

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ευσταθής ομολογία προτύπων.

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Παναγιώτα Μανουσάκη.

Επιβλέπων: Ιωάννης Εμμανουήλ, Καθηγητής.

ΑΘΗΝΑ 2017

*une douzaine d'hivers de la solitude
et d'une douzaine d'étés contre le monde*

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ευσταθής ομολογία προτύπων.

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Παναγιώτα Μανουσάκη.

Επιβλέπων: Ιωάννης Εμμανουήλ, Καθηγητής.

ΑΘΗΝΑ 2017

Ευχαριστίες.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντά μου, Καθηγητή κύριο Ιωάννη Εμμανουήλ, για την υπομονή και επιμονή του ώστε αυτή η διατριβή να γίνει πραγματικότητα.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης την Καθηγήτρια κυρία Ολυμπία Ταλέλλη για τη συμβολή της σε αυτό το επιχείρημα.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κύριο Δημήτριο Βάρσο για τις ενδιαφέρουσες και εποικοδομητικές συζητήσεις μας.

Ευχαριστώ την οικογένειά μου για τη στήριξη που μου δίνει πάντα.

Ευσταθής ομολογία προτύπων.

Μία προσέγγιση της εμφυτευτικής πλήρωσης του ομολογικού συναρτητή Tor .

Παναγιώτα Μανουσάκη

2017

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή.	3
2	Προβολικές πληρώσεις.	6
2.1	Συνομολογία <i>Tate</i> .	6
2.2	Συνομολογία <i>Tate – Farrell</i> .	8
2.3	Πλήρεις επιλύσεις.	9
3	Η προβολική και η εμφυτευτική πλήρωση του συνομολογικού δισυναρτητή <i>Ext</i>.	16
3.1	Δορυφόροι.	16
3.2	Η πλήρης συνομολογία κατά <i>Mislin</i> .	24
3.3	Η προβολική πλήρωση του συνομολογικού συναρτητή <i>Ext</i> κατά <i>Benson – Carlson</i> .	29
3.4	Η ευσταθής συνομολογία κατά <i>Vogel</i> . Σχεδόν αλυσωτές απεικονίσεις.	31
3.5	Η φυσική ισοδυναμία των προβολικών πληρώσεων του συνομολογικού συναρτητή <i>Ext</i> .	33
3.6	Σχετική ομολογία.	36
3.7	Η εμφυτευτική πλήρωση του συνομολογικού συναρτητή <i>Ext</i> κατά <i>Nucinkis</i> .	38
3.8	Προβολικώς και εμφυτευτικώς πλήρης συνομολογία.	39
3.9	Κριτήρια μηδενισμού και η ισορροπία του δισυναρτητή <i>Ext</i> .	42
4	Η πλήρης ομολογία.	44
4.1	Ο ορισμός της εμφυτευτικής πλήρωσης του ομολογικού συναρτητή Tor .	44
4.2	Φυσικοί Μετασχηματισμοί <i>Yoneda</i> .	46
4.3	Η κατασκευή <i>Triulzi</i> .	58
5	Εναλλακτική περιγραφή της πλήρωσης κατά <i>Nucinkis</i>.	71
6	Η ευσταθής ομολογία.	74
6.1	Τανυστικό γινόμενο συμπλεγμάτων.	74
6.2	Η ευσταθής ομολογία κατά <i>Vogel</i> .	78
6.3	Η επέκταση του συνδετικού ομομορφισμού από την ευσταθή στην πλήρη ομολογία.	80

7	Η σχέση της ευσταθούς ομολογίας με την πλήρη ομολογία.	82
7.1	Εναλλακτική περιγραφή της κατασκευής <i>Triulzi</i> .	82
7.2	Φιλτράρισμα <i>Hausdorff</i> .	84
7.3	Η σχέση της ευσταθούς ομολογίας με την πλήρη ομολογία.	87
8	Κριτήρια ισομορφισμού.	88
8.1	Η συνθήκη <i>Mittag – Leffler</i> .	88
8.2	Κριτήρια ισομορφισμού.	90
9	Κριτήρια μηδενισμού.	92
9.1	Η συνθήκη <i>Mittag – Leffler</i> και ο μηδενισμός του πρώτου επαγόμενου συναρτητή του αντίστροφου ορίου.	92
9.2	Κριτήρια μηδενισμού.	97
10	Κριτήρια μηδενισμού σε δακτυλίους αριστερά της <i>Noether</i>.	101
11	Ισορροπία της ευσταθούς ομολογίας.	108
12	Παράρτημα.	118
12.1	Η απεικόνιση Φ .	118
12.2	Πρότυπα.	119
12.3	Εμφυτευτικά πρότυπα.	120
12.4	Δακτύλιοι αριστερά της <i>Noether</i> .	121
12.5	Δακτύλιοι αριστερά συνεκτικοί.	125
12.6	Εμφυτευτικά αντικείμενα στην κατηγορία των αντίστροφων συστημάτων αβελιανών ομάδων.	126
13	Αναφορές.	128

1 Εισαγωγή.

Η συνομολογία Tate για μία πεπερασμένη ομάδα G , $\widehat{H}^*(G, -)$, ορίζει μία πλήρη συνομολογία εκφρασμένη μέσω μίας πλήρους προβολικής επίλυσης του τετριμμένου $\mathbb{Z}G$ -προτύπου \mathbb{Z} . Η συνομολογία αυτή είναι προβολικώς και εμφυτευτικώς πλήρης. Η συνομολογία Tate – Farrell για μία ομάδα G με πεπερασμένη κατ' ουσίαν συνομολογική διάσταση γενικεύει την προηγούμενη, εκφρασμένη μέσω μίας πλήρους προβολικής επίλυσης του τετριμμένου $\mathbb{Z}G$ -προτύπου \mathbb{Z} το άνω τμήμα της οποίας ταυτίζεται με μία προβολική επίλυση του προτύπου, επίσης προβολικώς και εμφυτευτικώς πλήρης. Αυτή η θεωρία γενικεύεται από τον ορισμό της ισχυρής πλήρους προβολικής επίλυσης ενός αριστερού R -προτύπου M , \mathbb{P}_* , ορίζοντας μία πλήρη συνομολογία, επιτυγχάνοντας ένα συναλλοίωτο πλήρη συνομολογικό συναρτητή, $H^*(Hom_R(\mathbb{P}_*, -))$, προβολικώς και εμφυτευτικώς πλήρη. Δυϊκώς, θεωρούμε έναν ανταλλοίωτο πλήρη συνομολογικό συναρτητή, $H^*(Hom_R(-, \mathbb{I}^*))$, προβολικώς και εμφυτευτικώς πλήρη, μέσω του ορισμού της ισχυρής πλήρους εμφυτευτικής επίλυσης, \mathbb{I}^* .

Η αντίληψη της προβολικής πλήρωσης του συναλλοίωτου συνομολογικού συναρτητή $Ext_R^*(A, -)$ για ένα αριστερό R -πρότυπο A νοείται από τα παραπάνω ως μία θεωρία πλήρους συνομολογίας που καθιστά την ύπαρξη τέτοιων επιλύσεων όχι αναγκαία. Αυτή η πλήρωση είναι ένας συνομολογικός συναρτητής που κατέχει μία καθολική ιδιότητα, η οποία περιγράφεται ακολούθως. Δυϊκώς προκύπτει η έννοια της εμφυτευτικής πλήρωσης του ανταλλοίωτου συνομολογικού συναρτητή $Ext_R^*(-, B)$ για ένα αριστερό R -πρότυπο B .

Η μελέτη για την ύπαρξη της εμφυτευτικής πλήρωσης του ομολογικού συναρτητή $Tor_*^R(M, -)$ για ένα δεξιό R -πρότυπο M επάγεται από τα αποτελέσματα στις δύο προηγούμενες πληρώσεις.

Όπως προαναφέραμε, η προβολική πλήρωση του συναλλοίωτου συνομολογικού συναρτητή $Ext_R^*(A, -)$ για ένα αριστερό R -πρότυπο A , $\widehat{Ext}_R^*(A, -)$, είναι ένας προβολικώς πλήρης συνομολογικός συναρτητής με την καθολική ιδιότητα που δηλώνει ότι κάθε μορφισμός από τον $Ext_R^*(A, -)$ σε έναν προβολικώς πλήρη συναλλοίωτο συνομολογικό συναρτητή W^* παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο μέσω του $\widehat{Ext}_R^*(A, -)$. Αυτή η ιδιότητα προκύπτει από τον ορισμό της πλήρωσης, καθώς είναι η κατασκευή κατά Mislin μέσω αριστερών δορυφόρων που την ικανοποιεί. Ο συναρτητής αυτός είναι φυσικά ισοδύναμος με αυτόν που ορίζουν οι Benson και Carlson, εισάγοντας την αβελιανή ομάδα $[A, B] := \frac{Hom_R(A, B)}{PHom_R(A, B)}$ ως το πηλίκο της ομάδας των ομομορφισμών modulo παραγοντοποίησης μέσω ενός προβολικού R -προτύπου. Η ομάδα Vogel που ορίζεται ως η ομάδα των κλάσεων των σχεδόν αλυσωτών απεικονίσεων ανάμεσα στις αντίστοιχες προβολικές επιλύσεις modulo σχεδόν αλυσωτών ομομορφισμών οδηγεί σε ένα συναρτητή, φυσικά ισοδύναμο με τους προηγούμενους δύο, και καλείται η ευσταθής συνομολογία. Τα ανωτέρω παρουσιάζουμε ακολούθως, δίνοντας τον n -συναρτητή της πλήρωσης υπολογισμένη σε ένα αριστερό R -πρότυπο B . Η τελευταία έκφραση της πλήρωσης εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ισόμορφη με την κατασκευή Mislin εν όψει του ακριβούς συναρτητή \varinjlim επί κατευθυνόμενου συνόλου δεικτών. Η παράθεση Ω δηλώνει το συζυγές πρότυπο. Οι μορφισμοί που συνθέτουν τα ευθέα όρια ακολούθως προκύπτουν από τις προβολικές παραστάσεις που αφορούν στα συζυγή πρότυπα. Στην τελευταία έκφραση αυτοί είναι ακριβώς οι συνδυαστικοί ομομορφισμοί.

$$Ext_R^n(A, B) = \varinjlim S^{-i} Ext_R^{n+i}(A, B),$$

$$\widehat{BC}_R^n(A, B) = \varinjlim [\Omega^{n+i} A, \Omega^i B],$$

$$\widetilde{Ext}_R^n(A, B) = V_R^n(A, B) = H^n(\widehat{Hom}_R(\mathbb{P}_*, \mathbb{Q}_*)), \widehat{Hom}_R(\mathbb{P}_*, \mathbb{Q}_*) = \frac{Hom_R(\mathbb{P}_*, \mathbb{Q}_*)}{Hom_R(\mathbb{P}_*, \mathbb{Q}_*)},$$

$$\lim_{\leftarrow i} \text{Ext}_R^{n+i}(A, \Omega^i B).$$

Τα δυϊκά επιχειρήματα μέσω της έννοιας των εμφυτευτικών προτύπων αντί των προβολικών οδηγούν στην εμφυτευτική πλήρωση του $\text{Ext}_R^*(-, B)$ για ένα αριστερό R -πρότυπο B , $\widetilde{\text{Ext}}_R^*(-, B)$, που εισάγει η *Nucinkis*.

Η μελέτη των δύο αυτών πληρώσεων του δισυναρτητή $\text{Ext}_R^*(-, -)$ είναι τρίπτυχη καθώς μπορεί να συγκεντρωθεί στα ακόλουθα αποτελέσματα.

1. Η φυσική ισοδυναμία των συναρτητών που ορίζουν την κάθε πλήρωση.

$$2. \widehat{\text{Ext}}_R^*(M, -) = 0 \Leftrightarrow \text{proj.dim.}_R M < \infty \Leftrightarrow \widehat{\text{Ext}}_R^0(M, M) = 0,$$

$$\widetilde{\text{Ext}}_R^*(-, M) = 0 \Leftrightarrow \text{inj.dim.}_R M < \infty \Leftrightarrow \widetilde{\text{Ext}}_R^0(M, M) = 0.$$

$$3. \widehat{\text{Ext}}_R^*(-, -) \simeq \widetilde{\text{Ext}}_R^*(-, -) \Leftrightarrow \text{spli}R = \text{silp}R < \infty.$$

Ο πρώτος ισχυρισμός της τελευταίας ισοδυναμίας δηλώνει την ισοροπία επί του R της πλήρους συνομολογίας. Η συνθήκη ομολογικής περατότητας της ισοδυναμίας αναφέρεται στο *supremum* των προβολικών μηκών των εμφυτευτικών αριστερών R -προτύπων και στο *supremum* των εμφυτευτικών μηκών των προβολικών αριστερών R -προτύπων, αντίστοιχα κατά σειρά εμφάνισης.

Η μελέτη για την ύπαρξη της εμφυτευτικής πλήρωσης του ομολογικού συναρτητή $\text{Tor}_*^R(M, -)$ για ένα δεξιό R -πρότυπο M θα είναι ομοίως τρίπτυχη. Η εμφυτευτική πλήρωση θα είναι ένας ομολογικός συναρτητής που κατέχει την καθολική ιδιότητα η οποία δηλώνει την παραγοντοποίηση μέσω αυτής κάθε μορφισμού από έναν εμφυτευτικώς πλήρη συναλλοίωτο ομολογικό συναρτητή στο συναρτητή $\text{Tor}_*^R(M, -)$. Παρουσιάζουμε τους υποψήφιους για την εμφυτευτική πλήρωση του εν λόγω συναρτητή, ο πρώτος από τους οποίους είναι η κατασκευή *Triulzi*, η δυϊκή της κατασκευής *Mislin*, μέσω δεξιών δορυφόρων, η οποία κατέχει την καθολική ιδιότητα αλλά δεν είναι απαραίτητα ομολογικός συναρτητής, ο δεύτερος είναι η ευσταθής ομολογία, που υπολογίζεται μέσω επίπεδης επίλυσης της πρώτης μεταβλητής και εμφυτευτικής επίλυσης της δεύτερης, και ο τρίτος είναι ο εύλογος ορισμός, δίνοντας τον n -συναρτητή της κάθε συνδεδεμένης οικογένειας υπολογισμένη σε ένα αριστερό R -πρότυπο N . Ο υπολογισμός της ευσταθούς ομολογίας μέσω επίπεδης επίλυσης αντί προβολικής αποδεικνύεται από τους *Christensen*, *Celikbas*, *Liang* και *Piempeyer*. Πρώτα όμως, ο *Triulzi* ρητά δείχνει ότι η επέκταση, Δ , από την ευσταθή ομολογία στην κατασκευή *Triulzi*, η επαγόμενη από τον συνδετικό ομομορφισμό από την ευσταθή στην απόλυτη ομολογία, είναι επιμορφισμός.

$$\widehat{\text{Tor}}_n^R(M, N) = \lim_{\leftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+i}^R(M, N),$$

$$\widetilde{\text{Tor}}_n^R(M, N) = V_n^R(M, N) = H_{n+1}(\mathbb{F}_* \otimes_R \widetilde{\mathbb{I}}^*, \mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^*) = \frac{\mathbb{F}_* \otimes_R \widetilde{\mathbb{I}}^*}{\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^*},$$

$$\lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(M, \Sigma^i N).$$

Η κατασκευή *Triulzi* είναι ισόμορφη με τον εύλογο ορισμό. Πράγματι, ο εύλογος ορισμός είναι ο πιο χρήσιμος, καθώς μπορούμε να συγκρίνουμε κάθε οικογένεια με αυτόν, και ακόμα, να τον χρησιμοποιήσουμε για να δώσουμε μία άλλη έκφραση της οικογένειας αυτής, που επίσης οδηγεί σε μία άλλη έκφραση του ευσταθούς συμπλέγματος, με χρήση της έννοιας του φιλτραρίσματος *Hausdorff*.

Μέσω εμφυτευτικής επίλυσης του προτύπου ${}_R A, \mathbb{I}^*$, και εμφυτευτικής επίλυσης του προτύπου ${}_R B, \mathbb{J}^*$, εκφράζουμε την πλήρωση $\widetilde{Ext}_R^n(A, B)$ ως $\varprojlim_i H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*))$. Το τελευταίο όριο συνίσταται από τους ομομορφισμούς που επάγονται από τις εμφυτεύσεις των υποσυμπλεγμάτων του \mathbb{I}^* , $\mathbb{I}^{\geq i+1} \subseteq \mathbb{I}^{\geq i}$. Με χρήση του συναρτητή *Pontryagin D* εκφράζουμε τον εύλογο ορισμό που αφορά στην ομολογία ως $\varprojlim_i H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i})$, με \mathbb{F}_* και \mathbb{I}^* να είναι οι επίλυσεις στον ορισμό της ευσταθούς ομολογίας.

Αποδεικνύουμε τα ακόλουθα ως προς την τρίπτυχη μελέτη.

1. Θεώρημα: Έστω R ένας δακτύλιος. Τότε, για κάθε ζεύγος προτύπων $(M_{R,R}, N)$ και για κάθε ακέραιο n έχουμε την ακόλουθη βραχεία ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων, φυσική ως προς M και N .

$$0 \longrightarrow \varprojlim_i {}^1\text{Tor}_{n+i+1}^R(M, \Sigma^i N) \longrightarrow \widetilde{\text{Tor}}_n^R(M, N) \xrightarrow{\Delta} \widehat{\text{Tor}}_n^R(M, N) \rightarrow 0$$

Κάτω από συνθήκες όπου ο πυρήνας της Δ μηδενίζεται, επιτυγχάνεται η εμφυτευτική πλήρωση του εν λόγω συναρτητή.

2. Θεώρημα: Έστω R ένας δακτύλιος. Τότε, $\widetilde{\text{Tor}}_*^R(-, DM) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{\text{Tor}}_0^R(M, DM) = 0 = \widetilde{\text{Tor}}_{-1}^R(M^{(\mathbb{N})}, DM) \Leftrightarrow \text{fl.dim.}_{R^{\text{opp}}} M < \infty$.

Θεώρημα: Έστω R ένας δακτύλιος αριστερά της *Noether*. Τότε, $\widetilde{\text{Tor}}_*^R(M, -) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{\text{Tor}}_0^R(M, DM) = 0 = \widetilde{\text{Tor}}_{-1}^R(M, (DM)^{(\mathbb{N})}) \Leftrightarrow \widetilde{\text{Tor}}_*^R(-, DM) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{\text{Tor}}_0^R(M, DM) = 0 = \widetilde{\text{Tor}}_{-1}^R(M^{(\mathbb{N})}, DM) \Leftrightarrow \widetilde{\text{Ext}}_R^*(-, DM) = 0 \Leftrightarrow \text{fl.dim.}_{R^{\text{opp}}} M < \infty$.

Θεώρημα: Έστω R ένας δακτύλιος αριστερά της *Noether*. Τότε, $\widetilde{\text{Tor}}_*^R(-, N) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{\text{Tor}}_0^R(DN, N) = 0 = \widetilde{\text{Tor}}_{-1}^R((DN)^{(\mathbb{N})}, N) \Leftrightarrow \widetilde{\text{Ext}}_R^*(N, D-) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{\text{Ext}}_R^0(N, D^2N) = 0 \Leftrightarrow \text{inj.dim.}_{R} N < \infty$.

3. Η ισορροπία επί του R της ευσταθούς ομολογίας εκφράζεται ως η φυσική ισοδυναμία των δισυναρτητών $\widetilde{\text{Tor}}_*^R(-, -)$ και $\widetilde{\text{Tor}}_*^{R^{\text{opp}}}(-, -)$, εννοώντας τον ισομορφισμό $\widetilde{\text{Tor}}_*^R(M, N) \simeq \widetilde{\text{Tor}}_*^{R^{\text{opp}}}(N, M)$ για κάθε ζεύγος προτύπων $(M_{R,R}, N)$.

Θεώρημα: Έστω R ένας δακτύλιος αριστερά και δεξιά συνεκτικός. Τότε, η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη επί του R αν και μόνο αν $\text{sfl}iR = \text{sfl}iR^{\text{opp}} < \infty$.

Η συνθήκη ομολογικής περατότητας της ισοδυναμίας αναφέρεται στο *supremum* των επίπεδων μηκών των εμφυτευτικών αριστερών R -προτύπων και στο *supremum* των επίπεδων μηκών των εμφυτευτικών δεξιών R -προτύπων, αντίστοιχα κατά σειρά εμφάνισης.

Ένας χαρακτηρισμός για *Iwanaga – Gorenstein* δακτύλιους: Έστω R ένας δακτύλιος αριστερά και δεξιά της *Noether*. Τότε, η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη επί του R αν και μόνο αν ο R είναι *Iwanaga – Gorenstein*.

Η διατριβή είναι βασισμένη στο άρθρο *ON THE STABLE HOMOLOGY OF MODULES* με συν-συγγραφέα τον Καθηγητή κύριο Ιωάννη Εμμανουήλ.

2 Προβολικές πληρώσεις.

2.1 Συνομολογία Tate.

Έστω ομάδα G πεπερασμένη. Θεωρούμε τον $\mathbb{Z}G$ -ομομορφισμό $\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}G : 1 \mapsto \sum_{g \in G} g$. Αυτή η διαγώνια απεικόνιση εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι \mathbb{Z} -διασπώμενη, για παράδειγμα μέσω παραστάσεων ομάδας. Προοικονομούμε λέγοντας ότι η απεικόνιση i είναι η δυϊκή της απεικόνισης *augmentation* $\varepsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$, δηλαδή $i = \varepsilon^*$, όπου με $-^*$ δηλώνουμε το συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$, ενώ ισχύει $\mathbb{Z}G \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$ ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα, καθώς $|G| < \infty$. Έστω C ο *Coker* που είναι ελεύθερο \mathbb{Z} -πρότυπο. Θεωρούμε τις παρακάτω $\mathbb{Z}G$ -ακριβείς ακολουθίες. Η δεύτερη προκύπτει από την πρώτη εφαρμόζοντας το συναρτητή $-\otimes_{\mathbb{Z}} C$.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}G \xrightarrow{p_1} C \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{t_1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} C \xrightarrow{p_2} C \otimes_{\mathbb{Z}} C \longrightarrow 0$$

Θεωρούμε τα πρότυπα με τη διαγώνιο δράση. Το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} C$ είναι ισόμορφο με το επαγόμενο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} C_0$, όπου με C_0 δηλώνουμε το υποκείμενο \mathbb{Z} -πρότυπο, μέσω της $\mathbb{Z}G$ -απεικόνισης με κανόνα ώστε $g \otimes c \mapsto g \otimes g^{-1}c$ με αντίστροφη την απεικόνιση με κανόνα ώστε $g \otimes c \mapsto g \otimes gc$, με $g \in G$ και $c \in C$. Έτσι, το $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} C$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Οι παραπάνω ακολουθίες συνδέονται για να δώσουν την ακόλουθη.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z}G & \xrightarrow{t_1 \circ p_1} & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} C & \xrightarrow{p_2} & C \otimes_{\mathbb{Z}} C & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \searrow^{p_1} \nearrow^{t_1} & & & & \\ & & & & & & C & & & & \end{array}$$

Εφαρμόζουμε το συναρτητή $-\otimes_{\mathbb{Z}} C \otimes_{\mathbb{Z}} C$ στην πρώτη και τη συνδέουμε με την προηγούμενη.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}G & \longrightarrow & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} C & \xrightarrow{t_2 \circ p_2} & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} C \otimes_{\mathbb{Z}} C & \xrightarrow{p_3} & C \otimes_{\mathbb{Z}} C \otimes_{\mathbb{Z}} C & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \searrow^{p_2} \nearrow^{t_2} & & & & C \otimes_{\mathbb{Z}} C & & \end{array}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προκύπτει δεξιά άπειρη ακριβής ακολουθία. Συνδέοντας αυτή με μία προβολική επίλυση του \mathbb{Z} προκύπτει μία πλήρης προβολική επίλυση του \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

$$\mathbb{P}^c : \dots \longrightarrow P_n \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_{-1} \longrightarrow P_{-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_{-k} \longrightarrow \dots$$

$$\begin{array}{c} \searrow \\ \mathbb{Z} \\ \nearrow \end{array}$$

Μία δεξιά άπειρη προβολική επίλυση όπως παραπάνω πεπερασμένου τύπου είναι η δυϊκή μίας προβολικής επίλυσης πεπερασμένου τύπου του \mathbb{Z} ως τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, δηλαδή είναι της μορφής $\mathbb{P}_*^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{P}_*, \mathbb{Z})$ με \mathbb{P}_* πεπερασμένου τύπου, όπου με $-^*$ δηλώνουμε το συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$. Αυτό οφείλεται στον ισομορφισμό $\mathbb{Z}G$ -προτύπων $P \xrightarrow{f} P^*$, με P πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό

$\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Πράγματι, το P ως πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο με G πεπερασμένη είναι και πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό \mathbb{Z} -πρότυπο, και η απεικόνιση f είναι ισομορφισμός \mathbb{Z} -προτύπων, $P \xrightarrow{f} P^*$, με P πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό \mathbb{Z} -πρότυπο, ο οποίος δίνεται από τον κανόνα ώστε $x \mapsto f(x) : g \mapsto g(x)$, ενώ ο ισομορφισμός προκύπτει από προσθετικότητα και ανάγεται στην περίπτωση που το P είναι ελεύθερο \mathbb{Z} -πρότυπο διάστασης 1. Επιπλέον, η f είναι $\mathbb{Z}G$ -ομομορφισμός. Όντως, η δομή του P ως αριστερό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ορίζει δομή του $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z})$ ως δεξιό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο που ορίζει δομή του $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ ως αριστερό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Έχουμε $f(r \circ x) : g \mapsto g(r \circ x) = (g \circ r)(x)$ και $r \circ f(x) : g \mapsto (r \circ f(x))(g) = f(x)(g \circ r) = (g \circ r)(x)$, με $r \in \mathbb{Z}G$, $x \in P$ και $g \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z})$, όπου με \circ δηλώνουμε τη δράση του ομαδοδακτυλίου $\mathbb{Z}G$. Σημειώνουμε ότι το σύμπλεγμα \mathbb{P}_*^* αποτελείται από δεξιά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα, όμως, καθώς $\mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}G^{opp}$, η δεξιά δράση ενός στοιχείου της ομάδας G δίνεται από την αριστερή δράση του αντιστρόφου στοιχείου του στοιχείου της ομάδας, καθιστώντας το προαναφερθέν σύμπλεγμα αριστερών $\mathbb{Z}G$ -προτύπων.

Η συνομολογία Tate της ομάδας G με συντελεστή το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M ορίζεται ως

$$\hat{H}^n(G, M) = H^n(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{P}_*^*, M)).$$

Η ανεξαρτησία της επιλογής της πλήρους επίλυσης, και αυτή εμφανίζεται αναλυτικά στην παράγραφο των πλήρων επίλυσεων, οφείλεται στο γεγονός ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(A, P) = 0$ με A $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο \mathbb{Z} -ελεύθερο και P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Το τελευταίο ισχύει καθώς το επαγόμενο είναι ισόμορφο με το συνεπαγόμενο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο διότι η ομάδα G είναι πεπερασμένη, και η απόδειξη του ισομορφισμού αυτού εμφανίζεται στην παράγραφο της σχετικής ομολογίας. Έτσι, ο παραπάνω μηδενισμός προκύπτει από το λήμμα *Eckmann – Shapiro* που εκφράζει τη συνομολογία του $\mathbb{Z}G$ -προτύπου A με συντελεστή συνεπαγόμενο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο $\text{Coind}_1^G M$ μέσω της συνομολογίας του \mathbb{Z} -προτύπου $\text{res}_1^G A$ με συντελεστή το υποκείμενο \mathbb{Z} -πρότυπο M . Το προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P είναι ευθύς παράγοντας επαγόμενου $\mathbb{Z}G$ -προτύπου και χρησιμοποιούμε την προσθετικότητα του εν λόγω συναρτητή.

Επιπλέον ισχύει

$$\hat{H}^n(G, M) = \begin{cases} H^n(G, M), & n > 0 \\ H_{-n-1}(G, M), & n < -1 \end{cases}$$

και η ακόλουθη είναι ακριβής.

$$0 \longrightarrow \hat{H}^{-1}(G, M) \longrightarrow H_0(G, M) \xrightarrow{\sum_{g \in G} g} H^0(G, M) \longrightarrow \hat{H}^0(G, M) \longrightarrow 0$$

Η ομολογία στον ορισμό οφείλεται στον ισομορφισμό αβελιανών ομάδων $f' : P \otimes_{\mathbb{Z}G} M \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P^*, M)$

ώστε $f'(x \otimes m) : g \mapsto g(x) \circ m$ για M αριστερό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και P πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο το οποίο έχει δομή δεξιού $\mathbb{Z}G$ -προτύπου, δηλαδή, $P \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq P \otimes_{\mathbb{Z}G^{opp}} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$. Έτσι, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_*^*[1], M) \simeq P_*^*[1] \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, όπου με $[1]$ δηλώνουμε την ανάρτηση δεικτών του συμπλέγματος κατά ένα βαθμό.

Η ακρίβεια της ανωτέρω ακολουθίας οφείλεται στην ανεξαρτησία της επιλογής της πλήρους προβολικής επίλυσης, καθώς έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε μία προβολική επίλυση, P_* , που συμπληρώνεται με την απεικόνιση *augmentation*, ε , και τη δυϊκή της, P_*^* , ώστε το διαφορικό $\varepsilon^* \circ \varepsilon$, εφαρμόζοντας το συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, M)$, ορίζει την απεικόνιση $\sum_{g \in G} g : M \rightarrow M$ τέτοια ώστε $m \mapsto \sum_{g \in G} g \circ m$, μέσω του $\mathbb{Z}G$ -ισομορφισμού $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\cong} M$ ώστε $\phi \mapsto \phi(1)$ και $g \circ \phi \mapsto (g \circ \phi)(1) =$

$\phi(1 \circ g) = \phi(g) = g \circ \phi(1)$. Η εικόνα της απεικόνισης $\sum_{g \in G} g$ περιέχεται στην υποομάδα των G -αναλλοίωτων στοιχείων του M , και η ίδια απεικόνιση παραγοντοποιείται μέσω του συμπυρήνα της απεικόνισης $P_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\vartheta} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M)$. Επομένως, ορίζεται η απεικόνιση

$$\overline{\sum_{g \in G} g} : M_G = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M = H_0(G, M) \rightarrow H^0(G, M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) = M^G,$$

και υπολογίζοντας ομολογία στα εν λόγω συμπλέγματα έχουμε ότι $\text{Ker } \overline{\sum_{g \in G} g} = \widehat{H}^{-1}(G, M)$ και $\text{Coker } \overline{\sum_{g \in G} g} = \widehat{H}^0(G, M)$.

$$\begin{array}{ccccc} P_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{\vartheta} & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{(\varepsilon^* \circ \varepsilon)^*} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1, M) \\ & & \downarrow \pi & & \uparrow \mu & & \\ & & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{(\varepsilon^* \circ \varepsilon)^*} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) & & \end{array}$$

Παραπέμπουμε στο [7].

2.2 Συνομολογία Tate – Farrell.

Μία ομάδα G έχει πεπερασμένη *virtual* συνομολογική διάσταση n αν υπάρχει υποομάδα της ελεύθερης στρέψης πεπερασμένου δείκτη με συνομολογική διάσταση n . Οι υποομάδες μίας ομάδας που είναι ελεύθερες στρέψης πεπερασμένου δείκτη έχουν όλες ίδια συνομολογική διάσταση, άπειρη ή πεπερασμένη. Παραπέμπουμε στο θεώρημα του Serre στο [7]. Αυτή η κοινή διάσταση καλείται κατ' ουσίαν, και η ομάδα G καλείται κατ' ουσίαν ελεύθερη στρέψης.

Έστω ομάδα G με πεπερασμένη *virtual* συνομολογική διάσταση n . Μία πλήρης προβολική επίλυση για την G είναι μία διπλά άπειρη ακριβής ακολουθία προβολικών $\mathbb{Z}G$ -πρότυπων που συμπίπτει με μία προβολική επίλυση του \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο σε μεγάλες διαστάσεις. Δύο τέτοιες είναι ομοτοπικά ισόδυναμες και υπολογίζουν τη συνομολογία Farrell.

Η κατασκευή της δίδεται από την ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}[G/H] \xrightarrow{p_1} C \longrightarrow 0$, με H υποομάδα της G ελεύθερη στρέψης πεπερασμένου δείκτη και συνομολογικής διάστασης n . Εδώ η αγκίστρωση των συμπλεγμάτων γίνεται στη θέση n της προβολικής επίλυσης του \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, καθώς ο πυρήνας R_n είναι προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο και το $\mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}} R_n$ με τη διαγώνια δράση είναι ισόμορφο με το επαγόμενο $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} R_n$ που είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Η ανεξαρτησία της επιλογής της πλήρους επίλυσης οφείλεται στο γεγονός ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(A, P) = 0$ με A $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο \mathbb{Z} -ελεύθερο, P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και $i > n$.

Ιδιότητες της συνομολογίας Tate – Farrell.

1. $\widehat{H}^*(G, -) = 0$ αν η G είναι ελεύθερη στρέψης.

2. Η πλήρης συνομολογία $\widehat{H}^*(G, -)$ μηδενίζεται στα εμφυτευτικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα λόγω της ακρίβειας του συναρτητή $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, I)$ για I εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Επίσης μηδενίζεται στα προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα, ενώ πιά γενικά μηδενίζεται στα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα που είναι $\mathbb{Z}H$ -επαγόμενα, όπου η H είναι ελεύθερη στρέψης υποομάδα πεπερασμένου δείκτου.
3. Ισχύει το λήμμα *Eckmann – Shapiro*.
4. $Cor \circ Res = \times |G : H|$.
5. Κατασκευάζονται *cup products*.

Παραπέμπουμε στο [27], στο [7], καθώς επίσης και στην παράγραφο της σχετικής ομολογίας.

2.3 Πλήρεις επιλύσεις.

Ορισμός 2.3.1 *Μια πλήρης προβολική επίλυση του R -πρότυπου A είναι ένα ακριβές σύμπλεγμα προβολικών R -πρότυπων $(\mathbb{F}_*, \mathbb{P}_*, n)$, που φέρει δείκτες τους ακεραίους και συμπίπτει με μία προβολική επίλυση του πρότυπου σε μεγάλες διαστάσεις, με δείκτη σύμπτωσης n . Επιπλέον, $H^*(Hom_R(\mathbb{F}_*, Q)) = 0$ για κάθε προβολικό R -πρότυπο Q . Το τελευταίο χαρακτηρίζει την επίλυση ως *in the strong sense*.*

Όπως θα δούμε σε επόμενο θεώρημα για την ειδική περίπτωση όπου $A = \mathbb{Z}$ και $R = \mathbb{Z}G$, κάθε δύο πλήρεις ισχυρές προβολικές επιλύσεις ενός πρότυπου είναι ομοτοπικά ισοδύναμες. Δυστυχώς ορίζονται οι πλήρεις ισχυρές εμφυτευτικές επιλύσεις και κάθε δύο πλήρεις ισχυρές εμφυτευτικές επιλύσεις ενός πρότυπου είναι ομοτοπικά ισοδύναμες.

Η πρώτη προσέγγιση της προβολικής πλήρωσης του συναρτητή $Ext_R^*(-, -)$, και ο αυστηρός ορισμός θα δοθεί στην παράγραφο της πλήρους συνομολογίας κατά *Mislin*, είναι μέσω πλήρους ισχυρής προβολικής επίλυσης για το πρότυπο στην πρώτη μεταβλητή. Η πλήρωση είναι καλά ορισμένη, ανεξάρτητα από την επιλογή της πλήρους ισχυρής προβολικής επίλυσης και ορίζει το συναρτητή $\widehat{Ext}_R^*(A, -) = H^*(Hom_R(\mathbb{P}_*^A, -))$, όπου \mathbb{P}_*^A είναι πλήρης ισχυρή προβολική επίλυση του A . Η πλήρωση είναι τερματική με την έννοια ότι ταυτίζεται με τη συνήθη συνομολογία για μεγάλες διαστάσεις. Ο συναρτητής αυτός είναι συνομολογικός και μηδενίζεται στα προβολικά R -πρότυπα. Ομοίως ορίζεται η τερματική εμφυτευτική πλήρωση του συναρτητή $Ext_R^*(-, -)$ μέσω πλήρους ισχυρής εμφυτευτικής επίλυσης για το πρότυπο στη δεύτερη μεταβλητή. Η πλήρωση είναι καλά ορισμένη, ανεξάρτητα από την επιλογή της πλήρους ισχυρής εμφυτευτικής επίλυσης και ορίζει το συναρτητή $\widehat{Ext}_R^*(-, B) = H^*(Hom_R(-, \mathbb{I}_{c_B}^*))$, όπου $\mathbb{I}_{c_B}^*$ είναι πλήρης ισχυρή εμφυτευτική επίλυση του B . Ο συναρτητής αυτός είναι συνομολογικός και μηδενίζεται στα εμφυτευτικά R -πρότυπα.

Το ακόλουθο θεώρημα δηλώνει την ύπαρξη πλήρων ισχυρών προβολικών επιλύσεων ως ισοδύναμη με μία συνθήκη ομολογικής περατότητας μέσω των αναλλοίωτων *spliR* και *silpR*. Δυστυχώς ισχύει το θεώρημα για την ύπαρξη πλήρων ισχυρών εμφυτευτικών επιλύσεων.

Αρχικά δείχνουμε ότι αν οι αναλλοίωτες *silpR* και *spliR* είναι πεπερασμένες, τότε είναι ίσες. Πράγματι, έστω ότι *silpR* = m και *spliR* = n . Έστω ένα εμφυτευτικό R -πρότυπο I με προβολική διάσταση πεπερασμένη, n . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει R -πρότυπο B με $Ext_R^n(I, B) \neq 0$ και ο $Ext_R^n(I, -)$ είναι δεξιά ακριβής. Άρα, υπάρχει προβολικό πρότυπο P προβολικής παράστασης του B με $Ext_R^n(I, P) \neq 0$.

Επομένως η εμφυτευτική διάσταση του προβολικού αυτού R -προτύπου είναι τουλάχιστον n που σημαίνει ότι $\text{silp}R \geq \text{spli}R$. Ομοίως δείχνουμε και την άλλη σχέση.

Αναφέρουμε ότι αν οι παραπάνω διαστάσεις είναι πεπερασμένες, άρα και ίσες, τότε κάθε διπλά άπειρη προβολική ή εμφυτευτική επίλυση, που υπάρχει, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί η *terminal completion* του $\text{Ext}_R^*(-, -)$. Η τερματική πλήρωση του δισυναρτητή δηλώνει ουσιαστικά ότι η προβολική και η εμφυτευτική πλήρωση είναι φυσικά ισοδύναμες. Μία απόδειξη για αυτό εμφανίζεται στην παράγραφο που αφορά στην ισορροπία του δισυναρτητή. Με την ομολογική αυτή συνθήκη περατότητας, αποδεικνύουμε ακολούθως ότι αν $\text{spli}R < \infty$ τότε πράγματι κάθε R -πρότυπο A έχει πλήρη προβολική επίλυση και αν επιπλέον $\text{silp}R < \infty$ τότε αυτή είναι *in the strong sense*. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε τη δυϊκή πρόταση αυτού. Έτσι, ο δισυναρτητής $H^*(\text{Hom}_R(\mathbb{P}_*^c, -))$ μηδενίζεται στα προβολικά R -πρότυπα στη δεύτερη μεταβλητή, φυσικά μηδενίζεται στα εμφυτευτικά R -πρότυπα στην ίδια μεταβλητή, αλλά επιπλέον μηδενίζεται στα εμφυτευτικά R -πρότυπα στην πρώτη μεταβλητή καθώς η μηδενική πλήρης επίλυση ικανοποιεί τον ορισμό, και φυσικά μηδενίζεται στα προβολικά R -πρότυπα στην ίδια μεταβλητή. Δυϊκώς έχουμε για το δισυναρτητή $H^*(\text{Hom}_R(-, \mathbb{I}_c^*))$. Η τερματική τους ιδιότητα εξασφαλίζει, όπως προκύπτει από πρόταση στην παράγραφο της πλήρους συνομολογίας κατά *Mislin*, ότι οι εν λόγω δισυναρτητές είναι φυσικά ισοδύναμοι. Ακολουθεί το θεώρημα, ενώ ισχύει και το δυϊκό του μέσω πλήρων ισχυρών εμφυτευτικών επιλύσεων.

Θεώρημα 2.3.2 *Ισχύει $\text{spli}R = \text{silp}R < \infty \Leftrightarrow$ Κάθε R -πρότυπο έχει πλήρη προβολική επίλυση in the strong sense.*

Απόδειξη.

Θα δείξουμε ότι αν $\text{spli}R < \infty$ τότε κάθε R -πρότυπο A έχει πλήρη προβολική επίλυση. Αν επιπλέον $\text{silp}R < \infty$ τότε αυτή είναι *in the strong sense*. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε τη δυϊκή πρόταση αυτού.

Θεωρούμε μία εμφυτευτική επίλυση του A . Χρησιμοποιούμε το λήμμα *Horseshoe* και κατασκευάζουμε προβολικές επιλύσεις για τα πρότυπα της εμφυτευτικής επίλυσης. Καθώς $\text{spli}R < \infty$, έστω $\text{spli}R = m$, έχουμε ότι οι πυρήνες βαθμού m των προβολικών επιλύσεων που αφορούν στα εμφυτευτικά πρότυπα της εμφυτευτικής επίλυσης είναι προβολικά R -πρότυπα. Συνδέουμε το τμήμα της προβολικής επίλυσης για το A που φέρει τους δείκτες που υπερβαίνουν το δείκτη $m - 1$ με την ακολουθία των προβολικών πυρήνων των προβολικών επιλύσεων των εμφυτευτικών προτύπων της εμφυτευτικής επίλυσης του A . Προκύπτει έτσι πλήρης προβολική επίλυση για το A , $(\mathbb{F}_*, \mathbb{P}_*, m)$. Θεωρούμε Q ένα προβολικό R -πρότυπο. Έχουμε, για $n > m$, $H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{F}_*, Q)) = \text{Ext}_R^n(A, Q) = 0$ διότι $\text{silp}R = m$. Για $n \leq m$ χρησιμοποιούμε *dimension shifting* μέσω των πυρήνων που εμφανίζονται στην πλήρη επίλυση, S_n , $n \in \mathbb{Z}$, με $S_n \cong R_n$ για $n \geq m$, όπου R_n είναι οι πυρήνες της αρχικής προβολικής επίλυσης του A . Έχουμε $H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{F}_*, Q)) = \text{Ext}_R^n(T_0, Q) \simeq \text{Ext}_R^{n+(m-n+1)}(T_{-(m-n+1)}, Q) = \text{Ext}_R^{m+1}(T_{n-m-1}, Q) = 0$ διότι $\text{silp}R = m$. Έτσι, η πλήρης επίλυση είναι *in the strong sense*.

Αντίστροφα, για να δείξουμε ότι $\text{silp}R < \infty$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε προβολικό R -πρότυπο έχει πεπερασμένη εμφυτευτική διάσταση. Αυτό είναι αρκετό, καθώς το σύνολο των πεπερασμένων εμφυτευτικών διαστάσεων των προβολικών R -προτύπων παρουσιάζει φράγμα. Η απόδειξη αυτού εμφανίζεται στο θεώρημα που αφορά στην ισορροπία του δισυναρτητή Ext . Δυϊκώς, οφείλουμε να δείξουμε ότι η αναλλοίωτη $\text{spli}R$ είναι πεπερασμένη.

Αν κάθε R -πρότυπο έχει πλήρη προβολική επίλυση *in the strong sense* τότε και κάθε εμφυτευτικό R -πρότυπο I έχει τέτοια. Ο συναρτητής $\widehat{\text{Ext}}_R^*(A, -)$ υπολογίζεται μέσω πλήρους ισχυρής προβολικής επίλυσης και μηδενίζεται στα εμφυτευτικά R -πρότυπα, για κάθε A . Άρα και $\widehat{\text{Ext}}_R^0(I, I) = 0$. Στην

παράγραφο της προβολικής πλήρωσης του Ext κατά *Benson* και *Carlson*, καθώς και στην παράγραφο της φυσικής ισοδυναμίας των προβολικών πληρώσεων του συναρτητή, ο παραπάνω μηδενισμός δηλώνει ότι το I έχει πεπερασμένη προβολική διάσταση, καθώς η ταυτοτική απεικόνιση του συζυγούς προτύπου $\Omega^s I$ για κάποιο s θα παραγοντοποιείται μέσω προβολικού R -πρότυπου.

Έστω τώρα Q ένα προβολικό R -πρότυπο, και έστω τυχαίο R -πρότυπο M . Τότε, καθώς η προβολική πλήρωση δίδεται μέσω πλήρους ισχυρής επίλυσης, έχουμε ότι $Ext_R^k(M, Q) = 0$ για $k \geq n(M)$. Το n αυτό αφορά στο πρότυπο M , όμως το σύνολο αυτών των εκθετών αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι φραγμένο. Η νοοτροπία της απόδειξης τέτοιων φραγμάτων, όπως ήδη έχουμε αναφέρει ένα σημείο, εμφανίζεται στην πορεία της συγγραφής. Έπεται ότι η εμφυτευτική διάσταση του προβολικού R -πρότυπου Q είναι πεπερασμένη.

Το αντίστροφο επιδέχεται δυϊκότητα μέσω της ύπαρξης πλήρων ισχυρών εμφυτευτικών επιλύσεων. \square

Θεώρημα 2.3.3 $silp\mathbb{Z}G \leq spli\mathbb{Z}G + 1$.

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $spli\mathbb{Z}G < \infty$, έστω $spli\mathbb{Z}G = n$. Πρέπει να δείξουμε ότι τυχαίο προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P έχει εμφυτευτική διάσταση το πολύ $n + 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε διαιρετό \mathbb{Z} -πρότυπο D το $P \otimes_{\mathbb{Z}} D = \Delta$ έχει εμφυτευτική διάσταση το πολύ n . Διότι τότε, αν I^* είναι εμφυτευτική επίλυση του \mathbb{Z} ως \mathbb{Z} -πρότυπο μήκους 1, εφαρμόζοντας το συναρτητή $P \otimes_{\mathbb{Z}} -$ στην προσαρτημένη με τη συνομολογία της εμφυτευτική επίλυση προκύπτει βραχεία ακριβής $\mathbb{Z}G$ -ακολουθία $0 \rightarrow P \rightarrow P \otimes_{\mathbb{Z}} I^0 \rightarrow P \otimes_{\mathbb{Z}} I^1 \rightarrow 0$, και τότε θα έχουμε ότι $Ext_{\mathbb{Z}G}^r(-, P) = 0$ για $r > n + 1$ καθώς θα έχουμε $Ext_{\mathbb{Z}G}^r(-, P \otimes_{\mathbb{Z}} I^i) = 0$ για $r > n$ και $i = 0, 1$.

Θεωρούμε τις ακόλουθες ακριβείς $\mathbb{Z}G$ -ακολουθίες.

$$\mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\epsilon^*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$$

Η δεύτερη ακολουθία είναι \mathbb{Z} -διασπώμενη με τομή $s : Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} : f \mapsto f(1)$. Εφαρμόζουμε σε αυτήν το συναρτητή $Hom_{\mathbb{Z}}(-, \Delta)$ και προκύπτει η \mathbb{Z} -διασπώμενη $Hom_{\mathbb{Z}}(Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}), \Delta) \xrightarrow{\epsilon^{**}} \Delta \rightarrow 0$. Όμως όλα τα επαγόμενα πρότυπα είναι *relative projective*, και ο ορισμός είναι ο δυϊκός του σχετικά εμφυτευτικού που εμφανίζεται στην παράγραφο της σχετικής ομολογίας, καθώς ο συναρτητής $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} M, -)$ είναι φυσικά ισοδύναμος με τον $Hom_{\mathbb{Z}}(M, Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, -))$, όπου ο $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, -)$ είναι ο $resG$, και ο συναρτητής $Hom_{\mathbb{Z}}(M, Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, -))$ είναι ακριβής σε \mathbb{Z} -διασπώμενες ακολουθίες για κάθε $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M . Το ευθύ άθροισμα από σχετικά προβολικά πρότυπα είναι σχετικά προβολικό πρότυπο, και ο ευθύς παράγοντας ενός σχετικά προβολικού προτύπου είναι σχετικά προβολικό πρότυπο. Έτσι, το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο Δ είναι σχετικά προβολικό και η ακολουθία $Hom_{\mathbb{Z}}(Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}), \Delta) \xrightarrow{\epsilon^{**}} \Delta \rightarrow 0$ είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το $Hom_{\mathbb{Z}}(Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}), \Delta)$ έχει εμφυτευτική διάσταση το πολύ n .

Κατ' αρχάς, το $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$ έχει $\mathbb{Z}G$ -προβολική διάσταση το πολύ n . Πράγματι, αν I^* είναι εμφυτευτική επίλυση του \mathbb{Z} ως \mathbb{Z} -πρότυπο μήκους 1, τότε, εφαρμόζοντας το συναρτητή $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, -)$ στην προσαρτημένη με τη συνομολογία της εμφυτευτική επίλυση προκύπτει $\mathbb{Z}G$ -εμφυτευτική επίλυση του $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$. Αυτό ισχύει διότι το $\mathbb{Z}G$ είναι προβολικό \mathbb{Z} -πρότυπο και όταν εφαρμοστεί σε βραχεία ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων, η προκύπτουσα ακολουθία είναι ακριβής $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

με απεικονίσεις που διατηρούν την αριστερή δράση της G μέσω της δεξιάς δράσης της στο πρότυπο $\mathbb{Z}G$, και επιπλέον, το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, I)$ είναι εμφυτευτικό για κάθε διαιρετή αβελιανή ομάδα I . Καθώς $\text{spli}_{\mathbb{Z}G} = n$ έχουμε ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^r(\text{Hom}(\mathbb{Z}G, I^k), -) = 0$ για $r > n$ και $k = 0, 1$, και έπεται ότι η προβολική διάσταση του $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$ είναι το πολύ n . Το Δ είναι διαιρετό \mathbb{Z} -πρότυπο. Εφαρμόζουμε τον ακριβή συναρτητή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \Delta)$ στην προσαρτημένη με την ομολογία της προβολική επίλυση του $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$ μήκους n και προκύπτει εμφυτευτική επίλυση του $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}), \Delta)$ μήκους το πολύ n . Πράγματι, τα πρότυπα της προκύπτουσας επίλυσης τα θεωρούμε με τη διαγώνιο δράση, ενώ το $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \Delta)$ με τη διαγώνιο δράση είναι ισόμορφο με το $\mathbb{Z}G$ -εμφυτευτικό συνεπαγόμενο πρότυπο $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \Delta)$, μέσω των $\mathbb{Z}G$ -ισομορφισμών f και f' ώστε $f(g) : x \mapsto x^{-1} \circ (g(x))$ με $f(y \circ g)(x) = x^{-1} \circ ((y \circ g)(x)) = x^{-1} \circ (y \circ (g(y^{-1}x))) = (x^{-1}y) \circ (g(y^{-1}x)) = f(g)(y^{-1}x) = (y \circ (f(g)))(x)$, δηλώνοντας τις αντιστοιχίες $\mathbb{Z}G$ -δομές, και $f'(g)(x) = x \circ (g(x))$, με $x, y \in G$. Επομένως η επίλυση είναι εμφυτευτική, διότι αν P είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, τότε το $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \Delta)$ είναι ευθύς παράγοντας καρτεσιανού γινομένου συνεπαγόμενων προτύπων $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \Delta)$. \square

Ο κύριος Εμμανουήλ, στο άρθρο [20], *On Certain Cohomological Invariants of Groups*, αποδεικνύει το σημαντικό θεώρημα που δηλώνει την ισότητα των αναλλοίωτων $\text{silp}\mathbb{Z}G$ και $\text{spli}\mathbb{Z}G$.

Θεώρημα 2.3.4 *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. Υπάρχει πλήρης προβολική επίλυση *in the strong sense* του \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, $(\mathbb{F}_*, \mathbb{P}_*, n)$.
2. Η πλήρης συνομολογία είναι υπολογίσιμη μέσω πλήρους προβολικής επίλυσης.
3. Υπάρχει ακολουθία $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow A \rightarrow T \rightarrow 0$ $\mathbb{Z}G$ -ακριβής, \mathbb{Z} -διασπώμενη, με A \mathbb{Z} -ελεύθερο πρότυπο και προβολική διάσταση αυτού ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο πεπερασμένη.
4. Η ομάδα G έχει πλήρη προβολική επίλυση και $\text{silp}\mathbb{Z}G < \infty$.
5. Ισχύει το λήμμα *Eckmann – Shapiro* στην πλήρη συνομολογία.
6. $\text{spli}\mathbb{Z}G < \infty$

Η τρίτη υπόθεση είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη. Υπάρχει \mathbb{Z} -διασπώμενος $\mathbb{Z}G$ -μονομορφισμός $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} A$ με A \mathbb{Z} -ελεύθερο πρότυπο ώστε $\phi(i) = 0$ στην απεικόνιση $H^0(G, A) \xrightarrow{\phi} \widehat{H}^0(G, A)$. Αυτό αποδεικνύεται στο άρθρο [22] της κυρίας Ταλέλλη και του κυρίου Εμμανουήλ με τίτλο *Finiteness Criteria in Gorenstein Homological Algebra*.

Απόδειξη.

$1 \Rightarrow 2$: Δείχνουμε ότι κάθε δύο πλήρεις προβολικές επιλύσεις *in the strong sense* του \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο είναι ομοτοπικά ισοδύναμες. Και τότε $\widehat{H}^*(G, -) \simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{F}_*, -))$ καθώς ο δεύτερος συναρτητής είναι προβολικώς πλήρης και ταυτίζεται με τη συνομολογία της ομάδας σε μεγάλες διαστάσεις.

Πράγματι, έστω δύο επιλύσεις όπως προαναφέραμε, για τις οποίες μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αμφότερες συμπίπτουν με μία ίδια προβολική επίλυση ίδιου δείκτη σύμπτωσης, $(\mathbb{F}_*, \mathbb{P}_*, n)$ και $(\mathbb{Q}_*, \mathbb{P}_*, n)$. Θα δείξουμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση στο κοινό τμήμα των επιλύσεων επεκτείνεται στα δεξιά με τρόπο μοναδικό ως προς ομοτοπική ισοδυναμία, όπως απεικονίζεται παρακάτω.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F_{n+1} & \xrightarrow{\theta_{n+1}} & F_n & \xrightarrow{\theta_n} & F_{n-1} & \xrightarrow{\theta_{n-1}} & F_{n-2} & \xrightarrow{\theta_{n-2}} & \cdots \\
& & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} & & \\
\cdots & \longrightarrow & Q_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & Q_n & \xrightarrow{\delta_n} & Q_{n-1} & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & Q_{n-2} & \xrightarrow{\delta_{n-2}} & \cdots
\end{array}$$

Η ακολουθία $Hom_{\mathbb{Z}G}(F_{n-1}, Q_{n-1}) \xrightarrow{\theta_n^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(F_n, Q_{n-1}) \xrightarrow{\theta_{n+1}^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(F_{n+1}, Q_{n-1})$ είναι ακριβής στη θέση $Hom_{\mathbb{Z}G}(F_n, Q_{n-1})$ καθώς η επίλυση $(\mathbb{F}_*, \mathbb{P}_*, n)$ είναι *in the strong sense*. Για την απεικόνιση $\delta_n \circ 1 : F_n \rightarrow Q_{n-1}$ ισχύει ότι $\delta_n \circ 1 \circ \theta_{n+1} = 0$, άρα υπάρχει απεικόνιση f_{n-1} ώστε $f_{n-1} \circ \theta_n = \delta_n$. Ομοίως δείχνουμε την ύπαρξη των υπολοίπων απεικονίσεων προς τα δεξιά.

Έστω τώρα ότι και η απεικόνιση g_{n-1} επεκτείνεται επίσης την ταυτοτική. Θεωρούμε την εν τω μέσω ακριβή ακολουθία $Hom_{\mathbb{Z}G}(F_{n-2}, Q_{n-1}) \xrightarrow{\theta_{n-1}^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(F_{n-1}, Q_{n-1}) \xrightarrow{\theta_n^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(F_n, Q_{n-1})$. Τότε έχουμε $(g_{n-1} - f_{n-1}) \circ \theta_n = \delta_n - \delta_n = 0$, επομένως υπάρχει απεικόνιση σ_{n-2} ώστε $\sigma_{n-2} \circ \theta_{n-1} = g_{n-1} - f_{n-1}$.

Για την ομοτοπία στην επόμενη προς τα δεξιά θέση θεωρούμε αντίστοιχα την απεικόνιση $g_{n-2} - f_{n-2} - \delta_{n-1} \circ \sigma_{n-2} : F_{n-2} \rightarrow Q_{n-2}$. Τότε έχουμε $(g_{n-2} - f_{n-2} - \delta_{n-1} \circ \sigma_{n-2}) \circ \theta_{n-1} = \delta_{n-1} \circ g_{n-1} - \delta_{n-1} \circ f_{n-1} - \delta_{n-1} \circ \sigma_{n-2} \circ \theta_{n-1} = 0$, και η ομοτοπία στη θέση αυτή προκύπτει από την εν τω μέσω ακρίβεια της $Hom_{\mathbb{Z}G}(F_{n-3}, Q_{n-2}) \xrightarrow{\theta_{n-2}^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(F_{n-2}, Q_{n-2}) \xrightarrow{\theta_{n-1}^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(F_{n-1}, Q_{n-2})$.

Συνεχίζουμε ομοίως.

Εκτελώντας την ίδια διαδικασία αντιστρέφοντας τις θέσεις των επιλύσεων προκύπτουν οι επιθυμητές αντίστροφες προς τις παραπάνω ως προς ομοτοπία απεικονίσεις.

2 \Rightarrow 3: Έστω $(\mathbb{F}_*, \mathbb{P}_*, n)$ μία πλήρης προβολική επίλυση του \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Καθώς η πλήρης συνολογία υπολογίζεται μέσω αυτής έπεται ότι η ίδια είναι *in the strong sense*. Το επιχείρημα στην προηγούμενη συνεπαγωγή δίδει δεξιά επέκταση της ταυτοτικής του κοινού τμήματος των επιλύσεων όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα, στο οποίο εμφανίζονται και οι αντίστοιχοι πυρήνες αυτών. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η απεικόνιση \bar{f}_0 είναι επί. Πράγματι, θεωρούμε τη μεταθετικότητα του διαγράμματος που ορίζουν οι επεκτάσεις. Το αμέσως επόμενο τμήμα είναι τροποποιημένο ώστε να επιτύχουμε τον επιμορφισμό της \bar{f}_0 . Τροποποιούμε την τελευταία κάθετη απεικόνιση και συνεχίζουμε ομοίως την τροποποίηση.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
F_n & \xrightarrow{p_n} & K_n & \xrightarrow{i_n} & F_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & K_0 & \xrightarrow{i_0} & F_{-1} & \longrightarrow & K_{-1} \\
\downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_0 & & \downarrow \bar{f}_0 & & \downarrow \phi & & \downarrow 1 \\
P_n & \xrightarrow{\pi_n} & R_n & \xrightarrow{\mu_n} & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\mu} & Y & \longrightarrow & K_{-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
K_n & \xrightarrow{i_n} & F_{n-1} \oplus P_{n-1} & \xrightarrow{p_{n-1} \oplus 1} & K_{n-1} \oplus P_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1} \oplus 1} & F_{n-2} \oplus P_{n-1} \oplus P_{n-2} & \xrightarrow{p_{n-2} \oplus 0 \oplus 1} & K_{n-2} \oplus P_{n-2} & \xrightarrow{i_{n-2} \oplus 1} & F_{n-3} \oplus P_{n-2} \\
\downarrow 1 & & \downarrow f_{n-1} \oplus 1 & & \downarrow \bar{f}_{n-1} + \pi_{n-1} & & \downarrow f_{n-2} + \theta_{n-1} \oplus 1 & & \downarrow \bar{f}_{n-2} + \pi_{n-2} & & \downarrow f_{n-3} + \theta_{n-2} \\
R_n & \xrightarrow{\mu_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{\pi_{n-1}} & R_{n-1} & \xrightarrow{\mu_{n-1}} & P_{n-2} & \xrightarrow{\pi_{n-2}} & R_{n-2} & \xrightarrow{\mu_{n-2}} & P_{n-3}
\end{array}$$

Θεωρούμε το *push out*, Y , των \bar{f}_0 και i_0 . Τότε $0 = Coker \bar{f}_0 \simeq Coker \phi$, δηλαδή η ϕ είναι επί απεικόνιση, και καθώς η i_0 είναι μονομορφισμός έπεται το ίδιο και για τη μ . Η ακολουθία $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow Y \rightarrow K_{-1} \rightarrow 0$ είναι $\mathbb{Z}G$ -ακριβής. Το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο K_{-1} είναι ελεύθερο \mathbb{Z} -πρότυπο, άρα η τελευταία είναι

\mathbb{Z} -διασπώμενη, που καθιστά το Y ελεύθερο \mathbb{Z} -πρότυπο. Για να δείξουμε ότι $proj.dim.\mathbb{Z}G Y < \infty$ αρκεί να δείξουμε ότι $proj.dim.\mathbb{Z}G K < \infty$, όπου $K = Ker\phi$. Όμως $Ker\phi \simeq Ker\bar{f}_0$. Θεωρούμε τη $\mathbb{Z}G$ -ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow K \rightarrow K_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$. Έχουμε $Ext_{\mathbb{Z}G}^{n+s}(\mathbb{Z}, -) \simeq Ext_{\mathbb{Z}G}^s(R_n, -) = Ext_{\mathbb{Z}G}^s(K_n, -) \simeq Ext_{\mathbb{Z}G}^{n+s}(K_0, -)$ για $s > 0$, ενώ αυτοί οι ισομορφισμοί είναι οι επαγόμενοι f_0^* από την κατασκευασμένη απεικόνιση f_0 . Επομένως, $Ext_{\mathbb{Z}G}^{n+s}(K, -) = 0$ για $s > 0$.

3 \Rightarrow 4: Έστω ότι $proj.dim.\mathbb{Z}G A = m$. Θεωρούμε μία προβολική επίλυση του \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Z}$. Εφαρμόζουμε τον ακριβή συναρτητή $-\otimes_{\mathbb{Z}} A$ σε αυτήν, θεωρούμε διαγώνια δράση και προκύπτει προβολική επίλυση για το A . Τότε, το $R_m \otimes_{\mathbb{Z}} A$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, όπου R_m είναι ο πυρήνας της επίλυσης του \mathbb{Z} . Στην ακολουθία $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow A \rightarrow T \rightarrow 0$ εφαρμόζουμε το συναρτητή $R_m \otimes_{\mathbb{Z}} -$ και θεωρούμε διαγώνιο δράση. Συνδέουμε την προκύπτουσα \mathbb{Z} -διασπώμενη ακολουθία με το άνω τμήμα της αρχικής προβολικής επίλυσης, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_{m+1} & \longrightarrow & P_m & \longrightarrow & R_m \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow R_m \otimes_{\mathbb{Z}} T \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \searrow \nearrow \\ & & & & & & R_m \end{array}$$

Το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο $R_m \otimes_{\mathbb{Z}} T$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα, και συνεχίζουμε τη διαδικασία ομοίως. Πάλι, το πρότυπο $R_m \otimes_{\mathbb{Z}} T \otimes_{\mathbb{Z}} A$, με διαγώνιο δράση, είναι $\mathbb{Z}G$ -προβολικό. Συνεχίζουμε ομοίως.

Για να δείξουμε τώρα ότι $silp\mathbb{Z}G < \infty$, πρέπει να δείξουμε ότι τυχαίο προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P έχει εμφυτευτική διάσταση πεπερασμένη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε διαιρετό πρότυπο D το $P \otimes_{\mathbb{Z}} D = \Delta$ έχει εμφυτευτική διάσταση πεπερασμένη. Διότι τότε αν I^* είναι εμφυτευτική επίλυση του \mathbb{Z} ως \mathbb{Z} -πρότυπο μήκους 1, εφαρμόζοντας το συναρτητή $P \otimes_{\mathbb{Z}} -$ στην προσαρτημένη με τη συνομολογία της εμφυτευτική επίλυση προκύπτει βραχεία ακριβής $\mathbb{Z}G$ -ακολουθία $0 \rightarrow P \rightarrow P \otimes_{\mathbb{Z}} I^0 \rightarrow P \otimes_{\mathbb{Z}} I^1 \rightarrow 0$.

Θεωρούμε το \mathbb{Z} -διασπώμενο μονομορφισμό $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} A$ και εφαρμόζουμε το συναρτητή $Hom_{\mathbb{Z}}(-, \Delta)$. Προκύπτει η \mathbb{Z} -διασπώμενη $Hom_{\mathbb{Z}}(A, \Delta) \xrightarrow{\mu^*} \Delta \rightarrow 0$. Όμως όλα τα επαγόμενα πρότυπα είναι *relative projective*, και το Δ είναι ευθύς προσθετός τέτοιου. Άρα η τελευταία είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι το $Hom_{\mathbb{Z}}(A, \Delta)$ έχει εμφυτευτική διάσταση πεπερασμένη. Όμως το A έχει πεπερασμένη προβολική διάσταση και το Δ είναι διαιρετό \mathbb{Z} -πρότυπο. Προκύπτει έτσι ότι το $Hom_{\mathbb{Z}}(A, \Delta)$ έχει εμφυτευτική διάσταση πεπερασμένη καθώς ο συναρτητής $Hom_{\mathbb{Z}}(-, \Delta)$ είναι ακριβής, και διότι το $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \Delta)$ με τη διαγώνιο δράση είναι ισόμορφο με το εμφυτευτικό συνεπαγόμενο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \Delta)$.

4 \Rightarrow 5: Χρησιμοποιούμε το θεώρημα του κυρίου Εμμανουήλ που αποδεικνύει ότι $silp\mathbb{Z}G < \infty \Rightarrow spli\mathbb{Z}G < \infty$. Και τότε κάθε $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο έχει πλήρη προβολική επίλυση *in the strong sense*. Ο περιορισμός μίας τέτοιας επίλυσης σε μία υποομάδα H της G είναι επίσης πλήρης προβολική επίλυση *in the strong sense*, καθώς $silp\mathbb{Z}H \leq silp\mathbb{Z}G < \infty$. Επομένως ισχύει το λήμμα *Eckmann – Shapiro* στην πλήρη συνομολογία.

5 \Rightarrow 6: Ισχύει λοιπόν ότι $\widehat{Ext}_{\mathbb{Z}G}^*(A, Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, B)) \simeq \widehat{Ext}_{\mathbb{Z}H}^*(A|_{\mathbb{Z}H}, B)$, με H υποομάδα της G , για κάθε $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο A και για κάθε $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο B , ενώ ο αυστηρός ορισμός της πλήρους συνομολογίας θα δοθεί στην παράγραφο της πλήρους συνομολογίας κατά *Mislin*. Για $H = 1$, έχουμε $\widehat{Ext}_{\mathbb{Z}G}^0(A, Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, B)) \simeq \widehat{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(A|_{\mathbb{Z}}, B) = 0$ καθώς $proj.dim.\mathbb{Z}A < \infty$. Αυτό ισχύει διότι αν

$proj.dim._R M < \infty$ συνεπάγεται ότι $\widehat{Ext}_R^i(M, -) = 0$ για κάθε ακέραιο i , για κάθε δακτύλιο R , καθώς η μηδενική πλήρης προβολική επίλυση είναι ισχυρή και ικανοποιεί τον ορισμό.

Επομένως έχουμε $\widehat{Ext}_{\mathbb{Z}G}^0(A, Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} A)) = 0$. Θεωρούμε την κανονική εμφύτευση $A \hookrightarrow Coin_1^G Res_1^G A = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} A)$, που είναι ρητή στην παράγραφο της σχετικής ομολογίας. Τότε,

αν το A είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, αυτή η εμφύτευση είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη. Άρα $\widehat{Ext}_{\mathbb{Z}G}^0(I, I) = 0$ για I εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, και όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο μηδενισμός αυτός δηλώνει ότι η ταυτοτική απεικόνιση του $\Omega^s I$ για κάποιο s παραγοντοποιείται μέσω προβολικού $\mathbb{Z}G$ -πρότυπου, και έτσι $proj.dim._{\mathbb{Z}G} I < \infty$.

6 \Rightarrow 1: Έπεται από τα δύο προηγούμενα θεωρήματα και τη σημείωση ότι αν $spliR$ και $silpR$ είναι πεπερασμένα τότε είναι ίσα. □

Θεώρημα 2.3.5 *Αν υπάρχει πλήρης προβολική επίλυση του \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, $(\mathbb{F}_*, \mathbb{P}_*, n)$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*

1. Υπάρχει εκθέτης k και P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο με $H^k(G, P) \neq 0$.
2. Η *finitistic dimension* της G είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

1. Κατ' αρχάς, ο συναρτητής $H^0(G, -)$ είναι φυσικά ισοδύναμος με τον $-^G$, όπου M^G είναι το υποπρότυπο του M των G -αναλλοίωτων στοιχείων. Αν η G είναι πεπερασμένη, τότε $H^0(G, \mathbb{Z}G) = \mathbb{Z}G^G \neq 0$. Έστω λοιπόν ότι η ομάδα είναι άπειρη. Τότε $H^0(G, \mathbb{Z}G) = \mathbb{Z}G^G = 0$. Άρα $H^0(G, P) = 0$ για κάθε προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P , καθώς αν ήταν $(\bigoplus_I \mathbb{Z}G)^G \neq 0$ θα σήμαινε ότι $(\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}G)^G \neq 0$ για κάποιο m . Επιπλέον $H^0(G, K_i) = 0$ για κάθε ακέραιο i , όπου K_i είναι οι πυρήνες που εμφανίζονται στη διπλά άπειρη προβολική επίλυση, \mathbb{F}_* , καθώς $K_i^G \subseteq F_{i-1}^G = 0$.

Έστω τώρα ότι $H^i(G, P) = 0$ για κάθε προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P και κάθε $i \leq n$. Αν R_i είναι οι πυρήνες που εμφανίζονται στην προβολική επίλυση \mathbb{P}_* , τότε

$$\mathbb{Z} = H^0(G, \mathbb{Z}) \simeq H^1(G, R_1) \simeq H^2(G, R_2) \simeq \dots \simeq H^n(G, R_n) = H^n(G, K_n) \simeq \dots \simeq H^0(G, K_0) = 0,$$

που είναι άτοπο. Άρα υπάρχει προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο κάποιας από τις δύο επιλύσεις και εκθέτης διάφορος του μηδενικού που δεν υπερβαίνει το δείκτη σύμπτωσης ώστε να ισχύει η πρόταση.

2. Θεωρούμε ένα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο A με $proj.dim._{\mathbb{Z}G} A < \infty$ και επιπλέον να είναι ελεύθερο \mathbb{Z} -πρότυπο. Εφαρμόζουμε τον ακριβή συναρτητή $-\otimes_{\mathbb{Z}} A$ στην προβολική και στην πλήρη προβολική επίλυση του \mathbb{Z} , θεωρούμε διαγώνιο δράση και προκύπτει πλήρης προβολική επίλυση του A βαθμού σύμπτωσης n . Καθώς $proj.dim._{\mathbb{Z}G} A < \infty$ έπεται ότι η διπλά άπειρη προβολική ακολουθία για το A είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με τη μηδενική ήτοι είναι συσταλτή και έτσι οι πυρήνες αυτής είναι προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα. Καθώς ο n -οστός πυρήνας της διπλά άπειρης επίλυσης ταυτίζεται με τον αντίστοιχο της προβολικής έπεται ότι $proj.dim._{\mathbb{Z}G} A \leq n$.

Έστω τώρα ότι το A δεν είναι ελεύθερο \mathbb{Z} -πρότυπο. Θεωρούμε τη $\mathbb{Z}G$ -παράσταση $0 \rightarrow R_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$. Καθώς το P_0 είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και $\text{proj.dim.}_{\mathbb{Z}G} A < \infty$ έπεται ότι $\text{proj.dim.}_{\mathbb{Z}G} R_1 < \infty$ και βέβαια το R_1 είναι ελεύθερο \mathbb{Z} -πρότυπο. Άρα, $\text{proj.dim.}_{\mathbb{Z}G} R_1 \leq n$ και $\text{proj.dim.}_{\mathbb{Z}G} A \leq n + 1$. □

Το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη ομάδων που δεν επιδέχονται πλήρη προβολική επίλυση. Για παράδειγμα, η ελεύθερη αβελιανή ομάδα άπειρης διάστασης G δεν επιδέχεται πλήρη προβολική επίλυση καθώς ισχύει $H^i(G, P) = 0$ για κάθε φυσικό δείκτη i και κάθε προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P .

Επομένως, όποια ομάδα έχει ως υποομάδα την ελεύθερη αβελιανή άπειρης διάστασης, επίσης δεν επιδέχεται πλήρη προβολική επίλυση. Τέτοιες ομάδες, για παράδειγμα, είναι οι πεπερασμένα παριστώμενες άπειρες ομάδες *Thompson*. Παραθέτουμε την πιο γνωστή, $F = \langle x_0, x_1, x_2, \dots | x_k^{-1} \cdot x_n \cdot x_k = x_{n+1}, k < n \rangle$, και παραπέμπουμε στο [8].

3 Η προβολική και η εμφυτευτική πλήρωση του συνομολογικού δισυναρτητή Ext .

3.1 Δορυφόροι.

Θεωρούμε ένα συναλλοίωτο συναρτητή $T : R - Mod \rightarrow Abelian \ Groups$ προσθετικό. Έστω το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα, με προβολική παράσταση του προτύπου A και κάποια παράσταση του A_1 , και g ομομορφισμός προτύπων.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{a} & P & \xrightarrow{b} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{a_1} & P_1 & \xrightarrow{b_1} & A_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Το P είναι προβολικό πρότυπο και η απεικόνιση b_1 επί, επομένως υπάρχει, όχι μοναδική, απεικόνιση f ώστε το δεξιό τετράγωνο του διαγράμματος να είναι μεταθετικό. Από καθολική ιδιότητα του πυρήνα ορίζεται μοναδικά και η f' . Εφαρμόζοντας το συναλλοίωτο συναρτητή T προκύπτει το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & KerT(a) & \xrightarrow{\mu} & TM & \xrightarrow{T(a)} & TP & & \\ & & \Theta(g) \downarrow & & T(f') \downarrow & & \downarrow T(f) & & \\ 0 & \longrightarrow & KerT(a_1) & \xrightarrow{\mu_1} & TM_1 & \xrightarrow{T(a_1)} & TP_1 & & \end{array}$$

Ο ομομορφισμός $\Theta(g)$ είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της f . Πράγματι, αν η ϕ επεκτείνει επίσης την g τότε η $\phi - f$ παραγοντοποιείται μέσω του πυρήνα της b_1 με τη μοναδική h , η οποία βέβαια παραγοντοποιεί την $\phi' - f'$ μέσω του προτύπου P , όπως φαίνεται στο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{a} & P & \xrightarrow{b} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & f' \downarrow \phi' & \searrow h & f \downarrow \phi & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{a_1} & P_1 & \xrightarrow{b_1} & A_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Θεωρώντας την αντίστοιχη απεικόνιση $\Theta'(g)$ που ορίζεται μέσω της $T(\phi')$ όπως φαίνεται στο σχήμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & KerT(a) & \xrightarrow{\mu} & TM & \xrightarrow{T(a)} & TP \\ & & \Theta(g)\downarrow\Theta'(g) & & T(f')\downarrow T(\phi') & & \downarrow T(f) \\ 0 & \longrightarrow & KerT(a_1) & \xrightarrow{\mu_1} & TM_1 & \xrightarrow{T(a_1)} & TP_1 \end{array}$$

έχουμε $T(\phi') \circ \mu = (T(f') + T(h \circ a)) \circ \mu = T(f') \circ \mu + T(h) \circ T(a) \circ \mu$ με $T(a) \circ \mu = 0$, άρα $\mu_1 \circ \Theta(g) = \mu_1 \circ \Theta'(g)$ και η μ_1 είναι αριστερά διαγράψιμη.

Επιπλέον, ο $KerT(a)$ είναι μοναδικός ως προς ισομορφισμό. Πράγματι, έστω δύο προβολικές παραστάσεις του προτύπου όπως φαίνονται στο επόμενο σχήμα, καθώς επίσης και το επαγόμενο αυτού.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{a} & P & \xrightarrow{b} & A \longrightarrow 0 \\ & & f'\downarrow & & f\downarrow & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{c} & Q & \xrightarrow{d} & A \longrightarrow 0 \\ & & j'\downarrow & & j\downarrow & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{a} & P & \xrightarrow{b} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & KerT(a) & \xrightarrow{\mu_P} & TM & \xrightarrow{T(a)} & TP \\ & & \Theta_P(1)\downarrow & & T(f')\downarrow & & \downarrow T(f) \\ 0 & \longrightarrow & KerT(c) & \xrightarrow{\mu_Q} & TN & \xrightarrow{T(c)} & TQ \\ & & \Theta_Q(1)\downarrow & & T(j')\downarrow & & \downarrow T(j) \\ 0 & \longrightarrow & KerT(a) & \xrightarrow{\mu_P} & TM & \xrightarrow{T(a)} & TP \end{array}$$

Ο κανόνας Θ , όπως ορίστηκε για τον ομομορφισμό g δύο προτύπων, αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι προσθετικός και διατηρεί την ταυτοτική καθώς και τη σύνθεση απεικονίσεων. Έτσι, οι $\Theta_Q(1)$ και $\Theta_P(1)$ είναι ισομορφισμοί, άρα και οι $KerT(a)$ και $KerT(c)$ είναι ισόμορφοι. Καλούμε αυτόν τον πυρήνα πρώτο αριστερό δορυφόρο του συναλλοίωτου συναρτητή T και συμβολίζουμε με $S^{-1}TA := KerT(a)$. Επομένως ο κανόνας $S^{-1}T$ με $S^{-1}T(g) := \Theta(g)$ είναι συναρτητής συναλλοίωτος, προσθετικός και δρα στις κατηγορίες που δρα και ο T . Επαγωγικά ορίζονται και οι υπόλοιποι δορυφόροι. Έχουμε $S^0T = T$ και $S^{-n}T = S^{-1}(S^{-n+1}T)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Διαλέγουμε να χρησιμοποιούμε, για ένα πρότυπο A , αυτήν την προβολική επίλυση με προβολικό να είναι το ελεύθερο R -πρότυπο με βάση το υποκείμενο σύνολο του A , ήτοι

$$0 \longrightarrow \Omega A \longrightarrow FA \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Αν το A είναι προβολικό, τότε η παραπάνω είναι διασπώμενη, έτσι, ο πρώτος αριστερός δορυφόρος μηδενίζεται στα προβολικά R -πρότυπα. Ομοίως ισχύει και για τους υπόλοιπους δορυφόρους. Επιπλέον έχουμε ότι

$$S^{-(n+1)}TA = S^{-n}T\Omega A$$

Πράγματι, αν $L = S^{-n}T$, $n \geq 1$, τότε, με δεδομένη την ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow \Omega A \longrightarrow FA \longrightarrow A \longrightarrow 0$, θεωρούμε την ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow S^{-1}LA \xrightarrow{\cong} L\Omega A \longrightarrow LFA$.

Πρόταση 3.1.1 Έστω $T : R - Mod \rightarrow Abelian \ Groups$ ένας συναλλοίωτος προσθετικός συναρτητής. Τότε, η οικογένεια των αριστερών δορυφόρων του αποτελεί συνδεδεμένη ακολουθία συναρτητών και επιπλέον, αν ο συναρτητής είναι και εν τω μέσω ακριβής η οικογένεια αποτελεί συναλλοίωτο συνολογικό συναρτητή.

Απόδειξη.

Ως προς το συνδεδετικό ομομορφισμό δ , θεωρούμε τα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{a} & P & \xrightarrow{b} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\kappa} & A & \xrightarrow{\lambda} & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & KerT(a) & \xrightarrow{\mu} & TM & \xrightarrow{T(a)} & TP & & \\ & & \Theta(1) \downarrow & \searrow \delta & T(f') \downarrow & & \downarrow T(f) & & \\ 0 & \longrightarrow & KerT(\kappa) & \xrightarrow{\iota} & TA' & \xrightarrow{T(\kappa)} & TA & & \end{array}$$

Ο συνδεδετικός ομομορφισμός δ είναι ακριβώς η διαγώνιος του αριστερού μεταθετικού τετραγώνου. Προκύπτει έτσι η ακολουθία

$$\dots \xrightarrow{S^{-2}T(\lambda)} S^{-2}TA'' \xrightarrow{\delta} S^{-1}TA' \xrightarrow{S^{-1}T(\kappa)} S^{-1}TA \xrightarrow{S^{-1}T(\lambda)} S^{-1}TA'' \xrightarrow{\delta} TA' \xrightarrow{T(\kappa)} TA \xrightarrow{T(\lambda)} TA''.$$

Η $\delta \circ S^{-1}T(\lambda)$ είναι η μηδενική απεικόνιση όπως φαίνεται παρακάτω. Για τις υπόλοιπες διαδοχικές συνθέσεις το ζητούμενο έπεται από τα προηγούμενα μεταθετικά διαγράμματα.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{a} & P & \xrightarrow{b} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \lambda & & \\ 0 & \longrightarrow & M'' & \xrightarrow{a''} & P'' & \xrightarrow{b''} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\kappa} & A & \xrightarrow{\lambda} & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{a} & P & \xrightarrow{b} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \circ \downarrow & & \circ \downarrow & & \downarrow \lambda & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\kappa} & A & \xrightarrow{\lambda} & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Η $\delta \circ S^{-1}T(\lambda) = \iota \circ \Theta(1) \circ \Theta(\lambda)$ και προκύπτει από επέκταση της λ .

Ως προς τη φυσικότητα της μακράς ακολουθίας, για το εξής μεταθετικό διάγραμμα ακριβών ακολουθιών

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{a'} & A & \xrightarrow{a} & A'' \longrightarrow 0 \\
& & \phi \downarrow & & \chi \downarrow & & \downarrow \psi \\
0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\beta'} & B & \xrightarrow{\beta} & B'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

έχουμε ουσιαστικά να ελέγξουμε τη μεταθετικότητα του τετραγώνου που αφορά στους συνδετικούς ομομορφισμούς δ , που είναι το ακόλουθο.

$$\begin{array}{ccc}
S^{-1}TA'' & \xrightarrow{\delta} & TA' \\
S^{-1}T(\psi) \downarrow & & \downarrow T(\phi) \\
S^{-1}TB'' & \xrightarrow{\delta} & TB'
\end{array}$$

Από τα παρακάτω μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{b} & A'' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \psi \\
0 & \longrightarrow & M'' & \xrightarrow{a''} & P'' & \xrightarrow{b''} & B'' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 \\
0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\beta'} & B & \xrightarrow{\beta} & B'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{b} & A'' \longrightarrow 0 \\
& & \rho \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{a'} & A & \xrightarrow{a} & A'' \longrightarrow 0 \\
& & \phi \downarrow & & \chi \downarrow & & \downarrow \psi \\
0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\beta'} & B & \xrightarrow{\beta} & B'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

προκύπτουν τα ακόλουθα αντίστοιχα μεταθετικά διαγράμματα,

$$\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & S^{-1}TA'' \longrightarrow TM \\
& & \Theta(\psi) \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
0 & \longrightarrow & S^{-1}TB'' \longrightarrow TM'' \\
& & \Theta(1) \downarrow \quad \searrow \delta \quad \downarrow \\
0 & \longrightarrow & KerT(\beta') \xrightarrow{\mu'} TB'
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & S^{-1}TA'' \longrightarrow TM \\
& & \Theta(1) \downarrow \quad \searrow \delta \quad \downarrow \\
0 & \longrightarrow & KerT(\alpha') \xrightarrow{\mu} TA' \\
& & T(\phi)|KerT(\alpha') \downarrow \qquad \qquad T(\phi) \downarrow \\
0 & \longrightarrow & KerT(\beta') \xrightarrow{\mu'} TB'
\end{array}$$

και έχουμε ότι $\delta \circ S^{-1}T(\psi) = \mu' \circ \Theta(1) \circ \Theta(\psi) = \mu' \circ \Theta(1 \circ \psi) = \mu' \circ \Theta(\psi \circ 1) = \mu' \circ T(\phi \circ \rho) | S^{-1}TA'' = \mu' \circ T(\phi) | Ker T(\alpha') \circ T(\rho) | S^{-1}TA'' = \mu' \circ T(\phi) | Ker T(\alpha') \circ \Theta(1) = T(\phi) \circ \mu \circ \Theta(1) = T(\phi) \circ \delta$, όπου μ' είναι ο πυρήνας της $T\beta'$ και μ είναι ο πυρήνας της $T\alpha'$.

Στην περίπτωση που ο συναρτητής T είναι εν τω μέσω ακριβής η μακρά ακολουθία των δορυφόρων είναι επιπλέον ακριβής. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε το λήμμα του φιδιού καθώς επίσης και την πρόταση κατά την οποία μία ακριβής ακολουθία προτύπων εμφυτεύεται σε ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες που αποτελείται από προβολικές παραστάσεις των προτύπων της αρχικής ακολουθίας. Θεωρούμε λοιπόν το εν λόγω μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\kappa} & A & \xrightarrow{\lambda} & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Εφαρμόζοντας το συναρτητή T προκύπτει το επόμενο μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές, και από το λήμμα του φιδιού έχουμε την ακρίβεια στη θέση $S^{-1}TA$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & TM' & \longrightarrow & TM & \longrightarrow & TM'' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & TP' & \longrightarrow & TP & \longrightarrow & TP''
 \end{array}$$

Προκύπτει έτσι ότι όλοι οι δορυφόροι είναι και αυτοί εν τω μέσω ακριβείς.

Για την ακρίβεια στη θέση $S^{-1}TA''$ θεωρούμε μία προβολική παράσταση του προτύπου A και λαμβάνουμε έτσι προβολική παράσταση για το πρότυπο A'' . Και οι δύο εμφυτεύονται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα διασταυρωμένες.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\tau} & K & \xrightarrow{\rho} & A' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \mu'' & & \downarrow \kappa \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{a} & P & \xrightarrow{\beta} & A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \lambda \circ \beta & & \downarrow \lambda \\
 & & 0 & \longrightarrow & A'' & \xrightarrow{1} & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Προκύπτουν έτσι τα εξής μεταθετικά διαγράμματα με ακριβείς γραμμές και στήλες.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\tau} & K & \xrightarrow{\rho} & A' \longrightarrow 0 \\
& & a\downarrow & & \downarrow \mu'' & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{1} & P & \longrightarrow & 0 \\
& & \beta\downarrow & & \downarrow \lambda \circ \beta & & \\
& & A & \xrightarrow{\lambda} & A'' & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & S^{-1}TA & \xrightarrow{S^{-1}T(\lambda)} & S^{-1}TA'' & \xrightarrow{T(\rho) \circ \mu_{A''}} & TA' \\
& & \mu_A \downarrow & & \mu_{A''} \downarrow & & \downarrow 1 \\
& & TM & \xrightarrow{T(\tau)} & TK & \xrightarrow{T(\rho)} & TA' \\
& & T(a)\downarrow & & T(\mu'')\downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & TP & \xrightarrow{1} & TP & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Η ζητούμενη ακρίβεια προκύπτει, καθώς επεκτείνουμε την ταυτοτική απεικόνιση μέσω της β στην ρ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, και έτσι η δ ισούται με την $T(\rho) \circ \mu_{A''}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\mu''} & P & \xrightarrow{\lambda \circ \beta} & A'' \longrightarrow 0 \\
& & \rho\downarrow & & \beta\downarrow & & \downarrow 1 \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\kappa} & A & \xrightarrow{\lambda} & A'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

Μένει να ελέγξουμε ακρίβεια στη θέση TA' . Θεωρούμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα στο οποίο η τρίτη στήλη είναι προβολική παράσταση και έτσι η δεύτερη γραμμή είναι διασπώμενη.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 0 & & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{1} & M \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \mu' \downarrow & & \downarrow \psi' \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\iota_{A'}} & Y & \xrightarrow[\substack{\cong \\ p_R}]{s} & P \longrightarrow 0 \\
& & 1\downarrow & h\swarrow & p_A\downarrow & \swarrow f & \downarrow \psi \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\kappa} & A & \xrightarrow{\lambda} & A'' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Το Y είναι το *pull back* των λ και ψ , η $\mu' : m \mapsto (0, \psi'(m))$ και η $\iota_{A'} : x \mapsto (\kappa(x), 0)$. Εφαρμόζουμε το συναρτητή T και προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα ακριβών γραμμών.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & \longrightarrow & TM & \longrightarrow & TM \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & T(\mu')\downarrow & & \downarrow T(\psi') \\
0 & \longrightarrow & TA' & \xrightarrow{T(\iota_{A'})} & TY & \xrightarrow{T(p_R)} & TP
\end{array}$$

Επομένως επάγεται η ακόλουθη ακριβής ακολουθία.

$$S^{-1}TA'' \xrightarrow{\delta'} TA' \xrightarrow{\phi} \text{Coker}T\mu'$$

Ο έλεγχος της ακρίβειας επιτυγχάνεται δείχνοντας ότι η δ' ισούται με τη $-\delta$ και ότι οι πυρήνες των $T\kappa$ και ϕ είναι ισόμορφοι. Για τη δεύτερη σχέση έχουμε

$$\text{Ker}\phi = \{x \in TA' \mid \pi \circ T(\iota_{A'})(x) = 0 \Leftrightarrow T(\iota_{A'})(x) \in \text{Im}T(\mu') = \text{Ker}T(p_A)\}$$

καθώς ο T είναι εν τω μέσω ακριβής, $\phi = \pi \circ T(\iota_{A'})$, και

$$\text{Ker}T(\kappa) = \{x \in TA' \mid T(p_A \circ \iota_{A'})(x) = 0 \Leftrightarrow T(\iota_{A'})(x) \in \text{Ker}T(p_A)\}.$$

Στο σχήμα, η f παραγοντοποιεί την ψ ώστε $\lambda \circ f = \psi$, καθώς το P είναι προβολικό R -πρότυπο, και η h παραγοντοποιεί την $f \circ p_P - p_A$ ήτοι $\kappa \circ h = f \circ p_P - p_A$. Επιπλέον ορίζεται η $s : P \rightarrow Y$ με $s(p) = (f(p), p)$ και ισχύει ότι $1_Y = s \circ p_P - \iota_{A'} \circ h$, από τον ορισμό της $\iota_{A'}$. Πράγματι, $(s \circ p_P)(a, p) = s(p) = (f(p), p)$ και $(\iota_{A'} \circ h)(a, p) = ((\kappa \circ h)(a, p), 0) = ((f \circ p_P - p_A)(a, p), 0) = (f(p) - a, 0)$. Η επέκταση της ταυτοτικής είναι η $h \circ \mu'$ όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\psi'} & P & \xrightarrow{\psi} & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & h \circ \mu' \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\kappa} & A & \xrightarrow{\lambda} & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις υπολογίζουμε ότι $T(\iota_{A'}) \circ \delta = T(\iota_{A'}) \circ (-\delta')$ ενώ η $T(\iota_{A'})$ είναι αριστερά διαγράψιμη, αφού το P είναι προβολικό R -πρότυπο.

Πράγματι, έχουμε $\iota_{A'} \circ h = s \circ p_P - 1_Y$.

$$T(\iota_{A'}) \circ \delta = T(\iota_{A'}) \circ T(h) \circ T(\mu') \circ \varepsilon = T(s \circ p_P - 1_Y) \circ T(\mu') \circ \varepsilon = T(s \circ p_P \circ \mu' - \mu') \circ \varepsilon =$$

$T(s \circ \psi' - \mu') \circ \varepsilon = -T(\mu') \circ \varepsilon$, όπου ε είναι η εμφύτευση στην ακολουθία $S^{-1}TA'' \xrightarrow{\varepsilon} TM \xrightarrow{T(\psi')} TP$, και $T(\iota_{A'}) \circ \delta' = T(\mu') \circ \varepsilon$. □

Πρόταση 3.1.2 Έστω $T = \{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $V = \{V^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συνδεδεμένες ακολουθίες συναλλοίωτων συνολογικών συναρτητών με V^{-n} , $n < 0$, να μηδενίζονται στα προβολικά πρότυπα. Τότε, ένας φυσικός μετασχηματισμός $\phi^0 : T^0 \rightarrow V^0$ επεκτείνεται μοναδικά σε φυσικό μετασχηματισμό $\phi^{\leq 0} : T^{\leq 0} \rightarrow V^{\leq 0}$.

Απόδειξη.

Ορίζουμε ϕ_A^{-1} για κάποιο πρότυπο A μέσω προβολικής παράστασης αυτού.

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a} P \xrightarrow{b} A \longrightarrow 0$$

Θεωρούμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα από το οποίο ορίζεται μοναδικά η απεικόνιση ϕ_A^{-1} .

$$\begin{array}{ccccccc} T^{-1}A & \xrightarrow{\delta} & T^0M & \xrightarrow{T^0(a)} & T^0P & & \\ \phi_A^{-1} \downarrow & & \phi_M^0 \downarrow & & \downarrow \phi_P^0 & & \\ 0 & \longrightarrow & V^{-1}A & \xrightarrow{\delta'} & V^0M & \xrightarrow{V^0(a)} & V^0P \end{array}$$

Ο ορισμός του ϕ^{-1} είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της προβολικής παράστασης και είναι φυσικός. Για τη φυσικότητα θέλουμε μεταθετικότητα στο κάτωθι διάγραμμα για $f : A \rightarrow A_1$.

$$\begin{array}{ccc} T^{-1}A & \xrightarrow{T^{-1}(f)} & T^{-1}A_1 \\ \phi_A^{-1} \downarrow & & \downarrow \phi_{A_1}^{-1} \\ V^{-1}A & \xrightarrow{V^{-1}(f)} & V^{-1}A_1 \end{array}$$

Η f επεκτείνεται ως φαίνεται στις προβολικές παραστάσεις των προτύπων. Για την ανεξαρτησία θεωρούμε την f να είναι η ταυτοτική στο πρότυπο A .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{a} & P & \xrightarrow{b} & A \longrightarrow 0 \\ & & h \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{a_1} & P_1 & \xrightarrow{b_1} & A_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Καθώς οι οικογένειες είναι συνδεδεμένες θεωρούμε τα μεταθετικά διαγράμματα που έπονται της φυσικότητας της μακράς ακολουθίας αυτών, για το παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccc} T^{-1}A & \xrightarrow{\delta} & T^0M & \xrightarrow{T^0(a)} & T^0P \\ & \searrow T^{-1}(f) & & \searrow T^0(h) & \searrow T^0(g) \\ & & T^{-1}A_1 & \xrightarrow{\delta} & T^0M_1 & \xrightarrow{T^0(a_1)} & T^0P_1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ V^{-1}A & \xrightarrow{\delta} & V^0M & \xrightarrow{V^0(a)} & V^0P \\ & \searrow V^{-1}(f) & & \searrow V^0(h) & \searrow V^0(g) \\ & & 0 & \longrightarrow & V^{-1}A_1 & \xrightarrow{\delta} & V^0M_1 & \xrightarrow{V^0(a_1)} & V^0P_1 \end{array}$$

Θεωρώντας κάθετα τους φυσικούς μετασχηματισμούς ϕ^0 και ϕ^{-1} , όπως ορίστηκαν, η μεταθετικότητα στην αριστερή έδρα του κύβου έπεται από τη μεταθετικότητα στο υπόλοιπο σχήμα.

Μένει να ελέγξουμε τη μεταθετικότητα του παρακάτω τετραγώνου για δεδομένη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} T^{-1}A'' & \xrightarrow{\delta'} & T^0A' \\ \phi_{A''}^{-1} \downarrow & & \downarrow \phi_{A'}^0 \\ V^{-1}A'' & \xrightarrow{\delta'} & V^0A' \end{array}$$

Για το κάτωθι μεταθετικό διάγραμμα και τη φυσικότητα της μακράς ακολουθίας των συνδεδεμένων συναρτητών T, V ,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M'' & \xrightarrow{\mu} & P'' & \xrightarrow{\varepsilon} & A'' \longrightarrow 0 \\
& & g\downarrow & & f\downarrow & & \downarrow 1 \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{a} & A & \xrightarrow{b} & A'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
T^{-1}A'' & \xrightarrow{\delta} & T^0M'' & \xrightarrow{T(\mu)} & T^0P'' \\
1\downarrow & & T^0(g)\downarrow & & \downarrow T^0(f) \\
T^{-1}A'' & \xrightarrow{\delta'} & T^0A' & \xrightarrow{T^0(a)} & T^0A
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
V^{-1}A'' & \xrightarrow{\delta} & V^0M'' & \xrightarrow{V(\mu)} & V^0P'' \\
1\downarrow & & V^0(g)\downarrow & & \downarrow V^0(f) \\
V^{-1}A'' & \xrightarrow{\delta'} & V^0A' & \xrightarrow{V^0(a)} & V^0A
\end{array}$$

έχουμε ότι $\delta' = T^0(g) \circ \delta$ και $\delta' = V^0(g) \circ \delta$, και η μεταθετικότητα του περί ου ο λόγος διαγράμματος έπεται από τη μεταθετικότητα του κάτωθι.

$$\begin{array}{ccccccc}
T^{-1}A'' & \xrightarrow{\delta} & T^0M'' & \xrightarrow{T^0(g)} & T^0A' \\
\phi_A^{-1}\downarrow & & \phi_M^0\downarrow & & \downarrow \phi_{A'}^0 \\
V^{-1}A'' & \xrightarrow{\delta} & V^0M'' & \xrightarrow{V^0(g)} & V^0A'
\end{array}$$

□

Ορισμός 3.1.3 Μία οικογένεια δισυναρτητών $T^*(-, -) = \{T^n(-, -) : R\text{-Mod}^{opp} \times R\text{-Mod} \longrightarrow \text{Abelian Groups}\}$ θα λέγεται συνομολογικός δισυναρτητής αν για κάθε A και B R -πρότυπα, οι συναρτητές $T^*(A, -)$ και $T^*(-, B)$ είναι συνομολογικοί.

3.2 Η πλήρης συνομολογία κατά Mislin.

Ορισμός 3.2.1 Ένας συνομολογικός συναρτητής T^* λέγεται προβολικώς πλήρης αν οι συναρτητές που τον αποτελούν μηδενίζονται στα προβολικά πρότυπα. Ένας $(-\infty, +\infty)$ προβολικώς πλήρης συνομολογικός συναρτητής V^* είναι η προβολική πλήρωση ενός συνομολογικού συναρτητή T^* αν υπάρχει μορφισμός συνομολογικών συναρτητών $\phi^* : T^* \longrightarrow V^*$ με την καθολική ιδιότητα κάθε μορφισμός από τον T^* σε προβολικώς πλήρη συνομολογικό συναρτητή W^* να παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο μέσω του ϕ^* .

$$\begin{array}{ccc}
T^* & \xrightarrow{\phi^*} & V^* \\
\lambda^* \downarrow & \swarrow \Lambda^* & \\
W^* & &
\end{array}$$

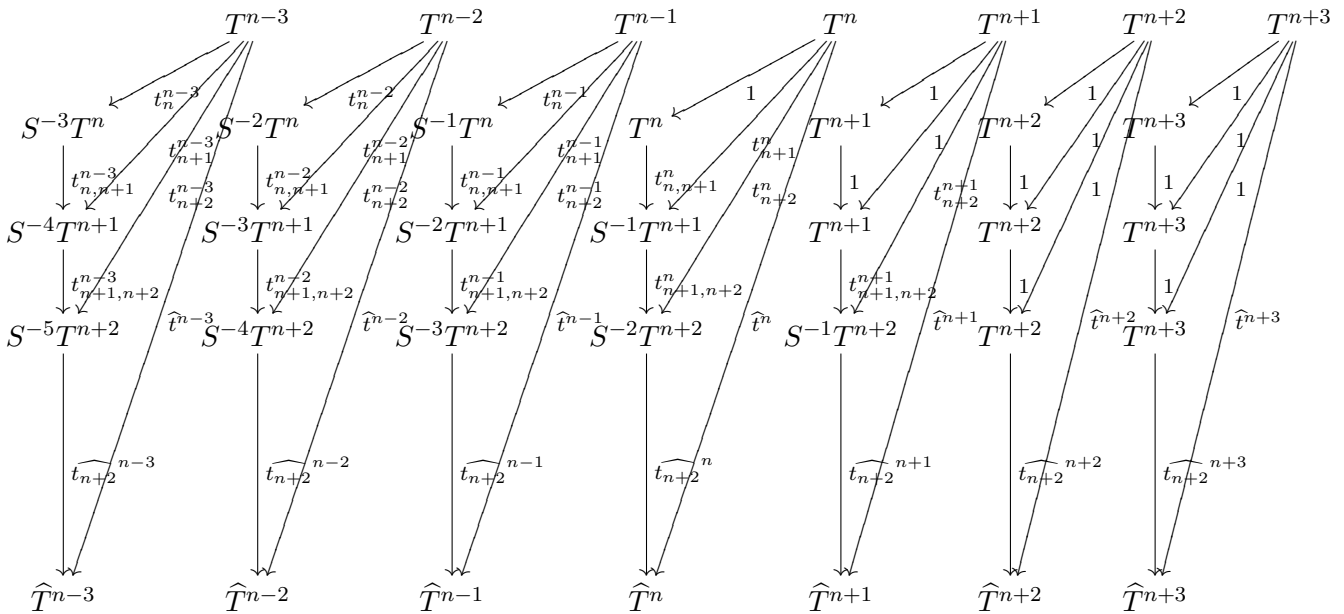
Θεώρημα 3.2.2 Κάθε συνομολογικός συναρτητής T^* επιδέχεται μοναδική προβολική πλήρωση.

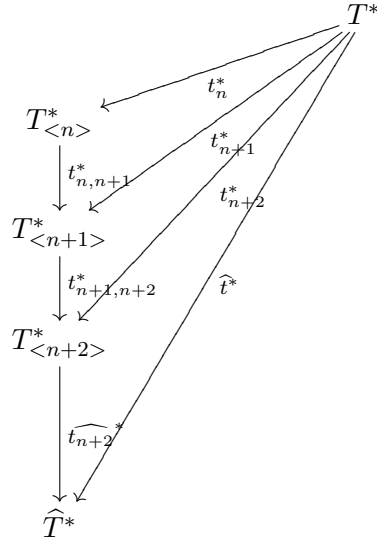
Απόδειξη.

Για κάθε δείκτη n θεωρούμε τους αριστερούς δορυφόρους του συναρτητή $T^n, S^{<0}T^n$. Αγκιστρώνοντας αυτούς με την κολόβωση ${}_nT_\infty^*$ προκύπτει ο συνομολογικός συναρτητής $T_{<n>}^*$. Ο ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός του T^{n+1} επεκτείνεται μοναδικά σε φυσικό μετασχηματισμό $-\infty T_{<n>_{n+1}}^* \rightarrow S^{\leq 0}T^{n+1}$ που επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε φυσικό μετασχηματισμό $T_{<n>}^* \rightarrow T_{<n+1>}^*$. Ο ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός κάθε T^n επεκτείνεται μοναδικά σε φυσικό μετασχηματισμό $T^* \rightarrow T_{<n>}^*$ με συμβιβαστότητα με τους προαναφερθέντες. Το σύνολο δεικτών του ορίου είναι κατευθυνόμενο. Ορίζουμε

$$\widehat{T}^* = \lim_{\rightarrow n} T_{<n>}^*$$

και αποτελεί την προβολική πλήρωση του T^* . Η συμβιβαστότητα των φυσικών μετασχηματισμών που οδηγεί στο ευθύ όριο του ευθέος συστήματος των συνομολογικών συναρτητών οφείλεται στη μοναδικότητα της επέκτασης των φυσικών μετασχηματισμών στους συναρτητές κατάλληλων οικογενειών κατά την πρόταση 3.1.2. Απεικονίζεται στο διπλά άπειρο μεταθετικό διάγραμμα συνομολογικών συναρτητών που επεκτείνεται άπειρα στο όριο του συστήματος, μέρος του οποίου φαίνεται ακολούθως. Το αμέσως επόμενο μεταθετικό διάγραμμα είναι η σύνοψη αυτού.





Η καθολική ιδιότητα έπεται πάλι από τη μοναδικότητα της επέκτασης των φυσικών μετασχηματισμών στους συναρτητές κατάλληλων οικογενειών κατά την πρόταση 3.1.2. Παραθέτουμε ένα τμήμα της.

$$\begin{array}{ccccccc}
 T^{n+1} & \xrightarrow{1} & T^{n+1} & \xrightarrow{1} & T^{n+1} \xrightarrow{\widehat{t}_{n+1}^{n+1}} & \widehat{T}^{n+1} \\
 \downarrow \lambda^{n+1} & & \swarrow \lambda^{n+1} & \swarrow \lambda^{n+1} & \swarrow \Lambda^{n+1} & \\
 W^{n+1} & & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 T^n & \xrightarrow{1} & T^n & \xrightarrow{t_{n,n+1}^n} & S^{-1}T^{n+1} & \xrightarrow{\widehat{t}_{n+1}^n} & \widehat{T}^n \\
 \downarrow \lambda^n & & \swarrow \lambda^n & \swarrow \lambda_{n+1}^n & \swarrow \Lambda^n & & \\
 W^n & & & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 T^{n-1} & \xrightarrow{t_n^{n-1}} & S^{-1}T^n & \xrightarrow{t_{n,n+1}^{n-1}} & S^{-2}T^{n+1} & \xrightarrow{\widehat{t}_{n+1}^{n-1}} & \widehat{T}^{n-1} \\
 \downarrow \lambda^{n-1} & & \swarrow \lambda^{n-1} & \swarrow \lambda_{n+1}^{n-1} & \swarrow \Lambda^{n-1} & & \\
 W^{n-1} & & & & & &
 \end{array}$$

□

Πρόταση 3.2.3 Αν ένας συνομολογικός συναρτητής T^* έχει προβολικώς πλήρη κολόβωση ${}_n T^*_\infty$ τότε αυτή είναι φυσικά ισοδύναμη με την ${}_n \widehat{T}^*_\infty$ και ο \widehat{T}^* είναι φυσικά ισοδύναμος με τον $T^*_{<n>}$.

Απόδειξη.

$$\begin{array}{ccc}
T^* & \xrightarrow{\hat{t}^*} & \hat{T}^* \\
\downarrow t_n^* & \swarrow \Lambda^* & \uparrow \\
T_{<n>}^* & & \\
\downarrow \hat{t}_n^* & \searrow 1_{\hat{T}^*} & \\
\hat{T}^* & &
\end{array}$$

Ο συνομολογικός συναρτητής $T_{<n>}^*$ είναι προβολικώς πλήρης. Ισχύει $\Lambda^* \circ \hat{t}^* = t_n^*$ από την καθολική ιδιότητα της πλήρωσης \hat{T}^* , και $\hat{t}_n^* \circ t_n^* = \hat{t}^*$ από την κατασκευή του. Έχουμε $\hat{t}_n^* \circ \Lambda^* \circ \hat{t}^* = \hat{t}_n^* \circ t_n^* = \hat{t}^*$, που σημαίνει ότι $\hat{t}_n^* \circ \Lambda^* = 1_{\hat{T}^*}$ λόγω της καθολικής ιδιότητας του \hat{T}^* .

Η προβολικώς πλήρης κολόβωση ${}_n T_\infty^*$ ταυτίζεται με την κολόβωση ${}_n T_{<n>\infty}^*$, επομένως έχουμε $\hat{t}^m = \hat{t}_n^m$ για $m \geq n$. Έτσι, καθώς ισχύει $\Lambda^* \circ \hat{t}^* = t_n^*$, έχουμε $\Lambda^m \circ \hat{t}_n^m = 1_{T_{<n>}^m}$ για $m \geq n$. Η σχέση $\Lambda^n \circ \hat{t}_n^n = 1_{T_{<n>}^n}$ επεκτείνεται με μοναδικό στους μικρότερους δείκτες, επομένως ισχύει $\Lambda^* \circ \hat{t}_n^* = 1_{T_{<n>}^*}$. \square

Πρόταση 3.2.4 Έστω ένας συνομολογικός συναρτητής T^* και έστω ένας προβολικώς πλήρης συνομολογικός συναρτητής V^* ώστε η κολόβωση ${}_n T_\infty^*$ είναι φυσικά ισοδύναμη με την ${}_n V_\infty^*$. Τότε ορίζεται μορφισμός $(-\infty, +\infty)$ συνομολογικών συναρτητών $\phi^* : T^* \rightarrow V^*$ και ο V^* είναι η προβολική πλήρωση του T^* .

Απόδειξη.

Ο μορφισμός $(-\infty, +\infty)$ συνομολογικών συναρτητών $\phi^* : T^* \rightarrow V^*$ ορίζεται ως η αριστερή μοναδική επέκταση της φυσικής ισοδυναμίας $\phi^{\geq n} : {}_n T_\infty^* \rightarrow {}_n V_\infty^*$. Ο \hat{T}^* είναι φυσικά ισοδύναμος με τον $T_{<n>}^*$. Έστω $\psi^{\geq n} : {}_n V_\infty^* \rightarrow {}_n T_\infty^*$ ο αντίστροφος μορφισμός του $\phi^{\geq n}$ στις κολοβώσεις. Τότε, ο ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός $T^n \rightarrow \hat{T}^n$ παραγοντοποιείται μέσω του V^n . Επομένως, ο ταυτοτικός μορφισμός $\hat{T}^n \rightarrow \hat{T}^n$ παραγοντοποιείται μέσω του V^n και επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο στα αριστερά. Αντίστροφα, ο ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός $V^n \rightarrow V^n$ παραγοντοποιείται μέσω του \hat{T}^n και επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο στα αριστερά. Άρα οι επιμέρους συνθέσεις των επεκτάσεων των φυσικών ισοδυναμιών των \hat{T}^n και V^n είναι οι ταυτοτικοί φυσικοί μετασχηματισμοί. \square

Από την παραπάνω πρόταση έπεται ότι η *Tate – Farrell* συνομολογία είναι η προβολική πλήρωση του συνομολογικού συναρτητή $H^*(G, -)$ για G ομάδα με πεπερασμένη *virtual* συνομολογική διάσταση. Για το συνομολογικό συναρτητή $Ext_R^*(A, -)$, με A ένα R -πρότυπο, έχουμε

$$\widehat{Ext}_R^*(A, -) = \{ \widehat{Ext}_R^n(A, -) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} S^{-k} Ext_R^{n+k}(A, -), n \in \mathbb{Z}, n+k \geq 0 \}.$$

Ο δορυφόρος περιέχεται στη μακρά ακριβή ακολουθία του συνομολογικού συναρτητή Ext , για τη δεδομένη προβολική παράσταση του προτύπου B , όπως φαίνεται ακολούθως.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdot & \longrightarrow & Ext_R^n(A, FB) & \xrightarrow{b} & Ext_R^n(A, B) & \xrightarrow{\omega} & Ext_R^{n+1}(A, \Omega B) & \xrightarrow{a} & Ext_R^{n+1}(A, FB) & \longrightarrow & \cdot \\
& & & & \searrow \pi & & \nearrow \mu & & & & \\
& & & & & & S^{-1}Ext_R^{n+1}(A, B) & & & &
\end{array}$$

Έχουμε $S^{-1}Ext_R^{n+1}(A, B) = Ker\omega \simeq Im\omega \simeq Ext_R^n(A, B)/Ker\omega \simeq Ext_R^n(A, B)/Imb = Cokerb$.
Καθώς το σύνολο δεικτών του ορίου είναι κατευθυνόμενο έχουμε, για ένα R -πρότυπο B ,

$$\widehat{Ext}_R^n(A, B) \simeq \lim_{\substack{\longrightarrow \\ k \geq 0}} (Ext_R^n(A, B) \xrightarrow{\omega} Ext_R^{n+1}(A, \Omega B) \xrightarrow{\omega} Ext_R^{n+2}(A, \Omega^2 B) \xrightarrow{\omega} \dots \xrightarrow{\omega} Ext_R^{n+k}(A, \Omega^k B) \xrightarrow{\omega} \dots).$$

Πράγματι, θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccc}
Ext_R^n(A, B) & \xrightarrow{\pi} & S^{-1}Ext_R^{n+1}(A, B) & \xrightarrow{\pi \circ \mu} & S^{-1}Ext_R^{n+2}(A, \Omega B) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \widehat{Ext}_R^n(A, B) \\
\downarrow 1 & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & & & \downarrow \mu \\
Ext_R^n(A, B) & \xrightarrow{\omega} & Ext_R^{n+1}(A, \Omega B) & \xrightarrow{\omega} & Ext_R^{n+2}(A, \Omega^2 B) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \lim_{\substack{\longrightarrow \\ k \geq 0}} Ext_R^{n+k}(A, \Omega^k B)
\end{array}$$

Καθώς το ευθύ όριο είναι επί κατευθυνόμενου συνόλου δεικτών, έπεται ότι είναι ακριβής συναρτητής και μάλιστα ένα στοιχείο στο όριο αντιπροσωπεύεται στην κλάση του από την εικόνα ενός στοιχείου που ανήκει σε κάποιο από τα αντικείμενα που συνθέτουν το όριο, στο ευθύ άθροισμα των αντικειμένων που συνθέτουν το όριο. Παραπέμπουμε στο [45].

Επομένως, η απεικόνιση $\mu : \widehat{Ext}_R^n(A, B) \rightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ k \geq 0}} Ext_R^{n+k}(A, \Omega^k B)$ είναι μονομορφισμός. Για να δείξουμε ότι είναι και επιμορφισμός, θεωρούμε ένα στοιχείο \bar{x} στο όριο $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ k \geq 0}} Ext_R^{n+k}(A, \Omega^k B)$, και έστω

$x \in Ext_R^{n+k}(A, \Omega^k B)$ του οποίου η εικόνα στο ευθύ άθροισμα των αντικειμένων που συνθέτουν το όριο είναι ο αντιπρόσωπος της κλάσης που ορίζει το στοιχείο \bar{x} . Τότε, το στοιχείο ωx ανήκει σε δορυφόρο, και η εικόνα αυτού στο ευθύ άθροισμα των αντικειμένων που συνθέτουν το όριο $\widehat{Ext}_R^n(A, B)$ είναι αντιπρόσωπος κλάσης που απεικονίζεται στο στοιχείο \bar{x} .

Ορίζουμε το συναρτητή $\widehat{Ext}_R^n(-, B)$, για ένα R -πρότυπο B , να είναι αυτός ώστε υπολογισμένος σε ένα R -πρότυπο A να είναι $\widehat{Ext}_R^n(-, B)(A) = \widehat{Ext}_R^n(A, -)(B) = \widehat{Ext}_R^n(A, B)$. Τότε, η οικογένεια συναρτητών $\widehat{Ext}_R^n(-, B)$, $n \in \mathbb{Z}$, αποτελεί προβολικώς πλήρη ανταλλοίωτο συνομολογικό συναρτητή. Η προβολική πληρότητα είναι άμεση από τον ορισμό. Για τη συνομολογία του, αρκεί να θεωρήσουμε τη δεξιά άπειρη ακολουθία του συναρτητή Ext αναφερόμενη σε μία βραχεία ακριβή ακολουθία R -προτύπων $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$, με δεδομένο ένα R -πρότυπο B , και χρησιμοποιώντας την προβολική επίλυση του τελευταίου που ορίζει τα συζυγή του πρότυπα, θεωρούμε και τις υπόλοιπες δεξιά άπειρες ακολουθίες αναφερόμενες στην ίδια βραχεία ακριβή ακολουθία. Ο ομομορφισμός ω_2 ορίζει απεικονίσεις μεταξύ

των ακολουθιών αυτών. Το ευθύ όριο του συστήματος δίνει τη ζητούμενη μακρά ακριβή ακολουθία, καθώς το σύνολο δεικτών είναι κατευθυνόμενο, και επίσης λόγω της αντιμεταθετικότητας της σύνθεσης των συνδετικών ομομορφισμών με δείκτες 1 και 2 λαμβάνουμε το σύστημα ανά δύο επίπεδα χωρίς να επηρεάζουμε το όριο αυτού.

3.3 Η προβολική πλήρωση του συνομολογικού συναρτητή Ext κατά Benson–Carlson.

Θεωρούμε το συναρτητή $\frac{Hom(A,-)}{PHom(A,-)} : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Abelian Groups}$ με $\frac{Hom(A,B)}{PHom(A,B)}$ να είναι η αβελιανή ομάδα των μορφισμών *modulo* παραγοντοποίησης μέσω προβολικών προτύπων. Ο συναρτητής αυτός είναι προσθετικός και εν τω μέσω ακριβής. Συμβολίζεται με $[A, -]$.

Για να δείξουμε ότι ο συναρτητής $[A, -]$ είναι εν τω μέσω ακριβής, θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow B' \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} B'' \rightarrow 0$. Εφαρμόζοντας το συναρτητή προκύπτει η ακολουθία $[A, B'] \xrightarrow{[a]} [A, B] \xrightarrow{[b]} [A, B'']$. Θα δείξουμε ότι $Ker[b] = Im[a]$ δια των εγκλεισμών. Καθώς $b \circ a = 0$ έχουμε ότι $[b \circ a] = [b] \circ [a] = 0$, επομένως, $Im[a] \subseteq Ker[b]$. Έστω τώρα $\bar{f} \in Ker[b]$ με αντιπρόσωπο $f : A \rightarrow B$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{b} & B' & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow k & \uparrow L & & \nearrow l & & \\ & & P & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & & & & \\ & \swarrow h & \downarrow f - L \circ k & & & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & B' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Έχουμε $\bar{f} \in Ker[b]$, δηλαδή η απεικόνιση $b \circ f$ παραγοντοποιείται μέσω προβολικού προτύπου, έστω P , ώστε $b \circ f = l \circ k$. Καθώς το P είναι προβολικό, υπάρχει απεικόνιση L ώστε $b \circ L = l$. Τότε, η απεικόνιση $f - L \circ k$ παραγοντοποιείται μέσω του πυρήνα της b που είναι η a , αφού συνθέτοντας από τα αριστερά με τη b έχουμε $b \circ (f - L \circ k) = b \circ f - b \circ L \circ k = l \circ k - b \circ L \circ k = (l - b \circ L) \circ k = 0$. Επομένως, υπάρχει απεικόνιση h ώστε $a \circ h = f - L \circ k$, δηλαδή $\bar{f} = a \circ h + L \circ k$ που σημαίνει ότι $\bar{f} \in Im[a]$.

Για την προσθετικότητα του συναρτητή, δείχνουμε ότι $[A, B \oplus C] \simeq [A, B] \oplus [A, C]$. Αν p_B και p_C είναι οι προβολές από το $B \oplus C$ στα αντίστοιχα πρότυπα, τότε ορίζουμε απεικόνιση ώστε $\bar{f} \mapsto (\overline{p_B \circ f}, \overline{p_C \circ f})$ με αντίστροφη, την απεικόνιση ώστε $(\bar{g}, \bar{h}) \mapsto \langle g, h \rangle$. Αν η απεικόνιση f παραγοντοποιείται μέσω προβολικού προτύπου P ώστε $f = k \circ l$, τότε και οι απεικονίσεις $p_B \circ f$ και $p_C \circ f$ παραγοντοποιούνται μέσω του ίδιου ώστε $p_B \circ f = (p_B \circ k) \circ l$ και $p_C \circ f = (p_C \circ k) \circ l$. Αν οι απεικονίσεις g και h παραγοντοποιούνται μέσω προβολικών προτύπων Q και S αντίστοιχα ώστε $g = m \circ n$ και $h = s \circ t$, τότε η απεικόνιση $\langle g, h \rangle$ παραγοντοποιείται μέσω του ευθέως αθροίσματος αυτών ώστε $\langle g, h \rangle = (m \otimes s) \circ \langle n, t \rangle$.

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση

$$\Omega : [A, B] \longrightarrow [\Omega A, \Omega B]$$

τέτοια ώστε $\bar{\phi} \mapsto \overline{\Omega\phi}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega A & \xrightarrow{i} & FA & \xrightarrow{p} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \Omega\phi\downarrow & h\swarrow & f\downarrow & \swarrow g & \downarrow\phi & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega B & \xrightarrow{i} & FB & \xrightarrow{p} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ορίζουμε ομάδες

$$\widehat{BC}_R^n(A, B) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ k \geq 0}} [\Omega^{n+k} A, \Omega^k B].$$

Για δεδομένη βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\kappa} B \xrightarrow{\lambda} B'' \longrightarrow 0$ δείχνουμε ότι η παρακάτω είναι ακριβής.

$$\dots \xrightarrow{\lambda_*} \widehat{BC}_R^{n-1}(A, B'') \xrightarrow{\delta} \widehat{BC}_R^n(A, B') \xrightarrow{\kappa_*} \widehat{BC}_R^n(A, B) \xrightarrow{\lambda_*} \widehat{BC}_R^n(A, B'') \xrightarrow{\delta} \widehat{BC}_R^{n+1}(A, B') \xrightarrow{\kappa_*} \dots$$

Η ακρίβεια αυτής έπεται από την ακρίβεια της κάτωθι καθώς θα αποτελέσει το ευθύ όριο συστήματος τέτοιων ακολουθιών μέσω του ομομορφισμού Ω .

$$\dots \longrightarrow [A, \Omega B'] \xrightarrow{\Omega\kappa_*} [A, \Omega B] \xrightarrow{\Omega\lambda_*} [A, \Omega B''] \xrightarrow{\sigma_*} [A, B'] \xrightarrow{\kappa_*} [A, B] \xrightarrow{\lambda_*} [A, B''].$$

Θεωρούμε την επέκταση της ταυτοτικής όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega B'' & \xrightarrow{a''} & FB'' & \xrightarrow{b''} & B'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \sigma\downarrow & & f\downarrow & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\kappa} & B & \xrightarrow{\lambda} & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Από το λήμμα του *Schanuel* έπεται η ακόλουθη ακριβής ακολουθία η οποία, εφαρμόζοντας το συναρτητή $[A, -]$, δίνει ακρίβεια στη θέση $[A, B']$.

$$0 \longrightarrow \Omega B'' \xrightarrow{\langle \sigma, a'' \rangle} B' \oplus FB'' \xrightarrow{\kappa - f} B \longrightarrow 0$$

Θεωρούμε τώρα το επόμενο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega B & \xrightarrow{a} & FB & \xrightarrow{b} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & g\downarrow & & h\downarrow & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega B'' & \xrightarrow{\langle \sigma, a'' \rangle} & B' \oplus FB'' & \xrightarrow{f - \kappa} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & 1\downarrow & & p\downarrow & & \downarrow \lambda & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega B'' & \xrightarrow{a''} & FB'' & \xrightarrow{b''} & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Εφαρμόζουμε το λήμμα του *Schanuel* στο πάνω μέρος του σχήματος και προκύπτει η ακόλουθη βραχεία ακριβής ακολουθία.

$$0 \longrightarrow \Omega B \xrightarrow{\langle g, a \rangle} \Omega B'' \oplus FB \xrightarrow{\langle \sigma, a'' \rangle - h} B' \oplus FB'' \longrightarrow 0$$

Η ακρίβεια στη θέση $[A, \Omega B'']$ έπεται αν θεωρήσουμε ότι $g \equiv \Omega\lambda$.

Ελέγχοντας και τη φυσικότητα της συνδεδεμένης μακράς ακολουθίας, η οποία έπεται από τη φυσικότητα των ακολουθιών που συνθέτουν αυτό το ευθύ όριο, η οικογένεια των συναρτητών $\widehat{BC}_R^n(A, -)$ καθίσταται προβολικώς πλήρης συναλλοίωτος συνομολογικός συναρτητής.

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι, για δεδομένη βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\kappa} A \xrightarrow{\lambda} A'' \rightarrow 0$, η παρακάτω είναι ακριβής.

$$\dots \xrightarrow{\kappa^*} \widehat{BC}_R^{n-1}(A', B) \xrightarrow{\delta} \widehat{BC}_R^n(A'', B) \xrightarrow{\lambda^*} \widehat{BC}_R^n(A, B) \xrightarrow{\kappa^*} \widehat{BC}_R^n(A', B) \xrightarrow{\delta} \widehat{BC}_R^{n+1}(A'', B) \xrightarrow{\lambda^*} \dots$$

Ελέγχοντας και τη φυσικότητα της συνδεδεμένης μακράς ακολουθίας, η οικογένεια των συναρτητών $\widehat{BC}_R^n(-, B)$ ώστε $\widehat{BC}_R^n(-, B)(A) = \widehat{BC}_R^n(A, B) = \widehat{BC}_R^n(A, -)(B)$ καθίσταται προβολικώς πλήρης ανταλλοίωτος συνομολογικός συναρτητής.

3.4 Η ευσταθής συνομολογία κατά Vogel. Σχεδόν αλυσωτές απεικονίσεις.

Έστω A, B R -πρότυπα και $\mathbb{P} \xrightarrow{\varepsilon} A, \mathbb{Q} \xrightarrow{\eta} B$ προβολικές επιλύσεις αυτών. Θεωρούμε τις προβολικές ακολουθίες

$$\dots \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow Q_n \rightarrow \dots \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Μία σχεδόν αλυσωτή απεικόνιση βαθμού n ανάμεσα στις προβολικές ακολουθίες είναι μία οικογένεια R -ομομορφισμών $\mu = \{\mu_i : P_{i+n} \rightarrow Q_i\}$ τέτοια ώστε για όλα τα i εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος αυτών το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό. Τα n και i διατρέχουν τους ακεραίους.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \rightarrow & P_{i+n+1} & \xrightarrow{\theta_{i+n+1}} & P_{i+n} & \xrightarrow{\theta_{i+n}} & P_{i+n-1} & \rightarrow \cdot \\ \sigma_{i+2} \swarrow & & \mu_{i+1} \downarrow \nu_{i+1} & \sigma_{i+1} \swarrow & \mu_i \downarrow \nu_i & \sigma_i \swarrow & \mu_{i-1} \downarrow \nu_{i-1} & \\ \cdot & \rightarrow & Q_{i+1} & \xrightarrow{\theta_{i+1}} & Q_i & \xrightarrow{\theta_i} & Q_{i-1} & \rightarrow \cdot \end{array}$$

Δύο σχεδόν αλυσωτές απεικονίσεις μ, ν ίδιου βαθμού n είναι σχεδόν αλυσωτά ομοτοπικές αν υπάρχει οικογένεια R -ομομορφισμών $\sigma = \{\sigma_i : P_{i+n-1} \rightarrow Q_i\}$ τέτοια ώστε για όλα τα i εκτός από πεπερασμένο πλήθος αυτών να ισχύει $\mu_i - \nu_i = \sigma_i \circ \theta_{i+n} + \theta_{i+1} \circ \sigma_{i+1}$. Η σχέση της σχεδόν αλυσωτής ομοτοπίας είναι σχέση ισοδυναμίας ήτοι η σχέση είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική. Οι παραπάνω έννοιες γενικεύουν τις έννοιες των αλυσωτών απεικονίσεων και των αλυσωτών ομοτοπιών αντίστοιχα.

Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, θεωρούμε την αβελιανή ομάδα με στοιχεία τις κλάσεις σχεδόν ομοτοπίας των σχεδόν αλυσωτών απεικονίσεων ίδιου βαθμού n , και συμβολίζουμε με $V_R^n(A, B)$. Οι ομάδες αυτές είναι γνωστές ως ομάδες Vogel και αποτελούν τη συνομολογία $\widetilde{Ext}_R^*(A, B) := H^*(\widetilde{Hom}_R(\mathbb{P}_*^A, \mathbb{Q}_*^B))$, με $\widetilde{Hom}_R(\mathbb{P}_*^A, \mathbb{Q}_*^B) = \frac{Hom_R(\mathbb{P}_*^A, \mathbb{Q}_*^B)}{Hom_R(\mathbb{P}_*^A, \mathbb{Q}_*^B)}$, δηλαδή είναι το σύμπλεγμα πηλίκου του δεύτερου ολικού συμπλέγματος modulo του πρώτου ολικού αντίστοιχα για το δισύμπλεγμα $\mathbf{Hom}_R(\mathbb{P}_*^A, \mathbb{Q}_*^B)$.

Τα συμπλέγματα \mathbb{P}_*^A και \mathbb{Q}_*^B είναι αλυσωτά. Για να προκύψει ο εν λόγω συναρτητής συνομολογικός, θα πρέπει να θεωρήσουμε το σύμπλεγμα \mathbb{Q}_*^B συναλυσωτό. Αυτό επιτυγχάνεται ορίζοντας $Q_B^n := Q_{-n}^B$ για κάθε δείκτη n .

Ο βαθμός n του συμπλέγματος είναι

$$\widetilde{Hom}_R^n(\mathbb{P}_*^A, \mathbb{Q}_*^B) = \frac{\prod_{p+q=n} Hom_R(P_p, Q_{-q})}{\bigoplus_{p+q=n} Hom_R(P_p, Q_{-q})}$$

με $\vartheta_{n+1}^H : \prod_{p+q=n} Hom_R(P_p, Q_{-q}) \longrightarrow \prod_{p+q=n+1} Hom_R(P_p, Q_{-q})$ τέτοια ώστε

$$(\vartheta_{n+1}^H f)_{p,q} = (-1)^{p+q} f_{p-1,q} \vartheta_{\mathbb{P}} + \vartheta_{\mathbb{Q}} f_{p,q-1}.$$

Χωρίς να γίνει σύγχυση με τους δείκτες ως προς το άθροισμά τους, η f ανήκει στο βαθμό n του συμπλέγματος, με $f = \{f_{p,q} : P_p \rightarrow Q_{-q}\}$.

Ο ορισμός των ομάδων *Vogel* είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των προβολικών επιλύσεων. Πράγματι, δύο προβολικές επιλύσεις ενός προτύπου είναι ομοτοπικά ισοδύναμες, και οι συναρτητές $Hom_R(X_*, -)$ και $Hom_R(-, Y_*)$, με X και Y αλυσωτά συμπλέγματα, διατηρούν ομοτοπίες. Έτσι, η ομολογία κάθε συμπλέγματος διατηρείται από ομοτοπικές ισοδυναμίες.

Η οικογένεια συναρτητών όπως ορίζει ο *Vogel*, $H^*(\widetilde{Hom}_R(\mathbb{P}_*, -))$, είναι όντως συνομολογικός συναρτητής, συναλλοιώτος, προβολικώς πλήρης, φυσικός ως προς τη δεύτερη μεταβλητή. Πράγματι, θεωρούμε μία βραχεία ακριβή ακολουθία αλυσωτών συμπλεγμάτων $0 \rightarrow Y' \rightarrow Y \rightarrow Y'' \rightarrow 0$, και εφαρμόζουμε το συναρτητή $Hom_R(\mathbb{P}_*, -)$. Καθώς το σύμπλεγμα \mathbb{P}_* αποτελείται από προβολικά πρότυπα, η προκύπτουσα ακολουθία αλυσωτών συμπλεγμάτων είναι ακριβής. Πράγματι, θεωρούμε την ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων $0 \rightarrow Hom_R(P_p, Y'_{-q}) \rightarrow Hom_R(P_p, Y_{-q}) \rightarrow Hom_R(P_p, Y''_{-q}) \rightarrow 0$ και εφαρμόζουμε καρτεσιανά γινόμενα. Εφαρμόζοντας τώρα στην αρχική ακολουθία το συναρτητή $\widetilde{Hom}_R(\mathbb{P}_*, -)$ προκύπτει βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων που εμφυτεύεται στην προηγούμενη. Έτσι, η ακολουθία που αφορά στο πηλίκο τους είναι επίσης βραχεία ακριβής, και θεωρούμε τη μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία των συμπλεγμάτων της ακολουθίας. Η φυσικότητα είναι εύλογη.

Η οικογένεια συναρτητών όπως ορίζει ο *Vogel*, $H^*(\widetilde{Hom}_R(-, \mathbb{Q}_*))$, είναι επίσης συνομολογικός συναρτητής, ανταλλοιώτος, προβολικώς πλήρης, φυσικός ως προς την πρώτη μεταβλητή. Πράγματι, θεωρούμε μία βραχεία ακριβή ακολουθία αλυσωτών συμπλεγμάτων $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$, και εφαρμόζουμε το συναρτητή $Hom_R(-, \mathbb{Q}_*)$. Αν το σύμπλεγμα X'' αποτελείται από προβολικά πρότυπα, η προκύπτουσα ακολουθία αλυσωτών συμπλεγμάτων είναι ακριβής. Πράγματι, θεωρούμε την ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων $0 \rightarrow Hom_R(X''_p, Q_{-q}) \rightarrow Hom_R(X_p, Q_{-q}) \rightarrow Hom_R(X'_p, Q_{-q}) \rightarrow 0$ και εφαρμόζουμε καρτεσιανά γινόμενα. Εφαρμόζοντας τώρα στην αρχική ακολουθία το συναρτητή $\widetilde{Hom}_R(-, \mathbb{Q}_*)$ με το σύμπλεγμα X'' να αποτελείται από προβολικά πρότυπα, προκύπτει βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων που εμφυτεύεται στην προηγούμενη. Έτσι, η ακολουθία που αφορά στο πηλίκο τους είναι επίσης βραχεία ακριβής, και θεωρούμε τη μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία των συμπλεγμάτων της ακολουθίας. Η φυσικότητα είναι εύλογη.

Παραπέμπουμε στο [5].

3.5 Η φυσική ισοδυναμία των προβολικών πληρώσεων του συνομολογικού συναρτητή Ext .

Πρόταση 3.5.1 Οι συνομολογικοί συναρτητές κατά *Mislin* και *Benson – Carlson* είναι φυσικά ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Θεωρούμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με Φ_n να απεικονίζει την κλάση μίας απεικόνισης $\varphi : \Omega^n A \rightarrow B$ modulo παραγοντοποίησης μέσω του $F\Omega^{n-1}A$ της δεδομένης προβολικής επίλυσης του A στην κλάση της φ modulo παραγοντοποίησης μέσω οποιουδήποτε προβολικού προτύπου. Συμβολίζουμε με $\Phi_n(\bar{\varphi}) = \bar{\varphi}$.

$$\begin{array}{ccc} Ext_R^n(A, B) & \xrightarrow{\Phi_n} & [\Omega^n A, B] \\ \omega_2 \downarrow & & \Omega \downarrow \\ Ext_R^{n+1}(A, \Omega B) & \xrightarrow{\Phi_{n+1}} & [\Omega^{n+1} A, \Omega B] \\ \omega_2 \downarrow & & \Omega \downarrow \end{array}$$

Επάγεται έτσι επί απεικόνιση στα όρια $\lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} S^{-k} Ext_R^{n+k}(A, B) \xrightarrow{\Phi} \lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} [\Omega^{n+k} A, \Omega^k B]$.

Δείχνουμε ότι η απεικόνιση Φ είναι $1 - 1$. Αν $\hat{\psi} \in \widehat{Ext}_R^n(A, B)$ τότε, καθώς το σύνολο δεικτών του ορίου είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει $\bar{\psi} \in S^{-k} Ext_R^{n+k}(A, B) \subseteq Ext_R^{n+k}(A, \Omega^k B)$ που η εικόνα του στο ευθύ άθροισμα των αντικειμένων που συνθέτουν το όριο είναι αντιπρόσωπος της κλάσης $\hat{\psi}$. Έστω ότι $\Phi(\hat{\psi}) = 0$ στο όριο. Τότε, λόγω των κατευθυνόμενων δεικτών σε αυτό το όριο, έχουμε $\bar{\varphi} = \Omega^t \bar{\psi} = 0$ για κάποιο t , ήτοι η απεικόνιση φ παραγοντοποιείται μέσω προβολικού προτύπου, έστω Q . Τότε παραγοντοποιείται μέσω του $F\Omega^{k+t}B$, διότι το Q απεικονίζεται σε αυτό λόγω του επιμορφισμού $F\Omega^{k+t}B \rightarrow \Omega^{k+t}B \rightarrow 0$. Υπολογίζουμε ότι η $\Omega\varphi$ παραγοντοποιείται μέσω του $F\Omega^{n+k+t}A$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ενώ έχουμε $\bar{\Omega\varphi} = \Phi_{n+k+t+1}(\omega_2(\bar{\varphi}))$ με $\omega_2(\bar{\varphi}) = \bar{\Omega\varphi} = \omega_2^{t+1}(\bar{\psi})$. Άρα $\hat{\psi} = 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^{n+k+t+1}A & \longrightarrow & F\Omega^{n+k+t}A & \longrightarrow & \Omega^{n+k+t}A & \longrightarrow & 0 \\ & & \Omega\varphi \downarrow & & \lambda \swarrow & & f \downarrow & & h \swarrow & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{k+t+1}B & \longrightarrow & F\Omega^{k+t}B & \longrightarrow & \Omega^{k+t}B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Για τη φυσικότητα της ισοδυναμίας δίδονται τα επόμενα πρώτα αριστερά άπειρα μεταθετικά διαγράμματα, με δεδομένη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\beta'} B \xrightarrow{\beta} B'' \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} Ext_R^n(A, \Omega B') & \xrightarrow{\Omega\beta'_*} & Ext_R^n(A, \Omega B) & \xrightarrow{\Omega\beta_*} & Ext_R^n(A, \Omega B'') & \xrightarrow{\sigma_*} & Ext_R^n(A, B') \\ & \searrow \Phi_n & & \searrow \Phi_n & & \searrow \Phi_n & \searrow \Phi_n \\ & & [\Omega^n A, \Omega B'] & \xrightarrow{\Omega\beta'_*} & [\Omega^n A, \Omega B] & \xrightarrow{\Omega\beta_*} & [\Omega^n A, \Omega B''] & \xrightarrow{\sigma_*} & [\Omega^n A, B'] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
Ext_R^{n+1}(A, \Omega^2 B') & \xrightarrow{\Omega^2 \beta'_*} & Ext_R^{n+1}(A, \Omega^2 B) & \xrightarrow{\Omega^2 \beta_*} & Ext_R^{n+1}(A, \Omega^2 B'') & \xrightarrow{\Omega \sigma_*} & Ext_R^{n+1}(A, \Omega B') \\
\searrow \Phi_{n+1} & & \searrow \Phi_{n+1} & & \searrow \Phi_{n+1} & & \searrow \Phi_{n+1} \\
& & [\Omega^{n+1} A, \Omega^2 B'] & \xrightarrow{\Omega^2 \beta'_*} & [\Omega^{n+1} A, \Omega^2 B] & \xrightarrow{\Omega^2 \beta_*} & [\Omega^{n+1} A, \Omega^2 B''] & \xrightarrow{\Omega \sigma_*} & [\Omega^{n+1} A, \Omega B']
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\widehat{Ext}_R^{n-1}(A, B') & \xrightarrow{\Omega^\infty \beta'_*} & \widehat{Ext}_R^{n-1}(A, B) & \xrightarrow{\Omega^\infty \beta_*} & \widehat{Ext}_R^{n-1}(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & \widehat{Ext}_R^n(A, B') \\
\searrow \Phi & & \searrow \Phi & & \searrow \Phi & & \searrow \Phi \\
& & \widehat{BC}_R^{n-1}(A, B') & \xrightarrow{\Omega^\infty \beta'_*} & \widehat{BC}_R^{n-1}(A, B) & \xrightarrow{\Omega^\infty \beta_*} & \widehat{BC}_R^{n-1}(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & \widehat{BC}_R^n(A, B')
\end{array}$$

Θεωρώντας κάθετα τους ομομορφισμούς ω_2 και Ω έπεται η μεταθετικότητα του διπλά άπειρου τελευταίου διαγράμματος.

Για να αντιληφθούμε τους συνδετικούς ομομορφισμούς που εμφανίζονται στις ακολουθίες των ορίων, παραθέτουμε τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα που δηλώνουν τις σχέσεις $\sigma^* \circ \omega_2 = \delta$ και $\sigma^* \circ \Omega = \delta$.

$$\begin{array}{ccc}
Ext_R^{n-1}(A, B'') & & \\
\omega_2 \downarrow & \searrow \delta & \\
Ext_R^n(A, \Omega B'') & \xrightarrow{\sigma_*} & Ext_R^n(A, B') \\
\omega_2 \downarrow & \searrow \delta & \downarrow \omega_2 \\
Ext_R^{n+1}(A, \Omega^2 B'') & \xrightarrow{\Omega \sigma_*} & Ext_R^{n+1}(A, \Omega B')
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
[\Omega^{n-1} A, B''] & & \\
\Omega \downarrow & \searrow \delta & \\
[\Omega^n A, \Omega B''] & \xrightarrow{\sigma_*} & [\Omega^n A, B'] \\
\Omega \downarrow & \searrow \delta & \downarrow \Omega \\
[\Omega^{n+1} A, \Omega^2 B''] & \xrightarrow{\Omega \sigma_*} & [\Omega^{n+1} A, \Omega B']
\end{array}$$

Ομοίως αποδεικνύουμε τη φυσικότητα ως προς την πρώτη μεταβλητή. □

Πρόταση 3.5.2 Οι συνομολογικοί συναρτητές κατά Benson – Carlson και Vogel είναι φυσικά ισοδύναμοι.

Απόδειξη.

Δείχνουμε ότι οι ομάδες $\widehat{BC}_R^n(A, B)$ και $V_R^n(A, B)$ είναι ισόμορφες.

Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 F\Omega^{n+k+1}A & \xrightarrow{p_{n+k+1}} & \Omega^{n+k+1}A & \xrightarrow{i_{n+k+1}} & F\Omega^{n+k}A & \xrightarrow{p_{n+k}} & \Omega^{n+k}A & \xrightarrow{i_{n+k}} & F\Omega^{n+k-1}A \\
 F\Omega\phi \downarrow & & \Omega\phi \downarrow & & F\phi \downarrow & & \phi \downarrow & & \downarrow \\
 F\Omega^{k+1}B & \xrightarrow{p_{k+1}} & \Omega^{k+1}B & \xrightarrow{i_{k+1}} & F\Omega^k B & \xrightarrow{p_k} & \Omega^k B & \xrightarrow{i_k} & F\Omega^{k-1}B
 \end{array}$$

Έστω $\hat{\phi} \in \widehat{BC}_R^n(A, B)$. Τότε η $\hat{\phi}$ αντιπροσωπεύεται από μία $\bar{\phi} \in [\Omega^{n+k}A, \Omega^k B]$ για κάποιο k . Τότε η ακολουθία $(F\phi, F\Omega\phi, F\Omega^2\phi, \dots, F\Omega^s\phi, \dots)$ είναι μία σχεδόν αλυσωτή απεικόνιση βαθμού n , και ορίζεται μοναδικά *modulo* σχεδόν αλυσωτές ομοτοπίες. Αν η ϕ παραγοντοποιείται μέσω προβολικού προτύπου τότε παραγοντοποιείται μέσω του $F\Omega^k B$ μέσω μίας απεικόνισης λ και προκύπτει ότι $\Omega\phi \equiv 0$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι, η απεικόνιση αυτή από την ομάδα $[\Omega^{n+k}A, \Omega^k B]$ στην ομάδα $V_R^n(A, B)$ είναι καλά ορισμένη.

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^{n+k+1}A & \xrightarrow{i_{n+k+1}} & F\Omega^{n+k}A & \xrightarrow{p_{n+k}} & \Omega^{n+k}A \\
 0 \downarrow & & \lambda \circ p_{n+k} \downarrow & \swarrow \lambda & \phi \downarrow \\
 \Omega^{k+1}B & \xrightarrow{i_{k+1}} & F\Omega^k B & \xrightarrow{p_k} & \Omega^k B
 \end{array}$$

Ομοίως, η απεικόνιση $\Omega\phi$ οδηγεί στην ίδια, μοναδική *modulo* σχεδόν αλυσωτές ομοτοπίες, σχεδόν αλυσωτή απεικόνιση, και αυτή η συμβιβαστότητα ορίζει καλά την απεικόνιση $G : \widehat{BC}_R^n(A, B) \rightarrow V_R^n(A, B)$ με $G(\hat{\phi}) = \overline{(F\phi, F\Omega\phi, F\Omega^2\phi, \dots, F\Omega^s\phi, \dots)}$.

Έστω τώρα Φ με $\Phi = \{\Phi_s\}$ σχεδόν αλυσωτή απεικόνιση βαθμού n και έστω το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με $k \gg 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 F\Omega^{n+k+1}A & \xrightarrow{p_{n+k+1}} & \Omega^{n+k+1}A & \xrightarrow{i_{n+k+1}} & F\Omega^{n+k}A & \xrightarrow{p_{n+k}} & \Omega^{n+k}A & \xrightarrow{i_{n+k}} & F\Omega^{n+k-1}A \\
 \Phi_{k+1} \downarrow & & \phi_{k+1} \downarrow & & \Phi_k \downarrow & & \phi_k \downarrow & & \Phi_{k-1} \downarrow \\
 F\Omega^{k+1}B & \xrightarrow{p_{k+1}} & \Omega^{k+1}B & \xrightarrow{i_{k+1}} & F\Omega^k B & \xrightarrow{p_k} & \Omega^k B & \xrightarrow{i_k} & F\Omega^{k-1}B
 \end{array}$$

Για την $p_k \circ \Phi_k$ ορίζεται μοναδική απεικόνιση ϕ_k λόγω της καθολικής ιδιότητας του συμπυρήνα της θ_{n+k+1} και το τετράγωνο που τις αφορά είναι μεταθετικό. Το όμορο δεξιό τετράγωνο αυτού είναι επίσης μεταθετικό, καθώς αν συνθέσουμε από τα δεξιά με τη δεξιά διαγράψιμη p_{n+k} στις συνθέσεις των απεικονίσεων η ισότητα των οποίων δίνει τη μεταθετικότητα, θα προκύψει η σχέση της μεταθετικότητας της αλυσωτής απεικόνισης. Δουλεύουμε ομοίως για το δείκτη $k+1$. Έτσι, μία επέκταση της ϕ_k είναι η ϕ_{k+1} . Τελικά, η ϕ_k ορίζει μοναδικό στοιχείο στην $\widehat{BC}_R^n(A, B)$. Έστω τώρα ότι $\Phi \equiv \Xi$ και έστω το παρακάτω διάγραμμα με k πολύ μεγάλο ώστε να υπερβαίνει τους δείκτες που ορίζουν μεταθετικότητα και ομοτοπία.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\theta_{n+k+2}} & F\Omega^{n+k+1}A & \xrightarrow{\theta_{n+k+1}} & F\Omega^{n+k}A & \xrightarrow{\theta_{n+k}} & F\Omega^{n+k-1}A & \xrightarrow{\theta_{n+k-1}} & \dots \\
 & & \Phi_{k+1} \downarrow \Xi_{k+1} & \swarrow \sigma_{k+1} & \Phi_k \downarrow \Xi_k & \swarrow \sigma_k & \Phi_{k-1} \downarrow \Xi_{k-1} & & \\
 \dots & \xrightarrow{\theta_{k+2}} & F\Omega^{k+1}B & \xrightarrow{\theta_{k+1}} & F\Omega^k B & \xrightarrow{\theta_k} & F\Omega^{k-1}B & \xrightarrow{\theta_{k-1}} & \dots
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_k - \Xi_k &= \sigma_k \circ \theta_{n+k} + \theta_{k+1} \circ \sigma_{k+1} \\
p_k \circ (\Phi_k - \Xi_k) &= p_k \circ (\sigma_k \circ \theta_{n+k} + \theta_{k+1} \circ \sigma_{k+1}) \\
(\phi_k - \xi_k) \circ p_{n+k} &= p_k \circ \sigma_k \circ \theta_{n+k} = p_k \circ \sigma_k \circ i_{n+k} \circ p_{n+k}
\end{aligned}$$

Καθώς η p_{n+k} είναι δεξιά διαγράψιμη έχουμε $\phi_k \equiv \xi_k \text{ modulo}$ παραγοντοποίησης μέσω προβολικού προτύπου.

Η φυσικότητα της ισοδυναμίας των εν λόγω συναρτητών προκύπτει εύκολα από την εποπτεία των σχεδόν αλυσωτών απεικονίσεων. Αποδεικνύεται ομοίως και η φυσικότητα ως προς την πρώτη μεταβλητή. □

3.6 Σχετική ομολογία.

Μία ομάδα G έχει πεπερασμένη *virtual* συνομολογική διάσταση n αν υπάρχει H υποομάδα της ελευθέρως στρέψιμης πεπερασμένου δείκτου με πεπερασμένη συνομολογική διάσταση n . Θεωρούμε μία προβολική επίλυση του \mathbb{Z} ως τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Αυτή αποτελεί προβολική επίλυση αυτού και ως $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο και ο πυρήνας βαθμού n , R_n , είναι προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο. Καθώς τα προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα είναι και προβολικά $\mathbb{Z}H$ -πρότυπα, η κάτω κολόβωση στο βαθμό n της επίλυσης συμπληρωμένη με την ομολογία της στη θέση αυτή, $\text{Coker} \vartheta_{n+1} \simeq R_n$, είναι $\mathbb{Z}H$ -συσταλή.

Καλούμε ένα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο σχετικά εμφυτευτικό αν έχει την ιδιότητα του εμφυτευτικού σε $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενη εμφύτευση. Τα $\mathbb{Z}H$ -συνεπαγόμενα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα είναι σχετικά εμφυτευτικά. Αυτό ισχύει διότι ο Coind_H^G είναι δεξιά συζυγής του Res_H^G , ως ειδική περίπτωση του συζυγούς ζεύγους $A \otimes_S - \text{Hom}_R(A, -)$,

και ο φυσικός ισομορφισμός $\text{Hom}_R(A \otimes_S B, C) \xrightarrow{w} \text{Hom}_S(B, \text{Hom}_R(A, C))$, ως προς B και C , έχει κανόνα $f \mapsto w(f) : b \mapsto w(f)(b) : a \mapsto f(a \otimes b)$ με αντίστροφο $g \mapsto w^{-1}g : a \otimes b \mapsto g(b)(a)$. Έτσι, για να είναι ακριβής ο $\text{Hom}_G(-, \text{Coind}_H^G N)$ εφαρμοζόμενος σε $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενη ακολουθία, αρκεί να είναι ο $\text{Hom}_H(\text{Res}_H^G(-), N)$ σε αυτές. Όμως ο $\text{Hom}_H(-, N)$, για κάθε $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο N , και ο $\text{Res}_H^G(-)$ διατηρούν τις $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενες ακολουθίες.

Έστω τώρα ένα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M . Αυτό εμφυτεύεται στο $\text{Coind}_H^G \text{Res}_H^G M$ ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα και η εμφύτευση είναι $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενη. Πράγματι, η απεικόνιση είναι ο κανόνας ώστε $x \mapsto f_x : g \mapsto g \otimes x = g \cdot x$ και η απεικόνιση f_x είναι $\mathbb{Z}H$ -μορφισμός, καθώς $f_x(h \cdot g) = (h \cdot g) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot f_x(g)$. Ο κανόνας είναι $\mathbb{Z}G$ -μορφισμός, καθώς $g' \cdot x \mapsto f_{g' \cdot x} : g \mapsto g \cdot (g' \cdot x) = (g \cdot g') \cdot x = f_x(g \cdot g') = g' \circ f_x$. Είναι επίσης μονομορφισμός, καθώς αν η f_x είναι η μηδενική απεικόνιση, τότε, για κάθε $g \in G$ έχουμε $f_x(g) = g \cdot x = 0$, επομένως, και για το τετριμμένο στοιχείο της ομάδας, έχουμε $f_x(1) = 1 \cdot x = x = 0$. Έχει τομή την απεικόνιση $\mathbb{Z}H$ -πρότυπων με κανόνα $f \mapsto f(1)$ ώστε $h \circ f \mapsto (h \circ f)(1) = f(1 \cdot h) = f(h \cdot 1) = h \cdot f(1)$, καθώς $x \mapsto f_x \mapsto f_x(1) = 1 \cdot x = x$.

Καθώς ο δείκτης είναι πεπερασμένος, τα $\mathbb{Z}H$ -συνεπαγόμενα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα είναι ισόμορφα με τα $\mathbb{Z}H$ -επαγόμενα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα. Πράγματι, θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο αντιπροσώπων των κλάσεων, T , ώστε $G = \bigcup_{t \in T} Ht$, και ορίζουμε απεικόνιση $w : \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A) : f \mapsto$

$\sum_{t \in T} t^{-1} \otimes f(t)$. Ο κανόνας είναι ανεξάρτητος της επιλογής του συνόλου των αντιπροσώπων των κλάσεων. Επίσης, είναι $\mathbb{Z}G$ -ομομορφισμός, $1-1$ και επί. Έτσι, αν M είναι προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο τότε το $Coind_H^G Res_H^G M$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Ειδικότερα, τα ελεύθερα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα είναι σχετικά εμφυτευτικά.

Ο πυρήνας βαθμού n , R_n , εμφυτεύεται στο $Coind_H^G Res_H^G R_n$, το οποίο, ως προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, είναι και προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο, και καθώς η εμφύτευση είναι $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενη, ο συμπυρήνας είναι και αυτός $\mathbb{Z}H$ -προβολικό πρότυπο. Συνεχίζουμε ομοίως και κατασκευάζουμε $\mathbb{Z}H$ -συσταλτή $\mathbb{Z}G$ -προβολική ακριβή ακολουθία. Θεωρούμε την προβολική επίλυση του \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, \mathbb{P}_* , και αγχιστρώνουμε την κολόβωση αυτής στο βαθμό n με την ανάρτηση βαθμού $n-1$ της κατασκευασμένης $\mathbb{Z}H$ -συσταλτής ακολουθίας \mathbb{Q} που αναφέραμε, $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}[n-1]$. Η προκύπτουσα ακολουθία που συμβολίζουμε με \mathbb{P}_*^c είναι πλήρης προβολική επίλυση του \mathbb{Z} . Δείχνουμε ότι ουσιαστικά είναι και ισχυρή. Γενικά η συνομολογία $H^*(G, -)$ στα $\mathbb{Z}H$ -συνεπαγόμενα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα δίδεται από αυτήν της H για τα υποκείμενα $\mathbb{Z}H$ -πρότυπα, λόγω του παραπάνω συζυγούς ζεύγους. Ο δείκτης είναι πεπερασμένος, άρα, τα προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα ως $\mathbb{Z}H$ -επαγόμενα είναι $\mathbb{Z}H$ -συνεπαγόμενα. Η πλήρης επίλυση του \mathbb{Z} ως $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο $res_H^G(\mathbb{P}^c)$ είναι ισχυρή διότι είναι $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενη και το σύμπλεγμα $Hom_{\mathbb{Z}H}(res_H^G(\mathbb{P}^c), N)$ είναι επίσης συσταλτό για κάθε $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο N . Άλλωστε, η πλήρης συνομολογία μηδενίζεται για ομάδα με πεπερασμένη συνομολογική διάσταση, καθώς η μηδενική πλήρης προβολική επίλυση του προτύπου \mathbb{Z} είναι ισχυρή. Η πλήρης συνομολογία είναι ανεξάρτητη της επιλογής της ισχυρής πλήρους προβολικής επίλυσης στον ορισμό της. Χρησιμοποιώντας το συζυγές ζεύγος, η συνομολογία $\hat{H}^*(G, -)$, μέσω πλήρους $\mathbb{Z}G$ -προβολικής επίλυσης, \mathbb{P}_*^c , μηδενίζεται στα προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα, τα οποία είναι συνεπαγόμενα $\mathbb{Z}H$ -πρότυπα, καθώς δίνεται από τη συνομολογία $\hat{H}^*(H, -)$, μέσω της ισχυρής πλήρους $\mathbb{Z}H$ -προβολικής επίλυσης, $res_H^G(\mathbb{P}_*^c)$, στα υποκείμενα $\mathbb{Z}H$ -πρότυπα. Αυτό επιτρέπει *dimension shifting* με προβολικές επιλύσεις, δηλαδή $\hat{H}^*(G, M) \simeq \hat{H}^{*+1}(G, \Omega M)$. Για δείκτες μεγαλύτερους του n , η πλήρης συνομολογία της G ταυτίζεται με τη συνομολογία της G , και οι ίδιες στο βαθμό n είναι ισόμορφες, καθώς ο συναρτητής $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ είναι δεξιά ακριβής για κάθε $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M .

Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα, με $t \geq 0$ και B ένα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & R_{n+t+1} & \xrightarrow{a} & P_{n+t} & \xrightarrow{d} & R_{n+t} \\
 & & \searrow \lambda & & \downarrow \Delta & \swarrow g & \\
 & & & & \Omega B & & \\
 F\Omega B & \xrightarrow{\quad} & \Omega B & \xrightarrow{b} & FB & \xrightarrow{c} & B \\
 & & & & \downarrow h & \swarrow h' & \downarrow H \\
 & & & & & & B
 \end{array}$$

Η εμφύτευση $R_{n+t+1} \xrightarrow{a} P_{n+t}$ είναι $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενη. Έστω ότι η απεικόνιση g παραγοντοποιείται μέσω προβολικού $\mathbb{Z}G$ -πρότυπου. Τότε, θα παραγοντοποιείται και μέσω του $F\Omega B$ δια της απεικόνισης λ . Καθώς η εμφύτευση $R_{n+t+1} \xrightarrow{a} P_{n+t}$ είναι $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενη και το $F\Omega B$ σχετικά εμφυτευτικό, η λ επεκτείνεται στη Δ , όπως φαίνεται στο σχήμα, και τότε η g παραγοντοποιείται μέσω του P_{n+t} . Έτσι, η απεικόνιση $\Phi_1 : Ext_{\mathbb{Z}G}^1(R_{n+t}, \Omega B) \rightarrow [R_{n+t+1}, \Omega B]$ έχει καλά ορισμένη αντίστροφη με κανόνα που στέλνει μία κλάση στην κλάση με ίδιο αντιπρόσωπο.

Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα, με $t \geq 0$ και B ένα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 R_{n+t+1} & \xrightarrow{a} & P_{n+t} & \xrightarrow{d} & R_{n+t} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & R_{s+1} & \longrightarrow & P_s & \longrightarrow & R_s \\
 F \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow H & & & & \downarrow \Omega f & & \downarrow & & \downarrow f \\
 \Omega^{n+t-s+1} B & \xrightarrow{b} & F\Omega^{n+t-s} B & \xrightarrow{c} & \Omega^{n+t-s} B & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \Omega B & \longrightarrow & FB & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

Η εμφύτευση $R_{n+t+1} \xrightarrow{a} P_{n+t}$ είναι $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενη. Τότε, καθώς το $F\Omega^{n+t-s}B$ είναι σχετικά εμφυτευτικό, η απεικόνιση $b \circ F$ επεκτείνεται σε απεικόνιση h , καθιστώντας το αριστερό τετράγωνο μεταθετικό, η οποία ορίζει με μοναδικό τρόπο την απεικόνιση H λόγω της καθολικής ιδιότητας του συμπυρήνα της a για την απεικόνιση $c \circ h$. Η απεικόνιση F ορίζει μοναδική απεικόνιση H modulo παραγοντοποίησης μέσω του $F\Omega^{n+t-s}B$. Πράγματι, αν υπάρχει απεικόνιση h' ώστε $h' \circ a = b \circ F = h \circ a$, που ορίζει μοναδικά την απεικόνιση H' , τότε $(h - h') \circ a = 0$, και λόγω της καθολικής ιδιότητας του συμπυρήνα της a υπάρχει απεικόνιση ρ ώστε $\rho \circ d = h - h'$. Τότε έχουμε $(H - H') \circ d = c \circ (h - h') = c \circ \rho \circ d$, και η d είναι δεξιά διαγράψιμη. Επομένως, η απεικόνιση $\Omega : [R_{n+t}, \Omega^{n+t-s}B] \rightarrow [R_{n+t+1}, \Omega^{n+t-s+1}B]$ είναι ισομορφισμός. Οι ομάδες *Benson – Carlson* βεβαίως είναι ανεξάρτητες επιλογής προβολικής επίλυσης, και αυτό έπεται από το λήμμα του *Schanuel*.

Επομένως, για $k > n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \widehat{H}^k(G, M) &= H^k(G, M) = Ext_{\mathbb{Z}G}^k(\mathbb{Z}, M) \stackrel{dim. \ shift.}{\simeq} Ext_{\mathbb{Z}G}^1(R_{k-1}, M) \stackrel{\Phi_1}{\simeq} [R_k, M] \stackrel{\Omega}{\simeq} \widehat{BC}_{\mathbb{Z}G}^k(\mathbb{Z}, M), \\ &\text{και για } k \leq n \text{ έχουμε} \\ \widehat{H}^k(G, M) &\stackrel{dim. \ shift.}{\simeq} \widehat{H}^{k+(n+1-k)}(G, \Omega^{n+1-k}M) = H^{n+1}(G, \Omega^{n+1-k}M) \stackrel{\Phi_{n+1}}{\simeq} [R_{n+1}, \Omega^{n+1-k}M] \stackrel{\Omega}{\simeq} \\ &\widehat{BC}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(\mathbb{Z}, \Omega^{n+1-k}M) \stackrel{dim. \ shift.}{\simeq} \widehat{BC}_{\mathbb{Z}G}^k(\mathbb{Z}, M). \end{aligned}$$

3.7 Η εμφυτευτική πλήρωση του συνομολογικού συναρτητή Ext κατά *Nucinkis*.

Οι ακριβώς δυϊκές προσεγγίσεις οδηγούν στον ορισμό της εμφυτευτικής πλήρωσης του συνομολογικού συναρτητή Ext , κατά *Nucinkis*. Παραθέτουμε τους φυσικά ισοδύναμους συναρτητές που αποτελούν αυτήν την πλήρωση για τον ανταλλοίωτο συνομολογικό συναρτητή $Ext_R^*(-, B)$, με B ένα R -πρότυπο.

Η προσέγγιση κατά *Mislin* είναι

$$\widetilde{Ext}_R^*(-, B) = \{ \widetilde{Ext}_R^n(-, B) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} S^{-k} Ext_R^{n+k}(-, B), n \in \mathbb{Z}, n+k \geq 0 \}.$$

Καθώς το σύνολο δεικτών του ορίου είναι κατευθυνόμενο, η προσέγγιση αυτή είναι φυσικά ισοδύναμη με την ακόλουθη,

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} Ext_R^{*+k}(\Sigma^k -, B) = \{ \lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} Ext_R^{n+k}(\Sigma^k -, B), n \in \mathbb{Z}, n+k \geq 0 \}.$$

Η προσέγγιση κατά *Benson – Carlson* είναι

$$\widetilde{BC}_R^*(-, B) = \{ \widetilde{BC}_R^n(-, B) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} [\Sigma^k -, \Sigma^{n+k} B], n \in \mathbb{Z}, n+k \geq 0 \}.$$

Η προσέγγιση κατά *Vogel* είναι

$$V_R^*(-, B) = \widetilde{Ext}_R^*(-, B) = H^*(\widetilde{Hom}_R(\mathbb{I}_-, \mathbb{J}_B^*)) = \{ H^n(\widetilde{Hom}_R(\mathbb{I}_-, \mathbb{J}_B^*)), n \in \mathbb{Z} \}, \widetilde{Hom}_R(\mathbb{I}_-, \mathbb{J}_B^*) = \frac{Hom_R(\mathbb{I}_-, \mathbb{J}_B^*)}{\overline{Hom}_R(\mathbb{I}_-, \mathbb{J}_B^*)}.$$

Ορίζονται εύλογα και οι συναρτητές $\widetilde{Ext}_R^*(A, -)$, $\lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} Ext_R^{*+k}(\Sigma^k A, -)$, $\widetilde{BC}_R^*(A, -)$ και $\widetilde{Ext}_R^*(A, -)$,

όπου A είναι ένα R -πρότυπο, καθιστώντας αντίστοιχα τους συνομολογικούς δισυναρτητές $\widetilde{Ext}_R^*(-, -)$, $\lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} Ext_R^{*+k}(\Sigma^k -, -)$, $\widetilde{BC}_R^*(-, -)$ και $\widetilde{Ext}_R^*(-, -)$ εμφυτευτικώς πλήρεις και φυσικούς ως προς τις δύο μεταβλητές τους.

Παραπέμπουμε στο [43].

3.8 Προβολικώς και εμφυτευτικώς πλήρης συνομολογία.

Θεωρούμε την οικογένεια δισυναρτητών $\widetilde{Ext}_R^*(-, -)$. Τότε, για κάθε R -πρότυπο B , ο $\widetilde{Ext}_R^*(-, B)$ είναι συνομολογικός συναρτητής ως η εμφυτευτική πλήρωση του ανταλλοιώτου συνομολογικού συναρτητή $\widehat{Ext}_R^*(-, B)$. Προκύπτει εύλογα ότι και, για κάθε R -πρότυπο A , η οικογένεια $\widetilde{Ext}_R^*(A, -)$ αποτελεί συνομολογικό συναρτητή. Ομοίως ισχύει και για την οικογένεια δισυναρτητών $\widehat{Ext}_R^*(-, -)$.

Για κάθε n ορίζουμε τους ακόλουθους φυσικούς μετασχηματισμούς. Οι αριστεροί δορυφόροι και οι συνδετικοί ομομορφισμοί φέρουν δείκτες δηλώνοντας τη μεταβλητή του συναρτητή στον οποίον αναφέρονται.

$$Ext_R^n(-, -) \xrightarrow{\psi_n} S_2^{-1} Ext_R^{n+1}(-, -), \psi_n(A, B) = \bar{\omega}$$

$$\begin{array}{ccc} Ext_R^n(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_2^{-1} Ext_R^{n+1}(A, B) \\ & \searrow \omega_2 & \downarrow \mu \\ & & Ext_R^{n+1}(A, \Omega B) \end{array}$$

$$Ext_R^n(-, -) \xrightarrow{\phi_n} S_1^{-1} Ext_R^{n+1}(-, -), \phi_n(A, B) = \bar{\omega}$$

$$\begin{array}{ccc} Ext_R^n(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_1^{-1} Ext_R^{n+1}(A, B) \\ & \searrow \omega_1 & \downarrow \mu \\ & & Ext_R^{n+1}(\Sigma A, B) \end{array}$$

Οι φυσικοί μετασχηματισμοί επεκτείνονται με μοναδικό τρόπο στους 1-αριστερούς ή και στους 2-αριστερούς δορυφόρους των δισυναρτητών στους οποίους δρουν.

Από το παρακάτω διάγραμμα, με δεδομένες τις παραστάσεις των προτύπων A και B που εμφανίζουν τον εμφυτευτικό φάκελο του πρώτου και το ελεύθερο πρότυπο με βάση το υποκείμενο σύνολο του δεύτερου αντίστοιχα, προκύπτει ότι οι 1-αριστεροί και 2-αριστεροί δορυφόροι μπορούν να εναλλάσσονται.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & S_2^{-1}S_1^{-1}Ext_R^n(A, B) & \xrightarrow{\mu} & S_2^{-1}Ext_R^n(\Sigma A, B) & \xrightarrow{\lambda^*} & S_2^{-1}Ext_R^n(IA, B) \\
& & \mu\downarrow & & \mu\downarrow & & \downarrow\mu \\
0 & \longrightarrow & S_1^{-1}Ext_R^n(A, \Omega B) & \xrightarrow{\mu} & Ext_R^n(\Sigma A, \Omega B) & \xrightarrow{\lambda^*} & Ext_R^n(IA, \Omega B) \\
& & \phi_*\downarrow & & \phi_*\downarrow & & \downarrow\phi_* \\
0 & \longrightarrow & S_1^{-1}Ext_R^n(A, FB) & \xrightarrow{\mu} & Ext_R^n(\Sigma A, FB) & \xrightarrow{\lambda^*} & Ext_R^n(IA, FB)
\end{array}$$

Πρόταση 3.8.1 Οι συνομολογικοί δισυναρτητές $\widehat{Ext}_R^*(-, -)$ και $\widehat{Ext}_R^*(-, -)$ είναι φυσικά ισοδύναμοι.

Απόδειξη.

Θεωρούμε το παρακάτω πλέγμα.

$$\begin{array}{ccccccc}
Ext^n(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_1^{-1}Ext_R^{n+1}(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_1^{-k}Ext_R^{n+k}(A, B) & \xrightarrow{\varpi} & \check{Ext}_R^n(A, B) \\
\bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow \\
S_2^{-1}Ext_R^{n+1}(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_2^{-1}S_1^{-1}Ext_R^{n+2}(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_2^{-1}S_1^{-k}Ext_R^{n+k+1}(A, B) & \xrightarrow{\varpi} & S_2^{-1}\check{Ext}_R^{n+1}(A, B) \\
\bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow \\
S_2^{-2}Ext_R^{n+2}(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_2^{-2}S_1^{-1}Ext_R^{n+3}(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_2^{-2}S_1^{-k}Ext_R^{n+k+2}(A, B) & \xrightarrow{\varpi} & S_2^{-2}\check{Ext}_R^{n+2}(A, B) \\
\bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
S_2^{-l}Ext_R^{n+l}(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_2^{-l}S_1^{-1}Ext_R^{n+l+1}(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_2^{-l}S_1^{-k}Ext_R^{n+l+k}(A, B) & \xrightarrow{\varpi} & S_2^{-l}\check{Ext}_R^{n+l}(A, B) \\
\bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow & & \bar{\omega}\downarrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\varpi\downarrow & & \varpi\downarrow & & \varpi\downarrow & & \varpi\downarrow \\
\hat{Ext}^n(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_1^{-1}\hat{Ext}_R^{n+1}(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_1^{-k}\hat{Ext}_R^{n+k}(A, B) & \xrightarrow{\varpi} & \Upsilon
\end{array}$$

Θα δείξουμε ότι κάθε τετράγωνο στο πλέγμα είναι αντιμεταθετικό. Και τότε, θεωρώντας \boxplus , προκύπτει ότι το πλέγμα είναι μεταθετικό. Η δεξιά στήλη και η κάτω γραμμή προκύπτουν καθώς οι πληρώσεις

που εμφανίζονται έχουν την καθολική ιδιότητα του πυρήνα στον ορισμό των δορυφόρων, λόγω του ατεθυθονόμενου συνόλου δεικτών του ορίου, παραδείγματος χάριν

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} S_1^{-k} S_2^{-1} Ext_R^{n+k+1}(A, B) \simeq S_2^{-1} \lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} S_1^{-k} Ext_R^{n+k+1}(A, B).$$

Επομένως ισχύει $\widetilde{Ext}_R^n(A, B) \simeq \Upsilon \simeq \widehat{Ext}_R^n(A, B)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Ορίζουμε τους παρακάτω φυσικούς μετασχηματισμούς συνομολογικών συναρτητών

$$\check{\tau}^* : Ext_R^*(-, -) \longrightarrow \widetilde{Ext}_R^*(-, -), \quad \check{\tau}^*(A, B) = \check{\tau}_B^*(A), \quad \check{\tau}_B^* : Ext_R^*(-, B) \longrightarrow \widetilde{Ext}_R^*(-, B),$$

όπου ο τελευταίος φυσικός μετασχηματισμός είναι αυτός της εμφυτευτικής πλήρωσης. Ομοίως έχουμε

$$\hat{\tau}^* : Ext_R^*(-, -) \longrightarrow \widehat{Ext}_R^*(-, -), \quad \hat{\tau}^*(A, B) = \hat{\tau}_A^*(B), \quad \hat{\tau}_A^* : Ext_R^*(A, -) \longrightarrow \widehat{Ext}_R^*(A, -),$$

όπου ο τελευταίος φυσικός μετασχηματισμός είναι αυτός της προβολικής πλήρωσης. Εύλογα έχουμε και τους ακόλουθους.

$$\hat{\tau}_V^* : \widetilde{Ext}_R^*(-, -) \longrightarrow \widehat{Ext}_R^*(-, -), \quad \hat{\tau}_V^*(A, B) = \hat{\tau}_A^*(B), \quad \hat{\tau}_A^* : \widetilde{Ext}_R^*(A, -) \longrightarrow \widehat{Ext}_R^*(A, -).$$

$$\check{\tau}_\wedge^* : \widehat{Ext}_R^*(-, -) \longrightarrow \widetilde{Ext}_R^*(-, -), \quad \check{\tau}_\wedge^*(A, B) = \check{\tau}_B^*(A), \quad \check{\tau}_B^* : \widehat{Ext}_R^*(-, B) \longrightarrow \widetilde{Ext}_R^*(-, B).$$

Ένας εκφυλισμός του παραπάνω πλέγματος είναι το ακόλουθο τετράγωνο.

$$\begin{array}{ccc} Ext_R^n(A, B) & \xrightarrow{\check{\tau}^n(A, B)} & \widetilde{Ext}_R^n(A, B) \\ \hat{\tau}^n(A, B) \downarrow & & \downarrow \hat{\tau}_V^n(A, B) \\ \widehat{Ext}_R^n(A, B) & \xrightarrow{\check{\tau}_\wedge^n(A, B)} & \widetilde{Ext}_R^n(A, B) \simeq \widehat{Ext}_R^n(A, B) \end{array}$$

Καθώς $\hat{\tau}_V^n(A, B) \circ \check{\tau}^n(A, B) = \check{\tau}_\wedge^n(A, B) \circ \hat{\tau}^n(A, B)$ για κάθε ζεύγος προτύπων, για κάθε ακέραιο n , ισχύει $\hat{\tau}_V^* \circ \check{\tau}^* = \check{\tau}_\wedge^* \circ \hat{\tau}^*$. Στο κάτωθι διάγραμμα οι ϕ^* και Φ^* ορίζονται λόγω των καθολικών ιδιοτήτων των συνομολογικών δισυναρτητών. Από την προηγούμενη ισότητα των φυσικών μετασχηματισμών η Φ^* είναι ο ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός.

$$\begin{array}{ccccc} Ext_R^*(-, -) & \xrightarrow{\check{\tau}^*} & \widetilde{Ext}_R^*(-, -) & \xrightarrow{\hat{\tau}_V^*} & \widehat{Ext}_R^*(-, -) \\ & \searrow & \downarrow \phi^* & \swarrow \Phi^* & \\ & & \widetilde{Ext}_R^*(-, -) & & \end{array}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται δείχνοντας ότι τα τετράγωνα που εμφανίστηκαν στο πλέγμα είναι αντιμεταθετικά. Στα κάτωθι διαγράμματα θεωρούμε κάθετα τις εμφυτεύσεις των δορυφόρων και ο προκύπτων κύβος είναι περιφερειακά μεταθετικός. Η κάτω έδρα είναι γνωστή για την αντιμεταθετικότητά της.

$$\begin{array}{ccccc}
S_2^{-l} S_1^{-k} \text{Ext}_R^{n+l+k}(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_2^{-l} S_1^{-(k+1)} \text{Ext}_R^{n+l+k+1}(A, B) & & \\
& \searrow \bar{\omega} & & \searrow \bar{\omega} & \\
& & S_2^{-(l+1)} S_1^{-k} \text{Ext}_R^{n+l+k+1}(A, B) & \xrightarrow{\bar{\omega}} & S_2^{-(l+1)} S_1^{-(k+1)} \text{Ext}_R^{n+l+k+2}(A, B) \\
& & & & \\
\text{Ext}_R^{n+l+k}(\Sigma^k A, \Omega^l B) & \xrightarrow{\omega_1} & \text{Ext}_R^{n+l+k+1}(\Sigma^{k+1} A, \Omega^l B) & & \\
& \searrow \omega_2 & & \searrow \omega_2 & \\
& & \text{Ext}_R^{n+l+k+1}(\Sigma^k A, \Omega^{l+1} B) & \xrightarrow{\omega_1} & \text{Ext}_R^{n+l+k+2}(\Sigma^{k+1} A, \Omega^{l+1} B)
\end{array}$$

□

3.9 Κριτήρια μηδενισμού και η ισορροπία του δισυναρτητή Ext .

Θεώρημα 3.9.1 Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα αριστερό R -πρότυπο. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες.

1. $\widehat{\text{Ext}}_R^*(M, -) = 0 \Leftrightarrow \text{proj.dim.}_R M < \infty \Leftrightarrow \widehat{\text{Ext}}_R^0(M, M) = 0$
2. $\widetilde{\text{Ext}}_R^*(-, M) = 0 \Leftrightarrow \text{inj.dim.}_R M < \infty \Leftrightarrow \widetilde{\text{Ext}}_R^0(M, M) = 0$

Απόδειξη.

Αποδεικνύουμε το πρώτο σκέλος του θεωρήματος, καθώς το δεύτερο αποδεικνύεται δυϊκώς.

$$\widehat{\text{Ext}}_R^*(M, -) = 0 \Rightarrow \widehat{\text{Ext}}_R^0(M, M) = 0 \Rightarrow \text{proj.dim.}_R M < \infty \Rightarrow \widehat{\text{Ext}}_R^*(M, -) = 0$$

Η πρώτη συνεπαγωγή είναι άμεση. Για τη δεύτερη, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση κατά *Benson* και *Carlson*, και προκύπτει ότι, η επέκταση της ταυτοτικής απεικόνισης του M ως η ταυτοτική απεικόνιση ενός πυρήνα μίας προβολικής επίλυσής του, λόγω του κατευθυνόμενου συνόλου δεικτών, παραγοντοποιείται μέσω προβολικού R -πρότυπου, καθιστώντας τον πυρήνα προβολικό R -πρότυπο. Η τρίτη συνεπαγωγή οφείλεται στο *dimension shifting*, καθώς ο συναρτητής Ext είναι προβολικώς πλήρης στην πρώτη μεταβλητή, ο οποίος βέβαια μηδενίζεται τερματικώς όταν στην πρώτη μεταβλητή βρίσκεται πρότυπο με πεπερασμένη προβολική διάσταση, εν όψει του συναρτητή $\widehat{\text{Ext}}_R^*(M, -)$. Έχουμε $\text{Ext}_R^n(M, B) \simeq \text{Ext}_R^{n-1}(\Omega M, B) \simeq \text{Ext}_R^{n-2}(\Omega^2 M, B) \simeq \dots \simeq \text{Ext}_R^{n-s}(\Omega^s M, B)$ για κάθε R -πρότυπο B και για κάθε φυσικό αριθμό $n > 1$ και με διαφορά φυσικών αριθμών $n - s \geq 1$. Χρησιμοποιούμε *dimension shifting* στα αντικείμενα μεγάλης διάστασης που συνθέτουν το όριο και αποφαινόμεστε το μηδενισμό τους.

$$\widehat{Ext}_R^*(M, -) \simeq \lim_{\substack{\rightarrow \\ k \geq 0}} (Ext_R^*(M, -) \xrightarrow{\omega} Ext_R^{*+1}(M, \Omega-) \xrightarrow{\omega} Ext_R^{*+2}(M, \Omega^2-) \xrightarrow{\omega} \dots \xrightarrow{\omega} Ext_R^{*+k}(M, \Omega^k-) \xrightarrow{\omega} \dots)$$

□

Θεώρημα 3.9.2 Οι συνομολογικοί συναρτητές $\widetilde{Ext}_R^*(-, -)$ και $\widehat{Ext}_R^*(-, -)$ είναι φυσικά ισοδύναμοι αν και μόνο αν $silpR = spliR < \infty$.

Απόδειξη.

Έστω ότι $silpR = spliR = m - 1$. Τότε η κολόβωση ${}_m Ext_R^*(-, -)_\infty$ είναι προβολικώς και εμφυτευτικώς πλήρης και ως προς τις δύο μεταβλητές της. Ειδικότερα, είναι (I, P) πλήρης. Με δεδομένο ότι $silpR = m - 1$, δείχνουμε ότι η οικογένεια των 2-αριστερών δορυφόρων του $Ext_R^m(-, -)$ ως προς την πρώτη μεταβλητή είναι συνομολογικός συναρτητής, και με δεδομένο ότι $spliR = m - 1$ δείχνουμε ότι η οικογένεια είναι εμφυτευτικώς πλήρης ως προς την ίδια μεταβλητή. Έτσι, η οικογένεια αυτή αγκιστρωμένη στην προηγούμενη κολόβωση δίνει συνομολογικό δισυναρτητή (I, P) πλήρη. Από την πρόταση με τη μοναδική επέκταση έχουμε ότι η τερματική εμφυτευτική πλήρωση και η τερματική προβολική πλήρωση του συνομολογικού δισυναρτητή Ext είναι αυτή η αγκίστρωση, άρα οι πληρώσεις του εν λόγω συναρτητή είναι φυσικά ισοδύναμες. Δι' ουτως αποδεικνύεται ότι, με δεδομένο ότι $spliR = m - 1$, η οικογένεια των 1-αριστερών δορυφόρων του $Ext_R^m(-, -)$ ως προς τη δεύτερη μεταβλητή είναι συνομολογικός συναρτητής, και, με δεδομένο ότι $silpR = m - 1$, η οικογένεια είναι προβολικώς πλήρης ως προς την ίδια μεταβλητή. Έτσι, η οικογένεια αυτή αγκιστρωμένη στην αρχική κολόβωση δίνει συνομολογικό δισυναρτητή (I, P) πλήρη. Από την πρόταση με τη μοναδική επέκταση έχουμε ότι η τερματική εμφυτευτική πλήρωση και η τερματική προβολική πλήρωση του συνομολογικού δισυναρτητή Ext είναι αυτή η αγκίστρωση. Άρα οι πληρώσεις του εν λόγω συναρτητή είναι φυσικά ισοδύναμες και οι προαναφερθείσες αγκιστρώσεις είναι φυσικά ισοδύναμες. Θεωρούμε ένα R -πρότυπο B και μία βραχεία ακριβή ακολουθία R -προτύπων $0 \rightarrow A' \xrightarrow{a} A \xrightarrow{b} A'' \rightarrow 0$. Χρησιμοποιούμε την προβολική επίλυση του προτύπου B που ορίζει τα συζυγή του πρότυπα. Ορίζουμε συνδετικό ομομορφισμό δ τη σύνθεση $\omega_2^{-1} \circ \omega_1 \circ \mu$.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 0 & & Ext_R^m(A'', FB) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
S_2^{-2} Ext_R^m(A', B) & \xrightarrow{\delta} & S_2^{-1} Ext_R^m(A'', B) & \xrightarrow{b^*} & S_2^{-1} Ext_R^m(A, B) & \xrightarrow{a^*} & S_2^{-1} Ext_R^m(A', B) & \xrightarrow{\delta} & Ext_R^m(A'', B) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
dim. \ shift. & & \mu & & \mu & & \mu & & \omega_2 \\
S_2^{-1} Ext_R^m(A', \Omega B) & \xrightarrow{\delta} & Ext_R^m(A'', \Omega B) & \xrightarrow{b^*} & Ext_R^m(A, \Omega B) & \xrightarrow{a^*} & Ext_R^m(A', \Omega B) & \xrightarrow{\omega_1} & Ext_R^{m+1}(A'', \Omega B) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Ext_R^m(A', \Omega^2 B) & \xrightarrow{\omega_1} & Ext_R^{m+1}(A'', \Omega^2 B) & & Ext_R^m(A', FB) & & Ext_R^{m+1}(A'', FB)
\end{array}$$

Έστω τώρα ότι $\widetilde{Ext}_R^*(-, -) \simeq \widehat{Ext}_R^*(-, -)$. Τότε και $\widetilde{Ext}_R^0(M, M) \simeq \widehat{Ext}_R^0(M, M)$ για κάθε πρότυπο M . Αν I είναι εμφυτευτικό R -πρότυπο, τότε

$$\widetilde{Ext}_R^0(I, I) = 0 \Leftrightarrow \widehat{Ext}_R^0(I, I) = 0 \Leftrightarrow \widehat{BC}_R^0(I, I) = 0.$$

Άρα, για την ταυτοτική απεικόνιση του I , με σύνολο δεικτών κατευθυνόμενο, η ταυτοτική απεικόνιση κάποιου πυρήνα μίας προβολικής επίλυσής του παραγοντοποιείται μέσω προβολικού R -πρότυπου που καθιστά τον πυρήνα προβολικό R -πρότυπο. Επομένως, η προβολική διάσταση κάθε εμφυτευτικού R -πρότυπου είναι πεπερασμένη. Και βέβαια αν κάθε τέτοια διάσταση είναι πεπερασμένη τότε $spliR < \infty$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής. Έστω ότι για κάθε φυσικό αριθμό i υπάρχει εμφυτευτικό R -πρότυπο I_i με $proj.dim.RI_i > i$. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο αυτών και προκύπτει εμφυτευτικό R -πρότυπο, πάλι με πεπερασμένη προβολική διάσταση, $I = \prod_i I_i$. Τότε αν $n - 1$ είναι αυτή η διάσταση έχουμε, για κάθε R -πρότυπο B ,

$$0 = Ext_R^n(I, B) = Ext_R^n\left(\prod_i I_i, B\right)$$

ενώ μπορούμε να βρούμε R -πρότυπο B' με $Ext_R^n(I_{n-1}, B') \neq 0$. Καταλήγουμε σε άτοπο, καθώς έχουμε

$$0 = Ext_R^n(I, B') = Ext_R^n\left(\prod_i I_i, B'\right) \simeq Ext_R^n(I_{n-1}, B') \oplus Ext_R^n\left(\prod_{i, i \neq n-1} I_i, B'\right) \neq 0.$$

Ομοίως δείχνουμε ότι $silpR < \infty$. Και φυσικά, ισχύει ότι αν αυτές οι διαστάσεις είναι πεπερασμένες τότε είναι και ίσες. \square

4 Η πλήρης ομολογία.

4.1 Ο ορισμός της εμφυτευτικής πλήρωσης του ομολογικού συναρτητή Tor .

Έστω A ένα δεξιό R -πρότυπο. Θα συμβολίζουμε με $\widetilde{Tor}_*^R(A, -)$, όταν αποδεικνύεται ότι υπάρχει, την εμφυτευτική πλήρωση του ομολογικού συναρτητή $Tor_*^R(A, -)$, μαζί με μορφισμό $\tau^* : \widetilde{Tor}_*^R(A, -) \rightarrow Tor_*^R(A, -)$. Είναι ο $(-\infty, +\infty)$ - εμφυτευτικός πλήρης ομολογικός συναρτητής με την καθολική ιδιότητα κάθε μη μηδενικός μορφισμός από εμφυτευτικώς πλήρη ομολογικό συναρτητή W_* στον $Tor_*^R(A, -)$ να παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο μέσω του τ^* .

$$\begin{array}{ccc} W_* & \xrightarrow{\Lambda^*} & \widetilde{Tor}_*^R(A, -) \\ \lambda^* \downarrow & & \swarrow \tau^* \\ & & Tor_*^R(A, -) \end{array}$$

Σε προηγούμενη παράγραφο ασχοληθήκαμε με τις πλήρεις ισχυρές προβολικές επιλύσεις. Χάριν αυτών, δίνουμε την απόδειξη που δηλώνει ότι η εμφυτευτική πλήρωση του ομολογικού συναρτητή Tor επιτυγχάνεται μέσω πλήρους ισχυρής προβολικής επίλυσης, όταν αυτή υπάρχει. Ο δακτύλιος σε αυτήν την περίπτωση είναι ένας ομαδοδακτύλιος.

Πρόταση 4.1.1 $spli\mathbb{Z}G < \infty \Rightarrow \widetilde{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(A, -) = H_n(\mathbb{P}_*^{c^A} \otimes_{\mathbb{Z}G} -)$ για κάθε ακέραιο n , με $\mathbb{P}_*^{c^A}$ πλήρης προβολική επίλυση του A in the strong sense.

Απόδειξη.

Καθώς $spli\mathbb{Z}G < \infty$, τότε και $silp\mathbb{Z}G < \infty$ και κάθε $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο επιδέχεται πλήρη προβολική επίλυση in the strong sense. Θα δείξουμε τώρα ότι $splf\mathbb{Z}G < \infty$.

Αρχικά δείχνουμε ότι $fin.dim.\mathbb{Z}G \leq silp\mathbb{Z}G$. Έστω λοιπόν $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M με $proj.dim.\mathbb{Z}G M = m < \infty$. Τότε ο $Ext_{\mathbb{Z}G}^m(M, -)$ είναι δεξιά ακριβής. Υπάρχει $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο B με $Ext_{\mathbb{Z}G}^m(M, B) \neq 0$, και άρα υπάρχει προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P , ώστε $P \rightarrow B \rightarrow 0$, και $Ext_{\mathbb{Z}G}^m(M, P) \neq 0$. Συνεπάγεται ότι $inj.dim.\mathbb{Z}G P \geq m$, άρα $silp\mathbb{Z}G \geq m$. Το supremum των m είναι η $fin.dim.\mathbb{Z}G$. Άρα $silp\mathbb{Z}G \geq fin.dim.\mathbb{Z}G$.

Από αποτέλεσμα του Jensen, και παραπέμπουμε στο [37], έχουμε ότι $fin.dim.\mathbb{Z}G < \infty \Rightarrow proj.dim.\mathbb{Z}G M < \infty$ για κάθε επίπεδο πρότυπο M . Καθώς το άπειρο ευθύ άθροισμα επίπεδων προτύπων είναι επίπεδο πρότυπο, έχουμε φράγμα στο $splf\mathbb{Z}G$.

Θεωρούμε μία πλήρη προβολική επίλυση του προτύπου A in the strong sense, $\mathbb{P}_*^{c^A}$. Έστω Q ένα προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Τότε το σύμπλεγμα $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{P}_*^{c^A}, Q)$ είναι ακυκλικό. Όμως ικανή συνθήκη για να είναι καλά ορισμένη η πλήρωση του Tor μέσω μίας πλήρους προβολικής επίλυσης του A είναι το σύμπλεγμα $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{P}_*^{c^A}, M)$ να είναι ακυκλικό για κάθε επίπεδο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M . Αυτό, διότι θεωρώντας πλήρεις προβολικές επιλύσεις με κοινό κομμάτι για μεγάλες διαστάσεις, η επέκταση στα δεξιά αφορά σε επίπεδα πρότυπα και ικανοποιείται όταν συμβαίνει το τελευταίο επιχείρημα. Αυτό θα δώσει την ομοτοπική ισοδυναμία των πλήρων προβολικών επιλύσεων in the strong sense και η εμφυτευτική πλήρωση του Tor γίνεται τότε ανεξάρτητη της επιλογής μίας τέτοιας επίλυσης.

Έστω λοιπόν ένα επίπεδο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M και έστω ότι $splf\mathbb{Z}G = n$. Θεωρούμε μία προβολική επίλυση του προτύπου όπως φαίνεται παρακάτω.

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

$$\searrow \nearrow_{\mu}$$

$$R_{n-1}$$

Στη βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow R_{n-1} \rightarrow 0$ εφαρμόζουμε το συναρτητή $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{P}_*^{c^A}, -)$ ο οποίος είναι ακριβής καθώς η επίλυση $\mathbb{P}_*^{c^A}$ αποτελείται από προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα. Προκύπτει έτσι βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων $0 \rightarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{P}_*^{c^A}, P_n) \rightarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{P}_*^{c^A}, P_{n-1}) \rightarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{P}_*^{c^A}, R_{n-1}) \rightarrow 0$. Θεωρούμε τη μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία αυτών. Τα δύο συμπλέγματα είναι ακυκλικά αφού η επίλυση είναι in the strong sense. Έπεται ότι και το σύμπλεγμα $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{P}_*^{c^A}, R_{n-1})$ είναι ακυκλικό. Θεωρούμε τώρα την ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow R_{n-1} \rightarrow P_{n-2} \rightarrow R_{n-2} \rightarrow 0$ και συνεχίζουμε ομοίως. Σε πεπερασμένα βήματα έχουμε ότι το σύμπλεγμα $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{P}_*^{c^A}, M)$ είναι ακυκλικό, όπου το M είναι τυχαίο επίπεδο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Μένει να δείξουμε ότι το σύμπλεγμα $\mathbb{P}_*^{c^A} \otimes_{\mathbb{Z}G} I$ είναι ακυκλικό για κάθε εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο I . Και τότε, η εμφυτευτική πλήρωση του $Tor_{\mathbb{Z}G}^*(A, -)$ θα δίδεται μέσω της ομολογίας του συμπλέγματος

$\mathbb{P}_*^{cA} \otimes_{\mathbb{Z}G} -$, και αυτό διότι η πλήρης προβολική επίλυση είναι ομοτοπικά ισοδύναμη σε μεγάλες διαστάσεις με την προβολική επίλυση μέσω της οποίας παίρνουμε το σύμπλεγμα που δίνει την κλασσική ομολογία. Το τελευταίο συμβαίνει διότι καθώς το $spli\mathbb{Z}G < \infty$ έπεται και ότι $sfli\mathbb{Z}G < \infty$, που σημαίνει ότι ο ομολογικός συναρτητής $Tor_{\mathbb{Z}G}^*(A, -)$ είναι εμφυτευτικώς πλήρης σε μεγάλες διαστάσεις. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με τις δυϊκές προτάσεις που αφορούν σε τερματικές πληρώσεις, καθώς επίσης και στη δυϊκή πρόταση που αφορά στη μοναδική επέκταση στα δεξιά για συναλλοίωτους συναρτητές που είναι εμφυτευτικώς πλήρεις σε μεγάλες διαστάσεις. Η πρόταση αυτή εφαρμόζεται δυϊκά στον ομολογικό συναρτητή Tor , έτσι, η τερματική πλήρωση επιτυγχάνεται στους φθίνοντες δείκτες.

Θεωρούμε λοιπόν ένα εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο I και μία προβολική επίλυση αυτού.

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$

$$\begin{array}{c} \searrow \nearrow \mu \\ R_{n-1} \end{array}$$

Θεωρούμε την ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow R_{n-1} \rightarrow 0$. Εφαρμόζουμε το συναρτητή $\mathbb{P}_*^{cA} \otimes_{\mathbb{Z}G} -$ ο οποίος είναι ακριβής καθώς η προβολική επίλυση αποτελείται από επίπεδα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα. Προκύπτει λοιπόν βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων που δίνουμε παρακάτω, και παίρνουμε τη μακρά ακριβή ακολουθία της ομολογίας αυτών.

$$0 \longrightarrow \mathbb{P}_*^{cA} \otimes_{\mathbb{Z}G} P_n \longrightarrow \mathbb{P}_*^{cA} \otimes_{\mathbb{Z}G} P_{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}_*^{cA} \otimes_{\mathbb{Z}G} R_{n-1} \longrightarrow 0$$

Όμως το σύμπλεγμα $\mathbb{P}_*^{cA} \otimes_{\mathbb{Z}G} P$ είναι ακυκλικό για κάθε προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P . Αυτό συμβαίνει διότι το προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο είναι επίπεδο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, και η ομάδα ομολογίας $H_n(\mathbb{P}_*^{cA} \otimes_{\mathbb{Z}G} P)$ είναι η ομάδα Tor κάποιου πυρήνα της πλήρους επίλυσης με συντελεστή ένα επίπεδο πρότυπο, άρα η τετρimerμένη ομάδα. Επομένως, το σύμπλεγμα $\mathbb{P}_*^{cA} \otimes_{\mathbb{Z}G} R_{n-1}$ είναι ακυκλικό. Σε πεπερασμένα βήματα προκύπτει ότι το σύμπλεγμα $\mathbb{P}_*^{cA} \otimes_{\mathbb{Z}G} I$ είναι ακυκλικό για κάθε τυχαίο εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο I . \square

4.2 Φυσικοί Μετασχηματισμοί Yoneda.

Πρόταση 4.2.1 Γενικευμένο λήμμα Yoneda.

Έστω $T : R - Mod \rightarrow Abelian\ Groups$ συναλλοίωτος προσθετικός συναρτητής. Τότε ισχύει ο ακόλουθος ισομορφισμός αβελιανών ομάδων,

$$[Ext_R^n(B, -), T-] \xrightarrow[\cong]{\Gamma} S^{-n}TB.$$

Για $n = 0$ έχουμε την ειδική περίπτωση του λήμματος Yoneda, $[Hom_R(B, -), T-] \xrightarrow[\cong]{\Gamma} TB$.

Απόδειξη.

Έστω R_n ο n -οστός πυρήνας προβολικής επίλυσης του R -πρότυπου B ,

$$\dots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

$$\begin{array}{c} \searrow \nearrow \mu \\ R_n \end{array}$$

Αν ο $\tau : Ext_R^n(B, -) \longrightarrow T-$ είναι φυσικός μετασχηματισμός, ορίζουμε

$$\tau \xrightarrow{\Gamma} \Gamma(\tau) = \tau_{R_n}([1_{R_n}]).$$

Δείχνουμε ότι $\tau_{R_n}([1_{R_n}]) \in S^{-n}TB$. Έστω λοιπόν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} Hom_R(P_{n-1}, R_n) & \longrightarrow & Hom_R(R_n, R_n) & \longrightarrow & Ext_R^1(R_{n-1}, R_n) \simeq Ext_R^n(B, R_n) & \longrightarrow & 0 \\ \mu_* \downarrow & & \mu_* \downarrow & & \mu_* \downarrow & & \\ Hom_R(P_{n-1}, P_{n-1}) & \xrightarrow{\mu_*} & Hom_R(R_n, P_{n-1}) & \longrightarrow & Ext_R^n(B, P_{n-1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

και

$$\begin{array}{ccc} 1_{R_n} & \longrightarrow & [1_{R_n}] \\ \mu_* \downarrow & & \mu_* \downarrow \\ 1 & \xrightarrow{\mu_*} & \mu \longrightarrow 0 \end{array}$$

Τότε $\mu_*([1_{R_n}]) = 0$. Ο τ είναι φυσικός μετασχηματισμός, έτσι θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} Ext_R^n(B, R_n) & \xrightarrow{\tau_{R_n}} & TR_n \\ \mu_* \downarrow & & T\mu \downarrow \\ Ext_R^n(B, P_{n-1}) & \xrightarrow{\tau_{P_{n-1}}} & TP_{n-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} [1_{R_n}] & \longrightarrow & \tau_{R_n}([1_{R_n}]) \\ \mu_* \downarrow & & T\mu \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Άρα $\tau_{R_n}([1_{R_n}]) \in Ker T\mu = S^{-1}TR_{n-1} \simeq S^{-n}TB$, από *dimension shifting*. Ο Γ είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων.

Αντίστροφα, έστω $\xi \in S^{-n}TB \hookrightarrow TR_n \xrightarrow{T\mu} TP_{n-1}$. Θα ορίσουμε φυσικό μετασχηματισμό $\tau : Ext_R^n(B, -) \longrightarrow T-$ με $\tau_{R_n}([1_{R_n}]) = \xi$.

Έστω λοιπόν ένα R -πρότυπο M . Ορίζουμε ομομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\tau_M : Ext_R^n(B, M) \longrightarrow TM$$

$$x = [\sigma : R_n \rightarrow M] \mapsto T\sigma(\xi).$$

Ισχύει ότι $\tau_{R_n}([1_{R_n}]) = T1_{R_n}(\xi) = 1_{TR_n}(\xi) = \xi$.

Δείχνουμε ότι ο τ_M είναι καλά ορισμένος. Έστω $\sigma' : R_n \rightarrow M$ με $[\sigma] = [\sigma']$. Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά των αντιπροσώπων παραγοντοποιείται μέσω του P_{n-1} όπως φαίνεται στο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} R_n & \xrightarrow{\mu} & P_{n-1} \\ \sigma-\sigma' \downarrow & \swarrow g & \\ & & M \end{array}$$

Καθώς το ξ ανήκει στον πυρήνα του ομομορφισμού $T\mu$ έχουμε $0 = Tg \circ T\mu(\xi) = (T\sigma - T\sigma')(\xi)$.

Για να δείξουμε ότι ο τ είναι φυσικός θεωρούμε έναν ομομορφισμό $\phi : M \rightarrow N$. Τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} Ext_R^n(B, M) & \xrightarrow{\tau_M} & TM \\ \phi_* \downarrow & & T\phi \downarrow \\ Ext_R^n(B, N) & \xrightarrow{\tau_N} & TN \end{array}$$

καθώς

$$\begin{array}{ccc} x = [\sigma : R_n \rightarrow M] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & T\sigma(\xi) \\ \phi_* \downarrow & & T\phi \downarrow \\ [\phi \circ \sigma : R_n \rightarrow N] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & T(\phi \circ \sigma)(\xi) = T\phi \circ T\sigma(\xi) \end{array}$$

Για $n = 0$, έχουμε $[Hom_R(B, -), T-] \xrightarrow{\Gamma} TB$ με $\tau \mapsto \Gamma(\tau) = \tau_B(1_B) \in TB$. □

Πρόταση 4.2.2 Έστω $T : R\text{-Mod} \rightarrow \text{Abelian Groups}$ συναλλοίωτος προσθετικός συναρτητής. Αν ο T είναι δεξιά ακριβής τότε οι αριστεροί δορυφόροι του συμπίπτουν με τους αριστερούς παραγόμενους συναρτητές, ήτοι $S^{-n}T = L_nT$ για κάθε $n \geq 0$.

Απόδειξη.

Αν ο T είναι δεξιά ακριβής τότε $L_0T = T = S^0T$.

Πράγματι, θεωρούμε μία προβολική επίλυση ενός προτύπου $A, \mathbb{P} : \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$, και την κολόβωση αυτής, $\mathbb{P}_* : \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$. Εφαρμόζουμε το συναρτητή T σε αυτήν και προκύπτει το σύμπλεγμα $T\mathbb{P}_* : \dots \rightarrow TP_1 \rightarrow TP_0 \rightarrow 0$. Οι αριστεροί παραγόμενοι συναρτητές του T στο A είναι η ομολογία αυτού.

Όμως η ακολουθία $TP_1 \rightarrow TP_0 \rightarrow TA \rightarrow 0$ είναι ακριβής αφού ο T είναι δεξιά ακριβής. Έτσι, $L_0TA = H_0(T\mathbb{P}_*) \simeq TA$, και βέβαια ο μηδενικός δορυφόρος ενός συναρτητή είναι ο ίδιος.

Έστω τώρα R_n ο n -οστός πυρήνας προβολικής επίλυσης του R -προτύπου A ,

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{\theta_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{\theta_n} & P_{n-1} & \longrightarrow & P_{n-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0. \\ & & & & & \searrow \pi & \swarrow \mu & & & & & & & & & & \\ & & & & & & R_n & & & & & & & & & & \end{array}$$

Εφαρμόζουμε το συναρτητή T στην ακριβή ακολουθία $P_{n+1} \xrightarrow{\theta_{n+1}} P_n \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0$. Ο T είναι δεξιά ακριβής και το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα έχει ακριβείς γραμμές.

$$\begin{array}{ccccccc} TP_{n+1} & \xrightarrow{T\theta_{n+1}} & TP_n & \xrightarrow{T\pi} & TR_n & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & T\theta_n \downarrow & & \downarrow T\mu & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TP_{n-1} & \xrightarrow{1} & TP \end{array}$$

Από το λήμμα *snake* έχουμε την ακριβή ακολουθία $TP_{n+1} \xrightarrow{T\theta_{n+1}} KerT\theta_n \rightarrow KerT\mu \rightarrow 0$.

Όμως $S^{-n}TA = KerT\mu = Coker[TP_{n+1} \xrightarrow{T\theta_{n+1}} KerT\theta_n] = \frac{KerT\theta_n}{ImT\theta_{n+1}} = H_n(T\mathbb{P}_*) = L_nTA$. □

Έστω B ένα R -πρότυπο. Θεωρούμε το δεξιά ακριβή συναρτητή $-\otimes_R B$. Τότε $Tor_n^R(-, B) = L_n(-\otimes_R B) = S^{-n}(-\otimes_R B)$. Δυσικά έχουμε $Tor_n^R(A, -) = S^{-n}(A\otimes_R -)$. Από ισορροπία έχουμε $Tor_n^R(A, B) = L_n(-\otimes_R B)(A) = L_n(A\otimes_R -)(B)$.

Θεωρούμε τώρα το συναρτητή $\Phi_n = [Ext_R^n(-, -), A\otimes_R -]$ με $\Phi_n(B) = [Ext_R^n(B, -), A\otimes_R -] \xrightarrow{\Gamma} S^{-n}(A\otimes_R -)(B) = L_n(A\otimes_R -)(B) = Tor_n^R(A, B)$.

Η οικογένεια $\{\Phi_n, n \geq 0\}$ καθίσταται ομολογικός συναρτητής μέσω του ισομορφισμού Γ που μας προσφέρει το γενικευμένο λήμμα *Yoneda*. Στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα δείχνουμε τις απεικονίσεις που δίνουν τη φυσική αυτή ισοδυναμία. Θεωρούμε γι' αυτό μία βραχεία ακριβή ακολουθία R -πρότυπων, $0 \rightarrow B' \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} B'' \rightarrow 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} [Ext_R^n(B', -), A\otimes_R -] & \xrightarrow{\phi^{**}} & [Ext_R^n(B, -), A\otimes_R -] & \xrightarrow{\psi^{**}} & [Ext_R^n(B'', -), A\otimes_R -] & \xrightarrow{(-\omega_1)^*} & [Ext_R^{n-1}(B', -), A\otimes_R -] \\ \simeq \downarrow \Gamma & & \simeq \downarrow \Gamma & & \simeq \downarrow \Gamma & & \simeq \downarrow \Gamma \\ Tor_n^R(A, B') & \xrightarrow{\phi_*} & Tor_n^R(A, B) & \xrightarrow{\psi_*} & Tor_n^R(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & Tor_{n-1}^R(A, B') \end{array}$$

Στην πάνω σειρά, κάθε \square^* είναι η σύνθεση από τα δεξιά και οι απεικονίσεις ϕ^* , ψ^* και ω_1 αφορούν στο συνομολογικό συναρτητή $Ext_R^*(-, M)$, όπου M είναι ένα R -πρότυπο. Η κάτω σειρά αποτελεί τη μακρά ακριβή ακολουθία που αφορά στον ομολογικό συναρτητή $Tor_*^R(A, -)$.

Για τη μεταθετικότητα των δύο πρώτων τετραγώνων το *dimension shifting* μας επιτρέπει να αναχθούμε στις περιπτώσεις με $n = 1$ και $n = 0$. Δουλεύουμε ομοίως, επομένως αρκεί να δείξουμε τη μεταθετικότητα των παρακάτω διαγραμμάτων.

$$\begin{array}{ccc} [Ext_R^1(B', -), A\otimes_R -] & \xrightarrow{\phi^{**}} & [Ext_R^1(B, -), A\otimes_R -] \\ \simeq \downarrow \Gamma & & \simeq \downarrow \Gamma \\ S^{-1}(A\otimes_R -)(B') & \xrightarrow{\phi_*} & S^{-1}(A\otimes_R -)(B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
[Hom_R(B', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{\phi^{**}} & [Hom_R(B, -), A \otimes_R -] \\
\cong \downarrow \Gamma & & \cong \downarrow \Gamma \\
(A \otimes_R -)(B') & \xrightarrow{\phi_*} & (A \otimes_R -)(B)
\end{array}$$

Για τη μεταθετικότητα του πρώτου θεωρούμε τα εξής διαγράμματα.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R'_1 & \xrightarrow{\mu'} & P'_0 & \xrightarrow{\epsilon'} & B' & \longrightarrow & 0 \\
& & \Omega\phi \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow \phi & & \\
0 & \longrightarrow & R_1 & \xrightarrow{\mu} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & B & \longrightarrow & 0 \\
& & \sigma \downarrow & & & & & & \\
& & M & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & S^{-1}(A \otimes_R -)(B') & \xrightarrow{i} & A \otimes_R R'_1 & \xrightarrow{1 \otimes \mu'} & A \otimes_R P'_0 \\
& & \phi_* = 1 \otimes \Omega\phi \downarrow & & 1 \otimes \Omega\phi \downarrow & & \downarrow 1 \otimes f \\
0 & \longrightarrow & S^{-1}(A \otimes_R -)(B) & \xrightarrow{j} & A \otimes_R R_1 & \xrightarrow{1 \otimes \mu} & A \otimes_R P_0
\end{array}$$

Τότε έχουμε

$$\begin{array}{ccc}
\tau \in [Ext_R^1(B', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{\phi^{**}} & \tau \circ \phi^* \in [Ext_R^1(B, -), A \otimes_R -] \\
\Gamma \downarrow & & \downarrow \Gamma \\
\tau_{R'_1}([1_{R'_1}]) & \xrightarrow{\phi_*} & (1 \otimes \Omega\phi)(\tau_{R'_1}([1_{R'_1}])) = (\tau \circ \phi^*)_{R_1}([1_{R_1}]).
\end{array}$$

Θα δείξουμε την ισχύ της ισότητας $(1 \otimes \Omega\phi)(\tau_{R'_1}([1_{R'_1}])) = (\tau \circ \phi^*)_{R_1}([1_{R_1}])$. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα του τ ως φυσικός μετασχηματισμός. Έτσι έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc}
Ext_R^1(B', R'_1) & \xrightarrow{\tau_{R'_1}} & A \otimes_R R'_1 \\
\Omega\phi_* \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \Omega\phi \\
Ext_R^1(B', R_1) & \xrightarrow{\tau_{R_1}} & A \otimes_R R_1
\end{array}$$

Στην κλάση $[1_{R'_1}]$ έχουμε $(\tau_{R'_1} \circ \Omega\phi_*)([1_{R'_1}]) = ((1 \otimes \Omega\phi) \circ \tau_{R'_1})([1_{R'_1}])$.

Όμως $(\tau_{R_1} \circ \Omega\phi_*)([1_{R'_1}]) = (\tau_{R_1})(\Omega\phi_*([1_{R'_1}])) = \tau_{R_1}([\Omega\phi \circ 1_{R'_1}]) = \tau_{R_1}([\Omega\phi]) = \tau_{R_1}([1_{R_1} \circ \Omega\phi]) = (\tau_{R_1})(\phi^*([1_{R_1}])) = (\tau_{R_1} \circ \phi^*)([1_{R_1}]) = (\tau \circ \phi^*)_{R_1}([1_{R_1}])$.

Καθώς $\tau_{R'_1}([1_{R'_1}]) \in S^{-1}(A \otimes_R -)(B')$, έχουμε επίσης ότι $(1 \otimes \Omega\phi)(\tau_{R'_1}([1_{R'_1}])) = (1 \otimes \Omega\phi)(\tau_{R'_1}([1_{R'_1}])) = ((1 \otimes \Omega\phi) \circ \tau_{R'_1})([1_{R'_1}])$.

Για την περίπτωση όπου $n = 0$ θεωρούμε πάλι το εξής μεταθετικό διάγραμμα, όπου ο τ είναι φυσικός μετασχηματισμός.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(B', B') & \xrightarrow{\tau_{B'}} & A \otimes_R B' \\ \downarrow \phi_* & & \downarrow 1 \otimes_R \phi \\ \text{Hom}_R(B', B) & \xrightarrow{\tau_B} & A \otimes_R B \end{array}$$

Έχουμε $(1 \otimes_R \phi)(\tau_{B'}(1_{B'})) = (\tau_B \circ \phi_*)(1_{B'}) = \tau_B \circ \phi \circ 1_{B'} = \tau_B \circ \phi = \tau_B \circ 1_B \circ \phi = (\tau \circ \phi^*)_B(1_B)$.

Προκύπτει έτσι η μεταθετικότητα του διαγράμματος που μας αφορά, καθώς ισχύει το ακόλουθο.

$$\begin{array}{ccc} \tau \in [\text{Hom}_R(B', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{\phi^{**}} & \tau \circ \phi^* \in [\text{Hom}_R(B, -), A \otimes_R -] \\ \Gamma \downarrow & & \downarrow \Gamma \\ \tau_{B'}(1_{B'}) & \xrightarrow{1 \otimes_R \phi} & (1 \otimes_R \phi)(\tau_{B'}(1_{B'})) = (\tau \circ \phi^*)_B(1_B) \end{array}$$

Για τη μεταθετικότητα του τρίτου τετραγώνου που αφορά στη φυσική ισοδυναμία αρκεί ομοίως να δείξουμε τις περιπτώσεις για $n = 2$ και $n = 1$. Επομένως δείχνουμε τη μεταθετικότητα των παρακάτω διαγραμμάτων.

$$\begin{array}{ccc} [\text{Ext}_R^1(B'', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(-\omega_1)^*} & [\text{Hom}_R(B', -), A \otimes_R -] \\ \simeq \downarrow \Gamma & & \simeq \downarrow \Gamma \\ S^{-1}(A \otimes_R -)(B'') & \xrightarrow{\delta} & A \otimes_R B' \\ \\ [\text{Ext}_R^2(B'', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(-\omega_1)^*} & [\text{Ext}_R^1(B', -), A \otimes_R -] \\ \simeq \downarrow \Gamma & & \simeq \downarrow \Gamma \\ S^{-2}(A \otimes_R -)(B'') & \xrightarrow{\delta} & S^{-1}(A \otimes_R -)(B') \end{array}$$

Στο πρώτο διάγραμμα δεξιόστροφα έχουμε $\tau \mapsto -\tau \circ \omega_1 \mapsto -(\tau \circ \omega_1)_{B'}(1_{B'}) = -\tau_{B'} \circ \omega_1(1_{B'}) = -\tau_{B'}([1_{B'} \circ (-\sigma)]) = \tau_{B'}([\sigma])$, όπου η σ είναι η ύψωση της $1_{B''}$, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R_1'' & \longrightarrow & P_0'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \sigma \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Αριστερόστροφα έχουμε $\tau \mapsto \tau_{R_1''}([1_{R_1''}]) \mapsto \delta \circ \tau_{R_1''}([1_{R_1''}])$ και η απεικόνιση δ φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & S^{-1}(A \otimes_R -)(B'') & \xrightarrow{i} & A \otimes_R R_1'' & \longrightarrow & A \otimes_R P_0'' \\
& & & \searrow \delta & \downarrow 1 \otimes_R \sigma & & \\
& & & & A \otimes_R B' & &
\end{array}$$

Ο τ είναι φυσικός μετασχηματισμός. Θεωρούμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc}
Ext_R^1(B'', R_1'') & \xrightarrow{\tau_{R_1''}} & A \otimes_R R_1'' \\
\sigma_* \downarrow & & \downarrow 1 \otimes_R \sigma \\
Ext_R^1(B'', B') & \xrightarrow{\tau_{B'}} & A \otimes_R B'
\end{array}$$

Έχουμε $\tau_{B'}([\sigma]) = \tau_{B'} \circ \sigma_*([1_{R_1''}]) = 1 \otimes_R \sigma \circ \tau_{R_1''}([1_{R_1''}]) = 1 \otimes_R \sigma \circ i \circ \tau_{R_1''}([1_{R_1''}]) = \delta \circ \tau_{R_1''}([1_{R_1''}])$.

Στο δεύτερο διάγραμμα όπου $n = 2$ έχουμε δεξιόστροφα $\tau \mapsto -\tau \circ \omega_1 \mapsto -(\tau \circ \omega_1)_{R'_1}([1_{R'_1}]) = -\tau_{R'_1} \circ \omega_1([1_{R'_1}]) = -\tau_{R'_1}([1_{R'_1} \circ (-\Omega\sigma)]) = \tau_{R'_1}([\Omega\sigma])$.

Αριστερόστροφα έχουμε $\tau \mapsto \tau_{R_2''}([1_{R_2''}]) \mapsto \delta \circ \tau_{R_2''}([1_{R_2''}])$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα μεταθετικά διαγράμματα.

$$\begin{array}{ccc}
Ext_R^2(B'', R_2'') & \xrightarrow{\tau_{R_2''}} & A \otimes_R R_2'' \\
\Omega\sigma_* \downarrow & & \downarrow 1 \otimes_R \Omega\sigma \\
Ext_R^2(B'', R'_1) & \xrightarrow{\tau_{R'_1}} & A \otimes_R R'_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & R_2'' & \longrightarrow & P_1'' & \longrightarrow & R_1'' & \longrightarrow & P_0'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \Omega\sigma \downarrow & & \downarrow & & \sigma \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & R'_1 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & B'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$S^{-2}(A \otimes_R -)(B'') \simeq S^{-1}(A \otimes_R -)(R_1'')$$

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & S^{-1}(A \otimes_R -)(R_1'') & \xrightarrow{i} & A \otimes_R R_2'' & \longrightarrow & A \otimes_R P_1'' \\
& & \delta = 1 \otimes_R \Omega\sigma \downarrow & & \downarrow 1 \otimes_R \Omega\sigma & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & S^{-1}(A \otimes_R -)(B') & \xrightarrow{j} & A \otimes_R R'_1 & \longrightarrow & A \otimes_R P'_0
\end{array}$$

Έχουμε $\delta \circ \tau_{R_2''}([1_{R_2''}]) = 1 \otimes_R \Omega\sigma \circ \tau_{R_2''}([1_{R_2''}]) = 1 \otimes_R \Omega\sigma \circ \tau_{R_2''}([1_{R_2''}]) = \tau_{R'_1} \circ \Omega\sigma_*([1_{R_2''}]) = \tau_{R'_1}([\Omega\sigma])$.

Τέλος, θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{a} & M & \xrightarrow{b} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
& & k\downarrow & & l\downarrow & & \downarrow m & & \\
0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{c} & N & \xrightarrow{d} & N'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Η μεταθετικότητα του παρακάτω διαγράμματος καθιστά φυσική την οικογένεια $\{\Phi_n\}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
[Ext_R^n(M', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{a^{**}} & [Ext_R^n(M, -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{b^{**}} & [Ext_R^n(M'', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(-\omega_1)^*} & [Ext_R^{n-1}(M', -), A \otimes_R -] \\
& \swarrow l^{**} & & \swarrow m^{**} & & \swarrow k^{**} & \\
[Ext_R^n(N, -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{d^{**}} & [Ext_R^n(N'', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(-\omega_1)^*} & [Ext_R^{n-1}(N', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{c^{**}} & [Ext_R^{n-1}(N, -), A \otimes_R -]
\end{array}$$

Οι σχέσεις $l^{**} \circ a^{**} = c^{**} \circ k^{**}$ και $m^{**} \circ b^{**} = d^{**} \circ l^{**}$ ισχύουν από τη μεταθετικότητα του προηγούμενου από αυτό διαγράμματος. Η σχέση $k^{**} \circ (-\omega_1)^* = (-\omega_1)^* \circ m^{**}$ ισχύει καθώς ισχύει $\omega_1 \circ k^* = m^* \circ \omega_1$ από τη φυσικότητα του συνολογικού συναρτητή $\{Ext_R^n(-, L)\}_{n \in \mathbb{N}}$, με L ένα R -πρότυπο.

Έστω τώρα μία βραχεία ακριβής ακολουθία R -πρότυπων, $0 \rightarrow B' \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} B'' \rightarrow 0$. Θεωρούμε τα παρακάτω πλέγματα. Ακολουθώς θα δείξουμε ότι είναι μεταθετικά. Αρχίζουν με μία αριστερά άπειρη ακολουθία και καταλήγουν στο αντίστροφο όριο ως διπλά άπειρες. Αυτές όμως οι ακολουθίες δεν είναι απαραίτητα ακριβείς καθώς ο συναρτητής \lim δεν είναι ακριβής. Τα πλέγματα συνδέονται κάθετα με τον ισομορφισμό Γ .

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & (-\omega_1^H)^* \\
& & & & & & \swarrow \\
[Ext_R^{n+3}(\Sigma^2 B, \cdot), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(\Sigma^2 \psi)^{**}} & [Ext_R^{n+3}(\Sigma^2 B'', \cdot), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(-\omega_1)^*} & [Ext_R^{n+2}(\Sigma^2 B', \cdot), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(\Sigma^2 \phi)^{**}} & [Ext_R^{n+2}(\Sigma^2 B, \cdot), A \otimes_R -] \\
& \swarrow (-\omega_1^H)^* & & \swarrow (-\omega_1^H)^* & & \swarrow (-\omega_1^H)^* & \\
[Ext_R^{n+2}(\Sigma B'', \cdot), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(-\omega_1)^*} & [Ext_R^{n+1}(\Sigma B', \cdot), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(\Sigma \phi)^{**}} & [Ext_R^{n+1}(\Sigma B, \cdot), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(\Sigma \psi)^{**}} & [Ext_R^{n+1}(\Sigma B'', \cdot), A \otimes_R -] \\
& \swarrow (-\omega_1^H)^* & & \swarrow (-\omega_1^H)^* & & \swarrow (-\omega_1^H)^* & \\
[Ext_R^n(B', \cdot), A \otimes_R -] & \xrightarrow{\phi^{**}} & [Ext_R^n(B, \cdot), A \otimes_R -] & \xrightarrow{\psi^{**}} & [Ext_R^n(B'', \cdot), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(-\omega_1)^*} & [Ext_R^{n-1}(B', \cdot), A \otimes_R -] \\
\downarrow \Gamma & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & [Ext_R^{n+1}(\Sigma B'', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(-\omega_1)^*} & [Ext_R^n(\Sigma B', -), A \otimes_R -] \\
& \swarrow^{(-\omega_1^H)^*} & & \swarrow^{(-\omega_1^H)^*} & \downarrow \Gamma \\
[Ext_R^n(B'', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(-\omega_1)^*} & [Ext_R^{n-1}(B', -), A \otimes_R -] & & Tor_n^R(A, \Sigma B') \\
\downarrow \Gamma & & \downarrow \Gamma & \swarrow^{\delta^H} & \\
Tor_n^R(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & Tor_{n-1}^R(A, B') & &
\end{array}$$

Δείχνουμε ότι οι συνδετικοί ομομορφισμοί αντιμετατίθενται. Η μελέτη μπορεί να γίνει για $n = 2$. Έτσι θεωρούμε το ακόλουθο τετράγωνο.

$$\begin{array}{ccc}
Ext_R^1(B', M) & \xrightarrow{\omega_1} & Ext_R^2(B'', M) \\
\omega_1^H \downarrow & & \downarrow \omega_1^H \\
Ext_R^2(\Sigma B', M) & \xrightarrow{\omega_1} & Ext_R^3(\Sigma B'', M)
\end{array}$$

Δεξιόστροφα έχουμε $[\varphi : R'_1 \rightarrow M] \mapsto [-\varphi \circ \Omega\sigma] \mapsto [\varphi \circ \Omega\sigma \circ \Omega^2\rho]$. Αριστερόστροφα έχουμε $[\varphi : R'_1 \rightarrow M] \mapsto [-\varphi \circ \Omega r] \mapsto [\varphi \circ \Omega r \circ \Omega^2 s]$. Οι υψώσεις φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & R_2'' & \longrightarrow & P_1'' & \longrightarrow & R_1'' & \longrightarrow & P_0'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \Omega\sigma \downarrow & & \downarrow & & \sigma \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & R'_1 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & B'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \varphi \downarrow & & & & & & & & & & \\
& & M & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_3'' & \longrightarrow & Q_2'' & \longrightarrow & K_2'' & \longrightarrow & Q_1'' & \longrightarrow & K_1'' & \longrightarrow & Q_0'' & \longrightarrow & \Sigma B'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \Omega^2 s \downarrow & & \downarrow & & \Omega s \downarrow & & \downarrow & & s \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & K'_2 & \longrightarrow & Q'_1 & \longrightarrow & K'_1 & \longrightarrow & Q'_0 & \longrightarrow & \Sigma B' & \xrightarrow{\Sigma\phi} & \Sigma B & \xrightarrow{\Sigma\psi} & \Sigma B'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & K'_2 & \longrightarrow & Q'_1 & \longrightarrow & K'_1 & \longrightarrow & Q'_0 & \longrightarrow & \Sigma B' & \longrightarrow & 0 \\
& & \Omega r \downarrow & & \downarrow & & r \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & R'_1 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\phi} & IB' & \xrightarrow{\psi} & \Sigma B' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_3'' & \longrightarrow & Q_2'' & \longrightarrow & K_2'' & \longrightarrow & Q_1'' & \longrightarrow & K_1'' & \longrightarrow & Q_0'' & \longrightarrow & \Sigma B'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \Omega^2 \rho \downarrow & & \downarrow & & \Omega \rho \downarrow & & \downarrow & & \rho \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & R_2'' & \longrightarrow & P_1'' & \longrightarrow & R_1'' & \longrightarrow & P_0'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & IB'' & \longrightarrow & \Sigma B'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Όμως $\Omega \sigma \circ \Omega^2 \rho \equiv \Omega r \circ \Omega^2 s$ modulo παραγοντοποίησης μέσω του προβολικού προτύπου Q_2'' , καθώς αποτελούν και οι δύο ύψωση της $1_{\Sigma B''}$. Το τελευταίο επιχείρημα απεικονίζεται στα δύο επόμενα διαγράμματα.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_3'' & \longrightarrow & Q_2'' & \longrightarrow & K_2'' & \longrightarrow & Q_1'' & \longrightarrow & K_1'' & \longrightarrow & Q_0'' & \longrightarrow & \Sigma B'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \Omega^2 \rho \downarrow & & \downarrow & & \Omega \rho \downarrow & & \downarrow & & \rho \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & R_2'' & \longrightarrow & P_1'' & \longrightarrow & R_1'' & \longrightarrow & P_0'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & IB'' & \longrightarrow & \Sigma B'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \Omega \sigma \downarrow & & \downarrow & & \sigma \downarrow & & \downarrow & & 1 \downarrow & & 1 \downarrow & & \downarrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & R'_1 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & B'' & \longrightarrow & IB'' & \longrightarrow & \Sigma B'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_3'' & \longrightarrow & Q_2'' & \longrightarrow & K_2'' & \longrightarrow & Q_1'' & \longrightarrow & K_1'' & \longrightarrow & Q_0'' & \longrightarrow & \Sigma B'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \Omega^2 s \downarrow & & \downarrow & & \Omega s \downarrow & & \downarrow & & s \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & K'_2 & \longrightarrow & Q'_1 & \longrightarrow & K'_1 & \longrightarrow & Q'_0 & \longrightarrow & \Sigma B' & \longrightarrow & \Sigma B & \longrightarrow & \Sigma B'' & \longrightarrow & 0 \\
& & \Omega r \downarrow & & \downarrow & & r \downarrow & & \downarrow & & 1 \downarrow & & 1 \downarrow & & \downarrow 1 & & \\
0 & \longrightarrow & R'_1 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\phi} & IB' & \xrightarrow{\psi} & \Sigma B' & \longrightarrow & \Sigma B & \longrightarrow & \Sigma B'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Μένει να δείξουμε τη μεταθετικότητα στο επόμενο τετράγωνο.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Tor}_3^R(A, \Sigma B'') & \xrightarrow{\delta} & \text{Tor}_2^R(A, \Sigma B') \\
\delta^H \downarrow & & \downarrow \delta^H \\
\text{Tor}_2^R(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & \text{Tor}_1^R(A, B')
\end{array}$$

Οι συνθέσεις των δ φαίνονται στα δύο επόμενα σχήματα. Πάλι, καθώς $\Omega \sigma \circ \Omega^2 \rho \equiv \Omega r \circ \Omega^2 s$ modulo παραγοντοποίησης μέσω του προβολικού προτύπου Q_2'' , το ζητούμενο προκύπτει από την ιδιότητα των δορυφόρων.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Tor}_3^R(A, \Sigma B'') & \longrightarrow & A \otimes_R K_3'' & \longrightarrow & A \otimes_R Q_2'' \\
& & 1 \otimes_R \Omega^2 \rho = \delta^H \downarrow & & 1 \otimes_R \Omega^2 \rho \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \text{Tor}_2^R(A, B'') & \longrightarrow & A \otimes_R R_2'' & \longrightarrow & A \otimes_R P_1'' \\
& & 1 \otimes_R \Omega^2 \sigma = \delta \downarrow & & 1 \otimes_R \Omega^2 \sigma \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \text{Tor}_1^R(A, B') & \longrightarrow & A \otimes_R R'_1 & \longrightarrow & A \otimes_R P'_0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Tor}_3^R(A, \Sigma B'') & \longrightarrow & A \otimes_R K_3'' & \longrightarrow & A \otimes_R Q_2'' \\
& & \downarrow 1 \otimes \Omega^2 s | = \delta \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \Omega^2 s \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \text{Tor}_2^R(A, \Sigma B') & \longrightarrow & A \otimes_R K_2' & \longrightarrow & A \otimes_R Q_1' \\
& & \downarrow 1 \otimes \Omega^2 r | = \delta^H \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \Omega^2 r \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \text{Tor}_1^R(A, B') & \longrightarrow & A \otimes_R R_1' & \longrightarrow & A \otimes_R P_0'
\end{array}$$

Για κάθε ακέραιο n θεωρούμε το συναρτητή $\varprojlim_k [\text{Ext}_R^{n+k}(\Sigma^k -, -), A \otimes_R -]$ τέτοιος ώστε

$$\varprojlim_k [\text{Ext}_R^{n+k}(\Sigma^k -, -), A \otimes_R -](B) = \varprojlim_k [\text{Ext}_R^{n+k}(\Sigma^k B, -), A \otimes_R -].$$

Θεωρούμε ένα στοιχείο $\{\tau_k\}_k$ που ανήκει στο αντίστροφο όριο. Τότε, κάθε τ_k είναι φυσικός μετασχηματισμός. Καθώς ισχύει ότι

$$\varprojlim_k \text{Hom}_R(B_k, M) \simeq \text{Hom}_R(\varinjlim_k B_k, M),$$

έχουμε

$$\varprojlim_k [\text{Ext}_R^{n+k}(\Sigma^k -, -), A \otimes_R -] \simeq [\varinjlim_k \text{Ext}_R^{n+k}(\Sigma^k -, -), A \otimes_R -]$$

και φυσικά έχουμε

$$[\varinjlim_k \text{Ext}_R^{n+k}(\Sigma^k -, -), A \otimes_R -] = [\varinjlim_k S_1^{-k} \text{Ext}_R^{n+k}(-, -), A \otimes_R -] = [\widetilde{\text{Ext}}_R^n(-, -), A \otimes_R -].$$

Ορίζουμε $\{\check{\Phi}_n, \check{\omega}_1\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{[\widetilde{\text{Ext}}_R^n(-, -), A \otimes_R -]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ και $\{\check{\text{Tor}}_n^R, \check{\delta}\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\varprojlim_k \text{Tor}_{n+k}^R(A, \Sigma^k -)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Με τα παραπάνω, οι συνδεδεμένες οικογένειες $\{\check{\Phi}_n, \check{\omega}_1\}_{n \in \mathbb{Z}}$ και $\{\check{\text{Tor}}_n^R, \check{\delta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι φυσικά ισοδύναμες. Οι οικογένειες αυτές είναι εμφυτευτικώς πλήρεις καθώς ο συναρτητής $\widetilde{\text{Ext}}_R^n(-, -)$ είναι τέτοιος και ο $\varprojlim_k \text{Tor}_{n+k}^R(A, \Sigma^k -)$ εξ ορισμού, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ο $\widetilde{\text{Ext}}_R^n(-, -)$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής της εμφυτευτικής επίλυσης του προτύπου που διαλέγουμε για τον ορισμό του, όπως ορίζει η προσέγγιση αυτού κατά *Benson* και *Carlson*, και αυτή η ιδιότητα μεταφέρεται στο συναρτητή $\varprojlim_k \text{Tor}_{n+k}^R(A, \Sigma^k -)$ και ο ορισμός του δεν δεσμεύεται από την εμφυτευτική παράσταση με τον *injective envelope*. Ο συνομολογικός συναρτητής $\widetilde{\text{Ext}}_R^n(B, -)$ εφαρμοσμένος σε ένα αριστερό R -πρότυπο C ορίζεται μέσω της εμφυτευτικής πλήρωσης του ανταλλοιώτου συναρτητή $\widetilde{\text{Ext}}_R^n(-, C)$ εφαρμοσμένο στο αριστερό R -πρότυπο B .

4.3 Η κατασκευή *Triulzi*.

Με χρήση του γενικευμένου λήμματος *Yoneda* έχουμε αποδείξει, μέσω των συνδετικών ομομορφισμών που αφορούν σε εμφυτευτικές παραστάσεις, δ^H , τη φυσική ισοδυναμία, για κάθε ακέραιο n ,

$$[\widetilde{Ext}_R^n(-, -), A \otimes_R -] \simeq \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(A, \Sigma^i -),$$

με εκτίμηση σε ένα πρότυπο B να είναι ο ισομορφισμός αβελιανών ομάδων $[\widetilde{Ext}_R^n(B, -), A \otimes_R -] \simeq \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(A, \Sigma^i B)$.

Επιτυγχάνουμε, έτσι, την ανεξαρτησία της επιλογής της εμφυτευτικής επίλυσης του προτύπου στη μεταβλητή, στον ορισμό του παραπάνω αντίστροφου ορίου, καθώς το ίδιο ισχύει για την πλήρωση $\widetilde{Ext}_R^n(-, -)$.

Θα δείξουμε ότι η πλήρης ομολογία, η οποία είναι η κατασκευή *Triulzi*, η δυϊκή της κατασκευής *Mislin*, είναι φυσικά ισοδύναμη με τη συνδεδεμένη οικογένεια που συνιστούν οι προηγούμενοι συναρτητές, $[\widetilde{Ext}_R^n(-, -), A \otimes_R -] \simeq \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(A, \Sigma^i -)$. Η απόδειξη θα είναι αναλυτική.

Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccc} \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(A, \Sigma^i B) & \rightarrow & \dots & \xrightarrow{\delta^H} & Tor_{n+2}^R(A, \Sigma^2 B) & \xrightarrow{\delta^H} & Tor_{n+1}^R(A, \Sigma B) & \xrightarrow{\delta^H} & Tor_n^R(A, B) & \xrightarrow{\mathbf{1}} & Tor_n^R(A, B) \\ & \nearrow \check{\mu} & & & & & \searrow \pi & \nearrow \mu & & & \searrow \pi & \nearrow \mu & & & & \searrow \mathbf{1} & \nearrow & \\ \lim_{\leftarrow i} S^i Tor_{n+i}^R(A, B) & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{d} & S^1 Tor_{n+2}^R(A, \Sigma B) & \xrightarrow{d} & S^1 Tor_{n+1}^R(A, B) & \xrightarrow{\mu} & Tor_n^R(A, B) & & & & & & & & & \end{array}$$

Οι απεικονίσεις π επάγονται από τον ορισμό των δορυφόρων. Παρουσιάζουμε τους δύο πρώτους, που είναι οι ακόλουθοι συμπυρήνες.

$$\begin{array}{l} Tor_{n+1}^R(A, IB) \rightarrow Tor_{n+1}^R(A, \Sigma B) \rightarrow S^1 Tor_{n+1}^R(A, B) \rightarrow 0 \\ Tor_{n+2}^R(A, I^2 B) \rightarrow Tor_{n+2}^R(A, \Sigma^2 B) \rightarrow S^1 Tor_{n+2}^R(A, \Sigma B) \rightarrow 0 \end{array}$$

Επίσης έχουμε $S^2 Tor_{n+2}^R(A, B) \simeq S^1 Tor_{n+2}^R(A, \Sigma B)$. Πραγματευόμαστε τις υπόλοιπες διαστάσεις τοιουτοτρόπως. Οι συμπυρήνες αυτοί εμφανίζονται στη μακρά ακριβή ακολουθία του συναρτητή Tor όπως φαίνεται ακολούθως.

$$\begin{array}{ccccccc} Tor_{n+1}^R(A, IB) & \xrightarrow{g} & Tor_{n+1}^R(A, \Sigma B) & \xrightarrow{\delta^H} & Tor_n^R(A, B) & \longrightarrow & Tor_n^R(A, IB) \\ & & & \searrow \pi & \nearrow \mu & & \\ & & & & S^1 Tor_{n+1}^R(A, B) & & \end{array}$$

Οι απεικονίσεις μ είναι οι εμφυτεύσεις

$$S^1 Tor_{n+1}^R(A, B) = Cokerg = \frac{Tor_{n+1}^R(A, \Sigma B)}{Img} \simeq \frac{Tor_{n+1}^R(A, \Sigma B)}{Ker\delta^H} \simeq Im\delta^H \xrightarrow{\mu} Tor_n^R(A, B).$$

Έχουμε $\mu \circ \pi = \delta^H$ και $\pi \circ \mu = d$. Επομένως, $\mu \circ d = \delta^H \circ \mu$. Καθώς το αντίστροφο όριο είναι αριστερά ακριβής συναρτητής, η απεικόνιση $\check{\mu} : \lim_{\leftarrow i} S^i Tor_{n+i}^R(A, B) \rightarrow \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(A, \Sigma^i B)$, μοναδικώς

ορισμένη, είναι εμφύτευση και παραγοντοποιεί μέσω της $\delta^H : \lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^i B) \rightarrow \text{Tor}_n^R(A, B)$ την απεικόνιση $\check{d} : \lim_{\leftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+i}^R(A, B) \rightarrow \text{Tor}_n^R(A, B)$.

Παραθέτουμε το διάγραμμα *Horseshoe*.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{a'} & IB' & \xrightarrow{b'} & \Sigma B' & \longrightarrow & 0 \\ & & \phi \downarrow & & I\phi \downarrow & & \downarrow \Sigma\phi & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{a} & IB & \xrightarrow{b} & \Sigma B & \longrightarrow & 0 \\ & & \psi \downarrow & & I\psi \downarrow & & \downarrow \Sigma\psi & & \\ 0 & \longrightarrow & B'' & \xrightarrow{a''} & IB'' & \xrightarrow{b''} & \Sigma B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Θεωρούμε ακόμα το επόμενο μεταθετικό διάγραμμα. Οι γραμμές είναι ακριβείς. Η απεικόνιση θ ορίζεται μοναδικά ανάμεσα στους συμπυρήνες. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα *dimension shifting* των εμφυτευτικών πλήρων δεξιών δορυφόρων ενός συναλλοίωτου συναρτητή για να ορίσουμε τις αντίστοιχες απεικονίσεις θ για τους υπόλοιπους δορυφόρους.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{Tor}_{n+1}^R(A, IB'') & \xrightarrow{b''_*} & \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B'') & \xrightarrow{\pi} & S^1 \text{Tor}_{n+1}^R(A, B'') & \xrightarrow{\mu} & \text{Tor}_n^R(A, B'') & \xrightarrow{a''_*} & \text{Tor}_n^R(A, IB'') \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \theta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ \text{Tor}_n^R(A, IB') & \xrightarrow{b'_*} & \text{Tor}_n^R(A, \Sigma B') & \xrightarrow{\pi} & S^1 \text{Tor}_n^R(A, B') & \xrightarrow{\mu} & \text{Tor}_{n-1}^R(A, B') & \xrightarrow{a'_*} & \text{Tor}_{n-1}^R(A, IB') \end{array}$$

Αφού $\delta^H \circ \delta = \delta \circ \delta^H$ και η π είναι δεξιά διαγράψιμη, η απεικόνιση θ ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα και του συμπυρήνα της b''_* αλλά και του πυρήνα της a'_* .

Πρόταση 4.3.1 Οι συνδεδεμένες οικογένειες συναρτητών $\{\lim_{\leftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+i}^R(A, -), \check{\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ και

$$\{\lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^i -), \check{d}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$
 είναι φυσικά ισοδύναμες.

Απόδειξη. Οι απεικονίσεις $\check{\theta}$ και \check{d} αναφέρονται στους συνδεδετικούς ομομορφισμούς στα αντίστοιχα αντίστροφα όρια. Πρώτα δείχνουμε ότι η απεικόνιση $\check{\mu} : \lim_{\leftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+i}^R(A, B) \rightarrow \lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^i B)$ είναι ισομορφισμός. Γί αυτό το σκοπό χρειαζόμαστε την ανεξαρτησία της επιλογής της εμφυτευτικής επίλυσης στον ορισμό του $\lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^i B)$ συνδυασμένη με την εμφυτευτική πληρότητα αυτού.

Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα *Horseshoe* και το μεταθετικό πλέγμα που αφορά σε αυτό.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{a} & IB & \xrightarrow{b} & \Sigma B & \xrightarrow{\Sigma a} & I\Sigma B & \xrightarrow{\Sigma b} & \Sigma^2 B \dots \\ & & a \downarrow & & i \downarrow & & \downarrow \Sigma a & & i \downarrow & & \downarrow \Sigma^2 a \\ 0 & \longrightarrow & IB & \xrightarrow{\iota} & IB \oplus I\Sigma B & \xrightarrow{\pi} & I\Sigma B & \xrightarrow{\iota} & I\Sigma B \oplus I\Sigma^2 B & \xrightarrow{\pi} & I\Sigma^2 B \dots \\ & & b \downarrow & & p \downarrow & & \downarrow \Sigma b & & p \downarrow & & \downarrow \Sigma^2 b \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma B & \xrightarrow{\Sigma a} & I\Sigma B & \xrightarrow{\Sigma b} & \Sigma^2 B & \xrightarrow{\Sigma^2 a} & I\Sigma^2 B & \xrightarrow{\Sigma^2 b} & \Sigma^3 B \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
& \delta^H \downarrow & & d \downarrow & & \delta^H \downarrow & & \delta^H \downarrow & & \delta^H \downarrow \\
\text{Tor}_{n+3}^R(A, \Sigma^3 B) & \xrightarrow{\pi} & S^3 \text{Tor}_{n+3}^R(A, B) & \xrightarrow{\mu} & \text{Tor}_{n+2}^R(A, \Sigma^2 B) & \xrightarrow{\Sigma^2 a_*} & \text{Tor}_{n+2}^R(A, I\Sigma^2 B) & \xrightarrow{\Sigma^2 b_*} & \text{Tor}_{n+2}^R(A, \Sigma^3 B) \\
& \delta^H \downarrow & & d \downarrow & & \delta^H \downarrow & & \delta^H \downarrow & & \delta^H \downarrow \\
\text{Tor}_{n+2}^R(A, \Sigma^2 B) & \xrightarrow{\pi} & S^1 \text{Tor}_{n+2}^R(A, \Sigma B) & \xrightarrow{\mu} & \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B) & \xrightarrow{\Sigma a_*} & \text{Tor}_{n+1}^R(A, I\Sigma B) & \xrightarrow{\Sigma b_*} & \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma^2 B) \\
& \delta^H \downarrow & & d \downarrow & & \delta^H \downarrow & & \delta^H \downarrow & & \delta^H \downarrow \\
\text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B) & \xrightarrow{\pi} & S^1 \text{Tor}_{n+1}^R(A, B) & \xrightarrow{\mu} & \text{Tor}_n^R(A, B) & \xrightarrow{a_*} & \text{Tor}_n^R(A, IB) & \xrightarrow{b_*} & \text{Tor}_n^R(A, \Sigma B) \\
& \delta^H \downarrow & & \mu \downarrow & & \mathbf{1} \downarrow & & \mathbf{1} \downarrow & & \mathbf{1} \downarrow \\
\text{Tor}_n^R(A, B) & \xrightarrow{\mathbf{1}} & \text{Tor}_n^R(A, B) & \xrightarrow{\mathbf{1}} & \text{Tor}_n^R(A, B) & \xrightarrow{a_*} & \text{Tor}_n^R(A, IB) & \xrightarrow{b_*} & \text{Tor}_n^R(A, \Sigma B)
\end{array}$$

Το πλέγμα είναι μεταθετικό. Πράγματι, τα αριστερά τετράγωνα είναι μεταθετικά από τον ορισμό των δ^H και d , ενώ η μεταθετικότητα των δεξιών οφείλεται στην ιδιότητα του Tor ως ομολογικός συναρτητής, προσφέροντας τους μορφισμούς ανάμεσα στις μακρές ακριβείς ακολουθίες που αφορούν στο διάγραμμα *Horseshoe*. Έτσι, προκύπτει το αντίστροφο όριο του πλέγματος που είναι η παρακάτω ακολουθία.

$$\lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^i B) \xrightarrow{\tilde{\pi}} \lim_{\leftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+i}^R(A, B) \xrightarrow{\tilde{\mu}} \lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^i B) \xrightarrow{\tilde{a}_*} \lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, I\Sigma^i B) \xrightarrow{\tilde{b}_*} \lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^{i+1} B)$$

Απομονώνουμε το ακόλουθο τμήμα του πλέγματος.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \lim_{\longleftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+i}^R(A, B) & \xrightarrow{\check{\mu}} & \lim_{\longleftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^i B) & \xrightarrow{\check{a}_*} & \lim_{\longleftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, I\Sigma^i B) \\
& & \check{d} \downarrow & & \check{\delta}^H \downarrow & & \check{\delta}^H \downarrow \\
& & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
& & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
& & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
& & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
0 & \longrightarrow & S^3 \text{Tor}_{n+3}^R(A, B) & \xrightarrow{\mu} & \text{Tor}_{n+2}^R(A, \Sigma^2 B) & \xrightarrow{\Sigma^2 a_*} & \text{Tor}_{n+2}^R(A, I\Sigma^2 B) \\
& & d \downarrow & & \delta^H \downarrow & & \delta^H \downarrow \\
0 & \longrightarrow & S^2 \text{Tor}_{n+2}^R(A, B) & \xrightarrow{\mu} & \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B) & \xrightarrow{\Sigma a_*} & \text{Tor}_{n+1}^R(A, I\Sigma B) \\
& & d \downarrow & & \delta^H \downarrow & & \delta^H \downarrow \\
0 & \longrightarrow & S^1 \text{Tor}_{n+1}^R(A, B) & \xrightarrow{\mu} & \text{Tor}_n^R(A, B) & \xrightarrow{a_*} & \text{Tor}_n^R(A, IB) \\
& & d \downarrow & & \delta^H \downarrow & & \delta^H \downarrow \\
& & \cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}$$

Αποτελείται από ακριβείς ακολουθίες. Καθώς το αντίστροφο όριο είναι αριστερά ακριβής συναρτητής, η προκύπτουσα ακολουθία είναι ακριβής. Καθώς $\lim_{\longleftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, I\Sigma^i B) = \lim_{\longleftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^i IB) = 0$, έχουμε ότι η απεικόνιση $\check{\mu}$ είναι ισομορφισμός.

Παρουσιάζουμε τώρα, για δεδομένη βραχεία ακριβή ακολουθία R -προτύπων, $0 \rightarrow B' \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} B'' \rightarrow 0$, τη μακρά συνδεδεμένη ακολουθία της οικογένειας $\{\lim_{\longleftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+i}^R(A, -), \check{\theta}\}$, απεικονιζόμενη στην αντίστοιχη της οικογένειας $\{\lim_{\longleftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^i -), \check{\delta}\}$.

Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα *Horseshoe*, και έχουμε υπ' όψιν και τα επαγόμενα αυτού.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{a'} & IB' & \xrightarrow{b'} & \Sigma B' \longrightarrow 0 \\
& & \phi \downarrow & & I\phi \downarrow & & \downarrow \Sigma \phi \\
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{a} & IB & \xrightarrow{b} & \Sigma B \longrightarrow 0 \\
& & \psi \downarrow & & I\psi \downarrow & & \downarrow \Sigma \psi \\
0 & \longrightarrow & B'' & \xrightarrow{a''} & IB'' & \xrightarrow{b''} & \Sigma B'' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Θεωρούμε το επόμενο κυβικό πλέγμα. Οι κάθετοι μορφισμοί είναι οι εμφυτεύσεις μ ανάμεσα σε όλες τις γραμμές εκτός από τις δύο πρώτες που συνδέονται με τις ταυτοτικές απεικονίσεις.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & \swarrow d \\
S^3 Tor_{n+4}^R(A, B) & \xrightarrow{S(\Sigma^2\psi)_*} & S^3 Tor_{n+4}^R(A, B'') & \xrightarrow{\theta} & S^3 Tor_{n+3}^R(A, B') & \xrightarrow{S(\Sigma^2\phi)_*} & S^3 Tor_{n+3}^R(A, B) \\
& \swarrow d & & \swarrow d & & \swarrow d & \\
S^2 Tor_{n+3}^R(A, B'') & \xrightarrow{\theta} & S^2 Tor_{n+2}^R(A, B') & \xrightarrow{S(\Sigma\phi)_*} & S^2 Tor_{n+2}^R(A, B) & \xrightarrow{S(\Sigma\psi)_*} & S^2 Tor_{n+2}^R(A, B'') \\
& \swarrow d & & \swarrow d & & \swarrow d & \\
S^1 Tor_{n+1}^R(A, B') & \xrightarrow{S\phi_*} & S^1 Tor_{n+1}^R(A, B) & \xrightarrow{S\psi_*} & S^1 Tor_{n+1}^R(A, B'') & \xrightarrow{\theta} & S^1 Tor_n^R(A, B') \\
& \swarrow \mu & & \swarrow \mu & & \swarrow \mu & \\
Tor_n^R(A, B) & \xrightarrow{\psi_*} & Tor_n^R(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & Tor_{n-1}^R(A, B') & \xrightarrow{\phi_*} & Tor_{n-1}^R(A, B) \\
& \downarrow & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & \swarrow \delta^H \\
Tor_{n+3}^R(A, \Sigma^2 B) & \xrightarrow{(\Sigma^2\psi)_*} & Tor_{n+3}^R(A, \Sigma^2 B'') & \xrightarrow{\delta} & Tor_{n+2}^R(A, \Sigma^2 B') & \xrightarrow{(\Sigma^2\phi)_*} & Tor_{n+2}^R(A, \Sigma^2 B) \\
& \swarrow \delta^H & & \swarrow \delta^H & & \swarrow \delta^H & \\
Tor_{n+2}^R(A, \Sigma B'') & \xrightarrow{\delta} & Tor_{n+1}^R(A, \Sigma B') & \xrightarrow{(\Sigma\phi)_*} & Tor_{n+1}^R(A, \Sigma B) & \xrightarrow{(\Sigma\psi)_*} & Tor_{n+1}^R(A, \Sigma B'') \\
& \swarrow \delta^H & & \swarrow \delta^H & & \swarrow \delta^H & \\
Tor_n^R(A, B') & \xrightarrow{\phi_*} & Tor_n^R(A, B) & \xrightarrow{\psi_*} & Tor_n^R(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & Tor_{n-1}^R(A, B') \\
& \swarrow \mathbf{1} & & \swarrow \mathbf{1} & & \swarrow \mathbf{1} & \\
Tor_n^R(A, B) & \xrightarrow{\psi_*} & Tor_n^R(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & Tor_{n-1}^R(A, B') & \xrightarrow{\phi_*} & Tor_{n-1}^R(A, B)
\end{array}$$

Θα δείξουμε ότι κάθε κύβος που εμφανίζεται είναι μεταθετικός. Αρχίζουμε με τον ακόλουθο.

$$\begin{array}{ccccc}
& & S^1 Tor_{n+1}^R(A, B) & \xrightarrow{S\psi_*} & S^1 Tor_{n+1}^R(A, B'') \\
& & \swarrow \mu & & \downarrow \mu \\
Tor_n^R(A, B) & \xrightarrow{\psi_*} & Tor_n^R(A, B'') & & Tor_n^R(A, B'') \\
& \downarrow \mathbf{1} & \downarrow \mathbf{1} & & \swarrow \mathbf{1} \\
Tor_n^R(A, B) & \xrightarrow{\psi_*} & Tor_n^R(A, B'') & &
\end{array}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\mu \circ S\psi_* = \psi_* \circ \mu$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα. Οι εμφυτεύσεις μ και οι προβολές π φέρουν δείκτες προς δική μας διευκόλυνση.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Tor}_{n+1}^R(A, IB) & \xrightarrow{b_*} & \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B) & \xrightarrow{\pi_1} & S^1\text{Tor}_{n+1}^R(A, B) & \xrightarrow{\mu_1} & \text{Tor}_n^R(A, B) & \xrightarrow{a_*} & \text{Tor}_n^R(A, IB) \\
\downarrow I\psi_* & & \downarrow \Sigma\psi_* & & \downarrow S\psi_* \quad \downarrow S\psi'_* & & \downarrow \psi_* & & \downarrow I\psi_* \\
\text{Tor}_{n+1}^R(A, IB'') & \xrightarrow{b_*''} & \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B'') & \xrightarrow{\pi_2} & S^1\text{Tor}_{n+1}^R(A, B'') & \xrightarrow{\mu_2} & \text{Tor}_n^R(A, B'') & \xrightarrow{a_*''} & \text{Tor}_n^R(A, IB'')
\end{array}$$

Η απεικόνιση $S\psi_*$ στους δεξιούς δορυφόρους επάγεται από τη μεταθετικότητα του αριστερού μέρους του διαγράμματος και την καθολική ιδιότητα του συμπυρήνα $S^1\text{Tor}_{n+1}^R(A, B)$, ενώ η απεικόνιση $S\psi'_*$ επάγεται από τη μεταθετικότητα του δεξιού μέρους του διαγράμματος και την καθολική ιδιότητα του πυρήνα $S^1\text{Tor}_{n+1}^R(A, B'')$. Για να δείξουμε την ισότητα $S\psi_* = S\psi'_*$ θεωρούμε τη διαφορά τους και τη συνθέτουμε από τα δεξιά με μία δεξιά διαγράψιμη απεικόνιση και από τα αριστερά με μία αριστερά διαγράψιμη. Έχουμε

$$\mu_2 \circ (S\psi_* - S\psi'_*) \circ \pi_1 = \mu_2 \circ S\psi_* \circ \pi_1 - \mu_2 \circ S\psi'_* \circ \pi_1 = \mu_2 \circ \pi_2 \circ \Sigma\psi_* - \psi_* \circ \mu_1 \circ \pi_1 = \delta^H \circ \Sigma\psi_* - \psi_* \circ \delta^H = 0,$$

θεωρώντας τη μακρά ακριβή ακολουθία του Tor που αναφέρεται στο κάτω μέρος του προηγούμενου διαγράμματος *Horseshoe*. Θεωρούμε τώρα τον επόμενο κύβο.

$$\begin{array}{ccccc}
& & S^1\text{Tor}_{n+1}^R(A, B'') & \xrightarrow{\theta} & S^1\text{Tor}_n^R(A, B') \\
& \swarrow \mu & & \swarrow \mu & \downarrow \mu \\
\text{Tor}_n^R(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & \text{Tor}_{n-1}^R(A, B') & & \text{Tor}_{n-1}^R(A, B') \\
\downarrow \mathbf{1} & & \downarrow \mathbf{1} & & \downarrow \mathbf{1} \\
\text{Tor}_n^R(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & \text{Tor}_{n-1}^R(A, B') & & \text{Tor}_{n-1}^R(A, B')
\end{array}$$

Αρκεί να δείξουμε την ισότητα $\mu \circ \theta = \delta \circ \mu$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Tor}_{n+1}^R(A, IB'') & \xrightarrow{b_*''} & \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B'') & \xrightarrow{\pi_1} & S^1\text{Tor}_{n+1}^R(A, B'') & \xrightarrow{\mu_1} & \text{Tor}_n^R(A, B'') & \xrightarrow{a_*''} & \text{Tor}_n^R(A, IB'') \\
\downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \theta \quad \downarrow \theta' & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\
\text{Tor}_n^R(A, IB') & \xrightarrow{b_*'} & \text{Tor}_n^R(A, \Sigma B') & \xrightarrow{\pi_2} & S^1\text{Tor}_n^R(A, B') & \xrightarrow{\mu_2} & \text{Tor}_{n-1}^R(A, B') & \xrightarrow{a_*'} & \text{Tor}_{n-1}^R(A, IB')
\end{array}$$

Όπως πριν, ορίζουμε τις απεικονίσεις θ και θ' και δείχνουμε ότι είναι ίσες.

$$\mu_2 \circ \theta \circ \pi_1 = \mu_2 \circ \pi_2 \circ \delta = \delta^H \circ \delta$$

$$\mu_2 \circ \theta' \circ \pi_1 = \delta \circ \mu_1 \circ \pi_1 = \delta \circ \delta^H$$

Καθώς οι δ και δ^H αντιμετατίθενται, έχουμε το ζητούμενο. Θεωρούμε τον ακόλουθο κύβο.

$$\begin{array}{ccccc}
& & S^2\text{Tor}_{n+2}^R(A, B') & \xrightarrow{S(\Sigma\phi)_*} & S^2\text{Tor}_{n+2}^R(A, B) \\
& \swarrow d & & \swarrow d & \downarrow \mu \\
S^1\text{Tor}_{n+1}^R(A, B') & \xrightarrow{S\phi_*} & S^1\text{Tor}_{n+1}^R(A, B) & & \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B) \\
\downarrow \mu & & \downarrow \mu & \swarrow \delta^H & \\
\text{Tor}_n^R(A, B') & \xrightarrow{\phi_*} & \text{Tor}_n^R(A, B) & &
\end{array}$$

Κατ' αρχάς έχουμε $\mu \circ d = \delta^H \circ \mu$ αφού $d = \pi \circ \mu$ και $\delta^H = \mu \circ \pi$. Οι ισότητες $\mu \circ S\phi_* = \phi_* \circ \mu$ και $\mu \circ S(\Sigma\phi)_* = \Sigma\phi_* \circ \mu$ αποδεικνύονται με όμοιο τρόπο όπως στον πρώτο κύβο που θεωρήσαμε. Μένει να δείξουμε την ισότητα $d \circ S(\Sigma\phi)_* = S\phi_* \circ d$. Συνθέτοντας από τα αριστερά με την $\mu : S^1\text{Tor}_{n+1}^R(A, B) \rightarrow \text{Tor}_n^R(A, B)$, έχουμε

$$\mu \circ S\phi_* \circ d = \phi_* \circ \mu \circ d = \phi_* \circ \delta^H \circ \mu$$

$$\mu \circ d \circ S(\Sigma\phi)_* = \delta^H \circ \mu \circ S(\Sigma\phi)_* = \delta^H \circ \Sigma\phi_* \circ \mu$$

και το ζητούμενο έπεται αφού $\phi_* \circ \delta^H = \delta^H \circ \Sigma\phi_*$ θεωρώντας τη μακρά ακριβή ακολουθία του Tor που αναφέρεται στο πάνω μέρος του προηγούμενου διαγράμματος *Horseshoe*. Η τελευταία ισότητα δηλώνει τη μεταθετικότητα της κάτω πλευράς του κύβου. Θεωρούμε τον τελευταίο κύβο.

$$\begin{array}{ccccc}
& & S^2\text{Tor}_{n+2}^R(A, B'') & \xrightarrow{\theta} & S^2\text{Tor}_{n+1}^R(A, B') \\
& \swarrow d & & \swarrow d & \downarrow \mu \\
S^1\text{Tor}_{n+1}^R(A, B'') & \xrightarrow{\theta} & S^1\text{Tor}_n^R(A, B') & & \text{Tor}_n^R(A, \Sigma B') \\
\downarrow \mu & & \downarrow \mu & \swarrow \delta^H & \\
\text{Tor}_n^R(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & \text{Tor}_{n-1}^R(A, B') & &
\end{array}$$

Αρκεί να δείξουμε τη μεταθετικότητα της πάνω πλευράς. Όπως πριν, χρησιμοποιούμε τη μεταθετικότητα των περιμετρικών πλευρών του κύβου, την εμφύτευση $\mu : S^1\text{Tor}_n^R(A, B') \rightarrow \text{Tor}_{n-1}^R(A, B')$ ως αριστερά διαγράψιμη και την αντιμετάθετικότητα των δ και δ^H , που δίνει επίσης τη μεταθετικότητα της κάτω πλευράς.

Η μεταθετικότητα του κυβικού πλέγματος μας επιτρέπει να ορίσουμε το αντίστροφο όριο αυτού, μέρος του οποίου είναι το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccc}
\lim_{\leftarrow i+1} S^{i+1}\text{Tor}_{n+i+1}^R(A, B) & \xrightarrow{S\check{\psi}_*} & \lim_{\leftarrow i+1} S^{i+1}\text{Tor}_{n+i+1}^R(A, B'') & \xrightarrow{\check{\theta}} & \lim_{\leftarrow i+1} S^{i+1}\text{Tor}_{n+i}^R(A, B') \\
\downarrow \check{\mu} & & \downarrow \check{\mu} & & \downarrow \check{\mu} \\
\lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^i B) & \xrightarrow{\check{\psi}_*} & \lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n+i}^R(A, \Sigma^i B'') & \xrightarrow{\check{\delta}} & \lim_{\leftarrow i} \text{Tor}_{n-1+i}^R(A, \Sigma^i B')
\end{array}$$

□

Τελειώνουμε δείχνοντας την κατασκευή *Triulzi* και τη σχέση της με την οικογένεια $\{\lim_{\leftarrow i} S^i Tor_{n+i}^R(A, -), \check{\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Η κατασκευή *Mislín*, μέσω των δορυφόρων, είναι μία έκφραση της προβολικής πλήρωσης του συνομολογικού συναλλοιώτου συναρτητή *Ext*. Θεωρούμε τη δυϊκή κατασκευή *Triulzi* και τις δυϊκές προτάσεις που αφορούν σε αυτήν και τις εφαρμόζουμε για τη μελέτη της εμφυτευτικής πλήρωσης του ομολογικού συναλλοιώτου συναρτητή *Tor*. Η συνδεδεμένη οικογένεια $\widehat{Tor}_*^R(A, -) = \{\lim_{\leftarrow i} S^i Tor_{n+i}^R(A, -), \check{\sigma}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, λόγω των δορυφόρων, είναι εμφυτευτικώς πλήρης, ο ορισμός της είναι ανεξάρτητος της εμφυτευτικής επίλυσης που επιλέγουμε για τον υπολογισμό της και έχει την εξής καθολική ιδιότητα: Κάθε μορφισμός από έναν εμφυτευτικώς πλήρη ομολογικό συναρτητή στον *Tor* παραγοντοποιείται με μοναδικό τρόπο μέσω της *d*.

$$\begin{array}{ccc} W_* & \xrightarrow{\Lambda^*} & \widehat{Tor}_*^R(A, -) \\ \lambda^* \downarrow & & \swarrow d^* \\ Tor_*^R(A, -) & & \end{array}$$

Η κατασκευή της μακράς ακολουθίας που σχετίζεται με βραχεία ακριβή ακολουθία προτύπων προκύπτει ως το αντίστροφο όριο ενός πλέγματος αποτελούμενο από μακρές ακριβείς ακολουθίες. Παρουσιάζουμε την κατασκευή, στην οποία εμφανίζουμε μόνο τους συνδετικούς ομομορφισμούς παραλείποντας κάθε φορά τους δύο ενδιάμεσους, θεωρώντας έτσι κάθε αντικείμενο σαν μία τριάδα αντικειμένων αναφερόμενη στη βραχεία ακριβή ακολουθία των προτύπων ίδιου δείκτη. Η απεικόνιση $\check{\sigma}$ αναφέρεται στους συνδετικούς ομομορφισμούς στο αντίστροφο όριο.

$$\begin{array}{ccccccccccc} S^1 Tor_{n+3}^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma^*} & S^2 Tor_{n+3}^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma^*} & S^3 Tor_{n+3}^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma^*} & S^4 Tor_{n+3}^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma^*} & S^5 Tor_{n+3}^R(A, -) & \\ \mu \downarrow & \searrow \theta & d \downarrow & \searrow \theta & d \downarrow & \searrow \theta & d \downarrow & \searrow \theta & d \downarrow & \\ Tor_{n+2}^R(A, -) & \xrightarrow{\pi \circ \sigma^*} & S^1 Tor_{n+2}^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma^*} & S^2 Tor_{n+2}^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma^*} & S^3 Tor_{n+2}^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma^*} & S^4 Tor_{n+2}^R(A, -) & \\ \downarrow 1 & \searrow \theta & \mu \downarrow & \searrow \theta & d \downarrow & \searrow \theta & d \downarrow & \searrow \theta & d \downarrow & \\ Tor_{n+2}^R(A, -) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{n+1}^R(A, -) & \xrightarrow{\pi \circ \sigma^*} & S^1 Tor_{n+1}^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma^*} & S^2 Tor_{n+1}^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma^*} & S^3 Tor_{n+1}^R(A, -) & \\ \downarrow 1 & \searrow \theta & \downarrow 1 & \searrow \theta & \mu \downarrow & \searrow \theta & d \downarrow & \searrow \theta & d \downarrow & \\ Tor_{n+2}^R(A, -) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{n+1}^R(A, -) & \xrightarrow{\delta} & Tor_n^R(A, -) & \xrightarrow{\pi \circ \sigma^*} & S^1 Tor_n^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma^*} & S^2 Tor_n^R(A, -) & \\ \downarrow 1 & \searrow \theta & \downarrow 1 & \searrow \theta & \downarrow 1 & \searrow \theta & \mu \downarrow & \searrow \theta & d \downarrow & \\ Tor_{n+2}^R(A, -) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{n+1}^R(A, -) & \xrightarrow{\delta} & Tor_n^R(A, -) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{n-1}^R(A, -) & \xrightarrow{\pi \circ \sigma^*} & S^1 Tor_{n-1}^R(A, -) & \end{array}$$

Για κάθε θετικό ακέραιο *n* αγκιστρώνουμε την κολόβωση $\infty Tor_*^R(A, -)_n$ με τους δεξιούς δορυφόρους του συναρτητή $Tor_n^R(A, -)$, $S^{>0} Tor_n^R(A, -)$, όπως φαίνεται οριζόντια στην κατασκευή. Η ακολουθία που επάγεται στο αντίστροφο όριο είναι η ακόλουθη.

$$\begin{array}{ccccccc}
\lim_{\leftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+2+i}^R(A, -) & \xrightarrow{\check{\sigma}_{n+2}} & \lim_{\leftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+1+i}^R(A, -) & \xrightarrow{\check{\sigma}_{n+1}} & \lim_{\leftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+i}^R(A, -) & \xrightarrow{\check{\sigma}_n} & \lim_{\leftarrow i} S^i \text{Tor}_{n-1+i}^R(A, -) \\
\downarrow \check{d} & & \downarrow \check{d} & & \downarrow \check{d} & & \downarrow \check{d} \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}$$

Συνεχίζουμε δείχνοντας τη μεταθετικότητα του ακόλουθου τμήματος.

$$\begin{array}{ccccc}
& & S^2 \text{Tor}_{n+1}^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma_*} & S^3 \text{Tor}_{n+1}^R(A, -) \\
& & \downarrow d & \searrow \theta & \downarrow d \\
\text{Tor}_n^R(A, -) & \xrightarrow{\pi \circ \sigma_*} & S^1 \text{Tor}_n^R(A, -) & \xrightarrow{\sigma_*} & S^2 \text{Tor}_n^R(A, -) \\
\downarrow \mathbf{1} & & \downarrow \mu & \searrow \theta & \downarrow d \\
\text{Tor}_n^R(A, -) & \xrightarrow{\delta} & \text{Tor}_{n-1}^R(A, -) & \xrightarrow{\pi \circ \sigma_*} & S^1 \text{Tor}_{n-1}^R(A, -)
\end{array}$$

Έτσι, για δεδομένη βραχεία ακριβή ακολουθία προτύπων $0 \rightarrow B' \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} B'' \rightarrow 0$, θεωρούμε το ακόλουθο τετράγωνο.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Tor}_n^R(A, B'') & \xrightarrow{\pi \circ \sigma_*} & S^1 \text{Tor}_n^R(A, B') \\
\downarrow \mathbf{1} & & \downarrow \mu \\
\text{Tor}_n^R(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & \text{Tor}_{n-1}^R(A, B')
\end{array}$$

Θεωρούμε επίσης την ύψωση της ταυτοτικής απεικόνισης, για το συνδετικό ομομορφισμό των δεξιών δορυφόρων ενός συναρτητή, σ .

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \mathbf{1} & & \downarrow f & & \downarrow \sigma \\
0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & IB' & \longrightarrow & \Sigma B' \longrightarrow 0
\end{array}$$

Η απεικόνιση ϑ είναι αυτός ο συνδετικός ομομορφισμός, όπως φαίνεται ακολούθως.

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Tor}_n^R(A, B) & \longrightarrow & \text{Tor}_n^R(A, B'') & & & & \\
\downarrow f_* & & \downarrow \sigma_* & \searrow \pi \circ \sigma_* = \vartheta & & & \\
\text{Tor}_n^R(A, IB') & \longrightarrow & \text{Tor}_n^R(A, \Sigma B') & \xrightarrow{\pi} & S^1 \text{Tor}_n^R(A, B') & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Δείχνουμε τη μεταθετικότητα του τετραγώνου χρησιμοποιώντας τη μεταθετικότητα του ακόλουθου διαγράμματος.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Tor}_n^R(A, B) & \longrightarrow & \text{Tor}_n^R(A, B'') & \xrightarrow{\delta} & \text{Tor}_{n-1}^R(A, B') \\
\downarrow f_* & & \downarrow \sigma_* & \searrow \delta^H \circ \sigma_* = \mu \circ \theta & \downarrow \mathbf{1} \\
\text{Tor}_n^R(A, IB') & \longrightarrow & \text{Tor}_n^R(A, \Sigma B') & \xrightarrow{\delta^H} & \text{Tor}_{n-1}^R(A, B') \\
& & \downarrow \pi & \nearrow \mu & \\
& & S^1 \text{Tor}_n^R(A, B') & &
\end{array}$$

Από το διάγραμμα που αφορά στην ύψωση έχουμε $\delta^H \circ \sigma_* = \delta$, ενώ $\mu \circ \pi = \delta^H$. Θεωρούμε τώρα το επόμενο διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc}
S^2 \text{Tor}_{n+1}^R(A, B'') & \xrightarrow{S\Sigma^2 \sigma_*} & S^3 \text{Tor}_{n+1}^R(A, B') \\
\downarrow d & \searrow \theta & \downarrow d \\
S^1 \text{Tor}_n^R(A, B'') & \xrightarrow{S\Sigma \sigma_*} & S^2 \text{Tor}_n^R(A, B') \\
\downarrow \mu & \searrow \theta & \downarrow d \\
\text{Tor}_{n-1}^R(A, B'') & \xrightarrow{\pi \circ \sigma_*} & S^1 \text{Tor}_{n-1}^R(A, B')
\end{array}$$

Θα δείξουμε την ισότητα $\sigma_* \circ \mu = \mu \circ S\Sigma \sigma_*$. Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα που σχετίζεται με το διάγραμμα της ύψωσης της σ , $\Sigma \sigma$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Tor}_{n+1}^R(A, B'') & \longrightarrow & \text{Tor}_{n+1}^R(A, IB'') & \longrightarrow & \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B'') & \xrightarrow{\pi} & S^1 \text{Tor}_{n+1}^R(A, B'') & \xrightarrow{\mu} & \text{Tor}_n^R(A, B'') \\
\downarrow \sigma_* & & \downarrow & & \downarrow \Sigma \sigma_* & & \downarrow S\Sigma \sigma_* & & \downarrow \sigma_* \\
\text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B') & \longrightarrow & \text{Tor}_{n+1}^R(A, I\Sigma B') & \longrightarrow & \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma^2 B') & \xrightarrow{\pi} & S^1 \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B') & \xrightarrow{\mu} & \text{Tor}_n^R(A, \Sigma B')
\end{array}$$

Έτσι έχουμε $\sigma_* \circ \mu \circ \pi = \sigma_* \circ \delta^H = \delta^H \circ \Sigma \sigma_* = \mu \circ \pi \circ \Sigma \sigma_* = \mu \circ S\Sigma \sigma_* \circ \pi$, ενώ η π είναι δεξιά διαγράψιμη.

Για την ισότητα $\pi \circ \sigma_* \circ \mu = d \circ S\Sigma \sigma_*$ συνθέτουμε από τα αριστερά με τη μ . Έχουμε $\mu \circ \pi \circ \sigma_* \circ \mu = \mu \circ d \circ S\Sigma \sigma_* \Leftrightarrow \delta^H \circ \sigma_* \circ \mu = \delta^H \circ \mu \circ S\Sigma \sigma_*$.

Για την ισότητα $S\Sigma \sigma_* \circ d = d \circ S\Sigma^2 \sigma_*$, ενεργούμε τοιουτοτρόπως. Έχουμε $\mu \circ S\Sigma \sigma_* \circ d = \mu \circ d \circ S\Sigma^2 \sigma_* \Leftrightarrow \sigma_* \circ \mu \circ d = \delta^H \circ \mu \circ S\Sigma^2 \sigma_* \Leftrightarrow \sigma_* \circ \delta^H \circ \mu = \delta^H \circ \Sigma \sigma_* \circ \mu$. Αφού $\sigma_* \circ \delta^H = \delta^H \circ \Sigma \sigma_*$, έπεται το ζητούμενο.

Τέλος, δείχνουμε την ισότητα $\theta = d \circ S\Sigma \sigma_*$. Ομοίως, έχουμε $\mu \circ \theta = \mu \circ d \circ S\Sigma \sigma_* \Leftrightarrow \mu \circ \theta = \delta^H \circ \mu \circ S\Sigma \sigma_* \Leftrightarrow \mu \circ \theta = \delta^H \circ \sigma_* \circ \mu \Leftrightarrow \mu \circ \theta = \delta \circ \mu$, αφού $\delta^H \circ \sigma_* = \delta$, και η τελευταία ισότητα της ισοδυναμίας είναι αποδεδειγμένη.

Πρόταση 4.3.2 Η συνδεδεμένες ακολουθίες των συναρτητών $\{\lim_{\leftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+i}^R(A, -), \theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ και

$\{\lim_{\leftarrow i} S^i \text{Tor}_{n+i}^R(A, -), \sigma\}_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι φυσικά ισοδύναμες.

Απόδειξη.

Εν όψει της κατασκευής *Triulzi*, αντιλαμβανόμαστε τις μακρές ακριβείς ακολουθίες που συνιστούν τη μακρά συνδεδεμένη ακολουθία της οικογένειας $\{\lim_{\leftarrow i} S^i Tor_{n+i}^R(A, -), \theta\}$ σαν τις πλάγιες τεθλασμένες γραμμές του πλέγματος. Το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 S^2 Tor_{n+1}^R(A, B'') & \xrightarrow{S\Sigma^2 \sigma_*} & S^3 Tor_{n+1}^R(A, B') \\
 \downarrow d & \searrow \theta & \downarrow d \\
 S^1 Tor_n^R(A, B'') & \xrightarrow{S\Sigma \sigma_*} & S^2 Tor_n^R(A, B') \\
 & \searrow \theta & \downarrow d \\
 & & S^1 Tor_{n-1}^R(A, B')
 \end{array}$$

είναι ουσιαστικά ο ακόλουθος μεταθετικός κύβος.

$$\begin{array}{ccccc}
 S^2 Tor_{n+1}^R(A, B'') & & \xrightarrow{S\Sigma^2 \sigma_*} & & S^3 Tor_{n+1}^R(A, B') \\
 \downarrow d & \searrow \theta & & \swarrow d & \downarrow d \\
 S^1 Tor_n^R(A, B'') & & S^2 Tor_n^R(A, B') & & S^2 Tor_n^R(A, B') \\
 & \searrow \theta & \downarrow d & \swarrow d & \\
 & & S^1 Tor_{n-1}^R(A, B') & &
 \end{array}$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $\mathbf{1} - D : \prod_i S^i Tor_{n+i}^R(A, -) \rightarrow \prod_i S^i Tor_{n+i}^R(A, -)$, που ορίζεται μέσω της d . Έχουμε $D|_{\check{\sigma}} = \check{\theta}$. Καθώς το όριο $\lim_{\leftarrow i} S^i Tor_{n+i}^R(A, -)$ είναι ο πυρήνας της $\mathbf{1} - D$ έχουμε $D|_{\check{\sigma}} = \check{\theta}$, επομένως $\check{\sigma} = \check{\theta}$. □

Πόρισμα 4.3.3 Οι συνδεδεμένη ακολουθία συναρτητών $\{\lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(A, \Sigma^i -), \check{\delta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ και η κατασκευή *Triulzi* είναι φυσικά ισοδύναμες.

Αν τώρα $sflR < \infty$, τότε η απεικόνιση d ανάμεσα στους δορυφόρους είναι ισομορφισμός για μεγάλες διαστάσεις. Θα δούμε λοιπόν την εμφυτευτική πλήρωση του $Tor_*^R(A, -)$ με αυτόν τον περιορισμό.

Πρόταση 4.3.4 $sflR = N < \infty \Rightarrow \widetilde{Tor}_*^R(A, -) = \{\check{Tor}_n^R(A, -), \check{\delta}\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(A, \Sigma^i -)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\dots, Tor_{n+1}^R(A, -), Tor_n^R(A, -), Tor_{n-1}^R(A, -), \dots, Tor_{N+1}^R(A, -), Tor_{N+1}^R(A, \Sigma -), Tor_{N+1}^R(A, \Sigma^2 -), \dots\}$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε την ακόλουθη κατασκευή.

$$\begin{array}{ccccccccc}
Tor_{N+6}^R(A, \Sigma^4-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+5}^R(A, \Sigma^4-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+4}^R(A, \Sigma^4-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+3}^R(A, \Sigma^4-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N=2}^R(A, \Sigma^4) \\
\delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow \simeq \\
Tor_{N+5}^R(A, \Sigma^3-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+4}^R(A, \Sigma^3-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+3}^R(A, \Sigma^3-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+2}^R(A, \Sigma^3-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+1}^R(A, \Sigma^3) \\
\delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow \\
Tor_{N+4}^R(A, \Sigma^2-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+3}^R(A, \Sigma^2-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+2}^R(A, \Sigma^2-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+1}^R(A, \Sigma^2-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_N^R(A, \Sigma^2) \\
\delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\
Tor_{N+3}^R(A, \Sigma-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+2}^R(A, \Sigma-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+1}^R(A, \Sigma-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_N^R(A, \Sigma-) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N-1}^R(A, \Sigma) \\
\delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow \simeq & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\
Tor_{N+2}^R(A, -) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N+1}^R(A, -) & \xrightarrow{\delta} & Tor_N^R(A, -) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N-1}^R(A, -) & \xrightarrow{\delta} & Tor_{N-2}^R(A, -)
\end{array}$$

Τότε, η προκύπτουσα ακολουθία στο αντίστροφο όριο είναι ακριβής, καθώς σε κάθε θέση η ακρίβεια ανάγεται στην ακρίβεια σε κάποιο τμήμα ενός επιπέδου. Η ίδια η ακολουθία είναι η τεθλασμένη γραμμή που εμφανίζεται σαν σκαλοπάτια στο πλέγμα. Η ακολουθία είναι τερματική καθώς ο $Tor_*^R(A, -)$ είναι εμφυτευτικώς πλήρης σε μεγάλες διαστάσεις όταν $sflR < \infty$. Από την πρόταση με τη μοναδική επέκταση στα δεξιά έπεται ότι ο ομολογικός αυτός συναρτητής είναι η εμφυτευτική πλήρωση του $Tor_*^R(A, -)$. \square

Η ακολουθία που προκύπτει από την κατασκευή *Triulzi*, $\widehat{Tor}_*^R(A, -)$, είναι η αγκίστρωση στο συναρτητή με δείκτη $N + 1$ των δεξιών δορυφόρων του. Ο προκύπτων ομολογικός συναρτητής είναι εμφυτευτικώς πλήρης και έπονται οι ακόλουθοι ισομορφισμοί.

$$\begin{aligned}
Tor_{N+1}^R(A, \Sigma IB) &\rightarrow Tor_{N+1}^R(A, \Sigma B) \xrightarrow{\pi} S^1 Tor_{N+1}^R(A, B) \rightarrow 0 \\
S^2 Tor_{N+1}^R(A, B) &\simeq S^1 Tor_{N+1}^R(A, \Sigma B) \xrightarrow{\pi} Tor_{N+1}^R(A, \Sigma^2 B)
\end{aligned}$$

Με *dimension shifting* έπονται και οι υπόλοιποι. Οι ομομορφισμοί αυτοί είναι φυσικοί καθώς είναι οι φυσικές προβολές των δεξιών δορυφόρων, π . Η παραπάνω κατασκευή ισοδυναμεί με την κατασκευή *Triulzi*. Άλλωστε είναι μία τερματική ακριβής ακολουθία και είναι η εμφυτευτική πλήρωση. Παραθέτουμε τον ισομορφισμό δ^H στις μεγάλες διαστάσεις.

$$Tor_{N+2}^R(A, I\Sigma^{r+1}B) \rightarrow Tor_{N+2}^R(A, \Sigma^{r+2}B) \xrightarrow[\delta^H]{\simeq} Tor_{N+1}^R(A, \Sigma^{r+1}B) \rightarrow Tor_{N+1}^R(A, I\Sigma^{r+1}B)$$

Παραθέτουμε την απεικόνιση δ^H .

$$\lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(A, \Sigma^i B) \xrightarrow{\simeq} \dots \xrightarrow{\simeq} Tor_{N+2}^R(A, \Sigma^{r+2}B) \xrightarrow{\simeq} Tor_{N+1}^R(A, \Sigma^{r+1}B) \xrightarrow{\delta^H} Tor_N^R(A, \Sigma^r B) \xrightarrow{\delta^H} \dots$$

Θα δούμε τώρα την απόδειξη που δίνει την ακρίβεια στη μακρά ακολουθία που αφορά στην οικογένεια των φυσικών μετασχηματισμών.

$$\begin{array}{ccccc}
[\widetilde{Ext}_R^n(B, -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{\check{\psi}} & [\widetilde{Ext}_R^n(B'', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{\check{\omega}_1} & [\widetilde{Ext}_R^{n-1}(B', -), A \otimes_R -] \\
\cong \downarrow \gamma_t^* & & \cong \downarrow \gamma_t^* & & \cong \downarrow \gamma_t^* \\
[Ext_R^t(\Sigma^l B, -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{\psi^*} & [Ext_R^t(\Sigma^l B'', -), A \otimes_R -] & \xrightarrow{(-\omega_1)^*} & [Ext_R^t(\Sigma^l B', -), A \otimes_R -]
\end{array}$$

Μελετάμε την ακρίβεια στην πρώτη θέση, και έχουμε ομοίως στις υπόλοιπες.

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{Ext}_R^n(B'', -) & \xrightarrow{\check{\psi}^*} & \widetilde{Ext}_R^n(B, -) & \xrightarrow{\check{\phi}^*} & \widetilde{Ext}_R^n(B', -) \\
\searrow \tau \circ \check{\psi}^* = 0 & & \downarrow \tau & & \swarrow \rho \\
& & A \otimes_R - & &
\end{array}$$

Θέλουμε φυσικό μετασχηματισμό ρ με $\rho \circ \check{\phi}^* = \tau$. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc}
Ext_R^t(\Sigma^l B'', -) & \xrightarrow{\gamma_t} & \widetilde{Ext}_R^n(B'', -) \\
(\Sigma^l \psi)^* \downarrow & & \downarrow \check{\psi}^* \\
Ext_R^t(\Sigma^l B, -) & \xrightarrow{\gamma_t} & \widetilde{Ext}_R^n(B, -) \\
& \searrow \tau \circ \gamma_t & \downarrow \tau \\
& & A \otimes_R -
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
Ext_R^t(\Sigma^l B'', -) & \xrightarrow{\Sigma^l \psi^*} & Ext_R^t(\Sigma^l B, -) & \xrightarrow{\Sigma^l \phi^*} & Ext_R^t(\Sigma^l B', -) \\
& \searrow \tau \circ \gamma_t \circ (\Sigma^l \psi)^* = 0 & \downarrow \tau \circ \gamma_t & & \swarrow \rho_t \\
& & A \otimes_R - & &
\end{array}$$

Έχουμε $\tau \circ \gamma_t \circ (\Sigma^l \psi)^* = (\Sigma^l \psi)^* (\tau \circ \gamma_t) = 0$. Οι φυσικοί μετασχηματισμοί είναι ακριβής ομολογικός συναρτητής σε αυτό το επίπεδο. Έτσι υπάρχει η ρ_t ώστε το προηγούμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό. Η γ_t^* είναι ισομορφισμός. Έτσι, υπέρχει η ρ με $\rho \circ \gamma_t = \rho_t$. Το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc}
Ext_R^t(\Sigma^l B, -) & \xrightarrow{\gamma_t} & \widetilde{Ext}_R^n(B, -) \\
(\Sigma^l \phi)^* \downarrow & & \downarrow \check{\phi}^* \\
Ext_R^t(\Sigma^l B', -) & \xrightarrow{\gamma_t} & \widetilde{Ext}_R^n(B, -) \\
\rho_t \downarrow & \swarrow \rho & \\
A \otimes_R - & &
\end{array}$$

Καταλήγουμε στη σχέση $\tau \circ \gamma_t = \rho \circ \check{\phi}^* \circ \gamma_t$.

5 Εναλλακτική περιγραφή της πλήρωσης κατά *Nucinkis*.

Θεωρούμε ένα δακτύλιο R . Έστω ${}_R N$ και ${}_R L$ δύο αριστερά R -πρότυπα, και έστω μία εμφυτευτική επίλυση του προτύπου N , $N \rightarrow \mathbb{I}$. Θεωρούμε το επαγόμενο ευθύ σύστημα αβελιανών ομάδων που προκύπτει μέσω των συνδετικών ομομορφισμών στις μακρές ακριβείς ακολουθίες που αφορούν στις εμφυτευτικές παραστάσεις της επίλυσης.

$$0 \rightarrow N \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow I^3 \rightarrow \dots \rightarrow I^i \rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \pi \searrow \nearrow \mu & & \pi \searrow \nearrow \mu & & \pi \searrow \nearrow \mu \\
& & \Sigma N & & \Sigma^2 N & & \Sigma^3 N
\end{array}$$

$$Ext_R^n(N, L) \xrightarrow{d_0^n} Ext_R^{n+1}(\Sigma N, L) \xrightarrow{d_1^n} Ext_R^{n+2}(\Sigma^2 N, L) \xrightarrow{d_2^n} Ext_R^{n+3}(\Sigma^3 N, L) \xrightarrow{d_3^n} \dots$$

Το ευθύ όριο του συστήματος αποτελεί την πλήρωση κατά *Nucinkis*, $\widetilde{Ext}_R^n(N, L) \simeq \lim_{\substack{\rightarrow \\ i}} Ext_R^{n+i}(\Sigma^i N, L)$,

η οποία είναι φυσικά ισοδύναμη με την ευσταθή (εμφυτευτικώς πλήρη) συνομολογία, $\widetilde{Ext}_R^n(N, L)$.

Παρουσιάζουμε μία άλλη περιγραφή της πλήρωσης αυτής. Γί αυτό το σκοπό, θεωρούμε επίσης μία εμφυτευτική επίλυση του προτύπου L , $L \rightarrow \mathbb{J}$.

$$0 \rightarrow L \rightarrow J^0 \rightarrow J^1 \rightarrow J^2 \rightarrow J^3 \rightarrow \dots \rightarrow J^i \rightarrow \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \pi \searrow \nearrow \mu & & \pi \searrow \nearrow \mu & & \pi \searrow \nearrow \mu \\
& & \Sigma L & & \Sigma^2 L & & \Sigma^3 L
\end{array}$$

Συμβολίζουμε, για κάθε $i \geq 0$, για κάθε σύμπλεγμα \mathbb{I}^* εμφυτευτικής επίλυσης το υποσύμπλεγμα αυτού, $\mathbb{I}^{\geq i}$, όπως φαίνεται ακολούθως.

$$\mathbb{I}^* : \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots \rightarrow I^{i-1} \rightarrow I^i \rightarrow I^{i+1} \rightarrow I^{i+2} \rightarrow \dots$$

$$\mathbb{I}^{\geq i} : \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow I^i \rightarrow I^{i+1} \rightarrow I^{i+2} \rightarrow \dots$$

Για κάθε $i \geq 0$, θεωρούμε το σχεδόν ισομορφισμό $\Sigma^i N[i] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{I}^{\geq i}$. Προκύπτει η ακόλουθη διασπώμενη, κατά βαθμό, ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων.

$$0 \longrightarrow \mathbb{I}^{\geq i+1} \longrightarrow \mathbb{I}^{\geq i} \longrightarrow I^i[i] \longrightarrow 0$$

Εφαρμόζουμε σε αυτήν το συναρτητή $Hom_R(-, \mathbb{J}^*)$ και προκύπτει η ακόλουθη διασπώμενη, κατά βαθμό, ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων.

$$0 \longrightarrow Hom_R(I^i[i], \mathbb{J}^*) \longrightarrow Hom_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*) \xrightarrow{c_i} Hom_R(\mathbb{I}^{\geq i+1}, \mathbb{J}^*) \longrightarrow 0$$

Η συναλυσωτή απεικόνιση c_i που εμφανίζεται στην ακολουθία επάγεται από τον περιορισμό της εμφύτευσης συμπλεγμάτων $\mathbb{I}^{\geq i+1} \subseteq \mathbb{I}^{\geq i}$. Η ίδια επάγει για κάθε ακέραιο n τις προσθετικές απεικονίσεις $c_i^n : H^n(Hom_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*)) \rightarrow H^n(Hom_R(\mathbb{I}^{\geq i+1}, \mathbb{J}^*))$. Θεωρούμε το ευθύ σύστημα

$$\begin{aligned} H^n(Hom_R(\mathbb{I}^{\geq 1}, \mathbb{J}^*)) &\xrightarrow{c_1^n} H^n(Hom_R(\mathbb{I}^{\geq 2}, \mathbb{J}^*)) \xrightarrow{c_2^n} H^n(Hom_R(\mathbb{I}^{\geq 3}, \mathbb{J}^*)) \xrightarrow{c_3^n} \dots \\ \dots &\xrightarrow{c_{i-1}^n} H^n(Hom_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*)) \xrightarrow{c_i^n} H^n(Hom_R(\mathbb{I}^{\geq i+1}, \mathbb{J}^*)) \xrightarrow{c_{i+1}^n} \dots \end{aligned}$$

με ευθύ όριο, $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i}} H^n(Hom_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*))$.

Λήμμα 5.0.5 Έστω \mathbb{J}^* ένα κάτω φραγμένο συναλυσωτό σύμπλεγμα εμφυτευτικών αριστερών R -προτύπων. Ισχύουν τα ακόλουθα.

1. Αν \mathbb{C}^* είναι ακυκλικό σύμπλεγμα αριστερών R -προτύπων τότε το σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων $Hom_R(\mathbb{C}^*, \mathbb{J}^*)$ είναι επίσης ακυκλικό.
2. Ένας σχεδόν ισομορφισμός συμπλεγμάτων αριστερών R -προτύπων $f : \mathbb{X}^* \rightarrow \mathbb{Y}^*$ επάγει το σχεδόν ισομορφισμό συμπλεγμάτων αβελιανών ομάδων $f^* : Hom_R(\mathbb{Y}^*, \mathbb{J}^*) \rightarrow Hom_R(\mathbb{X}^*, \mathbb{J}^*)$.

Απόδειξη.

1.

$$\begin{array}{ccccccc} C^{-n-1} & \xrightarrow{\theta^{-n}} & C^{-n} & \xrightarrow{\theta^{-n+1}} & C^{-n+1} & \xrightarrow{\theta^{-n+2}} & C^{-n+2} & \xrightarrow{\theta^{-n+3}} & \dots \\ \downarrow g^{-1} & \swarrow \Sigma_{-n} & \downarrow g^0 & \swarrow \Sigma_{-n+1} & \downarrow g^1 & \swarrow \Sigma_{-n+2} & \downarrow g^2 & \swarrow \Sigma_{-n+3} & \downarrow \dots \\ 0 & \xrightarrow{\theta^{-n}} & J^0 & \xrightarrow{\theta^{-n+1}} & J^1 & \xrightarrow{\theta^{-n+2}} & J^2 & \xrightarrow{\theta^{-n+3}} & \dots \end{array}$$

Ένας σύγκυκλος βαθμού n στο σύμπλεγμα $Hom_R(\mathbb{C}^*, \mathbb{J}^*)$ είναι μία συναλυσωτή απεικόνιση $g : \mathbb{C}^*[n] \rightarrow \mathbb{J}^*$, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα. Καθώς το σύμπλεγμα \mathbb{J}^* αποτελείται από εμφυτευτικά πρότυπα, δείχνουμε εύκολα ότι η g είναι ομοτοπική με τη μηδενική. Αυτό όμως σημαίνει ότι ο σύγκυκλος g είναι σύνορο. Επομένως, το σύμπλεγμα $Hom_R(\mathbb{C}^*, \mathbb{J}^*)$ είναι ακυκλικό.

2. Ο κώνος $\mathbb{C}^* = Cone(f)$ είναι ακυκλικό σύμπλεγμα και το σύμπλεγμα $Hom_R(\mathbb{C}^*, \mathbb{J}^*)$ είναι ακριβώς ο κώνος του μορφισμού $f^* : Hom_R(\mathbb{Y}^*, \mathbb{J}^*) \rightarrow Hom_R(\mathbb{X}^*, \mathbb{J}^*)$. Έτσι, ο μορφισμός f^* είναι σχεδόν ισομορφισμός από το 1.

□

Το λήμμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη της ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 5.0.6 Με τους προαναφερθέντες συμβολισμούς ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε ακέραιο n και κάθε μη αρνητικό ακέραιο i .

1. Ο σχεδόν ισομορφισμός $\Sigma^i N[i] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{I}^{\geq i}$ επάγει ισομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*)) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_R^{n+i}(\Sigma^i N, L).$$

2. Οι προηγούμενοι ισομορφισμοί ορίζουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*)) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}_R^{n+i}(\Sigma^i N, L) \\ \downarrow c_i^n & & \downarrow d_i^n \\ H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i+1}, \mathbb{J}^*)) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}_R^{n+i+1}(\Sigma^{i+1} N, L) \end{array}$$

3. Έχουμε φυσικό ισομορφισμό $\widetilde{\text{Ext}}_R^n(N, L) \simeq \varinjlim H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*))$.

Απόδειξη.

1. Καθώς το συναλυσωτό σύμπλεγμα \mathbb{J}^* είναι κάτω φραγμένο αποτελούμενο από εμφυτευτικά πρότυπα, από το δεύτερο σκέλος του προηγούμενου λήμματος, ο σχεδόν ισομορφισμός $\Sigma^i N[i] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{I}^{\geq i}$ επάγει το σχεδόν ισομορφισμό συμπλεγμάτων αβελιανών ομάδων $\alpha^* : \text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*) \rightarrow \text{Hom}_R(\Sigma^i N[i], \mathbb{J}^*)$. Επομένως, οι προσθετικές απεικονίσεις $H^n(\alpha^*) : H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*)) \rightarrow H^n(\text{Hom}_R(\Sigma^i N[i], \mathbb{J}^*))$ είναι ισομορφισμοί, και λόγω της *suspension* σε συναλυσωτό σύμπλεγμα έχουμε $H^n(\text{Hom}_R(\Sigma^i N[i], \mathbb{J}^*)) = H^{n+i}(\text{Hom}_R(\Sigma^i N, \mathbb{J}^*)) = \text{Ext}_R^{n+i}(\Sigma^i N, L)$. Προκύπτει, έτσι, ο ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*)) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_R^{n+i}(\Sigma^i N, L).$$

2. Ο προηγούμενος ισομορφισμός $H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*)) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_R^{n+i}(\Sigma^i N, L)$ ταυτίζει ένα στοιχείο $\xi \in \text{Ext}_R^{n+i}(\Sigma^i N, L)$, $\xi = [f]_{J^{n+i-1}}$ με την κλάση μίας συναλυσωτής απεικόνισης $(f^j)_{j \geq i} : \mathbb{I}^{\geq i} \rightarrow \mathbb{J}^*[-n]$ που ανυψώνει τον αντιπρόσωπο f ως εξής:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Sigma^i N & \longrightarrow & I^i & \longrightarrow & \Sigma^{i+1} N & \longrightarrow & I^{i+1} & \longrightarrow & I^{i+2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f^i & & \downarrow \Sigma f & & \downarrow f^{i+1} & & \downarrow f^{i+2} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma^{n+i} L & \longrightarrow & J^{n+i} & \longrightarrow & \Sigma^{n+i+1} L & \longrightarrow & J^{n+i+1} & \longrightarrow & J^{n+i+2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Οι ανωτέρω απεικονίσεις $(f^j)_{j \geq i}$ είναι μοναδικές ως προς ομοτοπία και, για κάθε $k \geq 0$, η απεικόνιση $\Sigma^k f$ είναι μοναδική *modulo* παραγοντοποίησης μέσω του $J^{n+i+k-1}$. Προκύπτουν, λοιπόν, οι ακόλουθες εικόνες.

$$\begin{array}{ccc} [(f^j)_{j \geq i}] & \xrightarrow{\cong} & \xi = [f]_{J^{n+i-1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ c_i^n([(f^j)_{j \geq i}]) = [(f^j)_{j \geq i+1}] & \xrightarrow{\cong} & d_i^n(\xi) = [\Sigma f]_{J^{n+i}} \end{array}$$

3. Ταυτίζοντας το ευθύ σύστημα $(Ext_R^{n+i}(\Sigma^i N, L), d_i^n)_i$ με το ευθύ σύστημα $(H^n(Hom_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*)), c_i^n)_i$ προκύπτει, λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος του δεύτερου σκέλους της πρότασης, ο φυσικός ισομορφισμός των αντίστοιχων ευθέων ορίων,

$$\widetilde{Ext}_R^n(N, L) \simeq \varinjlim_i H^n(Hom_R(\mathbb{I}^{\geq i}, \mathbb{J}^*)).$$

□

6 Η ευσταθής ομολογία.

6.1 Τανυστικό γινόμενο συμπλεγμάτων.

Ορισμοί 6.1.1 Θεωρούμε ένα R^{opp} -σύμπλεγμα X και ένα R -σύμπλεγμα Y . Κατασκευάζουμε το φραγμένο τανυστικό γινόμενο των συμπλεγμάτων, δηλαδή το πρώτο ολικό σύμπλεγμα, $X \otimes_R Y$, θεωρώντας σε κάθε βαθμό n , την αβελιανή ομάδα $(X \otimes_R Y)_n = \bigoplus_{p+q=n} (X_p \otimes_R Y_q) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (X_i \otimes_R Y_{n-i})$. Αυτό καθίσταται αλυσωτό σύμπλεγμα με διαφορικό που ορίζεται σε έναν απλό τένσορα,

$$\vartheta(x \otimes y) = \vartheta_i^X(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes \vartheta_{n-i}^Y(y), \quad x \in X_i, y \in Y_{n-i}.$$

Ομοίως, ορίζουμε το απεριόριστο τανυστικό γινόμενο των αρχικών συμπλεγμάτων, δηλαδή το δεύτερο ολικό σύμπλεγμα, $X \widetilde{\otimes}_R Y$, θεωρώντας σε κάθε βαθμό n , την αβελιανή ομάδα $(X \widetilde{\otimes}_R Y)_n = \prod_{p+q=n} (X_p \otimes_R Y_q) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} (X_i \otimes_R Y_{n-i})$. Καθίσταται αλυσωτό σύμπλεγμα με διαφορικό που ορίζεται όπως στο φραγμένο.

Καθώς υποσύμπλεγμα του απεριόριστου αποτελεί το φραγμένο σύμπλεγμα, θεωρούμε το σύμπλεγμα πηλίκο και το καλούμε ευσταθές τανυστικό γινόμενο των αρχικών συμπλεγμάτων, $X \widetilde{\otimes}_R Y = X \overline{\otimes}_R Y / X \otimes_R Y$, με $(X \widetilde{\otimes}_R Y)_n = \frac{\prod_{p+q=n} (X_p \otimes_R Y_q)}{\bigoplus_{p+q=n} (X_p \otimes_R Y_q)} = \frac{\prod_{i \in \mathbb{Z}} (X_i \otimes_R Y_{n-i})}{\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (X_i \otimes_R Y_{n-i})}$, το οποίο καθίσταται αλυσωτό με διαφορικό που επάγεται από το διαφορικό του απεριόριστου. Έτσι, προκύπτει η ακόλουθη, κατά βαθμό, βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων.

$$0 \rightarrow X \otimes_R Y \rightarrow X \overline{\otimes}_R Y \rightarrow X \widetilde{\otimes}_R Y \rightarrow 0$$

Παρατηρούμε ότι αν το σύμπλεγμα X ή το σύμπλεγμα Y είναι φραγμένα ολικώς, ή ακόμα αν και τα δύο είναι φραγμένα άνω ή φραγμένα κάτω, τότε το φραγμένο και το απεριόριστο τανυστικό γινόμενο συμπίπτουν, καθιστώντας το ευσταθές μηδενικό.

Οι ακόλουθες ιδιότητες έχουν αναφερθεί από τους *Olgur Celikbas, Lars Winther Christensen, Li Liang* και *Greg Piepmeyer*. Τις αποδεικνύουμε.

Ιδιότητες 6.1.2 1. $X \otimes_R Y \simeq Y \otimes_{R^{opp}} X$, $X \overline{\otimes}_R Y \simeq Y \overline{\otimes}_R X$ και $X \widetilde{\otimes}_R Y \simeq Y \widetilde{\otimes}_R X$.

Καθώς $X_p \otimes_R Y_q \xrightarrow{g} Y_q \otimes_{R^{opp}} X_p$, με $g(a \otimes b) = b \otimes a$, δείχνουμε ότι σε κάθε βαθμό n οι αβελιανές ομάδες που συνθέτουν τις διαβαθμισμένες $X \otimes_R Y$ και $Y \otimes_{R^{opp}} X$ είναι ισόμορφες. Ομοίως, έχουμε τον δεύτερο ισομορφισμό. Ο τρίτος αποδεικνύεται με χρήση του 3-λήμματος στο μεταθετικό διάγραμμα που προκύπτει από την προαναφερθείσα βραχεία ακριβή ακολουθία, κατά βαθμό, και την απεικόνιση αυτής στην αντίστοιχη μέσω του ισομορφισμού ϕ .

2. Οι συναρτητές $X \otimes_R -$, $X \overline{\otimes}_R -$ και $X \widetilde{\otimes}_R -$ είναι προσθετικοί και δεξιά ακριβείς.

Αν A και B είναι R -συμπλέγματα τότε, καθώς $(A \oplus B)_q = A_q \oplus B_q$, έχουμε

$$(X \otimes_R (A \oplus B))_n = \bigoplus_{p+q=n} (X_p \otimes_R (A_q \oplus B_q)) = \bigoplus_{p+q=n} ((X_p \otimes_R A_q) \oplus (X_p \otimes_R B_q)) = (X \otimes_R A)_n \oplus (X \otimes_R B)_n$$

και

$$(X \overline{\otimes}_R (A \oplus B))_n = \prod_{p+q=n} (X_p \otimes_R (A_q \oplus B_q)) = \prod_{p+q=n} ((X_p \otimes_R A_q) \oplus (X_p \otimes_R B_q)) = (X \overline{\otimes}_R A)_n \oplus (X \overline{\otimes}_R B)_n.$$

Επομένως, έχουμε $X \otimes_R (A \oplus B) = X \otimes_R A \oplus X \otimes_R B$ και $X \overline{\otimes}_R (A \oplus B) = X \overline{\otimes}_R A \oplus X \overline{\otimes}_R B$.

Η προσθετικότητα του τρίτου συναρτητή αποδεικνύεται πάλι με χρήση του 3-λήμματος στο μεταθετικό διάγραμμα που προκύπτει συνδέοντας μέσω της προσθετικότητας των δύο πρώτων τις αντίστοιχες βραχείες ακριβείς ακολουθίες, κατά βαθμό, που ορίζουν το φραγμένο, το απεριοριστο και το ευσταθές τανυστικό γινόμενο.

Για τη δεξιά ακρίβεια των συναρτητών ξεκινάμε με μία ακριβή ακολουθία της μορφής $A_q \rightarrow B_q \rightarrow C_q \rightarrow 0$. Ο συναρτητής $X_p \otimes_R -$ είναι δεξιά ακριβής, και θεωρούμε ευθεία αθροίσματα και καρτεσιανά γινόμενα από τις προκύπτουσες ακριβείς ακολουθίες, για τον πρώτο και τον δεύτερο συναρτητή αντίστοιχα. Προκύπτει έτσι το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα, κατά βαθμό, του οποίου η ακρίβεια της τρίτης γραμμής έπεται από κυνήγι διαγράμματος.

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ X \otimes_R A & \longrightarrow & X \otimes_R B & \longrightarrow & X \otimes_R C & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ X \overline{\otimes}_R A & \longrightarrow & X \overline{\otimes}_R B & \longrightarrow & X \overline{\otimes}_R C & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ X \widetilde{\otimes}_R A & \longrightarrow & X \widetilde{\otimes}_R B & \longrightarrow & X \widetilde{\otimes}_R C & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

3. Οι συναρτητές $X \otimes_R -$, $X \overline{\otimes}_R -$ και $X \widetilde{\otimes}_R -$ διατηρούν διασπώμενες, κατά βαθμό, βραχείες ακριβείς ακολουθίες συμπλεγμάτων.

Έπεται από την προσθετικότητα των συναρτητών.

4. Οι συναρτητές $X \otimes_R -$, $X \overline{\otimes}_R -$ και $X \widetilde{\otimes}_R -$ διατηρούν ομοτοπίες.

Έπεται από την προσθετικότητα των συναρτητών και οι ομοτοπίες ορίζονται εύλογα, σεβόμενες την επιλογή του διαφορικού των συμπλεγμάτων. Πράγματι, θα ορίσουμε ομοτοπίες της μορφής $\Sigma_{p,q} = (-1)^p \mathbf{1} \otimes \Sigma_q$. Θα ασχοληθούμε με τον πρώτο συναρτητή, καθώς η μελέτη για τους υπόλοιπους γίνεται τοιοιτοτρόπως. Έστω η ακόλουθη ομοτοπία.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\theta_{q+2}} & A_{q+1} & \xrightarrow{\theta_{q+1}} & A_q & \xrightarrow{\theta_q} & A_{q-1} & \xrightarrow{\theta_{q-1}} & \dots \\ & & \downarrow \phi_{q+1} & \swarrow \xi_{q+1} & \downarrow \phi_q & \swarrow \xi_q & \downarrow \phi_{q-1} & \swarrow \xi_{q-1} & \\ & & \theta_{q+2} & \swarrow \theta_{q+1} & \theta_q & \swarrow \theta_{q-1} & \theta_{q-1} & & \\ \dots & \xrightarrow{\theta_{q+2}} & B_{q+1} & \xrightarrow{\theta_{q+1}} & B_q & \xrightarrow{\theta_q} & B_{q-1} & \xrightarrow{\theta_{q-1}} & \dots \end{array}$$

Έχουμε $\phi_q - \xi_q = \Sigma_{q-1} \circ \theta_q + \theta_{q+1} \circ \Sigma_q$. Εφαρμόζουμε το συναρτητή $X \otimes_R -$ και έστω ένας απλός τένσορας $x_p \otimes a_q \in \bigoplus_{p+q=n} (X_p \otimes_R A_q)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} x_p \otimes a_q &\mapsto (\dots, 0, 0, \vartheta_p^X(x_p) \otimes a_q, (-1)^p x_p \otimes \theta_q(a_q), 0, 0, \dots) \mapsto \\ &(\dots, 0, 0, (-1)^{p-1} \vartheta_p^X(x_p) \otimes \Sigma_q(a_q), (-1)^{2p} x_p \otimes \Sigma_{q-1} \theta_q(a_q), 0, 0, \dots) \\ x_p \otimes a_q &\mapsto (-1)^p x_p \otimes \Sigma_q(a_q) \mapsto (\dots, 0, 0, (-1)^p \vartheta_p^X(x_p) \otimes \Sigma_q(a_q), (-1)^{2p} x_p \otimes \theta_{q+1} \Sigma_q(a_q), 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τα τελευταία στοιχεία, μετά τη διαγραφή των δύο αντίθετων όρων, προκύπτει το άθροισμα $(-1)^{2p} x_p \otimes \Sigma_{q-1} \theta_q(a_q) + (-1)^{2p} x_p \otimes \theta_{q+1} \Sigma_q(a_q) = x_p \otimes (\Sigma_{q-1} \theta_q(a_q) + \theta_{q+1} \Sigma_q(a_q)) = x_p \otimes (\Sigma_{q-1} \circ \theta_q + \theta_{q+1} \circ \Sigma_q)(a_q) = x_p \otimes (\phi_q - \xi_q)(a_q) = (\mathbf{1} \otimes \phi_q - \mathbf{1} \otimes \xi_q)(x_p \otimes a_q)$.

5. Αν $a : Y \rightarrow Y'$ είναι μορφισμός R -συμπλεγμάτων τότε $\text{Cone}(X \otimes_R a) \simeq X \otimes_R \text{Cone}(a)$, $\text{Cone}(X \overline{\otimes}_R a) \simeq X \overline{\otimes}_R \text{Cone}(a)$ και $\text{Cone}(X \widetilde{\otimes}_R a) \simeq X \widetilde{\otimes}_R \text{Cone}(a)$.

Ειδικότερα, $X \otimes_R a$, $X \overline{\otimes}_R a$ και $X \widetilde{\otimes}_R a$ είναι σχεδόν ισομορφισμοί αν και μόνο αν $X \otimes_R \text{Cone}(a)$, $X \overline{\otimes}_R \text{Cone}(a)$ και $X \widetilde{\otimes}_R \text{Cone}(a)$ είναι ακυκλικά, αντίστοιχα.

Πράγματι, η ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων $0 \rightarrow Y' \rightarrow \text{Cone}(a) \rightarrow \Sigma Y \rightarrow 0$ είναι διασπώμενη, κατά βαθμό. Οι συναρτητές $X \otimes_R -$, $X \overline{\otimes}_R -$ και $X \widetilde{\otimes}_R -$ διατηρούν διασπώμενες, κατά βαθμό, βραχείες ακριβείς ακολουθίες συμπλεγμάτων. Ισχύει, επίσης, ότι $X \otimes_R \Sigma Y = \Sigma(X \otimes_R Y)$, $X \overline{\otimes}_R \Sigma Y = \Sigma(X \overline{\otimes}_R Y)$ και $X \widetilde{\otimes}_R \Sigma Y = \Sigma(X \widetilde{\otimes}_R Y)$.

Επομένως, τα αντικείμενα $X \otimes_R \text{Cone}(a)$, $X \overline{\otimes}_R \text{Cone}(a)$ και $X \widetilde{\otimes}_R \text{Cone}(a)$ είναι οι κώνοι των $X \otimes_R a$, $X \overline{\otimes}_R a$ και $X \widetilde{\otimes}_R a$, αντίστοιχα.

Το ακόλουθο λήμμα και το επόμενο πόρισμα αυτού είναι αποτελέσματα των *Olgur Celikbas, Lars Winther Christensen, Li Liang* και *Greg Piermeyer*. Το πόρισμα θα χρησιμοποιηθεί κατά τις αναφορές αποτελεσμάτων τους.

Λήμμα 6.1.3 Έστω $D = (D_{i,j})$ ένα διπλό σύμπλεγμα αβελιανών ομάδων. Έστω z ένας κύκλος στο δεύτερο ολικό σύμπλεγμα αυτού με τμήμα $z_{m,n}$ τέτοιο ώστε $z_{m,n} = \vartheta^h(x') + \vartheta^v(x'')$, με $x' \in D_{m+1,n}$

και $x'' \in D_{m,n+1}$. Αν $H_{m+k}^h(D_{*,n-k}) = 0$ για κάθε $k > 0$ και $H_{n+k}^v(D_{m-k,*}) = 0$ για κάθε $k > 0$ τότε το z είναι σύνορο στο δεύτερο ολικό σύμπλεγμα.

Απόδειξη.

$$\begin{array}{ccccc}
 & z_{m-1,n+1} & & x'' & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & \longleftarrow & z_{m,n} & \longleftarrow x' \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & 0 & \longleftarrow z_{m+1,n-1}
 \end{array}$$

Αποδεικνύουμε την ύπαρξη μίας ακολουθίας στοιχείων $(x_{i,j})$ με $x' = x_{m+1,n}$ και $x'' = x_{m,n+1}$ ώστε $z_{m+k,n-k} = \vartheta^h(x_{m+k+1,n-k}) + \vartheta^v(x_{m+k,n-k+1})$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έχουμε

$$\vartheta^v(z_{m,n}) + \vartheta^h(z_{m+1,n-1}) = 0 \Leftrightarrow \vartheta^v(\vartheta^h(x') + \vartheta^v(x'')) + \vartheta^h(z_{m+1,n-1}) = 0 \Leftrightarrow -\vartheta^h\vartheta^v(x') + \vartheta^h(z_{m+1,n-1}) = 0 \Leftrightarrow \vartheta^h(z_{m+1,n-1} - \vartheta^v(x')) = 0.$$

Καθώς $H_{m+1}^h(D_{*,n-1}) = 0$ έπεται ότι υπάρχει στοιχείο $x := x_{m+2,n-1} \in D_{m+2,n-1}$ ώστε $\vartheta^h(x) = z_{m+1,n-1} - \vartheta^v(x')$, δηλαδή $z_{m+1,n-1} = \vartheta^h(x) + \vartheta^v(x')$. Ομοίως προκύπτουν στοιχεία $x_{m+k,n-k+1} \in D_{m+k,n-k+1}$ για $k > 2$ που εξυπηρετούν. Ακόμα,

$$\vartheta^h(z_{m,n}) + \vartheta^v(z_{m-1,n+1}) = 0 \Leftrightarrow \vartheta^h(\vartheta^h(x') + \vartheta^v(x'')) + \vartheta^v(z_{m-1,n+1}) = 0 \Leftrightarrow -\vartheta^v\vartheta^h(x'') + \vartheta^v(z_{m-1,n+1}) = 0 \Leftrightarrow \vartheta^v(z_{m-1,n+1} - \vartheta^h(x'')) = 0.$$

Καθώς $H_{n+1}^v(D_{m-1,*}) = 0$ έπεται ότι υπάρχει στοιχείο $y := x_{m-1,n+2} \in D_{m-1,n+2}$ ώστε $\vartheta^v(y) = z_{m-1,n+1} - \vartheta^h(x'')$, δηλαδή $z_{m-1,n+1} = \vartheta^v(y) + \vartheta^h(x'')$. Ομοίως προκύπτουν στοιχεία $x_{m-k+1,n+k} \in D_{m-k+1,n+k}$ για $k > 2$ που εξυπηρετούν. □

Η ακόλουθη πρόταση είναι πόρισμα του προηγούμενου λήμματος.

Πρόταση 6.1.4 Έστω X ένα R^{opp} -σύμπλεγμα και Y και ένα R -σύμπλεγμα.

1. Αν το X είναι άνω φραγμένο και $X_i \otimes_R Y$ είναι ακυκλικό για κάθε δείκτη i τότε $X \otimes_R Y$ είναι ακυκλικό.
2. Αν το Y είναι κάτω φραγμένο και $X_i \otimes_R Y$ είναι ακυκλικό για κάθε δείκτη i τότε $X \otimes_R Y$ είναι ακυκλικό.

Απόδειξη.

1. Έστω m ένα άνω φράγμα του X . Έστω $z = (z_{m+k,n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$ ένας κύκλος στο $X \otimes_R Y$ διάστασης $m+n$ με n τυχαίος ακέραιος. Τότε, $z_{m+k,n-k} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Καθώς $X_m \otimes_R Y$ είναι ακυκλικό έχουμε $z_{m,n} = \vartheta^h(0) + \vartheta^v(x'')$ για κάποιο $x'' \in D_{m,n+1}$. Η συνθήκη $H_{n+k}^v(D_{m-k,*}) = 0$ για κάθε $k > 0$ του προηγούμενου λήμματος ικανοποιείται καθώς $X_i \otimes_R Y$ είναι ακυκλικό για κάθε δείκτη i . Η συνθήκη $H_{m+k}^h(D_{*,n-k}) = 0$ για κάθε $k > 0$ του προηγούμενου λήμματος ικανοποιείται καθώς το X είναι άνω φραγμένο. Επομένως, ο κύκλος z είναι σύνορο και το $X \otimes_R Y$ είναι ακυκλικό.

2. Έστω n ένα κάτω φράγμα του Y . Έστω $z = (z_{m+k, n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$ ένας κύκλος στο $X \otimes_R \overline{Y}$ διάστασης $m+n$ με m τυχαίος ακέραιος. Τότε, $z_{m+k, n-k} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Καθώς $X_m \otimes_R Y$ είναι ακυκλικό έχουμε $z_{m, n} = \vartheta^h(0) + \vartheta^v(x'')$ για κάποιο $x'' \in D_{m, n+1}$. Η συνθήκη $H_{n+k}^v(D_{m-k, *}) = 0$ για κάθε $k > 0$ του προηγούμενου λήμματος ικανοποιείται καθώς $X_i \otimes_R Y$ είναι ακυκλικό για κάθε δείκτη i . Η συνθήκη $H_{m+k}^h(D_{*, n-k}) = 0$ για κάθε $k > 0$ του προηγούμενου λήμματος ικανοποιείται καθώς το Y είναι κάτω φραγμένο. Επομένως, ο κύκλος z είναι σύνορο και το $X \otimes_R \overline{Y}$ είναι ακυκλικό.

□

6.2 Η ευσταθής ομολογία κατά Vogel.

Ορισμοί 6.2.1 Θεωρούμε ένα R^{opp} -πρότυπο M και ένα R -πρότυπο N . Θεωρούμε, επίσης, μία προβολική επίλυση $\mathbb{P} \rightarrow M$ του προτύπου M καθώς και μία εμφυτευτική επίλυση $N \rightarrow \mathbb{I}$ του προτύπου N . Θεωρούμε τώρα τα συμπλέγματα \mathbb{P}_* και \mathbb{I}^* με μη μηδενική ομολογία στη θέση 0. Ορίζουμε

$$Tor_*^R(M, N) = H_*(\mathbb{P}_* \otimes_R \mathbb{I}^*), \quad \overline{Tor}_*^R(M, N) = H_*(\mathbb{P}_* \otimes_R \overline{\mathbb{I}^*}) \quad \text{και} \quad \widetilde{Tor}_*^R(M, N) = H_{*+1}(\mathbb{P}_* \otimes_R \widetilde{\mathbb{I}^*}).$$

Η πρώτη ομολογία καλείται απόλυτη και είναι η γνωστή ομολογία. Η δεύτερη καλείται απεριόριστη και η τρίτη καλείται ευσταθής.

Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι η ομολογία $H_*(\mathbb{P}_* \otimes_R \mathbb{I}^*)$ είναι όντως η γνωστή. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 5.0.5.

Πρόταση 6.2.2 Έστω M ένα R^{opp} -πρότυπο και έστω N ένα R -πρότυπο. Θεωρούμε, επίσης, μία προβολική επίλυση $\mathbb{P} \rightarrow M$ του προτύπου M καθώς και μία εμφυτευτική επίλυση $N \rightarrow \mathbb{I}$ του προτύπου N . Τότε $H_*(\mathbb{P}_* \otimes_R N) = H_*(\mathbb{P}_* \otimes_R \mathbb{I}^*)$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε το δυϊκό Pontryagin D . Εφαρμοζόμενος στην προβολική επίλυση του M προκύπτει μία εμφυτευτική επίλυση του R -προτύπου DM , $DM \rightarrow D\mathbb{P}$. Το σύμπλεγμα $D\mathbb{P}_*$ είναι κάτω φραγμένο συναλυσσώτο εμφυτευτικών προτύπων. Θεωρούμε το σχεδόν ισομορφισμό $\lambda : N \rightarrow \mathbb{I}^*$ και τον ακυκλικό κώνο $\mathbb{C}^* = Cone(\lambda)$. Τότε $Hom_R(\mathbb{C}^*, D\mathbb{P}_*)$ είναι ακυκλικό, ενώ από το γνωστό συζυγές ζεύγος είναι ισόμορφο με το $D(\mathbb{P}_* \otimes_R \mathbb{C}^*)$. Αφού αυτό είναι ακυκλικό, έπεται ότι ομοίως είναι και το σύμπλεγμα $\mathbb{P}_* \otimes_R \mathbb{C}^* = \mathbb{P}_* \otimes_R Cone(\lambda) = Cone(\mathbb{P}_* \otimes_R \lambda)$. Άρα, η $\mathbb{P}_* \otimes_R \lambda$ είναι σχεδόν ισομορφισμός.

□

Παρατηρήσεις 6.2.3 1. Καθώς οι συναρτητές $X \otimes_R -$, $X \otimes_R \overline{-}$ και $X \otimes_R \widetilde{-}$ διατηρούν ομοτοπίες, με X σύμπλεγμα, έπεται ότι οι ορισμοί των προηγούμενων ομολογιών είναι ανεξάρτητοι των επιλύσεων, είτε των προβολικών είτε των εμφυτευτικών.

2. Αν $pd_M R < \infty$ ή $id_R N < \infty$ τότε $\widetilde{Tor}_*^R(M, N) = 0$ αφού το ευσταθές τανυστικό γινόμενο των αντίστοιχων συμπλεγμάτων είναι το μηδενικό.

3. Οι δισυναρτητές $Tor_*^R(-, -)$, $\overline{Tor}_*^R(-, -)$ και $\widetilde{Tor}_*^R(-, -)$ είναι ομολογικοί και στις δύο μεταβλητές. Για τους δύο πρώτους δισυναρτητές έχουμε ότι, ως προς την πρώτη μεταβλητή, για μία βραχεία ακριβή ακολουθία προτύπων, μπορούμε να θεωρήσουμε προβολική επίλυση για το μεσαίο πρότυπο το ευθύ άθροισμα των προβολικών επιλύσεων των ακραίων προτύπων, ενώ ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, αρκεί ότι τα προβολικά είναι επίπεδα πρότυπα. Αποφαινόμαστε την ιδιότητα για τον τρίτο με κνήγη διαγράμματος στο 3×3 μεταθετικό διάγραμμα που προκύπτει με σειρές που αφορούν στη βραχεία ακριβή ακολουθία των προτύπων και στήλες που αφορούν στον ορισμό του ευσταθούς τανυστικού γινομένου συμπλεγμάτων. Η ομολογική ιδιότητα των συναρτητών προκύπτει θεωρώντας τις μακρές ακριβείς ακολουθίες στις ομάδες ομολογίας για τις προκύπτουσες βραχείες ακριβείς ακολουθίες των φραγμένων, των απεριόριστων και των ευσταθών τανυστικών γινομένων των συμπλεγμάτων, αντίστοιχα.

4. Η κατά βαθμό βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων $0 \rightarrow X \otimes_R Y \rightarrow X \overline{\otimes}_R Y \rightarrow X \widetilde{\otimes}_R Y \rightarrow 0$, όπου $X = \mathbb{P}_*$ και $Y = \mathbb{I}^*$ με $\mathbb{P} \rightarrow M$ να είναι μία προβολική επίλυση ενός προτύπου M και $N \rightarrow \mathbb{I}$ μία εμφυτευτική επίλυση ενός προτύπου N , οδηγεί στη μακρά ακριβή ακολουθία

$$\dots \rightarrow \widetilde{Tor}_i^R(M, N) \xrightarrow{\delta} Tor_i^R(M, N) \rightarrow \overline{Tor}_i^R(M, N) \rightarrow \widetilde{Tor}_{i-1}^R(M, N) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Για τον υπολογισμό της ευσταθούς ομολογίας, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την προβολική επίλυση του προτύπου M με μία επίπεδη αυτού. Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα των *Olgur Celikbas, Lars Winther Christensen, Li Liang* και *Greg Piepmeyer*. Δίνουμε ακολούθως μία ελαφρώς αλλαγμένη απόδειξη αυτού.

Η ακόλουθη πρόταση δηλώνει ότι, όπως στην απόλυτη ομολογία, η απεριόριστη και η ευσταθής ομολογία μπορούν να υπολογιστούν μέσω επίπεδων επιλύσεων αντί μέσω προβολικών.

Πρόταση 6.2.4 Έστω M ένα R^{opp} -πρότυπο και έστω N ένα R -πρότυπο. Θεωρούμε, επίσης, μία επίπεδη επίλυση $\mathbb{F} \rightarrow M$ του προτύπου M καθώς και μία εμφυτευτική επίλυση $N \rightarrow \mathbb{I}$ του προτύπου N . Τότε $\overline{Tor}_i^R(M, N) \simeq H_i(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^*)$ και $\widetilde{Tor}_i^R(M, N) \simeq H_{i+1}(\mathbb{F}_* \widetilde{\otimes}_R \mathbb{I}^*)$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ και οι ισομορφισμοί είναι φυσικοί σε κάθε μεταβλητή.

Απόδειξη.

Θεωρούμε μία προβολική επίλυση του προτύπου M , $\mathbb{P} \rightarrow M$, καθώς και την αλυσωτή απεικόνιση που επάγει η ταυτοτική, $\mathbf{1}_M$, ανάμεσα σε αυτήν και την επίπεδη, $\mathbb{F} \rightarrow M$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \longrightarrow & M \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \mathbf{1}_M \\ \mathbb{F} & \longrightarrow & M \end{array}$$

Έστω $\mathbb{C}_* = Cone(\lambda)$ ο ακυκλικός κώνος ο οποίος είναι ένα κάτω φραγμένο αλυσωτό σύμπλεγμα. Εφαρμόζουμε το δυϊκό *Pontryagin* σε αυτόν και προκύπτει ένα κάτω φραγμένο ακυκλικό συναλυσωτό σύμπλεγμα από εμφυτευτικά πρότυπα, $D\mathbb{C}_*$. Συνεπώς, το τελευταίο είναι συσταλτό. Τότε, για κάθε σύμπλεγμα \mathbb{X}^* , το σύμπλεγμα $Hom_R(\mathbb{X}^*, D\mathbb{C}_*)$ είναι συσταλτό και άρα ακυκλικό. Από το γνωστό συζυγές ζεύγος αυτό είναι ισόμορφο με το $D(\mathbb{C}_* \otimes_R \mathbb{X}^*)$. Έπεται ότι το σύμπλεγμα $\mathbb{C}_* \otimes_R \mathbb{X}^* = Cone(\lambda) \otimes_R \mathbb{X}^*$ είναι ακυκλικό για κάθε σύμπλεγμα \mathbb{X}^* . Επομένως, το σύμπλεγμα $Cone(\lambda) \otimes_R \mathbb{I}^*$ είναι ακυκλικό. Ακόμα,

το σύμπλεγμα $Cone(\lambda) \otimes_R E = E \otimes_{R^o} Cone(\lambda)$ είναι ακυκλικό για κάθε E εμφυτευτικό πρότυπο, θεωρούμενο ως σύμπλεγμα συγκεντρωμένο στη διάσταση 0. Καθώς ο κώνος $Cone(\lambda)$ είναι κάτω φραγμένο σύμπλεγμα, έχουμε από το δεύτερο σκέλος της πρότασης 6.1.4, ότι το σύμπλεγμα $Cone(\lambda) \otimes_R \mathbb{I}^*$ είναι επίσης ακυκλικό. Συνεπάγεται ότι και το σύμπλεγμα $Cone(\lambda) \widetilde{\otimes}_R \mathbb{I}^*$ είναι ακυκλικό λόγω της βραχείας ακριβούς ακολουθίας, κατά βαθμό, συμπλεγμάτων που ορίζει το ευσταθές τανυστικό γινόμενο συμπλεγμάτων και της μακράς ακριβούς ακολουθίας στις ομάδες ομολογίας αυτών. Έτσι, οι μορφισμοί $\lambda \otimes_R \mathbb{I}^*$ και $\lambda \widetilde{\otimes}_R \mathbb{I}^*$ των οποίων οι κώνοι είναι τα ακυκλικά συμπλέγματα $Cone(\lambda) \otimes_R \mathbb{I}^*$ και $Cone(\lambda) \widetilde{\otimes}_R \mathbb{I}^*$, αντίστοιχα, είναι σχεδόν ισομορφισμοί. Άρα, $\overline{Tor}_i^R(M, N) \simeq H_i(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^*)$ και $\widetilde{Tor}_i^R(M, N) \simeq H_{i+1}(\mathbb{F}_* \widetilde{\otimes}_R \mathbb{I}^*)$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ και οι ισομορφισμοί αυτοί αποδεικνύεται εύλογα ότι είναι φυσικοί σε κάθε μεταβλητή λόγω της φυσικότητας που έχουμε από τον ορισμό των συναρτητών αυτών. \square

Πόρισμα 6.2.5 Αν M είναι ένα R^{opp} -πρότυπο με πεπερασμένη επίπεδη διάσταση τότε $\widetilde{Tor}_i^R(M, -) = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$.

6.3 Η επέκταση του συνδεδειμένου ομομορφισμού από την ευσταθή στην πλήρη ομολογία.

Έστω R ένας δακτύλιος και έστω M_R και ${}_R N$ δύο πρότυπα.

Ο συνδεδειμένος ομομορφισμός δ στη μακρά ακριβή ακολουθία

$$\dots \longrightarrow \widetilde{Tor}_i^R(M, N) \xrightarrow{\delta} Tor_i^R(M, N) \longrightarrow \overline{Tor}_i^R(M, N) \longrightarrow \widetilde{Tor}_{i-1}^R(M, N) \xrightarrow{\delta} \dots$$

επεκτείνεται, από την κατασκευή *Triulzi*, σε μορφισμό Δ ,

$$\widetilde{Tor}_*^R(M, N) \xrightarrow{\Delta} \widehat{Tor}_*^R(M, N).$$

Παραπέμπουμε στα [49] και [10].

Μία διαγραμματική εποπτεία της επέκτασης είναι το ακόλουθο διάγραμμα που προσφέρει μελέτη μικροσκοπικού χαρακτήρα. Πράγματι, μία μετατροπή μέσω αλλαγής προσήμων στο διαφορικό του ευσταθούς συμπλέγματος και διατηρώντας πρόσημα στην πλήρη ομολογία που συνάδουν με τη συνολογία του *Ext* κατά τον ορισμό μέσω φυσικών μετασχηματισμών *Yoneda* επιτυγχάνεται μία ρητή απεικόνιση που προσφέρει ιδανική εποπτεία της απεικόνισης και της περιγραφής ενός στοιχείου. Εύκολα αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση είναι επιμορφισμός και φυσική, και επιπλέον μπορούμε να υπολογίσουμε το μηδενισμό του πυρήνα αυτής κάτω από κατάλληλες συνθήκες, που εμφανίζονται στη συνέχεια της συγγραφής. Οι πυρήνες των τετραγώνων με κορυφές δείκτες της ευσταθούς ομολογίας είναι ακριβώς οι δορυφόροι που συνθέτουν την πλήρη ομολογία.

$$\begin{array}{c}
0 \longrightarrow \text{Tor}_n^R(A, B) \xrightarrow{\mu} R_n \otimes_R B \xrightarrow{i_n \otimes 1} P_{n-1} \otimes_R B \\
\swarrow p_n \otimes 1 \quad \searrow 1 \\
P_n \otimes_R B \xrightarrow{\theta_n \otimes 1} P_{n-1} \otimes_R B \\
\downarrow 1 \otimes \mu_0 \quad \downarrow 1 \otimes \mu_0 \\
P_{n+1} \otimes_R I_0 \xrightarrow{\theta_{n+1} \otimes 1} P_n \otimes_R I_0 \xrightarrow{\theta_n \otimes 1} P_{n-1} \otimes_R I_0 \\
\downarrow 1 \otimes \pi_1 \quad \downarrow 1 \otimes \pi_1 \\
P_{n+1} \otimes_R \Sigma B \xrightarrow{\theta_{n+1} \otimes 1} P_n \otimes_R \Sigma B \\
\swarrow p_{n+1} \otimes 1 \quad \searrow 1 \\
0 \longrightarrow \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B) \xrightarrow{\mu} R_{n+1} \otimes_R \Sigma B \xrightarrow{i_{n+1} \otimes 1} P_n \otimes_R \Sigma B \\
\swarrow p_{n+1} \otimes 1 \quad \searrow 1 \\
P_{n+1} \otimes_R \Sigma B \xrightarrow{\theta_{n+1} \otimes 1} P_n \otimes_R \Sigma B \\
\downarrow 1 \otimes \mu_1 \quad \downarrow 1 \otimes \mu_1 \\
P_{n+2} \otimes_R I_1 \xrightarrow{\theta_{n+2} \otimes 1} P_{n+1} \otimes_R I_1 \xrightarrow{\theta_{n+1} \otimes 1} P_n \otimes_R I_1 \\
\downarrow 1 \otimes \pi_2 \quad \downarrow 1 \otimes \pi_2 \\
P_{n+2} \otimes_R \Sigma^2 B \xrightarrow{\theta_{n+2} \otimes 1} P_{n+1} \otimes_R \Sigma^2 B \\
\swarrow p_{n+2} \otimes 1 \quad \searrow 1 \\
0 \longrightarrow \text{Tor}_{n+2}^R(A, \Sigma^2 B) \xrightarrow{\mu} R_{n+2} \otimes_R \Sigma^2 B \xrightarrow{i_{n+2} \otimes 1} P_{n+1} \otimes_R \Sigma^2 B \\
\swarrow p_{n+2} \otimes 1 \quad \searrow 1 \\
P_{n+2} \otimes_R \Sigma^2 B \\
\downarrow 1 \otimes \mu_2 \\
P_{n+3} \otimes_R I_2 \xrightarrow{\theta_{n+3} \otimes 1} P_{n+2} \otimes_R I_2 \\
\downarrow 1 \otimes \pi_3 \quad \downarrow 1 \otimes \pi_3 \\
P_{n+3} \otimes_R \Sigma^3 B \xrightarrow{\theta_{n+3} \otimes 1} P_{n+2} \otimes_R \Sigma^3 B \\
\swarrow p_{n+3} \otimes 1 \quad \searrow 1 \\
0 \longrightarrow \text{Tor}_{n+3}^R(A, \Sigma^3 B) \xrightarrow{\mu} R_{n+3} \otimes_R \Sigma^3 B
\end{array}$$

7 Η σχέση της ευσταθούς ομολογίας με την πλήρη ομολογία.

7.1 Εναλλακτική περιγραφή της κατασκευής *Triulzi*.

Παρουσιάζουμε μία άλλη περιγραφή της κατασκευής *Triulzi*, ως φυσικά ισοδύναμη με τη συνδεδεμένη οικογένεια συναρτητών που χρησιμοποιούμε ακολούθως. Θεωρούμε ένα R^{opp} -πρότυπο M και ένα R -πρότυπο N . Θεωρούμε, επίσης, μία επίπεδη επίλυση $\mathbb{F} \rightarrow M$ του προτύπου M καθώς και μία εμφυτευτική επίλυση $N \rightarrow \mathbb{I}$ του προτύπου N . Θεωρούμε ακόμα για κάθε μη αρνητικό ακέραιο i τη σχέση των συμπλεγμάτων $\mathbb{I}^{\geq i+1} \subseteq \mathbb{I}^{\geq i}$. Τότε, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο i , το σύμπλεγμα $\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i+1}$ είναι υποσύμπλεγμα του $\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}$.

Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο i , θεωρούμε την εμφύτευση $\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i+1} \xrightarrow{\gamma^i} \mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}$ που επάγει για κάθε ακέραιο n την προσθετική απεικόνιση αβελιανών ομάδων $H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i+1}) \xrightarrow{\gamma_n^i} H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i})$.

Πρόταση 7.1.1 *Με τους προαναφερθέντες συμβολισμούς ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε ακέραιο n και κάθε μη αρνητικό ακέραιο i .*

1. Ο σχεδόν ισομορφισμός $\Sigma^i N[i] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{I}^{\geq i}$ επάγει ισομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\mathrm{Tor}_{n+i}^R(M, \Sigma^i N) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}).$$

2. Οι προηγούμενοι ισομορφισμοί ορίζουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_{n+i+1}^R(M, \Sigma^{i+1} N) & \xrightarrow{\cong} & H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i+1}) \\ \downarrow \delta_n^i & & \downarrow \gamma_n^i \\ \mathrm{Tor}_{n+i}^R(M, \Sigma^i N) & \xrightarrow{\cong} & H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}) \end{array}$$

3. Έχουμε φυσικό ισομορφισμό $\widehat{\mathrm{Tor}}_n^R(M, N) \simeq \varprojlim_i H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i})$.

Απόδειξη.

Εφαρμόζουμε το δυϊκό συναρτητή *Pontryagin*, $D- = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, στην επίπεδη επίλυση του προτύπου M , $\mathbb{F} \rightarrow M$, και προκύπτει, λόγω του γνωστού συζυγούς ζεύγους, μία εμφυτευτική επίλυση του προτύπου DM , $DM \rightarrow D\mathbb{F}$.

1. Ο σχεδόν ισομορφισμός $\Sigma^i N[i] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{I}^{\geq i}$ επάγει, από το πρώτο σκέλος της πρότασης 5.0.6, ισομορφισμό αβελιανών ομάδων $H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i}, D\mathbb{F}_*)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}_R^{n+i}(\Sigma^i N, DM)$. Ισχύει επίσης ότι

$Ext_R^n(N, DM) \simeq D\text{Tor}_n^R(M, N)$ για κάθε δείκτη n . Πράγματι, για $n = 0$ η σχέση αποτελεί το γνωστό συζυγές ζεύγος. Για $n = 1$ θεωρούμε την ακόλουθη προβολική παράσταση, την ακριβή ακολουθία του ορισμού του Tor_1^R , καθώς επίσης και το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές. Η ιδιότητα του συμπυρήνα και το 5-λήμμα οδηγεί στο ζητούμενο. Για τις υπόλοιπες διαστάσεις χρησιμοποιούμε *dimension shifting*.

$$0 \rightarrow R_1 \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^R(M, N) \rightarrow M \otimes_R R_1 \rightarrow M \otimes_R P \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D(M \otimes_R N) & \longrightarrow & D(M \otimes_R P) & \longrightarrow & D(M \otimes_R R_1) \longrightarrow D\text{Tor}_1^R(M, N) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(N, DM) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(P, DM) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R_1, DM) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(N, DM) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Θεωρούμε, λοιπόν, το σχεδόν ισομορφισμό $\Sigma^i N[i] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{I}^{\geq i}$, και προκύπτει η αλυσωτή απεικόνιση $\mathbb{F}_* \otimes_R \alpha : \mathbb{F}_* \otimes_R \Sigma^i N[i] \rightarrow \mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}$. Θεωρούμε, για κάθε ακέραιο n , τις προσθετικές απεικονίσεις $H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \alpha) : H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \Sigma^i N[i]) \rightarrow H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i})$, ενώ ισχύει $H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \Sigma^i N[i]) = \text{Tor}_n^R(M, \Sigma^i N[i]) = \text{Tor}_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$ καθώς η *suspension* που εμφανίζεται ορίστηκε σε συναλυσωτό σύμπλεγμα. Εφαρμόζουμε το δυϊκό συναρτητή *Pontryagin* στην $H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \alpha)$ και έχουμε την προσθετική απεικόνιση $DH_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \alpha) : DH_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}) \rightarrow D\text{Tor}_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$, δηλαδή $H^n D(\mathbb{F}_* \otimes_R \alpha) : H^n D(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}) \rightarrow D\text{Tor}_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$, καθώς ο ακριβής συναρτητής D μετατίθεται με την ομολογία, δηλαδή προκύπτει η απεικόνιση $H^n(\text{Hom}_R(\alpha, D\mathbb{F}_*)) : H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i}, D\mathbb{F}_*)) \rightarrow \text{Ext}_R^{n+i}(\Sigma^i N, DM)$ που είναι ο προαναφερθείς ισομορφισμός. Καθώς η αβελιανή ομάδα \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι *faithfully injective*, έχουμε ότι η απεικόνιση $H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \alpha)$ είναι ισομορφισμός. Επομένως, ο σχεδόν ισομορφισμός $\Sigma^i N[i] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{I}^{\geq i}$ επάγει ισομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$\text{Tor}_{n+i}^R(M, \Sigma^i N) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}).$$

2. Θεωρούμε το διάγραμμα της υπόθεσης και εφαρμόζουμε σε αυτό το δυϊκό συναρτητή *Pontryagin*.

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_R^{n+i+1}(\Sigma^{i+1} N, DM) & \xleftarrow{\cong} & H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i+1}, D\mathbb{F}_*)) \\ D\delta_n^i \uparrow & & D\gamma_n^i \uparrow \\ \text{Ext}_R^{n+i}(\Sigma^i N, DM) & \xleftarrow{\cong} & H^n(\text{Hom}_R(\mathbb{I}^{\geq i}, D\mathbb{F}_*)) \end{array}$$

Ισχύουν ότι $D\delta_n^i = d_n^i$ και $D\gamma_n^i = c_n^i$ και η μεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος έχει αποδειχθεί στο δεύτερο σκέλος της πρότασης 5.0.6. Καθώς η αβελιανή ομάδα \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι *faithfully injective* έπεται η μεταθετικότητα του περί ου ο λόγος διαγράμματος.

3. Έχουμε $\widehat{Tor}_n^R(M, N) \simeq \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$. Ταυτίζοντας το αντίστροφο σύστημα

$(Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N), \delta_n^i = \delta^H)_i$ με το αντίστροφο σύστημα $(H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}), \gamma_n^i)_i$ προκύπτει, λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος του δεύτερου σκέλους της πρότασης, ο φυσικός ισομορφισμός των αντίστοιχων αντίστροφων ορίων,

$$\widehat{Tor}_n^R(M, N) \simeq \lim_{\leftarrow i} H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}).$$

□

7.2 Φιλτράρισμα Hausdorff.

Θεωρούμε ένα αντίστροφο σύστημα αλυσωτών συμπλεγμάτων αβελιανών ομάδων $(X^i)_i$ και συμβολίζουμε με $\tau^i : X^i \rightarrow X^{i-1}$, για κάθε $i > 0$, τις αλυσωτές απεικονίσεις που το συνιστούν, όπως φαίνεται στο παρακάτω μεταθετικό πλέγμα.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots & & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \dots & \longrightarrow & X_1^{i+1} & \longrightarrow & X_0^{i+1} & \longrightarrow & X_{-1}^{i+1} & \longrightarrow & \dots & & \\ & & \downarrow \tau_1^{i+1} & & \downarrow \tau_0^{i+1} & & \downarrow \tau_{-1}^{i+1} & & & & \\ \dots & \longrightarrow & X_1^i & \longrightarrow & X_0^i & \longrightarrow & X_{-1}^i & \longrightarrow & \dots & & \\ & & \downarrow \tau_1^i & & \downarrow \tau_0^i & & \downarrow \tau_{-1}^i & & & & \\ \dots & \longrightarrow & X_1^{i-1} & \longrightarrow & X_0^{i-1} & \longrightarrow & X_{-1}^{i-1} & \longrightarrow & \dots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \dots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots & & \dots \end{array}$$

Θεωρούμε την αλυσωτή απεικόνιση $\mathbf{1} - T : \prod_i X^i \rightarrow \prod_i X^i$ η οποία σε κάθε βαθμό n είναι η ακόλουθη προσθετική απεικόνιση.

$$(\mathbf{1} - T)_n : \prod_i X_n^i \rightarrow \prod_i X_n^i : (x_n^i)_i \mapsto (x_n^i - \tau_n^{i+1}(x_n^{i+1}))_i$$

Ορίζουμε τα συμπλέγματα $\lim_{\leftarrow i} X^i := \text{Ker}(\mathbf{1} - T)$ και $\lim_{\leftarrow i}^1 X^i := \text{Coker}(\mathbf{1} - T)$, όπως φαίνεται στην επόμενη ακριβή ακολουθία.

$$0 \longrightarrow \lim_{\leftarrow i} X^i \longrightarrow \prod_i X^i \xrightarrow{\mathbf{1} - T} \prod_i X^i \longrightarrow \lim_{\leftarrow i}^1 X^i \longrightarrow 0$$

Μας ενδιαφέρει η περίπτωση που το σύμπλεγμα $\lim_{\leftarrow i} X^i$ είναι το μηδενικό, δηλαδή όταν σε κάθε βαθμό n το σύμπλεγμα $(\lim_{\leftarrow i} X^i)_n$ είναι το μηδενικό, δηλαδή όταν έχουμε $\lim_{\leftarrow i} X_n^i = 0$ για κάθε δείκτη n . Τότε, η βραχεία ακριβής ακολουθία συμπλεγμάτων $0 \rightarrow \prod_i X^i \xrightarrow{1-T} \prod_i X^i \rightarrow \lim_{\leftarrow i} X^i \rightarrow 0$ επάγει την ακόλουθη μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_{n+1}(\lim_{\leftarrow i} X^i) & \rightarrow & H_n(\prod_i X^i) & \xrightarrow{H_n(1-T)} & H_n(\prod_i X^i) \rightarrow H_n(\lim_{\leftarrow i} X^i) \rightarrow \dots \\ & & \searrow \pi & \nearrow \mu & & & \searrow \pi & \nearrow \mu \\ & & \text{Ker } H_n(\mathbf{1} - T) & & & & \text{Coker } H_n(\mathbf{1} - T) & \end{array}$$

Όμως, η ομολογία μετατίθεται με ακριβείς συναρτητές, και η προσθετική απεικόνιση $H_n(\mathbf{1} - T)$ είναι ακριβώς η απεικόνιση $\mathbf{1} - H_n(T)$, για κάθε δείκτη n . Εν όψει του αντίστροφου συστήματος αβελιανών ομάδων $(H_n(X^i), H_n(\tau^i))_i$, για κάθε δείκτη n , και ταυτίζοντας το αντίστροφο όριο και τον πρώτο επαγόμενο συναρτητή αυτού με τον πυρήνα και τον συμπυρήνα της $\mathbf{1} - H_n(T) : \prod_i H_n(X^i) \rightarrow \prod_i H_n(X^i)$, αντίστοιχα, προκύπτει, για κάθε δείκτη n , η ακόλουθη βραχεία ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων.

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow i} H_{n+1}(X^i) \rightarrow H_{n+1}(\lim_{\leftarrow i} X^i) \rightarrow \lim_{\leftarrow i} H_n(X^i) \rightarrow 0$$

Για παράδειγμα, συμπλέγματα X που επιδέχονται φιλτράρισμα *Hausdorff* έχουν $\lim_{\leftarrow i} X^i = 0$, όπως φαίνεται στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 7.2.1 Ένα φιλτράρισμα *Hausdorff* ενός συμπλέγματος X είναι μία φθίνουσα ακολουθία υποσυμπλεγμάτων $X = X^0 \supseteq X^1 \supseteq X^2 \supseteq \dots \supseteq X^i \supseteq \dots$, τέτοια ώστε $\bigcap_i X^i = 0$, δηλαδή $\bigcap_i X_n^i = 0$ για κάθε δείκτη n .

Έστω ένα φιλτράρισμα *Hausdorff* ενός συμπλέγματος X . Θεωρούμε το αντίστροφο σύστημα συμπλεγμάτων $(X^i)_i$ με $\tau^i : X^i \hookrightarrow X^{i-1}$, για κάθε $i > 0$, οι αλυσωτές απεικονίσεις που το συνιστούν, να είναι οι εμφυτεύσεις. Τότε, $\lim_{\leftarrow i} X^i = \bigcap_i X^i = 0$. Θεωρούμε τώρα το αντίστροφο σύστημα των πηλίκων συμπλεγμάτων, όπως φαίνεται ακολούθως.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X^{i+1} & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\pi^{i+1}} & X/X^{i+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tau^{i+1} & & \downarrow \mathbf{1} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X^i & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\pi^i} & X/X^i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tau^i & & \downarrow \mathbf{1} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X^{i-1} & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\pi^{i-1}} & X/X^{i-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Δηλαδή, για κάθε ακέραιο n , έχουμε το ακόλουθο αντίστροφο σύστημα βραχείων ακριβών ακολουθιών προτύπων.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_n^{i+1} & \longrightarrow & X_n & \xrightarrow{\pi_n^{i+1}} & X_n/X_n^{i+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \tau_n^{i+1} & & \downarrow \mathbf{1}_n & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_n^i & \longrightarrow & X_n & \xrightarrow{\pi_n^i} & X_n/X_n^i \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \tau_n^i & & \downarrow \mathbf{1}_n & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X_n^{i-1} & \longrightarrow & X_n & \xrightarrow{\pi_n^{i-1}} & X_n/X_n^{i-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Η ακολουθία $X_n = X_n^0 \supseteq X_n^1 \supseteq X_n^2 \supseteq \dots \supseteq X_n^i \supseteq \dots$ είναι φιλτράρισμα *Hausdorff* του προτύπου X_n με $\bigcap_i X_n^i = 0$.

Έχουμε $\lim_{\leftarrow i}^1 X_n = 0$, καθώς το σύστημα X_n είναι σταθερό. Πράγματι, γενικότερα, αν ένα αντίστροφο σύστημα $Y = (Y^j)_{j \in \mathbb{N}}$ είναι επιμορφικό, αποδεικνύεται ότι $\lim_{\leftarrow j}^1 Y^j = 0$. Θα δείξουμε ότι η

απεικόνιση $\mathbf{1} - T$, με T οι απεικονίσεις που το συνθέτουν, είναι επιμορφισμός. Θεωρούμε μία ακολουθία στοιχείων στο καρτεσιανό γινόμενο $\prod_j Y^j$, $(y^j)_j = (y^0, y^1, y^2, \dots, y^j, \dots)$. Κατασκευάζουμε την

ακολουθία στοιχείων $(x^0, x^1, x^2, \dots, x^j, \dots)$ με x^0 οποιοδήποτε στοιχείο και $x^j \xrightarrow{\tau^j} x^{j-1} - y^{j-1}$ για κάθε $j \neq 0$. Τότε, $(x^0, x^1, x^2, \dots, x^j, \dots) \xrightarrow{\mathbf{1}-T} (x^0 - \tau^1(x^1), x^1 - \tau^2(x^2), x^2 - \tau^3(x^3), \dots, x^j - \tau^{j+1}(x^{j+1}), \dots) = (x^0 - (x^0 - y^0), x^1 - (x^1 - y^1), x^2 - (x^2 - y^2), \dots, x^j - (x^j - y^j), \dots) = (y^0, y^1, y^2, \dots, y^j, \dots)$.

Θεωρούμε την επαγόμενη ακριβή ακολουθία που συνίσταται από το αντίστροφο όριο και τον επαγόμενο συναρτητή αυτού για το προηγούμενο διάγραμμα. Λόγω των μηδενισμών των προαναφερθέντων αντικειμένων αυτή είναι η ακόλουθη.

$$0 \rightarrow X_n \xrightarrow{\pi_n} \lim_{\leftarrow i} X_n/X_n^i \rightarrow \lim_{\leftarrow i}^1 X_n^i \rightarrow 0$$

Συνεπάγεται ότι το σύμπλεγμα $\lim_{\leftarrow i}^1 X^i$ είναι ισόμορφο με το συμπυρήνα της αλυσωτής απεικόνισης $X \xrightarrow{\pi} \lim_{\leftarrow i} X/X^i$.

Πόρισμα 7.2.2 Έστω X σύμπλεγμα με φιλτράρισμα *Hausdorff*, $X = X^0 \supseteq X^1 \supseteq X^2 \supseteq \dots \supseteq X^i \supseteq \dots$. Τότε το σύμπλεγμα $\lim_{\leftarrow i}^1 X^i$ είναι ισόμορφο με το συμπυρήνα της αλυσωτής απεικόνισης

$X \xrightarrow{\pi} \lim_{\leftarrow i} X/X^i$ και η ομολογία του υπολογίζεται, για κάθε ακέραιο n , μέσω της βραχείας ακριβούς ακολουθίας αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \lim_{\longleftarrow i}^1 H_{n+1}(X^i) \longrightarrow H_{n+1}(\lim_{\longleftarrow i}^1 X^i) \longrightarrow \lim_{\longleftarrow i} H_n(X^i) \longrightarrow 0.$$

7.3 Η σχέση της ευσταθούς ομολογίας με την πλήρη ομολογία.

Το ακόλουθο θεώρημα δηλώνει τη σχέση της ευσταθούς με την πλήρη ομολογία.

Θεώρημα 7.3.1 Έστω R ένας δακτύλιος και έστω M_R και ${}_R N$ δύο πρότυπα. Τότε, για κάθε ακέραιο n , έχουμε την ακόλουθη βραχεία ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων, φυσική ως προς M και N .

$$0 \longrightarrow \lim_{\longleftarrow i}^1 \text{Tor}_{n+i+1}^R(M, \Sigma^i N) \longrightarrow \widetilde{\text{Tor}}_n^R(M, N) \xrightarrow{\Delta} \widehat{\text{Tor}}_n^R(M, N) \rightarrow 0$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε μία επίπεδη επίλυση $\mathbb{F} \rightarrow M$ του προτύπου M καθώς και μία εμφυτευτική επίλυση $N \rightarrow \mathbb{I}$ του προτύπου N . Για κάθε φυσικό ακέραιο i , θεωρούμε τα υποσυμπλέγματα $\mathbb{I}^{\geq i} \subseteq \mathbb{I}^*$ και συνιστούν το ακόλουθο φθίνον φιλτράρισμα του συμπλέγματος \mathbb{I}^* .

$$\mathbb{I}^* = \mathbb{I}^{\geq 0} \supseteq \mathbb{I}^{\geq 1} \supseteq \mathbb{I}^{\geq 2} \supseteq \dots \supseteq \mathbb{I}^{\geq i} \supseteq \dots$$

Θεωρούμε, επίσης, και το επαγόμενο φιλτράρισμα του συμπλέγματος αβελιανών ομάδων $\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^*$.

$$\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^* = \mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq 0} \supseteq \mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq 1} \supseteq \mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq 2} \supseteq \dots \supseteq \mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i} \supseteq \dots$$

Θεωρούμε το τμήμα βαθμού n , $(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^*)_n = \bigoplus_{j \geq 0} F_{n+j} \otimes_R I^j$, και το φθίνον φιλτράρισμα αυτού.

$$\bigoplus_{j \geq 0} F_{n+j} \otimes_R I^j \supseteq \bigoplus_{j \geq 1} F_{n+j} \otimes_R I^j \supseteq \bigoplus_{j \geq 2} F_{n+j} \otimes_R I^j \supseteq \dots \supseteq \bigoplus_{j \geq i} F_{n+j} \otimes_R I^j \supseteq \dots$$

Καθώς $\bigcap_{m \in \mathbb{N}, j \geq m} \bigoplus_{R} F_{n+j} \otimes_R I^j = 0$, έπεται ότι το ανωτέρω φιλτράρισμα είναι *Hausdorff*. Έτσι, το τμήμα βαθμού n του συμπλέγματος $\lim_{\longleftarrow i}^1 (\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^*)_n$ είναι ο συμπυρήνας της απεικόνισης $(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^*)_n \xrightarrow{\pi_n}$

$$\lim_{\longleftarrow i} [(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^*)_n / (\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i})_n].$$

Όμως, $(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^*)_n = \bigoplus_{j \geq 0} F_{n+j} \otimes_R I^j$, ενώ $\lim_{\longleftarrow i} [(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^*)_n / (\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i})_n] = \lim_{\longleftarrow i} [\bigoplus_{j \geq 0} F_{n+j} \otimes_R I^j / \bigoplus_{j \geq i} F_{n+j} \otimes_R I^j] =$

$$\lim_{\longleftarrow i} [\bigoplus_{j=0}^{i-1} F_{n+j} \otimes_R I^j] = \lim_{\longleftarrow i} [\prod_{j=0}^{i-1} F_{n+j} \otimes_R I^j] = \prod_{j \geq 0} F_{n+j} \otimes_R I^j.$$

Επομένως, η απεικόνιση π_n είναι η φυσική εμφύτευση

$$\bigoplus_{j \geq 0} F_{n+j} \otimes_R I^j \hookrightarrow \prod_{j \geq 0} F_{n+j} \otimes_R I^j$$

που συνθέτει το τμήμα βαθμού n του φραγμένου και του απεριόριστου τανυστικού γινομένου των συμπλεγμάτων \mathbb{F}_* και \mathbb{I}^* με συμπυρήνα το ευσταθές. Έχουμε, δηλαδή, ότι το σύμπλεγμα $\lim_{\leftarrow i}^1(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i})$

είναι το σύμπλεγμα $\mathbb{F}_* \otimes_R \widetilde{\mathbb{I}^*}$.

Από το πόρισμα 7.2.2 έπεται, για κάθε ακέραιο n , η βραχεία ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \lim_{\leftarrow i}^1 H_{n+1}(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}) \longrightarrow H_{n+1}(\mathbb{F}_* \otimes_R \widetilde{\mathbb{I}^*}) \longrightarrow \lim_{\leftarrow i} H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}) \longrightarrow 0.$$

Από τον ορισμό της ευσταθούς ομολογίας και την ταύτιση, από την πρόταση 7.1.1, του αντιστρόφου συστήματος $(\text{Tor}_{n+i}^R(M, \Sigma^i N), \delta_n^i)_i$ με το αντίστροφο σύστημα $(H_n(\mathbb{F}_* \otimes_R \mathbb{I}^{\geq i}), \gamma_n^i)_i$ έχουμε, για κάθε ακέραιο n , τη βραχεία ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \lim_{\leftarrow i}^1 \text{Tor}_{n+i+1}^R(M, \Sigma^i N) \longrightarrow \widehat{\text{Tor}}_n^R(M, N) \xrightarrow{\Delta} \widehat{\text{Tor}}_n^R(M, N) \rightarrow 0.$$

Η απεικόνιση Δ είναι ακριβώς η απεικόνιση που προσφέρει το πόρισμα 7.2.2. Έπεται η φυσικότητα της ακολουθίας. □

8 Κριτήρια ισομορφισμού.

8.1 Η συνθήκη Mittag – Leffler.

Θεωρούμε ένα αντίστροφο σύστημα αβελιανών ομάδων, $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Λέμε ότι το σύστημα ικανοποιεί τη συνθήκη *Mittag – Leffler* αν για κάθε δείκτη i υπάρχει δείκτης $j(i)$, που εξαρτάται δηλαδή από το i , με $j(i) \geq i$, έτσι ώστε για κάθε δείκτη $k \geq j(i)$ έχουμε $\text{Im}[A_k \rightarrow A_i] = \text{Im}[A_{j(i)} \rightarrow A_i] := A'_i$ και η οποία καλείται σταθερή εικόνα.

Λέμε ότι το σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί την τετριμμένη συνθήκη *Mittag – Leffler* αν για κάθε δείκτη i υπάρχει δείκτης $t(i)$, που εξαρτάται δηλαδή από το i , με $t(i) > i$ έτσι ώστε $\text{Im}[A_{t(i)} \rightarrow A_i] = 0$.

Έχουμε ήδη δείξει ότι αν ένα αντίστροφο σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι επιμορφικό τότε $\lim_{\leftarrow i}^1 A_i = 0$.

Θα δείξουμε ότι αν ένα σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί την τετριμμένη συνθήκη *Mittag – Leffler* τότε $\lim_{\leftarrow i}^1 A_i = 0$, και με χρήση των δύο αυτών προτάσεων θα αποδείξουμε ότι αν ένα σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί τη συνθήκη *Mittag – Leffler* τότε $\lim_{\leftarrow i}^1 A_i = 0$.

Θεωρούμε, λοιπόν, ένα αντίστροφο σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ που ικανοποιεί την τετριμμένη συνθήκη *Mittag – Leffler*. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $\mathbf{1} - S$, με S οι απεικονίσεις που το συνθέτουν, είναι επιμορφισμός. Θεωρούμε μία ακολουθία στοιχείων στο καρτεσιανό γινόμενο $\prod_i A_i$, $(b_i)_i = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_i, \dots)$.

Κατασκευάζουμε την ακολουθία στοιχείων $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$ ως εξής:

$$a_0 = \sum_{j=0}^{\infty} s_{j0} b_j, a_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_{j1} b_j, a_2 = \sum_{j=2}^{\infty} s_{j2} b_j, \dots, a_i = \sum_{j=i}^{\infty} s_{ji} b_j, \dots$$

Οι παραπάνω ορισμοί έχουν νόημα καθώς όλα τα ανωτέρω αθροίσματα είναι πεπερασμένα αφού το σύστημα ικανοποιεί την τετριμμένη συνθήκη *Mittag – Leffler*. Τότε,

$$\begin{aligned}
& (a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots) \xrightarrow{\mathbf{1-S}} (a_0 - s_{10}a_1, a_1 - s_{21}a_2, a_2 - s_{32}a_3, \dots, a_i - s_{i+1i}a_{i+1}, \dots) = \\
& \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_{j0}b_j - s_{10} \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_{j1}b_j \right), \sum_{j=1}^{\infty} s_{j1}b_j - s_{21} \left(\sum_{j=2}^{\infty} s_{j2}b_j \right), \sum_{j=2}^{\infty} s_{j2}b_j - s_{32} \left(\sum_{j=3}^{\infty} s_{j3}b_j \right), \dots, \sum_{j=i}^{\infty} s_{ji}b_j - s_{i+1i} \left(\sum_{j=i+1}^{\infty} s_{ji+1}b_j \right), \dots \right) = \\
& \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_{j0}b_j - \sum_{j=1}^{\infty} s_{10}s_{j1}b_j, \sum_{j=1}^{\infty} s_{j1}b_j - \sum_{j=2}^{\infty} s_{21}s_{j2}b_j, \sum_{j=2}^{\infty} s_{j2}b_j - \sum_{j=3}^{\infty} s_{32}s_{j3}b_j, \dots, \sum_{j=i}^{\infty} s_{ji}b_j - \sum_{j=i+1}^{\infty} s_{i+1i}s_{ji+1}b_j, \dots \right) = \\
& \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_{j0}b_j - \sum_{j=1}^{\infty} s_{j0}b_j, \sum_{j=1}^{\infty} s_{j1}b_j - \sum_{j=2}^{\infty} s_{j1}b_j, \sum_{j=2}^{\infty} s_{j2}b_j - \sum_{j=3}^{\infty} s_{j2}b_j, \dots, \sum_{j=i}^{\infty} s_{ji}b_j - \sum_{j=i+1}^{\infty} s_{ji}b_j, \dots \right) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_i, \dots).
\end{aligned}$$

Έστω τώρα ένα αντίστροφο σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη *Mittag – Leffler*. Θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow (A'_i)_i \rightarrow (A_i)_i \rightarrow (A_i/A'_i)_i \rightarrow 0$ που συνδέει το σύστημα αυτό και το αντίστροφο σύστημα των σταθερών εικόνων. Το τελευταίο είναι επιμορφικό, ενώ το προκύπτον σύστημα των πηλίκων, $(A_i/A'_i)_i$, ικανοποιεί την τετριμμένη συνθήκη *Mittag – Leffler*. Καθώς το σύνολο δεικτών που φέρουν τα συστήματα είναι οι φυσικοί αριθμοί, η επαγόμενη ακριβής ακολουθία που συνθέτουν οι επαγόμενοι δεξιοί συναρτητές του αντίστροφου ορίου είναι μία ακολουθία έξι όρων. Αυτό συμβαίνει διότι, στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων, ο συναρτητής $\prod_{i=0}^{\infty}$ είναι ακριβής, και η εν λόγω ακολουθία είναι η *Kernel – Cokernel* ακολουθία του παρακάτω διαγράμματος και έπεται αυτού. Το διάγραμμα εμφανίζει ίδιες γραμμές, αυτές που προκύπτουν εφαρμόζοντας το συναρτητή στα αντικείμενα των συστημάτων συνθέτοντας βραχεία ακριβή ακολουθία, και κάθετες απεικονίσεις την $\mathbf{1-S}$ που αντιστοιχεί σε κάθε σύστημα. Ο πυρήνας αυτής υπολογίζουμε ότι είναι όντως το αντίστροφο όριο του συστήματος, ενώ ο συμπυρήνας αυτής είναι ο πρώτος επαγόμενος συναρτητής του αντίστροφου ορίου, καθώς τα εμφυτευτικά αντικείμενα της κατηγορίας των αντίστροφων συστημάτων αβελιανών ομάδων είναι επιμορφικά συστήματα που μηδενίζουν τον συμπυρήνα αυτόν. Έπεται ότι οι υπόλοιποι επαγόμενοι συναρτητές για την περίπτωση των αβελιανών ομάδων με σύνολο δεικτών τους φυσικούς αριθμούς είναι οι μηδενικοί. Στην ακολουθία, λοιπόν, αυτή των έξι όρων έχουμε $\lim_{\leftarrow}^1 A'_i = 0$ και $\lim_{\leftarrow}^1 (A_i/A'_i) = 0$.

Συνεπάγεται ότι $\lim_{\leftarrow}^1 A_i = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \varprojlim_i A'_i & \longrightarrow & \varprojlim_i A_i & \longrightarrow & \varprojlim_i (A_i/A'_i) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \prod_i A'_i & \longrightarrow & \prod_i A_i & \longrightarrow & \prod_i (A_i/A'_i) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow 1-S' & & \downarrow 1-S & & \downarrow 1-S'' \\
0 & \longrightarrow & \prod_i A'_i & \longrightarrow & \prod_i A_i & \longrightarrow & \prod_i (A_i/A'_i) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \varprojlim_i^1 A'_i & \longrightarrow & \varprojlim_i^1 A_i & \longrightarrow & \varprojlim_i^1 (A_i/A'_i) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

$$0 \longrightarrow \varprojlim_i A'_i \longrightarrow \varprojlim_i A_i \longrightarrow \varprojlim_i (A_i/A'_i) \longrightarrow \varprojlim_i^1 A'_i \longrightarrow \varprojlim_i^1 A_i \longrightarrow \varprojlim_i^1 (A_i/A'_i) \longrightarrow 0$$

8.2 Κριτήρια ισομορφισμού.

Πρόταση 8.2.1 Έστω R ένας δακτύλιος και M_R ένα δεξιό R -πρότυπο. Έστω ότι ισχύει ένα από τα ακόλουθα.

1. Υπάρχει φυσικός αριθμός m ώστε $\text{Tor}_i^R(M, I) = 0$ για κάθε εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο I και κάθε $i > m$, δηλαδή το πρότυπο M έχει πεπερασμένη *core* επίπεδη διάσταση.
2. $\text{sfl}R < \infty$.

Τότε, η φυσική απεικόνιση $\widehat{\text{Tor}}_n^R(M, N) \xrightarrow{\Delta} \widehat{\text{Tor}}_n^R(M, N)$ είναι ισομορφισμός για κάθε αριστερό R -πρότυπο ${}_R N$, για κάθε ακέραιο n .

Απόδειξη.

Θεωρούμε, για κάθε n , το αντίστροφο σύστημα $\dots \xrightarrow{\delta^H} \text{Tor}_{n+2}^R(A, \Sigma^2 B) \xrightarrow{\delta^H = \delta_n^1} \text{Tor}_{n+1}^R(A, \Sigma B) \xrightarrow{\delta^H = \delta_n^0} \text{Tor}_n^R(A, B)$, όπου οι απεικονίσεις που το συνθέτουν είναι αυτές που προκύπτουν από εμφυτευτικές παραστάσεις. Σε μεγάλους δείκτες η απεικόνιση δ^H είναι ισομορφισμός καθιστώντας τη συνθήκη *Mittag – Leffler* ικανοποιημένη. Έτσι, για κάθε n , έχουμε $\varprojlim_i^1 \text{Tor}_{n+i}^R(M, \Sigma^i N) = 0$ και επικαλούμαστε το θεώρημα 7.3.1.

□

Λήμμα 8.2.2 Θεωρούμε ένα ευθύ σύστημα αβελιανών ομάδων $(B_i, \lambda_i)_i$ και το επαγόμενο αντίστροφο σύστημα μέσω του συναρτητή *Pontryagin*, $(DB_i, D\lambda_i)_i$. Τότε, $\lim_{\leftarrow i} DB_i \simeq D(\lim_{\rightarrow i} B_i)$ και $\lim_{\leftarrow i}^1 DB_i = 0$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία που ορίζει το ευθύ όριο του συστήματος,

$$0 \longrightarrow \bigoplus_i B_i \xrightarrow{1-\Lambda} \bigoplus_i B_i \longrightarrow \lim_{\rightarrow i} B_i \longrightarrow 0,$$

όπου η εμφύτευση $1 - \Lambda$ απεικονίζει ένα στοιχείο $(b_i)_i$ του ευθέως αθροίσματος στο στοιχείο του ιδίου $(b_i - \lambda_{i-1}b_{i-1})_i$. Εφαρμόζοντας το συναρτητή *Pontryagin* σε αυτήν, προκύπτει η ακόλουθη ακριβής ακολουθία.

$$0 \longrightarrow D(\lim_{\rightarrow i} B_i) \longrightarrow \prod_i DB_i \xrightarrow{D(1-\Lambda)} \prod_i DB_i \longrightarrow 0$$

Καθώς η απεικόνιση $D(1 - \Lambda) = 1 - D\Lambda$ είναι αυτή που ορίζει το αντίστροφο όριο και τον πρώτο επαγόμενο συναρτητή αυτού του εν λόγω αντιστρόφου συστήματος, η ακρίβεια της παραπάνω ακολουθίας δίνει $\lim_{\leftarrow i} DB_i \simeq D(\lim_{\rightarrow i} B_i)$ και $\lim_{\leftarrow i}^1 DB_i = 0$. □

Θεωρούμε, για πρότυπα $M_R, S K_R, S C$, τη γνωστή φυσική απεικόνιση

$$\Phi : M \bigotimes_R \bigotimes_S \text{Hom}_S(K, C) \rightarrow \text{Hom}_S(\text{Hom}_{R^{opp}}(M, K), C), m \otimes f \mapsto h : g \mapsto f(g(m)).$$

Από την προσθετικότητα του τανυστικού γινομένου έχουμε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι ισομορφισμός όταν το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό δεξιό R -πρότυπο. Είναι επίσης ισομορφισμός και στην περίπτωση που το C είναι εμφυτευτικό αριστερό S -πρότυπο και το M πεπερασμένα παριστώμενο δεξιό R -πρότυπο.

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση που ο δακτύλιος S είναι ο δακτύλιος \mathbb{Z} και το πρότυπο C είναι το \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ώστε ο συναρτητής $\text{Hom}_S(-, C)$ να είναι ο *Pontryagin*. Έστω επίσης ότι το πρότυπο M_R είναι τύπου FP_∞ . Θεωρούμε το σύμπλεγμα των πεπερασμένα παραγόμενων προβολικών προτύπων μίας προβολικής επίλυσής του, \mathbb{P}_* . Η προκύπτουσα αλυσωτή απεικόνιση $\Phi_* : \mathbb{P}_* \bigotimes_R DK \rightarrow D\text{Hom}_{R^{opp}}(\mathbb{P}_*, K)$ είναι ισομορφισμός για κάθε δεξιό R -πρότυπο K . Επομένως, οι προσθετικές απεικονίσεις στην ομολογία αυτών είναι οι ισομορφισμοί $\Phi_n : \text{Tor}_n^R(M, DK) \rightarrow \text{DExt}_{R^{opp}}^n(M, K)$.

Πρόταση 8.2.3 Θεωρούμε ένα δακτύλιο R και ένα δεξιό R -πρότυπο M τύπου FP_∞ . Τότε, η φυσική απεικόνιση $\widetilde{\text{Tor}}_n^R(M, DK) \xrightarrow{\Delta} \widehat{\text{Tor}}_n^R(M, DK)$ είναι ισομορφισμός για κάθε δεξιό R -πρότυπο K , για κάθε ακέραιο n .

Απόδειξη.

Θεωρούμε μία προβολική επίλυση του προτύπου K , $\mathbb{Q} \rightarrow K$, και έχουμε ότι το σύμπλεγμα $D\mathbb{Q}_*$ αποτελεί το σύμπλεγμα των εμφυτευτικών προτύπων της εμφυτευτικής επίλυσης του αριστερού R -προτύπου DK . Ταυτίζοντας το αντίστροφο σύστημα $(\text{Tor}_{n+i}^R(M, \Sigma^i DK))_i$ με το αντίστροφο σύστημα $(\text{DExt}_{R^{opp}}^{n+i}(M, \Omega_i K))_i$,

καθώς ισχύει ότι $D\Omega_i K = \Sigma^i DK$ και οι συνδετικοί ομομορφισμοί που τα συνθέτουν επάγονται από ίδιες παραστάσεις, αποφαινόμεστε ότι $\widehat{Tor}_n^R(M, DK) \simeq \widehat{DExt}_{R^{opp}}^n(M, K)$, όπου $\widehat{Ext}_{R^{opp}}^n(M, K) \simeq \widetilde{Ext}_{R^{opp}}^n(M, K)$ και $\widehat{Tor}_n^R(M, DK)$ είναι η κατασκευή *Mislin*, ισοδύναμη με την ευσταθή (προβολικώς πλήρη) συνομολογία, και η δυϊκή κατασκευή *Triulzi*, αντίστοιχα. Καθώς $\lim_{\leftarrow i}^1 Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i DK) = \lim_{\leftarrow i}^1 DExt_{R^{opp}}^{n+i}(M, \Omega_i K)$, από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι τα αντικείμενα αυτά είναι τετριμμένα, και επικαλούμαστε το θεώρημα 7.3.1. □

9 Κριτήρια μηδενισμού.

9.1 Η συνθήκη *Mittag – Leffler* και ο μηδενισμός του πρώτου επαγόμενου συναρτητή του αντίστροφου ορίου.

Η ακόλουθη πρόταση είναι απόρροια του άρθρου του κυρίου Εμμανουήλ, [19], *Mittag – Leffler condition and the vanishing of \lim_{\leftarrow}^1* .

Πρόταση 9.1.1 Έστω $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ένα αντίστροφο σύστημα αβελιανών ομάδων. Θεωρούμε το ευθύ άθροισμα του συστήματος, $(A_i^{(\mathbb{N})})_{i \in \mathbb{N}}$. Αν $\lim_{\leftarrow i}^1 A_i^{(\mathbb{N})} = 0$ τότε το σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί τη συνθήκη *Mittag – Leffler*.

Απόδειξη.

Για δική μας διευκόλυνση όπως θα φανεί στην απόδειξη, υιοθετούμε το συμβολισμό του άρθρου του κυρίου Εμμανουήλ. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{X} = (X_m)_m$ το εν λόγω σύστημα και εξαλείφουμε τους φυσικούς δείκτες $i = m$ στα όρια. Ο συμβολισμός της εκφώνησης της πρότασης διατηρείται στη συνέχεια.

Θεωρούμε την ακόλουθη ακριβή ακολουθία που ορίζει το αντίστροφο όριο και τον επαγόμενο συναρτητή αυτού του ανωτέρω συστήματος.

$$0 \longrightarrow \lim_{\leftarrow} \mathfrak{X} \longrightarrow \prod_m X_m \xrightarrow{1-S} \prod_m X_m \longrightarrow \lim_{\leftarrow}^1 \mathfrak{X} \longrightarrow 0$$

Εφαρμόζουμε το δεξιά συναρτητή $-\otimes_R E$, με E ένα αριστερό R -πρότυπο.

$$\begin{array}{ccccccc} (\lim_{\leftarrow} \mathfrak{X}) \otimes_R E & \longrightarrow & (\prod_m X_m) \otimes_R E & \xrightarrow{(1-S) \otimes 1} & (\prod_m X_m) \otimes_R E & \longrightarrow & (\lim_{\leftarrow}^1 \mathfrak{X}) \otimes_R E \longrightarrow 0 \\ \downarrow \Phi_{\mathfrak{X}, E}^0 & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \Phi_{\mathfrak{X}, E}^1 \\ 0 \longrightarrow \lim_{\leftarrow} (\mathfrak{X} \otimes_R E) & \longrightarrow & \prod_m (X_m \otimes_R E) & \xrightarrow{1-S \otimes 1} & \prod_m (X_m \otimes_R E) & \longrightarrow & \lim_{\leftarrow}^1 (\mathfrak{X} \otimes_R E) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Στο παραπάνω μεταθετικό διάγραμμα, η πάνω γραμμή είναι γενικά ακριβής στις δύο τελευταίες θέσεις, ενώ η κάτω είναι πάντα ακριβής. Η απεικόνιση ϕ είναι η εύλογη, με τύπο $(x_m)_m \otimes e \xrightarrow{\phi} (x_m \otimes e)_m$.

Σταθεροποιούμε ένα φυσικό αριθμό n . Θεωρούμε τώρα το αντίστροφο σύστημα $\mathfrak{X}_n = (X_{nm})_m$ με $X_{nm} = \text{Im}[s_{mn} : X_m \rightarrow X_n]$ για $m \geq n$ και $X_{nm} = 0$ για $m < n$. Ο επιμορφισμός $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}_n$ φαίνεται ακολούθως.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 X_{n+2} & \longrightarrow & X_{nn+2} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow s_{n+2n+1} & & \downarrow \cap & & \\
 X_{n+1} & \longrightarrow & X_{nn+1} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow s_{n+1n} & & \downarrow \cap & & \\
 X_n & \xrightarrow{\mathbf{1}} & X_{nn} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow s_{nn-1} & & \downarrow 0 & & \\
 X_{n-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Θεωρώντας τώρα την προαναφερθείσα ειδική φυσικότητα της *Kernel – Cokernel* ακολουθίας εφαρμοσμένη στα παραπάνω συστήματα, προκύπτει το ακόλουθο τμήμα. Θεωρούμε τώρα ότι το επίπεδο πρότυπο E είναι το ελεύθερο πρότυπο $R^{(\mathbb{N})}$, και χρησιμοποιούμε την υπόθεση, η οποία δίνει το μηδενισμό του $\lim_{\leftarrow}^1(\mathfrak{X} \otimes_R E)$. Από την ακρίβεια της ακολουθίας στους συμπυρήνες των απεικονίσεων που εμφανίζονται προκύπτει ότι $\text{Coker} \Phi_{\mathfrak{X}_n, E}^1 = 0$ και έτσι αποφαινόμαστε ότι η απεικόνιση $\Phi_{\mathfrak{X}_n, E}^1$ είναι επιμορφισμός.

$$\begin{array}{ccccc}
 (\lim_{\leftarrow}^1 \mathfrak{X}) \otimes_R E & \longrightarrow & (\lim_{\leftarrow}^1 \mathfrak{X}_n) \otimes_R E & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \Phi_{\mathfrak{X}, E}^1 & & \downarrow \Phi_{\mathfrak{X}_n, E}^1 & & \\
 \lim_{\leftarrow}^1(\mathfrak{X} \otimes_R E) & \longrightarrow & \lim_{\leftarrow}^1(\mathfrak{X}_n \otimes_R E) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Θεωρούμε τώρα τη βραχεία ακριβή ακολουθία αντίστροφων συστημάτων,

$$0 \rightarrow \mathfrak{X}_n \rightarrow X_n \rightarrow \mathfrak{X}_{(n)} \rightarrow 0,$$

όπου το σύστημα $X_n = (X_n)_m$ είναι το σταθερό για δείκτες όχι μικρότερους του δείκτη n και αποτελείται από τα τετριμμένα αντικείμενα για τους υπόλοιπους δείκτες. Το σύστημα $\mathfrak{X}_{(n)}$ είναι το σύστημα πηλίκο της εμφύτευσης $\mathfrak{X}_n \hookrightarrow X_n$. Το μη μηδενικό τμήμα του πρώτου συστήματος συνίσταται από εμφυτεύσεις, το μη μηδενικό τμήμα του δεύτερου είναι σταθερό και το τρίτο σύστημα είναι επιμορφικό.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X_{nn+2} & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X_n/X_{nn+2} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \cap & & \downarrow \mathbf{1} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X_{nn+1} & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X_n/X_{nn+1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \cap & & \downarrow \mathbf{1} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
\end{array}$$

Θεωρώντας πάλι την προαναφερθείσα ειδική φυσικότητα της *Kernel – Cokernel* ακολουθίας εφαρμοσμένη στην παραπάνω βραχεία ακριβή ακολουθία συστημάτων, προκύπτει το ακόλουθο τμήμα. Τα συστήματα X_n και $X_n \otimes_R E$ είναι επιμορφικά, επομένως $(\lim_{\leftarrow}^1 X_n) \otimes_R E = 0 = \lim_{\leftarrow}^1 (X_n \otimes_R E)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
X_n \otimes_R E & \longrightarrow & (\lim_{\leftarrow} \mathfrak{X}_{(n)}) \otimes_R E & \longrightarrow & (\lim_{\leftarrow}^1 \mathfrak{X}_n) \otimes_R E & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \mathbf{1} & & \downarrow \Phi_{\mathfrak{X}_{(n)}, E}^0 & & \downarrow \Phi_{\mathfrak{X}_n, E}^1 & & \\
X_n \otimes_R E & \longrightarrow & \lim_{\leftarrow}^1 (\mathfrak{X}_{(n)} \otimes_R E) & \longrightarrow & \lim_{\leftarrow}^1 (\mathfrak{X}_n \otimes_R E) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Καθώς η απεικόνιση $\Phi_{\mathfrak{X}_n, E}^1$ είναι επιμορφισμός, ένα κυνήγι διαγράμματος δίνει ότι και η απεικόνιση $\Phi_{\mathfrak{X}_{(n)}, E}^0$ είναι επιμορφισμός. Θα δείξουμε ότι είναι και εμφύτευση, δηλαδή τελικά θα είναι ισομορφισμός. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc}
(\lim_{\leftarrow} \mathfrak{X}_{(n)}) \otimes_R E & = & (\lim_{\leftarrow} \mathfrak{X}_{(n)})^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{a} (\lim_{\leftarrow} \mathfrak{X}_{(n)})^{\mathbb{N}} \\
\downarrow \Phi_{\mathfrak{X}_{(n)}, E}^0 & & \downarrow \simeq \\
\lim_{\leftarrow} (\mathfrak{X}_{(n)} \otimes_R E) & = & \lim_{\leftarrow} (\mathfrak{X}_{(n)})^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{b} \lim_{\leftarrow} (\mathfrak{X}_{(n)})^{\mathbb{N}}
\end{array}$$

Η απεικόνιση a είναι η εμφύτευση του ευθέος αθροίσματος στο καρτεσιανό γινόμενο. Ο κάθετος ισομορφισμός οφείλεται στην αντιμεταθετικότητα των συναρτητών καρτεσιανό γινόμενο και αντίστροφο όριο, καθώς ο τελευταίος είναι δεξιά συζυγής του σταθερού διαγώνιου συναρτητή, και έτσι το αντίστροφο όριο μετατίθεται με κάθε αντίστροφο όριο, δηλαδή και με το καρτεσιανό γινόμενο. Η απεικόνιση b είναι η εύλογη. Έπεται ότι η σύνθεση $b \circ \Phi_{\mathfrak{X}_{(n)}, E}^0$ είναι $1 - 1$, καθιστώντας τη $\Phi_{\mathfrak{X}_{(n)}, E}^0$ επίσης $1 - 1$.

Η ακριβής ακολουθία συστημάτων $0 \rightarrow \mathfrak{X}_n \rightarrow X_n \rightarrow \mathfrak{X}_{(n)} \rightarrow 0$ επάγει την παρακάτω ακριβή ακολουθία στα όρια, με $\lim_{\leftarrow}^1 X_n = 0$, $\lim_{\leftarrow} \mathfrak{X}_n = \bigcap_m X_{nm}$ και $\lim_{\leftarrow} X_n = X_n$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & \bigcap_m X_{nm} & \hookrightarrow & X_n & \rightarrow & \lim_{\leftarrow} \mathfrak{X}_{(n)} & \rightarrow & \lim_{\leftarrow}^1 \mathfrak{X}_n & \rightarrow & 0 \\
& & & & & & \pi \searrow \nearrow \mu & & \mathfrak{X}_{(n)} \searrow & & \\
& & & & & & X_n / \bigcap_m X_{nm} & & X_n / X_{nm} & &
\end{array}$$

Το σύστημα $\mathfrak{X}_{(n)}$ είναι επιμορφικό και έτσι η απεικόνιση $s_m^{\mathfrak{X}_{(n)}} : \lim_{\leftarrow} \mathfrak{X}_{(n)} \rightarrow \mathfrak{X}_{(n)_m}$ είναι επιμορφισμός για κάθε δείκτη m . Θεωρούμε τη σύνθεση $s_m^{\mathfrak{X}_{(n)}} \circ \mu : X_n / \bigcap_m X_{nm} \rightarrow X_n / X_{nm}$. Με χρήση του ισομορφισμού $\Phi_{\mathfrak{X}_{(n)}, E}^0$ θα δείξουμε ότι, για μεγάλους δείκτες m , η απεικόνιση $s_m^{\mathfrak{X}_{(n)}}$ είναι $1 - 1$, και από την προηγούμενη σύνθεση θα έχουμε την εμφύτευση $X_n / \bigcap_m X_{nm} \subseteq X_n / X_{nm}$. Θα προκύψει έτσι ότι $\bigcap_m X_{nm} = X_{nm}$ για μεγάλους δείκτες m , δηλαδή το σύστημα \mathfrak{X} ικανοποιεί τη συνθήκη *Mittag - Leffler*.

Έστω, προς άτοπο, ότι $\text{Kers}_m^{\mathfrak{X}_{(n)}} \neq 0$ για άπειρους δείκτες m . Καταλήγοντας σε άτοπο, θα προκύψει ότι τελικά μόνο για πεπερασμένους δείκτες έχουμε $\text{Kers}_m^{\mathfrak{X}_{(n)}} \neq 0$. Έτσι, για μεγάλους δείκτες m θα έχουμε $\bigcap_m X_{nm} = X_{nm}$ και το ζητούμενο.

Θεωρούμε μία βάση του ελεύθερου R -προτύπου $R^{(\mathbb{N})}$, $\{e_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Για κάθε δείκτη n στο άπειρο σύνολο δεικτών της υπόθεσης θεωρούμε ένα στοιχείο $f_n \in \lim_{\leftarrow} \mathfrak{X}_{(n)}$ με $f_n \neq 0$ και $f_n \in \text{Kers}_n^{\mathfrak{X}_{(n)}}$. Έστω M ο ελάχιστος δείκτης στο άπειρο σύνολο δεικτών της υπόθεσης. Τα στοιχεία θα έχουν την ακόλουθη μορφή.

$$f_M = (a_m^M)_m = (0, 0, \dots, 0, a_{M+1}^M, a_{M+2}^M, \dots, a_i^M, \dots)$$

$$f_{M+1} = (a_m^{M+1})_m = (0, 0, \dots, 0, a_{M+2}^{M+1}, a_{M+3}^{M+1}, \dots, a_i^{M+1}, \dots)$$

$$f_{M+2} = (a_m^{M+2})_m = (0, 0, \dots, 0, a_{M+3}^{M+2}, a_{M+4}^{M+2}, \dots, a_i^{M+2}, \dots)$$

.

$$f_n = (a_m^n)_m = (0, 0, \dots, 0, a_{n+1}^n, a_{n+2}^n, \dots, a_i^n, \dots)$$

.

Θεωρούμε τώρα τα ακόλουθα στοιχεία, συμβολίζοντας ουσιαστικά την εικόνα τους μέσω της απεικόνισης ϕ .

$$f_M \otimes e_M = (a_m^M \otimes e_M)_m = (0, 0, \dots, 0, a_{M+1}^M \otimes e_M, a_{M+2}^M \otimes e_M, \dots, a_i^M \otimes e_M, \dots)$$

$$f_{M+1} \otimes e_{M+1} = (a_m^{M+1} \otimes e_{M+1})_m = (0, 0, \dots, 0, a_{M+2}^{M+1} \otimes e_{M+1}, a_{M+3}^{M+1} \otimes e_{M+1}, \dots, a_i^{M+1} \otimes e_{M+1}, \dots)$$

$$f_{M+2} \otimes e_{M+2} = (a_m^{M+2} \otimes e_{M+2})_m = (0, 0, \dots, 0, a_{M+3}^{M+2} \otimes e_{M+2}, a_{M+4}^{M+2} \otimes e_{M+2}, \dots, a_i^{M+2} \otimes e_{M+2}, \dots)$$

.

$$f_n \otimes e_n = (a_m^n \otimes e_n)_m = (0, 0, \dots, 0, a_{n+1}^n \otimes e_n, a_{n+2}^n \otimes e_n, \dots, a_i^n \otimes e_n, \dots)$$

Για κάθε τέτοιο στοιχείο έχουμε $f_n \otimes e_n \in \prod_m (\mathfrak{X}_{(n)} \otimes_R E)_m$ και $(0, 0, \dots, 0, a_{n+1}^n \otimes e_n, a_{n+2}^n \otimes e_n, \dots, a_i^n \otimes e_n, \dots) \xrightarrow{1-S^{\mathfrak{X}_{(n)}} \otimes 1} (0, 0, \dots, 0, a_{n+1}^n \otimes e_n, a_{n+2}^n \otimes e_n, \dots, a_i^n \otimes e_n, \dots) - (0, 0, \dots, 0, a_{n+1}^n \otimes e_n, a_{n+2}^n \otimes e_n, \dots, a_i^n \otimes e_n, \dots) = 0$, δηλαδή το στοιχείο $f_n \otimes e_n$ ανήκει στο $\lim_{\leftarrow} (\mathfrak{X}_{(n)} \otimes_R E)$.

Έστω $x = \sum_n f_n \otimes e_n$, το άπειρο αυτό άθροισμα στοιχείων που ανήκει στο καρτεσιανό γινόμενο $\prod_m (\mathfrak{X}_{(n)} \otimes_R E)_m$, με $(\mathfrak{X}_{(n)} \otimes_R E)_m = \mathfrak{X}_{(n),m} \otimes_R E$. Το στοιχείο αυτό έχει νόημα καθώς σε κάθε θέση $M+i$ με $i \geq 1$ υπάρχει ένα πεπερασμένο άθροισμα στοιχείων, $\sum_{j=0}^{i-1} a_{M+i}^{M+j} \otimes e_{M+j}$ το οποίο επίσης δεν επιδέχεται διαγραφές αφού το σύνολο $\{e_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ είναι βάση του προτύπου E . Ειδικότερα, το στοιχείο αυτό ανήκει στο $\lim_{\leftarrow} (\mathfrak{X}_{(n)} \otimes_R E)$. Όμως η απεικόνιση $\Phi_{\mathfrak{X}_{(n)}, E}^0$ είναι ισομορφισμός, και το στοιχείο x ανήκει στην εικόνα αυτής. Όμως, αν ένα στοιχείο ανήκει σε αυτήν την εικόνα, δηλαδή υπάρχει στοιχείο y που ανήκει στο $(\lim_{\leftarrow} \mathfrak{X}_{(n)}) \otimes_R E$ και μέσω της $\Phi_{\mathfrak{X}_{(n)}, E}^0$ απεικονίζεται στο x , τότε το y θα εμφανίζει αναγκαστικά πεπερασμένους δείκτες στις εμφανίσεις των στοιχείων της βάσης του ελεύθερου προτύπου E . Αυτό είναι το άτοπο, καθώς το στοιχείο x δεν φέρει αυτόν τον περιορισμό. □

9.2 Κριτήρια μηδενισμού.

Το ακόλουθο λήμμα θα χρησιμοποιηθεί πολλάκις.

Λήμμα 9.2.1 Έστω $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ένα αντίστροφο σύστημα αβελιανών ομάδων. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. $\lim_{\leftarrow} A_i^{(X)} = 0 = \lim_{\leftarrow}^1 A_i^{(X)}$ για κάθε σύνολο X .
2. $\lim_{\leftarrow} A_i = 0 = \lim_{\leftarrow}^1 A_i^{(\mathbb{N})}$.
3. Το αντίστροφο σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι ουσιαδώς τετριμμένο, δηλαδή ικανοποιεί την τετριμμένη συνθήκη Mittag – Lefler.
4. $\lim_{\rightarrow} D(A_i^{(X)}) = 0$ για κάθε σύνολο X .

Απόδειξη.

Η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ είναι προφανής.

Για τη συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 3$ χρησιμοποιούμε την προηγούμενη πρόταση. Έχουμε, λοιπόν, ότι καθώς $\varprojlim_{\leftarrow}^1 A_i^{(\mathbb{N})} = 0$, το σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί τη συνθήκη *Mittag – Leffler*. Θεωρούμε το αντίστροφο σύστημα των σταθερών εικόνων, $(A'_i)_{i \in \mathbb{N}}$, το οποίο είναι επιμορφικό. Το ίδιο είναι υποσύστημα του $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, και καθώς ο συναρτητής αντίστροφο όριο διατηρεί μονομορφισμούς, έχουμε $\varprojlim_{\leftarrow} A'_i \subseteq \varprojlim_{\leftarrow} A_i$. Το τελευταίο είναι τετριμμένο από υπόθεση, επομένως έχουμε $\varprojlim_{\leftarrow} A'_i = 0$. Καθώς όμως το σύστημα είναι επιμορφικό, έπεται ότι $A'_i = 0$ για κάθε δείκτη i , καθιστώντας το σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ουσιωδώς τετριμμένο.

Συνεχίζουμε την απόδειξη δείχνοντας τη συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 1$. Το αντίστροφο σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι ουσιωδώς τετριμμένο. Συνεπάγεται ότι και το σύστημα $(A_i^{(X)})_{i \in \mathbb{N}}$ είναι ουσιωδώς τετριμμένο για κάθε σύνολο X . Έχουμε ότι $\varprojlim_{\leftarrow}^1 A_i^{(X)} = 0$ αφού το σύστημα ικανοποιεί τη συνθήκη *Mittag – Leffler*, συγκεκριμένα την τετριμμένη. Επίσης, το αντίστροφο όριο ενός ουσιωδώς τετριμμένου συστήματος είναι τετριμμένο. Επομένως, $\varprojlim_{\leftarrow} A_i^{(X)} = 0 = \varprojlim_{\leftarrow}^1 A_i^{(X)}$ για κάθε σύνολο X .

Δείχνουμε τώρα τη συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 4$. Από υπόθεση, καθώς το σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι ουσιωδώς τετριμμένο, για κάθε δείκτη i υπάρχει δείκτης $t(i)$, που εξαρτάται δηλαδή από το i , με $t(i) > i$ έτσι ώστε $\text{Im}[A_{t(i)} \rightarrow A_i] = 0$, δηλαδή η απεικόνιση $s_{t(i)i} : A_{t(i)} \rightarrow A_i$ είναι η τετριμμένη. Η επαγόμενη απεικόνιση στο ευθύ άθροισμα του συστήματος $(A_i^{(X)})_{i \in \mathbb{N}}$, $s_{t(i)i}^{(X)} : A_{t(i)}^{(X)} \rightarrow A_i^{(X)}$, είναι επίσης τετριμμένη για κάθε σύνολο X . Εφαρμόζουμε το συναρτητή *Pontryagin* στο τελευταίο αυτό σύστημα και προκύπτει το ευθύ σύστημα $(D(A_i^{(X)}))_{i \in \mathbb{N}}$. Για κάθε ζεύγος δεικτών $(i, t(i))$, η επαγόμενη απεικόνιση $Ds_{t(i)i}^{(X)} : D(A_{t(i)}^{(X)}) \rightarrow D(A_i^{(X)})$, είναι επίσης τετριμμένη, καθιστώντας το ευθύ όριο $\varinjlim_{\rightarrow} D(A_i^{(X)})$ τετριμμένο, για κάθε σύνολο X .

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη δείχνοντας τη συνεπαγωγή $4 \Rightarrow 3$. Για κάθε αβελιανή ομάδα A_i υπάρχει μονομορφισμός $f_i : A_i \rightarrow \prod_{N_i} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{N_i}$ διότι το πρότυπο \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι *faithfully injective*, με $N_i = \# \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Επιλέγουμε ένα σύνολο X με $\#X \geq \sum_i N_i$ και συμβολίζουμε με Δ το καρτεσιανό γινόμενο $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^X$. Τότε, το ευθύ σύστημα $(D(A_i^{(X)}))_{i \in \mathbb{N}}$ ταυτίζεται με το σύστημα $(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_i, \Delta))_{i \in \mathbb{N}}$. Ο μονομορφισμός f_i επεκτείνεται σε μονομορφισμό $F_i : A_i \rightarrow \Delta$ για κάθε δείκτη i . Καθώς όμως από υπόθεση έχουμε $\varinjlim_{\rightarrow} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_i, \Delta) = 0$, κάθε απεικόνιση F_i μηδενίζεται σε πεπερασμένα βήματα σύνθεσης στο σύστημα, δηλαδή για κάθε δείκτη i υπάρχει δείκτης j ώστε $F_i \circ s_{ji} = 0$. Η απεικόνιση F_i είναι αριστερά διαγράψιμη, επομένως η απεικόνιση $s_{ji} = 0$. Επομένως το αντίστροφο σύστημα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι ουσιωδώς τετριμμένο. □

Πρόταση 9.2.2 Έστω R ένας δακτύλιος. Θεωρούμε ένα δεξιό R -πρότυπο M και ένα αριστερό R -πρότυπο N . Αν $\widehat{\text{Tor}}_n^R(M, N) = 0 = \widehat{\text{Tor}}_{n-1}^R(M^{(\mathbb{N})}, N)$ για κάποιον ακέραιο n , τότε $\widehat{\text{Ext}}_R^n(N, DM) = 0$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε μία εμφυτευτική επίλυση του προτύπου N , $N \rightarrow \mathbb{I}$. Συμβολίζουμε με A_i τα αντικείμενα που συνθέτουν το αντίστροφο όριο $\widehat{\text{Tor}}_n^R(M, N)$, $\text{Tor}_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$, για κάθε $i \geq 0$. Τότε, $A_i^{(\mathbb{N})} =$

$Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)^{(\mathbb{N})} = Tor_{n+i}^R(M^{(\mathbb{N})}, \Sigma^i N)$, διότι ο συναρτητής Tor μετατίθεται με ευθέα αθροίσματα.

Επίσης, $\widetilde{Ext}_R^n(N, DM) \simeq \widetilde{Ext}_R^n(N, DM) \simeq \varinjlim_i Ext_R^{n+i}(\Sigma^i N, DM) \simeq \varinjlim_i DA_i$, καθώς το ευθύ σύστημα $(Ext_R^{n+i}(\Sigma^i N, DM), d_i^n)_i$ ταυτίζεται με το σύστημα $(DTor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N), Dd_i^n)_i$.

Από το θεώρημα 7.3.1 έχουμε ότι η συνθήκη $\widetilde{Tor}_n^R(M, N) = 0$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\varprojlim_i^1 Tor_{n+i+1}^R(M, \Sigma^i N) = 0 = \varprojlim_i^1 Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$, ενώ η συνθήκη $\widetilde{Tor}_{n-1}^R(M^{(\mathbb{N})}, N) = 0$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\varprojlim_i^1 Tor_{n+i}^R(M^{(\mathbb{N})}, \Sigma^i N) = 0 = \varprojlim_i^1 Tor_{n-1+i}^R(M^{(\mathbb{N})}, \Sigma^i N)$.

Έτσι έχουμε $\varprojlim_i A_i = 0 = \varprojlim_i^1 A_i^{(\mathbb{N})}$. Από το προηγούμενο λήμμα, για X μονοσύνολο, προκύπτει ότι $\widetilde{Ext}_R^n(N, DM) = 0$. □

Πόρισμα 9.2.3 Έστω R ένας δακτύλιος και M ένα δεξιό R -πρότυπο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. $\widetilde{Tor}_*^R(-, DM) = 0$
2. $\widetilde{Tor}_0^R(M, DM) = 0 = \widetilde{Tor}_{-1}^R(M^{(\mathbb{N})}, DM)$
3. $fd_{R^{opp}} M < \infty$

Απόδειξη.

Η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ είναι προφανής.

$2 \Rightarrow 3$: Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $\widetilde{Ext}_R^0(DM, DM) = 0$, λόγω της υπόθεσης, όπου $\widetilde{Ext}_R^0(DM, DM) \simeq Ext_R^0(DM, DM)$. Αυτό σημαίνει ότι $id_R DM < \infty$. Θεωρώντας όμως μία επίπεδη επίλυση του προτύπου M και εφαρμόζοντας σε αυτήν το συναρτητή *Pontryagin* επιτυγχάνουμε μία εμφυτευτική επίλυση του προτύπου DM . Το γνωστό συζυγές ζεύγος μας δίνει την ισότητα $fd_{R^{opp}} M = id_R DM$, και έπεται το ζητούμενο.

$3 \Rightarrow 1$: Έπεται από τον ορισμό της ευσταθούς ομολογίας καθώς $id_R DM = fd_{R^{opp}} M < \infty$. □

Πρόταση 9.2.4 Έστω R ένας δακτύλιος. Θεωρούμε ένα δεξιό R -πρότυπο M και ένα αριστερό R -πρότυπο N . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. $\widetilde{Tor}_*^R(M^{(X)}, N) = 0$ για κάθε σύνολο X .
2. $\widetilde{Tor}_*^R(M^{(\mathbb{N})}, N) = 0$
3. $\widetilde{Ext}_R^*(N, D(M^{(X)})) = 0$ για κάθε σύνολο X .

Απόδειξη.

Θεωρούμε μία εμφυτευτική επίλυση του προτύπου N , $N \rightarrow \mathbb{I}$. Συμβολίζουμε με A_i^n τα αντικείμενα που συνθέτουν το αντίστροφο όριο $\widetilde{Tor}_n^R(M, N)$, $Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$, για κάθε $i \geq 0$. Τότε, $A_i^n(X) =$

$Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)^{(X)} = Tor_{n+i}^R(M^{(X)}, \Sigma^i N)$, διότι ο συναρτητής Tor μετατίθεται με ευθέα αθροίσματα. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα 7.3.1.

Η πρώτη συνθήκη της πρότασης, $\widetilde{Tor}_*^R(M^{(X)}, N) = 0$ για κάθε σύνολο X , είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\lim_{\leftarrow i}^1 Tor_{n+i+1}^R(M^{(X)}, \Sigma^i N) = 0 = \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(M^{(X)}, \Sigma^i N)$ για κάθε ακέραιο n και κάθε σύνολο X . Επομένως έχουμε $\lim_{\leftarrow i} A_i^n(X) = 0 = \lim_{\leftarrow i}^1 A_i^n(X)$ για κάθε σύνολο X και κάθε ακέραιο n . Αυτή η συνθήκη είναι η πρώτη συνθήκη του λήμματος 9.2.1 για τα συστήματα $(A_i^n)_{i \in \mathbb{N}}$ με n να διατρέχει τους ακεραίους.

Θεωρούμε τώρα τη συνθήκη $\widetilde{Tor}_*^R(M^{(\mathbb{N})}, N) = 0$. Από την προσθετικότητα της ευσταθούς ομολογίας έχουμε επίσης ότι $\widetilde{Tor}_*^R(M, N) = 0$, ως ευθύς παράγοντας του τετριμμένου αντικειμένου της υπόθεσης. Η δεύτερη συνθήκη της πρότασης είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\lim_{\leftarrow i}^1 Tor_{n+i+1}^R(M^{(\mathbb{N})}, \Sigma^i N) = 0 = \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(M^{(\mathbb{N})}, \Sigma^i N)$ για κάθε ακέραιο n . Δηλαδή έχουμε $\lim_{\leftarrow i} A_i^n(\mathbb{N}) = 0 = \lim_{\leftarrow i}^1 A_i^n(\mathbb{N})$

για κάθε ακέραιο n . Η εξασφαλισμένη συνθήκη $\widetilde{Tor}_*^R(M, N) = 0$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\lim_{\leftarrow i}^1 Tor_{n+i+1}^R(M, \Sigma^i N) = 0 = \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$ για κάθε ακέραιο n . Δηλαδή έχουμε $\lim_{\leftarrow i} A_i^n = 0 = \lim_{\leftarrow i}^1 A_i^n$ για κάθε ακέραιο n . Προκύπτει, λοιπόν η συνθήκη $\lim_{\leftarrow i} A_i^n = 0 = \lim_{\leftarrow i}^1 A_i^n$ για κάθε ακέραιο n . Αυτή η συνθήκη είναι η δεύτερη συνθήκη του λήμματος 9.2.1 για τα συστήματα $(A_i^n)_{i \in \mathbb{N}}$ με n να διατρέχει τους ακεραίους. Είναι επίσης προφανής η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$.

Από το λήμμα 9.2.1 έχουμε ότι οι δύο πρώτες συνθήκες της πρότασης είναι ισοδύναμες με τη συνθήκη $\lim_{\leftarrow i} D(A_i^n(X)) = 0$ για κάθε σύνολο X και κάθε ακέραιο n , δηλαδή $0 = \lim_{\leftarrow i} D(Tor_{n+i}^R(M^{(X)}, \Sigma^i N)) \simeq \lim_{\leftarrow i} Ext_R^{n+i}(\Sigma^i N, D(M^{(X)})) \simeq \widetilde{Ext}_R^n(N, D(M^{(X)})) \simeq \widetilde{Ext}_R^n(N, D(M^{(X)}))$ για κάθε σύνολο X και κάθε ακέραιο n , που αποτελεί την τρίτη συνθήκη της πρότασης. □

Πόρισμα 9.2.5 Έστω R ένας δακτύλιος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα αριστερό R -πρότυπο N .

1. $\widetilde{Tor}_*^R(-, N) = 0$
2. $\widetilde{Ext}_R^*(N, D-) = 0$.

Απόδειξη.

Το πόρισμα αναφέρεται στην προηγούμενη πρόταση. Η απόδειξη είναι εντελώς προφανής και μεγαλύτερος είναι ο κόπος να γραφεί παρά να αντιληφθεί.

Ο συναρτητής $\widetilde{Tor}_*^R(-, N)$ μηδενίζεται σε κάθε δεξιό R -πρότυπο, επομένως μηδενίζεται και σε κάθε δεξιό R -πρότυπο $M^{(X)}$ για κάθε σύνολο X και κάθε δεξιό R -πρότυπο M . Συνεπάγεται ότι ο συναρτητής $\widetilde{Ext}_R^*(N, D-)$ μηδενίζεται σε κάθε δεξιό R -πρότυπο $M^{(X)}$ για κάθε σύνολο X και κάθε δεξιό R -πρότυπο M . Επομένως, για X ένα μονοσύνολο, ο συναρτητής $\widetilde{Ext}_R^*(N, D-)$ μηδενίζεται σε κάθε δεξιό R -πρότυπο M . Αντίστροφα, ο συναρτητής $\widetilde{Ext}_R^*(N, D-)$ μηδενίζεται σε κάθε

δεξιό R -πρότυπο, επομένως μηδενίζεται και σε κάθε δεξιό R -πρότυπο $M^{(X)}$ για κάθε σύνολο X και κάθε δεξιό R -πρότυπο M . Συνεπάγεται ότι ο συναρτητής $\widetilde{Tor}_*^R(-, N)$ μηδενίζεται σε κάθε δεξιό R -πρότυπο $M^{(X)}$ για κάθε σύνολο X και κάθε δεξιό R -πρότυπο M . Επομένως, για X ένα μονοσύνολο, ο συναρτητής $\widetilde{Tor}_*^R(-, N)$ μηδενίζεται σε κάθε δεξιό R -πρότυπο M . \square

10 Κριτήρια μηδενισμού σε δακτύλιους αριστερά της Noether.

Θα περιοριστούμε τώρα στην περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι αριστερά της Noether. Αυτός ο περιορισμός μας εξασφαλίζει ότι, δεδομένης μίας εμφυτευτικής επίλυσης ενός αριστερού R -προτύπου N , $N \rightarrow \mathbb{I}$, το ευθύ άθροισμα του συμπλέγματος, $N^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{I}^{(\mathbb{N})}$, αποτελεί εμφυτευτική επίλυση του αριστερού R -προτύπου $N^{(\mathbb{N})}$. Οφείλεται στο ότι το ευθύ άθροισμα εμφυτευτικών αριστερών R -προτύπων, σε δακτύλιο R που είναι αριστερά της Noether, είναι επίσης εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο.

Η ακόλουθη πρόταση μοιάζει με την πρόταση 9.2.2.

Πρόταση 10.0.6 Έστω R ένας δακτύλιος αριστερά της Noether. Θεωρούμε ένα δεξιό R -πρότυπο M και ένα αριστερό R -πρότυπο N . Αν $\widetilde{Tor}_n^R(M, N) = 0 = \widetilde{Tor}_{n-1}^R(M, N^{(\mathbb{N})})$ για κάποιο ακέραιο n , τότε $\widetilde{Ext}_R^n(N, DM) = 0$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε μία εμφυτευτική επίλυση του προτύπου N , $N \rightarrow \mathbb{I}$. Συμβολίζουμε με A_i τα αντικείμενα που συνθέτουν το αντίστροφο όριο $\widehat{Tor}_n^R(M, N)$, $Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$, για κάθε $i \geq 0$. Τότε, $A_i^{(\mathbb{N})} = Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)^{(\mathbb{N})} = Tor_{n+i}^R(M, (\Sigma^i N)^{(\mathbb{N})})$, διότι ο συναρτητής Tor μετατίθεται με ευθέα αθροίσματα. Καθώς όμως ο δακτύλιος είναι αριστερά της Noether, το σύμπλεγμα $N^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{I}^{(\mathbb{N})}$, αποτελεί εμφυτευτική επίλυση του αριστερού R -προτύπου $N^{(\mathbb{N})}$, επομένως έχουμε $(\Sigma^i N)^{(\mathbb{N})} = \Sigma^i(N^{(\mathbb{N})})$, και έτσι $A_i^{(\mathbb{N})} = Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i(N^{(\mathbb{N})}))$.

Επίσης, $\widetilde{Ext}_R^n(N, DM) \simeq \widetilde{Ext}_R^n(N, DM) \simeq \varinjlim_i Ext_R^{n+i}(\Sigma^i N, DM) \simeq \varinjlim_i DA_i$, καθώς το ευθύ σύστημα $(Ext_R^{n+i}(\Sigma^i N, DM), d_i^n)_i$ ταυτίζεται με το σύστημα $(DTor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N), D\delta_n^i)_i$.

Από το θεώρημα 7.3.1 έχουμε ότι η συνθήκη $\widetilde{Tor}_n^R(M, N) = 0$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\varprojlim_i^1 Tor_{n+i+1}^R(M, \Sigma^i N) = 0 = \varprojlim_i^1 Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$, ενώ η συνθήκη $\widetilde{Tor}_{n-1}^R(M, N^{(\mathbb{N})}) = 0$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\varprojlim_i^1 Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i(N^{(\mathbb{N})})) = 0 = \varprojlim_i^1 Tor_{n-1+i}^R(M, \Sigma^i(N^{(\mathbb{N})}))$.

Έτσι έχουμε $\varprojlim_i^1 A_i = 0 = \varprojlim_i^1 A_i^{(\mathbb{N})}$. Από το λήμμα 9.2.1, για X μονοσύνολο, προκύπτει ότι $\widetilde{Ext}_R^n(N, DM) = 0$. \square

Η ακόλουθη πρόταση μοιάζει με την πρόταση 9.2.4.

Πρόταση 10.0.7 Έστω R ένας δακτύλιος αριστερά της Noether. Θεωρούμε ένα δεξιό R -πρότυπο M και ένα αριστερό R -πρότυπο N . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. $\widetilde{Tor}_*^R(M, N^{(X)}) = 0$ για κάθε σύνολο X .
2. $\widetilde{Tor}_*^R(M, N^{(\mathbb{N})}) = 0$
3. $\widetilde{Ext}_R^*(N^{(X)}, DM) = 0$ για κάθε σύνολο X .

Απόδειξη.

Θεωρούμε μία εμφυτευτική επίλυση του προτύπου N , $N \rightarrow \mathbb{I}$. Συμβολίζουμε με A_i^n τα αντικείμενα που συνθέτουν το αντίστροφο όριο $\widetilde{Tor}_n^R(M, N)$, $Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$, για κάθε $i \geq 0$. Τότε, $A_i^n(X) = Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)^{(X)} = Tor_{n+i}^R(M, (\Sigma^i N)^{(X)})$, διότι ο συναρτητής Tor μεταπίθεται με ευθέα αθροίσματα. Καθώς όμως ο δακτύλιος είναι αριστερά της *Noether*, το σύμπλεγμα $N^{(X)} \rightarrow \mathbb{I}^{(X)}$, αποτελεί εμφυτευτική επίλυση του αριστερού R -προτύπου $N^{(X)}$, για κάθε σύνολο X , επομένως έχουμε $(\Sigma^i N)^{(X)} = \Sigma^i(N^{(X)})$, και έτσι $A_i^n(X) = Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i(N^{(X)}))$, για κάθε σύνολο X . Χρησιμοποιούμε το θεώρημα 7.3.1.

Η πρώτη συνθήκη της πρότασης, $\widetilde{Tor}_*^R(M, N^{(X)}) = 0$ για κάθε σύνολο X , είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\lim_{\leftarrow i}^1 Tor_{n+i+1}^R(M, \Sigma^i(N^{(X)})) = 0 = \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i(N^{(X)}))$ για κάθε ακέραιο n και κάθε σύνολο X . Επομένως έχουμε $\lim_{\leftarrow i} A_i^n(X) = 0 = \lim_{\leftarrow i}^1 A_i^n(X)$ για κάθε σύνολο X και κάθε ακέραιο n . Αυτή η συνθήκη είναι η πρώτη συνθήκη του λήμματος 9.2.1 για τα συστήματα $(A_i^n)_{i \in \mathbb{N}}$ με n να διατρέχει τους ακεραίους.

Θεωρούμε τώρα τη συνθήκη $\widetilde{Tor}_*^R(M, N^{(\mathbb{N})}) = 0$. Από την προσθετικότητα της ευσταθούς ομολογίας έχουμε επίσης ότι $\widetilde{Tor}_*^R(M, N) = 0$, ως ευθύς παράγοντας του τετριμμένου αντικειμένου της υπόθεσης. Η δεύτερη συνθήκη της πρότασης είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\lim_{\leftarrow i}^1 Tor_{n+i+1}^R(M, \Sigma^i(N^{(\mathbb{N})})) = 0 = \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i(N^{(\mathbb{N})}))$ για κάθε ακέραιο n . Δηλαδή έχουμε $\lim_{\leftarrow i} A_i^n(\mathbb{N}) = 0 = \lim_{\leftarrow i}^1 A_i^n(\mathbb{N})$ για κάθε ακέραιο n . Η εξασφαλισμένη συνθήκη $\widetilde{Tor}_*^R(M, N) = 0$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\lim_{\leftarrow i}^1 Tor_{n+i+1}^R(M, \Sigma^i N) = 0 = \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i N)$ για κάθε ακέραιο n . Δηλαδή έχουμε $\lim_{\leftarrow i} A_i^n = 0 = \lim_{\leftarrow i}^1 A_i^n$ για κάθε ακέραιο n . Προκύπτει, λοιπόν η συνθήκη $\lim_{\leftarrow i} A_i^n = 0 = \lim_{\leftarrow i}^1 A_i^n(\mathbb{N})$ για κάθε ακέραιο n . Αυτή η συνθήκη είναι η δεύτερη συνθήκη του λήμματος 9.2.1 για τα συστήματα $(A_i^n)_{i \in \mathbb{N}}$ με n να διατρέχει τους ακεραίους. Είναι επίσης προφανής η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$.

Από το λήμμα 9.2.1 έχουμε ότι οι δύο πρώτες συνθήκες της πρότασης είναι ισοδύναμες με τη συνθήκη $\lim_{\leftarrow i} D(A_i^n(X)) = 0$ για κάθε σύνολο X και κάθε ακέραιο n , δηλαδή $0 = \lim_{\leftarrow i} D(Tor_{n+i}^R(M, \Sigma^i(N^{(X)}))) \simeq \lim_{\leftarrow i} Ext_R^{n+i}(\Sigma^i(N^{(X)}), DM) \simeq \widetilde{Ext}_R^n(N^{(X)}, DM) \simeq \widetilde{Ext}_R^n(N^{(X)}, DM)$ για κάθε σύνολο X και κάθε ακέραιο n , που αποτελεί την τρίτη συνθήκη της πρότασης. □

Ανάλογο του πορίσματος 9.2.5 αποτελεί το πόρισμα της παραπάνω πρότασης που δηλώνει ότι σε δακτύλιο R αριστερά της *Noether*, για ένα δεξιό R -πρότυπο M , ισχύει η ισοδυναμία $\widetilde{Tor}_*^R(M, -) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{Ext}_R^*(-, DM) = 0$.

Το ακόλουθο θεώρημα συμπληρώνει το πόρισμα 9.2.3 με την επιπλέον συνθήκη ότι ο δακτύλιος R είναι αριστερά της *Noether*.

Θεώρημα 10.0.8 Έστω R ένας δακτύλιος αριστερά της *Noether*. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα δεξιό R -πρότυπο M .

1. $\widetilde{Tor}_*^R(M, -) = 0$
2. $\widetilde{Tor}_0^R(M, DM) = 0 = \widetilde{Tor}_{-1}^R(M, (DM)^{(\mathbb{N})})$
3. $\widetilde{Tor}_*^R(-, DM) = 0$
4. $\widetilde{Tor}_0^R(M, DM) = 0 = \widetilde{Tor}_{-1}^R(M^{(\mathbb{N})}, DM)$
5. $\widetilde{Ext}_R^*(-, DM) = 0$
6. $fd_{Ropp} M < \infty$

Απόδειξη.

Οι συνθήκες 3, 4 και 6 είναι ισοδύναμες για κάθε δακτύλιο, όπως δηλώνει το πόρισμα 9.2.3.

Η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ είναι προφανής, για κάθε δακτύλιο.

Η συνεπαγωγή $6 \Rightarrow 1$ έπεται από τον ορισμό της ευσταθούς ομολογίας, και ισχύει για κάθε δακτύλιο.

Η ισοδυναμία $1 \Leftrightarrow 5$ ισχύει για δακτύλιο αριστερά της *Noether* και είναι το πόρισμα της πρότασης 10.0.7 και έπεται αυτής.

Η συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 6$ ισχύει για δακτύλιο αριστερά της *Noether* και αποδεικνύεται με χρήση της πρότασης 10.0.6 για $n = 0$ και $N = DM$. Πράγματι, η υπόθεση δίνει $\widetilde{Ext}_R^0(DM, DM) = 0$, όπου $\widetilde{Ext}_R^0(DM, DM) \simeq \widetilde{Ext}_R^0(DM, DM)$. Επομένως έχουμε $id_R DM < \infty$, δηλαδή $fd_{Ropp} M < \infty$. □

Θα μελετήσουμε τώρα την περίπτωση μηδενισμού της ευσταθούς ομολογίας $\widetilde{Tor}_*^R(-, N)$ σε δακτύλιο αριστερά της *Noether*. Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της *purity* και το κριτήριο του *Baer*.

Μία βραχεία ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \rightarrow L' \xrightarrow{i} L \rightarrow L'' \rightarrow 0$$

καλείται αμιγής αν η επαγόμενη ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \rightarrow Hom_R(C, L') \rightarrow Hom_R(C, L) \rightarrow Hom_R(C, L'') \rightarrow 0$$

είναι ακριβής για κάθε πεπερασμένα παριστώμενο αριστερό R -πρότυπο C . Τότε λέμε ότι η απεικόνιση i είναι αμιγής μονομορφισμός. Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη.

Αν $f : A \rightarrow B$ είναι R -γραμμική απεικόνιση αριστερών R -προτύπων με συμπυρήνα πεπερασμένα παριστώμενο αριστερό R -πρότυπο, C , και το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \downarrow & \swarrow g & \downarrow b \\ L' & \xrightarrow{i} & L \end{array}$$

τότε υπάρχει απεικόνιση $g : B \rightarrow L'$ με $a = g \circ f$, που συμπεριλάβαμε στο διάγραμμα.

Πράγματι, έστω ότι η ακολουθία $0 \rightarrow L' \xrightarrow{i} L \rightarrow L'' \rightarrow 0$ είναι αμιγής. Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα της υπόθεσης και κατασκευάζουμε τις απεικονίσεις h, k και g .

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{l} & C & \longrightarrow & 0 \\ a \downarrow & & \downarrow b & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{i} & L & \xrightarrow{p} & L'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $p \circ b$. Τότε $(p \circ b) \circ f = p \circ (b \circ f) = p \circ (i \circ a) = (p \circ i) \circ a = 0$, επομένως η $p \circ b$ παραγοντοποιείται μέσω του συμπυρήνα της f , δηλαδή υπάρχει απεικόνιση g με $h \circ l = p \circ b$. Καθώς η απεικόνιση i είναι αμιγής, υπάρχει απεικόνιση k με $p \circ k = h$. Θεωρούμε την απεικόνιση $b - k \circ l$. Τότε $p \circ (b - k \circ l) = p \circ b - p \circ k \circ l = h \circ l - h \circ l = 0$, επομένως, η απεικόνιση $b - k \circ l$ παραγοντοποιείται μέσω του πυρήνα της p , δηλαδή υπάρχει απεικόνιση g με $i \circ g = b - k \circ l$. Τότε, $i \circ g \circ f = (b - k \circ l) \circ f = b \circ f - k \circ l \circ f = i \circ a - 0 = i \circ a$, και η i είναι αριστερά διαγράψιμη.

Αντίστροφα, έστω C ένα πεπερασμένο παριστώμενο αριστερό R -πρότυπο. Θεωρούμε ελεύθερα R -πρότυπα πεπερασμένης διάστασης, R^m, R^n ώστε η ακολουθία $R^m \rightarrow R^n \rightarrow C$ να είναι ακριβής. Έστω απεικόνιση $h : C \rightarrow L''$. Θα κατασκευάσουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα ώστε να αποφανθούμε την ύπαρξη απεικόνισης k με $p \circ k = h$. Αυτό θα είναι αρκετό, καθώς ο συναρτητής $\text{Hom}_R(C, -)$ είναι αριστερά ακριβής.

$$\begin{array}{ccccccc} R^m & \xrightarrow{f} & R^n & \xrightarrow{l} & C & \longrightarrow & 0 \\ a \downarrow & & \downarrow b & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{i} & L & \xrightarrow{p} & L'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $h \circ l : R^n \rightarrow L''$. Καθώς το R -πρότυπο R^n είναι προβολικό και η απεικόνιση p είναι επί, υπάρχει απεικόνιση b τέτοια ώστε $p \circ b = h \circ l$. Θεωρούμε την απεικόνιση $b \circ f$. Τότε, $p \circ (b \circ f) = (p \circ b) \circ f = (h \circ l) \circ f = h \circ (l \circ f) = 0$. Επομένως, η απεικόνιση $b \circ f$ παραγοντοποιείται μέσω του πυρήνα της p , δηλαδή υπάρχει απεικόνιση a ώστε $i \circ a = b \circ f$. Από την υπόθεση, υπάρχει απεικόνιση g ώστε $g \circ f = a$. Θεωρούμε την απεικόνιση $b - i \circ g$. Τότε, $(b - i \circ g) \circ f = b \circ f - i \circ g \circ f = i \circ a - i \circ a = 0$. Επομένως, η απεικόνιση $b - i \circ g$ παραγοντοποιείται μέσω του συμπυρήνα της f , δηλαδή υπάρχει απεικόνιση k με $k \circ l = b - i \circ g$. Τότε, $p \circ k \circ l = p \circ (b - i \circ g) = p \circ b - p \circ i \circ g = h \circ l - 0 = h \circ l$, και η l είναι δεξιά διαγράψιμη.

Μία περίπτωση αμιγούς απεικόνισης είναι η φυσική απεικόνιση $L \xrightarrow{\nu_L} D^2L$, με L ένα αριστερό R -πρότυπο και D ο συναρτητής Pontryagin. Πράγματι, θα δείξουμε ότι η απεικόνιση ν_L είναι μονομορφισμός, και στη συνέχεια ότι είναι και αμιγής. Έχουμε

$$L \xrightarrow{\nu_L} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$l \longmapsto \nu_L(l) : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$[g : L \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \longmapsto \nu_L(l)(g) = g(l).$$

Έστω $l \neq 0, l \in L \neq 0$, με $\nu_L(l) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε απεικόνιση $g \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ισχύει $\nu_L(l)(g) = g(l) = 0$. Όμως, καθώς το \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι *faithfully injective*, για κάθε $l \in L$ με $l \neq 0$,

υπάρχει $k \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ με $k(l) \neq 0$. Άρα, αν $\nu_L(l) = 0$ τότε αναγκαστικά $l = 0$ που καθιστά την απεικόνιση ν_L $1 - 1$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η απεικόνιση ν_L είναι αμιγής. Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής πρόταση:
Έστω μία βραχεία ακριβής ακολουθία αριστερών R -προτύπων

$$0 \rightarrow L' \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} L'' \rightarrow 0.$$

Αν ο επαγόμενος επιμορφισμός

$$DL \xrightarrow{i^*} DL' \rightarrow 0$$

είναι διασπώμενος, τότε η απεικόνιση i είναι αμιγής.

Πράγματι, θεωρούμε την επαγόμενη ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow DL'' \xrightarrow{p^*} DL \xrightarrow{i^*} DL' \rightarrow 0$, καθώς ο συναρτητής *Pontryagin* είναι ακριβής. Από υπόθεση, είναι και διασπώμενη. Επομένως, για κάθε αριστερό R -πρότυπο A , η ακολουθία $0 \rightarrow DL'' \otimes_R A \xrightarrow{p^* \otimes 1} DL \otimes_R A \xrightarrow{i^* \otimes 1} DL' \otimes_R A \rightarrow 0$ είναι ακριβής. Θεωρούμε για A ένα πεπερασμένα παριστώμενο αριστερό R -πρότυπο, και το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα ακριβών γραμμών. Η απεικόνιση ϕ είναι η γνωστή φυσική.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & DL'' \otimes_R A & \xrightarrow{p^* \otimes 1} & DL \otimes_R A & \xrightarrow{i^* \otimes 1} & DL' \otimes_R A \longrightarrow 0 \\ & & \phi \downarrow \simeq & & \phi \downarrow \simeq & & \phi \downarrow \simeq \\ & & D\text{Hom}_R(A, L'') & \xrightarrow{p_*} & D\text{Hom}_R(A, L) & \xrightarrow{i_*} & D\text{Hom}_R(A, L') \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ένα απλό κунήγι διαγράμματος δείχνει ότι η απεικόνιση p_* είναι $1 - 1$. Επομένως, η ακολουθία $0 \rightarrow D\text{Hom}_R(A, L'') \xrightarrow{p_*} D\text{Hom}_R(A, L) \xrightarrow{i_*} D\text{Hom}_R(A, L') \rightarrow 0$ είναι ακριβής. Θεωρούμε τώρα την ακριβή ακολουθία $0 \rightarrow \text{Hom}_R(A, L') \xrightarrow{i_*} \text{Hom}_R(A, L) \xrightarrow{p_*} \text{Hom}_R(A, L'') \rightarrow \text{Coker } p_* \rightarrow 0$. Εφαρμόζοντας σε αυτήν το συναρτητή *Pontryagin*, λόγω της ακρίβειας της προηγούμενης ακολουθίας, προκύπτει ότι $D\text{Coker } p_* = 0$. Όμως, καθώς το \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι *faithfully injective*, έχουμε τελικά ότι $\text{Coker } p_* = 0$, και έτσι, η απεικόνιση i είναι αμιγής.

Θα δείξουμε τώρα, με χρήση της προηγούμενης πρότασης, ότι η απεικόνιση $L \xrightarrow{\nu_L} D^2L$ είναι αμιγής. Θεωρούμε την επαγόμενη απεικόνιση $D\nu_L$, και θα δείξουμε ότι $D\nu_L \circ \nu_{DL} = \mathbf{1}_{DL}$.

$$D^2(DL) = D(D^2L) \xrightarrow{D\nu_L} DL \xrightarrow{\nu_{DL}} 0$$

Θα είμαστε αναλυτικοί. Παραθέτουμε ξανά την απεικόνιση ν_L και γράφουμε και την απεικόνιση ν_{DL} .

$$L \xrightarrow{\nu_L} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$l \mapsto \nu_L(l) : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$[g : L \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \mapsto \nu_L(l)(g) = g(l).$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\nu_{DL}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$g \mapsto \nu_{DL}(g) : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$[k : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \mapsto \nu_{DL}(g)(k) = k(g).$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $D\nu_L \circ \nu_{DL} = \mathbf{1}_{DL}$, δηλαδή $(D\nu_L \circ \nu_{DL})(g) = \mathbf{1}_{DL}(g) = g$, για κάθε $g \in DL$, δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $l \in L$, $(D\nu_L \circ \nu_{DL})(g)(l) = g(l)$. Έχουμε $(D\nu_L \circ \nu_{DL})(g) = D\nu_L(\nu_{DL}(g)) = \nu_L^*(\nu_{DL}(g)) = \nu_{DL}(g) \circ \nu_L$. Έτσι, $(D\nu_L \circ \nu_{DL})(g)(l) = (\nu_{DL}(g) \circ \nu_L)(l) = \nu_{DL}(g)(\nu_L(l)) = \nu_L(l)(g) = g(l)$.

Λήμμα 10.0.9 Έστω R ένας δακτύλιος αριστερά της Noether. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα αριστερό R -πρότυπο L .

1. Το R -πρότυπο L είναι εμφυτευτικό.
2. Η φυσική απεικόνιση $\nu_L : L \rightarrow D^2L$ παραγοντοποιείται μέσω εμφυτευτικού προτύπου.
3. Υπάρχει αμιγής μονομορφισμός $i : L \rightarrow N$, που παραγοντοποιείται μέσω εμφυτευτικού προτύπου.

Απόδειξη.

Οι συνεπαγωγές $1 \Rightarrow 2$ και $2 \Rightarrow 3$ είναι προφανείς. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη δείχνοντας τη συνεπαγωγή $3 \Rightarrow 1$. Θεωρούμε, λοιπόν, έναν αμιγή μονομορφισμό $i : L \rightarrow N$, που παραγοντοποιείται μέσω εμφυτευτικού προτύπου I , $L \xrightarrow{a} I \xrightarrow{b} N$. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Baer για να δείξουμε ότι το L είναι εμφυτευτικό. Θεωρούμε ένα αριστερό ιδεώδες του δακτυλίου, J , και μία R -γραμμική απεικόνιση $f : J \rightarrow L$. Θεωρούμε τη σύνθεση $a \circ f : J \rightarrow I$, και, καθώς το I είναι εμφυτευτικό, υπάρχει απεικόνιση $g : R \rightarrow I$ που επεκτείνει τη σύνθεση, δηλαδή έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα, που περιέχεται στο επόμενο, το οποίο καταλήγει στο τρίτο μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\mu} & R \\ a \circ f \downarrow & & \swarrow g \\ I & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\mu} & R \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ L & \xrightarrow{a} & I \\ & & \searrow b \\ & & N \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\mu} & R \\ f \downarrow & & \downarrow b \circ g \\ L & \xrightarrow{i} & N \end{array}$$

Καθώς ο δακτύλιος είναι αριστερά της *Noether*, έχουμε ότι κάθε υποπρότυπο ενός πεπερασμένα παραγόμενου αριστερού R -πρότυπου είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενο. Επομένως, καθώς το ιδεώδες J είναι πεπερασμένα παραγόμενο, έπεται ότι ο συμπυρήνας της εμφύτευσης μ είναι πεπερασμένα παριστώμενο πρότυπο. Καθώς η απεικόνιση i είναι αμιγής, υπάρχει απεικόνιση h , όπως φαίνεται στο ανωτέρω διάγραμμα, με $h \circ \mu = f$. Επομένως, το πρότυπο L είναι εμφυτευτικό. \square

Για το ακόλουθο θεώρημα θα χρειαστούμε, επίσης, την πρόταση που δηλώνει ότι σε ένα δακτύλιο αριστερά της *Noether*, R , ο δυϊκός *Pontryagin* απεικονίζει εμφυτευτικά αριστερά R -πρότυπα σε επίπεδα δεξιά R -πρότυπα. Δυϊκώς αποδεικνύεται ότι σε ένα δακτύλιο δεξιά της *Noether*, R , ο δυϊκός *Pontryagin* απεικονίζει εμφυτευτικά δεξιά R -πρότυπα σε επίπεδα αριστερά R -πρότυπα.

Θεώρημα 10.0.10 Έστω R ένας δακτύλιος αριστερά της *Noether*. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για ένα αριστερό R -πρότυπο N .

1. $\widetilde{Tor}_*^R(-, N) = 0$
2. $\widetilde{Tor}_0^R(DN, N) = 0 = \widetilde{Tor}_{-1}^R((DN)^{(N)}, N)$
3. $\widetilde{Ext}_R^*(N, D-) = 0$
4. $\widetilde{Ext}_R^0(N, D^2N) = 0$
5. $id_R N < \infty$

Απόδειξη.

Η ισοδυναμία $1 \Leftrightarrow 3$ είναι το πόρισμα 9.2.5.

Η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ είναι προφανής.

Η συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 4$ έπεται από την πρόταση 9.2.2 για $n = 0$ και $M = DN$.

Η συνεπαγωγή $5 \Rightarrow 1$ έπεται από τον ορισμό της ευσταθούς ομολογίας.

Όλα τα παραπάνω ισχύουν για κάθε δακτύλιο. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη δείχνοντας τη συνεπαγωγή $4 \Rightarrow 5$ για δακτύλιο αριστερά της *Noether*.

Θεωρούμε μία εμφυτευτική επίλυση του προτύπου N , $N \rightarrow \mathbb{I}$. Εφαρμόζουμε το συναρτητή *Pontryagin* σε αυτήν. Καθώς, σε δακτύλιο αριστερά της *Noether*, ο συναρτητής αυτός απεικονίζει εμφυτευτικά αριστερά πρότυπα σε επίπεδα δεξιά πρότυπα, το προκύπτον σύμπλεγμα είναι μία επίπεδη επίλυση του δεξιού προτύπου DN . Εφαρμόζουμε πάλι το συναρτητή *Pontryagin* στην επίπεδη επίλυση και επιτυγχάνουμε μία εμφυτευτική επίλυση του αριστερού προτύπου D^2N . Τα συνσυσζυγή του πρότυπα, $\Sigma^i D^2N$, είναι ακριβώς τα πρότυπα $D^2 \Sigma^i N$ για κάθε φυσικό δείκτη i . Η φυσική απεικόνιση $\nu : N \rightarrow D^2N$ επεκτείνεται σε μορφισμό συναλυσσωτών συμπλεγμάτων, όπως φαίνεται ακολούθως.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & I^2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \nu_N \downarrow & & \nu_{I^0} \downarrow & & \nu_{I^1} \downarrow & & \nu_{I^2} \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & D^2N & \longrightarrow & D^2I^0 & \longrightarrow & D^2I^1 & \longrightarrow & D^2I^2 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Καθώς, όμως, έχουμε $\widetilde{Ext}_R^0(N, D^2N) = 0$, η προσέγγιση κατά *Benson* και *Carlson* μας δίνει ότι σε πεπερασμένα βήματα, για κάποιο δείκτη k , η επαγόμενη απεικόνιση $\nu_{\Sigma^k N} = \Sigma^k \nu_N : \Sigma^k N \rightarrow$

$\Sigma^k D^2 N = D^2 \Sigma^k N$ παραγοντοποιείται μέσω εμφυτευτικού προτύπου. Από το λήμμα 10.0.9 έχουμε ότι το πρότυπο $\Sigma^k N$ είναι εμφυτευτικό, δηλαδή έχουμε ότι το πρότυπο N έχει πεπερασμένη εμφυτευτική διάσταση.

□

11 Ισορροπία της ευσταθούς ομολογίας.

Από αποτελέσματα της κυρίας Ταλέλλη και του κύριου Εμμανουήλ έχουμε ότι, για ένα δακτύλιο R , αν $sflR < \infty$ και $sflR^{opp} < \infty$ τότε οι αναλλοίωτες αυτές είναι ίσες.

Κατ'άρχάς δείχνουμε ότι αν κάθε εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο έχει πεπερασμένη επίπεδη διάσταση τότε η αναλλοίωτη $sflR$ παρουσιάζει φράγμα. Τοιοιτοτρόπως δείχνουμε και για την περίπτωση των αντίστοιχων δεξιών R -προτύπων για να αποφανθούμε το φράγμα της αναλλοίωτης $sflR^{opp}$. Έστω, λοιπόν, ότι κάθε εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο έχει πεπερασμένη επίπεδη διάσταση. Έστω, προς άτοπο, ότι για κάθε φυσικό αριθμό i υπάρχει εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο I_i με επίπεδη διάσταση μεγαλύτερη του i . Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_i I_i$, και έστω η επίπεδη διάσταση, $n - 1$. Τότε, για κάθε δεξιό R -πρότυπο A , έχουμε $Tor_n^R(A, \prod_i I_i) = 0$. Το εμφυτευτικό πρότυπο I_n εμφυτεύεται ως ευθύς παράγοντας στο πρότυπο $\prod_i I_i$ και ο συναρτητής $Tor_n^R(A, -)$ είναι προσθετικός για κάθε δεξιό R -πρότυπο A . Επίσης, καθώς η επίπεδη διάσταση του προτύπου I_n υπερβαίνει το n , υπάρχει δεξιό R -πρότυπο A με $Tor_n^R(A, I_n) \neq 0$. Γι αυτό το πρότυπο A έχουμε $0 = Tor_n^R(A, \prod_i I_i) \simeq Tor_n^R(A, I_n) \oplus Tor_n^R(A, \prod_{i, i \neq n} I_i) \neq 0$. Καταλήξαμε σε άτοπο.

Ορίζουμε, για ένα δακτύλιο R , τη διάσταση *finitistic* επίπεδη αυτού, $ffdR$, ως το *supremum* των επίπεδων διαστάσεων των προτύπων που έχουν πεπερασμένη επίπεδη διάσταση.

Πρόταση 11.0.11 Έστω R ένας δακτύλιος. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα.

1. $ffdR \leq sflR^{opp}$
2. $sflR < \infty \Rightarrow sflR \leq ffdR$

Απόδειξη.

1. Θεωρούμε ένα αριστερό R -πρότυπο M με πεπερασμένη επίπεδη διάσταση, έστω $fd_R M = n$. Τότε, ο συναρτητής $Tor_{n+1}^R(-, M)$ είναι ο μηδενικός, ενώ υπάρχει κάποιο πρότυπο A_R με $Tor_n^R(A, M) \neq 0$. Το πρότυπο A εμφυτεύεται σε ένα εμφυτευτικό πρότυπο I , και έστω η παράσταση $0 \rightarrow A \rightarrow I \rightarrow I/A \rightarrow 0$. Τότε, από την ακριβή ακολουθία $0 = Tor_{n+1}^R(I/A, M) \rightarrow Tor_n^R(A, M) \rightarrow Tor_n^R(I, M)$ έχουμε $Tor_n^R(I, M) \neq 0$. Ειδικότερα έχουμε $fd_{R^{opp}} I \geq n = fd_R M$. Καθώς η $ffdR$ είναι το *supremum* των επίπεδων διαστάσεων των προτύπων που έχουν πεπερασμένη επίπεδη διάσταση και η αναλλοίωτη $sflR^{opp}$ είναι το *supremum* των επίπεδων διαστάσεων των εμφυτευτικών R^{opp} -προτύπων, συνεπάγεται ότι $sflR^{opp} \geq ffdR$.
2. Έστω ότι $sflR = n$. Τότε, υπάρχει εμφυτευτικό πρότυπο ${}_R I$ με $fd_R I = n$. Καθώς αυτό είναι πρότυπο με πεπερασμένη επίπεδη διάσταση, έχουμε ότι $ffdR \geq fd_R I = n = sflR$.

□

Πόρισμα 11.0.12 Έστω R δακτύλιος και έστω $sflR < \infty$ και $sflR^{opp} < \infty$. Τότε,

$$sflR = ffdR = sflR^{opp} = ffdR^{opp} < \infty.$$

Απόδειξη.

Καθώς $sflR < \infty$ και $sflR^{opp} < \infty$, έχουμε

$$sflR \leq ffdR \leq sflR^{opp} \leq ffdR^{opp} \leq sflR.$$

□

Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα ακυκλικό σύμπλεγμα T από επίπεδα R^{opp} -πρότυπα καλείται εντελώς ακυκλικό αν το σύμπλεγμα $T \otimes_R E$ είναι ακυκλικό για κάθε εμφυτευτικό R -πρότυπο E . Μία επίπεδη επίλυση Tate ενός R^{opp} -πρότυπου M είναι μία τριάδα (T, \mathbb{F}_*, n) , όπου το T είναι εντελώς ακυκλικό, η $\mathbb{F} \rightarrow M$ είναι επίπεδη επίλυση και ο δείκτης n είναι δείκτης σύμπτωσης αυτών, δηλαδή τα συμπλέγματα είναι ισόμορφα για δείκτες μεγαλύτερους ή ίσον με αυτόν. Ανάλογα ορίζεται η επίπεδη επίλυση Tate για ένα R -πρότυπο.

Λέμε ότι η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη για ένα ζεύγος προτύπων $(M_R, R N)$ αν οι αβελιανές ομάδες $\widehat{Tor}_n^R(M, N)$ και $\widehat{Tor}_n^{R^{opp}}(N, M)$ είναι ισόμορφες για κάθε δείκτη n , και έτσι θα υπολογίζεται είτε μέσω επίπεδης επίλυσης του προτύπου M και εμφυτευτικής επίλυσης του προτύπου N είτε μέσω επίπεδης επίλυσης του προτύπου N και εμφυτευτικής επίλυσης του προτύπου M .

Λήμμα 11.0.13 Έστω R ένας δακτύλιος και έστω $sflR = n < \infty$. Τότε, για κάθε αριστερό R -πρότυπο N υπάρχει ακυκλικό σύμπλεγμα T αποτελούμενο από επίπεδα αριστερά R -πρότυπα και ταυτίζεται με μία προβολική επίλυση του προτύπου για δείκτες μεγαλύτερους ή ίσον του n .

Απόδειξη.

Θεωρούμε μία εμφυτευτική επίλυση του προτύπου N , $N \rightarrow \mathbb{I}$. Με το λήμμα *Horseshoe* κατασκευάζουμε το μεταθετικό διάγραμμα προβολικών επιλύσεων των προτύπων της επίλυσης. Στο επίπεδο με δείκτη n , η ακριβής ακολουθία των πυρήνων αποτελεί δεξιά επίπεδη επίλυση του πυρήνα $R_n N$. Συνδέουμε την προβολική επίλυση του $R_n N$, που είναι το άνω μέρος προβολικής επίλυσης του N , με τη δεξιά επίπεδη επίλυσή του και προκύπτει το ζητούμενο σύμπλεγμα. Φαίνεται ακολούθως.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & R_n N & \longrightarrow & R_n I^0 & \longrightarrow & R_n I^1 & \longrightarrow & R_n I^2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots \\
 0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & P_0^0 & \longrightarrow & P_0^1 & \longrightarrow & P_0^2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \dots \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & I^2 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Λήμμα 11.0.15 Έστω F ένα κάτω φραγμένο αλυσωτό σύμπλεγμα από επίπεδα R^{opp} -πρότυπα. Έστω N ένα R -πρότυπο με προβολική επίλυση $\mathbb{P} \xrightarrow{\alpha} N$ και εμφυτευτική επίλυση $N \xrightarrow{\beta} \mathbb{I}$ και έστω $C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N$ ο κώνος του σχεδόν ισομορφισμού $\beta \circ \alpha$. Τότε τα συμπλέγματα $F \overline{\otimes}_R C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N$ και $F \widetilde{\otimes}_R \mathbb{I}^*$ έχουν ίδιες ομολογίες.

Απόδειξη.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & F \overline{\otimes}_R \mathbb{I}^* & \longrightarrow & F \overline{\otimes}_R C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N & \longrightarrow & F \overline{\otimes}_R \Sigma \mathbb{P}_* \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & F \overline{\otimes}_R \mathbb{I}^* & \longrightarrow & F \overline{\otimes}_R C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N & \longrightarrow & F \overline{\otimes}_R \Sigma \mathbb{P}_* \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \sim \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & F \widetilde{\otimes}_R \mathbb{I}^* & \xrightarrow{\cong} & F \widetilde{\otimes}_R C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N & \longrightarrow & F \widetilde{\otimes}_R \Sigma \mathbb{P}_* \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Καθώς τα συμπλέγματα F και \mathbb{P}_* είναι και τα δύο κάτω φραγμένα έχουμε ότι $F \overline{\otimes}_R \mathbb{P}_* = F \overline{\otimes}_R \mathbb{P}_*$ που καθιστά το σύμπλεγμα $F \widetilde{\otimes}_R \Sigma \mathbb{P}_*$ μηδενικό. Επιπλέον, το σύμπλεγμα F αποτελείται από επίπεδα πρότυπα, και όντας κάτω φραγμένο, το σύμπλεγμα DF είναι ένα κάτω φραγμένο συναλυσωτό σύμπλεγμα εμφυτευτικών αριστερών R -πρότυπων. Από το λήμμα 5.0.5, το σύμπλεγμα $Hom_R(C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N, DF)$ είναι ακυκλικό, ενώ από το γνωστό συζυγές ζεύγος είναι ισομορφο με το $D(F \overline{\otimes}_R C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N)$. Συνεπάγεται ότι το σύμπλεγμα $F \overline{\otimes}_R C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N$ είναι ακυκλικό, και δίνει το σχεδόν ισομορφισμό στο διάγραμμα. Επομένως τα συμπλέγματα $F \overline{\otimes}_R C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N$ και $F \widetilde{\otimes}_R \mathbb{I}^*$ έχουν ίδιες ομολογίες. \square

Το παραπάνω φαινόμενο στην επαγόμενη κατηγορία μεταφράζεται ως ισομορφισμός, γενικεύοντας την έννοια του σχεδόν ισομορφισμού, χωρίς δηλαδή απαραίτητα να επάγεται από μορφοισμό συμπλεγμάτων.

Λήμμα 11.0.16 Έστω T ένα αλυσωτό σύμπλεγμα από επίπεδα R^{opp} -πρότυπα τέτοιο ώστε το σύμπλεγμα $T \overline{\otimes}_R E$ είναι ακυκλικό για κάθε εμφυτευτικό R -πρότυπο E . Έστω N ένα R -πρότυπο με προβολική επίλυση $\mathbb{P} \xrightarrow{\alpha} N$ και εμφυτευτική επίλυση $N \xrightarrow{\beta} \mathbb{I}$ και έστω $C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N$ ο κώνος του σχεδόν ισομορφισμού $\beta \circ \alpha$. Τότε τα συμπλέγματα $T \overline{\otimes}_R C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N$ και $\Sigma(T \overline{\otimes}_R N)$ έχουν ίδιες ομολογίες.

Απόδειξη.

Από υπόθεση, το σύμπλεγμα $T \overline{\otimes}_R E$ είναι ακυκλικό για κάθε εμφυτευτικό R -πρότυπο E . Από το πρώτο σκέλος της πρότασης 6.1.4, καθώς το σύμπλεγμα \mathbb{I}^* ως αλυσωτό είναι άνω φραγμένο, έχουμε ότι το σύμπλεγμα $T \overline{\otimes}_R \mathbb{I}^*$ είναι ακυκλικό. Εφαρμόζουμε τώρα στη διασπώμενη, κατά βαθμό, ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow \mathbb{I}^* \longrightarrow C_{\mathbb{P}\mathbb{I}}^N \longrightarrow \Sigma \mathbb{P}_* \longrightarrow 0$ το συναρτητή $T \overline{\otimes}_R -$ και προκύπτει η ακόλουθη ακριβής, φέροντας το σχεδόν ισομορφισμό λόγω της προαναφερθείσας ακυκλικότητας.

$$0 \longrightarrow T \otimes_R \mathbb{I}^* \longrightarrow T \otimes_R C_{\mathbb{P}^1}^N \xrightarrow{\sim} T \otimes_R \Sigma \mathbb{P}_* \longrightarrow 0.$$

Θεωρούμε τώρα τον ακυκλικό κώνο της αλυσωτής απεικόνισης α , \mathbb{P}^+ . Το σύμπλεγμα $F \otimes_R \mathbb{P}^+$ είναι ακυκλικό για κάθε επίπεδο πρότυπο F . Έτσι, καθώς το σύμπλεγμα T αποτελείται από επίπεδα πρότυπα και ο κώνος αυτός είναι κάτω φραγμένος, το δεύτερο σκέλος της πρότασης 6.1.4 μας δίνει την ακυκλικότητα του συμπλέγματος $T \otimes_R \mathbb{P}^+$. Εφαρμόζουμε τώρα το συναρτητή $T \otimes_R -$ στη διασπώμενη, κατά βαθμό, ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow N \longrightarrow \mathbb{P}^+ \longrightarrow \Sigma \mathbb{P}_* \longrightarrow 0$ και προκύπτει η ακόλουθη ακριβής.

$$0 \longrightarrow T \otimes_R N \longrightarrow T \otimes_R \mathbb{P}^+ \longrightarrow T \otimes_R \Sigma \mathbb{P}_* \longrightarrow 0.$$

Από την τελευταία ακυκλικότητα έχουμε ότι τα συμπλέγματα $\Sigma(T \otimes_R N)$ και $T \otimes_R \Sigma \mathbb{P}_*$ έχουν ίδιες ομολογίες. Επομένως, τα συμπλέγματα $T \otimes_R C_{\mathbb{P}^1}^N$ και $\Sigma(T \otimes_R N)$ έχουν ίδιες ομολογίες. \square

Η κατασκευή του προαναφερθέντος κώνου $C_{\mathbb{P}^1}^N$, καθώς ως προς ομοτοπική ισοδυναμία είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των επιλύσεων, ορίζει συναρτητή στη θέση του προτύπου. Έτσι, οι ισομορφισμοί, στην επαγόμενη κατηγορία, των προηγούμενων λημμάτων είναι φυσική ισοδυναμία ως προς τη δεύτερη θέση. Επίσης, οι ίδιοι ισομορφισμοί ισχύουν και στην περίπτωση που αντικατασταθεί η προβολική επίλυση με επίπεδη.

Θεώρημα 11.0.17 Έστω M ένα R^{opp} -πρότυπο με επίπεδη επίλυση Tate (T, F, n) . Τότε, για κάθε R -πρότυπο N και κάθε δείκτη $i \in \mathbb{Z}$ ισχύει ο ακόλουθος ισομορφισμός που ορίζει φυσική ισοδυναμία στη δεύτερη μεταβλητή.

$$\widetilde{Tor}_i^R(M, N) \simeq H_i(T \otimes_R N)$$

Απόδειξη.

Θεωρούμε τον κώνο $C_{\mathbb{P}^1}^N$. Θεωρούμε τη διασπώμενη, κατά βαθμό, ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων $0 \longrightarrow T_{\leq n-1} \longrightarrow T \longrightarrow F_{\geq n} \longrightarrow 0$ και την επαγόμενη ομοίως ακριβή, $0 \longrightarrow T_{\leq n-1} \otimes_R C_{\mathbb{P}^1}^N \longrightarrow T \otimes_R C_{\mathbb{P}^1}^N \xrightarrow{\sim} F_{\geq n} \otimes_R C_{\mathbb{P}^1}^N \longrightarrow 0$.

Από το πρώτο σκέλος της πρότασης 6.1.4, καθώς ο κώνος είναι ακυκλικός και το σύμπλεγμα $T_{\leq n-1}$ άνω φραγμένο αποτελούμενο από εμφυτευτικά πρότυπα, έχουμε ότι το σύμπλεγμα $T_{\leq n-1} \otimes_R C_{\mathbb{P}^1}^N$ είναι ακυκλικό. Το σύμπλεγμα T είναι εντελώς ακυκλικό αποτελούμενο από επίπεδα πρότυπα, έτσι, το λήμμα 11.0.16 δίνει ότι τα συμπλέγματα $T \otimes_R C_{\mathbb{P}^1}^N$ και $\Sigma(T \otimes_R N)$ έχουν ίδιες ομολογίες. Ακόμα, το σύμπλεγμα $F_{\geq n}$ είναι κάτω φραγμένο αποτελούμενο από επίπεδα πρότυπα, έτσι, το λήμμα 11.0.15 δίνει ότι τα συμπλέγματα $F_{\geq n} \otimes_R C_{\mathbb{P}^1}^N$ και $F_{\geq n} \otimes_R \mathbb{I}^*$ έχουν ίδιες ομολογίες. Προκύπτει, λοιπόν, ότι τα συμπλέγματα $\Sigma(T \otimes_R N)$ και $F_{\geq n} \otimes_R \mathbb{I}^*$ έχουν ίδιες ομολογίες, το οποίο χρησιμοποιούμε παρακάτω. Υπολογίζουμε.

$$\begin{aligned} \widetilde{Tor}_i^R(M, N) &\stackrel{dim. \text{ shift.}}{\simeq} \widetilde{Tor}_{i-n}^R(C_n(F), N) \stackrel{definition, via \text{ flat res.}}{=} H_{i-n+1}((\Sigma^{-n} F_{\geq n}) \otimes_R \mathbb{I}^*) \stackrel{suspension}{=} \\ &H_{i+1}(F_{\geq n} \otimes_R \mathbb{I}^*) \simeq H_{i+1}(\Sigma(T \otimes_R N)) \stackrel{suspension}{=} H_i(T \otimes_R N) \end{aligned}$$

\square

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποδεικνύεται επίσης ως εξής: Καθώς το πρότυπο M έχει επίπεδη επίλυση Tate (T, F, n) , έχουμε ότι ο ομολογικός συναρτητής $Tor_*^R(M, -)$ είναι εμφυτευτικώς πλήρης για μεγάλους δείκτες. Ορίζεται έτσι η εμφυτευτική πλήρωση του $Tor_*^R(M, -)$, $\widetilde{Tor}_*^R(M, -)$, η οποία προκύπτει από την κατασκευή *Triulzi* με όλα τα αντίστροφα όρια που συνθέτουν τους συναρτητές εκφυλισμένα σε έναν μόνο δείκτη. Το *dimension shifting* επιτρέπει ο δείκτης αυτός να είναι ο ακέραιος $n + 1$ για όλους τους υπόλοιπους δείκτες, καθώς η πλήρωση είναι τερματική, δηλαδή για μεγάλους δείκτες ταυτίζεται με τον ομολογικό συναρτητή $Tor_*^R(M, -)$. Είναι η ακόλουθη.

$$\widetilde{Tor}_*^R(M, -) = \{\widetilde{Tor}_j^R(M, -)\}_{j \in \mathbb{Z}} = \{\lim_{\leftarrow k} Tor_{j+k}^R(M, \Sigma^k -), \check{\delta}\}_{j \in \mathbb{Z}} =$$

$$\{\dots, Tor_{i+1}^R(M, -), Tor_i^R(M, -), Tor_{i-1}^R(M, -), \dots, Tor_{n+1}^R(M, -), Tor_{n+1}^R(M, \Sigma -), Tor_{n+1}^R(M, \Sigma^2 -), \dots\}.$$

Καθώς τώρα ο συναρτητής $H_*(T \otimes_R N)$ είναι εμφυτευτικώς πλήρης και ταυτίζεται με τον προαναφερθέντα για μεγάλους δείκτες, από τη μοναδική επέκταση προς τα δεξιά έχουμε ότι τελικά θα είναι φυσικά ισοδύναμοι. Από τη διαγραμματική εποπτεία της απεικόνισης $\widetilde{Tor}_i^R(M, N) \xrightarrow{\Delta} \widehat{Tor}_i^R(M, N)$ και την εμφυτευτική πληρότητα του συναρτητή $Tor_*^R(M, -)$ για μεγάλους δείκτες υπολογίζουμε ότι για μεγάλους δείκτες, κάθε αντιπρόσωπος κλάσης στοιχείου του πυρήνα αυτής είναι κατασκευάσιμος ως στοιχείο της εικόνας του διαφορικού του ευσταθούς συμπλέγματος, που καθιστά τον πυρήνα αυτόν τετριμμένο. Πάλι, από τη μοναδική επέκταση προς τα δεξιά, για συνδεδεμένες οικογένειες συναρτητών που είναι εμφυτευτικώς πλήρεις και ταυτίζονται για μεγάλους δείκτες, έχουμε ότι τελικά θα είναι φυσικά ισοδύναμοι. Έτσι, έχουμε $\widetilde{Tor}_*^R(M, -) \simeq \widehat{Tor}_*^R(M, -) \simeq \widetilde{Tor}_*^R(M, -) \simeq H_*(T \otimes_R -)$.

Λήμμα 11.0.18 Έστω T και T' ακυκλικά συμπλέγματα από επίπεδα R^{opp} -πρότυπα και επίπεδα R -πρότυπα, αντίστοιχα. Για κάθε ακέραιο m και n έχουμε τους ακόλουθους ισομορφισμούς στην επαγόμενη κατηγορία.

1. $T_{\leq n-1} \otimes_R C_m(T') \sim \Sigma^{n-m}(C_n(T) \otimes_R T'_{\leq m-1})$
2. $T_{\geq n} \otimes_R C_m(T') \sim \Sigma^{n-m}(C_n(T) \otimes_R T'_{\geq m})$
3. $T \otimes_R C_m(T') \sim \Sigma^{n-m}(C_n(T) \otimes_R T')$

Απόδειξη.

1. Θεωρούμε τον άνω φραγμένο ακυκλικό κώνο $0 \rightarrow C_m(T') \rightarrow T'_{m-1} \rightarrow T'_{m-2} \rightarrow \dots$ του σχεδόν ισομορφισμού $C_m(T') \xrightarrow{\alpha} \Sigma^{1-m} T'_{\leq m-1}$, $Cone(\alpha)$. Το σύμπλεγμα $0 \rightarrow T_{n-1} \rightarrow T_{n-2} \rightarrow T_{n-3} \rightarrow \dots, T_{\leq n-1}$, είναι άνω φραγμένο αποτελούμενο από επίπεδα πρότυπα, επομένως, από το πρώτο σκέλος της πρότασης 6.1.4 προκύπτει η ακυκλικότητα του συμπλέγματος $T_{\leq n-1} \otimes_R Cone(\alpha)$ το οποίο ταυτίζεται με το σύμπλεγμα $T_{\leq n-1} \otimes_R Cone(\alpha) = Cone(T_{\leq n-1} \otimes_R \alpha)$ διότι αποτελούνται από συμπλέγματα της ίδιας μορφής φραγμένα. Έτσι, ο κώνος της $T_{\leq n-1} \otimes_R \alpha$ είναι ακυκλικός που μας δίνει τον ακόλουθο πρώτο ισομορφισμό στην επαγόμενη κατηγορία. Ομοίως προκύπτει ο τελευταίος, θεωρώντας το σχεδόν ισομορφισμό $C_n(T) \xrightarrow{\beta} \Sigma^{1-n} T_{\leq n-1}$. Οι υπόλοιποι οφείλονται στη *suspension*.

$$\begin{aligned}
T_{\leq n-1} \otimes_R C_m(T') &\xrightarrow{\alpha} T_{\leq n-1} \otimes_R (\Sigma^{1-m} T'_{\leq m-1}) \sim \Sigma^{n-m} \Sigma^{1-n} T_{\leq n-1} \otimes_R T'_{\leq m-1} \sim \\
&\sim \Sigma^{n-m} ((\Sigma^{1-n} T_{\leq n-1}) \otimes_R T'_{\leq m-1}) \xleftarrow{\beta} \Sigma^{n-m} (C_n(T) \otimes_R T'_{\leq m-1})
\end{aligned}$$

2. Το αλυσωτό σύμπλεγμα $T_{\geq n}$ είναι κάτω φραγμένο αποτελούμενο από επίπεδα πρότυπα, επομένως, από το λήμμα 5.0.5 και το γνωστό συζυγές ζεύγος, ο συναρτητής $T_{\geq n} \otimes_R -$ διατηρεί το

σχεδόν ισομορφισμό $\Sigma^{-m} T'_{\geq m} \xrightarrow{\gamma} C_m T'$. Προκύπτει, έτσι, ο ακόλουθος πρώτος ισομορφισμός στην επαγόμενη κατηγορία. Ομοίως προκύπτει ο τελευταίος, θεωρώντας το σχεδόν ισομορφισμό $\Sigma^{-n} T_{\geq n} \xrightarrow{\delta} C_n T$. Οι υπόλοιποι οφείλονται στη *suspension*.

$$\begin{aligned}
T_{\geq n} \otimes_R C_m(T') &\xleftarrow{\gamma} T_{\geq n} \otimes_R (\Sigma^{-m} T'_{\geq m}) \sim \Sigma^{n-m} \Sigma^{-n} T_{\geq n} \otimes_R T'_{\geq m} \sim \\
&\sim \Sigma^{n-m} ((\Sigma^{-n} T_{\geq n}) \otimes_R T'_{\geq m}) \xrightarrow{\delta} \Sigma^{n-m} (C_n(T) \otimes_R T'_{\geq m})
\end{aligned}$$

3. Ο ισομορφισμός στην επαγόμενη κατηγορία $T \otimes_R C_m(T') \sim \Sigma^{n-m} (C_n(T) \otimes_R T')$ προκύπτει από το 5-λήμμα σε αυτήν με συμπλήρωση μορφισμών τριγώνων.

Αλλιώς, θεωρούμε τη διασπώμενη, κατά βαθμό, ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων

$0 \rightarrow T_{\leq n-1} \rightarrow T \rightarrow T_{\geq n} \rightarrow 0$ η οποία σε κάθε βαθμό εμφανίζει μηδενικό ακραίο συντελεστή, και την επαγόμενη ομοίως ακριβή διασπώμενη.

$$0 \rightarrow T_{\leq n-1} \otimes_R C_m(T') \rightarrow T \otimes_R C_m(T') \rightarrow T_{\geq n} \otimes_R C_m(T') \rightarrow 0$$

Ομοίως θεωρούμε τη διασπώμενη, κατά βαθμό, ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων

$0 \rightarrow T'_{\leq m-1} \rightarrow T' \rightarrow T'_{\geq m} \rightarrow 0$ η οποία σε κάθε βαθμό εμφανίζει μηδενικό ακραίο συντελεστή, και την ακόλουθη ομοίως ακριβή διασπώμενη. Θεωρούμε, επίσης, την $(n-m)$ -*suspension* αυτής.

$$0 \rightarrow C_n(T) \otimes_R T'_{\leq m-1} \rightarrow C_n(T) \otimes_R T'_{\leq m-1} \rightarrow C_n(T) \otimes_R T'_{\leq m-1} \rightarrow 0$$

Οι ακολουθίες $0 \rightarrow T_{\leq n-1} \otimes_R C_m(T') \rightarrow T \otimes_R C_m(T') \rightarrow T_{\geq n} \otimes_R C_m(T') \rightarrow 0$ και $0 \rightarrow \Sigma^{n-m} C_n(T) \otimes_R T'_{\leq m-1} \rightarrow \Sigma^{n-m} C_n(T) \otimes_R T'_{\leq m-1} \rightarrow \Sigma^{n-m} C_n(T) \otimes_R T'_{\leq m-1} \rightarrow 0$ έχουν μετα-

ξύ τους στις ακραίες θέσεις συμπλέγματα με ίδιες ομολογίες, αντίστοιχα, και στη μεσαία θέση εμφανίζουν την τετριμμένη επέκταση των ακραίων συμπλεγμάτων με την έννοια ότι οι ακολουθίες σε κάθε βαθμό εμφανίζουν μηδενικό ακραίο συντελεστή. Έπεται ότι οι επεκτάσεις αυτές έχουν ίδια ομολογία.

□

Θεώρημα 11.0.19 Έστω M ένα R^{opp} -πρότυπο και N ένα R -πρότυπο. Αν και τα δύο έχουν επίπεδες επιλύσεις Tate τότε για κάθε ακέραιο i ισχύει ο ακόλουθος ισομορφισμός.

$$\widetilde{Tor}_i^R(M, N) \simeq \widetilde{Tor}_i^{R^{opp}}(N, M)$$

Απόδειξη.

Έστω οι επίπεδες επιλύσεις Tate των προτύπων M και N , (T, F, t) και (T', F', s) , αντίστοιχα. Επιλέγουμε έναν κοινό δείκτη σύμπτωσης, έστω q . Υπολογίζουμε για κάθε ακέραιο i .

$$\begin{aligned} \widetilde{Tor}_i^R(M, N) &\stackrel{11.0.17}{\simeq} H_i(T \otimes_R N) \stackrel{dim. shift.}{\simeq} H_{i-q}(T \otimes_R C_q(T')) \stackrel{11.0.18, 3, n=m=q}{\simeq} H_{i-q}(C_q(T) \otimes_R T') \stackrel{dim. shift.}{\simeq} \\ H_i(M \otimes_R T') &\stackrel{11.0.17}{\simeq} \widetilde{Tor}_i^{R^{opp}}(N, M) \end{aligned}$$

Τα *dimension shiftings* που χρησιμοποιούμε οφείλονται στην ακυκλικότητα των T και T' η οποία διατηρείται από το συναρτητή $-\otimes_R F$ για κάθε επίπεδο πρότυπο R^F . □

Μία άλλη απόδειξη της πρότασης 11.0.14 είναι η ακόλουθη.

Αν $sflR = N < \infty$ τότε

$$\widetilde{Tor}_*^R(A, -) \simeq \{ \lim_{\leftarrow i} Tor_{n+i}^R(A, \Sigma^i -), \check{\delta} \}_n \simeq \widehat{Tor}_*^R(A, -) \simeq$$

$\{ \dots, Tor_{n+1}^R(A, -), Tor_n^R(A, -), Tor_{n-1}^R(A, -), \dots, Tor_{N+1}^R(A, -), Tor_{N+1}^R(A, \Sigma -), Tor_{N+1}^R(A, \Sigma^2 -), \dots \}$, και είναι η εμφυτευτική πλήρωση του ομολογικού συναρτητή $Tor_*^R(A, -)$, για κάθε δεξιό R -πρότυπο A .

Ομοίως έχουμε ότι αν $sflR^{opp} = N < \infty$ τότε

$$\widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(B, -) \simeq$$

$\{ \dots, Tor_{n+1}^{R^{opp}}(B, -), Tor_n^{R^{opp}}(B, -), Tor_{n-1}^{R^{opp}}(B, -), \dots, Tor_{N+1}^{R^{opp}}(B, -), Tor_{N+1}^{R^{opp}}(B, \Sigma -), Tor_{N+1}^{R^{opp}}(B, \Sigma^2 -), \dots \}$, και είναι η εμφυτευτική πλήρωση του ομολογικού συναρτητή $Tor_*^{R^{opp}}(B, -)$, για κάθε δεξιό R^{opp} -πρότυπο B .

Με δεδομένο ότι η αναλλοίωτη $sflR^{opp}$ είναι πεπερασμένη, θεωρούμε το συναρτητή $\widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(-, A)$

με εκτίμηση στο αριστερό R -πρότυπο B να είναι μέσω του συναρτητή $\widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(B, -)$ εκτιμημένος στο δεξιό R -πρότυπο A , δηλαδή

$$\widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(-, A)(B) = \widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(B, -)(A).$$

Αν επιπλέον $sflR = N < \infty$, τότε, ο συναρτητής $\widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(-, A)$ είναι εμφυτευτικώς πλήρης.

Τότε, με δεδομένο ότι και οι δύο αναλλοίωτες $sflR$ και $sflR^{opp}$ είναι πεπερασμένες, άρα και ίσες,

έστω N , οι ομολογικοί συναρτητές $\widetilde{Tor}_*^R(A, -)$ και $\widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(-, A)$ ταυτίζονται για δείκτες μεγαλύτερους του N , αφού

$$\widetilde{Tor}_n^R(A, -)(B) = \widetilde{Tor}_n^R(A, B) = Tor_n^R(A, B) \simeq Tor_n^{R^{opp}}(B, A) = \widetilde{Tor}_n^{R^{opp}}(B, A) = \widetilde{Tor}_n^{R^{opp}}(-, A)(B),$$

για κάθε αριστερό R -πρότυπο B και κάθε $n > N$. Οι ομολογικοί αυτοί συναρτητές είναι εμφυτευτικώς πλήρεις, και αφού ταυτίζονται σε μεγάλες διαστάσεις, από τη μοναδική επέκταση στα δεξιά, είναι

φυσικά ισοδύναμοι. Επομένως, $\widetilde{Tor}_*^R(A, B) \simeq \widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(B, A)$ για κάθε ζεύγος προτύπων $(A_{R,R} B)$.

Έχουμε ήδη δείξει ότι αν $sflR < \infty$, τότε, η φυσική απεικόνιση $\widetilde{Tor}_n^R(A, B) \xrightarrow{\Delta} \widehat{Tor}_n^R(A, B)$ είναι ισομορφισμός για κάθε ζεύγος προτύπων $(A_{R,R} B)$, για κάθε ακέραιο n . Ομοίως έχουμε ότι αν $sflR^{opp} < \infty$, τότε, η φυσική απεικόνιση $\widetilde{Tor}_n^{R^{opp}}(B, A) \xrightarrow{\Delta} \widehat{Tor}_n^{R^{opp}}(B, A)$ είναι ισομορφισμός για κάθε ζεύγος προτύπων $(A_{R,R} B)$, για κάθε ακέραιο n . Επομένως, όταν οι αναλλοίωτες $sflR$ και $sflR^{opp}$ είναι πεπερασμένες, η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη επί του R .

Για την απόδειξη της επόμενης πρότασης θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση, καθώς και την επόμενη δυϊκή αυτής.

Σε ένα δακτύλιο δεξιά συνεκτικό, R , ο δυϊκός *Pontryagin* απεικονίζει εμφυτευτικά δεξιά R -πρότυπα σε επίπεδα αριστερά R -πρότυπα.

Σε ένα δακτύλιο αριστερά συνεκτικό, R , ο δυϊκός *Pontryagin* απεικονίζει εμφυτευτικά αριστερά R -πρότυπα σε επίπεδα δεξιά R -πρότυπα.

Πρόταση 11.0.20 Έστω R ένας δακτύλιος και έστω ότι η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη επί αυτού. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα.

1. Αν ο δακτύλιος R είναι δεξιά συνεκτικός ή αριστερά της *Noether*, τότε $sflR^{opp} < \infty$.
2. Αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά συνεκτικός ή δεξιά της *Noether*, τότε $sflR < \infty$.

Απόδειξη.

1. Θεωρούμε ένα εμφυτευτικό δεξιό R -πρότυπο I . Θα δείξουμε ότι έχει πεπερασμένη επίπεδη διάσταση.

Αν ο δακτύλιος R είναι δεξιά συνεκτικός, τότε το αριστερό R -πρότυπο DI είναι επίπεδο. Αφού η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη, έχουμε $\widetilde{Tor}_*^R(-, DI) \simeq \widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(DI, -)$, και από τον ορισμό της ευσταθούς ομολογίας, καθώς το πρότυπο DI είναι επίπεδο, οι συναρτητές αυτοί είναι τετριμμένοι. Από το πόρισμα 9.2.3 έχουμε $\widetilde{Tor}_*^R(-, DI) = 0 \Leftrightarrow fd_{R^{opp}}I < \infty$.

Γενικά, με δεδομένη την ισορροπία της ευσταθούς ομολογίας, έχουμε $\widetilde{Tor}_*^R(I, -) \simeq \widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(-, I)$, και από τον ορισμό της ευσταθούς ομολογίας, καθώς το πρότυπο I είναι εμφυτευτικό, οι συναρτητές αυτοί είναι τετριμμένοι. Αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά της *Noether*, τότε από το θεώρημα 10.0.10 έχουμε $\widetilde{Tor}_*^R(I, -) = 0 \Leftrightarrow fd_{R^{opp}}I < \infty$.

2. Η απόδειξη είναι όμοια.

Θεωρούμε ένα εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο I . Θα δείξουμε ότι έχει πεπερασμένη επίπεδη διάσταση.

Αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά συνεκτικός, τότε το δεξιό R -πρότυπο DI είναι επίπεδο. Αφού η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη, έχουμε $\widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(-, DI) \simeq \widetilde{Tor}_*^R(DI, -)$, και από τον ορισμό της ευσταθούς ομολογίας, καθώς το πρότυπο DI είναι επίπεδο, οι συναρτητές αυτοί είναι τετριμμένοι. Από το πόρισμα 9.2.3 έχουμε $\widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(-, DI) = 0 \Leftrightarrow fd_R I < \infty$, με $R^{opp} = R$.

Γενικά, με δεδομένη την ισορροπία της ευσταθούς ομολογίας, έχουμε $\widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(I, -) \simeq \widetilde{Tor}_*^R(-, I)$, και από τον ορισμό της ευσταθούς ομολογίας, καθώς το πρότυπο I είναι εμφυτευτικό, οι συναρτητές αυτοί είναι τετριμμένοι. Αν ο δακτύλιος R είναι δεξιά της *Noether*, δηλαδή ο δακτύλιος R^{opp} είναι αριστερά της *Noether*, τότε από το θεώρημα 10.0.10 έχουμε $\widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(I, -) = 0 \Leftrightarrow fd_R I < \infty$.

□

Θεώρημα 11.0.21 Έστω R ένας δακτύλιος που είναι αριστερά και δεξιά συνεκτικός. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. Η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη επί του R .
2. $sfl_i R = sfl_i R^{opp} < \infty$

Απόδειξη.

Η συνεπαγωγή $1 \Rightarrow 2$ έπεται από την προηγούμενη πρόταση, διότι, καθώς οι αναλλοίωτες $sfl_i R$ και $sfl_i R^{opp}$, λόγω της υπόθεσης, προκύπτουν πεπερασμένες, είναι και ίσες.

Η συνεπαγωγή $2 \Rightarrow 1$ ισχύει για κάθε δακτύλιο και έπεται από την πρόταση 11.0.14.

□

Αποδεικνύουμε στο παράρτημα τα ακόλουθα.

Αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά της *Noether*, τότε ισχύει η ισότητα $sfl_i R^{opp} = id_R R$. Διότι έχουμε ότι $sfl_i R = id_{R^{opp}} R$ όταν ο δακτύλιος R είναι δεξιά της *Noether*.

Αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά και δεξιά της *Noether* και οι διαστάσεις $id_R R$ και $id_{R^{opp}} R$ είναι πεπερασμένες τότε $id_{R^{opp}} R = sfl_i R = sfl_i R^{opp} = id_R R < \infty$.

Ένας δακτύλιος R λέγεται *Iwanaga – Gorenstein* αν ο δακτύλιος είναι αριστερά και δεξιά της *Noether* και οι διαστάσεις $id_R R$ και $id_{R^{opp}} R$ είναι πεπερασμένες. Συνεπάγεται από τα παραπάνω ότι οι πεπερασμένες αυτές διαστάσεις ταυτίζονται.

Πόρισμα 11.0.22 Έστω R ένας δακτύλιος που είναι αριστερά και δεξιά της *Noether*. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. Η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη επί του R .
2. Ο δακτύλιος R είναι *Iwanaga – Gorenstein*.

Απόδειξη.

Ένας δακτύλιος R που είναι αριστερά της *Noether* είναι και αριστερά συνεκτικός. Πράγματι, ένας δακτύλιος R είναι αριστερά της *Noether* αν κάθε αριστερό ιδεώδες του είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Επίσης, αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά της *Noether* τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο είναι πεπερασμένα παριστώμενο. Ένας δακτύλιος R είναι αριστερά συνεκτικός αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό ιδεώδες αυτού είναι πεπερασμένα παριστώμενο. Όμοια, αν ο δακτύλιος είναι δεξιά της *Noether*, τότε είναι και δεξιά συνεκτικός.

Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι αν η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη επί του R , τότε οι αναλλοίωτες $sfl_i R$ και $sfl_i R^{opp}$ είναι πεπερασμένες, άρα και ίσες. Καθώς έχουμε $id_{R^{opp}} R = sfl_i R = sfl_i R^{opp} = id_R R < \infty$, έπεται ότι ο δακτύλιος είναι *Iwanaga – Gorenstein*. Αντίστροφα, αν οι διαστάσεις $id_R R$ και $id_{R^{opp}} R$ είναι πεπερασμένες, τότε, έχουμε αντίστοιχα ότι οι αναλλοίωτες

$sflR^{opp}$ και $sflR$ είναι πεπερασμένες και ίσες. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη επί του R .

□

Παρατήρηση 11.0.23 Έστω ένας δακτύλιος R και έστω ότι η ευσταθής ομολογία είναι ισορροπημένη επί αυτού. Θεωρούμε ένα δεξιό R -πρότυπο M τέτοιο ώστε να ικανοποιεί μία από τις ακόλουθες δύο συνθήκες.

1. Το αριστερό R -πρότυπο DM έχει πεπερασμένη επίπεδη διάσταση.
2. Το δεξιό R -πρότυπο $M^{(\mathbb{N})}$ έχει πεπερασμένη εμφυτευτική διάσταση.

Τότε, η επίπεδη διάσταση του δεξιού R -προτύπου M είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη.

1. Από την ισορροπία της ευσταθούς ομολογίας έχουμε $\widetilde{Tor}_*^R(-, DM) \simeq \widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(DM, -)$. Καθώς το αριστερό R -πρότυπο DM έχει πεπερασμένη επίπεδη διάσταση, έπεται ότι οι προηγούμενοι συναρτητές είναι οι μηδενικοί. Από το πόρισμα 9.2.3 έχουμε $\widetilde{Tor}_*^R(-, DM) = 0 \Leftrightarrow fd_{R^{opp}}M < \infty$.
2. Από την ισορροπία της ευσταθούς ομολογίας έχουμε $\widetilde{Tor}_*^R(M^{(\mathbb{N})}, -) \simeq \widetilde{Tor}_*^{R^{opp}}(-, M^{(\mathbb{N})})$. Καθώς το δεξιό R -πρότυπο $M^{(\mathbb{N})}$ έχει πεπερασμένη εμφυτευτική διάσταση, έπεται ότι οι προηγούμενοι συναρτητές είναι οι μηδενικοί. Από την πρόταση 9.2.4 έχουμε $\widetilde{Tor}_*^R(M^{(\mathbb{N})}, -) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{Ext}_R^*(-, D(M^{(X)})) = 0$ για κάθε σύνολο X . Ειδικότερα, για X μονοσύνολο, έχουμε ότι ο συνολογικός συναρτητής $\widetilde{Ext}_R^*(-, DM)$ είναι ο μηδενικός. Επομένως έχουμε $\widetilde{Ext}_R^0(DM, DM) = 0$, άρα $id_R DM < \infty$, δηλαδή $fd_{R^{opp}}M < \infty$.

□

12 Παράρτημα.

12.1 Η απεικόνιση Φ .

Έστω R και S δακτύλιοι. Θεωρούμε, για πρότυπα $A_R, {}_S B_R, {}_S C$, τη γνωστή απεικόνιση

$$\Phi : A \otimes_R Hom_S(B, C) \rightarrow Hom_S(Hom_{R^o}(A, B), C), a \otimes f \mapsto h : g \mapsto f(g(a)).$$

Από την προσθετικότητα του τανυστικού γινομένου έχουμε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι ισομορφισμός όταν το A είναι πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό δεξιό R -πρότυπο. Είναι επίσης ισομορφισμός και στην περίπτωση που το C είναι εμφυτευτικό αριστερό S -πρότυπο και το A πεπερασμένα παριστώμενο δεξιό R -πρότυπο. Αποδεικνύεται διαγραμματικώς ακολούθως με χρήση της μεταθετικότητας αυτού και του 3-λήμματος. Κάθε ακολουθία είναι ακριβής.

$$R^m \rightarrow R^n \rightarrow A \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(A, B) \rightarrow \text{Hom}_R(R^n, B) \rightarrow \text{Hom}_R(R^m, B)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(R^m, B), C) & \longrightarrow & \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(R^n, B), C) & \longrightarrow & \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(A, B), C) & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow \simeq \Phi & & \uparrow \simeq \Phi & & \uparrow \Phi & & \\ R^m \otimes_R \text{Hom}_S(B, C) & \longrightarrow & R^n \otimes_R \text{Hom}_S(B, C) & \longrightarrow & A \otimes_R \text{Hom}_S(B, C) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

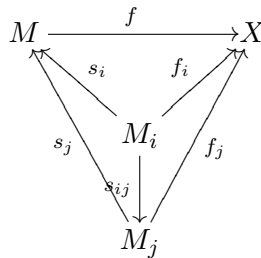
12.2 Πρότυπα.

Η ακόλουθη πρόταση επιδέχεται δυϊκότητα θεωρώντας δεξιά R -πρότυπα.

Πρόταση 12.2.1 Κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι το ευθύ όριο των πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του σε ένα κατευθυνόμενο σύνολο δεικτών.

Απόδειξη.

Έστω M ένα αριστερό R -πρότυπο. Θεωρούμε την οικογένεια όλων των πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του, $\{M_i\}_{i \in I}$, με I ένα σύνολο δεικτών, η οποία είναι μερικώς διατεταγμένη με διάταξη την εμφύτευση. Η οικογένεια αυτή καθίσταται ένα ευθύ σύστημα θεωρώντας απεικόνιση για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j) με $i \leq j$ τον εγκλεισμό $s_{ij} : M_i \subseteq M_j$. Το σύνολο δεικτών I είναι, επίσης, κατευθυνόμενο, καθώς για κάθε ζεύγος δεικτών (i, j) υπάρχει δείκτης k με $i \leq k$ και $j \leq k$. Θεωρούμε το αντικείμενο $(M, s_i)_{i \in I}$ με $s_i : M_i \subseteq M$ τον εγκλεισμό για κάθε δείκτη i , με συμβιβασμό ως προς τις απεικονίσεις s_{ij} για κάθε ζεύγος δεικτών, και δείχνουμε ότι το αντικείμενο αυτό έχει την καθολική ιδιότητα του ευθέος ορίου του συστήματος. Πράγματι, για το αντικείμενο $(X, f_i)_i$ με συμβιβασμό ως προς τις απεικονίσεις s_{ij} για κάθε ζεύγος δεικτών, ορίζουμε απεικόνιση $f : M \rightarrow X$ με $f(m) = f_k(m)$ αν $m \in M_k$. Η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη, διότι, αν το στοιχείο $m \in M_l$, τότε, καθώς το σύνολο δεικτών είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει δείκτης n με $k \leq n$ και $l \leq n$ ώστε $f_l(m) = f_n(s_{ln}(m)) = f_n(m) = f_n(s_{kn}(m)) = f_k(m)$. Η απεικόνιση f που επεκτείνει τις f_i για κάθε δείκτη i ορίζεται μοναδικά ως προς τους εγκλεισμούς $s_i : M_i \subseteq M$ για κάθε δείκτη i .



□

12.3 Εμφυτευτικά πρότυπα.

Το ακόλουθο κριτήριο επιδέχεται δυϊκότητα θεωρώντας δεξιά R -πρότυπα.

Κριτήριο του Baer. 12.3.1 Θεωρούμε ένα δακτύλιο R . Τότε, ένα αριστερό R -πρότυπο E είναι εμφυτευτικό αν και μόνο αν, για κάθε αριστερό ιδεώδες J του δακτυλίου, κάθε απεικόνιση $J \rightarrow E$ επεκτείνεται σε απεικόνιση $R \rightarrow E$.

Απόδειξη.

Η μία κατεύθυνση είναι προφανής από τον ορισμό του εμφυτευτικού προτύπου.

Έστω τώρα ένα αριστερό R -πρότυπο B , ένα υποπρότυπο αυτού, A , και η εμφύτευση $A \xrightarrow{\mu} B$. Θεωρούμε μία απεικόνιση $A \xrightarrow{\alpha} E$. Θα δείξουμε την ύπαρξη απεικόνισης β ώστε $\beta \circ \mu = \alpha$.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\mu} & B \\ & & \downarrow \alpha & \swarrow \beta & \\ & & E & & \end{array}$$

Έστω \mathfrak{E} το μερικώς διατεταγμένο σύνολο των επεκτάσεων $\alpha' : A' \rightarrow E$ της α , με A' ένα ενδιάμεσο υποπρότυπο, $A \subseteq A' \subseteq B$. Η μερική διάταξη είναι: $\alpha' \leq \alpha''$ αν η α'' επεκτείνει την α' , η οποία έχει αυτοπάθεια, μεταβατικότητα και συμμετρία. Δείχνουμε ότι κάθε μη κενό ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του \mathfrak{E} , \mathfrak{U} , έχει ένα άνω φράγμα στο \mathfrak{E} . Δηλαδή, αν το \mathfrak{U} έχει την ιδιότητα ότι κάθε δύο στοιχεία αυτού διατάσσονται, τότε για κάθε στοιχείο ψ του \mathfrak{U} υπάρχει στοιχείο χ στο \mathfrak{E} ώστε $\psi \leq \chi$. Πράγματι, θεωρούμε το επαγωγικό σύστημα που δημιουργούν τα ενδιάμεσα υποπρότυπα του B μαζί με τις επεκτάσεις που ορίζει η διάταξη, ως στοιχεία του \mathfrak{U} . Το ευθύ όριο του συστήματος, λόγω της καθολικής του ιδιότητας, πληροί τις προϋποθέσεις του άνω φράγματος, καθώς ορίζεται μοναδική απεικόνιση που επεκτείνει όλες τις προηγούμενες.

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & \xrightarrow{\subseteq} & A_a & \xrightarrow{\subseteq} & A_b & \xrightarrow{\subseteq} & A_c & \xrightarrow{\subseteq} & \dots & \xrightarrow{\subseteq} & \lim A_a \\ \downarrow \alpha & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & & & \downarrow l \\ E & \xrightarrow{1} & E & \xrightarrow{1} & E & \xrightarrow{1} & E & \xrightarrow{1} & \dots & \xrightarrow{1} & E \end{array}$$

Παραθέτουμε το λήμμα του Zorn το οποίο, στη Θεωρία Συνόλων, είναι ισοδύναμο με το Αξίωμα της Επιλογής.

Έστω $\mathfrak{E} \neq \emptyset$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο του οποίου κάθε μη κενό ολικά διατεταγμένο υποσύνολο έχει ένα άνω φράγμα στο \mathfrak{E} . Τότε το \mathfrak{E} έχει ένα (τουλάχιστον) μέγιστο στοιχείο M , δηλαδή στοιχείο για το οποίο δεν υπάρχει στοιχείο M' με $M \leq M'$ και $M \neq M'$.

Από το λήμμα του Zorn υπάρχει μέγιστη επέκταση (A_M, a_M) στο \mathfrak{E} που επεκτείνει την (A, α) . Θα δείξουμε ότι $A_M = B$. Έστω προς άτοπο, ότι υπάρχει στοιχείο $b \in B$ που δεν ανήκει στο A_M . Θεωρούμε το αριστερό ιδεώδες του δακτυλίου, $J = \{r \in R : br \in A_M\}$. Από υπόθεση, η απεικόνιση $J \xrightarrow{b} A_M \xrightarrow{a_M} E$ τέτοια ώστε $r \mapsto br \mapsto a_M(br)$ επεκτείνεται σε απεικόνιση $f : R \rightarrow E$.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & J & \xrightarrow{\varepsilon} & R \\ & & \downarrow a_M \circ b & \swarrow f & \\ & & E & & \end{array}$$

Θεωρούμε το υποπρότυπο του B , $A' = A_M + bR$ και ορίζουμε απεικόνιση $a' : A' \rightarrow E$ τέτοια ώστε $a + br \mapsto a_M(a) + f(r)$ με $a \in A_M$ και $r \in R$. Η απεικόνιση a' είναι καλά ορισμένη, αφού $a_M(br) = f(r)$ για $br \in A_M \cap bR$. Η απεικόνιση a' επεκτείνει την απεικόνιση a_M , άτοπο. Επομένως $A_M = B$.

□

12.4 Δακτύλιοι αριστερά της Noether.

Τα ακόλουθα που αφορούν σε δακτύλιο αριστερά της Noether επιδέχονται δυϊκότητα θεωρώντας δεξιά πρότυπα.

Ορισμός 12.4.1 Ένας δακτύλιος R λέγεται αριστερά της Noether αν κάθε αριστερό ιδεώδες του είναι πεπερασμένα παραγόμενο ως R -πρότυπο.

Θεώρημα 12.4.2 Ένας δακτύλιος R είναι αριστερά της Noether αν και μόνο αν κάθε υποπρότυπο ενός πεπερασμένα παραγόμενου αριστερού R -προτύπου είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενο.

Απόδειξη.

Έστω $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο. Έστω S ένα υποπρότυπο αυτού. Θα δείξουμε με επαγωγή στο πλήθος των R -γεννητόρων, n , ότι το S είναι επίσης πεπερασμένα παραγόμενο. Αν $n = 1$, τότε το πρότυπο M είναι κυκλικό. Αποδεικνύουμε ότι το πρότυπο είναι ισόμορφο με R/I , για κάποιο αριστερό ιδεώδες I του δακτυλίου R . Πράγματι, για κάθε δακτύλιο, ένα πρότυπο είναι κυκλικό αν και μόνο αν είναι αυτής της μορφής. Ένας ισομορφισμός $f : R/I \rightarrow M$ καθιστά το πρότυπο M κυκλικό, με γεννήτορα το στοιχείο $f(1+I)$, όπου $1+I$ είναι ο γεννήτορας του κυκλικού προτύπου R/I . Αντίστροφα, θεωρώντας το πρότυπο $M = \langle x \rangle$, ορίζουμε τον επιμορφισμό $f : R \rightarrow M$ με $f(r) = rx$. Τότε $M \simeq R/\text{Ker}f$, όπου ο $\text{Ker}f = \{r \in R \mid rx = 0\}$ είναι αριστερό ιδεώδες του δακτυλίου. Επομένως, το υποπρότυπο S έχει τη μορφή J/I με J ένα αριστερό ιδεώδες του δακτυλίου που περιέχει το I . Ο δακτύλιος R είναι αριστερά της Noether, άρα το ιδεώδες J είναι πεπερασμένα παραγόμενο, επομένως ομοίως θα είναι και η εικόνα του, J/I . Έστω τώρα ότι $n > 1$, και θεωρούμε το κυκλικό πρότυπο $M' = \langle x_n \rangle$. Παραθέτουμε τις ακόλουθες ακριβείς ακολουθίες.

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M/M' \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow S \cap M' \rightarrow S \rightarrow S/S \cap M' \rightarrow 0$$

Το $S \cap M'$, ως υποπρότυπο του κυκλικού προτύπου M' είναι πεπερασμένα παραγόμενο, όπως αποδείξαμε πριν. Το πρότυπο M/M' παράγεται από στοιχεία πλήθους $n - 1$. Έχουμε $S/S \cap M' \simeq (S + M')/M'$, το οποίο είναι υποπρότυπο του M/M' . Από την επαγωγική υπόθεση, είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Για κάθε δακτύλιο, η ιδιότητα του πεπερασμένα παραγόμενου είναι κλειστή ως προς επεκτάσεις, επομένως το υποπρότυπο S είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Το αντίστροφο είναι άμεσο καθώς τα αριστερά ιδεώδη είναι τα υποπρότυπα του R , που από την υπόθεση είναι πεπερασμένα παραγόμενα. Επομένως ο δακτύλιος είναι αριστερά της Noether.

□

Πόρισμα 12.4.3 Έστω R ένας δακτύλιος αριστερά της Noether. Τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο είναι και πεπερασμένα παριστώμενο.

Απόδειξη.

Έστω M ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό R -πρότυπο, με R ένας δακτύλιος αριστερά της Noether. Εν όψει μίας πεπερασμένου τύπου προβολικής παράστασης αυτού, θεωρώντας το ως πηλίκο ενός πεπερασμένα παραγόμενου ελεύθερου R -πρότυπου, R^n , $0 \rightarrow K \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0$, έχουμε από το προηγούμενο θεώρημα ότι το πρότυπο K είναι πεπερασμένα παραγόμενο, καθιστώντας το πρότυπο M πεπερασμένα παριστώμενο. □

Με χρήση του κριτηρίου του Baer αποδεικνύουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 12.4.4 Αν ένας δακτύλιος είναι αριστερά της Noether τότε το ευθύ άθροισμα εμφυτευτικών αριστερών R -πρότυπων είναι επίσης εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο.

Απόδειξη.

Έστω E_i ένα αριστερό εμφυτευτικό R -πρότυπο, για κάθε δείκτη $i \in I$ με I ένα σύνολο δεικτών. Θεωρούμε το ευθύ άθροισμα αυτών, $\bigoplus_{i \in I} E_i$. Θεωρούμε ένα ιδεώδες του δακτυλίου, J . Θα δείξουμε ότι κάθε απεικόνιση $f : J \rightarrow \bigoplus_{i \in I} E_i$ επεκτείνεται σε $g : R \rightarrow \bigoplus_{i \in I} E_i$, όπως φαίνεται ακολούθως.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & J & \xrightarrow{\varepsilon} & R \\
 & & \downarrow f & \swarrow g & \\
 & & \bigoplus_{i \in I} E_i & &
 \end{array}$$

Καθώς ο δακτύλιος R είναι αριστερά της Noether, το ιδεώδες J είναι πεπερασμένα παραγόμενο, έστω $J = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Θεωρούμε τις εικόνες των a_k μέσω της απεικόνισης f , $f(a_k)$, για κάθε δείκτη k των γεννητόρων του ιδεώδους. Κάθε τέτοια εικόνα περιέχεται σε ένα πεπερασμένο ευθύ άθροισμα, συνιστάμενο από κάποια E_i , και καθώς το πλήθος των γεννητόρων a_k είναι πεπερασμένο, η εικόνα της f περιέχεται επίσης σε ένα πεπερασμένο ευθύ άθροισμα, συνιστάμενο από κάποια E_i . Καθώς το πεπερασμένων δεικτών ευθύ άθροισμα ταυτίζεται με το πεπερασμένων δεικτών καρτεσιανό γινόμενο των αντικειμένων, είναι εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο. Υπάρχει, λοιπόν, απεικόνιση που επεκτείνει την f μέσω του δακτυλίου, και θεωρούμε g τη σύνθεση της εμφύτευσης του πεπερασμένου ευθέος αθροίσματος αυτού στο $\bigoplus_{i \in I} E_i$ με την επέκταση. □

Πρόταση 12.4.5 Σε ένα δακτύλιο αριστερά της Noether, R , ο δυϊκός συναρτητής Pontryagin απεικονίζει εμφυτευτικά αριστερά R -πρότυπα σε επίπεδα δεξιά R -πρότυπα.

Απόδειξη.

Θεωρούμε ένα εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο, I . Θα δείξουμε ότι ο συναρτητής $Tor_1^R(DI, -)$ είναι ο μηδενικός, ισοδύναμα θα έχουμε ότι το δεξιά R -πρότυπο DI είναι επίπεδο. Αρκεί να δείξουμε ότι ο συναρτητής $Tor_1^R(DI, -)$ μηδενίζεται στα πεπερασμένα παριστώμενα αριστερά R -πρότυπα. Αυτό είναι όντως αρκετό, διότι, κάθε πρότυπο γράφεται ως ευθύ όριο πεπερασμένα παριστώμενων προτύπων με

σύνολο δεικτών κατευθυνόμενο, και ο συναρτητής $Tor_1^R(DI, -)$ μετατίθεται με ευθεία όρια με σύνολο δεικτών κατευθυνόμενο.

Θεωρούμε, λοιπόν, ένα πρότυπο M πεπερασμένα παριστώμενο και μία πεπερασμένου τύπου προβολική παράσταση αυτού, $0 \rightarrow K \xrightarrow{a} R^m \xrightarrow{b} M \rightarrow 0$. Το πρότυπο K είναι πεπερασμένα παραγόμενο επομένως και πεπερασμένα παριστώμενο καθώς ο δακτύλιος είναι αριστερά της *Noether*. Εφαρμόζουμε στην παραπάνω παράσταση τον ακριβή συναρτητή $Hom_R(-, I)$, και στην προκύπτουσα το συναρτητή *Pontryagin* πάραυτα. Θεωρούμε επίσης τη γνωστή απεικόνιση Φ . Έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα ακριβών γραμμών.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & DHom_R(K, I) & \xrightarrow{a^*} & DHom_R(R^m, I) & \xrightarrow{b^*} & DHom_R(M, I) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \simeq \Phi & & \uparrow \simeq \Phi & & \uparrow \simeq \Phi \\
 0 & \longrightarrow & Tor_1^R(DI, M) & \longrightarrow & DI \otimes_R K & \xrightarrow{1 \otimes a} & DI \otimes_R R^m & \xrightarrow{1 \otimes b} & DI \otimes_R M & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Ένα απλό κυνήγι διαγράμματος δείχνει ότι η απεικόνιση $1 \otimes a$ είναι $1 - 1$. Συνεπάγεται ότι $Tor_1^R(DI, M) = 0$. □

Η παραπάνω πρόταση ισχύει γενικά για δακτύλιο αριστερά συνεκτικό, όπως δείχνουμε στο αντίστοιχο τμήμα. Καθώς ένας δακτύλιος αριστερά της *Noether* είναι αριστερά συνεκτικός, η παραπάνω πρόταση μπορεί να παραληφθεί, δίνει όμως μία απλούστερη απόδειξη για τον ειδικό αυτό δακτύλιο.

Πρόταση 12.4.6 Έστω R ένας δακτύλιος που είναι αριστερά της *Noether*. Τότε $id_R R = sfl_i R^{opp}$.

Απόδειξη.

Θα δείξουμε αρχικά ότι αν ο δακτύλιος R είναι αριστερά της *Noether* τότε έχουμε $sfl_i R^{opp} \leq id_R R$, και μετά θα δείξουμε ότι ισχύει στην πραγματικότητα η ισότητα $sfl_i R^{opp} = id_R R$.

Δείχνουμε, λοιπόν, ότι $sfl_i R^{opp} \leq id_R R$.

Αν $id_R R = \infty$ τότε ισχύει το ζητούμενο. Έστω ότι $id_R R = m < \infty$. Θεωρούμε μία πεπερασμένου μήκους εμφυτευτική επίλυση του αριστερού R -πρότυπου R , με $\Sigma^m R$ εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο.

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow I^3 \longrightarrow \dots \longrightarrow I^{m-1} \longrightarrow \Sigma^m R \longrightarrow 0$$

Το ευθύ άθροισμα του συμπλέγματος αποτελεί πάλι εμφυτευτική επίλυση, καθώς, σε δακτύλιο αριστερά της *Noether*, το ευθύ άθροισμα εμφυτευτικών αριστερών R -προτύπων είναι εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο. Επομένως, $id_R \bigoplus_i R \leq m$.

$$0 \longrightarrow \bigoplus_i R \longrightarrow \bigoplus_i I^0 \longrightarrow \bigoplus_i I^1 \longrightarrow \bigoplus_i I^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigoplus_i I^{m-1} \longrightarrow \bigoplus_i \Sigma^m R \longrightarrow 0$$

Έχουμε δείξει ότι σε ένα δακτύλιο αριστερά της *Noether*, R , ο δυϊκός *Pontryagin* απεικονίζει εμφυτευτικά αριστερά R -πρότυπα σε επίπεδα δεξιά R -πρότυπα. Επομένως, εφαρμόζοντας το συναρτητή *Pontryagin* στην παραπάνω επίλυση, προκύπτει μία επίπεδη επίλυση του δεξιού R -προτύπου $D(\bigoplus_i R)$.

$$0 \longrightarrow D(\bigoplus_i \Sigma^m R) \longrightarrow D(\bigoplus_i I^{m-1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow D(\bigoplus_i I^2) \longrightarrow D(\bigoplus_i I^1) \longrightarrow D(\bigoplus_i I^0) \longrightarrow D(\bigoplus_i R) \longrightarrow 0$$

Επομένως έχουμε ότι $fd_{R^{opp}} D(\bigoplus_i R) \leq m$.

Όμως, κάθε εμφυτευτικό δεξιό R -πρότυπο I εμφυτεύεται, ως ευθύς παράγοντας, σε εμφυτευτικό δεξιό R -πρότυπο της μορφής $\prod_i Hom_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_i R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = D(\bigoplus_i R)$, για κάποιο αριστερό R -πρότυπο $\bigoplus_i R$.

Τότε, η αβελιανή ομάδα $Tor_{m+1}^R(I, A)$, από την προσθετικότητα του συναρτητή $Tor_{m+1}^R(-, A)$, εμφυτεύεται ως ευθύς παράγοντας στην αβελιανή ομάδα $Tor_{m+1}^R(D(\bigoplus_i R), A) = 0$, για κάθε πρότυπο RA . Επομένως, $fd_{R^{opp}} I \leq m$. Συνεπάγεται ότι $sfliR^{opp} \leq id_R R = m$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι $sfliR^{opp} \leq id_R R$.

Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση. Αν $sfliR^{opp} = \infty$ τότε ισχύει το ζητούμενο. Έστω τώρα ότι $sfliR^{opp} = n < \infty$. Θεωρούμε το ακόλουθο τμήμα εμφυτευτικής επίλυσης του αριστερού R -πρότυπου R .

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow I^3 \longrightarrow \dots \longrightarrow I^{n-1} \longrightarrow \Sigma^n R \longrightarrow 0$$

Εφαρμόζοντας το συναρτητή *Pontryagin* στην παραπάνω επίλυση, προκύπτει, καθώς ο δακτύλιος είναι αριστερά της *Noether*, το ακόλουθο τμήμα επίπεδης επίλυσης του δεξιού R -πρότυπου DR .

$$0 \longrightarrow D(\Sigma^n R) \longrightarrow DI^{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow DI^3 \longrightarrow DI^2 \longrightarrow DI^1 \longrightarrow DI^0 \longrightarrow DR \longrightarrow 0$$

Το *cofree* δεξιό R -πρότυπο DR είναι εμφυτευτικό. Καθώς $sfliR^{opp} = n$, έχουμε ότι το δεξιό R -πρότυπο $D(\Sigma^n R)$ είναι επίπεδο. Εφαρμόζουμε το συναρτητή *Pontryagin* σε αυτό, και προκύπτει, από το γνωστό συζυγές ζεύγος, το εμφυτευτικό αριστερό R -πρότυπο $D^2(\Sigma^n R)$. Θεωρούμε τώρα τη φυσική απεικόνιση $\nu_{\Sigma^n R} : \Sigma^n R \rightarrow D^2(\Sigma^n R)$. Ο δακτύλιος R είναι αριστερά της *Noether*, και εν όψει του λήμματος 10.0.9, έχουμε ότι το αριστερό R -πρότυπο $\Sigma^n R$ είναι εμφυτευτικό. Επομένως, $id_R R \leq n = sfliR^{opp}$, δηλαδή τελικά έχουμε την ισότητα $id_R R = n = sfliR^{opp}$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι $sfliR^{opp} = id_R R$ όταν ο δακτύλιος R είναι αριστερά της *Noether*. □

Ορισμός 12.4.7 Ένας δακτύλιος R είναι *Iwanaga – Gorenstein* αν ο δακτύλιος είναι αριστερά και δεξιά της *Noether* και οι διαστάσεις $id_R R$ και $id_{R^{opp}} R$ είναι πεπερασμένες.

Πρόταση 12.4.8 Έστω R ένας δακτύλιος *Iwanaga – Gorenstein*. Τότε $id_R R = sfliR$.

Απόδειξη.

Ο δακτύλιος R είναι αριστερά και δεξιά της *Noether*, και οι διαστάσεις $id_R R$ και $id_{R^{opp}} R$ είναι πεπερασμένες. Καθώς ο δακτύλιος R είναι αριστερά της *Noether*, ισχύει η ισότητα $sfliR^{opp} = id_R R$. Δυσίως έχουμε ότι $sfliR = id_{R^{opp}} R$ καθώς ο δακτύλιος R είναι και δεξιά της *Noether*. Οι διαστάσεις $id_R R$ και $id_{R^{opp}} R$ πεπερασμένες. Οι ισότητες $sfliR = id_{R^{opp}} R$ και $sfliR^{opp} = id_R R$ μας δίνουν ότι οι αναλλοίωτες $sfliR$ και $sfliR^{opp}$ είναι πεπερασμένες, άρα, από το αποτέλεσμα των Ταλέλλη και Εμμανουήλ, είναι και ίσες. Συνεπάγεται ότι $id_{R^{opp}} R = sfliR = sfliR^{opp} = id_R R < \infty$.

□

Η παραπάνω απόδειξη με χρήση του αποτελέσματος των Ταλέλλη και Εμμανουήλ της ισότητας των πεπερασμένων αναλλοίωτων $sflR$ και $sflR^{opp}$ αποτελεί μία άλλη απόδειξη για το αποτέλεσμα του *Zaks* που δηλώνει ότι σε δακτύλιο αριστερά και δεξιά της *Noether*, R , αν οι διαστάσεις $id_R R$ και $id_{R^{opp}} R$ είναι πεπερασμένες, τότε είναι ίσες. Οι αποδείξεις του αποτελέσματος αυτού δεν είναι εντελώς διαφορετικές, καθώς εμφανίζουν κάποια ομοιότητα.

12.5 Δακτύλιοι αριστερά συνεκτικοί.

Τα ακόλουθα που αφορούν σε δακτύλιο αριστερά συνεκτικό επιδέχονται δυνικότητα θεωρώντας δεξιά πρότυπα.

Ορισμός 12.5.1 Ένας δακτύλιος R είναι αριστερά συνεκτικός αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό ιδεώδες αυτού είναι πεπερασμένα παριστώμενο.

Πρόταση 12.5.2 Σε ένα δακτύλιο αριστερά συνεκτικό, R , ο δυνικός συναρτητής *Pontryagin* απεικονίζει εμφυτευτικά αριστερά R -πρότυπα σε επίπεδα δεξιά R -πρότυπα.

Απόδειξη.

Από το κριτήριο του *Baer* έχουμε ότι, ένα αριστερό R -πρότυπο I είναι εμφυτευτικό αν και μόνο αν $Ext_R^1(R/J, I) = 0$ για κάθε αριστερό ιδεώδες J του δακτυλίου.

$$0 \rightarrow J \xrightarrow{a} R \xrightarrow{b} R/J \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow Hom_R(R/J, I) \xrightarrow{b^*} Hom_R(R, I) \xrightarrow{a^*} Hom_R(J, I) \rightarrow Ext_R^1(R/J, I) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow DExt_R^1(R/J, I) \rightarrow DHom_R(J, I) \xrightarrow{a^{**}} DHom_R(R, I) \xrightarrow{b^{**}} DHom_R(R/J, I) \rightarrow 0$$

Έστω ότι το αριστερό R -πρότυπο I είναι εμφυτευτικό. Θεωρούμε ένα πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό ιδεώδες του δακτυλίου, J . Καθώς ο δακτύλιος είναι αριστερά συνεκτικός, το ιδεώδες J είναι και πεπερασμένα παριστώμενο. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα ακριβών γραμμών στο οποίο εμφανίζεται η γνωστή απεικόνιση ϕ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & DHom_R(J, I) & \xrightarrow{a^{**}} & DHom_R(R, I) & \xrightarrow{b^{**}} & DHom_R(R/J, I) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \simeq \phi & & \uparrow \simeq \phi & & \uparrow \simeq \phi \\
 0 & \longrightarrow & Tor_1^R(DI, R/J) & \xrightarrow{1 \otimes a} & Tor_1^R(DI, R) & \xrightarrow{1 \otimes b} & Tor_1^R(DI, R/J) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Ένα απλό κνηγή διαγράμματος δείχνει ότι η απεικόνιση $1 \otimes a$ είναι $1 - 1$. Συνεπάγεται ότι $Tor_1^R(DI, R/J) = 0$, όπου το J είναι πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό ιδεώδες, το οποίο είναι βέβαια και πεπερασμένα παριστώμενο.

Όμως, κάθε αριστερό R -πρότυπο είναι το ευθύ όριο των πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του σε ένα κατευθυνόμενο σύνολο δεικτών. Έτσι, ένα αριστερό ιδεώδες του δακτυλίου, J , είναι το ευθύ όριο πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του, δηλαδή το ευθύ όριο πεπερασμένα παριστώμενων ιδεωδών. Θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία ευθέων συστημάτων $0 \rightarrow (J_i)_i \rightarrow R \rightarrow (R/J_i)_i \rightarrow 0$, με $J = \lim_{\rightarrow i} J_i$ εκφρασμένο ως το ευθύ όριο των πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του σε ένα κατευθυνόμενο σύνολο δεικτών, J_i πεπερασμένα παραγόμενο αριστερό ιδεώδες, το οποίο είναι βέβαια και πεπερασμένα παριστώμενο, για κάθε δείκτη i , και το ευθύ σύστημα R είναι το σταθερό σύστημα. Τότε, καθώς το ευθύ όριο είναι ακριβής συναρτητής όταν το σύνολο δεικτών είναι κατευθυνόμενο, έχουμε $\lim_{\rightarrow i} (R/J_i) \simeq R/(\lim_{\rightarrow i} J_i) = R/J$. Ο συναρτητής $Tor_1^R(DI, -)$ μετατίθεται με ευθέα όρια σε σύνολο δεικτών κατευθυνόμενο, επομένως έχουμε ότι $Tor_1^R(DI, R/J) = 0$ για κάθε ιδεώδες J , δηλαδή ο συναρτητής $DI \otimes_R -$ είναι ακριβής όταν εφαρμοστεί σε ακολουθίες της μορφής $0 \rightarrow J \xrightarrow{a} R \xrightarrow{b} R/J \rightarrow 0$ με J ένα οποιοδήποτε ιδεώδες του δακτυλίου.

Από το γνωστό συζυγές ζεύγος έχουμε γενικά ότι το DI_R είναι επίπεδο πρότυπο αν και μόνο αν το ${}_R D^2 I$ είναι εμφυτευτικό πρότυπο. Δηλαδή έχουμε ότι, καθώς το \mathbb{Z} -πρότυπο \mathbb{Q}/\mathbb{Z} είναι *faithfully injective*, ο συναρτητής $DI \otimes_R -$ είναι ακριβής αν και μόνο αν ο συναρτητής $D(DI \otimes_R -)$ είναι ακριβής αν και μόνο αν ο συναρτητής $Hom_R(-, D^2 I)$ είναι ακριβής αν και μόνο αν το ${}_R D^2 I$ είναι εμφυτευτικό. Για να ελέγξουμε αν το ${}_R D^2 I$ είναι εμφυτευτικό, από το κριτήριο του *Baer*, αρκεί να ελέγξουμε την ακρίβεια του συναρτητή $Hom_R(-, D^2 I)$ πάνω σε βραχείες ακριβείς ακολουθίες της μορφής $0 \rightarrow J \xrightarrow{a} R \xrightarrow{b} R/J \rightarrow 0$ με J ένα οποιοδήποτε ιδεώδες του δακτυλίου. Οι συναρτητές $D(DI \otimes_R -)$ και $Hom_R(-, D^2 I)$ είναι φυσικά ισοδύναμοι, λόγω του γνωστού συζυγούς ζεύγους. Προηγουμένως δείξαμε ότι ο συναρτητής $DI \otimes_R -$ είναι ακριβής όταν εφαρμοστεί σε ακολουθίες της μορφής $0 \rightarrow J \xrightarrow{a} R \xrightarrow{b} R/J \rightarrow 0$ με J οποιοδήποτε αριστερό ιδεώδες. Άρα, και ο συναρτητής $D(DI \otimes_R -)$ διατηρεί την ακρίβεια τέτοιων ακολουθιών καθώς ο συναρτητής *Pontryagin* είναι ακριβής. Επομένως, ο συναρτητής $Hom_R(-, D^2 I)$ διατηρεί την ακρίβεια τέτοιων ακολουθιών. Ισοδύναμα έχουμε ότι το ${}_R D^2 I$ είναι εμφυτευτικό, επομένως το DI_R είναι επίπεδο. □

12.6 Εμφυτευτικά αντικείμενα στην κατηγορία των αντίστροφων συστημάτων αβελιανών ομάδων.

Πρόταση 12.6.1 Έστω $I = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ένα αντίστροφο σύστημα αβελιανών ομάδων το οποίο είναι εμφυτευτικό αντικείμενο στην κατηγορία των αντίστροφων συστημάτων αβελιανών ομάδων. Τότε, το σύστημα είναι επιμορφικό.

Απόδειξη.

Θεωρούμε τις απεικονίσεις που συνθέτουν το σύστημα, $\phi_{n+1, n} : I_{n+1} \rightarrow I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι οι απεικονίσεις αυτές είναι επιμορφισμοί. Κατασκευάζουμε ένα επιμορφικό αντίστροφο σύστημα $J = (J_n = \prod_{i=0}^n I_i)_{n \in \mathbb{N}}$ στο οποίο εμφυτεύεται το σύστημα $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μέσω της απεικόνισης $i : I \hookrightarrow J$, όπως

δείχνουμε ακολούθως. Καθώς το I είναι εμφυτευτικό, από τον ορισμό του εμφυτευτικού αντικειμένου, για την ταυτοτική απεικόνιση $1_I : I \rightarrow I$ υπάρχει τομή $s : J \rightarrow I$ με $s \circ i = 1_I$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 I_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & \prod_{i=0}^{n+1} I_i & \xrightarrow{s_{n+1}} & I_{n+1} \\
 \downarrow \phi_{n+1,n} & & \downarrow \psi_{n+1,n} & & \downarrow \phi_{n+1,n} \\
 I_n & \xrightarrow{i_n} & \prod_{i=0}^n I_i & \xrightarrow{s_n} & I_n \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 I_3 & \xrightarrow{i_3} & I_3 \times I_2 \times I_1 \times I_0 & \xrightarrow{s_3} & I_3 \\
 \downarrow \phi_{3,2} & & \downarrow \psi_{3,2} & & \downarrow \phi_{3,2} \\
 I_2 & \xrightarrow{i_2} & I_2 \times I_1 \times I_0 & \xrightarrow{s_2} & I_2 \\
 \downarrow \phi_{2,1} & & \downarrow \psi_{2,1} & & \downarrow \phi_{2,1} \\
 I_1 & \xrightarrow{i_1} & I_1 \times I_0 & \xrightarrow{s_1} & I_1 \\
 \downarrow \phi_{1,0} & & \downarrow \psi_{1,0} & & \downarrow \phi_{1,0} \\
 I_0 & \xrightarrow{i_0} & I_0 & \xrightarrow{s_0} & I_0
 \end{array}$$

Οι απεικονίσεις $i_n : I_n \rightarrow \prod_{i=0}^n I_i$ είναι οι μονομορφισμοί με τύπο $i_n(a_n) = (\phi_{n,i}(a_n))_{i=0}^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι απεικονίσεις $\psi_{n+1,n} : \prod_{i=0}^{n+1} I_i \rightarrow \prod_{i=0}^n I_i$ είναι επιμορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{N}$, καθώς είναι οι προβολές που αγνοούν τη συνιστώσα του μεγαλύτερου δείκτη στο καρτεσιανό γινόμενο. Έτσι, το αριστερό τμήμα του διαγράμματος είναι μεταθετικό. Το δεξιό αντίστοιχα είναι μεταθετικό από την ύπαρξη της τομής s . Οι απεικονίσεις $s_n : J_n \rightarrow I_n$ είναι επιμορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{N}$, καθώς ισχύει $s_n \circ i_n = 1_{I_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $\phi_{n+1,n} \circ s_{n+1} = s_n \circ \psi_{n+1,n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι απεικονίσεις $s_n \circ \psi_{n+1,n}$ είναι επιμορφισμοί ως σύνθεση επιμορφισμών για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως οι απεικονίσεις $\phi_{n+1,n}$ είναι επιμορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

13 Αναφορές.

- [1] Avramov, L.L., Iyengar, S.B., Lipman, J. : *Reflexivity and rigidity for complexes. I. Commutative rings. Algebra Number Theory* **4** : **1**, 47 – 86 (2010).
- [2] Avramov, L.L., Martinkovsky, A. : *Absolute, relative, and Tate cohomology of modules of finite Gorenstein dimension. Proceedings of the London Mathematical Society* **85** : **2**, 393 – 440 (2002).
- [3] Avramov, L.L., Veliche, O. : *Stable cohomology over local rings. Advances in Mathematics* **213** : **1**, 93 – 139 (2007).
- [4] Bass, H. : *Injective dimension in Noetherian rings. Transactions of the American Mathematical Society* **102** : **1**, 18 – 29 (1962).
- [5] Benson, D.J., Carlson, J.F. : *Products in negative cohomology. Journal of Pure and Applied Algebra* **82** : **2**, 107 – 129 (1992).
- [6] Bourbaki, N. : *Algèbre. Masson, Paris, Chapitre X* (1980).
- [7] Brown, K.S. : *Cohomology of Groups. Graduate Texts in Mathematics* **87**, Springer – Verlag (1982).
- [8] Cannon, J.W., Floyd, W.J., Parry, W.R. : *Introductory notes on Richard Thompson's groups. L'Enseignement Mathématique, IIe Série* **42** : **3**, 215 – 256 (1996).
- [9] Cartan, H., Eilenberg, S. : *Homological Algebra. Princeton Mathematical Series, Princeton University Press* (1956).
- [10] Celikbas, O., Christensen, L.W., Liang, L., Piepmeyer, G. : *Complete homology. arXiv* : 1501.00297v1.
- [11] Celikbas, O., Christensen, L.W., Liang, L., Piepmeyer, G. : *Stable homology. arXiv* : 1409.3605v1.
- [12] Christensen, L.W., Jorgensen, D.A. : *Tate (co)homology via pinched complexes. Transactions of the American Mathematical Society (to appear)*.
- [13] Cornick, J., Kropholler, P.H. : *Homological finiteness conditions for modules over group algebras. Journal of the London Mathematical Society* **58** : **1**, 49 – 62 (1998).
- [14] Cornick, J., Kropholler, P.H. : *On complete resolutions. Topology and its Applications* **78** : **3**, 235 – 250 (1997).
- [15] Dembajioti, F., Talelli, O. : *A note on complete resolutions. Proceedings of the American Mathematical Society* **138** : **11**, 3815 – 3820 (2010).
- [16] Ding, N., Chen, J. : *The flat dimensions of injective modules. Manuscripta Mathematica* **78** : **1**, 165 – 177 (1993).
- [17] Emmanouil, I. : *A homological characterization of locally finite groups. Journal of Algebra* **352** : **1**, 167 – 172 (2012).
- [18] Emmanouil, I. : *Balance in complete cohomology. Journal of Pure and Applied Algebra* **218** : **4**, 618 – 623 (2014).
- [19] Emmanouil, I. : *Mittag – Leffler condition and the vanishing of \lim_{\leftarrow}^1 . Topology* **35** : **1**, 267 – 271 (1996).
- [20] Emmanouil, I. : *On certain cohomological invariants of groups. Advances in Mathematics* **225** : **6**, 3446 – 3462 (2010).
- [21] Emmanouil, I. : *On the finiteness of Gorenstein homological dimensions. Journal of Algebra* **372**, 376 – 396 (2012).

- [22] Emmanouil, I., Talelli, O. : *Finiteness criteria in Gorenstein homological algebra. Transactions of the American Mathematical Society* **366** : **12**, 6329 – 6351 (2014).
- [23] Emmanouil, I., Talelli, O. : *On the flat length of injective modules. Journal of the London Mathematical Society* **84** : **2**, 408 – 432 (2011).
- [24] Enochs, E.E., Estrada, S., Iacob, A.C. : *Balance with unbounded complexes. Bulletin of the London Mathematical Society* **44** : **3**, 439 – 442 (2012).
- [25] Enochs, E.E., Jenda, O.M.G. : *Copure injective resolutions, flat resolvents and dimensions. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* **34** : **2**, 203 – 211 (1993).
- [26] Enochs, E.E., Jenda, O.M.G., Torrecillas, B. : *Gorenstein flat modules. Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan* **10** : **1**, 1 – 9 (1993).
- [27] Farrell, F.T. : *An extension of Tate cohomology to a class of infinite groups. Journal of Pure and Applied Algebra* **10** : **2**, 153 – 161 (1977).
- [28] Gedrich, T.V., Gruenberg, K.W. : *Complete cohomological functors on groups. Topology and its Applications* **25** : **2**, 203 – 223 (1987).
- [29] Goichot, F. : *Homologie de Tate – Vogel équivariante. Journal of Pure and Applied Algebra* **82** : **1**, 39 – 64 (1992).
- [30] Goto, S. : *Vanishing of $\text{Ext}_A^i(M, A)$. Journal of Mathematics – Kyoto University* **22** : **3**, 481 – 484 (1982).
- [31] Grothendieck, A. : **EGA III. Publications Mathématiques de l’IHÉS** **11** (1961).
- [32] Hilton, P.J., Stammach, U. : *A Course in Homological Algebra. Springer – Verlag* (1971).
- [33] Holm, H. : *Gorenstein Homological dimensions. Journal of Pure and Applied Algebra* **189** : **1 – 3**, 167 – 193 (2004).
- [34] Ikenaga, B.M. : *Generalized cohomological dimension. Journal of Pure and Applied Algebra* **40**, 125 – 134 (1986).
- [35] Ikenaga, B.M. : *Homological dimension and Farrell cohomology. Journal of Algebra* **87** : **2**, 422 – 457 (1984).
- [36] Iwanaga, Y. : *On rings with finite self – injective dimension II. Tsukuba Journal of Mathematics* **4**, 107 – 113 (1980).
- [37] Jensen, C.U. : *On the vanishing of \lim_{\leftarrow}^i . Journal of Algebra* **15** : **2**, 151 – 166 (1970).
- [38] Jo, J.H. : *Complete homology and related dimensions of groups. Journal of Group Theory* **12** : **3**, 431 – 448 (2009).
- [39] Kropholler, P.H. : *On groups of type $(FP)_{\infty}$. Journal of Pure and Applied Algebra* **90** : **1**, 55 – 67 (1993).
- [40] Kropholler, P.H., Mislin, G. : *Groups acting on finite dimensional spaces with finite stabilizers. Commentarii Mathematici Helvetici* **73** : **1**, 122 – 136 (1998).
- [41] Kropholler, P.H., Talelli, O. : *On a property of fundamental groups of graphs of finite groups. Journal of Pure and Applied Algebra* **74** : **1**, 57 – 59 (1991).
- [42] Mislin, G. : *Tate cohomology for arbitrary groups via satellites. Topology and its Applications* **56** : **3**, 293 – 300 (1994).
- [43] Nucinkis, B.E.A. : *Complete cohomology for arbitrary rings using injectives. Journal of Pure and Applied Algebra* **131** : **3**, 297 – 318 (1998).
- [44] Raynaud, M., Gruson, L. : *Critères de platitude et de projectivité. Inventiones Mathematicae* **13** : **1**, 1 – 89 (1971).

- [45] Rotman, J.J. : *An Introduction to Homological Algebra*. Pure and Applied Mathematics, Academic Press (1979).
- [46] Talelli, O. : *On groups of type Φ* . *Archiv der Mathematik* **89** : 1, 24 – 32 (2007).
- [47] Talelli, O. : *On the Gorenstein and cohomological dimension of groups*. *Proceedings of the American Mathematical Society* **142** : 4, 1175 – 1180 (2014).
- [48] Talelli, O. : *A characterization of cohomological dimension for a big class of groups*. *Journal of Algebra* **326** : 1, 238 – 244 (2011).
- [49] Triulzi, M. : *Completion constructions in homological algebra and finiteness conditions*. Ph.D. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology (1998).
- [50] Weibel, C.A. : *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**, Cambridge University Press (1994).
- [51] Zaks, A. : *Injective dimension of semi – primary rings*. *Journal of Algebra* **13** : 1, 73 – 86 (1969).

