Κων. Χατζησταυρίδης

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΠΙ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΟΜΑΔΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων Καθηγητής: Δημήτριος Βάρσος

Αθήνα 2017

Πρόλογος - Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια εκπλήρωσης των υποχρεώσεων του μεταπτυχιακού προγράμματος στα θεωρητικά μαθηματικά του Μαθηματικού Τμήματος της Σχολής Θετικών Επιστημών του Ε.Κ.Π.Α. για την κατίσχυση του δικαιώματος απονομής του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης (Μ.Δ.Ε.) στα Θεωρητικά Μαθηματικά.

Θα ήθελα να αποτάξω φόρο τιμής και ευχαριστίας πρωτίστως προς τον κύριο Δημήτριο Βάρσο, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α. για την αδιάλειπτη και αγόγγυστη νοητική και ψυχική επικουρία και συμπαράσταση κατά τη διάρκεια συγγραφής αυτής της εργασίας, δίχως την οποίες το εγχείρημα τούτο θα περέμενε αν όχι απραγματοποίητο, σίγουρα κρινόμενο κατώτερο των περιστάσεων και των προσδοκιών μου. Τω όντι, στη σημερινή εποχή που η αγάπη για το διδάσκειν πνέει τα λοίσθια, αναδύεται αδήριτος η ανάγκη εύρεσης διδασκάλων με όλη τη σημασία του όρου. Δια τούτο, αισθάνομαι ευλογηθείς τόσο για την ακαδημαϊκή όσο και την προσωπική μου γνωριμία με τον κύριο Βάρσο. Επιπροσθέτως, να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον κύριο Ευάγγελο Ράπτη, καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α. και τον κύριο Μιχάλη Συκιώτη, επίκουρο καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α., μέλη της τριμελούς επιτροπής αξιολόγησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Θα ήθελα εν κατακλείδι να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συνεχή στήριξη και την αδιασάλευτη πεποίθηση για την επιτυχή έκβαση αυτής της μαθηματικής εργασίας.

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται ζητήματα αφορούντα στο γενικό γνωστικό αντικείμενο "εξισώσεις υπεράνω ομάδων ' και ιδιαιτέρως, όπως άλλωστε μαρτυρά και ο τίτλος της, ¨εξισώσεις υπεράνω ελευθέρων ομάδων¨.

Απαρχή και συνάμα ορόσημο για το αντικείμενο τούτο στάθηκε η εργασία του B.H. Neumann "Adjunction of elements to groups, J. London Math. Soc. 18(1943)" [1], ο οποίος - κατ΄ αναλογίαν με το αντίστοιχο πρόβλημα στη θεωρία σωμάτων - εισήγαγε την έννοια της εξίσωσης υπεράνω μιας ομάδας.

Επί παραδείγματι, αν G είναι μια ομάδα και $g \in G$, ένα πολύ συγκεκριμένο πρόβλημα τοιαύτης φύσεως θα ήταν το ερώτημα εάν η ομάδα G δύναται να εμφυτευθεί σε μια άλλη ομάδα H, εις τρόπον ώστε να υπάρχει $x \in H$, που να ικανοποιεί τη σχέση $g = x^2$.

Το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα της προαναφερθείσας θεωρίας του Neumann αποφαίνεται καταφατικά σε ένα ερώτημα προκύπτον εκ μίας - τρόπον τινά - γενίκευσης αυτού του συγκεκριμένου παραδείγματος.

Θεώρημα Έστω G ομάδα και I ένα τυχόν σύνολο δεικτών. Έστω $g_i \in G$, $i \in I$ και $m_i \in \mathbb{Z}^+$, $i \in I$. Τότε η G εμφυτεύεται σε μια ομάδα H, η οποία περιέχει στοιχεία x_i, $i \in I$, έτσι ώστε $x^{m_i} = g_i$ για κάθε $i \in I$.

Παρασυρθείς ενδεομένως κανείς από την ισχύ αυτού του Θεωρήματος, θα εδύνατο να πλανηθεί, φρονώντας εσφαλμένα ότι κάθε εξίσωση υπεράνω μιας τυχούσας ομάδας έχει λύση. Το 1949 ωστόσο, οι Higman, Neumann, Neumann [2] απέδειξαν ένα αποτέλεσμα που θέτει ορισμένους φραγμούς σε αυτήν την υπέρμετρη αισιοδοξία:

Θεώρημα Έστω G ομάδα και I σύνολο δεικτών. Έστωσαν επίσης g_i, $g_i' \in G, i \in I$. Τότε η ομάδα G εμφυτεύεται σε μια άλλη ομάδα H, που περιέχει ένα $x \in H$ με $x^{-1} g_i x = g_i'$ αν και μόνο αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $\varphi : \langle\, g_i,\, i \in I \,\rangle \longrightarrow \langle\, g_i',\, i \in I \,\rangle : \varphi(g_i) = g_i'$.

Για να ενωτισθούμε μολαταύτα της αξίας του προλεχθέντος στην πληρότητά του, χρειαζόμαστε έναν προσεκτικότερο(ή τυπικότερο) και πιο γενικό ορισμό της εξίσωσης υπεράνω μιας ομάδας.

Έστω G ομάδα, $g_1, g_2, ..., g_m \in G$ και F μια ελεύθερη ομάδα με βάση τα στοιχεία $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Έστω επιπλέον W ένα σύνολο στοιχείων $w_j = w_j(\gamma_1, \gamma_2, , ..., \gamma_m, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Τότε αναζητούμε όλους τους ομομορφισμούς $\varphi : F \longrightarrow H$, με την ιδιότητα $\varphi(\gamma_i) = g_i$ για κάθε $i = 1, ..., m$ και $\varphi(w_j) = 1$ για κάθε $j = 1, ..., m$, όπου H είναι μια υποομάδα της G.

Είναι αναμενόμενο επομένως να αναφερόμαστε στο *σύστημα* W *των εξισώσεων* $w_j = w_j(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = 1$ με *συντελεστές* $g_i \in G$ για κάθε $j = 1, ..., m$ και *αγνώστους* ξ_k, $k = 1, ..., n$. Θα ονομάζουμε δε το σύνολο των $x_k = \varphi(\xi_k)$, $k = 1, ..., m$ ως *λύση του συστήματος εξισώσεων* W.

Έχοντας κατά νου τον άνωθεν ορισμό, καθώς και τον γενικότερο τρόπο σκέψης, θα αποδείξουμε στη συνέχεια - μεταξύ άλλων - ότι στην κλάση των ελεύθερων ομάδων πεπερασμένης διάστασης, η επιλυσιμότητα εξισώσεων σχετίζεται στενά με την ύπαρξη retract υποομάδων της ελεύθερης ομάδας. Η έννοια της retract υποομάδας είναι εν γένει γνωστή και από την Αλγεβρική Τοπολογία και θα αναλυθεί ενδελεχώς στο πρώτο κεφάλαιο, ωστόσο ας παραθέσουμε εδώ έναν πρώτο ορισμό.

Ορισμός Έστω G ομάδα. Λέμε ότι μια υποομάδα H της G είναι retract για την G, αν υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : G \longrightarrow H$ με $\varphi(h) = h$ για κάθε $h \in H$. Αυτός ο ομομορφισμός φ, αν υπάρχει, θα ονομάζεται retraction της G.

Προτού προχωρήσουμε σε μια πρώτη επιγραμματική παρουσίαση του κύριου Θεωρήματος της εργασίας, θα χρειαστούμε δύο ορισμούς:

Ορισμός Έστω G ομάδα και H μια υποομάδα της. Τότε η H θα ονομάζεται algebraically closed στην G, αν για κάθε S πεπερασμένο σύστημα εξισώσεων με σταθερές από την H ισχύει η εξής ιδιότητα: Αν το S έχει λύση στην G, τότε έχει λύση και στην H.

Αναλόγως, η H θα ονομάζεται verbally closed στην G, αν για κάθε λέξη $w \in F(X)$ - όπου X είναι ένα σύνολο και $F(X)$ η ελεύθερη ομάδα που παράγεται από το X - η εξίσωση $w(x_1, x_2, ... x_n)$ έχει λύση στην G αν και μόνο αν έχει λύση στην H.

Τώρα είμαστε αρκούντως εξοπλισμένοι, ώστε να περάσουμε στην παρουσίαση του Θεωρήματος.

Θεώρημα Έστω F ελεύθερη ομάδα πεπερασμένης τάξης και H μια υποομάδα της. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) Η H είναι retract της F.

β) Η H είναι verbally closed υποομάδα της F.

γ) Η H είναι algebraically closed υποομάδα της F.

Εδώ καλείται ο αναγνώστης να παρατηρήσει μια διαισθητική φυσικότητα της ισοδυναμίας των α),β),γ) που εκπηγάζει από την εις βάθος κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης υπεράνω ομάδας καθώς και των retract υποομάδων.

Παραταύτα, η ενασχόληση των μαθηματικών με τις εξισώσεις υπεράνω ομάδων δεν εδράζεται αποκλειστικά στην αντιμετώπιση αλγεβρικής φύσης προβλημάτων: τουναντίον, η επιλυσιμότητα εξισώσεων υπεράνω ομάδων συσχετίζεται με την αποκρισιμότητα της θεωρίας που περιγράφει διάφορες κλάσεις ομάδων, ήτοι, το κατά πόσον είναι δυνατόν να αποφανθούμε για την εγκυρότητα μιας οιασδήποτε πρότασης που εμπίπτει στην εκάστοτε θεωρία. Θα ήταν λανθασμένο συνεπώς να νομίσουμε ότι η παρούσα μαθηματική περιοχή, την οποία εδώ επιχειρούμε εξερευνήσουμε γνωστικά, δεν κατευθύνει τον μελετητή της eo ipso στην ψαύση γνωστικών αντικειμένων φαινομενικά ασυσχέτιστων με εκείνη.

Προς δικαίωση του ισχυρισμού μας τούτου, θα αποδείξουμε στην πορεία ότι mutandis mutandis η ιδιότητα του verbally (ή algebraically) closed, (θυμηθείτε εδώ το προηγούμενο Θεώρημα!) σε πεπερασμένα παραγόμενες υποομάδες μιας οποιασδήποτε ελεύθερης ομάδας πεπερασμένης τάξης είναι αποκρίσιμη.

Τουτέστιν, θα αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα Έστω F_r ελεύθερη ομάδα με βάση ένα (πεπερασμένο) σύνολο $\{ f_1, f_2, ..., f_r \}$, $r \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει αλγόριθμος που να αποκρίνεται για το εάν μια πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της F_r είναι verbally algebraically closed ή όχι.

Εν κατακλείδι, έχοντας παρουσιάσει τα προλεχθέντα, θα αναδείξουμε ορισμένα ανοικτά προβλήματα αναφορικά με τις verbally closed υποομάδες συγκεκριμένων κλάσεων ομάδων, τα οποία ανακύπτουν φυσιολογικά.

0.1 Γενικότητες και Προκαταρκτικά

0.1.1 Παραδείγματα εξισώσεων υπεράνω ελευθέρων ομάδων

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση του κυρίου Θεωρήματος της εργασίας, το οποίο αποδείχθηκε στο paper των Myasnikov και Roman'kov "Verbally closed subgroups of free groups" [3], δέον θα ήταν να παραθέσουμε ορισμένα παραδείγματα εξισώσεων υπεράνω ελευθέρων ομάδων - μαζί με τις λύσεις τους - ώστε ο αναγνώστης να αποκτήσει την απαραίτητη ευχέρεια και τη μαθηματική εποπτεία για τη βέλτιστη συμπόρευση με την ανάπτυξη της θεωρίας.

Στην Εισαγωγή αναφερθήκαμε σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα εξίσωσης υπεράνω ομάδας, ένα πρόβλημα που θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε ως ¨πρόβλημα ύπαρξης ρίζας σε υποομάδα¨. Μία φυσική γενίκευση αυτού του προβλήματος, η λύση της οποίας δύναται να επιλυθεί τόσο στοιχειωδώς όσο και με την προσφυγή σε βαθιά θεωρήματα της θεωρίας ομάδων είναι το ακόλουθο:

Έστω F_n ελεύθερη ομάδα διάστασης n. Έστωσαν επίσης $g_1,\, g_2 \in F_n$. Τότε $g_1 g_2 = g_2 g_1$ αν και μόνο αν υπάρχει $w \in F_n : g_1,\, g_2 \in \langle\, w \,\rangle$.

Εν άλλοις λόγοις, δυο στοιχεία σε μια πεπερασμένης διάστασης ελεύθερη ομάδα μετατίθενται αν και μόνο αν υπάρχει $w \in F_n : g_1 = w^{\kappa},\, g_2 = w^{\lambda}$, για κάποιοους φυσικούς αριθμούς κ, λ.

Μία άμεση αλλά διόλου τετριμμένη απόδειξη αυτού του ισχυρισμού έπεται με προφανή τρόπο από το Θεώρημα Nielsen-Schreier. Τω όντι, αν $g_1 g_2 = g_2 g_1$, τότε η $\langle g_1, g_2 \rangle$ είναι αβελιανή υποομάδα της F_n. Όμως από το Θεώρημα Nielsen-Schreier, η $\langle g_1, g_2 \rangle$ είναι ελεύθερη υποομάδα της F_n. Συνεπώς $\langle g_1, g_2 \rangle = \mathbb{Z}$, άρα η $\langle g_1, g_2 \rangle$ είναι κυκλική και προφανώς $g_1, g_2 \in \langle g_1, g_2 \rangle$.

Η αντίστροφη κατεύθυνση δε, είναι άμεση:

Παρατηρούμε ότι αν $g_1 = w^k, g_2 = w^m$ για κάποιους φυσικούς k, m, τότε θα έχουμε $g_1 g_2 = w^k w^m = w^{k+m} = w^{m+k} = w^m w^k = g_2 g_1$.

Εντούτοις, για το ευθύ θα εργαστούμε με στοιχειωδέστερο τρόπο, ώστε να αποκτήσουμε συν αυτώ την επιθυμητή εξοικείωση. Πριν από αυτό όμως, ας συμφωνήσουμε ως προς έναν συμβολισμό:

Συμβολισμός Έστω F ελεύθερη ομάδα και X μια βάση της. Το *ανηγμένο μήκος* ενός στοιχείου $g \in F$ ως προς τη βάση X θα το συμβολίζουμε με $\ell_X(g)$. Όταν η βάση X έχει σταθεροποιηθεί και δεν υφίσταται κίνδυνος σύγχυσης, θα το συμβολίζουμε απλούστερα με $\ell(g)$.

Ας περάσουμε τώρα στην απόδειξη:

Αν τα g_1, g_2 έχουν μήκος 0 ή 1, το συμπέρασμα είναι προφανές. Ας υποθέσουμε λοιπόν χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα μήκη τους είναι μεγαλύτερα ή ίσα του 2.

Για κάποια βάση της F_n, έστω X, εκφράζουμε τα g_1, g_2 συναρτήσει των στοιχείων αυτής της βάσης. Θα έχουμε λοιπόν

$g_1 = x_1...x_m$, $g_2 = \psi_1 \ldots \psi_n$, για x_i, $\psi_j \in X$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$ και κάποιους φυσικούς n, m με(χωρίς βλάβη της γενικότητας) $n \leq m$. Τότε σε ανηγμένη μορφή θα έχουμε:

$g_1 g_2 = x_1...x_{m-r}\psi_{r+1}...\psi_n$ και

$g_2 g_1 = \psi_1...\psi_{n-s}x_{s+1}...x_m$

Επιπλέον από τη σχέση $g_1g_2 = g_2g_1$ θα έχουμε ότι $\ell(g_1g_2) = \ell(g_2g_1)$.

Άρα $m + n - 2r - 1 = \ell(g_1g_2) = \ell(g_2g_1) = m + n - 2s - 1$. Άρα $r = s$. Επιπλέον, $0 \leq r \leq n$.

Θα προχωρήσουμε με επαγωγή.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

α) $r = 0$

β) $r = n$

γ)$0 < r < n$

α) Αν $r = 0$, τότε $\psi_i = x_i$ για κάθε $i = 1, ..., n$, άρα $g_1 = (x_1...x_n)(x_{n+1}...x_m) = (\psi_1...\psi_n)(x_{n+1}...x_m) = g_2u$.

Παρατηρούμε ότι $g_2u = g_1 = g_2^{-1}g_1g_2 = ug_2$. Επειδή τώρα $\ell(u) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2)$, από την επαγωγική υπόθεση λαμβάνουμε το επιθυμητό συμπέρασμα.

β) Αν $r = n$, τότε $\psi_i = {x_{m-i+1}}^{-1}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.

Άρα $g_1^{-1} = ({x_m}^{-1}...{x_{m-n+1}}^{-1})({x_{m-n+2}}^{-1}...{x_m}^{-1})$

$= (\psi_1...\psi_n)({x_{m-n+2}}^{-1}...{x_m}^{-1}) = g_2u$.

Παρατηρούμε ότι $g_2u = {g_1}^{-1} = ({g_2}^{-1}g_1g_2)^{-1} = {g_2}^{-1}{g_1}^{-1}g_2 = ug_2$.

Οπότε πάλι από την επαγωγική υπόθεση έχουμε το συμπέρασμα.

γ) Αν $0 < r < n$, τότε $x_1 = \psi_1, \psi_1 = {x_m}^{-1}, \psi_n = x_m$ και $x_1 = {\psi_m}^{-1}$.

Έστω $z = x_1, a' = x_2...x_{m-1}, b' = \psi_2...\psi_{n-1}$. Τότε $a = za'z^{-1}, b = zb'z^{-1}$. Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση για τα a', b', έχουμε πάλι το συμπέρασμα.

Παρατήρηση 0.1.1 *Προφανώς στην διαδικασία της απόδειξης, η υπόθεση ότι η ελεύθερη ομάδα F_n είναι πεπερασμένης διάστασης δεν διαδραμάτισε κανέναν ουσιαστικό ρόλο. Το αυτό συμπέρασμα θα ισχύει επομένως και για ελεύθερη ομάδα απείρου διαστάσεως, καθώς τα g_1, g_2 θα εκφράζονται και σε αυτήν την περίπτωση ως λέξεις πεπερασμένου ανηγμένου μήκους από την άπειρη βάση της ελεύθερης ομάδας που θα είχε επιλεγεί.*

0.1.2 Retract και verbal υποομάδες

Όπως είχε προοιωνιστεί στην Εισαγωγή, πριν προβούμε στην ανάπτυξη της κυρίως θεωρίας θα ήταν χρήσιμο να εξετάσουμε την στοιχειώδη πλην πολύ σημαντική έννοια της retract υποομάδας μιας ομάδας, επικεντρωνόμενοι εν ευθέτω χρόνω στην εξέταση της έννοιας στις ελεύθερες ομάδες και στις verbal υποομάδες τους.

Ιστορικά, η έννοια της retract υποομάδες έχει τις ρίζες της στην Αλγεβρική Τοπολογία: Ένας υπόχωρος A ενός τοπολογικού χώρου X θα λέγεται retract, αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $r : X \longrightarrow A$: $r(a) = a$ για κάθε $a \in A$. Η r σε αυτήν την περίπτωση θα καλείται retraction.

Διαισθητικά, τούτο σημαίνει ότι ο χώρος X δύναται να απεικονιστεί με συνεχής τρόπο σε έναν υπόχωρό του. Χώροι με αυτήν την ιδιότητα ονομάζονται retractible και παρουσιάζουν ενδιαφέρουσες αλγεβροτοπολογικές ιδιότητες. Μολαταύτα, σε αυτήν την εργασία θα προσεγγίσουμε την έννοια της retract υποομάδας από καθαρά ομαδοθεωρητικής σκοπιάς.

Ορισμός 0.1.2 *Έστω G ομάδα και H μια υποομάδα της. Η H ονομάζεται* retract *της G, αν υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : G \longrightarrow H$: $\varphi(h) = h$ για κάθε $h \in H$.*

Γενικές Ιδιότητες των retract υποομάδων

Πρόταση 0.1.3 *Έστω G ομάδα και H μια υποομάδα της. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

α) Η H είναι retract της G.

β) Έστω K ομάδα και ομομορφισμός $\pi : H \longrightarrow K$. Τότε υπάρχει ομομορφισμός $\pi' : G \longrightarrow K$: $\pi'(h) = \pi(h)$ για κάθε $h \in H$.

γ) Υπάρχει $N \lhd G$: $G = NH$ και $H \cap N = \{1\}$.

Απόδειξη: α) $\Rightarrow$ β) Η H είναι retract της G, άρα υπάρχει ομομορφισμός $\pi : G \longrightarrow H$. Έστω K ομάδα και ομομορφισμός $\pi : H \longrightarrow K$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\pi' = \pi \circ \varphi : G \longrightarrow K$. Η απεικόνιση π' είναι ομομορφισμός ως σύνθεση των ομομορφισμών π και φ και ισχύει ότι $\pi'(h) = \pi(h)$ για κάθε $h \in H$.

β) $\Rightarrow$ γ) Έστω $K = H$ και $\pi = id_H : H \longrightarrow H$. Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : G \longrightarrow H : \varphi_{/H} = id_H$, που σημαίνει ακριβώς ότι η H είναι retract της G.

α) $\Longrightarrow$ γ) Η H είναι retract της G, άρα υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : G \longrightarrow H$ ώστε $\varphi_{/H} = id_H$.

Ορίζουμε $N = Ker(\varphi) \lhd G$. Τότε ελέγχουμε ότι πράγματι ισύουν τα κάτωθι:

1. $G = NH$

Πράγματι, έστω $g \in G$. Τότε $g = g\varphi(g)^{-1}\varphi(g)$, όπου $\varphi(g) \in H$. Επίσης, $\varphi(g\varphi(g)^{-1}) = \varphi(g)\varphi(\varphi(g)^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = 1$.

Συνεπώς $g\varphi(g)^{-1} \in N$, άρα $g \in NH$ και επομένως $G \subseteq NH$.

Προφανώς $NH \subseteq G$.

Άρα $G = NH$.

2. $H \cap N = \{1\}$

Πράγματι, έστω $h \in H \cap N$. Επειδή $h \in N$, ισχύει ότι $\varphi(h) = 1$, αλλά $\varphi_{/H} = id_H$, συνεπώς $\varphi(h) = h$. Άρα $h = \varphi(h) = 1$.

γ) $\Longrightarrow$ α) Έστω $gN \in G/N$. Από την υπόθεση έχουμε $G = NH$, άρα $gN = hN$, για κάποιο $h \in H$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν την απεικόνιση $\pi : G/N \longrightarrow H$: $hN \mapsto h$. Παρατηρούμε τα εξής:

Η π είναι καλώς ορισμένη: Πράγματι, έστω $hN = h'N$, για κάποια $h, h' \in H$. Τότε $hh'^{-1}N = N \Longrightarrow hh'^{-1} \in N$. Προφανώς $hh'^{-1} \in H \Longrightarrow hh'^{-1} \in H \cap N = \{1\}$. Άρα $hh'^{-1} = 1 \Longrightarrow h = h' \Longrightarrow \pi(hN) = \pi(h'N)$.

Η π είναι ομομορφισμός ομάδων: Πράγματι, έστωσαν $h, h' \in H$. Τότε $\pi(hNh'N) = \pi(hh'N) = hh' = \pi(hN)\pi(h'N)$.

Ας θεωρήσουμε τον φυσικό επιμορφισμό $\pi' : G \longrightarrow G/N$. Έστω ακόμη $\varphi = \pi \circ \pi' : G \longrightarrow H : g \mapsto \varphi(g) = \pi \circ \pi')(g)\pi(gN) = \pi(hN) = h$.

Τότε η φ είναι ομομορφισμός και έχουμε ότι $\varphi_{/H} = id_H$.

Άρα η H είναι retract της G.

Πρόταση 0.1.4 *Έστωσαν A, B ομάδες. Τότε η ομάδα A είναι retract των ακόλουθων ομάδων G:*

α) $G = A \times B$

β) $G = A * B$

Απόδειξη: α) Έστω $\varphi : G \longrightarrow A : (a, b) \mapsto a, a \in A, b \in B$. Η φ είναι προφανώς ομομορφισμός και $\varphi_{/A} = id_A$.

β) Έστωσαν οι ομομορφισμοί $\varphi_A = id_A : A \longrightarrow A$ και

$\varphi_B : B \longrightarrow A : b \mapsto 1$.

Από την Καθολική Συνθήκη του Ελευθέρου Γινομένου υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : A * B \longrightarrow A : \varphi_{/A} = \varphi_A = id_A$ και $\varphi_{/B} = \varphi_B$

Άρα ο φ είναι ο ζητούμενος ομομορφισμός και έτσι η ομάδα A είναι retract της G.

Verbal υποομάδες

Ένα πρόβλημα που ελκύει ενδιαφέρον στη θεωρία ομάδων είναι η εύρεση αναλλοιώτων(fully invariant) υποομάδων μιας ομάδας, υποομάδων δηλαδή που απεικονίζονται στον εαυτό τους μέσω κάθε ενδομορφισμού της ομάδας. Μια έννοια που μας επιτρέπει να κατασκευάζουμε πλήρως αναλλοίωτες υποομάδες είναι οι verbal υποομάδες.

Ορισμός 0.1.5 *Έστω $W_\mu(x_\lambda), \mu = 1,\ 2,\ ...,$ σύνολο λέξεων στα σύμβολα x_λ, $\lambda = 1,\ 2,\ ....$ Τότε η $\{W_\mu\}$* - verbal υποομάδα *μιας ομάδας G είναι η υποομάδα $G(W_\mu, ...)$ της G που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής $W_\mu(g_\lambda)$, $g_\lambda \in G$, $\lambda = 1,\ 2,\ ...,\ \mu = 1, 2, ...,$*

Παρατήρηση 0.1.6 *Έστω G ομάδα και $G(W_\mu, ...)$ μια verbal υποομάδα της. Τότε η $G(W_\mu, ...)$ είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της G.*

Απόδειξη: Έστω $a \in End(G)$. Τότε $a(W_\mu(g_\lambda)) = W_\mu(a(g_\lambda))$, για κάθε $\lambda = 1, 2, ...$, $\mu = 1, 2, ...$, $\in G(W_\mu, ...)$.

Πρόταση 0.1.7 *(Takahasi) Έστω G ομάδα και A retract υποομάδα της G. Έστω επιπλέον $G(W_\mu, ...)$ verbal υποομάδα της G. Τότε ισχύει $G(W_\mu, ...) \cap A = A(W_\mu, ...)$.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι $A(W_\mu) \subseteq G(W_\mu) \cap A$.

Προφανώς $A(W_\mu)) \subseteq A$.

Επειδή όμως από την προηγούμενη Παρατήρηση η $G(W_\mu)$ είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της G, έπεται ότι $A(W_\mu) \subseteq G(W_\mu)$. Άρα $A(W_\mu)) \subseteq G(W_\mu) \cap A$.

Δείχνουμε τώρα αντιστρόφως ότι $G(W_\mu) \cap A \subseteq A(W_\mu))$.

Ισχύει προφανώς ότι $G(W_\mu) \cap A \subseteq A$. Έστω τώρα $\varphi : G \longrightarrow A$ retract της G. Τότε, επειδή η φ είναι ενδομορφισμός της G και η $G(W_\mu)$ είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της G, έχουμε $\varphi((G(W_\mu) \cap A) \subseteq \varphi(G(W_\mu)) \cap \varphi(A) \subseteq G(W_\mu)) \cap A$. Άρα $G(W_\mu)) \cap A \subseteq A(W_\mu)$.

0.1.3 Ελεύθερες Μηδενοδύναμες Ομάδες

Μεταθέτες

Ορισμός 0.1.8 *Έστω G ομάδα και $g_1,\, g_2 \in G$. Τότε το $[g_1,\, g_2] = {g_1}^{-1}{g_2}^{-1}g_1g_2$ καλείται* μεταθέτης των $g_1,\, g_2$.

Γενικότερα τώρα, αν $A,\, B$ είναι υποσύνολα της G, το $[A,\, B] = \langle\, [a,\, b] : a \in A,\, b \in B\,\rangle$, είναι αντίστοιχα ο μεταθέτης των υποσυνόλων $A,\, B$ *και είναι η ομάδα που παράγεται από τους μεταθέτες όλων των στοιχείων των υποσυνόλων $A,\, B$.*

Συμβολισμός:

α) Έστω G ομάδα και $x_1,\, x_2,\, x_3 \in G$. Τότε $[x_1,\, x_2,\, x_3] = [[x_1,\, x_2],\, x_3]]$. Επαγωγικά, αν $x_1,\, x_2,\, x_3,\, ...,x_{n-1},\, x_n \in G$, τότε $[x_1,\, x_2,\, x_3,\, ...,x_{n-1},\, x_n] = [[x_1,\, x_2,\, x_3,\, ...,x_{n-1}],\, x_n]] = [[[x_1,\, x_2,\, ...,x_{n-2}],\, x_{n-1}],\, x_n]$ κ.ο.κ..

β) Έστω G ομάδα και $a,\, b,\, c \in G$. Τότε $[a,\, b]^c = c^{-1}[a,\, b]c$.

Ορισμός 0.1.9 *Έστω G ομάδα και $x \in G$. Τότε ο αυτομορφισμός $\tau_x : G \longrightarrow G$, όπου $\tau_x(g) = x^{-1}gx$, ονομάζεται* εσωτερικός αυτομορφισμός *της ομάδας G.*

Λήμμα 0.1.10 *Έστω G ομάδα και $x,\, y,\, z \in G$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

α) $[x,\, y]^{-1} = [y,\, x]$

β) $[xy,\, z] = [x,\, z][x,\, z,\, y][y,\, z]$

Απόδειξη: α) $[x,\, y]^{-1} = (x^{-1}y^{-1}xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}yx = [y,\, x]$

β) $[x,\, y,\, z] = (xy)^{-1}z^{-1}xyz = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz$.

Από την άλλη, έχουμε $[x,\, z][x,\, z,\, y][y,\, z] = x^{-1}z^{-1}xz[[x,\, z],y]y^{-1}z^{-1}yz = x^{-1}z^{-1}yz = x^{-1}z^{-1}xz[x,z]^{-1}y^{-1}[x,z]yy^{-1}z^{-1}yz$
$= x^{-1}z^{-1}xz(x^{-1}z^{-1}xz)^{-1}y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzz^{-1}yz$
$= x^{-1}z^{-1}xzz^{-1}x^{-1}zxy^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz.$

Πρόταση 0.1.11 *(Ταυτότητα Hall-Witt) Έστω G ομάδα και $x, y, z \in G$. Τότε ισχύει η ταυτότητα*

$[x,\, y^{-1},\, z]^y[y,\, z^{-1},\, x]^z[z,\, x^{-1},\, y]^x = 1.$

Απόδειξη: $[x,\, y^{-1},\, z]^y = y^{-1}[x,\, y^{-1},\, z]y = y^{-1}[[x,\, y^{-1}],\, z]y$
$= y^{-1}[x,\, y^{-1}]^{-1}z^{-1}[x,y^{-1}]zy = y^{-1}(x^{-1}yxy^{-1})^{-1}z^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy$
$= y^{-1}yx^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy = x^{-1}y^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zy(1)$

$[y,\, z^{-1},\, x]^z = z^{-1}[y,\, z^{-1},\, x]z = z^{-1}[[y,z^{-1}],x]z = z^{-1}[y,z^{-1}]^{-1}x^{-1}[y,z^{-1}]xz =$
$z^{-1}(y^{-1}zyz^{-1})^{-1}x^{-1}y{-}1zyz^{-1}xz = z^{-1}zy^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyz^{-1}xz$
$= y^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyz^{-1}xz(2)$

$[z,\, x^{-1},\, y]^x = x^{-1}[z,\, x^{-1},\, y]x = x^{-1}[[z,\, x^{-1}],\, y]x = x^{-1}[z,\, x^{-1}]^{-1}y^{-1}[z,\, x^{-1}]yx =$
$x^{-1}(z^{-1}xzx^{-1})^{-1}y^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx = x^{-1}xz^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx$
$= z^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx(3)$

Από τις (1),(2) και (3), θα έχουμε επομένως:

$[x,\, y^{-1},\, z]^y[y,\, z^{-1},\, x]^z[z,\, x^{-1},\, y]^x$
$= xy^{-1}xz^{-1}x^{-1}yxy^{-1}zyy^{-1}z^{-1}yx^{-1}y^{-1}zyz^{-1}xzz^{-1}x^{-1}$
$zx^{-1}z^{-1}xzx^{-1}yx = xy^{-1}xz^{-1}x^{-1}xzx^{-1}yx = 1.$

Λήμμα 0.1.12 *(Των τριών υποομάδων) Έστω G ομάδα και $X,\, Y,\, Z \lhd G$. Τότε $[X,\, Y,\, Z] \leq [Y,\, Z,\, X][Z,\, X,\, Y]$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη έπεται άμεσα από την ακόλουθη απλή παρατήρηση:

Αν G ομάδα και $H \lhd G$, τότε για κάθε άλλη υποομάδα K της G, ισχύει ότι $[H,\, K] = [K,\, H]$.

Από αυτήν λοιπόν την παρατήρηση θα έχουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση ότι $[Y,\, Z,\, X] = [[Y,\, Z],\, X] = [X,\, [Y,\, Z]] = [X,\, Y,\, Z]$, διότι η $[Y,\, Z]$ είναι κανονική υποομάδα της G ως μεταθέτης των κανονικών υποομάδων $Y,\, Z$ Από αυτό τώρα έπεται και το συμπέρασμα.

Μηδενοδύναμες Ομάδες

Η έννοια της μηδενοδυναμίας και κατά συνέπεια της μηδενοδύναμης ομάδας κατέχει βασικό ρόλο στη θεωρία ομάδων, καθώς, όπως και η ανάλογη έννοια της επιλυσιμότητας, μας επικουρεί στην ανίχνευση της δομής μιας ομάδας, η οποία εν γένει δύναται να είναι αρκετά περίπλοκη.

Ορισμός 0.1.13 *Έστω G ομάδα. Ορίζουμε επαγωγικά μια ακολουθία υποομάδων της G ως εξής:*

$\gamma_1(G) = G,\, \gamma_2(G) = [G, G] = G',\, \gamma_3(G) = [G',\, G],\, ..., \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G),\, G]$ $i = 1,\, ...n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Έτσι, ορίζεται για κάθε φυσικό n μια ακολουθία υποομάδων της G, η $\gamma_n(G)$.

Στις ιδιότητες παρακάτω, θα αποδείξουμε ότι $\gamma_{i+1}(G) \lhd \gamma_i(G)$ για κάθε $i = 1, ...n$. Θα έχουμε τότε μια σειρά της ομάδας G της μορφής

$\gamma_{i+1}(G) \lhd \gamma_i(G) \lhd ... \lhd \gamma_2(G) \lhd \gamma_1(G) = G,$

την οποία θα ονομάζουμε κατωτέρα κεντρική σειρά *της ομάδας G.*

Πρόταση 0.1.14 *Έστω G ομάδα. Τότε η κατωτέρα κεντρική σειρά της G έχει τις εξής ιδιότητες:*

α) $\gamma_i(G) \lhd G$ για κάθε $i = 1, ..., n$

β) $\gamma_{i+1}(G) \lhd \gamma_i(G)$.

Απόδειξη: α) Θα προχωρήσουμε με επαγωγή.

Προφανώς $\gamma_1(G) = G \lhd G$.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\gamma_i(G) \lhd G$ για κάποιο i. Έστωσαν $x, g \in G$ και $g_i \in \gamma_i(G)$. Τότε $\tau_x([g_i,\, g]) = [\tau_x(g_i),\, \tau_x(g)] \in \gamma_{i+1}(G)$. Συνεπώς $\tau_x(\gamma_{i+1}(G)) \subseteq \gamma_{i+1}(G)$, άρα $\gamma_{i+1}(G) \lhd G$.

β) Θα δείξουμε πρώτα ότι $\gamma_{i+1}(G) \subseteq \gamma_i(G)$.

Έστω λοιπόν $g_i \in \gamma_i(G)$ και $g \in G$. Τότε $[g_i, g] = {g_i}^{-1}g^{-1}g_ig \in \gamma_i(G) \Longrightarrow \gamma_{i+1}(G) \subseteq \gamma_i(G)$.

Επειδή τέλος, ισχύει από το α) ότι $\gamma_i(G) \lhd G$ για κάθε $i = 1, ...,\, n$, θα έχουμε και το ότι $\gamma_{i+1}(G) \lhd \gamma_i(G)$.

Πρόταση 0.1.15 *Έστω G ομάδα. Τότε ισχύει η ανισότητα*
$[\gamma_m(G),\, \gamma_n(G)] \leq \gamma_{n+m}(G)$ *για κάθε* $n,\, m \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε έναν φυσικό m.

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $[\gamma_m(G), \gamma_n(G)] \leq \gamma_{n+m}(G)$ για κάθε $n \in N$.

Έστω $n = 1$. Τότε $[\gamma_m(G), \gamma_1(G)] = [\gamma_m(G), G] = \gamma_{m+1}(G)$.

Έστω $n > 1$ και ας υποθέσουμε ότι $[\gamma_m(G), \gamma_n(G)] \leq \gamma_{n+m}(G)$. Θα δείξουμε ότι $[\gamma_m(G), \gamma_{n+1}(G)] \leq \gamma_{n+1+m}(G)$.

Έχουμε $[\gamma_m(G), \gamma_{n+1}(G)] = [\gamma_m(G), [\gamma_n(G), G]] \leq [\gamma_n(G), G, \gamma_m(G)][G, \gamma_m(G), \gamma_n(G)] = [\gamma_{n+1}(G), \gamma_m(G)][\gamma_{m+1}(G), \gamma_n(G)] \leq \gamma_{m+1+n}(G)\gamma_{m+1+n}(G) = \gamma_{m+1+n}(G) = \gamma_{n+1+m}(G)$.

Πρόταση 0.1.16 *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $1 \leq i \leq n$. Σταθεροποιούμε $x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n \in G$ και ορίζουμε $f_i = {f_i}^n : G \longrightarrow \gamma_n(G)$ ως ακολούθως:*
$f_i(g) = [x_1,\, ...,\, x_{i-1},\, g,\, x_{i+1},\, ...,\, x_n]$
Αν $x \in G$ και $y \in \gamma_m(G)$, τότε
$f_i(xy) \equiv f_i(x)f_i(y) mod \gamma_{n+m}(G) \equiv f_i(x) mod \gamma_{n+m-1}(G)$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε πρώτα τη σχέση $f_i(xy) \equiv f_i(x)f_i(y) mod \gamma_{n+m}(G)$ (1)

Έστω $i = 1$. Θα προχωρήσουμε με επαγωγή.

Έστω $n = 2$. Τότε για να δειχθεί η (1), αρκεί να δειχθεί η σχέση

$[xy, z] \equiv [x, z][y, z] mod \gamma_{2+m}(G)$, η οποία από το β) του Λήμματος 0.1.10 είναι ισοδύναμη με την $[x, z][x, z, y][y, z] \equiv [x, z][y, z] mod \gamma_{2+m}(G) \Longleftrightarrow [y, z]^{-1}[x, z, y][y, z] \in \gamma_{2+m}(G) \Longleftrightarrow [y, z]^{-1}[[x, z], y][y, z] \in \gamma_{2+m}(G)$, όπου $[y, z]^{-1} \in \gamma_{1+m}(G)$, $[y, z] \in \gamma_{1+m}(G)$ και $[[x, z], y] \in \gamma_{2+m}(G)$.

Άρα το $[y, z]^{-1}[[x, z], y][y, z] \in \gamma_{2+m}(G)$, διότι από τις ιδιότητες της κατωτέρας κεντρικής σειράς $\gamma_{2+m}(G) \lhd \gamma_{1+m}(G)$.

Έστω $n > 2$ και ας υποθέσουμε ότι ${f_1}^{n-1}(xy) = {f_1}^{n-1}(x){f_1}^{n-1}(y)z$, όπου $z \in \gamma_{n-1+m}(G)$.

Τότε ${f_1}^n(xy) = [{f_1}^{n-1}(xy), x_n] = [{f_1}^{n-1}(x){f_1}^{n-1}(y)z, x_n] \equiv {f_1}^n(x){f_1}^n(y) mod \gamma_{n+m}(G)$, όπως ακριβώς στο βήμα για $n = 2$.

Έστω τώρα $i > 1$. Έχουμε ${f_i}^n(xy) = [x_1, ..., x_{i-1}, xy, x_{i+1}, ..., x_n]$
$= [u,\, xy,\, x_{i+1}, ..., x_n] = [[u,\, x][u,\, y][[u,\, y][u,\, x]][u,\, x,\, y],\, x_{i+1}, ..., x_n]$
$= [[u,\, x][u,\, y]z,\, x_{i+1}, ..., x_n] = {F_1}^{n-i+1}([u,\, x][u,\, y]z)$, όπου η F^{n-i+1} προκύπτει από την f^{n-i+1}, αν αντικαταστήσουμε το x_j με το x_{i+j-1}.

Έχουμε ${f_i}^n(xy) \equiv {F_1}^{n-i+1}([u,\, x]){F_1}^{n-i+1}([u,\, y]){F_1}^{n-i+1}(z) mod \gamma_{n+m}(G) = {f_1}^n(x){f_1}^n(y){F_1}^{n-i+1}(z) mod \gamma_{n+m}(G) \equiv {f_1}^n(x){f_1}^n(y) mod \gamma_{n+m}(G)$, διότι ${F_1}^{n-i+1}(z) \in \gamma_{n+m}(G)$.

Τέλος, θα δείξουμε τη σχέση $f_i(x)f_i(y) mod \gamma_{n+m}(G) \equiv f_i(x) mod \gamma_{n+m-1}(G)$ (2)

Για να δείξουμε την (2), αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε ότι $f_i(y)z \in \gamma_{n+m-1}(G)$, για κάποιο $z \in \gamma_{n+m}(G)$. Όμως $f_i(y) = [x_1, ..., x_{i-1},\, y,\, x_{i+1}, ..., x_n]$, όπου $y \in \gamma_m(G)$. Επομένως, εφόσον $f_i(y) \in \gamma_{n+m-1}(G)$, θα έχουμε ότι $f_i(y)z \in \gamma_{n+m-1}$, όπερ έδει δείξαι.

Συμβολισμός Έστω G ομάδα και A, B υποσύνολα της G. Τότε $[A,\, _1B] = [A,\, B]$. Επαγωγικά, θα συμβολίζουμε $[A,\, _nB] = [[A,\, _{n-1}B],\, B]$.

Ορισμός 0.1.17 *Έστω G ομάδα. Μια κανονική σειρά της G, $G = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n \lhd \ldots$ λέγεται κεντρική αν $[G_{i+1}, G] \subseteq G_i$, για κάθε $i = 1, ..., n$.*

Ορισμός 0.1.18 *Μια ομάδα ονομάζεται* μηδενοδύναμη *αν έχει κεντρική σειρά.*

Πόρισμα 0.1.19 *Έστω G ομάδα. Η G είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν υπάρχει κάποιος φυσικός n, ώστε $\gamma_n(G) = 1$.*

Απόδειξη: Προφανής.

Ορισμός 0.1.20 *Έστω G μια μηδενοδύναμη ομάδα. Τότε ο μικρότερος φυσικός αριθμός n, για τον οποίον ισχύει ότι $\gamma_{n+1}(G) = 1$, ονομάζεται* κλάση μηδενοδυναμίας *της G.*

Ελεύθερες Μηδενοδύναμες Ομάδες

Έστω F_r μια ελεύθερη ομάδα πεπερασμένης διάστασης r και $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ μια βάση της. Από τις ιδιότητες της κεντρικής σειράς θα έχουμε ότι $\gamma_n(F_r) \lhd F_r$ για κάθε $n \in N$. Άρα για κάθε $n \in N$ ορίζεται η ομάδα $F_r/\gamma_{n+1}(F_r)$.

Έχουμε επιπλέον ότι $\gamma_{n+1}(F_r/\gamma_{n+1}(F_r)) \subseteq \gamma_{n+1}(F_r)/\gamma_{n+1}(F_r) = 1$. Από το Πόρισμα 0.1.19 για κάθε n φυσικό αριθμό, η ομάδα $F_r/\gamma_{n+1}(F_r)$ είναι μηδενοδύναμη με κλάση μηδενοδυναμίας n. Τοιουτοτρόπως, οδηγούμαστε φυσιολογικά στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 0.1.21 *Έστω F_r ελεύθερη ομάδα με βάση το σύνολο $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ και c ένας φυσικός αριθμός. Τότε ορίζεται η μηδενοδύναμη ομάδα $N_{r,c} = F_r/\gamma_{c+1}(F_r)$ και ονομάζεται* ελεύθερη μηδενοδύναμη διάστασης r και κλάσης μηδενοδυναμίας c.

Οι ελεύθερες μηδενοδύναμες ομάδες παρουσιάζουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες, όπως θα δούμε παρακάτω. Στόχος μας από τούδε και έως το πέρας της παραγράφου θα είναι η εύρεση μιας βολικής περιγραφής των στοιχείων της παραγώγου υποομάδας ${N_{r,c}}' = [N_{r,c}, N_{r,c}] = \gamma_2(N_{r,c})$ μιας τυχούσας ελεύθερης μηδενοδύναμης ομάδας $N_{r,c}$, πληροφορία που θα χρησιμοποιηθεί εν καιρώ τω δέοντι στην κυρίως θεωρία που θα αναπτυχθεί.

Πρόταση 0.1.22 *Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα και $H \lhd G$. Υποθέτουμε ότι $G = G'\langle x_1, ..., x_m\rangle$. Τότε ισχύει*

$[H,\, G] = [H,\, x_1][H,\, x_2]...[H,\, x_m][H,\, _nG]$, *για κάθε $n \geq 1$.*

Απόδειξη: Θα εργαστούμε επαγωγικά.

Αν $n = 1$, τότε προφανώς $[H, G] = [H, x_1][H, x_2]...[H, x_m][H, G]$, διότι $[H, x_1][H, x_2]...[H, x_m] \subseteq [H, G]$.

Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για κάποιον φυσικό αριθμό $n \geq 1$, όπου n είναι η κλάση μηδενοδυναμίας της G. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $[H, {}_{n+1}G] = 1$, διότι η G είναι μηδενοδύναμη. Έστω $A = [H, {}_{n-1}G]$ και $\varphi : A \times G \longrightarrow [A, G] = [H, {}_nG] : (a, g) \mapsto [a, g]$. Η απεικόνιση φ επάγει απεικόνιση $\phi : A \times G/G' \longrightarrow [H, {}_nG]$ που είναι ομομορφισμός ως προς την πρώτη θέση. Πράγματι, έστωσαν $a_1, a_2 \in A$. Τότε υπάρχουν $h_1, h_2 \in H$, $g_1, g_2 \in {}_{n-1}G$ έτσι ώστε $a_1 = [h_1, g_1]$, $a_2 = [h_2, g_2]$. Έστω και τυχόν $g \in G/G'$. Έχουμε $[[h_1, g_1][h_2, g_2], g] = [[h_1, g_1], g][[h_1, g_1], g, [h_2, g_2]]$. Όμως, επειδή το $g \in G/G'$, θα έχουμε ότι $[[h_1, g_1], g, [h_2, g_2]] = 1$. Άρα όντως η ϕ είναι ομομορφισμός ως προς την πρώτη θέση.

Τώρα, επειδή $\gamma_{n+2}(G) = [G, {}_{n+1}G] = 1$, θα έχουμε ότι $\gamma_{n+1}(G) = Z(G)$ και συνεπώς $[H, {}_nG] \leq [G, {}_nG] = \gamma_{n+1}(G) = Z(G)$.

Άρα $[H,_n G] = [A, x_1]...[A, x_m]$.

Συνεπώς $[H, G] = [H, x_1]...[H, x_m][A, x_1]...[A, x_m] = [H, x_1][A, x_1]...[H, x_m]$ $[A, x_m]$, (διότι $[A, x_i] \leq Z(G)$ για κάθε $i = 1, ..., m$)

$= [H, x_1]...[H, x_m]$, διότι για κάθε $h \in H, a \in A, x \in G$ από την Πρόταση 1.3.13 θα έχουμε $[h, x][a, x] \equiv [ha, x] mod[H, G, A] = 1$.

Άμεσο απότοκο τώρα των ιδιοτήτων της κατωτέρας κεντρικής σειράς είναι το εξής Πόρισμα, το οποίο ήταν και ο αρχικός μας στόχος αυτής της παραγράφου και που με το οποίο ολοκληρώνεται το πρώτο προπαρασκευαστικό κεφάλαιο της εργασίας.

Πόρισμα 0.1.23 *Έστω G μια μηδενοδύναμη ομάδα για την οποία ισχύει $G = G'\langle x_1, ..., x_m\rangle$. Τότε $\gamma_2(G) = [G, x_1]...[G, x_m]$.*

0.2 Verbally closed υποομάδες ελευθέρων ομάδων

0.2.1 Εισαγωγικές έννοιες, γενικά αποτελέσματα και προαπαιτούμενα

Εισαγωγικές Έννοιες και Γενικά Αποτελέσματα

Όπως έχει προειπωθεί στην Εισαγωγή, η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στη μελέτη των verbally closed υποομάδων ελευθέρων ομάδων, με την προοπτική της εφαρμογής ορισμένων ιδιοτήτων τους στην εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων αναφορικά με τα retracts ελευθέρων ομάδων. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι κάθε verbally closed υποομάδα μιας ελεύθερης ομάδας πεπερασμένης διάστασης είναι retract της ελεύθερης ομάδας, πληροφορία εξαιρετικά σημαντική, καθώς τα retracts αποτελούν βασικό εργαλείο διαφωτισμού της ενδότερης δομής περίπλοκων ομαδοθεωρητικών αντικειμένων.

Η πορεία μας αυτή προς την απόδειξη του κυρίου Θεωρήματος είναι άρρηκτα συνυφασμένη με την έννοια της εξίσωσης υπεράνω ελευθέρων ομάδων, μιας έννοιας που αποκλίνει από τη συνήθη θέαση της εξίσωσης με την οποία είμαστε εξοικειωμένοι στους πραγματικούς και τους μιγαδικούς, πλην όμως επιδαψιλεύει γόνιμα αποτελέσματα στη θεωρία ομάδων.

Ορισμός 0.2.1 *α) Έστω H ομάδα, $X = \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο και $F(X)$ η ελεύθερη ομάδα με βάση το σύνολο X.*

Ονομάζουμε τότε εξίσωση με μεταβλητές $x_1, ..., x_n$ και σταθερές από την H *μια έκφραση $E(x_1, ..., x_n, H) = 1$, όπου το $E(x_1, ..., x_n, H)$ είναι μια λέξη από το αλφάβητο $\{x_1, ..., x_n\}^{\pm 1} \cup H$. Ισοδύναμα, το $E(x_1, ..., x_n, H) \in F(X) * H$.*

β) Υπενθυμίζουμε ότι αν H ομάδα και υπάρχει μια ομάδα G, της οποίας η H να είναι υποομάδα, τότε η G ονομάζεται επέκταση της H. *Συμφωνούμε τώρα ότι η εξίσωση $E(x_1, ..., x_n, H) = 1$ έχει* λύση σε μια επέκταση G της H, *αν υπάρχουν κατάλληλα $g_i \in G$, έτσι ώστε $E(g_1, ..., g_n, H) = 1$ στην ομάδα G.*

Ο τρόπος ορισμού της έννοιας της εξίσωσης υπεράνω ομάδας μάς κατευθύνει φυσιολογικά προς την έννοια της αλγεβρικής κλειστότητας.

Ορισμός 0.2.2 *Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Η υποομάδα H καλείται* algebraically closed *στην G, αν για κάθε πεπερασμένο σύστημα εξισώσεων $S = \{E_i(x_1, ..., x_n, H) : i = 1, ..., m\}$ με σταθερές από την H ισχύει το ακόλουθο: Αν το S έχει λύση στην G, τότε το S έχει λύση και στην H.*

Προφανώς το αντίστοφο ισχύει πάντα.

Ορισμένα γνωστά και στοιχειωδώς επόμενα από τους ορισμούς αποτελέσματα πλην χρήσιμα για την απόδειξη των βασικών Θεωρημάτων που θα μας απασχολήσουν εδώ, συσχετζίουν την έννοια της algebraically closed υποομάδας, καθώς και της existentially closed υποομάδας - που θα οριστεί οσονούπω - με εκείνη της retract υποομάδας.

Ορισμός 0.2.3 *Έστω G ομάδα. Η G ονομάζεται* equationally Noetherian, *αν για κάθε n φυσικό αριθμό, ισχύει ότι κάθε σύστημα εξισώσεων σε n μεταβλητές με συντελεστές από την G έχει ίδιο σύνολο λύσεων με κάποιο πεπερασμένο σύστημα εξισώσεων που περιέχεται σε εκείνο. Εν άλλοις λόγοις, αν κάθε σύστημα εξισώσεων σε n μεταβλητές με συντελεστές από την G είναι ισοδύναμο με κάποιο πεπερασμένο* υποσύστημά *του.*

Ορισμός 0.2.4 *α) Έστω G ομάδα και $G = \langle S/R \rangle$ μια παράστασή της. Υπενθυμίζουμε ότι η G καλείται* πεπερασμένα παριστώμενη, *αν τα σύνολα S, R είναι πεπερασμένα.*

β) Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Λέμε ότι η G είναι πεπερασμένα γενόμενη σε σχέση με την *H, αν υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $g_1, g_2, ..., g_n \in G$, έτσι ώστε $G = \langle g_1, ..., g_n, H \rangle$.*

Πρόταση 0.2.5 *Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

α) Αν η ομάδα H είναι retract της G, τότε η H είναι algebraically closed υποομάδα της G.

β) Ας υποθέσουμε ότι η G είναι πεπερασμένα παριστώμενη και η H πεπερασμένα παραγόμενη. Τότε η H είναι algebraically closed στην G αν και μόνο αν η H είναι retract της G.

γ) Ας υποθέσουμε ότι η G είναι πεπερασμένα γενόμενη σε σχέση με την H και ότι η H είναι equationally Noetherian. Τότε η H είναι algebraically closed στην G αν και μόνο αν η H είναι retract της G.

Απόδειξη: α) Έστω $\pi : G \longrightarrow H$ μια retraction. Έστω και ένα πεπερασμένο σύστημα εξισώσεων $\phi(x_1, ..., x_n, H)$ που έχει λύση στην G, δηλαδή υπάρχουν $g_1, ..., g_n \in G$ έτσι ώστε το σύστημα $\phi(x_1, ..., x_n, H)$ να έχει λύση. Τώρα, τα $\pi(g_1), ..., \pi(g_n) \in H$, διότι η π είναι retraction. Άρα, το σύστημα $\phi(x_1, ..., x_n, H)$ έχει λύση στην H τα στοιχεία $\pi(g_1), ..., \pi(g_n)$, συνεπώς η H είναι algebraically closed υποομάδα της G.

β) $\Longleftarrow$ Αν η H είναι retract της G, τότε από το α), έχουμε το συμπέρασμα.

$\Longrightarrow$ Ας υποθέσουμε ότι η H παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο $\{h_1, ..., h_m\}$ και έστω $G = \langle a_1, ..., a_n / r_1 ... r_s \rangle$ μια πεπερασμένη παράσταση της G. Θα βρούμε μια retraction της G στην H.

Για κάθε $i = 1, ..., m$ το h_i γράφεται ως $h_i = v_i(a_1, ..., a_n)$ ως προς τους γεννήτορες της G. Ας θεωρήσουμε τώρα το σύστημα εξισώσεων ϕ

$$v_1(x_1, ..., x_n) = h_1, ..., v_m(x_1, ..., x_n) = h_m$$
$$r_1(x_1, ..., x_n) = 1, ..., r_s(x_1, ..., x_n) = 1$$

Το σύστημα εξισώσεων ϕ έχει λύση στην ομάδα G, τα $x_1 = a_1, ..., x_n = a_n$. Όμως από υπόθεση η H είναι algebraically closed στην G, άρα το ϕ έχει λύση $x_1 = b_1, ..., x_n = b_n$ στην H.

Έστω τώρα $\varphi : G \longrightarrow H : a_1 \mapsto b_1, ..., a_n \mapsto b_n$. Από τον ορισμό της, η φ είναι ομομορφισμός ομάδων και επιπλέον, ισχύει $\varphi(r_i) = 1$ για κάθε $i = 1, ..., s$, συνεπώς $\langle\langle r_1 ... r_s \rangle\rangle \subseteq Ker\varphi$. Τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\psi : \langle a_1, ..., a_n / r_1, ..., r_s \rangle \longrightarrow H : \psi \circ \pi = \varphi$, όπου ο $\pi : \langle a_1, ..., a_n \rangle \longrightarrow \langle a_1, ..., a_n / r_1 ... r_s \rangle = G$ είναι ο κανονικός επιμορφισμός στην G.

Τέλος, για κάθε $i = 1, ..., m$ θα έχουμε $\psi(h_i) = \varphi(h_i) = b_i = h_i \Longrightarrow \psi_{/H} = id_H$ και άρα η ψ είναι η ζητούμενη retraction.

γ) $\Longleftarrow$ Αν η H είναι retract της G, τότε από το α), έχουμε το συμπέρασμα.

$\Longrightarrow$ Έστω $B_n = \{b_1, ..., b_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G σε σχέση με την H. Έστω επίσης $R = R(b_1, ..., b_n, H)$ ορίζουσες σχέσεις της G σε σχέση με το $B_n \cup H$. Κάθε στοιχείο της H μπορεί να εκφραστεί ως $h = h(b_1, ..., b_n, H)$. Από την έκφραση αυτή για κάθε $h \in H$ λαμβάνουμε ένα σύστημα εξισώσεων ϕ(ενδεχομένως άπειρο) με σταθερές από την H. Όμως η H είναι equationally Noetherian, άρα το ϕ είναι ισοδύναμο με κάποιο πεπερασμένο υποσύστημά του, έστω ϕ_0 με λύσεις $x_1 = a_1, ..., x_n = a_n$ στην G. Όμως η H είναι algebraically closed στην G, άρα το ϕ_0 έχει λύσεις $x_1 = c_1, ..., x_n = c_n$ στην H.

Ας θεωρήσουμε τώρα την απεικόνιση $\varphi : G \longrightarrow H : b_1 \mapsto c_1, ..., b_n \mapsto c_n, h \mapsto h$ για κάθε $h \in H$. Θα δείξουμε ότι είναι ομομορφισμός ομάδων. Για το σύνολο B_n θα περιοριστούμε σε δύο μόνο γεννήτορες χάριν απλότητας. Πράγματι, $\varphi(b_1 h_1 ... h_k)\varphi(b_2 h'_1 ... h'_s) = c_1 h_1 ... h_k c_2 h'_1 ... h'_s = \varphi(b_1 h_1 ... h_k b_2 h'_1 ... h'_s)$.

Έστω τώρα $h \in H$ με παράσταση $h = {b_1}^{\lambda_1} h_1 ... {b_n}^{\lambda_n} h_k = h_1 ... h_k$. Τότε $\varphi(h) = h_1 ... h_k$, άρα $\varphi_H = id_H$.

Η φ είναι επομένως η ζητούμενη retraction.

Ορισμός 0.2.6 *Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Η G καλείται* discriminating, *αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο K της G υπάρχει μια retraction $\varphi : G \longrightarrow H : \varphi_{/K} : K \longrightarrow K$ να είναι 1-1.*

Μία τώρα τρόπον τινά γενίκευση της algebraically closed υποομάδας μιας ομάδας είναι η έννοια της existentially closed υποομάδας.

Ορισμός 0.2.7 *Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Η H ονομάζεται existentially closed υποομάδα της G, αν για κάθε πεπερασμένο σύστημα εξισώσεων και ανισώσεων S με συντελεστές στην H, ισχύει το ακόλουθο: Αν το σύστημα S έχει λύση στην G, τότε το S έχει λύση και στην H.*

Πρόταση 0.2.8 *Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Τότε ισχύουν τα κάτωθι:*

α) Αν η G είναι discriminating, τότε η H είναι existentially closed υποομάδα της G.

β) Ας υποθέσουμε ότι η G είναι πεπερασμένα γενόμενη σε σχέση με την H και ότι η H είναι equationally Noetherian. Τότε η H είναι existentially closed υποομάδα της G αν και μόνο αν η G είναι discriminating επέκταση της H.

Απόδειξη: α) Έστω $\psi(x_1, ..., x_n, H)$ πεπερασμένο σύστημα εξισώσεων και ανισώσεων με συντελεστές στην H και λύσεις του συστήματος ψ, $a_1, ..., a_n \in G$. Όμως η G είναι discriminating, συνεπώς για το πεπερασμένο υποσύνολο ψ της G υπάρχει μια $\varphi : G \longrightarrow H$ retraction, ώστε $\varphi_{/\psi}$ να είναι 1-1. Έχουμε επομένως ότι τα $\varphi(a_1), ..., \varphi(a_n)$ είναι λύσεις του συστήματος ψ. Άρα η H είναι existentially closed στην G.

β) $\Longleftarrow$ Αν η G discriminating επέκταση της H, τότε από το α) έχουμε το συμπέρασμα.

$\Longrightarrow$ Έστω $B_n = \{b_1, ..., b_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G σε σχέση με την H. Έστω επίσης $R = R(b_1, ..., b_n, H)$ ορίζουσες σχέσεις της G σε σχέση με το $B_n \cup H$. Κάθε στοιχείο της H μπορεί να εκφραστεί ως $h = h(b_1, ..., b_n, H)$. Από την έκφραση αυτή για κάθε $h \in H$ λαμβάνουμε ένα σύστημα εξισώσεων ϕ(ενδεχομένως άπειρο) με σταθερές από την H. Όμως η H είναι equationally Noetherian, άρα το ϕ είναι ισοδύναμο με κάποιο πεπερασμένο υποσύστημά του, έστω ϕ_0. Ένα ψ πεπερασμένο σύστημα ανισώσεων στην G μπορεί να εκφραστεί σε κάποιο πεπερασμένο σύστημα ανισώσεων στο σύνολο $\{B_n \cup H\}$, έστω ψ_0. Ας θεωρήσουμε τώρα το $\phi_0 \cup \psi_0$, το οποίο είναι ένα πεπερασμένο σύστημα εξισώσεων με σταθερές από την H και ανισώσεων στην G με συντελεστές από την H.

Έστω $a_1, ..., a_n$ μια λύση του $\phi_0 \cup \psi_0$ στην G. Επειδή όμως η H είναι existentially closed στην G, το $\phi_0 \cup \psi_0$ έχει λύση στην H, έστω $c_1, ...c_n$. Ακριβώς όπως στο γ) της προηγούμενης Πρότασης, ορίζουμε απεικόνιση $\varphi : G \longrightarrow H : b_1 \mapsto c_1, ..., b_n \mapsto c_n, h \mapsto h$ για κάθε $h \in H$, η οποία είναι retraction από την G στην H.

Έστω τώρα K πεπερασμένο υποσύνολο της G. Μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το K είναι υποσύνολο του ψ_0. Άρα, εφόσον η φ είναι 1-1 στο ψ_0, θα είναι και στο K, συνεπώς η G είναι discriminating επέκταση της H.

Προαπαιτούμενα 1. Primitive στοιχεία

Ορισμός 0.2.9 *Έστω A_n ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση ένα σύνολο $\{a_1, ..., a_n\}$ και έστω ένα $a \in A_n$. Το a ονομάζεται* primitive*, αν υπάρχει μια βάση $\{b_1, ..., b_n\}$ της A_n, ώστε $a = b_i$, για κάποιο $i \in \{1, ..., n\}$.*

Το ακόλουθο Θεώρημα μάς προμηθεύει με έναν εύχρηστο αριθμοθεωρητικό χαρακτηρισμό των primitive στοιχείων μιας ελεύθερης αβελιανής ομάδας.

Θεώρημα 0.2.10 *Έστω A_n ελεύθερη αβελιανή ομάδα με βάση ένα σύνολο $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Ένα $a \in A_n$, όπου $a = {x_1}^{k_1} ... {x_n}^{k_n}$ είναι primitive αν και μόνο αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $(k_1, ..., k_n)$ είναι ίσος με 1.*

Απόδειξη: $\Longrightarrow$ Επειδή το a είναι primitive, υπάρχει μια βάση $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ της A_n, έτσι ώστε $a = w_i$, για κάποιο $i = 1, ..., n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας θεωρήσουμε ότι $a = w_1$. Έχουμε λοιπόν ότι

$a = {x_1}^{k_{11}} ... {x_n}^{k_{1n}} = {x_1}^{k_1} ... {x_n}^{k_n}$

$w_2 = {x_1}^{k_{21}} ... {x_n}^{k_{2n}}$

$\vdots$

$w_n = {x_1}^{k_{n1}} ... {x_n}^{k_{nn}}$

Επειδή τώρα τα $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ αποτελούν βάση της A_n, η απεικόνιση $\theta : A_n \longrightarrow A_n : x_i \mapsto w_i$ για κάθε $i = 1, ..., n$, ορίζει αυτομορφισμό της A_n αλλά και αντιστρόφως, αν έχουμε έναν αυτομορφισμό της A_n από τη βάση X σε ένα άλλο σύνολο U, τότε το U είναι βάση της A_n. Επομένως, ο πίνακας της θ από τη βάση X στη βάση $W = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$, θα είναι αντιστρέψιμος στο $\mathbb{Z}$, άρα θα έχει ορίζουσα ± 1. Ο πίνακας αυτός θα είναι ο ακόλουθος:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

κι επομένως, θα έχουμε ότι $1 = (k_{11}, ..., k_{1n}) = (k_1, ..., k_n)$.

$\Longleftarrow$ Υποθέτουμε ότι $(k_1, ..., k_n) = 1$. Για να δείξουμε ότι το a είναι primitive, αρκεί να βρούμε n το πλήθος στοιχεία $\{w_1 = a = {x_1}^{k_1} ... {x_n}^{k_n}, ..., w_n = {x_1}^{k_{n1}} ... {x_n}^{k_{nn}}\}$ της A_n, τα οποία να αποτελούν βάση της. Άρα, από την απόδειξη του ευθέως, πρέπει και αρκεί να βρούμε πίνακα $n \times n$ με ορίζουσα ± 1, ο οποίος θα έχει γραμμές τους εκθέτες $k_{i,j}, i, j = 1, ..., n$.

Θα προχωρήσουμε με επαγωγή επί του n.

Αν $n = 2$, τότε $(k_1, k_2) = 1$, άρα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z} : \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 = 1$. Επομένως, μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

ο οποίος έχει προφανώς ορίζουσα 1 κι επομένως τα στοιχεία $w_1 = a = {x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2}$, $w_2 = {x_1}^{-\lambda_2} {x_2}^{\lambda_1}$ αποτελούν βάση της A_n.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n - 1$ το πλήθος γεννήτορες. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $(k_1, ..., k_{n-1}) = 1$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένας $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας $A = \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_{n-1} \\ * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$

με ορίζουσα ± 1 και $\{w_1, ..., w_{n-1}\}$ βάση της A_{n-1}. Κατασκευάζουμε τώρα τον $n \times n$ πίνακα $B = \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_{n-1} & k_n \\ * & * & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ο οποίος, περιορισμένος στο άνω αριστερό τμήμα του που ορίζεται από την $n-1$ γραμμή και τη $n-1$ στήλη είναι ακριβώς ο πίνακας A. Επίσης, ο B έχει ορίζουσα ± 1. Τότε, τα στοιχεία $\{w_1 = {x_1}^{k_1} ... {x_n}^{k_n} = a,\ w_2 = w_2, ..., w_{n-1} = w_{n-1},\ w_n = {x_n}^{k_n}\}$ είναι βάση της A_n κι άρα το a είναι primitive.

2. $(k_1, ..., k_{n-1}) = \delta \neq 1$. Τότε θα ισχύει $(k_1/\delta, ..., k_{n-1}/\delta) = 1$ και επίσης $(\delta, k_n) = 1$. Εφαρμόζουμε επομένως το 1. για τα $k_1/\delta, ..., k_{n-1}/\delta$. Υπάρχει λοιπόν πίνακας A, διάστασης $(n-1) \times (n-1)$, $A = \begin{pmatrix} k_1/\delta & \cdots & k_{n-1}/\delta \\ * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$

με ορίζουσα ± 1 και $\{w_1, ..., w_{n-1}\}$ βάση της A_{n-1}. Ας θεωρήσουμε τώρα τον $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα $A_\delta = \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_{n-1} \\ * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$,

που είναι ο πίνακας A, με πολλαπλασιασμένη την πρώτη γραμμή με δ. Τότε προφανώς $det(A_\delta) = \pm\delta$.

Από την άλλη, επειδή $(\delta, k_n) = 1$, υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{Z} : \lambda\delta + \mu k_n = 1$. Έστω τώρα ο πίνακας B, ο οποίος είναι ο πίνακας A, αν τοποθετήσουμε την πρώτη του γραμμή στο τέλος του. Δηλαδή ο πίνακας που κατασκευάσαμε είναι ο

$$B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * \\ k_1/\delta & \cdots & k_n/\delta \end{pmatrix}.$$

Τότε $det(B) = \pm 1$. Ας θεωρήσουμε τέλος τον $n \times n$ πίνακα Γ, ο οποίος, περιορισμένος στο άνω αριστερό τμήμα του που ορίζεται από την $n-1$ στήλη και $n-1$ γραμμή του, είναι ακριβώς ο πίνακας A. Αναλυτικά, ο πίνακας θα είναι ο εξής:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_{n-1} & k_n \\ * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 \\ \mu k_1/\delta & \cdots & \mu k_{n-1}/\delta & \pm\lambda \end{pmatrix}$$

ο οποίος παρατηρούμε ότι έχει ορίζουσα ± 1. Τότε, τα στοιχεία $\{w_1 = {x_1}^{k_1}...{x_n}^{k_n} = a,\, w_2 = w_2, ..., w_{n-1} = w_{n-1},\, w_n = {x_1}^{\mu k_1/\delta}...{x_{n-1}}^{\mu k_{n-1}/\delta}{x_n}^{\pm\lambda}\}$ αποτελούν βάση της A_n.

Προαπαιτούμενα 2.Το Θέωρημα του Lee

Ο ορισμός των λεγόμενων C-test words - τα οποία θα οριστούν εν ευθέτω χρόνω - πραγματοποιήθηκε ως προσπάθεια απόδοσης καταφατικής απάντησης από τον Ivanov σε ένα ερώτημα που είχε θέσει ο Shpilrain, φαινομενικά άσχετο με τη θεωρία εξισώσεων υπεράνω ελευθέρων ομάδων.

Πρόβλημα(Shpilrain) Έστω F_m ελεύθερη ομάδα διάστασης m. Υπάρχουν $u_1, u_2 \in F_m$ έτσι ώστε οποιοσδήποτε $\psi \in End(F_m)$ με μη κυκλική εικόνα να καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από τις εικόνες των u_1, u_2;

Ισοδύναμα, με άλλα λόγια, υπάρχουν $u_1, u_2 \in F_m$, έτσι ώστε αν $\varphi, \psi \in End(F_m)$ με $\varphi(u_i) = \psi(u_i)$ για $i = 1, 2$ να ισχύει $\varphi = \psi$;

Ο Ivanov λοιπόν στο [4], καλούμενος να απαντήσει καταφατικά στο άνωθεν ερώτημα στη συγκεκριμένη περίπτωση που ο ψ είναι μονομορφισμός της F_m, όρισε την έννοια του C-test word.

Ορισμός 0.2.11 *Έστω F_m ελεύθερη ομάδα διάστασης m. Μια μη-κενή λέξη $v(t_1, ..., t_n)$ καλείται* C-test word *σε n* γράμματα *για την F_m, αν για κάθε δύο n-άδες $(x_1, ..., x_n), (\psi_1, ..., \psi_n)$ της F_m με $v(x_1, ..., x_n) = v(\psi_1, ..., \psi_n) \neq 1$, υπάρχει $s \in F_m$, έτσι ώστε $\psi_i = s x_i s^{-1}$ για κάθε $i = 1, ..., n$.*

Ο Ivanov απέδειξε το εξής:

Πρόταση 0.2.12 *Αν το v είναι C-test word σε m γράμματα για την F_m, $\varphi \in End(F_m)$ και ψ μονομορφισμός της F_m με $\varphi(v) = \psi(v)$, τότε υπάρχει $s \in F_m$ έτσι ώστε $\varphi = \tau_s \circ \psi$ και η υποομάδα $\langle s, \psi(v) \rangle$ είναι κυκλική, όπου τ_s είναι ο εσωτερικός αυτομορφισμός της F_m μέσω του s.*

Παρατηρούμε ότι αν ο ομομορφισμός ψ δεν υποτεθεί 1-1, αλλά θεωρηθεί απλά ως ενδομορφισμός της F_m με μη κυκλική εικόνα, τότε το συμπέρασμα δεν ισχύει, διότι δεν έπεται πλέον αναγκαστικά ότι $\psi(v) \neq 1$. Άρα η υπόθεση για την κυκλικότητα της υποομάδας είναι αναγκαία. Η αναγκαιότητα τούτη μάς παροτρύνει στη διατύπωση του ακόλουθου Θεωρήματος:

Θεώρημα 0.2.13 *Lee[4] Έστω F_m ελεύθερη ομάδα διάστασης m. Τότε υπάρχει C- test word $v_n(x_1, ..., x_n)$ σε n γράμματα για την F_m με την επιπλέον ιδιότητα $v_n(t_1, ..., t_n) = 1$ αν και μόνο αν η $\langle t_1, ..., t_n \rangle$ είναι κυκλική υποομάδα της F_m.*

Με τη βοήθεια επομένως του αποτελέσματος που απέδειξε ο Ivanov και του Θεωρήματος του Lee, ο Lee στο [4] απάντησε καταφατικά στο ερώτημα του Shpilrain:

Πρόταση 0.2.14 *Έστω F_m ελεύθερη ομάδα διάστασης m. Τότε υπάρχουν $u_1, u_2 \in F_m$ έτσι ώστε οποιοσδήποτε $\psi \in End(F_m)$ με μη κυκλική εικόνα να καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από τα $\psi(u_1), \psi(u_2)$.*

Σχέδιο Απόδειξης: Επειδή η λεπτομερής παρουσίαση της απόδειξης θα απαιτούσε μια ενδελεχή πραγμάτευση του [4], η οποία θα υπερέβαινε τον σκοπό αυτής της εργασίας, παρουσιάζουμε την γενική ιδέα της απόδειξης χωρίς λεπτομέρειες.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν και έναν άλλον ενδομορφισμό με μη κυκλική εικόνα, έστω ϕ, ώστε να ταυτίζεται με τον ψ στις λέξεις $u_1 = v_m(x_1, x_2, ..., x_m)$ και $u_2 = v_{m+1}(x_{m-1}, x_{m-2}, ..., x_1, x_m, x_1)$,
όπου τα $v_m(x_1, x_2, ..., x_m)$, $v_{m+1}(x_{m-1}, x_{m-2}, ..., x_1, x_m, x_1)$ ορίζονται αναδρομικά(για μια λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας ορισμού τους, παραπέμπουμε στο [4], σελ. 3). Θα δείξουμε ότι $\phi = \psi$. Από την προηγούμενη Πρόταση που απέδειξε ο Ivanov, το $\phi(u_1) = \psi(u_1)$ συνεπάγεται ότι $\phi = \tau_s \circ \psi$, όπου η υποομάδα $\langle S, \psi(u_1) \rangle$ είναι κυκλική. Για να έχουμε το συμπέρασμα επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $S = 1$. Από την άλλη, επειδή $\phi(u_2) = \psi(u_2)$, έπεται ότι $\phi(u_2) = \psi(u_2) = S\psi(u_2)S^{-1}$, όπου η υποομάδα $\langle S, \psi(u_2) \rangle$ είναι κυκλική. Αν, επομένως, αποδείξουμε ότι η $\langle \psi(u_1), \psi(u_2) \rangle$ δεν είναι κυκλική, θα έχουμε ότι $S = 1$. Η απόδειξη αυτού του Ισχυρισμού είναι καθαρά τεχνικής φύσης, γι' αυτό την παραλείπουμε.

Ορισμός 0.2.15 *Ένα C-test word που ικανοποιεί το Θεώρημα του Lee καλείται* Lee Word.

0.2.2 Χαρακτηρισμός των verbally closed υποομάδων ελευθέρων ομάδων και Εφαρμογές

Verbally closed υποομάδες ελευθέρων ομάδων

Ορισμός 0.2.16 *Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Η H θα ονομάζεται verbally closed στην G, αν για κάθε λέξη $w \in F(X)$ - όπου X είναι ένα σύνολο και $F(X)$ η ελεύθερη ομάδα που παράγεται από το X - η εξίσωση $w(x_1, x_2, ...x_n)$ έχει λύση στην G αν και μόνο αν έχει λύση στην H.*

Μία προφανής μεν αλλά πλέον σημαντική δε παρατήρηση που αφορά στη σχέση μεταξύ verbally closed και algebraically closed υποομάδων είναι ότι οι δύο αυτές έννοιες ταυτίζονται στις ελεύθερες ομάδες πεπερασμένης διάστασης:

Πρόταση 0.2.17 *Έστω F_r μια ελεύθερη ομάδα διάστασης r και $H \leq F_r$. Τότε η H είναι verbally closed αν και μόνο αν είναι algebraically closed.*

Απόδειξη: $\Longrightarrow$ Η κατεύθυνση αυτή ισχύει με προφανή τρόπο και μάλιστα, στη γενικότερη περίπτωση που η ομάδα F_r δεν υποτεθεί πεπερασμένης διάστασης.

$\Longleftarrow$ Ας υποθέσουμε ότι η H είναι algebraically closed στην F_r. Θα δείξουμε ότι η H είναι verbally closed. Έστω X ένα σύνολο και $F(X)$ η ελεύθερη ομάδα που παράγεται από το X. Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση $w(x_1, x_2, ...x_n)$ έχει λύση στην F_r για κάθε $w \in F(X)$. Επειδή η F_r είναι πεπερασμένης διάστασης, για κάθε $w \in F(X)$ λαμβάνουμε ένα πεπερασμένο σύστημα εξισώσεων με λύση στην F_r. Όμως, η H είναι algebraically closed, άρα το σύστημα εξισώσεων που έχουμε κατασκευάσει έχει λύση και στην H. Άρα και η εξίσωση $w(x_1, x_2, ...x_n)$ έχει λύση στην H για κάθε $w \in F(X)$.

Λήμμα 0.2.18 *Έστω F_r μια ελεύθερη ομάδα διάστασης r και $h \in F_r$, $h \neq 1$. Έστω επίσης η υποομάδα $H = \langle h \rangle$ της F_r. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

α) Η H είναι verbally closed στην F_r.

β) Η H είναι retract της F_r.

γ) Έστω $\pi : F_r \longrightarrow F_r/[F_r, F_r]$ η προβολή της F_r στην αβελιανοποίησή της. Τότε το $\pi(h)$ είναι primitive.

Απόδειξη: Έστω $\{f_1, f_2, ..., f_r\}$ μια βάση της F_r και $h \in H$. Έστω ότι το $h = f_1^{k_1}...f_r^{k_r}$ για κάποια $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, ..., r$. Τότε $\pi(h) = f_1^{k_1}F_r'...f_r^{k_r}F_r' = \hat{f}_1...\hat{f}_r$, όπου $f_i^{k_i}F_r' = \hat{f}_i$, για $i = 1, ..., r$.

β) $\Longrightarrow$ α) Εφόσον η H είναι retract της F_r, τότε η H από την Πρόταση 2.1.5 είναι algebraically closed στην F_r. Όμως η F_r είναι πεπερασμένης διάστασης, άρα από την προηγούμενη Πρόταση η H είναι και verbally closed στην F_r.

α) $\Longrightarrow$ γ) Ας υποθέσουμε ότι το $\pi(h)$ δεν είναι primitive. Αυτό σημαίνει ότι είτε $\pi(h) = 1$ στην αβελιανοποίηση της F_r είτε ότι $(k_1, ..., k_n) = d > 1$ από το Θεώρημα 2.1.10.

Ας υποθέσουμε ότι $\pi(h) = 1$, δηλαδή $\hat{f}_1...\hat{f}_r = 1 \Longleftrightarrow f_1^{k_1}...f_r^{k_r}[F_r, F_r] = [F_r, F_r] \Leftrightarrow f_1^{k_1}...f_r^{k_r} \in [F_r, F_r] \Longrightarrow k_1 = ... = k_r = 0$. Τότε $h = 1$, άτοπο.

Επομένως $(k_1, ..., k_n) = d > 1$. Αν αντικαταστήσουμε τα $f_1, ..., f_r$ με $x_1, ..., x_r$ λαμβάνουμε την εξίσωση $\pi(h) = x_1^{k_1}...x_r^{k_r}F_r'$, η οποία έχει λύση στην F_r. Όμως η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση στην H. Πράγματι, αν $h_1, ..., h_r \in H$ λύση της εξίσωσης, τότε ${h_1}^{k_1}...{h_r}^{k_r}F_r' = \pi(h) \Longleftrightarrow \pi(h) \in F_r'$, διότι τα $h_1, ..., h_r \in H$, όπου H κυκλική υποομάδα της F_r και άρα αβελιανή. Έπεται τότε λοιπόν ότι $\pi(h) = 1$ στην F_r'. Αυτό συνεπάγεται ότι η H δεν είναι verbally closed υποομάδα της F_r, άτοπο.

Συνεπώς το $\pi(h)$ είναι primitive.

γ) $\Longrightarrow$ β) Το $\pi(h)$ είναι primitive, άρα από το Θεώρημα 0.2.10 υπάρχουν $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{Z} : k_1\lambda_1 + ... + k_r\lambda_r = 1$.

Έστω τώρα η απεικόνιση $\varphi : F_r \longrightarrow H = \langle h \rangle : f_i \mapsto h^{\lambda_i}$, $i = 1, ..., r$.

Η φ επεκτείνεται σε ομομορφισμό ομάδων από την Καθολική Συνθήκη για την F_r. Μένει να δείξουμε ότι $\varphi(h) = h$. Πράγματι, επειδή η H είναι αβελιανή ομάδα ως κυκλική, $\pi(h) = h$, συνεπώς $\varphi(\pi(h)) = 1$ και άρα $\varphi(h) = h$

Άρα, η φ είναι retraction από την G στην H και επομένως η H είναι retract της G.

Έστω F_n ελεύθερη αβελιανή ομάδα διάστασης n και H υποομάδα της. Τότε, γνωρίζουμε ότι η H είναι ελεύθερη αβελιανή και μάλιστα, διάστασης το πολύ n.

Ας υπενθυμίσουμε την απόδειξη: Θα προχωρήσουμε με επαγωγή.

Αν $n = 1$, τότε $F_1 = \mathbb{Z}$ και τότε γνωρίζουμε ότι κάθε μη τετριμμένη υποομάδα των ακεραίων είναι άπειρη κυκλική. Άρα αν $H \leq \mathbb{Z}$, τότε η H είναι ελεύθερη αβελιανή διάστασης 1.

Έστω $n > 1$. Τότε η $F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = K \oplus \mathbb{Z}$, όπου $K = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}$, $n-1$ φορές.

Η K είναι ελεύθερη αβελιανή διάστασης $n-1$. Έστω $\pi : F_n \longrightarrow \mathbb{Z}$ ο φυσικός επιμορφισμός. Τότε $Ker\pi = K$. Έστω και $H \leq F_n$.

Αν $\pi(H) = \{0\}$, τότε $H \subseteq Ker\pi = K$ και από επαγωγική υπόθεση η H είναι ελεύθερη αβελιανή διάστασης το πολύ $n-1$.

Αν $\pi(H) \neq \{0\}$, τότε $\{0\} \neq \pi(H) \leq \mathbb{Z}$ και συνεπώς $\pi(H) \simeq \mathbb{Z}$.

Έστω $\pi_{/H} : H \longrightarrow \pi(H)$. Εφόσον η H είναι ελεύθερη αβελιανή, από γνωστό Λήμμα θα έχουμε $H = Ker(\pi_{/H}) \oplus \mathbb{Z}$. Όμως $Ker(\pi_{/H}) = H \cap K \leq K$ και άρα το $Ker(\pi_{/H})$ είναι ελεύθερη αβελιανή διάστασης το πολύ $n-1$.

Άρα, έχουμε $H = Ker(\pi_{/H}) \oplus \mathbb{Z}$, επομένως η H είναι ελεύθερη αβελιανή διάστασης το πολύ n.

Στη γενικότερη, μη μεταθετική περίπτωση των ελεύθερων ομάδων δεν έχουμε κάποιο φράγμα για τη διάσταση τυχούσας υποομάδας μιας ελεύθερης πεπερασμένης διάστασης. Είναι γνωστό παραδείγματος χάριν, ότι η ελεύθερη ομάδα διάστασης 2, $F_2 = \langle a, b \rangle$ περιέχει ελεύθερη υποομάδα απείρου αριθμησίμου διαστάσεως, την $H = \langle b^{-k}ab^k : k = 0, 1, 2, ... \rangle$

Το Θεώρημα Nielsen-Schreier[5] μάς εξασφαλίζει μεν ότι κάθε υποομάδα ελεύθερης ομάδας είναι ελεύθερη, απαιτεί δε επιπλέον υποθέσεις για να μάς εξασφαλίσει με κάποιο φράγμα για τη διάσταση υποομάδας μιας ελεύθερης ομάδας. Γνωρίζουμε ότι αν F_k ελεύθερη ομάδα διάστασης k, τότε κάθε υποομάδα της πεπερασμένου δείκτου n είναι ελεύθερη διάστασης $n(k-1)+1$ [5].

Η ιδιότητα της verbally closed υποομάδας ωστόσο, μάς επιτρέπει να συμπεράνουμε το αποτέλεσμα που ισχύει για τις ελεύθερες αβελιανές ομάδες σε τυχούσες ελεύθερες ομάδες πεπερασμένης διάστασης σε υποομάδες που έχουν αυτήν την ιδιότητα.

Πρόταση 0.2.19 *Έστω F_r ελεύθερη ομάδα διάστασης r και H verbally closed υποομάδα της F_r. Τότε η H έχει διάσταση το πολύ r.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι η H έχει διάσταση $m > r$. Τότε λοιπόν $H \simeq F_m$. Ας θεωρήσουμε την ελεύθερη μηδενοδύναμη ομάδα $N_{m,3}$ διάστασης m και κλάσης μηδενοδυναμίας 3, $N_{m,3}$. Τότε ισχύει ότι $N_{m,3} = F_m/\gamma_4(F_m) \simeq H/\gamma_4(H)$.

Από το Πόρισμα 0.1.23 γνωρίζουμε ότι αν $N_{r,c}$ ελεύθερη μηδενοδύναμη ομάδα διάστασης r και κλάσης μηδενοδυναμίας c με βάση το σύνολο $\{z_1, ..., z_r\}$ και αν $g \in [N_{r,c}, N_{r,c}]$, τότε υπάρχουν $g_1, ..., g_r \in N_{r,c}$ έτσι ώστε $g = [g_1, z_1]...[g_r, z_r]$.

Μάλιστα, οι Alambergenov και Roman'kov απέδειξαν στο [6] ότι αν $r \geq 2$ και $c \geq 3$, υπάρχει $u_r \in [N_{r,c}, N_{r,c}]$ που δεν ισούται με κανένα γινόμενο $r-1$ το πλήθος μεταθετών στην $N_{r,c}$.

Έστω λοιπόν ένα τέτοιο $u_m \in [N_{m,3}, N_{m,3}]$ που δεν ισούται με γινόμενο $m-1$ το πλήθος μεταθετών στην $N_{m,3}$. Τότε $u_m \in \gamma_2(N_{m,3}) \simeq \gamma_2(H/\gamma_4(H)) = \gamma_2(H)/\gamma_4(H)$. Έστω $\pi : H \longrightarrow H/\gamma_4(H)$. Ισχύει επίσης ότι $\gamma_2(H)/\gamma_4(H) \leq H/\gamma_4(H)$. Έστω $h \in \gamma_2(H)$ ώστε $h\gamma_4(H) = u_m$. Επειδή $H \leq F_r$ και $[H,H] \leq [F_r, F_r]$, από τα προηγούμενα υπάρχουν $g_1, ..., g_r, g_1', ..., g_r' \in F_r$ και $f' \in \gamma_4(F_r)$: $h = [g_1, g_1']...[g_r, g_r']f'$.

Έστω τώρα $\{f_1, ..., f_r\}$ μια βάση της F_r. Τότε $g_i = g_i(f_1, ..., f_r), g_i' = g_i'(f_1, ..., f_r)$ και $f' = f'(f_1, ..., f_r), i = 1, ..., r$.

Έχουμε επομένως $h = [g_1(f_1, ..., f_r), g_1'(f_1, ..., f_r)]...[g_r(f_1...f_r), g_r'(f_1, ..., f_r)]$ $f'(f_1, ...f_r)$.

Αν αντικαταστήσουμε τα $f_1, ..., f_r$ με μεταβλητές $y_1, ..., y_r$, λαμβάνουμε το σύστημα εξισώσεων

$h = [g_1(y_1, ..., y_r), g_1'(y_1, ..., y_r)]...[g_r(y_1...y_r), g_r'(y_1, ..., y_r)]f'(y_1, ..., y_r)$ σε μεταβλητές $y_1, ..., y_r$ και σταθερά $h \in H$. Αυτό το σύστημα εξισώσεων έχει λύση στην F_r κι επειδή η H είναι verbally closed στην F_r, έχει λύση και στην H. Άρα, το h μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο $r < m$ το πλήθος μεταθετών. Αυτό όμως είναι άτοπο από την επιλογή του u_m, που είναι η εικόνα του h μέσω του ισομορφισμού $N_{m,3} \simeq H/\gamma_4(H)$.

Έχοντας πλέον αποδείξει ότι η διάσταση των verbally closed υποομάδων μιας ελεύθερης ομάδας δεν υπερβαίνει τη διάσταση της δοθείσης, μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην απόδειξη του βασικού μας Θεωρήματος.

Πρόταση 0.2.20 *Έστω F_r ελεύθερη ομάδα διάστασης r και H verbally closed υποομάδα της. Τότε η H είναι retract της F_r.*

Απόδειξη: Αν $r = 1$, από το Λήμμα 0.2.18 έχουμε το συμπέρασμα.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $r \geq 2$. Από την Πρόταση 0.2.19, η H θα έχει διάσταση, έστω m, με $m \leq r$. Έστω λοιπόν μια βάση $\{h_1, ..., h_m\}$ της H.

Για $m = 1$, πάλι το Λήμμα 0.2.18, μάς εξασφαλίζει το συμπέρασμα.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $m \geq 2$. Έστω $\{f_1, ..., f_r\}$ μια βάση της F_r. Για $i = 1, ..., m$ έστω $h_i = v_i(f_1, ..., f_r)$. Έστω τώρα $w_m(z_1, ..., z_m)$ ένα Lee word για την F_r. Έχουμε $h_1 = v_1(f_1, ..., f_r), ..., h_m = v_m(f_1, ..., f_r)$. Αν αντικαταστήσουμε τα $f_1, ..., f_r$ με μεταβλητές $x_1, ..., x_r$, θα έχουμε το σύστημα εξισώσεων $w_m(v_1(x_1, ..., x_r), ..., v_m(x_1, ..., x_r)) = w_m(h_1, ..., h_m)$ σε μεταβλητές $x_1, ..., x_r$ και σταθερές $h_1, ..., h_m$. Το σύστημα αυτό έχει λύση $x_1 = f_1, ..., x_r = f_r$ στην F_r. Όμως η H είναι verbally closed στην F_r άρα και algebraically closed, διότι η F_r είναι πεπερασμένης διάστασης. Επομένως, υπάρχει λύση αυτού του συστήματος, έστω $x_1 = g_1, ..., x_r = g_r$ στην H.

Επειδή η διάσταση της $H = \langle h_1, ..., h_m \rangle \geq 2$, άρα από το Θέωρημα του Lee υπάρχει $u \in F_r : v_i(g_1, ..., g_r) = u^{-1}h_i u, i = 1, ..., m$.

Επομένως $w_m(u^{-1}h_1 u, ..., u^{-1}h_m u) = u^{-1}w_m(h_1, ..., h_m)u = w_m(h_1, ..., h_m)$. Άρα $[u, h] = 1$. Έπεται ότι υπάρχει $f \in F_r : u, h \in \langle f \rangle$, δηλαδή υπάρχουν $s, t \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $u = f^s, h = f^t$.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε το f με μια μεταβλητή, έστω y, λαμβάνουμε την εξίσωση $h = y^t$ με μεταβλητή y και σταθερά h. Αυτή η εξίσωση έχει λύση στην F_r, την $y = f$, άρα έχει λύση και στην H, εφόσον η H έχει υποτεθεί verbally closed στην F_r. Έστω λοιπόν $g \in H$ αυτή η λύση. Τότε $g^t = h = f^t \Longrightarrow f = g \in H$. Επομένως $u = f^s \in H$.

Τώρα έχουμε $v_i(g_1, ..., g_r) = u^{-1}h_i u$, άρα $v_i(ug_1u^{-1}, ..., ug_ru^{-1}) = h_i, i = 1, ..., m$. Έστω $\varphi : F_r \longrightarrow H : f_i \mapsto ug_iu^{-1}, i = 1, ..., m$. Θα δείξουμε ότι η φ είναι retraction της F_r στην H.

Η φ είναι ομομορφισμός ομάδων από την Καθολική Συνθήκη.

Τέλος, $\varphi_{/H} = id_H$. Πράγματι, αυτό έπεται από τη σχέση $v_i(ug_1u^{-1}, ..., ug_ru^{-1}) = h_i$ για κάθε $i = 1, ..., m$.

Άρα συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα, έχουμε το βασικό Θεώρημα:

Θεώρημα 0.2.21 *Έστω F ελεύθερη ομάδα πεπερασμένης διάστασης και $H \leq F$. Τότε τα κάτωθι είναι ισοδύναμα:*

α) Η H είναι retract της F.

β) Η H είναι verbally closed υποομάδα της F.

γ) Η H είναι algebraically closed υποομάδα της F.

Απόδειξη: Η ισοδυναμία των β) και γ) είναι ακριβώς η Πρόταση 0.2.17.

α) $\Longrightarrow$ γ) Από την Πρόταση 0.2.5 γνωρίζουμε ότι, επειδή η H είναι retract της F, η H είναι algebraically closed υποομάδα της F.

γ)$\Longrightarrow$ α)Αυτό έπεται από την Πρόταση 0.2.20 και την ισοδυναμία των β) και γ).

Εφαρμογές

Ορισμός 0.2.22 *α) Μία ομάδα G ονομάζεται* ελευθέρα στρέψεως *αν δεν έχει μη τετριμμένο στοιχείο πεπερασμένης τάξης.*

β) Έστω G μια ομάδα και K ένα G-πρότυπο. Μια απεικόνιση $\delta : G \longrightarrow M$ ονομάζεται παραγώγιση *της G στο K, αν $\delta(g_1g_2) = \delta(g_1) + g_1\delta(g_2)$ για κάθε $g_1, g_2 \in G$.*

γ) Έστω R δακτύλιος και M ένα R- πρότυπο. Το M ονομάζεται ελεύθερο, *αν έχει μια βάση $E \subseteq M$, δηλαδή κάθε στοιχείο του M γράφεται με μοναδικό τρόπο ως πεπερασμένο άθροισμα στοιχείων από το E και συντελεστές από τον δακτύλιο R.*

δ) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και K σώμα. Έστω και $K[G]$ ένας K-διανυσματικός χώρος με βάση τα στοιχεία της G. Επεικτείνοντας γραμμικά τον πολλαπλασιασμό της G, το $K[G]$ γίνεται K-άλγεβρα. Αυτό σημαίνει ότι η γραμμική επέκταση του πολλαπλασιασμού της G καθιστά το $K[G]$ δακτύλιο. Τότε, το $K[G]$ ονομάζεται ο δακτύλιος της ομάδας *G.*

Ορισμός 0.2.23 *Έστω F ομάδα και $\beta \in End(F)$.*

α) Το σύνολο $Fix(\beta) = \{f \in F : \beta(f) = f\}$ είναι υποομάδα της F και ονομάζεται σταθερή υποομάδα *της F.*

β) Το σύνολο $Fix^i(\beta) = \{f \in F : \beta^i(f) = f\}$ είναι υποομάδα της F και ονομάζεται i-σταθερή υποομάδα *της F.*

Πριν προχωρήσουμε σε κάποιες εφαρμογές της ήδη αναπτυχθείσας θεωρίας, θα χρειαστούμε μια Πρόταση που μας κατοχυρώνει το γεγονός ότι η τομή οποιασδήποτε οικογένειας retract είναι retract. Για αυτόν τον λόγο, παραθέτουμε χωρίς απόδειξη - καθώς η διαδικασία απόδειξής τους υπερβαίνει τον σκοπό αυτής της διπλωματικής εργασίας - δύο Λήμματα που μας επιτρέπουν να προχωρήσουμε στην απόδειξη αυτής της Πρότασης. Στο [7] λοιπόν, Corollary 9, ο Bergman έδειξε το εξής:

Λήμμα 0.2.24 *Έστω G μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα ελευθέρα στρέψεως, ένας μεταθετικός δακτύλιος K και μια παραγώγιση d της G σε ένα ελεύθερο αριστερό $K[G]$-πρότυπο. Τότε ο πυρήνας της παραγώγισης $Ker(d)$ είναι ένας ελεύθερος παράγοντας της G.*

Παρατήρηση 0.2.25 *Είναι προφανές ότι $Fix^i(\beta) \subseteq Fix^{i+1}(\beta)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$. Με αυτόν τον τρόπο, δημιουργείται μια αύξουσα ακολουθία υποομάδων της F. Ορίζουμε τότε ως $Fix^{\infty}(\beta)$ την άπειρη αριθμήσιμη ένωση των $Fix^i(\beta)$ για $i \in \mathbb{N}$.*

Στο ίδιο paper [7], αναφέρεται το δεύτερο προπαρασκευαστικό Λήμμα ως σχέση (25), (σελ. 1547). Η απόδειξη δε αυτού του Θωρήματος έχει ολοκληρωθεί από τους Turner και Imrich στα [8] και [9].

Λήμμα 0.2.26 *([7]) Έστω F ελεύθερη ομάδα και $f \in End(F)$. Τότε το $Fix^{\infty}(\beta)$ είναι retract της F και ο περιορισμός του β σε αυτό το retract είναι αυτομορφισμός. Αν επιπλέον, ο β είναι 1-1, τότε το $Fix^{\infty}(\beta)$ είναι ελεύθερος παράγοντας της F.*

Πρόταση 0.2.27 *Έστω $F_r = \langle x_1, ..., x_r \rangle$ ελεύθερη ομάδα πεπερασμένης διάστασης r. Τότε η τομή οποιασδήποτε οικογένειας retract της F_r είναι retract της F_r.*

Απόδειξη: Αρκεί να περιοριστούμε στην περίπτωση των δύο retracts. Πράγματι, επειδή η F είναι ελεύθερη ομάδα πεπερασμένης διάστασης, έστω r από την Πρόταση 0.2.19, κάθε retract της θα έχει διάσταση το πολύ r, ως verbally closed υποομάδα της. Άρα, αν έχουμε μια οικογένεια μη τετριμμένων retracts της F, τότε το σύνολο των διαστάσεων τους θα έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.

Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε υπάρχουν δύο υποομάδες της F_r, $H = \langle h_1, ..., h_m \rangle$, $K = \langle k_1, ..., k_s \rangle$, $m, s < r$, ώστε η τομή τους να μην είναι retract της F_r. Ας θεωρήσουμε τους επιμορφισμούς $\alpha : F_r \longrightarrow H : x_i \mapsto h_i$ και $\beta : F_r \longrightarrow K : x_i \mapsto k_i$. Τότε $\alpha(F_r) \cap \beta(F_r) = H \cap K$, το οποίο έχουμε υποθέσει ότι δεν είναι retract της F_r. Άρα υπάρχουν $\alpha, \beta \in End(F_r) : \alpha(F_r) \cap \beta(F_r)$ να μην είναι retract της F_r. Μπορούμε επιπλέον χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $s < m$. Αυτό συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει γνήσιο retract του $\beta(F_r)$ που να περιέχει το $\alpha(F_r) \cap \beta(F_r)$. Έστω ο περιορισμός της σύνθεσης $\alpha \circ \beta : \beta(F) \longrightarrow \beta(F)$. Αν αυτός ο περιορισμός δεν είναι αυτομορφισμός του $\beta(F_r)$, επειδή το σταθερό σώμα $Fix(\beta)$ περιέχει το $\alpha(F_r) \cap \beta(F_r)$, από το Λήμμα 2.2.6, θα έπρεπε το σταθερό σώμα $Fix(\beta)$ να περιέχεται σε ένα γνήσιο retract του $\beta(F_r)$, άτοπο. Άρα ο περιορισμός της σύνθεσης $\alpha \circ \beta$ είναι αυτομορφισμός του $\beta(F_r)$.

Έστω τώρα γ ο αντίστοφος αυτού του αυτομορφισμού. Θεωρούμε τη σύνθεση $\alpha \circ \gamma : \beta(F_r) \longrightarrow F_r$. Τότε $Im(\gamma \circ \alpha) \cap \beta(F) \supseteq \alpha(F) \cap \beta(F)$. Από το Λήμμα 2.2.5 η τομή $\gamma \circ \alpha(\beta(F_r)) \cap \beta(F_r)$ είναι ελεύθερος παράγοντας στην εικόνα $\beta(F_r)$. Άρα από την υπόθεση που κάναμε στην αρχή, $\gamma \circ \alpha(\beta(F_r)) \cap \beta(F_r) \subsetneq \beta(F_r)$. Ιδιαιτέρως, επειδή $\beta(F_r) \subseteq \alpha(F_r)$, έχουμε $\alpha(F_r) \cap \beta(F_r) = \beta(F_r)$, άτοπο.

Θεώρημα 0.2.28 *(Makanin)[10] Έστω F ελεύθερη ομάδα. Υπάρχει αλγόριθμος που να αποφαίνεται για την επίλυση οποιασδήποτε στοιχειώδους εξίσωσης υπεράνω της F.*

Πρόταση 0.2.29 *Έστω F_r ελεύθερη ομάδα διάστασης r. Υπάρχει αλγόριθμος που να αποφαίνεται για το αν μια πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα H της F_r είναι verbally (algebraically) closed ή όχι.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 0.2.20 αρκεί να βρούμε έναν αλγόριθμο που να αποφαίνεται για το αν μια πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της F_r είναι retract ή όχι.

Έστω λοιπόν $\{f, ..., f_r\}$ μια βάση της F_r και $\{h_1, ..., h_m\}$ μια βάση της H. Έστω $h_i = v_i(f_1, ..., f_r)$ μια παράσταση του $h_i, i = 1, ..., m$. Τότε η H είναι retract της F_r, αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1, ..., x_r \in H$ έτσι ώστε ο ενδομορφισμός $\varphi : F_r \longrightarrow F_r : \varphi(f_i) = x_i$ αφήνει την H αναλλοίωτη. Επομένως, για να αποφανθούμε αν υπάρχει τέτοιος ενδομορφισμός, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $h_i = v_i(x_1, ..., x_r), i = 1, ..., m$ με μεταβλητές $x_1, ..., x_r$ και σταθερές $h_1, ..., h_m$ στην H. Επειδή όμως η H είναι ελεύθερη ομάδα, ο αλγόριθμος του Makanin μάς εξασφαλίζει ότι μπορούμε να αποφανθούμε για το αν η εξίσωση αυτή λύνεται.

Θεώρημα 0.2.30 *Έστω F_r ελεύθερη ομάδα με βάση το σύνολο $\{f_1, ..., f_r\}$ και $H \leq F_r$. Τότε υπάρχει μοναδική ελαχιστική(ως προς το περιέχεσθαι) verbally closed υποομάδα της F_r, η οποία περιέχει την υποομάδα H.*

Αυτή η μοναδική ελαχιστική είναι μάλιστα η μοναδική ελαχιστική algebraically closed υποομάδα της F_r που περιέχει την H.

Θα τη συμβολίζουμε δε, με $vcl(H)$.

Απόδειξη: Άμεσο από την Πρόταση 0.2.27.

Θεώρημα 0.2.31 *Έστω F_r ελεύθερη ομάδα και $H \leq F_r$. Υπάρχει αλγόριθμος που να αποφαίνεται για την εύρεση βάσης της $vcl(H)$.*

Απόδειξη: Άμεσο από την Πρόταση 0.2.29 και την Πρόταση 0.2.20.

Με το Θεώρημα αυτό ολοκληρώνεται η ανάπτυξη της θεωρίας.

Ανοικτά Προβλήματα

Στο [3], οι Myasnikov και Roman'kov έθεσαν τα ακόλουθα προβλήματα:

1. Ποιές είναι οι verbally closed υποομάδες μιας ελεύθερης μηδενοδύναμης ομάδας πεπερασμένης διάστασης;
2. Αποδείξτε ότι οι verbally closed υποομάδες μιας υπερβολικής ομάδας ελευθέρας στρέψεως είναι retracts.

Το πρόβλημα 1. μάλιστα επιλύθηκε στο [11] από τους Roman'kov και Khisamiev, οι οποίοι απέδειξαν ότι οι verbally closed υποομάδες μιας ελεύθερης μηδενοδύναμης ομάδας πεπερασμένης διάστασης $N_{r,c}$ είναι ακριβώς οι ελεύθεροι παράγοντες (ή αλλιώς, τα retracts) της $N_{r,c}$.

Το πρόβλημα 2. από όσο γνωρίζουμε δεν έχει επιλυθεί μέχρι αυτή τη στιγμή. Αν ο αναγνώστης δεν είναι εξοικειωμένος με την έννοια της υπερβολικής ομάδας, τον παραπέμπουμε στις σημειώσεις [12] για μια ομαλή εισαγωγή στο αντικείμενο.

Βιβλιογραφία

[1] B.H. Neumann, ”Adjunction of elements to groups, J. London Math. Soc. 18(1943)”

[2]] G. Higman, B. H. Neumann and H. Neumann, Embedding theorems for groups, J. London Math. Soc. 24 (1949)

[3] Myasnikov, Roman’kov ”Verbally closed subgroups of free groups”, J.Group Theory 17(2014)

[4] D. Lee, ”On certain C-test words for free groups”, J. Algebra 247(2002)

[5] Rotman JJ, ”Introduction to the theory of groups”, 383-384

[6] K.S. Allambergenov and V.A. Roman’kov, ”Products of commutators in groups”, Dokl. Akad. Nauk. UzSSR 4 (1984)

[7] George M. Bergman, ”Supports of derivations, free factorizations, and ranks of fixed subgroups in free groups, TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 351, Number 4, April 1999, Pages 15311550 S 0002-9947(99)02087-5”

[8] W. Imrich and E. C. Turner, ”Endomorphisms of free groups and their fixed points, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 105 (1989), 421-422. MR 90f:20037”

[9] Edward C. Turner, ”Test words for automorphisms of free groups, Bull. London Math. Soc. 28 (1996), 255-263. MR 96m:20039”

[10]G.S. Makanin, ”Equations in a Free Group, Math. USSR Izvestiya Vol. 21(1983), No. 3”

[11]”Verbally and existentially closed subgroups of free nilpotent groups”, Roman’kov, Khisamiev, Algebra Logika, 2014, Volume 53, Number 1, Pages 45?59(Mi al623)

[12]”Hyperbolic Groups Lecture Notes, James Howie Heriot-Watt University, Edinburgh, EH14 4AS, Scotland”