ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η   Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Η μετάβαση
από τις ανθυφαιρετικές στις αριθμητικές μεθόδους
αποδείξεων ασυμμετρίας
στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

Στυλιανή Μαυρομάτη
Δ 2013 07

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Στυλιανός Νεγρεπόντης **Ομότιμος Καθηγητής**

Αθήνα
Ιανουάριος, 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 13η Ιανουαρίου 2017από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Σ. Νεγρεπόντη(Επιβλέπων)	Ομοτ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Δ. Λάππα	Αναπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Σ. Νεγρεπόντη (Επιβλέπων)	Ομοτ. Καθηγητή
▪ Δ. Λάππα	Αναπλ. Καθηγητή
▪ Ε. Βασιλείου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

…ἐν τούτοις τοῖς μαθήμασιν

ἑκάστου ὄργανόν τι ψυχῆς

ἐκκαθαίρεταί τε

καὶ ἀναζωπυρεῖται

ἀπολλύμενον καὶ τυφλούμενον

ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐπιτηδευμάτων,

κρεῖττον ὂν σωθῆναι μυρίων ὀμμάτων·

μόνῳ γὰρ αὐτῷ ἀλήθεια ὁρᾶται. …

Πολιτεία, 527d7-e2

Ευχαριστίες

Είναι γεγονός ότι οι στόχοι ομορφαίνουν τη ζωή μας, της δίνουν νόημα και περιεχόμενο. Αποτελούν δυναμογόνα στοιχεία όταν ικανοποιούν εσώτερες επιθυμίες. Πριν από περίπου τέσσερα χρόνια, άρχισε να γίνεται πιο έντονη η σκέψη για την παρακολούθηση του μεταπτυχιακού αυτού προγράμματος. Σίγουρα τότε, δεν ήξερα σε τι ξεχωριστό ταξίδι θα συμμετάσχω, εξωτερικεύοντας την. Οι λόγοι που το κατέστησαν ιδιαίτερο είναι πολλοί, και αν ξεκινήσει η καταγραφή τους, ακούσια θα παραλειφθούν κάποιοι. Η αναφορά

* *στις γνώσεις που μου προσφέρθηκαν απλόχερα μέσω της συσσωρευμένης εμπειρίας,*
* *στην οπτική θέασης και επεξεργασίας των εκάστοτε δεδομένων,*
* *στις στιγμές που βιώθηκαν αυτά τα χρόνια*

είναι η ελάχιστη δυνατή και σίγουρα δεν καλύπτει, παρά λιγοστά από αυτά που θα μείνουν ως αναμνήσεις από αυτή την ενασχόληση.

Η αίσθηση ότι σίγουρα κάτι δε θα αναφερθεί, δε μπορεί να μου στερήσει την ανάγκη έκφρασης θερμών ευχαριστιών σε ξεχωριστά άτομα, τώρα που η εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας σηματοδοτεί την τυπική -και μόνο- λήξη αυτού του ταξιδιού.

Θα ήθελα ολόψυχα να ευχαριστήσω:

* *Τις κυρίες Διονυσία Μπακογιάννη και Ελένη Κλή για τη βοήθειά τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, από την πρώτη μέχρι και την τελευταία μέρα αντίστοιχα.*
* *Όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού προγράμματος για τις νέες γνώσεις και τα εφόδια που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια αυτών των σπουδών.*
  Ιδιαιτέρως
* *τον κ. Α. Μούτσιο-Ρέντζο καθώς μέσα από το μάθημά του μας έδωσε χρήσιμες πληροφορίες για τη σωστή καταγραφή μίας επιστημονικής εργασίας.*
* *τον κ. Δ.Λάππα και τον κ. Ε.Βασιλείου που με χαρά με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στη συμβουλευτική επιτροπή.*
* *τον επιβλέποντα καθηγητή, κ. Στυλιανό Νεγρεπόντη. Η τιμή και οι γνώσεις που έλαβα κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας, δεν περιγράφονται ευκολα με λέξεις. Η ενθάρρυνση, η εμπιστοσύνη και η ουσιαστική βοήθεια κατά τη διάρκειά της, αλλά και των σπουδών συνολικά, υπήρξε καθοριστική. Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας, θα ήταν εξαιρετικά λειψό αν δεν μου εμπιστευόταν τον πνευματικό του μόχθο, την οξυδέρκεια και τον πολύτιμο χρόνο του.*

Επιπλέον, τους συνοδηπόρους μου σε αυτό το ταξίδι,

* *αυτούς που ήξερα πριν την έκδοση του εισιτηρίου αυτού του ταξιδιού και αυτούς που γνώρισα μέσα σε αυτό. Η Μαρία Μ., η Ιωάννα Δ., η Κωνσταντίνα Τ., η Στέλλα Κ., ο Γιάννης Οικ. , ο Βασίλης Κ., ο Κυριάκος Οικ., ο Μάριο Γκ., και ο Κυριάκος Κ., ήταν πλάι μου ότι και όποτε χρειάστηκα κάτι.*
* *τους γονείς μου και τον αδερφό μου, για την υποστήριξη και την υπομονή τους καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Οι δικές τους αρχές και αξίες δίνουν στέρεα βάση για τη μετέπειτα πορεία μου. Ελπίζω ότι θα καλυφθεί ο χρόνος που με στερήθηκαν και τους στερήθηκα.*

Περίληψη

Ο Πλάτων, στο διάσημο χωρίο 147d-148d του διαλόγου *Θεαίτητος,* μας πληροφορεί ότι ο Θεαίτητος απέδειξε το 399 π.Χ. την πρότασή του, σύμφωνα με την οποία: Αν α, β είναι ευθύγραμμα τμήματα, Ν ένας μη τετράγωνος αριθμός, και $α^2=N\cdot β^2$, τότε τα α, β είναι μεταξύ τους ασύμμετρα. Στο κείμενο του διαλόγου δεν αναφέρεται ρητά η μέθοδος απόδειξης αυτής της Πρότασης. Αργότερα, ο Αριστοτέλης περί το 350 π.Χ. στα *Αναλυτικά Πρότερα* περιγράφει μια μη ανθυφαιρετική, αριθμητική απόδειξη ασυμμετρίας της διαμέτρου προς την πλευρά τετραγώνου. Επιπλέον, υπάρχουν αρχαία αριθμητικά εργαλεία, (μερικά από τα οποία σχετίζονται με τον Αρχύτα, όπως η Πρότασή του όπως διασώθηκε από τον Βοήθιο, το Βιβλίο VIII των *Στοιχείων,* και η *Κατατομή Κανόνος,* και δύο ανώνυμες αριθμητικές αποδείξεις ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, που χρησιμοποιούν, αυτά τα εργαλεία, και δείχνουν ότι προ του 350 π.Χ. και στα χρόνια του Αριστοτέλη, υπήρχαν αριθμητικές αποδείξεις της Πρότασης Θεαίτητου.

Από τα παραπάνω, οι πλέον σημαντικοί ιστορικοί συμπέραναν ότι η πρόταση του Θεαίτητου, αποδείχθηκε από τους Αρχύτα και Θεαίτητο, με αριθμητικές μεθόδους, τονίζοντας τη συμβολή του Θεαίτητου και ελαχιστοποιώντας αυτήν του Αρχύτα (Zeuthen 1910, Knorr 1975), ή τονίζοντας την συμβολή του Αρχύτα (van der Waerden 1954). Όμως αυτοί οι ιστορικοί, δε λαμβάνουν υπoψη ότι η μέθοδος του Πλάτωνα Διαίρεση και Συναγωγή στους διαλόγους *Σοφιστής* και *Πολιτικός* (α) περιγράφονται ρητά ως μίμηση της μεθόδου απόδειξης του Θεαίτητου και (β) μπορούν να θεωρηθούν όπως έδειξε ο Σ. Νεγρεπόντης, ως φιλοσοφικό ανάλογο της περιοδικής ανθυφαίρεσης.

Η παρούσα μελέτη παρουσιάζει τα βήματα της μετάβασης από τις ανθυφαιρετικές μεθόδους στις αριθμητικές μεθόδους απόδειξης τετραγωνικών ασυμμετριών στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά. Η ώθηση για τις αριθμητικές αποδείξεις δόθηκε από τις μουσικές προτάσεις του Αρχύτα, το Βιβλίο VIII των *Στοιχείων*, με το οποίο σχετίζεται στενά και το μουσικό έργο *Κατατομή Κανόνος.* Η σύνδεση αυτών των αριθμητικών αποδείξεων με τις γεωμετρικές ασυμμετρίες έγινε με την Πρόταση X.9, μία πρόταση της οποίας η σημασία και ο ρόλος είχε παρερμηνευθεί (όπως σημειώθηκε από τον Mazur (2007), και χρειαζόταν διασαφήνιση. Η έρευνα ανέδειξε σημαντικό κενό στην απόδειξη της πρότασης X.5, στην οποία στηρίζεται η X.9, είναι αναχρονιστική, και χρειάστηκε απόδειξη βασισμένη σε μία νεώτερη, Πυθαγόρεια θεωρία λόγων σύμμετρων μεγεθών.

Συμπερασματικά έχουμε ότι οι αριθμητικές μέθοδοι απόδειξης της Πρότασης του Θεαίτητου οφείλονται αποκλειστικά στον Αρχύτα και τους μαθητές του (χωρίς καμία συμβολή από τον Θεαίτητο).

Λέξεις κλειδιά.
Πρόταση Αρχύτα, Πρόταση Θεαίτητου, Θεωρία Λόγων Σύμμετρων μεγεθών, X.9, X.117.

Abstract

Plato in the famous passage 147d-148d of his dialogue *Theaetetus* informs us that in 399BC, Theaetetus proved the following proposition: If a,b are line segments, N a non-square number, and a^2=N b^2, then a,b are incommensurable. Plato does not expressly indicate the method of proof of this proposition. Later, around 350 BC, Aristotle in *Analytics Prior* 41a26 hints at an non-anthyphairetic, arithmetic proof of the incommensurability of the diameter to the side of a square. Furthermore, ancient arithmetical tools (such as contained in Archytas' proposition reported by Boethius, Book VIII of the *Elements*, and *Sectio Canonis*) and two anonymous arithmetical proofs of the incommensurability of the diameter to the side of a square, employing some of these tools, indicate that arithmetical proofs of Theatetus' proposition existed already at the time of Aristotle.

Most historians of Mathematics concluded that Theatetus' proposition was proved by Archytas and Theatetus with the use of arithmetical methods, either highlighting Theaetetus' contribution and minimizing that of Archytas (Zeuthen 1910, Knorr 1975), or highlighting Archytas' contribution (van der Waerden, 1954). However these historians did not take into account that Plato's method of Division and Collection in the dialogues *Sophist* and *Politicus* (a) is explicitly described as an imitation of Theaetetus' method of proof, and (b) can be seen to be, as shown by S. Negrepontis, a philosophical analogue of periodic anthyphairesis.

In the work at hand we present the steps of transition from the anthyphairetical to the arithmetical methods, employed used in the proof of quadratic incommensurabilities in Greek Mathematics. The impetus for the arithmetic proofs was provided by the musical propositions of Archytas, the closely related Book VIII of Euclid's *Elements* and the musical work *Sectio Canonis*. The link of these arithmetical proofs with geometric incommensurabilities was provided by Proposition X.9, a proposition whose meaning and role has been misunderstood (as pointed out by Mazur, 2007), and in need of clarification. Our research showed that the proof of the proposition X.5, on which X.9 is based, is anachronistic, and in need of a proof based on an earlier, Pythagorean theory of ratios of commensurable magnitudes.

Our thesis is that the original proof of Theaetetus' Proposition is anthyphairetic, while the ancient arithmetical proofs of this Proposition is exclusively due to Archytas and his students, without any contribution by Theaetetus.

Keywords:

Archytas Proposition, Theaetetus Proposition, Ratio Theory of Commensurable Magnitudes, X.9, X.117.

Εισαγωγή

Η σημαντικότερη μαθηματική ανακάλυψη των Πυθαγορείων ήταν χωρίς αμφιβολία η ανακάλυψη ασύμμετρων μεγεθών, ειδικότερα της ασυμμετρίας της διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου. Ο συσχετισμός της ασυμμετρίας με το άπειρο, η σημασία της αρχής του απείρου στην πυθαγόρεια φιλοσοφία, και η ανακάλυψη των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών, είναι μερικά βασικά επιχειρήματα υπέρ της θέσης ότι η μέθοδος της ανακάλυψης της ασυμμετρίας από τους Πυθαγόρειους ήταν ανθυφαιρετική, δηλαδή με τη χρήση της Πρότασης Χ.2 των *Στοιχείων*. Ο Σ. Νεγρεπόντης, μελετώντας τα έργα του Πλάτωνος, και ιδιαίτερα την τριλογία *Θεαίτητος, Σοφιστής, Πολιτικός*, παρουσίασε νέα, σημαντικά επιχειρήματα τα οποία λαμβάνουν υπόψη και αναδεικνύουν την ανθυφαιρετική φύση της Πλατωνικής φιλοσοφίας, συνοψίζονται στο Κεφάλαιο 8, και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος της απόδειξης των τετραγωνικών ασυμμετριών από τους Θεόδωρο και Θεαίτητο (σύντομα μετά το 400 π.Χ.), όπως αναφέρονται από τον Πλάτωνα στον διάλογο *Θεαίτητος* 147d-148d, ήταν επίσης ανθυφαιρετική.

Από την άλλη μεριά, ήδη ο Αριστοτέλης περί το 350 π.Χ. στα *Αναλυτικά Πρότερα* 41a26 περιγράφει μια μη ανθυφαιρετική, αριθμητική απόδειξη της ασυμμετρίας της διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου η κατάληξη της οποίας είναι: "…ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης…" .

Ο **σκοπός της παρούσης διπλωματικής εργασίας** είναι η παρουσίαση της μετάβασης από τις ανθυφαιρετικές μεθόδους στις αριθμητικές μεθόδους απόδειξης τετραγωνικών ασυμμετριών στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά.

Τα ερευνητικά αποτελέσματα που αναφέρονται στην παρούσα εργασία εντάσσονται σε ένα πρόγραμμα υπό την καθοδήγηση του Σ. Νεγρεπόντη.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της μελέτης μας, η μετάβαση αυτή πραγματοποιήθηκε αποκλειστικά από τον Αρχύτα και τους μαθητές του, χωρίς καμία συμβολή από τον Θεαίτητο, ο οποίος ασχολήθηκε μόνο με ανθυφαιρετικές μεθόδους. Αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της μετάβασης αυτής είναι ότι, αν και ξεκίνησε με τις εφαρμογές της Πρότασης VII.27 των *Στοιχείων* στις Αρχύτειες Προτάσεις του βιβλίου VIII, εν τούτοις τελικά ο αριθμητικός πυρήνας των αριθμητικών αποδείξεων τετραγωνικής ασυμμετρίας βασίσθηκε εξ ολοκλήρου στην Πρόταση VII.27, καθιστώντας πλεονάζον το βιβλίο VIII των Στοιχείων. Τα συμπεράσματα της μελέτης, ιδίως ως προς τον ρόλο του Θεαίτητου, έρχονται σε θεμελιώδη αντίθεση με τις κυρίαρχες μέχρι σήμερα απόψεις των Zeuthen, van der Waerden, και Knorr.

Στο **Κεφάλαιο 1**, η μελέτη ξεκινά από την Πρόταση του **Αρχύτα**, όπως αυτή δίνεται από τον Λατίνο συγγραφέα **Βοήθιο** στην παράγραφο **ΙΙΙ.11** του έργου του ***De Institutione Musica***. Εκεί, ο συγγραφέας διέσωσε μια Πρόταση του Αρχύτα του Ταραντίνου - σύγχρονου και φίλου του Πλάτωνος - στην Πυθαγόρεια μουσική, σύμφωνα με την οποία σε κάθε **επιμόριο λόγο** (δηλαδή, λόγο αριθμών ο οποίος, όπως ο ίδιος έδειξε, σε ανάγωγη μορφή είναι ίσος προς (N+1):N για κάποιο φυσικό αριθμό N) δεν υπάρχει **μέσος ανάλογος,** δηλαδή φυσικός αριθμός x ώστε (N+1):x=x:N. Σημειώνεται πως ο Βοήθιος εκεί κάνει επανειλημμένως ρητή αναφορά στον Αρχύτα.

Η απόδειξη αυτή, βασίζεται στις Προτάσεις VII.20-22 των *Στοιχείων* και στην Πρόταση VIII.8 των *Στοιχείων* (στην ειδική μορφή που παρεμβάλλεται ένας μόνο μέσος ανάλογος). Γενίκευση αυτής για περισσότερους μέσους ανάλογους αποτελεί η Πρόταση 3 του μουσικού έργου ***Κατατομή Κανόνος***.

Η Πρόταση VIII.8 είναι μία από τις βασικές Προτάσεις του αυστηρά αριθμητικού **βιβλίου VIII των *Στοιχείων***, ενώ η άλλη είναι η Πρόταση VIII.6 (σε αντιθετο-αντίστροφη μορφή ως Πρόταση VIII.7) και η απλή συνέπειά της ως Πρόταση VIII.14, σύμφωνα με την οποία "αν ο αριθμός $β^2$ είναι πολλαπλάσιος του αριθμού $α^2$, τότε ο αριθμός β είναι πολλαπλάσιος του α". Με τρόπο ανάλογο, με τον οποίο προκύπτει η μουσική Αρχύτεια Πρόταση για επιμόριους λόγους από την Πρόταση VIII.8 των *Στοιχείων*, προκύπτει και η Πρόταση 2 της *Κατατομής Κανόνος* για τους πολλαπλάσιους λόγους, από την Πρόταση VIII.7 και (η απλή της συνέπεια) η Πρόταση VIII.14.

Ο Βοήθιος, στην παράγραφο IV.2 του ίδιου έργου αναφέρεται μεταξύ άλλων στις Προτάσεις 2 και 3 της *Κατατομής Κανόνος*. Αξίζει να τονισθεί ότι αν και η Πρόταση 3 πρακτικά συμπίπτει με την Πρόταση του Αρχύτα, εν τούτοις στο σημείο αυτό ο Βοήθιος δεν έχει καμία αναφορά σε αυτόν. Επιπροσθέτως, σημειώνεται ότι η απόδειξη της Πρότασης του Αρχύτα στο *De institutione Musica,* III.11 είναι σε μαθηματικά αρχαϊκή μορφή, ενώ η απόδειξή της αντίστοιχα στο IV.2 είναι σε σχετικά σε προηγμένη μορφή, ακολουθώντας πιθανόν την *Κατατομή Κανόνος*.

Βασικό χαρακτηριστικό αμφοτέρων των Προτάσεων VIII.8 και VIII.7 των *Στοιχείων* είναι η εξάρτησή τους από τις Προτάσεις VII.20-22, αλλά κυρίως από την θεμελιώδη Πρόταση VII.27 των *Στοιχείων*.

Πρωταρχικός σκοπός λοιπόν του κεφαλαίου αυτού είναι να αναδειχθεί και περιγραφεί ο θεμελιώδης ρόλος της Πρότασης VII.27 (αν μ,ν είναι δύο σχετικά πρώτοι αριθμοί τότε οι $μ^2$, $ν^2$ είναι σχετικά πρώτοι) στην Πυθαγόρεια μουσική, όπως ξεκίνησε από τον Αρχύτα και συνεχίσθηκε στην *Κατατομή Κανόνος* αλλά και στην δημιουργία του αριθμητικού βιβλίου VIII των *Στοιχείων*, μέσω μελέτης όλων των προαναφερόμενων προτάσεων και των κύριων προαπαιτούμενών τους.

Αφού επιτευχθεί ο παραπάνω σκοπός, ακολουθούν στην § 1.5 σχόλια των van der Waerden και Knorr, στα οποία γίνεται προσπάθεια να εντοπισθεί ο ρόλος του Αρχύτα στο όλο οικοδόμημα των Προτάσεων του βιβλίου VIII των *Στοιχείων*, οι οποίες παράγονται από την Πρόταση VII.27. Βρίσκουμε εκεί τον van der Waerden να αποδίδει σε μεγάλο βαθμό το βιβλίο VIII των *Στοιχείων* και τις Προτάσεις 2 & 3 της *Κατατομής Κανόνος* στον Αρχύτα, ενώ ο Knorr, βασιζόμενος και στην κρίση του Βοήθιου ότι η απόδειξη του Αρχύτα (III.11) δεν ήταν αυστηρή (nimium fluxa), θεωρεί ότι σημαντική συμβολή στην συγγραφή του βιβλίου VIII είχε και ο **Θεαίτητος**.

Η εμπλοκή του Θεαίτητου με το βιβλίο VIII των *Στοιχείων* από μία σειρά ιστορικών των μαθηματικών από τον Zeuthen και μετά, οφείλεται στο γεγονός ότι η Πρόταση VIII.14 των *Στοιχείων* και η Πρόταση 2 της *Κατατομής Κανόνος* βρίσκονται, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5, παρακάτω, σε στενή συνάφεια με την Πρόταση, την οποία, σύμφωνα με το χωρίο 147d-148d του Πλατωνικού διαλόγου *Θεαίτητος* (και το ανώνυμο σχόλιο X.62 στα *Στοιχεία*), απέδειξε ο ίδιος για τις τετραγωνικές ασυμμετρίες: αν α, β είναι ευθύγραμμα τμήματα, Ν ένας όχι τετράγωνος αριθμός, και $α^2=N\cdot β^2$, τότε α, β είναι μεταξύ τους ασύμμετρα. (Αυτή η πρόταση θα αναφέρεται στη συνέχεια ως Πρόταση Θεαίτητου)

Επομένως, το θέμα της συμβολής του Αρχύτα και του διαχωρισμού της συμβολής του ίδιου από εκείνης του Θεαίτητου που πραγματεύονται οι σχολιαστές είναι ιδιαίτερα σημαντικό, και θα επανέλθουμε σε αυτό στο Κεφάλαιο 7, αφού πρώτα εξετάσουμε τον ακριβή τρόπο με τον οποίο οι αριθμητικές Προτάσεις που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 1 σχετίσθηκαν στην αρχαιότητα με θεωρήματα τετραγωνικών ασυμμετριών.

Διαπιστώθηκε ότι οι Προτάσεις που μελετούνται στο Κεφάλαιο 1, αναφέρονται στη μουσική και αριθμητική, εν τούτοις δημιουργούν την αίσθηση της στενής συνάφειας με προτάσεις ασυμμετρίας. Γίνεται αντιληπτό ότι γεωμετρικός μέσος δεν υπάρχει μεταξύ δύο αριθμών σε επιμόριο λόγο ακριβώς διότι η "τετραγωνική ρίζα" ενός επιμόριου λόγου είναι άρρητη. Γεννάται εύλογα το ερώτημα αν και οι αρχαίοι είχαν μια τέτοια αντίληψη, και αν όντως είχαν μετατρέψει τις μουσικές-αριθμητικές Προτάσεις του Αρχύτα σε γεωμετρικές αποδείξεις ασυμμετρίας. Υπάρχουν ενδείξεις ότι αυτό πράγματι συνέβη, και παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4. Συγκεκριμένα, στη βιβλιογραφία υπάρχει:

--μια ανώνυμη απόδειξη της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, **η (λεγόμενη) Πρόταση X.117a,** της οποίας η απόδειξη βασίζεται στην Πρόταση VIII.14, και

--μια απόδειξη της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου με χρήση της Πρότασης VII.27, η οποία περιγράφεται λεπτομερώς στα **σχόλια του Αλέξανδρου Αφροδισιέως στο χωρίο 41a23-32 του έργου *Αναλυτικά Πρότερα* του Αριστοτέλη,** όπου η απόδειξη της εν λόγω ασυμμετρίας ανάγεται στο άτοπο "…τὰ περισσὰ ἄρα τοῖς ἀρτίοις ἴσα ὑποτεθείσης τῆς διαμέτρου εἶναι τῇ πλευρᾷ συμμέτρου…"

Οι δύο αυτές αρχαίες αποδείξεις δείχνουν ότι αρχαίοι μαθηματικοί, κάποια χρονική στιγμή, όντως μετέτρεψαν τις μουσικές-αριθμητικές Προτάσεις των Αρχύτα, βιβλίου VIII, των *Στοιχείων* και *Κατατομής Κανόνος* σε προτάσεις τετραγωνικών ασυμμετριών.

Η εξέλιξη της μετάβασης από τις μουσικές-αριθμητικές Προτάσεις (Βιβλίο VII *Στοιχείων*, Αρχύτας, Βιβλίο VIII *Στοιχείων, Κατατομή Κανόνος*) σε μη-ανθυφαιρετικές αριθμητικές αποδείξεις τετραγωνικών ασυμμετριών πραγματοποιείται στα **Κεφάλαια 2-6**.

Ειδικότερα, στα Κεφάλαια 2 & 3 εντοπίζονται τα απλά αρχαία εργαλεία που αναπτύχθηκαν για την μετάβαση από τετραγωνικούς λόγους συμμέτρων μεγεθών σε αριθμητικούς λόγους προκειμένου οι αριθμητικές Προτάσεις να μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν σε αποδείξεις τετραγωνικών ασυμμετριών.

Για το σκοπό αυτό είναι αναγκαία, η χρήση της Πρότασης X.5 και του ευθέος μέρους της Πρότασης X.9 των *Στοιχείων*, το οποίο θα συμβολίσουμε με X.9 (ε). Η μελέτη καταδεικνύει ότι οι αποδείξεις, ακόμη και οι διατυπώσεις, αυτών των Προτάσεων στα *Στοιχεία* είναι ιδιαίτερα προβληματικές τουλάχιστον στα εξής σημεία:

--Ενώ στα *Στοιχεία* δεν ορίζεται ποτέ μεικτός λόγος της μορφής α:β=μ:ν, όπου α, β είναι ομοειδή μεγέθη και μ,ν είναι φυσικοί αριθμοί, η διατύπωση των Προτάσεων X.5 και X.9 χρησιμοποιεί αυτούς τους μεικτούς λόγους.

--Οι Προτάσεις X.5 και X.9 αποδεικνύονται με τη χρήση Προτάσεων θεωρίας λόγων μεγεθών του Βιβλίου V, το οποίο, όμως οφείλεται στον Εύδοξο, με αποτέλεσμα η θεωρία αυτή να είναι μεταγενέστερη από τον χρόνο στον οποίο χρησιμοποιήθηκαν αυτές οι Προτάσεις. Το ίδιο ισχύει και για προτάσεις που χρησιμοποιούνται από το βιβλίο VI, το οποίο βασίζεται ολοκληρωτικά στη θεωρία του βιβλίου V.

-- Η απόδειξη της Πρότασης X.9 (ε) παρουσιάζει λογικό κενό στο σημείο όπου από την ισότητα μεικτών λόγων συμπεραίνεται, χωρίς επαρκή αιτιολόγηση η ισότητα των "διπλασίονων" λόγων.

Προκειμένου να γίνει συνεπής χρήση των εργαλείων αυτών, καθίσταται αναγκαία η εισαγωγή των προαπαιτούμενων ορισμών, των Προτάσεων και αποδείξεών τους, οι οποίες απαλείφουν τις προαναφερόμενες ελλείψεις.

Οι μελετητές, έχουν επισημάνει τα παραπάνω σημεία και για την διόρθωσή τους ο μεν Heath εντοπίζει, αλλά δεν αντιμετωπίζει ικανοποιητικά το πρόβλημα, ο δε van der Waerden προτείνει τη χρήση της Θεαιτήτειας θεωρίας λόγων μεγεθών, η οποία, σύμφωνα με το φημισμένο χωρίο των *Τοπικών* του Αριστοτέλη, βασίζεται στον ορισμό της αναλογίας ως η ίση ανθυφαίρεση. Αυτό όμως δεν είναι αναγκαίο ή χρήσιμο, διότι οι Προτάσεις X.5 και X.9(ε) αναφέρονται μόνο σε σύμμετρους μεικτούς λόγους. Αναδύεται επομένως η ανάγκη ορισμού της αναλογίας συμμέτρων μεικτών λόγων και η ανάπτυξη της θεωρίας αναλογιών μέχρι το σημείο που μπορούν να αποδειχθούν ικανοποιητικά οι Προτάσεις X.5 & X.9(ε). Ο Knorr συνοπτικά και ο C.M.Taisbak περισσότερο αναλυτικά, περιγράφουν τη σωστή προσέγγιση για τους ιστορικά ορθούς ορισμούς και αποδείξεις των Προτάσεων X.5 (αλλά και X.9).

Στις παραπάνω προσεγγίσεις εμφανίζεται το εξής οξύμωρο. Παρόλο που γίνονται αξιόλογες προσπάθειες για την ιστορικά ορθή ανακατασκευή της θεωρίας λόγων σύμμετρων μεγεθών, εν τούτοις δεν δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στο γεγονός ότι πριν από την Πρόταση X.5, ο Ευκλείδης παραθέτει δύο Προτάσεις, την X.3 και την X.4, οι οποίες:

--βρίσκονται σε στενή αναλογία με τις αριθμητικές Προτάσεις VII.2 και VII.3, αντίστοιχα, και

--δεν έχουν κάποια φανερή χρήση στα *Στοιχεία*.

Δεδομένου ότι η (VII.1 και) VII.2 είναι η Πρόταση για την εύρεση του Μ.Κ.Δ δύο αριθμών, και ο Μ.Κ.Δ. είναι η βασική έννοια για την ανάπτυξη της θεωρίας λόγων αριθμών, είναι σαφές ότι η παρουσία της X.3 στο κρίσιμο αυτό σημείο, δηλώνει την ανάπτυξη της ζητούμενης θεωρίας συμμέτρων λόγων με βάση ακριβώς την Πρόταση X.3.

Επομένως, στο **Κεφάλαιο 2**, αναζητείται ο λόγος για τον οποίο η Πρόταση X.5 των *Στοιχείων* είναι προβληματική και επιχειρείται η ορθή ερμηνεία της βάσει της Πρότασης X.3 των *Στοιχείων*. Αυτή είναι καθοριστική για τη μελέτη μας, αφού αριθμητικοποιεί το λόγο σύμμετρων μεγεθών. Κατόπιν, στο **Κεφάλαιο 3** αναπτύσσεται η Πυθαγόρεια θεωρία λόγων συμμέτρων μεγεθών & λόγων μεικτών βάσει των Προτάσεων VII.1, 2 και X.3 των *Στοιχείων,* με σαφή στόχο την Πρόταση μεικτών τετραγωνικών λόγων: Αν α, β σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, και μ,ν αριθμοί ώστε α:β=μ:ν, τότε $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$.

Είμαστε πλέον σε θέση να μελετήσουμε και αναλύσουμε στο **Κεφάλαιο 4**, τις δύο αρχαίες ανώνυμες αποδείξεις ασυμμετρίας διαμέτρου α προς πλευρά β τετραγώνου που αναφέρθηκαν πρωτύτερα. Οφείλουμε να σημειώσουμε ότι, την σημασία αυτών των δύο αποδείξεων ανέδειξε κυρίως ο Knorr (1975).

Η μελέτη ξεκινά με τη **X.117a**, της οποίας η απόδοση είναι συνοπτικά:

Έστω ότι τα μεγέθη α, β είναι σύμμετρα. Από την **Πρόταση X.5**, υπάρχουν αριθμοί μ,ν, ώστε α:β=μ:ν. Από την **X.9 (ε)** λαμβάνουμε $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2=2:1$. Άρα $\mu^2=2\cdot\nu^2$, δηλαδή ο ν^2 μετρά τον μ^2. Από την **Πρόταση VIII.14**, προκύπτει ότι ο ν μετρά τον μ, δηλαδή υπάρχει φυσικός αριθμός κ, ώστε μ=κ·ν. Προφανώς κ>1 (αλλιώς θα είχαμε μ=ν, και α=β, άτοπο). Τότε α=κ·β, και $2\beta^2=\alpha^2=\kappa^2\cdot\beta^2$, άτοπο εφ όσον το 2 δεν είναι τετράγωνος αριθμός.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη την οποία περιγράφει **ο Αλέξανδρος,** στα σχόλιά του *εις Αναλυτικά Πρότερα* 260,7-261,28, της οποίας η συνοπτική απόδοση είναι:

Έστω ότι α, β είναι σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Από την **Πρόταση X.5**, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε α:β=μ:ν. Από τις Προτάσεις **VII.20-22** μπορούμε να υποθέσουμε ότι μ,ν είναι σχετικά πρώτοι. Από την **X.9(ε)** ισχύει ότι $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$. Από τη θεμελιώδη **Πρόταση VII.27** -που επί της οποίας βασίζονται όλες οι Προτάσεις που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 1- οι μ^2 και ν^2 είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί.

[Μέχρις εδώ η απόδειξη έχει τα χαρακτηριστικά μιας γενικής απόδειξης. Από το σημείο αυτό η απόδειξη χάνει τα γενικά της χαρακτηριστικά.]

Από το γεγονός ότι $\alpha^2=2\cdot\beta^2$, έπεται ότι $\mu^2:\nu^2=2:1$, $\mu^2=2\cdot\nu^2$, άρα μ^2 άρτιος, ν^2 είναι άρτιος, άτοπο.

Ορμώμενοι από την προηγηθείσα μελέτη των δύο αποδείξεων ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου ανακατασκευάζουμε, λόγω της εμφανούς γενικότητος των αποδείξεων αυτών, δύο είδη αποδείξεων τετραγωνικής ασυμμετρίας.

Το πρώτο είδος εξετάζεται στο **Κεφάλαιο 5**, και βασίζεται στις Προτάσεις VIII.14 και VIII.8 του βιβλίου VIII, όπως η πρώτη απόδειξη (X.117a) ασυμμετρίας της διαμέτρου προς την πλευρά τετραγώνου, βασίσθηκε στην Πρόταση VIII.14. Εκεί διαπιστώνουμε ότι η ανώνυμη απόδειξη ασυμμετρίας X.117a που εξετάστηκε στην §4.1 έχει τα χαρακτηριστικά ειδίκευσης γενικής απόδειξης της Πρότασης τετραγωνικής ασυμμετρίας, δηλαδή της **Πρότασης του Θεαίτητου** (αν α,β είναι ευθύγραμμα τμήματα, Ν μη τετράγωνος αριθμός και $\alpha^2=N\cdot\beta^2$, τότε α,β είναι ασύμμετρα), με μεθόδους μη ανθυφαιρετικές, αριθμητικές, που βασίζεται στην Πρόταση VIII.14 των *Στοιχείων*.

Προκύπτει άμεσα στην §5.1 μια ανακατασκευή γενικής αριθμητικής, μη ανθυφαιρετικής, απόδειξης τετραγωνικής ασυμμετρίας της οποίας ειδική περίπτωση είναι η αρχαία ανώνυμη απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου X.117a, και μια ανάλογη ανακατασκευή στην §5.2, με χρήση της Αρχύτειας Πρότασης VIII.8. της **Πρότασης**: Αν α,β ευθύγραμμα τμήματα, ώστε $\alpha^2:\beta^2=(N+1):N$, τότε α, β ασύμμετρα **(τετραγωνική 'Αρχύτεια' ασυμμετρία επιμόριων λόγων)**.

Στο σημείο αυτό, στην § 5.3 από τη μελέτη της δομής των ειδικών αποδείξεων στο Κεφάλαιο 4, και των γενικών στις παραγράφους 5.1, 5.2 αναδύεται αβίαστα ο ακριβής ρόλος της Πρότασης X.9 των Στοιχείων, ή ακριβέστερα της ευθείας κατεύθυνσης της X.9(ε). Γίνεται αντιληπτό ότι η ευθεία κατεύθυνση της Πρότασης X.9 των *Στοιχείων* είναι ακριβώς η σύμπτυξη της Πρότασης X.5 και της Πρότασης 3.2.12 συμμέτρων τετραγωνικών λόγων. Έτσι, διαπιστώνουμε ότι η Πρόταση X.9 είναι το στοιχειώδες αλλά απολύτως κατάλληλο εργαλείο, ώστε μια απόδειξη τετραγωνικής ασυμμετρίας με εις άτοπο να έλθει στο σημείο όπου μια από τις Αρχύτειες αριθμητικές Προτάσεις είναι χρησιμοποιήσιμη.

Τέλος, στην § 5.5 καταγράφουμε τη βελτιωμένη (με την έννοια της αντικατάστασης των X.5 και 3.2.12 από την X.9(ε)) μορφή των αριθμητικών μη-ανθυφαιρετικών αποδείξεων της Πρότασης του Θεαίτητου και της Πρότασης Αρχύτειας τετραγωνικής ασυμμετρίας των επιμορίων λόγων.

Το δεύτερο είδος θα εξετασθεί στο **Κεφάλαιο 6**, και βασίζεται στην θεμελιώδη Πρόταση VII.27, όπως η απόδειξη του Αλέξανδρου. Εκεί, αναζητούμε την γενική μορφή απόδειξης ασυμμετρίας από την οποία θα προέκυπτε αυτή που εξετάσαμε ως Πρόταση Αλέξανδρου (στην § 4.2).

Η απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, την οποία περιγράφει ο Αλέξανδρος, σχολιάζοντας το Αριστοτελικό χωρίο στα *Αναλυτικά Πρότερα* (και την οποία εξετάσαμε στην § 4.2.2), είναι εμφανώς μια απόδειξη που προσαρμόσθηκε στην ειδική περίπτωση διαμέτρου προς πλευρά μιας γενικής απόδειξης. Εύλογο είναι να αναρωτηθεί κανείς, ποιάς γενικής ακριβώς; Στην πραγματικότητα έχουμε τρείς ενδιαφέρουσες επιλογές.

Μπορούμε να θεωρήσουμε (στην § 6.1) την απόδειξη του Αλέξανδρου ως ειδική με την έννοια ότι αποτελεί εξειδίκευση της Πρότασης του Θεαίτητου (η οποία ισχύει για κάθε μη τετράγωνο Ν) για τον μη τετράγωνο αριθμό Ν=2. Πράγματι με ελάχιστη τροποποίηση στην απόδειξη της Πρότασης Αλέξανδρου, δηλαδή με χρήση της Πρότασης VII.27 μαζί με την X.9(ε), έχουμε απόδειξη της Θεαιτήτειας ασυμμετρίας.

Όμως μπορούμε εξ ίσου να θεωρήσουμε (στην § 6.2) την απόδειξη του Αλέξανδρου ως ειδική με την έννοια ότι είναι εξειδίκευση της Αρχύτειας Πρότασης -η οποία ισχύει για επιμόριο λόγο (N+1):N- για τον "επιμόριο" λόγο 2:1. Πράγματι με ελάχιστη τροποποίηση στην απόδειξη της

Πρότασης Αλέξανδρου, δηλαδή με χρήση της Πρότασης VII.27 μαζί με την X.9(ε) έχουμε απόδειξη της Αρχύτειας ασυμμετρίας.

Το ιδιαίτερα σημαντικό στοιχείο που αναδεικνύεται στις § 6.2, § 6.3 είναι η διαπίστωση ότι δεν χρειάζονται οι ενδιάμεσες Προτάσεις του βιβλίου VIII, οι οποίες όπως είδαμε στο κεφάλαιο προϋποθέτουν την VII.27, αλλά η ίδια η θεμελιώδης Πρόταση VII.27 από μόνη της είναι σε θέση να δώσει με τον ίδιο τρόπο τις δύο αριθμητικές αποδείξεις ασυμμετρίας, την Πρόταση του Θεαίτητου και την Αρχύτεια επιμόρια ασυμμετρία. Ακόμη καλύτερα μπορεί (στην § 6.3), χωρίς καμία πρόσθετη δυσκολία, να αποδειχθεί, από την VII.27 και την X.9(ε) μια γενικευμένη-ενοποιημένη Πρόταση τετραγωνικής ασυμμετρίας του Θεαίτητου, η οποία να περιέχει τις δύο αυτές ως ειδικές περιπτώσεις. Η πρόταση αυτή είναι: Αν α,β ευθύγραμμα τμήματα, Μ, Ν φυσικοί αριθμοί, ώστε $α^2$:$β^2$=Ν:Μ, και Ν, Μ σχετικά πρώτοι, και όχι αμφότεροι τετράγωνοι, τότε α,β ασύμμετρα.

Με τον τρόπο αυτό, οι Προτάσεις του βιβλίου VIII στο τέλος της 50ετίας από το 400 μέχρι το 350 π.Χ., αφού συμπληρώσουν τον κύκλο της χρησιμότητός τους, χάνουν την σημασία τους ως εργαλεία για την απόδειξη τετραγωνικών ασυμμετριών, και αρκεί για όλες τις εφαρμογές η αρχαία αλλά θεμελιώδης Πρόταση VII.27.

Επιπλέον προσθήκες στην ενοποιημένη Πρόταση τετραγωνικής ασυμμετρίας περιγράφονται στην §6.4, οπότε και συμπληρώνεται η μεταφορά από τις μουσικές-αριθμητικές Προτάσεις που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 1 (Βιβλίο VII *Στοιχείων*, Αρχύτας, Βιβλίο VIII *Στοιχείων*, *Κατατομή Κανόνος*) στις μη-ανθυφαιρετικές αριθμητικές αποδείξεις τετραγωνικών ασυμμετριών, οι οποίες, όπως διαπιστώσαμε, συνέβησαν προ του χρόνου κατά τον οποίο ο Αριστοτέλης συμπλήρωσε τα *Αναλυτικά Πρότερα*, περί το 350 π.Χ.

Το τελικό στάδιο (το οποίο περιγράφεται στο **Κεφάλαιο 7**) στην πορεία απλοποίησης της αριθμητικής μη ανθυφαιρετικής απόδειξης της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά πραγματοποιήθηκε κατά τα φαινόμενα πολύ αργότερα, μετά τον Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα (όπως επιχειρηματολογήσαμε στο Κεφάλαιο 4), πιθανόν από τον ή κατά την εποχή του Θέωνος του Αλεξανδρέος, και αποτέλεσε την ακροτελεύτια Πρόταση X.117 σε ορισμένα μεταγενέστερα αντίγραφα των *Στοιχείων*. Η απόδειξη αυτή είναι απολύτως στοιχειώδης, απαλλαγμένη από κάθε περιττό εργαλείο και δεν χρησιμοποιεί κανένα ουσιαστικό εργαλείο από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες αποδείξεις. Οι μόνες Προτάσεις από το βιβλίο VII που είναι αναγκαίες είναι οι Προτάσεις VII.20-22. Συγχρόνως είναι η μόνη απόδειξη η οποία δεν αποτελεί εξειδίκευση κάποιας γενικότερης απόδειξης τετραγωνικής ασυμμετρίας. Τέλος, τονίζουμε ότι η απόδειξη X.117 κατ’ ουσίαν ταυτίζεται με την σύγχρονη στοιχειώδη, αριθμητική απόδειξη.

Κεφάλαιο 1. Η εφαρμογή της Πρότασης VII. 27 των *Στοιχείων* στην Πυθαγόρεια μουσική (Αρχύτας, *Κατατομή Κανόνος*) και στο αριθμητικό βιβλίο VIII των *Στοιχείων*.

Ο λατίνος συγγραφέας Βοήθιος (480–524 μ.Χ.), στην παράγραφο III.11 του έργου του *De institutione Musica*, διέσωσε μια Πρόταση του Αρχύτα του Ταραντίνου (περίπου 430–365 π.Χ.), σύγχρονου και φίλου του Πλάτωνα, στην Πυθαγόρεια μουσική, σύμφωνα με την οποία για κάθε επιμόριο λόγο (δηλαδή, λόγο αριθμών ο οποίος σε ανάγωγη μορφή είναι ίσος προς (N+1):N για καποιο φυσικό αριθμό N) δεν υπάρχει μέσος ανάλογος (δηλαδή φυσικός αριθμός x ώστε (N+1):x=x:N). Η απόδειξη του Αρχύτα, η οποία περιγράφεται από τον Βοήθιο, βασίζεται στις Προτάσεις VII.20-22 και στην Πρόταση VIII.8 των *Στοιχείων* (στην ειδική μορφή που παρεμβάλλεται ένας μόνο μέσος ανάλογος).

Όπως θα διαπιστωθεί στη συνέχεια, η Πρόταση VIII.8 είναι μία από τις βασικές Προτάσεις του αυστηρά αριθμητικού βιβλίου VIII των *Στοιχείων*, ενώ η άλλη είναι η Πρόταση VIII.6 (σε αντιθετο-αντίστροφη μορφή η Πρόταση VIII.7) και η απλή συνέπειά της Πρόταση VIII.14. Βασικό χαρακτηριστικό αμφοτέρων των Προτάσεων VIII.8 και VIII.7 των *Στοιχείων* είναι η εξάρτησή τους από τις Προτάσεις VII.20-22 αλλά κυρίως από την θεμελιώδη Πρόταση VII.27 των *Στοιχείων*.

Στη συνέχεια, καθίσταται σαφές, ότι με τρόπο ανάλογο, με τον οποίο από την Πρόταση VIII.8 των *Στοιχείων* προκύπτει η μουσική Αρχύτεια Πρόταση για επιμόριους λόγους, προκύπτει από την Πρόταση VIII.7 (και την απλή συνέπεια της Πρόταση VIII.14) η Πρόταση 2 του μουσικού έργου ***Κατατομή Κανόνος*** για τους πολλάπλάσιους λόγους, σύμφωνα με την οποία "αν ο αριθμός $β^2$ είναι πολλαπλάσιος του αριθμού $α^2$, τότε ο αριθμός β είναι πολλαπλάσιος του α". Η Πρόταση 3 της *Κατατομής Κανόνος* είναι γενίκευση σε περισσότερους μέσους ανάλογους της Αρχύτειας Πρότασης για επιμόριους λόγους.

Ο **Βοήθιος**, στην παράγραφο **IV.2** του έργου του ***De institutione Musica***, αναφέρεται στις Προτάσεις 2 και 3 της *Κατατομής Κανόνος*. Σημειώνεται ότι αν και η Πρόταση 3 συμπίπτει με την Πρόταση του Αρχύτα, εν τούτοις στο σημείο αυτό ο Βοήθιος δεν έχει καμία αναφορά σε αυτόν.

Επιπλέον, αξίζει να τονισθεί, ότι η απόδειξη της Πρότασης του Αρχύτα στο *De institutione Musica*, III.11 είναι σε μαθηματικά αρχαϊκή μορφή, ενώ η απόδειξη της στο IV.2 (στην οποία δεν υπάρχει καμμία αναφορά στον Αρχύτα) είναι σε σχετικά σε προηγμένη μορφή, ακολουθώντας την *Κατατομή Κανόνος*.

Συνοπτικά, στην §1.1 εξετάζουμε την μουσική-αριθμητική Πρόταση του Αρχύτα για επιμόριους λόγους όπως δίδεται από τον Βοήθιο στο *Institutio* III.11.
Ακολούθως, στην § 1.2 οι βασικές Προτάσεις VIII.6, VIII.7, VIII.8 και VIII.14 του Βιβλίου VIII των *Στοιχείων*.
Στην §1.3 βρίσκονται οι Προτάσεις 2 και 3 του μουσικού έργου *Κατατομή Κανόνος,* το οποίο φαίνεται να έχει γραφεί την ίδια εποχή ή λίγο αργότερα από τα *Στοιχεία,* πιθανόν από τον ίδιο τον Ευκλείδη,
Στην §1.4 εξετάζουμε την Πρόταση του Αρχύτα (=Πρόταση 3 Κατατομής Κανόνος), όπως δίδεται από τον Βοήθιο στο *Institutio* IV.2.

Τέλος, στην § 1.5 αναφέρονται σχόλια των van der Waerden και Knorr, στα οποία γίνεται προσπάθεια να εντοπισθεί ο ρόλος του Αρχύτα στο όλο οικοδόμημα των Προτάσεων του βιβλίου VIII των Στοιχείων τα οποία παράγονται από την Πρόταση VII.27. Ο van der Waerden αποδίδει σε μεγάλο βαθμό το βιβλίο VIII των *Στοιχείων* και τις Προτάσεις 2 & 3 της *Κατατομής Κανόνος* στον Αρχύτα, ενώ ο Knorr, βασιζόμενος και στην κρίση του Βοήθιου ότι η απόδειξη του Αρχύτα (III.11) δεν ήταν αυστηρή (nimium fluxa), θεωρεί ότι σημαντική συμβολή στην συγγραφή του βιβλίο VIII είχε και ο **Θεαίτητος**.
Ο λόγος για τον οποίο οι ιστορικοί των μαθηματικών, από τον Zeuthen και μετά, εμπλέκουν τον Θεαίτητο με το βιβλίο VIII των *Στοιχείων* οφείλεται στο γεγονός ότι η Πρόταση VIII.14 των *Στοιχείων* και η Πρόταση 2 της *Κατατομής Κανόνος* ευρίσκονται, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 5, παρακάτω, σε στενή συνάφεια με την Πρόταση, την οποία, σύμφωνα με το χωρίο 147d-148d του Πλατωνικού διαλόγου *Θεαίτητος* (και το ανώνυμο σχόλιο X.62 στα *Στοιχεία*), απέδειξε ο Θεαίτητος (και η οποία θα αναφέρεται στη συνέχεια ως Πρόταση Θεαίτητου) για τις τετραγωνικές ασυμμετρίες: αν α,β είναι ευθύγραμμα τμήματα και Ν ένας όχι τετράγωνος αριθμός,και $α^2=Ν·β^2$, τότε α,β είναι μεταξύ τους ασύμμετρα.
Το θέμα της συμβολής του Αρχύτα, και του διαχωρισμού της συμβολής του Αρχύτα από εκείνης του Θεαίτητου, είναι ιδιαίτερα σημαντικό, και θα επανέλθουμε στο Κεφάλαιο 7, αφού πρώτα εξετάσουμε τον ακριβή τρόπο με τον οποίο οι αριθμητικές Προτάσεις που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 1 σχετίσθηκαν στην αρχαιότητα με θεωρήματα τετραγωνικών ασυμμετριών.

1.1. Η Πρόταση του Αρχύτα όπως δίδεται από τον Βοήθιο στο *Institutio Musica,* III.11.

Η Πρόταση του Αρχύτα αποδίδεται ως εξής: Σε επιμόριο διάστημα δεν υπάρχει μέσος ανάλογος (δηλαδή για κάθε δύο φυσικούς αριθμούς α,β σε επιμόριο λόγο, δεν υπάρχει φυσικός αριθμός x ώστε α:x=x:β).
Σύμφωνα με τον ορισμό που αναφέρει ο **Θέων Σμυρνεύς** στο έργο *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος Ανάγνωσιν* **76,21-77,2**
"ἐπιμόριος δέ ἐστι λόγος, ὅταν…
ὁ μείζων [α] τοῦ ἐλάττονος [β] ταύτην ἔχῃ τὴν ὑπεροχήν [γ=α - β],
ἥτις τοῦ ἐλάττονος ἀριθμοῦ **μέρος** ἐστίν.[β=κ·γ]"

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, δύο αριθμοί α, β με α>β είναι σε **επιμόριο λόγο** α:β αν **η διαφορά** (υπεροχή) γ=α – β του α από το β καταμετρεί τον β, δηλαδή ο β είναι **πολλαπλάσιο** του γ, β=κ·γ για κάποιο φυσικό αριθμό κ.

Σε σχόλια στον Ευκλείδη, αναφέρεται ως ορισμός "ο κατὰ γένος ἐπιμόριος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἑτέρου μετρούμενος ἅπαξ καὶ περισσεύων τινός, ὅπερ τινὸς μετρεῖ τὸν μετρήσαντα οἷον ὁ θ καὶ ὁ ιβ· μετρεῖ ὁ θ τὸν ιβ καὶ περισσεύει γ, καὶ ὁ γ μετρεῖ τὸν θ. κατὰ εἶδος δὲ ἐπίτριτος, ἐπιτέταρτος, ἐπιέβδομος καὶ εἰς ἄπειρον". Scholia In Euclidem Book appendix scholiorum 3 line 1-4.

Ο v.d.Waerden αναφέρει ότι "δύο αριθμοί *A* και *B* είναι σε "επιμόριο λόγο", όταν η διαφορά *B-A* είναι μέρος του *A* και του *B*, δηλαδή αν ο *A* και ο *B* είναι πολλαπλάσια του *B-A*." (σελ.105)

Ο Βοήθιος, στο κεφάλαιο III, 11 του έργου του *De institutione Musica*, μας παρέχει στα Λατινικά την διατύπωση και απόδειξη σε πρώτη μορφή της Πρότασης του Αρχύτα για επιμόριους λόγους:

De institutione Musica III, 11.

Demonstratio ***Archytae*** *superparticularem in aequa divide non posse, eiusque reprehension.*
-Superparticularis proportion scindi in aequa medio proportionaliter interposito numero non potest. Id vero posterious firmiter demonstrabitur. Quam enim demonstrationem ponit Archytas, nimium fluxa est. Haec vero est huiusmodi.-
Sit, inquit, superparticularis proportion ·A·B·, sumo in eadem proportione minimos ·C·DE· Quoniam igitur sunt minimi in eadem proportione ·C·DE· et sunt superparticulars, ·DE· numerous ·C· numerum parte una sua eiusque transcendit. Sit haec ·D· Dico, quoniam ·D· non erit numerous, sed unitas. Si enim est numerous ·D· et pars est eius, qui est ·DE· metitur ·D· numerous ·DE· numerum; quocirca et ·E· numerum metietur, quo fit, ut ·C· quoque metiatur. Utrumque igitar ·C· et ·DE· numeros metietur ·D· numerus, quod est inpossibile. Qui enim sunt minimi in eadem proportione quibuslibet aliis numeris, hi primi ad se invicem sunt, et solam differentiam retinent unitatem. Unitas igitur est ·D· Igitur ·DE· numerus ·C· numerum unitate transcendit. Quocirca nullus incidit medius numerous, quieam proportionem aequaliter scindat. Quo fit, ut nec inter eos, qui eandem his proportionem tenent, medius posit numerous collocari, qui eandem proportionem aequaliter scindat. (p.285)

1.1.1. Μεταφράσεις της πρότασης Αρχύτα

Η πρόταση αυτή έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης σημαντικών ερευνητών και παρατίθενται στην βιβλιογραφία μεταφράσεις αυτής. Συγκεκριμένα:

Μετάφραση της Πρότασης του Αρχύτα στα αγγλικά από τον van der Waerden στο έργο του *Science Awakening* (1961).

In the theory of music of Archytas, the following [two] proposition[s] from the theory of numbers, which we shall call A [and B], play a leading role:
A. *Between two numbers in epimoric ratio there exists no mean proportional.*
Proof
Let A : B be the given epimoric ratio, and let C and *D* + E* be the smallest numbers in this ratio. Then *D* + E exceeds the number C by an amount *D*, which is a divisor of *D*+ E itself and also of C. I assert now that *D* must be unity. For, suppose that *D* is a number greater than 1 and a divisor of *D*+ E; then *D* is also a divisor of E and hence of C. It follows that *D* is a common divisor of C and *D*+E; but this is impossible, because the smallest of the numbers whose ratio equals their ratio, are relatively prime (cf. Euclid's Elements VII.22). Therefore *D* is unity, i.e *D* + E exceeds C by unity, and hence a mean proportional between C and *D* + E can not be found. Consequently, a mean proportional between the two original numbers A and B can not exist, since their ratio equals that of C and *D* + E.
(*for the sake of clarity I have written *D* + E. The Latin text simply writes *DE*. The sequel indicates that the equality of C and E is assumed.) (p. 111)

Ελληνική μετάφραση από τον Ι.Χριστιανίδη αυτής της μετάφρασης του van der Waerden στο *Αφύπνιση της Επιστήμης*.

Α. Μεταξύ δύο αριθμών σε επιμόριο λόγο δεν υπάρχει μέσος ανάλογος.

Απόδειξη.

Έστω Α:Β ο δεδομένος επιμόριος λόγος και έστω ότι Γ και Δ+Ε (ΔΕ) οι μικρότεροι αριθμοί με τον ίδιο λόγο. Τότε ο Δ+Ε υπερέχει του αριθμού Γ κατά μία ποσότητα Δ, η οποία είναι διαιρέτης τόσο του Δ+Ε, όσο και του Γ. Ισχυρίζομαι τώρα ότι το Δ πρέπει να είναι η μονάδα. Διότι, ας υποθέσουμε ότι ο Δ είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος του 1, και διαιρέτης του Δ+Ε, τότε ο Δ είναι επίσης διαιρέτης του Ε και συνεπώς του Γ.

Από αυτό συνάγεται ότι ο Δ είναι κοινός διαιρέτης των Γ και Δ+Ε, αλλά αυτό είναι αδύνατο, διότι οι ελάχιστοι απ' τους αριθμούς με τον ίδιο λόγο είναι πρώτοι μεταξύ τους. (VII.22)

Συνεπώς ο Δ είναι μονάδα, δηλαδή ο Δ+Ε υπερέχει του Γ κατά μία μονάδα και επομένως δε μπορεί να βρεθεί μέσος ανάλογος μεταξύ των Γ και Δ+Ε.

Άρα, δεν υπάρχει μέσος ανάλογος μεταξύ των δύο αρχικών αριθμών Α και Β, αφού ο λόγος τους ισούται με το λόγο των Γ και ΔΕ. (σελ.123)

Μετάφαση της Πρότασης του Αρχύτα στα αγγλικά από τον Knorr στο έργο του *The Evolution of The Euclidean Elements* (1975)

[[Proof of Archytas' Proposition in which it is proved that]]

A superparticular proportion cannot be divided into equal parts by the interpolation of a mean proportional number.

Let ·*A*·*B*· be a superparticular ratio (*proportio*), I take the least terms ·*C*·*DE*· in the same ratio. Since ·*C*·*DE*· are the least in the same ratio and are superparticulars, the number ·*DE*· exceeds the number ·*C*· by a part of itself. Let this be ·*D*·. I say that ·*D*· will not be a number, but a unit. For if the number ·*D*· is also part of ·*DE*·, the number ·*D*· measures ·*DE*·*;* whence it measures the number ·*E*·*,* so that it also measures ·*C*·. Thus, the number ·*D*· measures both of the numbers ·*C*· and ·*DE*·*,* which is impossible. For those numbers which are the least in the same ratio as any other numbers are relatively prime, and they have the unit as sole difference. Thus ·*D*· is the unit. Thus ·*DE*· exceeds ·*C*· by a unit.

Whence between them no mean number lies which cuts their ratio equally. Thus, neither between those which have the same ratio can there be found a mean number which cut the same ratio equally. (σελ. 213)

Μετάφραση στα ελληνικά από την αγγλική μετάφραση του Knorr της Πρότασης Αρχύτα.

Ένας επιμόριος λόγος δεν μπορεί να διαιρεθεί σε ίσα μέρη από την παρεμβολή ενός μέσου ανάλογου.

Απόδειξη.

Έστω ·*Α*·*Β*· ότι είναι ένας επιμόριος λόγος.

Παίρνω τους ελάχιστους όρους ·*C*·*DE*· στον ίδιο λόγο. Αφού οι ·*C*·*DE*· είναι οι ελάχιστοι στον ίδιο λόγο και είναι επιμόριος, ο αριθμός ·*DE*· υπερβαίνει τον αριθμό ·*C*· κατά ένα μέρος του εαυτού του. Έστω ότι αυτό είναι ο ·*D*·. Ισχυρίζομαι ότι ο ·*D*· δε θα είναι ένας αριθμός, αλλά η μονάδα. Γιατί αφού ο αριθμός ·*D*· είναι επίσης μέρος του ·*DE*·*,* ο αριθμός ·*D*· μετράει τον ·*DE*·*,* από όπου μετράει

τον αριθμό *·E·,* οπότε επίσης μετράει τον *·C·*. Έτσι, ο αριθμός *·D·* μετράει και τους δύο αριθμούς *·C·* και *·DE·,* το οποίο είναι αδύνατο. Για αυτούς τους αριθμούς οι οποίοι είναι οι ελάχιστοι στον ίδιο λόγο με οποιουσδήποτε άλλους αριθμούς είναι σχετικώς πρώτοι, και έχουν τη μονάδα ως μόνη διαφορά. Έτσι ο *·D·* είναι η μονάδα. Έτσι, ο *·DE·* υπερβαίνει τον *·C·* κατά μία μονάδα. Οπότε, μεταξύ αυτών κανένας μέσος αριθμός δεν εμπίπτει ό οποίος να χωρίζει το λόγο τους εξίσου.
Έτσι, μεταξύ αυτών που έχουν τον ίδιο λόγο δε μπορεί να βρεθεί κανένας μέσος αριθμός ο οποίος να κόβει τον ίδιο λόγο εξίσου.

Απόδοση της απόδειξης της Πρότασης του Αρχύτα με σύγχρονο συμβολισμό, δηλώνοντας τις προτάσεις από τα *Στοιχεία* που χρησιμοποιούνται σε αυτή.

Απόδειξη.
Έστω A:B ένας επιμόριος λόγος.
Θεωρώ τους ελάχιστους C, DE τέτοιους ώστε A:B= C:DE[1] .
Αφού οι C, DE είναι οι ελάχιστοι στον ίδιο λόγο και είναι επιμόριος, ο αριθμός DE=C+D. Θα δειχτεί ότι D=1.
Επειδή DE=k·D,όπου k φυσικός, απ’ όπου θα είναι και E=m·D, για φυσικό m, επομένως C=DE-D οπότε C=(k-1)·D, το οποίο είναι αδύνατο αφού οι C, DE είναι οι ελάχιστοι και επομένως σχετικώς πρώτοι [2] και αφού είναι σε επιμόριο λόγο, διαφέρουν μόνο κατά μία μονάδα.
Έτσι ο D=1, οπότε DE=C+1, οπότε μεταξύ (δύο διαδοχικών) δε μπορεί να βρεθεί κανένας μέσος ανάλογος αριθμός που να διαιρεί εξίσου το λόγο.
Επομένως και στον αρχικό λόγο δε μπορεί να βρεθεί κανένας μεσος ανάλογος αριθμός που να τον διαιρεί εξίσου[3].

---

1 VII.20 των *Στοιχείων*
2 VII.22 των *Στοιχείων*
3 Η πρόταση αυτή είναι ειδική μορφή της Πρότασης VIII.8 των Στοιχείων, συμβολίζεται με VIII.8* και θα μελετηθεί στην παράγραφο 1.2.

1.2. Οι Προτάσεις του Βιβλίου VIII των *Στοιχείων*

Το Βιβλίο VIII των *Στοιχείων* είναι το δεύτερο από τα τρία αριθμητικά βιβλία (VII-IX) και έχει ως αντικείμενό του τη μελέτη των αριθμών σε συνεχή αναλογία, δηλαδή ακολουθίας αριθμών α_1, α_2, $\alpha_3,\ldots,\alpha_n$, ώστε $\alpha_1:\alpha_2=\alpha_2:\alpha_3=\ldots$. Σήμερα, τέτοιες ακολουθίες τις αποκαλούμε γεωμετρικές προόδους, στην ειδική περίπτωση που ο σταθερός λόγος $\lambda= \alpha_1:\alpha_2$, είναι θετικός ρητός. Υπολείπεται σε αυστηρότητα των άλλων δύο, σχετίζεται άμεσα με τη Θεωρία μουσικής του Αρχύτα και το μεγαλύτερό του μέρος αποδίδεται σε αυτόν κατά τον v.d.Waerden, ενώ ολόκληρο του το αποδίδει ο Knorr. Κεντρικό πρόβλημα του Βιβλίου αυτού, είναι: κάτω από ποιες συνθήκες είναι δυνατόν να βρούμε έναν ή περισσότερους αριθμούς σε συνεχή αναλογία μεταξύ των α και β. Βάσει της πρότασης VIII.8, αυτό εξαρτάται μόνο από το λόγο α:β. Όπως διαπιστώθηκε από την πρόταση του Αρχύτα, η οποία μελετήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, η ύπαρξή της προϋποθέτει σημαντικό μέρος της θεωρίας λόγων αριθμών όπως αυτή περιγράφεται στο Βιβλίο VII.

1.2.1. Οι προτάσεις του Βιβλίου VII των *Στοιχείων* που οδηγούν στις αποδείξεις των προτάσεων VIII.7, VIII.8&VIII.14.

Για την απόδειξη των κρίσιμων προτάσεων του βιβλίου VIII χρησιμοποιούνται προτάσεις του βιβλίου VII. Εκτός των στοιχειωδών προτάσεων της θεωρίας λόγων αριθμών VII.1 έως VII.22, οι οποίες θεωρούνται γνωστές στον αναγνώστη, καθοριστικό ρόλο έχει η VII.27. Από την αρχή ήδη του Βιβλίου VIII των *Στοιχειών,* γίνεται σαφής η σπουδαιότητά της, αφού χρησιμοποιείται στην VIII.2 και το ίδιο κατασκευαστικό επιχείρημα που εμφανίζεται εκεί, ακολουθείται στο υπόλοιπο βιβλίο. Μελετώντας την, διαπιστώνουμε ότι η απόδειξή της συνάδει με τον παραγωγικό τρόπο αποδείξεων στα *Στοιχεία*, και επομένως η ολοκληρωμένη παρουσίασή της επιβάλει τη μελέτη των προαπαιτούμενων αυτής, προτάσεων.

Πρόταση VII.24	**μετάφραση της Πρότασης VII.24**
᾿Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.	Εάν δύο αριθμοί είναι σχετικώς πρώτοι με άλλον αριθμό, τότε και το γινόμενο αυτών είναι σχετικά πρώτος με αυτόν.
	Αν (Α,Γ)=1 και (Β,Γ)=1, τότε (Α·Β, Γ)=1
Απόδειξη. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Γ πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει [τις] τοὺς Γ, Δ ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, τὸν δὲ Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε, οἱ Α, Ε ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας. ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Ζ τῷ ἐκ τῶν Α, Β. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι,	**Απόδειξη.** Έστω δύο αριθμοί, οι Α, Β σχετικώς πρώτοι με τον Γ. Έστω Α·Β=Δ. Ισχυρίζομαι ότι οι Γ, Δ είναι σχετικώς πρώτοι. Αν δεν ήταν σχετικώς πρώτοι οι Γ, Δ, θα είχαν κοινό μέτρο, έστω το Ε. Και αφού (Α, Γ)=1 και το Ε είναι μέτρο του Γ, τότε και (Α, Ε)=1 (VII.23) Έστω Δ=Ε·Ζ (VII.16), (Ορ.VII.15). Όμως είναι και Α·Β=Δ Επομένως, Α·Β= Ε·Ζ . (κ.ε. 1) Άρα, οι τέσσερις αριθμοί είναι ανάλογοι και είναι Ε:Α=Β:Ζ (VII.19). Όμως (Α, Ε)=1, επομένως οι Α, Ε είναι οι

οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β, Γ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	ελάχιστοι (VII.21), και αφού έχουν τον ίδιο λόγο με τους Β, Ζ, θα μετράει ο Ε τον Β και ο Α τον Ζ (VII.20). Όμως ο Ε μετρά και τον Β, μετρά και τον Γ, επομένως ο Ε μετρά τους Β, Γ που είχαν υποτεθεί σχετικώς πρώτοι. Αδύνατον, (Ορ.VII. 12), άρα δεν έχουν κοινό μέτρο οι Γ, Δ επομένως είναι σχετικώς πρώτοι.

Παρατήρηση: Η απόδειξη της πρότασης χρειάζεται πολλές από τις προηγούμενες προτάσεις του βιβλίου VII.

Πρόταση VII.25	**μετάφραση της Πρότασης VII.25**
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.	Εάν δύο αριθμοί είναι σχετικώς πρώτοι, το τετράγωνο του ενός είναι σχετικά πρώτος με τον άλλο.
	Αν (Α, Β)=1, τότε και ($Α^2$, Β)=1
Απόδειξη. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Κείσθω γὰρ τῷ Α ἴσος ὁ Δ. ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ Α τῷ Δ, καὶ οἱ Δ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἑκάτερος ἄρα τῶν Δ, Α πρὸς τὸν Β πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ ἐκ τῶν Δ, Α ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Β πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Δ, Α γενόμενος ἀριθμός ἐστιν ὁ Γ. οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	**Απόδειξη.** Έστω οι αριθμοί Α, Β σχετικώς πρώτοι και έστω $Α^2$=Γ. Ισχυρίζομαι ότι οι Β, Γ είναι σχετικώς πρώτοι. Έστω Α=Δ. Επειδή οι Α, Β είναι σχετικώς πρώτοι και Α=Δ, θα είναι και οι Δ, Β σχετικώς πρώτοι. Αφού ο κάθε ένας από τους Α, Δ είναι σχετικώς πρώτοι με τον Β τότε και ο Α·Δ, θα είναι σχετικώς πρώτος με τον Β (VII.24) και αφού Α·Δ=$Α^2$=Γ, έπεται ότι οι Γ, Β είναι σχετικώς πρώτοι.

Παρατήρηση: Η πρόταση είναι εύκολο πόρισμα της VII.24 .

Πρόταση VII.25
Αν α,β σχετικώς πρώτοι, τότε $α^2$,β σχετικώς πρώτοι.

Απόδειξη.
Θέτουμε κ=ΜΚΔ($α^2$,β).
Τότε υπάρχουν μ, ν, ώστε $α^2$=μ·κ, β=ν·κ.
Τότε α:β=$α^2$:αβ=(μ·κ):[α·(ν·κ)]=μ:(α·ν).
Από υπόθεση και την Πρόταση VII.20, υπάρχει ω ώστε μ=ω·α, α·ν=ω·β.
Τότε $α^2$=μ·κ=(ω·α)κ=α· (ω·κ), άρα α=ω·κ.
Τότε ο κ είναι κοινός διαιρέτης των σχετικά πρώτων α=ω·κ και β=ν·κ.
Άρα κ=1, και οι $α^2$,β είναι σχετικώς πρώτοι..

Πρόταση VII.26	**μετάφραση της Πρότασης VII.26**
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ὦσιν, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γενόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.	Εάν δύο αριθμοί είναι και οι δύο σχετικώς πρώτοι προς άλλους δύο, τότε τα γινόμενά τους είναι σχετικώς πρώτοι.
	Αν (Α,Γ)=1, (Α, Δ)=1 και (Β,Γ)=1, (Β, Δ)=1, τότε (Α·Β,Γ·Δ)=1.
Απόδειξη. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ Ε, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Α, Β πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Β ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Β γενόμενός ἐστιν ὁ Ε· οἱ Ε, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ Δ, Ε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ, Δ πρὸς τὸν Ε πρῶτός ἐστιν. καὶ ὁ ἐκ τῶν Γ, Δ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Ε πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ γενόμενός ἐστιν ὁ Ζ. οἱ Ε, Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι	**Απόδειξη.** Έστω οι αριθμοί Α, Β οι οποίοι είναι και οι δύο πρώτοι προς τους Γ, Δ και έστω Α·Β=Ε και Γ·Δ=Ζ. Ισχυρίζομαι ότι οι Ε, Ζ είναι σχετικώς πρώτοι. Επειδή οι Α, Β είναι σχετικώς πρώτοι προς τον Γ, έπεται ότι και ο Α·Β είναι σχετικά πρώτος προς τον Γ (VII.24), και αφού Α·Β=Ε, είναι οι Ε, Γ σχετικώς πρώτοι. Για τον ίδιο λόγο και οι Δ, Ε είναι σχετικώς πρώτοι (VII.24). Αφού οι Γ, Ε και οι Δ, Ε είναι σχετικώς πρώτοι, άρα και ο Γ·Δ είναι σχετικά πρώτος με τον Ε (VII.24). Όμως Γ·Δ=Ζ, άρα οι Ε, Ζ είναι σχετικώς πρώτοι μεταξύ τους.

Αφού έχουν αποδειχθεί οι βοηθητικές προτάσεις, ακολουθεί η απόδειξη της βασικής πρότασης VII.27 .

Πρόταση VII.27	**μετάφραση της Πρότασης VII.27**
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, κἂν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται [καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].	Εάν δύο αριθμοί είναι σχετικώς πρώτοι, και ο κάθε ένας πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, τότε οι παραγόμενοι θα είναι σχετικώς πρώτοι, και αν οι αρχικοί πολλαπλασιάσουν τους παραγόμενους, τότε και αυτοί θα είναι σχετικώς πρώτοι [και διαρκώς αυτό θα συμβαίνει για τους άκρους].
	Αν (α, β)=1, τότε $(α^2,β^2)=1$, $(α^3,β^3)=1$, … , $(α^ν,β^ν)=1$, $ν\in\mathbb{N}$.
Απόδειξη. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω, ὅτι οἵ τε Γ, Ε καὶ οἱ Δ, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ οὖν οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους	**Απόδειξη**. Έστω οι αριθμοί Α, Β σχετικώς πρώτοι και έστω Α·Α=Γ, Α·Γ=Δ, Β·Β=Ε , Β·Ε=Ζ˙ Ισχυρίζομαι ότι οι Γ, Ε και οι Δ, Ζ είναι σχετικώς πρώτοι. Επειδή οι Α, Β είναι σχετικώς πρώτοι και Α·Α=Γ, οι Γ, Β θα είναι σχετικώς πρώτοι (VII.25). Επειδή οι Γ, Β είναι σχετικώς πρώτοι και Β·Β=Ε, οι Γ, Ε θα είναι

εἰσίν, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, οἱ Γ, Ε ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, οἱ Α, Ε ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Ε ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν Β, Ε πρῶτός ἐστιν. καί ἐστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν Α, Γ ὁ Δ, ὁ δὲ ἐκ τῶν Β, Ε ὁ Ζ. οἱ Δ, Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	σχετικώς πρώτοι (VII.25). Πάλι, επειδή οι Α, Β είναι σχετικώς πρώτοι και Β·Β=Ε, οι Α, Ε θα είναι σχετικώς πρώτοι (VII.25). Επειδή, δύο αριθμοί, οι Α, Γ είναι σχετικώς πρώτοι και οι δύο προς τους Β, Ε , τότε και το γινόμενο των Α,Γ θα είναι πρώτος προς το γινόμενο των Β, Ε (VII.26). Και είναι Α·Γ=Δ και Β·Ε=Ζ. Άρα οι Δ, Ζ είναι σχετικώς πρώτοι.

Απόδοση απόδειξης Πρότασης VII.27

Αν δύο αριθμοί είναι μεταξύ τους πρώτοι, και δημιουργήσουμε τα αντίστοιχα τετράγωνά τους, τότε και αυτά είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί. Και εάν οι αρχικοί (αριθμοί) πολλαπλασιάσουν τα γινόμενα αυτά, και εκείνοι θα είναι πρώτοι (και συνεχώς αυτό συμβαίνει για τους άκρους).

Απόδειξη.

Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ με $(\alpha, \beta)=1$

Θα δείξουμε ότι $(\alpha^2,\beta^2)=1$ και $(\alpha^3, \beta^3)=1$ …και $(\alpha^\nu, \beta^\nu)=1$

Καλώ τον $\alpha^2=\gamma$, τον $\alpha\cdot\gamma=\delta \Rightarrow \alpha^3=\delta$ και

τον $\beta^2=\varepsilon$ και τον $\beta\cdot\varepsilon=\zeta$

θα δείξουμε ότι $(\gamma, \varepsilon)=1$ ή $(\alpha^2, \beta^2)=1$

Είναι $(\alpha, \beta)=1$, τότε από την VII.25 $(\alpha^2, \beta)=1 \Rightarrow (\gamma, \beta)=1$

Και αφού ισχύει $(\gamma, \beta)=1$, από την VII.25 είναι $(\gamma, \beta^2)=1$, δηλαδή $(\alpha^2,\beta^2)=1$.

Επιπλέον, είναι $(\alpha, \beta)=1$ και $(\gamma,\varepsilon)=1$,

οπότε από την VII.26 $(\alpha\cdot\gamma, \beta\cdot\varepsilon)=1 \Rightarrow (\alpha^3, \beta^3)=1$ κ.ο.κ.

VII.25
Αν $(\alpha,\beta)=1$, τότε και $(\alpha^2, \beta)=1$.

VII.26
Αν $(\alpha,\beta)=1$ και $(\beta,\delta)=1$,
τότε και $(\alpha\cdot\beta, \gamma\cdot\delta)=1$.

Παρατήρηση: Οι προτάσεις VII.20 έως VII.22 χρησιμοποιούν στην απόδειξή τους τόσο την ύπαρξη ελάχιστων αριθμών σε ίδιο λόγο με άλλους δοσμένους. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στην απόδειξη του Αρχύτα, που ήδη μελετήσαμε. Διαπιστώνεται επομένως η σημασία της ύπαρξης και χρήσης του ίσου ανάγωγου κλάσματος, κάτι που θεωρείται αυτονόητο στα *Στοιχεία*.

Σε σύγχρονους όρους, αυτό αποδίδεται ως εξής.

Αν κ:λ δοθείς λόγος, τότε

--οι μ, ν είναι οι ελάχιστοι ώστε κ:λ=μ:ν

αν και μόνο αν

--ο μ είναι ο ελάχιστος για τον οποίο υπάρχει φυσικός αριθμός y ώστε μ:y=κ:λ.

Η ύπαρξη του ελαχίστου αριθμού μ εξασφαλίζεται από την "αρχή του ελαχίστου".

Ο Ευκλείδης αποδεικνύει την ύπαρξη των ελαχίστων μ, ν στην πρόταση VII.33, την οποία παραθέτουμε για λόγους πληρότητος, χωρίς να χρειάζεται, αφού έχει εξασφαλιστεί από τις Προτάσεις VII.20 -22.

Πρόταση VII.33	**μετάφραση της Πρότασης VII.27**
᾿Αριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.	Να βρεθούν οι ελάχιστοι αριθμοί που έχουν τον ίδιο λόγο με οσουσδήποτε δοσμένους.
Κατασκευή.	
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ. Οἱ Α, Β, Γ γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. Εἰ δὲ οὔ, εἰλήφθω **τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον** ὁ Δ, καὶ ὁσάκις ὁ Δ ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν Ε, Ζ, Η. καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Ε, Ζ, Η ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας. οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῖς Α, Β, Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. λέγω δή, ὅτι **καὶ ἐλάχιστοι**. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ, ἔσονται [τινες] τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. ἔστωσαν οἱ Θ, Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ. ὁσάκις δὲ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Μ· καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας, καὶ ὁ Μ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁ Μ καὶ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν Κ, Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας, ὁ Θ ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ τῷ ἐκ τῶν Θ, Μ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. μείζων δὲ ὁ Ε τοῦ Θ· μείζων ἄρα καὶ ὁ Μ τοῦ Δ. καὶ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα **ἐλάχιστοί** εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	Έστω Α, Β, Γ οι δοθέντες αριθμοί˙ πρέπει να βρεθούν οι ελάχιστοι που έχουν τον ίδιο λόγο με τους Α, Β, Γ. Οι Α, Β, Γ είτε είναι σχετικώς πρώτοι, είτε όχι. Αν μεν οι Α, Β, Γ είναι σχετικώς πρώτοι, θα είναι οι ελάχιστοι μεταξύ όσων έχουν τον ίδιο λόγο. (VII.22) Αν όχι, λαμβάνεται ο Δ **ως ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των Α, Β, Γ** (VII.3) και έστω οι Ε,Ζ,Η, ώστε Α=Δ·Ε, Β=Δ·Ζ, Γ=Δ·Η (VII.16) επομένως οι Ε, Ζ, Η μετρούν τους Α, Β, Γ ίσες φορές, οπότε οι Ε, Ζ, Η έχουν τον ίδιο λόγο με τους Α, Β, Γ (Ορ. VII.20) Ισχυρίζομαι ότι είναι και **οι ελάχιστοι.** Εάν δεν είναι οι ελάχιστοι στον ίδιο λόγο με τους Α, Β, Γ, θα υπάρχουν μικρότεροι από τους Ε, Ζ, Η, που θα είναι στον ίδιο λόγο με τους Α, Β, Γ και έστω ότι αυτοί είναι οι Θ, Κ, Λ. Άρα, όσες φορές ο Θ μετρά τον Α, ίσες φορές και οι Κ, Λ θα μετρούν αντίστοιχα τους Β, Γ. Όσες φορές μετρά ο Θ τον Α, τόσες μονάδες υπάρχουν στον Μ , και επομένως οι Κ, Λ μετρούν τους Β, Γ αντίστοιχα Μ φορές, άρα Α=Θ·Μ, Β=Κ·Μ, Γ=Λ·Μ, (VII.16), δηλαδή ο Μ μετρά τους Α, Β, Γ. Αφού Α=Θ·Μ και επειδή είναι Α=Δ·Ε , θα είναι και Θ·Μ= Δ·Ε (κ.ε.1). Άρα θα είναι Ε:Θ=Μ:Δ (VII.19). Όμως ο Ε είναι μεγαλύτερος του Θ, οπότε και ο Μ θα είναι μεγαλύτερος του Δ και ο Μ μετράει τους Α, Β, Γ, το οποίο είναι αδύνατον αφού υποτέθηκε ότι ο Δ ήταν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των Α, Β, Γ. Επομένως δε θα υπάρχουν μικρότεροι αριθμοί στον ίδιο λόγο με τους Α, Β, Γ. Άρα οι Ε, Ζ, Η είναι οι ελάχιστοι μεταξύ όσων έχουν τον ίδιο λόγο με τους Α, Β, Γ.

Παρατήρηση: Η απόδειξη της VII.33 είναι αδέξια, αφού χρησιμοποιεί το μέγιστο κοινό διαιρέτη, ενώ στην πραγματικότητα μπορεί να αποδειχθεί με αναφορά στην αρχή του ελαχίστου, όπως αυτό γίνεται ήδη στην απόδειξη της πρότασης VII.2. Λόγω αυτής της παρατήρησης, δεν υπάρχει κυκλικότητα στις VII.20- VII.22.

Μετά από αυτές τις προτάσεις, μπορούμε να οδηγηθούμε στη μελέτη των χρήσιμων προτάσεων του Βιβλίου VIII .

1.2.2. Προτάσεις VIII.1-3 των *Στοιχείων*

Στο τέλος της πρότασης του Αρχύτα που μελετήθηκε, αφού έχει αποδειχθεί ότι οι ελάχιστοι όροι για ένα επιμόριο λόγο είναι διαδοχικοί, αναφέρεται ως επιχείρημα ότι μεταξύ τους δεν γίνεται να εμπέσει αριθμός ο οποίος να διαιρεί εξίσου την αναλογία, και ως εκ τούτου, δεν εμπίπτει ούτε και μεταξύ αυτών που έχουν τον ίσο αρχικό λόγο. Όπως είδαμε ο Knorr (1975), αναφέρει ότι

> Whence between them no mean number lies which cuts their ratio equally. Thus, neither between those which have the same ratio can there be found a mean number which cut the same ratio equally. (p.213) .

Παρ όλο που γίνεται εκτενής σχολιασμός της πρότασης αυτής, δεν αναγνωρίζεται αυτό το σημείο ως επίκληση στην VIII.8, αφού αυτή στην διατύπωσή της στα *Στοιχεία* δεν αναφέρεται σε έναν, αλλά σε "όσους". Δεδομένου ότι στην παρούσα εργασιά θα ασχοληθούμε μόνο τις με τετραγωνικές ασυμμετρίες και για αυτές χρειάζεται μόνο ένας μέσος ανάλογος, οι προτάσεις του ογδόου βιβλίου που προϋποτίθενται θα διατυπωθούν και αποδειχθούν στην ειδική περίπτωση του ενός μέσου ανάλογου και θα έχουν τον ειδικό συμβολισμό *.

Η μελέτη ξεκινά με την **VIII.1**, η οποία έχει διατύπωση:
᾿Εὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

και η απόδοσή της είναι:
Εάν υπάρχουν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία, και οι άκροι αυτών είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί, τότε είναι οι ελάχιστοι μεταξύ αυτών που έχουν τον ίδιο λόγο.

Η διατύπωσή της για ένα μέσο ανάλογο είναι η εξής:

Πρόταση VIII.1*
Αν υπάρχουν τρείς αριθμοί σε δοθείσα συνεχή αναλογία και οι άκροι αυτών είναι σχετικώς πρώτοι, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι οι ελάχιστοι μεταξύ αυτών που είναι σε συνεχή αναλογία με τον αυτό λόγο.
Απόδειξη.
Έστω αριθμοί α,β,γ, ώστε α:β=β:γ και α,γ σχετικά πρώτοι.
Θα δείξουμε ότι οι α, β, γ είναι οι ελάχιστοι δυνατοί αριθμοί σε συνεχή ακολουθία με λόγο α:β.
Έστω ότι οι αριθμοί α΄, β΄, γ΄ ικανοποιούν α΄:β΄=β΄:γ΄=α:β.
Από την **δι ίσου VII.14**, έπεται ότι α:γ=α΄:γ΄.
Εφόσον οι α, γ σχετικώς πρώτοι, έπεται, από την **VII.21**, ότι έναι ελάχιστοι με λόγο α:γ.
Από την **VII.20**, υπάρχει φυσικός αριθμός κ, ώστε α΄=κ·α, γ΄=κ·γ.
Εφόσον α΄:β΄=α:β, έπεται άμεσα ότι β΄=κ·β.

Άρα $\alpha' = \kappa \cdot \alpha \geq \alpha$, $\beta' = \kappa \cdot \beta \geq \beta$, $\gamma' = \kappa \cdot \gamma \geq \gamma$.
Άρα οι α,β,γ είναι οι ελάχιστοι αριθμοί μεταξύ αυτών που είναι σε συνεχή αναλογία με τον αυτό λόγο α:β.

Ακολουθεί η κρίσιμη πρόταση **VIII.2**, της οποίας η διατύπωση είναι:

Ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β·
δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἄν τις ἐπιτάξῃ,
ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ.

Η διατύπωσή της για ένα μέσο ανάλογο είναι η εξής:

Πρόταση VIII.2*
Έστω α:β δοθείς λόγος.
Να κατασκευασθούν αριθμοί Α,Β,Γ, ώστε
να βρίσκονται σε συνεχή αναλογία με λόγο α:β (δηλαδή, Α:Β=Β:Γ=α:β), και
να είναι οι ελάχιστοι αριθμοί σε συνεχή αναλογία με τον δοθέντα λόγο α:β.

Απόδειξη.
Θέτουμε μ,ν τους ελάχιστους φυσικούς αριθμούς ώστε α:β=μ:ν.
Ισχυρισμός: οι $A=\mu^2$, $B=\mu\cdot\nu$, $\Gamma=\nu^2$ είναι οι ζητούμενοι ελάχιστοι αριθμοί.
--οι Α,Β,Γ είναι σε συνεχή αναλογία με λόγο α:β.
[[Πράγματι, Από την VII.17 έπεται ότι $\mu:\nu=\mu^2:(\mu\cdot\nu)$, και
από την VII.18 έπεται ότι $\mu:\nu=(\mu\cdot\nu):\nu^2$,
άρα $\alpha:\beta=\mu:\nu=\mu^2:(\mu\cdot\nu)=(\mu\cdot\nu):\nu^2$.]]
--οι Α,Β,Γ είναι οι ελάχιστοι αριθμοί σε συνεχή αναλογία με λόγο α:β.
[[Εφόσον οι μ, ν είναι οι ελάχιστοι με λόγο α:β, έπεται από την VII.22 ότι
οι μ,ν είναι σχετικώς πρώτοι. Τότε, από την VII.27, έπεται ότι και οι μ^2,ν^2 είναι σχετικώς πρώτοι
Από την VIII.1*, οι $A=\mu^2$, $B=\mu\cdot\nu$, $\Gamma=\nu^2$ είναι οι ελάχιστοι.]]

Πόρισμα.
Αν τρεις αριθμοί σε συνεχή αναλογία είναι οι ελάχιστοι από όλους όσους έχουν ίσο λόγο,
τότε οι άκροι της είναι τετράγωνοι αριθμοί.

Το πόρισμα είναι άμεση συνέπεια της **VIII.2*.**

Η πρόταση **VIII.3,** είναι η αντίστροφη της VIII.1:
᾿Εὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς,
οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Δηλαδή,
Εάν υπάρχουν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία και είναι οι ελάχιστοι μεταξύ αυτών που έχουν τον ίδιο λόγο,
τότε οι άκροι αυτών είναι σχετικώς πρώτοι.

Η διατύπωσή της για ένα μέσο ανάλογο είναι:

Πρόταση VIII.3*

Έστω αριθμοί α, β, γ, ώστε
οι α,β,γ είναι σε συνεχή αναλογία (α:β=β:γ) και
οι α,β,γ οι ελάχιστοι αριθμο΄σε συνεχή αναλογία με λόγο α:β.
Τότε οι α, γ είναι σχετικώς πρώτοι.

Απόδειξη.
Έπεται από την Πρόταση **VIII.2*, ότι**
αν μ,ν είναι **οι ελάχιστοι** αριθμοί, ώστε α:β=β:γ=μ:ν,
τότε οι αριθμοί Α=$μ^2$, Β=μ·ν, Γ=$ν^2$ **είναι οι ελάχιστοι σε συνεχή αναλογία με λόγο α:β.**
Από την μοναδικότητα των ελάχιστων αριθμών έπεται ότι
α=Α=$μ^2$, γ=Γ=$ν^2$.
Άρα οι α, γ είναι σχετικώς πρώτοι.

Παρατηρούμε ότι η **VIII.3***είναι συνέπεια της **VIII.2*,** και άρα έμμεσα της **VII.27**.

1.2.3. Προτάσεις VIII.6, VIII.7, VIII.14, και VIII.8

Οι παρακάτω προτάσεις εμφανίζονται στην περαιτέρω μελέτη μας και ως εκ τούτου κρίνεται σκόπιμη η παρουσίασή τους τόσο στη μορφή που εμφανίζονται στα *Στοιχεία* συμπληρωμένη με την απόδειξη και τη νέο-ελληνική απόδοσή τους, όσο και με τη μορφή που θα χρησιμοποιηθούν, με τον ειδικό συμβολισμό *. Όλες αυτές χρειάζονται τις προτάσεις VII.20-22 την VII.27& VII.33.

Πρόταση VIII.6	**μετάφραση της Πρότασης VIII.6**
Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρῇ,οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.	Αν υπάρχουν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία, και ο πρώτος δε μετρά τον δεύτερο, τότε κανείς άλλος δε θα μετρά κανένα άλλον.
	Αν Α:Β=Β:Γ=Γ:Δ=Δ:Ε και Α∤Β, τότε κανείς άλλος δε θα μετρά κανένα άλλον.
Απόδειξη. Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ,Δ, Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Ὅτι μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε ἑξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσιν, φανερόν· οὐδὲ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω ὁ Α τὸν Γ. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Α,Β,Γ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ οἱ Ζ, Η, Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Α, Β, Γ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ τῷ πλήθει τῶν Ζ, Η, Θ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β, οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Ζ τὸν Η· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Ζ·ἡ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ.	**Απόδειξη.** Έστω οι αριθμοί Α, Β, Γ, Δ, Ε σε συνεχή αναλογία Α:Β=Β:Γ=Γ:Δ=Δ:Ε και ο Α να μη μετρά τον Β˙ λέω ότι κανείς άλλος δε θα μετρά κανένα άλλον. Είναι φανερό ότι οι Α,Β,Γ,Δ,Ε δε μετρούν στη σειρά ο ένας τον άλλο, αφού ο Α δε μετρά τον Β. Ισχυρίζομαι, ότι κανείς άλλος, δε μετρά κανένα. Αν αυτό ήταν δυνατό, έστω ότι θα μετρούσε ο Α τον Γ. Όσοι είναι οι Α, Β, Γ , τόσοι ελάχιστοι αριθμοί λαμβάνονται οι Ζ, Η, Θ με Α:Β=Β:Γ=Ζ:Η=Η:Θ (VII.33). Επειδή οι Ζ,Η,Θ είναι στον ίδιο λόγο με τους Α, Β, Γ και έχουν το ίδιο πλήθος με αυτούς, από την δι ίσου, Α:Γ=Ζ:Θ (VII.14)

καί εἰσιν οἱ Ζ, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους [οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ]. καί ἐστιν ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ· οὐδὲ ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	και αφού Α:Β=Ζ:Η και ο Α δε μετρά τον Β, τότε ούτε ο Ζ μετρά τον Η (Ορ.VII.20). Άρα, ο Ζ≠1, αφού το 1 μετρά όλους τους αριθμούς και θα είναι οι Ζ, Θ σχετικώς πρώτοι (VIII.3). Αφού Ζ:Θ=Α:Γ, δε θα μετρά ούτε ο Α τον Γ. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι κανείς, κανέναν δε θα μετρήσει.

Πρόταση VIII.6*
Αν οι αριθμοί α,β,γ είναι σε συνεχή αναλογία, και ο α δεν μετρά (διαιρεί) τον β, τότε ο α δεν μετρά (διαιρεί) τον γ.

Απόδειξη.
Έστω α΄, β΄,γ΄ οι **ελάχιστοι** σε συνεχή αναλογία με λόγο α΄:β΄=α:β.
Εφόσον α΄:β΄=α:β, και ο α δεν μετρά τον β, έπεται ότι ο α΄ δεν μετρά τον β΄, άρα
[1] α΄>1.
Εφόσον α΄,β΄,γ΄ είναι **ελάχιστοι**, έπεται από την Πρόταση **VIII.3*** ότι
[2] οι α΄, γ΄ είναι **σχετικώς πρώτοι**.
Από την [1] και [2] έπεται ότι
[3] ο α΄ δεν μετρά (διαιρεί) τον γ΄.
Εφόσον α,β,γ και α΄,β΄,γ΄ σε συνεχή αναλογία με τον αυτό λόγο, έπεται από την δι’ ίσου VII.14 ότι
[4] α΄:γ΄=α:γ.
Από την [3] και την [4] έπεται ότι
[5] ο α δεν μετρά (διαιρεί) τον γ.

Η Πρόταση VIII.7 είναι άμεση εφαρμογή της πρότασης VIII.6.

Πρόταση VIII.7	**μετάφραση της Πρότασης VIII.7**
᾿Εὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ [ἑξῆς] ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.	Αν υπάρχουν οσοιδήποτε αριθμοί σε [συνεχή] αναλογία, και ο πρώτος μετρά τον τελευταίο, τότε θα μετρά και τον δεύτερο.
	Αν Α:Β=Β:Γ=Γ:Δ και Α\Δ, τότε Α\Β
Απόδειξη. ῎Εστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Δ μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ. Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει· μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	**Απόδειξη.** Έστω οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία οι Α, Β, Γ, Δ και ο Α μετράει τον Δ. Ισχυρίζομαι ότι ο Α μετράει και τον Β. Αν ο Α δε μετράει τον Β, τότε από την VIII.6, κανένας άλλος, κανέναν άλλο δε θα μετράει. Όμως ο Α μετράει τον Δ, οπότε μετρά και ο Α τον Β.

Αντίστοιχα, η διατύπωσή της για ένα μέσο ανάλογο, είναι:

Πρόταση VIII. 7*
Αν οι αριθμοί α,β,γ είναι σε συνεχή αναλογία, και ο α μετρά (διαιρεί) τον γ,
τότε ο α μετρά (διαιρεί) τον β.

Αποδειξη.
Η απόδειξη της πρότασης αποτελεί **αντιθετοαντιστροφή της VIII.6***,
δηλαδή αν ο α δε διαιρούσε τον β, τότε από την VIII.6* αφού α:β=β:γ, ο α δε θα διαιρούσε κανέναν άλλο, επομένως ούτε και τον γ. Επομένως, ο α διαιρεί τον β.

Πρόταση VIII.8	**μετάφραση της Πρότασης VIII.8**
Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας [αὐτοῖς] μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.	Αν μεταξύ δύο αριθμών εμπίπτουν αριθμοί σε συνεχή αναλογία, όσοι εμπίπτουν σε συνεχή αναλογία μεταξύ τους, τόσοι θα εμπίπτουν σε συνεχή αναλογία μεταξύ αυτών που έχουν τον ίδιο λόγο.
Απόδειξη. Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω, ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. Ὅσοι γάρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ Α, Β, Γ, Δ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β οἱ Η, Θ, Κ, Λ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Η, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β τοῖς Η, Θ, Κ, Λ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Δ, Β τῷ πλήθει τῶν Η, Θ, Κ, Λ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Η, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. ἰσάκις ἄρα ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ καὶ ὁ Λ τὸν Ζ. ὁσάκις δὴ ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Κ ἑκάτερον τῶν Μ, Ν μετρείτω· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ ἰσάκις μετροῦσιν. οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἀλλὰ οἱ Η, Θ, Κ, Λ τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν· καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν· καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	**Απόδειξη.** Έστω ότι μεταξύ των αριθμών Α, Β, εμπίπτουν σε συνεχή αναλογία οι αριθμοί Γ, Δ και οι Ε, Ζ είναι τέτοιοι ώστε Α:Β=Ε:Ζ. Ισχυρίζομαι ότι εμπίπτουν σε συνεχή αναλογία μεταξύ των Α, Β, τόσοι όσοι εμπίπτουν σε συνεχή αναλογία και μεταξύ των Ε, Ζ. Όσο είναι το πλήθος των Α,Β,Γ,Δ, τόσοι λαμβάνονται ελάχιστοι αριθμοί στον ίδιο λόγο των Α, Γ, Δ, Β (VII.33), οι Η, Θ,Κ, Λ˙ Άρα οι άκροι όροι Η, Λ είναι σχετικώς πρώτοι (VIII.3). Αφού οι Α,Β,Γ,Δ είναι στον ίδιο λόγο με τους Η,Θ,Κ,Λ και είναι ίσο το πλήθος των Α,Β,Γ,Δ με αυτό των Η,Θ,Κ,Λ, από τη δι΄ίσου (VII.14) θα είναι Α:Β=Η:Λ. Όμως Α:Β=Ε:Ζ και επομένως Η:Λ=Ε:Ζ (κ.ε.1). Οι Η, Λ είναι σχετικώς πρώτοι και οι πρώτοι είναι ελάχιστοι (VII.21) και οι ελάχιστοι μετράνε όσους έχουν τον ίδιο λόγο ίσες φορές αριθμητή και παρονομαστή (VII.20). Άρα, Άρα, υπάρχει φυσικός κ με Ε=κ·Η, Ζ=κ·Λ. Όσες φορές μετρά ο Η τον Ε, τόσες θα μετρά ο Θ, Κ τους Μ, Ν αντίστοιχα, οπότε Μ=κ·Θ, Ν=κ·Κ. Άρα, οι Η,Θ,Κ,Λ μετράνε ίσες φορές τους Ε,Μ,Ν,Ζ, οπότε οι Η,Θ,Κ,Λ είναι στον ίδιο λόγο με τους Ε,Μ,Ν,Ζ (Ορ. VII.20). Όμως, οι Η,Θ,Κ,Λ είναι στον ίδιο λόγο με τους Α, Γ, Δ, Β και επομένως είναι στον ίδιο λόγο με τους Ε,Μ,Ν,Ζ. Όμως οι Α, Γ, Δ, Β είναι σε συνεχή αναλογία, άρα και οι Ε,Μ,Ν,Ζ είναι σε συνεχή αναλογία. Επομένως, όσοι εμπίπτουν σε συνεχή αναλογία μεταξύ των Α, Β εμπίπτουν και μεταξύ των Ε, Ζ.

Και η αντίστοιχή της για ένα μέσο ανάλογο είναι:

Πρόταση VIII.8*
Αν, μεταξύ δύο δοθέντων αριθμών α, γ, παρεμβάλλεται ένας αριθμός β σε συνεχή αναλογία, τότε μεταξύ δύο άλλων αριθμών α΄, γ΄ που έχουν τον ίδιο λόγο με αυτό των δοθέντων (α:γ=α΄:γ΄), παρεμβάλλεται ένας αριθμός β΄ σε συνεχή αναλογία.

Απόδειξη.
Έστω οι **ελάχιστοι** αριθμοί μ,ν ώστε α:β=μ:ν.
Από την VIII.2* οι **ελάχιστοι** αριθμοί σε συνεχή αναλογία με λόγο α:β είναι οι $μ^2$,μν,$ν^2$.
Από την υπόθεση α΄:γ΄=α:γ, και από την κατασκευή των μ,ν, α:γ=$μ^2:ν^2$, άρα α΄:γ΄= $μ^2:ν^2$.
Από την VII.20 υπάρχει , φυσικός αριθμός κ ώστε α΄=κ·$μ^2$, γ΄=κ·$ν^2$.
Θέτουμε β΄=κ·μ·ν. Τότε οι α΄, β΄, γ΄ είναι σε συνεχή αναλογία.

Ιδιαίτερη βαρύτητα πρέπει να δοθεί στην παρακάτω πρόταση, αφού υπάρχει αρχαία πηγή η οποία την χρησιμοποιεί για απόδειξη τετραγωνικής ασυμμετρίας.

Πρόταση VIII. 14	**μετάφραση της Πρότασης VIII.14**
᾿Εὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.	Εάν το τετράγωνο ενός αριθμού μετράει το τετράγωνο ενός άλλου αριθμού, τότε και ίδιος ο αριθμός, θα μετράει τον άλλο. Και εάν ένας αριθμός μετράει έναν άλλο αριθμό, τότε και το τετράγωνό του θα μετράει το άλλο τετράγωνο.
Απόδειξη. ῎Εστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Β μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ. ῾Ο Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω· οἱ Α, Ε, Β ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. καί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. Πάλιν δὴ ὁ Γ τὸν Δ μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ. Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. καί εἰσιν οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β. ᾿Εὰν ἄρα τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	**Απόδειξη.** Έστω Α=$Γ^2$, Β=$Δ^2$ και έστω ότι ο Α μετράει τον Β, δηλαδή ότι υπάρχει φυσικός κ ώστε Β=κ·Α. Ισχυρίζομαι ότι υπάρχει φυσικός λ ώστε Δ=λ·Γ. Έστω Γ·Δ=Ε˙ τότε οι Α, Ε, Β είναι σε συνεχή αναλογία με Γ:Δ=Α:Ε=Ε:Β. Αφού Β=κ·Α, από την VIII.7 υπαρχει φυσικός ώστε Ε=λ·Α . Όμως Α:Ε=Γ:Δ, άρα Δ=λ·Γ (Ορ. VII.20). Αν τώρα ο Γ μετράει τον Δ, δηλαδή ότι υπάρχει φυσικός λ ώστε Δ=λ·Γ, ισχυρίζομαι ότι και ο Α μετράει τον Β, δηλαδή ότι υπάρχει $κ\in\mathbb{N}$ ώστε Β=κ·Α. Αυτούς που έχουν ήδη κατασκευασθεί, δείχνουμε ομοίως ότι οι Α, Ε, Β είναι σε συνεχή αναλογία σε λόγο Γ:Δ. Επειδή, Γ:Δ=Α:Ε και αφού ο Γ μετράει τον Δ, θα μετράει και ο Α τον Ε (Ορ. VII.20) . Είναι όμως Α:Ε=Ε:Β και Ε=λ·Α άρα και Β=κ·Α[4].

[4] δηλαδή αφού Δ=λ·Γ, θα είναι και Ε=λ·Α και Β=λ·Ε επομένως και Β=λ·Ε=λ·(λ·Α)=$λ^2$·Α, άρα ο Α μετρεί τον Β.

Δηλαδή, η πρόταση VIII.14 αποδεικνύει ότι:
[1] Αν ο $α^2$ μετρά τον $β^2$, τότε ο α μετρά τον β και αντίστροφα,
[2] Αν ο α μετρά τον β, τότε ο $α^2$ μετρά τον $β^2$.
Απόδειξη.
[1] Το ευθύ αποτελεί άμεση συνέπεια της Πρότασης VIII.7, καθώς οι αριθμοί $α^2$, $α·β$, $β^2$ είναι σε συνεχή αναλογία. Από την υπόθεση ο $α^2$ μετρά τον $β^2$, επομένως από την VIII.7 έπεται, ότι ο $α^2$ μετρά τον $α·β$, και από τις προτάσεις VII.17, VII.18 ο α μετρά τον β.
[2] Το αντίστροφο είναι τετριμμένο.

1.3. Οι Προτάσεις 2 & 3 της *Κατατομή Κανόνος*

Η *Κατατομή Κανόνος* περιέχει 20 προτάσεις "παρουσιασμένες και αποδεδειγμένες με τη μορφή θεωρημάτων" (πρβλ. Barker, (1989), p.190). Μετά την εισαγωγή ακολουθούν " εννέα θεωρήματα, τα οποία είναι καθαρά μαθηματικά, αποδεικνύοντας προτάσεις για τους λόγους, και έτσι και για τα διαστήματα" (σελ.190). Οι προτάσεις 2 και 3 με τις οποίες θα ασχοληθουμε, βρίσκονται σε αυτή την πραγματεία για τη μουσική, και αποτελούν μέρος του μαθηματικού τμήματός της. Στα παρακάτω θεωρήματα εμφανίζονται οι όροι "πολλαπλάσιο διάστημα" και "επιμόριο διάστημα". Το επιμόριο διάστημα έχει οριστεί ήδη στην §1.1 και ακολουθεί ο ορισμός του πολλαπλασίου διαστήματος:
"πολλαπλάσιος μὲν οὖν ἐστι λόγος, ὅταν ὁ μείζων ὅρος πλεονάκις ἔχῃ τὸν ἐλάττονα" (Theon, de utilitate mathematicae) p.76, line 10.

Πρόταση 2	**μετάφραση της Πρότασης 2**
᾿Εὰν διάστημα δὶς συντεθὲν τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον, καὶ αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.	Αν ένα διάστημα συντεθεί διπλά και το αποτέλεσμα είναι πολλαπλάσιο, τότε και το ίδιο (το διάστημα) είναι πολλαπλάσιο.
Απόδειξη. ἔστω διάστημα τὸ ΒΓ, καὶ γεγενήσθω, ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔστω ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· φημὶ καὶ τὸν Β τοῦ Γ εἶναι πολλαπλάσιον. ἐπεὶ γὰρ ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ. ἐμάθομεν δέ, ὅτι, ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὁποσοιοῦν, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τοὺς μεταξὺ μετρήσει. μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Β· πολλαπλάσιος ἄρα ὁ Β τοῦ Γ.	**Απόδειξη.** Έστω το διάστημα ΒΓ και δημιουργώ [διάστημα ΒΔ τέτοιο ώστε] Γ:Β=Β:Δ και το Δ να είναι πολλαπλάσιο του Γ. Ισχυρίζομαι ότι και ο Β είναι πολλαπλάσιος του Γ. Έπειδή ο Δ είναι πολλαπλάσιος του Γ, είναι $Δ=κ·Γ$, για κ φυσικό. Μάθαμε όμως ότι αν υπάρχουν οσοιδήποτε [συνεχώς] ανάλογοι αριθμοί και ο πρώτος μετράει τον τελευταίο, τότε [ο πρώτος] θα μετράει και τους ενδιαμεσους, (VIII.7). Άρα, ο Γ μετράει τον Β, επομένως $Β=λ·Γ$, για λ φυσικό.

Η παραπάνω πρόταση έχει αποδοθεί στα Αγγλικά από τον Barker (p.194) ως

Proposition 2

If an interval put together twice makes a whole that is multiple, then that interval will also be multiple

Let there be an interval BC, let B be to D as is C to B, and let D be a multiple of C. I assert that B is also a multiple of C. For since D is a multiple of C, C therefore measures D. But we have learned that where there are numbers in proportion -however many of them - and where the first measures the last, it will also measure those in between. Therefore C measures B, and B is therefore a multiple of C.

Και η νέο-ελληνική της μετάφραση, είναι

Έστω το διάστημα BC, έστω ότι το B είναι προς το D, όπως είναι το C προς το B, και έστω ότι το D είναι πολλαπλάσιο του C. Ισχυρίζομαι, ότι το B είναι επίσης πολλαπλάσιο του C. Αφού το D είναι πολλαπλάσιο του C, το C μετράει το D. Αλλά, έχουμε μάθει[5] ότι όταν υπάρχουν αριθμοί σε αναλογία- οσοιδήποτε τέτοιοι- όταν ο πρώτος μετράει τον τελευταίο, θα μετράει επίσης και αυτούς που είναι ενδιάμεσα. Έτσι, ο C μετράει τον B, και έτσι το B είναι πολλαπλάσιο του C.

Απόδοση της απόδειξής της Πρότασης 2 της *Κατατομή Κανόνος*.

Έστω το διάστημα Β:Γ και δημιουργούμε Γ:Β=Β:Δ με Δ=κ·Γ.

Ισχυρίζομαι, ότι και Β= λ·Γ, όπου κ, λ φυσικοί.

Αφού Δ=κ·Γ , Γ:Β=Β:Δ και επειδή έχουμε μάθει (VIII.7) ότι αφού έχουμε (συνεχή) αναλογία και Δ=m·Γ, τότε ο Γ θα μετρεί τον Β δηλαδή, υπάρχει φυσικός λ, ώστε Β=λ·Γ, οπότε ο Β είναι πολλαπλάσιος του Γ.

Απόδειξη σε σύγχρονη γραφή.

Έστω το διάστημα Β:Γ.

Θέτω Β:Γ=μ:ν, Β:Δ=μ:ξ, όπου ν, μ, ξ οι ελάχιστοι φυσικοί ώστε Γ:Β=Β:Δ=ν:μ (VII.33).

Αρκεί να δείξουμε ότι ν=1.

Αφού ν:μ=μ:ξ και ν, μ, ξ είναι οι ελάχιστοι, έπεται ότι (ν, ξ)=1, από (VIII.3)

Επιπλέον είναι Γ:Δ=(Γ:Β)·(Β:Δ)=(ν:μ)·(μ:ξ)=ν:ξ

Όμως το διάστημα Δ:Γ είναι πολλαπλάσιο, άρα $(\xi:\nu)\in\mathrm{N}$ και αφού ξ, ν οι ελάχιστοι έπεται ότι ν=1, οπότε Δ:Γ=ξ και Β:Γ=μ

Επομένως $\Gamma:\Delta=(\Gamma:\mathrm{B})\cdot(\mathrm{B}:\Delta)=(1:\mu)\cdot(1:\mu)=1:\mu^2$, οπότε $\Delta:\Gamma=\mu^2=\xi$.

και $\Gamma:\mathrm{B}=\mathrm{B}:(\xi\cdot\Gamma) \Leftrightarrow \mathrm{B}^2= \xi\cdot\Gamma^2 \Leftrightarrow \mathrm{B}^2= \mu^2\cdot\Gamma^2$.

Η κρίσιμη πρόταση, η οποία αποδίδεται από τον Βοήθιο στον Αρχύτα και έχει ήδη μελετηθεί στην § 1.1, εμφανίζεται σε γενικότερη (ως προς τον αριθμό των μέσων αναλόγων που παραμβάλονται) και τελειοποιημένη ως πρόταση 3 στην *Κατατομή Κανόνος,* και έχει ως εξής:

[5] VIII.7

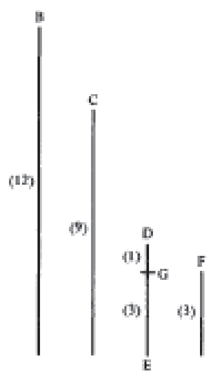
Πρόταση 3	**μετάφραση της Πρότασης 3**
᾿Επιμορίου διαστήματος οὐδεὶς μέσος, οὔτε εἷς οὔτε πλείους, ἀνάλογον ἐμπεσεῖται ἀριθμός.	Σε επιμόριο διάστημα, κανένας μέσος ανάλογος αριθμός δεν εμπίπτει, ούτε ένας ούτε περισσότεροι.
	Δεν υπάρχει φυσικός x ώστε (N+1):x=x:N, όπου N>1 φυσικός.
Απόδειξη. ἔστω γὰρ ἐπιμόριον διάστημα τὸ ΒΓ· ἐλάχιστοι δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς Β, Γ ἔστωσαν οἱ ΔΖ, Θ. οὗτοι οὖν ὑπὸ μονάδος μόνης μετροῦνται κοινοῦ μέτρου. ἄφελε ἴσον τῷ Θ τὸν ΗΖ καὶ ἐπεὶ ἐπιμόριός ἐστιν ὁ ΔΖ τοῦ Θ, ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΗ κοινὸν μέτρον τοῦ τε ΔΖ καὶ τοῦ Θ ἐστι· μονὰς ἄρα ὁ ΔΗ· οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς ΔΖ, Θ μέσος οὐδείς. ἔσται γὰρ ὁ ἐμπίπτων τοῦ ΔΖ ἐλάττων, τοῦ δὲ Θ μείζων, ὥστε τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς ΔΖ, Θ τις. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς ἐλαχίστους μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. οὐδεὶς δὲ εἰς τοὺς ΔΖ, Θ ἐμπεσεῖται, οὐδὲ εἰς τοὺς Β, Γ ἐμπεσεῖται.	**Απόδειξη.** Έστω το επιμόριο διάστημα ΒΓ, και έστω οι ελάχιστοι στον ίδιο λόγο ότι είναι οι ΔΖ,Θ, οι οποίοι έχουν μόνο τη μονάδα ως κοινό μέτρο (VII.21). Αφαίρεσε το ΗΖ=Θ, και αφού ο ΔΖ είναι επιμόριος του Θ, τότε το εναπομείναν ΔΗ είναι κοινό μέτρο του ΔΖ και του Θ, οπότε είναι η μονάδα, άρα δεν εμπίπτει κανένας μέσος μεταξύ τους. Ο εμπίπτων θα ήταν μικρότερος του ΔΖ και μεγαλύτερος του Θ, και θα έπρεπει να διαιρεί τη μονάδα, το οποίο είναι αδύνατον, άρα δεν εμπίπτει μεταξύ των ΔΖ, Θ. Όμως, όσοι μέσοι ανάλογοι εμπίπτουν στους ελάχιστους, τόσοι ανάλογοι εμπίπτουν και σε αυτούς που έχουν τον ίδιο λόγο (VIII.8). Κανείς δεν εμπίπτει μεταξύ των ΔΖ, Θ, άρα κανείς δεν εμπίπτει στους Β, Γ.

Η παραπάνω πρόταση έχει αποδοθεί στα Αγγλικά από τον Barker (σελ.195) ως

Proposition 3

In the case of an epimoric interval, no mean number,
neither one nor more than one, will fall within it proportionally.

Let BC be an epimoric interval.
Let DE and F be the smallest numbers in the same ratio as are B and C. These then are measured only by the unit as a common measure. Take away GE, which is equal to F. Since DE is the epimoric of F, the remainder DG is a common measure of DE and F. DG is therefore a unit. Therefore no mean will fall between DE and F. For the intervening number will be less than DE and greater than F, and will thus divide the unit, which is impossible. Therefore no mean will fall between DE and F. And however many means fall in proportion between the smallest numbers, there will fall in proportion exactly as many between any others which have the same ratio. But none will fall between DE and F; nor will one fall between B and C.



Απόδοση της απόδειξής της Πρότασης 3 της *Κατατομή Κανόνος*.

Έστω Β:Γ ένα επιμόριο διάστημα και Β:Γ=ΔΖ:Θ , όπου ΔΖ, Θ οι ελάχιστοι στον ίδιο λόγο. Αφού ΔΖ>Θ, δημιουργώ τη διαφορά ΔΗ=ΔΖ-ΗΖ=ΔΖ-Θ, άρα το ΔΗ είναι το κοινό μέτρο του ΔΖ, Θ και αφού αυτοί είναι πρώτοι, έπεται ότι ΔΗ=1.
Επομένως δεν εμπεριέχεται μέσος στους ΔΖ, Θ.
Αν υπήρχε μέσος φυσικός αριθμός x, τότε θα έπρεπε x<ΔΖ, x>θ και 1:x φυσικός, το οποίο είναι αδύνατο. Ξέρουμε όμως, από την VIII.8, ότι όσοι μέσοι ανάλογοι υπάρχουν ανάμεσα στους πρώτους ΔΖ, Θ, τόσοι υπάρχουν και στους αρχικούς Β, Γ και αφού δεν υπάρχει κανείς ανάμεσά τους, δε θα υπάρχει και στους αρχικούς.

1.4. Βοήθιος, *De institutione Musica IV*, 2

Στο ίδιο έργο του ***De institutione Musica*** ο Βοήθιος, στο βιβλίο *IV*, παρέχει την απόδειξη της πρότασης του Αρχύτα σε νεότερη εκδοχή της. Συγκεκριμένα,

> Superparticularis intervallic medius numerous neque unus neque plures proportionaliter intervenient.
> Sit enim ·BC· proportion superparticularis et in eadem proportione minimi sint ·DF· et ·G· Quoniam ·DF· et ·G· minimi sunt in eadem proportione, sunt eiusdem proportionis primi. Quocirca sola eos unitas metietur. Auferatur igitur ·G· ab ·DF· et relinguatur ·D· Hic est igitur utrorumque mensura communis. Haec igitur erit unitas. Quocirca nullus inter ·FD· atque ·G· incident numerous, qui sit ab ·FD· quidem minor, maior vero ab ·G· Sola enim interest unitas. Quanti vero in superparticularibus proportionibus proportionaliter inter eiusdem proportionis minimos intercident tot etiam inter ceteros eiusdem proportionis intercident. Sed nullus inter ·FD· atque ·G· minimos eiusdem proprionis intervenire potest; nullus igitur inter ·B· atque ·C· proportionaliter cadet (σελ 303-4).

Ο Knorr έχει επίσης αποδόσει στα Αγγλικά το παραπάνω θεώρημα, στην προσπάθειά του να ολοκληρώσει την επιχειρηματολογία του, συγκρίνοντας τις δύο εκδόσεις. Έτσι, το εμφανίζει ως THEOREM 2, και ειδικότερα:

> No mean number, neither one or several, may be interpolated in proportion in an epimoric [superparticular] interval.
> Let *ΒΓ* be an epimoric interval, and let the least terms in the same ratio be *ΔΖ, θ*. [A] Then they are measured only by the unit as common measure. Let *HZ* equal to *θ* be subtracted, (and since *ΔΖ* of *θ* is epimoric,) [B] the excess *ΔΗ* is a common measure of *ΔΖ* and *θ* : it is thus the unit. Whence, there may not be interpolated between *ΔΖ* and *θ* any number, for the mean would have to be less than *ΔΖ* but greater than θ, (so that the unit would be divided, which is impossible. Thus, none may be interpolated between *ΔΖ* and *θ*). [C] Now, however many numbers may be interpolated [D] in proportion between the least terms, the same number may be interpolated in proportion between those having the same ratio. But no number may be interpolated between *ΔΖ, θ* [E], whence, none may be interpolated between *Β, Γ*. (σελ. 214)

Η αντίστοιχη απόδοσή της στα νέο-ελληνικά από τη μετάφραση του Knorr, είναι:

Κανένας μέσος αριθμός, ούτε ένας, ούτε περισσότεροι, δε μπορεί να παρεμβάλλεται σε αναλογία σε έναν επιμόριο λόγο.
Έστω ότι *ΒΓ* είναι ένα επιμόριο διάστημα, και έστω ότι οι ελάχιστοι όροι στον ίδιο λόγο είναι οι *ΔΖ, θ*. Τότε αυτοί μετριούνται μόνο από τη μονάδα ως κοινό μέτρο. Έστω ότι το *ΗΖ* ίσο με *θ*, αφαιρείται, (και το *ΔΖ* είναι επιμόριο του *θ),* η υπεροχή *ΔΗ* είναι ένα κοινό μέτρο του *ΔΖ* και του *θ,* αυτό είναι επομένως η μονάδα. Έτσι, δε μπορεί να παρεμβληθεί μεταξύ των *ΔΖ* και *θ* κανένας αριθμός, αφού ο μέσος θα έπρεπε να είναι μικρότερος από τον *ΔΖ* αλλά μεγαλύτερος από τον *θ,* (έτσι, η μονάδα θα μπορούσε να διαιρεθεί, το οποίο είναι αδύνατο. Έτσι κανένας δεν παρεμβάλλεται μεταξύ των *ΔΖ* και *θ*). Τώρα, όσοι αριθμοί μπορούν να παρεμβληθούν σε αναλογία μεταξύ των ελάχιστων όρων, το ίδιο πλήθος μπορεί να παρεμβληθεί σε αναλογία μεταξύ αυτών που έχουν τον ίδιο λόγο. Αλλά κανένας αριθμός δεν μπορεί να παρεμβληθεί μεταξύ των *ΔΖ, θ*, και έτσι, κανένας δε μπορεί να παρεμβληθεί μεταξύ των *Β, Γ.*

1.5. Θέσεις van der Waerden για την συμβολή του Αρχύτα στοΒιβλίο VIII των *Στοιχείων* και την *Κατατομή Κανόνος*.

1.5.1. Το Βιβλίο VII των *Στοιχείων* είναι Πυθαγόρειο και είχε ήδη σχηματισθεί προ του Αρχύτα.

Ο van der Waerden, αναφέρει ότι

> Η συστηματική οργάνωση της θεωρίας των λόγων μεταξύ αριθμών και της διαιρετότητας, που περιέχονται στο έβδομο βιβλίο των *Στοιχείων*, έλαβε χώρα μετά τη θεωρία του άρτιου και του περιττού. Η γνώμη μου είναι πώς ολόκληρο αυτό το βιβλίο θα έπρεπε να αποδοθεί στους προγενέστερους από τον Αρχύτα Πυθαγορείους. Για να δικαιολογηθεί αυτό το συμπέρασμα, είναι αναγκαίο κατ' αρχάς να ρίξουμε μία προσεκτικότερη ματιά στην αριθμοθεωρία του ίδιου του Αρχύτα. (p.110, σελ.123)

Ακολούθως, παραθέτει τις προτάσεις *Α*[6] και *Β*[7] που έχουμε ήδη μελετήσει, σημειώνοντας ότι "Στη θεωρία της μουσικής του Αρχύτα παίζουν κυρίαρχο λόγο οι δύο προτάσεις [*Α* και *Β*] από τη θεωρία αριθμών" (p.111, σελ.124)
και επιπλέον ότι "Η απόδειξη της πρότασης *Α* αναφέρεται από τον Βοήθιο ",

Συνεχίζει την επιχειρηματολογία του σχετικά με τη χρονολόγηση του βιβλίου VII, λέγοντας ότι:

> Η απόδειξη [της πρότασης *Α*] επαναλαμβάνει σχεδόν λέξη προς λέξη μία πρόταςση από το έβδομο Βιβλίο, συγκεκριμένα την
> *VII 22. Οι ελάχιστοι αριθμοί από αυτούς οι οποίοι έχουν τον ίδιο λόγο είναι πρώτοι μεταξύ τους.*
> και ότι επιπλέον, στο τέλος της απόδειξης χρησιμοποιείται μια πρόταση από το όγδοο Βιβλίο, συγκεκριμένα η
> *VIII 8. Εάν μεταξύ δύο αριθμών παρεμβληθούν αριθμοί σε συνεχή αναλογία* (δηλαδή αν έχουμε μια γεωμετρική πρόοδο, της οποίας οι δεδομένοι αριθμοί είναι ακραίοι όροι), *τότε,*

6 Πρόταση Αρχύτα όπως δίνεται στην *Κατατομή Κανόνος.*
7 *Κατατομή Κανόνος*, 2.

όσοι αριθμοί παρεμβάλλονται μεταξύ αυτών σε συνεχή αναλογία, τόσοι θα παρεμβάλλονται σε συνεχή αναλογία και μεταξύ των εχόντων τον ίδιο λόγο με αυτούς. (p.111, σελ.124)

Η εκτίμησή του είναι πως "Η απόδειξη της πρότασης *Α* στην *Κατατομής κανόνος* του Ευκλείδη είναι ουσιαστικά ίδια με εκείνη του Αρχύτα." (p.111, σελ.124) .

1.5.2. Τα περιεχόμενα του Βιβλίου VIII των *Στοιχείων* πρέπει να πιστωθεί στον Αρχύτα και στον κύκλο του.

Προκειμένου να στοιχειοθετήσει αυτή του την πεποίθηση, σημειώνει ότι

Η πρόταση *Β* αποδεικνύεται στην *Κατατομής κανόνος* βάσει της πρότασης

VIII 7. Εάν υπάρχουν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία, και ο πρώτος μετρεί τον τελευταίο, θα μετρεί επίσης και τον δεύτερο.

Και συνεχίζει, διαπιστώνοντας ότι

"Όπως είναι φανερό, η θεωρία μουσικής του Αρχύτα προϋποθέτει οπωσδήποτε ένα τμήμα της θεωρίας αριθμών. Ο Tannery και ο Heath ορθώς συμπεραίνουν από αυτό, ότι την εποχή του Αρχύτα, δηλαδή περί το 400 π.Χ, πρέπει να υπήρχε στη σχολή των Πυθαγορείων κάποιο είδος «αριθμητικής πραγματείας», μια «πραγματεία εν είδει *Αριθμητικής στοιχειώσεως»,* κάτι παρόμοιο προς τα βιβλία VII-IX των *Στοιχείων* του Ευκλείδη." (p.111-112, σελ.124-125).

Σημειώνει ότι οι προτάσεις *VIII.7* και *VIII.8* εξαρτώνται από την

VIII 3. Εάν υπάρχουν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία και είναι οι ελάχιστοι μετακύ όσων έχουν τον ίδιο λόγο, οι άκροι αυτών είναι πρώτοι μεταξύ τους.

η οποία εξαρτάται από την VII 27 και την

VIII 2. Να βρεθούν αριθμοί σε συνεχή αναλογία, όσους αν επιτάξει κανείς, οι οποίοι είναι οι ελάχιστοι με έναν δεδομένο λόγο.

Η λύση αυτού του προβλήματος, ακολουθεί ένα κατασκευαστικό μοτίβο που εντοπίζεται σε όλο το όγδοο βιβλίο και στο Νικόμαχο εφαρμοζόμενο στη θεωρία της μουσικής. Συγκεκριμένα το

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & & B & & \\ & A^2 & & AB & & B^2 & \\ A^3 & & A^2B & & AB^2 & & B^3 \end{array}$$

Εν συνεχεία, διαπιστώνει ότι

Αυτός ο τρόπος κατασκευής της γεωμετρικής προόδου πρέπει οπωσδήποτε να ανήκε στην αριθμητική των Πυθαγορείων.

Ενισχύει την επιχειρηματολογία του με στοιχεία που βρίσκει από τη μελέτη των πλατωνικών διαλόγων που εκεί κατά τον ίδιο

Έχει χρησιμοποιηθεί ο μεγαλύτερος αριθμός πυθαγόρειων ιδεών, και συγκεκριμένα στον *Τίμαιο* και *Επινομίς*, οι οποίοι περιέχουν υπαινικτικές αναφορές σε προτάσεις και έννοιες του ογδόου βιβλίου. Επί παραδείγματι στον *Τίμαιο* αναφέρεται ότι μεταξύ δύο τετράγωνων αριθμών υπάρχει ένας μέσος ανάλογος και μεταξύ δύο κύβων υπάρχουν δύο μέσοι ανάλογοι ˙ και στην *Επινομίδα* γίνεται λόγος για όμοιους επίπεδους και στερεούς αριθμούς.

Και καταλήγει εμφατικά, λέγοντας ότι

> Το περιεχόμενο του ογδόου βιβλίου, επομένως, πρέπει να αποδοθεί στους Πυθαγορείους, ιδιαιτέρως στον Αρχύτα και το περιβάλλον του. (p. 112, σελ. 125).

Στη συνέχεια του έργου του, ο van der Waerden επανέρχεται στον Αρχύτα, όπου εγκωμιάζοντάς τον, μεταξύ άλλων, αναφέρει πώς

> Εκτός του ότι διατύπωσε ορισμένα λήμματα σχετικά με τις αναλογίες μεταξύ αριθμών και ορισμένες ανισότητες για τους τρείς μέσους στο πλαίσιο της μουσικής θεωρίας του, **γενικότερα ολόκληρο το όγδοο βιβλίο των *Στοιχείων,* με την αριθμητική θεωρία των συνεχών αναλογιών, τους όμοιους αριθμούς κ.λπ. είναι κατά το πλείστον δικό του έργο.** Σημαντική ήταν επίσης η συμβολή του στη θεωρία των αρρήτων. Δικαίως ο Πτολεμαίος τον αποκαλεί τον σημαντικότερο πυθαγόρειο της μουσικής. Γιατί, εκτός από τον υπολογισμό των αριθμητικών λόγων της νέας κλίμακας, που ήταν της μόδας εκείνη την εποχή, έθεσε τα αριθμητικοθεωρητικά θεμέλια της θεωρίας της μουσικής που περιέχονται στην *Κατατομή Κανόνος* του Ευκλείδη. (p.149-σελ.171)

Διαφωτίζει την προσωπικότητά του "αξιόλογου αυτού Δωριέως" με μακροσκελή κατάλογο των έργων με τα οποία έχει καταπιαστεί, όμως κάνει μία σημαντική αντιπαραβολή:

> Ο εντυπωσιασμός θα γίνει ακόμη μεγαλύτερος τώρα που θα διεισδύσουμε βαθύτερα στον τρόπο που σκέπτεται και θα αποκαλύψουμε την εκπληκτική αντίθεση ανάμεσα στις μεγαλοφυείς ιδέες του, τη δημιουργική φαντασία και την τέλεια γνώση των γεωμετρικών μεθόδων από τη μία πλευρά, και το έλλειμμα της λογικής, την αδυναμία του να εκφράζεται με ακρίβεια και σαφήνεια, τα λάθη στον τρόπο του σκέπτεσθαι και την απεραντολογία από την άλλη. Μια κριτική ανάγνωση του Βιβλίου VIII του Ευκλείδη και της *Κατατομής Κανόνος* αποκαλύπτει τον Αρχύτα να αγωνίζεται επιζητώντας την αυστηρότητα και τη σαφήνεια που απαιτούσαν οι μαθηματικοί της εποχής του και που αμέσως και πολύ απλά συναντούμε, π.χ., στο παλαιότερο Βιβλίο VII. (p.150-σελ.172)

Μελετώντας το Βιβλίο VIII των *Στοιχείων,* του το αποδίδει, παρατηρώντας ότι:

> Τις ανεπάρκειες του Αρχύτα σε ότι αφορά τη λογική, τις ξαναβρίσκουμε στο Βιβλίο VIII των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Πράγματι, είναι σχεδόν βέβαιο ότι το Βιβλίο αυτό πρέπει να αποδίδεται στον Αρχύτα. Είδαμε πιο πριν ότι η αρχή του Βιβλίου VIII σχετίζεται στενά με τη θεωρία του της μουσικής. Παραθέτει ο ίδιος την Πρόταση 8 [VIII.8], ενώ η VIII.7 είναι ισοδύναμη με την Πρόταση από την *Κατατομή Κανόνος* που σημειώσαμε προηγουμένως ως πρόταση *Β*. Ένας αριθμός άλλων προτάσεων και εννοιών από το Βιβλίου VIII παρατίθενται από τον Πλάτωνα, ο οποίος πρέπει να έμαθε τη θεωρία των αριθμών κατά μεγάλο μέρος από τον Αρχύτα. Αλλά, πέρα αυτών, στο Βιβλίο VIII αναγνωρίζεται ολοφάνερα το ύφος του Αρχύτα και αυτό κλείνει οριστικά το θέμα. (p.153-σελ.176)

Ξεκινά την ανάλυση της δομής του Βιβλίου VIII, περιγράφοντας τη χρήση η μοτίβου που αναφέρθηκε νωρίτερα, συγκεκριμένα λέει:

> Το κεντρικό πρόβλημα του Βιβλίου VIII είναι το εξής: κάτω από ποιες συνθήκες είναι δυνατόν να βρούμε έναν ή περισσότερους αριθμούς σε συνεχή αναλογία μεταξύ των *α* και *β;*(p.153-σελ.176)

Αναλύοντάς το σε απλούστερο πρόβλημα, διαπιστώνει ότι:

> Το σημείο εκκίνησης για μία συστηματική διαπραγμάτευση του όλου θέματος είναι η πρόταση VIII.2 «ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἄν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ.»(p.154-σελ.177)

Παρατηρώντας λοιπόν συνολικά το βιβλίο συνοψίζει λέγοντας ότι:

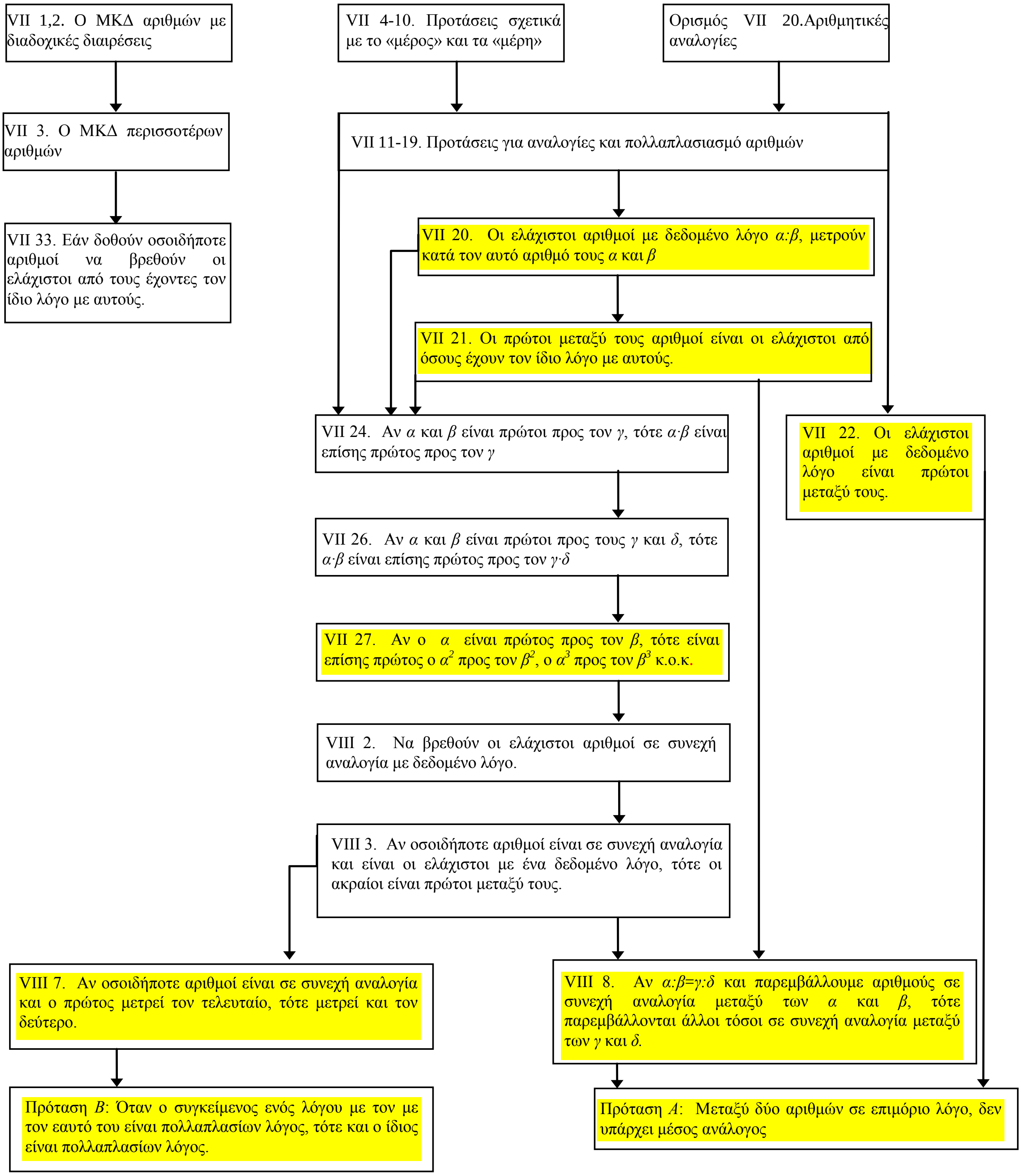
> Η ιδιοτροπία του Βιβλίου VIII απορρέει από το γεγονός ότι η διαδικασία [εύρεσης] αυτή δεν διατυπώνεται ως πρόταση, αλλά ως πρόβλημα. Για να την εφαρμόσει κανείς πρέπει να ανατρέχει κάθε φορά στον τρόπο σχηματισμού των γεωμετρικών προόδων. Κάθε φορά πρέπει να ανασύρεται η απόδειξη της VIII.2 και, έτσι, τα παραθέματα γίνονται πολύ περίπλοκα. Αλλά και από άλλες απόψεις, οι διατυπώσεις του Βιβλίου VIII είναι άσκοπα μπερδεμένες.(p.154-σελ.177)

Συνεχίζοντας τη μελέτη του, διαπιστώνει την ύπαρξη λογικών σφαλμάτων στις προτάσεις VIII.22, 23. Ομαδοποιεί αυτά που θεωρεί κοινά χαρακτηριστικά στο ύφος του Αρχύτα, και συνοψίζει, λέγοντας:

> Βλέπουμε, έτσι, ότι στο Βιβλίο VIII, όπως και στα υπόλοιπα έργα του, ο Αρχύτας βρίσκεται διαρκώς σε σύγκρουση με τη λογική, στην χωρίς επιτυχία προσπάθειά του να ικανοποιήσει τις αυστηρές απαιτήσεις της.
>
> Θα ήταν λάθος να σκεφθούμε ότι μία τέτοια ελαττωματική λογική αποτελεί γενικό χαρακτηριστικό της επιστήμης αυτής της περιόδου. **Αυτό διαψεύδεται από το Βιβλίο VII το οποίο, αν και παλαιότερο του ΒιβλίουVIII, έχει εξαιρετική λογική δομή.** […]
>
> Όταν ο Αριστοτέλης έθεσε τους κανόνες της λογικής, κωδικοποίησε απλώς τις κανονικότητες που απαντούν στους συλλογισμούς των προ αυτού μαθηματικών και φιλοσόφων. Τα περισσότερα από αυτά τα παραδείγματά του τα αντλεί από μαθηματικά εγχειρίδια της εποχής. Είναι αυτονόητο ότι τέτοιου είδους εγχειρίδια ακολουθούν ως προς τη λογική δομή τους, το παράδειγμα των πρωτότυπων συγγραμμάτων των μεγάλων μαθηματικών, και όχι το αντίστροφο. Από εδώ, όμως, έπεται ότι ο τρόπος του σκέπτεσθαι των ελλήνων μαθηματικών θα πρέπει να ικανοποιούσε πολύ ψηλές απαιτήσεις αυστηρότητας, πολύ πριν τον Αριστοτέλη.
> **Η ανεπαρκής λογική του Αρχύτα συνιστά, επομένως, ένα εντελώς προσωπικό χαρακτηριστικό γνώρισμα αυτού του τόσο εξαίρετου, κατά τα λοιπά, μαθηματικού.** (p.155-σελ.178)

1.5.3. Η λογική δομή του Βιβλίου VIII κατά van der Waerden

Ο van der Waerden δίνει συνοπτικά με ένα πλήρες σχήμα τη λογική γενεαλογία των προτάσεων *Α* και *Β* του Αρχύτα. (p.113, σελ.126)



1.6. Σχόλια Knorr

Ο Knorr, σχολιάζει εκτενώς τις προτάσεις που έχουν μελετηθεί σε αυτό το κεφάλαιο. Παρακάτω, δίνεται συνοπτικός πίνακας με αντιστοίχιση σε αυτές, προκειμένου να είναι σε αναγνωρίσιμη μορφή.

Θεώρημα 1 (Knorr, p. 213)=Πρόταση Αρχύτα
Θεώρημα 2 (Knorr, p. 214)=Πρόταση *K.K.*3
Θεώρημα 3 (Knorr, p. 215)=Πρόταση Αρχύτα
Θεώρημα 4 (Knorr, p. 216)=Πρόταση *K.K.2*=8.14

Παρατηρώντας ο Knorr, ότι ο Αρχύτας στο *Institutio* III.11 αφιερώνει σημαντικό μέρος της απόδειξής του για να αποδείξει ότι οι ελάχιστοι όροι ενός επιμόριου λόγου είναι στη μορφή *(N+1):N,* εκτιμά ότι:

> Όλο το πρώτο μέρος είναι αφιερωμένο για να δείξει απλώς ότι ένας επιμόριος λόγος παίρνει τη μορφή *(N+1):N* σε ελάχιστους όρους […]. ο Αρχύτας είναι τόσο σαφής στη μεταχείριση του D ως "μέρος" και "μέτρο" των άλλων, που μπορούμε να συνάγουμε ότι δε μπορούσε να αναφερθεί σε μία συστηματική θεωρία αριθμών για να διευκολύνει το επιχείρημά του. (p.212).

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να επαναλάβει ο αναγνώστης τον ορισμό του επιμορίου διαστήματος, και ίσως αιτιολογήσει τον Αρχύτα. Ο ορισμός αυτός (πρβλ §1.1), κάθε άλλο παρά φανερή κάνει τη μορφή του ανάγωγου κλάσματος στο οποίο βρίσκεται ένας επιμόριος λόγος. Αντ'αυτού, ο Knorr εκτιμά ότι "Η βασανιστική αιτιολόγηση στην εκδοχή του Αρχύτα [[III.11]], δείχνει ότι είχε διαθέσιμο το πιο πρώιμο στάδιο της θεωρίας αριθμών." (p. 216)

Η απόδειξη του θεωρήματος του Αρχύτα στον Βοήθιο III.11 έγινε με χρήση της Πρότασης που αναφέρεται στον Ευκλείδη ως VIII.8, εφαρμοσμένη για ένα μέσο, χωρίς όμως να έχει αυστηρή απόδειξη για την VIII.8. Είναι η πρόταση που εμείς ονομάσαμε VIII.8*, αλλά ο Knorr θεωρεί ότι υπάρχει έλλειψη όταν τη συγκρίνει με την *Institutio Musica* IV.2, αφού εκεί υπάρχει η αυτολεξεί παράθεσή της. Εκτιμά ότι:

> η μη προφανής, αλλά κρίσιμη τελευταία γραμμή της απόδειξης δίνεται χωρίς καθόλου αιτιολόγηση. Από την έκδοσή της από την *Κατατομή Κανόνος* μπορούμε να δούμε πώς αυτή η γραμμή αναδεικνύει μια επίκληση στη μελέτη των αριθμών σε συνεχή αναλογία. (p.213)

Στη συνέχεια, αναφέρει:

> Το ελάττωμα μπορεί να διορθώθηκε κάπως αργότερα από τους επόμενούς του, αν όχι από τον ίδιο τον Αρχύτα, μετά από εξελίξεις στην Θεωρία αριθμών που οδήγησαν στην οργάνωση μιας πιο αυστηρής θεωρίας της συνεχούς αναλογίας στο στυλ του βιβλίου VIII των *Στοιχείων.* (p.221-222)

Η άρτια διατύπωση του θεωρήματος του Αρχύτα από τον Βοήθιο στην IV.2 δεν πρέπει να μας δημιουργήσει την εντύπωση ότι αυτή ήταν στην κατοχή του Αρχύτα, διότι εδώ ο Βοήθιος αναπαράγει παρεμφερές αντίγραφό από την *Κατατομή Κανόνος* (Πρόταση 3), η οποία είναι πολύ αργότερα, ίσως και μετά τα Στοιχεία του Ευκλείδη, όταν τα βιβλία VII και VIII των *Στοιχείων* είχαν λάβει την τελική τους μορφή. Ο ίδιος ο Βοήθιος περιγράφει την απόδειξη του Αρχύτα (III.11) ως 'nimium fluxa' (όχι αυστηρή) (p. 222).

Αναφερόμενος στην Πρόταση 2 της *Κατατομής Κανόνος* θεωρεί, πώς

> Παρά την επικάλυψη με τη γλώσσα της Αρμονικής, πρέπει να είναι εμφανές ότι το Θεώρημα 4[8], καθιερώνει ένα αποτέλεσμα ισοδύναμο με αυτό του Θεωρήματος Α[9], το οποίο είναι το θεώρημα του Θεαίτητου για τετράγωνους αριθμούς.(p.217)

Επίσης, η άποψή του είναι πως ο Αρχύτας δεν την είχε αποδείξει αυτή, η οποία επίσης χρειάζεται την VII.27, διότι τότε θα ήταν πολύ εύκολο να αποδειχθεί το θεώρημα το Θεαίτητου:

> Αν η Πρόταση 2 της *Κατατομής Κανόνος* επίσης οφείλονταν στον Αρχύτα, όπως κανείς μπορεί να υποθέσει[10], τότε η απόδειξη του [θεωρήματος του Θεαίτητου], θα μπορούσε να έχει προκύψει από τίποτα παραπάνω από μια επαναδιατύπωση της απόδειξης του Αρχύτα. Αλλά, μια προσεκτικότερη ματιά στο κείμενο του Βοήθιου, αναδεικνύει ότι μια τέτοια αξίωση δεν έχει βάση. Αυτό που ισχύει είναι ότι ο Αρχύτας *δεν* την απέδειξε. [την Πρόταση 2 της *Κατατομής Κανόνος*] (p. 217).

Συνεχίζει, συνδέοντας την προηγούμενη επιχειρηματολογία του, λέγοντας ότι ο λόγος για τον οποίο η προηγούμενη απόδειξη του Αρχύτα δεν είναι αυστηρή είναι ότι αυτή χρειάζεται την πρόταση VII.27, την οποία δεν μπορεί να είχε στην διάθεσή του αφού δεν θεωρεί υπήρχαν τότε ακόμη προτάσεις για σχετικά πρώτους αριθμούς. **Ο Αρχύτας δεν είχε στην διάθεσή του μια καλά επεξεργασμένη μορφή του βιβλίου VII, το οποίο χώλαινε ιδίως σε ότι αφορά την έννοια των σχετικώς πρώτων αριθμών (Προτάσεις VII.20-22).**
Διακρίνεται, σαφώς, η προσπάθεια του Knorr να στοιχειοθετήσει τη μη ύπαρξη σε συστηματική μορφή του βιβλίου VII των *Στοιχείων* όταν ο Αρχύτας απέδειξε το θεώρημά του.

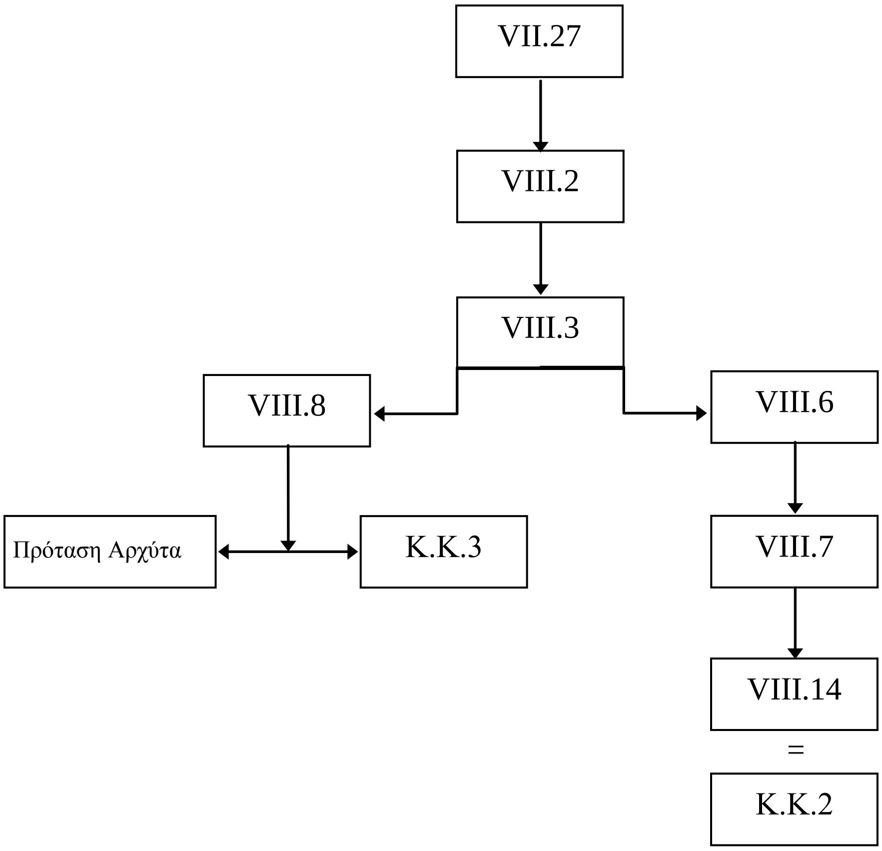
8 Πρόταση 2 *Κατατομής Κανόνος*

9 Θεώρημα Α (Knorr, p. 212) Αν $\alpha^2:\beta^2=N:1$, N όχι τετράγωνος, τότε α,β ασύμμετρα =Πρόταση Θεαίτητου. Με την Πρόταση αυτή θ' ασχοληθούμε στοΚεφάλαιο 5.

10 Στις παραπομπές του αναφέρεται στον v.d.Waerden, στο *Arithmetic* p.134 και στο *S.A.* p.111.

1.7. Συνοπτική δομή

Από την προηγηθείσα μελέτη, τόσο των ίδιων των προτάσεων, όσο και του σχολιασμού των μελετητών, προκύπτει και αναδεικνύεται η λογική δομή από την Πρόταση VII.27 των *Στοιχείων* στις βασικές Προτάσεις του Βιβλίου VIII των *Στοιχείων* και από εκεί στη μουσική Πρόταση του Αρχύτα και στις μουσικές Προτάσεις 2 & 3 της *Κατατομής Κανόνος*. Έτσι, σχηματικά έχουμε:



Κεφάλαια 2-6.
Μεταφορά από τις μουσικές-αριθμητικές Προτάσεις (Αρχύτας, Βιβλία VII & VIII *Στοιχείων, Κατατομή Κανόνος*) στις μη-ανθυφαιρετικές αποδείξεις Προτάσεων τετραγωνικής ασυμμετρίας

Οι Προτάσεις, τις οποίες μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 1, αναφέρονται στη μουσική και αριθμητική, εν τούτοις δημιουργούν την αίσθηση της στενής συνάφειας με προτάσεις ασυμμετρίας. Αντιλαμβανόμαστε ότι ο γεωμετρικός μέσος ενός επιμόριου λόγου δεν υπάρχει μεταξύ των αριθμών, ακριβώς διότι η "τετραγωνική ρίζα" ενός επιμόριου λόγου είναι άρρητη. Πρέπει όμως να δούμε αν και οι αρχαίοι είχαν μια τέτοια αντίληψη, και αν όντως είχαν μετατρέψει τις μουσικές-αριθμητικές Προτάσεις του Αρχύτα σε γεωμετρικές αποδείξεις ασυμμετρίας.
Οι ενδείξεις που έχουμε ότι αυτό πράγματι συνέβη, και οι οποίες θα παρουσιασθούν στο Κεφάλαιο 4, είναι:
(α) η λεγόμενη 'Πρόταση **X.117a**', μια ανώνυμη απόδειξη της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, η οποία βασίζεται στην Πρόταση VIII.14, και
(β) η λεγόμενη 'Πρόταση στον Αλέξανδρο', μια απόδειξη της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου με χρήση της Πρότασης VII.27, η οποία παρουσιάζεται από τον Αλέξανδρο Αφροδισιέα, στην προσπάθεια του να εξηγήσει την απόδειξη με αναγωγή στο άτοπο 'τα περιττά είναι άρτια' που έχει κατά νου ο Αριστοτέλης στο χωρίο του *Αναλυτικά Πρότερα* 41a23-32.

Κεφάλαια 2 & 3. Τα εργαλεία για την μετάβαση από τετραγωνικούς λόγους συμμέτρων μεγεθών σε αριθμητικούς λόγους προκειμένου οι αριθμητικές Προτάσεις να μετατραπούν σε αποδείξεις τετραγωνικών ασυμμετριών.

Οι δύο αυτές αρχαίες αποδείξεις δείχνουν ότι όντως οι αρχαίοι θεώρησαν ότι οι αριθμητικές Προτάσεις του Αρχύτα μπορούσαν να μετατραπούν, σε προτάσεις ασυμμετρίας με χρήση των Προτάσεων X.5 και X.9.
Στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει η παραμικρή ένδειξη για το ποιοι θα μπορούσαν να είναι οι μαθηματικοί που ανακάλυψαν αυτές τις μεθόδους απόδειξης τετραγωνικών ασυμμετριών.
Η μελέτη μας, όπως θα δούμε στα Κεφάλαια 4 & 5, δείχνει ότι προκειμένου οι Προτάσεις των βιβλίων VII & VIII των *Στοιχείων*, ιδίως οι Προτάσεις του Αρχύτα, να μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν σε αποδείξεις προτάσεων τετραγωνικών ασυμμετριών, είναι αναγκαία, η χρήση των Προτάσεων X.5 και το ευθύ μέρος της Πρότασης X.9, το οποίο θα συμβολίσουμε με X.9 (ε). Διαπιστώνεται όμως ότι οι αποδείξεις, ακόμη και οι διατυπώσεις αυτών των Προτάσεων αυτών στα *Στοιχεία* είναι ιδιαίτερα προβληματικές.
--Στα *Στοιχεία* δεν ορίζεται ποτέ μεικτός λόγος της μορφής α:β=μ:ν, όπου α,β είναι ομοειδή μεγέθη και μ,ν είναι αριθμοί, και όμως η διατύπωση των Προτάσεων X.5 και X.9 χρησιμοποιεί αυτούς τους μεικτούς λόγους.
--Οι Προτάσεις αποδεικνύονται με τη χρήση Προτάσεων θεωρίας λόγων μεγεθών του Βιβλίου V, το οποίο, όμως οφείλεται στον Εύδοξο, με αποτέλεσμα η θεωρία αυτή να είναι μεταγενέστερη από τον χρόνο στον οποίο χρησιμοποιήθηκαν αυτές οι Προτάσεις. Το ίδιο ισχύει και για προτάσεις που χρησιμοποιούνται από το βιβλίο VI, το οποίο βασίζεται ολοκληρωτικά στη θεωρία του βιβλίου V.

-- Η απόδειξη της Πρότασης Χ.9 (ε) παρουσιάζει ένα λογικό κενό στο ότι από την ισότητα μεικτών λόγων συμπεραίνεται, χωρίς επαρκή δικαιολογία η ισότητα των 'διπλασίονων' λόγων.

Για τη διόρθωση αυτών των δυσκολιών ο van der Waerden έχει προτείνει την χρήση της Θεαιτήτειας θεωρίας λόγων μεγεθών, η οποία, σύμφωνα με το φημισμένο χωρίο των *Τοπικών* του Αριστοτέλη, βασίζεται στον ορισμό της αναλογίας ως η ίση ανθυφαίρεση. Αυτό όμως δεν είναι αναγκαίο ή χρήσιμο, διότι οι Προτάσεις Χ.5 και Χ.9(ε) αναφέρονται μόνο σε σύμμετρους & μεικτούς λόγους.

Για την άρση αυτών των δυσκολιών ο μεν Heath (*Elements*, vol.2, p.113 & vol.3, p.25) εντοπίζει, αλλά δεν αντιμετωπίζει ικανοποιητικά το πρόβλημα, ο δε van der Waerden (1954), p.176-179, έχει προτείνει τη χρήση της Θεαιτήτειας θεωρίας λόγων μεγεθών, η οποία, σύμφωνα με το φημισμένο χωρίο των *Τοπικών* του Αριστοτέλη, βασίζεται στον ορισμό της αναλογίας ως η ίση ανθυφαίρεση. Όμως αυτό δεν είναι αναγκαίο ή χρήσιμο, διότι οι Προτάσεις Χ.5 και Χ.9(ε) αναφέρονται μόνο σε σύμμετρους & μεικτούς λόγους.

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι χρειάζεται να ορισθεί η αναλογία συμμέτρων & μεικτών λόγων και να αναπτυχθεί η θεωρία αναλογιών μέχρι το σημείο που μπορούν να αποδειχθούν ικανοποιητικά οι Προτάσεις Χ.5& Χ.9(ε). Ο Knorr (1975), p.253-254 συνοπτικά και ο C.M.Taisbak στο έργο του *Colored Quadrangles, A guide to the tenth book of Euclid Elements* (1982), p.21-25, 70-72 περισσότερο αναλυτικά, περιγράφουν τη σωστή προσέγγιση για τους ιστορικά ορθούς ορισμούς και αποδείξεις των Προτάσεων Χ.5 (αλλά και Χ.9).

Δεν έχει δοθεί όμως ιδιαίτερη βαρύτητα από τους μελετητές στο γεγονός ότι πριν από την Πρόταση Χ.5, ο Ευκλείδης παραθέτει δύο Προτάσεις, την Χ.3 και την Χ.4, οι οποίες

-- βρίσκονται σε στενή αναλογία με τις αριθμητικές Προτάσεις VII.2 και VII.3, αντίστοιχα, και

-- δεν έχουν κάποια φανερή χρήση στα *Στοιχεία*.

Δεδομένου ότι η (VII.1 και) VII.2 είναι η Πρόταση για την εύρεση του Μ.Κ.Δ δύο αριθμών, και ο Μ.Κ.Δ. είναι η βασική έννοια για την ανάπτυξη της θεωρίας λόγων αριθμών, είναι σαφές ότι η παρουσία της Χ.3 στο κρίσιμο αυτό σημείο, δηλώνει την ανάπτυξη της ζητούμενης θεωρίας συμμέτρων λόγων με βάση ακριβώς την Πρόταση Χ.3.

Αυτό ακριβώς πραγματοποιούμε στα Κεφάλαια 3 & 4.

Κεφάλαιο 2. Η προβληματική Πρόταση X.5 των *Στοιχείων* και η ορθή ερμηνεία της με βάση την Πρόταση X.3 των *Στοιχείων*

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα αναζητηθεί ο λόγος για τον οποίο η Πρόταση X.5 των *Στοιχείων* είναι προβληματική και θα επιχειρηθεί η ορθή ερμηνεία της με βάση την Πρόταση X.3 των *Στοιχείων*. Η πρόταση αυτή είναι καθοριστική για τη μελέτη μας, αφού με αυτή αριθμητικοποιείται ο λόγος σύμμετρων μεγεθών.
Στην §**2.1** δίδεται ο ακριβής ορισμός των σύμμετρων μεγεθών.
Στην §**2.2** μελετούμε την πρόταση X.5, αναδεικνύοντας τα σημεία που απαιτούν προσοχή.
Στην §**2.3** παρατίθενται τα σχόλια των επιμελέστερων εκ των μελετητών της, σχετικά με τα παραπάνω σημεία. Συγκεκριμένα, έχουν διαπιστώσει την απουσία ορισμού μεικτού λόγου της μορφής α:β=μ:ν, όπου α,β είναι ομοειδή μεγέθη και μ,ν είναι φυσικοί αριθμοί, καθώς και την ανορθόδοξη χρήση της θεωρίας λόγων μεγεθών του Ευδόξου, η οποία όντας μεταγενέστερη δεν είχε προφανώς χρησιμοποιηθεί από τον δημιουργό του βιβλίου X, τον Θεαίτητο.
Στην §**2.4** παρατίθενται τα δικά μας σχετικά σχόλια καθώς και η λεπτομερής σύγκριση των αντίστοιχων προτάσεων VII.2-X.3 και VII.3-X.4**.**
Τέλος, στην §**2.5** λαμβάνοντας υπ όψη τα σχόλια των μελετητών και τις δικές μας παρατηρήσεις, προβαίνουμε στον ιστορικά ορθό ορισμό της μεικτής αναλογίας, με βάση την Πρόταση X.3, και στην ιστορικά ορθή ανακατασκευή της απόδειξης της X.5.

2.1. Σύμμετρα μεγέθη

Στο βιβλίο X των *Στοιχείων* γίνεται η ταξινόμηση των ασύμμετρων μεγεθών. Ο εισαγωγικός ορισμός αποκαλύπτει τον τρόπο που ο Ευκλείδης αντιλαμβανόταν τον βασικό όρο «ασύμμετρος», οπότε φυσιολογικά ξεκινά το βιβλίο X με τον ορισμό των σύμμετρων μεγεθών. Συγκεκριμένα:

Ορισμός 1	**μετάφραση ορισμού**
Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.	Σύμμετρα λέγονται τα μεγέθη που μετρούνται από κοινό μέτρο, ενώ ασύμμετρα αυτά για τα οποία δεν μπορεί να βρεθεί κοινό μέτρο

Συνεπώς, τα μεγέθη α, β είναι σύμμετρα αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ, ν και μέγεθος γ (ομοειδές ως προς τα α, β) ώστε α=μ·γ και β=ν·γ.

Όπως σημειώνει ο Taisbak,

> η φράση «το Α μετράει το Β», είναι συνώνυμο με το ότι «το Β είναι πολλαπλάσιο του Α», και «η συμμετρία με» είναι μία σχέση στα σύνολα των ομοειδών μεγεθών. Αυτό δεν είναι τετριμμένο, καθιερώνεται με τις X1-2, οι οποίες βεβαιώνουν την ύπαρξη των ασύμμετρων μεγεθών, αποδεικνύοντας ότι υπάρχουν μεγέθη, των οποίων η Ανθυφαίρεση, δεν τελειώνει ποτέ. p.21

2.2. Η Πρόταση Χ.5

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε λεπτομερώς την κρίσιμη Πρόταση, βάσει της οποίας γίνεται στα *Στοιχεία* η αριθμητικοποίηση των μεγεθών.

2.2.1. Η απόδειξη της Χ.5 στα *Στοιχεία*

Πρόταση Χ.5	**μετάφραση της Πρότασης Χ.5**
Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.	Τα σύμμετρα μεγέθη έχουν λόγο ως αριθμός προς αριθμό.
Απόδειξη.	
Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. καὶ ὁσάκις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Δ μετρεῖ ἀριθμὸν καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· **ἀνάπαλιν** ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε. Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	Έστω τα μεγέθη Α, Β τα οποία είναι σύμμετρα. Ισχυρίζομαι ότι το Α προς το Β, έχει λόγο ως αριθμός προς αριθμό. Επειδή τα Α, Β είναι σύμμετρα, έχουν κοινό μέγεθος ως μέτρο και έστω ότι αυτό είναι το Γ.[11] Όσες φορές μετράει το (μέγεθος) Γ το (μέγεθος) Α, τόσες μονάδες έστω ότι υπάρχουν στον (αριθμό) Δ και όσες φορές μετράει το (μέγεθος) Γ το (μέγεθος) Β, τόσες μονάδες υπάρχουν στον (αριθμό) Ε.[12] Επειδή το Γ μετράει το Α κατά τις μονάδες του Δ, και η μονάδα μετράει τον Δ κατά τις μονάδες του άρα, η μονάδα μετρά τον αριθμό Δ ίσες φορές που μετράει και το Γ το (μέγεθος) Α˙ είναι επομένως όπως το Γ προς το Α, έτσι η μονάδα προς το Δ[13] και επομένως ανάπαλιν, όπως το Α προς το Γ, έτσι (είναι) το Δ προς τη μονάδα. Επειδή πάλι το Γ μετράει το Β κατά τις μονάδες του Ε και η μονάδα μετράει τον Ε κατά τις μονάδες του, άρα, η μονάδα μετρά τον αριθμό Ε ίσες φορές που μετράει και το Γ το (μέγεθος) Β˙ είναι επομένως όπως το Γ προς το Β, έτσι η μονάδα προς το Ε. Δείχτηκε όμως ότι και όπως το Α προς το Γ, έτσι (είναι) το Δ προς τη μονάδα. Άρα από τη δι ίσου[14], όπως είναι το Α προς το Β, έτσι είναι ο αριθμός Δ προς τον αριθμό Ε. Άρα, τα σύμμετρα μεγέθη Α, Β έχουν λόγο μεταξύ τους ως ο αριθμός Δ προς τον αριθμό Ε.

[11] Δε χρησιμοποιεί την Πρόταση Χ.3 ώστε το Γ να είναι το μέγιστο κοινό μέτρο των Α,Β, αλλά μόνο τον ορισμό Χ.1 συμμετρίας. Ίσως για αυτό οι Knorr, Taisbak δε χρησιμοποιούν το μέγιστο κοινό μέτρο.

[12] Εφόσον το Γ δεν ήταν το μέγιστο κοινό τους μέτρο, τότε οι αριθμοί Δ, Ε δεν είναι κατ' ανάγκη σχετικώς πρώτοι.

[13] Δεν έχει οριστεί μεικτή αναλογία.

[14] Δεν έχει οριστεί μεικτή δι' ίσου

2.2.2. Απόδοση της πρότασης Χ.5 σε σύγχρονη γραφή:

Έστω τα σύμμετρα μεγέθη Α και Β.
Ισχυρίζομαι ότι το Α προς το Β έχει λόγο ως αριθμός προς αριθμό.
Επειδή τα Α, Β είναι σύμμετρα, έχουν κοινό μέγεθος ως μέτρο και έστω ότι αυτό είναι το Γ. Έστω φυσικός Δ, τέτοιος ώστε Α=Δ·Γ, και Δ=Δ·1.
Είναι λοιπόν Γ:Α=1:Δ[15] και αντιστρόφως Α:Γ=Δ:1.[16]
Έστω φυσικός Ε, τέτοιος ώστε Β=Ε·Γ και Ε=Ε·1, είναι λοιπόν Γ:Β=1:Ε.
Αφού έχει δειχθεί ότι Α:Γ=Δ:1, από τη δι᾽ίσου᾽ είναι Α:Β=Δ:Ε.[17]
Επομένως τα σύμμετρα μεγέθη έχουν μεταξύ τους λόγο ως ο αριθμός Δ προς τον αριθμό Ε.

2.3. Σχόλια για την Πρόταση Χ.5 και την απόδειξή της από τους κύριους μελετητές της.

Η πρόταση Χ.5 έχει απασχολήσει τους μελετητές. Παρακάτω, αναφέρονται τα σχόλια από τα οποία σαφώς αναδεικνύονται τα προβληματικά σημεία αυτής, αλλά και η σημαντικότητά της.

2.3.1. Σχόλια για την Πρόταση Χ.5 από τον Heath

Ο Heath, στο σύγγραμμα *Elements* vol.2&3, αναφέρεται σε αυτήν εκτενώς. Τα χωρία που έχουν παρατεθεί, αποτελούν δική μας απόδοση στα νεο-ελληνικά. Ξεκινώντας στον vol.2 p.113, παρατηρεί ότι:

> Ο Αριστοτέλης είχε σαφώς αναφέρει ότι τα μεγέθη μπορούν να είναι αριθμοί όταν παρατήρησε (*Αναλυτικά Ύστερα I.7, 75b 4*[18]) ότι δε μπορούν να προσαρμοστούν οι αριθμητικές μέθοδοι των αποδείξεων των μεγεθών αν τα μεγέθη δεν είναι αριθμοί. Επιπλέον ο Αριστοτέλης είχε σημειώσει (*Αναλυτικά Ύστερα I.5, 74a 17*[19]) ότι η πρόταση στην οποία οι όροι του λόγου μπορούν να ληφθούν εναλλάξ έχει τη μία φορά αποδειχθεί ξεχωριστά για αριθμούς, ευθείες, στερεά και χρόνους αλλά θεωρεί ότι ήταν δυνατό να αποδειχτούν όλα από μία απόδειξη, αλλά επειδή δεν υπάρχει κοινό όνομα να τα συμπεριλαμβάνει όλα αυτά, συγκεκριμένα τους αριθμούς, τα μήκη, χρόνους και στερεά, και ο χαρακτήρας τους ήταν διαφορετικός, λαμβάνονταν ξεχωριστά. Τώρα όμως[20], η πρόταση αποδεικνύεται γενικά.

Κατόπιν ο Heath, διαπιστώνει ότι:

> Ακόμη ο Ευκλείδης δεν έχει πει τίποτα για να συνδέσει τις δύο θεωρίες αναλογιών ακόμα και όταν έρχεται στην Χ.5 σε μια αναλογία, δύο όροι της οποίας είναι μεγέθη και δύο είναι αριθμοί («Σύμμετρα μεγέθη έχουν λόγο μεταξύ τους, ως αριθμό προς αριθμό»). Η πιθανή εξήγηση του φαινομένου είναι ότι ο Ευκλείδης απλά ακολούθησε την παράδοση και έδωσε τις δύο θεωρίες όπως τις βρήκε. Αυτό μπορεί να ευθυγραμμιστεί με τη σημείωση στον Πάππο (VII,.p.678) σχετικά με δικαιοσύνη του Ευκλείδη απέναντι στους άλλους και την προθυμία του να τους τιμήσει για την εργασία τους.

---

15 Περιφραστικά ο Ορισμός VII.20, που όμως εκεί αφορά αριθμούς και όχι μεγέθη.

16 Πόρισμα V.7

17 Πρόταση V.22

18 75b3-6.
ὧν δὲ τὸ γένος ἕτερον, ὥσπερ ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρίας, οὐκ ἔστι τὴν ἀριθμητικὴν ἀπόδειξιν ἐφαρμόσαι ἐπὶ τὰ τοῖς μεγέθεσι συμβεβηκότα, εἰ μὴ τὰ μεγέθη ἀριθμοί εἰσι·

19 74α17-25
καὶ τὸ ἀνάλογον ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ᾗ ἀριθμοὶ καὶ ᾗ γραμμαὶ καὶ ᾗ στερεὰ καὶ ᾗ χρόνοι, ὥσπερ ἐδείκνυτό ποτε χωρίς, ἐνδεχόμενόν γε κατὰ πάντων μιᾷ ἀποδείξει δειχθῆναι· ἀλλὰ διὰ τὸ μὴ εἶναι ὠνομασμένον τι ταῦτα πάντα ἕν, ἀριθμοί μήκη χρόνοι στερεά, καὶ εἴδει διαφέρειν ἀλλήλων, χωρὶς ἐλαμβάνετο. νῦν δὲ καθόλου δείκνυται· οὐ γὰρ ᾗ γραμμαὶ ἢ ᾗ ἀριθμοὶ ὑπῆρχεν, ἀλλ' ᾗ τοδί, ὃ καθόλου ὑποτίθενται ὑπάρχειν.

20 Δηλαδή, με την εισαγωγή της έννοιας του μεγέθους

Στον ίδιο τόμο (p.117), συνεχίζει τις παρατηρήσεις του, λέγοντας

> Έχουμε τώρα να ιχνηλατήσουμε όσο πιο καθαρά γίνεται την εξέλιξη της έννοιας του *λόγου* ή *σχετικού μεγέθους*. Στην αρχική του έννοια ο *λόγος* χρησιμοποιούνταν μόνο για λόγο μεταξύ συμμέτρων, δηλαδή ένα λόγο που μπορούσε να *εκφραστεί*, και ο τρόπος της έκφρασης υποδηλώνεται στην πρόταση X.5 των *Στοιχείων*, στην οποία αποδεικνύει ότι «Σύμμετρα μεγέθη έχουν λόγο μεταξύ τους, ως αριθμό προς αριθμό». Ότι αυτή ήταν η πρωταρχική σημασία του *λόγου* αποδεικνύεται από τη χρήση του όρου *ἄλογος* για τα ασύμμετρα, το οποίο σημαίνει άρρητος με την έννοια του μη έχοντα λόγο με κάτι το οποίο λαμβάνεται ως ρητό. Ο Ευκλείδης ο ίδιος μας δείχνει πώς να προχωρήσουμε για την εύρεση του λόγου, του σχετικού μεγέθους δύο συμμέτρων μεγεθών. Πρακτικά δίνει στη X.3 τη συνήθη σε μας μέθοδο εύρεσης του μέγιστου κοινού μέτρου.

Εμβαθύνοντας τη μελέτη του σχετικά με την πρόταση X.5, στη p.126 σημειώνει πώς:

> Έχει ήδη παρατηρηθεί ότι ο Ευκλείδης πουθενά δεν αποδεικνύει (το γεγονός δεν μπορεί να του έχει ξεφύγει) ότι η αναλογία των αριθμών περιλαμβάνεται στην αναλογία των μεγεθών ως ειδική περίπτωση. Αυτό αποδείχτηκε από τον Simson ότι είναι αναγκαίο για τις προτάσεις 5 και 6 του βιβλίου X. Από την άλλη μεριά, η X.5 ανήκει σε βιβλίο του Θεαίτητου, και άρα οποιαδήποτε χρήση του βιβλίου 5 στο βιβλίο X δεν νομιμοποιείται (όπως άλλωστε και για την X.2).

Στον επόμενο τόμο 3, p.25 στα σχόλιά του για την X.5, γράφει:

> Θα έχει παρατηρηθεί ότι αναφέροντας την αναλογία Γ:Α=1:Δ ο Ευκλείδης απλώς εκφράζει το γεγονός ότι το Α είναι το ίδιο πολλαπλάσιο του Γ, όπως είναι το Δ της μονάδος. Με άλλα λόγια, στηρίζει την πρότασή του στον ορισμό 20 της αναλογίας του βιβλίου VII. Αυτός όμως ο ορισμός είναι εφαρμόσιμος μόνο στην περίπτωση των αριθμών, εν αντιθέσει με τα Α και Γ που είναι μεγέθη. Έτσι η αναλογία δεν είναι «νόμιμη» εκτός αν αποδειχθεί ότι είναι σωστή με την έννοια του Ορισμού 5 του βιβλίου V σε σχέση με τα μεγέθη γενικά, μεταχειριζόμενος τους αριθμούς 1, Δ ως *μεγέθη*. Το ίδιο ισχύει και με τις άλλες αναλογίες στην πρόταση. Υπάρχει ένα κενό στο σημείο αυτό. Ο Ευκλείδης όφειλε να έχει αποδείξει ότι τα μεγέθη που είναι ανάλογα με την έννοια του ορισμού 20 του βιβλίου VII, είναι επίσης ανάλογα με την έννοια του ορισμού 5 του βιβλίου V, ή ότι η αναλογία των αριθμών περιλαμβάνεται στην αναλογία των μεγεθών ως ειδική περίπτωση. Ο Simson το έχει αποδείξει αυτό στην εμβόλιμή του Πρόταση C στο βιβλίο V.

2.3.2. Σχόλια για την Πρόταση X.5 από τον van der Waerden,

Ο van der Waerden, ο επόμενος χρονολογικά σχολιαστής, στο πλαίσιο αναζήτησης της πραγματικής απόδειξης του θεωρήματος που διατυπώνεται στον Πλατωνικό διάλογο *Θεαίτητος,* καταθέτει την οπτική του για την εξέλιξη της απόδειξης αυτής. Συγκεκριμένα αναφέρει ότι :

> Υποθέτοντας ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία παράγουν τετράγωνα με εμβαδά n και 1, είχαν μήκη σύμμετρα, θα προσπαθούσαμε να αποδείξουμε ότι το n είναι τετράγωνος αριθμός. Η απόδειξη χωρίζεται, κατ' ανάγκη σε ένα γεωμετρικό και σε ένα αριθμοθεωρητικό μέρος. Από την υπόθεση ότι οι πλευρές είναι σύμμετρες εξάγεται γεωμετρικά κατ' αρχάς ότι ο λόγος των πλευρών ισούται προς το λόγο δύο αριθμών p και q […]. Το γεωμετρικό μέρος

της απόδειξης περιέχεται στο δέκατο βιβλίο των *Στοιχείων*. Οι προτάσεις 5, 6 […] αυτού του βιβλίου είναι:

Χ.5 Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Χ.6 ᾿Εὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Συνεχίζει, αναφέροντας:

> Ο Θεαίτητος χρειαζόταν τις προτάσεις Χ.5, Χ.6 [και Χ.9] για να αποδείξει την πρόταση που διατυπώνει στο διάλογο. Χάρη σε αυτές μπόρεσε να μεταφράσει τη *γεωμετρική* υπόθεση της ασυμμετρίας των πλευρών σε μια *αριθμητική* ιδιότητα. (p. 166-169, σελ.193-196)

Επισημαίνει παρακάτω, όμως ότι

> Τη διατύπωση των προτάσεων Χ.5, 6 [και 9] του Θεαίτητου μπορούμε να τη βρούμε στα *Στοιχεία*. Δεν ισχύει το ίδιο και για τις αποδείξεις. Πράγματι, οι αποδείξεις του Ευκλείδη περιέχουν λογικά σφάλματα για τα οποία δε μπορούμε να θεωρήσουμε υπεύθυνο το Θεαίτητο. Πέραν αυτού, οι εν λόγω αποδείξεις εξαρτώνται από τη θεωρία αναλογιών του Ευδόξου που αναπτύσσεται στο πέμπτο βιβλίο, θεωρία η οποία δεν ήταν ακόμη γνωστή στο Θεαίτητο. (p. 175, σελ. 204)

Επιχειρώντας, τώρα να προσεγγίσει με ιστορικά ορθό τρόπο την εξέλιξη του τροποποιημένου μέρους του βιβλίου Χ, προτάσσει την εξής πορεία:

> Προφανώς ο Θεαίτητος άρχισε το βιβλίο του με μία έκθεση της θεωρίας των αναλογιών, με βάση τον ορισμό μέσω της ανταναίρεσης. Ακολουθώντας τη συνηθισμένη μέθοδο άρχισε με λήμματα τα οποία θα του χρειάζονταν αργότερα. Σε αυτά περιλαμβάνεται η [R=]Χ.1. Στις προτάσεις Χ.2, 3 θεμελίωσε τη θεωρία της άπειρης και πεπερασμένης ανταναίρεσης πετυχαίνοντας, έτσι συγχρόνως, να βρεί κριτήριο συμμετρίας για δυο ευθύγραμμα τμήματα ή για δύο επιφάνειες. Είναι πιθανό ότι το επόμενο βήμα ήταν η θεωρία των αναλογιών, με βάση τον ορισμό της ανταναίρεσης στο οποίο αναφέρεται ο Αριστοτέλης. Ο Ευκλείδης παρέκαμψε αυτό το κομμάτι, γιατί προτιμήθηκε η νέα αυτή θεωρία (που οφείλεται στον Εύδοξο). Ο Θεαίτητος, τότε, προχώρησε στην ανάπτυξη της θεωρίας των ρητών λόγων του με βάση τη δική του θεωρία αναλογιών (Χ.4, 5[21] και 9). Σε αυτό το τμήμα του βιβλίου, ο Ευκλείδης αντικατέστησε τις αποδείξεις με άλλες των οποίων τη μέθοδο δανείστηκε από τον Αρχύτα και τη σχολή του. Το επόμενο κύριο τμήμα του δεκάτου βιβλίου που αναφέρεται στα δεκατρία είδη άρρητων γραμμών έμεινε ουσιαστικά αμετάβλητο από τον Ευκλείδη, εκτός από μερικές ήσσονος σημασίας προτάσεις και παρατηρήσεις που πρόσθεσαν αυτός και οι διάδοχοί του και που σκοπό είχαν να διασαφηνίσουν το εξαιρετικά δύσκολο θέμα. (p.179, σελ.208)

2.3.3. Σχόλια του Knorr για την Πρόταση Χ.5 .

Ο Knorr, στο κεφάλαιο VIII, μελετά τη γεωμετρία της ασυμμετρίας. Εκεί, διαπιστώνει ότι απαιτείται ένα ουσιώδες κοινό βήμα σε όλες τις αλγεβρικές αποδείξεις της ασυμμετρίας. Το αναφέρει ως:

> Θεώρημα 3: Τα σύμμετρα μεγέθη έχουν το ένα προς το άλλο λόγο ακεραίου (θετικού) προς ακέραιο (θετικό) [και αντίστροφα].

---

[21] 5, 6 και 9, θα έπρεπε να γράφει.

και κατόπιν το σχολιάζει, λέγοντας ότι:

> Ο Ευκλείδης το αποδεικνύει αυτό ως (πρόταση) X.5 [και X.6]. Ενώ μία σύγχρονη θεωρία ρητών θα το μεταχειριζόταν ως ορισμό, ο Ευκλείδης είναι σωστός που το δίνει ως θεώρημα, αφού ο δικός του ορισμός των σύμμετρων μεγεθών (ορισμός X.1) βασίζεται στην ύπαρξη κοινού μεγέθους μέτρησης. Αλλά **στην απόδειξή του της X.5 εμφανίζεται να σφάλει** […]. Έτσι, εφαρμόζει τον ορισμό VII.20 της αναλογίας για (θετικούς) ακεραίους στην περίπτωση μιας αναλογίας στην οποία δύο από τους όρους δεν είναι (θετικοί) ακέραιοι, αλλά σύμμετρα μεγέθη. Αυτό που χρειάζεται, είναι μια απόδειξη ότι μία αναλογία μεγεθών (με την προσέγγιση του βιβλίου V), όπου όμως τα μεγέθη είναι σύμμετρα, ικανοποιεί τις ιδιότητες μιας αναλογίας με την άποψη του βιβλίου VII. Η απουσία αυτού του βήματος, αναδεικνύει ότι η γνήσια μορφή της X.5 δεν προσέφευγε στον ορισμό του Ευδόξου, αλλά **ο Ευκλείδης απέτυχε να αντιληφθεί την αναγκαιότητα της διασκευής**. (p. 253-254)

Διακρίνει, λοιπόν, με σαφήνεια την ύπαρξη ελαττωματικού σημείου στην απόδειξη της X.5 και επιχειρεί ολοκληρωμένη προσέγγιση, προσπαθώντας να ανακατασκευάσει τον ορισμό που λείπει.

> Θα μπορέσουμε να επανακτήσουμε τον ορισμό της αναλογίας που χρησιμοποιείται στην X.5. Εκεί παίρνει το μέγεθος A και ένα μέτρο C και προσδιορίζει τον (θετικό) ακέραιο d τέτοιο που ο C να μετρά τον A τόσες φορές, όσες είναι και οι μονάδες στο d. Από αυτό λαμβάνεται ότι A:C=d:1. Πρέπει να αναφέρουμε ότι ο συγγραφέας χρησιμοποιεί αυτό τον ορισμό: Δοθέντος δύο ζευγών ομογενών και σύμμετρων μεγεθών, αυτά είναι σε αναλογία αν το πρώτο είναι το ίδιο πολλαπλάσιο, μέρος ή μέρη του δεύτερου, όπως το τρίτο είναι του τετάρτου. Αυτός είναι ο βαθύτερος ορισμός που υπάρχει στον τετραγωνισμό των μηνίσκων του Ιπποκράτη. Με αυτή τη μικρή τροποποίηση, τα θεωρήματα στην αναλογία των (θετικών) ακεραίων (VII.1-19) γίνονται εφαρμόσιμα πιο γενικά στα σύμμετρα μεγέθη. Στο πλαίσιο μιας τέτοιας θεωρίας λόγων, η απόδειξη της X.5 του Ευκλείδη στη μορφή που την έχουμε είναι αποδεκτή. (p. 254)

2.4. Δικά μας σχόλια για την απόδειξη της Πρότασης X.5 στα *Στοιχεία*

Ο Ευκλείδης αποδεικνύει την X.5 χωρίς να υπάρχει ορισμός είτε λόγου συμμέτρων μεγεθών, είτε μεικτής αναλογίας, επομένως δεν είναι σαφής η απόδειξη που παραθέτει στα *Στοιχεία*. Επιπροσθέτως, σφάλει χρησιμοποιώντας την δι' ίσου, η οποία έχει αποδειχθεί στην VII.14 για λόγους αριθμών και στην V.22 για λόγους μεγεθών. Σαφώς όμως, η Πρόταση X.5 είναι αρχαιότερη από τη θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου (βιβλίο V των *Στοιχείων*)[22]. Είναι πολύ πιθανόν αρχαιότερη και από τη θεωρία λόγων του Θεαίτητου, η οποία όμως για σύμμετρα μεγέθη συμπίπτει με τη θεωρία λόγων αριθμών. Η όλη απόδειξη λοιπόν, απορρίπτεται και θα αναζητηθεί ολοκληρωμένη προσέγγιση αξιοποιώντας τα σημεία προσοχής που έχουν μελετηθεί .

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι έχοντας ο Ευκλείδης ορίσει τα σύμμετρα μεγέθη, συνεχίζει, σε πλήρη αντιστοιχία με την VII.2, κατά τον Heath, στην Πρόταση X.3 για να βρει το μέγιστο κοινό τους μέτρο. Η παρουσία της Πρότασης X.3 και X.4 και η εντελώς όμοια απόδειξη με τις αριθμητικές προτάσεις VII.2 & 3, όπως αναδεικνύεται από την παρακάτω γραμμή προς γραμμή σύγκρισή τους, υποδεικνύει με σαφήνεια ποιος πρέπει να είναι ο μεικτός ορισμός ισότητος λόγου συμμέτρων μεγεθών με λόγο αριθμών.

[22] Ο Heath στο σημείο αυτό αναφέρεται στην V.22.

VII.2	**X.3**
Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.	Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν
[Απόδειξη]	[Απόδειξη]
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΓΔ. δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.	Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.
Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΓΔ, ΑΒ κοινὸν μέτρον ἐστίν.	Τὸ ΑΒ γὰρ μέγεθος ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό, τὸ ΑΒ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν·
καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.	καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον. μεῖζον γὰρ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΒ οὐ μετρήσει.
Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος λειφθήσεταί τις ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειφθήσεται· εἰ δὲ μή, ἔσονται οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.	Μὴ μετρείτω δὴ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ. καὶ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ·
λειφθήσεταί τις ἄρα ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΒΕ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρείτω.	καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΕΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΖ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρείτω.
ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ, καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει·μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ. ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν.	Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ, καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν.
λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Η.	λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ ΑΒ, ΓΔ. ἔστω τὸ Η.
καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ, καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ·	ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ, καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει.

μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΕ μετρήσει. ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον·	μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ, καὶ λοιπὸν τὸ ΑΖ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ ΓΖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].	οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρήσει· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν. Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ηὕρηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.
Πόρισμα	Πόρισμα
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.
VII.3	**X.4**
Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.	Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.
[Απόδειξη]	[Απόδειξη]
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.	Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.
Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ· ὁ δὴ Δ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον· μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α, Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν.	Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὔ [μετρεῖ]. μετρείτω πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β, τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν.
λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον.	καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α, Β οὐ μετρεῖ.
	Μὴ μετρείτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. λέγω πρῶτον, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Γ, Δ.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β ἄρα μετρήσει· καὶ τὸ τῶν Α, Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει.	εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον.
τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.	εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε μεῖζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρείτω τὰ Α, Β, Γ. καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β ἄρα μετρήσει καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. ἔστι δὲ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Δ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.	οὐκ ἄρα μεῖζόν τι τοῦ Ε μεγέθους [μέγεθος] τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν,
Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Δ τὸν Γ· λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Γ, Δ οὔκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ οὔκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. ὁ δὴ τοὺς Α, Β, Γ μετρῶν καὶ τοὺς Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸν Δ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Δ, Γ ἄρα οὔκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Ε. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, ὁ δὲ Δ τοὺς Α, Β μετρεῖ, καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον.	ἐὰν μὴ μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ, ἐὰν δὲ μετρῇ, αὐτὸ τὸ Δ. [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].
λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Ε τῶν Α, Β, Γ	

τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Ε. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Α, Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ζ ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Δ, Γ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Δ, Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.	
οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ηὕρηται [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].
	Πόρισμα
	᾽Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος τρία μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει. ῾Ομοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

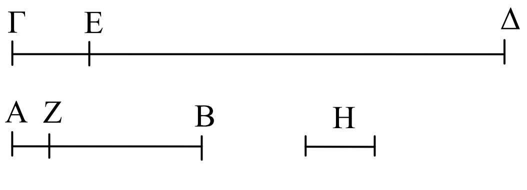
Η απόδειξη της Χ.3 που υπάρχει στα *«Στοιχεία»* σε νέο-ελληνική απόδοση και σύγχρονη γραφή, είναι:

Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο σύμμετρα μεγέθη, τα οποία αναπαριστά με τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα, και έστω ΑΒ<ΓΔ.

Αφού είναι σύμμετρα, είτε το ΑΒ θα μετράει το ΓΔ, είτε όχι.

i. Έστω ότι το ΑΒ μετρά το ΓΔ. Τότε προφανώς το ΑΒ είναι το μέγιστο κοινό τους μέτρο, αφού το ΑΒ μετρά το ΑΒ και κάποιο μεγαλύτερο από αυτό, δε θα μετρούσε το ΑΒ.

ii. Έστω ότι το ΑΒ δε μετρά το ΓΔ. Τότε η ανθυφαίρεση των ΑΒ, ΓΔ είναι πεπερασμένη, αλλιώς (από την πρόταση Χ.2) θα ήταν ασύμμετρα τα μεγέθη αυτά. Έστω ότι η διαδικασία τελειώνει σε τρία βήματα.



Είναι

[1] ΓΔ=ΕΔ+ΓΕ, ΓΕ<ΑΒ και ΕΔ=$κ_1$·ΑΒ, δηλαδή ΓΔ= $κ_1$·ΑΒ +ΓΕ

[2] ΑΒ=ΖΒ+ΑΖ, ΑΖ<ΓΕ και ΖΒ=$κ_2$·ΓΕ, δηλαδή ΑΒ= $κ_2$·ΓΕ +ΑΖ

[3] ΓΕ=$κ_3$ ·ΑΖ.

Άρα τελικά ΓΔ=[$\kappa_1 \cdot(\kappa_2 \cdot \kappa_3+1)+\kappa_3$] ·ΑΖ και

ΑΒ=($\kappa_2 \cdot \kappa_3+1$) ·ΑΖ

Επομένως το ΑΖ είναι κοινό μέτρο των ΓΔ και των ΑΒ.

Θα δειχτεί ότι είναι και μέγιστο.

Έστω ότι υπάρχει μέγεθος Η με Η >ΑΖ που να είναι κοινό μέτρο των ΑΒ, ΓΔ.

Έστω ότι ΑΒ=ν·Η.

Ίσχυε όμως ότι ΕΔ=κ_1·ΑΒ επομένως ΕΔ=κ_1·ν·Η

Αφού το Η μετρά το ΓΔ θα είναι ΓΔ=ρ·Η.

Τελικά το Η θα είναι μέτρο και της διαφοράς τους, οπότε ΓΕ=σ·Η.

Όμως ΖΒ=λ·ΓΕ , επομένως ΖΒ=λ·σ·Η

και αφού ΑΒ=ν·Η, το Η θα είναι μέτρο και της διαφοράς τους ΑΖ=(ν-λ·σ)Η,

το οποίο είναι αδύνατο, αφού υποθέσαμε ότι Η>ΑΖ.

Επομένως, το ΑΖ είναι το μέγιστο κοινό τους μέτρο.▪

Κατόπιν υπάρχει, σε αντιστοιχία με το πόρισμα της πρότασης VII.2, το πόρισμα που λέει:

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Συνεχίζει, αντίστοιχα με την πρόταση VII.3, στην πρόταση Χ.4 όπου ζητείται η εύρεση μέγιστου κοινού μέτρου τριών πλέον μεγεθών.

2.5. Ο ορθός ορισμός της μεικτής αναλογίας και η ιστορικά ορθή απόδειξη της Πρότασης Χ.5

Το γεγονός ότι ο Ευκλείδης εισάγει στο βιβλίο Χ τις Προτάσεις Χ.3, 4 απολύτως συμβατά με τις Προτάσεις VII.2,3 του βιβλίου VII, και το γεγονός ότι αυτές οι Προτάσεις δεν χρησιμοποιούνται πουθενά αλλού στο βιβλίο Χ, καθιστά σαφές ότι ο μόνος λόγος για την εκεί τοποθέτησή τους από το συγγραφέα του Βιβλίου Χ, είναι προκειμένου να χρησιμοποιηθούν ώστε να δοθεί μέσω αυτών, όπως και στο βιβλίο VII, ο (κανονικός) μεικτός ορισμός αναλογίας α:β=μ:ν, όπου α,β είναι σύμμετρα μεγέθη και μ,ν φυσικοί αριθμοί, ένας ορισμός που είναι απολύτως αναγκαίος προκειμένου να έχει νόημα η αμέσως επόμενη Πρόταση Χ.5.

Ορισμός μεικτής αναλογίας.

Έστω α, β σύμμετρα μεγέθη και μ,ν φυσικοί αριθμοί.

Λέμε ότι **α:β=μ:ν** αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί σ,τ ώστε, θέτοντας γ=Μ.Κ.Μ(α,β) από την Πρόταση Χ.3 και κ=Μ.Κ.Δ(μ,ν) από τις Προτάσεις VII.1 και VII.2, να ισχύει

α=σ·γ, β=τ·γ και μ=σ·κ, ν=τ·κ.

Έχοντας πλέον αυτόν τον ορισμό, η ορθή απόδειξη της Πρότασης Χ.5 είναι η ακόλουθη:

Πρόταση Χ.5.

Έστω α,β σύμμετρα μεγέθη. Τότε υπάρχουν αριθμοί φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε α:β=μ:ν.

Ιστορικά ορθή απόδειξη της Χ.5.

Εφόσον α,β είναι σύμμετρα μεγέθη, υπάρχουν αριθμοί σ,τ και μέγεθος γ, ώστε α=σ·γ, β=τ·γ. Θέτουμε δ=Μ.Κ.Μ(α,β).

Τότε από Πόρισμα στην Χ.3, υπάρχει αριθμός ω ώστε ω·γ=δ.

Τότε α=(σ·ω)δ, β=(τ·ω)δ. Θέτουμε μ=σ·ω, ν=τ·ω.

Οι αριθμοί μ,ν είναι σχετικώς πρώτοι (γιατί? Πρόταση ανάλογη της VII.20-22), δηλαδή ΜΚΔ(μ,ν)=1.

Άρα α=μ·δ, β=ν·δ, και μ=μ·1, ν=ν·1 και από τον δοθέντα ορισμό προκύπτει α:β=μ:ν.

Κεφάλαιο 3. Πυθαγόρεια θεωρία λόγων συμμέτρων μεγεθών & λόγων μεικτών με βάση τις Προτάσεις VII.1, 2 και X.3 των *Στοιχείων*. Πρόταση μεικτών τετραγωνικών λόγων: αν α:β=μ:ν, τότε $α^2:β^2=μ^2:ν^2$.

Στην §3.1 ορίζεται –σε αντιστοιχία με το Βιβλίο VII– η αναλογία σύμμετρων μεγεθών και αιτιολογείται η Πυθαγόρεια προέλευσή της.
Κατόπιν, στην §3.2 αναπτύσσεται η θεωρία λόγων σύμμετρων μεγεθών με κορωνίδα την πρόταση μεικτών τετραγωνικών λόγων και το συσχετισμό της με την Πρόταση X.9.

3.1. Ορισμός αναλογίας συμμέτρων μεγεθών.

Έστω α,β σύμμετρα ομοειδή μεγέθη, και γ,δ επίσης σύμμετρα ομοειδή μεγέθη.
Λέμε ότι **α:β=γ:δ** αν, θέτοντας κ=Μ.Κ.Μ.(α,β), λ=Μ.Κ.Μ.(γ,δ) (από την Πρόταση X.3), υπάρχουν **φυσικοί αριθμοί** μ,ν σχετικώς πρώτοι, ώστε α=μ·κ, β=ν·κ, και γ=μ·λ,δ=ν·λ.

Με βάση τον ορισμό αυτό και τον ορισμό μεικτών λόγων στο Κεφάλαιο 2, οι οποίοι, με τη βοήθεια της Πρότασης X.3 των *Στοιχείων*, αριθμητικοποιούν το λόγο σύμμετρων μεγεθών, ανοίγει ο δρόμος για την ανακατασκευή της θεωρίας λόγων συμμέτρων μεγεθών και τη θεωρία μεικτών λόγων, κατ' αναλογίαν προς την αριθμητική θεωρία του βιβλίου VII.

Μπορούμε με βάσιμα στοιχεία να υποθέσουμε ότι η θεωρία αυτή είναι Πυθαγόρεια, αφού η X.3 είναι, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, αντίστοιχη της VII.2, η οποία σαφώς είναι Πυθαγόρεια.

Επιπροσθέτως, όταν ο ο van der Waerden αναφέρεται στον Ιπποκράτη τον Χίο, παραθέτει το, αποκαθαρμένο από μεταγενέστερες παρεμβολές, κείμενο του Ευδήμου από απόσπασμα του Σιμπλίκιου, που είναι αντεγραμμένο από *Ιστορία της Γεωμετρίας* του Ευδήμου, όπως αποκαταστάθηκε από τους Allman, Diels και Usener, Tannery, Rudio, Heiberg και τον Becker. Σύμφωνα με αυτό:

> *Οι τετραγωνισμοί των μηνίσκων, που λόγω της ομοιότητάς τους με τον κύκλο δεν είναι από τα απλά σχήματα, επιτεύχθηκαν πρώτα από τον Ιπποκράτη και θεωρήθηκαν ότι ήταν σωστά παρουσιασμένοι ˙ γι' αυτό και εμείς θα ασχοληθούμε με αυτούς και θα τους διεξέλθουμε διά μακρών.*
>
> *Άρχισε λοιπόν θέτοντας ως πρώτο μεταξύ των θεωρημάτων που χρησιμεύουν για το σκοπό του, ότι τα όμοια τμήματα των κύκλων έχουν μεταξύ τους τον αυτό λόγο με τα από τις βάσεις τους τετράγωνα. Αυτό δε το απέδειξε δείχνοντας πρώτα ότι τα τετράγωνα από τις διαμέτρους έχουν τον αυτό λόγο με τους κύκλους. Διότι δύο κύκλοι έχουν τον αυτό λόγο όπως τα όμοια τμήματα, αφού όμοια λέγονται τα τμήματα που σχηματίζουν το ίδιο μέρος του κύκλου.*

Συνεχίζει λέγοντας ότι "οπως απέδειξε πειστικά ο Dijksterhuis αυτή η επεξήγηση δεν οφείλεται στον Σιμπλίκιο αλλά στον Ιπποκράτη ή στον Εύδημο". Σε αυτό λοιπόν το κείμενο καθίσταται σαφές, αυτό που ο ίδιος συμπληρώνει, λέγοντας, ότι:

> Η έννοια της αναλογίας που χρησιμοποιεί εδώ ο Ιπποκράτης είναι η ίδια με εκείνη που αποτελεί τη βάση της πυθαγόρειας θεωρίας αριθμών: τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα εάν το πρώτο είναι το ίδιο μέρος ή το ίδιο πολλαπλάσιο του δευτέρου όπως είναι το τρίτο του τετάρτου. (p.132–133, σελ. 149–150)

Δε μένει λοιπόν αμφιβολία αναφορικά με την Πυθαγόρεια προέλευσή της θεωρίας λόγων σύμμετρων μεγεθών, την οποία σε αντιστοιχία με το βιβλίο VII των *Στοιχείων*, ανακατασκευάζουμε παρακάτω:

3.2. Θεωρία λόγων συμμέτρων μεγεθών

3.2.1. Πρόταση (Μεταβατική Ιδιότητα)

Έστω α,β σύμμετρα ομοειδή μεγέθη, α΄,β΄ σύμμετρα ομοειδή μεγέθη, και α΄΄, β΄΄ σύμμετρα ομοειδή μεγέθη, και επιπλέον μ, ν, μ΄,ν΄ αριθμοί. Τότε:

[1] Αν α:β=α΄:β΄, α΄:β΄=α΄΄:β΄΄, τότε α:β=α΄΄:β΄΄,

[2] Αν α:β=μ:ν, α΄:β΄=μ:ν, τότε α:β=α΄:β΄,

[3] Αν α:β=μ:ν, και μ:ν=μ΄:ν΄, τότε α:β=μ΄:ν΄, και

[4] Αν α:β=μ:ν, α:β=μ΄:ν΄, τότε μ:ν=μ΄:ν΄.

Απόδειξη.

[1] Θέτουμε κ=Μ.Κ.Μ(α,β), λ=Μ.Κ.Μ (α΄,β΄), ξ=Μ.Κ.Μ (α΄΄,β΄΄).
Από τον ορισμό, εφόσον α:β= α΄:β΄, υπάρχουν αριθμοί μ,ν, ώστε α=μ·κ, β=ν·κ,και α΄=μ·λ,β΄=ν·λ.
Από τον ορισμό, εφόσον α΄:β΄=α΄΄:β΄΄, έπεται ότι για τους αριθμούς μ,ν ισχύει επίσης, α΄΄=μ·ξ, β΄΄=ν·ξ.
Προκύπτει επομένως άμεσα ότι ο ορισμός α:β=α΄΄:β΄΄ ικανοποιείται.

[2] Θέτουμε κ=Μ.Κ.Μ(α,β), λ=Μ.Κ.Μ(α΄,β΄), ξ=Μ.Κ.Δ(μ,ν).
Από τον ορισμό, εφόσον α:β=μ:ν, υπάρχουν αριθμοί σ,τ, ώστε α=σ·κ, β=τ·κ, και μ=σ·ξ, ν=τ·ξ.
Από τον ορισμό, εφόσον α΄:β΄=μ:ν και αφού ήδη γνωρίζουμε ότι μ=σ·ξ και ν=τ·ξ, έπεται ότι α΄=σ·λ και β΄=τ·λ.
Προκύπτει άμεσα ότι ο ορισμός α:β=α΄:β΄ ικανοποιείται.

[3] Θέτουμε γ=Μ.Κ.Μ(α,β) και κ=Μ.Κ.Δ(μ,ν). Από τον ορισμό υπάρχουν φυσικοί αριθμοί σ,τ ώστε α=σ·γ, β=τ·γ και μ=σ·κ, ν=τ·κ. Αφού μ:ν=μ΄:ν΄, αν λ=Μ.Κ.Δ(μ΄,ν΄) και αφού ήδη γνωρίζουμε ότι μ=σ·κ, ν=τ·κ, τότε μ΄=σ·λ και ν΄=τ·λ και επομένως ικανοποιείται ο ορισμός μεικτής αναλογίας οπότε ισχύει α:β=μ΄:ν΄.

[4] Θέτουμε γ=Μ.Κ.Μ(α,β) και κ=Μ.Κ.Δ(μ,ν). Από τον ορισμό μεικτής αναλογίας υπάρχουν φυσικοί αριθμοί σ,τ ώστε α=σ·γ, β=τ·γ και μ=σ·κ, ν=τ·κ. Αφού α:β=μ΄:ν΄ και ήδη γνωρίζουμε ότι α=σ·γ, β=τ·γ, θέτοντας λ=Μ.Κ.Δ(μ΄,ν΄), θα είναι μ΄=σ·λ και ν΄=τ·λ. Ικανοποιείται επομένως ο ορισμός αναλογίας αριθμών και ισχύει μ:ν=μ΄:ν΄.

3.2.2. Πρόταση (Ισαίτατα)

Έστω α,β, σύμμετρα μεγέθη, και α,β΄, επίσης σύμμετρα μεγέθη.
Αν α:β=α:β΄, τότε β=β΄.

Απόδειξη.
Θέτουμε κ=Μ.Κ.Μ(α,β), λ=Μ.Κ.Μ(α,β΄).
Από τον ορισμό, εφόσον α:β=α:β΄, υπάρχουν αριθμοί σ,τ, ώστε α=σ·κ και β=τ·κ, και α=σ·λ, β΄=τ·λ.
Εφόσον α=σ·κ και α=σ·λ, έπεται ότι κ=λ.
Άρα β΄=τ·λ=τ·κ=β.

3.2.3. Πρόταση (ανάλογη της σύνθεσης λόγου VII.12)

Αν α, β, α΄, β΄ είναι σύμμετρα ομοειδή μεγέθη, τέτοια ώστε α:β=α΄:β΄,
τότε (α+α΄):(β+β΄)=α:β.

Απόδειξη.
Θέτουμε κ=Μ.Κ.Δ(α,β), λ=Μ.Κ.Δ(α΄,β΄). Από την υπόθεση και τον ορισμό αναλογίας σύμμετρων μεγεθών, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε α=μ·κ, β=ν·κ και α΄=μ·λ, β΄=ν·λ.
Άρα α+α΄=μ(κ+λ), και β+β΄=ν(κ+λ).
Από τις ανάλογες προτάσεις των VII.20–22, οι μ,ν είναι σχετικώς πρώτοι.
Άρα ο ορισμός (α+α΄): (β+β΄)=α:β ικανοποιείται.

Πόρισμα.
Αν α, β σύμμετρα μεγέθη και μ αριθμός, τότε α:β=(μ·α):(μ·β).

3.2.4. Πρόταση (ανάλογη της διαίρεσης λόγου VII.11)

Αν α, β, α΄, β΄ είναι σύμμετρα ομοειδή μεγέθη, τέτοια ώστε α:β=α΄:β΄,
με α>α΄, β>β΄, τότε (α–α΄):(β–β΄)=α:β

Απόδειξη.
Θέτουμε κ=Μ.Κ.Δ(α,β), λ=Μ.Κ.Δ(α΄,β΄). Από την υπόθεση και τον ορισμό αναλογίας σύμμετρων μεγεθών, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε α=μ·κ, β=ν·κ και α΄=μ·λ, β΄=ν·λ.
Άρα α–α΄=μ(κ–λ), και β–β΄=ν(κ–λ).
Από τις ανάλογες προτάσεις των VII.20-22, οι μ,ν είναι σχετικώς πρώτοι.
Άρα ο ορισμός (α–α΄): (β–β΄)=α:β ικανοποιείται.

3.2.5. Πρόταση (ανάλογη της εναλλάξ, VII.13)

Αν α,β,γ,δ είναι σύμμετρα ομοειδή μεγέθη, και α:β=γ:δ, τότε α:γ=β:δ.

Απόδειξη.
Θέτουμε κ=Μ.Κ.Δ(α,β), λ=Μ.Κ.Δ(γ,δ).
Από τον ορισμό υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν σχετικώς πρώτοι,
ώστε α=μ·κ, β=ν·κ και γ=μ·λ, δ=ν·λ.
Από το πόρισμα στη σύνθεση λόγου, εφόσον α=μ·κ, γ=μ·λ, έπεται ότι α:γ=(μ·κ): (μ·λ)=κ:λ, και από το πόρισμα στη σύνθεση λόγου, εφόσον β=ν·κ, δ=ν·λ, έπεται ότι β:δ=(ν·κ):(ν·λ)=κ:λ.
Από την Πρόταση μεταβατικότητος, ισχύει α:γ=β:δ.

3.2.6. Λήμμα.
Έστω μέγεθος α και μ,ν φυσικοί αριθμοί.
Τότε
Μ.Κ.Μ(μ·α, ν·α)=Μ.Κ.Δ(μ,ν)·α, και
(μ·α): (ν·α) = μ:ν.

Απόδειξη.
Είναι προφανές ότι τα μεγέθη $\mu\cdot\alpha$, $\nu\cdot\alpha$ είναι σύμμετρα.
Θέτουμε κ=Μ.Κ.Δ(μ,ν)
Τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί σ, τ σχετικώς πρώτοι, ώστε $\mu=\sigma\cdot\kappa$ και $\nu=\tau\cdot\kappa$
Επομένως, $\mu\cdot\alpha=\sigma\cdot(\kappa\cdot\alpha)$ και $\nu\cdot\alpha=\tau\cdot(\kappa\cdot\alpha)$
και αφού σ, τ σχετικώς πρώτοι, από τις ανάλογες Προτάσεις των VII.20-22, έπεται ότι $\kappa\cdot\alpha$ =Μ.Κ.Μ$(\mu\cdot\alpha, \nu\cdot\alpha)$.
Είναι σαφές ότι ικανοποιείται ο ορισμός μεικτών λόγων $(\mu\cdot\alpha):(\nu\cdot\alpha)=\mu:\nu$.

3.2.7. Πρόταση (ανάλογη της VII.19).

Έστω α, β σύμμετρα μεγέθη και μ, ν φυσικοί αριθμοί.
Ισχύει $\alpha:\beta=\mu:\nu$ αν και μόνο αν $\nu\cdot\alpha=\mu\cdot\beta$.

Απόδειξη.
>>Έστω $\alpha:\beta=\mu:\nu$.
Από **τον ορισμό μεικτής αναλογίας** υπάρχουν
μέγεθος γ, αριθμός κ, και αριθμοί σ,τ, ώστε
$\alpha=\sigma\cdot\gamma$, $\beta=\tau\cdot\gamma$ και $\mu=\sigma\cdot\kappa$, $\nu=\tau\cdot\kappa$.
Αφού $\alpha=\sigma\cdot\gamma$, έπεται $\nu\cdot\alpha=\nu\cdot\sigma\cdot\gamma$
και αφού $\nu=\tau\cdot\kappa$,
τελικά είναι $\nu\cdot\alpha=\tau\cdot\kappa\cdot\sigma\cdot\gamma$ (1)
Ομοίως
αφού $\beta=\tau\cdot\gamma$, έπεται ότι $\mu\cdot\beta=\mu\cdot\tau\cdot\gamma$
και αφού $\mu=\sigma\cdot\kappa$, τελικά είναι $\mu\cdot\beta=\sigma\cdot\kappa\cdot\tau\cdot\gamma$ (2)
Από (1), (2) έπεται το ζητούμενο $\nu\cdot\alpha=\mu\cdot\beta$.
<<Έστω $\nu\cdot\alpha=\mu\cdot\beta$
Αφού $\mu\cdot\alpha$, $\nu\cdot\alpha$ έχουν κοινό το μέτρο α, αυτά είναι σύμμετρα,
και επομένως από το **Λήμμα** ισχύει ότι
$(\mu\cdot\alpha):(\nu\cdot\alpha)=\mu:\nu$.
Άρα, από το πόρισμα της Πρότασης ανάλογης προς σύνθεσης λόγου VII.12, προκύπτει
$\mu:\nu=(\mu\cdot\alpha):(\nu\cdot\alpha)=(\mu\cdot\alpha):(\mu\cdot\beta)=\alpha:\beta$.

3.2.8. Πρόταση (ανάλογη της δι' ίσου, VII.14)

[1] Αν α, β, γ, α', β', γ' είναι σύμμετρα ομοειδή μεγέθη,
για τα οποία $\alpha:\beta=\alpha':\beta'$ και $\beta:\gamma=\beta':\gamma'$, τότε $\alpha:\gamma=\alpha':\gamma'$
[2] Αν α, β, γ είναι σύμμετρα ομοειδή μεγέθη και μ, ν, ξ είναι αριθμοί,
ώστε $\alpha:\beta=\mu:\nu$, $\beta:\gamma=\nu:\xi$, τότε $\alpha:\gamma=\mu:\xi$.

Απόδειξη.
[1] Από την υπόθεση και την 3.2.5, την αντίστοιχη πρόταση της εναλλάξ VII.13, έχουμε:
$\alpha:\alpha'=\beta:\beta'$, και $\beta:\beta'=\gamma:\gamma'$.
Από την Πρόταση μεταβατικότητος, ισχύει $\alpha:\alpha'=\gamma:\gamma'$.
Από την αντίστοιχη πρόταση της εναλλάξ VII.13, την 3.2.5, θα είναι $\alpha:\gamma=\alpha':\gamma'$.

[2] Από την υπόθεση και την 3.2.7, είναι: $\nu\cdot\alpha=\mu\cdot\beta$, $\xi\cdot\beta=\nu\cdot\gamma$.

Άρα $\nu\cdot(\xi\cdot\alpha)=\xi\cdot(\nu\cdot\alpha)=\xi\cdot(\mu\cdot\beta)=\mu\cdot(\xi\cdot\beta)=\mu\cdot(\nu\cdot\gamma)=\nu\cdot(\mu\cdot\gamma)$

Αρα $\xi\cdot\alpha=\gamma\cdot\mu$, οπότε από την 3.2.7, είναι $\alpha:\gamma=\mu:\xi$.

3.2.9. Πρόταση (ανάλογη της VI.1 για σύμμετρα μεγέθη).

Έστω α,β σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, και γ ευθύγραμμο τμήμα. Τότε $\alpha:\beta=(\alpha\cdot\gamma):(\beta\cdot\gamma)$.

Απόδειξη.
Από την X.3 υπάρχει το μέγιστο κοινό μέτρο των α, β. Θέτουμε δ=Μ.Κ.Μ(α,β), οπότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν ώστε $\alpha=\mu\cdot\delta$, $\beta=\nu\cdot\delta$.
Από τις ανάλογες Προτάσεις των VII.20-22, οι μ,ν είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί.
Είναι $\alpha\cdot\gamma=\mu\cdot\delta\cdot\gamma$ και $\beta\cdot\gamma=\nu\cdot\delta\cdot\gamma$.
Από τις ανάλογες των Προτάσεων VII.20-22 και το Λήμμα 3.2.6, εφόσον οι μ,ν είναι σχετικώς πρώτοι, έπεται ότι δ·γ=Μ.Κ.Μ(α·γ,β·γ).
Άρα $\alpha:\beta=(\alpha\cdot\gamma):(\beta\cdot\gamma)$

3.2.10. Πρόταση (ανάλογη της VI.16 για σύμμετρα μεγέθη)

Αν α,β σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, και γ,δ σύμμετρα μεγέθη.
Τότε $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ αν και μόνο αν $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$.

Απόδειξη.
>> Από την υπόθεση και την ανάλογη Πρόταση της VI.1, έχουμε $(\alpha\cdot\delta):(\beta\cdot\delta)=\alpha:\beta=\gamma:\delta=(\beta\cdot\gamma):(\beta\cdot\delta)$, άρα $(\alpha\cdot\delta):(\beta\cdot\delta)=(\beta\cdot\gamma):(\beta\cdot\delta)$, και αντιστρόφως $(\beta\cdot\delta):(\alpha\cdot\delta)=(\beta\cdot\delta):(\beta\cdot\gamma)$, επομένως, από ισαίτατα, $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$.
<< Έστω $\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$. Τότε $(\alpha\cdot\delta):(\beta\cdot\delta)= (\beta\cdot\gamma):(\beta\cdot\delta)$,
Από την ανάλογη Πρόταση της VI.1, έπεται $\alpha:\beta=(\alpha\cdot\delta):(\beta\cdot\delta)$, $\gamma:\delta=(\beta\cdot\gamma):(\beta\cdot\delta)$,
Από μεταβατικότητα προκύπτει $(\alpha\cdot\delta):(\beta\cdot\delta)=(\beta\cdot\gamma):(\beta\cdot\delta)$.

3.2.11. Πρόταση (αντίστοιχη της VI.20 για σύμμετρα μεγέθη)

Αν α, β, γ σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, και $\alpha:\beta=\beta:\gamma$,
τότε $\alpha:\gamma=\alpha^2:\beta^2$.

Απόδειξη.
Αφού τα α, γ είναι σύμμετρα, από την ανάλογη πρόταση της VI.1, την 3.2.9, προκύπτει:
[1] $\boldsymbol{\alpha:\gamma=\alpha^2:(\alpha\cdot\gamma)}$.
Εφόσον $\alpha:\beta=\beta:\gamma$, από τον ορισμό αναλογίας συμμέτρων μεγεθών,
υπάρχουν ομοειδή μεγέθη κ, λ και φυσικοί αριθμοί μ, ν, ώστε
$\alpha=\mu\cdot\kappa$, $\beta=\nu\cdot\kappa$, και $\beta=\mu\cdot\lambda$, $\gamma=\nu\cdot\lambda$.
Άρα
$\alpha\cdot\gamma=(\mu\cdot\kappa)\cdot(\nu\cdot\lambda)= \mu\cdot\nu\cdot\kappa\cdot\lambda$, και
$\beta^2=(\nu\cdot\kappa)\cdot(\mu\cdot\lambda)= \mu\cdot\nu\cdot\kappa\cdot\lambda$,
οπότε

[2] $\alpha\cdot\gamma=\beta^2$.
Από [1] και [2] έπεται ότι:
[3] $\alpha:\gamma=\alpha^2:\beta^2$.

Παρατήρηση. Εξ ορισμού του συγκείμενου λόγου και του διπλασίωνα λόγου, ισχύει ότι
$\alpha:\gamma=(\alpha:\beta)\cdot(\beta:\gamma)=(\alpha:\beta)\cdot(\alpha:\beta)= (\alpha:\beta)^2$,
οπότε τελικά, από την 3.2.11, προκύπτει ότι
$(\alpha:\beta)^2= \alpha^2:\beta^2$.

Η επόμενη πρόταση, αποτελεί την κορωνίδα της ανακατασκευασμένης θεωρίας λόγων σύμμετρων μεγεθών.

3.2.12. Πρόταση μεικτών τετραγωνικών λόγων.

Αν α, β σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, και μ,ν αριθμοί ώστε $\alpha:\beta=\mu:\nu$, τότε $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$.

Απόδειξη α (εντός της Πρότασης Χ.9 των *Στοιχείων*)
Από την ανάλογη πρόταση της VI.1, έχουμε $\alpha:\beta=\alpha^2:(\alpha\cdot\beta)$ και $\alpha:\beta=(\alpha\cdot\beta):\beta^2$, άρα και $\alpha^2:(\alpha\cdot\beta)=(\alpha\cdot\beta):\beta^2=\alpha:\beta$, και επομένως τα χωρία α^2, $\alpha\cdot\beta$, β^2 είναι σε συνεχή αναλογία, οπότε από VI.20 προκύπτει $\alpha^2:\beta^2=(\alpha:\beta)^2$.

Από την VII.17 και VII.18 ομοίως $\mu:\nu=\mu^2:(\mu\cdot\nu)$ και $\mu:\nu=(\mu\cdot\nu):\nu^2$, οπότε $\mu^2:(\mu\cdot\nu)=(\mu\cdot\nu):\nu^2=\mu:\nu$ δηλαδή οι αριθμοί μ^2, $\mu\cdot\nu$, ν^2 είναι σε συνεχή αναλογία, και από την VIII.11 είναι $\mu^2:\nu^2=(\mu:\nu)^2$.

Στο σημείο αυτό χρειάζεται η συνεπαγωγή: αν $\alpha:\beta=\mu:\nu$, τότε $(\alpha:\beta)^2=(\mu:\nu)^2$ (πρβλ. Παρατήρηση μετά την Πρόταση 3.2.11). Τόσο ο ορισμός των $(\alpha:\beta)^2$, $(\mu:\nu)^2$, όσο και η παραπάνω συνεπαγωγή χρειάζονται την ανάλογη της δι'ίσου VII.14.

Εφόσον $\alpha:\beta=\mu:\nu$, έπεται ότι $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$.

Σημείωση. Η απόδειξη α χρησιμοποιεί τις Προτάσεις VI.1, VI.20 καθαρών λόγων μεγεθών. Η απόδειξη της Χ.9 στα Στοιχεία δεν επικαλείται την ανάλογη της δι' ίσου και έτσι παρουσιάζει ένα κενό στην απόδειξή της.

Το κενό αυτό το επισημαίνει ο Heath στο *Elements* (vol.3), όταν καταθέτει τις παρατηρήσεις του αναφορικά με τη Χ.9, οπότε δηλώνει

> Αυτό το συμπέρασμα [Αν α, β είναι ευθείες, και $\alpha:\beta=m:n$ όπου m,n είναι αριθμοί, τότε και $\alpha^2:\beta^2=m^2:n^2$], που φαίνεται τόσο εύκολο όταν εκφράζεται συμβολικά, με κανένα τρόπο δεν ήταν εύκολο για τον Ευκλείδη, γεγονός που οφείλεται στο ότι τα α, β ήταν ευθείες, ενώ τα m,n αριθμοί. Είχε να περάσει από το $\alpha:\beta$ στο $\alpha^2:\beta^2$ δια μέσου της εφαρμογής της VI.20 από όπου διπλασιάζεται ο λόγος, το $\alpha^2:\beta^2=(\alpha:\beta)^2$. Το (εμβαδόν του) τετραγώνο(υ) της πλευράς α, προς το (εμβαδόν του) τετραγώνο(υ) της πλευράς β έχει διπλάσιο λόγο των αντίστοιχων πλευρών α, β.
> Απ' την άλλη μεριά, όντας αριθμοί οι m, n πρέπει να χρησιμοποιηθεί η VIII.11 για να δείξει ότι $m^2:n^2=(m:n)^2$.

Κατόπιν, με σκοπό να ολοκληρώσει το αποτέλεσμα του, ο Ευκλείδης υποθέτει ότι *αν δύο λόγοι είναι ίσοι, τότε είναι επίσης ίσα τα τετράγωνα των λόγων αυτών.* Αυτό δεν αποδεικνύεται πουθενά στον Ευκλείδη, αλλά είναι ένα εύκολο συμπέρασμα από την V.22, όπως φαίνεται από τη σημείωσή στην VI.22[23]. (p.30)

Στη βάση δεδομένων T.L.G, εμφανίζεται ως εναλλακτική απόδειξη της X.9, την οποία θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο 5, μία ανώνυμη της οποίας ο δημιουργός έχει εντοπίσει τα προβληματικά σημεία αυτής και επιχειρεί τη θεραπεία τους. Αξίζει να σημειωθεί πώς σε αυτή την απόδειξη δίνεται μόνο το τμήμα της X.9 που έχουμε χαρακτηρίσει ως ευθύ X.9(ε). Το πρωτότυπο κείμενο της απόδειξης β, αλλά και η νέο–ελληνική απόδοσή της, δίδονται παρακάτω.

Euclides Geometria: **Elementa (demonstration altere, Lib. X) Demonstratio 3 Ad libr. X prop. 9** Ἄλλως τὸ θʹ	**Μετάφραση.**
Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, [οὕτως] ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β · ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· **δι' ἴσου ἄρα** ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η. ἔστι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε, Η τετράγωνος· ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ ἐστιν, ὁ δὲ Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει, ὃν	Επειδή η Α είναι σύμμετρη σε μήκος της Β, υπάρχουν φυσικοί Γ, Δ ώστε, $Α:Β=Γ:Δ$[24] , Κατασκευάζουμε τους $Γ^2=Ε$ $Γ\cdot Δ=Ζ$ $Δ^2=Η$ Επειδή είναι $Γ^2=Ε$, $Γ\cdot Δ=Ζ$, θα είναι $Γ:Δ= Α:Β =Ε:Ζ$[25] (κ.ε.1) Αλλά ισχύει $Α:Β=Α^2:(Α\cdot Β)$ (VI.1) Επομένως είναι $Α^2:(Α\cdot Β)=Ε:Ζ$[26] Ομοίως επειδή $Δ^2=Η$, $Γ\cdot Δ=Ζ$ είναι άρα $Γ:Δ= Α:Β$[27]$= Ζ:Η$[28] Όμως $Α:Β= (Α\cdot Β):Β^2$ (VI.1) Επομένως είναι $(Α\cdot Β):Β^2=Ζ:Η$ και από πριν είναι $Α^2:(Α\cdot Β) = Ε:Ζ$ οπότε από την **δι' ἴσου** $Α^2:Β^2=Ε:Η$[29] Όμως κάθε ένας από τους Ε, Η είναι τετράγωνος αριθμός, όπου $Ε=Γ^2$, $Η=Δ^2$ Άρα, $Α^2: Β^2= Γ^2: Δ^2$, όπου Γ, Δ φυσικοί

[23] Εδώ ο Heath, αναφέρεται στον δεύτερο τόμο του ίδιου έργου.
[24] X.5
[25] Είναι $Γ:Δ=Γ^2:(Γ\cdot Δ)$ (VII. 17)
[26] Χρειάζεται τη μεταβατική ιδιότητα
[27] $Γ:Δ= (Γ\cdot Δ) : Δ^2$ (VII. 18)
[28] Χρειάζεται τη μεταβατική ιδιότητα
[29] Τη μεικτή δι' ἴσου

τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ᾿Αλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β. Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β. αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί εἰσιν· λόγον γὰρ ἔχουσιν, ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτέστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ.	αριθμοί, οπότε αποδείχτηκε. Αλλά αν ισχύει $Α^2:Β^2=Ε:Η$, όπου Ε, Η τετράγωνοι αριθμοί· ισχυρίζομαι ότι η Α είναι σύμμετρος της Β. Έστω ότι η Γ είναι η πλευρά του Ε[30], και Δ η πλευρά του Η[31], και $Γ\cdot Δ=Ζ$. Οι Ε, Ζ, Η είναι σε συνεχή αναλογία σε λόγο Γ:Δ[32] Επειδή ο μέσος ανάλογος των $Α^2$, $Β^2$ είναι ο $Α\cdot Β$[33], και των Ε, Η είναι (μέσος ανάλογος) ο Ζ[34], θα είναι $Α^2:(Α\cdot Β)=Ε:Ζ$ όμως $(Α\cdot Β):Β^2=Ζ:Η$ αλλά $Α^2 :(Α\cdot Β) =Α:Β$, άρα Α:Β=Ε:Ζ[35] Άρα οι πλευρές Α, Β είναι σύμμετρες, αφού έχουν λόγο ως αριθμό προς αριθμό, δηλαδή Α:Β=Ε:Ζ=Γ:Δ , αφού $Γ^2=Ε$, και $Γ\cdot Δ=Ζ$, οπότε είναι Γ:Δ =Ε:Ζ

Απόδειξη β (Ανώνυμη), σε σύγχρονη γραφή.

Επειδή η α είναι σύμμετρη σε μήκος της β, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ, ν ώστε, α:β=μ:ν.

Από την ανάλογη της VI.1,
τα χωρία $α^2$, $α\cdot β$, $β^2$ είναι σε συνεχή αναλογία,
και $α^2:(α\cdot β)=(α\cdot β):β^2=α:β$.

Από την VII.17,
οι αριθμοί $μ^2$,μν,$ν^2$ είναι σε συνεχή αναλογία,
και $μ^2:(μ\cdot ν)=(μ\cdot ν):ν^2=μ:ν$.

Από την ανάλογη της δι' ίσου 7.14,
$α^2:β^2=μ^2:ν^2$.

Σημειώσεις στην απόδειξη β.

[1] Η ανώνυμη απόδειξη β, με την εκπεφρασμένη χρήση της ανάλογης της VII.14 Πρότασης, αποσαφηνίζει την Ευκλείδεια απόδειξη α εντός της X.9 των *Στοιχείων*. Χρησιμοποιεί επίσης την Πρόταση VI.1 καθαρών λόγων μεγεθών.

30 $Γ^2=Ε$
31 $Δ^2=Η$
32 $Γ:Δ= Γ^2:(Γ\cdot Δ)=(Γ\cdot Δ):Δ^2$
33 $Α^2 :(Α\cdot Β) =(Α\cdot Β):Β^2$
34 Ε:Ζ=Ζ:Η
35 Χρειάζεται τη μεταβατική ιδιότητα

[2] Ο Knorr, (1975) επισημαίνει την χρήση της δι' ίσου για την αυστηρή, χωρίς κενά, απόδειξη β της 3.2.12 (και άρα και της Χ.9).
Σημειώνουμε πώς, στο κείμενό του, χρησιμοποιεί την ορολογία,

Θεώρημα 7 (Knorr, p. 225) =*Στοιχεία* Χ.9

Έτσι, τον βρίσκουμε να ότι παρατηρεί ότι:

> Κάποιος μπορεί να σημειώσει ότι το βήμα που καθιερώνεται από επίκληση της **VII.14**, είναι κοντά στο βήμα της ευκλείδειας μορφής (Χ.9). Συγκεκριμένα, ίσοι λόγοι, είναι ίσοι και ως "τετραγωνισμένοι". Αλλά αυτό εφαρμόζεται στη Χ.9, όχι σε ένα απλό λόγο ακεραίων, αλλά σε ένα μεικτό λόγο της μορφής *Α:Β=α:β*, όπου *Α, Β* είναι γραμμές και *α, β* ακέραιοι. Έτσι, πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια πιο γενική μορφή της αρχής " *δι ίσου* ", π.χ. V.22 και VI.22. Το σιωπηρό θεώρημα των ίσων υποδιπλασίων λόγων (τετραγωνικές ρίζες), του οποίου γίνεται επίκληση στην Χ.9 δεν εμφανίζεται στα *Στοιχεία*. Μια εναλλακτική απόδειξη όμως "παρακάμπτει" αυτή τη δυσκολία, ενισχύοντας το ενδιάμεσο επιχείρημα, δια μέσου τη *δι ίσου* ιδιότητας. (p.232-233)

Εκτός της παραπάνω απόδειξης, η οποία σαφώς βρίσκεται στην αρχαία ελληνική γραμματεία, μπορεί κανείς εύκολα να ανακατασκευάσει απόδειξη, βάσει της Πυθαγόρειας θεωρίας λόγων σύμμετρων μεγεθών που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3. Αυτή έχει ως εξής:

Απόδειξη γ

Από την υπόθεση της συμμετρίας ισχύει α:β=μ:ν.
Από την αντίστοιχη Πρόταση της VII.19, την 3.2.7, είναι ν·α=μ·β, οπότε και $\nu^2\cdot\alpha^2=\mu^2\cdot\beta^2$.
Η σχέση αυτή μετασχηματίζεται βάσει της 3.2.7, ως $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$.

Αν επιπλέον ληφθεί υπόψη και αξιοποιηθεί η ύπαρξη της πρότασης Χ.3 στην αρχή του Βιβλίου Χ, στην απόδειξη της πρότασης που ακολουθεί, μπορεί να υπάρξει η παρακάτω ανακατασκευή:

Απόδειξη δ
Από την υπόθεση της συμμετρίας είναι α:β=μ:ν.
Θέτουμε κ=Μ.Κ.Μ(α,β) και λ=Μ.Κ.Δ(μ,ν), οπότε
από τον **ορισμό μεικτής αναλογίας**, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί σ, τ, ώστε
α=σ·κ, β=τ·κ, και μ=σ·λ, ν=τ·λ.
Άρα $\alpha^2=\sigma^2\kappa^2$, $\beta^2=\tau^2\kappa^2$(*), και $\mu^2=\sigma^2\lambda^2$, $\nu^2=\tau^2\lambda^2$ (**)
Από την (**) και τις Προτάσεις VII.20-22, έπεται ότι οι σ,τ είναι σχετικώς πρώτοι.
Από την VII.27 προκύπτει επίσης ότι οι σ^2,τ^2 είναι σχετικώς πρώτοι.
Επομένως, από Προτάσεις VII.20-22 και τις ανάλογες αυτών για σύμμετρα μεγέθη, είναι
κ^2=Μ.Κ.Μ(α^2,β^2), λ^2=ΜΚΔ(μ^2,ν^2).
Άρα η (*), (**) εκφράζουν ακριβώς τον ορισμό $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$.

Σημείωση. Η αποδείξεις γ, δ χρησιμοποιούν Προτάσεις VI.1 **μόνο** μεικτών λόγων και καθαρά αριθμητικών λόγων.

Κεφάλαιο 4. Δύο αποδείξεις ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου.

Είμαστε τώρα σε θέση να αναλύσουμε, στο **Κεφάλαιο 4**, τις δύο αρχαίες ανώνυμες αποδείξεις ασυμμετρίας διαμέτρου α προς πλευρά β τετραγώνου που αναφέραμε παραπάνω. Πρέπει να τονιστεί ότι την σημασία αυτών των δύο αποδείξεων ανέδειξε κυρίως ο Knorr (1975)[36].

Στην § 4.1 μελετάμε την εναλλακτική απόδειξη της γνωστής, ακροτελεύτιας πρότασης X.117, η οποία συμβολίζεται ως X.117a, και

Στην § 4.2, δίνεται το χωρίο του Αριστοτέλη, στο οποίο υπάρχει η γνωστή φράση «οἷον ὅτι **ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης**», και κατόπιν υπάρχει ο σχολιασμός του **Αλέξανδρου του Αφροδισιέα** στο χωρίο του αυτό, με την ενδιαφέρουσα επεξήγηση στη φράση του Αριστοτέλη.

4.1. Πρόταση X.117a: Ανώνυμη απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου με χρήση της αριθμητικής Πρότασης VIII.14

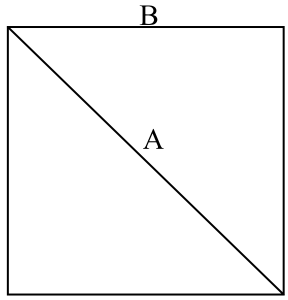
Η στοίχιση του πρωτότυπου κειμένου είναι τέτοια ώστε οι προτάσεις που βρίσκονται αριστερά να αφορούν μεγέθη, και αυτές δεξιά αριθμούς.

X.117a	**Μετάφραση της πρότασης**
Ἄλλως [Δεικτέον καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.]	Δείχνεται και διαφορετικά, ότι η διαγώνιος του τετραγώνου είναι ασύμμετρη με την πλευρά του.
Απόδειξη.	
Ἔστω ἀντὶ μὲν διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω [σύμμετρος· καὶ γεγονέτω] πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ ΕΖ, Η· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν λέγω πρῶτον, ὅτι ὁ Η οὐκ ἔστι μονάς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μονάς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τῆς Β· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η[37].	Έστω η διαγώνιος Α και η πλευρά του τετραγώνου Β. Ισχυρίζομαι ότι η Α είναι ασύμμετρη σε μήκος με τη Β. Αν ήταν σύμμετρη, τότε θα ήταν Α:Β=ΕΖ:Η (X.5) όπου ΕΖ, Η οι ελάχιστοι αριθμοί στον ίδιο λόγο, άρα θα είναι και πρώτοι μεταξύ τους. (VII.22) Αρχικά ισχυρίζομαι ότι το Η δεν είναι η μονάδα. Έστω ότι το Η=1 Αφού είναι Α:Β=ΕΖ:Η , τότε επομένως θα είναι $Α^2{:}Β^2=ΕΖ^2{:}Η^2$. Όμως $Α^2=2Β^2$, άρα και $ΕΖ^2=2\cdot Η^2$

[36] Πρβλ.Knorr, p. 227-228.
There is general agreement on the type of principles Theaetetus used in demonstrating the arithmetic part of these theorems. H.Zeuthen, E.J Dijksterhuis, K. Reidemeinster and B.L. van der Waerder have each given reconstructions, drawing from various portions of the arithmetic books of the *Elements*. But none has brought into consideration the other Greek texts which relate to such reconstructions. Among the extant versions of the demonstration of the incommensurability of the side and diameter of the square, there are two which through slight modification permit of extension to the theorems of Theaetetus. One version is given by Alexander in his commentary on the *Prior Analytics*. The other has been preserved as an alternative proof to the proposition traditionally numbered X.117 in the tenth book of *Elements*. For each, we will provide a paraphrase and then develop out of it a proof of Theaetetus' theorems.

[37] πρόταση συμμέτρων τετραγωνικών λόγων (3.2.12)

καί ἐστι μονὰς ὁ Η· δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τετράγωνος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ, μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτὴ ὁ Η τὸν ΕΖ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοὺς ΕΖ, Η μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	και αφού $H=1$ $EZ^2=2\cdot H^2=2\cdot 1=2$, το οποίο είναι αδύνατο. Οπότε $H\neq 1$[38], άρα είναι αριθμός. Επιπλέον, αφού είναι $A^2:B^2=EZ^2:H^2$ ισχύει ανάπαλιν ότι $B^2:A^2 = H^2:EZ^2$ Όμως το B^2 μετράει το A^2, $A^2=\kappa\cdot B^2$, για κ φυσικό άρα και το H^2 μετράει το EZ^2, ($EZ^2=\kappa\cdot H^2$, για κ φυσικό) επομένως και η πλευρά του, η Η μετράει τον ΕΖ˙ (VIII.14) ($EZ= H\cdot\lambda$, για λφυσικό) και μετράει και τον ίδιο τον Η ($H=H\cdot 1$) Άρα ο Η μετράει τους ΕΖ, Η οι οποίοι είναι σχετικώς πρώτοι, το οποίο είναι αδύνατον. Άρα, δεν είναι σύμμετρος σε μήκος η Α με τη Β, άρα είναι ασύμμετρος.



Απόδοση απόδειξης.
Έστω ότι τα Α, Β είναι σύμμετρα μεγέθη.
Από τη X.5, υπάρχουν αριθμοί μ,ν, ώστε $A:B=\mu:\nu$.[39]
Από την στοιχειώδη Πρόταση 3.2.12 είναι $A^2:B^2=\mu^2:\nu^2=2:1$.
Άρα $\mu^2=2\cdot\nu^2$, άρα ο ν^2 μετρά τον μ^2.
Από την **Πρόταση VIII.14**, προκύπτει ότι ο ν μετρά τον μ, δηλαδή υπάρχει φυσικός κ, ώστε $\mu=\kappa\cdot\nu$.
Προφανώς $\kappa>1$[40] (αλλιώς θα είχαμε μ=ν, και α=β, άτοπο).
Τότε $\alpha=\kappa\cdot\beta$, και $2\beta^2=\alpha^2=\kappa^2\beta^2$, άτοπο, εφόσον το 2 δεν είναι τετράγωνος αριθμός.

Η απόδειξη αυτή είναι σαφώς ειδική περίπτωση της γενικής Πρότασης για πολλαπλάσια, την οποία εξετάζουμε στο επόμενο Κεφάλαιο 5.

Σημείωση: Στην απόδειξη αυτή εμφανίζεται ένα αξιοσημείωτο παράδοξο. Ο λόγος των ευθύγραμμων τμημάτων Α και Β εκφράζεται ως Α:Β=ΕΖ:Η, όπου ΕΖ, Η είναι οι ελάχιστοι πρώτοι σε αυτό τον λόγο. Ο αριθμός ΕΖ, αναγράφεται με δύο διαδοχικά γράμματα, τα Ε και Ζ, κατι ιδιαίτερα συνηθισμένο στον ευκλείδειο κώδικα, αλλά χωρίς προφανή αιτία. Στη συνήθη ευκλείδεια τακτική, ένας αριθμός περιγράφεται με δύο διαδοχικά γράμματα, τα οποία εμφανίζονται στις άκρες ενός ευθύγραμμου τμήματος, όταν πρόκειται από αυτό το μήκος να αφαιρεθεί κάποιο άλλο μήκος. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και στην Πρόταση του Αρχύτα (πρβλ §1.1), αλλά και σε πολλές προτάσεις των *Στοιχειών*. Χωρίς αυτό τον σκοπό, τα ευθύγραμμα τμήματα κατά κανόνα συμβολίζονται με ένα κεφαλαίο γράμμα. Εδώ όμως διαπιστώνουμε πώς ο συγγραφέας κάνει άσκοπη χρήση των δύο γραμμάτων. Μία ερμηνεία αυτού θα μπορούσε να είναι, χωρίς να υπάρχουν

38 Μέρος της απόδειξης της Πρότασης VIII.14
39 Η ανώνυμη απόδειξη υποθέτει και μ,ν σχετικά πρώτοι, αλλά αυτό δεν είναι αναγκαίο.
40 Η ανώνυμη απόδειξη αποδεικνύει ότι κ>1, και μετά εφαρμόζει την Πρόταση VIII.14, αλλά αυτό δεν είναι αναγκαίο. Το ότι κ>1 είναι ενσωματωμένο στην απόδειξη της Πρότασης VIII.14.

στοιχεία για αυτή, ενδεχόμενη αντιγραφή-μεταφορά από κάποιο άλλο σύγγραμμα, στο οποίο πιθανώς δε θα ήταν ο λόγος σε ελάχιστους όρους και θα μπορούσαν να αφιαρεθούν ευθύγραμμα τμήματα.

Εκτός αυτής της εναλλακτική απόδειξης, που υφίσταται στην Αρχαία Ελληνική βιβλιογραφία, θα μπορούσε να υπάρχει και η ακόλουθη, με χρήση της πρότασης **VIII.8**:

Απόδειξη:
Έστω ότι α, β είναι σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα.
Από Χ.5, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε α:β=μ:ν.[41]
Από την στοιχειώδη Πρόταση 3.2.12, $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2=2:1$.
Από την Πρόταση **VIII.8**, εφόσον υπάρχει ο μέσος ανάλογος μ·ν, για τους μ^2,ν^2. έπεται ότι υπάρχει μέσος ανάλογος για τους 1<2, άτοπο.
Άρα, τα α, β είναι ασύμμετρα μεγέθη.

Παρατήρηση. Ο λόγος 2:1 θεωρείται πολλαπλάσιος, και όχι επιμόριος, και γι’ αυτό η απόδειξη της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά πραγματοποιείται με την Πρόταση VIII.14 (VIII.6, VIII.7) και όχι με την Πρόταση VIII.8, οποία όπως είδαμε, στην ειδική της μορφή χρησιμοποιείται από τον Αρχύτα, και στη γενική της από την Πρόταση 3 της *Κατατομής Κανόνος*.

4.1.2. Σχόλια του Knorr στην απόδειξη X.117a.

Σημειώνουμε πώς, στο κείμενό του, χρησιμοποιεί την ορολογία:

Θεώρημα 4 (Knorr, p. 216)=Πρόταση Κ.Κ.2=VIII.14
Θεώρημα 5 (Knorr, p. 225)=Πρόταση Θεαίτητου

Ο Knorr, όπως τονίσαμε, ανέδειξε στο σύγγραμμά του τις δύο αποδείξεις ασυμμετρίας που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο. Έτσι, τον βρίσκουμε να αναφέρει ότι:

> Άλλη απόδειξη της ασυμμετρίας πλευράς και διαμέτρου έχει διατηρηθεί ως εναλλακτική της Χ.117. Όπως και η έκδοση του Αλέξανδρου[42], επιτρέπει την άμεση μετατροπή της σε απόδειξη του **θεωρήματος 5.** Διαφέρει, όμως από τη δική του σε κάποιες ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες. Μπορεί να παραφραστεί ακολούθως:
> Έστω ότι η διάμετρος (διαγώνιος) ενός τετραγώνου είναι η A και η πλευρά η B. Αν η A και B σύμμετρες, θα υπήρχαν ακέραιοι c, d τέτοιοι ώστε $A:B=c:d$. Μπορούμε να πάρουμε τους c,d, σε ελάχιστους όρους, οπότε να είναι σχετικά πρώτοι. Τώρα, το d δεν είναι η μονάδα. Από την υπόθεση, $A:B=c:d$, οπότε $A^2:B^2=c^2:d^2$, αλλά $A^2=2B^2$, οπότε $c^2=2d^2$. Έτσι, αν το d ήταν η μονάδα, τότε το c^2 θα είναι ίσο με 2. Αυτό είναι αδύνατο, αφού το 2 δεν είναι τετράγωνος ακέραιος. Αφού $A^2:B^2=c^2:d^2$, και το B^2 είναι μέτρο του A^2, και επομένως το d^2 είναι μέτρο του c^2. Αλλά, όταν ένας τετράγωνος αριθμός μετράει ένα τετράγωνο αριθμό, η αντίστοιχή πλευρά του πρώτου είναι ένα μέτρο της πλευράς του δεύτερου (VIII.14). Έτσι, το d είναι μέτρο και του c και του d, δύο αριθμοί οι οποίοι υποτέθηκαν σχετικώς πρώτοι, όπου το d δεν είναι η μονάδα. Αυτό είναι αδύνατον. Έτσι, τα A και B είναι ασύμμετρα.

[41] Η ανώνυμη απόδειξη υποθέτει και μ,ν σχετικά πρώτοι, αλλά αυτό δεν είναι αναγκαίο.
[42] Θα μελετηθεί στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

Στη μέση της απόδειξης, ο συγγραφέας κινείται από τη χρήση δοσμένων ειδικών περιπτώσεων σε πιο γενικές. Αντί να συμπληρώσει την ανάλυσή του σε όρους ενός τετράγωνου (c^2) ο οποίος είναι ο *διπλάσιος* ενός άλλου (d^2), εισάγει τις συνέπειες που υπάρχουν αν ένας τετράγωνος αριθμός (d^2) είναι το μέτρο ενός άλλου. Μετά, δια μέσου της VIII.14 μπορεί να ισχυριστεί ότι η πλευρά d μετράει την c .

Εξαιτίας αυτής της αλλαγής, το επιχείρημα είναι στην πραγματικότητα μια απόδειξη του γενικού **θεωρήματος 5**. Η μόνη ιδιότητα του 2 που χρησιμοποιείται στο επιχείρημα είναι ότι δεν είναι τετράγωνος αριθμός, έτσι, το επιχείρημα ισχύει για κάθε μη τετράγωνο ακέραιο c. Για έναν τέτοιο ακέραιο, αν οι γραμμές A και B κατασκευάζονται ώστε $A^2:B^2=c^2:1$, τότε οι A και B είναι ασύμμετρες.

Η υπόρρητη εφαρμογή στην VIII.14 σε αυτή την έκδοση δείχνει μία σύνδεση μεταξύ αυτών και της έκδοσης της απόδειξης που δίνεται στην *Κατατομή Κανόνος* (Πρόταση II), την οποία έχουμε δει ως θεώρημα 4. Αυτό αποδείχθηκε από μια εφαρμογή της VIII.7. Αλλά η Ευκλείδεια απόδειξη της VIII.14 επίσης επιτελείται από εφαρμογή της VIII.7. Έτσι, η απόδειξη στην X.117a γίνεται πανομοιότυπη με την απόδειξη στην *Κατατομή Κανόνος* II, απλώς με αντικατάσταση της παραπομπής στην VIII.14, με απόδειξη της VIII.14. Αυτό το σημειώνω για να αναδειχθεί ότι η *Κατατομή Κανόνος* διατηρεί μία ελαφρώς παλαιότερη έκδοση της απόδειξης. Με την προσφυγή σε ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα, την **VIII.14**, ο συγγραφέας της **X.117a** αποκαλύπτει οικειότητα με ένα πιο συστηματοποιημένο σώμα των θεωρημάτων στις συνεχείς αναλογίες.(p. 230-231).

Παρατήρηση. Η απόδειξη X.117a σαφώς δεν είναι αυτή που έχει κατά νου ο Αριστοτέλης, εφόσον η αρχαϊκή αυτή απόδειξη δεν έχει καμία αναφορά σε περιττούς που γίνονται άρτιοι. Η απόδειξη X.117a είναι ενδεχομένως **η αρχαιότερη μη ανθυφαιρετική απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου**, πιθανώς και από τον ίδιο τον Αρχύτα. Η αδεξιότητα στην χρήση της Πρότασης VIII.14, εν σχέσει με την απόδειξη της Πρότασης VIII.14 στα *Στοιχεία* συνηγορεί υπέρ αυτής της άποψης.

4.2. Απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, με αναγωγή στο άτοπο “τα άρτια είναι περιττά”

4.2.1. Απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, με αναγωγή στο άτοπο “τα άρτια είναι περιττά” από τον Αριστοτέλη.

Ερχόμαστε τώρα στο αυθεντικό κείμενο του Αριστοτέλη. Στο έργο του “***Αναλυτικά Πρότερα***” στο 41a23-32 γράφει, μεταξύ άλλων:

‘πάντες γὰρ οἱ διὰ τοῦ ἀδυνάτου περαίνοντες
τὸ μὲν ψεῦδος συλλογίζονται,
τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν,
ὅταν ἀδύνατόν τι συμβαίνῃ
τῆς ἀντιφάσεως τεθείσης,
οἷον ὅτι
ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος
διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις
συμμέτρου τεθείσης.

<table>
<tr><td>τὸ μὲν οὖν ἴσα γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις συλλογίζεται,
τὸ δ' ἀσύμμετρον εἶναι τὴν διάμετρον
ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν,</td></tr>
<tr><td>ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει
διὰ τὴν ἀντίφασιν.
τοῦτο γὰρ ἦν τὸ διὰ τοῦ ἀδυνάτου συλλογίσασθαι,
τὸ δεῖξαί τι ἀδύνατον
διὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὑπόθεσιν.</td></tr>
</table>

Στο γνωστό αυτό χωρίο ο Αριστοτέλης δηλώνει ότι προκειμένου να αποδειχθεί ότι η διάμετρος είναι ασύμμετρη με πλευρά τετραγώνου, τίθεται η υπόθεση (**διὰ τοῦ ἀδυνάτου συλλογίσασθαι)** ότι η διάμετρος είναι σύμμετρος και καταλήγουμε στην αντίφαση ότι "διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις[43]".

Ο νους μας πάει αμέσως στην σύγχρονη απόδειξη με την οποία αποδεικνύεται ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.
Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός, τότε $\sqrt{2}=\mu:\nu$, και μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι μ,ν είναι σχετικώς πρώτοι. Τότε $2=\mu^2:\nu^2$, δηλαδή $\mu^2=2\cdot\nu^2$. Αφού ο μ^2 είναι άρτιος, προκύπτει ότι και ο μ είναι άρτιος. Εφόσον οι μ,ν είναι σχετικώς πρώτοι, ο ν πρέπει να είναι περιττός. Όμως, αφού μ άρτιος, θα είναι $\mu=2\cdot\kappa$ επομένως $\mu^2=4\cdot\kappa^2$, και άρα $2\cdot\kappa^2=\nu^2$, και άρα ο ν^2 είναι άρτιος, οπότε ομοίως και ο ν άρτιος. Επομένως, ο περιττός ν "γίνεται" άρτιος.

Η παραπάνω όμως απόδειξη, αποτελεί σαφώς ύστερη παρεμβολή των ίδιων των *Στοιχείων*, που γράφτηκαν περί το 300π.Χ., και αποτελεί την πρόταση Χ.117.

Πράγματι, ο van der Waerden θεωρεί ότι:

> "Το μόνο σημείο στο οποίο η θεωρία αρτίων και περιττών εφαρμόζεται στα ίδια τα *Στοιχεία* είναι η απόδειξη της ασυμμετρίας της πλευράς και της διαγωνίου ενός τετραγώνου, στο τέλος του δεκάτου βιβλίου." (p.110, σελ.123)

Συνεχίζει, στην ίδια σελίδα λέγοντας, ότι "ο Αριστοτέλης υπαινίσσεται επανειλλημένα αυτή την απόδειξη (Χ.117)".

Έτσι, τον βρίσκουμε να πιστεύει ότι η αναφορά του Αριστοτέλη στην απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά, αφορά στην απόδειξη που εμφανίζεται στην Χ.117, και η οποία όπως θα δούμε παρακάτω, κατ' ουσίαν συμπίπτει με την σύγχρονη παραδοσιακή απόδειξη, αλλά πολύ πιθανόν δεν ήταν διαθέσιμη κατά την εποχή του Αριστοτέλη, αφού γράφτηκε πολύ αργότερα, όπως μας ενημερώνει ο Heath (1956), λέγοντάς ότι:

> "Η απόδειξη εμφανίζεται ήδη στα κείμενα του Ευκλείδη ως Χ.117, αλλά είναι αναμφίβολα μια παρεμβολή, και ο Αύγουστος και ο Heiberg συμφώνως την παρέπεμψαν σε ένα Παράρτημα." (vol.3, p. 2)

---

[43] Επίσης *Αναλυτικά Πρότερα* 50a35-38
'ἐνταῦθα δὲ καὶ μὴ προδιομολογησάμενοι συγχωροῦσι **διὰ τὸ φανερὸν εἶναι τὸ ψεῦδος**, οἷον τεθείσης τῆς διαμέτρου συμμέτρου τὸ τὰ περιττὰ ἴσα εἶναι τοῖς ἀρτίοις.'

Το κρίσιμο αυτό σημείο, διαφωτίζεται από τα λεπτομερή σχόλια του Αλέξανδρου Αφροδισιέως στο χωρίο του Αριστοτέλη, που περιγράφουν μια ουσιαστικά διαφορετική και πολύ ενδιαφέρουσα απόδειξη.

Είναι ενδιαφέρουσα διότι, σ’ αυτό το πρώιμο στάδιο, δεν είχαν καταλάβει ακόμη πόσο απλή είναι η μη ανθυφαιρετική απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά (όπως κατάλαβαν όταν ανακάλυψαν αργότερα την απόδειξη X.117 την οποία θα εξετάσουμε στο Κεφάλαιο 8) και παρουσίαζαν μια απόδειξη που είναι πολύ κοντά στη γενική μη-ανθυφαιρετική απόδειξη του θεωρήματος του Θεαίτητου.

4.2.2. Απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, με χρήση της Πρότασης VII.27 και με αναγωγή στο άτοπο “περιττά ίσα τοις αρτίοις”.

Ο Αλέξανδρος Αφροδισιεύς, στο *εις Αναλυτικά Πρότερα* 260,7-261,28 όπου σχολιάζει το έργο του Αριστοτέλη *“Αναλυτικά Πρότερα*” και ειδικότερα το χωρίο 41a26, αναφέρει:

Οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ
διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις
συμμέτρου τεθείσης.
Παραδείγματι αὐτὸς κέχρηται τῆς δι' ἀδυνάτου δείξεως
τῷ ἐπὶ τῆς διαμέτρου δεικνύς,
πῶς, ὃ βούλεται κατασκευάζειν, ὁ τῇ δι' ἀδυνάτου δείξει
χρώμενος δείκνυσιν.
οὐ γὰρ συλλογίζεται, ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ,
ὁ οὕτως δεικνύς, ὅπερ ἐστίν, ὃ βούλεται δεῖξαι,
ἀλλὰ τοῦ ἀντικειμένου τεθέντος τοῦ σύμμετρον αὐτὴν εἶναι τῇ πλευρᾷ
δείκνυσι διὰ συλλογισμοῦ δεικτικῶς, ὅτι
τούτου κειμένου
γίνεται τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις ἴσα·
ὃ ἐπεὶ ἀδύνατον,
ἀναιρεῖται μὲν ἡ ὑπόθεσις,
ᾗ τοῦτο ἠκολούθησεν,
ἐν δὲ τῇ ταύτης ἀναιρέσει
τὸ ἀντικείμενον αὐτῆς κατασκευάζεται
τὸ μὴ εἶναι σύμμετρον τὴν διάμετρον τῇ πλευρᾷ,
ἐπειδὴ κατὰ παντὸς θάτερον μέρος τῆς ἀντιφάσεως,
ὃ ἦν ἐξ ἀρχῆς προκείμενον.
ὁ δὲ συλλογισμὸς τοῦ
τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις ἴσα γίνεσθαι,

ἂν ᾖ ἡ διάμετρος σύμμετρος τῇ πλευρᾷ,
τοιοῦτος κείσθω·
τετράγωνον χωρίον τὰ Α Β Γ Δ,
καὶ ἔστω διάμετρος αὐτοῦ ἡ Β Γ·

εἰ δὴ σύμμετρός ἐστιν ἡ Β Γ διάμετρος τῇ Α Β πλευρᾷ,
ἕξει λόγον πρὸς αὐτήν,
ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν·

ἔχομεν γὰρ παρὰ Εὐκλείδη
ἐν τῷ δεκάτῳ τῶν Στοιχείων δεδειγμένον τοῦτο, ὅτι
“τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα

λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν”, καὶ ἔστι τέταρτον[44] θεώρημα ἐν τῷ δεκάτῳ τοῦτο. ἔστω δὴ ὡς ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΑ πλευρὰν ὁ Ε ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ, καὶ εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον τούτοις ἐχόντων πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· “οἱ γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους”· δέδεικται δὲ καὶ τοῦτο ἐν τῷ ἑβδόμῳ τῶν Στοιχείων Εὐκλείδου. εἰσὶ δὲ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι. πεπολυπλασιάσθω ἑκάτερος τῶν Ε Ζ, καὶ ἔστω ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ Η ἐφ' ἑαυτὸν γενόμενος πολυπλασιασθεὶς Ι, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Θ Κ. τετράγωνοι ἄρα εἰσὶν ὁ Ι καὶ Κ καὶ πρῶτοι καὶ αὐτοὶ πρὸς ἀλλήλους· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο ἐν τῷ ἑβδόμῳ τῶν Στοιχείων, ὅτι, ἂν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι καὶ πολλαπλασιασθεὶς ἑκάτερος αὐτῶν ποιήσῃ τινά, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι καὶ αὐτοὶ πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ Β Γ διάμετρος πρὸς τὴν Α Β πλευρὰν οὕτως ὁ Ε ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ, ὡς δ' ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ, καὶ ὡς ἡ Β Γ διάμετρος ἔχει πρὸς τὴν Α Β πλευράν, οὕτως ἕξει ὁ Η ἀριθμὸς πρὸς τὸν Θ. καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β Γ ἄρα διαμέτρου τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α Β πλευρᾶς, οὕτως ἕξει καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Θ· εἰσὶ δὲ οὗτοι Ι καὶ Κ. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ Ι ἀριθμὸς τοῦ Κ ἀριθμοῦ· ἄρτιος ἄρα ὁ Ι· πᾶς γὰρ ὁ διπλάσιός τινος ἄρτιος εἰς ἴσα γε διαιρούμενος. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ ἄρτιος ἔσται· τῶν γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν τῶν εἰς ἴσα διαιρουμένων καὶ τὰ ἡμίση ἄρτιά ἐστιν. ἄρτιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Κ ἥμισυς ὢν τοῦ Ι ὄντος τετραγώνου. [οὖ] ἔστι δὲ καὶ περισσός· πρῶτοι γὰρ ἦσαν πρὸς ἀλλήλους ὁ Ι καὶ ὁ Κ.
ἀδύνατον δὲ πρώτους εἶναι πρὸς ἀλλήλους τοὺς ἀρτίους· οἱ γὰρ ἄρτιοι οὐ μετροῦνται μονάδι μόνῃ κοινῷ μέτρῳ, ὃ ἴδιόν ἐστι τῶν πρώτων. δεῖ δὴ ἤτοι ἀμφοτέρους ἢ τὸν ἕτερον αὐτῶν περισσὸν εἶναι· ἐδείχθησαν δὲ καὶ ἄρτιοι ἀμφότεροι διὰ τὴν ὑπόθεσιν·

[44] πέμπτον, X.5

τὰ περισσὰ ἄρα τοῖς ἀρτίοις ἴσα
ὑποτεθείσης τῆς διαμέτρου εἶναι τῇ πλευρᾷ συμμέτρου,
ὅπερ ἀδύνατον.
ἐπὶ δὴ τῆς δείξεως ταύτης ὁ μὲν συλλογισμὸς ἐγένετο τοῦ
τὰ περισσὰ τοῖς ἀρτίοις ἴσα εἶναι, ὅ ἐστι ψεῦδος.
τὸ δὲ εἶναι ἀσύμμετρον
τὴν διάμετρον τῇ πλευρᾷ διὰ τὴν ὑπόθεσιν δείκνυται·
ὅτι γὰρ ὑποτεθέντος
τοῦ ἀντικειμένου τούτῳ ἀδύνατόν τι ἀκολουθοῦν ἐδείκνυτο διὰ συλλογισμοῦ,
τῇ τῆς ὑποθέσεως ἀναιρέσει ἐκεῖνο ἐτέθη τῷ δεῖν θάτερον αὐτῶν ἀληθὲς
εἶναι· τοῦτο γάρ ἐστι τὸ διὰ τὴν ἀντίφασιν. εἰ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς εἰς
ἀδύνατον ἀπαγωγῆς ὁ γινόμενος τοῦ ψεύδους συλλογισμὸς δεικτικός τέ ἐστι,
τοῦτ' ἔστι κατηγορικός, καὶ διά τινος τῶν τριῶν περαίνεται σχημάτων, εἶεν
ἂν ἐν τοῖς σχήμασι τοῖς τρισὶ καὶ οἱ δι' ἀδυνάτου συλλογισμοὶ μέρος ὄντες
τῶν ἐξ ὑποθέσεως.

Παρακάτω αποδίδεται εριληπτικά και με σύγχρονους όρους, η απόδειξη που αναδύεται από τα σχόλια του Αλέξανδρου.

Απόδοση:
Αν η ΒΓ είναι σύμμετρη της ΑΒ, θα έχουν λόγο ως αριθμός προς αριθμό όπως έχει αποδειχτεί στο θεώρημα Χ.4[45]
Έστω ΒΓ:ΑΒ=Ε:Ζ όπου Ε, Ζ έχουν ληφθεί οι ελάχιστοι στον ίδιο λόγο, και επομένως είναι σχετικώς πρώτοι. (VII.22)
Θεωρώ ως $Ε\cdot Η=Ι$, (υπονοεί Ε=Η) δηλαδή $Η^2=Ι$
και ως $Ζ\cdot Θ=Κ$, (υπονοεί Θ=Ζ) δηλαδή $Θ^2=Κ$.
Τότε, αφού (Ε,Η)=1, έπεται από VII.27, ότι και οι Ι, Κ είναι σχετικώς πρώτοι.
Αφού ΒΓ:ΑΒ=Ε:Ζ και Ε:Ζ=Η:Θ, έπεται ότι ΒΓ:ΑΒ= Η:Θ
Και επομένως $ΒΓ^2:ΑΒ^2 = Η^2:Θ^2$, δηλαδή $ΒΓ^2:ΑΒ^2 = Ι:Κ$.
Όμως $ΒΓ^2=2\cdot ΑΒ^2$, επομένως και $Ι=2\cdot Κ$.
Αφού ο Ι είναι άρτιος, θα είναι και ο Ι:2=Κ άρτιος (αντιθετοαντιστροφή της ΙΧ.29).
Όμως οι Ι, Κ είναι σχετικώς πρώτοι και είναι αδύνατον άρτιοι αριθμοί να είναι σχετικώς πρώτοι γιατί δε μετρούνται μόνο από τη μονάδα. Άρα πρέπει ή και οι δύο ή ένας από αυτούς να είναι περιττοί. Οπότε, θα έπρεπε ο Κ να είναι περιττός.
Με την υπόθεση όμως δείχτηκε ότι ήταν και οι δύο άρτιοι. Δηλαδή οι περιττοί είναι ίσοι με τους άρτιους, αν υποτεθεί ότι η διάμετρος και η πλευρά είναι σύμμετρες, άρα αδύνατον.
Επομένως η διάμετρος και η πλευρά είναι ασύμμετρες.

Ανάλυση της απόδειξης που περιγράφει ο Αλέξανδρος.
Έστω ότι α, β είναι σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα.
Τότε από την Πρόταση Χ.5, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ωστε α:β=μ:ν.
Από τις Προτάσεις VII.20-22 μπορούμε να υποθέσουμε ότι μ,ν είναι σχετικά πρώτοι.

Έρχεται τώρα μια έκπληξη.
Η απόδειξη που περιγράφει ο Αλέξανδρος δεν προχωρεί
ούτε με την παραδοσιακό τρόπο (που περιγράψαμε μόλις παραπάνω),

[45] Χ.5

ούτε με χρήση μιας των Προτάσεων VIII.14 (VIII.6, VIII.7) , ή VIII.8,
αλλά αντίθετα χρησιμοποιεί **την θεμελιώδη Πρόταση** VII.27, επί της οποίας βασίζονται όλες αυτές οι Προτάσεις.
Σύμφωνα, λοιπόν, με την πρόταση VII.27, οι μ^2 και ν^2 είναι σχετικά πρώτοι.
Από την **πρόταση σύμμετρων τετραγωνικών λόγων (3.2.12)** ισχύει ότι $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$.
Μέχρις εδώ η απόδειξη έχει τα χαρακτηριστικά μιας γενικής απόδειξης.

Από το σημείο αυτό η απόδειξη χάνει τα γενικά της χαρακτηριστικά.
Από το γεγονός ότι $\alpha^2=2\cdot\beta^2$, έπεται ότι $\mu^2:\nu^2=2:1$, $\mu^2=2\cdot\nu^2$, άρα μ^2 άρτιος, Από εδώ συνάγεται ότι ο ν^2 είναι άρτιος,
Άτοπο.

4.2.3. Σχόλια του Knorr για την απόδειξη στον Αλέξανδρο.

Επανερχομαστε στο σχολιασμό του Knorr, αναφορικά με τις αποδείξεις αυτές. Εκτιμά και αναφέρει ευθέως ότι:

> Μεταξύ των σωζόμενων εκδόσεων των αποδείξεων της ασυμμετρίας πλευράς και διαμέτρου του τετραγώνου, υπάρχουν δύο[46] οι οποίες μέσω ελαφράς τροποποίησης επιτρέπουν την επέκταση στα θεωρήματα του Θεαίτητου. (p.228)

Συνεχίζοντας την ανάλυσή του, παραθέτει την παράφρασή του για αυτή:

> Ο Αλέξανδρος ορίζει μια τέτοια απόδειξη ως εξήγηση στο παράδειγμα του Αριστοτέλη στην επαγωγική αιτιολόγηση (*Αναλυτικά Πρότερα 41α26)*: "η διάμετρος είναι ασύμμετρη με την πλευρά, γιατί αν υποτεθεί σύμμετρη, τότε οι περιττοί αριθμοί γίνονται ίσοι με τους άρτιους αριθμούς". Η απόδειξη μπορεί να παραφραστεί ακολούθως:
>
> *Απόδειξη.*
>
> Αν η διάμετρος και η πλευρά του τετραγώνου ήταν σύμμετρες, θα είχαν λόγο [θετικών] ακεραίων, έστω $a:b$ (από την Χ.4[47]). Έστω αυτός ο λόγος να είναι στους ελάχιστους όρους, έτσι οι a και b είναι σχετικά πρώτοι (VII. 22). Έτσι, οι a^2 και b^2 είναι επίσης σχετικά πρώτοι (VII.27). Αλλά από κατασκευή αυτοί είναι στον ίδιο λόγο που είναι το τετράγωνο από τη διάμετρο, προς το τετράγωνο της πλευράς, έτσι θα είναι $a^2:b^2=2:1$. Έτσι, ο a^2 είναι άρτιος αφού είναι το διπλάσιο ενός αριθμού (b^2). Τώρα, αν ένας τετράγωνος αριθμός διαιρείται με το 2, το μισό του επίσης διαιρείται με το 2. Έτσι ο b^2 (ο μισός του a^2) θα είναι επίσης άρτιος. Αλλά ο b^2 είναι και περιττός. Διότι οι a^2 και b^2 είναι σχετικώς πρώτοι και ο a^2 είναι άρτιος και δύο άρτιοι αριθμοί δε μπορεί να είναι σχετικώς πρώτοι, αφού ο αριθμός 2 μετράει και τους δύο. Έτσι, από την υπόθεση των σχετικά πρώτων, ο ένας ή και οι δύο αριθμοί a^2, b^2 πρέπει να είναι περιττοί, αλλά από την υπόθεση της συμμετρίας και οι δύο αριθμοί a^2, b^2 πρέπει να είναι άρτιοι. Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει την ασυμμετρία της πλευράς και της διαμέτρου, και καθιστά σαφή την παρατήρηση του Αριστοτέλη ότι η υπόθεση της συμμετρίας απαιτεί οι περιττοί αριθμοί να είναι ίσοι με τους άρτιους.

Τονίζει με ακρίβεια, τη διαφορά αυτής της απόδειξης σε σχέση με την σύγχρονη απόδειξη που δίδεται συνήθως, για την απόδειξη αυτής της ασυμμετρίας, λέγοντας:

---

[46] Η Χ.117a και αυτή του Αλέξανδρου.
[47] Πρβλ. υποσημείωση 35 στο Knorr (1975), σελ.228, 247.

> Αρκετά σαφώς, αυτή η απόδειξη δεν είναι η Ευκλείδεια έκδοση (X.117) που έχουμε παραλάβει. Ήδη ο Αλέξανδρος παρουσιάζει εδώ τρεις παραπομπές από τα *Στοιχεία* οι οποίες συμφωνούν λέξη προς λέξη με τα παραδοσιακά διατηρημένα χειρόγραφα (που απορρέουν από το Θέωνα, περίπου δύο αιώνες μετά τον Αλέξανδρο)˙ όλες του οι παραπομπές ικανοποιούν το ίδιο κριτήριο. Συμπεραίνουμε ότι κατείχε ένα αντίγραφο των *Στοιχείων*, ουσιαστικά στην ίδια μορφή με τα δικά μας σωζόμενα χειρόγραφα, αλλά αυτό το αντίγραφο, δεν περιείχε απόδειξη της ασυμμετρίας πλευράς και διαμέτρου που να βασίζεται στις ιδιότητες των περιττών και άρτιων αριθμών˙ άντλησε αυτή την απόδειξη από μία άλλη πηγή. Αυτό επιβεβαιώνει την αποστολή αυτού του θεωρήματος (X.117) στο Παράρτημα από τον Heiberg. Επιπλέον δείχνει ότι αυτό το θεώρημα [Αλέξανδρου] προέκυψε από μία ύστερη, αλλά προ-Θεώνεια, παρεμβολή παρακινούμενη από την εργασία σχολιασμού του Αριστοτέλη. (p.228-229)

Σε επίρρωση της επιχειρηματολογίας υπέρ της ύπαρξης γενικής απόδειξης της Πρότασης του Θεαίτητου, προβάλλει τον ισχυρισμό:

> Η απόδειξη είναι ύποπτη ως μια "άρτια - περιττών" απόδειξη στο ότι οι αρχές που επικαλείται (πρακτικά η VII.27) είναι πολύ ισχυρότερη από ότι απαιτείται. Είναι σα να είχε ο Αλέξανδρος μια πιο γενική απόδειξη πριν από εκείνον και την τροποποίησε ώστε να ταιριάξει με τις ανάγκες του χωρίου από τον Αριστοτέλη. Μπορούμε ακόμη να δούμε ότι αποκλίνει από την πηγή του. Για όλο το αρχικό κομμάτι της απόδειξης, παραθέτει τον Ευκλείδη για να υποστηρίξει τα βήματά του και η αιτιολόγηση είναι άμεση και σφικτή. Αλλά, αμέσως μόλις εισάγει την απόδειξη των άρτιων και περιττών αριθμών, το επιχείρημά του περιπλανιέται και οι παραπομπές των *Στοιχείων* παραλείπονται. Για παράδειγμα, ο ορισμός των "άρτιων αριθμών" τον οποίο χρησιμοποιεί είναι αυτός που διαιρείται "σε ίσα μισά", ενώ η φράση του Ευκλείδη είναι "σε δύο" (δίχα). Επιπλέον χρησιμοποιεί ένα θεώρημα που δε βρίσκεται στον Ευκλείδη: "τα μισά των άρτιων τετράγωνων αριθμών είναι άρτιοι."
>
> Μετά βλέπουμε ότι το τελευταίο μέρος, βασίζεται σε αριθμητικές πηγές άλλες πέραν του Ευκλείδη, είναι ένα παράρτημα, πιθανώς δουλειά του ίδιου του Αλέξανδρου, σε μία απόδειξη η οποία δεν εισάγει τους άρτιους και περιττούς.

Εντοπίζει και προβάλλει συστηματικά και λεπτομερώς τις διαφοροποιήσεις μεταξύ αυτής και της X.117, εικάζοντας την αιτία αυτών διαφορών. Η εικασία αυτή ενισχύει την προηγούμενη επιχειρηματολογία του για την ύπαρξη γενικής απόδειξης.

> Όπως έχουμε δει, η πηγή του Αλέξανδρου διαφέρει απ' την απόδειξη που μας έχει μεταφερθεί στα *Στοιχεία* (X.117). Έτσι, το χειρόγραφο των *Στοιχείων*, δεν ήταν πιθανά η πηγή της απόδειξης, γιατί αλλιώς θα ήταν ανεξήγητο γιατί το χειρόγραφό του θα είχε τη συνοπτική και ακριβή απόδειξη που έχουμε συζητήσει, ενώ η επόμενη έκδοση των *Στοιχείων* την χαλαρή και ακόμη ατελή έκδοση της X.117 που θα έπρεπε να έχει αντικατασταθεί από αυτή. Τείνουμε, λοιπόν στην οπτική ότι ο Αλέξανδρος είχε ψάξει αλλού για μια βολική απόδειξη για να εξηγήσει το χωρίο των *Αναλυτικών.* Η απόδειξη που βρήκε, ήταν η γενική απόδειξη η οποία καταλαμβάνει το πρώτο μισό του σχόλιού του, οπότε για να φτάσει στο συμπέρασμα ότι "οι περιττοί ισούνται με τους άρτιους αριθμούς", είχε να "ειδικεύσει" το θεώρημα, κάνοντας τις απαραίτητες αναθεωρήσεις δια μέσου των ιδιοτήτων των άρτιων και των περιττών αριθμών, τις οποίες μπορεί να τις αντλήσει από τις αριθμητικές πηγές. **Όσο**

αφορά την πηγή της γενικής απόδειξης, ένας πιθανός υποψήφιος είναι η *Ιστορία της Γεωμετρίας* του Εύδημου, η οποία είχε χρησιμοποιηθεί από μετέπειτα (συγ)γραφείς όπως ο Πάππος, ο Πρόκλος και ο Συμπλίκιος. Ο Αλέξανδρος, πουθενά δεν αναφέρει ρητά αυτή την εργασία, αλλά η συζήτησή του για τους τετραγωνισμούς του Ιπποκράτη, υποδηλώνουν ότι αυτά τα στοιχεία έφτασαν από τον Εύδημο σε αυτόν διαμέσου μεσαζόντων. p.230

4.2.4. Δικά μας σχόλια στη απόδειξη του Αλέξανδρου.

Διαπιστώνουμε ότι η χρήση της VII.27 και του συμπεράσματός της ότι οι $μ^2$,$ν^2$ είναι σχετικώς πρώτοι, είναι στην πραγματικότητα εντελώς επιφανειακή. Είναι σαφές, όπως υποστηρίζει και ο Knorr, ότι η απόδειξη αυτή έχει προσαρμοσθεί από μια γενική, την οποία και θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο 6.

Το γεγονός ότι η απόδειξη αντικαθιστά τις Προτάσεις του Βιβλίου VIII με την πλέον θεμελιώδη VII.27, δείχνει εμφανώς ότι αποτελεί μια βελτίωση εν σχέσει με τις αποδείξεις που περιγράψαμε νωρίτερα, γενικές ή ειδική για την διάμετρο, και οι οποίες είναι πολύ κοντά στις μεθόδους του βιβλίου VIII και στην Αρχύτειο μέθοδο των μέσων αναλόγων.

Το δεδομένο ότι ο Αριστοτέλης αναφέρεται ακριβώς σε αυτή την απόδειξη, μας ωθεί αβίαστα στο συμπέρασμα ότι κατά την περίοδο του Αριστοτέλη, οι αρχικές Αρχύτειες αποδείξεις είχαν ήδη αντικατασταθεί από άλλες που χρησιμοποιούν μόνο την πρόταση που όπως δείξαμε εξαρτώνται, δηλαδή, τη θεμελιώδη Πρόταση VII.27. Αυτές οι αποδείξεις θα περιγραφούν στο επόμενο Κεφάλαιο.

Από την άλλη μεριά η απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευράς βασίστηκε για πρώτη φορά σε ένα επιχείρημα, κάπως αδέξιο, όπου η αντίφαση επιτυγχάνεται με το να γίνονται οι περιττοί άρτιοι. Αυτήν την απόδειξη πρέπει να είχε κατά νου ο Αριστοτέλης.

Ο λόγος για τον οποίο θεωρούμε ότι η χρήση των Προτάσεων του Βιβλίου VIII (VIII.8 και VIII.6= VIII.7=VIII.14) προηγείται της άμεσης χρήσης της Πρότασης VII.27 σε αριθμητικές αποδείξεις τετραγωνικής ασυμμετρίας είναι ο εξής: αν προηγείτο η άμεση χρήση της VII.27, δεν θα υπήρχε καν ανάγκη να χρησιμοποιηθούν (ή ακόμη και να δημιουργηθούν) οι Προτάσεις του βιβλίου VIII. Η πιο γενική και οικονομική απόδειξη με την VII.27 προδίδει ένα πιο προηγμένο μαθηματικό επίπεδο από εκείνες με τις Προτάσεις του Βιβλίου VIII.

Το γεγονός ότι ο Αλέξανδρος (περίπου 250 μ.Χ.) δεν αναφέρει καθόλου την απόδειξη X.117, παρ όλο που είχε στα χέρια του αντίγραφο των *Στοιχείων,* σημαίνει ότι αυτή ήλθε αργότερα, πιθανόν από τον Θέωνα (335-405 μ.Χ.).

Διαπιστώνουμε λοιπόν πως η αρχαιότερη χρονικά, μη ανθυφαιρετική απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά είναι η X.117a, κατόπιν έρχεται η απόδειξη στο σχολιασμό του Αλέξανδρου, η οποία, σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις τοποθετείται προ της συγγραφής των *Αναλυτικών Προτέρων*, περί το 350 π.Χ., και πολύ αργότερα, έρχεται η X.117, στη εποχή του Θέωνος, και πάντως μετά τον Αλέξανδρο.

Κεφάλαια 5 και 6.

Από τη μελέτη των δύο αποδείξεων ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου στο προηγούμενο κεφάλαιο προκύπτουν πρόδηλα, λόγω της εμφανούς γενικότητος των αποδείξεων αυτών, δύο είδη αποδείξεων τετραγωνικής ασυμμετρίας.

Το πρώτο είδος εξετάζεται στο Κεφάλαιο 5, και βασίζεται στις Προτάσεις VIII.14 και VIII.8 του Βιβλίου VIII, όπως η πρώτη απόδειξη (X.117a) ασυμμετρίας της διαμέτρου, στην §4.1, η οποία βασίσθηκε στην Πρόταση VIII.14.

Το δεύτερο είδος θα εξετασθεί στο Κεφάλαιο 6, και βασίζεται στην θεμελιώδη Πρόταση VII.27, όπως η απόδειξη στον σχολιασμό του Αλέξανδρου, που μελετήθηκε στην §4.2.

Κεφάλαιο 5. Αριθμητικές μη ανθυφαιρετικές αποδείξεις

της Πρότασης τετραγωνικής ασυμμετρίας του Θεαίτητου και
της Πρότασης τετραγωνικής ασυμμετρίας επιμόριων λόγων
με χρήση της Πρότασης X.9 και μίας των Προτάσεων VIII.14, VIII.8.

Στην §5.1 δίνεται η πρώτη δυνατή ανακατασκευή της Πρότασης του Θεαίτητου, κάνοντας χρήση της θεωρίας λόγων σύμμετρων μεγεθών που αναπτύξαμε, αλλά και προτάσεων του Βιβλίου VIII.
Στην §5.2 έχουμε απόδειξη τετραγωνικής ασυμμετρίας ενός επιμόριου λόγου χρησιμοποιώντας την προαναφερόμενη θεωρία, αλλά και την VIII.8*.
Κατόπιν στην §5.3 δίνεται η πρωτότυπη X.9 με τη σύγχρονη απόδοσή της. Επειδή όμως και αυτή −όπως και X.5− χρησιμοποιεί στην απόδειξή της αναχρονιστικά τη θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου, παρατίθεται όπως είναι αναγκαίο και η ιστορικά ορθή απόδειξη αυτής, διαφωτίζοντας και τονίζοντας το ρόλο της.
Μετέπειτα, στην §5.4 έχουμε σχόλια επ αυτής από τους σημαντικότερους μελετητές της.
Συνεχίζουμε στην §5.5, όπου κάνουμε εμφανή την "απλοποίηση" των αποδείξεων που δόθηκαν στις §5.1, §5.2, μέσω της X.9(ε), αναδεικνύοντας έτσι τον ακριβή της ρόλο.
Τέλος, στην §5.6 σχολιάζουμε τα παραπάνω ευρήματα.

5.1. Αριθμητική, μη ανθυφαιρετική απόδειξη της Πρότασης Θεαίτητου κατ' αναλογία προς την αρχαία ανώνυμη απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου X.117a (§4.1)-σε προκαταρτική μορφή

Διαπιστώνουμε ότι η ανώνυμη απόδειξη ασυμμετρίας X.117a που εξετάστηκε στην §4.1 έχει τα χαρακτηριστικά ειδικεύσης κάποιας γενικής απόδειξης της Πρότασης τετραγωνικής ασυμμετρίας, δηλαδή της **Πρότασης του Θεαίτητου**, με μεθόδους αριθμητικές, μη ανθυφαιρετικές πλέον, που βασίζεται στην Πρόταση VIII.14 των *Στοιχείων*. Άμεσα προκύπτει μια ανακατασκευή γενικής αριθμητικής μη ανθυφαιρετικής απόδειξης τετραγωνικής ασυμμετρίας, της οποίας ειδική περίπτωση είναι η αρχαία ανώνυμη απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου που αναφέρθηκε ως X.117a.

Πρόταση (Θεαίτητος).
Αν α,β ευθύγραμμα τμήματα και Ν μη τετράγωνος αριθμός, ώστε $α^2:β^2=N:1$, τότε τα α,β είναι ασύμμετρα.

Απόδειξη (με χρήση των X.5, 3.2.12 και της Πρότασης VIII.14)
Έστω α,β σύμμετρα.
Από την **Πρόταση X.5**, υπάρχουν αριθμοί μ,ν, ώστε α:β=μ:ν,
Από την **Πρόταση** συμμέτρων τετραγωνικών λόγων **3.2.12**, είναι $α^2:β^2=μ^2:ν^2$, και από τη μεταβατική ιδιότητα 3.2.1 ισχύει $μ^2:ν^2 =N:1$. Άρα $μ^2 =N\cdotν^2$, δηλαδή ο αριθμός $ν^2$ μετρά τον $μ^2$.
Από την **Πρόταση VIII.14 (VIII.6, VIII.7)**, έχουμε ότι ο ν θα μετρά τον μ, άρα ο β θα μετρά τον α. Δηλαδή υπάρχει φυσικός αριθμός κ, ώστε α=κ·β, επομένως $α^2 =κ^2\cdotβ^2$. Τότε $N=κ^2$, το οποίο είναι άτοπο, αφού υποτέθηκε ο Ν μη τετράγωνος αριθμός. Άρα, τα α, β είναι ασύμμετρα .

5.2. Αριθμητική, μη ανθυφαιρετική απόδειξη της "Αρχύτειας" Πρότασης τετραγωνικής ασυμμετρίας των επιμορίων λόγων, κατ' αναλογίαν προς την αριθμητική απόδειξη της Πρότασης Θεαίτητου -σε προκαταρτική μορφή-.

Ομοίως εύλογα, κατ΄αναλογίαν προς την αριθμητική απόδειξη της Πρότασης Θεαίτητου προκύπτει και η αριθμητική απόδειξη της κατ΄εξοχήν "Αρχύτειας" ασυμμετρίας.

Πρόταση (τετραγωνική "Αρχύτεια" ασυμμετρία επιμόριων λόγων).
Αν α,β ευθύγραμμα τμήματα, ώστε $α^2:β^2=(N+1):N$, τότε α, β ασύμμετρα.

Απόδειξη (με χρήση των X.5, 3.2.12 και της Πρότασης VIII.8*).
Έστω ότι τα α,β είναι σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα.
Από **Πρόταση X.5**, υπάρχουν αριθμοί μ,ν, ώστε $α:β=μ:ν$.
Από **Πρόταση 3.2.12** συμμέτρων τετραγωνικών λόγων, ισχύει $α^2:β^2=μ^2:ν^2$.
Από τη μεταβατική ιδιότητα 3.2.1 και την υπόθεση, είναι $μ^2:ν^2=(N+1):N$.
Ξέρουμε ότι για τους αριθμούς $μ^2$, $ν^2$, υπάρχει μέσος ανάλογος $μ\cdot ν$, επομένως από την **Πρόταση VIII.8***, θα υπάρχει ενας φυσικός μέσος ανάλογος Κ και για τους αριθμούς N+1, N, αφού είναι στον ίδιο λόγο. Αυτό είναι άτοπο αφού οι N, N+1 είναι διαδοχικοί.
Επομένως τα α, β ασυμμέτρα ευθύγραμμα τμήματα.

5.3. Η ευθεία κατεύθυνση X.9(ε) της Πρότασης X.9 των *Στοιχείων* είναι ακριβώς η σύμπτυξη της Πρότασης X.5 και της Πρότασης 3.2.12 συμμέτρων τετραγωνικών λόγων

Το σημαντικό εύρημα από τη μελέτη της δομής των ειδικών αποδείξεων στο Κεφάλαιο 4, και των αντίστοιχων γενικών στις §5.1, 5.2 είναι η αβίαστη ανάδειξη του ακριβούς ρόλου της Πρότασης X.9 των *Στοιχείων*, ή ακριβέστερα της ευθείας κατεύθυνσής της X.9(ε).

5.3.1. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται η ακριβής διατύπωση και απόδειξη της Πρότασης X.9 των *Στοιχείων*.

Πρόταση X.9	**Μετάφραση της πρότασης X.9**
Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.	Τα τετράγωνα από σύμμετρες στο μήκος ευθείες έχουν μεταξύ τους λόγο ως τετράγωνος προς τετράγωνο αριθμό· και τα τετράγωνα που έχουν μεταξύ τους λόγο ως τετράγωνος προς τετράγωνο αριθμό, θα έχουν μήκη σύμμετρα. τα τετράγωνα από ασύμμετρες στο μήκος ευθείες, δεν έχουν λόγο ως τετράγωνος προς τετράγωνο αριθμό. και τα τετράγωνα που δεν έχουν μεταξύ τους λόγο ως τετράγωνος προς τετράγωνο αριθμό, ούτε τις πλευρές τους θα έχουν σύμμετρες.
Απόδειξη. Ἔστωσαν γὰρ αἱ Α, Β μήκει σύμμετροι· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.	**Απόδειξη.** Έστω ότι τα μήκη Α, Β είναι σύμμετρα. Ισχυρίζομαι ότι: $Α^2:Β^2 = Γ^2:Δ^2$ για Γ, Δ φυσικούς.

᾿Επεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει, ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον [ἀριθμὸν] διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμόν].	Αφού οι Α, Β, είναι σύμμετρες στο μήκος, τότε υπάρχουν Γ, Δ αριθμοί ώστε, $Α:Β=Γ:Δ$[48] . Είναι $Α:Β=Γ:Δ$ αλλά $(Α:Β)^2=Α^2:Β^2$ αφού τα όμοια σχήματα (τετράγωνα) έχουν λόγο εμβαδών ίσο με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας[49] . Επίσης, είναι $(Γ:Δ)^2=Γ^2:Δ^2$, αφού μεταξύ δύο τετράγωνων αριθμών υπάρχει ένας μέσος ανάλογος αριθμός και ο τετράγωνος προς τετράγωνο αριθμό έχει λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου των αριθμών[50], και επομένως είναι $Α^2:Β^2 = Γ^2:Δ^2$.
᾿Αλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον]· λέγω, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. ᾿Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον], οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον], ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] τετραγώνου [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμὸν] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμόν]. ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει.	Έστω τώρα ότι $Α^2:Β^2 = Γ^2:Δ^2$. Ισχυρίζομαι ότι η Α είναι σύμμετρη σε μήκος με τη Β. Επειδή είναι $Α^2:Β^2 = Γ^2:Δ^2$ Αλλά για τον μεν λόγο $Α^2:Β^2$ ισχύει $Α^2:Β^2 = (Α:Β)^2$ [51] Και για τον άλλο λόγο ισχύει $Γ^2:Δ^2 =(Γ:Δ)^2$ [52] Επομένως είναι και $Α:Β=Γ:Δ$, όπου Γ, Δ φυσικοί αριθμοί οπότε έπεται ότι η Α είναι σύμμετρη σε μήκος με τη Β[53].
᾿Αλλὰ δὴ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ Α τῇ Β μήκει· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, σύμμετρος ἔσται ἡ Α τῇ Β. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.	Έστω τώρα ότι η Α, είναι ασύμμετρη σε μήκος με τη Β. Ισχυρίζομαι ότι δεν υπάρχουν Γ, Δ φυσικοί, ώστε $Α^2:Β^2=Γ^2:Δ^2$. Αν ήταν $Α^2:Β^2=Γ^2:Δ^2$ για κάποιους φυσικούς Γ, Δ τότε τα Α, Β θα ήταν σύμμετρα. Όμως αυτό δεν ισχύει, άρα δεν υπάρχουν φυσικοί Γ, Δώστε $Α^2:Β^2=Γ^2:Δ^2$, άρα $Α^2:Β^2\neq Γ^2:Δ^2$, για κάθε μ, ν φυσικο.

48 X.5
49 VI.20
50 VIII.11
51 VI.20
52 VIII.11
53 X.6

Πάλιν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.	Έστω πάλι $Α^2:Β^2 \neq Γ^2:Δ^2$ για κάθε φυσικό Γ,Δ. Ισχυρίζομαι ότι τα Α, Β είναι ασύμμετρα σε μήκος.
Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρος ἡ Α τῇ Β, ἕξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.	Αν σύμμετρη η Α με τη Β τότε θα ήταν $Α^2:Β^2=Γ^2:Δ^2$ για κάποιους φυσικούς Γ, Δ. Όμως υποθέσαμε ότι δεν υπάρχουν τέτοια Γ, Δ, άρα δεν είναι σύμμετρα τα Α,Β.▪

Παρατήρηση. Η απόδειξη της Πρότασης, χρησιμοποιεί αναχρονιστικά τη θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου, τόσο με τη χρήση των X.5, X.6, όσο και με την πρόταση VI.20.

5.3.2. Η Πρόταση X.9 (ε) των *Στοιχείων*, η ιστορικά ορθή απόδειξή της και ο ρόλος της

Στη συνέχεια της μελέτης μας, θα χρησιμοποιείται ο όρος X.9(ε). Στο εξής, με τον όρο **X.9 (ε)**, θα εννοούμε το ευθύ μέρος της πρότασης X.9:

> Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·

και την αντιθετοαντιστροφή αυτής,

> καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Με σύγχρονους όρους, η X.9(ε) αποδίδεται ως εξής:
Έστω α,β ευθύγραμμα τμήματα.
[1] Αν τα α, β είναι σύμμετρα,
τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε $α^2:β^2 =μ^2:ν^2$.
[2] Αν δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν ώστε $α^2:β^2 =μ^2:ν^2$,
τότε τα α, β είναι ασύμμετρα.

Ιστορικά ορθή απόδειξη της Πρότασης X.9(ε).
[1] Αφού τα α, β είναι σύμμετρα μεγέθη, από την **πρόταση X.5**, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε α:β=μ:ν. Επομένως, από την την **Πρόταση 3.2.12** τετραγωνικών συμμέτρων λόγων, προκύπτει ότι $α^2:β^2 =μ^2:ν^2$.
[2] Αντιθετο-αντιστροφή της [1].

Ο ρόλος της Πρότασης X.9 των *Στοιχείων*, που προκύπτει από την απόδειξη, είναι ότι
--δεν αποτελεί από μόνη της κριτήριο ασυμμετρίας, όπως θα μπορούσαμε να φαντασθούμε από την αντιθετο-αντίστροφη μορφή [2], όπως ισχυρίσθηκαν διάφοροι αρχαίοι και σύγχρονοί σχολιαστές, και
--είναι απλώς η σύμπτυξη των προτάσεων X.5 και μεικτών τετραγωνικών λόγων 3.2.12, και άρα είναι ακριβώς το εργαλείο με την οποία οι αριθμητικές Προτάσεις του βιβλίου VIII των *Στοιχείων* (και οι μουσικές Προτάσεις του Αρχύτα και της *Κατατομής Κανόνος*) γίνονται εφαρμόσιμες σε αποδείξεις τετραγωνικής ασυμμετρίας.

5.4. Σχόλια των μελετητών για την Χ.9

5.4.1. Σχόλια Heath.

Ο Heath (1921), στο έργο του "*A History of Greek Mathematics, vol.1, From Thales to Euclid",* αναφέρει:

> Ένας σχολιαστής[54] στην Χ.9 στον Ευκλείδη, αποδίδει πλήρως την ανακάλυψη αυτού του Θεωρήματος στον Θεαίτητο. Αλλά, σε αντιστοιχία με την παραδοσιακή πρακτική στην Ελληνική Γεωμετρία, ήταν χρήσιμο να αποδείξει την ύπαρξη τέτοιων ασύμμετρων λόγων, και αυτό γίνεται στο πόρισμα της Χ.6 του Ευκλείδη από μία γεωμετρική κατασκευή. Το πόρισμα πρώτα δηλώνει ότι, δεδομένης μιας ευθείας γραμμής α και οποιονδήποτε δύο αριθμών m, n δείχνεται ότι, αν y λαμβάνεται ως μέσος ανάλογος μεταξύ των α και x, τότε $\alpha^2{:}y^2=\alpha{:}x=m{:}n$ και αν ο λόγος $m{:}n$ δεν είναι λόγος ενός τετράγωνου προς τετράγωνο, έχουμε κατασκευάσει μια άρρητη ευθεία γραμμή την $\sqrt{n/m}\,\alpha$ και έτσι δείχνεται ότι μία τέτοια ευθεία γραμμή υπάρχει.

Μεταφέρει εκεί τις παρατηρήσεις του, αλλά και τις ενστάσεις Zeuthen, που εμπλέκουν το Θεαίτητο με το Βιβλίο VII, λέγοντας:

> Η απόδειξη της Χ.9, τυπικά εξαρτάται από την VIII.11 [στο γεγονός ότι μεταξύ δύο τετράγωνων αριθμών υπάρχει ένας μέσος ανάλογος αριθμός, και ο λόγος των (εμβαδών δύο) τετραγώνων είναι ίσος με το διπλάσιο (τετράγωνο) λόγο που έχει η πλευρά προς την πλευρά, και η VIII.11 εξαρτάται από την VII.17 και VII.18 (στο γεγονός ότι $ab{:}ac=b{:}c$, *και* $a{:}b=ac{:}bc$, προτάσεις οι οποίες δεν είναι ίδιες]. Αλλά ο Zeuthen σημειώνει ότι αυτές οι προτάσεις είναι ένα ξεχωριστό κομμάτι μιας ολόκληρης θεωρίας η οποία εγκαθιδρύεται στο Βιβλίο VII και στο πρώιμο μέρος του Βιβλίου VIII, και ότι η πραγματική απόδειξη της Χ.9 (rather) μάλλον περιλαμβάνει τις προτάσεις αυτών των Βιβλίων οι οποίες δίνουν μια αυστηρή απόδειξη των αναγκαίων και ικανών συνθηκών για την των τετραγωνικών ριζών των αριθμητικών λόγων και (θετικών) ακεραίων αριθμών , συγκεκριμένα της VII.27 και των προτάσεων που καθοδηγούνται από αυτή, όπως η VIII.2. Έτσι , προτείνει ότι η θεωρία στο πρώιμο μέρος του Βιβλίου VII δεν οφειλόταν στους Πυθαγόρειους, αλλά ήταν μια καινοτομία που έγινε από τον Θεαίτητο με σαφές αντικείμενο. (p.210)

5.4.2. Σχόλια από τον van der Waerden

Ο van der Waerden, επιχειρεί στο έργο του να διευκρινίσει και να διαφωτίσει τη σχέση μεταξύ του πλατωνικού διαλόγου *Θεαίτητος* και του Βιβλίου Χ, που αποτελεί έργο του ίδιου του Θεαίτητου. Έτσι, παρατηρεί πώς:

> Υπάρχει μια εντυπωσιακή ομοιότητα ανάμεσα στην ορολογία του διαλόγου *Θεαίτητος* και σ' εκείνη της αρχής του δεκάτου βιβλίου. Η φράση, «*μήκει σύμμετρος*», εμφανίζεται αυτούσια και στα δύο, ενώ η φράση «δυνάμει σύμμετρος» αντιστοιχεί στον Πλάτωνα στην περιφραστική διατύπωση «σύμμετρος τῷ τετραγώνῳ ὃ δύναται». Ηχητικά και σημασιολογικά, οι λέξεις *μῆκος* και *δύναμις* στον Πλάτωνα συνδέονται στενά με τις φράσεις *μήκει σύμμετρος και δυνάμει σύμμετρος* του Ευκλείδη. Και ενώ στον Πλάτωνα ο Θεαίτητος

---

[54] Χ, No. 62 (Heiberg's Euclid, vol.v, p.450)

ξεκινά υπενθυμίζοντας τα επιτεύγματα του Θεόδωρου, το δέκατο βιβλίο αρχίζει με τρεις προτάσεις που αναφέρονται στις «διαδοχικές αφαιρέσεις» άνισων μεγεθών, μεταξύ των οποίων απαντά, ως πρόταση X.2, ακριβώς το κριτήριο της ασυμμετρίας που, κατά πάσα πιθανότητα, είχε χρησιμοποιήσει ο Θεόδωρος στην έρευνά του. (p.167, σελ.194–195)

Αφού διαπιστώσει τα εμφανώς κοινά χαρακτηριστικά τους, καταλήγει στο συσχετισμό με την κρίσιμη πρόταση X.9:

> Απ' όλα αυτά γίνεται φανερό ότι ο διάλογος *Θεαίτητος* και η αρχή του δέκατου βιβλίου είναι αλληλένδετα και συμπληρώνουν το ένα το άλλο. Το δέκατο βιβλίο περιέχει αναπτυγμένα με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα μαθηματικά θέματα τα οποία υποδηλώνονται συνοπτικά στο διάλογο. Ο Θεαίτητος χρειαζόταν τις προτάσεις X.5, [X.6] και X.9 για να αποδείξει την πρόταση που διατυπώνει στο διάλογο. Χάρη σε αυτές μπόρεσε να μεταφράσει τη *γεωμετρική* υπόθεση της ασυμμετρίας των πλευρών σε μια *αριθμητική* ιδιότητα των αριθμών που παριστάνουν τα εμβαδά των τετραγώνων. (p.167, σελ.195)

Συνεχίζει, αναζητώντας τη γενεαλογία της Πρότασης X.9, επιχειρώντας ταυτόχρονα αποκαθαρμό από αναχρονιστικά στοιχεία, εντός του Βιβλίου X

> Στον Ευκλείδη, το λήμμα του Αρχιμήδη χρησιμοποιείται συνήθως με την ακόλουθη μορφή:
>
> R: *Έστω ότι τα Α και Γ είναι ομογενή μεγέθη και το Α είναι μεγαλύτερο του Γ. Αν από το Α αφαιρεθεί περισσότερο από το μισό του Α, από το υπόλοιπο περισσότερο από το μισό αυτού και αυτό γίνεται πάντοτε, τότε θα υπολειφθεί κάποτε μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο του Γ.*
>
> Αυτή είναι, ακριβώς, η πρώτη πρόταση του δεκάτου βιβλίου, που είναι έργο του Θεαίτητου. Αυτό αποτελεί ένδειξη ότι βρισκόμαστε στο σωστό δρόμο. Γιατί, για ποιο λόγο εμφανίζεται εδώ η X.1; Στο δέκατο βιβλίο χρησιμοποιείται αποκλειστικά στην απόδειξη της X.2 :
>
> *Εάν [δοθούν] δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από το μεγαλύτερο, και το εκάστοτε υπόλοιπο ουδέποτε καταμετρεί το προηγούμενο αυτού, τα μεγέθη θα είναι ασύμμετρα.*
>
> Η απόδειξη της X.2 από τη X.1 είναι εξαιρετικά κομψή, μπορεί όμως να γίνει, χωρίς την παραμικρή δυσκολία, και χωρίς τη X.1, λ.χ. ως εξής: αν τα μεγέθη *A* και *B* είχαν κοινό μέτρο *E,* τότε τα υπόλοιπα που προκύπτουν από την ανθυφαίρεση, θα ήταν πάντοτε πολλαπλάσια του *E* και, μάλιστα, σταθερά ελαττούμενα πολλαπλάσια, οπότε, μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων η ακολουθία των υπολοίπων θα έφθανε στο τέλος.
>
> Κατά συνέπεια η X.1 δεν είναι απαραίτητη ως προαπαιτούμενη της X.2. Αλλά τότε, ποιον σκοπό εξυπηρετεί η X.1; Χρειάζεται για την απόδειξη της πρότασης P[55] η οποία με τη σειρά της, χρειάζονταν για να θεμελιωθεί η θεωρία των αναλογιών!
>
> Τώρα, όλα ξεκαθαρίζουν. Προφανώς ο Θεαίτητος άρχισε το βιβλίο του με μία έκθεση της θεωρίας των αναλογιών, με βάση τον ορισμό μέσω της ανταναίρεσης. Ακολουθώντας τη συνηθισμένη μέθοδο άρχισε με λήμματα τα οποία θα του χρειάζονταν αργότερα. Σε αυτά περιλαμβάνεται η *R*=X.1. Στις προτάσεις X 2, 3 θεμελίωσε τη θεωρία της άπειρης και πεπερασμένης ανταναίρεσης πετυχαίνοντας, έτσι συγχρόνως, να βρεί κριτήριο συμμετρίας

[55] P: *Αν σε μία αναλογία (ad): (bd)=(bc): (bd), οι επόμενοι (bd) είναι ίσοι τότε και οι ηγούμενοι (ad* και *bc)* θα είναι επίσης ίσοι.

για δυο ευθύγραμμα τμήματα ή για δύο επιφάνειες. Είναι πιθανό ότι το επόμενο βήμα ήταν η θεωρία των αναλογιών, με βάση τον ορισμό της ανταναίρεσης στο οποίο αναφέρεται ο Αριστοτέλης. Ο Ευκλείδης παρέκαμψε αυτό το κομμάτι, γιατί προτιμήθηκε η νέα αυτή θεωρία (που οφείλεται στον Εύδοξο). Ο Θεαίτητος, τότε, προχώρησε στην ανάπτυξη της θεωρίας των ρητών λόγων τους με βάση τη δική του θεωρία αναλογιών (X.4, 5 και 9). Σε αυτό το τμήμα του βιβλίου, ο Ευκλείδης αντικατέστησε τις αποδείξεις με άλλες των οποίων τη μέθοδο δανείστηκε από τον Αρχύτα και τη σχολή του. (p.176, σελ.207–208)

5.4.3. Σχόλια του Knorr

Ο Knorr, χρησιμοποιεί την παρακάτω ορολογία.

Θεώρημα 1 (Knorr, p. 213)=Πρόταση Αρχύτα
Θεώρημα 2 (Knorr, p. 214)=Βοήθιος III.11
Θεώρημα D (Knorr, p. 212)=X.9

Κατά τον Knorr, ο Θεαίτητος για την απόδειξη του Θεωρήματός του χρειαζόταν μια μορφή της Πρότασης X.9.

[Άλλη ένδειξη του σχετικά πρώιμου του Θεωρήματος 1, είναι ότι] ο συγγραφέας [Αρχύτας] φαίνεται να μην ξέρει το Θεώρημα D, [αλλιώς θα είχε αποδείξει τον ισχυρισμό του απλώς σημειώνοντας ότι ο δοσμένος λόγος (C+1):C δε μπορεί να είναι λόγος τετράγωνων αριθμών, και έτσι δε μπορεί να είναι το διπλάσιο (τετράγωνο) ενός λόγου αριθμών. Αυτός ήταν ο συνήθης τρόπος που επιβεβαίωσης των ασυμμετριών από τους σχολιαστές των *Στοιχείων*]. Έτσι έχουμε μια ένδειξη ότι το Θεώρημα D, έρχεται μετά το θεώρημα 1. [Στην πραγματικότητα, θα επιχειρηματολογήσουμε ότι] το Θεώρημα D αποδίδεται στο νεότερο, σύγχρονο του Αρχύτα, Θεαίτητο, [και έτσι, τα Θεωρήματα 1 και 2 θα φανεί ότι προέρχονται από την περίοδο του Αρχύτα.] (p.216).

5.4.4. Τα σχόλια Mazur για την X.9

Ο Mazur (2007), ασκεί εποικοδομητική κριτική στον τρόπο με τον οποίο έχει συχνά ερμηνευθεί η Πρόταση X.9:

What is strange [[about Proposition X.9 of the Elements]], though, is that a popular delusion seems to be lurking in the *secondary literature* on this topic.

Specifically, you will find –in various places– the claim that Theaetetus' theorem is proven in Proposition 9 of Book X of Euclid's *Elements.*

It doesn't serve any purpose here to list the places where you find this incorrect assertion, except to say that it is incorrect, and it remains a thriving delusion since at least one important article published as late as 2005 repeats it. It is an especially strange delusion since nothing subtle is going on here.

Even a cursory glance at Proposition 9 of Book X will convince you that what is being demonstrated there –if you take it in a modern perspective– **is an utter triviality**. Proposition 9 of Book X stands, though, for an important issue in ancient thought if taken on its own terms, but **it won't prove irrationality of anything for us, let alone irrationality of all the numbers that Theaetetus proves**. One might imagine that Heath's commentary on this—which is perfectly clear, and says exactly what is indeed proved in Proposition 9—would

dispel the misconception that Theaetetus' theorem about the irrationality of surds is contained in this proposition, but it seems that this has held on with some tenacity. I would guess that the source of this error is quite early, as early as the commentaries of Pappus, but I offer this guess timidly because that would seem to imply
that poor Proposition 9 of Book X has been often cited but far less often read with attention since the fourth century AD. (p. 235)

Η νέο-ελληνική μετάφραση του άρθρου από τον Φίλιππο Φουρναράκη, στο περιοδικό "το φ".

Το περίεργο, όμως, είναι ότι μία δημοφιλής εσφαλμένη αντίληψη φαίνεται να ελλοχεύει στη *δευτερεύουσα γραμματεία* για το θέμα αυτό. Συγκεκριμένα, θα βρείτε -σε διάφορα μέρη- τον ισχυρισμό ότι το Θεώρημα του Θεαίτητου αποδεικνύεται στην Πρόταση 9 του βιβλίου X των Στοιχείων του Ευκλείδη. Δεν εξυπηρετεί κανένα σκοπό εδώ για να απαριθμήσω τα μέρη όπου μπορείτε να βρείτε αυτό το εσφαλμένο ισχυρισμό, παρά μόνο για να πω ότι είναι λανθασμένος, και παραμένει μια ακμάζουσα εσφαλμένη αντίληψη και τουλάχιστον ένα σημαντικό άρθρο που δημοσιεύθηκε πρόσφατα το 2005, το επαναλαμβάνει. Είναι μια ιδιαίτερα παράξενη ψευδαίσθηση, διότι τίποτε δυσδιάκριτο δε συμβαίνει εδώ. Ακόμη και μια βιαστική ματιά στην Πρόταση 9 στο Βιβλίο X θα σας πείσει ότι αυτό που αποδεικνύεται εκεί -αν μπορείτε να το πάρετε σε μια σύγχρονη εκδοχή **- είναι μια απόλυτη ασημαντότητα (κοινοτοπία).** Η Πρόταση 9 του βιβλίου X αντιπροσωπεύει ένα σημαντικό θέμα στην αρχαία σκέψη, αν ληφθεί από μόνη της (στους δικούς της όρους), **αλλά δεν θα αποδείξει την ασυμμετρία του οτιδήποτε για μας, πόσο μάλλον την ασυμμετρία όλων των αριθμών που αποδεικνύει ο Θεαίτητος.** Θα μπορούσε κανείς να φανταστεί ο σχολιασμός του Heath επ' αυτού -ο οποίος είναι απολύτως σαφής, και λέει ακριβώς αυτό που πράγματι αποδεικνύεται στην Πρόταση 9- θα διέλυε την εσφαλμένη αντίληψη ότι το θεώρημα του Θεαίτητου σχετικά με την ασυμμετρία των δυνάμεων περιέχεται σε αυτή την πρόταση, αλλά φαίνεται ότι αυτή έχει αντέξει με αρκετή επιμονή. Εγώ θα μπορούσα να εικάσω ότι η πηγή αυτού του σφάλματος είναι αρκετά παλιά, τόσο παλιά, όσο τα σχόλια του Πάππου, αλλά δίνω αυτή την εικασία δειλά γιατί αυτό θα φαινόταν να υποδηλώνει ότι η καημένη η Πρόταση 9 του βιβλίου X έχει αναφερθεί συχνά, αλλά έχει πολύ λιγότερο μελετηθεί με προσοχή από το τέταρτο αιώνα μ.Χ. και μετά. (σελ.41)

Ο Mazur έχει δίκαιο στο ότι η Πρόταση X.9 είναι τετριμμένη. Αυτό όμως δεν αποκαλύπτει τον κρίσιμο ρόλο της, τον οποίο τώρα θα περιγράψουμε. Συνοπτικά αναφέρουμε ότι είναι ακριβώς η σύμπτυξη της X.5 και της πρότασης συμμέτρων τετραγωνικών λόγων (3.2.12).

5.5. Βελτιωμένη μορφή των αριθμητικών μη-ανθυφαιρετικών αποδείξεων της Πρότασης του Θεαίτητου και της Πρότασης Αρχύτειας τετραγωνικής ασυμμετρίας των επιμορίων λόγων.

Παρατηρούμε ότι στις αποδείξεις ασυμμετρίας που περιγράψαμε στις § 4.1, 4.2, τα δύο πρώτα βήματα ήταν η χρήση *της X.5 και της πρότασης συμμέτρων τετραγωνικών λόγων (3.2.12).* Αυτά τα δύο βήματα μπορούν ν' αντικατασταθούν με ***την Πρόταση X.9*** όπως φαίνεται παρακάτω. Τότε ανοίγει ο δρόμος για την εφαρμογή μιας αριθμητικής Πρότασης, της VII.27 ή της VIII.8 ή της VIII.14, με την οποία συμπληρώνεται η απόδειξη ασυμμετρίας.

Πρόταση (Θεαίτητος)
Αν α,β ευθύγραμμα τμήματα και Ν μη τετράγωνος αριθμός, ώστε $α^2=Ν\cdot β^2$, τότε τα α, β είναι ασύμμετρα.

Απόδειξη (αριθμητική, μη ανθυφαιρετική, με χρήση της X.9(ε) και της VIII.14)

<table>
<tr><th>Νέα απόδειξη</th><th>§4.1</th></tr>
<tr><td colspan="2">Έστω α,β σύμμετρα μεγέθη.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">***Από την Πρόταση X.9(ε), $α^2:β^2=μ^2:ν^2$.***</td><td>*Από την Πρόταση X.5,*</td></tr>
<tr><td>*υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε $α:β=μ:ν$*</td></tr>
<tr><td>*Από την Πρόταση συμμέτρων τετραγωνικών λόγων (3.2.12), $α^2:β^2=μ^2:ν^2=Ν:1$.*</td></tr>
<tr><td colspan="2">Άρα $μ^2=Ν\cdot ν^2$, ο $μ^2$ μετρά τον $ν^2$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Από την Πρόταση VIII.14, ο μ μετρά τον ν, άρα και ο β μετρά τον α.
Υπάρχει , δηλαδή φυσικός αριθμός κ, ώστε $α=κ\cdot β$, άρα $α^2=κ^2\cdot β^2$.
Τότε $Ν=κ^2$, άτοπο.
Άρα, τα α, β είναι ασύμμετρα.</td></tr>
</table>

Πρόταση (τετραγωνικής 'Αρχύτειας' ασυμμετρίας των επιμορίων λόγων). Αν α,β ευθύγραμμα τμήματα, ώστε $α^2:β^2=(Ν+1):Ν$, τότε τα α,β είναι ασύμμετρα.

Απόδειξη
(αριθμητική, μη ανθυφαιρετική, με χρήση της X.9(ε) και της Πρότασης VIII.8*, Αρχύτα).

<table>
<tr><th>Νέα απόδειξη</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="2">Έστω α,β σύμμετρα μεγέθη.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">***Από την Πρόταση X.9(ε), $α^2:β^2=μ^2:ν^2$.***</td><td>*Από την Πρόταση X.5,*</td></tr>
<tr><td>*υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε $α:β=μ:ν$*</td></tr>
<tr><td>*Από την Πρόταση συμμέτρων τετραγωνικών λόγων (3.2.12), $α^2:β^2=μ^2:ν^2=Ν:1$.*</td></tr>
<tr><td colspan="2">Άρα $μ^2:ν^2=(Ν+1):Ν$
Για τους αριθμούς $μ^2,ν^2$, υπάρχει μέσος ανάλογος $μ\cdot ν$.
Από την **Πρόταση VIII.8*,** θα υπάρχει ένας μέσος ανάλογος Ν για τους αριθμούς Ν+1, Ν, άτοπο.
Άρα, α, β ασύμμετρα.</td></tr>
</table>

5.6. Σχόλια.

Παρατηρούμε ότι η Πρόταση X.9 είναι το στοιχειώδες αλλά απολύτως κατάλληλο εργαλείο, ώστε μια απόδειξη τετραγωνικής ασυμμετρίας με εις άτοπο να έλθει στο σημείο όπου μια από τις Αρχύτειες Προτάσεις να είναι χρησιμοποιήσιμη.

Ενδεικτικό αυτού του ρόλου που έχει η Χ.9 είναι και το γεγονός ότι δεν λαμβάνει τους μ, ν σχετικά πρώτους, ακριβώς διότι αυτή η υπόθεση έχει ήδη ενσωματωθεί στις Αρχύτειες προτάσεις.

Είναι σαφές, μετά από αυτή την ερμηνεία της Χ.9, ότι ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* ακολουθεί μια πλήρως Αρχύτεια προσέγγιση. Αυτό το εύρημα ενδυναμώνει την υπόθεση ότι η *Κατατομή Κανόνος* είναι έργο του Ευκλείδη.

Κεφάλαιο 6. Η ενοποιημένη Πρόταση τετραγωνικών ασυμμετριών Θεαίτητου με χρήση της Πρότασης VII.27.

Τώρα αναζητούμε τη γενική απόδειξη, από την οποία εύκολα προκύπτει η δεύτερη απόδειξη ασυμμετρίας της διαμέτρου προς την πλευρά του τετραγώνου, την οποία εξετάσαμε ως Πρόταση του Αλέξανδρου. Η απόδειξη την οποία περιγράφει ο Αλέξανδρος, σχολιάζοντας το Αριστοτελικό χωρίο στα *Αναλυτικά Πρότερα* (και την οποία εξετάσαμε στην §4.2.2), είναι σαφώς μια απόδειξη που προσαρμόσθηκε στην ειδική περίπτωση διαμέτρου προς πλευρά μιας γενικής απόδειξης. Ποιάς όμως ακριβώς; Στην πραγματικότητα έχουμε τρείς επιλογές.

Στην §6.1 γίνεται σαφές, ότι στην απόδειξη του Αλέξανδρου, προκύπτει από αυτή του Θεαίτητου, με μόνη τροποποίηση, το N=2. Η ανακατασκευή που προτείνουμε χρησιμοποιεί τη θεωρία λόγων σύμμετρων μεγεθών, και τη θεμελιώδη πρόταση VII.27.

Στην §6.2 δείχνουμε πώς θα μπορούσε να έχει προκύψει η πρόταση του Αλέξανδρου, από την Πρόταση ασυμμετρίας του Αρχύτα, για N=1.

Η εξέλιξη αυτών των αποδείξεων δίνεται στην §6.3 όπου δίνεται η κορωνίδα των αποδείξεων της Πρότασης του Θεαίτητου.

Στην §6.4 ολοκληρώνεται η ανάδειξη της μεταφοράς από τις μουσικές-αριθμητικές Προτάσεις, στις μη ανθυφαιρετικές αριθμητικές αποδείξεις τετραγωνικών ασυμμετριών δίνοντας προσθήκες που απαιτούνται για τη χρήση της X.9.

6.1. Η απόδειξη της Πρότασης Θεαίτητου (για κάθε μη τετράγωνο N) ως γενίκευση της Πρότασης Αλέξανδρου (για N=2).

Μπορούμε να θεωρήσουμε την ειδική απόδειξη του Αλέξανδρου ως ειδική, με την έννοια ότι είναι εξειδίκευση της Πρότασης του Θεαίτητου (η οποία ισχύει για κάθε μη τετράγωνο N) για τον μη τετράγωνο αριθμό N=2. Πράγματι με ελάχιστη τροποποίηση στην απόδειξη της Πρότασης Αλέξανδρου, δηλαδή με χρήση της Πρότασης VII.27 μαζί με την X.9(ε) έχουμε απόδειξη της Θεαιτήτειας ασυμμετρίας.

Πρόταση Θεαίτητου. Αν α,β ευθύγραμμα τμήματα και N μη τετράγωνος αριθμός, ώστε $\alpha^2:\beta^2=N:1$, τότε α,β είναι ασύμμετρα.

Απόδειξη
(αριθμητική, μη ανθυφαιρετική, με χρήση των X.5, 3.2.12 και της Πρότασης VII.27)

Νέα απόδειξη	
Έστω α,β σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα.	
Από τις Προτάσεις VII.20-22 μπορούμε να υποθέσουμε ότι μ,ν είναι σχετικά πρώτοι.	*Από την Πρόταση X.5,*
	υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε $\alpha:\beta=\mu:\nu$
	Από την Πρόταση συμμέτρων τετραγωνικών λόγων (3.2.12), $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2=N:1$.
Από την θεμελιώδη **Πρόταση VII.27**, που επί της οποίας βασίζονται όλες οι Προτάσεις που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 1, οι μ^2 και ν^2 είναι σχετικά πρώτοι. Από το γεγονός ότι $\alpha^2=N\cdot\beta^2$, έπεται ότι $\mu^2:\nu^2=N:1$, $\mu^2=N$, άρα N τετράγωνος, άτοπο. Άρα, α, β ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα.	

Σχετικά, γράφει ο Knorr [πρβλ. §4.2.3, παραπάνω]:

> Είναι σα να είχε ο Αλέξανδρος μια πιο γενική απόδειξη πριν από εκείνον και την τροποποίησε ώστε να ταιριάξει με τις ανάγκες του χωρίου από τον Αριστοτέλη. Μπορούμε ακόμη να δούμε ότι αποκλίνει από την πηγή του. (p. 229-230)

Συνεχίζει παρακάτω διαπιστώνοντας,

> Με μία μικρή τροποποίηση το πρώτο μέρος γίνεται μία απόδειξη του [θεωρήματος του Θεαίτητου]
> Η απόδειξη που βρήκε, ήταν η γενική απόδειξη η οποία καταλαμβάνει το πρώτο μισό του σχόλιού του, οπότε για να φτάσει στο συμπέρασμα ότι "οι περιττοί ισούνται με τους άρτιους αριθμού"ς, είχε να "ειδικεύσει" το θεώρημα, κάνοντας τις απαραίτητες αναθεωρήσεις δια μέσου των ιδιοτήτων των άρτιων και των περιττών αριθμών, τις οποίες μπορεί να τις αντλήσει από τις αριθμητικές πηγές. Όσο αφορά την πηγή της γενικής απόδειξης, ένας πιθανός υποψήφιος είναι η Ιστορία της Γεωμετρίας του Εύδημου, η οποία είχε χρησιμοποιηθεί από μετέπειτα συγγραφείς όπως ο Πάππος, ο Πρόκλος και ο Σιμπλίκιος. (p. 229-230)

Βελτιωμένη απόδειξη
(αριθμητική, μη ανθυφαιρετική, με χρήση της X.9(ε) και της Πρότασης VII.27)

<table>
<tr><td>Νέα απόδειξη</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Έστω ότι α, β είναι σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Από τις Προτάσεις VII.20-22 μπορούμε να υποθέσουμε ότι μ,ν είναι σχετικά πρώτοι.

Από την Πρόταση X.9(ε), $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$.</td><td>Από την Πρόταση X.5,</td></tr>
<tr><td>υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε $\alpha:\beta=\mu:\nu$</td></tr>
<tr><td>Από την Πρόταση σύμμετρων τετραγωνικών λόγων (3.2.12), $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Από την θεμελιώδη Πρόταση VII.27, οι μ^2 και ν^2 είναι σχετικά πρώτοι.
Από το γεγονός ότι $\alpha^2=N\cdot\beta^2$, έπεται ότι $\mu^2:\nu^2=N:1$, $\mu^2=N$, άρα N τετράγωνος, άτοπο.
Άρα, α, β ασύμμετρα.</td></tr>
</table>

6.2. Η απόδειξη της Αρχύτειας Πρότασης -για κάθε επιμόριο λόγο (N+1):N - ως γενίκευση της Πρότασης Αλέξανδρου (για 2:1).

Όμως μπορούμε εξ ίσου να θεωρήσουμε την ειδική απόδειξη του Αλέξανδρου ως ειδική με την έννοια ότι είναι εξειδίκευση της Αρχύτειας Πρότασης (η οποία ισχύει για επιμόριο λόγο (N+1):N) για τον καταχρηστικά 'επιμόριο' λόγο 2:1. Πράγματι με ελάχιστη τροποποίηση στην απόδειξη της Πρότασης Αλέξανδρου, δηλαδή με χρήση της Πρότασης VII.27 μαζί με την X.9(ε) έχουμε απόδειξη της Αρχύτειας ασυμμετρίας.

Πρόταση (τετραγωνικής 'Αρχύτειας' ασυμμετρίας των επιμορίων λόγων). Αν α,β ευθύγραμμα τμήματα, ώστε $\alpha^2:\beta^2=(N+1):N$, τότε τα α,β είναι ασύμμετρα.

Απόδειξη (αριθμητική, μη ανθυφαιρετική, με χρήση της X.9(ε) και της Πρότασης VII.27)

<table>
<tr><td>Νέα απόδειξη</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Έστω ότι α, β είναι σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Από τις Προτάσεις VII.20-22 μπορούμε να υποθέσουμε ότι μ,ν είναι σχετικά πρώτοι.

Από την Πρόταση X.9(ε), $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$.</td><td>Από την Πρόταση X.5,</td></tr>
<tr><td>υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε α:β=μ:ν</td></tr>
<tr><td>Από την Πρόταση σύμμετρων τετραγωνικών λόγων (3.2.12), $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Από την θεμελιώδη Πρόταση VII.27, οι μ^2 και ν^2 είναι σχετικά πρώτοι.
Από την υπόθεση και την μεταβατική ιδιότητα 3.2.1 έπεται ότι $\mu^2:\nu^2=(N+1):N$, και
εφόσον σαφώς οι N+1, N είναι σχετικώς πρώτοι
έπεται ότι $\mu^2=N+1$ και $\nu^2=N$,
δηλαδή υπάρχουν δύο διαδοχικοί τετράγωνοι φυσικοί, άτοπο.
Άρα, τα α, β είναι ασύμμετρα</td></tr>
</table>

6.3. Η Γενικευμένη-ενοποιημένη Πρόταση τετραγωνικής ασυμμετρίας Θεαίτητου.

Από τις αποδείξεις των §6.2, 6.3 παρατηρούμε ότι δεν χρειάζονται οι ενδιάμεσες Προτάσεις του βιβλίου VIII, οι οποίες βασίζονται στην VII.27, αλλά η ίδια η θεμελιώδης Πρόταση VII.27 από μόνη της είναι σε θέση να δώσει με τον ίδιο τρόπο τις δύο αριθμητικές αποδείξεις ασυμμετρίας, τόσο την Πρόταση του Θεαίτητου, όσο την Αρχύτεια επιμόρια ασυμμετρία. Ακόμη καλύτερα μπορεί, χωρίς καμία πρόσθετη δυσκολία, να αποδειχθεί, από την VII.27 μια γενικευμένη-ενοποιημένη Πρόταση τετραγωνικής ασυμμετρίας του Θεαίτητου, η οποία περιέχει τις δύο αυτές ως ειδικές περιπτώσεις. Με αυτό τον τρόπο οι Προτάσεις του βιβλίου VIII, στο τέλος της 50ετίας από το 400 μέχρι το 350 π.Χ., αφού συμπληρώσουν τον κύκλο της χρησιμότητός τους, χάνουν την σημασία τους ως εργαλεία για την απόδειξη τετραγωνικών ασυμμετριών, και αρκεί για όλες τις εφαρμογές η αρχαία αλλά θεμελιώδης Πρόταση VII.27.

Γενικευμένη-ενοποιημένη Πρόταση τετραγωνικής ασυμμετρίας Θεαίτητου.
Αν α,β ευθύγραμμα τμήματα, Μ,Ν φυσικοί αριθμοί, ώστε $\alpha^2:\beta^2=N:M$, όπου Ν,Μ σχετικά πρώτοι, και όχι αμφότεροι τετράγωνοι, τότε τα α, β είναι ασύμμετρα.

Απόδειξη (αριθμητική, μη ανθυφαιρετική, με χρήση της X.9(ε) και της Πρότασης VII.27)
Έστω ότι τα α,β είναι σύμμετρα. Τότε α:β=μ:ν.
Από VII.20-22 μπορούμε να υποθέσουμε ότι μ,ν είναι σχετικά πρώτοι.
Από X.9(ε), $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2=M:N$,
Από την VII,27, αφού οι μ,ν είναι σχετικά πρώτοι, έπεται μ^2,ν^2 είναι σχετικά πρώτοι.
Άρα, θα είναι: $\mu^2=M$, $\nu^2=N$, άτοπο. Επομένως, τα α,β είναι ασύμμετρα.

6.4. Μερικές προσθήκες στην ενοποιημένη Πρόταση

[1] O Knorr, έχει διέκρινει και αναδείξει στοιχεία που καθιστούν προβληματική την πρόταση X.9 των *Στοιχείων*. Χρησιμοποιεί, τη δική του ορολογία, την οποία παραθέτουμε:

Θεώρημα 5 (Knorr, p. 225) =Πρόταση Θεαίτητου **Θεώρημα 7** (Knorr, p. 225) =*Στοιχεία* X.9

Έτσι, αναφέρει ότι

Επιστρέφοντας τώρα στο Θεώρημα 7, παρατηρούμε ότι παρόλο που είχε καθιερωθεί στην Ευκλείδειά του μορφή (X.9), δεν είναι εξυπηρετικό ως κριτήριο ασυμμετρίας. Επιπρόσθετα χρειάζεται ένα επιχείρημα του παρακάτω τύπου:

Θεώρημα 8 (Knorr): Οι ελάχιστοι όροι ενός λόγου τετραγωνικών ακεραίων είναι επίσης τετράγωνοι ακέραιοι.

Μια απόδειξη μπορεί να δοθεί, χρησιμοποιώντας την απόδειξη του **θεωρήματος 5** του **Αλέξανδρου** ως μοντέλο. Έστω ο δοσμένος λόγος $a^2:b^2$ και τους ελάχιστους όρους να είναι $c:d$.

Θα δειχθεί ότι οι c και d είναι τετράγωνοι ακέραιοι.

Αρχικά, αν οι a^2 και b^2 είναι σχετικά πρώτοι, θα είναι οι ελάχιστοι σε αυτό το λόγο, (VII.21).

Οπότε οι $c=a^2$ και $d= b^2$ (μέσω της VII.20) τελειώνοντας το θεώρημα.

Κατόπιν, αν οι a^2 και b^2 δεν είναι σχετικά πρώτοι, τότε ούτε οι a και b θα είναι (**VII.27**).

Έστω f και g οι ελάχιστοι όροι του λόγου ώστε $f:g=a:b$, όπου οι f και g σχετικώς πρώτοι (VII.22). Από την VII.17 και 18 έχουμε $a:b= a^2:ab=ab:b^2$ και $f:g=f^2:fg=fg:g^2$.

Αφού $a:b=f:g$ έχουμε (από την **VII.14**) *δι ίσου*, $a^2:b^2=f^2:g^2=c:d$.

Εφόσον οι f^2, g^2 and c, d είναι και οι δύο οι ελάχιστοι όροι στον ίδιο λόγο, θα είναι αντίστοιχα ίσοι (VII.20). Έτσι, $c=f^2$ και $d=g^2$ όπως ισχυριστήκαμε. **(p. 232)**

Η αντίστοιχη δική μας απόδειξη μπορεί να είναι:

Πρόταση (=Θεώρημα 8, Knorr).

Αν Μ,Ν, κ,λ είναι φυσικοί αριθμοί, ώστε κ,λ σχετικά πρώτοι με $Μ^2:Ν^2$=κ:λ, τότε οι κ,λ είναι τετράγωνοι αριθμοί.

Απόδειξη.

Έστω μ,ν φυσικοί αριθμοί, ώστε Μ:Ν=μ:ν και μ,ν σχετικά πρώτοι.

Από VII.21 υπάρχει ρ ώστε Μ=ρ·μ, Ν=ρ·ν. Τότε $Μ^2=ρ^2·μ^2$, $Ν^2=ρ^2·ν^2$.

Από VII.27, οι $μ^2$,$ν^2$ είναι σχετικά πρώτοι, άρα $Μ^2:Ν^2=μ^2:ν^2$=κ:λ, και τα ζεύγη $μ^2$, $ν^2$ με τους κ,λ να είναι σχετικά πρώτοι. Τελικά, $μ^2$=κ, $ν^2$=λ, δηλαδή κ,λ είναι τετράγωνοι αριθμοί.

[2] Μια, γενικότερη του Knorr, προσθήκη περιέχεται παρακάτω:

Πρόταση. Αν Μ, Ν, κ, λ είναι φυσικοί αριθμοί, ώστε $Μ·Ν=σ^2$ τετράγωνος αριθμός, και κ, λ σχετικά πρώτοι, με Μ:Ν=κ:λ, Τότε οι κ, λ είναι τετράγωνοι αριθμοί.

Απόδειξη.

Από την υπόθεση Μ:Ν=κ:λ και την VII.20, υπάρχει φυσικός ρ ώστε Μ=ρ·κ, Ν=ρ·λ.

Τότε $Μ·Ν=ρ^2·κ·λ=σ^2$.

Αφού $σ^2= κ·λ·ρ^2$ με κ, λ φυσικούς, από την VIII.14, υπάρχει φυσικός τ ώστε σ=τ·ρ. Άρα $σ^2=τ^2·ρ^2$. Άρα $κ·λ=τ^2$. Τότε οι κ,λ είναι τετράγωνοι αριθμοί (γιατί ?)

Στο σημείο αυτό έχει συμπληρωθεί η μεταφορά από τις μουσικές-αριθμητικές Προτάσεις (Βιβλίο VII *Στοιχείων*, Αρχύτας, Βιβλίο VIII *Στοιχείων, Κατατομή Κανόνος*) (Κεφάλαιο 1) στις μη-ανθυφαιρετικές αριθμητικές αποδείξεις τετραγωνικών ασυμμετριών, οι οποίες, όπως επιχειρηματολογήσαμε, συνέβησαν προ του χρόνου κατά τον οποίο ο Αριστοτέλης συμπλήρωσε τα *Αναλυτικά Πρότερα*, περί το 350 π.Χ.

Κεφάλαιο 7. Πρόταση X.117: μη ανθυφαιρετική απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου χωρίς τη χρήση των Αρχύτειων Προτάσεων ούτε της Πρότασης VII.27, και με αναγωγή στο άτοπο “τα περιττά είναι άρτια”.

Το τελικό στάδιο στην πορεία απλοποίησης της αριθμητικής μη ανθυφαιρετικής απόδειξης της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά πραγματοποιήθηκε κατά τα φαινόμενα πολύ αργότερα, μετά τον Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα (όπως επιχειρηματολογήσαμε στο Κεφάλαιο 4), ή πιθανόν κατά την εποχή του Θέωνος του Αλεξανδρέος. Η απόδειξη αυτή είναι απολύτως στοιχειώδης, απαλλαγμένη από κάθε περιττό εργαλείο, δε χρησιμοποιεί κανένα ουσιαστικό εργαλείο από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες αποδείξεις, όπως τις Αρχύτειες Προτάσεις του Βιβλίου VIII (για την απόδειξη της X.117a) ή την αρχική Πρόταση VII.27 (για την απόδειξη στον Αλέξανδρο). Οι μόνες Προτάσεις από το βιβλίο VII που είναι αναγκαίες είναι οι Προτάσεις VII.20-22. Συγχρόνως είναι η μόνη απόδειξη η οποία δεν αποτελεί εξειδίκευση κάποιας γενικότερης απόδειξης τετραγωνικής ασυμμετρίας. Τέλος η απόδειξη X.117 κατ’ ουσίαν ταυτίζεται με την σύγχρονη στοιχειώδη, αριθμητική απόδειξη.
Στην §7.1 έχουμε το πρωτότυπο κείμενο της προαναφερόμενης απόδειξης X.117, καθώς και η περιληπτική απόδοσή της.
Στην §7.2 γίνεται γραμμή προς γραμμή σύγκριση των τριών αρχαίων αριθμητικών αποδείξεων ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευράς τετραγώνου που έχουμε μελετήσει στην παρούσα έρευνα, αναδεικνύοντας τόσο τα κοινά τους στοιχεία, όσο και τις διαφορές τους.

7.1. Η απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά X.117

Η σύγχρονη στοιχειώδης, αριθμητική απόδειξη της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευράς τετραγώνου, ταυτίζεται με αυτήν της ακροτελεύτιας πρότασης X.117, την οποία θα μελετήσουμε στην παράγραφο αυτή. Η στοίχιση του κειμένου είναι τέτοια ώστε αριστερά να βρίσκεται ότι αφορά μεγέθη, και δεξιά, ότι αφορά αριθμούς. Στη ροή του κειμένου σημειώνονται οι προτάσεις που χρησιμοποιούνται από τα *Στοιχεία.*

Η Πρόταση X.117

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει. Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΑ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. Εἰ γὰρ δυνατόν, **ἔστω σύμμετρος**· λέγω, ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν. φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ, **ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει,** **ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.[[X.5]]** **ἐχέτω, ὃν ὁ ΕΖ πρὸς Η,** **καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι** **τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς·[[VII.20-22]]** ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ,

καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ,

μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τοῦ Η ἀριθμοῦ·
ὅπερ ἄτοπον.
οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα.

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ,

οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η,

καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ,

οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η.

(***)

διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ·

διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η·
ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ·
ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν.
εἰ γὰρ ἦν περισσός,
καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἦν,
ἐπειδήπερ, ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν,
τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὁ ὅλος περισσός ἐστιν·
ὁ ΕΖ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ.
καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοί εἰσι
τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων [αὐτοῖς],
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.
καὶ ὁ ΕΖ ἄρτιος·
περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η.
εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς ΕΖ, Η δυὰς ἐμέτρει·
πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ·
πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους·
ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η· περισσὸς ἄρα.
καὶ ἐπεὶ διπλάσιος ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ,
τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ ΕΘ.
διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η·
διπλάσιος **ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ ΕΘ·**
ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η.
ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η·
ἀλλὰ καὶ περισσός·
ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα σύμμετρος ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ μήκει·
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Απόδοση απόδειξης X.117.

Έστω ότι τα α, β είναι σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα.
Από την X.5, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ,ν, ώστε $\alpha:\beta=\mu:\nu$.
Από τις Προτάσεις VII.20-22, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι μ,ν είναι σχετικώς πρώτοι.
Από την (3.2.12) έχουμε ότι $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$
Εφόσον $\alpha^2:\beta^2=2:1$, έπεται από την μεταβατική ιδιότητα 3.2.1 ότι $\mu^2:\nu^2 =2:1$.
Άρα $\mu^2 =2\cdot\nu^2$, άρα μ^2 άρτιος, άρα μ άρτιος.
Αν $\mu=2\cdot\kappa$, τότε $\mu^2 =4\cdot\kappa^2 =2\cdot\nu^2$, άρα $2\cdot\kappa^2 =\nu^2$, άρα ν^2 άρτιος, οπότε και ν άρτιος.
Άτοπο, επομένως, τα α, β είναι ασύμμετρα μεγέθη.

7.2. Σύγκριση και σχολιασμός των τριών αρχαίων αποδείξεων ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου.

X.117a	**Αλέξανδρος,** ***εις Αναλυτικά Πρότερα*** **260,7-261,28**	**X.117**
χρησιμοποιεί την Πρόταση VIII.14, έχει αναλυθεί στην §4.1	χρησιμοποιεί μόνο την Πρόταση VII.27, έχει αναλυθεί στην § 4.2	Αυτή είναι η συνηθισμένη σε μας αριθμητική απόδειξη, η πιο στοιχειώδης. Δεν χρησιμοποιεί την VII.27 ή κάποια πρόταση του Βιβλίου VIII
Ἄλλως [Δεικτέον καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.] Ἔστω ἀντὶ μὲν διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.	**p. 41a26** Οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ	Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.
εἰ γὰρ δυνατόν,	διὰ τὸ γίνεσθαι **τὰ περιττὰ ἴσα** **τοῖς ἀρτίοις** συμμέτρου τεθείσης. Παραδείγματι αὐτὸς κέχρηται τῆς δι' ἀδυνάτου δείξεως τῷ ἐπὶ τῆς διαμέτρου δεικνύς, πῶς, ὃ βούλεται κατασκευάζειν, ὁ τῇ δι' ἀδυνάτου δείξει χρώμενος δείκνυσιν. οὐ γὰρ συλλογίζεται, ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ, ὁ οὕτως δεικνύς, ὅπερ ἐστίν, ὃ βούλεται δεῖξαι,	Εστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΑ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. Εἰ γὰρ δυνατόν, **ἔστω σύμμετρος**· λέγω, ὅτι συμβήσεται **τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν** **ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν.**

	ἀλλὰ τοῦ ἀντικειμένου τεθέντος τοῦ σύμμετρον αὐτὴν εἶναι τῇ πλευρᾷ δείκνυσι διὰ συλλογισμοῦ δεικτικῶς, ὅτι τούτου κειμένου γίνεται **τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις ἴσα·** ὃ ἐπεὶ ἀδύνατον, ἀναιρεῖται μὲν ἡ ὑπόθεσις, ᾗ τοῦτο ἠκολούθησεν, ἐν δὲ τῇ ταύτης ἀναιρέσει τὸ ἀντικείμενον αὐτῆς κατασκευάζεται τὸ μὴ εἶναι σύμμετρον τὴν διάμετρον τῇ πλευρᾷ, ἐπειδὴ κατὰ παντὸς θάτερον μέρος τῆς ἀντιφάσεως, ὃ ἦν ἐξ ἀρχῆς προκείμενον. ὁ δὲ συλλογισμὸς τοῦ τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις ἴσα γίνεσθαι,	
	Χρήση της X.5	
ἔστω [σύμμετρος· καὶ γεγονέτω] πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, **[[X.5]]**	ἂν ᾖ **ἡ διάμετρος σύμμετρος τῇ πλευρᾷ**, τοιοῦτος κείσθω· τετράγωνον χωρίον τὰ Α Β Γ Δ, καὶ ἔστω διάμετρος αὐτοῦ ἡ Β Γ· εἰ δὴ σύμμετρός ἐστιν ἡ Β Γ διάμετρος τῇ Α Β πλευρᾷ, ἕξει λόγον πρὸς αὐτήν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἔχομεν γὰρ παρὰ Εὐκλείδη ἐν τῷ δεκάτῳ τῶν *Στοιχείων* δεδειγμένον τοῦτο, ὅτι “τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν”, καὶ ἔστι τέταρτον[56] θεώρημα ἐν τῷ δεκάτῳ τοῦτο. ἔστω δὴ ὡς ἡ Β Γ διάμετρος πρὸς τὴν Β Α πλευρὰν ὁ Ε ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ, **[[X.5]]**	φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ, ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. **[[X.5]]**
	[[VII.20-22]]	
καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ ΕΖ, Η· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. [[VII.20-22]]	καὶ εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον τούτοις ἐχόντων πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· “οἱ γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν	ἐχέτω, ὃν ὁ ΕΖ πρὸς Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· [[αναφέρεται αργότερα ότι καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοί εἰσι

[56] πέμπτον

	αὐτὸν λόγον ἐχόντων πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους”· δέδεικται δὲ καὶ τοῦτο ἐν τῷ ἑβδόμῳ τῶν Στοιχείων Εὐκλείδου. εἰσὶ δὲ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι. [[VII.20-22]]	τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων [αὐτοῖς], πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.]] [[VII.20-22]]
[[μέχρι αυτού του σημείου οι τρείς αποδείξεις συμπίπτουν]]		
λέγω πρῶτον, ὅτι **ὁ Η οὐκ ἔστι μονάς**. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μονάς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. **διπλάσιον δὲ** τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τῆς Β· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. καί ἐστι μονὰς ὁ Η· δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τετράγωνος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. **οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν** **ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα.**		οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ ΕΖ. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν Η, ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τοῦ Η ἀριθμοῦ· ὅπερ ἄτοπον. **οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν** **ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα.**
καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ, μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτὴ ὁ Η τὸν ΕΖ μετρεῖ. **[**VIII.**14**, Άμεση συνέπεια των VIII.6, VIII.7]	πεπολυπλασιάσθω ἑκάτερος τῶν Ε Ζ, καὶ ἔστω ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ Η ἐφ' ἑαυτὸν γενόμενος πολυπλασιασθεὶς Ι, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Θ Κ. τετράγωνοι ἄρα εἰσὶν ὁ Ι [m] καὶ Κ[n] καὶ πρῶτοι καὶ αὐτοὶ πρὸς ἀλλήλους· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο ἐν τῷ ἑβδόμῳ τῶν Στοιχείων [VII.27], ὅτι, ἂν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι καὶ πολλαπλασιασθεὶς ἑκάτερος αὐτῶν ποιήσῃ τινά, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι καὶ αὐτοὶ πρὸς ἀλλήλους ἔσονται	

[[Γενική απόδειξη κατά τον Αρχύτα που άγεται ομαλά εις πέρας,]]	[[Γενική απόδειξη, καλύτερη εκείνης του Αρχύτα, που θα μπορούσε να τελειώσει σε δύο γραμμες, εκτρέπεται απ' εδώ και πέρα και ουσιαστικά μοιάζει με τη στοιχειώδη απόδειξη **X.117**] Ο λόγος της εκτροπής είναι αρκετά σαφής: ο Αλέξανδρος άρχισε με την **VII.27**, μάλλον διότι αυτή ήταν μια γενική απόδειξη ασυμμετρίας, καλύτερη από αυτήν του Αρχύτα, που κάπου ήταν γραμμένη, την είχε μπροστά του. Επιπλέον όμως ο Αλέξανδρος ήθελε να δικαιολογήσει τη ρήση του Αριστοτέλη, ότι **τα περιττά γίνονται άρτια**, κάτι που δεν θα συνέβαινε αν ακολουθούσε μέχρι τέλους την γενική απόδειξη. Έτσι το συμπέρασμα ότι μ^2 , ν^2 είναι σχετικώς πρώτοι, και $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2=2:1$, δεν το χρησιμοποίησε για να δείξει ότι $\mu^2=2$, άτοπο, αλλά για να δείξει μόνο ότι μ^2 άρτιος, και ως τετράγωνος ο ημισυ αυτού, ο ν^2, επίσης άρτιος, άτοπο, διότι από VII.20-22 πρέπει να ήταν και περιττός.]	
μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοὺς ΕΖ, **Η μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους·** ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	.	
	ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ Β Γ διάμετρος πρὸς τὴν Α Β πλευρὰν οὕτως ὁ Ε ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ, ὡς δ' ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ, καὶ ὡς ἡ Β Γ διάμετρος ἔχει πρὸς τὴν Α Β πλευράν, οὕτως ἕξει ὁ Η ἀριθμὸς πρὸς τὸν Θ. καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β Γ ἄρα διαμέτρου τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α Β πλευρᾶς,	καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· **ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν.**

<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td>οὕτως ἕξει καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς
τὸν ἀπὸ τοῦ Θ·
εἰσὶ δὲ οὗτοι Ι καὶ Κ.
$\mathbf{\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2=2:1.}$
διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς
διαμέτρου τετράγωνον τοῦ ἀπὸ
τῆς πλευρᾶς· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ
Ι ἀριθμὸς τοῦ Κ ἀριθμοῦ·
[$\mu^2=2\cdot\nu^2$, ν^2 άρτιος]</td>
<td rowspan="3">εἰ γὰρ ἦν περισ-
σός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος
περισσὸς ἦν, ἐπειδήπερ,
ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν
συντεθῶσιν, τὸ δὲ
πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὁ ὅλος
περισσός ἐστιν·
ὁ ΕΖ ἄρα ἄρτιός ἐστιν.
τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ.
καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοί εἰσι
τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων
[αὐτοῖς],
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.
καὶ ὁ ΕΖ ἄρτιος·
περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η.
εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς ΕΖ, Η δυὰς
ἐμέτρει·
πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ·
πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους·
ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η·
περισσὸς ἄρα.
καὶ ἐπεὶ διπλάσιος ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ,
τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ
ἀπὸ ΕΘ.
διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ
τοῦ Η·
διπλάσιος
ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ ΕΘ·
ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η.
ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η·
ἀλλὰ καὶ περισσός·
ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
οὐκ ἄρα σύμμετρος ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ
μήκει·
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.</td>
</tr>
<tr>
<td>ἄρτιος ἄρα ὁ Ι· [μ^2]
πᾶς γὰρ ὁ διπλάσιός τινος ἄρτιος
εἰς ἴσα γε διαιρούμενος.
ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ
ἄρτιος ἔσται·[μ^2:2, ν^2 άρτιος]
τῶν γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν
τῶν εἰς ἴσα διαιρουμένων
καὶ τὰ ἡμίση ἄρτιά ἐστιν.
ἄρτιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Κ
ἥμισυς ὢν τοῦ Ι ὄντος
τετραγώνου.
[οὖ] ἔστι δὲ καὶ περισσός·
πρῶτοι γὰρ ἦσαν πρὸς ἀλλήλους
ὁ Ι καὶ ὁ Κ.[μ^2,ν^2 άρτιοι,
αλλά από VII.27
σχετικά πρώτοι]
ἀδύνατον δὲ πρώτους εἶναι πρὸς
ἀλλήλους τοὺς ἀρτίους·
οἱ γὰρ ἄρτιοι οὐ μετροῦνται
μονάδι μόνῃ κοινῷ μέτρῳ, ὃ ἴδιόν
ἐστι τῶν
πρώτων. δεῖ δὴ ἤτοι ἀμφοτέρους
ἢ τὸν ἕτερον αὐτῶν περισσὸν
εἶναι·
ἐδείχθησαν δὲ καὶ ἄρτιοι
ἀμφότεροι
διὰ τὴν ὑπόθεσιν·
τὰ περισσὰ ἄρα
τοῖς ἀρτίοις ἴσα
ὑποτεθείσης τῆς διαμέτρου εἶναι
τῇ πλευρᾷ συμμέτρου,
ὅπερ ἀδύνατον.</td>
</tr>
<tr>
<td>ἐπὶ δὴ τῆς δείξεως ταύτης ὁ μὲν
συλλογισμὸς ἐγένετο τοῦ
τὰ περισσὰ τοῖς ἀρτίοις ἴσα εἶναι,
ὅ ἐστι ψεῦδος. τὸ δὲ εἶναι
ἀσύμμετρον
τὴν διάμετρον τῇ πλευρᾷ διὰ τὴν
ὑπόθεσιν δείκνυται· ὅτι γὰρ
ὑποτεθέντος
τοῦ ἀντικειμένου τούτῳ ἀδύνατόν
τι ἀκολουθοῦν ἐδείκνυτο διὰ
συλλογισμοῦ,
τῇ τῆς ὑποθέσεως ἀναιρέσει
ἐκεῖνο ἐτέθη τῷ δεῖν θάτερον
αὐτῶν ἀληθὲς</td>
</tr>
</table>

	εἶναι· τοῦτο γάρ ἐστι τὸ διὰ τὴν ἀντίφασιν. εἰ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς ὁ γινόμενος τοῦ ψεύδους συλλογισμὸς δεικτικός τέ ἐστι, τοῦτ' ἔστι κατηγορικός, καὶ διά τινος τῶν τριῶν περαίνεται σχημάτων, εἶεν ἂν ἐν τοῖς σχήμασι τοῖς τρισὶ καὶ οἱ δι' ἀδυνάτου συλλογισμοὶ μέρος ὄντες τῶν ἐξ ὑποθέσεως.	
Πιθανώς η αρχαιότερη αριθμητική απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου/πλευρά είναι η **X.117a.** [επειδή ακολουθεί την έμμεση χρήση της Πρότασης VII.27, μέσω της Πρότασης VIII.14]	Μετά έρχεται η απόδειξη στον **Αλέξανδρο** [η οποία αρχικά είναι αρτιότερη από την απόδειξη X.117a, διότι χρησιμοποιεί μόνο την VII.27, και όχι τα παράγωγά της. Αργότερα εκτρέπεται] Χρονικά τοποθετείται **προ** της συγγραφής των *Αναλυτικών Προτέρων* περί το 350 π.Χ.. Ο Knorr (σελ. 231) φαίνεται να λέει ότι πρώτα έρχεται η απόδειξη στον Αλέξανδρο, μετά η X.117a, αυτό όμως δεν φαίνεται λογικό.	**Πολύ** μετά έρχεται η **X.117** [επειδή είναι η απλούστερη, απαλλαγμένη από κάθε περιττό εργαλείο, η πρώτη απόδειξη η οποία δεν είναι εξειδίκευση κάποιας γενικότερης απόδειξης τετραγωνικής ασυμμετρίας. Επί πλέον επειδή δεν την είχε στη διάθεση του ο Αλέξανδρος.] Πιθανόν είναι του/ή της εποχής του Θέωνος.

Κεφάλαιο 8. Συμβολή και μέθοδοι των Θεόδωρου, Θεαίτητου και Αρχύτα στις Προτάσεις και αποδείξεις τετραγωνικής ασυμμετρίας.

Όπως είναι σαφές ήδη από τα Κεφάλαια 5 και 6, οι αριθμητικές αποδείξεις της Πρότασης Θεαίτητου που έχουμε περιγράψει είναι ανώνυμες ανακαλύψεις αγνώστων σε μας μαθηματικών. Ο κατάλογος των μαθηματικών που θα μπορούσαν να έχουν ανακαλύψει και δημιουργήσει αυτές τις αποδείξεις δεν είναι βέβαια ιδιαίτερα μεγάλος, στην πραγματικότητα περιορίζεται σε δύο ονόματα. Στον Αρχύτα και στον Θεαίτητο.

Αν και η θέση ότι ο Θεαίτητος απέδειξε το θεώρημά του με τις αριθμητικές μεθόδους που ξεκινούν από τον Αρχύτα τυγχάνει ευρύτατης αποδοχής από τους μελετητές περισότερο από ένα αιώνα, από τον Zeuthen, Knorr (οι οποίοι τείνουν να μειώσουν το έργο του Αρχύτα) μέχρι τον van der Waerden (ο οποίος αντίθετα μειώνει στο ελάχιστο την προσφορά του Θεαίτητου), εν τούτοις θα πρέπει να υπάρχουν σοβαρές επιφυλάξεις για την ορθότητα της θέσης αυτής.

Η θέση του Σ. Νεγρεπόντη είναι ότι η μέθοδος των Θεόδωρου και Θεαίτητου είναι ανθυφαιρετική και στην §8.1 αναπτύσσονται τα κύρια σημεία αυτής της επιχειρηματολογίας. Από αυτό το δεδομένο συνάγεται σαφώς ότι η αρχική απόδειξη του θεωρήματος του Θεαίτητου είναι επίσης ανθυφαιρετική. Η άποψη αυτή βασίζεται στην ερμηνεία των Πλατωνικών διαλόγων με βάση την περιοδική ανθυφαίρεση[57].

Στην §8.2, §8.3 και §8.4 θα εξετάσουμε τα επιχειρήματα των μελετητών, ιδίως των Zeuthen, van der Waerden, Knorr, Lucic, οι οποίοι ομόφωνα σχεδόν καταλήγουν στο συμπερασμα ότι ο δημιουργός των αριθμητικών μη ανθυφαιρετικών αποδείξεων της Πρότασης Θεαίτητου είναι ο ίδιος ο Θεαίτητος.

Στην §8.5 δίνονται το συμπέρασμα που προκύπτει από τη μελέτη και κριτική των παραπάνω θέσεων, σύμφωνα με το οποίο η μόνη ρεαλιστική δυνατότητα είναι πώς η απόδειξη της Πρότασης του Θεαίτητου με χρήση της VIII.14 (και της X.9) πραγματοποιήθηκε από τον ίδιο τον Αρχύτα ή από κάποιο μαθητή του.

Τέλος, στην §8.5 χρονολογούνται στοιχειοθετημένα οι αρχαίες αποδείξεις των τετραγωνικών ασυμμετριών.

8.1. Η ανακατασκευή Σ. Νεγρεπόντη: η μέθοδος του Θεαίτητου για την απόδειξη του θεωρήματός του είναι ανθυφαιρετική σύμφωνα με τους Πλατωνικούς διαλόγους *Θεαίτητος, Σοφιστής, Πολιτικός*.

Οι μη ανθυφαιρετικές απόδείξεις του θεωρήματος του Θεαίτητου οφείλονται στον Αρχύτα και τους μαθητές του και είναι μεταγενέστερες της απόδειξης του Θεαίτητου.

Κατ' αρχήν έχει αποδειχθεί από τον Σ. Νεγρεπόντη, μετά από ανάλυση του Πλατωνικού χωρίου *Θεαίτητος* 147d-148d και των ανωνύμων σχολιαστών του, ότι η μέθοδος αποδειξης του Θεόδωρου είναι ανθυφαιρετική.

Ο Zeuthen και ο van der Waerden έχουν υποστηρίξει αυτή την άποψη αλλά με ασθενή επιχειρήματα, σε αντίθεση με τον Σ. Νεγρεπόντη ο οποίος παρουσίασε νέα ισχυρά επιχειρήματα τα οποία προέρχονται από το ίδιο το κείμενο του Θεαίτητου (όπως η ύπαρξη διανεμητικού πληθυντικού για τις "δυνάμεις") και από τους ανώνυμους σολιαστές, υπέρ της ανθυφαιρετικής μεθόδου για τον Θεόδωρο.

[57] Λεπτομερής ανάλυση βρίσκεται στο: Negrepontis, S. (2014). *The Anthyphairetic Revolutions of the Platonic Ideas*.

Δεύτερον, σύμφωνα με το Πλατωνικό χωρίο 147d-148d, στο *Θεαίτητος,* ο ίδιος ο Θεαίτητος είχε την έμπνευση ως αποτέλεσμα του μαθήματος του Θεόδωρου. Δεν υπάρχει στον διάλογο αυτό, την κύρια –ουσιαστικά μόνη– πηγή που έχουμε για αυτό το γεγονός, η παραμικρή ένδειξη ότι ο Θεόδωρος δεν εμπνευσθηκε από την ανθυφαιρετική μέθοδο του Θεόδωρου, αλλά από κάποιες ανακαλύψεις του Αρχύτα. Δεν υπάρχει η παραμικρή αναφορά στον Αρχύτα εν σχέσει με την ανακάλυψη του Θεαίτητου. Δεδομένου ότι ο Θεαίτητος εμπνεύσθηκε το θεώρημά του από το μάθημα του Θεόδωρου, είναι πολύ πιθανότερο η έμπνευσή του να είχε σχέση με ανθυφαιρετική μέθοδο (όπως του Θεόδωρου), παρά αριθμητική, μη ανθυφαιρετική μορφή, όπως αυτή του Αρχύτα. Το ανώνυμο σχόλιο X.62 στα *Στοιχεία*, το οποίο σαφώς προέρχεται από τα *Σχόλια στο Βιβλίο X των Στοιχείων* του Πάππου[58] ορθά αναφέρει ότι το θεώρημα Θεαίτητου οφείλεται στον ίδιο τον Θεαίτητο, χωρίς να υπεισέρχεται όμως στον τρόπο απόδειξής του από τον Θεαίτητο. Η X.9, όπως εξηγήθηκε παραπάνω, ασφαλώς δεν αποτελεί κριτήριο ασυμμετρίας, μόνο εργαλείο αριθμητικοποίησης της συμμετρίας, ώστε να χρησιμοποηθεί για την απόδειξη ασυμμετρίας με εις άτοπον.

Τρίτον, ο Knorr τοποθετεί την ανακάλυψη του θεωρήματος του Αρχύτα **ΜΕΤΑ** το μάθημα του Θεόδωρου, (p.213). Πώς τότε ήταν δυνατόν ο Θεαίτητος να επηρεάστηκε στην έμπνευσή του (εισήλθε τι τοιούτον) από κάτι που ακόμη δεν υπήρχε καν?

Τέταρτον, ακόμη πιο σημαντικό, είναι ότι το αποτέλεσμα του Θεαίτητου οδήγησε στην συναγωγή των πολλών (και απείρων) μερών κάθε δύναμης σε Εν, κάτι που στη συνέχεια, **κατά μίμηση** του γεωμετρικού αποτελέσματος του Θεαίτητου, πραγματοποιεί και η φιλοσοφική του μέθοδος Διαίρεση & Συναγωγή. Όμως από την μελέτη του *Σοφιστή* και του *Πολιτικού* η Διαίρεση & Συναγωγή είναι το φιλοσοφικό ανάλογο της περιοδικής ανθυφαίρεσης (Διαιρέσεις Ασπαλιευτή, Σοφιστή, Πολιτικού). Έτσι οδηγούμαστε αυτοτελώς, όχι μέσω Θεόδωρου, στο σαφές συμπέρασμα ότι η μέθοδος του Θεαίτητου ήταν ανθυφαιρετική.

Πέμπτον, τα εργαλεία του βιβλίου X, ιδίως οι έννοιες των ευθειών αποτομή και εκ δύο ονομάτων, και η μεταξύ τους συζυγία (Προτάσεις X.112-114 στα *Στοιχεία*) οδηγούν σε ανθυφαιρετική απόδειξη του θεωρήματος του Θεαίτητου.

Επομένως ο Θεαίτητος δεν έχει την παραμικρή σχέση με τις αριθμητικές μη ανθυφαιρετικές τεχνικές του Αρχύτα.

8.2. Van der Waerden

8.2.1. Οι θέσεις του van der Waerden

Συνοπτικά, αναφέρουμε ότι ο van der Waerden εκτιμά ότι το βιβλίο VII των *Στοιχείων* ήταν στη μορφή που εμφανίζεται ήδη πριν από τα χρόνια του Αρχύτα. Ο βασικός ορισμός αναλογίας αριθμών VII.20 εμφανίζεται ήδη, για σύμμετρα μεγέθη, στο Ιπποκράτη Χίο και από αυτό μπορούμε ευλογα, όπως είδαμε, να συμπεράνουμε ότι η θεωρία λόγων συμμέτρων μεγεθών ή μεικτών λόγων την οποία αναπτύσσουμε στα Κεφάλαια 2 και 3 είναι αρχαία Πυθαγόρεια, προ του Αρχύτα. (p.110, σελ.123, p.114-115 σελ 127-8) . Συγκεκριμένα, τον βρίσκουμε να

[58] Πρβλ. Junge & Thomson, p.72-74, §10.

Τα αποτελέσματα αυτά πρέπει να προκάλεσαν πρέπει να προκάλεσαν μεγάλη σύγχυση σε έναν Πυθαγόρειο, γιατί οι Πυθαγόρειοι πάντοτε υποστήριζαν ότι όλα είναι διατεταγμένα με βάση αριθμούς. Και ακριβώς η αξίωση ότι όλοι οι τόνοι μπορούν να παριστάνονται με αριθμούς και όλα τα διαστήματα με αριθμητικούς λόγους, ήταν αυτή που έδωσε τη δυνατότητα στον Αρχύτα να αποδείξει ότι ορισμένα διαστήματα δε μπορούν να υποδιπλασιαστούν. Αν κάποιος υπέθετε –μια φυσιολογική υπόθεση για έναν Πυθαγόρειο– ότι όλα τα ευθύγραμμα τμήματα μπορούν, και αυτά, να εκφράζονται με αριθμούς, θα κατέληγε στο συμπέρασμα ότι για ευθύγραμμα τμήματα με ορισμένους λόγους, μέσος ανάλογος δεν μπορούσε να υπάρχει. Όμως, μέση ανάλογος δύο ευθύγραμμων τμημάτων *μπορεί* πάντοτε να κατασκευασθεί. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα ευθύγραμμα τμήματα δεν εκφράζονται πάντοτε με αριθμούς, ή ακριβέστερα διατυπωμένο: οι λόγοι ευθύγραμμων τμημάτων δεν εκφράζονται πάντοτε ως λόγοι ακεραίων. Με άλλα λόγια: *υπάρχουν ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα.* (p.158-159, σελ. 184)

Συνεχίζει παρακάτω, ενισχύοντας τη συνεισφορά του ίδιου του Αρχύτα

Είναι, άραγε, πιθανόν να είναι ο ίδιος ο Αρχύτας αυτός που κατάλαβε τη σύνδεση ανάμεσα στη θεωρία των συνεχών αναλογιών που ανέπτυξε και στην ύπαρξη των αρρήτων; Πιστέυω πως είναι. (p.159, σελ. 184)

Ενισχύει την επιχειρηματολογία του, αναφέροντας

Από τη μελέτη της *Επινομίδος,* η οποία επισημαίνει με έμφαση ότι αριθμοί οι οποίοι εκ φύσεως είναι ανόμοιοι (και, συνεπώς, για τους οποίους, σύμφωνα με την πρόταση 20 του Βιβλίου VIII, δεν υπάρχει μέσος ανάλογος αριθμός) μπορούν να γίνουν όμοιοι με χρήση της γεωμετρικής κατασκευής των μέσων αναλόγων, αποδεικνύεται ότι, ασφαλώς για τον Πλάτωνα και τους μαθητές του, αυτή η σύνδεση ήταν σαφής. (p.159, σελ. 184)

Σημειώνει, επομένως ρητά ο van der Waerden, ότι ο Αρχύτας πιθανόν να γνώριζε την σύνδεση των βασικών Προτάσεων του στο βιβλίο VIII (VIII.8, VIII.6, VIII.7, VIII.14) με αποδείξεις ασυμμετριών. Αυτό, γιατί:

[1] Ο Πλάτων στον *Τίμαιο* και στην *Επινομίδα* περιγράφει πως οι ανόμοιοι αριθμοί με χρήση της συνεχούς αναλογίας και των μέσων ανάλογων γίνονται όμοιοι. Σύμφωνα με την VIII.20 Στοιχείων, αν υπάρχει μέσος ανάλογος μεταξύ δύο αριθμών, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι όμοιοι.

και

[2] Η Πρόταση X.9, η οποία αποτελεί όπως είδαμε τον συνδετικό κρίκο μεταξύ των προτάσεων του Αρχύτα και των αποδείξεων ασυμμετρίας, χρησιμοποιεί στην απόδειξή της στα *Στοιχεία* την Πρόταση VIII.11. Επισης η X.10 χρησιμοποιεί Προτάσεις από το βιβλίο VIII.

Προσθέτει επιπλέον στοιχεία, για να ενισχύσει τα λεγόμενά του, λέγοντας

Πρέπει να προσθέσουμε και κάτι ακόμη. Στο δέκατο βιβλίο των *Στοιχείων* εμφανίζονται δύο αποδείξεις τόσο πολύ διαφορετικές ως προς το ύφος σε σύγκριση με το υπόλοιπο βιβλίο, ώστε πρέπει να θεωρούνται μεταγενέστερες προσθήκες. Πρόκειται συγκεκριμένα για τις αποδείξεις των X.9 και X.10. Ενώ το Δέκατο βιβλίο ως σύνολο, διακρίνεται για την αυστηρή λογική δομή του και για τις εξαιρετικά σύντομες και κομψές του αποδείξεις, εν αντιθέσει με τις αποδείξεις των X.9 και X.10, οι οποίες όχι μόνο περιέχουν περιττά μέρη αλλά, επίσης και κενά.

Στην απόδειξη της X.9, από την $\alpha^2 : \beta^2 = \gamma^2 : \delta^2$, όπου τα α, β είναι ευθύγραμμα τμήματα, ενώ οι γ, δ είναι αριθμοί, πρέπει να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι $\alpha{:}\beta=\gamma{:}\delta$. Για το σκοπό αυτό σημειώνεται ότι ο λόγος των τετραγώνων $\alpha^2 : \beta^2$ είναι «διπλασίων λόγος» του λόγου $\alpha{:}\beta$ και ότι ο λόγος $\gamma^2 : \delta^2$, είναι ομοίως «διπλασίων λόγος» του λόγου $\gamma{:}\delta$. Η ισότητα των λόγων συνεπάγεται , τώρα, χωρίς καμία άλλη εξήγηση, από την ισότητα των διπλασιόνων λόγων. Η απόδειξη, επομένως, είναι ατελής.

Η απόδειξη της X.10, για την οποία και ο Heiberg θεωρεί «νόθα», περιέχει η φράση «ἐμάθομεν γὰρ», η οποία όπως παρατήρησε ο Heath, δεν εμφανίζεται πουθενά αλλού εκτός από την *Κατατομή κανόνος*. Και οι δύο αποδείξεις χρησιμοποιούν προτάσεις από το όγδοο βιβλίο που αφορούν τους μέσους ανάλογους και τους όμοιους αριθμούς, οι οποίες είναι εντελώς ξένες προς τις μεθόδους απόδειξης του δεκάτου βιβλίου. Όποιος και αν εκπόνησε το κείμενο αυτών των αποδείξεων –πιθανώς ο ίδιος κοινότοπος και χωρίς πρωτοτυπία συγγραφέας στον οποίο οφείλεται, επίσης η *Κατατομή Κανόνος*– γνώριζε ότι οι προτάσεις αυτές βρίσκουν εφαρμογή στη Θεωρία των αρρήτων. Είναι πολύ πιθανό ο Αρχύτας και οι μαθητές του, στους οποίους οφείλονται οι θεωρίες του ογδόου βιβλίου και της *Κατατομή κανόνος* , να είχαν κάνει οι ίδιοι τέτοιες εφαρμογές.[[Όπως η X.9 και η X.10]] (p.159, σελ.184–185)

Σε αυτό το σημείο, υπενθυμίζουμε ότι υπάρχει ρητή αναφορά από τον ίδιο ότι το βιβλίο VIII (άρα και οι Πρότασεις VIII.6, VIII.7, VIII.14) είναι σαφώς του Αρχύτα (p. 153, σελ.176)

Σχόλιο: Από τα παραπάνω επιχειρήματα του v.d.Waerden, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η εφαρμογή των Αρχυτείων Προτάσεων VIII.7 & VIII.8 σε αποδείξεις ασυμμετρίας έγινε από τον ίδιο τον Αρχύτα ή από μαθητές του. Οι ίδιοι συμπλήρωσαν την Αρχαία Πυθαγόρεια θεωρία λόγων συμμέτρων μεγεθών, ώστε να υπάρχει αυστηρή απόδειξη της Πρότασης X.9. [[πρβλ. Κεφάλαιο 6 για την X.9]].

Όπως έχουμε ήδη δει, θεωρεί ότι

Ο Θεαίτητος χρειαζόταν τις προτάσεις X.5, X.6, και X.9 για να αποδείξει την πρόταση που διατυπώνει στο διάλογο. Χάρη σε αυτές μπόρεσε να μεταφράσει τη *γεωμετρική* υπόθεση της ασυμμετρίας των πλευρών σε μια *αριθμητική* ιδιότητα των αριθμών που παριστάνουν τα εμβαδά των τετραγώνων. (p. 167–168, σελ. 194–195)

Αντιπαραβάλλει την πεποίθησή του με αυτή του Zeuthen, λέγοντας ότι

Κατά τη γνώμη του Zeuthen η μεγαλύτερη αξία του Θεαίτητου δεν πρέπει να αναζητηθεί στη γεωμετρική ανάλυση του προβλήματος της αρρητότητας, αλλά στο αριθμητικό μέρος, στην απόδειξη δηλαδή ότι η (2) ισχύει τότε μόνο αν ο *n* είναι τετράγωνος. Σύμφωνα με την άποψη αυτή ο Θεαίτητος είχε ανακαλύψει και αποδείξει διάφορες προτάσεις των αριθμητικών βιβλίων VII και VIII που χρειάζονταν γι' αυτή την απόδειξη. Δε συμμερίζομαι την άποψη του Zeuthen επ' αυτού. (p.167–168, σελ. 195)

Επιχειρηματολογεί υπέρ της διαφωνίας του με τον Zeuthen, λέγοντας πώς αν ίσχυει αυτό που ισχυρίζεται, τότε θα μπορούσε να αποδείξει την Πρότασή του (Αν Ν μη τετράγωνος, τότε $\sqrt{N}$ ασύμμετρος) χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις X.5 και VII.27.

όπως είπαμε προηγουμένως, το έβδομο βιβλίο είναι παλαιότερης εποχής και αποτελεί τη βάση της πυθαγόρειας αριθμοθεωρίας. Όμως, από τη στιγμή που κάποιος έχει στη διάθεσή του τις προτάσεις του εβδόμου βιβλίου, το αριθμοθεωρητικό μέρος της απόδειξης του Θεαίτητου δεν παρουσιάζει πλέον δυσκολίες. Μπορεί, για παράδειγμα, να σκεφτεί κανείς ως εξής: Οι p και q στην (1) μπορούν, φυσικά, να θεωρηθούν πρώτοι προς αλλήλους. Τότε έπεται από την VII.27 ότι οι p^2 και q^2 είναι πρώτοι προς αλλήλους, οπότε, οπότε από την VII.21,είναι οι ελάχιστοι αριθμοί με αυτό το λόγο. Αλλά στο αριστερό μέρος της $n:1= p^2 : q^2$ εμφανίζονται οι n και 1 οι οποίοι είναι επίσης πρώτοι προς αλλήλους και επομένως επίσης οι ελάχιστοι με αυτό τον λόγο. Συνεπάγεται ότι $n=p^2$ και $1=q^2$, οπότε ο n είναι τετράγωνος. p. 167-168, σελ. 194-196)

Καταλήγει λέγοντας, ότι

Κατά τη γνώμη μου, η αξία του Θεαίτητου δεν έγκειται στη συμβολή του στην αριθμοθεωρία, αλλά στη μελέτη που έκανε των ασύμμετρων ευθύγραμμων τμημάτων που παράγουν σύμμετρα τετράγωνα. (p.168, σελ. 195)

Αναζητά την εξέλιξη της πρότασης του Θεαίτητου, σημειώνοντας ότι

Τη διατύπωση των προτάσεων X.5, 6 και 9 του Θεαίτητου μπορούμε να τη βρούμε στα *Στοιχεία*. Δεν ισχύει το ίδιο και για τις αποδείξεις. Πράγματι, οι αποδείξεις του Ευκλείδη περιέχουν λογικά σφάλματα για τα οποία δε μπορούμε να θεωρήσουμε υπεύθυνο το Θεαίτητο. Πέραν αυτού, οι εν λόγω αποδείξεις εξαρτώνται από τη θεωρία αναλογιών του Ευδόξου που αναπτύσσεται στο πέμπτο βιβλίο, θεωρία η οποία δεν ήταν ακόμη γνωστή στο Θεαίτητο.[…] Όταν ο Θεαίτητος, στη νεανική του ηλικία, βρήκε τις προτάσεις X.5, 6 και 9, δε μπορούσε να χρησιμοποιήσει τον ορισμό 5 του πέμπτου Βιβλίου. Πρέπει να άρχισε με έναν άλλο ορισμό της αναλογίας.
(p.175, σελ. 204)

Κάνει σύνδεση με τη διαθέσιμη γνώση που υπήρχε στα χρόνια του Θεαίτητου, λέγοντας ότι:

Ο παλαιότερος ορισμός του εβδόμου βιβλίου:
Αριθμοί είναι ανάλογοι όταν ο πρώτος είναι του δεύτερου ισάκις πολλαπλάσιος, ή το αυτό μέρος, ή τα αυτά μέρη, όπως ο τρίτος είναι του τετάρτου,
είναι εφαρμόσιμος σε αριθμούς, όχι όμως σε ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα, γιατί αν τα ευθύγραμμα τμήματα α και β δεν έχουν κοινό μέτρο, το α δεν είναι ούτε πολλαπλάσιο, ούτε μέρος, ούτε μέρη του β. Ο ορισμός αυτός, λοιπόν, μικρή αξία έχει για το Θεαίτητο σε εφαρμογές σε μη μετρήσιμα ευθύγραμμα τμήματα. Δε μπορώ, επίσης, να φανταστώ ότι αυτός, αυστηρά λογικός καθώς ήταν, θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιήσει απλοϊκά την έννοια του λόγου, χωρίς ακριβή ορισμό. (p. 175-176, σελ. 204 -208)

Εμβαθύνει την έρευνά του και σημειώνει:

Ποιος είναι ο ορισμός της αναλογίας από τον οποίο ξεκίνησε; Ένα αξιοσημείωτο χωρίο από τα *Τοπικά* του Αριστοτέλη (158b) ρίχνει κάποιο φώς στο ερώτημα αυτό:
Φαίνεται, επίσης, ότι και στα μαθηματικά μερικές [προτάσεις] δεν αποδεικνύονται εύκολα λόγω έλλειψης ορισμού, όπως [είναι η πρόταση] ότι η ευθεία που τέμνει ένα παραλληλόγραμμο και είναι παράλληλη προς τη [μία] πλευρά [αυτού], διαιρεί ομοίως και την πλευρά [που τέμνει] και το χωρίο. Ενώ, όταν έχει διατυπωθεί ο ορισμός, το λεγόμενο γίνεται αμέσως φανερό· διότι τα

χωρία και οι πλευρές έχουν την ίδια ανταναίρεση· και αυτός είναι ο ορισμός «του αυτού λόγου».

Το χωρίο για το οποίο γίνεται λόγος εδώ είναι ένα ορθογώνιο ή ένα παραλληλόγραμμο, και ο ισχυρισμός είναι ότι οι επιφάνειες στις οποίες χωρίζεται το ορθογώνιο από μια ευθεία παράλληλη προς τη βάση είναι ανάλογες προς τα τμήματα στα οποία χωρίζεται το ύψος. Αν ονομάσουμε τα τμήματα αυτά b και c, τότε το πρόβλημα είναι να αποδειχτεί ότι :

$$(ab):(ac)=b:c$$

Ο Αριστοτέλης το χαρακτηρίζει αυτό «αμέσως φανερό», αν προηγουμένως έχει διατυπωθεί ο «ορισμός». Προφανώς αναφέρεται σε ορισμό της έννοιας της αναλογίας, γιατί οι ορισμοί των εννοιών ορθογώνιο, παράλληλος κ.λ.π. δεν έχουν σημασία στην προκειμένη περίπτωση. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, λοιπόν, αυτός ο ορισμός πρέπει να είναι ο εξής: *δύο επιφάνειες και δύο ευθείες είναι ανάλογες, αν οι επιφάνειες και οι ευθείες έχουν την ίδια ανταναίρεση.*(p. 175–176, σελ.206)

Κατόπιν συνοψίζει τα συμπεράσματά του αναφορικά με τη θεωρία αναλογιών του Θεαίτητου, λέγοντας,

> ο Θεαίτητος άρχισε το βιβλίο του με μία έκθεση της θεωρίας των αναλογιών, με βάση τον ορισμό μέσω της ανταναίρεσης[…]με βάση τον ορισμό της ανταναίρεσης στο οποίο αναφέρεται ο Αριστοτέλης. Ο Ευκλείδης παρέκαμψε αυτό το κομμάτι, γιατί προτιμήθηκε η νέα αυτή θεωρία (που οφείλεται στον Εύδοξο). Ο Θεαίτητος, τότε, προχώρησε στην ανάπτυξη της θεωρίας των ρητών λόγων τους με βάση τη δική του θεωρία αναλογιών (X.4, 5 και 9). Σε αυτό το τμήμα του βιβλίου, ο Ευκλείδης αντικατέστησε τις αποδείξεις με άλλες των οποίων τη μέθοδο δανείστηκε από τον Αρχύτα και τη σχολή του.(p.179, σελ 208).

8.2.2. Κριτική για τις θέσεις του van der Waerden.

[1] Ο van der Waerden υποστηρίζει ότι ο Θεαίτητος μπορούσε να αποδείξει το θεώρημά του με τις προτάσεις X.5, X.9, VII.27.

Ο Σ. Νεγρεπόντης όμως ήδη εμφανίσει ισχυρά επιχειρήματα, αποδεικνύοντας ότι ο Θεαίτητος ασχολήθηκε μόνο με ανθυφαιρετικές μεθόδους (§8.1), αντίθετα από ότι υποστηρίζει ο van der Waerden.

Επιπλέον, οι X.5, X.9(ε), καθώς δεν αναφέρονται σε ύπαρξη αριθμών μ,ν σχετικά πρώτων ώστε να ισχύει α:β=μ:ν, αλλά μόνο σε φυσικούς αριθμούς μ, ν, είναι κατάλληλες για την χρήση τους σε απόδειξη ασυμμετρίας με χρήση μιας των Αρχύτειων προτάσεων VIII,7, VIII.14, VIII.8, και όχι με χρήση της VII.27.

[2] Ο van der Waerden σωστά υποστηρίζει ότι ο **Αρχύτας** θα μπορούσε να αποδείξει τις τετραγωνικές ασυμμετρίες από τις VIII.7, VIII. 14, VIII.8. Όμως θα χρειαζόταν τις X.5, X.9(ε) (ευθεία συνεπαγωγή).

Όμως, λανθασμένα υποστηρίζει ότι οι Προτάσεις αυτές αποδείχθηκαν από τον Θεόδωρο, ο οποίος λόγω [1], δεν ασχολήθηκε καθόλου με αυτές τις Προτάσεις.

Αυτό είναι σαφώς λάθος, αφού σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί στην §8.1, ο Θεόδωρος απεδειξε το θεώρημά του με αυστηρά **ανθυφαιρετική μέθοδο**, όπως προκύπτει από την ανάλυση των Πλατωνικών διαλόγων, και δεν έχει σχέση με τις αριθμητικές μεθόδους που προέκυψαν για πρώτη φορά από το έργο του Αρχύτα.

Επιπροσθέτως, είναι χρήσιμο να επισημανθεί εδώ ότι η πρόταση του van der Waerden, ότι ο Θεαίτητος απέδειξε το θεώρημά του με την VII.27, ή με κάποια άλλη αριθμητική μέθοδο και όχι με ανθυφαιρετική μέθοδο, είναι κάπως παράδοξη, δεδομένου ότι:

[1] σύμφωνα με το πλατωνικό χωρίο *Θεαίτητος* 147d-148d ο Θεαίτητος απέδειξε, ή τουλάχιστον συνέλαβε το θεώρημά του κατά την διάρκεια του μαθήματος του θεόδωρου, όταν αυτός σταμάτησε στην περίπτωση της √17, και

[2] Ο van der Waerden θεωρεί ότι η μέθοδος του Θεόδωρου είναι ανθυφαιρετική (p.143-146). Το ίδιο ισχύει και για τον Zeuthen (1910). Δεδομένου ότι ο Θεαίτητος ήταν μαθητής του Θεόδωρου, είναι παράδοξη η πεποίθηση ότι προέκυψε ιδέα από το μάθημά του, χωρίς ανθυφαιρετική μέθοδο.

8.3. Knorr

8.3.1. Οι θέσεις του Knorr για τον τρόπο απόδειξης της Πρότασης του Θεαίτητου από τον ίδιο τον Θεαίτητο.

Παρακάτω επιχειρείται διαχωρισμός, βάσει των σχολίων του Knorr, σχετικά με τη συμβολή των Αρχύτα και Θεαίτητο στην απόδειξη της Πρότασης Θεαίτητου.

Αντιστοιχία Αριθμητικών Προτάσεων

Θεώρημα 1 (Knorr, p. 213)=Πρόταση Αρχύτα
Θεώρημα 2 (Knorr, p. 214)=ΚΚ3
Θεώρημα 3 (Knorr, p. 215)=Πρόταση Αρχύτα
Θεώρημα 4 (Knorr, p. 216)=Πρόταση Κ.Κ.2=VIII.14

Αντιστοιχία Προτάσεων τετραγωνικών ασυμμετριών

Θεώρημα Α (Knorr, p.212)=Πρόταση Θεαίτητου
Θεώρημα 5 (Knorr, p.225)=Πρόταση Θεαίτητου
Θεώρημα C (Knorr, p.212)=Αν $\alpha^2:\beta^2=(N+1):N$, τότε α,β ασύμμετρα.

Βρίσκουμε λοιπόν τον Knorr, να παρατηρεί ότι:

> Από την άλλη μεριά, η απόδειξη του Αλέξανδρου, μπορεί να θεωρηθεί ακόμη πιο αρχική, για την επίκληση άμεσα της VII.27, ένα αποτέλεσμα που χρειάζεται για την VIII.7 (μέσω των VIII.1-6). Έτσι, μια απόδειξη που βασίζεται στα τελευταία κάνει σιωπηρή αναφορά στο σώμα της θεωρίας στην οποία εμφανίζεται. Αντίθετα, η δυνατότητα για πιο άμεση απόδειξη δια μέσου της VII.27 δείχνει ότι όλη η ενδιάμεση ανάπτυξη είναι περιττή όσο αφορά την απόδειξη του Θεωρήματος 5.Για να διευκρινίσουμε αυτό το σημείο, είναι χρήσιμο να διακρίνουμε τη σειρά της ανακάλυψης, από τη σειρά της απόδειξης. Οι Έλληνες αναγνωρίζουν τη χρησιμότητα της αναγωγής μίας πρότασης σε μία ισοδύναμη, πιο εύκολα αναλύσιμη, με τον Αριστοτέλη να την αναγνωρίζει ως λογική τεχνική. Ήδη από την περίοδο των πρώιμων μελετών της ασυμμετρίας υπήρχε η εικασία ότι το Θεώρημα 5 ήταν ένα αληθές θεώρημα που γενικεύει τα αποτελέσματα της δουλειάς του Θεόδωρου.
>
> Προσέχοντας αυτό το θεώρημα, οι γεωμέτρες μπορούν να πάνε διαδοχικά
> στο VIII.14,
> μετά στο VIII.7
> μετά στο ένα ή στο άλλο θεώρημα της συνεχούς αναλογίας και

τέλος στην VII.27.

Έχουμε υποστηρίξει ότι κατά τη διάρκεια αυτής της διαδρομής υπήρχαν κάποιοι που πίστευαν ότι είχαν αποδείξει το θεώρημα, ανάγοντάς το σε κάτι προφανές, για παράδειγμα ο Αρχύτας αρχικά ισχυρίστηκε ότι είχε αποδείξει το Θεώρημα C, στην πραγματικότητα ανάγοντάς το στην VIII.8. Αλλά άλλοι αντιλήφθηκαν την ανάγκη να αναχθεί σε ένα πιο θεμελιώδες αποτέλεσμα και τελικά στην VII.27 και τη βασική έννοια των σχετικά πρώτων. Εδώ είναι που βλέπουμε μια από τις μεγαλύτερες συνεισφορές του Θεαίτητου: στην αρχή της θεμελίωσης των σχετικά πρώτων αριθμών. Μετά από αυτό μπορεί κάποιος να αποδείξει το Θεώρημα 5 κινούμενος ξανά στα βήματα της αναγωγικής αλυσίδας [από την VIII.14 προς τη VII.27]. Αλλά αυτό μπορεί να φανεί ως μία μη οικονομική προσέγγιση. Ο μόνος σκοπός του Θεαίτητου ήταν να καθιερώσει το Θεώρημα 5 και να επεκτείνει τη γνώση της ασυμμετρίας, έτσι η απόδειξη του Αλέξανδρου πιθανόν να αναπαριστά την δική του προσέγγιση.

Για άλλους, αυτούς στην σχολή του Αρχύτα, η θεωρία της συνεχούς αναλογίας είχε ένα εγγενές ενδιαφέρον, οπότε θα μπορούσαν να επιλέξουν να αναπτύξουν το τελευταίο υλικό, παράγοντας αποδείξεις των Θεωρήματων 1 και 4 ως εύκολα πορίσματα. (p. 231-232)

[3] Στην περίπτωση του πρώτου θεωρήματος, η κύριά μας αυθεντία είναι ο Πλατωνικός διάλογος *Θεαίτητος* (147d-148b). Ο Θεαίτητος δεν αποτόλμησε να αποδείξει αυτά τα θεωρήματα στο πλαίσιο του χωρίου του διαλόγου.[…] η συνεισφορά του Θεαίτητου περιγράφεται εδώ ως κάποιος αυστηρά " ορίζοντας" και "ονομάζοντας", παρέχοντας καθολικούς ορισμούς για τις σύμμετρες και ασύμμετρες γραμμές. Έτσι, η συνεισφορά του Θεαίτητου είναι ισοδύναμη με μία *δήλωση* του θεωρήματος 5. Τώρα είναι φανεροί, δραματικοί λόγοι για τους οποίους ο Πλάτων διάλεξε εδώ να περιορίσει τη συνεισφορά του Θεαίτητου. Ο Θεαίτητος είναι ένας έφηβος στη σκηνή του διαλόγου. Θα ήταν παράλογο για αυτόν να προοδεύσει πέρα από τις δυνατότητες του δασκάλου του Θεόδωρου, σε επιτυχημένη απόδειξη των γενικών θεωρημάτων, στη βάση ενός μόνο μαθήματος σχετικά με το θέμα που τον απασχολούσε. Αλλά αυτό το γεγονός δεν αντικρούει τον ισχυρισμό ότι ο ιστορικός Θεαίτητος ήταν υπεύθυνος τελικά για την πρώτη κατάλληλη απόδειξη αυτών των θεωρημάτων. (p.225-226)

- [4]

[4α] Ο Knorr ακολουθεί μια μακρά σειρά σημαντικών ιστορικών των Μαθηματικών στη θέση ότι ο **Θεαίτητος** ακολούθησε αριθμητικές (και άρα μη ανθυφαιρετικές) μεθόδους προκειμένου ν' αποδείξει το θεώρημά του.

Υπάρχει γενική συμφωνία στον τύπο των αρχών που χρησιμοποιούσε ο Θεαίτητος. Οι H. Zeuthen(1910), E.J Dijksterhuis (1929, 1930), K. Reidemeinster(1940) και B.L. van der Waerden(1947, 1854), έχουν δώσει ο καθένας ανακατασκευές, σχεδιασμένες από διάφορα μέρη των αριθμητικών βιβλίων των *Στοιχείων*. (p.227-228)

Σχόλιο. Είναι πολύ περίεργο ότι ο **Zeuthen και ο van den Waerden** υποστηρίζουν μη ανθυφαιρετική μέθοδο για τον Θεαίτητο, ενώ συγχρόνως υποστηρίζουν (ορθά, αλλα χωρίς πειστικά επιχειρήματα) ότι η μέθοδος του Θεόδωρου είναι ανθυφαιρετική, και κατά την διάρκεια του μαθήματος του Θεόδωρου προς τον Θεαίτητο, ο Θεαίτητος εμπνεύστηκε την απόδειξή του.

[4β] Η συμβολή του **Θεαίτητου** βρίσκεται στο ότι ο Θεαίτητος αυστηροποίησε το βιβλίο VII, ιδίως σε ότι έχει σχέση με την έννοια των **σχετικά πρώτων αριθμών** (Προτάσεις VII.20-22 και VII.27).

> Είναι εδώ που βλέπουμε μία από τις μεγαλύτερες συνεισφορές του Θεαίτητου στη θεμελίωση της θεωρίας των σχετικά πρώτων αριθμών. (p.232)

[4γ] Αυτή η αυστηροποίηση του βιβλιου VII επέφερε την αυστηροποίηση των βασικών Προτάσεων VIII.8 (δηλαδή του Θεωρήματος του Αρχύτα) και VIII.7 (δηλαδή της Πρότασης 2 της *Κατατομής Κανόνος*) του βιβλιου VIII. Έτσι, γραφει:

> Τώρα, το Θεώρημα C όπως βρίσκεται στην *Κατατομή Κανόνος* δημιουργεί την αίσθηση ότι σχετίζεται στενά με την απόδειξη του Θεωρήματος 4. Μπορούμε να αναμένουμε ότι ο Θεαίτητος, κατά τη μελέτη του στο τελευταίο θεώρημα, αντιλήφθηκε τη σημασία της προσέγγισης του Αρχύτα, όπως επίσης και τα ελαττώματά της. Έτσι, ήταν στο δρόμο να διορθώσει την τεχνική του Αρχύτα και εφάρμοσε τη μέθοδό του στο πρόβλημα των εμβαδών που τέθηκε από το Θεόδωρο έτσι ο Θεαίτητος δημιούργησε τη δική του χαρακτηριστική μέθοδο στη μελέτη των ασύμμετρων μεγεθών. (p. 224-25)

[4δ] Μετά ο Θεαίτητος ήταν σε θέση να αποδείξει το θεώρημά του. Κατά την γνώμη του Knorr αυτό επετεύχθη με την χρήση, όχι της VIII.14 (που σχετίζεται με την *K.K.2*), αλλά κατ' ευθείαν της VII.27.

> Μετά από αυτό μπορεί κάποιος να αποδείξει το θεώρημα 5 κινούμενος ξανά στα βήματα της αναγωγικής αλυσίδας. Αλλά αυτό μπορεί να φανεί ως μία μη οικονομική προσέγγιση. Ο μόνος σκοπός του Θεαίτητου ήταν να καθιερώσει το Θεώρημα 5 και να επεκτείνει τη γνώση της ασυμμετρίας, έτσι η έκδοση του Αλέξανδρου πιθανά να αναπαριστά αυτό. (p.232)

8.3.2. Κριτική των θέσεων Knorr

Το [1] είναι τελείως λάθος. Όπως έχει αναλυθεί από Σ. Νεγρεπόντη [§8.1], η μέθοδος του Θεόδωρου δεν είναι αριθμητική αλλά ανθυφαιρετική.
Το [4] είναι τελείως λάθος. Διότι:
(α) Ο Θεαίτητος εμφανίζεται να εμπνέεται
όχι από το μάθημα του Θεόδωρου, όπως μας λέει ρητά ο Πλάτων,
αλλά από τον Αρχύτα, ο οποίος δεν αναφέρεται καθόλου από τον Πλάτωνα.
Αν όντως ο Θεαίτητος ήταν συνεχιστής των ιδεών του Αρχύτα, τότε αποτελεί σοβαρή παράλειψη του Πλάτωνος ν' αναφέρει στο σημείο αυτό (Θεαίτητος 147d-148d) την συμβολή του (καλού του φίλου) Αρχύτα.
(β) Επισης ο Πλάτων αναφέρει ότι η Πλατωνική μέθοδος Διαίρεσης και Συναγωγής είναι **μίμηση** της μεθόδου του Θεαίτητου. 'Όπως απεδείχθη από Σ. Νεγρεπόντη [§8.1], η μέθοδος αυτή είναι ανάλογη της περιοδικής ανθυφαίρεσης.
(γ) Η συμβολή του Αρχύτα τοποθετείται χρονικά μεταξύ Θεόδωρου και Θεαίτητου, σε αντίθεση με ότι γράφει ο Πλάτων, ότι η έμπνευση του Θεαίτητου ήταν στιγμιαία, κατά την διάρκεια του μαθήματος του Θεόδωρου. Σ' αυτήν τη στιγμή δεν μπορεί να συνέβησαν τόσα πολλά! Αυτό το δικαιλογεί με αυθαίρετο τρόπο ο Knorr εισάγοντας μια μεγάλη απόσταση μεταξύ του μαθήματος του Θεόδωρου και της απόδειξης του θεωρήματος του πό τον Θεαίτητο [3].

Το [2] τώρα χάνει τη σημασία του, διότι ο μόνος που μπορεί να σχετίζεται με τις πρότασεις 2, 3 της *Κατατομής Κανόνος* ΚΑΙ μη ανθυφαιρετική απόδειξη του θεωρήματος του Θεαίτητου είναι ο Αρχύτας και οι μαθητές του ([2γ]). Πρβλ. την απόδειξη του Αλεξανδρου, την οποία έχει κατά νού ο Αριστοτέλης (με VII.27), και την ακόμη κοντινότερη στον Αρχύτα απόδειξη X.117a. Αυτά σαφώς συνέβησαν ΜΕΤΑ την ανθυφαιρετική απόδειξη του Θεωρήματος του Θεαίτητου.

Όμως μια τέτοια απόδειξη, προσαρμοσμένη, όπως σωστά υποστηρίζει ο Knorr, στην ειδική περίπτωση διαμέτρου προς πλευρά, από μια γενική απόδειξη του θεωρήματος Θεαίτητου, υπάρχει σε αρχαία πηγή στον Αλέξανδρο, και πιθανώς να ήταν γνωστή στον Αριστοτέλη, άρα είναι προγενέστερη του Αριστοτέλη, και μεταγενέστερη του Θεαίτητου. Επίσης έχουμε επιχειρηματολογήσει ότι η απόδειξη του θεωρήματος του Θεαίτητου με την VIII.14 ήλθε πριν (σε αντίθεση με ότι υποστηρίζει ο Knorr) από την απόδειξη με την VII.27, διότι η VIII.14 είναι μια Πρόταση του ίδιου του Αρχύτα.
Η μόνη ρεαλιστική δυνατότητα που προτάσσεται είναι ότι η απόδειξη του θεωρήματος Θεαίτητου με τη χρήση των X.5,9, και VII.27 πραγματοποιήθηκε είτε από τον ίδιο τον Αρχύτα είτε από κάποιο άγνωστο μαθητή του Αρχύτα.

8.4. Lucic

8.4.1. Οι πρόσφατες θέσεις Lucic

Ο Z. Lucic, στο άρθρο του *Irrationality of the Square Root of 2: The Early Pythagorean Proof, Theodorus's and Theaetetus's Generalizations* (p.26-32).

> To **reconstruct Theodorus's proof**, suppose that k is a nonsquare odd number such that $q^2=kp^2$. Obviously,p^2 and q^2 are both odd, or both are even numbers. If they are odd numbers, then p^2 -1 and q^2 -1 are divisible by 8. In addition, if $q^2=8x + 1= k(8y + 1) = kp^2$, then k = 8(x – ky) + 1. Hence, k is an odd number of the form 8z + 1. If p^2 and q^2 are even numbers, then p and q are even numbers as well, and the procedure of continual bisection of p (and q) terminates at an odd number or at the number 2. If it ends at an odd number p', then q'^2 (= kp'^2) is an odd number as well, because k and p'^2 are odd numbers. Consequently, k is again a number of the form 8z + 1. If the procedure of continual bisection of p ends at the number 2, then, using the same method as **Meno**'s slave, it may be easily verified that $3.2^2= 12$, $5.2^2 =20$, $7.2^2=28$, $11.2^2 =44$, $13.2^2=52$ and $15.2^2 =60$ are not perfect squares, as $3^2<3.2^2<4^2<5.2^2<5^2<7.2^2<6^2<11.2^2<7^2<13.2^2<15.2^2<8^2$ (Fig. 5). Therefore, q^2 is not equal to kp^2 when k is equal to 3, 5, 7, 11, 13, or 15.
>
> Hence, regardless of whether the numbers p and q are odd or even, if k is a nonsquare odd number that is not of the form 8z +1, then q^2 is not equal to kp^2. Therefore, square roots of 3, 5, 7, 11, 13, and 15 are irrational. Consequently, the square roots of 6, 10, 12, 14 are also irrational (section 2. (b)) as well as the square root of 8 (section 1. (a)). But we do not come to that conclusion for numbers 17, 25, 33; . . . and, in these cases, we cannot decide whether q2 is equal to kp2 or not. Because 17 is the first nonsquare number of the form 8z + 1, Theodorus stopped his demonstration at this number. As a consequence of his investigation, the problem of rationality or irrationality of square roots of natural numbers stayed open only in the case

of nonsquare odd numbers that are of the form 8z + 1. It was Theaetetus who solved the general problem.(p.31)

‘an unnoticed fact that **Euclid** did not have a need to point out and prove the proposition on the square root of 2 as he already had proven a much more general proposition—**VIII.14**. By this proposition a square measures a square, if and only if the side also measures the side. In other words, if p and q are natural numbers, then p^2 divides q^2 if and only if p divides q. Therefore, by this proposition, from $q^2 = mp^2$ it follows that q = np. But then $q^2 = n^2p^2$ and, consequently, $m = n^2$.
Hence, m must be a perfect square if $q^2 = mp^2$. The converse is trivial. Therefore, by **Euclid**’s proposition **VIII.14**, the square root of m is rational if and only if m is a perfect square. This is **Theaetetus’**s theorem [Van der Waerden, p. 142; Mazur, p. 235; Knorr, pp. 227–228]. It implies that the square root of 2 is an irrational number.’ (p.30)

Theaetetus’s Theorem

Theodorus’s demonstration and the early **Pythagorean** proof of the irrationality of the square root of 2 originate from the same knowledge domain. Both are based on the odd-even number theory provided in *Elements* as propositions IX.21–34. It seems that this theory has been ineffective only in the case of numbers that are of the form 8z +1 or $(8z+1)2^n$.

To solve the problem of rationality of the square roots of these numbers, **Theaetetus** had to develop a new theory. Judging from Euclid’s proof of proposition VIII.14, this new theory was independent from the odd-even arithmetic. In contrast to the early Pythagorean arithmetic, the theory that was developed for proving proposition VIII.14, did not rely on visual obviousness. Moreover, the proofs of some of the key theorems in this theory, such as the proofs of propositions VII.24 and VIII.6, required the use of reductio ad absurdum in a very elaborate form.

Further, the deductive structure of proof of proposition VIII.14 (Fig. 6) is much more complicated than the deductive structures of the early Pythagorean and Theodorus’s proofs. Therefore, the complexity of the theory that was necessarily developed for the achievement of the proof of this proposition was greatly beyond the early Pythagorean odd-even arithmetic. Proving proposition VIII.14, Theaetetus appears to be a founder of a new arithmetic different from the one practiced by his teacher Theodorus. In a time sequence between the two of them, no one else could have developed this theory, one that Theaetetus used to prove his theorem. Judging by the use of reductio ad absurdum in this new theory, as in the proofs of Euclid’s propositions VII.24 and VIII.6, the traditional even-odd proof of the irrationality of the square root of 2 is in the tradition of this new approach to arithmetic.(p.31-32).

8.4.2. Κριτική των θέσεων Lucic

Κατά τον **Lucic**
--οι **Πυθαγόρειοι** απέδειξαν την ασυμμετρία της √2 με μια παραλλαγή της μεθόδου που προτείνει ο Knorr (και η οποία βασίζεται σε μια ερμηνεία του σχήματος στον Πλατωνικό διάλογο *Μένωνα*),

--ο **Θεόδωρος** απέδειξε τις ασυμμετρίες √3, √5,…, √17 με την μέθοδο κατ' ουσίαν του Knorr (στην απλοποιημένη μορφή των Bashmakova-Lupin), και
--ο **Θεαίτητος** απέδειξε το Θεώρημά του (αν N όχι τετράγωνος, τότε √N ασύμμετρος) με την Πρόταση VIII.14, η οποία επίσης αποδίδεται στον Θεαίτητο. Στην εργασία δεν υπάρχει η παραμικρή αναφορά στον Αρχύτα σχετικά με τις Προτάσεις VIII.6, VIII.7, VIII.14 και VIII.8.

Η απόδειξη του θεωρήματος του Θεαίτητου με την VIII.14, όπως περιγράφεται από τον Lucic είναι ορθή, αλλά συσκοτίζει, με τον σύγχρονο συμβολισμό που χρησιμοποιεί τον ρόλο της Πρότασης X.9 σε αυτήν. Επίσης απόδειξη της ασυμμετρίας διαμ. προς πλευρά με χρήση της VIII.14 όντως καταγράφεται σε αρχαίες (ανώνυμες) πηγές, άρα είναι σαφές ότι η Πρόταση VIII.14 έχει όντως εφαρμογή σε απόδειξη ασυμμετρίας. Και επειδή η ανώνυμη αποδειξη έχει τα χαρακτηριστικά, όπως σωστά επισημαίνει ο Knorr, προσαρμογής μιας γενικής απόδειξης ασυμμετρίας √N στην ειδική περίπτωση διαμέτρου προς πλευρά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η VIII.14 όντως χρησιμοποιήθηκε στην αρχαιότητα για την μη-ανθυφαιρετική απόδειξη του θεωρηματος Θεαίτητου (Lucic, p.30).
Επίσης με το να αποδίδει την πατρότητα της VIII.14 στον Θεαίτητο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι η Πρόταση VIII.14 είναι ιδιαίτερα συναφής όχι μόνο με την Πρόταση VIII.7 αλλά και με την Πρόταση VIII.8, η οποία είναι γνωστό, από τον Βοήθιο, ότι οφείλεται στον Αρχύτα. Πέραν αυτού, ο Θεαίτητος απέδειξε μεν το θεώρημά του, αλλά, όπως είδαμε, με ανθυφαιρετική μέθοδο. Επομένως η απόδειξη του θεωρήματος του Θεαίτητου με την Πρόταση VIII.14 (και τις την X.9) πρέπει να αποδοθεί στον Αρχύτα ή στους μαθητές του Αρχύτα (ή στον Ευκλείδη). Ωστόσο ο Ευκλείδης μάλλον πρέπει να αποκλεισθεί, διότι μια απόδειξη του θέωρημα Θεαίτητου βασισμένη στην VII.27, εύλογα μεταγενέστερη από εκείνη που βασίζεται στην VIII.14 (καθώς η απόδειξη με την VIII.14 είναι πιο κοντά στον Αρχύτα, εν σχέσει με εκείνη της VII.27), ήταν πιθανώς γνωστή στον νεαρό Αριστοτέλη (*Αναλυτικά Πρότερα*), προγενέστερο του Ευκλείδη. Επομένως η τελική εκτίμηση είναι ότι η απόδειξη του θεωήματος του Θεαίτητου με την VIII.14 πραγματοποιήθηκε μετά τον Θεαίτητο και πριν από τον Αριστοτέλη.

8.5. Συμπεράσματα

Η μόνη ρεαλιστική δυνατότητα είναι ότι η απόδειξη την Πρόταση του Θεαίτητου με χρήση της VIII.14 (και της X.9) πραγματοποιήθηκε από τον ίδιο τον Αρχύτα ή από κάποιο άγνωστο μαθητή του Αρχύτα.

Αυτό σημαίνει ότι η διατύπωση και απόδειξη των Προτάσεων X.5, X.9 (ευθεία συνεπαγωγή μόνο) είναι η μόνη που χρειάζεται για την απόδειξη της Πρότασης του Θεαίτητου) πραγματοποιήθηκε πριν από τον Αρχύτα ή από τον Αρχύτα ή μαθητές του Αρχύτα.
Το ερώτημα αφορά, το είδπς των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν.
Τότε δεν υπήρχε ακόμη η θεωρία λόγων μεγεθών του Ευδόξου.
Επίσης ο Θεαίτητος δεν είχε κανένα ενδιαφέρον για αυτές τις Προτάσεις, αντίθετα με ότι πιστεύει ο van der Waerdeb (**p. 175-176, 179**) και είναι άκρως απίθανο να χρησιμοποιήθηκε η ανθυφαιρετική θεωρία λόγων μεγεθών του Θεαίτητου.
Άρα ο Αρχύτας χρησιμοποίησε την Πυθαγόρεια θεωρία λόγων ή αριθμών ή συμμετρων μεγεθών ή μεικτών λόγων αριθμών και συμμέτρων μεγεθών. Η θεωρία αυτή βασίζεται μόνο στις Προτάσεις VII.1, VII.2 και X.3. Η θεωρία αναπτύσεται στο Κεφάλαιο 3.

Οι προσπάθειες του Knorr να δημιουργήσει χώρο δημιουργίας για τον Θεαίτητο με το να τονίσει τα ασθενή στοιχεία του Αρχύτα (πρβλ. Κεφάλαιο 1) και να συσχετίσει με τον Θεαίτητο τις Προτάσεις στα βιβλία VII και VIII των *Στοιχείων* τις σχετικές με την έννοια των σχετικών πρώτων αριθμών είναι, παρ' όλη την ενδιαφέρουσα επιχειρηματολογία της, τελικώς άνευ σημασίας διότι
--ο μεν Θεαίτητος δεν ασχολήθηκε καθόλου με τις Προτάσεις του Αρχύτα και απέδειξε το θεώρημάτου με αυστηρά ανθυφαιρετική μέθοδο,
--ο δε Αρχύτας και οι μάθητές του πρέπει να πιστωθούν εξ ολοκλήρου με τις αριθμητικές αποδείξεις τετραγωνικής ασυμμετρίας.

8.6. Η προκύπτουσα χρονολόγηση των αρχαίων αποδείξεων τετραγωνικών ασυμμετριών.

Οι αριθμητικές προτάσεις του βιβλιου VIII και οι αριθμητικές αποδείξεις τετραγωνικής ασυμμετρίας οφείλονται εξ ολοκλήρου στον Αρχύτα και τους μαθητές του και (με πιθανή εξαίρεση μόνο της αριθμητικής Πρότασης VIII.8) χρονικά τοποθετούνται **ΜΕΤΑ** τις ανθυφαιρετικές αποδείξεις των Θεόδωρου και Θεαίτητου, οι οποίες με τη σειρά τους βρίσκονται σε άμεση, αδιάσπαστη συνέχεια των ανθυφαιρετικών μεθόδων και ανακαλύψεων των Πυθαγορείων.
Διότι ο μεν Θεόδωρος δεν θα μπορούσε να ασχολείται με μερικές, κατά περίπτωση, αποδείξης τετραγωνικών ασυμμετριών, αν υπήρχε κάποια γενική απόδειξη του Αρχύτα. Άρα μεά τους Πυθαγόρεους έρχεται άμεσα ο Θεόδωρος.
Ο Θεαίτητος τώρα είχε την ιδέα της γενικής απόδειξης τετραγωνικής ασυμμετρίας κατά την διάρκεια του μαθήματος του Θεόδωρου. Μπορεί ο Knorr να παρατηρεί ότι η ίδια η απόδειξη τη Πρότασης του Θεαίτητου να ήλθε κάπως αργότερα, αλλά γνωρίζουμε ότι όταν ένας μαθηματικός έχει συλλάβει την γενική ιδέα απόδειξης μιας Πρότασης, εργάζεται αμέσα για την υπολοίησή της. Και πάντως, η ιδέα της απόδειξης σχετίζονταν με την περιοδική ανθυφαίρεση και ήταν παντελώς ξένη προς την αριθμητική μέθοδο των Βιβλίων VII και VIII των *Στοιχείων*. Άρα μετά τις αποδείξεις του Θεόδωρου το επομενο βήμα είναι η απόδειξη της παλινδρομικής περιοδικότητος της ανθυφαίρεσης, και άρα βεβαίως της ασυμμετρίας των α,β, αν $\alpha^2=N\cdot\beta^2$, και Ν αριθμός όχι τετράγωνος.
Τώρα θα εξετάσουμε ποια είναι τα επόμενα βήματα.
Είναι καλά γνωστό ότι ο Αριστοτέλης στα *Αναλυτικά Πρότερα* 41a26 αναφέρεται σε μια αριθμητική απόδειξη ασυμμετρίας της διαμέτρου προς την πλευρά τετραγώνου, κατά την οποία δημιουργείται άτοπο της μορφής τα άρτια γίνοναι περιττά. Και ακόμη είναι γνωστή μια απόδειξη αυμμετρίας της διαμέτρου με ην ονομασία Πρόταση Χ.117, διότι εμφανίζονταν ως μεταγενέσερη προσθήκη ως η τελευταία Πρόταση στο βιβλίο Χ. των Στοιχείων. Η απόδειξη αυτή έχει παρουσιασθεί στο Κεφάλιο 7.
Η απόδειξη στην ανώνυμη πρόταση Χ.117 ταυτίζεται με τη σύγχρονη-συνήθη αριθμητική μη ανθυφαιρετική απόδειξη της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευράς τετραγώνου. Η απόδειξη που δίδεται στην Χ.117 είναι πολύ απλούστερη των δύο αποδείξεων που είδαμε στο κεφάλαιο 4 (Χ.117a, και αυτή του Αλέξανδρου) κατά το ότι πραγματοποιείαι χωρίς τη χρήση των Προτάσεων Αρχύτα και βιβλίου VIII, ούτε της Πρότασης VII.27 και με αναγωγή στο άτοπο 'τα περιττά είναι άρτια'. Το γεγονός ότι ο Αλεξανδρος ο Αφροδισιεύς επικαλείται , προκειμένου να ερμηνεύσει το χωρίο του Αριστοτέλη, τη διαφορετική και πιο πολύπλοκη απόδειξη, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 4, δείχνει ότι η απόδειξη στην Χ.117 δεν ήταν διαθέσιμη στον Αλέξανδρο, και άρα ούτε και στον Αριστοτέλη, και πολύ πιθανόν θα πρέπει να αποδοθεί στον Θέωνα τον Αλεξανδρέα και άρα η

X.117 έρχεται τρίτη χρονικά μετά τις δύο αποδείξεις που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 5, και οι οποίες είναι εμφανώς ειδικεύσεις γενικοτέρων αποδείξεων.
Αυτό σημαίνει ότι η απόδειξη την οποία επικαλείται ο Αλέξανδρος πολύ πιθανόν είναι ακριβώς εκείνη την οποία έχει κατά νού ο Αριστοτέλης όταν συσχετίζει την ασυμμετρία διαμέτρου με το ότι τα αρτια γίνονται περιττά.
Εφόσον όμως η ειδική απόδειξη για την διάμετρο τετραγώνου είναι στην πραγματικότητα ειδίκευση γενικής απόδειξης της Πρότασης Θεαίτητου (όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 5), έπεται ότι
και η αριθμητική απόδειξη της Πρότασης Θεαίτητου ήταν ηδη γνωστή στον Αριστοτέλη.
Η απόδειξη όμως αυτή, όπως εξηγήθηκε παραπάνω έπεται της ανθυφαιρετικής πόδειξης από τον ίδιο τον Θεαίτητο.
Οι αριθμητικές αυτές αποδείξεις δεν είναι δυνατόν παρά να οφείλονται στον ίδιο τον Αρχύτα ή/και τους μαθητές του (μεταξύ των οποίων οι Εύδοξος και Μέναιχμος), οι οποίοι και θα ανέπτυξαν σε σύντομο χρονικό διάστημα
τις Προτάσεις του Βιβλιου VIII (ιδίως τις VIII.6,7,14), οι οποίες είναι αναγκαίες για την αριθμητική απόδειξη της Πρότασης Θεαίτητου, στο πρότυπο της Αρχύτειας Πρότασης (και της VIII.8), με βάση την θεμελιώδη Πρόταση VII.27.
Είναι πολύ πιθανό να συνέβησαν τα εξής μετά την απόδειξη της Πρότασης Θεαίητου από τον ίδιο τον Θεαίτητο:
--ο Αρχύτας και οι μαθητές του συνειδητοποίηασν
ότι η Πρόταση του Αρχύτα οδηγεί πολύ εύκολα σε απόδειξη της Αρχύτειας ασυμμετρίας.
--Και ότι και η Πρόταση του Θεαίτητου μπορεί ν' αποδειχθεί με μια αριθμητική-μουσική Πρόταση, την VIII.6 (=VIII.7=VIII.14=Πρόταση 2 της Κατατομής Κανόνος), επίσης συνέπεια της θεμελιώδους Πρότασης VII.27. Αυή εξειδικευόμενη για N=2 είναι ακριβώς η απόδειξη της ασυμμετρίας της διαμέτρου, όπως η X.117a.
Σχηματικά:

Πρόταση Αρχύτα VIII.8 (από VII.27)	
	Ανθυφαιρετική απόδειξη Πρότασης Θεαίτητου

Πρόταση Αρχύτα VIII.8 (από VII.27)	Πρόταση VIII.6.7,14 X.**117a**
Αριθμητική απόδειξη Ασυμμετρία τεραγωνικών επιμορίων	Αριθμητική απόδειξη Πρότασης Θεαίτητου

--Σύντομα μετά οι ίδιοι μαθητές του Αρχύτα συνειδητοποίησαν ότι δεν χρειάζονται οι ενδιάμεσες Προτάσεις του βιβλίου VIII, οι οποίες χρησιμοποιούν την VII.27, αλλά η ιδια η θεμελιώδης Πρόταση VII.27 είναι σε θέση να δώσει με τον ίδιο τρόπο τις δύο αριθμηικές αποδείξεις ασυμμερίας, την Πρόταση του Θεαίτητου και την Αρχύτεια επιμόρια ασυμμερία, ή ακόμη καλύτερα να αποδειχθεί, από την VII.27 σε ενοποιημένη μορφή μια Πρόταση, η οποία περιέχει τις δύο ως ειδικές περιπτώσεις.

Γενικευμένη Πρόταση τετραγωνικής ασυμμετρίας.
Αν α,β ευθύγραμμα τμήματα, Μ,Ν φυσικοί αριθμοί, και $\alpha^2:\beta^2$=Ν:Μ, Ν,Μ σχετικά πρώτοι, και όχι αμφότεροι τετράγωνοι, τότε α,β ασύμμετρα.

Απόδειξη. Έστω α,β σύμμετρα.
Τότε α:β=μ:ν.
Από VII.20-22 μπορούμε να υποθέσουμε ότι μ,ν είναι σχετικά πρώτοι.
Από Χ.9(ε), $\alpha^2:\beta^2=\mu^2:\nu^2$=Μ:Ν,
Από VII,27 μ^2,ν^2 είναι σχετικά πρώτοι.
‘Αρα μ^2=Μ, ν^2=Ν, άτοπο.
Άρα, α,β ασύμμετρα.

Σχηματικά:

Ενοποίηση των δύο αριθμητικων αποδείξεων της Αρχύτειας ασυμμετρίας τεραγωνικών επιμορίων λόγων & της Πρότασης Θεαίτητου σε μια γενική απόδειξη τετραγωνικής ασυμμετρίας **μόνο** με χρήση της VIII.27 και αχρήστευση του βιβλίου VIII (ο Αλέξανδρος αναφέρει την εξειδίκευσγη αυτής για Ν=2)

Ο λόγος για τον οποίο θεωρούμε ότι η χρήση των Προτάσεων του Βιβλίου 8 (VIII.8 και VIII.6= VIII.7=VIII.14) προηγείται της άμεσης χρήσης της Πρότασης VII.27 σε αριθμητικές αποδείξεις τετραγωνικής ασυμμετρίας είναι ο εξής: αν προηγείτο η άμεση χρήση της VII.27, δεν θα υπήρχε καν ανάγκη να χρηχιμοποιηθούν ή ακόμη και να δημιουργηθούν οι Προτάσεις του βιβλίου VIII. Η πιο γενική και οικονομική απόδειξη με την VII.27 προδίδει ένα πιο προηγμένο μαθηματικό επίπεδο από εκείνες με τις Προτάσεις του Βιβλίου VIII.

Αριθμητικές μέθοδοι	**Ανθυφαιρετκές μέθοδοι**
	Πυθαγόρειοι (βιβλίο VII, ιδιαίτερα VII.20-22 και VII.27) θεωρία συμμέτρων μεγέθων, ανθυφαιρετική απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά
Αρχύτας Πρόταση για επιμόριους λόγους (Βοήθιος *Institutio* III.11) (Πρόταση VIII. 8 από VII.27)	
	Θεόδωρος (ανθυφαιρετική απόδειξη μερικών τετραγωνικών ασυμμετριών)
	Θεαίτητος (Πρόταση Θεαίτητου με περιοδική ανθυφαίρεση)
	Πλάτων (*Θεαίτητος, Σοφιστής, Πολιτικός* μίμηση Πρότασης Θεαίτητου στην Διαίρεση και Συναγωγή)

Αρχύτας και μαθητές του Αριθμητικές αποδείξεις ασυμμετρίας (X.117a) με χρήση Βιβλίο VIII (VIII.8, VIII.14), X.9,	
Αρχύτας και μαθητές του απόδειξη Αλέξανδρου (γίνονται τα περιττά ίσα τοις άρτιοις) με χρήση Πρόταση VII.27 και X.9	
Αριστοτέλης *Αναλυτικά Πρότερα* **41a26** (γίνονται τα περιττά ίσα τοις άρτιοις)	
Ευκλείδης (*Στοιχεία*, βιβλία VII, VIII, X.1-9)	
Κατατομή Κανόνος (Προτάσεις 2 και 3)	
Αλέξανδρος Αφροδισιεύς, *εις Αναλυτικά Πρότερα* **260,7-261,28** (γίνονται τα περιττά ίσα τοις άρτιοις)	
Θέων Αλεξανδρεύς, Πρόταση X.117 (τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν)	
Βοήθιος, *Institutio* III.11,IV.2	

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barker, A. (1989). *Greek Musical Writings, Volume II: Harmonic and Acoustic Theory*. United Kingdom: Cambridge University Press

Heath, T.L. (1921). *A History of Greek Mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

Heath, T.L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. I–III (2nd ed.). New York: Dover.

Huffman, A. C. (2005). *Archytas of Tarentum: Pythagorean, Philosopher and Mathematician King*. New York: Cambridge University Press

Fowler, D. (1999). *The Mathematics of Plato's Academy. A new Reconstruction.* Oxford: Clarendon Press

Friedlein, G. (1867). *Boethius, De Institutione Arithmetica Libri II, De institutione Musica Libri V*. edited by Leipzig.

Junge, G. & Thomson, T (1930). *The commentary of Pappus on Book X*. Cambridge: Harvard University Press.

Knorr, W. (1975). *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht: Reidel

Lučic, Z. (2015). *Square Root of 2: The Early Pythagorean Proof, Theodorus's and Theaetetus's Generalizations*. New York: Springer, Science+Business Media, Volume 37, Number 3, 26-32

Mazur, B. (2007). "How Did Theaetetus Prove His Theorem?'' In P. Kalkavage and E. Salem, (Eds.) *The Envisioned Life: Essays in Honor of Eva Brann* (pp. 227—250). Philadelphia: Paul Dry Books.

Mazur, B. (2005). "Πώς απέδειξε ο Θεαίτητος το θεώρημά του;''Περιοδική έκδοση Επικοινωνίας και Διαλόγου στα Μαθηματικά "το φ" (τεύχος 3), σελίδες 34—52.

Negrepontis, S. (2014). The Anthyphairetic *Revolutions* of the Platonic Ideas. *arXiv preprint arXiv:1405.4186*.

Taisbak, C. (1982). *Coloured Quadrangles: A guide to the tenth book of Euclid's Elements,* Copenhagen: Museum Tusculanum Press

Van der Waerden, B. L. (1961). *Science Awakening.* New York: Oxford University Press

Νεγρεπόντης, Στ. (2013-2014), Σημειώσεις μεταπτυχιακών μαθημάτων «Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών και Στοιχεία του Ευκλείδη» και «Πλάτων και Μαθηματικά»

Τα αρχαία κείμενα είναι από τη βάση δεδομένων T.L.G (Musaios)