένες, αλλά μόνο στη γεωμετρική τους μορφή : κάθε σημείο της έλικας ορίζεται από τη διανυσματική του ακτίνα OP και το τόξο (n-1)c +$\widehat{AMP'}$. Στις μετέπειτα έρευνες του ο Αρχιμήδης εφαρμόζει τις σχέσεις (1) και (2) με τον ίδιο τρόπο που θα τις εφαρμόζαμε σήμερα όταν κάνουμε χρήση της εξίσωσης της έλικας σε πολικές συντεταγμένες. Μπορούμε να γράψουμε την ιδιότητα της έλικας που συνάγει ο Αρχιμήδης με σύγχρονο συμβολισμό ως εξής : $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ όπου φ_1 και φ_2 είναι οι γωνίες που σχηματίζουν οι ρ_1 και ρ_2 με την ευθεία OA. Υποτίθεται ότι είναι εκφρασμένες με μέτρο το ακτίνιο. Για λόγους ευκολίας, δεχόμαστε ότι η εξίσωση της έλικας είναι $\rho = \varphi$.

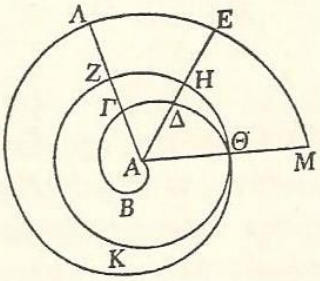
Πρόταση 14

Εἴ κα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπεσέωντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὰν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τᾶς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομενᾶν τᾶν περιφερειᾶν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος.



Πρόταση 15

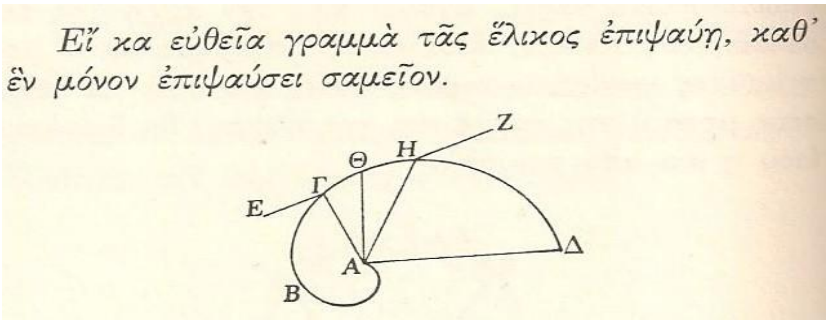
Εἰ δέ κα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας.



3.6 Ορισμός της εφαπτομένης της έλικας.

Για τον ορισμό της εφαπτομένης στην έλικα ο Αρχιμήδης αποδεικνύει αρχικά δυο βασικές ιδιότητες μέσω των προτάσεων 13,16 και 17. Στην πρόταση 13 αποδεικνύει ότι αν ευθεία εφάπτεται σε έλικα θα εφάπτεται σε ένα και μόνο σημείο.

Πρόταση 13


Εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ, καθ' ἓν μόνον ἐπιψαύσει σαμεῖον.

Έστω ότι είναι δυνατόν να εφάπτεται σε δύο σημεία, τα Γ και Η. Φέρνουμε τις ΑΓ και ΑΗ καθώς και τη διχοτόμο της γωνίας ΓΑΗ και έστω Θ το σημείο που τέμνει την έλικα η διχοτόμος της γωνίας ΓΑΗ. Όμως από την πρόταση 12 που είναι η βασική ιδιότητα της έλικας έχουμε ότι όσο υπερέχει η ΑΗ της ΑΘ τόσο υπερέχει και η ΑΘ της ΑΓ , δηλαδή με σύγχρονη γλώσσα $\text{ΑΘ}=\frac{\text{ΑΗ}+\text{ΑΓ}}{2}$ (1) . Αλλά το άθροισμα ΑΗ +ΑΓ είναι μεγαλύτερο από το διπλάσιο της διχοτόμου ΑΘ στο τρίγωνο ΑΓΗ. Άρα το σημείο που η ΑΘ συναντά τη ΓΗ βρίσκεται μεταξύ των Θ και Α. Επομένως η ευθεία ΕΖ τέμνει την έλικα επειδή ένα από τα σημεία της ευθείας ΓΘΗ βρίσκεται στο εσωτερικό της έλικας. Είχαμε όμως υποθέσει ότι η ευθεία αυτή ήταν εφαπτόμενη άρα η ΕΖ εφάπτεται της έλικας σε ένα μόνο σημείο.

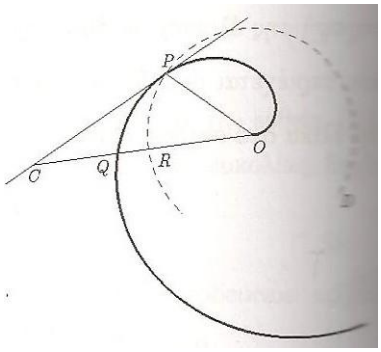
Παρατηρούμε ότι ο Αρχιμήδης δεν δίνει τον ορισμό της εφαπτομένης. Στον συλλογισμό της πρότασης 13 γίνεται φανερό ότι ως εφαπτομένη εννοεί την ευθεία που έχει με την καμπύλη ένα κοινό σημείο και κείται στη γειτονιά αυτού του σημείου προς το ίδιο μέρος της καμπύλης. Με τον τρόπο αυτό, τα σημεία καμπής δεν περιλαμβάνονται σε αυτή την έννοια της εφαπτομένης.

Ένα δεύτερο σχόλιο που είναι άξιο αναφοράς είναι ότι ο Αρχιμήδης αποδεικνύει την πρώτη ιδιότητα της έλικας δια της μεθόδου της εις άτοπον απαγωγής μέθοδο την οποία χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* αλλά και ο Απολλώνιος στα *Κωνικά*.

Πρόταση 16

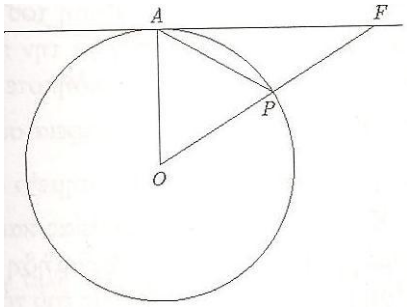
Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σαμεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν, ἀνίσοι ἐσσοῦνται καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα.

Η εφαπτομένη της έλικας σχηματίζει με τη διανυσματική ακτίνα που άγεται στο σημείο επαφής οξεία γωνία στο επόμενο μέρος και αμβλεία γωνία στο προηγούμενο μέρος.



Αν PC είναι εφαπτομένη στο σημείο P τότε η γωνία OPC (των επόμενων μερών) δεν μπορεί να είναι οξεία. Γι αυτό, αρκεί να φέρουμε την περιφέρεια με ακτίνα την OP και να παρατηρήσουμε ότι στα << επόμενα μέρη >> της OP η περιφέρεια διέρχεται από το εσωτερικό της έλικας, αφού οι διανυσματικές ακτίνες της έλικας είναι μεγαλύτερες της OP, ενώ στα << προηγούμενα μέρη >> της OP η περιφέρεια διέρχεται από το εξωτερικό της έλικας. Αν η γωνία OPC ήταν οξεία τότε η εφαπτομένη PC θα εισερχόταν στο εσωτερικό της έλικας , γεγονός που είναι αδύνατον.

Μένει να αποδειχθεί ότι η γωνία αυτή δεν μπορεί να είναι ορθή δηλαδή ότι η περιφέρεια και η έλικα δεν μπορούν να έχουν στο σημείο P κοινή εφαπτομένη. Για να αποδειχθεί ότι η γωνία OPC δεν μπορεί να είναι ορθή, ο Αρχιμήδης στηρίζεται στην πρόταση 5 (έχουμε προαναφέρει και αποδείξει παραπάνω στην παράγραφο **3.3** περί βασικών λημμάτων στις έλικες).Δηλαδή, αν , δεδομένου ενός κύκλου με κέντρο το O, αχθεί η εφαπτομένη σ' αυτόν στο σημείο A, τότε από το O μπορεί να αχθεί ευθεία OPF, η οποία συναντά τον κύκλο στο P και την εφαπτομένη στο F έτσι ώστε $\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PO}} < \frac{\widehat{\mathrm{AP}}}{c}$ όπου c το μήκος της περιφέρειας αυθαίρετου κύκλου.



Η παραπάνω ανισότητα χρησιμοποιείται από τον Αρχιμήδη για την απόδειξη ότι η γωνία OPC δεν είναι ορθή.

Έστω ότι η γωνία OPC είναι ορθή, τότε η PC είναι η εφαπτομένη στην περιφέρεια. Επομένως στην PC μπορεί να βρεθεί σημείο C, τέτοιο ώστε $\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RO}} < \frac{\widehat{\mathrm{PR}}}{\widehat{\mathrm{DLP}}}$ η διαφορετικά $\frac{CR+RQ}{\mathrm{RO}} < \frac{\widehat{\mathrm{PR}}+\widehat{\mathrm{DLP}}}{\widehat{\mathrm{DLP}}} = \frac{\widehat{\mathrm{DLR}}}{\widehat{\mathrm{DLP}}}$ δηλαδή $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OR}} < \frac{\mathrm{OQ}}{OP}$.

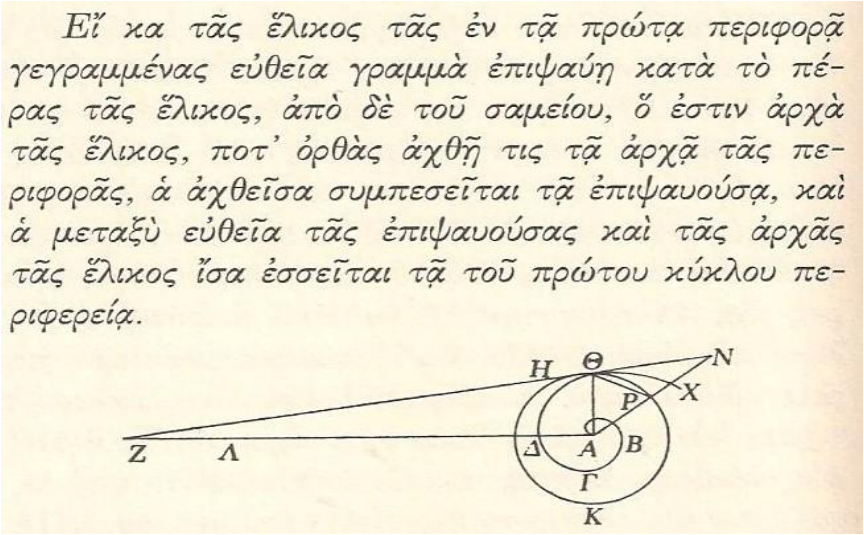
Όμως OR=OP , επομένως έχουμε ότι CO<OQ που είναι άτοπο αφού CO είναι η απόσταση από την εφαπτομένη και OQ η αντίστοιχη απόσταση από την έλικα.

Το ίδιο ισχύει και αν η ευθεία εφάπτεται σε έλικα που δημιουργήθηκε κατά τη δεύτερη περιστροφή (πρόταση 17- Αρχιμήδης ΄΄ περί ελίκων ΄΄).

3.7 Εύρεση της εφαπτομένης στην έλικα.

Βασικός σκοπός του Αρχιμήδη είναι να βρει την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της έλικας. Γι'αυτό ορίζει το μέγεθος της πολικής υποεφαπτομένης ΟΤ. Οι προτάσεις 18, 19, 20 δίνουν τη θεμελιώδη πρόταση σχετικά με την εφαπτομένη, δηλαδή δίνουν το μήκος της υφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο Ρ (την απόσταση μεταξύ του Ο και του σημείου τομής της εφαπτομένης με την κάθετο από το Ο στην ΟΡ). Ο Αρχιμήδης πραγματεύεται πάντοτε πρώτα την πρώτη περιστροφή και κατόπιν οποιαδήποτε επακόλουθη περιστροφή και μαζί με κάθε πλήρη περιστροφή τις ιδιότητες των σημείων η των μερών της συγκεκριμένης περιστροφής. Έτσι, πραγματεύεται τις εφαπτόμενες με την εξής σειρά, **πρώτον** την εφαπτομένη στο σημείο Α, το τέλος της πρώτης περιστροφής, **δεύτερον** την εφαπτομένη στο τέλος της δεύτερης και οποιασδήποτε επακόλουθης περιστροφής, και **τρίτον** την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο της πρώτης ή οποιασδήποτε επακόλουθης περιστροφής.

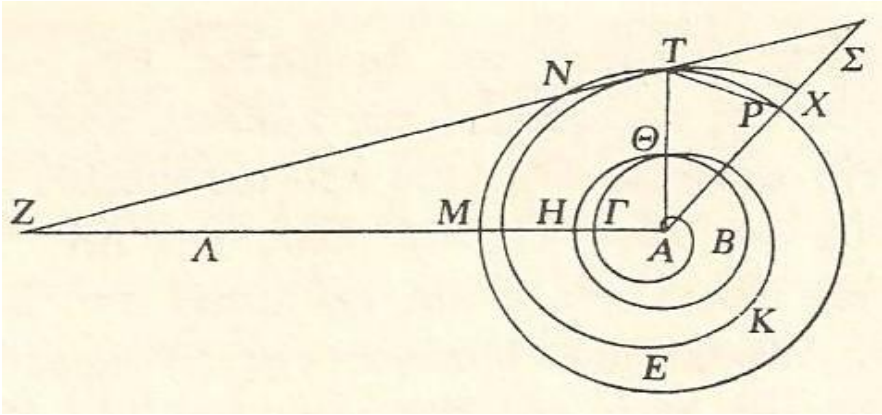
Πρόταση 18


Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ.

Έστω η έλικα ΑΒΓΔΘ, Α η αρχή της έλικας και ΘΑ η πρώτη ευθεία και ΘΗΚ ο πρώτος κύκλος και ας εφάπτεται στην έλικα στο Θ η ευθεία ΘΖ και από το Α άγεται η κάθετος επί της ΘΑ έστω η ΑΖ η οποία θα συναντήσει τη ΘΖ στο Ζ. Τότε η ΖΑ είναι ίση με τη περιφέρεια του κύκλου ΘΚΗ. Θα ακολουθήσει η πρόταση 19 που διαπραγματεύεται την ιδιότητα της εφαπτομένης στο τέλος της δεύτερης περιστροφής κατά ανάλογο τρόπο.

Πρόταση 19

Εἰ δέ κα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὔτα ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ εὐθεῖα ἁ μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος διπλασία τᾶς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφερείας.

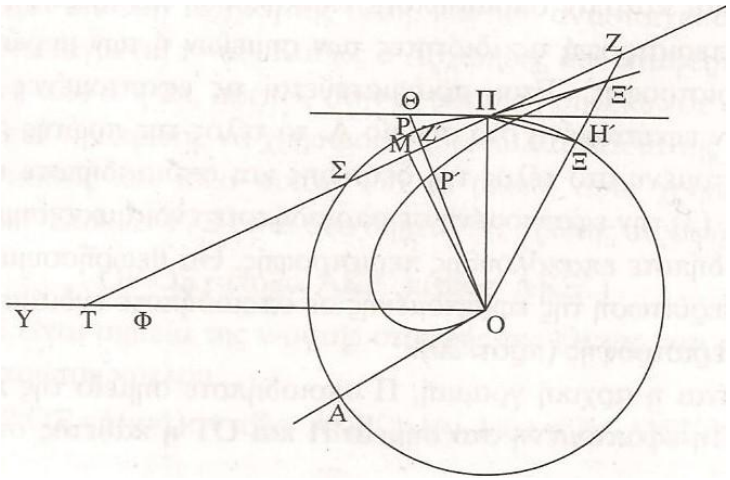


Κατ΄ αναλογίαν σε αυτή την πρόταση ο Αρχιμήδης αποδεικνύει ότι το μήκος της υφαπτομένης ΖΑ είναι ίσο με το διπλάσιο του κύκλου ΤΜΝ.

Θα θεωρήσουμε ως διευκρινιστική και ως γενικότερη την περίπτωση της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο Π της πρώτης περιστροφής στην πρόταση 20(από το βιβλίο του Heath Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών σελίδα 89-90 δεύτερος τόμος).

Πρόταση 20

Αν ΟΑ είναι η αρχική γραμμή, Π οποιοδήποτε σημείο της πρώτης περιστροφής , ΠΤ η εφαπτομένη στο σημείο Π και ΟΤ η κάθετος στην ΟΠ, τότε θα αποδειχθεί ότι, αν ΑΣΠ είναι ο κύκλος που διέρχεται από το σημείο Π με κέντρο το Ο , και τέμνει την ΠΤ στο σημείο Σ, τότε (Υφαπτομένη ΟΤ)=(τόξο $\widehat{\text{ΑΣΠ}}$).



Έστω η ΟΤ είναι μεγαλύτερη από το τόξο $\widehat{\text{ΑΣΠ}}$. θεωρούμε τμήμα ΟΦ τέτοιο ώστε $\widehat{\text{ΑΣΠ}} < O\Phi < OT$. Τότε ο λόγος $\frac{\text{ΠΟ}}{\text{ΟΦ}} > \frac{\text{ΠΟ}}{\text{ΟΤ}}$ και επειδή τα τρίγωνα ΠΟΤ και ΠΟΜ είναι όμοια έχουμε ότι $\frac{\text{ΠΟ}}{\text{ΟΤ}} = \frac{\text{ΠΜ}}{\text{ΟΜ}}$ άρα $\frac{\text{ΠΟ}}{\text{ΟΦ}} > \frac{\text{ΠΜ}}{\text{ΟΜ}}$ επομένως από την πρόταση 7 (των περί ελίκων) μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία ΟΞΖ , η οποία να τέμνει την προέκταση της ΤΠ στο σημείο Ζ, και τον κύκλο στο Ξ, έτσι ώστε $\frac{\text{ΖΞ}}{\text{ΠΞ}} = \frac{\text{ΠΟ}}{\text{ΟΦ}}$. Έστω η ΟΖ τέμνει την έλικα στο σημείο Ξ΄ . Τότε εφόσον ΠΟ=ΞΟ η παραπάνω αναλογία γίνεται $\frac{\text{ΖΞ}}{\text{ΞΟ}} = \frac{\text{ΠΞ}}{\text{ΟΦ}} < \frac{\text{τοξο } \widehat{\text{ΠΞ}}}{\text{τόξο } \widehat{\text{ΑΣΠ}}}$ από υπόθεση. Συνθέτοντας έχουμε $\frac{\text{ΖΟ}}{\text{ΞΟ}} < \frac{\text{τοξο}\widehat{\text{ΑΣΠ}}}{\text{τοξο}\widehat{\text{ΑΣΠ}}} < \frac{\text{ΟΞ΄}}{\text{ΟΠ}}$ και επειδή ΟΞ=ΟΠ καταλήγουμε ότι ΖΟ<ΟΞ΄ που είναι άτοπο, άρα η ΟΤ δεν είναι μεγαλύτερη από το τόξο $\widehat{\text{ΑΣΠ}}$.

Έστω τώρα ότι η ΟΤ είναι μικρότερη από το τόξο $\widehat{\text{ΑΣΠ}}$.Μετράμε μήκος ΟΥ κατά μήκος της ΟΤ, τέτοιο ώστε η ΟΥ να είναι μεγαλύτερη από την ΟΤ αλλά μικρότερη από το τόξο $\widehat{\text{ΑΣΠ}}$. Τότε ο λόγος $\frac{\text{ΠΟ}}{\text{ΟΥ}} < \frac{\text{ΠΟ}}{\text{ΟΤ}}$ και επειδή τα τρίγωνα ΠΟΤ και ΠΟΜ είναι όμοια έχουμε ότι

$\frac{ΠΟ}{ΟΤ} = \frac{ΠΜ}{ΟΜ}$ άρα $\frac{ΠΟ}{ΟΥ} < \frac{ΠΜ}{ΟΜ}$ επομένως από την πρόταση 8 (των περί ελίκων) μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία ΟΖ΄ΡΘ , η οποία να τέμνει την ΠΣ στο σημείο Ζ΄, τον κύκλο ΡΣΑ στο Ρ, και την εφαπτομένη του κύκλου στο Θ, έτσι ώστε $\frac{Z'P}{ΘP} = \frac{ΠΟ}{ΟΥ}$.

Έστω ότι η ΟΖ΄Θ τέμνει την έλικα στο σημείο Ρ΄. Τότε εφόσον ΠΟ=ΡΟ, έχουμε $\frac{Z'P}{PO} = \frac{ΘΠ}{ΟΥ} > \frac{τόξο\widehat{ΠΡ}}{τόξο\widehat{ΑΣΠ}}$ που συνεπάγεται $\frac{Z'O}{PO} < \frac{τόξο\ \widehat{ΑΣΡ}}{τόξο\ \widehat{ΑΣΠ}} < \frac{OP'}{OΠ}$ άρα Ζ΄Ο<ΟΡ΄ που είναι αδύνατον. Έτσι η ΟΤ δεν είναι μικρότερη από το τόξο $\widehat{ΑΣΠ}$.

Άρα το (ΟΤ)=(τόξο $\widehat{ΑΣΠ}$).

Άρα στις προτάσεις 18 και 19 τις οποίες ο Αρχιμήδης τις αντιμετωπίζει ως ειδικές περιπτώσεις και τις αποδεικνύει ξεχωριστά έχουμε ότι αν το σημείο Π είναι το άκρο της πρώτης περιστροφής και C_1 η περιφέρεια του πρώτου κύκλου, τότε η υφαπτομένη = C_1 , αν Π είναι το άκρο της δεύτερης περιστροφής και C_2 η περιφέρεια του δεύτερου κύκλου τότε η υφαπτομένη $=2\cdot C_2$ και γενικότερα αν $C_ν$ είναι η περιφέρεια του ν-οστού κύκλου (του κύκλου με ακτίνα το ακτινικό διάνυσμα προς το άκρο της ν-οστής περιστροφής), η υφαπτομένη προς την εφαπτομένη στο άκρο της ν-οστής περιστροφής = ν $C_ν$.

Αν Π είναι ένα σημείο της ν-οστής περιστροφής, όχι το άκρο, και ο κύκλος με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα την ΟΠ τέμνει την αρχική γραμμή στο σημείο Κ, ενώ ρ είναι η περιφέρεια του κύκλου , η υφαπτομένη προς την εφαπτομένη στο σημείο Π = (ν-1)ρ +τόξο$\widehat{ΚΠ}$.

3.8 Σχολιασμός στο έργο του Αρχιμήδη *Περί ελίκων* και η ιστοριογραφική του αποτίμηση.

Τα παρακάτω σχόλια είναι από το βιβλίο της I.Basmakova *«Ιστορία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών»* σε μετάφραση Ιωάννη Βανδουλάκη και αφορούν στη μέθοδο των εφαπτόμενων η οποία θεμελιώνεται και εφαρμόζεται από τον Αρχιμήδη στην πραγματεία του *Περί ελίκων*. Τον 3^{ο} αιώνα μ.Χ. ο Πάππος άσκησε κριτική στη μέθοδο απόδειξης των βασικών λημμάτων αυτού του έργου (τις προτάσεις 5-9), στα οποία στηρίζεται άμεσα η απόδειξη της θεμελιώδους πρότασης για τις εφαπτόμενες της έλικας. Ο Πάππος ισχυρίζεται ότι τα λήμματα αυτά μπορούν να αποδειχθούν πλήρως, χρησιμοποιώντας μόνο κατασκευές με κανόνα και διαβήτη και γι' αυτό ο Αρχιμήδης διέπραξε σφάλμα που εφάρμοσε τη μέθοδο της *νεύσης* - τεχνική που για την εξεταζόμενη περίπτωση είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή κωνικών τομών.

Πολλοί ιστορικοί των μαθηματικών όπως ο Paul Tannery (1843-1904) και ο Thomas Heath (1861-1940) και άλλοι προσπάθησαν να δώσουν απλούστερες αποδείξεις για τα λήμματα του Αρχιμήδη. Έτσι με τη ελαφρολογία του Πάππου η προσοχή πολλών ιστορικών συγκεντρώθηκε όχι στην κατανόηση του ειρμού της σκέψης του Αρχιμήδη, αλλά στην απλοποίηση των τεχνικών του.

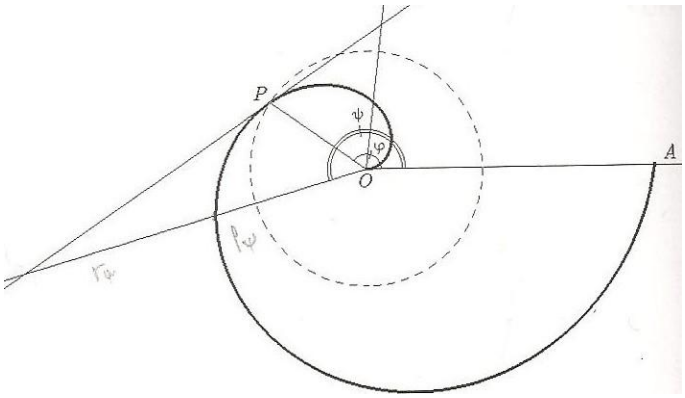
Ο πρώτος που προσέγγισε ορθά το έργο του Αρχιμήδη *Περί ελίκων* ήταν ο Δανός ιστορικός των μαθηματικών Zeuthen ο οποίος έγραψε ότι βασικός σκοπός αυτού του έργου, παράλληλα με τον υπολογισμό εμβαδών είναι κι ένα άλλο ζήτημα από το πεδίο του απειροστού και πιο συγκεκριμένα η εύρεση εφαπτόμενων σε έλικες. Γι αυτό ο Αρχιμήδης εξετάζει εκείνο το απειροστό τρίγωνο που χρησιμοποιούμε και σήμερα για την εύρεση των εφαπτόμενων σε καμπύλες που εκφράζονται σε πολικές συντεταγμένες και αποδεικνύει ότι η πολική υποεφαπτομένη ισούται με ρθ[Zeuthen 1902,151].

Όμως ο Zeuthen περιορίζεται μόνο σ' αυτή την παρατήρηση και δεν προχωρά σε διεξοδική ανάλυση της μεθόδου του Αρχιμήδη.

Ένας άλλος μεγάλος ιστορικός των μαθηματικών ο Thomas Heath, υποθέτει ότι ο Αρχιμήδης βρήκε τη βασική ιδιότητα της εφαπτομένης στην έλικα από την εξέταση του απειροστού τριγώνου [Heath 1921,II,556-561]. Ο Heath θεωρεί, ωστόσο ότι η πορεία της

απόδειξης του Αρχιμήδη είναι εντελώς διαφορετική από τη μέθοδο λήψης του αποτελέσματος. Ο Heath καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αν και η κατασκευή του Αρχιμήδη μας φέρνει επικίνδυνα κοντά στα απειροστά [Heath 1921,II,561], ωστόσο καταφέρνει να αποφύγει την εφαρμογή τους και να παραμείνει στο στέρεο έδαφος της κλασσικής γεωμετρίας. Εκτός απ' αυτό, ο Heath ασκεί κριτική στον Αριστοτέλη για περισσή πολυπλοκότητα στην απόδειξη του, εξηγώντας την μόνον από το «πάθος» του Αρχιμήδη προς την μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

Σύμφωνα με τη I. Basmakova στην απόδειξη του Αρχιμήδη για τη βασική πρόταση 20 που αφορά την εφαπτομένη το απειροστό πολικό τρίγωνο εμφανίζεται σαφώς. Ο Αρχιμήδης στηρίζεται στα εξής στοιχεία:



α : Για οποιοδήποτε γωνία $\psi \neq \varphi$, η απόσταση μέχρι την εφαπτομένη στην έλικα r_ψ είναι μεγαλύτερη από την απόσταση μέχρι την ίδια την έλικα ρ_ψ δηλαδή $r_\psi > \rho_\psi$

Επιπλέον, αν $\psi > \varphi$, τότε $r_\psi = \rho + \Delta r$, $\rho_\psi = \rho + \Delta\rho$,όπου ρ είναι η διανυσματική ακτίνα που αντιστοιχεί στη γωνία φ. Άρα για $\psi > \varphi$ έχουμε $\Delta r > \Delta\rho$ **(1)**

Αν $\psi < \varphi$, τότε $r_\psi = \rho - \Delta r > \rho_\psi = \rho - \Delta\rho$ δηλαδή $\Delta r < \Delta\rho$

β : Ο λόγος $\frac{\Delta r}{\rho\Delta\varphi}$ για πολύ μικρές γωνίες Δφ γίνεται οσοδήποτε εγγύς στο λόγο

$$\frac{\rho}{\mathrm{OT}} = \frac{\rho}{\rho\varphi} = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\rho} = \varepsilon\varphi\alpha$$

Αυτό αποδεικνύεται με τη βοήθεια της σύγκρισης του απειροστού τριγώνου με τις κάθετες $\Delta r \approx \Delta\rho$, $\rho\cdot\Delta\varphi$ και του πεπερασμένου τριγώνου με τις κάθετες ρ και OT. Για την αυστηρή θεμελίωση της ισότητας $\mathrm{OT} = \rho\cdot\varphi$, ο Αρχιμήδης δείχνει ότι οποιοσδήποτε κι αν είναι ο λόγος

Z:H ≠ εφα πάντοτε βρίσκεται γωνία Δφ , έτσι ώστε ο λόγος $\frac{\Delta r}{\rho\Delta\varphi}$ να διαφέρει λιγότερο από την εφα απ' ότι ο λόγος Z:H, δηλαδή αν Z:H > εφα , τότε Z:H > $\frac{\Delta r}{\rho\Delta\varphi}$ > εφα ενώ αν Z:H<εφα τότε Z:H < $\frac{\Delta r}{\rho\Delta\varphi}$ < εφα .

Χρησιμοποιώντας τα α και β ο Αρχιμήδης αποδεικνύει ότι ΟΤ = ρ·φ **ή** ότι εφα = $\frac{\rho}{\rho\cdot\varphi} = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\rho}$ πράγματι , αν ΟΤ > ρ·φ, δηλαδή εφα < $\frac{1}{\rho}$ τότε μπορεί να βρεθεί θετικό Δφ , τέτοιο ώστε

εφα < $\frac{\Delta r}{\rho\cdot\Delta\varphi} < \frac{1}{\rho}$ **.** Αλλά τότε Δr < Δφ = Δρ που αντιφάσκει στη σχέση **(1).** Με ανάλογο τρόπο αναιρείται και η υπόθεση ότι ΟΤ < ρ·φ.

Έτσι ολόκληρη η απόδειξη του Αρχιμήδη βασίζεται στην εξέταση του απειροστού χαρακτηριστικού τριγώνου , με τη βοήθεια του οποίου βρίσκει την υπεφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της έλικας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

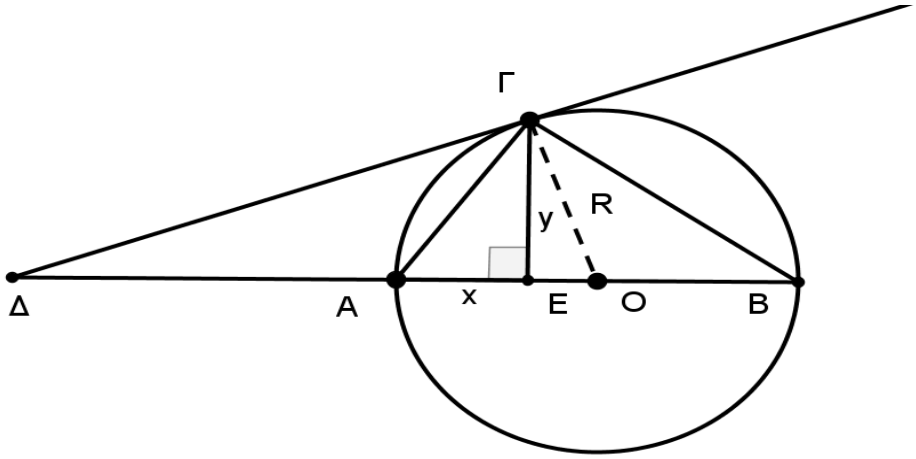
ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

4.1 Αρμονική τετράδα

Το τελευταίο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας αναφέρεται σε διδακτικές προεκτάσεις – προτάσεις που αφορούν την κατασκευή της εφαπτόμενης στις κωνικές τομές όχι μόνο με γεωμετρικό τρόπο αλλά και με αριθμητικά μέσα που πηγάζουν από την ανάλυση της έννοιας της εφαπτομένης από τους μεγάλους Έλληνες Γεωμέτρες, Ευκλείδη, Απολλώνιο και τον μέγιστο όλων τον Αρχιμήδη.

4.1.1 Κατασκευή εφαπτόμενης σε κύκλο με την βοήθεια της αρμονικής τετράδας.

Έστω ένας κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ με διάμετρο ΑΒ και Γ ένα τυχαίο σημείο του κύκλου. Θα κατασκευάσουμε την εφαπτομένη του κύκλου με την πολύ προχωρημένη για την εποχή, πρόταση του Απολλώνιου χρησιμοποιώντας την αρμονική τετράδα. Φέρνουμε την κάθετο από το Γ προς την ΑΒ, έστω Ε το ίχνος και θεωρούμε ένα σημείο Δ στην προέκταση της ΑΒ προς την Α τέτοιο ώστε $\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ}$ (δηλαδή τα Δ,Ε συζυγή αρμονικά των Α,Β η διαφορετικά τα Δ, Α, Ε, Β αποτελούν αρμονική τετράδα) τότε το ΔΓ είναι εφαπτομένη της καμπύλης και αντίστροφα.



Αν Δ, Α, Ε, Β αρμονική τετράδα δηλαδή $\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ}$ **θα δείξουμε** ότι ΔΓ είναι εφαπτομένη στον κύκλο δηλαδή ότι ισχύει $ΔΓ^2 = ΔΑ·ΔΒ$ και αντιστρόφως. Θα χρησιμοποιήσουμε τον σύγχρονο τρόπο απόδειξης με αλγεβρικά μέσα.

Θέτουμε ΑΕ = χ και ΕΓ =ψ. Από την ιδιότητα της αρμονικής τετράδας έχουμε $\frac{χ}{2ρ-χ} = \frac{ΑΔ}{ΑΔ+2ρ}$

άρα $ΑΔ = \frac{ρχ}{ρ-χ}$

Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ΔΑΓ έχουμε $ΔΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + 2ΑΔ·ΑΕ =$

$= χ^2 + ψ^2 + (\frac{ρχ}{ρ-χ})^2 + 2\frac{ρχ}{ρ-χ}·χ = χ^2 + χ·(2ρ-χ) + (\frac{ρχ}{ρ-χ})^2 + 2\frac{ρχ^2}{ρ-χ} = 2ρχ + (\frac{ρχ}{ρ-χ})^2 + 2\frac{ρχ^2}{ρ-χ} =$

$= \frac{ρχ}{ρ-χ}\left(2(ρ-χ) + \frac{ρχ}{ρ-χ} + 2χ \right) = \frac{ρχ}{ρ-χ}\left(\frac{ρχ}{ρ-χ} + 2ρ\right) = ΔΑ·ΔΒ$. Η τελευταία σχέση μαρτυρά ότι η ΔΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

Αντίστροφα : Αν ΔΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου τότε τα σημεία Δ, Ε είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β δηλαδή τα Δ, Α, Ε, Β αποτελούν αρμονική τετράδα δηλαδή αν $ΔΓ^2 = ΔΑ·ΔΒ$ τότε θα δείξουμε ότι $\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ}$

Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχω $ΔΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + 2ΑΔ·ΑΕ = χ^2 + ψ^2 + ΑΔ^2 + 2ΑΔ·χ$

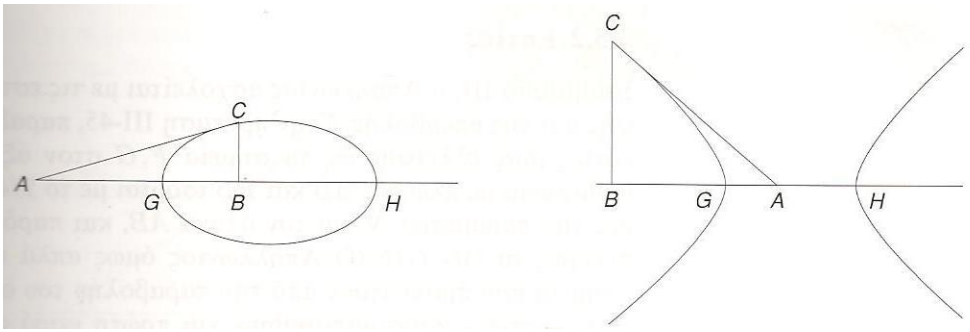
$\xLeftrightarrow{ΔΓ^2=ΔΑ·ΔΒ} ΔΑ(ΔΑ+2ρ) = χ^2 + ψ^2 + ΑΔ^2 + 2ΑΔ·χ \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{ρχ}{ρ-χ}$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΔΑ}{ΔΒ}$ ισοδύναμα $\frac{χ}{2ρ-χ} = \frac{ΑΔ}{ΑΔ+2ρ}$ ή $\frac{2ρ-χ}{χ} = \frac{ΑΔ+2ρ}{ΑΔ}$ ή

$\frac{2ρ}{χ} - 1 = 1 + \frac{2ρ}{\frac{ρχ}{ρ-χ}}$ **ή** $\frac{ρ}{χ} = 1 + \frac{ρ(ρ-χ)}{ρχ}$ που ισχύει.

4.1.2 Κατασκευή εφαπτομένης σε έλλειψη και υπερβολή με την βοήθεια της αρμονικής τετράδας.

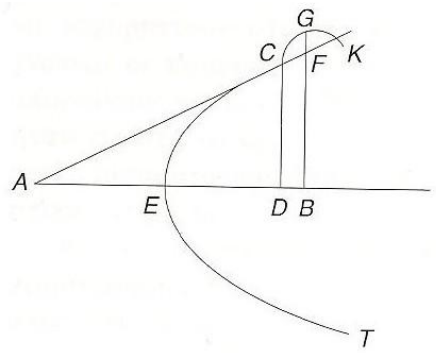
Έστω C σημείο μιας έλλειψης η υπερβολής, CB η κάθετος από το σημείο αυτό προς τη διάμετρο της καμπύλης. Έστω G και H οι τομές της διαμέτρου με τη καμπύλη και έστω A σημείο επί της διαμέτρου η επί της προέκτασής της τέτοιο ώστε $\frac{AH}{AG} = \frac{BH}{BG}$. Τότε η AC είναι εφαπτομένη της καμπύλης στο C.



Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εκφραστεί αλγεβρικά εάν θέσουμε AG=t και BG=χ. Στην περίπτωση της έλλειψης, BH=2α-χ και AH=2α + t ενώ στην περίπτωση της υπερβολής, BH=2α+χ και AH=2α – t. Επομένως για την έλλειψη ισχύει $\frac{2\alpha+t}{t} = \frac{2\alpha-\chi}{\chi}$ και για την υπερβολή $\frac{2\alpha-t}{t} = \frac{2\alpha+\chi}{\chi}$. Όταν λύσουμε τις εξισώσεις αυτές ως προς t παίρνουμε $t = \frac{\alpha\chi}{\alpha-\chi}$ για την έλλειψη και $t = \frac{\alpha\chi}{\alpha+\chi}$ για την υπερβολή. Τώρα η εφαπτομένη μπορεί να κατασκευαστεί.

4.2 Κατασκευή εφαπτομένης σε παραβολή

Για να κατασκευάσουμε την εφαπτομένη σε ένα οποιοδήποτε σημείο της παραβολής αρκεί να εφαρμόσουμε την πρόταση α 33 του Απολλώνιου. Έστω C σημείο της παραβολής CET και CD η κάθετος στη διάμετρο EB. Εάν η διάμετρος προεκταθεί κατά AE = ED ,τότε η ευθεία AC θα εφάπτεται της παραβολής στο C.



Έστω DC= y, DE=x και AE=t. Το θεώρημα δηλώνει ότι αν t=x τότε η ευθεία AC είναι εφαπτομένη της καμπύλης στο C. Με άλλα λόγια, βρίσκουμε την εφαπτομένη απλά με το να προεκτείνουμε τη διάμετρο πέρα από το E κατά τμήμα ίσο με το χ και συνδέοντας το σημείο που προσδιορίζεται έτσι με το C.

4.3 Ανακλαστική ιδιότητα των κωνικών τομών.

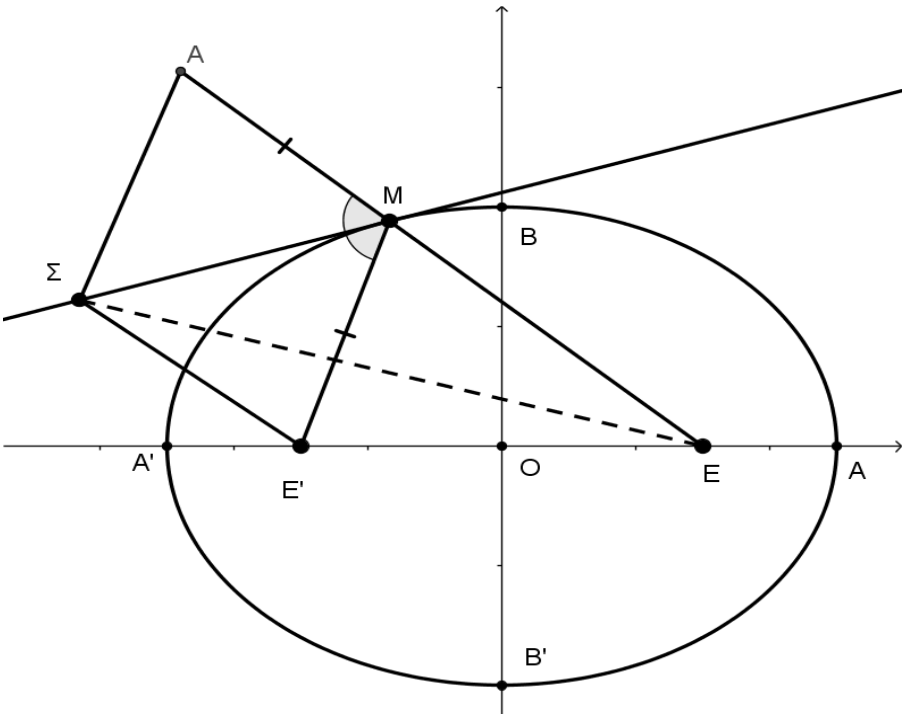
4.3.1 Κατασκευή εφαπτομένης σε έλλειψη και υπερβολή.

Κατασκευή εφαπτομένης **έλλειψης-υπερβολής** με την αντιστροφή της πρότασης της ανακλαστικής ιδιότητας.

α) Έστω έλλειψη με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ και Μ ένα τυχαίο σημείο της έλλειψης.Φέρνουμε τις εστιακές αποστάσεις ΜΕ και ΜΕ΄ και προεκτείνουμε την ΜΕ (η την ΜΕ΄).Κατόπιν κατασκευάζουμε την διχοτόμο της γωνίας ΘΜΕ΄.Θα αποδείξουμε ότι η διχοτόμος είναι εφαπτομένη της έλλειψης.

Απόδειξη

Έστω η ευθεία Μχ διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας ΕΜΕ΄.Θα αποδείξουμε ότι η Μχ είναι εφαπτομένη της έλλειψης.Θα πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας και θα δείξουμε ότι είναι εξωτερικό της κωνικής τομής, επομένως η ευθεία αυτή θα είναι η η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ. Στην προέκταση της ΜΕ παίρνουμε σημείο Α τέτοιο ώστε ΑΜ = ΜΕ΄.Από την ισότητα των τριγώνων ΑΜΣ και ΣΜΕ΄ και την πρόταση Ι 4 του Ευκλείδη προκύπτει ότι ΣΑ = ΣΕ΄. Έχουμε ότι ΣΕ΄ + ΣΕ = ΣΑ + ΣΕ



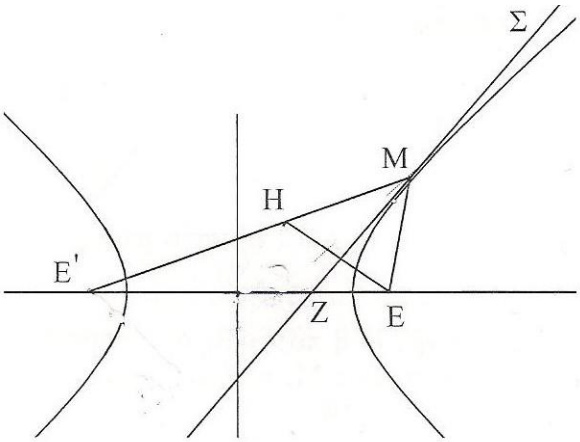
Όμως ΣΑ +ΣΕ > ΑΕ από την τριγωνική ανισότητα άρα ΣΕ΄ +ΣΕ > ΑΕ.

Η ΑΕ=ΜΑ +ΜΕ = ΜΕ΄+ ΜΕ =2α (από την πρόταση 52- γ΄ βιβλίο) άρα ΣΕ + ΣΕ΄ >2α που σημαίνει ότι το Σ βρίσκεται εκτός της τομής άρα η ευθεία είναι εφαπτόμενη της έλλειψης στο Μ.

β) Έστω **υπερβολή** με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ και Μ ένα τυχαίο σημείο της υπερβολής.Φέρνουμε τις εστιακές αποστάσεις ΜΕ και ΜΕ΄ και κατόπιν κατασκευάζουμε την διχοτόμο της γωνίας ΕΜΕ΄.Θα αποδείξουμε ότι η διχοτόμος είναι εφαπτομένη της υπερβολής.

Απόδειξη

Έστω η ευθεία ΜΖ διχοτόμος της γωνίας ΕΜΕ΄.Θα αποδείξουμε ότι η ΜΖ είναι εφαπτομένη της υπερβολής. Θα πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας και θα δείξουμε ότι είναι εξωτερικό της κωνικής τομής, επομένως η ευθεία αυτή θα είναι η η εφαπτομένη της υπερβολής στο Μ.

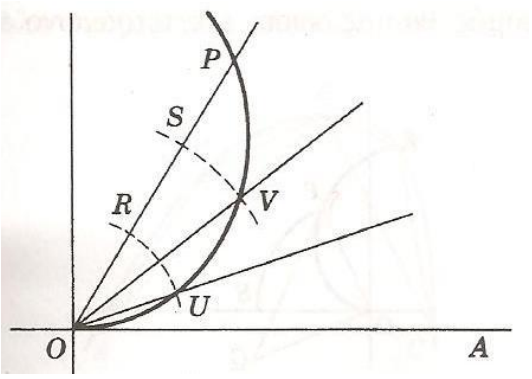


Στην πλευρά της ΜΕ΄ παίρνουμε σημείο Η τέτοιο ώστε ΗΜ = ΜΕ.Άρα η ΜΖ θα είναι μεσοκάθετος της ΗΕ, άρα ΣΗ = ΣΕ.Απο το τρίγωνο ΣΗΕ΄ έχουμε : ΣΕ΄ - ΗΕ΄< ΣΗ=ΣΕ ισοδύναμα έχουμε ΣΕ΄ - ΣΕ < ΗΕ΄ Όμως ΗΕ΄ = ΜΕ΄- ΜΗ = ΜΕ΄ - ΜΕ =2α.

Άρα ΣΕ΄ - ΣΕ < 2α , επομένως το σημείο Σ βρίσκεται εκτός της υπερβολής, άρα η ΜΣ είναι εφαπτομένη της υπερβολής.

4.4 Η τριχοτόμηση της γωνίας με την βοήθεια της έλικας του Αρχιμήδη.

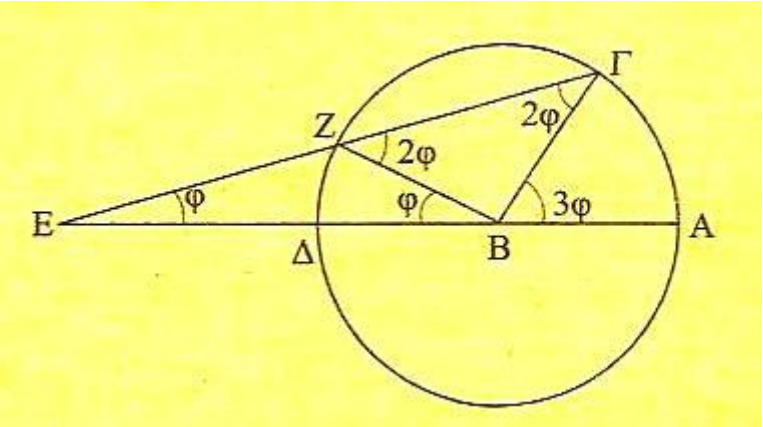
Ο Αρχιμήδης, όπως και οι πρόγονοι του, ενδιαφέρθηκαν για τα τρία περίφημα προβλήματα της γεωμετρίας ένα εκ των οποίων ήταν και η *τριχοτόμηση* της γωνίας. Η έλικα του Αρχιμήδη έδινε λύση σε αυτό το πρόβλημα χωρίς όμως την χρήση κανόνα και διαβήτη. Η εξίσωση της έλικας όπως έχουμε δει στο τρίτο κεφάλαιο σε πολικές συντεταγμένες είναι $\rho = \alpha \cdot \theta$. Με ένα τέτοιο σπειροειδές, η τριχοτόμηση της γωνίας γίνεται εύκολη. Τοποθετούμε τη γωνία με τέτοιο τρόπο , ώστε η κορυφή της και η αρχική της πλευρά να συμπίπτουν με την αρχική θέση του σημείου Ο του σπειροειδούς και την αρχική θέση ΟΑ της περιστρεφόμενης ευθείας.



Το ευθύγραμμο τμήμα, ΟΡ όπου Ρ είναι το σημείο τομής της τελικής πλευράς της γωνίας με την έλικα τριχοτομείται με τα σημεία R και S. Εν συνεχεία φέρνουμε κύκλους με κέντρο το Ο και ακτίνες OR και OS. Αν αυτοί οι κύκλοι τέμνουν το σπειροειδές στα σημεία U και V, οι ευθείες OU και OV θα τριχοτομούν τη γωνία ΑΟΡ. Αυτό συμβαίνει διότι σύμφωνα με τη εξίσωση της έλικας έχουμε ότι $OR=OU=\alpha \cdot \varphi_1$ όπου φ_1 είναι η γωνία ΑΟU, επίσης $OS = 2 \cdot OR = \alpha \cdot \varphi_2$ άρα διαιρώντας κατά μέλη έχουμε ότι $\varphi_2 = 2 \cdot \varphi_1$. Ακόμη $OP = 3 \cdot OR = \alpha \cdot \varphi_3$ άρα και $\varphi_3 = 3 \cdot \varphi_1$.

4.5 Η τριχοτόμηση της γωνίας με τη μέθοδο της νεύσης.

Στο πρόβλημα αυτό ζητείται να διαιρεθεί μια γωνία σε τρία ίσα μέρη. Η μέθοδος της νεύσης συνίσταται στην τοποθέτηση ενός ευθυγράμμου τμήματος ορισμένου μήκους μεταξύ δυο δεδομένων γραμμών έτσι, ώστε τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος να βρίσκονται πάνω στις γραμμές και το ίδιο το τμήμα ή η προέκταση του να διέρχεται από δεδομένο σημείο. Οι δεδομένες γραμμές που εξέταζαν οι αρχαίοι γεωμέτρες ήταν συνήθως η ευθεία και η περιφέρεια. Ωστόσο, αν ένα πρόβλημα λύνεται με τη μέθοδο της νεύσης τότε η φύση του προβλήματος παραμένει ασαφής. Αν το ευθύγραμμο τμήμα κινείται έτσι ώστε το ένα άκρο του να βρίσκεται στη μια από τις δυο δεδομένες γραμμές, ενώ η προέκταση του διέρχεται από το δεδομένο σημείο, τότε το δεύτερο άκρο θα γράψει καμπύλη(Κ). Η εφαρμογή της μεθόδου της νεύσης ισοδυναμεί με την εύρεση του σημείου τομής της καμπύλης (Κ) με τη δεύτερη δεδομένη γραμμή. Όμως η μέθοδος της νεύσης δεν δίνει καμία πληροφορία για τη φύση της καμπύλης (Κ), η οποία μπορεί να είναι απλή, ή αρκετά περίπλοκη Ίσως για αυτό το λόγο οι αρχαίοι γεωμέτρες απέφευγαν την μέθοδο αυτή.



Η τριχοτόμηση της γωνίας με τη μέθοδο της νεύσης γίνεται με τον εξής τρόπο: Έστω η γωνία ΑΒΓ=3φ που πρέπει να διαιρέσουμε σε τρία ίσα μέρη. Γράφουμε κύκλο κέντρου Β και προεκτείνουμε την ΑΒ προς την άλλη μεριά από το κέντρο Β. Μεταξύ της ευθείας ΒΕ και του κύκλου τοποθετούμε το τμήμα ΕΖ μήκους ίσο με την ακτίνα, έτσι ώστε η προέκταση του να διέρχεται από το σημείο Γ (το σημείο τομής της πλευράς ΒΓ με το κύκλο). Τότε εύκολα δείχνουμε ότι η γωνία ΖΕΔ=$\frac{1}{3}$ της ΓΒΑ γωνίας.

4.6 Εφαρμογές των ιδιοτήτων της εφαπτομένης στις κωνικές τομές με χρήση διαφορικού λογισμού.

α) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\sqrt{\chi}$ και το σημείο $A(\xi , \varphi(\xi))$ με $\xi\neq 0$ της γραφικής παράστασης της φ. Να δείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi , \varphi(\xi))$ και $B(-\xi , 0)$εφάπτεται της φ στο σημείο Α.

Η παραπάνω άσκηση του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών κατεύθυνσης της τρίτης Λυκείου(σελίδα 228 άσκηση 2) δεν είναι τίποτε άλλο από την κατασκευή της εφαπτόμενης ευθείας σε ένα οποιοδήποτε σημείο της παραβολής. Θα το λύσουμε με χρήση παραγώγων και αναλυτικής γεωμετρίας. Βρίσκουμε την εξίσωση εφαπτομένης της φ στο τυχαίο σημείο Α η οποία είναι $y-\varphi(\xi)=\varphi'(\xi)(\chi-\xi)$ ή $y-\sqrt{\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}(\chi-\xi)$ η οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου Β και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

β) Έστω η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\frac{1}{\chi}$ και η εφαπτομένη της συνάρτησης σε ένα τυχαίο σημείο της $M(\xi, \varphi(\xi))$.Αν Α και Β είναι τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες χχ΄ και yy΄ αντίστοιχα θα αποδείξουμε ότι το σημείο Μ είναι μέσο του Α, Β.

Επίσης η παραπάνω άσκηση είναι στη σελίδα 228 του σχολικού βιβλίου της γ τάξης και αποτελεί την τρίτη πρόταση του Απολλώνιου στο δεύτερο βιβλίο του ΄΄ Κωνικά του Απολλώνιου ΄΄ και είναι ιδιότητα της εφαπτομένης στην υπερβολή.

Η λύση με χρήση αναλυτικής γεωμετρίας και παραγώγων είναι η εξής: η εξίσωση εφαπτομένης στο Μ είναι $y-\varphi(\xi) = \varphi'(\xi)(\chi-\xi)$ ή ισοδύναμα $y-\frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\xi^2}(\chi-\xi)$ η οποία τέμνει τον άξονα χχ΄ στο σημείο $A(2\xi, 0)$ ενώ τον άξονα yy΄ στο σημείο $B(0,\frac{2}{\xi})$ Με την βοήθεια των τύπων που μας δίνουν τις συντεταγμένες του μέσου εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

BASMAKOVA I., (2014), *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*, ΑΘΗΝΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΣΩΤΗΡΙΟΥ.

BOYER C., MERZBACH U., (1997), *Η Ιστορία των Μαθηματικών,* ΑΘΗΝΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΥ.

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΚΑΙ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ, (2001), ΑΘΗΝΑ, Ο.Ε.Δ.Β.

ΕΥΚΛΕΙΔΗ *Στοιχεία*, ΤΟΜΟΣ Ι, (2001), ΑΘΗΝΑ, ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ.

HEATH T., (1896), *Apollonius of Perga, Treatise on Conic Section*, CAMBRIDGE AT THE UNIVERSITY PRESS.

HEATH T., (1908), *The thirteen books of Euclid's Elements* Volume II, CAMBRIDGE AT THE UNIVERSITY PRESS.

HEATH T., (2001), *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών,* Τόμος Ι-ΙΙ, ΑΘΗΝΑ, ΚΕΝΤΡΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ.

KATZ V., (2013), *Ιστορία των Μαθηματικών*, ΗΡΑΚΛΕΙΟ, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ.

KLEIN F., (1939), *Elementary mathematics from an advanced standpoint, Geometry*, LONDON, MACMILLAN AND CO.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ, (2011), ΑΘΗΝΑ, ΟΕΔΒ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ, (2002), ΑΘΗΝΑ, ΟΕΔΒ.

ΝΕΓΡΕΠΟΝΤΗΣ Σ., (2014-2015), *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά: Ευκλείδη «Στοιχεία»*, (σημειώσεις μαθήματος)

ΣΤΑΜΑΤΗΣ Ε., (1952), *Ευκλείδου Γεωμετρία*, ΤΟΜΟΣ Α΄, ΑΘΗΝΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΑΚΚΟΥΛΑ.

ΣΤΑΜΑΤΗΣ Ε., (1970), *Αρχιμήδους Άπαντα,* ΤΟΜΟΣ Β΄, ΑΘΗΝΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Τ.Ε.Ε.

ΣΤΑΜΑΤΗΣ Ε., (1976), *Απολλώνιου Κωνικά*, ΤΟΜΟΙ Α-Β-Γ-Δ, ΑΘΗΝΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ Τ.Ε.Ε.

ΣΤΡΑΝΤΖΑΛΟΣ Χ., (1989), *Η εξέλιξη των Ευκλείδειων και μη Ευκλείδειων Γεωμετριών,* ΑΘΗΝΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΡΔΑΜΙΤΣΑ.