Αυτομορφισμοί ελεύθερων γινομένων με αμάλγαμα και εφαρμογές

Ιωάννης Τσουκνίδας

επιβλέπων καθηγητής,
κ. Δημήτριος Βάρσος

Τμήμα Μαθηματικών,
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών,
2016

Στη γιαγιά Μαρία

Περιεχόμενα

Πρόλογος . . . . . **vii**

1 Εισαγωγή στη θεωρία των άπειρων ομάδων **1**
1.1 Η συνδυαστική σκοπιά 2
1.1.1 Ελεύθερες ομάδες 3
1.1.2 Παραστάσεις και σχέσεις 19
1.1.3 Ελεύθερα γινόμενα 24
1.1.4 Ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα 30
1.2 Η γεωμετρική σκοπιά 40
1.2.1 Το γράφημα Cayley μιας ομάδας 44
1.2.2 Ελεύθερες ομάδες και δένδρα 48
1.2.3 Ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα και δένδρα 55

2 Conjugate maximal υποομάδες και αυτομορφισμοί **59**
2.1 Conjugate maximal υποομάδες 59
2.2 Οι υποομάδες της ομάδας αυτομορφισμών 64

3 Η περίπτωση της $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ **81**

Βιβλιογραφία **86**

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία έχει ως σκοπό τη μελέτη της ομάδας αυτομορφισμών, ομάδων που είναι ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα. Ο υπολογισμός ομάδων αυτομορφισμών έχει βαρύνουσα σημασία στη θεωρία ομάδων, της οποίας μεγάλο μέρος αποτελούν οι ομάδες που είναι ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα.

Ο στόχος μας κατά τη συγγραφή ήταν να βασιστούμε και, αν καταστεί δυνατό, να εμπλουτίσουμε το αντίστοιχο άρθρο των Karrass, Pietrowski και Solitar με τίτλο «Automorphisms of a free product with an amalgamated subgroup» [10]. Το άρθρο αυτό ήταν το πρώτο που ασχολούνταν με το θέμα και δημοσιεύτηκε προτού η θεωρία των δράσεων ομάδων σε δένδρα (Bass-Serre theory) γίνει ευρύτερα γνωστή.

Για τον σκοπό αυτό, θεωρήσαμε χρήσιμο να συμπεριλάβουμε μία σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των άπειρων ομάδων. Η εισαγωγή αυτή αποσκοπούσε, αφενός στο να μυήσει τον αναγνώστη στη συνδυαστική θεωρία ομάδων, με βάση την οποία είναι γραμμένη και η προαναφερθείσα δημοσίευση, και, αφετέρου να εισάγει τα βασικά εργαλεία της γεωμετρικής θεωρίας ομάδων.

Η γεωμετρική θεωρία ομάδων, η οποία έδωσε νέα πνοή στη θεωρία ομάδων, κατέστησε εφικτό σε πολλές περιπτώσεις να απλοποιήσουμε αποδείξεις που ήταν μακροσκελείς στην αρχική τους μορφή. Ασφαλώς, σε άλλες περιπτώσεις αυτό ήταν αδύνατο, οπότε αναχθήκαμε στη συνδυαστική θεωρία.

Στην επόμενη παράγραφο καταπιανόμαστε με τη μελέτη των ομάδων αυτομορφισμών. Πρωτεύοντα ρόλο σε αυτό παίζει η έννοια της conjugate maximal υποομάδας. Η συνθήκη να είναι μία υποομάδα conjugate maximal, παρότι αρχικά φαίνεται περιοριστική, εντούτοις εμφανίζεται σε μεγάλο πλήθος ομάδων. Στη συνέχεια, διακρίνουμε τους αυτομορφισμούς ανάλογα με τις ιδιότητές τους και την επίδρασή τους στους παράγοντες του αμαλγάματος. Αυτό μας επιτρέπει να αποδείξουμε ότι, σε πολλές περιπτώσεις, η ομάδα αυτομορφισμών ενός αμαλγάματος είναι και η ίδια ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα.

Η εργασία ολοκληρώνεται με την απόδειξη ότι η ειδική γραμμική ομάδα $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ είναι ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα και με τον υπολογισμό της ομάδας αυτομορφισμών της. Ιδιαίτερα, στην απόδειξη αυτή είναι πρόδηλη η τεράστια σημασία της γεωμετρικής θεωρίας ομάδων που μας επιτρέπει να

έχουμε τέτοια αποτελέσματα.

Για την εργασία αυτή, κυρίως όμως για τις γνώσεις που μου προσέφεραν πριν αρχίσει η συγγραφή της, οφείλω ευγνωμοσύνη στα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τους καθηγητές κ. Δημήτριο Βάρσο, Μιχάλη Συκιώτη και Ευάγγελο Ράπτη. Ιδιαίτερα στον κύριο Συκιώτη οφείλω, μεταξύ άλλων, την πρώτη γνωριμία με τη γεωμετρική θεωρία ομάδων μέσω του αντίστοιχου μαθήματος που είχα την τύχη να παρακολούθησω το προηγούμενο ακαδημαϊκό έτος.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Βάρσο για την επίβλεψη της εργασίας αυτής, της οποίας η μελέτη και η συγγραφή κράτησε σχεδόν ένα χρόνο, στον οποίο οι συναντήσεις μας ήταν συχνές και πολύωρες. Σε αυτές τις συναντήσεις υπέμεινε αγόγγυστα, τόσο τις ελλείψεις μου, όσο τις συνεχείς ερωτήσεις και τις ενστάσεις μου, ενώ διαρκώς παρέμενε προσιτός και ευπροσήγορος. Η συμπαγής και σε βάθος γνώση του αντικειμένου που διαθέτει, μου επέτρεψε να εντρυφήσω στις νέες, για εμένα, έννοιες. Τέλος δεν θα ξεχάσω την απάντηση που μου έδωσε όταν τον ρώτησα αν έχει τον χρόνο και τη διάθεση να επιβλέψει την εργασία μου· “και να μην έχω τον χρόνο, θα τον βρω”. Για αυτόν τον λόγο και για πολλούς άλλους, τον ευχαριστώ και από αυτή τη θέση.

Θα ήθελα τέλος να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Παναγιώτη και Αναστασία, τον αδελφό μου Κωνσταντίνο, την Αλεξία Λύτη και τη γιαγιά Μαρία Σπυροπούλου για τη στήριξή τους αυτά τα χρόνια και για την υπομονή τους, συστατικά τα οποία με βοήθησαν να αφοσιωθώ απρόσκοπτα στο αντικείμενό μου.

Με αυτή την εργασία ολοκληρώνεται ένας κύκλος σπουδών του συγγραφέα στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών που κράτησε επτά χρόνια και τριάντα μία ημέρες. Το τμήμα αυτό, σε μία εποχή δύσκολη, ακολούθησε ανοδική πορεία καθιστώντας σαφές ότι μόνο η προσωπική εργασία και προσπάθεια μπορούν να επιφέρουν την αλλαγή προς το καλύτερο. Για τον γράφοντα, αυτή η γνώση αποτελεί και το μεγαλύτερο εφόδιο των σπουδών του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στη θεωρία των άπειρων ομάδων

Η θεωρία ομάδων, κατά τους πρώτους αιώνες της μελέτης της, ασχολούνταν με τις πεπερασμένες ομάδες. Αυτές ήταν το θεμέλιο στη θεωρία του Galois, αυτές ήταν "χρήσιμες" στη φυσική. Τις πεπερασμένες ομάδες άλλωστε αφορούσε το μεγαλύτερο πρόβλημα της θεωρίας των ομάδων για το δεύτερο μισό του 20ού αιώνα, το πρόβλημα της ταξινόμησης των απλών ομάδων. Πολύ πριν τον 20ό αιώνα όμως, οι μαθηματικοί γνώριζαν αρκετά πράγματα για τις άπειρες ομάδες. Για να τις μελετήσουν ανέπτυξαν τη *συνδυαστική θεωρία ομάδων*. Ποιά ήταν η ιδέα αυτής της θεωρίας;

Κατά τη μελέτη της θεωρίας των πεπερασμένων ομάδων, συνήθως επικεντρωνόμαστε στη μελέτη μιας ομάδας και αφού την ολοκληρώσουμε προχωράμε στη μελέτη κάποιας άλλης. Επιλέγουμε δηλαδή μία πεπερασμένη ομάδα και στη συνέχεια τη μελετούμε. Η συνδυαστική θεωρία ακολούθησε την αντίθετη κατεύθυνση· βρήκε τις θεμελιώδεις αρχές που υπακούουν όλες οι ομάδες και στη συνέχεια κατασκεύασε την κάθε ομάδα προσθέτοντας περιορισμούς στις αρχικές παραδοχές. Η ιδέα της συνδυαστικής θεωρίας ομάδων υπήρχε από τη δεκαετία του 1880 αλλά η συστηματική μελέτη έγινε από τη δεκαετία του 1920 και έπειτα.

Ο επόμενος σταθμός στη μελέτη των άπειρων ομάδων ήταν η γεωμετρική

θεωρία ομάδων. Πάλι, η αρχική σύλληψη έγινε νωρίς, στα μέσα της δεκαετίας του 1920, αλλά η θεωρία άρχισε να μελετάται συστηματικα μετά το 1977, χρονιά στην οποία οι H. Bass και J. P. Serre εξέδωσαν τη μονογραφία «Trees»[16][1]. Μάλιστα, ο νέος κλάδος πήρε το όνομα των δύο συγγραφέων και ονομαστηκε θεωρία των Bass-Serre. Η μονογραφία του Gromov [9] με τίτλο «Hyperbolic groups» έδειξε τις νέες προοπτικές αυτού του κλάδου, ο οποίος ανέπτυξε γρήγορα αλληλεπιδράσεις με άλλες περιοχές των μαθηματικών όπως η χαμηλοδιάστατη τοπολογία, οι ομάδες Lie και η υπερβολική γεωμετρία.

Σε αυτό το κεφάλαιο, ακολουθώντας την ιστορική εξέλιξη, θα δώσουμε τους ορισμούς και τις βασικές ιδιότητες, αρχικά συνδυαστικά και στη συνέχεια γεωμετρικά.

1.1 Η συνδυαστική σκοπιά

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε τον ορισμό των ελεύθερων ομάδων, καθώς και τις βασικές τους ιδιότητες. Ο τρόπος ορισμού των ελεύθερων ομάδων που θα δώσουμε είναι ο πιο φιλικός προς τον αναγνώστη. Υπάρχουν άλλοι, ισοδύναμοι ορισμοί που είναι πιο σύντομοι και πιο φορμαλιστικοί, αλλά δεν βοηθούν τη διαίσθηση. Θα σταθούμε λίγο περισσότερο στις ελεύθερες ομάδες, στα ελεύθερα γινόμενα και στα ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα γιατί αυτά θα χρειαστούν στη γεωμετρική μας εποπτεία αργότερα.

Παρότι η γεωμετρική θεωρία ομάδων αντιμετωπίζεται σήμερα ως η πιο "ενεργή" πλευρά της θεωρίας ομάδων, λόγω της αλληλεπίδρασής της με τους άλλους κλάδους, ο ευκολότερος τρόπος να αντιληφθεί κάποιος διαισθητικά της έννοιες που θα περιγράψουμε παρακάτω είναι μέσω της συνδυαστικής θεωρίας ομάδων. Για αυτό το λόγο, η πρώτη ενότητα περιγράφει τη συνδυαστική σκοπιά.

[1] Η αγγλική έκδοση βρίσκεται εδώ· [17].

1.1.1 Ελεύθερες ομάδες

> Only that thing is free which exists by the necessities of its own nature, and is determined in its actions by itself alone.
>
> Baruch Spinoza

Σε αυτήν την ενότητα θα δωθεί ο ορισμός και θα γίνει η συνδυαστική κατασκευή της ελεύθερης ομάδας F πάνω από ένα τυχαίο σύνολο X. Θα μιλήσουμε για κάποιες ιδιότητες των ελεύθερων ομάδων καθώς και για δύο προβλήματα του Max Dehn. Επιπλέον, θα διατυπώσουμε την καθολική ιδιότητα που χαρακτηρίζει τις ελεύθερες ομάδες και θα την αποδείξουμε.

Έστω λοιπόν ένα μη κενό σύνολο X. Θεωρούμε ένα νέο σύνολο, το X^{-1} το οποίο είναι ισοπληθικό με το σύνολο X έτσι ώστε $X \cap X^{-1} = \emptyset$. Θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του X^{-1} με x^{-1}, σε αντιστοιχία με τα στοιχεία του X. Ονομάζουμε το σύνολο $X^{\pm 1}$ **αλφάβητο** της F.

Μία ακολουθία της μορφής

$$\lambda = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n},\ x_i \in X, \epsilon_i = \pm 1, n \in \mathbb{N}$$

ονομάζεται **λέξη**. Ο αριθμός n καλείται **μήκος** της λέξης και συμβολίζεται με $|\lambda|$. Επιπλέον, θεωρούμε ως λέξη μήκους μηδέν την κενή ακολουθία και τη συμβολίζουμε με 1. Ονομάζουμε **υπολέξη** μιας λέξης $\lambda = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ κάθε λέξη της μορφής $x_i^{\epsilon_i} \cdots x_j^{\epsilon_j}$ με $1 \leq i \leq j \leq n$. Συμβατικά θεωρούμε την κενή λέξη ως υπολέξη κάθε λέξης. Μία λέξη λ λέγεται **ανηγμένη** αν *δεν* περιέχει υπολέξεις της μορφής $x^{\epsilon} \cdot x^{-\epsilon}$ για $x \in X, \epsilon = \pm 1$. Θα λέμε ότι δύο λέξεις $a_1 a_2 \ldots a_n, b_1 b_2 \ldots b_m$ είναι *ίσες* αν $n = m$ και $a_i = b_i$ για κάθε i.

Έστω μία ομάδα G και X ένα υποσύνολο της G. Έστω επιπλέον ότι με x^{-1} συμβολίζουμε τους αντιστρόφους των στοιχείων του X. Παρατηρούμε τότε ότι κάθε λέξη της μορφής $\lambda = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ (όπου $x_i \in X$, $\epsilon_i = \pm 1$) καθορίζει ένα μοναδικό στοιχείο της G, ενώ η κενή λέξη 1 αντιστοιχεί στο ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας. Αυτό μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.1 (ελεύθερη ομάδα)**.** Μία ομάδα G ονομάζεται **ελεύθερη** πάνω από ένα σύνολο X αν παράγεται από το X και κάθε μη κενή ανηγμένη λέξη με στοιχεία από αυτό ορίζει ένα μη τετριμμένο στοιχείο της G. Σε αυτήν την περίπτωση το X ονομάζεται *βάση* της G. Μία ελεύθερη ομάδα με βάση X συμβολίζεται με $F(X)$.

Στα επόμενα θα δείξουμε πώς γίνεται η κατασκευή της ελεύθερης ομάδας πάνω από ένα σύνολο X. Αρχικά θα ορίσουμε μία διαδικασία αναγωγής η οποία θα μας επιτρέπει να μετασχηματίζουμε τυχαίες λέξεις σε ανηγμένες.

Ονομάζουμε·

- *στοιχειώδη αναγωγή μιας λέξης* λ τη διαδικασία της διαγραφής μιας υπολέξης της μορφής $x^{\epsilon} \cdot x^{-\epsilon}$ ($\epsilon = \pm 1$) από την λ. Θα συμβολίζουμε την εφαρμογή μιας στοιχειώδους αναγωγής σε μία λέξη με ένα βέλος. Για παράδειγμα, η λέξη $x_1 \cdot x_3^{-1} \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_2^{-1}$ μέσω μιας στοιχειώδους αναγωγής γίνεται
$$x_1 \cdot x_3^{-1} \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_2^{-1} \to x_1 \cdot x_3^{-1} \cdot x_3$$
- *αναγωγή μιας λέξης* λ την εφαρμογή διαδοχικών στοιχειώδων αναγωγών επί της λ μέχρι να καταλήξουμε σε μία ανηγμένη λέξη. Στο προηγούμενο παράδειγμα η αναγωγή της λέξης λ είναι
$$x_1 \cdot x_3^{-1} \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_2^{-1} \to x_1 \cdot x_3^{-1} \cdot x_3 \to x_1 \tag{1.1}$$
όπου σταματήσαμε στο x_1 γιατί είναι σε ανηγμένη μορφή.

Φαίνεται από το προηγούμενο παράδειγμα ότι, κατά τη διαδικασία της αναγωγής μιας λέξης, μπορούμε να εφαρμόσουμε διαφορετικές στοιχειώδεις αναγωγές κάθε φορά. Πιο συγκεκριμένα, στην αναγωγή 1.1, θα μπορούσαμε να είχαμε γράψει
$$x_1 \cdot x_3^{-1} \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_2^{-1} \to x_1 \cdot x_2 \cdot x_2^{-1} \to x_1$$

Θα δείξουμε όμως ότι το αποτέλεσμα της αναγωγής μιας λέξης θα είναι πάντα το ίδιο, ανεξαρτήτως της σειράς με την οποία εφαρμόστηκαν οι στοιχειώδεις αναγωγές. Πριν από αυτό αποδεικνύουμε το εξής λήμμα·

Λήμμα 1.2. *Αν $\lambda \to \lambda_1$, $\lambda \to \lambda_2$ είναι δύο στοιχειώδεις αναγωγές μιας λέξης λ, τότε υπάρχουν στοιχειώδεις αναγωγές των λ_1, λ_2 που καταλήγουν στην ίδια λέξη λ_0. Σχηματικά, $\lambda_1 \to \lambda_0$, $\lambda_2 \to \lambda_0$.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε τις δύο στοιχειώδεις αναγωγές με $\mu_1 : \lambda \to \lambda_1, \mu_2 : \lambda \to \lambda_2$ και υποθέτουμε ότι διαγράφουν τμήματα της μορφής $x_1^{\epsilon_1} x_1^{-\epsilon_1}, x_2^{\epsilon_2} x_2^{-\epsilon_2}$ αντίστοιχα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις·

1. Αν $x_1 \neq x_2$ τότε θα έχουμε μια κατάσταση της μορφής
$$\ldots x_1^{\epsilon_1} x_1^{-\epsilon_1} u_i x_2^{\epsilon_2} x_2^{-\epsilon_2} \ldots$$

όπου μπορεί να είναι $u_i = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, το παρακάτω σχήμα μας οδηγεί στο ζητούμενο

$$\lambda \xrightarrow{\mu_1} \lambda_1 \xrightarrow{\mu_2} \lambda_0,$$

$$\lambda \xrightarrow{\mu_2} \lambda_2 \xrightarrow{\mu_1} \lambda_0$$

2. Αν $x_1 = x_2$ τότε, αν είναι όπως πριν,

$$\dots x_1^{\epsilon_1} x_1^{-\epsilon_1} u_i x_1^{\epsilon_2} x_1^{-\epsilon_2}$$

τότε, ανάλογα, εφαρμόζουμε τις αναγωγές $\lambda \xrightarrow{\mu_1} \lambda_1 \xrightarrow{\mu_2} \lambda_0,\ \lambda \xrightarrow{\mu_2} \lambda_2 \xrightarrow{\mu_1} \lambda_0$ και έστω ότι έχουμε την περίπτωση

$$\dots x_1^{\epsilon_1} x_1^{-\epsilon_1} x_1^{\epsilon_1} \dots$$

Σε αυτήν την περίπτωση είναι $\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda_2$ αφού

$$\dots x_1^{\epsilon_1} (x_1^{-\epsilon_1} x_1^{\epsilon_1}) \dots \xrightarrow{\mu_1} \dots x_1^{\epsilon_1} \dots$$

και

$$\dots (x_1^{\epsilon_1} x_1^{-\epsilon_1}) x_1^{\epsilon_1} \dots \xrightarrow{\mu_2} \dots x_1^{\epsilon_1} \dots$$

□

Το λήμμα μας οδηγεί στην επόμενη πρόταση που είχαμε προαναγγείλει.

Πρόταση 1.3. *Έστω λ μία λέξη πάνω από το X. Ισχύει ότι κάθε δύο αναγωγές της λ*

$$\lambda \to \lambda_0' \to \dots \to \lambda_n' \tag{1.2}$$

$$\lambda \to \lambda_0'' \to \dots \to \lambda_m'' \tag{1.3}$$

οδηγούν στην ίδια ανηγμένη λέξη, δηλαδή $\lambda_n' = \lambda_m''$.

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε επαγωγή στο μήκος της λ. Αν $|\lambda| = 0$ τότε η λ είναι ήδη ανηγμένη. Έστω ότι $|\lambda| > 0$ και υποθέτουμε ότι η λ δεν είναι ήδη ανηγμένη. Από το λήμμα 1.2 υπάρχουν στοιχειώδεις αναγωγές $\lambda_0' \to \lambda_0$, $\lambda_0'' \to \lambda_0$. Θεωρώ την αναγωγή του λ_0 σε ανηγμένη λέξη, έστω $\lambda_0 \to \lambda_1 \to \dots \to \lambda_k$. Το μήκος της λέξης λ_0' είναι μικρότερο από το μήκος της λ άρα, από την επαγωγική υπόθεση, όλες οι ανηγμένες μορφές της λ_0' είναι ίσες. Το ίδιο ισχύει για τις ανηγμένες μορφές της λ_0''. Από τον ορισμό της αναγωγής λ_0, η ανηγμένη λέξη λ_k είναι κοινή ανηγμένη μορφή των λ_n', λ_n'' και άρα $\lambda_n' = \lambda_k = \lambda_n''$. □

Στο εξής θα συμβολίζουμε με $\bar{\lambda}$ τη μοναδική ανηγμένη λέξη που προκύπτει από μία λέξη λ. Έστω $F(X)$ το σύνολο των ανηγμένων λέξεων με στοιχεία από το X. Ορίζουμε διμελή πράξη στο σύνολο $F(X)$ ως εξής· αν $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ είναι δύο ανηγμένες λέξεις θέτουμε

$$\bar{\lambda} * \bar{\mu} = \overline{(\bar{\lambda})(\bar{\mu})} \tag{1.4}$$

όπου με $(\bar{\lambda})(\bar{\mu})$ συμβολίζουμε την παράθεση των δύο λέξεων.

Το παρακάτω θεώρημα ολοκληρώνει την κατασκευή της ελεύθερης ομάδας.

Θεώρημα 1.4. *Το σύνολο των ανηγμένων λέξεων $F(X)$ είναι ομάδα με πολλαπλασιασμό αυτόν που ορίστηκε στη σχέση 1.4. Επιπλέον, η ομάδα αυτή είναι ελεύθερη με βάση το σύνολο X.*

Απόδειξη. Δείχνουμε αρχικά ότι ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lambda_1 * (\lambda_2 * \lambda_3) = (\lambda_1 * \lambda_2) * \lambda_3$$

Δηλαδή ότι

$$\overline{\lambda_1 \overline{\lambda_2 \lambda_3}} = \overline{\overline{\lambda_1 \lambda_2} \lambda_3}$$

Αυτό όμως είναι άμεσο αφού και οι δύο λέξεις προκύπτουν από διαφορετικές στοιχειώδεις αναγωγές της λέξης $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ οι οποίες, λόγω της προηγούμενης πρότασης, θα καταλήγουν στην ίδια ανηγμένη λέξη.

Προφανώς, το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας είναι η κενή λέξη ενώ, αν $\bar{\lambda} = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ είναι μία ανηγμένη λέξη, τότε η λέξη $\bar{\lambda}^{-1} = x_n^{-\epsilon_n} \cdots x_1^{-\epsilon_1}$ είναι επίσης ανηγμένη και ισχύει ότι

$$\lambda * \lambda^{-1} = \overline{x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n} x_n^{-\epsilon_n} \cdots x_1^{-\epsilon_1}} = 1 = \lambda^{-1} * \lambda$$

Συνεπώς, το σύνολο των ανηγμένων λέξεων είναι ομάδα.

Από τον ορισμό της $F(X)$, κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της γράφεται στη μορφή

$$x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$$

όπου $x_i \in X$, $\epsilon_i = \pm 1$, $x_i^{\epsilon_i} \neq x_{i+1}^{-\epsilon_{i+1}}$. Αυτό σημαίνει ότι η ομάδα παράγεται από το X. Επιπλέον, είναι σαφές ότι κάθε μη κενή ανηγμένη λέξη πάνω από το X είναι μη τετριμμένη, οπότε, σύμφωνα με τον ορισμό 1.1, η $F(X)$ είναι ελεύθερη πάνω από το X. □

Παρατήρηση. Σύμφωνα με την παραπάνω κατασκευή, αν $F(X)$ είναι η ελεύθερη ομάδα με βάση το σύνολο X, τότε ορίζεται συνολοθεωρητική απεικόνιση $\iota : X \to F(X)$, η οποία μάλιστα είναι $1-1$. Πιο συγκεκριμένα, η απεικόνιση ι αντιστοιχεί κάθε στοιχείο x στον εαυτό του· $\iota(x) = x$. Είναι $1-1$ λόγω του ορισμού της ελεύθερης ομάδας, αφού, αν $\iota(x_1) = \iota(x_2)$ για κάποια $x_1, x_2 \in X$, διαφορετικά μεταξύ τους, τότε θα είναι $x_1 = x_2$ στην $F(X)$ το οποίο, λόγω της μοναδικότητας της γραφής κάθε στοιχείου στη μορφή $x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$, είναι άτοπο.

Η τελευταία παρατήρηση μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.5 (κανονική μορφή)**.** Έστω $F(X)$ μία ελεύθερη ομάδα πάνω από ένα σύνολο X. Από τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας, κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της, g, γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$g = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$$

για κάποια $x_i \in X$, $\epsilon_i = \pm 1$ και η λέξη $x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ είναι ανηγμένη. Η μορφή αυτή ονομάζεται **κανονική μορφή** του στοιχείου g.

Αφού ολοκληρώσαμε την κατασκευή της ελεύθερης ομάδας πάνω από ένα σύνολο X, μπορουμε να αποδείξουμε δύο χρήσιμες χαρακτηριστικές της ιδιότητες.

Πρόταση 1.6. *Αν το σύνολο X περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε η ελεύθερη ομάδα με βάση το X έχει τετριμμένο κέντρο.*

Απόδειξη. Έστω λ ένα μη τετριμμένο στοιχείο του κέντρου της $F(X)$. Έστω ότι το λ έχει την εξής (ανηγμένη) μορφή

$$\lambda = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$$

όπου $n \geq 1$. Αφού το X περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία, υπάρχει $x_0 \neq x_n$. Θεωρούμε τα στοιχεία $x_0\lambda$ και λx_0 τα οποία είναι ίσα, αφού η λ ανήκει στο κέντρο. Επιπλέον, λόγω της επιλογής του x_0, το λx_0 είναι σε ανηγμένη μορφή και διακρίνουμε περιπτώσεις για το $x_0\lambda$.

Αν είναι σε ανηγμένη μορφή τότε, λόγω της μοναδικότητας της γραφής κάθε στοιχείου σε ανηγμένη μορφή, είναι άτοπο.

Αν το $x_0\lambda$ δεν είναι σε ανηγμένη μορφή, τότε, μέσω της αναγωγής, οδηγούμαστε σε ένα στοιχείο μήκους μικρότερου από n το οποίο είναι ίσο με ένα στοιχείο μήκους $n+1$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Πρόταση 1.7. *Κάθε ελεύθερη ομάδα πάνω από ένα σύνολο X περιέχει στοιχεία άπειρης τάξης.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Το στοιχείο x της $F(X)$ βρίσκεται σε ανηγμένη μορφή, άρα είναι μη τετριμμένο. Επιπλέον, έχει άπειρη τάξη αφού

$$x^k = x \cdot x \cdots x$$

και το στοιχείο αυτό βρίσκεται σε ανηγμένη μορφή για κάθε k, άρα είναι διαφορετικό από 1. □

Το πρόβλημα της λέξης και το πρόβλημα της συζυγίας

Η παράγραφος αυτή αποτελεί μία σύντομη παρέκβαση και έχει ως στόχο να μας εφοδιάσει με διάφορα εργαλεία που θα μας χρειαστούν αργότερα, εξηγώντας παράλληλα δύο προβλήματα της θεωρίας ομάδων. Τα προβλήματα της λέξης και της συζυγίας ήταν δύο από τα τρία προβλήματα που έθεσε ο Max Dehn το 1911 στο [6] και αφορούν πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες. Πιο συγκεκριμένα, έστω μία ομάδα G η οποία παράγεται από ένα σύνολο S. Τα δύο προβλήματα διατυπώνονται ως εξής·

1. Για μία τυχαία λέξη λ που εκφράζεται συναρτήσει των γεννητόρων, υπάρχει τρόπος να αποφασίσουμε σε πεπερασμένα βήματα αν $\lambda = 1$;

2. Για δύο τυχαίες λέξεις λ_1 και λ_2 που εκφράζεται συναρτήσει των γεννητόρων, υπάρχει τρόπος να αποφασίσουμε σε πεπερασμένα βήματα αν οι δύο λέξεις είναι συζυγείς;

Όπως είναι εμφανές, η λέξη "αποφασίσουμε" προϋποθέτει κάποια περαιτέρω διερεύνηση και ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει περισσότερες πληροφορίες επ' αυτού στο [14]. Μία άλλη παρατήρηση είναι ότι το πρόβλημα της συζυγίας είναι πιο σύνθετο από το πρόβλημα της λέξης. Αυτό γίνεται εμφανές αν παρατηρήσει κανείς πως, αν επιλέξουμε $\lambda_1 = 1$ στο πρόβλημα της συζυγίας, αναγόμαστε στο πρόβλημα της λέξης.

Παρόλο που το πρόβλημα της λέξης και το πρόβλημα της συζυγίας είναι επιλύσιμα για πολλές ομάδες, όπως για τις πεπερασμένες, έχει αποδειχθεί από τους Novikov, Boone και Britton ανεξάρτητα ότι δεν είναι επιλύσιμα για κάθε ομάδα. Σε πολλές όμως περιπτώσεις, τα δύο προβλήματα είναι επιλύσιμα και αυτή που μας αφορά ιδιαίτερα είναι η περίπτωση όπου η ομάδα είναι ελεύθερη.

Έστω λοιπόν μία ελεύθερη ομάδα $F(X)$ και μία λέξη λ επί του X. Ξέρουμε ότι ένα στοιχείο της $F(X)$ είναι μη τετριμμένο αν και μόνο αν η ανηγμένη του μορφή είναι μη τετριμμένη. Μέσω της διαδικασίας αναγωγής που περιγράψαμε πρωτύτερα, μπορούμε να υπολογίσουμε την ανηγμένη μορφή της λ. Η διαδικασία αυτή ολοκληρώνεται μέτα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων και άρα, μπορούμε να αποφασίσουμε αν το λ είναι το ταυτοτικό στοιχείο μετά από πεπερασμένα βήματα. Συνεπώς, αποδείξαμε ότι το πρόβλημα της λέξης είναι επιλύσιμο στην περίπτωση που η ομάδα είναι ελεύθερη.

Όπως προαναφέραμε, το πρόβλημα της συζυγίας είναι πιο σύνθετο και απαιτεί περισσότερα εργαλεία για να λυθεί. Για το σκοπό αυτό δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.8 (κυκλικά ανηγμένη λέξη)**.** Έστω $\lambda = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ μία ανηγμένη λέξη με στοιχεία από το X. Η λ ονομάζεται **κυκλικά ανηγμένη** αν $x_1^{\epsilon_1} \neq x_n^{-\epsilon_n}$. Συμβατικά θα θεωρούμε ότι και η κενή λέξη είναι κυκλικά ανηγμένη.

Για παράδειγμα, αν $X = \{x, y\}$ και $F(X)$ είναι η ελεύθερη ομάδα με βάση το σύνολο X τότε τα στοιχεία $xy, yxy, x^{-1}y^{-1}xy^{-1}$ είναι κυκλικά ανηγμένα ενώ τα $yxx^{-1}, y^{-1}xxy$ δεν είναι.

Η βασικότερη ιδιότητα που έχουν οι κυκλικά ανηγμένες λέξεις είναι ότι έχουν άπειρη τάξη. Αν $\lambda = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ είναι μια κυκλικά ανηγμένη λέξη τότε

$$\lambda^k = \underbrace{(x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}) \cdots (x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n})}_{k\text{-φορές}}$$

και για το στοιχείο αυτό, παρατηρούμε ότι τα μόνα σημεία στα οποία θα μπορούσαν να γίνουν αναγωγές είναι τα σημεία $\ldots x_n^{\epsilon_n})(x_1^{\epsilon_1} \ldots$. Όμως η λέξη είναι κυκλικά ανηγμένη, άρα $x_n^{\epsilon_n} \neq x_1^{-\epsilon_1}$ και άρα το λ^k βρίσκεται σε ανηγμένη μορφή, άρα είναι μη τετριμμένο. Αυτό ισχύει για κάθε k, άρα πράγματι, κάθε κυκλικά ανηγμένη λέξη έχει άπειρη τάξη.

Πρόταση 1.9. *Κάθε μη τετριμμένο στοιχείο μιας ελεύθερης ομάδας $F(X)$ είναι συζυγές με ένα κυκλικά ανηγμένο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω ένα μη τετριμμένο στοιχείο λ της $F(X)$. Το λ βρίσκεται σε ανηγμένη μορφή (λόγω του ορισμού της ελεύθερης ομάδας) και έστω ότι

$$\lambda = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}, x_i \in X, \epsilon_i = \pm 1$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Αν $n = 1$ τότε η λ είναι κυκλικά ανηγμένη. Έστω ότι $n > 1$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις·

- Αν $x_1 \neq x_n$ ή $x_1 = x_n$ αλλά $\epsilon_1 \neq -\epsilon_n$ τότε η λ είναι κυκλικά ανηγμένη.
- Έστω ότι $x_1^{\epsilon_1} = x_n^{-\epsilon_n}$, δηλαδή η λ έχει τη μορφή

$$\lambda = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_1^{-\epsilon_1}$$

Σε αυτήν την περίπτωση είναι $n > 2$ αφού αλλιώς θα ήταν $\lambda = 1$. Θεωρούμε το στοιχείο $x_1^{-\epsilon_1} \lambda x_1^{\epsilon_1}$. Είναι

$$x_1^{-\epsilon_1} \lambda x_1^{\epsilon_1} = x_2^{\epsilon_2} \cdots x_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}$$

και η τελευταία λέξη είναι μη τετριμμένη, μήκους μικρότερου από $|\lambda|$, άρα, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, είναι συζυγής με μία κυκλικά ανηγμένη λέξη. Συνεπώς,

$$x_1^{-\epsilon_1} \lambda x_1^{\epsilon_1} = gcg^{-1}$$

όπου $g \in F(X)$ και c είναι μία κυκλικά ανηγμένη λέξη. Άρα,

$$\lambda = x_1^{\epsilon_1} gcg^{-1} x_1^{-\epsilon_1} = (x_1^{\epsilon_1} g) c (g^{-1} x_1^{-\epsilon_1})$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Πριν συνεχίσουμε τη διερεύνηση του προβλήματος της συζυγίας, θα αποδείξουμε την εξής γενίκευση της πρότασης 1.7 χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση.

Πρόταση 1.10. *Κάθε μη τετριμμένο στοιχείο σε μία ελεύθερη ομάδα έχει άπειρη τάξη.*

Απόδειξη. Έστω $F(X)$ μία ελεύθερη ομάδα επί ενός συνόλου X και λ ένα μη τετριμμένο στοιχείο της. Λόγω της προηγούμενης πρότασης, το λ είναι συζυγές με ένα κυκλικά ανηγμένο στοιχείο· $\lambda = gcg^{-1}$ όπου το c είναι κυκλικά ανηγμένο. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι

$$\lambda^k = gcg^{-1} \cdots gcg^{-1} = gc^k g^{-1}$$

και, αν ίσχυε ότι $\lambda^k = 1$, τότε θα ήταν $c^k = 1$ το οποίο όμως είναι άτοπο, αφού το c είναι κυκλικά ανηγμένο, άρα το λ έχει άπειρη τάξη. □

Επιστρέφουμε τώρα στο πρόβλημα της συζυγίας και θα δείξουμε ότι είναι επιλύσιμο για ελεύθερες ομάδες. Έστω δύο στοιχεία λ, μ μιας ελεύθερης ομάδας $F(X)$. Όπως αποδείξαμε στην πρόταση 1.9, υπάρχουν κυκλικά ανηγμένα στοιχεία της ομάδας, έστω $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$, έτσι ώστε να ισχύει ότι $\lambda = g_1 \bar{\lambda} g_1^{-1}$ και $\mu = g_2 \bar{\mu} g_2^{-1}$. Παρατηρούμε τώρα ότι οι αρχικές λέξεις είναι συζυγείς αν και μόνο αν οι $\bar{\lambda}$ και $\bar{\mu}$ είναι συζυγείς. Συνεπώς, αρκεί να μελετήσουμε το πρόβλημα της συζυγίας για κυκλικά ανηγμένες λέξεις.

Έστω λοιπόν δύο κυκλικά ανηγμένες λέξεις $\bar{\lambda}, \bar{\mu} = \mu_1^{\epsilon_1} \cdots \mu_n^{\epsilon_n}$. Αν υποθέσουμε ότι είναι συζυγείς, θα υπάρχει ανηγμένη λέξη $z_1^{\nu_1} \cdots z_k^{\nu_k}$ ώστε

$$\bar{\lambda} = z_1^{\nu_1} \cdots z_k^{\nu_k} \cdot \mu_1^{\epsilon_1} \cdots \mu_n^{\epsilon_n} \cdot z_k^{-\nu_k} \cdots z_1^{-\nu_1} \tag{1.5}$$

Παρατηρούμε όμως ότι η λέξη στο αριστερό μέλος είναι κυκλικά ανηγμένη ενώ η λέξη στο δεξιό μέλος δεν είναι. Αυτό σημαίνει ότι η λέξη στο δεξιό μέλος δεν είναι ανηγμένη· αν υποθέταμε ότι είναι, υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη θα είχαμε μία ανηγμένη λέξη στο αριστερό μέλος μήκους $2|\bar{\lambda}|$ ίση με μία ανηγμένη λέξη μήκους $2(2k+n)-2$ ενώ η ισότητα 1.5 μας λέει ότι $|\bar{\lambda}| = 2k+n$.

Συνεπώς, μπορούν να γίνουν αναγωγές στο δεξιό μέλος της εξίσωσης 1.5. Αφού οι λέξεις $z_1^{\nu_1} \cdots z_k^{\nu_k}$ και $\mu_1^{\epsilon_1} \cdots \mu_l^{\epsilon_n}$ είναι ανηγμένες, θα πρέπει να ισχύει $z_k^{\nu_k} = \mu_1^{-\epsilon_1}$ ή $z_k^{\nu_k} = \mu_n^{+\epsilon_n}$

Θα ελέγξουμε μόνο την πρώτη περίπτωση αφού η δεύτερη αποδεικνύεται ανάλογα. Έστω λοιπόν ότι $z_k^{\nu_k} = \mu_1^{-\epsilon_1}$ οπότε το γινόμενο $z_k^{\nu_k} \mu_1^{\epsilon_1}$ μπορεί να απαλειφθεί.

Επαγωγικά ως προς k, παρατηρούμε ότι αν $k = 1$ τότε $z_1^{\nu_1} = \mu_1^{-\epsilon_1}$ και

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} &= \cancel{z_1^{\nu_1}} \cancel{\mu_1^{\epsilon_1}} \cdots \mu_n^{\epsilon_n} z_1^{-\nu_1} = \\
&= \mu_2^{\epsilon_2} \cdots \mu_n^{\epsilon_n} z_1^{-\nu_1} = \\
&= \mu_2^{\epsilon_2} \cdots \mu_n^{\epsilon_n} \mu_1^{\epsilon_1}
\end{aligned}$$

Αφού το $\bar{\mu} = \mu_1^{\epsilon_1} \cdots \mu_n^{\epsilon_n}$ είναι κυκλικό ανηγμένο, το στοιχείο $\mu_2^{\epsilon_2} \cdots \mu_n^{\epsilon_n} \mu_1^{\epsilon_1}$ είναι ανηγμένο (και μάλιστα ονομάζεται κυκλική μετάθεση του $\bar{\mu}$).

Έχουμε λοιπόν ότι $\bar{\lambda} = \mu_2^{\epsilon_2} \cdots \mu_n^{\epsilon_n} \mu_1^{\epsilon_1}$. Καταλήξαμε δηλαδή ότι η $\bar{\lambda}$ είναι συζυγής με τη $\bar{\mu}$ αν και μόνο αν είναι ίση με μία κυκλική μετάθεση των γραμμάτων της.

Αν τώρα $k > 1$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} &= z_1^{\nu_1} \cdots \cancel{z_k^{\nu_k}} \cdot \cancel{\mu_1^{\epsilon_1}} \cdots \mu_n^{\epsilon_n} \cdot z_k^{-\nu_k} \cdots z_1^{-\nu_1} = \\
&= (z_1^{\nu_1} \cdots z_{k-1}^{\nu_{k-1}}) \cdot (\mu_2^{\epsilon_2} \cdots \mu_n^{\epsilon_n} \cdot z_k^{-\nu_k}) \cdot (z_{k-1}^{\nu_{k-1}} \cdots z_1^{-\nu_1}) = \\
&= (z_1^{\nu_1} \cdots z_{k-1}^{\nu_{k-1}}) \cdot (\mu_2^{\epsilon_2} \cdots \mu_n^{\epsilon_n} \cdot \mu_1^{\epsilon_1}) \cdot (z_{k-1}^{\nu_{k-1}} \cdots z_1^{-\nu_1})
\end{aligned}$$

και $k-1 < k$, άρα, από την επαγωγική υπόθεση, η $\bar{\lambda}$ είναι ίση με μία κυκλική μετάθεση του $\mu_2^{\epsilon_2} \cdots \mu_n^{\epsilon_n} \mu_1^{\epsilon_1}$, το οποίο είναι επίσης μία κυκλική μετάθεση του $\bar{\mu}$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Η καθολική ιδιότητα των ελεύθερων ομάδων

Μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες που ικανοποιούν οι ελεύθερες ομάδες είναι η *καθολική ιδιότητα*.

Θεώρημα 1.11 (καθολική ιδιότητα)**.** *Έστω ένα σύνολο X, $F(X)$ η ελεύθερη ομάδα επί αυτού και $\iota : X \to F(X)$ η εμφύτευση του X στο $F(X)$. Αν G είναι μία ομάδα και $f : X \to G$ μία συνολοθεωρητική απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\phi : F(X) \to G$ ώστε $\phi \circ \iota = f$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"] & F(X) \arrow[dl, dotted, bend left, "\phi"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της ελεύθερης ομάδας, κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της, g, γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$g = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}, x_i \in X, \epsilon_i = \pm 1$$

Ορίζουμε την απεικόνιση ϕ να είναι

$$\phi(g) = f(x_1)^{\epsilon_1} \cdots f(x_n)^{\epsilon_n}$$

για κάθε μη τετριμμένο $g \in F(X)$ και $\phi(1) = 1_G$. Η ϕ είναι καλά ορισμένη λόγω της μοναδικότητας της γραφής κάθε στοιχείου σε ανηγμένη μορφή.

Δείχνουμε ότι είναι ομομορφισμός ομάδων. Έστω $g = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}, h = y_1^{e_1} \cdots y_m^{e_m} \in F(X)$ όπου $x_i, y_j \in X, \epsilon_i, e_j = \pm 1$. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις·

- Αν το στοιχείο gh βρίσκεται σε ανηγμένη μορφή, δηλαδή $gh = \overline{gh}$, τότε

$$\begin{aligned} \phi(gh) &= f(x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n} y_1^{e_1} \cdots y_m^{e_m}) = \\ &= f(x_1^{\epsilon_1}) \cdots f(x_n^{\epsilon_n}) \cdot f(y_1^{e_1}) \cdots f(y_m^{e_m})) = \\ &= \phi(g) \cdot \phi(h) \end{aligned}$$

- Αν το gh δεν βρίσκεται σε ανηγμένη μορφή, τότε, αφού τα g, h βρίσκονται σε ανηγμένη μορφή, θα έχουμε την εξής κατάσταση

$$g = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_k^{\epsilon_k} z_1^{n_1} \cdots z_m^{n_m}$$

και

$$h = z_m^{-n_m} \cdots z_1^{-n_1} y_\lambda^{e_\lambda} \cdots y_m^{e_m}$$

οπότε

$$g * h = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_k^{\epsilon_k} y_\lambda^{e_\lambda} \cdots y_m^{e_m}$$

Σε αυτήν την περίπτωση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned}
\phi(g) \cdot \phi(h) &= f(x_1)^{\epsilon_1} \cdots f(x_k)^{\epsilon_k} \cancel{f(z_1)^{n_1}} \cdots \cancel{f(z_m)^{n_m}} \cdot \\
&\quad \cdot \cancel{f(z_m)^{-n_m}} \cdots \cancel{f(z_1)^{-n_1}} \cdot f(y_\lambda)^{e_\lambda} \cdots f(y_m)^{e_m} = \\
&= f(x_1)^{\epsilon_1} \cdots f(x_k)^{\epsilon_k} \cdot f(y_\lambda)^{e_\lambda} \cdots f(y_m)^{e_m} = \\
&= \phi(g * h)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $\phi(g * h) = \phi(g)\phi(h)$ και άρα η ϕ είναι ομομορφισμός.

Επιπλέον, εξ' ορισμού, η ϕ επεκτείνει την f ώστε

$$\phi \circ \iota(x) = \phi(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in X \tag{1.6}$$

Τέλος, η μοναδικότητα της ϕ ως προς την ιδιότητα 1.6 προκύπτει από τη μοναδικότητα της γραφής κάθε στοιχείου της ελεύθερης ομάδας σε ανηγμένη μορφή. Πιο συγκεκριμένα, αν ϕ' είναι μια άλλη απεικόνιση ώστε $\phi' \circ \iota = f$ τότε, έστω $g \in F(X)$. Αν $g = 1$ τότε $\phi'(g) = \phi(g) = 1_G$. Αν $g \neq 1$, τότε, το g γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\phi'(g) &= \phi'(x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}) = \phi'(x_1^{\epsilon_1}) \cdots \phi'(x_n^{\epsilon_n}) = \phi'(x_1)^{\epsilon_1} \cdots \phi'(x_n)^{\epsilon_n} = \\
&= f(x_1)^{\epsilon_1} \cdots f(x_n)^{\epsilon_n} = \phi(x_1)^{\epsilon_1} \cdots \phi(x_n)^{\epsilon_n} = \phi(x_1^{\epsilon_1}) \cdots \phi(x_n^{\epsilon_n}) = \\
&= \phi(g)
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\phi'(g) = \phi(g)$ για κάθε $g \in F(X)$ και το ζητούμενο αποδείχτηκε. □

Η καθολική ιδιότητα των ελεύθερων ομάδων συνιστά μία άλλη οπτική της θεωρίας των ομάδων η οποία σχετίζεται με τη θεωρία κατηγοριών. Στη δική μας περιγραφή, αποδείξαμε την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων ομάδων ως επακόλουθο του ορισμού της ελεύθερης ομάδας. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Πιο συγκεκριμένα, μία ομάδα F είναι ελεύθερη επί ενός υποσυνόλου της X αν, για κάθε ομάδα G και απεικόνιση $f : X \to G$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi : F \to G$ ώστε $\phi(x) = f(x)$ για κάθε $x \in X$.

Υπό αυτό το πρίσμα, θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει την ελεύθερη ομάδα επί ενός συνόλου X μέσω της καθολικής ιδιότητας και στη συνέχεια να συνάγουμε τις πληροφορίες που έχουμε. Όπως όμως αναφέρθηκε στην αρχή της ενότητας, ο στόχος μας είναι να περιγράψουμε τις ελεύθερες ομάδες (και τα ελεύθερα γινόμενα παρακάτω) μέσω της συνδυαστικής σκοπιάς η οποία διευκολύνει τη διαίσθηση.

Συνεχίζουμε τώρα τη μελέτη των ελεύθερων ομάδων. Μία από τις άμεσες ιδιότητες που προκύπτουν από την καθολική ιδιότητα είναι ότι για κάθε σύνολο X, η ελεύθερη ομάδα $F(X)$ είναι μοναδική. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1.12. *Έστω ένα σύνολο X. Τότε η ελεύθερη ομάδα $F(X)$ που έχει το X ως βάση είναι μοναδική, υπό την εξής έννοια· αν κάποια άλλη ομάδα είναι ελεύθερη με βάση το X τότε θα είναι ισόμορφη με την $F(X)$.*

Απόδειξη. Πράγματι, έστω $F'(X)$ μία άλλη ομάδα, ελεύθερη επί ενός συνόλου X. Ορίζεται απεικόνιση $\iota' : X \to F'(X)$ με $\iota'(x^\epsilon) = x^\epsilon$ η οποία, λόγω του ορισμού της ελεύθερης ομάδας, είναι καλά ορισμένη.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\iota'"] & F(X) \arrow[dl, dotted, "\phi"] \\ F'(X) & \end{tikzcd}$$

Προκύπτουν λοιπόν τα εξής διαγράμματα και, λόγω της καθολικής ιδιότητας, υπάρχουν μοναδικοί ομομορφισμοί ϕ και ϕ' ώστε $\phi \circ \iota = \iota'$ και $\phi' \circ \iota' = \iota$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota'"] \arrow[d, "\iota"] & F'(X) \arrow[dl, dotted, "\phi'"] \\ F(X) & \end{tikzcd}$$

Θα δείξουμε ότι οι ϕ και ϕ' είναι ισομορφισμοί και $\phi' = \phi^{-1}$. Συνθέτοντας τις ϕ και ϕ', έχουμε δύο απεικονίσεις $\phi \circ \phi' : F'(X) \to F'(X)$ και $\phi' \circ \phi : F(X) \to F(X)$. Παρατηρούμε ότι $(\phi \circ \phi') \circ \iota' = \phi \circ (\phi' \circ \iota') = \phi \circ \iota = \iota'$ και ανάλογα, $(\phi' \circ \phi) \circ \iota = \iota$. Αυτό μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\iota"] & F(X) \arrow[dl, dotted, "1_{F(X)}"] \arrow[dll, dotted, bend left, "\phi' \circ \phi"] \\ F(X) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota'"] \arrow[d, "\iota'"] & F'(X) \arrow[dl, dotted, "1_{F'(X)}"] \arrow[dll, dotted, bend left, "\phi \circ \phi'"] \\ F'(X) & \end{tikzcd}$$

Τα οποία είναι μεταθετικά (δηλαδή ισχύει $(\phi \circ \phi') \circ \iota' = \iota'$ και $(\phi' \circ \phi) \circ \iota = \iota$). Όμως οι ταυτοτικοί ομομορφισμοί $1_{F(X)}$, $1_{F'(X)}$ ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις και λόγω της μοναδικότητας από την καθολική ιδιότητα θα ισχύει ότι

$$\phi \circ \phi' = 1_{F'(X)} \text{ και } \phi' \circ \phi = 1_{F(X)}$$

Δηλαδή οι ϕ και ϕ' είναι ισομορφισμοί και αποδείξαμε το θεώρημα. □

Είδαμε ότι η ελεύθερη ομάδα επί ενός συνόλου X είναι μοναδική. Ιδιαίτερα, κάθε σύνολο καθορίζει ακριβώς μία ελεύθερη ομάδα. Ορισμένα ερωτήματα που προκύπτουν είναι τα εξής·

- τι ρόλο παίζει η δομή του συνόλου X στον σχηματισμό της ελεύθερης ομάδας $F(X)$;
- ισχύει κάποιο είδος αντιστρόφου του προηγούμενου θεωρήματος;

Η απάντηση των ερωτημάτων βρίσκεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.13. *Έστω δύο σύνολα X, Y και έστω $F(X), F(Y)$ οι ελεύθερες ομάδες επί αυτών. Οι $F(X), F(Y)$ είναι ισόμορφες αν και μόνο αν $|X| = |Y|$, όπου με $|\cdot|$ συμβολίζουμε του πληθάριθμο ενός συνόλου.*

Απόδειξη. Έστω ότι $|X| = |Y|$. Αφού τα σύνολα είναι ισοπληθικά, υπάρχει συνολοθεωρητική απεικόνιση $\sigma : X \to Y$ η οποία είναι 1-1 και επί. Έστω ι_X και ι_Y οι εμφυτεύσεις των X και Y στις ομάδες $F(X)$ και $F(Y)$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $\iota_Y \circ \sigma : X \to F(Y)$ και $\iota_X \circ \sigma^{-1} : Y \to F(X)$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "\iota_Y"] \arrow[d, "\sigma^{-1}"] & F(Y) \arrow[ddl, dotted, "\phi_Y"] \\ X \arrow[d, "\iota_X"] & \\ F(X) & \end{tikzcd}$$

Λόγω της καθολικής ιδιότητας, υπάρχουν ομομορφισμοί $\phi_X : F(X) \to F(Y)$, $\phi_Y : F(Y) \to F(X)$ ώστε $\phi_X \circ \iota_X = \iota_Y \circ \sigma$ και $\phi_Y \circ \iota_Y = \iota_X \circ \sigma^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_X"] \arrow[d, "\sigma"] & F(X) \arrow[ddl, dotted, "\phi_X"] \\ Y \arrow[d, "\iota_Y"] & \\ F(Y) & \end{tikzcd}$$

Θεωρώντας τώρα τα παρακάτω διαγράμματα,

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "\iota_Y"] \arrow[d, hook, "\iota_Y"'] & F(Y) \arrow[dl, dotted, "1_{F(Y)}"] \arrow[dll, dotted, bend left, "\phi_X \circ \phi_Y"] \\ F(Y) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_X"] \arrow[d, hook, "\iota_X"'] & F(X) \arrow[dl, dotted, "1_{F(X)}"] \arrow[dll, dotted, bend left, "\phi_Y \circ \phi_X"] \\ F(X) & \end{tikzcd}$$

Θα καταλήξουμε στο ότι οι ϕ_X και ϕ_Y είναι ισομορφισμοί. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι μεταθετικά και συγκεκριμένα ότι

$$(\phi_X \circ \phi_Y) \circ \iota_Y = \iota_Y$$

και

$$(\phi_Y \circ \phi_X) \circ \iota_X = \iota_X$$

Θα δείξουμε μόνο την πρώτη εξίσωση. Είναι·

$$\begin{aligned} (\phi_X \circ \phi_Y) \circ \iota_Y &= \phi_X \circ (\phi_Y \circ \iota_Y) = \phi_X \circ (\iota_X \circ \sigma^{-1}) = \\ &= (\phi_X \circ \iota_X) \circ \sigma^{-1} = (\iota_Y \circ \sigma) \circ \sigma^{-1} = \\ &= \iota_Y \end{aligned}$$

Συνεπώς, πράγματι οι ϕ_X και ϕ_Y είναι ισομορφισμοί και $F(X) \simeq F(Y)$.

Για την αντίθετη φορά, έστω ότι οι δύο ομάδες $F(X), F(Y)$ είναι ισόμορφες.

Ισχυρισμός. Αν $F(S)$ είναι η ελεύθερη ομάδα επί ενός συνόλου S τότε ισχύει ότι

$$F(S) \Big/ (F(S))' \simeq \mathbb{Z}^{|S|} \tag{1.7}$$

όπου με $(F(S))'$ συμβολίζουμε την παράγωγο υποομάδα της $F(S)$, δηλαδή την υποομάδα που παράγεται από τους μεταθέτες των στοιχείων της $F(S)$.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Ορίζουμε αρχικά $\phi : S \to \mathbb{Z}^{|S|}$ με $\phi(s_i) = e_i$ όπου $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{\underset{\sqcup}{1}}, 0, \ldots, 0)$. Λόγω της καθολικής ιδιότητας υπάρχει (μοναδικός) ομομορφισμός

$$\bar{\phi} : F(S) \to \mathbb{Z}^{|S|}$$

ο οποίος επεκτείνει την ϕ. Αφού το $\mathbb{Z}^{|S|}$ παράγεται από τα e_i, $i = 1, \ldots, |S|$, και $e_i \in \operatorname{Im} \bar{\phi}$, η $\bar{\phi}$ είναι επιμορφισμός. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\ker \bar{\phi} = (F(S))'$.
Είναι $F(S)/\ker \bar{\phi} \simeq \mathbb{Z}^{|S|}$ και η τελευταία ομάδα είναι αβελιανή, συνεπώς είναι $(F(S))' \subseteq \ker \bar{\phi}$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω $s \in \ker \bar{\phi}$ με $s \neq 1$. Τότε το s γράφεται σε ανηγμένη μορφή· $s = s_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\epsilon_n}$ με $\epsilon_i = \pm 1$.
Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}(s) = \bar{\phi}(s_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\epsilon_n}) &= \epsilon_1 \bar{\phi}(s_{i_1}) + \cdots + \epsilon_n \bar{\phi}(s_{i_n}) = \\
&= \epsilon_1 \phi(s_{i_1}) + \cdots + \epsilon_n \phi(s_{i_n}) = \\
&= \epsilon_1 e_{i_1} + \ldots \epsilon_n e_{i_n} = 0
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε i_j υπάρχει κάποιο $i_{j'}$ ώστε να ισχύει $\epsilon_j e_{i_j} = -\epsilon_{j'} e_{i_{j'}}$. Διακρινόντας περιπτώσεις ανάλογα με το μήκος του s και προσθέτοντας όρους όπου χρειάζεται, μπορούμε να γράψουμε το s σαν γινόμενο μεταθετών, δηλαδή σαν στοιχείο της $(F(S))'$. Αυτό αποδεικνύει τη σχέση 1.7. □

Έχουμε λοιπόν ότι $F(X) \simeq F(Y)$ το οποίο σημαίνει ότι και οι ομάδες $F(X)/(F(X))'$, $F(Y)/(F(Y))'$, είναι ισόμορφες. Λόγω του ισχυρισμού προκύπτει ότι $\mathbb{Z}^{|X|} \simeq \mathbb{Z}^{|Y|}$ δηλαδή $\oplus_{|X|}\mathbb{Z} \simeq \oplus_{|Y|}\mathbb{Z}$. Λόγω της σχέσης $2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ θα ισχύει ότι

$$(\oplus_{|X|}\mathbb{Z}) \Big/ (\oplus_{|X|}2\mathbb{Z}) \simeq (\oplus_{|Y|}\mathbb{Z}) \Big/ (\oplus_{|Y|}2\mathbb{Z})$$

Τα δύο τελευταία πηλίκα όμως μας δίνουν ότι

$$\oplus_{|X|}\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \oplus_{|Y|}\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \Leftrightarrow \oplus_{|X|}\mathbb{Z}_2 \simeq \oplus_{|Y|}\mathbb{Z}_2$$

Τα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης είναι διανυσμάτικοί χώροι επί του $\mathbb{Z}_2$ διάστασης $|X|$ και $|Y|$ και, αφού είναι ισόμορφοι, έπεται ότι $|X| = |Y|$. $\square$

Το τελευταίο θεώρημα μας λέει ότι η ελεύθερη ομάδα $F(X)$ επί ενός συνόλου X εξαρτάται *μόνο από τον πληθάριθμο του* X. Δηλαδή η δομή του συνόλου δεν παίζει κανέναν ρόλο στον σχηματισμό της ελεύθερης ομάδας. Με άλλα λόγια, ο ορισμός της ελεύθερης ομάδας είναι όσο το δυνατόν γενικός ώστε να επιβάλλει τους λιγότερους δυνατούς περιορισμούς.

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι το θεώρημα 1.13 αποτελεί μία μορφή αντιστρόφου του θεωρήματος 1.12 υπό την έννοια ότι, αν δύο ελεύθερες ομάδες $F(X), F(Y)$ είναι ισόμορφες τότε τα σύνολα X, Y είναι ισοπληθικά. Αν για παράδειγμα, το σύνολο X είναι μονοσύνολο, τότε η ελεύθερη ομάδα $F(X)$ είναι ισόμορφη με την άπειρη κυκλική ομάδα των ακεραίων.

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια της *διάστασης* της ελεύθερης ομάδας $F(X)$, η οποία είναι ο πληθάριθμος του συνόλου X. Λόγω του προηγούμενου θεωρήματος, η έννοια της διάστασης είναι καλά ορισμένη. Αν ο πληθάριθμος του συνόλου X είναι πεπερασμένος και ίσος με κάποιο n, τότε η ελεύθερη ομάδα $F(X)$ θα συμβολίζεται ενίοτε και με F_n.

Ολοκληρώνουμε την παρουσίαση των ελεύθερων ομάδων με μία άλλη απόρροια της καθολικής ιδιότητας. Είδαμε παραπάνω ότι κάθε σύνολο αντιστοιχίζεται σε μία μοναδική ελεύθερη ομάδα και ότι κάθε άλλο σύνολο με τον ίδιο πληθάριθμο αντιστοιχίζεται στην "ίδια" ομάδα (μέσω ισομορφισμού). Στο επόμενο θεώρημα θα δούμε ότι, οι ελεύθερες ομάδες, με κατάλληλο τρόπο περιγράφουν το σύνολο των ομάδων, πεπερασμένων ή άπειρων.

Θεώρημα 1.14. *Κάθε ομάδα είναι επιμορφική εικόνα μιας ελεύθερης ομάδας.*

Απόδειξη. Έστω μία ομάδα G. Έστω X ένα σύνολο γεννητόρων της G. Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε την ίδια τη G ως σύνολο γεννητόρων, οπότε η επιλογή του X είναι δυνατή.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, hook, "\iota'"] & F(X) \arrow[dl, dotted, bend left, "\phi"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Θεωρούμε την ελεύθερη ομάδα $F(X)$ που έχει ως βάση το σύνολο X και τη φυσική απεικόνιση

$$\iota' : X \to G,\ \iota'(x) = x$$

Λόγω της καθολικής ιδιότητας, υπάρχει απεικόνιση $\phi : F(X) \to G$ ώστε $\phi(x) = \iota'(x) = x$.

Συνεπώς, έχουμε ομομορφισμό από την $F(X)$ στη G. Επιπλέον, η G παράγεται από το X άρα ο ϕ είναι επιμορφισμός. Από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών έπεται ότι

$$F(X) \Big/ \ker(\phi) \simeq G$$

δηλαδή η G είναι πράγματι πηλίκο μιας ελεύθερης ομάδας. □

Ένα κεντρικό θεώρημα που αφορά της ελεύθερες ομάδες είναι το θεώρημα Nielsen-Schreier, το οποίο λέει ότι οι υποομάδες των ελεύθερων ομάδων είναι ελεύθερες. Μία συνδυαστική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος απαιτεί κάποια προεργασία η οποία περιλαμβάνει τον ορισμό των μετασχηματισμών Tietze. Αντ' αυτού, θα παρουσιάσουμε τη γεωμετρική απόδειξη αυτού του θεωρήματος στην παράγραφο 1.2.2, η οποία φανερώνει τις μεγάλες δυνατότητες της γεωμετρικής θεωρίας ομάδων.

1.1.2 Παραστάσεις και σχέσεις

Ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο την έννοια της ελεύθερης ομάδας. Είδαμε ότι μία ελεύθερη ομάδα εξαρτάται μόνο από τον πληθάριθμο του συνόλου που θα θεωρήσουμε ως βάση. Στο θεώρημα 1.14 είδαμε ότι, αν θεωρήσουμε πηλίκα ελεύθερων ομάδων, ουσιαστικά καλύπτουμε όλο το φάσμα των ομάδων, είτε πεπερασμένων, είτε άπειρων. Το επόμενο βήμα είναι προς αυτήν την κατεύθυνση και προκύπτει από την εξής ερώτηση·

> έστω ότι μία ομάδα G είναι ισόμορφη με ένα πηλίκο $F(X)/K$ μιας ελεύθερης ομάδας και έστω ότι γνωρίζουμε ένα σύνολο (κανονικών) γεννητόρων του K. Τότε, τι μορφή έχει η ομάδα G;

Ορισμός 1.15. Έστω μία ομάδα G και Y ένα υποσύνολό της. Ονομάζουμε *κανονική υποομάδα της G που παράγεται από το Y*, και το συμβολίζουμε με $\langle\langle Y \rangle\rangle$, την τομή όλων των κανονικών υποομάδων της G που περιέχουν το Y. Δηλαδή,

$$\langle\langle Y \rangle\rangle = \bigcap_{N \triangleleft G, Y \leq N} N$$

Ορισμός 1.16. Έστω μία ομάδα G και K μία κανονική υποομάδα της. Ένα υποσύνολο Y του K ονομάζεται *σύνολο κανονικών γεννητόρων* της K αν $\langle\langle Y \rangle\rangle = K$.

Ορισμός 1.17. Έστω $G \simeq F(X)/K$ όπου $F(X)$ η ελεύθερη ομάδα επί ενός συνόλου X. Έστω Y ένα σύνολο κανονικών γεννητόρων της K. Το πηλίκο $F(X)/K$ ονομάζεται **παράσταση** της ομάδας G και συμβολίζεται με $\langle X|Y\rangle$

Αν το σύνολο X αποτελείται από κάποια στοιχεία $x_1, x_2, \dots$ και το Y από κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ τότε θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\langle x_1, x_2, \dots | \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle$$

για την $\langle X|Y\rangle$. Τα στοιχεία $x_1, x_2 \dots$ ονομάζονται *γεννήτορες* της G και τα στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2 \dots$· *ορίζουσες σχέσεις*. Οι σχέσεις, ως στοιχεία της ελεύθερης ομάδας, γράφονται σε ανηγμένη μορφή·

$$\lambda_i = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \tag{1.8}$$

όπου $x_{i_j} \in X$ και $\epsilon_j = \pm 1$

Μέσω του θεωρήματος 1.14 βλέπουμε ότι κάθε ομάδα έχει μία παράσταση. Στην αντίθετη κατεύθυνση, αν έχουμε ένα σύνολο γεννητόρων και ένα σύνολο σχέσεων, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ομάδα που θα έχει αυτά τα σύνολα ως παράσταση. Πιο συγκεκριμένα, αν X είναι ένα σύνολο και Y είναι ένα υποσύνολο της ελεύθερης ομάδας $F(X)$ τότε θέτουμε $K = \langle\langle Y \rangle\rangle$ και θεωρούμε την ομάδα $F(X)/K$ η οποία είναι ακριβώς η $\langle X|Y\rangle$.

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, θα αποδείξουμε ένα θεώρημα το οποίο μας είναι χρήσιμο όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι κάποια γνωστή ομάδα έχει μία συγκεκριμένη παράσταση.

Θεώρημα 1.18 (von Dyck). *Έστω ένα σύνολο X και $f : X \to G$ μία απεικόνιση από το X σε κάποια ομάδα G. Έστω η ομάδα με παράσταση $\langle X|\lambda_1, \lambda_2, \dots\rangle$. Οι κανονικοί γεννήτορες λ_i γράφονται όπως στην 1.8 και θεωρούμε τα στοιχεία*

$$f(\lambda_i) = f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots f(x_{i_n})^{\epsilon_n}$$

της G. Αν $f(\lambda_i) = 1_G$ για κάθε i, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi : \langle X|\lambda_1, \lambda_2, \dots\rangle \to G$ ώστε $\phi(x) = f(x)$ για κάθε $x \in X$.

Πριν την απόδειξη χρειαζόμαστε το εξής λήμμα·

Λήμμα 1.19. *Έστω δύο ομάδες G, H και $f : G \to H$ ομομορφισμός. Αν $N \triangleleft G$ και $N \subseteq \ker f$ τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\bar{f} : G/N \to H$ ώστε $\bar{f}(gN) = f(g)$ για κάθε $g \in G$.*

Απόδειξη. Έστω $\bar{f}(gN) = f(g)$. Η $\bar{f}$ είναι καλά ορισμένη αφού, αν $g_1 \cdot g_2^{-1} \in N$ τότε $g_1 \cdot g_2^{-1} \in \ker f$ και συνεπώς, $f(g_1) = f(g_2)$. Είναι άμεσο ότι η $\bar{f}$ είναι ομομορφισμός και ότι επεκτείνει την f. Επιπλέον, είναι σαφές ότι αν κάποια άλλη απεικόνιση επεκτείνει την f, θα ταυτίζεται με την $\bar{f}$. Συνεπώς το λήμμα αποδείχθηκε. □

Απόδειξη του θεωρήματος 1.18. Θα χρησιμοποιήσουμε την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων ομάδων και το προηγούμενο λήμμα. Θα πρέπει να είναι σαφές ότι για την ελεύθερη ομάδα $F(X)$ και την ομάδα με παράσταση $\langle X|\lambda_1, \lambda_2, \dots\rangle$ ορίζεται ο φυσικός επιμορφισμός $\pi : F(X) \to \langle X|\lambda_1, \lambda_2, \dots\rangle$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"] & F(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, dotted, bend right, "\bar{\phi}"] & \langle X|\lambda_1, \lambda_2, \dots\rangle \arrow[dll, dotted, bend left, "\phi"] \\
G &&
\end{tikzcd}$$

Λόγω της καθολικής ιδιότητας των ελεύθερων ομάδων, υπάρχει απεικόνιση $\bar{\phi} : F(X) \to G$ ώστε $\bar{\phi} \circ \iota = f$. Παρατηρούμε ότι, το σύνολο $\langle\langle \lambda_1, \lambda_2, \dots\rangle\rangle$ περιέχεται στον πυρήνα της $\bar{\phi}$. Αυτό ισχύει αφού

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(\lambda_i) &= \bar{\phi}(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}) = \bar{\phi}(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots \bar{\phi}(x_{i_n})^{\epsilon_n} = (\bar{\phi} \circ \iota(x_{i_1}))^{\epsilon_1} \cdots (\bar{\phi} \circ \iota(x_{i_n}))^{\epsilon_n} = \\ &= f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots f(x_{i_n})^{\epsilon_n} = f(\lambda_i) = 1\end{aligned}$$

Συνεπώς, από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\phi : \langle X|\lambda_1, \lambda_2, \dots\rangle \to G \text{ ώστε } \phi \circ \pi = \bar{\phi}$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάποιο $x \in X$ θα ισχύει

$$\phi(x) := \phi(x\langle\langle \lambda_1, \lambda_2, \dots\rangle\rangle) = (\phi \circ \pi)(x) = \bar{\phi}(x) = (\bar{\phi} \circ \iota)(x) = f(x)$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε κάποια παραδείγματα παραστάσεων γνωστών ομάδων.

Παράδειγμα 1.20. Αν δεν ορίσουμε σχέσεις μεταξύ των γεννητόρων τότε η ομάδα που θα πάρουμε θα είναι μια ελεύθερη ομάδα. Πιο συγκεκριμένα, η $\langle a|1\rangle$ είναι η $F_1 = \mathbb{Z}$, η $\langle a, b|1\rangle$ είναι η F_2 κ.ο.κ.

Παράδειγμα 1.21. Η ομάδα $(\mathbb{Z}_n, +)$ είναι η $\langle a|a^n\rangle$. Πράγματι, θεωρούμε το μονοσύνολο $X = \{a\}$ και την απεικόνιση $f : X \to \mathbb{Z}_n$, $f(a) = 1$. Για τον κανονικό γεννήτορα a^n ισχύει (με τον προσθετικό συμβολισμό) $f(a^n)) = nf(a) = n\cdot 1 = 0$. Συνεπώς, λόγω του θεωρήματος von Dyck, υπάρχει (μοναδικός) ομομορφισμός $\phi : \langle a|a^n\rangle \to \mathbb{Z}_n$ ώστε $\phi(a) = 1$. Αφού το 1 είναι γεννήτορας της $\mathbb{Z}_n$, η ϕ είναι επιμορφισμός. Θα δείξουμε ότι είναι και $1-1$. Έστω $N = \langle\langle a^n\rangle\rangle$ και $gN \in \ker\phi$. Το g είναι στοιχείο της ελεύθερης ομάδας $F(a)$, συνεπώς έχει τη μορφή $g = a^m = a\cdots a$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$. Λόγω του θεωρήματας von Dyck, θα ισχύει ότι

$$\phi(gN) = 0 \Leftrightarrow \phi(a)^m N = 0 \Leftrightarrow mf(a) = 0 \Leftrightarrow m\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow n|m$$

Δηλαδή, το g έχει τη μορφή a^{pn} που σημαίνει ότι ανήκει στο N. Άρα η ϕ είναι ισομορφισμός και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Σημείωση. Πολλές φορές όταν θα κάνουμε πράξεις μεταξύ των στοιχείων μιας ομάδας με κάποια παράσταση, θα αλλοιώνουμε τον συμβολισμό και αντί για σύμπλοκα της μορφής aN να γράφουμε απλώς a.

Παράδειγμα 1.22. Ανάλογα με το προηγούμενο παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι το ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}$ έχει την παράσταση $\langle x_1,\ldots x_n|[x_i,x_j]$ για κάθε $i,j = 1,\ldots,n.\rangle$, όπου με $[x_i,x_j]$ συμβολίζουμε τον μεταθέτη $x_ix_jx_i^{-1}x_j^{-1}$.

Παράδειγμα 1.23. Η διεδρική ομάδα D_n όριζεται μέσω της παράστασής της αφού

$$D_n = \langle\tau,\sigma|\tau^n = \sigma^2 = 1, \tau\sigma\tau = \sigma\rangle = \langle\tau,\sigma|\tau^n,\sigma^2,\tau\sigma\tau\sigma\rangle$$

Παράδειγμα 1.24. Η ομάδα των τεσσάρων στοιχείων του Klein είναι η ομάδα $\{1,a,b,ab\}$. Ορίζεται μέσω της παράστασης $V = \langle a,b|a^2 = b^2 = 1, ab = ba\rangle$ και είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. Είναι η ομάδα με τη μικρότερη δυνατή τάξη που δεν είναι κυκλική.

Παράδειγμα 1.25. Σε αυτό το παράδειγμα θα δείξουμε ότι η συμμετρική ομάδα S_3 είναι η

$$\langle a,b|a^3,b^2,abab\rangle$$

Τα στοιχεία της S_3, γραμμένα υπό τη μορφή κυκλικών μεταθέσεων, είναι τα $\{1,(1\,2),(1\,3),(2\,3),(1\,2\,3),(1\,3\,2)\}$. Για λόγους ευκολίας, θα συμβολίζουμε την $\langle\langle a^3,b^2,abab\rangle\rangle$ με N.

Ανάλογα με πριν, θεωρούμε το σύνολο $\{a,b\}$ και την απεικόνιση

$$f : \{a,b\} \to S_3,\ f(a) = (1\,2\,3),\ f(b) = (1\,2)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, δεν θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα von Dyck. Αντ' αυτού, θα επεκτείνουμε αρχικά την απεικονιση f σε ομομορφισμό $\bar{f} : F(a,b) \to S_3$ μέσω της καθολικής ιδιότητας. Παρατηρούμε ότι η S_3 παράγεται από τους κύκλους $(1\,2), (1\,2\,3)$, συνεπώς η $\bar{f}$ είναι επί. Από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών θα ισχύει ότι

$$F(a,b)\,/\ker \bar{f} \simeq S_3$$

Επιπλέον, κάθε στοιχείο της N περιέχεται στον πυρήνα της $\bar{f}$ αφού οι κανονικοί γεννήτορες της N περιέχονται· $\bar{f}(a^3) = (\bar{f}(a))^3 = (1\,2\,3)^3 = 1$, $\bar{f}(b^2) = 1$ και $\bar{f}(abab) = 1$. Συνεπώς $N \subseteq \ker \bar{f}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $N = \ker \bar{f}$ δείχνοντας ότι $|F(a,b)/N| \leq 6$. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε την ομάδα $F(a,b)/N$. Έστω M η υποομάδα της $F(a,b)/N$ που παράγεται από το a, δηλαδή, $M = \langle aN \rangle$. Το bN έχει τάξη 2 άρα $M \triangleleft F(a,b)/N$ και $(F(a,b)/N)/M \simeq bN$. Συνεπώς, το γινόμενο των υποομάδων M, $\{N, bN\}$ είναι υποομάδα και περιέχει τους δύο γεννήτορες της $F(a,b)/N$, άρα $F(a,b)/N = M \cdot \{N, bN\}$. Τώρα είναι εύκολο να υπολογίσουμε το

$$\begin{aligned} |F(a,b)/N| &= |M \cdot \{N, bN\}| = \\ &= |M| \cdot |\{N, bN\}|/|M \cap \{N, bN\}| = \\ &= 6/|M \cap \{N, bN\}| \leq 6 \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι $|F(a,b)/N| \leq 6$ και $N \leq \ker \bar{f}$ άρα, από το 3ο θεώρημα ισομορφισμών,

$$\left(F(a,b)\,/_N\right) \Big/ \left(\ker \bar{f}\,/_N\right) \simeq F(a,b)\,/\ker \bar{f}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} [F(a,b) : N][\ker \bar{f} : N] = 6 \Leftrightarrow 6 \cdot [\ker \bar{f} : N] \leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N = \ker \bar{f} \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$F(a,b)\,/_N = \langle a,\, b \,|\, a^3,\, b^2,\, abab \rangle \simeq S_3$$

Σημείωση. Στο παράδειγμα 5.4 του [1] αποδεικνύεται ότι μία άλλη παράσταση της S_3 είναι η $\langle a, b |\, a^2, b^2, (ab)^3 \rangle$. Βλέπουμε λοιπόν ότι μία ομάδα μπορεί να έχει πολλές παραστάσεις.

1.1.3 Ελεύθερα γινόμενα

Η επόμενη έννοια που θα περιγράψουμε είναι αυτή του ελεύθερου γινομένου δύο ή περισσότερων ομάδων. Αντίστοιχα με την ελεύθερη ομάδα, το ελεύθερο γινόμενο ορίζεται έτσι ώστε να συνδυάζει δύο ομάδες επιβάλλοντας όσο το δυνατόν λιγότερους περιορισμούς στη νέα ομάδα.

Αφού μελετούμε από τη συνδυαστική σκοπιά, ο ορισμός που θα δώσουμε θα είναι μέσω παραστάσεων.

Ορισμός 1.26 (ελεύθερο γινόμενο)**.** Έστω A, B δύο ομάδες με παραστάσεις

$$A = \langle x_1,\, x_2, \dots \,|\, \lambda_1,\, \lambda_2 \dots \rangle \text{ και } B = \langle y_1,\, y_2 \dots \,|\, \mu_1,\, \mu_2, \dots \rangle.$$

Ονομάζουμε **ελεύθερο γινόμενο** των A και B, και το συμβολίζουμε με $A * B$, την ομάδα με παράσταση

$$\langle x_1,\, x_2, \dots,\, y_1,\, y_2, \dots \,|\, \lambda_1,\, \lambda_2, \dots,\, \mu_1,\, \mu_2, \dots \rangle$$

Οι A, B ονομάζονται *παράγοντες* του ελεύθερου γινομένου.

Παρατήρηση. Στον ορισμό που δώσαμε, οι σχέσεις που έχει το ελεύθερο γινόμενο *δεν* συσχετίζουν με κανέναν τρόπο τα x_i με τα y_j. Πιο συγκεκριμένα, θα υπάρχουν σχέσεις της μορφής $x_1 \cdot x_2 = 1$ αλλά δεν θα υπάρχουν σχέσεις της μορφής $x_1 \cdot y_2 = 1$. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούμε την εξής γραφή για τις σχέσεις $\lambda_1(x_1,\, x_2, \dots), \dots, \mu_1(y_1,\, y_2, \dots)$ για να είμαστε πιο σαφείς αλλά οι συμβολισμοί θα γίνονταν αρκετά πιο πολύπλοκοι.

Θεώρημα 1.27. *Το ελεύθερο γινόμενο των A και B είναι ομάδα, περιέχει υποομάδες $\bar{A}, \bar{B}$ ισόμορφες με τις A και B, παράγεται από αυτές και ισχύει ότι $\bar{A} \cap \bar{B} = 1$.*

Απόδειξη. Είναι άμεσο ότι το $A * B$ είναι ομάδα. Ορίζουμε συνολοθεωρητικές απεικονίσεις $f : \{x_1,\, x_2, \dots\} \to A * B, g : \{y_1,\, y_2, \dots\} \to A * B$ με $f(x_i) = x_i$, $g(y_j) = y_j$ για κάθε i, j. Θα συμβολίζουμε τις υποομάδες $\langle\langle \lambda_1,\, \lambda_2 \dots \rangle\rangle$, $\langle\langle \mu_1,\, \mu_2, \dots \rangle\rangle$ και $\langle\langle \lambda_1,\, \lambda_2,\, \dots,\, \mu_1,\, \mu_2,\, \dots \rangle\rangle$ των A, B και $A * B$ με N_A, N_B και M αντίστοιχα. Λόγω του ορισμού του ελεύθερου γινομένου, είναι σαφές ότι θα ισχύει

$$f(\lambda_i) := f(x_1)^{\epsilon_1} \cdots f(x_n)^{\epsilon_n} = 1,$$

εφόσον $\lambda_i = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$, για κάθε i. Από το θεώρημα von Dyck, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi_A : \langle x_1,\, x_2, \dots \,|\, \lambda_1,\, \lambda_2, \dots \rangle \to A * B$ ώστε $\phi_A(x_i N_A) = x_i M$.

$$\begin{tikzcd}
\{x_1,\, x_2, \dots\} \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[dl, dotted, "\phi_A"] \\
A * B &
\end{tikzcd}$$

Ανάλογα, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi_B : \langle y_1, y_2, \dots | \mu_1, \mu_2, \dots \rangle \to A * B$ ώστε $\phi_B(y_j N_B) = y_j M$. Έστω $\bar{A} = \operatorname{Im} \phi_A$, $\bar{B} = \operatorname{Im} \phi_B$. Το ελεύθερο γινόμενο παράγεται από τα στοιχεία x_i, y_j τα οποία περιέχονται στις υποομάδες $\bar{A}$, $\bar{B}$, άρα είναι σαφές ότι παράγεται από αυτές.

Χρησιμοποιώντας της αντίστροφη διαδικασία, ορίζουμε απεικονίσεις

$$f' : \{x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots\} \to A \text{ και } g' : \{x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots\} \to B$$

με

$$f'(x_i) = x_i N_A,\ f'(y_i) = N_A,\ g'(x_i) = N_B,\ g'(y_i) = y_i N_B.$$

$$\begin{tikzcd}
 & \{x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots\} \arrow[d, "\iota'"] \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\
A & A * B \arrow[l, dotted, bend left, "\psi_A"] \arrow[r, dotted, bend right, "\psi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Αν λ_i, μ_j είναι κάποιες από τις σχέσεις τότε είναι σαφές ότι $f'(\lambda_i) = f'(\mu_j) = 1$ και ανάλογα για την g'. Μπορούμε να εφαρμόσουμε λοιπόν το θεώρημα von Dyck, λόγω του οποίου υπάρχουν μοναδικοί ομομορφισμοί ψ_A και ψ_B, όπως στο σχήμα.

Για τους ψ_A, ψ_B ισχύει ότι $\psi_A(x_i M) = x_i N_A, \psi_A(y_j M) = N_A$ και ανάλογα για τον ψ_B. Αν θεωρήσουμε τις συνθέσεις $\phi_A \circ (\psi_A|_{\bar{A}}) : \bar{A} \to A * B$, $(\psi_A|_{\bar{A}}) \circ \phi_A : \bar{A} \to A * B$ παρατηρούμε ότι

$$\phi_A \circ \psi_A(x_i M) = \phi_A(x_i N_A) = x_i M.$$

Δηλαδή η σύνθεση $\phi_A \circ \psi_A|_{\bar{A}}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση και η εικόνα της είναι το $\bar{A}$, δηλαδή η $\phi_A \circ \psi_A|_{\bar{A}}$ είναι η $1_{\bar{A}}$. Ανάλογα,

$$\psi_A|_{\bar{A}} \circ \phi_A(x_i N_A) = \psi_A|_{\bar{A}}(x_i M) = x_i N_A$$

το οποίο σημαίνει ότι οι απεικονίσεις ϕ_A, $\psi_A|_{\bar{A}}$ είναι ισομορφισμοί και $A \simeq \bar{A}$. Ανάλογα, οι ϕ_B, $\psi_B|_{\bar{B}}$ είναι ισομορφισμοί και $B \simeq \bar{B}$.

Τέλος, αν $g \in \bar{A} \cap \bar{B}$ τότε $\psi_A|_{\bar{A}}(g) = N_A$ αφού $g \in \bar{B}$ και η $\psi_A|_{\bar{A}}$ είναι 1-1 στο $\bar{A}$, άρα $g = 1$ αφού $g \in \bar{A}$. $\square$

Λόγω του προηγούμενου θεωρήματος, μπορούμε στο εξής να ταυτίζουμε τις υποομάδες $\bar{A}$ και $\bar{B}$ του ελεύθερου γινομένου με τις A και B αντίστοιχα.

Παρατήρηση. Η συνδυαστική οπτική που είδαμε μας βοηθάει να έχουμε καλύτερη αντίληψη των αντικειμένων που ορίσαμε. Για παράδειγμα, αν οι ομάδες A, B του ελευθέρου γινομένου είναι ελεύθερες (δηλαδή έχουν παραστάσεις χωρίς σχέσεις· $A = \langle x_1, x_2, \ldots | \emptyset \rangle$, $B = \langle y_1, y_2, \ldots | \emptyset \rangle$), τότε το ελεύθερο γινόμενό τους είναι η ομάδα ομάδα με παράσταση $\langle x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots | \emptyset \rangle$ η οποία δεν είναι τίποτε άλλο από την ελεύθερη ομάδα $F(X \cup Y)$.

Κατ' αναλογία με τις ελεύθερες ομάδες, τα στοιχεία του ελεύθερου γινομένου μπορούν να γραφούν και αυτά με μοναδικό τρόπο σε μία "καλή" μορφή. Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.28 (ανηγμένη ακολουθία)**.** Έστω $A*B$ ένα ελεύθερο γινόμενο. Μία ακολουθία στοιχείων $g_1, g_2, \ldots g_n$ του $A*B$ ονομάζεται **ανηγμένη** αν ικανοποιεί τα εξής·

1. κάθε g_i ανήκει αποκλειστικά είτε στο A, είτε στο B,
2. κάθε g_i είναι διαφορετικό από 1 και
3. διαδοχικά στοιχεία, g_i, g_{i+1}, δεν βρίσκονται στον ίδιο παράγοντα, για κάθε $i = 1, \ldots n-1$

Συμβατικά δεχόμαστε και την περίπτωση $n = 0$, δηλαδή και η κενή λέξη είναι ανηγμένη.

Στις ελεύθερες ομάδες, η γραφή κάθε στοιχείου σε ανηγμένη μορφή με μοναδικό τρόπο ήρθε φυσιολογικά, λόγω της κατασκευής της ελεύθερης ομάδας που παραθέσαμε. Εδώ η κατάσταση διαφέρει και πρέπει να αποδείξουμε τη γραφή αυτή.

Θεώρημα 1.29. *Κάθε στοιχείο g ενός ελεύθερου γινομένου $A * B$ γράφεται μοναδικά στη μορφή*

$$g = g_1 g_2 \cdots g_n,\ n \geq 0$$

όπου η ακολουθία $g_1, g_2, \ldots, g_n$ είναι ανηγμένη.

Απόδειξη. Εξ' ορισμού, το ελεύθερο γινόμενο παράγεται από τους γεννήτορες των A, B. Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε $g \in A * B$ γράφεται στη μορφή

$$h_1 h_2 \cdots h_r$$

όπου $h_i \in A$ ή B. Η γραφή αυτή δεν είναι απαραίτητα μοναδική, γι' αυτό το λόγο, από όλες τις γραφές αυτής της μορφής του g, επιλέγουμε μία με το

ελάχιστο δυνατό r. Παρατηρούμε τώρα ότι η ακολουθία $h_1, h_2, \ldots, h_r$ είναι σε ανηγμένη μορφη αφού, αν κάποιο h_i είναι ίσο με 1 τότε η λέξη $h_1 \cdots h_{i-1} \cdot h_{i+1} \cdot h_r$ έχει λιγότερους από r όρους. Ανάλογα, αν κάποια διαδοχικά στοιχεία $h_i h_{i+1}$ ανήκουν στον ίδιο παράγοντα τότε το στοιχείο $h_1 \cdots (h_i h_{i+1}) \cdot h_r$ έχει επίσης λιγότερους από r όρους.

Άρα είδαμε ότι κάθε μη τετριμμένο στοιχείο γράφεται στη ζητούμενη μορφή και μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα της γραφής. Ο στόχος μας είναι να ορίσουμε μία διαδικασία αναγωγής όπως στις ελεύθερες ομάδες και να δείξουμε ότι κάθε λέξη επί των $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ανάγεται σε μία μοναδική ανηγμένη λέξη στο $A * B$. Λόγω των πολλών τεχνικών λεπτομερειών που περιλαμβάνει αυτή η απόδειξη, δεν κρίθηκε σκόπιμο να την συμπεριλάβουμε. □

Παρατηρήσεις. 1. Το προηγούμενο θεώρημα μας επιτρέπει να εντάξουμε την έννοια του μήκους μιας λέξης στο περιβάλλον των ελεύθερων γινομένων. Συγκεκριμένα, αν $A*B$ είναι ένα ελεύθερο γινόμενο και $g = g_1 \cdots g_n$ είναι ένα στοιχείο σε ανηγμένη μορφή, τότε ονομάζουμε **μήκος** του g, και το συμβολίζουμε με $|g|$, τον αριθμό n.

2. Στην περιγραφή μας ως τώρα, έχουμε περιγράψει ελεύθερα γινόμενα μόνο με δύο παράγοντες. Η γενίκευση όμως στους περισσότερους παράγοντες είναι άμεση, λόγω του ορισμού που δώσαμε. Για λόγους απλότητας λοιπόν, στο εξής θα συνεχίσουμε να μιλάμε για ελεύθερα γινόμενα με δύο παράγοντες.

3. Τα ελεύθερα γινόμενα, όπως θα πρέπει να είναι εμφανές, αποτελούν γενίκευση της έννοιας της ελεύθερης ομάδας. Είδαμε στην παρατήρηση μετά το θεώρημα 1.27 ότι το ελεύθερο γινόμενο δύο ελεύθερων ομάδων είναι ελεύθερη ομάδα. Ισχύει όμως και το εξής· κάθε ομάδα επί ενός συνόλου X είναι ελεύθερο γινόμενο. Πράγματι, αν $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ θεωρούμε τις ελεύθερες ομάδες $F(x_1), F(x_2), \ldots$ και το ελεύθερο γινόμενό τους $*_{x_i \in X} F(x_i)$. Αυτό το ελεύθερο γινόμενο είναι σαφές ότι είναι η ελεύθερη ομάδα $F(X)$.

   Σε αυτήν την περίπτωση όμως, η έννοια του μήκους ενός στοιχείου του ελεύθερου γινομένου *δεν* συμπίπτει με την έννοια του μήκους ενός στοιχείου της ελεύθερης ομάδας. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την $F_2 = F(a, b)$ ως το ελεύθερο γινόμενο $F(a) * F(b)$ τότε, μήκος του στοιχείου $a^2 b^{-5}$ είναι ίσο με

   - επτά ως στοιχείο της $F(a, b)$,

- δύο ως στοιχείο της $F(a) * F(b)$.

Προχωρούμε τώρα στη διατύπωση διάφορων ορισμών και προτάσεων που αφορούν τα ελεύθερα γινόμενα.

Πρόταση 1.30. *Κάθε ελεύθερο γινόμενο $A * B$ με μη τετριμμένους παράγοντες περιέχει στοιχεία άπειρης τάξης.*

Απόδειξη. Έστω $a \in A \backslash 1$, $b \in B \backslash 1$. Το στοιχείο $a \cdot b$ βρίσκεται σε ανηγμένη μορφή και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$(ab)^n = ab \cdot ab \cdots ab$$

το οποίο είναι διαφορετικό από 1 αφού το $ab \cdot ab \cdots ab$ είναι σε ανηγμένη μορφή και έχει μήκος μεγαλύτερο από 1. □

Πρόταση 1.31. *Έστω ένα ελεύθερο γινόμενο $A * B$ με A, $B \neq 1$. Τότε το κέντρο του $A * B$ είναι τετριμμένο.*

Απόδειξη. Έστω g ένα στοιχείο του κέντρου και έστω η ανηγμένη του μορφή

$$g = g_1 \cdots g_n$$

Αν $g \neq 1$ θα είναι $n \geq 1$ και το g_n θα ανήκει είτε στο A, είτε στο B. Έστω ότι ανήκει στο A. Αφού $B \neq 1$ υπάρχει $b \in B$, $b \neq 1$. Αφού το g ανήκει στο κέντρο θα ισχύει ότι $gb = bg$, δηλαδή,

$$g_1 \cdots g_n \cdot b = b \cdot g_1 \cdots g_n$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, λόγω της επιλογής του b, η λέξη στο αριστερό μέλος είναι σε ανηγμένη μορφή. Διακρίνουμε λοιπόν δύο περιπτώσεις· αν η λέξη στο δεξιό μέλος είναι σε ανηγμένη μορφή τότε είναι άτοπο λόγω της μοναδικότητας της γραφής σε ανηγμένη μορφή. Αν η λέξη στο δεξιό μέλος δεν είναι σε ανηγμένη μορφή, τότε το g_1 ανήκει στον ίδιο παράγοντα με το b, δηλαδή στο B και άρα

$$g_1 \cdots g_n \cdot b = (b \cdot g_1) \cdot g_2 \cdots g_n$$

Αυτό είναι πάλι άτοπο αφού η λέξη στο δεξιό μέλος είναι ανηγμένη και έχει μήκος $n+1$ και η λέξη στο δεξιό μέλος είναι ανηγμένη και έχει μήκος n. □

Μία άλλη ιδιότητα που έχουν τα ελεύθερα γινόμενα και επεκτείνει την ανάλογη ιδιότητα των ελεύθερων ομάδων είναι η *καθολική ιδιότητα*.

Θεώρημα 1.32 (καθολική ιδιότητα). *Έστω $\phi_A : A \to A * B$, $\phi_B : B \to A * B$ οι εμφυτεύσεις των A, B στο ελεύθερο γινόμενο. Αν G είναι μία ομάδα και $f_1 : A \to G$, $f_2 : B \to G$ ομομορφισμοί, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\phi : A * B \to G$ ώστε*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\phi_A"] \arrow[dr, "f_1"'] & A * B \arrow[d, dotted, "\phi"] & B \arrow[l, hook', "\phi_B"'] \arrow[dl, "f_2"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

$$\phi \circ \phi_A = f_1,\ \phi \circ \phi_B = f_2$$

Απόδειξη. Σε αυτήν την απόδειξη θα φανεί η αξία των προηγούμενων θεωρημάτων που αποδείξαμε και συγκεκριμένα του θεωρήματος von Dyck. Αρχικά θεωρούμε τις παραστάσεις των A και B να είναι $\langle a_1, a_2, \dots \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle$ και $\langle b_1, b_2, \dots \mid \mu_1, \mu_2, \dots \rangle$. Θεωρούμε απεικόνιση $f : \{a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots\} \to G$ με $f(a_i) = f_1(a_i)$ και $f(b_i) = f_2(b_i)$. Για την f ισχύει ότι $f(\lambda_i) = f(\mu_j) = 1$ για κάθε i, j· αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι f_1, f_2 είναι ομομορφισμοί (οπότε $f_1(\lambda_i) = f_2(\mu_j) = 1$) και στο γεγονός ότι η f ταυτίζεται με τις f_1, f_2 στα αντίστοιχα στοιχεία.

$$\begin{tikzcd} \{a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots\} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"] & \langle a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \mu_1, \mu_2 \dots \rangle \arrow[dl, dotted, bend left, "\phi"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Από το θεώρημα von Dyck, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\phi : \langle a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \mu_1, \mu_2 \dots \rangle = A * B \to G$$

έτσι ώστε

$$\phi(a_i) = f_1(a_i) \text{ και } \phi(b_j) = f_2(b_j)$$

για κάθε i, j. Αυτό ήταν ακριβώς το ζητούμενο. □

1.1.4 Ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα

Η μελέτη των ελεύθερων γινομένων με αμάλγαμα ξεκίνησε από την αλγεβρική τοπολογία. Στη σύντομη ζωή του, ο Otto Schreier εισήγαγε πρώτος την έννοια εργαζόμενος επί της θεωρίας κόμβων (knot theory) το 1927. Η δημοσίευσή του με τίτλο «Die untergruppen der freien gruppen» (οι υποομάδες των ελεύθερων ομάδων) [15], χαρακτηρίστηκε ως μία από τις σημαντικότερες στη συνδυαστική θεωρία ομάδων. Λίγο αργότερα, η απόδειξη του θεωρήματος Van Kampen έδειξε τη σημασία της νέας έννοιας.

Στα επόμενα, θα δούμε τον συνδυαστικό ορισμό, καθώς και τα βασικά εργαλεία των ελεύθερων γινομένων με αμάλγαμα. Θα σταθούμε λίγο περισσότερο σε αυτά, μιας και αποτελούν το βασικό αντικείμενο της μετέπειτα μελέτης μας. Πριν δώσουμε τον ορισμό των ελευθέρων γινομένων με αμάλγαμα θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις.

Όταν ορίσαμε το ελεύθερο γινόμενο δύο ομάδων A και B με παραστάσεις $A = \langle a_1, a_2, \dots | \, \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle$ και $B = \langle b_1, b_2, \dots | \mu_1, \mu_2 \dots \rangle$ να είναι η ομάδα με παράσταση

$$\langle a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots | \, \lambda_1, \lambda_2 \dots, \mu_1, \mu_2, \dots \rangle,$$

είπαμε ότι, στις σχέσεις τις νέας ομάδας, τα στοιχεία a_i δεν σχετίζονται με τα b_j. "Κολλάμε" δηλαδή τις ομάδες με τον απλούστερο τρόπο ώστε να διατηρούν τις ιδιότητές τους.

Για παράδειγμα, το ελεύθερο γινόμενο των $\langle a|a^4\rangle$, $\langle b|b^{12}\rangle$ είναι η ομάδα $\langle a, b|a^4, b^{12}\rangle$. Αν όμως είχαμε μία άλλη σχέση η ο οποία θα συσχέτιζε το a με το b, θα ήταν η νέα ομάδα κάποιο ελεύθερο γινόμενο;

Μπορούμε να θεωρήσουμε την παράσταση $\langle a, b|a^4, b^{12}, a^2b^{-6}\rangle$. Είναι ένα ελεύθερο γινόμενο; Θα δούμε ότι *δεν* είναι χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.31. Θα δείξουμε δηλαδή ότι έχει μη τετριμμένο κέντρο.

Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι το στοιχείο a^2 ανήκει στο κέντρο της ομάδας αφού μετατίθεται με τους γεννήτορες. Πιο συγκεκριμένα, $b \cdot a^2 = b \cdot b^6 = b^7 = b^6 \cdot b = a^2 \cdot b$. Επιπλέον, $a^2 \neq 1$. Για να το δούμε αυτό, μπορούμε να θεωρήσουμε τον ομομορφισμό

$$\phi : F(a, b) \to \langle g|g^{24}\rangle, \, \phi(a) = g^6, \, \phi(b) = g^2$$

όπου με $F(a, b)$ συμβολίζουμε την ελεύθερη ομάδα που παράγεται από δύο στοιχεία. Παρατηρούμε ότι $\phi(a^4) = g^{24} = 1 = \phi(b^{12})$. Επιπλέον, $\phi(a^2 \cdot b^{-6}) = g^{12} \cdot g^{-12} = 1$. Άρα επάγεται ομομορφισμός $\bar{\phi} : \langle a, b|a^4, b^{12}, a^2 = b^6\rangle \to \langle g|g^{24}\rangle$. Αν το a^2 ήταν ίσο με 1 τότε θα ήταν και $\bar{\phi}(a^2) = 1 \iff g^{12} = 1$. Αυτό όμως είναι άτοπο.

Είδαμε λοιπόν ότι η ομάδα με παράστασταση $\langle a, b | a^4, b^{12}, a^2 = b^6 \rangle$ *δεν* είναι ελεύθερο γινόμενο.

Ορισμός 1.33 (ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα)**.** Έστω δύο ομάδες A και B με παραστάσεις $\langle a_1, a_2, \ldots | \lambda_1, \lambda_2, \ldots \rangle$ και $\langle b_1, b_2, \ldots | \mu_1, \mu_2, \ldots \rangle$. Έστω $U \subseteq A$, $V \subseteq B$ υποομάδες οι οποίες είναι ισόμορφες μέσω μιας απεικόνισης ϕ. Ονομάζουμε **ελεύθερο γινόμενο των A και B με αμαλγαματοποιημένες υποομάδες τις U και V** την ομάδα με παράσταση

$$\langle a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots | \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots, u\phi(u)^{-1}, u \in U \rangle$$

Για λόγους συντομίας θα λέμε απλώς «ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα» ή ενίοτε μόνο «αμάλγαμα». Θα συμβολίζουμε ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα όπως αυτό στον ορισμό με $A *_{U=V} B$. Οι ομάδες A και B ονομάζονται παράγοντες και οι U και V αμαλγαματοποιημένες υποομάδες.

Η κεντρική ιδέα πίσω από τον ορισμό είναι ότι επιπλέον, πέρα από τις σχέσεις που προϋπάρχουν στις ομάδες, θεωρούμε και νέες σχέσεις οι οποίες είναι μεταξύ των στοιχείων των δύο ομάδων. Υπό αυτό το πλαίσιο είναι σαφές ότι τα ελεύθερα γινόμενα αποτελούν ειδική περίπτωση των ελεύθερων γινομένων με αμάλγαμα. Συνεπώς, το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα εξαρτάται από τους παράγοντες, τις αμαλγαματοποιημένες υποομάδες και την απεικόνιση που συνδέει τις τελευταίες. Ειδικότερα, θα δούμε στο παράδειγμα 1.43 ότι η απεικόνιση ϕ παίζει ενεργό ρόλο στο σχηματισμό του αμαλγάματος, αφού διαφορετικές απεικονίσεις οδηγούν σε διαφορετικές ομάδες.

Παράδειγμα 1.34. Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι η ομάδα G με παράσταση $\langle a, b | a^4, b^{12}, a^2b^{-6} \rangle$ δεν είναι ελεύθερο γινόμενο. Θα δούμε ότι είναι ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα.

Έστω ότι U είναι η υποομάδα της $A = \langle a | a^4 \rangle$ που παράγεται από το a^2 και V η υποομάδα της $B = \langle b | b^{12} \rangle$ που παράγεται από το b^6.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : U \to V$, $\phi(a^2) = b^6$. Η ϕ είναι ισομορφισμός αφού είναι μη τετριμμένος ομομορφισμός μεταξύ υποομάδων όπου κάθε μία από τις οποίες έχει ακριβώς δύο στοιχεία. Το αμάλγαμα που προκύπτει θεωρώντας το ελεύθερο γινόμενο των A, B και με αμαλγαματοποιημένες τις U, V μέσω της ϕ έχει την παράσταση

$$\langle a, b | a^4, b^{12}, a^2b^{-6} \rangle$$

Παρατήρηση. Λόγω του ορισμού του αμαλγάματος, είναι εύκολο να δούμε ότι η αναφορά στην υποομάδα V του παράγοντα B είναι περιττή. Πιο συγκεκριμένα, θα αρκούσε να θεωρήσουμε τον μονομορφισμό $\phi : U \to B$ αφού

τότε η V είναι ακριβώς η εικόνα $\phi(U)$. Για τον λόγο αυτό, στα επόμενα θα αναφερόμαστε στην υποομάδα U του παράγοντα A και στον μονομορφισμό $\phi : U \to B$, παραλείποντας την ομάδα V. Επίσης στην περίπτωση αυτή θα συμβολίζουμε το αμάλγαμα με $A *_U B$.

Διατυπώνουμε τώρα κάποιους ορισμούς και κάποιες προτάσεις που θα σχηματίσουν την αντίληψή μας για τα ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα. Ο πρώτος ορισμός γενικεύει την ανηγμένη μορφή που συναντήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Στη συνέχεια θα μιλήσουμε για μία άλλη γραφή που χρησιμοποιείται στα ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα, την γραφή σε κανονική μορφή. Η απόδειξη των δυνατοτήτων της κανονικής μορφής θα μας επιτρέψει να δείξουμε ότι οι ομάδες A και B εμφυτεύονται στο αμάλγαμα.

Αρχικά θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό $\pi : A * B \to A *_U B$. Λόγω της ανηγμένης μορφής που αποδείξαμε για το ελεύθερο γινόμενο, κάθε στοιχείο $g \in A * B$ γράφεται στη μορφή $g_1 g_2 \dots g_n$ όπου η ακολουθία $g_1, g_2, \dots, g_n$ είναι ανηγμένη. Συνεπώς, για κάθε στοιχείο $x \in A *_U B$ υπάρχει (τουλάχιστον) μία ανηγμένη ακολουθία $g_1, \dots, g_n$ του $A * B$ ώστε $x = \pi(g_1) \cdots \pi(g_n)$. Για λόγους ευκολίας, στα επόμενα θα γράφουμε απλώς $x = g_1 \cdots g_n$ αντί για $\pi(g_1) \cdots \pi(g_n)$.

Επεκτείνουμε τώρα τον ορισμό της ανηγμένης μορφής στο ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα.

Ορισμός 1.35 (ανηγμένη μορφή για αμαλγάματα)**.** Έστω $A *_U B$ ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα. Μία ακολουθία στοιχείων της μορφής

$$g_1, g_2, \dots, g_n,\ n \geq 1$$

ονομάζεται **ανηγμένη** (στο αμάλγαμα) αν κάθε g_i ανήκει είτε στο $A \backslash U$, είτε στο $B \backslash U$ και διαδοχικά στοιχεία, g_i, g_{i+1}, ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες για κάθε $i = 1, \dots, n-1$.

Η ανηγμένη μορφή για αμαλγάματα δεν θα μας χρειαστεί άμεσα καθώς για την απόδειξη της μοναδικότητας της γραφής σε κανονική μορφή μας αρκεί η ανηγμένη μορφή για ελεύθερα γινόμενα. Θα δείξουμε όμως ότι η κανονική και η ανηγμένη μορφή συνδέονται και θα ορίσουμε το συλλαβικό μήκος που θα είναι χρήσιμο στο επόμενο κεφάλαιο. Προχωρούμε τώρα στον ορισμό της κανονικής μορφής.

Επιλέγουμε σύστηματα αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων $T_U, T_{\phi(U)}$ της U και της $\phi(U)$ στις A και B αντίστοιχα και έστω ότι $T_U = \{\overline{a_0} = 1_A, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots\}$,

$T_{\phi(U)} = \{\overline{b_0} = 1_B, \overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots\}$. Υπό αυτό το πρίσμα, κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$x = u\overline{a_i},\ y = \phi(u')\overline{b_j}$$

για κάποια $u, u' \in U$.

Ορισμός 1.36 (U κανονική μορφή)**.** Έστω ένα ελεύθερο γινόμενο $A * B$, U μία υποομάδα της A, $\phi : A \to B$ ένας μονομορφισμός και $T_U, T_{\phi(U)}$ τα σύνολα αντιπροσώπων όπως πριν. Μία ακολουθία $(u, x_1, \dots, x_n)$ στοιχείων του ελεύθερου γινομένου λέμε ότι είναι σε $\boldsymbol{U}$ **κανονική μορφή** αν·

1. $u \in U$,
2. κάθε x_i ανήκει είτε στο T_U, είτε στο $T_{\phi(U)}$ και είναι διαφορετικό από 1,
3. διαδοχικά στοιχεία x_i, x_{i+1} ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα αντιπροσώπων.

Ασφαλώς, με ανάλογο τρόπο ορίζεται η $\phi(U)$ κανονική μορφή.

Θεώρημα 1.37. *Έστω $A *_U B$ ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα. Κάθε $x \in A *_U B$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $x = ux_1 \cdots x_n$ όπου η ακολουθία $(u, x_1, \dots, x_n)$ βρίσκεται σε U κανονική μορφή.*

Παρατήρηση. Θα πρέπει να είναι σαφές ότι στην πραγματικότητα εννοούμε ότι $x = \pi(u)\pi(x_1) \cdots \pi(x_n)$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα την δυνατότητα γραφής κάθε στοιχείου στη ζητούμενη μορφή. Έστω $x \in A *_U B$. Τότε, υπάρχει, τουλάχιστον μία ακολουθία στοιχείων του ελεύθερου γινομένου $y_1, y_2, \dots, y_n$ η οποία βρίσκεται σε ανηγμένη μορφή (στο ελεύθερο γινόμενο) ώστε

$$x = y_1 \cdot y_2 \cdots y_n$$

Επιλέγουμε μία τέτοια ακολουθία ώστε το n να είναι το μικρότερο δυνατό. Η απόδειξη είναι συνδυαστική. Παρατηρούμε αρχικά ότι, αν $n = 1$, τότε $x = y_1$ για κάποιο $y_1 \in A * B$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις·

- Αν $y_1 \in U$ τότε θεωρούμε την ακολουθία με ένα στοιχείο, (y_1), η οποία είναι μια U κανονική μορφή. Αν $y_1 \in \phi(U)$, δηλαδή $y_1 = \phi(u_1)$, τότε χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι, αν $u \in U$, τότε $\pi(u\phi(u)^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \pi(u) = \pi(\phi(u))$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_1 = \pi(y_1) = \pi(\phi(u_1)) = \pi(u_1)$ και η ακολουθία (u_1) είναι μία U κανονική μορφή.

- Αν $y_1 \notin U$ και $y_1 \notin \phi(U)$ τότε, είτε $y_1 \in A \backslash U$, είτε $y_1 \in B \backslash \phi(U)$. Έστω ότι $y_1 \in A$. Τότε $y_1 = u\overline{a_i}$, όπου $\overline{a_i} \neq 1$, και η ακολουθία $(u, \overline{a_i})$ είναι μία U κανονική μορφή ώστε $x = \pi(u\overline{a_i}) := u\overline{a_i}$.

Έστω τώρα ότι $n > 1$ και $x = y_1 \cdots y_n$. Παρατηρούμε τότε ότι κανένα από τα y_i δεν ανήκει στο U ή στο $\phi(U)$. Πράγματι, έστω ότι $y_i \in U$. Τότε $\pi(y_i) = \pi(\phi(y_i))$ και

$$x = y_1 \cdots \underbrace{y_i}_{\in U} \cdot \underbrace{y_{i+1}}_{\in B} \cdots y_n = y_1 \cdots \underbrace{(\phi(y_i)y_{i+1})}_{\in B} \cdots y_n$$

και το στοιχείο αυτό έχει μικρότερο "μήκος" από n, το οποίο είναι άτοπο.

Έχουμε λοιπόν ότι $x = y_1 \cdots y_k$ και $y_i \notin U, \phi(U)$ για κάθε i. Θα πρέπει να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις σχετικά με το y_k. Ενδεικτικά, έστω ότι $y_k \in A$. Τότε $y_k = u \cdot \overline{a_{i_k}}$, όπου $\overline{a_{i_k}} \neq 1$, και

$$x = y_1 \cdots y_k = y_1 \cdots y_{k-1} \cdot (u \cdot \overline{a_{i_k}}) = y_1 \cdots (y_{k-1} \cdot u) \cdot \overline{a_{i_k}}.$$

Επιπλέον, $\pi(u) = \pi(\phi(u))$ και, συνεπώς, $y_{k-1} \cdot u = y_{k-1} \cdot \phi(u) \in B$. Άρα, $y_{k-1} \cdot \phi(u) = \phi(u') \cdot \overline{b_{i_{k-1}}}$ και $\overline{b_{i_{k-1}}} \neq 1$. Οπότε, $x = y_1 \cdots \phi(u')\overline{b_{i_{k-1}}}\overline{a_{i_k}}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά καταλήγουμε στη ζητούμενη γραφή.

Ερχόμαστε τώρα στη μοναδικότητα. Έστω K_U το σύνολο των U κανονικών μορφών και $K_{\phi(U)}$ το σύνολο των $\phi(U)$ κανονικών μορφών. Ορίζουμε μία απεικόνιση $f : K_U \to K_{\phi(U)}$ με

$$f(u, x_1, \ldots, x_n) = (\phi(u), x_1, \ldots, x_n)$$

Η f είναι καλά ορισμένη. Είναι $1-1$ και επί αφού η ϕ είναι $1-1$ και επί (στο $\phi(U)$).

Ορίζουμε δράση της A στο σύνολο K_U ως εξής· έστω $a \in A$ και $k = (u, x_1, \ldots, x_n)$ μία U κανονική μορφή. Θέτουμε

$$a * k = \begin{cases} (au, x_1, \ldots, x_n) & \text{αν } a \in U \\ (u', \overline{a_i}, x_1, \ldots, x_n) & \text{αν } a \notin U, x_1 \in B \text{ (όπου } au = u'\overline{a_i}) \\ (aux_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{αν } a \notin U, x_1 \in A, aux_1 \in U \\ (u', \overline{a_1}, x_2, \ldots, x_n) & \text{αν } a \notin U, x_1 \in A, aux_1 \notin U \text{ (όπου } aux_1 = u'\overline{a_i}) \end{cases}$$

Στην περίπτωση που $k = (u)$ θέτουμε

$$a * k = \begin{cases} (au) & \text{αν } a \in U \\ (u', \overline{a_i}) & \text{αν } a \notin U \text{ (όπου } au = u'\overline{a_i}) \end{cases}$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται η δράση της B στο σύνολο $K_{\phi(U)}$. Επεκτείνουμε την τελευταία δράση και στο σύνολο K_U θέτοντας $b *' k = f^{-1}(b * f(k))$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι έχουμε δράσεις από τα σύνολα A, B στο σύνολο K_U. Λόγω του θεωρήματος Cayley, μπορούμε να ταυτίσουμε τις δράσεις αυτές με ομομορφισμούς από τις A, B στην ομάδα συμμετριών του K_U. Λόγω της καθολικής ιδιότητας του ελεύθερου γινομένου, ορίζεται μοναδικός ομομορφισμός $\phi : A*B \to S_{K_U}$ ο οποίος επεκτείνει τους προηγούμενους ομομορφισμούς. Προφανώς, ο ομομορφισμός που βρήκαμε αντιστοιχίζεται σε δράση του $A * B$ στο K_U.

Ο στόχος μας είναι μέσω αυτής της δράσης να ορίσουμε δράση του αμαλγάματος $A*_U B$ στο K_U. Αν κοιτάξουμε πάλι τον ομομορφισμό $A*B \to S_{K_U}$, θα παρατηρήσουμε ότι οι ορίζουσες σχέσεις, $u\phi(u)^{-1}$, περιέχονται στον πυρήνα του.

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\rho_{u\phi(u)^{-1}} : K_U \to K_U$, η οποία είναι η εικόνα $\psi(u\phi(u)^{-1})$ και επάγεται από το θέωρημα Cayley, είναι η ταυτοτική. Έστω λοιπόν ένα στοιχείο $(u, x_1, \ldots, x_n)$ σε U κανονική μορφή. Είναι

$$\begin{aligned}
\rho_{u\phi(u)^{-1}}(u, x_1, \ldots, x_n) &= \rho_u \rho_{\phi(u)^{-1}}(u, x_1, \ldots, x_n) = \\
&= \rho_u(\phi(u)^{-1} *' (u, x_1, \ldots, x_n)) = \\
&= \rho_u(f^{-1}(\phi(u)^{-1} * f(u, x_1, \ldots, x_n))) = \\
&= \rho_u(f^{-1}(\phi(u)^{-1} * (\phi(u), x_1, \ldots, x_n))) = \\
&= \rho_u(f^{-1}(1, x_1, \ldots, x_n)) = \\
&= \rho_u(1, x_1, \ldots, x_n) = \\
&= u * (1, x_1, \ldots, x_n) = (u, x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, από το λήμμα 1.19, υπάρχει (μοναδικός) ομομορφισμός $A *_U B \to S_{K_U}$ που επάγεται από την προηγούμενη δράση.

Έστω τώρα ένα στοιχείο $g = ux_1 \cdots x_n$ όπου το $(u, x_1, \ldots, x_n)$ είναι σε U κανονική μορφή. Το g είναι ένα στοιχείο του αμαλγάματος, συνεπώς δρα επί του συνόλου K_U. Υπολογίζουμε τη δράση του g στο στοιχείο (1) του K_U. Είναι·

$$\begin{aligned}
g(1) &= ux_1 \cdots x_n(1) = ux_1 \cdots x_{n-1}(1, x_n) = \\
&= ux_1 \cdots x_{n-2}(1, x_{n-1}, x_n) = \cdots = u(1, x_1 \ldots, x_n) = (u, x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Δηλαδή η δράση του $ux_1 \cdots x_n$ στο (1) ισούται με $(u, x_1, \ldots, x_n)$. Αν λοιπόν το g δεν γραφόταν με μοναδικό τρόπο, θα ήταν άτοπο αφού, αν $g = (u', x'_1, \ldots, x'_m)$ τότε θα ήταν

$$g(1) = (u', x'_1, \ldots, x'_m) = (u, x_1, \ldots, x_n)$$

οπότε $m = n$ και $u' = u$, $x_1 = x'_1, \ldots, x'_m = x_n$. □

Η επόμενη πρόταση συνδέει την U κανονική μορφή με την ανηγμένη μορφή του ελεύθερου γινομένου με αμάλγαμα και μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια του συλλαβικού μήκους.

Πόρισμα. *Έστω $A *_U B$ ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα και έστω ένα στοιχείο του x. Υποθέτουμε ότι $x = g_1 \cdots g_n$, όπου η ακολουθία $g_1, \ldots, g_n$ είναι ανηγμένη (ως προς το αμάλγαμα) και ότι η U κανονική μορφή του είναι*

$$(u, x_1, \ldots, x_k)$$

Τότε $n = k$ και τα στοιχεία g_i, x_i ανήκουν στους ίδιους παράγοντες. Επιπλέον, αν κάποια g_i είναι αντιπρόσωποι των συμπλόκων στα οποία ανήκουν (δηλαδή $g_i \in T_U$ ή $T_{\phi(U)}$) τότε $x_i = g_i$.

Απόδειξη. Έστω ότι

$$x = g_1 \cdots g_n$$

Υποθέτουμε ότι $g_n \in A \backslash U$. Για να υπολογίσουμε την U κανονική μορφή του x, γράφουμε $g_n = u_n \overline{a_n}$ και $x = g_1 \cdots u_n y_n$ όπου $y_n = \overline{a_n}$. Στη συνέχεια γράφουμε $u_n = \phi(u_n)$ και $g_{n-1}\phi(u_n) = \phi(u_{n-1})\overline{b_{n-1}}$. Προχωρώντας κατ' αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στην U κανονική μορφή $(u, y_1, \ldots, y_n)$ και σε κάθε βήμα αντικαθίσταται ένα g_i με κάποιον αντιπρόσωπο. Μάλιστα, αφού $g_i \notin U \cup \phi(U)$, οι αντιπρόσωποι είναι διαφορετικοί από 1,και έχουμε ότι

$$x = uy_1 \cdots y_n$$

όπου η $(u, y_1, \ldots, y_n)$ είναι μία U κανονική μορφή. Από τη μοναδικότητα της γραφής σε U κανονική μορφή θα ισχύει ότι $n = k$ και τα αντίστοιχα στοιχεία g_i, x_i ανήκουν στους ίδιους παράγοντες. Τέλος, αν $g_i = \overline{a_n}$ για κάποιο $\bar{a_n} \in T_U$ ή αντίστοιχα για το $T_{\phi(U)}$, τότε θα είναι $g_i = u_i x_i$ με $u_i = 1$ και $x_i = \overline{a_n} = g_i$. Δηλαδή το ζητούμενο. □

Πόρισμα. *Έστω ένα ελεύθερο γινόμενο $G = A *_U B$ και ένα στοιχείο $g \in G$. Υποθέτουμε ότι $g = y_1 \cdots y_n$ ώστε η ακολουθία $y_1, \ldots, y_n$ να είναι ανηγμένη ως προς το αμάλγαμα και $n \geq 1$. Τότε $g \neq 1$.*

Απόδειξη. Άμεση από τα προηγούμενα. □

Συνεπώς, ένα στοιχείο του αμαλγάματος μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο σε ανηγμένη μορφή (ως προς το αμάλγαμα) αν και μόνο αν δεν ανήκει στο U. Ουσιαστικά η ανηγμένη μορφή διαφέρει από την U κανονική μορφή στη μοναδικότητα της γραφής, αλλά διατηρεί αναλλοίωτο το μήκος. Αυτό σημαίνει ότι αν ένα στοιχείο γράφεται με διαφορετικούς τρόπους σε ανηγμένη μορφή, οι γραφές αυτές θα έχουν το ίδιο μήκος. Λόγω αυτού, μπορούμε να δώσουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.38 (συλλαβικό μήκος)**.** Έστω ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $A *_U B$ και ένα στοιχείο του x. Ορίζουμε το **συλλαβικό μήκος** του x να είναι

- ίσο με μηδέν αν το x ανήκει στο U
- ίσο με n αν το x γράφεται σε ανηγμένη μορφή ως $g_1 \cdots g_n$.

Τα επόμενα θεωρήματα υποδεικνύουν τη σημασία της U κανονικής μορφής.

Θεώρημα 1.39. *Έστω $A = \langle a_1, a_2, \dots \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle$, $B = \langle b_1, b_2, \dots \mid \mu_1, \mu_2, \dots \rangle$, U μία υποομάδα της A, $\phi : U \to B$ ένας μονομορφισμός και*

$$G = \langle a_1, a_2 \dots, b_1, b_2, \dots \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots, u\phi(u)^{-1}, u \in U \rangle$$

το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα. Έστω A' και B' οι υποομάδες της G που παράγονται από τα $a_1, a_2, \dots$ και $b_1, b_2 \dots$ αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι $A \simeq A'$, $B \simeq B'$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $\overline{\iota_A} : \{a_1, a_2, \dots\} \to A *_U B$, $\overline{\iota_A}(a_i) = a_i$ και $\overline{\iota_B} : \{b_1, b_2, \dots\} \to A *_U B$, $\overline{\iota_B}(b_j) = b_j$. Λόγω του θεωρήματος von Dyck, οι δύο απεικονίσεις επεκτείνονται σε ομομορφισμούς $\iota_A : A \to A *_U B$, $\iota_B : B \to A *_U B$.

Δείχνουμε ότι $\operatorname{Im} \iota_A = A'$ και $\operatorname{Im} \iota_B = B'$. Τα σύνολα $\operatorname{Im} \iota_A$ και $\operatorname{Im} \iota_B$ περιέχουν τους γεννήτορες των A' και B' αντίστοιχα, συνεπώς $A' \subseteq \operatorname{Im} \iota_A$ και $B' \subseteq \operatorname{Im} \iota_B$. Έστω τώρα $y = \iota_A(x)$. Το x γράφεται στη μορφή $a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}$ και άρα

$$\iota_A(x) = \iota_A(a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n}) = \iota_A(a_{i_1}^{\epsilon_1}) \cdots \iota_A(a_{i_n}^{\epsilon_n}) = a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n} \in A'$$

άρα $\operatorname{Im} \iota_A \subseteq A'$ και άρα ισχύει η ισότητα. Ανάλογα, $\operatorname{Im} \iota_B = B'$.

Μένει να δείξουμε ότι οι ι_A, ι_B είναι $1-1$. Αν $x \in A$, τότε το $\iota_A(x)$ γράφεται σε U κανονική μορφή ως (x) (αν $x \in U$) ή $(u, \overline{a_i})$ (αν $x \notin U$ και $x = u\overline{a_i}$). Σε κάθε περίπτωση, το x είναι ίσο με το γινόμενο των όρων της κανονικής

μορφής του $\iota_A(x)$. Έστω ότι $\iota_A(y) = \iota_A(x)$ για κάποια $x, y \in A$. Από τη μοναδικότητα της γραφής σε U κανονική μορφή προκύπτει ότι οι U κανονικές μορφές των $\iota_A(x)$ και $\iota_A(y)$ θα είναι ίσες. Όπως είπαμε όμως, τα x, y είναι ίσα με το γινόμενο των όρων της κανονικής μορφής των $\iota_A(x), \iota_A(y)$. Άρα $x = y$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η ι_B είναι $1-1$. □

Λόγω του τελευταίου θεωρήματος, μπορούμε να ταυτίσουμε τις υποομάδες του αμαλγάματος που παράγονται από τα $a_1, a_2, \ldots$ και $b_1, b_2, \ldots$ με τις A και B αντίστοιχα. Μάλιστα, στα επόμενα θα συμβολίζουμε αυτές τις υποομάδες με A και B.

Θεώρημα 1.40. *Έστω $\pi : A * B \to A *_U B$ ο φυσικός επιμορφισμός και έστω ότι η A παράγεται από τα a_i και η B από τα b_i. Ισχύει ότι ο περιορισμός της π στην A (και στη B) είναι μονομορφισμός και $\operatorname{Im}\pi|_A \simeq A$, $\operatorname{Im}\pi|_B \simeq B$, και $\pi(A) \cap \pi(B) = \pi(U)$.*

Απόδειξη. Στο προηγούμενο θεώρημα ορίσαμε απεικονίσεις $\iota_A : A \to A *_U B$, $\iota_B : B \to A *_U B$. Λόγω της καθολικής ιδιότητας των ελεύθερων γινομένων, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi : A * B \to A *_U B$ ώστε $\phi(a_i) = a_i$ και $\phi(b_j) = b_j$. Ο φυσικός επιμορφισμός π ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες και λόγω της μοναδικότητας προκύπτει ότι $\pi = \phi$.

Συνεπώς μένει να δείξουμε ότι $\pi(A) \cap \pi(B) = \pi(U)$. Αν $u \in U$ είναι $\pi(A) \ni \pi(u) = \pi(\phi(u)) \in \pi(B)$. Άρα $\pi(U) \subseteq \pi(A) \cap \pi(B)$.

Έστω τώρα $y \in A *_U B$ ώστε $y = \pi(a) = \pi(b)$ για κάποια $a \in A$, $b \in B$. Αν $a \notin U$ τότε η U κανονική μορφή του $\pi(a)$ είναι η $(u, \overline{a_i})$ για κάποιο $a_i \in A$. Άρα, από τη μοναδικότητα της γραφής σε U κανονική μορφή, η U κανονική μορφή του b είναι αυτή, δηλαδή $b \in A$, άτοπο. □

Θεώρημα 1.41. *Έστω ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $A *_U B$. Ισχύει ότι το κέντρο του είναι*

$$Z(A *_U B) = Z(A) \cap U \cap Z(B)$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η τομή στο δεξιό μέλος περιέχεται στο κέντρο του αμαλγάματος. Έστω $x \in Z(A) \cap U \cap Z(B)$ και $g \in A *_U B$. Αν $g \in U$ τότε $xg = gx$ αφού $g \in U \subseteq A$ και $x \in Z(A)$. Αν $g \notin U$ τότε $g = g_1 \cdots g_n$ σε ανηγμένη μορφή όπου $g_i \in A \backslash U$ ή $B \backslash U$ οπότε

$$xg = xg_1 \cdots g_n = g_1 x \cdots g_n = g_1 \cdots x g_n = g_1 \cdots g_n x = gx$$

αφού $x \in Z(A) \cap Z(B)$.

Αντίστροφα τώρα, έστω $x \in Z(A *_U B)$ και θα δείξουμε ότι $x \in U$. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει οπότε το x γράφεται σε U κανονική μορφή ως $ux_1 \cdots x_n$ με $n \geq 1$. Έστω ένας αντιπρόσωπος x_{n+1} ο οποίος ανήκει σε διαφορετικό παράγοντα από το x_n. Θα ισχύει ότι $x_{n+1}g = gx_{n+1}$ και το $gx_{n+1} = ux_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1}$ είναι μία U κανονική μορφή, άρα το συλλαβικό του μήκος είναι $n+1$. Υπολογίζουμε τώρα το $x_{n+1}g = x_{n+1}u \cdots x_n$. Αν το x_{n+1} ανήκει στον ίδιο παράγοντα με το x_1 τότε έχουμε το στοιχείο $(x_{n+1}ux_1) \cdot x_2 \cdots x_n$ το οποίο γράφεται σε U κανονική μορφή ως $u'x_1' \cdot x_2 \cdots x_n$ δηλαδή έχει συλλαβικό μήκος n, το οποίο είναι άτοπο. Αν το x_{n+1} δεν ανήκει στον ίδιο παράγοντα με το x_1 τότε έχουμε το $(x_{n+1}u)x_1 \cdots x_n$ το οποίο γράφεται σε U κανονική μορφή ως $u'x_{n+1}'x_1 \cdots x_n$ και ισχύει ότι

$$u'x_{n+1}'x_1 \cdots x_n = ux_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1}$$

λόγω της μοναδικότητας της γραφής σε U κανονική μορφή θα ισχύει $x_n = x_{n+1}$, το οποίο όμως είναι άτοπο. Άρα αποδείχθηκε το θεώρημα. □

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει έναν τρόπο να αποδεικνύουμε ότι μία ομάδα έχει τη μορφή ελεύθερου γινομένου με αμάλγαμα.

Θεώρημα 1.42. *Έστω A, B υποομάδες μιας ομάδας G και $U = A \cap B$. Υποθέτουμε ότι η G παράγεται από τις A, B και έστω ότι υπάρχει ένας επιμορφισμός $\psi : A *_U B \to G$ που είναι η ταυτοτική απεικόνιση στα A, B. Ο ψ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν κάθε γινόμενο της μορφής $g_1 \cdots g_n$ στοιχείων της G, όπου $g_i \in A \backslash U$ ή $B \backslash U$ και $g_{i+1} \in B \backslash U$ ή $A \backslash U$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$, είναι διαφορετικό από 1.*

Απόδειξη. Έστω ότι κάθε γινόμενο όπως παραπάνω είναι μη τετριμμένο. Ο ψ είναι επιμορφισμός και αν $\psi(x) = 1_G$ για κάποιο $x \in A *_U B$ τότε, αν $x \notin U$, το x γράφεται σε ανηγμένη μορφή ως $g_1 \cdots g_n$ οπότε θα ισχύει ότι

$$\psi(x) = 1 \Leftrightarrow \psi(g_1 \cdots g_n) = 1 \Leftrightarrow \psi(g_1) \cdots \psi(g_n) = 1 \Leftrightarrow g_1 \cdots g_n = 1$$

το οποίο όμως είναι άτοπο από την υπόθεση.

Αντίστροφα, έστω ένα γινόμενο $g_1 \cdots g_n$ με τις προαναφερθείσες συνθήκες το οποίο είναι ίσο με 1 και υποθέτουμε ότι ο ψ είναι ισομορφισμός. Λόγω του ορισμού του ψ θα είναι $\psi(g_1 \cdots g_n) = g_1 \cdots g_n = 1 = \psi(1)$ άρα $g_1 \cdots g_n = 1$ στην $A *_U B$. Το στοιχείο αυτό όμως είναι σε ανηγμένη μορφή, και όπως έχουμε πει, τα στοιχεία που είναι σε ανηγμένη μορφή είναι μη τετριμμένα, άρα είναι άτοπο. Αποδείχθηκε λοιπόν το ζητούμενο. □

Πριν ολοκληρώσουμε την συνδυαστική μας περιήγηση, θα εξηγήσουμε κάτι που είχαμε αναφέρει στην αρχή της ενότητας. Είχαμε πει ότι, κατά τον σχηματισμό του αμαλγάματος, ο μονομορφισμός ϕ παίζει ενεργό ρόλο. Αυτό γίνεται φανερό στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.43. Έστω δύο ομάδες A, B ισόμορφες με την ομάδα συμμετριών του τετραγώνου

$$A = \langle \tau_1, \sigma_1 | \tau_1^4, \sigma_1^2, \tau_1\sigma_1\tau_1 = \sigma_1 \rangle$$

και

$$B = \langle \tau_2, \sigma_2 | \tau_2^4, \sigma_2^2, \tau_2\sigma_2\tau_2 = \sigma_2 \rangle$$

Έστω U, H οι υποομάδες τους που παράγονται από τα τ_1^2, σ_1 και τ_2^2, σ_2 αντίστοιχα. Παρατηρεί εύκολα κάποιος ότι οι U, H είναι ισόμορφες με την ομάδα του Klein. Θεωρούμε τους μονομορφισμούς

$$\phi : U \to B,\ \phi(\tau_1^2) = \tau_2^2 \text{ και } \phi(\sigma_1) = \sigma_2$$

και

$$\psi : U \to B,\ \psi(\tau_1^2) = \sigma_2 \text{ και } \psi(\sigma_1) = \tau_1^2$$

οι οποίοι είναι ισομορφισμοί από τη U στην K. Ορίζονται λοιπόν τα ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα $A *_{U,\phi} B$ και $A *_{U,\psi} B$ και θα δείξουμε ότι δεν είναι ισόμορφα.

Για το σκοπό αυτό, θα συγκρίνουμε τα κέντρα των δύο ομάδων. Όπως αποδείξαμε στο θεώρημα 1.41, θα ισχύει ότι $Z(A *_{U,\phi} B) = Z(A) \cap U \cap Z(B)$. Γνωρίζουμε ότι $\tau_1^2 \in Z(A)$,$\tau_2^2 \in Z(B)$ και $\tau_1^2 = \tau_2^2$ στο $A *_{U,\phi} B$. Επιπλέον, $\tau_1^2 \in U$, άρα $\tau_1^2 \in Z(A *_{U,\phi} B)$, δηλαδή το πρώτο αμάλγαμα έχει μη τετριμμένο κέντρο.

Από την άλλη μεριά θα δείξουμε ότι το δεύτερο αμάλγαμα έχει τετριμμένο κέντρο. Αφού τα στοιχεία του κέντρου της $A *_{U,\psi} B$ περιέχονται στη U, υπάρχουν τρεις επιλογές, πέρα από το ταυτοτικό στοιχείο, το τ_1^2, το σ_1 και το $\tau_1^2\sigma_1$. Από αυτά, μόνο το τ_1^2 ανήκει στο κέντρο της A, αλλά και τότε, δεν ανήκει στο κέντρο της B αφού $\psi(\tau_1^2) = \sigma_2 \notin Z(B)$. Συνεπώς, πράγματι, τα δύο αμαλγάματα δεν είναι ισόμορφα.

1.2 Η γεωμετρική σκοπιά

Η ιδέα πίσω από τη γεωμετρική θεωρία ομάδων είναι σχετικά απλή και στηρίζεται στην εξής γενική παρατήρηση που πως, αν θέλουμε να μελετήσουμε ένα αντικείμενο, μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για αυτό μελετώντας τον τρόπο που δρα πάνω σε άλλα (μαθηματικά) αντικείμενα.

Αυτή η ιδέα χρησιμοποιείται σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών εδώ και αιώνες. Ασφαλώς, το δύσκολο μέρος είναι η υλοποίησή της. Σε γενικές γραμμές, οι δράσεις ομάδων πάνω σε άλλα αντικείμενα είχαν μελετηθεί πολύ και συνεχίζουν να μελετώνται, προσπαθώντας κυρίως να δώσουν αποτελέσματα για τη δομή των αντικειμένων αυτών και όχι για τη δομή των ομάδων. Η κεντρική ιδέα που δημιούργησε τον νέο κλάδο ήταν να οριστεί η έννοια της δράσης μιας ομάδας επί ενός γραφήματος και μέσω αυτής να μελετηθούν οι ιδιότητες της ομάδας.

Ορισμός 1.44 (γράφημα)**.** Έστω ένα μη κενό σύνολο V, ένα σύνολο E και τρεις απεικονίσεις, $a : E \to V$, $\tau : E \to V$ και $^{-}: E \to E$ ώστε

$$(i)\ \bar{\bar{e}} = e, \quad (ii)\ e \neq \bar{e}, \quad (iii)\ \tau(\bar{e}) = a(e)$$

για κάθε $e \in E$. Το σύνολο αυτών των αντικειμένων ονομάζεται **γράφημα** και συμβολίζεται (συνήθως) με $X(E, V)$ ή (E, V). Για λόγους απλότητας πολλές φορές θα συμβολίζουμε ένα γράφημα με το γράμμα X ενώ τις κορυφές και τις ακμές του X θα τις συμβολίζουμε με $V(X)$ και $E(X)$ αντίστοιχα.

Το σύνολο V ονομάζεται σύνολο των *κορυφών* του γραφήματος και, το σύνολο E, σύνολο των *ακμών*. Οι απεικονίσεις a, τ και $^{-}$ ονομάζονται *αρχή, τέλος* και *αντιστροφή* αντίστοιχα.

Ορισμός 1.45 (προσανατολισμός)**.** Έστω ένα γράφημα $X(V, E)$. Ονομάζουμε **προσανατολισμό** του X ένα υποσύνολο Ω του E έτσι ώστε η τομή $\Omega \cap \{e, \bar{e}\}$ να είναι μονοσύνολο, για κάθε $e \in E$. Στη περίπτωση που έχει επιλεγεί προσανατολισμός σε ένα γράφημα, θα ονομάζουμε τις ακμές του Ω **θετικά** προσανατολισμένες και τις ακμές που δεν ανήκουν στο Ω, **αρνητικά** προσανατολισμένες.

Ορισμός 1.46 (μορφισμός γραφημάτων)**.** Έστω δύο γραφήματα X και X'. Ονομάζουμε **μορφισμός** από το X στο X' ένα ζεύγος απεικονίσεων $\phi_V : V_X \to V_{X'}$, $\phi_E : E_X \to E_{X'}$ ώστε να ισχύει ότι·

$$(i)\ \phi_E(\bar{e}) = \overline{\phi_E(e)}, \quad (ii)\ \phi_V(a(e)) = a(\phi_E(e)), \quad (iii)\ \phi_V(\tau(e)) = \tau(\phi_E(e))$$

για κάθε $e \in E$.

Ένα ζεύγος απεικονίσεων λοιπόν, είναι μορφισμός γραφημάτων αν διατηρεί αναλλοίωτη την δομή του γραφήματος.

Ορισμός 1.47 (μονοπάτι, κλειστό, ανηγμένο)**.** Έστω ένα γράφημα X. Ονομάζουμε·

- **μονοπάτι** του X μία ακολουθία ακμών της μορφής $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$ αν ισχύει ότι $\tau(e_i) = a(e_{i+1})$ για κάθε $i = 1, \dots, n-1$. Οι κορυφές $a(e_1), \tau(e_n)$ ονομάζονται *άκρα* του μονοπατιού. Ο αριθμός n ονομάζεται *μήκος* του μονοπατιού και συμβολίζεται με $l(\mu)$. Επιπλέον θα θεωρούμε ότι και οι κορυφές του γραφήματος είναι μονοπάτια μήκους 0.
- **ανηγμένο μονοπάτι** ένα μονοπάτι $e_1 \dots e_n$ είτε αν $n = 1$, είτε αν $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$, (δηλαδή δεν περιέχει παλινδρομήσεις).
- **κλειστό μονοπάτι** ένα μονοπάτι του οποίου τα άκρα συμπίπτουν.

Ορισμός 1.48 (συνεκτικό γράφημα, δένδρο)**.** Ένα γράφημα X ονομάζεται **συνεκτικό** αν κάθε δύο κορυφές του μπορούν να ενωθούν με (τουλάχιστον) ένα μονοπάτι. Ένα συνεκτικό γράφημα ονομάζεται **δένδρο** αν δεν περιέχει κλειστά ανηγμένα μονοπάτια θετικού μήκους.

Ορισμός 1.49 (γεωδαισιακή)**.** Έστω ένα συνεκτικό γράφημα X. Ένα ανηγμένο μονοπάτι στο X ονομάζεται **γεωδαισιακή**. Ισχύει ότι για κάθε ζεύγος κορυφών u, v υπάρχει (τουλάχιστον) μία γεωδαισιακή που τις ενώνει. Θα συμβολίζουμε μία τυχαία γεωδαισιακή μεταξύ δύο κορυφών με $[u, v]$. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι, στην περίπτωση που το X είναι δένδρο, η γεωδαισιακή αυτή είναι μοναδική.

Ορισμός 1.50 (δράση ομάδας σε γράφημα)**.** Έστω μία ομάδα G και ένα γράφημα $X(E, V)$. Λέμε ότι η ***G* δρα επί του *X*** (από αριστερά) αν δρα (από αριστερά) επί των συνόλων E, V έτσι ώστε να διατηρείται η δομή του γραφήματος, δηλαδή να ισχύει ότι

$$(i)\ g\bar{e} = \overline{ge} \quad \text{και} \quad (ii)\ a(ge) = ga(e)$$

για κάθε $e \in E$, $g \in G$. Θα λέμε ότι η G **δρα χωρίς αντιστροφές** αν $ge \neq \bar{e}$ για κάθε $e \in E$.

Παρατήρηση. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις i και ii του προηγούμενου ορισμού τότε θα ισχύει και ότι $\tau(ge) = g\tau(e)$. Για να το δούμε αυτό, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\tau(ge) = a(\overline{ge}) = a(g\bar{e}) = ga(\bar{e}) = g\tau(e)$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Η σημασία της δράσης χωρίς αντιστροφές θα φανεί στον επόμενο ορισμό. Πριν όμως από αυτό, πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι η δράση μιας ομάδας G σε ένα σύνολο X επάγει δύο νέες έννοιες· την έννοια της τροχιάς ενός στοιχείου, $\mathcal{O}(x) = \{gx \,|\, g \in G\}$, και την έννοια της σταθεροποιούσας ενός στοιχείου, $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \,|\, gx = x\}$.

Έστω τώρα ένα γράφημα $X(E, V)$ και μία ομάδα G η οποία δρα επί του X χωρίς αντιστροφές. Θεωρούμε τα σύνολα

$$V' = \{\mathcal{O}(v) \,|\, v \in V\} \text{ και } E' = \{\mathcal{O}(e) \,|\, e \in E\}$$

Επιπλέον, ορίζουμε

$$(i)\ a(\mathcal{O}(e)) = \mathcal{O}(a(e)), \quad (ii)\ \tau(\mathcal{O}(e)) = \mathcal{O}(\tau(e)), \quad (iii)\ \overline{(\mathcal{O}(e))} = \mathcal{O}(\bar{e})$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι τα σύνολα V' και E' αποτελούν τις κορυφές και τις ακμές ενός γραφήματος.

Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\overline{\left(\overline{\mathcal{O}(e)}\right)} = \overline{\mathcal{O}(\bar{e})} = \mathcal{O}(\bar{\bar{e}}) = \mathcal{O}(e)$$

και ότι

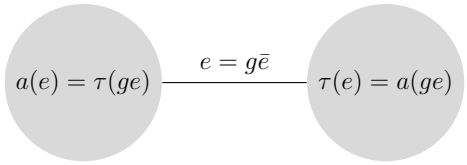
$$\tau\left(\overline{\mathcal{O}(e)}\right) = \tau(\mathcal{O}(\bar{e})) = \mathcal{O}(\tau(\bar{e})) = \mathcal{O}(a(e)) = a(\mathcal{O}(e)).$$

Δηλαδή οι συνθήκες i και iii του ορισμού ικανοποιούνται και μένει να δείξουμε ότι $\mathcal{O}(e) \neq \overline{\mathcal{O}(e)}$. Υποθέτουμε ότι η τελευταία σχέση δεν ισχύει και ότι υπάρχει ακμή e_0 ώστε $\mathcal{O}(e_0) = \overline{\mathcal{O}(e_0)} = \mathcal{O}(\overline{e_0})$. Θα υπάρχει λοιπόν $g \in G$ ώστε $ge_0 = \bar{e_0}$. Η δράση όμως της G στο X είναι χωρίς αντιστροφές, το οποίο σημαίνει ότι δεν υπάρχει g που να ικανοποιεί την τελευταία ισότητα οπότε αποδείχθηκε το ζητούμενο.

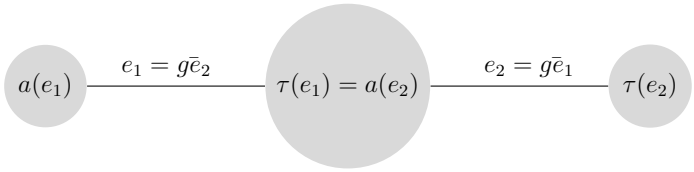
Το γράφημα που μόλις κατασκευάσαμε το ονομάζουμε **γράφημα πηλίκο** του X ως προς τη G και το συμβολίζουμε με X/G.

Είδαμε ότι η δράση χωρίς αντιστροφές είναι σημαντική για τον ορισμό του γραφήματος πηλίκο. Σε περίπτωση όμως που μία ομάδα δρα επί ενός γραφήματος με αντιστροφές υπάρχει ο εξής τρόπος να παρακάμψουμε το πρόβλημα.

Θεωρούμε ένα νέο γράφημα, το οποίο ονομάζεται "βαρυκεντρική υποδιαίρεση" του αρχικού γραφήματος, ως εξής· κάθε ακμή e του αρχικού γραφήματος υποδιαιρείται σε δύο νέες ακμές e_1 και e_2, προσθέτοντας μία νέα κορυφή στο σημείο που αντιστοιχεί στο "μέσο" της αρχικής ακμής. Θεωρούμε τις ακμές e_1 και e_2 έτσι ώστε να ισχύει $(\bar{e})_2 = \overline{e_1}$, $(\bar{e})_1 = \overline{e_2}$.



Για παράδειγμα, η ακμή e του διπλανού σχήματος, για την οποία ισχύει ότι $ge = \bar{e}$, υποδιαιρείται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Το νέο γράφημα διατηρεί τις επιθυμητές ιδιότητες του παλιού και η G δρα επί αυτού χωρίς αντιστροφές. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν μπορούμε να υποθέτουμε ότι οι δράσεις των ομάδων στα γραφήματα είναι χωρίς αντιστροφές, το οποίο και θα εννοείται στο εξής.

Έστω τώρα ένα γράφημα X επί του οποίου δρα μία ομάδα G και έστω το γράφημα πηλίκο X/G. Ορίζεται η απεικόνιση $\pi : X \to X/G$ με $\pi(e) = \mathcal{O}(e)$ και $\pi(v) = \mathcal{O}(v)$. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση αυτή ειναι ένας μορφισμός γραφημάτων.

Είναι

$$\pi(a(e)) = \mathcal{O}(a(e)) = a(\mathcal{O}(e)) = a(\pi(e))$$

και

$$\pi(\tau(e)) = \mathcal{O}(\tau(e)) = \tau(\mathcal{O}(e)) = \tau(\pi(e)).$$

Τέλος,

$$\pi(\bar{e}) = \mathcal{O}(\bar{e}) = \overline{\mathcal{O}(e)} = \overline{\pi(e)}$$

Συνεπώς, η $\pi : X \to X/G$ είναι πράγματι μορφισμός γραφημάτων και ονομάζεται **προβολή**.

1.2.1 Το γράφημα Cayley μιας ομάδας

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε το γράφημα Cayley μιας ομάδας. Το γράφημα αυτό χρησιμοποιήθηκε αρχικά το 1878 από τον Arthur Cayley και αφορούσε πεπερασμένες ομάδες. Ο Max Dehn το 1910, σε μια σειρά διαλέξεων οι οποίες δεν δημοσιεύτηκαν, επανεισήγαγε την έννοια η οποία οδήγησε στη γεωμετρική θεώρηση που χρησιμοποιείται σήμερα.

Πριν την κατασκευή του γραφήματος Cayley θα ορίσουμε πρώτα τη γενικότερη κατασκευή του γραφήματος μιας ομάδας επί ενός υποσυνόλου της. Έστω μία ομάδα G και S ένα υποσύνολό της. Ιδιαίτερα, απαιτούμε κανένα στοιχείο του S να μην είναι ίσο με 1 και, αν $s \in S$ τότε ισχύει ότι $s^{-1} \in S$.

Ορίζουμε το γράφημα της G ως προς το S ως το γράφημα που έχει

- για κορυφές τα στοιχεία της G και για
- ακμές τα στοιχεία της μορφής (g, gs), $g \in G$, $s \in S$.

Επιπλέον ορίζουμε τις συναρτήσεις της αρχής, του τέλους και της αντιστροφής ως

$$(i)\ a(g, gs) = g, \quad (ii)\ \tau(g, gs) = gs \text{ και } \quad (iii)\ \overline{(g, s)} = (gs, (gs)s^{-1}).$$

Το γράφημα μιας ομάδας G επί ενός συνόλου S συμβολίζεται με $\Gamma(G, S)$.

Μία πρώτη παρατήρηση που αφορά το γράφημα αυτό είναι ότι δύο κορυφές g, h είναι γειτονικές, δηλαδή είναι άκρα της ίδιας ακμής, αν και μόνο αν το $g^{-1}h$ ανήκει στο S.

Παρατήρηση. Το γράφημα $\Gamma(G, S)$, σύμφωνα με την κατασκευή που κάναμε, είναι προσανατολισμένο με προσανατολισμό $\Omega = \{(g, gs) | \, s \in S_+\}$ όπου με S_+ συμβολίσαμε τη συνολοθεωρητική διαφορά $\{s_1^{\pm 1}, s_2^{\pm 1}, \dots\} \backslash \{s_1^{-1}, s_2^{-1}, \dots\}$.

Προχωρούμε στη διατύπωση ορισμένων προτάσεων οι οποίες θα αποκρυσταλλώσουν την αντίληψή μας για το γράφημα μιας ομάδας επί ενός συνόλου.

Πρόταση 1.51. *Το γράφημα μιας ομάδας G επί ενός υποσυνόλου της S, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, είναι πράγματι γράφημα.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\overline{(\overline{g, gs})} = (\overline{gs, (gs)s^{-1}}) = ((gs)s^{-1}, ((gs)s^{-1})s) = (g, gs).$$

Επιπλέον,

$$\tau(\overline{(g, gs)}) = \tau(gs, (gs)s^{-1}) = (gs)s^{-1} = g = a(g, gs).$$

Τέλος, έστω ότι $(g, gs) = \overline{(g, gs)}$, τότε ισχύει $(g, gs) = (gs, (gs)s^{-1})$, δηλαδή $g = gs \Leftrightarrow s = 1$. Όμως εξ' ορισμού έχουμε απαιτήσει τα στοιχεία του S να είναι διαφορετικά από 1, συνεπώς $(g, gs) \neq \overline{(g, gs)}$ για κάθε $g \in G, s \in S$. $\square$

Πρόταση 1.52. *Το γράφημα μιας ομάδας G επί ενός υποσυνόλου της S είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το S είναι σύνολο γεννητόρων της G.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $\Gamma(G,S)$ συνεκτικό και έστω $g \in G$. Θα δείξουμε ότι το g γράφεται στη μορφή $s_1 \cdots s_n$ για κάποια $s_i \in S$. Αφού το γράφημα είναι συνεκτικό, υπάρχει μονοπάτι $e_1 \dots e_n$ που συνδέει τις κορυφές 1 και g. Ισχύει δηλαδή ότι $a(e_1) = 1$, $\tau(e_i) = a(e_{i+1})$ και $\tau(e_n) = g$.

Ιδιαίτερα, η ακμή e_1 έχει τη μορφή $(1, s_1)$, $s_1 \in S$. Ανάλογα, η ακμή e_2 έχει τη μορφή $(s_1, s_1 s_2)$, $s_2 \in S$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε ότι η ακμή e_n είναι η $(s_1 s_2 \cdots s_{n-1}, (s_1 s_2 \cdots s_{n-1}) s_n)$, $s_n \in S$ και, άρα,

$$g = \tau(e_n) = s_1 s_2 \cdots s_n,\ s_i \in S$$

Δηλαδή αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Υποθέτουμε τώρα ότι το S είναι σύνολο γεννητόρων. Αρκεί να δείξουμε ότι όλες οι κορυφές συνδέονται με την κορυφή 1. Έστω λοιπόν ένα $g \in G$ και, αφού το S είναι σύνολο γεννητόρων, υπάρχουν $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$ ώστε $g = s_1^{\epsilon_1} \cdots s_n^{\epsilon_n}$ όπου $\epsilon_i = \pm 1$. Θεωρούμε τις ακμές e_i ως εξής·

$$e_1 = (1, s_1^{\epsilon_1}),\ e_2 = (s_1^{\epsilon_1}, s_1^{\epsilon_1}(s_2^{\epsilon_2})), \dots,\ e_n = (s_1^{\epsilon_1} \cdots s_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}, s_1^{\epsilon_1} \cdots s_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}(s_n^{\epsilon_n}))$$

Οι e_i είναι πράγματι ακμές αφού εξ' ορισμού τα $s_i^{\pm 1}$ ανήκουν στο S. Αν τώρα θεωρήσουμε το μονοπάτι $e_1 e_2 \dots e_n$ θα παρατηρήσουμε ότι η αρχή του είναι η κορυφή 1 και το τέλος η κορυφή g, οπότε αποδείχθηκε το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.53 (γράφημα Cayley)**.** Έστω μία ομάδα G και S ένα υποσύνολο της ώστε κανένα στοιχείο του S να μην είναι ίσο με 1 και, αν $s \in S$, τότε και $s^{-1} \in S$. Αν το S είναι ένα σύνολο γεννητόρων της G τότε το γράφημα $\Gamma(G,S)$ ονομάζεται **γράφημα Cayley** της G ως προς το S.

Στα επόμενα θα μελετήσουμε αποκλειστικά το γράφημα Cayley μιας ομάδας G, δηλαδή θα υποθέτουμε ότι το S είναι σύνολο γεννητόρων της ομάδας.

Η ομάδα G δρα επί του γραφήματος Cayley $\Gamma(G,S)$ ως εξής· έστω $y \in G$.

- Αν v είναι μία κορυφή ορίζουμε $y * v = yv$ και
- αν (g, gs) είναι μία ακμή τότε ορίζουμε $y * (g, gs) = (yg, (yg)s)$

Πρόταση 1.54. *Η δράση της G στο γράφημα Cayley είναι πράγματι δράση ομάδας σε γράφημα.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο ορισμός της δράσης που δώσαμε ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού 1.50. Έστω μία ακμή (g, gs) του γραφήματος Cayley και ένα στοιχείο y της G. Είναι

$$y\overline{(g, gs)} = y(gs, (gs)s^{-1}) = (ygs, (ygs)s^{-1}) = \overline{(yg, (yg)s)}$$

και

$$a(y(g, gs)) = a(yg, ygs) = yg = y(a(g, gs))$$

□

Ορισμός 1.55 (ελεύθερη δράση)**.** Έστω μία ομάδα G η οποία δρα επί ενός γραφήματος X. Υποθέτουμε ότι η δράση επί του συνόλου των κορυφών είναι ελεύθερη, δηλαδή αν η σταθεροποιούσα κάθε κορυφής είναι τετριμμένη. Τότε, λέμε ότι η G δρα **ελεύθερα** επί του X.

Υπενθυμίζουμε ότι μία δράση μιας ομάδας ονομάζεται **μεταβατική** αν υπάρχει μόνο μία τροχιά.

Πρόταση 1.56. *Η δράση μιας ομάδας G στο γράφημα Cayley της, $\Gamma(G, S)$, είναι χωρίς αντιστροφές αν και μόνο αν $s \neq s^{-1}$ για κάθε $s \in S$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $s \neq s^{-1}$ για κάθε $s \in S$ και υποθέτουμε ότι $y(g, gs) = \overline{(g, gs)} \Leftrightarrow (yg, ygs) = (gs, gss^{-1})$. Αφού οι δύο ακμές συμπίπτουν θα συμπίπτουν και τα άκρα τους. Συνεπώς, $yg = gs$ και $ygs = g$. Αντικαθιστώντας το yg, η δεύτερη εξίσωση γίνεται $gs \cdot s = g \Leftrightarrow s^2 = 1 \Leftrightarrow s = s^{-1}$ το οποίο είναι άτοπο.

Έστω τώρα ότι $s = s^{-1}$ για κάποιο $s \in S$ και η δράση είναι χωρίς αντιστροφές. Τότε

$$s(1, s) = (s, s \cdot s) = (s, 1) = \overline{(}1, s)$$

το οποίο είναι πάλι άτοπο. □

Πρόταση 1.57. *Η δράση μιας ομάδας G στο γράφημα Cayley της, $\Gamma(G, S)$, είναι ελεύθερη και μεταβατική στις κορυφές.*

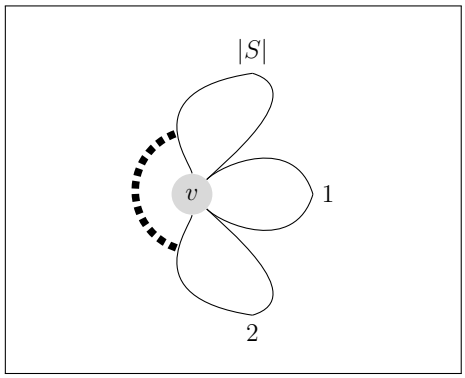
Απόδειξη. Έστω ότι κάποιο στοιχείο y της ομάδας σταθεροποιεί κάποιο στοιχείο του γραφήματος. Αν σταθεροποιεί κορυφή τότε θα ισχύει $yg = g$ για κάποιο $g \in G$ το οποίο συνεπάγεται ότι $y = 1$. Αν το y σταθεροποιεί κάποια ακμή, τότε θα σταθεροποιεί και τα άκρα της ακμής, το οποίο όπως είδαμε, γίνεται μόνο αν $y = 1$. Συνεπώς η δράση είναι ελεύθερη.

Θεωρούμε τώρα δύο κορυφές g, g' του γραφήματος. Θα δείξουμε ότι ανήκουν στην ίδια τροχιά. Πράγματι, το στοιχείο $(g'g^{-1})$ ανήκει στη G και $(g'g^{-1})g = g'$ άρα το g ανήκει στην τροχιά του g'. Συνεπώς αποδείχθηκε το ζητούμενο. □

Πρόταση 1.58. *Οι τροχιές των ακμών του γραφήματος Cayley $\Gamma(G, S)$ είναι τόσες όσα και τα στοιχεία του S.*

Απόδειξη. Έστω δύο στοιχεία s_1, s_2 του S με $s_1 \neq s_2$. Αρκεί να δείξουμε ότι οι τροχιές των ακμών (g, gs_1), (h, hs_2) είναι ξένες. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει και ότι υπάρχει $y \in G$ ώστε $y(g, gs_1) = (h, hs_2) \Leftrightarrow (yg, ygs_1) = (h, hs_2)$. Συνεπώς, τα άκρα των δύο ακμών συμπίπτουν και ισχύει $yg = h$, $ygs_1 = hs_2$ άρα $ygs_1 = ygs_2 \Leftrightarrow s_1 = s_2$. □

Η τελευταίες προτάσεις μας επιτρέπουν να "δούμε" το γράφημα πηλίκο $\Gamma(G, S)/G$. Όπως είπαμε, το γράφημα αυτό έχει για κορυφές τις τροχιές των κορυφών και για ακμές τις τροχιές των ακμών. Συνεπώς, το γράφημα πηλίκο έχει μία κορυφή και $|S|$ πλήθους ακμές, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



1.2.2 Ελεύθερες ομάδες και δένδρα

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με τις γεωμετρικές ιδιότητες ομάδων οι οποίες είναι ελεύθερες. Μεταξύ άλλων, θα αποδείξουμε και το θεώρημα Nielsen-Schreier.

Θεώρημα 1.59. *Έστω μία ελεύθερη ομάδα $F(X)$ επί ενός συνόλου X. Τότε το γράφημα Cayley $\Gamma(F(X), X^{\pm 1})$ είναι δένδρο.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία του X είναι διαφορετικά από 1 στην $F(X)$. Επιπλέον, $x \neq x^{-1}$, άρα η δράση είναι χωρίς αντιστροφές και, αν $x \in X^{\pm 1}$, τότε $x^{-1} \in X^{\pm 1}$. Συνεπώς, η επιλογή του $X^{\pm 1}$ ως συνόλου γεννητόρων μάς επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις προτάσεις που διατυπώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Γνωρίζουμε ήδη ότι, αφού η $F(X)$ παράγεται από το X, το γράφημα Cayley είναι συνεκτικό. Αρκεί να δείξουμε ότι δεν περιέχει κυκλώματα.

Για μία ακμή $e = (g, gs)$, ορίζουμε τον *δείκτη* της, $\delta(e) = s \in X^{\pm 1}$. Για κάθε ακμή ισχύει ότι $\tau(g, gs) = a(g, gs)\delta(e)$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση βλέπουμε ότι για ένα μονοπάτι $e_1 \dots e_n$ είναι

$$\begin{aligned}\tau(e_n) &= a(e_n)\delta(e_n) = \tau(e_{n-1})\delta(e_n) = \\ &= a(e_{n-1})\delta(e_{n-1})\delta(e_n) = \cdots = a(e_1)\delta(e_1)\cdots\delta(e_n)\end{aligned}$$

Έστω λοιπόν ένα κλειστό ανηγμένο μονοπάτι θετικού μήκους $e_1e_2\dots e_n$. Ισχύει δηλαδή $\tau(e_n) = a(e_1)$ και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση βλέπουμε ότι θα ισχύει

$$\delta(e_1)\cdots\delta(e_n) = 1$$

όπου $\delta(e_i) = x^\epsilon$, $x \in X$, $\epsilon = \pm 1$. Αν το στοιχείο στο αριστερό μέλος της τελευταίας εξίσωσης βρίσκεται σε ανηγμένη μορφή τότε έχουμε οδηγηθεί σε άτοπο. Επομένως θα μπορούν να γίνουν αναγωγές. Οι μόνες πιθανές αναγωγές θα είναι στοιχεία της μορφής $x^\epsilon x^{-\epsilon}$, δηλαδή θα ισχύει $\delta(e_i) = \delta(e_{i+1})^{-1}$ για ένα τουλάχιστον i. Αυτό όμως σημαίνει ότι ισχύει $e_i = \overline{e_{i+1}}$, δηλαδή το μονοπάτι δεν είναι ανηγμένο, το οποίο είναι άτοπο. □

Επιπλέον, το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος ισχύει.

Θεώρημα 1.60. *Έστω μία ομάδα G και ένα υποσύνολό της S ώστε $1 \notin S$ και $s \neq s^{-1}$ για κάθε $s \in S$. Έστω ότι το γράφημα της G επί του S είναι δένδρο. Τότε η G είναι ελεύθερη με βάση S.*

Απόδειξη. Εφόσον το $\Gamma(G, S)$ είναι δένδρο, είναι και συνεκτικό γράφημα οπότε, από την πρόταση 1.52, το S παράγει την G. Μένει να δείξουμε ότι κάθε ανηγμένη λέξη επί του S είναι μη τετριμμένη. Μία ανηγμένη λέξη επί του S έχει τη μορφή

$$s_1s_2\cdots s_n,\ s_i \in S,$$

όπου $s_i \neq s_{i+1}^{-1}$ για κάθε $i = 1, \dots, n-1$, $n \geq 1$. Έστω ότι το στοιχείο αυτό είναι ίσο με 1. Θεωρούμε τις ακμές $e_1 = (1, s_1)$, $e_2 = (s_1, s_1s_2)$,..., $e_n = (s_1s_2\cdots s_{n-1}, (s_1s_2\cdots s_{n-1})s_n) = (s_1s_2\cdots s_{n-1}, 1)$. Παρατηρούμε τα εξής·

- Αφού κάθε s_i είναι διαφορετικό από 1, οι ακμές αυτές δεν είναι βρόχοι (δηλαδή δεν ταυτίζονται τα άκρα τους).
- Οι ακμές $e_1, e_2, \dots, e_n$ είναι διαδοχικές αφού $\tau(e_i) = s_1\cdots s_i = a(e_{i+1})$.
- Το μονοπάτι $e_1e_2\dots e_n$ είναι ανηγμένο. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια παλινδρόμηση $e_{i+1} = \bar{e}_i$ τότε θα ισχύει ότι $\tau(\bar{e}_i) = \tau(e_{i+1}) \Leftrightarrow a(e_i) = \tau(e_{i+1}) \Leftrightarrow s_1\cdots s_{i-1} = s_1\cdots s_{i-1}s_is_{i+1} \Leftrightarrow s_is_{i+1} = 1 \Leftrightarrow s_i = s_{i+1}^{-1}$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

Έχουμε λοιπόν ότι το μονοπάτι $e_1\dots e_n$ είναι ανηγμένο και έχει θετικό μήκος. Επιπλέον, είναι κλειστό αφού $\tau(e_n) = 1 = a(e_1)$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το $\Gamma(G, S)$ είναι δένδρο. Συνεπώς κάθε στοιχείο της μορφής $s_1s_2\cdots s_n$, $s_i \in S$ όπου $s_i \neq s_{i+1}^{-1}$ για κάθε $i = 1, \dots, n-1$, $n \geq 1$ είναι διαφορετικό από 1 και άρα, σύμφωνα με τον ορισμό 1.1, η G είναι ελεύθερη επί του S. □

Είδαμε λοιπόν ότι μία ελεύθερη ομάδα $F(X)$ δρα ελεύθερα επί του γραφήματος Cayley της και ότι, αν το γράφημα μιας ομάδας G επί ενός συνόλου S είναι δένδρο, τότε η G είναι ελεύθερη με βάση S. Άμεση απόρροια των προηγουμένων είναι το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα. *Κάθε ελεύθερη ομάδα δρα ελεύθερα επί ενός δένδρου χωρίς αντιστροφες των ακμών.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το γράφημα Cayley της ομάδας και εφαρμόζουμε τις προτάσεις της προηγούμενης παραγράφου. □

Το "αντίστροφο" αυτού του πορίσματος είναι το κεντρικό θεώρημα αυτής της παραγράφου το οποίο όμως θα χρειαστεί κάποια προετοιμασία για να αποδειχθεί.

Πρόταση 1.61. *Έστω ένα συνεκτικό γράφημα X. Ονομάζουμε μεγιστικό υποδένδρο ένα υπογράφημα T του X το οποίο είναι δένδρο και δεν περιέχεται γνήσια σε κάποιο άλλο υποδένδρο του X. Τότε ισχύει ότι το T περιέχει όλες τις κορυφές του X, δηλαδή $V(T) = V(X)$.*

Απόδειξη. Έστω μία κορυφή v του X που δεν ανήκει στο T. Αφού το X είναι συνεκτικό, θα υπάρχει κάποια ακμή, e, της οποίας η αρχή θα ανήκει στο T αλλά όχι και το τέλος. Θεωρούμε το υπογράφημα $T \cup \{e, \bar{e}, \tau(e)\}$ του X. Αυτό είναι ένα συνεκτικό υπογράφημα το οποίο δεν περιέχει κλειστά ανηγμένα μονοπάτια θετικού μήκους, δηλαδή είναι υποδένδρο του X που περιέχει γνήσια το T, το οποίο είναι άτοπο. □

Λήμμα 1.62. *Έστω ένα γράφημα X και μία ομάδα G η οποία δρα επί του X χωρίς αντιστροφές των ακμών. Έστω μία ακμή e' του γραφήματος πηλίκο X/G και μία κορυφή v του X ώστε να ισχύει $\pi(v) = a(e')$. Τότε υπάρχει ακμή e του X ώστε να ισχύει $a(e) = v$ και $\pi(e) = e'$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του γραφήματος πηλίκο, υπάρχει ακμή e'' του X ώστε $\pi(e'') = e'$. Συνεπώς,

$$a(\pi(e'')) = a(e') = \pi(v) \Leftrightarrow \pi(a(e'')) = a(e') = \pi(v) \Leftrightarrow \mathcal{O}(a(e'')) = \mathcal{O}(v)$$

Άρα, υπάρχει $g \in G$ ώστε να ισχύει $v = ga(e'') = a(ge'')$. Δηλαδή η ακμή $e := ge''$ έχει ως αρχή την κορυφή v και ισχύει $\pi(e) = \pi(ge'') = \mathcal{O}(ge'') = \mathcal{O}(e'') = e'$. Δηλαδή, η ακμή e ικανοποιεί το ζητούμενο. □

Λήμμα 1.63. *Έστω μία ομάδα G η οποία δρα επί ενός συνεκτικού γραφήματος X χωρίς αντιστροφές των ακμών. Για κάθε υποδένδρο T' του X/G υπάρχει υποδένδρο T του X ώστε ο περιορισμός της π στο T, $\pi|_T : T \to T'$, να είναι ισομορφισμός γραφημάτων.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο Z των υποδένδρων του X τα οποία εμφυτεύονται στο T'. Πιο συγκεκριμένα,

$$Z = \{T | \, T \text{ υποδένδρο του } X, \text{ ισχύει ότι η} \pi|_T \text{ είναι } 1-1 \text{ και } \operatorname{Im} \pi|_T \subseteq T'\}.$$

Το σύνολο αυτό είναι μη κενό, αφού μπορούμε να θεωρήσουμε ως υποδένδρο κάθε ακμή (ή κορυφή, στην περίπτωση που το T' αποτελείται από μία κορυφή μόνο) της οποία η εικόνα ανήκει στο T'. Επιπλέον, το Z εφοδιάζεται με τη σχέση μερικής διάταξης του περιέχεσθαι. Αν θεωρήσουμε κάποια αύξουσα ακολουθία στοιχείων του Z, έστω $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$, τότε, η ένωση $\cup T_i$ είναι υποδένδρο του X και ικανοποιεί τις ιδιότητες ώστε να ανήκει στο Z.

Συνεπώς εφαρμόζεται το λήμμα του Zorn και το Z έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω T. Μένει να δείξουμε ότι $\pi(T) = T'$. Αν αυτό δεν ισχύει τότε θα υπάρχει ακμή e' στο T' ώστε $a(e') \in \pi(T)$ και $\tau(e') \in T' \backslash \pi(T)$. Από το προηγούμενο λήμμα ξέρουμε ότι θα υπάρχει ακμή e στο X ώστε $a(e) \in T$ και $\pi(e) = e'$. Θεωρώντας το γράφημα $T \cup \{e, \bar{e}, \tau(e)\}$ βλέπουμε ότι ανήκει στο Z, το οποίο είναι άτοπο λόγω της μεγιστικότητας του T, οπότε $\pi(T) = T'$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.64. *Έστω ότι μία ομάδα G δρα ελεύθερα επί ενός δένδρου X χωρίς αντιστροφές των ακμών. Τότε η G είναι ελεύθερη. Επιπλέον, έστω T' είναι ένα μεγιστικό υποδένδρο του X/G. Τότε η διάσταση της G είναι ίση με το πλήθος των θετικά προσανατολισμένων ακμών του γραφήματος $(X/G)\backslash T'$, δηλαδή των θετικά προσανατολισμένων ακμών που δεν ανήκουν στο T'.*

Απόδειξη. Έστω $\pi : X \to X/G$ η προβολή και έστω ένα μεγιστικό υποδένδρο T' του X/G. Έστω το υποδένδρο T για το οποίο είναι $\pi(T) = T'$ όπως προκύπτει από το προηγούμενο λήμμα.

Ισχυρισμός. (1) Αν $v_1, v_2 \in V(T)$ με $v_1 \neq v_2$ τότε $\pi(v_1) \neq \pi(v_2)$.

(2) Κάθε κορυφή του X ανήκει στην τροχιά μιας μοναδικής κορυφής του T.

Απόδειξη του ισχυρισμού. (1) Άμεσο αφού η π είναι $1-1$ στο T.

(2) Δείχνουμε αρχικά ότι κάθε κορυφή ανήκει στην τροχιά τουλάχιστον μιας κορυφής του T. Έστω v μία κορυφή και έστω η εικόνα της $\pi(v) \in V(X/G)$. Από την πρόταση 1.61 ισχύει ότι $V(X/G) = V(T')$ άρα $\pi(v) \in V(T') = \pi(T)$ οπότε έπεται το ζητούμενο.

Από το (1) γνωρίζουμε ότι διαφορετικές κορυφές του T ανήκουν σε διαφορετικές τροχιές οπότε ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

□

Έστω ένας τυχαίος προσανατολισμός Ω του X/G. Μέσω αυτού, ορίζουμε προσανατολισμό στο X, θεωρώντας μία ακμή e του X να είναι θετικά προσανατολισμένη αν η $\pi(e)$ είναι θετικά προσανατολισμένη. Προκύπτει εύκολα ότι ο προσανατολισμός αυτός είναι καλά ορισμένος στο X.

Έστω E' το σύνολο των θετικά προσανατολισμένων ακμών του X/G οι οποίες *δεν* ανήκουν στο T'. Από το λήμμα 1.62, για κάθε ακμή $e' \in E'$, υπάρχει ακμή e του X ώστε η αρχή $a(e)$ να ανήκει στο T και $\pi(e) = e'$. Επιπλέον, αυτή η ακμή e είναι μοναδική. Πράγματι, έστω μία άλλη ακμή $\epsilon \neq e$ ώστε $a(\epsilon) \in T$ και $\pi(\epsilon) = e'$. Αν $a(\epsilon) \neq a(e)$ θα είναι άτοπο από τον πρώτο ισχυρισμό. Άρα θα ισχύει $a(\epsilon) = a(e)$ και, αφού $\pi(\epsilon) = e' = \pi(e)$, υπάρχει $g \in G$ ώστε $\epsilon = ge$. Παρατηρούμε τότε ότι

$$g^{-1}a(\epsilon) = g^{-1}a(ge) = a(g^{-1}(ge)) = a(e) = a(\epsilon)$$

δηλαδή το g^{-1} σταθεροποιεί την κορυφή $a(e)$ αλλά η δράση είναι ελεύθερη άρα $g = 1$ και $e = \epsilon$.

Μπορούμε λοιπόν να συσχετίσουμε κάθε ακμή e' του E' με μία μοναδική ακμή e του X ώστε $a(e) \in V(T)$ και $\pi(e) = e'$. Επιπλέον, το τέλος αυτής της ακμής δεν ανήκει στο T γιατί αφού το X είναι δένδρο, υπάρχει μοναδική ακμή που συνδέει τις κορυφές $a(e), \tau(e)$, (η e), η οποία δεν ανήκει στο T, και αν υποθέταμε ότι $a(e), \tau(e) \in T$ τότε το T δεν θα ήταν συνεκτικό.

Έστω E το σύνολο των θετικά προσανατολισμένων ακμών του X που έχουν αρχή στο T και τέλος εκτός του T.

> *Ισχυρισμός* (3). Ισχύει ότι $\pi(E) = E'$ και ο περιορισμός $\pi|_E$ είναι 1-1.
>
> *Απόδειξη του ισχυρισμού.* Είδαμε ότι $E' \subseteq \pi(E)$. Αν τώρα $e \in E$ τότε η $\pi(e)$ δεν ανήκει στο T' (αφού $T' = \pi(T)$) και είναι θετικά προσανατολισμένη, άρα $\pi(e) \in E'$. Συνεπώς $\pi(E) = E'$. Είδαμε επιπλέον πριν ότι η ακμή του E που αντιστοιχίζεται σε κάποια ακμή του E' είναι μοναδική, άρα ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. □

Λόγω του δεύτερου ισχυρισμού, για κάθε $e \in E$, η κορυφή $\tau(e)$ ανήκει στην τροχιά μιας μοναδικής κορυφής του T, έστω v_e. Αφού το $\tau(e)$ ανήκει στην τροχιά της v_e, υπάρχει $g \in G$ ώστε $g\tau(e) = v_e$. Αφού η δράση της G είναι ελεύθερη, το g αυτό είναι μοναδικό για την ακμή e και το συμβολίζουμε με g_e.

Θα δείξουμε ότι η G είναι ελεύθερη με βάση το σύνολο $S = \{g_e \,|\, e \in E\}$. Για κάθε $g \in G$, το υπογράφημα gT είναι δένδρο (λόγω του ορισμού της δράσης) και ισχύει ότι, αν $g_1 \neq g_2$, τότε τα υποδένδρα g_1T, g_2T είναι ξένα. Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι δεν έχουν κοινή κορυφή. Έστω $v = g_1v_1 = g_2v_2$ με $v_1, v_2 \in T$. Τότε $\pi(v_1) = \pi(v_2)$ άρα $v_1 = v_2$ από τον πρώτο ισχυρισμό και άρα η εξίσωση γίνεται $(g_1^{-1}g_2)v_1 = v_2$ άρα $g_1 = g_2$.

Επιπλέον, $V(X) = \cup_{g\in G}V(gT)$ αφού, αν $v \in V(X)$ τότε $\pi(v) \in V(X/G) = V(T') = V(\pi(T))$ άρα υπάρχει $v' \in V(T)$ ώστε $\pi(v) = \pi(v')$ οπότε υπάρχει $g \in G$ ώστε $v = gv' \in gT$.

Έστω τώρα μία θετικά προσανατολισμένη ακμή f του X η οποία να μην ανήκει σε κανένα από τα υποδένδρα gT. Τα άκρα της f ανήκουν στα gT και μάλιστα ανήκουν σε διαφορετικά υποδένδρα (επειδή το X είναι δένδρο). Δηλαδή, $a(f) \in g_1T$ και $\tau(f) \in g_2T$ με $g_1 \neq g_2$.

Θεωρούμε ένα νέο γράφημα X_T του οποίου οι κορυφές είναι τα υποδένδρα gT του X και οι ακμές είναι οι ακμές f που συνδέουν τα υποδένδρα. Προφανώς, το X_T είναι δένδρο. Θα δείξουμε ότι $X_T \simeq \Gamma(G, S^{\pm 1})$. Αν αυτό ισχύει, λόγω του θεωρήματος 1.60 θα έχουμε το ζητούμενο.

Παρατηρούμε αρχικά ότι $1 \notin S$ λόγω του ορισμού του S. Έστω $\phi : X_T \to \Gamma(G, S^{\pm 1})$ με $\phi(gT) = g$ και $\phi(f) = (g_1, g_1s)$, όπου $s = g_1^{-1}g_2$ αν η f ενώνει τις κορυφές g_1T, g_2T. Θα δείξουμε πρώτα ότι το s ανήκει στο $S^{\pm 1}$. Παρατηρούμε αρχικά ότι η ακμή $g_1^{-1}f$ συνδέει τις κορυφές T και $g_1^{-1}g_2T$ δηλαδή έχει

αρχή στο T και τέλος εκτός του T και είναι θετικά προσανατολισμένη αφού $\pi(g_1^{-1}f) = \pi(f)$ (η f είναι ακμή του E, δηλαδή θετικά προσανατολισμένη). Συνεπώς η $g_1^{-1}f$ ανήκει στο E. Επομένως, ισχύει ότι $\tau(g_1^{-1}f) = g_1^{-1}\tau(f) = g_1^{-1}g_2v_T$ όπου v_T είναι κάποια κορυφή του T άρα το $\tau(g_1^{-1}f)$ ανήκει στην τροχιά του v_T. Ιδιαίτερα, ισχύει ότι $g_2^{-1}g_1 \cdot \tau(g_1^{-1}f) = v_T \in V(T)$, άρα $g_2^{-1}g_1 \in S$, οπότε το $g_1^{-1}g_2 = (g_2^{-1}g_1)^{-1}$ ανήκει στο $S^{\pm 1}$.

Η ϕ είναι μορφισμός γραφημάτων. Πράγματι, είναι

- $\phi(a(g_1T, g_2T)) = \phi(g_1T) = g_1$ και $a(\phi(g_1T, g_2T)) = a(g_1, g_1s) = g_1$.
- $\phi(\tau(g_1T, g_2T)) = \phi(g_2T) = g_2$ και $\tau(\phi(g_1T, g_2T)) = \tau(g_1, g_1s) = g_1s = g_1 \cdot (g_1^{-1}g_2) = g_2$.
- $\phi\left(\overline{(g_1T, g_2T)}\right) = \phi(g_2T, g_1T) = (g_2, g_2s) = (g_2, g_1)$ και $\overline{\phi(g_1T, g_2T)} = \overline{(g_1, g_2s)} = (g_1s, (g_1s)s^{-1}) = (g_1s, g_1) = (g_2, g_1)$.

Η ϕ είναι 1-1. Έστω ότι $\phi(g_1T) = \phi(g_2T)$, για δύο κορυφές g_1T, g_2T, τότε $g_1 = g_2$. Αν τώρα $\phi(g_1T, g_2T) = \phi(g_1'T, g_2'T)$ για δύο ακμές τότε $(g_1, g_1s) = (g_1', g_1's)$ άρα $g_1 = g_1'$ και από προκύπτει και ότι $g_2 = g_2'$.

Η ϕ είναι επί. Έστω $g \in G$. Τότε το gT είναι κορυφή του X_T και $\phi(gT) = g$. Ανάλογα, αν (g, gs) είναι (γεωμετρική) ακμή του $\Gamma(G, S^{\pm 1})$, με $s \in S$, τότε, θα είναι $s = g_e$ και θεωρούμε τις κορυφές gT, gg_eT οι οποίες είναι διακεκριμένες (αφού $g_e \neq 1$), συνεπώς υπάρχει (θετικά προσανατολισμένη) ακμή f που τις συνδέει και είναι

$$\phi(f) = \phi(gT, gg_eT) = (g, gs)$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Έχουμε πλέον αποδείξει το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα. *Μία ομάδα είναι ελεύθερη αν και μόνο αν δρα ελεύθερα επί ενός δένδρου χωρίς αντιστροφές των ακμών.*

Μία άλλη απόρροια είναι το επόμενο θεώρημα το οποίο είχαμε πρωτοδιατυπώσει στην συνδυαστική περιγραφή των ελεύθερων ομάδων.

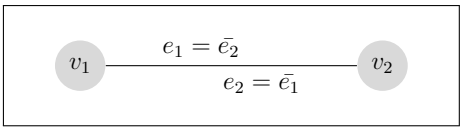
Πόρισμα (Nielsen-Schreier)**.** *Κάθε υποομάδα μιας ελεύθερης ομάδας είναι ελεύθερη.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο πόρισμα, υπάρχει δένδρο T επί του οποίου δρα η ομάδα ελεύθερα χωρίς αντιστροφές των ακμών. Έστω μία υποομάδα Y. Η Y δρα επί του T ελεύθερα και χωρίς αντιστροφές των ακμών. Συνεπώς το ζητούμενο έπεται από το προηγούμενο πόρισμα. □

1.2.3 Ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα και δένδρα

Όπως και στις ελεύθερες ομάδες, στα ελεύθερα γινόμενα μπορούμε να περιγράψουμε τη δομή της ομάδας μέσω της δράσης της επί ενός δένδρου και αντίστροφα. Αυτός είναι ο σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο.

Ένα συνεκτικό γράφημα που αποτελείται από δύο κορυφές και από δύο ακμές ώστε η μία να είναι η αντιστροφή της άλλης ονομάζεται **ευθύγραμμο τμήμα**.



Στα επόμενα, αν G είναι μία ομάδα και H μία υποομάδα της τότε θα συμβολίζουμε τα αριστερά σύμπλοκα της H στην G με G/H, παραλείποντας το ενδεχόμενο να μην είναι η H κανονική υποομάδα.

Θεώρημα 1.65. *Έστω ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $G = A *_U B$. Υπάρχει τότε ένα δένδρο X επί του οποίου δρα η G χωρίς αντιστροφές των ακμών ώστε το γράφημα πηλίκο X/G να είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Επιπλέον, υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα στο X το οποίο απεικονίζεται μέσω της προβολής στο ευθύγραμμο τμήμα του γραφήματος πηλίκο και του οποίου οι σταθεροποιούσες των κορυφών είναι τα A, B και των ακμών είναι η U.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το γράφημα X το οποίο έχει·

- για κορυφές τα στοιχεία του συνόλου $G/A \sqcup G/B$ (σύμφωνα με τις παρατηρήσεις της παραγράφου 1.1.4, μπορούμε να ταυτίσουμε τις A, B με τους παράγοντες του αμαλγάματος)
- για ακμές τα στοιχεία του συνόλου $G/U \sqcup \overline{G/U}$.

όπου, με τον συμβολισμό $\overline{G/U}$ εννοούμε ότι, για κάθε ακμή gU, θεωρούμε ένα αυθαίρετο αντικείμενο $\overline{gU}$ το οποίο να είναι διαφορετικό από το gU και ικανοποιεί την ιδιότητα $\overline{\overline{gU}} = gU$.

Επιπλέον, για μία ακμή gU ορίζουμε

$$(i)\ a(gU) = gA, \quad (ii)\ \tau(gU) = gB, \quad \text{και } (iii)\ a(\overline{gU}) = \tau(gU)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η G δρα επί του X με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά. Θα δείξουμε ότι το X είναι δένδρο και ότι το γράφημα πηλίκο X/G είναι ευθύγραμμο τμήμα.

Το X είναι συνεκτικό γράφημα. Αρκεί να δείξουμε ότι όλες οι κορυφές συνδέονται με κάποια συγκεκριμένη κορυφή, εν προκειμένω την A. Αν v είναι μία κορυφή τότε θα έχει τη μορφή gA ή gB για κάποιο $g \in G$. Στη δεύτερη περίπτωση, η gB συνδέεται με την gA μέσω της ακμής $\overline{gU}$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι η gA συνδέεται με την A. Στη συνδυαστική περιγραφή μας και συγκεκριμένα στο θεώρημα 1.40, δείξαμε ότι για το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα ορίζεται ο επιμορφισμός $\pi : A * B \to A *_U B$ και ισχύει ότι

$$\mathrm{Im}(\pi|_A) \simeq A, \quad \mathrm{Im}(\pi|_B) \simeq B$$

Συνεπώς, το στοιχείο g του αμαλγάματος μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\pi(g_1)\pi(g_2)\cdots\pi(g_n)$$

όπου $g_i \in A$ ή B και τα διαδοχικά g_i, g_{i+1} ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες. Άρα λοιπόν η κορυφή gA έχει τη μορφή $\pi(g_1)\cdots\pi(g_n)A$. Αν $g_n \in A$ τότε $\pi(g_1)\cdots\pi(g_n)A = \pi(g_1)\cdots\pi(g_{n-1})A$ ενώ, αν $g_n \in B$, τότε η κορυφή $\pi(g_1)\cdots\pi(g_n)A$ συνδέεται με την $\pi(g_1)\cdots\pi(g_n)B = \pi(g_1)\cdots\pi(g_{n-1})B$ μέσω της ακμής $\pi(g_1)\cdots\pi(g_n)U$ και η τελευταία κορυφή συνδέεται με την $\pi(g_1)\cdots\pi(g_n)B = \pi(g_1)\cdots\pi(g_{n-2})A$ μέσω της $\pi(g_1)\cdots\pi(g_{n-1})U$. Συνεπώς σε κάθε περίπτωση, μπορούμε επαγωγικά να καταλήξουμε στην κορυφή A.

Το X δεν περιέχει κλειστά ανηγμένα μονοπάτια. Έστω ένα ανηγμένο μονοπάτι $e_1e_2\ldots e_n$ ώστε να ισχύει $\tau(e_n) = a(e_1) = gA$ ή gB. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλες τις ακμές του μονοπατιού με g^{-1} χωρίς βλάβη της γενικότητας (λόγω του ορισμού της δράσης) ώστε το μονοπάτι να αρχίζει από την κορυφή A ή B. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που η αρχή και το τέλους του μονοπατιού είναι η κορυφή A. Από τον ορισμό του γραφήματος, οι γειτονικές κορυφές είναι σύμπλοκα των υποομάδων A και B. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος του παραπάνω μονοπατιού πρέπει να είναι άρτιος αριθμός, ειδάλλως θα καταλήγαμε σε σύμπλοκο του B. Γνωρίζουμε ότι κάθε στοιχείο g του αμαλγάματος μπορεί να γραφεί σε U κανονική μορφή· $g = \pi(u)\pi(x_1)\cdots\pi(x_n)$.

Αφού η αρχή του μονοπατιού μας είναι η κορυφή A, η ακμή e_1 έχει τη μορφή x_1U όπου $x_1 \in A$. Η ακμή e_2 έχει τη μορφή x_1y_1U όπου πλέον το y_1 ανήκει στο $B\backslash U$, ειδάλλως θα είχαμε παλινδρόμηση. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι το τέλος της e_n έχει τη μορφή

$$\tau(e_n) = x_1 \cdot y_1 \cdots x_{\frac{n}{2}} y_{\frac{n}{2}} A$$

Αφού το μονοπάτι είναι κλειστό θα ισχύει ότι

$$x_1 \cdot y_1 \cdots x_{\frac{n}{2}} y_{\frac{n}{2}} A = A$$

Θα δείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $x_1 \cdot y_1 \cdots x_{\frac{n}{2}} y_{\frac{n}{2}} = a$ οπότε

$$(a^{-1}x_1) \cdot y_1 \cdots x_{\frac{n}{2}} y_{\frac{n}{2}} = 1$$

και είναι το $a^{-1}x_1$ ανήκει στο A και μπορεί να ανήκει και στο U. Το y_1 όμως ανήκει στο $B\backslash U$ και το συλλαβικό μήκος του τελευταίου στοιχείου είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 1, άρα είναι άτοπο, αφού το συλλαβικό μήκος του 1 είναι μηδέν.

Συνεπώς αποδείξαμε ότι το X είναι δένδρο. Λόγω του ορισμού του X και της δράσης, υπάρχουν δύο τροχιές κορυφών· η τροχιά της A και η τροχιά της B. Επιπλέον, υπάρχει μόνο μία τροχιά ακμών, η τροχιά της U, συνεπώς βλέπουμε ότι το γράφημα πηλίκο είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Θεωρούμε τώρα το ευθύγραμμο τμήμα E του X το οποίο αποτελείται από τις κορυφές A, B και την ακμή U. Είναι $\pi(E) = X/G$ και, αν $g \in \mathrm{Stab}_G(A)$ τότε $gA = A \Leftrightarrow g \in A$. Ανάλογα αποδεικνύονται και οι άλλες δύο σχέσεις. $\square$

Παρατήρηση. Στο προηγούμενο δένδρο που κατασκευάσαμε επί του οποίου δρα το αμάλγαμα, παρατηρούμε ότι οι σταθεροποιούσες των κορυφών και των ακμών είναι τα συζυγή των A, B, U. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει ότι $\mathrm{Stab}_G(gA) = gAg^{-1}$, $\mathrm{Stab}_G(gB) = gBg^{-1}$ και $\mathrm{Stab}_G(gU) = gUg^{-1}$.

Ισχύει και το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος υπό την εξής έννοια·

Θεώρημα 1.66. *Έστω μία ομάδα G η οποία δρα χωρίς αντιστροφές των ακμών επί ενός δένδρου X ώστε το γράφημα πηλίκο X/G να είναι ευθύγραμμο τμήμα. Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα E του X ώστε να ισχύει $\pi(E) = X/G$ και έστω L, M τα άκρα του και e η ακμή του. Θεωρούμε τις σταθεροποιούσες $\mathrm{Stab}_G(L), \mathrm{Stab}_G(M)$ και $\mathrm{Stab}_G(e)$. Ισχύει ότι η G είναι ισόμορφη με το ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $\mathrm{Stab}_G(L) *_{\mathrm{Stab}_G(e)} \mathrm{Stab}_G(M)$.*

Απόδειξη. Στο εξής θα συμβολίζουμε τις σταθεροποιούσες $\mathrm{Stab}_G(L)$, $\mathrm{Stab}_G(M)$ και $\mathrm{Stab}_G(e)$ με A, B και U αντίστοιχα για λόγους συντομίας. Θεωρούμε την φυσική απεικόνιση $\psi : A *_U B \to G$ που απεικονίζει κάθε στοιχείο της A και της B στον εαυτό του. Φαίνεται εύκολα ότι η ψ είναι ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός, χρησιμοποιώντας για παράδειγμα την μοναδικότητα της U κανονικής μορφής.

Θα δείξουμε ότι είναι $1-1$ και επί. Για το επί, αρκεί να δείξουμε ότι η G παράγεται από τις εικόνες των $\psi(A) = A, \psi(B) = B$. Έστω $H = \langle A, B\rangle$ η υποομάδα της G που παράγεται από τις A, B και υποθέτουμε ότι $H \lneq G$. Αυτό σημαίνει ότι τα υπογραφήματα HE και $(G\backslash H)E$ είναι ξένα.

Πράγματι, αν $ge = he$ τότε $gh^{-1} \in U \subseteq H$ και $h \in H$ άρα $g \in H$-άτοπο. Αν $gL = hM$ τότε η κορυφή L ανήκει στην τροχιά της M και άρα $\pi(L) = \pi(M)$ το οποίο είναι άτοπο, αφού το $\pi(E)$ είναι ευθύγραμμο τμήμα. Ανάλογα ελέγχονται και οι άλλες περιπτώσεις.

Ισχύει λοιπόν ότι τα HE και $(G\backslash H)E$ είναι ξένα, το οποίο όμως είναι άτοπο γιατί $HE \cup (G\backslash H)E = GE = X$ και το X είναι συνεκτικό γράφημα, οπότε δεν μπορεί να χωριστεί σε ξένα υπογραφήματα. Άρα $H = G$ και η ψ είναι επί.

Θα δείξουμε τώρα ότι η ψ είναι $1-1$. Έστω δύο στοιχεία x, y του αμαλγάματος ώστε $\psi(x) = \psi(y)$. Έστω επίσης ότι η U κανονική μορφή τους είναι

$$x = un_1 \cdots n_k,\ y = vm_1 \cdots m_\lambda$$

όπου τα $(u, n_1, \ldots, n_k)$, $(v, m_1, \ldots, m_\lambda)$ είναι U κανονικές μορφές. Αυτό σημαίνει ότι $\psi(n_i) = n_i$ και $\psi(m_j) = m_j$ για κάθε n_i και m_j, αφού εξ' ορισμού, η ψ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στα A, B. Το ίδιο ισχύει και για τα u, v αφού $U := \pi(U) = \pi(A) \cap \pi(B)$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}\psi(x) = \psi(y) &\Leftrightarrow \psi(un_1 \cdots n_k) = \psi(vm_1 \cdots m_\lambda) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \psi(u)\psi(n_1) \cdots \psi(n_k) = \psi(v)\psi(m_1) \cdots \psi(m_\lambda) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow un_1 \cdots n_k = vm_1 \cdots m_\lambda \Leftrightarrow x = y\end{aligned}$$

Δηλαδή αποδείξαμε το ζητούμενο. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Conjugate maximal υποομάδες και αυτομορφισμοί

Ο στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να "ξαναδιαβάσουμε" το άρθρο [10] των Karrass, Pietrowski και Solitar μέσω της γεωμετρικής θεωρίας ομάδων, η οποία εκείνη την εποχή ήταν ακόμα στα σπάργανα.

Το άρθρο αυτό πραγματεύεται τις ομάδες αυτομορφισμών ομάδων που έχουν τη μορφή αμαλγάματος. Ιδιαίτερα, ασχολείται με την περίπτωση που η αμαλγαματοποιημένη υποομάδα είναι conjugate maximal και αποδεικνύει ότι, αν όλοι οι αυτομορφισμοί έχουν κάποιες επιθυμητές ιδιότητες τότε και η ομάδα αυτομορφισμών έχει τη μορφή αμαλγάματος.

2.1 Conjugate maximal υποομάδες

Σε αυτήν την πρώτη παράγραφο θα εξοικειωθούμε με την έννοια των conjugate maximal υποομάδων. Επιπλέον, θα αποδείξουμε ένα λήμμα το οποίο αφορά την ειδική περίπτωση που έχουμε ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα και η αμαλγαματοποιημένη υποομάδα είναι conjugate maximal.

Ορισμός 2.1 (conjugate maximal)**.** Έστω H μία υποομάδα μιας ομάδας G.

Η H ονομάζεται **conjugate maximal** στη G αν ισχύει το εξής·

$$\text{αν } gHg^{-1} \subseteq H \text{ για κάποιο } g \in G \text{ τότε } gHg^{-1} = H$$

Τα επόμενα παραδείγματα μάς εφοδιάζουν με παραδείγματα conjugate maximal υποομάδων.

Παράδειγμα 2.2. Αν η H είναι πεπερασμένη τότε είναι conjugate maximal. Γενικότερα, αν δεν περιέχει γνήσια ισόμορφη υποομάδα είναι conjugate maximal.

Παρατήρηση. Στο [7], οι Fallat, Li, Lutzer και Stanford δίνουν ορισμένα εύκολα (και ορισμένα όχι τόσο εύκολα) παραδείγματα ομάδων που περιέχουν γνησίως υποομάδες που είναι ισόμορφές τους.

Απόδειξη. Αφού η H είναι πεπερασμένη, ισχύει $|gHg^{-1}| = |H|$ και αφού η μία περιέχεται στην άλλη, είναι ίσες. Για το δεύτερο σκέλος, αν θεωρήσουμε τον εσωτερικό αυτομορφισμό $\tau_{h^{-1}} : hUh^{-1} \to U$ αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι ισομορφισμός, δηλαδή η hUh^{-1} είναι ισόμορφη με την U και περιέχεται γνήσια σε αυτήν, το οποίο είναι άτοπο. □

Παράδειγμα 2.3. Αν η H είναι κανονική τότε είναι conjugate maximal.

Απόδειξη. Άμεσο. □

Παράδειγμα 2.4. Αν η H είναι malnormal στη G, δηλαδή ισχύει $gHg^{-1} \cap H = 1$ για κάθε $g \in G \backslash H$, τότε είναι conjugate maximal.

Απόδειξη. Αν $gHg^{-1} \subseteq H$ και $g \notin H$ τότε $gHg^{-1} \cap H = gHg^{-1} = 1$ άρα, είτε $H = 1$, οπότε είναι και conjugate maximal, είτε είναι άτοπο και $g \in H$, δηλαδή $gHg^{-1} = H$. Οπότε σε κάθε περίπτωση ισχύει το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 2.5. Αν η H είναι πεπερασμένου δείκτη στη G τότε είναι conjugate maximal.

Απόδειξη. Είναι $[G : H] < \infty$ και έστω ότι $gHg^{-1} \subseteq H$. Είναι τότε

$$[G : H] = [gGg^{-1} : gHg^{-1}] = [G : gHg^{-1}]$$

Επιπλέον, $[G : gHg^{-1}] = [G : H] \cdot [H : gHg^{-1}]$ και $[G : gHg^{-1}] = [G : H] < \infty$ άρα $[H : gHg^{-1}] = 1$. □

Το επόμενο βήμα, πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή των υποομάδων της ομάδας αυτομορφισμών, είναι να δώσουμε δύο λήμματα που θα συνδέσουν τις conjugate maximal υποομάδες με τα προηγούμενα.

Λήμμα 2.6. *Έστω ένα ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $G = A *_U B$. Τότε η U είναι conjugate maximal στη G αν και μόνο αν είναι conjugate maximal στις A, B.*

Απόδειξη. Έστω ότι η U είναι conjugate maximal στο αμάλγαμα και έστω ότι $aUa^{-1} \subseteq U$ για κάποιο $a \in A$. Τότε ισχύει ότι $\pi(aUa^{-1}) \subseteq \pi(U)$ στο αμάλγαμα, όπου $\pi : A * B \to A *_U B$ ο φυσικός επιμορφισμός, δηλαδή $\pi(a)\pi(U)\pi(a)^{-1} \subseteq \pi(U)$. Αφού η $\pi(U)$ είναι conjugate maximal στο αμάλγαμα, έπεται ότι $\pi(a)\pi(U)\pi(a)^{-1} = \pi(U)$. Έστω τώρα $h \in U$ και θα δείξουμε ότι $h \in aUa^{-1}$. Είναι $\pi(h) \in \pi(U) = \pi(a)\pi(U)\pi(a)^{-1}$, συνεπώς υπάρχει $h' \in U$ ώστε $\pi(h) = \pi(a)\pi(h')\pi(a)^{-1} = \pi(ah'a^{-1})$. Είναι $h, ah'a^{-1} \in A$ και ο περιορισμός της π στην A είναι $1-1$, συνεπώς $h = ah'a^{-1} \in aUa^{-1}$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι η U (δηλαδή, η $\phi(U)$) είναι conjugate maximal στη B.

Αντίστροφα, έστω ότι η U είναι conjugate maximal σε κάθε μία από τις A, B, θα δείξουμε ότι είναι conjugate maximal στο αμάλγαμα. Έστω $g \in A *_U B$ ώστε $gUg^{-1} \subseteq U$. Αν $g \in U$ τότε $gUg^{-1} = U$. Έστω λοιπόν ότι $g \notin U$, συνεπώς, το g γράφεται με μοναδικό τρόπο σε ανηγμένη μορφή

$$g = x_1 y_1 \cdots x_n y_n$$

με x_i, $y_i \in A \backslash U$ ή $B \backslash U$ και διαφορετικοί όροι ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες.

Έχουμε ότι $gUg^{-1} \subseteq U$ δηλαδή

$$x_1 y_1 \cdots x_n y_n U y_n^{-1} x_n^{-1} \cdots y_1^{-1} x_1^{-1} \subseteq U \tag{2.1}$$

Έστω ότι $y_n U y_n^{-1} \nsubseteq U$, δηλαδή υπάρχει $u \in U$ ώστε $y_n u y_n^{-1} \notin U$. Το y_n ανήκει σε κάποιον από τους παράγοντες, έστω ότι ανήκει στον B, και άρα είναι

$$y_n u y_n^{-1} \in B \backslash U$$

Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο $x_1 y_1 \cdots x_n (y_n u y_n^{-1}) x_n^{-1} \cdots y_1^{-1} x_1^{-1}$ βρίσκεται σε ανηγμένη μορφή, συνεπώς το στοιχείο αυτό δεν ανήκει στο U, το οποίο είναι άτοπο, λόγω του εγκλεισμού 2.1. Άρα $y_n U y_n^{-1} \subseteq U$ και, αφού η U είναι conjugate maximal σε κάθε έναν από τους παράγοντες, θα ισχύει η ισότητα· $y_n U y_n^{-1} = U$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο, θα καταλήξουμε στον εγκλεισμό $x_1 U x_1^{-1} \subseteq U$, απ' όπου έπεται ότι $x_1 U x_1^{-1} = U$, αφού η U είναι conjugate maximal σε κάθε έναν από τους παράγοντες. Συνεπώς αποδείξαμε το λήμμα. □

Λήμμα 2.7. *Έστω $G = A *_U B$, $A \neq U \neq B$ και η U είναι conjugate maximal στην G. Αν $\langle A, gBg^{-1} \rangle = G$ (δηλαδή η G παράγεται από την A και την gBg^{-1}) και $A \cap gBg^{-1} = kUk^{-1}$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε να ισχύει ότι*

$$gBg^{-1} = aBa^{-1} \text{ και } kUk^{-1} = aUa^{-1}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι, αν $g \in U$, τότε $gBg^{-1} = B$ και $U = A \cap B = kUk^{-1}$, άρα για $a = 1 \in A$ είναι $gBg^{-1} = B = aBa^{-1}$, $kUk^{-1} = U = aUa^{-1}$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Έστω ότι το g γράφεται στη μορφή

$$g = x_1 x_2 \cdots x_n$$

όπου $x_i \in A$ ή B και $x_{i+1} \in B$ ή A για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$. Παρατηρούμε ότι, αν $n = 1$, το λήμμα ισχύει. Πράγματι, είτε $g \in A$, είτε $g \in B$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$kUk^{-1} = A \cap gBg^{-1} = g(A \cap B)g^{-1} = gUg^{-1}$$

δηλαδή, τη ζητούμενη σχέση με $a = g$, ενώ στην δεύτερη περίπτωση είναι

$$kUk^{-1} = A \cap gBg^{-1} = A \cap B = U$$

άρα πάλι ισχύει το ζητούμενο για $a = 1_G$.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι $n > 1$. Θα δείξουμε ότι τότε οδηγούμαστε σε άτοπο και αναγκαστικά θα πρέπει να είναι $n = 1$. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $x_n \in A$. Όμοια, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 \in B$ αφού, αν ανήκε στο A, τότε, αντικαθιστώντας το g με το στοιχείο $g' = x_2 \cdots x_n$ και το k με το $k' = x_1^{-1}k$ θα είχαμε πάλι ότι $G = \langle A, g'Bg'^{-1} \rangle$ και, αν ισχύει το ζητούμενο για τα νέα στοιχεία, δηλαδή

$$g'Bg'^{-1} = aBa^{-1} \text{ και } k'Uk'^{-1} = aUa^{-1}$$

τότε $gBg^{-1} = x_1 g'Bg'^{-1} x_1^{-1} = (x_1 a)B(ax_1)^{-1}$ και
$kUk^{-1} = x_1(k'Uk'^{-1})x_1^{-1} = (x_1 a)U(ax_1)^{-1}$ δηλαδή ισχύει και για τα αρχικά στοιχεία.

Συνοψίζοντας, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $x_1 \in B \backslash U$ και $x_n \in A \backslash U$. Θεωρούμε το γράφημα X επί του οποίου δρα η G χωρίς αντιστροφές με κορυφές τα στοιχεία $G/A \sqcup G/B$ και ακμές τα στοιχεία του $G/U \sqcup \overline{G/U}$.

Ισχυρισμός. Ισχύει $B \cap gBg^{-1} \subseteq gUg^{-1}$ και $A \cap gBg^{-1} \subseteq A \cap B$.

Απόδειξη. Έστω $x \in B \cap gBg^{-1}$ και θεωρούμε τις κορυφές B, gB του γραφήματος X. Το X είναι δένδρο, συνεπώς υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή που συνδέει τις δύο κορυφές. Η γεωδαισιακή αυτή περιλαμβάνει την ακμή gU (είναι η ακμή που συνδέει τις κορυφές $gA = x_1 \cdots x_{n-1}A$ και gB). Το x σταθεροποιεί την κορυφή B (αφού $x \in B$ είναι $xB = B$) και την κορυφή gB (αφού $x = gbg^{-1}$ θα είναι $xgB = gbB = gB$) άρα θα σταθεροποιεί και τη γεωδαισιακή τους. Άρα θα σταθεροποιεί όλες τις ακμές τις γεωδαισιακής, άρα και την gU άρα $x \in gUg^{-1}$.
Για το δεύτερο σκέλος, αν $x \in A$ και $x \in gBg^{-1}$ τότε, όπως πριν, το x σταθεροποιεί τις κορυφές A και gB. Συνεπώς σταθεροποιεί και τη γεωδαισιακή τους καθώς και τις κορυφές της γεωδαισιακής. Η πρώτη κορυφή αυτής της γεωδαισιακής, μετά την A, είναι η $x_1B = B$. Αφού την σταθεροποιεί, έπεται ότι το x ανήκει στη B. □

Με ένα εντελώς ανάλογο επιχείρημα με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του ισχυρισμού, προκύπτει ότι $A \cap gBg^{-1} \subseteq gUg^{-1}$, δηλαδή $kUk^{-1} \subseteq gUg^{-1}$. Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι $g^{-1}kUk^{-1}g \subseteq U$ και αφού η U είναι conjugate maximal, έπεται ότι $kUk^{-1} = gUg^{-1}$. Δηλαδή $A \cap gBg^{-1} = gUg^{-1}$. Συνεπώς, από τον ισχυρισμό προκύπτει ότι $gUg^{-1} = A \cap gBg^{-1} \subseteq A \cap B = U$ και, αφού η U είναι conjugate maximal, ισχύει η ισότητα· $U = gUg^{-1}$.

Θα καταλήξουμε τώρα στο άτοπο χρησιμοποιώντας ένα συνδυαστικό επιχείρημα. Αφού $U \subsetneq B$ υπάρχει $b \in B \backslash U$. Θα δείξουμε ότι το b δεν γίνεται να ανήκει στο $\langle A, gBg^{-1} \rangle$. Αφού $b \in B \backslash U$, το b δεν ανήκει στο A προφανώς, και δεν ανήκει στο gBg^{-1} αφού τότε, λόγω του ισχυρισμού, θα ανήκε στο U.

Αφού το b ανήκει στο B, το συλλαβικό του μήκος είναι ίσο με 1. Τα στοιχεία όμως του συνόλου $\langle A, gBg^{-1} \rangle = G$ που δεν ανήκουν ούτε στο A, ούτε στο gBg^{-1} έχουν μήκος μεγαλύτερο από 1. Πράγματι, έστω ένα στοιχείο

$$a_1^{e_1}(gb_1g^{-1})^{e_1'}a_2^{e_2}(gb_2g^{-1})^{e_2'} \cdots = a_1^{e_1}gb_1^{e_1'}g^{-1}a_2^{e_2}gb_2^{e_2'}g^{-1} \ldots$$

όπου $e_i, e_i' \in \mathbb{Z}$. Αν $a_1 \in U$ τότε, αφού $U = gUg^{-1} = kUk^{-1} = A \cap gBg^{-1}$, θα είναι $a_1^{e_1} = g(b_1')^{e_1}g^{-1}$ και, συνεπώς,

$$a_1^{e_1}gb_1^{e_1'}g^{-1} = g(b_1')^{e_1}b_1^{e_1'}g^{-1} \in gBg^{-1}$$

Ανάλογα, αν $b_1^{e_1'} \in U$ τότε $gb_1^{e_1'}g^{-1} \in gUg^{-1} \subseteq A$ συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$a_1^{e_1}gb_1^{e_1'}g^{-1} = a_1^{e_1} = a_1'$$

Απαλείφοντας λοιπόν τέτοιους όρους μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε γινόμενο της μορφής

$$a_1^{e_1}gb_1^{e_1'}g^{-1}a_2^{e_2}gb_2^{e_2'}g^{-1}\dots$$

με $a_i \in A\backslash U$ και $b_j \in B\backslash U$ για κάθε i, j. Το μήκος όμως ενός τέτοιου στοιχείου είναι μεγαλύτερο από ένα, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

2.2 Οι υποομάδες της ομάδας αυτομορφισμών

Οι επόμενοι ορισμοί μάς επιτρέπουν να διακρίνουμε τους αυτομορφισμούς ενός ελεύθερου γινομένου με αμάλγαμα ανάλογα με τις ιδιότητές τους και να τους ταξινομούμε ανάλογα με τις μεταξύ τους σχέσεις.

Ορισμός 2.8. Έστω $G = A *_U B$ όπου $A \neq U \neq B$. Όπως πριν, θα ταυτίζουμε τις A, B και U με τις εικόνες τους στο αμάλγαμα. Θεωρούμε τις ακόλουθες υποομάδες της ομάδας αυτομορφισμών της G.

Con(G): Ένας **conjugating αυτομορφισμός** της G είναι ένας αυτομορφισμός ο οποίος απεικονίζει την A σε κάποιο συζυγές της, τη B σε κάποιο συζυγές της και την U σε κάποιο συζυγές της. Το σύνολο των conjugating αυτομορφισμών είναι υποομάδα της $Aut(G)$.

RCon(G): Ένας **reverse conjugating αυτομορφισμός** της G είναι ένας αυτομορφισμός ο οποίος απεικονίζει την A σε κάποιο συζυγές της B, τη B σε κάποιο συζυγές της A και τη U σε κάποιο συζυγές της. Αν υπάρχει τουλάχιστον ένας reverse conjugating αυτομορφισμός, θα λέμε ότι η G είναι **reversible**. Το σύνολο των reverse conjugating αυτομορφισμών μαζί με τους conjugating αυτομορφισμούς σχηματίζουν υποομάδα της $Aut(G)$ την οποία συμβολίζουμε με $RCon(G)$. Προφανώς ισχύει ότι $Con(G) \leq RCon(G)$.

Pair(G): Ένας **pairing αυτομορφισμός** της G είναι ένας αυτομορφισμός ο οποίος απεικονίζει την A στην A και την B στη B. Αν ικανοποιεί αυτά τα

δύο τότε θα απεικονίζει και την U στη U οπότε θα ανήκει στην $Con(G)$. Θα συμβολίζουμε με $Pair(G)$ την ομάδα των pairing αυτομορφισμών. Ισχύουν λοιπόν οι εγκλεισμοί $Pair(G) \leq Con(G) \leq RCon(G)$.

RPair(G): Ένας **reverse pairing αυτομορφισμός** της G είναι ένας αυτομορφισμός που απεικονίζει την A στη B και τη B στην A. Το σύνολο των reverse pairing αυτομορφισμών μαζί με τους pairing αυτομορφισμούς σχηματίζουν ομάδα η οποία συμβολίζεται με $RPair(G)$.

Xtn(H): Αν H είναι μία υποομάδα της G τότε θα συμβολίζουμε με $Xtn(H)$ (extensions της H) το σύνολο των αυτομορφισμών της G οι οποίοι είναι conjugating και απεικονίζουν την H στον εαυτό της.

Inn(H): Αν H είναι μία υποομάδα της G τότε θα συμβολίζουμε με $Inn(H)$ την υποομάδα της $Inn(G)$ που αποτελείται από εκείνους τους εσωτερικούς αυτομορφισμούς που προκύπτουν από τα στοιχεία της H.

Λήμμα 2.9. *Έστω $G = A *_U B$ όπου $A \neq U \neq B$, όπου η U είναι conjugate maximal στη G. Τότε, κάθε αυτομορφισμός της G που απεικονίζει την A σε συζυγές της και τη B σε συζυγές της είναι conjugating αυτομορφισμός και κάθε αυτομορφισμός που απεικονίζει την A σε συζυγές της B και τη B σε συζυγές της A είναι reverse conjugating αυτομορφισμός.*

Απόδειξη. Για το πρώτο σκέλος, ο σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι, αν η U είναι conjugate maximal και ένας αυτομορφισμός ϕ απεικονίζει τις A και B σε συζυγή τους, τότε θα απεικονίζει και τη U σε συζυγές της. Αν ισχυεί ότι $\phi(A) = gAg^{-1}$, θεωρούμε την σύνθεση $\phi' := \tau_{g^{-1}} \circ \phi$ οπότε ο ϕ' απεικονίζει την A στον εαυτό της και τη B σε συζυγές της. Παρατηρούμε ότι, αφού η ϕ' είναι αυτομορφισμός, ισχύει ότι $\phi'(U) = \phi'(A \cap B) = \phi'(A) \cap \phi'(B) = A \cap xBx^{-1}$ για κάποιο $x \in G$. Για αυτό το x μπορούμε να υποθέσουμε ότι στην γραφή του σε ανηγμένη μορφή, το τελευταίο στοιχείο δεν ανήκει στο B.

Ισχυρισμός. Ισχύει ότι $\phi'(U) \subseteq xUx^{-1}$

Απόδειξη. Η G είναι ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα, συνεπώς δρα επί ενός δένδου χωρίς αντιστροφές των ακμών ώστε οι σταθεροποιούσες των ακμών να είναι υποομάδες της μορφής gUg^{-1}. Αν $y \in \phi'(U)$ τότε $y \in A \cap xBx^{-1}$, το οποίο σημαίνει ότι το y σταθεροποιεί τις κορυφές A και xB. Συνεπώς σταθεροποιεί και τη γεωδαισιακή που συνδέει αυτές τις κορυφές. Όπως είπαμε, το x γράφεται στη μορφή $x_1 \cdots x_n$ με $x_n \notin B$. Άρα, η τελευταία ακμή αυτής της γεωδαισιακής είναι η xU και το y την σταθεροποιεί συνεπώς $y \in xUx^{-1}$. Αφού το y ήταν τυχαίο, ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. □

Θεωρούμε τώρα τον αυτομομορφισμό ϕ'^{-1} οπότε $\phi'^{-1}(A) = A$ και $\phi'^{-1}(xBx^{-1}) = B$. Η τελευταία σχέση μάς δίνει ότι $\phi'^{-1}(x)\phi'^{-1}(B)\phi'^{-1}(x)^{-1} = B$ άρα $\phi'^{-1}(B) = \phi'^{-1}(x)^{-1}B\phi'^{-1}(x)$. Άρα,

$$\phi'^{-1}(U) = \phi'^{-1}(A \cap B) = \phi'^{-1}(A) \cap \phi'^{-1}(B) = A \cap \phi'^{-1}(x)^{-1}B\phi'^{-1}(x)$$

Σημειώνουμε ότι, πριν τον ισχυρισμό, είπαμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε πως το τελευταίο στοιχείο του x δεν ανήκει στο B. Ιδεατά, είναι πιθανόν να ισχύει ότι και το τελευταίο στοιχείο του $\phi'^{-1}(x)^{-1}$ δεν ανήκει στο B. Σε αυτήν την περίπτωση, εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό για το $\phi'^{-1}(U)$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη χωρίς να χρησιμοποιήσουμε ότι η U είναι conjugate maximal.

Ασφαλώς, δεν μπορούμε να υποθέσουμε κάτι τέτοιο για το τελευταίο στοιχείο του $\phi'^{-1}(x)^{-1}$. Σίγουρα όμως θα ισχύει ότι

$$\phi'^{-1}(U) = A \cap zBz^{-1}$$

για κάποιο z του οποίου το τελευταίο στοιχείο δεν ανήκει στο B. Εφαρμόζοντας το λήμμα έπεται ότι $\phi'^{-1}(U) \subseteq zUz^{-1}$ και έχουμε ότι

$$U = \phi' \circ \phi'^{-1}(U) \subseteq \phi'(z)\phi'(U)\phi'(z^{-1}) \subseteq [\phi'(z)x]U[\phi'(z)x]^{-1}$$

Αφού η U είναι conjugate maximal, ισχύει η ισότητα και άρα

$$\phi'(U) = \phi'(z)^{-1}U\phi'(z)$$

Αντικαθιστώντας την ϕ' με $\tau_{g^{-1}} \circ \phi$ παίρνουμε ότι

$$\phi(U) = g\phi'(z)^{-1}U\phi'(z)g^{-1}$$

Δηλαδή, το ζητούμενο.

Για το δεύτερο σκέλος, έστω $\phi(A) = gBg^{-1}$. Έστω $\phi' = \tau_{g^{-1}} \circ \phi$ άρα $\phi'(A) = B$ και $\phi'(B) = xAx^{-1}$. Είναι $\phi'(U) = B \cap xAx^{-1}$ και μπορούμε χωρίς βλάβη να υποθέσουμε ότι η ανηγμένη μορφή του x δεν τελειώνει με στοιχείο του A. Με το ίδιο επιχείρημα του ισχυρισμού προκύπτει ότι $\phi'(U) \subseteq xUx^{-1}$. Παρατηρούμε ότι η $(\phi')^2$ απεικονίζει την A στον εαυτό της και τη B στον εαυτό της, άρα από το πρώτο σκέλος, $(\phi')^2(U) = \omega U \omega^{-1}$. Συνεπώς,

$$\omega U \omega^{-1} = \phi' \circ \phi'(U) \subseteq \phi'(x)\phi'(U)\phi'(x^{-1}) \subseteq \phi'(x)^2 U \phi'(x)^{-2}$$

αφού η U είναι conjugate maximal θα είναι ίσα, συνεπώς,

$$\phi'(U) = \mu U \mu^{-1}$$

και άρα

$$\phi(U) = \mu' U \mu'^{-1}$$

□

Στο επόμενο λήμμα γίνεται φανερή η αλληλεπίδραση μεταξύ των υποομάδων της ομάδας αυτομορφισμών που ορίσαμε.

Λήμμα 2.10. *Έστω $G = A *_U B$ όπου $A \neq U \neq B$ και η U είναι conjugate maximal. Τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις·*

$$Xtn(A) = Inn(A) \cdot Pair(G) \text{ και,} \tag{2.2}$$

$$\text{ανάλογα, } Xtn(B) = Inn(B) \cdot Pair(G)$$

$$Inn(A) \triangleleft Xtn(A) \text{ και } Inn(G) \triangleleft Con(G) \tag{2.3}$$

$$Inn(A) \cap Pair(G) = Inn(U) \tag{2.4}$$

$$Inn(G) \cap Xtn(A) = Inn(A) \tag{2.5}$$

$$Inn(G) \cap Pair(G) = Inn(U) \tag{2.6}$$

$$Inn(A) \simeq A/(U \cap Z(A) \cap Z(B)) = A/Z(G) \tag{2.7}$$

$$Inn(U) \simeq U/Z(G) \tag{2.8}$$

$$\text{Αν } p \in Pair(G) \text{ τότε } p \cdot Inn(A) = Inn(A) \cdot p \text{ και} \tag{2.9}$$

$$pInn(B) = Inn(B)p.$$

Ιδιαίτερα, αν $\tau_a \in Inn(A \backslash U)$ τότε, $p \circ \tau_{a'} = \tau'_a \circ p$ και $a' \in A \backslash U$.

Απόδειξη. Για τη 2.2, έστω $f \in Xtn(A)$, δηλαδή η f απεικονίζει το A στο A και τα B, U σε συζυγή τους. Θα εφαρμόσουμε το λήμμα 2.7. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$kUk^{-1} = f(U) = f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = A \cap gBg^{-1}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η G παράγεται από τα A, gBg^{-1}. Αφού η f είναι αυτομορφισμός, ισχύει ότι

$$G = f(G) = f(\langle A \cup B \rangle) = \langle f(A \cup B) \rangle = \langle f(A) \cup f(B) \rangle = \langle A \cup gBg^{-1} \rangle$$

Συνεπώς εφαρμόζεται το λήμμα 2.7 και ισχύει ότι

$$f(B) = aBa^{-1} \text{ και } f(U) = aUa^{-1} \text{ για κάποιο } a \in A.$$

Θεωρούμε τον εσωτερικό αυτομορφισμό τ_a και τον pairing αυτομορφισμό $\tau_{a^{-1}} \circ f$ οπότε ισχύει

$$f = \underbrace{\tau_a}_{\in Inn(A)} \circ \underbrace{\tau_{a^{-1}} \circ f}_{\in Pair(G)}$$

Δηλαδή $Xtn(A) \subseteq Inn(A)Pair(G)$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής.

Οι σχέσεις της 2.3 είναι άμεσες. Για την 2.4, έστω $a \in A$ ώστε $\tau_a(B) = B$. Υποθέτουμε ότι $a \in A \backslash U$ και έστω ένα $b \in B \backslash U$. Το στοιχείο $\tau_a(b) = aba^{-1}$ έχει συλλαβικό μήκος ίσο με 3 ενώ είναι ίσο με κάποιο $b \in B$ το οποίο έχει συλλαβικό μήκος το πολύ ίσο με 1. Αυτό είναι άτοπο άρα $a \in U$.

Για τη σχέση 2.5 θα χρησιμοποιήσουμε ένα γεωμετρικό επιχείρημα. Έστω ότι για κάποιο $g \in G$ ισχύει ότι $gAg^{-1} = A$. Αν το g δεν ανήκει στην A τότε οι κορυφές A, gA του γραφήματος που κατασκευάσαμε στο θεώρημα 1.65 είναι διακεκριμένες και για κάθε $a \in A$ ισχύει ότι $a = ga'g^{-1}$για κάποιο $a' \in A$ άρα $a(gA) = gA$. Δηλαδή τα στοιχεία της A σταθεροποιούν τις δύο κορυφές άρα και τη γεωδαισιακή τους. Η γεωδαισιακή αυτή θα ξεκινάει από την κορυφή A. Γνωρίζουμε όμως ότι οι ακμές που ξεκινούν από την A έχουν τη μορφή a_0U για κάποιο $a_0 \in A$. Αφού τα στοιχεία της A σταθεροποιούν τη γεωδαισιακή, θα σταθεροποιούν και την ακμή a_0U, δηλαδή $a \in a_0Ua_0^{-1}$ για κάθε $a \in A$. Ισχύει λοιπόν ότι $A \subseteq a_0Ua_0^{-1}$. Επίσης $U \subseteq A$ άρα $U \subseteq a_0Ua_0^{-1}$. Αφού η U είναι conjugate maximal προκύπτει ότι οι δύο ομάδες είναι ίσες. Αυτό όμως σημαίνει ότι $A = U$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα $g \in A$ και $Inn(G) \cap Xtn(A) \subseteq Inn(A)$. Τέλος, ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής.

Για τη σχέση 2.6, είναι $Pair(G) \subseteq Xtn(A)$ άρα

$$Inn(G) \cap Pair(G) = (Inn(G) \cap Xtn(A)) \cap Pair(G) \overset{2.5}{=} Inn(A) \cap Pair(G) \overset{2.4}{=} Inn(U)$$

Για τη σχέση 2.7, έστω $\phi : A \to Inn(A)$ με $\phi(a) = \tau_a$. Η ϕ είναι επιμορφισμός και θα δείξουμε ότι $\ker \phi = U \cap Z(A) \cap Z(B)$. Αν $\phi(x) = id_G$ τότε $\tau_x = id_G$ δηλαδή $xgx^{-1} = g$ για κάθε $g \in A *_U B$ άρα $g \in Z(G)$. Το θεώρημα 1.41 ολοκληρώνει την απόδειξη. Τελείως ανάλογα αποδεικνύεται και η σχέση 2.8.

Για τη σχέση 2.9, έστω $p \in Pair(G)$ και τ_a ένα στοιχείο του $Inn(A)$. Είναι

$$p \circ \tau_a(x) = p(axa^{-1}) = p(a)p(x)p(a)^{-1} = \tau_{p(a)} \circ p(x)$$

Αφού ο p είναι pairing αυτομορφισμός, θα είναι $p(a) \in A$ άρα $\tau_{p(a)} \in Inn(A)$ και άρα αποδείξαμε ότι $f \cdot Inn(A) = Inn(A)f$. Ανάλογα αποδεικνύεται ο ισχυρισμός και για το $Inn(B)$. Τέλος, αν $a \in A \backslash U$ τότε θα είναι και $p(a) \in A \backslash U$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο. □

Το επόμενο θεώρημα είναι ο στόχος μας για αυτό το κεφάλαιο.

Θεώρημα 2.11. *Έστω $G = A *_U B$ όπου $A \neq U \neq B$ και η U είναι conjugate maximal. Τότε ισχύουν τα εξής·*

$$Inn(G) \simeq Inn(A) *_{Inn(U)} Inn(B) \text{ και } Con(G) \simeq Xtn(A) *_{Pair(G)} Xtn(B), \tag{2.10}$$

$$[Xtn(A) : Pair(G)] = [A : U],\ [Xtn(B) : Pair(G)] = [B : U] \text{ και} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}[Con(G) : Inn(G)] &= [Xtn(A) : Inn(A)] = [Xtn(B) : Inn(B)] = \\ &= [Pair(G) : Inn(U)]\end{aligned} \tag{2.12}$$

Επιπλέον, αν η G είναι reversible (δηλαδή έχει reverse conjugating αυτομορφισμό) τότε

$$RPair(G) = \langle \rho, Pair(G) \rangle \tag{2.13}$$

(όπου ρ είναι ένας τυχαίος reverse pairing αυτομορφισμός),

$$[RPair(G) : Pair(G)] = 2 = [RCon(G) : Con(G)] \tag{2.14}$$

και

$$RCon(G) = Xtn(A) *_{Pair(G)} RPair(G) \tag{2.15}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 1.42. Αφού η G παράγεται από τις A, B, η $Inn(G)$ παράγεται από τις $Inn(A)$, $Inn(B)$. Επιπλέον, είναι άμεσο ότι $Inn(A) \cap Inn(B) = Inn(U)$. Μένει να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο της μορφής $\tau_{x_1}\tau_{x_2}\cdots\tau_{x_n}$ όπου τα x_i ανήκουν είτε στο $A \backslash U$, είτε στο $B \backslash U$ και διαδοχικοί όροι ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες, είναι μη τετριμμένο. Και

αυτό όμως είναι άμεσο αφού, αν υποθέσουμε ότι $\tau_{x_1}\tau_{x_2}\cdots\tau_{x_n} = 1$ τότε, διακρίνοντας περιπτώσεις για το x_n, θα καταλήξουμε σε άτοπο. Ενδεικτικά, αν $x_n \in A\backslash U$, τότε θεωρώντας ένα $b \in B\backslash U$, θα είναι

$$\tau_{x_1}\tau_{x_2}\cdots\tau_{x_n}(b) = b \Leftrightarrow x_1\cdots x_n \cdot b \cdot x_n^{-1}\cdots x_1^{-1} = b$$

το οποίο είναι άτοπο από τη μοναδικότητα της γραφής σε ανηγμένη μορφή (που ισχύει για τα στοιχεία που δεν ανήκουν στο U). Συνεπώς το πρώτο σκέλος της 2.10 αποδείχθηκε.

Για το δεύτερο σκέλος, θα χρησιμοποιήσουμε ξανά το θεώρημα 1.42. Δείχνουμε πρώτα ότι η $Con(G)$ παράγεται από τις $Xtn(A)$ και $Xtn(B)$. Για το σκοπό αυτό, θα δείξουμε αρχικά ότι παράγεται από τις $Inn(G)$ και $Pair(G)$. Έστω λοιπόν ένας conjugating αυτομορφισμός f. Αν $f(A) = gAg^{-1}$ τότε ο $\tau_{g^{-1}} \circ f$ απεικονίζει την A στον εαυτό της και τις B, U σε συζυγή τους. Άρα $\tau_{g^{-1}} \circ f \in Xtn(A)$ και συνεπως, $f \in Inn(G) \cdot Xtn(A)$. Από το προηγούμενο λήμμα είναι $Xtn(A) = Inn(A) \cdot Pair(G)$ και $Inn(A) \leq Inn(G)$ άρα $f \in Inn(G) \cdot Pair(G)$. Επιπλεόν, ίσχυει ότι $Inn(G) = \langle Inn(A), Inn(B)\rangle$, άρα η $Con(G)$ παράγεται από τα $Inn(A)$, $Inn(B)$ και $Pair(G)$ και, λόγω της σχέσης 2.2, έπεται ότι

$$Con(G) = \langle Inn(A), Inn(B), Pair(G)\rangle = \langle Xtn(A), Xtn(B)\rangle$$

Είναι προφανές ότι $Xtn(A) \cap Xtn(B) = Pair(G)$ οπότε μένει να δείξουμε ότι ένα στοιχείο της μορφής

$$g_1 \cdots g_n,$$

όπου $g_i \in Xtn(A)\backslash Pair(G)$ ή $Xtn(B)\backslash Pair(G)$ ώστε τα διαδοχικά στοιχεία να ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες, είναι μη τετριμμένο στην $Con(G)$. Λόγω της σχέσης 2.2, μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε g_i με ένα στοιχείο της μορφής $\tau_x \circ f$ όπου $x \in A\backslash U$ ή $B\backslash U$ και $f \in Pair(G)$. Επίσης στην 2.9, δείξαμε ότι $fInn(A) = Inn(A)f$ και $fInn(B) = Inn(B)f$ για κάθε $f \in Pair(G)$. Συνεπώς, μπορούμε να "μεταφέρουμε" όλους τους pairing αυτομορφισμούς στο τέλος και να καταλήξουμε στη σχέση

$$g_1 \cdots g_n = \tau_{x_1} \cdots \tau_{x_n} p$$

όπου $x_i \in A\backslash U$ ή $B\backslash U$, τα διαδοχικά x_i ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες και $p \in Pair(G)$. Αν το $\tau_{x_1} \cdots \tau_{x_n} p$ είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός, θα πρέπει να απεικονίζει τις A και B στον εαυτό τους. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού, αν για παράδειγμα είναι $x_n \in B\backslash U$ τότε, έστω $a \in A\backslash U$ και θα είναι

$$\tau_{x_1} \cdots \tau_{x_n} pa = a \Leftrightarrow x_1 \cdots x_n a' x_n^{-1} \cdots x_1^{-1} = a$$

για κάποιο $a' \in A \backslash U$, και, αν $n > 1$, έχουμε καταλήξει σε άτοπο. Αν $n = 1$ τότε θα είχαμε $\tau_{x_1} p$ με $x_1 \in A \backslash U$, οπότε επιλέγουμε $b \in B \backslash U$ και, από την εξίσωση $x_1 b' x_1^{-1} = b$ και τη μοναδικότητα της ανηγμένης μορφής, έχουμε πάλι άτοπο.

Συνεπώς, λόγω του θεωρήματος 1.42,

$$Con(G) \simeq Xtn(A) *_{Pair(G)} Xtn(B)$$

Για την σχέση 2.11, αρκεί να παρατηρήσουμε (χρησιμοποιώντας και το προηγούμενο λήμμα) ότι

$$\begin{aligned}[Xtn(A) : Pair(G)] &= [Inn(A)Pair(G) : Pair(G)] = \\ &= [Inn(A) : Inn(A) \cap Pair(G)] = \\ &= [Inn(A) : Inn(U)] = \\ &= [A/Z(G) : U/Z(G)] = [A : U]\end{aligned}$$

Ανάλογα προκύπτει ότι $[Xtn(B) : Pair(G)] = [B : U]$

Για το δεύτερο σκέλος είναι,

$$\begin{aligned}[Xtn(A) : Inn(A)] &= [Inn(A)Pair(G) : Inn(A)] = \\ &= [Pair(G) : Inn(A) \cap Pair(G)] = \\ &= [Pair(G) : Inn(U)]\end{aligned}$$

και ανάλογα αποδεικνύεται ότι $[Xtn(B) : Inn(B)] = [Pair(G) : Inn(U)]$.

Ένας τρόπος για να δείξουμε ότι $[Con(G) : Inn(G)] = [Xtn(A) : inn(A)]$ είναι να δείξουμε ότι οι δύο ομάδες είναι ισόμορφες. Μπορούμε να θεωρήσουμε τον

$$\Phi : Xtn(A) \to {}^{Con(G)}\big/_{Inn(G)},\ \Phi(f) = fInn(G)$$

ο οποίος είναι ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός. Επιπλέον είναι επί αφού, αν $\phi \in Con(G)$ με $\phi(A) = gAg^{-1}$ τότε θεωρούμε το $\phi \circ \tau_{g^{-1}}$ το οποίο ανήκει στο $Xtn(A)$ και ισχύει

$$\Phi(\phi \circ \tau_{g^{-1}}) = \phi Inn(G)$$

Τέλος είναι $\ker \Phi = Xtn(A) \cap Inn(G)$ το οποίο είναι ίσο με $Inn(A)$ όπως δείξαμε στο προηγούμενο λήμμα.

Συνεχίζουμε τώρα υποθέτοντας ότι η G είναι reversible, δηλαδή έχει τουλάχιστον έναν reverse conjugating αυτομορφισμό. Θα δείξουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει και reverse pairing αυτομορφισμός.

Συνθέτοντας τον reverse conjugating αυτομορφισμό με έναν εσωτερικό αυτομορφισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι μεταφέρει το A στο B και το

B σε κάποιο συζυγές του A. Εφαρμόζοντας το λήμμα 2.7 της προηγούμενης υποενότητας, βλέπουμε ότι υπάρχει $b \in B$ ώστε να ισχύει $\phi(B) = bAb^{-1}$ και $\phi(U) = bUb^{-1}$. Συνθέτοντας εκ νέου αυτόν τον αυτομορφισμό με τον $\tau_{b^{-1}}$ καταλήγουμε στο ότι, πράγματι, υπάρχει reverse pairing αυτομορφισμός, έστω ρ.

Θα δείξουμε ότι $RCon(G) = \langle \rho, Con(G) \rangle$, δηλαδή αρκεί ένας reverse pairing αυτομορφισμός για να παραχθούν όλοι οι reverse conjugating αυτομορφισμοί.

Πράγματι, αν f είναι ένας reverse conjugating αυτομορφισμός, ακολουθώντας την διαδικασία που περιγράψαμε πριν βρίσκουμε έναν reverse pairing αυτομορφισμό ρ' ώστε να ισχύει

$$f = \rho' \circ (\tau_b)^{-1} \circ (\tau_a)^{-1} = \rho' \circ \underbrace{\tau_{b^{-1}} \circ \tau_{a^{-1}}}_{\in Con(G)}$$

και μπορούμε να γράψουμε

$$f = \rho^{-1} \circ \underbrace{\underbrace{(\rho \circ \rho')}_{\in Pair(G)} \circ \tau_{b^{-1}} \circ \tau_{a^{-1}}}_{\in Con(G)}$$

άρα $f \in \langle \rho, Con(G) \rangle$. Επιπλέον ισχύει ότι $[RCon(G) : Con(G)] = 2$ αφού η σύνθεση δύο reverse conjugating αυτομορφισμών είναι conjugating αυτομορφισμός. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $RPair(G) = \langle \rho, Pair(G) \rangle$ και $[RPair(G) : Pair(G)] = 2$. Συνεπώς, έχουμε αποδείξει τις σχέσεις 2.13 και 2.14. Για την 2.15, παρατηρούμε αρχικά ότι λόγω του λήμματος 2.10 μπορούμε να γράψουμε

$$RCon(G) = \langle \rho, Con(G) \rangle = \langle \rho, Xtn(A), Xtn(B) \rangle = \langle \rho, Inn(A), Pair(G) \rangle$$

αφού $Inn(B) = \rho Inn(A) \rho^{-1}$. Επίσης αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\langle \rho, Inn(A), Pair(G) \rangle = \langle \rho(Xtn(A)) \rangle = \langle Xtn(A), RPair(G) \rangle$$

Είναι σαφές ότι $Xtn(A) \cap RPair(G) = Pair(G)$ και μένει να δείξουμε ότι ένα στοιχείο της μορφής

$$g_1 \cdots g_m,$$

όπου κάθε g_i ανήκει είτε στο $Xtn(A) \backslash Pair(G)$, είτε στο $RPair(G) \backslash Pair(G)$ και τα διαδοχικά στοιχεία δεν ανήκουν στον ίδιο παράγοντα, είναι μη τετριμμένο.

Έστω ότι $g_1 \cdots g_m = 1$. Πολλαπλασιάζοντας αν χρειαστεί με κατάλληλο τρόπο, μπορούμε να γράψουμε το $g_1 \cdots g_m$ στη μορφή

$$x_1 y_1 \cdots x_n y_n$$

όπου $x_i \in Xtn(A) \backslash Pair(G)$, $y_i \in RPair(G) \backslash Pair(G)$. Διακρίνοντας περιπτώσεις παρατηρούμε ότι το n είναι άρτιος αριθμός, διαφορετικά το παραπάνω στοιχείο δεν ανήκει στο $Con(G)$. Εφόσον το n είναι άρτιος, θα υποθέσουμε ότι είναι ίσο με 2 καθώς η γενική περίπτωση είναι ίδια. Αφού $x_1 y_1 x_2 y_2 = 1$ θα είναι

$$\begin{aligned} x_1 y_1 x_2 y_2(A) = A \Leftrightarrow x_1 y_1 x_2(B) = A \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_1 y_1(gBg^{-1}) = A \Leftrightarrow x_1(y_1(g)Ay_1(g^{-1})) = A \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_1(y_1(g))Ax_1(y_1(g^{-1})) = A \end{aligned}$$

και παρατηρούμε αρχικά ότι $g \notin B$ άρα $y_1(g) \notin A$ και $x_1(y_1(g)) \notin A$. Από τη μοναδικότητα της γραφής σε ανηγμένη μορφή καταλήγουμε σε άτοπο, αφού αν $a \in A \backslash U$ τότε

$$x_1(y_1(g))a(y_1(g^{-1})) = a'$$

και το στοιχείο στο αριστερό μέλος έχει συλλαβικό μήκος μεγαλύτερο από 1. Συνεπώς, αποδείχθηκε το θεώρημα. □

Το θεώρημα που αποδείξαμε είναι κεντρικής σημασίας. Μας λέει ότι αν η αμαλγαματοποιημένη υποομάδα είναι conjugate maximal, τότε η ομάδα των εσωτερικών αυτομορφισμών είναι ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα. Το ίδιο συμβαίνει με τις ομάδες των conjugating και των reverse conjugating αυτομορφισμών. Ειδικότερα, το τελευταίο αποτέλεσμα σημαίνει ότι, αν $Con(G) = Aut(G)$, δηλαδή οι αυτομορφισμοί μεταφέρουν τους παράγοντες και την U σε συζυγή τους, τότε η ομάδα αυτομορφισμών είναι και αυτή ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα. Τα ίδια συμπεράσματα ισχύου και αν $RCon(G) = Aut(G)$.

Ειδικότερα, στην περίπτωση που η αμαλγαματοποιημένη υποομάδα είναι πεπερασμένου δείκτη στις A και B, μπορούμε να εκμαιεύσουμε επιπλέον πληροφορίες για τις ομάδες Con και $RCon$, όπως θα δούμε στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα. *Αν $G = A *_U B$, $A \neq U \neq B$ και η U είναι πεπερασμένου δείκτη στην A και στη B, τότε οι ομάδες $Con(G)$ και $RCon(G)$ έχουν τη μορφή*

$$C *_V D,\ C \neq V \neq D$$

(όπως δείξαμε στο θεώρημα 2.11) και για τους δείκτες ισχύει ότι

$$[C : V] = [A : U]$$

και

$$[D : V] = [B : U] \text{ ή } [D : V] = 2 \text{ αν } RCon(G) \neq Con(G)$$

Επιπλέον, αν κάθε αυτομορφισμός απεικονίζει την U σε κάποιο συζυγές της τότε $Aut(G) = Con(G)$ ή $RCon(G)$.

Απόδειξη. Αν η U είναι πεπερασμένου δείκτη στις A, B θα είναι και conjugate maximal σε αυτές και άρα θα είναι και στο αμάλγαμα, όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη ενότητα. Άρα ισχύει το προηγούμενο θεώρημα, δηλαδή

$$Con(G) = Xtn(A) *_{Pair(G)} Xtn(B)$$

όπου $[Xtn(A) : Pair(G)] = [A : U]$ και $[Xtn(B) : Pair(G)] = [B : U]$. Ανάλογα, αν $RCon(G) \neq Con(G)$ τότε

$$RCon(G) = Xtn(A) *_{Pair(G)} RPair(G)$$

και $[Xtn(A) : Pair(G)] = [A : U]$, $[RPair(G) : Pair(G)] = 2$.

Πριν την απόδειξη του δεύτερου σκέλους, χρειαζόμαστε το εξής λήμμα.

Λήμμα 2.12. *Έστω H μία υποομάδα πεπερασμένου δείκτη μιας ομάδας G και έστω ότι η G δρα επί ενός δένδρου T χωρίς αντιστροφές. Αν η H σταθεροποιεί κάποια κορυφή του T τότε και η G σταθεροποιεί κορυφή.*

Απόδειξη του λήμματος. Έστω T' το σύνολο των κορυφών και των ακμών του T που σταθεροποιούνται από την H. Είναι $T' \neq \emptyset$ αφού η H σταθεροποιεί κορυφή του T και το T' είναι υπογράφημα του T. Θα δείξουμε ότι είναι συνεκτικό. Αν v_1, v_2 είναι δύο κορυφές του T', έστω $[v_1, v_2]$ η γεωδαισιακή τους και, αφού η H σταθεροποιεί τα άκρα τις γεωδαισιακής, θα σταθεροποιεί και τις ακμές τις, ειδάλλως θα είχαμε κύκλωμα. Έχουμε λοιπόν ότι το T' είναι ένα υποδένδρο του T και η H δρα πάνω του σταθεροποιώντας κάθε ακμή και κάθε κορυφή του.

Έστω H' μία κανονική υποομάδα της G που περιέχεται στην H και είναι πεπερασμένου δείκτη στη G. Τέτοια ομάδα υπάρχει, αφού μπορούμε να θεωρήσουμε $H' = Core(H) = \cap_{g \in G} gHg^{-1}$ οπότε ισχύει $[G : H'] \leq [G : H]!$. Θεωρούμε τη δράση της G/H' επί του T' που ορίζεται θέτοντας

$$(gH)v = gv$$

αν v είναι μία κορυφή του T και

$$(gH)e = ge$$

αν e είναι μία ακμή του T. Αφού η H σταθεροποιεί κάθε στοιχείο του T' και $H' \leq H$, εύκολα βλέπει κάποιος ότι η δράση που μόλις ορίσαμε είναι καλά ορισμένη. Αφού η G/H' είναι πεπερασμένη, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα 2.14 το οποίο μας λέει ότι η G/H' σταθεροποιεί κορυφή του T', έστω v. Αυτό σημαίνει ότι $(gH')v = v$ για κάθε $gH' \in G/H'$ δηλαδή $gv = v$ για κάθε $g \in G$ οπότε αποδείχθηκε το λήμμα. □

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη του πορίσματος. Έστω ένας αυτομορφισμός ϕ της G και θα δείξουμε ότι είναι, είτε conjugating, είτε reverse conjugating. Από την υπόθεση είναι $\phi(U) = gUg^{-1}$ για κάποιο $g \in G$. Συνεπώς, αν θεωρήσουμε το δένδρο T επί του οποίου δρα η G, προκύπτει ότι η $\phi(U)$ σταθεροποιεί την ακμή gU, οπότε θα σταθεροποιεί και τα άκρα της. Συνεπώς, η $\phi(U)$ σταθεροποιεί την κορυφή gA. Είναι $[G : U] < \infty$ άρα και $[A : U] < \infty$ και $[\phi(A) : \phi(U)] < \infty$. Η $\phi(A)$, ως υποομάδα της G, δρα επί του T χωρίς αντιστροφές. Επιπλέον, περιέχει την $\phi(U)$ και μάλιστα, $[\phi(A) : \phi(U)] < \infty$. Αφού η $\phi(U)$ σταθεροποιεί κορυφή κορυφή του T, από το λήμμα προκύπτει ότι και η $\phi(A)$ θα σταθεροποιεί κορυφή του T. Αφού οι σταθεροποιούσες των κορυφών είναι τα συζυγή των παραγόντων, καταλήξαμε στο ότι η $\phi(A)$ περιέχεται σε συζυγές ενός παράγοντα. Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι και η $\phi(B)$ περιέχεται σε συζυγές ενός παράγοντα και, αφού η ϕ είναι αυτομορφισμός, οι $\phi(A)$ και $\phi(B)$ περιέχονται σε συζυγή διαφορετικών παραγόντων. Άρα $\phi \in Con(G)$ ή $\phi \in RCon(G)$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Θεώρημα 2.13. *Αν $G = A *_U B$ όπου $A \neq U \neq B$ και η U είναι conjugate maximal στη G τότε η $Pair(G)$ είναι conjugate maximal στην $Con(G)$ και την $RCon(G)$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $Con(G) = Xtn(A) *_{Pair(G)} Xtn(B)$, για να δείξουμε ότι η $Pair(G)$ είναι conjugate maximal στην $Con(G)$, αρκεί (όπως δείξαμε στο λήμμα 2.6) να δείξουμε ότι είναι conjugate maximal στις $Xtn(A)$ και $Xtn(B)$. Ιδιαίτερα, αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για την $Xtn(A)$ αφού, με τα ίδια επιχειρήματα θα αποδεικνύεται και για την $Xtn(B)$.

Έστω $gPair(G)g^{-1} \leq Pair(G)$ για κάποιο $g \in Xtn(A)$. Είναι $Xtn(A) = Inn(A) \cdot Pair(G)$ άρα $g = \tau_a \cdot \pi$ και $gPair(G)g^{-1} = \tau_a Pair(G)\tau_{a^{-1}} \subseteq Pair(G)$ Άρα αρκεί να δείξουμε ότι, αν

$$\tau_a Pair(G)\tau_{a^{-1}} \subseteq Pair(G)$$

για κάποιο $a \in A$, τότε ισχύει η ισότητα.

Ισχυρισμός. Ισχύει ότι $aUa^{-1} = U$.

Απόδειξη. Είναι $Inn(U) \subseteq Pair(G)$ άρα

$$\tau_a Inn(U)\tau_{a^{-1}} \subseteq \tau_a Pair(G)\tau_{a^{-1}} \subseteq Pair(G)$$

και

$$\tau_a Inn(U)\tau_{a^{-1}} = Inn(aUa^{-1})$$

άρα $Inn(aUa^{-1}) \subseteq Pair(G)$. Επιπλέον, $Inn(aUa^{-1}) \subseteq Inn(A)$ άρα

$$Inn(aUa^{-1}) \subseteq Pair(G) \cap Inn(A) = Inn(U)$$

συνεπώς

$$aUa^{-1} \Big/ Z(G) = U \Big/ Z(G)$$

άρα για κάθε $u \in U$ είναι $aua^{-1}Z(G) = u'Z(G) \subseteq u'U = U$, δηλαδή $aUa^{-1} \subseteq U$ και η U είναι conjugate maximal, άρα ισχύει η ισότητα. □

Έστω τώρα $\phi \in Pair(G)$. Τότε

$$Pair(G) \ni \tau_a \phi \tau_{a^{-1}} = (\tau_a \phi \tau_{a^{-1}} \phi^{-1})\phi = \tau_{a\phi(a)^{-1}}\phi$$

Για να ανήκει το τελευταίο στοιχείο στο $Pair(G)$ θα πρέπει να ισχύει $a\phi(a)^{-1} \in U$, διαφορετικά είναι άτοπο. Άρα $\phi(a) \in Ua = aU$ άρα $a^{-1}\phi(a) \in U$. Συνεπώς, το $\tau_{a\phi(a)}\phi$ ανήκει στο $Pair(G)$. Επιπλέον,

$$\tau_{a^{-1}\phi(a)}\phi = \tau_{a^{-1}}\phi\tau_a \in Pair(G)$$

Άρα, αφού το ϕ ήταν τυχαίο, έχουμε ότι

$$(\tau_a)^{-1} Pair(G)\tau_a \leq Pair(G)$$

δηλαδή

$$Pair(G) \leq \tau_a Pair(G)\tau_{a^{-1}}$$

άρα είναι και ίσα. Δηλαδή αποδείχθηκε το θεώρημα. □

Πριν το επόμενο θεώρημα χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς και ένα λήμμα.

Ορισμός. Έστω X ένα συνεκτικό γράφημα. Ορίζουμε την εξής μετρική στο σύνολο των κορυφών του X· $d : V(X) \times V(X) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$d(v, u) = \min\{l(\mu) | \mu \text{ ώστε } a(\mu) = v, \tau(\mu) = u\}$$

Η d είναι πράγματι μετρική. Επιπλέον, αν G είναι μία ομάδα η οποία δρα επί του X τότε λέμε ότι **δρα με ισομετρίες** αν ισχύει ότι

$$d(gv, gu) = d(v, u)$$

Κατά τη διάρκεια της παρουσίασής μας υποθέσαμε σιωπηρά ότι όλες οι δράσεις ομάδων επί γραφημάτων είναι με ισομετρίες, αν και το μόνο σημείο στο οποίο χρειάζεται αυτή η παραδοχή είναι στην απόδειξη του επόμενου λήμματος.

Λήμμα 2.14. *Έστω μία πεπερασμένη ομάδα G η οποία δρα χωρίς αντιστροφές επί ενός δένδρου X. Τότε η G σταθεροποιεί κάποια κορυφή του γραφήματος.*

Απόδειξη. Έστω $v \in V(X)$. Για κάθε $g \in G$ θεωρούμε τη γεωδαισιακή $[x_0, gx_0]$ και την ένωση

$$T = \bigcup_{g \in G} [x_0, gx_0]$$

Η G είναι πεπερασμένη άρα και το T είναι πεπερασμένο υποδένδρο του X. Θα δείξουμε ότι η G δρα επί του T. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, αν $h \in G$ και $y \in T$ τότε $y \in [x_0, gx_0]$ για κάποιο $g \in G$ και ισχύει ότι

$$hy \in [hx_0, hgx_0] \subseteq \underbrace{[x_0, hx_0] \cup [x_0, hgx_0]}_{\in T}$$

Έστω

$$\delta = \max\{d(x, y) | x, y \in V(T)\}$$

Το T είναι πεπερασμένο υποδένδρο άρα $\delta < \infty$. Έστω $x, y \in V(T)$ με $d(x, y) = \delta$. Θεωρούμε το μέσο m της γεωδαισιακής $[x, y]$. Πιο συγκεκριμένα, αν το μήκος της γεωδαισιακής είναι περιττό, το m είναι η "μεσαία" ακμή, ενώ, αν το μήκος είναι άρτιο, το m είναι η "μεσαία" κορυφή.

Έστω ότι η m είναι κορυφή. Θα δείξουμε ότι $gm = m$ για κάθε $g \in G$. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει και έστω g_0 ώστε $g_0 m \neq m$.

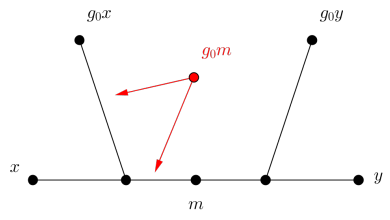
Παρατηρούμε αρχικά ότι, αφού η γεωδαισιακή $[x, y]$ είναι γεωδαισιακή μεγιστικής απόστασης (στο T), από την κορυφή x ξεκινάει μόνο μία ακμή (του T), αυτή που ανήκει στην $[x, y]$. Πράγματι, αν υπήρχε και άλλη ακμή

$e \in E(T)$, τότε θα ήταν $[\tau(e), y] = [x, y] + 1$ το οποίο είναι άτοπο. Ανάλογα, υπάρχει μόνο μία ακμή του T που ξεκινάει από την y. Αφού από το x ξεκινάει μόνο μία ακμή του T, το ίδιο θα ισχύει και για το g_0x και ανάλογα για τα y, g_0y. Άρα, οι g_0x, g_0y δεν ανήκουν στην $[x, y]$ αφού από τις κορυφές που βρίσκονται στο εσωτερικό της $[x, y]$ διέρχονται δύο ακμές.

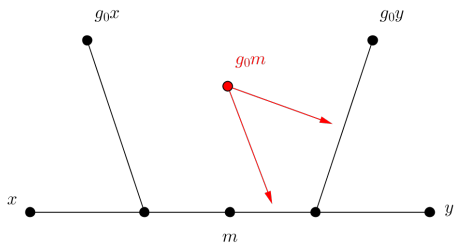
Αφού οι κορυφές x, m, y συνδέονται μέσω της γεωδαισιακής $[x, y]$, και οι κορυφές g_0x, g_0m, g_0y θα συνδέονται μέσω της γεωδαισιακής $g_0[x, y]$. Επιπλέον, οι κορυφες g_0x, g_0y πρέπει να συνδέονται με τις x, y. Συνοψίζοντας, έχουμε καταλήξει στα εξής·

- Οι κορυφές g_0x, g_0y βρίσκονται εκτός της $[x, y]$.
- Αφού οί g_0x, g_0y συνδέονται με τις x, y θα πρέπει να έχουν μονοπάτια τα οποία θα τέμνουν την $[x, y]$.
- Τα μονοπάτια αυτά θα καταλήγουν στο "εσωτερικό" της $[x, y]$ λόγω της μεγιστικότητας της διαμέτρου του $[x, y]$.
- η g_0m είναι το μέσον της γεωδαισιακής $[g_0x, g_0y]$

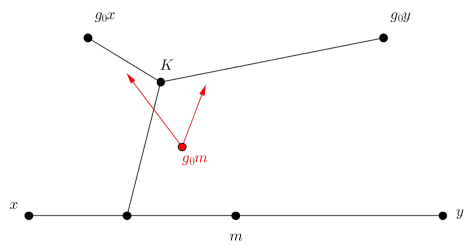
Τα παραπάνω μας οδηγούν στο να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις που απεικονίζονται στα παρακάτω σχήματα·



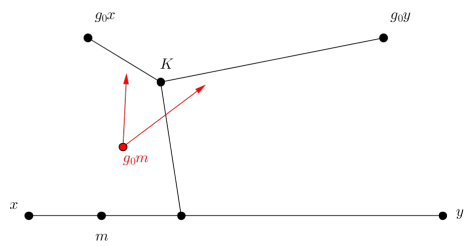
Σχήμα 2.1: (περίπτωση α') το g_0m βρίσκεται μεταξύ του m και του g_0x



Σχήμα 2.2: (περίπτωση β') το g_0m βρίσκεται μεταξύ του m και του g_0y



Σχήμα 2.3: (περίπτωση γ')



Σχήμα 2.4: (περίπτωση δ')

Και στις τέσσερεις περιπτώσεις οδηγούμαστε σε άτοπο. Στην περίπτωση α' είναι

$$d(y, g_0x) = d(y, m) + d(m, g_0m) + d(g_0m, g_0x) = d(y, m) + d(m, g_0m) + d(m, x) > \delta$$

αφού $m \neq g_0m$. Στην περίπτωση β' είναι

$$d(x, g_0y) = d(x, m) + d(m, g_0m) + d(g_0m, g_0y) = d(x, m) + d(m, g_0m) + d(m, y) > \delta$$

αφού $m \neq g_0m$. Στις περιπτώσεις γ' και δ' χρειάζεται να διακρίνουμε δύο επιμέρους περιπτώσεις ανάλογα με τη θέση του g_0m ως προς το K. Ενδεικτικά, στην περίπτωση γ', αν το g_0m βρίσκεται μεταξύ του K και του g_0y τότε γράφουμε

$$\begin{aligned} d(y, g_0y) &= d(y, m) + d(m, g_0m) + d(g_0m, g_0y) = \\ &= d(y, m) + d(m, g_0m) + d(m, y) > \\ &> 2d(y, m) = \delta \end{aligned}$$

άρα πάλι είναι άτοπο. Οι άλλες περιπτώσεις ελέγχονται ανάλογα.

Αν υποθέσουμε ότι το m είναι ακμή τότε οι αποδείξεις είναι τελείως ίδιες, θεωρώντας αυτή τη φορά την κορυφή $a(m)$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση $d(x, a(m)) + d(a(m), y) = \delta$. □

Θεώρημα 2.15. *Αν $G = A *_U B$ και οι A, B είναι πεπερασμένες τότε η ομάδα αυτομορφισμών της G έχει και αυτή τη μορφή ελεύθερου γινομένου με αμάλγαμα, του οποίου μάλιστα οι παράγοντες είναι πεπερασμένες ομάδες.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \neq U \neq B$. Από το προηγούμενο θεώρημα, κάθε πεπερασμένη υποομάδα της G σταθεροποιεί κάποια κορυφή

του δένδρου επί του οποίου δρα η G. Επιπλέον, έχουμε δει ότι οι σταθεροποιούσες των κορυφών είναι τα συζυγή των παραγόντων. Άρα, η εικόνα κάθε παράγοντα μέσω ενός αυτομορφισμού περιέχεται, είτε σε συζυγές του εαυτού του, είτε σε συζυγές του άλλου παράγοντα. Δηλαδή, $Aut(G) = Con(G)$, είτε $Aut(G) = RCon(G)$ και το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα 2.11. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η περίπτωση της $\mathbf{SL_2}(\mathbb{Z})$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε μία εφαρμογή των όσων είπαμε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι η ειδική γραμμική ομάδα των 2×2 πινάκων επί των ακεραίων έχει τη μορφή ελεύθερου γινομένου με αμάλγαμα και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ομάδα αυτομορφισμών της μέσω του τελευταίου θεωρήματος της προηγούμενης παραγράφου.

Πρόταση 3.1. *Η $SL_2(\mathbb{Z})$ παράγεται από τους πίνακες*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη. Έστω G η υποομάδα της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ που παράγεται από τους S, T. Παρατηρούμε ότι, αν $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι ένα στοιχείο της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ τότε

$$S \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \text{ και } T^n \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}$$

Έστω τώρα ένα στοιχείο $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Υποθέτουμε ότι $c \neq 0$. Αν $|a| \geq |c|$ εκτελούμε την Ευκλείδεια διαίρεση $a = cq + r$ με $0 \leq r < |c|$. Το

στοιχείο $T^{-q}\gamma$ έχει στη θέση $(1,1)$ το στοιχείο $a - gc$, το οποίο είναι μικρότερο (κατ' απόλυτη τιμή) από το c που είναι στη θέση $(2,1)$. Πολλαπλασιάζοντας επί S από αριστερά προκύπτει ένας νέος πίνακας με αντεστραμένα τα στοιχεία αυτών των θέσεων (και με άλλο πρόσημο στη θέση $(1,1)$). Αν η κάτω αριστερά ένδειξη είναι διαφορετική από μηδέν, εφαρμόζουμε πάλι την Ευκλείδεια διαίρεση. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία έως ότου η κάτω αριστερή θέση να μηδενιστεί, καταλήγουμε σε έναν πίνακα ο οποίος θα έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & m \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = T^m \text{ ή } -T^{-m}$$

για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$ άρα $g\gamma = \pm T^n$ για κάποιο $g \in G$ και $n \in \mathbb{Z}$. Αφού $T^n \in G$ και $-I_2 = S^2 \in G$ θα έχουμε

$$\gamma = \pm g^{-1} T^m \in G$$

δηλαδή αποδείξαμε ότι το ζητούμενο. □

Δείξαμε λοιπόν ότι $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$ και παρατηρούμε ότι

$$\langle S, T \rangle = \langle S^{-1}, S^{-1}T^{-1} \rangle$$

Θα συμβολίζουμε τους

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } S^{-1}T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

με A και B αντίστοιχα.

Ορισμός 3.2 (υπερβολικό επίπεδο)**.** Ονομάζουμε **υπερβολικό επίπεδο** το υποσύνολο

$$\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

του μιγαδικού επιπέδου και το συμβολίζουμε με $\mathbb{H}^2$.

Ονομάζουμε **μετασχηματισμό Möbius** του υπερβολικού επιπέδου μία "απεικόνιση" $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ της μορφής

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \tag{3.1}$$

όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc = 1$.

Αποδεικνύεται εύκολα, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mathrm{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i$ ότι, αν $ad - bc = 1$, τότε

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι, αν $\mathrm{Im}(z) > 0$ τότε και $\mathrm{Im}[(az+b)/(cz+d)] > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η 3.1 ορίζει πράγματι απεικόνιση. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ορίζεται δράση της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ στο $\mathbb{H}^2$ ως εξής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z := \frac{az+b}{cz+d}$$

είναι καλά ορισμένη.

Θεωρούμε το τόξο του υπερβολικού επιπέδου

$$T = \{e^{ia} | \pi/3 \leq a \leq \pi/2\}$$

Θεώρημα 3.3. *Το σύνολο*

$$\Omega = \bigcup_{X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} X * T$$

είναι δένδρο. Η $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ δρα επί αυτού χωρίς αντιστροφές των ακμών ώστε δύο διακεκριμένα σημεία του T να μην συμπίπτουν υπό τη δράση αυτή. Οι σταθεροποιούσες του τόξου και των δύο άκρων του παράγονται από τους πίνακες

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A \text{ και } B$$

οι οποίοι έχουν τάξεις $2, 4$ και 6 αντίστοιχα. Ιδιαίτερα ισχύει ότι

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$$

Απόδειξη. Αποδεικνύεται εύκολα ότι το Ω έχει δομή γραφήματος με κορυφές τα άκρα των τόξων και ακμές τα τόξα. Αποδεικνύεται επιπλέον ότι δεν περιέχει κλειστά ανηγμένα μονοπάτια θετικού μήκους. Επίσης βλέπει κανείς ότι, αν V_1, V_2 είναι τα άκρα του T τότε $Stab_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(V_1) = A$ και $Stab_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(V_2) = B$. Επομένως, η συνεκτικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ παράγεται από τους A και B δηλαδή το Ω είναι δένδρο.

Λόγο του θεωρήματος 1.66, προκύπτει ότι

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = A *_U B = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$$

□

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.15 του προηγούμενου κεφαλαίου και να υπολογίσουμε την ομάδα αυτομορφισμών της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Συγκεκριμένα έχουμε: Επειδή η $\mathbb{Z}_4$ δεν είναι ισόμορφη με τη $\mathbb{Z}_6$ επομένως, για την ομάδα αυτομορφισμών της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ έχουμε

$$Aut(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = Aut(\mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6) = Con(\mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6) = Xtn(\mathbb{Z}_4) *_{Pair(\mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6)} Xtn(\mathbb{Z}_6)$$

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε το κέντρο της $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ αφού, λόγω της πρότασης 1.41, είναι

$$Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = Z(\mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6) = Z(\mathbb{Z}_4) \cap \mathbb{Z}_2 \cap Z(\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_2$$

Χρησιμοποιώντας ένα ανάλογο επιχείρημα με αυτό που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε τη σχέση 2.10 βλέπουμε ότι

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \Big/ Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

Αφού το κέντρο κάθε ομάδας είναι χαρακτηριστική υποομάδα, επάγεται ομομορφισμός

$$f : Aut(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \to Aut(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}))$$

Συνεπώς, μπορούμε μέσω της ομάδας αυτομορφισμών $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, την οποία υπολογίσαμε, να μελετήσουμε υπό άλλη οπτική γωνία την ομάδα αυτομορφισμών της $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Βιβλιογραφία

[1] Bogopolski, O. *Introduction to Group Theory (trans., revised and expanded from the 2002 Russian original)*. European Mathematical Society (EMS), 2008.

[2] Borovik, A. V., Myasnikov, A. G., and Remeslennikov, V. N. The conjugacy problem in amalgamated products i: Regular elements and black holes. *International Journal of Algebra and Computation 17*, 07 (2007), 1299–1333.

[3] Brittenham, M. Free groups, lecture notes. Personal website, 2007.

[4] Conrad, K. Sl2 (z). *Übersichtsartikel erhältlich auf: http://www. math. uconn. edu/kconrad/blurbs*.

[5] Coxeter, H. S., and Moser, W. O. *Generators and relations for discrete groups*, vol. 14. Springer Science & Business Media, 2013.

[6] Dehn, M. Über unendliche diskontinuierliche gruppen. *Mathematische Annalen 71*, 1 (1911), 116–144.

[7] Fallat, S., Li, C.-K., Lutzer, D., and Stanford, D. On groups that are isomorphic to a proper subgroup. *Mathematics Magazine 72*, 5 (1999), 388–391.

[8] Grillet, P. A. *Abstract algebra*, vol. 242. Springer Science & Business Media, 2007.

[9] Gromov, M. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*. Springer, 1987, pp. 75–263.

[10] Karrass, A., Pietrowski, A., and Solitar, D. Automorphisms of a free product with an amalgamated subgroup, from:\ contributions to group theory. *Contemp. Math 33* (1984), 328–340.

[11] Lyndon, R. C., and Schupp, P. E. Combinatorial group theory. reprint of the 1977 edition. classics in mathematics, 2001.

[12] MAGNUS, W., KARRASS, A., AND SOLITAR, D. *Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations*. Courier Corporation, 2004.

[13] MILLER, C. F. Combinatorial group theory, 2004.

[14] ROTMAN, J. *An introduction to the theory of groups*, vol. 148. Springer Science & Business Media, 2012.

[15] SCHREIER, O. Die untergruppen der freien gruppen. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* (1927), vol. 5, Springer, pp. 161–183.

[16] SERRE, J.-P. Arbres, amalgames, sl2, société mathématique de france. *Astérisque 46* (1977).

[17] SERRE, J.-P. Trees. translated from the french original by john stillwell. corrected 2nd printing of the 1980 english translation. *Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin* (2003).

[18] SMITH, G., AND TABACHNIKOVA, O. *Topics in group theory*. Springer Science & Business Media, 2012.