Η ΘΕΩΡΙΑ RIESZ-FREDHOLM ΓΙΑ ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΔΑΣΗΣ

ΠΑΠΑΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

25 Φεβρουαρίου 2017

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία κυματικής σκέδασης μελετά τα είδη των μεταβολών που υφίσταται ένα κυματικό πεδίο, όταν στο χώρο διάδοσης του βρίσκεται ένα εμπόδιο το οποίο ονομάζεται σκεδαστής. Το φαινόμενο της σκέδασης εμφανίζεται επίσης όταν το μέσο διάδοσης του κυματικού πεδίου είναι μή ομογενές, δηλαδή οι φυσικές παράμετροι είναι συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής. Όταν είναι γνωστό το προσπίπτον στο σκεδαστή κύμα καθώς και οι συνοριακές συνθήκες, που εξαρτόνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή, και αναζητούμε το σκεδασμένο κύμα έχουμε ένα ευθύ πρόβλημα σκέδασης. Ειδάλλως αν ξέρουμε το προσπίπτον και το σκεδασμένο πεδίο και αναζητούμε τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή, έχουμε ένα αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης.

Από μαθηματική άποψη, γενικά, ένα πρόβλημα σκέδασης ανήκει στη περιοχή των προβλημάτων συνοριακών τιμών για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις υπερβολικού τύπου αν και η ακουστική σκέδαση με αρμονική χρονική εξάρτηση (όπου απαλείφεται ο χρόνος) είναι ένα εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz η οποία είναι ελλειπτικού τύπου. Για την «καλή τοποθέτηση» του προβλήματος, εκτός από τις φυσικές συνθήκες που ισχύουν στην επιφάνεια του σκεδαστή, οι οποίες προκύπτουν από τις φυσικές και γεωμετρικές ιδιότητες του, είναι απαραίτητη και μια συνθήκη στο άπειρο (συνθήκη ακτινοβολίας). Ο σκεδαστής μπορεί να είναι μή διαπερατός και να μην εισέρχονται τα κύματα στο εσωτερικό του, ή διαπερατός και να εισέρχονται. Έτσι στη πρώτη περίπτωση έχουμε ένα εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών ενώ στη δεύτερη έχουμε ένα μεταβατικό πρόβλημα και στην επιφάνεια του σκεδαστή πληρούνται κατάλληλες συνθήκες σύνδεσης.

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης όπως και η συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα του προβλήματος σκέδασης αντιμετωπίζονται με χρήση της Θεωρίας Riesz-Fredholm για συμπαγείς τελεστές. Ένα πρόβλημα σκέδασης μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια εξίσωση τελεστών. Οι τελεστές αυτοί ορίζονται με επιφανειακά ολοκληρώματα πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή και έτσι η επίλυση ενός προβλήματος σκέδασης ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης συμπαγών τελεστών. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της ανάλυσης μας είναι τύπου Fredholm με ασθενώς ιδιάζων ή ισχυρώς ιδιάζων πυρήνα. Θα δείξουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις έπειτα από εφαρμογή κατάλληλων τελεστών η ολοκληρωτική εξίσωση μετασχηματίζεται στη μορφή

$$(I - A)\phi = f$$

όπου A ένας συμπαγής ολοκληρωτικός τελεστής και f είναι στοιχείο ενός χώρου Banach.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ξεκινάμε παραθέτοντας τις βασικές έννοιες και ιδιότητες των συμπαγών τελεστών και ιδιαίτερα των ολοκληρωτικών τελεστών. Επίσης παρουσιάζονται ορισμένα στοιχεία για το φάσμα ενός συμπαγούς τελεστή καθώς και για τους τελεστές Hilbert-Schmidt.Για περισσότερες πληροφορίες μπορεί κάποιος να ανατρέξει στα βιβλία [6],[9],[19]. Συνεχίζουμε στο τρίτο κεφάλαιο και παρουσιάζουμε τη Θεωρία Riesz για τις γραμμικές εξισώσεις τελεστών δευτέρου είδους και έπειτα αναλύουμε τη Θεωρία Fredholm για τα δυϊκά συστήματα βασιζόμενοι κυρίως στο βιβλίο [9] των Colton και Kress. Στο τέταρτο κεφάλαιο ορίζουμε συνοριακές συνθήκες και διατυπώνουμε τα βασικά προβλήματα της ακουστικής σκέδασης. Για περισσότερες πληροφορίες σε θέματα σκέδασης μπορεί κανείς να ανατρέξει στα βιβλία [1],[9],[11]. Στο τελευταίο κεφάλαιο ασχολούμαστε με την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης ενός προβλήματος σκέδασης, στοιχεία που είναι απαραίτητα για την «καλή τοποθέτηση» του προβλήματος. Για την ύπαρξη λύσης ορίζουμε δυναμικά απλού και διπλού στρώματος ενώ για τη μοναδικότητα δινούμε το πολύ βασικό κριτήριο του 'Rellich' και ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο κάνοντας τη σύνδεση με τη Θεωρία Riesz-Fredholm που παρουσιάσαμε εκτενώς στο τρίτο κεφάλαιο (περισσότερα μπορεί να βρει κανείς στο βιβλίο [9]).

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούμε να δώσουμε και για ηλεκτρομαγνητικά κύματα (βιβλία [4],[14],[15]), για ελαστικά, για θερμοελαστικά αλλά και για ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε χειρόμορφο περιβάλλον (βιβλίο [18]). Η θεωρία σκέδασης βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορους τομείς της εφαρμοσμένης έρευνας κι ένα κλασικό παράδειγμα είναι το γνωστό σε όλους υπερηχογράφημα το οποίο βασίζεται στην επίλυση ενός αντίστροφου προβλήματος ακουστικής σκέδασης.

Κεφάλαιο 2

ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Θα ξεκινήσουμε την ενότητα αυτή αναλύοντας μια από τις πιο σημαντικές κατηγορίες φραγμένων γραμμικών τελεστών, τους λεγόμενους συμπαγείς τελεστές. Η κλάση των γραμμικών τελεστών από ένα χώρο με νόρμα X σε έναν άλλο χώρο με νόρμα Y θα συμβολίζεται με $L(X,Y)$.

Ορισμός 2.1.1.

- *Θα λέμε ότι ένας τελεστής $T \in L(X,Y)$ είναι συμπαγής αν στέλνει κάθε φραγμένο υποσύνολο του X σε ένα σχετικά συμπαγές υποσύνολο του Y.*
- *Ένα σύνολο $U \subset X$ θα λέγεται σχετικά συμπαγές αν η κλειστή του θήκη είναι συμπαγής, δηλαδή αν κάθε ακολουθία στο U έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία στο X.*

Από αυτό προκύπτει και το παρακάτω βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.2. *Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη ακολουθία $(\phi_n) \in X$ η ακολουθία $(T\phi_n) \in Y$ περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Θεώρημα 2.1.3. *Αν ένας γραμμικός τελεστής είναι συμπαγής τότε θα είναι και φραγμένος.*

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι ο συμπαγής γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ δεν είναι φραγμένος. Τότε υπάρχει ακολουθία $(\phi_n) \in X$ τέτοια ώστε $\| \phi_n \| = 1$ και $\| T\phi_n \| \geq n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Αφού λοιπόν ο T είναι συμπαγής θα υπάρχει υπακολουθία $\phi_{n(k)}$ τέτοια ώστε $T\phi_{n(k)} \to \psi \in Y$ για $k \to \infty$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση πως $\| T\phi_{n(k)} \| \geq n(k) \to \infty$ για $k \to \infty$. Συνεπώς ο T είναι φραγμένος. $\square$

Θεώρημα 2.1.4. *Κάθε γραμμικός συνδυασμός από συμπαγείς γραμμικούς τελεστές είναι κι αυτός ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής.*

Απόδειξη.

Ας είναι $A, B : X \to Y$ συμπαγείς γραμμικοί τελεστές και έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Τότε κάθε φραγμένη ακολουθία $(\phi_n) \in X$ περιέχει μια υπακολουθία $\phi_{n(k)}$ τέτοια ώστε $A\phi_{n(k)}$ και $B\phi_{n(k)}$ να συγκλίνουν. Άρα $(\alpha A + \beta B)\phi_{n(k)} = \alpha A\phi_{n(k)} + \beta B\phi_{n(k)}$ θα συγκλίνει. Επομένως $\alpha A + \beta B$ συμπαγής γραμμικός τελεστής. $\square$

Θεώρημα 2.1.5. *Ας είναι X, Y, Z τρεις χώροι με νόρμα και $A : X \to Y$, $B : Y \to Z$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Τότε η σύνθεση $BA : X \to Z$ είναι συμπαγής αν ένας από τους A ή B είναι συμπαγής.*

Απόδειξη.

Έστω (ϕ_n) μια φραγμένη ακολουθία στον $X :\| \phi_n \| \leq C$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.Αν A είναι συμπαγής, τότε υπάρχει μια υπακολουθία $\phi_{n(k)}$ τέτοια ώστε $A\phi_{n(k)} \to \psi \in Y, k \to \infty$. Αφού ο B είναι φραγμένος, οπότε και συνεχής, παίρνουμε πως $(BA)\phi_{n(k)} = B(A\phi_{n(k)}) \to B\psi \in Z, k \to \infty$. Άρα ο BA είναι συμπαγής.

Αν τώρα A είναι φραγμένος και B συμπαγής, η ακολουθία $(A\phi_n)$ στο Y είναι φραγμένη γιατί $\| A\phi_n \| \leq \| A \| \| \phi_n \| \leq \| A \| C$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, θα υπάρχει υπακολουθία $(\phi_{n(k)})$ τέτοια ώστε $(BA)\phi_{n(k)} = B(A\phi_{n(k)}) \to \chi \in Z, k \to \infty$. Άρα πάλι έχουμε ότι ο BA είναι συμπαγής τελεστής.

□

Θεώρημα 2.1.6. *Έστω X χώρος με νόρμα και Y ένας χώρος Banach. Έστω επίσης ότι η ακολουθία $A_n : X \to Y$ η οποία αποτελείται από συμπαγείς γραμμικούς τελεστές συγκλίνει ομοιόμορφα στο γραμμικό τελεστή $A : X \to Y$, δηλαδή, $\| A_n - A \|_\infty \to 0, \quad n \to \infty$. Τότε ο A είναι συμπαγής τελεστής.*

Απόδειξη.

Έστω (ϕ_m) είναι μια φραγμένη ακολουθία στο $X :\| \phi_m \| \leq C$ για όλα τα $m \in \mathbb{N}$. Επειδή οι A_n είναι συμπαγείς μπορούμε να επιλέξουμε μέσω του διαγωνίου επιχειρήματος μια υπακολουθία $(\phi_{m(k)})$ τέτοια ώστε $(A_n\phi_{m(k)})$ να συγκλίνει για κάθε n φιξαρισμένο με $k \to \infty$. Συγκεκριμένα επειδή A_1 συμπαγής μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία $(\phi_{m_1(k)})$ τέτοια ώστε η $(A_1\phi_{m_1(k)})$ να συγκλίνει για $k \to \infty$. Αφού η ακολουθία $(\phi_{m_1(k)})$ είναι φραγμένη και ο A_2 συμπαγής, μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία $(\phi_{m_2(k)})$ της $(\phi_{m_1(k)})$ έτσι ώστε η $(A_2\phi_{m_2(k)})$ να συγκλίνει για $k \to \infty$. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία καταλήγουμε σε ένα πίνακα $(\phi_{m_n(k)})$ τέτοιον ώστε η κάθε γραμμή

$(\phi_{m_n(k)})$ να είναι υπακολουθία της προηγούμενης γραμμής $(\phi_{m_{n-1}(k)})$ και κάθε ακολουθία $(A_n\phi_{m_n(k)})$ να συγκλίνει για $k \to \infty$. Για την ακολουθία της διαγωνίου $\phi_{m(k)} := \phi_{m_k(k)}$ θα έχουμε πως η $(A_n\phi_{m(k)})$ συγκλίνει για όλα τα $k \to \infty$ και όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Έστω τώρα τυχαίο $\varepsilon > 0$. Επειδή $\| A_n - A \| \to 0, \quad n \to \infty$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\| A_{n_0} - A \| < \frac{\varepsilon}{3C}$. Καθώς $(A_{n_0}\phi_{m(k)})$ συγκλίνει θα υπάρχει $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ για το οποίο

$$\| A_{n_0}\phi_{m(k)} - A_{n_0}\phi_{m(l)} \| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad k, l \geq N(\varepsilon).$$

Αλλά τότε για όλα τα $k, l \geq N(\varepsilon)$ παίρνουμε

$$\| A\phi_{m(k)} - A\phi_{m(l)} \| \leq \| A\phi_{m(k)} - A_{n_0}\phi_{m(k)} \|$$

$$+ \| A_{n_0}\phi_{m(k)} - A_{n_0}\phi_{m(l)} \| + \| A_{n_0}\phi_{m(l)} - A\phi_{m(l)} \| < \varepsilon.$$

Έτσι $(A\phi_{m(k)})$ είναι μια ακολουθία Cauchy και άρα θα συγκλίνει στον χώρο Banach Y. Συνεπώς ο A είναι συμπαγής.

□

Σημείωση: Αν γνωρίζαμε ότι ο A είναι φραγμένος τότε θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι $\| A_n - A \| \to 0, \quad n \to \infty$, όπου $\| \cdot \|$ είναι η νόρμα των φραγμένων τελεστών. Η απόδειξη είναι η ίδια, αφού παρατηρούμε ότι :

$$\| A_n - A \| \to 0, \quad n \to \infty \Leftrightarrow \| A_n(x) - A(x) \| \leq \| A_n - A \| \| x \|$$

$$\Rightarrow \| A_n(x) - A(x) \| \leq \| A_n - A \| C,$$

όπου $\| x \| < C$. Δηλαδή ο A_n συγκλίνει ομοιόμορφα στον A στην μπάλα $B(0, C)$ το οποίο είναι κι εκείνο που χρησιμοποιούμε στην απόδειξη.

Θεώρημα 2.1.7. *Αν $A : X \to Y$ είναι ένας φραγμένος τελεστής με πεπερασμένης διάστασης εικόνα $A(X)$, τότε ο A είναι συμπαγής τελεστής.*

Απόδειξη.

Έστω ϕ_n φραγμένη ακολουθία στον $X :\| \phi_n \| \leq C$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Τότε, αφού $\| A\phi_n \| \leq \| A \| \| \phi_n \| \leq \| A \| C$ η ακολουθία $(A\phi_n)$ είναι φραγμένη στον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο $A(X)$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass κάθε φραγμένη ακολουθία σε ένα πεπερασμένης διάστασης χώρο με νόρμα περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Οπότε ο A θα είναι συμπαγής. $\square$

Λήμμα 2.1.8. *(Riesz) Έστω X χώρος με νόρμα, $U \subsetneqq X$ είναι κλειστός υπόχωρος και $\alpha \in (0,1)$. Τότε υπάρχει ένα στοιχείο $\psi \in X$ με $\| \psi \| = 1$ τέτοιο ώστε*

$$\| \psi - \phi \| \geq \alpha$$

για όλα τα $\phi \in U$.

Απόδειξη.

Αφού $U \neq X$, υπάρχει ένα στοιχείο $f \in X$ με $f \notin U$ και επειδή U είναι κλειστό θα έχουμε

$$\beta := \inf_{\phi \in U} \| f - \phi \| > 0.$$

Ακόμα μπορούμε να επιλέξουμε $g \in U$ τέτοιο ώστε

$$\beta \leq \| f - g \| \leq \frac{\beta}{\alpha}.$$

Τώρα ορίζουμε

$$\psi := \frac{f - g}{\| f - g \|}.$$

Τότε $\| \psi \| = 1$ και για όλα τα $\phi \in U$ έχουμε

$$\| \psi - \phi \| = \frac{1}{\| f - g \|} \| f - (g + \| f - g \| \phi) \| \geq \frac{\beta}{\| f - g \|} \geq \alpha$$

καθώς $g + \| f - g \| \phi \in U$.

$\square$

Θεώρημα 2.1.9. *Ο ταυτοτικός τελεστής $I : X \to X$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι ο I είναι συμπαγής και ο X όχι πεπερασμένης διάστασης. Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\phi_1 \in X$ με $\| \phi_1 \|= 1$. Τότε $U_1 := span(\phi_1)$ είναι πεπερασμένης διάστασης, οπότε και κλειστός υπόχωρος του X. Από Λήμμα 2.1.8 έχουμε ότι υπάρχει ένα $\phi_2 \in X$ με $\| \phi_2 \|= 1$ και $\| \phi_2 - \phi_1 \|\geq 1/2$. Θεωρούμε τώρα $U_2 := span(\phi_1, \phi_2)$. Πάλι από Λήμμα 2.1.8 θα έχουμε ότι υπάρχει $\phi_3 \in X$ με $\| \phi_3 \|= 1$ και $\| \phi_3 - \phi_1 \|\geq 1/2$, $\| \phi_3 - \phi_2 \|\geq 1/2$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία, φτιάχνουμε μια ακολουθία (ϕ_n) με ιδιότητες $\| \phi_n \|= 1$ και

$$\| \phi_n - \phi_m \|\geq 1/2, \qquad n \neq m.$$

Αυτό δηλώνει πως η φραγμένη ακολουθία (ϕ_n) δεν περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τη συμπάγεια του ταυτοτικού τελεστή.Συνεπώς αν ο ταυτοτικός τελεστής είναι συμπαγής , ο X θα είναι πεπερασμένης διάστασης.

Το αντίστροφο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.7.

□

Από το θεώρημα 2.1.7 έχουμε επίσης ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος 2.1.3. Δηλαδή ένας φραγμένος τελεστής δεν είναι αναγκαστικά και συμπαγής.

2.2 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Έστω $G \subset \mathbb{R}^2$ είναι Jordan-μετρήσιμο (με μη μηδενικό μέτρο) και συμπαγές σύνολο. Έστω επίσης ότι ο $C(G)$ είναι ο χώρος Banach των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων που ορίζονται στο G εφοδιασμένος με τη maximum νόρμα

$$\| \phi \|_\infty := \max_{x \in G} | \phi(x) | .$$

Ορίζουμε τώρα τον ολοκληρωτικό τελεστή $A : C(G) \to C(G)$ ως εξής

$$(A\phi)(x) := \int_G K(x,y)\phi(y)dy, \qquad x \in G, \tag{2.1}$$

όπου $K : G \times G \to \mathbb{C}$ είναι ένας συνεχής πυρήνας.

Θεώρημα 2.2.1. *Ο ολοκληρωτικός τελεστής A με συνεχή πυρήνα είναι συμπαγής τελεστής στον $C(G)$.*

Απόδειξη.

Επιλέγουμε μια ακολουθία υποδιαιρέσεων

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Delta_{\mathrm{i,n}}}$$

τέτοια ώστε τα μετρήσιμα ανοικτά σύνολα $\Delta_{i,n}$ να είναι ξένα μεταξύ τους. Δηλαδή $\Delta_{i,n} \cap \Delta_{j,n} = \varnothing, i \neq j$. Επίσης οι διάμετροι ικανοποιούν

$$\max_{1 \le i \le n} (diam \Delta_{i,n}) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{2.2}$$

Παίρνουμε ένα $y_{i,n}$ από κάθε ένα $\Delta_{i,n}$ και θεωρούμε την ακολουθία τελεστών $A_n : C(G) \to C(G)$ ορισμένη ως

$$(A_n\phi)(x) := \sum_{i=1}^{n} K(x, y_{i,n}) \int_{\Delta_{i,n}} \phi(y)dy.$$

Οι A_n είναι φραγμένοι:

$$\| A_n \|_\infty \leq \max_{x,y\in G} | K(x,y) | \int_G dy$$

και έχουν πεπερασμένης διάστασης εικόνα

$$A_n(C(G)) = span(K(\cdot, y_{i,n}), \qquad i = 1, ..., n).$$

Οπότε από θεώρημα 2.1.7 έχουμε ότι οι τελεστές A_n είναι συμπαγείς.

Ορίζουμε $K_n := G \times G \to \mathbb{C}$ ως

$$K_n(x,y) = K(x, y_{i,n}), \qquad x \in G, \qquad y \in \Delta_{i,n}.$$

Επομένως μπορούμε να ξαναγράψουμε τους A_n με την εξής μορφή

$$(A_n\phi)(x) = \int_G K_n(x,y)\phi(y)dy.$$

Καθώς K είναι ομοιόμορφα συνεχής στο συμπαγές σύνολο $G \times G$, για $\epsilon > 0$, έχουμε από την (2.2) ότι υπάρχει $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$| K(x,y) - K_n(x,y) | < \frac{\epsilon}{\int_G dy}, \qquad x, y \in G, \qquad n \geq N(\epsilon).$$

Τότε

$$| (A\phi)(x) - (A_n\phi)(x) | \leq \epsilon \| \phi \|_\infty, \qquad x \in G$$

και άρα $\| A - A_n \|_\infty \leq \epsilon$ για όλα τα $n \geq N(\epsilon)$. Συνεπώς από το Θεώρημα 2.1.6 ο τελεστής A είναι συμπαγής.

□

Τώρα θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τελεστή A που ορίζεται μέσω της (2.1) όπου ο πυρήνας K είναι ασθενώς ιδιάζων (weakly singular kernel).

Ορισμός 2.2.2. *Ένας πυρήνας K θα λέγεται ασθενώς ιδιάζων (Weakly Singular Kernel) αν ο K ορίζεται και είναι συνεχής για όλα τα $x, y \in G$ με $x \neq y$, δηλαδή στο $G \setminus \{(x,y) : x = y\}$, και επίσης υπάρχουν θετικές σταθερές M και $\alpha \in (0, 2]$ τέτοιες ώστε για κάθε $x, y \in G$ με $x \neq y$ να έχουμε*

$$| K(x,y) | \leq M \mid x - y \mid^{\alpha - 2} . \tag{2.3}$$

Με $| x |$ ορίζουμε την ευκλείδια νόρμα ενός σημείου $x \in \mathbb{R}^2$.

Θεώρημα 2.2.3. *Ο ολοκληρωτικός τελεστής A με ασθενώς ιδιάζων πυρήνα είναι συμπαγής τελεστής στον $C(G)$.*

Απόδειξη.

Το ολοκλήρωμα στην (2.1) που ορίζει τον A υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα αφού
$$| K(x,y)\phi(y) | \leq M \parallel \phi \parallel_\infty | x-y |^{\alpha-2}$$
και
$$\int_G | x-y |^{\alpha-2} \, dy \leq 2\pi \int_0^d \rho^{\alpha-2} \varrho d\varrho = \frac{2\pi}{\alpha} d^\alpha$$
όπου έχουμε κάνει χρήση πολικών συντεταγμένων με αρχή το x και d τη διάμετρο του G.

Τώρα ορίζουμε την κατά τμήματα γραμμική συνεχή συνάρτηση $\kappa_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, ως
$$\kappa_n(t) := \begin{cases} 0 \quad , & 0 \leq t \leq \frac{1}{2n} \\ 2nt-1, & \frac{1}{2n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 \quad , & \frac{1}{n} \leq t < \infty \end{cases}$$
Επίσης ορίζουμε τους συνεχείς πυρήνες $K_n : G \times G \to \mathbb{C}$ ως
$$K_n(x,y) := \begin{cases} \kappa_n(| x-y |) K(x,y), & x \neq y, \\ 0 \quad , & x = y. \end{cases}$$
Οι αντίστοιχοι ολοκληρωτικοί τελεστές $A_n : C(G) \to C(G)$ είναι συμπαγείς από το Θεώρημα 2.2.1. Έτσι έχουμε
$$| (A\phi)(x) - (A_n\phi)(x) | = \left| \int_G \left[K(x,y) - K_n(x,y) \right] \phi(y) dy \right|$$
$$\leq \int_{G_{x,1/n}} | K(x,y) | \| \phi \|_\infty \, dy$$

$$\leq M \parallel \phi \parallel_\infty 2\pi \int_0^{1/n} \rho^{\alpha-2} \varrho d\varrho$$

$$= M \parallel \phi \parallel_\infty \frac{2\pi}{\alpha} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha, \qquad x \in G,$$

όπου $G_{x,1/n} := \{y \in G \backslash \mid y - x \mid \leq 1/n\}$. Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι $A_n\phi \to A\phi, \ \ n \to \infty$, ομοιόμορφα και άρα $A\phi \in C(G)$. Ακόμα, έπεται ότι

$$\parallel A - A_n \parallel_\infty \leq M \frac{2\pi}{\alpha} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \to 0, \qquad n \to \infty,$$

και συνεπώς ο A είναι συμπαγής βάση του Θεωρήματος 2.1.6.

□

Τα θεωρήματα 2.2.1 και 2.2.3 μπορούν να επεκταθούν και σε Ευκλείδιους χώρους πολλών διαστάσεων $\mathbb{R}^s$, όπου η συνθήκη (2.3) θα αντικατασταθεί από $\mid K(x,y) \mid \leq M \mid x - y \mid^{\alpha - s}$.

Η συμπάγεια των ολοκληρωτικών τελεστών μπορεί να δειχθεί και από το ακόλουθο Θεώρημα Arzela-Ascoli .

Θεώρημα 2.2.4. *(Arzela-Ascoli) Έστω $G \subset \mathbb{R}^s$ ένα συμπαγές σύνολο. Ένα σύνολο $K \subset C(G)$ είναι σχετικά συμπαγές (ως προς την maximum νόρμα στο $C(G)$) αν και μόνο αν είναι φραγμένο και ισοσυνεχές. Δηλαδή υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε*

$$\mid \phi(x) \mid \leq c$$

για όλα τα $x \in G$ και όλα τα $\phi \in K$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mid \phi(x) - \phi(y) \mid < \varepsilon$$

για όλα τα $x, y \in G$ με $\mid x - y \mid < \delta$ και όλα τα $\phi \in K$.

Απόδειξη.

Έστω K φραγμένο και ισοσυνεχές και έστω ϕ_n μια ακολουθία στο K. Επιλέγουμε τώρα μια ακολουθία $(\chi_m) \in G$ η οποία είναι και πυκνή στο G. Αφού η ακολουθία $(\phi_n(\chi_m))$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$ για κάθε χ_m, από τη συνήθη διαδικασία διαγωνοποίησης (που χρησιμοποιήσαμε και για την απόδειξη του θεωρήματος 2.1.6) μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία $(\phi_{n(k)})$ τέτοια ώστε $(\phi_{n(k)}(\chi_m))$ να συγκλίνει στο $\mathbb{C}$ καθώς $k \to \infty$ για κάθε χ_m. Επειδή το σύνολο (χ_m) είναι πυκνό στο G, για δοσμένο $\varepsilon > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε κάθε $\chi \in G$ να έχει απόσταση μικρότερη από δ, από τουλάχιστον ένα στοιχείο χ_j του συνόλου $\chi_1, ..., \chi_m$. Μετά επιλέγουμε $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$| \phi_{n(k)}(\chi_j) - \phi_{n(l)}(\chi_j) | < \varepsilon, \qquad k, l \geq N(\varepsilon)$$

για όλα τα $j = 1, ..., m$. Μέσω της ισοσυνέχειας παίρνουμε πως

$$| \phi_{n(k)}(\chi) - \phi_{n(l)}(\chi) | \leq | \phi_{n(k)}(\chi) - \phi_{n(k)}(\chi_j) |$$

$$+ | \phi_{n(k)}(\chi_j) - \phi_{n(l)}(\chi_j) | + | \phi_{n(l)}(\chi_j) - \phi_{n(l)}(\chi) | < 3\varepsilon$$

για όλα τα $k, l \geq N(\varepsilon)$ και όλα τα $\chi \in G$ κάτι το οποίο μας δίνει την ομοιόμορφη σύγκλιση, υπό τη maximum νόρμα, της υπακολουθίας $(\phi_{n(k)})$. Άρα το K είναι σχετικά συμπαγές.

Αντίστροφα, ας είναι το K σχετικά συμπαγές. Για δοσμένο $\varepsilon > 0$ θα υπάρχουν συναρτήσεις $\phi_1, ..., \phi_m \in K$ τέτοιες ώστε

$$\min_{1 \leq j \leq m} \| \phi - \phi_j \|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

για όλα τα $\phi \in K$. Ειδάλλως επαγωγικά μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία (ϕ_n) στο K με την ιδιότητα

$$\| \phi_n - \phi_l \|_\infty \geq \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n \neq l$$

από την οποία προκύπτει ότι η ακολουθία (ϕ_n) δεν περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία κάτι που έρχεται σε αντίθεση με τη σχετική συμπάγεια του K. Καθώς κάθε μια $\phi_1, ..., \phi_m$ είναι ομοιόμορφα συνεχής , υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$| \phi_j(x) - \phi_j(y) | < \frac{\varepsilon}{3}$$

για όλα τα $x, y \in G$ με $| x - y |< \delta$ και όλα τα $j = 1, ..., m$. Τότε για όλα τα $\phi \in K$, επιλέγουμε j έτσι ώστε

$$\| \phi - \phi_j \|_\infty = \min_{1 \leq i \leq m} \| \phi - \phi_i \|_\infty,$$

και καταλήγουμε στο

$$| \phi(x) - \phi(y) |\leq| \phi(x) - \phi_j(x) | + | \phi_j(x) - \phi_j(y) | + | \phi_j(y) - \phi(y) |< \varepsilon$$

για όλα τα $x, y \in G$ με $| x - y |< \delta$. Συνεπώς το K είναι ισοσυνεχές. Τέλος, είναι προφανές ότι το σχετικά συμπαγές σύνολο K είναι και φραγμένο.

$\square$

2.3 ΦΑΣΜΑ ΣΥΜΠΑΓΟΥΣ ΤΕΛΕΣΤΗ

Τώρα θα αναφέρουμε μερικά στοιχεία για το Φάσμα ενός συμπαγούς τελεστή. Θεωρούμε ότι οι παρακάτω διανυσματικοί χώροι είναι επί του $\mathbb{R}$. Αντίστοιχα θα ισχύουν και για χώρους επί του $\mathbb{C}$. Έστω E ένας χώρος Banach.

Ορισμός 2.3.1. *Έστω A γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Το επιλύον σύνολο του είναι:*

$$p(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (A - \lambda I) \ \text{αμφιμονοσήμαντος από τον } E \text{ επί του } E\}$$

Το φάσμα $\sigma(A)$ είναι το συμπλήρωμα του επιλύοντος συνόλου, δηλαδή $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus p(A)$.

Θα λέμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή και θα γράφουμε $\lambda \in \iota\delta(A)$ αν $N(A - \lambda I) \neq 0$. Ο $N(A - \lambda I)$ θα καλείται ιδιόχωρος που αντστοιχεί στον λ, όπου $N(A)$ συμβολίζουμε τον πυρήνα του τελεστή A.

Πρόταση 2.3.2. *Το φάσμα $\sigma(A)$ είναι ένα συμπαγές σύνολο με*

$$\sigma(A) \subset [-\parallel A \parallel, +\parallel A \parallel].$$

Απόδειξη.

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\mid \lambda \mid > \parallel A \parallel$. Θα δείξουμε ότι ο $A - \lambda I$ είναι αμφιμονοσήμαντος και επί, γεγονός από το οποίο θα συμπεράνουμε ότι ισχύει

$$\sigma(A) \subset [-\parallel A \parallel, +\parallel A \parallel].$$

Για δεδομένο $f \in E$ η εξίσωση $A\phi - \lambda\phi = f$ έχει μοναδική λύση, διότι αυτή γράφεται $\phi = \frac{1}{\lambda}(A\phi - f)$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach.

Θα δείξουμε τώρα ότι το $p(A)$ είναι ανοιχτό. Έστω $\lambda_0 \in p(A)$, για δεδομένα $\lambda \in \mathbb{R}$(κοντά στο λ_0) και $f \in E$ ζητούμε να λύσουμε την

$$A\phi - \lambda\phi = f \tag{2.4}$$

Αλλά η (2.4) γράφεται

$$A\phi - \lambda_0\phi = f + (\lambda - \lambda_0)\phi$$

δηλαδή,

$$\phi = (A - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)\phi] \tag{2.5}$$

Εφαρμόζοντας ξανά το Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach βλέπουμε ότι η (2.5) έχει μοναδική λύση αν $\mid \lambda - \lambda_0 \mid \parallel (A - \lambda_0 I)^{-1} \parallel < 1$

□

Θεώρημα 2.3.3. *Έστω E γραμμικός χώρος με νόρμα τέτοιος ώστε*

$$\{x \in E \ : \ \|x\| \leq 1\}$$

συμπαγές. Τότε ο E είναι πεπερασμένης διάστασης.

Απόδειξη.

Με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι ο E είναι απείρου διαστάσεως. Τότε υπάρχει ακολουθία υποχώρων $\{E_n\}$ πεπερασμένης διάστασης τέτοιοι ώστε $E_{n-1} \subsetneqq E_n$. Από το Λήμμα 2.1.8 (Riesz) έχουμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία (ϕ_n) με $\phi_n \in E$, $\| \phi_n \| = 1$ και $dist(\phi_n, E_{n-1}) \geq 1/2$. Ειδικότερα $\| \phi_n - \phi_m \| \geq 1/2$ για $m < n$. Άρα η ακολουθία (ϕ_n) δεν έχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία το οποίο είναι άτοπο καθώς το $\{x \in E : \| x \| \leq 1\}$ είναι ένα συμπαγές σύνολο.

□

Λήμμα 2.3.4. *Έστω (λ_n) με $n \geq 1$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών διαφορετικών μεταξύ τους τέτοια ώστε $\lambda_n \to \lambda$ και $\lambda_n \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ για όλα τα n. Τότε θα έχουμε $\lambda = 0$. (Με άλλα λόγια όλα τα σημεία του $\sigma(A) \setminus \{0\}$ είναι μεμονωμένα.)*

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω A συμπαγής γραμμικός τελεστής στον χώρο Banach E με $\dim E = \infty$.*

Τότε ισχύει :

1. $0 \in \sigma(A)$
2. $\sigma(A) \setminus \{0\} = \iota\delta(A) \setminus \{0\}$
3. *Ένας από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:*
   - $\sigma(A) = 0$
   - $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *είναι πεπερασμένο.*

Για την απόδειξη του Λήμματος 2.3.4 και του Θεωρήματος 2.3.5 παραπέμπουμε στο βιβλίο [6].

Θα τελειώσουμε το κεφάλαιο αυτό παραθέτοντας μερικά βασικά στοιχεία για τους τελεστές Hilbert-Schmidt.

2.4 ΤΕΛΕΣΤΕΣ HILBERT-SCHMIDT

Ορισμός 2.4.1. *Ας είναι E, F χώροι Hilbert. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : E \to F$ θα λέμε ότι είναι τελεστής Hilbert-Schmidt αν υπάρχει μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n\}$ στον E τέτοια ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| Ae_n \|^2 < \infty.$$

Θεώρημα 2.4.2. *Οι τελεστές Hilbert-Schmidt είναι συμπαγείς.*

Απόδειξη.

Έστω A και $\{e_n\}$ όπως δίνονται στον παραπάνω ορισμό. Θα δείξουμε ότι ο A είναι συμπαγής τελεστής δείχνοντας ότι είναι όριο μιας ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης διάστασης. Ορίζουμε $A_k : E \to F$ (όπου $k \in \mathbb{N}$) ως

$$A_k(\sum_1^{\infty} x_n e_n) = \sum_1^{k} x_n A e_n$$

όπου

$$x = \sum_1^{\infty} x_n e_n$$

είναι ένα τυχαίο στοιχείο του E. Άρα ο A_k συμπίπτει με τον A στον χώρο που παράγουν τα $\{e_1, ..., e_k\}$ και είναι μηδέν στα υπόλοιπα e_n. Η τάξη του A_k είναι το πολύ k και έτσι έχουμε ότι ο A_k είναι συμπαγής. Για $x = \sum_1^\infty x_n e_n$ έχουμε:

$$(A - A_k)x = \sum_1^\infty x_n A e_n - \sum_1^k x_n A e_n = \sum_{k+1}^\infty x_n A e_n$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \| (A - A_k)x \| &\leq \sum_{k+1}^\infty | x_n | \| A e_n \| \\ &\leq \{\sum_{k+1}^\infty | x |^2\}^{1/2} \{\sum_{k+1}^\infty \| A e_n \|^2\}^{1/2} \\ &\leq \| x \| \{\sum_{k+1}^\infty \| A e_n \|^2\}^{1/2} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\| (A - A_k)x \| \leq \{ \sum_{n=k+1}^\infty \| A e_n \|^2\}^{1/2}.$$

Το άθροισμα μέσα στις αγκύλες είναι η ουρά μιας συγκλίνουσας σειράς και έτσι τείνει στο μηδέν για $k \to \infty$. Άρα $A_k \to A$, δηλαδή ο A συμπαγής γραμμικος τελεστής.

$\square$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνει πλήρης ανάλυση της Θεωρίας Riesz-Fredholm.

Κεφάλαιο 3

Η ΘΕΩΡΙΑ RIESZ-FREDHOLM

3.1 Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ RIESZ

Τώρα θα παρουσιάσουμε τη θεωρία Riesz για την εξίσωση δευτέρου είδους

$$\phi - A\phi = f$$

Υποθέτουμε ότι X είναι ένας χώρος με νόρμα, $A : X \to X$ είναι ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής και τέλος ορίζουμε τον τελεστή

$$L = I - A$$

όπου I συμβολίζει τον ταυτοτικό τελεστή.

Θεώρημα 3.1.1. *(Πρώτο Θεώρημα Riesz). Ο πυρήνας του τελεστή L*

$$N(L) := \{\phi \in X \setminus L\phi = 0\}$$

είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης.

Απόδειξη.

Ο πυρήνας του φραγμένου γραμμικού τελεστή L είναι προφανές οτι είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X . Αφού για όλα τα $\phi \in N(L)$ έχουμε $A\phi = \phi$ ο περιορισμός του A στον πυρήνα $N(L)$ συμπίπτει με τον ταυτοτικό τελεστή $A\backslash_{N(L)} = I : N(L) \to N(L)$.Ο A είναι συμπαγής στον X και επομένως συμπαγής σε κάθε κλειστό γραμμικό υπόχωρο του X.Άρα από Θεώρημα 2.1.9 έχουμε οτι ο $N(L)$ θα είναι πεπερασμένης διάστασης.

□

Θεώρημα 3.1.2. *(Δεύτερο Θεώρημα Riesz). Η εικόνα του τελεστή L*

$$L(X) := \{L\phi | \phi \in X\}$$

είναι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος.

Απόδειξη.

Η εικόνα του γραμμικού τελεστή L είναι προφανώς ένας γραμμικός υπόχωρος. Έστω f στοιχείο του $\overline{L(X)}$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία ϕ_n στον X τέτοιο ώστε

$$L_{\phi_n} \to f, \qquad n \to \infty$$

Σε κάθε ϕ_n επιλέγουμε ένα στοιχείο $\chi_n \in N(L)$ τέτοια ώστε

$$\|\phi_n - \chi_n\| \leq \inf_{\chi \in N(L)} \|\phi_n - \chi\| + \frac{1}{n}$$

Η ακολουθία (ϕ'_n) που ορίζεται ως :

$$\phi'_n := \phi_n - \chi_n$$

είναι φραγμένη.Αυτό θα το δείξουμε έμεσα υποθέτοντας το αντίθετο .Έστω λοιπόν ότι η (ϕ'_n) δεν είναι φραγμένη,τότε θα υπάρχει μια υπακολουθία $\phi'_{n(k)}$ τέτοια ώστε

$$\|\phi'_{n(k)}\| \geq k, \qquad k \in \mathbf{N}$$

Τώρα ορίζουμε

$$\psi_k := \frac{\phi'_{n(k)}}{\|\phi'_{n(k)}\|}, \qquad k \in \mathbf{N}$$

Αφού $\|\psi_k\| = 1,\ k \in \mathbf{N}$,θα υπάρχει μία υπακολουθία $(\psi_{k(j)})$ τέτοια ώστε

$$A\psi_{k(j)} \to \psi \in X, \qquad j \to \infty$$

Ακόμα

$$\|L\psi_k\| = \frac{\|L\phi'_{n(k)}\|}{\|\phi'_{n(k)}\|} \leq \frac{\|L\phi_{n(k)}\|}{k} \to 0, \qquad k \to \infty$$

αφού η ακολουθία $(L\phi_n)$ είναι συγκλίνουσα και συνεπώς φραγμένη. Επομένως

$$L\psi_{k(j)} \to 0, \qquad j \to \infty$$

Τώρα παίρνουμε

$$\psi_{k(j)} = L\psi_{k(j)} + A\psi_{k(j)} \to \psi, \qquad j \to \infty$$

και αφού ο L είναι φραγμένος από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έπεται ότι

$$L\psi = 0$$

Αλλά τότε αφού $\chi_{n(k)} + \|\phi'_{n(k)}\|\psi \in N(L)$ για όλα τα k βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|\psi_k - \psi\| &= \frac{1}{\|\phi'_{n(k)}\|}\|\phi_{n(k)} - (\chi_{n(k)} + \|\phi'_{n(k)}\|\psi)\| \\
&\geq \frac{1}{\|\phi'_{n(k)}\|} \inf_{\chi \in N(L)} \|\phi_{n(k)} - \chi\| \\
&\geq \frac{1}{\|\phi'_{n(k)}\|}\{\|\phi_{n(k)} - \chi_{n(k)}\| - \frac{1}{n(k)}\} \\
&= 1 - \frac{1}{n(k)\|\phi'_{n(k)}\|} \to 1, \qquad k \to \infty,
\end{aligned}$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το $\psi_{k(j)} \to \psi, j \to \infty$.

Επομένως η ακολουθία (ϕ'_n) είναι όντως φραγμένη και μπορούμε να επιλέξουμε μία υπακολουθία $(\phi'_{n(k)})$ τέτοια ώστε η $(A\phi'_{n(k)})$ να συγκλίνει για $k \to \infty$. Από την $\phi'_{n(k)} = L\phi'_{n(k)} + A\phi'_{n(k)}$ παρατηρούμε ότι η $(\phi'_{n(k)})$ συγκλίνει

$$\phi'_{n(k)} \to \phi \in X, \qquad k \to \infty.$$

Αλλά τότε $L\phi'_{n(k)} \to L\phi \in X$ και επομένως $f = L\phi \in L(X)$.Έτσι έχουμε ότι $\overline{L(X)} = L(X)$.

Οι επαναληπτικοί τελεστές $L^n, n \geq 1$, που ορίζονται από τις $L^0 = I$, $L^n := LL^{n-1}$, μπορούν να γραφούν στην μορφή

$$L^n = (I - A)^n = I - A_n$$

όπου

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} A^k$$

είναι συμπαγής από τα Θεωρήματα 2.1.4 και 2.1.5.Οπότε από το Θεώρημα 3.1.1 οι πυρήνες $N(L^n)$ είναι πεπερασμένης διάστασης ενώ από το Θεώρημα 3.1.2 οι εικόνες $L^n(X)$ είναι κλειστοί υπόχωροι.

□

Θεώρημα 3.1.3. *(Τρίτο Θεώρημα Riesz).Υπάρχει ένας μοναδικός μη αρνητικός ακέραιος r, ο οποίος ονομάζεται και αριθμός Riesz του τελεστή A, τέτοιος ώστε*

$$\{0\} = N(L^0) \subsetneqq N(L^1) \subsetneqq \cdots \subsetneqq N(L^r) \subsetneqq N(L^{r+1}) = \cdots,$$

$$X = L^0(X) \supsetneqq L^1(X) \supsetneqq \cdots \supsetneqq L^r(X) \supsetneqq L^{r+1}(X) = \cdots.$$

Ακόμα

$$X = N(L^r) \oplus L^r(X).$$

Απόδειξη.

1. Αφού για όλα τα ϕ με $L^n\phi = 0$ έχουμε ότι $L^{n+1}\phi = 0$, είναι προφανές ότι

$$\{0\} = N(L^0) \subset N(L^1) \subset N(L^2) \subset \cdots .$$

Υποθέτουμε τώρα ότι

$$\{0\} = N(L^0) \subsetneqq N(L^1) \subsetneqq N(L^2) \subsetneqq \cdots .$$

Καθώς οι πυρήνες $N(L^n)$ είναι πεπερασμένης διάστασης απο το Θεώρημα 3.1.1, λαμβάνοντας υπόψιν το Λήμμα 2.1.8 του Riesz συμπαιρένουμε ότι υπάρχει $\phi_n \in N(L^{n+1})$ τέτοιο ώστε $\| \phi_n \| = 1$ και

$$\| \phi_n - \phi \| \geq 1/2$$

για όλα τα $\phi \in N(L^n)$. Για $n > m$ θεωρούμε

$$A\phi_n - A\phi_m = \phi_n - (\phi_m + L\phi_n - L\phi_m).$$

Όμως $\phi_m + L\phi_n - L\phi_m \in N(L^n)$ αφού

$$L^n(\phi_m + L\phi_n - L\phi_m) = L^{n-m-1}L^{m+1}\phi_m + L^{n+1}\phi_n - L^{n-m}L^{m+1}\phi_m = 0.$$

Συνεπώς

$$\| A\phi_n - A\phi_m \| \geq 1/2, \quad n > m.$$

Έτσι η ακολουθία $(A\phi_n)$ δεν περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη συμπάγεια του A.

Τώρα γνωρίζουμε ότι στην ακολουθία $(N(L^n))$ υπάρχουν δύο διαδοχικοί πυρήνες οι οποίοι είναι και ίσοι μεταξύ τους. Ορίζουμε

$$r := min\{k \mid N(L^k) = N(L^{k+1})\}.$$

Θα δείξουμε τώρα επαγωγικά ότι

$$N(L^r) = N(L^{r+1}) = N(L^{r+2}) = \cdots .$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε πως $N(L^k) = N(L^{k+1})$ για κάποιο $k \geq r$.Τότε για κάθε $\phi \in N(L^{k+2})$ έχουμε $L^{k+1}L\phi = L^{k+2}\phi = 0$, το οποίο είναι, $L\phi \in N(L^{k+1}) = N(L^k)$. Οπότε $L^{k+1}\phi = L^kL\phi = 0$ και επομένως $\phi \in N(L^{k+1})$. Άρα $N(L^{k+2}) \subset N(L^{k+1})$.

Μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τα αποτελέσματα μας εώς τώρα με τον εξής τύπο:

$$\{0\} = N(L^0) \subsetneqq N(L^1) \subsetneqq \cdots \subsetneqq N(L^r) \subsetneqq N(L^{r+1}) = \cdots .$$

2. Αφού για κάθε $\psi = L^{n+1}\phi \in L^{n+1}(X)$ μπορούμε να γραφουμε $\psi = L^n L\phi$, οπότε προφανώς

$$X = L^0(X) \supset L^1(X) \supset L^2(X) \supset \cdots .$$

Υποθέτουμε τώρα ότι

$$X = L^0(X) \supsetneqq L^1(X) \supsetneqq L^2(X) \supsetneqq \cdots .$$

Αφού οι εικόνες $L^n(X)$ είναι κλειστοί υπόχωροι από το Θεώρημα 3.1.2 , έχουμε από το Λήμμα του Riesz 2.1.8 ότι υπάρχουν $\psi_n \in L^n(X)$ τέτοια ώστε $\| \psi_n \|= 1$ και

$$\| \psi_n - \psi \| \geq 1/2$$

για όλα τα $\psi \in L^{n+1}(X)$.

Γράφουμε $\psi_n = L^n\phi_n$ και για $m > n$ θεωρούμε

$$A\psi_n - A\psi_m = \psi_n - (\psi_m + L\psi_n - L\psi_m).$$

Εδώ $\psi_m + L\psi_n - L\psi_m \in L^{n+1}(X)$ καθώς $\psi_m + L\psi_n - L\psi_m = L^{n+1}(L^{m-n-1}\phi_m + \phi_n - L^{m-n}\phi_m)$. Άρα

$$\| A\psi_n - A\psi_m \| \geq 1/2, \quad m > n$$

και έτσι οδηγούμαστε στην ίδια αντίφαση όπως παραπάνω.

Επομένως στην ακολουθία $(L^n(X))$ υπάρχουν δύο υπακολουθίες εικόνες οι οποίες θα είναι και ίσες μεταξύ τους. Ορίζουμε

$$q := min\{k \mid L^k(X) = L^{k+1}(X)\}.$$

Θα δείξουμε τώρα επαγωγικά πώς

$$L^q(X) = L^{q+1}(X) = L^{q+2}(X) = \cdots .$$

Υποθέτουμε ακόμα ότι ισχύει $L^k(X) = L^{k+1}(X)$ για κάποια $k \geq q$.Τότε για όλα τα $\psi = L^{k+1}\phi \in L^{k+1}(X)$ μπορούμε να γράψουμε $L^k\phi = L^{k+1}\phi'$ με κάποιο $\phi' \in X$ αφού $L^{k+1}(X) \subset L^{k+2}(X)$.

Ομοίως με πριν ομαδοποιούμε τα αποτελέσματα μας κάνοντας χρήση του τύπου

$$X = L^0(X) \supsetneqq L^1(X) \supsetneqq \cdots \supsetneqq L^q(X) \supsetneqq L^{q+1}(X) = \cdots$$

3. Θα δείξουμε τώρα ότι $r = q$.Έστω ότι $r > q$ και $\phi \in N(L^r)$.Τότε αφού $L^{r-1}\phi \in L^{r-1}(X) = L^r(X)$, παρατηρούμε ότι μπορούμε να θέσουμε $L^{r-1}\phi = L^r\phi'$ για κάποιο $\phi' \in X$. Επίσης αφού $L^{r+1}\phi' = L^r\phi = 0$, έχουμε $\phi' \in N(L^{r+1}) = N(L^r)$, που είναι, $L^{r-1}\phi = L^r\phi' = 0$.Επομένως $\phi \in N(L^{r-1})$ και άρα $N(L^{r-1}) = N(L^r)$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό του r.

   Τώρα υποθέτουμε ότι $r < q$ κι έστω $\psi = L^{q-1}\phi \in L^{q-1}(X)$. Επειδή $L\psi = L^q\phi \in L^q(X) = L^{q+1}(X)$ γράφουμε $L\psi = L^{q+1}\phi'$ για κάποιο $\phi' \in X$. Τότε $L^q(\phi - L\phi') = L\psi - L^{q+1}\phi' = 0$, και αφού $N(L^{q-1}) = N(L^q)$ συμπαιρένουμε πως $L^{q-1}(\phi - L\phi') = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\psi = L^q\phi' \in L^q(X)$. Επομένως $L^{q-1}(X) = L^q(X)$ το οποίο αντιτίθεται στον ορισμό του q.

4. Έστω $\psi \in N(L^r) \cap L^r(X)$. Τότε $\psi = L^r\phi$ για κάποιο $\phi \in X$ και $L^r\psi = 0$. Συνεπώς $L^{2r} = 0$, το οποίο μας δίνει πως $\phi \in N(L^{2r}) = N(L^r)$. Οπότε $\psi = L^r\phi = 0$. Έστω $\phi \in X$ αιθαίρετο στοιχείο.Τότε $L^r\phi \in L^r(X) = L^{2r}(X)$ και μπορούμε να γράψουμε $L^r\phi = L^{2r}\phi'$ για κάποιο $\phi' \in X$.Ορίζουμε $\psi := L^r\phi' \in L^r(X)$ και $\chi := \phi - \psi$. Τότε $L^r\chi = L^r\phi - L^{2r}\phi' = 0$, το οποίο συνεπάγεται $\chi \in N(L^r)$. Έτσι η αποσύνθεση $\phi = \chi + \psi$ αποδεικνύει το ευθύ άθροισμα $X = N(L^r) \oplus L^r(X)$.

□

Τώρα θα αντλήσουμε τα θεμελιώδη συμπεράσματα της θεωρίας Riesz διαφοροποιώντας τις δύο περιπτώσεις $r = 0$ και $r > 0$.

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα, $A : X \to X$ ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής, και έστω $I - A$ «1-1».Τότε ο αντίστροφος τελεστής $(I - A)^{-1}$ υπάρχει και είναι φραγμένος.*

Απόδειξη.

Από υπόθεση ο τελεστής L είναι «1-1», το οποίο σημαίνει, $N(L) = 0$. Επομένως $r = 0$ και από Θεώρημα 3.1.3 (Τρίτο Θεώρημα του Riesz) συμπεραίνουμε ότι

$L(X) = X$,δηλαδή πως ο τελεστής L είναι επί. Άρα ο αντίστροφος τελεστής $L^{-1} : X \to X$ υπάρχει.

Υποθέτουμε ότι ο L^{-1} δεν είναι φραγμένος.Τότε υπάρχει μια ακολουθία (ϕ_n) με $\| \phi_n \|= 1$ τέτοια ώστε η ακολουθία $f_n := L^{-1}\phi_n$ δεν είναι φραγμένη. Ορίζουμε

$$\psi_n := \frac{\phi_n}{\| f_n \|}, \qquad g_n := \frac{f_n}{\| f_n \|}.$$

Τότε $\psi_n \to 0, \;\; n \to \infty$ και $\| g_n \|= 1$. Αφού ο A είναι συμπαγής , μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία $(g_{n(k)})$ τέτοια ώστε $Ag_{n(k)} \to g \in X, \; k \to \infty$. Έτσι αφού

$$\psi_n = g_n - Ag_n$$

παρατηρούμε ότι $g_{n(k)} \to g, \; k \to \infty$ και συνεπώς $g \in N(L)$.Άρα $g = 0$,το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση $\| g_n \|= 1, \; n \in N$. Μπορούμε να ξαναγράψουμε το Θεώρημα 3.1.4 για συνθήκες επιλυσιμότητας της συνάρτησης τελεστή δευτέρου είδους όπως φαίνεται στο επόμενο πόρισμα. □

Πόρισμα 3.1.5. *Έστω X χώρος με νόρμα και $A : X \to X$ ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής. Αν η ομογενής εξίσωση*

$$\phi - A\phi = 0$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση $\phi = 0$, τότε για όλα τα $f \in X$ η μη ομογενής εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

έχει μοναδική λύση $\phi \in X$ η οποία εξαρτάται συνεχώς απο την f.

Θεώρημα 3.1.6. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα και $A : X \to X$ ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής όπου υποθέτουμε πως ο $I - A$ δεν είναι «1-1». Τότε ο πυρήνας $N(I - A)$ είναι πεπερασμένης διάστασης και η εικόνα $(I - A)X \subsetneqq X$ είναι ένας κανονικός κλειστός υπόχωρος.*

Απόδειξη.

Από υπόθεση έχουμε ότι $N(L) \supsetneqq 0$.Αυτό σημαίνει $r > 0$ και από το Θεώρημα 3.1.3 συμπεραίνουμε πως $L(X) \subsetneqq X$. $\square$

Πόρισμα 3.1.7. *Αν η ομογενής εξίσωση*

$$\phi - A\phi = 0$$

έχει μη τετριμένες λύσεις,τότε η μη ομογενής εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

ή δεν έχει λύση ή έχει γενική λύση που δίνεται από τον τύπο

$$\phi = \phi^* + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k$$

όπου ϕ^* ορίζει μία συγκεκριμένη λύση της μη ομογενούς εξίσωσης, $\phi_1, \cdots, \phi_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, και $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ είναι αυθαίρετοι μιγαδικοί αριθμοί.

Πόρισμα 3.1.8. *Τα Θεωρήματα 3.1.4 και 3.1.6 καθώς και τα πορίσματά τους 3.1.5 και 3.1.7 ικανοποιούνται ακόμα κι αν γίνει αντικατάσταση του $I - A$ με $S - A$, όπου S είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής ο οποίος έχει και φραγμένο αντίστροφο S^{-1}.*

Απόδειξη.

Έπεται άμεσα απο το γεγονός ότι μπορούμε να μετατρέψουμε την εξίσωση

$$S\phi - A\phi = f$$

στην ισοδύναμη μορφή

$$\phi - S^{-1}A\phi = S^{-1}f$$

όπου $S^{-1}A$ είναι συμπαγής από Θεώρημα 2.1.5 . $\square$

Η βασική σημασία των αποτελεσμάτων της Θεωρίας Riesz για συμπαγείς τελεστές αφορά το γεγονός πώς μπορούμε να αποφανθούμε ύπαρξη μέσω μοναδικότητας όπως στην περίπτωση των πεπερασμένης διάστασης γραμμικών εξισώσεων.Θα ολοκληρώσουμε την παράγραφο αυτή με το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.9. *Ο προβολικός τελεστής $P : X \to N(L^r)$ που ορίζεται από το ευθύ άθροισμα*

$$X = N(L^r) \oplus L^r(X)$$

είναι συμπαγής. Ο τελεστής $L - P = I - A - P$ είναι «1-1» και «επί».

Απόδειξη.

Ο πυρήνας $N(L^r)$ είναι πεπερασμένης διάστασης από το Θεώρημα 3.1.1 .Στον $N(L^r)$ εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$||| \psi ||| := \inf_{x \in L^r(X)} \| \psi + \chi \|$$

ορίζει μια νόρμα. Συγκεκριμένα, από $||| \psi ||| = 0$ έχουμε ότι $\psi = 0$ καθώς η εικόνα $L^r(X)$ είναι κλειστή από το Θεώρημα 3.1.2 .Έτσι αφού σε ένα πεπερασμένης διάστασης γραμμικό χώρο όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες, προκύπτει ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός C τέτοιος ώστε $\| \psi \| \leqslant C ||| \psi |||$, και έτσι,

$$\| \psi \| \leqslant C \inf_{x \in L^r(X)} \| \psi + \chi \|$$

για όλα τα $\psi \in N(L^r)$. Τότε για όλα τα $\phi \in X$ έχουμε $P\phi \in N(L^r)$ και συνεπώς

$$\| P\phi \| \leqslant C \inf_{x \in L^r(X)} \| P\phi + \chi \| \leqslant \| \phi \|$$

καθώς $\phi - P\phi \in L^r(X)$. Άρα ο P είναι φραγμένος και επειδή έχει πεπερασμένης διάστασης εικόνα $P(X) = N(L^r)$, από το Θεώρημα 3.1.7 έπεται ότι είναι και συμπαγής .

Επίσης από το Θεώρημα 3.1.4 έχουμε πως ο τελεστής $A+P$ είναι συμπαγής. Έστω $\phi \in N(L-P)$, όπου,

$$L\phi - P\phi = 0.$$

Τότε $L^{r+1}\phi = 0$ αφού $P\phi \in N(L^r)$. Επομένως $\phi \in N(L^{r+1}) = N(L^r)$ και $P\Phi = \phi$ από το οποίο παίρνουμε

$$L\phi = \phi.$$

Από εδώ επαναλαμβάνοντας βρίσκουμε ότι

$$\phi = L^r\phi = 0.$$

Οπότε $N(L-P) = \{0\}$ και από το Θεώρημα 3.1.4 εφαρμόζοντάς το για τον συμπαγή τελεστή $A+P$, καταλήγουμε ότι ο $L-P$ είναι «επί». $\square$

3.2 Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ FREDHOLM

Για την υπόθεση του Θεωρήματος 3.1.6 όπου η ομογενής εξίσωση έχει μή τετριμένες λύσεις, η Θεωρία του Riesz δεν δίνει απάντηση στο ερώτημα για το αν η μη ομογενής εξίσωση με δοσμένη ανομοιογένεια έχει λύση ή όχι. Για την απάντηση του παραπάνω ερωτήματος θα ανατρέξουμε στην ακόλουθη Θεωρία του Fredholm για δυϊκά συστήματα.

Ορισμός 3.2.1. *Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα και $\langle \cdot\,,\cdot\rangle : X \times Y \to \mathbb{C}$ μια μη εκφυλισμένη διγραμμική μορφή, δηλαδή,*

1. *Για κάθε $\phi \in X, \phi \neq 0$, υπάρχει $\psi \in Y$ τέτοιο ώστε $\langle \phi,\psi\rangle \neq 0$ και για κάθε $\psi \in Y, \psi \neq 0$, υπάρχει $\phi \in X$ τέτοιο ώστε $\langle \phi,\psi\rangle \neq 0$.*

2. *Για όλα τα* $\phi_1, \phi_2, \phi \in X, \psi_1, \psi_2, \psi \in Y, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ *έχουμε*

$$\langle \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2, \psi\rangle = \alpha_1\langle\phi_1, \psi\rangle + \alpha_2\langle\phi_2, \psi\rangle,$$

$$\langle \phi, \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2\rangle = \beta_1\langle\phi, \psi_1\rangle + \beta_2\langle\phi, \psi_2\rangle.$$

Θα καλούμε δύο χώρους με νόρμα X *και* Y *εφοδιασμένους με μια μη εκφυλισμένη διγραμμική μορφή ως δυϊκό σύστημα το οποίο και θα συμβολίζεται με* $\langle X, Y\rangle$.

Αξίζει να σημειωθεί πως δεν υποθέτουμε να είναι φραγμένη η διγραμμική μορφή. Παρόμοια θεωρία μπορεί να κατασκευαστεί με sesquilinear μορφή αντί της διγραμμικής.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω* G *σύνολο αντίστοιχο με αυτό του Θεωρήματος 2.2.1. Τότε* $\langle C(G), C(G)\rangle$ *είναι ένα δυϊκό σύστημα με διγραμμική μορφή*

$$\langle\phi, \psi\rangle := \int_G \phi(x)\psi(x)dx, \qquad \phi, \psi \in C(G).$$

Απόδειξη. Προφανές από τον ορισμό 3.2.1. □

Ορισμός 3.2.3. *Έστω* $\langle X, Y\rangle$ *ένα δυϊκό σύστημα. Τότε δύο τελεστές* $A : X \to X$, $B : Y \to Y$ *θα ονομάζονται συζυγείς αν για κάθε* $\phi \in X,\ \psi \in Y$,

$$\langle A\phi, \psi\rangle = \langle\phi, A\psi\rangle.$$

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω* $\langle X, Y\rangle$ *ένα δυϊκό σύστημα. Αν ένας τελεστής* $A : X \to X$ *έχει ένα συζυγή* $B : Y \to Y$, *τότε ο* B *ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο και μάλιστα οι* A, B *είναι γραμμικοί τελεστές.*

Απόδειξη.

Υποθέτουμε πως υπάρχουν δύο συζυγείς του τελεστή A, οι οποίοι ορίζονται ως B_1 και B_2. Έστω $B := B_1 - B_2$. Τότε για κάθε $\psi \in Y$ έχουμε $\langle \phi, B\psi \rangle = \langle \phi, B_1\psi \rangle - \langle \phi, B_2\psi \rangle = \langle A\phi, \psi \rangle - \langle A\phi, \psi \rangle = 0$ για όλα τα $\phi \in X$. Άρα, αφού $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι μη εκφυλισμένη θα ισχύει $B\psi = 0$ για κάθε $\psi \in Y$, δηλαδή, $B_1 = B_2$.

Για να δείξουμε ότι ο B είναι γραμμικός απλά παρατηρούμε ότι για κάθε $\phi \in X$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle \phi, \beta_1 B\psi_1 + \beta_2 B\psi_2 \rangle &= \beta_1 \langle \phi, B\psi_1 \rangle + \beta_2 \langle \phi, B\psi_2 \rangle \\ &= \beta_1 \langle A\phi, \psi_1 \rangle + \beta_2 \langle A\phi, \psi_2 \rangle \\ &= \langle A\phi, \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 \rangle \\ &= \langle \phi, B(\beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2) \rangle,\end{aligned}$$

δηλαδή, $\beta_1 B\psi_1 + \beta_1 B\psi_2 = B(\beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2)$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε και τη γραμμικότητα του τελεστή A.

□

Θεώρημα 3.2.5. *Έστω K ένας συνεχής και weakly singular πυρήνας. Τότε στο δυϊκό σύστημα $\langle C(G), C(G) \rangle$ οι (συμπαγείς) ολοκληρωτικοί τελεστές που ορίζονται ως*

$$(A\phi)(x) := \int_G K(x, y)\phi(y)dy$$

$$(B\psi)(x) := \int_G K(y, x)\psi(y)dy$$

είναι συζυγείς τελεστές.

Απόδειξη.

Από τον ορισμό των τελεστών A,B και της διγραμμικής μορφής έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle A\phi, \psi\rangle &= \int_G (A\phi)(x)\psi(x)dx \\ &= \int_G \left\{ \int_G K(x,y)\phi(y)dy \right\} \psi(x)dx \\ &= \int_G \phi(y) \left\{ \int_G K(x,y)\psi(x)dx \right\} dy \\ &= \int_G \phi(y)(B\psi)(y)dy = \langle \phi, B\psi\rangle.\end{aligned}$$

Στη περίπτωση του weakly singular πυρήνα η εναλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης δικαιολογείται από το γεγονός πως $A_n\phi \to A\phi, \quad n \to \infty$, ομοιόμορφα στο G, όπου A_n είναι ο ολοκληρωτικός τελεστής με συνεχή πυρήνα K_n που παρουσιάστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.3.

□

Λήμμα 3.2.6. *Έστω $\langle X, Y\rangle$ ένα δυϊκό σύστημα. Τότε για κάθε σύνολο από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\phi_1, ..., \phi_n \in X$ θα υπάρχει ένα σύνολο $\psi_1, ..., \psi_n \in Y$ τέτοιο ώστε*

$$\langle \phi_i, \psi_k\rangle = \delta_{ik}, \qquad i, k = 1, ..., n$$

Ισχύει ανάλογη πρόταση ακόμα κι αν αντιστρέψουμε τους ρόλους των X και Y.

Απόδειξη.

Για ένα γραμμικώς ανεξάρτητο στοιχείο $\phi_1 \in X$ το λήμμα είναι αληθές καθώς $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι μη εκφυλισμένη. Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για $n \geq 1$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Έστω τώρα $\phi_1, ..., \phi_{n+1}$ είναι $n+1$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Από υπόθεση επαγωγής , για κάθε $l = 1, ..., n+1$, του συνόλου $\phi_1, ..., \phi_{l-1}, \phi_{l+1}, ...\phi_{n+1}$ με n στοιχεία στο X θα υπάρχει ένα σύνολο n στοιχείων $\psi_1^{(l)}, ..., \psi_{l-1}^{(l)}, \psi_{l+1}^{(l)}, ...\psi_{n+1}^{(l)}$ στο Y τέτοια ώστε

$$\langle \phi_i, \psi_k^{(l)} \rangle = \delta_{ik}, \qquad i, k = 1, ..., n+1, \qquad i, k \neq l. \tag{3.1}$$

Τότε θα υπάρχει $\chi_l \in Y$ τέτοιο ώστε

$$\alpha_l := \langle \phi_l, \chi_l - \sum_{k=1, k\neq l}^{n+1} \psi_k^{(l)} \langle \phi_k, \chi_l \rangle \rangle$$

$$= \langle \phi_l - \sum_{k=1, k\neq l}^{n+1} \langle \phi_l, \psi_k^{(l)} \rangle \phi_k, \chi_l \rangle \neq 0$$

γιατί διαφορετικά θα έχουμε

$$\phi_l - \sum_{k=1, k\neq l}^{n+1} \langle \phi_l, \psi_k^{(l)} \rangle \phi_k = 0,$$

το οποίο αντιτίθεται στη γραμμική ανεξαρτησία των $\phi_1, ..., \phi_{n+1}$. Ορίζουμε

$$\psi_l := \frac{1}{\alpha_l} \left\{ \chi_l - \sum_{k=1, k\neq l}^{n+1} \psi_k^{(l)} \langle \phi_k, \chi_l \rangle \right\}.$$

Τότε, προφανώς, $\langle \phi_l, \psi_l \rangle = 1$ και για $i \neq l$,

$$\langle \phi_i, \psi_l \rangle = \frac{1}{\alpha_l} \left\{ \langle \phi_i, \chi_l \rangle - \sum_{k=1, k\neq l}^{n+1} \langle \phi_i, \psi_k^{(l)} \rangle \langle \phi_k, \chi_l \rangle \right\} = 0$$

εξαιτίας της σχέσης (3.1). Άρα παίρνουμε $\psi_1, ..., \psi_{n+1}$ τέτοια ώστε

$$\langle \phi_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}, \qquad i, k = 1, ..., n+1.$$

$\square$

Θεώρημα 3.2.7. *(Πρώτο Θεώρημα του Fredholm). Έστω $\langle X, Y\rangle$ ένα δυϊκό σύστημα, και $A : X \to X, B : Y \to Y$ συμπαγείς συζυγείς τελεστές. Τότε οι πυρήνες των τελεστών $I - A$ και $I - B$ θα έχουν την ίδια πεπερασμένη διάσταση.*

Απόδειξη.

Από το πρώτο Θεώρημα του Riesz έχουμε

$$m := dimN(I - A) < \infty, \qquad n := dimN(I - B) < \infty.$$

Υποθέτουμε $m < n$. Επιλέγουμε μια βάση $\phi_1, ..., \phi_m$ για τον πυρήνα $N(I - A)$ (αν $m > 0$) και μια βάση $\psi_1, ..., \psi_n$ για τον πυρήνα $N(I - B)$. Από το Λήμμα 3.2.6 προκύπτει ότι υπάρχουν στοιχεία $\alpha_1, ..., \alpha_m \in Y$ (αν $m > 0$) και $b_1, ..., b_n \in X$ τέτοια ώστε

$$\langle \phi_i, \alpha_k\rangle = \delta_{ik}, \qquad i, k = 1, ...m,$$

$$\langle b_i, \psi_k\rangle = \delta_{ik}, \qquad i, k = 1, ...n.$$

Ορίζουμε ένα γραμμικό τελεστή $T : X \to X$ με πεπερασμένης διάστασης εικόνα ως

$$T\phi := \begin{cases} 0 & \text{αν } \ m = 0, \\ \sum_{i=1}^{m} \langle \phi, \alpha_i\rangle b_i & \text{αν } \ m > 0. \end{cases}$$

Έστω $\phi \in N(I - A + T)$, δηλαδή,(αν $m > 0$)

$$\phi - A\phi + \sum_{i=1}^{m} \langle \phi, \alpha_i\rangle b_i = 0.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \langle \phi, \alpha_k\rangle &= \langle \phi, \psi_k - B\psi_k\rangle + \langle \phi, \alpha_k\rangle \\ &= \langle \phi - A\phi + \sum_{i=1}^{m} \langle \phi, \alpha_i\rangle b_i, \psi_k\rangle = 0 \end{aligned}$$

για $k = 1, ..., m$. Συνεπώς $\phi - A\phi = 0$ και άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\phi = \sum_{i=1}^{m} a_i \phi_i.$$

Τώρα από

$$\langle \phi, \alpha_k \rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i \langle \phi_i, \alpha_k \rangle = a_k$$

παίρνουμε $a_k = 0$ για $k = 1, ..., m$, και επομένως $\phi = 0$. Έτσι έχουμε δείξει πως $N(I - A + T) = \{0\}$, δηλαδή, $I - A + T$ είναι «1-1» το οποίο θα ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που $m = 0$.

Τώρα θα δείξουμε ότι ο $I - A + T$ είναι «επί». Έστω $P : X \to N(L^r)$ είναι η προβολή που ορίζεται από το ευθύ άθροισμα $X = N(L^r) \oplus L^r(X)$ κι ας θυμηθούμε πως ο αντίστροφος τελεστής $(I - A - P)^{-1} : X \to X$ υπάρχει από το Θεώρημα 3.1.9. Ο τελεστής $T + P$ έχει πεπερασμένης διάστασης εικόνα $U := (T + P)(X)$. Ορίζουμε τώρα στον πεπερασμένης διάστασης χώρο U ένα τελεστή $K : U \to U$ ως εξής

$$K := I + (T + P)(I - A - P)^{-1} = (I - A + T)(I - A - P)^{-1}.$$

Έστω $g \in N(K)$. Τότε, αφού $N(I - A + T) = \{0\}$, έχουμε $(I - A - P)^{-1} g = 0$ και από αυτό έπεται ότι $g = 0$. Συνεπώς ο γραμμικός τελεστής K στον πεπερασμένης διάστασης χώρο U είναι «1-1» και επομένως και «επί». Άρα, για κάθε $f \in X$, η μη ομογενής εξίσωση

$$Kg = (T + P)(I - A - P)^{-1} f$$

θα έχει μοναδική λύση $g \in U$. Τώρα ορίζουμε

$$\phi := (I - A - P)^{-1}(f - g)$$

και καταλήγουμε

$$\begin{aligned} (I - A + T)\phi &= f - g + (T + P)(I - A - P)^{-1}(f - g) \\ &= f - Kg + (T + P)(I - A - P)^{-1} f = f. \end{aligned}$$

Έτσι, ο $I - A + T$ είναι «επί».

Τώρα, καθώς ο $I - A + T$ είναι «1-1» και «επί», η μη ομογενής εξίσωση

$$\phi - A\phi + T\phi = b_{m+1}$$

έχει μοναδική λύση ϕ. Καταλήγουμε λοιπόν στην αντίφαση

$$1 = \langle b_{m+1}, \psi_{m+1} \rangle = \langle \phi - A\phi + T\phi, \psi_{m+1} \rangle$$

$$= \langle \phi - A\phi, \psi_{m+1} \rangle = \langle \phi, \psi_{m+1} - B\psi_{m+1} \rangle = 0$$

αφού $\langle T\phi, \psi_{m+1} \rangle = 0$.

Οπότε $m \geq n$. Με παρόμοιο τρόπο έχουμε το $n \geq m$, δηλαδή τελικά $m = n$.

□

Θεώρημα 3.2.8. *(Δεύτερο Θεώρημα του Fredholm). Η μη ομογενής εξίσωση*

$$\phi - A\phi = f \qquad | \qquad \psi - B\psi = g$$

είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η συνθήκη

$$\langle f, \psi \rangle = 0 \qquad | \qquad \langle \phi, g \rangle = 0$$

ικανοποιείται για όλες τις λύσεις της συζυγούς ομογενούς εξίσωσης

$$\psi - B\psi = 0 \qquad | \qquad \phi - A\phi = 0.$$

Απόδειξη.

Είναι προφανές ότι αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα μόνο για την εξίσωση $\phi - A\phi = f$.

Το αναγκαίο: Έστω ϕ μία λύση της εξίσωσης $\phi - A\phi = f$. Τότε για όλες τις λύσεις ψ της εξίσωσης $\psi - B\psi = 0$, παίρνουμε

$$\langle f, \psi \rangle = \langle \phi - A\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \psi - B\psi \rangle = 0.$$

Το ικανό: Από το Πρώτο Θεώρημα του Fredholm έχουμε

$$m = dimN(I - A) = dimN(I - B) < \infty.$$

Στη περίπτωση που $m = 0$, η συνθήκη $\langle f, \phi \rangle = 0$ ικανοποιείται για όλα τα $f \in X$ και έτσι από το Πόρισμα 3.1.5 έχουμε πως η εξίσωση $\phi - A\phi = f$ είναι πράγματι επιλύσιμη για όλα τα $f \in X$.

Στη περίπτωση που $m > 0$, από την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, γνωρίζουμε πως ο $I - A + T$ είναι «1-1» και «επί». Επομένως θα υπάρχει μια μοναδική λύση ϕ της εξίσωσης

$$\phi - A\phi + T\phi = f.$$

Τότε έπεται ότι

$$\begin{aligned}\langle \phi, a_k \rangle &= \langle \phi, \psi_k - B\psi_k \rangle + \langle \phi, a_k \rangle \\ &= \langle \phi - A\phi, \psi_k \rangle + \sum_{i=1}^{m} \langle \phi, a_i \rangle \langle b_i, \psi_k \rangle \\ &= \langle \phi - A\phi + T\phi, \psi_k \rangle = \langle f, \psi_k \rangle = 0\end{aligned}$$

για $k = 1, ..., m$ αφού υποθέτουμε ότι η συνθήκη επιλυσιμότητας του θεωρήματος ικανοποιείται. Άρα $T\phi = 0$ και έτσι η ϕ θα ικανοποιεί επιπλέον και την αρχική εξίσωση

$$\phi - A\phi = f.$$

□

Τώρα θα ομαδοποιήσουμε τα συμπεράσματά μας στο επόμενο βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.9. *(Θεώρημα Εναλλαγής του Fredholm.) Έστω $\langle X, Y \rangle$ είναι ένα δυϊκό σύστημα και $A : X \to X$, $B : Y \to Y$, συμπαγείς συζυγείς τελεστές. Τότε ισχύει*

$$N(I - A) = \{0\} \quad \textit{και} \quad N(I - B) = \{0\}$$

$$\textit{και} \quad (I - A)(X) = X \quad \textit{και} \quad (I - B)(Y) = Y$$

ή

$$dim N(I - A) = dim N(I - B) \in \mathbb{N}$$

$$\textit{και} \quad (I - A)(X) = \{\ f \in X \mid \langle f, \psi \rangle = 0, \quad \psi \in N(I - B)\}$$

$$\textit{και} \quad (I - B)(Y) = \{\ g \in Y \mid \langle \phi, g \rangle = 0, \quad \phi \in N(I - A)\}.$$

Επιλέγοντας το δυϊκό σύστημα όπως στο Θεώρημα 3.2.2 και τον ολοκληρωτικό τελεστή όπως στο Θεώρημα 3.2.5 , τα αποτελέσματα μας θα περιλαμβάνουν το Θεώρημα εναλλαγής του Fredholm για ολοκληρωτικές εξισώσεις δευτέρου είδους οι οποίες έχουν ήδη μελετηθεί διεξοδικά στο βιβλίο του Fredholm. Η Θεωρία Schauder περιλαμβάνεται αντικαθιστώντας όπου $Y = X^*$, το δυϊκό χώρο του X, και ορίζοντας μια διγραμμική μορφή όπως $\langle \phi, \psi \rangle = \psi(\phi)$ για όλα τα στοιχεία $\phi \in X$ και τα φραγμένα γραμμικά συναρτησιακά $\psi \in X^*$. Ως συνέπεια του Θεωρήματος Hahn-Banach, αυτή η διαγραμμική μορφή είναι μη εκφυλισμένη.

Τελειώνουμε το κεφάλαιο αυτό με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.10. *Οι τελεστές A και B έχουν αριθμό Riesz «ένα» αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος βάσεων $\phi_1, ..., \phi_m$ και $\psi_1, ..., \psi_m$ των πυρήνων $N(I-A)$ και $N(I-B)$ ο πίνακας $\langle \phi_i, \psi_k \rangle$, $i, k = 1, ..., m$, είναι μη ιδιάζων (nonsingular).*

Απόδειξη.

Προφανώς

$$det\langle \phi_i, \psi_k \rangle = 0$$

είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη μη τετριμένων λύσεων λ_i, $i = 1, ..., m$, του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$\sum_{i=1}^{m} \langle \phi_i, \psi_k \rangle \lambda_i = 0, \qquad k = 1, ..., m.$$

Από θεώρημα εναλλαγής του Fredholm, αυτό είναι ισοδύναμο με το γεγονός πως για

$$f := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i \in N(I-A)$$

με $f \neq 0$ η εξίσωση $\phi - A\phi = f$ έχει λύση ϕ, που σημαίνει, $\phi \in N((I-A)^2)$ αλλά $\phi \notin N(I-A)$, δηλαδή, ο αριθμός Riesz είναι μεγαλύτερος από ένα. □

Κεφάλαιο 4

ΣΚΕΔΑΣΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΏΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Όπως είναι γνωστό [11] η υπερπίεση του ρευστού $P(x,t)$ και το δυναμικό ταχύτητας του $\phi(x,t)$ ικανοποιούν την κυματική εξίσωση $w_{tt} = {c_0}^2 \Delta w$, όπου c_0 είναι η ταχύτητα των ακουστικών κυμάτων.Στις εφαρμογές μελετάμε ακουστικά κύματα με αρμονική χρονική εξάρτηση, δηλαδή κύματα της μορφής $\phi(x,t) = u(x)\exp^{-i\omega t}$ όπου $\omega > 0$ είναι η κυκλική συχνότητα .Τότε από την κυματική εξίσωση (η οποία είναι υπερβολικού τύπου) προκύπτει η εξίσωση Helmholtz (η οποία είναι ελλειπτικού τύπου):

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{4.1}$$

όπου $k = \omega/c_0$ είναι ο κυματικός αριθμός. Τα προβλήματα σκέδασης των ακουστικών κυμάτων από μαθηματικής άποψης είναι εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών για τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz. Επομένως για την καλή τοποθέτηση αυτών των προβλημάτων πρέπει να ικανοποιούνται κάποιες βοηθητικές συνθήκες, οι οποίες μπορεί να συνοριακές (boundary conditions) ή μετάβασης (transmission conditions) ή ακτινοβολίας.

4.1 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Θεωρούμε λοιπόν μια επιφάνεια S (επιφάνεια του σκεδαστή), η οποία θα περιβάλλει ένα συνεκτικό πεδίο $\Omega(S = \partial\Omega)$ και παραθέτουμε μερικές από τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών. Αυτές είναι οι εξής:

(i) Αν ο σκεδαστής είναι ένα σταθερό, ηχητικά σκληρό σώμα, δηλαδή η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας του κύματος είναι μηδέν πάνω στην επιφάνεια και αν n το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια, θα έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{στην} \quad S, \tag{4.2}$$

δηλαδή τη συνθήκη Neumann (hard boundary condition).

(ii) Αν ο σκεδαστής είναι ένα σταθερό, ηχητικά μαλακό σώμα, δηλαδή πανω στην επιφάνεια του δημιουργούνται συνθήκες μηδενισμού της πίεσης του ρευστού, θα έχουμε

$$u = 0 \quad \text{στην} \quad S, \tag{4.3}$$

δηλαδή τη συνθήκη Dirichlet (soft boundary condition).

(iii) Αν θεωρήσουμε ότι πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή υπάρχουν δυνάμεις τριβής του ιξώδους, κάτι το οποίο είναι και περισσότερο ρεαλιστικό, θα έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0 \quad \text{στην} \quad S, \tag{4.4}$$

όπου λ (εν γένει μιγαδική συνάρτηση του $x \in S$) εξαρτάται από τις φυσικές παραμέτρους του σκεδαστή και την κυκλική συχνότητα του κύματος. Η (4.4) είναι μια συνοριακή συνθήκη τύπου Robin (impedance boundary condition).

(iv) Τέλος, στην περίπτωση που ο σκεδαστής είναι διαπερατός, δηλαδή το ακουστικό κύμα εισέρχεται στο εσωτερικό του, τότε οι πιέσεις του ρευστού και οι κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας του κύματος πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή, από το εσωτερικό και το εξωτερικό του είναι ίσες, δηλαδή $p_1 = p_2$, $\widehat{n} \cdot \upsilon_1 = \widehat{n} \cdot \upsilon_2$ (οι δείκτες 1 και 2 δηλώνουν το εσωτερικό και το εξωτερικό του σκεδαστή αντίστοιχα). Οπότε, για ρ_1, ρ_2

τις πυκνότητες του ρευστού στο εσωτερικό και εξωτερικό του σκεδαστή, παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{c} u_1 = u_2 \\[2ex] \dfrac{1}{\rho_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial n} = \dfrac{1}{\rho_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial n} \end{array}\right| \quad \text{στην} \quad S, \tag{4.5}$$

δηλαδή συνθήκες σύνδεσης ή διαπερατότητας ή μεταφοράς (transmission conditions).

Για να είναι όμως καλά τοποθετημένο ένα πρόβλημα σκέδασης απαιτείται και μια κατάλληλη συνθήκη στο άπειρο, που είναι μέρος του θεμελιώδους πεδίου του προβλήματος (εξωτερικό πρόβλημα). Η συνθήκη αυτή πρέπει να εξασφαλίζει για το σκεδασμένο πεδίο (scattered field) u^{sc} δύο απαιτήσεις. Να έχει την απαραίτητη ασυμπτωτική τάξη εξασθένησης με την απόσταση από το σκεδαστή και να διαδίδεται από το σκεδαστή προς το άπειρο, δηλαδή ο σκεδαστής να δρα σαν πηγή. Ο σκεδαστής δεν παράγει ενέργεια, αλλά εκτρέπει την ενεργειακή ροή του προσπίπτοντος κύματος , δηλαδή παίρνει ενέργεια από το προσπίπτον κύμα και την επανεκπέμπει με τη μορφή σκεδασμένου κύματος. Για αυτό το λόγο η συνθήκη στο άπειρο ονομάζεται συνθήκη ακτινοβολίας (radiation condition). Συνήθως χρησιμοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld:

$$\frac{x}{|x|} \cdot grad\ u^{sc}(x) - i\ k\ u^{sc}(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad |x| \to \infty, \tag{4.6}$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\dfrac{x}{|x|}$. Αποδεικνύεται ότι αν ισχύει η (4.6), έχουμε

$$u^{sc}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad |x| \to \infty, \tag{4.7}$$

ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις. Επίσης αποδεικνύεται ότι κάθε ακέραια λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld είναι μηδενική συνάρτηση. Τέλος, να σημειωθεί ότι η συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld ισχύει ανεξάρτητα από τη θέση της αρχής των συντεταγμένων.

Μια ασθενέστερη συνθήκη ακτινοβολίας είναι αυτή των Wilcox-Magnus-Müller

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S_r}\left|\frac{\partial u^{sc}}{\partial r} - i\ k\ u^{sc}\right|^2 ds = 0, \tag{4.8}$$

όπου S_r είναι η επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r, με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων.

Η πρώτη συνθήκη ακτινοβολίας , που χρησιμοποιήθηκε στα προβλήματα σκέδασης, διατυπώθηκε από τον Rayleigh το 1879 και είχε τη μορφή

$$u^{sc}(r) = f(\hat{r};\hat{p})\frac{e^{ikr}}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \qquad r\to\infty, \tag{4.9}$$

όπου $r = |\mathbf{r}|$, f το πλάτος σκέδασης και $\hat{r},\hat{p}$ τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις παρατήρησης και πρόσπτωσης αντίστοιχα.

Σημείωση 4.1.1. *Υπενθυμίζουμε τους ορισμούς των συμβόλων «όμικρον» του Landau. Έστω $f,g : S\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z_0\in\bar{S}$. Ορίζουμε*

$$f(z) = O(g(z)), \quad z\to z_0, \tag{4.10}$$

όταν υπάρχει σταθερά $b>0$ και περιοχή V_0 του z_0 έτσι ώστε

$$|f(z)|\le b|g(z)|,\ \forall z\in V_0\cap S.$$

Επίσης ορίζουμε

$$f(z) = o(g(z)), \quad z\to z_0, \tag{4.11}$$

όταν $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει περιοχή V_0 του z_0 έτσι ώστε

$$|f(z)|\le \varepsilon|g(z)|,\ \forall z\in V_0\cap S.$$

Αν $g(z)\neq 0,\ z\in V_0$, τότε

$$f(z) = o(g(z)) \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = 0. \tag{4.12}$$

Μερικές χρήσιμες σχέσεις, που συνδέουν τα δύο σύμβολα και προκύπτουν άμεσα από τους ορισμούς, για $z\to z_0$, είναι:

$$O(o(f)) = o(O(f)) = o(o(f)) = o(f),$$

$$O(f)o(g) = o(fg),$$
$$O(f)O(g) = O(fg),$$
$$O(f) + o(f) = O(f).$$

Για την ολοκλήρωση ισχύει

$$f = O(g),\ z \to z_0 \Rightarrow \int_z^{z_0} f(t)dt = O\left(\int_z^{z_0} |g(t)|dt\right),\ z \to z_0,$$

ενώ για την παραγώγιση έχουμε

$$f = O(g),\ z \to z_0 \nRightarrow f' = O(g'),\ z \to z_0.$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αναφέρουμε τα βασικότερα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων.

4.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ

Έστω D ένας σκεδαστής, δηλαδή ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ με C^2-σύνορο. Ένα ακουστικό κύμα u^{inc} προσπίπτει πάνω στο σκεδαστή D. Το προσπίπτον (incident) κύμα μπορεί να είναι είτε επίπεδο είτε σφαιρικό. Το επίπεδο ακουστικό κύμα (plane wave) έχει τη μορφή

$$u^{inc}(x;\hat{d}) = e^{ik\hat{d}\cdot x}, \tag{4.13}$$

όπου $\hat{d}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση διάδοσης του και k είναι ο κυματικός αριθμός. Το σφαιρικό ακουστικό κύμα (spherical wave), που παράγει μια σημειακή πηγή (point source) τοποθετημένη στη θέση x_0 έχει μορφή

$$u_{x_0}^{inc}(x) = A\frac{e^{ik|x-x_0|}}{|x-x_0|},\ x \neq x_0, \tag{4.14}$$

όπου $A \in \mathbb{C}$ μια σταθερά. Να σημειωθεί ότι το προπίπτον ακουστικό κύμα (4.13) ή (4.14) είναι μια λύση της εξίσωσης Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$. Στον εξωτερικό χώρο του σκεδαστή το ολικό ακουστικό πεδίο u είναι

$$u = u^{inc} + u^{sc},$$

όπου το σκεδασμένο πεδίο u^{sc} ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld (4.6). Οι συνοριακές συνθήκες, που ικανοποιεί η u πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή, εξαρτώνται από τις φυσικές του ιδιότητες. Τα βασικότερα προβλήματα σκέδασης είναι τα εξής:

(I) Ηχητικά μαλακός σκεδαστής:

Να ορισθεί συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \backslash D)$ τέτοια ώστε

$$\left[\begin{array}{ll} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{στο } \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}, \\ u = 0 & \text{στο } \partial D, \\ u = u^{inc} + u^{sc} & \text{στο } \mathbb{R}^3 \backslash D, \\ \dfrac{x}{|x|} \cdot grad\ u^{sc} - i\ k\ u^{sc} = o\left(\dfrac{1}{|x|}\right), & |x| \to \infty, \\ \text{ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις.} & \end{array}\right. \tag{4.15}$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι η u^{inc} είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz, τότε στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε την u^{sc}, που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και

$$\Delta u^{sc} + k^2 u^{sc} = 0 \ \text{ στο } \ \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}, \quad u^{sc} = -u^{inc} \ \text{ στο } \ \partial D, \tag{4.16}$$

δηλαδή έχουμε ένα εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet γαι την u^{sc}.

(II) Ηχητικά σκληρός σκεδαστής:

Διατυπώνεται όπως και στην περίπτωση του μαλακού σκεδαστή, με τη μόνη διαφορά πως η συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο ∂D έχει αντικατασταθεί με τη $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ στο ∂D. Δηλαδή,

$$\left[\begin{array}{ll} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{στο } \mathbb{R}^3\backslash\overline{D}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{στο } \partial D, \\ u = u^{inc} + u^{sc} & \text{στο } \mathbb{R}^3\backslash D, \\ \dfrac{x}{|x|} \cdot grad\ u^{sc} - i\ k\ u^{sc} = o\left(\dfrac{1}{|x|}\right), & |x| \to \infty, \\ \text{ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις.} & \end{array}\right. \tag{4.17}$$

Εδώ έχουμε ένα εξωτερικό πρόβλημα Neumann, δηλαδή πάλι αναζητούμε την u^{sc} που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και

$$\Delta u^{sc} + k^2 u^{sc} = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3\backslash\overline{D}, \quad \frac{\partial u^{sc}}{\partial n} = -\frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \text{ στο } \partial D, \tag{4.18}$$

(III) Ανθεκτικός σκεδαστής:

Διατυπώνεται όπως στην περίπτωση του μαλακού ή σκληρού σκεδαστή, όπου η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη έχει αντικατασταθεί από τη συνθήκη: $\dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0$ στο ∂D, $\lambda \in \mathbb{C}$. Επομένως,

$$\left[\begin{array}{lll} \Delta u + k^2 u = 0 & & \text{στο } \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = 0 & & \text{στο } \partial D, \\[2ex] u = u^{inc} + u^{sc} & & \text{στο } \mathbb{R}^3 \backslash D, \\[2ex] \dfrac{x}{|x|} \cdot grad\ u^{sc} - i\ k\ u^{sc} = o\left(\dfrac{1}{|x|}\right), & & |x| \to \infty, \\[2ex] \text{ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις.} & & \end{array}\right. \tag{4.19}$$

Η u^{sc} εδώ είναι λύση ενός εξωτερικού προβλήματος Robin, δηλαδή ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld και

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u^{sc} + k^2 u^{sc} = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}, \\[2ex] \dfrac{\partial u^{sc}}{\partial n} + \lambda u^{sc} = -\dfrac{\partial u^{inc}}{\partial n} - \lambda u^{inc} \text{ στο } \partial D \end{array}\right| \tag{4.20}$$

(IV) <u>Διαπερατός σκεδαστής</u>:

Να ορισθούν συναρτήσεις

$$u_0 \in C^2(\mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \backslash D)$$

και

$$u_1 \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$$

που ικανοποιούν,

$$\left[\begin{array}{ll} \Delta u_0 + k_0^2 u_0 = 0 & \text{στο } \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}, \\ \Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0 & \text{στο } D, \\ \left.\begin{array}{c} u_0 = u_1 \\ \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial u_0}{\partial n} = \dfrac{1}{\rho_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial n} \end{array}\right| & \text{στο } \partial D, \\ u = u^{inc} + u^{sc} & \text{στο } \mathbb{R}^3 \backslash D, \\ \dfrac{x}{|x|} \cdot grad\ u^{sc} - i\ k\ u^{sc} = o\left(\dfrac{1}{|x|}\right), & |x| \to \infty, \\ \text{ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις.} & \end{array}\right. \tag{4.21}$$

Οι δείκτες 0 και 1 αναφέρονται στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του σκεδαστή, όπου αντίστοιχα (ρ_0, ρ_1 : πυκνότητες).

Σημείωση 4.2.1.

Σε όλα τα προβλήματα σκέδασης ακουστικών κυμάτων έχουμε υποθέσει ότι οι φυσικές παράμετροι (π.χ. η πυκνότητα) του σκεδαστή και του μη φραγμένου χώρου διάδοσης των κυμάτων είναι σταθερές, δηλαδή είναι ομογενή μέσα. Στην περίπτωση που μεταβάλλονται οι φυσικές παράμετροι, τα αντίστοιχα προβλήματα δεν έχουν μελετηθεί πλήρως και ως εκ τούτου υπάρχουν πολλά ανοικτά θέματα. Σαν ειδική περίπτωση έχουμε θεωρήσει τα στρωματοποιημένα (stratified) υλικά, που είναι μέσα διάδοσης κυμάτων όπου οι φυσικές παράμετροι μεταβάλονται μόνο ως προς τη μία συντεταγμένη της χωρικής μεταβλητής. Τέτοια υλικά υπάρχουν στη φύση, όπως π.χ. στο νερό μιας λίμνης μπορούμε να θεωρήσουμε, με ικανοποιητική προσέγγιση, ότι η πυκνότητα μεταβάλεται συναρτήση μόνο με το βάθος. Η μελέτη αυτών των προβλημάτων βασίζεται κυρίως στη φασματική ανάλυση των τελεστών των προβλημάτων. Μια άλλη ειδική περίπτωση που έχει μελετηθεί είναι όταν το μέσο διάδοσης του κύματος είναι μη ομογενές αλλά έχει συμπαγή φορέα. Τέλος να αναφέρουμε ότι ο πολυστρωματικός σκεδαστής (που *είναι κατά τμήματα ομογενής) όταν το πλήθος των στρωμάτων τείνει στο άπειρο μπορεί, με κατάλληλες υποθέσεις, να προσεγγίσει ένα μη ομογενή σκεδαστή.*

Κεφάλαιο 5

ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΛΥΣΗΣ

Από δώ και στο εξής θα θεωρούμε με D μία φραγμένη και ανοιχτή περιοχή στο $\mathbb{R}^3$. Το σύνορο του D, που ορίζεται ως ∂D, θεωρούμε πως αποτελείται από πεπερασμένες σε αριθμό, ξένες κλειστές και φραγμένες επιφάνειες της κλάσης C^2 κι ακόμα υποθέτουμε ότι το συμπλήρωμα $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ είναι συνεκτικό. Επίσης θεωρούμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ν πως κατευθύνεται στο εξωτερικό του $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$.

Έστω τώρα k ένας μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε $Im\ k \geq 0$. Τότε μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η συνάρτηση

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{4\pi} \frac{\exp^{ik|x-y|}}{\mid x - y \mid}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y,$$

είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0$$

ως προς το x για δοσμένο y. Η συνάρτηση Φ καλείται θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz. Για $k = 0$ έχουμε τη θεμελιώδη λύση

$$\Phi_0(x, y) := \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mid x - y \mid}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y$$

της εξίσωσης Laplace: $\Delta\Phi = 0$.

5.1 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΑΠΛΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

Ορισμός 5.1.1. *Έστω η συνάρτηση $\phi \in C(\partial D)$, η συνάρτηση*

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)ds(y), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D, \tag{5.1}$$

θα καλείται ακουστικό δυναμικό απλού στρώματος με πυκνότητα ϕ.

Είναι φανερό λοιπόν πως αν για $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ παραγωγίσουμε μέσα στο ολοκλήρωμα παίρνουμε ότι η u είναι λύση της εξίσωσης $Helmholtz$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5 του [9] αναλυτική στο $\mathbb{R}^3 \setminus \partial D$.

Θεώρημα 5.1.2. *Το δυναμικό απλού στρώματος u με συνεχή πυκνότητα ϕ είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}^3$ και*

$$\| u \|_{\alpha,\mathbb{R}^3} \leq C_\alpha \| \phi \|_{\infty,\partial D} \tag{5.2}$$

για όλα τα $0 < \alpha < 1$ για κάποια σταθερά C_α που θα εξαρτάται από τα $\partial D, \alpha$.

Θεώρημα 5.1.3. *Οι πρώτες παράγωγοι του δυναμικού απλού στρώματος u με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα $\phi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, μπορούν να επεκταθούν ομοιόμορφα σε Hölder συνεχείς από το $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και από το D στο $\overline{D}$ με οριακές τιμές*

$$grad\ u_\pm(x) = \int_{\partial D} grad_x \Phi(x,y)\phi(y)ds(y) \mp \frac{1}{2}\nu(x)\phi(x), \quad x \in \partial D, \tag{5.3}$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως πρωτεύουσα τιμή Cauchy. Επιπλέον, έχουμε τις εκτιμήσεις

$$\|grad\ u\|_{\alpha,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_\alpha \|\phi\|_{\alpha,\partial D}\ , \qquad \|grad\ u\|_{\alpha,\overline{D}} \leq C_\alpha \|\phi\|_{\alpha,\partial D} \tag{5.4}$$

για κάποια σταθερά C_α η οποία εξαρτάται από το ∂D και το α.

Πόρισμα 5.1.4. *Για το δυναμικό απλού στρώματος u με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα ϕ έχουμε τη εξής σχέση μεταπήδησης*

$$grad\ u_+ - grad\ u_- = -\nu\phi \quad \text{στο} \quad \partial D. \tag{5.5}$$

Μπορεί εύκολα να δειχθεί μέσω αντιπαραδειγμάτων (δείτε [9]) ότι για το δυναμικό απλού στρώματος με σχεδόν συνεχή πυκνότητα, η κλίση στο σύνορο δεν υπάρχει γενικά. Ωστόσο για κατευθυνόμενες παραγώγους αποδεικνύεται το εξής Θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.5. *Για το δυναμικό απλού στρώματος u με συνεχή πυκνότητα ϕ έχουμε*

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} \phi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2}\phi(x), \qquad x \in \partial D, \tag{5.6}$$

όπου

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{\partial u(x \pm h\nu(x))}{\partial \nu(x)}$$

έχει νόημα με την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης και όπου το ολοκλήρωμα στην (5.6) υπάρχει σαν γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Πόρισμα 5.1.6. *Για το δυναμικό απλού στρώματος u με συνεχή πυκνότητα ϕ έχουμε τη σχέση μεταπήδησης*

$$\frac{\partial u_+}{\partial \nu} - \frac{\partial u_-}{\partial \nu} = -\phi \quad \text{στο} \quad \partial D. \tag{5.7}$$

5.2 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΔΙΠΛΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

Ορισμός 5.2.1. *Έστω η συνάρτηση* $\psi \in C(\partial)$, *τότε η συνάρτηση*

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \tag{5.8}$$

θα καλείται ακουστικό δυναμικό διπλού στρώματος με πυκνότητα ψ.

Ομοίως παρατηρούμε ότι το δυναμικό διπλού στρώματος v είναι λύση της εξίσωσης $Helmholtz$ και επομένως και αναλυτική στο $\mathbb{R}^3 \setminus \partial D$.

Θεώρημα 5.2.2. *Το δυναμικό διπλού στρώματος* v *με συνεχή πυκνότητα* ψ *μπορεί να επεκταθεί συνεχόμενα από το* $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ *στο* $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$ *και από το* D *στο* $\overline{D}$ *με οριακές τιμές*

$$v_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2}\psi(x), \qquad x \in \partial D, \tag{5.9}$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει σαν γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Πόρισμα 5.2.3. *Για το δυναμικό διπλού στρώματος* v *με συνεχή πυκνότητα* ψ, *έχουμε τη σχέση μεταπήδησης*

$$v_+ - v_- = \psi \quad \text{στο} \quad \partial D \tag{5.10}$$

Θεώρημα 5.2.4. *Για το δυναμικό διπλού στρώματος* v *με συνεχή πυκνότητα* ψ *έχουμε*

$$\frac{\partial v_+}{\partial \nu} = \frac{\partial v_-}{\partial \nu} \qquad \text{στο} \qquad \partial D \tag{5.11}$$

με την έννοια

$$\lim_{h \to 0,\ h>0} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} v(x + h\nu(x)) - \frac{\partial}{\partial \nu(x)} v(x - h\nu(x)) = 0, \qquad x \in \partial D,$$

ομοιόμορφα για όλα τα x *στο* ∂D.

5.3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τους βασικούς ολοκληρωτικούς επιφανειακούς τελεστές που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για τη μελέτη της ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης των συνοριακών προβλημάτων σκέδασης.

Ορισμός 5.3.1. *Ορίζουμε τους επιφανειακούς τελεστές $K, K' : C(\partial D) \to C(\partial D)$ ως εξής:*

$$(K\psi)(x) := 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \qquad x \in \partial D \tag{5.12}$$

$$(K'\phi)(x) := 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} \phi(y) ds(y), \qquad x \in \partial D \tag{5.13}$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, είναι εύκολο να δούμε ότι K και K' είναι συζυγείς ως προς το δυαδικό σύστημα $\langle C(\partial D), C(\partial D)\rangle$ που ορίζεται από τη

$$\langle \psi, \phi \rangle := \int_{\partial D} \psi \phi ds. \tag{5.14}$$

Αποδεικνύεται (βλέπε [9]) πώς οι τελεστές K, K' είναι συμπαγείς στο $C(\partial D)$ και στο $C^{0,\alpha}(\partial D)$ για $0 < \alpha < 1$. Επίσης οι τελεστές K και K' απεικονίζουν τον $C(\partial D)$ στον $C^{0,\alpha}(\partial D)$ και ο K απεικονίζει τον $C^{0,\alpha}(\partial D)$ στον $C^{1,\alpha}(\partial D)$.

Ορισμός 5.3.2. *Τώρα ορίζουμε τον ολοκληρωτικό τελεστή $S : C(\partial D) \to C(\partial D)$ ως εξής*

$$(S\phi)(x) := 2\int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y) ds(y), \qquad x \in \partial D. \tag{5.15}$$

Ο τελεστής S είναι προφανώς αυτοσυζυγής, δηλαδή, $\langle S\phi, \psi\rangle = \langle \phi, S\psi\rangle$ για όλα τα $\phi, \psi \in C(\partial D)$ και από τα Θεωρήματα 5.1.2 και 5.1.3 έπεται ότι ο S έχει την ίδια συμπάγεια και ιδιότητες απεικόνισης με τον K.

Ως $\mathfrak{N}(\partial D)$ ορίζουμε το γραμμικό χώρο των συνεχών συναρτήσεων ψ με την ιδιότητα ότι το δυναμικό διπλού στρώματος v με πυκνότητα ψ θα έχει συνεχείς κατευθυνόμενες, κάθετες παραγώγους στο σύνορο και από τις δύο μεριές του συνόρου ∂D. Από το Θεώρημα 5.2.4 και οι δύο αυτές κάθετες κατευθυνόμενες παράγωγοι συμπίπτουν ενώ είναι εύκολο να δειχθεί ότι το σύνολο $\mathfrak{N}(\partial D)$ δεν είναι κενό διότι $C^{1,\alpha}(\partial D) \subset \mathfrak{N}(\partial D)$ (για απόδειξη δές [9]).

Ορισμός 5.3.3. *Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τον τελεστή* $T : \mathfrak{N}(\partial D) \to C(\partial D)$ *ως εξής :*

$$(T\psi)(x) := 2\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\int_{\partial D}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)}\psi(y)ds(y), \qquad x \in \partial D. \tag{5.16}$$

Από το Θεώρημα *Green* και τη σχέση μεταπήδησης (5.10) βλέπουμε ότι ο τελεστής T είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή, $\langle T\psi, \phi\rangle = \langle \psi, T\phi\rangle$ για όλα τα $\phi, \psi \in \mathfrak{N}(\partial D)$. Αν κι ο τελεστής T είναι μη φραγμένος αποδεικνύεται (δείτε [9]) ότι ο τελεστής $T - T_0$ είναι συμπαγής στον $C(\partial D)$ και στον $C^{0,\alpha}(\partial D)$ για $0 < \alpha < 1$, όπου T_0 είναι ο τελεστής της (5.16) αν αντικαταστήσουμε το Φ με Φ_0. Τέλος ο $T - T_0$ απεικονίζει τον $C(\partial D)$ στον $C^{0,\alpha}(\partial D)$.

5.4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω G χώρος με σύνορο ∂G της κλάσης C^2. Ως $\mathfrak{R}(G)$ θεωρούμε το γραμμικό χώρο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ για τις οποίες η κάθετη παράγωγος στο σύνορο υπάρχει υπό την έννοια πως το όριο

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) = \lim_{h\to 0, h>0}(\nu(x), grad\ u(x - h\nu(x))) \qquad x \in \partial G,$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο ∂G.

Θεώρημα 5.4.1. *Έστω $u, v \in \Re(G)$ όπου G φραγμένο χωρίο με C^2 σύνορο ∂G. Τότε:*

Πρώτο Θεώρημα του Green

$$\int_G u\Delta v dx = \int_{\partial G} u\frac{\partial v}{\partial \nu}ds - \int_G (grad\ u, grad\ v)dx \tag{5.17}$$

Δεύτερο Θεώρημα του Green

$$\int_G (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial G} (u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu})ds \tag{5.18}$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να εξετάσουμε την επιλυσιμότητα των βασικών προβλημάτων συνοριακών τιμών της ακουστικής σκέδασης (εσωτερικών κι εξωτερικών για την εξίσωση *Helmholtz*) και να δώσουμε κάποια πολύ βασικά θεωρήματα. Τα προβλήματα σκέδασης του μαλακού και σκληρού σκεδαστή είναι ειδικές περιπτώσεις προβλημάτων συνοριακών τιμών *Dirichlet* και *Neumann*. Έχουμε αντίστοιχα:

Εσωτερικό πρόβλημα Dirichlet

Αναζητούμε συνάρτηση $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ που ικανοποιεί την εξίσωση *Helmholtz* στο D και τη συνοριακή συνθήκη

$$u = f \quad \text{στο} \ \partial D \tag{5.19}$$

όπου f είναι μία γνωστή συνεχής συνάρτηση.

Εσωτερικό πρόβλημα Newmann

Αναζητούμε συνάρτηση $u \in \Re(D)$ που ικανοποιεί την εξίσωση *Helmholtz* στο D και τη συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{στο} \ \partial D \tag{5.20}$$

όπου g είναι μία γνωστή συνεχής συνάρτηση.

Εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet

Αναζητούμε συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ που ικανοποιεί την εξίσωση *Helmholtz* στο $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, τη συνθήκη ακτινοβολίας του *Sommerfeld* στο άπειρο και τη συνοριακή συνθήκη

$$u = f \quad \text{στο} \ \partial D \tag{5.21}$$

όπου f είναι μία γνωστή συνεχής συνάρτηση. Ειδικά για τη σκέδαση ακουστικών κυμάτων από μαλακό σκεδαστή η $f = -u_{inc}$.

Εξωτερικό πρόβλημα Neumann

Αναζητούμε συνάρτηση $u \in \Re(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ που ικανοποιεί την εξίσωση *Helmholtz* στο $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, τη συνθήκη ακτινοβολίας του *Sommerfeld* στο άπειρο και τη συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{στο} \ \partial D \tag{5.22}$$

όπου g είναι μία γνωστή συνεχής συνάρτηση. Ειδικά για τη σκέδαση ακουστικών κυμάτων από σκληρό σκεδαστή η $g = \frac{\partial - u_{inc}}{\partial \nu}$.

Στη συνέχεια θα κάνουμε χρήση του ότι κάθε λύση u του ομογενούς προβλήματος *Dirichlet*, δηλαδή, κάθε λύση με την ιδιότητα $u = 0$ στο ∂D, είναι αυτόματα και συνεχώς διαφορίσιμη μέχρι το σύνορο.(δείτε [9])

5.5 ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΛΥΣΗΣ

Αν ο κυματικός αριθμός k είναι μιγαδικός τότε τα εσωτερικά προβλήματα έχουν το πολύ μια λύση. Συγκεκριμένα έχουμε:

Θεώρημα 5.5.1. *Έστω $Im\ k > 0$. Τότε τα εσωτερικά προβλήματα Dirichlet και Neumann έχουν το πολύ μία λύση.*

Απόδειξη.

Πρέπει να δείξουμε ότι οι λύσεις των ομογενών προβλημάτων συνοριακών τιμών μηδενίζονται. Έστω $u \in \Re(D)$ μια λύση της εξίσωσης *Helmholtz*. Τότε από το πρώτο θεώρημα *Green* (5.17) έχουμε

$$\int_{\partial D} \overline{u}\frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_D \{|grad\ u|^2 - k^2|u|^2\} dx.$$

Καθώς το αριστερό μέρος της εξίσωσης μηδενίζεται αν είτε $u = 0$ είτε $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ στο ∂D, και $Im\ k > 0$, συνεπάγεται ότι

$$\int_D |u|^2 dx = 0.$$

Άρα $u = 0$ στο D. □

Για k πραγματικό, γενικά δεν ισχύει η μοναδικότητα στα εσωτερικά προβλήματα (για την απόδειξη του παραπέμπουμε στο [9]). Τα συμπεράσματα για τη μοναδικότητα των εξωτερικών προβλημάτων βασίζονται κυρίως στο επόμενο Λήμμα του *Rellich*.

Λήμμα 5.5.2. ***(Rellich)*** *Έστω $k > 0$ και $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ μια λύση της εξίσωσης Helmholtz η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και τη*

$$\int_{|x|=R} | u |^2 \, ds = o(1), \qquad R \to \infty.$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$.

Την απόδειξη του Λήμματος Rellich μπορεί να βρεί κανείς ανατρέχοντας στο βιβλίο [9]. Τώρα από την εφαρμογή αυτού έπεται το ακόλουθο κριτήριο.

Θεώρημα 5.5.3. *Έστω $u \in \Re(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ μια λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας και τη*

$$Im \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} ds \right) \geq 0.$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$.

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.4.4 είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα μοναδικότητας.

Θεώρημα 5.5.4. *Τα εξωτερικά προβλήματα Dirichlet και Neumann έχουν το πολύ μία λύση.*

Τέλος μια ειδική περίπτωση ενός ισχυρότερου αποτελέσματος από το Λήμμα του *Rellich* αποτελεί το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 5.5.5. *Έστω $k > 0$ και $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ μια λύση της εξίσωσης Helmholtz η οποία ικανοποιεί τη*

$$\int_{|x|=R} | u |^2 \, ds \to 0, \qquad R \to \infty.$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$.

5.6 ΥΠΑΡΞΗ ΛΥΣΗΣ

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τα αντίστοιχα Θεωρήματα για την ύπαρξη λύσης των προβλημάτων μαλακού και σκληρού σκεδαστή. Για το εσωτερικό και εξωτερικό πρόβλημα *Dirichlet* ισχύει:

Θεώρημα 5.6.1. *Το δυναμικό διπλού στρώματος (5.8) με συνεχή πυκνότητα ψ είναι λύση του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet στο D δεδομένου ότι ψ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης*

$$\psi(x) - 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) = -2f(x), \qquad x \in \partial D. \tag{5.23}$$

Επίσης λύνει το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet στο $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ δεδομένου ότι η ψ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\psi(x) + 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) = 2f(x), \qquad x \in \partial D. \tag{5.24}$$

Για το εσωτερικό και εξωτερικό πρόβλημα *Neumann* ισχύει:

Θεώρημα 5.6.2. *Το δυναμικό απλού στρώματος (5.1) με συνεχή πυκνότητα ϕ είναι λύση του εσωτερικού προβλήματος Neumann στο D δεδομένου ότι ϕ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης*

$$\phi(x) + 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} \phi(y) ds(y) = 2g(x), \qquad x \in \partial D. \tag{5.25}$$

Επίσης λύνει το εξωτερικό πρόβλημα Neumann στο $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ δεδομένου ότι η ϕ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\phi(x) - 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} \phi(y) ds(y) = -2g(x), \qquad x \in \partial D. \tag{5.26}$$

Με χρήση των επιφανειακών τελεστών $K, K' : C(\partial D) \to C(\partial D)$ που δόθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να ξαναγράψουμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις στη μορφή:

$$\psi - K\psi = -2f \tag{5.27}$$

και

$$\psi + K\psi = 2f \tag{5.28}$$

αντί των (5.23),(5.24) για το εσωτερικό κι εξωτερικό πρόβλημα *Dirichlet* αντίστοιχα και

$$\phi + K'\phi = 2g \tag{5.29}$$

και

$$\phi - K'\phi = -2g \tag{5.30}$$

αντί των (5.25),(5.26) για το εσωτερικό κι εξωτερικό πρόβλημα *Neumann* αντίστοιχα.

Τέλος θα δώσουμε δύο ακόμα Θεωρήματα για την ύπαρξη λύσης των προβλημάτων *Dirichlet* και *Neumann*.

Θεώρημα 5.6.3. *Το δυναμικό απλού στρώματος (5.1) με συνεχή πυκνότητα ϕ λύνει το εσωτερικό και εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet δεδομένου ότι η ϕ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης*

$$\int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y) ds(y) = f(x), \qquad x \in \partial D \tag{5.31}$$

Ομοίως με χρήση του επιφανειακού τελεστή $S : C(\partial D) \to C(\partial D)$, η (5.31) ξαναγράφεται στη μορφή

$$S\phi = 2f. \tag{5.32}$$

Θεώρημα 5.6.4. *Το δυναμικό διπλού στρώματος (5.8) με συνεχή πυκνότητα $\psi \in \Re(\partial D)$ λύνει το εσωτερικό και εξωτερικό πρόβλημα Neumann δεδομένου ότι η ψ είναι λύση της ιδιάζουσασ(singular) ολοκληρωτικής εξίσωσης*

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) = g(x), \qquad x \in \partial D \tag{5.33}$$

Επομένως με χρήση του επιφανειακού τελεστή $T : \Re(\partial D) \to C(\partial D)$, η (5.31) ξαναγράφεται στη μορφή

$$T\psi = 2g. \tag{5.34}$$

Σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις των σχέσεων (5.27),(5.28),(5.29),(5.30),(5.32) και (5.34) έπεται από τη Θεωρία $Riesz - Fredholm$, όπου έγινε πλήρης ανάλυση στο Κεφάλαιο 3, η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης τους και συνεπώς η ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης των προβλημάτων ακουστικής σκέδασης του μαλακού και σκληρού σκεδαστή αντίστοιχα. Αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούν να αποδειχθούν ομοίως με χρήση της Θεωρίας Riesz-Fredholm για αντίστοιχα προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών,ελαστικών και θέρμο-ελαστικών κυμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αθανασιάδης Χ, Στρατής Ι, Μαθηματικά μοντέλα στις φυσικές επιστήμες (Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος), Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2000.

2. Athanasiadis C, Costakis G, Stratis I, Electromagnetic scattering by a homogeneous chiral obstacle in a chiral environment, IMA J. Appl. Math., 64 , 245-258, 2000.

3. Athanasiadis C, Martin P, Stratis I, Electromagnetic scattering by a homogeneous chiral obstacle: boundary integral equations and low-chirality approximations, SIAM J. Appl. Math., 59 , 1745-1762, 1999.

4. Angell T, Kirsch A, The conductive boundary condition for Maxwell's equations, SIAM J. Appl. Math., 52,1597-1610, 1992.

5. Angell T, Colton D, Kirsch A, The three dimensional inverse scattering problem for acoustic waves, J. Diff. Eq., 46, 46-58, 1982.

6. Brezis H, Συναρτησιακή Ανάλυση (Θεωρία κι εφαρμογές), Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1997.

7. Cakoni F, Colton D, Monk P, The determination of the surface conductivity of a partially coated dielectric, SIAM J. Appl. Math., 65, 767-789, 2005.

8. Colton D, Coyle J, Monk P, Recent developments in inverse acoustic scattering theory, SIAM Review, 42, 369-414, 2000.

9. Colton D, Kress R, Integral equation methods in scattering theory, Wiley, New York, 1983.

10. Colton D, Kress R, The unique solvability of the null field equations of acoustics, Q. J. Mech. Appl. Math., 36, 87-95, 1983.

11. Dasios G , Kleinman R, Low frequency Scattering, Oxford University Press, Oxford, 1999.

12. Evans LC, Partial Differential Equations, Vol.19, American Mathematical Society, Berkeley, 1997.

13. Kress R, Lee KM, Integral equation methods for scattering from an impedance crack , J. Comp. Appl. Math., 161, 161-177, 2003.

14. Kress R, On boundary integral equation methods in stationary electromagnetic reflection, In Springer-Verlag Lecture, Notes in Mathematics , Vol. 846 , Or-

dinary and partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 210-226, 1980.

15. Kress R, On the existence of a solution to a singular integral equation in electromagnetic reflection, J. Math. Anal. Appl., 77, 555-556, 1980.

16. Logan JD, Applied Mathematics, 2nd ed., Wiley, New York, 1967.

17. Martin PA, On the null field equations for the exterior problems of acoustics, Q. J. Mech. Appl. Math., 33, 385-396, 1980.

18. Roach GF, Stratis IG, Yannacopoulos AN, Mathematical Analysis of Deterministic and Stochastic Problems in Complex Media Electromagnetics, Princeton Series in Applied Mathematics, 2012.

19. Young N, An introduction to Hilbert space , Cambridge University Press, New York, 1988.