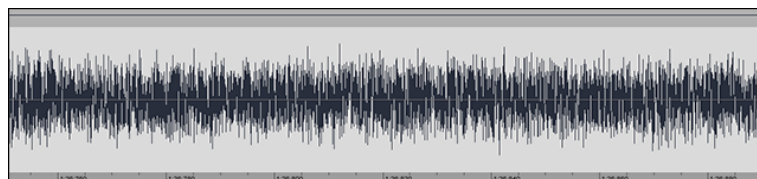


Fractal Γεωμετρία της Μουσικής



Μαριάννα Μουσάκου

Διπλωματική Εργασία
για το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Σπουδών

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών



ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα

Σεπτέμβριος 2016

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κα Λεώνη Ευαγγελάτου
Δάλλα για την αμέριστη στήριξή της, ηθική και επιστημονική.
Ευχαριστώ τον καθηγητή Χαράλαμπο Σαΐτη (**PhD in Music Technology**),
μαθηματικό και μουσικό για τη βοήθεια και τις γνώσεις που προσέφερε.
Ευχαριστώ την τριμελή επιτροπή για την παρουσία και τη συμμετοχή της την
ημέρα της παρουσίασης.

Αφιερώνεται σε..

..αυτούς που με Έκαναν Να αγαπήσω τη μουσική όσο Αγαπώ τα μαθηματικά.

Περιεχόμενα

1	Κεφάλαιο 1	11
1.1	Εισαγωγή στον ήχο και τη μουσική	11
1.1.1	Υποκειμενικά χαρακτηριστικά του ήχου	11
1.1.2	Extra χαρακτηριστικά του ήχου - χρήσιμα για την κατανόηση της εργασίας .	13
1.2	Μουσική κλίμακα, τόνος, τονικότητα και μουσικά διαστήματα	13
1.2.1	Μουσική κλίμακα	13
1.2.2	Τόνος	14
1.2.3	Τονικότητα	15
1.2.4	Μουσικά Διαστήματα	16
1.2.5	Μειωμένη Πεμπτη ή αλλιώς ο διάβολος στη Μουσική	17
1.3	Μαθηματικά και Μουσική - Μια σύντομη ανασκόπηση στην ιστορία	18
1.3.1	Σημειογραφία και περιεχόμενο	21
1.3.2	Η μουσική ως επιστήμη: Μια ιστορική προσέγγιση	22
1.3.3	Κοινωνικές και εκπαιδευτικές διασυνδέσεις	27
1.3.4	Μαθηματικά και Μουσική - Η πλευρά της σύνθεσης	29
2	Κεφάλαιο 2	31
2.1	Τυχαιότητα στη μουσική	31
2.1.1	Εισαγωγή	31
2.1.2	Θόρυβος	31
2.2	Διαγράμματα Διασποράς (Scatter Diagrams)	35
2.3	Voss: Μουσική από το θόρυβο $1/f$	38
2.4	Εξετάζοντας άλλες μουσικές συνθέσεις.	42
2.4.1	Xenakis-Eonta	42
2.4.2	Schubert: Who is Sylvia?	43
2.4.3	Gregorian Chant	44
2.4.4	Dodge: Brown Music	44
2.4.5	Stewart: Chaotic music	45
2.4.6	Babbit	47
2.4.7	Webern	48
2.4.8	Bach	48

2.4.9	Chopin	49
2.4.10	Row your boat	50
2.4.11	Bewitched, bothered and Bewildered	50
2.4.12	Pärt	51
2.4.13	Schoenberg	51
2.4.14	Συμπεράσματα	51
2.5	Fractal διαστάσεις στη μουσική	52
2.5.1	Fractal διαστάσεις	53
2.6	Η Box Διάσταση των μουσικών συνθέσεων	55
2.6.1	Dodge Brown Music	55
2.6.2	Voss Brown Music	56
2.6.3	Gregorian Chant	57
2.6.4	Voss Pink	57
2.6.5	Schubert	57
2.6.6	Voss White Music	58
2.6.7	Stewart	58
2.6.8	Xenakis	59
2.6.9	Babbit	60
2.6.10	Webern	60
2.6.11	Row row row your boat	60
2.6.12	Bewitched Bothered and Bewildered	61
2.6.13	Pärt	62
2.6.14	Bach	62
2.6.15	Chopin	63
2.6.16	Συμπεράσματα	64
2.7	Το άρθρο των Hsu	65
2.7.1	Εισαγωγή	65
2.7.2	Γεωμετρία των Fractals	67
2.7.3	Fractal Γεωμετρία της Συχνότητας (μελωδία) στην Κλασική Μουσική	68
2.7.4	Fractal Γεωμετρία του πλάτους στη μουσική του Bach	71
2.7.5	Περίληψη	73
2.7.6	Κριτική και επισκόπηση στο άρθρο	75
A'	Fractal Διαστάσεις	77
A'.1	Fractal Διαστάσεις	77
A'.1.1	Εισαγωγή	77
A'.1.2	Μέτρο Lebesgue, Μέτρο Hausdorff	77
A'.1.3	Fractal Διαστάσεις	80
A'.1.4	Ιδιότητες και σχέσεις διαστάσεων	82
A'.1.5	Υπολογισμός fractal διαστάσεων	83
	Βιβλιογραφία	87

Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της απόκτησης του μεταπτυχιακού διπλώματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, του τμήματος Μαθηματικών, του Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Ο στόχος της είναι να διερευνήσει τη σχέση των Μαθηματικών και της Μουσικής μέσα από το πρίσμα της fractal γεωμετρίας και πιο συγκεκριμένα της fractal διάστασης box. Το υλικό που βρέθηκε ήταν βιβλία και άρθρα γραμμένα από μουσικούς, οι οποίοι είχαν γνώση βασικών ακαδημαϊκών μαθηματικών εννοιών. Κύριος οδηγός ήταν η 2η έκδοση του βιβλίου του Charles Madden, *Fractals in Music - Introductory Mathematics for Musical Analysis*.

Η εργασία είναι χωρισμένη σε δύο κεφάλαια. Το 1ο κεφάλαιο αποτελείται από τρία θεματικά μέρη, εκ των οποίων τα δύο πρώτα περιέχουν βασικές έννοιες, χρήσιμες για την κατανόηση του κύριου σκελετού. Το πρώτο μέρος (1.1) παρουσιάζει βασικά χαρακτηριστικά του ήχου, το δεύτερο (1.2) αναλύει και εξηγεί τη μουσική ορολογία που θα ακολουθήσει και το τρίτο μέρος (1.3) αναλύει τη σχέση των Μαθηματικών και της Μουσικής μέσα στην ιστορία.

Το 2ο κεφάλαιο χωρίζεται εξ' ίσου σε τρία θεματικά μέρη. Στο πρώτο μέρος (ενότητες 2.1, 2.2, 2.3, 2.4) γίνεται μία εισαγωγή στην έννοια του θορύβου και τα $1/f^\beta$ είδη του ως αντικείμενο επιστημονικής έρευνας. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας διαγράμματα διασποράς (μέσω Excel) διερευνάται η συσχέτιση ή μη του τονικού ύψους μίας νότας με το τονικό ύψος της αμέσως προηγούμενης της τόσο στα είδη του θορύβου όσο και σε αρκετές μουσικές συνθέσεις διαφορετικών ειδών μουσικής. Στις επόμενες ενότητες (2.5, 2.6), οι οποίες αποτελούν το κεντρικό θέμα της εργασίας αυτής, εξετάζονται ως επί το πλείστον οι ίδιες μουσικές συνθέσεις, θίγοντας όμως μια πολύ διαφορετική πτυχή στη σχέση Μαθηματικών και Μουσικής. Αυτή, της fractal διάστασης box. Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Excel chart program, οι ερευνητές έφτιαξαν διαγράμματα που συνδέουν αυτή τη φορά το τονικό ύψος με τη χρονική στιγμή που εμφανίζεται στην εκάστοτε μουσική σύνθεση. Έπειτα, κάλυψαν τα διαγράμματα αυτά με ειδικά διαμορφωμένα πλέγματα, τα οποία βοήθησαν στην εύρεση της box διάστασης. Κάθε μουσική σύνθεση, λοιπόν αντιστοιχεί σε μία μοναδική αριθμητική τιμή της διάστασης. Για το τρίτο και τελευταίο μέρος του κεφαλαίου αυτού, αλλά και ολόκληρης της εργασίας, παρατίθεται μεταφρασμένο ένα επιστημονικό άρθρο με τίτλο *Fractal Geometry of Music*, γραμμένο από τους KENNETH J. Hsu και ANDREAS J. Hsu. Το άρθρο αυτό στάθηκε πηγή έμπνευσης για τον τίτλο και το θέμα της εργασίας αυτής, αφού είναι ένα από τα τρία άρθρα των Hsu, που αποτέλεσαν αντικείμενο σχολιασμού και εκ νέου έρευνας από τους ειδικούς στον κλάδο που ασχολείται με τη fractal γεωμετρία της μουσικής.

Στο παράρτημα αναλύεται λεπτομερώς και με αυστηρά μαθηματικό τρόπο η έννοια της fractal διάστασης.

Κεφάλαιο 1

Κεφάλαιο 1

1.1 Εισαγωγή στον ήχο και τη μουσική

Για να κατανοήσουμε πλήρως το περιεχόμενο της εργασίας αυτής, είναι αναγκαίο να κατανοήσουμε πρώτα τα χαρακτηριστικά μεγέθη του ήχου, καθώς και κάποιες βασικές έννοιες της Μουσικής.

1.1.1 Υποκειμενικά χαρακτηριστικά του ήχου

Τα ηχητικά κύματα ανιχνεύονται με δέκτες τους οποίους θέτουν σε ταλάντωση. Παράδειγμα τέτοιου δέκτη είναι η μεμβράνη που έχουν τα μικρόφωνα ή το τύμπανο του αυτιού μας. Συνδέοντας κατάλληλα το μικρόφωνο με παλμογράφο μπορούμε να έχουμε και μια απεικόνιση του ηχητικού κύματος που αυτό ανιχνεύει.



Σχήμα 1.1: Το ηχητικό κύμα γίνεται αντιληπτό από τον άνθρωπο. Επίσης μπορεί να παρασταθεί στην οθόνη μιας συσκευής που ονομάζεται παλμογράφος.

Ο άνθρωπος ανιχνεύει τους ήχους με τα τύμπανα των αυτιών του και τους αντιλαμβάνεται με τον εγκέφαλο του. Τα χαρακτηριστικά που συνδέονται με τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τον ήχο ονομάζονται υποκειμενικά χαρακτηριστικά του ήχου και είναι το ύψος, η ακουστότητα και η χροιά.

Ύψος του ήχου ονομάζεται το υποκειμενικό χαρακτηριστικό σύμφωνα με το οποίο διακρίνουμε έναν οξύ ή ψηλό ήχο από ένα βαρύ ή χαμηλό ήχο. Το ύψος καθορίζεται από τη συχνότητα του ηχητικού κύματος. Όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα τόσο ψηλότερος είναι ο ήχος.

Τα όρια συχνότητας των ακουστών ήχων διαφέρουν ελαφρά από άνθρωπο σε άνθρωπο. Για παράδειγμα, ένας νέος άνθρωπος αντιλαμβάνεται καλύτερα βαρύτερους και οξύτερους ήχους απ'

ό,τι ένας ηλικιωμένος. Σημαντικότερη διαφορά παρατηρείται μεταξύ των διαφορετικών ειδών ζώων. (σχήμα 1.2)



Σχήμα 1.2: Όριο συχνότητας ακουστών ήχων σε διάφορα έμβρια όντα.

Αν χτυπήσουμε δυνατά το διαπασών (σχήμα 1.3) ή αν τραβήξουμε πιο δυνατά τη χορδή μιας κιθάρας, τότε αυτά πάλλονται με μεγαλύτερο πλάτος. Συγχρόνως ακούμε ισχυρότερο ήχο. Ακουστότητα του ήχου λέγεται το χαρακτηριστικό με το οποίο ξεχωρίζουμε τους ήχους σε ισχυρούς και λιγότερο ισχυρούς, ασθενείς κ.λπ. Η ακουστότητα καθορίζεται κυρίως από την ένταση του ηχητικού κύματος, δηλαδή από την ηχητική ενέργεια που φθάνει στο αφτί μας κάθε δευτερόλεπτο. Η ένταση του ήχου είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος του ηχητικού κύματος. Η ακουστότητα εκτός από την ένταση εξαρτάται και από τη συχνότητα του ήχου. Το ανθρώπινο αφτί είναι πιο ευαίσθητο στις μεσαίες συχνότητες (περίπου 1.000 Hz) απ' ό,τι στις χαμηλές και τις υψηλές συχνότητες.



Σχήμα 1.3: Όταν το διαπασών ταλαντώνεται με μεγαλύτερο πλάτος, η ένταση του ήχου που παράγει αυξάνεται.

Για τη μέτρηση της στάθμης της έντασης ενός ήχου χρησιμοποιείται η κλίμακα ντεσιμπέλ (decibel, dB) η οποία βασίζεται στις μεταβολές της πίεσης του αέρα, δηλαδή το πλάτος του κύματος. Τα μηδέν ντεσιμπέλ αντιστοιχούν σε ήχο που μόλις ακούγεται, ενώ ο ήχος 120 dB προκαλεί πόνο στα αφτιά. Μια αύξηση της στάθμης της έντασης κατά 10dB αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 10 φορές μεγαλύτερης, κατά 20dB αντιστοιχεί σε ήχο έντασης $100=10^2$ φορές μεγαλύτερης έντασης και κατά 30 dB αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 10^3 φορές μεγαλύτερης. Ήχοι που διαφέρουν κατά 10dB οι περισσότεροι άνθρωποι τους αντιλαμβάνονται ως ήχους διπλάσιας ακουστότητας.

Μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο ήχους που προέρχονται από δύο διαφορετικά μουσικά όργανα, λόγου χάρη βιολί και κλαρίνο, ακόμα και αν οι ήχοι έχουν το ίδιο ύψος και την ίδια ακουστότητα. Το υποκειμενικό χαρακτηριστικό με το οποίο διακρίνουμε τις πηγές των ήχων λέγεται χροιά.

Από τι όμως εξαρτάται η χροιά; Αν με τη βοήθεια ενός μικροφώνου απεικονίσουμε στην οθόνη του παλμογράφου τους ήχους που προέρχονται από διαφορετικά όργανα τα οποία παίζουν την ίδια νότα, παρατηρούμε ότι οι μορφές τους είναι διαφορετικές (σχήμα 1.4). Η χροιά είναι εκείνο το χαρακτηριστικό του ήχου χάρη στο οποίο μπορούμε να αναγνωρίσουμε τους ανθρώπους από τις φωνές τους.



Σχήμα 1.4: Νότες και Φυσική: εικόνες στην οθόνη του παλμογράφου
(α) Από διαφορετικές νότες που προέρχονται από το ίδιο όργανο. (β) Της ίδιας νότας που προέρχεται από διαφορετικά μουσικά όργανα.

1.1.2 **Extra** χαρακτηριστικά του ήχου - χρήσιμα για την κατανόηση της εργασίας

Η πίεση του αέρα και ο ήχος

Η πίεση του αέρα στο επίπεδο της θάλασσας είναι περίπου 101,325 Pascals (Pa) ή 14.7 pounds per square inch (psi) ή $1kg/cm^2$. Οι μεταβολές της πίεσης του αέρα τις οποίες τα αυτιά μας αντιλαμβάνονται ως ήχο είναι μεταξύ 20 *microPascals* (μPa) (ή 0.000020Pa ή *microbar* ή $dyne/cm^2$) και 20Pa.

Ισχύς και **watts**

Η Ισχύς ή αλλιώς η Ενέργεια του Ήχου στην μονάδα του χρόνου, η οποία εκπέμπεται από μία πηγή μετρείται σε *watts*. Έχει εκτιμηθεί ότι χρειάζονται περισσότεροι από 3.000.000 άνθρωποι, οι οποίοι να μιλούν όλοι μαζί, για να παραχθεί ισχύς αντίστοιχη με εκείνη που θα άναβε μία λάμπα 100 *watt*

Πίεση, πλάτος, ένταση

Το πλάτος (**amplitude**) αντιστοιχεί στη μέγιστη αλλαγή πίεσης του αέρα όπως μεταδίδεται το ηχητικό κύμα. Η πυκνότητα ισχύος (**power density**) όπως διέρχεται από μία επιφάνεια κάθετη στην διεύθυνση της μετάδοσης του ηχητικού κύματος καλείται Ένταση (**Intensity**) του Ήχου.

1.2 Μουσική κλίμακα, τόνος, τονικότητα και μουσικά διαστήματα

1.2.1 Μουσική κλίμακα

Λέγοντας κλίμακα (άρχ. κλίμαξ ° κλίνω) ή σκάλα, εννοούμε μία σειρά από μουσικούς φθόγγους, την οποία χρησιμοποιεί ο μουσικός/συνθέτης ως βάση για τη σύνθεση μουσικής και τραγουδιών. Ο αριθμός των μουσικών φθόγγων ποικίλει από μια κλίμακα σε άλλη: μια πεντατονική κλίμακα περιέχει πέντε νότες, ενώ αντίστοιχο αριθμό περιέχουν οι εξατονικές (έξι νότες) και επτατονικές (επτά νότες). Κάθε μουσική κλίμακα χαρακτηρίζεται από μια συγκεκριμένη διάταξη ως προς τα

διαστήματα (τις ηχητικές αποστάσεις) μεταξύ των φθόγγων της. Υπάρχουν πολυάριθμες κλίμακες (διαφορετικές μεταξύ τους ως προς την εσωτερική διάταξη των φθόγγων). Παρόλο που διαφορετικοί πολιτισμοί δεν περιέχουν αυτούσια την ελληνική λέξη 'κλίμακα' στο μουσικό τους λεξιλόγιο, έχουν ωστόσο αντίστοιχες ή παραπλήσιες έννοιες με αυτή. Έτσι:

- Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν τους τρόπους. Σε κάθε τρόπο έδιναν, ανάλογα με την διάταξή του, και ένα διαφορετικό όνομα, παρμένο από τόπους και λαούς που τους πρωτοχρησιμοποίησαν. Υπήρξε έτσι ο Δώριος ή Δωρικός τρόπος, ο Λύδιος, ο Φρύγιος κ.ά.
- Οι Έλληνες του Πόντου έχουν τους σκοπούς.
- Οι Άραβες ονομάζουν τις κλίμακες τους μακάμ και έτσι ακριβώς τις έλεγαν παλιότερα οι Έλληνες μουσικοί, μέχρι τα πρώτα χρόνια που διαμορφώθηκε η έννοια του ρεμπέτικου τραγουδιού, οπότε και οι κλίμακες άρχισαν να ονομάζονται με το ελληνικό δρόμοι.
- Οι Βυζαντινοί είχαν τους ήχους και τους χώριζαν σε κύριους ήχους και πλάγιους ήχους.
- Οι Πέρσες ονομάζουν τις κλίμακες περντέ, ενώ οι κινέζοι τις λένε τιάο και οι Ινδοί ράγκα.

Εξαιτίας της εσωτερικής διάταξης των φθόγγων της, κάθε κλίμακα προκαλεί διαφορετικές συναισθηματικές εντυπώσεις στον κάθε ακροατή. Ωστόσο, δεν είναι τυποποιημένο το ότι μια κλίμακα σχετίζεται με ένα και μόνο ανθρώπινο συναίσθημα.

-Οι σημαντικότερες ευρωπαϊκές κλίμακες

Αν και η μουσική δεν γνωρίζει σύνορα και θα ήταν δυνατόν ένας δημιουργός να χρησιμοποιήσει στη μουσική του κλίμακες από κάθε μέρος του κόσμου, εντούτοις, η μεγάλη επιρροή της μουσικής που προέρχεται από τη δυτική Ευρώπη σε όλο τον κόσμο, έχει υποχρεώσει την αυθεντική μουσική των λαών να ονομάζεται στη διεθνή μουσική γλώσσα είτε παραδοσιακή και λαϊκή, είτε έθνικ (ethnic) αν έχει σαφώς επηρεαστεί από αυτές, ώστε να διακρίνεται από την 'δυτική' ευρωπαϊκή μουσική δημιουργία, είτε αυτή είναι η Ευρωπαϊκή κλασική μουσική, είτε η ροκ, η ποπ και τα παρακλάδια τους. Στις παραδοσιακές/λαϊκές μουσικές των χωρών ιδιαίτερα της ανατολής, θα συναντήσουμε πολύ συχνά κλίμακες με ποικίλες κατασκευές (για παράδειγμα, κλίμακες 'χτισμένες' σύμφωνα με τον πεντατονικό τρόπο), που περιέχουν σειρές από 4 μέχρι και 32 νότες. Αντίθετα, στο μεγαλύτερο μέρος της μη έθνικ, ευρωπαϊκής μουσικής, χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο, δύο μόνο 'τρόποι' (πρότυπα) κατασκευής κλιμάκων, ο Μείζων και ο Ελάσσων ή αλλιώς θα λέγαμε, δύο μόνο ομάδες κλιμάκων: οι λεγόμενες Μείζονες (ιταλ. Ματζόρε) και οι Ελάσσονες (ιταλ. Μινόρε). Και οι δύο αυτές είναι οκτάφθογγες που σημαίνει ότι περιέχουν ένα σύνολο από οκτώ νότες: επτά συν μία ακόμη, που είναι πάλι η αρχική, η οποία όμως επαναλαμβάνεται μετά το πέρας των επτά: π.χ. Ντο, Ρε, Μι, Φα, Σολ, Λα, Σι, Ντο. Μία κλίμακα που παίζει ιδιαίτερο ρόλο για την εργασία αυτή είναι η χρωματική κλίμακα. Στη χρωματική κλίμακα οι βαθμίδες έχουν μεταξύ τους διαφορά ενός ημιτονίου.

1.2.2 Τόνος

Στη μουσική, ο όρος τόνος, προέρχεται από την θεωρία της χορδής, σύμφωνα με την οποία το μουσικό (τονικό όπως λέγεται) ύψος που παράγεται από χορδές κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό, καθορίζεται από τρεις παράγοντες: α) το πάχος της κάθε χορδής, β) το μήκος της κάθε χορδής και γ) την τάση της κάθε χορδής. Η τάση της κάθε χορδής καθορίζεται από το πόση δύναμη έχει εφαρμοστεί

κατά το χόρδισμά της (κούρδισμα) μέσω των κλειδιών (αρχαιοελληνικών κολάφων). Χορδές λοιπόν, κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό, έχοντας το ίδιο μήκος και το ίδιο πάχος, παράγουν διαφορετικά μουσικά ύψη (μουσικές συχνότητες), ανάλογα με το πόσο τεντωμένες είναι. Τα διαφορετικά αυτά ύψη ονομάζονται στην μουσική ορολογία φθόγγοι ή τόνοι.

Ο όρος τόνος έχει επικρατήσει στη μουσική ορολογία να αναφέρεται στο μείζον διάστημα δευτέρας (αγγλ. *major second*), το οποίο ακριβέστερα ονομάζεται μείζων τόνος. Το διάστημα αυτό εκπεφρασμένο ως μαθηματικός λόγος είναι 8:9, που συνεπάγεται ότι δύο χορδές (από το ίδιο υλικό, με το ίδιο πάχος και την ίδια τάση), όπου η μία έχει μήκος 90 cm και η άλλη 80 cm (δηλαδή 8/9 των 90 cm), θα παράγουν δύο διαφορετικούς φθόγγους που θα έχουν διαφορά, όπως ονομάζεται, ενός τόνου. Χαμηλότερος (βάσει του διαστήματος) θα είναι ο φθόγγος ο προερχόμενος από την χορδή των 90 cm, και ψηλότερος (χορυφή του διαστήματος) ο φθόγγος που προέρχεται από την χορδή των 80 cm. Στην ευρωπαϊκή μουσική διακρίνονται δύο είδη τόνων ο μείζων τόνος (8/9) και ο ελάσσων τόνος (9/10).

Μεγάλη ποικιλία τόνων με την έννοια του μουσικού διαστήματος, απαντάται στους αρχαίους Έλληνες θεωρητικούς συγγραφείς. Ως τόνους ονομάζουν γενικώς τα διαστήματα που καθορίζονται από δύο διαδοχικούς φθόγγους κάποιας κλίμακας. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτουν πολλά είδη τόνων: τόνοι μείζονες, ελάσσονες, ελάχιστοι, υπερμείζονες. Η έκφραση όλων αυτών των τόνων με μαθηματικούς λόγους, ποικίλει μεταξύ των διαφόρων αρχαίων θεωρητικών συγγραφέων. Αντίστοιχα, και οι βυζαντινοί και οι μεταβυζαντινοί θεωρητικοί της εκκλησιαστικής μουσικής ακολουθούν την αρχαιοελληνική ορολογία για τον προσδιορισμό του τόνου, διαφοροποιούμενοι ως προς τον μαθηματικό προσδιορισμό των ποικιλιών του, και από τους αρχαίους Έλληνες θεωρητικούς, αλλά και μεταξύ των.

Ο όρος τόνος συνδυαζόμενος μάλιστα με τα επίθετα Δώριος, Φρύγιος, Λύδιος, κλπ, στην αρχαιοελληνική μουσική θεωρία, αλλά και σε ορισμένους θεωρητικούς της βυζαντινής μουσικής, σημαίνει κλίμακα, τρόπος, αρμονία.

1.2.3 Τονικότητα

Ο μουσικολογικός όρος Τονικότητα υποδηλώνει τη χαρακτηριστική τάση της μουσικής γλώσσας να οργανώνεται στη βάση ενός ηχητικού πόλου έλξης, το επονομαζόμενο τονικό κέντρο. Ο όρος αυτός βρήκε εφαρμογή στην κλασική μουσική παραγωγή της δυτικής Ευρώπης από το 17ο μέχρι τον 19ο αιώνα, αλλά και σήμερα από την (τονική) τζαζ μουσική μέχρι τις εμπορικές δημιουργίες της ποπ και ροκ μουσικής.

Στις αρχές του 16ου αιώνα, με τη μετάβαση από την Αναγέννηση στο Μπαρόκ, η μουσική προσανατολίστηκε και κατέληξε στη χρήση δύο μόνο μουσικών τρόπων, του Ιωνικού και του Αιολικού, οι οποίοι εν τέλει καθιερώθηκαν ως μείζονας τρόπος και ελάσσονας τρόπος. Στην εξέλιξη της αρμονίας οι δύο αυτοί τρόποι αποτέλεσαν αυτό που πλέον ονομάζουμε Κλίμακες, κατά τις οποίες υφίσταται ως κεντρικό τους σημείο μια βασική νότα, συγκεκριμένα η πρώτη νότα κάθε κλίμακας, η οποία και αποτελεί το λεγόμενο τονικό τους κέντρο.

Έτσι, η πορεία κάθε μελωδίας για να γίνεται αποδεκτή από τους ακροατές και να μπορούν να κατανοούν τμηματικά την εξέλιξή της, έπρεπε σε τακτά διαστήματα να επανέρχεται και να στέκεται λίγο ή περισσότερο, σε αυτή την πρώτη νότα κάθε κλίμακας, δημιουργώντας έτσι μουσικές φράσεις και μουσικές περιόδους, κατ' αντιστοιχία του προφορικού λόγου.

Για παράδειγμα, αν μιλούσαμε για την κλίμακα του Ντο, που αποτελείται από τις νότες Ντο, Ρε, Μι, Φα, Σολ, Λα, Σι, Ντο, θα έπρεπε μετά από κάθε τμήμα μιας μελωδίας και μετά από μια σειρά από νότες, να επανέλθουμε οπωσδήποτε στην νότα Ντο και κατόπιν να ξεκινήσουμε μία νέα μελωδική φράση, ένα νέο μελωδικό τμήμα.

Αυτή η επαναφορά σε τακτά διαστήματα στο τονικό κέντρο της κλίμακας (στην πρώτη της νότα δηλαδή, η οποία μπορεί να ακούγεται είτε στην μελωδία είτε και στη συνοδευτική συγχορδία) ονομάστηκε Τέλεια Πτώση, για τον λόγο ότι δίνει την αίσθηση της ολοκλήρωσης ενός μουσικού νόηματος, έχοντας κατά κάποιο τρόπο τον χαρακτήρα της τελείας ή άνω τελείας του γραπτού λόγου.

Η κατοπινή πορεία εξέλιξης της λεγόμενης κλασικής μουσικής, από τα μέσα του 19ου αι. και μετά, απέδειξε ότι η τονικότητα μπορεί να προχωρήσει μέχρι την εξάντληση των εκφραστικών δυνατοτήτων της, με τη χρήση της πολυτονικότητας (ταυτόχρονη χρήση διαφορετικών τονικοτήτων/κλιμάκων στην ίδια σύνθεση) αλλά και με την ολοκληρωτική άρνηση της τονικότητας, τη λεγόμενη ατονικότητα. Εξέλιξη της ατονικότητας υπήρξε και ένα καινούριο σύστημα οργάνωσης της μουσικής γλώσσας, το επονομαζόμενο δωδεκαφθογγικό ή δωδεκάφθογγο σύστημα, το οποίο αρνείται το νόημα της ιεραρχίας ανάμεσα στις βαθμίδες του τονικού συστήματος και φυσικά αρνείται την σπουδαιότητα της διαρκούς επιστροφής στην πρώτη νότα της κλίμακας που μας δίνει την αίσθηση της τονικότητας. Το σύστημα αυτό, βασίζεται σε μια διαφοροποιημένη χρήση και των δώδεκα ημιτονίων της χρωματικής κλίμακας, δίνοντας τους ίση σπουδαιότητα μέσα στο μουσικό έργο. Αντιθέτως, στα πιο εμπορικά, ευρωπαϊκά μουσικά είδη της σημερινής εποχής, η έννοια της Τονικότητας διατηρείται στη συντριπτική πλειοψηφία των μουσικών δημιουργιών.

1.2.4 Μουσικά Διαστήματα

Στη θεωρία της μουσικής, το διάστημα ορίζεται ως η διαφορά ανάμεσα σε δύο τονικά ύψη. Τα διαστήματα χωρίζονται σε οριζόντια (ή μελωδικά ή γραμμικά) όταν πρόκειται για μια σειρά διαδοχής τους, όπως σε μια μελωδία και σε κάθετα (ή αρμονικά) όταν διέπονται από την ταυτόχρονη συνήχηση δύο τονικών υψών, όπως σε μια συγχορδία.

Στη μουσική της Δυτικής Ευρώπης τα διαστήματα ορίζονται συνήθως στα πλαίσια της διατονικής κλίμακας τα μικρότερα διαστήματα που συναποτελούν μια τέτοια κλίμακα ονομάζονται ημιτόνια. Στα πλαίσια άλλων ειδών μουσικής, όπως η παραδοσιακή μουσική της Ινδίας και η μικροτονική μουσική, χρησιμοποιούνται ακόμη μικρότερα διαστήματα, τα οποία και ονομάζονται μικροδιαστήματα. Το κόμμα είναι ένα τέτοιο μικροδιάστημα και χρησιμοποιείται στον συγκερασμό μη-διατονικών κλιμάκων, όπως συμβαίνει στη Βυζαντινή μουσική και στο Γρηγοριανό μέλος. Τα διαστήματα αυτά συχνά δεν γίνονται αντιληπτά από το ανθρώπινο αυτί και η ακριβής τους ήχηση απαιτεί μέτρηση με ειδικά επιστημονικά όργανα.

Σε επιστημονικούς όρους, το μουσικό διάστημα είναι η αναλογία ανάμεσα σε δύο συχνότητες: π.χ. το διάστημα οκτάβας εκφράζεται με τον λόγο 2:1, που σημαίνει ότι αν η μία συχνότητα είναι 100 Hz η δεύτερη θα πρέπει να είναι 200Hz. Ένας άλλος τρόπος ακριβούς μέτρησης συχνοτήτων είναι με την κατάτμηση του ημιτονίου σε εκατοστά (ένα ημιτόνιο ισούται με 100 εκατοστά), μία μονάδα που προκύπτει από τη λογαριθμική σχέση του λόγου της μιας συχνότητας ως προς την άλλη. Και στους δύο τρόπους η επιθυμητή αναλογία ισχύει εξίσου.

Στη θεωρία της μουσικής έχουν επικρατήσει κάποια συγκεκριμένα ονόματα για την περιγραφή των πιο βασικών διαστημάτων, με βάση α) την μεταξύ τους απόσταση σε φθόγγους (χρησιμοποιού-

ύνται τα αριθμητικά πρώτη, δεύτερη, τρίτη κλπ) και β') τα ποιοτικά χαρακτηριστικά τους (καθαρό, μεγάλο, μικρό, ελατωμένο, αυξημένο).

Έτσι, για παράδειγμα, μπορεί να γίνει λόγος για διάστημα τρίτης μεγάλης (3M) και τρίτης μικρής (3m). Κατ' ουσίαν η μέτρηση αφορά τόνους (δύο διαδοχικά ημιτόνια), αποσαφηνίζοντας παράλληλα την ενδεχόμενη διαφορά ημιτονίου (όπως στο παραπάνω παράδειγμα), ενώ ταυτόχρονα ονοματίζει το δεδομένο διάστημα. Σε άλλα μουσικά συστήματα, όπως στην Αρχαία ελληνική μουσική και τη Βυζαντινή μουσική, τα διαστήματα αποσαφηνίζονται και ονοματίζονται με άλλη ορολογία, ενέχοντας όμως την ίδια βάση (π.χ. το διάστημα ανιούσας δεύτερης μεγάλης (2M) αντιστοιχεί στο ολίγον, ενώ η αντίστοιχη κατιούσα στην απόστροφο της Βυζ. μουσικής).

1.2.5 Μειωμένη Πεμπτη ή αλλιώς ο διάβολος στη Μουσική

Τα απλά διαστήματα που θεωρούνται 'σύμφωνα' (και κατ' επέκταση 'ευχάριστα' στην ακουστική αντίληψη) είναι: ελάσσων τρίτη, μείζων τρίτη, τέλεια τέταρτη, τέλεια πέμπτη, ελάσσων έκτη, μείζων έκτη και βέβαια η όγδοη (οκτάβα). Τα ακόρντα που περιέχουν μονάχα τέτοιου τύπου διαστήματα θεωρούνται σταθερά στην ακουστική τους αντίληψη και

ξεκούραστα. Ο ακροατής τους γενικά δεν αισθάνεται υποσυνείδητα την ανάγκη να λυθούν αυτά μεταβαίνοντας σε άλλα ακόρντα. Ειδικά η τέλεια τέταρτη αποτελεί την αναστροφή της τέλειας πέμπτης. Στη συνήθη μουσική πρακτική μπορεί να θεωρηθεί είτε σύμφωνο (όταν υποστηρίζεται από χαμηλότερη τρίτη ή τέλεια πέμπτη), είτε διάφωνο διάστημα έστω κι αν από μόνη της δημιουργεί 'ευνοϊκή' ακουστική εντύπωση όπως και η τέλεια πέμπτη.

Τα θεωρούμενα διάφωνα διαστήματα είναι η ελάσσων δεύτερη, μείζων δεύτερη, ελάσσων έβδομη, μείζων έβδομη και ιδιαίτερα το περίφημο Τρίτονο (το διάστημα μεταξύ της τέλειας τετάρτης και της τέλειας πέμπτης)

Τα διαστήματα που ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία θεωρούνται συνήθως λιγότερο ευχάριστα και ότι προξενούν ένταση. Στην τονική μουσική τα ακόρντα που περιέχουν διάφωνες συνηχήσεις θεωρούνται "ασταθή" μιάς και η αντίληψη που αποδίδουν στο μέσο ακροατή είναι αυτή της αναμονής για τη μετάβαση σε πιο "σταθερά". Τούτη η "μετάβαση" προς τη σύμφωνη συνηχήση - που αναμένεται κανονικά ν' ακολουθήσει καλείται "λύση" της διαφωνίας.

Το μοτίβο της εναλλαγής ανάμεσα στις δημιουργούμενες εντάσεις και τις αντίστοιχες λύσεις (εκτονώσεις) των διάφωνων συνηχήσεων αποτελεί κύριο ψυχοακουστικό παράγοντα που καθιστά ένα μουσικό κομμάτι ενδιαφέρον και συναρπαστικό. Μουσική δημιουργία που στερείται διαφωνιών τείνει να εκτιμηθεί ως απλοϊκή και μονότονη. Από την άλλη μεριά, μουσικές δημιουργίες περιέχουσες σε μεγάλο ποσοστό διαφωνίες που δεν καταλήγουν σε λύση είναι δυνητικά δύσκολες στην ακρόαση για αρκετούς, εξ' αιτίας της συσσωρευμένης έντασης που δε βρίσκει εκτόνωση.

Η προτίμηση για ορισμένους συνδυασμούς μουσικών φθόγγων έναντι άλλων βασίζεται εν μέρει σε πολιτισμικούς παράγοντες. Όμως, ακόμη και μέσα στους κόλπους της Δυτικής Μουσικής, οι απόψεις σχετικά με το ποιές διάφωνες συνηχήσεις ενεργοποιούν δυσάρεστα συναισθήματα και ποιές όχι έχουν αλλάξει δραματικά με την πάροδο των αιώνων. Η διάκριση εξάλλου γίνεται σε μουσικό πλαίσιο.

Παραδείγματος χάρη, η ίδια μουσική δομή που δε μοιάζει ν' απαιτεί λύση (λ.χ. οι μείζονες πέμπτες ενός πρελούδιου του Debussy) μπορεί ν' ακούγεται παράταιρη σε διαφορετικό περιεχόμενο (λ.χ. μέσα σε μια φούγκα του Bach) όπου επιβάλλεται η λύση της. Αν μάλιστα ληφθούν παραδείγματα και από

το χώρο της Ροκ, τα διάφωνα ακόρντα λ.χ. από το "Tonight's the Night" του Neil Young ή το "Shine on You Crazy Diamond" των Pink Floyd εξακολουθούν να στοιχειώνουν ευχάριστα το νου των ακροατών εδώ και 35 χρόνια. Οι κύριοι παράγοντες όμως σχετίζονται με το ταίριασμα των φυσικών χαρακτηριστικών των ηχητικών κυμάτων και τη λειτουργία της ακοής.

Στο θέμα των χαρακτηριστικών, εάν δύο νότες είναι για παράδειγμα μια οκτάβα χωριστά, όταν συνηχούν θ' αντιστοιχούν δύο ακριβώς ηχητικά κύματα της υψηλότερης προς ακριβώς ένα της χαμηλότερης στη μονάδα του χρόνου. Υποθέτοντας πως θα αντιστοιχούσαν λ.χ δύο και ένα δέκατον ακριβώς κύματα ή σε άλλη περίπτωση 11/12 κύματος της μιας προς ένα ακριβώς κύμα της άλλης, είναι προφανές ότι οι συνδυασμοί που θα προέκυπταν είναι λιγότερο ταιριαστοί μεταξύ τους. Υπό αυτή τη σκοπιά, η διαβάθμιση από τη σύμφωνη στη διάφωνη συνήχηση αντιστοιχεί σε ισοδύναμη διαβάθμιση των συχνοτικών λόγων ανάμεσα στις νότες των εκάστοτε διαστημάτων από απλούς σε πολύπλοκους.

Επιστρέφοντας στην αυξημένη τέταρτη και τη μειωμένη πέμπτη, έχουν επίσης κοινό χαρακτηριστικό ότι αποτελούνται το καθένα διάστημα από έξι ημίτονα (ή αλλιώς τρεις ολόκληρους τόνους, γι' αυτό και η εναλλακτική ονομασία για τούτον τον τύπο διαστήματος είναι ' τρίτονο'). Στη Δυτική Μουσική, αυτό το ξεχωριστό διάστημα (αυξημένη τέταρτη) που είναι α δ ύ ν α τ ο ν να καταχωρηθεί είτε ως τέλειο, είτε ως μείζον είτε ως έλασσον, θεωρείται ι δ ι α ί τ ε ρ α 'διάφωνο' και 'ασταθές'. Μάλιστα από την εποχή του Μεσαίωνα απέφευγαν την εφαρμογή του στην Εκκλησιαστική μουσική (εξαιτίας της έντονα διάφωνης συνήχησης που συνεπαγόταν) ενώ μεταγενέστερα του προσδόθηκε η ιδιότητα του 'διαβόλου στη Μουσική': *Mi contra fa est Diabolus in Musica*.

1.3 Μαθηματικά και Μουσική - Μια σύντομη ανασκόπηση στην ιστορία

'And so they have handed down to us clear knowledge of the speed of the heavenly bodies and their risings and settings, of geometry, numbers and, not least, of the science of music. For these sciences seem to be related.

-ARCHYTAS OF TARENTUM, EARLY FOURTH CENTURY BC'

'This science [mathematics] is the easiest. This is clearly proved by the fact that mathematics is not beyond the intellectual grasp of anyone. For the people at large and those wholly illiterate know how to draw figures and compute and sing, all of which are mathematical operations.

-ROGER BACON, c.1265'

'I do present you with a man of mine, Cunning in music and in mathematics, To instruct herFULLy in those sciences, Whereof, I know, she is not ignorant.

-WILLIAM SHAKESPEARE, 1594'

'May not Music be described as the Mathematics of Sense, Mathematics as the Music of reason? The soul of each the same! Thus the musician feels Mathematic, the mathematician thinks Music,- Music is the dream, Mathematics the working line,-each to receive its consummation from the other.

-JAMES JOSEPH SYLVESTER, 1865'

'Quite suddenly a young violinist appeared on a balcony above the courtyard. There was a hush as, high above us, he struck up the first great D minor chords of Bach's Chaconne. All at once, and with utter certainty, I had found my link with the centre . . . The clear phrases of the Chaconne touched me like a cool wind, breaking through the mist and revealing the towering structures beyond. There had always been a path to the central order in the language of music, ... today no less than in Plato's day and in Bach's. That I now knew from my own experience.

-WALTER HEISENBERG, 1971'

'When Professor Spitta, the great expert on Bach, explained to Ethel Voynich (Lily Boole)] that in tuning, the third and fourth notes of the octave had to be just a little off or otherwise the octave would not fit, she suddenly "began to hate God and to despise the Almighty Creator of all things visible and invisible who couldn't make even eight notes fit", and she remained devoutly atheistic for the rest of her days. When Anne Freemantle told her many years later that Einstein had shown that it was only in our space-time continuum that the octave does not fit, the ninety-six year old Voynich replied reflectively, "Yes, perhaps I was a bit hasty."

-DES MACHALE, 1985'



Σχήμα 1.5: Η Margarita Philosophica, (εδώ) ξυλόγλυπτο του Gregor Reisch, είναι μία από τις πρώτες έντυπες εγκυκλοπαίδειες γενικής γνώσης. Εκδόθηκε για πρώτη φορά το 1503.

Κατά παράδοση τα Μαθηματικά και η Μουσική συνδέονται πολύ στενά. Σύμφωνα με τους ιστορικούς ο 17ος αιώνας αναφέρεται ως ένα κρίσιμο σημείο καμπής, όπου η μουσική από επιστήμη γινόταν τέχνη και η επιστήμη από θεωρητική γινόταν πρακτική. Σ' αυτή την περίοδο γίνονται πολλές αναφορές σύνδεσης της επιστήμης και της μουσικής. Το 19ο και τον 20ο αιώνα η ανάπτυξη της επιστήμης της μουσικής και της μαθηματικής προσέγγισης της σύνθεσης διέυρυναν περισσότερο τη σύνδεση των δύο πεδίων.

Η μουσική και τα μαθηματικά είναι δύο τομείς τόσο άρρηκτα συνδεδεμένοι που ο διαχωρισμός τους προκαλεί έκπληξη. Προς το τέλος του 16ου και την αρχή του 17ου αιώνα η μουσική άρχισε να αναγνωρίζεται κυρίως ως τέχνη, να αντιμετωπίζεται παιδαγωγικά ως γλώσσα και να αναλύεται με εκφραστικούς όρους. Και ενώ θα περίμενε κανείς να χάσει την επιστημονική της χροιά, αντιθέτως

αναπτύχθηκε με καινούρια δεδομένα.

Αυτή η εισαγωγή έχει ως στόχο να διερευνήσει, μέσω μιας μεγάλης ποικιλίας κειμένων, μερικές από τις πολλές ιστορικές και συνθετικές εκδηλώσεις της σύνδεσης μεταξύ των μαθηματικών και της μουσικής. Η προσπάθεια μόνο επιλεκτική μπορεί να είναι, αφού το πεδίο είναι τεράστιο και κυμαίνεται από την αρχαία θεωρία έως τις νεότερες ανακαλύψεις, όπως εκείνες του μεσαιωνικού *motet*, μέχρι τις νέες ιδέες της μετατονικής μουσικής και των πειραματικών μουσικών τεχνικών που ανακαλύφθηκαν κατά τον τελευταίο αιώνα. Σε ό,τι ακολουθεί, το πεδίο προβάλλεται ιδιαίτερα από την προοπτική ενός μουσικού ιστορικού με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την ιστορία της μουσικής στην εκπαιδευτική διάστασή του.

1.3.1 Σημειογραφία και περιεχόμενο

Μελετώντας τα δύο πεδία, Μαθηματικά και Μουσική (με τον όρο μουσική εδώ, εννοούμε την -κατα παράδοση- Δυτική κλασική), είναι ξεκάθαρο από την αρχή στον παρατηρητή ότι συμμερίζονται μερικές από τις πιο βασικές ιδιότητες. Είναι και τα δύο πεδία -σχεδόν αποκλειστικά- εξαρτώμενα από ένα εξειδικευμένο σύστημα σημειογραφίας, το οποίο κωδικοποιείται από αυτόν που γράφει και αποκωδικοποιείται από αυτόν που διαβάζει και στην περίπτωση της μουσικής από αυτόν που είναι στην εκτέλεση. Κάποιοι από τους συμβολισμούς που χρησιμοποιούνται είναι ταυτόχρονα αρχαίοι, αλλά και μοντέρνοι. Εντοπίζονται μεν πολλούς αιώνες πίσω, σε αυτούς όμως προστίθενται καινούριοι για να εξυπηρετήσουν τις ανάγκες της ολοένα εξελισσόμενης μαθηματικής και μουσικής σκέψης.

Η μουσική σημειογραφία έχει τις ρίζες της στο αρχαιοελληνικό σύστημα της Ελληνικής Αλφάβητου. Κατά τη Μεσαιωνική περίοδο παρατηρήθηκε μία σημαντική σειρά ανάπτυξης των συμβολισμών αυτών στην Ανατολική και Δυτική Εκκλησία. Από τον 11ο μέχρι το 13ο αιώνα κωδικοποιήθηκαν πιο ακριβείς σχηματισμοί συμπεριλαμβανομένης της μεθόδου *Guido d'Arezzo's* για το πεντάγραμμα και της ενσωμάτωσης των ενδείξεων του ρυθμού. Κατά τη διάρκεια του 16ου και 17ου αιώνα τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά της μουσικής σημειογραφίας, όπως τα αντιλαμβανόμαστε σήμερα, ήταν ήδη σε χρήση. Μεταγενέστερες και ουσιαστικές προσθήκες που αφορούσαν στη λεπτομέρεια και στις οδηγίες της εκτέλεσης έγιναν το 19ο αιώνα. Τον 20ο αιώνα, κατά τη διάρκεια του οποίου δόθηκε έμφαση στην πειραματική μουσική, παρατηρήθηκε μια ταχεία ανάπτυξη σε καινούριες μορφές σημειογραφίας. Από την άλλη πλευρά και πάντα σε σύγκριση με τη μουσική, η μαθηματική σημειογραφία αναπτύχθηκε μέσα σε 2500 χρόνια και οι σχηματισμοί της προέρχονται αναπόφευκτα από ποικίλες παραδόσεις και πηγές.

Στη μουσική, η σχέση μεταξύ της σημειογραφίας και του περιεχομένου που μεταφέρει είναι πιο περίπλοκη από ότι φαίνεται εκ πρώτης όψεως. Ο συμβολισμός κατά κανόνα δεν εκπληρώνει τον ρόλο που τον θέλει να υπηρετεί το περιεχόμενο. Παρ' ότι είναι κοινή αλήθεια πως τα συμβολικά συστήματα αναπτύχθηκαν εξ' αιτίας των απαιτήσεων που προέκυψαν από καινούριες ιδέες και από ένα νέο τρόπο σκέψης, είναι εξ' ίσου πιθανό οι πειραματισμοί πάνω στο συμβολισμό να είναι συνυφασμένοι με την ανάπτυξη των ιδεών αυτών ή ακόμα και να προηγούνται εμπνέοντας τη δημιουργία τους. Στα μαθηματικά η σχέση συμβολισμού- περιεχομένου παρουσιάζει μικρές διαφορές. Η σημειογραφία αναπτύχθηκε για ένα πλαίσιο έτσι ώστε να είναι χρήσιμη για ένα (φαινομενικά) τελείως διαφορετικό πλαίσιο. Ένα διάσημο παράδειγμα πάνω σε αυτό είναι η χρήση του συμβόλου του τανυστή στη γενική σχετικότητα. Σε μία άλλη αξιοσημείωτη περίπτωση ο συμβολισμός αποτέλεσε μέρος επαγγελματικής διαμάχης. Ο *Leibniz* και ο *Νεύτωνας* ήρθαν σε αντιπαράθεση για το ποιός θεμελίωσε το Διαφορικό

Λογισμό, έχοντας ακόμη και διαφορετικό συμβολισμό για τις παραγώγους.

Καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας τα μαθηματικά και η μουσική έχουν έρθει κοντά με μερικούς πολύ παράξενους τρόπους. Η "Μηχανή της Φαντασίας" (**Fantasy Machine**) που παρουσιάστηκε το 1753 από το Γερμανό Μαθηματικό **Johann Friedrich Unger** στην Ακαδημία Επιστημών του Βερολίνου, υπό την προεδρεία του **Leonhard Euler**, σχεδιάστηκε για να διατηρήσει το μουσικό αυτοσχεδιασμό. Σύμφωνα με τα λόγια ενός Άγγλου εφευρέτη, του σεβασμιότατου **John Creed**, ο οποίος είχε παρουσιάσει μια παρόμοια ιδέα στο **Royal Society** του Λονδίνου το 1747: "Με αυτή τη συσκευή και οι πιο εφήμερες Χάριτες θα μπορούσαν να μοντελοποιηθούν μαθηματικά". Αν και ο **Unger** ισχυρίστηκε πως είχε συλλάβει την ιδέα από το 1745, ο **Charles Burney** στο δοκίμιό του **A machine for recording music** έδωσε προτεραιότητα στην εφεύρεση του **Creed**. Παρά το γεγονός ότι η μηχανή προκάλεσε το ενδιαφέρον στους κύκλους διανοήσεως της εποχής και δοκιμάστηκε από πολλούς γνωστούς μουσικούς στα μέσα του 18ου αιώνα δεν είχε εντέλει επιτυχία.

1.3.2 Η μουσική ως επιστήμη: Μια ιστορική προσέγγιση

Καθ' όλη τη διάρκεια της μαθηματικής επιστήμης, οι μαθηματικοί αισθάνθηκαν πως η μουσική μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο επιστημονικής έρευνας. Αποτέλεσμα της ανάγκης αυτής ήταν ένα περίπλοκο δίκτυο κερδοσκοπικών και πειραματικών ιδεών. Ρίχνοντας μία ιστορική ματιά βλέπουμε ότι η **Penelope Gouk** (Επίτιμος Επιστημονικός Συνεργάτης στο Πανεπιστήμιο του Μάντσεστερ και πρώην Λέκτορας στη Σύγχρονη Πνευματική Καλλιέργεια) είχε εκφράσει την ανησυχία της ότι ο όρος "μαθηματικές επιστήμες", θα έπρεπε σαφώς και αυταπόδεικτα να διαφοροποιείται από τις τέχνες και τις ανθρωπιστικές επιστήμες. Εφ' όσον η μουσική, πλέον, λογίζεται περισσότερο ως τέχνη παρά ως επιστήμη δεν θα έπρεπε να προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι το θέμα θα έπρεπε να αγνοείται από τους ιστορικούς της επιστήμης". Το βιβλίο της "θεραπεύει" αυτή την κατάσταση με πομπώδη επιτυχία, προσκαλώντας τον αναγνώστη να επανεξετάσει τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι κοινές ιστορικές αναλύσεις των δύο κλάδων.

Η δουλειά της **Gouk** εστιάζει κυρίως στην Αγγλία του 17ου αιώνα, γίνονται όμως αναφορές, οι οποίες καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα από τον Πυθαγόρα μέχρι και το **Rene Descartes** ("**The arithmetical foundation of Consonance**"), αλλά και αργότερα. Το **Compendium** του **Descartes** (1618) μεταφράστηκε ως **Renatus Des-Cartes excellent compendium of musick and animadversions of the author** (1653) από τον Άγγλο μαθηματικό **William Brouncker**. Ο **Brouncker** ήταν ο πρώτος Άγγλος μαθηματικός που εφάρμοσε λογάριθμους στη μουσική διαίρεση. Έτσι, μπήκε σε έναν επιστημονικό διάλογο με τον **Descartes** και αμφισβήτησε τα αποτελέσματά του.

Την περίοδο κατά την οποία η μουσική άλλαζε από επιστήμη σε τέχνη (διατηρώντας κομμάτια και στα δύο στρατόπεδα), η επιστήμη γινόταν πρακτική από θεωρητική. Ο 17ος αιώνας ήταν, σύμφωνα με τους ιστορικούς, ένα κρίσιμο σημείο καμπής με την εμφάνιση μιας αναγνωρίσιμης επιστημονικής κοινότητας καθώς και την ιδρυματοποίηση της επιστήμης. Η ίδρυση του **Royal Society of London** το 1660 ήταν σταθμός για την εξέλιξη της σύγχρονης επιστημονικής έρευνας. Οι ηγέτες της επιστημονικής σκέψης, οι οποίοι συγκεντρώνονταν υπό την αιγίδα του, είχαν στρέψει την προσοχή τους στη μουσική.

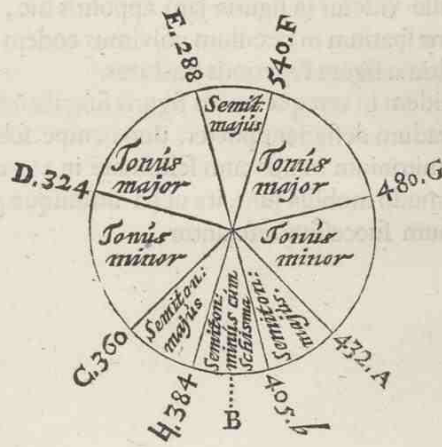
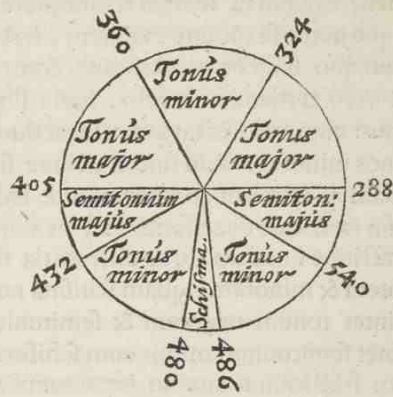
RENATUS DESCARTES
EXCELLENT
COMPENDIUM
O F
MUSICK:
WITH
Necessary and Judicious
ANIMADVERSIONS
Thereupon.

By a Person of HONOUR.
J. Bruncher



London, Printed by Thomas Harper, for Humphrey Moseley,
and are to be sold at his Shop at the Signe of the
Princes Armes in S. Pauls Church-Yard, and
by Thomas Heath in Coven Garden. 1653.

Σχῆμα 1.6:



unde

Σχήμα 1.7:

Η Gouk επισημαίνει ότι το πιο έντονο ενδιαφέρον στο Royal Society σε θέματα μουσικής, εκδηλώθηκε υπό την προεδρία των Brouncker και Moray, οι οποίοι ήταν ικανότατοι μουσικοί και μεγάλοι υποστηρικτές της. Οι επαγγελματίες και των δύο κλάδων (της μουσικής και των μαθηματικών) θα μάθαιναν πολλά ο ένας από τη δουλειά του άλλου.

Ιδέες, όπως αυτή του μουσικού κουρδίσματος, ήταν στο επίκεντρο προς την εύρεση καινούριων θεωριών. Τα μουσικά θέματα κατείχαν κεντρική θέση στην επιστήμη: Τα προβλήματα που περιελάμβαναν στη διαίρεση του μουσικού χώρου ήταν από τις μεγαλύτερες προκλήσεις που αντιμετώπιζαν οι μαθηματικοί και οι φυσικοί φιλόσοφοι το 17ο αιώνα. Όπως παρατηρεί και η Gouk, ο Νεύτωνας στα μέσα του 1660 μάθαινε όλα όσα είχαν αναπτυχθεί από σύγχρονους μαθηματικούς της εποχής του, όπως ο Descartes, ο Oughtred και ο Wallis που αφορούσαν θέματα μουσικής κλίμακας και συγκεκριμένα της διαίρεσης της κλίμακας και σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα προχώρησε και σε δικές του μελέτες. Σημαντικές ανακαλύψεις εκείνης της περιόδου δείχνουν πως το τονικό ύψος θα μπορούσε να αναγνωριστεί από τη συχνότητα. Ο 17ος αιώνας ήταν η αρχή για τη σύγχρονη ακουστική επιστήμη: Την καινούρια επιστήμη του ήχου.

Το έργο του Mersenne μπορεί επίσης να αποτελέσει ορόσημο στην ανάδειξη της σύγχρονης επιστήμης, λαμβάνοντας υπ' όψιν τους μουσικούς νόμους που καθιέρωσε. Τα συγγράμματα του Mersenne, ιδιαίτερα το Harmonie universelle (1636) και το Harmonicorum libri κυκλοφόρησαν στην Αγγλία (η Gouk επισημαίνει το πόσο γρήγορα αφομοιώθηκαν στην Αγγλία). Η πεποίθηση του Mersenne ότι το σύμπαν είναι κατασκευασμένο σύμφωνα με αρμονικές αρχές που μεταφράζονται σε μαθηματικούς νόμους στάθηκε πηγή έμπνευσης σε μαθηματικούς, όπως ο Νεύτωνας. Οι προσωπικές επαφές και η αλληλογραφία μεταξύ των επιστημόνων δημιούργησαν και παγίωσαν σημαντικές πνευματικές διασυνδέσεις εκείνη την περίοδο.



Σχήμα 1.8: Harmonicorum Libri

Από εκπαιδευτικής απόψεως, το γεμάτο έμπνευση έργο του Boethius (480 μ.Χ - 524 μ.Χ) που επηρέασε τις επόμενες γενιές και βασίστηκε στις θεωρίες του Πυθαγόρα και του Πλάτωνα, αντιστόιχισε τη Μουσική με την Αριθμητική και την Αστρονομία με τη Γεωμετρία στο Quadrivium, ενώ τη Γραμματική, τη Ρητορική και τη Λογική στο Trivium. Όταν ιδρύθηκε στο Λονδίνο το 1596

το *Seven Gresham Professorships* με σκοπό να παρέχει δωρεάν εκπαίδευση σε ενήλικες, τα μαθήματα διδασκαλίας περιελάμβαναν μουσική, φυσική, γεωμετρία και αστρονομία. Από την άλλη πλευρά του εκπαιδευτικού φάσματος η ίδρυση του **University Chair** στα μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης από τον **Henry Saville** το 1619, περιελάμβανε στις διατάξεις του στα καθήκοντα ενός νέου καθηγητή την ανάπτυξη του κανόνα της μουσικής ως μία από τις Πειθαρχίες του **Quadrivium**. Η μουσική διδασκόταν στα Πανεπιστήμια ως επιστήμη (με τη μορφή των πτυχίων **B. Mus.** και **D. Mus.**), ενώ εξεταζόταν ως τέχνη, μέσω της υποβολής κάποιας σύνθεσης.

Μέσα στην έξαρση των χαρισματικών **Professorships** στις αρχές του 17ου αιώνα η ίδρυση της **Chair in Music** από το **William Heather** στην Οξφόρδη το 1627, αναγνωρίζει αυτή τη δυαδικότητα της μουσικής προβλέποντας τακτική πρακτική με ταυτόχρονη σειρά διαλέξεων για την επιστήμη της μουσικής. Γι' αυτό το σκοπό ο **Heather** αντικατοπτρίζει αυτή τη διττή φύση της μουσικής στο σύγγραμμα *Plaine and easie introduction to music* του **Thomas Morley** (1597).

‘Speculative is that kinde of musicke which by Mathematical helpes, seeketh out the causes, properties and natures of soundes... content with the online contemplation of the Art. Practical is that which teacheth al that may be known in songs, eyther for the understanding of other mens, or making of one' s owne...’



Σχήμα 1.9: Heather William- Ιδρυτής της Heather Chair in Music στα Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης

Μουσική επιστημονική έρευνα, αναλυτική ακρόαση (ή αλλιώς ακρόαση με κατανόηση) και η τέχνη της μουσικής σύνθεσης είναι όλα αναγνωρίσιμα ως ισχύουσες δραστηριότητες. Στις πρωτοποριακές διαλέξεις που εκδόθηκαν το 1831, ο **William Crotch**, καθηγητής μουσικής (**Heather Professor of Music**) επισημαίνει στην αρχή του 1ου κεφαλαίου ότι χωρίς καμία αμφιβολία η μουσική είναι παράλληλα επιστήμη και τέχνη. Ο **Crotch** συνόδευσε αυτή την εισαγωγή με ένα μεγάλο και ιδιαίτερα εύστοχο απόσπασμα από το έργο του **Sir William Jones**.

‘Music...belongs as a science, to an interesting part of natural philosophy, which by mathematical deductions...explains the causes and properties of sound...but, considered as an art, it combines the sounds which philosophy distinguishes, in such a manner as to gratify our ears or affect our imaginations, or

by uniting both objects, to captivate the fancy, while it pleases the sense; and speaking as it were, the language of nature, to raise corresponding ideas and connections in the mind of the hearer. It the, and then only become fine art, allied very nearly to poetry, painting and rhetoric...'

(μετάφραση) Η μουσική είναι επιστήμη..ως ένα κομμάτι της φυσικής φιλοσοφίας, η οποία με μαθηματικούς συλλογισμούς εξηγεί τα αίτια και τις ιδιότητες του ήχου, αλλά.. αν θεωρηθεί τέχνη συνδυάζει τους ήχους με τους οποίους η φιλοσοφία ξεχωρίζει με τέτοιο τρόπο, ώστε να ευχαριστήσει τα αυτιά ή να διεγείρει τη φαντασία ή συνδυάζοντας και τα δύο μαζί να αιχμαλωτίσει το ωραίο καθώς τέρπει το νου και μιλάει στον άνθρωπο λες και είναι η γλώσσα της φύσης, με στόχο να εγείρει ιδέες και συνδέσεις στο μυαλό του ακροατή. Τότε και μόνο τότε μπορεί να συμπεριληφθεί στις Καλές Τέχνες, μαζί με την Ποίηση, τη Ζωγραφική και τη Ρητορική.

Ο Crotch συνέχιζε να δηλώνει πως Η Επιστήμη της Μουσικής δεν θα αποτελέσει το θέμα της παρούσας εργασίας του. Όμως, το χρησιμοποίησε αυτό ως τέχνασμα με σκοπό να ξεκινήσει συζήτηση για τα πλεονεκτήματα μιας τέτοιας έρευνας συστήνοντας ανεπιφύλακτα τη μελέτη της επιστήμης της μουσικής σε κάθε εραστή της τέχνης, και κινήγησε αρκετά τις διακλαδώσεις αυτές μέχρι να καταλήξει.. "Αρκετά έχουν πλέον ειπωθεί για να προσελκύσουν ένα λάτρη της μουσικής να μελετήσει την επιστήμη, την οποία και θα πρέπει να θυμόμαστε, αυτό όμως δεν είναι το θέμα της παρούσας εργασίας μου". Μετά από δέκα σελίδες συζήτησης, ο αναγνώστης είτε έχει ξεχάσει για τα καλά αυτό τον ισχυρισμό είτε είναι διαθετειμένος να τον αμφισβητήσει, κι έτσι είναι φανερό πως ο Crotch το ένωθε ανάρμοστο να προσφέρει στο κοινό μια διδακτική διατριβή για τη μουσική, χωρίς να συμπεριλάβει την επιστημονική της διάσταση, παρ' όλου που ο αρχικός του σκοπός ήταν η αισθητική ("η βελτίωση του γούστου").

1.3.3 Κοινωνικές και εκπαιδευτικές διασυνδέσεις

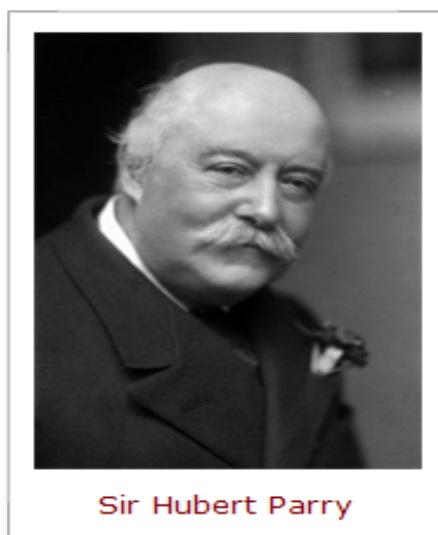
Βλέποντας τα πράγματα με μια πιο ανεπίσημη ματιά, η ιστορία της πολιτιστικής ζωής είναι γεμάτη απλόχερα με παραδείγματα από μουσικό-μαθηματικούς και από επιστήμονες. Η ομάδα των διανοούμενων και των καλλιτεχνών στην οποία ανήκε ο Carl Philipp Emanuel Bach στο Αμβούργο του 18ου αιώνα, η οποία συμπεριελάμβανε στα μέλη της τον Johann Joachim Christoph Bode (μεταφραστής, μεταξύ των έργων του ήταν το *A sentimental journey* του Sterne) διοργάνωνε συχνά συναντήσεις στο σπίτι του μαθηματικού Johann Georg Büsch." Πολλά από τα μέλη της ομάδας ήταν ερασιτέχνες μουσικοί, συμπεριλαμβανομένου του Bode, ο οποίος έπαιζε τσέλο στην καθιερωμένη μουσική δημιουργία στο σπίτι του Busch ". Ο βιογράφος του C.P.E Bach, Hans-Günter Ottenberg, είχε γράψει για τη φιλική ατμόσφαιρα και τη φιλελεύθερη ανταλλαγή ιδεών που λάμβαναν χώρα στο σπίτι του μαθηματικού Johann Georg Büsch, παραθέτοντας την περιγραφή του Reichardt για αυτές τις συνεστιάσεις, η οποία προσδίδει προφανώς μία σφραγίδα: " Δεν γίνονταν όλοι δεκτοί στους ενδότερους κύκλους αυτών των συναντήσεων, οι οποίες πραγματοποιούνταν συχνά, με σκοπό την απογευματινή διασκέδαση, εκτός από αυτούς που βρίσκονταν στην ευρεία ακαδημαϊκή κοινότητα ". Ο Ottenberg τονίζει πως ο Bach ήταν μία από τις πιο κοντινές γνωριμίες του Büsch.

Το 19ο αιώνα στην Οξφόρδη, ο Hubert Parry (Άγγλος μουσικός, δάσκαλος και ιστορικός της μουσικής), ως προπτυχιακός, σύχναζε στο σπίτι του καθηγητή Donkin (Savilian Professor of Astronomy), ο οποίος οργάνωνε συνεστιάσεις με κύριο θέμα τη μουσική δωματίου. Η οικογένεια του Donkin ήταν ιδιαίτερος μουσική οικογένεια. Για τον Parry αυτές οι συναντήσεις ήταν εξαιρετικά



Σχήμα 1.10: William Fishburn Donkin, Savilian Professor of Astronomy στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης

διεγερτικές και ουσιαστικές, καθώς του παρέιχαν τη δυνατότητα να γνωρίσει το ρεπερτόριο της μουσικής δωματίου, αλλά και να κάνει τις δικές του προσπάθειες στη σύνθεση πάνω σε αυτό το είδος. Οι Donkin άσκησαν μεγάλη επιρροή στη μουσική ζωή της Οξφόρδης κατά τη διάρκεια του δεύτερου μισού του 19ου αιώνα.



Σχήμα 1.11:

Ήταν εκείνη την περίοδο που το ακαδημαϊκό στάτους της μουσικής, υπό τη μορφή των μουσικών πτυχίων της Οξφόρδης, απέκτησε μεγαλύτερο κύρος. Οι (καθηγητές) **Heather Professors of Music** καθώς και οι βοηθοί τους στήριξαν τις ελπίδες τους για την ανάπτυξη του θέματος εντός του Πανε-

πιστημίου δίνοντας μεγάλη βάση στην επιστήμη της μουσικής. Για παράδειγμα, ο βασικός σκελετός για το πτυχίο **D. Mus.** της Οξφόρδης περιελάμβανε τις θεωρίες του **Helmholtz** (Γερμανός γιατρός και φυσικός με σημαντική συνεισφορά στη μουσική εξετάζοντας τους -υπό συνδυασμό- τόνους που παράγουν μία τρίτη μικρή) και θεωρίες πολλών άλλων σημαντικών επιστημόνων πάνω στην ακουστική. Τα στοιχεία παρουσιάστηκαν από τον **Sir Frederick Ouseley** (Άγγλος συνθέτης, οργανοπαίκτης, μουσικολόγος και ιερέας 1825-1889), τότε (καθηγητή) **Heather Professor** στο **University of Oxford Commission** το 1877 και περιελάμβαναν πρόταση για τη θέσπιση εργαστηρίου Ακουστικής. Δυστυχώς αυτό το σχέδιο δεν υλοποιήθηκε ποτέ. Ο **Ouseley** οραματιζόταν ότι ένα τέτοιο εργαστήριο θα μπορούσε να λειτουργήσει με την επιστημονική πλευρά μιας σχολής τεχνικής μουσικής και θα είχε άμεση σύνδεση με τη σχολή της Φυσικής στο Πανεπιστήμιο.

Οι κάτοχοι πτυχίων μουσικής από την Οξφόρδη (προσόν πολυπόθητο για το επάγγελμα του μουσικού), κατά τη διάρκεια εκείνης της περιόδου, δεν ακολούθησαν όλοι κατά βάση μουσική σταδιοδρομία. Ο **William Pole FRS** (b.1814, **B.Mus.** 1860, **D.Mus.** 1867) ήταν καθηγητής Πολιτικών Μηχανικών στο **University College** του Λονδίνου και παράλληλα οργανίστας στο **St Mark's, North Audley Street**. Ανάμεσα σε αυτούς που πήραν το **B.Mus.** στην Οξφόρδη, εκτός από το σύνηθες **B.A.**, ήταν ο **J. Barclay Thompson** του **Christ Church** (**B.Mus.** 1868), ο οποίος έγινε **University Reader** στην Ανατομία. Πιο πρόσφατο παράδειγμα επιστήμονα-μουσικού είναι ο μαθηματικά - εκπαιδευμένος μουσικολόγος **Roy Howat**, του οποίου το έργο βρίσκεται στο χρυσό μέρος της **Ravel** μουσικής και έχει προσελκύσει μεγάλο ενδιαφέρον.

1.3.4 Μαθηματικά και Μουσική - Η πλευρά της σύνθεσης

Από τη μια πλευρά η μουσική έχει ελκύσει τους Μαθηματικούς ως αντικείμενο έρευνας και από την άλλη οι μουσικοί δελεάζονται από τη δυνατότητα ενσωμάτωσης της μαθηματικής επιστήμης ως επί το πλείστον στους τομείς της μουσικής σύνθεσης και της ανάλυσης. Οι θεμελιώδεις παράμετροι της μουσικής: τόνος, ρυθμός, συγγραφή παρτιτούρας κ.ο.κ και η κατηγοριοποίηση των εξωτερικών μουσικών μονάδων μέσα σε σύνολα αντανακλούν έναν οργανωμένο και συστηματικό μαθηματικό σχεδιασμό. Πολλά έχουν γραφτεί για τις μαθηματικές πτυχές συγκεκριμένων τεχνικών σύνθεσης, όπως για παράδειγμα η μέθοδος του **Arnold Schoenberg** (Αυστριακός συνθέτης και ζωγράφος) για το σειραϊσμό. Ατομικά έργα συχνά αναλύονται μεταξύ άλλων και με την οπτική των μαθηματικών ιδιοτήτων.

Οι μαθηματικές σχέσεις, όχι μόνο σε ένα μουσικό κομμάτι, αλλά και μεταξύ πολλών μουσικών κομματιών που αποτελούν ένα σύνολο, είναι καλά τεκμηριωμένες. Τέτοιων ειδών σχέσεις, μπορεί να εκφράζονται στα ευρήματα των μουσικών αναλυτών, πιθανότατα επανακατασκευάζοντας νοητά συστήματα σύνθεσης και περαιτέρω εξετάζοντας ταυτόχρονα αυτά που θεωρούνται γνωστά και αυτά που προκύπτουν από θεωρητικές, συμβολικές συνδέσεις, όπως επίσης και τις μαθηματικές διακλαδώσεις κατασκευαστικών διαδικασιών. Αυτό συμβαίνει κυρίως στην περίπτωση του αριθμητικού συμβολισμού, ο οποίος μάλλον διέπει τις μουσικές σχέσεις ενός μουσικού έργου ή και ενός συνόλου μουσικών έργων.

Οι τεχνικές αντίστιξης στη μουσική (αντίστιξη καλείται η ταυτόχρονη συνήχηση πολλών διαφορετικών μελωδιών, οι οποίες συνδυάζονται με βάση ένα αυστηρό συνήθως πρόγραμμα κανόνων διαφορετικό από εποχή σε εποχή) , έπειτα από μαθηματική επεξεργασία ταυτίζονται με την αυστηρότητα των μαθηματικών κανόνων. Ανάμεσα στα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα στις δύο

τελευταίες κατηγορίες, σε αυτές του συνθετικού συνόλου και της αυστηρής αντίστιξης, πρέπει να υπολογίζονται τα έργα του **J.S Bach** με τους κατοπτρικούς (αντεστραμμένους) κανόνες και τις φούγκες, τα οποία έχουν αριθμητική διάταξη (**Goldberg variations**) και τονίζονται οι συνδυαστικές τους δομές. Στη μουσική ορολογία, ο κανόνας αποτελεί σύνθεση, στην οποία μια κύρια μελωδία ακολουθείται με χρονική διαφορά (διαφορά φάσης ενός ογδούου, τετάρτου, ενός μέτρου κλπ) από τη μίμηση αυτής, από τις άλλες φωνές. Η αρχική φωνή που έχει και την κύρια μελωδία ονομάζεται οδηγός, ενώ οι υπόλοιπες φωνές που ακολουθούν ονομάζονται ακόλουθοι. Η μίμηση αυτή καθεαυτή πρέπει να είναι είτε πανομοιότυπη της κύριας μελωδία, είτε παραλλαγή αυτής. Στον αντεστραμμένο κανόνα (ή κανόνας αντίθετης κίνησης ή κατοπτρικός κανόνας) ο ακόλουθος κινείται αντίθετα του οδηγού: π.χ. ο οδηγός κινείται σε διάστημα ανιούσας τρίτης, ενώ ο ακόλουθος σε κατιούσα τρίτη. Η φούγκα είναι είδος αντιστικτικής σύνθεσης που βασίζεται στη μίμηση και ειδικότερα στο είδος που ήδη αναφέραμε, τον κανόνα. Από τον 16ο αιώνα και πολύ περισσότερο από τον 17ο αιώνα η φούγκα καθιερώθηκε να χαρακτηρίζει πολυφωνικά μουσικά έργα που χρησιμοποιούσαν τη μίμηση των φωνών πιο ελεύθερα. Επεξεργάζονταν δηλαδή μια κεντρική μουσική ιδέα (το θέμα) με τέτοιο τρόπο, ώστε αυτή να παρουσιάζεται αρχικά στην πρώτη φωνή και στη συνέχεια να περνάει διαδοχικά στη δεύτερη, την τρίτη κλπ. και να υφίσταται επεξεργασία, ενώ οι προηγούμενες συνέχιζαν με μελωδίες γραμμένες αντιστικτικά ως προς την αρχική μελωδική ιδέα.

Έπειτα από 200 χρόνια, οι μουσικοί κύκλοι του **Paul Hindemith** (Γερμανός μουσικός σύγχρονης κλασικής μουσικής του 20ου αιώνα) με τις φούγκες και τα ιντερλούδια για πιάνο με την ονομασία **Ludus tonalis**, με το σχεδόν γεωμετρικό σχεδιασμό, όπου ζευγάρια μουσικών έργων αντικατοπτρίζουν το ένα το άλλο, παρέχουν αφενός μία σύγχρονη ηχώ στις ιδέες για αντίστιξη βασιζόμενες στην παράδοση του **Bach**, αφετέρου δομικές τεχνικές που αναπτύσσονται στη θεωρητική γραφή του **Hindemith**. Έχει διατυπωθεί η άποψη, πως ο **Hindemith** ήταν πολύ κοντά στον **Kepler** (γνωστός Γερμανός αστρονόμος και καταλυτική φυσιογνωμία στην επιστημονική επανάσταση των νεότερων χρόνων. Υπήρξε επίσης μαθηματικός και συγγραφέας), του οποίου το έργο και η ζωή επηρέασαν το θέμα της τελευταίας (πλήρους μήκους) όπερας του **Hindemith** με τίτλο **The harmony of the world** (1956-7).

Η επιστημονική μουσική, δεν έχει ωστόσο εκτιμηθεί από τους μουσικούς επιστήμονες. Για παράδειγμα ο **Christiaan Huygens** (εξέχων Ολλανδός μαθηματικός και επιστήμονας. Συνέβαλε σημαντικά στην επιστημονική επανάσταση του 17ου αιώνα) εξέφρασε την επιθυμία, ότι οι συνθέτες δεν πρέπει να ψάχνουν αυτό που είναι τεχνικά δύσκολο να δημιουργηθεί, αλλά αυτό που επηρεάζει περισσότερο το αυτί, υποκρίνοντας πως δεν τους νοιάζει η παρατηρούμενη ακρίβεια που έχουν οι φούγκες και οι κανόνες και ισχυρίζοντας πως οι καλλιτέχνες που αντλούν ευχαρίστηση από τα παραπάνω κρίνουν λάθος το σκοπό της μουσικής, ο οποίος είναι η απόλαυση του ήχου μέσω των αυτιών και όχι μέσω της ενατένισης της τέχνης. Ο **Huygens** εδώ διαχωρίζει την ένταση μεταξύ της επιστημονικής δομής στη σύνθεση της μουσικής και του εκφραστικού αποτελέσματος της μουσικής. Η ισορροπία μεταξύ αυτών των δύο πτυχών και γενικότερα της επιστημονικής βάσης της τέχνης της μουσικής και των αισθητικών εφαρμογών έχει σταθεί πηγή έλξης για τους μελετητές. Η κοινή τους ανησυχία είναι κατ' ουσίαν η έρευνα πάνω στη δύναμη της μουσικής, η οποία έχει απασχολήσει αναλυτές μέσα στους αιώνες, από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα.

Κεφάλαιο 2

Κεφάλαιο 2

2.1 Τυχαιότητα στη μουσική

2.1.1 Εισαγωγή

Τυχαίο, ασαφές, στοχαστικό, αβέβαιο, απρόβλεπτο, χαοτικό. Λίγες από τις λέξεις που χαρακτηρίζουν την τυχαιότητα. Παλαιότερα, η μουσική δεν ήταν συνυφασμένη με την τυχαιότητα, στον 20ο αιώνα όμως άλλαξαν πολλά. Οι μελωδίες (εάν υπάρχουν) είναι ασυνεχείς και υπάρχει έλλειψη αρμονίας. Για παράδειγμα, στο έργο του Anton Webern - *Symphony, Opus 21* βρέθηκαν νότες οι οποίες διαχωρίζονται με τρόπο ιδιαίτερο και πρωτοπόρο. Στη σύνθεση *Eonta* του Γιάννη Ξενάκη, γραμμένη για πιάνο και τούμπα, υπάρχει ένα συνθετικό μέρος στο πιάνο όπου οι νότες ήταν σχεδόν άσχετες η μία με την άλλη. Από την άλλη, ο Pärt παρήγαγε μουσική, της οποίας οι νότες ήταν ισχυρά συνδεδεμένες μεταξύ τους.

Σε αυτή την ενότητα εστιάζουμε στα διαγράμματα διασποράς (scatter plots) τα οποία δείχνουν τη βραχυπρόθεσμη συσχέτιση που υπάρχει στις νότες ή την έλλειψή της. Ο θόρυβος, σε οποιαδήποτε μορφή του είναι αυτοόμοιος. Όπου και να τον κοιτάξουμε, όσο και να τον μεγενθύνουμε είναι ίδιος. Οι πιθανότητες χρησιμοποιούνται μέσω της θεωρίας του χάους για να μετρήσουν την πυκνότητα και τη διάσταση. Οι μετασχηματισμοί Fourier είναι σημαντικοί για τη συχνότητα και στη δική μας περίπτωση χρησιμοποιούνται για να μετρήσουν τις μελωδικές μορφές. Σε αυτή την ενότητα δεν εμβαθύνουμε σε μαθηματικές τεχνικές, αλλά χρησιμοποιούμε μια απλή γραφική διαδικασία η οποία είναι εύκολη στο χειρισμό και στην κατανόηση. Αυτή η διαδικασία είναι τα διαγράμματα διασποράς (scatter diagrams) τα οποία δίνουν πολλά οπτικά αποτελέσματα. Πρώτα όμως θα εξετάσουμε το θόρυβο.

2.1.2 Θόρυβος

Ο θόρυβος έχει περισσότερο ενδιαφέρον από ότι κανένας θα νόμιζε. Συνήθως, τον αντιλαμβανόμαστε ως κάτι ενοχλητικό, παρ' όλα αυτά όμως υπάρχουν πολλές ενδιαφέρουσες εφαρμογές του. Οι συνθέτες της ηλεκτρονικής μουσικής τον χρησιμοποιούν πολύ συχνά ως πηγή ήχου, οι τεχνικοί του ήχου τον χρησιμοποιούν για να ελέγξουν την ακουστική του χώρου και οι αναλυτές όπως ο Dr. Richard F. Voss τον χρησιμοποιούν για να αναλύσουν τη μακροπρόθεσμη και τη βραχυπρόθεσμη

συσχέτιση μεταξύ των μουσικών παραμέτρων. Παρακάτω, αναφέρονται συνοπτικά τα αποτελέσματα από την έρευνα του Voss.

$1/f^\beta$ είναι ο σωστός όρος όταν αναφερόμαστε στο θόρυβο. Διαβάζεται ένα προς f (ή αντίστροφο f) εις τη βήτα και αναφέρεται στην αντίστροφη τιμή της συχνότητας υψωμένη στη δύναμη β . Αρχικά θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις όπου $\beta = 0, 1, 2$ και αργότερα θα αναπτυχθούν και οι δυνάμεις 3 και 4. Τι σημαίνουν όμως όλα αυτά;

$1/f^0$, δηλαδή για $\beta = 0$ έχουμε τον επονομαζόμενο Λευκό θόρυβο (**white noise**). Ένας τέτοιος θόρυβος είναι βάνουσα συριστικός και τον ακούμε όταν, για παράδειγμα, σε μία τηλεόραση όπου ο ήχος είναι ανοιχτός στην επιλογή των UHF προσπαθούμε να μειώσουμε την ταυτόχρονη εκπομπή δύο γειτονικών καναλιών. Αυτός ο θόρυβος περιγράφηκε από τον **K. Sam Shanmugan** ως εξής:

‘Ο θερμικός θόρυβος που παράγεται μέσα σε αντιστάτες ή ημιαγωγούς μοντελοποιείται ως μία στάσιμη τυχαία διαδικασία Gauss (**stationary Gaussian random process**) $N(t)$ με φασματική πυκνότητα ισχύος που παραμένει ίδια σε ένα πολύ μεγάλο εύρος συχνοτήτων. Μία τέτοια διαδικασία ονομάζεται **White Gaussian noise** αντιστοιχίζοντας το με το λευκό φως, του οποίου η φασματική πυκνότητα είναι ευρεία και ομοιόμορφη σε ένα μεγάλο φάσμα συχνοτήτων.’**

****(1)** Ορίζουμε ως τυχαία διαδικασία (**random process**) ή στοχαστική διαδικασία (**stochastic process**) ή τυχαίο σήμα (**random signal**) μια συλλογή από σήματα, δηλαδή συναρτήσεις στο χρόνο, τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικά αποτελέσματα ενός πειράματος. Δηλαδή, δοθέντος ενός δειγματικού χώρου $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^M$ σε κάθε συμβάν ω_i αντιστοιχεί ένα σήμα $x(t; \omega_i)$ το οποίο έχει πιθανότητα $P(\omega_i)$

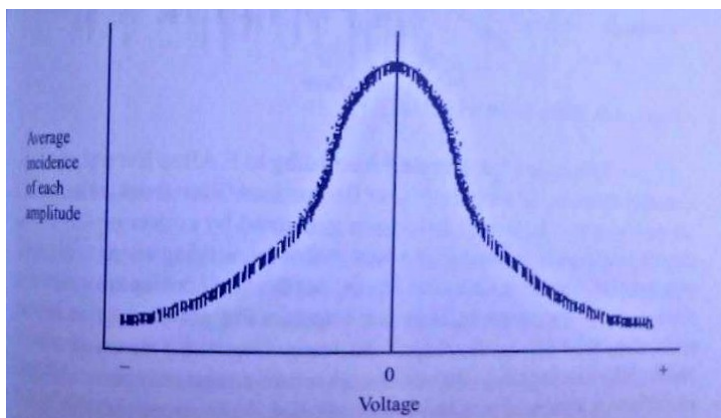
****(2)** Η έννοια της στασιμότητας μιας τυχαίας διαδικασίας συνδέεται με την έννοια της στατιστικής χρονικής σταθερότητας, δηλαδή όταν οι στατιστικές ιδιότητες ή οι μέσοι όροι συνόλων της τυχαίας διαδικασίας είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας διαδικασίας είναι ανεξάρτητη του χρόνου τότε η διαδικασία $x(n)$ ονομάζεται στάσιμη (**stationary**) διαδικασία πρώτης τάξης. Γενικά, ορίζουμε ότι μια διαδικασία είναι στάσιμη L τάξης όταν οι διαδικασίες $x(n)$ και $x(n+k)$ έχουν τις ίδιες από κοινού συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας L τάξης. Μία διαδικασία που είναι στάσιμη για όλες τις τάξεις $L > 0$, ονομάζεται αυστηρά στάσιμη (**stationary in the strict sense**). Για **Gaussian** τυχαίες διαδικασίες, η στασιμότητα υπό την ευρεία έννοια είναι ισοδύναμη με την αυστηρή στασιμότητα.

****(3)** Φασματική πυκνότητα είναι μια γενική έννοια που εφαρμόζεται σε ένα σήμα που μπορεί να έχει οποιοσδήποτε φυσικές διαστάσεις ή καθόλου φυσική διάσταση. Το σήμα είναι συνήθως ένα κύμα, όπως ένα ηλεκτρομαγνητικό ή ένα ακουστικό. Η φασματική πυκνότητα του κύματος, όταν πολλαπλασιάζεται με έναν κατάλληλο παράγοντα, θα δώσει τη δύναμη που φέρεται από το κύμα, συνήθως ανά συχνότητα μονάδων ή ανά μήκος κύματος μονάδων. Αυτό είναι γνωστό ως φασματική πυκνότητα δύναμης (**PSD**) ή φασματική διανομή δύναμης (**SPD**) του σήματος. Οι μονάδες της φασματικής πυκνότητας ισχύος εκφράζονται συνήθως με τα **Watt** ανά χερτς ($\Theta^* \Omega / Hz$) ή **Watt** ανά **nanometer** (W/nm) (για μια μέτρηση εναντίον του μήκους κύματος αντί της συχνότητας). Αν και δεν είναι απαραίτητο να οριστούν οι φυσικές διαστάσεις στο σήμα ή το επιχείρημά του, στην ακόλουθη συζήτηση οι όροι χρησιμοποιούμενοι θα υποθέσουν ότι το σήμα ποικίλλει εγκαίρως.

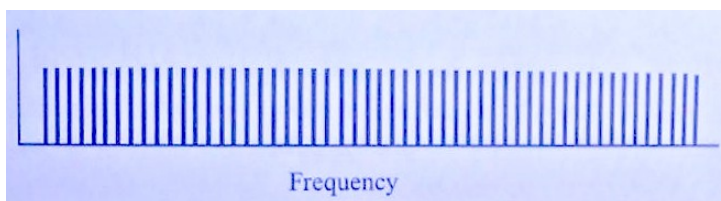
Με λίγα λόγια, ο **K. Sam Shanmugan** εξηγεί πως:

1. Οι αντιστάτες οι οποίοι δεν διαπερνώνται από ρεύμα παράγουν αυθόρμητα εξαιρετικά σύντομες και τυχαίες τάσεις στους ακροδέκτες τους με μοτίβο το οποίο δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Αυτό καθορίζει και τη στασιμότητα (stationary aspect).
2. Οι συχνότητες που παράγονται από αυτά τα σύντομα ερεθίσματα θορύβου κατανομονται εξ' ίσου σε όλο το φάσμα.
3. Το πλάτος πολλών ερεθισμάτων ποικίλει με τέτοιο τρόπο, ώστε η κατανομή να είναι κανονική (Gauss).

Οι μουσικοί που έχουν ασχοληθεί με τον επονομαζόμενο λευκό θόρυβο (white noise) είναι μάλλον μπερδεμένοι με αυτή τη Γκαουσιανή-ομοιόμορφη περιγραφή του συγκεκριμένου θορύβου. Έχουν μάλλον ακούσει κάτι σα σκούπισμα του ακουστικού φάσματος χρησιμοποιώντας πολύ ισχυρά φίλτρα και παρατήρησαν ότι οι υψηλές συχνότητες είναι το ίδιο μεγάλες με τις χαμηλές συχνότητες. Για εκείνους, λευκός θόρυβος σημαίνει ίδιο πλάτος σε όλες τις συχνότητες, ενώ οι λέξεις Γκαουσιανή και ομοιόμορφη φαίνονται αντιφατικές. Στην πραγματικότητα, οι δύο αυτές λέξεις περιγράφουν δύο πράγματα. Τη κατανομή Gauss η οποία δημιουργείται από τα πλάτη των ερεθισμάτων του θορύβου και την ομοιόμορφη που παράγεται από τις συχνότητες αυτών των ερεθισμάτων. Υπάρχουν τόσα πολλά ηχητικά ερεθίσματα σε όλα τα πλάτη και τις συχνότητες που ο θόρυβος που βγαίνει μοιάζει σαν ένα σταθερό σφύριγμα σε όλη την έκταση. Στα σχήματα 2.1 και 2.2 φαίνονται τα διαγραμματικά αποτελέσματα.



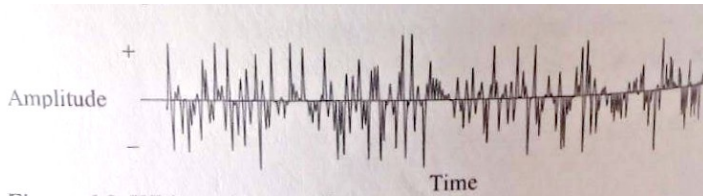
Σχήμα 2.1: Προσέγγιση της κανονικής κατανομής από τα πλάτη πολλών σύντομων ερεθισμάτων του θορύβου



Σχήμα 2.2: Προσέγγιση των κανονικά - κατανεμημένων συχνοτήτων που παράγονται από ένα σύντομο ερέθισμα

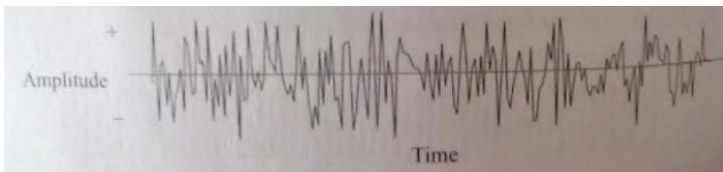
Στη Γκαουσιανή κατανομή του θορύβου, τα θετικά και αρνητικά πλάτη βρίσκονται γύρω από τη μέση τιμή, η οποία είναι η γραμμή μηδενικής τάσης και θυμίζει έντονα την καμπύλη-καμπάνα που είχαμε μάθει στο σχολείο. Αυτό σημαίνει ότι οι μηδενικές τάσεις είναι περισσότερες από τις υψηλές τάσεις. Αντιστρόφως, στην ομοιόμορφη κατανομή του θορύβου οι συχνότητες ποικίλουν από το μηδέν μέχρι όσο υψηλά θέλουμε. Αυτά τα ερεθίσματα είναι το αποτέλεσμα από τη παραγωγή ενός Λευκού θορύβου.

Στο σχήμα 2.3 φαίνεται η κυματομορφή του Λευκού θορύβου όπως παράγεται σε ένα αντιστάτη ο οποίος δε διαρρέεται από ρεύμα. Εδώ, φαίνεται πως κάθε ερέθισμα πηγαίνει πίσω στο μηδέν, από όπου και αρχίζει το επόμενο ερέθισμα. Κάθε ένα από αυτά μπορεί να είναι είτε θετικό, είτε αρνητικό καθώς και πολλά συνεχόμενα ερεθίσματα μπορεί να έχουν το ίδιο πρόσημο.



Σχήμα 2.3: White noise - Κυματομορφή

$1/f^1$, δηλαδή για $\beta = 1$ έχουμε τον επονομαζόμενο ροζ θόρυβο (**Pink noise**). Σύμφωνα με τον **F. Alton Everest**, στην ουσία ο ροζ θόρυβος είναι ίδιος με το λευκό, δίνοντας όμως υψηλότερες συχνότητες της τάξεως των $3db/octave$. Ο θόρυβος αυτός μπορεί να παραχθεί από ένα τρανζίστορ ή έναν αντιστάτη που διαρρέονται από ρεύμα. Σε αυτή την περίπτωση, η κατανομή της τάσης είναι και πάλι Γκαουσιανή, αλλά οι συχνότητες είναι πιο πυκνές στο κάτω μέρος του πλάτους της κατανομής, καθώς τα ερεθίσματα δεν χαρακτηρίζονται από υψηλή οξύτητα. Στο σχήμα 2.4 βλέπουμε ένα παράδειγμα. Παρατηρήστε ότι τα ερεθίσματα δεν επιστρέφουν πάντοτε στο μηδέν και η κυματομορφή βρίσκεται είτε πάνω είτε κάτω από τη γραμμή. Ο **Voss** επισήμανε πως η συγκεκριμένη μορφή είναι πιο αντιπροσωπευτική για τη μουσική και ο **Everest** τοποθετήθηκε, λέγοντας πως είναι εύλογο υποκατάστατο της μουσικής στις μετρήσεις.



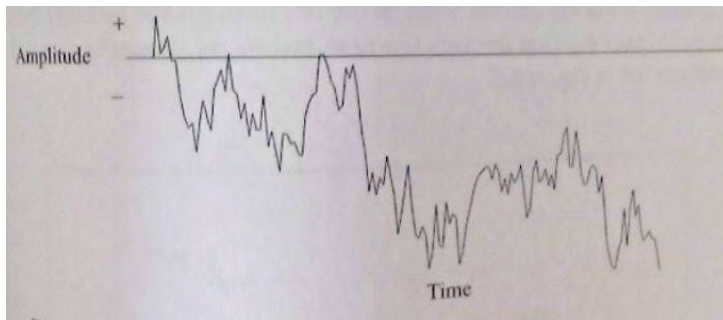
Σχήμα 2.4: Pink noise - Κυματομορφή

$1/f^2$, δηλαδή για $\beta = 2$ έχουμε τον επονομαζόμενο Καφέ θόρυβο (**Brown noise**). Είναι γνωστός και με την ονομασία "Κίνηση **Brown**". Αυτό το φαινόμενο ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του **Robert Brown**, ο οποίος το ανακάλυψε. Ο **Brown** παρατήρησε πως ένα μικροσκοπικό σωματίδιο αφημένο σε υγρό, πηδά ασταθείς αποστάσεις σε ίσα χρονικά διαστήματα. Ο **Einstein** απέδειξε το 1905, πως μπορεί κάθε προσάυξηση αυτής της κίνησης να είναι τυχαία, αλλά η παρούσα θέση του σωματιδίου εξαρτάται από όλες τις τυχαίες κινήσεις του παρελθόντος. Έτσι, η συνολική κίνηση έχει κάποια μνήμη, εφ' όσον προσθέτουμε την τρέχουσα τυχαία ώθηση στην προηγούμενη θέση. Έτσι, κάθε κατάσταση είναι άμεσα συνδεδεμένη με την προηγούμενη. Ο συγκεκριμένος **Brown** θόρυβος δημιουργήθηκε προσθέτοντας έναν **Gauss** τυχαίο αριθμό στον αμέσως προηγούμενο, ακολουθώντας τον τύπο $x_n = x_{n-1} + R_G$. Στο σχήμα 2.5 δίνεται ένα τέτοιο παράδειγμα. Παρατηρήστε ότι το μονοπάτι κάποια στιγμή θα επιστρέψει τελικά στο μηδέν.

Ο **Charles Dodge** επισήμανε πως ο θόρυβος $1/f$ έχει την καλύτερη μνήμη, αλλά δεν ξέρουμε ακόμη τι εννοούσε. Μάλλον, ενίσχυε την άποψη του **Voss** για την αντιπροσώπευση της μουσικής από τον $1/f$ θόρυβο.

Ο **Mandelbrot** προειδοποίησε πως δεν μπορούν όλοι να συμφωνούν για τον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύεται ο **Brown noise**. Είπε:

"Ο πολλαπλασιασμός των παραλλαγών σε μια κίνηση **Brown** είναι ατέρμονος και η ορολογία είναι casual".



Σχήμα 2.5: Brown noise - Κυματομορφή

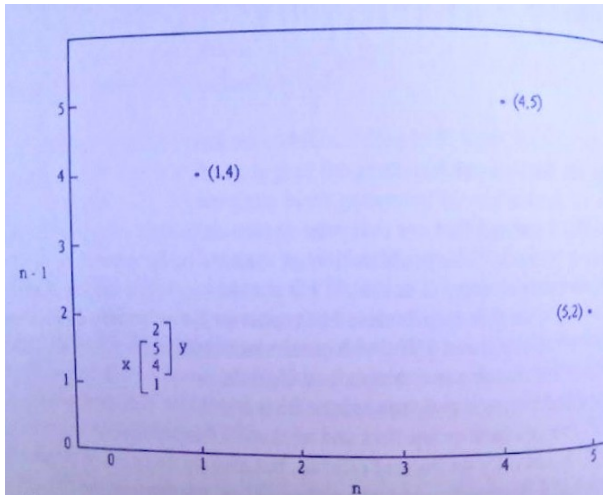
Ήταν καλός γνώστης, καθώς περνούσε πολύ χρόνο ασχολούμενος με τη συγκεκριμένη κατανομή. Η αναφορά του για τη μελέτη του Hurst πάνω την πλημμύρα του Νείλου είναι κατατοπιστική σχετικά με τον $1/f^\beta$ και πιο συγκεκριμένα για $\beta = 3$ ή 4 . Ο Hurst ανακάλυψε πως όταν βρέχει στην Αιθιοπία ή στην Ουγκάντα, κάποια ποσότητα νερού κινείται αργά προς το Λευκό και το Μπλε ποταμό του Νείλου μέσω προσωρινής αποθήκευσης, όπως οι υδροφορείς και τα ρεζερβουάρ. Σε μεταγενέστερα χρόνια, η ροή του ποταμού δεν θα εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα καταιγίδα, αλλά και από προηγούμενες καταιγίδες που ήδη τρέχουν μέσα στο σύστημα. Έτσι, αν θέλουμε να επιτύχουμε ένα καλό μέσο όρο για να μετρήσουμε το ρεύμα του ποταμού είναι απαραίτητο να γυρίσουμε πίσω χρονικά.

Ο Manfred Schroeder περιέγραψε τις τιμές $1/f^3$ και $1/f^4$ ως Μαύρο θόρυβο (Black noise), ενώ ο Hui-Hsiung Kuo ως Γκρι θόρυβο (Grey noise) που βρίσκεται μεταξύ Καφέ και Μαύρου θορύβου. Η περιγραφή του Mandelbrot που αφορούσε στη μελέτη για τις πλημμύρες του Νείλου, πρότεινε την ονομασία του Γκρι ή Μαύρου θορύβου. Παρ' όλα αυτά προτιμούσε την ονομασία: Καφέ θόρυβος με υψηλό Hurst- εκθέτη (Brown noise with a high Hurst exponent). Είπε πως υπάρχει μεγάλη επιμονή στην κυματομορφή. Οι εκθέτες του Hurst θα έπρεπε τελικά να μελετηθούν για πιθανές εφαρμογές στη μουσική ανάλυση, αλλά σε αυτή την εργασία δεν θα μελετηθούν περαιτέρω, καθώς σχετίζονται με πρακτικές εφαρμογές της μουσικής.

2.2 Διαγράμματα Διασποράς (Scatter Diagrams)

Το μέσο ανάλυσης για αυτή την ενότητα είναι το διάγραμμα διασποράς scatter graph. Ελέγχει πόσο ισχυρή ή αδύναμη είναι η σχέση της μίας νότας με την ακριβώς προηγούμενή της. Η πραγματοποίηση είναι απλή χρησιμοποιώντας ένα φύλλο του Excel. Ο άξονας των x έχει την ονομασία n και ο άξονας των y την ονομασία $n - 1$. Πληκτρολογούμε τα νούμερα που αντιστοιχούν στο αντίστοιχο τονικό ύψος (pitch) με σειρά εμφάνισης στη μουσική στη στήλη A. Έπειτα, καθορίζουμε το εύρος για τα στοιχεία του x άξονα στο τμήμα σχεδίασης του προγράμματος, έτσι ώστε να καλύψουμε το δεύτερο μέχρι και το τελευταίο άκρο της λίστας και το εύρος των στοιχείων του y άξονα για να καλύψουμε από την πρώτη μέχρι και την επόμενη από την τελευταία θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6 στην κάτω αριστερή γωνία.

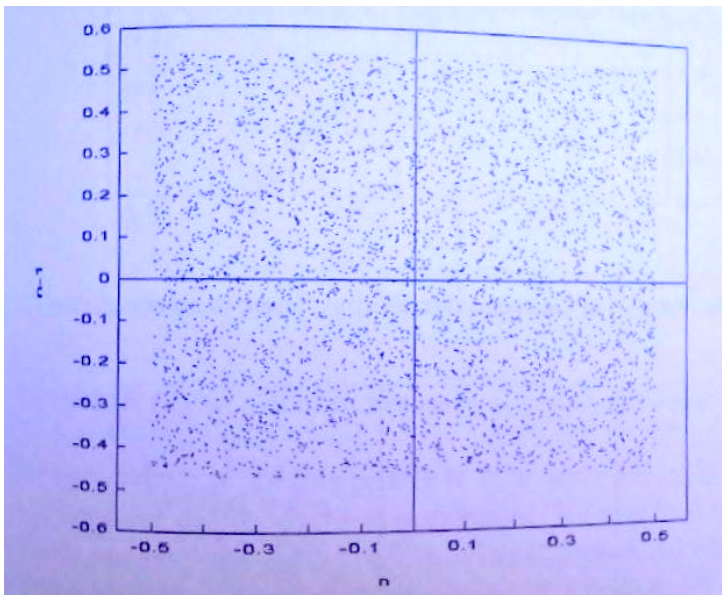
Με αυτό τον τρόπο ζητάμε από το πρόγραμμα να συγκρίνει το τρέχον νούμερο με το ακριβώς προηγούμενο και να τοποθετήσει ένα σύμβολο στις συντεταγμένες n και $n - 1$. Για παράδειγμα, εάν ο δεύτερος όρος είναι το τονικό ύψος 5, ο πρώτος είναι το 2, όπως στο σχήμα 2.6 μας δίνονται οι συντεταγμένες (5,2). Τα υπόλοιπα δύο ζευγάρια είναι τα (1,4) και (4,5). Τα νούμερα στις παρενθέσεις μας δείχνουν πως το τονικό ύψος πήγε από το 2 στο 5 και από το 5 στο 4, όπως



Σχήμα 2.6: Παράδειγμα διαγράμματος διασποράς

ακριβώς εμφανίζεται και στη λίστα.

Το διάγραμμα διασποράς μας δείχνει πολύ εύστοχα πόσο στενά συνδεδεμένα είναι τα αντίστοιχα τονικά ύψη. Στο σχήμα 2.7, φαίνεται το διάγραμμα διασποράς των ομοιόμορφα κατανομημένων τυχαίων αριθμών, όπως ακριβώς προήλθαν από έναν γεννήτορα τυχαίων αριθμών, προσθαφαιρώντας το 0.5 δεξιά κ αριστερά του μηδενός, έτσι ώστε να προκύψει ένα ομοιόμορφα κατανομημένο διάστημα. Παρατηρήστε πως τα σημεία εμφανίζονται σχεδόν παντού στο διάγραμμα, χωρίς να μένει απ' έξω κάποια περιοχή. Αυτό θα μπορούσε να παρομοιαστεί με το σχήμα 2.6, εφ' όσον τα σημεία απλώνονται σε όλο το χώρο. Υπάρχει μια θεωρία που υποστηρίζει πως αυτό δηλώνει πως τα σημεία δεν συσχετίζονται μεταξύ τους. Δεν θα διεισδυσούμε περαιτέρω, όμως, σε αυτή την εργασία.

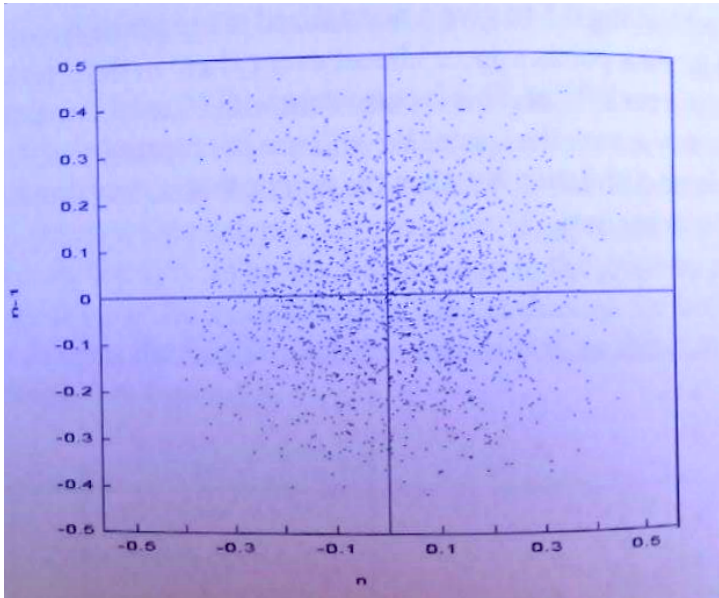


Σχήμα 2.7: Διάγραμμα διασποράς - Τα σημεία είναι σχεδόν ιδανικά ασυσχέτιστα μεταξύ τους.

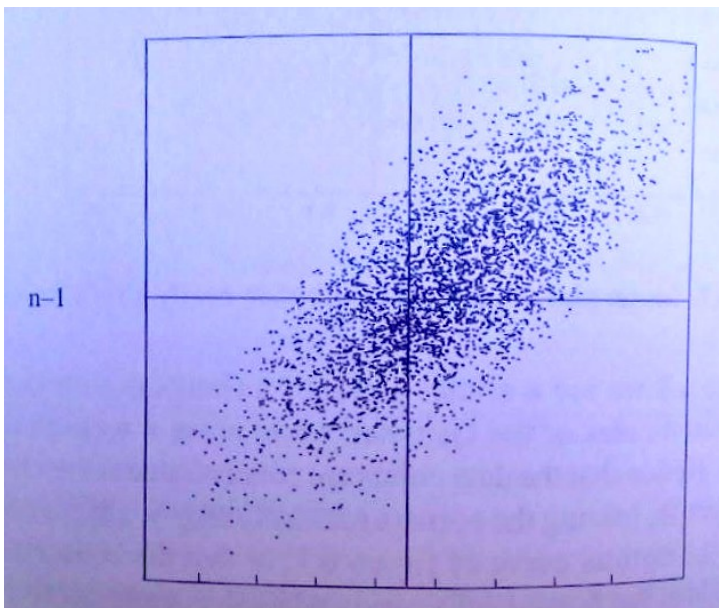
Στο σχήμα 2.8, βλέπουμε ένα διάγραμμα διασποράς μιας κατανομής Gauss, η οποία προέρχεται από τα πλάτη της Gauss κυματομορφής του Λευκού θορύβου, όπως την είδαμε και στο σχήμα 2.3. Παρατηρήστε πως τα σημεία συγκεντρώνονται με κάποιο τρόπο στο κέντρο του γραφήματος, αφήνοντας τις γωνίες άδειες. Αυτό το μοτίβο αντιστοιχεί στην κανονική καμπύλη του σχήματος 2.1, στο οποίο οι περισσότερες τιμές είναι συγκεντρωμένες στην 'καμπούρα' της καμπύλης και οι σχεδόν άδειες γωνίες αντιστοιχούν στην ουρά της. Μήπως αυτό σημαίνει πως υπάρχει κάποια συσχέτιση;

Παρ' όλο που κάποιος θα μπορούσε να απαντήσει θετικά, φαίνεται πως η απάντηση είναι μάλλον αρνητική, η ανάλυσή της, όμως, ξεφεύγει από τα πλαίσια της εργασίας αυτής.

Στο σχήμα 2.9, βλέπουμε το διάγραμμα διασποράς του Ροζ θορύβου, όπως είχε παρουσιαστεί στο σχήμα 2.4. Σε αυτό το διάγραμμα, υπάρχει μία συγκέντρωση των σημείων κατά μήκος της διαγώνιας γραμμής. Αυτό, δηλώνει μέτρια συσχέτιση. Σε αυτό το σημείο, υπενθυμίζεται πως αυτή είναι η προσέγγιση του Voss για να περιγράψει και να κατασκευάσει μουσική.



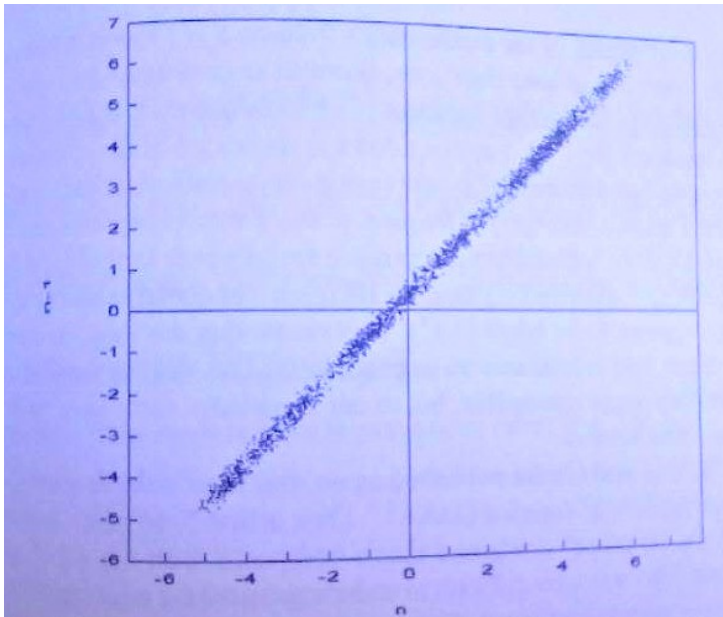
Σχήμα 2.8: Διάγραμμα διασποράς της Γκαουσιανής κατανομής του Λευκού θορύβου - Δεν υπάρχει συσχέτιση.



Σχήμα 2.9: Διάγραμμα διασποράς του Pink noise - Υπάρχει μια αρκετά καλή συσχέτιση.

Τέλος, στο σχήμα 2.10, βλέπουμε ένα διάγραμμα διασποράς που προέρχεται από τον Brown θόρυβο, ο οποίος παρουσιάστηκε στο σχήμα 2.5. Αυτό το γράφημα δείχνει πολύ ισχυρή συσχέτιση μεταξύ των γειτονικών ζευγαριών, όπως φαίνεται από την πολύ πυκνή συγκέντρωση στη διαγώνιο ευθεία.

Η σημασία των παραπάνω σχετίζεται με τον τρόπο που οι νότες ομαδοποιούνται σε μία μουσική σύνθεση. Ένα πιάνο μπορεί να επιδείξει ομοιόμορφη κατανομή, αλλά συνήθως κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, αφού τα χέρια πέφτουν φυσικά στη μέση των πλήκτρων. Μία ορχήστρα ή μια χορωδία



Σχήμα 2.10: Διάγραμμα διασποράς του Brown noise- Υπάρχει ισχυρή συσχέτιση στη διαγώνιο.

δύσκολα παράγουν ομοιόμορφη κατανομή, αλλά η επικάλυψη των οργάνων και του φωνητικού εύρους μετατρέπουν την κατανομή προσεγγιστικά σε κανονική. Αντιστρόφως, η μουσική που προέρχεται από το Brown θόρυβο, θεωρείται περισσότερο συσχετισμένη.

2.3 Voss: Μουσική από το θόρυβο $1/f$

Ο Richard F. Voss έγραψε μια διδακτορική διατριβή, στην οποία αναφέρει μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα για τη σχέση που συνδέει τη μουσική με τις κυματομορφές που έχουμε αναφέρει παραπάνω. Αυτός και ο καθηγητής του John Clarke, δημοσίευσαν στο επιστημονικό περιοδικό Nature μια ανακοίνωση για κάποια από τα αποτελέσματα της έρευνάς τους. Το άρθρο αυτό ήταν αρκετά τεχνικό και απαιτούσε βαθιά γνώση στα Μαθηματικά που σχετίζονται με την επεξεργασία σήματος. Σε αυτό, οι Voss και Clarke ισχυρίζονται πως οι σχέσεις της μορφής $1/f$ περιγράφουν μακροπρόθεσμες συσχετίσεις της μουσικής των ραδιοσταθμών και των δομικών λειτουργιών της μουσικής στην εκτέλεση. Ακολουθεί μια πολύ σύντομη αναφορά στο συμβολισμό των μαθηματικών που χρειάστηκαν για την προαναφερόμενη εργασία:

Το $S_{V^2}(f)$ δίνει τη μέση ισχύ της ηχηρότητας (loudness-σχετίζεται με τις συχνότητες) σε μακρινές αποστάσεις για συγκεκριμένες ώρες για τους ραδιοσταθμούς. Το $S_V(f)$ δίνει τη μέση ηχηρότητα των συχνοτήτων του ήχου. Το $S_Z(f)$ δίνει τη μέση ηχηρότητα μακράς διάρκειας σε μια μουσική σύνθεση μετρώντας τις βουβές (άηχες περιοχές) στο τέλος ενός κομματιού (zero crossings). Για το συμβολισμό έχουμε τα εξής: S = spectrum, V = voltage, f = frequency, Z=zero crossings.

Οι Voss και Clarke βρήκαν πως υπάρχει μεγαλύτερη ηχητική ισχύς μέσα σε βάθος χρόνου (δηλ. το φάσμα $1/f$) με όριο τα 1000 δευτερόλεπτα, όπου το φάσμα μετά από αυτό το όριο γίνεται άσπρο (white - της μορφής $1/f^0$). Αυτό σημαίνει πως όσο μεγαλύτερη σε διάρκεια είναι η μελέτη, τόσο λιγότερο εξαρτάται η ηχηρότητα από το παρελθόν της. Δεν είμαστε σε θέση να αμφισβητήσουμε τα αποτελέσματα αυτά, καθώς φαίνονται λογικά, όμως πρέπει να αναφέρουμε ότι δεν έχουν γίνει άλλες υποστηρικτικές μελέτες.

Το 1975, οι Voss και Clarke δημοσίευσαν ξανά. Αυτή τη φορά στο Journal of the Acoustical

Society of America (JASA). Το άρθρο τους: *1/f noise in Music: Music from 1/f noise*, περιελάμβανε μουσική σύνθεση με τη βοήθεια των κυματομορφών του θορύβου. Αυτό ήταν λίγο δύσκολο στην κατανόηση, μέχρι τη στιγμή που η Γκαουσιανή ερμηνεία του Λευκού θορύβου ξεδιάλυσε την υπόθεση. Αυτό που θα πρέπει να γνωρίζουμε και να αναφέρουμε είναι ότι οι δύο επιστήμονες μελετούσαν τα πλάτη των ηλεκτρικών ερεθισμάτων, όχι των συχνοτήτων. Σε αυτό το άρθρο, επανεξετάζουν και βελτιώνουν τη θεωρία που αφορά στα πλάτη χαμηλών συχνοτήτων, κάτω των 10Hz (δηλ. τις διάρκειες). Το πιο σημαντικό όμως είναι πως στο 3ο μέρος της εργασίας παρουσίασαν τη μουσική σύνθεση μέσω των τάσεων του Λευκού (white), Ροζ (pink) και Brown θορύβου, οδηγώντας έναν ταλαντωτή ελεγχόμενης τάσης να παράγει τονικά ύψη (pitches) που ήταν άμεσα σχετιζόμενα με τις τάσεις εισόδου. Το θέμα αυτό έχει συζητηθεί από πολλούς άλλους συγγραφείς.

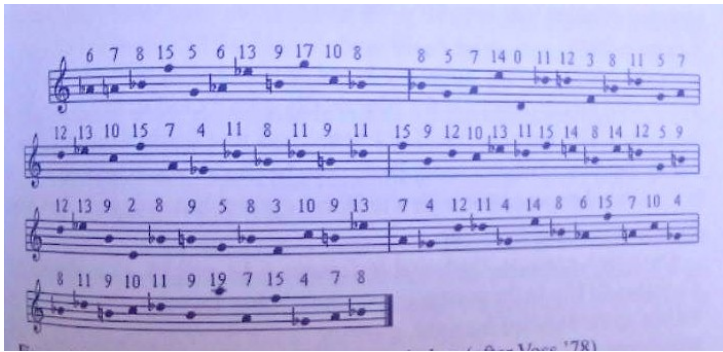
Στο σχήμα 2.12, παρουσιάζεται μία μίνιμαλ εκδοχή της Λευκής μουσικής (white music) από το άρθρο στο JASA το '78, η οποία δείχνει τις νότες και τα τονικά ύψη, χωρίς τις διάρκειες. Ο Voss παρήγαγε τις διάρκειες με τρόπο παρόμοιο με αυτό των τονικών υψών, έτσι τονικά ύψη και διάρκειες μπορούν να αναλυθούν το ίδιο.

Πριν συνεχίσουμε την ανάλυση για το άρθρο των Voss και Clarke παραθέτουμε κάποια χρήσιμη μουσική σημειολογία για περαιτέρω κατανόηση. Έτσι λοιπόν, αρχικά χρειάζεται η αντιστοίχιση στις νότες από το Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si με τα γράμματα της Αγγλικής αλφαβήτου A, B, C, D, E, F, G, η οποία έχει ως εξής: A = La, B = Si, C = Do, D = Re, E = Mi, F = Fa, G = Sol. Κατά δεύτερον, είναι πολύ σημαντική η σχέση μεταξύ συχνοτήτων και τονικών υψών. Παρακάτω, παρατίθεται πίνακας που αντιστοιχίζει τις νότες, τα τονικά ύψη και τις συχνότητες (σχήμα 2.11).

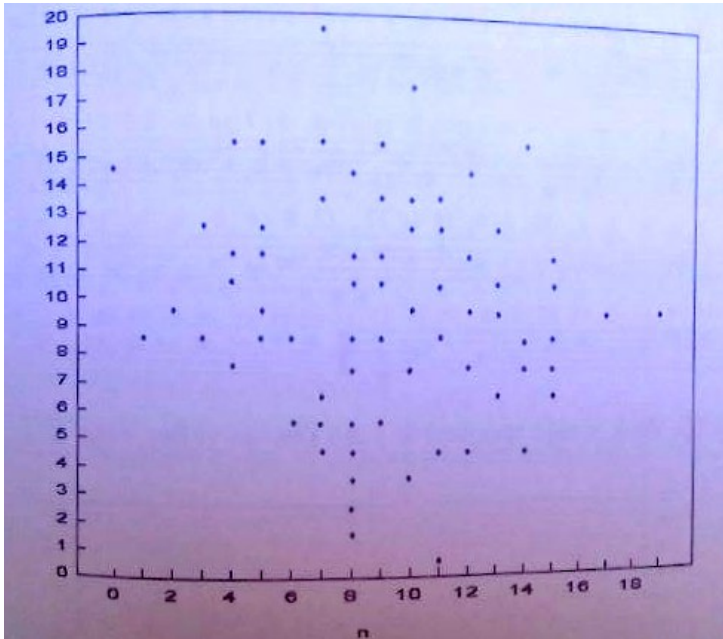
	C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	B
0	16.35	17.32	18.35	19.45	20.60	21.83	23.12	24.50	25.96	27.50	29.14	30.87
1	32.70	34.65	36.71	38.89	41.20	43.65	46.25	49.00	51.91	55.00	58.27	61.74
2	65.41	69.30	73.42	77.78	82.41	87.31	92.50	98.00	103.8	110.0	116.5	123.5
3	130.8	138.6	146.8	155.6	164.8	174.6	185.0	196.0	207.7	220.0	233.1	246.9
4	261.6	277.2	293.7	311.1	329.6	349.2	370.0	392.0	415.3	440.0	466.2	493.9
5	523.3	554.4	587.3	622.3	659.3	698.5	740.0	784.0	830.6	880.0	932.3	987.8
6	1047	1109	1175	1245	1319	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976
7	2093	2217	2349	2489	2637	2794	2960	3136	3322	3520	3729	3951
8	4186	4435	4699	4978	5274	5588	5920	6272	6645	7040	7459	7902

Σχήμα 2.11: Πίνακας αντιστοίχισης. Στην αριστερή στήλη βρίσκεται το νότιο της οκτάβας.

Πίσω στο άρθρο τώρα. Μετρήσαμε τα τονικά ύψη (pitches) ανεβαίνοντας ανά ημιτόνιο, από τη νότα $D_4(0)$ στην $A_5(19)$ και τοποθετήσαμε τα αποτελέσματα σε ένα φύλλο εργασίας για να κατασκευάσουμε το διάγραμμα διασποράς που φαίνεται στο σχήμα 2.13. Παρατηρήστε πως τα διαστήματα συγκεντρώνονται στο κέντρο και ότι οι γωνίες είναι άδειες. Αυτό συμβαίνει εξ' αιτίας της κατανομής Gauss. Άραγε μπορεί να συμπεράνει κανείς τυχαιότητα από τη στιγμή που παρατηρείται αυτή η συγκέντρωση στο κέντρο; Όπως πολύ σωστά επισήμανε ο Kuo, οι μουσικοί σκέφτονται διαφορετικά το Λευκό θόρυβο σε σχέση με τους μηχανικούς. Αυτό, γιατί θα περίμενε κανείς τα τονικά ύψη της μουσικής που προέρχονται από το Λευκό θόρυβο να ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή. Παρακάτω, θα εξετάσουμε τις συνθέσεις του Ξενάκη και του Babbitt και θα δούμε πόσο κοντά προσεγγίζουν την ομοιόμορφη κατανομή για το τονικό ύψος.



Σχήμα 2.12: White music- Όπως παρουσιάζεται μετά το άρθρο του Voss.



Σχήμα 2.13: Διάγραμμα διασποράς προερχόμενο από White music του Voss.

Ο Voss δεν εξήγησε ξεκάθαρα πως προσέγγισε ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο σήμα, από ένα άλλο του οποίου το πλάτος κυμαίνεται με ένα συγκεκριμένο διάστημα τιμών (quantized) για αυτά τα τονικά ύψη. Οι αρχικές τιμές τους θα ήταν τυχαίες, εφ' όσον παρήχθησαν από τυχαίες τάσεις, και θα ήταν πολυάριθμες. Εξήγησε στη διατριβή του ότι πήρε ένα δείγμα τάσεων και χρησιμοποίησε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή μοντέλου PDP-11 έτσι ώστε να ψηφιοποιήσει και να βάλει σε σειρά τα αποτελέσματα από τους τυχαίους αριθμούς που προέκυψαν, καθώς και να καθορίσει το τονικό ύψος σε ένα εύρος δύο οκτάβων. Η παραγωγή των συγκεκριμένων τόνων, πρέπει να χρειάστηκε εξαιρετική προσοχή. Εικάζουμε πως διαίρεσε τις τάσεις σε 24 κλάσεις, με μία μέθοδο που στα Αγγλικά λέγεται Equal temperament και στρογγυλοποίησε κάθε τάση τοποθετώντας τη στη βάση κάθε κλάσης. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα μια σειρά 24 βημάτων σε μια equally tempered scale, αριθμώντας από το 0 έως το 23. Θεωρούμε σωστό για τον αναγνώστη της εργασίας αυτής να παραθέσουμε μια παράγραφο, εξηγώντας αυτή τη μεθοδολογία.

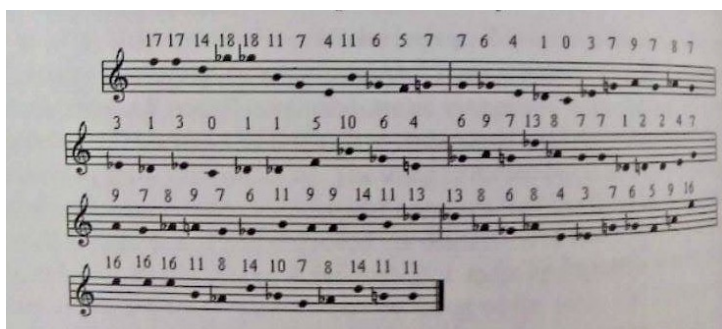
Equal temperament: Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται σήμερα με σκοπό να συντονιστεί-κουρδιστεί το πιάνο. Γενικά, θεωρείται ως πρότυπο και αναπτυσσόταν επί εκατοντάδες χρόνια έπειτα από μεγάλες διαμάχες. Σε αυτό το σύστημα, θεωρητικά, όλα τα ημιτόνια έχουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος. Όλα τα μουσικά διαστήματα, με εξαίρεση τις οκτάβες είναι ελαφρώς εκτός τόνου. Ευτυχώς, οι αποκλίσεις είναι πολύ μικρές κι έτσι γίνονται ανεκτές από τους ακροατές. Αυτός ο συμβιβασμός, καθιστά δυνατή την εκτέλεση, με αρμονία σε όλα τα κλειδιά, αλλά δίνει στους εκτελεστές την ευθύνη

να προσέχουν πολύ το κούρδισμα των οργάνων. Ο σκοπός είναι να διαιρεθεί η οκτάβα σε 12 ίσα μέρη, χρησιμοποιώντας τη ρίζα δωδέκατης τάξης του 2, η οποία είναι $2^{1/12} = 1.059463$, στρογγυλοποιώντας σε 6 δεκαδικά ψηφία. Κάθε τόνος με τη σειρά του πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό αυτό καθ' όλη την έκταση της οκτάβας, καταλήγοντας σε 12 διαφορετικές συχνότητες - *equally tempered*. Για παράδειγμα, $22.0 * 1.059463 = 233.1$, $233.1 * 1.059463 = 246.9$ κλπ. Επισυνάπτεται ο πίνακας στο σχήμα 2.14.

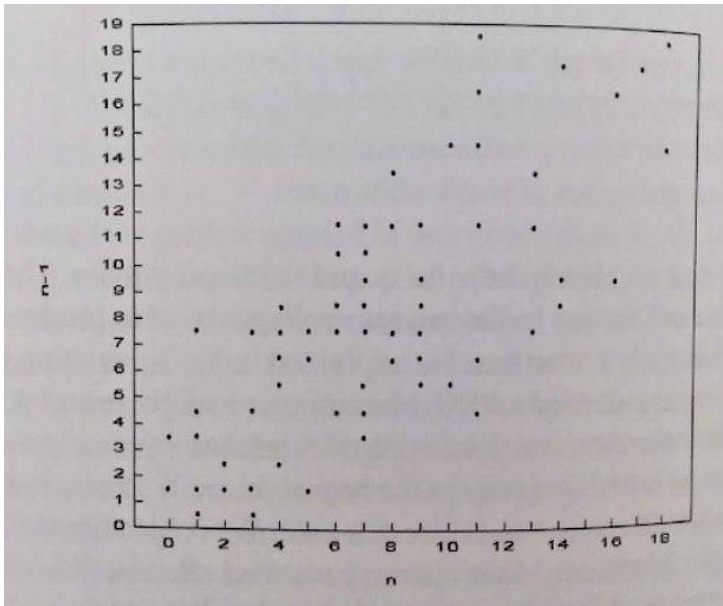
<u>Pitch</u> (Hz)	<u>Equally tempered</u> <u>frequency (Hz)</u>
A ₃	220.0
A ₃ [#] /B ₃ ^b	233.1
B ₃	246.9
C ₄	261.6
C ₄ [#] /D ₄ ^b	277.2
D ₄	293.7
D ₄ [#] /E ₄ ^b	311.1
E ₄	329.6
F ₄	349.2
F ₄ [#] /G ₄ ^b	370.0
G ₄	392.0
G ₄ [#] /A ₄ ^b	415.3
A ₄	440.0

Σχήμα 2.14: *Equally tempered chromatic scale* για μια οκτάβα.

Συνεχίζοντας στην εργασία του Voss, ο Γκαουσιανός Λευκός θόρυβος παρήγαγε μουσική, στην οποία όλα τα τονικά ύψη παρουσιάζονται ως ισόνομα, εξ' αιτίας της διωνυμικής κατανομής των τάσεων οι οποίες ελέγχουν αυτά τα τονικά ύψη. Ο Voss πιθανόν να μην χρησιμοποίησε τον προαναφερθέν εξοπλισμό για να πάρει μία ομοιόμορφα κατανομημένη Λευκή μουσική. Για να πραγματοποιήσει κάτι τέτοιο, ίσως χρειάστηκε μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών με ομοιόμορφο *output*, αλλά λειτουργώντας με αυτό τον τρόπο θα είχε δώσει ένα διαφορετικό αποτέλεσμα. Η Ροζ μουσική του Voss εμφανίζεται στα σχήματα 2.15 και 2.16. Σε αυτή την περίπτωση, το εύρος που δίνεται είναι από τη νότα C₄(0) έως την G₅^{b(18). Στο διάγραμμα διασποράς τα τονικά ύψη εμφανίζονται περίπου πάνω σε μία διαγώνιο ευθεία με θετική κλίση, εμφανίζοντας μεγαλύτερη συσχέτιση από αυτή που υπήρχε στη Λευκή μουσική (*white music*). Αυτό είναι αναμενόμενο από την 1/f μουσική.}



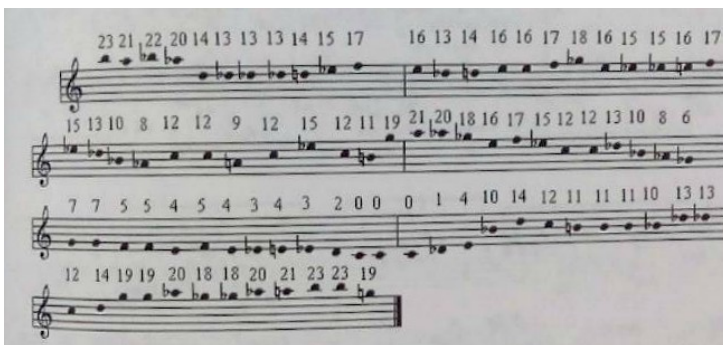
Σχήμα 2.15: *Pink music* στο άρθρο του Voss.



Σχήμα 2.16: Pink music - Διάγραμμα διασποράς.

Ποιά επίδραση όμως δημιουργεί στη **Brown** μουσική ακόμα μεγαλύτερη συσχέτιση; Στα σχήματα 2.17 και 2.18 που ακολουθούν, βλέπουμε τη **Brown** μουσική, όπως τη δημιούργησε ο **Voss**. Τώρα το εύρος είναι μεγαλύτερο, από $C_4(0)$ μέχρι $B_5(23)$, ίσως εξ' αιτίας της κίνησης **Brown**. Υπενθυμίζουμε, πως στο σχήμα 2.5 η κυματομορφή απομακρυνόταν από τη κεντρική γραμμή και είχαμε πει πως θα επέστρεφε. Για λογαριασμό της σύνθεσης αυτής ο **Voss**, επέλεξε ένα μέρος της κυματομορφής, το οποίο επιστρέφει επανέρχεται στο σημείο από όπου ξεκίνησε. Το μέγιστο τονικό ύψος είναι το 23, αφού κυμαινόμαστε σε ένα μικρό εύρος.

Το διάγραμμα διασποράς για αυτά τα δεδομένα, είναι ισχυρά ευθυγραμμισμένο με τη διαγώνια ευθεία, δείχνοντας έτσι ισχυρή συσχέτιση για τις νότες (n) και τις αμέσως προηγούμενές τους ($n - 1$). Μήπως είναι αυτό τελικά που εννοούμε με τον όρο μουσική;

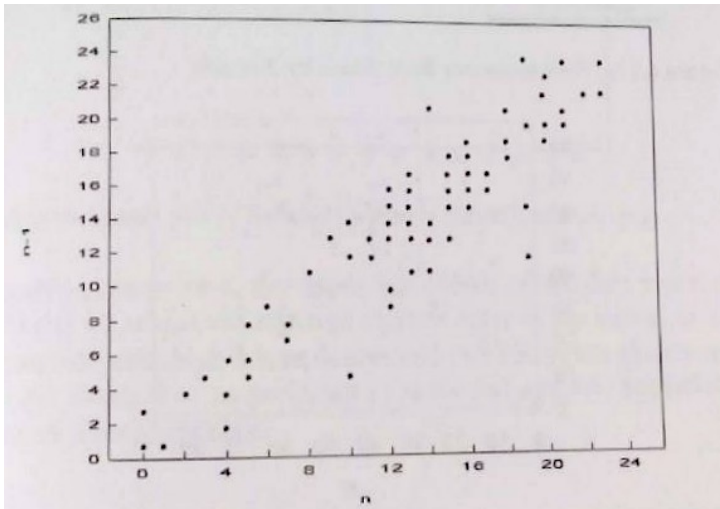


Σχήμα 2.17: Brown music στο άρθρο του **Voss**.

2.4 Εξετάζοντας άλλες μουσικές συνθέσεις.

2.4.1 Xenakis-Eonta

Τα σχήματα 2.19 και 2.20 που ακολουθούν δείχνουν ένα μέρος της μουσικής σύνθεσης Εόντα του Γιάννη Ξενάκη και ένα διάγραμμα. Δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε τι είδους μαθηματικά χρησιμοποίησε, το αποτέλεσμα όμως είναι αξιόπαινο. Ο πιανίστας χρησιμοποιεί όλο το εύρος των πλήκτρων. Με αυτό τον τρόπο, το τονικό ύψος ξεκινάει από το 0 και φτάνει μέχρι και το 87. Τα



Σχήμα 2.18: Διάγραμμα διασποράς για Brown music στο άρθρο του Voss.

μέτρα από 6 μέχρι 9, μοιάζουν ομοιόμορφα κατανομημένα. Ο Ξενάκης αρέσκει να γράφει σύννεφα από νότες, όπως αυτό το ομιχλώδες τοπίο, που συνεχίζει πέρα από το υποφαινόμενο μέρος, με έναν ήχο μεταλλικό να μπαμβοβγαίνει σε αυτή την ομίχλη εξετάζοντας παρακάτω σε αυτή τη μουσική σύνθεση.

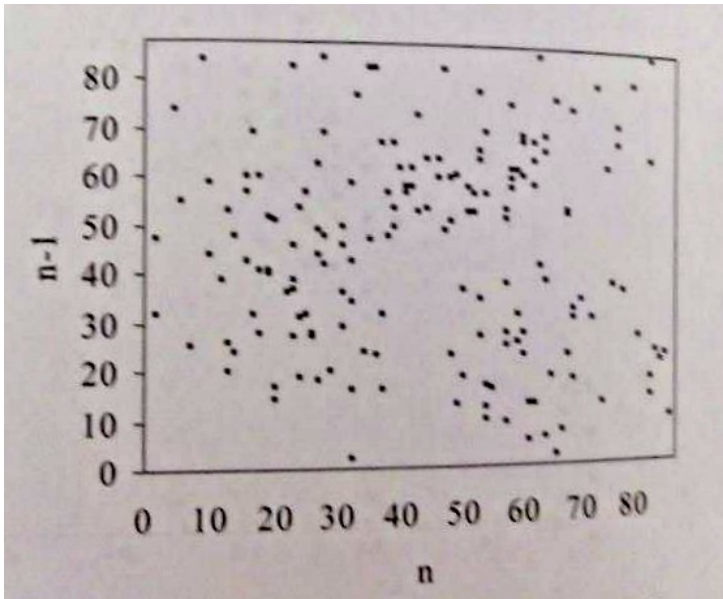


Σχήμα 2.19: Τέσσερα μέτρα από την Εόντα του Γιάννη Ξενάκη

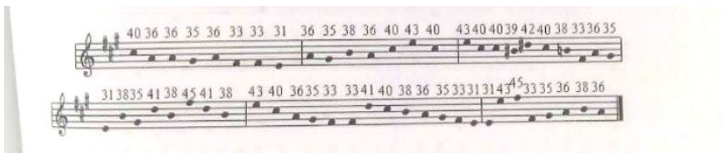
2.4.2 Schubert: Who is Sylvia?

Οι μελωδίες του Franz Schubert ίσως είναι πηγή για Brown music, εφ' όσον είναι ομαλά μελωδικές. Ελέγχουμε μία από αυτές με ένα διάγραμμα διασποράς. Η μελωδία της μουσικής σύνθεσης *Who is Sylvia?*, παρουσιάζεται με τα τονικά ύψη στο σχήμα 2.21 και με το διάγραμμα διασποράς στο σχήμα 2.22. Μάλλον, προς απογοήτευση κάποιων, δεν είναι $1/f^2$, αλλά μάλλον $1/f$.

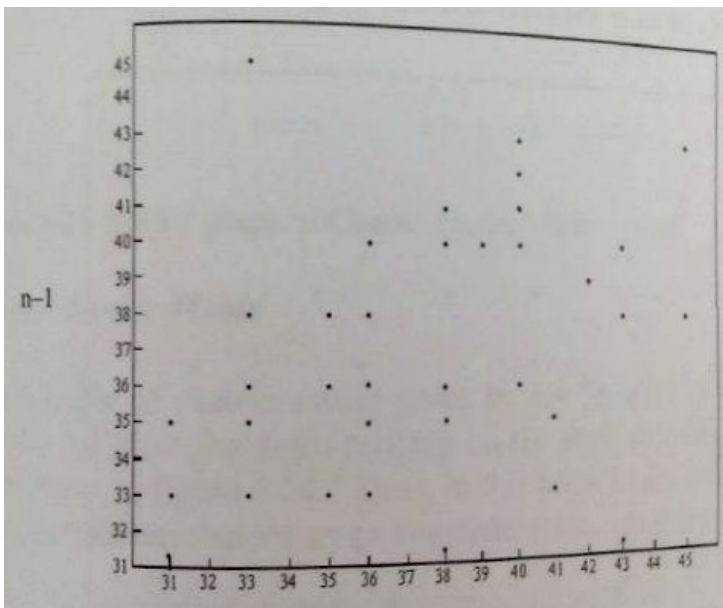
Αξίζει να παρατηρηθεί πως στην πάνω αριστερή γωνία του διαγράμματος βρίσκονται οι τόνοι 33 και 45 οι οποίοι είναι συνεχόμενοι στη μουσική. Μήπως αυτό στρεβλώνει την ερμηνεία μας; Είναι άλμα μίας οκτάβας, το οποίο ακούγεται γνώριμο. Το διάγραμμα, όμως, το δείχνει ασυσχέτιστο (στατιστικές ακραίες τιμές). Κάποιες φορές θα παραβλέπουμε τέτοιου είδους απομονωμένες ακραίες τιμές.



Σχήμα 2.20: Διάγραμμα διασποράς - Εόντα



Σχήμα 2.21: Schubert-Who is Sylvia?-Μέρος από τη Σοπράνο



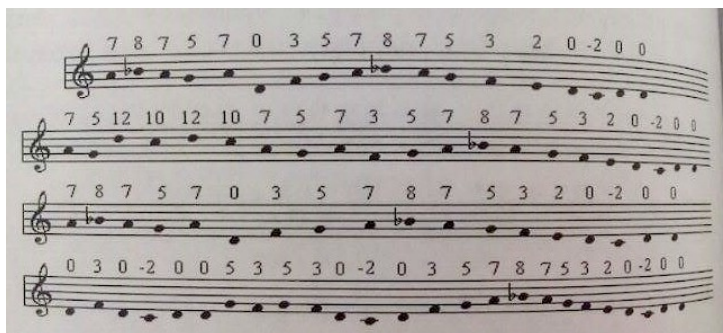
Σχήμα 2.22: Διάγραμμα διασποράς -Schubert-Who is Sylvia?

2.4.3 Gregorian Chant

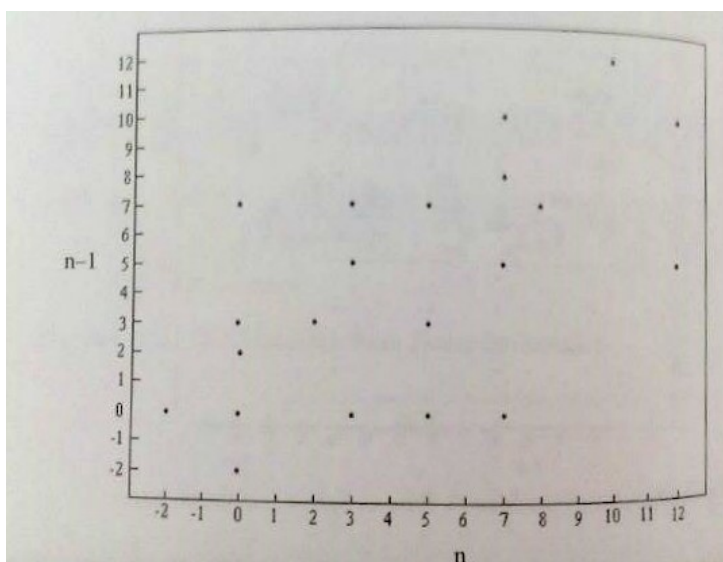
Μπορεί αρχικά να φαίνεται πως η σύνθεση Gregorian Chant από το Liber Usualis στο σχήμα 2.23 θα είχε διάγραμμα παρόμοιο με αυτό την κίνησης Brown, αλλά το σχήμα 2.24 δείχνει ότι είναι πιο κοντά από ποτέ στην $1/f$.

2.4.4 Dodge: Brown Music

Στα σχήματα 2.25 και 2.26 παρουσιάζονται η μουσική και το διάγραμμα από τη μουσική σύνθεση η οποία έχει προκύψει από το θόρυβο του Charles Dodge, κάτι παρόμοιο με εκείνο του Voss. Η Brown

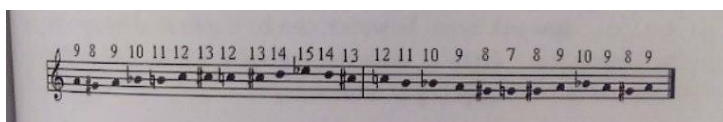


Σχήμα 2.23: Kyrie-Liber Usualis



Σχήμα 2.24: Διάγραμμα διασποράς για Gregorian chant χρησιμοποιώντας χρωματική αρίθμηση- χρησιμοποιώντας τις νότες που δεν ανήκουν στην διατονική κλίμακα του κλειδιού στο οποίο είναι γραμμένο το απόσπασμα

μουσική είναι εμφανής ημιτονιακά, αλλά και στο διάγραμμα διασποράς, όπου τα στοιχεία βρίσκονται κατά μήκος της ευθείας. Επομένως, τα δεδομένα είναι ισχυρώς συσχετισμένα. Χρησιμοποιεί τυχαίο περίπατο με ίσα βήματα. Δηλαδή, μία πολύ καλή προσέγγιση της κίνησης Brown. Η μουσική αυτή σύνθεση μοιάζει πολύ διαφορετική από αυτή του Voss.



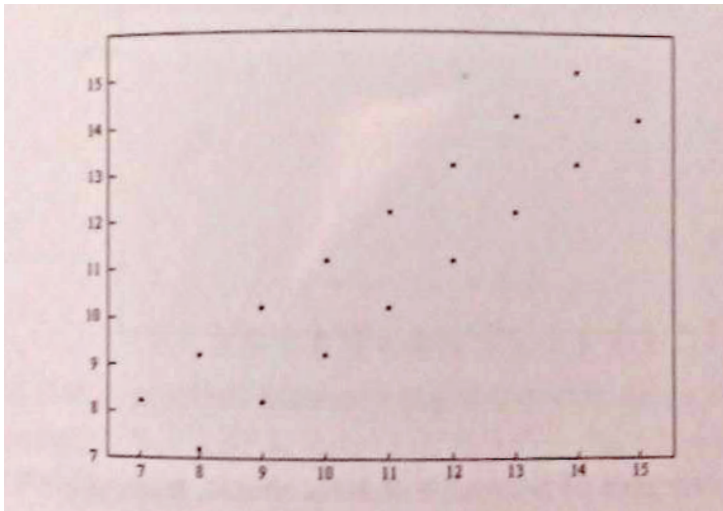
Σχήμα 2.25: Charles Dodge Brown music

2.4.5 Stewart: Chaotic music

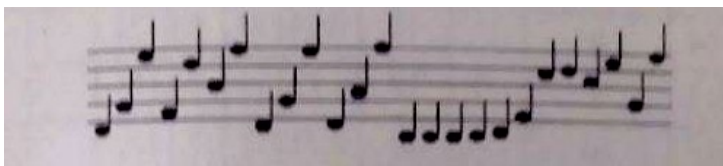
Στο παράδειγμα της χαοτικής μουσικής από τη μουσική σύνθεση Does God Play Dice του Ian Stewart οι νότες δεν τοποθετούνται αξιόπιστα στο πεντάγραμμα και δεν υπάρχει μουσικό κλειδί, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.27. Οπότε προσεγγιστικά έχει τοποθετηθεί ένα κλειδί, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.28.

Στο διάγραμμα διασποράς για αυτή τη μουσική σύνθεση, οι άξονες έχουν στραφεί κατά 90°, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.29 και το γράφημα προσεγγίζει την παραβολή, γεγονός το οποίο θυμίζει fractal δομή. Οι νότες του Ian Stewart μπορούν να μοντελοποιηθούν χρησιμοποιώντας τον τύπο $f(x) = 4x(1 - x)$ ξεκινώντας με $x = 0.1$. Πολλαπλασιάζοντας επί 10 έχουμε τα πραγματικά τονικά ύψη στον πίνακα που παρουσιάζεται στο σχήμα 2.30.

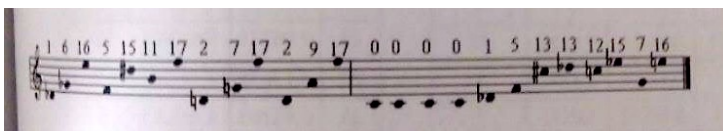
Σημειώνεται πως στον πίνακα του σχήματος 2.30, η χαμένη νότα 24 και οι διαφορούμενες νότες 23 και 26 έχουν διορθωθεί. Τα αποτελέσματα είναι ορατά στα σχήματα 2.31 και 2.32.



Σχήμα 2.26: Charle's Dodge Brown music-Διάγραμμα διασποράς



Σχήμα 2.27: Ian Stewart- chaotic music



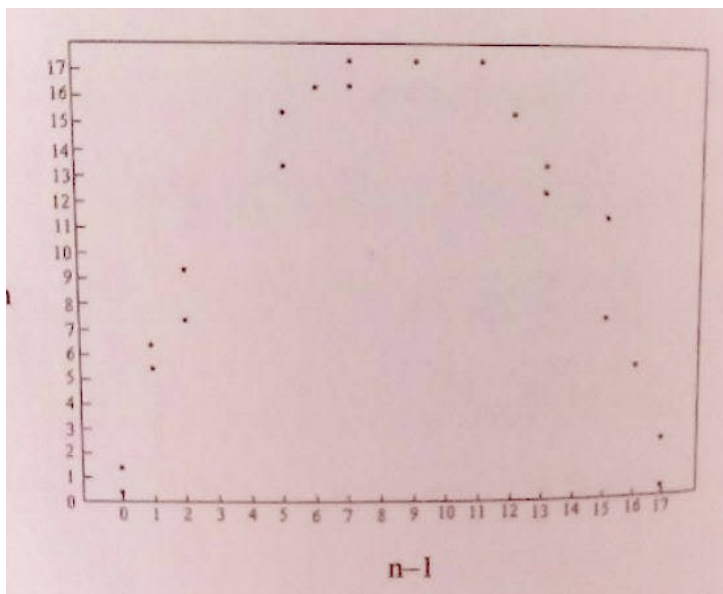
Σχήμα 2.28: Ian Stewart- chaotic music

Το γράφημα της εικόνας 2.32 μοιάζει να ξεπερνάει τις προσδοκίες μας στην τελειότητα. Γιατί; Η τελευταία στήλη (rounded) του πίνακα του σχήματος 2.30 περιέχει όλα τα αρχικά δεκαδικά ψηφία. Αυτό γιατί η στρογγυλοποίηση γίνεται εξ' αιτίας μορφοποίησης στην εκτύπωση. Έτσι, το γράφημα είναι βασισμένο σε ένα πλήθος από τονικά ύψη το οποίο πλησιάζει το άπειρο. Θα έπρεπε, ωστόσο, να βασίζεται μόνο στις ακέραιες τιμές. Το γράφημα του σχήματος 2.33 είναι βασισμένο στις ακέραιες τιμές. Παρατηρούμε πως είναι παρόμοιο με το γράφημα του σχήματος 2.29, με τη διαφορά ότι έχει μια ελαφρά κλίση προς τα δεξιά. Αυτό δείχνει πως μεταχειρίζοντας τη σύνθεση ως η κλίμακα να ήταν επτατονική, δεν υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις, ως εάν η κλίμακα να ήταν χρωματική.

Ωστόσο, πρέπει να αναρωτηθούμε εάν ο Stewart είχε πρόθεση να αναλύσει τη μουσική του με μία επτατονική-equally tempered κλίμακα, της οποίας οι συχνότητες θα βασίζονται στην έβδομη τάξης ρίζα του 2 ($2^{1/7}$). Είναι πολύ πιθανόν να έγραψε τις νότες και μετά να έβαλε το πεντάγραμμα, κατά βούληση. Έτσι, η σημειογραφία πρέπει να θεωρηθεί αλληγορική.

Ανεξαρτήτως όλων αυτών των προβλημάτων, μπορεί να σημειώσει κανείς πολύτιμα σχόλια. Η παραβολή της εικόνας 2.32 είναι πολύ ακριβής και η παραβολή της εικόνας 2.33 είναι μία πολύ λογική προσέγγιση, δίνοντας ένα μελωδικό αποτέλεσμα. Αυτό σημαίνει πως τα διαγράμματα διασποράς και η fractal γεωμετρία δείχνουν τη δομή. Οι παραβολές καθιστούν σαφές πως η μουσική είναι πλήρως καθορισμένη από τον τύπο.

Μία σημαντική ερώτηση για τους συνθέτες θα ήταν: Τι κάνουμε με αυτές τις τιμές στη σύνθεση; Θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τις αρχικές τιμές (πριν τη στρογγυλοποίηση) και να έχουν ως αποτέλεσμα ένα μη συντονισμένο κομμάτι ή να χρησιμοποιήσουν τις στρογγυλοποιημένες τιμές και να έχουν μια ασυνήθιστη equally tempered κλίμακα βασισμένη στην έβδομη ρίζα του 2. Αυτές οι λύσεις μπορεί να φαίνονται ενδιαφέρουσες, αλλά η τελευταία διαφεύδεται από την αυθαίρετη θέση

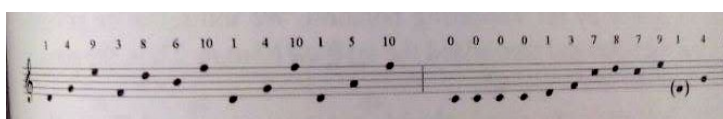


Σχήμα 2.29: Διάγραμμα διασποράς Ian Stewart- chaotic music, αριθμημένο χρωματικά.

Note	Pitch	$\times 10$	Rounded
1	0.10000	1.0000	1
2	0.36000	3.6000	4
3	0.92160	9.2160	9
4	0.28901	2.8901	3
5	0.82194	8.2194	8
6	0.58542	5.8542	6
7	0.97081	9.7081	10
8	0.11334	1.1334	1
9	0.40197	4.0197	4
10	0.96156	9.6156	10
11	0.14784	1.4784	1
12	0.50392	5.0392	5
13	0.99994	9.9994	10

Note	Pitch	$\times 10$	Rounded
14	0.00025	0.0025	0
15	0.00098	0.0098	0
16	0.00394	0.0394	0
17	0.01568	0.1568	0
18	0.06174	0.6174	1
19	0.23173	2.3173	2
20	0.71212	7.1212	7
21	0.82001	8.2001	8
22	0.59036	5.9036	6
23	0.96734	9.6734	10?
24	0.12638	1.2638	(1)
25	0.44165	4.4165	4
26	0.98638	9.8638	10?

Σχήμα 2.30: Τιμές για Οι τιμές που χρησιμοποιήθηκαν- Ian Stewart- chaotic music



Σχήμα 2.31: Διάγραμμα διασποράς Ian Stewart- chaotic music, διορθωμένο.

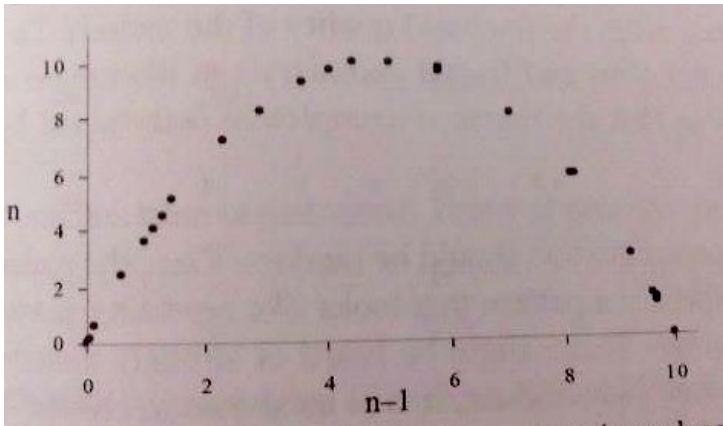
που έχουν οι νότες, σε σχέση με τις γραμμές και τα διαστήματα στο παράδειγμα του Stewart.

Η απάντηση των παραπάνω αφήνεται στους συνθέτες. Το σίγουρο είναι πως η πρόταση του Stewart είναι προκλητική, αλλά πολύ προβληματική. Είναι μία πολύ σημαντική ιδέα που χρειάζεται πολλή δουλειά.

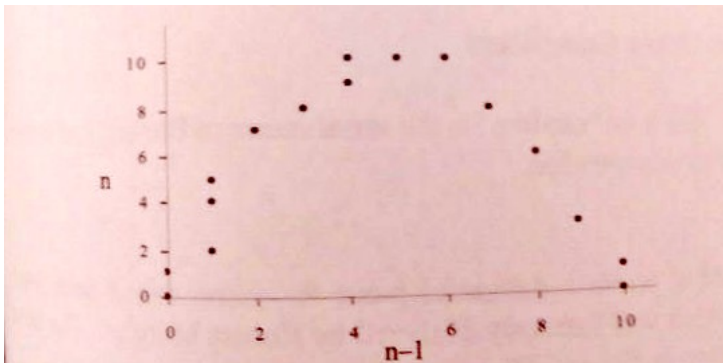
2.4.6 Babbit

Ο Milton Babbit έγραψε ένα γοητευτικό κομμάτι για πιάνο με την ονομασία *Semi-Simple Variations*, το οποίο αναλύθηκε ως γνωστόν από τον Robert Morgan. Μία θεματική ενότητα της σύνθεσης φαίνεται στο σχήμα 2.34. Η μουσική είναι τόσο μελωδική που μπορεί να εναρμονιστεί, όπως στο σχήμα 2.35.

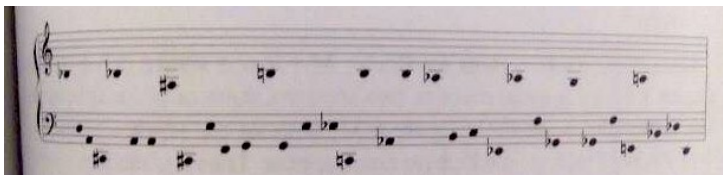
Μία τέτοια αλλαγή ίσως να ήταν αρεστή και από τον ίδιο το συνθέτη, αφού ως γνωστόν έχει ήδη



Σχήμα 2.32: Διάγραμμα διασποράς από Ian Stewart- chaotic music. Οι τιμές έχουν υπολογιστεί μέσω του δοσμένου τύπου. Η μουσική υποτίθεται πως είναι τυχαία, αλλά η παραβολή μας δείχνει ότι είναι καθορισμένη.



Σχήμα 2.33: Διάγραμμα διασποράς Ian Stewart- chaotic music, διορθωμένο.



Σχήμα 2.34: Θεματική ενότητα από τη σύνθεση Semi - Simple Variations του Milton Babbitt.

καταπιαστεί με πιο jazz μελωδίες γράφοντας το All set for jazz ensemble. Τα τονικά ύψη αριθμούνται από τη $C_2(0)$ ως τη $F_6(53)$ και παραστάθηκαν γραφικά σύμφωνα με το σχήμα 2.36.

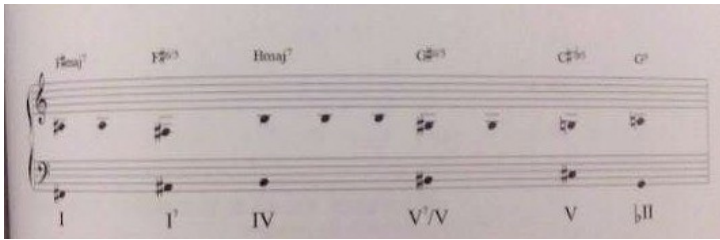
2.4.7 Webern

Η σύνθεση του Anton Weber- Variations for piano, Mvt II είναι ένα σειριακό κομμάτι σε δύο μέρη, κάθε ένα από τα οποία επαναλαμβάνεται. Παρατηρήστε πως υπάρχουν μεγάλες περιοχές, όπου δεν εμφανίζεται καμία νότα. Έτσι, η σύνθεση αυτή είναι τυχαία, αλλά όχι πυκνή. Παρ' όλα αυτά πλησιάζει την κανονική κατανομή.

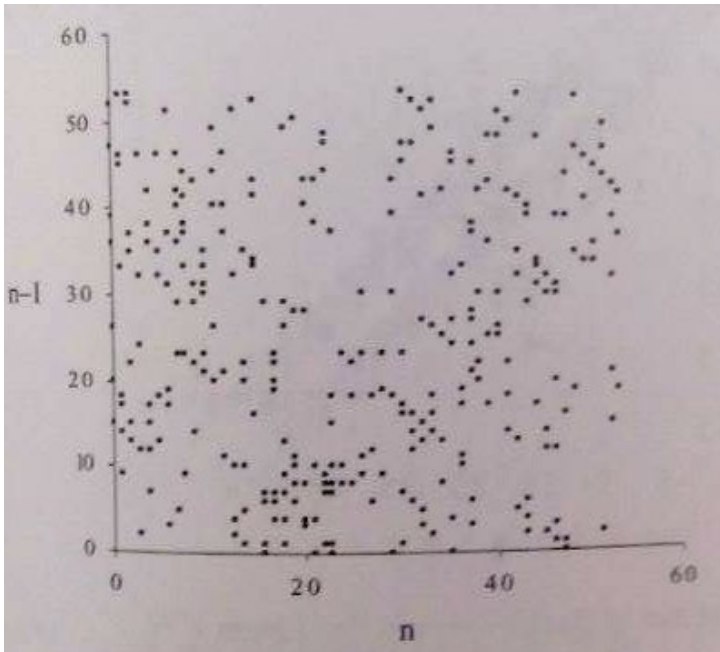
2.4.8 Bach

Η σύνθεση του Bach- Prelude No1 from WTC I παρουσιάζεται στο σχήμα 2.38. Μέρος της σύνθεσης δείχνει ισχυρή συσχέτιση πάνω στη διαγώνιο ευθεία, όμως η διασπορά είναι πολύ μεγάλη για να είναι $1/f^2$.

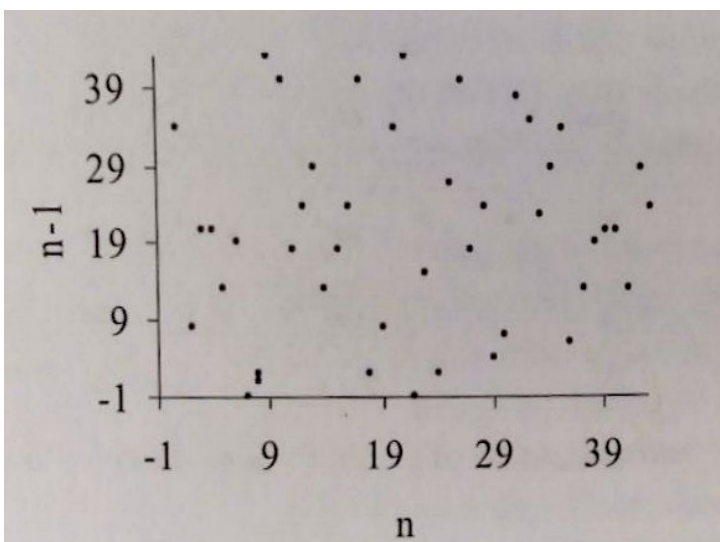
Επίσης, η σύνθεση του Inventions No. 1 έχει ένα εξίσου ενδιαφέρον γράφημα (σχήμα 2.39). Δεν απέχει πολύ από το σχηματισμό Brown.



Σχήμα 2.35: Πιθανές εναρμονίσεις της σύνθεσης **Semi - Simple Variations** του Milton Babbitt.



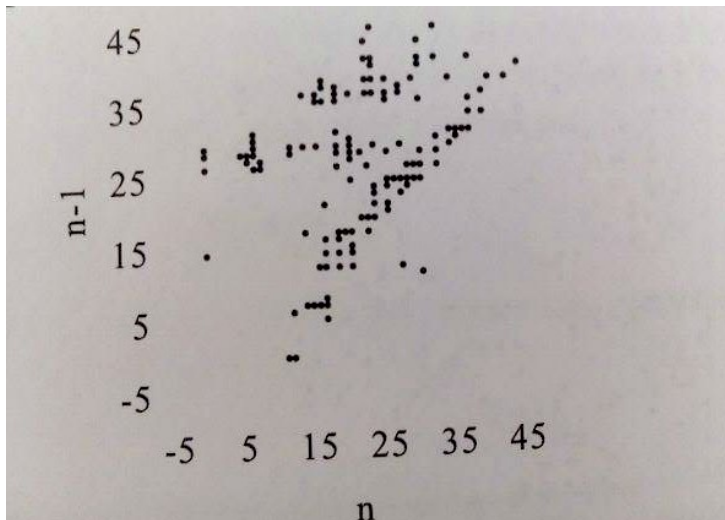
Σχήμα 2.36: Διάγραμμα διασποράς για τη σύνθεση **Semi-Simple Variations** του Milton Babbitt.



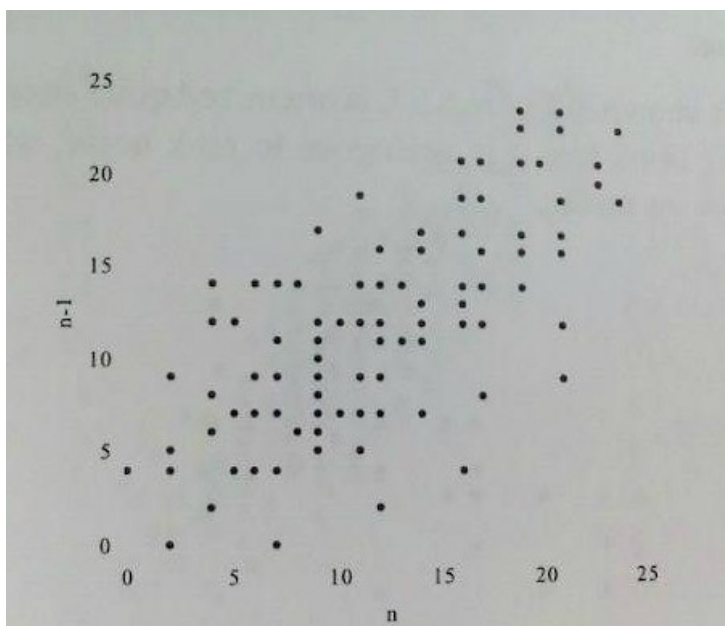
Σχήμα 2.37: Διάγραμμα διασποράς για τη σύνθεση **Variations for piano** του Anton Webern.

2.4.9 Chopin

Ακολουθεί η σύνθεση *Etude Op. 10 No. 1* του Chopin. Τα σημεία στο διάγραμμα (σχήμα 2.40), φαίνονται πολύ πυκνά. Υπάρχουν κάποια σημεία - λιποτάκτες τα οποία προκύπτουν από τα κενά μεταξύ των μουσικών φράσεων. Αναφορικά, πίσω από αυτή τη σύνθεση κρύβεται ένας μετασχηματισμός Fourier. Η ανάλυσή του όμως βρίσκεται εκτός των πλαισίων της εργασίας αυτής.



Σχήμα 2.38: Διάγραμμα διασποράς για τη σύνθεση Prelude No1 from WTC του Bach.



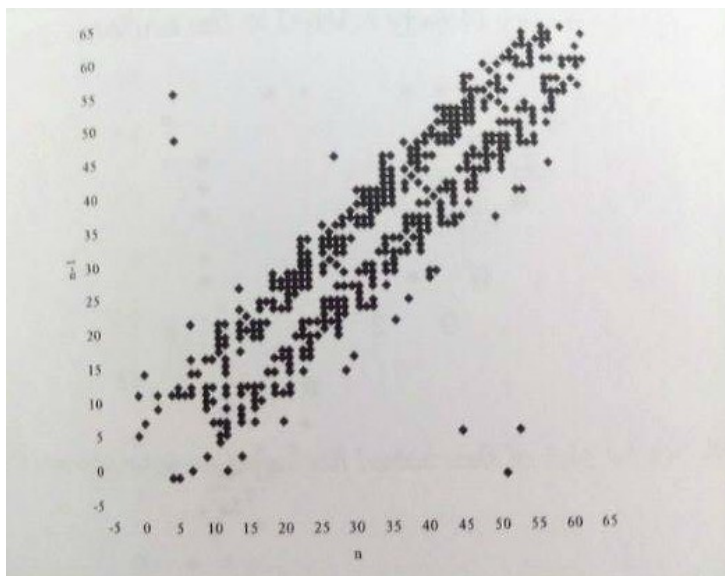
Σχήμα 2.39: Διάγραμμα διασποράς για τη σύνθεση Invention No. 1 του Bach.

2.4.10 Row your boat

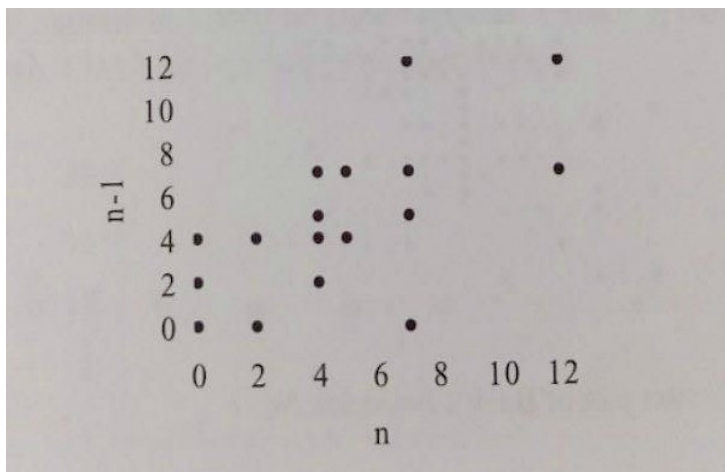
Τα σημεία του διαγράμματος για τη σύνθεση του παιδικού τραγουδιού **Row your boat** που φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα (σχήμα 2.41) φαίνονται καλά οργανωμένα κατά μήκος της ευθείας. Διαγραμματικά, πλησιάζει πολύ το Ροζ θόρυβο, ο οποίος, όπως έχουμε αναφέρει, είναι ο αγαπημένος υποψήφιος του Voss για μουσική.

2.4.11 Bewitched, bothered and Bewildered

Το διάγραμμα διασποράς της jazz μουσικής σύνθεσης **Bewitched, bothered and Bewildered** που φαίνεται στο σχήμα 2.42 δείχνει ένα πολύ περίεργο μοτίβο. Τα σημεία βρίσκονται περίπου γύρω από την περίμετρο του τετραγώνου, αφήνοντας το κέντρο άδειο. Στη παρακάτω ενότητα, θα δούμε πως αυτή η μουσική σύνθεση έχει πολύ μεγάλη διάσταση box, η οποία την φέρνει πιο κοντά στην κανονική κατανομή.



Σχήμα 2.40: Διάγραμμα διασποράς για τη σύνθεση Etude Op. 10 No. 1 του Chopin.



Σχήμα 2.41: Διάγραμμα διασποράς για τη σύνθεση Row your boat.

2.4.12 Pärt

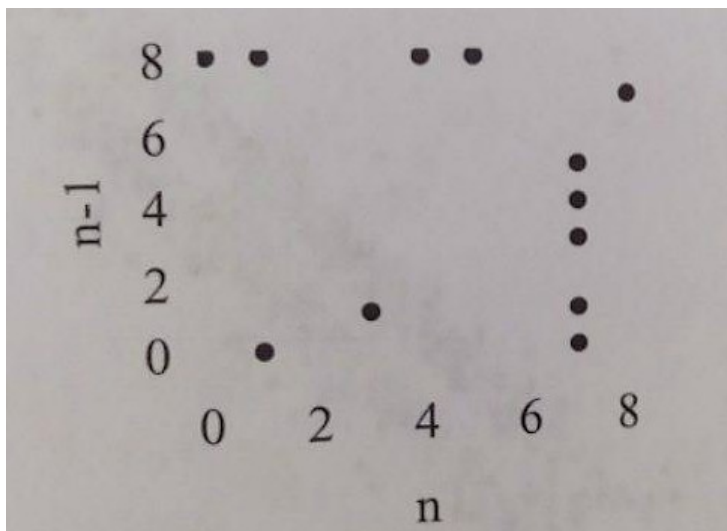
Το έργο του Arvo Pärt - Fratres που φαίνεται στο σχήμα 2.43, έχει σαφή κλίση προς την ευθεία. Η ισχυρή αυτή συσχέτιση δείχνει στενή σχέση με την κατανομή από την κίνηση Brown.

2.4.13 Schoenberg

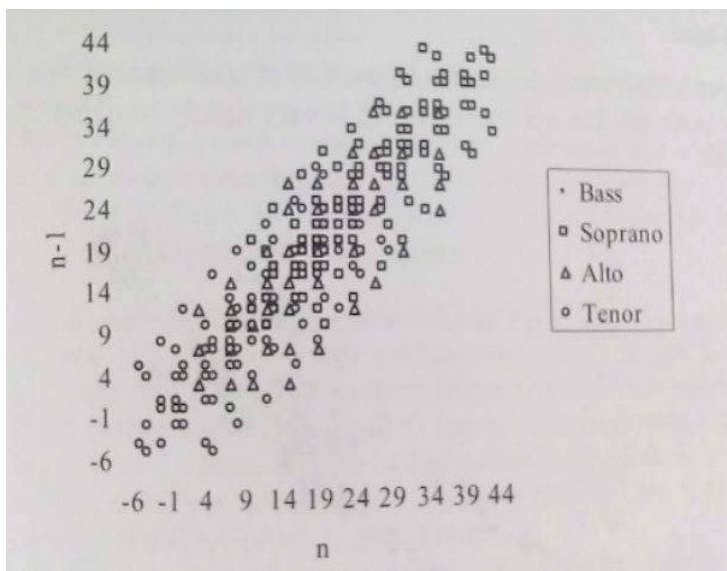
Ένα μέρος του βιβλίου Hanging Gardens του Schoenberg παρουσιάζεται στο επόμενο διάγραμμα (σχήμα 2.44). Τα σημεία βρίσκονται κοντά στη διαγώνιο ευθεία, παρουσιάζοντας όμως ένα κενό στο κέντρο.

2.4.14 Συμπεράσματα

Για κάποιο χρονικό διάστημα, ο Voss και οι σχολιαστές του, ίσως έσφαλαν για το γεγονός ότι ο θόρυβος $1/f$ είναι ο καταλληλότερος στην αντιπροσώπευση της μουσικής. Παρ' όλα αυτά, οι αναλύσεις σε αυτή την ενότητα τείνουν να υποστηρίξουν τη θεωρία αυτή. Αρκετές συνθέσεις έχουν την προδιάθεση να έχουν τη μορφή της $1/f$ μουσικής. Ούτε η στρωτή μελωδία της σύνθεσης Gregorian chant δεν προσεγγίζει την $1/f^2$. Είναι απορίας άξιο, αν υπάρχει φυσική μουσική που να είναι $1/f^2$.



Σχήμα 2.42: Διάγραμμα διασποράς για τη σύνθεση *Bewitched, bothered and bewildered* (fragment).



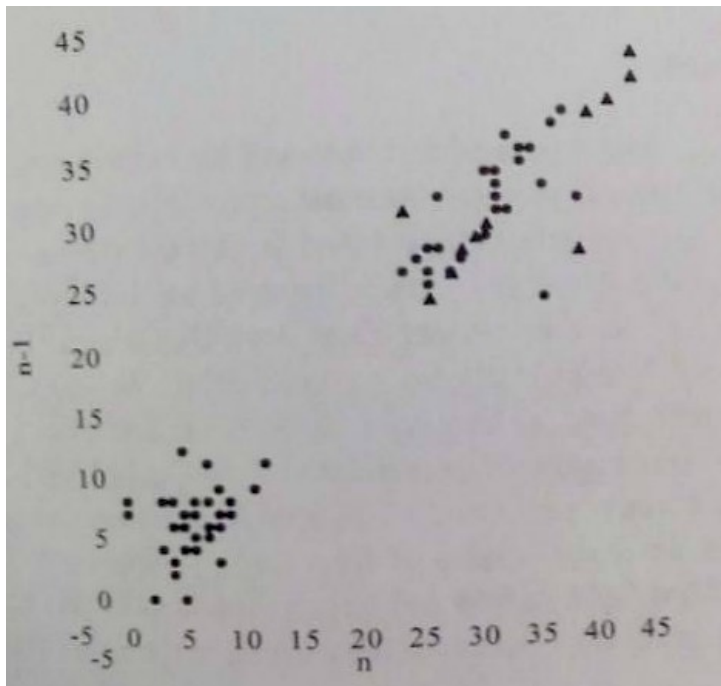
Σχήμα 2.43: Διάγραμμα διασποράς για τη σύνθεση *Fratres* του Arvo Pärt.

Από την άλλη μεριά, είδαμε πως ο Ξενάκης, σκόπιμα χρησιμοποίησε το θόρυβο $1/f^0$, για να δημιουργήσει ασυσχέτιστη μουσική και ότι η χρήση του σειριασμού (12τονη τεχνική) από το *Babbitt* είχε ως αποτέλεσμα μία κατανομή που να προσεγγίζει την κανονική.

2.5 Fractal διαστάσεις στη μουσική

Τι σημαίνει διάσταση στη μουσική;

Στην ενότητα αυτή αναλύονται γραφήματα διασποράς διάφορων μουσικών έργων και προσδιορίζονται οι διαστάσεις των μουσικών τους διαστημάτων. Όχι μόνο μετρώντας το κενό στο χώρο (όπως έχει γίνει σε αναλύσεις στο παρελθόν, χάνοντας έτσι κάποια διαστήματα), αλλά αναλύοντας χρονικά διαγράμματα του τονικού ύψους και εφαρμόζοντας κάποιους βασικούς τύπους. Σε αυτή την ενότητα, θα εξεταστεί πόσο αραιά ή ακανόνιστα είναι τα μουσικά σετ.



Σχήμα 2.44: Διάγραμμα διασποράς για ένα μέρος του βιβλίου **Hanging Gardens** του Schoenberg.

2.5.1 Fractal διαστάσεις

Η γεωμετρία των Fractal παρέχει διάφορους ορισμούς για τη διάσταση, αλλά ο πιο χρήσιμος από όλους είναι αυτός της διάστασης box ή αλλιώς της διάστασης που υπολογίζεται μέσω ενός ειδικά κατασκευασμένου πλέγματος. Ας δούμε πώς αυτό συνδέεται με την Ευκλείδια Γεωμετρία που γνωρίζουμε από το σχολείο.

Οι Ευκλείδιες διαστάσεις 1,2 και 3 είναι γνωστές σε εμάς από τον Έλληνα γεωμέτρη Ευκλείδη. Αυτές καθορίζουν το πάνω-κάτω, το δεξιά-αριστερά και το μπρος-πίσω. Οι μαθηματικοί του 19ου αιώνα, άνθρωποι του λαού και θεολόγοι, σκέφτηκαν μία τέταρτη διάσταση, η οποία δεν είναι μεν εμφανής στο γυμνό μάτι, αλλά η σκιά της έχει ως αποτέλεσμα τις συνήθεις τρεις διαστάσεις, έτσι ώστε ένα τρισδιάστατο αντικείμενο να εμφανίζεται ως μία δισδιάστατη σκιά στο δικό μας κόσμο. Ο Einstein πλησίασε αυτή την ιδέα πλαγίως στη Θεωρία της Σχετικότητας υποστηρίζοντας ότι ο χρόνος είναι αυτή η τέταρτη διάσταση, αλλά υπάρχουν και επιπλέον διαστάσεις που είναι εξίσου χρήσιμες στην Αστροφυσική και την Τέχνη. Μία αρκετά εμπεριστατωμένη κοσμική θεωρία υποστηρίζει ότι υπάρχουν δέκα διαστάσεις στο χωροχρόνο.

Οι Fractal διαστάσεις αποτελούν ένα υποσύνολο των διαστάσεων της Ευκλείδιας Γεωμετρίας και μετρούν την ανωμαλία των δεδομένων. Ο Mandelbrot έθεσε το εξής ερώτημα: Τι μήκος έχει η Μεγάλη Βρετανία;. Δίνοντας, έτσι, συνέχεια στο έργο του Lewis Fry Richardson, ο οποίος εξετάζε γιατί τα σύνορα μεταξύ Πορτογαλλίας και Ισπανίας βρέθηκαν μετά από μέτρηση της μιας χώρας μακρύτερα σε σχέση με μέτρηση της άλλης χώρας. Αποδείχθηκε πως σε όλα τα παραπάνω ερωτήματα η απάντηση ήταν πως όλες οι μετρήσεις επηρεάζονται από τη μονάδα μέτρησης.

Αν καλύψουμε την ακτή οποιουδήποτε συνόρου με κουτιά ίδιου μεγέθους κι έπειτα μετρήσουμε το πλήθος των κουτιών στα οποία απο κάτω βρίσκεται το σχήμα παίρνουμε το μήκος $L = N \cdot l$, όπου N είναι το συνολικό πλήθος των κουτιών και l είναι το μέσο μήκος των ακμών του. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αρκετές φορές με μικρότερα κουτιά στον ίδιο πάντα χώρο προσεγγίζουμε ένα οριακό νούμερο για τον εκθέτη D , καθώς το μέγεθος των κουτιών τείνει να γίνει μηδενικό, χρησιμοποιώντας

τον τύπο $L = N \cdot l^D$, όπου D είναι η διάσταση. Το μήκος αυξάνει καθώς τα κουτιά γίνονται μικρότερα. Για να λύσουμε ως προς D εφαρμόζουμε λογάριθμους και στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης κι έχουμε:

$$\log L = \log N + \log l^D = \log N + D \log l$$

το οποίο μας δίνει:

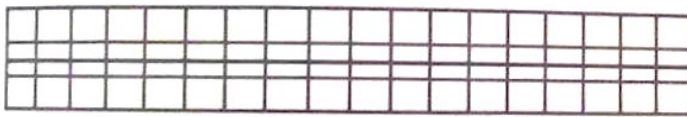
$$D = \frac{\log(L) - \log N}{\log(l)} = \frac{\log(L/N)}{\log(l)} \quad (2.1)$$

Έτσι, η διάσταση είναι ο λογάριθμος του συνολικού μήκους διαιρεμένο με το πλήθος των κουτιών προς το λογάριθμο του μέσου μήκους της ακμής του κουτιού με το οποίο γίνεται η μέτρηση.

Προς χάριν της συγκεκριμένης μελέτης, θα κάνουμε μια μικρή παραλλαγή στον τύπο:

$$D = \frac{\log(N/n)}{\log(B/b)} \quad (2.2)$$

όπου N είναι το μέγιστο πλήθος κουτιών τα οποία τέμνονται με το εκάστοτε γράφημα, n είναι το ελάχιστο πλήθος κουτιών τα οποία τέμνονται με το εκάστοτε γράφημα, B είναι το μέγιστο πλήθος κουτιών τα οποία βρίσκονται στο άκρο του πλέγματος (δηλ. με το μικρότερο μέγεθος κουτιών) και b είναι ο ελάχιστος αριθμός κουτιών που βρίσκονται στην άκρη του πλέγματος (δηλ. με το μεγαλύτερο μέγεθος κουτιών).



Σχήμα 2.45: Στο σχήμα φαίνεται μία ευθεία οριζόντια γραμμή καλυμμένη από τα κουτιά του πλέγματος.

Μία εξαιρετικά εύκολη διάσταση προς υπολογισμό είναι αυτή της ευθείας γραμμής. Σχεδιάσαμε μια ευθεία όπως στο σχήμα 2.45 και την καλύψαμε με πλέγμα, το οποίο αποτελείται από κουτιά σχετικά μεγάλου μεγέθους. Έπειτα, διαιρέσαμε τα κουτιά με κάποιο βολικό (για τις πράξεις) μέγεθος, έτσι τώρα έχουμε δύο μεγέθη κουτιών για να βρούμε τις σχετικές διαστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, κουτιά με το $1/6$ και το $1/18$ του μήκους της ακμής ή αλλιώς για $b = 6$ και $B = 18$. Αντικαθιστούμε τα νούμερα αυτά στον τύπο κι έχουμε ότι:

$$D = \frac{\log(N/n)}{\log(B/b)} = \frac{\log(18/6)}{\log(18/6)} = 1.000$$

Έτσι, η διάσταση ισούται με 1, όπως ακριβώς και στην Ευκλείδια Γεωμετρία. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί και με έναν πιο απλό τύπο:

$$D = \frac{\log(18)}{\log(18)} = 1.000$$

αλλά ίσως να χρειαστεί να γίνουν πολλές επαναλήψεις με μικρότερα μεγέθη έτσι ώστε να επιτευχθεί το θεμιτό αποτέλεσμα.

Το παράδειγμα του Peitgen για τις Βρετανικές ακτές στο περιοδικό *Chaos and Fractals* αναλύει το πρόβλημα με το μέγεθος των κουτιών. Χρησιμοποιεί 283 κουτιά στο μέγεθος 32,

$$D = \frac{\log(283)}{\log(32)} \cong 1.54$$

αλλά η διάσταση είναι πολύ μεγάλη, οπότε χρησιμοποιεί τον πιο περιεκτικό τύπο που έχει αναφερθεί παραπάνω συμπεριλαμβάνοντας 194 κουτιά στο μέγεθος 24

$$D = \frac{\log(283/194)}{\log(32/24)} \cong 1.31$$

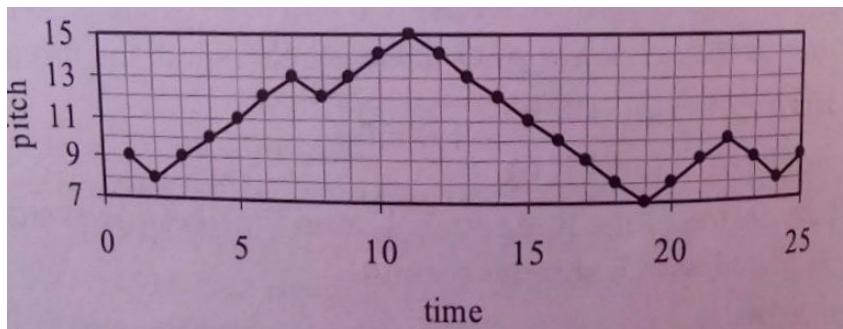
για να προσεγγίσει τη σωστή διάσταση. Το πρόβλημα σε αυτή την περίπτωση πιθανώς να δημιουργείται επειδή η ακτογραμμή έχει υπολογιστεί σε χάρτη πολύ υψηλής ευκρίνειας και το πλέγμα που χρησιμοποίησε ο Peitgen ήταν σχετικά μεγάλο. Στα παραδείγματα που ακολουθούν παρακάτω χρησιμοποιείται η απλή μορφή του τύπου της διάστασης.

2.6 Η **Box** Διάσταση των μουσικών συνθέσεων

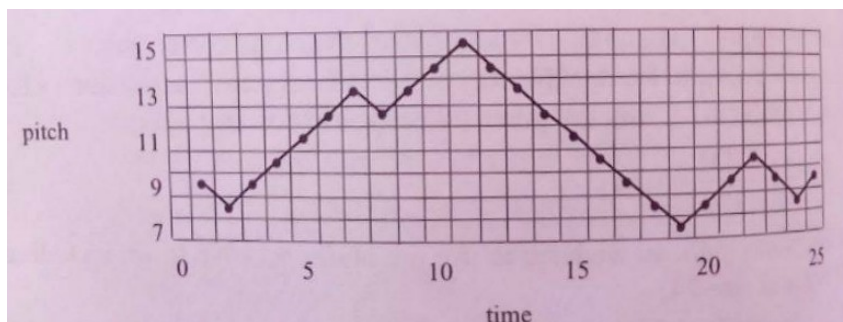
Ο Keneth Falconer πρότεινε την εφαρμογή τετράγωνων πλεγμάτων σε γραμμικά διαγράμματα, έτσι ώστε να βρεθεί η διάσταση. Τα αποτελέσματα που ακολουθούν είναι εξαιρετικά ενδιαφέροντα.

2.6.1 **Dodge Brown Music**

Ξεκινάμε την ενότητα αυτή με τη Dodge Brown Music παρουσιαζόμενη σε τρεις εκδοχές. Στο σχήμα 2.46 είναι στη μορφή που δίνεται από το Excel chart program και στο σχήμα 2.47 έχει μετακινηθεί με πολλή προσοχή και κόπο το πλέγμα με τέτοιο τρόπο ώστε τα δοσμένα σημεία να βρίσκονται στο κέντρο των κουτιών. Η επιπλέον δουλειά άξιζε τον κόπο, καθώς το μέτρημα των κουτιών γίνεται ισότιμα. Αν θελήσουμε μεγαλύτερη ακρίβεια θα πρέπει χρησιμοποιώντας το Excel να διπλασιάσουμε το πλήθος των γραμμών του πλέγματος, όπως ακριβώς φαίνεται στο σχήμα 2.48. Με αυτή τη διαμόρφωση παίρνουμε τέσσερα κουτιά (θεωρώντας τα ως ένα) στο κέντρο των οποίων βρίσκεται το δοσμένο σημείο του γραφήματος.

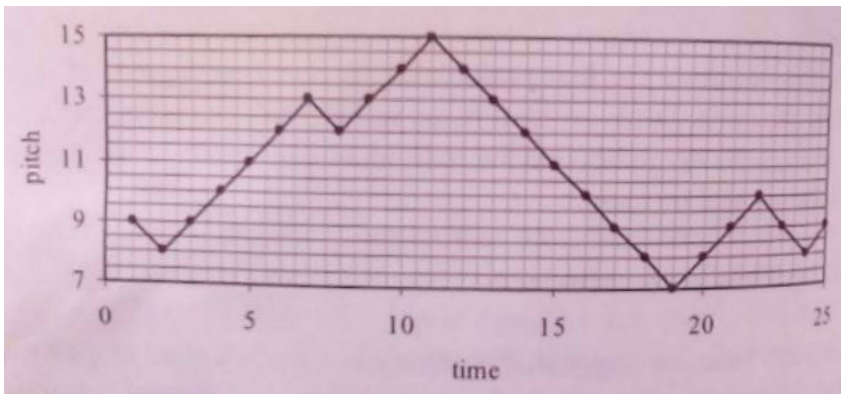


Σχήμα 2.46: Πλέγμα για Dodge Brown music προς μέτρηση της box διάστασης



Σχήμα 2.47: Πλέγμα για Dodge Brown music. Τα δοσμένα σημεία βρίσκονται στο κέντρο των κουτιών

Ο σκοπός είναι η μέτρηση του πλήθους των κουτιών που τέμνουν το διάγραμμα και η σύγκριση με το πλήθος των κουτιών που βρίσκονται στο κάτω άκρο. Ξεκινάμε να μετράμε από το πρώτο



Σχήμα 2.48: Πλέγμα για Dodge Brown Music. Διπλασιασμός των κουτιών για μεγαλύτερη ακρίβεια.

δοσμένο σημείο και συνεχίζουμε μετρώντας κάθε κουτί που έρχεται σε επαφή με το διάγραμμα. Σε κάθε μέτρηση καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$D = \frac{\log(25)}{\log(25)} = 1.000$$

Το γεγονός ότι η παραπάνω γραμμή έχει διάσταση 1 μπορεί να φαίνεται περίεργο από τη στιγμή που δεν είναι ευθεία, αλλά δεν υπάρχει άλλος τρόπος να τη μετρήσουμε έτσι ώστε να δίνει διαφορετικό αποτέλεσμα χωρίς να ανακατανήμουμε τα κουτιά με πολύ ασυνήθιστο τρόπο. Οι Falconer και Peitgen πρότειναν πως μια ομαλή καμπύλη θα πρέπει να έχει Ευκλείδεια διάσταση 1 όπως ακριβώς και μία ευθεία γραμμή. Αυτό συμβαίνει γιατί στη μουσική δεν υπάρχουν άλματα.

Στην πραγματικότητα, ο Dodge χρησιμοποίησε έναν τυχαίο περίπατο (τείνοντας προς την ίδια κατεύθυνση) με μόνη επιλογή να γίνει μισό βήμα επάνω ή μισό βήμα κάτω. Αυτή είναι μία αποδεκτή, αλλά πολύ περιορισμένη προσέγγιση της κίνησης Brown.

2.6.2 Voss Brown Music

Παρατηρώντας το σχήμα 2.49 θα λέγαμε ότι η Voss Brown Music έχει μεγαλύτερη διάσταση από τη Dodge Brown Music.



Σχήμα 2.49: Voss Brown music .

Σε διάφορα σημεία, το διάγραμμα διασταυρώνεται με περισσότερα από ένα κουτιά καθώς ανάμεσα στις νότες αμφιταλαντεύεται ολόένα και περισσότερο. Τα κουτιά είναι τόσο μικρά που χρησιμοποιήθηκε μεγάλο χαρτί εκτύπωσης, έτσι ώστε να είναι ευκολότερο το μέτρημα. Τα αποτελέσματα που βγήκαν είναι τα εξής:

$$D = \frac{\log(155)}{\log(84)} \cong 1.13826$$

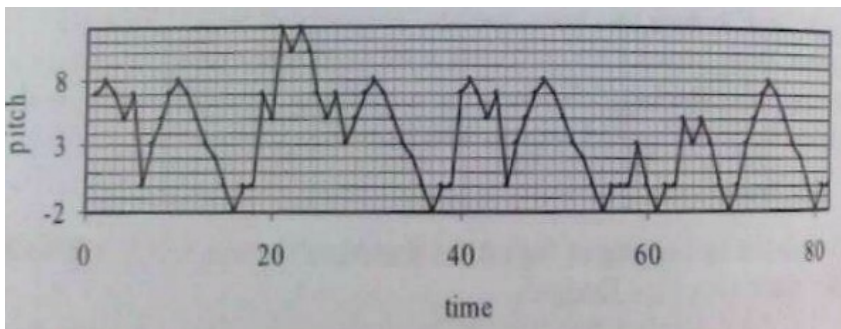
Διάσταση περίπου ίση με 1.1 ή και λίγο παραπάνω φαίνεται να είναι λογική για τη **Brown Music**.

2.6.3 Gregorian Chant

Τα διαγράμματα που έχουν προκύψει για τη Γρηγοριανή μουσική (σχήμα 2.50) δείχνουν πως το πλήθος των κουτιών που τέμνονται με το διάγραμμα είναι 168, ενώ το πλήθος αυτών που βρίσκονται στο άκρο είναι 82. Αντικαθιστώντας στον τύπο:

$$D = \frac{\log(168)}{\log(82)} \cong 1.16276$$

Παρόλο που αυτή η μουσική δεν παρουσιάζει ανωμαλίες, υπάρχουν κάποια άλματα, το οποίο σημαίνει πως το γράφημα τέμνει κάποια κουτιά κάθετα. Παρ'όλα αυτά η διάσταση είναι περίπου ίση με αυτή της **Voss Brown Music**.

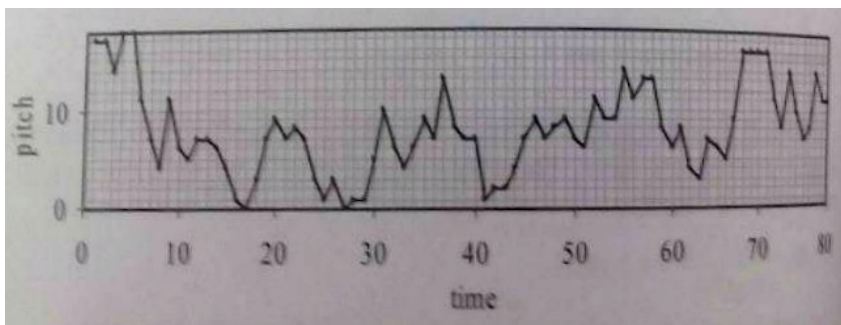


Σχήμα 2.50: Gregorian Chant.

2.6.4 Voss Pink

Η διάσταση για το διάγραμμα της **Voss Pink Music** που παρουσιάζεται στο σχήμα 2.51 δίνει διάσταση περίπου ίση με 1.2, όχι πολύ υψηλότερη σε σχέση με τα προηγούμενα διαγράμματα, αλλά αρκετά αναμενόμενη για το είδος **pink music**.

$$D = \frac{\log(215)}{\log(80)} \cong 1.22561$$

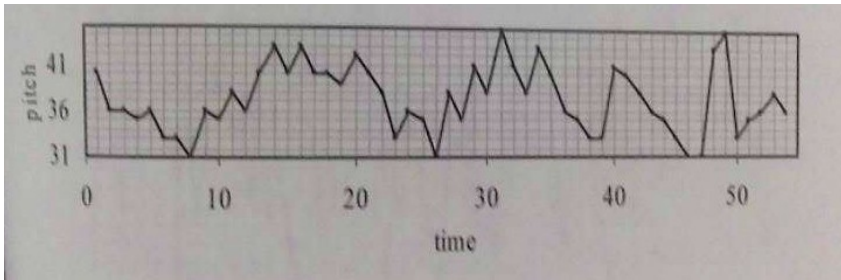


Σχήμα 2.51: Voss Pink Music.

2.6.5 Schubert

Όπως φαίνεται από το διάγραμμα του σχήματος 2.52 η μουσική του **Schubert** μοιάζει με τη **Voss Pink Music**. Τα νούμερα που προκύπτουν είναι τα εξής:

$$D = \frac{\log(164)}{\log(54)} \cong 1.28016$$



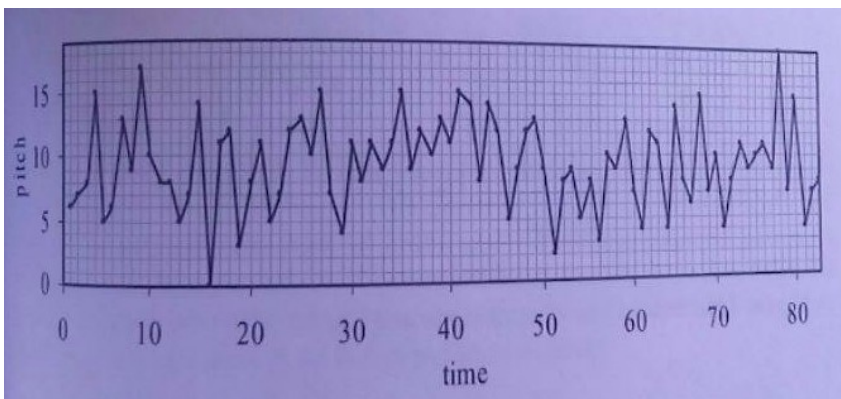
Σχήμα 2.52: Schubert - Who is Sylvia?.

2.6.6 Voss White Music

Το γράφημα για τη Voss White Music, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.53, δείχνει ξεκάθαρα τη Gauss φύση (κατανομή) που έχει η δομή από τις νότες. Παρατηρείται μια συγκέντρωση των τιμών κοντά στο 9.33 (κατά μέσο όρο). Η διάσταση δίνεται από:

$$D = \frac{\log(378)}{\log(83)} \cong 1.34309$$

Η τιμή της διάστασης περίπου ίση με 1.3 φαίνεται λογική για white music. Σύντομα θα δούμε ένα πολύ γνωστό είδος μουσικής με μεγαλύτερη διάσταση.



Σχήμα 2.53: Voss White Music.

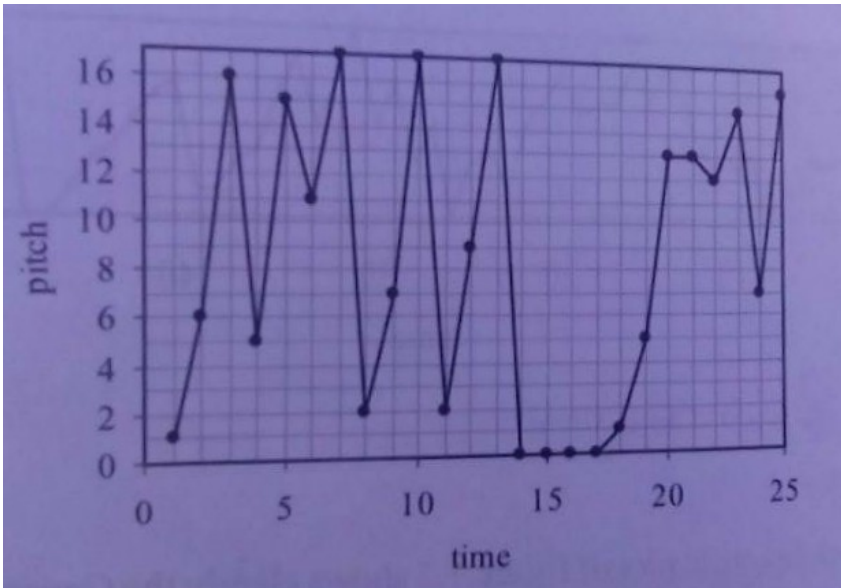
2.6.7 Stewart

Η χαοτική μουσική του Stewart μετρήθηκε ως προς το χρωματισμό της και παρουσιάζεται στο σχήμα 2.54. Έχει μεγαλύτερη διάσταση από ότι θα περίμενε κανείς, καθώς το γράφημα ταλαντεύεται πάνω κάτω με μεγάλο εύρος. Η διάσταση:

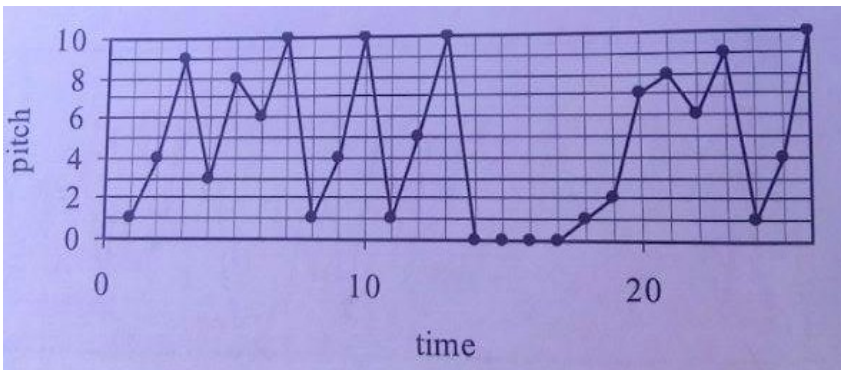
$$D = \frac{\log(162)}{\log(25)} \cong 1.57892$$

Η μουσική του Stewart όπως αναθεωρήθηκε, φαίνεται στο σχήμα 2.55. Είναι πιο ομαλή και έχει μικρότερη διάσταση, χάρη στην αναθεωρημένη αρίθμηση, αλλά παραμένει σε σχετικά υψηλά επίπεδα.

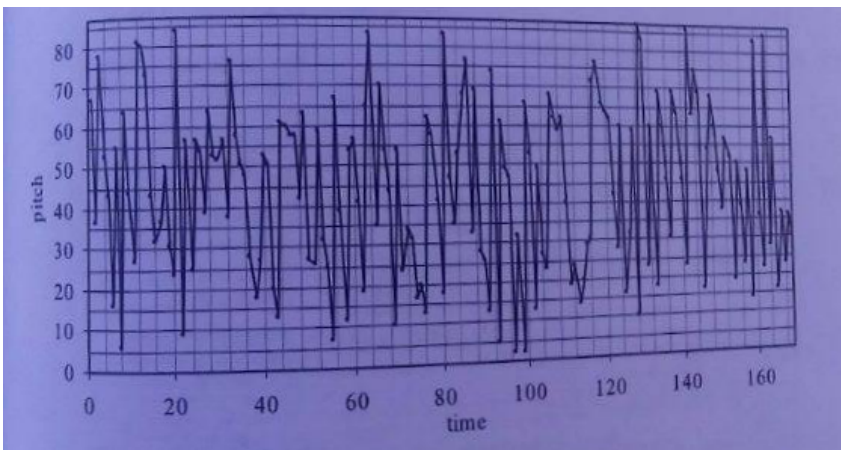
$$D = \frac{\log(105)}{\log(25)} \cong 1.44583$$



Σχήμα 2.54: Stewart chaotic music.



Σχήμα 2.55: Stewart chaotic music - Αναθεωρημένη.



Σχήμα 2.56: Xenakis - Eonta.

2.6.8 Xenakis

Τέσσερα μέτρα της μουσικής σύνθεσης Eonta του Ξενάκη φαίνονται στο επόμενο διάγραμμα (σχήμα 2.56).

Προφανώς, είναι πολύ πιο περίπλοκο από τα διαγράμματα που είδαμε πιο πάνω. Αυτή η μουσική απλώνεται τυχαία με ένα εύρος που καταλαμβάνει όλο το πιάνο. Ο Ξενάκης ισχυριζόταν πως είχε χρησιμοποιήσει πιθανοθεωρητικούς υπολογισμούς για να δημιουργήσει ένα αποτέλεσμα το οποίο να μοιάζει με σύννεφο. Μετρήσαμε τα κουτιά χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.3) που δίνεται παρακάτω.

Η διάσταση είναι εξαιρετικά μεγάλη και αυτό είναι αποτέλεσμα της τυχαιότητας. Σε αριθμούς:

$$D = \frac{\log(4158)}{\log(170)} \cong 1.62249$$

Από το σημείο αυτό και έπειτα, έχουν μειωθεί οι γραμμές του πλέγματος και έχουν χρησιμοποιηθεί μεγάλες εκτυπώσεις ή η εξίσωση (2.3) για τον υπολογισμό των κουτιών.

2.6.9 Babbit

Η σύνθεση για πιάνο **Semi-Simple Variations** του **Milton Babbit** παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα (σχήμα 2.57). Παρ' όλο που γυρίστηκε πλαγίως, έτσι ώστε να έχουμε καλή ευκρίνεια και χρησιμοποιήθηκε μεγάλη εκτύπωση, η μέτρηση των κουτιών έγινε μετ' εμποδίων, εξ' αιτίας του μεγάλου πλήθους τους. Η μέτρηση τελικά έγινε με τη χρήση μιας συνάρτησης. Η εξίσωση (2.3) αθροίζει τις αποστάσεις μεταξύ των τονικών υψών (pitches) p_k με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω.

$$N = 1 + \sum |p_k - p_{k+1}| \quad (2.3)$$

Ο αριθμός 1 προστίθεται για τη μέτρηση του πρώτου κουτιού. Έτσι, η διάσταση του γραφήματος είναι:

$$D = \frac{\log(5751)}{\log(317)} \cong 1.50326$$

Το γράφημα αυτό θυμίζει εκείνα των **Stewart** και **Xenakis**. Διακρίνεται από μεγάλες ταλαντώσεις και είναι ισχυρά ασυσχέτιστο θυμίζοντας έτσι τον $1/f^0$ - Λευκό θόρυβο.

2.6.10 Webern

Στο επόμενο διάγραμμα (σχήμα 2.58) φαίνεται το έργο του **Anton Weber - Variations for Piano, Mvt II**. Τα νούμερα που προκύπτουν είναι:

$$D = \frac{\log(1117)}{\log(89)} \cong 1.56359$$

Αυτή η σύνθεση έχει μεγάλη διάσταση και δίνεται η εντύπωση μεγάλης τυχαιότητας.

2.6.11 Row row row your boat

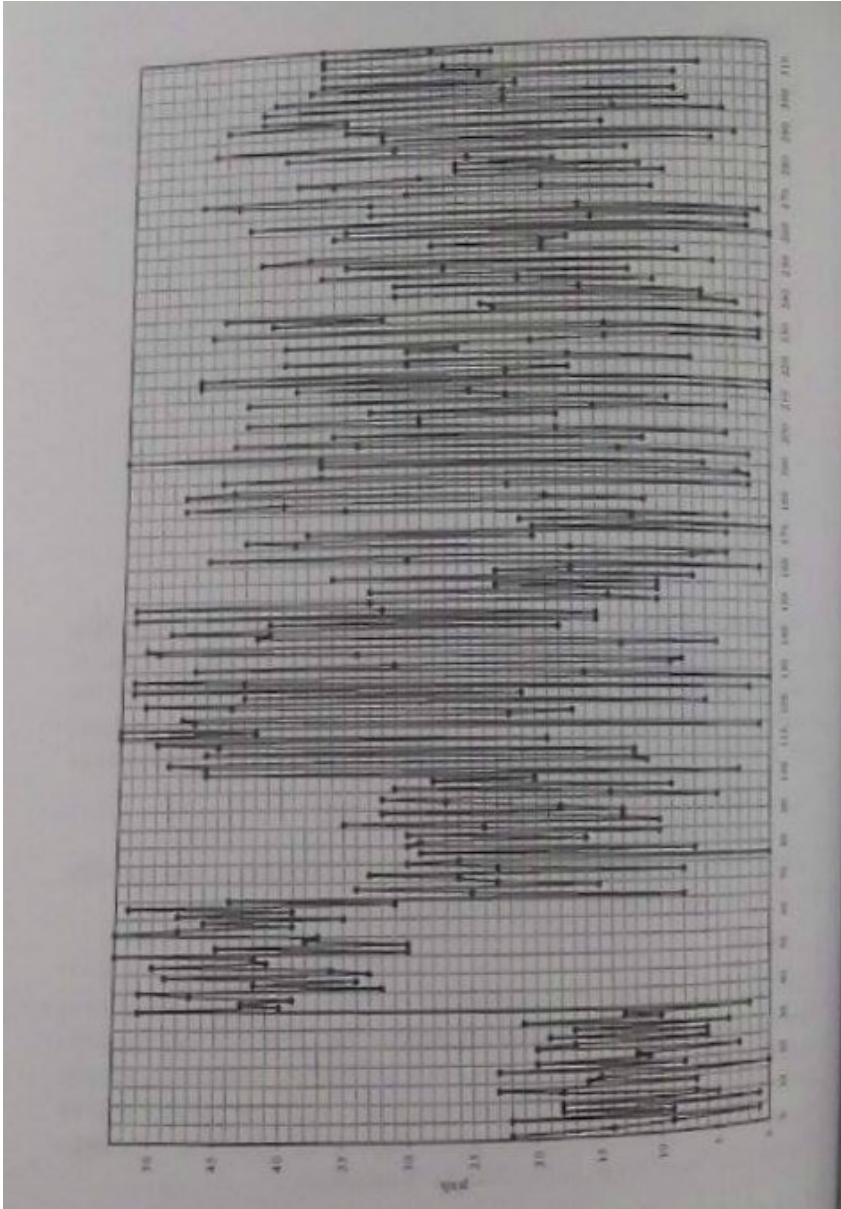
Το **Row row row your boat** είναι ένα παιδικό τραγούδι. Θα μπορούσε να το παρομοιάσει κανείς με την **pink music** του **Voss**. Στο σχήμα 2.59 φαίνεται το διάγραμμα που προκύπτει. Η διάσταση είναι:

$$D = \frac{\log(42)}{\log(25)} \cong 1.16117$$

Να ληφθεί υπόψιν πως υπάρχουν 10 επαναλαμβανόμενες νότες, οι οποίες δεν έχουν υπολογιστεί αφού δεν έχουν τεταγμένη (κάθετη συνιστώσα). Οι δέκα αυτές νότες όμως παίζουν σημαντικό ρόλο για το τελικό αποτέλεσμα. Τις προσθέτουμε και ξαναυπολογίζουμε την παρακάτω διάσταση:

$$D = \frac{\log(52)}{\log(25)} \cong 1.22752$$

Το αποτέλεσμα είναι αρκετά όμοιο με εκείνο της **Voss pink music**. Η μεγάλη διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων στην αριθμητική τιμή της διάστασης μας δείχνει πως πρέπει να γίνεται έλεγχος τουλάχιστον δύο φορές. Διαφορετικά, η τιμή της διάστασης για το πρώτο αποτέλεσμα θα ήταν εξαιρετικά μικρή.



Σχήμα 2.57: Babbit - Semi Simple Variations.

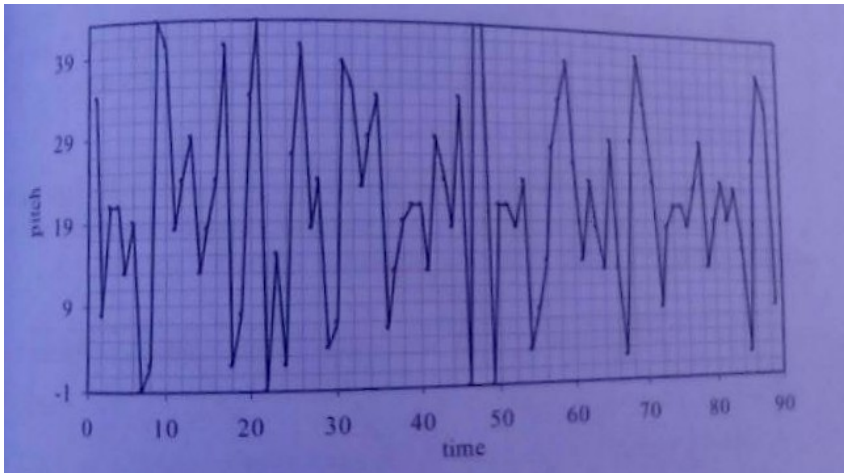
2.6.12 Bewitched Bothered and Bewildered

Το διάγραμμα του τραγουδιού **Bewitched Bothered and Bewildered** φαίνεται στο σχήμα 2.60. Βλέποντας το, μαντεύουμε πως έχει μεγάλη διάσταση, αφού το γράφημα διασχίζει πολλά από τα κουτιά του πλέγματος.

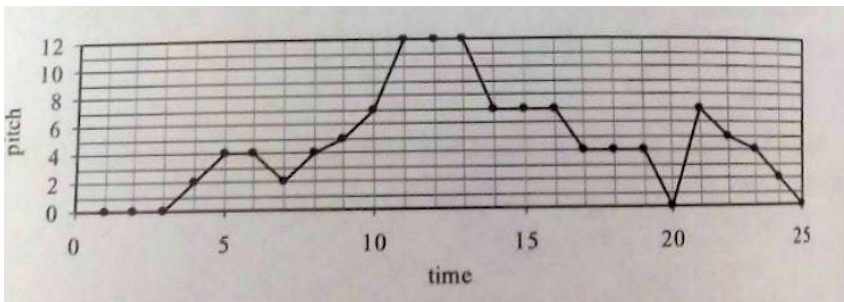
Αντικαθιστώντας τις τιμές που μας δίνει η εξίσωση (2.3), βρίσκουμε τη διάσταση:

$$D = \frac{\log(60)}{\log(17)} \cong 1.44512$$

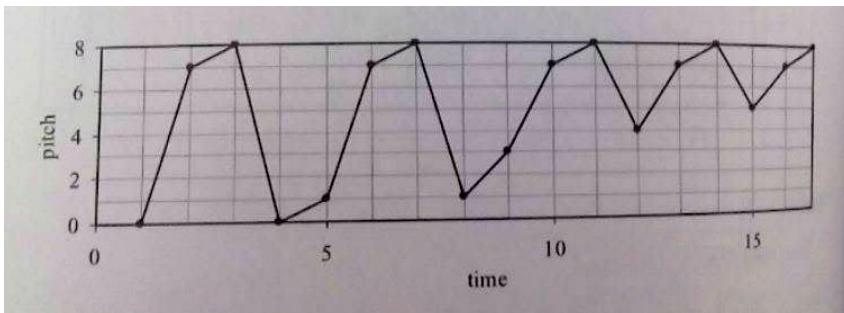
Αν αυτή η τιμή φαίνεται απρόσμενα μεγάλη, θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας πως κάποια από τα κουτιά διασταυρώνονται με το γράφημα κάθετα. Το γεγονός ότι η διάσταση είναι μεγάλη δεν είναι τυχαίο. Υπάρχει μία πολύ καλή δομή πίσω από όλο αυτό. (*εννοώντας πως η fractal δομή έχει έναν καλό ελκυστή)



Σχήμα 2.58: Webern- Variations for Piano Mvt II.



Σχήμα 2.59: Row row row your boat contour plot.



Σχήμα 2.60: Bewitched Bothered and Bewildered.

2.6.13 Pärt

Το έργο του Arvo Pärt - Fratres βρίσκεται στο επόμενο διάγραμμα (σχήμα 2.61). Στο διάγραμμα παρουσιάζεται μόνο το μέρος της σοπράνο. Έχει σχετικά μικρή διάσταση σε σχέση με τη Brown noise και τη Brown music του Voss.

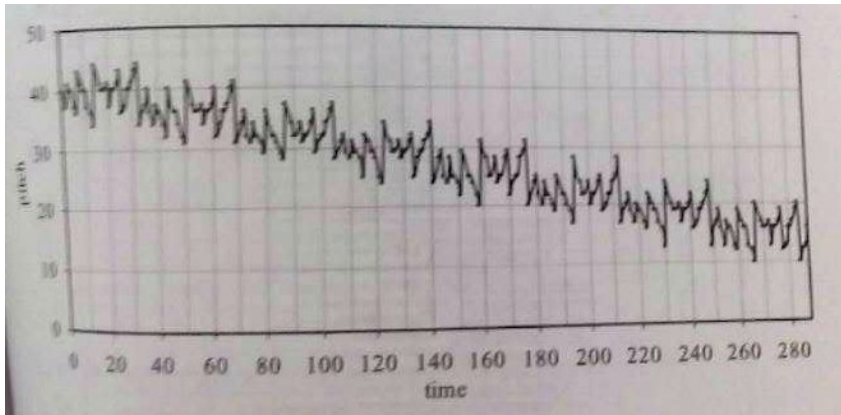
$$D = \frac{\log(700)}{\log(288)} \cong 1.15683$$

Προφανώς, υπάρχουν κάποια μεγάλα άλματα στη μουσική.

2.6.14 Bach

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το έργο του Bach- Prelude No.1 WTC I (σχήμα 2.62). Με ένα μοναδικό τρόπο θυμίζει το Fratres του Pärt. Η διάσταση:

$$D = \frac{\log(3840)}{\log(548)} \cong 1.30873$$



Σχήμα 2.61: Soprano line of Fratres.

Τρία άρθρα των Kenneth J. και Andrew Hsu βοήθησαν στην περαιτέρω ανάπτυξη του θέματος. Ένα εξ' αυτών, με τίτλο *Fractal Geometry of Music* παρουσιάζεται σε ενότητα στην παρούσα εργασία. Σε ένα άλλο άρθρο τους παρουσιάζομενο το 1990 στο περιοδικό *Proceedings of the National Academy of Sciences* έδωσαν διάσταση στη μουσική του Bach και του Mozart. Εστιάζουμε στο *Invention No.1* του Bach, γιατί ο πίνακας 1 του άρθρου έδειξε την κατανομή των μουσικών διαστημάτων.

Χρησιμοποιώντας τα νούμερα του άρθρου βρήκαμε το συνολικό πλήθος των κουτιών που διασταυρώνονται με το γράφημα πολλαπλασιάζοντας τη συχνότητα εμφάνισης των μουσικών διαστημάτων με το μέγεθός τους. Καταλήξαμε στο εξής:

$$D = \frac{\log(1290)}{\log(454)} \cong 1.17069$$

Έτσι, η διάσταση βγαίνει αρκετά μικρή σε σχέση με αυτή του Hsu που βγαίνει 2.4184, η οποία βέβαια είναι παράξενα μεγάλη. Γιατί να είναι μεγαλύτερη του 2; Η ανάλυσή μας για το πιάνο (δεξί χέρι) φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα (σχήμα 2.63). Οι αριθμοί που βγαίνουν χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.3) δίνουν την εξής διάσταση:

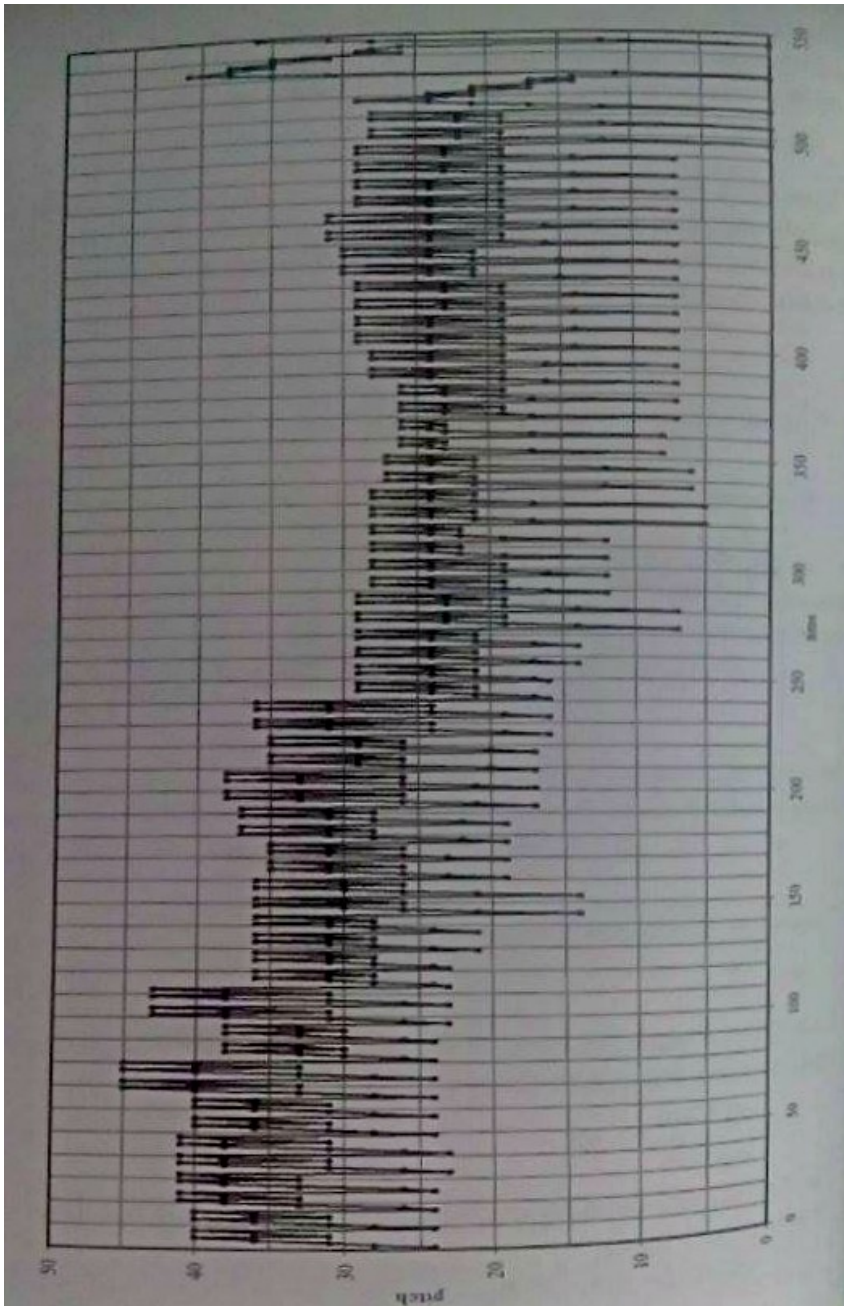
$$D = \frac{\log(635)}{\log(237)} \cong 1.18024$$

Το αποτέλεσμα είναι περίπου ίσο με εκείνο που έχει ο Hsu στον πίνακα και αφορά στον υπολογισμό της διάστασης με τα δύο χέρια. Θεωρητικά η διάσταση στη μουσική είναι μεταξύ του 1 και του 2 με έφεση προς το μικρότερο άκρο. Ήταν αδύνατο λοιπόν να αντιγράψουμε το διάγραμμα για τη διάσταση μεγαλύτερης του 2 και να κατανοήσουμε την εμπειρική σταθερά c . (**Σε αυτή την εργασία γίνεται μεγαλύτερη ανάλυση στο θέμα)

2.6.15 Chopin

Για το τέλος, προσθέτουμε στη λίστα το έργο του Chopin - *Etude Op. 10 No. 1*, το οποίο είναι γνωστό για την ημιτονοειδή μορφή του. Παρατηρώντας το επόμενο διάγραμμα (σχήμα 2.64) συμπεραίνουμε ότι μοιάζει με εκείνο του Bach στο *Prelude No. 1* με μόνη διαφορά πως δεν βυθίζεται προς τα κάτω.

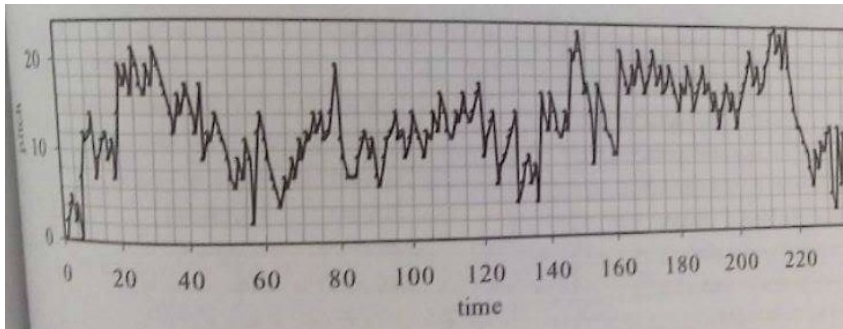
$$D = \frac{\log(6466)}{\log(1243)} \cong 1.23143$$



Σχήμα 2.62: Bach- Prelude No.1 WTC I .

2.6.16 Συμπεράσματα

Όλα τα προηγούμενα συνθέτουν μια χρήσιμη διαδικασία καθώς κάποιος μπορεί να βγάλει κάποια συμπεράσματα με μια μόνο ματιά. Το πλέγμα δείχνει πόσο ζωτικός μπορεί να είναι για τη μελέτη του γραφήματος ο τρόπος που διασταυρώνεται με τα κουτιά και σε πόσο μεγάλο πλάτος μπορεί να ταλαντευτεί και να απομακρυνθεί από τις ομαλές καμπύλες. Υποθετικά, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να μετρήσουμε τα διάφορα είδη μουσικής. Όπως είδαμε σε αυτή την ενότητα, το **Gregorian Chant** έχει πολύ μικρή διάσταση παρ' όλο που βρίσκεται πολύ κοντά με την κίνηση **Brown**, το παράδειγμα του **Schubert** είναι πολύ κοντά στο **pink noise** παρ' ότι κάποιος θα περίμενε πως η ρομαντική μουσική θα έχει μεγαλύτερη διάσταση και κάποια έργα από τη σύγχρονη μουσική έχουν πολύ μεγάλη διάσταση, όπως είδαμε στο παράδειγμα του Ξενάκη και του **Babbitt**. Από την άλλη πλευρά κάποια άλλα έργα του 20ου αιώνα, όπως του **Pärt** και του **Ligeti** έχουν πολύ μικρή διάσταση,



Σχήμα 2.63: Bach- Invention No.1 - Πιάνο - Δεξί χέρι .

δεν θα μπορούσε όμως να πει κανείς πως δεν αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα σύγχρονης μουσικής.

Ενδιαφέρον προξενεί το γεγονός ότι τα πέντε κομμάτια με τη μεγαλύτερη διάσταση (ίσως και με τη μεγαλύτερη τυχαιότητα) έχουν τελείως διαφορετικές προσεγγίσεις στη σύνθεσή τους. Η μουσική του Stewart καθορίζεται πλήρως από τη συνάρτηση $f(x) = 4x(1 - x)$, η μουσική του Ξενάκη χαρακτηρίζεται από τυχαία νούμερα και αυτή των Babbit και Webern καθορίζεται από 12 σειρές τόνων. Αντίθετα παρ' όλο που η σύνθεση του Bewitched ήταν ξεκάθαρα διαισθητική, η διάσταση του είναι αρκετά μεγάλη.

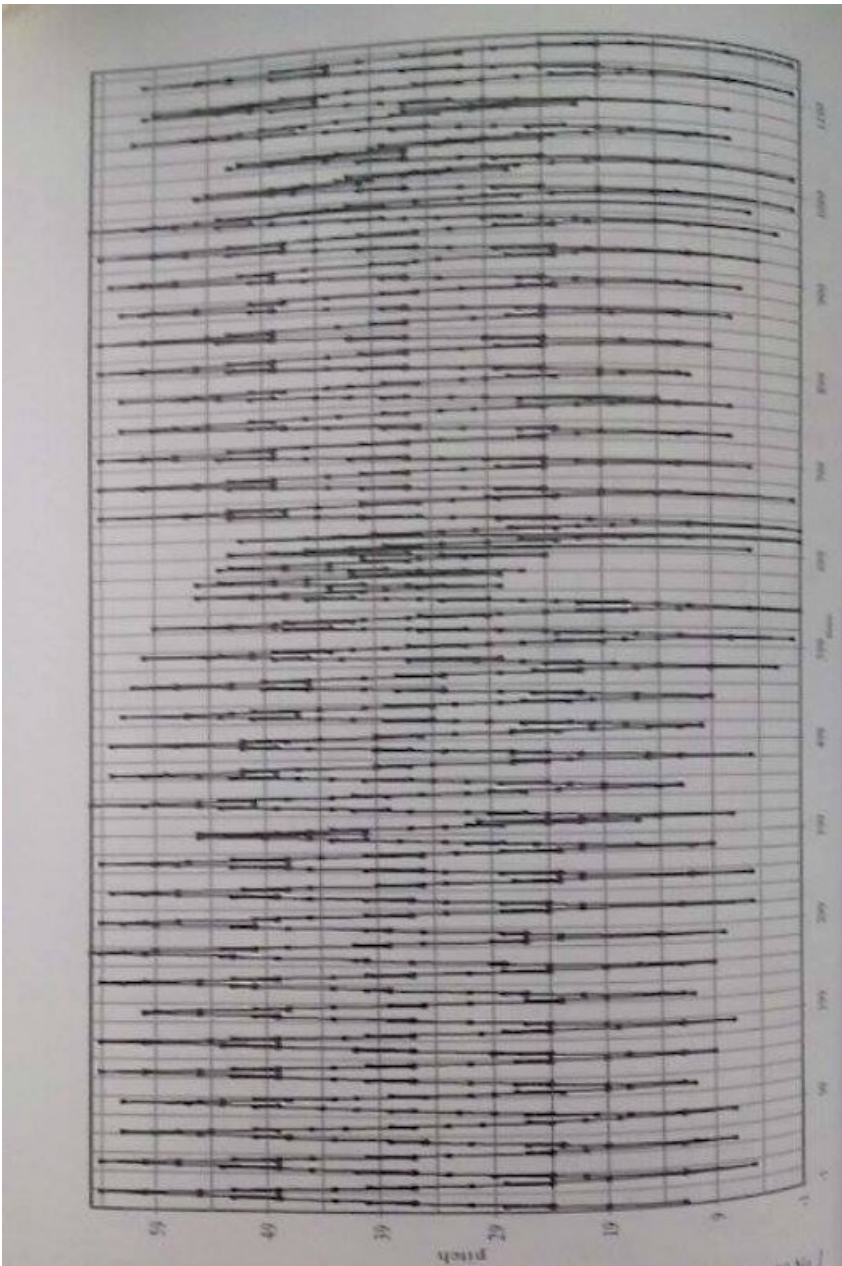
Πόσο παράξενο είναι αυτό!;

2.7 Το άρθρο των Hsu

Το άρθρο που ακολουθεί είναι μία δημοσίευση που έγινε την περίοδο 1989-1990 από τους Keneth J. Hsu και Andreas J. Hsu εκ μέρους του Eidgenossische Technische Hochschule, Zurich, Switzerland και του Konservatorium und Musikhochschule, Zurich, Switzerland αντίστοιχα. Οι Keneth και Andreas J. Hsu έχουν κάνει εξ' ίσου έρευνα στον $1/f$ θόρυβο και τη μουσική. Κατά τη διάρκεια των σπουδών τους ο γηραιότερος εξ' αυτών ήταν ακαδημαϊκός γεωλόγος στο Eidgenossische Zurich Technische Hochschule και ο γιος του πιανίστας κονσέρτου στο Zurich Konservatorium. Τρία από τα πιο σημαντικά, επιστημονικά άρθρα τους ήταν : 1. Fractal Geometry of Music (1989-1990) (το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω), 2. Self-similarity of the $1/f$ noise, called music (1990) και 3. Fractal geometry of music: from birdsongs to Bach (1993). Από τη λίστα των πηγών στα άρθρα τους, είναι φανερό πως οι Hsu βάσισαν μεγάλο μέρος της έρευνάς τους στη δουλειά των Voss, Clarke και Mandelbrot, αλλά οι μέθοδοι και οι προσεγγίσεις τους ήταν κάπως παραλλαγμένες. Θεωρώ σημαντική την ανάλυση και το σχολιασμό του που ακολουθεί για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής, καθώς οι ερευνητές που έχουν ασχοληθεί με τη fractal γεωμετρία της μουσικής κάνουν επισταμένως αναφορά στο συγκεκριμένο άρθρο. Θα έλεγε κανείς πως αποτέλεσε αφορμή για περαιτέρω διερεύνηση του θέματος.

2.7.1 Εισαγωγή

Οι περισσότεροι κριτικοί της Μουσικής συγκρίνουν τη μουσική του Bach με την ακρίβεια των Μαθηματικών. Το βασικό όμως ερώτημα που τίθεται από τους επιστήμονες είναι: Ποιά Μαθηματικά είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν; Στόχος του άρθρου είναι να δείξει, πως ένα μέρος των Μαθηματικών που είναι χρήσιμα για αυτό το σκοπό είναι η Fractal Γεωμετρία του Mandelbrot και η λεγόμενη



Σχήμα 2.64: Chopin Etude Op. 10 No. 1 - Πιάνο - Δεξί χέρι .

ακρίβεια είναι η απόκλιση από ένα log-log γραμμικό plot.

Η Μουσική μέχρι το 17ο αιώνα ήταν μία από τις 4 μαθηματικές πειθαρχίες του **Quadrivium** μαζί με την Αριθμητική, τη Γεωμετρία και την Αστρονομία. Κατά τον Αριστοτέλη, η αιτία για τα μουσικά διαστήματα που βρίσκονταν σε συμφωνία φαίνεται να ήταν το "numerous sonorus" ή αλλιώς ο αρμονικός αριθμός. Από την εποχή του Πυθαγόρα ήταν γνωστό ότι η αναλογία 2:1 αντιστοιχεί στην οκτάβα και η αναλογία 3:2 παράγει την πέμπτη. Έπειτα, αριθμολόγοι του Μεσαίωνα έκαναν εικασίες για τη μυθική σημασία των αριθμών στη Μουσική. Ο **Vincenzo Galilei**, πατέρας του **Galileo**, ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να απομυθοποιήσει την αριθμολογία της μουσικής(1). Επισήμανε ότι η οκτάβα μπορεί να επιτευχθεί μέσω διαφόρων αναλογιών ακολουθώντας τον τύπο $2^n : 1$. Είναι 2 : 1 όσον αφορά στο μήκος των χορδών, 4 : 1 όσον αφορά σε αριθμητικές τιμές βαρών που συνδέονται με τις χορδές (η αναλογία αυτή είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη διατομή των χορδών) και 8 : 1

όσον αφορά στον όγκο των σωμάτων που παράγουν ήχο, όπως π.χ των μουσικών αυλών.

Επιστημονικά πειράματα έχουν αποκαλύψει τη σχέση μεταξύ ενός μουσικού διαστήματος και της συχνότητας δόνησης που παράγεται από ένα όργανο. Μπορούμε να επιτύχουμε νότα μιας οκτάβας ψηλότερη υποδιπλασιάζοντας το μήκος της χορδής. Υπάρχουν 12 νότες σε μία οκτάβα στη διατονική μουσική, αυτό σημαίνει ότι η διαφορά της συχνότητας χωρίζεται σε 12 ίσα διαστήματα i , τέτοια ώστε:

$$f'/f = (2.0)^{1/12} = 1,05946 = (15,9/15)$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή στους μουσικούς, ότι η αναλογική σχέση που προκύπτει από δύο διαδοχικές νότες f' και f είναι περίπου 16/15. Η αναλογία των ακουστικών συχνοτήτων από δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές νότες ενός διαστήματος i είναι:

$$I_i = 2^{i/12} = (15.9/15)^i, 1 \leq i \leq 12, i \in Z$$

Όπου i ένας ακέραιος αριθμός μεταξύ του 1 και του 12 στη διατονική μουσική. Για $i = 1$ έχουμε ένα ημιτόνιο, για $i = 2$ έχουμε ένα τόνο, για $i = 3$ μία τρίτη μειωμένη κ.ο.κ. Η αριθμητική αξία της αναλογίας I_i είναι κατά προσέγγιση μία αναλογία ακέραιων αριθμών. Μερικές νότες έχουν αναλογία μικρών ακεραίων. Μία τετάρτη ($i = 5$) έχει I_5 αξία ίση με 1.3382 ή αλλιώς αναλογία ίση με 4/3. Μία πέμπτη ($i = 7$) έχει $I_7 = 1,5036$ ή αλλιώς αναλογία ίση με 3/2. Αυτοί είθισται να θεωρούνται αρμονικοί τόνοι (1). Από την άλλη πλευρά, άλλες νότες έχουν αναλογία μεγαλύτερων ακεραίων. Μία πέμπτη ελάσσονα ($i = 6$), για παράδειγμα, δίνει αναλογία 1,4185 (= 10/7,05). Αυτή δεν είναι αναλογία μικρών ακεραίων. Δεν είναι καν μια ακριβής προσέγγιση του 10/7. Έτσι, παραδοσιακά αυτή η νότα θεωρείται παράφωνη (1).

Η Μουσική χαρακτηρίζεται από το τρίπτυχο Μελωδία, Αρμονία, Ρυθμός. Ορίζεται, λοιπόν, ως μια διευθετημένη διάταξη μεμονομένων ήχων που έχουν διαφορετικές συχνότητες (μελωδία), ήχων σε συνδυασμούς (αρμονία) και ήχων τοποθετημένων σε συγκεκριμένη χρονική διαδοχή (ρυθμός). Η μελωδία είναι, υποθετικά, μία σειρά από μεμονωμένες νότες τοποθετημένες σε ένα μοτίβο και επιλεγμένες με μία προϋπάρχουσα σειρά, η οποία καθορίζεται είτε από την παράδοση είτε από μία κοινώς αποδεκτή σύμβαση. Η θεωρία της αρμονίας μας έχει διδάξει ότι η διαδοχή των ήχων δεν είναι τυχαία και ότι η κατανομή της συχνότητας του i δεν είναι χασοτική. Ποιά είναι, λοιπόν, η μαθηματική έκφραση αυτής της αλληλουχίας;

2.7.2 Γεωμετρία των **Fractals**

Μελετώντας τη συχνότητα των φυσικών καταστροφών, ένας από τους συγγραφείς του άρθρου συνειδητοποίησε ότι υπάρχει μία αντίστροφη log-log γραμμική σχέση μεταξύ της συχνότητας (F) και μίας παραμέτρου που εκφράζει την ένταση γεγονότων (M), όπως οι σεισμοί, οι κατολισθήσεις, οι πλημμύρες και οι μετεωρίτες. Αυτή η σχέση εκφράζεται από την εξίσωση:

$$F = c/M^D$$

Λίγο αργότερα, συνειδητοποιήσαμε ότι η παραπάνω σχέση ονομάζεται **Fractal** κατά **Mandelbrot**, όπου c είναι μία σταθερά αναλογίας και D είναι η fractal διάσταση. Οι fractal σχέσεις έχουν ένα κάτω και ένα άνω φράγμα. Στην περίπτωση των σεισμών, για παράδειγμα, η τελευταία σχέση υφίσταται μόνο για $3 \leq M \leq 9$, γιατί αφενός ακόμα και οι μικρότεροι σεισμοί δεν παίζουν ρόλο στη στατιστική, αφετέρου η ενέργεια που απελευθερώνεται από μεγάλους σεισμούς δεν είναι άπειρη.

Ο Mandelbrot ομαδοποίησε συγκεκριμένα γεωμετρικά σχήματα των οποίων οι "τερατώδεις" μορφές ήταν ακανόνιστες και κατακερματισμένες (fragmented) και γι' αυτό το λόγο έδωσε την ορολογία fractal. Αυτές οι "τερατώδεις" μορφές υποτίθεται ότι δεν σχετίζονται, ούτε με τη φύση ούτε με τη σύγχρονη άτονη μουσική, ώσπου ο Mandelbrot πρότεινε ότι οι fractal σχέσεις θα μπορούσαν να αποτελέσουν βασικό εργαλείο για την κατανόηση της αρμονίας της φύσης.

Στόχος μας είναι να καταλάβουμε τι είναι μελωδία. Είναι παράδοση; Σύμβαση; Ή μήπως μία ενστικτώδης έκφραση των νόμων της φύσης; Θα μπορούσαμε να βρούμε μία μαθηματική σχέση για να εκφράσουμε τη μελωδία; Θα μπορούσε η μουσική του Bach να διαφοροποιείται μαθηματικά από τη μουσική του Stockhausen; Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα μαθηματικά για να περιγράψουμε την εξέλιξη της μουσικής από την παραδοσιακή folk μουσική, στην άτονη μουσική του σήμερα; Αν η μουσική είναι μία έκφραση της αρμονίας της φύσης, θα μπορούσε να ακολουθεί τα μοτίβα της fractal Γεωμετρίας; Ποιά μουσική από όλες; Η άτονη ή η κλασική;

2.7.3 Fractal Γεωμετρία της Συχνότητας (μελωδία) στην Κλασική Μουσική

Η σχετική αφθονία ή αλλιώς η συχνότητα εμφάνισης F από νότες που έχουν διαφορετική ακουστική συχνότητα f σε μία μουσική σύνθεση δεν είναι fractal. Χτυπώντας τα πλήκτρα σε ένα πιάνο, δεν παράγεις απαραίτητα και μουσική. Η μελωδία αποτελείται από επιλεγμένη διαδοχή από νότες. Είναι αυτή η διαδοχή fractal; Η σχέση είναι fractal όταν η συχνότητα εμφάνισης F του διαστήματος i που προκύπτει από διαδοχικές νότες σε μία μουσική σύνθεση μπορεί να καθοριστεί από τη σχέση:

$$F = c/i^D$$

όπου D είναι η fractal διάσταση αυτής της σχέσης. Λογαριθμίζοντας, παίρνουμε τη σχέση:

$$\log F = c - D \log i$$

Διαλέξαμε για την πρώτη μας μελέτη μία σύνθεση του J. S Bach:

First movement of Invention no1 in C Major, BWV 772

Μετρήθηκε το ποσοστό της συχνότητας εμφάνισης F του διαστήματος i σε διαδοχικές νότες είτε σε ημιτόνια ($i = 1$), είτε σε τόνους ($i = 2$), είτε σε τρίτη ελάσσονα ($i = 3$), είτε σε μία οκτάβα. Αναλύσαμε την πιθανή διαφορά που θα μπορούσε να υπάρχει μεταξύ δεξιού και αριστερού χεριού (στο παίξιμο) και τα αποτελέσματα εμφανίζονται στον Πίνακα 1. Δεν υπάρχει κάποια αξιόλογη διαφορά στο μοτίβο κατανομής της σχέσης μεταξύ του F και του i όσο αφορά και στα δύο χέρια. Παρ' όλα αυτά συγκρίναμε και τα δύο σετ δεδομένων για να αξιολογήσουμε τη συχνότητα εμφάνισης για την ποικιλία των διαστημάτων i σε αυτή τη σύνθεση. Το αποτέλεσμα, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 1A, μας

δείχνει ότι υπάρχει fractal σχέση για $2 \leq i \leq 10$ η οποία έχει fractal διάσταση $D = 2,4184$.

$$F = 2,15/i^{2,4184}$$

Οι αξιοσημείωτες αποκλίσεις στο διάγραμμα οφείλονται στην έλλειψη για ($i = 6$) και στην περίσσεια για ($i = 7$). Αν και οι αποκλίσεις είναι μικρές, είναι αξιοπρόσεκτες για ένα μουσικό. Η

πέμπτη ελάσσονα, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, είναι ένα διάστημα που δεν αντιπροσωπεύεται από αναλογία μικρών ακεραίων. Συνεπώς, το διάστημα αυτό είναι δύσκολο να τραγουδηθεί ή να παιχτεί με ακρίβεια σε ένα όργανο με χορδές. Έτσι, συνήθως ονομάζεται "Η συγχορδία του Διαβόλου". Οι συνθέτες της Κλασικής Μουσικής συνειδητά αποφεύγουν αυτό το διάστημα. Η περίσσεια για ($i = 7$) δεν μας εκπλήσει, καθώς η πέμπτη με την αναλογία συχνοτήτων $3/2$ είναι ευχάριστη και ηχηρή.

Μετά αναλύσαμε τη σύνθεση:

First movement of Bach's Invention no13 in A Minor, BWV 784.

Την επιλέξαμε γιατί ο Bach προσπάθησε να προσδώσει σε κάθεμιά από τις 15 συνθέσεις που αποτελούν τον κύκλο Inventions διαφορετικό χαρακτήρα και θέλαμε να εξερευνήσουμε την έκφραση της διαφοράς αυτής. Η fractal σχέση είναι η εξής:

$$F = 3,0/i^{1,882}$$

Αυτή η σχέση είναι έγκυρη για $i \geq 3$ και το μοτίβο της είναι διαφορετικό, σε σχέση με το μοτίβο άλλων συνθέσεων που έχουν εκτιμηθεί ως fractal σχέσεις για $i \geq 1$ και $i \geq 2$. Η ασυνήθιστη έλλειψη του διαστήματος ενός τόνου ($i = 2$) δεν είναι τυχαία. Είναι μία συνειδητή πράξη εκ μέρους του Bach για την επίτευξη ενός ειδικού εφέ, μέσω της καθιέρωσης της τρίτης ελάσσονος ως το πιο συχνό μουσικό διάστημα. Η περίσσεια της ηχηρής πέμπτης για ($i = 7$) δίνει μία επίσης σημαντική παρέκλιση από τη fractal σχέση, η οποία δεν είναι τυχαία.

Η τρίτη σύνθεση που επιλέχθηκε ήταν η εξής:

Adagio movement of Bach's Toccata in F Sharp, BWV 910.

Μία log-log γραμμική απεικόνιση δίνει τη σχέση:

$$F = 0,376/i^{1,3403}, 1 \leq i \leq 7$$

Η fractal σχέση που δημιουργείται θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως "λιγότερο τέλει". Ίσως, γιατί είναι η πιο σύγχρονη από τις συνθέσεις του Bach που έχουν αναλυθεί. Το διάγραμμα $F - i$ που δημιουργείται έχει ένα ενδιάμεσο μοτίβο μεταξύ κλασικής και σύγχρονης-άτονης μουσικής. Ο Bach προσπάθησε να ψάξει για κάτι καινούριο με αυτή τη σύνθεση. Το Adagio Movement είναι ιδιαίτερα σύγχρονο, καθώς φαίνεται να θέτει το ζήτημα της αύξησης της ψυχολογικής έντασης στον ακροατή πριν τη λύση. Αυτό, προφανώς επιτυγχάνεται μέσω των αξιοσημείωτων αποκλίσεων από τη fractal σχέση. Υπάρχει μία ασυνήθιστα μεγάλη περίσσεια για ($i = 0$) (νότα επανάληψης). Οι υπερβολικές επαναλήψεις αποτελούν μία μουσική τεχνική, η οποία έχει σαν στόχο να ενθουσιάσει και να διεγείρει το κοινό. Επίσης, υπάρχει ανεπάρκεια για ($i = 4$). Η εσκεμμένη παράλειψη της αρμονικής τρίτης μείζονα κάνει την Tocatta να ακούγεται σκληρή και διαφορετική.

Αφήνοντας το Bach πίσω, στραφήκαμε στο Mozart και αναλύσαμε τη σύνθεση:

The First Movement of a Sonata in F Major, KV 533

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο διάγραμμα 1D. Η fractal σχέση που έχει καθιερωθεί για τα διαστήματα με $2 \leq i \leq 4$ είναι η εξής:

$$F = 1/i^{1,7322}$$

Η προφανής απόκλιση συμβαίνει εξ' αιτίας της περίσσειας για ($i = 5$), δηλαδή της ηχηρής τετάρτης. Η έλλειψη της πέμπτης ελάσσονος ($i = 6$) είναι κοινή σε όλες τις συνθέσεις που έχουν αναλυθεί. Παρατηρούμε ότι, η σταθερά αναλογίας s' αυτή τη σύνθεση είναι ίση με τη μονάδα και τέτοια ώστε:

$$Fi^D = 1$$

Σ' αυτή την περίπτωση το D είναι διάσταση ομοιότητας (similarity dimension). Αυτή η διάσταση: $D = \log F / \log(1/i) = 1,7322$, δεν είναι ακέραιος αριθμός και δεν αντιστοιχεί σε κάτι στην κλασική Γεωμετρία. Ο Mandelbrot πρότεινε πως ένα γεωμετρικό σχήμα θα μπορούσε να δημιουργηθεί από αυτή τη διάσταση ομοιότητας. Αν είναι έτσι, η μουσική του Mozart θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως "εϊκαστική", ενώ η μουσική του Bach ως "Μαθηματικά ακριβής".

Για να εξερευνήσουμε τη δομή της απλής μουσικής, αναλύσαμε έξι Ελβετικά παιδικά τραγούδια και ομαδοποιήσαμε τα εξαγόμενα, έτσι ώστε να προκύψουν σημαντικά στατιστικά αποτελέσματα. Αυτά τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 2 και στο διάγραμμα 1E. Το πιο αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό είναι το πλεόνασμα της νότας επανάληψης για $i = 0$. Μήπως γι' αυτό το λόγο η παιδική μουσική τείνει να είναι μονότονη;

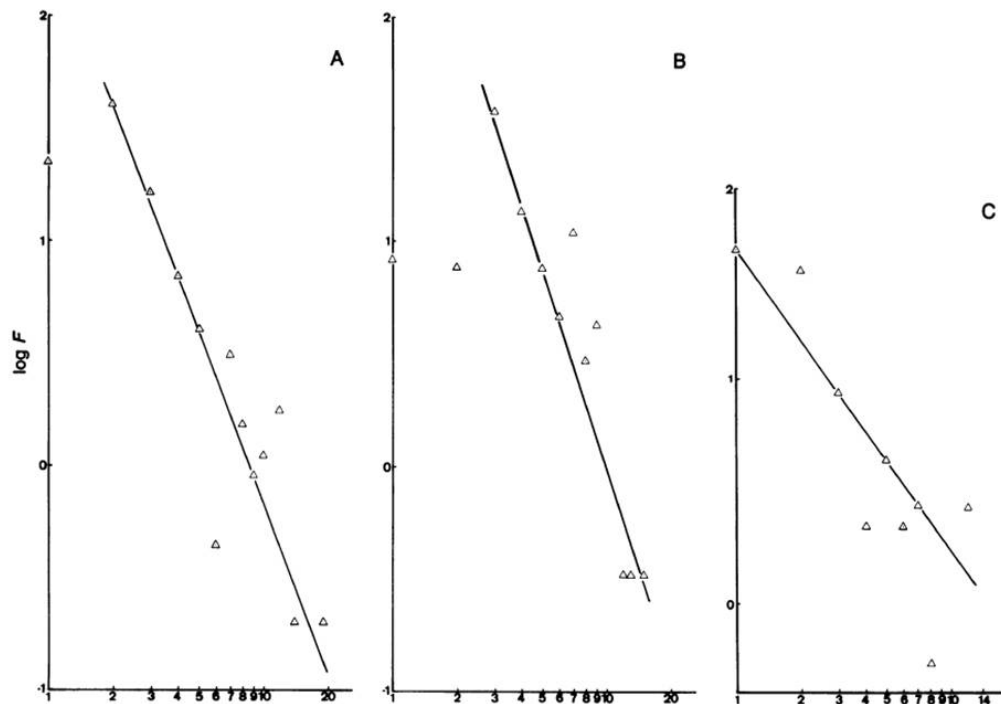
Note-interval	Right hand		Left hand		Total score	
	Incidence	% incidence	Incidence	% incidence	Incidence	% incidence
0	4	1.70	0	0.00	4	0.90
1	50	21.20	51	23.40	101	22.20
2	100	42.40	84	38.50	184	40.50
3	39	16.50	35	16.05	74	16.30
4	20	8.50	11	5.05	31	6.90
5	7	3.00	11	5.05	18	4.00
6	2	0.85	0	0.00	2	0.44
7	5	2.10	9	4.10	14	3.10
8	4	1.70	3	1.40	7	1.54
9	2	0.85	2	0.90	4	0.88
10	2	0.85	3	1.40	5	1.10
11	0	0.00	0	0.00	0	0.00
12	1	0.40	7	3.20	8	1.76
14	0	0.00	1	0.46	1	0.22
19	0	0.00	1	0.46	1	0.22
Total	236	100.00	218	100.00	454	100.00

Σχήμα 2.65: Πίνακας 1: Συχνότητα εμφάνισης F των διαστημάτων i στη σύνθεση Bach's Invention in C Major- Δύο χέρια

Στοιχεία της παραδοσιακής μουσικής δομούν τη βάση της κλασικής Μουσικής. Αυτό συμβαίνει και στην περίπτωση της σύνθεσης:

W.A Mozart, First Movement Sonata in A Major, KV 331.

Αναλύσαμε το πρώτο μέρος της και παρατηρήσαμε ότι χαρακτηρίζεται από την ίδια περίσσεια στη νότα επανάληψης ($i = 0$) με τα παιδικά τραγούδια (Πίνακας 2). Οι δύο αυτές συνθέσεις παρουσιάζουν



Σχήμα 2.66: Fig. 1A: J. S. Bach, the First Movement of Invention no. 1 in C Major, BWV 772, Fig. 1B: J.S Bach, Invention no. 13 in A Minor, BWV 784, Fig. 1C: J.S Bach, Toccata in F-sharp Minor, BWV 910.

εξαιρετικά όμοιες fractal σχέσεις (βλ. Fig.1E και Fig.1F). Δεν προκαλεί έκπληξη η πλήρης απουσία της νότας του Διαβόλου- πέμπτης ελάσσονος.

Η fractal σχέση που διέπει τη Sonata του Mozart θα μπορούσε να χαρακτηριστεί από μια διάσταση ομοιότητας $Fi^D = 1$. Είναι σύμπτωση ή μήπως αποτελεί κάποιο χαρακτηριστικό της μουσικής του Mozart;

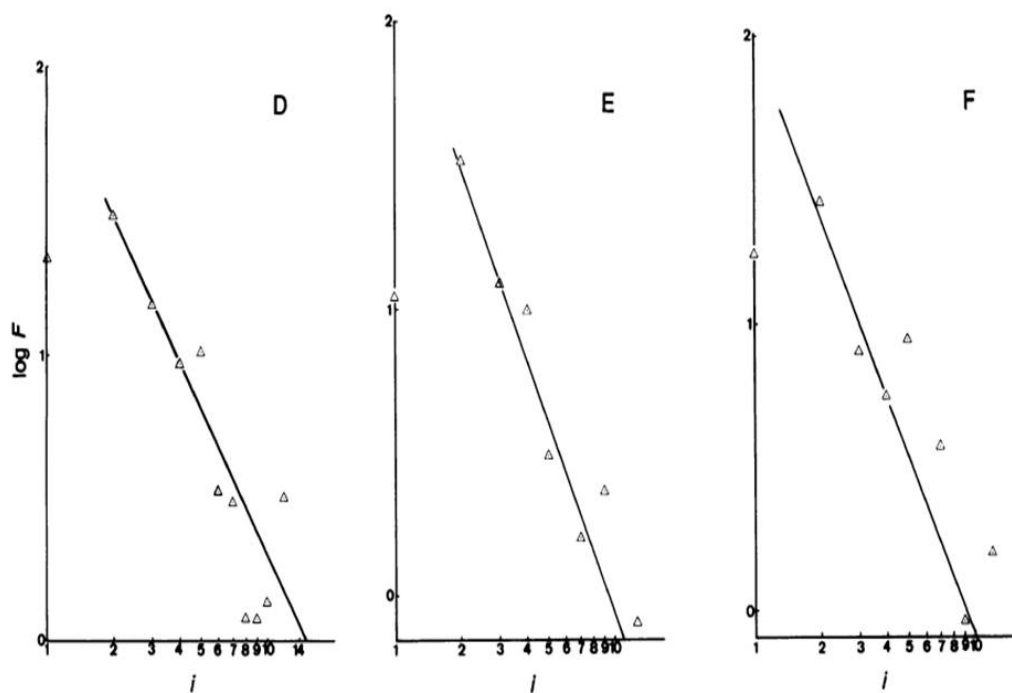
Για να γίνει εμφανής η διαφορά της κλασικής από τη μοντέρνα μουσική παρουσιάζουμε στο διάγραμμα Fig.1G την ανάλυση στη σύνθεση *Capricorn* του *Stockhausen*. Σ' αυτή τη δουλειά δεν υπάρχει καμία ομοιότητα με fractal Γεωμετρία. Η προφανής ανεπάρκεια της τρίτης μείζονα ($i = 4$) και η υπερβολική περίσσεια της πέμπτης ελάσσονα ($i = 6$) είναι αυτό που κάνει άτονη τη μοντέρνα μουσική.

2.7.4 Fractal Γεωμετρία του πλάτους στη μουσική του Bach

Ο Einstein κάποτε είπε πως η μουσική αποτελείται από ακουστικά κύματα, τα οποία καθορίζονται από τη συχνότητα και το πλάτος τους. Τα διαστήματα μεταξύ διαδοχικών ακουστικών συχνοτήτων στην κλασική μουσική ακολουθούν fractal κατανομή. Υπάρχει, όμως, κάποια παρόμοια fractal Γεωμετρία του ήχου όταν αυτός αναπαριστάται από το πλάτος του;

Οι Voss και Clarke ανέλυσαν την ένταση της μουσικής (loudness) και βρήκαν μια κατά προσέγγιση fractal κατανομή της έντασης στη σύνθεση:

J.S Bach, First Brandenburg Concerto



Σχήμα 2.67: Fig. 1D: W.A Mozart, Sonata in F Major, KV 533, Fig. 1E: Six Swiss children songs, Fig. 1F: W.A Mozart Sonata in A Major, KV 331

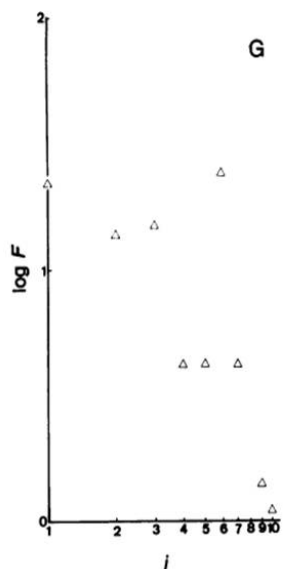


FIG. 1. Fractal geometry of sound frequency. F is the percentage frequency of incidence of note interval i . The approximately linear log-log plots suggest a fractal geometry for the classical music. No such relation is apparent in the music by Stockhausen. (A) Bach BWV 772. (B) Bach BWV 784. (C) Bach BWV 910. (D) Mozart KV 533. (E) Six Swiss children's songs. (F) Mozart KV 331. (G) Stockhausen *Capricorn*.

Σχήμα 2.68: Fig. 1G: Stockhausen, Capricorn

Note-interval	Bach's Toccata		Swiss children's songs		Mozart's Sonata	
	Incidence	% incidence	Incidence	% incidence	Incidence	% incidence
0	15	8.2	63	24.9	116	27.0
1	69	37.7	28	11.1	76	17.7
2	56	30.6	82	32.4	114	26.6
3	16	8.7	31	12.3	34	7.9
4	4	2.2	25	10.0	24	5.6
5	8	4.4	8	3.1	38	8.9
6	4	2.2	0	0	0	0
7	5	2.7	4	1.6	16	3.7
8	1	0.55	0	0	0	0
9	0	0	6	2.3	4	0.9
10	0	0	4	1.6	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	5	2.7	2	0.8	7	1.6
Total	183	100.0	253	100.1	429	99.9

Σχήμα 2.69: Πίνακας 2: Συχνότητα εμφάνισης F των διαστημάτων στη μουσική. Ομαδοποίηση των δεδομένων

Εργάστηκαν, όμως, μόνο σε μια εκτέλεση του Bach από έναν ερμηνευτή. Ήταν αυτό σκόπιμο εκ μέρους του Bach;

Ένας πιθανός τρόπος για να αξιολογήσουμε το πλάτος είναι να αναλύσουμε το πλήθος από τις νότες που παίζονται ταυτόχρονα. Αυτό, γιατί όσο περισσότερες νότες παίζονται ταυτόχρονα, τόσο μεγαλύτερη φαίνεται να είναι η ένταση του ήχου. Διαλέξαμε πάλι τη σύνθεση: *Adagio movement of Bach's Toccata in F Sharp, BWV 910*, γιατί σ' αυτή τη φούγκα παίζονται 4 μελωδίες ταυτόχρονα. Βρήκαμε ότι 3 ή 4 νότες από τις μελωδίες ακούγονται ταυτόχρονα στο 94,3% των περιπτώσεων (Πίνακας 3). Αυτή δεν είναι fractal κατανομή, ούτε αποτελεσματικός τρόπος αξιολόγησης της έντασης.

Γνωρίζοντας ότι η ένταση του ήχου είναι μέγιστη όταν μια νότα χτυπάει πρώτα τα πλήκτρα του πιάνου, αναλύσαμε το πλήθος από τις νότες που χτυπάνε ταυτόχρονα και τα αποτελέσματα από τη μελέτη της Toccata φαίνονται στον πίνακα 3 και στο διάγραμμα Fig. 2. Αν και η ανάλυση βασίζεται μόνο σε 157 τέτοιες νότες η fractal κατανομή του πλάτους είναι εμφανής. Οι ερμηνευτές του Bach που αναλύθηκαν από τους Voss και Clarke μάλλον δε στρέβλωσαν την αρχική πρόθεση του Bach.

2.7.5 Περίληψη

Αυτή η προκαταρκτική ανάλυση των λίγων συνθέσεων του Bach, αλλά και των υπολοίπων αποδεικνύει τις δυνατότητες που μπορεί να προσφέρει μία αριθμητική ανάλυση της μουσικής. Αυτό το άρθρο προτείνει μόνο μία μεθοδολογία. Βρήκαμε πως η μουσική δομή μιας σύνθεσης μπορεί να εκφραστεί ως αποκλίσεις από τη fractal Γεωμετρία. Ωστόσο, πρέπει να γίνουν πολλές πρόσθετες παρατηρήσεις πριν κανείς προσπαθήσει μια βαθιά γενίκευση.

n^*	Played simultaneously		Struck simultaneously	
	Incidence	% incidence	Incidence	% incidence
1	1	1.1	72	45.9
2	2	2.3	38	24.2
3	36	40.9	31	19.7
4	47	53.4	16	10.2
5	2	2.3	0	0
Total	88	100.0	157	100.0

*Number of notes played or struck simultaneously.

Σχήμα 2.70: Πίνακας 3. Συχνότητα από τις νότες που παίζονται ή χτυπώνται ταυτόχρονα στη σύνθεση Toccata in F-sharp Minor, J.S Bach. n^* : το πλήθος από τις νότες που χτυπώνται ταυτόχρονα

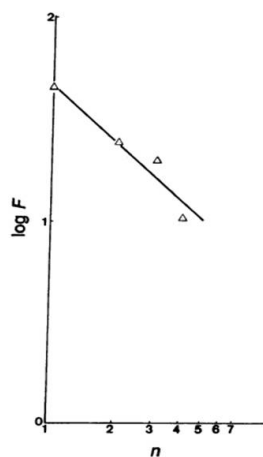


FIG. 2. Fractal geometry of sound amplitude. F is the percentage of incidence of n notes being struck simultaneously on keyboard. Music is Bach's Toccata, BWV 910.

Σχήμα 2.71: Fig.2 Fractal Γεωμετρία του πλάτους του ήχου J.S Bach Toccata, BWV 910. F είναι το ποσοστό της συχνότητας εμφάνισης από n το πλήθος από τις νότες που χτυπώνται ταυτόχρονα στο πιάνο

2.7.6 Κριτική και επισκόπηση στο άρθρο

Οι Hsu είχαν μια διαφορετική προσέγγιση σε σχέση με τους Voss και Clarke για να ελέγξουν τις $1/f$ διακυμάνσεις στη μουσική. Ενώ οι Voss και Clarke ήλεγξαν τις διακυμάνσεις στα τονικά ύψη των επιμέρους συνθέσεων, οι Kenneth και Andreas Hsu, πίστεψαν πως μετρώντας τη συχνότητα εμφάνισης συγκεκριμένου μουσικού διαστήματος ανάμεσα σε διαδοχικές νότες μιας μουσικής σύνθεσης θα πετύχαιναν καλύτερα αποτελέσματα. Ένας από τους κύριους λόγους για αυτό, ήταν η πεποίθησή τους πως τα μουσικά διαστήματα ανάμεσα σε διαδοχικές νότες (και όχι οι νότες καθ' αυτές) αποτελούσαν τα θεμέλια της μουσικής.

Οι Hsu υιοθέτησαν τον τύπο του Mandelbrot για τον καθορισμό της box-fractal διάστασης ενός αντικειμένου $F = \frac{c}{M^D}$ και τον ρύθμισαν έτσι ώστε να εφαρμόζεται στη μουσική. Όπου F η συχνότητα, M η ένταση των γεγονότων, c μια σταθερά αναλογίας και D η fractal διάσταση. Οι Hsu τη μετέτρεψαν στη μορφή $F = \frac{c}{i^D}$, όπου F είναι η συχνότητα εμφάνισης από νότες και i το διάστημα ανάμεσα σε διαδοχικές νότες με το 0 να αντιπροσωπεύει μια επαναλαμβανόμενη νότα, το 1 μια μικρή δευτέρα κ.ο.κ.

Repeated note	0
Minor second	1
Major second	2
Minor third	3
Major third	4
Perfect fourth	5
Tritone	6
Perfect fifth	7
Minor sixth	8
Major sixth	9
Minor seventh	10
Major seventh	11
Octave	12

Σχήμα 2.72:
Αριθμητικές τιμές-αντιστοιχούν σε μουσικά διαστήματα

Η πρώτη σύνθεση που επιλέχθηκε να αναλυθεί με τον παραπάνω τρόπο ήταν η **First Invention in C major, BWV 772** του Bach. Τα διαστήματα ανάμεσα σε διαδοχικές νότες μετρήθηκαν ξεχωριστά για το δεξί και το αριστερό χέρι. Αφού καταχωρήθηκαν τα αποτελέσματα σε έναν πίνακα, βρήκαν πως υπάρχει κάποια fractal σχέση για $2 \leq i \leq 10$, δηλαδή υπάρχει fractal σχέση για τα διαστήματα μεταξύ ενός ολόκληρου τόνου και μιας μειωμένης εβδόμης συμπεριλαμβάνοντας και τα άκρα. Υπολόγισαν τη fractal διάσταση ίση με 2.4184, η οποία αντιστοιχεί στην εξίσωση: $F = \frac{2.15}{i^{2.4184}}$

Παρ' όλα αυτά οι Hsu δεν εξήγησαν στο άρθρο αφενός με ποιό τρόπο ακριβώς υπολογίζεται η σταθερά 2.15 και η fractal διάσταση 2.4184 και αφετέρου γιατί συμπεριλαμβάνεται μόνο ένα συγκεκριμένο εύρος διαστημάτων. Αξίζει να σημειωθεί πως έγινε προσπάθεια από εμένα και την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου κα Δάλλα να εφαρμόσουμε τον τύπο σύμφωνα με τα στατιστικά που δίνονται από τον πίνακα και τα αποτελέσματα ήταν τελείως διαφορετικά. Αυτό ίσως σημαίνει πως το άρθρο δεν παρέχει ικανές πληροφορίες για τους υπόλοιπους ερευνητές.

Η ίδια μέθοδος χρησιμοποιήθηκε και για άλλες μουσικές συνθέσεις, όπως:

1. Bach, Invention No.13 in A minor, BWV 784
2. Bach, Adagio movement from Toccata in F-sharp minor, BWV 910
3. Mozart, First movement from Sonata in F major, KV 533
4. Six Swiss children's songs
5. Mozart: First movement from Sonata in A major, KV 331
6. Stockhausen: Capricorn

Τα αποτελέσματά των πειραμάτων τους παραστάθηκαν γραφικά σε **log-log** διαγράμματα, όπως είχαν κάνει στις εργασίες του οι Voss και Clarke. Παρ' όλο που οι μεθοδολογίες των δύο ομάδων ήταν διαφορετικές, κατέληξαν στο ίδιο αποτέλεσμα: " Η μουσική του Stockhausen δεν προσεγγίζει το θόρυβο $1/f$ με τον ίδιο τρόπο που τον προσεγγίζει η κλασική και η φολκ μουσική ". Από τα διαγράμματα είναι ξεκάθαρο πως η έρευνα των Hsu έδειξε μια $1/f$ κατανομή σε όλες τις συνθέσεις που αναλύθηκαν, εκτός από αυτή του Stockhausen (Capricorn). Έφτασαν τελικά στο συμπέρασμα ότι τα διαστήματα ανάμεσα σε διαδοχικές ακουστικές συχνότητες (τονικά ύψη) στην κλασική μουσική έχουν fractal κατανομή.

Fractal Διαστάσεις

A'.1 Fractal Διαστάσεις

A'.1.1 Εισαγωγή

Εάν έχουμε γεωμετρικά σύνολα, (ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, τετράγωνα, τρίγωνα, κύκλους, παραλληλεπίπεδα, πυραμίδες, σφαίρες κ.ο.κ.) η μέτρησή τους γίνεται με μήκος, εμβαδόν, όγκο, δηλαδή με μέτρο **Lebesgue** στους Ευκλείδειους χώρους \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 . Στην περίπτωση όμως των **fractals**, η μέτρηση με το εν λόγω μέτρο δεν μας δίνει πληροφορίες για το πόσο χώρο καταλαμβάνουν τα σύνολα αυτά.

Για παράδειγμα, το εμβαδόν του τριγώνου **Sierpinski** είναι μηδέν, όσο και ενός ευθυγράμμου τμήματος, ο όγκος του κύβου **Menger** είναι επίσης μηδέν, όσο και ενός τετραγώνου. Για αυτούς τους λόγους χρειαζόμαστε ένα ειδικότερο μέτρο, το μέτρο **Hausdorff**. Θα πρέπει επιπλέον, οι μετρήσεις των γεωμετρικών συνόλων που θα γίνονται με αυτό το μέτρο να συμπίπτουν με τις μετρήσεις που έχουμε ήδη για αυτά.

A'.1.2 Μέτρο **Lebesgue**, Μέτρο **Hausdorff**

Ορισμός 1. Έστω X τυχαίο σύνολο και $\mathcal{P}(X)$, το δυναμοσύνολο του X .

Εξωτερικό Μέτρο μ είναι μία συνάρτηση $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$, ώστε:

- i. $\mu(\emptyset) = 0$
- ii. $\mu(A) \leq \mu(B)$, αν $A \subseteq B \subseteq X$
- iii. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, αν $A_i \subseteq X$, $i = 1, 2, \dots$

Ορισμός 2. Μία οικογένεια \mathcal{A} του X , καλείται σ -Άλγεβρα, εφ' όσον ισχύουν τα εξής:

- i. $\emptyset \in \mathcal{A}$
- ii. Αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $X/E = E^c \in \mathcal{A}$
- iii. Αν $E_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$

Ορισμός 3. Εάν \mathcal{A} είναι σ -άλγεβρα, μία απεικόνιση $\mu^* : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$, ώστε:

$$i. \mu^*(\emptyset) = 0$$

$$ii. \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i), \text{ αν } E_i \subseteq \mathcal{A} \text{ και } E_i \cap E_j, i \neq j \text{ καλείται μέτρο.}$$

Εάν μ είναι εξωτερικό μέτρο, λέμε ότι το $E \subseteq X$ είναι μ -μετρήσιμο αν:

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) \text{ για κάθε } A \subseteq X.$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathcal{M} = \{E \subseteq X : E \text{ είναι } \mu\text{-μετρήσιμο}\}$ είναι σ -Άλγεβρα και ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου μ στο \mathcal{M} ,

$$\mu|_{\mathcal{M}} = \mu^*, \text{ είναι ένα μέτρο στο } \mathcal{M}.$$

Ορισμός 4. Στο χώρο \mathbb{R}^d ορίζουμε το εξωτερικό μέτρο **Lebesgue**, λ_d ως εξής:

Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d] \subseteq \mathbb{R}^d$$

όπου $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}, i = 1, \dots, d$ και ορίζουμε

$$V_d(B) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d)$$

τον d -όγκο του B .

Για τυχαίο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ορίζουμε:

$$\lambda_d(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} V_d(B_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, B_i \text{ ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Αποδεικνύεται ότι το λ_d είναι εξωτερικό μέτρο και $\lambda_d(B) = V_d(B)$, αν το B είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Επίσης, ισχύουν:

$$\lambda_d(E + x) = \lambda_d(E), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

και

$$\lambda_d(aE) = a^d \lambda_d(E), \quad a > 0$$

Εάν περιορίσουμε το λ_d στην σ -άλγεβρα \mathcal{M} των λ_d -μετρήσιμων συνόλων, τότε ο περιορισμός αυτός είναι το μέτρο **Lebesgue** d -διάστασης. Το μέτρο λ_d καλείται και d -όγκος. Στην άλγεβρα \mathcal{M} περιέχονται τα ανοιχτά και τα κλειστά σύνολα του \mathbb{R}^d .

Οι αποδείξεις των παραπάνω ιδιοτήτων και Θεωρημάτων υπάρχουν σε βιβλία "Θεωρίας Μέτρου".

Τώρα θα ορίσουμε το μέτρο **Hausdorff** στον \mathbb{R}^d . Το μέτρο **Hausdorff** ορίζεται γενικά σε τυχαίο μετρικό χώρο.

Ορισμός 5. Στο χώρο $\langle \mathbb{R}^d, d \rangle$ (d η Ευκλείδεια μετρική στον \mathbb{R}^d), ορίζουμε το εξωτερικό μέτρο **Hausdorff** H^s για $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ ως εξής:

Θεωρούμε: $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$, τη διάμετρο του συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και για $\varepsilon > 0$

$$H_\varepsilon^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < \delta(U_i) \leq \varepsilon, i \in \mathbb{N}\right\}$$

όπου $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Για $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ έχουμε:

$$H_{\varepsilon_2}^s \leq H_{\varepsilon_1}^s$$

Ορίζουμε ως εξωτερικό μέτρο **Hausdorff** H^s του $E \subseteq \mathbb{R}^d$ το:

$$H^s(E) = \sup\{H_\varepsilon^s(E), \varepsilon > 0\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} H_\varepsilon^s(E)$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι τα H_ε^s ($\varepsilon > 0$) και το H^s είναι εξωτερικά μέτρα. Εάν περιορίσουμε το H^s στη σ -άλγεβρα των H^s -μετρήσιμων συνόλων, τότε ο περιορισμός αυτός είναι το μέτρο **Hausdorff** s -διάστασης, ($s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$). Στην άλγεβρα αυτή περιέχονται τα ανοιχτά και τα κλειστά σύνολα του \mathbb{R}^d . Επίσης ισχύει ότι:

$$H^s(E + x) = H^s(E), x \in \mathbb{R}^d, \text{ και}$$

$$H^s(aE) = a^s H^s(E), a > 0$$

Με τους ανωτέρω ορισμούς του λ_d μέτρου **Lebesgue** διαστάσεως $d \in \mathbb{N}$ και του μέτρου **Hausdorff** διαστάσεως $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, γεννάται το ερώτημα αν αυτά συμπίπτουν στην περίπτωση που το $s \in \mathbb{N}$. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι θετική, καθώς μπορεί να αποδειχθεί η πολύ σημαντική σχέση:

$$\lambda_d(E) = c_d H^d(E)$$

όπου λ_d, H^d τα εξωτερικά μέτρα, c_d ο όγκος της σφαίρας στον \mathbb{R}^d διαμέτρου 1 και $E \subseteq \mathbb{R}^d$.

A'.1.3 Fractal Διαστάσεις

Διάσταση Hausdorff-Besicovitch

Σε κάθε γεωμετρικό σχήμα δίνουμε μία διάσταση. Για παράδειγμα: Ευθείες, ευθύγραμμα τμήματα είναι διάστασης 1. Τρίγωνα, πολύγωνα, κύκλοι είναι διάστασης 2. Πυραμίδες, πολύεδρα, σφαίρες είναι διάστασης 3.

Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος πεπερασμένο, εμβαδόν και όγκο μηδέν. Ένα τρίγωνο έχει μήκος άπειρο, εμβαδόν πεπερασμένο και όγκο μηδέν. Ένας κύβος έχει μήκος και εμβαδόν άπειρο και όγκο πεπερασμένο.

Παρατηρούμε ότι η διάσταση ενός γεωμετρικού σχήματος είναι εκείνος ο αριθμός n που αν το μετρήσουμε με μέτρο $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ έχει μέτρο άπειρο, ενώ αν το μετρήσουμε με μέτρο $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots$ έχει μέτρο μηδέν. Την έννοια διάσταση συνόλου, θα τη γενικεύσουμε με τη βοήθεια του μέτρου Hausdorff του συνόλου.

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ και $H^s(E)$ το s - Hausdorff μέτρο του, για $s \geq 0$. Εάν, $0 \leq s < t$, τότε:

$$\begin{aligned} H_\varepsilon^s(E) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < \delta(U_i) \leq \varepsilon, i \in \mathbb{N} \right\} \\ &\geq H_\varepsilon^t(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^t(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < \delta(U_i) \leq \varepsilon, i \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned} \quad (A'.1)$$

για $0 < \varepsilon < 1$.

Από τον ορισμό του μέτρου Hausdorff έχουμε ότι:

$$H^t(E) \leq H^s(E) \quad \text{για } 0 \leq s < t.$$

Άρα, εάν $H^s(E) = 0$ για κάποιο $s \geq 0$, θα έχουμε και $H^t(E) = 0$ για κάθε $t \geq s$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} H_\varepsilon^s(E) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^t(U_i) \cdot \delta^{s-t}(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < \delta(U_i) \leq \varepsilon, i \in \mathbb{N} \right\} \\ &\geq \varepsilon^{s-t} H_\varepsilon^t(E) \end{aligned} \quad (A'.2)$$

Εάν $0 < H^t(E) \leq +\infty$, τότε:

$$H^s(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon^s(E) \geq \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{s-t} \right) H^t(E) = +\infty$$

για κάθε $0 \leq s < t$.

Ιδιαίτερας, για το σύνολο \mathbb{R}^d έχουμε ότι $H^d(\mathbb{R}^d) = +\infty$ και

$H^s(\mathbb{R}^d) = 0$ για $s > d$, και για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^d$ έχουμε ότι $H^s(E) = 0$ για $s > d$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός s_0 , $0 \leq s_0 \leq d$, ώστε:

$$H^t(E) = \begin{cases} 0, & \text{για } t > s_0 \\ +\infty, & \text{για } t < s_0 \end{cases} \quad \text{Τότε,}$$

$$s_0 = \sup\{t \geq 0 : H^t(E) = +\infty\} = \inf\{t \geq 0 : H^t(E) = 0\}.$$

Τον αριθμό αυτό ονομάζουμε **Hausdorff-Besicovitch** διάσταση του E και το συμβολίζουμε $\dim_H E$. Το μέτρο $H^{s_0}(E)$ είναι δυνατόν να είναι 0, $+\infty$ ή θετικός αριθμός.

Διάσταση **Box**

Η διάσταση **Box** είναι η απλούστερη διάσταση που χρησιμοποιούμε. Φέρει επίσης τα ονόματα εντροπία Kolmogorov, διάσταση εντροπίας, διάσταση πληροφορίας, λογαριθμική πυκνότητα, διάσταση Minkowski και άλλα.

Η κατανόηση του ορισμού γίνεται εφικτή μέσω παραδειγμάτων στον \mathbb{R}^3 . Εάν έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς α και $\delta > 0$ χρειαζόμαστε τουλάχιστον:

$$N_\delta = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2 = \alpha^2 \left(\frac{1}{\delta}\right)^2$$

κύβους πλευράς δ για να καλύψουμε το αρχικό τετράγωνο. Ανάλογα για τον κύβο πλευράς α χρειαζόμαστε τουλάχιστον:

$$N_\delta = \alpha^3 \left(\frac{1}{\delta}\right)^3$$

κύβους πλευράς δ για να το καλύψουμε.

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που εμφανίζεται στο $\frac{1}{\delta}$, είναι η διάσταση του αντικείμενου.

Για το τυχαίο αντικείμενο Θ χρειαζόμαστε $N_\delta \cong c \left(\frac{1}{\delta}\right)^s$ κύβους πλευράς δ για να το καλύψουμε για κάποιο $s \geq 0$, όπου c σταθερά εξαρτώμενη από το αντικείμενο. ($f(\delta) \cong g(\delta)$, αν $\lim_{\delta \rightarrow 0} (f(\delta) - g(\delta)) = 0$). Λογαριθμώντας έχουμε:

$$\log N_\delta = \log c - s \log \delta$$

Άρα

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta}$$

Ορισμός 6. Εάν $F \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι φραγμένο σύνολο, ορίζουμε **box**-διάσταση τον αριθμό:

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

(εφόσον υπάρχει το όριο), όπου $N_\delta(F)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός κύβων του \mathbb{R}^d , πλευράς δ που καλύπτουν το F .

Ισοδύναμα: $N_\delta(F)$ είναι ένα από τα ακόλουθα:

- i. Ο ελάχιστος αριθμός κλειστών σφαιρών ακτίνας δ που καλύπτουν το F .
- ii. Ο ελάχιστος αριθμός συνόλων διαμέτρου δ που καλύπτει το F .
- iii. Ο αριθμός κύβων της μορφής:

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_d\delta, (m_d + 1)\delta]$$

- iv. Ο μεγαλύτερος αριθμός σφαιρών $S(x, \delta)$ ξένων ανά δύο με κέντρο $x \in F$.

Διάσταση ομοιότητας

Η διάσταση αυτή ορίζεται σε σύνολα που έχουν κατασκευαστεί με ειδικής μορφής Συστήματος Επαναλαμβανομένων Συναρτήσεων.

Ορισμός 7. Έστω ότι $w_1, w_2, \dots, w_N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ είναι ομοιότητες με κοινό συντελεστή συστολής $0 < c < 1$, $|w_i(x) - w_i(y)| = c|x - y|$, $i = 1, 2, \dots, N$ και F σταθερό σημείο.

$$F = w_1(F) \cup w_2(F) \cup \dots \cup w_n(F).$$

Ορίζουμε διάσταση ομοιότητας:

$$\dim_s F = \frac{\log N}{-\log c}$$

A'.1.4 Ιδιότητες και σχέσεις διαστάσεων

Οι διαστάσεις Hausdorff και Box, έχουν κοινές ιδιότητες, όπως οι εξής:

- i. Μονοτονία: Εάν $E \subseteq F$, τότε $\dim E \leq \dim F$.
- ii. Πεπερασμένα σύνολα: Εάν $E = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε $\dim E = 0$.
- iii. Συνθήκη **Lipschitz**: Εάν $f : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ είναι συνάρτηση Lipschitz, τότε $\dim f(E) \leq \dim E$, όπου \dim , είναι η Hausdorff ή η Box διάσταση.
Έχουν διαφορετική συμπεριφορά στη διάσταση της ένωσης συνόλων.
- iv. Εάν $\{E_n \subseteq \mathbb{R}^d : n \in \mathbb{N}\}$, τότε:

$$\dim_H \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sup \{ \dim_H E_n : n \in \mathbb{N} \}.$$

Ιδιαίτερος, κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R}^d , έχει Hausdorff διάσταση ίση με το μηδέν.

- v. Εάν $\{E_n \subseteq \mathbb{R}^d : n = 1, 2, \dots, k\}$, τότε:

$$\dim_B \left(\bigcup_{n=1}^k E_n \right) = \max \{ \dim_B E_n : n = 1, 2, \dots, k \}.$$

Η μεταξύ τους σχέση είναι η εξής:

Πρόταση 1. Εάν $\dim_H E, \dim_B E$ οι διαστάσεις Hausdorff και Box του $E \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε ισχύει:

$$\dim_H E \leq \dim_B E$$

Γενικά, η ισότητα δεν ισχύει.

Απόδειξη

Έστω $s = \dim_H E = \sup \{ t \geq 0 : H^t(E) = +\infty \}$

Εάν $s = 0$, έχουμε $\dim_H E \leq \dim_B E$.

Έστω $s > 0$ και $t < s$. Τότε $H^t(E) = +\infty = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^t(E)$ και $H_\delta^t(E) > 1$, για $0 < \delta < \varepsilon$ για

κάποιο $\varepsilon > 0$

Εάν $N_\delta(E)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός συνόλων διαμέτρου δ που καλύπτουν το E , θα έχουμε:

$$H_\delta^t(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta^t(U_i) : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \delta(U_i) \leq \delta \right\} \leq N_\delta(E) \delta^t$$

Άρα $N_\delta(E) \delta^t > 1$, και $\log N_\delta(E) + t \log \delta > 0$, για $0 < \delta < \varepsilon$. Επομένως,

$$t \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} = \dim_B(E).$$

Από το οποίο έχουμε $\dim_H E \leq \dim_B E$.

Έστω $E = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Τότε $\dim_H E = 0$ και $\dim_B E = \frac{1}{2}$.

Πράγματι, ισχύει $\dim_H(E) = 0$, επειδή το E είναι αριθμησιμο.

Θεωρούμε $0 < \delta < \frac{1}{2}$ και $k \in \mathbb{N}$, ώστε:

$$\frac{1}{k(k-1)} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}.$$

Το $\{0, 1, \dots, \frac{1}{k}\}$ καλύπτεται από $(k+1)$ διαστήματα μήκους δ και χρειαζόμαστε $(k-1)$ διαστήματα για να καλύψουμε το $\{\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-2}, \dots, 1\}$. Άρα $N_\delta(E) \leq 2k$. Καθένα από τα διαστήματα μήκους δ μπορεί να καλύψει το πολύ ένα από τα σημεία $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}\}$, άρα $N_\delta(E) \geq k$. Επομένως,

$$\frac{\log k}{\log k(k+1)} \leq \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{k(k-1)}.$$

Άρα,

$$\dim_B(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} = \frac{1}{2}.$$

Σχόλια 1. Εάν $E \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\dim_B(E) = \dim_B(\overline{E})$$

ενώ δεν ισχύει το ίδιο για τις διαστάσεις $\dim_H(E), \dim_H(\overline{E})$. Παραδείγματος χάρη, εάν E είναι το σύνολο των ρητών στο $[0, 1]$, τότε $\dim_H(E) = 0$, ενώ $\dim_H(\overline{E}) = \dim_H([0, 1]) = 1$.

A.1.5 Υπολογισμός **fractal** διαστάσεων

Διάσταση **Box** συνόλων κατασκευασμένων με Σύστημα Επαναλαμβανόμενων Συναρτήσεων

Η εύρεση των διάστασης **Box**, συνόλων **fractal** χρειάζεται μελέτη της μεθόδου κατασκευής καθενός από αυτά και εν συνεχεία να γίνει προσπάθεια υπολογισμού των διαστάσεων.

Οι διαστάσεις των **fractal** συνόλων και συναρτήσεων που κατασκευάζονται με τη βοήθεια ΣΕΣ, υπολογίζονται βάσει γενικών Θεωρημάτων.

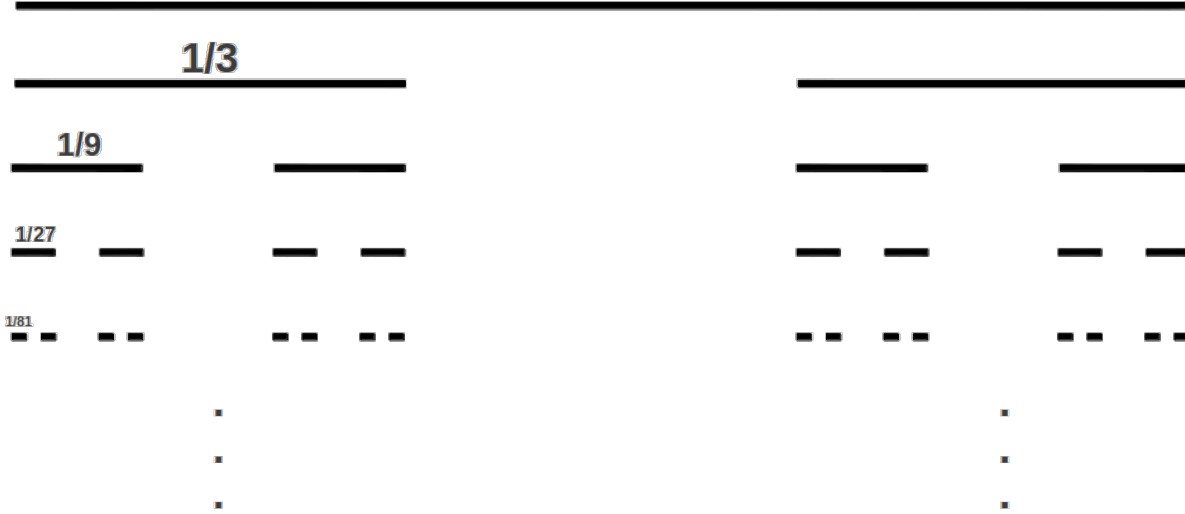
Για να πεισθούμε για τη χρησιμότητα των θεωρημάτων αυτών, θα βρούμε τη **box** διάσταση του απλούστερου συνόλου **fractal**, του τριαδικού συνόλου **Cantor E**.

Ας θυμηθούμε λίγο πρώτα αυτό το σύνολο.

Έστω $\langle \mathbb{R}, d \rangle$, όπου $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε τις συστολές $3^1 - 1$ το πλήθος.

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

1



Σχήμα Α'.1:

Έστω $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B)$, $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, όπου $\mathcal{H}(\mathbb{R})$, το σύνολο των μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του \mathbb{R} . Για $B = [0, 1]$:

$$W([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$W^2([0, 1]) = W\left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

κ.ο.κ. Τότε το σταθερό σημείο της W είναι το $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} W^n([0, 1])$, το οποίο είναι το τριαδικό σύνολο Cantor.

- Θα υπολογίσουμε τη διάσταση Box του συνόλου $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, όπου κάθε E_n αποτελείται από 2^n διαστήματα, μήκους $\frac{1}{3^n}$ το καθένα.

Εάν $\frac{1}{3^k} < \delta \leq \frac{1}{3^{k-1}}$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε ο ελάχιστος αριθμός για να καλύψουμε το E με διαστήματα μήκους δ , είναι $N_\delta(E) \leq 2^k$. Άρα:

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{k}{k-1} \quad (1)$$

Εάν $\frac{1}{3^{k+1}} \leq \delta \leq \frac{1}{3^k}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε $N_\delta(E) \geq 2^k$. Άρα:

$$\frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \geq \frac{\log 2^k}{\log 3^{k+1}} = \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{k}{k+1} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε ότι:

$$\dim_B E = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Το επόμενο θεώρημα θα μας δώσει τη διάσταση του σταθερού συνόλου κατάλληλου ΣΕΣ.

Θεώρημα 1. Έστω $w_1, w_2, \dots, w_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ομοιότητες (με την Ευκλείδεια μετρική) με συντελεστές $s_1, s_2, \dots, s_n \in (0, 1)$, ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη ανοιχτού συνόλου:
Υπάρχει $V \subseteq \mathbb{R}^d$, $V \neq \emptyset$, V ανοιχτό, ώστε:

1. $\bigcup_{i=1}^N w_i(V) \subseteq V$ και
2. $w_i(V) \cap w_j(V) = \emptyset$, $i \neq j$

Εάν K είναι το σταθερό σημείο της $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$, τότε:

i. $\dim_H(K) = \dim_B(K) = D$, όπου D δίνεται από τη σχέση:

$$\sum_{i=1}^N s_i^D = 1.$$

ii. $0 < H^D(K) < +\infty$

Το επόμενο θεώρημα δίνει τη διάσταση του γραφήματος συνάρτησης παρεμβολής.

Θεώρημα 2. Έστω $\{(x_i, F_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$, σημεία του \mathbb{R}^2 , μη κείμενα όλα στην ίδια ευθεία και G το γράφημα της συνάρτησης παρεμβολής. Εάν $\sum_{i=1}^N |d_i| > 1$ τότε $\dim_B(G) = D$, όπου D δίνεται από τη σχέση:

$$\sum_{i=1}^N |d_i| a_i^{D-1} = 1$$

Εάν $\sum_{i=1}^N |d_i| \leq 1$ τότε $\dim_B(G) = 1$

Παραδείγματα 1. • Τα ευθύγραμμα τμήματα και οι ευθείες έχουν διάσταση 1.

• Τρίγωνα, πολύγωνα, κύκλοι έχουν διάσταση 2.

• Πολύεδρα, σφαίρες και κύλινδροι έχουν διάσταση 3.

• Ανοιχτά σύνολα στον \mathbb{R}^d έχουν διάσταση d .

Τα ανωτέρω προκύπτουν από τη σχέση $H^d(E) = c\lambda_d(E)$, $E \subseteq \mathbb{R}^d$

• Το τριαδικό σύνολο *Cantor* είναι διάστασης $\frac{\log 2}{\log 3} \in (0, 1)$.

• Το Τρίγωνο *Sierpinski* είναι $\frac{\log 3}{\log 2} \in (1, 2)$

• Ο σπόγγος του *Menger* είναι διάστασης $\frac{\log 20}{\log 3} \in (2, 3)$

• Η χαμπύλη του *Koch* είναι διάστασης $\frac{\log 4}{\log 3} \in (1, 2)$

Τα ανωτέρω προκύπτουν από το θεώρημα 1.

Βιβλιογραφία

- [1] Charles Madden. *Fractals in Music, Introductory Mathematics for Musical Analysis, Second Edition revised and Expanded*. High Art Press, 2007.
- [2] John Fauvel, Raymond Flood, Robin Wilson. *Music and Mathematics, From Pythagoras to Fractals*. Oxford University Press, 2003.
- [3] KENNETH J. Hsu AND ANDREAS J. Hsu. *Fractal geometry of music (physics of melody)*. *Eidgenossische Technische Hochschule, Zurich, Switzerland; and Konservatorium und Musikhochschule, Zurich, Switzerland, Contributed by Kenneth J. Hsu, October 31, 1989., Proc. Nati. Acad. Sci. USA Vol. 87, pp. 938-941, February 1990 Physics
- [4] Λεώνη Ευαγγελάτου Δάλλα. Στοιχεία *Fractal* Γεωμετρίας, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Αθηνών, 2000.
- [5] Ise Steynberg . *The applications of fractal geometry and self-similarity to art music. Dissertation submitted in fulfilment of the requirements for the degree Magister Musicae (Musicology), Department of Music, University of Pretoria, 2014.*
- [6] Νικόλαος Αντωνίου, Κωνσταντίνος Καμπούρης, Κωνσταντίνος Παπαμιχάλης, Λαμπρινή Παπασιμίπα. Φυσική γ' γυμνασίου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ, ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ: Ελληνικά Γράμματα.
- [7] Avsite.gr, forum,
<http://www.avsite.gr/forum/threads> - Ο Διάβολος στη Μουσική.
- [8] Κλίμακα (Μουσική), [wikipedia.org](http://el.wikipedia.org/wiki),
<https://el.wikipedia.org/wiki>
- [9] Τα μουσικά διαστήματα, [wikipedia.org](http://el.wikipedia.org/wiki),
<https://el.wikipedia.org/wiki>
- [10] Μουσικός Τόνος , [wikipedia.org](http://el.wikipedia.org/wiki/),
<https://el.wikipedia.org/wiki/>

- [11] Note frequencies, Seventh String Ltd [GB],
<https://www.seventhstring.com/resources/notefrequencies.html>
- [12] What is the relationship between “do re mi” and note letter names? MUSIC (practice and theory),
<http://music.stackexchange.com/questions/4957/what-is-the-relationship-between-d>
- [13] Στοχαστικά Σήματα και Εφαρμογές, Τυχαίες Διαδικασίες Διακριτού Χρόνου - σημειώσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής, Διδάσκων: Ν. Παπανδρέου.
<http://xanthippi.ceid.upatras.grf>
- [14] Φασματική πυκνότητα, en.wikipedia.org,
<http://wikipedia.qwika.com>
- [15] Η κατανόηση των Decibels, Σημειώσεις Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.
<http://eclass.uth.gr>