ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πίνακες **Bézout** και εφαρμογές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΣΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Παντελεήμων Β. Γρυπάρης

ΑΘΗΝΑ 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στ........
....
που απονέμει το
Τμήμα Μαθηματικών
του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου
Αθηνών.
Εγκρίθηκε την .... από Εξεταστική Επιτροπή
αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
.... (επιβλέπων Καθηγητής)	....	....
....	....	....
....	....	....

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα της διπλωματικής μου εργασίας, την αναπληρώτρια καθηγήτρια κυρία Μαριλένα Μητρούλη, για την εμπιστοσύνη, την καθοδήγηση και τη συνεχή υποστήριξή της με υλικό για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει θέμα τη μελέτη των πινάκων Bézout και τις εφαρμογές τους. Οι πίνακες Bézout είναι ένα συμμετρικοί πίνακες που ορίζονται μέσω των συντελεστών 2 ή περισσοτέρων πολυωνύμων, μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών. Το χαρακτηριστικό της συμμετρικότητας, καθώς και άλλων ιδιοτήτων και παρατηρήσεων που καταγράφονται στην παρούσα εργασία, μας δίνει μεγάλο πλεονέκτημα στις εφαρμογές τους συγκριτικά με άλλους πίνακες, ενώ ταυτόχρονα μας μειώνει το χρόνο εκτέλεσης υπολογισμών (πολυπλοκότητα).

Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη ενότητα παρουσιάζονται όλα τα μαθηματικά εργαλεία για την κατασκευή και μελετή των πινάκων Bézout , συμπεριλαμβανομένων μικρών παραδειγμάτων και παρατηρήσεων για την καλύτερη εμβάθυνση του αναγνώστη στο περιοχόμενο της εργασίας.

Στη δεύτερη ενότητα ορίζονται αναλυτικά οι πίνακες Bézout, παρουσιάζοντας θεωρητικά και αριθμητικά παραδείγματα σε σειρά αυξανόμενης τάξης και μελετώνται (με απόδειξεις) κάποιες ιδιότητές τους. Στη συνέχεια, στην τρίτη ενότητα αναλύονται πολλά θεωρήματα, τα οποία εξηγούν τη σύνδεση των πινάκων Bézout με τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη (GCD) δύο πολυωνύμων μίας μεταβλητής, όπου μέσω των πινάκων βρίσκουμε τους συντελεστές του GCD και τον βαθμό του (degree) . Εν κατακλείδι, στις δύο τελευταίες ενότητες παρουσιάζονται πολλές αριθμητικές εφαρμογές και οι χρήσεις των πινάκων Bézout και του GCD δύο πολυωνύμων.

Στο σημείο αυτό οφείλω να ευχαριστήσω τους συνεργάτες - διδακτορικούς (εν εξελίξη και μη) της επιβλέπουσας κυρίας Μητρούλης για την πολύτιμη συμπαράσταση και υποστήριξη -θεωρητική και πρακτική-. Αυτοί είναι ονομαστικά και αλφαβητικά: κυρία Ρούπα Παρασκευή, κύριος Τριανταφύλλου Δημήτριος, κυρία Φίκα Παρασκευή, κύριος Χρήστου Δημήτριος.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Μ.Δρακόπουλο και τον κύριο Σ.Νοτάρη για τις γνώσεις που μου προσέφεραν καθ'ολη τη διάρκεια των σπουδών μου, τόσο στο προπτυχιακό όσο και στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών, καθώς επίσης για την τιμή που μου έκαναν να είναι στην τριμελής επιτροπή μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα μου τα κοντινά άτομα που με στήριξαν και ιδιαιτέρως την οικογένειά μου. Ο καθένας με το δικό του τρόπο με ώθησε να ολοκληρώσω τη παρούσα εργασία. Η συνεχής συμπαράσταση και υποστήριξη ήταν οι πιο σημαντικοί παράγοντες για να μπορώ να συνεχίζω παρά την οποιαδήποτε διαταραχή.

Την παρούσα διπλωματική εργασία την αφιερώνω στα καλύτερα που έρχονται πριν καν το καταλάβω!!!

Παντελεήμων Β. Γρυπάρης

η δύναμη πηγάζει στη θέληση

when you feel like quitting: think about why you started

Περίληψη

Οι πίνακες χρησιμοποιούνται ευρέως σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, ειδικότερα στη Γραμμική Άλγεβρα και την Αριθμητική Ανάλυση. Μια γνωστή, συχνή και απλή εφαρμογή των πινάκων είναι στην επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Αν ένας πίνακας είναι τετραγωνικός, είναι δυνατόν να συμπεράνουμε μερικές από τις ιδιότητές του υπολογίζοντας την ορίζουσα του. Αν ο πίνακας είναι συμμετρικός, τότε έχουμε επιπλέον σημαντικές ιδιότητες. Η παρούσα διπλωματική εργασία σχετίζεται με τους πίνακες Bézout και τις εφαρμογές τους. Το σημαντικό στοιχείο αυτών των πινάκων είναι πως είναι συμμετρικοί, που μας δίνει μεγάλο πλεονέκτημα στις εφαρμογές τους συγκριτικά με άλλους πίνακες, και μας μειώνει το χρόνο εκτέλεσης υπολογισμών (πολυπλοκότητα).

Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται τα μαθηματικά εργαλεία, τα οποία είναι χρήσιμα για τον υπολογισμό και τις εφαρμογές των πινάκων Bézout.

Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζουμε αναλυτικά τους πίνακες Bézout, δίνοντας τον ορισμό, θεωρητικά και αριθμητικά παραδείγματα, τις ιδιότητές του και τις συναρτήσεις υπολογισμού αυτών των πινάκων, μέσω των αριθμητικών υπολογιστικών περιβάλλοντων Matlab (έκδοση R2015a) και Maple (έκδοση 2016).

Το τρίτο μέρος αποτελείται από πολλά θεωρήματα, τα οποία συνδέουν τους πίνακες Bézout με τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη (GCD) δύο πολυωνύμων μίας μεταβλητής, όπου μέσω των πινάκων βρίσκουμε τους συντελεστές του GCD. Επιπλέον δίνονται πολλά αριθμητικά παραδείγματα προς επαλήθευση των θεωρημάτων.

Στα δύο τελευταία μέρη δίνονται πολλές αριθμητικές εφαρμογές, τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας και οι χρήσεις των πινάκων Bézout και του GCD δύο πολυωνύμων. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο στόχος είναι η εύρεση του GCD δύο πολυωνύμων μέσω των πινάκων Bézout να είναι της τάξης $\mathcal{O}(n^2)$.

Abstract

The matrices are widely used in many fields of mathematics, especially in Linear Algebra and Arithmetic Analysis. A well-known and simple application of the matrices is to solve a system of linear equations. If a matrix is square, it is possible to deduce some of the properties of calculating its determinant. If the matrix is symmetric, then we have additional important properties.

This thesis researches Bézout matrices and their applications. The important element of these matrices is that they are symmetric, which it gives us a great advantage in applications comparing to other matrices. In addition these matrices reduce our complexity.

The first part presents the mathematical tools, which are useful for the calculation and applications of Bézout matrices.

In the second part we present the definition of Bézout matrices, theoretical and numerical examples and the properties. Finally, the calculation functions of these tables via two numerical computing environments, Matlab (version R2015a) and Maple (version 2016) are introduced.

The third part consists of several theorems which connect the Bézout matrices with the Greatest Common Divisor (GCD) of two univariate polynomials. It is possible to calculate both the degree and the coefficients of GCD via the application of these theorems. Furthermore many examples are provided to verify these theorems.

In the final two sections a number numerical applications are presented, the conclusions of this thesis, and the use of both these matrices and GCD of two univariate polynomials. It is worth mentioning that the goal is to calculate the GCD via Bézout matrix so that the complexity will be of the order $\mathcal{O}(n^2)$

Περιεχόμενα

1 Μαθηματικά Εργαλεία

1.1 Πολυώνυμα μιας μεταβλητής

Στην ενότητα αυτή αναφέρουμε την ορολογία και κάποιες βασικές ιδιότητες των πολυωνύμων μιας μεταβλητής. Ένα πολυώνυμο μιας μεταβλητής είναι μια έκφραση κατασκευασμένη από σταθερές (συνήθως αριθμοί άλλα όχι πάντα) και μεταβλητές (που λέγονται επίσης άγνωστοι) με χρήση μη αρνητικών ακεραίων δυνάμεων.

Στο εξής, όταν αναφέρουμε τον όρο ¨πολυώνυμα' εννοείται πως αναφερόμαστε σε πολυώνυμα μιας μεταβλητής.

Τα πολυώνυμα θα τα θεωρούμε ως εκφράσεις της μορφής:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} u_k x^k = u_m x^m + u_{m-1} x^{m-1} + u_{m-2} x^{m-2} + ... + u_2 x^2 + u_1 x + u_0$$

όπου ισχύουν τα εξής:

- Ο αριθμός m είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος και καλείται βαθμός (degree) του πολυωνύμου με την προυπόθεση ότι $u_m \neq 0$.
- Τα $u_i, i = 0, 1, ..., m$, τα ονομάζουμε συντελεστές (coefficients) του πολυωνύμου, και είναι ακέραιοι, ρητοί, πραγματικοί ή μιγαδικοί. Στην παρούσα εργασία δε θα ασχοληθούμε με μιγαδικούς συντελεστές. Ο συντελεστής u_m καλείται μεγιστοβάθμιος συντελεστής (leading coefficient)
- Για το σύμβολο x, έχει επικρατήσει η ονομασία μεταβλητή του πολυωνύμου.

Παραδείγματα

1. $f(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$
   εδώ έχουμε: $m = 2$ ο βαθμός του πολυωνύμου και
   $u_2 = 1, u_1 = 0, u_0 = -1$ οι συντελεστές.
2. $f(x) = (x-1)(x+2)(x+3) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
   εδώ έχουμε: $m = 3$ ο βαθμός του πολυωνύμου και
   $u_3 = 1, u_2 = 4, u_1 = 0, u_0 = -1$ οι συντελεστές.
3. $g(x) = x - 1 = 0x^2 + 1x - 1$
   εδώ έχουμε: $m = 1$ ο βαθμός του πολυωνύμου και
   $u_3 = 0, u_2 = 1, u_1 = 0, u_0 = -1$ οι συντελεστές.
4. $f(x) = (x-1)^3 = 1x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
   εδώ έχουμε: $m = 3$ ο βαθμός του πολυωνύμου και
   $u_3 = 1, u_2 = -3, u_1 = 3, u_0 = -1$ οι συντελεστές.

1.2 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (GCD) Πολυωνύμων

Έστω δύο πολυώνυμα $f(x), g(x)$, όπως ορίστηκαν στην ενότητα (1.1), όχι και τα δύο μηδενικά*. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ), με διεθνή συμβολισμό GCD (από τις λέξεις Greatest Common Divisor) των δύο αυτών πολυωνύμων είναι ένα πολυώνυμο $d(x)$ με το μέγιστο δυνατό βαθμό και αντίστοιχο μεγιστοβάθμιο συντελεστή (leading coefficient) τη μονάδα.

*Αν είναι $f(x) = g(x) = 0$ τότε κάθε πολυώνυμο είναι κοινός διαιρέτης των $f(x)$ και $g(x)$. Σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει GCD.

Συμβολισμός GCD δύο πολυωνύμων

$$d(x) = GCD(f(x), g(x)) = GCD(f, g)$$

Ορισμός GCD δύο πολυωνύμων

Ένα πολύωνυμο $d(x)$ θα λέγεται μέγιστος κοινός διαιρέτης (GCD) των $f(x), g(x)$ αν:

- $GCD(f, g)$ διαιρεί και τα δύο πολυώνυμα $f(x), g(x)$, δηλαδή το πολυώνυμο $GCD(f, g)$ είναι κοινός διαιρέτης των $f(x)$ και $g(x)$.
- το πολυώνυμο $GCD(f, g)$ είναι μονικό, δηλαδή έχει μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα.
- Αν $h(x)$ πολυώνυμο που διαιρεί και τα δύο πολυώνυμα $f(x), g(x)$, τότε διαιρεί και το πολυώνυμο $GCD(f, g)$. Δηλαδή κάθε κοινός διαιρέτης των $f(x), g(x)$ είναι διαιρέτης του $GCD(f, g)$.

Ακόμη μπορούμε να ορίσουμε το GCD των $f(x)$ και $g(x)$ να είναι το πολυώνυμο εκείνο με τον μεγαλύτερο βαθμό ανάμεσα στους κοινούς διαιρέτες των δύο πολυωνύμων.

Παρατήρηση
Ο αριθμός 1, είναι πάντα κοινός διαιρέτης των $f(x)$ και $g(x)$. Αν $GCD(f, g) = 1$ τότε τα πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ καλούνται πρώτα μεταξύ τους.

Παραδείγματα

1. για τα δύο δοσμένα πολυώνυμα
$$f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
και
$$g(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$$
παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $x-1$ πληροί τις υποθέσεις του ορισμού. Άρα εδώ:
$$GCD(f,g) = x - 1$$
2. για τα δύο δοσμένα πολυώνυμα
$$f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
και
$$g(x) = 1x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$
παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $x-1$ πληροί τις υποθέσεις του ορισμού. Άρα εδώ:
$$GCD(f,g) = x - 1$$
3. για τα δύο δοσμένα πολυώνυμα
$$f(x) = x^2 + 2.8x - 0.6 = (x-0.2)(x+3)$$
και
$$g(x) = x^2 + 4.8x - 1 = (x-0.2)(x+5)$$
παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $x - 0.5$ πληροί τις υποθέσεις του ορισμού. Άρα εδώ:
$$GCD(f,g) = x - 0.5$$
4. για τα δύο δοσμένα πολυώνυμα
$$f(x) = 3x^2 - 12x + 9 = (3x-3)(x-3)$$
και
$$g(x) = 3x^2 - 3 = (3x-3)(x+1)$$
παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $3x - 3$ πληροί τις υποθέσεις του ορισμού, εκτός ότι δεν είναι μονικό. Άρα εδώ αρχικά πολλαπλασιάζουμε το $\frac{1}{3}$ και έχουμε:
$$GCD(f,g) = \frac{1}{3}(3x-3) = x - 1$$
5. για τα δύο δοσμένα πολυώνυμα
$$f(x) = x^2 + 2.8x - 0.6 = (x-0.2)(x+3)$$
και
$$g(x) = 1x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$$
παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο, το οποίο να πληροί τις υποθέσεις του ορισμού. Άρα εδώ:
$$GCD(f,g) = 1$$
και τα πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ καλούνται πρώτα μεταξύ τους.

1.3 Πίνακες

Ένας πίνακας είναι μια αριθμών, μεταβλητών, συμβόλων, ή εκφράσεων, διατεταγμένων σε σειρές και στήλες. Τα μεμονωμένα στοιχεία σε ένα πίνακα ονομάζονται στοιχεία του. Λέμε ότι ένας πίνακας A ανήκει έχει m γραμμές και n στήλες όταν $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ και έχει την ακόλουθη μορφή:

Γενική μορφή πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ένας πίνακας ο οποίος έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών ονομάζεται τετραγωνικός πίνακας.

Παραδείγματα

1. $A \in \mathbb{R}^{2x3}$ και έχει τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 4 \\ 14 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

2. $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ και έχει τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3. $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ και έχει τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $A \in \mathbb{R}^{4x4}$ και έχει τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. $A \in \mathbb{R}^{4x5}$ και έχει τη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \end{bmatrix}$$

1.3.1 Όμοιοι πίνακες

Αν A, B είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες με πραγματικές τιμές α_{ij} και b_{ij}, θα λέμε ότι οι πίνακες είναι **όμοιοι** (similar), αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$B = P^{-1}AP \Longleftrightarrow A = PBP^{-1}$$

Παραδείγματα

1. οι πίνακες Α και Β με

$$A = \begin{bmatrix} -2 & +2 & +2 \\ +2 & +1 & +2 \\ -3 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

και

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

είναι όμοιοι, γιατί για πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} P =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -6 & +4 \\ -1 & +3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & +2 & +2 \\ +2 & +1 & +2 \\ -3 & -6 & -7 \end{bmatrix} = A$$

2. οι πίνακες Α και Β με

$$A = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

και

$$B = \begin{bmatrix} +1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & +8 \\ -4 & +8 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι όμοιοι, γιατί για πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow P^{-1} = P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & +8 \\ -4 & +8 & 0 \end{bmatrix} P =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 0 & +1 \\ +8 & -4 & 0 \\ 0 & +8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix} = A$$

3. κάθε πίνακας με τον εαυτό του είναι όμοιοι αφού για

$$A = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

και

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow P^{-1} = P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix} P =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix} = A$$

1.3.2 Συμμετρικοί πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται συμμετρικός αν τα στοιχεία που βρίσκονται συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο είναι ίσα. Επιπλέον ο πίνακας A είναι ίσος με τον ανάστροφό του, δηλαδή, $A = A^T$.

Γενική μορφή συμμετρικού πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Στους σύνθετους πίνακες (πίνακες με μιγαδικά στοιχεία),η συμμετρία συχνά αντικαθιστάται από την έννοια Ερμιτιανός πίνακας (Hermitian matrix), που ικανοποιεί $A^* = A$, όπου το αστέρι ή ο αστερίσκος υποδηλώνει το συζυγή ανάστροφο ενός πινάκα.

Παραδείγματα

1. ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός, αφού

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix} = A$$

2. ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} -7 & +2 & +5 \\ +2 & 20 & -22 \\ +5 & -22 & 17 \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός, αφού

$$B^T = \begin{bmatrix} -7 & +2 & +5 \\ +2 & 20 & -22 \\ +5 & -22 & 17 \end{bmatrix} = B$$

3. ο πίνακας

$$D = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

είναι συμμετρικός, αφού

$$D^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = D$$

Παρατηρήσεις

Στην παρούσα εργασία οι Bézout πίνακες, οι οποίοι μελετάμε είναι συμμετρίκοι πίνακες. Παραθέτουμε κάποιες σημαντικές ιδιότητες των συμμετρικών πινάκων.

Ιδιότητες συμμετρικών πινάκων

Για τους συμμετρικούς πίνακες ισχύουν τα εξής:

- έχουν πραγματικές ιδιοτιμές
- έχουν ορθογώνια ιδιοδιανύσματα
- έχουν ιδιοτιμές ίσες με τις ιδιάζουσες τιμές
- το άθροισμα και η διαφορά συμμετρικών πινάκων είναι πάλι συμμετρικός πίνακας
- για ακέραιο n, ο πίνακας A^n είναι συμμετρικός αν και μόνο αν ο A είναι συμμετρικός
- αν A αντιστρέψιμος, τότε ο A^{-1} είναι συμμετρικός αν και μόνο αν ο A είναι συμμετρικός
- [9] κάθε συμμετρικός πίνακας A εκφράζεται στη μορφή:

  $$A = QDQ^T \iff AQ = QD,$$

  όπου Q ένας ορθογώνιος πίνακας και D ένας *block*-αντί-τριγωνικός (block-anti-triangular (BAT))πίνακας.

1.3.3 Τάξη ενός πίνακα A

Στη γραμμική άλγεβρα, η τάξη ενός πίνακα A είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τις στήλες (ή ισοδύναμα του διανυσματικού χώρου που παράγεται από τις γραμμές). Θεωρείται ένα από τα θεμελιώδη στοιχεία ενός πίνακα. Υπολογίζεται με πολλούς τρόπους όπως:

- Για μη τετραγωνικό πίνακα ($m \neq n$): Ψπολογισμός κλιμακωτής μορφής ως προς γραμμές και εύρεση πλήθους (μη μηδενικών) γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών, υπολογισμός κλιμακωτής μορφής ως προς στήλες και εύρεση πλήθους (μη μηδενικών) γραμμικά ανεξάρτητων στηλών. Επιλογή του μικρότερου πλήθους.
- Για τετραγωνικό πίνακα ($m = n$) η τάξη είναι το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών.

Συμβολισμός:
rank(A) ή rk(A). Θα χρησιμοποιούμε τον πρώτο συμβολισμό. Μερικές φορές η παρένθεση παραλείπεται.

Ορισμός:
Η τάξη $rank(A) = k$ ενός πίνακα A mxn είναι ο μικρότερος αριθμός μεταξύ του μέγιστου αριθμού των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών $c_1, c_2, \ldots, c_a$ για $1 \leq a \leq n$ του A και του μέγιστου αριθμού των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών $r_1, r_2, \ldots, r_b$ για $1 \leq b \leq m$ του A, δηλαδή:

$$k = rank(A) = rank(A_{mxn}) = min\{a, b\} \leq min\{m, n\}$$

Παρατήρηση:
Υπολογίζουμε εύκολα τον πυρήνα ενός δοσμένου πίνακα A εισάγοντάς τον στο περιβάλλον της Matlab και χρησιμοποιώντας την εντολή $rank(A)$

Παραδείγματα

1. έχουμε πίνακα:
$$A = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$$
τότε $rank(A) = 1$
2. έχουμε πίνακα:
$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
τότε $rank(B) = 1$
3. έχουμε πίνακα:
$$C = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$$
τότε $rank(C) = 1$

4. έχουμε πίνακα:
$$D = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
τότε $rank(D) = 2$

5. έχουμε πίνακα:
$$E = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$
τότε $rank(E) = 2$

6. έχουμε πίνακα:
$$F = \begin{bmatrix} -17 & 22 & -5 \\ 22 & -20 & -2 \\ -5 & -2 & +7 \end{bmatrix}$$
τότε $rank(F) = 2$

7. έχουμε πίνακα:
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$
τότε $rank(G) = 3$

8. για συμμετρικό πίνακα A ισχύει: $rank(A) = rank(A^T)$

Παρατηρήσεις:

Οι πίνακες που έχουν τάξη ίση με το ελάχιστο των γραμμών ή στηλών καλούνται full rank (παράδειγμα D, G), δηλαδή:

$$A fullrank \Leftrightarrow rank(A) = r = min\{m, n\},$$

ενώ Οι πίνακες που έχουν τάξη μικρότερη από το ελάχιστο των γραμμών ή στηλών καλούνται rank deficient (παραδείγματα A, B, C, E, F, δηλαδή:

$$A rankdeficient \Leftrightarrow rank(A) = r < min\{m, n\},$$

Στην παρούσα εργασία οι Bézout πίνακες, οι οποίοι μελετάμε αποδεικνύεται ότι είναι rank deficient πίνακες. Αυτό μας δίνει μεγάλο πλεονέκτημα στο κόστος του αλγορίθμου, την πολυπλοκότητά του.

1.3.4 Πυρήνας ενός πίνακα A

Έστω mxn πίνακας A. Ο πίνακας A είναι μια γραμμική απεικόνιση

$$A \in F^n \to F^m$$

και μέσω αυτού ορίζουμε ένα θεμελιώδη υπόχωρο, γνωστό ως πυρήνα του πίνακα.

Συμβολισμός:
ker(A) ή null(A). Θα χρησιμοποιούμε το δεύτερο συμβολισμό.

Ορισμός:

$$null(A) = \{x \in F^n : A \cdot x = 0 \in F^m\}$$

Παρατήρηση:
Υπολογίζουμε εύκολα τον πυρήνα ενός δοσμένου πίνακα A εισάγοντάς τον στο περιβάλλον της Matlab και χρησιμοποιώντας την εντολή **null(A)**

Παραδείγματα

1. έχουμε πίνακα:
$$A = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$$
τότε
$$NullSpace(A) = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

2. έχουμε πίνακα:
$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
τότε $NullSpace(B) = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ -0.8944 \end{bmatrix}$

3. έχουμε πίνακα:
$$C = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$$
τότε $NullSpace(C) = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$

4. έχουμε πίνακα:
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
τότε $NullSpace(D) = \begin{bmatrix} -0.8944 \\ 0.4472 \end{bmatrix}$

5. έχουμε πίνακα:
$$E = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

τότε $NullSpace(E) = \begin{bmatrix} 0.8729 \\ 0.4364 \\ 0.2182 \end{bmatrix}$

6. έχουμε πίνακα:
$$F = \begin{bmatrix} -17 & 22 & -5 \\ 22 & -20 & -2 \\ -5 & -2 & +7 \end{bmatrix}$$
τότε $NullSpace(F) = \begin{bmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{bmatrix}$

7. έχουμε πίνακα:
$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
τότε $NullSpace(I_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1.3.5 Κλιμακατωτή μορφή ενός πίνακα A

Ένας πίνακας λέμε ότι είναι σε κλιμακωτή μορφή εάν έχει μία συγκεκριμένη τελική μορφή μέσω των στοιχειώδων μετασχηματισμών του Gauss. Κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές (row echelon form) σημαίνει μετασχηματισμοί Gauss ως προς τις γραμμές και αντίστοιχα κλιμακωτή μορφή ως προς τις στήλες (column echelon form) σημαίνει μετασχηματισμοί Gauss ως προς τις στήλες. Επειδή παρακάτω θα ασχοληθούμε μόνο με συμμετρικούς πίνακες, ότι ιδιότητες ισχύουν για την κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές, θα ισχύει και για την κλιμακωτή μορφή ως προς τις στήλες καθώς ο ανάστροφος ενός πίνακα συμμετρικού είναι ο εαυτός του.

Ειδικότερα ένας πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές (row echelon form) αν:

- όλες οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω των μηδενικών γραμμών, δηλαδή οι μηδενικές γραμμές (αν υπάρχουν) βρίσκονται στη τελευταία γραμμή του πίνακα
- το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής, βρίσκεται κάτω και αριστερά του ηγετικού στοιχείου κάθε προηγούμενης γραμμής

Αντίστοιχα ένας πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή ως προς τις στήλες (column echelon form) αν:

- όλες οι μη μηδενικές στήλες βρίσκονται αριστερότερα των μηδενικών στηλών, δηλαδή οι μηδενικές στήλες (αν υπάρχουν) βρίσκονται δεξιά του πίνακα
- το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής στήλης, βρίσκεται πιο κάτω του ηγετικού στοιχείου κάθε προηγούμενης στήλης

Παρατήρηση:
Υπολογίζουμε εύκολα τον κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές ενός δοσμένου πίνακα A εισάγοντάς τον στο περιβάλλον της Matlab και χρησιμοποιώντας την εντολή $rref(A)$

Αντίστοιχα υπολογίζουμε εύκολα τον κλιμακωτή μορφή ως προς τις στήλες ενός δοσμένου πίνακα A εισάγοντάς τον στο περιβάλλον της Matlab και χρησιμοποιώντας την εντολή $rref(transpose(A))$

Παραδείγματα

1. Έχουμε πίνακα:
$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
τότε κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές: $rref(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
και κλιμακωτή μορφή ως προς τις στήλες $rref(transpose(B)) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Η ισότητα $rref(B) = rref(transpose(B))$ προκύπτει επειδή ο πίνακας B είναι συμμετρικός.

2. Έχουμε πίνακα:
$$E = \begin{bmatrix} -17 & 22 & -5 \\ 22 & -20 & -2 \\ -5 & -2 & +7 \end{bmatrix}$$
τότε κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές: $rref(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
και κλιμακωτή μορφή ως προς τις στήλες $rref(transpose(E)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Η ισότητα $rref(E) = rref(transpose(E))$ προκύπτει επειδή ο πίνακας E είναι συμμετρικός.

3. Έχουμε πίνακα:
$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$
τότε κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές: $rref(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
και κλιμακωτή μορφή ως προς τις στήλες $rref(transpose(F)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.4 QR παραγοντοποίηση

Πίνακας Householder

Ένας πίνακας nxn της μορφής:

$$H = I - \frac{2uu^T}{u^T u}, u \neq 0, u \in \mathbb{R}^n$$

λέγεται πίνακας Householder ή μετασχηματισμός Householder.

Ιδιότητες πινάκων Householder

- Ο πίνακας Householder είναι συμετρικός.
- Ο πίνακας Householder είναι ορθογώνιος.
- Οι πίνακες Householder λέγονται και στοιχειώδεις πίνακες ανάκλασης.

Η σπουδαιότητα των μετασχηματισμών Householder έγκειται στο γεγονός ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία μηδενικών εισόδων σ'ενα διάνυσμα ή και σε έναν πίνακα.

QR παραγοντοποίηση

[1] Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{mxn}$. Υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας Q_{mxm}, δηλαδή

$$QQ^T = Q^T Q = I$$

και ένας άνω τριγωνικός πίνακας R_{nxn}, δηλαδή της μορφής

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε:

$$A = QR$$

Ο πίνακας Q είναι το γινόμενο

$$Q = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$$

όπου κάθε πίνακας H_i είναι Householder. Η παραγοντοποίηση αυτή του A ονομάζεται QR παραγοντοποίηση του A.

Πολυπλοκότητα QR παραγοντοποίησης

Αποδεικνύεται ότι η QR παραγοντοποίηση ενός mxn πίνακα A μέσω Householder έχει πολυπλοκότητα της τάξης

$$\mathcal{O}(2mn^2 - \frac{2n^3}{3})$$

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τετραγωνικούς πίνακες, δηλαδή m=n. Επομένως η πολυπλοκότητα θα είναι:

$$\mathcal{O}(2n^3 - \frac{2n^3}{3}) = \mathcal{O}(\frac{4n^3}{3}),$$

Ο υπολογισμός της ανάλυσης QR παραγοντοποίησης είναι ιδιαίτερα χρονοβόρος. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν κάποια αριθμητικά αποτελέσματα με τη χρήση του λογισμικού περιβάλλοντος Matlab (έκδοση R2015a) και συγκεκριμένα την εντολή:

$$[Q, R] = \mathbf{qr}A$$

Αριθμητικά αποτελέσματα

Τα παρακάτω παραδείγματα δεν είναι τυχαία, καθώς είναι οι πίνακες που μελετώνται στην επόμενη θεματική ενότητα. Οι υπολισμοί έχουν γίνει στο υπολογισμό περιβάλλον της Matlab (έκδοση R2015a).

1. Έστω πίνακας $B = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$.
   Τότε:
   $$Q = \begin{bmatrix} -0.7017 & +0.7017 \\ +0.7017 & +0.7017 \end{bmatrix}$$
   επαληθεύεται ότι $QQ^T = I_2$ και
   $$R = \begin{bmatrix} 1.4142 & -1.4142 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Έστω πίνακας $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
   Τότε:
   $$Q = \begin{bmatrix} -0.8944 & -0.4472 \\ -0.4472 & +0.8944 \end{bmatrix}$$
   επαληθεύεται ότι $QQ^T = I_2$ και
   $$R = \begin{bmatrix} -4.4721 & -2.2361 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Έστω πίνακας $B = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$.
   Τότε:
$$Q = \begin{bmatrix} -0.7017 & +0.7017 \\ +0.7017 & +0.7017 \end{bmatrix}$$
   επαληθεύεται ότι $QQ^T = I_2$ και
$$R = \begin{bmatrix} 7.0711 & -7.0711 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Έστω πίνακας $B = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$.
   Τότε:
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.9759 & 0.2182 \\ -0.8944 & -0.0976 & 0.4364 \\ 0.4472 & -0.1972 & 0.8729 \end{bmatrix}$$
   επαληθεύεται ότι $QQ^T = I_3$ και
$$R = \begin{bmatrix} -8.9443 & 3.5777 & 0.4472 \\ 0 & 8.1976 & -4.0988 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   ώστε:
$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.9759 & 0.2182 \\ -0.8944 & -0.0976 & 0.4364 \\ 0.4472 & -0.1972 & 0.8729 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.9443 & 3.5777 & 0.4472 \\ 0 & 8.1976 & -4.0988 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = QR$$

5. Έστω πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.
   Τότε: $Q = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ και $R = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ώστε:
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = QR$$

1.5 QR παραγοντοποίηση με οδήγηση κατά στήλες

[1] Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ με $m \geqslant n$ και $rank(A) = r < n$. Τότε υπάρχει πάντα ένας μεταθετικός πίνακας $P \in \mathbb{R}^{nxn}$ και ένας ορθογώνιος πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{mxm}$, δηλαδή

$$QQ^T = Q^T Q = I$$

ώστε:

$$Q^T AP = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AP = QR$$

όπου $R_{11} \in \mathbb{R}^{rxr}$ άνω τριγωνικός με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία

Πολυπλοκότητα QR παραγοντοποίησης με οδήγηση κατά στήλες

Η QR παραγοντοποίηση με οδήγηση κατά στήλες ενός mxn πίνακα A με $rank(A) = r < min\{m, n\}$ έχει πολυπλοκότητα της τάξης

$$\mathcal{O}(2mnr - r^2(m+n) + \frac{2r^3}{3})$$

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τετραγωνικούς πίνακες, δηλαδή m=n. Επομένως η πολυπλοκότητα θα είναι:

$$\mathcal{O}(2rn^2 - 2r^2 n + \frac{2r^3}{3})$$

Ο υπολογισμός της ανάλυσης QR παραγοντοποίησης με οδήγηση κατά στήλες είναι ιδιαίτερα χρονοβόρος. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν κάποια αριθμητικά αποτελέσματα με τη χρήση του λογισμικού περιβάλλοντος Matlab (έκδοση R2015a) και συγκεκριμένα την εντολή:

$$[Q, R, P] = \mathbf{qr}A$$

Αριθμητικά αποτελέσματα

Τα παρακάτω παραδείγματα δεν είναι τυχαία, καθώς είναι οι πίνακες που μελετώνται στην επόμενη θεματική ενότητα. Οι υπολισμοί έχουν γίνει στο υπολογισμό περιβάλλον της Matlab (έκδοση R2015a).

1. Έστω πίνακας $B = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$.

   Τότε:

   $$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   $$Q = \begin{bmatrix} -0.7017 & +0.7017 \\ +0.7017 & +0.7017 \end{bmatrix}$$

   επαληθεύεται ότι $QQ^T = I_2$ και

   $$R = \begin{bmatrix} 1.4142 & -1.4142 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   και επαληθεύεται ότι $BP = QR$

2. Έστω πίνακας $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
   Τότε:
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$Q = \begin{bmatrix} -0.8944 & -0.4472 \\ -0.4472 & +0.8944 \end{bmatrix}$$
   επαληθεύεται ότι $QQ^T = I_2$ και
$$R = \begin{bmatrix} -4.4721 & -2.2361 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   και επαληθεύεται ότι $BP = QR$

3. Έστω πίνακας $B = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$.
   Τότε:
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$Q = \begin{bmatrix} -0.7017 & +0.7017 \\ +0.7017 & +0.7017 \end{bmatrix}$$
   επαληθεύεται ότι $QQ^T = I_2$ και
$$R = \begin{bmatrix} 7.0711 & -7.0711 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   και επαληθεύεται ότι $BP = QR$

4. Έστω πίνακας $B = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$.
   Τότε:
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.9759 & 0.2182 \\ -0.8944 & -0.0976 & 0.4364 \\ 0.4472 & -0.1972 & 0.8729 \end{bmatrix}$$
   επαληθεύεται ότι $QQ^T = I_3$ και
$$R = \begin{bmatrix} -8.9443 & 3.5777 & 0.4472 \\ 0 & 8.1976 & -4.0988 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   και επαληθεύεται ότι $BP = QR$

5. Έστω πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \\ 1 & 11 & 12 \end{bmatrix}$.

   Τότε έχουμε πίνακα P ώστε:

$$P = [e_3, e_2, e_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   ώστε

$$AP = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 1 \\ 12 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

   και βρίσκουμε πίνακα:

$$Q = \begin{bmatrix} -0.182 & -0.816 & 0.514 & 0.191 \\ -0.365 & 0.408 & -0.827 & 0.129 \\ 0.548 & 0 & 0.113 & -0.829 \\ -0.730 & 0.408 & 0.200 & 0.510 \end{bmatrix},$$

   , ο οποίος είναι ορθογώνιος, δηλαδή $QQ^T = I_3$ και

$$R = \begin{bmatrix} -16.4 & -14.6 & -1.82 \\ 0 & 0.816 & -0.816 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   και επαληθεύεται ότι

$$AP = QR \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AP = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 1 \\ 12 & 11 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.182 & -0.816 & 0.514 & 0.191 \\ -0.365 & 0.408 & -0.827 & 0.129 \\ 0.548 & 0 & 0.113 & -0.829 \\ -0.730 & 0.408 & 0.200 & 0.510 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16.4 & -14.6 & -1.82 \\ 0 & 0.816 & -0.816 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = QR$$

1.6 Χρήσιμες εντολές Matlab

Χρήσιμες εντολές Matlab	
Εντολή	Αποτέλεσμα
rand	τυχαίος αριθμός
rand(n)	τυχαίος πίνακας nxn
transpose(A)	ανάστροφος πίνακας του A
rank(A)	τάξη πίνακα A
null(A)	πυρήνας πίνακα A
det(A)	ορίζουσα πίνακα A
inv(A)	υπολογισμός A^{-1}
eig(A)	ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πίνακα A
rref(A)	κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές πίνακα A
rref(transpose(A))	κλιμακωτή μορφή ως προς τις στήλες πίνακα A
[Q,R]=qr(A)	QR παραγοντοποίηση πίνακα A
[Q,R,P]=qr(A)	QR παραγοντοποίηση με οδήγηση κατά στήλες

2 Πίνακες Bézout: Ορισμός και ιδιότητες

Στα μαθηματικά, ένας πίνακας Bézout είναι ένας ειδικός τετράγωνος πίνακας που δημιουργείται από δύο (ή περισσότερα) πολυώνυμα μίας μεταβλητής (univariate polynomials) και παρουσιάστηκε πρώτη φορά από τους Sylvester (1853) και Cayley (1857) και πήρε το όνομά του από τον Étienne Bézout.Παρακάτω θα μελετήσουμε τη μορφή αυτού του πίνακα καθώς επίσης κάποιες ιδιότητες και εφαρμογές του.

2.1 Ορισμός (2.1) [3]

Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δύο μη μηδενικά πολυώνυμα μίας μεταβλητής για τα οποία ισχύουν τα εξής:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} u_k x^k = u_m x^m + u_{m-1}x^{m-1} + u_{m-2}x^{m-2} + ... + u_2 x^2 + u_1 x + u_0$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \upsilon_k x^k = \upsilon_n x^n + \upsilon_{n-1}x^{n-1} + \upsilon_{n-2}x^{n-2} + ... + \upsilon_2 x^2 + \upsilon_1 x + \upsilon_0$$

με

$$deg(f(x)) = m$$

και

$$deg(g(x)) = n$$

έτσι ώστε

$$m \geq n$$

και

$$(u_m, \upsilon_n) \neq (0, 0)$$

όπου:

- deg(*) ο βαθμός του πολυωνύμου *
- u_m ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του πολυωνύμου $f(x)$
- υ_n ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του πολυωνύμου $g(x)$.

Παρατήρηση
Αν $deg(f(x)) = m > n = deg(g(x))$, τότε συμπληρώνουμε κάποιους από τους πρώτους συντελεστές του πολυωνόμου $g(x)$ με τον αριθμό μηδέν.

Συμβολισμός και στοιχεία πίνακα Bézout

$$B = B(f, g) = Bez(f(x), g(x))$$

Ο πίνακας Bézout έχει την εξής αναπαράσταση (**matrix representation**):

$$B = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_m \\ \vdots & \iddots & \\ u_m & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_0 & \cdots & \upsilon_{m-1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \upsilon_0 \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} \upsilon_1 & \cdots & \upsilon_m \\ \vdots & \iddots & \\ \upsilon_m & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 & \cdots & u_{m-1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_0 \end{bmatrix}$$

όπου αν $m > n$ τότε τους συντελεστές $\upsilon_{n+1}, ...\upsilon_m$ τους υπολογίζουμε ως μηδέν, δηλαδή $\upsilon_{n+1} = ... = \upsilon_m = 0$ Για την καλύτερη κατανόηση της παραπάνω αναπαράστασης, η αναπάρασταση μπορεί να γραφεί και ως:

$$B = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \\ u_2 & \cdots & u_m & \\ \vdots & \iddots & & \\ u_m & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_0 & \upsilon_1 & \cdots & \upsilon_{m-1} \\ & \upsilon_0 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \upsilon_1 \\ 0 & & & \upsilon_0 \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} \upsilon_1 & \upsilon_2 & \cdots & \upsilon_m \\ \upsilon_2 & \cdots & \upsilon_m & \\ \vdots & \iddots & & \\ \upsilon_m & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{m-1} \\ & u_0 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & u_1 \\ 0 & & & u_0 \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία b_{ij} του πίνακα Bézout $B(f, g)$ υπολογίζονται από τον παρακάτω τύπο:

$$b_{ij} = \mid u_0\upsilon_{i+j-1} \mid + \mid u_1\upsilon_{i+j-2} \mid + ... + \mid u_k\upsilon_{i+j-k-1} \mid$$

όπου

$$k = min(i-1, j-1)$$

$u_r = \upsilon_r = 0$ όταν $r > m$ και

$$\mid u_r\upsilon_s \mid = u_s\upsilon_r - u_r\upsilon_s$$

Επιπλέον υπάρχει ο παρακάτω ισοδύναμος ορισμός. Ο πίνακας Bézout έχει τη μορφή:

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,m} \end{bmatrix}$$

όπου οι συντελεστές $b_{i,j}$ υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\frac{f(x) \cdot g(y) - f(y) \cdot g(x)}{x - y} = [1, x, x^2, ..., x^{m-1}]B(f, g)[1, y, y^2, ..., y^{m-1}] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} b_{i,j} x^{i-1} y^{i-1}$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε 3 παρατηρήσεις, τις οποίες επαληθεύουμε με αριθμητικά παραδείγματα στην υποενότητα (2.7)

Παρατήρηση 1
Σημειώνεται ότι ο πίνακας Bézout μπορεί να προσδιοριστεί από το περιβάλλον αριθμητικής υπολογιστικής Maple 2016 εισάγοντας δύο πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$, χρησιμοποιώντας την εντολή $BezoutMatrix(f, g, x)$ και έπειτα την ισότητα:

$$B(f, g) = -\mathbf{J} BezoutMatrix(f, g, x)\mathbf{J}(1)$$

όπου $\mathbf{J}$ ο αντιδιαγώνιος πίνακας με το στοιχείο 1 στις μη μηδενικές εισόδους, δηλαδή:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο ισχύει ότι:

$$\mathbf{J^{-1}} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$BezoutMatrix(f, g, x) = -\mathbf{J}B(f, g)\mathbf{J}$$

Είναι προφανές από την παραπάνω σχέση πως οι πίνακες $BezoutMatrix(f, g, x)$ και $B(f, g)$ είναι όμοιοι.

Παρακάτω παρουσιάζεται (2.4) και μία συνάρτηση (function) του λογισμικού περιβάλλοντος Matlab (θα τη συμβολίσουμε $bezoutmatrix(u, v)$*) που χρησιμοποιήθηκε εξίσου για τους υπολογισμούς των πινάκων Bézout της παρούσας εργασίας και μέσω της οποίας εξίσου ισχύει:*

$$bezoutmatrix(u, v) = -\mathbf{J}B(f, g)\mathbf{J} \Leftrightarrow B(f, g) = -\mathbf{J}bezoutmatrix(u, v)\mathbf{J}$$

Παρατήρηση 2
Έστω πίνακας J όπως ορίστηκε στην προηγούμενη παρατήρηση και ορίζουμε πολυώνυμα $\tilde{f}(x)$ και $\tilde{g}(x)$ τέτοια ώστε:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{m} u_{m-k}x^k = u_0x^m + u_1x^{m-1} + u_2x^{m-2} + ... + u_{m-2}x^2 + u_{m-1}x + u_m$$

και

$$\tilde{g}(x) = \sum_{k=0}^{n} \upsilon_{n-k}x^k = \upsilon_0x^n + \upsilon_1x^{n-1} + \upsilon_2x^{n-2} + ... + \upsilon_{n-2}x^2 + \upsilon_{n-1}x + \upsilon_n$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} u_kx^k = u_mx^m + u_{m-1}x^{m-1} + u_{m-2}x^{m-2} + ... + u_2x^2 + u_1x + u_0$$

και

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \upsilon_kx^k = \upsilon_nx^n + \upsilon_{n-1}x^{n-1} + \upsilon_{n-2}x^{n-2} + ... + \upsilon_2x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_0$$

Δηλαδή τα πολυώνυμα $\tilde{f}(x)$ και $\tilde{g}(x)$ είναι τα πολυώνυμα με τους συντελεστές γραμμένους με αντίστροφη σειρά (reversed polynomials) των πολυωνύμων $f(x)$ και $g(x)$. Τότε ισχύει:

$$B(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)) = \mathbf{J}B(f,g)\mathbf{J}$$

όπου $B(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x))$ ο πίνακας Bézout των $\tilde{f}(x)$ και $\tilde{g}(x)$

Είναι προφανές από την παραπάνω σχέση πως οι πίνακες $B(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x))$ και $B(f,g)$ είναι όμοιοι.

Παρατήρηση 3
Με δοσμένα τα:

- n-οστή γραμμή του πίνακα $B(f,g)$
- τελευταία γραμμή του πίνακα $B(f,g)$
- ο πάνω αριστερά στοιχείο του πίνακα $B(f,g)$ (top left entry)

μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων $u_mg(x)$ και $f(x)/u_m$

2.2 Θεωρητικά παραδείγματα υπολογισμού πίνακα Bézout

1. Για $m = n = 2$ έχουμε:

$$f(x) = u_2x^2 + u_1x + u_0$$

$$g(x) = \upsilon_2x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_0$$

$$b_{11} = \mid u_0\upsilon_1 \mid = u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1$$

$$b_{12} = \mid u_0\upsilon_2 \mid = u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2$$

$$b_{21} = \mid u_0\upsilon_2 \mid = u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2$$

$$b_{22} = \mid u_0\upsilon_3 \mid + \mid u_1\upsilon_2 \mid = u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2$$

στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $u_3 = \upsilon_3 = 0$ γιατί $r = 3 > 2 = m = n$.
Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

δηλαδή:

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 & u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 \\ u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 \end{bmatrix} (1)$$

Παρατηρήσεις
Ο πίνακας είναι (1) συμμετρικός. Επιπλέον ο πίνακας (1) μπορεί να πάρει την εξής αναπαράσταση:

$$B = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_0 & \upsilon_1 \\ 0 & \upsilon_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \upsilon_1 & \upsilon_2 \\ \upsilon_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 \\ 0 & u_0 \end{bmatrix}$$

2. Με παρόμοιο τρόπο θα υπολογίσουμε τον πίνακα $B(g, f)$ όπου έχουμε:

$$b_{11} = \mid u_1\upsilon_0 \mid = u_0\upsilon_1 - u_1\upsilon_0$$

$$b_{12} = \mid u_2\upsilon_0 \mid = u_0\upsilon_2 - u_2\upsilon_0$$

$$b_{21} = \mid u_2\upsilon_0 \mid = u_0\upsilon_2 - u_2\upsilon_0$$

$$b_{22} = \mid u_3\upsilon_0 \mid + \mid u_2\upsilon_1 \mid = u_1\upsilon_2 - u_2\upsilon_1$$

στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $u_3 = \upsilon_3 = 0$ γιατί $r = 3 > 2 = m = n$.
Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} u_0\upsilon_1 - u_1\upsilon_0 & u_0\upsilon_2 - u_2\upsilon_0 \\ u_0\upsilon_2 - u_2\upsilon_0 & u_1\upsilon_2 - u_2\upsilon_1 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 & u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 \\ u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} u_0\upsilon_1 - u_1\upsilon_0 & u_0\upsilon_2 - u_2\upsilon_0 \\ u_0\upsilon_2 - u_2\upsilon_0 & u_1\upsilon_2 - u_2\upsilon_1 \end{bmatrix} = -B(g, f)$$

3. Με παρόμοιο τρόπο θα υπολογίσουμε τον πίνακα $B(\tilde{f},\tilde{g})$ όπου:

$$\tilde{f}(x) = u_0x^2 + u_1x + u_2$$
$$\tilde{g}(x) = \upsilon_0x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_2$$

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \mid u_1\upsilon_2 \mid = u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2\\
b_{12} &= \mid u_0\upsilon_2 \mid = u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2\\
b_{21} &= \mid u_0\upsilon_2 \mid = u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2\\
b_{22} &= \mid u_3\upsilon_0 \mid + \mid u_0\upsilon_1 \mid = u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1
\end{aligned}$$

στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $u_3 = \upsilon_3 = 0$ γιατί $r = 3 > 2 = m = n$.
Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B(\tilde{f},\tilde{g}) = \begin{bmatrix} u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 & u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 \\ u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρήση
Παρατηρούμε ότι

$$JB(f,g)J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 & u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 \\ u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 \\ u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 & u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 & u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 \\ u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 \end{bmatrix} = B(\tilde{f},\tilde{g})$$

4. Για $m = 2$ και $n = 1$ έχουμε:

$$f(x) = u_2x^2 + u_1x + u_0$$
$$g(x) = \upsilon_1x + \upsilon_0 = 0x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_0$$

Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα 1. και ότι $\upsilon_2 = 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \mid u_0\upsilon_1 \mid = u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 = -u_0\upsilon_1\\
b_{12} &= \mid u_0\upsilon_2 \mid = u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 = -u_0\upsilon_2\\
b_{21} &= \mid u_0\upsilon_2 \mid = u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 = -u_0\upsilon_2\\
b_{22} &= \mid u_0\upsilon_3 \mid + \mid u_1\upsilon_2 \mid = u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2
\end{aligned}$$

Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

δηλαδή:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -u_0\upsilon_1 & -u_0\upsilon_2 \\ -u_0\upsilon_2 & u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 \end{bmatrix} (2)$$

Παρατηρήση
Ο πίνακας είναι (2) συμμετρικός

5. Για $m = n = 3$ έχουμε:

$$f(x) = u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x + u_0$$

$$g(x) = \upsilon_3x^3 + \upsilon_2x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_0$$

$$b_{11} =| u_0\upsilon_1 |= u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1, (k = 0)$$
$$b_{12} =| u_0\upsilon_2 |= u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2, (k = 0)$$
$$b_{13} =| u_0\upsilon_3 |= u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3, (k = 0)$$
$$b_{21} =| u_0\upsilon_2 |= u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2(k = 0)$$
$$b_{22} =| u_0\upsilon_3 | + | u_1\upsilon_2 |= u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3 + u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2, (k = 1)$$
$$b_{23} =| u_0\upsilon_4 | + | u_1\upsilon_3 |= u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3, (k = 1)$$

για το b_{23} χρησιμοποιήσαμε ότι $u_4 = \upsilon_4 = 0$
γιατί $r = 4 > 3 = m = n$.

$$b_{31} =| u_0\upsilon_3 |= u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3, (k = 0)$$
$$b_{32} =| u_0\upsilon_4 | + | u_1\upsilon_3 |= u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3, (k = 1)$$
$$b_{33} =| u_0\upsilon_5 | + | u_1\upsilon_4 | + | u_2\upsilon_3 |= u_3\upsilon_2 - u_2\upsilon_3, (k = 2)$$

για το b_{33} χρησιμοποιήσαμε ότι $u_4 = \upsilon_4 = 0$ και $u_5 = \upsilon_5 = 0$
γιατί $r = 4 > 3 = m = n$.

Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

δηλαδή:

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 & u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3 \\ u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3 + u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 & u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3 \\ u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3 & u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3 & u_3\upsilon_2 - u_2\upsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Παρατηρήση
Ο πίνακας είναι (3) συμμετρικός. Επιπλέον ο πίνακας (3) μπορεί να πάρει την εξής αναπαράσταση:

$$B = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_0 & \upsilon_1 & \upsilon_2 \\ 0 & \upsilon_0 & \upsilon_1 \\ 0 & 0 & \upsilon_0 \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \\ \upsilon_2 & \upsilon_3 & 0 \\ \upsilon_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ 0 & u_0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_0 \end{bmatrix}$$

6. Για $m = 3$ και $n = 2$ έχουμε:

$$f(x) = u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x + u_0$$

$$g(x) = \upsilon_2x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_0 = 0x^3 + \upsilon_2x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_0$$

Άρα βάζοντας $\upsilon_3 = 0$ στον πίνακα (3) θα έχουμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 & u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_3\upsilon_0 \\ u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_3\upsilon_0 + u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 & u_3\upsilon_1 \\ u_3\upsilon_0 & u_3\upsilon_1 & u_3\upsilon_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

7. Για $m = n = 4$ έχουμε:

$$f(x) = u_4x^4 + u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x + u_0$$

$$g(x) = \upsilon_4x^4 + \upsilon_3x^3 + \upsilon_2x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_0$$

$$b_{11} =\mid u_0\upsilon_1 \mid= u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1, (k = 0)$$

$$b_{12} =\mid u_0\upsilon_2 \mid= u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2, (k = 0)$$

$$b_{13} =\mid u_0\upsilon_3 \mid= u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3, (k = 0)$$

$$b_{14} =\mid u_0\upsilon_4 \mid= u_4\upsilon_0 - u_0\upsilon_4, (k = 0)$$

$$b_{21} =\mid u_0\upsilon_2 \mid= u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2(k = 0)$$

$$b_{22} =\mid u_0\upsilon_3 \mid + \mid u_1\upsilon_2 \mid= u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3 + u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2, (k = 1)$$

$$b_{23} =\mid u_0\upsilon_4 \mid + \mid u_1\upsilon_3 \mid= u_4\upsilon_0 - u_0\upsilon_4 + u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3, (k = 1)$$

$$b_{24} =\mid u_0\upsilon_5 \mid + \mid u_1\upsilon_4 \mid= u_4\upsilon_1 - u_1\upsilon_4, (k = 1)$$

$$b_{31} =\mid u_0\upsilon_3 \mid= u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3, (k = 0)$$

$$b_{32} =\mid u_0\upsilon_4 \mid + \mid u_1\upsilon_3 \mid= u_4\upsilon_0 - u_0\upsilon_4 + u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3, (k = 1)$$

$$b_{33} =\mid u_0\upsilon_5 \mid + \mid u_1\upsilon_4 \mid + \mid u_2\upsilon_3 \mid= u_4\upsilon_1 - u_1\upsilon_4u_3\upsilon_2 - u_2\upsilon_3, (k = 2)$$

$$b_{34} =\mid u_0\upsilon_6 \mid + \mid u_1\upsilon_5 \mid + \mid u_2\upsilon_4 \mid= u_4\upsilon_2 - u_2\upsilon_4, (k = 2)$$

$$b_{41} =\mid u_0\upsilon_4 \mid= u_4\upsilon_0 - u_0\upsilon_4, (k = 0)$$

$$b_{42} =\mid u_0\upsilon_5 \mid + \mid u_1\upsilon_4 \mid= u_4\upsilon_1 - u_1\upsilon_4, (k = 1)$$

$$b_{43} =\mid u_0\upsilon_6 \mid + \mid u_1\upsilon_5 \mid + \mid u_2\upsilon_4 \mid= u_4\upsilon_2 - u_2\upsilon_4, (k = 2)$$

$$b_{44} =\mid u_0\upsilon_7 \mid + \mid u_1\upsilon_6 \mid + \mid u_2\upsilon_5 \mid + \mid u_2\upsilon_4 \mid= u_4\upsilon_3 - u_3\upsilon_4, (k = 3)$$

παραπάνω χρησιμοποιήσαμε ότι $u_5 = \upsilon_5 = 0$ και $u_6 = \upsilon_6 = 0$
γιατί $r = 5 > 4 = m = n$ και ομοίως για $r = 6$.

Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

δηλαδή:

$$B(f,g) =$$

$$= \begin{bmatrix} u_1v_0 - u_0v_1 & u_2v_0 - u_0v_2 & u_3v_0 - u_0v_3 & u_4v_0 - u_0v_4 \\ u_2v_0 - u_0v_2 & u_3v_0 - u_0v_3 + u_2v_1 - u_1v_2 & u_4v_0 - u_0v_4 + u_3v_1 - u_1v_3 & u_4v_1 - u_1v_4 \\ u_3v_0 - u_0v_3 & u_4v_0 - u_0v_4 + u_3v_1 - u_1v_3 & u_4v_1 - u_1v_4 + u_3v_2 - u_2v_3 & u_4v_2 - u_2v_4 \\ u_4v_0 - u_0v_4 & u_4v_1 - u_1v_4 & u_4v_2 - u_2v_4 & u_4v_3 - u_3v_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Παρατηρήση

Ο πίνακας είναι (4) συμμετρικός. Επιπλέον ο πίνακας (4) μπορεί να πάρει την εξής αναπαράσταση:

$$B = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_4 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & v_0 & v_1 & v_2 \\ 0 & 0 & v_0 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & v_0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 & 0 \\ v_3 & v_4 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 0 & u_0 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_0 \end{bmatrix}$$

2.3 Ιδιότητες πινάκων Bézout

- ο πίνακας Bézout $B(f,g)$ είναι συμμετρικός για κάθε φυσικούς αριθμούς m,n (I)
- $B(f,g) = -B(g,f)$ για κάθε φυσικούς αριθμούς m,n (II)
- $B(f,f) = \mathbb{O}$ για κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές (III)
- $B(f,g) \in \mathbb{R}^{mxm}$ αν $f(x)$ με $deg(f(x)) = m$ και $g(x)$ με $deg(g(x)) = n$ έχουν πραγματικούς συντελεστές, δηλαδή $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ (IV)
- Αν $deg(f(x)) = deg(g(x)) = n$ τότε: Ο πίνακας Bézout $B(f,g)$ είναι μη-ιδιάζων (non-singular) αν και μόνο αν τα πολύωνυμα $f(x)$ και $g(x)$ δεν έχουν κοινές ρίζες. (V)
- ο πίνακας Bézout $B(f,g)$ είναι γραμμικός ως προς τα $f(x), g(x)$, δηλαδή:

  $$B(af + bw, g) = aB(f,g) + bB(w,g),$$

  $$B(f, ag + bs) = aB(f,g) + bB(f,s)$$

  για οποιαδήποτε πολυώνυμα $w(x), s(x)$ και παράμετροι a, b (VI)
- [8] Έστω $f(x) = \sum_{k=0}^{m} u_k x^k$ και $g(x) = \sum_{k=0}^{n} \upsilon_k x^k$ δύο πολυώνυμα με βαθμούς m και n αντίστοιχα, τότε:

  $$\|B(f,g)\|_2 \leq 2m\|f\|_2\|g\|_2$$

  όπου $\|\|_2$ η Ευκλείδια νόρμα (VII)

Αποδείξεις ιδιοτήτων πινάκων Bézout

- ο πίνακας Bézout $B(f,g)$ είναι συμμετρικός για κάθε φυσικούς αριθμούς m,n (I)

  Απόδειξη
  Είναι προφανές από την περιγραφή του πίνακα. Επαληθεύτηκε και στα θεωρητικά παραδείγματα στην υποενότητα (2.2) για:

  - m=n=2
  - m=2, n=1
  - m=n=3
  - m=3, n=2
  - m=n=4

- $B(f,g) = -B(g,f)$ για κάθε φυσικούς αριθμούς m,n (II)

  Απόδειξη
  Θα το αποδείξουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας για m=n=3 και με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται για κάθε φυσικούς αριθμούς m,n

  Για $m = n = 3$ έχουμε:

$$f(x) = u_3x^3 + u_2x^2 + u_1x + u_0$$

$$g(x) = \upsilon_3x^3 + \upsilon_2x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_0$$

έχουμε δείξει στην υποενότητα "Θεωρητικά παραδείγματα υπολογισμού πίνακα Bézout" ότι:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 & u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3 \\ u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3 + u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 & u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3 \\ u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3 & u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3 & u_3\upsilon_2 - u_2\upsilon_3 \end{bmatrix}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε τον πίνακα $B(g,f)$

$$b_{11} = \mid u_1\upsilon_0 \mid = u_0\upsilon_1 - u_1\upsilon_0, (k=0)$$

$$b_{12} = \mid u_2\upsilon_0 \mid = u_0\upsilon_2 - u_2\upsilon_0, (k=0)$$

$$b_{13} = \mid u_3\upsilon_0 \mid = u_0\upsilon_3 - u_3\upsilon_0 (k=0)$$

$$b_{21} = \mid u_2\upsilon_0 \mid = u_0\upsilon_2 - u_2\upsilon_0 (k=0)$$

$$b_{22} = \mid u_3\upsilon_0 \mid + \mid u_2\upsilon_1 \mid = u_0\upsilon_3 - u_3\upsilon_0 + u_1\upsilon_2 - u_2\upsilon_1, (k=1)$$

$$b_{23} = \mid u_4\upsilon_0 \mid + \mid u_3\upsilon_1 \mid = u_1\upsilon_3 - u_3\upsilon_1, (k=1)$$

για το b_{23} χρησιμοποιήσαμε ότι $u_4 = \upsilon_4 = 0$
γιατί $r = 4 > 3 = m = n$.

$$b_{31} = \mid u_3\upsilon_0 \mid = u_0\upsilon_3 - u_3\upsilon_0, (k=0)$$

$$b_{32} =| u_4v_0 | + | u_3v_1 |= u_1v_3 - u_3v_1, (k = 1)$$

$$b_{33} =| u_5v_0 | + | u_4v_1 | + | u_3v_2 |= u_2v_3 - u_3v_2, (k = 2)$$

για το b_{33} χρησιμοποιήσαμε ότι $u_4 = v_4 = 0$ και $u_5 = v_5 = 0$
γιατί $r = 4 > 3 = m = n$.

Άρα έχουμε

$$B(g, f) = \begin{bmatrix} u_0v_1 - u_1v_0 & u_0v_2 - u_2v_0 & u_0v_3 - u_3v_0 \\ u_0v_2 - u_2v_0 & u_0v_3 - u_3v_0 + u_1v_2 - u_2v_1 & u_1v_3 - u_3v_1 \\ u_0v_3 - u_3v_0 & u_1v_3 - u_3v_1 & u_2v_3 - u_3v_2 \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} u_1v_0 - u_0v_1 & u_2v_0 - u_0v_2 & u_3v_0 - u_0v_3 \\ u_2v_0 - u_0v_2 & u_3v_0 - u_0v_3 + u_2v_1 - u_1v_2 & u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_3v_0 - u_0v_3 & u_3v_1 - u_1v_3 & u_3v_2 - u_2v_3 \end{bmatrix} = -B(f, g)$$

- $B(f, f) = \mathbb{O}$ για κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές (III)

  Απόδειξη
  Θα το αποδείξουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας για m=2 και με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται για κάθε φυσικούς αριθμούς m,n

  Για $m = 2$ έχουμε:
  $$f(x) = u_2x^2 + u_1x + u_0$$

  $$b_{11} =| u_0u_1 |= u_1u_0 - u_0u_1 = 0$$

  $$b_{12} =| u_0u_2 |= u_2u_0 - u_0u_2 = 0$$

  $$b_{21} =| u_0u_2 |= u_2u_0 - u_0u_2 = 0$$

  $$b_{22} =| u_0u_3 | + | u_1u_2 |= u_2u_1 - u_1u_2 = 0$$

  στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $u_3 = 0$
  γιατί $r = 3 > 2 = m$.
  Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

  $$B(f, g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$$

- $B(f, g) \in \mathbb{R}^{mxn}$ αν $f(x)$ με $deg(f(x)) = m$ και $g(x)$ με $deg(g(x)) = n$ έχουν πραγματικούς συντελεστές, δηλαδή $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ (IV)

  Απόδειξη
  Είναι προφανές καθώς τα στοιχεία του πίνακα Bézout των πολυωνύμων $f(x)$ και $g(x)$ αποτελούνται από πράξεις μεταξύ πραγματικών αριθμών, αφού $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, άρα και τα στοιχεία $b_{ij} \in \mathbb{R} \implies B(f, g) \in \mathbb{R}^{mxm}$

- Αν $deg(f(x)) = deg(g(x)) = n$ τότε: Ο πίνακας Bézout $B(f, g)$ είναι μη-ιδιάζων (non-singular) αν και μόνο αν τα πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ δεν έχουν κοινές ρίζες. (V)

  Απόδειξη
  Γνωρίζουμε ότι ένας πίνακας A είναι μη-ιδιάζων (non-singular) αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα A δεν είναι μηδένη, δηλαδή:

$$\exists A^{-1} \iff detA \neq 0$$

και ισοδύναμα

$$\nexists A^{-1} \iff detA = 0$$

Τότε η ιδιότητα (V) γράφεται ισοδύναμα: 'Αν $deg(f(x)) = deg(g(x)) = n$ τότε: Ο πίνακας Bézout $B(f, g)$ έχει ορίζουσα μηδέν (δηλαδή δεν υπάρχει $B(f, g)^{-1}$) αν και μόνο αν τα πολύωνυμα $f(x)$ και $g(x)$ έχουν κοινές ρίζες '
Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό, χωρίς περιορισμό της γενικότητας για m=n=2. Είχαμε στο παράδειγμα 1 της υποενότητας (2.2)

$$f(x) = u_2x^2 + u_1x + u_0,$$

$$g(x) = \upsilon_2x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_0.$$

Έστω r η κοινή ρίζα των $f(x)$ και $g(x)$. Τότε έχουμε:

$$f(x) = u_2r^2 + u_1r + u_0 = 0 \iff u_0 = -u_2r^2 - u_1r$$

και

$$g(x) = \upsilon_2r^2 + \upsilon_1r + \upsilon_0 = 0 \iff \upsilon_0 = -\upsilon_2r^2 - \upsilon_1r$$

και για τον πίνακα Bézout

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 & u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 \\ u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 & u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 \end{bmatrix}$$

βρίσκουμε την ορίζουσα:

$$det(B(f, g)) = (u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1)(u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2) - (u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2)^2$$

$$= [u_1(-\upsilon_2r^2-\upsilon_1r)-\upsilon_1(-u_2r^2-u_1r)](u_2\upsilon_1-u_1\upsilon_2)-[u_2(-\upsilon_2r^2 - \upsilon_1r) - \upsilon_2(-u_2r^2 - u_1r)]^2$$

$$= (-u_1\upsilon_2r^2-u_1\upsilon_1r+u_2\upsilon_1r^2+u_1\upsilon_1r)(u_2\upsilon_1-u_1\upsilon_2)-[-u_2\upsilon_2r^2 - u_2\upsilon_1r + u_2\upsilon_2r^2 + u_1\upsilon_2r]^2$$

$$= -u_1u_2\upsilon_1\upsilon_2r^2+{u_1}^2{\upsilon_2}^2r^2-u_1u_2{\upsilon_1}^2r+{u_1}^2\upsilon_1\upsilon_2r+{u_2}^2{\upsilon_1}^2r^2-u_1u_2\upsilon_1\upsilon_2r^2+u_1u_2{\upsilon_1}^2r-{u_1}^2\upsilon_1\upsilon_2r-$$
$$-[u_1\upsilon_2r - u_2\upsilon_1r]^2$$

$$= +{u_1}^2{\upsilon_2}^2r^2 + {u_1}^2\upsilon_1\upsilon_2 r + {u_2}^2{\upsilon_1}^2r^2 + u_1u_2{\upsilon_1}^2r + 2u_1u_2\upsilon_1\upsilon_2r^2-$$

$$-u_1u_2\upsilon_1\upsilon_2r^2 - u_1u_2\upsilon_1\upsilon_2r^2 - u_1u_2{\upsilon_1}^2r - {u_1}^2\upsilon_1\upsilon_2r - {u_1}^2{\upsilon_2}^2r^2 - {u_2}^2{\upsilon_1}^2r^2$$

$$= +{u_1}^2{\upsilon_2}^2r^2 - {u_1}^2{\upsilon_2}^2r^2 + {u_1}^2\upsilon_1\upsilon_2r - {u_1}^2\upsilon_1\upsilon_2r + {u_2}^2{\upsilon_1}^2r^2 - {u_2}^2{\upsilon_1}^2r^2+$$
$$+u_1u_2{\upsilon_1}^2r - u_1u_2{\upsilon_1}^2r + 2u_1u_2\upsilon_1\upsilon_2r^2 - 2u_1u_2\upsilon_1\upsilon_2r^2 = \mathbf{0}$$

- ο πίνακας Bézout $B(f,g)$ είναι γραμμικός ως προς τα $f(x), g(x)$, δηλαδή:

$$B(af+bw,g) = aB(f,g)+bB(w,g),$$
$$B(f,ag+bs) = aB(f,g)+bB(f,s)$$

για οποιαδήποτε πολυώνυμα $w(x), s(x)$ και παράμετροι a, b (VI)

Απόδειξη
Θα το αποδείξουμε την ισότητα $B(af+bw,g) = aB(f,g)+bB(w,g)$, χωρίς περιορισμό της γενικότητας για m=2 και με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται για κάθε φυσικούς αριθμούς m,n.
Έχουμε:

$$f(x) = u_2x^2+u_1x+u_0 \iff af(x) = au_2x^2+au_1x+au_0$$

και

$$w(x) = w_2x^2+w_1x+w_0 \iff bw(x) = bw_2x^2+bw_1x+bw_0$$

τότε:

$$af+bw = (au_2+bw_2)x^2+(au_1+bw_1)x+(au_0+bw_0)$$

και επίπλέον για:
$$g(x) = \upsilon_2x^2+\upsilon_1x+\upsilon_0$$
βρίσκουμε πίνακα Bézout σύμφωνα με τον ορισμό (2.1):

$$B(af+bw,g) = \begin{bmatrix}(au_1+bw_1)\upsilon_0-(au_0+bw_0)\upsilon_1 & (au_2+bw_2)\upsilon_0-(au_0+bw_0)\upsilon_2\\(au_2+bw_2)\upsilon_0-(au_0+bw_0)\upsilon_2 & (au_2+bw_2)\upsilon_1-(au_1+bw_1)\upsilon_2\end{bmatrix}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε για τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ και $w(x)$ τα εξής:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} u_1v_0 - u_0v_1 & u_2v_0 - u_0v_2 \\ u_2v_0 - u_0v_2 & u_2v_1 - u_1v_2 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff aB(f,g) = \begin{bmatrix} au_1v_0 - au_0v_1 & au_2v_0 - au_0v_2 \\ au_2v_0 - au_0v_2 & au_2v_1 - au_1v_2 \end{bmatrix}$$

και

$$B(w,g) = \begin{bmatrix} w_1v_0 - w_0v_1 & w_2v_0 - w_0v_2 \\ w_2v_0 - w_0v_2 & w_2v_1 - w_1v_2 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff bB(w,g) = \begin{bmatrix} bw_1v_0 - bw_0v_1 & bw_2v_0 - bw_0v_2 \\ bw_2v_0 - bw_0v_2 & bw_2v_1 - bw_1v_2 \end{bmatrix}$$

τότε:

$$aB(f,g) + bB(w,g) =$$

$$= \begin{bmatrix} au_1v_0 - au_0v_1 & au_2v_0 - au_0v_2 \\ au_2v_0 - au_0v_2 & au_2v_1 - au_1v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bw_1v_0 - bw_0v_1 & bw_2v_0 - bw_0v_2 \\ bw_2v_0 - bw_0v_2 & bw_2v_1 - bw_1v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} au_1v_0 - au_0v_1 + bw_1v_0 - bw_0v_1 & au_2v_0 - au_0v_2 + bw_2v_0 - bw_0v_2 \\ au_2v_0 - au_0v_2 + bw_2v_0 - bw_0v_2 & au_2v_1 - au_1v_2 + bw_2v_1 - bw_1v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (au_1 + bw_1)v_0 - (au_0 + bw_0)v_1 & (au_2 + bw_2)v_0 - (au_0 + bw_0)v_2 \\ (au_2 + bw_2)v_0 - (au_0 + bw_0)v_2 & (au_2 + bw_2)v_1 - (au_1 + bw_1)v_2 \end{bmatrix} = B(af{+}bw, g)$$

Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

- [8] Έστω $f(x) = \sum_{k=0}^{m} u_k x^k$ και $g(x) = \sum_{k=0}^{n} v_k x^k$ δύο πολυώνυμα με βαθμούς m και n αντίστοιχα, τότε:

  $$\|B(f,g)\|_2 \le 2m\|f\|_2\|g\|_2$$

  όπου $\|\|_2$ η Ευκλείδια νόρμα (VII)

  Απόδειξη
  Ένα όριο για κάθε στοιχείο $b_{i,j}$ του πίνακα Bézout μπορεί να βρεθεί από την αναπαράσταση του πίνακα, δηλαδή:

  $$|b_{i,j}| = |b_{i,:}[0,...,0,1,0,...,0]^T| \le 2\|f\|_2\|g\|_2$$

  Λόγω ισοδυναμίας νορμών έχουμε:

  $$\|B(f,g)\|_2 \le \|B(f,g)\|_F \le 2\sqrt{m}\sqrt{m}\|f\|_2\|g\|_2$$

  δηλαδή:

  $$\|B(f,g)\|_2 \le 2m\|f\|_2\|g\|_2$$

2.4 Συνάρτηση υπολογισμού πίνακα Bézout μέσω Matlab

Με βάση τον ορισμό, τα θεωρητικά παραδείγματα και με τη χρήση του λογισμικού περιβάλλοντος Matlab (έκδοση R2015a) δημιουργήσαμε μία συνάρτηση (function), η οποία δεν είναι δημοσιευμένη στο διαδίκτυο. Για να τρέξει ο αλγόριθμος πρέπει αρχικά να εισάγουμε διανύσματα γραμμές u και v, τα οποία είναι διάστασης 1xm και 1xn (όπου m και n ο βαθμός των δοσμένων πολυωνύμων) και έχουν ως συντεταγμένες τους συντελεστές των πολυωνύμων, όταν τα πολυώνυμα είναι γραμμένα κατά φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής. Προφανώς λόγω της δεύτερης ιδιότητας του πίνακα Bézout έχουμε ότι:

$$bezoutmatrix(u,v) = -bezoutmatrix(v,u)$$

Σημειώνεται ότι δεν έχει σημασία ποιο από τα διανύσματα u και v θα αντιστοιχεί στο κάθε πολυώνυμο στο συγκεκριμένο αλγόριθμο.

Παράδειγμα
Έστω τα πολυώνυμα:

$$f(x) = (x-1)^3 = 1x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

και

$$g(x) = (x-1)(x+2)(x+3) = 1x^3 + 4x^2 + 1x - 6$$

τότε γράφουμε:

$$u = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

και

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

ή ορίζουμε τα διανύσματα u και v αντίστροφα και ύστερα τρέχουμε τη συνάρτηση (function) που βρίσκεται στην επόμενη σελίδα. Το παράδειγμα θα μας δώσει:

$$B(f,g) = bezoutmatrix(u,v) = -bezoutmatrix(v,u) =$$

$$= -B(g,f) = \begin{bmatrix} -7 & +2 & +5 \\ +2 & 20 & -22 \\ +5 & -22 & +17 \end{bmatrix}$$

Algorithm 1 Υπολογισμός πίνακα Bézout

```
function B=bezoutmatrix(u,v)

n=length(u)-1;
m=length(v)-1;
if m < n
v=[zeros(1,n-m) v];
end

if m > n
temp=u;
u=v;
v=temp;
n=length(u)-1;
m=length(v)-1;
v=[zeros(1,n-m) v];
end

B=zeros(n);
for i=1:n
for j=1:n
mij=min([i,n+1-j]);
for k=1:mij
B(i,j)=B(i,j)+u(j+1+k-1)*v(i+1-k)-u(i+1-k)*v(j+1+k-1);
end
end
end
```

2.5 Συνάρτηση υπολογισμού πίνακα Bézout μέσω Maple

To Maple (έκδοση 2016)είναι ένα συμβολικό και αριθμητικό περιβάλλον, με πολυπαραδειγματική γλώσσα προγραμματισμού. Υποστηρίζει πολλές οπτικές από τεχνικό προγραμματισμό περιλαμβάνοντας οπτικοποίηση (visualization), ανάλυση δεδομένων (data analysis),συνδεσιμότητα (connectivity)και, αυτό που μας ενδιαφέρει στην παρούσα εργασία, υπολογισμούς και πράξεις πινάκων (matrix computation).

Για να τρέξει ο υπολογισμός του πίνακα πρέπει να κάνουμε τα εξής βήματα:

- δημιουργία νέου φυλλαδίου εργασίας (New Worksheet)
- γράφουμε την εντολή with(LinearAlgebra):
- εισάγουμε τα πολυώνυμα, γράφοντας τα δύοο πολυώνυμα $f = f(x) = ...$ και $g = g(x) = ...$
- γράφουμε την εντολή B := BezoutMatrix(p, q, x, method = symmetric) η οποία μας υπολογίζει το πίνακα Bézout για τα δοσμένα πολυώνυμα.

Παρακάτω δίνεται ένα θεωρητικό και ένα αριθμητικό παράδειγμα:

Θεωρητικό Παράδειγμα
$> with(LinearAlgebra):$
$> f := c * x^2 + b * x + a;$

$$f := cx^2 + bx + a$$

$> g := h * x^3 + e * x + d;$

$$g := hx^3 + ex + d$$

$> B := BezoutMatrix(p, q, x, method = symmetric);$

$$B := \begin{bmatrix} -hc & -bh & -ah \\ -bh & -ah + ce & dc \\ -ah & dc & -ae + bd \end{bmatrix}$$

Αριθμητικό Παράδειγμα
$> with(LinearAlgebra):$
$> f := x^3 - 8;$

$$f := x^3 - 8$$

$> g := x^2 - 4;$

$$g := x^2 - 4$$

$> B := BezoutMatrix(p, q, x, method = symmetric);$

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

2.6 Πολυπλοκότητα υπολογισμού πίνακα Bézout

Έχουμε:

$$B_{i,j} = \sum_{k=max(0,i-j)}^{min(i,n-1-j} (u_{i-k}v_{j+1+k} - v_{i-k}u_{j+1+k}).$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τις εισόδους $\{B_{i,j}\}$ για όλα τα $i \leq j$:

- για $i + j \leq n - 1$ έχουμε:

$$B_{i,j} = \sum_{k=0}^{i} (u_{i-k}v_{j+1+k} - v_{i-k}u_{j+1+k})$$

- για $i + j > n - 1$ έχουμε:

$$B_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1-j} (u_{i-k}v_{j+1+k} - v_{i-k}u_{j+1+k}),$$

Καθένα άθροισμα απαιτεί 2 πολλαπλασιασμούς και 1 πρόσθεση.

Έστω n περιττός, τότε ο συνολικός αριθμός των πολλαπλασιασμών για να υπολογιστούν όλα τα $\{B_{i,j}\}$,$i \leq j$ είναι:

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (n-2i)\cdot(i+1) + 2\cdot \sum_{j=(n+1)/2}^{n-1} (n-j)\cdot(2j-n+1) =$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 10n + 3}{12}$$

και ο συνολικός αριθμός των προσθέσεων:

$$\sum_{i=0}^{(n-1)/2} (n-2i)\cdot(2i+1) + \sum_{j=(n+1)/2}^{n-1} (2n-2j-1)\cdot(2j-n+1) =$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 4n + 3}{12}$$

Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν αν n άρτιος αριθμός.

Επομένως, η κλασσική και αναλυτική μέθοδος υπολογισμού του πίνακα Bézout απαιτεί $\mathcal{O}(n^3)$ πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις. Στη συνέχεια εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι οι πίνακες Bézout είναι συμμετρικοί, ώστε να καταλήξουμε πως το πλήθος των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων να είναι $\mathcal{O}(n^2)$.

Αφού οι πίνακες Bézout είναι συμμετρικοί, χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε μόνο τα στοιχεία b_{ij} όπου $i \leq j$. Χρησιμοποιώντας τα βήματα και τις πράξεις που περιγράφηκαν στην υποενότητα (2.1), βρίσκουμε τις εισόδους b_{ij} για $i \leq j$ και συμπληρώνουμε τις υπόλοιπες εισόδους (για $i > j$)

Αρχικό στάδιο

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Δημιουργία υπολοίπων στοιχείων

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ & \swarrow & \cdots & \swarrow & * \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \swarrow & * \\ & & & & * \end{bmatrix}$$

Οι υπολογισμοί ακολουθούν την εξής σειρά:

- Στο **αρχικό στάδιο** κάθε στοιχείο-είσοδος απαιτεί 2 πολλαπλασιασμούς και 1 πρόσθεση (πρόσθεση αντιθέτου, δηλαδή αφαίρεση). Όλα αυτά είναι $n^2 + n$ πολλαπλασιασμοί και $\frac{n^2+n}{2}$ προσθέσεις.
- Όπως συμπλήρωνουμε στη **δημιουργία υπολοίπων στοιχείων**, κάθε στοιχείο-εισόδος πάνω από τη διαγώνιο $i = j$ (εκτός από τα στοιχεία-είσοδοι της πρώτης γραμμής ή της τελευταίας στήλης χρειάζονται 1 πρόσθεση. Όλα αυτά είναι $\frac{n^2-n}{2}$ επιπλέον προσθέσεις.
- Τελικά χρειαζόμαστε συνολικά για όλα τα στοιχεία b_{ij}:

  $$n^2 + n$$

  πολλαπλασιασμούς και

  $$\frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

  προσθέσεις.

Καταλήγουμε πως η κλασσική και αναλυτική μέθοδος υπολογισμού του πίνακα για όλα τα στοιχεία των πινάκων Bézout απαιτεί $\mathcal{O}(n^3)$ πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις, ενώ αν εκμεταλλευτούμε τη συμμετρικότητα των πινάκων Bézout καταλήγουμε πως το πλήθος των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων να είναι

$$\mathcal{O}(n^2).$$

2.7 Αριθμητικά παραδείγματα

Τα παρακάτω αριθμητικά παραδείγματα παρουσιάζονται για την καλύτερη κατανόηση της δημιουργίας του πίνακα Bézout και έχουν επαληθευτεί με τη χρήση των συνάρτησης (2.4) και (2.5). Σε ορισμένα από αυτά αλλά και χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ο πίνακας Bézout υπολογισμένος από τις συναρτήσεις (2.4),(2.5) βγήκε ισοδύναμος (γραμμικοί μετασχηματισμοί μεταξύ γραμμών ή στηλών) με τον πίνακα υπολογισμένο με τους τύπους. Σε κάθε αριθμητικό παράδειγμα γράφουμε και το αποτέλεσμα της συνάρτησης (2.4), το όποιο συμβολίζουμε ως $MatlabResult$ και το αποτέλεσμα της συνάρτησης (2.5), το όποιο συμβολίζουμε ως $MapleResult$

1. Δίνονται:

$$f(x) = x^2 - 1 = 1x^2 + 0x - 1$$

$$g(x) = x - 1 = 0x^2 + 1x - 1$$

δηλαδή έχουμε:

$$u_2 = 1, u_1 = 0, u_0 = -1$$

και

$$v_2 = 0, v_1 = 1, v_0 = -1$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα:

$$b_{11} = \mid u_0 v_1 \mid = u_1 v_0 - u_0 v_1 = 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 = +1$$

$$b_{12} = \mid u_0 v_2 \mid = u_2 v_0 - u_0 v_2 = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 0 = -1$$

$$b_{21} = \mid u_0 v_2 \mid = u_2 v_0 - u_0 v_2 = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 0 = -1$$

$$b_{22} = \mid u_0 v_3 \mid + \mid u_1 v_2 \mid = u_2 v_1 - u_1 v_2 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = +1$$

στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $u_3 = v_3 = 0$
γιατί $r = 3 > 2 = m = n$.
Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$MatlabResult = bezoutmatrix(u,v) = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

$$MapleResult = BezoutMatrix(f,g,x,method = symmetric) = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

2. Δίνονται:

$$f(x) = x^2 - 4 = 1x^2 + 0x - 4$$

$$g(x) = x + 2 = 0x^2 + 1x + 2$$

δηλαδή έχουμε:

$$u_2 = 1, u_1 = 0, u_0 = -4$$

και

$$v_2 = 0, v_1 = 1, v_0 = 2$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα:

$$b_{11} =\mid u_0\upsilon_1 \mid= u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 = 0 \cdot 2 - (-4) \cdot 1 = +4$$

$$b_{12} =\mid u_0\upsilon_2 \mid= u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 = 1 \cdot 2 - (-4) \cdot 0 = +2$$

$$b_{21} =\mid u_0\upsilon_2 \mid= u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 = 1 \cdot 2 - (-4) \cdot 0 = +2$$

$$b_{22} =\mid u_0\upsilon_3 \mid + \mid u_1\upsilon_2 \mid= u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = +1$$

στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $u_3 = \upsilon_3 = 0$
γιατί $r = 3 > 2 = m = n$.
Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MatlabResult = bezoutmatrix(u,v) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

$$MapleResult = BezoutMatrix(f,g,x,method = symmetric) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

3. Δίνονται:

$$f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 = 1x^2 + 1x - 2$$

$$g(x) = (x-1)(x-3) = 1x^2 - 4x + 3$$

δηλαδή έχουμε:

$$u_2 = 1, u_1 = 1, u_0 = -2$$

και

$$\upsilon_2 = 1, \upsilon_1 = -4, \upsilon_0 = 3$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα:

$$b_{11} =\mid u_0\upsilon_1 \mid= u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1 = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot (-4) = -5$$

$$b_{12} =\mid u_0\upsilon_2 \mid= u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 = +5$$

$$b_{21} =\mid u_0\upsilon_2 \mid= u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 = +5$$

$$b_{22} =\mid u_0\upsilon_3 \mid + \mid u_1\upsilon_2 \mid= u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2 = 1 \cdot (-4) - 1 \cdot 1 = -5$$

στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $u_3 = \upsilon_3 = 0$
γιατί $r = 3 > 2 = m = n$.
Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$MatlabResult = bezoutmatrix(u,v) = \begin{bmatrix} +5 & -5 \\ -5 & +5 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

$$MapleResult = BezoutMatrix(f,g,x,method = symmetric) = bezoutmatrix(u,v) = \begin{bmatrix} +5 & -5 \\ -5 & +5 \end{bmatrix} = -$$

4. Δίνονται:

$$f(x) = x^3 - 8 = 1x^3 + 0x^2 + 0x - 8$$
$$g(x) = x^2 - 4 = 0x^3 + 1x^2 + 0x - 4$$

δηλαδή έχουμε:

$$u_3 = 1, u_2 = 0, u_1 = 0, u_0 = -8$$

και

$$\upsilon_3 = 0, \upsilon_2 = 1, \upsilon_1 = 0, \upsilon_0 = -4$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα:

$$b_{11} =\mid u_0\upsilon_1 \mid= u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1, (k = 0) = 0 \cdot (-4) - (-8) \cdot 0 = 0$$

$$b_{12} =\mid u_0\upsilon_2 \mid= u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2, (k = 0) = 0 \cdot (-4) - (-8) \cdot 1 = 8$$

$$b_{13} =\mid u_0\upsilon_3 \mid= u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3, (k = 0) = 1 \cdot (-4) - (-8) \cdot 0 = -4$$

$$b_{21} =\mid u_0\upsilon_2 \mid= u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2 (k = 0) = 0 \cdot (-4) - (-8) \cdot 1 = 8$$

$$b_{22} =\mid u_0\upsilon_3 \mid + \mid u_1\upsilon_2 \mid= u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3 + u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2, (k = 1) = 1\cdot(-4)-(-8)\cdot0+0\cdot0-0\cdot1 = -4$$

$$b_{23} =\mid u_0\upsilon_4 \mid + \mid u_1\upsilon_3 \mid= u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3, (k = 1) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

για το b_{23} χρησιμοποιήσαμε ότι $u_4 = \upsilon_4 = 0$
γιατί $r = 4 > 3 = m = n$.

$$b_{31} =\mid u_0\upsilon_3 \mid= u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3, (k = 0) == 1 \cdot (-4) - (-8) \cdot 0 = -4$$

$$b_{32} =\mid u_0\upsilon_4 \mid + \mid u_1\upsilon_3 \mid= u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3, (k = 1) == 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$b_{33} =\mid u_0\upsilon_5 \mid + \mid u_1\upsilon_4 \mid + \mid u_2\upsilon_3 \mid= u_3\upsilon_2 - u_2\upsilon_3, (k = 2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

για το b_{33} χρησιμοποιήσαμε ότι $u_4 = \upsilon_4 = 0$ και $u_5 = \upsilon_5 = 0$
γιατί $r = 4 > 3 = m = n$.

Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

$$MatlabResult = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +4 \\ 0 & +4 & -8 \\ +4 & -8 & 0 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

$$MapleResult = BezoutMatrix(f,g,x,method = symmetric) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +4 \\ 0 & +4 & -8 \\ +4 & -8 & 0 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

5. Δίνονται:

$$f(x) = (x-1)^3 = 1x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$
$$g(x) = (x-1)(x+2)(x+3) = 1x^3 + 4x^2 + 1x - 6$$

δηλαδή έχουμε:

$$u_3 = 1, u_2 = -3, u_1 = 3, u_0 = -1$$

και

$$\upsilon_3 = 1, \upsilon_2 = 4, \upsilon_1 = 1, \upsilon_0 = -6$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα:

$$b_{11} =\mid u_0\upsilon_1 \mid = u_1\upsilon_0 - u_0\upsilon_1, (k=0) = 3\cdot(-6) - (-1)\cdot 1 = -17$$

$$b_{12} =\mid u_0\upsilon_2 \mid = u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2, (k=0) = -3\cdot(-6) - (-1)\cdot 4 = 22$$

$$b_{13} =\mid u_0\upsilon_3 \mid = u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3, (k=0) = 1\cdot(-6) - (-1)\cdot 1 = -5$$

$$b_{21} =\mid u_0\upsilon_2 \mid = u_2\upsilon_0 - u_0\upsilon_2, (k=0) = -3\cdot(-6) - (-1)\cdot 4 = 22$$

$$b_{22} =\mid u_0\upsilon_3 \mid + \mid u_1\upsilon_2 \mid = u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3 + u_2\upsilon_1 - u_1\upsilon_2, (k=1) = -3\cdot1 - 4\cdot3 + 1\cdot(-6) - (-1)\cdot1 = -20$$

$$b_{23} =\mid u_0\upsilon_4 \mid + \mid u_1\upsilon_3 \mid = u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3, (k=1) = 1\cdot1 - 3\cdot1 = -2$$

για το b_{23} χρησιμοποιήσαμε ότι $u_4 = \upsilon_4 = 0$
γιατί $r = 4 > 3 = m = n$.

$$b_{31} =\mid u_0\upsilon_3 \mid = u_3\upsilon_0 - u_0\upsilon_3, (k=0) = 1\cdot(-6) - (-1)\cdot 1 = -5$$

$$b_{32} =\mid u_0\upsilon_4 \mid + \mid u_1\upsilon_3 \mid = u_3\upsilon_1 - u_1\upsilon_3, (k=1) = 1\cdot1 - 3\cdot1 = -2$$

$$b_{33} =\mid u_0\upsilon_5 \mid + \mid u_1\upsilon_4 \mid + \mid u_2\upsilon_3 \mid = u_3\upsilon_2 - u_2\upsilon_3, (k=2) = 1\cdot4 - (-3)\cdot1 = 7$$

για το b_{33} χρησιμοποιήσαμε ότι $u_4 = \upsilon_4 = 0$ και $u_5 = \upsilon_5 = 0$
γιατί $r = 4 > 3 = m = n$.

Έτσι ο πίνακας Bézout έχει την ακόλουθη μορφή:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -17 & 22 & -5 \\ 22 & -20 & -2 \\ -5 & -2 & +7 \end{bmatrix}$$

$$MatlabResult = bezoutmatrix(u,v) = \begin{bmatrix} -7 & +2 & +5 \\ +2 & 20 & -22 \\ +5 & -22 & 17 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

$$MapleResult = BezoutMatrix(f,g,x,method=symmetric) = \begin{bmatrix} -7 & +2 & +5 \\ +2 & 20 & -22 \\ +5 & -22 & 17 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

Εδώ επαληθεύουμε τις 3 παρατηρήσεις της υποενότητας (2.1)

Παρατήρηση 1

Σημειώνεται ότι ο πίνακας Bézout μπορεί να προσδιοριστεί από το περιβάλλον αριθμητικής υπολογιστικής Maple 2016 εισάγοντας δύο πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$, χρησιμοποιώντας την εντολή $BezoutMatrix(f,g,x)$ και έπειτα την ισότητα:

$$B(f,g) = -\mathbf{J}BezoutMatrix(f,g,x)\mathbf{J}(1)$$

όπου $\mathbf{J}$ ο αντιδιαγώνιος πίνακας με το στοιχείο 1 στις μη μηδενικές εισόδους, δηλαδή:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο ισχύει ότι:

$$\mathbf{J^{-1}} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$BezoutMatrix(f,g,x) = -\mathbf{J}B(f,g)\mathbf{J}$$

Είναι προφανές από την παραπάνω σχέση πως οι πίνακες $BezoutMatrix(f,g,x)$ και $B(f,g)$ είναι όμοιοι.

Παρακάτω παρουσιάζεται (2.4) και μία συνάρτηση (function)του λογισμικού περιβάλλοντος Matlab που χρησιμοποιήθηκε για τους υπολογισμούς της παρούσας εργασίας. Στο επόμενο παράδειγμα επαληθεύεται η σχέση (1)

Παράδειγμα

Μέσω Maple (2.6) βρίσκουμε για τα πολυώνυμα $f(x) = x^3 - 8$ και $g(x) = x^2 - 4$

$> with(LinearAlgebra) :$

$> f := x^3 - 8;$

$$f := x^3 - 8$$

$> g := x^2 - 4;$

$$g := x^2 - 4$$

$> B := BezoutMatrix(f, g, x, method = symmetric);$

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

ενώ μέσω Matlab (2.5) βρίσκουμε για τα πολυώνυμα $f(x) = x^3 - 8$ και $g(x) = x^2 - 4$ τον πίνακα

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}.$$

Τότε πράγματι:

$$-JBezoutMatrix(f,g,x) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

και

$$-JBezoutMatrix(f,g,x)J = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix} = B(f,g)$$

Άρα επαληθεύται ότι:

$$B(f,g) = -JBezoutMatrix(f,g,x)J$$

Παρατήρηση 2

Έστω πίνακας J όπως ορίστηκε στην προηγούμενη παρατήρηση και ορίζουμε πολυώνυμα $\tilde{f}(x)$ και $\tilde{g}(x)$ τέτοια ώστε:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{m} u_{m-k}x^k = u_0x^m + u_1x^{m-1} + u_2x^{m-2} + ... + u_{m-2}x^2 + u_{m-1}x + u_m$$

και

$$\tilde{g}(x) = \sum_{k=0}^{n} \upsilon_{n-k}x^k = \upsilon_0x^n + \upsilon_1x^{n-1} + \upsilon_2x^{n-2} + ... + \upsilon_{n-2}x^2 + \upsilon_{n-1}x + \upsilon_n$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} u_kx^k = u_mx^m + u_{m-1}x^{m-1} + u_{m-2}x^{m-2} + ... + u_2x^2 + u_1x + u_0$$

και

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \upsilon_kx^k = \upsilon_nx^n + \upsilon_{n-1}x^{n-1} + \upsilon_{n-2}x^{n-2} + ... + \upsilon_2x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_0$$

Δηλαδή τα πολυώνυμα $\tilde{f}(x)$ και $\tilde{g}(x)$ είναι τα πολυώνυμα με τους συντελεστές γραμμένους με αντίστροφη σειρά (reversed polynomials) των πολυωνύμων $f(x)$ και $g(x)$. Τότε ισχύει:

$$B(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)) = \mathbf{J}B(f,g)\mathbf{J}$$

όπου $B(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x))$ ο πίνακας Bézout των $\tilde{f}(x)$ και $\tilde{g}(x)$

Είναι προφανές από την παραπάνω σχέση πως οι πίνακες $B(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x))$ και $B(f,g)$ είναι όμοιοι.

Παράδειγμα
Για τα πολυώνυμα
$$f(x) = 1x^2 + 1x - 2$$
και
$$g(x) = 1x^2 - 4x + 3$$
βρίσκουμε μέσω Matlab (2.5)
$$B(f, g) = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$$
ενώ για τα πολυώνυμα
$$\tilde{f}(x) = -2x^2 + 1x + 1$$
και
$$\tilde{g}(x) = 3x^2 - 4x + 1$$
βρίσκουμε
$$B(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)) = \begin{bmatrix} +5 & -5 \\ -5 & +5 \end{bmatrix}$$
Τότε πράγματι:
$$JB(f, g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5 & -5 \\ -5 & +5 \end{bmatrix}$$
και
$$JB(f, g)J = \begin{bmatrix} +5 & -5 \\ -5 & +5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5 & -5 \\ -5 & +5 \end{bmatrix} = B(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)).$$
Άρα επαληθεύται ότι:
$$B(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)) = JB(f, g)J$$

Παρατήρηση 3
Με δοσμένα τα:

- n-οστή γραμμή του πίνακα $B(f, g)$
- τελευταία γραμμή του πίνακα $B(f, g)$
- ο πάνω αριστερά στοιχείο του πίνακα $B(f, g)$ (top left entry)

μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων $u_m g(x)$ και $f(x)/u_m$

Πράγματι, αν $m > n$, η τελευταία γραμμή του πίνακα $B(f, g)$ είναι $u_m[\upsilon_0, ..., \upsilon_{m-1}]$, η οποία δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου $u_m g(x)$. Επιπλέον, η n-οστή γραμμή b^T του πίνακα $B(f, g)$ είναι:
$$b^T = -\upsilon_n[u_0, ...u_{m-1}] + [u_n, ..., u_m, 0, ..., 0] \begin{bmatrix} \upsilon_0 & \cdots & \upsilon_{m-1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \upsilon_0 \end{bmatrix}$$
και αυτή η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μας δώσει τους συντελεστές του πολυωνύμου $f(x)/u_m$ ως γραμμικές σχέσεις του u_{m-1}. Οι συντελεστές u_{m-1} μπορεί έπειτα να βρεθούν από το πάνω αριστερά στοιχείο του πίνακα $B(f, g)$. Σημειώνεται πως η υπόθεση ότι $m > n$ είναι χωρίς περιορισμό της γενικότητας.

3 Εύρεση ΜΚΔ (GCD) Πολυωνύμων μέσω Πινάκων Bézout

3.1 Θεωρήματα του Barnett μέσω πίνακα Bézout

Παρακάτω παρουσιάζονται 4 σημαντικά θεωρήματα για τη μαθηματική σχέση μεταξύ του GCD (Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη) δύο πολυωνύμων και του πίνακα Bézout και κάποια αριθμητικά παραδείγματα προς επαλήθευση του κάθε θεωρήματος. Οι αποδείξεις των 3 πρώτων θεωρημάτων μπορούν να βρεθούν στην αναφορά [11], ενώ το 4ο θεώρημα αναλύεται στην αναφορά [8].

Θεώρημα 3.1.1 [4]

Έστω $f(x)$ και $g(x)$ όπως ορίστηκαν στον ορισμό (2.1) με

$$deg(f(x)) = m$$

και

$$deg(g(x)) = n$$

έτσι ώστε

$$m \geq n$$

και

$$d(x) = GCD(f, g)$$

ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $f(x)$ και $g(x)$ και $B(f, g)$ ο πίνακας Bézout. Ο βαθμός (degree) του μέγιστου κοινού διαιρέτη των $f(x)$ και $g(x)$ συμβολίζεται με $deg(GCD(f, g))$ και επαληθεύει τις ταυτότητες:

- $dim[NullSpace(B(f, g))] = deg(GCD(f, g))$
- $deg(GCD(f, g)) = m - rank(B(f, g))$

Παραδείγματα

1. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^2 - 1 = 1x^2 + 0x - 1, m = 2$$

και

$$g(x) = x - 1 = 0x^2 + 1x - 1, n = 1$$

είχαμε:

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε πως

$$rank[B(f, g)] = 1$$

και

$$NullSpace(B(f, g) = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

άρα

$$dim[NullSpace(B(f,g))] = 1.$$

Επιπλέον γνωρίζοντας ότι

$$GCD(f,g) = x - 1$$

έχουμε ότι

$$deg(GCD(f,g)) = 1$$

Δηλαδή επαληθεύουμε ότι:

- $dim[NullSpace(B(f,g))] = 1 = deg(GCD(f,g))$
- $deg(GCD(f,g)) = 1 = 2 - 1 = m - rank(B(f,g))$

2. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^2 - 4 = 1x^2 + 0x - 4, m = 2$$

και

$$g(x) = x + 2 = 0x^2 + 1x + 2, n = 1$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε πως

$$rank[B(f,g)] = 1$$

και

$$NullSpace(B(f,g) = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ -0.8944 \end{bmatrix}$$

άρα

$$dim[NullSpace(B(f,g))] = 1.$$

Επιπλέον γνωρίζοντας ότι

$$GCD(f,g) = x + 2$$

έχουμε ότι

$$deg(GCD(f,g)) = 1$$

Δηλαδή επαληθεύουμε ότι:

- $dim[NullSpace(B(f,g))] = 1 = deg(GCD(f,g))$
- $deg(GCD(f,g)) = 1 = 2 - 1 = m - rank(B(f,g))$

3. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 = 1x^2 + 1x - 2, m = 2$$

και

$$g(x) = (x-1)(x-3) = 1x^2 - 4x + 3, n = 2$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε πως

$$rank[B(f,g)] = 1$$

και

$$NullSpace(B(f,g) = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$$

άρα

$$dim[NullSpace(B(f,g))] = 1$$

Επιπλέον γνωρίζοντας ότι

$$GCD(f,g) = x - 1$$

έχουμε ότι

$$deg(GCD(f,g)) = 1$$

Δηλαδή επαληθεύουμε ότι:

- $dim[NullSpace(B(f,g))] = 1 = deg(GCD(f,g))$
- $deg(GCD(f,g)) = 1 = 2 - 1 = m - rank(B(f,g))$

4. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 2) = 1x^3 + 0x^2 + 0x - 8, m = 3$$

και

$$g(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0x^3 + 1x^2 + 0x - 4, n = 2$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε πως

$$rank[B(f,g)] = 2$$

και

$$NullSpace(B(f,g) = \begin{bmatrix} 0.8729 \\ 0.4364 \\ 0.2182 \end{bmatrix}$$

άρα

$$dim[NullSpace(B(f,g))] = 1.$$

Επιπλέον γνωρίζοντας ότι

$$GCD(f,g) = x - 2$$

έχουμε ότι

$$deg(GCD(f,g)) = 1$$

Δηλαδή επαληθεύουμε ότι:

- $dim[NullSpace(B(f,g))] = 1 = deg(GCD(f,g))$
- $deg(GCD(f,g)) = 1 = 3 - 2 = m - rank(B(f,g))$

5. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = (x-1)^3 = 1x^3 - 3x^2 + 3x - 1, m = 3$$

και

$$g(x) = (x-1)(x+2)(x+3) = 1x^3 + 4x^2 + 1x - 6, n = 3$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -17 & 22 & -5 \\ 22 & -20 & -2 \\ -5 & -2 & +7 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε πως

$$rank[B(f,g)] = 2$$

και

$$NullSpace(B(f,g) = \begin{bmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{bmatrix}$$

άρα

$$dim[NullSpace(B(f,g))] = 1.$$

Επιπλέον γνωρίζοντας ότι

$$GCD(f,g) = x - 1$$

έχουμε ότι

$$deg(GCD(f,g)) = 1$$

Δηλαδή επαληθεύουμε ότι:

- $dim[NullSpace(B(f,g))] = 1 = deg(GCD(f,g))$
- $deg(GCD(f,g)) = 1 = 3 - 2 = m - rank(B(f,g))$

Παρατηρήση

Επειδή

$$deg(GCD(f,g)) = m - rank(B(f,g)),$$

τότε έχουμε ισοδύναμα ότι

$$rank(B(f,g)) = m - deg(GCD(f,g))$$

όπου $m = max\{m,n\}$, δηλαδή:

$$rank(B(f,g)) = m - deg(GCD(f,g)) \leq m.$$

Η ισότητα $(rank(B(f,g)) = m - deg(GCD(f,g)) = m - 0 = m)$ ισχύει αν και μόνο αν τα πολυώνυμα $f(x), g(x)$ είναι πρώτα μεταξύ τουσ$(GCD(f,g) = 1 \Leftrightarrow deg(GCD(f,g)) = 0)$, το οποίο δεν είναι αντικείμενο της μελέτης μας.

Σε κάθε άλλη περίπτωση ισχύει:

$$rank(B(f,g)) = m - deg(GCD(f,g)) < m,$$

το όποιο μας δίνει την πληροφορία ότι οι πίνακες Bézout είναι **rank deficient** πίνακες.

Θεώρημα 3.1.2 [4]

Αν $c_1, c_2, ..., c_m$ είναι οι στήλες Bézout , και η τάξη του είναι $m - k$, τότε

- οι τελευταίες $m-k$ στήλες, δηλαδή $c_{k+1}, ..., c_m$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες
- κάθε στήλη c_i για $1 \leq i \leq k$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των $c_{k+1}, ..., c_m$

Παραδείγματα

1. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^2 - 1 = 1x^2 + 0x - 1, m = 2$$

και

$$g(x) = x - 1 = 0x^2 + 1x - 1, n = 1$$

είχαμε:

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή:

$$c_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

και

$$c_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον έχουμε

$$rank(B(f, g)) = 1 = m - k = 2 - 1$$

δηλαδή

$$k = 1$$

Επομένως επαληθεύουμε ότι:

- η τελευταία $m - k = 2 - 1 = 1$ στήλη, δηλαδή η c_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητη (προφανές αφού είναι μία)
- η στήλη c_1 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός της c_2, αφού

$$c_1 = (-1) \cdot c_2$$

2. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^2 - 4 = 1x^2 + 0x - 4, m = 2$$

και

$$g(x) = x + 2 = 0x^2 + 1x + 2, n = 1$$

είχαμε:

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

και

$$c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον έχουμε

$$rank(B(f,g)) = 1 = m - k = 2 - 1$$

δηλαδή

$$k = 1$$

Επομένως επαληθεύουμε ότι:

- η τελευταία $m - k = 2 - 1 = 1$ στήλη, δηλαδή η c_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητη (προφανές αφού είναι μία)
- η στήλη c_1 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός της c_2, αφού

$$c_1 = 2 \cdot c_2$$

3. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 = 1x^2 + 1x - 2, m = 2$$

και

$$g(x) = (x-1)(x-3) = 1x^2 - 4x + 3, n = 2$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή:

$$c_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ +5 \end{bmatrix}$$

και

$$c_2 = \begin{bmatrix} +5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον έχουμε

$$rank(B(f,g)) = 1 = m - k = 2 - 1$$

δηλαδή

$$k = 1$$

Επομένως επαληθεύουμε ότι:

- η τελευταία $m - k = 2 - 1 = 1$ στήλη, δηλαδή c_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητη (προφανές αφού είναι μία)
- η στήλη c_1 γράφεται ως γραμμικός συνδυσμός της c_2, αφού

$$c_1 = -1 \cdot c_2$$

4. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+2) = 1x^3 + 0x^2 + 0x - 8, m = 3$$

και

$$g(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0x^3 + 1x^2 + 0x - 4, n = 2$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ +8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = \begin{bmatrix} +8 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και

$$c_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον έχουμε

$$rank(B(f,g)) = 2 = m - k = 3 - 1$$

δηλαδή

$$k = 1$$

Επομένως επαληθεύουμε ότι:

- οι τελευταίες $m-k = 3-1 = 2$ στήλες, δηλαδή οι c_2, c_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι για λ_1, λ_2 έχουμε:

$$\lambda_1 \cdot c_2 + \lambda_2 \cdot c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} +8 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-4\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 0$$

  τότε

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

- η στήλη c_1 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των c_2, c_3, αφού

$$c_1 = -2 \cdot c_2 - 4 \cdot c_3$$

5. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = (x-1)^3 = 1x^3 - 3x^2 + 3x - 1, m = 3$$

και

$$g(x) = (x-1)(x+2)(x+3) = 1x^3 + 4x^2 + 1x - 6, n = 3$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -17 & 22 & -5 \\ 22 & -20 & -2 \\ -5 & -2 & +7 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή:

$$c_1 = \begin{bmatrix} -17 \\ +22 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = \begin{bmatrix} +22 \\ -20 \\ -2 \end{bmatrix}$$

και

$$c_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ +7 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον έχουμε

$$rank(B(f,g)) = 2 = m - k = 3 - 1$$

δηλαδή

$$k = 1$$

Επομένως επαληθεύουμε ότι:

- οι τελευταίες $m - k = 3 - 1 = 2$ στήλες, δηλαδή c_2, c_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι για λ_1, λ_2 έχουμε:

$$\lambda_1 \cdot c_2 + \lambda_2 \cdot c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} +22 \\ -20 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ +7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου με επίλυση του απλού γραμμικού συστήματος καταλήγουμε ότι

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

- η στήλη c_1 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των c_2, c_3, αφού

$$c_1 = -1 \cdot c_2 - 1 \cdot c_3$$

Θεώρημα 3.1.3 [4]

Αν $c_1, c_2, ..., c_m$ είναι οι στήλες του πίνακα Bézout $B(f,g)$, του οποίου η τάξη είναι $m-k$ τότε έχουμε:

- $c_{k-i} = \sum_{j=k+1}^{m} {h_{k-i}}^{j} c_j$ για $i = 0, 1, ..., k-1$
- Τα $d_1, d_2, ..., d_k$ δίνονται από τη σχέση:

$$d_j = d_0 {h_{k-j+1}}^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} = d_0 \begin{bmatrix} 1 \\ {h_k}^{k+1} \\ {h_{k-1}}^{k+1} \\ \vdots \\ {h_1}^{k+1} \end{bmatrix}$$

  με d_0 πραγματικό αριθμό.

Τότε το πολυώνυμο:

$$d(x) = d_0 x^k + d_1 x^{k-1} + ... + d_{k-1} x + d_k$$

είναι ο μέγιστος διαιρέτης (GCD) των πολυωνύμων, δήλαδη:

$$GCD(f(x), g(x)) = GCD(f,g) = d_0 x^k + d_1 x^{k-1} + ... + d_{k-1} x + d_k$$

Παραδείγματα

1. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^2 - 1 = 1x^2 + 0x - 1, m = 2$$

και

$$g(x) = x - 1 = 0x^2 + 1x - 1, n = 1$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον είχαμε

$$rank(B(f,g)) = 1 = m - k = 2 - 1$$

δηλαδή

$$k = 1$$

και ακόμη

$$c_1 = (-1) \cdot c_2$$

Δηλαδή $c_j = c_2$ και ${h_1}^{k+1} = -1$.
Άρα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = d_0 \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$GCD(f,g) = d_0 x - d_0$$

για $d_0 \in \mathbb{R}^*$, τότε επιλέγουμε $d_0 = 1$ (ώστε να είναι μονικό πολυώνυμο από ορισμό ΜΚΔ) και τελικά βρίσκουμε:

GCD(f,g)=x-1

2. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^2 - 4 = 1x^2 + 0x - 4, m = 2$$

και

$$g(x) = x + 2 = 0x^2 + 1x + 2, n = 1$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον είχαμε

$$rank(B(f,g)) = 1 = m - k = 2 - 1$$

δηλαδή

$$k = 1$$

και ακόμη

$$c_1 = 2 \cdot c_2$$

Δηλαδή $c_j = c_2$ και ${h_1}^{k+1} = 2$.
Άρα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = d_0 \begin{bmatrix} +1 \\ +2 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$GCD(f,g) = d_0 x + 2d_0$$

για $d_0 \in \mathbb{R}^*$, τότε επιλέγουμε $d_0 = 1$ (ώστε να είναι μονικό πολυώνυμο από ορισμό ΜΚΔ) και τελικά βρίσκουμε:

$$\mathbf{GCD(f,g)=x+2}$$

3. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 = 1x^2 + 1x - 2, m = 2$$

και

$$g(x) = (x-1)(x-3) = 1x^2 - 4x + 3, n = 2$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον είχαμε

$$rank(B(f,g)) = 1 = m - k = 2 - 1$$

δηλαδή

$$k = 1$$

και ακόμη

$$c_1 = -1 \cdot c_2$$

Δηλαδή $c_j = c_2$ και ${h_1}^{k+1} = -1$.
Άρα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = d_0 \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$GCD(f,g) = d_0 x - d_0$$

για $d_0 \in \mathbb{R}^*$, τότε επιλέγουμε $d_0 = 1$ (ώστε να είναι μονικό πολυώνυμο από ορισμό ΜΚΔ) και τελικά βρίσκουμε:

GCD(f,g)=x-1

4. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+2) = 1x^3 + 0x^2 + 0x - 8, m = 3$$

και

$$g(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0x^3 + 1x^2 + 0x - 4, n = 2$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον είχαμε

$$rank(B(f,g)) = 2 = m - k = 3 - 1$$

δηλαδή

$$k = 1$$

και ακόμη

$$c_1 = -2 \cdot c_2 - 4 \cdot c_3$$

Δηλαδή $c_j = c_2, c_{j+1} = c_3$ και ${h_1}^{k+1} = -2, {h_2}^{k+1} = -4$.
Άρα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = d_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$GCD(f,g) = d_0 x - 2d_0$$

γιατί πρέπει να έχει βαθμό $k = 1$ σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.3, για $d_0 \in \mathbb{R}^*$, τότε επιλέγουμε $d_0 = 1$ (ώστε να είναι μονικό πολυώνυμο από ορισμό ΜΚΔ) και τελικά βρίσκουμε:

GCD(f,g)=x-2

5. Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = (x-1)^3 = 1x^3 - 3x^2 + 3x - 1, m = 3$$

και

$$g(x) = (x-1)(x+2)(x+3) = 1x^3 + 4x^2 + 1x - 6, n = 3$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -17 & 22 & -5 \\ 22 & -20 & -2 \\ -5 & -2 & +7 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον είχαμε

$$rank(B(f,g)) = 2 = m - k = 3 - 1$$

δηλαδή

$$k = 1$$

και ακόμη

$$c_1 = -1 \cdot c_2 - 1 \cdot c_3$$

Δηλαδή $c_j = c_2, c_{j+1} = c_3$ και ${h_1}^{k+1} = -1, {h_2}^{k+1} = -1$.
Άρα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = d_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$GCD(f,g) = d_0 x - d_0$$

γιατί πρέπει να έχει βαθμό $k = 1$ σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.3, για $d_0 \in \mathbb{R}^*$, τότε επιλέγουμε $d_0 = 1$ (ώστε να είναι μονικό πολυώνυμο από ορισμό ΜΚΔ) και τελικά βρίσκουμε:

GCD(f,g)=x-1

Θεώρημα 3.1.4 [8]

Για δοσμένα πολυώνυμα:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{d} w_k x^k = w_m x^d + w_{d-1}x^{d-1} + w_{d-2}x^{d-2} + ... + w_2 x^2 + w_1 x + w_0,$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} u_k x^k = u_m x^m + u_{m-1}x^{m-1} + u_{m-2}x^{m-2} + ... + u_2 x^2 + u_1 x + u_0$$

και

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \upsilon_k x^k = \upsilon_n x^n + \upsilon_{n-1}x^{n-1} + \upsilon_{n-2}x^{n-2} + ... + \upsilon_2 x^2 + \upsilon_1 x + \upsilon_0$$

αληθεύει ότι:

$$B(fw, gw) = C(w)B(f,g)C(w)^T,$$

όπου ο πίνακας $C(w)$ είναι ο:

$$C(w) = \begin{bmatrix} w_0 & & \\ w_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & w_0 \\ \vdots & & w_1 \\ w_d & & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & w_d \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ένας πίνακας συνέλιξης με κατάλληλες διαστάσεις ώστε να ισχύει το θεώρημα.

Παρατήρηση
Ως μία συγκεκριμένη περίπτωση του θεωρήματος 3.1.4 θεωρούμε τα εξής:

- πολυώνυμα $f(x), g(x)$ όπως ορίστηκαν παραπάνω
- $$d(x) = \sum_{i=0}^{k} d_{k-i}kx^k = d_0x^k + d_1x^{k-1} + ... + d_{k-1}x + d_k$$

  να είναι ο μέγιστος διαιρέτης (GCD) των πολυωνύμων $f(x), g(x)$, δήλαδη:

  $$GCD(f(x), g(x)) = GCD(f, g) = d_0x^k + d_1x^{k-1} + ... + d_{k-1}x + d_k$$

- πολυώνυμα $\tilde{f}(x)$ και $\tilde{g}(x)$ τέτοια ώστε:

  $$f(x) = \tilde{f}(x)d(x),$$

  $$g(x) = \tilde{g}(x)d(x)$$

τότε έχουμε:

$$B(f, g) = GB(\tilde{f}, \tilde{g})G^T,$$

όπου ο πίνακας G (συντομογραφία του Greatest Common Divisor) είναι ο:

$$G = \begin{bmatrix} d_0 & & \\ d_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & d_0 \\ \vdots & & d_1 \\ d_k & & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & d_k \end{bmatrix}$$

με διαστάσεις $mx(m-k)$ για $m \geq n$

3.2 Εύρεση ΜΚΔ (GCD) Πολυωνύμων μέσω QR παραγοντοποίησης Πινάκων Bézout [8]

Για δοσμένα πολυώνυμα:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} u_k x^k = u_m x^m + u_{m-1}x^{m-1} + u_{m-2}x^{m-2} + ... + u_2 x^2 + u_1 x + u_0$$

και

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \upsilon_k x^k = \upsilon_n x^n + \upsilon_{n-1}x^{n-1} + \upsilon_{n-2}x^{n-2} + ... + \upsilon_2 x^2 + \upsilon_1 x + \upsilon_0$$

με $m \geq n$ και

$$B(\tilde{f}, \tilde{g}) = JB(f, g)J.$$

Τότε αν $JB(f,g)J = QR$ είναι η QR παραγοντοποίηση του πίνακα $JB(f,g)J$ όπως ορίστηκε στο (1.6), τότε τα στοιχεία στη τελευταία μη μηδενική γραμμή του πίνακα R είναι οι συντελεστές του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη (GCD) των $f(x), g(x)$

Παρατήρηση

Οι πίνακες Bézout όπως εξηγήσαμε παραπάνω είναι rank deficient πίνακες, επομένως χρησιμοποιούμε QR παραγοντοποίησης με οδήγηση κατά στήλες. Αρκετές φορές, και λόγω συμμετρικότητας, δε θα απαιτείται αλλαγή στηλών, (1η στήλη αυτή με τη μεγαλύτερη νόρμα) και έτσι ο μεταθετικός πίνακας P θα είναι ο ταυτοτικός. Το σημαντικό είναι το ακόλουθο:

Πολυπλοκότητα εύρεσης ΜΚΔ (GCD) Πολυωνύμων μέσω QR παραγοντοποίησης Πινάκων Bézout

Λόγω των όσων εξηγήσαμε παραπάνω η πολυπλοκότητα εύρεσης ΜΚΔ (GCD) Πολυωνύμων μέσω QR παραγοντοποίησης με οδήγηση κατά στήλη πινάκων Bézout είναι:

$$\mathcal{O}(2mnr - r^2(m+n) + \frac{2r^3}{3})$$

Παραδείγματα

1. Δίνονται:

$$f(x) = x^2 - 1 = 1x^2 + 0x - 1$$
$$g(x) = x - 1 = 0x^2 + 1x - 1$$

   και

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

   τότε:

$$B(\tilde{f}, \tilde{g}) = JB(f,g)J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix},$$

$$R[B(\tilde{f},\tilde{g})] = \begin{bmatrix} -1.4142 & +1.4142 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και πράγματι:

$$GCD = k(-1.4142x + 1.4142)$$

και επιλέγουμε $k = \dfrac{1}{-1.4142}$ ώστε ο ΜΚΔ να είναι μονικό πολυώνυμο. Άρα

GCD=x-1

2. Δίνονται:

$$f(x) = x^2 - 4 = 1x^2 + 0x - 4$$
$$g(x) = x + 2 = 0x^2 + 1x + 2$$

και

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε:

$$B(\tilde{f},\tilde{g}) = JB(f,g)J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$R[B(\tilde{f},\tilde{g})] = \begin{bmatrix} -2.2361 & -4.4721 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και πράγματι:

$$GCD = k(-2.2361x - 4.4721)$$

και επιλέγουμε $k = \dfrac{1}{-2.2361}$ ώστε ο ΜΚΔ να είναι μονικό πολυώνυμο. Άρα

GCD=x+2

3. Δίνονται:

$$f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 = 1x^2 + 1x - 2$$
$$g(x) = (x-1)(x-3) = 1x^2 - 4x + 3$$

και

$$\begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$$

τότε:

$$B(\tilde{f},\tilde{g}) = JB(f,g)J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix},$$

$$R[B(\tilde{f},\tilde{g})] = \begin{bmatrix} 7.0711 & -7.0711 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και πράγματι:

$$GCD = k(7.0711x - 7.0711)$$

και επιλέγουμε $k = \dfrac{1}{7.0711}$ ώστε ο ΜΚΔ να είναι μονικό πολυώνυμο. Άρα

GCD=x-1

4. Δίνονται:

$$f(x) = x^3 - 8 = 1x^3 + 0x^2 + 0x - 8$$
$$g(x) = x^2 - 4 = 0x^3 + 1x^2 + 0x - 4$$

και

$$\begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

τότε:

$$B(\tilde{f}, \tilde{g}) = JB(f,g)J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \\ -4 & 8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R[B(\tilde{f}, \tilde{g})] = \begin{bmatrix} -4.1231 & 7.7611 & 0.9701 \\ 0 & 4.4458 & -8.8915 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και πράγματι:

$$GCD = k(4.4458x - 8.8915)$$

και επιλέγουμε $k = \dfrac{1}{4.4458}$ ώστε ο ΜΚΔ να είναι μονικό πολυώνυμο. Άρα

GCD=x-2

5. Δίνονται:

$$f(x) = (x-1)^3 = 1x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$
$$g(x) = (x-1)(x+2)(x+3) = 1x^3 + 4x^2 + 1x - 6$$

και

$$\begin{bmatrix} -17 & 22 & -5 \\ 22 & -20 & -2 \\ -5 & -2 & +7 \end{bmatrix}$$

τότε:

$$B(\tilde{f}, \tilde{g}) = JB(f,g)J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -17 & 22 & -5 \\ 22 & -20 & -2 \\ -5 & -2 & +7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -2 & -20 & 22 \\ -5 & 22 & -17 \end{bmatrix},$$

$$R[B(\tilde{f}, \tilde{g})] = \begin{bmatrix} -8.8318 & 9.5111 & -0.6794 \\ 0 & 28.2407 & -28.2407 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και πράγματι:

$$GCD = k(28.2407x - 28.2407)$$

και επιλέγουμε $k = \dfrac{1}{28.2407}$ ώστε ο ΜΚΔ να είναι μονικό πολυώνυμο. Άρα

GCD=x-1

3.3 Σύγκριση πίνακα Bézout με πίνακα Sylvester

[7] Έστω $f(x)$ και $g(x)$ δύο μη μηδενικά πολυώνυμα μίας μεταβλητής για τα οποία ισχύουν (όπως ορίστηκαν και για τον πίνακα Bézout με τη διαφορά ότι το πολυώνυμα $f(x)$ είναι μονικό) τα εξής:

$$f(x) = 1x^m + \sum_{k=1}^{m-1} u_k x^k = 1x^m + u_{m-1}x^{m-1} + u_{m-2}x^{m-2} + ... + u_2x^2 + u_1x + u_0$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \upsilon_k x^k = \upsilon_n x^n + \upsilon_{n-1}x^{n-1} + \upsilon_{n-2}x^{n-2} + ... + \upsilon_2x^2 + \upsilon_1x + \upsilon_0$$

με

$$deg(f(x)) = m$$

και

$$deg(g(x)) = n$$

έτσι ώστε

$$m \geq n$$

και

$$(u_m, \upsilon_n) \neq (0, 0)$$

όπου:

- deg(*) ο βαθμός του πολυωνύμου *
- u_m ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του πολυωνύμου $f(x)$
- υ_n ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του πολυωνύμου $g(x)$.

Τότε έχουμε τον πίνακα Sylvester (με συμβολισμό $S(f, g)$) που έχει τη μορφή:

$$S(f,g) = \begin{bmatrix} 1 & u_{m-1} & u_{m-2} & \cdots & u_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{m-1} & u_{m-2} & \cdots & u_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{m-1} & \cdots & u_1 & u_0 \\ \upsilon_n & \upsilon_{n-1} & \upsilon_{n-2} & \cdots & \upsilon_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \upsilon_n & \upsilon_{n-1} & \cdots & \upsilon_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \upsilon_n & \upsilon_{n-1} & \cdots & u_0 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα

Αν ο πίνακας Sylvester ($S(f,g)$) έχει σε κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές (row echelon form), τότε η τελευταία μη μηδενική γραμμή δίνει τους συντελεστές του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη ($d(x) = GCD(f,g)$)

Παραδείγματα

1. Δίνονται:
$$f(x) = x^2 - 1 = 1x^2 + 0x - 1$$
$$g(x) = x - 1 = 0x^2 + 1x - 1$$
τότε ο πίνακας Sylvester $S(f,g)$ έχει τη μορφή:
$$S(f,g) = \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
με κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές:
$$rref(S(f,g)) = \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Δηλαδή
GCD(f,g)=x-1

2. Δίνονται:
$$f(x) = x^2 - 4 = 1x^2 + 0x - 4$$
$$g(x) = x + 2 = 0x^2 + 1x + 2$$
τότε ο πίνακας Sylvester $S(f,g)$ έχει τη μορφή:
$$S(f,g) = \begin{bmatrix} +1 & 0 & -4 \\ +1 & +2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
με κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές:
$$rref(S(f,g)) = \begin{bmatrix} +1 & 0 & -4 \\ 0 & +1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Δηλαδή
GCD(f,g)=x+2

3. Δίνονται:
$$f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 = 1x^2 + 1x - 2$$
$$g(x) = (x-1)(x-3) = 1x^2 - 4x + 3$$

τότε ο πίνακας Sylvester $S(f,g)$ έχει τη μορφή:

$$S(f,g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

με κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές:

$$rref(S(f,g)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή

GCD(f,g)=x-1

4. Δίνονται:

$$f(x) = x^3 - 8 = 1x^3 + 0x^2 + 0x - 8$$
$$g(x) = x^2 - 4 = 0x^3 + 1x^2 + 0x - 4$$

τότε ο πίνακας Sylvester $S(f,g)$ έχει τη μορφή:

$$S(f,g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

με κλιμακωτή μορφή ως προς τις γραμμές:

$$rref(S(f,g)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή

GCD(f,g)=x-2

Πολυπλοκότητα

Η πολυπλοκότητα για την εύρεση του $d(x) = GCD(f,g)$ μέσω του αλγορίθμου που περιγράφεται είναι της τάξης

$$\mathcal{O}(\frac{5}{6}n^3)$$

Ένα ανοιχτό πρόβλημα και στόχος είναι να καταλήξουμε σε μικρότερης τάξης πολυπλοκότητα για την εύρεση του $GCD(f,g)$ μέσω του πίνακα Bézout εκμεταλλευόμενοι κυριώς τη συμμετρικότητά του.

4 Αριθμητικές Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται όλα οι υπολογισμοί που μελετήθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για την παρούσα εργασία καθώς και υπολογισμοί από άλλες δημοσιευμένες εργασίες και papers.

4.1 Υπολογισμένοι πίνακες Bézout και GCD

Παράδειγμα 1 Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^2 - 1 = 1x^2 + 0x - 1, m = 2$$

και

$$g(x) = x - 1 = 0x^2 + 1x - 1, n = 1$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε πως

$$rank[B(f,g)] = 1$$

και

$$NullSpace(B(f,g) = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

άρα

$$dim[NullSpace(B(f,g))] = 1.$$

Επιπλέον γνωρίζοντας ότι

$$GCD(f,g) = x - 1$$

έχουμε ότι

$$deg(GCD(f,g)) = 1$$

Δηλαδή επαληθεύουμε ότι:

- $dim[NullSpace(B(f,g))] = 1 = deg(GCD(f,g))$
- $deg(GCD(f,g)) = 1 = 2 - 1 = m - rank(B(f,g))$

επίσης έχουμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$MatlabResult = bezoutmatrix(u,v) = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

$$MapleResult = BezoutMatrix(f,g,x,method = symmetric) = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

και

$$B(\tilde{f},\tilde{g}) = JB(f,g)J = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix},$$

$$R[B(\tilde{f},\tilde{g})] = \begin{bmatrix} -1.4142 & +1.4142 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ώστε τελικά,

$$GCD(f,g) = x - 1$$

Παράδειγμα 2 Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^2 - 4 = 1x^2 + 0x - 4, m = 2$$

και

$$g(x) = x + 2 = 0x^2 + 1x + 2, n = 1$$

είχαμε:

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε πως

$$rank[B(f, g)] = 1$$

και

$$NullSpace(B(f, g) = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ -0.8944 \end{bmatrix}$$

άρα

$$dim[NullSpace(B(f, g))] = 1.$$

Επιπλέον γνωρίζοντας ότι

$$GCD(f, g) = x + 2$$

έχουμε ότι

$$deg(GCD(f, g)) = 1$$

Δηλαδή επαληθεύουμε ότι:

- $dim[NullSpace(B(f, g))] = 1 = deg(GCD(f, g))$
- $deg(GCD(f, g)) = 1 = 2 - 1 = m - rank(B(f, g))$

επίσης έχουμε:

$$B(f, g) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MatlabResult = bezoutmatrix(u, v) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = -JB(f, g)J$$

$$MapleResult = BezoutMatrix(f, g, x, method = symmetric) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = -JB(f, g)J$$

και

$$B(\tilde{f}, \tilde{g}) = JB(f, g)J = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$R[B(\tilde{f}, \tilde{g})] = \begin{bmatrix} -2.2361 & -4.4721 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ώστε τελικά,

$$GCD(f, g) = x + 2$$

Παράδειγμα 3 Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 = 1x^2 + 1x - 2, m = 2$$

και

$$g(x) = (x-1)(x-3) = 1x^2 - 4x + 3, n = 2$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε πως

$$rank[B(f,g)] = 1$$

και

$$NullSpace(B(f,g) = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$$

άρα

$$dim[NullSpace(B(f,g))] = 1$$

Επιπλέον γνωρίζοντας ότι

$$GCD(f,g) = x - 1$$

έχουμε ότι

$$deg(GCD(f,g)) = 1$$

Δηλαδή επαληθεύουμε ότι:

- $dim[NullSpace(B(f,g))] = 1 = deg(GCD(f,g))$
- $deg(GCD(f,g)) = 1 = 2 - 1 = m - rank(B(f,g))$

επίσης έχουμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$MatlabResult = bezoutmatrix(u,v) = \begin{bmatrix} +5 & -5 \\ -5 & +5 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

$$MapleResult = BezoutMatrix(f,g,x,method = symmetric) = bezoutmatrix(u,v) = \begin{bmatrix} +5 & -5 \\ -5 & +5 \end{bmatrix} = -$$

και

$$B(\tilde{f},\tilde{g}) = JB(f,g)J = \begin{bmatrix} -5 & +5 \\ +5 & -5 \end{bmatrix},$$

$$R[B(\tilde{f},\tilde{g})] = \begin{bmatrix} 7.0711 & -7.0711 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ώστε τελικά,

$$GCD(f,g) = x - 1$$

Παράδειγμα 4 Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+2) = 1x^3 + 0x^2 + 0x - 8, m = 3$$

και

$$g(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0x^3 + 1x^2 + 0x - 4, n = 2$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε πως

$$rank[B(f,g)] = 2$$

και

$$NullSpace(B(f,g) = \begin{bmatrix} 0.8729 \\ 0.4364 \\ 0.2182 \end{bmatrix}$$

άρα

$$dim[NullSpace(B(f,g))] = 1.$$

Επιπλέον γνωρίζοντας ότι

$$GCD(f,g) = x - 2$$

έχουμε ότι

$$deg(GCD(f,g)) = 1$$

Δηλαδή επαληθεύουμε ότι:

- $dim[NullSpace(B(f,g))] = 1 = deg(GCD(f,g))$
- $deg(GCD(f,g)) = 1 = 3 - 2 = m - rank(B(f,g))$

επίσης έχουμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} 0 & +8 & -4 \\ +8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

$$MatlabResult = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +4 \\ 0 & +4 & -8 \\ +4 & -8 & 0 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

$$MapleResult = BezoutMatrix(f,g,x,method = symmetric) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +4 \\ 0 & +4 & -8 \\ +4 & -8 & 0 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

και

$$B(\tilde{f},\tilde{g}) = JB(f,g)J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \\ -4 & 8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R[B(\tilde{f},\tilde{g})] = \begin{bmatrix} -4.1231 & 7.7611 & 0.9701 \\ 0 & 4.4458 & -8.8915 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ώστε τελικά,

$$GCD(f,g) = x - 2$$

Παράδειγμα 5 Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = (x-1)^3 = 1x^3 - 3x^2 + 3x - 1, m = 3$$

και

$$g(x) = (x-1)(x+2)(x+3) = 1x^3 + 4x^2 + 1x - 6, n = 3$$

είχαμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -17 & 22 & -5 \\ 22 & -20 & -2 \\ -5 & -2 & +7 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε πως

$$rank[B(f,g)] = 2$$

και

$$NullSpace(B(f,g) = \begin{bmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{bmatrix}$$

άρα

$$dim[NullSpace(B(f,g))] = 1.$$

Επιπλέον γνωρίζοντας ότι

$$GCD(f,g) = x - 1$$

έχουμε ότι

$$deg(GCD(f,g)) = 1$$

Δηλαδή επαληθεύουμε ότι:

- $dim[NullSpace(B(f,g))] = 1 = deg(GCD(f,g))$
- $deg(GCD(f,g)) = 1 = 3 - 2 = m - rank(B(f,g))$

επίσης έχουμε:

$$B(f,g) = \begin{bmatrix} -17 & 22 & -5 \\ 22 & -20 & -2 \\ -5 & -2 & +7 \end{bmatrix}$$

$$MatlabResult = bezoutmatrix(u,v) = \begin{bmatrix} -7 & +2 & +5 \\ +2 & 20 & -22 \\ +5 & -22 & 17 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

$$MapleResult = BezoutMatrix(f,g,x,method = symmetric) = \begin{bmatrix} -7 & +2 & +5 \\ +2 & 20 & -22 \\ +5 & -22 & 17 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$

και

$$B(\tilde{f},\tilde{g}) = JB(f,g)J = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -2 & -20 & 22 \\ -5 & 22 & -17 \end{bmatrix},$$

$$R[B(\tilde{f},\tilde{g})] = \begin{bmatrix} -8.8318 & 9.5111 & -0.6794 \\ 0 & 28.2407 & -28.2407 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ώστε τελικά,

$$GCD(f,g) = x - 1$$

Παράδειγμα 6 Για τα πολυώνυμα
$$f(x) = x^3 - 64$$
και
$$g(x) = x^2 - 16$$
έχουμε:
$$B(f,g) = \begin{bmatrix} 0 & 64 & -16 \\ 64 & -16 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$MatlabResult = bezoutmatrix(u,v) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 16 \\ 0 & 16 & -64 \\ 16 & -64 & 0 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$
$$MapleResult = BezoutMatrix(f,g,x,method = symmetric) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 16 \\ 0 & 16 & -64 \\ 16 & -64 & 0 \end{bmatrix} = -JB(f,g)J$$
και
$$B(\tilde{f},\tilde{g}) = JB(f,g)J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -16 & 64 \\ -16 & 64 & 0 \end{bmatrix},$$
$$R[B(\tilde{f},\tilde{g})] = \begin{bmatrix} -16.0312 & 63.8754 & 0.9981 \\ 0 & 16.4905 & -65.9621 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
ώστε τελικά,
$$GCD(f,g) = x - 4$$

Παράδειγμα 7 Για τα πολυώνυμα
$$f(x) = (x+1)^5 = 1x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1, m = 5$$
και
$$g(x) = (x-1)(x+1) = 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 1x^2 + 0x - 1, n = 2$$
έχουμε:
$$Bezout = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -5 \\ 1 & 5 & 9 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & -15 & -11 \\ -1 & -5 & -10 & -11 & -5 \end{bmatrix}$$
$$J_5BJ_5 = \begin{bmatrix} -5 & 11 & -10 & 5 & -1 \\ 11 & -15 & 5 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & 9 & -5 & 1 \\ 5 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$Q = \begin{bmatrix} -0.5703 & -0.4441 & -0.4159 & -0.3233 & 0.4472 \\ 0.7777 & -0.0328 & -0.2993 & -0.3233 & 0.4472 \\ -0.2592 & 0.7994 & 0.1770 & -0.2498 & 0.4472 \\ 0.0518 & -0.3964 & 0.7989 & 0.0441 & 0.4472 \\ 0 & 0.0739 & -0.2607 & 0.8524 & 0.4472 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -19.2873 & 6.9994 & -2.2813 & 0.311114.2581 & \\ 0 & 13.5280 & -6.5813 & 1.2435 & -8.1903 \\ 0 & 0 & -1.8660 & 0.5928 & 1.2732 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0735 & -0.0735 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0000 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε στον πίνακα R την τελευταία μη μηδενική γραμμή και έχουμε: $GCD = 0.0735(x-1)$

Παράδειγμα 8 Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = 1x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7, m = 6$$

και

$$g(x) = 0x^6 - 1x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 5x - 6, n = 5$$

έχουμε:

$$Bezout = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -5 \\ -3 & -6 & -9 & -12 & -8 & -4 \\ -4 & -8 & -12 & -9 & -6 & -3 \\ -5 & -10 & -8 & -6 & -4 & -2 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_6 B J_6 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -5 \\ -3 & -6 & -9 & -12 & -8 & -4 \\ -4 & -8 & -12 & -9 & -6 & -3 \\ -5 & -10 & -8 & -6 & -4 & -2 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1604 & -0.3806 & 0.0315 & 0.9102 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.3207 & -0.7613 & 0.0631 & -0.3771 & 0.4140 & -0.0000 \\ -0.4811 & -0.1835 & -0.1576 & -0.1560 & -0.8281 & -0.0000 \\ -0.6414 & 0.3943 & -0.3783 & 0.0650 & 0.3450 & 0.4082 \\ -0.4276 & 0.2629 & 0.2483 & 0.0260 & 0.1380 & -0.8165 \\ -0.2138 & 0.1314 & 0.8749 & -0.0130 & -0.0690 & 0.4082 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 18.7083 & 13.8441 & 8.2316 & 7.4833 & 17.9600 & 14.9666 \\ 0 & 7.3034 & -1.2268 & 4.9840 & 4.2939 & -1.5335 \\ 0 & 0 & -4.6621 & -0.1103 & 0.5517 & -3.2000 \\ 0 & 0 & 0 & -3.1856 & 0.5461 & -0.0910 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.8983 & -0.4830 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.8577 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε στον πίνακα R την τελευταία μη μηδενική γραμμή (που είναι η τελευταία και έχουμε: $GCD = 2.8577$

Παράδειγμα 9 Για τα πολυώνυμα

$$f(x) = 1x^6 + 1x^5 + 1x^4 - 2x^3 + 1x^2 + 1x + 3, m = 6$$

και

$$g(x) = 1x^6 + 1x^5 + 1x^4 + 0x^3 - 1x^2 - 1x - 1, n = 6$$

έχουμε:

$$Bezout = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 8 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$J_6BJ_6 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 & 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.3592 & 0.3752 & -0.3321 & 0.5353 & -0.5286 & -0.2321 \\ -0.5388 & 0.0341 & 0.5509 & 0.2677 & 0.4654 & -0.3417 \\ -0.7184 & -0.0955 & -0.2642 & -0.2677 & 0.0633 & 0.5739 \\ -0.1796 & -0.7641 & 0.2113 & -0.0765 & -0.5286 & -0.2321 \\ 0 & -0.4230 & -0.6717 & 0.1912 & 0.4654 & -0.3417 \\ 0.1796 & -0.2934 & 0.1434 & 0.7265 & 0.0633 & 0.5739 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -11.1355 & -4.3105 & -0.3592 & -7.5434 & 3.2329 & -3.5921 \\ 0 & -9.4562 & -8.7193 & 2.1696 & -6.5497 & 2.9064 \\ 0 & 0 & -3.4415 & 2.2642 & -1.1774 & -1.1774 \\ 0 & 0 & 0 & 2.2942 & 2.2942 & 2.2942 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε στον πίνακα R την τελευταία μη μηδενική γραμμή και έχουμε: $GCD = 2.2942(x^2 + x + 1)$

4.2 Εύρεση GCD μέσω Bézout σε σύγκριση μέσω Sylvester

[13] Για να συγκρίνουμε τις 2 μεθόδους μελετήθηκαν τα εξής πολυώνυμα μίας μεταβλητής:

$$f_0 = (x - 0.9)^5 (x - 0.8)^5 (x - 0.7)^5 (x + 0.3)^5 (x + 0.5)^5 (x + 0.7)^5$$

$$f_1 = (x - 2)^5 (x - 0.9)^5 (x - 0.8)^5 (x + 0.5)^5 (x + 2)^5$$

$$f_2 = (x - 3)^5 (x - 0.8)^5 (x + 2)^5 (x + 0.5)^5$$

$$f_3 = (x - 0.8)^4 (x + 0.5)^4$$

Είναι φανερό ότι $GCD(f_0, f_1, f_2, f_3) = f_3 = (x - 0.8)^4 (x + 0.5)^4$. Η ακρίβεια αυτών των υπολογισμων φαίνεται στην παρακάτω πίνακα.

Ακρίβεια υπολογισμών GCD		
Συντελεστές Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη	Σφάλματα στους συντελεστές μέσω μεθόδου Sylvester	Σφάλματα στους συντελεστές μέσω μεθόδου Bézout
1.0000	0.0000e+00	0.0000e+00
-1.2000	-9.1038e-15	1.8050e-12
-1.0600	-6.8834e-15	-7.6916e-13
1.3320	2.6645e-15	-2.6426e-12
0.5361	1.2212e-15	3.3151e-13
-0.5328	-2.6645e-15	1.3358e-12
-0.1696	-2.0539e-15	1.1419e-13
0.0768	-7.2164e-16	-2.3732e-13
0.0256	-3.8164e-16	-5.7697e-14

5 Συμπεράσματα - Ανοικτά Προβλήματα

Παρακάτω θα αναφέρουμε κάποια συμπεράσματα και χρήσεις - εφαρμογές σχετικά με τους πίνακες Bézout και με την εύρεση Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη πολυωνύμων.

5.1 Εύρεση ριζών πολυωνύμου

Θεωρείται ιδιαίτερο περίπλοκο να υπολογίσουμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου $p(x)$ μιας μεταβλητής, στο οποίο οι ρίζες έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα. Αν ένας ισχυρός Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης έχει βρεθεί, τέτοιος ώστε $d(x) = GCD(p, p')$, τότε η επίλυση μπορεί να γίνει πιο εύκολη, αφού οι ρίζες του πολυωνύμου $p(x)/d(x)$ καταλήγουν να είναι πιο εύκολα υπολογίσιμες.

5.2 Απλοποίηση ρητών συναρτήσεων

Με δοσμένη μία ρητή συνάρτηση της μορφής:

$$R(x) = \frac{a(x)}{(b(x)},$$

όπου τα πολυώνυμα $a(x)$ και $b(x)$ δεν είναι πρώτα μεταξύ τους, τότε υπολογίζοντας το Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη των $a(x)$ και $b(x)$, η συνάρτηση $R(x)$ μπορεί να απλοποιηθεί. Έτσι για $d(x) = GCD(a, b)$ η συνάρτηση $R(x)$ μπορεί να αντικατασταθεί από τη ρητή συνάρτηση:

$$\tilde{R}(x) = \frac{\tilde{a}(x)}{\tilde{b}(x)},$$

όπου $\tilde{a}(x) = \dfrac{a(x)}{d(x)}$ και $\tilde{b}(x) = \dfrac{b(x)}{d(x)}$. Μια εφαρμογή τους είναι η μείωση βαθμού σε ρητές καμπύλες.

5.3 Θεωρία Ελέγχου

Οι πίνακες Bézout έχουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο σε πολλά πεδία των αριθμητικών υπολογισμών συμπεριλαμβανομένου και της επεξεργασία σήματος και της θεωρίας ελέγχου [12]. Για να το εμπεδώσουμε καλύτερα ας θεωρήσουμε $f(x)$ ένα πολύπλοκο πολυώνυμο με $deg(f(x)) = n$ και συμβολίζουμε με $q(y)$ και $p(y)$ τα πραγματικά πολυώνυμα τέτοια ώστε:

$$f(iy) = q(y) + ip(y)$$

όπου y πραγματικός. Συμβολίζουμε με

$$r = rank(B(q, p) = -B(p, q))$$

Τότε ισχύει ότι:
$f(x)$ έχει $n - r$ ρίζες ίδιες με το συζυγές του.

5.4 Blind Image Deconvolution

[3] Η ψηφιακή επεξεργασία εικόνας είναι η χρήση αλγορίθμων για να παρουσιάσουν την επεξεργασία εικόνας σε ψηφιακές εικόνες. Έχει πολλά πλεονεκτήματα σε σχέση με την αναλογική επεξεργασία καθώς επιτρέπει ένα πολύ μεγαλύτερο εύρος αλγορίθμων να εφαρμοστούν σαν δεδομένα εισόδου, και μπορεί να αποτρέψει προβλήματα όπως η συγκέντρωση θορύβου και διαστρέβλωση σημάτων κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας. Το πρόβλημα, γνωστό διεθνώς ως Blind Image Deconvolution όπου σε ελεύθερη ελληνική μετάφραση καλείται τυφλή αποσυνέλιξη εικόνας, μπορεί να λυθεί υπολογίζοντας το Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη (GCD) πολυωνύμων. Αν έχουμε μόνο μια θολή εικόνα και θέλουμε να προσδιορίσουμε την αρχική σκηνή, η θολή εικόνα μπορεί να χωριστεί έτσι ώστε κάθε τμήμα να περιέχει τη συνάρτηση θόλωμα (blurring function),ως εκ τούτου, η συνάρτηση θόλωμα γίνεται ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης ο οποίος είναι χαμηλού βαθμού. Επομένως είναι πολύ σημαντικό και θεωρείται ανοιχτό πρόβλημα να σχεδιάσουμε ένα σταθερό αλγόριθμο για τον υπολογισμό του GCD των πολυωνύμων με όσο το δυνατόν μικρότερης τάξης πολυπλοκότητα. Ο στόχος είναι μέσω παραγοντοποιήσεων των πινάκων Bézout να γίνει η πολυπλοκότητα τάξης

$$\mathcal{O}(n^2)$$

6 Βιβλιογραφία

Αναφορές

[1] Μητρούλη Μαριλένα: *Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα.*, Αθήνα, 2001

[2] Καλογερόπουλος Γρ. Η.: *Λογισμός Πινάκων και εφαρμογές.*, Αθήνα, 1995

[3] Zijia Li, Zhengfeng Yang, Lihong Zhi, Blind Image Deconvolution via Fast Approximate GCD: *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2010*, Municch, Germany, 2010, 25-28

[4] Gema M. Diaz-Toca, Laureano Gonzalez-Vega, Computing greatest common divisors and squarefree decompositions through matrix methods: The parametric and approximate cases: *Linear Algebra and its Applications 412*, 2006, 222-246

[5] Μπλαζάκης Κωνσταντίνος, Υπολογισμός Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη πολυωνύμων δύο μεταβλητών *Διπλωματική εργασία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο θεσσαλονίκης, Τμήμα Μαθηματικών*, Θεσσαλονίκη, 2009

[6] Michael P. Holmes, Fast SVD for Large-Scale Matrices: *College of Computing, Georgia Institute of Technology*, Atlanta

[7] D. Triantafyllou, M. Mitrouli Two Resultant Based Methods Computing the Greatest Common Divisor of Two Polynomials: *Department of Mathematics, University of Athens, Panepistimiopolis 15784*, Athens, Greece

[8] Paola Boito, Dario Andrea Bini, Structured Matrix Based Methods for Approximate Polynomial GCD: *Scuola Normale Superiore*

[9] Nicola Mastronardi, Paul Van Dooren Rank-revealing decomposition of symmetric indefinite matrices via block anti-triangular factorization: *Linear Algebra and its Applications*, Italy, 2016

[10] Dongxia Sun, Lihong Zhi, Structured Low Rank Approximation of a Bezout Matrix: *Mathematics in Computer Science*, Switzerland, 2007, 427-437

[11] Gema M. Diaz-Toca, Laureano Gonzalez-Vega, Barnett's theorems about the greatest common divisor of several univariate polynomials through Bezout-like matrices *J.Symbolic Computation*, 2002, 59-81

[12] S. Barnett, Polynomials and Linear Control Systems, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics *Marcel Dekker Inc.*, New York, 1983

[13] Jiri Eckstein, Jan Zitko, Comparison of algorithms for calculation of the Greatest Common Divisor of several polynomials *Department of Numerical Mathematics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University Sokolovska 83, Prague 8, Czech Republic*, Prague, 2015

[14] Matlab software (version R2015a)

[15] Maple 2016 software