ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης (Μ.Ι.Θ.Ε.)

Πτυχιακή Εργασία

Μελετάκος Γιώργος

"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ"

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος

ΑΘΗΝΑ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2017

Μαθηματικά και υπολογιστές

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρουσα εργασία θα γίνει μι α προσπαθεια να ταξηνομηθούν και να παρουσιαστουν οι πρωτεργάτες επιστήμονες που συνέβαλαν στη εξέληξη των μαθηματικών σε σχέση με την τεχνολογία και τους υπολογιστές.

Φαίνεται πως ο Leibniz είχε οραματιστεί την αναγωγή των ανθρώπινων συλλογισμών καθώσ και ισχυρές μηχανικές συσκευές που θα εκτελούν συλλογισμούς.Ο Frege είχε δημιουργήσει για πρώτη φορά ένα σύστημα κανόνων που μπορούσαν να δώσουν μια εύλογη εξήγηση για όλουσ τους ανθρώπινουσ παραγωγικούσ συλλογισμούς.Ο Godel , στη διδακτορική διατριβή του,είχε αποδήξει ότι οι κανόνες του Frege ήταν πλήρεις ,απαντώντασ έτσι στην ερώτηση που είχε τεθεί απο τον Hilbert δυο χρόνια νωρίτερα.Ο Hilbert είχε επίσης αναζητήσει αναλυτικές υπολογιστικές διαδικασίες με τις οποίες θα ήταν πάντα δυνατό να προσδιοριστεί,αν αυτό το συμπέρασμα μπορέι να εξαχθεί από τις προυποθέσεις αυτές με τη χρήση κανόνων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Η επιρροή του Leibniz και τα πρώτα βήματα της εξέλιξης

Στις μέρες μας οι υπολογιστές έχουν αποκτήσει εξέχουσα θέση στην καθημερινότητά μας και έχουν γίνει αναπόσπαστο κομμάτι στην εργασία, την επικοινωνία, την διασκέδαση ακόμα και στις τέχνες. Πως φτάσαμε όμως ως εδώ. Για να καταλήξει η ανθρωπότητα και η επιστήμη στον Alan Turing και τη μηχανή του προϋπήρχαν διάφοροι εξέχοντες επιστήμονες που συνέβαλαν στη ραγδαία αυτή εξέλιξη. Οι υπολογιστές ουσιαστικά είναι μηχανές λογικής που βαθμιαία εξελίχθηκαν από επιφανείς μαθηματικούς από τα μέσα περίπου της προηγούμενης χιλιετίας. Σίγουρα όπως κάθε άλλος τομέας της επιστήμης έτσι και τα μαθηματικά επηρεάστηκαν θετικά από τον διαφωτισμό και την βιομηχανική επανάσταση.

Ας πάρουμε όμως τα πράγματα με χρονική σειρά. Ποιος έδωσε το έναυσμα για τη σύνδεση μαθηματικών και τεχνολογίας; Ο εκ Λειψίας ορμώμενος Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς (Gottfried Wilhelm Leibniz) Γερμανός φιλόσοφος καθώς και επιστήμονας, μαθηματικός, διπλωμάτης, φυσικός, ιστορικός, βιβλιοθηκονόμος και διδάκτορας των λαϊκών και εκκλησιαστικών Νομικών. Κατέχει εξέχουσα θέση στην ιστορία των μαθηματικών και της φιλοσοφίας, έχοντας αναπτύξει τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, ανεξάρτητα από τον Νεύτωνα. Έγινε ένας από τους πιο παραγωγικούς εφευρέτες στον τομέα της μηχανικής αριθμομηχανών. Ενώ εργαζόταν για την προσθήκη αυτόματου πολλαπλασιασμού και διαίρεσης στην αριθμομηχανή του Pascal, ήταν ο πρώτος που περιέγραψε μια αριθμομηχανή pinwheel το 1685 και εφηύρε τον τροχό Leibniz, που χρησιμοποιείται στην αριθμομετρία, η πρώτη μαζικής παραγωγής μηχανική αριθμομηχανή. Όρισε επίσης το δυαδικό αριθμητικό σύστημα, το οποίο είναι το θεμέλιο όλων σχεδόν των ψηφιακών υπολογιστών.

Οι συνεισφορές του Leibniz σε αυτό το ευρύ θεματικό φάσμα διασκορπίστηκαν σε διάφορα γνωστά περιοδικά, σε δεκάδες χιλιάδες επιστολές και αδημοσίευτα χειρόγραφα. Ο Leibniz δεν δημοσίευσε τίποτα επάνω στην τυπική λογική όσο ζούσε. Τα περισσότερα που έγραψε επάνω στο θέμα αποτελούν σχέδια εργασίας. Στο βιβλίο του «Η Ιστορία της Δυτικής Φιλοσοφίας», ο Bertrand Russell ισχυρίστηκε ότι ο Leibniz είχε αναπτύξει τη λογική σε αδημοσίευτα γραπτά του σε τέτοιο επίπεδο, το οποίο επιτεύχθηκε μόνο 200 χρόνια αργότερα. Παρόλο που η μαθηματική έννοια της λειτουργίας βρισκόταν στους τριγωνομετρικούς και λογαριθμικούς πίνακες, που υπήρχαν στην εποχή του, ο Leibniz ήταν ο πρώτος, ο οποίος το 1692 και 1694 τη χρησιμοποίησε ξεκάθαρα για να ορίσει οποιαδήποτε από τις διάφορες γεωμετρικές έννοιες που προκύπτουν από καμπύλη, όπως η τετμημένη, η συνεταγμένη, η εφαπτομένη, η χορδή και η κάθετη. Το 18ο αιώνα η «λειτουργία» έχασε αυτές τις γεωμετρικές ενώσεις.

Ο Leibniz είχε όλα τα εχέγγυα ώστε μα γίνει ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών κυρίως λόγω της χρονικής συγκυρίας που βίωσε (Τερματισμός τριακονταετούς πολέμου) αλλά και της κληρονομιάς που του άφησε ο πατέρας του έπειτα από το θάνατό του. Στα τέλη του 17^{ου} αιώνα τα μαθηματικά βρίσκονταν σε αρκετά πρώιμο στάδιο στη Γερμανία γεγονός που καταδεικνύεται στο ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία διδάσκονταν μόνο σε πανεπιστημιακό επίπεδο. Έτσι ο Leibniz εκστασιασμένος από την Αριστοτελική παιδεία του συνέλαβε αυτό που ο ίδιος ονόμασε “Υπέροχη ιδέα” του. Επινόησε ένα κωδικοποιημένο αλφάβητο με σύμβολα που θα αναπαριστούσαν ήχους έτσι το αλφάβητό του θα καθιστούσε εφικτό τη λήψη αποφάσεων μέσω συμβολικού υπολογισμού για το ποιες προτάσεις που είχαν γραφτεί σε αυτή τη γλώσσα, είναι αληθής και ποιοι λογικοί συσχετισμοί αναπτύσσονται αναμεταξύ τους.

Σύντομα ο Leibniz βρέθηκε αντιμέτωπος με το δίλλημα ποια επαγγελματική σταδιοδρομία να ακολουθήσει, και επειδή δεν τον ενθουσίαζε η προοπτική της ακαδημαϊκής καριέρας στη Γερμανία αναζήτησε έναν προστάτη-χορηγό στο πρόσωπο του βαρόνου του Mainz ο οποίος με τη σειρά του του ζήτησε να εκσυγχρονίσει το νομικό σύστημα που βασίζονταν ως τότε στο Ρωμαϊκό αστικό δίκαιο. Η πολιτική κατάσταση καθιστούσε αναγκαία τη σύμπλευση και τη διατήρηση ειρηνικών σχέσεων με τη Γαλλία του Λουδοβίκου ΙΔ. Για το λόγο αυτό ο Leibniz κατέφθασε στο Παρίσι έτσι ώστε να προωθήσει τα σχέδιά του για την επιλογή της Αιγύπτου ως αντικείμενο στρατιωτικών επεμβάσεων. Ο ξαφνικός θάνατος του εργοδότη του τον οδήγησε στην παραμονή του στην πρωτεύουσα της Γαλλίας για 4 παραγωγικά χρόνια μέσα στα οποία επισκέφθηκε το Λονδίνο και εξελέγη το 1673 μέλος της βασιλικής ακαδημίας χάρις στην υπολογιστική μηχανή ικανής να πραγματοποιήσει τις 4 βασικές αριθμητικές πράξεις. Το ιδιοφυές εξάρτημα για το οποίο έγινε γνωστός στο ευρύ κοινό ήταν “ο τροχός του Leibniz”.

Πρώτη απόπειρα εφαρμογής της μηχανής του ήταν η προσπάθεια προσέγγισης του γνωστού αριθμού π μέσω μιας απειροσειράς κατά την οποία προσθαφαιρούνταν στη μονάδα κλάσματα με παρονομαστές διαδοχικούς περιττούς αριθμούς.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots.$$

Χάρη στη χρήση διαδικασιών ορίου ο Leibniz οδηγήθηκε στην εύρεση μεγάλου αριθμού εννοιολογικών και υπολογιστικών ανακαλύψεων γνωστές ως “ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού”. Πιο συγκεκριμένα, ο Leibniz αντιλήφθηκε ότι η εύρεση εμβαδού και υπολογισμού ρυθμού μεταβολής ήταν χαρακτηριστικά, καθώς επίσης οι πράξεις που χρειάζονταν για την επίλυση των δύο αυτών τύπων ήταν η μία αντίστροφη της άλλης. Ανέπτυξε έναν σχετικό συμβολισμό για αυτές πράξεις και πιο συγκεκριμένα το ∫ για την ολοκλήρωση και το d για την παραγώγιση. Καθώς επίσης και πράξεις για να υπολογίζονται τα πιο συνηθισμένα ολοκληρώματα και παραγωγίσεις.

Μόλις ο Leibniz αντιλήφθηκε πως δεν θα αποκτούσε κάποια θέση στο Παρίσι, αναχώρησε για το Ανόβερο όπου και τέθηκε στην υπηρεσία του τοπικού Δούκα και θα παρέμενε εκεί ως τα τέλος της ζωής του. Εκεί κατάφερε και υλοποίησε το παιδικό του όνειρο για τη δημιουργία ενός αληθινού αλφαβήτου της ανθρώπινης σκέψης και τα ακατάλληλα εργαλεία για να μπορεί κανείς να χειρίζεται αυτά τα σύμβολα. Αυτό που χρειαζόταν ήταν μια “καθολική χαρακτηριστική”, ένα σύστημα συμβόλων που θα απλωνόταν σε όλη την εμβέλεια της σκέψης. Ο Leibniz μέσω της άλγεβρας καταδεικνύει πως ένα σύστημα που αποτελείται από επιλεγμένα σύμβολα είναι χρήσιμο για την επαγωγική σκέψη. Χρησιμοποίησε την Άλγεβρα και την αριθμητική ως παραδείγματα που υποδεικνύουν την σημασία ενός κατάλληλου συμβολισμού έχοντας στο μυαλό του την επικράτηση του αραβικού συμβολισμού.

Παρόλη την προσπάθειά του για εξαγωγή συγκεκριμένων συμπερασμάτων ο Leibniz δεν κατάφερε να το πετύχει με την καθολική χαρακτηριστική. Έτσι αποπειράθηκε αρκετές φορές για να φτιάξει ένα Calculus Ratiocinator (Λογικό Λογισμό), ένα σύνολο λογικών κανόνων οι οποίοι διαφέρουν κατά πολύ από εκείνους που ισχύουν για τους αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα δημιούργησε μια άλγεβρα της λογικής η οποία θα διευκόλυνε τους χειρισμούς λογικών εννοιών όπως ακριβώς η άλγεβρα καθορίζει τους κανόνες χειρισμού αριθμών. Επινόησε ένα ειδικό σύμβολο, το ⊕, το οποίο συμβολίζει την συνένωση ομάδων όρων. Ενώ το σύμβολο + μας προτρέπει να υπολογίσουμε την πράξη ως πρόσθεση, εντούτοις ο κύκλος γύρο του προειδοποιεί ότι δεν είναι ακριβώς σαν πρόσθεση, καθώς οι όροι δεν είναι αριθμοί. Ο πιο εντυπωσιακός κανόνας είναι το δεύτερο αξίωμα του Leibniz, Α ⊕ Α = Α, το οποίο εκφράζει ότι η ένωση μιας ομάδας όρων με τον εαυτό της δεν παράγει τίποτα καινούριο. Η παρακάτω εικόνα καταδεικνύει ένα δείγμα από τους λογισμούς του Leibniz.

Αξιωμα 1. $B \oplus N = N \oplus B$.

Αιτημα. Οποιεσδήποτε πολλαπλότητες όρων, όπως το A και το B, μπορούν να προστεθούν για να συνθέσουν έναν απλό όρο $A \oplus B$.

Αξιωμα 2. $A \oplus A = A$.

Προταση 5. Αν το A είναι στο B και $A = C$, τότε το C είναι στο B.

Διότι, στην πρόταση *το A είναι στο B*, η αντικατάσταση του A με C, δίνει *το C είναι στο B*.

Προταση 6. Αν το C είναι στο B και $A = B$, τότε το C είναι στο A.

Διότι, στην πρόταση *το C είναι στο B*, η αντικατάσταση του B με το A δίνει *το C είναι στο A*.

Προταση 7. Το A είναι στο A.

Διότι το A είναι στο $A \oplus A$ (από τον Ορισμό 3). Επομένως (από την Πρόταση 6) το A είναι στο A.

....

Προταση 20. Αν το A είναι στο M και το B είναι στο N, τότε το $A \oplus B$ είναι στο $M \oplus N$.

George Boole και η εξελιγμένη μορφή της Αριστοτελικής λογικής

Ένας άλλος επιστήμονας νεότερος του Leibniz, ο George Boole, βάδισε εν αγνοία του στο δρόμο που χάραξε ο Γερμανός μαθηματικός δημιουργώντας και ο ίδιος μια λειτουργική, συμβολική λογική, η οποία εμπεριέχει τη λογική που είχε παρουσιάσει ο Αριστοτέλης 2000 χρόνια νωρίτερα. Ο George Boole, Άγγλος μαθηματικός, φιλόσοφος και μελετητής της λογικής, εργάστηκε στους τομείς των διαφορικών εξισώσεων και της αλγεβρικής λογικής και είναι ευρύτερα γνωστός ως ο συγγραφέας του "Οι νόμοι της Λογικής". Αποτελεί το θεμελιωτή της συστηματικής μελέτης της λογικής και της γενικότερης εφαρμογής που μπορεί να έχει στην επιστήμη των μαθηματικών. Ο Boole έλεγε, πως καμία γενική μέθοδος για την επίλυση ερωτημάτων στην θεωρία των πιθανοτήτων δεν μπορεί να εδραιωθεί αν δεν αναγνωρίζει ξεκάθαρα τους παγκόσμιους νόμους της σκέψης που είναι η βάση κάθε λογικής.

Ο Boole δεν θεωρούσε τη λογική ως κλάδο των μαθηματικών, αλλά ο Boole παρείχε μια γενική συμβολική μέθοδο λογικού συμπεράσματος. Ο Boole πρότεινε ότι οι λογικές προτάσεις θα πρέπει να εκφράζονται μέσω των αλγεβρικών εξισώσεων. Ο καλός χειρισμός των συμβόλων στις αλγεβρικές εξισώσεις θα παρέχει μία ασφαλή μέθοδο του επαγωγικού συλλογισμού: δηλαδή η λογική ανάγεται σε ένα είδος άλγεβρας. Στο αρχικό στάδιο του έργου του, εφάρμοσε αλγεβρικές μεθόδους στα αντικείμενα που οι μαθηματικοί ονομάζουν "Τελεστές". Αυτοί επενεργούν σε κοινές αλγεβρικές παραστάσεις δημιουργώντας νέες. Ο

Boole ενδιαφερόταν για διαφορικούς τελεστές που ονομάζονται έτσι γιατί επικεντρώνονται στην πράξη παραγώγισης του απειροστικού λογισμού.

Όντας επηρεασμένος από την Αριστοτελική λογική θέλησε να κατατάξει τους έμβιους οργανισμούς σε κλάσεις, αναγνωρίζοντας πως αυτή η συλλογιστική μέθοδος μπορεί να παρασταθεί μέσο μιας άλγεβρας τέτοιων κλάσεων. Έτσι χρησιμοποίησε γράμματα για τον συμβολισμό των κλάσεων όπως ακριβώς είχαν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν για τον συμβολισμό αριθμών ή τελεστών. Ο Boole πίστευε πως η πράξη που εφαρμοζόταν στις κλάσεις είχε ομοιότητες με τον πολλαπλασιασμό που εφαρμόζεται στους αριθμούς. Δεν θα ήταν υπερβολικό να πούμε ότι στήριξε ολόκληρο το σύστημα της λογικής του στο ότι όταν το χ είναι κλάση η εξίσωση xx = x είναι πάντα αληθής.

Αυτό έδωσε το έναυσμα στον Boole να αναρωτηθεί. Στην κοινή Άλγεβρα, όταν το χ συμβολίζει έναν αριθμό, πότε αληθεύει η εξίσωση xx = x; Οδηγήθηκε στην εξής απάντηση: η εξίσωση είναι αληθής όταν το x είναι είτε 0 είτε 1 αλλά για κανένα άλλον αριθμό. Έτσι ο Boole συμπέρανε ότι η Άλγεβρα της λογικής ήταν ακριβώς θα γινόταν η κοινή άλγεβρα αν περιοριζόταν στις δύο τιμές 0 και 1. Όμως για να υπάρχει νόημα ήταν χρήσιμο να επανερμηνευθούν τα σύμβολα 0 και 1 ως κλάσεις. Το στοιχείο που προέκυψε από την συμπεριφορά των 0 και 1 στον πολλαπλασιασμό είναι σε συμβολική μορφή:

$$0x = 0, \quad 1x=x$$

Επειδή ο Boole συμβόλιζε με x – y την κλάση των πραγμάτων που ανήκουν στο x και όχι στο y, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως αν το x συμβολίζει την κλάση όλων των ανθρώπων και το y όλων των παιδιών τότε το x – y συμβολίζει την κλάση όλων των ενηλίκων. Άρα το 1-x θα ήταν κλάση των αντικειμένων που δεν ανήκουν στο x έτσι ώστε x + (1-x) = 1.

Με τις επινοήσεις του αυτές έλαβε την επιβεβαίωση ως επιστήμονας και κατάφερε ουσιαστικά να ανακαλύψει πως ένα σημαντικό παλαιότερο ορόσημο αποδεικνύεται πως είναι απλώς μια εφαρμογή των νέων ιδεών όπως η περίπτωση της αρχής της αντίφασης του Αριστοτέλη κατά την οποία ο φιλόσοφος ασχολείται με διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων που αποκαλούνται συλλογισμοί. Τα συμπεράσματα αυτά εξάγονται από ένα ζεύγος προτάσεων που αποκαλούνται προϋποθέσεις σε μία άλλη πρόταση που αποκαλείται συμπέρασμα.

Τύπος Πρότασης	Παράδειγμα
Όλα τα X είναι Y.	Όλα τα άλογα είναι ζώα.
Κανένα X δεν είναι Y.	Κανένα δέντρο δεν είναι ζώο.
Μερικά X είναι Y.	Κάποια άλογα είναι καθαρόαιμα.
Μερικά X δεν είναι Y.	Κάποια άλογα δεν είναι καθαρόαιμα.

Το παρακάτω είναι ένα παράδειγμα έγκυρου συλλογισμού:

$$\begin{array}{c}\text{Όλα τα } X \text{ είναι } Y \\ \text{Όλα τα } Y \text{ είναι } Z \\ \hline \text{Όλα τα } X \text{ είναι } Z\end{array}$$

Ωστόσο ο Boole αποκήρυξε αυτή την ιδέα αρκετά έντονα τονίζοντας πως μεγάλο μέρος αυτής της επιχειρηματολογίας αφορά αυτό που ο ίδιος αποκαλούσε δευτερεύοντες προτάσεις. Αυτού του είδους επιχειρηματολογία δεν περιγράφεται με τη συλλογιστική. Όπως συμβαίνει με κάθε έγκυρη συνεπαγωγή η αλήθεια των προτάσεων που ονομάζονται συμπεράσματα προκύπτει από την αλήθεια άλλων προτάσεων που ονομάζονται υποθέσεις. Ως ένα τελικό παράδειγμα των μεθόδων του Boole θα στραφούμε στην απόδειξη ύπαρξης του θεού του Samuel Clarke, η οποία χωρίς να είναι μακροσκελής και πολύπλοκη μας δίνει σαφή εικόνα για το σκοπό της. Ένα μικρό απόσπασμα είναι:

$1^{ον}$: Κάτι είναι.

$2^{ον}$: Αν κάτι είναι, τότε είτε κάτι πάντοτε ήταν είτε τα πράγματα που τώρα είναι προήλθαν από το τίποτα.

$3^{ον}$: Αν κάτι είναι τότε είτε υπάρχει ως ανάγκη της ίδιας της φύσης του είτε υπάρχει ως αποτέλεσμα της βούλησης κάποιου άλλου όντος.

$4^{ον}$: Αν υπάρχει ως ανάγκη της ίδιας της φύσης του, τότε κάτι ανέκαθεν ήταν.

$5^{ον}$: Αν υπάρχει εξαιτίας της βούλησης κάποιου άλλου όντος, τότε η υπόθεση ότι τα πράγματα που τώρα είναι προήλθαν από το τίποτα, είναι ψευδής.

Έστω:

X = Κάτι είναι.

Y = κάτι πάντοτε ήταν

Z = τα πράγματα που τώρα είναι προήλθαν από το τίποτα

P = υπάρχει ως ανάγκη της ίδιας της φύσης του

Q = υπάρχει εξαιτίας της βούλησης κάποιου άλλου όντος

Έτσι ο Boole εξήγαγε τις ακόλουθες εξισώσεις από τις υποθέσεις:

$1-X = 0$,

$X\{YZ+(1-Y)(1-Z)\} = 0$,

$X\{PQ+(1-P)(1-Q)\} = 0$,

$P(1-Y) = 0$,

$QZ = 0$.

Το σημαντικότερο επίτευγμα του George Boole ήταν να αποδείξει μία και καλή ότι η λογική επιχειρηματολογία θα μπορούσε να αναπτυχθεί ως κλάδος των μαθηματικών. Παρότι υπήρξαν κάποιες εξελίξεις στη λογική μετά το πρωτοποριακό έργο του Αριστοτέλη, ο Boole ουσιαστικά βρήκε το θέμα όπως το είχε αφήσει 2 χιλιετίες πριν. Έπειτα από τον Boole, η μαθηματική λογική βρίσκεται συνεχώς κάτω από αδιάκοπη ανάπτυξη. Τέλος θα μπορούσαμε να αναφέρουμε ότι η άλγεβρα του Boole ήταν ένα σύστημα κανόνων για τη διεξαγωγή υπολογισμών και έτσι όσο της επέτρεπαν τα όριά της παρείχε το λογικό λογισμό που αναζητούσε ο Leibniz.

Ο Frege και ο πρόγονος των γλωσσών προγραμματισμού

Έχοντας λοιπόν ως οδηγό την απόδειξη του George Boole, ότι η λογική επιχειρηματολογία μπορεί να αποτελέσει πλέον έναν καινούριο κλάδο των μαθηματικών, ένας νέος διανοητής της λογικής καταγόμενος από την ανατολική Γερμανία έρχεται μέσω των συλλογισμών του να διακρίνει τις λεπτές αποχρώσεις του έργου του Leibniz. Ο Friedrich Ludwig Gottlob Frege, Γερμανός μαθηματικός, λογικολόγος και φιλόσοφος, εργάστηκε στο πανεπιστήμιο της Ιένα. Θεωρείται ένας από τους ιδρυτές της σύγχρονης λογικής και συνέβαλε σε μεγάλο βαθμό στη θεμελίωση των μαθηματικών. Θεωρείται γενικά πατέρας της αναλυτικής φιλοσοφίας λόγω των κειμένων του για τη φιλοσοφία της γλώσσας και τα μαθηματικά.

Πιο συγκεκριμένα ο Leibniz παρόλο το πρωτοποριακό του έργο, παγιδεύτηκε σε μία γενίκευση της θεωρίας του που διακρίνεται στο εξής παράδειγμα. Όλοι οι φοιτητές που αποτυγχάνουν είναι είτε χαζοί είτε τεμπέληδες. Άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι και όλα τα X είναι Y. Αυτό όμως θα μας οδηγούσε στο να αντιμετωπίσουμε την κλάση των φοιτητών που είναι χαζοί ή τεμπέληδες ως μία κλάση που δεν θα επέτρεπε οποιοδήποτε συλλογισμό που θα επιχειρούσε να ξεχωρίσει όσους αποτυγχάνουν λόγω ηλιθιότητας από αυτούς που αποτυγχάνουν λόγω τεμπελιάς. Τη λύση στο ζήτημα έδωσε με το φιλοσοφικό του έργο ο Frege. Κατάφερε και δημιούργησε το πρώτο πλήρως ανεπτυγμένο σύστημα λογικής που εμπεριείχε όλο τον συμπερασματικό λογισμό των συνηθισμένων μαθηματικών και το πρωτοποριακό έργο του που χρησιμοποιεί τα εργαλεία της λογικής ανάλυσης για να μελετάει τη γλώσσα, λειτούργησε ως θεμέλιο για καινοτόμες εξελίξεις στην φιλοσοφία.

Επιχείρησε να δημιουργήσει ένα λογικό σύστημα που θα περιελάμβανε όλη τη συμπερασματική επιχειρηματολογία που χρησιμοποιείται στα πλαίσια της μαθηματικής πρακτικής. θεώρησε σημαντικό να εφεύρει δικά του ειδικά σύμβολα για τις λογικές σχέσεις για να αποφύγει τη σύγχυση και πίστευε πως οι ίδιες σχέσεις που συνδέουν προτάσεις μπορούν να βοηθήσουν στην ανάλυση της δομής των προτάσεων. Μέσω του παραδείγματός του

“όλα τα άλογα είναι θηλαστικά”

εισήγαγε για πρώτη φορά τη λογική σχέση

“εάν…, τότε…”.

Άρα “εάν το x είναι άλογο, τότε το x είναι θηλαστικό”.

Παρομοίως, “μερικά άλογα είναι καθαρόαιμα” εισήγαγε τη λογική σχέση

“…και…”

Το x είναι άλογο και το x είναι καθαρόαιμο. Ωστόσο παρατηρούμε πως το γράμμα x χρησιμοποιείται με διαφορετικό τρόπο στα δύο αυτά παραδείγματα. Στο πρώτο θέλουμε να πούμε ότι αυτό που βεβαιώνεται είναι αληθές, δηλαδή για κάθε x. Όμως το δεύτερο παράδειγμα αυτό που απαιτείται είναι απλώς η επιβεβαίωση για κάθε x. έτσι με τον σημερινό συμβολισμό έχουμε το “για κάθε” ως ∀ και το “υπάρχει” ως ∃. Έτσι οι δύο προτάσεις μπορούν να γραφούν ως

(∀x) (εάν το x είναι άλογο, τότε το x είναι θηλαστικό)

(∃x) (το x είναι άλογο και το x είναι καθαρόαιμο)

Το ∀ προέρχεται από την αγγλική λέξη all που σημαίνει όλα και ονομάζεται καθολικός ποσοδείκτης. Παρομοίως το σύμβολο ∃ προέρχεται από την λέξη exists και ονομάζεται υπαρξιακός ποσοδείκτης. Επιπλέον η σχέση “εάν…, τότε” συμβολίζεται με Ͻ και η σχέση “…και…” συμβολίζεται με Λ. Ένα τυπικό παράδειγμα αυτών των σχέσεων φανερώνεται στην παρακάτω εικόνα.

$$(\forall x)(\text{το } x \text{ είναι άλογο} \supset \text{το } x \text{ είναι θηλαστικό}),$$
$$(\exists x)(\text{το } x \text{ είναι άλογο} \wedge \text{το } x \text{ είναι καθαρόαιμο}).$$

Αυτό μπορεί να συντομευθεί ως εξής:

$$(\forall x)(\text{άλογο}(x) \supset \text{θηλαστικό}(x)),$$
$$(\exists x)(\text{άλογο}(x) \wedge \text{καθαρόαιμο}(x)).$$

και στα αγγλικά:

$$(\forall x)(\mathbf{horse}(x) \supset \mathbf{mammal}(x)),$$
$$(\exists x)(\mathbf{horse}(x) \wedge \mathbf{pure\text{-}bread}(x)).$$

Ή ακόμα πιο σύντομα:

$$(\forall x)(h(x) \supset m(x)),$$
$$(\exists x)(h(x) \wedge p(x)).$$

Τέλος ο Frege χρησιμοποίησε το σύμβολο ¬ για να εκφράσει τη σχέση "όχι" λάθος επίσης και ένα τελευταίο σύμβολο, το V που σημαίνει "…ή…". Οπότε περιληπτικά έχουμε:

$\neg$	όχι ...
$\vee$	... ή ...
$\wedge$	... και ...
$\supset$	αν ..., τότε ...
$\forall$	κάθε
$\exists$	για κάποιο

Από τα παραπάνω λοιπόν γίνεται αντιληπτό ότι ο Frege δεν ανέπτυσσε απλώς μια μαθηματική αντιμετώπιση της λογικής αλλά δημιουργούσε κυρίως μία νέα γλώσσα, με εφόδιο την ιδέα του Leibniz για μια οικουμενική γλώσσα που θα αντλούσε τη δύναμή της από την επιλογή συμβόλων. Έπειτα λοιπόν από την προσπάθεια δημιουργίας παγκόσμιας γλώσσας ο Frege αποπειράθηκε να δημιουργήσει το τυπικό συντακτικό. Έπρεπε με άλλα λόγια να βρει έναν τρόπο να αναπτύξει την λογική του χωρίς να καταφύγει στη χρήση της λογικής στη διάρκεια της διαδικασίας. Με την ανάπτυξη της "Begriffsschrift" έγινε δυνατή η παρουσίαση λογικών συμπερασμάτων ως καθαρά μηχανιστικών πράξεων, με αναφορές μόνο στον τρόπο με τον οποίο συντάσσονται τα σύμβολα. Αυτό ήταν το πρώτο παράδειγμα τυπικής γλώσσας κατασκευασμένης βάσει αυστηρού συντακτικού. Έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί τον πρόγονο όλων των γλωσσών προγραμματισμού που χρησιμοποιούνται ευρέως σήμερα.

Η λογική του Frege έχει επιβληθεί έναντι των υπολοίπων ως καθεστηκυία λογική που διδάσκεται σε φοιτητές μαθηματικών, επιστήμης των υπολογιστών, και φιλοσοφίας και έχει αποτελέσει τη βάση και αρχική έμπνευση για τον Alan Turing να συλλάβει την ιδέα ενός υπολογιστή γενικής χρήσης. Είναι άξιο αναφοράς πως για πρώτη φορά ένα ακριβές σύστημα μαθηματικής λογικής περιέκλειε όλη την επιχειρηματολογία που συνήθως ακολουθείται από τους μαθηματικούς και συνεπώς συντελείται για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών ένα άλμα συγκριτικά με τη λογική του Frege και εκείνη του Boole.

Ο Frege ήθελε να προσφέρει μια θεωρία για να δείξει ότι η αριθμητική συμπεριλαμβανομένων και των εξελίξεων που προέκυψαν από τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό μπορούν να θεωρηθούν ως κλάδοι της λογικής. Ήθελε να είναι σε θέση να ορίσει τους φυσικούς αριθμούς με λογικούς όρους για να μπορέσει να εξάγει συμπερασματικά τις ιδιότητές τους. Για παράδειγμα ο αριθμός 3 θα μπορούσε να εξηγηθεί ως μέρος της λογικής. Δηλαδή ο αριθμός 3 είναι κάτι που έχουνε κοινό όλα τα παρακάτω: η αγία τριάδα, το σύνολο των φύλλων σε ένα τριφύλλι, το σύνολο των γραμμάτων {α,β,γ}. η ιδέα λοιπόν του Frege να ταυτίσει τον αριθμό 3 με τη συλλογή όλων αυτών των συνόλων μπορεί να οριστεί ως η συλλογή όλων εκείνων των συνόλων που μπορούν να αντιστοιχιστούν ένα προς ένα με το δεδομένο σύνολο. Την άποψη αυτή συμμεριζόταν και ο Bertrand Russell ο οποίος με την επιστολή που απέστειλε στον ίδιο τον Frege τον έκανε να αντιληφθεί ότι η θεωρία του ερχόταν σε αντίφαση με τα ίδια τα λεγόμενά του. Στην επιστολή του ο Russell υποστήριξε πως τα σύνολα συνόλων θα μπορούσαν εύκολα να

οδηγήσουν σε αντιφάσεις. Έτσι ο Russell πρότεινε στον Frege το σύνολο ε το οποίο θα

περιελάμβανε όλα τα κανονικά σύνολα. Χωρίς να γνωρίζουμε πλήρως το σκοπό του Russell εντούτοις θα μπορούσαμε να πούμε ότι επηρέασε σε μεγάλο βαθμό τον Frege που συνειδητοποίησε πως μια μαθηματική απόδειξη που καταλήγει σε αντίφαση αποτελεί απόδειξη ότι μία από τις προϋποθέσεις πάνω στις οποίες βασίστηκε η επιχειρηματολογία της ήταν λανθασμένη.

Ανακεφαλαιώνοντας, θεωρώντας ότι η Begriffsschrift αποτέλεσε την υλοποίηση της καθολικής γλώσσας που ονειρευόταν ο Leibniz θα μπορούσαμε να αντιληφθούμε ότι ο Frege ολοκλήρωσε το έργο του προκατόχου του. Όμως δεν ανταποκρίνονταν σε δύο σημαντικά σημεία. Αρχικά ο Leibniz είχε φανταστεί μια γλώσσα που θα περιείχε αυτόματα όλες τις αλήθειες την επιστήμης και της φιλοσοφίας και επιπλέον η “φανταστική” του γλώσσα θα μπορούσε να αποτελέσει εργαλείο που θα επέτρεπε την συστηματική εξαγωγή συμπερασμάτων, γεγονός που ερχόταν σε αντίθεση με την πολύ περίπλοκη και δύσκολη στην εξαγωγή συμπερασμάτων γλώσσα του Frege.

Ωστόσο κατά τη διαδικασία απόδειξης αυτού του αρνητικού αποτελέσματος ο Turing ανακάλυψε πως ήταν, θεωρητικά, δυνατό να κατασκευαστεί μια μηχανή που θα μπορούσε να εκτελέσει κάθε δυνατό υπολογισμό.

Ο Georg Cantor και τα άπειρα σύνολα

Στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, μαθηματικά προβλήματα που προέκυψαν με φυσικό τρόπο από τις τρέχουσες μαθηματικές ανησυχίες έδειχναν να απαιτούν τη χρήση ενός ολοκληρωμένου απείρου για την ακριβή τους διατύπωση. Ο Georg Cantor αποδέχτηκε την πρόκληση να δημιουργήσει μια θεμελιώδη και συνεπή μαθηματική θεωρία του ολοκληρωμένου απείρου. Ο Georg Cantor ήταν διάσημος μαθηματικός, περισσότερο γνωστός για τη Θεωρία συνόλων, που ανέπτυξε, και τους υπεραριθμήσιμους αριθμούς. Πριν όμως από την δική του έρευνα, η έννοια του σύνολου χρησιμοποιήθηκε έμμεσα από τις αρχές των μαθηματικών, εμφανίζεται μάλιστα και στις ιδέες του Αριστοτέλη. Πριν τον

Κάντορ, υπήρχαν μόνο πεπερασμένα σύνολα και τα "άπειρα". Αποδεικνύοντας ότι υπάρχουν (απείρως) πολλά πιθανά μεγέθη για άπειρα σύνολα, ο Κάντορ γνωστοποίησε ότι η θεωρία συνόλων δεν ήταν ασήμαντη, και χρειαζόταν μελέτη. Η θεωρία συνόλων αποτελεί τη βάση για τα μοντέρνα μαθηματικά, με την έννοια ότι ερμηνεύει προτάσεις μαθηματικών αντικειμένων από όλους τους τομείς των παραδοσιακών μαθηματικών σε μία ενιαία θεωρία.

Σε ένα από τα τελευταία κομμάτια της εργασίας του, ο Κάντορ απέδειξε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι "πιο μεγάλο" από το σύνολο των φυσικών αριθμών. Έτσι δείχθηκε, για πρώτη φορά, ότι υπάρχουν άπειρα σύνολα διαφορετικών μεγεθών. Ήταν ο πρώτος που εκτίμησε τη σημασία της 1 προς 1 αντιστοιχίας στη θεωρία συνόλων. Χρησιμοποίησε μάλιστα την έννοια αυτή για να ορίσει πεπερασμένα σύνολα και άπειρα σύνολα, υποδιαιρώντας το τελευταίο σε μετρήσιμα σύνολα σύνολα και μη μετρήσιμα σύνολα. Ένα μετρήσιμο σύνολο είναι ένα σύνολο το οποίο είναι ή πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

Ο Κάντορ εισήγαγε θεμελιώδεις κατασκευές στη θεωρία συνόλων, όπως το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A, το οποίο είναι δυνατό υποσύνολο του A. Αργότερα απέδειξε ότι το μέγεθος ενός δυναμοσυνόλου A είναι αυστηρά μεγαλύτερο από το A, ειδικά όταν το A είναι ένα άπειρο σύνολο; αυτό το συμπέρασμα σύντομα έγινε γνωστό ως το Θεώρημα του Κάντορ. Ο Κάντορ ανέπτυξε μία ολόκληρη θεωρία και την αριθμητική των άπειρων συνόλων, που περιλαμβάνει τους πληθικούς αριθμούς.

Ο Κάντορ εγκαθίδρυσε κάποια αποτελέσματα χρησιμοποιώντας δύο κατασκευές. Η πρώτη κατασκευή δείχνει πώς γράφονται οι πραγματικοί αλγεβρικοί αριθμοί ως μία ακολουθία a1, a2, a3, ... Με άλλα λόγια, οι πραγματικοί αλγεβρικοί αριθμοί είναι μετρήσιμοι. Ο Κάντορ ξεκίνησε τη δεύτερη κατασκευή με μία σειρά πραγματικών αριθμών. Χρησιμοποιώντας αυτή την ακολουθία, κατασκεύασε έναν κιβωτισμό διανυσμάτων του οποίου η τομή περιλαμβάνει έναν πραγματικό αριθμό που δεν ανήκει στην ακολουθία. Από την κάθε σειρά των πραγματικών αριθμών μπορεί να κατασκευαστεί ένας πραγματικός που δεν ανήκει στην ακολουθία, οι πραγματικοί αριθμοί δεν μπορούν να γραφούν ως ακολουθία – και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι μετρήσιμοι.

Ο Cantor απέδειξε ότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των ακεραίων, και ότι το ανοικτό διάστημα (0,1)⊂R δεν είναι αριθμήσιμο. Η τελευταία απόδειξη έχει μείνει στην ιστορία των μαθηματικών ως η «διαγώνιος μέθοδος του Cantor». Ονομάζεται και επιχείρημα της Διαγωνοποίησης και δημοσιεύτηκε το 1891 από τον Cantor. Το διαγώνιο Επιχείρημα είναι μια απόδειξη για τη μη μετρησιμότητα των πραγματικών αριθμών. Εφάρμοσε την ίδια ιδέα για να αποδείξει το θεώρημα του Κάντορ: η πληθικότητα του δυναμοσυνόλου ενός συνόλου Α είναι αυστηρά μεγαλύτερη από την πληθικότητα του Α. Αυτό προσδιόρισε τον πλούτο της ιεραρχίας των άπειρων συνόλων, και τον πληθικό και διατακτικό αριθμητικό μέσο που ο Κάντορ είχε ορίσει.

Εν κατακλείδι ο Cantor επιχειρηματολόγησε σε μεγάλο βαθμό όπως και ο Leibniz αντιμετωπίζοντας το ίδιο δίλλημα: είτε δεν έχει νόημα να μιλάμε για τον αριθμό στοιχείων ενός απείρου συνόλου είτε κάποια άπειρα σύνολα θα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων με κάποιο από τα υποσύνολά τους. Ο Georg Cantor πέθανε αναπάντεχα από καρδιακή ανεπάρκεια το 1918 μεσούσις του Α παγκοσμίου πολέμου και μπορούμε να πούμε πως και η μάχη που μαίνονταν μέσα του δεν είχε κάποια αποφασιστικής σημασίας έκβαση ίσως όμως το πλέον εκπληκτικό παράπλευρο αποτέλεσμα αυτής της μάχης να ήταν το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποίησε ο Alan Turing για τον υπολογιστή γενικής χρήσης.

David Hilbert και τα θεμέλια του μέλλοντος

Αυτός που ασχολήθηκε ενδελεχώς με τα σύνολα και τα βασικά θεμέλια των μαθηματικών ήταν ο David Hilbert, Γερμανός Μαθηματικός που έδρασε στις αρχές στου 20ου αιώνα και αποτελεί εξέχουσα προσωπικότητα για τους Γερμανούς Μαθηματικούς μιας και θεωρείται απόγονος του Gauss, Riemann και Klein. Τον Αύγουστο του 1900 έφερε στην επιφάνεια μία νέα πρόκληση για τους μαθηματικούς του νέου αιώνα, θέτοντας στους σύνεδρους του Παρισίου μία σειρά από 23 προβλήματα που μέχρι τότε φαίνονταν ανεπίλυτα με τις διαθέσιμες μεθόδους. Ο Hilbert υποστήριξε πως κάθε καλά ορισμένο μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να επιδέχεται μια ακριβή λύση. Με αυτά του τα λόγια κάλεσε τους υπόλοιπους μαθηματικούς να επιδιώκουν πεισματικά την επίλυση των προβλημάτων. Ο κατάλογός του ξεκινούσε με την επαλήθευση ή μη της υπόθεσης του Συνεχούς του Cantor, μιας θεωρίας η οποία ισχυριζόταν ότι δεν υπάρχουν σύνολα με πληθικό αριθμό μεταξύ του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών και του συνόλου όλων των συνόλων φυσικών αριθμών. Το δεύτερο πρόβλημα σχετιζόταν με την συνέπεια των αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, να αποδειχθεί δηλαδή με κάποιον τρόπο, η συνέπεια των αξιωμάτων της αριθμητικής των πραγματικών αριθμών. Το σύνολο των προβλημάτων του Hilbert συνεπήρε γενιές μαθηματικών και το πόσο παραγωγικά υπήρξαν αντικατοπτρίζεται στο γεγονός ότι τα πρακτικά του συνεδρίου του Παρισιού δημοσιεύτηκαν σε έναν τόμο άνω των 600 σελίδων.

Οι ανησυχίες των μαθηματικών για το υπερπεπερασμένο του Cantor κορυφώθηκαν όταν ο Bertrand Russel δημοσιοποίησε την αντίφαση που είχε εντοπίσει σε αυτό που φαινόταν να είναι απλός συλλογισμός. Μόλις ο Frege έλαβε σε επιστολή το παράδοξο του Russel απλώς εγκατέλειψε το έργο της ζωής του.

Στη θεμελίωση των μαθηματικών, το παράδοξο του Ράσελ, έδειξε ότι η αφελής θεωρία συνόλων που δημιουργήθηκε από τον Georg Cantor οδηγεί σε μια αντίφαση. Σύμφωνα με την αφελή θεωρία συνόλων, κάθε προσδιορίσιμη συλλογή είναι ένα σύνολο. Έστω R το σύνολο όλων των συνόλων που δεν είναι μέλη του εαυτού τους. Αν R μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέλος του εαυτού του, θα ήταν αντίθετος με τον δικό της ορισμό της ως σύνολο που περιέχει όλα τα σύνολα που δεν είναι μέλη του εαυτού τους. Από την άλλη πλευρά, εάν ένα τέτοιο σύνολο δεν είναι μέλος του εαυτού του, θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί ως ένα μέλος της ίδιας από τον ίδιο ορισμό. Αυτή η αντίφαση είναι παράδοξο του Ράσελ.

Το παράδοξο του Ράσελ αποτέλεσε τη βάση την αιτιολόγησης, η οποία τον οδήγησε να διαγράψει οποιαδήποτε ελπίδα έτρεφε, για τη θεμελίωση των μαθηματικών σε όρους λογικής. Ο σκοπός της έρευνας ήταν η θεωρία των συνόλων. Και η σκέψη του Ράσελ ήταν ότι, κάθε είδος συνόλου θα πρέπει να ανήκει σε ένα ευρύτερο σύνολο, αλλά η αιτιολόγησή του οδήγησε σε ένα παράδοξο. Ανακάλυψε ότι υπήρχαν σύνολα που δεν ανήκουν σε κανένα άλλο σύνολο, αποδεικνύοντας ότι αυτή η λογική δεν ευσταθεί: το σύνολο όλων των συνόλων (τα οποία δεν περιέχουν τον εαυτό τους), θα πρέπει να περιέχει και να μην περιέχει τον εαυτό του, ταυτόχρονα.

Ο Ράσελ το εξήγησε αυτό με μία μικρή ιστορία: «Σε μια χώρα που όλοι οι άντρες είναι καθημερινά ξυρισμένοι, υπάρχει ένας μόνο κουρέας. Αυτός ξυρίζει όλους τους άντρες που δεν ξυρίζονται μόνοι τους. Τότε όμως ποιος ξυρίζει τον κουρέα;». Αναλύοντας το πρόβλημα με τη βοήθεια της Θεωρίας των Συνόλων, είναι σαφές ότι στη χώρα υπάρχουν το σύνολο εκείνων που ξυρίζονται μόνοι τους και το σύνολο εκείνων που ξυρίζονται στον κουρέα. Ο κουρέας ξυρίζεται μόνος του; Αδύνατον, αφού ξυρίζει όλους τους άντρες που δεν ξυρίζονται μόνοι τους. Τον ξυρίζει κάποιος άλλος; Όχι, γιατί ο κουρέας ξυρίζει όλους όσοι δεν ξυρίζονται μόνοι τους. Βρισκόμαστε εδώ μπροστά σ’ ένα παράδοξο. Σύμφωνα με τον Ράσελ, για να το ξεπεράσουμε πρέπει να διορθώσουμε τη δική μας λανθασμένη αντίληψη ότι για κάθε ιδιότητα πρέπει οπωσδήποτε να υπάρχει ένα σύνολο. Σ’ αυτή την περίπτωση δε δημιουργείται κανένα ομοιογενές σύνολο.

Ο Russel ήταν από εκείνους που εργάστηκε επιμελώς πάνω σε ένα σύστημα συμβολικής λογικής στα πλαίσια του οποίου το σχέδιο του Frege για την αναγωγή της αριθμητικής σε καθαρή λογική θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί χωρίς να προσκρούει σε παράδοξα. Καίρια αποδείχθηκε η συμβολή του Giuseppe Peano με την εισαγωγή συμβολισμού που ήταν πολύ πιο κατανοητός από εκείνον του Frege. Η προσπάθεια του Russel να επαναφέρει στην επιφάνεια το πρόγραμμα του Frege έλαβε την μορφή της μνημειώδους τρίτομης εργασίας Principia Mathematica, την οποία συνέγραψαν αμφότεροι Russel και Whitehead. Αν και η εργασία άρχισε με την λογική της Begriffsschrift και τελείωνε με άμεσα βήματα στα μαθηματικά, καταφέρνοντας παράλληλα να αποφευχθούν τα παράδοξα εντούτοις η Principia πλήττονταν από μια ελλοχεύουσα σύγχυση. Ενώ ο Frege είχε αντιληφθεί ότι εξέταζε δύο επίπεδα γλώσσας το έργο των Russel-Whitehead ήταν ασαφές σε αυτόν τον τομέα και έμπλεκε τα δύο επίπεδα, συνεπώς το τόσο κρίσιμο για τον Hilbert πρόβλημα της συνέπειας της ολόκληρης δομής δεν μπορούσε καν να προκύψει στο πλαίσιο του Russel. Παρόλα αυτά η εργασία αποτέλεσε ορόσημο που καταδείκνυε μια για πάντα πως η τυποποίηση των μαθηματικών είναι πλήρως εφικτή.

Ενώ λοιπόν ο Russel εργάστηκε με σκοπό να βρει μια λογική βάση για το πλήρες εύρος των μαθηματικών αποφεύγοντας τα παράδοξα, ο Brouwer είχε πειστεί ότι μεγάλο μέρος αυτής της δουλειάς ήταν εσφαλμένο και έπρεπε να απορριφθεί. Για εκείνον τα πραγματικά μαθηματικά είναι στη διαίσθηση του μαθηματικού και όχι στην έκφρασή τους. Όχι απλώς τα μαθηματικά δεν είναι λογική, αλλά η ίδια η λογική προέρχεται από τα μαθηματικά. Με αποτέλεσμα μερικές προτάσεις να μην μπορούν να θεωρηθούν ούτε ότι είναι αληθής ούτε ότι είναι ψευδής. Αυτές είναι προτάσεις για τις οποίες δεν είναι γνωστή καμία μέθοδος με την βοήθεια της οποίας θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε το ένα ή το άλλο. Η αρχική απόδειξη του Hilbert για την αρχική απόδειξη του Gordan χρησιμοποίησε τον νόμο του αποκλειόμενου τρίτου δείχνοντας ότι η άρνηση της εικασίας θα οδηγούσε σε αντίφαση. Γεγονός που για τον Brouwer ήταν απαράδεκτη.

Ο Hermann Weyl ο καλύτερος σπουδαστής του Hilbert και ένας από τους καλύτερους μαθηματικούς του αιώνα, ενώ επιλέχθηκε τελικά να διαδεχτεί τον Hilbert στην θέση που κατείχε προς μεγάλη απογοήτευση του δεύτερου ο weyl πείστηκε ότι τα θεμέλια για την εξέταση των διεργασιών ορίων που είχαν οριστεί από τον Cantor και τον Dedekind ήταν επισφαλή. Του ήταν αδύνατον να αποδεχτεί το σύστημα πραγματικών αριθμών που αποτελούσε τη βάση για τα πάντα. Weyl και Brouwer επιδίωξαν να τεκμηριώσουν μια βάση για τα μαθηματικά με το να ξεφορτώνονται οτιδήποτε τους ενοχλεί με βάση τον Kronecker, γεγονός που έδειξε να ενοχλεί τον Hilbert ο οποίος φοβότανε πως το έργο των παραπάνω θα οδηγούσε σε προσπάθεια κατάργησης των άρρητων αριθμών.

Το δεύτερο κατά σειρά πρόβλημα στην ομιλία του Hilbert το 1900 ήταν το πρόβλημα της αριθμητικής συνέπειας. Ενώ λοιπόν άρχισε με το λογικό σύστημα του Principia Mathematika προσπαθώντας να ορίσει τους αριθμούς με καθαρά λογικό τρόπο, σύντομα αναγκάστηκε να εγκαταλείψει τον στόχο αυτό ως άπιαστο συνεχίζοντας να βλέπει την συμβολική λογική ως ζωτικής σημασίας. Στόχος του ήτανε να αποδειχθεί πως στη γλώσσα είναι αδύνατο να παραχθεί κάποιο ζεύγος τύπων που ρητά αντικρούει ο ένας τον άλλον, τύποι όπως $1 = 0$ ή $0 \neq 0$ είναι αδύνατον να παραχθούν. Προσπάθησε να αντικρούσει τις κριτικές των Poincare και Brouwer μέσω μιας τολμηρής ιδέας που αφορούσε ένα νέο είδος μαθηματικών που ονόμασε Μεταμαθηματικά ή θεωρία αποδείξεων. Ενώ λοιπόν μέσα στο τυπικό σύστημα επιτρεπόταν πλήρης και απεριόριστη χρήση μαθηματικών μεθόδων κάθε είδους, η μεταμαθηματικές μέθοδοι περιορίζονταν σε μεθόδους αναμφισβήτητες όπως αποκαλούσε ο Hilbert “Finitary”.

Ανάμεσα στους μαθηματικούς θησαυρούς που οι μέθοδοί του στόχευαν να διασώσουν, ο Hilbert συμπεριέλαβε τους υπερπεπερασμένους αριθμούς του Cantor απορρίπτοντας τις κριτικές των Brouwer και Weyl, θεωρώντας πως κανείς δεν ήταν ικανός να αμφισβητήσει τις προηγούμενες θεωρίες πάνω στις οποίες δομήθηκαν οι νεότερες. Η διαμάχη του Hilbert από τη μία και των Brouwer και Weyl από την άλλη έχει τις ρίζες της σε βασικά φιλοσοφικά ερωτήματα σχετικά με τη φύση της γνώσης. Το κύριο πρόβλημα που αντιμετώπιζε ο Ιντουισιονισμός του Brouwer ήταν η έμπρακτη ανακατασκευή των μαθηματικών που απαιτείτο για να πείσει τους εν ενεργεία μαθηματικούς να συνεχίσουν χωρίς το κλασσικό συνεχές των αριθμών και χωρίς τον νόμο του αποκλειόμενου τρίτου.

Ακόμα και σήμερα ο Ιντουισιονισμός εξακολουθεί να επιβιώνει ως μελέτη τυπικών λογικών συστημάτων σχεδιασμένων για να ενσωματώσουν κάποια στοιχεία από τις ιδέες του. Μερικά από αυτά τα συστήματα μάλιστα έχουν αποτελέσει τη βάση για τα προγράμματα υπολογιστών που πραγματοποιούν τυπικά συμπεράσματα. Το κύριο πρόβλημα που τέθηκε από το πρόγραμμα του Hilbert ήταν η συνέπεια της αριθμητικής. Το 1928 μαζί με τον Ackermann δημοσίευσαν ένα μικρό εγχειρίδιο μέσα στο οποίο τέθηκαν δύο προβλήματα για τη βασική λογική της Begriffsschrift του Frege που πλέον αποκαλείται πρωτοβάθμια λογική. Ένα από αυτά τα προβλήματα ήταν να αποδειχθεί πως η πρωτοβάθμια λογική είναι πλήρης με την έννοια ότι έναν τύπο μπορούμε να τον συμπεράνουμε εντός του συστήματος χρησιμοποιώντας τους κανόνες που προτείνονταν στο εγχειρίδιο. Το δεύτερο, που έγινε γνωστό ως Entscheidungsproblem ήταν να βρεθεί μια μέθοδος που θα αποφάσιζε εάν ο τύπος αυτός είναι έγκυρος ή όχι, σε πεπερασμένο αριθμό καλά ορισμένων μηχανιστικών βημάτων. Ο Hilbert έθεσε ένα πρόβλημα σχετικά με ένα τυπικό σύστημα βασισμένο στην εφαρμογή των κανόνων πρωτοβάθμιας λογικής σε ένα αξιωματικό σύστημα για τους φυσικούς αριθμούς γνωστό ως αριθμητική Peano ή PA. Ο Hilbert ζήτησε μια απόδειξη ότι η Pa είναι πλήρης, εννοώντας πως για οποιαδήποτε πρόταση που μπορεί να εκφραστεί στην PA, είτε μπορεί να αποδειχθεί στην PA ότι είναι αληθής, είτε ψευδής. Η λύση του προβλήματος ήρθε δύο χρόνια αργότερα από έναν νεαρό λογικό ονόματι Kurt Godel έχοντας μάλιστα συντριπτικές επιπτώσεις στο πρόγραμμα του Hilbert.

Θεώρημα της μη πληρότητας και Godel

Ο Kurt Friedrich Gödel ήταν Αυστρο-αμερικάνος επιστήμονας της λογικής, μαθηματικός και φιλόσοφος. Ένας από τους πιο σημαντικούς επιστήμονες της λογικής όλων των εποχών, ο Gödel είχε τεράστια επιρροή στην επιστημονική και φιλοσοφική σκέψη του 20ου αιώνα, σε μια εποχή όταν πολλοί, όπως ο Bertrand Russel, ο Whitehead, και ο David Hilbert, πρωτοπορούσαν στη χρήση της λογικής και της θεωρίας συνόλων για την κατανόηση των θεμελίων των μαθηματικών.

Ο Gödel είναι περισσότερο γνωστός για τα δυο του θεωρήματα μη-πληρότητας, δημοσιευμένα το 1931 όταν ήταν 25 χρονών, ένα χρόνο μετά το τέλος του διδακτορικού του στο πανεπιστήμιο της Βιέννης. Το πιο διάσημο θεώρημα μη-πληρότητας διατυπώνει ότι για κάθε αυτο-συνεπές αναδρομικό αξιωματικό σύστημα αρκετά ισχυρό ώστε να περιγράφει την αριθμητική των φυσικών αριθμών (αριθμητική Peano), υπάρχουν αληθείς προτάσεις για τους φυσικούς που δεν μπορούν να αποδειχθούν από τα αξιώματα. Για να αποδείξει το θεώρημα αυτό, ο Gödel ανέπτυξε μια τεχνική γνωστή ως Γκεντελοποίηση, η οποία κωδικοποιεί τυπικές εκφράσεις ως φυσικούς αριθμούς.

Έδειξε ακόμα ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν μπορεί να διαψευσθεί από τα δεκτά αξιώματα της θεωρίας συνόλων, αν τα αξιώματα αυτά είναι συνεπή. Έκανε σημαντικές συνεισφορές στην θεωρία αποδείξεων με το να ξεκαθαρίσει τις σχέσεις μεταξύ κλασσικής λογικής, διαισθητικής λογικής και τροπικής λογικής.

Μέσα στην τρικυμιώδη ατμόσφαιρα του Α παγκοσμίου πολέμου στην Ευρώπη και της δουλειάς του Whitehead και Russel στην δημιουργία τεχνητής γλώσσας για τα μαθηματικά στην οποία οι αποδείξεις μπορούσαν να παρασταθούν με συμβολικές τυπικές πράξεις, άνθησε ο περίφημος κύκλος της Βιέννης. Στο 1924 μια ομάδα φιλοσόφων και επιστημόνων που συνέχιζαν την εμπειρική-θετικιστική παράδοση απεχθάνονταν την παραδοσιακή μεταφυσική, προχώρησαν στην δημιουργία αυτής της ομάδας με σκοπό τη δημιουργία κύκλου φιλοσοφίας πάνω στη μελέτη συμβολικών συστημάτων που θα περιέκλειαν όχι μόνο τα μαθηματικά αλλά και τις εμπειρικές επιστήμες. Όταν ο Gödel άρχισε να πηγαίνει στις συναντήσεις του Κύκλου συνειδητοποίησε πως δεν του άρεσαν πολλά από αυτά που άκουγε. Παρόλα αυτά φαίνεται πως η πορεία της έρευνάς του επηρεάστηκε από τον Russel και τον Wittgenstein. Η πεποίθηση του Hilbert πως χρειάζεται απόδειξη ότι οι κανόνες είναι πλήρης υιοθετώντας τους βασικούς κανόνες της λογικής επαγωγής, συνεπήρε τον Gödel ο οποίος επέλεξε το πρόβλημα αυτό ως θέμα διδακτορικής διατριβής. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούσε ήταν αρκετά γνωστές στους λογικούς της εποχής όμως τα χέρια του φαίνεται πως ήταν δεμένα λόγο της επιρροής των Brouwer και Weyl.

Η λογική επαγωγή προχωρά από κάποιες προϋποθέσεις προς ένα συμπέρασμα. Όταν χρησιμοποιείται η συμβολική λογική κάθε προϋπόθεση καθώς και το συμπέρασμα αναπαρίστανται από έναν λογικό τύπο οποίος δεν είναι παρά μία λογική σειρά από σύμβολα. Ένα δείγμα λογικής επαγωγής στο οποίο οι πρώτες δύο γραμμές δείχνουν τις προϋποθέσεις και η τρίτη το συμπέρασμα.

Όποιος είναι ερωτευμένος (Love) είναι ευτυχισμένος (Happy).
Ο Μιχάλης (M) είναι ερωτευμένος με τη Βάλια (B).

Ο Μιχάλης είναι ευτυχισμένος.

$$\begin{array}{c} (\forall \mathbf{x})((\exists \mathbf{y})\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \supset \mathbf{H}(\mathbf{x})) \qquad (*) \\ \mathbf{L}(\mathbf{M}, \mathbf{B}) \\ \hline \mathbf{H}(\mathbf{M}) \end{array}$$

Όπου:

L = η σχέση είναι ερωτευμένος

H = η ιδιότητα είναι ευτυχισμένος

M = ο Μιχάλης

B = η Βάλια

Αυτό που εννοούμε λέγοντας πως αυτή η επαγωγή είναι έγκυρη είναι ότι όποιο σύνολο ατόμων και να διαλέξουμε, όποια κι αν είναι η μεταξύ τους σχέση που συμβολίζεται με το L, όποια ιδιότητά τους κι αν συμβολίζεται με το H και όποια άτομα κι αν ονομάσουμε M και B, αν το κάνουμε με τέτοιον τρόπο ώστε οι δύο προϋποθέσεις να είναι αληθής τότε και το συμπέρασμα θα είναι επίσης αληθές.

Μετά την κριτική των Brouwer και Weyl για τον μη περατοκρατικό συλλογισμό και τη δήλωση του Hilbert πως τα μεταμαθηματικά του επέτρεπαν μόνο περατοκρατικούς συλλογισμούς, έγινε αποδεκτό, πως η έξωθεν εξέταση των τυπικών λογικών συστημάτων θα έπρεπε να περιοριστεί αποκλειστικά σε περατοκρατικές μεθόδους. Ωστόσο το θεώρημα πληρότητας του Godel δεν μπορεί να αποδειχθεί χωρίς τη χρήση μη περατοκρατικών μεθόδων. Ο Godel εξήγησε πως ακόμα κι αν δεν είχε ποτέ αμφισβητηθεί κατά πόσον τα αφελή μαθηματικά είναι ορθά ως προς το περιεχόμενό του, το εν λόγω πρόβλημα θα είχε νόημα αν είχε τεθεί εντός αυτών των αφελών μαθηματικών. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο ένας περιορισμός των μέσων επαλήθευσης δεν φαίνεται να είναι σε αυτήν την περίπτωση πιο επιτακτικός από ότι για κάθε άλλο μαθηματικό πρόβλημα.

Αργότερα ο Godel στράφηκε προς το ζήτημα της απόδειξης της συνέπειας της αριθμητικής των πραγματικών αριθμών, σε μια περίοδο όπου το πρόγραμμα του Hilbert φαινόταν να οδεύει προς επιτυχία. Έχοντας μιλήσει για την αριθμητική Peano οι μαθητές του Hilbert φαίνονταν να προχωρούν προς μία περατοκρατική απόδειξη συνέπειας του PA. Ακόμη και ο ίδιος ο Godel πίστευε πως η πρόοδος της PA παρεμποδίζονταν μόνο από τεχνικές δυσκολίες οι οποίες θα ξεπερνιόντουσαν με την πάροδο του χρόνου και ανέλαβε να αποδείξει ισχυρότερα συστήματα με αναγωγή στη συνέπεια του PA. Ήλπιζε να πετύχει μια περατοκρατική αναγωγή της συνέπειας ισχυρών συστημάτων που επαρκούν για την αριθμητική των πραγματικών αριθμών και ακόμη περισσότερο στην συνέπεια του PA. Τα πράγματα όμως δεν έμελλε να εξελιχθούν θετικά. Ο Godel όχι μόνο απέτυχε στην προσπάθειά του, αλλά απέδειξε πως δεν θα μπορούσε να είχε πετύχει και τελικά αντί να καταφέρει να προστατεύσει τα μαθηματικά από την κριτική των Brouwer και Weyl στην ουσία έθαψε το πρόγραμμα του Hilbert.

Καθώς ο Godel ξεκίνησε να ασχολείται με αυτά τα θέματα προβληματίστηκε και πάλι με τη διαφορά του να εξετάζεις ένα τυπικό λογικό σύστημα απέξω σε αντίθεση με το να το βλέπεις από μέσα, ολόκληρη η ύλη των κοινών μαθηματικών μπορεί να αναπτυχθεί στο εσωτερικό ενός τέτοιου συστήματος. Ο Hilbert στα μεταμαθηματικά του, πρότεινε την χρήση μαθηματικών μεθόδων για την μελέτη τέτοιων συστημάτων έξωθεν. Βλέποντας λοιπόν απέξω αυτά τα συστήματα περιλαμβάνουν σχέσεις ανάμεσα σε συμβολοσειρές. Εκ των έσω τα συστήματα αυτά μπορούν να εκφράσουν προτάσεις για διάφορα αντικείμενα των μαθηματικών και χρησιμοποιώντας τέτοιους κώδικες, αυτό που υπάρχει στο εσωτερικό μπορεί να μεταφερθεί και στο εσωτερικό του.

Για να φανερώσουμε την χρήση τέτοιων κωδικών ας κοιτάξουμε πως συμβολίστηκε η προϋπόθεση “όποιος είναι ερωτευμένος είναι ευτυχισμένος”

$$(\forall \mathbf{x})((\exists \mathbf{y})\mathbf{L}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \supset \mathbf{H}(\mathbf{x}))$$

$$, \quad \mathbf{L} \quad \mathbf{H} \quad \supset \quad \forall \quad \exists \quad \mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad (\quad)$$

$$\begin{array}{cccccccccc} , & \mathbf{L} & \mathbf{H} & \supset & \forall & \exists & \mathbf{x} & \mathbf{y} & (&) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

$$8469885791860079328699$$

Ο Godel δεν δυσκολεύτηκε να δει πως οι κώδικες μπορούσαν όντως να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη των μεταμαθηματικών των τυπικών λογικών συστημάτων, αλλά στην διαδικασία άρχισε να σκέφτεται πράγματα που ήτανε ενάντια στις διακηρύξεις του Κύκλου της Βιέννης. Ανακάλυψε ότι υπάρχουν προτάσεις που ενώ όταν εξετάζονται εκτός συστημάτων φαίνονται αληθείς εντούτις δεν μπορούν να αποδειχτούν στο εσωτερικό της. Γεγονός που ερχόταν σε αντίθεση με τους οπαδούς του Κύκλου της Βιέννης που θεωρούσαν οποιαδήποτε έννοια μαθηματικής αλήθειας πέρα από την αποδειξημότητα ως χίμαιρα.

Ο Godel κατέληξε στο συμπέρασμα ότι όχι μόνο υπάρχει νόημα μαθηματικής αλήθειας αλλά και ότι αυτό εκτείνεται πολύ πέρα από οτιδήποτε μπορεί να αποδειχθεί στα πλαίσια δεδομένου τυπικού συστήματος. Το αποφασιστικό βήμα ήταν η απόδειξη ότι η ιδιότητα ενός φυσικού αριθμού αποτελεί τον κώδικα μιας αποδείξιμης στο Principia Mathematica, πρότασης μπορεί και η ίδια να εκφραστεί μέσα στο PM. Η Α πρόταση εκφράζει ότι μια σειρά συμβόλων Β παριστά μια πρόταση που δεν μπορεί να αποδειχθεί στο PM. Κανονικά η Α και η Β θα ήταν διαφορετικές προτάσεις, ο Godel αναρωτήθηκε όμως αν θα μπορούσαν να είναι η ίδια και πράγματι τα κατάφερε χρησιμοποιώντας την διαγωνιοποίηση του Cantor.

- Η U λέει ότι κάποια πρόταση δεν είναι αποδείξιμη στο PM
- Η πρόταση αυτή δεν είναι παρά η ίδια η U

- Επομένως η U λέει “Η U δεν είναι αποδείξιμη στο PM”

Στον Κύκλο της Βιέννης ήταν αποδεκτό ότι η μόνη έννοια αλήθειας που έχει νόημα είναι αυτή της αποδειξιμότητας σύμφωνα με τους κανόνες του συστήματος. Η U είναι αληθής αλλά όχι αποδείξιμη στο PM.

Η U είναι αληθής. Ας υποθέσουμε πως είναι ψευδής. Τότε αυτό που λέει δεν ισχύει. Έτσι δεν μπορεί να είναι μη αποδείξιμη και θα πρέπει να μπορεί να αποδειχθεί και επομένως να είναι αληθής. Υποθέσαμε όμως ότι είναι ψευδής. Άρα θα πρέπει να είναι αληθής.

Τώρα ας δούμε τον ακόλουθο γρίφο: Ξέρουμε ότι η U είναι αληθής παρότι μη αποδείξιμη στο PM. Ο Godel συνειδητοποίησε ότι αυτό είναι δυνατό αλλά υπάρχει μια παγίδα:

Αν το PM είναι συνεπές τότε ισχύει το U

Επομένως μόνο η παραδοχή ότι το PM είναι συνεχές παρεμποδίζει την απόδειξη της U εντός του PM. Όμως η συνέπεια του PM δεν μπορεί να αποδειχθεί στο PM. Ωστόσο το πρόγραμμα του Hilbert απέβλεπε στο να αποδείξει ότι συστήματα όπως το PM είναι συνεπή μόνο με τη χρήση περατοκρατικών μεθόδων που θεωρούνταν ως περιορισμένο υποσύνολο στο PM. Όμως ο Godel είχε αποδείξει ότι ολόκληρη η δύναμη του PM δεν είναι επαρκής για να αποδειχθεί η δική του συνέπεια. Έτσι το πρόγραμμα του Hilbert όσον αφορά την αρχική του μορφή είχε πεθάνει.

Η ιδέα όμως του Godel για τη δημιουργία μιας πραγματικής μηχανής γενικής χρήσης δεν πέθανε ποτέ, παρόλο που το εγχείρημά του χρειάστηκε πολλές δεκαετίες για να επιτευχθεί. Στην προσπάθειά του να δείξει πως η ιδιότητα ενός αριθμού να είναι ο κώδικας μιας απόδειξης στο PM ο Godel είχε να αντιμετωπίσει προβλήματα που απασχόλησαν και άλλους σχεδιαστές γλωσσών προγραμματισμού. Οι σχεδιαστές υψηλού επιπέδου γλωσσών προγραμματισμού, οφείλουν να παρέχουν στους προγραμματιστές παραστάσεις και εντολές που θα ήθελαν να δουλέψουν. Για να εκτελεστούν τα προγράμματα που περιέχουν αυτές τις παραστάσεις και εντολές από έναν υπολογιστή πρέπει να μεταφραστούν σε γλώσσα μηχανής. Αυτό γίνεται από τα ειδικά προγράμματα που λέγονται διερμηνείς (interpreters) ή μεταγλωττιστές (compilers).

Με αυτό τον τρόπο έλυσε το πρόβλημα της διάσπασης των πράξεων πάνω στους κώδικες των συμβολοσειρών που αντιστοιχούν στους κανόνες επαγωγής του PM. Η ειδική γλώσσα σχεδιάστηκε με τρόπο ώστε οι πράξεις που εισάγονται να μπορούν να εκφραστούν κατάλληλα μέσα στο PM, κάτι που κανείς πριν τον Godel δεν είχε δείξει. Σκοπός του ήταν να δείξει ότι για να διατυπωθεί αυτή η πρόταση δεν απαιτούνται εξωτερικές μαθηματικές έννοιες, για το σκοπό αυτό χρησιμοποίησε το γνωστό ως κινέζικο θεώρημα υπολοίπων, έτσι ώστε να καταδείξει πως όλες οι πράξεις που μπορούσαν να εκφραστούν στην ειδική γλώσσα μπορούσαν να διατυπωθούν στην βασική γλώσσα των φυσικών αριθμών. Η βόμβα του Godel ξεκίνησε από μια αβέβαιη ομιλία του σχετικά με το όφελος που θα προέκυπτε από μια απόδειξη συνέπειας της PM. Βεβαίωσε πως ακόμα και αν είναι γνωστό ότι ένα τέτοιο σύστημα είναι συνεπές εξακολουθεί να υπάρχει η δυνατότητα πως κάποιος θα μπορούσε να αποδείξει πως μέσα σε αυτό το σύστημα κάποια πρόταση είναι αναληθής. Έπειτα ο Godel βεβαίωσε πως αν θεωρήσουμε την συνέπεια συστημάτων όπως το PM ως δεδομένη θα μπορούσε να δώσει κανείς παραδείγματα προτάσεων μιας απλής αριθμητικής που είναι αληθής αλλά μη αποδείξιμες σε ένα τέτοιο σύστημα. Επανήλθαν τα ενδιαφέροντά του στην λογική όταν έπειτα από δέκα χρόνια προσπάθησε να σχεδιάσει το (hardware) γενικής χρήσης ψηφιακό υπολογιστή.

Ο Hilbert παρόλες τις συνεχιζόμενες προσπάθειες δεν κατάφερε να αποφασίσει αν η υπόθεση του συνεχούς είναι αληθής ή ψευδής. Ο Godel όμως έφτασε στο συμπέρασμα πως με τα τότε διαθέσιμα συστήματα η υπόθεση του συνεχούς ήταν μη αποκρίσιμη. Κατάφερε να δικαιολογήσει την πεποίθησή του μόνο εν μέρει, όταν βρήκε τον τρόπο να αποδείξει πως σε αυτά τα συστήματα είναι αδύνατον να αποδειχθεί ψευδής η υπόθεση του συνεχούς. Ο Godel έθεσε το ερώτημα κατά πόσο ο ανθρώπινος νους ισοδυναμεί με έναν υπολογιστή και αν μια πεπερασμένη μηχανική συσκευή μπορεί να μιμηθεί την πλήρη δύναμη του ανθρώπινου μυαλού, τότε το ίδιο το θεώρημα μη πληρότητά του μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δειχθεί ότι μια πρόταση παρότι ορθή, δεν μπορεί ποτέ να αποδειχθεί από ανθρώπους. Ο Godel επιχειρηματολόγησε ότι ο ανθρώπινος νους δεν μπορεί να αναχθεί σε έναν μηχανισμό παρόλο που πίστευε ότι ήταν προφανές πως ο φυσικός εγκέφαλος μπορεί να αναχθεί σε μηχανισμό αν και θα έπρεπε να συμπεράνουμε πως ο ανθρώπινος νους ξεπερνά την φυσική πραγματικότητα το οποίο θα ήταν πάλι ασύμβατο με τον υλισμό.

Alan Turing ο πατέρας του σύγχρονου υπολογιστή

Αρκετά νωρίς, το 1834, ο Charles babbage είχε συλλάβει την ιδέα μιας αυτόματης υπολογιστικής μηχανής αλλά δίχως να πραγματοποιήσει ποτέ την κατασκευή της. Σκόπευε να κατασκευάσει την μηχανή του αποκλειστικά από μηχανικά στοιχεία όπως γρανάζια και δεδομένης της πολυπλοκότητας της συσκευής απέτυχε. Έπειτα από σχεδόν έναν αιώνα ο Alan Turing διατύπωσε την θεμελιώδη θεώρηση στην προσπάθειά του να λύσει ένα πρόβλημα λογικής του David Hilbert.

Ο Alan Turing, Άγγλος μαθηματικός, καθηγητής της λογικής, κρυπτογράφος και θεωρητικός βιολόγος. Θεωρείται «πατέρας της επιστήμης υπολογιστών», χάρη στην πολύ μεγάλη συνεισφορά του στο γνωστικό πεδίο της θεωρίας υπολογισμού κατά τη δεκαετία του 1930, αλλά και της τεχνητής νοημοσύνης, χάρη στη λεγόμενη δοκιμή Τιούρινγκ την οποία πρότεινε το 1950: έναν τρόπο να διαπιστωθεί πειραματικά αν μία μηχανή έχει αυθεντικές γνωστικές ικανότητες και μπορεί να σκεφτεί.

Το έργο του από τη δεκαετία του '30 προσέδωσε στην ως τότε άτυπη έννοια του αλγορίθμου μία επίσημη, αυστηρή μαθηματική διατύπωση μέσω της λεγόμενης Μηχανής Τιούρινγκ. Ακόμα, ο Τιούρινγκ διατύπωσε από κοινού με τον Αλόνζο Τσερτς την περίφημη εικασία του, ευρέως αποδεκτή, σύμφωνα με την οποία οποιοδήποτε μαθηματικό μοντέλο υπολογισμού είναι είτε ισοδύναμο είτε υποδεέστερο της Καθολικής Μηχανής Τιούρινγκ, επομένως αυτή περιγράφει τον ευρύτερο δυνατό υπολογιστή γενικού σκοπού: είναι θεωρητικά ικανή να υπολογίσει ό,τι είναι δυνατό να υπολογιστεί αλγοριθμικά.

Μετά από την εργασία του Godel ήταν δύσκολο να πιστέψει κανείς πως θα υπάρξει αλγόριθμος σαν αυτόν που ήθελε ο Hilbert. Έτσι ο Turing άρχισε να σκέφτεται πως θα ήταν δυνατό να το επιτύχει. Γνώριζε ότι ένας αλγόριθμος συνήθως ορίζεται με μια λίστα κανόνων που ένα άτομο μπορεί να ακολουθήσει με έναν επακριβή μηχανιστικό τρόπο. Έτσι κατάφερε να δείξει με μια αλληλουχία διαδοχικών αφαιρέσεων ότι ένα τέτοιο άτομο θα μπορούσε να περιοριστεί σε μερικές απλές ενέργειες χωρίς να αλλάζει το τελικό αποτέλεσμα του υπολογισμού. Κατόπιν αποδεικνύοντας ότι καμία μηχανή εκτελώντας μόνο αυτές τις ενέργειες δεν θα μπορούσε να καθορίσει εάν ένα δεδομένο προτεινόμενο συμπέρασμα προκύπτει από δεδομένες προϋποθέσεις με τη χρήση των κανόνων του Frege. Ως παράπλευρο αποτέλεσμα βρήκε ένα μαθηματικό μοντέλο για μια υπολογιστική μηχανή γενικής χρήσης. Τίποτα ουσιαστικό δεν θα άλλαζε πραγματικά αν η ιδέα αυτή περιοριζόταν σε ένα χαρτί που δεν θα μπορούσε να γραφτούν σύμβολα το ένα κάτω από το άλλο χωρίς να χρησιμοποιηθεί κάτι σαν ρολό ταινίας χωρισμένο σε οριζόντια κουτάκια.

Χω

4	2	3	1	×	7	7	=	2	9	6	1	7	+	2	9	6	1	7	0	=	3	2	5	7	8	7

$$\begin{array}{r} 4231 \\ \times 77 \\ \hline 29617 \\ 296170 \\ \hline 325787 \end{array}$$

ρίς να χάνεται κάτι το ουσιαστικό μπορούμε να την φανταστούμε να εκτελεί την εργασία της κατά μήκος μιας ταινίας χαρτιού χωρισμένης σε κουτάκια όπως φαίνεται παρακάτω:

Ένα άτομο που εκτελεί έναν υπολογισμό λειτουργεί κάτω από τους ακόλουθους περιορισμούς:

- Σε κάθε στάδιο του υπολογισμού έχει την προσοχή του μόνο σε έναν μικρό αριθμό συμβόλων.
- Η ενέργεια που εκτελείται εξαρτάται μόνο από τα συγκεκριμένα σύμβολα που το άτομο προσέχει

Το αποτέλεσμα της παρατήρησης σε πολλά από αυτά ταυτόχρονα μπορεί να επιτευχθεί με την παρατήρηση καθενός από αυτά διαδοχικά και κάθε υπολογισμός μπορεί να θεωρηθεί ότι προχωρά με τον ακόλουθο τρόπο:

- Ο υπολογισμός εκτελείται μόνο γράφοντας σύμβολα σε κουτάκια σε μια ταινία χαρτιού
- Σε κάθε βήμα το άτομο που εκτελεί τον υπολογισμό προσέχει το σύμβολο που είναι γραμμένο μόνο σε ένα από αυτά τα κουτάκια
- Η επόμενη ενέργεια εξαρτάται μόνο από αυτό το σύμβολο και την τρέχουσα

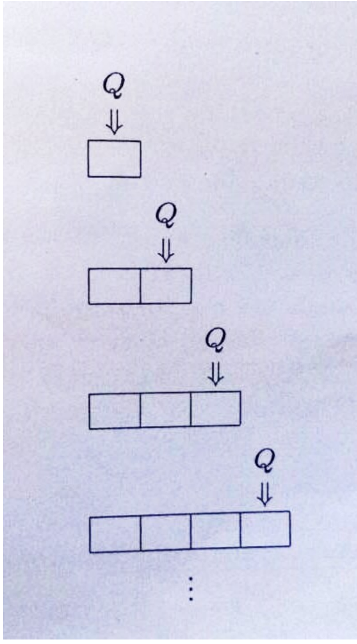
κατάσταση του μυαλού του

- Η επόμενη αυτή ενέργεια αποτελείται από την εγγραφή ενός συμβόλου στο κουτάκι στο οποίο επικεντρώθηκε η προσοχή του, και μετά ίσως από μετατόπιση της προσοχής του στο κουτάκι που βρίσκεται ακριβώς αριστερά ή ακριβώς δεξιά

Η μηχανή πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ώστε να είναι ευαίσθητη σε ένα ακριβώς σύμβολο της ταινίας, τοπ ανιχνευόμενο σύμβολο. Ανάλογα με την εσωτερική της κατάσταση, η μηχανή θα γράψει ένα σύμβολο στην ταινία και μετά είτε συνεχίζει να διαβάζει από το ίδιο κουτάκι είτε μετατοπίζεται προς το κουτάκι αμέσως αριστερά ή αμέσως δεξιά. Για το σκοπό του υπολογισμού δεν έχει σημασία πως είναι κατασκευασμένη η μηχανή αλλά αυτό που είναι σημαντικό είναι να έχει την δυνατότητα να βρεθεί σε έναν αριθμό διαφορετικών διατάξεων και να συμπεριφέρεται κατάλληλα σε κάθε κατάσταση. Είναι δυνατόν να συμπεράνουμε ότι κάθε τι υπολογίσιμο από οποιαδήποτε αλγοριθμική διαδικασία μπορεί να υπολογιστεί από μια μηχανή Turing. Αξίζει να εξετάσουμε μερικά απλά παραδείγματα. Για αρχή απαιτείται μία λίστα με όλες τις δυνατές καταστάσεις. Έπειτα, για κάθε κατάσταση και κάθε σύμβολο που θα μπορούσε να εμφανιστεί στην ταινία, είναι απαραίτητο να καθορίσουμε την ενέργεια της μηχανής σε αυτή την κατάσταση όταν διαβάζει το σύμβολο.

“όταν η μηχανή είναι στην κατάσταση R και ανιχνεύει το σύμβολο α στην ταινία, θα αντικαταστήσει το α με το β, και θα μετακινηθεί ένα κουτάκι δεξιά, και μετά θα μεταβεί στην κατάσταση S.”

Αντίθετα με τις φυσικές συσκευές, οι μηχανές Turing επωφελούνται από την ύπαρξή τους ως απλές μαθηματικές αφαιρέσεις από την έλλειψη περιορισμού στην ποσότητα ταινίας που μπορούν να χρησιμοποιήσουν. Μια μηχανή Turing αποτελούμενη από την μοναδική πεντάδα Q □ : □ → Q , αν αρχικοποιηθεί σε μια λευκή ταινία συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά επ’ άπειρον και η ποσότητα της διανυθείσας ταινίας αυξάνεται. Συνοπτικά, κάποιες μηχανές Turing με κάποιες εισόδους τελικά σταματάνε, άλλες όχι. Η εφαρμογή της μεθόδου της διαγωνοποίησης του Cantor οδήγησε σε προβλήματα που δεν μπορούν να λυθούν από μηχανές Turing .



Κάθε μηχανή Turing μπορεί να θεωρηθεί ότι ανιχνεύει αρχικά το αριστερότερο ψηφίο ενός αριθμού γραμμένου στην ταινία. Για κάποιους από αυτούς τους αριθμούς, η μηχανή τελικά θα σταματήσει, ενώ για άλλους μπορεί να συνεχίσει επ' άπειρον. Ας ονομάσουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών στην πρώτη κατηγορία το σύνολο εισόδων για τις οποίες τερματίζεται (Σ.Ε.Τ.) της συγκεκριμένης μηχανής Turing. Αν θεωρήσουμε ότι το Σ.Ε.Τ. μιας μηχανής Turing αποτελεί ένα πακέτο και ο κωδικός αριθμός της μηχανής ετικέτα του πακέτου, τότε έχουμε ακριβώς την τυπική περίπτωση για εφαρμογή της διαγωνιοποίησης. Η οποία μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε ένα σύνολο από φυσικούς αριθμούς που το ονομάζουμε D και είναι διαφορετικό από κάθε Σ.Ε.Τ. μιας μηχανής Turing.

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα:

Βρείτε έναν αλγόρυθμο που να αποφασίζει για κάθε δεδομένο φυσικό αριθμό αν ανοίκει στο σύνολο D ή όχι.

Αυτό είναι το παράδειγμα ενός μη επιλύσιμου προβλήματος. Το πρώτο βήμα για να συμπεράνουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αλγόριθμος είναι να παρατηρήσουμε από την ανάλυση του Turing για την υπολογιστική διαδικασία, ότι αν υπήρχε ένας τέτοιος αλγόριθμος θα υπήρχε και μια μηχανή Turing που θα μπορούσε να επιτύχει το ίδιο.

Ο Hilbert και ο Hardy πίστευαν ότι μια αλγοριθμική επίλυση του Entscheidungsproblem θα είχε ως συνέπεια ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με έναν αλγόριθμο. Άρα αν έχουμε ένα μαθηματικό πρόβλημα που είναι αλγοριθμικά μη επιλύσιμο, τότε έπεται η μη επιλυσιμότητα του Entscheidungsproblem. Για να δούμε τη σύνδεση με το σύνολο D, αντιστοιχούμε σε κάθε φυσικό αριθμό n τα εξής:

Προυπόθεση: n είναι ο κωδικός αριθμός κάποιας μηχανής Turing , και ο ίδιος ο αριθμός είναι τοποθετημένος στην ταινία της, με το αριστερότερο στοιχείο προς ανίχνευση.

Συμπέρασμα: αυτή η μηχανή Turing που αρχικοποιήθηκε με τον παραπάνω τρόπο τελικά θα σταματήσει.

Χρησιμοποιώντας την γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής, και οι δύο προτάσεις μπορούν να μεταφραστούν σε συμβολισμό λογικής. Μετά είναι δυνατόν να αποδείξουμε, ότι το συμπέρασμα προκύπτει από την προυπόθεση αν και μόνο αν η προκείμενη μηχανή Turing με είσοδο τον ίδιο της τον κωδικό πράγματι τελικά σταματάει. Αυτό με τη σειρά του είναι αληθές μόνο αν το n δεν ανήκει στο D. Έτσι αν είχαμε έναν αλγόριθμο για το Entscheidungsproblem θα μπορούσαμε να το χρησιμοποιήσουμε για να αποφασίσουμε αν ένα στοιχείο ανήκει στο D. Επομένως το Entscheidungsproblem είναι αλγοριθμηκά μη επιλύσιμο. Για να στηρίξει τον ισχυρισμό του ο Turing απέδειξε ότι μια ευρεία γκάμα περίπλοκων μαθηματικών υπολογισμών μπορούσε να εκτελεστεί σε μηχανές Turing. Φανταστείτε δύο φυσικούς αριθμούς γραμμένους σε μία ταινία μηχανής Turing και χωρισμένους από ένα κουτάκι. Ο πρώτος αριθμός πρόκειται να είναι ο κωδικός αριθμός κάποιας μηχανή Turing και ο δεύτερος μια είσοδος για αυτή την μηχανή. Η εργασία είναι σαφής. Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε ανακτώντας τις πεντάδες που συνιστούν την μηχανή και βρίσκονται κωδικοποιημένες στον πρώτο αριθμό στην ταινία. Μετά, θα μπορούσαμε να εκτελέσουμε ότι ακριβώς επιτάσσουν οι πεντάδες.

Εφαρμόζοντας αυτήν την ιδέα στην παρούσα εργασία οδηγούμαστε να φανταστούμε μια μηχανή Turing η οποία ξεκινώντας με τον κωδικό μιας μηχανής M και ακολουθούμενο από μια αριθμητική είσοδο στην M της ταινία της, θα κάνει ότι ακριβώς και η M αν είχε την ίδια είσοδο. Αυτή θα ήταν η μία και μοναδική μηχανή Turing η οποία θα έκανε οτιδήποτε θα μπορούσε να κάνει οποιαδήποτε μηχανή Turing. Ο Turing επαλήθευσε το αξιοσημείωτο αυτό αποτέλεσμα με το να δείξει πως κάποιος θα μπορούσε να παράγει τις πεντάδες μιας τέτοιας καθολικής μηχανής. Μια μηχανή Turing την φανταζόμαστε αρχικά σαν μηχανή με μηχανικά μέρη hardware. Αλλά ο κωδικός της στην ταινία της καθολικής μηχανής λειτουργεί ως πρόγραμμα, περιγράφοντας λεπτομερώς τις εντολές που δίνονται στην καθολική μηχανή ώστε να εκτελεστεί ο κατάλληλος υπολογισμός. Η ίδια η καθολική μηχανή Turing μπορεί να θεωρηθεί ως διερμηνέας, αφού λειτουργεί ερμηνεύοντας διαδοχικές πεντάδες για να εκτελέσει τις λειτουργίες που καθορίζουν.

Η ανάλυση του Turing προσέφερε μια νέα ενόραση στην αρχαία τέχνη του υπολογισμού. Καταλήξαμε να θεωρούμε πως η έννοια του υπολογισμού περιλαμβάνει πολλά περισσότερα από απλούς αριθμητικούς υπολογισμούς. Τα παραδείγματα του Turing για συγκεκριμένες μηχανές είναι ήδη στιγμιότυπα της τέχνης του προγραμματισμού ενώ η καθολική μηχανή παρέχει ένα μοντέλο υπολογιστή με αποθήκευση προγραμμάτων στο οποίο οι κωδικοποιημένες πεντάδες στην ταινία παίζουν το ρόλο του αποθηκευμένου προγράμματος και στο οποίο ο υπολογιστής δεν κάνει ουσιαστική διάκριση ανάμεσα σε πρόγραμμα και δεδομένα. Τέλος η καθολική μηχανή δείχνει πως το hardware στην μορφή ενός συνόλου πεντάδων που περιγράφει τη λειτουργία ενός μηχανισμού, μπορεί να αντικατασταθεί από ισοδύναμο software στη μορφή των ίδιων αυτών πεντάδων σε κωδικοποιημένη μορφή στην ταινία μιας καθολικής μηχανής.

Στη βαρυσήμαντη δημοσίευσή του "Για τους υπολογίσιμους αριθμούς, με μια εφαρμογή στην λήψη αποφάσεων", ο Turing αναδιατύπωσε τα αποτελέσματα του 1931 του Κούρτ Γκέντελ για τα όρια της απόδειξης και του υπολογισμού, αντικαθιστώντας την επίσημη γλώσσα του Γκέντελ από αυτές που καλούνται τώρα καθολικές μηχανές Turing, επίσημες και απλές συσκευές. Απέδειξε ότι μια τέτοια μηχανή θα ήταν σε θέση να υπολογίσει οποιοδήποτε κατανοητό μαθηματικό πρόβλημα εάν ήταν δυνατό να αναπαρασταθεί από έναν αλγόριθμο, ακόμα κι αν καμία πραγματική μηχανή Turing δεν θα ήταν πιθανό να έχει τις πρακτικές εφαρμογές, όντας πολύ πιο αργή από τις εναλλακτικές λύσεις. Οι μηχανές Turing είναι μέχρι σήμερα το κεντρικό αντικείμενο μελέτης της θεωρίας υπολογισμού.

Κατά τη διάρκεια του 2ου παγκόσμιου πολέμου ήταν σημαντικός συμμετέχων στις προσπάθειες στο Μπλέτσλεϊ Παρκ να αποκρυπτογραφήσουν τα γερμανικά μηνύματα. Οι κώδικες και η αποκωδικοποίηση είχαν εισέλθει στη δουλειά του Turing αλλά αυτοί οι κώδικες ήτα επίτηδες διαφανείς σε αντίθεση με τους κώδικες που χρησιμοποιούσαν οι Γερμανοί ώστε να είναι αδιαπέραστοι. Οι Γερμανικές στρατιωτικές επικοινωνίες χρησιμοποιούσαν μια τροποποιημένη εμπορική μηχανή κρυπτογράφησης που λεγόταν Enigma. Αυτή η μηχανή είχε ένα αλφαβητικό πληκτρολόγιο και όταν πιεζόταν το πλήκτρο ενός συγκεκριμένου γράμματος, ένα γράμμα εμφανιζόταν σε ένα μικρό παράθυρο. Όταν ένα ολόκληρο μήνυμα είχε κρυπτογραφηθεί στελνόταν με απλή ραδιοφωνική τηλεγραφία. Ο παραλήπτης εισήγαγε τα κρυπτογραφημένα γράμματα σε μια άλλη συσκευή Enigma και το αρχικό μήνυμα εμφανιζόταν. Στη στρατιωτική έκδοση η ασφάλεια ενισχυόταν με έναν επιπλέον πίνακα καλωδίωσης. Κάθε μέρα υπήρχε μια διαφορετική αρχική ρύθμιση της μηχανής η οποία έπρεπε να είναι ίδια για αποστολέα και παραλήπτη. Η εργασία του Turing κρατήθηκε μυστική μέχρι τη δεκαετία του '70, ακόμη και οι στενοί φίλοι του δεν την ήξεραν.

Συνέβαλε με διάφορες μαθηματικές ιδέες για την αποκρυπτογράφηση μηνυμάτων των συσκευών Enigma και Lorenz SZ 40/42. Στο Μπλέτσλεϊ Παρκ ο Turing εργάστηκε από το 1939 ως το 1940 όταν και μετακινήθηκε προς την Ομάδα 8. Ο Turing συνειδητοποίησε ότι δεν ήταν απαραίτητο να εξεταστούν όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί για να σπάσουν τους κωδικούς της μηχανής Enigma. Απέδειξε ότι ήταν δυνατό να εξετάσει τις σωστές τοποθετήσεις των διακοπτών (περίπου ένα εκατομμύριο συνδυασμοί) χωρίς να πρέπει να εξεταστούν οι τοποθετήσεις του πίνακα συνδέσεων (περίπου 157 εκατομμύριο συνδυασμοί). Ενώ ακόμα ένας τρομερός στόχος, ένα εκατομμύριο συνδυασμοί ήταν επιτεύξιμοι χρησιμοποιώντας μια ηλεκτρομηχανική μηχανή - τη βόμβα, ονομασμένη από τη σχεδιασμένη από τους Πολωνούς bomba. Αυτή η μηχανή αποδείχθηκε πολύ αποτελεσματική για να υπολογίσει τη ρύθμιση του Γερμανικού Enigma σε μία συγκεκριμένη μέρα. Οι Bombes συστηματικά εκτελούσαν αλυσίδες λογικών συλλογισμών που απέκλειαν την μία πιθανή ρύθμιση του Enigma μετά την άλλη, ανάμεσα στο τεράστιο πλήθος των δυνατών ρυθμίσεων, ώσπου απέμεναν μόνο λίγες. Σε αυτές γινόταν επεξεργασία με το χέρι μέχρι να βρεθεί η σωστή.

Για ένα χρόνο, ο Turing ήταν επικεφαλής του "καταλύματος 8", τμήματος αρμόδιου για τα γερμανικά ναυτικά σήματα. Ο Turing εφηύρε επίσης την τεχνική Banburismus για να βοηθήσει στο σπάσιμο της Γερμανική κρυπτογραφικής συσκευής Enigma. Για να βοηθήσει, ο πρώτος ψηφιακός προγραμματίσιμος ηλεκτρονικός υπολογιστής αναπτύχθηκε, ο Colossus Mark I. Ο Turing, εντούτοις, δεν συμμετείχε άμεσα - ο Colossus σχεδιάστηκε και κατασκευάστηκε στον ερευνητικό σταθμό ταχυδρομείων στο Hill Dollis από μια ομάδα με επικεφαλής τον Τόμας Φλάουερς (Thomas Flowers) το 1943.

Στο τελευταίο μέρος του πολέμου, ο Turing ανέλαβε (με τον μηχανικό Ντόναλντ Μπέιλι (Donald Bayley)) το σχέδιο μιας φορητής μηχανής με κωδικό Delilah για να επιτρέψει τις ασφαλείς μεταδόσεις φωνής. Προορισμένος για τις διαφορετικές εφαρμογές, Το Delilah στερήθηκε τη δυνατότητα που χρησιμοποιείται πέρα από τις μεγάλης απόστασης ραδιομεταδόσεις. Το Delilah ολοκληρώθηκε πάρα πολύ αργά για να χρησιμοποιηθεί στον πόλεμο. Ενώ ο Turing το κατέδειξε στους ανώτερους υπαλλήλους με την κωδικοποίηση/αποκωδικοποίηση μιας καταγραφής μιας ομιλίας του Ουίνστων Τσώρτσιλ, δεν υιοθετήθηκε για τη χρήση.

Από το 1945 ως το 1947, εργάστηκε στο εθνικό φυσικό εργαστήριο, πάνω στο σχέδιο της αυτόματης μηχανή υπολογισμού. Παρουσίασε μια εργασία στις 19 Φεβρουαρίου του 1946, η όποια ήταν το πρώτο πλήρες σχέδιο ενός υπολογιστή. Αν και πέτυχε το σχεδιασμό της αυτόματης μηχανής υπολογισμού, υπήρξαν καθυστερήσεις στην έναρξη του προγράμματος και απογοητεύτηκε. Στα τέλη του 1947 επέστρεψε στο Καίμπριτζ για ένα έτος. Ενώ ήταν στο Καίμπριτζ, η κατασκευή της αυτόματης μηχανής υπολογισμού σταμάτησε προτού αρχίσει.

Το 1949 έγινε αναπληρωτής διευθυντής του εργαστηρίου υπολογισμού στο πανεπιστήμιο του Μάντσεστερ, και εργαζόμενος στο λογισμικό για έναν από τους πρώτους αληθινούς υπολογιστές - τον Μάντσεστερ Mark H. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου συνέχισε να κάνει περισσότερη αφηρημένη εργασία και στα μηχανήματα υπολογισμού και τη νοημοσύνη. Ο Turing αντιμετώπισε το πρόβλημα της τεχνητής νοημοσύνης, και πρότεινε ένα πείραμα γνωστό σήμερα ως δοκιμή Turing, μια προσπάθεια να καθοριστούν πρότυπα για μια μηχανή που καλείται νοήμων.

Μετά τον Πόλεμο, σχεδίασε έναν από τους πρώτους ηλεκτρονικούς προγραμματίσιμους ψηφιακούς υπολογιστές στο Εθνικό Φυσικό Εργαστήριο, όπως λεγόταν, και κατασκεύασε μια δεύτερη υπολογιστική μηχανή στο Πανεπιστήμιο του Μάντσεστερ. Ο Turing αυτοκτόνησε το 1954. Το Βραβείο Turing, η ύψιστη επιστημονική διάκριση στον χώρο της πληροφορικής από το 1966 κι έπειτα, ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του.

Βιβλιογραφία

1. Martin Davis, Μηχανές της λογικής, Η συνεισφορά των μαθηματικών στην ανάπτυξη των υπολογιστών. Ο δρόμος από τον Leibniz ως τον Turing, ΕΚΚΡΕΜΕΣ

2. Wikipedia, the free encyclopedia