

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Πτυχιακή Εργασία:

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΕΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΣΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΧΡΟΝΟ

Στυλιανός Σοφικίτης

A.M.: 1110200800158

Επιβλέπων: Ν. Β. Σαρλής

Αναπληρωτής Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ 2016

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	4
Πρόλογος.....	5
Κεφάλαιο 1 ^ο . Φυσικός χρόνος. Υπόβαθρο.....	6
1.1 Εισαγωγή στο φυσικό χρόνο.....	7
1.2 Ο χρόνος και όχι ο χώρος αποτελεί τη μεγαλύτερη πρόκληση για την επιστήμη.....	7
1.3 Ορισμός του φυσικού χρόνου.....	8
1.3.1 Η “ομοιόμορφη” κατανομή.....	10
1.3.2 Αναστροφή χρόνου και φυσικός χρόνος.....	10
1.4 Κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος $\Pi(\omega)$ ή $\Pi(\phi)$ και διασπορά κ_1 του φυσικού χρόνου.....	11
1.4.1 Το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος για την “ομοιόμορφη” κατανομή.....	13
1.4.2 Το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος των προσεισμικών ηλεκτρικών σημάτων.....	14
1.5 Είναι ο χρόνος συνεχής ;	15
1.5.1 Διαφορές μεταξύ του φυσικού και συμβατικού χρόνου με βάση τη θεωρία συνόλων.....	15
1.5.2 Απόδειξη της πληθικότητας του συνόλου των τιμών του φυσικού χρόνου.....	17

1.5.3	Είναι ο φυσικός χρόνος συμβατός με την άποψη του Schrödinger ;	18
1.6	Συμπεράσματα	19
Κεφάλαιο 2 ^ο . Επαναληπτικές πολλαπλασιαστικές χρονοσειρές και η διασπορά του φυσικού χρόνου.....		20
2.1	Γενικευμένο σύνολο Cantor.....	21
2.1.1	Ντετερμινιστικό σύνολο Cantor	21
2.2	Διασπορά κ_1 του φυσικού χρόνου χ	23
2.2.1	Διασπορά φυσικού χρόνου για $M=1$ ($p, (1-p)$).....	24
2.2.2	Διασπορά φυσικού χρόνου για $M=2$ ($p^2, p(1-p), p(1-p), (1-p)^2$).....	24
2.2.3	Διασπορά φυσικού χρόνου για M και $M-1$ με $K=2$ ίσα τμήματα.....	25
2.2.4	Διασπορά φυσικού χρόνου για M και $M-1$ με $K=3$ ίσα τμήματα.....	27
2.2.5	Διασπορά φυσικού χρόνου και σεισμικότητα.....	29
2.3	Συμπεράσματα.....	31
Αναφορές.....		32

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται λόγος για τις επαναληπτικές πολλαπλασιαστικές χρονοσειρές και την ανάλυσή τους στο φυσικό χρόνο. Στο 1^ο κεφάλαιο κάνουμε μια εισαγωγή στην έννοια του φυσικού χρόνου και στα φυσικά μεγέθη που τον προσδιορίζουν με απλά παραδείγματα για να κατανοηθεί όσο γίνεται καλύτερα. Και στο 2^ο κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι επαναληπτικές χρονοσειρές που αναλύονται στο φυσικό χρόνο, και η διασπορά του φυσικού χρόνου που τις περιγράφει παίρνοντας συγκεκριμένες τιμές.

Πρόλογος

Ο φυσικός χρόνος είναι μια νέα έννοια που εισήχθη από τους Βαρώτσο, Σαρλή και Σκορδά το 2001 [Varotsos et al., 2001] για να περιγράψει την κρίσιμη δυναμική που εμφανίζεται στις δραστηριότητες προσεισμικών ηλεκτρικών σημάτων. Έχει εφαρμογές σε διάφορα επιστημονικά πεδία της όπως η Καρδιολογία, οι Γεωεπιστήμες, η Σεισμολογία, η Στατιστική Φυσική, η Φυσική Συμπυκνωμένης Ύλης και η Φυσική Πολύπλοκων Συστημάτων. Σ' αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή που έχει στις επαναληπτικές πολλαπλασιαστικές χρονοσειρές και πιο συγκεκριμένα με τη μελέτη τους με βάση τη διασπορά του φυσικού χρόνου.

Κεφάλαιο 1^ο

Φυσικός χρόνος. Υπόβαθρο

1.1 Εισαγωγή στο φυσικό χρόνο

Σύμφωνα με τους Βαρώτσο, Σαρλή και Σκορδά [Varotsos et al., 2011] υπάρχει μια ευρέως διαδεδομένη πεποίθηση ότι, δεν είναι ο χώρος, αλλά ο χρόνος που τελικά αποτελεί τη μεγαλύτερη πρόκληση για την επιστήμη. Η ανάλυση του φυσικού χρόνου επίσης επιτρέπει τη μελέτη της δυναμικής εξέλιξης ενός πολύπλοκου συστήματος και προσδιορίζει *πότε ένα σύστημα εισέρχεται σε μία κρίσιμη κατάσταση*.

1.2 Ο χρόνος και όχι ο χώρος αποτελεί τη μεγαλύτερη πρόκληση για την επιστήμη

Ο χρόνος, σύμφωνα με τον Weyl [Weyl, 1952] για παράδειγμα, είναι η “πρωτόγονη μορφή της ροής της συνείδησης”.

Η πρόκληση φαίνεται να πηγάζει από το γεγονός ότι η ειδική σχετικότητα και η κβαντική μηχανική, που είναι οι δύο σπουδαίες (και επιτυχημένες) θεωρίες της φυσικής του εικοστού αιώνα, βασίζονται σε εντελώς διαφορετικές ιδέες, οι οποίες δεν είναι εύκολο να συμφιλιωθούν.

Συνοπτικά, ο (συμβατικός) χρόνος t , σήμερα διαμορφώνεται ως το μονοδιάστατο συνεχές R των πραγματικών αριθμών. Οι συνέπειες αυτής της συνέχειας θα συγκριθούν με τη νεοεισαχθείσα έννοια του φυσικού χρόνου.

1.3 Ορισμός του φυσικού χρόνου

Σε μια χρονοσειρά που περιλαμβάνει N γεγονότα, ο φυσικός χρόνος

$$\chi_k = \frac{k}{N} \quad (1.3.1)$$

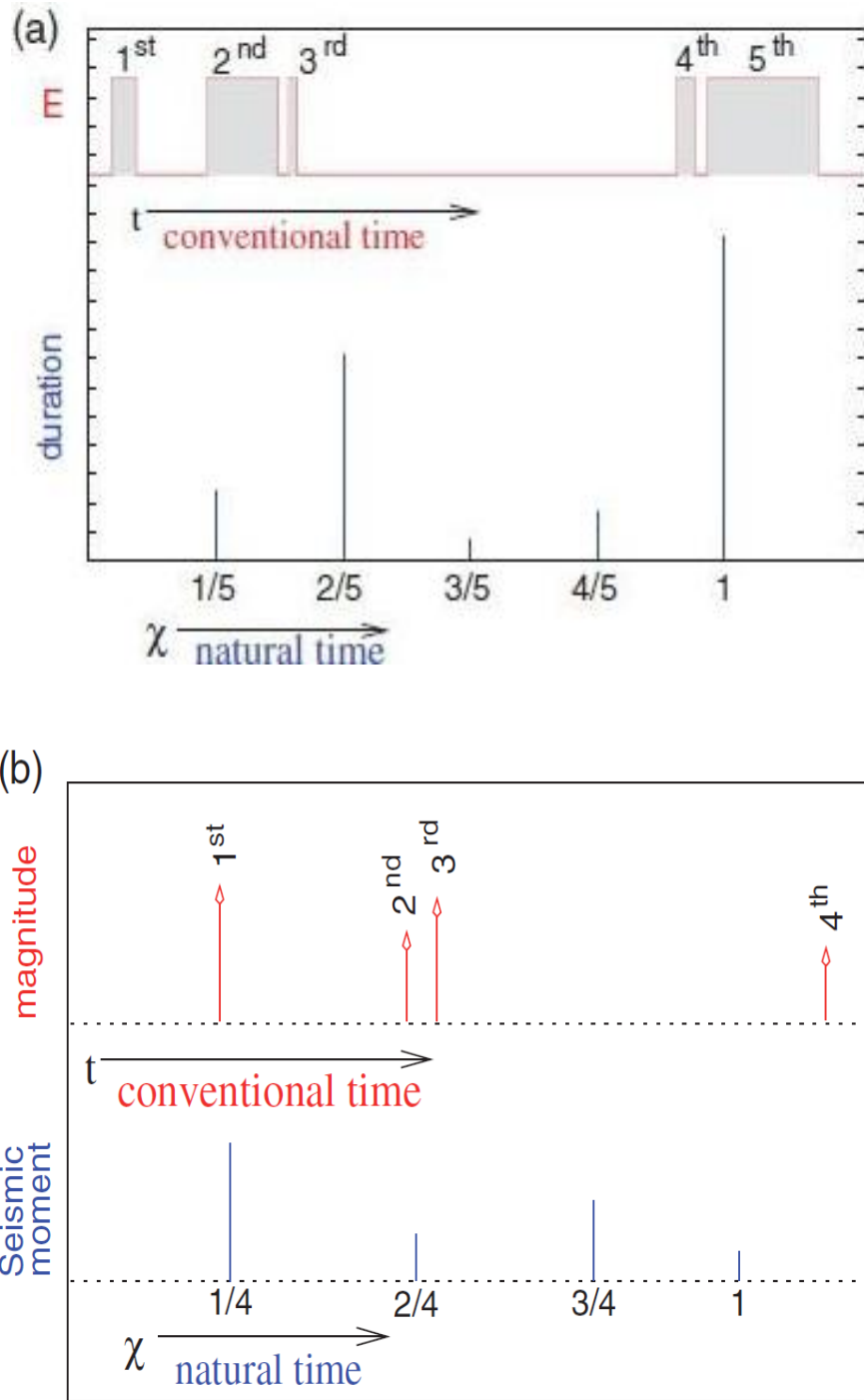
χρησιμοποιείται ως δείκτης για την εμφάνιση του k -οστού γεγονότος, και είναι μικρότερος ή ίσος με τη μονάδα. Στην ανάλυση του φυσικού χρόνου μελετάμε την εξέλιξη του ζεύγους των δύο ποσοτήτων (χ_k, Q_k) , όπου Q_k υποδηλώνει γενικά μία ποσότητα ανάλογη με την ενέργεια του συγκεκριμένου γεγονότος. Ισοδύναμα με το Q_k , μπορεί κανείς να θεωρήσει την ποσότητα

$$p_k = \frac{Q_k}{\sum_{n=1}^N Q_n}, \quad (1.3.2)$$

$$\sum_{k=1}^N p_k = 1, \quad (1.3.3)$$

όπου p_k είναι η κανονικοποιημένη ενέργεια που εκπέμπεται κατά τη διάρκεια του k -οστού γεγονότος.

Για παράδειγμα, για να κάνουμε την ανάλυση των δίτιμων ηλεκτρικών σημάτων (σχήμα 1a), η οποία είναι συχνά η περίπτωση δραστηριότητας των προσεισμικών ηλεκτρικών σημάτων, θεωρούμε το Q_k να είναι ανάλογο με τη διάρκεια του k -οστού παλμού. Ως ένα άλλο παράδειγμα, αναφερόμαστε στην ανάλυση των σεισμικών γεγονότων (σχήμα 1b): τότε θεωρούμε την εξέλιξη του ζεύγους (χ_k, Mo_k) όπου Mo_k συμβολίζει τη σεισμική ροπή του k -οστού σεισμού.



Σχήμα 1 (a) Πώς μία δίτιμη σειρά ηλεκτρικών παλμών στο συμβατικό χρόνο t (πάνω διάγραμμα, κόκκινο) μπορεί να διαβαστεί στο φυσικό χρόνο χ (κάτω διάγραμμα, μπλε). Το σύμβολο E συμβολίζει το ηλεκτρικό πεδίο. (b) Το ίδιο με το (a), αλλά για σειρά από σεισμικά γεγονότα. (αναπαράγεται από [Varotsos et al., 2011].)

1.3.1 Η “ομοιόμορφη” κατανομή

Ως “ομοιόμορφη” κατανομή θεωρούμε την περίπτωση την περίπτωση όταν οι ποσότητες Q_k είναι θετικές, ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές.

Ας εξετάσουμε την κατανομή

$$p(\chi) = \sum_{k=1}^N p_k \delta(\chi - \chi_k) = \sum_{k=1}^N p_k \delta(\chi - \frac{k}{N}) \quad (1.3.1.1)$$

που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένες πιθανότητες p_k .

Όταν $N \rightarrow \infty$, η $p(\chi)$ για μια “ομοιόμορφη” κατανομή τείνει στο

$$p(\chi) = 1, \quad (1.3.1.2)$$

οδηγώντας σε μια μέση τιμή του φυσικού χρόνου

$$\langle \chi \rangle = \int_0^1 \chi p(\chi) d\chi = \frac{1}{2}. \quad (1.3.1.3)$$

1.3.2 Αναστροφή χρόνου και φυσικός χρόνος

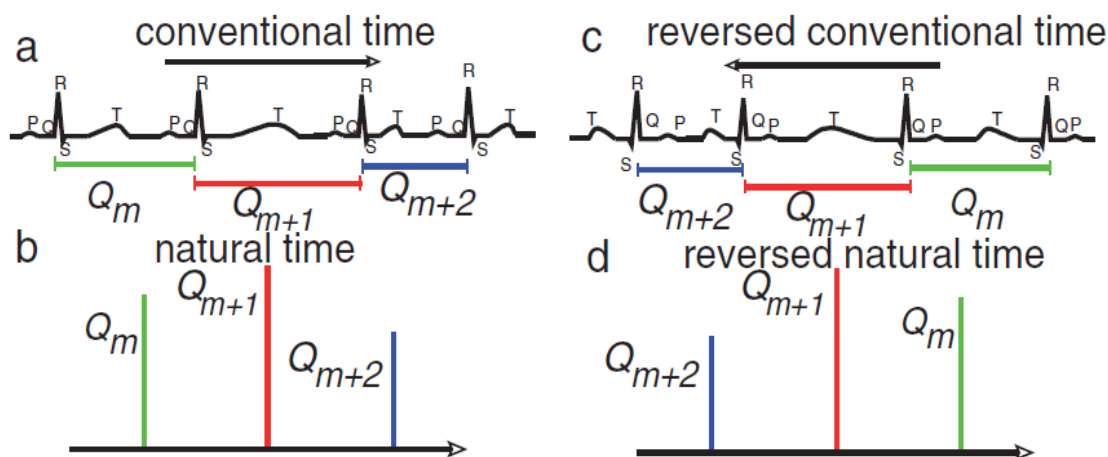
Σε μια χρονική σειρά που περιλαμβάνει N γεγονότα, η δράση του τελεστή αναστροφής χρόνου \hat{T} πάνω στο Q_k δίνεται από τη σχέση

$$\hat{T}Q_k = Q_{N-k+1}, \quad (1.3.2.1)$$

οπότε ο πρώτος παλμός ($k=1$) τοποθετείται τελευταίος, ο δεύτερος προτελευταίος κ.ο.κ. Έτσι, ο τελεστή αναστροφής χρόνου \hat{T} στο φυσικό χρόνο όταν δρα πάνω στο p_k το αποτέλεσμα που δίνει είναι

$$\hat{T}p_k = p_{N-k+1}. \quad (1.3.2.2)$$

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της περίπτωσης αυτής είναι στο ηλεκτροκαρδιογράφημα το οποίο φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 2 Στο (α) βλέπουμε ένα σχηματικό διάγραμμα τετραπλού χτύπου καρδιάς σε ηλεκτροκαρδιογράφημα στο πεδίο του συμβατικού χρόνου. Στο (β) βλέπουμε πως το χρονικό διάστημα RR της σειράς γεγονότων του διαγράμματος (α) διαβάζεται στο φυσικό χρόνο: οι κάθετες γραμμές ισαπέχουν μεταξύ τους και το μήκος κάθε γραμμής υποδηλώνει τη διάρκεια του αντίστοιχου διαστήματος RR που είναι σημειωμένο στο διάγραμμα (α). Στο (γ) απεικονίζεται πώς το στιγμιότυπο των τεσσάρων χτύπων καρδιάς του (α) γίνεται κατά την αντιστροφή του συμβατικού χρόνου και το (β) μετατρέπεται στο (δ). (αναπαράγεται από [Varotsos et al., 2007].)

1.4 Κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος $\Pi(\omega)$ ή $\Pi(\phi)$ και διασπορά

κ_1 του φυσικού χρόνου

Στην ανάλυση του φυσικού χρόνου, χρησιμοποιούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$\Phi(\omega) = \frac{\sum_{k=1}^N Q_k \exp\left(i\omega \frac{k}{N}\right)}{\sum_{n=1}^N Q_n} = \sum_{k=1}^N p_k \exp\left(i\omega \frac{k}{N}\right) = \sum_{k=1}^N p_k e^{i\omega \chi_k} \quad (1.4.1)$$

όπου

$$\omega = 2\pi\phi \quad (1.4.2)$$

και φ η συχνότητα στο φυσικό χρόνο.

Χρησιμοποιώντας την (1.3.1.1.), έχουμε

$$\int_0^1 e^{i\omega\chi} p(\chi) d\chi = \sum_{k=1}^N \left[\int_0^1 p_k \delta(\chi - \chi_k) e^{i\omega\chi} d\chi \right] = \sum_{k=1}^N p_k e^{i\omega\chi_k} \quad (1.4.3)$$

κι έτσι γράφουμε τη $\Phi(\omega)$

$$\Phi(\omega) = \int_0^1 e^{i\omega\chi} p(\chi) d\chi = \sum_{k=1}^N p_k e^{i\omega\chi_k}. \quad (1.4.4)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος $\Pi(\omega)$, από τη σχέση

$$\Pi(\omega) = |\Phi(\omega)|^2 = \left| \sum_{k=1}^N p_k e^{i\omega\frac{k}{N}} \right|^2 \quad (1.4.5)$$

το οποίο βέβαια δεν αλλάζει κάτω από αντιστροφή χρόνου. (Η συνάρτηση $\Phi(\omega)$ δε θα πρέπει να συγχέεται με το διακριτό μετασχηματισμό Fourier επειδή η ω είναι εδώ μια συνεχής μεταβλητή).

Για μικρές τιμές του ω το φάσμα $\Pi(\omega)$ αναπτυσσόμενο κατά Taylor, γύρω από $\omega \rightarrow 0$, είναι

$$\Pi(\omega) = 1 - \kappa_1 \omega^2 + \kappa_2 \omega^4 + \kappa_3 \omega^6 + \kappa_4 \omega^8 + \dots \quad (1.4.6)$$

όπου

$$\kappa_1 = -\frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \Pi(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=0}. \quad (1.4.7)$$

Θεωρούμε τώρα

$$\frac{d^2 \Pi(\omega)}{d\omega^2} = \Phi^*(\omega) \frac{d^2 \Phi(\omega)}{d\omega^2} + \Phi(\omega) \frac{d^2 \Phi^*(\omega)}{d\omega^2} + 2 \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} \frac{d\Phi^*(\omega)}{d\omega} \quad (1.4.8)$$

και αφού $\Phi(0)=1$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{1}{2} [-\sum_k p_k \chi_k^2 - \sum_k p_k \chi_k^2 + 2 (\sum_k p_k \chi_k)^2] = \\ &= \langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2, \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

όπου

$$\langle \chi^n \rangle = \sum_{k=1}^N p_k \chi_k^n \quad (1.4.10)$$

δηλώνει τις ροπές του φυσικού χρόνου χ ως προς την κατανομή p_k .

Η ποσότητα κ_1 λοιπόν αντιστοιχεί στη διασπορά του φυσικού χρόνου

$$\kappa_1 = \langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2 = \sum_{k=1}^N p_k \left(\frac{k}{N}\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^N \frac{k}{N} p_k\right)^2. \quad (1.4.11)$$

Δεδομένου ότι το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος $\Pi(\omega)$ δεν αλλάζει κάτω από αντιστροφή του χρόνου, το ίδιο ισχύει και για την ποσότητα κ_1 .

Η μεγαλύτερη τιμή της κ_1 που λαμβάνονται είτε από πειραματικά δεδομένα ή από θεωρητικά μοντέλα είναι $\kappa_1=0.25$.

1.4.1 Το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος για την “ομοιόμορφη” κατανομή

Χρησιμοποιώντας τις $\Pi(\omega) = |\Phi(\omega)|^2 = \left| \sum_{k=1}^N p_k e^{i\omega \frac{k}{N}} \right|^2$ και

$\Phi(\omega) = \int_0^1 e^{i\omega \chi} p(\chi) d\chi = \sum_{k=1}^N p_k e^{i\omega \chi_k}$ προκύπτει

$$\Pi(\omega) = \left| \int_0^1 e^{i\omega \chi} p(\chi) d\chi \right|^2 = \int_0^1 \int_0^1 p(\chi) p(\psi) e^{i\omega(\chi-\psi)} d\chi d\psi \quad (1.4.1.1)$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $X = \frac{x+y}{2}$ και $\delta = x - y$ και μετά από πράξεις, εκτιμούμε ότι το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος για την “ομοιόμορφη” κατανομή ($p(x)=1$) είναι

$$\Pi_u(\omega) = 2 \int_0^1 (1 - \delta) \cos(\omega\delta) d\delta = \frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2} \quad (1.4.1.2)$$

Αναπτύσσοντας την (1.4.1.2) γύρω από $\omega \rightarrow 0$, αποκτούμε

$$\Pi_u(\omega) \approx \left[1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 \right]^2 \approx 1 - \frac{2}{3!} \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 = 1 - \frac{1}{12} \omega^2. \quad (1.4.1.3)$$

1.4.2 Το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος των προσεισμικών ηλεκτρικών σημάτων

Στην κρίσιμη δυναμική [Varotsos et al. 2001, 2011] το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος ισούται με

$$\Pi(\omega) = \frac{18}{5\omega^2} - \frac{6 \cos \omega}{5\omega^2} - \frac{12 \sin \omega}{5\omega^3}. \quad (1.4.2.1)$$

Αναπτύσσοντας την $\Pi(\omega)$ γύρω από $\omega \rightarrow 0$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\cos \omega = 1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} - \dots$ και $\sin \omega = \omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \dots$ αντίστοιχα, κι αντικαθιστώντας έπειτα στην (1.4.2.1) θα προκύψει:

$$\begin{aligned} \Pi(\omega) &\approx \frac{18}{5\omega^2} - \frac{6}{5\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{24} \right) - \frac{12}{5\omega^3} \left(\omega - \frac{\omega^3}{6} + \frac{\omega^5}{120} \right) = \frac{18}{5\omega^2} - \frac{6}{5\omega^2} + \frac{6}{5\omega^2} \frac{\omega^2}{2} - \frac{6}{5\omega^2} \frac{\omega^4}{24} - \\ &\frac{12\omega}{5\omega^3} + \frac{12}{5\omega^3} \frac{\omega^3}{6} - \frac{12}{5\omega^3} \frac{\omega^5}{120} = \frac{18}{5\omega^2} - \frac{6}{5\omega^2} + \frac{3}{5} - \frac{\omega^2}{20} - \frac{12}{5\omega^2} + \frac{2}{5} - \frac{\omega^2}{50} = \\ &= 1 - \frac{7}{100} \omega^2, \end{aligned}$$

$$\Pi(\omega) \approx 1 - \frac{7}{100} \omega^2. \quad (1.4.2.2)$$

και επομένως

$$\kappa_1=0.070. \quad (1.4.2.3)$$

1.5 Είναι ο χρόνος συνεχής ;

Ο φυσικός χρόνος χ , εξ' ορισμού, δεν είναι συνεχής και παίρνει τιμές που είναι ρητοί αριθμοί στο διάστημα $(0,1]$. (Σε αυτές τις τιμές, όπως εξελίσσεται το πολύπλοκο σύστημα, οι αριθμητές είναι μόνο οι φυσικοί αριθμοί (εκτός από το 0), που υποδηλώνουν την σειρά εμφάνισης των συνεχών αριθμών). Μία από τις θεμελιώδεις διαφορές μεταξύ του (συμβατικού) χρόνου και το φυσικού χρόνου αναφέρεται στο γεγονός ότι ο πρώτος βασίζεται στην ιδέα της συνέχειας, ενώ ο τελευταίος όχι.

1.5.1 Διαφορές μεταξύ του φυσικού και συμβατικού χρόνου με βάση τη θεωρία συνόλων

Το σύνολο των φυσικών αριθμών συμβολίζεται με N , ενώ ο αριθμός των φυσικών αριθμών ορίζεται με το σύμβολο $N_o = |N|$.

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των ρητών αριθμών, που ορίζονται ως D , έχει την ίδια πληθικότητα όπως το σύνολο των φυσικών αριθμών $|N|=|D|$. Με άλλα λόγια, οι ρητοί είναι ακριβώς τόσο πολυάριθμοι όσο και οι φυσικοί.

Ένα σύνολο είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν η πληθικότητά του είναι πεπερασμένη ή ίση με N_o και συγκεκριμένα αποκαλείται αριθμήσιμο αν και μόνο αν η πληθικότητά

του είναι ακριβώς N_0 . Ένα σύνολο είναι μη μετρήσιμο αν και μόνο αν η πληθικότητά του είναι μεγαλύτερη από N_0 .

Γι' αυτό, ο φυσικός χρόνος παίρνει τιμές που αποτελούν σε γενικές γραμμές ένα μετρήσιμο σύνολο. Αυτό γίνεται αριθμήσιμο στο όριο του απείρως μεγάλου αριθμού γεγονότων.

Περαιτέρω, δεδομένου ότι στην ανάλυση του φυσικού χρόνου θεωρούμε τα ζευγάρια (χ_k, Q_k) , οι τιμές της ποσότητας Q_k θα πρέπει να αποτελούν ένα σύνολο με αριθμό στοιχείων μικρότερο από N_0 . Με άλλα λόγια, οι τιμές της ενέργειας αποτελούν επίσης ένα μετρήσιμο σύνολο, το οποίο αντανακλά βέβαια ότι η ενέργεια δεν είναι συνεχής, κι έτσι φαίνεται να αναδύεται η κβάντωσή της.

Οι τιμές του συμβατικού χρόνου αποτελούν μη μετρήσιμο σύνολο, σε αντίθεση με εκείνες του φυσικού χρόνου που, σε γενικές γραμμές όπως αναφέρθηκε, αποτελούν μετρήσιμο σύνολο.

1.5.2 Απόδειξη της πληθικότητας του συνόλου των τιμών του φυσικού χρόνου

Μετράμε τις τιμές του φυσικού χρόνου μετά την εμφάνιση κάθε γεγονότος:

μετά το πρώτο γεγονός	1					
μετά το δεύτερο γεγονός	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$				
μετά το τρίτο γεγονός	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$			
μετά το τέταρτο γεγονός	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$		
...						
μετά το N -οστό γεγονός	$\frac{1}{N}$	$\frac{2}{N}$	$\frac{3}{N}$	$\frac{4}{N}$...	$\frac{N}{N}$

Σχήμα 3 (αναπαράγεται από [Varotsos et al., 2011].)

Ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου των τιμών του φυσικού χρόνου $|\{\chi_k\}|$ πρέπει να είναι μεγαλύτερος από N και μικρότερος από N^2 : $N \leq |\{\chi_k\}| \leq N^2$.

Έτσι, για $N \rightarrow \infty$ έχουμε $N_o \leq |\{\chi_k\}| \leq N_o^2$ και αφού $N_o^2 = N_o$, βρίσκουμε ότι, σε αυτή την περίπτωση $|\{\chi_k\}| = N_o$.

1.5.3 Είναι ο φυσικός χρόνος συμβατός με την άποψη του

Schrödinger;

Ο Schrödinger [Schrödinger 1954] σχολίασε: *“Είναι το αξίωμα της συνέχειας που εμφανίζεται να μην είναι πλήρες!...”* και επιπλέον προσέθεσε: *“Δεν πρέπει να παραδεχτούμε την πιθανότητα συνεχούς παρατήρησης”*.

Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις σημαντικές παρατηρήσεις, μπορούμε να πούμε ότι η *έννοια του φυσικού χρόνου συνάδει με την άποψη του Schrödinger*.

1.6 Συμπεράσματα

Ο συμβατικός χρόνος σήμερα θεωρείται συνεχής, αλλά αυτό δε συνάγεται κατ' ανάγκη από κάποια θεμελιώδη αρχή. Οι τιμές του είναι από ένα μη μετρήσιμο σύνολο, από τις οποίες σχεδόν όλες μπορεί να είναι *άρρητοι αριθμοί*.

Από την άλλη μεριά, ο φυσικός χρόνος δεν είναι συνεχής, και οι τιμές του σχηματίζουν ένα μετρήσιμο σύνολο που αποτελείται μόνο από *ρητούς αριθμούς*.

Περαιτέρω, οι τιμές της ενέργειας επίσης σχηματίζουν ένα μετρήσιμο σύνολο αλλά δεν είναι απαραίτητα ρητές.

Στο όριο του απείρωσ μεγάλου αριθμού γεγονότων, η πληθικότητα του συνόλου των τιμών του φυσικού χρόνου είναι N_0 (ανεξάρτητα από το αν αυξήσουμε την ακρίβεια της μέτρησης), και έτσι είναι δραστικά μικρότερη από εκείνη του συμβατικού χρόνου, η οποία ισούται με 2^{N_0} αν δεχτούμε την εγκυρότητα της υπόθεσης της συνέχειας.

Κεφάλαιο 2^ο

Επαναληπτικές πολλαπλασιαστικές
χρονοσειρές και η διασπορά του
φυσικού χρόνου.

2.1 Γενικευμένο σύνολο Cantor

Σε ένα γενικευμένο σύνολο Cantor (ή σε μια επαναληπτική πολλαπλασιαστική χρονοσειρά), το αρχικό στάδιο ($M=1$) χωρίζεται σε K τμήματα με πιθανώς μεταβλητά μεγέθη, αλλά η μαζική πιθανότητα διανέμεται από συναρτήσεις βάρους ω_i , $i=1,2,..K$ όπου $\sum \omega_i=1$. Η ίδια διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί σε κάθε τμήμα για την τιμή $M=2$ κ.ο.κ. Βασιζόμενοι στο εάν σε κάθε στάδιο το βάρος πιθανότητας κατανέμεται στα αντίστοιχα τμήματα, με τον ίδιο ή με τυχαίο τρόπο διακρίνουμε δυο περιπτώσεις: το ντετερμινιστικό σύνολο Cantor και το στοχαστικό σύνολο Cantor.

2.1.1 Ντετερμινιστικό σύνολο Cantor

Στην περίπτωση του ντετερμινιστικού συνόλου με ίσα τμήματα, η ανάλυση στο φυσικό χρόνο απλουστεύεται. Στην πραγματικότητα το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος $\Pi(\omega)$ παραγοντοποιείται, κι έτσι λοιπόν δίνει το πλεονέκτημα ενός αναλυτικού υπολογισμού της τιμής του κ_1 .

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το αρχικό διάστημα του φυσικού χρόνου $\chi \in (0,1]$ και υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις βάρους ω_i είναι ίσες με τις πιθανότητες p_k .

Έπειτα, η σχέση $\Phi(\omega) = \sum_{k=1}^N p_k e^{i\omega \frac{k}{N}}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί στο φυσικό χρόνο και να πάρουμε εύκολα τις ιδιότητες του ντετερμινιστικού συνόλου Cantor.

Μια περίπτωση ειδικού πρακτικού ενδιαφέροντος είναι το λεγόμενο p – μοντέλο στην οποία κάθε τμήμα χωρίζεται εξίσου σε δύο μέρη ($K = 2$), με $\omega_1 = p$ και $\omega_2 = 1 - p$, για το οποίο ισχύει $\sum \omega_i = \omega_1 + \omega_2 = p + 1 - p = 1$.

Υπό αυτές τις συνθήκες, δηλαδή για $K = 2$ ίσα τμήματα, η χρονοσειρά με βάση την

$\Phi(\omega) = \sum_{k=1}^N p_k e^{i\omega \frac{k}{N}}$ αναλύεται στο φυσικό χρόνο ως εξής:

$$\Phi_{M=1}(\omega) = p e^{i\omega/2} + (1 - p) e^{i\omega} \quad (2.1.1.1)$$

Κάνουμε το ίδιο για να δούμε τι θα μας δώσει το $\Phi_{M=2}(\omega)$ και θα βρούμε

$$\Phi_{M=2}(\omega) = p^2 e^{i\omega/4} + p(1 - p) e^{i\omega^2/4} + p(1 - p) e^{i\omega^3/4} + (1 - p)^2 e^{i\omega} \quad (2.1.1.2)$$

Κάνοντας παραγοντοποίηση του $\Phi_{M=2}(\omega_1=p, \omega_2=1-p)$:

$$\begin{aligned} \Phi_2(\omega) &= \omega_1^2 e^{i\omega/4} + \omega_1 \omega_2 e^{i\omega^2/4} + \omega_1 \omega_2 e^{i\omega^3/4} + \omega_2^2 e^{i\omega} = \\ &= \omega_1 (\omega_1 e^{i\omega/4} + \omega_2 e^{i\omega/2}) + \omega_2 e^{i\omega/2} (\omega_1 e^{i\omega/4} + \omega_2 e^{i\omega/2}) = \\ &= (\omega_1 + \omega_2 e^{i\omega/2}) (\omega_1 e^{i\omega/4} + \omega_2 e^{i\omega/2}), \end{aligned}$$

όπου $\Phi_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = \omega_1 e^{i\omega/4} + \omega_2 e^{i\omega/2}$, καταλήγουμε ότι

$$\Phi_2(\omega) = (\omega_1 + \omega_2 e^{i\omega/2}) \Phi_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = (p + (1 - p) e^{i\omega/2}) \Phi_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.1.1.3)$$

Άρα ο αναγωγικός τύπος που ψάχνουμε είναι

$$\Phi_{M+1}(\omega) = (p + (1 - p) e^{i\omega/2}) \Phi_M\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (2.1.1.4)$$

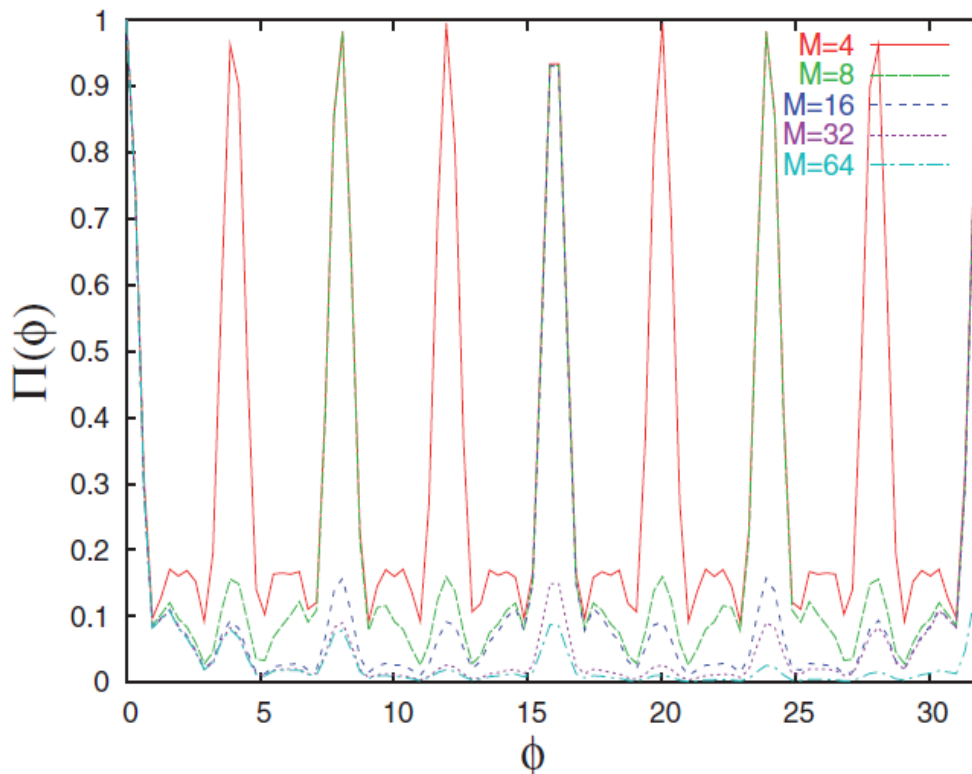
Γενικεύοντας για $K > 2$ παίρνουμε [Varotsos et al., 2011]

$$\Phi_{M+1}(\omega) = \Phi_M\left(\frac{\omega}{K}\right) \sum_{j=1}^K \omega_j e^{i\frac{(j-1)\omega}{K}}. \quad (2.1.1.5)$$

η οποία με βάση την (1.4.5.) θα γίνει:

$$\Pi_M(\omega) = \Pi_{M-1}\left(\frac{\omega}{K}\right) \left| \sum_{j=1}^K \omega_j e^{i\frac{(j-1)\omega}{K}} \right|^2. \quad (2.1.1.6)$$

Η (2.1.1.6) μας δείχνει πως συνδέεται το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος στην τιμή M , $\Pi_M(\omega)$, με αυτό στην τιμή $M-1$.



Σχήμα 4 Το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος $\Pi_M(\varphi)$ για το ντετερμινιστικό σύνολο Cantor με $K=2$ και $p=0.3$ για $M=4,8,16,32$ κλπ. (αναπαράγεται από [Varotsos et al., 2006].)

2.2 Διασπορά κ_1 του φυσικού χρόνου χ

Θα δούμε τώρα τι μας δίνει, για ορισμένες τιμές του M και του K , η διασπορά του φυσικού χρόνου χ , κ_1 , με βάση τη γνωστή μας σχέση.

2.2.1 Διασπορά του φυσικού χρόνου για $M=1$ ($p, (1-p)$)

Χρησιμοποιώντας το p – μοντέλο, δηλαδή $M=1(p, (1-p))$, ξέροντας πως κάθε σύνολο χωρίζεται εξίσου σε $K=2$ μέρη, θα βρούμε τη διασπορά από την (1.4.11) αφού υπολογίσουμε πρώτα κάθε όρο ξεχωριστά.

$$\langle \chi \rangle = \frac{p}{2} + 1 - p = 1 - \frac{p}{2} \quad (2.2.1.1)$$

και

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{p}{4} + 1 - p = 1 - \frac{3p}{4}, \quad (2.2.1.2)$$

άρα,

$$\begin{aligned} \kappa_{1,M=1} &= \langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2 = 1 - \frac{3p}{4} - \left(1 - \frac{p}{2}\right)^2 = \\ &= 1 - \frac{3p}{4} - \left(1 - p + \frac{p^2}{4}\right) = 1 - \frac{3p}{4} - 1 + p - \frac{p^2}{4} = \frac{p - p^2}{4} = \frac{p(1-p)}{4} \quad \rightarrow \\ \kappa_{1,M=1} &= \frac{p(1-p)}{4}. \end{aligned} \quad (2.2.1.3)$$

2.2.2 Διασπορά του φυσικού χρόνου για

$M=2$ ($p^2, p(1-p), p(1-p), (1-p)^2$)

Θα υπολογίσουμε τη διασπορά κ_1 για $M=2$ ($p^2, p(1-p), p(1-p), (1-p)^2$), με

$\sum \omega_i = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 1$, ακολουθώντας την ίδια μέθοδο με πριν:

$$\langle \chi \rangle = \frac{p^2}{4} + \frac{p}{2} - \frac{p^2}{2} + \frac{3p}{4} - \frac{3p^2}{4} + 1 - 2p + p^2 = 1 - \frac{3p}{4} \quad (2.2.2.1)$$

και

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{p^2}{4} + \frac{2}{4}p(1-p) + \frac{3}{4}p(1-p) + (1-p)^2 = \frac{4p^2 - 19p + 16}{16}, \quad (2.2.2.2)$$

άρα

$$\begin{aligned} \kappa_{1,M=2} &= \frac{4p^2 - 19p + 16}{16} - \left(1 - \frac{3p}{4}\right)^2 = \frac{4p^2 - 19p + 16}{16} - 1 + \frac{3p}{2} - \frac{9p^2}{16} = \\ &= \frac{5p(1-p)}{16} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\kappa_{1,M=2} = \frac{5p(1-p)}{16}. \quad (2.2.2.3)$$

Παρατηρούμε, ότι

$$\kappa_{1,M=2} = \frac{5p(1-p)}{16} = \frac{\frac{p(1-p)}{4} + p(1-p)}{4}, \quad (2.2.2.4)$$

επομένως τα $\kappa_{1,M=1}$ και $\kappa_{1,M=2}$ συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\kappa_{1,M=2} = \frac{\kappa_{1,M=1} + p(1-p)}{4}. \quad (2.2.2.5)$$

2.2.3 Διασπορά φυσικού χρόνου για M και M-1 με K=2 ίσα

τμήματα

Είδαμε από την (2.1.1.4) πώς συνδέεται το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος στην τιμή M, $\Pi_M(\omega)$, με αυτό στην τιμή M-1. Για K=2 θα γίνει

$$\Pi_M(\omega) = \Pi_{M-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) |p + (1-p)e^{i\omega/2}|^2 \quad (2.2.3.1)$$

όπου $\omega \rightarrow 0$, ξέρουμε όμως ότι $\Pi_M(\omega) = 1 - \kappa_{1,M}\omega^2$, επομένως για $\Pi_{M-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ είναι

$$\Pi_{M-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 - \kappa_{1,M-1}\frac{\omega^2}{4} \quad (2.2.3.2)$$

την οποία αντικαθιστούμε και παίρνουμε

$$1 - \kappa_{1,M}\omega^2 = \left(1 - \kappa_{1,M-1}\frac{\omega^2}{4}\right) |p + (1-p)e^{i\omega/2}|^2. \quad (2.2.3.3)$$

Το τετράγωνο της (2.2.3.3) ισούται με

$$\begin{aligned} |p + (1-p)e^{i\omega/2}|^2 &= (p + (1-p)e^{i\omega/2})(p + (1-p)e^{-i\omega/2}) = \\ &= p^2 + p(1-p)e^{-i\omega/2} + p(1-p)e^{i\omega/2} + (1-p)^2 = p^2 + (1-p)^2 + 2p(1-p) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right), \end{aligned}$$

και όταν $\omega \rightarrow 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} |p + (1-p)e^{i\omega/2}|^2 &\approx p^2 + (1-p)^2 + 2p(1-p) \left(1 - \frac{\omega^2}{8}\right) = \\ &= 1 - p(1-p) \frac{\omega^2}{4}. \end{aligned} \tag{2.2.3.4}$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν τις (2.2.3.4) και (2.2.3.2) στην (2.2.3.1):

$$\begin{aligned} 1 - \kappa_{1,M}\omega^2 &= \left(1 - \kappa_{1,M-1} \frac{\omega^2}{4}\right) \left(1 - \frac{p(1-p)}{4} \omega^2\right) \quad \rightarrow \\ 1 - \kappa_{1,M}\omega^2 &= 1 - \frac{p(1-p)}{4} \omega^2 - \kappa_{1,M-1} \frac{\omega^2}{4} + p(1-p)\kappa_{1,M-1} \frac{\omega^4}{16} \quad \rightarrow \\ 1 - \kappa_{1,M}\omega^2 &\approx 1 - \left(\frac{\kappa_{1,M-1}}{4} + \frac{p(1-p)}{4}\right) \omega^2. \end{aligned} \tag{2.2.3.5}$$

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει να εξισώσουμε τους συντελεστές κάθε όμοιου όρου απ' τα δύο μέλη και προκύπτει

$$\kappa_{1,M} = \frac{\kappa_{1,M-1} + p(1-p)}{4}. \tag{2.2.3.6}$$

Τώρα αν π.χ. $M \rightarrow \infty$, τότε $\lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_{1,M} = \frac{p(1-p)}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right)$,

όπου $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots$ είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{4}$.

Το άθροισμα λοιπόν άπειρων όρων της παραπάνω γεωμετρικής προόδου είναι $\frac{\alpha_1}{1-\lambda}$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$ και τότε το $\lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_{1,M}$ θα γίνει

$$\kappa_{1,M \rightarrow \infty} = \frac{p(1-p)}{4} \frac{4}{3} = \frac{p(1-p)}{3}. \quad (2.2.3.7)$$

η οποία αποτελεί την τιμή της διασποράς, κ_1 , για μεγάλες τιμές του M στην περίπτωση του ντετερμινιστικού συνόλου Cantor για $K=2$. Η τιμή αυτή ταυτίζεται με την πιο πιθανή τιμή και για την περίπτωση του στοχαστικού συνόλου Cantor για $K=2$ [Varotsos et al., 2006].

2.2.4 Διασπορά φυσικού χρόνου για M και $M-1$ με $K=3$ ίσα

τμήματα

Έστω τώρα ότι κάθε τμήμα χωρίζεται εξίσου σε $K=3$ μέρη, ω_1 , ω_2 και ω_3 με $\sum \omega_i = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Ακολουθούμε την ίδια μέθοδο για την (2.1.1.5) με $K=3$ και θα γίνει

$$\Pi_M(\omega) = \Pi_{M-1}\left(\frac{\omega}{3}\right) \left| \omega_1 + \omega_2 e^{i\omega/3} + \omega_3 e^{i2\omega/3} \right|^2 \quad (2.2.4.1)$$

ενώ το τετράγωνο

$$\begin{aligned} \left| \omega_1 + \omega_2 e^{i\omega/3} + \omega_3 e^{i2\omega/3} \right|^2 &= (\omega_1 + \omega_2 e^{i\omega/3} + \omega_3 e^{i2\omega/3})(\omega_1 + \omega_2 e^{-i\omega/3} + \\ &\omega_3 e^{-i2\omega/3}) = \omega_1^2 + \omega_1 \omega_2 e^{-i\omega/3} + \omega_1 \omega_3 e^{-i2\omega/3} + \omega_1 \omega_2 e^{i\omega/3} + \omega_2^2 + \\ &\omega_2 \omega_3 e^{-i\omega/3} + \omega_1 \omega_3 e^{i2\omega/3} + \omega_2 \omega_3 e^{i\omega/3} + \omega_3^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \\ &2\omega_1 \omega_2 \cos\left(\frac{\omega}{3}\right) + 2\omega_1 \omega_3 \cos\left(\frac{2\omega}{3}\right) + 2\omega_2 \omega_3 \cos\left(\frac{\omega}{3}\right). \end{aligned} \quad (2.2.4.2)$$

Επίσης, κατ' αντιστοιχία με τη (2.2.3.2) θα ισχύει για $\omega \rightarrow 0$

$$\Pi_{M-1}\left(\frac{\omega}{3}\right) = 1 - \kappa_{1,M-1} \frac{\omega^2}{9}. \quad (2.2.4.3)$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν τις (2.2.4.3) και (2.2.4.2) στην (2.2.4.1) για $\omega \rightarrow 0$ και έχουμε:

$$1 - \kappa_{1,M} \omega^2 = \left(1 - \kappa_{1,M-1} \frac{\omega^2}{9}\right) \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos\left(\frac{\omega}{3}\right) + 2\omega_1\omega_3 \cos\left(\frac{2\omega}{3}\right) + 2\omega_2\omega_3 \cos\left(\frac{\omega}{3}\right)\right) \quad (2.2.4.4)$$

όπου,

$$\begin{aligned} & \left(1 - \kappa_{1,M-1} \frac{\omega^2}{9}\right) \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos\left(\frac{\omega}{3}\right) + 2\omega_1\omega_3 \cos\left(\frac{2\omega}{3}\right) + 2\omega_2\omega_3 \cos\left(\frac{\omega}{3}\right)\right) = \\ & \left[\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + 2\omega_1\omega_2 - \omega_1\omega_2 \frac{\omega^2}{9} + 2\omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_3 \frac{4\omega^2}{9} + 2\omega_2\omega_3 - \omega_2\omega_3 \frac{\omega^2}{9} - \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + 2\omega_1\omega_2 - \omega_1\omega_2 \frac{\omega^2}{9} + 2\omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_3 \frac{4\omega^2}{9} + 2\omega_2\omega_3 - \omega_2\omega_3 \frac{\omega^2}{9}\right) \frac{\omega^2}{9} \kappa_{1,M-1}\right] = \\ & = 1 - (\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + 4\omega_1\omega_3) \frac{\omega^2}{9} - \\ & \left(1 - \omega_1\omega_2 \frac{\omega^2}{9} - \omega_1\omega_3 \frac{4\omega^2}{9} - \omega_2\omega_3 \frac{\omega^2}{9}\right) \frac{\omega^2}{9} \kappa_{1,M-1} - \left(1 - \omega_1\omega_2 \frac{\omega^2}{9} - \omega_1\omega_3 \frac{4\omega^2}{9} - \omega_2\omega_3 \frac{\omega^2}{9}\right) \frac{\omega^2}{9} \kappa_{1,M-1} \end{aligned}$$

και άρα

$$1 - \kappa_{1,M} \omega^2 = 1 - (\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + 4\omega_1\omega_3) \frac{\omega^2}{9} - \left(1 - \omega_1\omega_2 \frac{\omega^2}{9} - \omega_1\omega_3 \frac{4\omega^2}{9} - \omega_2\omega_3 \frac{\omega^2}{9}\right) \frac{\omega^2}{9} \kappa_{1,M-1} \quad (2.2.4.5)$$

Για να ισχύει η παραπάνω ισότητα πρέπει να εξισώσουμε τους συντελεστές κάθε όμοιου όρου απ' τα δύο μέλη και προκύπτει (αρκεί δηλαδή οι συντελεστές του ω^2 να είναι ίδιοι)

$$\kappa_{1,M} = \frac{\kappa_{1,M-1} + \omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + 4\omega_1\omega_3}{9}. \quad (2.2.4.6)$$

Για $M \rightarrow \infty \rightarrow M-1 \approx M$, θα ισχύει $\kappa_{1,M} = \kappa_{1,M-1}$ δηλαδή

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \kappa_{1,M} = \kappa_{1,M \rightarrow \infty} = \kappa_{1,M} = \frac{\kappa_{1,M} + \omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + 4\omega_1\omega_3}{9} \rightarrow$$

$$\frac{8}{9}\kappa_{1,M} = \frac{\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + 4\omega_1\omega_3}{9} \rightarrow$$

$$\kappa_{1,M \rightarrow \infty} = \frac{\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + 4\omega_1\omega_3}{8}. \quad (2.2.4.7)$$

Όμοια με την (2.2.3.7), η (2.2.4.7), όπου $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$, αποτελεί την τιμή της διασποράς, κ_1 , για μεγάλες τιμές του M στην περίπτωση του ντετερμινιστικού συνόλου Cantor για $K=3$ αντίστοιχα.

2.2.5 Διασπορά φυσικού χρόνου και σεισμικότητα

Ας εφαρμόσουμε τώρα τα προαναφερθέντα αποτελέσματα στην περίπτωση της σεισμικότητας. Τα μεγέθη των σεισμών ακολουθούν το νόμο *Gutenberg Richter*: Η πιθανότητα να παρατηρήσουμε σε κάποια περιοχή, και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα αναμονής, ένα σεισμό μεγέθους m μεγαλύτερου ή ίσου με m_0 δίνεται από

$$P(m \geq m_0) \sim 10^{-bm_0} \quad (2.2.5.1)$$

Γι' αυτό το λόγο, η συχνότητα $\nu(m)$ σεισμών με μέγεθος m , όπως αυτοί που έχουν μεγέθη στο $[m-\delta m, m+\delta m]$ είναι μόλις

$$\nu(m) \sim 10^{-bm}. \quad (2.2.5.2)$$

Από το πρίσμα του p -μοντέλου, μπορούμε τώρα να προσεγγίσουμε την περίπτωση της σεισμικότητας ως ακολούθως [Sarlis et al., 2009]: υποθέτοντας ότι ο μεγαλύτερος σεισμός σε ένα χρονικό διάστημα δεσπόζει στην αντίστοιχη

απελευθέρωση της ενέργειας σε αυτό το διάστημα, αν ένας σεισμός μεγέθους m_o κυριαρχεί το δεύτερο (τιμήμα) χρονικό διάστημα, το πρώτο τιμήμα θα κυριαρχείται από ένα σεισμό μεγέθους $m_o - \Delta M$, έχοντας διπλάσια συχνότητα του m_o , δηλαδή $\nu(m_o - \Delta M) = 2\nu(m_o)$. Έτσι, μία επαναληπτική πολλαπλασιαστική χρονοσειρά σχηματίζεται με μία τιμή p ίση με $p = 1/(1 + 10^{c\Delta M})$, όπου c είναι η σταθερά που συσχετίζει την απελευθέρωση σεισμικής ενέργειας με το μέγεθος, η οποία είναι $E \sim M_o \sim 10^{cm}$, όπου M_o είναι η σεισμική ροπή. Αντικαθιστώντας την τιμή του $\Delta M (= \frac{1}{b} \log_{10} 2)$ που υπολογίζεται με βάση το νόμο *Gutenberg Richter*, παίρνουμε

$$p = \frac{1}{(1 + 2^{c/b})}. \quad (2.2.5.3)$$

η οποία εν όψει της (2.2.3.7), οδηγεί στην πιο πιθανή τιμή του κ_1 που δίνεται από

$$\kappa_{1,p} = \frac{2^{c/b}}{3(1 + 2^{c/b})^2}. \quad (2.2.5.4)$$

Αυτή η σχέση συσχετίζει το $\kappa_{1,p}$, με την ποσότητα c/b . Τυπικές ποσότητες του b και του c είναι $b \approx 1$ και $c \approx 1.5$ και δίνουν αποτέλεσμα $\kappa_{1,p} = 0.064$. Η τελευταία τιμή είναι και αυτή που βρίσκεται από τη μελέτη του τυχαία κατανεμημένου σεισμολογικού καταλόγου της Ιαπωνίας και της Καλιφόρνια [Sarlis et al., 2009].

2.3 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύσαμε επαναληπτικές πολλαπλασιαστικές χρονοσειρές στο φυσικό χρόνο. Υπολογίσαμε μάλιστα την τιμή της διασποράς κ_1 του φυσικού χρόνου για την περίπτωση του ντετερμινιστικού συνόλου Cantor με διαχωρισμό σε $K=2$ και $K=3$ ίσα τμήματα. Η περίπτωση $K=2$ εφαρμόστηκε στην περίπτωση της σεισμικότητας, ενώ η περίπτωση $K=3$ (εξ. 2.2.4.7) εξετάστηκε εδώ για πρώτη φορά και ελπίζουμε να βρει εφαρμογή στο μέλλον.

Αναφορές

Gödel, K., 1949. An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitations. Rev. Mod. Phys. **21**, 447-450.

Schrödinger, E. 1954. Nature and the Greeks. Guilford Press.

Sarlis, N., Skordas, E.S and Varotsos,P. 2009. Multiplicative cascades and seismicity in natural time. Phys. Rev. E **80**, 022102.

Varotsos, P., Sarlis, N., Skordas, E., 2001, Spatiotemporal complexity aspects on the interrelation between Seismic Electric Signals and seismicity, Practica of Athens Academy **76**, 294-321.

Varotsos,P., Sarlis, N., Skordas, E.S., 2011. Natural Time Analysis: The New View of Time. Precursory Seismic Electric Signals, Earthquakes and other Complex Time Series. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Varotsos,P., Sarlis, N., Skordas, E.S. and Lazaridou, M.S. 2007. Identifying sudden cardiac death risk and specifying its occurrence time by analyzing electrocardiograms in natural time. Applied Physics Letters, **91**, 064106.

Varotsos,P.A., Sarlis, N.V., Skordas, E.S., Tanaka, H.K., M.S. 2006. Attempt to distinguish long-range temporal correlations from the statistics of the increments by natural time. Phys.Rev. E **74**, 021123.

Weyl, H., 1952. Space-Time-Matter. London, Methuen & co. ltd