

Σολιτόνια σε  
συμπυκνώματα  
**Bose-Einstein.**

Παπαϊωάννου Μαρία

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΑΘΗΝΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
Τμήμα Μαθηματικών  
Αθήνα, 2017

## Περιεχόμενα

<b>1 Συμπύκνωση Bose-Einstein.</b>	<b>6</b>
1.1 Φυσική περιγραφή του φαινομένου της συμπύκνωσης Bose-Einstein.	6
1.2 Ποιοτική Περιγραφή του φαινομένου της συμπύκνωσης Bose-Einstein.	8
1.3 Πειραματική προσέγγιση της συμπύκνωσης Bose-Einstein(BEC)	8
1.4 Μία εισαγωγή στα σολιτόνια σε συμπυκνώματα Bose-Einstein(BEC)	9
<b>2 Περιγραφή του BEC μέσω της εξίσωσης Gross-Pitaevskii.</b>	<b>11</b>
2.1 Η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος πολλών ταυτοτικών σωματιδίων.	11
<b>3 Εξίσωση Gross-Pitaevskii.</b>	<b>11</b>
3.1 Εισαγωγή.	11
3.2 Μελέτη της Gross-Pitaevskii εξίσωσης σε ένα μέσο πεδίο.	12
3.2.1 Προσέγγιση μέσου πεδίου.	12
3.2.2 Θεμελιώδης Κατάσταση.	14
3.3 Μελέτη της Gross-Pitaevskii σε χαμηλότερες διαστάσεις.	15
3.3.1 Το σχήμα του συμπυκνώματος και τα μήκη κλίμακας.	15
3.3.2 Η GP εξίσωση από 3 ΣΕ 1 διάσταση.	15
<b>4 Εξίσωση NLS σε μία διάσταση.</b>	<b>18</b>
4.1 Περιγραφή της εξίσωσης και ολοκληρώματα κίνησης.	18
4.2 Λύσεις της εξίσωσης NLS.	19
4.2.1 Φωτεινά σολιτόνια.	19
4.2.2 Σκοτεινά σολιτόνια.	21
4.3 Υδροδυναμική Προσέγγιση της εξίσωσης NLS μέσω των εξισώσεων συνέχειας του ρευστού.	23
4.4 Ευστάθεια της θεμελιώδους κατάστασης επίπεδου κύματος (Αστάθεια διαμόρφωσης)	24
<b>5 Η εξίσωση Boussinesq μέσω των εξισώσεων συνέχειας.</b>	<b>26</b>
<b>6 Από την εξίσωση NLS στην εξίσωση Korteweg–de Vries (KdV).</b>	<b>27</b>
<b>7 Λύσεις σολιτονίων στο επίπεδο φάσεων.</b>	<b>31</b>
7.1 Χώρος φάσεων για τα φωτεινά σολιτόνια	34
7.2 Χώρος φάσεων για τα σκοτεινά σολιτόνια.	36
<b>8 Ο νόμος διατήρησης του αριθμού των ατόμων.</b>	<b>39</b>
8.1 Η προσέγγιση Thomas-Fermi.	40
8.2 Δυναμική των σολιτονίων παρουσία εξωτερικού δυναμικού.	43
8.2.1 Διατύπωση του προβλήματος.	43
8.2.2 Σκοτεινά σολιτόνια σαν νευτώνια σωματίδια.	44
<b>9 Από την Εξίσωση Boussinesq στην εξίσωση Korteweg–de Vries(Kdv).</b>	<b>47</b>

<b>10 Εξίσωση Korteweg-de Vries.(KdV)</b>	<b>51</b>
10.1 Εξίσωση KdV και οι λύσεις της στον φασικό χώρο. . . . .	51
<b>11 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	<b>53</b>
11.1 Εναλλακτική προσέγγιση της παραγράφου 4.4 . . . . .	53
<b>12 Αναφορές</b>	<b>55</b>

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η διπλωματική αυτή εργασία εκπονήθηκε στη Σχολή Θετικών Επιστημών, στο Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, στα πλαίσια του μεταπτυχιακού διπλώματος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ.Ιωάννη Στρατή. Θερμές ευχαριστίες στον καθηγητή κ.Ιωάννη Στρατή για την υποστήριξη και τις επιστημονικές συζητήσεις καθώς και στον καθηγητή κ.Δημήτριο Φραντζεσκάκη του τμήματος Φυσικής για τις αξιόλογες υποδείξεις και την άριστη καθοδήγηση.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάται το φαινόμενο της συμπύκνωσης Bose-Einstein. Αρχικά περιγράφουμε το φαινόμενο από φυσικής σκοπιάς και ύστερα το αναλύουμε μέσω της εξίσωσης Gross-Pitaevskii. Αφού περάσουμε στην προσέγγιση μέσου πεδίου και στα μήκη κλίμακας του συμπυκνώματος καταλήγουμε στην μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση Schrödinger (NLS), η οποία είναι η εξίσωση Gross-Pitaevskii σε μία διάσταση. Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι τα φωτεινά, σκοτεινά καθώς και τα γκρι σολιτόνια τα οποία απεικονίζονται στον φασικό χώρο μέσω των διαχωριστικών καμπύλων. Ύστερα, θα προσεγγίσουμε υδροδυναμικά την εξίσωση NLS μέσω των εξισώσεων συνέχειας και Euler που διέπουν τα ρευστά. Μέσω των εξισώσεων αυτών θα καταλήξουμε στην εξίσωση Korteweg-de Vries με δύο τρόπους-απευθείας και έπειτα μέσω της εξίσωσης Boussinesq. Τέλος, θα μελετήσουμε την δυναμική των σολιτονίων παρουσία εξωτερικού δυναμικού. Αφού διατυπώσουμε το πρόβλημα θ' αποδειχθεί ότι οι λύσεις της εξίσωσης Gross-Pitaevskii συμπεριφέρονται σαν κλασσικά νευτώνεια σωματίδια.

## **Abstract**

The aim of this thesis is to introduce the reader to physical notions and mathematical methods that are relevant to the study of nonlinear waves in Bose-Einstein condensates (BECs). Upon introducing the general framework, we present the Gross-Pitaevskii (GP) equation, through the mean field theory and its form from 3D to 1D. The GP equation (1D) is the nonlinear Schrödinger equation (NLS). The solutions of the NLS equation are the black, white and grey solitons, that can be observed in the phase space. We also discuss the hydrodynamic approach of the NLS equation through the equations of continuity. With this approach, we present the transformation from NLS to KdV (via the Boussinesq equation) and from NLS to KdV, through the perturbation theory. Special attention is paid to the ground state in presence of the potential: we study the solitons' solutions that behave like particles and obey the second law of Newton.

# 1 Συμπύκνωση Bose-Einstein.

## 1.1 Φυσική περιγραφή του φαινομένου της συμπύκνωσης Bose-Einstein.

Ας θεωρήσουμε ένα αέριο του οποίου τα σωματίδια μπορούν να περιγραφούν ως κυματοπακέτα που έχουν μήκος όσο το μήκος κύματος De Broglie<sup>1</sup>, το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda_{DB} = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

όπου  $\hbar$  η ανηγμένη σταθερά του Planck<sup>2</sup>,  $k$  η σταθερά του Boltzmann<sup>3</sup> και  $T$  η θερμοκρασία.

Σε σχετικά υψηλές θερμοκρασίες, το μήκος κύματος αυτό είναι πολύ μικρότερο από την απόσταση μεταξύ δύο σωματιδίων. Επομένως, τα σωματίδια αυτά είναι αδύνατον να βρεθούν σε πολύ κοντινή απόσταση μεταξύ τους και λόγω των παραπάνω περιγράφονται από την στατιστική Boltzmann. Μειώνοντας τη θερμοκρασία στο αέριο, το μήκος κύματος θα αρχίσει να αυξάνει μέχρι να γίνει συγκρίσιμο με τη μέση απόσταση μεταξύ των σωματιδίων και σαν αποτέλεσμα έχουμε αλληλοεπικάλυψη των κυματοπακέτων των διάφορων σωματιδίων τα οποία δημιουργούν ένα μακροσκοπικό κύμα ύλης.

Στην περίπτωση που τα σωματίδια μας είναι φερμιόνια η στατιστική κατανομή Fermi-Dirac<sup>4 5</sup> δεν επιτρέπει σε δύο φερμιόνια να βρεθούν στην ίδια κβαντική κατάσταση. Για τα μποζόνια όμως που ακολουθούν τη κατανομή Bose-Einstein<sup>6 7</sup> η πιθανότητα κατάληψης της ίδιας κβαντικής κατάστασης από πολλά σωματίδια είναι δυνατή.

Κάτω από μία κρίσιμη θερμοκρασία, σημαντικός αριθμός μποζονίων θα βρεθούν στη θεμελιώδη τους κατάσταση. Η θερμοκρασία αυτή για ένα αδρανές αέριο, στις τρεις διαστάσεις χωρίς εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας είναι:

$$T_c = \left( \frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2\pi m k_B} \quad (2)$$

όπου:

$T_c$ : κρίσιμη θερμοκρασία  
 $n$ : η πυκνότητα σωματιδίων  
 $m$ : η μάζα των μποζονίων  
 $h$ : η σταθερά του Planck

<sup>1</sup>De Broglie, Louis: 1892-1987, Γάλλος φυσικός

<sup>2</sup>Planck, Max: 1858-1947, Γερμανός φυσικός

<sup>3</sup>Boltzmann, Ludwig: 1844-1906, Αυστριακός φυσικός

<sup>4</sup>Fermi, Enrico: 1901-1954, Ιταλός φυσικός

<sup>5</sup>Dirac, Paul: 1902-1984, Άγγλος φυσικός

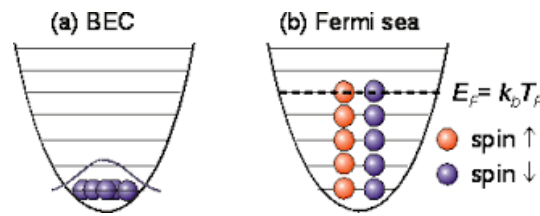
<sup>6</sup>Bose, Satyendra Nath: 1894-1974, Ινδός φυσικός

<sup>7</sup>Einstein, Albert: 1879-1955, Γερμανός φυσικός

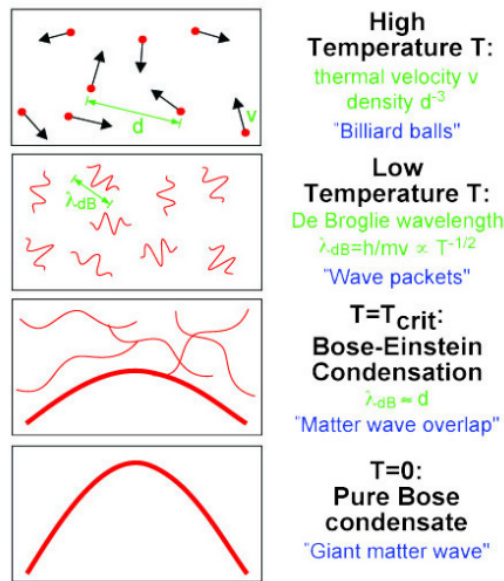
$k_B$ : η σταθερά του Boltzman  
 $\zeta$ : η συνάρτηση του Riemann<sup>8</sup>.

Τυπικά, η κρίσιμη θερμοκρασία είναι της τάξης των λίγων εκατοντάδων  $nK$ , ενώ η πιο χαμηλή θερμοκρασία που έχει επιτευχθεί πειραματικά είναι  $T = 0.5nK$ . (από την πειραματική ομάδα του MIT)

Το αέριο μποζονίων θα υποστεί μία αλλαγή φάσης με αποτέλεσμα να σχηματιστεί το συμπύκνωμα Bose-Einstein. Στο BEC ένας μεγάλος αριθμός σωματιδίων καταλαμβάνει τη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη. Η αλλαγή αυτή φάσης όμως είναι ένα καθαρά χβαντικό φαινόμενο και δεν αποτελεί φαινόμενο που έχει να κάνει με τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ σωματιδίων όπως η τήξη ή η εξαέρωση.



Σχήμα 1: Κατανομή μποζονίων-φερμιονίων



Σχήμα 2: Στάδια δημιουργίας του BEC

<sup>8</sup>Riemann, Bernhard: 1826-1866, Γερμανός μαθηματικός



## 1.2 Ποιοτική Περιγραφή του φαινομένου της συμπύκνωσης Bose-Einstein.

Ας θεωρήσουμε ένα αέριο του οποίου τα σωματίδια μπορούμε όπως προείπαμε να το αντιμετωπίσουμε ως κυματοπακέτα που έχουν έκταση της τάξης του κύματος De Broglie. Σε σχετικά υψηλές θερμοκρασίες, το  $l_{dB}$  είναι πολύ μικρό, οπότε είναι αδύνατον να βρεθούν δύο σωματίδια μέσα σε αυτήν την απόσταση, έτσι το αέριο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύστημα και να περιγραφεί με την στατιστική Boltzmann. Όταν όμως η θερμοκρασία ελαττωθεί ως το σημείο που  $\lambda_{dB} \approx r$ , δηλαδή το μήκος κύματος De Broglie να γίνει συγκρίσιμο με τη μέση απόσταση  $r$  μεταξύ των σωματιδίων, όπου  $r \approx \rho^{-\frac{1}{3}}$  (με  $\rho$  την πυκνότητα των σωματιδίων), τότε τα κυματοπακέτα αρχίζουν να επικαλύπτονται, με αποτέλεσμα η ταυτότητα κάθε σωματιδίου να γίνεται δυσδιάκριτη. Για τα φερμιόνια, τα οποία είναι σωματίδια με ημιακέραια ιδιοστροφορμή που ακολουθούν την κατανομή Fermi-Dirac, η απαγορευτική αρχή του Pauli,<sup>9</sup> δεν επιτρέπει σε δύο σωματίδια να καταλάβουν την ίδια κβαντική κατάσταση. Αντιθέτως, τα μποζόνια τα οποία έχουν ακέραια ιδιοστροφορμή και ακολουθούν την κατανομή Bose-Einstein, η πιθανότητα κατάληψης της ίδιας κβαντικής κατάστασης είναι πολύ μεγάλη, με αποτέλεσμα το σχηματισμό του συμπυκνώματος Bose-Einstein. Στην Bose-Einstein συμπύκνωση, ένας μακροσκοπικός αριθμός σωματιδίων καταλαμβάνει τη χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση.

Σημειώνεται ότι εάν  $T_0$ , είναι η κρίσιμη θερμοκρασία στην οποία λαμβάνει χώρα η αλλαγή φάσης, τότε ο αριθμός των ατόμων  $N_0$  του συμπυκνώματος για θερμοκρασία  $T < T_0$  και  $N$  τον αριθμό των ατόμων του αερίου, είναι:

$$N_0 = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^3 \right]$$

Σε αυτό το σημείο, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι κατά τη συμπύκνωση Bose-Einstein οι κυματοσυναστήσεις των μποζονικών σωματιδίων επικαλύπτονται χωρικά και έτσι τα κύματα ύλης ταλαντώνονται σε συμφωνία με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί ένα γιγάντιο κύμα ύλης το οποίο φαίνεται και στο σχήμα 2 της προηγούμενης σελίδας.

Τέλος, ας επισημάνουμε ότι η συμπύκνωση είναι μια αλλαγή φάσης όπως η τήξη με την διαφορά ότι δεν υπάρχει διαχωρισμός στον χώρο, με διαφορετικές ιδιότητες σε κάθε περιοχή. Η συμπύκνωση αυτή οφείλεται καθαρά στις κβαντικές ιδιότητες της ύλης και όχι στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων οι οποίες θεωρούνται αμελητέες αν κρατήσουμε την πυκνότητα του αερίου χαμηλή.

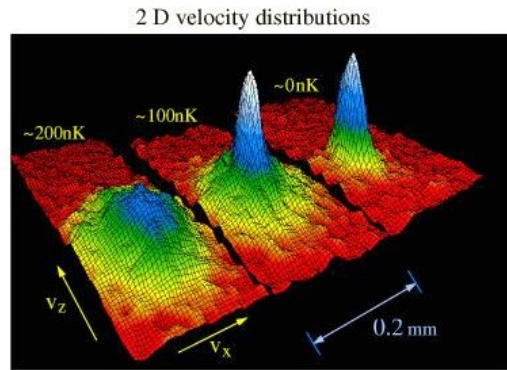
## 1.3 Πειραματική προσέγγιση της συμπύκνωσης Bose-Einstein(BEC)

Η πρόβλεψη για τη δημιουργία του συμπυκνώματος έγινε πρώτη φορά από τον Bose το 1925. Χρειάστηκαν εβδομήντα χρόνια για την επιτυχή δημιουργία του συμπυκνώματος, η οποία πραγματοποιήθηκε το 1995 στο πανεπιστήμιο του Κολοράντο.

<sup>9</sup>Pauli, Wolfgang: 1900-1958, Αυστριακός φυσικός

Στο πείραμα αυτό, πηγή  $^{87}\text{Rb}$  τοποθετήθηκε σε χώρο υψηλού κενού, θερμάνθηκε για να εξαερωθούν τα άτομα με ταχύτητες της τάξης των μερικών εκατοντάδων  $m/s$ . Στη συνέχεια απομονώθηκε μια δέσμη η οποία επιβραδύνθηκε με τη μέθοδο ψύξης με LASER. Το αποτέλεσμα είναι να επιβραδυνθούν τα σωματίδια σε ταχύτητες της τάξης των  $cm/s$  που αντιστοιχούν σε θερμοκρασίες της τάξης των  $mK$ . Το αέριο αυτό τοποθετήθηκε σε μαγνητική παγίδα, ψύχθηκε ακόμη περισσότερο σε θερμοκρασίες της τάξης των  $170\text{ nK}$ . Στη θερμοκρασία αυτή δημιουργήθηκε το συμπύκνωμα Bose-Einstein. Τα τελευταία χρόνια διάφορες πειραματικές ομάδες έχουν καταφέρει να δημιουργήσουν BEC και από άλλα στοιχεία όπως:  $^7\text{Li}$ ,  $^{23}\text{Na}$ ,  $^{39}\text{K}$ ,  $^{41}\text{K}$ ,  $^{85}\text{Rb}$ ,  $^{87}\text{Rb}$ ,  $^{123}\text{Cs}$ ,  $^{52}\text{Cr}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{84}\text{Sr}$ ,  $^{86}\text{Sr}$ ,  $^{88}\text{Sr}$ ,  $^{174}\text{Yb}$ ,  $^{164}\text{Dy}$ ,  $^{168}\text{Er}$ .

Τέλος, τα BECs που δημιουργούνται στα εργαστήρια αποτελούν κβαντικές μακροσκοπικές καταστάσεις της ύλης. Σε πολύ χαμηλες θερμοκρασίες, κβαντικά φαινόμενα όπως η υπεραγωγιμότητα στα μέταλλα και η υπερρευστότητα στο ρευστό ήλιο γίνονται εμφανή.



Σχήμα 3: Γραφική απεικόνιση BEC συναρτήσει της θερμοκρασίας σε δύο διαστάσεις.

#### 1.4 Μία εισαγωγή στα σολιτόνια σε συμπυκνώματα Bose-Einstein(BEC)

Τα συμπυκνώματα Bose-Einstein, εν συντομία BEC, προσφέρουν όπως προείπαμε την δυνατότητα της θεωρητικής και πειραματικής μελέτης μη γραμμικών φαινομένων μέσω κυμάτων ύλης. Το ενδιαφέρον για τέτοιου είδους μελέτες έχει κατακόρυφα αυξηθεί, όπως αποδεικνύεται από σειρά προσφάτων πειραμάτων, τα οποία έχουν αναδείξει τη μορφή των λεγόμενων σολιτονίων σε μία διάσταση, τη δυνατότητα μείξης τεσσάρων κυμάτων με BEC, τη δημιουργία τοπολογικών μορφωμάτων όπως οι στρόβιλοι (σολιτόνια σε ανώτερες διαστάσεις), όπως και τη δημιουργία σκοτεινών και φωτεινών σολιτονίων. Τα σολιτόνια είναι μη γραμμικά εντοπισμένα κύματα τα οποία παρατηρούνται στα περισσότερα φυσικά φαινόμενα.

Τα κύματα αυτά ενοπίστηκαν για πρώτη φορά απο τον Russell <sup>10</sup> το 1834 κοντά στο Εδιμβούργο και μία από τις πιο σημαντικές τους ιδιότητες είναι ότι συμπεριφέρονται σαν σωματίδια.

Τα κύματα αυτά εμφανίζουν μία ισορροπία μεταξύ της μη γραμμικότητας και της διασποράς που τα διέπουν. Συγκεκριμένα, η μη γραμμικότητα είναι υπεύθυνη για την παραμόρφωση του σχήματος μεγάλου πλάτους κυμάτων. Παρόλα αυτά υπάρχει και μία άλλη πηγή παραμόρφωσης, η διασπορά του κύματος. Εν αντιθέσει με τα γραμμικά κύματα που περιγράφονται απο γραμμικές εξισώσεις και αναπαριστούν μια περιοδική επανάληψη από ανυψώσεις και κοιλότητες σε ένα μέσο, τα σολιτόνια είναι μεμονωμένες ανυψώσεις και πολλαπλασιάζονται με μοναδική ενότητα με συγκεκριμένη ταχύτητα.

Συγκεκριμένα, τα βασικά χαρακτηριστικά ενός σολιτονίου είναι:

- Ένα κύμα σολιτονίου έχει σταθερή ταχύτητα και διατηρεί το σχήμα του καθώς πολλαπλασιάζεται.
- Ένα μεγάλο κύμα σολιτονίου "σπάει" σε δύο ή μικρότερα κύματα. Τα νέα κύματα έχουν διαφορετικά ύψη και ως αποτέλεσμα, οι ταχύτητες τους είναι διαφορετικές.
- Οι ανυψώσεις (elevations) και οι κοιλότητες(humps) δεν συναντώνται ποτέ.
- Η ταχύτητα εξαρτάται από το ύψος του κύματος  $u$ , το βάθος του καναλιού  $h$  και δίνεται από τον τύπο,

$$u = \sqrt{g(h + u)}$$

όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η παραπάνω σχέση ισχύει για  $u < h$ .

Επιπλέον, έχουν μελετηθεί και άλλες, πιο πολύπλοκες μη γραμμικές διεγέρσεις του BEC, όπως πλέγματα στροβίλων που παρατηρήθηκαν πειραματικά αναδεικνύοντας μεταξύ άλλων τον υπέρρευστο χαρακτήρα του BEC, κύματα Faraday,<sup>11</sup> σκοτεινά κυλινδρικά σολιτόνια και περιδέραια στροβίλων, πνοές κυμάτων ύλης με διαχείριση του συντονισμού Feshbach.<sup>12</sup>

<sup>10</sup>Russell, John Scott: 1808-1882, Σκώτος πολιτικός μηχανικός και ναυπηγός

<sup>11</sup>Faraday, Michael: 1791-1867, Άγγλος αυτοδίδακτος φυσικός

<sup>12</sup>Feshbach, Herman: 1917-2000, Αμερικανός φυσικός

## 2 Περιγραφή του BEC μέσω της εξίσωσης Gross-Pitaevskii.

### 2.1 Η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος πολλών ταυτοτικών σωματιδίων.

Η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος πολλών ταυτοτικών σωματιδίων (αλλιώς  $N$  μποζονίων) περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση,

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=j}^N V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (3)$$

η λύση της οποίας θα είναι της μορφής,

$$\psi^s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{N!} \sum_P \hat{P} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (4)$$

Στην παραπάνω λύση,  $\hat{P}$  είναι όλες οι δυνατές αναδιατάξεις των σωματιδίων. Ορίζουμε τους τελεστές μποζονικού πεδίου,

$$\hat{\psi}^+(\mathbf{r}) = \sum_k \psi^*(\mathbf{r}) b_k^+$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_k \psi(\mathbf{r}) b_k$$

όπου  $\psi_k(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}, k \rangle$  είναι οι μονοσωματιδιακές καταστάσεις στην βάση του χώρου θέσεων,

$b_k = \int d\mathbf{r} \langle \mathbf{r} | k \rangle \hat{\psi}(\mathbf{r})$ . Επιπλέον  $b_k, b_k^+$  τελεστές καταστροφής και δημιουργίας αντίστοιχα.

Ο τελεστής  $b_k$  γράφεται,

$$\langle b_k | n_1 n_2 \dots n_k \dots n_\infty \rangle = \langle \sqrt{n_k} | n_1 n_2 \dots n_{k-1} \dots n_\infty \rangle$$

Ο τελεστής  $b_k^+$  γράφεται,

$$\langle b_k^+ | n_1 n_2 \dots n_k \dots n_\infty \rangle = \langle \sqrt{n_{k+1}} | n_1 n_2 \dots n_{k+1} \dots n_\infty \rangle$$

όπου  $\langle n_1 n_2 \dots n_k \dots n_\infty \rangle$ , μία βάση που εκφράζει τον αριθμό των σωματιδίων  $n_k$ , που βρίσκονται σε κάθε μονοσωματιδιακή κατάσταση με  $k$  τις μονοσωματιδιακές καταστάσεις.

## 3 Εξίσωση Gross-Pitaevskii.

### 3.1 Εισαγωγή.

Από θεωρητική και πειραματική σκοπιά, οι στατικές και δυναμικές ιδιότητες του BEC μπορούν να περιγραφούν μέσω της εξίσωσης μέσου πεδίου Gross-Pitaevskii,<sup>13</sup>

<sup>13</sup>Gross, Eugene: 1926-1991, Αμερικανός φυσικός

<sup>14</sup> η οποία είναι μία μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση Schrödinger<sup>15</sup> γνωστή και ως NLS. Η εξίσωση αυτή περιλαμβάνει επιπλέον ένα εξωτερικό δυναμικό που χρησιμοποιείται για να περιορίσει το συμπύκνωμα.

Στην περίπτωση που έχουμε Bose-Einstein συμπύκνωμα, η μη γραμμικότητα στην GP(NLS) εξίσωση εμφανίζεται στις ενδοατομικές αλληλεπιδράσεις που λειτουργούν σε ένα μέσο πεδίο. Η προσέγγιση μέσου πεδίου και η μελέτη της GP εξίσωσης ανοίγει τον δρόμο για τη μελέτη και περιγραφή μη γραμμικών κυμάτων όπως τα σολιτόνια και οι στρόβιλοι. Τα σολιτόνια (κύματα ύλης) και οι στρόβιλοι μελετώνται ως θεμελιώδεις μη γραμμικές διεγέρσεις του BEC. Έχουν επίσης παρατηρηθεί πειραματικά με πολλές διαφορετικές τεχνικές, με σκοπό να δημιουργηθούν στρόβιλοι και σκοτεινά κύματα ύλης (σολιτόνια) μέσα σε αυτό. Επιπλέον η εξίσωση NLS παρουσιάζει ενδιαφέρον στην οπτική, στην δυναμική των ρευστών και στη φυσική του πλάσματος.

Παρακάτω θα μελετήσουμε την εξίσωση GP και τις ιδιότητές της. Επιπροσθέτως θα αναλύσουμε πώς από την GP θα καταλήξουμε στην απλοποιημένη NLS.

### 3.2 Μελέτη της Gross-Pitaevskii εξίσωσης σε ένα μέσο πεδίο.

Το αέριο αποτελείται από  $N$  σωματίδια μάζας  $m$ . Στην περίπτωση που είναι πολύ αραιό, η θερμοκρασία τείνει στο απόλυτο μηδέν και τα σωματίδια περιορίζονται από ένα εξωτερικό δυναμικό  $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ , τότε το αέριο περιγράφεται από την παρακάτω Χαμιλτονιανή σε δεύτερη κβαντισμένη μορφή :

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{H}_0 \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

όπου :

$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  και  $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$  : Οι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας αντίστοιχα.

$\hat{H}_0 = -(\hbar^2/2m)\nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$  : Ο τελεστής που προσδιορίζει την αρχική Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου.

$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  : Το δυναμικό αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε δύο σωματίδια.

#### 3.2.1 Προσέγγιση μέσου πεδίου.

Η προσέγγιση μέσου πεδίου βασίστηκε στο επιμερισμό Bogoliubov<sup>16</sup> που αναπτύχθηκε από τον ίδιο το 1947, σύμφωνα με η οποία ο τελεστής καταστροφής γράφεται ως,

<sup>14</sup>Pitaevskii, Lev Petrovich: 1933-, Ρώσος φυσικός

<sup>15</sup>Schrödinger, Erwin: 1887-1961, Αυστριακός φυσικός

<sup>16</sup>Bogoliubov, Nikolay: 1909-1992, Ρώσος μαθηματικός

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, t) + \hat{\Psi}_1(\mathbf{r}, t)$$

Ο τελεστής  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$  είναι η μακροσκοπική κυματοσυνάρτηση του συμπυκνώματος και περιγράφει το σύστημα πριν τη συμπύκνωση ενώ ο τελεστής  $\hat{\Psi}_1(\mathbf{r}, t)$  περιγράφει τα μη συμπυκνωμένα σωματίδια, ο οποίος σε θερμοκρασίες πολύ χαμηλότερες από την  $T_c$  θεωρείται αμελητέος.

Επομένως, σε χαμηλές θερμοκρασίες και αραιό αέριο στο συμπύκνωμα θεωρούμε την αλληλεπίδραση των σωματιδίων ως μετωπικές κρούσεις μεταξύ δύο σωματιδίων που έχουν μηδενική στροφορμή. Η αλληλεπίδραση αυτή περιγράφεται από ένα δυναμικό εντοπισμένο στο χώρο με χαρακτηριστικό μέγεθος το μήκος σκέδασης  $a$ . Το δυναμικό αυτό αλλάζει πρόσημο σε περίπτωση έλξης ( $-$ ) ή απώθησης ( $+$ ). Στην περίπτωση που η απόσταση των σωματιδίων είναι πολύ μεγαλύτερη από το μήκος σκέδασης, το δυναμικό περιγράφεται από τη σχέση :

$$V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (6)$$

όπου  $\delta$ , το δέλτα του Dirac.

Το παραπάνω δυναμικό προκύπτει από τη προσέγγιση μέσου πεδίου.

Ο συντελεστής  $g$ , όπου

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (7)$$

είναι η σταθερά σύζευξης και εξαρτάται από το  $a$ .

Από την εικόνα Heisenberg<sup>17</sup> για τον τελεστή  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ , ισχύει :

$$i\hbar(\partial\hat{\Psi}/\partial t) = [\hat{\Psi}, \hat{H}] \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) την (4) παίρνουμε τη παρακάτω εξίσωση :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[ \hat{H}_0 + \int d\mathbf{r}'\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)V(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t). \quad (9)$$

Τέλος, με την εφαρμογή της προσέγγισης μέσου πεδίου (εξισώσεις (2), (3» στην τελευταία, παίρνουμε την  $GP$  εξίσωση.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (10)$$

Η κυματοσυνάρτηση  $\Psi$  μπορεί να εκφραστεί μέσω της παρακάτω εξίσωσης:  $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ , όπου  $\rho$  η πυκνότητα.

Για χρονοανεξάρτητα εξωτερικά δυναμικά, από τη  $GP$  εξίσωση, παίρνουμε τα εξής ολοκληρώματα κίνησης:

$$N = \int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}, \quad (11)$$

<sup>17</sup>Heisenberg, Werner: 1901-1976 Γερμανός φυσικός

όπου  $N$  ο συνολικός αριθμός των ατόμων στο σύστημά μας.

$$E = \int d\mathbf{r} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi|^2 + V_{\text{ext}}|\Psi|^2 + \frac{1}{2}g|\Psi|^4 \right], \quad (12)$$

όπου  $E$  η συνολική ενέργεια του συστήματος. Στο παραπάνω ολοκλήρωμα, οι τρεις όροι εκφράζουν την κινητική, δυναμική και την ενέργεια αλληλεπίδρασης αντιστοίχως.

Μία χρονοανεξάρτητη μορφή της εξίσωσης  $GP$  μπορεί να εξαχθεί εάν εκφράσουμε τη κυματοσυνάρτηση του  $BEC$  ως:  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}) \exp(-i\mu t/\hbar)$ , όπου  $\Psi_0$  είναι κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση στον αριθμό των ατόμων  $N$  και  $\mu = \partial E/\partial N$  όπου  $\mu$  το χημικό δυναμικό.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση (6), παίρνουμε την εξίσωση σταθερής κατάστασης για το  $\Psi_0$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\Psi_0|^2(\mathbf{r}) \right] \Psi_0(\mathbf{r}) = \mu\Psi_0(\mathbf{r}). \quad (13)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι χρήσιμη καθώς έχει στατικές λύσεις, στις οποίες περιέχεται και η θεμελιώδης κατάσταση του συστήματος. (ground state)

### 3.2.2 Θεμελιώδης Κατάσταση.

Θεωρούμε ένα συμπύκνωμα το οποίο περιορίζεται από ένα αρμονικό εξωτερικό δυναμικό:

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (14)$$

όπου  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  οι κυκλικές συχνότητες στις αντίστοιχες διαστάσεις.

Τη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος μπορούμε να την υπολογίσουμε μέσω της κυματοσυνάρτησης του  $BEC$ . Εφαρμόζοντας την εξίσωση (10) στην (9) και θεωρώντας ότι δεν έχουμε αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων  $g = 0$  η λύση μας θα είναι η θεμελιώδης κατάσταση του κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή:

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \left( \frac{m\omega_{\text{ho}}}{\pi\hbar} \right)^{3/4} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \right], \quad (15)$$

όπου:  $\omega_{\text{ho}} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ , ο γεωμετρικός μέσος των συχνοτήτων.

Στην περίπτωση που έχουμε απωστικές αλληλεπιδράσεις ( $g > 0$ ) ή το μήκος σκέδασης ( $a > 0$ ), αν ο αριθμός των ατόμων στο συμπύκνωμα είναι αρκετά μεγάλος, τα άτομα ωθούνται προς το εξωτερικό του συμπυκνώματος με αποτέλεσμα να έχουμε αργές χωρικές μεταβολές της πυκνότητας. Στην περίπτωση αυτή, η κινητική ενέργεια θα είναι πολύ μικρή σε σχέση με την δυναμική και την ενέργεια αλληλεπίδρασης αλλά θα γίνεται πιο εμφανής στα όρια του συμπυκνώματος. Επομένως στην εξίσωση (9), ο κινητικός όρος θεωρείται αμελητέος. Λόγω των παραπάνω,

η πυκνότητα της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος θα περιγράφεται από την εξής εξίσωση (Thomas-Fermi equation):

$$\rho(\mathbf{r}) = |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 = g^{-1} [\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})]$$

Στην περίπτωση που έχουμε ελκτικές αλληλεπιδράσεις ( $g < 0$ ) ή το μήκος σκέδασης ( $a < 0$ ), η πυκνότητα τείνει να αυξάνει προς το κέντρο του συμπυκνώματος ενώ η κινητική ενέργεια έχει την τάση να αντισταθμίζει την αύξηση της πυκνότητας. Ωστόσο, εάν ο αριθμός των ατόμων στο συμπύκνωμα ξεπεράσει μία κρίσιμη τιμή, το αέριο θα καταρρεύσει. Η κατάρρευση αυτή είναι πιθανόν να μην συμβαίνει σε quasi 1D συστήματα, αν ο αριθμός των ατόμων δεν ξεπερνά μία κρίσιμη τιμή.

### 3.3 Μελέτη της Gross-Pitaevskii σε χαμηλότερες διαστάσεις.

#### 3.3.1 Το σχήμα του συμπυκνώματος και τα μήκη κλίμακας.

Στην περίπτωση που έχουμε αρμονικό δυναμικό παγίδευσης, δηλαδή την εξίσωση (10), η συχνότητα είναι αυτή που ελέγχει το σχήμα του συμπυκνώματος. Συγκεκριμένα, εάν η παγίδα μας είναι ισότροπη, δηλαδή  $\omega_x = \omega_y \equiv \omega_r \approx \omega_z$ , τότε το συμπύκνωμα έχει σχεδόν σχήμα σφαιρικό. Σε περίπτωση που  $\omega_z < \omega_r$ , δηλαδή η παγίδα μας είναι ανισότροπη, το συμπύκνωμα παίρνει σχήμα πούρου και τέλος εάν  $\omega_r < \omega_z$  έχουμε σχήμα δίσκου. Επιπλέον, σε ιδιαίτερα ανοσότροπα δυναμικά παγίδευσης όπου  $\omega_z \ll \omega_r$  ή  $\omega_r \ll \omega_z$ , έχουμε ψευδο 1D και ψεύδο 2D BECs. Τα συγκεκριμένα BECs έχουν μελετηθεί θεωρητικά και πειραματικά με οπτικές και μαγνητικές παγίδες και επιφανειακές μικροπαγίδες.

Τέλος, οι συγκεκριμένες συχνότητες του αρμονικού δυναμικού παγίδευσης μας δίνουν χαρακτηριστικά μήκη κλίμακας για το μέγεθος του συμπυκνώματος μέσω της σχέσης  $a_j \equiv (\hbar/m\omega_j)^{1/2}$  του χαρακτηριστικού αρμονικού ταλαντωτή. Ένα άλλο σημαντικό μήκος κλίμακας που προέρχεται από τη θεωρία μέσου πεδίου είναι η απόσταση στην οποία η κινητική ενέργεια και η ενέργεια αλληλεπίδρασης, ισορροπούν. Εάν η πυκνότητα του BEC αυξάνει από 0 έως  $\rho$  στην απόσταση  $\xi$ , οι δύο ενέργειες εξισώνονται και η παράμετρος  $\xi$  δίνεται από τον τύπο,  $\xi = (8\pi\rho a)^{-1/2}$ .

#### 3.3.2 Η GP εξίσωση από 3 ΣΕ 1 διάσταση.

Ας υποθέσουμε ότι  $\omega_z \ll \omega_x = \omega_y \equiv \omega_r$  τότε, εάν το χαρακτηριστικό μήκος του αρμονικού ταλαντωτή είναι  $a_r \equiv \sqrt{\hbar/m\omega_r} < \xi$ , το συμπύκνωμά μας είναι ισχυρά ανισότροπο και όπως προείπαμε αποκτά σχήμα πούρου και μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά μονοδιάστατο (1D). Επομένως, η τρισδιάστατη GP εξίσωση μετατρέπεται σε 1D και αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει για επαρκώς μικρό λόγο  $\omega_z/\omega_r$ . Πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι αυτή η μείωση διαστάσεων είναι πλασματική (quasi1D) και μπορεί να γίνει μόνο στα πλαίσια της θεωρίας μέσου πεδίου τριών διαστάσεων. Παρακάτω θα μελετήσουμε πώς απο τη τρισδιάστατη GP θα πάμε στο 1D μοντέλο. Θεωρούμε  $\omega_z/\omega_r$  και αναλύουμε την κυματοσυνάρτηση  $\Psi$ :



$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(z, t) \Phi(r; t) \exp(-i\gamma t), \quad (16)$$

όπου:

$$\begin{aligned} \Phi(r; t) &= \tilde{\Phi}_0(r) \exp(-i\gamma t), \\ r^2 &\equiv x^2 + y^2: \text{ το χημικό δυναμικό } \gamma, \\ \tilde{\Phi}(r): &\text{ εγκάρσια κυματοσυνάρτηση} \end{aligned}$$

Τα παραπάνω συνδέονται με τον εγκάρσιο κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή,

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 \tilde{\Phi}_0 - \frac{1}{2} m \omega_r^2 r^2 \tilde{\Phi}_0 + \gamma \tilde{\Phi}_0 = 0, \quad (17)$$

όπου:  $\nabla_r^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ .

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστό ότι περιγράφει τον αρμονικό κβαντικό ταλαντωτή και η λύση της θεμελιώδους στάθμης είναι:

$$\tilde{\Phi}_0(r) = \pi^{-1/2} a_r^{-1} \exp(-r^2/2a_r^2)$$

Αντικαθιστώντας τη παραπάνω μορφή της  $\Psi$  στη Gross-Pitaevskii, παίρνουμε το  $GP$  μοντέλο σε μία διάσταση:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(z, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + g_{1D} |\psi(z, t)|^2 \right] \psi(z, t), \quad (18)$$

όπου ο μη γραμμικός όρος στη μία διάσταση ορίζεται ως:  $g_{1D} = g/2\pi a_r^2 = 2a\hbar\omega_r$  και  $V(z) = (1/2)m\omega_z^2 z^2$ , το δυναμικό.

Παρόμοιες τεχνικές μείωσης διαστάσεων που βασίζονται σε μεθόδους προσέγγισης μέσου πεδίου χρησιμοποιούνται και σε άλλους τομείς όπως η μη γραμμική οπτική.

Ορίζοντας τις μεταβλητές:

$$t' = \omega_r t, \quad z' = z/a_r, \quad a_r = (\hbar/\omega_r m)^{1/2}$$

Παραγωγίζοντας τις μεταβλητές, έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \omega_r \frac{\partial}{\partial t'} \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{1}{a_r} \frac{\partial}{\partial z'} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{a_r^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{m\omega_r}{\hbar} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \quad (21)$$

Η (14) μέσω των (15),(16),(17) γίνεται:

$$i\hbar\omega_r \psi(t') = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{m\omega_r}{\hbar} \frac{\partial \Psi^2}{\partial z'^2} + 2\hbar a \omega_r |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z'^2 \frac{\hbar}{m\omega_r} \psi \Rightarrow \quad (22)$$

$$i\psi(t') = -\frac{1}{2}\frac{\partial\psi^2}{\partial z'^2} + 2a|\psi|^2\psi + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_z}{\omega_r}\right)^2 z'^2\psi \quad (23)$$

$$|a||\psi|^2 = |\psi'|^2 \Rightarrow \psi = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi' \quad (24)$$

και μέσω των (19) και (20), έχουμε:

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\frac{\partial\psi^2}{\partial z'^2} + 2s|\psi|^2\psi + \frac{1}{2}\Omega^2 z'^2\psi \quad (25)$$

όπου  $s = a/|a| = \text{sgn}(a)$ ,  $\Omega = \omega_z/\omega_r$

και έχουμε ήδη ορίσει  $V(z, r) = \frac{1}{2}m(\omega_z^2 + \omega_r^2)$  και  $\omega_z \ll \omega_r$ .

Η παραπάνω εξίσωση είναι η μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση Schrödinger, εν συντομία NLS και θα μελετηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

## 4 Εξίσωση NLS σε μία διάσταση.

### 4.1 Περιγραφή της εξίσωσης και ολοκληρώματα κίνησης.

Θεωρούμε τη μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση Schrödinger σε μία διάσταση:

$$i\partial_t\psi(z,t) = \left(-\frac{1}{2}\partial_z^2 + V(z) + s|\psi(z,t)|^2\right)\psi(z,t) \quad (26)$$

όπου το δυναμικό δίνεται από τον τύπο  $V(z) = \frac{1}{2}\Omega^2 z^2$ .

Στην περίπτωση μας, το  $\Omega \ll 1$  άρα το δυναμικό θεωρείται αμελητέο. Επομένως η εξίσωσή μας, παίρνει την εξής μορφή:

$$i\partial_t\psi(z,t) = \left(-\frac{1}{2}\partial_z^2 + s|\psi(z,t)|^2\right)\psi(z,t) \quad (27)$$

Απλοποιώντας τους συμβολισμούς, η εξίσωση γράφεται

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{zz} + s|\psi|^2\psi \quad (28)$$

Η εξίσωση αυτή προκύπτει αν εφαρμόσουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange<sup>18 19</sup> στην Λαγκρατζιανή:

$$L = \frac{i}{2} \left( \psi(\bar{z}, t) \partial_t \psi(z, t) - \psi(z, t) \partial_t \bar{\psi}(\bar{z}, t) \right) - \frac{1}{2} \left( |\partial_z \psi(z, t)|^2 - s|\psi(z, t)|^4 \right) \quad (29)$$

Οι διατηρήσιμες ποσότητες (ολοκληρώματα κίνησης) προκύπτουν από το γεγονός ότι η Λαγκρατζιανή παραμένει αμετάβλητη όταν έχουμε συνεχείς μετασχηματισμούς.

Έτσι, ο αριθμός των σωματιδίων  $N$  δίνεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dz, \quad (30)$$

και προκύπτει από το αναλλοίωτο της μεταβολής της φάσης,  
 $\psi(z, t) \rightarrow \psi(z, t) \exp(i\theta)$ .

Στη συνέχεια, το ολοκλήρωμα διατήρησης της ορμής  $P$  δίνεται από τον τύπο:

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi \partial_z \bar{\psi} - \bar{\psi} \partial_z \psi) dz, \quad (31)$$

και προκύπτει από την αναλλοίωτο της μετατόπισης κατά τον άξονα  $z$ ,  
 $\psi(z, t) \rightarrow \psi(z + \Delta(z), t)$ .

<sup>18</sup>Euler, Leonhard: 1707-1783, Ελβετός μαθηματικός

<sup>19</sup>Lagrange, Joseph-Louis: 1736-1813, Ιταλός μαθηματικός

Τέλος, η διατήρηση ενέργειας του συστήματος δίνεται από τον ολοκλήρωμα:

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (|\partial_z \psi|^2 + s|\psi|^4) dz. \quad (32)$$

και προέρχεται από την αναλλοίωτο της χρονικής μετατόπισης,  $\psi(z, t) \rightarrow \psi(z, t + \Delta t)$ .

Η πιο απλή μη τετριμμένη λύση της εξίσωσης (3) η οποία αναπαριστά ένα κύμα το οποίο κινείται, είναι:

$$\psi = \psi_0 \exp(i(kz - \omega t + \theta_0)) \quad (33)$$

όπου  $\theta_0$  μία τυχαία σταθερή φάση,  $\psi_0$  το πλάτος κύματος,  $k$  ο κυματάνριθμός του και  $\omega$  η συχνότητά του. Αντικαθιστώντας την μη τετριμμένη λύση μας στην εξίσωση (3), βρίσκουμε ότι:

$$\omega = \frac{1}{2}k^2 + s|\psi_0|^2 \quad (34)$$

Η εξίσωση (7) για  $\kappa = 0$ , αναπαριστά ένα στατικό κύμα και δίνεται από:

$$\psi = \psi_0 \exp(-i(\omega t + \theta_0)) \quad (35)$$

Παρατηρώντας την (8) για  $\kappa = 0$  βλέπουμε ότι  $\omega = |\psi|^2$ . Το  $\omega = \mu$ , όπου  $\mu$  είναι μια σταθερή BEC πυκνότητα που ορίζει το χημικό δυναμικό.

Κατά συνέπεια,  $\psi_0 = \sqrt{\mu}$ .

Οπότε η λύση μας παίρνει τη μορφή:

$$\psi = \sqrt{\mu} \exp(-i\mu t)$$

Για μικρό πλάτος  $\psi = 0$ , το παραπάνω κύμα ικανοποιεί την γραμμική εξίσωση Schrödinger:

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\partial_z^2 \psi = 0 \quad (36)$$

Στην εξίσωση (10) τα γραμμικά κύματα που προκύπτουν ως λύσεις, χαρακτηρίζονται από τη σχέση διασποράς:

$$\omega = \frac{1}{2}\kappa^2$$

## 4.2 Λύσεις της εξίσωσης NLS.

### 4.2.1 Φωτεινά σολιτόνια.

Οι λύσεις της εξίσωσης NLS εξαρτώνται από την παράμετρο  $s$ . Συγκεκριμένα για ελκτικά BECs ( $s = +1$ ), η εξίσωση NLS έχει σαν λύση το φωτεινό σολιτόνιο, το οποίο έχει την μορφή:

$$\psi_{bs}(z, t) = \eta \operatorname{sech}[\eta(z - vt)] \exp[i(kz - \omega t)], \quad (37)$$

όπου

$\eta$ : το πλάτος κύματος του σολιτονίου

$k$ : κυματάρηθος

$\omega$ : συχνότητα

$v \equiv \partial\omega/\partial k = k$ : ταχύτητα

Η συχνότητα και ο κυματάρηθος του σολιτονίου συνδέονται με την εξής σχέση διασποράς:

$$\omega = \frac{1}{2}(k^2 - \eta^2),$$

η οποία μας δείχνει ότι η περιοχή στο  $(k, \omega)$  επίπεδο για τα φωτεινά σολιτόνια βρίσκεται κάτω από την παραβολή  $\omega < \frac{1}{2}k^2$ , που αντιστοιχεί στις αρχικές διεγέρσεις της εξίσωσης NLS. Συνεπώς, τα γραμμικά κύματα και τα σολιτόνια, βρίσκονται σε διαφορετικές θέσεις στο επίπεδο, γεγονός που σημαίνει ότι δεν αλληλεπιδρούν.

Μέσω της λύσης (37) και συναρτήσεων των παραμέτρων  $\eta$  και  $k$ , τα ολοκληρώματα κίνησης  $N$ ,  $P$  και  $E$  μετατρέπονται σε:

$$N = 2\eta, \quad P = 2\eta k, \quad E = \eta k^2 - \frac{1}{3}\eta^3 \quad (38)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις καταλαβαίνουμε ότι το φωτεινό σολιτόνιο συμπεριφέρεται σαν ένα σωματίδιο με μάζα  $M_{bs}$ , ορμή  $P_{bs}$  και ενέργεια  $E_{bs}$  όπου  $M_{bs} = 2\eta$ ,  $P_{bs} = Mv$  και  $E_{bs} = \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{24}M^3$ .

Καταλήγουμε ότι  $v = k$ . Στην τελευταία εξίσωση της ενέργειας, οι όροι στο δεξιό μέρος είναι η κινητική ενέργεια και η ενέργεια των σωματιδίων που σχετίζεται με τα σολιτόνια.

Αναλύοντας την εξίσωση της ενέργειας και την ορμή με την ταχύτητα του ήχου, έχουμε τη παρακάτω σχέση:

$$\frac{\partial E_{bs}}{\partial P_{bs}} = v, \quad (39)$$

Η παραπάνω εξίσωση μας υποδεικνύει τη σωματιδιακή φύση του φωτεινού σολιτονίου.

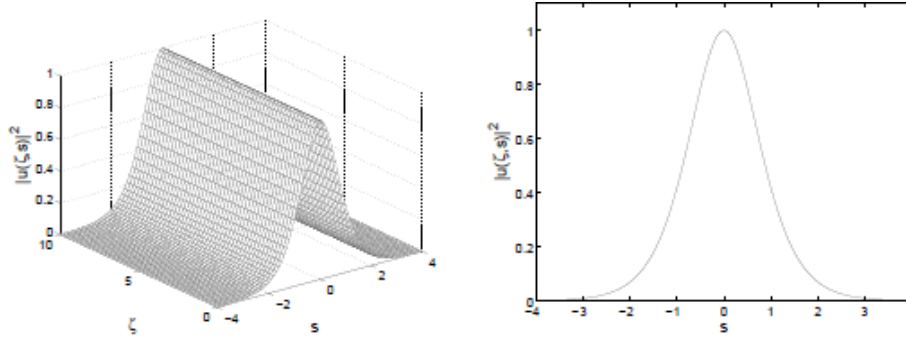


Figure 8. The fundamental bright soliton solution to the NLSE.

#### 4.2.2 Σκοτεινά σολιτόνια.

Για BECs με απωστικές διατομικές αλληλεπιδράσεις δηλαδή για  $s = -1$ , η εξίσωση NLS έχει ως λύση το σκοτεινό σολιτόνιο. Η πιο απλή μη τετριμμένη λύση του που αναπαριστά ένα απλό κύμα είναι η:  $\psi = \psi_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ . Η εξίσωση NLS έχει και άλλες λύσεις (σκοτεινά σολιτόνια), οι οποίες είναι μη γραμμικές διεγέρσεις της απλής εξίσωσης κύματος. Μία από αυτές τις λύσεις μπορεί να εκφραστεί μέσω της:

$$\psi(z, t) = \psi_0 (\cos \varphi \tanh \zeta + i \sin \varphi) \exp[i(kz - \omega t)], \quad (40)$$

όπου  $\zeta \equiv \psi_0 \cos \varphi (z - vt)$ ,  $\omega = (1/2)k^2 + \psi_0^2$  ενώ οι παράμετροι  $v$ ,  $\varphi$  και  $k$  συνδέονται μέσω της σχέσης  $v = \psi_0 \sin \varphi + k$ .

Εδώ η παράμετρος  $\varphi$  καλείται "γωνιακή φάση σολιτονίου" ή πιο απλά αλλαγή φάσης του σκοτεινού σολιτονίου όπου  $|\varphi| < \pi/2$ . Η συγκεκριμένη παράμετρος, περιγράφει την "σκοτεινότητα" του σολιτονίου μέσω της σχέσης

$$|\psi|^2 = 1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sech}^2 \zeta$$

Με αυτόν τον τρόπο στις περιπτώσεις όπου  $\varphi = 0$  έχουμε σκοτεινά σολιτόνια, ενώ στις περιπτώσεις όπου  $\cos \varphi \ll 1$  έχουμε γκρι σολιτόνια. Το πλάτος και η ταχύτητα του σκοτεινού σολιτονίου δίνονται από το  $\cos \varphi$  και  $\sin \varphi$  αντίστοιχα.

Το σκοτεινό σολιτόνιο,  $\psi = \psi_0 \tanh(\psi_0 x) \exp(-i\mu t)$  είναι ένα στατικό κύμα ( $v = 0$ ), ενώ το γκρι μεταφέρεται με μία ταχύτητα κοντά στη ταχύτητα του ήχου ( $v \sim c \equiv \psi_0$ ). Η σχέση (40) έχει δύο ανεξάρτητες παραμέτρους, για το υπόβαθρο (background) ( $\psi_0$  και  $k$ ) και για το σολιτόνιο ( $\varphi$ ).

Στην πραγματικότητα, πρέπει να σημειωθεί ότι και στο σκοτεινό και στο φωτεινό σολιτόνιο υπάρχει μία ελευθερία στην επιλογή της αρχικής τοποθεσίας του κύματος  $z_0$ . Επιπλέον, στην περίπτωση που η σχέση διασποράς μας δείχνει ότι  $\omega > k^2$ , τότε η επιτρεπόμενη περιοχή στο  $(k, \omega)$  επίπεδο για τα σκοτεινά σολιτόνια βρίσκεται πάνω από την παραβολή  $\omega = \frac{1}{2}k^2$ .

Καθώς τα ολοκληρώματα κίνησης της εξίσωσης NLS αναφέρονται εξίσου στο υπόβαθρο (background) και στο σκοτεινό σολιτόνιο, τα ολοκληρώματα κίνησης του σκοτεινού κανονικοποιούνται έτσι ώστε να συνεισφέρουν για την δημιουργία του

υποβάθρου. Συγκεκριμένα, η κανονικοποιημένη ορμή και ενέργεια του σκοτεινού σολιτονίου (40), για  $\kappa=0$ :

$$P_{\text{ds}} = -2v(c^2 - v^2)^{1/2} + 2c^2 \tan^{-1} \left[ \frac{(c^2 - v^2)^{1/2}}{v} \right], \quad (41)$$

$$E_{\text{ds}} = \frac{4}{3}(c^2 - v^2)^{3/2} \quad (42)$$

Διαφορίζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, βρίσκεται ότι:

$$\frac{\partial E_{\text{ds}}}{\partial P_{\text{ds}}} = v, \quad (43)$$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι όπως το φωτεινό σολιτόνιο, το σκοτεινό και αυτό συμπεριφέρεται σαν σωματίδιο. Η απλούστερη περίπτωση όπου μελετώνται τα σκοτεινά σολιτόνια είναι όταν δεν υπάρχει υπόβαθρο δηλαδή, ( $k = 0$ ). Στην περίπτωση αυτή, η συχνότητα  $\omega = 0$  γίνεται το κανονικοποιημένο δυναμικό μιας διάστασης δηλαδή,  $\mu \equiv \psi_0^2$ , το οποίο καθορίζεται από τον αριθμό των ατόμων του συμπυκνώματος.

Επί προσθέτως, όταν έχουμε αρμονικά καθορισμένο συμπύκνωμα,  $V(z) = \frac{1}{2}\Omega^2 z^2$  (με  $\Omega = \omega_z/\omega_r$ , κανονικοποιημένη παγίδα) στην εξίσωση (26), το υπόβαθρο του σκοτεινού σολιτονίου βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση του BEC. Από την άλλη μεριά, η κυματοσυνάρτηση (που περιέχει εξίσου το υπόβαθρο και το σκοτεινό σολιτόνιο) μπορεί να περιγραφεί μέσω της,

$$\psi = \psi_{\text{TF}}(z) \exp(-i\psi_0^2 t) \psi_{\text{ds}}(z, t)$$

όπου  $\psi_{\text{ds}}(z, t)$  είναι το σκοτεινό σολιτόνιο της εξίσωσης (40).

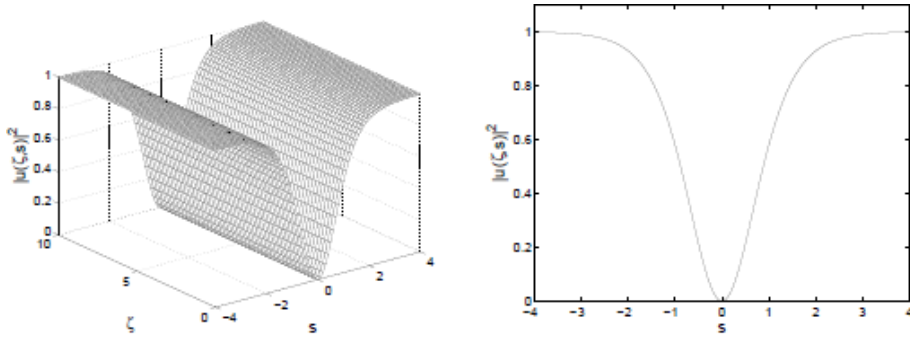


Figure 9. The fundamental dark (black) soliton solution to the NLSE.

### 4.3 Υδροδυναμική Προσέγγιση της εξίσωσης NLS μέσω των εξισώσεων συνέχειας του ρευστού.

Θεωρούμε την εξίσωση NLS

$$i\partial_t\psi(z, t) = \left( -\frac{1}{2}\partial_z^2 + s|\psi(z, t)|^2 \right)\psi(z, t) \quad (44)$$

της οποίας η λύση είναι:

$$\psi = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\phi} \quad (45)$$

όπου  $\rho = \rho(z, t)$ ,  $\phi = \phi(z, t)$  και  $|\psi|^2 = \rho$ ,  $\phi_z = u$  η πυκνότητα και η ταχύτητα του ρευστού αντιστοίχως.

Η εξίσωση συνέχειας που μας υποδεικνύει την διατήρηση της μάζας και αποτελεί το φανταστικό κομμάτι της εξίσωσης (Im), είναι:

$$\rho_t + (\rho\phi_z)_z = 0 \quad (46)$$

Η εξίσωση Euler που μας υποδεικνύει την διατήρηση της ορμής κα αποτελεί το πραγματικό κομμάτι της εξίσωσης (Re), είναι:

$$\phi_t + s\rho + \frac{1}{2}\phi_z^2 - \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{2}})_{zz} = 0 \quad (47)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε τις στοιχειώδεις λύσεις. Παρατηρούμε ότι  $\rho = \text{σταθερό}$ , αλλά λόγω της λύσης της NLS,  $\psi = \mu^{\frac{1}{2}} e^{i\phi}$ , όπου  $\mu = \psi_0$ , θα θεωρήσουμε  $\rho = \mu$ .

Επιπλέον θα θεωρήσουμε,  $\phi = \phi(t)$  καθώς τείνοντας στο άπειρο η ταχύτητα του ρευστού μηδενίζεται. Λόγω των παραπάνω,

$$\phi_t + \mu = 0 \Rightarrow \phi = s\mu t \quad (48)$$

Οπότε η στοιχειώδης λύση μας είναι:

$$\rho = \mu \quad (49)$$

$$\phi = +s\mu t \quad (50)$$

Άρα οι εξισώσεις μας μετατρέπονται στις,

$$\rho_t + (\rho\phi_z)_z = 0 \quad (51)$$

και

$$\phi_t - s\rho + \frac{1}{2}\phi_z^2 - \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{2}})_{zz} = 0 \quad (52)$$

που έχουν ως λύση  $\rho = \mu$ ,  $\phi = +s\mu t$ , όπως προαναφέραμε.



#### 4.4 Ευστάθεια της θεμελιώδους κατάστασης επίπεδου κύματος (Αστάθεια διαμόρφωσης)

Θεωρώντας μικρές διαταραχές στην παραπάνω λύση, της μορφής:

$$\begin{aligned}\rho &= \mu + \rho_1(z, t) \\ \phi &= +s\mu t + \phi_1(z, t)\end{aligned}$$

και γραμμικοποιώντας ως προς  $\rho_1$ ,  $\phi_1$ , παίρνουμε

$$(\rho\phi_z)_z = \left[ (\mu + \rho_1)\phi_{1z} \right]_z = \mu\phi_{1zz} \quad (53)$$

$$\rho_{1t} + \mu\phi_{1zz} = 0 \quad (54)$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{2}})_{zz} &= -\frac{1}{2}(\mu + \rho_1)^{-\frac{1}{2}}(\rho_1 + \mu)^{\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2}\mu^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\rho_1}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\left[(\mu + \rho_1)^{-\frac{1}{2}}\rho_{1z}\right]_z \approx \\ &= -\frac{1}{4}\mu^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\rho_1}{2\mu}\right)\left[\mu^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\rho_1}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}\rho_{1z}\right]_z = \\ &= -\frac{1}{4\mu}\left(1 - \frac{\rho_1}{2\mu}\right)\left[-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\rho_1}{\mu}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\rho_{1z}^2}{\mu} + \left(1 + \frac{\rho_1}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}\rho_{1zzz}\right] \approx \\ &= -\frac{1}{4\mu}\left(1 - \frac{\rho_1}{2\mu}\right)\left(1 - \frac{\rho_1}{2\mu}\right)\rho_{1zzz} \approx -\frac{1}{4\mu}\rho_{1zzz}\end{aligned}$$

καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$s\mu + \phi_{1t} - s\mu - s\rho_1 + \frac{1}{4\mu}\rho_{1zz} = 0 \quad (55)$$

Επομένως το γραμμικοποιημένο σύστημά μας από τις (51),(52) για τις μικρές διαταραχές στην λύση (49),(50) είναι:

$$\rho_{1t} + \mu\phi_{1zz} = 0 \quad (56)$$

$$\phi_{1t} - s\rho_1 - \frac{1}{4\mu}\rho_{1zz} = 0 \quad (57)$$

Τα  $\rho_1, \phi_1$  είναι γενικές διαταραχές και μπορούν πάντα να αναλυθούν σε Fourier συνιστώσες.

$$\rho_1 = \rho_1^{(0)} \exp(i(Kz - \Omega t)) + c.c \quad (58)$$

$$\phi_1 = \phi_1^{(0)} \exp(i(Kz - \Omega t)) + c.c \quad (59)$$

όπου *c.c.* μιγαδικές συζυγείς.

Μέσω των παραπάνω οι (56),(57) μετατρέπονται στις:

$$-i\Omega\rho_1^{(0)} - \mu K^2\phi_1^{(0)} = 0 \quad (60)$$

$$\left(\frac{K^2}{4\mu} - s\right)\rho_1^{(0)} - i\Omega\phi_1^{(0)} = 0 \quad (61)$$

Για μη τετριμμένες λύσεις:

$$\det \left[ (-i\Omega)(-i\Omega) - (-\mu K^2)\left(\frac{K^2}{4\mu} - s\right) \right] = 0$$

Μετά από πράξεις, καταλήγουμε:

$$\Omega^2 = \mu K^2 \left(-s + \frac{K^2}{4\mu}\right)$$

Άν  $\Omega \in \mathbb{R}$  για κάθε  $K \in \mathbb{R}$  η λύση μας είναι ευσταθής και είμαστε στη περίπτωση που  $s = -1$ .

Άν  $s = +1$  τότε υπάρχει  $K < 0$  τέτοιο ώστε:

$$-1 + \frac{K^2}{4\mu} < 0$$

άρα

$$K < 2\sqrt{\mu}$$

Επομένως,  $\Omega = \Omega_r \pm \Omega_i$  άρα η διαταραχή μας μέσω  $\rho_1, \phi_1$

$$\sim \exp(i(Kz - (\Omega_r \pm \Omega_i)t) = \exp(i(Kz - \Omega_r t) \exp(\pm \Omega_i t)$$

Ο τελευταίος όρος μας δίνει μια εκθετική αύξηση, δηλαδή υποδεικνύει την αστάθεια της λύσης.

## 5 Η εξίσωση Boussinesq μέσω των εξισώσεων συνέχειας.

Οι εξισώσεις (46), (47) για  $s = -1$  μετατρέπονται στις:

$$\rho_t + (\rho\phi_z)_z = 0 \quad (62)$$

$$\phi_t + \rho + \frac{1}{2}\phi_z^2 - \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{2}})_{zz} = 0 \quad (63)$$

Η απλή λύση που γνωρίζουμε ήδη είναι η  $\psi = \sqrt{\mu} \exp(-it\mu)$ . Ισχύει όμως ότι το  $\rho = \mu = \text{σταθερό}$  και ότι  $\phi = -t\mu$ . Κάνουμε γραμμικοποίηση ως προς τις μικρές διαταραχές  $\rho_1, \phi_1$ , δηλαδή  $\rho = \mu + \rho_1$  και  $\phi = -t\mu + \phi_1$ . Επομένως οι (62), (63) μετατρέπονται στις,

$$\rho_{1t} + \mu\phi_{1zz} = 0 \quad (64)$$

$$\phi_{1t} + \rho_1 - \frac{1}{4\mu}\rho_{1zz} = 0 \quad (65)$$

Πολλαπλασιάζω την (64) με  $\partial_t$  και την (65) με  $-\mu\partial_z^2$ ,

$$\rho_{1tt} + \mu\phi_{1zzt} = 0 \quad (66)$$

$$-\mu\phi_{1tzz} - \mu\rho_{1zz} + \frac{1}{4\mu}\rho_{1zzzz} = 0 \quad (67)$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω έχουμε τη γραμμική εξίσωση Boussinesq:<sup>20</sup>

$$\rho_{1tt} - \mu\rho_{1zz} + \frac{1}{4\mu}\rho_{1zzzz} = 0 \quad (68)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η λύση μας είναι  $\rho_1 = \rho_1^{(0)} \exp(i(Kz - \Omega t))$ , επομένως ισχύει:  $\Omega^2 = \mu K^2(1 + \frac{K^2}{4\mu})$ .

<sup>20</sup>Boussinesq, Joseph Valentin: 1842-1929, Γάλλος μαθηματικός

## 6 Από την εξίσωση NLS στην εξίσωση Korteweg–de Vries (KdV).

Είχαμε μείνει στο προηγούμενο κεφάλαιο, στις μικρές διαταραχές

$$\rho_1, \phi_1 \sim \exp(i(Kx - \Omega t))$$

των εξισώσεων συνέχειας, αφού είχαμε γραμμικοποιήσει ως προς αυτές τις διαταραχές.

Επιπλέον, βρήκαμε ότι

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \mu K^2 + \frac{K^4}{4} \Rightarrow \\ \Omega &= \sqrt{\mu}K \left(1 + \frac{K^2}{4\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Επομένως για  $K \ll 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Omega &\approx \sqrt{\mu}K \left(1 + \frac{K^2}{8\mu}\right) \Rightarrow \\ \Omega &= \sqrt{\mu}K + \frac{K^3}{8\sqrt{\mu}}\end{aligned}$$

Άρα οι μικρές διαταραχές  $\rho_1, \phi_1 \sim \exp(i(Kx - \Omega t))$  θα δώσουν,

$$\theta = Kx - \Omega t = Kx - \left(\sqrt{\mu}K + \frac{K^3}{8\sqrt{\mu}}\right)t = K(x - \sqrt{\mu}t) - \frac{K^3}{8\sqrt{\mu}}t$$

Εισάγουμε μία μικρή παράμετρο  $0 < \varepsilon \ll 1$  και υποθέτουμε ότι,

$$K \rightarrow \varepsilon^{\frac{1}{2}}K$$

Οπότε,

$$\theta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}K(x - \sqrt{\mu}t) - \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}K}{8\sqrt{\mu}}t, \sqrt{\mu} = u$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τη θεωρία διαταραχών εισάγουμε δύο νέες μεταβλητές:

$$X = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(x - vt)$$

$$T = \varepsilon^{\frac{3}{2}}t$$

$$x, t \rightarrow X, T$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial_X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial_T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} = -\varepsilon^{\frac{1}{2}}v \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial_X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial_T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}v \frac{\partial}{\partial X}\end{aligned}$$

Επομένως οι (36), (37) μέσω των  $\rho = \rho(X, T), \phi = \phi(X, T, t)$  μετατρέπονται στις,

$$-\varepsilon^{\frac{1}{2}}v\rho_X + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\rho_T + \varepsilon(\rho\phi_X)_X = 0 \quad (69)$$

$$\phi_t - \varepsilon^{\frac{1}{2}}v\phi_X + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\phi_T + \rho + \frac{1}{2}\varepsilon(\phi_X)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\rho^{-\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{2}})_{XX} = 0 \quad (70)$$

Τώρα, χρειαζόμαστε ασυμπτωτικά αναπτύγματα για τα άγνωστα  $\phi$  και  $\rho$ . Επομένως:

$$\begin{aligned} \rho &= \mu + \varepsilon^\gamma\rho_1 + \varepsilon^{\gamma+1}\rho_2 + .. \\ \phi &= -\mu t + \varepsilon^\delta\phi_1 + \varepsilon^{\delta+1}\phi_2 + .. \end{aligned}$$

Στην (69), ο πιο χαμηλής τάξης όρος είναι,

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}v\varepsilon^\gamma\rho_{1x} = \varepsilon^{\gamma+\frac{1}{2}}v\rho_{1x}$$

Επίσης, έχουμε και τον όρο,

$$\varepsilon(\rho\phi_x)_x = \varepsilon[(\mu + \varepsilon^\gamma\rho_1)\varepsilon^\delta\phi_{1X}]_X \approx \varepsilon\mu\varepsilon^\delta\phi_{1XX} = \varepsilon^{\delta+1}\mu\phi_{1XX}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις πρέπει να είναι στην ίδια τάξη, άρα:

$$\gamma + \frac{1}{2} = 1 + \delta \Rightarrow \delta = \gamma - \frac{1}{2}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του  $\phi$  είναι,

$$\phi = -\mu t + \varepsilon^{\gamma-\frac{1}{2}}\phi_1 + \varepsilon^{\gamma+\frac{1}{2}}\phi_2 + ..$$

Στην (70) ο χαμηλής τάξης όρος είναι,

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}v\varepsilon^{\gamma-\frac{1}{2}}\phi_{1X} = -v\varepsilon^\gamma\phi_{1X}$$

Επιπλέον, ο όρος  $\rho = \mu + \varepsilon^\gamma\rho_1 + ..$ , είναι στην ίδια τάξη με τον όρο  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}v\phi_X$  και επομένως θα απαλειφθεί με τον  $\phi_t$ .

Ο όρος  $-\frac{1}{2}\varepsilon\rho^{-\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}_{xx}$ , είναι ο όρος διασποράς και ο όρος  $\frac{1}{2}\varepsilon\phi_x^2$ , είναι ο όρος μη γραμμικότητας.

Ο όρος διασποράς μας δίνει,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\varepsilon\rho^{-\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}_{xx} &= -\frac{1}{2}\varepsilon(\mu + \varepsilon^\gamma\rho_1)^{-\frac{1}{2}}(\mu + \varepsilon^\gamma\rho_1)^{\frac{1}{2}}_{xx} = \\ &-\frac{1}{2}\varepsilon(1 + \varepsilon^\gamma\frac{\rho_1}{\mu})^{-\frac{1}{2}}(1 + \varepsilon^\gamma\frac{\rho_1}{\mu})^{\frac{1}{2}}_{xx} \approx -\frac{1}{2}\varepsilon(1 - \varepsilon^\gamma\frac{\rho_1}{2\mu})(1 + \varepsilon^\gamma\frac{\rho_1}{2\mu})_{xx} \end{aligned}$$

Σημειωτέον ότι στη χαμηλότερη τάξη έχουμε,

$$\frac{-1}{2}\varepsilon\rho^{-\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{2}})_{xx} \approx -\frac{1}{2}\varepsilon^{(\gamma+1)}\frac{\rho_{1xx}}{2\mu} = -\frac{1}{4\mu}\varepsilon^{\gamma+1}\rho_{1xx}$$

Έτσι, ο όρος,

$$\frac{1}{2}\varepsilon\phi_x^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon^{2(\gamma-\frac{1}{2})}\phi_{1x}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon^{2\gamma-1}\phi_{1x}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon^{2\gamma}$$

Απαιτούμε,

$$\gamma + 1 = 2\gamma \Rightarrow \gamma = 1$$

Αν είχαμε επιλέξει,  $\varepsilon(\rho\phi_x)_x = \varepsilon[(\mu + \varepsilon^\gamma\rho_1)\varepsilon^{\gamma-\frac{1}{2}}\phi_{1x}]_x$ , ο μη γραμμικός όρος είναι τάξης,  $\varepsilon^{1+2\gamma-\frac{1}{2}} = \varepsilon^{2\gamma+\frac{1}{2}}$ , δηλαδή ανώτερης τάξης από τον όρο  $\frac{1}{2}\varepsilon\phi_{1x}^2$ . Επομένως η σωστή επιλογή είναι  $\gamma = 1$ , διότι ο χαμηλότερης τάξης όρος διασποράς εμφανίζεται στην ίδια τάξη με τον χαμηλότερης τάξης μη γραμμικό όρο!

Άρα

$$\rho = \mu + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + \dots \quad (71)$$

$$\phi = -\mu t + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\phi_1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\phi_2 + \dots \quad (72)$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, για να καταλήξουμε στην εξίσωση KdV, μέσω των παρακάτω εξισώσεων που μετασχηματίστηκαν από την αλλαγή μεταβλητής έχουμε,

$$-\varepsilon^{\frac{1}{2}}v\rho_X + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\rho_T + \varepsilon(\rho\phi_X)_X = 0 \quad (73)$$

$$\phi_t - \varepsilon^{\frac{1}{2}}v\phi_x + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\phi_T + \rho^{\frac{1}{2}}\varepsilon\phi_X^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\rho^{-\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{2}})_{XX} = 0 \quad (74)$$

Στην εξίσωση (73), ο όρος  $\phi_t$  ισούται με τον  $-\mu$  και έτσι διαγράφεται σε συνδυασμό με τον όρο  $\rho$  που ισούται με τον όρο  $\mu + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2$ . Επομένως οι (73), (74) σε τάξεις  $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})$  και  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  αντίστοιχα μετατρέπονται:

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}}(-v\rho_{1X} + \mu\phi_{1XX}) = 0 \quad (75)$$

$$\varepsilon(-v\phi_{1X} + \rho_1) = 0 \quad (76)$$

Δηλαδή στις,

$$-v\rho_{1X} + \mu\phi_{1XX} = 0 \quad (77)$$

$$\rho_{1X} - v\phi_{1XX} = 0 \quad (78)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα, βρίσκουμε ότι  $v^2 = \mu$  και ότι μία σύνδεση μεταξύ  $\rho_1$  και  $\phi_1$  είναι η  $\rho_1 = v\phi_{1X}$ . Συνεχίζοντας τους μετασχηματισμούς, ο παρακάτω όρος μετατρέπεται,

$$\varepsilon(\rho\phi_x)_x = \varepsilon[(\mu + \varepsilon\rho_1)(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\phi_{1x} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\phi_{2x})_x]_x = \varepsilon^{\frac{3}{2}}\mu\phi_{1xx} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}(\rho_1\phi_{1x})_x + \mu\phi_{2xx} + \dots$$

Η εξίσωση (73) τάξης  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ,

$$-v\rho_{2T} + \rho_{1T} + (\rho_1\Phi_{1X})_X + \mu\phi_{2XX} = 0 \quad (79)$$

Η εξίσωση (74) τάξης,  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  :

$$-v\phi_{2X} + \phi_{1T} + \rho_2 + \frac{1}{2}\Phi_{1X}^2 - \frac{1}{4\mu}\rho_{1XX} = 0 \quad (80)$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις, θα πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (80) με την ταχύτητα  $v$  και θα έχουμε,

$$-v^2\phi_{2XX} + v\phi_{1XT} + v\rho_{2X} + \frac{1}{2}v(\Phi_{1X}^2)_X - \frac{v}{4\mu}\rho_{1XXX} = 0 \quad (81)$$

Τέλος, θα προσθέσουμε την εξίσωση (81) με την εξίσωση(79) και θα έχουμε,

$$\rho_{1T} + (\rho_1\Phi_{1X})_X + v\phi_{1XT} + \frac{1}{2}v(\phi_{1X}^2)_X - \frac{4}{\mu}\rho_{1XXX} = 0 \Rightarrow$$

$$2\rho_{1T} - \frac{v}{4\mu}\rho_{1XXX} + \frac{1}{v}(\rho_1^2)_X\Phi_{1X})_X + v\phi_{1XT} + \frac{1}{2}v(\rho_1^2)_X + \frac{1}{2v}(\rho_1^2)_X = 0 \Rightarrow$$

$$\rho_{1T} - \frac{v}{8\mu}\rho_{1XXX} + \frac{3}{2v}\rho_1\rho_{1X} = 0 \quad (82)$$

Παρατηρούμε ότι, καταλήξαμε στην εξίσωση Korteweg–de Vries! <sup>21</sup> <sup>22</sup>

<sup>21</sup>Korteweg, Diederik: 1848-1941, Δανός μαθηματικός

<sup>22</sup>de Vries, Gustav: 1866-1936, Δανός μαθηματικός

## 7 Λύσεις σολιτονίων στο επίπεδο φάσεων.

Ξεκινάμε με τη μέθοδο ανάλυσης του φασικού επιπέδου. Η μέθοδος αυτή έγκειται στην αναγωγή της μερικής διαφορικής εξίσωσης (NLS) σε μία συνήθη διαφορική εξίσωση και κατόπιν στο υπολογισμό των διαχωριστικών καμπύλων στο φασικό επίπεδο του δυναμικού συστήματος. Το δυναμικό σύστημα αντιπροσωπεύεται από την συνήθη διαφορική εξίσωση, στην οποία αντιστοιχούν οι λύσεις των μοναχικών κυμάτων.

Σημειώνεται ότι η μέθοδος αυτή οδηγεί γενικά σε λύσεις μοναχικών κυμάτων, όμως η NLS είναι όπως προαναφέρθηκε πλήρως ολοκληρώσιμη, οπότε οι λύσεις μοναχικών κυμάτων είναι πράγματι οι ζητούμενες λύσεις σολιτονίων.

Θεωρώντας την εξίσωση (1) αναζητούμε τις λύσεις των οποίων η παράμετρος  $|\psi|^2 = \rho(z)$  είναι στάσιμη στο  $z$  και εξαρτάται μόνο από το  $t$ . Η λύση μας όπως έχουμε δει από παραπάνω είναι,

$$\psi(t, z) = \sqrt{\rho} \exp[i\phi(t, z)]$$

Θα θέσουμε  $\sqrt{\rho} \rightarrow \rho$  για ευκολία στην αναπαράσταση των λύσεων μας στην συνέχεια. Επομένως η λύση μας γίνεται,

$$\psi(t, z) = \rho \exp[i\phi(t, z)]$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα και  $\phi(x, t)$  η φάση της λύσης. Κάνουμε τις ανάλογες πράξεις και τοποθετούμε την λύση μας στην εξίσωση. Έτσι,

$$\begin{aligned} \psi_{zz} &= [(\rho_x + i\phi_x \rho) \exp i\phi]_z \\ &\sim \rho_{zz} + i\rho_z \phi_z + i\rho \phi_{zz} + i\phi_z (\rho_z + i\phi_z \rho) \\ &\sim \rho_{zz} + 2i\rho_z \phi_z + i\rho \phi_{zz} - \rho \phi_z^2 \end{aligned}$$

με  $s|\psi|^2\psi = s\rho^3$ .

Χωρίζουμε το πραγματικό από το φανταστικό κομμάτι της εξίσωσης και έχουμε,

$$\text{Im} : \rho_t + \rho_z \phi_z + \frac{1}{2} \rho \phi_{zz} = 0 \quad (83)$$

Κάνοντας τις ανάλογες πράξεις,

$$(\rho^2 \phi_z)_z = 2\rho \rho_z \phi_z + \rho^2 \phi_{zz} = 2\rho (\rho_z \phi_z + \frac{1}{2} \rho \phi_{zz}) \Rightarrow \rho_z \phi_z + \frac{1}{2} \rho \phi_{zz} = \frac{1}{2\rho} (\rho^2 \phi_z)_z$$

Επομένως η (83) μετατρέπεται στην,

$$(\rho^2)_t + (\rho^2 \phi_z)_z = 0 \quad (84)$$

Η παραπάνω εξίσωση προσδιορίζει την διατήρηση της μάζας. Όσον αφορά το πραγματικό κομμάτι της εξίσωσης, έχουμε,

$$\text{Re} : -\phi_t \rho - \frac{1}{2} \rho_{zz} - \frac{1}{2} \rho \phi_z^2 + s\rho^3 = 0 \Rightarrow$$



$$\phi_t + \frac{1}{2}\phi_z^2 = +s\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho_{zz}}{\rho} \quad (85)$$

Η παραπάνω εξίσωση προσδιορίζει την διατήρηση της ορμής και ο όρος  $\frac{\rho_{zz}}{\rho}$  προσδιορίζει την κβαντομηχανική πίεση. Για  $s = -1$  οι εξισώσεις παριστάνουν ένα ρευστό που είναι συμπιεστό και χωρίς ιξώδες (compressible inviscid fluids.)

Στις εξισώσεις (84), (85) θέτουμε  $\sigma = \rho^2$  την πυκνότητα,  $v = \phi_z$  την ταχύτητα και  $\rho = \frac{\sigma^2}{2}$  την πίεση. Άρα η εξίσωση (84), θα μετατραπεί στην,

$$\sigma_t + (\sigma v)_z = 0 \quad (86)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (84) ως προς  $z$  και αντικαθιστώντας όπου  $\phi_z = v$ , έχω,

$$\begin{aligned} \phi_{tz} + \frac{1}{2}(v^2)_z &= \frac{\partial}{\partial z}(s\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho_{zz}}{\rho}) \Rightarrow \\ v_t + \frac{1}{2}(v^2)_z &= \frac{\partial}{\partial z}(s\rho^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho_{zz}}{\rho}) \Rightarrow \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v &= -\nabla(\frac{P}{\rho} - gz) \end{aligned} \quad (87)$$

Στην παραπάνω εξίσωση,  $F = gz$  και  $P$  πίεση,  $g$  επιτάχυνση της βαρύτητας και  $\rho$  πυκνότητα. Η (87) μετατρέπεται στην,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v_t + (v\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla P + F$$

Αν  $F = -\nabla\Omega$ , όπου το βαρυτικό δυναμικό  $\Omega = gz$  η παραπάνω εξίσωση γίνεται,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v_t + (v\nabla)v = -\nabla(\frac{P}{\rho} + \Omega) \quad (88)$$

Όσον αφορά τις λύσεις των σολιτονίων, θεωρούμε  $\rho = \rho(z)$ , επομένως η εξίσωση (84) μετατρέπεται στην,

$$(\rho^2\phi_z)_z = 0 \quad (89)$$

ενώ η εξίσωση (85) μετατρέπεται στην,

$$\frac{1}{\rho}(\frac{1}{2}\rho_{zz} + s\rho^3) = \phi_t + \frac{1}{2}\phi_z^2 \quad (90)$$

Από την (89), παίρνουμε:

$$\phi_z = \frac{1}{\rho^2}C(t) \quad (91)$$

Από την (90), έχουμε:

$$\phi_t = -\frac{1}{2}\phi_z^2 + g(z) \quad (92)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις ο όρος  $C(t)$  είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση του  $t$  και ο όρος  $g(x)$  είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση του  $x$ . Λόγω της συνθήκης συμβιβαστότητας, ισχύει  $\phi_{ztt} = \phi_{ttz}$ . Παραγωγίζοντας την (91) δύο φορές ως προς  $t$  με  $\partial_z^2$ , παίρνουμε

$$\phi_{ztt} = \frac{1}{\rho^2} C_{tt}$$

Παραγωγίζοντας την (92) ως προς  $t$ , έχουμε

$$\phi_{tt} = -\frac{1}{2}(\phi_z^2)_t = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^4}(C^2)\right)_t$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω με  $z$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi_{ttz} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^4}\right)_z(C^2)_t \Rightarrow \\ \frac{1}{\rho^2}C_{tt} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^4}\right)_z(C^2)_t \Rightarrow \\ \frac{1}{\rho^2}C_{tt} &= -\frac{1}{2}\left(-4\frac{\rho_z}{\rho^5}\right)(C^2)_t \Rightarrow \\ C_{tt} &= 2\frac{\rho_z}{\rho^3}(C^2)_t \Rightarrow \end{aligned}$$

$$C(t) = C_0 \tag{93}$$

όπου  $C_0$ =σταθερά

Επομένως η (91) θα μετατραπεί στην,

$$\phi_z = \frac{c_0}{\rho^2}$$

Και η (92),

$$\phi_t = -\frac{1}{2}\frac{c_0^2}{\rho^4} + g(z) = k_0$$

Άρα,

$$\phi = C_0 \int \rho^{-2}(z)dz + k_0 t + \theta \tag{94}$$

Από τα παραπάνω η τελική μορφή της (90), γίνεται,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}\rho_{zz} + s\rho^3\right) &= k_0 + \frac{1}{2}\frac{C_0^2}{\rho^4} \Rightarrow \\ \rho_{zz} &= 2k_0\rho - 2s\rho^3 + \frac{C_0}{\rho^3} = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$V(\rho) = -k_0\rho^2 + \frac{s}{2}\rho^4 + \frac{C_0^2}{2\rho^2} \tag{95}$$

## 7.1 Χώρος φάσεων για τα φωτεινά σολιτόνια

Επιλέγοντας,  $s = +1$  με  $\psi \rightarrow 0$  όταν  $|z| \rightarrow \infty$ ,

$$V(\rho) = -k_0\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^4 + \frac{C_0^2}{2\rho^2} \quad (96)$$

Υποθέτουμε ότι  $C_0 = 0$ ,  $k_0 > 0$  και  $k_0 = \frac{\eta^2}{2}$ . Επίσης, η εξίσωση κίνησης μετατρέπεται στην,

$$\begin{aligned} \rho_{zz} &= \eta^2\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^4 \Rightarrow \\ \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 - \rho^2(\eta^2 - \rho^2) &= 0 \end{aligned}$$

Έτσι, η πυκνότητα θα δίνεται από τον τύπο,

$$\rho(z) = \eta \operatorname{sech}[\eta(z - z_0)] \quad (97)$$

Και το δυναμικό θα έχει την μορφή,

$$V(\rho) = -k_0\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^4 = -\frac{1}{2}\rho^2(\eta^2 - \rho^2) \quad (98)$$

Στην περίπτωση που  $k_0 < 0$ , δεν έχουμε σολιτονικές λύσεις.

Για  $C_0 \neq 0$  δεν έχουμε σολιτονικές λύσεις επίσης.

Μία άλλη λύση της εξίσωσής μας είναι,

$$\psi = \eta \operatorname{sech}[\eta(z - z_0)] \exp^{i\frac{\eta^2}{2} t} \quad (99)$$

Για οδεύοντα κύματα κάνουμε τον εξής μετασχηματισμό,

$$z' = z - vt$$

$$t = t'$$

Επομένως η λύση μας επιλέγοντας  $\Omega = -\frac{K^2}{2}$  και  $k = v$ , θα είναι

$$\psi'(z - kt, t) = \psi \exp[-i(kz + \frac{k^2}{2}t)] \quad (100)$$

Άρα άλλη μία λύση που μας υποδεικνύει το σολιτόνιο είναι,

$$\psi = \eta \operatorname{sech}[\eta(z - vt - z_0)] \exp[-ikz + \frac{i}{2}(\eta^2 - k^2)t] \quad (101)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημάνουμε ότι, η μη γραμμική σχέση διασποράς εκφράζεται από την σχέση:

$$\omega = \frac{1}{2}k^2 + \psi^2$$

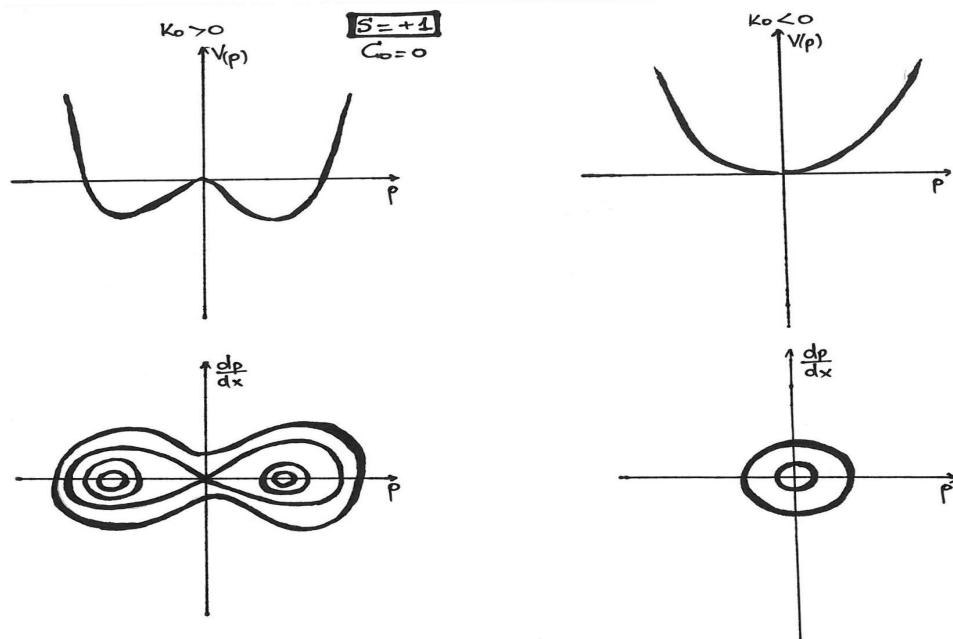
Επιπλέον, τα φωτεινά σολιτόνια δημιουργούνται για

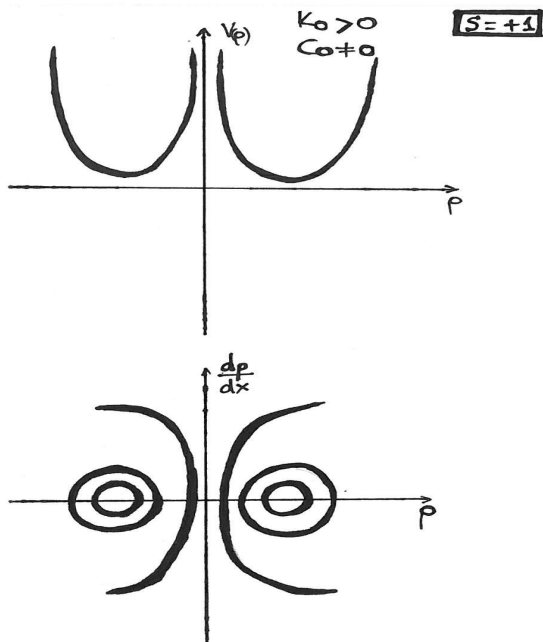
$$\omega > \frac{1}{2}k^2$$

Η γραμμική σχέση διασποράς εκφράζεται από την σχέση,

$$\omega = \frac{1}{2}k^2 \Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial k} = k = v$$

Παρακάτω παραθέτουμε τις απεικονίσεις των λύσεων στο χώρο φάσεων, για  $s = +1$ ,  $C_0 \neq 0$  και  $C_0 = 0$  αντίστοιχα. Επιπλέον διακρίνουμε τις περιπτώσεις,  $k_0 < 0$  και  $k_0 > 0$ .





## 7.2 Χώρος φάσεων για τα σκοτεινά σολιτόνια.

Για  $s = -1$  η εξίσωση του δυναμικού δίνεται από τον τύπο,

$$V(\rho) = -k_0\rho^2 - \frac{1}{2}\rho^4 + \frac{C_0}{2\rho^2}$$

Υποθέτοντας ότι  $C_0 = 0$  και  $k_0 = -\psi_0^2 < 0$  η εξίσωση της κίνησης περιγράφεται από τον τύπο,

$$\rho'' = -2\psi_0^2\rho + 2\rho^3$$

Η πυκνότητα θα περιγράφεται από τον τύπο,

$$\rho = \psi_0 \tanh[\psi_0(z - z_0)] \quad (102)$$

Και το δυναμικό,

$$V(\rho) = \psi_0 \rho^2 - \frac{1}{2} \rho^4 \quad (103)$$

και η λύση μας που αντιστοιχεί στο σκοτεινό σολιτόνιο θα είναι,

$$\psi = \psi_0 \tanh[\psi_0(z - z_0)] \exp(-i\psi_0^2 t) \quad (104)$$

Να επισημανθεί ότι  $\phi = k_0 t = -\psi_0^2 t$ .

Για  $k_0 > 0$  και  $C_0 = 0$  δεν έχουμε σολιτονικές λύσεις.

Για  $C_0 \neq 0$  και  $k_0 = -\psi_0^2 < 0$ , η λύση μας έχει την μορφή,

$$\psi = \psi_0 \sqrt{1 - B^2 \operatorname{sech}^2 Z} \exp(-i\psi_0^2 t + i\theta) \quad (105)$$

όπου

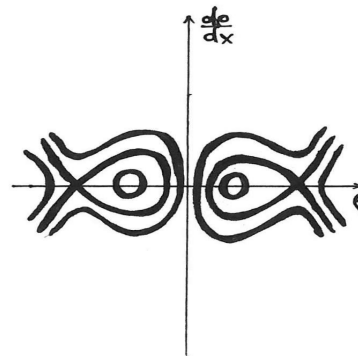
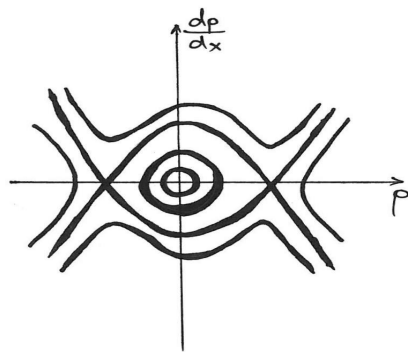
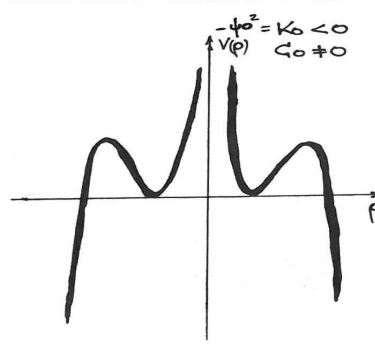
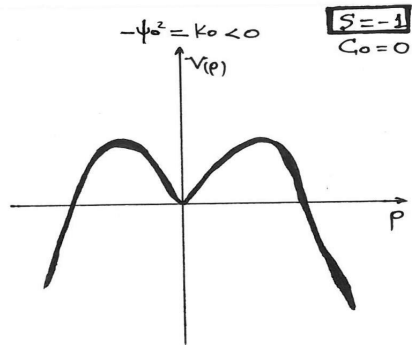
$$Z = \psi_0 A(z - \psi_0 B t), \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B \tanh Z}\right)$$

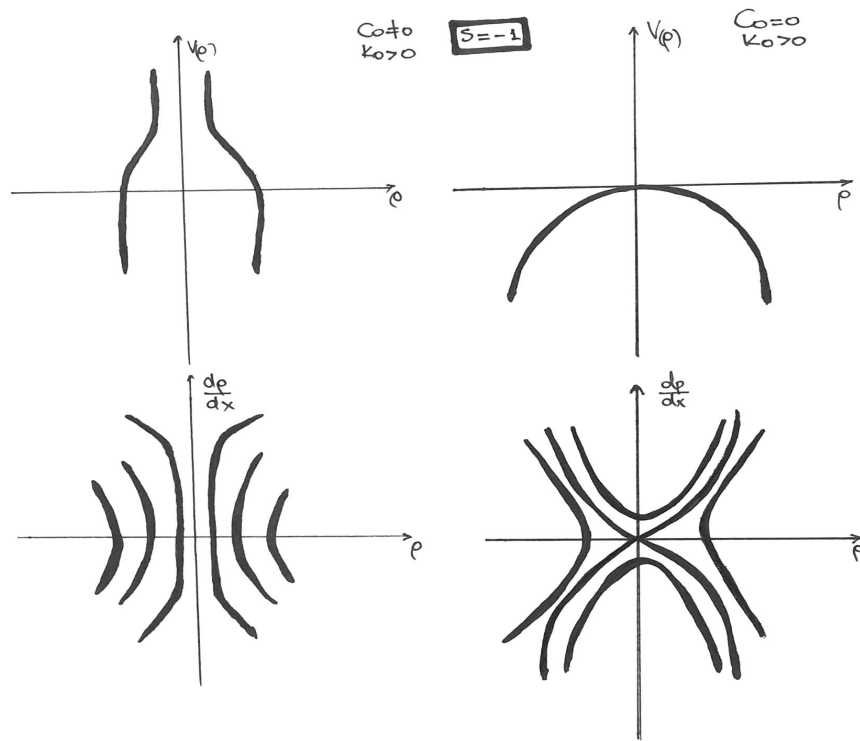
Σε αυτήν την περίπτωση, με  $A^2 + B^2 = 1$ , η λύση μας είναι η παρακάτω και μας υποδεικνύει το γκρί σολιτόνιο.

$$\psi = \psi_0 (B \tanh Z + iA) \exp(-i\psi_0^2 t) \quad (106)$$

Για  $C_0 \neq 0$  και  $k_0 > 0$  δεν έχουμε σολιτονικές λύσεις.

Παρακάτω παραθέτουμε τις απεικονίσεις των λύσεων στο χώρο φάσεων, για  $s = -1$ ,  $C_0 \neq 0$  και  $C_0 = 0$  αντίστοιχα. Επιπλέον διακρίνουμε τις περιπτώσεις,  $k_0 < 0$  και  $k_0 > 0$ .





## 8 Ο νόμος διατήρησης του αριθμού των ατόμων.

Η συζυγής μορφή της εξίσωσης NLS αρχικά, χωρίς παρουσία δυναμικού,

$$-i\partial_t \bar{\psi}(z, t) = -\frac{1}{2} \bar{\psi}_{zz} + |\psi(z, t)|^2 \bar{\psi}(z, t) \quad (107)$$

Ψάχνουμε να βρούμε μια σχέση μεταξύ διασποράς, χημικού δυναμικού, δυναμικού και του αριθμού σωματιδίων  $N$ . Ο αριθμός σωματιδίων  $N$  δίνεται από τον τύπο,

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} N dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx$$



Γνωρίζουμε ότι  $N = |\psi|^2 = \psi\bar{\psi}$ , επομένως,

$$dN/dt = \frac{d}{dt}(\psi\bar{\psi}) = \psi_t\bar{\psi} + \bar{\psi}_t\psi$$

Από την συζυγή εξίσωση της NLS όμως, αν πολλαπλασιάσουμε με  $\bar{\psi}$  την ίδια και με  $\psi\bar{\psi}$  την αρχική μας, κατασκευάζουμε το ολοκλήρωμα  $dN/dt$ , δηλαδή,

$$dN/dt = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\psi}\psi_{zz} - \psi\bar{\psi}_{zz})dx$$

όπου  $\psi \rightarrow 0$  καθώς  $x \rightarrow \infty$ .

Άρα,  $\frac{dN}{dt} = 0$  που σημαίνει ότι ο αριθμός των ατόμων του συμπυκνώματος παραμένει σταθερός. Το ίδιο επιχείρημα μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς και στην περίπτωση που η εξίσωση NLS συμπεριλαμβάνει και ένα όριο με εξωτερικό δυναμικό. [Βλ.Εξ. (108) παρακάτω]

## 8.1 Η προσέγγιση Thomas-Fermi.

Η εξίσωση NLS παρουσία δυναμικού,

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi + V(x)\psi \quad (108)$$

Το δυναμικό δίνεται από τον τύπο,  $V(x) = -\frac{1}{2}\Omega^2 x^2$ , όπου  $\Omega \ll 1$ .

Σύμφωνα με τη θεωρία διαταραχών,  $X = \varepsilon x$ , άρα η συζυγής εξίσωσή μας παρουσία δυναμικού μετατρέπεται στην,

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\varepsilon^2\psi_{xx} + |\psi|^2\psi + V(x)\psi \quad (109)$$

Ο πρώτος όρος στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης φεύγει, επομένως η εξίσωσή μας μέσω της λύσης  $\psi = \phi(X) \exp(-i\mu t)$  μετατρέπεται στην  $\mu\phi = |\phi|^2\phi + V(x)\phi$ . Επομένως,

$$|\phi|^2 = \mu - V(x) \quad (110)$$

Η παραπάνω σχέση συνδέει το δυναμικό, την διασπορά και το χημικό δυναμικό.

Το χημικό δυναμικό μας δείχνει πως αλληλεπιδρούν τα σωματίδια μεταξύ τους. Επιπλέον ισχύει για  $\mu > V(x)$  ενώ οπουδήποτε αλλού είναι μηδέν. Λύνοντας την σχέση αυτή ίση με το μηδέν και αντικαθιστώντας το δυναμικό, βρίσκουμε,

$$x = \pm \frac{\sqrt{2\mu}}{\Omega}$$

Η συγκεκριμένη εξίσωση ονομάζεται Thomas-Fermi <sup>23</sup> ακτίνα. Τέλος, χρησιμοποιώντας τον τύπο του αριθμού σωματιδίου  $N$  θα βρούμε τον αριθμό των σωματιδίων που περιλαμβάνονται στην θεμελιώδη κατάσταση, τη λεγόμενη ground state. Έχοντας

<sup>23</sup>Thomas, Llewellyn: 1903-1992, Άγγλος φυσικός

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = \int_{-\frac{\sqrt{2\mu}}{\Omega}}^{+\frac{\sqrt{2\mu}}{\Omega}} |\phi|^2 dx$$

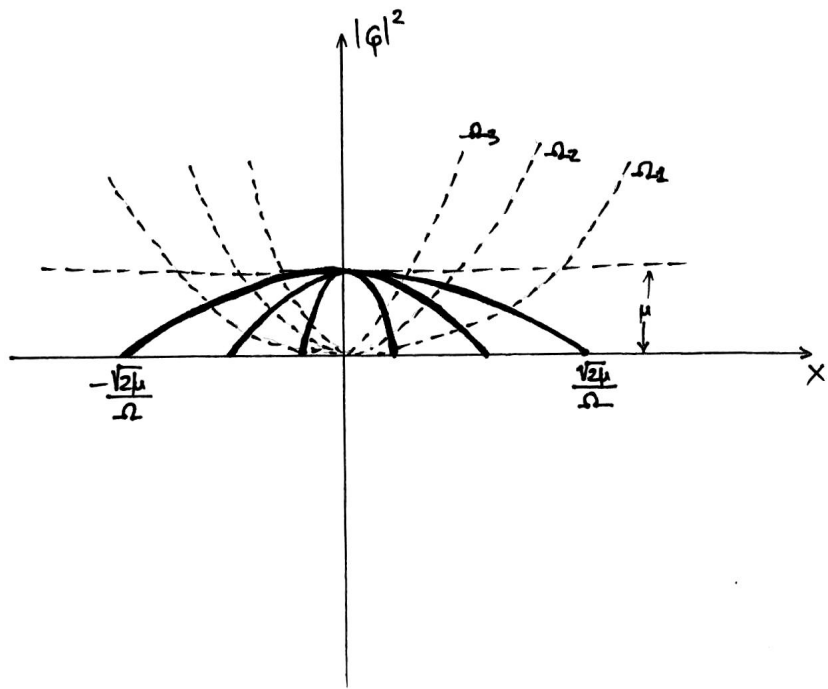
Συνεχίζοντας τις πράξεις έχουμε,

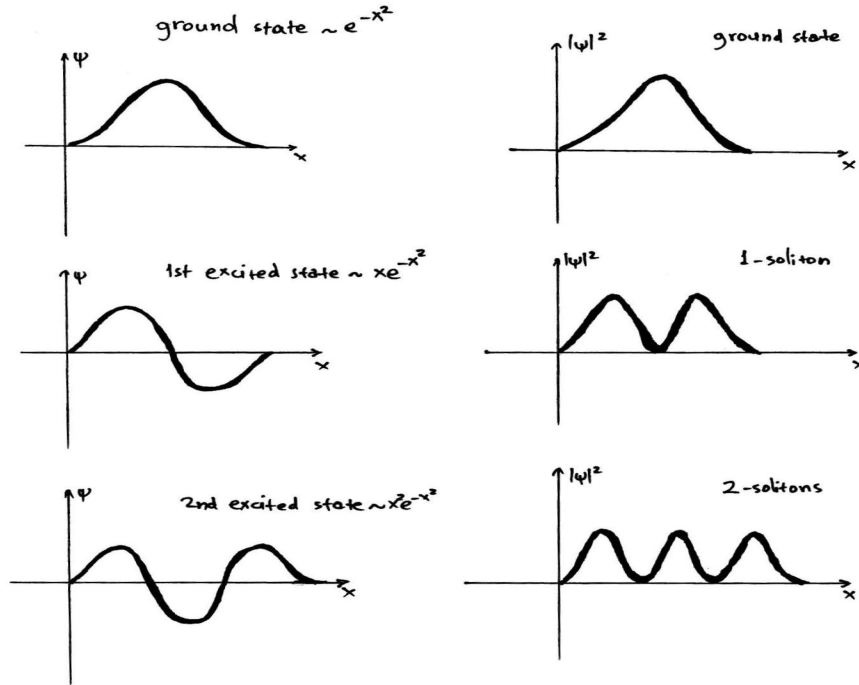
$$N = \int_{-\frac{\sqrt{2\mu}}{\Omega}}^{+\frac{\sqrt{2\mu}}{\Omega}} (\mu - \frac{1}{2}\Omega^2 x^2) dx = \frac{2\mu\sqrt{2\mu}}{\Omega} - \frac{1}{6}\Omega^2 \frac{2\mu\sqrt{2\mu}}{\Omega^3} =$$

$$N = \frac{5}{6} \frac{(2\mu)^{\frac{3}{2}}}{\Omega}$$

όπου  $N$  ο αριθμός των σωματιδίων που περικλείονται. Παρακάτω απεικονίζεται η σχέση μεταξύ διασποράς, χημικού δυναμικού, δυναμικού. Επιπλέον, φαίνεται ο αριθμός των σωματιδίων  $N$  που περικλείονται.

Η προσέγγιση Thomas-Fermi συμβαίνει στη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος, δηλαδή πριν ξεκινήσει να παίζει ρόλο ο μη γραμμικός όρος της εξίσωσης που στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση (1st excited state) μας δίνει τη λύση του πρώτου σολιτονίου, στην δεύτερη διεγερμένη κατάσταση, τη δεύτερη λύση κτλ. Οι καταστάσεις αυτές απεικονίζονται στα ακόλουθα σχήματα.





## 8.2 Δυναμική των σολιτονίων παρουσία εξωτερικού δυναμικού.

### 8.2.1 Διατύπωση του προβλήματος.

Ας θεωρήσουμε μία διαταραγμένη NLS, η οποία περιλαμβάνει την αλληλεπίδραση με κάποιο εξωτερικό δυναμικό, που περιγράφεται από την πραγματική συνάρτηση  $U(z)$ . Η εξίσωση NLS έχει στην περίπτωση αυτή την ακόλουθη μορφή:

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\partial_x^2\psi + s|\psi|^2\psi = U(z)\psi \quad (111)$$

με  $U(z) = \varepsilon V(z)$ ,

όπου η συνάρτηση  $V(z)$  υποτίθεται ότι είναι αργά μεταβαλλόμενη, έτσι ώστε το χαρακτηριστικό μήκος  $l$  να είναι πολύ μεγαλύτερο από το εύρος  $w$  είτε του φωτεινού είτε του σκοτεινού σολιτονίου, στις περιπτώσεις  $s = +1, s = -1$  αντίστοιχα.

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει γενικά τη δυναμική μη γραμμικών κυμάτων και σολιτονίων παρουσία ανομοιογενειών, ενώ το δυναμικό  $U(z)$  έχει διαφορετική φυσική σημασία ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα. Για παράδειγμα, μπορεί να αναπαραστήσει ατέλειες σε κρυστάλλους, δυναμικά παγίδευσης σε πλάσμα, ή στη συμπύκνωση Bose-Einstein. Επίσης, στην περίπτωση της μη γραμμικής οπτικής, η εξίσωση (111) περιγράφει την αυτο-εστίαση μίας οπτικής δέσμης σε ένα κυ-

ματοδηγό με βαθμιαία κατανομή του δείκτη διάθλασης, που περιγράφεται από τη συνάρτηση  $U(z)$ . Σημειώνεται ότι στην περίπτωση αυτή, η ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  παίζει το ρόλο της χωρικής συντεταγμένης στη διεύθυνση διάδοσης.

Στην περίπτωση της διαταραγμένης NLS, είναι βολικό να χρησιμοποιηθεί η θεωρία διαταραχών για να μελετηθεί αναλυτικά η δυναμική των σολιτονίων. Επομένως η λύση της διαταραγμένης εξίσωσης NLS εκφράζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\psi(z, t) = \psi_s(z, t) + \varepsilon\psi_1(z, t) + \varepsilon\psi_R(z, t) \quad (112)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, η  $\psi_s(z, t)$  είναι μία συνάρτηση που έχει την ίδια μορφή με εκείνη του σκοτεινού ή φωτεινού σολιτονίου αντίστοιχα, αλλά με τη βασική διαφορά ότι οι παράμετροι του σολιτονίου δεν θα είναι πλέον σταθεροί, αλλά μεταβαλλόμενοι με το χρόνο, εξαιτίας της παρουσίας ης διαταραχής.

Από την άλλη πλευρά, ο δεύτερος και ο τρίτος όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης είναι ανάλογοι με τη διαταραχή, και έχουν την ακόλουθη σημασία: Ο όρος  $\psi_1(z, t)$  είναι μία εντοπισμένη συνάρτηση γύρω από το σολιτόνιο, που περιγράφει την αλλαγή του σχήματος του σολιτονίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μικρή αυτή αλλαγή στο σχήμα του σολιτονίου (ανάλογη του  $\varepsilon$ ) δεν επηρεάζει την κίνησή του, οπότε ο όρος αυτός συνήθως δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Τέλος, ο όρος  $\psi_R(z, t)$  περιγράφει το πεδίο ακτινοβολίας που εκπέμπεται από το μη μόνιμο σολιτόνιο και μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της θεωρίας διαταραχών που βασίζεται στο Μετασχηματισμό Αντίστροφης Σκέδασης.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση όπου οι όροι των διαταραχών είναι μικροί, μπορεί κανείς να αναμένει ότι η παραμόρφωση του σολιτονίου θα είναι αδιαβατική. Άρα, μόνο ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης θα είναι σημαντικός και συγκεκριμένα, μία αδιαβατική σχέση θα είναι η εξισορρόπηση μεταξύ της μη γραμμικότητας και της διασποράς, δηλαδή το πλάτος επί το εύρος θα είναι κάτι σταθερό. Η προσέγγιση αυτή, είναι η βασική ιδέα της λεγόμενης αδιαβατικής θεωρίας διαταραχών.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να θεωρήσουμε λύσεις της εξίσωσης που θα έχουν τη μορφή φωτεινού σολιτονίου ή σκοτεινού σολιτονίου ( $s = +1$  ή  $s = -1$ ). Τότε, σύμφωνα με την αδιαβατική θεωρία διαταραχών, το πρόβλημα ανάγεται ουσιαστικά στον προσδιορισμό της χρονικής εξέλιξης των παραμέτρων των σολιτονίων, ο οποίος μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων κίνησης.

Γενικά η εξίσωση (103), εμπλέκεται σε μία εξίσωση κίνησης του Νεύτωνα, πράγμα που δείχνει ποσοτικά ότι τα σολιτόνια της εξίσωσης NLS συμπεριφέρονται σαν κλασσικά σωματία. Παρακάτω θα δείξουμε ότι τα σκοτεινά σολιτόνια έχουν αυτήν την συμπεριφορά.

### 8.2.2 Σκοτεινά σολιτόνια σαν νευτώνια σωματία.

Θα μελετήσουμε την εξίσωση NLS παρουσία εξωτερικού δυναμικού, στην περίπτωση  $s = -1$ . Δηλαδή,

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\partial_z^2\psi + |\psi|^2\psi + U(z)\psi \quad (113)$$

όπου  $U(z) = \varepsilon V(z)$ . Σε αυτή τη περίπτωση θα πρέπει να προσδιορίσουμε την επίδραση που έχει το εξωτερικό δυναμικό στη λύση, δηλαδή να επαναπροσδιορίσουμε τη λύση του υποβάθρου, επάνω στο οποίο θα διαδοθεί το σολιτόνιο.

Υποθέτουμε ότι η μορφή της λύσης μας (λόγω του ότι έχουμε δυναμικό στο δεξί μέλος) θα είναι,

$$\psi(z, t) = \psi_1(z) \exp(-i\psi_0^2 t) \quad (114)$$

όπου,

$$\psi_1(z) = \psi_0 + \varepsilon f(z) \quad (115)$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις στην αρχική (113), θεωρώντας ότι η συνάρτηση μεταβάλλεται αργά όπως και το δυναμικό (επομένως οι όροι από  $\varepsilon^2$  και πάνω θεωρούνται αμελητέοι) βρίσκουμε,

$$f(z) = -\frac{1}{2\psi_0} V(z) \quad (116)$$

Άρα η λύση μας για το υπόβαθρο θα γίνει,

$$\psi(z, t) = \left(\psi_0 - \frac{1}{2\psi_0} U(z)\right) \exp(-i\psi_0^2 t)$$

Στην παρούσα φάση, για να περιγραφεί ένα σκοτεινό σολιτόνιο σε ένα τέτοιο υπόβαθρο, θα θεωρήσουμε λύση της μορφής,

$$\psi = \psi_1(z) v(z, t) \exp(-i\psi_0^2 t) \quad (117)$$

Αντικαθιστώντας τη νέα λύση μας στην (113), η εξίσωσή μας θα μετατραπεί στην,

$$iv_t + \frac{1}{2} v_{zz} - \psi_1^2 (|v|^2 - 1)v = -\frac{1}{\psi_1} \psi_{1z} v_z \quad (118)$$

Αντικαθιστούμε στην παραπάνω εξίσωση την λύση  $\psi_1$  του υποβάθρου και αναλύοντας την  $\psi_1$  όπως παρακάτω, έχουμε,

$$\psi_1^2 \approx \psi_0^2 - U(z) \quad (119)$$

Η παραπάνω λύση εκφράζεται έτσι, διότι οι όροι που είναι ανάλογοι του  $\varepsilon$  (λόγω διαταραχής), τους θεωρούμε μηδενικούς. Επομένως, η εξίσωσή μας μετατρέπεται στην,

$$iv_t + \frac{1}{2} v_{zz} - \psi_0^2 (|v|^2 - 1)v = \frac{1}{2\psi_0^2} U(z) v_z - (|v|^2 - 1)Uv = \varepsilon P(v) \quad (120)$$

όπου

$$P(v) = \frac{1}{2} \psi_0^2 [2(1 - |v|^2)vV + v_z V_z]$$

Για  $\varepsilon = 0$  και κάνοντας τον μετασχηματισμό,  $t \rightarrow \psi_0^2 t$  και  $z \rightarrow \psi_0 z$ , η εξίσωσή μας έχει σαν λύση την,

$$v(z, t) = \cos \phi \tanh \xi + i \sin \phi \quad (121)$$

όπου

$$\xi = \cos \phi(z - (\sin \phi)t)$$

Θα θεωρήσουμε ότι οι παράμετροι που χαρακτηρίζουν το σκοτεινό σολιτόνιο από σταθερές θα γίνουν χρονικά μεταβαλλόμενες. Σαν ανεξάρτητη παράμετρο του σολιτονίου θα θεωρήσουμε την  $\phi$  και έτσι η λύση μας μετατρέπεται στην,

$$v(z, t) = \cos \phi(t) \tanh \xi(t) + i \sin \phi(t)$$

όπου,

$$\xi(t) = \cos \phi(t)(z - z_0(t))$$

Στην παραπάνω εξίσωση η παράμετρος  $\phi$  είναι το κέντρο του σολιτονίου και περιγράφεται όπως παρακάτω,

$$z_0(t) = \int_0^t \sin \phi(t') dt'$$

Λόγω των παραπάνω το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό της χρονικής εξέλιξης της φασικής γωνίας  $\phi$  του σολιτονίου, η οποία οφείλεται στην παρουσία της διαταραχής  $P(v)$ . Υπολογίζοντας λοιπόν το ολοκλήρωμα κίνησης της ενέργειας του αδιατάραχτου συστήματος θα καταφέρουμε να υπολογίσουμε και το κέντρο του σολιτονίου. Το ολοκλήρωμα της κίνησης που εκφράζει την ενέργεια του συστήματος, δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} (|v_z|^2 + (|v|^2 - 1)^2) dz = \frac{4}{3} \cos^3 \phi(t)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω έχουμε,

$$\frac{dE}{dt} = -4 \cos^2 \phi \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\frac{dE}{dt}}{4 \cos^2 \phi \sin \phi}$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της ενέργειας, είναι να αντικαταστήσουμε την λύση στην (122) στην (121) με τους μετασχηματισμούς της και την συζυγή της. Έτσι πολλαπλασιάζοντας και με  $v_t$ , έχουμε

$$\frac{dE}{dt} = -\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} (P \bar{v}_t + \bar{P} v_t) dz$$

Στην παραπάνω εξίσωση, αντικαθιστώντας την λύση  $v(z, t)$  με την παράμετρο  $\phi$  έχω,

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{2} \cos \phi \frac{\partial V}{\partial z_0}$$

Επομένως το κέντρο του σολιτονίου (αφού  $z_0(t) = \int_0^t \sin \phi(t') dt'$ ) δίνεται από την παρακάτω σχέση,

$$\frac{d^2 z_0}{dz^2} = -\frac{1}{2} \cos^2 \phi \frac{\partial V}{\partial z_0},$$

η οποία μας δείχνει ότι τα σολιτόνια έχουν συμπεριφορά κλασσικού νευτώνειου σωμάτιου.

## 9 Από την Εξίσωση Boussinesq στην εξίσωση Korteweg–de Vries(Kdv).

Παρακάτω παραθέτουμε τις εξισώσεις συνέχειας,

$$\rho_t + (\rho\phi_x)_x = 0 \quad (122)$$

$$\phi_t + \rho + \frac{1}{2}\phi_x^2 - \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{2}})_{xx} = 0 \quad (123)$$

Μέσω της θεωρίας διαταραχών ορίζουμε τις νέες μεταβλητές μας ως εξής:  $X = \varepsilon^{\frac{1}{2}}x$ ,  $T = \varepsilon^{\frac{1}{2}}t$ . Κάνουμε τις μερικές παραγωγίσεις και έτσι,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial X}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial T}$$

Αντικαθιστούμε στις παραπάνω εξισώσεις και έχουμε,

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\rho_T + \varepsilon(\rho\phi_X)_X = 0 \quad (124)$$

$$\phi_t + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\phi_T + \rho + \frac{1}{2}\varepsilon\phi_X^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\rho^{-\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{2}})_{XX} = 0 \quad (125)$$

Γνωρίζουμε ότι οι λύσεις  $\rho$  και  $\phi$  εκφράζονται μέσω των παρακάτω εξισώσεων,

$$\rho = \mu + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + ..$$

$$\phi = -\mu t + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\Phi$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω λύσεις στις εξισώσεις (125) και (126), έχουμε τα παρακάτω:

$$-\mu + \varepsilon\Phi_T + \mu + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Phi_X^2 - \frac{\varepsilon^2}{4\mu}\rho_{1XX} = \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (126)$$

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}}\rho_{1T} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}\rho_{2T} + \varepsilon[(\mu + \varepsilon\rho_1)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\Phi_X]_X = 0$$

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}}\rho_{1T} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}\rho_{2T} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\mu\Phi_{XX} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}(\rho_1\Phi_X)_X = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{7}{2}})$$

Επομένως καταλήξαμε στις παρακάτω εξισώσεις,

$$\rho_{1T} + \mu\Phi_{XX} = 0 \quad (127)$$

$$\rho_{2T} + (\rho_1\Phi_X)_X = 0 \quad (128)$$

Η εξίσωση (128) είναι τάξης  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  και η (129) είναι τάξης  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  αντίστοιχα.

Η εξίσωση (127) αφού παραγωγιστεί μία φορά ως προς  $T$ , μετατρέπεται στην,

$$\Phi_{TT} + \rho_{1T} + \varepsilon[\rho_{2T} + \frac{1}{2}(\Phi_X^2)_T - \frac{1}{4\mu}\rho_{1XXT}] = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (129)$$



και η παραπάνω στην,

$$\Phi_{TT} - \mu\Phi_{XX} + \varepsilon[\dots] = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (130)$$

Στα παραπάνω ισχύει  $v^2 = \mu$  όπως και στα προηγούμενα. Επίσης ισχύουν,

$$-\frac{1}{4\mu}\rho_{1XXT} = \frac{1}{4}\Phi_{XXXX}$$

Διότι από (128), έχουμε

$$\rho_{1TXX} = -\mu\Phi_{XXXX}$$

Επιπλέον, από (130) σε  $\mathcal{O}(1)$  :  $\rho_1 = -\Phi_T$

Έτσι, η (129) μετατρέπεται,

$$\rho_{2T} + (-\Phi_T\Phi_X)_X = 0 \Rightarrow$$

$$\rho_{2T} = +(\Phi_X\Phi_T)_X$$

Άρα,

$$\Phi_{TT} - \mu\Phi_{XX} + \varepsilon\left[\frac{1}{4}\Phi_{XXXX} + \frac{1}{2}(\Phi_X^2)_T + (\Phi_X\Phi_T)_X\right] = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (131)$$

Στο σημείο αυτό να επισημάνουμε ότι για την γραμμική σχέση διασποράς ισχύουν τα ίδια, δηλαδή:

$$-\omega^2 + \mu K^2 + \frac{\varepsilon}{4}K^4 = 0$$

Για την εξίσωση (132), θα εφαρμόσουμε την θεωρία διαταραχών. Εκτός από την αλλαγή μεταβλητών,

$$X = \varepsilon^{\frac{1}{2}}x$$

$$T = \varepsilon^{\frac{1}{2}}t$$

Θα έχουμε επίσης,

$$\xi = X - vT$$

$$\eta = X + vT$$

$$\tau = \varepsilon T$$

Η μεταβλητή  $\xi$  υποδεικνύει το κύμα προς τα δεξιά, η μεταβλητή  $\eta$  το κύμα προς τα αριστερά και η  $\tau$  τον "αργό" χρόνο. Παρακάτω θα κάνουμε τις μερικές παραγωγίσεις με τις νέες μεταβλητές και θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (132).

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial \xi}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \tau} = -v \frac{\partial}{\partial \xi} + v \frac{\partial}{\partial \eta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\varepsilon v \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \tau} - 2v^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial \xi}{\partial X} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial X} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau}{\partial X} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial_X^2} = \frac{\partial^2}{\partial_\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial_\eta^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial_\xi\partial_\eta}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial_X^4} = \frac{\partial^4}{\partial_\xi^4} + \frac{\partial^4}{\partial_\eta^4} + 4\frac{\partial^4}{\partial_\xi^2\partial_\eta^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial_\xi^3\partial_\eta} + 4\frac{\partial^4}{\partial_\xi\partial_\eta^3}$$

Η εξίσωση (132) μέσω των παραγωγίσεων,

$$\begin{aligned} & v^2\Phi_{\xi\xi} + v^2\Phi_{\eta\eta} + \varepsilon^2\Phi_{\tau\tau} - 2\varepsilon v\Phi_{\xi\tau} + \\ & 2\varepsilon v\Phi_{\eta\tau} - 2v^2\Phi_{\xi\eta} - \mu\Phi_{\xi\xi} - \mu\Phi_{\eta\eta} - 2\mu\Phi_{\xi\eta} + \\ & \varepsilon\left[\frac{1}{4}(\Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + 6\Phi_{\xi\xi\eta\eta} + 4\Phi_{\xi\xi\xi\eta} + 4\Phi_{\xi\eta\eta\eta}) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2}\left(-v\frac{\partial}{\partial_\xi} + v\frac{\partial}{\partial_\eta} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial_\tau}\right)(\Phi_\xi + \Phi_\eta)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial}{\partial_\xi} + \frac{\partial}{\partial_\eta}\right)[(\Phi_\xi + \Phi_\eta)(-v\Phi_\xi + v\Phi_\eta + \varepsilon\Phi_\tau)]\right] = 0 \end{aligned} \quad \text{false}$$

Σύμφωνα με την θεωρία διαταραχών, θα αναλύσουμε και την μεταβλητή  $\Phi$ . Έτσι,

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1$$

Επομένως, η παραπάνω εξίσωση θα μετατραπεί στην,

$$4\mu\Phi_{0\xi\eta} + \varepsilon[.] = 0$$

Αν εξισώσουμε με το μηδέν και τους δύο όρους, θα έχουμε:

$$\Phi_{0\xi\eta} = 0$$

Άρα

$$\Phi_0 = \Phi_0^R(\xi) + \bar{\Phi}_0^L(\eta)$$

όπου  $\Phi_0^R(\xi)$  (Right-going)  $\bar{\Phi}_0^L(\eta)$  (Left-going). Ο επόμενος όρος  $\varepsilon[.] = 0$  Συνεχίζοντας τις πράξεις,

$$-4\mu\Phi_{1\xi\eta} - 2v\Phi_{0\xi\tau}^R + 2v\Phi_{0\eta\tau}^L + \frac{1}{4}(\Phi_{0\xi\xi\xi\xi}^R + \Phi_{0\eta\eta\eta\eta}^L) + \quad (132)$$

$$\frac{1}{2}\left(-v\frac{\partial}{\partial_\xi} + v\frac{\partial}{\partial_\eta} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial_\tau}\right)(\Phi_{0\xi}^{R^2} + \Phi_{0\eta}^{L^2} + 2\Phi_{0\xi}^R\Phi_{0\eta}^L) + \quad (133)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial_\xi} + \frac{\partial}{\partial_\eta}\right)(-v\Phi_{0\xi}^{R^2} - v\Phi_{0\xi}^R\Phi_{0\eta}^L + v\Phi_{0\xi}^R\Phi_{0\eta}^L + v\Phi_{0\eta}^{L^2}) = 0 \quad (134)$$

Ο όρος (134) μετασχηματίζεται μέσω πράξεων,

$$\frac{1}{2}[-v(\Phi_{0\xi}^{(R)^2})_\xi + v(\Phi_{0\eta}^{(L)^2})_\eta - 2v\Phi_{0\xi\xi}^{(R)}\Phi_{0\eta}^{(L)} + 2v\Phi_{0\xi}^{(R)}\Phi_{0\eta\eta}^{(L)} - v(\Phi_{0\xi}^{(R)^2})_\xi + v(\Phi_{0\eta}^{(L)^2})_\eta]$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις, καταλήγουμε:

$$-4\mu\Phi_{1\xi\eta} - 2v(\Phi_{0\xi\xi}^{(R)}\Phi_{0\eta}^{(L)} - \Phi_{0\xi}^{(R)}\Phi_{0\eta\eta}^{(L)}) \quad (135)$$

$$+[-2v\Phi_{0\tau}^{(R)} + \frac{1}{4}\Phi_{0\xi\xi\xi}^{(R)} - \frac{3}{2}v\Phi_{0\xi}^{(R)^2}]_{\xi} \quad (136)$$

$$+[2v\Phi_{0\tau}^{(L)} + \frac{1}{4}\Phi_{0\eta\eta\eta}^{(L)} - \frac{3}{2}v\Phi_{0\eta}^{(L)^2}]_{\eta} = 0 \quad (137)$$

Οι όροι (137) και (138) ονομάζονται "αιώνιοι" (secular) διότι εάν ολοκληρώσουμε όλοι την παραπάνω εξίσωση ως προς  $\xi$  ή ως προς  $\eta$  αντίστοιχα, τότε ο όρος (137)  $\sim \eta$  και ο όρος (138)  $\sim \xi$  καθώς και οι δύο όροι πηγαίνουν στο άπειρο, όταν  $\xi, \eta \rightarrow \infty$ . Επομένως, πρέπει ο όρος (137)=0 και ο όρος (138)=0.

Από την εξίσωση (130), έχουμε

$$\rho_1 = -\Phi_{\tau} \Rightarrow$$

$$\rho_1 = +v\Phi_{0\xi}^{(R)} - v\Phi_{0\eta}^{(L)} \Rightarrow$$

$$\rho_1^{(R)} = v\Phi_{0\xi}^{(R)}$$

$$\rho_1^{(L)} = -v\Phi_{0\eta}^{(L)}$$

Εξισώνοντας την εξίσωση (137)=0, έχουμε:

$$-2v\Phi_{0\xi\tau}^{(R)} + \frac{1}{4}\phi_{0\xi\xi\xi}^{(R)} - \frac{3}{2}v(\Phi_{0\xi}^{(R)})_{\xi} = 0 \Rightarrow$$

$$-2\frac{v}{v}\rho_{1\tau}^{(R)} + \frac{1}{4v}\rho_{1\xi\xi\xi}^{(R)} - \frac{3}{v}\rho_1^{(R)}\rho_{1\xi}^{(R)} = 0 \Rightarrow$$

$$\rho_{1\tau}^{(R)} - \frac{1}{8v}\rho_{1\xi\xi\xi}^{(R)} + \frac{3}{2v}\rho_1^{(R)}\rho_{1\xi}^{(R)} = 0 \quad (138)$$

Η παραπάνω είναι μία εξίσωση KdV!

Παρόμοια, εξισώνοντας την εξίσωση (138)=0, έχουμε:

$$-2\frac{v}{v}\rho_{1\tau}^{(L)} - \frac{1}{4v}\rho_{1\eta\eta\eta}^{(L)} + \frac{3}{v}\rho_1^{(L)}\rho_{1\eta}^{(L)} = 0 \Rightarrow$$

$$\rho_{1\tau}^{(L)} + \frac{1}{8v}\rho_{1\eta\eta\eta}^{(L)} - \frac{3}{2v}\rho_1^{(L)}\rho_{1\eta}^{(L)} = 0 \quad (139)$$

Ομοίως η (140), είναι μία εξίσωση KdV!

## 10 Εξίσωση Korteweg-de Vries.(KdV)

Η εξίσωση KdV ανακαλύφθηκε από τον Korteweg και τον de Vries το 1895 και φέρει τα όνοματά τους.

Η μορφή της εξίσωσης που περιγράφει τα κύματα σολιτονίων στο νερό έχει την παρακάτω μορφή,

$$u_t + \frac{3}{2h}uu_x + \frac{h^2}{6}u_{xxx} = 0 \quad (140)$$

Η μεταβλητή  $u(x, t)$  υποδεικνύει το ύψος του κύματος από την επιφάνεια και  $h$  είναι το βάθος του νερού.

Η ακριβής λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται από τον τύπο,

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - vt}{l}\right) \quad (141)$$

Στην παραπάνω λύση,  $u_0$  είναι το αρχικό ύψος του σολιτονίου, η ταχύτητα  $v$  δίνεται από τον τύπο,  $v = \sqrt{gh}\left(1 + \frac{u_0}{2h}\right)$  και ο όρος  $2l$  υποδεικνύει το "πλάτος" του σολιτονίου και καθορίζεται από την παρακάτω εξίσωση,

$$S \equiv \frac{3}{4} \frac{u_0 l^2}{h^3} = 1 \quad (142)$$

Η εξίσωση (130) είναι η μαθηματική συνθήκη που μας υποδεικνύει την ισορροπία μεταξύ της διασποράς και της μη γραμμικότητας - ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τα σολιτόνια.

Εάν η παράμετρος  $S$  είναι πολύ μεγαλύτερη της μονάδος, το φαινόμενο της μη γραμμικότητας επικρατεί. Συγκεκριμένα, οι ανυψώσεις (humps) θα "σπάσουν" σε μικρότερες ανυψώσεις και έτσι θα δημιουργηθούν πολλά σολιτόνια. Εάν τώρα ισχύει  $S \ll 1$  τότε επικρατεί το φαινόμενο της διασποράς. Σε αυτήν την περίπτωση, οι ανυψώσεις θα 'διαλυθούν' σταδιακά. Τέλος, όταν  $S \approx 1$  οι ανυψώσεις έχουν τη μορφή σολιτονίου και η ταχύτητά τους είναι κοντά στην ταχύτητα του σολιτονίου, δηλαδή όταν ισχύει η παραπάνω σχέση έχουμε ένα κανονικό σολιτόνιο το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση KdV.

### 10.1 Εξίσωση KdV και οι λύσεις της στον φασικό χώρο.

Μία γενική μορφή της εξίσωσης KdV είναι,

$$u_t + auu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (143)$$

Η λύση της οποίας θα έχει τη μορφή,

$$u = \Phi(x - vt) \quad (144)$$

Ονομάζοντας το  $x - vt = \xi$  και ολοκληρώνοντας την εξίσωση έχουμε τις παρακάτω πράξεις,

$$\begin{aligned} -v\Phi' + a\Phi\Phi' + \beta\Phi''' &= 0 \\ -v\Phi' + \frac{a}{2}(\Phi^2)' + \beta\Phi''' &= 0 \end{aligned}$$

$$-vu + \frac{a}{2}(u^2) + \beta u'' = C$$

Αν  $u \rightarrow 0$  καθώς  $|\xi| \rightarrow \infty$  τότε  $C = 0$   
 Συνεχίζοντας τις πράξεις έχουμε,

$$u'' - \frac{v}{\beta}u + \frac{a}{2\beta}u^2 = 0$$

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα όπου  $mx'' = -\frac{dV}{dx}$ , η εξίσωσή μας μετατρέπεται στην,

$$u'' = \frac{v}{\beta}u - \frac{a}{2\beta}u^2 = -\frac{dV}{du}$$

Τελικά βρίσκουμε ότι το δυναμικό της παραπάνω εξίσωσης έχει την μορφή,

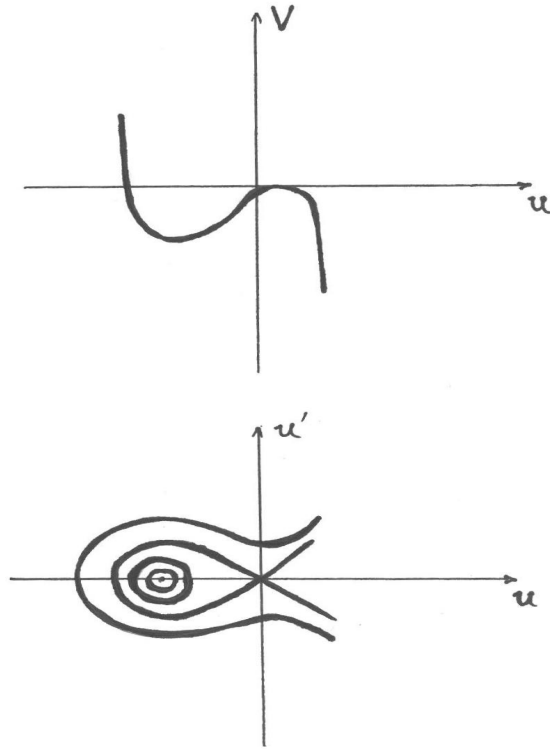
$$V = -\frac{v}{2\beta}u^2 + \frac{a}{6\beta}u^3 \quad (145)$$

Στην παραπάνω εξίσωση ο πρώτος και ο δεύτερος όρος είναι αρνητικοί έχοντας,  
 $\beta > 0, a < 0, v > 0$

Η λύση της εξίσωσης KdV δίνεται από τον τύπο,

$$u = -u_0 \operatorname{sech}^2(\beta\xi) \quad (146)$$

Παρακάτω παραθέτουμε το δυναμικό σε σχέση με την λύση της εξίσωσης KdV στον χώρο φάσεων



## 11 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### 11.1 Εναλλακτική προσέγγιση της παραγράφου 4.4

Ευστάθεια της θεμελιώδους κατάστασης του επίπεδου κύματος  
(Αστάθεια διαμόρφωσης)

Θεωρούμε την εξίσωση NLS,

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{zz} + s|\psi|^2\psi$$

με  $s = \pm 1$  και λύση  $\psi = \sqrt{\mu}e^{is\mu t}$  και  $\psi_0 = \sqrt{\mu}$ .

Η  $\psi$  θα εκφραστεί ως  $\psi = \psi_0 + \psi_1$  όπου  $\psi_1$ , ένας όρο μικρής διαταχής, δηλαδή  $\max(\psi_1) \ll \psi_0$ .

$$i\psi_{0t} + i\psi_{1t} + \frac{1}{2}\psi_{0zz} + \frac{1}{2}\psi_{1zz} + s|\psi_0|^2\psi_0 + 2s|\psi_0|^2\psi_1 + s\psi_0^2\bar{\psi}_1 = 0$$

$$i\psi_{1t} + \frac{1}{2}\psi_{1zz} + 2s\mu\psi_1 + s\mu \exp(2ist\mu)\bar{\psi}_1 = 0$$

Η λύση μας είναι  $\psi_1 = \phi_1 \exp(ist\mu)$ , άρα η παραπάνω εξίσωση μας δίνει,

$$\begin{aligned}
i\phi_{1t} - s\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_{1zz} + 2sm\phi_1 + s\mu\bar{\phi}_1 &= 0 \\
i\phi_{1t} + \frac{1}{2}\phi_{1zz} + s\mu(\phi_1 + \bar{\phi}_1) &= 0
\end{aligned}$$

Με  $\phi_1 = u + iv$ , έχουμε:

$$iu_t - v_t + \frac{1}{2}u_{zz} + \frac{i}{2}u_{zz} + 2smu = 0 \quad (147)$$

όπου:

$$\begin{aligned}
u_t + \frac{1}{2}v_{xx} &= 0 : \text{Im} \\
-v_t + \frac{1}{2}u_{xx} + 2su\mu &= 0 : \text{Re}
\end{aligned}$$

Οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων είναι:

$$\begin{aligned}
u &= u_0 \exp(i(Kx - \Omega t)) + c.c. \\
v &= v_0 \exp(i(Kx - \Omega t)) + c.c.
\end{aligned}$$

με  $u_0, v_0$  σταθερές.

Τοποθετώντας τις λύσεις στις παραπάνω εξισώσεις, έχουμε:

$$-i\Omega u_0 - \frac{K^2}{2}v_0 = 0$$

$$i\Omega v_0 - \frac{K^2}{2}u_0 + 2su_0\mu$$

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων έχουμε,

$$\Omega^2 + \frac{K^2}{2}\left(-\frac{K^2}{2} + 2s\mu\right) = 0$$

και τελικά,

$$\Omega^2 = -s\mu K^2 + \frac{K^4}{4} = \mu K^2\left(-s + \frac{K^2}{4\mu}\right) \quad (148)$$

Στην περίπτωση ευστάθειας:  $\Omega \in \mathbb{R}$  για κάθε  $K \in \mathbb{R}$  έχουμε  $s = -1$  και στην περίπτωση αστάθειας  $s = +1$

## 12 Αναφορές

- [1] M. J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
- [2] R. Carretero-Gonzalez, D. J. Frantzeskakis, and P. G. Kevrekidis, “Nonlinear waves in Bose-Einstein condensates: Physical relevance and mathematical techniques”, *Nonlinearity*, **21**, R139–R202 (2008).
- [3] D. J. Frantzeskakis, “Dark solitons in Bose–Einstein condensates: from theory to experiments”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 213001 (2010)
- [4] P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-Gonzalez, *The defocusing nonlinear Schrödinger Equation* (SIAM, Philadelphia, 2015).
- [5] P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-Gonzalez (Eds.), *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates: Theory and Experiment* (Springer-Verlag, Heidelberg, 2008).
- [6] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [7] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [8] V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, “Multi-scale expansions in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform”, *Physica D* **18**, 455–463 (1986).