Ελληνική Δημοκρατία
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πτυχιακή Εργασία τμήματος Φυσικής

Αρχέγονα βαρυτικά κύματα από τον κοσμολογικό πληθωρισμό και CMB

Πολυκράτης Γιώργος
ΑΜ: 201200186

Επιβλέπον:
Σπανός Βασίλης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα 2017

Περίληψη

Στο Κεφ. 0 κάνουμε απλή αναφορά στα βασικότερα εργαλεία της Γενικής Σχετικότητας και των οποίων η χρήση είναι πολύ συχνή στο κυρίως κείμενο. Επίσης δείχνουμε πως με ελάχιστα βήματα μπορεί να δει κανείς ότι ο τανυστής Riemann ικανοποιεί την κυματική εξίσωση, που μας προιδεάζει ότι τα κύματα καμπυλότητας είναι πράγματι μια ουσιαστική έννοια. Στα κεφάλαια του Μέρους I ασχολούμαστε με τα βαρυτικά κύματα. Συγκεκριμένα στο Κεφ. 1 εξερευνούμε τις εξισώσεις του Einstein περνώντας από διάφορες βολικές βαθμίδες για την περίπτωση μιας γραμμικής διαταραχής $1^{\eta\varsigma}$ τάξης στην μετρική και εξάγουμε την εξίσωση κίνησης αυτής της τανυστικής διαταραχής (βαρυτικό κύμα). Εξετάζουμε επίσης την επίδραση που έχει ένα βαρυτικό κύμα σε μια σειρά από ελεύθερα σωμάτια, και συγκεκριμένα την παραμόρφωση που προκαλεί σε ένα δακτυλίδι από διακριτά σωμάτια. Στο Κεφ. 2 ασχολούμαστε με τα είδη σημάτων βαρυτικών κυμάτων και τα ενεργά και μελλοντικά πειράματα για την ανίχνευσή τους. Περιγράφουμε επίσης την λειτουργία του πιο διαδεδομένου πλέον είδους ανιχνευτών, του ανιχνευτή συμβολομέτρου. Στο Κεφ. 3 γράφουμε για τα πολυπολικούς όρους της βαρυτικής ακτινοβολίας. Στο Κεφ. 4 ασχολούμαστε με την ενέργεια των βαρυτικών κυμάτων και δουλεύουμε στη λεγόμενη προσέγγιση μικρού μήκους κύματος για να βρούμε τις ενεργειακές απώλειες αυτών. Στο Κεφ. 5 χαρακτηρίζουμε τις διάφορες περιοχές του φάσματος της βαρυτικής ακτινοβολίας και αναφέρουμε τα αντίστοιχα πειράματα που ειδικεύονται σε κάθε περιοχή. Στα κεφάλαια του Μέρους II ασχολούμαστε, σε μια προσπάθεια γενίκευσης της αρχικής συζήτησης του Κεφ. 1, γενικότερα με τις γραμμικές διαταραχές σε ένα FRW σύμπαν μηδενικής καμπυλότητας. Στα κεφάλαια του Μέρους III κάνουμε μια αναφορά στη βαθμωτή θεωρία του Πληθωρισμού (Inflation) και γενικεύουμε την προηγούμενη ανάλυση του Μέρους II αλλά στην περίπτωση που έχουμε ένα ή περισσότερα inflaton πεδία, με απώτερο σκοπό την εξαγωγή του δείκτη φασματικής ισχύως. Η συζήτηση αυτή είναι κρίσιμη στην μελέτη των βαρυτικών κυμάτων αφού και οι τανυστικές διαταραχές συνεισφέρουν στο μέγεθος αυτό. Στο IV εισαγάγουμε στις βασικές έννοιες και εργαλεία της μελέτης του CMB. Τέλος στο Μέρος V βλέπουμε πως από τις ανισοτροποίες του CMB παίρνουμε πληροφορίες για τις αρχέγονες κοσμολογικές διαταραχές του Μέρους III.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον κ. Σπανό για την άμεση επικοινωνία, και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε με την επιλογή ενός τόσο ενδιαφεροντος και ευρέος θέματος. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον κ. Λαχανά που μαζί με τον κ. Σπανό είχαν μαζί μου επικοδομητικές και ενδιαφέρουσες συζητήσεις πάνω στην φυσική αλλά και όχι μόνο. Το ενδιαφέρον που έδειξαν και οι δύο στις ερωτήσεις μου και το χρόνο που αφιέρωσαν στο να με κατευθήνουν είναι πραγματικά μεγάλο δώρο. Θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους δύο για άλλη μια φορά, για τις συμβουλές που μου έδωσαν όταν τις είχα περισσότερο ανάγκη.

Περιεχόμενα

0 Προκαταρκτικά 8

I Βαρυτικά Κύματα 12

1 Εξαγωγή Λύσης Βαρυτικών Κυμάτων 13

1.1 Βαρυτικά κύματα σε επίπεδο χώρο 13

1.2 Περίπτωση απουσίας βαρυτικών πηγών 18

1.3 Επίδραση βαρυτικών κυμάτων σε ελεύθερα σωμάτια 20

1.4 Πολώσεις 22

2 Ανίχνευση Βαρυτικών Κυμάτων 28

2.1 Παρατηρίσημα μεγέθη βαρυτικών κυμάτων 29

2.2 Ανιχνευτές δέσμης (Συμβολόμετρα laser) 31

3 Παραγωγή Βαρυτικών Κυμάτων 36

3.1 Προσέγγιση μακρινού πεδίου 36

4 Ενέργεια των Βαρυτικών Κυμάτων 40

4.1 Μη τοπική ενέργεια στη Γενική Σχετικότητα 40

4.2 Τανυστής ενέργειας-ορμής Βαρυτικών Κυμάτων στην προσέγγιση μικρού μήκους κύματος 41

4.2.1 Ενεργειακές απώλειες βαρυτικών κυμάτων 46

4.2.2 Μερικές εκτιμήσεις μεγέθους 46

5 Το φάσμα των Βαρυτικών Κυμάτων 48

5.1 Περιοχή υψηλών συχνοτήτων, $1 - 10^4$ Hz 49

5.2 Περιοχή χαμηλών συχνοτήτων, 10^{-4} - 1 Hz 50

5.3 Περιοχή πολύ χαμηλών συχνοτήτων, 10^{-7} - 10^{-9} Hz 51

5.4 Περιοχή εξαιρετικά χαμηλών συχνοτήτων, 10^{-15} - 10^{-18} Hz . . 52

5.5 Λίγα περισσότερα λόγια για τις κοσμολογικές πηγές 52

II Διαταραχές με απουσία βαθμωτού πεδίου 54

6 Μετασχηματισμοί Βαθμίδας της μετρικής 55

6.1 Διαχωρισμός σε Βαθμωτές, Διανυσματικές και Τανυστικές Διαταραχές 60

6.2 Βαθμωτές Διαταραχές 64

6.3 Δυναμικά Bardeen 66

6.4 Σύμμορφη Νευτώνεια Βαθμίδα 66

7 Διαταραχές στον Τανυστή Καμπυλότητας 68

8 Εξέληξη Υπερορίζοντα και συσχέτιση με τις προτότυπες διαταραχές. 70

III Διαταραχές με παρουσία βαθμωτού πεδίου 72

9 Μια γνωρημία με τη βαθμωτή θεωρία του inflation 73

9.1 Βαθμωτά πεδία στην Κοσμολογία 78

9.2 Slow Roll 79

9.3 Διάρκεια του Inflation και εξέληξη των κλιμάκων 80

10 Infaltion 84

10.1 Βαθμωτά πεδία στον χώρο Minkowski 84

10.2 Βαθμωτά πεδία σε καμπύλο χωροχρόνο 86

10.3 Υποκείμενο Σύμπαν 88

10.4 Διαταρακτικό Σύμπαν 90

10.5 Βαθμίδα επίπεδου χώρου 93

10.6 Ένα Πεδίο 96

10.6.1 Υπόβαθρο 96

10.6.2 Διαταρακτικές εξισώσεις πεδίου 97

10.6.3 Καμπυλότητα και Ολική Εντροπία Διαταραχών 97

10.6.4 Slow-Roll Inflation 98

10.6.5 Εξέλιξη έξω από τον ορίζοντα 100

10.6.5.1 Υπόβαθρο 101

10.6.5.2 Συναρτήσεις Hankel και Bessel 101

10.6.5.3 Διαταρακτική εξίσωση 102

10.6.6 Δημιουργία Βαθμωτών Διαταραχών 103

10.6.6.1 Διαταραχές του κενού στον χώρο Minkowski 104

10.6.6.2 Διαταραχές του κενού την περίοδο του Inflation 105

10.6.7 Αρχέγονο Φάσμα Ισχύος 108

10.6.7.1 Φασματικός δείκτης σε δεύτερη τάξη των slow-roll παραμέτρων 110

10.7 Διαταραχές Καμπυλότητας 112

10.8 Slow-Roll Inflation 113

10.8.1 Παράμετροι slow-roll 113

10.8.2 Νόμος εκθετικής διαστολής του υποβάθρου 114

10.8.3 Εξέλιξη διαταραχών 115

10.9 Δύο πεδία 118

10.9.1 Αδιαβατικές και Εντροπικές πεδιακές συντεταγμένες . . 118

10.9.2 Ακριβής λύση υποβάθρου 120

10.9.3 Slow-Roll προσέγγιση 121

10.9.4 Διαταραχές 123

10.9.5 Διαταραχές Εντροπίας και Καμυπλότητας 124

10.9.6 Εξέλιξη κατά την έξοδο από τον Ορίζοντα 125

10.9.7 Εξέλιξη έξω από τον Ορίζοντα 128

10.9.8 Αρχέγονοι φασματικοί δείκτες σε πρώτη τάξη 130

10.10 Αρχέγονες Τανυστικές Διαταραχές 134

IV CMB 136

11 Ανισοτροπίες στην Κοσμική ακτινοβολία Υποβάθρου 137

11.1 Διακυμάνσεις του CMB 137

11.2 Τανυστής Πόλωσης 140

11.3 Κλασσικό Ημιμονοχρωματικό Επίπεδο κύμα 142

12 Σφαιρικό Αρμονικό ανάπτυγμα του Πεδίου Πόλωσης 144

12.1 Σφαιρικό Αρμονικό ανάπτυγμα του Πεδίου Πόλωσης 144

12.2 Flat-Sky προσέγγιση 146

12.3 Γεωμετρία της σφαίρας 148

12.4 Τανυστικές Σφαιρικές Αρμονικές 149

12.5 Ιδιότητες των Τανυστικών Σφαιρικών Αρμονικών 152

12.6 Ανάπτυγμα Fourier και ανάπτυγμα σε Σφαιρικές Αρμονικές . . 157

V Κοσμολογικές διαταραχές και η καταγραφή τους στο CMB 159

12.7 Δημιουργία ανισοτροποιών στο CMB από διαταραχές της μετρικής 160

12.7.1 Βαθμωτές διαταραχές 160

12.7.2 Διανυσματικές Διαταραχές 161

12.7.3 Τανυστικές Διαταραχές 162

12.7.4 Σύνοψη 162

12.8 Free Streaming 163

12.9 Spin-2 Σφαιρικές Αρμονικές 165

12.10Συναρτήσεις Συσχέτισης και Γωνιακό Φάσμα Ισχύος 169

12.11Εξίσωση Boltzmann-Vlasov 177

12.12Παράμετροι Stokes και Spin-S Σφαιρικές Αρμονικές 177

12.13Αρμονική ανάλυση για πόλωση του CMB 177

12.14Γενικές σχέσεις για τις διακυμάνσεις θερμοκρασίας 178

13 Συμπλήρωμα: Αποδείξεις Σχέσεων 180

14 Appendix 197

A Εξίσωση Γεωδαισιακής Απόκλισης 197

B Νόμοι μετασχηματισμού μεταξύ χρονικών συντεταγμένων . . . 198

C Κύμα με τυχαία διεύθυνση ως προς τον προσανατολισμό των δοκιμαστικών μαζών 199

D Μετρική Robertson-Walker 201

E Κινηματική: Σύμμορφος χρόνος και Ορίζοντες 205

F Εξίσωση Friedman 207

G Ιδανικά Ρευστά 209

H Συμπλήρωμα στο κεφάλαιο των διαταραχών 209

I Σφαιρικές Αρμονικές 213

J Εξίσωση Boltzmann-Vlasov 215

J.1 Φασικός Χώρος και Συνάρτηση κατανομής 215

K Τανυστής Ενέργειας σε Τοπικό Ορθοκανονικό Σύστημα 217

L Ερυθρομετατόπιση Φωτονίων και Free Streaming 220

M Εξίσωση Φωτεινότητας 223

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

Προκαταρκτικά

Συμβάσεις Προσήμου

Στη βιβλιογραφία παρατηρούνται πολλοί διαφορετικοί ορισμού των τανυστών που συχνά χρησημοποιούνται στη Γενική Σχετικότητα, γεγονός που οφείλεται, πέρα από την δυνατότητα επιλογής διαφορετικής μετρικής, και στην ανεξάρτητη ελευθερία που υπάρχει στον ορισμό του τανυστή Riemann και του τανυστή ενέργειας ορμής. Πρός αποφυγή τυχόν παρενόησης στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι διαφορετικές συμβάσεις προσήμου που συναντώνται στην βιβλιογραφία:

	Συγγραφέας X[1]	Weinberg
$g^{\mu\nu}$	$+---$	$-+++$
$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$	(same)	(same)
$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$	$\left(R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\right)_X$	$\left(R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\right)_W = -\left(R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\right)_X$
$R_{\beta\delta}$	$\left(R_{\beta\delta}\right)_X$	$\left(R_{\beta\delta}\right)_W = -\left(R_{\beta\delta}\right)_X$
R	$g^{\alpha\beta}_{\beta} R^{\beta}_{\alpha\beta} \equiv R_X$	R
$T_{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$	$\left(T_{\mu\nu}\right)_X$	$\left(T_{\mu\nu}\right)_W = -\left(T_{\mu\nu}\right)_X$

Βαρυτικά και Η/Μ κύματα σύγκριση

	Γραμμικοποιημένη βαρύτητα	Ηλεκτρομαγνητισμός
Δυναμικά	$h_{\mu\nu}$	Διανυσματικό δυναμικό: $\mathrm{A}(1,\mathrm{x})$ Βαθμωτό δυναμικό: $\Phi(t,\mathrm{x})$
Πεδία	Γραμμικοποιημένη καμπυλότητα Rieman: $R_{a\beta\gamma\delta}(x)$	Ηλεκτρικό πεδίο: $\mathrm{E}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ Μαγνητικό πεδίο: $\mathrm{B}(\mathrm{t},\mathrm{x})$
Μετασχηματισμός βαθμίδας	$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu$	$A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu \chi$
Παράδειγμα συνθήκης βαθμίδας ("Lorentz")	$\partial_\nu h^\nu_\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu h^\nu_\nu = 0$	$\partial^\mu A_\mu = 0$
Εξισώσεις πεδίου στη βαθμίδα Lorentz	$\Box h_{\mu\nu} = 0$	$\Box A^\mu = 0$

Χρήσιμες σχέσεις από τη Γενική Σχετικότητα
Σχέσεις Christoffel

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \tag{0.1}$$

Τανυστής Riemann

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{0.2}$$

$$R^\bullet_{\bullet\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\bullet_{\nu\bullet} - \partial_\nu \Gamma^\bullet_{\mu\bullet} + \left[\Gamma^\bullet_{\mu\bullet}, \Gamma^\bullet_{\nu\bullet}\right] = \left[\partial_\mu + \Gamma^\bullet_{\mu\bullet}, \partial_\nu \Gamma^\bullet_{\nu\bullet}\right]$$

Τανυστής Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \tag{0.3}$$

Το ίχνος του τανυστή Ricci μας δίνει το βαθμωτό Ricci:

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{0.4}$$

Μια χρήσιμη έννοια που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω την οποία όμως δεν θα αποδείξουμε είναι οι εξισώσεις πεδίου Einstein.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{0.5}$$

Οι παραπάνω συνδέουν την καμπυλότητα (μέσω της μετρικής και του τανυστή Ricci) με την παρουσία ενέργειας - ορμής (μέσω του $T_{\mu\nu}$).

Ισοδύναμη διατύπωση

Παίρνοντας στην 0.5 το ίχνος ως προς τη μετρική και στα δύο μέλη παίρνουμε

$$R - \frac{D}{2} R = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

όπου D είναι η διάσταση του χωροχρόνου στον οποίο δουλεύουμε (εδώ $D = 4$). Η έκφραση αυτή μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$-R = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{T}{\frac{D}{2} - 1}$$

Προσθέτοντας το παραπάνω, πολλαπλασιασμένο $-\frac{1}{2} g_{\mu\nu}$ φορές στην 0.5, παίρνουμε την επόμενη ισοδύναμη "trace-reversed" μορφή

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \tag{0.6}$$

Δηλαδή ο όρος με το βαθμωτό του τανυστή Ricci έχει αντικατασταθεί στη νέα έκφραση από όρο με βαθμωτό του τανυστή ενέργειας-ορμής.

Επίσης από τα παραπάνω βλέπουμε ότι τα βαθμωτά των δύο αυτών τανυστών συνδέονται με τη σχέση:

$$R = \frac{8\pi G}{c^4} T \tag{0.7}$$

Μια πρώτη ένδειξη του ότι μπορεί να έχουμε κύματα καμπυλότητας

Από την ταυτότητα Bianchi:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\mu} + R_{\alpha\beta\delta\mu,\gamma} + R_{\alpha\beta\mu\gamma,\delta} = 0 \tag{0.8}$$

Στο κενό χώρο, χωρίς την παρουσία κάποιας πηγής δηλαδή, η 0.6 μας δίνει ότι

$$R_{\alpha\beta} = 0 \tag{0.9}$$

Πολλαπλασιάζοντας την 0.11 με $g^{\alpha\mu}$, και χρησιμοποιώντας την 0.9, παίρνουμε

$$\begin{aligned} R^{\mu}_{\beta\gamma\delta,\mu} + \cancel{R^{\mu}_{\beta\delta\mu,\gamma}} + \cancel{R^{\mu}_{\beta\mu\gamma,\delta}} &= 0 \\ R^{\mu}_{\beta\gamma\delta,\mu} &= 0 \end{aligned} \tag{0.10}$$

Λόγω της συμμετρίας του τανυστή Riemann σημαίνει ότι ο τανυστής αυτός έχει μηδενική απόκλιση σε κάθε δείκτη.

Παίρνουμε τώρα τη δεύτερη παράγωγο της 0.11 ως προς μ, και χρησημοποιούμε το τελευταίο επιχείρημα για την απόκλιση του τανυστή Riemann:

$$\boxed{R_{\alpha\beta\gamma\delta,\mu}{}^{,\mu}} + \cancel{R_{\alpha\beta\delta\mu,\gamma}}{}^{,\mu} + \cancel{R_{\alpha\beta\mu\gamma,\delta}}{}^{,\mu} = 0 \tag{0.11}$$

Που σημαίνει ότι ο τανυστής Riemann ικανοποιεί την κυματική εξίσωση:

$$\Box R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \tag{0.12}$$

Μέρος I

Βαρυτικά Κύματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εξαγωγή Λύσης Βαρυτικών Κυμάτων

1.1 Βαρυτικά κύματα σε επίπεδο χώρο

Όπως και στον ηλεκτρομαγνητισμό στον οποίο υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικές διαταραχές που διαδίδονται με ταχύτητα c - ηλεκτρομαγνητικά κύματα - στην σχετικιστική θεωρία της βαρύτητας υπάρχουν διαταραχές της γεωμετρίας του χώρου οι οποίες διαδίδονται στο χωροχρόνο και ονομάζουμε βαρυτικά κύματα.

Θεωρούμε ένα ασθενές βαρυτικό πεδίο στο κενό. Η μετρική του επίπεδου χώρου Minkowski είναι:

$$g_{\alpha\beta} \equiv g^{(0)}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Εισάγουμε τον τανυστή $h_{\alpha\beta}$ ως διαταραχή στο παραπάνω επίπεδο χώρο, ώστε:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

Επειδή τα $\eta_{\alpha\beta}$ και $g_{\alpha\beta}$ είναι συμμετρικά, πρέπει και το $h_{\alpha\beta}$ να είναι επίσης συμμετρικό. Ορίζουμε στη συνέχεια με τη βοήθεια των σχέσεων των ύψωσης δεικτών της ειδικής σχετικότητας και τις ποσότητες:

$$\begin{aligned} h^{\alpha}_{\beta} &\equiv \eta^{\alpha\sigma} h_{\sigma\beta} \\ h^{\alpha\beta} &\equiv \eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\rho} h_{\sigma\rho} \\ h &\equiv h^{\alpha}_{\alpha} = \eta^{\sigma\rho} h_{\sigma\rho}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ανταλοίωτη μορφή της διαταραχής

Επειδή είναι $g_{\mu\nu}g^{\mu\sigma} = \delta^\sigma_\nu$, έχουμε:

$$\delta^\sigma_\nu = g_{\mu\nu}g^{\mu\sigma} = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\mu\sigma} + \alpha h^{\mu\sigma}) = \delta^\sigma_\nu + \alpha h^\sigma_\nu + h + O(h^2)$$

άρα πρέπει $\alpha = -1$, συνεπώς η ανταλλοίωτη σχέση για τη μετρική γίνεται:

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} \tag{1.3}$$

Στη νέα μετρική τα σύμβολα Christoffel και ο τανυστής Ricci γίνονται:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\rho}(h_{\nu\rho,\mu} + h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho}). \tag{1.4}$$

Και επειδή κρατάμε πρώτης τάξης όρους ως προς $h_{\alpha\beta}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \eta_{\mu\lambda}\partial_\rho\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\partial_\sigma\Gamma^\lambda_{\nu\rho} \\ &= \frac{1}{2}\left(h_{\mu\sigma,\nu\rho} + h_{\nu\rho,\mu\sigma} - h_{\mu\rho,\nu\sigma} - h_{\nu\sigma,\mu\rho}\right) \end{aligned}$$

και με τη βοήθεια της 1.4:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} \\ &= \partial_\lambda\frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left(\partial_\nu h_{\mu\rho} + \partial_\mu h_{\rho\nu} - \partial_\rho h_{\mu\nu}\right) - \partial_\nu\frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu h_{\lambda\rho} + \partial_\lambda h_{\rho\mu} - \partial_\rho h_{\lambda\mu}\right) \\ &= \partial_\lambda\frac{1}{2}\left(\partial_\nu h^\lambda_\mu + \partial_\mu h^\lambda_\nu - \partial^\lambda h_{\mu\nu}\right) - \partial_\nu\frac{1}{2}\left(\partial_\mu h^\lambda_\lambda + \partial_\lambda h^\lambda_\mu - \partial^\lambda h_{\lambda\mu}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[h^\lambda_{\mu,\nu\lambda} + h^\lambda_{\nu,\mu\lambda} - h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} - h^\lambda_{\lambda,\mu\nu} - h^\lambda_{\mu,\lambda\nu} + h_{\lambda\mu,\nu}{}^{,\lambda}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[h^\lambda_{\mu,\nu\lambda} + h^\lambda_{\nu,\mu\lambda} - \Box h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} - h^\lambda_{\mu,\lambda\nu} + h_{\lambda\mu,\nu}{}^{,\lambda}\right] \end{aligned}$$

Όμως είναι $h^\lambda_{\mu,\lambda\nu} = \eta^{\lambda\beta}h_{\beta\mu,\lambda\nu} = \eta^{\lambda\beta}\eta_{\lambda k}h_{\beta\mu,\nu}{}^{,k} = \delta^\beta_k h_{\beta\mu,\nu}{}^{,k} = h_{k\mu,\nu}{}^{,k} = h_{\lambda\mu,\nu}{}^{,\lambda}$

Συνεπώς:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[h^\lambda_{\mu,\nu\lambda} + h^\lambda_{\nu,\mu\lambda} - \Box h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}\right] \tag{1.5}$$

Και

$$R = h^{\mu\nu}_{,\mu\nu} - \Box h \tag{1.6}$$

Επομένως οι εξισώσεις πεδίου του Einstein, αγνοώντας όρους $O(|h_{\mu\nu}|^2)$, γίνονται:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left[h^{\lambda}_{\mu,\nu\lambda} + h^{\lambda}_{\nu,\mu\lambda} - \Box h_{\mu\nu} - h_{,\lambda\sigma} - \eta_{\mu\nu}(h^{\lambda\sigma}_{,\mu\nu} - \Box h)\right] + O(h^2_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\left[h^{\lambda}_{\mu,\nu\lambda} + h^{\lambda}_{\nu,\mu\lambda} - \Box h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h^{\lambda\sigma}_{,\lambda\sigma} + \eta_{\mu\nu}\Box h\right] \end{aligned} \tag{1.7}$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \quad \text{(Trace-Reverse Metric)} \\ \bar{h} &= h - \frac{1}{2}4h = -h \\ h_{\mu\nu} &= \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Και παίρνουμε:

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\bar{h}^{\lambda}_{\mu,\nu\lambda} + \bar{h}^{\lambda}_{\nu,\mu\lambda} - \Box h_{\mu\nu}\right]} \tag{1.9}$$

και

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left[h^{\lambda}_{\mu,\nu\lambda} + h^{\lambda}_{\nu,\mu\lambda} - \Box h_{\mu\nu} - h_{,\lambda\sigma} - \eta_{\mu\nu}(h^{\lambda\sigma}_{,\mu\nu} - \Box h)\right] + O(h^2_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\left[\bar{h}^{\lambda}_{\mu,\nu\lambda} + \bar{h}^{\lambda}_{\nu,\mu\lambda} - \Box\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\eta_{\nu\lambda}\bar{h}^{,\lambda}_{,\mu} - \eta_{\mu\nu}\Box\bar{h})\right] + O(\bar{h}^2_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}\left[\Box\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{,\lambda\sigma}_{\lambda\sigma} - \bar{h}^{\lambda}_{\mu,\nu\lambda} - \bar{h}^{,\lambda}_{\nu,\mu\lambda}\right] + O(\bar{h}^2_{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Άλλος συβολισμός στη βιβλιογραφία

Αφού $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left[T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}(\bar{h})\right]$

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{,\lambda\sigma}_{\lambda\sigma} - \bar{h}^{\lambda}_{\mu,\nu\lambda} - \bar{h}^{,\lambda}_{\nu,\mu\lambda} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left[T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}(\bar{h})\right]$$

Θέτοντας

$$\bar{W}_\mu = \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{h}_{\mu\sigma}$$

Η προηγούμενη εξίσωση παίρνει την εναλακτική μορφή

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \bar{W}_\nu - \partial_\nu \bar{W}_\mu + \eta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{W}_\sigma \eta_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left[T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}(\bar{h})\right]$$

την οποία συναντάμε στη βιβλιογραφία (πχ. [10])

Βλέπουμε ότι η παραπάνω σχέση θα απλοποιούταν ακόμα περισσότερο αν

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$$

Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε με τον επόμενο μετασχηματισμό. Θεωρούμε ένα απειροστό μετασχηματισμό συντεταγμένων, $x'^{\alpha} = x^\alpha + \xi^\alpha$, όπου ξ^a είναι ένα δεδομενο διανυσματικό πεδίο. Έχουμε ότι η διαταραχή $\bar{h}_{\mu\nu}$ μετασχηματίζεται όπως [1, 3, 10]:

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\alpha\beta} &= \bar{h}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^\rho_{,\rho} \\ \bar{h} &= h' - 2\xi^\alpha_{,\alpha} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Προκύπτει ότι αυτός, για να είναι μετασχηματισμός Lotentz θα πρέπει $\xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} = 0$. Πράγματι, για να είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, μετασχηματισμός Lorentz θα πρέπει η μετρική να παραμένει αναλλοίωτη:

Πρέπει $\quad g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma} = (\delta^\rho_\mu + \partial_\mu \xi^\rho)(\delta^\sigma_\nu + \partial_\nu \xi^\sigma) g'_{\rho\sigma} \\ &= (\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu + \delta^\rho_\mu \partial_\nu \xi^\sigma + \delta^\sigma_\nu \partial_\mu \xi^\rho + \partial_\mu \xi^\rho \partial_\nu \xi^\sigma) g'_{\rho\sigma} \\ &\approx g'_{\mu\nu} + g'_{\rho\nu}\partial_\mu \xi^\rho + g'_{\mu\sigma}\partial_\nu \xi^\sigma \\ &= \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu \\ &= g'_{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu}_{=0} \end{aligned}$$

Πώς πρέπει να μετασχηματίζεται λοιπόν το $\bar{h}_{\mu\nu}$ ώστε να έχουμε $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$?

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \\
&= h'_{\mu\nu} + (\partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \\
&= \bar{h}'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}' + (0) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h \\
&= \bar{h}'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(\bar{h}' + h\right) \\
&= \bar{h}'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(-h' + h\right) \\
&= \bar{h}'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(-2\partial_\alpha \xi^\alpha\right)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

όπου προφανώς το $\bar{h}_{\alpha\beta}$ παραμένει λύση της εξίσωσης πεδίου. Επομένως, αφού έχουμε την ελευθερία να επιλέξουμε όποιο ξ^α, μπορούμε να επιλέξουμε το ξ να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\bar{h}^\sigma_{\alpha,\sigma} = \frac{1}{2}\bar{h}'^\sigma_{\sigma,\alpha} - \Box \xi_\alpha \quad \text{(Harmonic gauge)} \tag{1.13}$$

Τότε βλέπουμε ότι η 1.12 μας δίνει το επιθυμητό αποτέλεσμα $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$. Οι 1.8 και 1.13 μαζί συνιστούν την Transverse Traceless βαθμίδα, στην οποία θα δουλέψουμε από εδώ και πέρα.

Βαθμοί ελευθερίας

- $h_{\mu\nu}$ είναι ένας 4×4 συμμετρικός πίνακας: 10 BE
- Harmonic gauge: -4 BE
- Επιλογή του ξ^α: -4 BE

Μόνο 2 BE περισσεύουν στην TT βαθμίδα.

Με την επιλογή και αυτής της δεύτερης βαθμίδας παίρνουμε:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \tag{1.14}$$

Και οι εξισώσεις Einstein παίρνουν την απλούστερη μορφή:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \Box h_{\mu\nu} = -\tfrac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.15}$$

η οποία είναι της μορφής:

$$\Box h_{\mu\nu} = -j^{gr}_{\mu\nu} \quad \text{με βαθμίδα} \quad \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

Όπως και στον ηλεκτρομαγνητισμό, η λύση της εξίσωσης αυτής είναι το καθυστερημένο δυναμικό:

$$h_{\alpha\beta}(\mathrm{x}, t) = \frac{4\pi G}{c^4}\int \frac{T_{\alpha\beta}(\mathrm{x}', t - \frac{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}{c})}{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|} d^3x'. \tag{1.16}$$

Αυτή η λύση περιγράφει μια βαρυτική διαταραχή που διαδίδεται στο χώρο με την ταχύτητα του φωτός c.

1.2 Περίπτωση απουσίας βαρυτικών πηγών

Όταν $T_{\alpha\beta} = 0$, τότε έχουμε στην βαθμίδα Lorentz την ομογενή εξίσωση που αντιστοιχεί στην περίπτωση απουσίας βαρυτικών πηγών (στο θα δούμε τη γενική μη ομογενή λύση), δηλαδή την εξίσωση ελευθέρου πεδίου:

$$\Box h_{\alpha\beta} = 0, \tag{1.17}$$

η οποία έχει λύση διαδιδόμενου κύματος με $k^2 = 0$

$$h_{\mu\nu}(x) = Re\{A_{\mu\nu}(\mathrm{k})e^{\pm i\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}}\} \tag{1.18}$$

όπου ο τανυστής πόλωσης $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ ικανοποιεί πάντα, λόγω της βαθμίδας Lorentz, τις συνθήκες:

$$\boxed{k^\mu A_{\mu\nu}(\mathrm{k}) = A_{\mu\nu}(\mathrm{k})k^\nu = 0} \tag{1.19}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι στον τανυστή του πλάτους μπορεί να επιβληθεί η πρόσθετη συνθήκη

$$A^{\alpha}_{\alpha} = 0 \text{ [3]} \tag{1.20}$$

Οι δύο αυτές συνθήκες αποτελούν τη λεγόμενη transverse-traceless gauge και χρησιμοποιούν όλες τις ελευθερίες βαθμίδας, συνεπώς οι εναπομείνασες συνιστώσες του $h_{\alpha\beta}$ θα έχουν φυσική σημασία. Επιλέγοντας ως z την διεύθυνση διάδοσης του κύματος, παίρνουμε $\vec{k} = (\omega, 0, 0, \omega)$ που σε συνδυασμό με την εξίσωση 1.19 θα έχουμε $A_{\alpha z} = A_{0\alpha} = 0$ για κάθε α (αυτή είναι και η προέλευση του προσδιορισμού transverse για τη βαθμίδα: το $A_{\mu\nu}$ είναι εγκάρσιο στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος). Από την 1.19 λοιπόν έχουμε ότι επιβιώνουν οι συνιστώσες A_{xx}, A_{yy} και $A_{xy} = A_{yx}$. Επιπλέον η 1.2 επιβάλει τη συνθήκη $A_{xy} = A_{yx}$ για το ίχνος του τανυστή $A_{\mu\nu}$. Επομένως ο τανυστής του πλάτους παίρνει τη μορφή:

$$A^{TT}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

Τέλος από την $\vec{k} = (\omega, 0, 0, \omega)$ έχουμε $i\vec{k} \cdot \vec{x} = -i(\omega t - \omega z)$ επομένως η γενική λύση των γραμμικοποιημένων εξισώσεων Einstein στο κενό, για διάδοση στον z άξονα με σταθερή συχνότητα ω στην TT βαθμίδα είναι:

$$h^{TT}_{\mu\nu}(t, z) = Re\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{i\omega(z-t)} \} \tag{1.22}$$

Που σημαίνει ότι αφού υπάρχουν δύο ανεξάρτητες συνιστώσες, θα υπάρχουν δύο πιθανές πολώσεις για τα βαρυτικά κύματα. Η συνιστώσα του κύματος που είναι ανάλογη του A_{xx} ονομάζεται plus (+) και αυτή που είναι ανάλογη του A_{xy} ονομάζεται cross (×). Έτσι στη γραμμική προσέγγιση με την TT βαθμίδα

στο κενό μπορούμε να γράψουμε:

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t-z) & h_\times(t-z) & 0 \\ 0 & h_\times(t-z) & -h_+(t-z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

Για να συνειδητοποιήσουμε τι σημαίνει ένα βαρυτικό κύμα να έχει μια συγκεκριμένη πόλωση πρέπει να εξετάσουμε ποια θα είναι η επίδρασή του σε κάποια δοκιμαστικά σωμάτια.

1.3 Επίδραση βαρυτικών κυμάτων σε ελεύθερα σωμάτια

Όλα τα βαρυτικά κύματα μπορούν να γραφτούν στη μορφή της 1.22, ώστε κάθε κύμα να έχει δύο ανεξάρτητες συνιστώσες, τις h_{xx}^{TT} και h_{xy}^{TT}.
Ας θεωρήσουμε ένα κύμα πόλωσης + που διαδίδεται στον z άξονα:

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} h(t-z) \tag{1.24}$$

που αντιστοιχεί σε μια χρονοεξαρτώμενη μετρική:

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h(t-z))dx^2 + (1 - h(t-z))dy^2 + dz^2 \tag{1.25}$$

Θεωρούμε δύο δοκιμαστικά σωμάτια A και B στις θέσεις $x_A^i = (ct, 0, 0, 0)$ και $x^i = (ct, x_B, y_B, z_B)$ και ένα βαρυτικό που διαδίδεται στον z άξονα. Αν τα σωμάτια αυτά είναι ακίνητα πρωτού περάσει το πρώτο μέτωπο του κύματος, θα έχουν τετραταχύτητες $u_A = u_B = (1, 0, 0, 0)$. Αφού τα σωμάτια είναι ελεύθερα, θα υπακούουν την γεωδαισιακή εξίσωση

$$\frac{d}{d\tau}u^i = -\Gamma^i_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{1.26}$$

Στη γραμμικοποιημένη μετρική οι σχέσεις του Christoffel σε πρώτη τάξη της διαταραχής παίρνουν την μορφή:

$$\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial h_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right) \tag{1.27}$$

Αντικαθιστώντας στην 1.26, παίρνουμε την αρχική τιμή της επιτάχυνσης:

$$\left(\frac{du^\alpha}{d\tau}\right)_0 = \frac{d^2(\delta x^i)}{d\tau^2} = -\delta\Gamma^i_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\delta\Gamma^i_{00}$$
$$= -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial h_{\beta 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{\beta 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}\right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα σωμάτια είναι αρχικά ακίνητα. Όμως από την βαθμίδα TT είδαμε ότι $h_{\delta 0} = 0$ άρα

$$\left(\frac{du^\alpha}{d\tau}\right)_0 = 0$$

που σημαίνει πως σε πρώτη τάξη ως προς τη διαταραχή, η χωρική απόσταση μεταξύ των σωματιδίων A και B δεν έχει αλλάξει λόγω του βαρυτικού κύματος. Η χωροχρονική απόσταση όμως των μεταξύ των δύο σωμάτων έχει αλλάξει. Για παράδειγμα αν τα A και B είναι πάνω στον άξονα x και απέχουν απόσταση L_0 τότε το αντίστοιχο στοιχείο μήκους είναι

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h(t-z))dx^2 \tag{1.28}$$

που αντιστοιχεί στη μετρική

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 + h(t-z) \end{bmatrix}$$

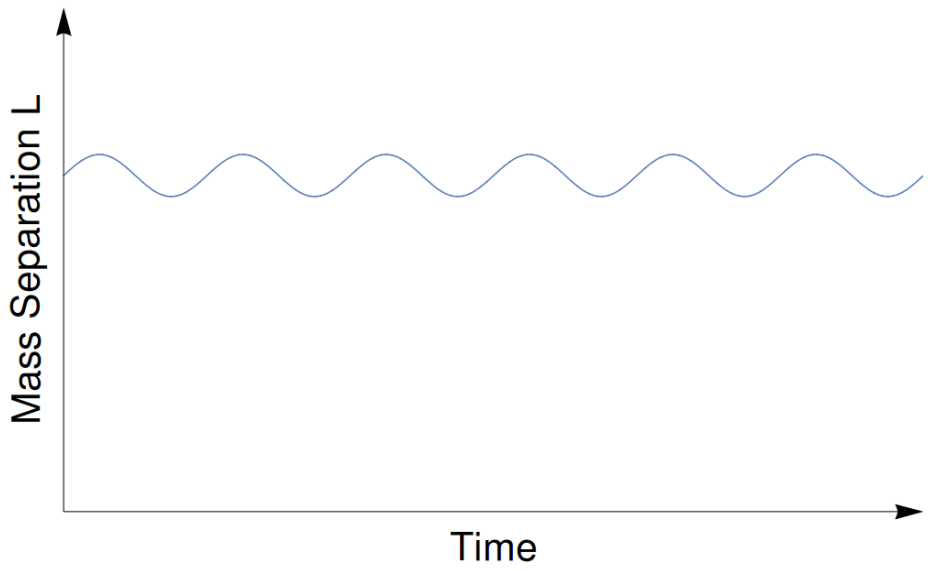
επομένως η χωροχρονική απόσταση μεταξύ τους θα είναι:

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_0^{L_0} |ds^2|^{1/2} = \int_0^{L_0} |g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta|^{1/2} \\ &= \int_0^{L_0} |g_{xx}|^{1/2}dx \approx |g_{xx}(x=0)|^{1/2}L_0 \\ &= \left[1 + \frac{1}{2}h(t-z)\right]L_0 \end{aligned} \tag{1.29}$$

άρα η μεταβολή στην χωροχρονική απόσταση των μαζών είναι

$$\frac{\delta L(t)}{L_0} \simeq \frac{1}{2}h(t-z) \tag{1.30}$$

που σημαίνει ότι ταλαντεύεται με τη συχνότητα του βαρυτικού κύματος όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα. Μια τυπική ταλάντωση βαρυτικών κυμάτων προερχόμενη από μια μακρινή αστρονομική πηγή και αναμένουμε να είναι ανιχνεύσιμη στη Γη είναι της τάξης $\delta L/L_0 \sim 10^{-21}$.



Σχήμα 1.1: Απόστασης μεταξύ δοκιμαστικών σωμάτων που διαταράσσεται λόγω του βαρυτικού κύματος

1.4 Πολώσεις

Ορίζουμε το διάνυσμα μεταξύ των δύο $\hat{\xi}^\alpha$ που περιγράφει την ταυτόχρονη σχετική τους απόσταση, στο σύστημα όπου τα σωμάτια αυτά είναι ακίνητα πριν από τη διέλευση του βαρυτικού κύματος.

$$\hat{\xi}^\alpha(t) := \hat{\chi}^\alpha_B(t) - \hat{\chi}^\alpha_A(t) = (0, x_B, y_B, z_B). \tag{1.31}$$

Στο τοπικό αδρανειακό σύστημα η σχετική επιτάχυνση μεταξύ των σωμάτων δίνεται από την εξίσωση της γεωδαισιακής απόκλισης [3, 7]

$$\frac{d^2\hat{\xi}^\alpha}{d\hat{t}^2} = -c^2 \hat{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta}\hat{u}^\beta\hat{\xi}^\gamma\hat{u}^\delta, \tag{1.32}$$

όπου $\hat{u}^\beta := dx^\alpha/(cdt)$ είναι η τετραταχύτητα στο σύστημα ηρεμίας των δύο σωμάτων.

Εάν επιλέξουμε συντεταγμένες στη βαθμίδα TT με τέτοιο τρόπο ώστε το πεδίο των 4-ταχυτήτων που απαιτείται για να περιγράψει τις TT συντεταγμένες να ταυτίζεται με τη 4-ταχύτητα στο αρχικό σύστημα ηρεμίας, τότε

$$R_{i0j0} = R^{TT}_{i0j0} + O(h^2). \tag{1.33}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω, αγνοώντας όρους τάξης $O(h^2)$, παίρνουμε

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{ij}^{TT}}{\partial t^2}x^j, \tag{1.34}$$

όπου οι παράγωγοι δευτέρας τάξης χρονική παράγωγος $\partial^2 h_{ij}^{TT}/\partial t^2$ υπολογίζεται κατά μήκος της γεωδαισιακής $x = y = z = 0$. Παραπάνω δεν απαιτείται πουθενά να υποθέσουμε ότι η διάδοση του κύματος γίνεται στην διεύθυνση $+\hat{z}$, επομένως αυτή η σχέση ισχύει για κύματα που ταξιδεύουν προς κάθε διεύθυνση. Έστω ότι για χρόνους $t \leq 0$ δεν υπάρχουν κύματα ($h_{ij}^{TT} = 0$) στην περιοχή των μαζών,

$$x^i(t) = x_0^i = \text{σταθερό}, \quad \text{για } t \leq 0. \tag{1.35}$$

Την $t = 0$ κάποια μέτωπα κυμάτων καταφθάνουν στην περιοχή. Περιμένουμε ότι $x^i(t) = x_0^i + O(h)$ για $t > 0$, επομένως επειδή αγνοούμε όρους $O(h^2)$, μπορούμε να κάνουμε την αλλαγή:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{ij}^{TT}}{\partial t^2}x^j \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{ij}^{TT}}{\partial t^2}x_0^j} \tag{1.36}$$

Ολοκληρώνοντας την 1.36,

$$\boxed{x^i(t) = \left(\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}^{TT}(t)\right)x_0^j, \quad t > 0} \tag{1.37}$$

Προσανατολίζουμε τώρα τους άξονες στο σύστημά μας ώστε το κύμα να διαδίδεται στην $+\hat{z}$ κατεύθυνση, ώστε το $h_{ij}^{TT}(t)$ να δίνεται από την 1.23. Επομένως το σύστημα εξισώσεων 1.36 παίρνει τη μορφή:

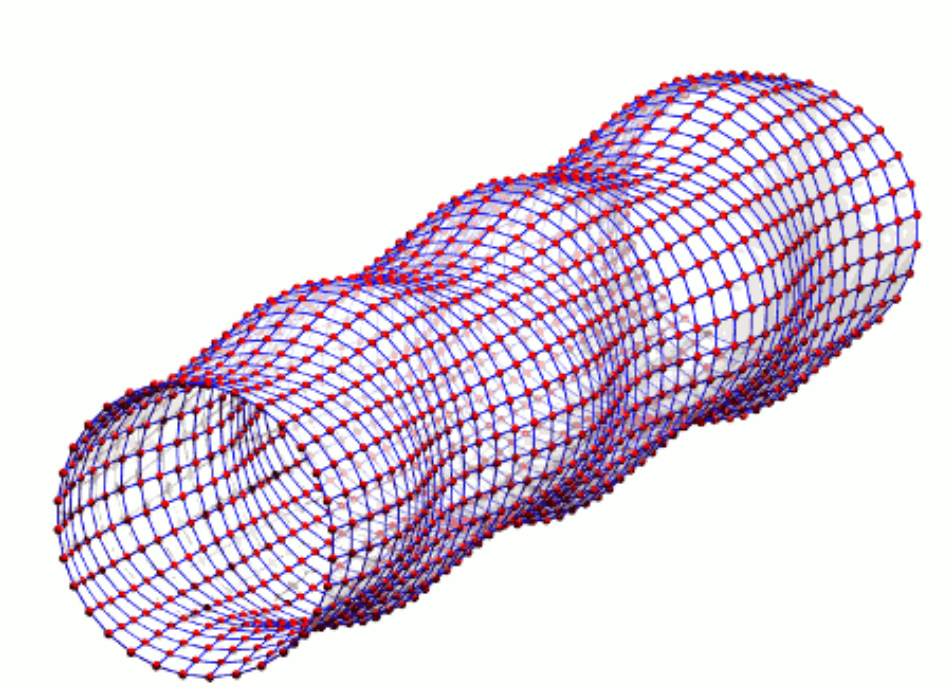
$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}\left(h_+(t)x_0 + h_x(t)y_0\right), \tag{1.38a}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{2}\left(h_x(t)x_0 - h_+(t)y_0\right), \tag{1.38b}$$

$$z(t) = z_0 \tag{1.38c}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις φαίνεται ότι το κύμα είναι εγκάρσιο στη διεύθυνση διάδοσής του, που σημαίνει ότι προκαλεί σχετικές μετατοπίσεις των δοκιμαστικών σωματιδίων μόνο στο επίπεδο που είναι κάθετο με τη διεύθυνση διάδοσής του, δηλαδή θα έχει τη μορφή της εικόνας 1.2 .8

Ας θεωρήσουμε ένα τέλειο δακτυλίδι αρχικά ακίνητων σωματιδίων στο επίπεδο x-y (1.3) με το κέντρο του δακτυλιδιού να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 1.2: Μια 3d αναπαράσταση ενός εγκάρσιου πολωμένου βαρυτικού κύματος στο χώρο [17]

Αν r_0 η ακτίνα του δακτυλιδιού, τότε οι συντεταγμένες του κάθε σωματιδίου στο δακτυλίδι μπορούν να παραμετροποιηθούν με μια γωνία $\phi \in [0, 2\pi]$

$$x_0 = r_0 \cos\phi, \quad y_0 = r_0 \sin\phi, \quad z_0 = 0. \tag{1.39}$$

οι εξισώσεις 1.38 και 1.39 συνεπάγονται ότι η τρίτη συνιστώσα των σωματιδίων παραμένει συνεχώς σταθερή $z(t) = 0$, άρα μόνο οι x και y συντεταγμένες των σωμ=ατιδίων θα πρέπει να αναλυθούν.

Εάν το κύμα έχει πόλωση $+$, δηλαδή είναι $h_{xx}^{TT} \neq 0, h_{xy}^{TT} = 0$ τότε χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 1.38 και 1.39 παίρνουμε

$$x(t) = r_0 \cos\phi \left(1 + \frac{1}{2} h_+(t)\right), \tag{1.40a}$$

$$y(t) = r_0 \sin\phi \left(1 - \frac{1}{2} h_+(t)\right). \tag{1.40b}$$

Αρχικά, πρωτού το κύμα φτάσει ($h_+(t \leq 0) = 0$), το δακτυλίδι των σωματιδίων είναι τελείως κυκλικό. Πώς παραμορφώνεται η διάταξή τους με τη διέλευση του κύματος;

Αντιμετωπίζοντας το σύστημα αυτό ως την παραμετρική μορφή μιας καμπύλης με παράμετρο ϕ, μπορούμε διώχνοντας την εξάρτηση του ϕ να καταλήξουμε πολύ απλά σε μια εξίσωση της μορφής

$$\frac{x^2}{(a_+(t))^2} + \frac{y^2}{(b_+(t))^2} = 1, \tag{1.41}$$

όπου

$$a_+(t) := r_0 \left(1 + \frac{1}{2}h_+(t)\right), \quad b_+(t) := \left(1 - \frac{1}{2}h_+(t)\right). \tag{1.42}$$

Οι εξισώσεις 1.41 - 1.42 περιγράφουν μια έλλειψη με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Η έλλειψη έχει ημιάξονες $a_+(t)$ και $b_+(t)$, οι οποίοι είναι παράλληλοι με τους άξονες x και y αντίστοιχα. Εάν το $h_+(t)$ είναι μια ταλαντωτική συνάρτηση, η οποία αλλάζει το πρόσημό της σε κάθε ταλάντωση, τότε η παραμόρφωση του αρχικού κύκλου σε έλλειψη γίνεται με τον εξής τρόπο: στο χρονικό διάστημα όπου είναι $h_+(t) > 0$, ο κύκλος τεντώνεται στην διεύθυνση x και συμπιέζεται στην διεύθυνση y. Όταν είναι $h_+(t) < 0$ το τέντωμα γίνεται κατά μήκος του άξονα y και η συμπίεση κατά μήκος του x άξονα.

Ας εστιάσουμε την προσοχή μας σε ένα μόνο σωμάτιο του δαχτυλιδιού. Η κίνησή του ως προς την αρχή δίνεται από την 1.38 για κάποια τιμή του ϕ. Ποιά είναι η μορφή της τροχιάς του σωματιδίου;
Συνδυάζοντας την 1.40 με την 1.41 ώστε να απαλλαγούμε από το h_+ βρίσκουμε:

$$\frac{x^2}{r_0 \cos\phi} + \frac{y^2}{r_0 \sin\phi} - 2 = 0, \tag{1.43}$$

Η παραπάνω εξίσωση μας λέει ότι ότι ένα σωματίδιο του δακτυλιδιού κινείται γύρω από την αρχική του θέση κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής.

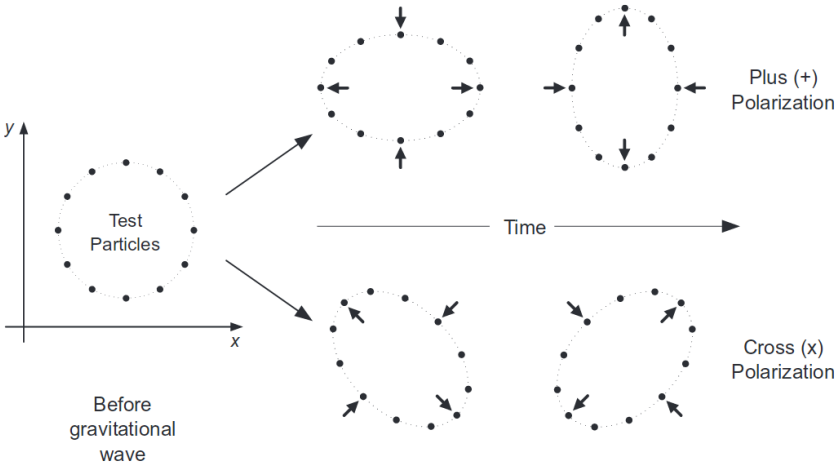
Με την ίδια λογική εξετάζουμε και τα κύματα με πόλωση $\times$ όπου $h_+ = 0$, έχουμε:

$$x(t) = r_0 \left(\cos\phi + \frac{1}{2}\sin\phi h_\times(t)\right), \tag{1.44a}$$

$$y(t) = r_0 \left(\sin\phi - \frac{1}{2}\sin\phi h_\times(t)\right). \tag{1.44b}$$

Εισάγουμε τις νέες συντεταγμένες (x', y') οι οποίες προέρχονται από τις παλιές με μια περιστροφή κατά γωνία $\alpha = 45^o$ γύρω από τον z άξονα.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.45}$$



Σχήμα 1.3: Η επίδραση ενός βαρυτικού κύματος διαδιδόμενου στη διεύθυνση z σε μια σειρά από δοκιμαστικές μάζες στο x-y επίπεδο

Ξαναγράφουμε την 1.44 ως προς τις νέες συντεταγμένες (x', y'),

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} r_0 \left(\sin\phi + \cos\phi\right)\left(1 + h_\times(t)\right), \tag{1.46a}$$

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} r_0 \left(\sin\phi - \cos\phi\right)\left(1 - h_\times(t)\right). \tag{1.46b}$$

που δίνει την καμπύλη

$$\frac{x'^2}{(a_\times(t))^2} + \frac{y'^2}{(b_\times(t))^2} = 1, \tag{1.47}$$

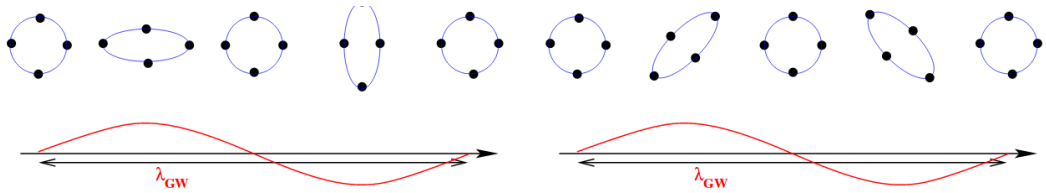
όπου

$$a_\times(t) := r_0 \left(1 + \frac{1}{2} h_\times(t)\right), \quad b_\times(t) := \left(1 - \frac{1}{2} h_\times(t)\right). \tag{1.48}$$

Οι εξισώσεις 1.47 και 1.48 έχουν την ίδια ακριβώς μορφή με αυτή των εξισώσεων 1.41 και 1.42. Αυτό σημαίνει ότι το αρχικό κυκλικό δακτυλίδι παραμορφώνεται σε μια έλλειψη με κέντρο την αρχή, με ημιάξονες $a_\times$ και $b_\times$ οι οποίοι είναι στραμμένοι κατά γωνία 45° ως προς τους άξονες x και y αντίστοιχα [2].

[2] Η διαφορά με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι ότι οι δύο ανεξάρτητες πολώσεις διαφέρουν κατά μια περιστροφή 45° και όχι 90° μεταξύ τους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το $h^{\mu\nu}$ είναι τανυστής τάξης 2 (δηλαδή πίνακας), ενώ στον ηλεκτρομαγνητισμό έχουμε το A^μ που είναι τανυστής τάξης 1 (δηλαδή διάνυσμα).

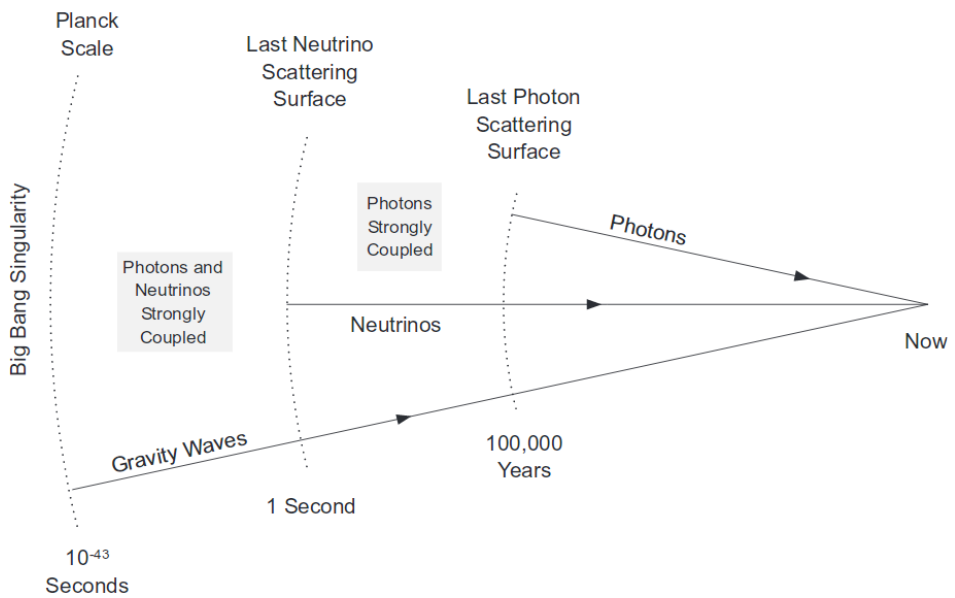
Ηλεκτρομαγνητικά κύματα	Βαρυτικά κύματα
$E'_x = E_x \cos\theta + E_y \sin\theta$	$h'_+ = h_+ \cos 2\theta - h_\times \sin 2\theta$
$E'_y = E_y \cos\theta - E_x \sin\theta$	$h'_\times = h_+ \cos 2\theta + h_+ \sin 2\theta$



Σχήμα 1.4: Δείχνουμε πως σημειακά σωματίδια κατά μήκος ενός δακτυλίου μετατοπίζονται ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης με ένα βαρυτικό κύμα διαδιδόμενο σε διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του δακτυλίου. Το αριστερό σχήμα αναφέρεται σε κύμα πόλωσης $+$ ενώ το δεξί σε κύμα πόλωσης $\times$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ανίχνευση Βαρυτικών Κυμάτων



Σχήμα 2.1: Σωμάτια που αλληλεπιδρούν πιο ασθενικά φαίνεται ότι προέρχονται από νεαρότερες στιγμές του Σύμπαντος. Εν γένει, βαρυτικά κύματα προερχόμενα από εποχές κοντά στην κλίμακα του Planck μπορεί να είναι ορατά στο σημερινό σύμπαν.

Υπάρχουν πολλά κίνητρα για την προσπάθεια ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων και την επιθυμία αύξησης της ακρίβειας των ανιχνευτών. Πρώτα από όλα σχεδόν όλα τα αστροφυσικά φαινόμενα εκπέμπουν βαρυτικά κύματα, και μάλιστα τα ποιο βίαια από αυτά σε μεγάλες εντάσεις. Σε ορισμένες περιπτώσεις τα βαρυτικά κύματα μεταφέρουν πληροφορίες τις οποίες δεν μπορούμε να πάρουμε από την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Για παράδειγμα, βαρυτικά

κύματα φτάνουν σε εμάς απευθείας μετά από μια έκρηξη supernova ενώ αντίθετα η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία υπόκειται πολλαπλές σκεδάσεις από την ύλη που τον περιβάλει πρωτού φτάσει σε εμάς και έτσι πολύτιμες πληροφορίες για την έκρηξη χάνονται κατά τη διαδικασία. Ένα άλλο παράδειγμα που υποδεικνύει την σημαντικότητα των βαρυτικών κυμάτων στην κοσμολογία είναι τα βαρυτικά κύματα που προέρχονται από το πρώιμο σύμπαν, καθώς αυτό είχε ηλικία μόλις 10^{-25}s. Αυτά τα βαρυτικά κύματα αποτελούν τους καλύτερους αγγελιοφόρος (??) για τη μελέτη του νεαρού σύμπαντος και μεταφέρουν το αποτύπωμα άγνωστης φυσικής σε ενέργειες πολύ υψηλότερες από αυτές που μπορούμε να πετύχουμε σήμερα με τους επιταχυντές.

2.1 Παρατηρίσημα μεγέθη βαρυτικών κυμάτων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο καλύψαμε πόσο διαφέρουν τα παρατηρίσημα μεγάθη του βαρυτικού από του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Αυτά είναι τα μεγέθη που θέλουμε να παρατηρίσουμε όταν θέλουμε να ανηχνεύσουμε βαρυτικά κύματα:

- $h_+(t), h_\times(t), \varphi\acute{\alpha}\sigma\eta(t)$: το πλάτος, την πόλωση των κυμάτων και τη φάση της πόλωσης συναρτήσει του χρόνου. Αυτά τα μεγέθη περιέχουν τις περισσότερες πληροφορίες για τα βαρυτικά κύματα.
- θ, ϕ: τη διεύθυνση της πηγής στον ουρανό (εκτός από παρατηρήσεις του στοχαστικού υποβάθρου).

Από αυτά είναι εμφανές ότι η ανίχνευση της βαριτυκής ακτινοβολίας δεν είναι ίδια με την ανίχνευση της ηλεκτρομαγνητικής. Στην περίπτωση της H/M αστρονομίας μπορεί σχεδόν πάντα κανείς να ενισχύσει την ακτινοβολία, ενώ στην περίπτωση της αστρονομίας των βαρυτικών κυμάτων κάποιος πρέπει να ακολουθήσει της ταλαντώσεις της βαρυτικής ακτινοβολίας. Ουσιαστικά στον H/M ανηχνεύουμε την ισχύ της ακτινοβολίας ενώ στην βαρυτική ακτινοβολία πρέπει να ανιχνεύσουμε την έμεση δράση του κύματος στον χώρο.

Ας εξετάσουμε τι μπορούμε να συμπεράνουμε από μια ανίχνεση. Εάν το βαρυτικό κύμα έχει μικρή διαρκεια, της τάξης του δείγματος μιας ροής δειγματοληψίας, τότε κάθε ανηχνευτής θα δώσει συνήθος έναν αριθμό, το οποίο είναι το πλάτος του κύματος που προβάλλεται στον ανιχνευτή (μια συνδιασμένη προβολή των πολώσεων h_+ και $h_\times$). Εάν το κύμα κρατάει περισσότερο από ένα απλό δείγμα, τότε η πληροφορία αυτή θα είναι μια συνάρτηση στο χρόνο.

Εάν το σήμα κρατάει σημαντικά περισσότερο χρόνο, τότε και το πλάτος και η φάση του κύματος μπορούν να επιρρεαστούν από την κίνηση του ανιχνευτή, ο οποίος κινείται και περιστρέφεται μαζί με την τροχιά της Γής. Αυτό προκαλεί μια διαμόρφωση στο πλάτος και τη φάση που δεν είναι εγγενής στο σήμα. Εάν η εσωτερική μορφή του σήματος μπορεί να κατανοηθεί, τότε η διαμόρφωση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της θέσης της πηγής.

Ξεχωρίζουμε τρία διαφορετικά είδη σήματος από τη σκοπιά του παρατηρητή.

(i) Παλμοί (bursts) έχουν τόσο μικρή διάρκεια όπου η αλλοίωση στο σήμα λόγω της κίνησης του ανηχνευτή δεν είναι παρατηρίσημη. Κατά τη διάρκεια της παρατήρισης ο ανιχνευτής είναι ουσιαστικά στατικός. Στην περίπτωση αυτή χρειαζόναστε τουλάχιστον 3 και ιδανικά 4 ανιχνευτές για να προσδιορήσουμε την θέση της πηγής με τη μέθοδο του τριγωνισμού και τις δύο πολώσεις h_+ και $h_\times$. Ένα σύστημα ενηχνευτών είναι απαραίτητο για την εξαγωγή όλων των πληροφοριών σε αυτή την περίπτωση.

(ii) Συνεχές σήμα εξ ορισμού διαρκεί αρκετά ώστε η κίνηση του ανιχνευτή να αποτυπώνεται στη διαμόρφωση του πλάτους και της φάσης του σήματος. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ένα απλό μοντέλο για το εγγενές (”εσωτερικό”) σήμα και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πληροφορίες που είναι αποτυπωμένες στο σήμα (την διαμόρφωση του πλάτους και της φάσης) για να συμπεράνουμε τη θέση και τα πλάτη πόλωσης της πηγής στον ουρανό. Ένας και μόνο ανιχνευτής μπορεί αποτελεσματικά να κάνει αυτή τη δουλειά από μόνος του. Ωστόσο, προκειμένου να είμαστε βέβαιοι ότι το καταγραφόμενο σήμα είναι πράγματι τέτοιο, είναι σημαντικό να παρατηριθεί από έναν δεύτερο ή και τρίτο ανιχνευτή.

(iii) Στοχαστικά υπόβαθρα μπορούν να ανιχνευθούν όπως ο θόρυβος σε έναν ανιχνευτή. Εάν ο θόρυβος ενός ανιχνευτή είναι αρκετά κατανοητός, αυτός ο παραπλήσιος θόρυβος μπορεί να ανιχευθεί ως στοχαστικό υπόβαθρο. Αυτό είναι αρκετά ανάλογο με τον τρόπο ανίχνευσης του μικροκυματικού υποβάθρου.

Μια πιο έμπιστη μέθοδο για την ανίχνευση της στοχαστικής ακτινοβολίας είναι η διαστεύρωση μεταξύ δύο ανιχνευτών, οι οποίοι υπόκεινται στον ίδιο κοσμολογικό θόρυβο αλλα'έχουν διαφορετικό εγγενή θόρυβο. Η διασταύρωση αυτή εξαλείφει πολύ από τον θόρυβο του ανιχνευτή και λειτουργεί καλύτερα όταν οι ανιχνευτές απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από ένα μήκος κύματος της ανιχνευόμενης βαρυτικής ακτινοβομίας.

Εν γενη η ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων απαιτεί την συνδιαδμένη παρατήριση από ένα σύστημα ανιχνευτών, τόσο για την αύξηση της εμπιστοσύνης της παρατήρησης όσο και για την παροχή ακριβών πληροφοριών σε άλλα φυσικά παρατηρίσημα μεγέθη (κατεύθυνση, πλάτος κτλ).

2.2 Ανιχνευτές δέσμης (Συμβολόμετρα laser)

Οι ανιχνευτές αυτοί κάνουν χρήση δεσμών laser για να παρακολουθούν την μεταβολή στην πρότυπη απόσταση μεταξύ ζεύγους ελευθέρων μαζών (οι οποίες αιωρούνται με τη βοήθεια στήριξής που εξουδετερώνει ταλαντώσεις που προέρχονται από τον εξωτερικό χώρο) κατά τη διέλευση ενός βαρυτικού κύματος. Είναι ουσιαστικά συμβολόμετρα Michelson μεγάλης κλίμακας. Ανιχνευτές της μορφής αυτής είναι αυτή τη στιγμή σε λειτουργία υπό τη διεύθυνση διαφόρων ομάδων παγκοσμίως.

Ένα πλεονέκτημα των ανιχνευτών αυτών είναι ότι η διαφορά φάσης στη δέσμη του φωτός μπορεί να γίνει μεγαλύτερη απλά μεγαλώνοντας τους βραχίονες του ανιχνευτή. Ένας ανιχνευτής με βραχίονες μήκους 4km ανταποκρίνεται σε ένα βαρυτικό κύμα πλάτους 10^{-21} [3] με

$$\delta l_{gw} \sim \frac{1}{2} hl \sim 2 \times 10^{-18} m \tag{2.1}$$

όπου δl_{gw} είναι η παραμόρφωση στο βραχίονα του ανιχνευτή.

Υπάρχουν τριών ειδών πηγές θορύβου: θερμικός, και δονητικός. Για να καταλάβουμε τον τρόπο με τον οποίο περιορίζονται, είναι σημαντικό να σκεφτούμε σε ένοιες του χώρου συχνοτήτων. Παρατηρήσεις με επίγειους ανιχνευτές θα γίνονται πιθανός στο φάσμα των $10Hz$ με $10kHz$. Διαταρχές θορύβου έξω από την περιοχή ανίχνευσης μπορούν απλά να αγνοηθούν. Ο στόχος του ελένχου θορύβου η μείωση των διαταραχών εντός του παρατηρίσημου φάσματος.

- Θερμικός θόρυβος. Τα συμβολόμετρα δουλεύουν σε θερμοκρασία δωματίου και δονήσεις στα κάτοπτρα και στα αναρτημένα εκρεμή μπορούν να επισκιάσουν τα βαρυτικά κύματα. Για να ελένξουν αυτό το είδος

[3] Θυμίζουμε εδώ ότι το πλάτος h στο οποίο αναφερόμαστε είναι αδιάστατο και αναφέρεται στο μέγεθος του φαινομένου παραμόρφωσης του χώρου και των αποστάσεων με τη διέλευση του βαρυτικού κύματος. Επομένως το h είναι το κλάσμα της παραμόρφωσης - του τεντώματος του χώρου $\frac{\delta L}{L}$.

θορύβου, οι μηχανικοί εκμεταλεύονται το γεγονός ότι ο θερμικός θόρυβος έχει το μέγιστο πλάτος του στις ιδιοσυχνότητες

- Θόρυβος Poisson (shot noise) Αυτός είναι ο κύριος περιορισμός στην ευαισθησία σε υψηλότερες συχνότητες, $200 - 300Hz$. Έχει να κάνει με τυχαίες διακυμάνσεις στην ένταση του φωτός που μπορεί να εμφανίζονται ως σήμα βαρυτικού κύματος. Όσο περισσότερα φωτόνα χρησιμοποιούνται, τόσο πιο ομαλοί θα είναι οι κροσσοί συμβολής. Μπορουε εύκολα να υπολογίσουμε αυτό τον εγγενή θόρυβο. Εάν N είναι το πλήθος των φωτονίων που εκπέμπονται από το laser κατά τη διάρκεια μιας μέτρησης, τότε όπως και κάθε τυχαία διαδικασία για τη διακύμανση ισχύει $\delta N \propto \sqrt{N}$. Εάν χρησιμοποιούμε φως με μήκος κύματος λ (πχ υπέρυθρο με $\lambda \sim 1\mu m$) μπορούμε να αναμένουμε να καταγράψουμε το μήκος κύματος αυτό με ακρίβεια

$$\delta l_{shot} \sim \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{N}} \tag{2.2}$$

Για να μετρήσουμε ένα βαρυτικό κύμα συχνότητας f, πρέπει να παίρνουμε τουλάχιστον $2f$ μετρήσεις το δευτερόλεπτο, ώστε να μπορούμε να συσσωρεύουμε φωτόνια για χρόνο $\frac{2}{2f}$. Εάν P είναι η ισχύς της δέσμης, τότε

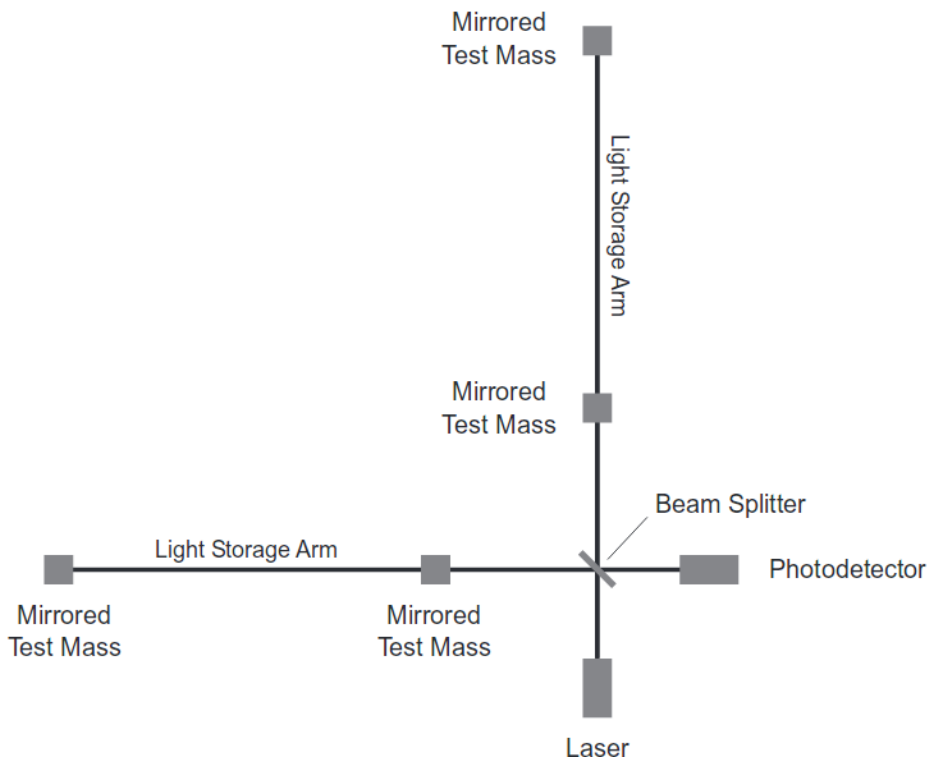
$$N = \frac{P}{\frac{hc}{\lambda} \cdot \frac{1}{2f}} \tag{2.3}$$

Μπορεί εύκολα κανείς να δεί ότι προκειμένου το δl_{shot} να είναι ίδιο με το δl_{gw} στην 2.1, χρειαζόμαστε φως ισχύος περίπου $600kW$. Κανένα συνεχές laser δεν είναι ικανό να παρέχει τέτοια ισχύ στο συμβολόμετρο. Το κλειδί για την επίτευξη τέτοιας ισχύος μέσα στους βραχίονες του ανιχνευτή είναι μια τεχνική που ονομάζεται ανακύκλωση ισχύος [2] όπου με την προσθήκη κατόπτρων κατά μήκος των βραχιόνων αυξάνουν το ενεργό μήκος που διανύει η δέσμη εξισσοροπόντας ταυτόχρονα και τις ενεργειακές απώλειες λόγω διαθλάσεων.

- Δονήσεις εδάφους και μηχανικές δονήσεις είναι μια άλλη πηγή θορύβου που πρέπει να ελενχθεί. Τυπικές σεισμικές δονήσεις μειώνονται απότομα με τη συχνότητα. Συνεπώς αυτό αποτελεί πρόβλημα κυρίων κάτω από τα $100Hz$. Τα αναρτημένα εκρεμμή είναι εξαιρετικά μηχανικά φίλτρα για συχνότητες υψηλότερες της φυσικής τους συχνότητας. Οι αναρτημένοι σωλήνες (στους οποίους ταξιδεύει η δέσμη) περιλαμβάνουν πολλαπλά εκρεμή, κάθε ένα με συχνότητα γύρω στο $1Hz$. Αυτό προσφαίρει μια γρήγορη ακύρωση του θορύβου πάνω από το $1Hz$. Το φάσμα των συμβολομέτρων κανονικά εμφανίζει ένα απότομο βήμα στο χαμηλής συχνότητας υπόβαθρο: αυτό είναι το αναμενόμενο πλάτος του δονητικού θορύβου.

Λειτουργία

Μια δέσμη laser χωρίζεται και κατευθύνεται στου δύο βραχίονες του ανιχνευτή οι οποίοι έχουν κατασκευαστεί ώστε να έχουν το ίδιο μήκος. Το φως ανακλάται σε δοκιμαστικές μάζες με κατοπτρική επιφάνεια που στα άκρα των δύο βραχίονων. Στη συνέχεια το ανακλώμενο φως επανενώνονται και οι κροσσοί συμβολής που παρατηρούνται αναλύονται για ενδείξεις μεταβολής της χωροχρονικής απόστασης των δοκιμαστικών μαζών.



Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση ανιχνευτή συμβολόμετρου laser. Στα μακρά (ίδιου μήκους σκέλη) του ανιχνευτή, το φως ανακλάται επανειλημμένα, αυξάνοντας έτσι το ενεργό μήκος του ανιχνευτή.

Επειδή τα δύο σκέλη φτιάχνονται ώστε να έχουν μεγάλο μήκος είναι δυνατό να ανιχνεύσουν εξαιρετικά μικρές μεταβολές σε αποστάσεις. Θα εξετάσουμε λεπτομερώς πως μπορούμε με τη χρήση φωτός να μετρήσουμε την απόσταση μεταξύ δύο σωμάτων που εκτελούν ελεύθερη πτώση. Επειδή τα σωμάτια είναι ελεύθερα, και υποθέτουμε ότι είναι μακριά το ένα από το άλλο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το TT σύστημα συντεταγμένων. Ας θεωρήσουμε για απλότητα ένα κύμα που ταξιδεύει κατά την διεύθυνση του άξονα z έχοντας καθαρή + πόλωση ώστε η μετρική στην περιοχή όπου διαδίδεται να δίνεται από

την

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + h_+(t-z)]\, dx^2 + [1 - h_+(t-z)]\, dy^2 + dz^2 \tag{2.4}$$

Ας υποθέσουμε πάλι, για απλότητα, ότι δύο σώματα βρίσκονται στον άξονα x, το ένα τοποθετημένο στην αρχή $x = 0$ και το άλλο στη θέση $x = L$. Στο σύστημα TT, τα σωμάτια παραμένουν στις θέσεις αυτές συνέχεια. Για να πραγματοποιηθεί μια μέτρηση, το σωμάτιο στην αρχή στέλνει ένα φωτόνιο κατά μήκος του άξονα x προς το δεύτερο σώμα, το οποίο το ανακλά προς τα πίσω. Το πρώτο σώμα μετρά τον απόλυτο χρόνο (proper time) που μεσολάβησε μεταξύ των γεγονότων της εκπομπής και της λήψης.

Επειδή το φωτόνιο που ταξιδεύει πάνω στον άξονα x κινείται πάνω σε μια γεωδαισιακή ($ds^2 = 0$), με $dy = dz = 0$, θα έχει μια ενεργό ταχύτητα

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1 + h_+}. \tag{2.5}$$

Παρόλο που δεν ισούται με τη μονάδα, αυτή είναι απλά ταχύτητα των συντεταγμένων δεν έρχεται σε ρήξη με τη σχετικότητα. Ένα φωτόνιο που εκπέμφθηκε την t_{start} από την αρχή φτάνει μια συντεταγμένη x σε χρόνο t(x). Το φωτόνιο φτάνει στην δεύτερη μάζα σε χρόνο που παίρνουμε, ολοκληρώνοντας την ενεργό ταχύτητα του φωτός (2.5):

$$t_{far} = t_{start} + \int_0^L [1 + h_+(t(x))]^{1/2}\, dx \tag{2.6}$$

Αφού το h_+ είναι μικρό, μπορούμε να αναπτύξουμε την ρίζα, σε τάξη $O(|h|)$, θέτοντας επιπλέον $t(x) = t_{start} + x$:

$$t_{far} = t_{start} + L + \frac{1}{2}\int_0^L h_+(t_{start} + x)dx \tag{2.7}$$

Το φως ανακλάται προς τα πίσω και όμοιο επιχείρημα με παραπάνω μπορούμε να κάνουμε για την διαδρομή επιστροφής στην πρώτη μάζα:

$$t_{return} = t_{start} + 2L + \frac{1}{2}\int_0^L h_+(t_{start} + x)dx + \frac{1}{2}\int_0^L h_+(t_{start} + L + x)dx \tag{2.8}$$

Επειδή η παραπάνω εξαρτάται από το χρόνο t στο TT σύστημα συντεταγμένων, η εξίσωση αυτή μας δίνει μια μετρήσιμη ποσότητα.

Εάν το μήκος L είναι μικρό συγκριτικά με το μήκος κύματος του βαρυτικού κύματος, ή ο χρόνος επιστροφής t_{return} είναι μικρός σε σχέση με την περίοδο του κύματος, το h_+ είναι ουσιαστικά σταθερό στη διαδρομή του φωτονίου. Τότε ο χρόνος επιστροφής είναι απλά ανάλογος της απόλυτης απόστασης L όπως υπολογίζεται από τη μετρική. Προκειμένου να χρησιμοποιηθεί η σχέση αυτή για τον υπολογισμό της μετρικής της διαταραχής το πιο απλό που μπορούμε να κάνουμε είναι να εξετάσουμε το ρυθμό μεταβολής του χρόνου επιστροφής t_{return} με το πέρασμα του βαρυτικού κύματος.

$$\frac{dt_{return}}{dt_{start}} = 1 + \frac{1}{2}\left[h_+(t_{start} + 2L) - h_{t_{start}}\right] \tag{2.9}$$

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του χρόνου επιστροφής εξαρτάται μόνο από τη μετρική του κύματος τη στιγμή της εκπομπής του φωτονίου και της επιστροφής του στο σημείο αυτό μετά την ανάκλαση. Συγκεκριμένα το πλάτος του βαρυτικού κύματος τη στιγμή της ανάκλασης δεν παίζει κανένα ρόλο.

Εάν τώρα το σήμα που στέλνεται από την αρχή δεν είναι ένα μοναδικό φωτόνιο αλλά ένα συνεχές ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας ν, τότε η παράγωγος του χρόνου επιστροφής ως προς το χρόνο εκκίνησης δεν είναι παρά ο λόγος της συχνότητας της δέσμης τη στιγμή επιστροφής προς τη συχνότητα της δέσμης τη στιγμή της εκπομπής.

$$\frac{dt_{return}}{dt_{start}} = \frac{\nu_{return}}{\nu_{start}}. \tag{2.10}$$

Επομένως αν μελετάμε τις αλλαγές στην ερυθρομετατόπιση της δέσμης που επιστρέφει, μπορούμε άμεσα να το αντιστοιχίσουμε με αλλαγές στο πλάτος του βαρυτικού κύματος. Στην (??) θα βγάλουμε την αντίστοιχη σχέση για τη γενική περίπτωση όπου το κύμα έχει τυχαία διεύθυνση ως προς τον προσανατολισμό των πηγών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Παραγωγή Βαρυτικών Κυμάτων

Θα συζητήσουμε τώρα για το είδος των πηγών που οδηγούν στην παραγωγή βαρυτικών κυμάτων. Θα δούμε ότι στην προσέγγιση όπου θεωρούμε την πηγή αρκετά μακριά από τον παρατηρητή, το βαρυτικό πεδίο καθορίζεται από τη δεύτερη χρονική παράγωγο της τετραπολικής ροπής της πηγής. Με άλλα λόγια, η βαρυτική ακτινοβολία είναι κυρίως ακτινοβολία τετραπόλου. Αντίθετα, στον ηλεκτρομαγνητισμό κυρίαρχη είναι η ακτινοβολία διπόλου [16].

3.1 Προσέγγιση μακρινού πεδίου

Εξετάζουμε τη γραμμικοποιημένη εξίσωση πεδίου 1.15 στην TT βαθμίδα,

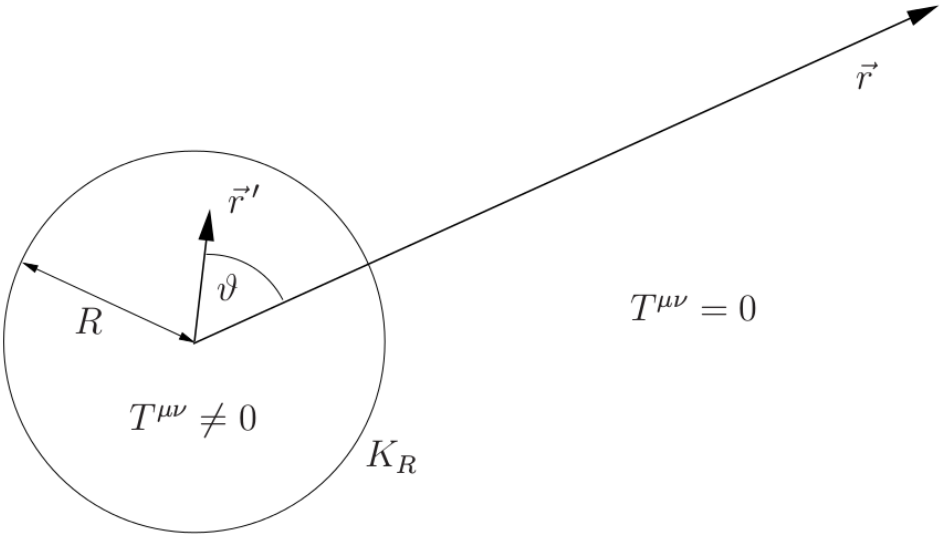
$$\Box h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}, \quad \partial_\mu h^{\mu\nu} = 0$$

Για δεδομένο $T^{\mu\nu}$ η γενική λύση σε αυτή την μη ομογενή εξίσωση είναι η γενική λύση στην ομογενή κυματική εξίσωση (επαλληλία επίπεδων αρμονικών κυμάτων) συν μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης. Μια τέτοια ειδική λύση μπορεί να γραφεί αμέσως σε αναλογία με το καθυστερημένο δυναμικό ([16] chap. 10.2): είναι η λύση καθυστερημένου δυναμικού:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\boldsymbol{R^3}} \left(-\frac{16\pi G}{c^4}\right)\frac{T_{\mu\nu}(ct-|\vec{r}^{\,\prime}-\vec{r}|,\vec{r}^{\,\prime})}{|\vec{r}^{\,\prime}-\vec{r}|}d^3\vec{r}^{\,\prime}. \tag{3.1}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω δύο φορές επαληθεύεται εύκολα ότι ικανοποιεί την 1.15.

Η γενική λύση στην μη ομογενή κυματική εξίσωση δίνεται, αθροίζοντας σε μια αυθαίρετη επαλληλία επίπεδων αρμονικών κυμάτων που ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση ([9] chap.4). Εάν δεν υπάρχουν εισερχόμενα κύματα από το άπειρο, μόνο η 3.1 δίνει φυσική λύση. Θα εξετάσουμε τώρα τη λύση μακριά από την πηγή. Για να το κάνουμε αυτό, υποθέτουμε ότι ο $T^{\mu\nu}$ είναι διάφορος του μηδενός μόνο σε μια συμπαγή περιοχή του χώρου. Μπορούμε έτσι να φράξουμε την περιοχή αυτή από μια σφαίρα K_R ακτίνας R γύρω από την αρχή (θεωρήσαμε την αρχή μέσα στην πηγή), έτσι ώστε $T^{\mu\nu} = 0$ έξω από την σφαίρα και πάνω στο σύνορό της. Ενδιαφερόμαστε για το πεδίο $h^{\mu\nu}$ στο σημείο $\vec{r}$ με $|\vec{r} \gg R|$.



Σχήμα 3.1: Ψάχνουμε το πεδίο μακριά από την πηγή.

Επομένως

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}\,' - \vec{r}| &= \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos\theta} = r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} \\
&= r\Big(1 + O(r'/r)\Big).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Αντικαθιστώντας την 3.2 στην 3.1 παίρνουμε:

$$
\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{r}) = -\frac{4G}{c^4}\int_{\boldsymbol{R^3}} \frac{T_{\mu\nu}(ct - r\Big(1 + O(r'/r)\Big), \vec{r}\,')}{r\Big(1 + O(r'/r)\Big), \vec{r}\,'} d^3\vec{r}\,'. \tag{3.3}
$$

Εάν $r \gg R$, ο $O(r'/r)$ όρος μπορεί να αγνοηθεί και μπορούμε να θεωρήσουμε

το r σταθερό καθώς γίνεται η ολοκλήρωση ως προς $r' \geq R$ σε όλη τη περιοχή.

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t,r) = -\frac{4G}{c^4 r}\int_{\boldsymbol{R^3}} T_{\mu\nu}(ct-r,\vec{r}')d^3\vec{r}'. \tag{3.4}$$

Στην προσέγγιση αυτή το $h^{\mu\nu}$ εξαρτάται από το μέτρο του $\vec{r}$. Αυτό γιατί τα σφαιρικά κύματα σε αυτή την προσέγγιση μπορούν να θεωρηθούν επίπεδα.

Θα εξετάσουμε τώρα ποιες ιδιότητες των πηγών καθορίζουν το$h^{\mu\nu}$ σε αυτή την προσέγγιση. Εισάγουμε για το σκοπό αυτό τις πολυπολικές ροπές της πηγής. Ορίζονται σε αναλογία με τον ηλεκτρομαγνητισμό , με την πυκνότητα φορτίου να αντικαθίσταται από την πυκνότητα ενέργειας $T_{00} = -T_0^0 = T^{00}$.

$$\begin{aligned}
M(t) &= \int_{\boldsymbol{K_R}} T^{00}(ct,\vec{r})d^3\vec{r} \quad \text{μονοπολική ροπή,}\\
D^k(t) &= \int_{\boldsymbol{K_R}} T^{00}(ct,\vec{r})x^k d^3\vec{r} \quad \text{διπολική ροπή,}\\
I^{kl}(t) &= \int_{\boldsymbol{K_R}} T^{00}(ct,\vec{r})x^k x^l d^3\vec{r} \quad \text{τετραπολική ροπή}\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Να παρατηρήσουμε ότι κάθε τετραπολική ροπή καθορίζεται από το άιχνο μέρος της και τετραπολικές ροπές χαμηλότερης τάξης.

Υπολογίζουμε την πρώτη και δεύτερη χρονική παράγωγο των τετραπολικών ροπών. Θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση συνέχειας:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G}\partial_\mu \Box h^{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G}\Box\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 \tag{3.5}$$

Βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I^{kl}(t) &= \int_{\boldsymbol{K_R}} c\partial_0 T^{00}(ct,\vec{r})x^k x^l d^3\vec{r} = -c\int_{\boldsymbol{K_R}} \partial_i T^{i0}(ct,\vec{r})x^k x^l d^3\vec{r}\\
&= -c\int_{\boldsymbol{K_R}}\Big[\partial_i\big(T^{i0}(ct,\vec{r})x^k x^l\big) - T^{i0}(ct,\vec{r})\delta_i^k x^l - T^{i0}(ct,\vec{r})x^k\delta_i^l\Big]d^3\vec{r}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα μπορεί, με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss να ξαναγραφτεί ως επιφανειακό:

$$\int_{\boldsymbol{K_R}} \partial_i\big(T^{i0}(ct,\vec{r})x^k x^l\big)d^3\vec{r} = \int_{\boldsymbol{\partial K_R}} T^{i0}(ct,\vec{r})x^k x^l d^3 f_i$$

όπου το df_i είναι το στοιχείο επιφανείας στην ∂K_R. Καθώς η $\boldsymbol{K_R}$ περικλείει όλες τις πηγές, ο $T^{\mu\nu}$ είναι μηδέν πάνω στο σύνορο ∂K_R, επομένως το τελευταίο ολοκλήρωμα, και άρα ο πρώτος όρος στην 3.6 μηδενίζεται. Άρα:

$$\frac{d}{dt}I^{kl}(t) = c\int_{\boldsymbol{K_R}} \Big(T^{k0}(ct,\vec{r})x^l + T^{l0}(ct,\vec{r})x^k\Big)d^3\vec{r}. \tag{3.7}$$

Όμοια βρίσκουμε και τη δεύτερη παράγωγο:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}I^{kl}(t) &= c^2\int_{\boldsymbol{K_R}} \Big(\partial_0 T^{k0}(ct,\vec{r})x^l + \partial_0 T^{l0}(ct,\vec{r})x^k\Big)d^3\vec{r} \\
&= c^2\int_{\boldsymbol{K_R}} \Big(-\partial_i T^{ki}(ct,\vec{r})x^l - \partial_i T^{li}(ct,\vec{r})x^k\Big)d^3\vec{r} \\
&= c^2\int_{\boldsymbol{K_R}} \Big[-\partial_i\big(T^{ki}(ct,\vec{r})x^l\big) + T^{ki}(ct,\vec{r})\delta_i^l - \partial_i\big(T^{li}(ct,\vec{r})x^k\big) + T^{li}(ct,\vec{r})\delta_i^k\Big]d^3\vec{r}. \\
&= 0 + c^2\int_{\boldsymbol{K_R}} T^{kl}(ct,\vec{r})d^3\vec{r} - 0 + c^2\int_{\boldsymbol{K_R}} T^{lk}(ct,\vec{r})d^3\vec{r}.
\end{aligned}$$

και επειδή $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$

$$\frac{d^2}{dt^2}I^{kl}(t) = c^2\int_{\boldsymbol{K_R}} T^{lk}(ct,\vec{r}')d^3\vec{r}' \tag{3.8}$$

Εισάγοντας αυτό το αποτέλεσμα στην 3.4 βρίσκουμε ότι στην προσέγγιση μακρινού πεδίου:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t,r) = -\frac{4G}{c^4 r}\int_{\boldsymbol{R^3}} T_{\mu\nu}(ct-r,\vec{r}')d^3\vec{r}' = -\frac{4G}{c^4 r}\frac{1}{2c^2}\frac{d^2 I^{kl}}{dt^2}\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

Άρα η λύση της διάδοσης ενός βαρυτικού κύματος μακριά από την πηγή δίνεται συναρτήσει της δεύτερης χρονικής παραγώγου της τετραπολικής ροπής της πηγής.

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t,r) = -\frac{2G}{c^6 r}\frac{d^2 I^{kl}}{dt^2}\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

Επομένως αυτή είναι και η μόνη ιδιότητα της πηγής που μπορεί να μετρήσει και ένας ανιχνευτής μακριά από την πηγή, η δεύτερη χρονική παράγωγος της τετραπολικής ροπής σε έναν καθυστερημένο χρόνο. Υπό αυτή την έννοια, η βαρυτική ακτινοβολία είναι ακτινοβολία τετραπόλου ενώ η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία είναι ακτινοβολία διπόλου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ενέργεια των Βαρυτικών Κυμάτων

4.1 Μη τοπική ενέργεια στη Γενική Σχετικότητα

Η ενεργειακή πυκνότητα ενός Νευτώνειου βαρυτικού πεδίου δίνεται από την

$$\epsilon_{Newt}(\vec{x}) = -\frac{1}{8\pi G}\left[\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})\right]^2 = -\frac{1}{8\pi G}\left[\vec{g}(\vec{x})\right]^2 \tag{4.1}$$

Όπου το $\Phi(\vec{x})$ είναι το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό και $\vec{g}(\vec{x})$ είναι το Νευτώνειο βαρυτικό πεδίο. Η σχέση αυτή είναι ανάλογη με τη ενεργειακή πυκνότητα του ηλεκτρικού πεδίου που ξέρουμε από τον ηλεκτρομαγνητισμό. Η ενεργειακή πυκνότητα για ένα βαρυτικό πεδίο έχει την ίδια μορφή, εκτός από το πρόσημο "$-$" το οποίο δηλώνει της βαρυτικής δύναμης. Επειδή η βαρύτητα είναι μια ελκτική δύναμη, η ενέργεια που μιας οργανωμένης κατανομής μαζών είναι μικρότερη από αυτήν όταν οι μάζες είναι διάσπαρτες.

Τέτοιες σχέσεις όμως δεν παίρνουμε στη γενική σχετικότητα και υπάρχει ένας θεμελιώδης λόγος για τον οποίο δεν υπάρχει έννοια τοπικής βαρυτικής ενεργειακής πυκνότητας στη γενική σχετικότητα. Αυτός έχει να κάνει με τη σύνδεση μεταξύ διατηρούμενων ποσοτήτων και και χωροχρονικές συμμετρίες. Η διατηρούμενη ενέργεια και στροφορμή της τροχιάς ενός σωματιδίου σε μια Schwarzchild γεωμετρία έρχεται ως άμεσο επόμενο τις συμμετρίες των στροφών και χρονικών μεταθέσεων. Η διατηρούμενη ενέργεια και στροφορμή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί ως συνέπεια συμμετριών στο επίπεδο χωροχρόνο τις οποίες υποθέτουμε στη θεωρία του Maxwell. Όμως στη γενική σχετικότητα δεν θεωρούμε καμία σταθερή χωροχρονική συμμετρία. Συνεπώς τέτοια επιχειρήματα δεν μπορούν να τεθούν, αφού είναι μια θεωρία χωροχρονικής γεωμετρίας, και δεν υπάρχουν συμμετρίες που να χαρακτηρίζουν όλο το χωροχρόνο. Η απουσία τοπικής βαρυτικής ενέργειας στη γενική

σχετικότητα είναι μέρος μιας σημαντικής αλλαγής στον τρόπο θεώρησης της βαρύτητας ως έννοια άμεσα συνυφασμένη με αυτή της καμπυλότητας του χωροχρόνου και όχι ως δυναμικό πεδίο που απλά δρα μέσα στο χωροχρόνο.

4.2 Τανυστής ενέργειας-ορμής Βαρυτικών Κυμάτων στην προσέγγιση μικρού μήκους κύματος

Παρόλο που δεν υπάρχει έννοια τοπικής ενέργειας για ένα βαρυτικό πεδίο, η ολική ενέργεια ηρεμίας (μετάφραση του (mass-energy)) του χωροχρόνου αποδεικνύεται ότι έχει νόημα όταν ο χώρος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος. Συγκεκριμένο παράδειγμα αυτού είναι όταν ορίζουμε την μάζα μιας μελανής οπής από τη ασυμπτωτική συμπεριφορά στην Schwarzchild ή Kerr γεωμετρία. Μεταξύ των δύο άκρων της ολικής ενέργειας του σύμπαντος και της αδυναμίας ορισμού τοπικής ενέργειας υπάρχει η προσεγγιστική έννοια της ενεργειακής πυκνότητας ενός ασθενούς βαρυτικού κύματος που έχει μήκος κύματος λ, το οποίο είναι πολύ μικρότερο από την κλίμακα καμπυλότητας $\mathcal{R}$ του χωροχρόνου στο υπόβαθρο μέσα στον οποίο διαδίδεται. Η ενέργεια αυτή δεν είναι ακριβώς τοπική. Είναι μια μέση ενεργειακή πυκνότητα πάνω σε χωροχρονικούς όγκους των οποίων οι διαστάσεις είναι μεγαλύτερες από λ αλλά πολύ μικρότερες από $\mathcal{R}$.

Οι προσεγγίσεις που συμμετέχουν στον ορισμό αυτής της ενεργειακής πυκνότητας αυξάνονται σε ακρίβεια καθώς το $\lambda/\mathcal{R}$ γίνεται μικρό. Για παράδειγμα, μπορούν να γίνουν πολύ ακριβείς στον υπολογισμό της ενέργειας του χάνεται από μια πηγή βαρυτικών κυμάτων απλά υπολογίζοντας πολύ μακριά από την πηγή όπου ο χώρος είναι προσεγγιστικά επίπεδος και το $\mathcal{R}$ μπορούμε να το θεωρήσουμε άπειρο.

Παρακάτω θα υπολογίσουμε την ενεργειακή πυκνότητα μικρού μήκους κύματος βαρυτικής ακτινοβολίας. Όμως μπορούμε πρωτού μπούμε σε αυτή την διαδικασία να προβλέψουμε τη μορφή της με μερικά επιχειρήματα διαστατικής ανάλυσης. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα κύμα της μορφής $f(t-z) = A\sin\left[\omega(t-z)\right]$, αναμένουμε όπως και στην μηχανική ή στον ηλεκτρομαγνητισμό η ενεργειακή πυκνότητα να είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του κύματος A. Η ενεργειακή πυκνότητα έχει μονάδες (μήκους)$^{-2}$ σε μονάδες όπου $G = c = 1$. $\Big[$ Είναι (ενέργεια)/(μήκος)^3 $\sim \mathcal{M}/(\mathcal{L}\mathcal{T}^2)$, αλλά η μάζα και ο χρόνος έχουν μονάδες μήκους σε αυτό το σύστημα $\Big]$. Η μόνη ποσότητα με διαστάσεις μήκους στην μετρική ενός επίπεδου βαρυτικού κύματος με συχνότητα ω είναι το αντίστροφο της συχνότητας αυτής. Επομένως,

υποθέτουμε ότι η ενεργειακή πυκνότητα πρέπει να είναι ανάλογη του $\omega^2\alpha^2$.

Όταν λύσαμε τις εξισώσεις του Einstein για το γραμμικοποιημένο βαρυτικό πεδίο στο Κεφάλαιο 3 δεν ανησυχούσαμε για το αν η ενέργεια του κύματος προκαλεί πρόσθετη καμπύλωση του χωροχρόνου και απλά πήραμε μια σταθερή επίπεδη μετρική στο υπόβαθρο. Αυτό ήταν συνεπές με την προσέγγιση, γιατί λύναμε τις εξισώσεις του Einstein σε πρώτη (γραμμική) τάξη του πλάτους του βαρυτικού κύματος. Αναμένουμε η ενεργειακή πυκνότητα του κύματος να είναι δεύτερης τάξης ως προς το πλάτος του βαρυτικού κύματος όπως δείξαμε διαστατικά παραπάνω. Η ενεργειακή πυκνότητα λοιπόν ενός κύματος θα μπορούσε να αγνοηθεί σε γραμμική προσέγγιση πρώτης τάξης όμως η ενέργεια των κυμάτων γίνεται πηγή καμπυλότητας σε προσεγγίσεις ανώτερης τάξης. Γράφοντας τις εξισώσεις του Einstein στο κενό σε προσέγγιση μεγαλύτερης τάξης, θα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τον ενεργό τανυστή ενέργειας ορμής των βαρυτικών κυμάτων.

Οι εξισώσεις του Einstein για τη μετρική $g_{\alpha\beta}(x)$ στην απουσία πηγών γίνεται ακριβώς:

$$R_{\alpha\beta}(g) = 0 \tag{4.2}$$

Έστω $\mathcal{R}$ η τυπική ακτίνα καμπυότητας του υποκείμενου χώρου, $\lambda\!\!\!^{-}$ το τυπικό μειωμένο μήκος κύματος $(\lambda/2\pi)$ και $\mathcal{A}$ το πλάτος του βαρυτικού κύματος. Απαιτούμε να ικανοποιούνται ταυτοχρόνως οι συνθήκες $\mathcal{A} \ll 1$ και $\lambda\!\!\!^{-}/\mathcal{R} \ll 1$. Η καμπυλότητα του υποβάθρου μπορεί να οφείλεται αποκλειστικά σε κύματα ή μερικώς σε κύματα και μερικώς σε κοντινή ύλη και άλλα πεδία.

Η ανάλυση γίνεται σε σύστημα αναφοράς αρχικά βαθμονομημένο στο χώρο με την έννοια ότι ο διαχωρισμός της μετρικής στη συνεισφορά του υποκείμενου χώρου και της ίδιας της διαταραχής θα είναι εφικτή. $h_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta}(x) = g^{(B)}_{\alpha\beta}(x) + h^{(1)}_{\alpha\beta}(x) + h^{(2)}_{\alpha\beta}(x) + \ldots = 0 \tag{4.3}$$

Θεωρούμε ότι ο υποκείμενος χώρος είναι λείος και ότι η διαταραχή έχει μήκος κύματος λ πολύ μικρότερη της κλίμακας $\mathcal{R}$ στην οποία η μετρική του υποκείμενου χώρου μεταβάλλεται σημαντικά. Μπορούμε κατά συνέπεια να ισχυριστούμε ότι ο $g^{(B)}_{\alpha\beta}$ θα περιγράφει προσεγγιστικά επίπεδο χώρο, αλλά ελαφρά καμπυλομένο λόγω της ενέργειας του βαρυτικού κύματος.

Αναπτύσσουμε την 4.2 σε δυνάμεις του πλάτους του κύματος, παίρνοντας

$$\underset{?}{R_{\alpha\beta} = R^{(B)}_{\alpha\beta}(g^{(B)})} + \underset{\mathcal{R}/\lambda\!\!\!^{-}{}^2}{R^{(1)}_{\alpha\beta}(g^{(B)}, h)} + \underset{\mathcal{R}^2/\lambda\!\!\!^{-}{}^2}{R^{(2)}_{\alpha\beta}(g^{(B)}, h)} + \underset{\mathcal{R}^3/\lambda\!\!\!^{-}{}^2}{\ldots} = 0 \tag{4.4}$$

Εδώ, το $R^{(B)}_{\alpha\beta}$ είναι ο τανυστής Ricci του υποβάθρου ο οποίος είναι ανεξάρτητος της διαταραχής $h_{\alpha\beta}$, το $R^{(1)}_{\alpha\beta}$ είναι γραμμικό ως προς το $h_{\alpha\beta}$ και το $R^{(2)}_{\alpha\beta}$ εξαρτάται από το τετραγωνικό όρο του $h_{\alpha\beta}$ κτλ, όπου γενικά το $R^{(n)}_{\alpha\beta}$ αποτελείται από όλους τους όρους n-ης τάξης ως προς $h_{\alpha\beta}$. Εδώ όμως ανώτεροι όροι δεν θα χρειαστούν.

Όμοια, ο τανυστής του Einstein παίρνει τη μορφή:

$$G_{\alpha\beta}(h) = R_{\alpha\beta}(h) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}(h) = G^{(1)}_{\alpha\beta}(h) + G^{(2)}_{\alpha\beta} + \ldots = 0 \tag{4.5}$$

όπου

$$G^{(1)}_{\alpha\beta}(h) = R^{(1)}_{\alpha\beta}(h) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma} R^{(1)}_{\rho\sigma}(h),$$

$$G^{(2)}_{\alpha\beta}(h) = R^{(2)}_{\alpha\beta}(h) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma} R^{(2)}_{\rho\sigma}(h) - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta}\eta^{\rho\sigma} R^{(1)}(h) + \eta_{\alpha\beta} h^{\rho\sigma} R^{(1)}_{\rho\sigma}(h), \tag{4.6}$$

κτλ. Εδώ χρησημοποιήσαμε ότι $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + \ldots$. Υποθέτουμε ότι η μετρική μας $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ ικανοποιεί την εξίσωση πεδίου του Einstein:

$$G_{\alpha\beta}(h) = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Ξαναγράφουμε την εξίσωση κρατώντας μόνο πρώτης τάξης όρους στο αριστερό μέλος και μετακινώντας όλους τους ανώτερης τάξης όρους στο αριστερό μέλος,

$$G^{(1)}_{\alpha\beta}(h) = \kappa\big(T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}\big), \tag{4.7}$$

$$t_{\alpha\beta} = \frac{1}{\kappa}\big(G_{\alpha\beta}(h) - G^{(1)}_{\alpha\beta}(h)\big) = \frac{1}{\kappa}\big(G^{(2)}_{\alpha\beta}(h) + \ldots\big) \tag{4.8}$$

Σύμφωνα με την 4.7 το h ικανοποιεί την γραμμικοποιημένη εξίσωση πεδίου με πηγή $T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}$[4]. Φυσικά αυτή εξακολουθεί να είναι η ίδια εξίσωση Einstein η οποία είναι μη γραμμική. Απλά ονομάσαμε τους μη γραμμικούς όρους $t_{\alpha\beta}$ και τους ερμηνεύσαμε σαν να είναι πρόσθετες πηγές.

[4]Η ιδέα για τη γραφή της "ξένης" συνεισφοράς στον τανυστή ενέργειας-ορμής με αυτή τη μορφή εισαγάγηκε πρώτη φορά από τους Landau και Lifshitz στο [6] chap.11 §101 και για το λόγο αυτό ο $t_{\alpha\beta}$ είναι γνωστός ως Landau–Lifshitz pseudotensor

Κρίσιμες παρατηρήσεις πάνω στο $t_{\alpha\beta}$

- Τα $t_{\alpha\beta}$ δεν είναι συνειστώσες κάποιου τανυστή

  Πράγματι, το $G^{(1)}_{\alpha\beta}$ και κατά συνέπεια το $t_{\alpha\beta}$ μετασχηματίζεται ως τανυστής κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, αλλά όχι κάτω από αυθαίρετη αλλαγή συντεταγμένων. Για το λόγο αυτό το $t_{\alpha\beta}$ ονομάζεται ψευδοτενυστής ενέργειας-ορμής.

- Η συνδιασμένη πηγή $T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}$ ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας

$$\partial^\alpha \big(T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}\big) = 0^{\text{a}} \tag{4.9}$$

  [a] Αυτή η εξίσωση δεν είναι συναλοίωτη (γιατί κατά την εξαγωγή τις σχέσης συναντώνται όροι με απλή και όχι συναλοίωτη παράγωγο της μορφής $\frac{\partial h^{ijl}}{\partial x^l}$ [a]), αλλά ισχύει μόνο σε σφαιρικές συντεταγμένες όπου η μετρική του υποβάθρου έχει συνειστώσες $\eta_{\alpha\beta}$. Παρόλα αυτά γίνεται πραγματική εξίσωση διατήρησης σε ολοκληρωτική μορφή, εάν ολοκληρωθεί σε μια χωροχρονική περιοχή (η αλλαγή του ενεργειακού περιεχομένου μέσα σε ένα χωρικό όγκο ισούται με την ενέργεια στο σύνορό του). [b]

[a] Σχέση 101.8 στο [6]

[b] Αντίθετα ο συναλοίωτος νόμος απόκλισης που έχουμε $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$ ο οποίος ικανοποιείται από πραγματική πηγή μάζας, είναι νόμος διατήρησης μόνο σε απειροστά μικρές περιοχές και δεν οδηγεί σε κανένα ολοκληρωτικό νόμο διατήρησης.

Η γραμμικοποίηση του πεδίου ως προς $h_{\alpha\beta}$ και των παραγώγων του είναι ισοδύναμη με το να θέσουμε $t_{\alpha\beta} = 0$. Σε αυτή την προσέγγιση, το $T_{\alpha\beta}$ ικανοποιεί το νόμο διατήρησης 4.9. Πρέπει να πάμε σε τουλάχιστον δεύτερη τάξη της μορφής 4.3 αν θέλουμε να έχουμε ενα μη τετριμένο $t_{\alpha\beta}$. Σε αυτη την ανώτερης τάξης προσέγγιση, το $h^{(1)}_{\alpha\beta}$ είναι λύση της γραμμικοποιημένης εξίσωσης πεδίου. Τα $h^{(1)}_{\alpha\beta}$ είναι μικρά σε πρώτη τάξη, ενώ τα $h^{(2)}_{\alpha\beta}$ είναι μικρά σε 2η τάξη. Με άλλα λόγια όροι γραμμικοί στα $h^{(2)}_{\alpha\beta}$ αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο σαν τεραγωνικοί όροι στα $h^{(1)}_{\alpha\beta}$.

Αναπτύσσοντας και τα δύο μέλη της 4.7 μέχρι δεύτερη τάξη, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} G^{(1)}_{\alpha\beta}\big(h^{(1)} + h^{(2)}\big) &= \kappa\big(T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}\big), \\ t_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{\kappa} G^{(2)}_{\alpha\beta}(h^{(1)}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Με άλλα λόγια παίρνουμε τον ψευδο-τανυστή ενέργειας-ορμής στη

χαμηλότερη μή τετριμένη του προσσέγγιση εάν εισάγουμε την λύση $h^{(1)}_{\alpha\beta}$ της γραμμικοποιημένης εξίσωσης στην $G^{(2)}_{\alpha\beta}$.

Εάν η μετρική του υποβάθρου είναι μη-επίπεδη αποκλειστικά εξαιτίας της ενέργειας στα κύματα, αυτή η καμπυλότητα δεν θα πρέπει να είναι γραμμική ως προς το $h_{\alpha\beta}$. Επομένως ο γραμμικός όρος $R^{(1)}_{\alpha\beta}$ στην 4.4 θα πρέπει να είναι μηδενικός

$$R^{(1)}_{\alpha\beta}(\gamma, h) = 0. \tag{4.11}$$

Αυτή είναι μια γραμμική κυματική εξίσωση για το βαρυτικό κύμα. Όσο μικρότερο είναι το πλάτος του κύματος, τόσο λιγότερο καμπύλος είναι ο υποκείμενος χώρος (το $\gamma_{\alpha\beta}$ πλησιάζει την επίπεδη μετρική), και τόσο περισσότερο πλησιάζει η 4.5 σε μια γραμμική κυματική εξίσωση σε επίπεδο χώρο.

Με το να λέμε ότι θεωρούμε κυματομορφές με μικρά μήκη κύματος εννοούμε τέτοια ώστε να μεταβάλλονται γρήγορα στην κλίμακα όπου το $\gamma_{\alpha\beta}$ μεταβάλλεται. Το υπόλοιπο της εξίσωσης 4.4 έχει επομένως ισχύ μόνο κατά μέσο όρο. Παίρνοντας το μέσο όρο πάνω σε χωροχρονικούς όγκους με πλευρές μεγαλύτερες από το μήκος κύματος έχουμε:

$$R^{(B)}_{\alpha\beta}(\gamma) = -\big\langle R^{(2)}_{\alpha\beta}(\gamma, h)\big\rangle. \tag{4.12}$$

Η εξίσωση 4.6 μας δείχνει πως ο τετραγωνικός όρος ως προς το πλάτος του βαρυτικού κύματος παράγει καμπυλότητα στο χωροχρόνο. Γράφοντας την 4.6 στην μορφή των εξισώσεων του Einstein για την καμπυλότητα του υποβάθρου:

$$R^{(B)}_{\alpha\beta}(\gamma) = 8\pi\left(T^{(GW)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}T^{(GW)}\right) \tag{4.13}$$

γίνεται εμφανής ο διαχωρισμός. Ο ενεργός τανυστής ενέργειας-ορμής του βαρυτικού κύματος είναι:

$$T^{(GW)}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{8\pi}\left[\big\langle R^{(2)}_{\alpha\beta}\big\rangle - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\big\langle R^{(2)}\big\rangle\right]. \tag{4.14}$$

Από τον ενεργό τανυστής ενέργειας-ορμής μιας μικρού μήκους κύματος διαταραχής θα βρούμε την ενεργειακή πυκνότητα ενός επίπεδου βαρυτικού κύματος σε ένα γραμμικά επίπεδο χώρο στην κατώτερη τάξη του πλάτους του. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα βαρυτικό κύμα πόλωσης plus (+) και με διεύθυνση αυτή του άξονα z (δηλαδή είναι της μορφής 1.24). Προκειμένου να βρούμε την έκφραση της ενέργειας και της ροής ενέργειας που ψάχνουμε, ως πρακτικό παράδειγμα και χωρίς έλλειψη της γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι

έχουμε κυματική μορφή $f(t-z) = \alpha \sin\left[\omega(t-z)\right]$. Η ροή ενέργειας είναι η συνιστώσα $T^{03}_{(GW)}$ της 4.8.

Για να υπολογίσουμε το $T^{03}_{(GW)}$ σε δεύτερη τάξη $O(\alpha^2)$ ως προς το πλάτος του κύματος αρκεί να βάλουμε $\gamma_{\alpha\beta}$ στην 4.8. Ο παραγόμενος τανυστής ενέργειας-ορμής οδηγεί στο $\gamma_{\alpha\beta}$ να αποκλίνει από το $h_{\alpha\beta}$ κατά μια ποσότητα ανάλογη του α^2.

$$g^{\alpha\beta}_{(1)} = -h^{\alpha\beta} \tag{4.15}$$

4.2.1 Ενεργειακές απώλειες βαρυτικών κυμάτων

$$g_{a\beta} = \eta_{a\beta} + h^{(1)}_{a\beta} + h^{(2)}_{a\beta} \tag{4.16}$$

$$R_{a\beta} = \underbrace{R^{(1)}_{a\beta}\left[h^{(1)}_{\mu\nu}\right]}_{0} + \underbrace{R^{(1)}_{a\beta}\left[h^{(2)}_{\mu\nu}\right] + R^{(2)}_{a\beta}\left[h^{(1)}_{\mu\nu}\right]}_{0} \tag{4.17}$$

$$R^{(2)}_{a\beta}\left[h^{(1)}_{\mu\nu}\right] = \frac{1}{2}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu,a\beta} + \frac{1}{4}h^{\mu\nu}_{,a}h_{\mu\nu,\beta} + \partial^{\mu}h^{\nu}_{\beta}\partial \tag{4.18}$$

4.2.2 Μερικές εκτιμήσεις μεγέθους

Ένα σημαντικό πρόβλημα όσον αφορά τους υπολογισμούς στην γενική σχετικότητα είναι η μη γραμμικότητα του χώρου. Δεν είναι πάντα δυνατό να χωρίσουμε την συνεισφορά των βαρυτικών κυμάτων από την καμπυλότητα του χώρου. Οι κλίμακες στις οποίες αυτή μεταβάλλεται (λ_{GW}) είναι πολύ μικρότερη συγκρινόμενη με όλες τις υπόλοιπες σημαντικές συνεισφορές στην καμπυλότητα που συναντάμε στην αστροφυσική. Η σημαντική αυτή διαφορά μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε τον τανυστή του Riemann σε δύο μέρη, ένα που αφορά την γεωμετρία του υποκείμενου χώρου ($R^{B}_{\mu\nu\sigma\rho}$) και ένα άλλο κομμάτι που αφορά τη συνεισφορά του βαρυτικού κύματος στην καμπυλότητα ($R^{GW}_{\mu\nu\sigma\rho}$). Ο διαχωρισμός αυτός δεν είναι απόλυτα ακριβής, αλλά είναι μια αξιόλογη προσέγγιση. Ο $R^{B}_{\mu\nu\sigma\rho}$ μπορεί να αντιμετωπισθεί ως μια μέση, καθολική, μεγάλης κλίμακας καμπυλότητα του σύμπαντος πάνω σε διάφορα μήκη κύματος. Το $R^{GW}_{\mu\nu\sigma\rho}$ είναι το γρήγορα μεταβαλλόμενο μέρος του τανυστή Riemann που περιγράφει σε μικρή κλίμακα, μόνο τοπικά την καμπυλότητα. Οι επόμενες σχέσεις δίνουν μια εκτίμηση των αντιστοίχων κλιμάκων

$$R^{GW}_{\mu\nu\sigma\rho} \sim \frac{1}{R^2} \tag{4.19}$$

$$R^{GW}_{\mu\nu\sigma\rho} \equiv R_{\mu\nu\sigma\rho} - R^{B}_{\mu\nu\sigma\rho} \sim \frac{h}{\lambda\!\!\!^{-2}_{GW}} \tag{4.20}$$

Όπου το R είναι το βαθμωτό Ricci και $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi$. Θεωρήσαμε ότι το $R^{B}_{\mu\nu\sigma\rho}$ είναι αντιστρόφως ανάλογο του R^2 υποθέτοντας ότι έχουμε ένα κλειστό σύμπαν (ανάλογα με την καμπυλότητα μιας σφαίρας). Μπορούμε επίσης να έχουμε και μια προσέγγιση για το πώς το μέτρο των δύο μερών του τανυστή διαφέρουν, παίρνοντας ως τάξη μεγέθους για το πλάτος, αυτό που ανιχνεύθηκε στο LIGO ($h \sim 10^{-22} cm$).

$$R^{GW}_{\mu\nu\sigma\rho} \sim \frac{1}{10^{56} cm^2} \tag{4.21}$$

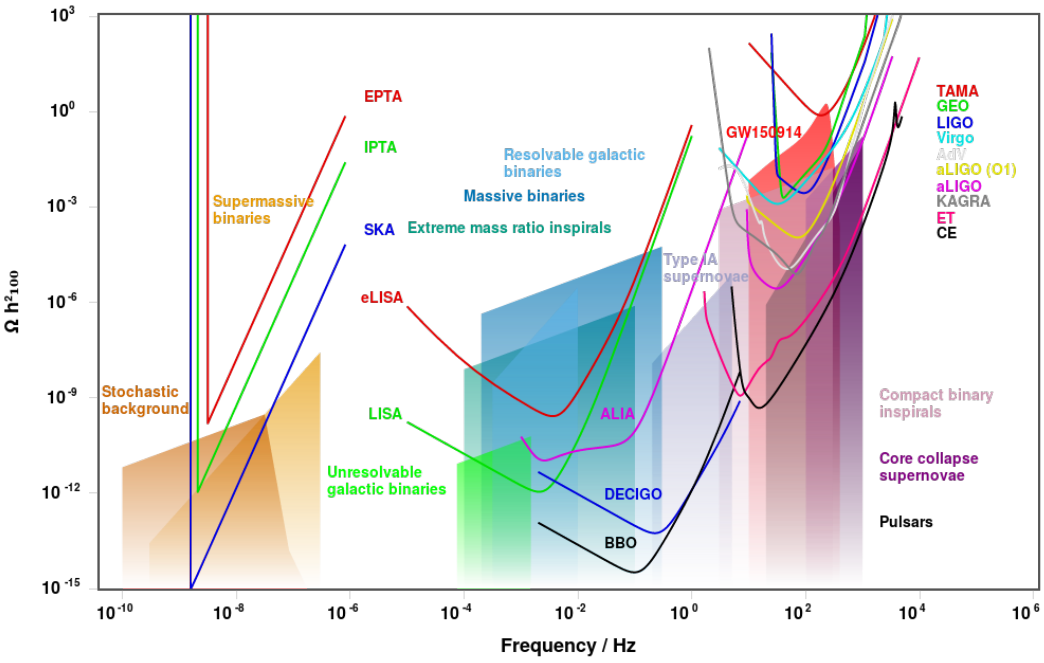
$$R^{GW}_{\mu\nu\sigma\rho} \sim \frac{h}{\lambda\!\!\!^{-2}_{GW}} \sim \frac{10^{-22}}{(10^8 cm)^2} \sim \frac{1}{10^{-38} cm^2} \gg \frac{1}{10^{56} cm^2} \tag{4.22}$$

Όπου R βάλαμε προσεγγιστικά την ακτίνα του Hubble.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Το φάσμα των Βαρυτικών Κυμάτων

Τρεις είναι οι περιοχές συχνοτήτων βαρυτικών κυμάτων που εξετάζονται πειραματικά: η περιοχή υψηλών συχνοτήτων (HF:$f \sim 10^{-4}$ έως 1 Hz), η περιοχή χαμηλών συχνοτήτων (LF:$f \sim 10^{-7}$ έως 10^{-9} Hz), και η περιοχή εξαιρετικά χαμηλών συχνοτήτων (ELF:$f \sim 10^{-15}$ έως 10^{-18} Hz). Στο σχήμα ?? φαίνονται οι τρεις κύριες περιοχές του φάσματος συχνοτήτων μαζί με τις καμπύλες ευαισθησίας διαφόρων ανιχνευτών [18]. Ο οριζόντιος άξονας έχει συχνότητες και ο κατακόρυφος ενεργειακές πυκνότητες. Στο δεξιό άκρο του γραφήματος (FR) δουλεύουν οι επίγειοι ανιχνευτές: TAMA, GEO, LIGO, aLIGO (ή αλλιώς Advanced LIGO είναι αναβαθμισμένα προγράμματα του LIGO), AdV, KAGRA, ET, Cosmic Explorer (CE). Οι πηγές σε αυτή την περιοχή έχουμε βάλει να είναι από: συμπαγή διπλά ελλειπτικά συστήματα, supernovas, pulsars και ξεχωριστά το διπλό σύστημα GW150914. Στη μεσαία περιοχή (LF) θα αναζητούν βαρυτικά κύματα οι διαστημικοί ανιχνευτές: eLISA, LISA, DECIGO, BBO, ALIA. Σε αυτή την περιοχή θεωρήσαμε τις πηγές: (resolvable) και μη διπλά συστήματα, διπλά συστήματα μεγάλης μάζας,, supernovas τύπου IA. Στην περιοχή εξαιρετικά χαμηλών συχνοτήτων (ELF) λειτουργούν οι ανιχνευτές που παίρνουν δεδομένα χρόνων άφιξης σημάτων από πάλσαρς: EPTA, IPTA, SKA. Εδώ πήραμε ως πηγές: Στοχαστικό υπόβαθρο, υπερμεγέθη διπλά συστήματα. Στην τελευταία κατηγορία, η ακρίβεια των ανιχνευτών αυξάνεται με το πλήθος των παρατηρούμενων pulsars αλλά και με το χρόνο παρατήρησης, που σημαίνει ότι με τον καιρό (βάλαμε να κυμαίνεται από 10 - 20 χρόνια) οι καμπύλες ευαισθησίας κατεβαίνουν χαμηλότερα στο διάγραμμα. Περισσότερες πληροφορίες για τους διαφορετικούς ανιχνευτές και την ευαισθησία τους υπάρχουν εδώ: [19].



Σχήμα 5.1: Φάσμα συχνοτήτων βαρυτικών κυμάτων και καμπύλες ευαισθησίας διαφόρων επίγειων και διαστημικών ανιχνευτών, ως προς την κρίσιμη ενεργειακή πυκνότητα ανά λογαριθμικό διάστημα συχνοτήτων πολλαπλασιασμένο με το τετράγωνο της σταθεράς Hubble H_0. [18]

5.1 Περιοχή υψηλών συχνοτήτων, $1 - 10^4$ Hz

Μία πηγή βαρυτικών κυμάτων μάζας M δεν μπορεί να είναι πολύ μικρότερη από την βαρυτική της ακτίνα, $2GM/c^2$, και δεν μπορεί να εκπέμψει ισχυρά σε περιόδους πολύ μικρότερες από το χρόνο που παίρνει στο φως να εκτελέσει μαι περιστροφή γύρω από τη βαρυτική ακτίνα της μάζας. Συνεπώς, οι συχνότητες στις οποίες εκπέμπει η βαρυτική πηγή είναι

$$f \lesssim \frac{1}{4\pi GM/c^3} \sim 10^4 Hz \frac{M_\odot}{M}, \tag{5.1}$$

όπου $M_\odot$ είναι η ηλιακή μάζα. Για να επιτευχθεί μέγεθος με τάξη μεγέθους ίδια της βαρυτικής ακτίνας και συνεπώς εκπομπή κοντά στη μέγιστη συχνότητα, το σώμα θα πρέπει να είναι βαρύτερο από το όριο μάζας του Chandrasekhar κατά περίπου μια ηλιακή μάζα, $M_\odot$. Επομένως, η υψηλότερη συχνότητα που αναμένουμε από ισχυρά βαρυτικά κύματα είναι $f_{max} \sim 10^4$ Hz. Αυτή ορίζει το άνω άκρο του φάσματος των βαρυτικών κυμάτων.
Η περιοχή υψηλών συχνοτήτων κυριαρχεί στις μετρήσεις των επίγειων

συμβολομέτρων και ανιχνευτών συντονισμού βαρυτικών κυμάτων. Σε συχνότητες χαμηλότερες του 1 Hz, οι επίγειοι ανιχνευτές φτάνουν να έχουν σχεδόν ανυπέρβλητο θόρυβο από a) τις διακυμάνσεις της βαθμίδας του Νευτώνειου βαρυτικού πεδίου (εξαιτίας έλξεων από ανομοιομορφίες της γήινης ατμόσφαιρας πάνω από τον ανιχνευτή) και b) από τις δονήσεις του Γήινου φλοιού (οι οποίες είναι πολύ δύσκολο να αφαιρεθούν μηχανικά από την αρχή). Προκειμένου να ανιχνευτούν κύματα με χαμηλότερη συχνότητα θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν διαστημικοί ανιχνευτές σε τροχιά, απαλλαγμένοι από τις δύο παραπάνω πηγές θορύβου.

Πλήθος πηγών βαρυτικών κυμάτων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον εκπέμπουν στην περιοχή υψηλών συχνοτήτων: κατάρρευση αστέρων σε αστέρες νετρονίων ή μελανών οπών στο γαλαξία μας και σε κοντινούς γαλαξίες, η περιστροφή και η δόνηση αστέρων νετρονίων στον γαλαξία μας, η σύζευξη διπλών συστημάτων αστέρων, αστέρων νετρονίων και μελανών οπών ($M \lesssim 1000 M_{odot}$) σε μακρινούς γαλαξίες. Άλλες πιθανές πηγές μπορεί να είναι το στοχαστικό υπόβαθρο από δονούμενες κοσμικές χορδές, αλλαγές φάσεως στο νεαρό σύμπαν και το Big Bang.

5.2 Περιοχή χαμηλών συχνοτήτων, 10^{-4} - 1 Hz

Η περιοχή χαμηλών συχνοτήτων, 10^{-4} έως 1 Hz, είναι ο τομέας έρευνας των διαστημικών ανιχνευτών (βρίσκονται σε γήινη ή σε άλλη διαπλανητική τροχιά). Οι πιο σημαντικοί από αυτούς είναι, ανιχνευτές που καταγράφουν τη μετατόπιση Doppler μικροκυμάτων που στέλνονται από τη Γη σε διαστημόπλοια σε τροχιά και στη συνέχεια αναμεταδίδονται πίσω στη Γη και ανιχνευτές προσαρμοσμένοι πάνω σε δορυφόρους που παρακολουθούν με φωτόμετρα ο ένας τον άλλο (διαστημικά συμβολόμετρα laser, την τεχνολογία αυτή θα χρησιμοποιεί ο ανιχνευτής LISA στο μέλλον).

Το άνω άκρο της περιοχής αυτής στο 1 Hz ορίζεται από το θορύβου λόγω των αλλαγών στη βαρυτική βαθμίδα και των θορύβων λόγω δονήσεων που επηρεάζουν τα επίγεια όργανα. Το κατώτερο άκρο, $\sim 10^{-4}$ Hz, αυτής της περιοχής συχνοτήτων ορίζεται να είναι τέτοιο λόγω των αναμενόμενων δυσκολιών στις χαμηλές συχνότητες απομόνωσης του διαστημοπλοίου από τις στροβιλώδεις δυνάμεις του ηλιακού ανέμου και της κοσμικής ακτινοβολίας.

Η περιοχή χαμηλών συχνοτήτων θα πρέπει να κυριαρχείται από κύματα

διπλών συστημάτων με μικρή περίοδο στο γαλαξία μας (διπλά συστήματα κύριας ακολουθίας, λευκών νάνων, αστέρων νετρονίων, κτλ), από λευκούς νάνους, αστέρες νετρονίων και μικρές μελανές οπές που εκτελούν σπειροειδή τροχιά γύρω από μελανή οπή μεγάλης μάζας ($M \sim 3 \times 10^5$ με 3×10^7 M_{odot}) σε μακρινούς γαλαξίες. Επίσης κύματα τέτοιας συχνότητας δίνουν και διπλά συστήματα υπερμεγεθών μελανών οπών ($M \sim 100$ με 10^8 M_{odot}) που πρόκειται να συγχωνευθούν Το άνω όριο, $\sim 10^8$ M_{odot}, στις μάζες των μελανών οπών που μπορούν να εκπέμψουν σε περιοχή χαμηλών συχνοτήτων προέρχεται από την εξίσωση 13 παίρνοντας $f \gtrsim 10^{-4} Hz$. Θα πρέπει επίσης να υπάρχει ένα στοχαστικό υπόβαθρο στις χαμηλές συχνότητες από διαδικασίες στο νεαρό σύμπαν όπως δονήσεις κοσμικών χορδών, αλλαγές φάσεις και το ίδιο το Big Bang.

5.3 Περιοχή πολύ χαμηλών συχνοτήτων, 10^{-7} - 10^{-9} Hz

Καθώς ένα βαρυτικό κύμα διαπερνάει τη Γη, διαταράσσει το ρυθμό ροής του χρόνου και συνεπώς το ρυθμό χτύπων των ρολογιών μας ως προς ρολόγια που βρίσκονται έκτος του κύματος. Τέτοιες διαφορές θα φανούν ως προφανείς διαταραχές στους χρόνους άφιξης παλμούς pulsars με κύματα παραπλήσιας συχνότητας. Αν δεν παρατηρηθούν τέτοιες διαταραχές σε κάποιο σημείο, μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι ούτε η Γη, ούτε ο pulsar "λούζονται" από βαρυτικά κύματα όμοιας συχνότητας. Αν διαταραχές με την ίδια χρονική εξέλιξη παρατηρούνται ταυτόχρονα από αρκετά διαφορετικά pulsar, τότε την αιτία θα μπορούσαμε να αποδώσουμε στα βαρυτικά κύματα που ταξιδεύουν στον ενδιάμεσο χώρο.

Παίρνοντας το μέσο όρο των χρόνων άφιξης των παλμών σε μεγάλα χρονικά διαστήματα (από μήνες έως δεκαετίες), μπορεί να επιτευχθεί μια μεγάλη ακρίβεια και κατά συνέπεια, στενά όρια μπορούν να παρθούν για τα κύματα που διαπερνάνε τη Γη ή τον pulsar. Το πάνω άκρο αυτής της περιοχής συχνοτήτων, $\sim 10^{-7} Hz$, βρίσκεται παίρνοντας τη μέση τιμή των χρόνων άφιξης των παλμών για ένα διάστημα μερικών μηνών τέτοιο ώστε να αυξηθεί η ακρίβεια. Το κάτω άκρο της περιοχής αυτής, $\sim 10^9$ Hz, βρίσκεται από τη μέση τιμή για διάστημα ~ 20 ετών, και αυτό γιατί πολύ σταθεροί pulsars με παλμούς O(ms) ήταν οι πρώτοι που ανακαλύφθηκαν και άρα έχουμε πολλά δεδομένα.

Με τα όσα ξέρουμε μέχρι σήμερα ισχυρές πηγές βαρυτικών κυμάτων είναι γενικά συμπαγείς και με μέγεθος όχι πολύ μεγαλύτερο της βαρυτικής τους ακτίνας. Τα μόνα όμως συμπαγή σώματα που μπορούν να δώσουν κύματα πχ. στη περιοχή $f \lesssim 10^7$ Hz, είναι αυτά με μάζα $M \gtrsim 10^{11} M_{odot}$ 13. Αυτή είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από τη μάζα των σωμάτων που γνωρίζουμε από όλα τα σημερινά αστρονομικά δεδομένα και φαίνεται επομένως λογικό να πούμε ότι τα μόνα ισχυρά βαρυτικά κύματα που παίρνουμε σε αυτή την περιοχή συχνοτήτων προέρχονται από το στοχαστικό υπόβαθρο που προήλθε από τις ίδιες διαδικασίες του νεαρού σύμπαντος, από τις οποίες προέρχονται και τα κύματα υψηλότερων συχνοτήτων.

5.4 Περιοχή εξαιρετικά χαμηλών συχνοτήτων, 10^{-15} - 10^{-18} Hz

Βαρυτικά κύματα εξαιρετικά χαμηλών συχνοτήτων, 10^{-15} με 10^{-18} Hz, θα πρέπει να προκαλούν ανισοτροπίες στην μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου. Το ισχυρότερο όριο που έχει μπει για αυτές τις συχνότητες προέρχεται από το κάτω άκρο της περιοχής συχνοτήτων $f \sim 10^{-18}$ Hz, όπου το μήκος κύματος των βαρυτικών κυμάτων είναι περίπου π φορές η απόσταση Hubble $1/H_0$ και τα βαρυτικά κύματα, πιέζοντας όλο το χώρο εντός του κοσμολογικού ορίζοντα προς μια κατεύθυνση και τεντώνοντάς τον προς μια άλλη θα πρέπει να έχουν παράξει τετραπολικές ανισοτροπίες στο μικροκυματικό υπόβαθρο. Οι τετραπολικές αυτές ανισοτροπίες, που καταγράφονται από το δορυφόρο COBE, αν προέρχονται κατά κύριο λόγο από βαρυτικά κύματα (το οποίο είναι πιθανό), θα πρέπει να αντιστοιχούν σε μια ενεργειακή πυκνότητα $\Omega_g(10^{-18} Hz) \sim 10^{-9}$.

5.5 Λίγα περισσότερα λόγια για τις κοσμολογικές πηγές

Σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε τις στοχαστικό υπόβαθρο των βαρυτικών κυμάτων. Αναλόγως με την προέλευσή του, το στοχαστικό υπόβαθρο μπορεί εν γένει να χωρισθεί σε δύο κατηγορίες: αυτή που προέρχεται από την υπέρθεση βαρυτικής ακτινοβολίας από μεγάλους πληθυσμούς αστροφυσικών πηγών που δεν μπορούν να επιλυθούν απομονωμένα, και το αρχέγονο υπόβαθρο που προκύπτει απο διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στα πρώιμα στάδια δημιουργίας του σύμπαντος. Η συνιστώσα αυτή του υποβάθρου της βαρυτικής ακτινοβολίας

είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα αφού φέρει πληροφορία για την κατάσταση του αρχέγονου σύμπανος εγκυμονώντας πιθανότατα και νέα φυσική.

Το ενεργειακό και φασματικό περιεχόμενο αυτής της ακτινοβολίας είναι αποτυπομένη στο φάσμα, το οποίο ορίζεται ως

$$\Omega_{GW} = \frac{1}{\rho_c} f \tilde{\rho}_{GW}(f), \tag{5.2}$$

όπου f είναι η συχνότητα, ρ_c είναι η κρίσημη ενεργειακή πυκνότητα του σύμπαντος $\left(\rho_c = 3H_0^2/8\pi G\right)$ και $\tilde{\rho}_{GW}$ είναι η ενλεργεια των βαρυτικών κυμάτων ανά μονάδα συχνότητας

$$\rho_{GW} = \int_0^\infty df \tilde{\rho}_{GW}(f). \tag{5.3}$$

Πρωτού ασχοληθούμε με τους μηχανισμούς από τους οποίους μπορεί να δημιουργήθηκαν τα αρχέγονα βαρυτικά κύματα, θα εξετάσουμε τα κύρια φαινομενολογικά φράγματα.

Μέρος ΙΙ

Διαταραχές με απουσία βαθμωτού πεδίου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Μετασχηματισμοί Βαθμίδας της μετρικής

Γράφουμε τη μετρική του διαταραγμένου FRW(0) (δηλαδή επίπεδου) σύμπαντος ως

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = a^2\big(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\big), \tag{6.1}$$

όπου το $h_{\mu\nu}$, καθώς και τα $h_{\mu\nu,\rho}$, $h_{\mu\nu,\rho\sigma}$ θεωρούνται μικρά. Παρακάτω θα αγνοήσουμε από όλες τις εξισώσεις διαταραχές τάξης $\mathcal{O}(h^2)$ και ανώτερης.

$$h^\mu_\nu \equiv \eta^{\mu\rho} h_{\rho\nu}, \quad h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}. \tag{6.2}$$

Στο Κεφ. 1 δείξαμε ότι (σχέση 1.3):

$$g^{\mu\nu} = a^{-2}\big(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\big) \tag{6.3}$$

Θα δώσουμε διαφορετικά ονόματα για τις χωρικές και χρονικές συντεταγμένες της διαταραγμένης μετρικής, ορίζοντας

$$\big[h_{\mu\nu}\big] = \begin{bmatrix} -2A & -B_{,i} \\ -B_{,i} & -2D\delta_{ij} + 2E_{,ij} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

ώστε

$$g_{\mu\nu} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} -a^2 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^2\delta_{ij} \end{array}\right)}_{a^2\eta_{\mu\nu}} + \underbrace{a^2\left(\begin{array}{c|c} -2A^2 & -B_i \\ \hline -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{,ij} \end{array}\right)}_{a^2 h_{\mu\nu}} \tag{6.5}$$

όπου

$$D = -\frac{1}{6}h^i_i \equiv -\frac{1}{6}h \tag{6.6}$$

και ο $E_{,ij}$ είναι άιχνος

$$\delta^{ij}E_{,ij} \equiv E^{,i}_{,i} \equiv E_{,ii} = 0. \tag{6.7}$$

και αφού οι δείκτες ανεβαίνουν και κατεβαίνουν με την αδιατάρακτη μετρική του επίπεδου σύμπαντος $\eta_{\mu\nu}$, έχουμε

$$\left[h^{\mu\nu}\right] \equiv \begin{bmatrix} -2A & +B_{,i} \\ +B_{,i} & -2D\delta_{ij} + 2E_{,ij} \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

επομένως το στοιχείο μήκους είναι

$$ds^2 = a^2(\eta)s\left\{-(1+2A)d\eta^2 - 2B_{,i}d\eta dx^i + \left[(1-2D)\delta_{ij} + 2E_{,ij}\right]dx^i dx^j\right\}. \tag{6.9}$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αδιατάραχτο χώρο ο οποίος περιγράφεται από το σύστημα συντεταγμένων $\{x^a\}$. Έστω η διαταραγμένη μορφή του χώρου αυτού και έστω δύο διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων $\{\tilde{x}^a\}$ και $\{\hat{x}^a\}$ που τον περιγράφουν. Οι συντεταγμένες $\hat{x}^a$ και $\tilde{x}^a$ συνδέονται με το μετασχηματσμό

$$\tilde{x}^a = \hat{x}^a + \xi^a, \tag{6.10}$$

όπου το ξ^a και οι παράγωγοι του $\xi^a_{,\beta}$ είναι μικρά σε πρώτη τάξη. Η διαφορά μεταξύ των $\frac{\partial \xi^a}{\partial \hat{x}^\beta}$ και $\frac{\partial \xi^a}{\partial \tilde{x}^\beta}$ είναι μικρή σε δεύτερη τάξη απομένως μπορούμε απλά να γράψουμε $\xi^a_{,\beta}$.

Το σύστημα $\{\hat{x}^a\}$ συσχετίζει ένα σημείο $\bar{P}$ του υποβάθρου με ένα σημειο $\hat{P}$ ενώ το $\{\tilde{x}^a\}$ αντιστοιχεί το $\bar{P}$ στο $\tilde{P}$. Για το ίδιο σημείο στα τρία συστήματα θα έχουμε

$$\tilde{x}^a(\tilde{P}) = \hat{x}^a(\hat{P}) = x^a(\bar{P}) \tag{6.11}$$

Η 6.10 μας δίνει το μετασχηματισμό συντεταγμένων του ίδιου σημείου στο διαταραγμένο χώρο πχ,

$$\begin{aligned} \tilde{x}^a(\tilde{P}) =& \hat{x}^a(\tilde{P}) + \xi^a \\ \tilde{x}^a(\hat{P}) =& \hat{x}^a(\hat{P}) + \xi^a. \end{aligned} \tag{6.12}$$

και θεωρούμε ότι η διαφορά $\xi^a(\tilde{P}) - \xi^a(\hat{P})$ είναι μικρή σε δεύτερη τάξη. Επομένως γράφουμε απλά ξ^a και το συσχετίζουμε με το σημείο $\bar{P}$ του υποβάθρου.

$$\xi^a = \xi^a(\bar{P}) = \xi^a(x^\beta). \tag{6.13}$$

Συνδιάζοντας τις 6.11 και 6.12, παίρνουμε το μετασχηματισμό διαφορετικών σημείων για το ίδιο σύστημα συντεταγμένων

$$\begin{aligned} \hat{x}(\tilde{P}) =& \hat{x}^a(\hat{P}) - \xi^a \\ \tilde{x}(\tilde{P}) =& \tilde{x}(\hat{P}) - \xi^a \end{aligned} \tag{6.14}$$

θα εξετάσουμε τώρα τους κανόνες μετασχηματισμού βαθμωτών, διανυσμάτων και τανυστών μεταξύ των συστημάτων $\{\tilde{x}^a\}$ και $\{\hat{x}^a\}$.

$$\begin{aligned} s =& s \\ w^{\tilde{a}} =& X^{\tilde{a}}_{\hat{\beta}} w^{\hat{\beta}} \\ A^{\tilde{a}}_{\tilde{\beta}} =& X^{\tilde{a}}_{\hat{\gamma}} X^{\hat{\delta}}_{\tilde{\beta}} A^{\hat{\gamma}}_{\hat{\delta}} \\ B_{\tilde{a}\tilde{\beta}} =& X^{\hat{\gamma}}_{\tilde{a}} X^{\hat{\delta}}_{\tilde{\beta}} B_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \end{aligned} \tag{6.15}$$

όπου

$$\begin{aligned} X^{\tilde{a}}_{\hat{\beta}} \equiv& \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial \hat{x}^\beta} = \delta^a_\beta + \xi^a_{,\beta} \\ X^{\hat{\delta}}_{\tilde{\beta}} \equiv& \frac{\partial \hat{x}^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta} = \delta^\delta_\beta - \xi^\delta_{,\beta}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

όπου παραπάνω χρησημοποιήσαμε την 6.12.
Στη συνέχεια θα χρησημοποιήσουμε διαταραχές διαφόρων ποσοτήτων

$$\begin{aligned} s =& \bar{s} + \delta s \\ w^a =& \bar{w}^a + \delta w^a \\ A^a_\beta =& + \bar{A}^a_\beta + \delta A^a_\beta \\ B_{a\beta} =& \bar{B}_{a\beta} + \delta B_{a\beta}. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Η ποσότητα $s = \bar{s} + \delta s$ ζει στο διαταραγμένο χώρο. Οι διαταραχές στις διαφορετικές βαθμίδες ορίζονται ως τη διαφορά της ποσότητας s στο διαταραγμένο από τον αδιατάραχτο χώρο, στη βαθμίδα αυτή

$$\begin{aligned} \hat{\delta s}(x^a) \equiv& s(\hat{P}) - \bar{s}(\bar{P}) \\ \tilde{\delta s}(x^a) \equiv& s(\tilde{P}) - \bar{s}(\bar{P}). \end{aligned} \tag{6.18}$$

Η διαταραχή δs επομένως παίρνεται από την διαφορά μεταξύ δύο χωροχρόνων και θεωρούμε ότι "ζει" στον υποκείμενο χώρο. Αλλάζει στο μετασχηματισμό βαθμίδας

$$s(\tilde{P}) = s(\hat{P}) + \frac{\partial s}{\partial \hat{x}^a}(\hat{P})\left[\hat{x}^a(\tilde{P}) - \hat{x}^a(\hat{P})\right] = s(\hat{P}) - \frac{\partial s}{\partial \hat{x}^a}(\hat{P})\xi^a = s(\hat{P}) - \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^a}(\bar{P})\xi^a \tag{6.19}$$

όπου πήραμε την προσέγγιση $\frac{\partial s}{\partial \hat{x}^a}(\hat{P}) \approx \frac{\partial \bar{s}}{\partial x^a}(\bar{P})$, αφού διαφέρουν μεταξύ τους σε πρώτη τάξη αλλά πολλαπλασιαζόμενος με το ξ^a ο συνολικός όρος είναι μικρός σε δεύτερη τάξη.

Επειδή ο υποκείμενος χώρος είναι ομογενής θα έχουμε $\bar{s} = \bar{s}(\eta, x^i) = \bar{s}(\eta)$ επομένως

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial x^a}(\bar{P})\xi^a = \frac{\partial \bar{s}}{\partial \eta}(\bar{P})\xi^0 = \bar{s}'\xi^0. \tag{6.20}$$

Επομένως παίρνουμε

$$s(\tilde{P}) = s(\hat{P}) - \bar{s}^{'}\xi^0, \tag{6.21}$$

έτσι από την 6.18 παίρνουμε το νόμο μετασχηματισμού μιας βαθμωτής διαταραχής μεταξύ δύο βαθμίδων

$$\tilde{\delta s}(x^a) = s(\hat{P}) - \bar{s}^{'}\xi^0 - \bar{s}(\bar{P}) = \hat{\delta s}(x^a) - \bar{s}^{'}\xi^0. \tag{6.22}$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για την περίπτωση των διανυσμάτων και των τανυστών βρίσκουμε

$$B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\tilde{P}) = B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) + \frac{\partial B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}}{\partial \hat{x}^a}\big[\hat{x}^a(\tilde{P}) - \hat{x}^a(\hat{P})\big] = B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) - \frac{\partial \bar{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}}{\partial \hat{x}^a}(\bar{P})\xi^a \tag{6.23}$$

και

$$\begin{aligned} B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{P}) =& X^{\hat{\rho}}_{\tilde{\mu}} X^{\hat{\sigma}}_{\tilde{\nu}} B_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}(\tilde{P}) = (\delta^\rho_\mu - \xi^\rho_{,\mu})(\delta^\sigma_\nu - \xi^\sigma_{,\nu})\left[B_{\hat{\rho}\hat{\sigma}}(\hat{P}) - \frac{\partial \bar{B}_{\rho\sigma}}{\partial x^a}(\bar{P})\xi^a\right] \\ =& B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) - \xi^\rho_{,\mu}\bar{B}_{\hat{\rho}\hat{\nu}}(\bar{P}) - \xi^\sigma_{,\nu}\bar{B}_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}(\hat{P}) - \frac{\partial \bar{B}_{\mu\nu}}{\partial x^a}(\bar{P})\xi^a \\ =& B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) - \xi^\rho_{,\mu}\bar{B}_{\rho\nu}(\bar{P}) - \xi^\sigma_{,\nu}\bar{B}_{\mu\sigma}(\bar{P}) - \frac{\partial \bar{B}_{\mu\nu}}{\partial x^a}(\bar{P})\xi^a, \end{aligned} \tag{6.24}$$

όπου αντικαταστήσαμε το $B_{\hat{\mu}\hat{\sigma}}(\hat{P})$ με $\bar{B}_{\mu\sigma}(\bar{P})$ στον δεύτερο όρο, το οποίο μπορούμε να κάνουμε αφού πολλαπλασιάζεταιμε τον πρώτης τάξης όρο $\xi^\sigma_{,\nu}$.

Όμοια με την περίπτωση της βαθμωτής διαταραχής ορίζουμε

$$\begin{aligned} \tilde{\delta B}_{\mu\nu} =& B_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{P}) - \bar{B}_{\mu\nu}(\bar{P}) \\ =& B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\hat{P}) - \bar{B}_{\mu\nu}(\bar{P}) - \xi^\rho_{,\mu}\bar{B}_{\rho\nu}(\bar{P}) - \xi^\sigma_{,\nu}\bar{B}_{\mu\sigma}(\bar{P}) - \frac{\partial \bar{B}_{\mu\nu}}{\partial x^a}(\bar{P})\xi^a \\ =& \hat{\delta B}_{\mu\nu} - \xi^\rho_{,\mu}\bar{B}_{\rho\nu} - \xi^\sigma_{,\nu}\bar{B}_{\mu\sigma} - \bar{B}_{\mu\nu,a}\xi^a. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση μετασχηματισμού βαθμίδας 6.25 για την διαταραχή της μετρικής παίρνουμε

$$\tilde{\delta g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - \xi^\rho_{,\mu}\bar{g}_{\rho\nu} - \xi^\sigma_{,\nu}\bar{g}_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,0}\xi^0, \tag{6.26}$$

όπου αντικαταστήσαμε το $\bar{g}_{\mu\nu,a}\xi^a$ με $\bar{g}_{\mu\nu,0}\xi^0$ αφού η μετρική του υποβάθρου εξαρτάται, μέσω του παράγοντα κλίμακας, μόνο από τη χρονική συνειστώσα η. Επειδή είναι $\bar{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}$, θα έχουμε

$$\bar{g}_{\mu\nu,0} = 2a^{'}a\eta_{\mu\nu} \tag{6.27}$$

και

$$\tilde{\delta g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + a^2\big[-\xi^\rho_{,\mu}\eta_{\rho\nu} - \xi^\sigma_{,\nu}\eta_{\mu\sigma} - 2\frac{a^{'}}{a}\eta_{\mu\nu}\xi^0\big]. \tag{6.28}$$

Από τα προηγούμενα

$$\left[\delta g_{\mu\nu}\right] = \begin{bmatrix} -2A & -B_{,i} \\ -B_{,i} & -2D\delta_{ij} + 2E_{,ij} \end{bmatrix} \tag{6.29}$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω νόμο μετασχηματισμού παίρνουμε για τις διαφορετικές συνειστώσεις:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta g}_{00} \equiv & -2a^2\tilde{A} \\ = & \delta g_{00} + \left(-\xi^{\rho}_{,0}\eta_{\rho 0} - \xi^{\sigma}_{,0}\eta_{0\sigma} - 2\frac{a^{'}}{a}\eta_{00}\xi^0\right) \\ = & -2a^2 A + a^2\left(2\xi^0_{,0} + 2\frac{a^{'}}{a}\xi^0\right) \end{aligned} \tag{6.30}$$

από την οποία και παίρνουμε τον νόμο μετασχηματισμού θαθμίδας

$$\boxed{\tilde{A} = A - \xi^0_{,0} - \frac{a^{'}}{a}\xi^0} \tag{6.31}$$

Όμοια, για το δg_{0i} έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{\delta g}_{0i} = & -a^2\tilde{B}_{,i} \\ = & \delta g_{0i} + a^2\left[-xi^{\rho}_{,0}\eta_{\rho i} - xi^{\sigma}_{,i}\eta_{0\sigma} - 2\frac{a^{'}}{a}\cancel{\eta_{0i}}\xi^0\right] \\ = & -a^2 B_{,i} + \left[-\xi^0_{,0}\cancel{\eta_{0i}} - \xi^j_{,0}\eta_{ij} - \xi^0_{,i}\eta_{00} - \xi^j_{,i}\cancel{\eta_{0j}}\right] \\ = & -a^2 B_{,i} - a^2\xi^i_{,0} + a^2\xi^0_{,i} \end{aligned} \tag{6.32}$$

Επομένως παίρνουμε

$$\boxed{\tilde{B}_i = B_i + \xi^i_{,0} - \xi^0_{,i}} \tag{6.33}$$

Τέλος από το χωριοκό κομμάτι της μετρικής έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{\delta g}_{ij} = & -2\tilde{D}\delta_{ij} + 2\tilde{E}_{,ij} \\ = & \delta g_{ij} + a^2\left[-\xi^{\rho}_{,i}\eta_{\rho j} - \xi^{\sigma}_{,j}\eta_{i\sigma} - 2\frac{a^{'}}{a}\eta_{ij}\xi^0\right] \\ = & 2D\delta_{ij} + 2E_{,ij} + a^2\left[-\xi^k_{,i}\eta_{kj} - \xi^k_{,j}\eta_{ik} - 2\frac{a^{'}}{a}\eta_{ij}\xi^0\right] \\ = & 2D\delta_{ij} + 2E_{,ij} + a^2\left[-\xi^j_{,i} - \xi^i_{,j} - 2\frac{a^{'}}{a}\delta_{ij}\xi^0\right] \end{aligned} \tag{6.34}$$

Απομένως

$$\boxed{-\tilde{D}\delta_{ij} + \tilde{E}_{,ij} = -D\delta_{ij} + E_{,ij} - \frac{1}{2}\left(\xi^j_{,i} + \xi^i_{,j}\right) - \frac{a^{'}}{a}\xi^0\delta_{ij}} \tag{6.35}$$

Το ίχνος του όρου $\frac{1}{2}\left(\xi^i_{,j}+\xi^j_{,i}\right)$ είναι ξ^k_k άρα αν γράψουμε

$$\frac{1}{2}\left(\xi^i_{,j}+\xi^j_{,i}\right)=\frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k_k+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\xi^i_{,j}+\xi^j_{,i}\right)-\frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k_k}_{\text{άιχνο}} \tag{6.36}$$

βλέπουμε ότι αναγκαστικά οι δύο τελευταίοι ότι συνειστούν ένα άιχνο κομμάτι. Μπορούμε έται να χωρίσουμε την 6.35:

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{D}=&D+\frac{1}{3}\xi^k_{,k}+\frac{a'}{a}\xi^0\\ \tilde{E}_{ij}=&E_{ij}-\frac{1}{2}\left(\xi^i_j+\xi^j_i\right)+\frac{1}{3}\delta_{ij}\xi^k_k.\end{aligned}} \tag{6.37}$$

Όταν ένας μετασχηματισμός βαθμίδας εξαφανίζει κάποιες διαταραχές, τότε αυτές δεν είναι πραγματικές, φυσικές διαταραχές, απλά τότε ο διαταραγμένος χώρος είναι ίδιος με τον υποκείμενο απλά διαφέρει στο ότι έχει διαταραγμένο σύτημα συντεταγμένων. Οι διαταραχές αυτές ονομάζονται "καθαρές βαθμίδες".

6.1 Διαχωρισμός σε Βαθμωτές, Διανυσματικές και Τανυστικές Διαταραχές

Εάν κρατήσουμε την βαθμίδα (την συσχέτιση μεταξύ του υποκείμενου χώρου και του διαταραγμένου χώρου) σταθερή αλλά εφαρμόσουμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων στον υποκείμενο χώρο, θα πάρουμε ένα αντίστοιχο μετασχηματισμό συντεταγμένων στο δαταραγμένο χώρο. Το σύστημα συντεταγμένων του υποβάθρου επιλέχθηκε ώστε να σέβεται τις συμμετρίες αυτού του χώρου και αυτό είναι μια ιδιότητα που δεν θέλουμε να χάσουμε. Συγκεκριμένα, στη κοσμολογική θεωρία διαταραχών επιλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων του υποβάθρου ώστε να σέβεται την ιδιότητα της ομογένειάς του, το οποίο μας δίνει ένα μοναδικό φύλλωμα του χωροχρόνου σε $t=$ σταθερά χωροχρονικές φέτες. Επομένων δεν θέλουμε να αλλάξουμε αυτό τον τρόπποο τομής. Αυτό μας αφήνει:

- ομογενείς μετασχηματισμούς της χρονικής συντεταγμένης πχ αναπαραμέτρηση του χρόνου, των οποίων παράδειγμα αποτελεί η αλλαγή από τον συνήθη κοσμικό χρόνο t στον η,

- και μετασχηαμτισμούς των χωρικών συντεταγμένων

$$x^{i'} = X^{i'}_k x^k,^{5} \tag{6.38}$$

όπου $X^{i'}_k$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου, η οποία είναι και η περίπτωση που εξετάζουμε σε αυτή την ενότητα.

Για το υπόβαθρό μας είχαμε επιλέξει $FRW(0)$, έτσι ώστε η 3-μετρική να εαι Ευκλείδεια,

$$g_{ij} = a^2\delta_{ij}, \tag{6.39}$$

και θέλουμε να διατηρήσουμε αυτή την ιδιότητα. Αυτό μας αφήνει τις στροφές. Οι πλήρεις πίνακες στροφών επομένως είναι

$$X^{\mu'}_{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^{i'}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{i'}_k \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad {}^{\mu}_{\rho'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{i}_{k'} \end{bmatrix}, \tag{6.40}$$

όπου $R^{i'}_k$ είναι ο πίνακας στροφών, με την ιδιότητα $R^T R = I$, ή $R^{i'}_k R^{i'}_l = (R^T R)_{kl} = \delta_{kl}$. Επομένως $R^T = R^{-1}$ έτσι ώστε $R^{i'}_k = R^k_{i'}$.

Αυτός ο μετασχηματισμός συντεταγμένων στο υπόβαθρο παράγει τον εξής μετασχηματισμό,

$$x^{\mu'} = X^{\mu'}_{\rho} x^{\rho}, \tag{6.41}$$

στον διαταραγμένο χώρο. Εδώ η μετρική είναι

$$g_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} -1-2A & -B_i \\ -B_i & (1-2D)\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix} = a^2\eta_{\mu\nu} + a^2 \begin{bmatrix} -2A & -B_i \\ -B_i & -2D\delta_{ij} + 2E_{ij} \end{bmatrix}. \tag{6.42}$$

Μετασχηματίζοντας τη μετρική,

$$g_{\rho'\sigma'} = X^{\mu}_{\rho'} X^{\nu}_{\sigma'} g_{\mu\nu}, \tag{6.43}$$

παίρνουμε για τις διαφορετικές συνειστώσες

$$\begin{aligned} g_{0'0'} &= X^{\mu}_{0'} X^{\nu}_{0'} g_{\mu\nu} = X^{0}_{0'} X^{0}_{0'} g_{00} = g_{00} = a^2(-1-2A) \\ g_{0'l'} &= X^{\mu}_{0'} X^{\nu}_{l'} g_{\mu\nu} = X^{0}_{0'} X^{j}_{l'} g_{0j} = -a^2 R^j_{l'} B_j \\ g_{k'l'} &= X^{i}_{k'} X^{j}_{l'} g_{ij} = a^2\big(-2D\delta_{ij} R^i_{k'} R^j_{l'} + 2E_{ij} R^i_{k'} R^j_{l'} \big) \\ &= a^2 \left(-2D\delta_{kl} + 2E_{ij} R^i_{k'} R^j_{l'} \right), \end{aligned} \tag{6.44}$$

[5] Εδωπέρα χρησιμοποιούμε το ' για να συμβολίσουμε το άλλο σύστημα συντεταγμένων. Να μην συγχίζεται με $' \equiv d/d\eta$ των άλλων ενοτήτων.

από τις οποίες αναγνωρίζουμε τις διαταραχές στις νέες συντεταγμένες,

$$\begin{aligned} A' &= A \\ D' &= D \\ B_{l'} &= R^j_{l'} B_j \\ E_{k'l'} &= R^i_{k'} R^j_{l'} E_{ij}. \end{aligned} \tag{6.45}$$

Συνεπώς τα και D μετασχηματίζονται ως βαθμωτά κάτω από στροφές στο σύστημα συντεταγμένων του υποβάθρου, τα B_i μετασχηματίζονται ως 3-διανυσματα, και τα E_{ij} ως 3-d τανυστές. Καθώς βρισκόμαστε επομένως σε μια σταθερή βαθμίδα, μπορούμε επομένως να τα σκεφτούμε ως βαθμωτά, διανυσματικά και τανυστικά πεδία σε ένα 3-d Εκλείδειο υποκείμενο χώρο. Μπορούμε ωστόσο να πάρουμε άλλες δύο βαθμωτές ποσότητες και άλλη μια διανυσματικη από τα B_i και E_{ij}.

Γνωρίζουμε ότι ένα διάνυσμα μπορεί να χωρισθεί σε δύο μέρη, ένα μηδενικής απόκλισης και ένα μηδενικού στροβιλισμού

$$\vec{B} = \vec{B}^S + \vec{B}^V, \quad \text{με} \quad \nabla \times \vec{B}^S = 0 \quad \text{και} \quad \nabla \cdot \vec{B}^V = 0, \tag{6.46}$$

και ότι το πρώτο μπορεί να εκφρασθεί ως κλίση κάποιου βαθμωτού πεδίου [6]

$$\vec{B}^S = -\nabla B. \tag{6.47}$$

και σε συμβολισμό συνειστωσών

$$B_i = -B_{,i} + B^V_i, \quad \text{όπου} \quad \delta^{ij} B^V_{i.j} = 0. \tag{6.48}$$

Με όμοιο τρόπο, το συμμετρικό άιχνο τανυστικό πεδίο E_{ij} μπορεί να χωρισθεί σε τρία μέρη,

$$E_{ij} = E^S_{ij} + E^V_{ij} + E^T_{ij}, \tag{6.49}$$

όπου τα E^S_{ij} και E^V_{ij} μπορούν να εκφραστούν ως προς ένα βαθμωτό πεδίο E και ένα διανυσματικό πεδίο E_i,

$$\begin{aligned} &E^S_{ij} = \big(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\big) E = E_{,ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta^{kl} E_{,kl} \\ &E^V_{ij} = -\frac{1}{2}\big(E_{i,j} + E_{j,i}\big), \quad \text{όπου} \quad \delta^{ij} E_{i,j} = \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ &\text{και} \quad \delta^{ij} E^T_{ij,k} = 0, \quad \delta^{ij} E^T_{ij} = 0. \end{aligned} \tag{6.50}$$

[6] Αυτή η σύμβαση προσήμου αντιστοιχεί στο να σκεφτόμαστε τη βαθμωτή συνάρτηση B ως "δυναμικό", όπου το διανυσματικό πεδίο $\vec{B}^S$ "κατρακυλάει προς τα κάτω".

Βλέπουμε ότι E^S_{ij} είναι συμμετικός και άιχνος εκ κατασκευής. Ο E^V_{ij} είναι συμμετρικός εκ κατασκευής, και η συνθήκη στο E_i τον κάνει άιχνο. Ο τανυστής E^T_{ij} υποθέτεται συμμετρικός, και οι δύο συνθήκες εφαρμοσμένες σε αυτόν ,τον κάνουν άιχνο και transverce[7].

Κάτω από στροφές στον υποκείμενο χώρο,

$$\begin{aligned} A' =& A, \quad B' = B, \quad D' = D. \quad E' = E \\ B^V_{l'} =& R^j_{l'} R^V_j, \quad E_{l'} = R^j_{l'} E_j \\ E^T_{k'l'} =& R^i_{k'} R^j_{l'} E^T_{ij}. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Οι διαταραχές της μετρικής μπορούνε επομένως να χωρισθούν σε

- ένα βαθμωτό κομμάτι, αποτελούμενο από τα A,B,D και E
- ένα διανυσματικό κομμάτι, αποτελούμενο από B^V_i και E_i,
- και ένα τανυστικό κομμάτι E^T_{ij}.

Οι ονομασίες "βαθμωτό", "διανυσματικό" και "τανυστικό" αναφέρονται στις ιδιότητες μετασχηματισμού κάτω από στροφές στον υποκείμενο χώρο.[8]

Οι διαταραχές στον τανυστή του Einstein δG^μ_ν και η διαταραχή του τανυστή ενέργειας δT^μ_ν μπορούν όμοια να χωρισθούν σε βαθμωτά + διανυσματικά + τανυστικά μέρη. Το βαθμωτό μέρος του δG^μ_ν προέρχεται μόνο από το βαθμωτό μέρος του $\delta g_{\mu\nu}$ κτλ.

Το σημαντικό όσον αφορά αυτό το διαχωρισμό είναι ότι το βαθμωτό, το διανυσματικό και το τανυστικό κομμάτι δεν συζεύγονται μεταξύ τους (σε πρώτης τάξης θεωρία διαταραχών), αλλά εξελίσσονται ανεξάρτητα. Αυτό μας επιτρέπει να τα αντιμετωπίζουμε ξεχωριστά: μπορούμε να μελετήσουμε, πχ βαθμωτές διαταραχές με τρόπο τέτοιο, σαν να απουσίαζαν οι διανυσματικές και τανυστικές διαταραχές. Η συνολική εξέληξη της πλήρους διαταραχής είναι απλά μια γραμμική υπέρθεση της ανεξάρτητης εξέληξης του βαθμωτού, του διανυσματικού και του τανυστικού μέρους της διαταραχής.

[7]Για περισσότερη διευκρίνιση του τελευταίου όρου στο πλαίσιο της παρούσας συζήτησης δες [24]

[8]Επομένως "βαθμωτό", δεν σημαίνει πχ, ότι οι δοιαταραχές θα είναι αναλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας - οι βαθμωτές διαταραχές δεν είναι αναλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, όπως έχουμε ήδη δει στις 6.31 και 6.37

Εφαρμόζουμε ένα δεσμό σε κάθε ένα από τα 3-διανύσματα B_i^V και E_i, και $3+1=4$ δεσμούς στο συμμετρικό τανυστή E_{ij}^T αφήνοντας σε κάθε ένα από αυτούς 2 ανεξάρτητες συνειστώσες. Επομένως οι 10 βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν στις 10 συνειστώσες της μετρικής της διαταραχής $h_{\mu\nu}$ χωρίζονται σε

$$\begin{aligned} 1+1+1+1 &= 4 \quad \text{βαθμωτούς} \\ 2+2 &= 4\text{διανυσματικούς} \\ 2 &= 2\text{τανυστικούς} \end{aligned} \tag{6.52}$$

βαθμούς ελευθερίας.

Οι βαθμωτές διαταραχές είναι οι πιο σημαντικές. Συζεύγονται με τις διαταραχές της πίεσης και της πυκνότητας και παρουσιάζουν βαρυτική αστάθεια: υπερπυκνές περιοχές εξελίσσονται σε ακόμα πυκνότερες. Είναι υπεύθυνες για το σχηματισμό των δομών στο σύμπαν από μικρές αρχικές συνθήκες.

Οι διανυσματικές διαταραχές συζεύγονται με τις διαταραχές της γωνιακής ταχύτητας στο κοσμικό ρευστό. Έχουν την τάση ατονούν σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν, και επομένως πιθανόν δεν είναι σημαντικες στην κοσμολογία.

Κάναμε όλα τα παραπάνω σε μια συγκεκριμένη σταθερή βαθμίδα. Προκύπτει ότι οι μετασχηματισμοί βαθμίδας επιρρεάζουν τις βαθμωτές και τις διανυσματικές διαταραχές, αλλά οι τανυστικές διαταραχές είναι αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς βαθμίδας. Οι τανυστικές διαταραχές είναι βαρυτικά κύματα, αυτή τη φορά σε ένα διεσταλόμενο σύμπαν[9] Όταν τις παίρνουμε από συνολικές διαταραχές με την παραπάνω διαδικασία διαχωρισμου, βρίσκονται ήδη στην "transverse-traceless βαθμίδα". Οι τανυστικές διαταραχές έχουν κοσμολογική σημασία, αφού εάν είναι αρκετά ισχυρές, έχουν ενα παρατηρήσιμο αποτέλεσμα στην ανισοτροπία του μικροκυματικού υποβάθρου.

6.2 Βαθμωτές Διαταραχές

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε βαθμωτές διαταραχές, οι οποίες είναι υπεύθυνες για τις δομή του Σύμπαντος (πχ. την απόκλιση από το ομογενές και ισότροπο FRW Σύμπαν). Η μετρική είναι

$$ds^2 = a^2(\eta)\{-(1+2)d\eta^2 - 2B_i d\eta dx^i + \big[(1-2\psi)\delta + 2E_{ij}\big]dx^i dx^j\}. \tag{6.53}$$

[9]Σε αντίθεση με τη θεωρία διαταραχών στο χώρο Minkowski, η οποία είναι και η συνήθης οδός παρουσίασης των βαρυτικών κυμάτων στην Γενική Σχετικότητα.

όπου έχουμε ορίσει την διαταραχή της καμπυλότητας

$$\psi \equiv D + \frac{1}{3}\nabla^2 E. \tag{6.54}$$

Τώρα εαν ξεκινήσουμε από καθαρά χωρικές διαταραχές και κάνουμε οποιαδήποτε αυθαίρετο μετασχηματισμό βαθμίδας, που παρίσταται από ένα πεδίο $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^i)$, θα μπορούσαμε να εισάγουμε επίσης ένα διάνυσμα διαταραχής. Η διανυσματική διαταραχή αυτή όμως είναι "καθαρή βαθμίδα" και επομένως δεν εχει κάποιο ενδιαφέρον. Μπορούμε να χωρίσουμε το ξ^i σε ένα μέρος με μηδενική απόκλιση (μέρος που αφορά μετατοπίσεις) και ένα κομμάτι με μηδενικό στροβιλισμό, το οποίο μπορεί να γραφεί ως η κλίση κάποιας συνάρτησης ξ,

$$\xi^i = \xi^i_{tr} - \delta^{ij}\xi_{,j} = \vec{\xi_{tr}} - \nabla\xi \quad \text{όπου} \quad \xi^i_{tr,i} = \nabla \cdot \vec{\xi_{tr}} = 0. \tag{6.55}$$

Το μέρος ξ^i_{tr} είναι υπεύθυνο για τις διανυσματικές διαταραχές, ενώ τα ξ^0 και $\xi_{,j}$ μεταβάλουν τις βαθμωτές διαταραχές. Στα πλαίσια της συζήτησης των βαθμωτών διαταραχών δεν χάνουμε κάτι, εαν επιλέξουμε να λάβουμε υπόψη μόνο τις βαθμωτές διαταραχές, ενώ το ξ^i_{tr} μέρος απουσιάζει. Αυτοί οι βαθμωτοί μετασχηματισμοί βαθμίδας προσδιορίζονται πλήρως από δύο συναρτήσεις ξ^0 και ξ,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} =& \eta + \xi^0(\eta, \vec{x}) \\ \tilde{x^i} =& x^i - \delta^{ij}\xi_{,j}(\eta, \vec{x}) \end{aligned} \tag{6.56}$$

και διατηρούν την βαθμωτή φύση της διαταραχής. (Η διαφορά δηλαδή από το προηγούμενο κεφάλαιο είναι ότι θέσαμε $\xi^i \to -\delta^{ij}\xi_{,j}(\eta, \vec{x})$)

Χρησιμοποιώτας αυτούς τους βαθμωτούς μετασχηματισμούς, οι εξισώσεις μετασχηματισμού των βαθμωτώς συναρτήσεων που εμφανίζονται μέσα στη μετρική γίνονται:

$$\begin{aligned} \tilde{A} =& A - \xi^{0'} - \frac{a'}{a}\xi^0 \\ \tilde{B} =& B + \xi' + \xi^0 \\ \tilde{D} =& D - \frac{1}{3}\nabla^2\xi + \frac{a'}{a}\xi^0 \\ \tilde{E} =& E + \xi, \end{aligned} \tag{6.57}$$

Και από τις 6.54 και 6.57 παίρνουμε ότι τον μετασχηματισμό της ψ η οποία συχνά χρησημοποιείται ως τέταρτη θαθμωτή μεταβλητή αντί για την D:

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\xi^0 = \psi + \mathcal{H}\xi^0. \tag{6.58}$$

6.3 Δυναμικά Bardeen

Ορίζουμε τις επόμενες δύο ποσότητες

$$\begin{aligned}\Phi \equiv & A + \mathcal{H}\big(B - E'\big) + \big(B - E'\big)' \\ \Psi \equiv & D + \frac{1}{3}\nabla^2 E - \mathcal{H}\big(B - E'\big) = \psi - \mathcal{H}\big(B - E'\big)\end{aligned} \tag{6.59}$$ [10]

Οι ποσότητες αυτές είναι αναλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας

6.4 Σύμμορφη Νευτώνεια Βαθμίδα

Μπορούμε να κάνουμε χρήση της ελευθερίας βαθμίδας για να έσουμε τις βαθμωτές διαταραχές B και E ίσες με μηδέν. Από την 6.44 βλέπουμε ότι αυτό επιτυγχάνεται με την επιλογή

$$\begin{aligned}\xi = & - E \\ \xi^0 = & - B + E'\end{aligned} \tag{6.60}$$

Κάνοντας ένα μετασχηματισμό βαθμίδας φτάνουμε σε μια συχνά χρησιμοποιούμενη βαθμίδα, τη σύμορφη-Νευτώνεια βαθμίδα (για συντόμευση Νευτώνεια βαθμίδα). Θα συμβολίσουμε τις ποσότητες στη βαθμίδα αυτή με δείκτη N. Συνεπώς $B^N = E^N = 0$, ενώ άμεσα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}A^N = & \Phi \\ D^N = & \psi^N = \Psi.\end{aligned} \tag{6.61}$$

Επομένως τα δυναμικά Bardeen είναι ίσες με τις δύο μη μηδενικές διαταραχές στην σύμμορφη Νευτώνεια βαθμίδα.

Από εδώ και πέρα (μέχρι να ειπωθεί το αντίθετο) θα κάνουμε υπολογισμούς στην σύμορφη-Νευτώνεια βαθμίδα. Η μετρική επομένως είναι

$$ds^2 = a(\eta)^2\big[-\big(1+2\Phi\big)d\eta^2 + (1-2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j\big], \tag{6.62}$$

ή

$$g_{\mu\nu} = a^2\begin{bmatrix}-1-2\Phi & \\ & (1-2\Psi)\delta_{ij}\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad g^{\mu\nu} = a^{-2}\begin{bmatrix}-1+2\Phi & \\ & (1+2\Psi)\delta_{ij}\end{bmatrix}, \tag{6.63}$$

[10] Βλέπε απόδειξη I

ή

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2\Phi & \\ & -2\Psi\delta_{ij} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad h^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -2\Phi & \\ & -2\Psi\delta_{ij} \end{bmatrix} \tag{6.64}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Διαταραχές στον Τανυστή Καμπυλότητας

Από την σύμμορφη-Νευτώνεια μετρική παίρνουμε τους συντελεστές Christoffel

$$\begin{array}{lll} \Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a} + \Phi' & \Gamma^0_{0k} = \Phi_{,k} & \Gamma^0_{ij} = \frac{a'}{a}\delta_{ij} - \left[2\frac{a'}{a}\left(\Phi + \Psi\right) + \Psi'\right]\delta_{ij} \\ \Gamma^i_{00} = \Phi_{,i} & \Gamma^i_{0j} = \frac{a'}{a}\delta^i_j - \Psi'\delta^i_j & \Gamma^i_{kl} = -\left(\Psi_{,l}\delta^i_k + \Psi_{,k}\delta^i_l\right) + \Psi_{,i}\delta_{kl} \end{array} \tag{7.1}$$

και τα αθροίσματα

$$\begin{aligned} \Gamma^a_{0a} =& 4\frac{a'}{a} + \Phi' - 3\Psi' \\ \Gamma^a_{ia} =& \Phi_{,i} - 3\Psi_{,i} \end{aligned} \tag{7.2}$$

όπου έχουμε αγνοήσει όλους τους, μεγαλύτερης 1ης τάξης, όρους ως προς τις μικρές ποσότητες Φ και Ψ. Επομένως οι εκφράσεις αυτές εμπεριέχουν $0^{ης}$ και $1^{ης}$ τάξης όρους, και διαχωρίζονται στο υπόβαθρο και τη διαταραχή όπως:

$$\Gamma^a_{\beta\gamma} = \bar{\Gamma}^a_{\beta\gamma} + \delta\Gamma^a_{\beta\gamma}, \tag{7.3}$$

όπου

$$\begin{array}{lll} \bar{\Gamma}^0_{00} = \mathcal{H} & \bar{\Gamma}^0_{0k} = 0 & \bar{\Gamma}^0_{ij} = \mathcal{H}\delta_{ij} \\ \bar{\Gamma}^i_{00} = 0 & \bar{\Gamma}^i_{0j} = \mathcal{H}\delta^i_j & \bar{\Gamma}^i_{kl} = 0 \end{array} \tag{7.4}$$

και

$$\begin{array}{lll} \delta\Gamma^0_{00} = \Phi' & \delta\Gamma^0_{0k} = \Phi_{,k} & \delta\Gamma^0_{ij} = -\left[2\mathcal{H}\left(\Phi + \Psi\right) + \Psi'\right]\delta_{ij} \\ \delta\Gamma^i_{00} = \Phi_{,i} & \delta\Gamma^i_{0j} = -\Psi'\delta^i_j & \delta\Gamma^i_{kl} = -\left(\Psi_{,l}\delta^i_k + \Psi_{,k}\delta^i_l\right) + \Psi_{,i}\delta_{kl}. \end{array} \tag{7.5}$$

Ο τανυστής Ricci είναι

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} =& \Gamma^a_{\nu\mu,a} - \Gamma^a_{a\mu,\nu} + \Gamma^a_{a\beta}\Gamma^\beta_{\nu,\mu} - \Gamma^a_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{a,\mu} \\ =& \bar{R}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^a_{\nu\mu,a} - \delta\Gamma^a_{a\mu,\nu} + \bar{\Gamma}^a_{a\beta}\delta\Gamma^\beta_{\nu\mu} + \bar{\Gamma}^\beta_{\nu\mu}\delta\Gamma\Gamma^a_{a\beta} - \bar{\Gamma}^a_{\nu\beta}\delta^\beta_{a\mu} - \bar{\Gamma}^\beta_{a\mu}\delta\Gamma^a_{\nu\beta}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Υστερα από υπολογισμούς παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
R_{00} =& -3\mathcal{H}' + 3\Psi'' + \nabla^2\Phi + 3\mathcal{H}\big(\Phi' + \Psi'\big) \\
R_{0i} =& 2\big(\Psi' + \mathcal{H}\Phi\big)_{,i} \\
R_{ij} =& \big(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2\big)\delta_{ij} \\
&+ \big[-\Psi'' + \nabla^2\Psi - \mathcal{H}\big(\Phi' + 5\Psi'\big) - (2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2)\big(\Phi + \Psi\big)\big]\delta_{ij} \quad + \big(\Psi - \Phi\big)_{,ij}
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Υψώνοντας έπειτα το δείκτη παίρνουμε

$$
R^\mu_\nu = g^{\mu a} R_{a\nu} = \big(\bar{R} + \delta R_{a\nu}\big)\bar{R}^\mu_\nu + \delta g^{\mu a}\bar{R}_{a\nu} + \bar{g}^{\mu a}\delta R_{a\nu}. \tag{7.8}
$$

παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
R^0_0 =& 3a^{-2}\mathcal{H}' + a^{-2}\big[-3\Psi'' - \nabla^2\Phi + 3\mathcal{H}\big(\Phi' + \Psi'\big) - 6\mathcal{H}\Phi\big] \\
R^0_i =& -2a^{-2}\big(\Psi' + \mathcal{H}\Phi\big)_{,i} \\
R^i_0 =& -R^0_i = 2a^{-2}\big(\Psi + \mathcal{H}\Phi\big)_{,i} \\
R^i_j =& a^{-2}\big(\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2\big)\delta^i_j \\
&+ a^{-2}\big[-\Psi'' + \nabla^2\Psi - \mathcal{H}\big(\Phi' + 5\Psi'\big) - \big(2\mathcal{H}' + 4\mathcal{H}^2\big)\Phi\big]\delta_{ij} \\
&+ a^{-2}\big(\Psi - \Phi\big)_{,ij}.
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

και αθροίζοντας παίρνουμε τη σταθερά καμπυλότητας του Ricci

$$
\begin{aligned}
R =& R^0_0 + R^i_i \\
=& 6a^{-2}\big(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\big) \\
&+ a^2\big[-6\Psi'' + 2\nabla^2\big(2\Psi - \Psi\big) - 6\mathcal{H}\big(\Phi' + 3\Psi'\big) - 12\big(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\big)\Phi\big].
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Και τελικά, ο τανυστής του Einstein γίνεται

$$
\begin{aligned}
G^0_0 =& R^0 - \frac{1}{2}R \\
=& -3a^{-2}\mathcal{H}^2 + a^{-2}\big[-2\nabla^2\Psi + 6\mathcal{H}\Psi' + 6\mathcal{H}^2\Phi\big] \\
G^0_i =& R^0_i \\
G^i_0 =& R^i_0 = -R^0_i = -G^0_i \\
G^i_j =& R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R \\
=& a^{-2}\big(-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2\big)\delta^i_j \\
&+ a^{-2}\big[2\Psi'' + \nabla^2\big(\Phi - \Psi\big) + \mathcal{H}\big(2\Phi' + 4\Psi'\big) + \big(4\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2\big)\Phi\big]\delta^i_j
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

Να παρατηρήσουμε καάτι για το υπόβαθρο και τις διαταραχές. Αφού τα υπόβαθρο $\bar{R}^\mu_\nu$ και $\bar{G}^\mu_\nu$ είναι διαγώνια, τα μη διαγώνια στοιχεία περιέχουν μόνο τη διαταραχή

$$
R^0_i = G^0_i = \delta R^0_i = \delta G^0_i. \tag{7.12}
$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Εξέληξη Υπερορίζοντα και συσχέτιση με τις προτότυπες διαταραχές.

Το σύνηθες σκεπτικό σήμερα είναι ότι οι διαταραχές παρήχθησαν πολύ νωρίτερα απ'την αποδέσμευση των νετρίνω, πχ. κατά τη διάρκεια του inflation. Παρόλο που η εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας είναι βολική για την εξακρίβωση των "αρχικών" συνθηκών $\Phi_{\vec{k}}(rad)$, $S_{cr,\vec{k}}(rad)$, $S_{br,\vec{k}}(rad)$, $S_{vr,\vec{k}}(rad)$, αυτές ΔΕΝ είναι "πργαματικά" αρχικές - εναλλακτικά τις ονομάζουμε "αρχέγονες" τιμές. Θα θέλαμε να τις συσχετίσουμε με τις "προτότυπες" διαταραχές, πχ. με την κατάσταση αμέσως μετά τη γέννηση των διαταραχών. Θα συμβολίσουμε τον χρόνο δημιουργίας με $t_\star$ ή απλά $\star$. Μπορεί νξα διαφέρει για διαφορετικές κλίμακες k (για την περίπτωση του inflation ισούται περίπου με το χρόνο εξόδου από τον ορίζοντα). Η σχέση αυτή εξαρτάται από τον μηχανισμό δημιουργίας που θεωρούμε (πχ. inflation) και από το τι συμβαίνει μεταξύ του χρόνου δημιουργίας ($\star$) και την αρχέγονη περίοδο (rad) (πχ. αναθέρμανση μετά το inflation). Στο πρώτο μέρος της ανάλυσης των διαταραχών δεν υποθέσαμε ένα συγκεκριμένο μηχανισμό για τη παραγωγή των διαταραχών (υποθέτουμε απλώς ότι πρόκειται για μια Γκαουσιανή τυχεία διαδικασία)- στο επόμενο μέρος θα θεωρήσουμε το inflation ως μηχανισμό παραγωγής των διαταραχών - επομένως τώρα κάνουμε μια απλή γενική παρατήρηση.

Στα συνήθει σενάρια οι διαταραχές είναι έξω από τον ορίζοντα κατά το διάστημα μεταξύ $\star$ και (rad), αλλά κάποιες άλλες ιδιότητες της αρχέγονης εποχής κυριαρχίας της ακτινοβολίας μπορεί να μην στέκουν. Επομένως ας συγκεντρώσουμε τι άλλες γενικές ιδιότητες συνεπάγονται από την υπόθεση του υπερορίζοντα ($k \ll \mathcal{H}$).

Για αδιαβατικές ($S = 0$) διαταραχές ισχύει $\mathcal{R} =$ σταθ [11]. Τα δυναμικά Bardeen Φ και Ψ δεν παραμένουν υποχρεωτικά σταθερά. Επομένως το $\mathcal{R}$ είναι καλύτερη ποσότητα για να περιγράψει τις αδιαβατικές διαδικασίες, και έχουμε

$$\mathcal{R}_{\vec{k}}(rad) = \mathcal{R}_{\vec{k}}(\star) \quad (ADI). \tag{8.1}$$

Από την άλλη, εάν $S \neq 0$, το $\mathcal{R}$ θα αναπτυχθεί, και επομένως το $\mathcal{R}_{\vec{k}}(rad)$ μπορεί να λάβει συνεισφορές από τις "προτότυπες" εντροπικές διαταραχές την στιγμή $\star$. Ενώ κατά τη διάρκεια της αρχέγονης περιόδου τα S_{cr}, S_{br} και $S_{\nu r}$ παραμένουν σταθερά

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}_{\vec{k}}(rad) \\ S_{cr,\vec{k}}(rad) \\ S_{br,\vec{k}}(rad) \\ S_{\nu r,\vec{k}}(rad) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T_{\mathcal{R}S_{cr}}(k) & T_{\mathcal{R}S_{br}}(k) & T_{\mathcal{R}S_{\nu r}}(k) \\ 0 & T_{S_{cr}S_{cr}}(k) & T_{S_{cr}S_{br}}(k) & T_{S_{cr}S_{\nu r}}(k) \\ 0 & T_{S_{br}S_{cr}}(k) & T_{S_{br}S_{br}}(k) & T_{S_{br}S_{\nu r}}(k) \\ 0 & T_{S_{\nu r}S_{cr}}(k) & T_{S_{\nu r}S_{br}}(k) & T_{S_{\nu r}S_{\nu r}}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{\vec{k}}(\star) \\ S_{cr,\vec{k}}(\star) \\ S_{br,\vec{k}}(\star) \\ S_{\nu r,\vec{k}}(\star) \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

[11] Βλέπε [24] Εξ.15.30

Μέρος III

Διαταραχές με παρουσία βαθμωτού πεδίου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Μια γνωρημία με τη βαθμωτή θεωρία του inflation

Κοσμολογικό inflation (πληθωρισμός) ονομάζουμε μια περιόδο επιταχυνόμενης υπερφωτεινής διαστολής στα πρώημα στάδια εξέλιξης του σύμπαντος[12] [13].

Ο ακριβής ορισμός του Inflation είναι απλά κάθε περίοδος κατά την οποία ο παράγοντας κλίμακα του σύμπαντος αυξάνεται επιταχυνόμενα. Συχά συναντάμε στη βιβλιογραφία τρείς ισοδύναμες διατυπώσεις:

$$\boxed{\text{INFLATION} \Leftrightarrow \ddot{a} > 0 \Leftrightarrow \big(\rho + 3p\big) < 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{H^{-1}}{a} < 0} \tag{9.1}$$

Επειδή υποθέτουμε ότι $\rho > 0$ είναι απαραίτητο να έχουμε $p < 0$ για να ικανοποιείται η μεσαία συνθήκη, η οποια είναι ανεξάρτητη της καμπυλητας του συπαντος. Το inflation περιγράφεται συνήθως σαν μια περίοδος γρήγορης διαστολής, παρόλο που δεν είναι σαφές ως προς το τι η διαστολή αυτή είναι γρήγορη. Η τελευτάια έκφραση δίνει στην ένοια αυτή περισσότερο φυσικό περιεχόμενο.

Επειδή το H^{-1}/a είναι στην κοσμολογία το comoving μήκος Hubble, βλέπουμε ότι η παραπάνω συνθήκη για το inflation ισοδυναμεί με το το comoving μήκος Hubble να μειώνεται με το χρόνο. Ειδωμένο σε συντεταγμένες που ταξιδεύουν μαζί με τη διαστολή, το παρατηρήσημο σύμπαν στην πραγματικότητα μειώνεται κατά τη διάρκεια του inflation, γιατί η χαρακτηριστική κλίμακα δεσμεύει όο και λιγότερο χώρο συντεταγμένων καθώς το inflation εξελίσσεται.

[12] Βλέπε [28, 29].

[13] Με τη γενικότερη έννοια είναι κάθε περίοδος επιταχυνόμενης διαστολής, όχι απαραίτητα υπερφωτεινής. Ακόμα και σήμερα, λόγω της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος, θεωρείται ότι βρισκόμαστε σε μια τέτοια περίοδο

Η επιτυχία του inflation έγκειται στο ότι παρόλο που είναι ένας απλός μηχανισμός, πολλά προβλήματα κοσμολογικά προβλήματα μπορούν να λυθούν με την εισαγωγή του. Τα ποιο σημαντικά από αυτά είναι

Το πρόβλημα της επιπεδότητας

Σύμφωνα με παρατηρήσεις, η ολική παράμετρος πυκνότητας σήμερα είναι πολύ κοντά στο 1 και η καμπυλότητα του σύμπαντος είναι ουσιαστικά μηδενική. Συνεπώς το σύμπαν είναι σχεδόν επίπεδο. Αφού η πυκνότητα καμπυλότητας αλλάζει ως προς την κλίμακα ως a^{-2}, μειώνεται πιο απότομα από την ύλη ή την ακτινοβολία καιι επομένως στο παραλθόν η παράμετρος πυκνότητας καμπυλότητας θα ήταν ακόμα μικρότερη και το σύμπαν θα ήταν ακόμα πιο επίπεδο. Πράγματι συγκρίνοντας με την ακτινοβολία, η οποία αλλάζει με την κλίμακα σαν a^{-4}, βρίσκουμε

$$\frac{\rho_K}{\rho_r} \sim 10^2 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 10^2 \left(\frac{\rho_{r,0}}{\rho_r}\right)^{1/2}, \tag{9.2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\Omega_K \sim 10^{-3}$ σήμερα και $\Omega_r \sim 10^{-5}$. Σήμερα η ενεργειακή πυκνότητα της ακτινοβολίας είναι της τάξης των $(10^{-4}eV)$. Στο χρόνο του Planck, όταν η ενεργειακή πυκνότητα του σύμπαντος ήταν $(10^{19}GeV)$, το κλάσμα αυτό ήταν 10^{-62}. Δεδομένων των τυχαίων αρχικών συνθηκών στο τέλος μιας κατάστασης κβαντικής βαρύτητας, θα περίμενε κάποιος ότι όλες οι συνεισφορές στην ενεργειακή πυκνότητα του σύμπαντος, πχ η ακτινοβολία ακι η καμπυλότητα, θα ήταν της ίδιας τάξης μεγέθους. Το πρόβλημα της επιπεδότητας μπορεί επομένως να διατυπωθεί ως: γιατί θα έπρεπε να ξεκινήσουμε από αρχικές καταστάσεις στο πολύ πρώιμο σύμπαν τέτοιες ώστε ο παράγοντας πυκνότητας του σύμπαντος να ήταν ρυθμισμένος στα 10^{-62} της ολικής ενεργειακής πυκνότητας, τι στιγμή που θα μπορούσε να είχε παάρει οποιαδήποτε τιμή?

Το πρόβλημα του Ορίζοντα

Ο ορίζοντας (του σωματιδίου) περικλείει εκείνο το τμήμα του χώρου μέσα στο οποίο αιτιακή επικοινωνία είναι εφικτή. Αφού καμια πληροφορία δεν μπορεί να ταξιδέψει γρηγορότερα από το φως, ένα γεγονός που λαμβάνει χώρα στο (t_1, x_1) δεν μπορεί να γίνει αντιληπτό από έναν παρατηρητή στο (t_2, x_2) εάν η απόστασή του είναι μεγαλύτερη από την απόδταση που μπορεί να διανύσει το φως σε αυτό το χρονικό διάστημα. Για ένα σύμπαν που κυριαρχείται από ύλη ή ακτινοβολία, ο ορίζοντας αυξάνεται γρηγορότερα από τον

ίδιο το χώρο[14] ή με άλλα λόγια, πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο, ο ορίζοντας ο ορίζοντας συρρικνώνεται πιο γρήγορα από το χώρο. Αυτό σημαίνει ότι σήμερα μπορούμε να αντιληφθούμε γεγονότα τα οποία στο παρελθόν δεν ήταν αιτιακά συνδεδεμένα μεταξύ τους. Επομένως το πρώιμο σύμπαν αποτελείαι από διαφορετικές περιοχές που δεν ανταλλάσουν πληροροφίες μεταξύ τους. Πάραυτα, το παρατηρίσημο σύμπαν σήμερα είναι πολύ ισοτροπικό, προφανώς η νουκλεοσύνθεση έλαβε χώρα με το ν ίδιο τρόπο παντού και γι αυτό η θερμοκρασία του CMB είναι βασικά ισοτροπική. Αλλά το σημερινό παρατηρήσιμο σύμπαν χωρίστηκε περίπου σε 10^6 ασύνδετες περιοχές την στιγμή της επανασύνδεσης, όταν δημιουργήθηκε το CMB, και σε περίπου 10^{24} περιοχές την περίοδο της νοθκλεοσύνθεσης. Επομένως το πρόβλημα του Ορίζοντα είναι το πως τέτοιες ασύνδετες περιοχές του σύμπαντος εξελίχθηκαν με τόσο παρόμοιο τρόπο.

Το πρόβλημα του μονοπόλου

Αλλαγές φάσης στο πρώιμο σύμπαν αναμένεται να δημιουργήσουν τοπολογικές ανωμαλίες. Μεταξύ αυτών, τα μονόπολα θεωρούνται "επικίνδυνα απομεινάρια", αφού η μεγάλη τους πυκνότητα θα κυριαρχούσε στην ολική πυκνότητα του σύμπαντος. Τα απομεινάρια αυτά είναι τυπικώς μη σχετικιστικά, με πυκνότητα ενέργειας όπως a^{-3}, άρα δεν θα επέτρεπαν ποτέ την κυριαρχία της ύλης ή της ακτινοβολίας.

Το πρόβλημα της ομογένειας σε μεγάλη κλίμακα

Σε μεγάλες κλίμακες το σύμπαν είναι πολύ ομογενές και ισότροπο. Ήδη στην επανασύνδεση, η απόκλιση από την ομογένεια της ακτινοβολίας του υποβάθρου είναι μόλις 10^{-5}. Αυτό εγείρει ερωτήματα όσον αφορά στην στις αρχικές συνθήκες που παράγουν τέτοιο ομογενές σύμπαν. Πράγματι στο χρόνο του Planck οι συνθήκες αυτές αναμένονται να είναι χαοτικές και είναι εξαιρετικά απίθανο να μπορούσαν να εξεληχθούν σε ένα σύμπαν τόσο ομογενές καιι ισότροπο.

Το πρόβλημα της ανομοιογένειας σε μικρή κλίμακα

Την ίδια στιγμή αυτό το πολύ ομοιόμορφο σύμπαν παρουσιάζει ανομοιογένειες σε μικρές κλίμακες, όπως γαλαξίες και ομάδες γαλαξιών. Πιστεύεται ότι από αυτές τις ανομοιογένειες της τάξης 10^{-5} του CMB προέρχονται οι σχηματισμοί των μεγάλης κλίμακας δομών, μέσω βαρυτικής κατάρευσης. Συνεπώς δημιουργείται το

[14] Για κυριαρχία της ύλης ο ορίζοντας του σωματιδίου αυξάνεται ως $a^{3/2}$, ενώ για κυριαρχία της ακτινοβολίας αυξάνεται ως a^2 και επομένως και στις δύο περιπτώσεις γρηγορότερα από τον παράγοντα κλίμακας (υποφωτονική διαστολή).

ερώτημα, πως δημιουργήθηκαν αυτές οι μικρές διακυμάνσεις σε ένα κατά τα άλλα ομογενές σύμπαν.

Δεν γνωρίζουμε πότε ακριβώς το inflation έλαβε χώρα, αν και το άνω όριο της ενεργειακής κλίμακας του inflation σύμφωνα με το Planck είναι $1.9 \times 10^{16} GeV$. Πιστεύεται ότι το πολύ στα πρώτα 10^{-30}s το σύμπαν διεστάλει κατά ένα παράγοντα 10^26. Μια τέτοια διαστολή μπορεί ανα επιτευχθεί εάν το σύμπαν είναι γεμάτο με ένα βαθμωτό πεδίο, συμβολιζόμενο συνήθως με ϕ, του οποίου η αργώς μειούμενη δυναμική ενέργεια κυριαρχεί την ολική πυκνότητα ενέργειας. Κατά τη διάρκεια αυτής της ταχύτατης διαστολής, το σύμπαν ψύχθηκε ενώ οι υπόλοιπες συνειστώσες του αραιώθηκαν. συνεπώς μια περίοδος αναθέρμανσης (reheating) χρειάζεται στη συνέχεια, για να ανακτήσει τη θερμοκρασία του σύμπαντος στην απαιτούμενη θερμοκρασία για να διατηρήσει όλα τα επιτυχημένα χαρακτηριστικά της καθιερωμένης θεωρίας του Big Bang. Κατά την αναθέρμανση η ενέργεια του βαθμωτού πεδίου διασπάται σε σωμάτια και γεμίζει το σύμπαν με σωμάτια του Standard Model.

Οι εξισώσεις του Einstein θα πρέπει να μας εξηγούν ποιο είδος ύλης μπορεί να οδηγήσει σε μια τέτοια περίοδο. Ας ξεκινήσουμε από την εξίσωση Friedmann για ένα επίπεδο σύμπαν, το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} a \rho^{1/2}. \tag{9.3}$$

παίρνοντας τη χρονική παράγωγο αυτής και αντικαθυστώντας το $\dot{\rho}$ σύμφωνα με την εξίσωση διατήρηση της ενέργειας παίρνουμε

$$\ddot{a} = -\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \frac{\dot{a}}{2\rho^{1/2}} (\rho + 3p). \tag{9.4}$$

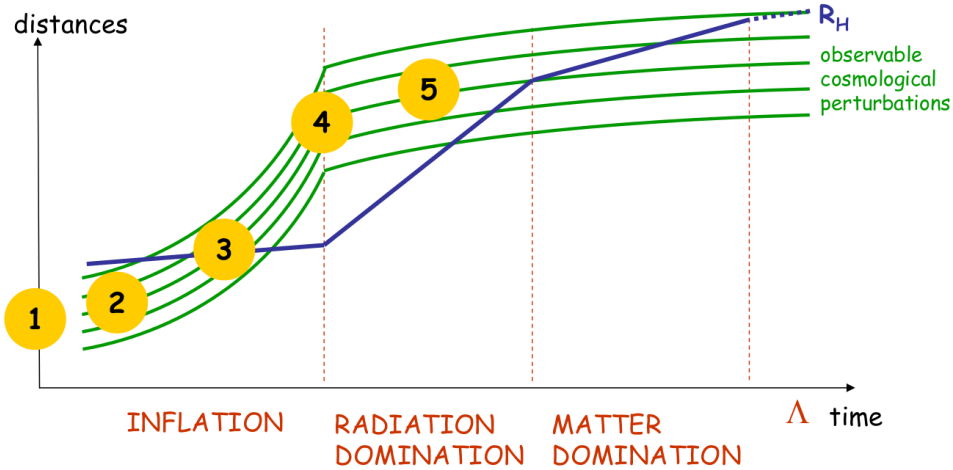
Για όσο διάστημα το σύμπαν διαστέλλεται, $\dot{a} > 0$. Άρα, η συνθήκη για μια επιταχυνόμενη διαστολή είναι απλά

$$\rho + 3p < 0 \tag{9.5}$$

Καταλήγουμε ότι κατά τη διάρκεια του inflation η πίεση έπρεπε να είναι αρνητική και μικρότερη από $-\rho/3$. Ποιό είδος ύλης θα μπορούσε να ικανοποιήσει την συνθήκη αυτή; Μια κοσμολογική σταθερά θα μπορούσε να το πετύχει αυτό αφού έχει $p = -\rho$. Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου κυριαρχίας της κοσμολογικής σταθεράς, η παράμετρος Hubble παραμένει σταθερή: και έχουμε De Sitter (εκθετικό) infaltion. Το πρόβλημα είναι ότι η κοσμολογική σταθερά δεν φθείνει, άρα το inflation θα συνεχίζει επ άπειρον. Εάν θέλουμε το inflation να τελειώνει, "κάτι πρέπει να γίνεται", άρα πρέπει να υπρχει ένα βέλος τουτ χρόνου. Επομένως

το είδος της ύλης που είναι υπεύθυνο για το infaltion δεν μπορεί να βρίσκεται ακριβώς σε ισορροποία. Η πιο απλή επιλογή είναι να εξετάσουμε ένα βαθμωτό πεδίο (ονομαζόμενο inflaton) το οποίο κατηφορίζει μια πολύ επίπεδη κυλάδα δυναμικού (slow-rolling). Επειδή κατηφορίζει, υπάρχει ένα βέλος του χρόνου, και κάτι μπορεί να συμβεί που μπορεί να σταματήσει το infaltion. Αλλά επειδή η κοιλάδα είναι πολύ επίπεδη και η πορεία του πεδίου στη θέδη ισορροπίας είναι αργή, το πεδίο μπορεί να ειδωθεί ως μια "στιγμιαία κατάσταση κενού", η οοποία μοιράζεται τις ίδιες σχεδόν ιδιότητες με την πραγματική κατάσταση κενού: συγκεκριμένα, η ενέργεια του πεδίου διαχέεται πολύ αργά και η πίεση είναι πολύ κοντά στην $-\rho$.

Στης επόμενες εννότητες, θα μελετήσουμε το σενάριο αυτό, στο οποίο μπορεί κανείς να ξεχωρίσει διάφορες φάσεις. Οι αριθμοί παρακάτω αντιστοιχούν στην εικόνα ??, η οποία συνοψίζει περιεκτικά την εξέληξη των κλιμάκων συναρτήσει του (συνήθους όχι σύμμορφου) χρόνου.



Σχήμα 9.1: Η εξέληξη μιας συλλογής παρατηρίσημων κλιμάκων k (κυματάριθμοι) συναρτήσει του χρόνου, κατά περίοδο του inflation, κυριαρχίας της ακτινοβολίας, κυριαρχίας της ύλης και κοσμολογικής σταθεράς (ή σκοτεινής ενέργειας). Τα μεγαλύτερα μήκη κύματος που εικονίζονται είναι ίσα με τη σημερινή ακτίνα του Hubble ($k_{min} = 2\pi/H_0$), άρα είναι η μεγαλύτερη κλίμακα που είναι προσβάσιμη σε παρατηρήσεις (καθορίζει το μέγεθος του ορατού σύμπαντος).

9.1 Βαθμωτά πεδία στην Κοσμολογία

Για να πάρουμε μια περίοδο σαν το inflation είναι αναγκάιο να έχουμε κάτι που να οδηγήσει σε αρνητική πίεση. Αυτό που επιτυγχνάνει τη συγκεκριμένη δουλειά είναι ένα βαθμωτό πεδίο, που περιγράφει βαθμωτά (χωρίς spin) σωμάτια. Η δράση σε τέτοια κομολογικά μοντέλα γράφεται ως:

$$S_\phi = -\int dx^4 \sqrt{g}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} + V(\phi)\right], \tag{9.6}$$

$$S_\phi = -\int dx^4 \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}R + \mathcal{L}_\phi\right], \tag{9.7}$$

με

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \tag{9.8}$$

Για τη μετρική FRW έχουμε $\sqrt{-g} \equiv \sqrt{-det(g_{\mu\nu})} = a^3$. Όπου $V(\phi)$ είναι μια συνάρτηση γνωστή ως δυναμικό του βαθμωτού πεδίου. Διαφορετικά πληθοριστικά μοντέλα αντιστοιχούν σε διαφορετικές επιλογές για το δυναμικό αυτό. Οι εξισώσεις πεδίου για το ϕ σε ένα βαρυτικό πεδίο δίνονται από τη συνθήκη η δράση αυτή να είναι στάσιμη ως προς μεταβολές στο ϕ:

$$\partial^\mu\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta(\partial^\mu\phi)} - \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta\phi} = 0 \Rightarrow -\partial^\mu(a^3\partial_\mu\phi) - V_\phi a^3 = 0 \tag{9.9}$$

Χρησημοποιώντας τον κανόνα του Leibniz στον 1ο όρο, το γεγονός ότι ο παράγοντα κλίμακας είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου $a(t)$ και διαιρώντας με έναν παράγοντα a^3 παίρνουμε:

$$\ddot{[\phi]} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2}{a^2}\phi + V_\phi = 0 \tag{9.10}$$

Από αυτή βλέπουμε ότι η διαστολή του σύμπαντος μας δίνει ένα όρο απόσβεσης ανάλογο του ρυθμού διαστολής $H = \dot{a}/a$. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής γράφεται:

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\partial^\mu\phi)}{\delta g_{\mu\nu}} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi \tag{9.11}$$

από την οποία παίρνουμε τις συνειστώσες της πίεσης και πυκνότητας:

$$\begin{aligned} \rho =& T_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} + V(\phi) \\ p =& T_{ii} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - V(\phi) \end{aligned} \tag{9.12}$$

Επειδή δουλεύουμε στη μετρική Robertson-Walker οι παραπάνω μπορεί να γραφούν στην διαγώνια μορφή:

$$\begin{aligned} \rho =& \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2}\frac{(\nabla\phi)^2}{a^2} \\ p_\phi =& \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - \frac{1}{6}\frac{(\nabla\phi)^2}{a^2} \end{aligned} \tag{9.13}$$

Οι εξισώσεις κίνησης για το πεδίο μπορούν να βρεθούν αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην εξίσωση Friedmann και την εξίσωση συνέχειας αντίστοιχα. Υποθέτοντας ένα σύμπαν επίπεδο:

$$H^2 = \frac{1}{3}\left[V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right] \tag{9.14}$$

και

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} \tag{9.15}$$

9.2 Slow Roll

Ο καθιερωμένος τρόπος προσέγγισης του inflation είναι η slow-roll προσεγγιση. Η προσέγγιση αυτή μας επιτρέπει να αγνοήσουμε τον όρο $\dot{\phi}$ της 9.14 και τον πρώτο όρο στην 9.15 δίνοντας:

$$\begin{aligned} H^2 \simeq& \frac{V(\phi)}{3}, \\ 3H\dot{\phi} \simeq& -V'(\phi) \end{aligned} \tag{9.16}$$

όπου το $\simeq$ δηλώνει ότι οι σχέσεις αυτές ισχύουν στα πλαίσια της προσέγγιαης slow-roll. Προκειμένου οι σχέσεις αυτές να ισχύουν, είναι υποχρεωτικό να ισχύουν οι δύο συνθήκες:

$$\begin{array}{ccccccc} \dot{\phi}^2/2 & \ll & V & \Rightarrow & H^2 = \rho/3 & \approx & V/3 \\ \ddot{\phi}^2/2 & \ll & 3H\dot{\phi} & \Rightarrow & 3H\dot{\phi} & \approx & -V' \end{array} \tag{9.17}$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις αυτές εγκυάται ότι το H είναι σχεδόν σταθερό $H \ll H^2$, οδηγόντας σε ημι-εκθετική διαστολή (με $a \sim e^{Ht}$).

$$\epsilon(\phi) \ll 1, \quad |\eta(\phi)| \ll 1, \tag{9.18}$$

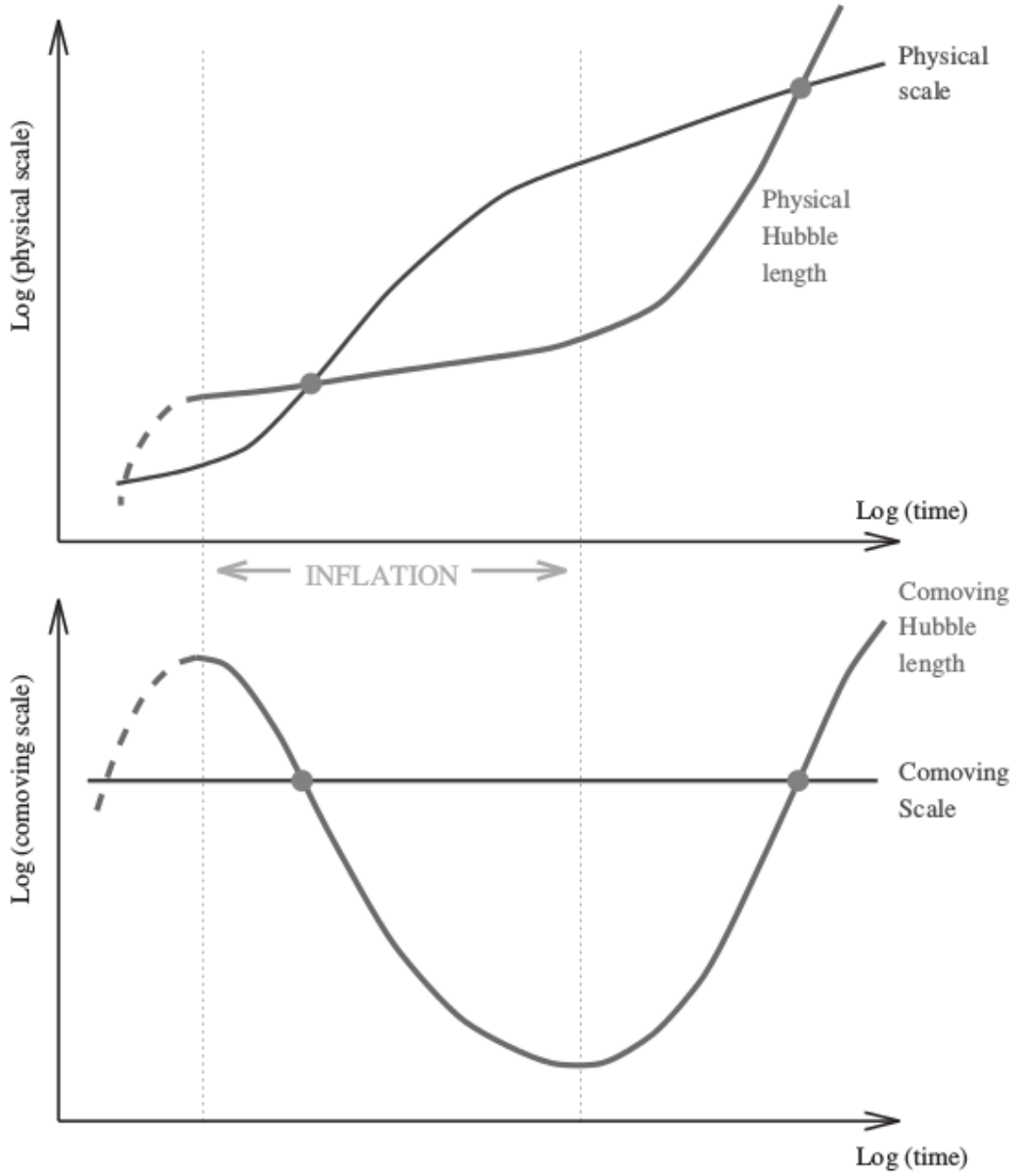
Όπου οι slow-roll παράμετροι ϵ και η είναι:

$$\begin{aligned}\epsilon(\phi) =& \frac{1}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \\ \eta(\phi) =& \frac{V''}{V}\end{aligned} \tag{9.19}$$

9.3 Διάρκεια του Inflation και εξέληξη των κλιμάκων

Όταν σε επόμενο κεφάλαιο συζητήσουμε για την δημιουργία και εξέλιξη διαταραχών, θα μας ενδιαφέρει η ιστορία του κάθε σύμμορφου κυματικού αριθμού. Μια σημαντική ερώτηση που αφορά μια συγκεκριμένη κλίμακα είναι το αν είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από τον ορίζοντα. Ακριβολογόντας, θα έπρεπε να αναφερόμαστε πάντα στο μήκος Hubble, αλλά ακολουθούμε τη συνηθισμένη ορολογία όπου οι όροι "ορίζοντας" και "μήκος Hubble" χρησημοποιούνται από κοινού για να αποδώσουν την έννοια του δεύτερου. Διαταραχές τη πυκνότητας συνήθως ορίζονται από το σύμμορφο κυμματικό αριθμό κ, ο οποίος προκύπτει από μια αρμονική ανάλυση Fourier της διαταραχής. Ορίζουμε μια κλίμακα να είναι ίση με τον ορίζοντα όταν $\kappa = aH$. Από τον ορισμό, κατά την διάρκεια του inflation το σύμμορφο μήκος Hubble μειώνεται ενώ σε όλες τις άλλες στιγμές αυξάνεται. Μια σταθερή σύμμορφη κλίμακα κ^{-1} επομένως μπορεί να ξεκινήσει την εξέλιξή της αρχικά πολύ μικρότερη από H^{-1}/a και να καταλήξει στο τέλος του inflation ναθεωρείται πολύ μεγαλύτερη. Για κάθε κλίμακα η οποία περνάει τον ορίζοντα κατά την διάρκεια του inlation, μια σημαντική εποχή για ποσοτικοποιήσουμε είναι ο χρόνος ο οποίος ισούται με την ακτίνα του Hubble, $\kappa = aH$. Με λίγες απλές υποθέσεις, αυτό μπορεί να αντιστοιχηθεί με το πλήθος των χαρακτηριστικών χρόνων του inflation (e-folding) στους οποίους το σύμπαν αυξάνεται κατά παράγοντα e ύστερα από την παραπάνω στιγμή. Η εξέληξη μιας κλίμακας κ, η οποία μπορούμε να φανταστούμε, για παράδειγμα, ότι είναι η κλίμακα που σήμερα ισούται με την ακτίνα του Hubble, $\kappa = a_0 H_0$, όπως φαίνεται στην εικόνα ??. Για να ταυτοποιήσουμε (αναγνωρίσουμε) τις διαφορετικές κλίμακες, απαιτείται ένα μοντέλο για την εξέλιξη του σύμπαντος μέχρι και το παρόν. Για παράδειγμα, στην απλούστερη βιώσιμη κοσμολογίαχωρίζουμε την εξέλιξη στα εξής μέρη:

- Από τη στιγμή του η κλίμακα κ^{-1} ισούται με την ακτίνα του Hubble έως το τέλος του inflation



Σχήμα 9.2: Δύο όψεις της συμπεριφοράς της σύμμορφης κλίμακας κ σε σχέση με το μήκος του Hubble (κλίμακα του ορίζοντα) Εξ ορισμού, το σύμμορφο μήκος Hubble $1/aH$ φθίνει την περίοδο του inflation, ενώ στις άλλες εποχές αυξάνεται. Η πρώτη εικόνα δείχνει φυσικές συντεταγμένες ενώ η κάτω σύμμορφες. Ο κατακόρυφος άξονας καλύπτει πολλές τάξεις μεγάθους. Μια κλίμακα ξεκινά βαθιά μέσα στον ορίζοντα, στην συνέχεια περνάει έξω κάποια στιγμή πριν από το τέλος του inflation και ξαναμπαίνει πολύ μετα του τέλους του inflation

- Από το τέλος του inflation μέχρι την αποκατάσταση του θερμού Big Bang (αναθέρμανση). Εδώ υποθέτουμε ότι το σύμπαν συμπεριφέρεται την περίοδο αυτή σαν να κυριαρχείται από ύλη.

- Την εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας, από το τέλος της αναθέρμανσης (μεταφορές ενέργειας του κενού στην ακτινοβολία και ύλη) έως το χρόνο ισοδυναμίας ύλης και ακτινοβολίας t_{eq}.

- Την εποχή κυριαρχίας της ύλης, από την στιγμή t_{eq} μέχρι σήμερα.

Αυτό δεν είναι το μόνο δυνατό μοντέλο της εξέλιξης του σύμπαντος. Για παράδειγμα υπάρχει μια τροποποίηση στην παραπάνω ταξινόμιση γνωστή ως θερμικό inflation, στο οποίο δύο πρόσθετες περίοδοι συμβαίνουν σε χαμηλές ενέργειες. Υποθέτουμε ακαριαίες μεταβάσεις μεταξύ των περιόδων. Χρησημοποιούμε τον δείκτη κ για να συμβολίσουμε την τιμή των ποσοτήτων $\kappa = aH$ κατά την περίοδο του inflation και μετά την αναθέρμανση. Έπειτα, μετρώντας όλες τις ποσότητες που σχετίζονται με την σημερινή σύμμορφη κλίμακα του Hubble $_0^{-1}/a_0$ παίρνουμε

$$\frac{\kappa}{a_0 H_0} = \frac{aH_\kappa}{aH_0} = \frac{a_\kappa}{a_{\text{τέλος}}} \frac{a_{\text{τέλος}}}{a_{\text{αν/νση}}} \frac{a_{\text{αν/νση}}}{a_{eq}} \frac{a_{eq}}{a_0} \frac{H_\kappa}{H_0}. \tag{9.20}$$

Το πρώτο κλάσμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης δίνει τον αριθμό των χαρακτηριστικών χρόνων $N(\kappa)$ του inflation όταν η κλίμακα κ ισούται με την ακτίνα του Hubble ($\frac{a_\kappa}{a_{\text{τέλος}}} = e^{-N}$). Αντικαθυστώντας τις τυπικές τιμές των άλλων μεγεθών παίρνουμε

$$N(\kappa) = 62 - \ln \frac{\kappa}{a_0 H_0} - \ln \frac{10^{16} GeV}{V_\kappa^{1/4}} + \ln \frac{V_k^{1/4}}{V^{1/4}} - \frac{1}{3} \ln \frac{V_{\text{τέλος}}^{1/4}}{\rho_{\text{αν/νση}}^{1/4}}. \tag{9.21}$$

Οι τελευταίοι 3 όροι της 9.21 αντιπροσοπεύουν την αβεβαιότητα σε διάφορες ενεργειακές κλίμακες που σχετίζονταιμε το inflation. Σε τυπικά μοντέλα του inflation, οι παράγοντες αυτοί δεν αναμένεται να είναι πολύ μεγάλοι. Συνήθως, δεν είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τον ακριβή αριθμό των χαρακτηριστικών χρόνων στον οποίο η σημερινή κλίμακα Hubble είναι ίση με την κλίμακα Hubble την περίοδο του inflation. Με την τυπική εξέλιξη, συνήθως συναντάμε στην βιβλιογραφία τον χρόνο αυτό να παίρνει τις τιμές 50 ή 60 ενώ σε τροποποιημένες θεωρίες όπων το θερμό inflation να πάιρνει και την τιμή $= 25$.

Το πλήθος των χαρακτηριστικών χρόνων (e-folds) του inflation μεταξύ του τέλους του inflation και ενός χρόνου t κατά τη διάρκεια του inflation είναι

$$N(t) \equiv \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} = \int_t^{t_{end}} = -\frac{1}{2m_{Pl}^2} \int_{\phi_t}^{\phi_{end}} \frac{H}{H'} d\phi \int_{\phi_{end}}^{\phi_t} \frac{d\phi}{M_{Pl}} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon(\phi)}}. \tag{9.22}$$

Οι μεγαλύτερες σύμμορφες κλίμακες εξέρχονται πρώτες από τον ορίζοντα κατά το inflation, και είναι οι τελευταίες που ξαναμπαίνουν στον ορίζοντα αργότερα, κατά την περίοδο κυριαρχίας της ακτινοβολίας και ύλης. Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των e-folds που απαιτούνται για να λυθεί το πρόβλημα του ορίζοντα, θεωρούμε έναφυσικό κυματάριθμο k_{phus}. Ο λόγος του με τη σημερινή κλίμακα τυ Hubble είναι

$$\frac{k_{phys}}{a_0 H_0} = \frac{a_k H_k}{a_0 H_0} = \frac{a_k}{a_{end}} \frac{a_{end}}{a_{reh}} \frac{a_{reh}}{a_{eq}} \frac{a_{eq}}{a_0} \frac{H_k}{H_0}, \tag{9.23}$$

όπου a_k και H_k είναι ο παράγοντας κλίμακας και η παράμετρος Hubble όταν ο συγκεκριμένος αυτός κυματάριθμος k εξέρχεται από τον ορίζοντα. a_{end} είναι ο παράγοντας κλίμακας στο τέλος του inflation, a_{eq} είναι ο περάγοντας κλίμακας στην εποχή κυριαρχίας της ύλης-ακτινοβολίας και a_{eh}

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Infaltion

10.1 Βαθμωτά πεδία στον χώρο Minkowski

Μελετάμε μια θεωρία N βαθμωτών πεδίων ϕ_I, $I = 1, \cdots, N$ με κανονικοποιημένους[15] κινητικούς όρους. Η Λαγκρανζιανή της θεωρίας αυτής είναι

$$\mathcal{L}\big(\phi_I, \partial_\mu \phi_I\big) = -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi_I \partial^\mu \phi_I - V\big(\phi_I\big) \tag{10.1}$$

(όπου εννοείται άθροιση τόσο στα μ όσο και στα I). Ως γνωστόν οι εξισώσεις κίνησης παίρνονται με το να απαιτήσουμε την στασιμότητα της δράσης, δηλαδή $\delta S = 0$ όπου

$$S = \int \mathcal{L} d^4x \tag{10.2}$$

χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες, οδηγούμαστε στις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_I} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu \phi_I\big)}\right] = 0 \tag{10.3}$$

όπου

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_I} = -V_I \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu \phi_I\big)} = -\partial^\mu \phi_I \tag{10.4}$$

με

$$V_I \equiv \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi_I}. \tag{10.5}$$

έτσι η 10.3 γίνεται

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi_I - V_I = 0. \tag{10.6}$$

[15] για παράδειγμα της μορφής $\frac{1}{2}\partial_\mu \phi_I \partial^\mu \phi_I$ και όχι $\partial_\mu \phi_I \partial^\mu \phi_I$. Οχι ότι έχει ιδιαίτερη συμμασία, απλά για να έχει την γνωστή μορφή η Lagrangian.

Η Λαγκρανζιανή 10.1 εξαρτάται από τις χωροχρονικές συντεταγμένες μόνο μέσα από τα ϕ_I και $\partial_\mu\phi_I$ και όχι άμεσα. Αυτό σημαίνει ότι η δράση είναι αναλοίωτη κάτω από ομογενείς μεταθέσεις των συντεταγμένων στο χωροχρόνο. Σύμφωνα με το θεώρημα της Noether τέτοια αναλοιώτητα οδηγεί σε διατηρούμενα ρεύματα.

Αν μετατοπίσουμε όλη τις συντεταγμένες του πεδίου κατά μια απειροστή ποσότητα α^ν = σταθ. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα χωροχρονικό σημείο P η καινούρια τιμή του πεδίου $\phi_I^{'}$ και η απόκλισή του $\partial_\mu\phi_I^{'}$ είναι αυτές που υπήρχαν σε ένα άλλο σημείο P' ώστε:

$$x^\nu(P') = x^\nu(P) - \alpha^\nu. \tag{10.7}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\phi_I'(P) &= \phi_I(P') = \phi_I(P) - \alpha^\nu\partial_\nu\phi_I(P) \equiv \phi_I(P) + \delta\phi_I(P) \\
\partial_\mu\phi_I'(P) &= \partial_\mu\phi_I(P') = \partial_\mu\phi_I(P) - \alpha^\nu\partial_\nu\partial_\mu\phi_I(P) \equiv \partial_\mu\phi_I(P) + \delta\big(\partial_\mu\phi_I(P)\big) \\
\mathcal{L}^{'}(P) &= \mathcal{L}(P') - \alpha^\nu\partial_\nu\mathcal{L}(P) \equiv \mathcal{L}(P) + \delta\mathcal{L}(P)
\end{aligned}$$

Και αφού η Λαγκρανζιανή εξαρτάται μόνο από τα ϕ_I και $\partial_\mu\phi_I$ η μεταβολή της θα είναι:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I}\delta\phi_I + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi_I\big)}\delta\big(\partial_\mu\phi_I\big) \\
&= -\alpha^\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I}\partial_\nu\phi_I + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi_I\big)}\partial_\nu\partial_\mu\phi_I\right] \\
&= -\alpha^\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi_I\big)}\partial_\nu\phi_I\right],
\end{aligned} \tag{10.8}$$

όπου κάναμε χρήση της 10.3. Επομένως έχουμε ότι

$$\delta\mathcal{L} = -\alpha^\nu\partial_\nu\mathcal{L} \equiv -\alpha^\nu\partial_\mu\big(\delta^\mu_\nu\mathcal{L}\big) = -\alpha^\nu\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi_I\big)}\partial_\nu\phi_I\right]. \tag{10.9}$$

αφού αυτό ισχύει για κάθε (απειροστό) α^ν, έχουμε το νόμο διαρήρησης

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0, \tag{10.10}$$

όπου

$$T^\mu_\nu \equiv \delta^\mu_\nu\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi_I\big)}\partial_\nu\phi_I, \tag{10.11}$$

ονομάζεται τανυστής ενέργειας-ορμής. Οι συναλοίωτες συνειστώσεις του είναι

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &\equiv \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_\mu\phi_I\big)}\partial^\nu\phi_I \\
&= \eta^{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}\partial_\rho\phi_I\partial^\rho\phi_I - V(\phi_I)\right] + \partial^\mu\phi_I\partial^\nu\phi_I.
\end{aligned} \tag{10.12}$$

Συγκεκριμένα

$$\rho \equiv T^{00} = \frac{1}{2}\sum_I \dot{\phi}_I^2 + \frac{1}{2}\sum_I \left(\nabla\phi_I\right)^2 + V(\phi_I) \tag{10.13}$$

$$p \equiv \frac{1}{3}T_i^i = \frac{1}{2}\sum_I \dot{\phi}_I^2 - \frac{1}{6}\sum_I \left(\nabla\phi_I\right)^2 - V(\phi_I). \tag{10.14}$$

10.2 Βαθμωτά πεδία σε καμπύλο χωροχρόνο

Σε καμύλο χωροχρόνο η Λαγκρανζιανή 10.1 αντικαθίσταται από

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi_I\nabla_\nu\phi_I - V(\phi_I) = -\frac{1}{2}\partial_\rho\phi_I - V(\phi_I). \tag{10.15}$$

και η δράση από την

$$S_\phi = \int \mathcal{L}_\phi\sqrt{-g}d^4x, \tag{10.16}$$

όπου

$$-g \equiv det\left[g_{\mu\nu}\right]. \tag{10.17}$$

Στην 10.15, $\nabla_\mu\phi_I = \partial_\mu\phi_I$ αφού τα ϕ_I είναι βαθμωτά πεδία, αλλά για τις αποκλίσεις της Euler-Lagrange εξίσωσης, όπου πρέπει να χρησημοποιήσουμε το θεώρημα του Stokes στην γενική του μορφή για καμπύλο χώρο

$$\int_\Sigma \nabla_\mu\upsilon^\mu\sqrt{-g}d^4x = \int_{\partial\Sigma} n_\mu\upsilon^\mu\sqrt{|\gamma|}d^3x, \tag{10.18}$$

όπου $\partial\Sigma$ είναι το σύνορο της χωροχρονικής περιοχής Σ και γ είναι η ορίζουσα της αντίστοιχης μετρικής του συνόρου.

Παίρνουμε τις εξισώσεις του Einstein, διαταράσσοντας την δράση του Hilbert

$$S = S_H = \int R\sqrt{-g}d^4x, \tag{10.19}$$

και απαιτώντας $\delta S_H = 0$. Διαταράσσοντας τη μετρική $g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$, παίρνουμε

$$\delta S_H = \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \int d^4xR\sqrt{-g}. \tag{10.20}$$

Από τη ΓΣ ξέρουμε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα μηδενίζεται (αφού είναι ολική απόκλιση και μηδενίζεται από το θ. Stokes) και ότι

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.^{16} \tag{10.21}$$

Το οποίο δίνει

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \equiv G_{\mu\nu} = 0. \tag{10.22}$$

Παίρνουμε τη σχετικιστική θεωρία με πηγές βαθμωτά πεδία ασθενώς συζευγμένο με την βαρύτητα διαταράσσοντας τη δράση

$$S = \frac{1}{16\pi G}S_H + S_\phi = \frac{1}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}d^4x + \int \mathcal{L}_\phi\sqrt{-g}d^4x \tag{10.23}$$

Και στο σύστημα $M_{Pl}^2 = \frac{1}{8\pi G} = 1$ έχουμε

$$S = \frac{1}{2}\int dtd^3\sqrt{-g}\big[R - (\partial_\mu\phi)^2 - 2V\big] \tag{10.24}$$

Διαταράσσοντας ως προς τα βαθμωτά πεδία, παίρνουμε την εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I} - \nabla_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\nabla_\mu\phi_I\big)}\right] = 0 \tag{10.25}$$

όπου

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_I} = -V_I \quad \text{και} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\nabla_\mu\phi_I\big)} = -\partial^\mu\phi_I \tag{10.26}$$

έτσι παίρνουμε

$$\Box\phi_I - V_I = 0, \tag{10.27}$$

όπου

$$\Box\phi_I \equiv \nabla_\mu\nabla^\mu\phi_I = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi_I = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\big(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi_I\big). \tag{10.28}$$

Διαταράσσοντας ως προς την αντίστροφη μετρική παίρνουμε τις εξισώσεις του Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \tag{10.29}$$

[16] Από την σχέση του Jacobi ο κανόνας παραγώγισης της ορίζουσας δίνει

$$\delta g = \delta det(g_{\mu\nu}) = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$$

από την οποία παίρνουμε

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\big(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\big) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\big(gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\big).$$

όπου κάναμε χρήση της σχέσης $g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$

όπου

$$T_{\mu\nu} \equiv -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{10.30}$$

Από την 10.15

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{phi}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\nabla_\mu \phi_I \nabla_\nu \phi_I = -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi_I \partial_\nu \phi_I \tag{10.31}$$

άρα από την 10.21

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \int \delta \mathcal{L}_\phi \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_\phi \delta \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int d^4x \sqrt{-g}\big(-\frac{1}{2}\partial_\mu \phi_I \partial_\nu \phi_I - \frac{1}{2}\mathcal{L}_\phi g_{\mu\nu}\big)\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{10.32}$$

ώστε

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi_I \partial_\nu \phi_I + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi \\ &= \partial_\mu \phi_I \partial_\nu \phi_I - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\partial_\rho \phi_I \partial^\rho \phi_I - g_{\mu\nu} V(\phi_I), \end{aligned} \tag{10.33}$$

ή

$$T^\mu_\nu = \partial^\mu \phi_I \partial_\nu \phi_I - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu \partial_\rho \phi_I \partial^\rho \phi_I - \delta^\mu_\nu V(\phi_I), \tag{10.34}$$

το οποίο είναι η σχετικιστική μορφή της 10.12, με το $\eta_{\mu\nu}$ να έχει αντικατασταθεί πλέον από το $g_{\mu\nu}$.

10.3 Υποκείμενο Σύμπαν

Ας εφαρμόσουμε τα προηγούμενα στον επίπεδο FRW χώρο, με μετρική

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \Rightarrow \sqrt{-g} = a^4. \tag{10.35}$$

Στον υποκείμενο χώρο τα βαθμωτά πεδία είναι ομογενή,

$$\bar{\phi}_I = \bar{\phi}_I(\eta). \tag{10.36}$$

Και τα πεδία του υποβάθρου ικανοποιούν την:

$$\bar{\phi}_I'' + 2\mathcal{H}\bar{\phi}_I' = -a^2\frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}_I}\text{[17]} \tag{10.37}$$

[17] Από την 10.27 και την 10.28, έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\big(\sqrt{-g}\partial^\mu \phi_I\big) - V_I = 0$$

Ισοδύναμη έκφραση στις σύνηθες μονάδες χρόνου:

Από B έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + a^2 V_\phi = 0 \\
\Rightarrow &\mathcal{H}^{-2}\phi'' + 2\mathcal{H}^{-1}\phi' + a^2\mathcal{H}^{-2}V_\phi = 0 \\
\Rightarrow &\left(H^{-2}\ddot{\phi} + H^{-1}\dot{\phi}\right) + 2\left(H^{-1}\dot{\phi}\right) + a^2 a^{-2} H^{-2} V_\phi = 0 \\
\Rightarrow &H^{-2}\ddot{\phi} + H^{-1}\dot{\phi} + 2H^{-1}\dot{\phi} + a^2 a^{-2} H^{-2} V_\phi = 0 \\
\Rightarrow &\quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + a^2 V_\phi = 0.
\end{aligned}
$$

και ο τανυστής ενέργειας ορμής του υποβάθρου:

$$
\begin{aligned}
\bar{T}^0_0 &= -\frac{1}{2}a^{-2}\sum_I \left(\bar{\phi}'_I\right) - V\left(\bar{\phi}_I\right) = -\bar{\rho} \\
\bar{T}^0_i &= \bar{T}^i_0 = 0 \\
\bar{T}^i_j &= \delta^i_j\left[\frac{1}{2}a^{-2}\sum_I \left(\bar{\phi}'_I\right) - V\left(\bar{\phi}_I\right)\right] = \delta^i_j \bar{p}.
\end{aligned}
\tag{10.38}
$$

Από την οποία έχουμε

$$
\bar{\rho} + \bar{p} = a^{-2}\sum_I \left(\bar{\phi}'_I\right) \tag{10.39}
$$

$$
\bar{\rho} - \bar{p} = 2V \tag{10.40}
$$

και οι εξισώσεις Friedmann είναι

$$
\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}a^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2}\sum_I \left(\bar{\phi}'_I\right)^2 + a^2 V\right] \tag{10.41}
$$

$$
\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}\left(\bar{\rho} + 3\bar{p}\right) = -\frac{8\pi G}{3}\left[\sum_I \left(\bar{\phi}'_I\right)^2 - a^2 V\right]. \tag{10.42}
$$

Διαφορετικοί συνδιασμοί των εξισώσεων Friedman δίνουν:

$$
\Rightarrow \frac{1}{a^2}\partial_\mu\left(a^2\partial^\mu\phi_I\right) - \frac{\partial V}{\partial\phi_I} = 0
$$

$$
\Rightarrow \frac{1}{a^2}\partial_0\left(a^2\partial^0\phi_I\right) - \frac{\partial V}{\partial\phi_I} = 0
$$

$$
\Rightarrow \phi''_I + 2\frac{\dot{a}}{a}\phi'_I + \frac{\partial V}{\partial\phi_I} = 0
$$

$$-2\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = 8\pi G a^2 = 8\pi G\left[\frac{1}{2}\sum_I \left(\bar{\phi}_I'\right)^2 - a^2 V\right] \tag{10.43}$$

$$-\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = 4\pi G\big(\bar{\rho} + \bar{p}\big)a^2 = 4\pi G\sum_I \left(\bar{\phi}_I'\right)^2 \tag{10.44}$$

$$\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 = 4\pi G\big(\bar{\rho} - \bar{p}\big)a^2 = 8\pi G a^2 V. \tag{10.45}$$

10.4 Διαταρακτικό Σύμπαν

Η μετρική που αποκλίνει κατά $\delta g_{\mu\nu}$ από ένα επίπεδο FRW[18] σύμπαν μπορεί να γραφεί ως

$$ds^2 = a^2\left\{-\big(1+2A\big)d\eta^2 + 2\nabla_i B dx^i d\eta + \big[\big(1-2D\big)\delta_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j E\big]dx^i dx^j\right\}, \tag{10.46}$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = a^2\big(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\big) \\ &= a^2\begin{bmatrix} -1-2A & -B_{,i} \\ -B_{,i} & (1-2D)\delta_{ij} + 2E_{,ij}\end{bmatrix} \\ g^{\mu\nu} &= a^2\begin{bmatrix} -1+2A & -B_{,i} \\ -B_{,i} & (1+2D)\delta_{ij} - 2E_{,ij}\end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{10.47}$$

όπου τα A,B,D και E είναι βαθμωτές συναρτήσεις των συντεταγμένων. Στην παραπάνω μετρική εξετάζουμε μόνο βαθμωτές διαταραχές, αγνοώντας προς το παρόν τις διανυσματικές και τανυστικές (θα τις εξετάσουμε στο 10.10) διαταραχές. [19] Από το παραπάνω η ορίζουσα της μετρικής (όλα τα γινόμενα

[18] Που σημαίνει ότι η μετρική του υποβάθρου είναι $ds^2 = a^2(\tau)\big[d\tau^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j\big]S$ Επιλέξαμε αυτή γιατί είναι ρεαλιστική και δεν περιπλέκει χωρις λόγο τις πράξεις.

[19] Λόγω της τανυστικής φύσης της διαταραχής, οι παραπάνω βαθμωτές συναρτήσεις αλλάζουν όταν αλλάζει το σύστημα αναφοράς. Είναι για παράδειγμα δυνατό να υπάρχει σύστημα αναφοράς για το οποίο να είναι $A = B = D = E = 0$. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε διαταραχές στη μετρική, αφού παίρνουμε την αρχική αδιατάραχτη FRW μετρική. Επομένως το γεγονός ότι έχουμε τέσσερες βαθμωτές συναρτήσεις των συντεταγμένων στην παραπάνω μετρική, δεν εγγυάται ότι πραγματικά έχουμε να κάνουμε με κοσμολογικές διαταραχές, γιατί οι συναρτήσεις αυτές μπορεί να είναι απλά ιδιομορφίες των συντεταγμένων. Αυτό είναι γνωστό και ως πρόβλημα της βαθμίδας.
Προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι πραγματικά εχουμε να κάνουμε με κοσμολογικές διαταραχές, είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε συνδυασμούς των παραπάνω βαθμωτών που παραμένουν αναλοίωτοι κάτω από πρώτης τάξης μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Υπάρχουν τρεις συνδιασμοί ανεξάρτητοι από την επιλογή χωρικού συστήματος συντεταγμένων: A, D

είναι εκτός από τα διαγώνια είναι μικρά σε τουλάχιστον δεύτερη τάξη)

$$\begin{aligned} g &\approx -a^8\big(1+2A\big)\big(1-2D+2E_{11}\big)\big(1-2D+2E_{22}\big)\big(1-2D+2E_{33}\big) \\ &\approx -a^{-8}\big[1+2A-6D+2(E_{11}+E_{22}+E_{33})\big] = -a^8(1+2A-6D), \end{aligned} \tag{10.48}$$

αφού ο E_{ij} είναι άιχνος. Από αυτήν

$$\boxed{\sqrt{-g} = a^4(1+A-3D)}. \tag{10.49}$$

Σε αυτήν την διαταραγμένη μετρική, η εξίσωση 10.27 γίνεται

$$\phi_I^{''} + 2\mathcal{H}\phi_I^{'} - \nabla^2\phi_I - \big(A' + 3D' - B_{i,i}\big)\phi_I^{'} = -a^2(1+2A)\frac{\partial V}{\partial \phi_I}. \tag{10.50}$$

Χωρίζουμε τώρα τα πεδία στο κομμάτι που αφορά το υπόβαθρο και το κομμάτι της διαταραχής,

$$\phi_I = \bar{\phi}_I(\eta) + \delta\phi_I(\eta, \vec{x}). \tag{10.51}$$

Το δυναμικό γίνεται

$$V(\phi_I) = V(\bar{\phi}_I + \delta\phi_I) = V(\bar{\phi}_I) + \frac{\partial V}{\partial \phi_I}\delta\phi_I \tag{10.52}$$

και οι παράγωγοι γίνονται

$$\begin{aligned} V_I \equiv \frac{\partial V}{\partial \phi_I} &= \frac{\partial V}{\partial \phi_I}(\bar{\phi}_1 + \delta\bar{\phi}_1, \cdots, \bar{\phi}_N + \delta\bar{\phi}_N) \\ &= \frac{\partial V}{\partial \phi_I}(\bar{\phi}_1, \cdots, \bar{\phi}_N) + \sum_J \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_I \partial \phi_J}\delta\phi_J \\ &\equiv \bar{V}_J + \sum_J \bar{V}_{IJ}\delta\phi_J \end{aligned} \tag{10.53}$$

Χωρίζοντας την 10.50 σε συνεισφορά υποβάθρου και το κομμάτι της διαταραχής παίρνουμε

$$\delta\phi_I^{''} + 2\mathcal{H}\delta\phi_I^{'} - \nabla^2\delta\phi_I + a^2 V_{IJ}\delta\phi_J = -2a^2 V_I A + \phi_I^{'}(A' + 3D' - B_{i,i}), \tag{10.54}$$

όπου έχουμε πλέον σταματήσει να βάζουμε μπάρες πάνω από τις ποσότητες του υποβάθρου (εδώ V_{IJ}, V_I και $\phi^{'}$) και ενοείται άθροιση στα J. Εδώ $-B_{i,i}$ –

και $\sigma \equiv E^{'} - B$, με $E^{'} = dE/d\eta$. Υπάρχουν δύο συνδιασμοί ανεξάρτητοι από την επιλογή χρονικών συντεταγμένων, πχ τα δυναμικά Bardeen $\Psi \equiv A - \mathcal{H}\sigma - \sigma^{'}$, $\Phi \equiv -D - \mathcal{H}\sigma$ Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η Νευτώνεια βαθμίδα $B = E = 0$, στην οποία η μετρική γίνεται διαγώνεια

$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla^2 B$, άρα το μέρος του διανύσματος δεν συνεισφέρει. Για λόγου συμμετρίας, τα βαθμωτά πεδία συζεύγονται μόνο με βαθμωτές διαταραχές της μετρικής, και επομένως θα εξετάσουμε αυτές απ'οεδω και πέρα. Εισάγοντας την 10.51 στην 10.34 παίρνουμε το κομμάτι του τανυστή ενέργειας ορμής που αφορά το υπόβαθρο και τις διαταραχές

$$\begin{aligned}
\delta T^0_0 &= -\sum_I \left\{ a^{-2}[\phi_I^{'}\delta\phi_I^{'} - (\phi_I^{'})^2 A] + V_I \delta\phi_I^{'} \right\} = -\delta\rho \\
\delta T^0_i &= -a^2 \sum_I \phi_I^{'} \partial_i(\delta\phi_I) \\
\delta T^i_0 &= -a^2 \sum_I \left[\phi_I^{'}\partial_i(\delta\phi_I) - (\phi_I^{'})^2 B_i\right] \\
\delta T^i_j &= \delta^i_j \sum_I \left\{ a^{-2}[\phi_I^{'}\delta\phi_I^{'} - (\phi_I^{'})^2 A] - V_I \delta\phi_I^{'} \right\} = \delta^i_j \delta p.
\end{aligned} \tag{10.55}$$

Βλέπουμε ότι τα βαθμωτά πεδία δεν έχουν ανισοτροπικό στρες και επομένως τα Bardeen δυναμικά είναι ίδια, $\Phi = \Psi$.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τις εξισώσεις του Einstein.

Διαταρακτικές εξισώσεις Einstein

$$\begin{aligned}
+\frac{1}{2}a^2\delta G^0_0 =& 3\mathcal{H}\left(\mathcal{H}A + D^{'}\right) \\
=& -4\pi G \sum_I \{\left[\phi_I^{'}\delta\phi_I^{'}\right] + a^2 V_I \delta\phi_I\}
\end{aligned} \tag{10.56a}$$

$$-\frac{1}{2}a^2\delta G^0_i = \left(\psi^{'} + \mathcal{H}A\right)_{,i} = 4\pi G \sum_I \phi_I^{'}\partial_i\left(\delta\phi_I\right) \tag{10.56b}$$

$$\begin{aligned}
+\frac{1}{2}a^2\delta G^i_0 =& \left[\psi^{'} + \mathcal{H}A + \left(-\mathcal{H}^{'} + \mathcal{H}^2\right)B\right]_{,i} \\
=& 4\pi G \sum_I \left[\phi_I^{'}\partial_i\left(\delta\phi_I\right) + \left(\phi_I^{'}\right)^2 B_{,i}\right]
\end{aligned} \tag{10.56c}$$

$$\begin{aligned}
+\frac{1}{2}a^2\delta G^i_j =& \left[\left(2\mathcal{H}^{'} + \mathcal{H}^2\right)A + \mathcal{H}A^{'} + \psi^{''} + 2\mathcal{H}\psi^{'} + \frac{1}{2}\nabla^2\mathcal{D}\right]\delta^i_j - \frac{1}{2}\mathcal{D}_{,ij} \\
=& 4\pi G \delta^i_j \sum_I \left\{\left[\phi_I^{'}\delta\phi_I^{'} - (\phi_I^{'})^2 A\right] - a^2 V_I \delta\phi_I\right\},
\end{aligned} \tag{10.56d}$$

όπου

$$\mathcal{D} \equiv A - \psi + 2\mathcal{H}\left(B - E^{'}\right) + \left(B - E^{'}\right) = 0 \tag{10.57}$$

επειδή το δεξί μέλος της 10.56d δεν έχει διαγώνιο μέλος. Και τα δύο μέλη των

εξησώσεων 10.56b-10.56c είναι αποκλίσεις και έτσι παίρνουμε

$$\psi^{'} + \mathcal{H}A = 4\pi G \sum_I \phi_I^{'} \delta\phi_I \tag{10.58a}$$

$$\psi^{'} + \mathcal{H}A + (-\mathcal{H}^{'} + \mathcal{H}^2)B = 4\pi G \sum_I \left[\phi_I^{'}\delta\phi_I + \left(\phi_I^{'}\right)^2 B\right] \tag{10.58b}$$

$$\left(2\mathcal{H}^{'} + \mathcal{H}^2\right)A + \mathcal{H}A^{'} + \psi^{''} + 2\mathcal{H}\psi^{'} = 4\pi G \sum_I \left\{\left[\phi_I^{'}\delta\phi_I^{'} - (\phi_I^{'})^2 A\right] - a^2 V_I \delta\phi_I\right\}. \tag{10.58c}$$

Η διαφορά μεταξύ των εξισώσεων 10.58b και 10.58a είναι μόνο η εξίσωση του υποβάθρου, άρα δεν είναι ανεξάρτητες διαταρακτικές εξισώσεις.

Αφού τα ϕ_I είναι βαθμωτά πεδία, ο μετασχηματισμός βαθμίδας τους είναι

$$\tilde{\delta\phi}_I = \delta\phi_I - \bar{\phi}_I^{'}\xi^0. \tag{10.59}$$

10.5 Βαθμίδα επίπεδου χώρου

Υπάρχουν διαφορετικές τακτικές για την επίλυση βαθμωτών διαταρακτικών εξισώσεων. Μια τακτική είναι να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του Einstein για να εξαλείψουμε τις διαταραχές της μετρικής από την 10.54, για να πάρουμε μια διαφορική εξίσωση μόνο για το $\delta\phi_I$.

Για να το επιτύχουμε αυτό, πάμε στην χωρικά επίπεδη βαθμίδα, η οποία συμβολίζεται με τον δείκτη Q και ορίζεται ως

$$\psi_Q = 0 \tag{10.60}$$

Αφού η διαταραχή της μετρικής ψ μετασχηματίζεται ως

$$\tilde{\psi}_Q = \psi + \mathcal{H}\xi^0. \tag{10.61}$$

πηγαίνουμε στηνχωρικά επίπεδη βαθμίδα μέσω του μετασχηματισμού βαθμίδας

$$\xi^0 = -\mathcal{H}^{-1}\psi. \tag{10.62}$$

Η διαταραχή του πεδίου στην χωρικά επίπεδη βαθμίδα συμβολίζεται ορισμένες φορές με Q και καλείται μεταβλητή Sasaki ή μεταβλητή Mukhanov:

$$Q_I \equiv \delta\phi_I^Q = \delta\phi_I + \frac{\bar{\phi}_I^{'}}{\mathcal{H}}\psi. \tag{10.63}$$

Στην βαθμίδα αυτή οι πεδιακές εξισώσεις γίνονται

$$\begin{aligned} Q_I^{''} + 2\mathcal{H}Q_I^{'} - \nabla^2 Q_I + a^2 V_{IJ} Q_J &= -2a^2 V_I A_Q + \phi_I^{'}\big(A_Q^{'} + 3D_Q^{'} + \nabla^2 B_Q\big) \\ &= -2a^2 V_I A_Q + \phi_I^{'} A_Q^{'} - \phi_I^{'}\nabla^2\big(E_Q^{'} - B_Q\big). \end{aligned} \tag{10.64}$$

Η δεύτερη εξίσωση του Einstein 10.58b γίνεται

$$\mathcal{H}A_Q = 4\pi G \sum_I \phi_I^{'} Q_I \Rightarrow A_Q = 4\pi G \mathcal{H}^{-1} \sum_I \phi_I^{'} Q_I, \tag{10.65}$$

η οποία μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το A_Q στην 10.64.

Οι εναπομέιναντες διαταραχές της μετρικής στην εξίσωση είναι ο συνδιασμός $\nabla^2\big(E_Q^{'} - B_Q\big)$. Παρατηρούμε ότι τα δυναμικά Bardeen τώρα είναι

$$\Phi = \Psi = \psi - \mathcal{H}\big(B - E^{'}\big) = \mathcal{H}\big(E_Q^{'} - B_Q\big), \tag{10.66}$$

ώστε ο τελευτίος όρος στην 10.64 γίνεται

$$-\phi_I^{'}\nabla^2\big(E_Q^{'} - B_Q\big) = -\mathcal{H}^{-1}\phi_I^{'}\nabla^2\Phi \tag{10.67}$$

όπου

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho^C \tag{10.68}$$

(από τις εξισώσεις "δεσμούς" Einstein). Οι εναπομείνουσες διαταραχές της μετρικής έχουν αντικατασταθεί από από διαταραχές στην πυκνότητα ενέργειας αλλά σε διαφορετική βαθμίδα, τη σύμμορφη βαθμίδα.

Επομένως χρειάζεται να εκφράσουμε τις διααραχές πυκνότητας στη σύμμορφη βαθμίδα $\delta\rho^C$ ως προς ποσότητες στην βαθμίδα επίπεδου χώρου.

Προηγουμένως ορίσαμε την σύμμορφη βαθμίδα απαιτώντας $u^C = B^C = 0$.

$$u_i = -\frac{\delta T_i^0}{\rho + p}, \tag{10.69}$$

$$\delta T_i^0 = 0 \quad \text{και} \quad B = 0. \tag{10.70}$$

Από τις οποίες έπεται

$$\sum_I \phi_I^{'}\partial_i\big(\delta\phi_I^C\big) = 0 \tag{10.71}$$

και για την περίπτωση του ενός πεδίου

$$\delta\phi^C = 0 \tag{10.72}$$

(τουλάχιστον όταν $\phi \neq 0$). Και αφού τα δT_i^0 και B μετασχηματίζονται ως

$$\begin{aligned} \delta\tilde{T}_i^0 =& \delta T_i^0 - \big(T^0 - \frac{1}{3}T_k^k\big)\xi_{,i}^0 = \delta T_i^0 + \big(\rho + p\big)\xi_{,i}^0 \\ \tilde{B} =& B + \xi^{'} + \xi^0, \end{aligned} \tag{10.73}$$

παίρνουμε τη σύμμορφη βαθμίδα

$$\begin{aligned} \xi_{,i}^0 =& -\frac{\delta T_i^0}{\rho + p} = \frac{\partial\big(\phi_I^{'}\delta\phi_I\big)}{\sum\big(\phi_I^{'}\big)^2} \\ \Rightarrow \xi^0 =& \frac{\phi_I^{'}\delta\phi_I}{\sum\big(\phi_I^{'}\big)^2} \end{aligned} \tag{10.74}$$

και

$$\xi^{'} = -B - \xi^0. \tag{10.75}$$

Για τη διαταραχή της πυκνότητας στη σύμμορφη βαθμίδα παίρνουμε

$$\begin{aligned} \delta\rho^C =& \delta\rho - \rho^{'}\xi^0 \\ =& a^{-2}\sum_I \big[\phi_I^{'}\big(\delta\phi_I^{'} - \phi_I^{'}A\big) - \big(\phi_I^{''} - \mathcal{H}\phi_I^{'}\big)\delta\phi_I\big] \\ =& a^{-2}\sum_I \left[\phi_I^{'}\big(\delta\phi_I^{'} - \phi_I^{'}A\big) + \left(3\mathcal{H}\phi_I^{'} + a^2\frac{\partial V}{\partial\phi_I}\right)\delta\phi_I\right] \\ \Rightarrow \nabla^2\Phi =& 4\pi G\sum_I \big[\phi_I^{'}\big(\delta\phi_I^{'} - \phi_I^{'}A\big) - \big(\phi_I^{''} - \mathcal{H}\phi_I^{'}\big)\delta\phi_I\big], \end{aligned} \tag{10.76}$$

όπου τα $\delta\phi_I$ και A είναι σε αυθαίρετη βαθμίδα. Συγκεκριμένα στην βαθμίδα επίπεδου χώρου

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\sum_I \big[\phi_I^{'}\big(\delta\phi_I^{'} - \phi_I^{'}A_Q\big) - \big(\phi_I^{''} - \mathcal{H}\phi_I^{'}\big)Q_I\big]. \tag{10.77}$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την 10.65 (και την εξίσωση του υποβάθρου 10.44) για να αντικαταστήσουμε το A_Q στην 10.77

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2\delta\rho^C = 4\pi G\sum_I \phi_I^{'}\left(Q_I^{'} + \frac{\mathcal{H}^{'}}{\mathcal{H}}Q - \frac{\phi_I^{''}}{\phi_I^{'}}Q_I\right) \tag{10.78}$$

και για να γράψουμε την 10.64 σε μορφή που εμπλέκει μόνο τις διαταραχές του πεδίου Q_I

$$Q_I^{''} + 2\mathcal{H}Q_I^{'} - \nabla^2 Q_I + \sum_I \left[a^2 V_{IJ} - \frac{8\pi G}{a^2}\left(\frac{a^2}{\mathcal{H}}\phi_I^{'}\phi_J^{'}\right)\right]Q_J = 0. \tag{10.79}$$

Βλέπουμε ότι η εξέλιξη των διαφορετικών διαταραχών του βαθμωτού πεδίου Q_I είναι συζευγμένες με τις δεύτερες παραγώγους του δυναμικού V_{IJ} και της εξέλιξης του υποβάθρου $(a^2\mathcal{H}^{-1}\phi_I^{'}\phi_J^{'})$. Στην ισοδύναμη έκφραση του συνήθους κοσμικού χρόνου t η 10.79 γίνεται

$$\ddot{Q}_I + 3H\dot{Q}_I - \frac{1}{a^2}\nabla^2 Q_I + \sum_I \left[V_{IJ} - \frac{8\pi G}{a^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{a^3}{H}\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J\right)\right] Q_J = 0. \quad (10.80)$$

10.6 Ένα Πεδίο

10.6.1 Υπόβαθρο

Για την περίπτωση ενός μοναδικού πεδίου η 10.38 γίνεται

$$\rho = \frac{1}{2}a^{-2}(\phi^{'})^2 + V \quad \text{και} \quad p = \frac{1}{2}a^{-2}(\phi^{'})^2 - V, \quad (10.81)$$

έτσι ώστε

$$\rho + p = a^{-2}(\phi^{'})^2 \quad \text{και} \quad \rho - p = 2V \quad \text{και} \quad w \equiv \frac{p}{\rho} = \frac{(\phi^{'})^2 - 2a^2V}{(\phi^{'})^2 + 2a^2V}, \quad (10.82)$$

οι εξισώσεις Friedmann είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 = \frac{4\pi G}{3}\left[(\phi^{'})^2 + 2a^2V\right] \\ \mathcal{H}^{'} &= \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a^2 = -\frac{8\pi G}{3}\left[(\phi^{'})^2 - a^2V\right]. \end{aligned} \quad (10.83)$$

Η εξίσωση πεδίου του υποβάθρου είναι

$$\phi^{''} + 2\mathcal{H}\phi^{'} + a^2V_\phi = 0. \quad (10.84)$$

ενώ η ίδια στις συνήθεις χρονικές συντεταγμένες (όπως δείξαμε σε προηγούμενη ενότητα) είναι

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + a^2V_\phi = 0. \quad (10.85)$$

Παραγωγίζοντας την 10.81 και χρησιμοποιώντας την 10.85, παίρνουμε

$$\rho^{'} = -3\mathcal{H}a^{-2}(\phi^{'})^2 \quad \text{και} \quad p^{'} = -3\mathcal{H}a^{-2}(\phi^{'})^2 - 2\phi^{'}V_\phi \quad (10.86)$$

και

$$c_s^2 \equiv \frac{p^{'}}{\rho^{'}} = \frac{3\mathcal{H}\phi^{'} + 2a^2V_\phi}{3\mathcal{H}\phi^{'}}. \quad (10.87)$$

10.6.2 Διαταρακτικές εξισώσεις πεδίου

Για ένα μοναδικό πεδίο, έχουμε μόνο ένα βαθμό ελευθερίας (για κάθε τιμή του $\vec{k}$). Για κάθε βαθμό ελευθερίας, μπορούμε να πάρουμε τη μετρική διαταραχή του Φ, ή τη διαταραχή στην χωρικά επίπεδη βαθμίδα Q. Και στις δύο προσεγγίσεις παίρνουμε μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης, στην τελευταία περίπτωση

$$\boxed{Q''_{\vec{k}} + 2\mathcal{H}Q'_{\vec{k}} + k^2 Q_{\vec{k}} + a^2 V_{\phi\phi} Q_{\vec{k}} = \frac{8\pi G}{a^2}\left[\frac{a^2}{\mathcal{H}}(\phi')^2\right]' Q_{\vec{k}}.} \tag{10.88}$$

Εάν ξέραμε την λύση του υποβάθρου, θα μπορούσαμε να λύσουμε την εξίσωση ξεκινώντας από τις αρχικές συνθήκες $Q_{\vec{k}}$ και $Q'_{\vec{k}}$ σε κάποιο αρχικό χρόνο $\eta = \eta_{init}$. Οι διαταραχές του πεδίου καθορίζουν στη συνέχεια όλες τις υπόλοιπες διαταρακτικές ποσότητες.

Παρόλα αυτά, όπως και στην περίπτωση του ιδανικού ρευστού, είναι χρήσιμο να ορίσουμε άλλες ποσότητες όπως την ολική εντροπία της διαταραχής S και τη σύμμορφη καμπυλότητα της διαταραχήε $\mathcal{R}$. Αυτές έχουν πιο απλές συμπεριφορές σε κλίμακες έξω από τον ορίζοντα.

10.6.3 Καμπυλότητα και Ολική Εντροπία Διαταραχών

Η σύμμορφη διαταραχή της καμπυλότητας ορίζεται

$$\mathcal{R} \equiv -\phi^C = -\psi - \mathcal{H}\xi^0, \tag{10.89}$$

από όπου τώρα, από την 10.74

$$\xi^0 = \frac{\delta\phi}{\phi'} \tag{10.90}$$

ώστε έχουμε

$$\mathcal{R} = -\psi - \frac{\mathcal{H}}{\phi'} = -\frac{\mathcal{H}}{\phi'}Q. \tag{10.91}$$

Παραγωγίζοτας αυτό παίρνουμε

$$\mathcal{R}' = -\psi - \frac{\mathcal{H}}{\phi'}\left(Q' + \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}}Q - \frac{\phi''}{\phi'}\right). \tag{10.92}$$

Συγκρίνοντας με την 10.78 μπορούμε να το γράψουμε ως

$$\mathcal{R}' = \frac{\mathcal{H}a^2}{\left(\phi'\right)^2}\delta\rho^C = -\frac{\mathcal{H}}{\rho+p}\delta\rho^C \tag{10.93}$$

$$= -\frac{\mathcal{H}}{4\pi G\left(\phi'\right)^2}\nabla^2\Phi = -\frac{2}{3\mathcal{H}}\frac{\rho}{\rho+p}\nabla^2\Phi. \tag{10.94}$$

Στο χώρο Fourier

$$\mathcal{H}^{-1}\mathcal{R}'_{\vec{k}} = \frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho+p}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\Phi, \tag{10.95}$$

που δείχνει ότι $\mathcal{R}_{\vec{k}}$ = σταθ. σε κλίμακες έξω από τον ορίζοντα (στον υπερορίζοντα $k \ll \mathcal{H}$). Στο inflation ισχύει $\rho+p \ll \rho$. Στην επ[όμενη ενότητα, δείχνουμε ότι $1+w = \left(\rho+p\right)/\rho$ είναι πρώτης τάξης ως προς τους slow-roll παράγοντες.

10.6.4 Slow-Roll Inflation

Η παράγραφος αυτή αφορά την λύση του υποβάθρου. Χρησιμοποιούμε σύνηθη κοσμικό χρόνο t, αντί για το σύμμορφο χρόνο η και γράφουμε

$$V' \equiv \frac{dV}{d\phi}. \tag{10.96}$$

Η ακριβείς εξισώσεις για το υπόβαθρο είναι

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0 \quad \text{και} \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right) = \frac{1}{3M^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right) \tag{10.97}$$

όπου

$$M \equiv \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} \tag{10.98}$$

είναι η μάζα του Planck. Στην slow-roll προσέγγιση υποθέτουμε ότι

$$\dot{\phi}^2 \ll V \quad \text{και} \quad |\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, \tag{10.99}$$

και αντικαθιστούμε την εξίσωση 10.97 από τις slow-roll εξισώσεις

$$\begin{aligned} 3H\dot{\phi} + V' = 0 \Rightarrow V' = -3H\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = -\frac{V'}{3H} \\ H^2 = \frac{1}{3M^2}V \Rightarrow V = 3M^2H^2 \Rightarrow 3H^2 = \frac{V}{M^2}, \end{aligned} \tag{10.100}$$

και από αυτές

$$H^{-1}\dot{\phi} = -M^2\frac{V'}{V}. \tag{10.101}$$

Από εδώ και πέρα πρέπει να χρησημοποιούμε τις 10.100 αντί των 10.97.

Σημαντικό στην slow roll προσέγγιση είναι να θυμόμαστε ότι τώρα όλα εξαρτωνται από το ϕ, μέσω του $V\phi$ και των παραγώγων του. Δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε ξεχωριστά τα ϕ και $\dot{\phi}$. Παραγωγίζωντας τις slow-roll εξισώσεις, παίρνουμε

$$\dot{H} = -\frac{(V')}{6V} \quad \text{και} \quad \ddot{\phi} = \frac{M^2}{3}\frac{V''V'}{V} - \frac{M^2}{6}\frac{(V')^3}{V^2}. \tag{10.102}$$

Ορίζουμε τις slow-roll παραμέτρους

$$\boxed{\epsilon_V \equiv \frac{M^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \quad \eta_V \equiv M^2\frac{V''}{V} \quad \xi_V \equiv M^4\frac{V'''V'}{V^2}}^{20} \tag{10.103}$$

Χρησιμοποιώντας τις slow-roll εξισώσεις παίρνουμε το επόμενο αποτέλεσμα

$$H^{-2}\dot{H} = -\epsilon \tag{10.104a}$$

$$\left(H^{-1}\dot{\phi}\right)^2 = 2M^2\epsilon \tag{10.104b}$$

$$H^{-2}\ddot{\phi} = H^{-1}\dot{\phi}\left(\epsilon - \eta\right) \tag{10.104c}$$

$$H^{-1}\dot{\epsilon} = -2\epsilon\eta + 4\epsilon^2 \tag{10.104d}$$

$$H^{-1}\dot{\eta} = +3\epsilon\eta - \xi \tag{10.104e}$$

και

$$\begin{aligned} \rho &= \left(1 + \frac{1}{3}\epsilon\right)V \\ p &= \left(-1 + \frac{1}{3}\epsilon\right)V \\ w &\equiv \frac{p}{\rho} \approx -1 + \frac{2}{3}\epsilon \Rightarrow 1 + w \approx \frac{2}{3}\epsilon \\ c_s^2 &= \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \approx -1 - \frac{2}{3}\epsilon + \frac{2}{3}\eta. \end{aligned} \tag{10.105}$$

Κατά τη περίοδο του inflation, οι slow-roll παράμετροι ϵ και η είναι τυπικά μικροί, ενώ το ξ είναι ακόμα μικρότερο: τυπικά το ξ είναι μικρό σε δεύτερη τάξη ως προς τα ϵ και η. Όταν λέμε ότι υπολογίζουμε μια slow-roll παράμετρο σε μια συγκεκριμένη τάξη αναφερόμαστε στα ϵ και η σαν να είναι πρώτης και το ξ δεύτερης τάξης.Βλέπουμε ότι οι χρονικές διακυμάνσεις των ϵ και η είναι επίσης μικρά σε δεύτερη τάξη ως προς τις slow-roll παραμέτρους.

10.6.5 Εξέλιξη έξω από τον ορίζοντα

Θέλουμε να υπολογίσουμε πως οι διαταραχές του πεδίου εξελίσσονται στην slow-roll inflation, ξεκινώντας από τότε όταν οι διαταραχές είναι εντελώς εντός του ορίζοντα.

Οι διαταρακτική εξίσωση πεδίου είναι

$$H^{-2}\ddot{Q}_{\vec{k}}+3H^{-1}\dot{Q}_{\vec{k}}+\left(\frac{k}{aH}\right)^2 Q_{\vec{k}}=\left[\frac{8\pi G}{a^3H^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{a^3}{H^3}\dot{\phi}^2\right)-H^{-2}V''\right]Q_{\vec{k}}. \quad (10.106)$$

Στην slow-roll προσέγγιση ο όρος στο δεξί μέλος είναι

$$\left[6\epsilon-3\eta+6\epsilon^2-4\epsilon\eta\right]Q_{\vec{k}}.^{21} \quad (10.107)$$

Επομένως βλέπουμε ότι στην βαθμίδα επίπεδου χώρου, οι διαταραχές της μετρικής επιρρεάζουν την διαταρακτική πεδιακή εξίσωση σε πρώτη τάξη των slow-roll παραμέτρων. Εαν υπολογίζαμε μόνο σε $0^{\text{κη}}$ τάξη ως προς τις slow-roll παραμέτρους, θα μπορούσαμε να αγνοήσουμε τις μετρικές διαταραχές σε αυτήν την βαθμίδα.

Σε πρώτη τάξη ως προς τις slow-roll παραμέτρους η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$H^{-2}\ddot{Q}_{\vec{k}}+3H^{-1}\dot{Q}_{\vec{k}}+\left(\frac{k}{aH}\right)^2 Q_{\vec{k}}=\left[6\epsilon-3\eta\right]Q_{\vec{k}}. \quad (10.108)$$

και χρησιμοποιώντας το σύμμορφο χρόνο παίρνει τη μορφή

$$Q''+3\mathcal{H}^{-1}Q'+k^2Q=\mathcal{H}^2\left(6\epsilon_V-3\eta_V\right)Q, \quad (10.109)$$

(βάζουμε το δείκτη V ώστε να μην υπάρχει σύνχιση της slow-roll παραμέτρου η_V και του σύμμορφου χρόνου η). Ορίζουμε

$$u\equiv aQ, \quad (10.110)$$

και η εξίσωση 10.109 γίνεται

$$u''+\left(k^2-\frac{a''}{a}\right)u=\mathcal{H}^2\left(6\epsilon_V-3\eta_V\right)u. \quad (10.111)$$

[21] Βλέπε απόδειξη IX

10.6.5.1 Υπόβαθρο

Πρώτα χρειάζεται να λύσουμε το πρόβλημα του υποβάθρου, πχ. πως τα a και $\mathcal{H}$ εξελίσσονται. Από την

$$\mathcal{H} = \frac{a^{'}}{a} = aH = \dot{a} \tag{10.112}$$

βρίσκουμε τις εξισώσεις

$$\frac{a^{''}}{a} = \mathcal{H}^2\left(1 + \frac{\mathcal{H}^{'}}{\mathcal{H}^2}\right) \quad \text{και} \quad \frac{\mathcal{H}^{'}}{\mathcal{H}^2} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2}.^{22} \tag{10.113}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 10.104 έχουμε ότι

$$\frac{\mathcal{H}^{'}}{\mathcal{H}^2} = 1 - \epsilon_V \tag{10.114}$$

και

$$\frac{a^{''}}{a} = \mathcal{H}^2(2 - \epsilon_V). \tag{10.115}$$

Ολοκληρώνοντας την 10.114 παίρνουμε

$$\frac{d\mathcal{H}}{\mathcal{H}^2} = (1 - \epsilon_V)d\eta \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{-1}{(1 - \epsilon_V)\eta} = \frac{1}{a}\frac{da}{dh}. \tag{10.116}$$

Παραγωγίζοντας για άλλη μια φορά

$$\frac{da}{a} = -\frac{1}{1 - \epsilon_V}\frac{d\eta}{\eta} \Rightarrow \ln a = -\frac{1}{1 - \epsilon_V}\ln|\eta| + \text{σταθ.} \Rightarrow a \propto (-\eta)^{-\frac{1}{1-\epsilon_V}}. \tag{10.117}$$

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι το η είναι αρνητικό, καθώς ο χρόνος πλησιάζει το $\eta \to 0$ και $a \to \infty$ (εάν η slow-roll περίοδος συνεχιζόταν)

10.6.5.2 Συναρτήσεις Hankel και Bessel

Οι εξισώσεις Hankel

$$H_\nu^{(1)} \equiv J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad \text{και} \quad H_\nu^{(2)} \equiv J_\nu(x) - iN_\nu(x), \tag{10.118}$$

όπου οι $J_\nu(x)$ και $N_\nu(x)$ είναι συναρτήσεις Bessel και Neumann αντίστοιχα και είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}Z(x) + x\frac{d}{dx}Z(x) + \left[x^2 - \nu^2\right]Z(x) = 0. \tag{10.119}$$

[22] Βλέπε απόδειξη VIII

για πραγματικά x, οι $J_\nu(x)$ και $N_\nu(x)$ είναι πραγματικές και ${}^2_\nu(x) = H_\nu^{(1)}(x)^*$. Η ασυμπτωτική τους συμπεριφορά είναι

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left[x-(\nu+\frac{1}{4})\frac{\pi}{2}\right]} \quad \text{για} \quad x \to \infty \tag{10.120}$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim -i\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{2}} 2^{\nu-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{-\nu} \quad \text{για} \quad x \to 0. \tag{10.121}$$

10.6.5.3 Διαταρακτική εξίσωση

Χρησιμοποιώντας την 10.114, η 10.111 γίνεται

$$u'' + \left[k^2 - \mathcal{H}^2(2 + 5\epsilon_V - 3\eta_V)\right]u = 0, \tag{10.122}$$

και κάνοντας χρήση της

$$\mathcal{H}^2 = \frac{1}{(1-\epsilon_V)^2\eta^2} \approx \frac{1+2\epsilon_V}{\eta^2} \tag{10.123}$$

παίρνουμε σε πρώτη τάξη των slow-roll παραμέτρων

$$u'' + \left[k^2 - \frac{1}{\eta^2}(2 + 9\epsilon_V - 3\eta_V)\right]u = 0. \tag{10.124}$$

Η εξίσωση αυτή μοιάζει με εξίσωση Bessel και αυτό το βλέπουμε εάν τη φέρουμεστη μορφή

$$u'' + \left[k^2 - \frac{1}{\eta^2}(\nu^2 - \frac{1}{4})\right]u = 0. \tag{10.125}$$

όπου

$$\nu^2 = \frac{9}{4} + 9\epsilon_V - 3\eta_V \Rightarrow \nu = \frac{3}{2}\sqrt{1 + 4\epsilon_V - \frac{4}{3}\eta_V} \approx \frac{3}{2} + 3\epsilon_V - \eta_V. \tag{10.126}$$

Ορίζουμε μια νέα συνάρτηση s τέτοια ώστε

$$u \equiv (-\eta)^{1/2} s. \tag{10.127}$$

Η εξίσωση 10.125 γίνεται

$$\eta^2 s'' + \eta s' + \left[k^2\eta^2 - \nu^2\right]s = 0, \tag{10.128}$$

την οποία αναγνωρίζουμε ως εξίσωση Bessel. Οι λύσεις επομένως είναι

$$s(\eta) \equiv (-\eta)^{-1/2}u(\eta) \equiv (-\eta)^{-1/2}aQ_{\vec{k}}(\eta) = C_{1\vec{k}}H_\nu^{(1)}(-k\eta) + C_{2\vec{k}}H_\nu^{(2)}(-k\eta), \tag{10.129}$$

ή

$$\boxed{Q_{\vec{k}} = C_{\vec{k}} a^{-1} \sqrt{-\eta} H_\nu(-k\eta)} \tag{10.130}$$

Νεαρές εποχές αντιστοιχούν στο όριο $x = -k\eta \to \infty$ και ύστεροι χρόνοι στο $x = -k\eta \to 0$. Επομένως για νεαρές εποχές έχουμε

$$Q_{\vec{k}} = C_{\vec{k}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a\sqrt{k}} e^{-ik\eta} \tag{10.131}$$

και σε ύστερες εποχές

$$Q_{\vec{k}} = C_{\vec{k}} a^{-1} \sqrt{-\eta} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (-k\eta)^{-\nu} \tag{10.132}$$

όπου αγνοήσαμε τον σταθερό παράγοντα φάσης $\exp\left[-i(\nu+1/2)\pi/2\right]$ (νεαροί χρόνοι) και $\exp\left[-i\pi/2\right]$ (ύστεροι χρόνοι) αφού δεν παίζουν ρόλο στην συνέχεια.
Από την 10.126

$$\nu = \frac{3}{2} + 3\epsilon_V - \eta_V. \tag{10.133}$$

Από την 10.117

$$a^{-1} \propto (-\eta)^{1/(1-\epsilon_V)} \approx (-\eta)^{1+\eta_V} \Rightarrow \frac{1}{-a\eta} \propto (-\eta)^{\epsilon_V} \tag{10.134}$$

Επομένως σε ύστερους χρόνους έχουμε

$$Q_{\vec{k}} \propto (-\eta)^{3/2+\epsilon_V-\nu} = (-\eta)^{\eta_V - 2\epsilon_V}, \tag{10.135}$$

πχ το $Q_{\vec{k}}$ γίνεται σχεδόν σταθερό, εννοώντας σε 0^η τάξη των slow-roll παραμέτρων.

10.6.6 Δημιουργία Βαθμωτών Διαταραχών

Κλίμακες εντός του ορίζοντα κατά την περίοδο του inflation είναι μικροσκοπικές και επομένως κβαντικά φαινόμενα είναι σημαντικά. Κατά συνέπεια θα πρέπει να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των βαθμωτών πεδίων χρησιμοποιώντας κβαντική θεωρία πεδίου. Εξετάζουμε πρώτα μια κβαντική θεωρία πεδίου ενός βαθμωτού πεδίου σε χώρο Minkowski.

10.6.6.1 Διαταραχές του κενού στον χώρο Minkowski

Η εξίσωση πεδίου για ένα έμμαζο ελεύθερο πραγματικό βαθμωτό πεδίο σε ενα χώρο Minkowski είνει

$$\ddot{\phi} - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0, \tag{10.136}$$

ή

$$\ddot{\phi}_{\vec{k}} + E_k^2\phi_{\vec{k}} = 0, \tag{10.137}$$

όπου $E_k^2 = k^2 + m^2$, για τις συνειστώσες Fourier. Παρατηρούμε ότι η 10.137 είναι η εξίσωση του αμονικού ταλαντωτή. Επομένως καάθε συνειστώσα Fourier του πεδίου συμπεριφέρεται ως ανεξάρτητος αρμονικός ταλαντωτής. Για ευκολία θα θεωρήσουμε ένα σύστημα ταλαντωτών περιορισμένων σε έναν όγκο $V = L^3$, επιτρέποντάς μας να κάνουμε αθροίσματα Fourier σε ενα διακριτό σύνολο κυματαριθμών $\vec{k}$, αντί για ολοκληρώματα Fourier.

Έχουμε ένα ξεχωριστό ζεύγος τελεστών δημιουργίας και καταστροφής $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$, $\hat{a}_{\vec{k}}$ για κάθε $\vec{k}$. Συνβολίζουμε τη βασική κατάσταση $|0\rangle$, και την ονομάζουμε κατάσταση κενού. Τα σωματίδια είναι κβάντα των ταλαντώσεων του πεδίου. Το κενό είναι κατάσταση με απουσία σωματιδίων. Δρώντας στο κενό με τον τελεστή δημιουργίας $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$ προσθέτουμε ένα κβάντο ορμής $\vec{k}$ και ενέργειας E_k στο σύστημα. Την κατάσταση αυτή την συμβολίζουμε ως

$$\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,|0\rangle = \left|1_{\vec{k}}\right\rangle. \tag{10.138}$$

Ως γνωστών η δράση του τελεστή καταστροφής στη βασική κατάσταση μας δίνει

$$\hat{a}_{\vec{k}}\,|0\rangle = 0. \tag{10.139}$$

Τα ερμητιανά συζυγή των παραπάνω σχέσεων είναι

$$\langle 0|\,\hat{a}_{\vec{k}} = \left\langle 1_{\vec{k}}\right| \quad \text{και} \quad \langle 0|\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}} = 0. \tag{10.140}$$

Ενώ οι σχέσεις μετάθεσης των τελεστών αυτών είναι

$$\left[\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k'}}\right] = \left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k'}}\right] = 0, \quad \text{και} \quad \left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k'}}\right] = \delta_{\vec{k}\vec{k'}}. \tag{10.141}$$

Το κλασικό παρατηρίσημο μέγεθος

$$\phi(t,\vec{x}) = \sum \phi_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{10.142}$$

αντικαθίσταται από το τελεστή του πεδίου

$$\hat{\phi}(t,\vec{x}) = \sum \hat{\phi}_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{10.143}$$

όπου

$$\hat{\phi}(t) = w_k(t)\hat{a}_{\vec{k}} + w_k^*(t)\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}} \tag{10.144}$$

και

$$w_k(t) = V^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2E_k}}e^{-iE_k t} \tag{10.145}$$

είναι η συνάρτηση βάρους της κατάστασης $\vec{k}$ άρα θα πρέπει να είναι μια κανονικοποιημένη λύση της 10.137. Δουλεύουμε στην εικόνα του Heisenberg όπου έχουμε χρονικά εξέλισσόμενους τελεστές.

Στην κλασική περίπτωση η βασική κατάσταση θα ήταν αυτή όπουείχαμε $\phi =$ σταθ. $= 0$, αλλά ξέρουμε από την κβαντική μηχανική ότι στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή υπάρχουν ταλαντώσεις ακόμα και στην θεμελιώδη κατάσταση. Όμοια υπάρχουν ταλαντώσεις του βαθμωτού πεδίου, οι διακυμάνσεις κενού.

Θα υπολογίσουμε το φάσμα ισχύος αυτών των διαταραχών του κενού. Το φάσμα της ισχύς ορίζεται ως την αναμενόμενη τιμή

$$\mathcal{P}_\phi(k) = V\frac{k^3}{2\pi^2}\langle|\phi_{\vec{k}}|^2\rangle \tag{10.146}$$

και η διακύμανση του πεδίου γράφεται συναρτήσει αυτής ως

$$\langle\phi(\vec{x})^2\rangle = \int_0^2 \frac{dk}{k}\mathcal{P}_\phi(k). \tag{10.147}$$

για την θεμελιώδη κατάσταση, η αναμενόμενη τιμή του $|\phi_{\vec{k}}|^2$ είναι

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\hat{\phi}_{\vec{k}}\hat{\phi}^\dagger_{\vec{k}}\,|0\rangle =& |w_k|^2\,\langle 0|\,\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,|0\rangle + w_k^2\,\langle 0|\,\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}}\,|0\rangle \\ &+ (w_k^*)^2\,\langle 0|\,\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,|0\rangle + |w_k|^2\,\langle 0|\,\hat{a}_{-\vec{k}}\hat{a}_{-\vec{k}}\,|0\rangle \\ =& |w_k|^2\,\langle 1_{\vec{k}}|1_{\vec{k}}\rangle = |w_k|^2\end{aligned} \tag{10.148}$$

Από την 10.145 έχουμε ότι $|w| = 1/(2VE_k)$. Το βασικό αποτέλεσμά μας είναι ότι

$$\mathcal{P}_\phi(k) = V\frac{k^3}{2\pi^2}|w_k|^2 \tag{10.149}$$

για διαταραχές του κενού. Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα αυτό στην περίπτωση τπυ inflation όπου και οι συναρτήσεις $w_k(t)$ διαφέρουν.

10.6.6.2 Διαταραχές του κενού την περίοδο του Inflation

Κατά την περίοδο του inflation η εξίσωση πεδίου (για διαταραχές στο infaltion) είναι η 10.106. Υπάρχουν ταλαντώσεις μόνο στην διαταραχή Q, το πεδίο ϕ

στο υπόβαθρο είναι ομογενές και εξελίσσεται αργά με το χρόνο. Από την οπτική ενός σωματιδίου, η λύση του υποβάθρου αναπαραστά το κενό (όχι υπό την έννοια ότι αυτή είναι η θεμελιώδης κατάσταση του συστήματος, γιατί η πραγματική θεμελιώδης κατάσταση έχει το ϕ στο ελάχιστο του δυναμικού). Τα σωμάτια είναι κβάντα ταλαντώσεων γύρω από αυτήν την τιμή. Βρήκαμε ότι οι ανεξάρτητες λύσεις του $Q_{\vec{k}}(\eta)$ (που δεν είναι παρά η διαταραχές του πεδίου $\delta\phi_{\vec{k}}$ όπως φαίνεται από την 10.63) για την περίπτωση που είμαστε στην περίοδο του inflation, δίνονται από την 10.130 επομένως οι συναρτήσεις βάρους $w_k(t)$ θα δίνονται από αυτές τις λύσεις του κβάντου του βαθμωτού πεδίου με την απροσδιοριστία μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς κανονικοποίησης.

$$w_k(\eta) = C_{\vec{k}} a^{-1}\sqrt{-\eta} H_\nu^{(1)}(-k\eta) \tag{10.150}$$

και ο μιγαδικός συζυγής του $w_k(\eta)$, όπου η χρονική εξάρτηση είναι στον παράγοντα κλίμακας $a = a(\eta) \propto (-\eta)^{-1/(1-\epsilon_S)}$[23].

Όταν η κλίμακα k είναι εντελώς εντός του ορίζοντα, $k \gg \mathcal{H} \sim 1/(-\eta)$,

$$w_k(\eta) \approx C_{\vec{k}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a\sqrt{k}}e^{-ik\eta} \tag{10.151}$$

ταλαντώνεται γρήγορα ως προς το χρόνο του Hubble. Σε κλίμακες αποστάσεων και χρόνου πολύ μικρότερες από την κλίμακα του Hubble, μπορούμε να αγνοήσουμε την διαστολή του σύμπαντος και να γράψουμε $\eta = t/a$. Τα πράγματα θα πρέπει να έχουν τότε την συμπεριφορά που αναμένουμε στον χώρο Minkowski και να εξισώσουμε την παραπάνω λύση με την συνάρτηση βάρους στο χώρο Minkowski,

$$C_{\vec{k}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a\sqrt{k}}e^{-ik\eta} = (aL)^{-3/2}\frac{1}{\sqrt{2E_k}}e^{-iE_k t} \tag{10.152}$$

απο την οποία παίρνουμε $E_k = k/a$ και

$$C_{\vec{k}} = L^{-3/2}\sqrt{\frac{\pi}{4}} \tag{10.153}$$

έτσι ώστε η ορθά κανονικοποιημένη συνάρτηση βάρους κατά την περίοδο του inflation να είναι

$$w_k(\eta) = L^{-3/2}\sqrt{\frac{\pi}{4}}a^{-1}\sqrt{-\eta}H_\nu(-k\eta), \tag{10.154}$$

το οποίο μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε σε όλους τους χρόνους κατά την διάρκεια του slow-roll inflation.

[23] Θεωρούμε το ϵ σταθερό

Ο τελεστής του πεδίου για τις βαθμωτές διαταραχές του κατά την περίοδο του inflation είναι

$$\hat{Q}_{\vec{k}}(\eta) = w_k(\eta)\hat{a}_{\vec{k}} + w_k^*(\eta)\hat{a}^\dagger_{-\vec{k}}, \tag{10.155}$$

και το φάσμα ισχύος της βαθμωτής διαταραχής του πεδίου είναι

$$\mathcal{P}_Q(k) = L^3 \frac{k^3}{2\pi^2}|w_k|^2. \tag{10.156}$$

Πολύ πριν από την έξοδο από τον ορίζοντα, $k \gg \mathcal{H}$, παρατηρούμενος σε χρονικές κλίμακες πολύ μικρότερες από το χρόνο του Hubble, ο τελεστής του πεδίου $\hat{Q}_{\vec{k}}(\eta)$ γίνεται ο τελεστής πεδίου στο χώρο Minkowsi (Εξ. 10.131) και έχουμε κοινές διαταραχές του κενού για το ϕ.

Πολύ αργότερα από την έξοδο από τον ορίζοντα, η συνάρτηση βάρους γίνεται σχεδόν σταθερή με το χρόνο (Εξ. 10.135-10.132),

$$w_k(\eta) = L^{-3/2}\frac{1}{\sqrt{2}}s^{\nu-3/2}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{1}{a}\sqrt{-\eta}(-k\eta)^{-\nu} \propto \big(-\eta\big)^{\eta_V - 2\epsilon_V}, \tag{10.157}$$

και οι διαταραχές "παγώνουν". Οι κλίμακες τότε είχαν μεγαλώσει και έτσι οι διαταραχές μπορούν να μελετηθούν κλασικά.
Το φάσμα ισχύος των βαθμωτών διαταραχών Q γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_Q(\eta, k) &= \frac{2^{2\nu-3}}{(2\pi)}\left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right]^2(-a\eta)^{-2}(-k\eta)^{3-2\nu} \\ &= \frac{2^{6\epsilon_V - 2\eta_V}}{(2\pi)^2}\left[\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+3\epsilon_s-\eta_s)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right]^2(-a\eta)^{-2}(-k\eta)^{2\eta_V-6\epsilon_V}.\end{aligned} \tag{10.158}$$

Βλέπουμε ότι η εξάρτηση του φάσφατος ισχύος από την κλίμακα (κυματάριθμο) είναι

$$\mathcal{P}_Q \propto k^{2\eta_V - 6\epsilon_V} \equiv k^{n_s} \Rightarrow n_s = 2\eta_V - 6\epsilon_V. \tag{10.159}$$

Ακόμα και σε ύστερους χρόνους, το φάσμα ισχύος έχειμια ασθενής χρονική εξάρτηση $\propto (-\eta)^{2\eta_V - 4\epsilon_V}$, και σημαντικότερα,η προσέγγισή μας ότι οι slow-roll παράμετροι παραμένουν σταθερές θα ισχύει για ένα πλήθος περιόδων $\ll 1/(slow-roll$ παράμετροι). Επομένως θα πρέπει να αλλάξουμε μεταβλητές μετά την έξοδο από τον ορίζοντα.

10.6.7 Αρχέγονο Φάσμα Ισχύος

Από την 10.6.3 είδαμε ότι η σύμμορφη διαταραχή στην καμπυλότητα παραμένει σταθερή σε κλίμακες έξω από τον ορίζοντα και ότι

$$\boxed{\mathcal{R} = -\frac{H}{\dot{\phi}}Q = -\frac{\mathcal{H}}{\phi'}Q} \tag{10.160}$$

Από το οποίο συνεπάγεται

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\eta, k) = \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2 \mathcal{P}_Q(\eta, k). \tag{10.161}$$

Και επομένως έχουμε σε ύστερους χρόνους (όταν $k \ll \mathcal{H}$)

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\eta, k) = \frac{2^{2\nu-3}}{(2\pi)^2}\left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right]^2 \left(\frac{H}{-a\eta\dot{\phi}}\right)^2 (-k\eta)^{3-2\nu} \tag{10.162}$$

Με την εξάρτηση από την κλίμακα να είναι $k^{3-2\nu}$ και την χρονική εξαρτηση να δίνεται από

$$\left(\frac{H}{a\dot{\phi}}\right)^2 (-\eta)^{1-2\nu} \tag{10.163}$$

Σταθερότητα στο χρόνο στην slow-roll προσέγγιση

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{H}{a\dot{\phi}}\right)^2(-\eta)^{1-2\nu} &= \frac{8\pi G}{3a^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{V}{\dot{\phi}^2}\right)(-\eta)^{-2-6\epsilon_s+2\eta_s} \\
&= \frac{8\pi G}{3a^2}\frac{V}{\dot{\phi}^2}(-\eta)^{-2-6\epsilon_s+2\eta_s} \\
&= \frac{8\pi G}{3a^2}\frac{9H^2V}{V'^2}(-\eta)^{-2-6\epsilon_s+2\eta_s} \\
&= \frac{4\pi G}{a^2}\left[\frac{2}{M^2}\left(\frac{V}{V'}\right)^2\right](-\eta)^{-2-6\epsilon_s+2\eta_s} \\
&\propto 4\pi G\frac{1}{\epsilon_s}\big(-\eta\big)^{2+2\epsilon_s}(-\eta)^{-2-6\epsilon_s+2\eta_s} \\
&\propto 4\pi G\frac{1}{\epsilon_s}(-\eta)^{-4\epsilon_s+2\eta_s} \\
&\propto 4\pi G\frac{1}{\epsilon_s}e^{(-4\epsilon_s+2\eta_s)\ln(-\eta)} \\
&\propto 4\pi G\frac{1}{\epsilon_s}\left[1+(-4\epsilon_s+2\eta_s)\ln(-\eta)+\big[(-4\epsilon_s+2\eta_s)\ln(-\eta)\big]^2\frac{1}{2}+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

Slow-Roll συνθήκη: $\dot{\phi}^2 \ll V$

$a \propto \big(-\eta\big)^{-\frac{1}{1-\epsilon_s}}$

$\epsilon_s = \frac{M^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2$ από 10.103

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος $4\pi G\frac{1}{\epsilon_s}$ είναι σταθερός, και επειδή οι slow roll παράμετροι είναι μικροί ($\epsilon_S \ll 1$), είναι κυρίαρχος. Συνεπώς ο δεύτερος όρος που δίνει την χρονική του εξέλιξη μπορεί να αγνοηθεί και η αρχική μας ποσότητα να θεωρηθεί σταθερή.

Αφού ο παράγοντας 10.163 παραμένει σταθερός, μπορούμε να επιλέξουμε να τον υπολογίσουμε για κάθε k στο χρόνο όπου η κλίμακα εξέρχεται από τον ορίζοντα, όταν δηλαδή $k = aH$, παρόλο που η 10.162 δεν ακόμα δίνει το φάσμα ισχύος σε αυτήν την εποχή (τότε έχει τη μορφή της γενικής συνάρτησης Hankel όχι την προσεγγιστική μορφή για ύστερους χρόνους) παρά μόνο αργότερα.

Από την 10.163,

$$\mathcal{H} = aH = \frac{-1}{\big(1-\epsilon_V\big)\eta} \tag{10.164}$$

έχουμε

$$-a\eta = \frac{1}{(1-\epsilon_V)H} \quad \text{και} \quad -k\eta = \frac{k}{(1-\epsilon_V)aH} \tag{10.165}$$

και άρα η 10.162 γίνεται

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\eta, k) = 2^{2\nu-3}\left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right]^2 (1-\epsilon_V)^{2\nu-1}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu}, \quad (10.166)$$

το οποίο τώρα υπολογίζουμε για κάθε k στο χρόνο έξόδου από τον ορίζοντα, $k = aH = \mathcal{H}$ για να πάρουμε

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left[2^{2\nu-3}\left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right)^2 (1-\epsilon)^{2\nu-1}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2\right]_{k=aH}. \quad (10.167)$$

Αυτός είναι το αρχέγονο φάσμα των διαταραχών. Η εξίσωση 10.167 δεν έχει πλέον χρονική εξάρτηση, αφού εξορισμού, υπολογίζεται για κάθε k την στιγμή εξόδου από τον ορίζοντα ($k = aH$). Ανεξαρτήτως από την slow-roll προσέγγιση, το $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ παραμένει σταθερό στο χρόνο για όση περίοδο οι κλίμακες k μένουν εντελώς εκτός του ορίζοντα.

Μπορούμε τώρα να υποθέσουμε ότι η 10.167 έχει προκύψει από ανεξάρτητο υπολογισμό για κάθε διαφορετικό k, έτσι ώστε για κάθε k οι slow-roll παράμετροι πάρθηκαν να είναι προσεγγιστικά σταθεροί στην τιμή που είχαν όταν $k = aH$. Επομένως η 10.167 παραμένει εγκυρη για όλες τι κλίμακες για τις οποίες η slow roll προσέγγιση ήταν έγκυρη κοντά στην έξοδο από τον ορίζοντα, παρόλο που οι παράμετροι έχουν αλλάξει σημαντικά με την άξοδο του όλου φάσματος των κλιμάκων.

Σε 1η προσέγγιση των slow-roll παραμέτρων η 10.167 έχει την ίδια εξάρτηση από την κλίμακα με την 10.158,

$$n_s \equiv \frac{d\ln\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\ln k} = 3 - 2\nu = 2\eta - 6\epsilon \quad (10.168)$$

αλλά πλέν μπορούμε να υπολογίσουμε την εξάρτηση από την κλίμακα k σε δύτερη τάξη των slow-roll παραμέτρων.

10.6.7.1 Φασματικός δείκτης σε δεύτερη τάξη των slow-roll παραμέτρων

Εάν η 0^{η} τάξη ήταν επαρκής για τον υπολογισμό του φασματικού δείκτη σε 1^{η} τάξη, η 10.167 θα ήταν αρκετή για να υπολογίσουμε το φασματικό δείκτη σε 2^{η} τάξη των slow roll παραμέτρων. Από την 10.167,

$$\frac{d\ln\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\ln k} = \frac{d}{d\ln k}\ln\left[2^{2\nu-3}\left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})}\right)^2(1-\epsilon)^{2\nu-1}\right] + \frac{d}{d\ln k}\ln\left[\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2\right]. \quad (10.169)$$

• Ο πρώτος όρος δίνει

$$\big(2-\ln 2-\gamma\big)\big(-16\epsilon\eta+24\eta^2+2\xi\big)+4\epsilon\eta-8\epsilon^2, \tag{10.170}$$

όπου $\gamma = 0.577215...$ είναι η σταθερά Euler-Mascheroni, ώστε $2-\ln 2-\gamma \approx 0.729637$.

Πως θα πάρουμε τις slow-roll εξισώσεις σε 2η τάξη? Χρειαζόμαστε ένα αποτέλεσμα ανώτερης τάξης για το $H^{-1}\dot{\epsilon}$ αφού παρόλο που η 10.104e που χρησιμοποιήσαμε είναι 2ης τάξης, χρησιμοποιήθηκε στη μορφή $(1/\epsilon)H^{-1}\dot{\epsilon}$, το οποίο ειναι 1ης τάξης.

Για να υπολογίσουμε σε ανώτερη slow-roll τάξη θα επιστρέψουμε στις εξισώσεις 10.97 του υποβάθρου

$$\ddot{\phi} \approx H\dot{\phi}(\epsilon-\eta) \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \approx M^2H^2\epsilon \tag{10.171}$$

για να καταλήξουμε στις 2ης τάξη ςεξισώσεις

$$\begin{aligned} (3+\epsilon-\eta)H\dot{\phi}+V' = 0 \Rightarrow & H\dot{\phi} = -\frac{V'}{3+\epsilon-\eta} \\ H^2 = \frac{1}{3M^2}(M^2H^2\epsilon+V) \Rightarrow & H^2 = \frac{V}{(3-\epsilon)M^2} \end{aligned} \tag{10.172}$$

από τις οποίες μπορούμε να εξάγουμε τις διάφορες 2ης τάξεις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \epsilon_H \equiv -\frac{\dot{H}}{H} \approx & \epsilon - \frac{4}{3}\epsilon^2 + \frac{2}{3}\epsilon\eta \\ (H^{-1}\dot{\phi})^2 = & 2M^2\frac{(3-\epsilon)^2}{(3+\epsilon-\eta)^2} \approx 2M^2(1-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\eta)\epsilon \approx 2M^2\epsilon_H \\ H^{-1}\dot{\epsilon} \approx & 4\epsilon^2 - 2\epsilon\eta - \frac{8}{3}\epsilon^3 + \frac{8}{3}\epsilon^2\eta - \frac{2}{3}\epsilon\eta^2 \\ H^{-1}\dot{\epsilon}_H \approx & (1-\frac{8}{3}\epsilon+\frac{2}{3}\eta)H^{-1}\dot{\epsilon} + \frac{2}{3}\epsilon H^{-1}\dot{\eta} \\ \approx & \epsilon(4\epsilon - 2\eta - \frac{40}{3}\epsilon^2 + \frac{36}{3}\epsilon\eta - 2\eta^2 - \frac{2}{3}\xi) \end{aligned} \tag{10.173}$$

• Στρέφουμε την προσοχή μας τώρα στον δεύτερο όρο της 10.169. Από

$$\frac{d}{d\ln k}\ln\left[\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2\right] = \frac{d}{d\ln k}\ln\left(\frac{H^2}{\epsilon_H}\right) = \frac{2}{H}\frac{dH}{d\ln k} - \frac{1}{\epsilon_H}\frac{d\epsilon^H}{d\ln k}. \tag{10.174}$$

εδώ

$$\frac{d\ln k}{dt} = \frac{d\ln(aH)}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{H}}{H} = H\left(1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right) = H(1-\epsilon_H) \tag{10.175}$$

έτσι ώστε η 10.174 γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{2\epsilon_H}{1-\epsilon_H} - \frac{1}{\epsilon_H(1-\epsilon_H)}H^{-1}\dot{\epsilon}_H &\approx \left(-2\epsilon + \frac{2}{3}\epsilon^2 - \frac{4}{3}\epsilon\eta\right) - \left(4\epsilon - 2\eta - 4\epsilon^2 + \frac{14}{3}\epsilon\eta - \frac{2}{3}\eta^2 - \frac{2}{3}\xi\right) \\ &= -6\epsilon + 2\eta + \frac{14}{3}\epsilon^2 - 6\epsilon\eta + \frac{2}{3}\eta^2 + \frac{2}{3}\xi.\end{aligned} \tag{10.176}$$

Προσθέτοντας τις 10.170+10.176 παίρνουμε εν τέλει

$$\eta_s = -6\epsilon + 2\eta - \frac{10}{3}\epsilon^2 - 2\epsilon\eta + \frac{2}{3}\eta^2 + \frac{2}{3}\xi + (2 - \ln 2 - \gamma)(24\epsilon^2 - 16\epsilon\eta + 2\xi). \tag{10.177}$$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Plank 2015 (υποθέτοντας αδιαβατικές βαθμωτές διαταραχές και αγνοώντας τανυστικές διαταραχές), η παρατηρηθείσα τιμή του φασματικού δείκτη ήταν

$$\eta_s + 1 = 0.968 \pm 0.006 \Rightarrow \eta_s = -0.032 \pm 0.006. \tag{10.178}$$

Αναμένουμε σε αυτό να κυριαρχούν οι 1ης τάξης συνεισφορές πχ $O(10^{-3})$. Οι ακριβείς τιμές και σχέσεις μεταξύ των slow-roll παραμέτρων εξαρτάται από το επιλεχθέν μοντέλο για το inflation.

10.7 Διαταραχές Καμπυλότητας

Στην περίπτωση N βαθμωτών πεδίων, οι διαταραχές της καμπυλότητας είναι

$$\mathcal{R} \equiv -\psi^C = -\psi - \mathcal{H}\xi^0, \tag{10.179}$$

όπου από την 10.74

$$\xi^0 = \frac{\sum \phi_I' \delta\phi_I}{\sum (\phi')^2}, \tag{10.180}$$

ώστε εν τέλει έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= -\psi - \mathcal{H}\frac{\sum \phi_I' \delta\phi_I}{\sum (\phi')^2} = -\mathcal{H}\frac{\sum \phi_I' Q_I}{\sum (\phi')^2} = -\frac{\mathcal{H}}{(\rho+p)a^2}\sum \phi_I' Q_I \\ &= 4\pi G\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}\sum \phi_I' Q_I = 4\pi G\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}\vec{\phi}' \cdot \vec{Q}.\end{aligned} \tag{10.181}$$

Η εύρεση της χρονικής εξέλιξης $\mathcal{R}'$ δεν είναι τόσο απλή όσο την περίπτωση που έχουμε ενα μόνο πεδίο.

10.8 Slow-Roll Inflation

Στο σημείο αυτό θα ασχοληθούμε αποκληστικά με την λύση του υποβάθρου. Θα χρησιμοποιήσουμε σύνηθη χρόνο t, αντί για το σύμμορφο χρόνο η. Υποθέτουμε τις slow-roll εξισώσεις

$$3H\dot{\phi}_I + V_I = 0 \Rightarrow V_I = -3H\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi}_I = -\frac{V_I}{3H} \tag{10.182}$$

και

$$H^2 = \frac{1}{3M^2}V \Rightarrow V = 3M^2H^2 \Rightarrow 3H^2 = \frac{V}{M^2} \tag{10.183}$$

ισχύει για όλα τα πεδία ϕ_I. Από αυτές

$$H^{-1}\dot{\phi}_I = -M^2\frac{V_I}{V}, \tag{10.184}$$

και σε διανυσματική μορφή

$$H^{-1}\dot{\vec{\phi}} = -\frac{M^2}{V}\nabla V, \tag{10.185}$$

δηλαδή στην slow-roll λύση, το πεδίο του ωποβάθρου εξελίσσεται σύμφωνα με την κλίση του δυναμικού.

Παραγωγίζοντας τις slow-roll εξισώσεις παίρνουμε

$$\dot{H} = -\frac{\sum V_I^2}{6V} \tag{10.186}$$

και

$$\ddot{\phi}_I = \frac{M^2}{3}\frac{\sum V_{IJ}V_J}{V} - \frac{M^2}{6}\frac{V_I\sum V_J^2}{V^2}.^{24} \tag{10.187}$$

Στην 10.187 ο δεύτερος όρος είναι παράλληλος στο $\dot{\vec{\phi}}$, αλλά ο πρώτος όρος μπορεί να μην είναι.

10.8.1 Παράμετροι slow-roll

Ορίζουμε τις slow-roll παραμέτρους

$$\epsilon_{IJ} \equiv \frac{M^2}{2}\frac{V_IV_J}{V^2} \quad \eta_{IJ} \equiv M^2\frac{V_{IJ}}{V} \tag{10.188}$$

[24] Βλέπε απόδειξη V

και

$$\epsilon \equiv tr[\epsilon_{IJ}] = \sum \epsilon_{II}. \tag{10.189}$$

Να παρατηρίσουμε ότι οι πίνακες ϵ_{IJ} και η_{IJ} είναι συμμετρικοί.

Χρησιμοποιώντας τις slow-roll εξισώσεις παίρνουμε

$$H^{-2}\dot{H} = -\epsilon \tag{10.190a}$$

και

$$(H^{-1}\dot{\phi}_I)^2 = 2M^2\epsilon_{II} \quad (\text{όχι άθροισμα}) \tag{10.190b}$$

$$H^{-2}\ddot{\phi}_I = \epsilon H^{-1}\dot{\phi}_I - \sum_J \eta_{IJ} H^{-1}\dot{\phi}_J \tag{10.190c}$$

$$H^{-1}\dot{\epsilon}_{IJ} = 4\epsilon\epsilon_{IJ} - \sum_K \big(\epsilon_{IK}\eta_{JK} + \epsilon_{IK}\eta_{JK}\big) \tag{10.190d}$$

$$H^{-1}\dot{\epsilon} = 4\epsilon^2 - 2\sum_{IK} \epsilon_{IK}\eta_{IK}.^{25} \tag{10.190e}$$

Κατά την περίοδο του inflation, οι slow-roll παράμετροι ϵ_{IJ} και η_{IJ} είναι τυπικά μικροί και η χρονική τους διακύμανση είναι μικρή σε δεύτερη τάξη. Θα ορίσουμε ξ παραμέτρους μόνο αφότου έχουμε κάνει μια περιστροφή στο χώρο των πεδίων στις αδιαβατικές και εντροπικές διαταραχές του πεδίου.

10.8.2 Νόμος εκθετικής διαστολής του υποβάθρου

Επειδή η 10.190a είναι η ίδια όπως στην περίπτωση του inflation από ένα παιδίο, παίρνουμε τον ίδιο νόμο

$$\frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = 1 - \epsilon \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{-1}{(1-\epsilon)\eta} \Rightarrow a \propto \big(-\eta\big)^{-1/(1-\epsilon)}, \tag{10.191}$$

και

$$\frac{a''}{a} = \mathcal{H}^2\big(2-\epsilon\big). \tag{10.192}$$

(αυτές είναι ορθές όσο το ϵ είναι προσεγγιστικά σταθερό.)

10.8.3 Εξέληξη διαταραχών

Από την 10.79 η εξίσωση εξέληξης των διαταραχών είναι

$$\mathcal{H}^{-2}Q_I^{''} + 2\mathcal{H}^{-1}Q_I^{'} + \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 Q_I = \mathcal{H}^{-2}\sum_J \left[\frac{8\pi G}{a^2}\left(\frac{a^2}{\mathcal{H}}\phi_I^{'}\phi_J^{'}\right)^{'} - a^2 V_{IJ}\right] Q_J, \tag{10.193}$$

ή

$$\mathcal{H}^{-2}\ddot{Q}_I + 2\mathcal{H}^{-1}\dot{Q}_I + \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2 Q_I = \mathcal{H}^{-2}\sum_J \left[\frac{8\pi G}{a^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{a^2}{\mathcal{H}}\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J\right) - V_{IJ}\right] Q_J. \tag{10.194}$$

Χρησημοποιώντας τις slow-roll εξισώσεις, το δεξί μέλος γίνεται

$$\left[6\epsilon_{IJ} - 3\eta_{IJ} - \sum_K \left(2\epsilon_{IK}\eta_{JK} + 2\eta_{IK}\epsilon_{JK}\right)\right] Q_J \equiv A_{IJ}Q_J. \tag{10.195}$$

Ορίζοντας

$$u_I \equiv aQ_I, \tag{10.196}$$

η 10.193 γίνεται

$$u_I^{''} + \left(k^2 - \frac{a^{''}}{a}\right) u_I = \mathcal{H}^2 \sum_J A_{IJ}u_J \tag{10.197}$$

και κάνοντας χρήση της 10.192 γίνεται

$$\begin{aligned} u_I^{''} + k^2 u_I &= \mathcal{H}^2(2-\epsilon)u_I + \mathcal{H}\sum_J A_{IJ}u_J \\ &= \mathcal{H}^2\left[(2-\epsilon)\delta_{IJ} + A_{IJ}\right]u_J \end{aligned} \tag{10.198}$$

και επειδή από τον ορισμό του σύμμορφου χρόνου είναι

$$\mathcal{H}^2 = \frac{1}{(1-\epsilon)^2}(-\eta)^2 \approx (1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2)(-\eta)^2 \tag{10.199}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} u_I^{''} + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right) u_I = \frac{3}{\eta^2}\Bigg[&(\epsilon + \frac{3}{4}\epsilon^2)\delta_{IJ} + 2\epsilon_{IJ} - \eta_{IJ} + 6\epsilon\epsilon_{IJ} - 2\epsilon\eta_{IJ} \\ &- \frac{1}{3}\sum_K \left(2\epsilon_{IK}\eta_{JK} + 2\eta_{IK}\epsilon_{JK}\right)\Bigg] u_J \end{aligned} \tag{10.200}$$

υπολογισμένη σε 2η τάξη των slow-roll παραγόντων. Οστώσο είναι συνεπές να τη χρησιμοποιήσαμε τον νόμο του αναπτύγματος ο οποίος ήταν ορθός μόνο

υποθέτοντας ότι η slow-roll παράμετρος ϵ παραμένει σταθερή. Επομένως η slow-roll εξίσωση εξέλιξης των διαταραχών είναι

$$u_I'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right) u_I = \frac{3}{\eta^2}\left(\epsilon\delta_{IJ} + 2\epsilon_{IJ} - \eta_{IJ}\right)u_J \equiv \frac{3}{\eta^2} M_{IJ} u_J. \tag{10.201}$$

Οι μη διαγώνειες συνειστώσες του πίνακα M_{IJ} συσχετίζουν την εξέλιξη διαφορετικών διαταραχών του πεδίου u_I. Οστώσω μπορούμε να κάνουμε μια στροφή στο χώρο των πεδίων για να διαγωνοποιήσουμε τον M, αφού είναι πραγματικός και συμμετρικός, για να φτάσουμε τις διαταραχές u_I που εξελίσσονται ανεξάρτητα. Ας ονομάσουμε τον πίνακα στροφών U_{IJ}, ώστε

$$u_I = \sum U_{IJ} u_j \quad \text{και} \quad U^T M U = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \tag{10.202}$$

όπου τα λ_I είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα M. Είναι 1 τάξης ως προς τις slow-roll παραμέτρους. Αφού U είναι πίνακας στροφών

$$U^T U = 1 \quad \text{ή} \quad \sum_I U_{IL} U_{IJ} = \delta_{IJ}. \tag{10.203}$$

και η 10.201 γίνεται

$$\begin{aligned} u_L'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right) u_L &= \frac{3}{\eta^2}\lambda_L u_L \\ \Rightarrow u_L'' + \left[k^2 - \frac{1}{\eta^2}\left(\nu_L^2 - \frac{1}{4}\right)\right] u_L &= \frac{3}{\eta^2}\lambda_L u_L \end{aligned} \tag{10.204}$$

όπου

$$\nu_L \equiv \sqrt{\frac{9}{4} + 3\lambda_L} \approx \frac{3}{2} + \lambda_L. \tag{10.205}$$

Η εξίσωση αυτή είναι ίδια με την 10.125 άρα την έχουμ ήδη λύσει. Οι συναρτήσεις βάρους είναι

$$\begin{aligned} w_L(\eta) &= L^{-3/2}\sqrt{\frac{pi}{4}} a^{-1}\sqrt{-\eta} H_{\nu_L}(-k\eta) \\ &\to L^{-3/2}\frac{1}{\sqrt{2}} 2^{\nu_L - 3/2}\frac{\Gamma(\nu_L)}{\Gamma(3/2)}\frac{1}{a}\sqrt{-\eta}(-k\eta)^{-\nu_L} \\ &\to L^{-3/2} 2^{\nu_L - 3/2}\frac{\Gamma(\nu_L)}{\Gamma(3/2)}\frac{1}{a}\sqrt{-\frac{\eta}{2}}(-k\eta)^{-3/2-\lambda_L} \\ &\to L^{-3/2} 2^{\nu_L - 3/2}\frac{\Gamma(\nu_L)}{\Gamma(3/2)}\frac{1}{a} frac1\sqrt{2k}(-k\eta)^{-1-\lambda_L} \end{aligned} \tag{10.206}$$

Η προσέγγισή μας ότι οι slow-roll παράμετροι θα παραμένουν σταθεροί θα ισχύει για έναν αριθμό χαρακτηριστικών χρόνων $\ll 1/(slow-roll$ παράμετροι).

Συνεπώς θέλουμε να πάμε σε άλλες μεταβλητές ,ετά την έξοδο από τον ορίζοντα. Μια από τις πιθανές επιλογές είναι σύμμορφη διαταρακτική καμπυλότητα $\mathcal{R}$.

$$\mathcal{R} = 4\pi G \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2} \vec{\phi}' \cdot \vec{Q} \approx -\frac{1}{2M^2\epsilon} \mathcal{H}^{-1} \vec{\phi}' \cdot \vec{Q} \approx \frac{1}{2\epsilon V} \nabla V \cdot \vec{Q}. \tag{10.207}$$

Συνεπώς το $\mathcal{R}$ δίνεται από τη διαταρακτική συνειστώσα δηλαδή την διεύθυνση του πεδίου του υποβάθρου $\vec{\phi}'$, το οποίο είναι, στην slow-roll προσέγγιση, στην διεύθυνση της κλίσης του δυναμικού. Αυτό εν γένει δεν είναι στη διεύθυνση κανενός από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα M, άρα χρειάζεται να κάνουμε άλλη μια στροφή στο χώρο των πεδίων.

Εφαρμόζουμε μια στροφή από την αρχική μας βάση στο χώρο συντεταγμένων των πεδίων, όπου

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} \tag{10.208}$$

σε μια νέα βάση για τις διαταραχές του πεδίου, ώστε

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_\sigma \\ Q_{s_1} \\ \vdots \\ Q_{s_{(N-1)}} \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} \tag{10.209}$$

όπου

$$Q_\sigma \equiv \frac{\nabla V \cdot \vec{Q}}{|\nabla V|}. \tag{10.210}$$

Ο πίνακας στροφής θα εξαρτάται εν γένει από τον χρόνο, αφού το ∇V μπορεί να αλλάζει κατεύθυνση κατά μήκος της τροχιάς στο υπόβαθρο (η τροχιά στο υπόβαθρο στο χώρο των πεδίων μπορεί να είναι καμπύλη). Ονομάζουμε Q_σ την αδαβατική διαταραχή του πεδίου και τις $N-1$ ορθογώνιες διαταραχές Q_{s_l} εντροπικές διαταραχές του πεδίου.

Αφού ο πίνακας στροφών δεν είναι σταθερός στο χώρο των πεδίων, δεν περιστρέφουμε τις τιμές των πεδίων στο πόβαθρο, αλλά τις χρονικές τους παραγώγους

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{s}_1 \\ \vdots \\ \dot{s}_{N-1} \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\phi}_N \end{pmatrix} \tag{10.211}$$

Που σημαίνει ότι η στροφή S δεν είναι μια καθολική στροφή των συντεταγμένων στο χώρο των πεδίων, αλλά μια τοπική στροφή στο χώρο των διανυσμάτων των διαταραχών του πεδίου και των χρονικών παραγώγων των διανυσμλατων.

10.9 Δύο πεδία

10.9.1 Αδιαβατικές και Εντροπικές πεδιακές συντεταγμένες

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση δύο πεδίων, $\vec{\phi} = \left(\phi_1, \phi_2\right)$. Η διεύθυνση της λύσης του υποβάθρου δίνεται από την $\dot{\phi}$. Η γωνία διεύθυνσης θ δίνεται από

$$\tan\theta \equiv \frac{\dot{\phi}_2}{\dot{\phi}_1}. \tag{10.212}$$

Ορίζουμε την αποκαλούμενη αδιαβατική συνειστώσα του πεδίου σ, ως το ολοκληρωμένο μήκος διαδρομής κατά μήκος της τροχιάς από κάποιο αυθαίρετο αρχικό σημείο (μόνο διαφορές της τάκης σ παίζουν ρόλο), και s, την αποκαλούμενη εντροπική συνειστώσα του πεδίου, ως την ορθογώνια απόσταση από την διαδρομή. Επομένως η λύση του υποβάθρου είναι εξορισμού:

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = 0 \tag{10.213}$$

Αυτό ορίζει ένα σύστημα συντεταγμένων σ, s στο χώρο των πεδίων, βαθμονομημένο για μια συγκεκριμένη λύση του υποβάθρου. Εάν η τροχιά είναι καμπύλη, αυτό είναι ένα καμπύλο σύστημα συντεταγμένων, και ισχύει μόνο στην γειτονιά της τροχιάς αφού πιο μακριά οι s γραμμες συντεταγμένων τέμνονται. Θα πρέπει να χρησημοποιήσουμε αυτό το σύστημα συντεταγμένων στην τροχιά και μόνο, καθώς και δεν θα εισάγουμε τα πλήρει εργαλεία για την ανάλυση των καμπυλόγραμων συστημάτων συντεταγμένων.

Εξετάζουμε την λύση του υποβάθρου $\phi_1 \equiv \bar{\phi}_1(t), \phi_2 \equiv \bar{\phi}_2(t)$ συναρτήσει των νέων συντεταγμένων σ, s, θ. Οι νέες συντεταγμένες σ, s δίνονται από μια στροφή κατά γωνία θ από τις παλιές συντεταγμένες ϕ_I, ϕ_2 ώστε

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix}, \tag{10.214}$$

όπου

$$S \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{10.215}$$

Επομένως

$$\dot{\sigma} = \dot{\phi}_1 \cos\theta + \dot{\phi}_2 \sin\theta. \tag{10.216}$$

Η αντίστροφη σχέση είναι

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{s} \end{pmatrix} \tag{10.217}$$

Και επειδή είναι $\dot{s} = 0$ έχουμε

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\sigma}\cos\theta \quad \text{και} \quad \dot{\phi}_2 = \dot{\sigma}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma}^2 = \dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 \tag{10.218}$$

και

$$\dot{\phi}_1 \sin\theta = \dot{\phi}_2 \cos\theta \tag{10.219}$$

Το δυναμικό $V(\phi_1, \phi_2)$ υπάρχει παντού στον χώρο των πεδίων (ϕ_1, ϕ_2). Μπορούμε να εκφράσουμε την κλίση του είται στη ϕ_1, ϕ_2 είται στη σ, s βάση. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} V_\sigma \\ V_s \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \tag{10.220}$$

και

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} V_\sigma \\ V_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_\sigma \\ V_s \end{pmatrix} \tag{10.221}$$

Η χρονική παράγωγος του V κατά μήκος της τροχιάς είναι

$$\dot{V} = V_1\dot{\phi}_1 + V_2\dot{\phi}_2 = V_\sigma\dot{\sigma}. \tag{10.222}$$

Μπορούμε όμοια να περιστρέψουμε τις δεύτερες παραγώγους V_{IJ}

$$|V_{I'J'}| \equiv S^T |V_{IJ}| S \quad \text{ή} \quad V_{I'J'} \equiv S^K_{I'} S^L_{J'} V_{KL} \tag{10.223}$$

ή

$$\begin{pmatrix} V_{\sigma\sigma} & V_{\sigma s} \\ V_{\sigma s} & V_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{10.224}$$

δίνοντας έτσι

$$\begin{aligned} V_{\sigma\sigma} &\equiv \cos^2\theta V_{11} + 2\cos\theta\sin\theta V_{12} + \sin^2\theta V_{22} \\ V_{ss} &\equiv \sin^2\theta V_{11} - 2\cos\theta\sin\theta V_{12} + \cos^2\theta V_{22} \\ V_{\sigma s} &\equiv -\sin\theta\cos\theta V_{11} + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) V_{12} + \cos\theta\sin\theta V_{22}. \end{aligned} \tag{10.225}$$

Παίρνουμε τις εξισώσεις αυτές ως ορισμό των $V_{\sigma\sigma}, V_{ss}$ και $V_{\sigma s}$. Αφού τα πήραμε από στροφές, αυτό σημαίνει ότι δεν είναι μερικές παράγωγοι, αλλά συναλοίωτες παράγωγοι στις σ, s συντεταγμένες.

Όμοια, για τις τρίτες παραγώγους:

$$V_{I'J'K'} \equiv S^L_{I'} S^M_{J'} S^N_{K'} V_{LMN}, \tag{10.226}$$

δίνοντας

$$\begin{aligned}
V_{\sigma\sigma\sigma} &\equiv \cos^3\theta V_{111} + 3\cos^2\theta\sin\theta V_{112} + 3\cos\theta\sin^2\theta V_{122} + \sin^3\theta V_{222} \\
V_{\sigma\sigma s} &\equiv -\cos^2\theta\sin\theta V_{111} + \big(\cos^3\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta\big)V_{112} \\
&\quad + \big(2\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\big)V_{122} + \sin^2\theta\cos\theta V_{222} \\
V_{\sigma ss} &\equiv \cos\theta\sin^2\theta V_{111} + \big(-2\cos^2\theta\sin\theta + \sin^3\theta\big)V_{112} \\
&\quad + \big(\cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\big)V_{122} + \sin\theta\cos^2\theta V_{222} \\
V_{sss} &\equiv -\sin^3\theta V_{111} + 3\sin^2\theta\cos\theta V_{112} - \sin\theta\cos^2\theta V_{122} + \cos^3\theta V_{222}
\end{aligned} \tag{10.227}$$

Παραγωγίζοντας πάλι την 10.216 παίρνουμε

$$\ddot{\sigma} = \ddot{\phi}_1\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta + \ddot{\phi}_2\sin\theta + \dot{\phi}_2\dot{\theta}\cos\theta = \ddot{\phi}_1\cos\theta + \ddot{\phi}_2\sin\theta \tag{10.228}$$

όπου κάναμε χρήση της 10.219.

10.9.2 Ακριβής λύση υποβάθρου

Χρησιμοποιώντας τις πεδιακές εξισώσεις του ϕ_I για το υπόβαθρο

$$\ddot{\phi}_1 + 3H\dot{\phi}_1 + V_1 = 0 \tag{10.229}$$

$$\ddot{\phi}_2 + 3H\dot{\phi}_2 + V_2 = 0, \tag{10.230}$$

παίρνουμε από την 10.228 την εξίσωση του πεδίου στο υπόβαθρο στις αδιαβατικές συντεταγμένες του πεδίου

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} + V_\sigma = 0. \tag{10.231}$$

Η αντίστοιχη εξίσωση για το εντροπικό πεδίο του υποβάθρου είναι λόγω του ορισμού 10.213 $\ddot{s} = 0$. Αντίθετα το ρόλο της άλλης δυναμικής ποσότητας για το υπόβαθρο αναλαμβάνει η θ. Βρίσκουμε

$$V_s = -\dot{\theta}\dot{\sigma} \quad \text{ή} \quad \dot{\theta} = -\frac{V_s}{\dot{\sigma}}. \tag{10.232}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη από τις παραπάνω παίρνουμε την εξίσωση για το $\ddot{\theta}$. Εδώ πρέπει να είμαστε προσεκτική με τη χρ'ηση της βάσης σ, s αφού μεταβάλλεται κατά μήκος της τροχιάς. Επομένως $\dot{V}_s \neq V_{ss}\dot{s} + V_{\sigma s}\dot{\sigma} = V_{\sigma s}\dot{\sigma}$. Για να αποφήγουμε να δουλέψουμε σε καμπύλο σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να γυρίσουμε στο αρχικό καρτεσιανό συστημα ϕ_1, ϕ_2 για τον υπολογισμό: παραγωγίζοντας την $V_s = -V_1 \sin\theta + V_2 \cos\theta$, παίρνουμε

$$\dot{V}_s = V_{\sigma s}\dot{s} - \dot{\theta} V_\sigma \tag{10.233}$$

και μπορούμε τώρα να παραγωγίσουμε την 10.232 και χρησιμοποιώντας τις 10.233 και 10.231 να πάρουμε

$$\ddot{\theta} - 3H\dot{\theta} + V_{\sigma s} - 2\frac{V_\sigma}{\dot{\sigma}}\dot{\theta} = 0. \tag{10.234}$$

10.9.3 Slow-Roll προσέγγιση

Από την προηγούμενη ενότητα έχουμε

$$H^2 = \frac{V}{3M^2} \tag{10.235}$$

και

$$\begin{aligned} H^{-1}\dot{\phi}_I &= -M^2 \frac{V_I}{V} \\ H^{-1}\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} &= -M^2 \frac{1}{V}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.236}$$

και στρέφοντας τις συντεταγμένες παίρνουμε

$$\begin{aligned} H^{-1}S^T\dot{\phi}_I &= -M^2 S^T \frac{V_I}{V} \\ H^{-1}\begin{pmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{s} \end{pmatrix} &= -M^2 \frac{1}{V}\begin{pmatrix} V_\sigma \\ V \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.237}$$

όμως $\dot{s} = 0$ άρα η δεύτερη συνειστώσα μηδενίζεται

$$V_s = 0. \tag{10.238}$$

στην slow-roll τροχια. Αυτό απλά δηλώνει ότι η τροχιά είναι πάντα στη διεύθυνση του ∇V, ώστε δεν επάρχουν λοξές συνειστώσες στο ∇V. (Κάποιος θα μπορούσε να καταλήξει από την 10.232, ότι $\dot{\theta} = 0$, αλλά αυτό θα ήταν λάθος

- πρέπει τώρα να είμαστε συνεπείς με τις slow-roll εξισώσεις, και να μην τις μπλέκουμε με τις ακριβείς εξισώσεις).

Αυτό σημαίνει ότι

$$\epsilon \equiv \epsilon_{11} + \epsilon_{22} = \frac{M^2}{2}\frac{\left(\nabla V\right)^2}{V^2} = \frac{M^2}{2}\frac{V_\sigma^2}{V^2} \tag{10.239}$$

και δεν χρειάζεται να ορίσουμε $\epsilon_{\sigma s}$, ϵ_{ss} ή ξεχωριστό $\epsilon_{\sigma\sigma}$. Εναλλακτικά έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} =& \epsilon \cos^2\theta \\ \epsilon_{22} =& \epsilon \sin^2\theta \\ \epsilon_{12} =& \epsilon \cos\theta \sin\theta. \end{aligned} \tag{10.240}$$

Αλλά ορίζουμε

$$\boxed{\eta_{\sigma\sigma} \equiv M^2\frac{V_{\sigma\sigma}}{V} \quad \eta_{\sigma s} \equiv M^2\frac{V_{\sigma s}}{V} \quad \eta_{ss} \equiv M^2\frac{V_{ss}}{V}} \tag{10.241}$$

και τα η_{IJ} μετασχηματίζονται όπως και στην 10.225

$$\begin{aligned} \eta_{\sigma\sigma} &\equiv \cos^2\theta\eta_{11} + 2\cos\theta\sin\theta\eta_{12} + \sin^2\theta\eta_{22} \\ \eta_{ss} &\equiv \sin^2\theta\eta_{11} - 2\cos\theta\sin\theta\eta_{12} + \cos^2\theta\eta_{22} \\ \eta_{\sigma s} &\equiv -\sin\theta\cos\theta\eta_{11} + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\eta_{12} + \cos\theta\sin\theta\eta_{22}, \end{aligned} \tag{10.242}$$

από την οποία βλέπουμε ότι

$$\eta_{\sigma\sigma} + \eta_{ss} = \eta_{11} + \eta_{22}. \tag{10.243}$$

ενώ παίρνουμε τον αντίθετο μετασχηματισμό απλά αλλάζοντας το πρόσημο στην γωνία θ

$$\begin{aligned} \eta_{11} &\equiv \cos^2\theta\eta_{\sigma\sigma} - 2\cos\theta\sin\theta\eta_{\sigma s} + \sin^2\theta\eta_{ss} \\ \eta_{22} &\equiv \sin^2\theta\eta_{\sigma\sigma} + 2\cos\theta\sin\theta\eta_{\sigma s} + \cos^2\theta\eta_{ss} \\ \eta_{12} &\equiv +\sin\theta\cos\theta\eta_{\sigma\sigma} + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\eta_{\sigma s} - \cos\theta\sin\theta\eta_{ss}. \end{aligned} \tag{10.244}$$

Τώρα ορίζουμε επίσης

$$\boxed{\xi_{\sigma\sigma\sigma} \equiv M^4\frac{V_\sigma V_{\sigma\sigma\sigma}}{V^2} \quad \xi_{\sigma\sigma s} \equiv M^4\frac{V_\sigma V_{\sigma\sigma s}}{V^2} \quad \xi_{\sigma ss} \equiv M^4\frac{V_\sigma V_{sss}}{V^2}.} \tag{10.245}$$

Από την εξίσωση 10.190e

$$H^{-1}\dot{\epsilon} = 4\epsilon^2 - 2\epsilon\left(\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta\eta_{12} + \sin^2\theta\eta_{22}\right) = 4\epsilon^2 - 2\epsilon\eta_{\sigma\sigma} \tag{10.246}$$

Επίσης από την 10.190c,

$$H^{-1}\begin{pmatrix}\ddot{\phi}_1\\ \ddot{\phi}_2\end{pmatrix} = \epsilon H^{-1}\begin{pmatrix}\dot{\phi}_1\\ \dot{\phi}_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\eta_{11} & \eta_{12}\\ \eta_{12} & \eta_{22}\dot{\phi}_2\end{pmatrix} H^{-1}\begin{pmatrix}\dot{\phi}_1\\ \dot{\phi}_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H^{-2}\ddot{\phi}_1 = \epsilon H^{-1}\dot{\phi}_1 - \eta_{11}H^{-1}\dot{\phi}_1 - \eta_{12}H^{-1}\dot{\phi}_2 \\ H^{-2}\ddot{\phi}_1 = \epsilon H^{-1}\dot{\phi}_2 - \eta_{12}H^{-1}\dot{\phi}_1 - \eta_{22}H^{-1}\dot{\phi}_2 \end{cases} \tag{10.247}$$

Παραγωγίζοντας την $\dot{\sigma} = \dot{\phi}_1 \cos\theta + \dot{\phi}_2 \sin\theta$, παίρνουμε

$$H^{-2}\ddot{\sigma} = H^{-1}\dot{\sigma}\big(\epsilon - \eta_{\sigma\sigma}\big)^{26} \tag{10.248}$$

και παραγωγίζοντας την $\dot{s} = -\dot{\phi}_1 \sin\theta + \dot{\phi}_2 \cos\theta = 0$, παίρνουμε την slow-roll εξίσωση για το $\dot{\theta}$:

$$H^{-1}\dot{\theta} = -\eta_{\sigma s} \propto -V_{\sigma s}. \tag{10.249}$$

Να σημειώσουμε ότι η $V_s = 0$ δεν συνεπάγεται $V_{\sigma s} = 0$, αφού δουλύουμε σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, και στο $V_{\sigma s}$ έχουμε συναλλοίωτες παραγώγους.

Είναι διδακτικό να συγκρίνουμε την ακριβή εξίσωση 10.232 με την 10.249: παίρνοντας την slow-roll προσέγγιση εξαλείφουμε τους όρους $\ddot{\phi}_I$ από την εξίσωση πεδίου. Τότε η αναζήτηση της λύσης του υποβάθρου αναγάγεται στηνν τοπογραφία του δυναμικού $V(\phi_1, \phi_2)$: Οι τροχιές είναι οι διαδρομές της πιο απότομης καθόδου, έτσι ώστε να μην υπάρχουν πλάγιες συνειστώσες V_s στην κλίση και η καμπύλωση της τροχιάς καθορίζεται από το δυναμικό: το $V_{\sigma s}$ μετράει το πως το δυναμικό

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις χρονικές παραγώγους των άλλων slow-roll παραμέτρων πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} H^{-1}\dot{\eta}_{\sigma\sigma} =& 2\epsilon\eta_{\sigma\sigma} - 2\eta_{\sigma s}^2 - \xi_{\sigma\sigma\sigma} \\ H^{-1}\dot{\eta}_{\sigma s} =& 2\epsilon\eta_{\sigma s}\big(\eta_{ss} - \eta_{\sigma\sigma}\big) - \xi_{\sigma\sigma s} \\ H^{-1}\dot{\eta}_{ss} =& 2\epsilon\eta_{ss} + 2\eta_{\sigma s}^2 - \xi_{\sigma ss}. \end{aligned} \tag{10.250}$$

10.9.4 Διαταραχές

Οι διαταραχές του πεδίου μετασχηματίζονται στην αδιαβατική $Q_\sigma \equiv \delta\sigma_Q$ και εντροπική διαταραχή $Q_s \equiv \delta s_Q \equiv \delta s$ του πεδίου. (δουλεύουμε στην

[26] Βλέπε απόδειξη VI

βαθμίδα επίπεδου χώρου και δεν γράφουμε πλέον τον δείκτη Q για τη βαθμίδα). Επομένως

$$\begin{pmatrix} \delta\sigma \\ \delta s \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} \delta\phi_1 \\ \delta\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\phi_1 \\ \delta\phi_2 \end{pmatrix}, \tag{10.251}$$

και

$$\begin{pmatrix} \delta\phi_1 \\ \delta\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\sigma \\ \delta s \end{pmatrix}. \tag{10.252}$$

οι εξισώσεις εξέλιξης για τις διαταραχές αυτές γίνοται

$$\delta\ddot{\sigma}+3H\delta\dot{\sigma}+\left[-\frac{1}{a^2}\nabla^2+V_{\sigma\sigma}-\dot{\sigma}^2-\frac{8\pi G}{a^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{a^3}{H}\dot{\sigma}^2\right)\right]\delta\sigma = 2\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\delta s)-2\left(\frac{V_\sigma}{\dot{\sigma}}\right)\dot{\theta}\delta s \tag{10.253}$$

και

$$\delta\ddot{s}+3H\delta\dot{\sigma}+\left(-\frac{1}{a^2}\nabla^2+V_{ss}+3\dot{\theta}^2\right)\delta s = -\frac{\dot{\theta}}{\dot{\sigma}}\frac{1}{2\pi G}\frac{1}{a^2}\nabla^2\Phi. \tag{10.254}$$

Βλέπουμε ότι για μια ευθεία τροχιά $\dot{\theta}=0$, η εξίσωση για το $\delta\sigma$ είναι ίδια με την εξίσωση για την περίπτωση ενός πεδίου, αλλά για μια καμπύλη τροχιά, η εντροπική διαταραχή δs παίζει το ρόλο πηγής. Το δεξί μέλος στην εξίσωση για το δs είναι μικρό για κλίμακες έξω από τον ορίζοντα (superhorizon).

10.9.5 Διαταραχές Εντροπίας και Καμυπλότητας

Η σύμμορφη διαταραχή της καμπυλότητας είναι

$$\mathcal{R} = -H\frac{\dot{\phi}_1\delta\phi_1+\dot{\phi}_2\delta\phi_2}{\dot{\phi}_1^2+\dot{\phi}_2^2} = -H\frac{\delta\sigma}{\dot{\sigma}} \tag{10.255}$$

Και για αυτή παίρνουμε μια διαφορική εξίσωση που μας δίνει την εξέληξή της

$$\dot{\mathcal{R}} = \frac{H}{\dot{H}}\frac{1}{a^2}\nabla^2\Phi\underline{-2H\frac{\dot{\theta}}{\dot{\sigma}}\delta s}. \tag{10.256}$$

Συνεπώς το $\mathcal{R}$ παραμένει σταθερό σε κλίμακες έξω από τον ορίζοντα, εάν δεν υπάρχουν εντροπικές διαταραχές του πεδίου, αλλά το δs δρα ως πηγή.

Ορίζουμε μια ανάλογη εντροπική διαταραχή

$$S \equiv H\frac{\delta s}{\dot{\sigma}} \tag{10.257}$$

Άρα, για κλίμακες έξω από τον ορίζοντα

$$\dot{\mathcal{R}} = -2\dot{\theta}S \quad (k \ll \mathcal{H}). \tag{10.258}$$

10.9.6 Εξέληξη κατά την έξοδο από τον Ορίζοντα

Τα $\delta\sigma$ και δs δεν αντιστοιχούν στις ανεξάρτητες συνεισφόρες του πεδίου κατά την έξοδο από τον ορίζοντα που συζητήσαμε στην 10.8.3. Αυτές παίρνονται με στροφή με μια διαφορετική γωνία Θ. Για τις ανεξάτητες διαταραχές υ_1 και υ_2 βρήκαμε

$$\vec{u} = U\vec{\upsilon}, \quad \vec{\upsilon} = U^T\vec{u}, \tag{10.259}$$

όπου

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a\delta\phi_1 \\ a\delta\phi_2 \end{pmatrix} = (aQ_1 aQ_2) \tag{10.260}$$

και

$$U \equiv \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{10.261}$$

είναι ένας πίνακας στροφών ο οποίος διαγωνοποιείται όπως

$$M = \begin{pmatrix} \epsilon + 2\epsilon_{11} - \eta_{11} & 2\epsilon_{12} - \eta_{12} \\ 2\epsilon_{12} - \eta_{12} & \epsilon + 2\epsilon_{22} - \eta_{22} \end{pmatrix}, \tag{10.262}$$

πχ,

$$U^T M U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{10.263}$$

Μπορούμε να λύσουμε ως προς Θ από την συνθήκη το $U^T M U$ να είναι διαγώνιο, πχ

$$(U^T M U)_{12} = \big(2\epsilon_{22} - \epsilon_{11} + \eta_{11} - \eta_{22}\big)\sin\Theta\cos\Theta + \big(2\epsilon_{12} - \eta_{12}\big)(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta) = 0, \tag{10.264}$$

όπου

$$\sin\Theta\cos\Theta = \frac{1}{2}\sin 2\Theta \quad \text{και} \quad \cos^2\Theta - \sin^2\Theta = 0, \tag{10.265}$$

ώστε

$$\tan 2\Theta = 2\left[\frac{2\epsilon_{12} - \eta_{12}}{2(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) - (\eta_{11} - \eta_{22})}\right]. \tag{10.266}$$

Τα λ_1, λ_2 είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα M οι οποίες παίρνονται ως λύσεις από την

$$\det(M - \lambda I) = 0 \tag{10.267}$$

της οποίας οι λύσεις είναι

$$\lambda = \frac{1}{2}\{4\epsilon - (\eta_{11} + \eta_{22}) \pm \sqrt{\left[2(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) - (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\right]^2 + 4(2\epsilon_{12} - \eta_{12})^2}\}. \tag{10.268}$$

Αυτή δεν μας διαφωτίζει για το είναι η λ_1 και ποια η λ_2, αλλά ούτε 10.266 μας προσδιορίζει το Θ με απροσδιοριστεία ενός όρου $\pi/2$ πχ μπορούμε να προσθέσουμε $\pi/2$ στο Θ, το οποίο εναλλάσει τις λ_1 και λ_2. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της ενότητας 10.9.3 για να ξαναγράψουμε τα αποτελέσματα 10.266 και 10.268 σε όρους των στρεμένων slow-roll παραμέτρων:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[4\epsilon - (\eta_{\sigma\sigma} + \eta_{ss}) \pm \sqrt{\omega^2 + 4\eta_{\sigma s}^2}\right] \tag{10.269}$$

και

$$\tan 2\Theta = \frac{\omega \sin 2\theta - 2\eta_{\sigma s}\cos 2\theta}{\omega \cos 2\theta + 2\eta_{\sigma s}\sin 2\theta}, \tag{10.270}$$

όπου έχουμε ορίσει τον παρακάτω συμβολισμό για συντομογραφία

$$\omega \equiv 2\epsilon - (\eta_{\sigma\sigma} - \eta_{ss}). \tag{10.271}$$

Από την 10.270 βλέπουμε ότι $\tan 2\Theta = \tan 2\theta$, εάν $\eta_{\sigma s} = 0$, πχ $V_{\sigma s} = 0$. Επομένως στην περίπτωση αυτή, οι ανεξάρτητες διαταραχές του πεδίου είναι η αδιαβατικές και οι εντροπικές διαταραχές, αλλά σε κάθε άλλη περίπτωση δεν είναι.

Συνδυάζοντας τις δύο στροφές 10.251 και 10.259 μπορούμε να στρέψουμε τις ανεξάρτητα παραχθείσες διαταραχές σε αδιαβατικές και εντροπικές διαταραχές του πεδίου

$$\begin{pmatrix} a\delta\sigma \\ a\delta s \end{pmatrix} = S^T U \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta - \theta) & -\sin(\Theta - \theta) \\ \sin(\Theta - \theta) & \cos(\Theta - \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{pmatrix} \tag{10.272}$$

Χρησιμοποιώντας την 10.270 μπορούμε ύκολα να βρούμε ότι

$$\begin{aligned} \tan 2(\Theta - \theta) &= -2\frac{\eta_{\sigma s}}{\omega} \\ \cos 2(\Theta - \theta) &= \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 4\eta_{\sigma s}^2}} \\ \sin 2(\Theta - \theta) &= \frac{-2\eta_{\sigma s}}{\sqrt{\omega^2 + 4\eta_{\sigma s}^2}}. \end{aligned} \tag{10.273}$$

Μπορούμε τώρα να πάρουμε τις διαταραχές $\delta\sigma$ και δs, από αυτές των υ_1 και υ_2

που πήραμε στην ενότητα 10.8.3:

$$
\begin{aligned}
\upsilon_L =& a w_L \to L^{-3/2} 2^{\lambda_L} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+\lambda_L)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\eta)^{-1-\lambda_L} \\
\langle |\upsilon_L|^2 \rangle =& \nabla V^{-1} 2^{\lambda_L} \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+\lambda_L)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right]^2 \frac{1}{2k} (-k\eta)^{-2-2\lambda_L} \\
\langle \upsilon_1 \upsilon_2^\star \rangle =& 0
\end{aligned}
\tag{10.274}
$$

Για το φάσμα ισχύος χρειαζόμαστε αυτά στη μορφή

$$
\mathcal{V} \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{1}{a^2} \langle |\upsilon_L|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} 2^{2\lambda_L} \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+\lambda_L)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right]^2 \left(\frac{k}{a} \right)^2 (-k\eta)^{-2-2\lambda_L} \tag{10.275}
$$

Για κάθε κλίμακα k υπολογίζουμε αυτή τη σχέση στην έξοδο από τον ορίζοντα, όπου $k = \mathcal{H} = aH$ και $-k\eta = 1/(1-\epsilon)$ (από την 10.191). Άρα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V} \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{1}{a^2} \langle |\upsilon_L|^2 \rangle =& \left(\frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 2^{\lambda_L} \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+\lambda_L)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right]^2 (1-\epsilon)^{2+2\lambda_L} \\
\approx& \left(\frac{H_\star}{2\pi} \right)^2 (1 + 2C\lambda_L - 2\epsilon),
\end{aligned}
\tag{10.276}
$$

όπου $C \equiv 2 - \ln 2 - \gamma \approx 0.729637$ και το $H_\star$ δηλώνει ότι το H υπολογίζεται στην έξοδο του ορίζοντα (όπως επίσης και τα ϵ και λ_L).

Χρησιμοποιώντας την 10.272 έχουμε

$$
\begin{aligned}
a^2 \langle |\delta\sigma|^2 \rangle =& \langle \big[\cos(\Theta-\theta)\upsilon_1 - \sin(\Theta-\theta)\upsilon_2 \big] \big[\cos(\Theta-\theta)\upsilon_1 - \sin(\Theta-\theta)\upsilon_2 \big]^\star \rangle \\
=& \cos^2(\Theta-\theta) \langle |\upsilon_1|^2 \rangle + \frac{1}{2} \sin^2(\Theta-\theta) \langle |\upsilon_2|^2 \rangle \\
=& \frac{1}{2} \big(\langle |\upsilon_1|^2 \rangle + \langle |\upsilon_2|^2 \rangle \big) + \frac{1}{2} \cos 2(\Theta-\theta) \big(\langle |\upsilon_1|^2 \rangle - \langle |\upsilon_2|^2 \rangle \big) \\
a^2 \langle \delta\sigma\delta s^\star \rangle =& \langle \big[\cos(\Theta-\theta)\upsilon_1 - \sin(\Theta-\theta)\upsilon_2 \big] \big[\sin(\Theta-\theta)\upsilon_1 + \cos(\Theta-\theta)\upsilon_2 \big]^\star \rangle \\
=& \frac{1}{2} \sin 2(\Theta-\theta) big(\langle |\upsilon_1|^2 \rangle - \langle |\upsilon_2|^2 \rangle \big) \\
a^2 \langle |\delta s|^2 \rangle =& \frac{1}{2} big(\langle |\upsilon_1|^2 \rangle + \langle |\upsilon_2|^2 \rangle \big) - \frac{1}{2} \cos 2(\Theta-\theta) big(\langle |\upsilon_1|^2 \rangle - \langle |\upsilon_2|^2 \rangle \big).
\end{aligned}
\tag{10.277}
$$

Από την 10.269 παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 =& 4\epsilon - \big(\eta_{\sigma\sigma} + \eta_{ss} \big) \\
\lambda_1 - \lambda_2 =& \sqrt{\omega^2 + 4\eta_{\sigma s}^2}.
\end{aligned}
\tag{10.278}
$$

Τέλος για το φάσμα ισχύος των αδιαβατικών και εντροπικών διαταραχών, καθώς και για τις συσχετίσεις τους πάιρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\sigma\star}(k) \equiv & \mathcal{V}\frac{k^3}{2\pi^2}\langle|\delta\sigma_{\vec{k}}|^2\rangle = \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)\left[1+(-1+6C)\epsilon-2C\eta_{\sigma\sigma}\right] \\
\mathcal{C}_{\sigma s\star}(k) \equiv & \mathcal{V}\frac{k^3}{2\pi^2}\langle\delta\sigma_{\vec{k}}\delta\sigma^\star_{\vec{k}}\rangle = -2C\eta_{\sigma s}\left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^2 \\
\mathcal{P}_{s\star}(k) \equiv & \mathcal{V}\frac{k^3}{2\pi^2}\langle|\delta s_{\vec{k}}|^2\rangle = \left(\frac{H_\star}{2\pi}\right)^2\left[1-2(1-C)\epsilon-2C\eta_{ss}\right].
\end{aligned} \tag{10.279}$$

10.9.7 Εξέληξη έξω από τον Ορίζοντα

Χρησιμοποιώντας τις 10.255 και 10.257, αμέσως παίρνουμε από την 10.279 το διαταρακτικό φάσμα για το $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$, καθώς δημιουργούνται με την έξοδο από τον ορίζοντα,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathcal{R}\star}(k) &= \left(\frac{H_\star}{\dot{\sigma}_\star}\right)^2\mathcal{P}_{\sigma\star}(k) = \left(\frac{H_\star^2}{2\pi\dot{\sigma}_\star}\right)^2\left[1+(-2+6C)\eta-2C\eta_{\sigma\sigma}\right] \\
\mathcal{C}_{\mathcal{RS}\star}(\star) &= -\left(\frac{H_\star}{\dot{\sigma}_\star}\right)^2\mathcal{C}_{\sigma s\star}(k) = +2C\eta_{\sigma s}\left(\frac{H_\star^2}{2\pi\dot{\sigma}_\star}\right)^2 \\
\mathcal{P}_{S\star}(k) &= \left(\frac{H_\star}{\dot{\sigma}_\star}\right)^2\mathcal{P}_{s\star}(k) = \left(\frac{H_\star^2}{\dot{\sigma}_\star}\right)^2\left[1-2(1-C)\epsilon-2C\eta_{ss}\right].
\end{aligned} \tag{10.280}$$

Ωστόσο, σε αντίθεση με την περίπτωση του 1 πεδίου, όπου το $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ παραμένει σταθερό στο χρόνογια όσο ισχύει $k \ll \mathcal{H}$, τώρα το διαταραγκτικό φάσμα μπορεί να εξελιχθεί και έξω από τον ορίζοντα. Σε πρώτης τάξης θεωρία διαταραχών, οι συνειστώσες Fourier της διαταραχής σε κάποιο ύστερο χρόνο t θα είναι ανάλογοι των νωρίτερων τιμών στο $t_\star$:

$$\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{\vec{k}}(t)\\ S_{\vec{k}}(t)\end{pmatrix} = T_k(t,t_\star)\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{\vec{k}\star}\\ \mathcal{S}_{\vec{k}\star}\end{pmatrix} \tag{10.281}$$

(Γράφουμε T_k και όχι $T_{\vec{k}}$ αφού η αντίστοιχη φυσική θεωρείται αναλοίωτη σε στροφές.)

Για υπεροριζόντιες κλίμακες, η εξάρτηση της εξέλιξης από τη κλίμακα εξαφανίζεται, ώστε $T_k(t,t_\star) = T(t,t_\star)$. Ωστόσο η 10.281 παραμένει εξαρτώμενη της κλίμακας, αφού το $t_\star$ εξαρτάται από το k. Συνεπώς

$$\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{\vec{k}}(t)\\ S_{\vec{k}}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T_{\mathcal{RR}}(t,t_\star) & T_{\mathcal{RS}}(t,t_\star)\\ T_{\mathcal{SR}}(t,t_\star) & T_{SS}(t,t_\star)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{\vec{k}\star}\\ S_{\vec{k}\star}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T_{\mathcal{RR}}(t,t_\star)\mathcal{R}_{\vec{k}\star}+T_{\mathcal{RS}}(t,t_\star)\mathcal{S}_{\vec{k}\star}\\ T_{\mathcal{SR}}(t,t_\star)\mathcal{R}_{\vec{k}\star}+T_{\mathcal{SS}}(t,t_\star)\mathcal{S}_{\vec{k}\star}\end{pmatrix} \tag{10.282}$$

Γνωρίζουμε δύο πράγματα που ισχύουν γενικά για τις διαταραχές στον υπερορίζοντα: 1) αδιαβατικές διαταραχές παραμένουν αδιαβατικές $\Rightarrow T_{\mathcal{SR}}$ 2) για αδιαβατικές διαταραχές, $\mathcal{R}$ είναι σταθερή στο χρόνο $\Rightarrow {}_{\mathcal{RR}} = 1$. Επομένως η 10.282 γίνεται

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}_{\vec{k}}(t) \\ S_{\vec{k}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T_{\mathcal{RS}}(t,t_\star) \\ 0 & T_{\mathcal{SS}}(t,t_\star) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{\vec{k}\star} \\ S_{\vec{k}\star} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{\vec{k}\star} + T_{\mathcal{RS}}(t,t_\star) S_{\vec{k}\star} \\ T_{SS}(t,t_\star) S_{\vec{k}\star} \end{pmatrix}, \tag{10.283}$$

και μπορούμε επίης, ορίζοντας δύο συναρτήσεις $a(t)$ και $\beta(t)$ που σχετίζονται με τις εξισώσεις μεταφοράς $T_{\mathcal{PS}}$ και $T_{\mathcal{SS}}$, να γράψουμε ότι εν γένει,

$$H^{-1}\mathcal{R} = a(t)S \quad H^{-1}\dot{S} = \beta(t)S. \tag{10.284}$$

Μπορούμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ αυτών των συναρτήσεων και των συναρτήσεων μεταφοράς, ολοκληρώνοντας τις 10.284. Αρχικά γράφουμε την δεύτερη από αυτές ως

$$\begin{aligned} d\ln S(t') \equiv & \frac{dS(t')}{S(t')} = \beta(t')H(t')dt' \Rightarrow \ln S(t) - \ln S(t_\star) = \int_{t_\star}^{t} \beta(t')H(t')dt' \\ \Rightarrow T_{SS}(t,t_\star) \equiv & \frac{S(t)}{S(t_\star)} = \exp\left\{ \int_{t_\star}^{t} \beta(t')H(t')dt' \right\}. \end{aligned} \tag{10.285}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t) =& \mathcal{R}(t_\star) + \int_{t_\star}^{t} \dot{\mathcal{R}} dt = \mathcal{R}(t_\star) + \int_{t_\star}^{t} a(t')H(t')S(t')dt' \\ =& \mathcal{R}(t_\star) + \int_{t_\star}^{t} a(t')H(t')T_{SS}(t',t_\star)S(t_\star)dt' \\ \Rightarrow T_{\mathcal{RS}}(t,t_\star) =& \int_{t_\star}^{t} a(t')H(t')T_{SS}(t',t_\star)dt'. \end{aligned} \tag{10.286}$$

Οι μόνες ποσότητες που εξαρτώνται από το k ή το $\vec{k}$ στην (10.285,10.286) είναι οι $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\vec{k}}$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\vec{k}}$, και $t_\star = t_\star(k)$. Παραπάνω τα a, β, $T_{\mathcal{SS}}$ και $T_{\mathcal{RS}}$, εξαρτώνται από το μοντέλο του inflation, και τα $T_{\mathcal{SS}}(t,t_\star)$ και $T_{\mathcal{RS}}(t,t_\star)$ μπορεί να είναι πολύπλοκο να υπολογιστούν. Προκειμένου να βρούμε τους φαρματικούς δείχτες, χρειαζόμαστε τις παραγώγους των $T_{\mathcal{SS}}$ και $T_{\mathcal{RS}}$ ως προς το k, τις οποίες παίρνουμε από

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\mathcal{SS}}}{\partial t_\star} =& -\beta(t_\star)H(t_\star)T_{SS}(t,t_\star) \\ \frac{\partial T_{\mathcal{RS}}}{\partial t_\star} =& -a(t_\star)H(t_\star)T_{SS}(t_\star,t_\star) + \int_{t_\star}^{t} a(t')H(t')\frac{\partial T_{\mathcal{SS}}(t',t_\star)}{\partial t_\star}dt' \\ =& -a(t_\star)H(t_\star) - \beta(t_\star)H(t_\star)\int_{t_\star}^{t} a(t')H(t')T_{SS}(t',t_\star)dt' \\ =& -a(t_\star)H(t_\star) - \beta(t_\star)H(t_\star)T_{\mathcal{RS}}(t,t_\star). \end{aligned} \tag{10.287}$$

Επομένως χρειαζόμαστε τα $a(t_\star)$ και $\beta(t_\star)$ στο χρονο $t_\star$ της εξόδου από τον ορίζοντα στο inflation, τα οποία είναι πιο εύκολα προσβάσημα σε όρους των slow-roll παραμέτρων σε αυτή την περίοδο.

Τα αρχέγονα φάσματα $\mathcal{P}_\mathcal{R}(k)$, $\mathcal{C}_{\mathcal{RS}}(k)$, $\mathcal{P}_\mathcal{S}(k)$ είναι ορισμένα σε κάποιο χρόνο t μετά το inflation, κατά την περίοδο κυριαρχίας της ακτινοβολίας, όταν όλες οι κοσμολογικές κλίμακες ήταν ακόμα αρκετά έξω από τον ορίζοντα:

$$\mathcal{P}_\mathcal{R}(k) \equiv \mathcal{V}\frac{k^3}{2\pi^2}\langle|\mathcal{R}_{\vec{k}}|^2\rangle = \mathcal{P}_{\mathcal{R}\star}(k) + 2T_{\mathcal{RS}}(t,t_\star)\mathcal{C}_{\mathcal{RS}\star}(k) + T_{\mathcal{RS}}(t,t_\star)^2\mathcal{P}_(S\star)(k) \tag{10.288}$$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{RC}}(k) \equiv \mathcal{V}\frac{k^3}{2\pi^2}\langle\mathcal{R}_{\vec{k}}S^\star_{\vec{k}}\rangle = T_{SS}(t,t_\star)C_{\mathcal{RS}\star}(k) + T_{\mathcal{RS}}(t,t_\star)T_{SS}\mathcal{P}_{S\star}(k) \tag{10.289}$$

$$\mathcal{P}_S(k) \equiv \mathcal{V}\frac{k^3}{2\pi^2}\langle|S_{\vec{k}}|^2\rangle = T_{SS}(t,t_\star)^2\mathcal{P}_{S\star}(k).^{27} \tag{10.290}$$

Αφού αυτές αναφέρονται σε χρόνο μετά το inflation, όταν τα βαθμωτά πεδία του inflation θα έχουν αντικατασταθεί από ύλη και ακτινοβολία, οι εξισώσεις 10.255 και 10.257 δεν θα ισχύουν πλέον. Παρόλα αυτά, συνεχίζουμε να έχουμε μια σύμμορφη διαταρακική καμπυλότητα $\mathcal{R}$ και ποσότητες που ονομάζονται εντροπικές διαταραχές, οι οποίες περιγράφουν τις αποκλίσεις από την αδιαβατικότητα. Αφού σε αυτή την ενότητα υποθέσαμε ότι όλες οι διαταραχές πηγάζουν από slow-roll inflation με δύο πεδία, υπάρχουν μόνο δύο βαθμοί ελευθερίας σε κάθε όρο Fourier, αφήνοντας μόνο ένα βαθμό ελευθερίας για την απόκλιση από την αδιαβατικότητα. Επομένως όλες οι εντροπικές διαταραχές μπορούν να δωθούν συναρτήσει μιας ποσότητας $S_{\vec{k}}$ ανά όρο Fourier.

10.9.8 Αρχέγονοι φασματικοί δείκτες σε πρώτη τάξη

Για να υπολογήσουμε τους φασματικούς δείκτες σε πρώτη τάξη των slow-roll παραμέτρων, είναι αρκετό να ξεκινήσει κανείς από το δημιουργούμενο φάσμα υπολογισμένο σε 0^η τάξη. Συνεπώς αντί για την ?? αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}\star}(k) = \left(\frac{H_\star^2}{2\pi\dot{\sigma}_\star}\right)^2 \equiv \mathcal{P}_\star(k) \tag{10.291}$$

$$C_{\mathcal{RS}\star} = 0 \tag{10.292}$$

$$\mathcal{P}_{S\star} = \left(\frac{H_\star^2}{2\pi\dot{\sigma}_\star}\right)^2 = \mathcal{P}_\star^{(0)}(k). \tag{10.293}$$

Οι εξισώσεις 10.288, 10.289, 10.290 τώρα γίνονται

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\star}^{(0)}(k) + T_{\mathcal{RS}}^2 \mathcal{P}_{\star}^{(0)}(k) \tag{10.294}$$

$$C_{\mathcal{RS}}(k) = T_{\mathcal{RS}} T_{SS} \mathcal{P}_{\star}^{(0)}(k) \tag{10.295}$$

$$\mathcal{P}_S(k) = T_{SS}^2 \mathcal{P}_{\star}^{(0)}(k). \tag{10.296}$$

Για να υπολογίσουμε τους φασματικούς δείκτες, χρειαζόμαστε τα $a(t_\star)$ και $\beta(t_\star)$. Από την 10.258, $\dot{\mathcal{R}} = -\dot{\theta} S$. Στην slow-roll προσέγγιση, από την 10.249 $\dot{\theta} = -H\eta_{\sigma s}$. Άρα έχουμε

$$\dot{\mathcal{R}} = 2H\eta_{\sigma s} S \quad \Rightarrow \quad a(t_\star) = 2\eta_{\sigma s}. \tag{10.297}$$

Προκειμένου να πάρουμε μια slow-roll προσέγγιση για το $\beta(t_\star)$ στον υπερορίζοντα, ξεκινάμε από την 10.254. Στο όριο του υπερορίζοντα, μπορούμε να αγνοήσουμε τον ∇^2 όρο, παίρνοντας έτσι

$$\ddot{\delta s} + 3H\dot{\delta s} + \left(V_{ss} + 3\dot{\theta}^2\right)\delta s = 0. \tag{10.298}$$

Στην slow-roll προσέγγιση αγνοούμε τη δεύτερη χρονική παράγωγο άρα έχουμε (γρ'αφοντας τα V_{ss} και $\dot{\theta}$ σε όρους των slow-roll παραμέτρων),

$$3H\dot{\delta s} + 3H^2\left(\eta_{ss} + \eta_{\sigma s}^2\right)\delta s = 0 \tag{10.299}$$

Αγνοώντας τον 2ης τάξη όρο, αυτή γίνεται

$$H^{-1}\dot{\delta s} + \eta_{ss}\delta s = 0, \tag{10.300}$$

(Το σημαντικό σημείο είναι ότι σε υπεροριζόντιες κλίμακες, τα διαφορετικά τμήματα του σύμπαντος είναι ασύνδετα μεταξύ τους, και η ανομοιογένεια των διαταραχών δεν παίζει ρόλο στην τοπική τους εξέληξη. Επομένως το $\vec{\phi} + \delta\vec{\phi}$ εξελίσσεται όπως το υπόβαθρο, απλά πάνω σε διαφορετική slow-roll τροχιά.)

Για $S \equiv (H/\dot{\sigma})$ αυτή γίνεται η εξίσωση

$$H^{-1}\dot{S} = (-2\epsilon + \eta_{\sigma\sigma} - \eta_{ss})S \quad \Rightarrow \quad \beta(t_\star) = -2\epsilon + \eta_{\sigma\sigma} - \eta_{ss}. \tag{10.301}$$

Είμαστε τώρα έτοι,οι να υπολογίσουμε τους φασματικούς δείκτες. Από τις ....

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}\star} + T_{\mathcal{RS}}(t, t_\star)^2 \mathcal{P}_{S\star}(k) = \frac{H^4}{4\pi^2\dot{\sigma}^2}\left(1 + T_{\mathcal{RS}}^2\right), \tag{10.302}$$

όπου για κάθε κλίμακα k, τα H και $\dot{\sigma}$ υπολογίζονται στο $t_\star$, όταν $k = aH$; και $T_{\mathcal{RS}} = T_{\mathcal{RS}}(t, t_\star)$. Από τις 10.235 και 10.237

$$\frac{H^4}{\dot{\sigma}^2} = H^2(H^{-1}\dot{\sigma})^{-2} = \frac{V}{3M^2}\frac{V^2}{M^4 V_\sigma^2} \propto \frac{V}{\epsilon}. \tag{10.303}$$

Ο φασματικός δείκτης $\eta_{\mathcal{R}}$ δίνεται από την

$$\eta_{\mathcal{R}} \equiv \frac{d\ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)}{d\ln k} = \frac{d\ln V}{d\ln k} - \frac{d\ln \epsilon}{d\ln k} + \frac{d\ln(1+T_{\mathcal{RS}}^2)}{d\ln k}. \tag{10.304}$$

Το $d\ln k$ μπορεί να αντικατασταθεί από χρονική παράγωγο

$$\frac{d\ln k}{dt} = \frac{d\ln(aH)}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{H}}{H} = H\left(1+\frac{\dot{H}}{H^2}\right) = (1-\epsilon)H \tag{10.305}$$

(όπου στο τελευτάιο βήμα χρησιμοποιήσαμε την 10.190a). Τώρα με χρήση των 10.237 και 10.239

$$\frac{d\ln V}{d\ln k} = \frac{1}{V}\frac{1}{(1-\epsilon)H}\dot{V} = \frac{1}{V}\frac{1}{(1-\epsilon)H}V_\sigma\dot{\sigma} = \frac{-M^2}{1-\epsilon}\left(\frac{V_\sigma}{V}\right)^2 = \frac{-2}{1-\epsilon}\epsilon \approx -2\epsilon \tag{10.306}$$

Με χρήση της 10.246

$$\frac{d\ln \epsilon}{d\ln k} = \frac{1}{(1-\epsilon)H}\frac{\dot{\epsilon o}}{\epsilon} = \frac{4\epsilon - 2\eta_{\sigma\sigma}}{1-\epsilon} \approx 4\epsilon - 2\eta_{\sigma\sigma}. \tag{10.307}$$

Οι δύο αυτές συνεισφορές προστίθενται στο αποτέλεσμα που είχαμε στην περίπτωση ενός μόνο πεδίου.

Ο νέος όρος προέρχεται από το

$$\begin{aligned}\frac{d\ln(1+T_{\mathcal{RS}}^2)}{d\ln k} \approx& \frac{1}{1+T_{\mathcal{RS}}^2}H^{-1}\frac{d}{dt_\star}(1+T_{\mathcal{RS}}^2) = \frac{2T_{\mathcal{RS}}}{1+T_{\mathcal{RS}}^2}H^{-1}\frac{\partial T_{\mathcal{RS}}}{\partial t_\star}\\ =&\frac{2T_{\mathcal{RS}}}{1+T_{\mathcal{RS}}^2}\big[-a(t_\star)-\beta(t_\star)T_{\mathcal{RS}}\big]\\ =&\frac{2T_{\mathcal{RS}}}{1+T_{\mathcal{RS}}^2}(-4\eta_{\sigma s}) + \frac{T_{\mathcal{RS}}^2}{1+T_{\mathcal{RS}}^2}(4\epsilon - 2\eta_{\sigma\sigma} + 2\eta_{ss}).\end{aligned} \tag{10.308}$$

Έχουμε δύο εκ των προτέρων περιορισμούς στο $T_{\mathcal{RS}}$. Εξαρτώνται από το μοντέλο του inflation που εξετάζουμε, συμπεριλαμβανομένης και της εποχής της αναθέρμανσης. Από την άλλη, οι συνδιασμοί $T_{\mathcal{RS}}/(1+T_{\mathcal{RS}}^2)$ και $T_{\mathcal{RS}}^2/(1+T_{\mathcal{RS}}^2)$ παραπάνω έχουν περιορισμένο εύρος - ο τελευταίος πρέπει να είναι μεταξύ του 0 και του 1. Η τετραγωνική του ρίζα πρέπει να είναι μεταξύ του -1 και του 1 και έχει καθιερωθεί να ορίζεται ως προς την γωνία Δ, έτσι ώστε

$$\cos\Delta \equiv \frac{T_{\mathcal{RS}}}{\sqrt{1+T_{\mathcal{RS}}^2}} \tag{10.309}$$

Από αυτό παίρνουμε

$$\frac{T_{\mathcal{RS}}^2}{1+T_{\mathcal{RS}}^2} = \cos^2\Delta, \quad \frac{1}{1+T_{\mathcal{RS}}^2} = \sin^2\Delta, \quad \frac{1}{\sqrt{1+T_{\mathcal{RS}}^2}} = \sin\Delta \tag{10.310}$$

(επιλέγοντας $0 \leq \Delta \leq \pi$), και

$$\frac{1}{T_{\mathcal{RS}}^2} = \tan^2 \Delta, \quad \frac{1}{T_{\mathcal{RS}}} = \tan \Delta. \tag{10.311}$$

Αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε την 10.308 ως

$$\frac{d \ln(1 + T_{\mathcal{RS}}^2)}{d \ln k} \approx -4\eta_{\sigma s} \cos \Delta \sin \Delta + (4\epsilon - 2\eta_{\sigma\sigma} + 2\eta_{ss}) \cos^2 \Delta \tag{10.312}$$

και συνολικά έχουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\eta_{\mathcal{R}} = -(6 - 4\cos^2 \Delta)\epsilon + 2\eta_{\sigma\sigma} \sin^2 \Delta - 4\eta_{\sigma s} \cos \Delta \sin \Delta + 2\eta_{ss} \cos^2 \Delta. \tag{10.313}$$

Με όμοιο τρόπο παίρνουμε και

$$\eta_S = -2\epsilon + 2\eta_{ss} \tag{10.314}$$

και

$$\eta_C \equiv \frac{d \ln \mathcal{C}_{\mathcal{RS}}(k)}{d \ln k} = -2\epsilon - 2\eta_{\sigma s} \tan \Delta + 2\eta_{ss}. \tag{10.315}$$

Παραγωγίζοντας σε 2η τάξη των slow-roll παραμέτρων:

$$\begin{aligned}
q_s \equiv & \frac{d\eta_S}{d \ln k} \approx H^{-1}\dot{\eta}_S = -2H^{-1}\dot{\epsilon} + 2H^{-1}\dot{\eta}_{ss} = -8\epsilon^2 + 4\epsilon\big(\eta_{\sigma\sigma} + \eta_{ss}\big) + 4\eta_{\sigma s}^2 + 2\xi_{\sigma ss} \\
q_{\mathcal{C}} \equiv & \frac{d\eta}{d \ln k} \approx H^{-1}\dot{\eta}_C = \cdots \\
= & -8\epsilon^2 + 4\epsilon(\eta_{\sigma\sigma} + \eta_{ss}) + 4\eta_{\sigma s}^2(1 - \tan^2 \Delta) - 4\eta_{\sigma s}(\eta_{\sigma\sigma} - \eta_{ss}) \tan \Delta + 2\xi_{\sigma\sigma s} \tan \Delta - 2\xi_{\sigma ss} \\
q_{\mathcal{R}} \equiv & \frac{d\eta_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \approx H^{-1}\dot{\eta}_{\mathcal{R}} = \cdots \\
= & 8(-3 + 4\cos^{\Delta} - 2\cos^4 \Delta)\epsilon^2 \\
& + 4(4 - 7\cos^2 \Delta + 4\cos^4 \Delta)\epsilon\eta_{\sigma\sigma} - 32\sin^3 \Delta \cos \Delta \epsilon\eta_{\sigma s} + 4(5\cos^2 \Delta - 4\cos^4 \Delta)\epsilon\eta_{\sigma\sigma} \\
& + 4\sin^2 \Delta \cos^2 \Delta(\eta_{\sigma\sigma}^2 + \eta_{ss}^2) + 4(1 - 4\sin^2 \Delta \cos^2 \Delta)\eta_{\sigma s}^2 \\
& + 8(\sin \Delta \cos \Delta - 2\sin \Delta \cos^3 \Delta)\eta_{\sigma}(\eta_{\sigma\sigma} - \eta_{ss}) - 8\sin^2 \Delta \cos^2 \Delta \eta_{\sigma\sigma}\eta_{ss} \\
& - 2\sin^2 \Delta \xi_{\sigma\sigma\sigma} + 4\sin \Delta \cos \Delta \xi_{\sigma\sigma s} - 2\cos^2 \Delta \xi_{\sigma ss}.
\end{aligned} \tag{10.316}$$

Αφού η εξέλιξη των φασματικών δεικτών είναι 2ης τάξης ως προς τις slow-roll παραμέτρους,είναι συνήθως καλή προσέγγιση το να προσεγγίζουμε το φάσμα ισχύος με ένα πολυωνυμικό όρο, πχ. με σταθερούς φασματικούς δείκτες. Εξαίρεση σε αυτό αποτελεί το η_C, στην περίτωση όπου το $T_{\mathcal{RS}}$ είναι πολύ μικρό, πχ. το $\tan \Delta$ είναι πολύ μεγάλο ακόμα και αν οι slow-roll παράμετροι είναι σταθεροί. Ο φασματικός δείκτης $\eta_{\mathcal{C}}$ από μόνος του εμπεριέχει τον όρο $-2\eta_{\sigma s} \tan \Delta$, το οποίο μπορεί να κάνει το $\eta_{\mathcal{C}}$ μεγάλο. Συνεπώς η συσχέτιση $\mathcal{C}_{\mathcal{RS}}(k)$ δεν προσεγγίζεται απαραίτητα από πολυωνυμική σχέση. Ωστόσο αυτό συμβαίνει μόνο όταν οι συσχέτιση είναι μικρή, αφού η $0^{\eta\varsigma}$ τάξης διόρθωση είναι ανάλογη στο $T_{\mathcal{RS}}$.

10.10 Αρχέγονες Τανυστικές Διαταραχές

Για τανυστικές διαταραχές, η μετρική είναι

$$g_{\mu\nu} = a^2\eta_{\mu\nu}+\delta g^T_{\mu\nu} = a^2\big(\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}\big) = a^2\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1+h_+ & h_\times & \\ & h_\times & 1-h_+ & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.317)$$

Επομένως υπάρχουν δύο πολώσεις για τις τανυστικές διαταραχές, h_+ και $h_\times$. Από την δράση του Hilbert και δουλεύοντας με τον ADM, βρίσκουμε ότι

$$\boxed{\psi_{+,\times} \equiv \frac{M}{\sqrt{2}}h_{+,\times}} \quad (10.318)$$

εμφανίζεται στη δράση σαν ένα ελεύθερο άμαζο βαθμωτό πεδίο. Επομένως οι διαταραχές αυτές έχουν το φάσμα την περίοδο του inflation με τις διαταραχές από τα βαθμωτά πεδία,

$$\mathcal{P}_\psi(k) \equiv \mathcal{V}\frac{k^3}{2\pi^2}\left\langle|\psi(\vec{k})|^2\right\rangle = \big(\frac{H}{2\pi}\big)^2_{k=aH} \quad (10.319)$$

στην κατώτερη τάξη. Οι τανυστικές διαταραχές δεν αναπτύσσονται έξω από την ορίζοντα, άρα αυτό δίνει το φάσμα των αρχέγονων τανυστικών διαταρραχών. Ορίζεται συνήθως ως

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_T(k) \equiv& \mathcal{V}\frac{k^3}{2\pi^2}\left\langle h_{\mu\nu}(\vec{k})h^{\mu\nu}(\vec{k})^*\right\rangle = \mathcal{V}\frac{k^3}{2\pi^2}\left\langle 2|h_+(\vec{k})|^2 + 2|h^\times(\vec{k})|^2\right\rangle \\ \frac{8}{M^2}\mathcal{P}_\psi(k) =& \frac{8}{M^2}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2_{k=aH}. \end{aligned} \quad (10.320)$$

Και επειδή οι δύο πολώσεις είναι ανεξάρτητες

$$\left\langle h_a(\vec{k})h_b(\vec{k}')^*\right\rangle = \frac{2\pi^2}{\mathcal{V}k^3}\delta_{ab}\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\frac{1}{4}\mathcal{P}_T(k) \quad \text{όπου} \quad a,b = +\times \quad (10.321)$$

Χρησιμοποιώντας τις slow-roll εξισώσεις $H^2 = V/3M^2$ κτλ, παίρνουμε

$$\mathcal{P}_T = \frac{2}{3\pi^2M^4}V \quad (10.322a)$$

$$n_T \equiv \frac{d\ln\mathcal{P}_T}{d\ln k} = \frac{d\ln\mathcal{V}}{d\ln k} = -2\epsilon \quad (10.322b)$$

$$q_T \equiv \frac{dn_T}{d\ln k} = -2\frac{d\epsilon}{d\ln k} = -8\epsilon^2 + 4\epsilon\eta_{\sigma\sigma}. \quad (10.322c)$$

Το τανυστικό προς το βαθμωτό κλάσμα του φάσματος ορίζεται ως,

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_R}. \tag{10.323}$$

Στο inflation με ένα πεδίο η $\mathcal{P}_R$ δεν εξελίσσεται έξω από τον ορίζοντα. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$r_\star \equiv \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_{R_\star}}. \tag{10.324}$$

Στην περίπτωση όμως του inflation με περισσότερα πεδία, το $\mathcal{P}_R$ εξελίσσεται έξω από τον ορίζοντα, ενώ το $\mathcal{P}_T$ όχι και επομένως $r \neq r_\star$. Αφού

$$\mathcal{P}_{R_\star} = \mathcal{P}_\star^{(0)} = \frac{H^4}{4\pi^2\dot{\sigma}^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{V}{3M^2}\frac{V^2}{M^4V_\sigma^2} = \frac{1}{24\pi^2M^4}\frac{1}{\epsilon}, \tag{10.325}$$

έχουμε

$$r_\star = \frac{48\pi^2m^4}{3\pi^2M^4}\epsilon = 16\epsilon. \tag{10.326}$$

Και από την 10.295

$$\mathcal{P}_R - (1+T_{RS}^2)\mathcal{P}_\star^{(0)} = \frac{\mathcal{P}_\star}{\sin^2\Delta} = \frac{\mathcal{P}_\star}{1-|\gamma|} \tag{10.327}$$

Αφού οι τανυστικές διαταραχές προσθέτουν νέα [αρατηρίσημα μεγέθη (r, n_T, q_T) χωρίς να εισάγουν νέες slow-roll παραμέτρους, παίρνουμε εξισώσεις συνοχικότητας

$$n_T = -\frac{1}{8}r_\star = -\frac{r}{8(1-|\gamma|)} \tag{10.328a}$$

$$q_T = n_T(n_T - n_{ar}) \tag{10.328b}$$

οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ελένξουν το inflation χωρίς να χρειάζεται να υποθέσουμε κανένα μοντέλο inflation.

Αρχέγονες τανυστικές διαταραχές δεν έχουν παρατηρηθεί μεχρι σήμερα. Συνδιασμένα αποτελέσματα από τα πειράματα θέτουν ένα ανώτητο όριο στο κλάσα των τανυστικών προς βαθμωτών διαταραχών.

$$r < 0.07 \quad (2\sigma \quad \text{βεβαιότητα}) \tag{10.329}$$

Υποθέτοντας inflation με ένα πεδίο παίρνουμε και το άνω όριο

$$\epsilon < 0.044 \tag{10.330}$$

και από τις εξισώσεις συνοχικότητας

$$n_T > -0.009 \tag{10.331}$$

Όσο μικρότερο είναι το r, με λιγότερη ακρίβεια θα μπορέσουμε να μετρήσουμε το n_T (αφού πρώτα έχουμε ανιχνεύσει τις τανυστικές διαταραχές).

Μέρος IV

CMB

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Ανισοτροπίες στην Κοσμική ακτινοβολία Υποβάθρου

11.1 Διακυμάνσεις του CMB

Για να εξετάσουμε την κοσμολογική εξέληξη της κατανομής φωτονίων, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας το πω η κατανομή των φωτονίων αλλάζει από σημείο σε σημείο στο ανομογενές σύμπαν. Μπορούμε να φανταστούμε το σύμπαν να είναι διαιρεμένο σε διακριτά κουτιά (όγκου V), τα οποία είναι μικρά σε σχέση με κοσμολογικές κλίμακες αλλά μεγάλα συγκρινόμενα με μικροσκοπικές καταστάσεις, και φωτονικές καταστάσεις που ζουν σε αυτά τα κουτιά. Τα κουτιά χαρακτηρίζονται από, τη θέση x^i την ορμή $\vec{k}$ και το σπιν s, a καταστάσεις $\left|x^i\vec{k}s\right\rangle$.

Επομένως ο πίνακας πυκνότητας του συστήματος των καταστάσεων αυτών θα είχει στοιχεία

$$\langle x^i\vec{q}s'|\hat{\rho}^1|x^i\vec{q}s\rangle \equiv \rho^{(1)}_{s's}\big(x^i,\vec{k}\big) = \langle a^\dagger_s(x^i,\vec{k})a_{s'}(x^i,\vec{k})\rangle \tag{11.1}$$

τα οποία καθορίζουν τις παραμέτρους Stokes

$$I(x^i,\vec{k}), \quad Q(x^i,\vec{k}), \quad U(x^i,\vec{k}), \quad V(x^i,\vec{k}) \tag{11.2}$$

Καθώς το σύμπαν εξελίσσεται με το χρόνο η το ίδιο κάνει και η μήτρα πυκνότητας των φωτονίων

$$\rho^{(1)}_{ss'}(\eta,x',\vec{k}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I(\eta,x^i,\vec{k})+Q(\eta,x^i,\vec{k}) & U(\eta,x^i,\vec{k})-iV(\eta,x^i,\vec{k}) \\ U(\eta,x^i,\vec{k})+iV(\eta,x^i,\vec{k}) & I(\eta,x^i,\vec{k})-Q(x^i,\vec{k}) \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Στο υποκείμενο σύμπαν, τα φωτόνια είναι σε θερμική ισορροπία (για μια

ικανοποιητική ημιπροσεγγιστική δουλειά για την ανισοτροπία του CMB).

$$\rho^{(1)}_{ss'}(\eta, x^i, \vec{k}) = \bar{\rho}_{ss'}(\eta, k) \equiv \frac{\delta_{ss'}}{e^{k/T(\eta)} - 1} = \frac{1}{e^{k/T(\eta)} - 1} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

έτσι ώστε

$$\bar{I}(\eta, k) = \frac{2}{e^{k/T(\eta)} - 1}, \quad \bar{U} = \bar{Q} = \bar{V} = 0 \tag{11.5}$$

Μπορούμε να γράψουμε τον ανοιγμένο πίνακα πυκνότητας γιο το διαταραγμένο σύμπαν, 11.3, σαν υπόβαθρο + διαταραχή

$$\rho^{(1)}_{ss'}(\eta, x^i, \vec{k}) = \bar{\rho}_{ss'}(\eta, k) + \delta\rho^{(1)}_{ss'}(\eta, x^i, \vec{k}) \tag{11.6}$$

όπου

$$\delta\rho^{(1)}_{ss'}(\eta, x^i, \vec{k}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta I + Q & U - iV \\ U + iV & \delta I - Q \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

Ακολουθούμε τώρα τη συζήτηση της ενότητας (M) (Εξίσωση φωτεινότητας). Παρατηρούμε ότι η συνρτηση κατανομής των φωτονίων $f(\eta, x^i, \vec{k})$ της (M) είναι ουσιαστικά η ίδια με την παράμετρο Stokes $I(\eta, x^i, \vec{k})$,

$$f(\eta, x^i, \vec{k}) = \frac{1}{h^3} I(\eta, x^i, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} I(\eta, x^i, \vec{k}) \tag{11.8}$$

Ο φασικός χώρος της κατάστασης θέσης και ορμής h^{-3} μετατρέπει (την αναμενόμενη τιμή) τον αριθμό κατοχής $I(\eta, x^i, \vec{k}) \equiv \langle \hat{n}(x^i, \vec{k}) \rangle(\eta)$ σε (την αναμενόμενη τιμή) του αριθμού πικνότητας $f(\eta, x^i, \vec{k})$ στο φασικό χώρο. (Βασικά η συνάρτηση κατανομής ορίζεται συχνά χωρίς τον παράγοντα πυκνότητας της κατάστασης h^{-3}, έτσι ώστε $f = I$). Γράφουμε την διαταραγμένη παράμετρο Stokes ως

$$I(\eta, x^i, q, \hat{n}) = \bar{I}(\eta, q) + \delta I(\eta, x^i, q, \hat{n}) \equiv \frac{2}{\exp\left\{\frac{q}{T(\eta)[1+\Theta(\eta, x^i, q, \hat{n})]}\right\} - 1} \tag{11.9}$$

όπως και στην M, και παρατηρούμε ότι για 1ης τάξη διαταραχές

$$\delta I = \frac{\partial \bar{I}}{\partial T} T\Theta = -q \frac{\partial \bar{I}}{\partial q} \Theta \tag{11.10}$$

όπου το $\bar{I}(\eta, q)$ θεωρείται συνάρτηση των T και q. Καθώς το $\bar{I}$ εξαρτάται από η μόνο μέσω του T, $\left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial q}\right)_T = \left(\frac{\partial \bar{I}}{\partial q}\right)_\eta$. Εδώ

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{2}{e^{q/T} - 1}\right) = \frac{-2}{\left(e^{q/T} - 1\right)^2} \frac{1}{T} e^{q/T} \tag{11.11}$$

και

$$-q\frac{\partial \bar{I}}{\partial q} = \frac{2}{\left(e^{q/T}-1\right)^2}\frac{q}{T}e^{q/T} = \frac{2xe^x}{\left(e^x-1\right)^2} = \frac{2x}{\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)^2} \tag{11.12}$$

όπου $x \equiv \frac{q}{T(\eta)}$. Επομένως

$$\delta I = \frac{2x}{(e^{x/2}-e^{-x/2})^2}\Theta \Rightarrow \Theta \equiv I_c = \frac{\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)^2}{2x}\delta I \tag{11.13}$$

Εδώ το I_c είναι η παράμετρος Stokes εκφρασμένη ως σχετική διαταραχήτης θερμοκρασίας του CMB. Είναι ίδια με την συνάρτηη φωτεινότητας (M). Επαναορίζουμε τώρα τις υπόλοιπες παραμέτρους Stokes επίσης σαν σχετικές διαταραχές στην θερμοκρασία του CMB.

$$\begin{aligned}\delta\rho^{(1)}_{ss'} =& \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\delta I + Q & U - iV \\ U + iV & \delta I - Q\end{bmatrix} \equiv \left(-q\frac{\partial \bar{I}}{\partial q}\right)\rho_{ss'} \\ \equiv& \left(-q\frac{\partial \bar{I}}{\partial q}\right)\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Theta + Q_c & U_c - iV_c \\ U_c + iV_c & \Theta - Q_c\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11.14}$$

όπου ορίσαμε τον πίνακα διακύμανσης στη θερμοκρασία του CMB

$$\rho_{ss'}\left(\eta, x^i, \vec{k}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Theta + Q_c & U_c - iV_c \\ U_c + iV_c & \Theta - Q_c\end{bmatrix} \tag{11.15}$$

έτσι ώστε

$$Q_c \equiv \frac{1}{\left(-q\frac{\partial \bar{I}}{\partial q}\right)}Q = \frac{\left(e^{x/2}-e^{-x/2}\right)^2}{2x}Q \tag{11.16}$$

Θα δειχθεί ότι σε πρώτης τάξης θεωρία διαταραχών δεν αναπτύσσεται πόλωση V, έτσι ώστε $V_c = V = 0$. Επίσης θα προκύψει ότι όπως και για το Θ, δεν προκύπτει καμια εξάρτηση των Q_c και U_c από την ενέργεια των φωτονίων, έτσι ώστε

$$\rho_{ss'}(\eta, x^i, \vec{q}) = \rho_{ss'}(\eta, x^i, \vec{q}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Theta + Q_c & U_c \\ U_c & \Theta - Q_c\end{bmatrix} \tag{11.17}$$

Επομένως το $\rho_{ss'}(\eta, x^i, \vec{q})$ είναι ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας, ο οποίος αναπαραστά μια διαταραχή εξαρτώμενη από το χρόνο, τη θέση και την πόλωση, στην θερμοκρασία του CMB. Εν το μεταξύ, η εξάρτηση του CMB από την συχνότητα παραμένει στο φάσμα του μέλανος σώματος.

$\Theta(\eta, x^i, \hat{n})$	είναι η διαταραχή στη θερμοκρασία στο η, x^i των φωτονίων που κινούνται στην κατεύθυνση $\hat{n}$, υπολογισμένη στη μέση τιμή δύο καταστάσεων πόλωσης
$Q_c(\eta, x^i, \hat{n})$	είναι το μισό της διαφοράς μεταξύ της διακίμανσης θερμοκρασίας των φωτονίων στη γραμμική κατάσταση x-πόλωσης και στη γραμμική κατάσταση y-πόλωσης.
$U_c(\eta, x^i, \hat{n})$	είναι η αντίστοιχη διαφορά ανάμεσα στην γραμμική 45° και 135° κατάστασης πόλωσης

Ο λόγος που δεν έχουνε εξάρτηση από το q είναι ο ίδιος όπως και στην περίπτωση του Θ. Αρχικά δεν έχουν, καθώς τα φωτόνια αρχικά βρίσκονται σε θερμική ισορροποία, άρα $Q = U = 0$. Θα εξάγουμε τις εξισώσεις εξέλιξης για τα Q_c και U_c. Και αυτές οι εξιώσεις εξέλιξης προκύπτει να είναι ανεξάρτητες από το q και επομένως δεν αναπτύσσεται καμια εξέλιξη από το q, και οι διαταραχές διατηρούν το φάσμα μέλανος σώματος.

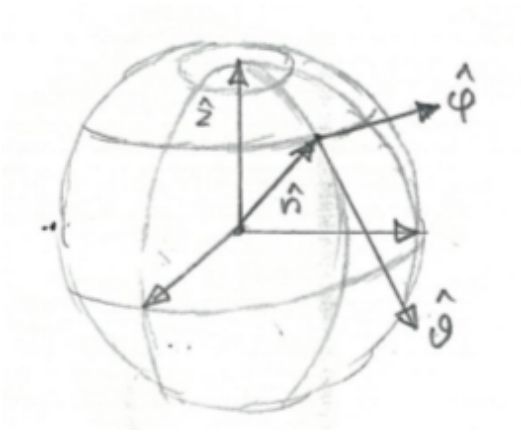
11.2 Τανυστής Πόλωσης

Οι διακυμάνσεις του CMB περιγράφονται από τις διακυμάνσεις στον τανυστή πυκνότητας θερμοκρασίας, ο οποίος μπορεί να χωρισθεί στο ίχνος του Θ και ένα άιχνο κομμάτι

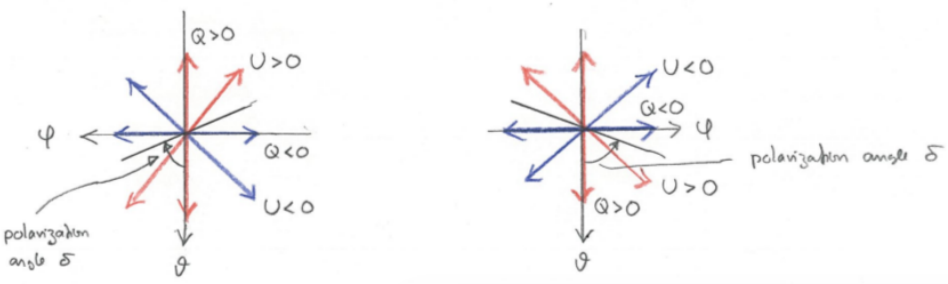
$$\rho_{ss'}(\eta, \vec{x}, \vec{n}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \Theta + Q & U \\ U & \Theta - U \end{bmatrix} = \Theta\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{bmatrix} \tag{11.18}$$

Θέλουμε τώρα να αναπτύξουμε την $\vec{x}$-εξάρτηση της πόλωσης σε επίπεδα κύματα (ανάπτυγμα Fourier) και της $\vec{n}$-εξάρτησης σε σφαιρικές αρμονικές. Πρέπει όμως να αντιμετοπίσουμε την εξάρτηση από τις συντεταγμένες των Q και U.
Το σύνολο των μοναδιαίων διανυσμάτων φτιάχνει μια σφαίρα, όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες θ, ϕ. Για κάθε όρο του αναπτύγματος Fourier επιλέγουμε σφαιρικές συντεταγμένες τέτοιες ώστε ο z-άξονας ($\theta = 0$) να είναι παράλληλος στο κυματικό αριθμό $\vec{k}$. Οι παράμετροι Stokes για κάθε κατεύθευνση $\hat{n}$ του φωτονίου

Επομένως οι δύο γραμμικές καταστάσεις πόλωσης που εξετάζουμε είναι οi θ και ϕ γραμμικές πολώσεις. Το $\hat{\theta}$ παίρνει τη θέση του $\hat{x}$ και το $\hat{\phi}$ τη θέση του $\hat{y}$. Γνωρίζουμε ότι ο $\rho_{\hat{a}\hat{b}}(\hat{\eta}, \vec{x}, \vec{n}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \Theta + Q & U \\ U & \Theta - Q \end{bmatrix}$ μετασχηματίζεται σαν τανυστής 2ης τάξης στη $\hat{n}$-σφαίρα. Μπορούμε να το διαχωρίσουμε στο



Σχήμα 11.1: Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{n}$ για μια ορθοκανονική right-handed βάση.



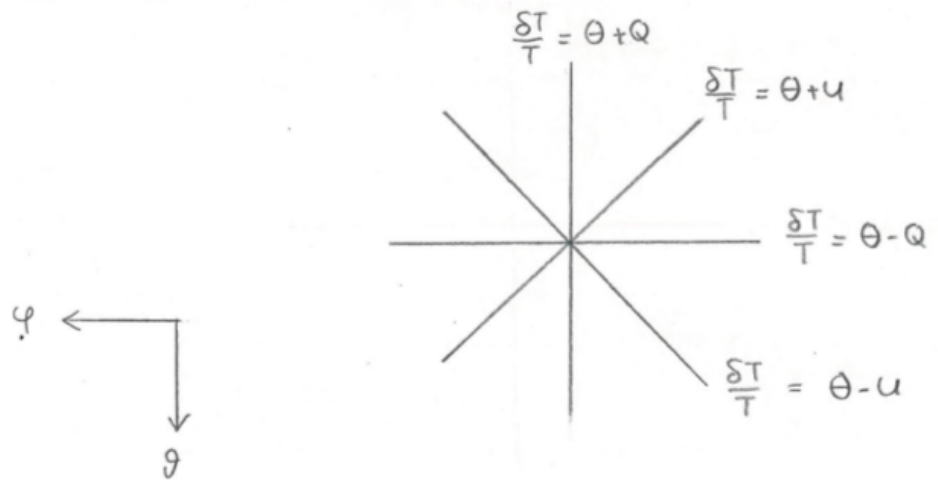
Σχήμα 11.2: Κοιτώντας τη μοναδιαία σφαίρα a) από το εσωτερικό (τα φωτόνια απομακρίνονται από εμάς) b) από το εξωτερικό (τα φωτόνια έρχονται προς εμάς)

ίχνος του $Tr\rho = \Theta$,το οποίο μετασχηματίζεται σαν βαθμωτό, και τον άιχνο συμμετρικό τανυστή πόλωσης $\rho_{\hat{a}\hat{b}}(\hat{\eta}, \vec{x}, \vec{n}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{bmatrix}$. Σε ένα δεδομένο $\eta, \vec{x}$, το $P_{\hat{a},\hat{b}}(\hat{n})$ είναι 2ης τάξης τανυστικό πδίο στη σφαίρα. Βάζουμε ανύσματα για δείκτες γαι να δείξουμε ότι τα $P_{\hat{a}\hat{b}}$ είναι συνιστώσες στην ορθοκανονική βάση $(\hat{\theta}, \hat{\phi})$, και όχι στην θ, ϕ βάση.

$$\begin{aligned} P_{\hat{\theta},\hat{\theta}} = & \quad -P_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = & \tfrac{1}{2}Q(\theta,\phi) \\ P_{\hat{\theta},\hat{\phi}} = & \quad P_{\hat{\phi}\hat{\theta}} = & \tfrac{1}{2}U(\theta,\phi) \end{aligned} \tag{11.19}$$

Σαν τανυστικό πεδίο στη σφαίρα, ο τανυστής πόλωσης δεν θα έπρεπε να αναπτύσσεται σε συνήθεις σφαιρικές αρμονικές με τον ίδιο τρόπο με ένα βαθμωτό πεδίο όπως το Θ. Θα αφιερώσουμε τις επόμενες ενότητες για τη

συζήτηση του αναπτύγματος σε σφαιρικές αρμονικές του τανυστικού πεδίου πόλωσης.



Σχήμα 11.3: h

11.3 Κλασσικό Ημιμονοχρωματικό Επίπεδο κύμα

Είδαμε ότι κλασσικά, ένα μονοχρωματικό επίπεδ'κύμα είναι αναγκαστικά πλήρως πολωμένο ($I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$). Ωστώσω στη φύση συναντάμε μη πολωμένη και μερικώς πολωμένη ακτινοβολία. Παρόλο που αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό από την κβαντική φύση της ακτινοβολίας, μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι το μονοχρωμαικό κύμα (μιας καλά ορισμένης συχνότητας) είναι μια εξιδανίκευση. Για παράδειγμα, το CMB έχει φάσμα μέλανος σώματος, και οι ανιχνευτές του CMB είναι ευαίσθητοι σε μια περιοχή συχνοτήτων $\Delta\nu$.

Μπορούμε να πάρουμε μερικώς πολωμένη ή μη πολωμένη ακτινοβολία από μια επαλληλία πολωμένων κυμάτων. Το ηλεκτρικό πεδίο (στο $\vec{x} = 0$) δίνεται από

$$\vec{E} = Re\big[(E_x\hat{e}_x + E_y\hat{e}_y)e^{-i\omega t}\big] \tag{11.20}$$

όπου το μιγαδικό πλάτος $\vec{E} = \vec{E}(t)$,

$$\boxed{\begin{aligned} E_x =& E_x(t) = a_x(t)e^{ia_x(t)} \\ E_y =& E_y(t) = a_y(t)e^{ia_y(t)} \end{aligned}} \tag{11.21}$$

μεταβάλεται αργά με το χρόνο.

Ορίζουμε τις παραμέτρους Stokes σε χρονικά μέσους όρους

$$\boxed{\begin{array}{llll} I \equiv & \langle|E_x|^2\rangle + \langle|E_y|^2\rangle = & \langle a_x^2\rangle + \langle a_y^2\rangle & \\ Q \equiv & \langle|E_x|^2\rangle - \langle|E_y|^2\rangle = & \langle a_x^2\rangle - \langle a_y^2\rangle & \\ U \equiv & \langle E_x E_y^*\rangle + \langle E_y E_x^*\rangle = & 2Re\langle E_x E_y^*\rangle = & 2\langle a_x a_y \cos a\rangle \\ V \equiv & i\langle E_x E_y^*\rangle - i\langle E_y E_x^*\rangle = & 2Im\langle E_x E_y^*\rangle = & 2\langle a_x a_y \sin a\rangle \end{array}} \tag{11.22}$$

όπου $\underline{a(t) = a_y(t) - a_x(t)}$ και είναι $\underline{0 \leq Q^2 + U^2 + V^2 \leq I^2}$ και πλήρως μη πολωμένη ακτινοβολία ($Q = U = V = 0$) είναι πλέον δυνατή. Μπορούμε επίσης να ορίσουμε τον τανυστή συνοχής

$$\boxed{\begin{aligned} C_{ij} \equiv & \langle E_i E_j^*\rangle = \langle a_i a_j e^{i(a_i - a_j)}\rangle \\ = & \begin{bmatrix} \langle a_x^2\rangle & \langle a_x a_y e^{-ia}\rangle \\ \langle a_y a_x e^{ia}\rangle & \langle a_y^2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^*\rangle & \langle E_x E_y^*\rangle \\ \langle E_y E_x^*\rangle & \langle E_y E_y^*\rangle \end{bmatrix} \\ = & \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I+Q & U-iV \\ U+iV & I-Q \end{bmatrix} \end{aligned}} \tag{11.23}$$

ο οποίος είναι ερμητιανός, $C_{ij}^* = C_{ji}$, με $I = TrC$. Μπορεί να γραφεί και συναρτήσει των πικάνων Pauli [28] ως

$$C = \frac{1}{2}\big(I\mathbb{1} + Q\sigma_3 + U\sigma_1 + V\sigma_2\big) \tag{11.24}$$

Αντί για I και Q είναι μερικές φορές προτημιταίο να χρησημοποιούμε

$$I_x \equiv \frac{1}{2}\big(I + Q\big) \quad \text{και} \quad I_y \equiv \frac{1}{2}\big(I - Q\big) \tag{11.25}$$

Αφού $C = \langle \vec{E} \otimes \vec{E}^*\rangle$ (όπου με $\otimes$ συμβολίζουμε τανυστικό γινόμενο), μετασχηματίζεται ωςτανυστής 2ης τάξης

$$\begin{aligned} C_{i'j'} \equiv & \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I' + Q' & U' - iV' \\ U' + iV' & I' - Q' \end{bmatrix} = R_{i'k} R_{j'l} C_{kl} \\ = & \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I+Q & U-iV \\ U+iV & I-Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.26}$$

[28] $\sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Σφαιρικό Αρμονικό ανάπτυγμα του Πεδίου Πόλωσης

12.1 Σφαιρικό Αρμονικό ανάπτυγμα του Πεδίου Πόλωσης

Η εξάρτηση από την κατεύθυνση της γραμμικής πόλωσης αναπαρίσταται από ενα 2ης τάξης τανυστικό πεδίο στη σφαίρα του μοναδιαίου διανύσματος

$$P_{\hat{a}\hat{b}}(\hat{n}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q(\hat{n}) & U(\hat{n}) \\ U(\hat{n}) & -Q(\hat{n}) \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

Τα ανύσματα $\hat{a}$ και $\hat{b}$, μας θυμίζουν ότι στην εξίσωση 12.1 οι συνιστώσες στον τανυστή δίνονται σε μια ορθοκανονική βάση, το ζεύγος των μαναδιαίων διανυσμάτων ορθογώνιων στο $\vec{n}$, ως προς το οποίο οι παράμετροι Stokes είναι ορισμένοι.
Ο γραμμικός τανυστής πόλωσης $P_{\hat{a}\hat{b}}$ είναι πραγματικός, συμμετρικός και άιχνος και επομένως έχει μόνο δύο ανεξάρτητες συνιστώσες.
Το άνυσμα κατεύθυνσης $\hat{n}$ μπορεί να παραστά

- Τη διεύθυνση της ορμής του φωτονίου, $\hat{n} = \hat{n}_{photon}$, $\vec{q} = q\hat{n}$, ή
- τη διεύθυνση παρατηρησης $\hat{n} = \hat{n}_{obs}$

Η παρακώτω ανάλυση ταιριάζει εξίσου καλά και με τις δύο προσεγγίσεις. Εφαρμόζουμε την προσέγγιση 1) όταν συζητάμε την εξέληξη του CMB από το νεαρό σύμπαν και παίρνουμε την εξίσωση Boltzmann από αυτήν. Εφαρμόζουμε την προσέγγιση 2) όταν περιγράφουμε τωρινές παρατηρίσεις και την ανάλυσή

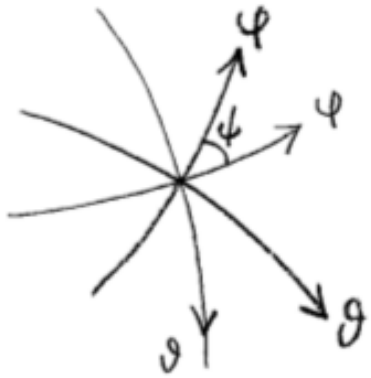
τους. Όταν πάρουμε τη σχέση μεταξύ των 1) και 2) πρέπει να λάβουμε υπόψην μας ότι.

$$\hat{n}_{ods} = -\hat{n}_{photon}(\text{εδώ και τώρα}) \tag{12.2}$$

πχ. πρέπει να αντιστρέψουμε τη σφαίρα. Η ανάλυση αυτή γίνεται σε επόμενο κεφάλαιο (L). Θα χρησιμοποιήσουμε συνήθεις σφαιρικές συντεταγμένες θ, ϕ στη σφαίρα, ετσι ώστε

$$\hat{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) = (n_x, n_y, n_z) \tag{12.3}$$

Να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν πολλά διαφορετικά σφαιρικά συστήματα συντεταγμένων για τη σφαίρα, που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς προσανατολισμούς των (ορθογώνιων) x,y και z αξόνων. Μπορεί ο καθένας να προκύψει από περιστροφή κάποιου άλλου. Να προσέξουμε επίσης ότι το $\hat{n}$ αναπαραστά ένα διάνυσμα κατεύθυνσης, το οποίο είναι ανεξάρτητο από το σύστημα συντεταγμένων: ένα δεδομένο διάνυσμα κατεύθυνσης έχει συνιστώσες $(n_x, n_y, n_z) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$ σε ένα θ, ϕ σύστημα συντεταγμένων και άλλες συντεταγμένες $(n_{x'}, n_{y'}, n_{z'}) = (\sin\theta'\cos\phi, \sin\theta'\sin\phi', \cos\phi')$ σε ένα άλλο θ', ϕ' σύστημα.



Οι συνιστώσεις του $P_{\hat{a}\hat{b}}$ και όμοια οι παράμετροι Stokes Q,U για μια δεδομένη κατεύθυνση $\hat{n}$ αλλάζουμ, όταν αλλάζουμε από ένα σφαικό σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο. Σε μια αλλαγή συστήματος συντεταγμένων $\theta, \phi \to \theta', \phi'$, τα τοπικά μοναδιαία ανύσματα $\hat{\theta}, \hat{\phi}$ στο $\hat{n}$ περιστρέφονται κατά μια γωνία ψ (διαφορετική γα διαφορετικό $\hat{n}$)

$$\Rightarrow \begin{aligned} Q' &= Q\cos 2\psi + U\sin 2\psi \\ U' &= -Q\sin 2\psi + U\cos 2\psi \end{aligned} \tag{12.4}$$

Συνεπώς ο διαχωρισμός του πεδίου πόλωσης σε Q και U δεν είναι φυσικής σημασίας. Παρόλα αυτά, προκύπτει ότι το πεδίο γραμμικής πόλωσης στη

σφαίρα μπορεί μα χωρισθεί σε δύο μέρη με ένα τρόπο ανεξάρτητο από το σύστημα συντεταγμένων και ότι η φυσική στα μέρη σημεία είναι διαφορετική. Ο διαχωρισμός αυτός είναι ανάλογος με το διαχωρισμό ενός διανυσματικού πεδίου σε κομμάτι μηδενικής απόκλισης και κομμάτι μηδενικού στροβιλισμού. Τα δύο μέρη καλούνται E-mode (ή G-mode,"gradient") και B-mode (ή C-mode, "curl") πόλωση.

Αναπαραστούμε αυτό το διαχωρισμό πρώτα χρησιμοποιώντας την "flat-sky προσέγγιση", πχ αγνοώντας την καμπυλότητα της σφαίρας.

12.2 Flat-Sky προσέγγιση

Θεωρούμε μόνο ένα μικρό τμήμα της σφαίρας (ή του ουρανού, εαν σκεφτόμαστε από την προσέγγιση του παρατηρητή (2)), όπου μπορούμε να αγνοήσουμε την καμπυλότητα: Χρησημοποιούμε Ευκλείδια γεωμετρία και εισάγουμε καρτεσιανές συντεταγμένες x και y.
Τώρα

$$P_{ab}(x,y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & P_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{xx} & -P_{xx} \end{bmatrix} \tag{12.5}$$

Μπορούμε να εισάγουμε ενα διανυσματικό πεδίο w^a σχετιζόμενο με το πεδίο πόλωσης P_{ab}, μέσω της απόκλισής του

$$w^a \equiv P^{ab}_{,a} = P^{ba}_{,b} \tag{12.6}$$

(δεν παίζει ρόλο εάν κάποιος δείκτης είναι πάνω ή κάτω, αφού χρησιμοποιούμε καρτεσιανές συντεταγμένες). Εαν εφαρμόσουμε έναν μετασχηματισμό Fourier σερ αυτό το 2-d επίπεδο κύμα, η απόκλιση γίνεται

$$w^a = ik_b P^{ab}, \quad \text{ή} \tag{12.7}$$

$$\begin{bmatrix} w^x \\ w^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x P^{xx} + ik_y P^{xy} \\ ik_x P^{yx} + ik_y P^{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x P^{xx} + ik_y P^{xy} \\ ik_x P^{xy} - ik_y P^{xx} \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} k_x & k_y \\ -k_y & k_x \end{bmatrix} [P^{xx} P^{xy}] \tag{12.8}$$

Μπορούμε τώρα να αντιστρέψουμε αυτή τη σχέση πινάκων:

$$\begin{bmatrix} P^{xx} \\ P^{xy} \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} k_x & k_y \\ -k_y & k_x \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w^x \\ w^y \end{bmatrix} = \frac{-i}{k_x^2 + k_y^2} \begin{bmatrix} k_x & -k_y \\ k_y & k_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^x \\ w^y \end{bmatrix} \tag{12.9}$$

Επομένως ο τανυστής του πεδίου πόλωσης χαρακτηρίζεται από αυτό το διανυσματικό πεδίο (με απροσδιοριστία μιας σταθεράς, που αντιστοιχεί στην $\vec{k} = (k_x, k_y) = 0$). Για να εκφράσουμε την 12.9 ως παράγωγο στο $\vec{x}$-χώρο, πρέπει αν απαλλαγούμε από το $k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2$. Επομένως ορίζουμε ένα νέο τανυστικό πεδίο $\vec{V}$ στο χώρο Fourier ως

$$V^a = \frac{2}{k^2} w^a \tag{12.10}$$

Στο $\vec{x}$-χώρο αυτό αντιστοιχεί στο να λύσουμε το πεδίο $\vec{V}$ από την εξίσωση

$$\nabla^2 \vec{V} = -2\vec{w} \tag{12.11}$$

Πέρα από το $\vec{w}$, λύση εξαρτάται από τη συνοριακή συνιθήκη. Το να χρησιμοποιήσουμε ανάπτυγμα Fourier ισοδυναμεί με το να υποθέσουμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες. (Όταν επιστρέψουμε στη σφαίρα, δεν υπάρχουν συνορα. Επίσης, ένα σταθερό μη μηδενικό γραμμικό πεδίο πόλωσης στη σφαίρα δεν είναι δυνατό, αφού οδηγεί αναγκαστικά σε μια ανωμαλία σε ένα σημείο.)

Η εξ. 12.9 γίνεται

$$\begin{bmatrix} P^{xx} \\ P^{xy} \end{bmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{bmatrix} k_x & -k_y \\ k_y & k_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^x \\ v^y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -ik_x & +ik_y \\ -ik_y & -ik_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^x \\ v^y \end{bmatrix} \tag{12.12}$$

Επιστρέφοντας στον $\vec{x}-$χώρο, έχουμε

$$\begin{aligned} P^{xx} = & \ -P^{yy} = & -\tfrac{1}{2}\partial_x v^x + \tfrac{1}{2}\partial_y v^y \\ P^{xy} = & \ -P^{yx} = & -\tfrac{1}{2}\partial_y v^x - \tfrac{1}{2}\partial_x v^y \end{aligned} \tag{12.13}$$

Ένα διανυσματικό πεδίο, όπως έχουμε ξανااναφέρει, μπορεί να χωρισθεί σε ένα κομάτι χωρία απόκλιση και ένα χωρίς στροβιλισμό. Για ένα 3-διάστατο διανυσματικό πεδίο αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{V} = -\underbrace{\nabla A}_{\substack{\text{βαθμωτή} \\ \text{διαταραχή}}} + \underbrace{\nabla \times \vec{B}}_{\substack{\text{διανυσματική} \\ \text{διαταραχή}}} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} V_x = & \ -\partial_x A + \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ V_y = & \ -\partial_y A + \partial_z B_x - \partial_x B_z \\ V_z = & \ -\partial_z A + \partial_x B_y - \partial_y B_x \end{aligned} \tag{12.14}$$

Και μπορούμε να το αναγάγουμε στην 2-διάστατη περίπτωση, απαιτόντας $V_z = 0$, και θεωρόντας ομογένεια στην z-διεύθυνση $\Rightarrow \quad \partial_z = 0$. Από αυτό έπεται

$$\begin{aligned} V_x = & -\partial_x A + \partial_y B_z \\ V_y = & -\partial_y A - \partial_x B_z \end{aligned} \tag{12.15}$$

Μπορούμε να λέμε από εδω και πέρα $B \equiv B_z$. Ένα 2-διάστατο διάνυσμα επομένως καθορίζεται από ένα βαθμωτό δυναμικό A και ένα ψευτοβαθμωτό δυναμικό B. Το B είναι ψευδοβαθμωτό, αφού αλλάζει πρόσημο σε ένα μετασχηματισμό ομοτιμίας, πχ $(x^{'} = -x, y^{'} = y)$ ή $(x^{'} = y, y^{'} = x)$ και αφού αυτό απαιτεί $z^{'} = -z \quad \Rightarrow \quad B_{z'} = -B_z$ για (x, y, z) προκειμένου το σύστημα συντεταγμένων να παραμείνει δεξιόστροφο.

Συνδιάζοντας τις 12.13 και 12.15 παίρνουμε

$$\begin{aligned} P^{xx} = \quad -P^{yy} = \quad +\tfrac{1}{2}\left(\partial_x\partial_x A - \partial_x\partial_y B - \partial_y\partial_y A - \partial_y\partial_x B\right) \\ P^{xy} = \quad -P^{yx} = \quad +\tfrac{1}{2}\left(\partial_y\partial_x A - \partial_y\partial_y B - \partial_x\partial_y A - \partial_x\partial_x B\right) \end{aligned} \tag{12.16}$$

Χρησιμοποιώντας τον Levi-Civita τανυστή, του οποίου οι συνιστώσες σε ένα δεξιόστροφο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\epsilon_{ab} = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} \tag{12.17}$$

μπορούμε να γράψουμε την 12.16 ως μια μοναδική τανυστική εξίσωση

$$P_{ab} = A_{,ab} - \frac{1}{2}\delta A_{,cc} + \frac{1}{2}\left(\epsilon_{cb}B_{,ac} + \epsilon_{ca}B_{,bc}\right) \tag{12.18}$$

Το οποίο χωρίζει το τανυστικό πεδίο πόλωσης σε δύο μέρη με τρόπο ανεξάρτητο από το στημα συντεταγμένων:

- Το κομμάτι που δίνεται από το βαθμωτό πεδίο A, το οποίο ονομάζεται E-mode, ή το κομμάτι της απόκλισης
- Το κομάτι που δίνεται από το ψευδοβαθμωτό πεδίο B, το οποίο καλείται B-mode, ή κομμάτι απόκλισης.

12.3 Γεωμετρία της σφαίρας

Επιστρέφουμε τώρα στην πλήρη σφαίρα, της οποίας και η γεωμετρία περιγράφεται από τη μετρική

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad g_{ab} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \theta & \phi \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix} \end{array} \tag{12.19}$$

Σε αυτές τις συντεταγμένες τα σύμβολα Christoffel είναι

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} &= \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot\theta\end{aligned}} \tag{12.20}$$

Και επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} g &= \det g = \sin^2\theta \\ \sqrt{g} &= \sin\theta \end{aligned} \tag{12.21}$$

Αφού η μετρική είναι διαγώνια (το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων είναι ορθογώνιο), είναι εύκολο να πάμε από την προηγούμενη βάση, σε αυτή την ορθοκανονική βάση

$$P_{ab} = \sqrt{g_{aa}}\sqrt{g_{bb}}\ P_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q & \sin\theta U \\ \sin\theta U & -\sin^2\theta Q \end{bmatrix} \tag{12.22}$$

Ο αντισυμμετρικός Levi-Civita τανυστής γίνεται

$$\epsilon_{ab} = \sqrt{g_{aa}}\sqrt{g_{bb}}\ \epsilon_{\hat{a}\hat{b}} = \sin\theta\begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix} \tag{12.23}$$

Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα 12.18 της flat-sky ανάλυσης στην καμπύλη πολαπλότητα της 2-σφαίρας:

$$P_{ab} = A_{;ab} - \frac{1}{2}g_{ab}A^{;c}_{;c} + \frac{1}{2}\left(\epsilon^c_b B_{;ac} + \epsilon^c_a B_{;bc}\right) \tag{12.24}$$

όπου εδώ

$$\epsilon^c_b = g^{ca}\epsilon_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sin^2\theta \\ -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin\theta \\ -\frac{1}{\sin^2\theta} & 0 \end{bmatrix}^{29} \tag{12.25}$$

12.4 Τανυστικές Σφαιρικές Αρμονικές

Αφού τα A και B είναι βαθμωτά πεδία (εφόσον δεν κάνουμε μετασχηματισμούς ομοτιμίας, μπορούμε να αντιμετοπίσουμε το B σαν βαθμωτό. Στροφές του συστήματος συντεταγμένων $\theta, \phi \to \theta' \phi'$ είναι εντάξη), μπορούμε να τα αναπτύξουμε σε σφαιρικές αρμονικές, με το συνήθη τρόπο:

$$\begin{aligned} A(\theta,\phi) &= \sum a_{lm} Y^m_l(\theta,\phi) \\ B(\theta,\phi) &= \sum b_{lm} Y^m_l(\theta,\phi) \end{aligned} \tag{12.26}$$

[29] Βλέπε [37] Appendix A

και οι συντελεστές του αναπτύγματος μετασχηματίζονται όπως

$$
\begin{aligned}
a_{lm} &= \sum_{m'} D^{l}_{mm'}(a,\beta,\gamma) a'_{lm'} \\
b_{lm} &= \sum_{m'} D^{l}_{mm'}(a,\beta,\gamma) b'_{lm'}
\end{aligned}
\tag{12.27}
$$

σε μια στροφή του συστήματος συντεταγμένων. Εδώ τα a, β, γ είναι οι γωνίες Euler της $\theta, \phi \to \theta' \phi'$ στροφής. Η 12.27 δείχνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό των a_{lm}, b_{lm}. Χρησιμοποιώντας την 12.26 και την 12.25 μπορούμε τώρα να γράψουμε το πεδίο πόλωσης ως

$$
\begin{aligned}
P_{ab}(\theta,\phi) &= \sum_{lm} a_{lm} \underbrace{\left(Y^{m}_{l;ab} - \frac{1}{2} g_{ab} Y^{m;c}_{;c} \right)}_{\equiv \frac{1}{N_l} Y^{G}_{(lm)ab}} + \sum_{lm} b_{lm} \underbrace{\frac{1}{2} \left(\epsilon^{c}_{b} Y^{m}_{l;ac} + \epsilon^{c}_{a} Y^{m}_{l;bc} \right)}_{\equiv \frac{1}{N_l} Y^{C}_{(lm)ab}} \\
&= \sum_{lm} a^{G}_{lm} Y^{G}_{(lm)ab} + \sum_{lm} a^{C}_{lm} Y^{C}_{(lm)ab}
\end{aligned}
\tag{12.28}
$$

όπου έχουμε ορίσει τις τανυστικές σφαιρικές αρμονικές

$$
\boxed{
\begin{aligned}
Y^{G}_{(lm)ab} &\equiv N_l \big(Y^{m}_{l;ab} - \frac{1}{2} g_{ab} Y^{m;c}_{l;c} \big) \\
Y^{c}_{(lm)ab} &\equiv \frac{1}{2} N_l \big(\epsilon^{c}_{b} Y^{m}_{l;ac} + \epsilon^{c}_{a} Y^{m}_{l;bc} \big)
\end{aligned}
}
\tag{12.29}
$$

όπου

$$
N_l \equiv \sqrt{\frac{2(l-2)!}{(l+2)!}}
\tag{12.30}
$$

είναι ο συντελεστής κανονικοποίησης, και επίσης μόλις ορίσαμε

$$
a^{G}_{lm} = \frac{1}{N_l} a_{lm} \quad \text{και} \quad a^{C}_{lm} = \frac{1}{N_l} b_{lm}.
\tag{12.31}
$$

Εδώ το $Y^{m}_{l;ab}$ είναι η δεύτερη συναλοίωτη παράγωγος της συνήθους (βαθμωτής) σφαιρικής αρμονικής Y^{m}_{l}.

$$
Y^{m}_{l;ab} = \left(Y^{m}_{l,a} \right)_{;b} = Y^{m}_{l,ab} - \Gamma^{c}_{ba} Y^{m}_{l,c} = Y^{m}_{l;ba}
\tag{12.32}
$$

Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα Christoffel από την 12.20,

$$
\begin{aligned}
Y^{m}_{l,\theta\theta} &= Y^{m}_{l,\theta\theta} \\
Y^{m}_{l,\theta\phi} &= Y^{m}_{l,\theta\phi} - \cot\theta Y^{m}_{l,\phi} \\
Y^{m}_{l,\phi\phi} &= Y^{m}_{l,\phi\phi} + \sin\theta\cos\theta Y^{m}_{l,\theta} \\
Y^{m;c}_{l;c} &= g^{cb} Y^{m}_{l;bc} = Y^{m}_{l;\theta\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} Y^{m}_{l;\phi\phi}
\end{aligned}
\tag{12.33}
$$

• Τι έχουμε για $l = 0$ και $l = 1$? Η εξ.12.30 δίνει ${}_0 = {}_1 = 0$. Επίσης

$$Y^m_{l;ab} - \frac{1}{2} g_{ab} Y^{m;c}_{l;c} = \epsilon^c_b Y^m_{l;ac} + \epsilon^c_a Y^m_{l;bc} = 0 \quad \text{για} \quad l = 0, 1 \tag{12.34}$$

Οι τανυστικές σφαιρικές αρμονικές είναι ορθοκανονικές

$$\boxed{\begin{aligned} &\int d\Omega Y^{G*}_{(lm)ab}(\theta,\phi) Y^{G\ ab}_{l'm'}(\theta,\phi) = \int Y^{C*}_{(lm)ab}(\theta,\phi) Y^{C\ ab}_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \\ &\int d\Omega Y^{G*}_{(lm)ab}(\theta,\phi) Y^{C\ ab}_{(l'm')}(\theta,\phi) = 0 \end{aligned}} \tag{12.35}$$

έτσι ώστε

$$\boxed{\begin{aligned} a^G_{lm} &= \int d\Omega P_{ab}(\theta,\phi) Y^{G\ ab*}_{(lm)}(\theta,\phi) \\ a^C_{lm} &= \int d\Omega P_{ab}(\theta,\phi) Y^{C\ ab*}_{(lm)}(\theta,\phi) \end{aligned}} \tag{12.36}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι μονοπολικές και διπολικές συνιστώσες των βαθμωτών και ψευδοβαθμωτών δυναμικών $A(\hat{n})$ και $B(\hat{n})$ δεν συνεισφέρουν στην πόλωση $P_{ab}(\hat{n})$ και από σσύμβαση, τα θεωρούμε μηδέν.
Επομένως τα $a^G_{lm}, a^C_{lm}, Y^G_{(lm)ab}, Y^C_{(lm)ab}$ ξεκινάνε από $l = 2$, και

$$P_{ab}(\theta,\phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a^G_{lm} Y^G_{(lm)ab} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a^C_{lm} Y^C_{(lm)ab} \tag{12.37}$$

Από τις 12.27 και 12.31 έπεται ότι οι πολυπολικοί συντελεστές a^G_{lm} και a^C_{lm} μετασχηματίζονται με το συνήθη τρόπο

$$\boxed{a^{G/C}_{lm} = \sum_{m'} D^l_{mm'}(a,\beta,\gamma) a^{G'/C'}_{lm'}} \tag{12.38}$$

σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων.
Μπορεί να φαίνεται ότι έχουμε αυξήσει κατά πολύ το πλήθος των συνιστωσών των σφαιρικών αρμονικών, με όλους αυτούς τους δείκτες G, C και $ab = \theta\theta, \theta\phi, \phi\theta, \phi\phi$. Για την ακρίβεια, υπάρχουν μονάχα δύο ανεξάρτητες συνιστώσες. Πρώτα από όλα, οι $Y^G_{(lm)ab}, Y^C_{(lm)ab}$ είναι άιχνοι και συμμετρικοί εκ κατασκευής, άρα κάθε ένας εξ αυτών έχει δύο ανεξάρτητες συνιστώσες. Επιπλέον, οι συνιστώσες των $Y^G_{(lm)}$ και $Y^C_{(lm)}$ σχετίζονται ο ένας με τον άλλο, και μπορούμε να τους γράψουμε ως

$$\boxed{Y^G_{(lm)ab} = \frac{N_l}{2} \begin{bmatrix} W_{lm} & X_{lm}\sin\theta \\ X_{lm}\sin\theta & -W_{lm}\sin^2\theta \end{bmatrix} \quad Y^C_{(lm)ab} = \frac{N_l}{2} \begin{bmatrix} -X_m & W_{lm}\sin\theta \\ W_{lm}\sin\theta & X_{lm}\sin^2\theta \end{bmatrix}} \tag{12.39}$$

όπου οι δύο ανεξάρτητες συναρτήσεις είναι

$$
\begin{aligned}
W_{lm} \equiv & Y_{lm;\theta\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta} = \partial_\theta^2 Y_{lm} - \frac{1}{\sin^2\theta} partial_\phi^2 Y_{lm} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\theta Y_{lm} \\
= & (\partial_\theta^2 - \cot\theta\partial_\theta + \frac{m^2}{\sin^2\theta})Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm} + 2\partial_\theta^2 Y_{lm} \\
X_{lm} \equiv & \frac{2}{\sin\theta} Y_{lm;\theta\phi} = \frac{2}{\sin\theta}\partial_\theta\partial_\phi Y_{lm} - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\phi Y_{lm} = \frac{2im}{\sin\theta}(\partial_\theta - \cot\theta)Y_{lm}
\end{aligned}
\tag{12.40}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες των σφαιρικών αρμονικών

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_z Y_{lm} \equiv & -i\partial_\phi Y_{lm} = mY_{lm} \\
\hat{L}^2 Y_{lm} \equiv & -\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} Y_{lm} \\
= & -\cot\partial_\theta Y_{lm} - \partial_\theta^2 Y_{lm} - \frac{1}{\sin^\theta}\partial_\phi^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}
\end{aligned}
\tag{12.41}
$$

όπου $\hat{L}_z$ και $\hat{L}^2$ είναι οι τελεστές στροφορμής.
Να παρατηρήσουμε ότι στην ορθοκανονική βάση

$$
P_{\hat{a}\hat{b}}(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{bmatrix} = \sum_{lm} a_{lm}^G Y_{(lm)\hat{a}\hat{b}}^G + \sum_{lm} a_{lm}^C Y_{(lm)\hat{a}\hat{b}}^C, \tag{12.42}
$$

όπου

$$
Y_{(lm)\hat{a}\hat{b}}^G \equiv \frac{N_l}{2}\begin{bmatrix} W_{lm} & X_{lm} \\ X_{lm} & -W_{lm} \end{bmatrix} \quad Y_{(lm)\hat{a}\hat{b}}^C \equiv \frac{N_l}{2}\begin{bmatrix} -X_{lm} & W_{lm} \\ W_{lm} & X_{lm} \end{bmatrix} \tag{12.43}
$$

Για τις παραμέτρους Stokes έχουμε

$$
\boxed{
\begin{aligned}
Q &= \sum_{lm} a_{lm}^G N_l W_{lm} - \sum_{lm} a_{lm}^C N_l X_{lm} \\
U &= \sum_{lm} a_{lm}^G N_l X_{lm} + \sum_{lm} a^C N_l W_{lm}
\end{aligned}
}
\tag{12.44}
$$

12.5 Ιδιότητες των Τανυστικών Σφαιρικών Αρμονικών

Οι βαθμωτές σφαιρικές αρμονικές είναι

$$
Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-1)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{12.45}
$$

όπου οι σχετικές συναρτήσεις Legendre $P_l^m(\cos\theta)$ είναι πραγματικές και

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-1)!}{(l+m)!} P_l^m \tag{12.46}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_l^{-m} =& (-1)^{-m}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-1)!}{(l+m)!}} P_l^{-m} e^{-im\phi} \\ =& \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-1)!}{(l+m)!}} P_l^{m} e^{-iml} = (-1)^m Y_l^{m*} \end{aligned} \tag{12.47}$$

Από αυτό έπεται επίσης (χρησιμοποιώντας τις 12.29 και 12.39)

$$\boxed{\begin{aligned} Y^{G/C}_{(l,-m)ab} =& (-1)^m Y^{G/C*}_{(lm)ab} \\ W_{l,-m} =& (-1)^m W^*_{lm} \\ X_{l,-m} =& (-1)^m X^*_{lm} \end{aligned}} \tag{12.48}$$

Από την 12.39 μπορούμε να υπολογίσουμε τα W_{lm} και X_{lm} σε όρους των $P_l^m(\cos\theta)$

$$\boxed{\begin{aligned} W_{lm}(\theta,\phi) =& l(l+1)Y_l^m + 2\partial_\theta^2 Y_l^m = \cdots = (-1)^m 2\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} G^+_{lm}(\cos\theta) e^{im\phi} \\ -iX_{lm}(\theta,\phi) =& \frac{2m}{\sin\theta}(\partial_\theta - \cot\theta) Y_l^m = \cdots = (-1)^m 2\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} G^-_{lm}(\cos\theta) e^{im\phi} \end{aligned}} \tag{12.49}$$

όπου οι

$$\boxed{\begin{aligned} G^+_{lm}(\cos\theta) \equiv& -\left[\frac{l-m^2}{\sin^2\theta} + \frac{1}{2}l(l-1)\right] P_l^m(\cos\theta) + (l+m)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} P^m_{l-1}(\cos\theta) \\ G^-_{lm}(\cos\theta) \equiv& \frac{m}{\sin^2\theta}\left[(l-1)\cos\theta P_l^m(\cos\theta) - (l+m)P^m_{l-1}(\cos\theta)\right] \end{aligned}} \tag{12.50}$$

είναι πραγματικές.
Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση Legendre

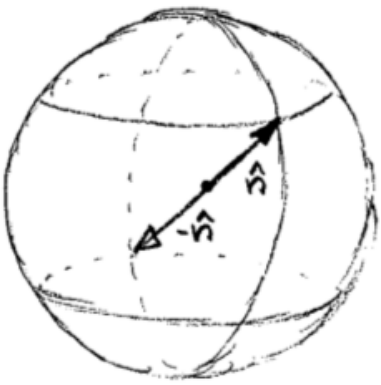
$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} P_l^m(\cos\theta)\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] P_l^m(\cos\theta) = 0 \\ &\frac{d^2}{d\theta^2} P_l^m(\cos\theta) = x\frac{dP_l^m}{dx} + \frac{m^2}{1-x^2} P_l^m - l(l+1)P_l^m \quad \text{όπου} \quad x = \cos\theta \end{aligned} \tag{12.51}$$

και η αναδρομική σχέση

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}P_l^m = lxP_l^m - (l+m)P_{l-1}^m \tag{12.52}$$

Βλέπουμε ότι η $\phi-$εξάρτηση των $W_{lm}, X_{lm}, Y_{lm}^G, Y_{lm}^C$ είναι τετρημένη, $e^{im\phi}$, και ότι για $m=0$: το W_{l0} είναι πραγματικό και το X_{l0} είναι φανταστηκό.

Αντίποδες



Οι δύο αντίθετες μεταξύ τους κατευθύνσεις $\hat{n}$ και $-\hat{n}$ έχουν συντεταγμένες $\hat{n}=(\theta,\phi)$ και $-\hat{n}=(\theta^-,\phi^-)=(\pi-\theta,\phi+\pi)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x^- &= \cos\theta^- = -\cos\theta = -x\\ e^{im\phi^-} &= e^{im\pi}e^{im\phi} = (-1)^m e^{im\phi}\end{aligned}$$

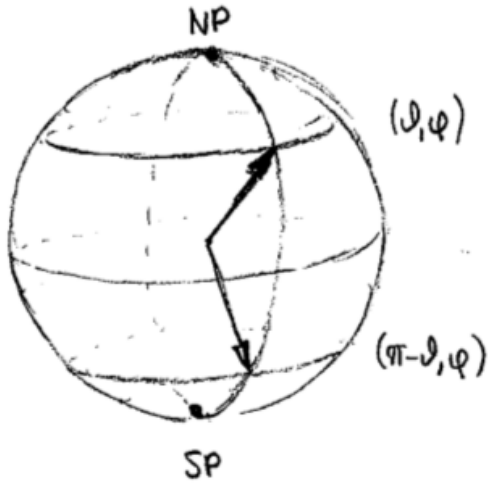
Η ομοτιμία της σχετικής εξίσωσης Legendre είναι

$$P_l^m(-x) = (-1)^{l+m}P_l^m(x) \tag{12.53}$$

$$\therefore Y_l^m(-\hat{n}) = (-1)^m(-1)^{l+m}Y_l^m(\hat{n}) = (-1)^l Y_l^m(\hat{n}) \tag{12.54}$$

Από τον ορισμό των $G_{lm}^{\pm}$, Εξ.12.50, παίρνουμε

$$G_{lm}^{\pm}(-x) = \pm(-1)^{l+m}G_{lm}^{\pm}(x) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}W_l^m(-\hat{n}) &= (-1)^l W_l^m(\hat{n})\\ X_l^m(-\hat{n}) &= (-1)^l X_l^m(\hat{n})\end{aligned}} \tag{12.55}$$



Ανάκλαση Βορά-Νότου

Εάν απλά εφαρμόσουμε μια ανάκλαση

$$\theta \to \phi - \theta \Rightarrow \cos\theta \to -\cos\theta$$

αλλά κρατήσουμε το ϕ ίδιο, δεν παίρνουμε τον παράγοντα $e^{im\pi} = (-1)^m$, και έχουμε τα αποτελέσματα

$$\boxed{\begin{aligned} Y_l^m(\pi-\theta,\phi) =& (-1)^{l+m} Y_l^m(\theta,\phi) \\ W_l^m(\pi-\theta,\phi) =& (-1)^{l+m} W_l^m(\theta,\phi) \\ X_l^m(\pi-\theta,\phi) =& (-1)^{l+m} X_l^m(\theta,\phi) \end{aligned}} \tag{12.56}$$

Βόριοι και Νότιοι Πόλοι

Ο βόρειος και ο νότιος πόλος (NP και SP) του θ, ϕ συστήματος συντεταγμένων αντιστοιχεί στα $\theta = 0, \pi$.

$$x = \cos\theta = +1, -1$$

Η ϕ συντεταγμένη είναι πλειονότιμη σε αυτά τα σημείο (όλες οι τιμές του ϕ αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο).

Οι $P_l^m(x)$ έχουν τις τιμές

$$\begin{aligned} P_l^m(\pm 1) =& 0 \quad \text{για} \quad m \neq 0 \\ P_l(1) =& 1 \quad \text{και} \quad P_l(-1) = (-1)^l \end{aligned} \tag{12.57}$$

από αυτό παίρνουμε

$$\boxed{\begin{aligned} Y_l^m(NP) =& \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0} \\ Y_l^m(SP) =& (-1)^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0} \end{aligned}} \tag{12.58}$$

Τα $G_{lm}^{\pm}(\pm 1)$ είναι πιο δύσκολο να τα εξάγουμε, αφού από τις 12.50 και 12.57 απλά παίρνουμε $\frac{0}{0}$ ή $\infty - \infty$, καθώς $\sin\theta = 0$ στους πόλους. Για να τα υπολογίσουμε, χρειάζεται να πάρουμε το όριο $\theta \to 0, \pi$.

⋆⋆⋆

$$\begin{aligned} & P_l^m(\cos\theta) \sim \frac{(-1)^m}{2^m m!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\theta^m \quad \text{για } m > 0 \\ & \text{και καθώς} \theta \to 0 \\ & P_l(\cos\theta) \sim 1 - \frac{1}{4}l(l+1)\theta^2 \end{aligned} \tag{12.59}$$

Χρησιμοποιώντας την 12.50 παίρνουμε <u>για $m \geq 0$</u>, ότι

$$G_{l2}^{\pm}(1) = \frac{1}{4}\frac{(l+2)!}{(l-2)!} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} W_{l2}(0,\phi) =& \frac{1}{N_l}\sqrt{\frac{2l+1}{8\pi}}e^{i2\phi} \\ X_{l2}(0,\phi) =& \frac{i}{N_l}\sqrt{\frac{2l+1}{8\pi}}e^{i2\phi} \end{aligned} \tag{12.60}$$

⋆⋆⋆

$$\boxed{\begin{aligned} W_l^m(0,\phi) =& \frac{1}{N_l}\sqrt{\frac{2l+1}{8\pi}}\left(\delta_{m2}e^{i2\phi} + \delta_{m,-2}e^{-i2\phi}\right) \\ X_l^m(0,\phi) =& \frac{i}{N_l}\sqrt{\frac{2l+1}{8\pi}}\left(\delta_{m2}e^{i2\phi} - \delta_{m,-2}e^{-i2\phi}\right) \end{aligned}} \tag{12.61}$$

12.6 Ανάπτυγμα Fourier και ανάπτυγμα σε Σφαιρικές Αρμονικές

Η συνάρτηση φωτεινότητας $\Theta(\eta, \vec{x}, \hat{n})$ εξαρτάται και από την θέση $(\vec{x})$ και από την κατεύθυνση $(\hat{n})$. Αναπτύσουμε κατά Fourier ως προς το τη θέση

$$\Theta(\eta, \vec{x}, \hat{n}) = \sum_{\vec{k}} \Theta(\eta, \vec{k}, \hat{n}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{12.62}$$

Η εξίσωση φωτεινότητας γίνεται

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = -i\hat{n}\cdot\vec{k}\ \Theta - \frac{1}{2}h'_{ij}n^i n^j - h'_{0i}n^i + \frac{1}{2}i\hat{n}\cdot\vec{k}h_{00} \tag{12.63}$$

για $\Theta(\theta, \vec{k}, \hat{n})$. Αναπτύσσουμε στη συνέχεια την εξάρτηση από την κατεύθυνση $(\hat{n})$ του $\Theta(\theta, \vec{k}, \hat{n})$ σε σφαιρικές αρμονικές.

$$\Theta(\theta, \vec{k}, \hat{n}) = \sum_{lm} a_{lm}(\eta, \vec{k}) Y_l^m(\hat{n}) \tag{12.64}$$

Για το ανάπτυγμα σε σφαιρικές αρμονικές προκύπτει ότι είναι βολικό να επιλέξουμε τον άξονα z παράλληλο στο κύμα $\vec{k}$ του αναπτύγματος Fourier: $\hat{z}||\vec{k}$.
Είναι απλούστερο να σκεφτούμε ότι επιλέγουμε έναν μόνο όρο του αναπτύγματος Fourier $\vec{k}$ και στη συνέχεια διαλέγουμε το προσανατολισμό των n's ώστε

$$\boxed{\Theta(\eta, \vec{x}, \hat{n}) = \Theta(\eta, \hat{n}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \Theta(\eta, \hat{n}) e^{ikz}} \tag{12.65}$$

και

$$\underline{\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -ikn_3\theta - \frac{1}{2}h' n^i n^j - h'_{0i}n^i + \frac{1}{2}ikn_3 h_{00}} \tag{12.66}$$

Για μελοντική ευκολία εισάγουμε έναν όρο $i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$ στους συντελεστές των σφαιρικών αρμονικών και ορίζουμε

$$\Theta_l^m \equiv i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}a_{lm} \equiv i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}a_{lm}\int d\Omega Y_l^{m*}(\hat{n})\Theta(\eta, \hat{n}) \tag{12.67}$$

Θα κάνουμε τώρα ένα ανάπτυγμα της 12.66 σε σφαιρικές αρμονικές ξεχωριστά για ερυθρομετατόπιση (12.7) και free streaming (L).
Ιδιότητες των σφαιρικών αρμονικών ${}_l^m(\hat{n}) = Y_l^m(\theta, \phi)$ συζητούνται στο (I). Παρατηρούμε από την 12.65 ότι η $\Theta(\eta, \vec{x}, \hat{n})$ είναι πραγματική $\Rightarrow \Theta(\eta, -\vec{k}, \hat{n}) = \Theta(\eta, \vec{k}, \hat{n})^*$. Κια αφού η $\Theta(\eta, \vec{x}, \hat{n})$ είναι μιγαδική, δεν υπάρχει πρόσθετος

περιορισμός στους συντελεστές του αναπτύγματός του θ_m^l.
Θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει τις "μη κανπνικοποιημένες σφαιρικές αρμονικές"

$$\tilde{Y}_l^m(\hat{n}) \equiv (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(\hat{n}) = (-i)^l (-i)^m \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \tag{12.68}$$

Πολλές εξισώσεις είναι απλούστερες για το $\tilde{Y}_l^m(\hat{n})$ παρά για το ${}_l^m(\hat{n})$, αλλά η σχέση ορθογωνιότητας είναι

$$\int d\Omega \tilde{Y}_l^m(\hat{n})^* \tilde{Y}_{l'}^{m'}(\hat{n}) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_l^{l'} \delta_m^{m'}. \tag{12.69}$$

Το πολυπολικό ανάπτυγμα της συνάρτηση φωτεινότητας τώρα είναι

$$\begin{aligned} \Theta(\eta, \hat{n}) =& \sum \Theta_l^m(\eta) \tilde{Y}_l^m(\hat{n}) \\ \Theta_l^m(\eta) =& \frac{2l+1}{4\pi} \int d\Omega \tilde{Y}_l^{m*}(\hat{n}) \Theta(\eta, \hat{n}) \end{aligned} \tag{12.70}$$

Για το $m = 0$ έχουμε Το πολυπολικό ανάπτυγμα της συνάρτηση φωτεινότητας τώρα είναι

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_l^0(\hat{n}) =& (-i)^l P_l(\cos\theta) \\ \Theta_l^0(\eta) =& \frac{2l+1}{4\pi} i^l \int d\Omega P_l(\cos\theta) \Theta(\eta, \hat{n}) \\ =& (2l+1) i^l \int_{-1}^{1} \frac{d\cos\theta}{2} P_l(\cos\theta) \Theta(\eta, \hat{n}) \end{aligned} \tag{12.71}$$

Η ανισοτροποία $\Theta(\hat{n})$ είναι ίδια σε κάθε $\vec{x}$ εκτός του ότι διαμορφώνεται από επίπεδο κύμα $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

Μέρος V

Κοσμολογικές διαταραχές και η καταγραφή τους στο CMB

12.7 Δημιουργία ανισοτροποιών στο CMB από διαταραχές της μετρικής

Εξετάζουμε τώρα το κομμάτι της ερυθρομετατόπισης της συνάρτησης φωτεινότητας 12.66:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = -\frac{1}{2}h_{ij}^{'}n^i n^j - h_{0i}^{'}n^i + \frac{1}{2}ikn_3 h_{00} \tag{12.72}$$

Αυτή μας λέει πως οι διαταραχές της μετρικής επιρρεάζουν την εξίσωση φωτεινότητας. Εξετάζουμε τις βαθμωτές, διανυσματικές και τανυστικές διαταραχές ξεχωριστά.

12.7.1 Βαθμωτές διαταραχές

Επιλέγουμε Νευτώνεια βαθμίδα $\Rightarrow h_{ij} = -2\psi\delta_{ij}, \quad h_{0i} = 0, \quad h_{00=-2\Phi}$. Η 12.72 γίνεται

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} = +\psi^{'} - ikn_3\phi = \psi^{'}\sqrt{4\pi}Y_0^0(\hat{n}) - ik\phi\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0(\hat{n}) \tag{12.73}$$

Για τους πολυπολικούς συντελεστές έχουμε

$$\begin{aligned} a_{lm}^{'} &= \int d\Omega Y_l^{m*}(\hat{n})\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} = \psi^{'}\sqrt{4\pi}\delta_l^0\delta_m^0 - ik\phi\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\delta_l^1\delta_m^0 \\ \Rightarrow \Theta_l^{m'} &= i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}a_{lm}^{'} = \psi^{'}\delta_l^0\delta_m^0 + k\phi\delta_l^1\delta_m^0 \end{aligned} \tag{12.74}$$

Άρα για τους διαφορετικούς πολιπολικούς συντελεστές έχουμε

$$\boxed{\begin{aligned} \Theta_0^{0'} &= \psi^{'} \\ \Theta_1^{0'} &= k\psi \end{aligned}} \tag{12.75}$$

ενώ όλες οι άλλες συνειστώσες είναι μηδενικές και άρα δεν έχουμε συνεισφορές σε αυτές.

Η 12.75 αντιστοιχεί σε $\delta_\gamma^1 = 4\psi^{'}$, $v_\gamma^{'} = k\phi$ στην περιγραφή του τανυστή ενέργειας ορμής. Η πρώτη από αυτές αντιστοιχεί στην αλλαγή της ενεργειακής πυκνότητας των φωτονίων λόγω πρόσθετης της διαστολής του $\psi^{'}$. Η δεύτερη εκφράζει την επίδραση της απόκλισης του βαρυτικού δυναμικού $k\phi$ στα φωτόνια.

12.7.2 Διανυσματικές Διαταραχές

Για διανυσματικές διαταραχές

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_i \\ -B_i & 2E^{\nu}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & 0 \\ -B_1 & & & -iE_1 \\ -B_2 & & & -iE_2 \\ 0 & -iE_1 & -iE_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{12.76}$$

Ο μετασχηματισμός βαθμίδας είναι (σε συμφωνία με όσα είπαμε στο Κεφ. 6.2)

$$\tilde{B}_i = B_i + \xi^{i'} \quad \text{και} \quad \tilde{E}_i = E_i + k\xi^i \tag{12.77}$$

Επιλέγουμε βαθμίδα όπου $E_i = 0$ (παίρνοντας $\xi^i = -\frac{1}{k}E_i$)

$$\Rightarrow \quad h_{00} = h_{ij} = 0, \quad h_{0i} = -B_i \tag{12.78}$$

Η 12.72 γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta}{\partial\eta} =& B_i^{'} n_i = n_1 B_1^{'} + n_2 B_2^{'} \\ =& \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\Big[\big(-Y_1^1 + Y_1^{-1}\big)B_1^{'} + i\big(Y_1^1 + Y_1^{-1}\big)B_2^{'}\Big] \\ =& \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\Big[-\frac{1}{\sqrt{2}}\big(B_1^{'} - iB_2^{'}\big)Y_1^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\big(B_1^{'} + iB_2^{'}\big)Y_1^{-1}\Big] \\ =& \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\Big[B^{(1)'}Y_1^1 + B^{(-1)}Y_1^{-1}\Big] \end{aligned} \tag{12.79}$$

όπου ορίσαμε

$$\begin{aligned} B^{(1)} \equiv& \frac{-1}{\sqrt{2}}\big(B_1 - iB_2\big) \\ B^{(-1)} \equiv& \frac{1}{\sqrt{2}}\big(B_1 + iB_2\big) \end{aligned} \tag{12.80}$$

Για τους πολυπολικούς όρους

$$\begin{aligned} \Theta_l^{m'} =& i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega Y_l^{m*}(\hat{n}) \frac{\partial\Theta(\hat{n})}{\partial\eta} \\ =& i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\Big[B^{(1)'}\delta_l^1\delta_m^1 + B^{(-1)'}\delta_l^1\delta_m^{-1}\Big] \end{aligned} \tag{12.81}$$

Άρα για τους διαφορετικούς πολυπολικούς όρους

$$\boxed{\begin{aligned} \Theta_1^{1'} =& iB^{(1)'} \\ \Theta_1^{-1'} =& iB^{(-1)'} \end{aligned}} \tag{12.82}$$

ενώ δεν έχουμε κάποια άλλη επίδραση στις άλλες συνειστώσες του Θ_l^m.

12.7.3 Τανυστικές Διαταραχές

Για τανυστικές διαταραχές, $h_{00} = h_{0i} = 0$ και $h_{ij} = \begin{bmatrix} h_+ & h_\times & \\ h_\times & -h_+ & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

Η Εξ. 12.72 γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta} =& -\frac{1}{2}h'_{ij}n_in_j = -\frac{1}{2}\left[h'_+(n_1^2 - n_2^2) + h'_\times 2n_1n_2\right] \\ =&\frac{2\pi}{15}\left[\left(Y_2^2 + Y_2^{-2}\right)h'_+ + i\left(-Y_2^2 + Y_2^{-2}\right)h'_\times\right] \\ =&\frac{4\pi}{5}\frac{1}{\sqrt{6}}\left[\left(-h'_+ + ih'_\times\right)Y_2^2 + \left(-h'_+ - ih'_\times\right)Y_2^{-2}\right] \\ =&\frac{4\pi}{5}\left[h^{(2)'}Y_2^2 + h^{(-2)'}Y_2^{-2}\right]\end{aligned} \tag{12.83}$$

όπου

$$\begin{aligned}h^{(2)} \equiv& \frac{-1}{6}\left(h_+ - ih_\times\right) \\ h^{(-2)} \equiv& \frac{-1}{6}\left(h_+ + ih_\times\right)\end{aligned} \tag{12.84}$$

Για τους πολυπολικούς όρους παίρνουμε (μόνο οι όροι $l = 2$ είναι μη μηδενικοί)

$$\Theta_l^{m'} = i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int d\Omega Y_l^{m*}(\hat{n})(\hat{n})\frac{\partial\Theta(\hat{n})}{\partial\eta} = -\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\left[h^{(2)'}\delta_l^2\delta_m^2 + h^{(-2)'}\delta_l^2\delta_m^{-2}\right] \tag{12.85}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Theta_2^{2'} =& -h^{(2)'} \\ \Theta_2^{(-2)'} =& -h^{(-2)'}\end{aligned}} \tag{12.86}$$

και δεν έχουμε άλλη συνεισφορά στο Θ_l^m.

12.7.4 Σύνοψη

Βρήκαμε ότι η επίδραση της βαρυτικής ερυθρομετατόπισης στη συνάρτηση φωτεινότητας είναι

$$\boxed{\begin{array}{llllll}\Theta_0^{0'} = & \psi' & \Theta_1^{1'} = & iB^{(1)'} & \Theta_2^{2'} = & -h^{(2)'} \\ \Theta_1^{0'} = & k\phi & \Theta_1^{-1'} = & iB^{(-1)'} & \Theta_2^{-2'} = & -h^{(-2)'}\end{array}} \tag{12.87}$$

Το σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι:

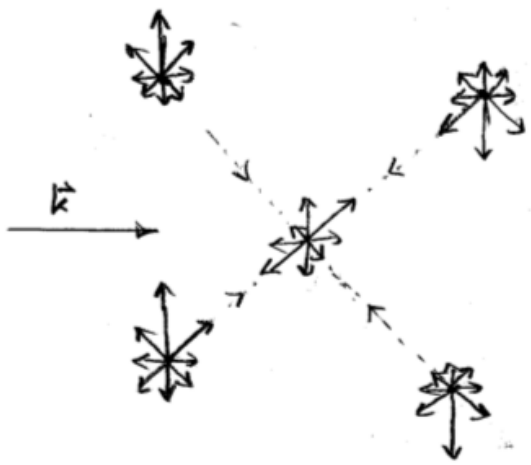
Οι βαθμωτές διαταραχές διεγείρουν $m = 0$ καταστάσεις
Οι διανυσματικές διαταραχές διεγείρουν $m = \pm 1$ καταστάσεις
Οι τανυστικές διαταραχές διεγείρουν $m = \pm 2$ καταστάσεις

12.8 Free Streaming

Ασχολούμαστε τώρα με το κομμάτι της συνάρτησης φωτεινότητας 12.66 του free-streaming:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = -ikn_3\Theta \quad \text{όπου} \quad \Theta = \Theta(\eta, \hat{n}) \tag{12.88}$$

Η φυσική αυτού είναι η ανάμειξη σε διαφορετικές θέσεις, καθώς τα φωτόνια



Σχήμα 12.1: Το σχήμα δείχνει την δημιουργία τετραπολικής ανισοτροπίας ($l = 2$) -στο κέντρο της εικόνας, το οποίο αντοπροσωπεύει έναν ύστερο χρόνο η - από τη διπολική ανισοτροπία ($l = 1$)

κινούνται από ένα επίπεδο σε ένα άλλο.

Η 12.72 διαφέρει από την προηγούμενη περίπτωση, (μετρικές διαταραχές, 12.7) στο ότι τώρα η $\Theta(\hat{n})$, με τη δικιά της εξάρτηση από την κατεύθυνση εμφανίζεται στο δεξί μέλος, πέρα από την εξάρτηση από το n_3. Αυτό οδηγεί

σε γινόμενα των Y_l^m τα οποία χρησιμοποιήσαμε στη σειρά CG,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} &= -ik\cos\theta\Theta(\hat{n}) = -ik\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0(\hat{n})\Theta(\hat{n}) = -ik\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_l \Theta_l^m(-i)^l\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_1^0Y_l^m \\ &= -ik\sum_l \Theta_l^m(-i)^l\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\left[\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}}Y_{l-1}^m + \sqrt{\frac{(l+1+m)(l+1-m)}{(2l+1)(2l+3)}}Y_{l+1}^m\right]\end{aligned} \tag{12.89}$$

Μπορούμε να πάρουμε αθροίσματα πάνω σε στους δύο όρους ξεχωριστά, στον πρώτο για $l = l^{'}+1$ και στον δεύτερο για $l = l^{'}-1$, και να τους αντιμετοπίσουμε ως αθροίσματα πάνω στα $l^{'}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} &= -ik\sum_{l'} \Theta_{l'+1}^m(-i)^{l'+1}\sqrt{\frac{4\pi}{2l'+3}}\sqrt{\frac{(l'+1+m)(l'+1-m)}{(2l'+1)(2l'+3)}}Y_{l'}^m \\ &\quad -ik\sum_{l'} \Theta_{l'-1}^m(-i)^{l'-1}\sqrt{\frac{4\pi}{2l'-1}}\sqrt{\frac{(l'+m)(l'-m)}{(2l'-1)(2l'+1)}}Y_{l'}^m.\end{aligned} \tag{12.90}$$

Και τώρα αγνοούμε τους περιττούς όρους γιατί αυτο-αναιρούνται. Μπορούμε επομένως να επιλέξουμε τους πολυπολικούς συντελεστές

$$\begin{aligned}\Theta_l^{m'} =& i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int d\Omega Y_l^{m*}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} \\ =& -iki^l\sqrt{\frac{\cancel{2l+1}}{\cancel{4\pi}}}\left[\Theta_{l+1}^m(-i)^{l+1}\sqrt{\frac{\cancel{4\pi}}{2l+3}}\sqrt{\frac{(l+1+m)(l+1-m)}{\cancel{(2l+1)}(2l+3)}}\right. \\ &\left. + \Theta_{l-1}^m(-i)^{l-1}\sqrt{\frac{4\pi}{2l-1}}\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)\cancel{(2l+3)}}}\right] \\ =& -k\frac{\sqrt{(l+1)^2-m^2}}{2l+3}\Theta_{l+1}^m + k\frac{\sqrt{l^2-m^2}}{2l-1}\Theta_{l-1}^m\end{aligned} \tag{12.91}$$

Η I.10 για $l = 0$ γίνεται

$$Y_1^0Y_0^0 = 0 + \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sqrt{\frac{1\cdot 1}{1\cdot 3}}Y_1^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}Y_1^0 \tag{12.92}$$

και η 12.91 για $l = 0$ γίνεται

$$\Theta_0^{0'} = -k\frac{1}{3}\Theta_1^0 + 0 = -\frac{k}{3}\Theta_1^0 \tag{12.93}$$

Από την 12.91 βλέπυμε ότι η επίδραση του free streaming είναι να αναμειγνύει τις l συνεισφορές, χωρίς να αναμειγνύει τις m καταστάσεις.

Συνδιάζοντας τα αποτελέσματα από το Κεφ. 12.7 και Κεφ. L, έχουμε ότι το πολυπολικό ανάπτυγμα της συνάρτησης φωτεινότητας 12.66 είναι

$$
\begin{aligned}
\Theta_0^{0'} &= -\frac{k}{3}\Theta_1^0 + \psi' \\
\Theta_1^{0'} &= -\frac{2}{5}k\Theta_2^0 + k\Theta_0^0 + k\phi \\
\Theta_1^{\pm 1'} &= -\frac{\sqrt{3}}{5}k\Theta_2^{\pm 1} + iB^{(\pm 1)'} \\
\Theta_2^{0'} &= -\frac{3}{7}k\Theta_3^0 + \frac{2}{3}k\Theta_1^0 \\
\Theta_2^{\pm 1'} &= -\frac{\sqrt{8}}{7}k\Theta_3^{\pm 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}k\Theta_1^{\pm 1} \\
\Theta_2^{\pm 2'} &= -\frac{\sqrt{5}}{7}k\Theta_3^{\pm 2} - h^{(\pm 2)'} \\
\Theta_l^{m'} &= \frac{\sqrt{(l+1)^2 - m^2}}{2l+3}k\Theta_{l+1}^m + \frac{\sqrt{l^2 - m^2}}{2l-1}k\Theta_{l-1}^m \quad \text{για } l \geq 3
\end{aligned}
\tag{12.94}
$$

Μετρικές διαταραχές γεννούν ανισοτροπία στο CMB σε μικρά l. Αφού οι m καταστάσεις δεν είναι μεικτές, έχουμε απλά $m = 0$ συνεισφορές για την περίπτωση βαθμωτών διαταραχών, $m = \pm 1$ για διανύσματα και $m = \pm 2$ για τανυστικές διαταραχές.

<u>Επομένως δεν παίρνουμε ποτέ $|m| \geq 3$ όρους!</u>

(Να θυμίσουμε ότι κάνουμε όμως $1^{\eta\varsigma}$ τάξης θεωρία διαταραχών.)

12.9 Spin-2 Σφαιρικές Αρμονικές

Υπάρχει και μια άλλη μέθοδος για να παάρουμε το ανάπτυγμα σε σφαιρικές αρμονικές γραμμικών πολώσεων. Αντί να παρατηρήσουμε ότι οι παράμετροι Stokes σχηματίζουν ένα τανυστικό πεδίο και χρησιμοποιώντας τα συνήθη εργαλεία της διαφορικής γεωμετρίας στην κυρτή πολλαπλότητα της σφαίρας, μπορούμε να εστειάσουμε στους μιγεδικούς συνδιασμούς των παραμέτρων Stokes $Q + iU$ και $Q - iU$. Δεν θα υπάρξει αναφορά σε σύστημα συντεταγμένων, καθώς οι παρέμετροι Stokes δίνονται πάντα σε μορφή που ανήκει σε ορθοκανονική βάση. Η σημαντική παρατήριση είναι ότι σε ένα

μετασχηματισμό συντεταγμένων $\theta, \phi \to \theta', \phi'$

$$\begin{aligned} Q' =& Q\cos 2\psi + U\sin 2\psi \\ U' =& -Q\sin 2\psi + U\cos 2\psi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} Q' + iU' =& e^{-i2\psi}(Q+iU) \\ Q' - iU' =& e^{+i2\psi}(Q+iU) \end{aligned}} \tag{12.95}$$

Στην αναζήτηση ενός κατάλληλου τρόπου για να κάνουμε πολυπολικό ανάπτυγμα των συναρτησεων στη σφαίρα με τέτοιες ιδιότητες μετασχηματισμών βρίσκουμε διαφορικούς τελεστές, οι οποίοι δρώντας στις συνήθεις (πλέον καλούμενες "spin-0") σφαιρικές αρμονικές παράγουν τις καλούμενες spin-2 σφαιρικές αρμονικές ${}_2Y_l^m$ και ${}_{-2}Y_l^m$. Αυτοί οι διαφορικοί τελεστές σχετίζονται στενά με τις συναλοίωτες παραγώγους που χρησιμοποιήσαμε για να πάρουμε τις τανυστικές σφαιρικές αρμονικές, και το τελικό αποτέλεσμα που παίρνουμε από τη δράση τους είναι

$$\boxed{\begin{aligned} {}_2Y_l^m =& \frac{N_l}{\sqrt{2}}\big(W_{lm} + iX_{lm}\big) \\ {}_{-2}Y_l^m =& \frac{N_l}{\sqrt{2}}\big(W_{lm} - iX_{lm}\big) \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} W_{lm} =& \frac{1}{\sqrt{2}N_l}\big({}_2Y_l^m + {}_{-2}Y_l^m\big) \\ X_{lm} =& \frac{-i}{\sqrt{2}N_l}\big({}_2Y_l^m + {}_{-2}Y_l^m\big) \end{aligned} \tag{12.96}$$

και χρησιμοποιώντας την 12.44 παίρνουμε

$$\begin{aligned} Q \pm iU =& \sum_{lm} a_{lm}^G N_l\big(W_{lm} \pm iX_{lm}\big) + \sum_{lm} a_{lm}^C N_l \underbrace{\big(-X_{lm} \pm iW_{lm}\big)}_{\pm i\left(W_{lm} \pm iX_{lm}\right)} \\ =& \sum_{lm} \underbrace{\sqrt{2}\big(a_{lm}^G \pm i a_{lm}^C\big)}_{\equiv a_{\pm 2, lm}} {}_{\pm 2}Y_l^m \end{aligned} \tag{12.97}$$

Και οι δύο προσεγγίσεις, είτε των τανυστικών σφαιρικών αρμονικών, είτε των spin-2 σφαιρικών αρμονικών για την ανάλυση της πόλωσης του CMB οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα, αλλά η ύπαρξη και των δύο προσεγγίσεων έχει οδηγήσει σε διαφορετικές συμβάσεις όσον αφορά το πρόσημο και τον παράγοντα $\sqrt{2}$. Ξεχωρίζουμε τις δύο συμβάσεις μεταξύ τους χρησιμοποιώντας τα γράμματα G και C για τις δύο καθαρές πολώσεις στη σύμβαση των τανυστικών σφαιρικών αρμονικών και τα γράμματα E και B για να διαχωρίσουμε τις δύο καθαρές πολώσει στη σύμβαση των spin-2 σφαιρικών αρμονικών. Η σύμβαση στη χρήση των spin-2 αρμονικών έχει κυριαρχήσει σήμερα στο πεδίο μελέτης του CMB, και για το λόγο αυτό στη συνέχεια θα δουλέψουμε βασικά με αυτή τη σύμβαση.

Εν γένει, ποσότητες ορισμένες πάνω στη σφαίρα που μετασχηματίζονται όπως

$$f'(\hat{n}) = e^{-is\psi} f(\hat{n}) \tag{12.98}$$

όπου το ψ είναι η τοπική (στο $\hat{n}$) γωνία στροφής των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{\theta}, \hat{\phi}$, ονομάζονται $spin-s$ συναρτήσει, και αναπτύσσονται σε $spin-s$ σφαιρικές αρμονικές ${}_sY_l^m(\theta,\phi)$. Οι συνήθεις $Y_l^m \equiv_0 Y_l^m$.
Οι spin-s σφαιρικές αρμονικές (για δεδομένο s) συνειστούν ένα πλήρες σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων στη σφαίρα

$$\boxed{\int d\Omega_s Y_l^m(\theta,\phi)_s Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}} \tag{12.99}$$

Συνεπώς έχουμε

$$\boxed{\begin{aligned} a_{2,lm} &= \int d\Omega_2 Y_l^{m*}(\theta,\phi)\big(Q+iU\big)(\theta,\phi) \\ a_{-2,lm} &= \int d\Omega_{-2} Y_l^{m*}(\theta,\phi)\big(Q-iU\big)(\theta,\phi) \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} Q+iU &= \sum_{lm} a_{2,lm2}Y_l^m \\ Q-iU &\sum_{lm} a_{-2,lm-2}Y_l^m \end{aligned}} \tag{12.100}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q =& \frac{1}{2}\sum_{lm}\left(a_{2,lm2}Y_l^m + a_{-2,lm-2}Y_l^m\right) \\ U -& \frac{i}{2}\sum_{lm}\left(a_{2,lm2}Y_l^m - a_{-2,lm-2}Y_l^m\right) \end{aligned}} \tag{12.101}$$

E και B modes

Αντί για τα $a_{2,lm}, a_{-2,lm}$ είναι βολικό να εισάγουμε τους γραμμικούς συνδιασμούς τους

$$\boxed{\begin{aligned} a^E_{lm} \equiv & \quad -\tfrac{1}{2}(a_{2,lm} + a_{-2,lm}) = & -\sqrt{2}a^G_{lm} \\ Q^B_{lm} \equiv & \quad \tfrac{i}{2}(a_{2,lm} - a_{-2,lm}) = & -\sqrt{2}a^C_{lm} \end{aligned}} \tag{12.102}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_{2,lm} &= -\,a^E_{lm} - ia^B_{lm} \\ a_{-2,lm} &= -\,a^E_{lm} + ia^B_{lm} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} Q + iU &= -\sum_{lm} \left(a^E_{lm} + ia^B_{lm}\right)_2 Y^m_l \\ Q - iU &= -\sum_{lm} \left(a^E_{lm} - ia^B_{lm}\right)_{-2} Y^m_l \end{aligned} \tag{12.103}$$

και ορίζουμε τα spin-0 πεδία

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\hat{n}) &\equiv \sum_{lm} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} a^E_{lm} Y^m_l(\hat{n}) = -2\sum_{lm} \frac{1}{N_l} a^G_{lm} Y^m_l = 2A(\hat{n}) \\ \tilde{B}(\hat{n}) &\equiv \sum_{lm} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} a^B_{lm} Y^m_l(\hat{n}) = -2\sum_{lm} \frac{1}{N_l} a^C_{lm} Y^m_l = -2B(\hat{n}) \end{aligned} \tag{12.104}$$

τα βαθμωτά και ψευδοβαθμωτά δυναμικά πόλωσης με τα οποία ξεκινήσαμε.
Ο λόγος που εισάγουμε τους E και B συνδιασμούς των spin +2 και spin -2 πολυπολικών συντελεστών είναι α) επανενώνουμε το μιγαδικό $Q \pm iU$ σε πραγματικές ποσότητες E και B και b) έχουν συγκεκριμένη ομοτιμία: το E είναι βαθμωτό και το B είναι ψευδοβαθμωτό.

Ιδιότητες των Spin-2 Σφαιρικών Αρμονικών

Από τις σχέσεις μεταξύ των τανυστικών και spin-2 σφαιρικών αρμονικών παίρνουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες για το ${}_sY^m_l$.

$$\boxed{\begin{aligned} {}_{+2}Y^{-m}_l &= (-1)^m {}_{-2}Y^{m*}_l \\ {}_{-2}Y^{-m}_l &= (-1)^m {}_{+2}Y^{m*}_l \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a^*_{2,lm} &= (-1)^m a_{-2,l-m} \\ a^*_{-2,lm} &= (-1)^m a_{2,l-m} \end{aligned}} \tag{12.105}$$

Οι

$$\boxed{\begin{aligned} {}_2Y^m_l(-\hat{n}) &= (-1)^l {}_{-2}Y^m_l(\hat{n}) \\ {}_{-2}Y^m_l(-\hat{n}) &= (-1)^l {}_2Y^m_l(\hat{n}) \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} {}_2Y^m_l(\pi-\theta,\phi) &= (-1)^{l+m} {}_{-2}Y^m_l(\theta,\phi) \\ {}_{-2}Y^m_l(\pi-\theta,\phi) &= (-1)^{l+m} {}_2Y^m_l(\theta,\phi) \end{aligned}} \tag{12.106}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι όλες οι σχέσεις εμπλέκουν την εναλλαγή spin $+2 \leftrightarrow -2$ Βόρειοι και Νότιοι Πόλοι

$$\boxed{\begin{array}{llll} {}_2Y_l^m(0,\phi) = & \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,-2}e^{-i2\phi} & {}_2Y_l^m(\pi,\phi) = & (-1)^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,2}e^{i2\phi} \\ {}_{-2}Y_l^m(0,\phi) = & \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,2}e^{i2\phi} & {}_{-2}Y_l^m(\pi,\phi) = & (-1)^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,-2}e^{-i2\phi} \end{array}} \tag{12.107}$$

Επομένως είναι

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{πλειότιμη στο NP, εαν } m = -s \\ \text{πλειότιμη στο SP, εαν } m = s \end{array} (\text{για } s = \pm 2, \text{ όχι για } s = 0)} \tag{12.108}$$

12.10 Συναρτήσεις Συσχέτισης και Γωνιακό Φάσμα Ισχύος

Η ανισοτροποία και η πόλωση του CMB περιγράφονται από τρία σύνολα πολυπολικών συντελεστών

$$\boxed{\begin{aligned} a_{lm}^T &= \int d\Omega Y_l^{m*}(\theta,\phi)\Theta(\theta,\phi) \\ a_{lm}^G &= \int d\Omega Y_{lm}^{Gab*}(\theta,\phi)P_{ab}(\theta,\phi) \\ a_{lm}^C &= \int d\Omega Y_{lm}^{Cab*}(\theta,\phi)P_{ab}(\theta,\phi) \end{aligned}} \tag{12.109}$$

Χρησιμοποιούμε X,Y για να συμβολίσουμε κάθε ένα από τα T, G, C. Τα Θ και P_{ab} είναι πραγματικά

$$\Rightarrow a_{l,-m}^X = (-1)^m a_{lm}^{X*} \tag{12.110}$$

Υποθέτουμε ότι οι αρχέγωνες διαταραχές δημιουργήθηκαν από στατιστικά τυχαίες ισοτροτικές Γκαουσιανές διαδικασίες, και χρησιμοποιούμε το $\langle\cdot\rangle$ για να συμβολίσουμε τη αναμενόμενη τιμή αυτής της τυχαίας διαδικασίας. Υποθέτουμε επίσης ότι τα παρατηρούμενα a_{lm}^X παράχθηκαν από αρχέγονες γραμμικές διαταραγές. $\Rightarrow$ κληρονόμησαν τις στατιστικές ιδιότητες των αρχέγωνων διαταραχών
$\Rightarrow$ Οι αναμενόμενες τιμές $\langle a_{lm}^x a_{l'm'}^{Y*}\rangle$ εξαφανίζονται για $l \neq l'$, ή $m \neq m'$ και είναι ανεξάρτητη στο m

$$\therefore \langle a_{lm}^x a_{l'm'}^{Y*}\rangle = \langle a_{l,-m}^x a_{l,-m}^{Y*}\rangle = \underbrace{(-1)^{2m}}_{=1}\langle a_{lm}^{x*} a_{lm}^Y\rangle = \langle a_{lm}^{x*} a_{lm}^Y\rangle \tag{12.111}$$

είναι πραγματικά και συμμετρικά στα XY.
Οι στατιστικές ιδιότητες του CMB περιγράφονται πλήρως (μπορούν να προκύψουν όλες οι αναμενόμενες τιμές) από τα έξι γωνιακά φάσματα ισχύος

$$\boxed{\begin{array}{llll} \langle a^T_{lm} a^{T*}_{l'm'} \rangle = & C^{TT}_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} & \langle a^T_{lm} a^{G*}_{l'm'} \rangle = & C^{TG} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ \langle a^G_{lm} a^{G*}_{l'm'} \rangle = & C^{GG}_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} & \langle a^T_{lm} a^{C*}_{l'm'} \rangle = & C^{TC} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ \langle a^C_{lm} a^{C*}_{l'm'} \rangle = & C^{CC}_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} & \langle a^G_{lm} a^{C*}_{l'm'} \rangle = & C^{GC} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{array}} \tag{12.112}$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η αρχέγονη τυχαία διαδικασία που δημιούργησε αυτέςτις διαταραχές διατηρεί την ομοτιμία πχ. δεν διαχωρίζει μεταξυ του σύμπαντος και της καθρεπτικής του εικόνας. Το διαταραγμενο σύμπαν είναι στατιστικά συμμετρικό στην ομοτιμία, δηλ. το σύμπαν και η καθρεπτική του εικόνα έχουν τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες.

Στο καθρεπτικό σύμπαν, το ψευδοβαθμωτό δυναμικό πόλωσης B έχει αντίθετο πρόσημο, ενώ το βαθμωτό δυναμικό A και η συνάρτυηση φωτεινότητας Θ παραμένουν απαράλλαχτες. Λέμε ότι σε ένα μετασχηματισμό ομοτιμίας

$$\begin{aligned} \Theta \to \Theta \ &\Rightarrow a^T_{lm} \to a^T_{lm} \\ A \to A \ &\Rightarrow a^G_{lm} \to a^G_{lm} \\ B \to -B \ &\Rightarrow a^C_{lm} \to -a^C_{lm} \end{aligned} \tag{12.113}$$

Από στατιστική συμμετρία στην ομοτιμία

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -\langle a^T_{lm} a^{C*}_{lm} \rangle = \langle a^T_{lm} a^{C*}_{lm} \rangle = C^{TC} = 0 \\ -\langle a^G_{lm} a^{C*}_{lm} \rangle = \langle a^G_{lm} a^{C*}_{lm} \rangle = C^{GC} = 0 \end{array} \tag{12.114}$$

$\therefore$ Έχουμε μόνο τέσσερα γωνιακά φάσματα ισχύος $C^{TT}_l, C^{GG}_l C^{CC}_l, C^{TG}_l$.
Με τις συμβάσεις του spin-2 φορμαλισμού τα τρία φάσματα ισχύος είναι

$$\begin{aligned} C^{EE}_l &\equiv \langle a^E_{lm} a^{E*}_{lm} \rangle = 2C^{GG}_l \\ C^{BB}_l &\equiv \langle a^B_{lm} a^{B*}_{lm} \rangle = 2C^{CC}_l \\ C^{TE}_l &\equiv \langle a^T_{lm} a^{E*}_{lm} \rangle = -\sqrt{2} C^{TG}_l \end{aligned} \tag{12.115}$$

Συναρτήσεις Συσχέτισης

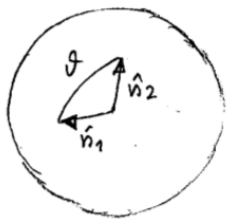
Οι συναρτήσεις συσχέτισης θερμοκρασίας στη σφαίρα (ουρανό) ορίζεται ως

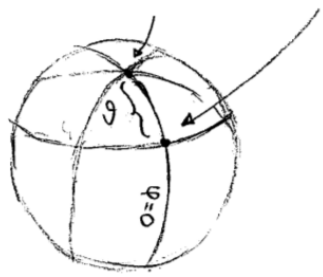
$$C^{TT}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) \equiv \langle \Theta(\hat{n}_1) \Theta(\hat{n}_2) \rangle \tag{12.116}$$

Εξαιτίας της στατιστικής ισοτροποίας, αυτό μπορεί να εξαρτάται μονάχα από τη γωνία θ μεταξύ των δύο κατευθύνσεων

$$C^{TT}(\theta) \equiv \langle \Theta(\hat{n}_1)\Theta(\hat{n}_2)\rangle_{|\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2=\cos\theta} \tag{12.117}$$

Από την παρατήρηση του ουρανού παίρνουμε μια εκτίμηση για την συνάρτηση συσχέτισης παίρνοντας την μέση τιμή πάνω σε όλα τα ζεύγη κατευθύσεων που χωρίζονται κατά μια γωνία θ. Εξαιτίας στατιστικής ισοτροποίας μπορούμε να επιλέξουμε $\hat{n}_1 = (0,0), \hat{n}_2 = (\theta, 0)$ και βρίσκουμε



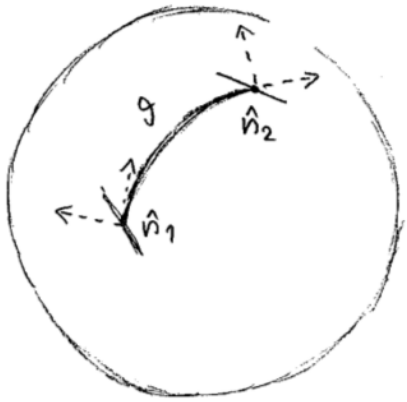


$$\begin{aligned}
C^{TT}(\theta) =& \langle \Theta(0,0)\Theta(\theta,0)\rangle = \sum_{lm}\sum_{l'm'} \langle a^{T*}_{lm} a^{T}_{l'm'}\rangle \underbrace{Y^{m*}_{l}(0,0)}_{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0}} Y^{m'}_{l'}(\theta,0) \\
=& \sum_{lm}\sum_{l'm'} C^{TT}_{l}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0} \underbrace{Y^{0}_{l}(\theta,0)}_{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta)} \\
=& \sum_{l} \frac{2l+1}{4\pi} C^{TT}_{l} P_l(\cos\theta)
\end{aligned} \tag{12.118}$$

Και για $\theta = 0 (\hat{n}_1 = \hat{n}_2)$ παίρνουμε την αυτοσυσχέτιση της θερμοκρασίας $\equiv$ διακύμανση θερμοκρασίας

$$C^{TT}(0) = \langle \Theta(\hat{n})\Theta(\hat{n})\rangle = \left\langle \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2 \right\rangle = \sum_{l} \frac{2l+1}{4\pi} C^{TT}_{l} \tag{12.119}$$

Για πολλώσεις, ο ορισμός των συναρτήσεων συσχέτισης είναι πιο δύσκολος, εξαιτίας της εξάρτησης των παραμέτρων Stokes από τις συντεταγμένες. Η γραμμική πόλωση έχει διεύθυνση στη σφαίρα που δίνεται από τα Q και U. Για να συσχετήσουμε αυτή την κατεύθυνση μεταξύ των σημείων $\hat{n}_1$ και $\hat{n}_2$ στη σφαίρα, ο ανεξάρτητος από τις συντεταγμένες τρόπος για να συγκρίνουμε τις διεύθύνσεις αυτές είναι να τις συσχετίσουμε με τις κατευθύνσεις ως προς τα $\hat{n}_1$ και $\hat{n}_2$. Η κατεύθυνση αυτή καθορίζεται μονοσήμαντα (με την απροσδιοριστία ενός προσήμου που δεν παίζει ρόλο στην πόλωση) από τον μέγιστο κύκλο



που εννώνει τα $\hat{n}_1$ και $\hat{n}_2$. Συνεπώς, προκειμένου να πάρουμε τις συσχετίσεις πόλωσης μεταξύ των $\hat{n}_1$ και $\hat{n}_2$, επαναορίζουμε τις παραμέτρους Stokes, ως προς ένα σύστημα που καθορίζεται από τον παραπάνω μέγιστο κύκλο, έτσι ώστε η "x" ή "θ" κατεύθυνση να είναι η κατεύθυνση κατά μήκος του μέγιστου κύκλου, από το $\hat{n}_1$ στο $\hat{n}_2$ (η ελάχιστη απόσταση, ώστε το τόξο να ειναι πάντα $0 \leq \theta \leq \pi$), και η "y" ή "ϕ" κατεύθυνση να είναι ορθογώνια, έτσι ώστε τα $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{n})$ να σχηματίζουν μια δεξιόστροφη βάση και στα δύο σημεία. Ονομάζουμε αυτές τις επαναορισμένες παραμέτρους Stokes Q_r και U_r. Θερικά Q_r αντιστοιχούν σε πολώσεις κατά μήκος του μέγιστου κύκλου και αρνητικά Q_r σε πολώσεις κάθετες σε αυτόν. Το U_r μετράει την πόλωση σε διεύθυνση 45 από αυτόν. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τις συναρτήσεις συσχέτισης.

$$\begin{aligned} C^{QQ}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) &\equiv \langle Q_r(\hat{n}_1) Q_r(\hat{n}_2) \rangle \quad C^{TQ} \equiv langle \Theta_r(\hat{n}_1) Qr(\hat{n}_1) \rangle \\ C^{UU}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) &\equiv \langle U_r(\hat{n}_1) U_r(\hat{n}_2) \rangle \quad C^{TU} \equiv langle \Theta_r(\hat{n}_1) U_r(\hat{n}_2) \rangle \\ C^{QU}(\hat{n}_1, \hat{n}_2) &\equiv \langle Q_r(\hat{n}_1) U_r(\hat{n}_2) \rangle \end{aligned} \tag{12.120}$$

Στατιστική ισοτροποία $\Rightarrow$ οι συναρτήσεις αυτές εξαρτώνται μόνο από την γωνία θ μεταξύ των $\hat{n}_1$ και $\hat{n}_2$,

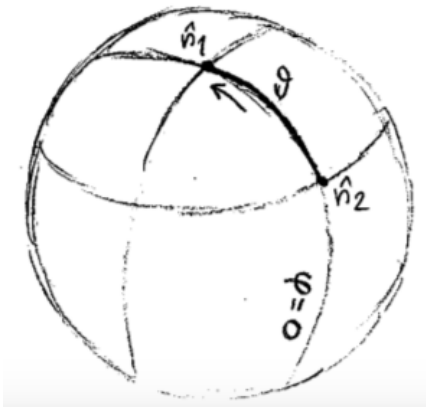
$$\cos\theta = \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2, \quad 0 \leq \theta \tag{12.121}$$

Επομένως οι σχετικοί με την πόλωση συναρτήσεις συσχέτισης είναι

$$\boxed{\begin{aligned} C^{QQ}(\theta) &\equiv \langle Q_r(\hat{n}_1) Q_r(\hat{n}_2) \rangle \quad C^{TQ}(\theta) \equiv \langle \Theta_r(\hat{n}_1) Q_r(\hat{n}_2) \rangle \\ C^{UU}(\theta) &\equiv \langle U_r(\hat{n}_1) U_r(\hat{n}_2) \rangle \quad C^{TU}(\theta) \equiv \langle \Theta_r(\hat{n}_1) U_r(\hat{n}_2) \rangle \\ C^{QU}(\theta) &\equiv \langle Q_r(\hat{n}_1) U_r(\hat{n}_2) \rangle \quad cos\theta \equiv \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 \end{aligned}} \tag{12.122}$$

Μπορούμε να επιλέξουμε $\hat{n}_1 = (0, 0)$, $\hat{n}_2 = (\theta, 0)$. Αυτό

⋆⋆⋆



Οι συνήθεις παράμετροι Stokes είναι κακώς ορισμένοι στο NP (επίσης στο SP) όπου $\theta = 0$ αλλά το ϕ είναι πλειότιμο. Μπορούμε να το αντιμετοπίσουμε αυτό, ορίζοντας τις παραμέτρους Stokes με το να είναι επίσης πλειότιμες

$$\boxed{\begin{aligned} Q(0,\phi) &\equiv \lim_{\theta\to 0} Q(\theta,\phi) \\ U(0,\phi) &\equiv \lim_{\theta\to 0} U(\theta,\phi) \end{aligned}} \tag{12.123}$$

Το οποίο δίνει τα παραπάνω $Q_r = Q, \quad U_r = U$, με $\phi = 0$.
Υπολογίζουμε τώρα το $C^{QQ}(\theta)$. Από την 12.44

$$Q(\theta,\phi) = \sum_{lm} N_l \left[a^C_{lm} W_{lm}(\theta,\phi) - a^C_{lm} X_{lm}(\theta,\phi)\right] \tag{12.124}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & C^{QQ}(\theta) \equiv \langle Q(0,0)Q(\theta,0)\rangle \\
&= \sum_{lm}\sum_{l'm'} N_l N_{l'} \left\langle \left[a^G_{lm} W_{lm}(0,0) - a^C_{lm} X_{lm}(0,0)\right]\left[a^{G*}_{l'm'} W^*_{l'm'}(\theta,0) - a^{C*}_{l'm'} X^*_{l'm'}(\theta,0)\right]\right\rangle \\
&= \sum_{lm}\sum_{l'm'} N_l N_{l'} \Big[W_{lm}(0,0) W^*_{l'm'}(\theta,0)\langle a^G_{lm} a^{G*}_{l'm'}\rangle - W_{lm}(0,0) X^*_{l'm'}(\theta,0) \underbrace{\langle a^G_{lm} a^{C*}_{l'm'}\rangle}_{=0} \\
&- X_{lm}(0,0) W^*_{l'm'}(\theta,0) \underbrace{\langle a^C_{lm} a^{G*}_{l'm'}\rangle}_{=0} + X_{lm}(0,0) X^*_{l'm'}(\theta,0) \underbrace{\langle a^C_{lm} a^{C*}_{l'm'}\rangle}_{C^{CC}_{ll'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}} \Big] \\
&= \sum_{lm} N_l^2 \Big[\underbrace{W_{lm}(0,0)}_{\frac{1}{N_l}\sqrt{\frac{2l+1}{8\pi}}(\delta_{m2}+\delta_{m,-2})} W^*_{lm}(\theta,0) C^{GG}_l + \underbrace{X_{lm}(0,0)}_{\frac{i}{N_l}\sqrt{\frac{2l+1}{8\pi}}(\delta_{m2}-\delta_{m,-2})} X^*_{lm}(\theta,0) C^{CC}_l \Big] \\
&= \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{8\pi}} N_l \left\{ \left[W^*_{l2}(\theta,0) + W^*_{l,-2}(\theta,0)\right] C^{GG}_l + i\left[X^*_{l2}(\theta,0) - X^*_{l,-2}(\theta,0)\right] C^{CC}_l \right\}
\end{aligned} \tag{12.125}$$

Για $\phi = 0$, τα $W_{lm}(\theta, 0)$ είναι πραγματικά και τα $X_{lm}(\theta, 0)$ είναι φανταστικά, και από την 12.112

$$W_{l,-2} = W_{l2}^* \quad \text{και} \quad X_{l,-2} = X_{l2}^* \quad \text{άρα} \tag{12.126}$$

$$\begin{aligned} & W_{l2}^*(\theta, 0) + W_{l,-2}(\theta, 0) = 2W_{l2}(\theta, 0) \\ \text{και} \quad & \underbrace{iX_{l2}^*(\theta, 0)}_{-iX_{l2}(\theta,0)} - \underbrace{iX_{l,-2}^*(\theta, 0)}_{X_{l2}(\theta,0)} = -2iX_{l2}(\theta, 0) \end{aligned} \tag{12.127}$$

και παίρνουμε

$$\begin{aligned} C_l^{QQ}(\theta) &= \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}} N_l \left[W_{l2}(\theta, 0) C_l^{GG} - iX_{l2}(\theta, 0) C_l^{CC} \right] \\ &= \sum_l \frac{2l+1}{2\pi} N_l^2 \left[C_l^{GG} G_{l2}^+(\cos\theta) + C_l^{CC} G_{l2}^-(\cos\theta) \right] \end{aligned} \tag{12.128}$$

Από την 12.61,

$$W_{l2}(0, 0) = \frac{1}{N_l} \sqrt{\frac{2l+1}{8\pi}}, \quad X_{l2}(0, 0) = \frac{i}{N_l} \sqrt{\frac{2l+1}{8\pi}} \tag{12.129}$$

άρα η αυτοσυσχέτιση (διακύμανση) του Q είναι

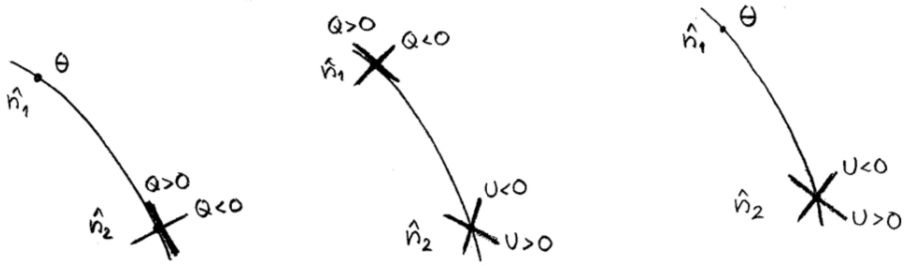
$$\boxed{\begin{aligned} C^{QQ}(0) = \langle Q(\hat{n}) Q(\hat{n}) \rangle = \langle Q^2 \rangle &= \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \left(C_l^{GG} + C_l^{CC} \right) \\ &= \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \frac{C_l^{EE} + C_l^{BB}}{2} \end{aligned}} \tag{12.130}$$

Όμοια παίρνουμε

$$\boxed{\begin{aligned} C^{UU}(\theta) &= \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}} N_l \left[W_{l2}(\theta, 0) C_l^{CC} - iX_{l2}(\theta, 0) C_l^{GG} \right] \\ &= \sum_l \frac{2l+1}{2\pi} N_l^2 \left[C_{GG} G_{l2}^-(\cos\theta) + C_l^{CC} G_{l2}^+(\cos\theta) \right] \\ C^{TQ}(\theta) &= \langle Q(0, 0) \Theta(0, 0) \rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} N_l C_l^{TG} \underbrace{P_l^2(\cos\theta)}_{\substack{m=2, \\ \text{όχι τετράγωνο}}} \\ & \text{και ότι} \quad C^{TU}(\theta) = C^{QU}(\theta) = 0 \end{aligned}} \tag{12.131}$$

Ο μηδενισμός των TU και QU συσχετίσεων οφείλεται στην συμμετρία ομοτιμίας (θυμίζουμε ότι αντιστοιχούν στα Q_r και U_r)

Ο μηδενισμός των TU και QU συσχετίσεων: Οι παράμετροι Stokes



$\Theta(\hat{n}_1), \Theta(\hat{n}_2), Q_r(\hat{n}_1), Q(\hat{n}_2)$ έχουν την ίδια τιμή σε ένα δεδομένο σύμπαν και το καθρεπτικό του. Αλλά οι $U_r(\hat{n}_1), U_r(\hat{n}_2)$ έχουν αντίθετα πρόσημα στο καθρεπτικό σύμπαν. Από διατήρηση ομοτιμίας έπεται

$$\begin{aligned} \langle Q_r(\hat{n}_1)U_r(\hat{n}_2)\rangle &= -\langle Q_r(\hat{n}_1)U_r(\hat{n}_2)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad C^{QU} = 0 \\ \langle \Theta_r(\hat{n}_1)U_r(\hat{n}_2)\rangle &= -\langle \Theta_r(\hat{n}_1)U_r(\hat{n}_2)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad C^{TU} = 0 \end{aligned} \tag{12.132}$$

αλλά για C^{UU} παίρνουμε απλά $\langle Q_r(\hat{n}_1)U_r(\hat{n}_2)\rangle = +\langle Q_r(\hat{n}_1)U_r(\hat{n}_2)\rangle$, αφού και τα δύο U_r αλλάζουν πρόσημο, και έτσι δεν πάιρνυμε καμια συνθήκη για τις αυτοσυσχετήσεις, από την ομοτιμία.

Υπολογίζοντας τα $C^{UU}(\theta)$ και $C^{TQ}(\theta)$ στο $\phi = 0$, παίρνουμε

$$\boxed{\begin{aligned} C^{UU}(0) =& \langle U^2\rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi}\left(C_l^{GG} + C_l^{CC}\right) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi}\frac{C_l^{EE} + C_l^{BB}}{2} = C^{QQ}(0) \\ C^{TQ}(0) =& \langle \Theta(\hat{n})Q(\hat{n})\rangle = \left\langle \frac{\delta T}{T} Q \right\rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} N_l C_l^{TG} \underbrace{P_l^2(1)}_{=0} = 0 \end{aligned}} \tag{12.133}$$

Η TQ αυτοσυσχέτιση (με τις δύο διαταραχές υπολογισμένες στο ίδιο σημείο) μηδενίζονται

⋆⋆⋆

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης των παραμέτρων Stokes $\langle (I, Q, U) \times (I, Q, U)\rangle$

επομένως είναι

$$
\begin{aligned}
&\sum_l \frac{2l+1}{4\pi}\begin{bmatrix} C_l^{TT} & 0 & 0 \\ 0 & C_l^{GG}+C_l^{CC} & 0 \\ 0 & 0 & C_l^{GG}+C_l^{CC}\end{bmatrix} \\
=&\sum_l \frac{2l+1}{4\pi}\begin{bmatrix} C_l^{TT} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_l^{EE}+C_l^{BB}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_l^{EE}+C_l^{BB}}{2}\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{12.134}
$$

Σε όρους των ${}_sY_l^m$,

$$
\begin{aligned}
C^{QQ}(\theta) =& \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}} N_l \Big[\underbrace{W_{l2}(\theta,0)}_{\frac{1}{\sqrt{2}N_l}\left({}_2Y_l^2+{}_{-2}Y_l^2\right)} \quad C_l^{GG} \quad \underbrace{-iX_{l2}(\theta,0)}_{\frac{-1}{\sqrt{2}N_l}\left({}_2Y_l^2-{}_{-2}Y_l^2\right)} \quad C_l^{CC}\Big] \\
=& \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left\{ \left[{}_2Y_l^2(\theta,0)+{}_{-2}Y_l^2(\theta,0)\right] C_l^{GG} - \left[{}_2Y_l^2(\theta,0)+{}_{-2}Y_l^2(\theta,0)\right] C_l^{CC} \right\} \\
=& \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left\{ \frac{1}{2}\left[{}_2Y_l^2(\theta,0)+{}_{-2}Y_l^2(\theta,0)\right] C_l^{EE} - \frac{1}{2}\left[{}_2Y_l^2(\theta,0)+{}_{-2}Y_l^2(\theta,0)\right] C_l^{BB} \right\} \\
=& \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left[\frac{1}{2}\left(C_l^{EE}-C_l^{BB}\right){}_2Y_l^2(\theta,0) + \frac{1}{2}\left(C_l^{EE}+C_l^{BB}\right){}_{-2}Y_l^2(\theta,0) \right]
\end{aligned}
\tag{12.135}
$$

και (από τις 12.127 και 12.131, απλά εναλλάσσουμε με τα E και B)

$$
\boxed{
\begin{aligned}
C^{UU}(\theta) =& \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}} \left[\frac{1}{2}\left(C_l^{BB}-C_l^{EE}\right){}_2Y_l^2(\theta,0) + \frac{1}{2}\left(C_l^{BB}+C_l^{EE}\right){}_{-2}Y_l^2(\theta,0) \right] \\
C^{TQ}(\theta) =& \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \underbrace{N_l\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{-\sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}}} C_l^{TE} P_l^2(\cos\theta) = -\sum_l \frac{2l+1}{4\pi}\sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} C_l^{TE} P_l^2(\cos\theta)
\end{aligned}
}
\tag{12.136}
$$

12.11 Εξίσωση Boltzmann-Vlasov

12.12 Παράμετροι Stokes και Spin-S Σφαιρικές Αρμονικές

Η ακτινοβολία του CMB χαρακτηρίζεται από έναν 2×2 πίνακα έντασης I_{ij}. Οι παράμετροι Stokes Q και U ορίζονται σαν $Q = \big(I_{11} - {}_{22}\big)/4$ και $U = I_{12}/2$ ενώ η ανισοτροποία στη θερμοκρασία δίνεται από την $T = \big(I_{11} - I_{22}\big)/4$. Εν γένει, η τέταρτη παράμετρος Stokes V που περιγράφει την κυκλική πόλωση θα είναι επίσης αναγκαία, αλλά στην κοσμολογία μπορεί να αγνοηθεί επειδή δεν μπορεί να παραχθεί μέσω σκέδασης Thomson.

12.13 Αρμονική ανάλυση για πόλωση του CMB

Η ανισοτροπία στην θερμορκασία του CMB είναι μια συνάρτηση πάνω σε μια σφαίρα. Σε αναλογία με το ανάπτυγμα Fourier στον 3-διάστατο χώρο, ξεχωρίζουμε τις συνεισφορές διαφορετικών γωνιακών κλιμάκων κάνοντας ενα πολυπολικό ανάπτυγμα,

$$\frac{\delta T}{T_0} = \sum \alpha_{lm} Y_{lm}\big(\theta, \phi\big) \tag{12.137}$$

όπου το άθροισμα τρέχει πάνω στα $l = 1, 2, \cdots \infty$ και $m = -l, \cdots, l$, δίνοντας $2l+1$ τιμές του m για κάθε l. Οι συναρτήσεις Y_{lm} είναι οι σφαιρικές αρμονικές, οι οποίες είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεψν πάνω στη σφαίρα, άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τους πολυπολικούς συντελεστές α_{lm} από την

$$\alpha_{lm} = \int Y^*_{lm} \frac{\delta T}{T_0}\big(\theta, \phi\big) d\Omega. \tag{12.138}$$

Ο ορισμός 12.137 δίνει αδιάστατα α_{lm} (συχνά στην βιβλιογραφία ορίζονται χωρίς το $T_0 = 2.725$ στην 12.137 και έτσι έχουν διαστάσεις θερμοκρασίας οι οποίες συνήθως δίνονται σε μK). Το άθροισμα ξεκινά στο $l = 1$, αφού $Y_{00} =$ σταθερό και επομένως πρέπει να έχουμε $\alpha_{00} = 0$ για μια ποσότητα η οποία αντιπροσοπεύει μια διακύμανση από το μέσο όρο. Το διπολικό μέρος, $l = 1$ κυριαρχείται από το φαινόμενο Doppler λόγω της κίνησης του ηλιακού συστήματος ως προς την επιφάνεις της τελευτσίας σκέδασης, και δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε από αυτό το κοσμολογικό δίπολο που προκαλείται από τις

διαταραχές μεγάλης κλίμακας. Επομένως ενδιαφερόμαστε μόνο για το $l \geq 2$ μέρος του αναπτύγματος.

Ένας άλλος συμβολισμός για το Y_{lm} είναι $Y_{\hat{n}}$ όπου $\hat{n}$ είναι το μοναδιαίο άνυσμα του οποίου η κατεύθυνση καθορίζεται από τις γωνίες θ και ϕ.

12.14 Γενικές σχέσεις για τις διακυμάνσεις θερμοκρασίας

Στην ενότητα αυτή βρίσκουμε τις γενικές σχέσεις για τη συνεισφορά των βαθμωτών και τανυστιών διαταραχών στις παρατηρούμενες θερμοκρασιακές διακυμάνσεις του CMB.

Επειδή η ενεργειακή πυκνότητα του μέλανος σώματος είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της θερμοκρασίας, οι κλασματικές διακυμάνσεις στην θερμοκρασία της ακτινοβολίας που έρχονται από μια διεύθυνση $\hat{n}$ είναι το ένα τέταρτο της κλασματικής διακύμανσης στην πρότυπη ενεργειακή πυκνότητα των φωτονίων που ταξιδεύουν στην κατεύθυνση $\hat{p} = -\hat{n}$ στην θέση μας $\mathrm{x} = 0$ και χρόνο $t = t_0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Συμπλήρωμα: Αποδείξεις Σχέσεων

Παράγραφος 4.2:

Υπολογισμοί στην προσέγγιση μικρού μήκους κύματος

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\gamma_{\alpha\gamma} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\gamma\delta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma} \tag{13.1}$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}\Big(g_{\delta\beta|\gamma} + g_{\delta\gamma|\beta} - g_{\beta\gamma|\delta} \Big) \tag{13.2}$$

Όπου σε αυτήν την έκφραση και όλες όσες ακολουθούν οι δείκτες υψώνονται και κατεβάζονται με τη μετρική του υποβάθρου $g^B_{\alpha\beta}$ και οι κατακόρυφες γραμμές δηλώνουν παραγώγιση ως προς συντεταγμένες σε αυτή τη μετρική.

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\big(\eta^{\alpha\delta} - h^{\alpha\delta}\big)\Big(h_{\gamma\delta|\beta} + h_{\delta\beta|\gamma} - h_{\beta\gamma|\delta} \Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big[\eta^{\alpha\delta} h_{\delta\gamma|\beta} + \eta^{\alpha\delta} h_{\delta\beta|\gamma} - \eta^{\alpha\delta} h_{\beta\gamma|\delta} \Big] \qquad O(\alpha) \\
&- \frac{1}{2}\Big[h^{\alpha\delta} h_{\delta\gamma|\beta} + h^{\alpha\delta} h_{\delta\beta|\gamma} - h^{\alpha\delta} h_{\beta\gamma|\delta} \Big] \qquad O(\alpha^2)
\end{aligned} \tag{13.3}$$

Και ο τανυστής Ricci γίνεται σύμφωνα με την 13.1:

$$\begin{aligned}
R^{(2)}_{\alpha\beta} =& -\frac{1}{2}\partial_\gamma\Big[h^{\gamma\delta}\big(h_{\delta\alpha|\beta} + h_{\delta\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\delta} \big)\Big] + \frac{1}{2}\partial_\beta\Big[h^{\gamma\delta}\big(h_{\gamma\delta|\alpha} + \cancel{h_{\delta\alpha|\alpha}} - \cancel{h_{\alpha\gamma|\delta}} \big)\Big] \\
&+ \frac{1}{4}\eta^{\gamma\sigma}\big(h_{\sigma\alpha|\beta} + h_{\sigma\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\sigma} \big)\eta^{\delta\zeta}\big(\cancel{h_{\zeta\gamma|\delta}} + h_{\zeta\delta|\gamma} - \cancel{h_{\gamma\delta|\zeta}} \big) \\
&- \frac{1}{4}\eta^{\gamma\sigma}\big(h_{\sigma\alpha|\delta} + h_{\sigma\delta|\alpha} - h_{\alpha\delta|\sigma} \big)\eta^{\delta\zeta}\big(h_{\zeta\beta|\gamma} + h_{\zeta\gamma|\beta} - h_{\beta\gamma|\zeta} \big) \\
=& -\frac{1}{2}\partial_\gamma\Big[h^{\gamma\delta}\big(h_{\delta\alpha|\beta} + h_{\delta\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\delta} \big)\Big] + \frac{1}{2}\partial_\beta\big(h^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta|\alpha} \big) \\
&+ \frac{1}{4}\eta^{\gamma\sigma}\eta^{\delta\zeta} h_{\zeta\delta|\gamma}\big(h_{\sigma\alpha|\beta} + h_{\sigma\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\sigma} \big) \\
&- \frac{1}{4}\eta^{\gamma\sigma}\big(h_{\sigma\alpha|\delta} + h_{\sigma\delta|\alpha} - h_{\alpha\delta|\sigma} \big)\eta^{\delta\zeta}\big(h_{\zeta\beta|\gamma} + h_{\zeta\gamma|\beta} - h_{\beta\gamma|\zeta} \big)
\end{aligned}$$

Θέλουμε να υπολογίζουμε τις χωροχρονικές συνειστώσες

$$t_{0j} = -\frac{1}{\kappa} G^{(2)}_{0j}(h^{(1)}) \tag{13.4}$$

και θεωρόντας ένα επίπεδο αρμονικό κύμα στην βαθμίδα TT με:

$$h_{\mu\nu}(\tau,\vec{x}) = h_\lambda(\tau;\vec{k})Re\{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\}\epsilon_{\mu\nu}(\vec{k};\lambda) \tag{13.5}$$

όπου $\lambda = +,\times$ με $\epsilon_{\mu\nu}(z;+) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, $\epsilon_{\mu\nu}(z;+) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ και $k_\mu k^\mu = 0$, $h_{\alpha\beta}(x)k^\beta = 0$, $h^\alpha_\alpha(x) = 0$, $h_{0\beta}(x) = 0$.
Το οποίο πάντα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κινείται προς τη διεύθυνση του άξονα z και άρα να γράψουμε

$$h_{\mu\nu}(\tau,z) = h_\lambda(\tau;\omega)Re\{e^{-i\omega(t-z)}\}\epsilon_{\mu\nu}(\omega;\lambda)$$

Με διαφορά ένα παράγοντα $-c$, οι χωροχρονικές συνειστώσες του t_{0j}, δίνουν τις συνειστώσες της πυκνότητας ενέργειας s_j ως προς ένα παρατηρητή του οποίου η τετραταχύτητα u^ρ είναι εφαπτόμενη στις γραμμές x^0,

$$s_j = -u^\rho t_{\rho j} = -u^0 t_{0j} = -ct_{0j}. \tag{13.6}$$

και από την 13.4 έχουμε:

$$\begin{aligned} \kappa t_{0j} &= -R^{(2)}_{0j}(h^{(1)}) - \tfrac{1}{2}\eta_{0j}\eta^{\rho\sigma}R^{(2)}_{\rho\sigma}(h) - \tfrac{1}{2}h_{0j}\eta^{\rho\sigma}R^{(1)}(h) + \eta_{0j}h^{\rho\sigma}R^{(1)}_{\rho\sigma}(h) \\ &= -R^{(2)}_{0j}(h^{(1)}) - \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 \end{aligned} \tag{13.7}$$

και επειδή από παραπάνω είναι

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{0j} =& -\frac{1}{2}\partial_\gamma\left[h^{\gamma\delta}\left(\cancelto{0}{h_{\delta 0|j}} + h_{\delta j|0} - \cancelto{0}{h_{0j|\delta}}\right)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\partial_j\left(h^{\gamma\delta}h_{\gamma\delta|0}\right) \\ &+ \frac{1}{4}\eta^{\gamma\sigma}\eta^{\delta\zeta}h_{\zeta\delta|\gamma}\left(\cancelto{0}{h_{\sigma 0|j}} + h_{\sigma j|0} - \cancelto{0}{h_{0j|\sigma}}\right) \\ &- \frac{1}{4}\eta^{\gamma\sigma}\left(\cancelto{0}{h_{\sigma 0|\delta}} + h_{\sigma\delta|0} - \cancelto{0}{h_{0\delta|\sigma}}\right)\eta^{\delta\zeta}\left(h_{\zeta j|\gamma} + h_{\zeta\gamma|j} - h_{j\gamma|\zeta}\right) \\ =& -\frac{1}{2}\partial_\gamma\left(h^{\gamma\delta}h_{\delta j|0}\right) + \frac{1}{2}\partial_j\left(h^{\gamma\delta}h_{\gamma\delta|0}\right) \\ &- \frac{1}{4}\eta^{\gamma\sigma}\underbrace{\eta^{\delta\zeta}h_{\zeta\delta|\gamma}}_{=\partial_\gamma h^\zeta_\zeta = 0}h_{\sigma j|0} + \frac{1}{4}\eta^{\gamma\sigma}h_{\sigma\delta|0}\eta^{\delta\zeta}\left(h_{\zeta j|\gamma} + h_{\zeta\gamma|j} - h_{j\gamma|\zeta}\right) \end{aligned}$$

όπου οι όροι με επισήμανση αλληλο-ακυρώνονται γιατί:

$$\begin{aligned}\eta^{\gamma\sigma}h_{\sigma\delta|0}\eta^{\delta\zeta}\left(h_{\zeta j|\gamma}-h_{j\gamma|\zeta}\right) =&\left(h_j^{\delta\ |\sigma}-h_j^{\sigma|\delta}\right)h_{\sigma\delta|0}\\ =&h_j^{\delta\ |\sigma}h_{\sigma\delta|0}-h_j^{\sigma|\delta}h_{\sigma\delta|0}\\ \text{στον } 2^{\text{ο}} \text{ όρο κάνουμε την αλλαγή } \sigma\leftrightarrow\delta \quad =&h_j^{\delta\ |\sigma}h_{\sigma\delta|0}-h_j^{\delta|\sigma}h_{\delta\sigma|0}=0\end{aligned}$$

$$R^{(2)}_{0j}(h^{(1)})=-\frac{1}{2}h^{\gamma\delta}_{\ |\gamma}h_{\delta j|0}-\frac{1}{2}h^{\gamma\delta}h_{\delta j|0\gamma}+\frac{1}{2}h^{\gamma\delta}_{\ |j}h_{\gamma\delta|0}+\frac{1}{2}h^{\gamma\delta}h_{\gamma\delta|0j}-\frac{1}{4}h^{\gamma\zeta}_{\ |0}h_{\zeta\gamma|j}$$

Ο πρώτος όρος, λόγω της 13.5 γίνεται

$$h^{\gamma\delta}_{\ |\gamma}=h^{\gamma\delta}ik_\gamma=0$$

Ο δεύτερος όρος, πάλι λόγω της 13.5 γίνεται

$$h^{\gamma\delta}h_{\delta j|0\gamma}=h^{\gamma\delta}h_{\delta j}i^2k_\gamma k_0\sim h^{\gamma\delta}k_\gamma=0$$

Επομένως

$$\begin{aligned}R^{(2)}_{0j}(h^{(1)})&=+\frac{1}{2}h^{\gamma\delta}\ _{|j}h_{\gamma\delta|0}+\frac{1}{2}h^{\gamma\delta}h_{\gamma\delta|0j}-\frac{1}{4}h^{\gamma\zeta}\ _{|0}h_{\gamma\zeta|j}\\ &=+\frac{1}{4}h^{\gamma\delta}\ _{|j}h_{\gamma\delta|0}+\frac{1}{2}h^{\gamma\delta}h_{\gamma\delta|0j}\\ &=+\frac{1}{4}h^{kl}\ _{|j}h_{kl|0}+\frac{1}{2}h^{kl}h_{kl|0j}\end{aligned}$$

είναι

$$\epsilon^{kl}\epsilon_{kl} = \epsilon^{1l}\epsilon_{1l} + \epsilon^{2l}\epsilon_{2l} + \cancel{\epsilon^{3l}\epsilon_{3l}}$$
$$= \epsilon^{11}\epsilon_{11} + \epsilon^{12}\epsilon_{12} + \epsilon^{21}\epsilon_{21} + \epsilon^{22}\epsilon_{22}$$

$$\epsilon^{kl}_{+}\epsilon^{+}_{kl} = \epsilon^{11}\epsilon_{11} + \epsilon^{22}\epsilon_{22} = 1 + 1 = 2$$

$$\epsilon^{kl}_{+}\epsilon^{\times}_{kl} = \epsilon^{kl}_{\times}\epsilon^{+}_{kl} = 0$$

$$\epsilon^{kl}_{\times}\epsilon^{\times}_{kl} = \epsilon^{12}\epsilon_{12} + \epsilon^{21}\epsilon_{21} = 1 + 1 = 2$$

Άρα αφού

$$\begin{aligned} h^{kl}_{|z} =& + \left[h_{+|z}\epsilon^{kl}_{+} + h_{\times|z}\epsilon^{kl}_{\times|z}\right] Re\{e^{-i\omega(t-z)}\} \\ h^{kl}_{|0} =& 0 \\ h^{kl}_{|0z} =& \left[h_{+}\epsilon^{kl}_{+} + h_{\times}\epsilon^{kl}_{\times}\right]\omega^2 Re\{e^{-i\omega(t-z)}\} \end{aligned}$$

Θα είναι και

$$\begin{aligned} h^{kl}_{|z}h_{kl|0} =& 0 \\ h^{kl}h_{kl|0z} =& + 2\omega^2\left[h^2_{+} + h^2_{\times}\right] Re\{e^{-i2\omega(t-z)}\} \end{aligned}$$

Άρα

$$R^{(2)}_{0z}\left(h^1\right) = \left[h_{+|z}h_{+} + h_{\times|z}h_{\times}\right]\omega^2 Re\{e^{-i2\omega(t-z)}\}$$

Απλούστερη περίπτωση $h_{\mu\nu} = h_+ \sin\big[\omega\big(t-z\big)\big]\epsilon^+_{\mu\nu} = \alpha \sin\big[\omega\big(t-z\big)\big]\epsilon^+_{\mu\nu}$

Στην περίπτωση αυτή

$$
\begin{aligned}
\kappa t_{0z} &= -\frac{1}{4}h^{kl}{}_{|z}h_{kl|0} - \frac{1}{2}h^{kl}h_{kl|0z} \\
&= -\frac{1}{4}h^{11}{}_{|z}h_{11|0} - \frac{1}{4}h^{22}{}_{|z}h_{22|0} - \frac{1}{2}h^{11}h_{11|0z} - \frac{1}{2}h^{22}h_{22|0z} \\
&= +\frac{1}{4}h_{11|z}h_{11|0} + \frac{1}{4}h_{22|z}h_{22|0} + \frac{1}{2}h_{11}h_{11|0z} + \frac{1}{2}h_{22}h_{22|0z} \\
&= +\frac{1}{2}h_{11|z}h_{11|0} + h_{11}h_{11|0z} \\
&= +\frac{1}{2}\big[-\alpha\omega\cos\big[\omega(t-z)\big]\big]\big[\alpha\omega\cos\big[\omega(t-z)\big]\big] \\
&\quad + \alpha\sin\big[\omega(t-z)\big]\big[-\alpha\omega^2\sin\big[\omega(t-z)\big]\big] \\
&= -\alpha^2\omega^2\cos^2\big[\omega(t-z)\big] - \alpha^2\omega^2\sin^2\big[\omega(t-z)\big] \\
&= -\alpha^2\omega^2
\end{aligned}
$$

Επομένως

$$
\kappa t_{0z} = -\alpha^2\omega^2 \to t_{0z} = -\frac{c^4}{8\pi G}\alpha^2\omega^2
$$

Παράγραφος 6.3:

Απόδειξη I

[Απόδειξη σχέσης 6.59]

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi} =& \tilde{A} + \mathcal{H}\big(\tilde{B} - \tilde{E}'\big) + \big(\tilde{B} - \tilde{E}'\big)' \\
=& A - \xi^{0\prime} - \frac{a'}{a}\xi^0 \\
&+ \mathcal{H}\big(B + \cancel{\xi}' + \xi^0 - \big(E + \cancel{\xi}\big)'\big) \\
&+ \big(B + \cancel{\xi}' + \xi^0 - \big(E + \cancel{\xi}\big)'\big)' \\
=& A + \mathcal{H}\big(B + E'\big) + \big(B + E'\big)' \\
&- \cancel{\xi^{0\prime}} - \cancel{\frac{a'}{a}\xi^0} + \cancel{\frac{a'}{a}\xi^0} + \cancel{\xi^{0\prime}} \\
=& \Phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Psi} =& \tilde{\psi} - \mathcal{H}\big(\tilde{B} - \tilde{E}'\big) \\
=& \psi + \cancel{\frac{a'}{a}\xi^0} - \mathcal{H}\big(B - E'\big) - \cancel{\frac{a'}{a}\xi^0} \\
=& \Psi
\end{aligned}
$$

□

Απόδειξη II

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} = \delta\Gamma^{0}_{0\mu} + \delta\Gamma^{i}_{i\mu}$$

- για $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda 0} =& \delta\Gamma^{0}_{00} + \delta\Gamma^{i}_{i0} \\
=& -\frac{1}{2}\dot{h}_{00} + \frac{1}{2a^2}\Big(-\frac{2\dot{a}}{a}h_{ii} + \dot{h}_{ii} + \cancel{\partial_i h_{i0}} - \cancel{\partial_i h_{i0}}\Big) \\
=& -\frac{1}{2}\dot{h}_{00} - \frac{\dot{a}}{a^3}h_{ii} + \frac{1}{2a^2}\dot{h}_{ii} \\
=& \partial_0\left(\frac{1}{2a^2}h_{ii} - \frac{1}{2}h_{00}\right)
\end{aligned}$$

- για $\mu = k$

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda k} =& \delta\Gamma^{0}_{0k} + \delta\Gamma^{i}_{ik} \\
=& \frac{\dot{a}}{a}h_{k0} - \frac{1}{2}\partial_k h_{00} + \frac{1}{2a^2}\delta^{il}\big(-2h_{l0}a\dot{a}\delta_{ik} + \partial_k h_{li} + \partial_i h_{lk} - \partial_l h_{ki}\big) \\
=& \frac{\dot{a}}{a}h_{k0} - \frac{1}{2}\partial_k h_{00} + \frac{1}{2a^2}\big(-2h_{i0}a\dot{a}\delta_{ik} + \partial_k h_{ii} + \cancel{\partial_i h_{ik}} - \cancel{\partial_i h_{ki}}\big) \\
=& \frac{\dot{a}}{a}h_{k0} - \frac{1}{2}\partial_k h_{00} + \frac{1}{2a^2}\big(-2h_{k0}a\dot{a} + \partial_k h_{ii}\big) \\
=& \cancel{\frac{\dot{a}}{a}h_{k0}} - \frac{1}{2}\partial_k h_{00} - \cancel{\frac{a\dot{a}}{a^2}h_{k0}} + \frac{1}{2a^2}\partial_k h_{ii} \\
=& \partial_k\left(\frac{1}{2a^2}h_{ii} - \frac{1}{2}h_{00}\right)
\end{aligned}$$

□

Απόδειξη III

Επειδή ο τανυστής $T_{\mu\nu}$ αφορά το γενικό και όχι τον αδιατάραχτο χώρο, θα

υψώνει και θα κατεβάζει τους δείκτες του με τη γενική μετρική $g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\delta T^{\mu}_{\nu} =& \delta\left(g^{\mu\lambda}T_{\lambda\nu}\right)\\
=& g^{\mu\lambda}\delta T_{\lambda\nu} + \delta g^{\mu\rho}T^{(0)}_{\rho\nu}\\
=& \left(g^{\mu\lambda}_{(0)} - \underbrace{h^{\mu\lambda}\right)\delta T_{\lambda\nu}}_{O(2)} + h^{\mu\rho}T^{(0)}_{\rho\nu}\\
=& g^{\mu\lambda}_{(0)}\delta T_{\lambda\nu} + h^{\mu\rho}T^{(0)}_{\rho\nu}
\end{aligned}$$

Όμως σύμφωνα με την ?? είναι $h^{\mu\rho} = -g^{\mu\lambda}_{(0)}g^{\rho\kappa}_{(0)}h_{\lambda\kappa}$ άρα

$$\begin{aligned}
\delta T^{\mu}_{\nu} =& g^{\mu\lambda}_{(0)}\delta T_{\lambda\nu} - g^{\mu\lambda}_{(0)}g^{\rho\kappa}_{(0)}h_{\lambda\kappa}T^{(0)}_{\rho\nu}\\
=& g^{\mu\lambda}_{(0)}\delta T_{\lambda\nu} - g^{\mu\lambda}_{(0)}h_{\lambda\kappa}T^{\kappa(0)}_{\nu}\\
=& g^{\mu\lambda}_{(0)}\left[\delta T_{\lambda\nu} - h_{\lambda\kappa}T^{\kappa(0)}_{\nu}\right]
\end{aligned}$$

□

Καφάλαιο 10

Παράγραφος 10.6.5.3

Απόδειξη IV

[Απόδειξη σχέσης 10.128]

$$u^{'} = -\frac{1}{2\sqrt{-\eta}}s + \sqrt{-\eta}s^{'}$$
$$u^{''} = -\frac{1}{4\big(-\eta\big)^{3/2}}s - \frac{1}{2\sqrt{-\eta}}s^{'} - \frac{1}{2\sqrt{-\eta}}s^{'} + \sqrt{-\eta}s^{''}$$

Άρα

$$\left[-\frac{1}{4\big(-\eta\big)^{3/2}}s - \frac{1}{\sqrt{-\eta}}s^{'} + \sqrt{-\eta}s^{''}\right] + \left[k^2 - \frac{1}{\eta^2}(\nu^2 - \frac{1}{4})\right]\sqrt{-\eta}s = 0$$
$$\sqrt{-\eta}s^{''} - \frac{1}{\sqrt{-\eta}}s^{'} + \left[k^2 - \frac{1}{\big(-\eta\big)^{3/2}}\nu^2\right]s = 0$$
$$\eta^2 s^{''} + \eta s^{'} + \big[k^2\eta^2 - \nu^2\big]s = 0$$

□

Απόδειξη V

[Απόδειξη σχέσης 10.187]

$$
\begin{aligned}
6H\dot{H} =& \frac{1}{M^2}\sum_J V_J\dot{\phi}_J = \frac{1}{M^2}\sum_J V_J\left(-\frac{V_J}{3H}\right) \\
=& -\frac{1}{3M^2H}\sum_J V_J^2 \\
\dot{H} =& -\frac{1}{18M^2H^2}\sum_J V_J^2 = -\frac{1}{6V}\sum_J V_J^2 \qquad (1) \\
\ddot{\phi}_I =& -\frac{\dot{V}_I 3H - 3\dot{H}V_I}{9H^2} = \frac{3\dot{H}V_I - 3H\sum_J V_{IJ}\dot{\phi}_J}{9H^2} \\
=& \frac{3\dot{H}V_I - \cancel{3H}\sum_J V_{IJ}\left(-\frac{V_J}{\cancel{3H}}\right)}{9H^2} = \frac{\dot{H}}{3H^2}V_I + \frac{1}{3H^2}\sum_J V_{IJ}V_J \\
=& \left(\frac{3M^2}{3V}\right)\left(-\frac{1}{6V}\sum_J V_J^2\right) + \frac{M^2}{3V}\sum_J V_{IJ}V_J \\
=& \frac{M^2}{3}\frac{\sum V_{IJ}V_J}{V} - \frac{M^2}{6}\frac{V_I\sum V_J^2}{V^2} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

□

Απόδειξη VI

[Απόδειξη σχέσης 10.248]

$$
\begin{aligned}
H^{-2}\ddot{\sigma} =& H^{-2}\left[\ddot{\phi}_1 - \dot{\phi}_1\dot{\theta}\sin\theta + \ddot{\phi}_2\sin\theta + \dot{\phi}_2\dot{\theta}\cos\theta\right] \\
=& \left(\epsilon H^{-1}\dot{\phi}_1 - \eta_{11}H^{-1}\dot{\phi}_1 - \eta_{12}H^{-1}\dot{\phi}_2\right)\cos\theta \\
& - H^{-2}\dot{\phi}_1\dot{\theta}\sin\theta + H^{-2}\dot{\phi}_2\dot{\theta}\cos\theta \\
& + \left(\epsilon H^{-1}\dot{\phi}_2 - \eta_{12}H^{-1}\dot{\phi}_1 - \eta_{22}H^{-1}\dot{\phi}_2\right)\sin\theta \\
=& \epsilon H^{-1}\left(\dot{\phi}_1\cos\theta + \dot{\phi}_2\sin\theta\right) - \eta_{12}H^{-1}\left(\dot{\phi}_1\sin\theta + \dot{\phi}_2\cos\theta\right) \\
& - \left(\eta_{11}\dot{\phi}_1\cos\theta + \eta_{22}\dot{\phi}_2\sin\theta\right)H^{-1} + \cancel{\left(\dot{\phi}_2\cos\theta - \dot{\phi}_1\sin\theta\right)}H^{-1} \quad (\text{από } 10.219) \\
=& \epsilon H^{-1}\dot{\sigma} - \eta_{12}H^{-1}2\dot{\phi}_1\sin\theta - \left(\eta_{11}\dot{\phi}_1\cos\theta + \eta_{22}\dot{\phi}_2\sin\theta\right)H^{-1} \\
=& H^{-1}\left[\epsilon\dot{\sigma} - 2\eta_{12}\dot{\phi}_1\sin\theta - \eta_{11}\dot{\phi}_1\cos\theta - \eta_{22}\dot{\phi}_2\sin\theta\right] \\
=& H^{-1}\left[\epsilon\dot{\sigma} - 2\eta_{12}\dot{\sigma}\cos\theta\sin\theta - \eta_{11}\dot{\sigma}\cos^2\theta - \eta_{22}\dot{\sigma}\sin^2\theta\right] \\
=& H^{-1}\dot{\sigma}\left(\epsilon - \eta_{\sigma\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

□

Κεφάλαιο 10

Παράγραφος 10.4

Απόδειξη VII

[Απόδειξη σχέσης 10.50]

$$
\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi_I\right) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi_I\right)
$$

$$
\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi_I\right) - V_I = 0
$$

$$
\begin{aligned}
a^4\big(1+A-3D\big)V_I =&\partial_\mu\big(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi_I\big)\\
=&\partial_\eta\big(\sqrt{-g}g^{00}\partial_\eta\phi_I\big)+\partial_\eta\big(\sqrt{-g}g^{0i}\partial_i\phi_I\big)\\
&+\partial_i\big(\sqrt{-g}g^{i0}\partial_\eta\phi_I\big)+\partial_i\big(\sqrt{-g}g^{ij}\partial_j\phi_I\big)\\
=&\partial_\eta\big(\sqrt{-g}\big)g^{00}\phi_I^{'}+\sqrt{-g}\partial_\eta\big(g^{00}\big)\phi_I^{'}+\sqrt{-g}g^{00}\phi_I^{''}\\
&+\partial_\eta\big(\sqrt{-g}\big)g^{0i}\phi_I^{'}+\sqrt{-g}\partial_\eta\big(g^{0i}\big)\partial_i\phi_I+\sqrt{-g}g^{0i}\partial_\eta\big(\cancel{\partial_i\phi_I}\big)\\
&+\partial_i\big(\sqrt{-g}\big)g^{i0}\phi_I^{'}+\sqrt{-g}\partial_i\big(g^{i0}\big)\phi_I^{'}+\sqrt{-g}g^{i0}\cancel{\partial_i\big(\phi_I^{'}\big)}\\
&+\partial_i\big(\sqrt{-g}\big)g^{ij}\cancel{\partial_j\phi_I}+\sqrt{-g}\partial_i\big(g^{ij}\big)\cancel{\partial_j\phi_I}+\sqrt{-g}g^{ij}\partial_i\big(\cancel{\partial_j\phi_I}\big)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

□

Παράγραφος 10.6.5

Απόδειξη VIII

[Απόδειξη σχέσης 10.113]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^{'} =&\frac{a^{''}a-a^{'2}}{a^2}=\frac{a^{''}}{a}-\left(\frac{a^{'}}{a}\right)^2\\
\Rightarrow\frac{a^{''}}{a}=&\mathcal{H}^{'}+\mathcal{H}^2=\mathcal{H}^2\left(1+\frac{\mathcal{H}^{'}}{\mathcal{H}^2}\right)
\end{aligned}
$$

και $a^{'}=\frac{d}{d\eta}a=a\dot{a}$, $\ddot{a}=\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d}{d\eta}a\right)=a\frac{d}{dt}\left(a\frac{d}{dt}a\right)=a\dot{a}^2+a^2\ddot{a}$ άρα

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{H}^{'}}{\mathcal{H}^2}=&\left(\frac{a}{a^{'}}\right)^2\frac{a^{''}a-a^{'2}}{a^2}\\
=&\left(\frac{a}{a\dot{a}}\right)^2\frac{\left(a\dot{a}^2+a^2\ddot{a}\right)a-\left(a\dot{a}\right)^2}{a^2}\\
=&\frac{a^2\dot{a}^2+a^3\ddot{a}a-a^2\dot{a}^2}{a^2\dot{a}^2}\\
=&1+\frac{a^2}{\dot{a}^2}\left(\frac{a\ddot{a}-\dot{a}^2}{a^2}\right)\\
=&1+\frac{\dot{H}}{H^2}
\end{aligned}
$$

□

Απόδειξη IX

[Απόδειξη σχέσης 10.107] Με χρήση των 10.103 και 10.100 έχουμε

$$-H^2V'' = -\frac{\eta V}{M^2}\frac{1}{H^2} = -\eta\frac{1}{M^2}3M^2 = -3\eta$$

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G}{a^3H^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{a^3}{H}\dot{\phi}^2\right) &= \frac{1}{M^2}\frac{1}{a^3H^2}\left[3a^2\dot{a}\dot{\phi}^2\frac{1}{H} - a^3\frac{\dot{H}}{H^2}\dot{\phi}^2 + 2\frac{a^3}{H}\dot{\phi}\ddot{\phi}\right]\\ &= \frac{1}{M^2}\left[3\left(\frac{\dot{\phi}}{H}\right)^2 - \frac{\dot{H}}{H^2}\left(\frac{\dot{\phi}}{H}\right)^2 + \frac{2}{H^3}\dot{\phi}\ddot{\phi}\right]\end{aligned}$$

Από την 10.104 οι δύο πρώτοι όροι γίνονται

$$\begin{aligned}3\left(\frac{\dot{\phi}}{H}\right)^2 &= 6M^2\epsilon\\ -\frac{\dot{H}}{H^2}\left(\frac{\dot{\phi}}{H}\right)^2 &= -\big(-\epsilon\big)\big(2M^2\epsilon\big)\\ &= 2M^2\epsilon^2\end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος από την 10.104

$$\begin{aligned}\frac{2}{H^3}\dot{\phi}\ddot{\phi} &= \frac{2}{H}\dot{\phi}\frac{1}{H}\dot{\phi}\big(\epsilon-\eta\big)\\ &= 2\big(\epsilon-\eta\big)\left(\frac{\dot{\phi}}{H}\right)^2 = 2\big(\epsilon-\eta\big)2M^2\epsilon\\ &= 4M^2\big(\epsilon^2-\epsilon\eta\big)\end{aligned}$$

Επομένως το δεξιό μέλος γίνεται

$$\left[\frac{1}{M^2}\big[6M^2\epsilon + 2M^2\epsilon^2 + 4M^2\big(\epsilon^2-\epsilon\eta\big)\big] - 3\eta\right]Q_{\vec{k}}.$$

$$\Rightarrow \big[6\epsilon - 3\eta + 6\epsilon^2 - 4\epsilon\eta\big]Q_{\vec{k}}.$$

□

Παράγραφος 10.9.2

Απόδειξη X

[Απόδειξη σχέσης 10.232] Παραγωγίζοντας την $\dot{s} = -\dot{\phi}_1 \sin\theta + \dot{\phi}_2 \cos\theta = 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\ddot{s} =& -\ddot{\phi}_1 \sin\theta - \dot{\phi}_1\dot{\theta}\cos\theta + \ddot{\phi}_2\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta \\
=&\big(3H\dot{\phi} + V_1\big)\sin\theta - \dot{\theta}\big(\dot{\phi}_1\cos\theta + \dot{\phi}_2\sin\theta\big) \\
&- \big(3H\dot{\phi}_2 + V_2\big)\cos\theta \\
=&\big(3H\dot{\phi}_1 + V_1\big)\sin\theta - \dot{\theta}\dot{\sigma} - \big(3H\dot{\phi}_2 + V_2\big)\cos\theta \\
=&3H\cancel{\big(\dot{\phi}_1\sin\theta - \dot{\phi}_2\cos\theta\big)} + V_1\sin\theta - V_2\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\sigma} \\
=&V_1\sin\theta - V_2\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\sigma} \\
=& - V_s - \dot{\theta}\dot{\sigma}
\end{aligned}$$

Όμως $\ddot{s} = 0$ άρα

$$V_s = -\dot{\theta}\dot{\sigma}$$

□

Απόδειξη XI

[Απόδειξη σχέσης 10.233]

$$\dot{V}_s = -\dot{V}_1\sin\theta - V_1\dot{\theta}\cos\theta + \dot{V}_2\cos\theta - V_2\dot{\theta}\sin\theta \tag{13.8}$$

είναι

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 =& \nabla_{\phi_1}V_1\dot{\phi}_1 + \nabla_{\phi_2}V_1\dot{\phi}_2 = V_{11}\dot{\phi}_1 + V_{12}\dot{\phi}_2 \\
\dot{V}_2 =& \nabla_{\phi_1}V_2\dot{\phi}_1 + \nabla_{\phi_2}V_2\dot{\phi}_2 = V_{12}\dot{\phi}_1 + V_{22}\dot{\phi}_2
\end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned}
\dot{V}_s =& - V_{11}\dot{\phi}_1\dot{\sigma}\cos\theta\sin\theta - V_{12}\dot{\phi}_2\dot{\sigma}\sin^2\theta - V_1\dot{\theta}\cos\theta \\
&+ V_{12}\dot{\phi}_1\dot{\sigma}\cos^2\theta + V_{22}\dot{\phi}_2\dot{\sigma}\cos\theta\sin\theta - V_2\dot{\theta}\sin\theta \\
=&\big[-\sin\theta\cos\theta V_{11} + \big(\cos^2\theta - \sin^2\theta\big)V_{12} + \cos\theta\sin\theta\big]\dot{\sigma} \\
&- \dot{\theta}\big(V_1\cos\theta + \sin\theta\big) \\
=&V_{\sigma s}\dot{\sigma} - \dot{\theta}V_\sigma
\end{aligned}$$

από 10.218

από 10.225

□

Παράγραφος 10.8.1

Απόδειξη XII

[Απόδειξη σχέσεων 10.190]

1.
$$H^{-2}\dot{H} = \frac{3M^2}{V}\left(-\frac{1}{6V}\sum_I V_I^2\right) = -\frac{M^2}{2V^2}\sum_I V_I^2 = -\epsilon$$

2.
$$(H^{-1}\dot{\phi}_I)^2 = \frac{3M^2}{V}\frac{V_I^2}{9H^2} = 2M^2\left(\frac{M^2}{2V^2}V_I V_I\right) = 2M^2\epsilon_{II}$$

3.
$$\begin{aligned}
H^{-2}\ddot{\phi}_I =& H^{-2}\left[\frac{M^2}{3}\frac{\sum V_{IJ}V_J}{V} - \frac{M^2}{6}\frac{V_I\sum V_J^2}{V^2}\right] \\
=& H^{-2}\left[\frac{M^2}{3}\frac{1}{V}\sum_J \frac{V}{M^2}n_{IJ}\big(-3H\dot{\phi}_J\big) - \frac{M^2}{6}\frac{1}{V^2}\big(-3H\dot{\phi}_I\big)\frac{2}{M^2}\sum_I V_I^2\right] \\
=& \epsilon H^{-1}\dot{\phi}_I - \sum_J \eta_{IJ}H^{-1}\dot{\phi}_J
\end{aligned}$$

4.

$$
\begin{aligned}
H^{-1}\dot{\epsilon}_{IJ} =& H^{-1}\frac{M^2}{2}\frac{\big(\dot{V}_I V_J + V_I \dot{V}_J\big)V^2 - V_I V_J 2V\dot{V}}{V^4} \\
=& H^{-1}\frac{M^2}{2V^2}\Big[V_J \sum_K V_{IK}\dot{\phi}_K + V_I \sum_K V_{JK}\dot{\phi}_K\Big] - H^{-1}\frac{M^2}{V^3}V_I V_J \sum_K V_K \dot{\phi}_K \\
=& H^{-1}\frac{M^2}{2V^2}\Big[V_J \sum_K V_{IK}\big(-\frac{V_K}{3H}\big) + V_I \sum_K V_{JK}\big(-\frac{V_K}{3H}\big)\Big] \\
& - H^{-1}\frac{M^2}{V^3}V_I V_J \sum_K V_K\big(-\frac{V_K}{3H}\big) \\
=& -\frac{M^2}{V}\frac{M^2}{2V^2}\Big[V_J \sum_K V_{IK}V_K + V_I \sum_K V_{JK}V_K\Big] \\
& + \frac{M^2}{V}\frac{M^2}{V^3}V_I V_J \sum_K V_K V_K \\
=& -\sum_K \Big[\eta_{IJ}\epsilon_{JK} + \eta_{JK}\epsilon_{IK}\Big] + 4\epsilon_{IJ}\epsilon
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
H^{-1}\dot{\epsilon} =& H^{-1}\frac{M^2}{2}\sum_I \frac{2V_I\dot{V}_I V^2 - V_I^2 2V\dot{V}}{V^4} \\
=& H^{-1}\frac{M^2}{2}\sum_I \frac{2V_I V^2 \sum V_{IK}\dot{\phi}_K - V_I^2 2V \sum V_K \dot{\phi}_K}{V^4} \\
=& H^{-1}\frac{M^2}{V^4}\sum_I \Big[V^2 V_I \sum_K V_{IK}\big(-\frac{V_K}{3H}\big) - V_I^2 V \sum_K V_K\big(-\frac{V_K}{3H}\big)\Big] \\
=& \frac{M^2}{V}\frac{M^2}{V^4}\sum_I \Big[-V^2 \sum_K V_{IK}V_I V_K + V_I^2 V \sum_K V_K^2\Big] \\
=& -2\sum_I \Big(\frac{M^2}{V}V_{IK}\Big)\Big(\frac{M^2}{2}\frac{V_I V_K}{V^2}\Big) + 4\sum_I\sum_K \Big(\frac{M^2}{2}\frac{V_I V_I}{V^2}\Big)\Big(\frac{M^2}{2}\frac{V_K V_K}{V^2}\Big) \\
=& -2\sum_I\sum_K \eta_{IK}\epsilon_{IK} + 4\epsilon^2
\end{aligned}
$$

□

Appendix

A Εξίσωση Γεωδαισιακής Απόκλισης

Έστω ότι έχουμε δύο ελεύθερα σημειακά σωμάτια A και B που κινούνται σε γεωδαισιακές καμπύλες οι οποίες αποκλινουν. Υποθέτουμε ότι σε κάθε ένα από αυτά αντιστοιχούν τροχιές $x^\mu(\tau)$ και $x^\mu(\tau) + \xi^\mu$. Από την εξίσωση των γεωδαισιακών έχουμε ότι η τροχιές τους θα υπακούουν στις

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} \tag{A.1}$$

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x+\xi)\frac{d(x^\nu + \xi^\mu)}{d\tau}\frac{d(x^\lambda + \xi^\lambda)}{d\tau} \tag{A.2}$$

Αναπτύσσουμε την A.2:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x+\xi)\left[\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} + \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\right] = 0$$

Αναπτύσσουμε κατά Taylor $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x+\xi) = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) + \left(\partial_\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\right)\xi^\delta$:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \left[\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \left(\partial_\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\right)\xi^\delta\right]\left[\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} + \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\right] = 0$$

Αγνοώντας όρους δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης ως προς ξ^μ και αφαιρώντας την A.1 έχουμε:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\right) + \left(\partial_\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\right)\xi^\delta\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

Εκμεταλλευόμενοι τη ελευθερία που έχουμε να αλλάξουμε ονομασία στους βουβούς δείκτες η παραπάνω γράφεται πιο καθαρά:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \left(\partial_\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\right)\xi^\delta\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

Χρησιμοποιώντας την παρακάτω:

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt\tau} = u^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \equiv \nabla_u f \tag{A.3}$$

Έχουμε ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση της σχετικής απομάκρυνσης των σωμάτων A και B στο σύστημα ενός παρατηρητή φαίνεται να είναι (η παραγώγιση γίνεται ως προς τον ιδιοχρόνο τ του παρατηρητή):

$$v^\alpha \equiv (\boldsymbol{\nabla_u \xi})^{\boldsymbol{\alpha}} = u^\beta\nabla_\beta\xi^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta\xi^\gamma \tag{A.4a}$$

$$\text{και} \quad w^\alpha \equiv \boldsymbol{\nabla_u\nabla_u\xi} = u^\beta\nabla_\beta v^\alpha = \frac{dv^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\delta\gamma}u^\delta v^\gamma \tag{A.4b}$$

Αντικαθιστώντας την A.4a στην A.4b παίρνουμε:

$$\begin{aligned} w^\alpha &= \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d}{d\tau}\left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta\xi^\gamma\right) + \Gamma^\alpha_{\beta\epsilon}u^\delta\left(\frac{d\xi^\epsilon}{d\tau} + \Gamma^\epsilon_{\beta\gamma}u^\beta\xi^\gamma\right) \\ &= \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} + 2\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta\frac{d\xi^\gamma}{d\tau} + \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}u^\delta u^\beta\xi^\gamma + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{d\tau}\xi^\gamma + \Gamma^\alpha_{\delta\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\beta\gamma}u^\beta u^\delta\xi^\gamma \end{aligned} \tag{A.5}$$

Συνδυάζοντας τις A.5 και A μπορούμε να εξαλείψουμε το $\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2}$:

$$\begin{aligned} w^\alpha &= -\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}u^\beta u^\gamma\xi^\delta + \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}u^\beta u^\delta\xi^\gamma - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_{\delta\epsilon}u^\delta u^\epsilon\xi^\gamma + \Gamma^\alpha_{\delta\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\beta\gamma}u^\beta u^\delta\xi^\gamma \\ &= -\left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_{\delta\epsilon} - \Gamma^\alpha_{\delta\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\beta\gamma}\right)u^\beta u^\delta\xi^\gamma \\ &\equiv -R^\alpha_{\beta\gamma\delta}u^\beta\xi^\gamma u^\delta \end{aligned} \tag{A.6}$$

B Νόμοι μετασχηματισμού μεταξύ χρονικών συντεταγμένων

Ο σύνηθης χρόνος t και ο σύμμορφος χρόνος η συνδέονται από τη σχέση

$$dt = ad\eta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta} \quad \Rightarrow \quad \dot{(\ )} = \frac{1}{a}(\ )' \quad \text{ή} \quad (\ )' = a\dot{(\ )} \tag{B.1}$$

Για οποιεσδήποτε δύο συναρτήσεις του χρόνου, f και g έχουμε

$$\frac{df}{dg} = \frac{\dot{f}}{\dot{g}} = \frac{f'}{g'} \tag{B.2}$$

Η συνήθης παράμετρος Hubble και η σύμμορφη παράμετρος Hubble συνδέονται από την

$$\mathcal{H} = aH = \dot{a} = \frac{a'}{a} \tag{B.3}$$

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να χτησημοποιούμε τον παράγοντα κλίμακας a ή το λογάριθμό του ως χρονική συντεταγμέν:

$$\mathcal{H}^{-1} f' = H^{-1}\dot{f} = a\frac{df}{da} = \frac{df}{dlna} \tag{B.4}$$

$$\mathcal{H}^{-2} f'' = H^{-2}\ddot{f} + H^{-1}\dot{f} = a^2\frac{d^2 f}{da^2} + \frac{1-3w}{2}a\frac{df}{da} = (\frac{d}{dlna})^2 f - \frac{1+3w}{2}\frac{df}{dlna} \tag{B.5}$$

Σε πολλές εξισώσεις εμφανίζεται ο συνδιασμός

$$\mathcal{H}^{-2} f'' + 2\mathcal{H}^{-1} f' = H^{-2}\ddot{f} + 3H^{-1}\dot{f} \tag{B.6}$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\mathcal{H} = a\ddot{a} = a^2\Big(\dot{H} + H^2\Big). \tag{B.7}$$

C Κύμα με τυχαία διεύθυνση ως προς τον προσανατολισμό των δοκιμαστικών μαζών

Στην 2.2 κάναμε την υπόθεση ότι το κύμα διαδίδεται σε διεύθυνση κάθετη με τον προσανατολισμό των δύο μαζών. Εάν υποθέσουμε ότι ένα κύμα h_+ ταξιδεύει σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα z στο επίπεδο $x - z$.

Η φωτεινή δέσμη είνα στην x διεύθυνση άρα χρειαζόμαστε μόνο την h_{xx} συνιστώσα αφού αυτή θα επηρεάσει το φωτόνιο. Θα δουλέψουμε πρώτα σε συντεταγμένες $x^{\alpha'}$ με βαθμίδα TT όπου τα βαρυτικά κύματα ταξιδεύουν στην διεύθυνση z' με πόλωση h_+, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την 1.29. Στη συνέχεια μπορούμε να εφαρμόσουμε μια στροφή συντεταγμένων γύρω από τον άξονα y' για να πάρουμε το h_{xx} που χρειαζόμαστε.

Για ένα κύμα πόλωσης h'_+ που ταξιδεύει στη διεύθυνση z' στο σύστημα με TT βαθμίδα (t', x', y', z'), έχουμε $h^{TT}_{x'x'} = A' cos\left[(z' - t')\omega\right], \quad h^{TT}_{y'y'} = -h^{TT}_{x'x'}$.

Έστω (t, x, y, z) σύστημα που παίρνουμε με περιστροφή των συντεταγμένων (t', x', y', z') γύρω από τον y' άξονα κατά μια γωνία θ.
Τότε

$$\begin{aligned} h_{xx} &= \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 h^{TT}_{x'x'} + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 h^{TT}_{y'y'} = \cos^2\theta h^{TT}_{x'x'} \\ &= \cos^2\theta A' \cos\left[\omega\big(z\cos\theta + x\sin\theta - t\big)\right] \\ &= A\cos\left[\omega\big(x\sin\theta - t\big)\right] \end{aligned} \tag{C.1}$$

Όπου θέσαμε $A \equiv \cos^2\theta A'$ και χωρίς έλλειψη της γενικότητας θέσαμε, $z = 0$. Αντικαθιστώντας το h_{xx} μέσα στην έκφραση της διάδοσης της φωτεινής δέσμης 2.6 από το $x = 0$ στο $x = L$:

$$\begin{aligned} t_{far} &= t_{start} + \int_0^L \sqrt{1 + h_{xx}}dx \\ &= t_{start} + L + \frac{1}{2}\int_0^L h_{xx}dx \\ &= t_{start} + L + \frac{1}{2}\int_0^L Acos[-\omega\left(x(1-\sin\theta) + t_{start}\right)]dx. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Στην τελευταία χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση $t(x) \approx t_{start} + x$ στην σχέση 5.1. Στο χρόνο που παίρνει της δέσμης να επιστρέψει από το $x = L$ (όταν $t = t_{far}$) στο σημείο αρχικής εκπομπής $x = 0$ (όταν $t = t_{return}$) έχουμε αντιθέτως $t(x) \approx t_{start} + 2l - x$.

$$\int_{t_{far}}^{t_{return}} dt = -\int_L^0 dx\sqrt{1 + h_{xx}} = \int_0^L dx\sqrt{1 + h_{xx}} \tag{C.3}$$

Ολοκληρώνοντας και στα δύο μέλη της εξίσωσης

$$\begin{aligned} t_{return} =& t_{far} + L + \frac{1}{2}\int_L^0 dx h_{xx} \\ =& t_{far} + L + \frac{1}{2}\int_L^0 A\cos\Big[-\omega\Big(x(1-\sin\theta) + t_{start}\Big)]dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_L^0 A\cos\Big[-\omega\Big(-x(\sin\theta + 1) + t_{start} + 2L\Big)\Big]dx \end{aligned} \tag{C.4}$$

η οποία είναι γενίκευση της έκφρασης 2.8. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο

εκκίνησης της δέσμης παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{dt_{return}}{dt_{start}} =&1+\frac{1}{2}\Bigg[\frac{1}{1+\sin\theta}h_{xx}\big(t_{start}+2L\big)-\frac{1}{1-\sin\theta}h_{xx}\big(t_{start}\big)\\&+\left(\frac{1}{1-\sin\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)h_{xx}\big(t_{start}+L\left(1+\sin\theta\right)\big)\Bigg].\\=&1+\frac{1}{2}\Bigg[(1-\sin\theta)h'_{xx}(t_{start}+2L)-(1+\sin\theta)h'_{xx}(t_{start})\\&-2\sin\theta h'_{xx}\big(t_{start}+L\left(1-\sin\theta\right)\big)\Bigg].\end{aligned} \tag{C.5}$$

Ένας παράγοντας $1/\cos^2\theta$, απορροφήθηκε όταν το h_{xx} αντικαταστάθηκε από το h'_{xx} (Θυμίζουμε ότι παραπάνω πήραμε $A = A'\cos^2\theta$).

D Μετρική Robertson-Walker

Η σύνχρονη κοσμολογία είναι βασισμένη στην κοσμολογική αρχή:

- κανείς δεν βρίσκεται στο κέντρο του του σύμπαντος
- ο κόσμος φαίνεται ο ίδιος από όποιο σημείο του σύμπαντος και αν ειδωθεί

Οι δύο παραπάνω υποθέσεις διατυπώνουν ότι το σύμπαν (σε μεγάλες κλίμακες[30]) είανι ομογενές και ισσότροπο (ειδωμένο από ένα παρατηρητή του εκτελεί ελεύθερη πτώση). Ένα ομογενές και ισότροπο σύμπαν περιγράφεται από τη μετρική Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + \alpha^2(t)\left[d\mathrm{x}^2 - k\frac{(\mathrm{x}\cdot d\mathrm{x})^2}{1-k\mathrm{x}^2}\right] \tag{D.1}$$

Όπου οι συνειστώσες της μετρικής είναι

$$g^{(0)}_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^2\big(\delta_{ij}+k\frac{x^ix^j}{1-kx^2}\big)\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^2\gamma_{ij}\end{array}\right) \tag{D.2}$$

[30]Ενδείξεις από πειράματα παρατήρησης του CMB επιβεβαιώνουν την ομογένεια και ισοτροποία του σύμπαντος σε κλίμακες > 100Mpc

και

$$g^{ij}_{(0)} = \frac{1}{\alpha^2(t)}\gamma^{ij}, \quad g^{i0}_{(0)} = 0, \quad g^{00}_{(0)} = -1 \tag{D.3}$$

με το $\alpha(t)$ να είναι ο παράγοντας κλίμακας του σύμπαντος. Το ds είναι το μέτρο της ιδιοαπόστασης μεταξύ δύο σημείων στο χωροχρόνο που χωρίζονται από στοιχειώδες μήκος dx^μ. Η σταθερά k δίνει την καμπυλότητα του χώρου και παίρνει τις τιμές $k = -1, 0, 1$ σε ένα ανοιχτό, επίπεδο και κλειστό σύμπαν αντίστοιχα.

Στη μετρική αυτή οι σχέσεις του Christofel 0.1 έχουν τις μη μηδενικές συνεισφόρες:

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{ij} =& \frac{1}{2}g^{00}\left[\cancelto{0}{g_{0i,j}} + \cancelto{0}{g_{0j,i}} - g_{ij,0}\right] = \alpha\dot{\alpha}\left[\delta_{ij} + k\frac{x^i x^j}{1-kx^2}\right] \\ =& \alpha\dot{\alpha}\gamma_{ij},\end{aligned} \tag{D.4a}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{0j} =& \frac{1}{2}g^{i\lambda}\left[\cancelto{0}{g_{\mu 0,j}} + g_{ij,0} - \cancelto{0}{g_{0j,i}}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2(t)}\gamma^{il}2\alpha\dot{\alpha}\gamma_{lj} \\ =& \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta_{ij},\end{aligned} \tag{D.4b}$$

Και έται έχουμε:

$$\partial_0\Gamma^0_{ij} = \partial_0\big(\alpha\dot{\alpha}\gamma_{ij}\big) = \gamma_{ij}\frac{d}{dt}\big(\alpha\dot{\alpha}\big) \tag{D.5a}$$

$$\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{j0} = \alpha\dot{\alpha}\gamma_{ik}\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta^k_j = \dot{\alpha}^2\gamma_{ij} \tag{D.5b}$$

$$\Gamma^0_{ij}\Gamma^l_{0l} = \alpha\dot{\alpha}\gamma_{ij}\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta^l_l = 3\dot{\alpha}^2\gamma_{ij} \tag{D.5c}$$

$$\partial_0\Gamma^i_{i0} = \partial_0\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta^i_i = 3\partial_0\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \tag{D.5d}$$

$$\Gamma^i_{0j}\Gamma^j_{0i} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta^i_j\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta^j_i = 3\big(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\big)^2 \tag{D.5e}$$

Καθώς $\partial_i\gamma_{00} = 0$ και $\partial_i\gamma_{0i} = 0$ επομένως $\Gamma^i_{00} = 0$.
Με τη βοήθεια των παραπάνω μπορούμε να βρούμε και τις μη μηδενικές

συνειστώσες του τανυστή Ricci 0.2[31]

$$
\begin{aligned}
R_{ij} =& \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} - \partial_j \Gamma^\lambda_{i\lambda} + \Gamma^\lambda_{ij}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{j\lambda} \\
=& \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_j \Gamma^k_{ik} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl} \\
&+ \partial_0 \Gamma^0_{ij} - \partial_j \cancelto{0}{\Gamma^0_{i0}} + \Gamma^0_{ij}\Gamma^l_{0l} + \Gamma^k_{ij}\cancelto{0}{\Gamma^0_{k0}} - \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} - \Gamma^0_{il}\Gamma^l_{j0} \\
=& \tilde{R}_{ij} + \gamma_{ij}\frac{d}{dt}\left(\alpha\dot{\alpha}\right) + 3\dot{\alpha}^2\gamma_{ij} - \dot{\alpha}^2\gamma_{ij} - \dot{\alpha}^2\gamma_{ij} \\
=& \tilde{R}_{ij} + \gamma_{ij}\dot{\alpha}^2 + \gamma_{ij}\alpha\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2\gamma_{ij} - 2\dot{\alpha}^2\gamma_{ij} \\
=& \tilde{R}_{ij} + \gamma_{ij}\alpha\ddot{\alpha} + 2\gamma_{ij}\dot{\alpha}^2
\end{aligned}
\tag{D.6}
$$

όπου $\tilde{R}_{ij} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_j \Gamma^l_{il} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^\sigma_{k\sigma} - \Gamma^k_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{jk}$.

$$
\begin{aligned}
R_{00} =& \partial_\lambda \cancelto{0}{\Gamma^\lambda_{00}} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{0\lambda} + \cancelto{0}{\Gamma^\lambda_{00}}\,\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\lambda} \\
=& -\partial_0 \Gamma^k_{0k} - \partial_0 \cancelto{0}{\Gamma^0_{00}} - \Gamma^k_{0l}\Gamma^l_{0k} - \cancelto{0}{\Gamma^k_{00}\Gamma^0_{0k}} - \Gamma^0_{0l}\Gamma^l_{00} \\
=& -\partial_0 \Gamma^k_{0k} - \Gamma^k_{0l}\Gamma^l_{0k} \\
=& -3\partial_0\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right) - 3\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 = -3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

άρα

$$
\begin{aligned}
R_{ij} =& \tilde{R}_{ij} + 2\dot{\alpha}^2\gamma_{ij} + \alpha\ddot{\alpha}\gamma_{ij} \\
R_{00} =& -3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

[31] Στα παρακάτω βλέπουμε πάλι διαφορές στα πρόσημα συγκριτικά με τις σχέσεις της παραγράφου 1.5 του [21]

Καταστατικές Μεταβλητές στην FRW μετρική

Από τις εξισώσεις πεδίου της ΓΣ:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\Big).$$

- για $\mu\nu = 00$

$$-3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = 4\pi G\Big(\rho + 3p\Big)$$

- για $\mu\nu = ij$

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + 2\big(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\big)^2 + 2\frac{k}{\alpha^2} = 4\pi G\big(\rho - p\big).$$

Και λύνοντας ως προς τις δύο καταστατικές μεταβλητές παίρνουμε:

$$\rho^{(0)} = \frac{3}{8\pi G}\Big(\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2}\Big), \quad p^{(0)} = -\frac{1}{8\pi G}\Big(\frac{2\ddot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2}\Big). \tag{D.8}$$

Αντί τις ημι-καρτεσιανές συντεταγμένες x^i, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες, για τις οποίες:

$$d\mathrm{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega, \quad d\Omega \equiv d^2\theta + \sin^2\theta d\phi^2. \tag{D.9}$$

άρα

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2(t)\Big[\frac{dr^2}{1 - k\mathrm{x}^2} + r^2 d\Omega\Big] \tag{D.10}$$

όπου στην περίπτωση αυτή η μετρική είναι διαγώνια, με:

$$g_{rr} = \frac{\alpha^2(t)}{1 - kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = \alpha^2(t)r^2, \quad g_{\phi\phi} = \alpha^2(t)r^2\sin^2\theta, \quad g_{00} = -1. \tag{D.11}$$

Στη βιβλιογραφία συναντούμε τις παρακάτω ισοδύναμες μορφές της μετρικής FRW:

$$ds^2 = a^2\left[-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right], \tag{D.12}$$

$$ds^2 = a^2\left[-d\eta^2 + \frac{1}{1 + \frac{K}{4}r^2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)\right], \tag{D.13}$$

$$ds^2 = a^2\left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{K}}\sin\Big(\sqrt{K}\chi\Big)\right)^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right], \tag{D.14}$$

όπου

$$r \equiv \frac{r}{1+\frac{K}{4}r^2} \quad r \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \chi \equiv \int^r \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \tag{D.15}$$

E Κινηματική: Σύμμορφος χρόνος και Ορίζοντες

Η αιτιακή δομή του συύμπαντος κυβερνάται από την διάδοση του φωτός στον FRW χωροχρόνο. Τα άμαζα φωτόνια ταξιδεύουν στην μηδενική γεωδαισιακή $ds^2 = 0$. Οι τροχιές των φωτονίων αυτές μελετώνται πιο εύκολα αν ορίσουμε τον σύμμορφο χρόνο:

$$\boxed{\tau = \int \frac{dt}{\alpha(t)}} \tag{E.1}$$

για τον οποίο η FRW μετρική γίνεται:

$$ds^2 = \alpha^2(\tau)\big[-d\tau^2 + \big(d\chi^2 + \Phi_k(\chi^2)\big(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\big)\big] \tag{E.2}$$

Σε ένα ισότροπο σύμπαν μπορούμε να θεωρήσουμε ακτινική διάδοση του φωτός της μορφής:

$$ds^2 = \alpha^2(\tau)\big[-d\tau^2 + d\chi^2\big]. \tag{E.3}$$

Στην περίπτωση αυτή η μετρική έχει παραγοντοποιηθεί σε μια στατική μετρική Minkowski πολλαπλασιασμένη από ένα χρονοεξαρτόμενο σύμμορφο παράγοντα $\alpha(\tau)$. Η ακτινική μηδενική γεωδαισιακή του φωτός ($ds^2 = 0$) στην FRW μετρική εκφρασμένη ως προς το σύμμορφο χρόνο θα ικανοποιεί την:

$$\Delta\chi(\tau) = \pm\Delta\tau + \sigma\tau\alpha\theta \tag{E.4}$$

όπου το πρόσημο + αντιστοιχεί σε ένα απομακρινόμενο φωτόνιο και το πρόσημο - σε ένα εισερχόνενο φωτόνιο. Αυτό δείχνει το πλεονέκτιμα του να δουλεύουμε με το σύμμορφο χρόνο: οι ακτίνες του φωτός αντιστοιχούν σε ευθείες γραμμές σε γωνία 45 μεταξύ τους στις $\chi - \tau$ συντεταγμένες. Εάν από την άλλη είχαμε χρησιμοποιήσει τον φυσικό χρόνο t, τότε οι κώνοι φωτός για τον καμπύλο χωροχρόνο θα ήταν καμπυλομένοι. Με αυτα'ως προαπαιτούμενα μπορούμε να εισάγουμε δύο είδη οριζόντων:

Ορίζοντας Σωματιδίων

Η μέγιστη σύμμορφη απόσταση που μπορεί να ταξιδέψει το φώς μεταξύ ενός αρχικού χρόνου t_i και ενός ύστερου χρόνου t είναι:

$$\chi_p(\tau) = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^{t} \frac{dt}{\alpha(t)}. \tag{E.5}$$

Αυτός ονομάζεται (σύμμορφος) ορίζοντας σωματιδίου. Ο αρχικός χρόνος t_i συχνά παίνεται να είναι η "αρχή του σύμπαντος", $t_i \equiv 0$[32] όπου $\alpha(t_i \equiv 0) \equiv 0$. Το φυσικό μέγεθος του ορίζοντα ενος σωματιδίου είναι:

$$d_p(t) = \alpha(t)\chi_p. \tag{E.6}$$

Ορίζοντας Γεγονότων

Ο ορίζοντας γεγονότων ορίζει το σύνολο των σημείων από τα οποία σήματα που εκπέμθηκαν μια χρονική στιγμή τ δεν πρόκειται να ληφθούν από ένα παρατηρητή στο μέλλον. Σε σύμμορφες συντεταγμένες τα σημεία αυτά ικανοποιούν την:

$$\chi > \chi_e = \int_{\tau}^{\tau_{max}} d\tau = \tau_{max} - \tau, \tag{E.7}$$

όπου το t_{max} δηλώνει μια τελική στιγμή στο χρόνο (αυτή μπορεί να είναι πεπερασμένη ή άπειρη). Το φυσικό μέγεθος του ορίζοντα γεγονότων είναι:

$$d_e(t) = \alpha(t)\chi_e \tag{E.8}$$

Η διαστελομενη σφαίρα του Hubble

Ο ορίζοντας ενός σωματιδίου είναι αυτός που σχετίζεται με το πρόβλημα του ορίζοντα ?? της καθιερωμένης κοσμολογίας του BB. Η E.5 μπορεί να γραφεί με το ν επόμενο τρόπο:

$$\chi_{ph}(\tau) = \int_{t_i}^{t} \frac{dt}{\alpha} = \int_{ln\alpha_i}^{ln\alpha} \left(\alpha H\right)^{-1} dln\alpha, \tag{E.9}$$

[32] Να παρατηρήσουμε εδώ ότι το Big Bang είναι μια στιγμή στο χρόνο και όχι ενα σημείο στο χώρο

όπου $\alpha_i \equiv 0$ αντιστοιχή στο BB. Η αιτιακή δομή του σύμπαντος μπορεί να συσχετιθεί με την εξέληξη της σύμμορφης ακτίνας του Hubble $(\alpha H)^{-1}$. Για ένα σύμπαν το οποίο κυριαρχείται από ένα κοσμικό ρευστό με σταθερή καταστατική εξίσωση $\omega \equiv p/\rho$ παίρνουμε:

$$(\alpha H)^{-1} = H_0^{-1}\alpha^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}. \tag{E.10}$$

Παρατηρούμε την εξάρτηση του εκθέτη από το $(1+3\omega)$. Όλες οι γνωστές πηγές ύλης ικανοποιούν την ισχυρή ενεργειακή συνθήκη $1+3\omega > 0$, και έτσι ήταν συνηθισμένη υπόθεση ότι η σύμμορφη ακτίνα Hubble αυξάνεται καθώς το σύμπαν διαστέλεται. Σε αυτή την περίπτωση το ολοκλήρωμα στην E.9, κυριαρχείται από το άνω όριο και παίρνει μηδενικές συνεισφορές από μικρούς χρόνους. Το βλέπουμε αυτό αποκλιστικά στην περίπτωση ενός τέλειου ρευστού. Χρησιμοποιώντας την E.10 στην E.9 βρίσκουμε:

$$\chi_{ph}(\alpha) = \frac{2H_0^{-1}}{(1+3\omega)}\left[\alpha^{\frac{1}{2}(1+3\omega)} - \alpha_i^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}\right] \equiv \tau - \tau_i. \tag{E.11}$$

Το γεγονός ότι αυτός ο σύμμορφος ορίζοντας παίρνει τη μεγαλύτερη συνεισφορά από μετέπειτα χρόνους μπορεί εκδηλώνεται

F Εξίσωση Friedman

Στη Γενική Σχετικότητα η μετρική είναι μια δυναμική μεταβλητή. Η χρονική εξέληξη του παράγοντα κλίμακας κυβερνάται από τις εξισώσεις του Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{F.1}$$

Το βερυτικό πεδίο, δηλαδή η μετρική του χώρου, πηγάζει και καμπυλώνεται από την ύλη/ενέργεια. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής υποχρεώνεται από τις συνθήκες ισοτροποίας και ομογένειας να είναι της μορφής ενός ιδανικού ρευστού, δηλαδή $T_{\mu\nu} = diag(-\rho, p, p, p)$. Τότε οι εξισώσεις του Einstein γράφονται ως δύο ανεξάρτητες εξισώσεις:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{\kappa}{\alpha^2} \qquad \text{(Εξίσωση Friedmann)} \tag{F.2}$$

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) \qquad \text{(Εξίσωση Raychaudhuri)} \tag{F.3}$$

Η εξίσωση F.3 μπορεί να αντικατασταθεί από την εξίσωση συνέχειας

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad \text{(Εξίσωση Συνέχειας)} \tag{F.4}$$

η οποία προκύπτει είτε από συνδυασμό των εξισώσεων F.2 και F.3 είτε από την $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Ουσιαστικά η F.4 δεν είναι παρά ο πρώτος θερμοδυνιμικός νόμος:

$$dU = -pdV \Rightarrow d(\rho a^3) = -pd(a^3) \tag{F.5}$$

και εισάγοντας την καταστατική εξίσωση $p \equiv \omega\rho$, η εξίσωση συνέχειας μπορεί να ολοκληρώθεί για να δώσει

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3\big(1+\omega\big)\frac{da}{a} \Rightarrow \rho \propto a^{-3(1+\omega)} \tag{F.6}$$

και αγνοώντας τον όρο καμπυλότητας στην F.2, ακολουθεί

$$a \propto \begin{cases} t^{2/3(1+\omega)} & \omega \neq 1 \\ e^{Ht} & \omega = 1 \end{cases} \tag{F.7}$$

[Αυτό μπορεί να βρεθεί αντικαθιστώντας $a = t^n$ και την F.7 στην F.2, για να πάρουμε $(n/t)^2 = 1/3t^{-3n(1+\omega)}$. Αυτή έχει λύση $n = 2/3(1+\omega)$, δεδομένου ότι $\omega \neq 1$. Για $\omega = -1$ είναι $\rho =$ σταθ. και η F.2 έχει σταθερή λύση]

Η ύλη στο σύμπαν αποτελείται από πολλά ρευστά $T_{\mu\nu} = \sum_i T_\mu^{(i)\nu}$, με $i = \{rad, mat, \Lambda\}$, για ακτινοβολία, μη σχετικιστική ύλη και κενό αντίστοιχα. Εάν η ενέργεια που ανταλλάσσεται μεταξύ τους είναι μηδαμινή, συνεπάγεται ότι όλα τα ρευστά ξεχωριστά υπακούουν την εξίσωση συνέχειας. Μπορούμε να ορίσουμε μια παράμετρο για κάθε καταστατική εξίσωση ξεχωριστά $p_i = \omega_i\rho_i$.

Ορίζουμε $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$, όπου $\rho_c = 3H^2$ είναι η κρίσημη πυκνότητα. Τότε μπορούμε να φέρουμε την εξίσωση Friedman F.2 στην ισοδύναμη μορφή:

$$\rho_c = \rho_i - \frac{3K}{a^2}$$

$$1 = \frac{\rho_i}{\rho_c} - \frac{3K}{a^2\rho_c} = \Omega_i - \frac{3K}{a^2 3H^2} = \Omega_i - \frac{K}{\big(aH\big)^2}$$

$$\Omega_i = 1 + \frac{K}{\big(aH\big)^2}$$

και για το σύνολο των κοσμικών ρευστών:

$$\Omega = \sum_i \Omega_i = 1 + \frac{k}{\big(aH\big)^2} \tag{F.8}$$

επομένως το Ω είναι μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο από τη μονάδα για ένα ανοιχτό, επίπεδο, ή κλειστό σύμπαν αντίστοιχα. Από παρατηρήσεις (supernovae, CMB, BBN κ.α.) εχουμε καταλήξει στις σημερινές τιμές:

$$\Omega - 1 \approx 0, \quad \Omega_B \approx 0.04, \quad \Omega_\gamma \approx 8 \times 10^{-5}, \quad \Omega \approx 0.072 \tag{F.9}$$

με B και DM να συμβολίζουν τα βαρυόνια και τη σκοτεινή ύλη. Η ορατή ύλη έχει πολύ μικρή συνεισφορά στην ολική πυκνότητα.

G Ιδανικά Ρευστά

Ως ιδανικό ορίζεται το μέσο για το οποίο σε κάθε σημείο του μπορούμερ να θεωρήσουμε ένα τοπικό αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, που ταξιδεύει μαζί με το ρευστό, στο οποίο σύστημα το ρευστό φαίνεται ομογενές σε όλες τις κατευθύνσεις. Σε ένα τέτοιο τοπικό αδρανειακό σύστημα οι συνειστώσες του τανυστή ενέργειας ορμής πρέπει να έχουν τη μορφή:

$$T^{ij} = \delta_{ij} p, \quad T^{i0} = T_{i0} = 0, \quad T^{00} = \rho$$

Αυτό γιατί μη μηδενικές τιμές του T^{i0} και κάθε άλλος όρος μη ανάλογοι του δ_{ij} θα επέλεγαν μια προνομιακή κατεύθυνση στο χώρο, όπως την κατεύθυνση του T^{i0}, ή κάποιας εκ των μη εκφυλισμένων ιδιοδιανυσμάτων του T_{ij}. Οι όροι p και ρ είναι αυτοί της πίεσης και της ενέργειας αντίστοιχα. Τότε σε άνα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς ο τανυστής ενέργειας ορμής παίρνει τη μορφή:

$$T^{a\beta} = p\eta^{a\beta} + \big(p + \rho\big) u^a u^\beta, \tag{G.1}$$

με τις p και ρ να ορίζονται στο ίδιο σύστημα αναφοράς που ταξιδεύει μαζί με το ρευστό και οι u^a να ορίζεται από τις συνθήκες να μετασχηματίζεται ως τετραδιάνυσμα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και στο τοπικό Καρτεσιανό σύστημα να έχει συνειστώσες $\bar{u}^0 = 1$ και $\bar{u}^i = 0$. Το τετραδιάνυσμα αυτό, γνωστό και ως διάνυσμα ταχύτητας, είναι κανονικοποιημένο έτσι ώστε σε κάθε αδρανειακό σύστημα να είναι $\eta_{a\beta} u^{a\beta} = -1$. Συνεπάγεται ότι σε ένα γενικό βαρυτικό πεδίο ο τανυστής ενέργειας ορμής ενός ιδανικού ρευστού είναι:

$$T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + \big(p + \rho\big) u^\mu u^\nu, \quad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \tag{G.2}$$

H Συμπλήρωμα στο κεφάλαιο των διαταραχών

Μελέτη της εξίσωσης Συνέχειας ??

Εξετάζουμε πρώτα την μηδενική συνειστώσα η οποία θα δώσεις την διατήρηση της ενέργειας. Έχουμε:

$$\partial_0 T^0_0 + \partial_i T^i_0 + \Gamma^\mu_{\mu 0} T^0_0 + \underbrace{\Gamma^\mu_{\mu i} T^i_0}_{O(2)} - \Gamma^0_{00} T^0_0 - \underbrace{\Gamma^0_{i0} T^i_0}_{O(2)} - \underbrace{\Gamma^i_{00} T^0_i}_{O(2)} - \Gamma^i_{j0} T^j_i = 0. \tag{1}$$

Ιντερμέδιο : Μετάφραση της παραπάνω σχέσης στη μετρική FRW [22]
Κλασικό όριο

Η εξίσωση $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ γράφεται:

$$\partial_t \rho + \nabla_{\mathrm{r}} \cdot \big(\rho \mathrm{u}\big) = 0 \tag{1}$$

Επίσης θυμίζουμε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} &\text{Euler} && \partial_t \mathrm{u} + \mathrm{u}\nabla_{\mathrm{r}} \cdot \mathrm{u} = -\tfrac{1}{\rho}\nabla_{\mathrm{r}} p - \nabla_{\mathrm{r}}\Phi \\ &\text{Poisson} && \nabla^2_{\mathrm{r}}\Phi = 4\pi G\rho \end{aligned}$$

Όπου το βαρυτικό δυναμικό Φ καθορίζει την επίτάχυνση $\mathrm{g} = -\nabla_{\mathrm{r}}\Phi$. Γενικότερα η εξίσωση Poisson περιλαμβάνει και την κοσμολογική σταθερά $\nabla^2_{\mathrm{r}}\Phi = 4\pi G\rho - \lambda$. Παίρνοντας $\Phi = 0$ στο $\mathrm{r} = 0$, η εξίσωση Poison ολοκληρώνεται όπως:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\big) =& \big(4\pi G\rho - \Lambda\big)r^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r} =& \frac{1}{3}\big(4\pi G\rho - \Lambda\big)r \\ \Rightarrow \Phi =& \frac{1}{6}\big(4\pi G\rho - \Lambda\big)r^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Η εξίσωση Euler επομένως γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{r} + H^2\underbrace{\mathrm{r}\nabla_{\mathrm{r}} \cdot \mathrm{r}}_{\mathrm{r}} =& -\frac{1}{3}\big(4\pi G\rho - \Lambda\big)\mathrm{r} \\ \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} + H^2 =& \frac{1}{3}\big(\Lambda - 4\pi G\rho\big). \end{aligned} \tag{3}$$

Αυτό είναι το Νευτώνιο όριο των εξισώσεων Friedman (το σχετικιστικό αποτέλεσμα αντικαθιστά το ρ με το άθρισμα της πυκνότητας ενέργειας και τρείς φορές το γινόμενο της πίεσης, $\rho + 3p$).
Η εξίσωση συνέχειας γίνεται

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla_{\mathrm{r}} \cdot \big[\rho(t)H(t)\mathrm{r}\big] =& 0 \\ \Rightarrow \partial_t \rho + 3\rho H =& 0. \\ \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{3}{a}\frac{\partial a}{\partial t} =& 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Αυτή δίνει τη διατήριση ενέργειας στο όριο $\rho \ll p$. Στο σύστημα που ταξιδεύει μαζί με το υπόβαθρο (αδιατάραχτο χώρο) ένας παρατηρητής έχει ταχύτητα $d\mathrm{r}/dt = H(t)\mathrm{r}$ επομένως και θέση $\mathrm{r} = a(t)\mathrm{x}$ όπου x είναι σταθερά. Αντί να χαρακτηρίζουμε γεγονότα από τα t και r είναι βολικό να χρησημοποιήσουμε τα t και x, όπου x είναι οι χωρικές συντεταγμένες όπως μετρώνται στο σύστημα του υποβάθρου.
Οι παράγωγοι μετασχηματίζονται ως:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathrm{r}} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial t}\right)_{\mathrm{r}} \cdot \nabla_{\mathrm{x}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathrm{x}} - H(t)\mathrm{x} \cdot \nabla_{\mathrm{x}},\end{aligned} \tag{5}$$

όπου χρησημοποιήσαμε το ∇ για να συμβολίσουμε την λαπλασιανή ως προς x για σταθερό t και

$$\nabla_{\mathrm{x}} = a^{-1}\nabla. \tag{6}$$

Παρακάτω γράφοντας ∂_t λαμβάνουμε το x σταθερό.
Διαταράσουμε τα ρ, u και Φ γύρω από τις τιμές του υποβάθρου:

$$\begin{aligned}\rho &\Rightarrow \bar{\rho}(t) + \delta\rho \equiv \bar{\rho}(t)\big(1+\delta\big) \\ p &\Rightarrow \bar{p}(t) + \delta p \\ \mathrm{u} &\Rightarrow a(t)H(t)\mathrm{x} + \mathrm{v} \\ \Phi &\Rightarrow \bar{\Phi}(\mathrm{x}, t) + \phi.\end{aligned} \tag{7}$$

Όπου δ είναι το κλάσμα της διαταραχής στην πυκνότητα του ρευστού και ϕ το διαταραγμένο βαρυτικό δυναμικό. Ετσι, για ένα σωματίδιο στο ρευστό,

$$\frac{d\mathrm{r}}{dt} = \frac{d\big(a\mathrm{x}\big)}{dt} = aH\mathrm{x} + a\frac{d\mathrm{r}}{dt} = \mathrm{u}, \tag{8}$$

Βλέπουμε ότι $ad\mathrm{r}/dt = \mathrm{v}$, άρα η v περιγράφει αλλαγές στα στοιχεία του υγρού στο σύμμορφο σύστημα ανά χρόνο. Η εξίσωση συνέχειας, με τη χρήση της 5 γίνεται:

$$(1+\delta)\partial_t\bar{\rho} - H\bar{\rho}\mathrm{x}\cdot\nabla\delta + \bar{\rho}\partial_t\delta + \frac{\bar{\rho}}{a}\nabla\cdot\Big[\big(1+\delta\big)\big(aH\mathrm{x}+\mathrm{v}\big)\Big] = 0. \tag{9}$$

Οργανώνοντας σε όρους ως προς την τάξη της διαταραχής

$$\underbrace{\partial_t\bar{\rho} + 3\bar{\rho}H}_{\text{0ης-τάξης}} + \underbrace{\big(\partial_t\bar{\rho} + 3\bar{\rho}H\big)\delta + \bar{\rho}\partial_t\delta + \frac{\bar{\rho}}{a}\nabla\cdot\mathrm{v}}_{\text{1ης-τάξης}} + \underbrace{\frac{\bar{\rho}}{a}\big(\mathrm{v}\cdot\nabla\delta + \delta\nabla\cdot\mathrm{v}\big)}_{\text{2ης-τάξης}} = 0. \tag{10}$$

Λόγω της εξίσωσης 4 για το υπόβαθρο το όρος μηδενικής τάξης είναι μηδέν. Και στη γραμμική περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε τις διαταραχές αρκετά μικρές (και τις παραγώγους τους) ώστε να αγνοήσουμε τον όρο δευτέρας τάξης. Άρα:

$$\partial_t \delta + \frac{1}{a} \nabla \cdot \mathrm{v} = 0.$$

I Σφαιρικές Αρμονικές

Αναλυτική μορφή

$$Y_l^m \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \underbrace{P_l^m(\cos\theta)}_{\substack{\text{γενικό πολυώνυμο} \\ \text{Legendre}}} e^{im\phi} \tag{I.1}$$

Ορθωκανονικότητα

$$\int d\Omega Y_l^m(\hat{n}) Y_{l'}^{m'}(\hat{n})^\star = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{I.2}$$

Πρόσθετη ιδιότητα

$$\sum_m |Y_l^m(\theta, \phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \tag{I.3}$$

Πολυώνυμα Legendre

$$P_l(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^0(\theta) \quad (\text{ανεξάρτητο του } \phi) \tag{I.4}$$

Ανάπτυγμα επίπεδου κύματος

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{k}} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kx) Y_l^m(\hat{x}) Y_l^m(\hat{k})^\star \tag{I.5}$$

Μορφές του $Y_l^m(\theta,\phi) = Y_l^m(\hat{n})$ για $l \leq 2$: Εδώ $\hat{n} = \big(n_1, n_2, n_3\big) = \big(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\big)$ είναι το μοναδιαίο άνυσμα κατεύθυνσης

$$
\begin{aligned}
Y_0^0 &= \tfrac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
Y_1^1 &= -\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi} && = -\sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\tfrac{1}{\sqrt{2}}(n_1 + in_2) \\
Y_1^0 &= \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\theta && = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}n_3 \\
Y_1^{-1} &= \sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi} && = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\tfrac{1}{\sqrt{2}}(n_1 - in_2) \\
Y_2^2 &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{i2\phi} && = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}}(n_1 + in_2)^2 \\
Y_2^1 &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{i\phi} && = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}}n_3(n_1 + in_2) \\
Y_2^0 &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{\pi}}\big(3\cos^2\theta - 1\big) && = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{\pi}}\big(3n_3^2 - 1\big) \\
Y_2^{-1} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{-i\phi} && = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}}n_3\big(n_1 - in_2\big) \\
Y_2^{-2} &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{-i2\phi} && = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}}\big(n_1 - in_2\big)^2
\end{aligned}
\tag{I.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad n_1 &= \tfrac{2\pi}{3}\big(-Y_1^1 + Y_1^{-1}\big) & n_1 n_2 &= i\sqrt{\tfrac{2\pi}{15}}\big(-Y_2^2 + Y_2^{-2}\big) \\
n_2 &= i\tfrac{2\pi}{3}\big(Y_1^1 + Y_1^{-1}\big) & \tfrac{1}{2}\big(n_1^2 - n_2^2\big) &= \sqrt{\tfrac{2\pi}{15}}\big(Y_2^2 + Y_2^{-2}\big) \\
n_3 &= \tfrac{4\pi}{3}Y_1^0
\end{aligned}
\tag{I.7}
$$

Ποσθετη ιδιότητα:

$$
\sum_m Y_l^m(\hat{n}')^* Y_l^m(\hat{n}) = \frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\theta) = \frac{2l+1}{4\pi}P_l(\hat{n}'\cdot\hat{n}) \tag{I.8}
$$

όπου β είναι η γωνία μεταξύ των $\hat{n'}$ και $\hat{n}$.

Στροφή Συστήματος Συντεταγμένων

⋆⋆⋆

Γινόμενο δύο Σφαιρικών Αρμονικών (Σειρά Clebsch-Gordon)

$$
Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\phi)Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\phi) = \sum_{jm}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2j+1)}}\langle l_1 0 l_2 0|j0\rangle\langle l_1 m_1 l_2 m_2|jm\rangle Y_j^m(\theta,\phi) \tag{I.9}
$$

όπου οι συντελεστές Clebsch-Gordon[33] $\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | jm \rangle = 0$ εκτός και αν $m = m_1 + m_1$ και $j = |l_1 - l_2|, \cdots l_1 + l_2$ Μια ειδική περίπτωση (που χρειαζόμαστε στο Κεφ. L) είναι

$$Y_1^0(\theta,\phi) Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1}^m + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l+1+m)(l+1-m)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^m \tag{I.10}$$

την οποία μπορούμε να πάρουμε και από την αναδρομική σχέση για τα γενικά πολυώνυμα Legendre

$$\cos\theta P_l^m(\cos\theta) = \frac{l+m}{2l+1} P_{l-1}^m(\cos\theta) + \frac{l+1-m}{2l+1} P_{l+1}^m(\cos\theta) \tag{I.11}$$

J Εξίσωση Boltzmann-Vlasov

J.1 Φασικός Χώρος και Συνάρτηση κατανομής

Εάν αντιμετοπίσουμε το ενεργειακό περιεχόμενο του σύμπαντος ως ρευστό που περιγράφεται από τον τανυστή ενέργειας ορμής T^μ_ν,δεν οδηγούμαστε σε πλήρες σύστημα εξισώσεων στην περίπτωση που δεν έχουμε προσεγγιση ιδανικού ρευστού.Επίσης αυτή η περιγραφή (του ρευστού) στο κοσμικό φωτονικό υπόβαθρο, δεν μπορεί να εξηγήσει τις ανισοτροποίες του CMB (το T^μ_μ περιγράφει πολυπολικούς όρους έως και $l = 2$).

Πριν από την αποσύνδεση των φωτονίων η προσεγγιση του ιδανικού ρευστού χαλάει, και είναι χρειάζεται μια μιο ακριβής ανάλυση της ενέργειας και ύλης του σύμπαντος. Για τις συνειστώσες (βαρυόνια, CDM, νετρίνα, φωτόνια) οι οποιες αποτελούνται από σωμάτια αυτή η πιο αναλυτική προσέγγιση δίνεται από την συνάρτηση κατανομής f η οποία είναι 6-διάστατη στο φασικό χώρο. Κάθε είδος σωματιδίου i έχει τη δικιά του συνάρτηση καταμ=νομής f_i.

Ο φασικός χώρος περιγράφεται από έξι μεταβλητές:

- τρεις συνειστώσες x^i
- και τις αντίστοιχες ορμές p_i

[33] Συνήθως γράφονται ως $\langle l_1 l_2 m_1 m_2 | jm \rangle$

Για την περίπτωση μας, όπου έχουμε σωμάτια σε καμπύλο χωροχρόνο σε κάποιο σύστημα x^μ, μπορούμε να πάρουμε τις συντεταγμένες να είναι τρεις χωρικές συντεταγμένες x^i. Οι αντίστοιχες ορμές θα είναι οι χωρικές συνειστώσες p_i της τετραορμής.

Ορίζουμε τη συνάρτηση κατανομής f ενός είδους σωματιδίων ως μια 6-διάστατη πυκνότητα στο χώρο φάσεων. Επομένως ο αριθμός dN των σωματιδίων στις χωρικές συντεταγμένες x^i, μέσα στον όγκο $dx^1dx^2dx^3$, και με χωρικές συνειστώσες p_i της 4-ορμής, σε χρόνο η, δίνεται από

$$dN = f(\eta, x^i, p_i)dx^1dx^2dx^3 \qquad \underbrace{dp_1dp_2dp_3}_{substack\text{στοιχείο όγκουστο φασικό χώρο}} \tag{J.1}$$

Συνεπώς η f έχει εξάρτηση επίσης από τον χρόνο, αλλά η χρονική συντεταγμένη (η) εμφανίζεται με διαφορετικό τρόπο σε σχέση με την χωρική συνειστώσα, αφού η f ορίζεται ως πυκνότητα στι χωρικές συντεταγμένες. Άρα η $f(\eta, x^i, p_i)$ είναι μια συνάρτηση στο 6-διάστατο φασικό χώρο $\{x^i, p^i\}$ που εξελίσσεται με το χρόνο η. Η χρονική συνειστώσα p_0 της 4-ορμής δεν εμφανίζεται ως μεταβλητή, αφού για δεδομένο είδος σωματιδίου η p_0 καθορίζεται από το p_i (και τη μετρική), και δεν είναι επομένως ανεξάρτητη μεταβλητή.

Προκύπτει ότι η συνάρτηση κατανομής f, ορισμένη με τον τρόπο αυτό, είναι ανεξάρτητη από την επιλογή συντεταγμένων (δεν θα το δείξουμε).

⋆⋆⋆

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = -\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\eta}}_{\text{free streaming}} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial E}\frac{dE}{d\eta}}_{\text{ερυθρομετατόπιση}} \tag{J.2}$$

Το αποτέλεσμα αυτό, η συνάρτηση Boltzmann σε 1^η τάξη, εκφράζει το πως η τιμή της συνάρτησης κατανομής αλλάζει στο x^i, q^i λόγω των επιδράσεων:

- Free streaming: Εξαιτίας των ταχυτήτων τους $\frac{dx^i}{d\eta}$, τα σωματίδια κινούνται έξω από το στοιχείο όγκου d^3x^i (και επομένως από το στοιχείο του φασικού χώρου $d^3x^id^3q^i$) , και άλλα σωμάτια εισέρχονται μέσα σε αυτό
- Ερυθρομετατόπιση: Η ενέργεια (και επομένως η ορμή) του σωματιδίου αλλάζει εξαιτίας της βαρύτητας.

K Τανυστής Ενέργειας σε Τοπικό Ορθοκανονικό Σύστημα

Ο τανυστής Ενέργειας Ορμής $T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ στο τοπικό ορθοκανονικό σύστημα σε όρους της συνάρτησης κατανομής είναι

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}(\eta, x^i) = \int \frac{d^3q^i}{E} f(\eta, x^i, \vec{q}) q^\mu q^\nu \tag{K.1}$$

Όπου $q^\mu \equiv (E, q^i)$, η 4-ορμή στο τοπικό ορθοκανονικό σύστημα. Επομένως έχουμε

$$\begin{array}{lll} T^{\hat{0}\hat{0}} = & \int E f d^3q & \text{πυκνότητα ενέργειας} \\ T^{\hat{0}\hat{i}} = & \int q^i f d^3q & \text{πυκνότητα ορμής = ενεργειακή ροή} \\ T^{\hat{i}\hat{j}} = & \int \frac{q^i q^j}{E} f d^3q & \text{ροή ορμής} \end{array} \tag{K.2}$$

για τις ποσότητες που παρατηρούνται από ένα σύμμορφο παρατηρητή.

Στο ορθοκανονικό σύστημα $T^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}} = \eta_{\nu\rho} T^{\hat{\mu}\rho}$, άρα

$$\begin{aligned} T_{\hat{0}\hat{0}} &= -T^{\hat{0}}_{\hat{0}} = T^{\hat{0}\hat{0}} \\ T_{\hat{0}\hat{i}} &= -T^{\hat{i}}_{\hat{0}} = -T^{\hat{0}\hat{i}} \\ T_{\hat{i}\hat{j}} &= -T^{\hat{i}}_{\hat{j}} = T^{\hat{i}\hat{j}} \end{aligned} \tag{K.3}$$

Και για να τα συνδέσουμε με αυτά που είπαμε στην θεωρία διαταραχών, πρέπει να μετασχηματίσουμε το

$$T^\mu_\nu = \begin{bmatrix} -\bar{\rho} - \delta\rho & (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i + h_{0i}) \\ -(\bar{\rho} + \bar{p})v_i & (\bar{\rho} + \delta p)\delta_{ij} + \sum_{ij} \end{bmatrix} \tag{K.4}$$

στο ορθοκανονικό σύστημα.

Χρησημοποιώντας $g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$ και $g^{\mu\nu} = a^{-2}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})$ έχουμε για τις ανταλοίωτες και συναλοίωτες συνειστώσες:

$$T^{\mu\nu} = a^{-2} \begin{bmatrix} \bar{\rho} + \delta\rho + \bar{\rho} h_{00} & (\bar{\rho} + \bar{p})v_i + \bar{p} h_{0i} \\ (\bar{\rho} + \bar{p})v_i + \bar{p} h_{0i} & (\bar{p} + \delta p)\delta_{ij} + \sum_{ij} -\bar{p} h_{ij} \end{bmatrix} \tag{K.5}$$

$$T^{\mu\nu} = a^{2} \begin{bmatrix} \bar{\rho} + \delta\rho - \bar{\rho} h_{00} & -(\bar{\rho} + \bar{p})v_i - \bar{p} h_{0i} \\ -(\bar{\rho} + \bar{p})v_i - \bar{p} h_{0i} & (\bar{p} + \delta p)\delta_{ij} + \sum_{ij} +\bar{p} h_{ij} \end{bmatrix} \tag{K.6}$$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση $\{\underline{e}_{\hat{\mu}}\}$ η οποία αντιστοιχεί σε μια δοθείσα βάση $\{\underline{e}_\mu\} \equiv \partial_\mu$. Για την περίπτωση ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων αυτό είναι τετριμένο, απλά κανονικοποιούμε τα $\underline{e}_\mu$. Αλλά θέλουμε την ειδική περίπτωση, όπου $h_{\mu\nu}$ δεν είναι διαγώνιο. Η διαδική βάση $\{\underline{e}^\mu \equiv d\tilde{x}^\mu\}$ μας βολεύει αφού

$$\underline{e}_\mu \underline{e}^\nu = \delta^\nu_\mu \tag{K.7}$$

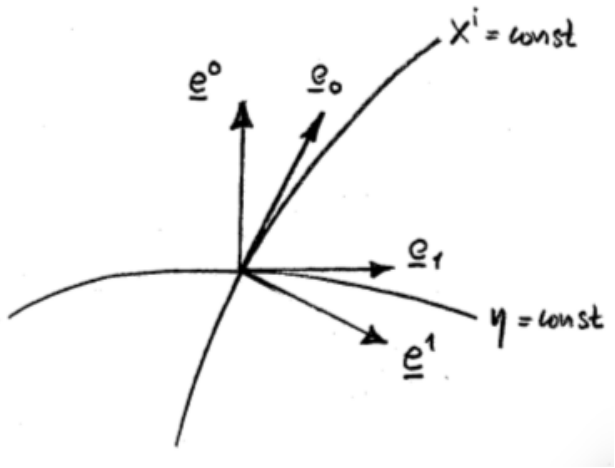
Και από τη ΓΣ έχουμε ότι οι ανταλοίωτες και συναλοίωτες συνειστώσες της ορθοκανονικής βάσης και της δυαδικής είναι

$$\begin{aligned} (\underline{e}_\mu)^a =& \delta^a_\mu \quad (\underline{e}_\mu)_a = g_{a\mu} \\ (\underline{e}^\nu)_a =& \delta^\nu_a \quad (\underline{e}^\nu)^a = g^{a\mu} \end{aligned} \tag{K.8}$$

και τα εσωτερικά γινόμενα είναι

$$\begin{aligned} \underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu =& (\underline{e}_\mu)_a (\underline{e}_\nu)^a = g_{\mu\nu} \\ \underline{e}^\mu \cdot \underline{e}^\nu =& (\underline{e}^\mu)_a (\underline{e}^\nu)^a = g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{K.9}$$

Από αυτό θέλουμε να κατασκευάσουμε μια νέα βάση $\{\underline{e}_{\hat{\mu}}\}$, τέτοια ώστε $\underline{e}_{\hat{\mu}} \cdot \underline{e}_{\hat{\nu}} = \eta_{\mu\nu}$ και $\underline{e}_{\hat{0}}$ είναι εφαπτόμενο στην ευθεία $x^i =$ σταθερό. Αφού το $\underline{e}_0$ είναι ήδη



Σχήμα 14.1: Βάση συντεταγμένων $\underline{e}_\mu$ και η διαδική βάση $\underline{e}^\mu$. Να παρατηρήσουμε ότι το σχήμαείανι υπερβολικό. Η απόκλιση από την ορθοκανονικότητα είναι μόλις $1^{\eta\varsigma}$ τάξης διαταραχή.

εφαπτόμενο στην ευθεία $x^i =$ σταθερό, απλά είναι $\underline{e}_0 \cdot \underline{e}_0 = g_{00} = -a^2(1 - h_{00})$ αντί για -1, και στην κανονικοποιημένη βάση παίρνουμε

$$\underline{e}_{\hat{0}} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g_{00}|}} \underline{e}_0 = \frac{1}{a\sqrt{1 - h_{00}}} \underline{e}_0 = a^{-1}\big(1 + \frac{1}{2}\big)\underline{e}_0 \tag{K.10}$$

Τα $\underline{e}^i$ είναι ορθογώνια στο $\underline{e}_0$, αλλά όχι μεταξύ τους. Από την άλλη, εάν ορίσουμε

$$\underline{e}_{\hat{i}} \equiv q\big(\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}\big)\underline{e}^j \tag{K.11}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\underline{e}_i\underline{e}_j =& a\big(\delta_{ik} + \frac{1}{2}h_{ik}\big)a\big(\delta_{jl} + \frac{1}{2}h_{jl}\big)\underline{e}^k\underline{e}^l \\ =& \big(\delta_{ik} + \frac{1}{2}h_{ik}\big)\big(\delta_{jl} + \frac{1}{2}h_{jl}\big)\big(\delta_{kl} - h_{kl}\big) \\ =& \delta_{ij} - h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij} \\ =& \underline{\delta_{ij}}\end{aligned} \tag{K.12}$$

και $\underline{e}_{\hat{i}} \cdot \underline{e}_{\hat{0}} = 0$. Επομένως $\{\underline{e}_{\hat{\mu}}\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση $\underline{e}_{\hat{\mu}} \cdot \underline{e}_{\hat{\nu}} = \eta_{\mu\nu}$.

Σε όρους των συντεταγμένων $\{\underline{e}_\mu\}$, $\underline{e}_{\hat{0}} = a^{-1}\big(1 + \frac{1}{2}h_{00}\big)\underline{e}_0$ και

$$\begin{aligned}\underline{e}_{\hat{i}} =& a\big(\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}\big)\underline{e}^{\hat{j}} = a\big(\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}\big)g^{j\mu}\underline{e}_{\hat{\mu}} = a\big(\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}\big)a^{-2}\big(\eta^{j\mu} - h^{j\mu}\big)\underline{e}_\mu \\ =& \cdots = a^{-1}\big[h_{0i}\underline{e}_0 + \big(\delta_{ij} - \frac{1}{2}h_{ij}\big)\underline{e}_j\big]\end{aligned} \tag{K.13}$$

ή $\underline{e}_{\hat{\mu}} = X^\nu_{\hat{\mu}}\underline{e}_\nu$ όπου

$$\boxed{\begin{array}{lll} X^0_{\hat{0}} = & a^{-1}\big(1 + \frac{1}{2}h_{00}\big) & X^0_{\hat{i}} = a^{-1}h_{0i} \\ X^i_{\hat{0}} = & 0 & X^j_{\hat{i}} = a^{-1}\big(\delta_{ij} - \frac{1}{2}h_{ij}\big) \end{array}} \tag{K.14}$$

είναι ο πίνακας μετασχηματισμού μεταξύ των δύο βάσεων.

Μπορούμε τώρα να χρησημοποιήσουμε τα $X^\nu_{\hat{\mu}}$ για να μετασχηματίσουμε τις συναλοίωτες συνειστώσες κάθε τανυστή από το σύστημα συντεταγμένων σε αυτή την ορθοκανονική βάση. Για τον τανυστή ενέργειας έχουμε

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = X^\rho_{\hat{\mu}}X^\sigma_{\hat{\nu}}T_{\rho\sigma} \tag{K.15}$$

η οποία, με χρήση των K.5 και K.13 δίνει

$$\boxed{\begin{aligned} T_{\hat{0}\hat{0}} =& T^{\hat{0}\hat{0}} = \bar{\rho} + \delta\rho \\ T_{\hat{0}\hat{i}} =& T_{\hat{i}\hat{0}} = -\big(\bar{\rho} + \bar{p}\big)v_i \\ T^{\hat{0}\hat{i}} =& T^{\hat{i}\hat{0}} = +\big(\bar{\rho} + \bar{p}\big)v_i \\ T_{\hat{i}\hat{j}} =& T^{\hat{i}\hat{j}} = \big(\bar{p} + \delta p\big)\delta_{ij} + \sum_{ij} \end{aligned}} \tag{K.16}$$

Επομένως παίρνουμε τη σύνδεση μεταξύ των διαταραχών του τανυστή ενέργειας και της συνάρτησης κατανομής[34]:

$$
\begin{aligned}
\rho = \bar{\rho} + \delta\rho &= \int E f d^3q \\
p = \bar{p} + \delta p &= \frac{1}{3}\delta_{ij} T^{\hat{i}\hat{j}} = \int \frac{\delta_{ij} q^i q^j}{3E} f d^3q \\
\sum_{ij} = T^{\hat{i}\hat{j}} - \delta_{ij} p &= \int \big(q^i q^j - \frac{1}{3}\delta^{ij} q^2\big) \frac{f d^3}{E} \\
\big(\rho + p\big) v_i = \big(\bar{\rho} + \bar{p}\big) v_i &= \int q^i f d^3q
\end{aligned}
\tag{K.17}
$$

όπου $q \equiv \sqrt{\delta_{ij} q^i q^j} = |\vec{q}|$

L Ερυθρομετατόπιση Φωτονίων και Free Streaming

Για φωτόνια, $E = \sqrt{q^2 + m^2} = q = |\vec{q}| = \sqrt{\delta_{ij} q^i q^j}$. Με το $\hat{n} = n^i = \big(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\big)$ $(\delta_{ij} n^i n^j = 1)$ να δίνει την διεύθυνση της ορμής των φωτονίων στο σύστημα (το τοπικό ορθοκανονικό) του παρατηρητή ($x^i =$ σταθ.).

Εξετάζουμε τώρα την πρώτης τάξης εξίσωση Boltzmann για τα φωτόνια,

$$
\frac{\partial f}{\partial \eta} = -\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\eta} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{d\eta} \tag{L.1}
$$

Η ενέργεια των φωτονίων q που παρατηρείται από ένα τοπικό παρατηρητή μπορεί να γραφεί ως

$$
q \equiv -\underline{u} \cdot \underline{p} = -u_\mu p^\mu \tag{L.2}
$$

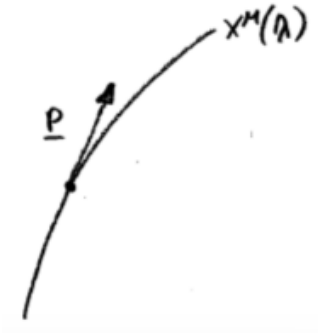
όπου $\underline{u} = \underline{e}_{\hat{0}}$ είναι η 4-ταχύτητα του παρατηρητή, και $\underline{p}$ είναι η 4-ορμή.

Οι ανταλλοίωτες συνειστώσες τπυ φωτονίου είναι

$$
p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(\frac{dx^\eta}{d\lambda}, \frac{dx^{x^i}}{d\lambda}\right) \tag{L.3}
$$

[34] Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν μόνο σε $1^{\eta\varsigma}$ τάξης θεωρία διαταραχών. Για παράδειγμα, έχουμε υποθέσει ότι η ταχύτητα του ρευστού $\vec{v}$ είναι μικρή (μη σχετικιστική). Γενικά, στη ΓΣ, η παρατηρούμενη πυκνότητα ενέργειας $T^{\hat{0}\hat{0}}$ δεν είναι ίση με την ενεργειακή πυκνότητα ρ στο σύστημα ηρεμίας του ρευστού, για δύο λόγους: 1) την κινητική ενέργεια λόγο της ταχύτητας $\vec{v}$ του ρευστού 2) συστολή Lorentz του στοιχείου όγκου. Και τα δύο αυτά έχουν $O(v^2)$ επίδραση, και επομένως μπορούν να αγνοηθούν σε $1^{\eta\varsigma}$ τάξης θεωρία διαταραχών. (Ταχύτητες σωματιδίων $\vec{q}/E$ μπορεί να είναι σχετικιστικές στην περίπτωσή μας - και σίγουρα είναι για τα φωτόνια)

όπου λ είναι η παράμετρος κατά μήκος της καμπύλης - τροχιάς του φωτονίου. Αυτές εξελίσσονται σύμφωνα με την γεωδαισιακή εξίσωση



$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = \frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}p^\nu p^\rho = 0 \tag{L.4}$$

Οι συνειστώσες της παρατηρούμενης 4-ταχύτητας είναι

$$\begin{aligned} u^\mu =& (\underline{e}_{\hat{0}})^\mu = a^{-1}\big(1 + \frac{1}{2}h_{00}, 0, 0, 0\big) \\ u_\mu =& g_{\mu\nu}u^\nu = a^2\left(\eta_{\mu 0} + h_{\mu 0}\right)u^0 = a\left(-1 + \frac{1}{2}h_{00}, h_{0i}\right) = -a\left(1 - \frac{1}{2}h_{00}, -h_{0i}\right) \end{aligned} \tag{L.5}$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε τις συνειστώσες της 4-ορμής του φωτονίου στο σύστημα συντεταγμένων, $p^\mu = \big(p^0, p^i\big)$ με αυτές στο σύστημα του παρατηρητή $p^{\hat{\mu}} = q^\mu = \big(q, q^i\big)$ με την

$$p^\mu = X^\mu_{\hat{\nu}}q^\nu$$

$$\begin{aligned} p^0 =& \quad a^{-1}\big(1 + \tfrac{1}{2}h_{00}\big)q + a^{-1}h_{0i}q^i \quad &= a^{-1}\big(1 + \tfrac{1}{2}h_{00} + h_{0i}n^i\big) \\ p^i =& \quad a^{-1}\big(\delta_{ij} - \tfrac{1}{2}h_{ij}\big)q^j &= a^{-1}q\big(n^i - \tfrac{1}{2}h_{ij}n^i\big) \end{aligned} \tag{L.6}$$

Από αυτό, σε 0^η τάξη έχουμε

$$p^0 = a^{-1}q, p^i = a^{-1}q^i \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{p^i}{p^0} = n^i} \quad \text{σε } 0^\eta \text{ τάξη} \tag{L.7}$$

και

$$\begin{aligned} \underline{p}\cdot\underline{p} = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = \underbrace{\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu}_{\delta_{ij}p^ip^j - (p^0)^2} + h_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \\ \Rightarrow \frac{\delta_{ij}p^ip^j}{(p^0)^2} = 1 - h_{00} - 2h_{0i}\frac{p^i}{p^0} - h_{ij}\frac{p^ip^j}{(p^0)^2} = 1 - h_{00} - 2h_{oi}n^i - h_{ij}n^in^j \end{aligned} \tag{L.8}$$

Αφού το $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ είναι μια διαταραχή, μπορούμε να προσεγγίσουμε το $\frac{dx^i}{d\eta}$ στην L.1 από το $\frac{dx^i}{d\eta} = \frac{p^i}{p^0} \approx n^i$ (σε 0^η τάξη) και γράφουμε την L.1 ως

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = -\frac{\partial f}{\partial x^i} n^i - q \frac{\partial f}{\partial q} \frac{1}{q} \frac{dq}{d\eta} \tag{L.9}$$

Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό της ερυθρομετατόπισης των φωτονίων, $\frac{1}{q}\frac{dq}{d\eta}$. Υπολογίζουμε ρώτα το $\frac{dq}{d\eta}$

$$\frac{dq}{d\eta} = -\frac{d}{d\eta}\big(u_\mu p^\mu\big) = -\frac{du_\mu}{d\eta} p^\mu - u_\mu \frac{dp^\mu}{d\eta} \tag{L.10}$$

Παρατηρούμε εδώ ότι το u_μ ορίζεται παντού από το σύστημα συντεταγμένων και τη μετρική, και μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{du_\mu}{d\eta} = \frac{\partial u_\mu}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\eta} = \frac{\partial u_\mu}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\mu}{\partial x^i}\frac{p^i}{p^0} \tag{L.11}$$

Χρησημοποιώντας το u_μ από την L.5

$$\boxed{\begin{array}{lll} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} = & -a^{'}\big(1 - \frac{1}{2}h_{00}\big) + \frac{1}{2}ah^{'}_{00} & \frac{\partial u_0}{\partial x^i} = \frac{1}{2}ah_{00,i} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = & a^{'}h_{0i} + ah^{'}_{0i} & ah_{0j,i} \end{array}} \tag{L.12}$$

$$\therefore \text{έχουμε το } -\frac{du^\mu}{d\eta}p^\mu$$

Για $-u_\mu \frac{dp^\mu}{d\eta} = -u_\mu \frac{d\lambda}{d\eta}\frac{dp^\mu}{d\lambda} = -u_\mu \frac{1}{p^0}\frac{dp^\mu}{d\lambda}$ χρειαζόμαστε την γεωδαισιακή εξίσωση L.4

Τα σύμβολα Christoffel για μια γενική $h_{\mu\nu}$ διαταραχή είναι

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma^0_{00} =& \mathcal{H} - \frac{1}{2}h^{'}_{00} \\ \Gamma^0_{0i} =& \mathcal{H}h_{0i} - \frac{1}{2}h_{00,i} \\ \Gamma^0_{ij} =& \mathcal{H}\delta_{ij} + \mathcal{H}\delta_{ij}h_{00} + \mathcal{H}h_{ij} - frac12\big(h_{0i,j} + h_{0j,i}\big) + \frac{1}{2}h^{'}_{ij} \\ \Gamma^i_{00} =& \mathcal{H}h_{0i} + h^{'}_{0i} - \frac{1}{2}h_{00,i} \\ \Gamma^i_{0j} =& \mathcal{H}\delta_{ij} - \frac{1}{2}\big(h_{0j,i} - h_{0i,j}\big) + \frac{1}{2}h^{'}_{ij} \\ \Gamma^i_{jk} =& -\mathcal{H}\delta_{jk}h_{0i} + \frac{1}{2}h_{ij,k} + \frac{1}{2}h_{ij,k} + \frac{1}{2}h_{ik,j} - \frac{1}{2}h_{jk,i} \end{aligned}} \tag{L.13}$$

Το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{dq}{d\eta} = p^0\big(- a^{'} + \frac{1}{2}a^{'}h_{00} + \frac{1}{2}ah_{00,i}n^i + a^{'}h_{0i}n^i - ah^{'}_{0i}n^i - \frac{1}{2}ah^{'}_{ij}n^in^j\big) \quad \text{(L.14)}$$

Χρειαζόμαστε επίσης για να φτάσουμε στο τελικό αποτέλεσμα

$$\boxed{\frac{1}{q}\frac{dq}{d\eta} = -\mathcal{H} - \frac{1}{2}h^{'}_{ij}n^in^j - h^{'}_{0i}n^i + \frac{1}{2}h_{00,i}n^i} \quad \text{(L.15)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x^i}n^i - q\frac{\partial f}{\partial q}\left(-\mathcal{H} - \frac{1}{2}h^{'}_{ij}n^in^j - h^{'}_{0i}n^i + \frac{1}{2}h_{00,i}n^i\right) \quad \text{(L.16)}$$

M Εξίσωση Φωτεινότητας

Εξετάζουμε τώρα την συνάρτηση κατανομής των φωτονίων. Δεδομένου ότι τα φωτόνια είναι άμαζα

$$E(\vec{k}) = k \quad \text{(M.1)}$$

Σε θερμική ισορροποία, η κατανομή των φωτονίων ακολουθεί κατανομή Bose-Einstein

$$f_{eq}(\eta, x^i, \vec{k}) = \frac{g}{(2\pi)^3}\frac{1}{e^{k/T} - 1} \quad \text{(M.2)}$$

Αφού όπως γνωρίζουμε από τη στατιστική φυσική, αφού δεν υπάρχει νόμος διατήρισης του πλήθους των φωτονίων (είναι μποζόνια) το χημεικό δυναμικό τους θα είναι μηδεν $\mu = 0$. Εδώ $g = 2$ είναι ο αριθμός των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας (spin).

Στο υποκείμενο σύμπαν, η θερμική ισορροποία για τα φωτόνια είναι αρκετά καλή προσέγγιση, και η θερμοκρασία T είναι ομογενής. Επομένως

$$\bar{f}(\eta, x^i, \vec{k}) = \bar{f}(\eta, k) = \frac{g}{(2\pi)^3}\frac{1}{e^{k/T(\eta)} - 1} \quad \text{(M.3)}$$

Γράφουμε την διαταρακτική συνάρτηση κατανομής ως

$$f(\eta, x^i, k, \hat{n}) = \frac{g/(2\pi)^3}{\exp\left\{\frac{k}{T(\eta)[1+\theta(\eta,x^i,k,\hat{n})]}\right\}} - 1 \quad \text{(M.4)}$$

(απολύτως γενικά, θ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του f).

Τώρα υποθέτουμε $\theta = \theta(\eta, x^i, \hat{n})$, ανεξάρτητο της ενέργειας των φωτονίων k. Η υπόθεση αυτή (κατά προσέγγιση) θα αιτιολογηθεί αργότερα. (Αρχικά,

σε νεαρούς χρόνους είναι σε ισοροπία και η υπόθεση ισχύει. Θα βγάλουμε τις εξισώσεις εξέλιξης για το θ και προκύπτει να μην περιέχουν το k άρα η k-εξάρτηση μπορεί να αγνοηθεί. Αυτό στην πραγματικότητα εξαρτάται από την υπόθεση ότι τα φωτόνια καθώς σκεδάζονται από τα ηλεκτρόνια δεν αλλάζουν την ενέργειά τους στο σύστημα ηρεμίας του ηλεκτρονίου το οποίο ισοδυναμεί με το να υποθέτουεμ ότι είμαστε στο κλασσικό όριο $k \ll m_e$.

Σε τοπική θερμική ισοροπία θα είχαμε τοπική θερμοκρασία $T(\eta, x^i) = T(\eta)\big[1 + \theta(\eta, x^i)\big]$. Συνεπώς η υπόθεση είναι ότι η απόκλιση από την ομογενή λύση της θερμοκρασίας είναι εξαρτώμενη από την απόσταση (ανισοτροποία).

• Η $\Theta(\eta, x^i, \hat{n})$ καλείται <u>συνάρτηση φωτεινότητας</u>.

Ένας τοπικός παρατηρητής στο η, x^i θα παρατηρήσει ακτινοβολία να καταφθάνει σε αυτόν με φάσμα μέλανος σώματος, της οποίας η θερμοκρασία εξαρτάται από την κατεύθυνση $\hat{x} = -\hat{n}$ την οποία κοιτάει

$$T(-\hat{n}) = T(\eta)\big[1 + \theta(\eta, x^i, \hat{n})\big] \tag{M.5}$$

Αφού το Θ είναι μικρό (1ης τάξης διαταραχή) μπορούμε να εκφράσουμε την διαταραχή στην συνάρτηση κατανομής $f = \bar{f} + \delta f = \bar{f} + f^{(1)}$ ως

$$f^{(1)}(\eta, x^i, k, \hat{n}) \equiv \delta f \frac{\partial \bar{f}}{\partial T} T(\eta)\theta(\eta, x^i, \hat{n}) \tag{M.6}$$

Αφού $\bar{f}$ εξαρτάται από το k και T μόνο μέσω του λόγου q/T, έχουμε

$$T\frac{\partial \bar{f}}{\partial T} = -k\frac{\partial \bar{f}}{\partial k} \Rightarrow \underline{f^{(1)} = -k\frac{\partial \bar{f}}{\partial k}\Theta} \tag{M.7}$$

Επιστρέφουμε τώρα στην εξίσωση κρούσης του Boltzmann για το φωτόνιο,

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x^i} n^i + k\frac{\partial f}{\partial k}\big(- H - \frac{1}{2} h'_{ij} n^i n^j - h'_{0i}\big) \tag{M.8}$$

Βιβλιογραφία

Gravitational Waves

[1] I. Ciufolini and J. Wheeler. "Gravitation and Inertia". Princeton University Press, (1995). 1

[2] Bernard F. Schutz, Franco Ricci "Gravitational Waves, Sources and Detectors". [arXiv:1005.4735v1] 2.1

[3] Bernard F. Schutz "A First Course in General Relativity". Cambridge University Press, Second Edition (2009). 1

[4] Matthias Bartelmann. "General Relativity". Universitat Heidelberg.1

[5] Michael D. Scadron "Advanced Quantum Theory" (Third Edition). World Scientific, (2007). 1

[6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz "The Classical Theory of Fields". (third English edition 1971) Pergamon Press. 1

[7] J. B. Hartle, "An introduction to Einstein's general relativity". San Francisco, USA: Addison-Wesley (2003). 4

[8] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, "Gravitation", San Francisco (1973). 4

[9] Claus Lammerzahl, Volker Perlick "Gravitational Waves" Lecture Notes, Summer Term (2014). 3,4

[10] Jerome NOVAK "General Relativity and Gravitational Waves", notes 2011 1.1

[11] Kip S. Thorne "The generation of gravitational waves: A review of Computational Tecniques". California Institute of Technology
(Πολύ ωραία ανάλυση του weak field approximation και των περιπτώσεων που δικαιολογείται η χρήση της)

[12] Kip S. Thorne "The theory of gravitational waves: an introductory review". W.K Kellogg Radiation Laboratory, September (1982)

[13] Kip S. Thorne "Gravitational waves (lecture review)". Theoretical Astrophysics, California Institute of Technology, (1994). 5

[14] Jordan B. Camp and Neil J. Cornish "Gravitational wave astronomy". Annual Review of Nuclear and Particle Science, Vol.54:1-577 (Volume publication date 8 December 2004). 5

[15] Λύσεις διαφόρων κρίσημων κοσμολογικών ερωτήσεων σε μορφή Προβλήματος - Λύσης: universeinproblems.com

[16] D. J. Griffiths, "Introduction to electrodynamics". Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall 1999.

[17] 3d animations of different polarization states of gravity waves
http://www.universetoday.com/127255/gravitational-waves-101/
1.4

[18] Christopher Moore, Robert Cole and Christopher Berry, Gravitational Wave Detectors and Sources.
http://rhcole.com/apps/GWplotter/
(Ανάλυση του αντίστοιχου paper.)
https://cplberry.com/2015/01/10/1408-0740/
(Πλατφόρμα σχεδίασης καμπυλών ευκρίνειας ανιχνευτών πάνω στο φάσμα των βαρυτικών κυμάτων.) 5

[19] B. S. Sathyaprakash and B. F. Schutz, [arXiv:0903.0338]

[20] Hannu Kurki-Suonio, (Chapter 7 of handwritten notes on General Relativity) "Perturbation Theory and Gravitational Radiation"
http://www.courses.physics.helsinki.fi/teor/genrel/

Perturbations in static spacetime

[21] S. Weinberg, "Cosmology", Oxford, UK: Oxford Univ. Pr. (2008) ??

[22] Anthony Challinor "Part-III Cosmology", notes

[23] S. Weinberg, "Damping of tensor modes in cosmology," [PhysRevD.69.023503]

[24] Hannu Kurki-Suonio, "Cosmological Perturbation Theory, part 1", Univ. Helsinki lectures (2015). I

Inflation

[25] Andrew R. Liddle, David H. Lyth "Cosmological inflation and large-scale structure", Cambridge University Press, 2000 9

[26] Marieke Postma, "Notes on Inflation", NIKHEF 9

[27] David Langlois, "Lectures on inflation and cosmological perturbations", [arXiv:1001.5259]

[28] D. Baumann, "The Physics of Inflation", Graduate Course Lecture Notes

[29] D. Baumann, "TASI Lectures on Inflation", [arXiv:0907.5424]

Perturbations during Inflation

[30] Hannu Kurki-Suonio, "Cosmological Perturbation Theory, part 2", Univ. Helsinki lectures (2015) II

[31] Julien Lesgourgues "Inflationary cosmology", EPFL, March 2006 https://lesgourg.github.io/courses/Inflation_EPFL.pdf

CMBR

[32] D. H. Lyth and A. R. Liddle, "The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure," Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr. (2009)

[33] Marc Kamionkowski and Ely D. Kovetz "The Quest for B Modes from Inflationary Gravitational Waves," (20 Oct 2015) [arXiv:1510.06042v1] 9.3

[34] David Wands, Oliver F. Piattella and Luciano Casarini "Physics of the Cosmic Microwave Background Radiation," (23 Apr 2015) [arXiv:1504.06335v1] 10.4

[35] Wayne Hu and Martin White A CMB Polarization Primer [arXiv:astro-ph/9706147v1]

[36] Hannu Kurki-Suonio, "handwritten notes on CMBR", (fall 2007) III

[37] Marc Kamionkowski, Arthur Kosowsky and Albert Stebbins "Statistics of cosmic microwave background polarization", (1997) III

ADM forlalism in GR

[38] Yaser Tavakoli, Courses in canonical gravity: "Lecture II: Hamiltonian formulation of general relativity," ??
http://www.cosmo-ufes.org/mini-courses.html

[39] Maldacena, Juan Martin "Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models," 2003

[40] Eleftheria Tzavara "Second-order cosmological perturbations in two-field inflation and predictions for non-Gaussianity," 2013 [arXiv:1312.0126] 9

[41] A. B. Lahanas "handwritten notes on ADM formalism," (από εδώ δανείστηκα τον όρο *foliation* $\therefore$ φυλλώσεις)