Εθνικό και
Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πανεπιστήμιο
Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αιτιολογία από /ή για ερμηνεία στο μαθηματικό συλλογισμό με τη διαμεσολάβηση ψηφιακών εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας

Ματθαίος Β. Τσιλπιρίδης

Δ 201509

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής
Γ. Ψυχάρης - Επ. Καθηγητής ΕΚΠΑ

Αθήνα - Ιούνιος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 2/6/2017 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

	Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪	Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Επίκ. Καθηγητής ΕΚΠΑ
▪	Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
▪	Π. Σπύρου	τ.Αναπλ.Καθηγητής ΕΚΠΑ

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενης από τους:

	Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪	Γ. Ψυχάρη (Επιβλέπων)	Επίκ. Καθηγητής ΕΚΠΑ
▪	Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
▪	Α. Μούτσιο – Ρέντζο	Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

… αφιερώνεται στο Δάσκαλο των Μαθηματικών

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους επιβλέποντες Πανεπιστημιακούς κ. **Γ. Ψυχάρη**, κ. **Δ. Πόταρη** και κ. **Α. Μούτσιο – Ρέντζο** για τη συμμετοχή τους στην τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή της παρούσης εργασίας, καθώς και για τη σημαντική συμβολή τους στην εκπόνησή της. Συμβολή, που συνίσταται τόσο κατά τη διάρκεια συγγραφής, όσο και στα σημαντικά ερείσματα που προκλήθηκαν από τις παραδόσεις τους κατά τη διάρκεια παρακολούθησης των μαθημάτων τους.

Από το σημείο αυτό, θα ήθελα επίσης να απευθύνω τις ευχαριστίες και την αναγνώρισή μου για το σημαντικό έργο τους και σε ορισμένους Πανεπιστημιακούς του Μαθηματικού Τμήματος, όπου ο επηρεασμός από τις παραδόσεις τους ήταν σημαντικός για την παρούσα εργασία. Αλφαβητικά:

- Τον Καθηγητή κ. **Θ. Ζαχαριάδη**, για τις σημαντικές επισημάνσεις του τόσο στο μαθηματικό όσο και στο διδακτικό – παιδαγωγικό μέρος της διδασκαλίας του Απειροστικού Λογισμού.
- Τον Καθηγητή κ. **Χ. Κυνηγό**, όπου η γνώση του σε θέματα Τεχνολογίας αλλά και ευρύτερα στη Δ.τ.Μ, συνέτεινε σε γόνιμο προβληματισμό για τους τρόπους χρήσης των Ψηφιακών Τεχνολογιών.
- Τον Ομότιμο Καθηγητή κ. **Σ. Νεγρεπόντη**, για τη γνώση και το ενδιαφέρον του για την Ιστορία των Αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών που τώρα, περισσότερο από ποτέ, χρειάζεται ο τόπος μας.
- Τον Καθηγητή κ. **Ε. Ράπτη**, όπου με το ήθος, την ηρεμία και τη σεμνότητά του καθώς και με τις εύστοχες επιλογές του, με βοήθησε να αναστοχαστώ σε σημαντικά θέματα της Άλγεβρας.
- Τον Αναπλ. Καθηγητή κ. **Π. Σπύρου**, όπου με το πνευματώδες χιούμορ, τη φιλοσοφική οπτική και την κοινωνικοπολιτική διάσταση της Δ.τ.Μ στις παραδόσεις του, προκαλεί στον εκπαιδευτικό την ευαισθησία και το ενδιαφέρον για τους μαθητές του.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τη **Μαρίνα Χαραλαμπίδου** (Καθηγήτρια ΕΚΠΑ στο Τμήμα Μαθηματικών) και τον **Ιορδάνη Χριστοδούλου** (Καθηγητή Μαθηματικών Δ.Ε), που χωρίς την ηθική στήριξη και την ενθάρρυνσή τους στις προπτυχιακές σπουδές μου, θα ήταν φυσικώς αδύνατη η τωρινή μεταπτυχιακή εργασία.

Ευχαριστίες επίσης, σε πολύτιμους συναδέλφους Καθηγητές, που με τη συμβολή τους πραγματοποιήθηκαν οι ερευνητικές διδασκαλίες που απαιτήθηκαν ώστε να ολοκληρωθεί η παρούσα εργασία. Αλφαβητικά:

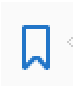
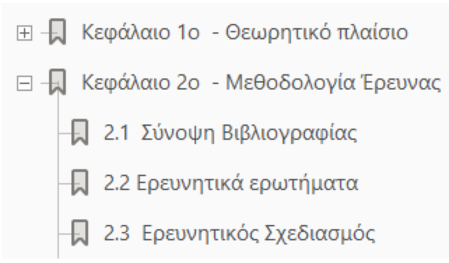
- Από το Α΄ & Β΄ Αρσάκειο - Τοσίτσειο Λύκειο Εκάλης: **Ι. Βακαλόπουλο, Α. Ζησόπουλο, Θ. Κιτσάκη, Α. Μαλάμου, Β. Ντούση, Α. Παπαβασιλείου, Γ. Χρονόπουλο**
- Από το Α΄ & Β΄ Αρσάκειο Λύκειο Ψυχικού: **Γ. Καγκάκη**, **Ε. Μπίτση**
- Τον **Π. Λιναρδάκη** – Συντονιστή Μαθηματικών στα Αρσάκεια Σχολεία, για την ηθική και οργανωτική στήριξή του.

Ευχαριστώ την κόρη μου **Χριστιάνα**, για τη φιλολογική επιμέλεια της παρούσης. Θα ήταν παράλειψη τέλος, να μην απευθύνω τις πιο θερμές ευχαριστίες, στους μαθητές και τις μαθήτριες μου, που επί 3 και πλέον δεκαετίες αποτελούν πηγή μόνιμης και διαρκούς προσωπικής έμπνευσης.

Μ.Τ

Ιούνιος 2017

Πλοήγηση στο έγγραφο

Αναφορές	Αποτέλεσμα
	Με κλικ στο αντίστοιχο εικονίδιο στην αριστερή λωρίδα εικονιδίων του Acrobat Reader, εμφανίζονται οι σελιδοδείκτες – παραπομπές στα αντίστοιχα κεφάλαια και στις υποενότητες
	Ανάπτυξη / Σύμπτυξη της λίστας των υποενοτήτων που εμφανίζονται στην αριστερή στήλη, με κλικ στο εικονίδιο του +/- αντίστοιχα.
βλ. σελ. 34	Μεταφορά στην αντίστοιχη σελίδα με κλικ στον αριθμό
Πίνακας περιεχομένων	Ενεργό το κλικ σε κάθε σειρά του πίνακα για μετάβαση σε οποιαδήποτε επικεφαλίδα
Πίνακας περιεχομένων εικόνων	Όμοια με προηγούμενα για πλοήγηση στις εικόνες του εγγράφου
Το url του χρησιμοποιούμενου e-δομήματος	https://ggbm.at/nBDCg7Qq

Περιεχόμενα

Πίνακας περιεχομένων εικόνων

Περίληψη

Είναι γνωστό ότι στη σχολική καθημερινότητα η επίλυση ενός προβλήματος ή η απόδειξη μιας πρότασης στα μαθηματικά, έχει συχνά τα χαρακτηριστικά μιας τυπικής διαδικασίας. Σπάνιο είναι το φαινόμενο της πρόκλησης κατάλληλων διδακτικών αλληλουχιών στους μαθητές, ώστε να ασχοληθούν σε πειραματικό –αρχικά- στάδιο, προκειμένου να καταλήξουν στη διατύπωση μιας εικασίας και στη συνέχεια να προχωρήσουν στην τυπική της απόδειξη. Στην εργασία ασχολούμαστε με τις προκλήσεις για νοηματοδότηση που μπορούν να προκύψουν από τη διαμεσολάβηση των DGEs, ώστε να δημιουργηθούν κατάλληλες συνθήκες για αιτιολογία *από* ερμηνεία. [1]

Συγκρίνουμε τη δυναμική αυτού του τύπου αιτιολογίας με εκείνης που αφορά στην αιτιολογία *για* ερμηνεία. Παράλληλα εξετάζουμε τις δυνατότητες της χρήσης των DGEs για τη δημιουργία συνθηκών bfp (before formal proof): Εκείνες δηλαδή τις αρχικές διαδικασίες που προηγούνται της τυπικής απόδειξης και οι οποίες είναι δυνατό μέσω ανάπτυξης γόνιμης επιχειρηματολογίας, να οδηγήσουν τους μαθητές τόσο στη διατύπωση μιας εικασίας όσο και στην απόδειξή της. Στην εργασία χρησιμοποιήθηκε ένα e-δόμημα με λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας καθώς και φύλλο εργασίας που δόθηκε σε δύο τριμελείς ομάδες μαθητών του Β΄ Αρσακείου Λυκείου Ψυχικού. Στόχος οι μαθητές να διαπιστώσουν και στη συνέχεια να αποδείξουν αλγεβρικά μια σημαντική γεωμετρική ιδιότητα. Τα κύρια ευρήματα της έρευνας αφορούν στη σημαντική διαφορά δυναμικού που αναπτύχθηκε στη μία ομάδα που χρησιμοποίησε αιτιολογία από ερμηνεία χρησιμοποιώντας ανατροφοδότηση από το e-δόμημα, σε σχέση με τη δεύτερη ομάδα που παρέμεινε στην αιτιολογία για ερμηνεία χρησιμοποιώντας κυρίως φορμαλιστικές προσεγγίσεις.

Λέξεις Κλειδιά: αιτιολογία, ερμηνεία, επιχειρηματολογία, απόδειξη, δυναμικές αναπαραστάσεις, συμμεταβολή, e-δόμημα , DGEs.

Abstract

It is well known that in school everyday life the solution of a problem or proof of a proposition in mathematics often has the characteristics of a formal process. The phenomenon of provoking appropriate teaching sequences to students is rare, so that to take them firstly to an experimental stage in order to conclude to a conjecture and then to proceed to its formal proof. In this work, we deal with the brainstorming challenges that can be arise from the mediation of DGEs, in order to create appropriate conditions for reasoning from interpretation.

We compare the dynamic of this type of reasoning with that of the reasoning from interpretation. At the same time, we examine the possibilities of using DGEs to create bfp (before formal proof) conditions. Namely, those initial processes that precede of the formal proof, and which are possible through the development of fruitful arguments, to lead the students both in guessing a conjecture as well as in its proof. An e-artefact with Dynamic Geometry software was used in the work, as well as a worksheet given to two groups of three students of the 2nd Arsakeio Lyceum of Psychiko. The aim is for students to discover and then to prove algebraically an important geometric property.

[1] **Αιτιολογία** (reasoning, explanation, rationale): η εξήγηση, η παρουσίαση των λόγων που οδήγησαν σε μια κατάσταση, στη λήψη αποφάσεως, σε πράξη ή παράλειψη κ.λ.π
αναγκαία/ανεπαρκής/απαράδεκτη/απαραίτητη/έξυπνη/ασαφής/άστοχη/εύλογη/πρόχειρη/συγκεκριμένη
Αιτιολόγηση (justification): η εξήγηση της αιτίας

The main findings of the research concern the significant difference in potential that developed in one group using reasoning from interpretation using employing from the e-artefact compared to the second group that remained in the reasoning for interpretation using mainly formalistic approaches.

Key words: reasoning, interpretation, argumentation, proof, dynamic representations, co-transposition, e-artefact, DGEs.

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε στα δύο είδη αιτιολογίας που εμφανίζονται στο μαθηματικό συλλογισμό και ερευνητικά αναφέρονται ως αιτιολογία από ερμηνεία και αιτιολογία για ερμηνεία (βλ. σελ. 18). Από την υπάρχουσα έρευνα προκύπτει σχεδόν με αδιαμφισβήτητο τρόπο η αξία της σχεσιακής κατανόησης στα μαθηματικά σε αντίθεση με την εργαλειακή. Τίθεται συνεπώς εύλογα το ερώτημα: είναι σκόπιμο να συνδέσουμε άμεσα ή έμμεσα τα δύο είδη αιτιολογίας στο μαθηματικό συλλογισμό με τα δύο επίπεδα κατανόησης κατά τρόπο ώστε η αιτιολογία από ερμηνεία να συνδέεται με τη σχεσιακή κατανόηση και η αιτιολογία για ερμηνεία να συνδέεται -πιθανό ασθενέστερα- με την εργαλειακή κατανόηση; [2]

Ως επαγγελματίες Καθηγητές Μαθηματικών διαπιστώνουμε πολύ συχνά στη διδασκαλία μας το «εύθραυστο» του δεύτερου τρόπου (μελέτης και) κατανόησης στα μαθηματικά από τους μαθητές σε αντίθεση με το στέρεο υπόβαθρο που δημιουργείται με τον πρώτο τρόπο κατανόησης, το οποίο είναι γνωστό ότι απαιτεί ειδικούς και κοπιώδεις χειρισμούς τόσο από το διδάσκοντα όσο και από το μαθητή. Στην έρευνα, τα δύο επίπεδα κατανόησης συσχετιζόμενα με τα είδη αναπαραστάσεων αναφέρονται εύστοχα ως εξωτερικών – εκπαιδευτικών και εσωτερικών –γνωστικών αντίστοιχα αναπαραστάσεων, περιγράφοντας με αυτόν τον τρόπο περίπου και τους τύπους εσωτερίκευσης νοημάτων από τους μαθητές μέσω αυτών.

Παράλληλα εξετάζουμε το ρόλο της διαμεσολάβησης των DGEs για την καλλιέργεια των δύο αυτών ειδών αιτιολογίας. Σκοπός της έρευνας είναι να διερευνήσει τη συμβολή ενός e-δομήματος που έχει κατασκευαστεί με το λογισμικό Geogebra σε δύο τομείς: αφενός στη δημιουργία κατάλληλου εννοιολογικού πλαισίου πριν την τυπική απόδειξη μιας πρότασης (καλούμε το συγκεκριμένο είδος συνθηκών bfp –before formal proof-) και αφετέρου τις επιπτώσεις αναφορικά με το είδος αιτιολογίας που θα αναπτυχθεί από τους μαθητές μετά από αυτή τη διαμεσολάβηση. Εξετάζουμε επίσης, κατά πόσο τα δύο είδη αιτιολογίας σχετίζονται με τα είδη κατανόησης που αναφέρονται στη βιβλιογραφία και αφορούν στη σχεσιακή κατανόηση (relational understanding) και στην εργαλειακή – διαδικαστική κατανόηση (instrumental understanding). Θέση του γράφοντος είναι, ότι οι νοηματοδοτήσεις που είναι δυνατό να προέλθουν από τις δυναμικές αναπαραστάσεις του e-δομήματος, είναι δυνητικά ικανές να δημιουργήσουν πλαίσια αιτιολογίας, που στηρίζονται στην ερμηνεία φαινομένων και ιδιοτήτων που εμφανίζονται σε αυτό.

Για το λόγο αυτό, ο σχεδιασμός της δραστηριότητας αποσκοπεί στη σύνθεση ερωτημάτων που αφορούν και στα δύο είδη αιτιολογίας. Ειδικότερα στην αιτιολογία από ερμηνεία, περιέχονται αρκετά στοιχεία στη δραστηριότητα τα οποία αφορούν σε δυναμικές αλγεβρικές και γεωμετρικές αναπαραστάσεις ιδιοτήτων μέσω του e-δομήματος. Από την αξιοποίηση και ερμηνεία των συγκε-

[2] βλ. σχετικά και σελ. 15

κριμένων αναπαραστάσεων, οι συμμετέχοντες θα μπορούν δυνητικά να προβούν σε τυπικές αποδείξεις σχέσεων και ιδιοτήτων που περιέχονται στη δραστηριότητα. Πριν από αυτό το σημείο, εντάσσουμε στοιχεία που έχουν ως στόχο να οδηγήσουν τους μαθητές στη διατύπωση σχετικής εικασίας, παρουσιάζοντας γεωμετρικό ισοδύναμο της ιδιότητας που θέλουμε να αποδείξουν. Η ιδιότητα αφορά στη μεγιστοποίηση του εμβαδού ορθογωνίων που έχουν σταθερή περίμετρο, όταν αυτά μετασχηματιστούν σε τετράγωνα. Ως γνωστό, η απόδειξη της συγκεκριμένης ιδιότητας απαιτεί σύνθετο αλγεβρικό συλλογισμό από τους μαθητές, ενώ δε γίνεται λόγος για μεθόδους διαφορικού λογισμού, δεδομένου ότι η δραστηριότητα έχει σχεδιαστεί για μαθητές της Β΄ Λυκείου Θετικού Προσανατολισμού (όπου και παρουσιάστηκε) ή για μαθητές της Α΄ Λυκείου όπου είναι δυνατή και σε αυτή την τάξη η παρουσίαση της συγκεκριμένης δραστηριότητας. Στην εργασία τίθενται ερωτήματα σε διακριτά στάδια τα οποία αφορούν στην ερμηνεία δυναμικών αναπαραστάσεων του προβλήματος καθώς και ερωτήματα τα οποία, αν και δεν διαθέτουν χαρακτηριστικά ανοικτών ερωτημάτων, εν τούτοις προσφέρονται τόσο για εμπειρικές προσεγγίσεις όσο και για την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας. Η διερεύνηση των τρόπων ερμηνείας αυτών των αναπαραστάσεων καθώς και η ανάπτυξη επιχειρημάτων που εν συνεχεία θα μετέλθουν οι συμμετέχοντες για να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους, αποτελούν το κεντρικό στοιχείο της έρευνάς μας. Παράλληλα εξετάζοντας τους διαλόγους που αναπτύχθηκαν ανάμεσα στα μέλη κάθε ομάδας, επιχειρούμε να εξετάσουμε τους τύπους συλλογισμού που ανέπτυξαν (παραγωγικό, επαγωγικό ή απαγωγικό). Αν και ο σχεδιασμός μας κατανέμει και τα τρία είδη συλλογισμού στα ερωτήματα που περιέχονται στο φύλλο εργασίας, εν τούτοις παρουσιάζουν ερευνητικό, κατά τη γνώμη μας, ενδιαφέρον οι –πιθανώς- διαφορετικοί από το σχεδιασμό μας τύποι συλλογισμού που θα επιστρατεύσουν οι μαθητές προκειμένου να απαντήσουν (βλ. περισσότερα και στις σελίδες 31 και υποσημείωση σελ. 67).

Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό, ότι οι συμμετέχοντες καλούνται αρχικά να διαπραγματευτούν στο χαρτί τα κεντρικά ερωτήματα της δραστηριότητας χωρίς επαφή με το e-δόμημα. Στη συνέχεια πειραματίζονται στο e-δόμημα ώστε να ελέγξουν ή/και να αναθεωρήσουν τις απαντήσεις τους από την ανατροφοδότησή του. Χρησιμοποιούμε αυτό το διπολικό τρόπο εργασίας, προκειμένου να επαληθεύσουμε ή όχι, τη θεώρηση από πολλούς ερευνητές “της εξασκούμενης μεθόδου, ως προϋπόθεσης και ως αποτελέσματος”, δεδομένου του διακριτού τύπου εργασίας στο χαρτί και στο ψηφιακό δόμημα. Επιπλέον, με αυτόν τον τρόπο συγκρίνουμε και πάλι τα δύο είδη αιτιολογίας που αναπτύσσονται καθώς και τη δυναμική κάθε είδους αιτιολογίας με το συγκεκριμένο διπολικό τρόπο εργασίας των συμμετεχόντων. Από τους καταγραφείς της οθόνης των υπολογιστών κάθε ομάδας, παρατηρούμε τους τρόπους με τους οποίους οι δύο ομάδες αξιοποιούν τις πληροφορίες που παρέχονται στο e-δόμημα. Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι κατά τη διάρκεια πειραματισμού των μαθητών δεν εμφανίζονται οι μετρήσεις εμβαδών. Τα εμβαδά που χρησιμοποιούνται αναπαρίστανται μέσω των γραφικών παραστάσεων των συμμεταβολών που τα αντιπροσωπεύουν. Αυτό συμβαίνει, προκειμένου να προκληθούν στους μαθητές οι κεντρικές ιδέες που απαιτούνται για την απόδειξη μαθηματικών ιδιοτήτων μέσω των δυναμικών αναπαραστάσεων που παρακολουθούν στην οθόνη και όχι μέσω μετρήσεων των αντίστοιχων μεγεθών.

Η εργασία χωρίζεται σε τέσσερα κεφάλαια:

- Στο 1^{ο} Κεφάλαιο αναφέρεται το θεωρητικό πλαίσιο το οποίο εστιάζει στην έννοια της απόδειξης γενικά, αλλά και εντός του θεσμικού πλαισίου της σχολικής τάξης, της επιχειρηματολογίας καθώς και στις συνδέσεις μεταξύ τους, της σύνδεσης της εικασίας με την απόδειξη και τέλος στο διδακτικό πλαίσιο λειτουργίας των DGEs (instrumental genesis και Θεωρίας TSM σημειωτικής διαμεσολάβησης). Αναφερόμαστε επίσης στους τρεις τύπους συλλογισμού (παραγωγικό, επαγωγικό και απαγωγικό), με δεδομένο ότι όπως προαναφέρθηκε, στην παρούσα έρευνα, εξετάζουμε τους τύπους αιτιολογίας των μαθητών και υπό το πρίσμα του τύπου συλλογισμού που θα αναπτύξουν. Ειδικότερες αναφορές γίνονται ως προς τα είδη αλλά και την αξιολόγηση των επιπέδων κατανόησης των μαθητών και τέλος στο ρόλο του ερευνητή κατά τη διενέργεια ερευνητικών διδασκαλιών με τη χρήση DGEs.

- Στο 2^{o} Κεφάλαιο γίνεται αρχικά αναφορά στη μεθοδολογία της έρευνας, στον ερευνητικό σχεδιασμό και στα ερευνητικά ερωτήματα και τέλος παρουσιάζεται μία σύνοψη της βιβλιογραφίας. Στη συνέχεια αναφέρονται λεπτομέρειες ως προς το σχεδιασμό και την ανάλυση της δραστηριότητας. Περιγράφονται οι διδακτικοί στόχοι καθώς και ο σχεδιασμός κάθε σταδίου. Παράλληλα αναφερόμαστε στα είδη συλλογισμού που πιθανολογούμε ότι θα αναπτύξουν οι μαθητές μέσω των αντίστοιχων ερωτημάτων.

- Στο 3^{o} Κεφάλαιο περιγράφουμε τα αποτελέσματα της ερευνητικής διδασκαλίας. Παρουσιάζονται οι απαντήσεις των δύο ομάδων που συμμετείχαν στην ερευνητική παρέμβαση καθώς και αποσπάσματα από τους διαλόγους μεταξύ των μελών τους που αναλύονται (και) με βάση τη Θεωρία των Κρίσιμων Συμβάντων.

- Στο 4^{o} Κεφάλαιο αναφέρονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την ερευνητική διδασκαλία καθώς και η σύνδεσή τους με υφιστάμενες ερευνητικές αναφορές.

- Στο παράρτημα της παρούσης εργασίας, παραθέτουμε τα φύλλα εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν στις ερευνητικές διδασκαλίες καθώς και ορισμένες επεκτάσεις αυτών που αφορούν σε ερωτήματα περαιτέρω ανάλυσης της δραστηριότητας. Επισυνάπτουμε επίσης ένα σύνολο ερωτημάτων τύπου «Σωστό – Λάθος» που είναι πιθανό ο ενδιαφερόμενος εκπαιδευτικός να θέσει επικουρικά στους συμμετέχοντες και τα οποία θα μπορούσαν εν δυνάμει, να αποτελέσουν και ένα είδος αξιολόγησης τόσο των συμμετεχόντων όσο και των επιτελούμενων στόχων της δραστηριότητας καθεαυτής. Τέλος, επισυνάπτουμε ευρετήριο ονομάτων και όρων ενώ για την καλύτερη πλοήγηση στο έγγραφο έχουμε επισυνάψει σελιδοδείκτες σε κάθε ενότητα και υποενότητα. Επίσης, οι παραπομπές σε σελίδες του παρόντος λειτουργούν ως hyper-text (με κλικ στον αριθμό της σελίδας γίνεται μεταφορά στην αντίστοιχη σελίδα).

Κεφάλαιο 1ο - Θεωρητικό πλαίσιο

1.1 Αιτιολογία από ερμηνεία και αιτιολογία για ερμηνεία [3]

Μελέτες γνωστικών επιστημών της ανθρώπινης αιτιολόγησης έδειξαν τους τρόπους με τους οποίους τα ανθρώπινα υποκείμενα ερμηνεύουν με επαγωγικό συλλογισμό τη σημασία προτάσεων με τα είδη των συμπερασμάτων που κάνουν (Girotto, 2004? Stenning & Monaghan, 2004). Σε κάθε τέτοιο έργο, οι μαθητές πρέπει να ερμηνεύσουν τους περιορισμούς – υποθέσεις κάποιου έργου σύμφωνα με τη λογική τους έννοια. Αυτό περιλαμβάνει την ερμηνεία λογικών όρων, όπως υποθετικοί («εάν ... τότε»), προτασιακοί σύνδεσμοι(«ή / και») ή ποσοδείκτες ("μερικές / όλες"), καθώς και έννοιες αλήθειας - ψεύδους με τρόπους που είναι συμβατοί με την ανάθεση τιμών αλήθειας όπως ορίζεται από τους πίνακες λογικής αλήθειας.

Η έρευνα διακρίνει δύο διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες στην προσπάθεια του επαγωγικού συλλογισμού:

Εικ. 1: Γνωστικές διαδικασίες κατά τον επαγωγικό συλλογισμό

Το παραπάνω διάγραμμα συμπυκνώνεται κατά τον Stenning στο: «αιτιολογία για ερμηνεία» και «αιτιολογία από την ερμηνεία »(Stenning & Monaghan,2004). Η προηγούμενη διαδικασία αφορά την υιοθέτηση από τους μαθητές της αφαιρετικής λογικής, για την ερμηνεία ενός έργου, τα οποία ερευνώνται για το πώς παράγουν συμπεράσματα. Η 2η διαδικασία αφορά τις γνώσεις των μαθη-τών για την παραγωγή αλυσίδας συμπερασμάτων που οδηγούν σε τελική απόδειξη, η οποία είναι ο στόχος του έργου (Stenning & Lambalgen, 2004).

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε δύο παραδείγματα, προκειμένου να γίνει σαφέστερος ο παραπάνω διαχωρισμός όσον αφορά στους δύο τρόπους αιτιολογίας στο μαθηματικό συλλογισμό: Στο 1ο παράδειγμα, ο μαθητής που αντιλαμβάνεται ότι, ο γ.τ των σημείων που “βλέπουν” το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπό ορθή γωνία θα είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ (εξαιρουμένων των άκρων Α και Β), θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι είναι η διαισθητική ιδέα της σχέσης εγγεγραμμένης με επίκεντρης γωνίας που διαμεσολαβεί στη συνέχεια, την ιδέα του κύκλου. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι πρόκειται για αιτιολογία από ερμηνεία. Για το ίδιο θέμα, μία 2η προσέγγιση θα ήταν η θεώρηση της σχέσης $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, που και πάλι οδηγεί σε εξίσωση κύκλου. Σε αυτή την

[3] Από το λεξικό της Νεοελληνικής Γλώσσας **Γ. Μπαμπινιώτη**:
Αιτιολογία: η εξήγηση, η παρουσίαση των λόγων που οδήγησαν σε μια κατάσταση, στη λήψη αποφάσεως, σε πράξη ή παράλειψη κλπ
αναγκαία/ανεπαρκής/απαράδεκτη/απαραίτητη/έξυπνη/ασαφής/άστοχη/εύλογη/πρόχειρη/συγκεκριμένη
Π.χ: η αιτιολογία της δικαστικής απόφασης ήταν...
Αιτιολόγηση: η εξήγηση της αιτίας
Π.χ: η βροχή ήταν η αιτία που παρατηρήθηκε μποτιλιάρισμα στο κέντρο της Αθήνας.

περίπτωση, είναι νομίζουμε εμφανής ο "εργαλειακός" τρόπος προσέγγισης και επομένως η ανάπτυξη αιτιολογίας για ερμηνεία.

Παράδειγμα **αιτιολογίας για ερμηνεία**:

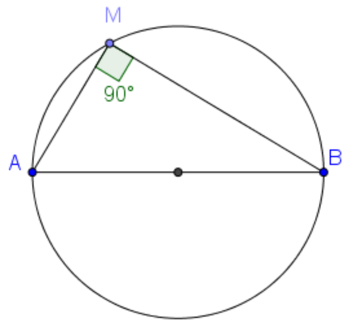
Έστω σταθερό ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία η γωνία ΑΜΒ είναι ορθή , είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ.

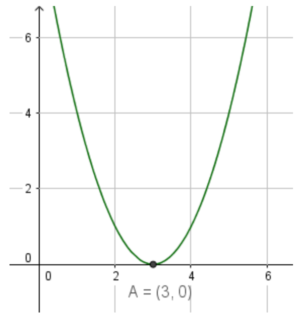
•Σε αυτή την περίπτωση η αιτιολογία αφορά **στην** ερμηνεία της ιδιότητας. (επειδή η γωνία ΑΜΒ είναι ορθή, άρα αυτή θα είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ).

Παράδειγμα **αιτιολογίας από ερμηνεία:**

Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου από τη γραφική παράσταση του σχήματος;

•Σε αυτή την περίπτωση η αιτιολογία προκύπτει **από** την ερμηνεία της σχετικής θέσης της παραβολής με τον άξονα xx΄. (αφού η παραβολή εφάπτεται του άξονα xx΄, η διακρίνουσα Δ του αντίστοιχου τριωνύμου θα είναι 0).



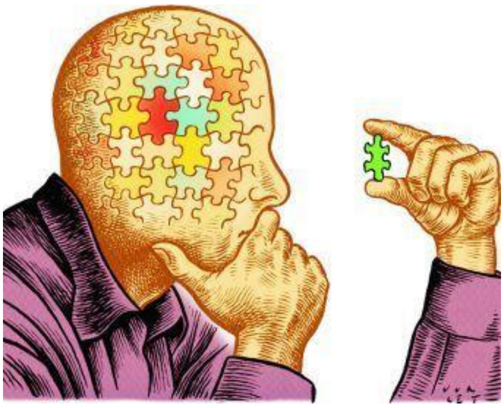


Εικ. 2: Παράδειγμα αιτιολογίας από και για ερμηνεία

Βλέπουμε συνεπώς ότι, για το ίδιο θέμα, υπάρχουν δύο τρόποι προσέγγισης, με διακριτά κατά τη γνώμη μας, ποιοτικά χαρακτηριστικά.

Στο 2^{ο} παράδειγμα, είναι νομίζουμε αρκετά πιο προφανές ότι, οι μαθητές που απαντούν για τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου ότι μηδενίζεται, θεωρούμε βάσιμο να υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούν αιτιολογία από ερμηνεία. Κι αυτό, γιατί είναι η ιδέα της εφαπτομένης σε καμπύλη που διαμεσολαβεί την αντίστοιχη ερμηνεία για τη διακρίνουσα του τριωνύμου, ακόμη και χωρίς τον τυπικό ορισμό της εφαπτομένης καμπύλης σε κάποιο σημείο της (τον οποίο δεν έχουν διδαχθεί ακόμη οι μαθητές της Α΄ και της Β΄ Λυκείου). Τί άλλο συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε, πέραν της λειτουργίας της διαισθητικής αντίληψης της συγκεκριμένης έννοιας και επομένως της εμφάνισης αιτιολογίας από ερμηνεία;

Από την άλλη πλευρά, τίθεται εύλογα το ερώτημα, «αν οι μαθητές στα προηγούμενα παραδείγματα κάνουν αιτιολογία ή αιτιολόγηση;» Το ερώτημα δεν είναι διόλου ρητορικό, δεδομένου ότι είναι συχνή η έκφραση σε μαθηματικά προβλήματα «να αιτιολογήσετε την απάντηση σας…». Ισχυριζόμαστε ότι, στην περίπτωση του 1^{ου} παραδείγματος, ο μαθητής που ενώ δεν υπάρχει καμία ένδειξη παρουσίας κύκλου, διαισθάνεται τη διαμεσολάβηση της σχέσης εγγεγραμμένης με την επίκεντρη γωνία και συμπεραίνει ότι ο γ.τ των σημείων Μ θα είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ, κάνει αιτιολογία και μάλιστα από ερμηνεία. Αιτιολόγηση θα έκανε στο αντίστροφο ακριβώς ερώτημα: δηλαδή αν δινόταν ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ και ζητούμενο ήταν το είδος της γωνίας Μ. Σε αυτή την περίπτωση, η απάντηση ότι η γωνία Μ είναι ορθή γιατί **είναι** εγγεγραμμένη σε διάμετρο, αποτελεί εξήγηση της αιτίας και επομένως πρόκειται για αιτιολόγηση. [4]



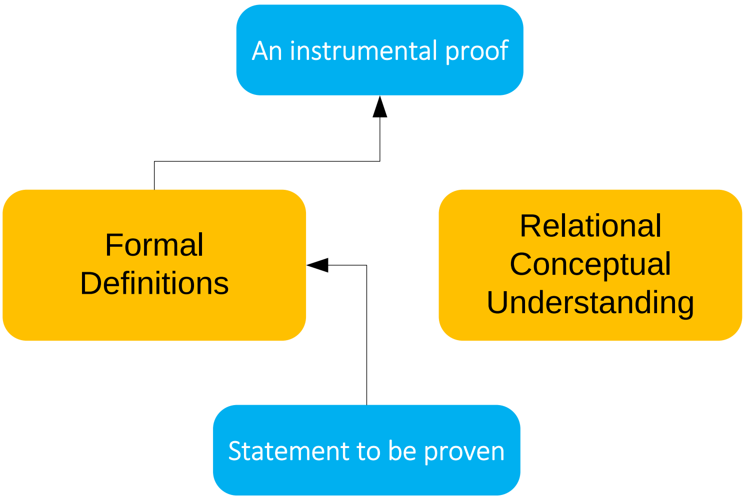
Εικ. 3: Αιτιολογία ή αιτιολόγηση;

Επιστρέφοντας στη βιβλιογραφία, σε έρευνες που έχουν διεξαχθεί, εμφανίζονται αρκετά γνωστικά θέματα που σχετίζονται με την «αιτιολογία για ερμηνεία» . Πολλοί φοιτητές οι οποίοι μαθαίνουν να αποδεικνύουν, δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν λογικομαθηματικούς όρους και έννοιες. Οι Balacheff (1988) και οι Harel & Sowder (1998) τεκμηριώνουν την έλλειψη της κεντρικής κατανόησης επαγωγικών διαδικασιών σε φοιτητές προ και κατά τη διάρκεια φοίτησης τους στα κολέγια. Μαθητές της δευτεροβάθμιας αντιμετωπίζουν επίσης δυσκολίες κατά την ερμηνεία των λογικών σχέσεων μεταξύ της προγενέ-στερης και της επακόλουθης λογικής επίπτωσης (Hoyles & Küchemann, 2003) [5]

Οι φοιτητές Πανεπιστημίου που είναι ικανοί στα μαθηματικά, φαίνεται να κατέχουν διαφορετικές αντιλήψεις μεταξύ τους των λογικών επιπτώσεων και της πραγματιστικής σημασίας των υποθέσεων (λογικών περιορισμών) (Durand-Guerrier, 2003). Τα γνωστικά αυτά ζητήματα μπορούν να ταξινομηθούν σε: (1) την πραγματιστική (ουσιαστική) ερμηνεία των συνδέσμων (συμπεριλαμβανομένων των υποθετικών «εάν ... τότε») και των ποσοδεικτών, και (2) η σύλληψη του "true" και "false" (Stenning & Lambalgen, 2004). Τα παραπάνω απεικονίζουν τη γνωστική πολυπλοκότητα στην προσπάθεια υιοθέτησης της αφαιρετικής λογικής από τους μαθητές. Από την άλλη πλευρά, τα παραδείγματα διαδικασιών «αιτιολόγησης από την ερμηνεία» δείχνουν στρατηγικές γνώσης και σημασιολογικής - συντακτικής παραγωγής απόδειξης (Weber, 2001? Weber & Alcock, 2004). Σε αυτές τις μελέτες, οι σπουδαστές φαίνεται να αντιμετωπίζουν την ερμηνεία ως συστατικό στοιχείο νοηματοδότησης προκειμένου να προχωρήσουν στην απόδειξη με λογικούς όρους και έννοιες.

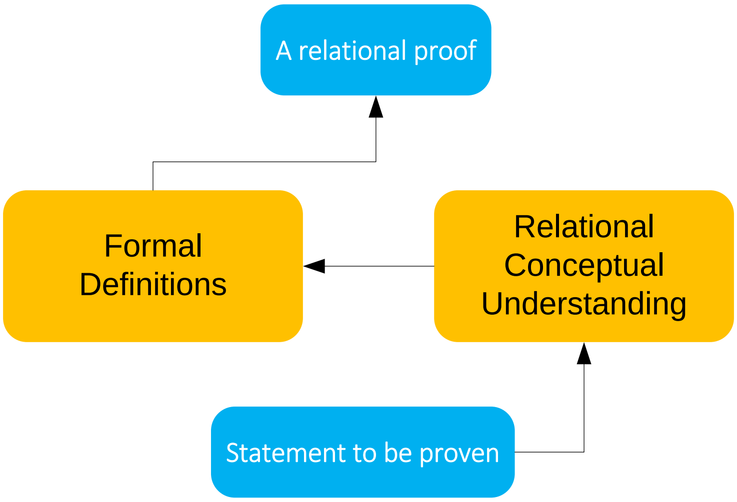
[4] Οι πολυπληθείς αναφορές ερευνητών στην αιτιολογία (reasoning) αναφορικά με το μαθηματικό συλλογισμό, είναι πιθανό να νοηματοδοτούν ένα ευρύτερο πεδίο εμφάνισης μαθηματικών συλλογισμών από εκείνο της αιτιολόγησης (justification).

[5] Για παράδειγμα, είναι συχνό το φαινόμενα στην πρόταση αν $x=1 \Leftrightarrow x^2=1$, οι μαθητές να δυσκολεύονται να αιτιολογήσουν γιατί είναι ψευδής. Άλλο σχετικό παράδειγμα, αν υπάρχει x ώστε f(x)=ημx, τότε εκλαμβάνουν αυτή τη σχέση ως τον τύπο της συνάρτησης f.



Εικ. 4: Εργαλειακή απόδειξη

Μια εργαλειακή απόδειξη είναι μια απόδειξη στην οποία κάποιος χρησιμοποιεί κυρίως ορισμούς και λογικούς χειρισμούς, χωρίς να αναφέρεται ή να βασίζεται (ή ενδεχομένως και να αντιλαμβάνεται) στη διαισθητική κατανόηση μιας έννοιας.



Εικ. 5: Σχεσιακή απόδειξη

Μια σχεσιακή απόδειξη είναι μια απόδειξη στην οποία κάποιος χρησιμοποιεί τη διαισθητική και σχεσιακή κατανόηση μιας έννοιας ως βάση για την κατασκευή ενός επιχειρήματος και στη συνέχεια μιας τυπικής απόδειξης.

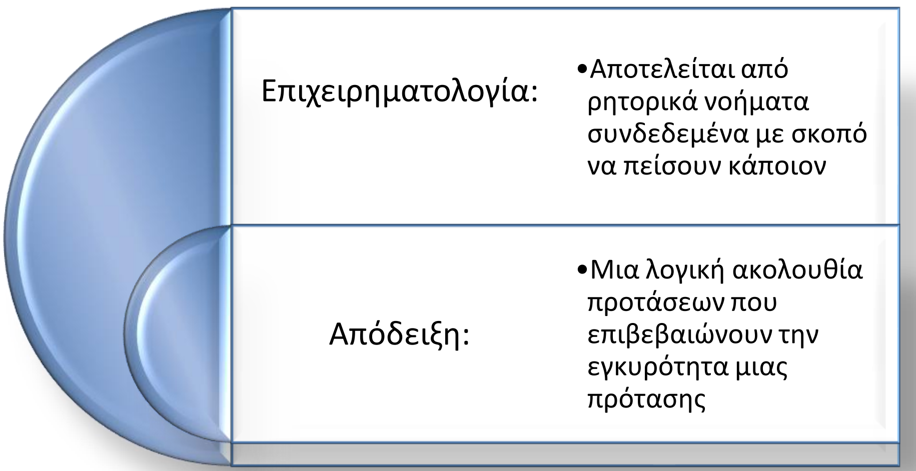
Μία εργαλειακή ή μία σχεσιακή απόδειξη, είναι ουσιαστικά αυτό που ο Vinner (1991) καλεί μια αμιγώς τυπική παραγωγική συλλογιστική και μία αμιγώς παραγωγική συλλογιστική μετά από διαισθητική σκέψη αντίστοιχα. Στο σημείο αυτό τέλος, φαίνεται να υπάρχει συμφωνία μεταξύ των Skemp και Weber τόσο ως προς το είδος κατανόησης στα μαθηματικά όσο και ως προς τις ακολουθούμενες διαδικασίες αιτιολογίας.

1.2 Επιχειρηματολογία και Απόδειξη στα Μαθηματικά

1.2.1 Γνωστικές και γλωσσικές προκλήσεις στην κατανόηση της απόδειξης

Η απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική μορφή της επιχειρηματολογίας στην οποία η αφαιρετική λογική λειτουργεί ως εγγύηση που δικαιολογεί τους μαθηματικούς ισχυρισμούς (Selden & Selden,2003). Στην προσπάθεια να αποδείξει ένας μαθητής μαθηματικές προτάσεις, πρέπει να παρακολουθήσει και να κατανοήσει τον επαγωγικό και λογικό χαρακτήρα της πρότασης. Αυτό απαιτεί από τους μαθητές να ερμηνεύουν και να υιοθετούν λογικούς περιορισμούς στον τρόπο επεξεργασίας τους, όπως αυτές υπαγορεύονται στην παραγωγική λογική. Αν (όμως) βλέπουμε την απόδειξη ως μια διαδικασία μαθηματικής επίλυσης προβλημάτων, τότε τα επιχειρήματα που παράγονται από τους μαθητές θα πρέπει να τα εκλαμβάνουμε ως απόπειρες λύσης τους που απορρέουν από το συμπέρασμα που απαιτείται από την εργασία.

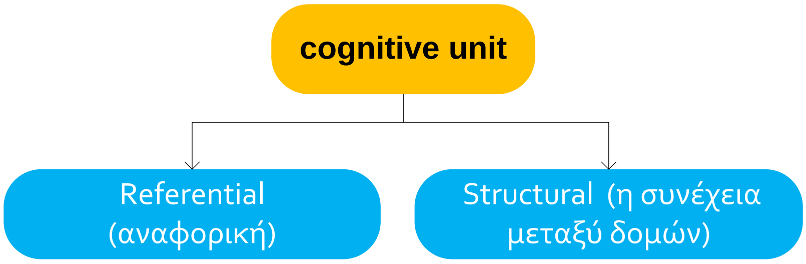
Η επιχειρηματολογία και η απόδειξη δεν είναι μεμονωμένες διαδικασίες για ειδικές χρονικές στιγμές αλλά πρέπει να είναι ένα συνεχές – φυσιολογικό μέρος της διδασκαλίας στην τάξη , όποιο κι αν είναι το θέμα που μελετάται (NCTM,2000 p.342). Λαμβάνοντας υπόψη τη διπλή φύση των μαθηματικών ως (μαθηματική) διαίσθηση (τόσο ως προς τη σύλληψη μιας έννοιας όσο και ως προς την κατανόηση της) αλλά και ως μίας συστημικής σειράς λογικών σχέσεων, γίνεται αντιληπτός ο ρόλος και η σημασία της επιχειρηματολογίας. Αρκετοί ερευνητές τοποθετούν τη σημασία της επιχειρηματολογίας στον πυρήνα της παράγωγης γνώσης και θεωρούν ότι η επιχειρηματολογία για την εικασία, αποτελεί το αντίστοιχο της απόδειξης για το θεώρημα (Balacheff, 1999). Ο ίδιος προκειμένου να ξεπεραστούν τα επιστημολογικά εμπόδια ανάμεσα στην επιχειρηματολογία και στην απόδειξη προτείνει ότι ο μαθητής πρέπει να κατανοήσει τη διαφορά ανάμεσα στα δύο χωρίς να απορρίπτει κάποιο από τα δύο (Balacheff, 1999) [6]



Εικ. 6: Σχέση επιχειρηματολογίας και απόδειξης

[6] Θα συμπληρώναμε και ο Εκπαιδευτικός(…)

Η ιδέα του “cognitive unity” (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) είναι δυνατό να αμβλύνει τις όψιμες αντιπαραθέσεις ανάμεσα στα μέλη της εκπαιδευτικής κοινότητας ως προς τη συμβολή τους στην αιτιολογία όσον αφορά στο μαθηματικό συλλογισμό. Πρόκειται για την ιδέα ότι η αντίληψη της διαφοράς μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης μπορεί να έρθει ως πιθανή συνέχεια και όχι ως σχίσμα μεταξύ τους. Προτείνεται το παρακάτω σχήμα με συγκέντρωση στις αναλογίες κάθε παράγοντα χωρίς να αφήνουμε στην άκρη τις διαφορές τους:



Εικ. 7: Δομική ενότητα και νοητική σύνδεση επιχειρηματολογίας και απόδειξης

1.2.2 Η μετάβαση από την εικασία στην τυπική απόδειξη

Χαρακτηριστική η περιγραφή ερευνητών (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) ως προς το στάδιο μεταφοράς από τη διατύπωση μιας εικασίας στην τυπική της απόδειξη: «Κατά τη διάρκεια της παραγωγής μιας εικασίας, ο μαθητής /τρια εργάζεται προοδευτικά στη δήλωση του / της μέσα από μια έντονα διαλεκτικά λειτουργική διαδικασία, ώστε να αναμίξει την εικασία του/της με την αιτιολόγηση της αληθοφάνειας των επιλογών του / της. Κατά τη διάρκεια του επόμενου σταδίου απόδειξης της δήλωσης, ο/η φοιτητής/τρια συνδέεται με αυτή τη διαδικασία με συνεκτικό τρόπο, οργανώνοντας μερικά από τα προηγουμένως παραγόμενα επιχειρήματα σύμφωνα με μια λογική αλυσίδα.» Το φαινόμενο αυτό αναφέρεται ως «cognitive unity».

Σε άλλες έρευνες γίνεται αναφορά στις στρατηγικές και στο περιεχόμενο των γνώσεων των μαθητών που επιστρατεύουν για την επιτυχή παραγωγή της λύσης (Polya, 1954? Schoenfeld,1985? Weber, 2001). Ωστόσο, αποδεχόμαστε ότι η προσέγγιση και η ερμηνεία των μαθητών του βαθύτερου λογικού χαρακτήρα που απαιτείται για την απόδειξη, παίζει καθοριστικό ρόλο στη δόμηση των επιχειρημάτων τους κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας. Με άλλα λόγια, αν τα επιχειρήματά τους χαρακτηρίζονται ως απόπειρες απόδειξης, αυτό εξαρτάται επίσης από την προσωπική τους ανακατασκευή (construal) των λογικών περιορισμών που επιβάλλονται από το πρόβλημα.

Πολλές έρευνες που προσανατολίζονται στη μελέτη αποδείξεων των φοιτητών, έχουν εστιάσει στη σημασία των συστημάτων απόδειξης (Balacheff, 1988? Harel & Sowder, 1998), καθώς και των στρατηγικών γνώσεων (Schoenfeld, 1985? Weber, 2001) και τέλος στο σχετικό και απαραίτητο περιεχόμενο γνώσης για την απόδειξη (Weber & Alcock, 2004). Από την άλλη πλευρά, φαίνεται να τυγχάνει λιγότερης προσοχής η μελέτη των ερμηνειών των μαθητών καθώς και η υιοθέτηση λογικών περιορισμών στη διαδικασία αποδείξεών τους. Ορισμένες έρευνες γύρω από αυτό το θέμα αναφέρονται στην έλλειψη εμπειρίας στην υιοθέτηση απαγωγικής λογικής ως κύριο περιοριστικό παράγοντα, ειδικά όταν αναφερόμαστε σε αρχάριους στην απόδειξη.

1.3 Εικασία και επιχειρηματολογία

Από πολλούς ερευνητές η διατύπωση εικασιών, θεωρείται το πρωταρχικό στάδιο για να παράξει κάποιος νέες ανακαλύψεις στα μαθηματικά (Lakatos, 1976). Η εικασία αποτελεί την αφορμή, το εναρκτήριο στάδιο, ώστε να μπορεί κάποιος να οδηγηθεί σε άτυπες αρχικά αιτιολογήσεις και στη συνέχεια να θέσει τις βάσεις με στοιχεία παραγωγικής απόδειξης (από διπλ. Π. Στρούβαλη, 2016).

Σύμφωνα με ορισμένους ερευνητές, η εικασία και η απόδειξη είναι οι δύο όψεις ενός νομίσματος καθώς χωρίς τη διατύπωση κάποιας εικασίας, δεν υπάρχει κάτι για να αποδειχθεί. Αντίστροφα, αν δεν ακολουθεί το στάδιο της απόδειξης, τότε δεν υπάρχει ουσιαστικός λόγος να διατυπώνονται εικασίες. [7]

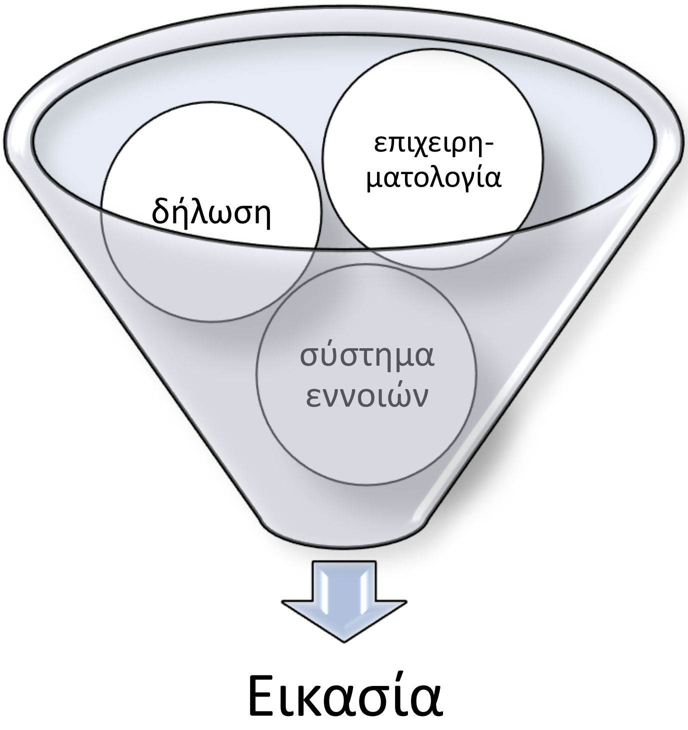
Στην έρευνα βέβαια, το βάρος πέφτει προς την πλευρά της απόδειξης μιας εικασίας και όχι στην εικασία καθεαυτή, μια που είναι πιθανό αυτή να μην είναι αληθής. Η εικασία δεν είναι απλώς μία πίστη ότι κάτι ισχύει αλλά πρόκειται για μία άποψη, μία θέση: «στηριζόμενοι σε παρατηρήσεις ή/και σε νοητικά πειράματα, και με εργαλείο τη κοινή λογική, άτυπα και πολλές φορές μάλιστα μη συνειδητά, οδηγούμαστε σε ευλογοφανείς απόψεις, δηλαδή σε εικασίες [...]. Οι Harel & Sowder ορίζουν την εικασία ως «μια παρατήρηση που κάνει ένα άτομο που έχει αμφιβολίες για την αλήθεια της. Η παρατήρηση του ατόμου παύει να είναι εικασία και γίνεται γεγονός τη στιγμή που το άτομο είναι σίγουρο για την αλήθεια της».

Από ορισμένους ερευνητές τίθεται η ανάγκη για τη διάκριση των σταδίων που αφορούν τη διαδικασία διατύπωσης μιας εικασίας και τη διαδικασία της απόδειξης. Η σκοπιμότητα αυτής της διάκρισης έγκειται στην ανάγκη να μελετηθούν οι (πιθανές) ασυνέχειες μεταξύ της δομής της επιχειρηματολογίας που χρησιμοποιείται κατά τη διαδικασία παραγωγής εικασιών και των αποδεικτικών χειρισμών που εν συνεχεία παράγονται για την απόδειξη της (Pedemonte, 2007). Κατά την ίδια ερευνήτρια, «η ασυνέχεια αυτή μπορεί να γίνει ένα εμπόδιο για τους μαθητές καθώς προσπαθούν να κατασκευάσουν την απόδειξη, τονίζοντας τη σημαντικότητα της "δομικής ενότητας των επιχειρημάτων"».

Από άλλους ερευνητές (Boero κ.ά στο Baccaglini-Frank & Mariotti, 2009) τονίζεται ότι κατά τη διάρκεια της παραγωγής μίας εικασίας, ο μαθητής επεξεργάζεται σταδιακά τη δήλωσή του μέσα από μια έντονη δραστηριότητα επιχειρηματολογίας, λειτουργικά αναμιγμένη με την αιτιολόγηση της αληθοφάνειας των επιλογών του: κατά τη διάρκεια του αποδεικτικού σταδίου που ακολουθεί, ο μαθητής ολοκληρώνει τη διαδικασία του με ένα συνεκτικό τρόπο, οργανώνοντας μερικές από τις αιτιολογήσεις, επιχειρήματα, που παράγονται κατά τη διάρκεια της κατασκευής της δήλωσης σύμφωνα με μια λογική αλυσίδα.

Έτσι, η εικασία ορίζεται ως το τρίπτυχο: μία δήλωση, μια επιχειρηματολογία και ένα σύστημα εννοιών (Balacheff & Margolinas, 2005).

[7] Η καταγραφή της συγκεκριμένης θέσης δεν δηλώνει και αποδοχή από τον υπογράφοντα. Είναι προφανές ότι πολλά δεν θα είχαν συμβεί στα μαθηματικά, αν εικασίες ή/και θεωρήματα (για παράδειγμα το Θ. Fermat) δεν είχαν διατυπωθεί ανεπίσημα, ανεξάρτητα από την ύπαρξη ή όχι της τυπικής απόδειξής τους. Είναι γνωστό πως αρκετές εικασίες ακόμη και ως απλοί ισχυρισμοί, έδωσαν αφορμή για το «άνοιγμα» νέων πεδίων στη μαθηματική επιστήμη κατά την προσπάθεια απόδειξής τους.



Εικ. 8: Εικασία - Τρίπτυχο σύνθεσης

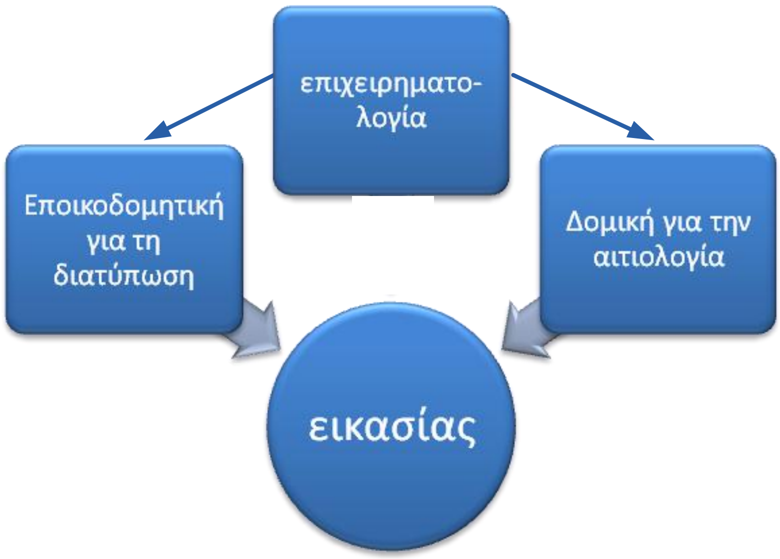
Η Pedemonte (2007) φαίνεται να διαχωρίζει τη θέση της από αυτό το τρίπτυχο, αναφέροντας ότι η εικασία δεν είναι πάντα το αποτέλεσμα μίας επιχειρηματολογίας. Σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να θεωρηθεί ως “γεγονός” που προέρχεται απευθείας από ένα σχέδιο ή από τη διαίσθηση ή κάτι ανάλογο. Σε μια τέτοια περίπτωση δεν υπάρχει ρητή επιχειρηματολογία που να αιτιολογεί αυτό το γεγονός.

1.3.1 Συσχέτιση επιχειρηματολογίας & εικασίας

Η επιχειρηματολογία μπορεί να συσχετισθεί με την εικασία με δύο τρόπους: με την εποικοδομητική επιχειρηματολογία (constructive argumentation), η οποία συμβάλλει στην κατασκευή μιας εικασίας και άρα προηγείται αυτής και με τη δομική επιχειρηματολογία (structurant argumentation), η οποία αιτιολογεί μία εικασία και άρα έπεται αυτής (Pedemonte, 2007). [8]

Οι Pedemonte και Buchbinder αναφέρουν ότι συνήθως είναι παρόντα και τα δύο είδη επιχειρηματολογίας κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Πολλές φορές η απόδειξη συμπίπτει με τη δομική επιχειρηματολογία ή, αν δεν συμβαίνει αυτό, τότε έχει πολλά από τα στοιχεία της. Επιπλέον, όταν κατά την επιχειρηματολογία κατασκευάζεται ταυτόχρονα και αιτιολογείται η εικασία, τότε αυτή χαρακτηρίζεται ως κατασκευαστική και ως δομική.

[8] Σχόλιο γράφοντος: Είναι αρκετά ασφαλές να υποθέσουμε ότι αυτά τα δύο είδη επιχειρηματολογίας, είναι δυνατό να αποτελέσουν (ή/ και να αποτελούν) ένα είδος μηχανισμών για την παραγωγή αιτιολογίας από ή για ερμηνεία αντίστοιχα.



Εικ. 9: Είδη επιχειρηματολογίας

Ορισμένοι ερευνητές από μια άλλη θεώρηση, λαμβάνουν την απόδειξη στα μαθηματικά ως μια παραγωγική διαδικασία και διαχωρίζουν αυτή τη διαδικασία από τις εξερευνητικές διαδικασίες καθώς και από τις διαδικασίες εικασιών, οι οποίες συχνά χαρακτηρίζονται από απαγωγική επιχειρηματολογία. Οι Arzarello κ.ά. (1998) ισχυρίζονται πως ο απαγωγικός τύπος συλλογισμού είναι κρίσιμος για την παραγωγή εικασιών (βλ. και σελ.32). Επίσης, οι Baccaglini-Frank & Mariotti (2009) αναφέρουν πως η απαγωγή φαίνεται να είναι το κλειδί που επιτρέπει στους λύτες να γράψουν εικασίες σε μία λογική μορφή «αν … τότε». Πρόκειται για το στάδιο όπου μια δήλωση είναι πλέον έτοιμη να αποδειχθεί. Η απαγωγή περιγράφεται ως ένα απαραίτητο τύπο συλλογισμού κατά τη διάρκεια του οποίου διατυπώνονται οι εικασίες και στη συνέχεια ακολουθεί η τελική μετάβαση προς την απόδειξη. Ωστόσο, φαίνεται να τονίζεται η ύπαρξη κάποιου συνθετότερου φαινομένου ανάμεσα στη χρήση της απαγωγής στη διαδικασία επιχειρηματολογίας και στην κατασκευή παραγωγικής απόδειξης (Pedemonte & Reid, 2011).

Σε κάθε περίπτωση όμως διακρίνουμε ότι η σχέση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη σχέση ανάμεσα στην εικασία και στο έγκυρο επιχείρημα.[9]

Όμως η Pedemonte (2007) σημειώνει πως για τη σύγκριση ανάμεσα στην επιχειρηματολογία που συνδέεται μέσω μιας εικασίας με την απόδειξη ως προϊόν στην εκπαιδευτική έρευνα, είναι σημαντικό να υπάρχει διάκριση μεταξύ τους ώστε να είναι διακριτή η φάση κατά την οποία ξεκινάει η αποδεικτική φάση για τους μαθητές. Κατά την ίδια, είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στο θεώρημα [10] και την εικασία (Σχήμα 4), η οποία μπορεί να φανεί χρήσιμη για τη διάκριση της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης (Pedemonte, 2007). Όπως εύστοχα επισημαίνει ο Balacheff, η επιχειρηματολογία είναι για την εικασία ότι είναι και το μαθηματικό θεώρημα για την απόδειξη. Στην πραγματικότητα, μία εικασία μπορεί να προκύψει χωρίς την παρουσία οποιουδήποτε είδους επιχειρηματολογίας, προερχόμενη απευθείας από ένα σχήμα ή τη

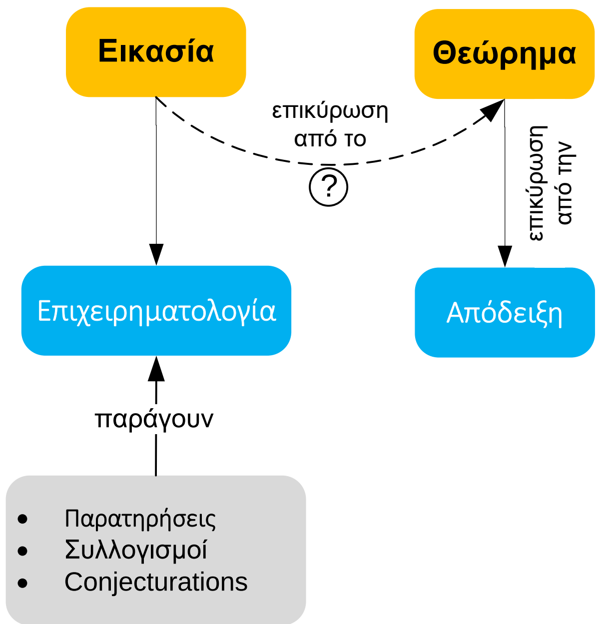
[9] Σημειώνουμε τη διαφορά ανάμεσα στην εγκυρότητα που αποτελεί μορφή επιχειρηματολογίας (από ορθές προκείμενες προτάσεις προκύπτει αληθές συμπέρασμα) από την ορθότητα του συμπεράσματος (που προϋποθέτει την ορθότητα των προκείμενων προτάσεων).

[10] Το θεώρημα ορίζεται ως ένα σύστημα τριών αλληλένδετων συνιστωσών: μια δήλωση, μία απόδειξη και μία μαθηματική θεωρία μέσα από την οποία η απόδειξη έχει νόημα (Mariotti, 2012).

διαίσθηση. Ιδανικά, η εικασία είναι μια δήλωση που συνδέεται με ένα σύνολο εννοιών και ορισμών μέσα στο οποίο η δήλωση είναι δυνητικά αληθής όταν επιτρέπεται (είναι δυνατή) η κατασκευή ενός επιχειρήματος που να την ικανοποιεί. Όταν κάποιο μαθηματικό θεώρημα επιτρέπει την κατασκευή μιας απόδειξης που να επαληθεύει μια εικασία, τότε αυτή μετατρέπεται σε ένα έγκυρο επιχείρημα. Συνεπώς, όταν μία δήλωση που εκφράζει μία εικασία επικυρώνεται μέσα από μια μαθηματική θεωρία, τότε μία απόδειξη έχει δομηθεί.

Από τα προαναφερόμενα προκύπτει ότι το στάδιο κατά το οποίο διατυπώνεται μια εικασία αποτελεί μια βασική δραστηριότητα σε νοήματα. Χαρακτηριστικά η Mariotti (2012, σελ.166) αναφέρει: «Το να εικάζεις αποτελεί μία βασική δραστηριότητα στην οποία η επιχειρηματολογία και η απόδειξη πρέπει να συνδέονται…».

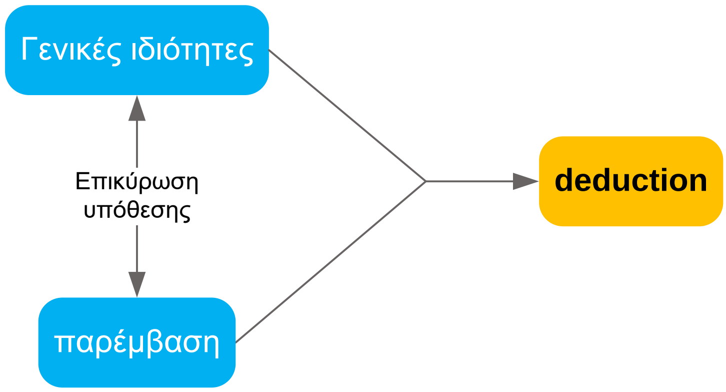
Αρκετοί ερευνητές θεωρούν ότι η απόδειξη είναι δυνατό να γίνει περισσότερο προσιτή στους μαθητές αν έχουν προηγηθεί στάδια επιχειρηματολογικής δραστηριότητας από τους ίδιους προκειμένου να αναπτυχθεί μια εικασία. Γενικότερα, θεωρείται πως η μετάβαση από την εικασία στην απόδειξη γίνεται μέσω της επιχειρηματολογίας και επομένως έχει νόημα η μελέτη της απόδειξης όχι μόνο ως ενός τελικού προϊόντος, αλλά και ως το αποτέλεσμα των ενδιάμεσων σταδίων που την απαρτίζουν και που (πρέπει να) αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι αυτής.



Εικ. 10: Εικασία & Επιχειρηματολογία / Θεώρημα και Απόδειξη

1.4 Παραγωγικό επιχείρημα

Με τον όρο «παραγωγικό επιχείρημα» εννοούμε αυτό που βασίζεται σε επαγωγικό συλλογισμό και το οποίο έχει μια τριμερή δομή που περιλαμβάνει μια προϋπόθεση, μια γενική ιδιότητα και μια συνοπτική παρέμβαση. Σχηματικά είναι:



Εικ. 11: Παραγωγικό επιχείρημα

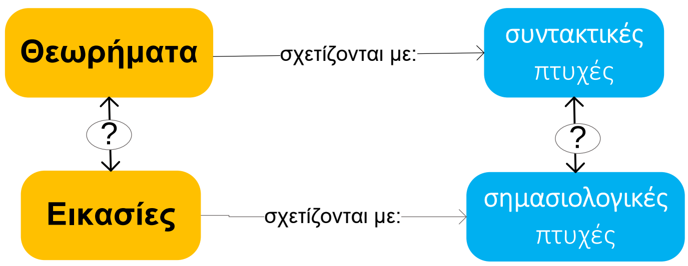
Θεωρώντας την έννοια της απόδειξης ως κεντρικό θέμα, τότε ανατρέχοντας στη γνωστική ενότητα της έννοιας των θεωρημάτων (Boero, Garuti & Mariotti, 1996), βλέπουμε ότι αυτή υποδηλώνει την ύπαρξη μιας συνέχειας ανάμεσα στην παραγωγή μιας εικασίας και την κατασκευή της απόδειξης της.

Σε πρώτο στάδιο, οι εξερευνήσεις σε αυτή τη συνεχή διαδικασία θα επιτρέψουν την παραγωγή μιας δήλωσης (υπό τη μορφή εικασίας) για επικύρωση πέραν των επιχειρημάτων που μπορεί να χρησιμοποιούνται στη διαδικασία. Σε αυτό το στάδιο (που ισοδυναμεί με την προαναφερθείσα Γεωμετρία ΙΙ) δεν παράγεται –κατ΄ ανάγκη- μια επίσημη απόδειξη. Είναι όμως δυνατό, το παραγωγικό της σκεπτικό να περιέχει πολλές πτυχές για την κατασκευή της μαθηματικής απόδειξης »(op.cit. σελίδα 126).

Αρκετοί ερευνητές συνδυάζουν τα κατά Kusniak επίπεδα Γεωμετρίας θεωρώντας ότι συμπίπτουν αρκετά με τη γνωστική ανάπτυξη των ατόμων, ώστε να επανεξετάσουν την ιδέα των θεσμικών πρακτικών γύρω από τη γεωμετρική απόδειξη (Godino & Batanero, 1994).

Σε αυτές τις περιπτώσεις γίνεται σαφής διάκριση ανάμεσα στην αυστηρότητα ως λειτουργικό άξονα και την ανάγκη απόκτησης μαθηματικού νοήματος που εφαρμόζεται στη διαδικασία της απόδειξης. Αναφέρεται μάλιστα χαρακτηριστικά ο ρόλος του δασκάλου ως μεσολαβητή στη διαδικασία της γνωστικής ενότητας, ο οποίος ενθαρρύνοντας τις εικασίες των μαθητών του φέρνει με αυτό τον τρόπο πιο κοντά στην επαγωγική διαδικασία και στο τυπικό μαθηματικό συλλογισμό.

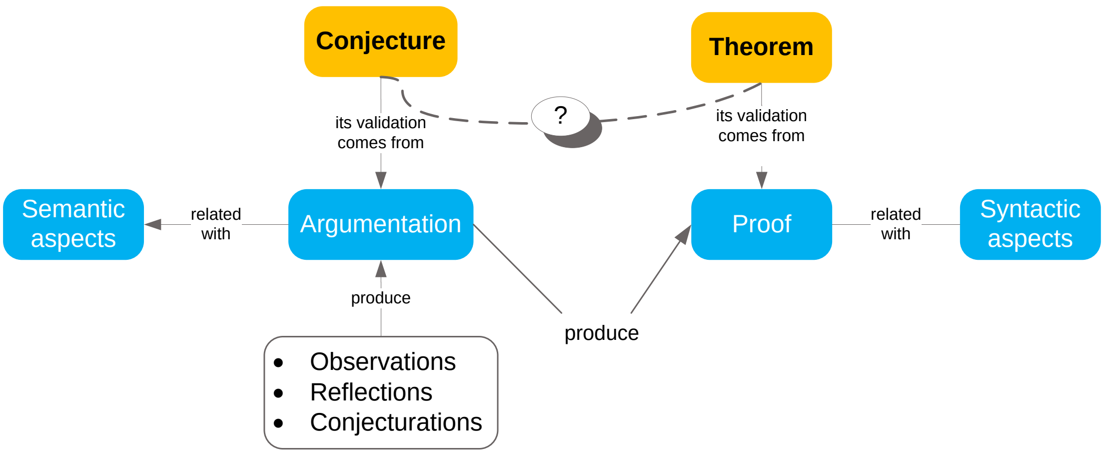
Σε αρκετές έρευνες επισημαίνεται η απαραίτητη παρουσία των εικασιών στη διαδρομή για την απόδειξη μιας δήλωσης, γιατί με αυτόν τον τρόπο αυξάνεται η ανάγκη για επικύρωση. Οι εικασίες και τα θεωρήματα είναι δηλώσεις με επιστημονική αξία και θεωρητικό στάτους. Εντοπίζεται μια σημαντική διαφοροποίηση ως προς το στάτους κάθε μιας κατάστασης:



Εικ. 12: Διαφοροποίηση του στάτους θεωρήματος - εικασίας

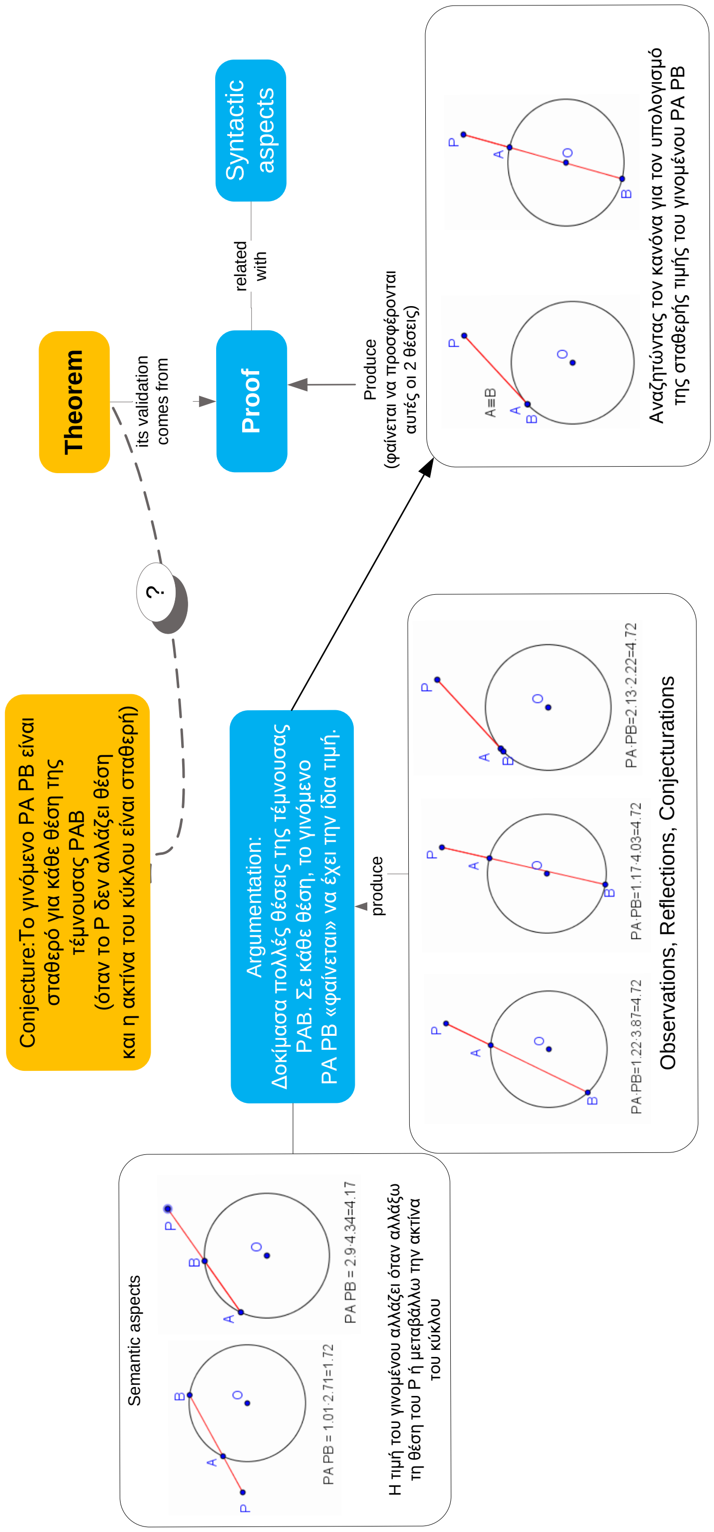
Με άλλα λόγια, οι διαφορές στη σημασιολογική και συντακτική πτυχή δεν είναι εμφανείς στις ίδιες δηλώσεις, αλλά αυτές οι πτυχές πλαισιώνουν την αντίστοιχη μέθοδο επικύρωσης. Η αλήθεια της εικασίας βασίζεται στην καταλληλότητα και στην "ισχύ". Στην πραγματικότητα, περιέχει ένα υψηλό βαθμό διαισθητικής πεποίθησης εκ μέρους του ατόμου που είναι πεπεισμένο ότι η εικασία είναι "αληθής". Στην πραγματικότητα ωστόσο, υπάρχει μόνο μία αποδοχή για το τι "μπορεί να είναι αλήθεια".

Οι Víctor Larios-Osorio και Claudia Acuña-Soto (ICMI Study 19 – 2009 σελ.2-59) προτείνουν το παρακάτω διάγραμμα για τη σχέση μεταξύ εικασίας και θεωρήματος:



Εικ. 13: Σχέση Εικασίας - Θεωρήματος

Οι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι η θέση της γνωστικής ενότητας των θεωρημάτων είναι συνεπής με αυτό το σχήμα, αφού οι εικασίες ως προϊόν εξερεύνησης γίνονται δεκτές ή απορρίπτονται μέσω επιχειρηματολογίας και επιτρέπουν την παρατήρηση και την κατασκευή της απόδειξης. Όταν η απόδειξη έχει πραγματοποιηθεί, τότε η δήλωση που ξεκίνησε ως μια εικασία γίνεται ένα θεώρημα. Στα επόμενα δίνουμε ένα παράδειγμα λειτουργίας του παραπάνω διαγράμματος που αφορά στην εύρεση ειδικών θέσεων της τέμνουσας PAB ενός κύκλου (O,R) προκειμένου να προκύψει η απόδειξη του Θεωρήματος που αφορά στις τέμνουσες κύκλου για τη σταθερή τιμή του γινομένου $PA \cdot PB$.



Εικ. 14:Παράδειγμα σχέσης εικασίας – επιχειρηματολογίας – απόδειξης

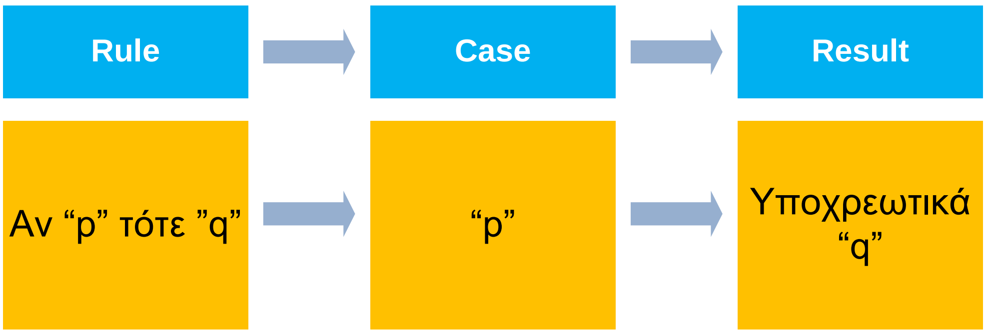
Από την έρευνα προκύπτει επίσης, ότι ενώ υπάρχει γνωστική συνέχεια στις διαδικασίες οικοδόμησης εικασιών και απόδειξής τους, υπάρχει (και) σε σημασιολογικούς όρους (Pedemonte, 2001), όχι τόσο στις διαρθρωτικές (Duval, 1999) και επιστημολογικές πτυχές (Arzarello, Olivero, Robutti & Paola, 1999), αφού οι μορφές της δομής καθεμιάς από αυτές τις διεργασίες και τα αποτελέσματα τους είναι διαφορετικά.

Ερχόμαστε τώρα στο ρόλο των DGEs ως προς τους τομείς της επιχειρηματολογίας και της διαμόρφωσης εννοιολογικού εδάφους πριν την τυπική απόδειξη μιας εικασίας που είναι πιθανό να αποτελέσει θεώρημα. Είναι αναμφισβήτητο ότι μπορεί να παρέχει στους φοιτητές τα εργαλεία (γλωσσικά, γραφικά και ακόμα επαγωγικά) για να εκφράσουν την απόδειξη ή τις απαντήσεις, δεδομένου ότι είναι ένας σημειωτικός διαμεσολαβητής που επηρεάζει την απόκτηση γνώσεων, συμπεριλαμβανομένης της γλώσσας και της επιχειρηματολογίας (Larios, 2005). Το γεγονός αυτό προκαλεί κάποιες παρατηρήσεις ή αιτιολογήσεις που παραπέμπουν άμεσα, είτε ρητά είτε σιωπηρά, στο λογισμικό (εντολές, ή/και χαρακτηριστικά της αρχιτεκτονικής του). Αυτό υποδηλώνει μια πιθανή ανάγκη να δοθεί έμφαση στις παρατηρήσεις και αποδείξεις των μαθητών με χρήση ψηφιακών εργαλείων. Με άλλα λόγια θα πρέπει να υπάρξει διάκριση μεταξύ των χαρακτηριστικών του λογισμικού και των αμιγώς γεωμετρικών ιδιοτήτων. Αυτό με τη σειρά του, προτάσσει ένα «ξεκαθάρισμα» των δηλώσεων που μπορούν να προταθούν από τους μαθητές όταν εργάζονται σε DGEs.

Στα επόμενα δίνεται μια κατηγοριοποίηση των βασικών τύπων συλλογιστικής πορείας και ειδών συμπερασματολογίας κατά τη διαδικασία απόδειξης ή/και επιχειρηματολογίας στα Μαθηματικά. Στην εργασία που ακολουθεί θα καταβληθεί προσπάθεια ώστε να προκληθούν και οι τρεις τύποι συλλογιστικής μέσω του σχεδιασμού κατάλληλου e-δομήματος.

1.4.1 Παραγωγικός συλλογισμός (Deduction)

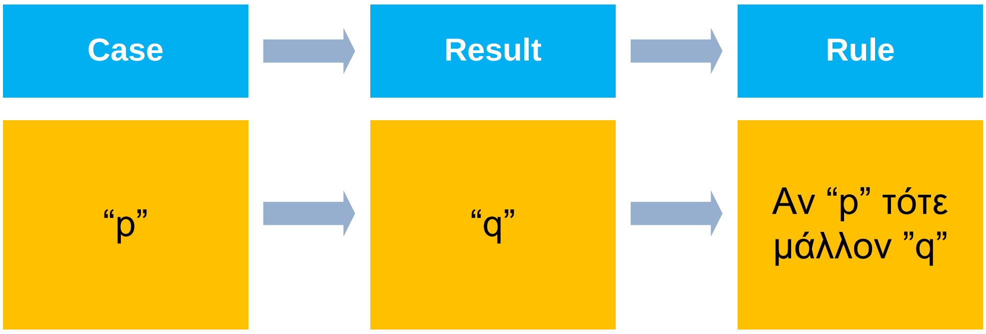
Η «q» συνάγεται από την «p» ως τυπική λογική συνέπειά του και αν «p» αληθής τότε αναγκαστικά/υποχρεωτικά και «q» αληθής.



Εικ. 15:Παραγωγικός τρόπος σκέψης (Deduction)

1.4.2 Επαγωγικός συλλογισμός (Induction)

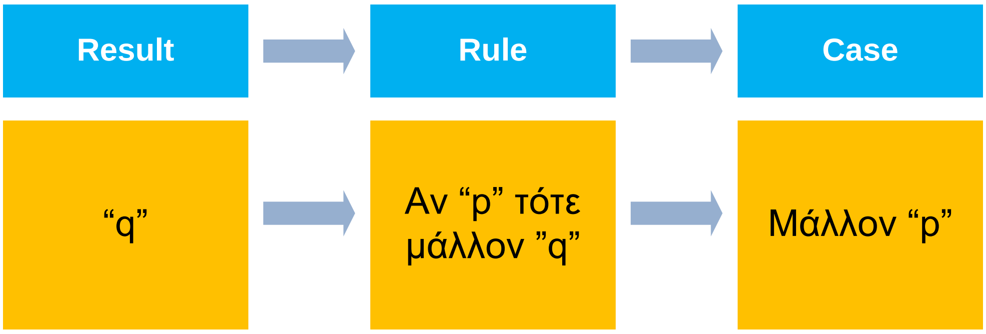
Η «q» συνάγεται από την «p», όχι ως αναγκαστική συνέπειά της αλλά το «p» είναι καλή αιτία για την «q», αλλά δεν την εξασφαλίζει απαραίτητα.



Εικ. 16: Επαγωγικός τρόπος σκέψης (Induction)

1.4.3 Απαγωγικός συλλογισμός (Abduction)

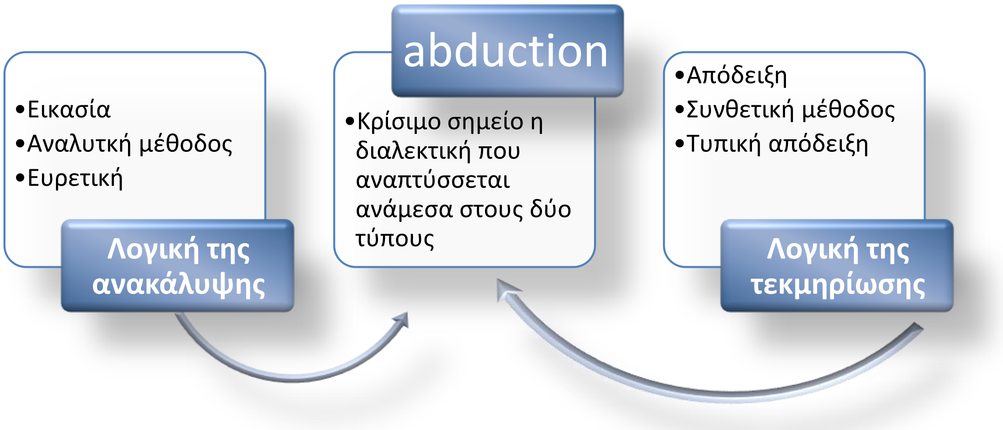
Η «p» συνάγεται ως η καλύτερη, μεταξύ άλλων, εξήγηση για την «q» - τυπικά ισοδύναμη με τη λογική πλάνη “Post hoc ergo propter hoc”: κατόπιν τούτου, άρα εξ αιτίας τούτου



Εικ. 17: Απαγωγικός τρόπος σκέψης (Abduction)

Charles Sanders Peirce, 1839 – 1914: Αμερικανός φιλόσοφος, επιστήμονας της λογικής, μαθηματικός, γνωστός και ως "ο πατέρας του πραγματισμού". Επινόησε τον όρο «**απαγωγή**» για να περιγράψει μια συλλογιστική, μη-παραγωγικού, αλλά και μη-επαγωγικού τύπου

Στη δραστηριότητα που θα ακολουθήσει, επιχειρούμε να αναδείξουμε τη συμβολή του χρησιμοποιούμενου e-δομήματος για την πρόκληση και των τριών κατηγοριών συλλογιστικής σκέψης. Επιπλέον θεωρούμε σημαντική την αναφορά στην ανακαλυπτική λογική και στη λογική της τεκμηρίωσης, όπου κρίσιμο σημείο η άτυπα εξελισσόμενη διαλεκτική ανάμεσα στα δύο είδη προκειμένου να προκληθεί ο απαγωγικός συλλογισμός.



Εικ. 18: Η ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης – Η φύση της μαθηματικής ανακάλυψης & δημιουργικότητας

Μέσω της εργασίας, επιχειρείται η χρήση του περιβάλλοντος των DGEs ως διαμεσολαβητικού εργαλείου, προκειμένου να προκληθούν στους μαθητές εκείνες οι αναπαραστάσεις που θα συντελέσουν στη λογική κυρίως της ανακάλυψης αλγεβρικών και γεωμετρικών ιδιοτήτων. Στη συνέχεια μέσω αντίστοιχου φύλλου εργασίας, επιχειρείται η νοηματοδότηση αλγεβρικών και γεωμετρικών σχέσεων που εμφανίζονται στο e-δόμημα, ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν στην τεκμηρίωση μέσω τυπικής απόδειξης των ισχυρισμών τους. Να σημειωθεί ότι έχουν ληφθεί υπόψη οι εγγενείς περιορισμοί αυτών των περιβαλλόντων ως προς τη χρήση τους όπως για παράδειγμα η αδυναμία αποδεικτικής δυνατότητας. Τουναντίον, επιχειρείται να αναδειχθεί η αξία της απόδειξης ως μέσου τεκμηρίωσης των ισχυρισμών που θα διατυπωθούν εξαιτίας της χρήσης τους.

1.5 Απόδειξη

Στα ελληνικά λεξικά η λέξη «αποδεικνύω» σημαίνει: «δείχνω με αδιαμφισβήτητο τρόπο ότι (κάτι) υπάρχει, είναι αληθές, ορθό» . Όμως, η απόδειξη είναι μια λέξη που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή και ως τέτοια έχει διαφορετικές σημασίες σε διαφορετικά πλαίσια. Όταν όμως αναφερόμαστε στην απόδειξη για τα μαθηματικά, είναι σαφές ότι πρόκειται για μια κεντρική έννοια που μέσω αυτής επιβεβαιώνεται η «αλήθεια για έναν/μια μαθηματικό με τον τρόπο που κάνουν το πείραμα ή η παρατήρηση για έναν/μία φυσικό επιστήμονα» (Griffiths,2000, σελ. 2). Χωρίς αυτό βέβαια να αποκλείει και την περίπτωση δημιουργίας αμφιβολιών.

Κατά τους Harel & Sowder, (1998 , 2005) αποδεικτική διαδικασία είναι η διαδικασία που ακολουθείται από κάποιον ώστε να διώξει ή να δημιουργήσει αμφιβολίες για την αλήθεια ενός ισχυρισμού. Οι ίδιοι ερευνητές (1998, 2005) περιγράφουν τη γνωστική ανάπτυξη των διαφορετικών σταδίων της απόδειξης αναφορικά με την ανάπτυξη του μαθητή και των αντίστοιχων συστημάτων απόδειξης που χρησιμοποιούν. Διαπιστώνουν σχετικά σταθερές γνωστικές / συναισθηματικές διαμορφώσεις όπου καταβάλλεται προσπάθεια από το μαθητή για το τί συνιστά διαπίστωση καθώς και για να πειστεί ο ίδιος για την αλήθεια μιας δήλωσης σε ένα συγκεκριμένο στάδιο της μαθηματικής ωρίμανσης του. Μια εμπειρική μελέτη σε ευρεία βάση βρήκε μια ολόκληρη σειρά διαφορετικών αποδείξεων, όπου μερικές από αυτές κατηγοριοποιούνται ως «εξωτερικές πεποιθήσεις», κάποιες ως «εμπειρικές» και κάποιες ως «αναλυτικές» (στο Cognitive Development of Proof, David Tall, Oleksiy Yevdokimov, Boris Koichu, Walter Whiteley, Margo Kondratieva, Ying-Hao Cheng σελ. 4)

Οι Harel & Sowder, (1998) αναφέρονται και στο «αποδεικτικό σχήμα» αποδίδοντας τόσο σε αυτό όσο και στην απόδειξη, ψυχολογικά και μαθητοκεντρικά χαρακτηριστικά. Υπό αυτή την οπτική, με την έννοια «απόδειξη» εννοούν τη διαδικασία κατά την οποία ένα άτομο εξαλείφει ή εγείρει αμφιβολίες για την αλήθεια μιας παρατήρησης και περιλαμβάνει τα στάδια της επιβεβαίωσης και της πειθούς. Επιβεβαίωση είναι η διαδικασία κατά την οποία ένα άτομο εξαφανίζει τις αμφιβολίες του για την αλήθεια μιας παρατήρησης, ενώ με την πειθώ το άτομο εξαφανίζει τις αμφιβολίες των άλλων. Σημειώνουμε ότι από τη θέση των συγκεκριμένων ερευνητών, δεν διακρίνεται αν οι ακολουθούμενες διαδικασίες για το ένα ή το άλλο στάδιο της απόδειξης, διαφέρουν ή μπορεί (και) να είναι ακριβώς ίδιες. Έτσι, το αποδεικτικό σχήμα που χρησιμοποιεί ένα άτομο περιλαμβάνει όσα αποτελούν επιβεβαίωση και πειθώ για αυτό το άτομο και το οποίο συναρτάται με τη χρονική περίοδο, τις συνθήκες και το πολιτισμικό επίπεδο.

Σύμφωνα με τους Harel και Sowder, τα αποδεικτικά σχήματα χωρίζονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες οι οποίες αποτελούνται από υποκατηγορίες. Κάθε κατηγορία αντιπροσωπεύει ένα γνωστικό στάδιο, μια διανοητική ικανότητα και αφορά στη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών ως προς το μαθηματικό συλλογισμό. Οι κατηγορίες αυτές δεν αποκλείουν η μία την άλλη, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ταυτόχρονα πάνω από ένα είδος αποδεικτικού σχήματος. Οι κατηγορίες αποδεικτικών σχημάτων με βάση τους συγκεκριμένους ερευνητές είναι:

1.5.1 Αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πειθούς.

Όταν οι μαθητές ακολουθούν τύπους για να επιλύσουν ένα πρόβλημα, συνειδητοποιούν ότι αυτό μπορεί να γίνει επιτυχώς αν απομνημονεύσουν κάποια συγκεκριμένα βήματα αντί να χρησιμοποιήσουν τη δημιουργικότητα και τις ικανότητες ανακάλυψης που διαθέτουν. Όταν μάλιστα ο δάσκαλος είναι η μοναδική πηγή γνώσης, οι μαθητές δύσκολα αποκτούν εμπιστοσύνη στην ικανότητα τους να κάνουν αποδείξεις. Ο συγκεκριμένος τρόπος μάθησης οδηγεί στη δημιουργία αποδεικτικών σχημάτων εξωτερικής πειθούς, σχήματα στα οποία οι αμφιβολίες εξαφανίζονται εξαιτίας:

- του τυπικού τρόπου παρουσίασης των επιχειρημάτων,
- μιας αυθεντίας (δάσκαλος/ βιβλίο),
- της συμβολικής μορφής του επιχειρήματος.

Τα αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πειθούς είναι σύμφωνα με τους ερευνητές: το τελετουργικό αποδεικτικό σχήμα (ritual proof scheme), το αυταρχικό αποδεικτικό σχήμα (authoritarian proof scheme) και το συμβολικό αποδεικτικό σχήμα (symbolic proof scheme).

1.5.2 Εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα.

Για να επιβεβαιωθεί, ή να αμφισβητηθεί ή να ανατραπεί μια εικασία, χρησιμοποιούμε φυσικά γεγονότα ή τις αισθήσεις. Δηλαδή, βασίζουμε την απόδειξη σε παραδείγματα, σε μετρήσεις, σε αντικαταστάσεις συγκεκριμένων αριθμών με γενικευμένες αλγεβρικές παραστάσεις ή τέλος χρησιμοποιώντας αντιλήψεις. Για το λόγο αυτό και τα εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα χωρίζονται σε επαγωγικά (inductive proof scheme)και αντιληπτικά αποδεικτικά σχήματα (perceptual proof scheme).Τα σχήματα αυτά χρησιμοποιούνται συχνά από τους μαθητές, ίσως επειδή στην καθημερινή μας ζωή σκεφτόμαστε αρκετά συχνά με παραδείγματα. Παρόλο που έχουν μειονεκτήματα όσον αφορά τη γενίκευσή τους, τα εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα έχουν κάποια αξία. Ιδιαιτέρως τα αντιπαραδείγματα είναι γνωστό ότι εμπλουτίζουν τις εικόνες και βοηθούν στη καλύτερη αντίληψη ιδεών.

1.5.3 Αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα.

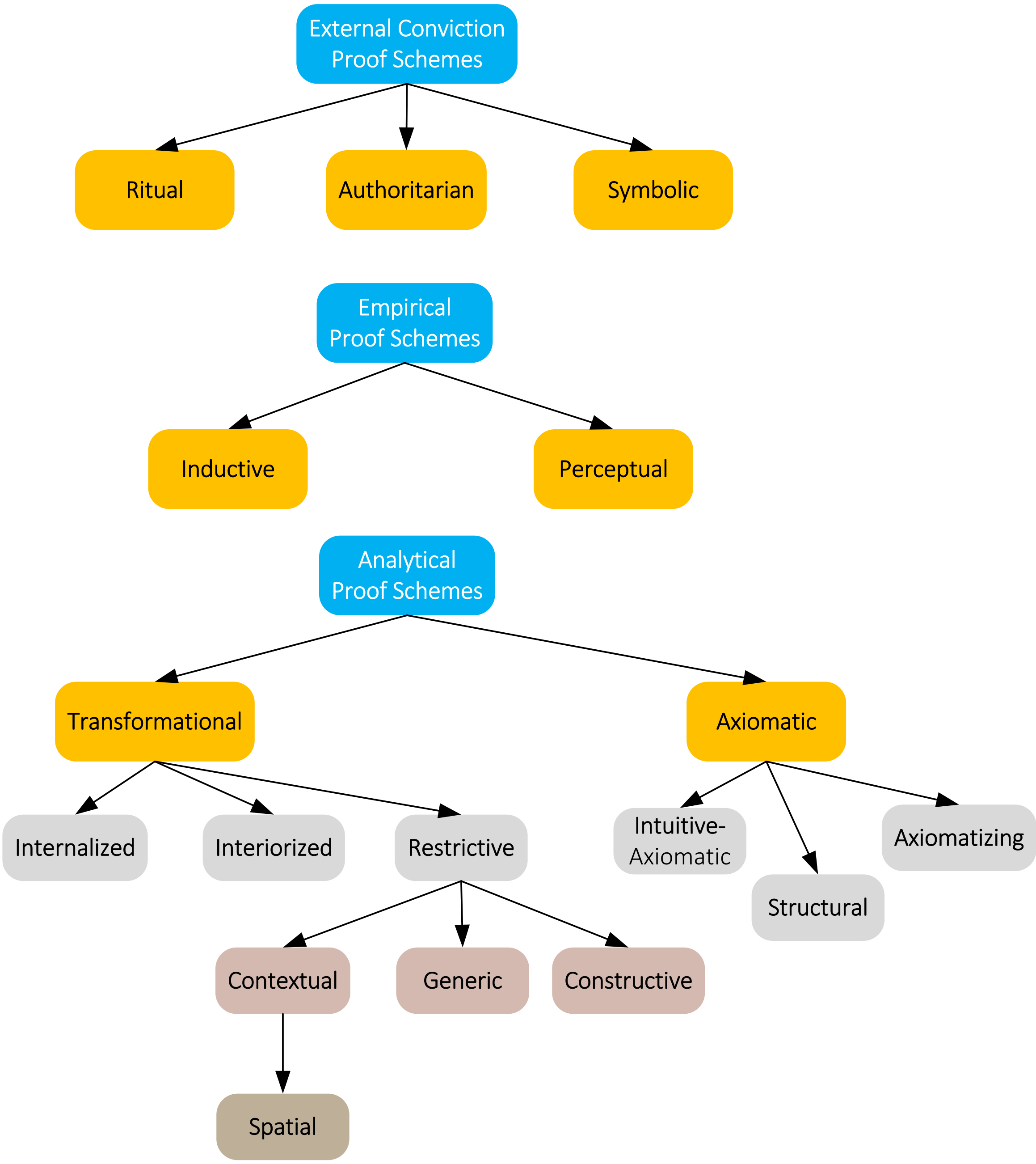
Εδώ, μια εικασία επιβεβαιώνεται μέσω λογικών συμπερασμάτων. Η συγκεκριμένη κατηγορία χωρίζεται σε σχήματα μετασχηματισμού (transformational proof scheme) και σε αξιωματικά σχήματα (axiomatic proof scheme).

Ένα αποδεικτικό σχήμα μετασχηματισμού χαρακτηρίζεται από τα εξής:

- εξέταση της γενικότητας της εικασίας.
- εκτέλεση νοητικών πράξεων που είναι στοχοκεντρικές και προληπτικές.
- μετασχηματισμοί εικόνων ως μέρος μιας αφαιρετικής διαδικασίας.

Στο αξιωματικό αποδεικτικό σχήμα, η δικαιολόγηση πρέπει να ξεκινά αρχικά από όρους που δεν έχουν οριστεί και από αξιώματα. Χωρίζονται σε διαισθητικά – αξιωματικά(intuitive axiomatic proof scheme), κατασκευαστικά (structural proof scheme) και σε αυτά που θέτουν αξιώματα (axiomatizing proof scheme).

Οι Harel και Sowder παραθέτουν το επόμενο σχήμα που δείχνει τη συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση:



Εικ. 19: Αποδεικτικά σχήματα: κατηγοριοποίηση κατά Harel και Sowder

Ως προς τη φύση τώρα της απόδειξης, φαίνεται να υπάρχουν δύο σχολές ερευνητών που εξετάζουν την απόδειξη με τη συγκεκριμένη οπτική: εκείνοι που υποστηρίζουν την εμπειρική φύση της απόδειξης κι εκείνοι που υποστηρίζουν τη φορμαλιστική φύση της. Άλλοι ερευνητές διαχωρίζουν την απόδειξη ως διαδικασία από την απόδειξη ως ένα τελικό προϊόν (Douek, 1998). Η πρώτη κατηγορία εστιάζει στη δομή της απόδειξης, ενώ η δεύτερη στο νόημα της απόδειξης.

Από την άλλη πλευρά, ο Balacheff (2002) σημειώνει ότι φαίνεται να υπάρχουν «ριζοσπαστικά διαφορετικές επιστημολογίες της μαθηματικής απόδειξης» (σελ. 13), το οποίο καθιστά «διόλου δυνατή την επικοινωνία ευρημάτων και συνεπώς την επίτευξη οποιασδήποτε πραγματικής προόδου στο πεδίο» (σελ. 1). Ο ίδιος αναφέρεται στα διαφορετικά είδη αιτιολογίας και επιχειρηματολογίας στις διαδικασίες απόδειξης των μαθητών. Διαχωρίζει τις αποδείξεις σε πραγματολογικές (pragmatic) και σε εννοιολογικές (conceptual). Για την πρώτη κατηγορία απαιτείται αναφορά σε πραγματικές ενδείξεις ενώ στη δεύτερη κατηγορία διατυπώνονται ιδιότητες και σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους.[11] Ο διαχωρισμός αυτός αφορά στο γνωστικό επίπεδο ανάπτυξης των μαθητών και κατηγοριοποιείται από τον ίδιο στα επόμενα στάδια:

1. Ο απλοϊκός εμπειρισμός (naive empiricism),όπου η αλήθεια κάποιου αποτελέσματος επιβεβαιώνεται αφού επαληθεύσουμε αρκετές περιπτώσεις.
2. Το κρίσιμο πείραμα (crucial experiment), ένα πείραμα δηλαδή, το αποτέλεσμα του οποίου μας επιτρέπει να επιλέξουμε ανάμεσα σε δύο υποθέσεις.
3. Το γενικό παράδειγμα (generic example), όπου χρησιμοποιείται ένα αντικείμενο το οποίο είναι χαρακτηριστικό και αντιπροσωπευτικό παράδειγμα της τάξης του.
4. Το πείραμα σκέψης (thought experiment), που σημαίνει ότι το ίδιο το πείραμα δεν είναι αναγκαίο να πραγματοποιηθεί αλλά μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε μόνο ποια μπορεί να είναι τα αποτελέσματά του.

Οι Weber & Alcock (2004), σε συμφωνία με τις απόψεις του Balacheff (ή σε προσπάθεια υποκατηγοριοποίησης των κατηγοριών απόδειξης που αυτός όρισε) θεωρούν ότι υπάρχουν τρεις τρόποι κατασκευής μιας τυπικής απόδειξης: ο συντακτικός, ο σημασιολογικός και ο διαδικαστικός. [12]

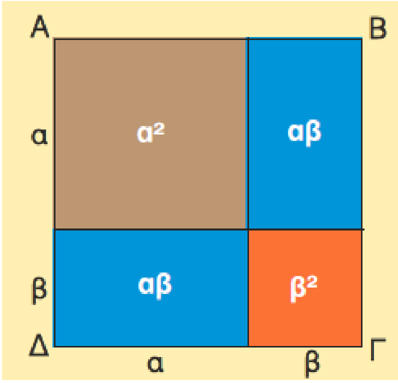
Στη συντακτική απόδειξη (syntactic proof) βγάζουμε συμπεράσματα μέσα από το χειρισμό συμβόλων και τύπων μέσω μιας αλυσίδας λογικών σχέσεων. Είναι φανερό ότι για αυτό το είδος απόδειξης απαιτείται η σωστή χρήση ορισμών και η συνδυασμένη χρήση δεδομένων. Επομένως σε αυτό το είδος απόδειξης δε φαίνεται να λειτουργεί κάποιο είδος διαίσθησης ή κάποιας άτυπης αναπαράστασης της έννοιας ή κάτι αντίστοιχο. Για παράδειγμα, η αλγεβρική απόδειξη της ταυτότητας $(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$, θα μπορούσε να ανήκει σε αυτή την κατηγορία αποδείξεων. Είναι σαφές ότι η ακολουθούμενη διαδικασία απόδειξης μέσω αυτού του τρόπου θα πρέπει να οδηγεί σε έγκυρα συμπεράσματα. Στην περίπτωση αυτή, το υποκείμενο που δημιουργεί την απόδειξη λέγεται ότι διαθέτει συντακτικές γνώσεις (syntactic knowledge) ή τη λεγόμενη τυπική κατανόηση (typical knowledge).

Στη σημασιολογική απόδειξη (semantic proof), χρησιμοποιούνται αντιπροσωπευτικά παραδείγματα (instantiations) του μαθηματικού αντικειμένου, για τα οποία η δήλωση που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει. Για παράδειγμα, η γεωμετρική απόδειξη της ταυτότητας $(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$ μέσω σχέσεων εμβαδών τετραπλεύρων θα μπορούσε να ανήκει σε αυτή την κατηγορία αποδείξεων.

---

[11] Θα λέγαμε ότι η $2^η$ κατηγορία αφορά το σύνολο σχεδόν των αποδείξεων που οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν τόσο στη Δ.Ε όσο και στο Πανεπιστήμιο.

[12] Αν και οι ίδιοι δεν αναφέρουν παραδείγματα προκειμένου να καταδείξουν αν με αυτό το διαχωρισμό υπονοούν ότι οι τρεις τρόποι λειτουργούν σε διακριτά επίπεδα ο ένας από τον άλλον, άποψη του γράφοντος αποτελεί ότι κάτι τέτοιο δεν είναι υποχρεωτικό. Για παράδειγμα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η απόδειξη πως το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, στην εκδοχή της με χρήση της εις άτοπον απαγωγή, χρησιμοποιεί στοιχεία που κατηγοριοποιούνται και στους τρεις τρόπους που προαναφέρθηκαν.



Εικ. 20: Σημασιολογική απόδειξη της ταυτότητας $(α+β)^2$

Για να κατασκευάσει κανείς μια σημασιολογική απόδειξη, πρέπει να μπορεί να θέτει ως παραδείγματα σχετικά μαθηματικά αντικείμενα, δηλαδή να χρησιμοποιεί (μη τυπικές;), διαισθητικές αναπαραστάσεις σχετικών εννοιών.

Τα παραδείγματα αυτά πρέπει να είναι εμπλουτισμένα κατάλληλα ώστε να οδηγούν σε συμπεράσματα και να αντιπροσωπεύουν ακριβώς τα αντικείμενα και τις έννοιες που αναπαριστούν. Με άλλα λόγια να αναπαριστούν με σαφήνεια τις ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων αναφορικά με την τυπική θεωρία. Στην περίπτωση αυτή, το υποκείμενο που δημιουργεί την απόδειξη λέγεται ότι διαθέτει σημασιολογική κατανόηση (semantic understanding) ή μια αποτελεσματική διαισθητική κατανόηση (effective intuitive understanding) της έννοιας.

Στη διαδικαστική απόδειξη (procedural proof), οι μαθητές ψάχνουν την απόδειξη μιας παρόμοιας δήλωσης και την χρησιμοποιούν ως βάση ώστε να δημιουργήσουν τη νέα απόδειξη (Weber, 2005 αναφορά στους Moutsios-Rentzos & Simpson, 2011). Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε για παράδειγμα αποδείξεις ισοδύναμων προτάσεων όπου ο ακολουθούμενος τρόπος είναι όμοιος με την απόδειξη ενός εκ των δύο προτάσεων και στο αντίστροφο αλλάζουν τα στοιχεία της υπόθεσης (βλ. η διχοτόμος μιας γωνίας ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας).

Εν κατακλείδι, μια αυστηρή απόδειξη με δεδομένη την εγκυρότητά της από την άποψη της τυπικής προέλευσης, γίνεται πραγματικά πειστική και πολυτιμότερη, μόνο αν οδηγεί στην πραγματική μαθηματική κατανόηση και λειτουργεί ως ένα επεξηγηματικό εργαλείο, ώστε να ασκήσει το ρόλο της ως μορφή μαθηματικής αιτιολόγησης. (Hanna, 2000)

1.5.4 Γεωμετρική απόδειξη στο θεσμικό περιβάλλον της τάξης

Η απόδειξη στα πλαίσια της Δ.Ε αποτελεί ένα σημαντικό μέρος της διδασκαλίας των Μαθηματικών, που όμως εξαρτάται τόσο από τα αναλυτικά προγράμματα όσο και από τις επί μέρους εφαρμοζόμενες πρακτικές κάθε σχολείου (ειδικά σε ότι αφορά τις τάξεις έως και τη Β΄ Λυκείου).

Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Υπάρχει η ανάγκη για τον προσδιορισμό ενός ρεαλιστικού και ταυτόχρονα ελκυστικού πλαισίου εντός του οποίου η απόδειξη στην τάξη μπορεί να λειτουργήσει ως άξονας μεταφοράς μαθηματικού νοήματος; Παράλληλα, υπάρχει η ανάγκη για τον επαναπροσδιορισμό του ρόλου του δασκάλου των Μαθηματικών προς αυτή την κατεύθυνση και ιδιαίτερα ως προς τη χρήση εργαλείων δυναμικής Γεωμετρίας;

Αρκετοί ερευνητές αναφέρονται στην απόδειξη ως μέσου επικύρωσης της γνώσης, θεωρώντας ότι θα πρέπει να ενσωματωθεί στα επίπεδα Γεωμετρίας κατά Kusniak ([13]) και ιδιαίτερα στο επίπεδο Γεωμετρία ΙΙ (φυσική και αξιωματική Γεωμετρία που βασίζεται σε υποθετικούς αφαιρετικούς νόμους και που σχετίζονται με ένα σύνολο αξιωμάτων που είναι κοντά με την αισθητηριακή πραγματικότητα).

Αλλά ποιες θα πρέπει να είναι οι απαιτούμενες προϋποθέσεις για την εισαγωγή των μαθητών στην αξιωματική απόδειξη που διαμορφώνεται από την αισθητηριακή πραγματικότητα; Στο σημείο αυτό συναντάμε μια παραδοξότητα: Ενώ η Ευκλείδεια Γεωμετρία στηρίζεται σε αξιώματα κοντά σε νατουραλιστικές αντιλήψεις, εντούτοις η αποδεικτική διαδικασία απέχει αρκετά από το να χαρακτηριστεί με αντίστοιχους όρους. Αυτό άλλωστε προκαλεί και τον προβληματισμό διεθνώς, για το υποχρεωτικό της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στα αναλυτικά προγράμματα. (C. Laborde, Cr.Kynigos, K. Hollebrands, R. Strasser – Teaching and learning Geometry with Technology).

Από τη δεκαετία του ΄90, οι διάφορες θεωρητικές προσεγγίσεις που αφορούν σε μια γεωμετρική δραστηριότητα συγχωνεύονται σε τρία είδη γνωστικών διεργασιών. Ο Duval (1988, 1998, 2000) διακρίνει αυτές τις διεργασίες σε: διαδικασίες οπτικοποίησης, διαδικασίες κατασκευής από εργαλεία, και τη συλλογιστική. Κάθε μία από αυτές τις διαδικασίες πληροί μια συγκεκριμένη επιστημολογική λειτουργία αλλά είναι στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους: "η συνέργεια τους είναι γνωστικά απαραίτητη για την επάρκεια στην γεωμετρία “ (Duval, 1998, σ. 38).

Με βάση την C.Houdement (Cerme 2007, σελ. 972) οι διαφορές ανάμεσα στα δύο επίπεδα Γεωμετρίας Ι και ΙΙ ταξινομούνται στον πίνακα:

	Γεωμετρία Ι	**Γεωμετρία ΙΙ**
Χώρος	Διαισθητικός και φυσικός χώρος	Γεωμετρικός Ευκλείδειος χώρος
Αντικείμενα	Υλικά (ή ψηφιακά)αντικείμενα. Σχέδια, μοντέλα, προϊόντα από ενόργανες (instrumental) δραστηριότητες	Ιδεατά αντικείμενα χωρίς διαστάσεις (τμήματα επιφανειών ή χώρου, ορισμένες σχέσεις). Ορισμοί Θεωρήματα
Artefacts (δομήματα)	Διάφορα εργαλεία (χάρακας, κατασκευή τετραπλεύρων, πρότυπα, αναδίπλωσης χαρτιού ....). Δυναμικό Λογισμικό.	Φυσικά εργαλεία (χάρακας, διαβήτης) θεωρητική χρήση δικαιολόγησης "Λογικό-επαγωγικός συλλογισμός"
Απόδειξη	Αποδεικτική διαδικασία μέσω οργάνων (π.χ dragging) ή κατάλληλες κατασκευές	Ιδιότητες και "τμήματα επίσημης απόδειξης) Μερική χρήση της αξιωματικής θεμελίωσης
Μέτρηση	Θεμιτή για παραγωγή γνώσης	Όχι θεμιτή για παραγωγή

[13] Οι τρεις προτεινόμενες αναφορές είναι:
«Γεωμετρία Ι» (Φυσική-natural- Γεωμετρία με την πηγή επικύρωσης που είναι στενά συνδεδεμένη με τη διαίσθηση και την πραγματικότητα (...).
«Γεωμετρία ΙΙ» (Φυσική και αξιωματική Γεωμετρία που βασίζεται σε υποθετικούς και αφαιρετικούς νόμους που σχετίζονται με ένα σύνολο αξιωμάτων, το δυνατόν πιο κοντά στην αισθητηριακή πραγματικότητα). (...)
«Γεωμετρία ΙΙΙ (τυπική και αξιωματική γεωμετρία) (...) το σύνολο των αξιωμάτων είναι ανεξάρτητα από την πραγματικότητα ενώ θα πρέπει να διδάσκονται με την τυπική έννοια ". (Kuzniak, Γαγάτσης,Ludwig, και Marchini, 2007, Σελ. 955)

		γνώσης αλλά εύρεσης
Στάτους σχεδίασης	Αντικείμενα μελέτης και αντικείμενα επικύρωσης	Ευρετικό εργαλείο, στήριξη της συλλογιστικής και "εικονιστικής αντίληψης" (figural concept) (Fischbein 1993)
Privileged aspects	Αυτοσχέδιες αποδείξεις και κατασκευές	Ιδιότητες και απόδειξη

1.5.5 Η απόδειξη στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Ο Balacheff (1987) κάνει διάκριση μεταξύ της επίδειξης (démonstration) και της απόδειξης (prevue) όσον αφορά την επικύρωση, έτσι ώστε να μπορούμε να πούμε ότι τα μαθηματικά αναπτύσσουν την πρώτη, ενώ οι καθηγητές μαθηματικών μπορούν να χειριστούν μόνο τη δεύτερη. ([14])

Πέρα από αυτή τη διάκριση, κρίνεται σημαντική η εξέταση των λειτουργιών της απόδειξης εντός του «θεσμικού» ρόλου της σχολικής τάξης, με την έννοια ότι σε αυτή την περίπτωση αναφερόμαστε σε ένα σύνολο πρακτικών που σχετίζονται με τη μαθηματική κοινότητα και το σχολείο. Υπό αυτό το πρίσμα, ο ρόλος της απόδειξης δεν αφορά τον τυπικό (μόνο) ρόλο του μέσου επικύρωσης, αλλά (και) στόχους που (πρέπει να) εκπληρώνει η διδασκαλία των μαθηματικών.

Η εξέταση αυτών των διαφορών είναι σημαντική για τη διδασκαλία, επειδή η έμφαση της μαθηματικής απόδειξης σε μια σχολική τάξη δεν έγκειται στη δομή της αλλά στην κατασκευή νοημάτων και εννοιών μέσω αυτής. Γενικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια απόδειξη για το επίπεδο της μέσης εκπαίδευσης γίνεται για τους εξής κυρίως λόγους:

1. Μια σιωπηρά αυστηρή απόδειξη ενός μαθηματικού γεγονότος (που βασίζεται σε επιχειρήματα που έχουν ως κύρια λειτουργία να πείσουν -τον ομιλητή και τους γύρω του-) .

2. Για να δώσουμε μια ρητή αυστηρή εξήγηση για το εν λόγω γεγονός και του οποίου η δομή είναι οργανωμένη με βάση τη συναγωγή καθώς και παραγωγικά επιχειρήματα.

Ο Tall (1989) προκειμένου να βοηθήσει στην εστίαση των φοιτητών σχετικά με τα διάφορα στάδια της απόδειξης, αναφέρεται στη διατύπωση (αρχικά) κάποιου πειστικού επιχειρήματος κατά τη διαδικασία ‘Thinking Mathematically’.

Στη συνέχεια με την ειδική αναφορά του στη μαθηματική απόδειξη, φαίνεται να τη διαφοροποιεί εν μέρει από τα υπόλοιπα είδη απόδειξης, αφού δεν αρκούν μόνο τα τρία προηγούμενα στάδια, αλλά και η στήριξη της απόδειξης σε δύο σημαντικές ιδέες: Η μία αφορά στη σαφή διατύπωση ορισμών και δηλώσεων και η δεύτερη, ότι απαιτεί συμφωνημένες διαδικασίες ώστε να συμπεράνουμε την αλήθεια μιας δήλωσης από μία άλλη.

([14]) Η συγκεκριμένη θέση ερμηνεύεται –πιθανά αυθαίρετα- ως εξής: τα μαθηματικά «εμφανίζονται» δηλαδή επιδεικνύονται μπροστά μας, και στη συνέχεια οι καθηγητές μαθηματικών, αναλαμβάνουν την επικύρωση αυτών μέσω της απόδειξης.

1.5.6 Εικασία και απόδειξη στα Μαθηματικά

Η απόδειξη βρίσκεται στην καρδιά των μαθηματικών και οι έρευνες δείχνουν αναφορικά με τους μαθητές, πρόκειται για αόριστη έννοια που διδάσκονται μαθηματικά (Hoyles, 1998). Η απόδειξη – συχνά- δεν θεωρείται ως μέρος της λύσης ενός προβλήματος, αλλά ως μια δραστηριότητα που προστίθεται στο πρόβλημα. Σύμφωνα με τον Freudenthal, τα προβλήματα των μαθητών με την απόδειξη δεν πρέπει να αποδοθούν στην επιβράδυνση της γνωστικής ανάπτυξης, αλλά μάλλον στο ότι οι μαθητές δεν μπορούν να δουν τη λειτουργία της απόδειξης, δηλαδή την έννοια, το σκοπό και τη χρησιμότητά της (de Villiers, 1999).

Επιπλέον, παρατηρείται σε μεγάλο βαθμό η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο, όταν έρχονται αντιμέτωποι με την ανάγκη της απόδειξης. Σχετικά με αυτό ο Moore (1994) επισημαίνει ότι «η μετάβαση στην απόδειξη είναι απότομη και έχει ως συνέπεια τη δημιουργία πηγής δυσκολιών για πολλούς μαθητές, ακόμη και για όσους έχουν κάνει ανώτερη δουλειά με ευκολία σε χαμηλότερου επιπέδου μαθήματα μαθηματικών».

Από την άλλη θα πρέπει να αναρωτηθούμε πόσο συμβάλλει σε αυτό και το «περιβάλλον» της τάξης. Ο Lambert (1990) υποστηρίζει ότι η κατανόηση της απόδειξης καθίσταται δύσκολη εξ αιτίας του τυπικού περιβάλλοντος της τάξης: «Στην τάξη, ο δάσκαλος και το βιβλίο είναι η αρχή και τα μαθηματικά δεν είναι ένα θέμα που διερευνάται ή δημιουργείται. Η αλήθεια δίνεται από τις (και στις) εξηγήσεις του δασκάλου καθώς και από τις απαντήσεις του βιβλίου. Δεν υπάρχει ευελιξία ανάμεσα σε εικασίες και επιχειρήματα για την εγκυρότητά τους».

Αρκετοί ερευνητές συμφωνούν ότι σημαντικός παράγοντας που επιτείνει τις δυσκολίες των μαθητών για την απόδειξη είναι και το μοντέλο διδασκαλίας που έχουν υιοθετήσει οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί. Οι μαθητές (υποχρεώνονται να) ακούν ορισμούς, θεωρήματα και θεωρητικές αποδείξεις προτάσεων συμμετέχοντας ως παθητικοί ακροατές σε μια – σχεδόν- τελετουργική διαδικασία. Αυτή η παραδοσιακή προσέγγιση για την απόδειξη έχει απογοητεύσει πολλούς φοιτητές και μαθητές (Battista & Clements, 1995), ενώ η Senk (1989) αναφέρει ότι η γεωμετρική απόδειξη συγκαταλέγεται ανάμεσα στα πιο δύσκολα και αντιπαθητικά θέματα των μαθηματικών για τους μαθητές του λυκείου στις ΗΠΑ.

Διαπιστώνουμε συνεπώς την ανάγκη να επαναπροσδιοριστεί ο ρόλος της απόδειξης στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η απόδειξη δεν θα πρέπει να θεωρείται πλέον ως μια ακολουθία σκέψεων αυστηρά δομημένων, που υπακούουν στους κανόνες της μαθηματικής επιστήμης. Ο Volmik (1990) υποστηρίζει ότι η απόδειξη είναι μια μορφή λόγου, ένα μέσο επικοινωνίας μεταξύ αυτών που κάνουν μαθηματικά. Ο Schoenfeld (1994) αναφέρει ότι οι αποδείξεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως ένα φυσικό μέρος των μαθηματικών αν οι μαθητές συμμετείχαν στην ανάπτυξη μιας μαθηματικής κουλτούρας, όπου ο διάλογος θα ήταν σημαντικό μέρος της εμπλοκής με τα μαθηματικά.

Ο ρόλος λοιπόν της απόδειξης επαναπροσδιορίζεται και ακολουθείται μια τάση απομάκρυνσης από τις αυστηρές αποδείξεις. Σε αυτή την κατεύθυνση τίθεται ο προβληματισμός αν θα ήταν μια εναλλακτική προσέγγιση η παραγωγή εικασιών ως προοίμιο της τυπικής αφαιρετικής απόδειξης. Την αποτύπωση μιας τέτοιας τάσης συναντάμε –μεταξύ άλλων και - στο πρότυπο του NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Με βάση το NCTM, υιοθετούνται πρακτικές δημιουργίας εικασιών ως αναπόσπαστο μέρος της πορείας προς την τυπική απόδειξη. Η εικασία και η ανεπίσημη αιτιολόγηση θεωρούνται συστατικό τμήμα της προετοιμασίας των μαθητών για την αυστηρή πράξη της παραγωγικής απόδειξης.

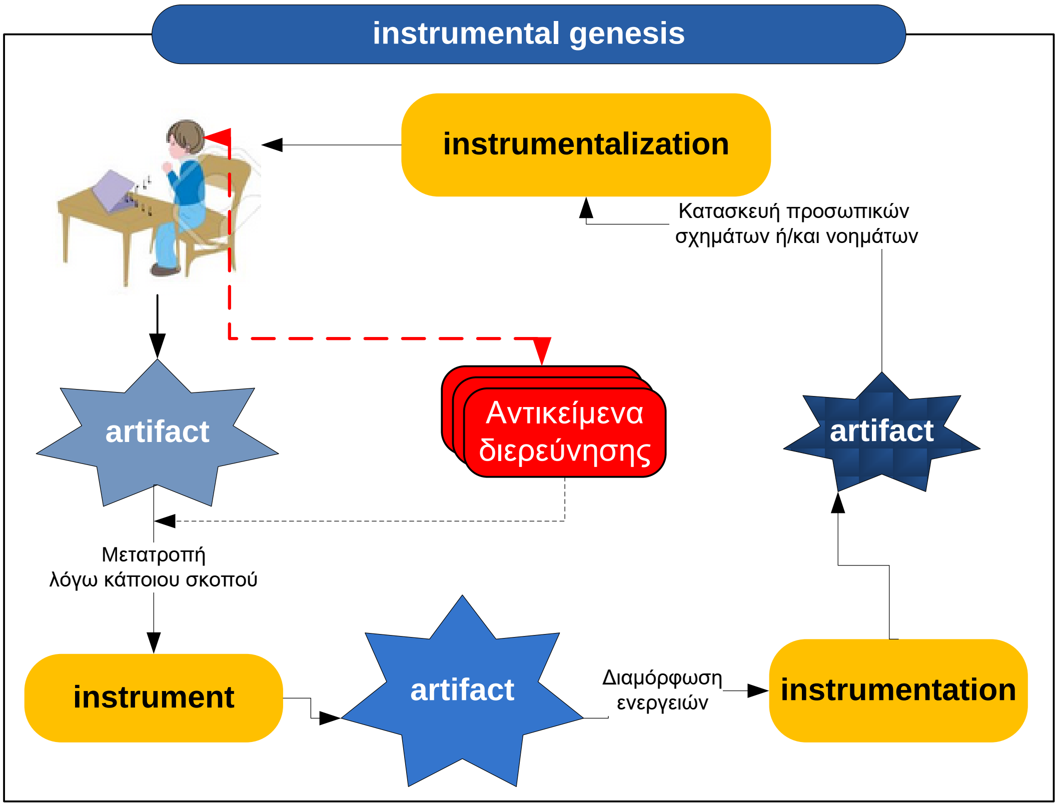
Είναι όμως εφικτό να παραχθεί εικασία στο πλαίσιο της παραδοσιακής εκπαιδευτικής διαδικασίας; Μπορούμε να κάνουμε υποθέσεις μόνο για αυτό το ερώτημα: Είναι πιθανό αυτό να αφορά στην κουλτούρα της τάξης που δημιουργείται μέσω του διδάσκοντα στα ευρύτερα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος που ο ίδιος μπορεί να συνθέσει. Ισχυριζόμαστε επίσης ότι είναι σαφής και πρωτοποριακός ο ρόλος και η παρουσία των DGEs προς αυτή την κατεύθυνση. Σε αρκετές περιπτώσεις, καθίσταται περίπου προφανές ότι το στατικό περιβάλλον του πίνακα δεν δίνει τις απαραίτητες ευκαιρίες στους μαθητές για πειραματισμό και πρόκληση εικασιών σε αντίθεση με το δυναμικό περιβάλλον των DGEs. Σημαντικές αναφορές για τη συμβολή των DGEs ειδικά σε ότι αφορά την αντιμετώπιση ανοικτών προβλημάτων, έχουν γίνει από αρκετούς ερευνητές. Οι Baccaglini & Mariotti, (2010) συγκρίνουν μια στατική εικασία που παράγεται με χαρτί και μολύβι, σε σχέση με μια δυναμική εικασία που παράγεται σε περιβάλλον DGEs. Η Mariotti (2006), υποστηρίζει ότι η συμβολή των DGEs στην αποδεικτική διαδικασία που πρέπει να διατυπώσει ο μαθητής, είναι εμφανής κατά την εξερεύνηση ανοικτών προβλημάτων, δεδομένου ότι η διαδικασία επίλυσης τους περιλαμβάνει τη διατύπωση εικασιών. Η έρευνα έχει δείξει ότι τα DGEs μπορούν να συμβάλλουν στην οικοδόμηση της σκέψης των μαθητών, πράγμα το οποίο μπορεί να τους βοηθήσει να ξεπεράσουν τις γνωστικές δυσκολίες που καταγράφονται μεταξύ εικασίας και απόδειξης (Baccaglini & Mariotti, 2010).

1.6 Ερευνητικά πλαίσια λειτουργίας των DGEs

1.6.1 Θεωρία κατασκευής εργαλείου (Instrumental Genesis)

Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη θεωρία, ένα τεχνούργημα (artifact) μετατρέπεται ύστερα από την προσπάθεια του χρήστη, σε εργαλείο (*instrument*) μέσω μιας μαθησιακής διαδικασίας κατά την οποία το εργαλείο κατασκευάζεται (*instrumental genesis*) για τη διεκπεραίωση μιας εργασίας. Στα στάδια αυτής της διεργασίας- μετασχηματισμού, ο χρήστης αναπτύσσει σχήματα χρήσης που περιέχουν τόσο τεχνικά όσο και διανοητικά στοιχεία (Guin & Trouche, 1999; Drijvers & Gravemeijer, 2005). Στην παρούσα εργασία, το e-δόμημα με το Geogebra που θα χρησιμοποιηθεί, αποτελεί το φυσικό μέρος αυτής της διαδικασίας.

Στη συγκεκριμένη θεωρία δομείται ένα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο μελετά (και) τα ψηφιακά τεχνουργήματα ως συνδετικούς κρίκους μεταξύ χρήστη και στόχου (Rabardel & Bourmaud, 2003). Με άλλα λόγια, ο (αρχικός) στόχος του μαθητή που δρομολογείται από τη δραστηριότητα, αλλάζει μορφή κατά τη χρήση του εργαλείου και την ίδια στιγμή ο ίδιος ο στόχος μετασχηματίζει το εργαλείο (Rabardel & Bourmaud, 2003, page 673). Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι πριν τις αναφορές των Rabardel & Verillon, υπήρχε η εντύπωση της ταύτισης μεταξύ του artifact και του instrument ως το ίδιο γνωστικό όργανο. Θα λέγαμε καθ' υπερβολή ότι ο όρος instrument προσδίδει στο artifact τη ψυχολογική διάσταση της κατασκευής του οργάνου από τον χρήστη του, μιας και το όργανο δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει πριν από τη χρήση του.



Εικ. 21: Διαδοχικές φάσεις «αλλοίωσης» ενός artifact κατά τη διαδικασία instrumental genesis

Η εργαλειακή γένεση διαφοροποιεί ένα τεχνούργημα (τεχνητό αντικείμενο / εργαλείο) από ένα μέσο (ως ψυχολογικό κατασκεύασμα) ορίζοντας την τελευταία, όπως διαμορφώνεται από ένα κατασκεύασμα μαζί με ένα ή περισσότερα συστήματα χρήσης που σχετίζονται ή που αναδύονται από ένα σύνολο δραστηριοτήτων που σχηματίζεται από μια τριάδα η οποία αποτελείται: από ένα υποκείμενο (ως χρήστη), ένα όργανο (ως εργαλείο) και ένα αντικείμενο (πιθανό γνωστικό, όπως μετασχηματισμοί με επιστημονικά χαρακτηριστικά, π.χ. γεωμετρική γνώση). Τα εργαλεία είναι αντικείμενα που μπορούν να ενισχύσουν ή να τροποποιήσουν τις ικανότητες μας ή και να μετα-μορφώσουν στη συνέχεια την ιδέα γύρω από μία έννοια. Έχουν σχεδιαστεί και διαμορφωθεί με τρόπο που περιέχουν τη δυνατότητα να προκαλούν την ανθρώπινη φαντασία. Ως εκ τούτου, η αξία ενός εργαλείου είναι αδιαχώριστη από εκείνον που το χρησιμοποιεί, κυρίως από τις ατομικές χρήσεις καθενός.

Είναι σαφές ότι μαθαίνουμε τα μαθηματικά με εργαλεία. Ένας χρήστης μετατρέπει ένα εργαλείο σε ένα μέσο για ένα συγκεκριμένο μαθηματικό σκοπό συσχετίζοντας ταυτόχρονα με αυτόν τον τρόπο και ένα σύστημα χρήσης. Ένα σύστημα, δηλαδή μια συστηματική διαδικασία για το πώς να χρησιμοποιήσει ένα συγκεκριμένο εργαλείο για να επιτευχθεί ένας συγκεκριμένος σκοπός. Έτσι, ένα μέσο είναι ένα ψυχολογικό κατασκεύασμα που απευθύνεται σε κάποιο γνωστικό τομέα με εργονομικά χαρακτηριστικά (Vérillon και Rabardel, 1995). Την ίδια στιγμή συνυπάρχουν, συγκε-κριμένες λειτουργικές δυνατότητες καθώς και οι σκοποί που αποδίδονται από το χρήστη προς το εργαλείο (οι οποίοι δεν είναι απαραίτητο να συμβαδίζουν με τις ιδέες του κατασκευαστή του εργαλείου). Η φάση αυτή έχει το ρόλο της διαδικασίας γένεσης (Rabardel , 1995) και ονομάζεται εργαλειοποίηση του τεχνουργήματος (*instrumentalization of the artifact*) . Ως εκ τούτου, ένα όργανο είναι μια διπλή οντότητα – μία τεχνητή και μία ψυχολογική.

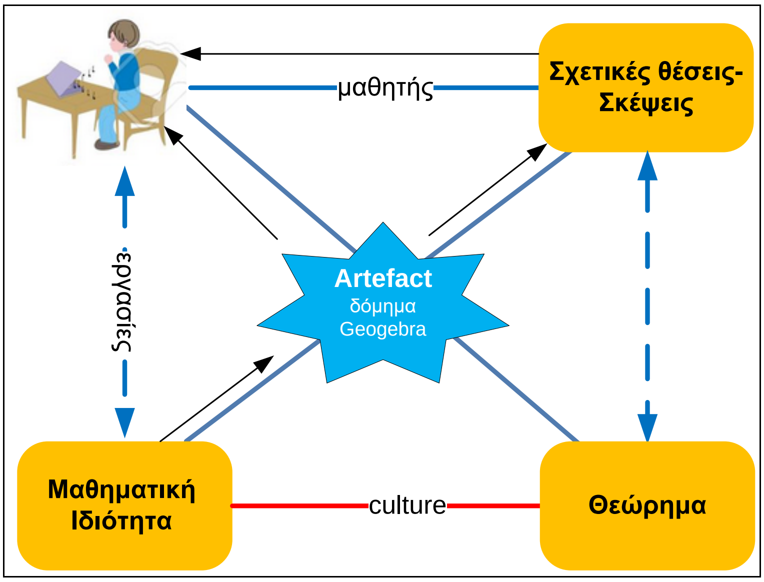
Στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι φαίνεται να διατυπώνονται κάποιες ενστάσεις με την προηγούμενη θεωρία. Η A. Mariotti διατυπώνει τις σχετικές επιφυλάξεις της: "Το τεχνούργημα, αν και ενσωματώνει μαθηματικές γνώσεις και πλαισιώνεται με κατάλληλα συστήματα αξιοποίησης, εν τούτοις δεν μπορεί να λειτουργήσει (απαραίτητα) με τρόπο ώστε να δημιουργηθεί η μαθηματική έννοια». Με άλλα λόγια δεν είναι διασφαλισμένη η πρόσβαση του χρήστη στο νόημα που έχει ενσωματωθεί στο τεχνούργημα. »(Mariotti, 2002, p.704). Έτσι φαίνεται να υιοθετεί μια περισσότερο Βιγκοτσκιανή θέση όπου αντί του όρου instrumental genesis χρησιμοποιεί τον όρο semiotic mediation (σημειωτική διαμεσολάβηση) προκειμένου να τονίσει τις διαμεσολαβητικές λειτουργίες ενός εργαλείου τόσο ως προς τα τεχνικά όσο και ως προς τα ψυχολογικά χαρακτηριστικά του ή/και αποτελέσματα κατά τη χρήση του. Στη σημειωτική διαμεσολάβηση η διάκριση δεν βρίσκεται ανάμεσα στο τεχνούργημα και στο μέσο αλλά στη διάκριση μεταξύ εξωτερικών ή εσωτερικών χαρακτηριστικών που είναι δυνατό να επηρεάσουν την κατασκευή του μαθηματικού νοήματος.

1.6.2 Θεωρία σημειωτικής διαμεσολάβησης (TSM)

Θεωρητικό πλαίσιο της Θεωρίας της Σημειωτικής Διαμεσολάβησης *(* (Bartolini Bussi και Mariotti, 2008). *Semiotic Mediation (TSM)*- Vygotskyj (1978), λαμβάνοντας υπόψη τον κρίσιμο ρόλο της ανθρώπινης διαμεσολάβησης (Κοζούλιν 2003, p. 19) στη διδακτική-μαθησιακή διαδικασία.

«Ερμηνεύοντας την teachinglearning διαδικασία από μια σημειωτική σκοπιά, σημαίνει ότι η συγκεκριμένη διαδικασία αναγνωρίζει τον κεντρικό ρόλο των σημειωτικών διαδικασιών και περιγράφει τη διδασκαλία-μάθηση ως εξέλιξη (μετασχηματισμό σε μια δεδομένη κατεύθυνση) των σημείων. Σύμφωνα με τη σημειολογική προσέγγιση που αναπτύχθηκε από άλλους ερευνητές (Radford, 2003, Arzarello, 2006), χρησιμοποιείται ο όρος sign consistently με την ιδέα της αλληλεπίδρασης των περίπλοκων σημείων. Μετά από αυτή τη διάκριση που εισήγαγε ο Rabardel (1995) χρησιμοποιείται ο όρος artefact (τεχνούργημα, δόμημα) προκειμένου να γίνεται διάκριση μεταξύ της φύσης του εργαλείου και του συγκεκριμένου τρόπου που χρησιμοποιήθηκε αυτό το εργαλείο προκειμένου να ολοκληρώσει μια συγκεκριμένη εργασία.»

«Η TSM επικεντρώνεται *στην παραγωγή των σημείων,* όπως προέρχονται σε σχέση με τα προσωπικά νοήματα που προκύπτουν από τη χρήση ενός συγκεκριμένου δομήματος (*artefact*), και σχετικά με τη διαδικασία μετασχηματισμού των εν λόγω σημείων μέσω των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων στην τάξη. Όταν χρησιμοποιείται ένα artefact για την ολοκλήρωση μιας εργασίας, αναδύονται προσωπικά νοήματα των μαθητών.» (Maria Alessandra Mariotti*, 2012).



Εικ. 22: Σχηματικό διάγραμμα ενός δομήματος

Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να αναδείξουμε το ρόλο της χρήσης των DGEs για τη δημιουργία σημειωτικών διαδικασιών, που με βάση τα προσωπικά νοήματα που θα αναδυθούν από κάθε μαθητή καθώς και από την αλληλεπίδραση μεταξύ τους, να οδηγήσουν στο μετασχηματισμό αυτών των διαδικασιών προς την ολοκλήρωση της εργασίας.

1.6.3 Η έννοια του σημειωτικού δυναμικού (semiotic potential)

«Στο πλαίσιο της TSM, δίνεται ο ακόλουθος ορισμός: Μια διπλή σχέση μπορεί να προκύψει μεταξύ ενός αντικειμένου από τη μία πλευρά και των προσωπικών νοημάτων που ανακύπτουν από τη χρήση ενός εργαλείου για να ολοκληρωθεί ένα έργο. Ορίσαμε αυτό το διπλό σημειωτικό σύνδεσμο ως *semiotic potential* (s.p) ενός artefact. Η έννοια του *semiotic potential* συλλαμβάνει την ιδέα ότι ένα δόμημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί από το μαθητή για να εκτελέσει ένα έργο, αλλά και από το δάσκαλο ως όχημα για τη μάθηση.» (Bartolini, Bussi και Mariotti , 2008).

Έτσι, το σημειωτικό δυναμικό (s.p) των DGEs, έγκειται στη διπλή σχέση που έχουν τα εργαλεία και η λειτουργία τους : μαθηματική έννοια που σχετίζεται με την έννοια κάποιου Θεωρήματος και έννοιες που ανακύπτουν από τη χρήση των εργαλείων σχεδίασης και μέτρησης του λογισμικού.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε ένα e-δόμημα με το λογισμικό *Geogebra*, προκειμένου να αναδειχθεί αυτή η διπλή σχέση μεταξύ του αντικειμένου (περιεχόμενο e-δομήματος) και των προσωπικών εννοιών που θα αποδοθούν από τους μαθητές. Οργανώνουμε τα βήματα αυτής της διπλής σχέσης, με το πέρασμα από τη φάση της κατασκευής (ορισμός ιδιοτήτων μιας κατασκευής) στη φάση της παρατήρησης παράγωγων ιδιοτήτων. Αυτό αναμένουμε να δημιουργήσει τη λογική σύνδεση ανάμεσα στην παραδοχή και στο συμπέρασμα. Στη λεγόμενη παραδοσιακή διδασκαλία, η έλλειψη του δυναμικού περιβάλλοντος του λογισμικού που είναι απαραίτητο για τη δραστηριότητα που επιλέξαμε, δε θα ήταν εφικτό να δημιουργήσει τις ίδιες συνθήκες s.p. Και αυτό διότι, όπως προκύπτει και από την περιγραφή της δραστηριότητας, απαιτούνται πειραματισμοί για την εύρεση παράγωγων σχέσεων, που μόνο με τη δυνατότητα του dragging καθώς και των υπολογιστικών και αναπαραστατικών εργαλείων του λογισμικού, μπορούν να επιτευχθούν.

Επιπλέον, ο διαχωρισμός μεταξύ των αναλλοίωτων (*invariants)* αντικειμένων και των δυνητικά διαμορφούμενων (*configurationmay*) αντικειμένων, δεν είναι εύκολο -αν όχι αδύνατον- να γίνει στο στατικό περιβάλλον του πίνακα. Η συγκεκριμένη δυνατότητα είναι δυνατό να δημιουργήσει συνδέσεις για τις αρχικές ιδιότητες, οι οποίες στη συνέχεια θα προκαλέσουν επάλληλα φαινόμενα. Με αυτό τον τρόπο ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να κάνει συσχετισμούς μεταξύ έμμεσων και άμεσων αναλλοίωτων σταθερών ιδιοτήτων καθώς και των παραγόμενων ιδιοτήτων εξαιτίας αυτών. Η ανακάλυψη της αιτίας αυτής είναι ο κύριος στόχος της δημιουργίας bfp (before formal proof) συνθηκών.

Κλείνοντας την ανασκόπηση στα δύο αυτά θεωρητικά πλαίσια λειτουργίας των DGEs εγείρονται ερωτηματικά για το αν τα συγκεκριμένα πλαίσια κινούνται κάπου μεταξύ του σωματικού και ψυχολογικού και ως εκ τούτου, αν μπορούν να θεωρηθούν ως μια κατηγορία όχι απαραίτητα δυϊστικού τομέα της εμπειρίας, αλλά ως μια φυσική θέση με φαινομενογραφική υπόσταση. Μήπως με άλλα λόγια, η ιδέα του μη-δυϊστικού εργαλείου δίνει κάποιο ιδιαίτερο νόημα στα DGEs ως σημειωτικού διαμεσολαβητή; Αν ναι, με ποιους τρόπους; Πρόκειται προφανώς για ερωτήματα που χρήζουν βαθύτερης έρευνας πειραματισμού και ενασχόλησης.

1.6.4 Μέτρηση στα DGEs και αποδεικτική ισχύς

Ο ρόλος της μέτρησης στα DGEs έχει διερευνηθεί σε αποδεικτικές δραστηριότητες (Kakihana, Shimizu & Nohda, 1996? Vadcard,1999? Flanagan, 2001? Hollebrands, 2002). Οι έρευνες γενικά καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η μέτρηση δεν περιορίζεται σε εμπειρικά επιχειρήματα, αλλά χρησιμοποιείται επίσης σε αφαιρετικής υφής επιχειρήματα. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η απόδειξη θεωρείται συχνά ως ένα μέσο για να αποφασίσουμε για την αλήθεια κάποιων δηλώσεων (εικασιών), η μέτρηση γίνεται ένα μέσο για την εξήγηση των φαινομένων που παρατηρήθηκαν στην οθόνη του υπολογιστή που προκαλούν εντύπωση και έκπληξη (DeVilliers, 1991? Chazan, 1993? Hanna, 1998) (σελ. 289). Με τη βοήθεια μιας κατάλληλης ακολουθίας εργασιών σε ένα DGE, η ανάγκη για την απόδειξη δημιουργείται μέσω μιας γνωστικής σύγκρουσης που δημιουργεί στους μαθητές μια νοητική περιέργεια σχετικά με το γιατί μια απρόσμενη ιδιότητα είναι αληθής (Hadas, Hershkowitz &Schwarz, 2000)

Μία κατασκευή των μαθητών προέρχεται από ένα σύστημα αξιωμάτων και θεωρημάτων και υλοποιείται με ένα σύστημα εντολών που εισάγονται στο λογισμικό, το οποίο δεν αποδεικνύει γεωμετρικές σχέσεις Η απόδειξη είναι το μέσο για να δικαιολογήσει ότι η νέα εντολή θα δώσει το αναμενόμενο αποτέλεσμα (Mariotti, 2000). Σε δύο έγγραφα (Marrades & Gutiérrez, Mariotti) αναφέρουν ότι η απόδειξη πληροί διττό ρόλο: Για την εγκυρότητα μιας κατασκευής για κάθε άτομο αλλά και για να πείσει τους άλλους μαθητές να αποδεχθούν τη διαδικασία κατασκευής.

1.6.5 Βασικά είδη dragging

Maintaining Dragging: Αντιστοιχεί στη γνωστή μαθηματική έκφραση '' εξερεύνηση υπό ποιες συνθήκες. . .μια ορισμένη ιδιότητα θα συμβεί ''. (Baccaglini-Frank, 2010).

Ως προς τα βασικά είδη συρσίματος διακρίνουμε:

- *free dragging*: ψάχνει για έμμεσες σταθερές ως συνέπειες των άμεσων σταθερών.

- *constrained dragging*; Περιορισμένο σύρσιμο: ψάχνει για πιθανές κατασκευές σταθερών που μπορούν να προκαλούν μια συγκεκριμένη αλλά έμμεση αναλλοίωτη ιδιότητα.

Το semiotic mediation είναι αναγνωρίσιμο στις παρακάτω σχέσεις:

- μεταξύ άμεσων και έμμεσων σταθερών και αντίστοιχα μια παραδοχή και η υπό όρους σύναψη μιας δήλωσης.
- η δυναμική αίσθηση της εξάρτησης μεταξύ των δύο τύπων σταθερών και η γεωμετρική ερμηνεία της λογικής εξάρτησης μεταξύ υπόθεσης και συμπεράσματος.

1.6.6 Το περιβάλλον των DGEs ως πλαίσιο ανάπτυξης εικασιών

Αν δεχθούμε ότι η τυπική απόδειξη έχει κεντρικό ρόλο στα προγράμματα σπουδών, είναι αναγκαίο να σχεδιάσουμε και να αναπτύξουμε ένα πλαίσιο από καινοτόμες δραστηριότητες, οι οποίες καθιστούν ικανούς τους μαθητές να συνδέσουν την εμπειρική και την αφαιρετική σκέψη μέσω αυτών των δραστηριοτήτων. Η Hoyles (1998), υποστηρίζει ότι ένα τέτοιο πλαίσιο μπορούν να προσφέρουν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές με τη χρήση ενός πακέτου δυναμικής γεωμετρίας, όπως το GSP. Ένα τέτοιο λογισμικό παρέχει την ευκαιρία σε αρκετούς μαθητές να εξετάσουν το «γιατί...», και επιπρόσθετα το «τι θα γινόταν αν...» και το «τι δεν θα γινόταν αν...» (Hoyles, 1998).

Ο Olive (2000), αναφέρει ότι το GSP (Geometer Sketch Pad) επιτρέπει στους μαθητές να υπερβαίνουν τα δικά τους σιωπηρά όρια της τάξης τους χωρίς να έχουν την πρόθεση να το πράξουν αλλά και χωρίς να επιζητούν οι ίδιοι κάτι τέτοιο, δημιουργώντας ένα είδος ανισορροπίας την οποία πρέπει με κάποιο τρόπο να επιλύσουν. Σύμφωνα με τους Hoyles & Healy (1999), η εξερεύνηση γεωμετρικών ιδιοτήτων σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας θα μπορούσε να παρακινήσει τους μαθητές να εξηγήσουν εμπειρικές εικασίες κατασκευάζοντας μια τυπική απόδειξη. Η ποιότητα της μαθηματικής ανάλυσης των μαθητών δείχνει ότι η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, το οποίο συνοδεύεται από κατάλληλες δραστηριότητες, μπορεί να παρέχει την ευκαιρία σε αρκετούς μαθητές να αναπτύξουν τη βάση για μια πληρέστερη εκτίμηση της φύσης και του σκοπού της μαθηματικής απόδειξης (Hoyles & Jones 1998).

Ένα βασικό χαρακτηριστικό των DGEs είναι η δυνατότητα της οπτικής αναπαράστασης γεωμετρικών αναλλοίωτων μέσω της ταυτόχρονης μεταβολής, που προκαλείται με τις δραστηριότητες του συρσίματος. Η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας επικεντρώνεται αρχικά στη δυνατότητα του λογισμικού να βοηθήσει τους μαθητές να μεταβούν από το μερικό στο γενικό με τη διατύπωση υποθέσεων και εικασιών και στη συνέχεια στη διαδικασία της απόδειξης (Hoyles,1998).

Εν τούτοις συχνά αναδύονται ερωτήματα από μερίδα εκπαιδευτικών που εργάζονται σε περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας, αναφορικά με τη σχέση που έχουν οι εικασίες και οι υποθέσεις που αναδύονται σε τέτοια περιβάλλοντα με τα θεωρήματα και την (αυστηρή) λογική θεμελίωση τόσο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (αξιώματα, θεωρήματα και αποδείξεις) όσο και του Απειροστικού Λογισμού. Μια αρχική θέση σε αυτού του τύπου τα ερωτήματα θα μπορούσε να είναι ότι σε περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας μια γεωμετρική κατασκευή αρχικά «περνάει» τη δοκιμή του συρσίματος (δημιουργία εικασιών και υποθέσεων). Στη συνέχεια αναδύεται η ανάγκη να αιτιολογηθεί γιατί η συγκεκριμένη κατασκευή «δουλεύει». Αυτή η ανάγκη ενισχύεται ακόμη περισσότερο κατά τη διάρκεια της συλλογικής συζήτησης προκειμένου να εξηγηθεί γιατί και πώς λειτουργεί.

Μια περαιτέρω μαθηματική νομιμοποίηση της κατασκευής αφορά τη διαδικασία της κατασκευής παρά το σχήμα που κατασκευάστηκε. Κάθε βήμα της κατασκευαστικής διαδικασίας αντιστοιχεί σε μια γεωμετρική ιδιότητα και ολόκληρο το σύνολο των ιδιοτήτων που δίνονται από τη διαδικασία αποτελεί μια παρουσίαση της απόδειξης της ακριβούς κατασκευής. Δηλαδή, υπάρχει μια σταδιακή μετατόπιση της εστίασης από την περιγραφή των αποτελεσμάτων του συρσίματος στην περιγραφή της διαδικασίας της κατασκευής και μέσω αυτής, η μετατόπιση κατευθύνεται στη θεωρητική γεωμετρία (Ε.Α.ΙΤΥ, 2010).

Από τα προηγούμενα ενισχύεται η άποψη ότι κατά τη διάρκεια εργασίας σε τέτοια περιβάλλοντα, δημιουργείται –πιθανό σε όχι και τόσο ορατό βαθμό- πλούτος νοημάτων αλλά και δυνατοτήτων για παραγωγή εικασιών. Χαρακτηριστική η ακόλουθη αναφορά: Στο στατικό περιβάλλον «χαρτί - μολύβι», η αφαιρετική διαδικασία της απόδειξης παράγεται κυρίως λόγω της ευφυΐας των υποκειμένων, ενώ στο δυναμικό περιβάλλον είναι η διαδικασία του συρσίματος που μπορεί να τη διαμεσολαβήσει (Arzarello et al, 1998).

1.6.7 Ψηφιακά εργαλεία και μαθηματικός συλλογισμός

Στην παρούσα εργασία, επιχειρούμε να καταδείξουμε τη σημασία της Ψ.Τ ως σημειωτικού διαμεσολαβητή, που μέσω του πειραματισμού των μαθητών με συγκεκριμένο ψηφιακό e-δόμημα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές ως εργαλείο πειραματισμού και ανατροφοδότησης των σκέψεων και των αποφάσεων που πρέπει να λάβουν, θα προκύψει το κατάλληλο εννοιολογικό έδαφος προτού το στάδιο της επίσημης απόδειξης.

Ο Edwards (1997) εισήγαγε τον όρο «εννοιολογικό έδαφος πριν από την απόδειξη» υποδεικνύοντας ότι η εικασία, η επαλήθευση, η εξερεύνηση και η εξήγηση αποτελούν τα απαραίτητα στοιχεία που προηγούνται των τυπικών αποδείξεων. Το εννοιολογικό έδαφος, παρέχει την αρένα για την κατασκευή των διαισθητικών ιδεών, που μπορούν στη συνέχεια να δοκιμαστούν και να επιβεβαιωθούν μέσω τυπικών μεθόδων και αποτελούν τη βάση για βαθύτερη κατανόηση της απόδειξης. Αυτή η προσέγγιση αντικατοπτρίζει την «οιονεί εμπειρική» άποψη των μαθηματικών, σύμφωνα με την οποία η κατανόηση οδηγεί από τις εικασίες και επαληθεύσεις των μαθητών, στις τυπικές αποδείξεις (Chazan, 1993).

Ισχυριζόμαστε επίσης ότι με την παρούσα εργασία δίνεται η αφορμή στους μαθητές να ασχοληθούν με δραστηριότητες πρόσθετης παιδαγωγικής αξίας που μπορούν να υποστηριχθούν από τις Ψ.Τ. Επιχειρούμε να ενσωματώσουμε διαδικασίες:

- Γραπτής και συμβολικής έκφρασης
- Ελεύθερης έκφρασης
- Διαχείρισης πληροφορίας
- Επικοινωνίας
- Πειραματισμό και διαχείριση μοντέλων
- Οικοδόμησης γνώσης
- Μάθησης μέσω συμμετοχής – εμπλοκής
- Δημιουργία νοημάτων εν χρήσει καθώς και νέων νοημάτων

Ως βασικές αρχές για το σχεδιασμό και την υλοποίηση του παρόντος, ελήφθησαν οι εξής:

- η «αποδοχή -ως βασικής αρχής για τη διδασκαλία-, της μάθησης μέσω ανακάλυψης (ή της “καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης” -Freudenthal)» καθώς και
- η «ανάδειξη της συμπληρωματικότητας της “καθαρής” και “εφαρμοσμένης” πλευράς των μαθηματικών».

Επιχειρείται επίσης να δοθεί έμφαση στους παρακάτω τομείς:

- Κατανόηση εννοιών, διαδικασιών και διάκριση σχέσεων.
- Ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να εκτελούν διαδικασίες με ευελιξία, ακρίβεια και στρατηγική.
- Δυνατότητα ερμηνείας και ορθολογικού συλλογισμού.
- Χρήση του δυναμικού περιβάλλοντος του e-δομήματος για τη διατύπωση μαθηματι-κών εικασιών .
- Καλλιέργεια και συστηματοποίηση της μαθηματικής ικανότητας που αφορά στην τυπική απόδειξη των εικασιών, ως αίτημα για την απάντηση στο καίριο ερώτημα «γιατί να ισχύει κάτι τέτοιο γενικά;».
- Ανάπτυξη στρατηγικών και ικανότητα σχηματισμού κατάλληλων αναπαραστάσεων και επίλυσης μαθηματικού προβλήματος.
- Καλλιέργεια της ικανότητας ελέγχου και συγκριτικής σκέψης των διαφορετικών αναπαραστάσεων του προβλήματος, μέσω του δυναμικού χειρισμού του δομήματος.
- Ανάπτυξη θετικής στάσης για τα Μαθηματικά και εδραίωση της άποψης ως χρήσιμου εργαλείου για επίλυση πραγματικών προβλημάτων αλλά και ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης και τεκμηρίωσης.

1.7 Διαδικασίες μάθησης και ο ρόλος του δασκάλου

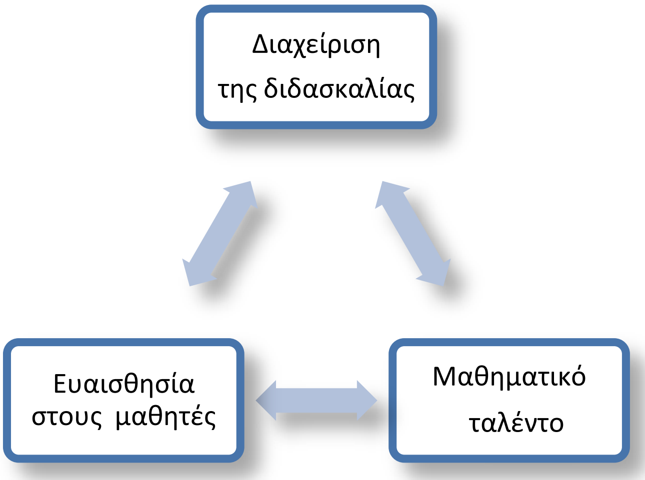
Ο ρόλος του δασκάλου στην προώθηση των διαδικασιών μάθησης είναι ζωτικής σημασίας και έχει αναλυθεί εκτεταμένα και σε διαφορετικά πλαίσια από πολλούς ερευνητές . Για παράδειγμα, η Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων που προέρχεται από τον G. Brousseau (1997), ορίζει το δάσκαλο ως μηχανικό διδακτικής (didactical engineer) που σχεδιάζει καταστάσεις και οργανώνει το περιβάλλον σύμφωνα με την ενότητα των μαθηματικών που πρέπει να διδάξει και με βάση τα χαρακτηριστικά των φοιτητών (αναφέρεται ως mesogenesis: βλ. Sensevy κ.ά., 2005). Σε δεύτερο επίπεδο διαχωρίζει τη δραστηριότητα μεταξύ του ίδιου και των μαθητών σύμφωνα με τις δυνατότητές τους (topogenesis).

Με αυτή την έννοια προσδιορίζεται εξ αρχής ο βαθμός παρεμβατικότητας του δασκάλου στην εξέλιξη των δραστηριοτήτων που ο ίδιος επιλέγει να παρουσιάσει στην τάξη.

Επιπλέον, οι αλληλεπιδράσεις στην τάξη αντιστοιχίζονται σε μεγάλο βαθμό με το διδακτικό συμβόλαιο, δηλαδή το σύστημα των αμοιβαίων άμεσων και έμμεσων προσδοκιών μεταξύ του δασκάλου και των μαθητών όσον αφορά τη μαθηματική γνώση.

Επιπλέον γίνονται αναφορές στη λεγόμενη “κουλτούρα της τάξης”: Επισημαίνεται “η ανάγκη για μια βαθύτερη κατανόηση των τρόπων με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί συμβάλλουν στη διαμόρφωση αυτής της κουλτούρας " (Siemon & al. (2004, σελ. 193). Άλλοι ερευνητές, οι οποίοι εργάζονται στα πλαίσια των αντιλήψεων του Vygotsky (Vygotsky,1978, σ. 84), υπογραμμίζουν "ότι η διδασκαλία συνίσταται σε μια διαδικασία δημιουργίας της δυνατότητας στους μαθητές δυναμικών επιτευγμάτων".

Προκειμένου συνεπώς να δημιουργούνται τέτοιου τύπου συνθήκες, ο δάσκαλος πρέπει να παρέχει την κατάλληλη παιδαγωγική διαμεσολάβηση για οικειοποίηση από τους μαθητές των επιστημονικών εννοιών (Schmittau, 2003). Μέσα από αυτή την προσέγγιση, ορισμένοι ερευνητές (π.χ. Bartolini & Mariotti) δίνουν την εικόνα του δασκάλου ως σημειωτικού μεσολαβητή (semiotic mediator). Με αυτή την ιδιότητα, ο δάσκαλος προωθεί την εξέλιξη εκείνων των σημείων μέσα στην τάξη, για τη δημιουργία στους μαθητές προσωπικών εννοιών και νοημάτων προς την κατεύθυνση της κοινώς αποδεκτής επιστημονικής έννοιας. Στην περίπτωση αυτή, η διδασκαλία σχεδιάζεται γενικά ως ένα σύστημα ενεργειών που προωθεί κατάλληλες διαδικασίες εσωτερίκευσης (internalisation processes).



Εικ. 23: Διδακτική τριάδα χαρακτηρισμού της διδασκαλίας των μαθηματικών

(B. Jaworski, D. Potari 1998)

1.8 Ψυχολογικές πτυχές των εργαλείων: Εργαλεία για αποτέλεσμα ή εργαλεία και αποτέλεσμα;

Είναι συχνός ο προβληματισμός που διατυπώνεται στην έρευνα, σχετικά με τη διάκριση (ή/και της ουδετερότητας) μιας ακολουθούμενης μεθόδου, από τα αποτελέσματα που η εφαρμογή αυτής προκάλεσε. Με άλλα λόγια, αναφερόμαστε στη γενικότερη θέση, που στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως παράδοξο του Vygotsky και τοποθετείται στο επίκεντρο της ψυχολογίας: ότι δηλαδή η ψυχολογία δημιουργεί τα ίδια τα αντικείμενα που διερευνά. Με αυτή την έννοια, όταν συντελείται μια έρευνα για μια μέθοδο, ταυτόχρονα εκτελείται και ένα από τα πιο σημαντικά παράδοξα στις προσπάθειες κατανόησης των ανθρώπινων και μοναδικών μορφών ψυχολογικής δραστηριότητας. Στην περίπτωση αυτή, η μέθοδος έχει το διπλό ρόλο της προϋπόθεσης και ταυτόχρονα και του προϊόντος. Αποτελεί ταυτόχρονα και το εργαλείο και το αποτέλεσμα της μελέτης (Vygotsky, 1978, σ.65). Φαίνεται συνεπώς, να αμφισβητείται ευθέως η διάκριση μεταξύ μεθόδου και αποτελεσμάτων αυτής. Δηλαδή μια μέθοδος έρευνας στη ψυχολογία, δεν είναι ανεξάρτητη από τα αποτελέσματά της. Κατ΄ επέκταση, φαίνεται να αμφισβητείται η παραδοσιακή θέση για το δίπολο εργαλείο

– αποτέλεσμα, με την έννοια της ανεξαρτησίας αυτών των δύο (Newman και Holzman, 1993). Στην ίδια λογική, αναφέρεται ότι "η μέθοδος εργαλείου – αποτελέσματος εξασκείται ταυτόχρονα, δεν εφαρμόζεται".

Η γνώση δεν μπορεί να διαχωριστεί από τη δράση της εξασκούμενης μεθόδου· Η γνώση δεν είναι "κάπου έξω" που περιμένει να ανακαλυφθεί μέσω της χρήσης ενός ήδη κατασκευασμένου εργαλείου. Η γνώση εν τέλει, παράγεται (και) μέσω του εργαλείου.

"Η εξασκούμενη μέθοδος δημιουργεί το αντικείμενο της γνώσης ταυτόχρονα με τη δημιουργία του εργαλείου με το οποίο η γνώση θα μπορούσε να γίνει γνωστή. Εργαλείο-και-αποτέλεσμα συνυπάρχουν. Η σχέση τους συνθέτει μια μάλλον διαλεκτική ενότητα, παρά αποτελεί μια ενόργανη δυαδικότητα (instrumental duality). (Holtzman, 1997, σ. 52, original emphasis). Θεωρούμε σημαντικές τις παραπάνω αναφορές, προκειμένου στα επόμενα να αναφερθούμε τόσο στο διδακτικό πλαίσιο των DGEs (βλ. σελ. 42 και σελ. 44 θεωρία Instrumental Genesis και θεωρία TSM –Semiotic Mediation) όσο και στον τρόπο που η χρήση τους διαμορφώνει διαφορετικά πρότυπα μεθοδολογιών και εσωτερίκευσης νοημάτων.

1.9 Κατανόηση στα μαθηματικά: ορισμός ή καταγραφή αποτελεσμάτων;

Ο Skemp (1976) εντόπισε δύο είδη μαθηματικής κατανόησης: τη σχεσιακή (relational) και την εργαλειακή (instrumental) . Περιέγραψε τη σχεσιακή κατανόηση ως εξής: " όταν γνωρίζω δύο: το τί πρέπει να κάνω και το γιατί "(σελ. 2). Για τη διαδικασία της σχεσιακής μάθησης στα μαθηματικά την περιγράφει ως «τη δημιουργία μιας εννοιολογικής δομής» (σελ. 14). Από την άλλη περιγράφει ως ενόργανη την κατανόηση ως "κανόνες χωρίς λόγους" (Nickerson, 1985 σελ. 2).

Εύλογα συνεπώς προκύπτει το ερώτημα: είναι εφικτό να δοθούν ρητοί ορισμοί για το τί είναι η κατανόηση ή ποια είναι τα επίπεδα κατανόησης στα μαθηματικά;

Σύμφωνα με ορισμένους ερευνητές κρίνεται περισσότερο σκόπιμο να εξετάσουμε και να εντοπίσουμε ορισμένα αποτελέσματα της κατανόησης: για παράδειγμα είναι δυνατό να υπάρχει συμφωνία ότι πιθανά αποτελέσματα της μαθηματικής κατανόησης μπορεί να είναι η δυνατότητα των μαθητών να δουν βαθύτερα χαρακτηριστικά μιας έννοιας, να ψάχνουν για συγκεκριμένες πληροφορίες σε μια κατάσταση πιο γρήγορα, να είναι σε θέση να αντιπροσωπεύουν τις καταστάσεις και να τις αναπαριστούν χρησιμοποιώντας νοητικά μοντέλα;

Προτείνεται επίσης ότι «στην καθημερινή ζωή η κατανόηση ενισχύεται από την ικανότητα να δημιουργούνται γέφυρες μεταξύ ενός εννοιολογικού πεδίου και ενός άλλου ». Οι Skemp & Nickerson τονίζουν τη σημασία της γνώσης ως σχεσιακής γνώσης: «Όσα περισσότερο γνωρίζει κάποιος σχετικά με ένα θέμα, τόσο περισσότερο το κατανοεί».

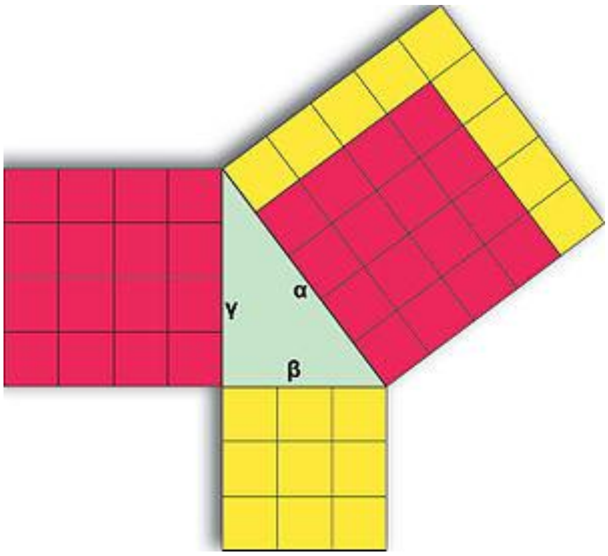
Οι Hiebert και Carpenter (1992) αναφέρουν ότι "ο εμπλουτισμός του εννοιολογικού πλαισίου μέσα στο οποίο μπορεί κανείς να ενσωματώσει μια νέα πραγματικότητα, συντείνει περισσότερο στο να μπορεί να κατανοήσει το γεγονός. " Ειδικά ως μαθηματική κατανόηση ορίζεται η οικοδόμηση του εννοιολογικού 'πλαισίου' ή 'δομής' που αναφέρεται παραπάνω. Μια μαθηματική ιδέα, διαδικασία ή γεγονός, γίνεται διεξοδικά κατανοητό αν συνδέεται με υπάρχοντα δίκτυα με εντονότερες ή πιο πολλές συνδέσεις. "(σελ. 67). Ως εκ τούτου, αυτή η ιδέα της κατανόησης ως μιας δομής ή ενός δικτύου μαθηματικών ιδεών ή παραστάσεων, τεκμαίρεται σαφώς από τη βιβλιογραφία.

Αντλώντας διάφορες θεωρήσεις από παλαιότερες μελέτες, οι ορισμοί της κατανόησης που χρησιμοποιούνται μπορούν να συντεθούν στις παρακάτω δύο θέσεις:

• Να κατανοείς τα μαθηματικά είναι να κάνεις συνδέσεις μεταξύ των (δια)νοητικών αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας και

• Κατανόηση είναι το αποτελεσματικό δίκτυο αναπαραστάσεων που θα προκύψει και που θα σχετίζονται με αυτή τη μαθηματική έννοια.

Για παράδειγμα, η βαθύτερη κατανόηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος (θα μπορούσε να) περιλαμβάνει και τη γεωμετρική αναπαράσταση της αλγεβρικής σχέσης $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ως σχέσης εμβαδών των εικονιζόμενων τετραγώνων.



Εικ. 24: Γεωμετρική αναπαράσταση Πυθαγορείου Θεωρήματος

Αυτοί οι ορισμοί σχεδιάστηκαν μαζί με την ιδέα της κατανόησης ως ένα δίκτυο εσωτερικευμένων εννοιών με τη διευκρίνιση της κατανόησης ως μίας δράσης και ως το αποτέλεσμα αυτής. Σχετικός είναι και ο ορισμός των Hiebert και Carpenter (1992) που ορίζουν ως κατανόηση αυτό που ευρέως ονομάζεται ‘’οτιδήποτε συνδέεται σε αυτό το δίκτυο, συμπεριλαμβανομένης της νοητικής αναπαράστασης από ό, τι προσπαθούμε να καταλάβουμε (μέσω νοητικών μοντέλων καθώς και τις μνήμες των εμπειριών του παρελθόντος ως νοητικές αναπαραστάσεις).

1.10 Ορίζοντας τις αναπαραστάσεις

Έχοντας αναφερθεί στα προηγούμενα για τις διάφορες εκδοχές που αφορούν στην κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι συστατικό στοιχείο της κατανόησης αποτελούν οι αναπαραστάσεις μιας μαθηματικής έννοιας. Τί εννοούμε όμως όταν λέμε αναπαράσταση μιας έννοιας;

Θα χρειαστεί πρώτα απ' όλα να διευκρινίσουμε ότι αναφερόμαστε σε διανοητικές ή εσωτερικές αναπαραστάσεις, χρησιμοποιώντας τον ορισμό από τον Davis (1984):«Κάθε μαθηματική έννοια, ή τεχνική ή στρατηγική - ή οτιδήποτε άλλο μαθηματικό που περιλαμβάνει είτε πληροφορίες ή κάποια νοήματα επεξεργασμένης πληροφορίας- αν θέλουμε να παραμείνει στο μυαλό, πρέπει να εκπροσωπείται με κάποιο τρόπο. "(σελ.203)»

Λόγω των εμφανών δυσκολιών όσον αφορά τη μελέτη του είδους αλλά και του τρόπου εσωτερίκευσης των αναπαραστάσεων, είναι φανερό ότι μόνο υποθέσεις μπορούμε να κάνουμε για τις πιθανές μορφές των εσωτερικών αναπαραστάσεων.

Έχουν γίνει πολλές προσπάθειες στο παρελθόν προκειμένου να δημιουργηθεί ένας ορισμός των αναπαραστάσεων. Ομαδοποιώντας κάποια στοιχεία που προτείνονται από Sierpinska (1994) υπό τον όρο «διανοητικές παραστάσεις' (mental representations) αλλά και από άλλους ερευνητές (π.χ Goldin, 1998) προτείνεται μια ποικιλία από μορφές εσωτερικών αναπαραστάσεων: λεκτικών / συντακτικών, εικονιστικών, συμβολικών, σχεδιασμού / παρακολούθησης /ελέγχου και τέλος και των συναισθηματικών αναπαραστάσεων.

Επομένως, μια εσωτερική αναπαράσταση μιας μαθηματικής έννοιας θα μπορούσε να περιλαμβάνει στοιχεία σχετικά με την εν λόγω έννοια, εικόνες ή διαδικασίες που θα μπορούσε να αντλήσει κάποιος προκειμένου να διερευνήσει αυτή την έννοια, καθώς και το πώς είχε αισθανθεί στο παρελθόν όταν ασχολήθηκε με αυτή την έννοια. Στην προσπάθεια κατανόησης αυτής της μαθηματικής έννοιας, συνδέουμε (αυθόρμητα;) αυτές τις ξεχωριστές αναπαραστάσεις για να δημιουργήσουμε μια πιο σύνθετη κατανόηση σχετικά με αυτή την έννοια.

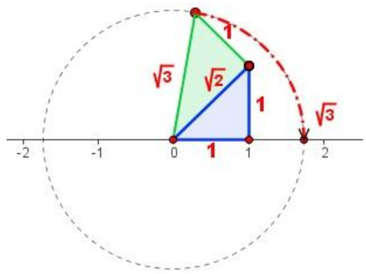
1.11 Αξιολόγηση της κατανόησης στα μαθηματικά

Όπως τεκμαίρεται από τα προηγούμενα, η κύρια θέση για την κατανόηση στα μαθηματικά, βασίζεται στις εσωτερικές αναπαραστάσεις. Από την άλλη πλευρά, στη διδασκαλία και στις αξιολογήσεις, αυτό που στην πραγματικότητα χρησιμοποιούμε είναι «εξωτερικές» αναπαραστάσεις των εννοιών. Με τον όρο εξωτερικές αναπαραστάσεις αναφερόμαστε σε καταστάσεις όπως: η ομιλούμενη γλώσσα, τα γραπτά σύμβολα, οι εικόνες και τα φυσικά αντικείμενα που χρησιμοποιούνται για να επικοινωνήσουμε τα μαθηματικά. Οι Hiebert και Carpenter, (1992) καθώς και Miura (2001) αναφέρονται σε εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις ως «γνωστικές» και «εκπαιδευτικές» αντίστοιχα.

Θα μπορούσε κανείς να υποθέσει ότι θα υπάρχει κάποια σύνδεση μεταξύ των εξωτερικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται στην εκπαίδευση για την αξιολόγηση του επιπέδου κατανόησης και των εσωτερικών αναπαραστάσεων που αναπτύχθηκαν από τους μαθητές. Ωστόσο, τόσο από εμπειρικά όσο και από ερευνητικά δεδομένα πρέπει να αναγνωρίσουμε τη δυσκολία σύμπλευσης αυτής της διαδικασίας . "Είναι πολύ προβληματικό να υποθέσουμε ότι οι συνδέσεις που διδάσκονται με ρητό τρόπο εσωτερικεύονται από τους μαθητές" (Hiebert και Carpenter, 1992, σελ. 86). "Μπορούμε μόνο να προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την κατανόηση των μαθητών μέσω εξωτερικών αναπαραστάσεων υπό το φως των όσων νομίζουμε ότι είναι η δομή αυτής της κατανόησης".

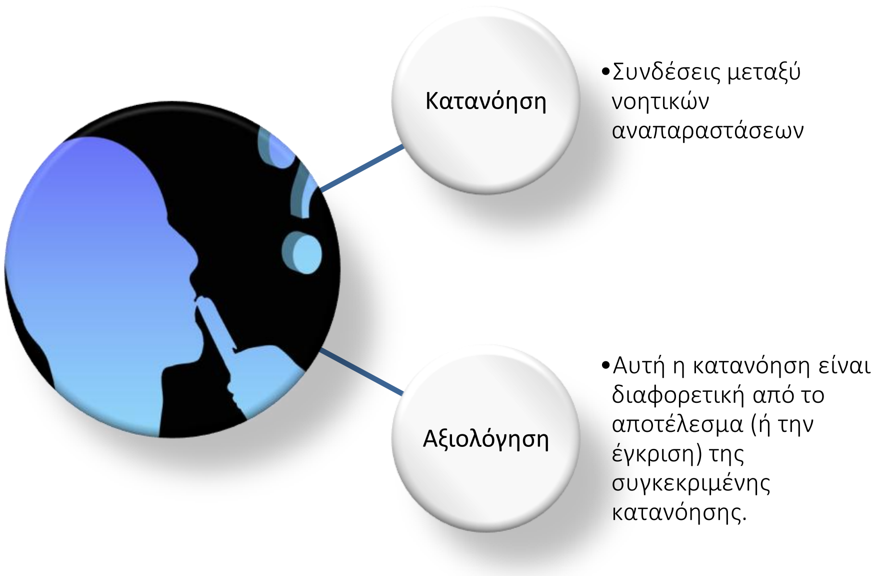
Για παράδειγμα όταν ζητάμε από τους μαθητές να αποδείξουν ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, στην πραγματικότητα ζητάμε να παρουσιάσουν μια σειρά εξωτερικών συνδέσεων (λογικές μαθηματικές σχέσεις που οδηγούν στην απόδειξη), παραβλέποντας τις εσωτερικές αναπαραστάσεις που μπορεί να έχουν για το $\sqrt{2}$ (ως μήκος πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους 1, ή/και τη δομή γενικότερα ενός άρρητου αριθμού ή/και την ανυπαρξία όλων αυτών…).

Με άλλα λόγια συμβαίνει συχνά το παράδοξο, να ζητείται από ένα μαθητή να αποδείξει κάτι για το οποίο δεν έχει κατανοήσει την εννοιολογική και δομική υπόσταση του.



Πόσο εφικτό όμως είναι να καθορίσουμε ή/και να προτείνουμε τρόπους ελέγχου της μαθηματικής κατανόησης, με την έννοια της εξέτασης του εσωτερικού δικτύου αναπαραστάσεων που έχει δημιουργηθεί από τη διδασκαλία κάποιας έννοιας;

Όπως έχει ήδη επισημανθεί, υπάρχει ένα βασικό μειονέκτημα σε οποιαδήποτε δυναμική μέθοδο χρησιμοποιούμε με εξωτερικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών για να προσπαθήσουμε να κάνουμε συνδέσεις μεταξύ αυτών και των αντίστοιχων εσωτερικών αναπαραστάσεων. Ωστόσο, από σχετικές έρευνες μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχουν δύο βασικοί άξονες στους οποίους μπορούμε να στηριχτούμε προς αυτή την κατεύθυνση:



Εικ. 25: Επίπεδα κατανόησης και αξιολόγηση τους

Είναι πιθανό, η συγκεκριμένη θέση να περιλαμβάνει από ορισμένες αλλαγές στον τρόπο αξιολόγησης έως και μεγάλες ανατροπές. Οι Hiebert και Carpenter (1992) αναφέρουν ότι «η κατανόηση συνήθως δεν μπορεί να συναχθεί από μια ενιαία απάντηση σε ένα ενιαίο έργο. Κάθε ατομική εργασία μπορεί να εκτελεστεί σωστά χωρίς κατανόηση. Απαιτείται τότε μια ποικιλία εργασιών, για τη δημιουργία ενός προφίλ συμπεριφορικών ενδείξεων. »(σελ. 89), αναγνωρίζοντας με αυτό τον τρόπο την κατανόηση ως ένα πιο σύνθετο δίκτυο.

Με βάση τους ίδιους, «αν θέλουμε να αξιολογήσουμε αυτό το είδος κατανόησης, τότε θα πρέπει να προσπαθήσουμε και να αποκτήσουμε πρόσβαση στις διαφορετικές συνδέσεις που έχει ένας μαθητής. Πολύ συχνά, όταν αξιολογούμε τους μαθητές ως προς την κατανόηση τους στα μαθηματικά, ασχολούμαστε μόνο με ένα μικρό μέρος αυτού του δικτύου».

Συνεχίζοντας στο ίδιο σκεπτικό, η ικανότητα ενός μαθητή να πραγματοποιήσει μια μαθηματική εργασία σημαίνει μόνο ότι ένα τμήμα της κατανόησης μπορεί να υπάρχει σε αυτό (αυτό μπορεί να περιέχει μόνο δεσμούς μεταξύ της έννοιας και ενός διαδικαστικού μοντέλου που σχετίζονται με την εν λόγω έννοια) και επομένως δεν υποδεικνύει απαραίτητα (και) την έκταση της κατανόησης.

Μια ενδιαφέρουσα εξέλιξη αυτής της ιδέας είναι η «μη δυαδική φύση» της κατανόησης (Nickerson, 1985). «Εάν ένας φοιτητής έχει έρθει σε μια ιδέα με οποιονδήποτε τρόπο, τότε θα έχει κάποια κατανόηση της έννοιας αυτής, ωστόσο είναι δυνατό οι συνδέσεις να περιορίζονται ή να είναι ακατάλληλες μέσα στα πλαίσια αυτής της κατανόησης». Ερμηνεύοντας –πιθανό αυθαίρετα- τη θέση αυτή, η «μη δυαδική φύση της κατανόησης» συνίσταται στο ελλιπές εσωτερικό δίκτυο αναπαραστάσεων της έννοιας, αλλά και στην έλλειψη συνδέσμων μεταξύ αυτού του δικτύου και των εξωτερικών μορφών έκφρασής του. Ως αποτέλεσμα αυτών προκύπτει το σύνηθες φαινόμενο να αναπαράγονται από μαθητές διαδικασίες που αφορούν σε μαθηματικές αποδείξεις χωρίς βαθύτερη κατανόηση ή νοηματοδότηση συστατικών και δομικών στοιχείων των μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται σε αυτές.

1.12 Προτεινόμενες στρατηγικές

Με βάση τα προηγούμενα, είναι πιθανό να τεθεί επιπρόσθετα και το –πιθανώς ρητορικό- ερώτημα: μπορούμε ποτέ να έχουμε πλήρη κατανόηση;

Είναι φυσικό ότι το ερώτημα δεν μπορεί να απαντηθεί με ρητό τρόπο. Μπορούμε όμως να πιθανολογήσουμε ότι είναι δυνατό να αυξάνουμε την κατανόηση αναπτύσσοντας περισσότερες συνδέσεις (για παράδειγμα μεταξύ –αρχικά- πολύ διαφορετικών εννοιών που δεν έχουμε κάνει αντίστοιχες συνδέσεις στο παρελθόν). Επομένως, μπορούμε να εξετάσουμε διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να αξιολογήσουμε την κατανόηση. Πιθανές μέθοδοι που προτείνονται από τους Hiebert και Carpenter (1992) είναι να αναλύουμε:

- Τα λάθη των μαθητών.
- Τις συνδέσεις μεταξύ συμβόλων και συμβολικών διαδικασιών και αντίστοιχες αναφορές.
- Τις συνδέσεις μεταξύ συμβολικών διαδικασιών και άτυπων καταστάσεων επίλυσης προβλημάτων
- Τις συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών συμβολικών συστημάτων.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις προτάσεις ως σημείο εκκίνησης για να εξετάσουμε τις δυνατότητες αξιολόγησης της μαθηματικής κατανόησης. Όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα, κατά την αξιολόγηση της κατανόησης μιας μαθηματικής έννοιας, θέλουμε να βρούμε τα είδη των εσωτερικών αναπαραστάσεων που μπορεί να δημιουργήσει αλλά και να συγκρατήσει ένας μαθητής σχετικά με την έννοια, είτε είναι διαδικαστικές - εννοιολογικές ή ακόμα και συναισθηματικές αναπαραστάσεις που σχετίζονται με την έννοια. Κυρίαρχο σημείο, η εύρεση των τρόπων με τους οποίους οι παραστάσεις αυτές συνδέονται μεταξύ τους. Είναι συνεπώς εύλογο το ερευνητικό ερώτημα που αφορά στο "πώς" η χρήση των DGEs μπορεί να χρησιμοποιηθεί (και) ως εργαλείο διερεύνησης τέτοιων συνδέσεων.

Κεφάλαιο 2ο - Μεθοδολογία Έρευνας

2.1 Στοχεύσεις της έρευνας

Η χρήση των DGEs (Dynamic Geometry Environments) έχει επιφέρει ριζικές αλλαγές στη διδασκαλία των Μαθηματικών, καθώς οι μαθητές "σύροντας" αντικείμενα μπορούν να πειραματίζονται και να αντιλαμβάνονται με αυτόν τον τρόπο τις ιδιότητες τους, ώστε να οδηγηθούν στη διατύπωση κάποιας εικασίας που να αποτελεί ένα είδος μιας γενικής σχέσης ή ιδιότητας. Βιβλιογραφικά τεκμαίρεται ότι η εισαγωγή κάθε είδους τεχνολογίας στο σχολείο, επηρεάζει όχι μόνο τη διδακτική διαδικασία αλλά ακόμα και τη σύλληψη και τον έλεγχο των διδακτικών καταστάσεων. Η έρευνα της διδασκαλίας μας με το συγκεκριμένο ψηφιακό εργαλείο δεν θα μπορούσε να αγνοήσει το σχεδιασμό και τη φύση αυτών των εργαλείων. Δεν θα μπορούσε επίσης να αγνοήσει την αποδοχή –ως βασικής αρχής για τη διδασκαλία – της μάθησης μέσω ανακάλυψης (ή της "καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης" για τον Freudenthal) καθώς επίσης και την ανάδειξη της συμπληρωματικότητας της "καθαρής" αλλά και της "εφαρμοσμένης" πλευράς των μαθηματικών (Κυνηγός 2017, παραδόσεις Διδακτικής ΙΙ). Όσον αφορά την παρούσα έρευνα, θα ήταν σχετικό να αναφέρουμε ότι τόσο κατά το στάδιο σχεδιασμού της δραστηριότητας όσο και κατά τα στάδια υλοποίησης της, θεωρήσαμε σημαντικό στοιχείο την καλλιέργεια αυτονομίας των συμμετεχόντων, θεωρώντας ότι αυτό αποτελεί κεντρικό στοιχείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών με χαρακτηριστικά κονστρουκτιβιστικών αντιλήψεων. Επιπλέον, στο σχεδιασμό και στη σύνθεση των ερωτημάτων που αφορούσαν στο τελικό φύλλο εργασίας που επεξεργάστηκαν οι μαθητές, δόθηκε έμφαση στους τρόπους με τους οποίους τα νοήματα που παράγονται κατά τη διάρκεια της συλλογικής εμπλοκής τους με τα ψηφιακά αντικείμενα, επηρεάζονται τόσο από τις αλλαγές σε αυτά τα αντικείμενα όσο και από τη μεταξύ τους διαπραγμάτευση.[15]

Από μια άλλη θεώρηση όμως, «… οι μαθητές είναι εύκολο να πειστούν για την εγκυρότητα μιας πρότασης κατόπιν των συνεχών μετασχηματισμών που μπορούν να δημιουργούν μόνοι τους σε περιβάλλοντα DGEs» (De Villiers, 1993 & 2003). Επισημαίνουμε σε αυτό το σημείο τον κρίσιμο ρόλο του εκπαιδευτικού καθώς αυτός είναι ο επικεφαλής της δόμησης διδακτικών αλληλουχιών, τέτοιων ώστε να λαμβάνει χώρα αρχικά η "εσωτερίκευση" νοημάτων που προκύπτουν από το "σύρσιμο" σε ένα δυναμικό ψηφιακό περιβάλλον, τα οποία στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθούν ως το όχημα που θα οδηγήσει τους μαθητές στην κατασκευή της απόδειξης. Είναι σαφές συνεπώς ότι δεν θα μπορούσαν να απουσιάζουν από τη δραστηριότητα αποδεικτικές διαδικασίες, οι οποίες όμως ζητούνται αφού προηγούμενα επιχειρείται να δημιουργηθούν συνθήκες bfp μέσω των δυναμικών αναπαραστάσεων του e-δομήματος. Όπως περιγράφεται και στα επόμενα, στο σχεδιασμό της δραστηριότητας περιλαμβάνονται και τα 3 είδη αποδεικτικών σχημάτων κατά Harel & Sowder (βλ. Εικ. 19): Αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πειθούς (στο εισαγωγικό στάδιο), εμπειρικά – αντιληπτικά σχήματα (με χρήση γεωμετρικού ισοδύναμου του προβλήματος) και τέλος αναλυτικά – αξιωματικά αποδεικτικά σχήματα (στα αποδεικτικά στάδια της δραστηριότητας).

Θεωρούμε επομένως ότι υλοποιούνται σημαντικά χαρακτηριστικά που αφορούν στην υλοποίηση σημειωτικών διαδικασιών που θα καλλιεργήσουν προσωπικά νοήματα και σημασίες στους μαθητές. Εστιάζοντας στη θέση "τα παραδείγματα διαδικασιών αιτιολογίας από την ερμηνεία

[15] (Kynigos, 2012. *Constructionism: Theory of learning or theory of theory of design?*).

δείχνουν στρατηγικές γνώσης και σημασιολογικής - συντακτικής παραγωγής απόδειξης (Weber, 2001? Weber & Alcock, 2004) ενδιαφερόμαστε ειδικότερα για αυτό το είδος αιτιολογίας. Συνθέσαμε συνεπώς ένα σύνολο ερωτημάτων που δίνεται σε φύλλο εργασίας και τα οποία στοχεύουν στην πρόκληση αιτιολογίας από /ή για ερμηνεία.

Επιπλέον διατυπώνεται η θέση ότι, «…τα περιβάλλοντα DGEs βοηθούν τους μαθητές ώστε να ανακαλύψουν ή/και να προσδιορίσουν γεωμετρικές ιδιότητες αλλά δεν συμβάλλουν κατ΄ ανάγκη και στην ανάπτυξη της αποδεικτικής τους ικανότητας.» (Hoyles και Healy, 1999). Συχνές είναι οι αναφορές στη βιβλιογραφία στη διατύπωση εικασιών από τους μαθητές, κατόπιν συνεχών πειραματισμών τους σε ψηφιακά περιβάλλοντα. Κατά συνέπεια καλλιεργείται (…) δυνητικά η παραμονή τους σε ένα αντιληπτικό – εμπειρικό επίπεδο σχετικά με την ανάγκη απόδειξης της εικασίας. Όταν μια τέτοια πεποίθηση είναι κοινή στην τάξη, τότε το λογισμικό μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο στη μετάβαση από την εμπειρική προς τη θεωρητική σκέψη, καθώς επιτρέπει την επικύρωση μιας πρότασης χωρίς την ανάγκη χρήσης θεωρίας. Για το σκοπό αυτό στην εργασία χρησιμοποιούμε γεωμετρικό ισοδύναμο του προβλήματος προκειμένου να λειτουργήσει ως εμπειρικό αντιληπτικό αποδεικτικό σχήμα (“empirical – perceptual proof scheme” κατά Harel & Sowder βλ. και σελ. 34 και Εικ. 19). Πρακτικά διαπιστώνουμε ότι με τη χρήση σχημάτων αυτής της κατηγορίας, είναι οι ίδιοι οι μαθητές που διατυπώνουν την άποψη «αυτό όμως δεν αποτελεί απόδειξη (…)» αν ο ερευνητής παραμείνει μόνο σε αυτό. Είναι πολύ πιθανό στη συνέχεια να δημιουργηθεί στους μαθητές η ιδέα της αναγκαιότητας για αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα.

Από μια άλλη σκοπιά τώρα «…Η απόδειξη πρέπει να διδάσκεται αποκλειστικά στους μαθητές που επιδιώκουν να αποκτήσουν πανεπιστημιακή εκπαίδευση…» ενώ «τα ευρετικά επιχειρήματα θεωρούνται ικανότερα της απόδειξης όσον αφορά στην ανάπτυξη επιχειρηματολογίας και δικαιολόγησης». Επιπλέον «…οι νέες τεχνολογίες προσφέρουν μια δυναμική και οπτική προσέγγιση, η οποία ενδεχομένως θεωρείται αποτελεσματικότερη της απόδειξης όσον αφορά στη μαθηματική αιτιολόγηση». (Hanna, 2000). Συνθέτοντας τις διαφορετικές αυτές προσεγγίσεις που προαναφέρθηκαν μέσω ορισμένων θέσεων (Πιαζετιανων καταβολών) περί της ανθρώπινης υπόστασης (εξισορρόπηση (equilibration), αυτορύθμιση (self-regulation), αυτό-εξέταση / αναστοχασμός (reflection)), η παρούσα έρευνα σχεδιάστηκε και μεθοδεύτηκε λαμβάνοντας υπόψη τους τρεις αυτούς πυλώνες που κατά τη γνώμη μας, αφορούν (και) ειδικότερα τις διαδικασίες της ανθρώπινης μάθησης. Σημαντική επίσης παράμετρος του σχεδιασμού μας και η σημασία του περικείμενου (με την έννοια τόσο του ψηφιακού περιβάλλοντος μάθησης όσο και των προκαλούμενων κοινωνικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των συμμετεχόντων) καθώς και τα εμπόδια των (πρότερων) αναπαραστασιακών παραδοχών.[16]

Τέλος, είναι γνωστό ότι στο πλαίσιο του σχολείου η πολυπλοκότητα της μετα-θεωρητικής θεώρησης από τους μαθητές, φαίνεται να αγνοούνται. Θεωρείται δεδομένο ότι οι τρόποι συλλογισμού των μαθητών προσαρμόζονται αυθόρμητα στην εξελιγμένη λειτουργία ενός θεωρητικού συστήματος (με ανάλογη πιθανώς προσαρμοστικότητα, εκείνης του διδάσκοντα). Θεωρείται επίσης δεδομένο ότι θα υπάρξει αποδοχή από τους μαθητές ορισμένων εννοιών με αφαιρετικό τρόπο, καθώς και ότι τίποτε άλλο εκτός από αυτά που είναι κοινά αποδεκτά δεν μπορεί να ισχύει. Ο έλεγχος αλήθειας παραμένει εξ ολοκλήρου στα χέρια του δασκάλου, με αποτέλεσμα να υπάρχει ένα γενικό αίσθημα σύγχυσης, αβεβαιότητας και έλλειψης της κατανόησης για τους μαθητές.» *(*Mariotti, 2012). Με άλλα λόγια, στο πλαίσιο του σχολικού προγράμματος δεν προσφέρονται

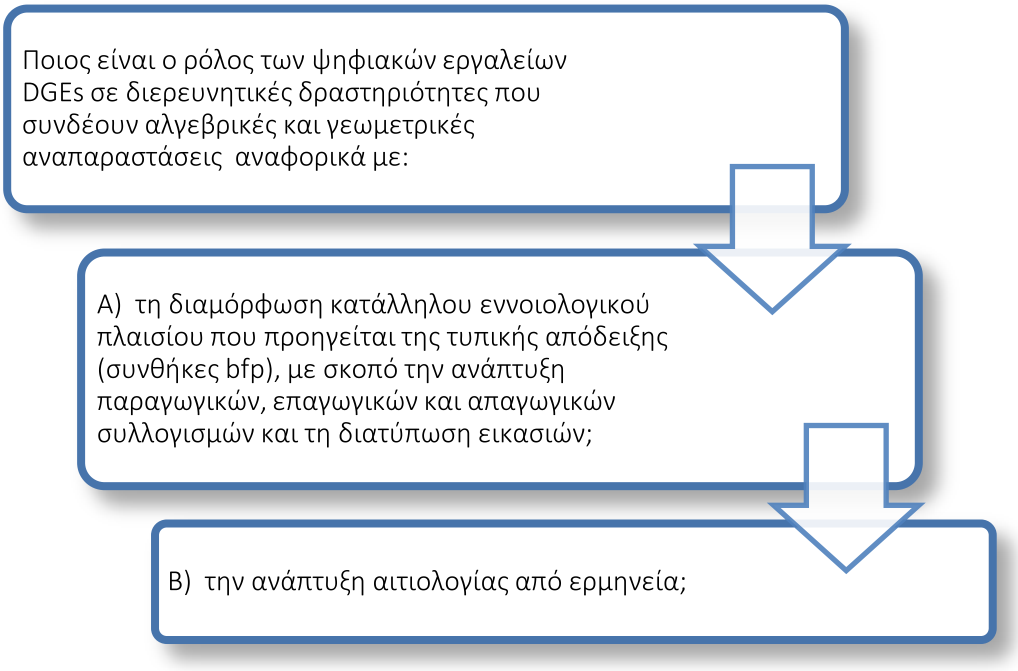
[16] Από την (επι)κριτική των σταδίων του Piaget…

κατάλληλα κίνητρα στους μαθητές, ώστε να αναπτύξουν τη δική τους επιχειρηματολογία αλλά και να αναδείξουν τη θεωρητική τους σκέψη μέσω της εμπλοκής τους στην αποδεικτική διαδικασία μιας πρότασης ή ενός θεωρήματος. Κρίναμε συνεπώς σημαντικό, να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλες διαδικασίες μάθησης (bfp συνθήκες), με τις οποίες οι μαθητές όχι μόνο θα εμπλακούν στη διαδικασία της απόδειξης μιας πρότασης, αλλά -και σε πρότερο επίπεδο από αυτό - θα οδηγηθούν στο στάδιο διατύπωσης υπό μορφή εικασίας ή ισχυρισμού καθεαυτής της πρότασης.

Για τους σκοπούς της δραστηριότητας σχεδιάστηκε ένα δόμημα στο Geogebra[17] όπου λήφθηκε μέριμνα ώστε τόσο τα δομικά του στοιχεία όσο και ο χειρισμός του να είναι εύκολα διαχειρίσιμα και με δυνατότητες περαιτέρω παραμετροποίησης. Λαμβάνοντας συνεπώς υπόψη τις προηγούμενες αναφορές καθώς επίσης και τις στάσεις, τις αντιλήψεις και τις ικανότητες αλλά και τις δυσκολίες των μαθητών στην παραγωγή εικασιών (κυρίως) σε ένα στατικό περιβάλλον, το ενδιαφέρον της έρευνας εστιάζει στα παρακάτω ερωτήματα.

2.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Σε αυτή την εργασία διερευνούμε μέσω θεωρητικά τεκμηριωμένου σχεδιασμού τα εξής ερωτήματα:



Εικ. 26: Ερευνητικά ερωτήματα

[17] Ο αρχικός σχεδιασμός υλοποιήθηκε στο GSP (Geometer SketchPad). Η τελική υλοποίηση στο Geogebra έγινε λόγω της ανάγκης να υπάρχει διαχωρισμός των γραφικών (Γραφικά 1 & Γραφικά 2) ανάμεσα στο γεωμετρικό και αλγεβρικό visualization.

2.3 Ερευνητικός Σχεδιασμός

Αρχικά η έρευνα διεξήχθη σε σχολική τάξη 15 ατόμων της Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού (Κατεύθυνσης) και είχε διάρκεια 3 διδακτικές ώρες. Το Σχολείο επιλογής ήταν το Α΄ Αρσάκειο - Τοσίτσειο Λύκειο. Χρησιμοποιήθηκε μια αρχική εκδοχή του φύλλου εργασίας που τίθεται στο παράρτημα της παρούσης, με ένα ευρύ φάσμα ερωτημάτων σχεδιασμένων ώστε να εξεταστούν και οι δύο τρόποι αιτιολογίας και στη συνέχεια να γίνει επιλογή των ερωτημάτων και κυρίως εκείνων που προκάλεσαν κρίσιμα συμβάντα (σελ.62) στη διαπραγμάτευση μεταξύ των μαθητών.

Η δραστηριότητα εισάγεται μέσω ενός ρεαλιστικού προβλήματος που αφορά στον τρόπο με τον οποίο πρέπει να γίνει μια μεταβολή εμβαδού ενός ορθογωνίου, ώστε να προκύψει ορθογώνιο αρχικά με το ίδιο εμβαδόν και στη συνέχεια ορθογώνιο με μεγαλύτερο εμβαδόν από το αρχικό ή και το μέγιστο δυνατό εμβαδόν. Η δραστηριότητα καταλήγει στην εισαγωγή (αρχικά ως μορφή εικασίας από τους μαθητές) της γνωστής πρότασης «*από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν*» και στη συνέχεια η απόδειξή της, μέσω στοιχείων που εμφανίζονται στο e-δόμημα και πρέπει να αξιοποιηθούν. Η φάση στην οποία αναφερόμαστε, είχε αποκλειστικά διαγνωστικό χαρακτήρα με σκοπό να εξετάσει τις αρχικές αντιδράσεις των μαθητών ώστε αυτές να καταγραφούν και να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για την αναδιαμόρφωση της δραστηριότητας που τους είχε δοθεί (όσον αφορά τόσο τη μορφή του e-δομήματος, όσο και τη σύνθεση του φύλλου εργασίας).

Η πιλοτική αυτή φάση της δραστηριότητας, υλοποιήθηκε την 1η ώρα στο αμφιθέατρο του Σχολείου και τις επόμενες 2 ώρες σε εργαστήριο Πληροφορικής. Οι μαθητές δεν είχαν κάποια ιδιαίτερη γνώση στη χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού και ειδικότερα του Geogebra. Από τις αντιδράσεις τους όμως και τον τρόπο χειρισμού του e-δομήματος δε φάνηκε να υπάρχει κάποιο πρόβλημα ως προς τη χρήση των εργαλείων καθώς και την πλοήγηση στο συγκεκριμένο e-δόμημα. Μάλιστα κάποια ομάδα προχώρησε μόνη της και ολοκλήρωσε σχεδόν το σύνολο των ερωτημάτων στο αρχικό φύλλο εργασίας. Να σημειωθεί εδώ ότι το αρχικό φύλλο εργασίας περιείχε αρκετά περισσότερα ερωτήματα από αυτά που τίθενται στο παράρτημα του παρόντος, τα οποία αποσκοπούσαν στο να οδηγήσουν τους μαθητές σταδιακά στην ανακάλυψη των ιδεών και των νοημάτων της δραστηριότητας. Επίσης αποσκοπούσαν στη διερεύνηση του τρόπου προσέγγισής τους όσον αφορά τα δύο είδη αιτιολογίας.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι δεν παρατηρήθηκαν δυσκολίες στη χρήση του e-δομήματος από τους μαθητές. Πιθανό σε αυτό να συνετέλεσε ο σχεδιασμός του: χρησιμοποιήθηκαν και οι δύο οθόνες γραφικών του Geogebra, με διαμοιρασμένα τα στοιχεία της δραστηριότητας κατά τρόπο ώστε να διακρίνονται οι διάφορες φάσεις και λειτουργίες (διακόπτες και δρομείς). Στην κύρια οθόνη γραφικών εμφανίζονται οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί του εμβαδού, ενώ στη 2η οθόνη γραφικών του Geogebra οι αλγεβρικές – γεωμετρικές αναπαραστάσεις των συμμεταβολών που ενυπάρχουν στη δραστηριότητα. Επίσης όσον αφορά τη συγκεκριμένη δραστηριότητα επισημαίνουμε ότι οι απαιτήσεις σε διερευνητικό dragging είναι περιορισμένες. Τέλος να σημειωθεί ότι οι μαθητές των συγκεκριμένων Σχολείων, έχουν έρθει σε επαφή από το Γυμνάσιο με λογισμικά όπως το Geogebra, κυρίως όμως σε επίπεδο δυναμικών αναπαραστάσεων μέσω αυτού και όχι χειρισμού και πειραματισμού σε δομήματα. Η ενασχόληση τους έχει συντελεστεί μέσα από ένα σύνολο δραστηριοτήτων που αφορούν στην ύλη επιλεγμένων θεμάτων για το Γυμνάσιο.

Στη 2η φάση η παρούσα δραστηριότητα διαμορφώθηκε στην τελική της μορφή με τα ερωτήματα που κρίθηκαν απολύτως απαραίτητα για τη συγκεκριμένη έρευνα. Για το σκοπό αυτό, περιορίστηκαν ή/και αφαιρέθηκαν ερωτήματα που οδηγούσαν με αρκετές λεπτομέρειες και σε πολλαπλά στάδια στις απαντήσεις των κεντρικών ερωτημάτων. Κύριος λόγος για αυτή την απόφαση αποτέλεσε ο περιορισμός του χρόνου. Ωστόσο παρέμειναν ερωτήματα που εκτιμήσαμε ότι μπορούν να δημιουργήσουν συνθήκες bfp για την επιτέλεση του κύριου στόχου της δραστηριότητας. Σε αυτό το στάδιο, επιλέχθηκαν δύο ομάδες της Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού από 3 μαθητές και μαθήτριες η καθεμία, από το Β΄ Αρσάκειο Λύκειο Ψυχικού. Όσον αφορά στη βαθμολογία και στη σχολική επίδοση στα Μαθηματικά Προσανατολισμού των μελών κάθε ομάδας: Τα μέλη της ομάδας στην πρώτη τριάδα (O1) είχαν βαθμολογία ανάμεσα στο 16 και 18 και η δεύτερη τριάδα (O2) είχε βαθμολογία άνω του 18. Η συλλογή δεδομένων προέκυψε από βιντεοσκόπηση της οθόνης των υπολογιστών μέσω του λογισμικού IspingCam8 (Windows) και του FaceTimeCam (Mac-ios), ενώ η διδασκαλία διεξήχθη σε μία αίθουσα προβολών του Σχολείου, στην οποία υπήρχε και διαδραστικός πίνακας που χρησιμοποιήθηκε ορισμένες φορές σε παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού. Καταγράφηκαν τόσο οι πειραματισμοί μέσω του dragging στο e-δόμημα όσο και οι διάλογοι που αναπτύχθηκαν στα μέλη κάθε ομάδας. Η διάρκεια της δραστηριότητας ήταν 4 συνεχόμενες διδακτικές ώρες (με ένα διάλειμμα 15΄ περίπου στο μέσο της δραστηριότητας) , από τις οποίες η μία ώρα από το σύνολο των ωρών που απαιτήθηκαν αφορούσε λειτουργίες χωρίς τη χρήση του e-δομήματος όπου οι δύο ομάδες διαπραγματεύονταν στο χαρτί ορισμένα κεντρικά ερωτήματα. Στο υπόλοιπο του διαστήματος, οι ομάδες πειραματίστηκαν στο e-δόμημα με ανοικτό το laptop που καθεμία είχε στη διάθεσή της. Η διδασκαλία έγινε κατά τη διάρκεια του Συντονισμού των Μαθηματικών στα Σχολεία του Ψυχικού και αποσπάσματα αυτής παρακολούθησαν σε διακριτές φάσεις οι Μαθηματικοί των Γυμνασίων και των Λυκείων των Αρσακείων Σχολείων του Ψυχικού χωρίς να παρεμβαίνουν στην εξέλιξη της δραστηριότητας. Επιπλέον, υπήρξε μία 2-ωρη συνέντευξη με τα μέλη των ομάδων ύστερα από μία περίπου εβδομάδα από την πραγματοποίηση της δραστηριότητας, προκειμένου να αποσαφηνιστούν ορισμένες θέσεις τους. Σημειώνουμε τέλος ότι όλες οι διδασκαλίες πραγματοποιήθηκαν από τον υπογράφοντα, με μαθητές που δεν είχε στο παρελθόν κάποια διδακτική επαφή.

2.4 Προσδοκούμενες μέθοδοι διδακτικής και στρατηγικές εφαρμογής

Η σύλληψη αλλά και η μορφολογία της συγκεκριμένης δραστηριότητας εστιάζει σε δύο τομείς:

- Στα ερεθίσματα που μπορούν να προκληθούν από τα ψηφιακά εργαλεία του δομήματος και τα οποία επιδιώκουμε να συνθέσουν το κατάλληλο υπέδαφος πριν την τυπική απόδειξη ερωτημάτων της δραστηριότητας.
- Έμφαση στους τρόπους με τους οποίους τα νοήματα που παράγονται κατά τη διάρκεια της ατομικής και συλλογικής εμπλοκής με ψηφιακά αντικείμενα, επηρεάζεται από τις αλλαγές σε αυτά τα αντικείμενα και τη διαπραγμάτευση μεταξύ των μαθητών

Επιπλέον εστιάζουμε στους ρόλους των μαθητών καθ' όλη τη διάρκεια υλοποίησης του σεναρίου, οι οποίοι εναλλάσσονται διαρκώς. Οι μαθητές μετατρέπονται σε εξερευνητές που θα πρέπει να αναπτύξουν κατάλληλες στρατηγικές και να λάβουν πρωτοβουλίες. Οι ίδιοι θα είναι ενεργοί κατάσκευαστές της γνώσης που θα δημιουργηθεί καθώς και συμμέτοχοι στην οικοδόμηση και την ανάπτυξη της. Το e-δόμημα δίνει πολυποίκιλες αφορμές για αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών κάθε ομάδας αλλά και συνολικά όλων των ομάδων.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούμε στην άποψη που ορισμένες φορές διατυπώνεται και που αφορά στη θέση των μαθηματικών καθεαυτών σε διδασκαλίες αυτού του τύπου (πειραματικές, ερευνητικές κ.ο.κ). Με άλλα λόγια, διατυπώνεται από ορισμένους η άποψη πως τα μαθηματικά μπαίνουν σε δεύτερη μοίρα προς χάριν του πειραματισμού ή του εξερευνητικού χαρακτήρα αντίστοιχων δραστηριοτήτων … Με άλλα λόγια ότι τα μαθηματικά επισκιάζονται από τον πειραματικό – εμπειρικό τρόπο παρουσίασης και διερεύνησης τους μέσω της χρήσης Ψ.Τ. Επισημαίνουμε λοιπόν (χωρίς αυτό να σημαίνει αποδοχή της προηγούμενης θέσης) ότι κατά το σχεδιασμό της συγκεκριμένης δραστηριότητας, περιλάβαμε στοιχεία που αναδεικνύουν –και μάλιστα τον κεντρικό και πρωταρχικό ρόλο- των μαθηματικών σχέσεων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την ολοκλήρωση της δραστηριότητας. Ιδιαιτέρως μάλιστα τα μαθηματικά που θα απαιτηθούν προκειμένου να αποδειχθούν ορισμένες εικασίες που θα διατυπωθούν από τους μαθητές. Παράλληλα ως προς το σχεδιασμό της δραστηριότητας, έχει ληφθεί υπόψη η συνεχής ανατροφοδότηση των μαθητών από το e-δόμημα μέσω του πειραματισμού τους σε αυτό. Ιδιαίτερα ενδιαφερόμαστε να προκληθούν ιδέες που αφορούν στο σχεσιακό είδος νοηματοδότησης και κατ' ελάχιστο στο εργαλειακό. Είναι συνεπώς επιδιωκόμενος ο συνδυασμός από τη μία των ψηφιακών εργαλείων ως μέσο πειραματισμού, ελέγχου, διερεύνησης και καλλιέργειας εννοιολογικού εδάφους που προηγείται της τυπικής απόδειξης και από την άλλη, των νοηματοδοτήσεων που θα τροφοδοτήσουν την εύρεση κατάλληλων μαθηματικών σχέσεων που θα απαιτηθούν ώστε οι εικασίες να αποδειχθούν με τυπικό φορμαλισμό.

2.4.1 Ο ρόλος του διδάσκοντα κατά τη διαδικασία πειραματισμού

Κύριο χαρακτηριστικό του ρόλου του διδάσκοντα είναι να δημιουργεί διαρκώς εκείνες τις συνθήκες που θα οδηγήσουν τους μαθητές να κατασκευάσουν τη νέα γνώση. Συνεπώς ο ρόλος του είναι κυρίως καθοδηγητικός και αφορά στην υποβολή κατάλληλων ερωτήσεων και επισημάνσεων, την πρόκληση ερωτημάτων που έχουν χαρακτηριστικά πρόκλησης ενδιαφέροντος των μαθητών «για το τί μπορεί να συμβαίνει και γιατί». Σημαντικό σημείο στο ρόλο του διδάσκοντα είναι η συνεχής πρόκληση διαλόγου μεταξύ των μελών κάθε ομάδας και αναφοράς σε προηγούμενες γνώσεις που μπορούν να συνδράμουν στις προσπάθειες των μαθητών.

Είναι επίσης σημαντικό να τονιστεί ότι θα πρέπει να αποφεύγεται η αποκάλυψη των απαντήσεων, καθώς και της πορείας που πρέπει να ακολουθηθεί για την επίλυση του προβλήματος, ιδιαίτερα μάλιστα σε ότι αφορά στο στάδιο του πειραματισμού. Είναι γνωστό ότι αυτό περιορίζει τη δράση και την αυτενέργεια των μαθητών, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι δυνατό να διαπιστώσει προσεγγίσεις μαθητών που εκπλήττουν θετικά.

«Ο εκπαιδευτικός πρέπει να προτείνει έναν «μπούσουλα» (παράθεση γνώσης) στα ερωτήματα και στις ασκήσεις που θέτει, ειδικά αυτά που διερευνούνται μέσω τεχνολογίας. Αν υποπέσει σε αυτή την παγίδα, στερεί την ευκαιρία από το μαθητή να σκεφτεί και να μάθει. Είναι απαραίτητο να εστιάζει στο μαθηματικό γραμματισμό και να παρουσιάζει ανοχή της διαπραγματευτικότητας των απαντήσεων». «Ιδιαίτερα ο εκπαιδευτικός που εφαρμόζει το σενάριο πρέπει να είναι αναστοχαζόμενος, ενεργός δημιουργός προσωπικής πρακτικής και άμεσα εμπλεκόμενος στην καινοτομία» (Kynigos, 2011). Εν κατακλείδι θα λέγαμε ότι οι προσπάθειες του εκπαιδευτικού προκειμένου να οικοδομηθεί κατασκευαστικά η νέα γνώση από τους ίδιους τους συμμετέχοντες, θα πρέπει να συμβάλλουν με διάφορους τρόπους στην αυτονόμηση τους.

2.5 Ανάλυση δεδομένων – Θεωρία κρίσιμων συμβάντων

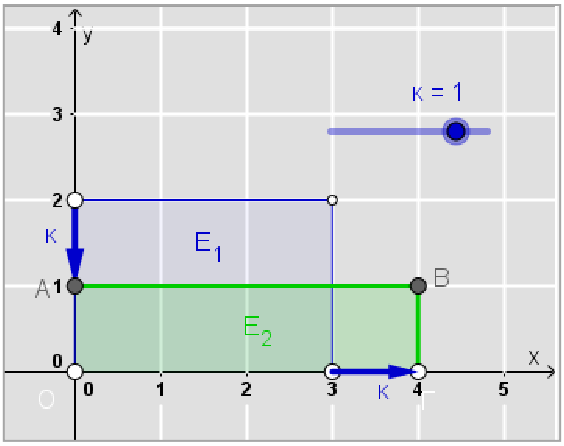
Κεντρικό στοιχείο στην ανάλυση ορισμένων διαλόγων που προέκυψαν από τη 2η φάση εφαρμογής της έρευνας, αποτελεί η θεωρία των κρίσιμων συμβάντων (Maher, 2002; Maher & Martino, 1996a, 1996b, 2000). Με τον όρο «κρίσιμα συμβάντα» εννοούμε αποσπάσματα διαλόγων των μαθητών τα οποία αφορούν σε στρατηγικής σημασίας στιγμιότυπα από τους διαλόγους μεταξύ τους. Δηλαδή φάσεις καθοριστικής σημασίας για τις αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν τόσο για τη διατύπωση μιας εικασίας όσο και για την προσπάθεια αιτιολογίας της. Σε τέτοιου τύπου συμβάντα συνήθως διακρίνουμε ένα σημαντικό εννοιολογικό άλμα που προκύπτει από μια προηγούμενη κατάσταση (Kiczek, 2000; Maher, 2002, Maher & Martino, 1996a; Maher, Pantozzi, Martino, Steencken, & Deming, 1996; Steencken, 2001). Επιπλέον είναι δυνατό να συμβαίνει και το ακριβώς αντίθετο: δηλαδή ένα σημαντικό διαισθητικό λάθος το οποίο όμως είναι δυνατό να συνδράμει στο ερευνητικό μας πεδίο με επικυρωτικό ή ακόμη και ακυρωτικό τρόπο. Όσον αφορά τον εφαρμοστικό χαρακτήρα της συγκεκριμένης θεωρίας, αποκτά κατά τη γνώμη μας ιδιαίτερη σημασία στις διδασκαλίες με διαμεσολάβηση των DGEs, δεδομένου ότι οι αναφορές σε κρίσιμα συμβάντα είναι δυνατό να αποτυπώσουν πτυχές των τρόπων με τους οποίους οι μαθητές κατασκευάζουν νοήματα σχετικά με τα δυναμικά μοντέλα που καλούνται να διαχειριστούν. Κατά την επιλογή τέτοιων συμβάντων επιχειρούμε αυτά να διαθέτουν εσωτερική συνοχή και εν ανάγκη ζητάμε από τους μαθητές περαιτέρω ανάλυση του τρόπου με τον οποίο νοηματοδότησαν μια δυναμική μεταβολή που παρατήρησαν κατά τη διάρκεια του πειραματισμού τους. Ωστόσο στο σημείο αυτό να τονίσουμε την ανάγκη αποχρωματισμού τους από –πιθανές- συναισθηματικές πτυχές των συμμετεχόντων στην ανάλυση τέτοιων δεδομένων μέσω του συγκεκριμένου πλαισίου. Με άλλα λόγια θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί αυτό που αναφέρεται ως grounded προσέγγιση (Kvale 1996) από την πλευρά του ερευνητή χρησιμοποιώντας αφηγηματικές τεχνικές οι οποίες κινούνται πίσω, μπροστά και δια μέσου του θεωρητικού πλαισίου που αναπτύχθηκε. Με αυτόν τον τρόπο η ανάλυση που τελικά προκύπτει -θα πρέπει να- έχει τα χαρακτηριστικά του αντικειμενικού παρατηρητή.

Σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε ότι στην ανάλυση των αποτελεσμάτων που ακολουθούν, επιλέχτηκαν συγκεκριμένοι διάλογοι του ερευνητή κυρίως με την ομάδα Ο2. Αυτό συνέβη, δεδομένου ότι η εξέλιξη αυτής της ομάδας, ειδικά στα τελευταία στάδια της δραστηριότητας, παρουσιάζει σημαντικές αδυναμίες στην αιτιολογία από ερμηνεία. Στους απομαγνητοφωνημένους διαλόγους της ομάδας με τον ερευνητή, εμφανίζονται οι δυσκολίες στην προσάρτηση αιτιολογίας από ερμηνεία, που οφείλεται στην ελλιπή νοηματοδότηση των δυναμικών αναπαραστάσεων του εδομήματος. Επίσης, παρουσιάζονται οι διάλογοι από τους οποίους προκύπτουν οι αδυναμίες ολοκλήρωσης αποδείξεων, εξαιτίας ασυνεχειών ανάμεσα στη διατύπωση εικασίας και ανάπτυξης εποικοδομητικής επιχειρηματολογίας, καθώς και διαισθητικών παραλείψεων αυτής της ομάδας. Συνοπτικά, εστιάζουμε στους διαλόγους εκείνους, από τους οποίους καταγράφηκε η αδυναμία της ομάδας να εμφανίσει αποτελεσματικούς συλλογισμούς για την απόδειξη, η οποία εν πολλοίς οφείλεται στη συνεχή επίκληση αιτιολογίας για ερμηνεία με αποτέλεσμα την εμφάνιση κυρίως παραγωγικών συλλογισμών και τον αποκλεισμό απαγωγικών.

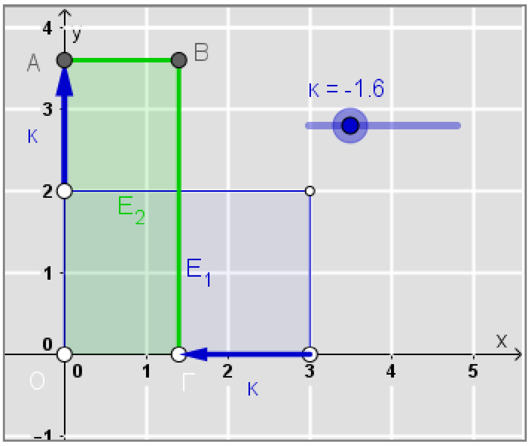
2.6 Σχεδιασμός και Ανάλυση Δραστηριότητας

Η δραστηριότητα εισάγεται μέσω ενός προβλήματος με τα παρακάτω στοιχεία:

Ο ιδιοκτήτης μιας έκτασης E_1 μήκους α=3 και πλάτους β=2 (σε εκατοντάδες m) θα πρέπει να παραχωρήσει ένα τμήμα αυτής της έκτασης στο Δήμο της περιοχής προκειμένου να ανοιχθεί δρόμος που θα περνάει μέσα από ένα τμήμα αυτής. Ο ιδιοκτήτης θα έπρεπε να μειώσει μία από τις δύο διαστάσεις κατά κ μέτρα και να αυξήσει την άλλη διάσταση επίσης κατά κ μέτρα. Η συμφωνία αφορούσε έναν από τους δύο εναλλακτικούς τρόπους των παρακάτω σχημάτων:



Ν-Α μεταβολή (νοτιοανατολική)



Β-Δ μεταβολή (βορειοδυτική)

Εικ. 27: Είδη μεταβολών εμβαδού

2.6.1 Κεντρικά ερωτήματα ως προς το πρόβλημα

Σε ποιο από τα δύο είδη μεταβολών ο ιδιοκτήτης μπορεί να πάρει έκταση:

- ίση με την αρχική
- μεγαλύτερη από την αρχική
- τη μέγιστη δυνατή.

Επιλέξαμε τη σύνδεση της δραστηριότητας με το προαναφερόμενο -ρεαλιστικό κατά τη γνώμη μας- πρόβλημα, προκειμένου να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών[18]. Είναι σαφές ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν περιέχει χαρακτηριστικά ανοικτού προβλήματος, όμως τόσο το σενάριό του όσο και η διάρθρωση των ερωτημάτων φαίνεται να έχουν μία ρεαλιστική βάση αναζήτησης. Τα ερωτήματα θεωρούμε ότι είναι πειστικά αφού προκύπτουν ως φυσικό αποτέλεσμα των διαπραγματεύσεων του Ιδιοκτήτη της έκτασης με τη Δημοτική Αρχή της περιοχής του. Διαπιστώνουμε εμπειρικά ότι η εισαγωγή μιας δραστηριότητας μέσω κάποιου ρεαλιστικού προβλήματος, προκαλεί το ενδιαφέρον των μαθητών ειδικά μάλιστα όταν γίνεται αντιληπτό από τους ίδιους η ανάγκη

[18] Η επίλυση προβλήματος βρίσκεται στον πυρήνα της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης, ενισχύοντας έτσι, την άποψη των Stanic και Kilpatrick (1988), ότι μια κατάσταση προβλήματος είναι κεντρική στη μάθηση των μαθηματικών.

μαθηματικού συλλογισμού για την επίλυσή του. Όπως αναλύουμε και στα επόμενα, οι τρόποι επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος μπορούν να περιέχουν και εμπειρικές προσεγγίσεις καθώς και αρκετές αφορμές για ανάπτυξη επιχειρηματολογίας αλλά και εικασιών. Η πλοκή όμως των ερωτημάτων στο φύλλο εργασίας που συνοδεύει τη δραστηριότητα, καθιστά σαφές στους συμμετέχοντες την ανάγκη αναφοράς μαθηματικών σχέσεων και ιδιοτήτων προκειμένου να δοθούν ρητές απαντήσεις στα ζητούμενα. Επιπλέον ο σχεδιασμός των ερωτημάτων του φύλλου εργασίας στηρίχθηκε όπως προαναφέρθηκε στο να προκληθούν και οι τρεις τύποι συλλογισμού (παραγωγικός, επαγωγικός και απαγωγικός) με ιδιαίτερη έμφαση στον τελευταίο τρόπο. Η διάρθρωση των ερωτημάτων της δραστηριότητας, προβλέπει την επικύρωση με μαθηματική απόδειξη των εμπειρικών ή πειραματικών δεδομένων των συμμετεχόντων που θα –πιθανό να- προέλθουν από τις πληροφορίες του e-δομήματος,

2.6.2 Ανάλυση Δραστηριότητας

Στην εισαγωγική φάση οι ομάδες των μαθητών καλούνται να επεξεργαστούν χωρίς τη χρήση του e-δομήματος, τα ερωτήματα σχετικά με το αν το αρχικό εμβαδόν E_1 καθώς και η περίμετρος του ορθογωνίου παραμένουν σταθερά μετά από τις μεταβολές που περιγράφηκαν στην εισαγωγή. Στη συγκεκριμένη φάση δεν αναμένουμε ούτε επιζητάμε μια τυπική μαθηματική απόδειξη σχετικά με αυτά τα ερωτήματα. Στόχευση είναι η επίγνωση των μαθητών σχετικά με το τί μεταβάλλεται (το εμβαδόν) και τί παραμένει σταθερό (η περίμετρος). Επίσης προφανές είναι ότι στο σημείο αυτό δημιουργούμε μια πρώτη πρόκληση παραγωγικού συλλογισμού (σελ.31).

Στη συνέχεια εισάγεται το 1^{ο} κεντρικό ερώτημα της δραστηριότητας: ο τρόπος με τον οποίο πρέπει να μεταβληθεί το αρχικό εμβαδόν, ώστε ο ιδιοκτήτης να πάρει έκταση ίση με αυτή που ανταλλάσει (δηλαδή E_2=6). Με άλλα λόγια να σκεφθούν αν παίζει ρόλο ο τρόπος μεταβολής του εμβαδού (Β-Δ ή Ν-Α μεταβολή). Αρχικά τίθεται το ερώτημα χωρίς να χρησιμοποιηθεί κανένα εργαλείο ή θεωρητική προσέγγιση για την απάντηση του. Γνωρίζουμε ασφαλώς τη δυσκολία της απάντησης του ερωτήματος χωρίς την ύπαρξη κάποιας μορφής δυναμικής αναπαράστασης του προβλήματος. Ωστόσο ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε αν υπάρχει κάποια βάσιμη διαισθητική προσέγγιση των μαθητών γύρω από το ερώτημα. [19]

Στη συνέχεια δίνεται χρόνος 5΄- 10΄ ώστε οι μαθητές να επεξεργαστούν τα στοιχεία στο χαρτί προκειμένου να αποφανθούν για την ερώτηση. Και σε αυτή τη φάση οι μαθητές διαπραγματεύονται μεταξύ τους ως μέλη κάθε ομάδας, τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει η συγκεκριμένη μεταβολή. Το ερευνητικό ενδιαφέρον εστιάζεται στους τρόπους που θα μετέλθουν οι μαθητές ώστε να επεξεργαστούν το ερώτημα είτε αυτοί περιέχουν στοιχεία τυπικής απόδειξης είτε άτυπα στοιχεία συλλογισμού. Σημειώνεται ότι μέχρι αυτό το σημείο υπήρξε μία σύντομη αναπαράσταση μέσω του e-δομήματος του προβλήματος όπου παρουσιάστηκαν οι δύο τρόποι μεταβολής του εμβαδού, χωρίς να υπάρχει καμία ανατροφοδότηση που να προέρχεται από τις μετρήσεις του λογισμικού. Στο σημείο αυτό αναμένεται ότι οι μαθητές θα συνθέσουν ένα ή/και τα

[19] …όχι πολύ συχνό αλλά ούτε και σπάνιο, το φαινόμενο οι μαθητές να μάς εκπλήττουν θετικά για την πρωτοτυπία και τη φαντασία στις απαντήσεις τους.

δύο τριώνυμα που ακολουθούν για την έκφραση του εμβαδού E_2 (χωρίς ασφαλώς να αποκλείεται και η περίπτωση να χρησιμοποιηθούν αριθμητικά παραδείγματα για αιτιολογία):

$$1^{\eta} \text{ μορφή: } f(κ)=(3+κ)(2-κ)=-κ^2-κ+6, \ -3<κ<2$$

$$2^{\eta} \text{ μορφή: } g(κ)=(3-κ)(2+κ)=-κ^2+κ+6, \ -2<κ<3$$

Στην 1^{η} μορφή πιθανολογείται ότι οι μαθητές θα αντιστοιχίσουν τη Ν-Α μεταβολή (χωρίς να αποκλείεται να αντιστοιχίσουν τη Β-Δ μεταβολή ανάλογα με το πρόσημο που –αυθαίρετα μάλλον- προσδίδουν κάθε φορά στο κ). Οπότε επειδή προκύπτει ότι f(κ)=6 για κ=-1 , ενδέχεται αυτό να δυσκολέψει στην ερμηνεία της μεταβολής που πρέπει να γίνει εξαιτίας του αρνητικού προσήμου του κ (μείωση του μήκους και αύξηση του πλάτους, δηλαδή Β-Δ μεταβολή). Ενδέχεται δηλαδή να αντιμετωπίσουν ένα είδος αντίφασης μεταξύ συλλογισμού και αποτελέσματος, αφού στην έκφραση f(κ) θα θεωρήσουν ότι κ>0 ενώ στη πραγματικότητα οι τιμές του κ για τη συγκεκριμένη μορφή είναι στο διάστημα (-3,2) ώστε f(κ)>0 και επομένως είναι δυνατές και οι αρνητικές τιμές του κ. Παράλληλα πιθανολογείται ότι η εκ των προτέρων αντιστοίχιση της έκφρασης f(κ) για τη Ν-Α μεταβολή, θα τους εγκλωβίσει σε αδυναμία ερμηνείας της τιμής κ=-1 η οποία οδηγεί σε διαστάσεις α+κ=2 και β-κ=3 οι οποίες σηματοδοτούν Β-Δ μεταβολή. Πιθανολογείται επίσης ότι η δυσκολία στην ερμηνεία της συγκεκριμένης περίπτωσης θα οφείλεται ενδεχόμενα και στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν θα λάβουν υπόψη τους περιορισμούς στις τιμές του κ στην (κάθε) έκφραση ώστε οι αριθμητικές τιμές της να δίνουν το εμβαδόν E_2. Δηλαδή ότι απαιτείται f(κ)>0 (αντίστοιχα και g(κ)>0).

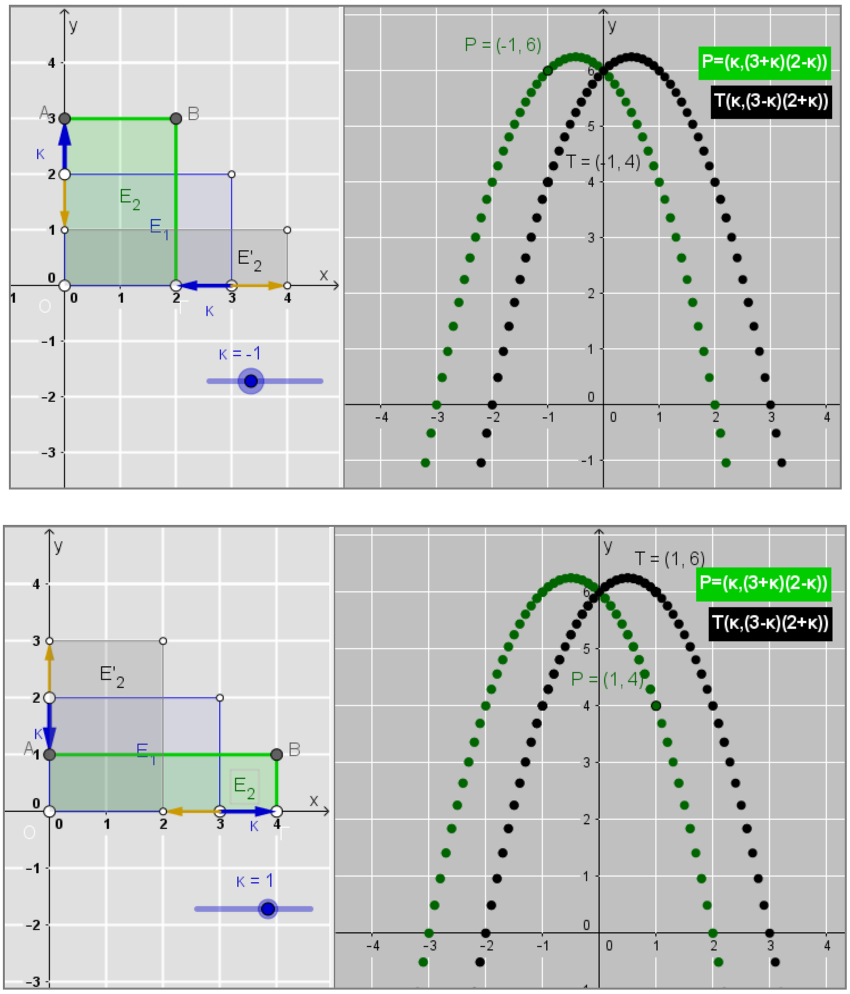
Όσον αφορά στη 2^{η} μορφή, προκύπτει ότι g(κ)=6 όταν κ=1 και αφορά όπως και στην 1^{η} μορφή Β– Δ μεταβολή του E_1 αφού τότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι α-κ=2 και β+κ=3. Να σημειωθεί ότι ακόμη κι αν οι ομάδες καταλήξουν σε σωστή ερμηνεία μίας εκ των δύο μορφών και δεν θεωρήσουν και τη 2^{η} μορφή έκφρασης του εμβαδού, θα παραμένει σε εκκρεμότητα η ερμηνεία του εμβαδού της άλλης μορφής που δεν θα ληφθεί υπόψη και η οποία στην αρχική προσέγγιση του προβλήματος θα ήταν πιθανό να περιλαμβάνει τη Ν-Α μεταβολή του εμβαδού. Επομένως ακόμη κι αν καταλήξουν με μία από τις δύο μορφές της f ή της g στο είδος μεταβολής, δεν θα έχουν απαντήσει ρητά στο ερώτημα "αν παίζει ρόλο το είδος της μεταβολής του εμβαδού E_1").

Και σε αυτή τη φάση της δραστηριότητας επιχειρούμε να προκληθεί παραγωγικός συλλογισμός στις ομάδες μαθητών τόσο κατά την εύρεση των τιμών του κ όσο –και κυρίως- στην ερμηνεία αυτών των τιμών που προκύπτουν και που θα καθορίσουν και το είδος της μεταβολής του αρχικού εμβαδού. Παράλληλα στο σημείο αυτό συνυπάρχουν χαρακτηριστικά της «Λογικής της ανακάλυψης» (σελ. 32) όσο και της «Λογικής της τεκμηρίωσης» αφού το στάδιο της ερμηνείας των τιμών του κ προσδιορίζει το είδος της μεταβολής του εμβαδού (τεκμηρίωση). Καθοριστική και η άτυπη διαλεκτική ανάμεσα στις δύο προσεγγίσεις που –πιθανό- να αναπτυχθεί στην προσπάθεια των ομάδων. Επομένως το συγκεκριμένο στάδιο είναι δυνατό να έχει και χαρακτηριστικά απαγωγικού συλλογισμού τα οποία θα προσπαθήσουμε να καταγράψουμε στους διαλόγους μεταξύ των μελών των ομάδων.

Στο επόμενο στάδιο Ε1, οι μαθητές επεξεργάζονται στο e-δόμημα το αντίστοιχο ερώτημα ώστε να επαληθεύσουν ή –ενδεχομένως- να ακυρώσουν τα συμπεράσματά τους από την ανάλυση που προηγήθηκε.

Εδώ οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με μια δυναμική αναπαράσταση του προβλήματος μέσω του e-δομήματος που έχει σχεδιαστεί στο Geogebra για το σκοπό αυτό (βλ. εκφώνηση σελ. 122). Στη δεξιά οθόνη του προγράμματος, σχηματίζονται δυναμικά οι παραβολές από τα κινούμενα σημεία P(κ,f(k)) και T(κ,g(κ)). Στην αριστερή οθόνη των γραφικών σχηματίζονται τα ορθογώνια E_2 και E'_2 που αντιστοιχούν στις εκφράσεις για το εμβαδόν f(κ) και g(κ), ενώ τέλος υπάρχει και το αρχικό ορθογώνιο E_1 διαστάσεων α=3 και β=2.

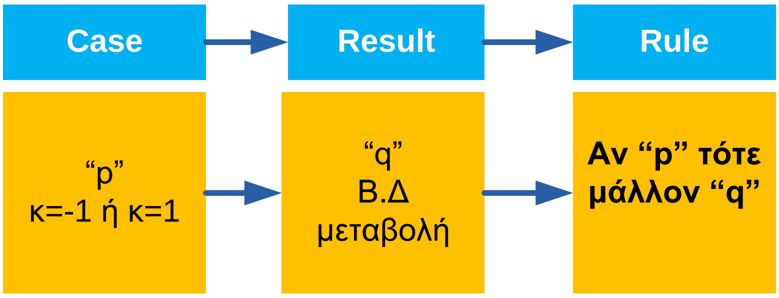
Πειραματιζόμενοι οι μαθητές στο e-δόμημα, θέλουμε να παρατηρήσουν μέσω των δυναμικών μεταβολών του εμβαδού E_1, ότι είναι δυνατό να έχουμε εμβαδόν ίσο με 6 και από τις δύο διαφορετικές εκφράσεις των συναρτήσεων f(κ) και g(κ) για αντίθετες τιμές του κ (-1 και 1 αντίστοιχα). Και στις δύο όμως αυτές περιπτώσεις, συντελείται το ίδιο είδος μεταβολής (μείωση του μήκους και αύξηση του πλάτους κατά 1, δηλαδή Β-Δ μεταβολή).



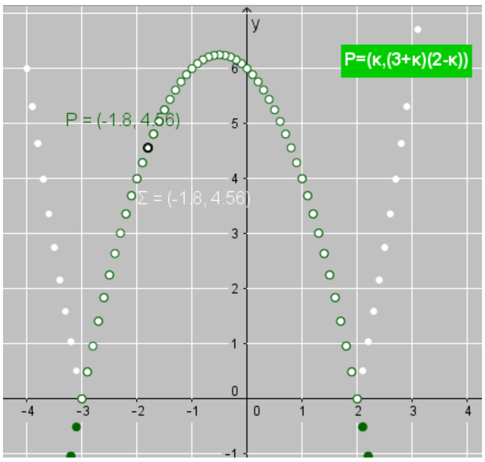
Εικ. 28: Συμμεταβολές εμβαδού και αλγεβρικές αναπαραστάσεις

Οι τρόποι ανατροφοδότησης από το e-δόμημα είναι πολλαπλοί: Από τη μορφή των γραφημάτων για τα σημεία P και T παρατηρούν τις θέσεις: $P(-1,6)$ & $T(1,6)$ για τις οποίες ισχύει $E_2=6$. Την ίδια στιγμή ο σχηματισμός των ορθογωνίων E_2 και E'_2 αντίστοιχα, υποδεικνύει τη Β-Δ μεταβολή ώστε το εμβαδόν να παραμείνει ίσο με το αρχικό.

Επιχειρούμε συνεπώς μέσω αυτής της δυναμικής αναπαράστασης που συντελείται ταυτόχρονα με αλγεβρικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά, να καταστήσουμε σαφές ότι ο τρόπος μεταβολής του εμβαδού παίζει ρόλο για το αν το εμβαδόν θα παραμείνει σταθερό. Η συγκεκριμένη ανατροφοδότηση θα παίξει ρόλο και στα επόμενα που ζητείται αν είναι δυνατό και με ποιο είδος μεταβολής, να ανταλλάξει ο Ιδιοκτήτης της έκτασης εμβαδόν μεγαλύτερο του αρχικού. Τέλος το ερώτημα έχει στοιχεία επαγωγικού συλλογισμού (σελ. 31) δεδομένου ότι: [20]



Ε1. Από το σημείο αυτό οι μαθητές εργάζονται στο e-δόμημα μόνο με τη συνάρτηση f(κ) για την έκφραση του E_2 για λόγους συντομίας. Σε αυτό το σημείο επιχειρούμε να προκληθεί μια πρώτη ιδέα για το γεγονός ότι η καμπύλη που διαγράφει το σημείο P δεν παριστάνει εμβαδόν για όλες τις τιμές του κ που αρχικά έχουμε ορίσει (βλ. εκφώνηση σελ. 123). Το γράφημα που βρίσκεται κάτω από τον άξονα xx΄ είναι πιθανό να τους υποψιάσει προς αυτή την κατεύθυνση. Για το σκοπό αυτό καλούνται να ανοίξουν το διακόπτη των σημείων Σ με τα οποία έχουμε αποτύπωση των σημείων Σ(κ,E_2) (λευκά σημεία) όπου τώρα το E_2 είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου και όχι η συνάρτηση $f(\kappa)=(3+\kappa)(2-\kappa)$.



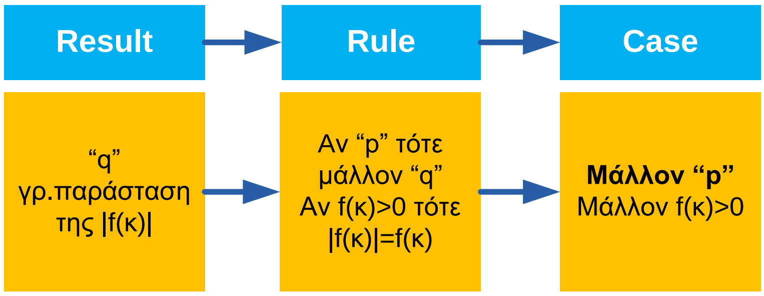
Εικ. 29: Αλγεβρική αναπαράσταση των συμμεταβολών |f(κ)| και E_2

Οι μαθητές θα πρέπει να παρατηρήσουν ότι τα γραφήματα των σημείων P και Σ δεν συμπίπτουν για όλες τις τιμές του κ, οι οποίες σκόπιμα έχουν οριστεί σε διάστημα μεγαλύτερο του (-3,2) και για την ακρίβεια στο διάστημα (-4,4). Ειδικότερα όταν $\kappa \notin (-3,2)$, δηλαδή για τις τιμές όπου είναι f(κ)<0, τα δύο γραφήματα δεν συμπίπτουν.

Καλούνται συνεπώς να κάνουν εικασίες για τις διαφορές των δύο γραφημάτων (ερμηνεία του γραφήματος Σ(κ,E_2) ότι δηλαδή πρόκειται για τη γραφική παράσταση της απόλυτης τιμής $|f(\kappa)|$ αφού πρέπει $E_2 > 0$).[21]

[20] Σημειώνουμε ότι η ταξινόμηση των ερωτημάτων με βάση κάποιο είδος συλλογισμού αναφέρεται στο σχεδιασμό μας και όχι απαραίτητα (και) από τους τρόπους που οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν για την απάντηση ή την ερμηνεία τους.

Με βάση αυτή την παρατήρηση οι μαθητές καλούνται να διορθώσουν τις τιμές του δρομέα κ ($-3<\kappa<2$) ώστε το γράφημα των σημείων P να παριστάνει το εμβαδόν του ορθογωνίου E_2. Αρχικά παίρνουν ανατροφοδότηση από το e-δόμημα για τις τιμές του κ ώστε να συμβαίνει αυτό και εν συνεχεία καλούνται να αιτιολογήσουν αλγεβρικά την απάντηση τους με την επίλυση της ανίσωσης f(κ)>0 κάνοντας χρήση των γνώσεων τους για το πρόσημο τριωνύμου. Στη συνέχεια ζητείται να διορθώσουν στο e-δόμημα τις τιμές του κ (ελάχιστο κ το -3 και μέγιστο το 2) ώστε η συνάρτηση f(κ) να παριστάνει το εμβαδόν E_2. Επισημαίνουμε ότι αν και το συγκεκριμένο τμήμα της δραστηριότητας δεν έχει κάποια ουσιαστική συσχέτιση με τα επόμενα στάδια, εν τούτοις δίνει μια καλή ευκαιρία στους μαθητές να ερμηνεύουν χαρακτηριστικά ενός γραφήματος όταν το συγκρίνουν με κάποιο άλλο. Επιπλέον το συγκεκριμένο ερώτημα και ιδιαίτερα στο σημείο που αφορά στην ερμηνεία της γραφικής παράστασης των σημείων Σ(κ, E_2) και τη σύνδεση με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης |f(κ)|, σχεδιάστηκε ώστε να προκληθεί απαγωγικός συλλογισμός (σελ. 32), όπως αναλύεται στο επόμενο σχήμα:



Τέλος, όσον αφορά τον προσδιορισμό των τιμών του κ, είναι σαφές ότι υπάρχουν χαρακτηριστικά παραγωγικού συλλογισμού, αφού για την απάντηση θα πρέπει να επιλυθεί η ανίσωση f(κ)>0.

Ε2. Στο συγκεκριμένο στάδιο ζητείται από τους μαθητές να εξετάσουν στο χαρτί, αν υπάρχει περίπτωση ο Ιδιοκτήτης να ανταλλάξει την έκταση E_1 με μεγαλύτερη έκταση από αυτήν, με τον ίδιο τρόπο μεταβολής των διαστάσεων του ορθογωνίου E_1 (βλ. εκφώνηση σελ. 123). Αν η απάντησή τους είναι καταφατική, ζητείται και πάλι ο τρόπος μεταβολής του εμβαδού E_1. Στο σημείο αυτό πιθανολογείται ότι οι μαθητές θα επιλύσουν εύκολα μία από τις παρακάτω ανισώσεις:

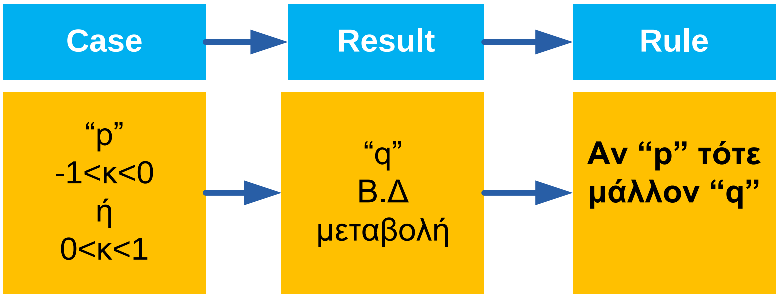
$$f(\kappa)>6 \Leftrightarrow -\kappa^2-\kappa+6>6 \Leftrightarrow \kappa^2+\kappa<0 \Leftrightarrow -1<\kappa<0$$

$$g(\kappa)>6 \Leftrightarrow -\kappa^2+\kappa+6>6 \Leftrightarrow \kappa^2-\kappa<0 \Leftrightarrow 0<\kappa<1$$

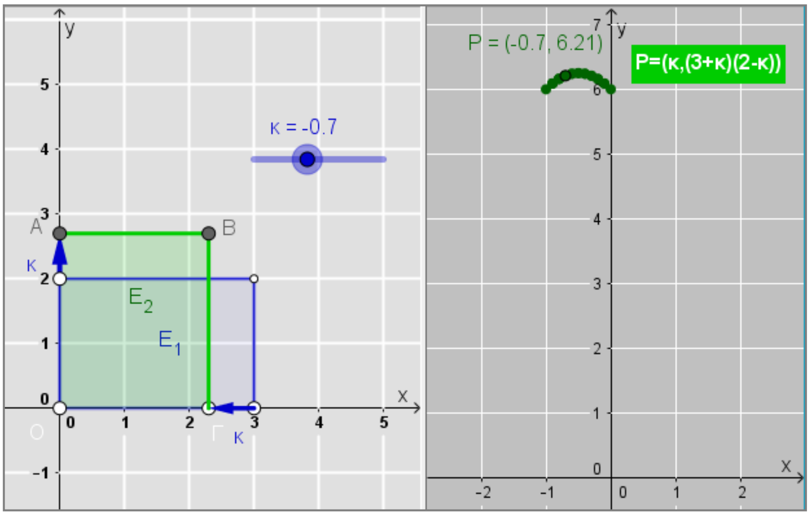
Από τα αποτελέσματα θα πρέπει να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι η μεταβολή της έκτασης πρέπει (και πάλι) να είναι βόρειο – δυτική. Υπό εξέταση σε αυτή τη φάση είναι το αν έχει επέλθει η απαραίτητη εξοικείωση με τις δυναμικές μεταβολές που προκαλούνται στο εμβαδόν, ώστε οι μαθητές να μπορούν να ερμηνεύσουν με μεγαλύτερη ευκολία από τα προηγούμενα στάδια τις τιμές του κ για τις οποίες το εμβαδόν E_2 είναι μεγαλύτερο του 6. Είναι σημαντικό

[21] Να σημειωθεί ότι με βάση το υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα, οι μαθητές έχουν διδαχθεί στην Α΄ Λυκείου τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=|x|. Συνεπώς δεν έχουν γενικευμένη αντίληψη για τη γραφική παράσταση της απόλυτης τιμής μιας τυχαίας συνάρτησης f.

συνεπώς να εξεταστεί αν ο πειραματισμός με το e-δόμημα που προηγήθηκε, δημιούργησε τις κατάλληλες νοηματοδοτήσεις στους μαθητές ώστε να μπορούν –αρχικά- να ερμηνεύουν κατάλληλα τις τιμές του κ και στη συνέχεια να εντοπίζουν το είδος μεταβολής του εμβαδού που αυτές προκαλούν. Και σε αυτό το σημείο έχουμε χαρακτηριστικά παραγωγικού συλλογισμού όσον αφορά τον προσδιορισμό των τιμών του κ, ενώ όσον αφορά στην ερμηνεία τους έχουμε χαρακτηριστικά επαγωγικού συλλογισμού με βάση το επόμενο σχήμα:



Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να επαληθεύσουν μέσω του e-δομήματος τις τιμές του κ που βρήκαν. Εδώ θέλουμε να εξετάσουμε κατά πόσο η αναπαράσταση των σημείων της παραβολής από τα σημεία P(κ, f(κ)) θα χρησιμοποιηθεί για την επαλήθευση των λύσεων της ανίσωσης f(κ)>6 (-1<κ<0).



Εικ. 30: Αλγεβρική αναπαράσταση της ανίσωσης f(κ)>6

Ε3. Μετά από το προηγούμενο στάδιο στο οποίο έχει διαφανεί ότι υπάρχει η δυνατότητα ανταλλαγής της αρχικής έκτασης με έκταση μεγαλύτερη από αυτή, προκύπτει πλέον αυτονόητα το ερώτημα για το “πότε ο Ιδιοκτήτης θα μπορεί να πάρει τη μέγιστη δυνατή έκταση στην ανταλλαγή που θα κάνει” (βλ. εκφώνηση σελ. 124).

Οι δυνατότητες προσέγγισης του ερωτήματος από θεωρητική σκοπιά στρέφονται στον τύπο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ που δίνει την τετμημένη της κορυφής μιας παραβολής και επομένως τη θέση ακροτάτου μιας παραβολής. Πιθανολογείται όμως ότι οι μαθητές δεν θα θυμούνται το συγκεκριμένο τύπο που διδάχτηκαν στην Α΄ Λυκείου, δεδομένου ότι η χρήση του γίνεται αποσπασματικά και μόνο για τη χάραξη της γραφικής παράστασης μιας παραβολής καθώς και του άξονα συμμετρίας της και όχι για τον υπολογισμό ακροτάτων της παραβολής. Στο σημείο αυτό να αναφέρουμε, ότι υπάρχει και ένα έμμεσο ερώτημα που ερευνάμε μέσω του συγκεκρι-μένου.

Ειδικότερα αν η ανάγκη για αιτιολογία από ερμηνεία της αλγεβρικής σημασίας της κορυφής μιας παραβολής ως σημείου στο οποίο εμφανίζεται μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης του τριωνύμου, θα ήταν δυνατό να προκαλέσει κάποιο ερώτημα στις ομάδες, για το «αν υπάρχει κάποιος τύπος που προσδιορίζει την τετμημένη της παραβολής». Δηλαδή αν η σημασία της κορυφής της παραβολής έχει εσωτερικευθεί όχι μόνο από τη γεωμετρική της σημασία (η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από αυτήν είναι και άξονας συμμετρίας της παραβολής), αλλά -και κυρίως για αυτό το στάδιο- ότι αποτελεί το σημείο της γραφικής παράστασης του τριωνύμου, στο οποίο έχουμε ακρότατη τιμή της συνάρτησης.

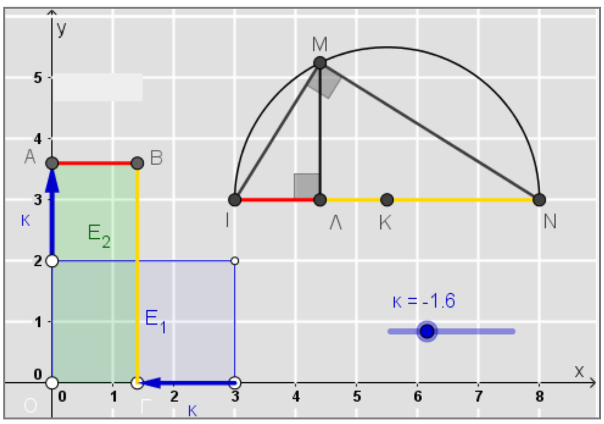
Ακόμη όμως κι αν οι μαθητές χρησιμοποιήσουν τον προηγούμενο τύπο τίθεται το ερώτημα της αιτιολογίας. Με άλλα λόγια πώς θα ήταν εφικτό να καταλήξουμε στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα μέσω αναπαραστάσεων που θα δημιουργούσαν την ιδέα της μεγιστοποίησης του εμβαδού και στη συνέχεια θα προκαλούσαν και τα ερείσματα για τον προσδιορισμό του; Συνεπώς θα επιχειρήσουμε στα επόμενα να καλλιεργήσουμε το κατάλληλο εννοιολογικό έδαφος μέσω συνθηκών bfp (before formal proof) προκειμένου να οδηγήσουμε τους μαθητές στην ανακάλυψη (ή στην επιβεβαίωση) της μεγιστοποίησης του εμβαδού, καθώς και στη διαδικασία τυπικής απόδειξης του ισχυρισμού τους.

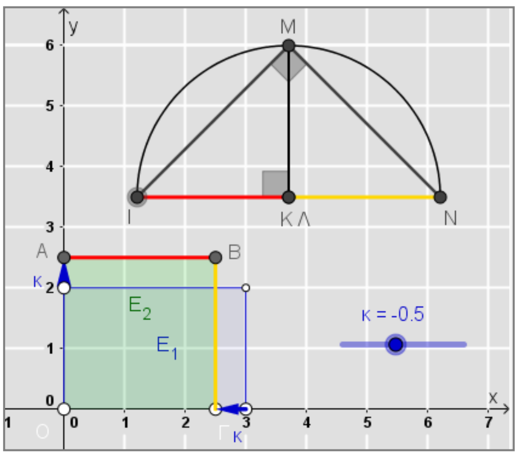
Να επισημάνουμε σε αυτό το σημείο, ότι στο σύνολο σχεδόν του σχεδιασμού του e-δομήματος αλλά και ιδιαιτέρως στα σημεία που ακολουθούν, λαμβάνουμε υπόψη στοιχεία από τη θεωρία TSM της σημειωτικής διαμεσολάβησης (σελ.44) καθώς και της έννοιας του σημειωτικού δυναμικού (σελ. 45) όσον αφορά στη διαμεσολάβηση των DGEs μέσω του συγκεκριμένου e-δομήματος. Για το σκοπό αυτό, στα επόμενα στάδια επιχειρούμε να προσεγγίσουμε τα δύο αυτά σημαντικά σκέλη της δραστηριότητας, τόσο με ένα γεωμετρικό ισοδύναμο που περιγράφει το πρόβλημα όσο και με ένα δεύτερο αλγεβρικό ισοδύναμο που θα (πρέπει να) οδηγήσει στην απόδειξη της εικασίας. Ο σχεδιασμός τους αφορά στη δημιουργία κατάλληλου εννοιολογικού εδάφους που είναι δυνατό να δημιουργήσει τις ιδέες γύρω από το αν και πότε το εμβαδόν μεγιστοποιείται.

Γεωμετρική προσέγγιση:

Στο σημείο αυτό δίνεται το γεωμετρικό ισοδύναμο του προβλήματος, δηλαδή ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΙΝ όπου: $ΙΝ=ΙΛ+ΛΝ=ΑΒ+ΟΑ=5$ (=ημιπερίμετρος του $Ε_2$). Δίνεται επίσης και η σχέση του τμήματος ΜΛ με τις προβολές ΙΛ και ΛΝ επί της υποτείνουσας, δηλαδή ότι:

$$ΜΛ^2 = ΙΛ \cdot ΛΝ$$



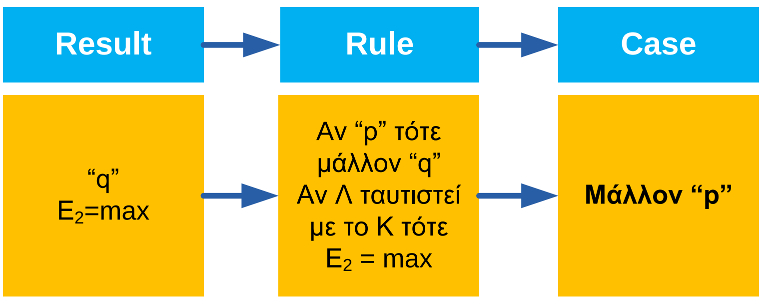


Εικ. 31: Γεωμετρικό ισοδύναμο μεγιστοποίησης του εμβαδού E_2

Στη συνέχεια ζητείται από τους μαθητές να πειραματιστούν για διάφορες τιμές του κ, προκειμένου να αξιοποιήσουν την παραπάνω κατασκευή ώστε να αποφανθούν οριστικά αν το εμβαδόν E_2 αποκτά μέγιστη τιμή. Σε αυτή την περίπτωση, θα πρέπει αρχικά να παρατηρήσουν ότι το μέγεθος $ΜΛ^2$ εκφράζει για κάθε τιμή του κ το εμβαδόν E_2. Επιπλέον ότι στην περίπτωση όπου τα σημεία Κ και Λ ταυτιστούν, τότε το τμήμα ΜΛ γίνεται μέγιστο και κατ' επέκταση μεγιστοποιείται και το εμβαδόν E_2. Επίσης καλούνται να παρατηρήσουν το σχήμα που αποκτά το ορθογώνιο σε αυτή την περίπτωση (τετράγωνο αφού $ΙΛ=ΛΝ=2.5$). Τονίζουμε ότι η συγκεκριμένη παρατήρηση, θα βοηθήσει τους μαθητές να διατυπώσουν εικασία σχετικά με το πότε το εμβαδόν του ορθογωνίου E_2 μεγιστοποιείται. Τέλος όσον αφορά το αριθμητικό αποτέλεσμα του μέγιστου εμβαδού, θα ισχύει ότι $ΜΛ^2=R^2=6.25$ που είναι και η μέγιστη δυνατή τιμή του εμβαδού E_2 και επομένως η μέγιστη επιφάνεια που μπορεί να πάρει ο Ιδιοκτήτης στην ανταλλαγή.

Ο σχεδιασμός του γεωμετρικού ισοδυνάμου που αναπαριστά με γεωμετρικό και μετρικό τρόπο τις μεταβολές του εμβαδού E_2, αποσκοπεί στο να προκληθεί ο κατάλληλος γεωμετρικός συλλογισμός που θα οδηγήσει στη διατύπωση της εικασίας που ακολουθεί στο επόμενο βήμα. Δηλαδή ότι από την παρατήρηση μεγιστοποίησης του εμβαδού του ορθογωνίου, είναι δυνατό να συμπεράνουμε μια γενική ιδιότητα ορθογωνίων όπως του E_2 , τη γνωστή δηλαδή πρόταση ότι *«από την οικογένεια των ορθογωνίων που έχουν σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν».* Επομένως φαίνεται να υπάρχει ερευνητικό ενδιαφέρον για τη συμβολή του e-δομήματος (με το ρόλο που καλείται να διαδραματίσει ως artefact –βλ. σελ. 44) στην πρόκλη-ση κατάλληλης εικασίας στους μαθητές γύρω από το θέμα αυτό.

Όσον αφορά τα είδη συλλογισμού που επιχειρούμε να αναπτυχθούν σε αυτό το στάδιο, φανερά υπάρχουν στοιχεία «Λογικής της ανακάλυψης» καθώς και στοιχεία απαγωγικού συλλογισμού με βάση το παρακάτω διάγραμμα:



Μετά την παρατήρηση μεγιστοποίησης του εμβαδού στην περίπτωση που το σημείο Λ ταυτιστεί με το κέντρο του ημικυκλίου Κ, είναι ίσως σκόπιμο να ζητηθεί από τους μαθητές να στηριχθεί και από γνώση που έχουν σχετικά με τη θέση ακροτάτου μιας παραβολής. Δηλαδή να αιτιολογήσουν και αλγεβρικά το παραπάνω εύρημα παίρνοντας την αντίστοιχη τιμή του κ=-0,5 από το e-δόμημα και δικαιολογώντας την από τον τύπο $κ=-\frac{β}{2α}$ που δίνει την τετμημένη της κορυφής της παραβολής.

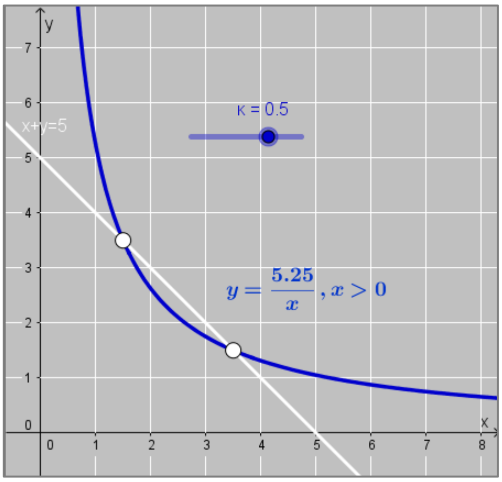
Ε4. Με βάση το προηγούμενο βήμα, προσπαθούμε να οδηγήσουμε τους μαθητές στη διατύπωση σχετικής εικασίας που αφορά στις μεταβολές του εμβαδού όπως του E_2: «*Από* *όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν*» (βλ. εκφώνηση σελ 124). Στο σημείο αυτό να επισημάνουμε τις δυσκολίες που φαίνεται να αντιμετωπίζουν οι μαθητές εργαζόμενοι σε τέτοια περιβάλλοντα, προκειμένου να διατυπώσουν εικασίες, μετά από τον πειραματισμό τους σε ένα e-δόμημα και στη συνέχεια να εισέλθουν σε διαδικασίες τυπικής απόδειξης. Κάποια από τα πιθανά αίτια έχουν αναφερθεί στα προηγούμενα (σελ. 41 & σελ. 57). Ωστόσο στο συγκεκριμένο στάδιο της δραστηριότητας θεωρούμε ότι θα πρέπει να ζητηθεί αρχικά από τους μαθητές η διατύπωση κάποιας εικασίας σχετικά με τα έως τώρα ευρήματα τους και σε περίπτωση δυσκολίας τους να δοθούν προσεκτικά κάποια στοιχεία που θα τους βοηθήσουν να συνδυάσουν τα προηγούμενα στάδια. Πιθανό να χρειαστεί ιδιαίτερη προετοιμασία από τον εκπαιδευτικό, για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου σημείου. Όπως έχουμε ήδη προαναφέρει (σελ. 61) «Ο εκπαιδευτικός πρέπει να προτείνει έναν *μπούσουλα* (παράθεση γνώσης) στα ερωτήματα και στις ασκήσεις που θέτει, ειδικά αυτά που διερευνούνται μέσω τεχνολογίας. Αν υποπέσει σε αυτή την παγίδα (δηλαδή να φανερώσει τις ιδέες), στερεί την ευκαιρία από το μαθητή να σκεφτεί και να μάθει. Είναι απαραίτητο να εστιάζει στο μαθηματικό γραμματισμό και να παρουσιάζει ανοχή της διαπραγματευτικότητας των απαντήσεων». «Ιδιαίτερα ο εκπαιδευτικός που εφαρμόζει το σενάριο πρέπει να είναι αναστοχαζόμενος, ενεργός δημιουργός προσωπικής πρακτικής και άμεσα εμπλεκόμενος στην καινοτομία» (Kynigos, 2011). Επομένως πρόκειται για κρίσιμο σημείο της δραστη-ριότητας, η προσεκτική καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό προς τη διατύπωση της σχετικής εικασίας από τους μαθητές σε περίπτωση αδυναμίας τους. Η πρόταση αφορά στην επανατοποθέτηση των χαρακτηριστικών στοιχείων που έχουν τα ορθογώνια όπως το $Ε_2$, (σταθερή περίμετρο και μεταβλητό εμβαδόν) και στην επισήμανση – τονισμό του ευρήματος στο προηγούμενο βήμα (μεγιστοποίηση εμβαδού όταν αυτό γίνει τετράγωνο). Εξίσου σημαντικοί και οι χειρισμοί του εκπαιδευτικού που αφορούν στο στάδιο μετά τη διατύπωση της εικασίας σχετικά με την ανάγκη απόδειξης της. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει «… οι μαθητές είναι εύκολο να πειστούν για την εγκυρότητα μιας πρότασης κατόπιν των συνεχών μετασχηματισμών που μπορούν να δημιουργούν μόνοι τους σε περιβάλλοντα DGEs» (De Villiers, 1993 & 2003). Κρίνεται ως απλουστευμένο αλλά και πειστικό το επιχείρημα της απουσίας του γεωμετρικού ισοδυνάμου και της απευθείας έρευνας για το αν και πότε μπορεί να μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν. Σε αυτή την περίπτωση όπως είναι φανερό οι μαθητές θα εισέρχονταν αυτόματα σε διαδικασίες τυπικής (αναζήτησης της) απόδειξης. Κατόπιν αυτών, στην επόμενη φάση αναπτύσσουμε και πάλι κατάλληλο υπόβαθρο bfp συνθηκών με χαρακτηριστικά αλγεβρικού λογισμού, προκειμένου οι μαθητές να αποδείξουν την εικασία τους χρησιμοποιώντας αλγεβρικές τεχνικές. Καθοριστικό σημείο στο σχεδιασμό μας και γι αυτό το στάδιο, η ανατροφοδότηση που θέλουμε να λάβουν από το e-δόμημα ώστε να δημιουργηθεί η κεντρική ιδέα της απόδειξης της συγκεκριμένης εικασίας.

Ε5. Σε αυτό το στάδιο γίνεται προσπάθεια για τη δημιουργία κατάλληλου εννοιολογικού υπόβαθρου πριν την τυπική απόδειξη της εικασίας που διατυπώθηκε στο προηγούμενο βήμα (βλ. εκφώνηση σελ. 125). Για το σκοπό αυτό δίνεται στο στάδιο Ι, το σύστημα (Σ) που περιγράφει τις συνθήκες του προβλήματος, όπου με x και y έχουμε συμβολίσει τις διαστάσεις του ορθογωνίου $Ε_2$ (θυμίζουμε ότι στο ερώτημα Ε2 έχουν διορθωθεί οι αρχικές τιμές του κ, ώστε οι διαστάσεις του ορθογωνίου $Ε_2$ να είναι θετικοί αριθμοί). Ζητείται να δείξουν ότι το σύστημα είναι ισοδύναμο με τις λύσεις της εξίσωσης 2^{ου} βαθμού p(x)=0 όπου $p(x)=-x^2+5x-E_2$.

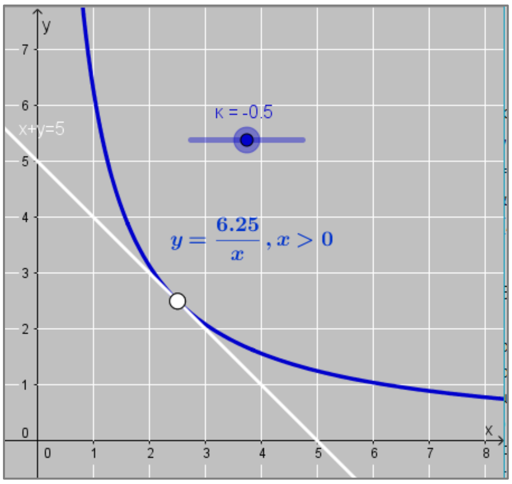
Συγκεκριμένα:

$$(\Sigma):\begin{cases} x+y=5 \\ xy=E_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-x \\ x(5-x)=E_2 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{-x^2+5x-E_2}_{p(x)}=0$$

Το προκαταρκτικό αυτό βήμα περιέχει στοιχεία παραγωγικού συλλογισμού και αποσκοπεί στο να δημιουργηθεί (και) μια αλγεβρική - οπτική διάσταση στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης του εμβαδού E_2. Δηλαδή ότι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που προκαλούνται στο εμβαδόν E_2 από τη συμμεταβολή των διαστάσεων x και y, είναι ισοδύναμοι με την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης p(x)=0. Στην επέκταση της δραστηριότητας που προτείνουμε στο παράρτημα της παρούσης, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να δουν στο e-δόμημα την οπτικοποίηση του συστήματος (Σ) τόσο ως προς τη γεωμετρική αναπαράστασή του (η σταθερή ευθεία x+y=5 και ο μεταβλητός κλάδος υπερβολής $y=\frac{E_2}{x}, x>0$) όσο και ως προς την αναπαράσταση των λύσεων του (Σ) (σχετική θέση της ευθείας με την υπερβολή, όπου σε κάθε περίπτωση ή τέμνονται ή εφάπτονται, βλ. επόμενη εικόνα).



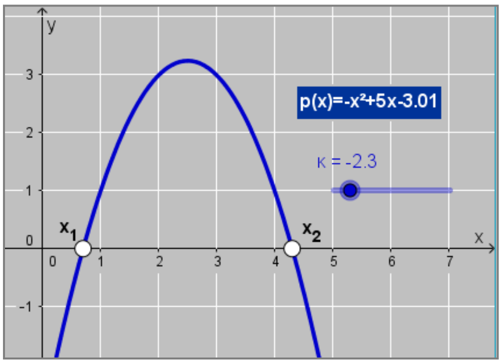
$\kappa \neq -0.5$



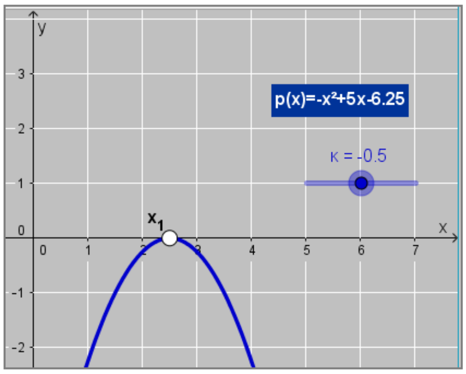
$\kappa = -0.5$

Εικ. 32: Αλγεβρική αναπαράσταση του συστήματος (Σ)

Επανερχόμαστε στο II μέρος αυτού του ερωτήματος, όπου οι μαθητές επεξεργάζονται τη γραφική παράσταση του τριωνύμου $p(x)=-x^2+5x-E_2$ για τις διάφορες τιμές του κ και τις αντίστοιχες μεταβολές του εμβαδού E_2. Στη 2^η οθόνη γραφικών του Geogebra εμφανίζονται οι δυναμικές μεταβολές της παραβολής p(x). Σε αυτό το στάδιο πειραματισμού, οι μαθητές θα πρέπει να παρατηρήσουν ότι για κάθε τιμή του κ (συνεπώς και για τις διάφορες τιμές του εμβαδού E_2) , η γραφική παράσταση του τριωνύμου p(x) ή τέμνει τον άξονα xx΄ σε 2 σημεία ή εφάπτεται σε αυτόν σε 1 σημείο.



$\kappa \neq -0.5$ & $\Delta_p > 0$

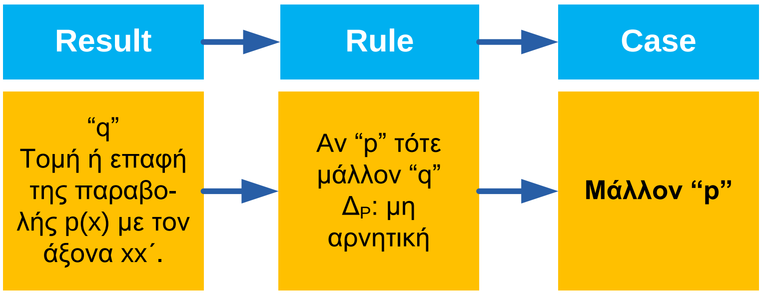


$\kappa = -0.5$ & $\Delta_p = 0$

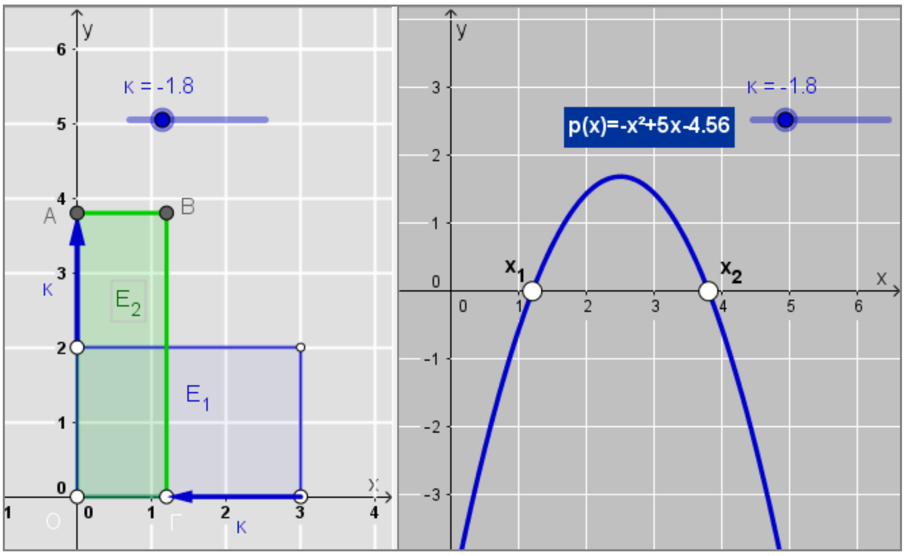
Εικ. 33: Αλγεβρική αναπαράσταση της εξίσωσης p(x)=0

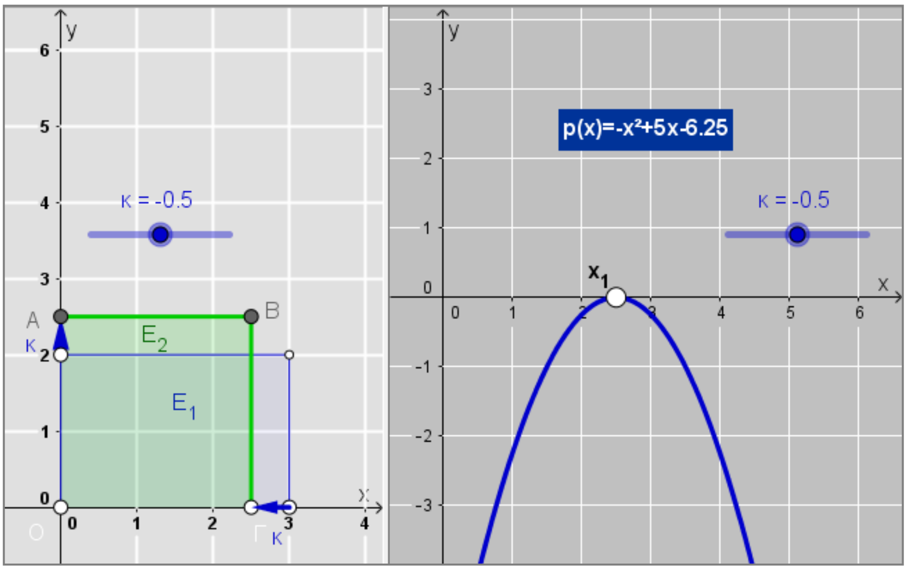
Στόχος της συγκεκριμένης δυναμικής αναπαράστασης είναι να προκληθεί η ιδέα της μη αρνητικής διακρίνουσας Δ_p του τριωνύμου p(x). Με τον τρόπο αυτό θέλουμε να διερευνήσουμε τη δυνατότητα (ή την αδυναμία) των μαθητών να ερμηνεύσουν τη σχετική θέση της παραβολής με τον άξονα xx΄ και τη σύνδεση αυτής της ερμηνείας με το αλγεβρικό ισοδύναμο που περιγράφει το φαινόμενο και αφορά στη σχέση $\Delta_p \geq 0$. Η συγκεκριμένη σχέση είναι αυτή που θα τους οδηγήσει στο επόμενο βήμα στην τυπική απόδειξη που αφορά στη μεγιστοποίηση του εμβαδού E_2 που αυτό θα συμβεί όταν $\Delta_p = 0$. Σε περίπτωση αδυναμίας άμεσης ερμηνείας από την πλευρά των μαθητών των μετασχηματισμών που προκαλούνται στην παραβολή p(x) με τις μεταβολές του κ, υπάρχει ο διακόπτης [Δ_p] που εμφανίζει τις (μη αρνητικές) τιμές της διακρίνουσας για κάθε τιμή του κ. Τέλος έχει προβλεφθεί να παρουσιαστεί στους μαθητές υπό μορφή υπενθύμισης η διαφάνεια που εμφανίζει τις μορφές του τριωνύμου (βλ. σελ. 128).

Επισημαίνουμε ότι το συγκεκριμένο στάδιο θεωρείται κομβικής σημασίας για την παρούσα εργασία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο σχεδιασμός μας, όπως έχει ήδη διαφανεί στα προηγούμενα, αφορά στη σταδιακή «αποκάλυψη» των σημείων που αφορούν στη μεγιστοποίηση του εμβαδού E_2. Όπως προαναφέρθηκε αρχικά διερευνάται αν υπάρχει η δυνατότητα ανταλλαγής της αρχικής έκτασης με εμβαδόν μεγαλύτερο από τα αρχικό E_1=6 και στη συνέχεια τίθεται το ερώτημα για το πότε ο Ιδιοκτήτης μπορεί κατά την ανταλλαγή να λάβει το μέγιστο εμβαδόν. Μέσω του γεωμετρικού ισοδυνάμου που περιγράφηκε στο προηγούμενο στάδιο, γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχει η περίπτωση της μεγιστοποίησης του E_2 ενώ παράλληλα διαφάνηκε ότι αυτό συμβαίνει όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο με Β-Δ μεταβολή των αρχικών του διαστάσεων. Επομένως, σε αυτό το στάδιο απομένει η νοηματοδότηση από τους μαθητές των γεωμετρικών μετασχηματισμών που παρατηρούνται στην οθόνη του υπολογιστή για το αλγεβρικό ισοδύναμο του προβλήματος, που εμφανίζεται μέσω των δυναμικών μεταβολών της παραβολής p(x). Η εν λόγω ερμηνεία αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα για το είδος της αιτιολογίας από ερμηνεία. Οι μαθητές πρέπει να ερμηνεύσουν τις δυναμικές μεταβολές της παραβολής p(x) μέσω του προσήμου της διακρίνουσας Δ_p του τριωνύμου p(x) (αιτιολογία από ερμηνεία) και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί η συγκεκριμένη ερμηνεία για την τυπική απόδειξη της εικασίας που διατυπώθηκε στο προηγούμενο βήμα: «από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν». Και σε αυτό το σημείο η πλοκή του ερωτήματος περιέχει χαρακτηριστικά «Λογικής για ανακάλυψη» και «Λογικής για τεκμηρίωση»(σελ.32) καθώς και απαγωγικού συλλογισμού με βάση το παρακάτω διάγραμμα:



Στο σημείο αυτό τονίζουμε τη σημασία της έκβασης του συγκεκριμένου σταδίου για το ερευνητικό μας ερώτημα που αφορά στην καλλιέργεια συνθηκών bfp μέσω του δυναμικού περιβάλλοντος των DGEs. Όπως αναφέρθηκε επιδιώκουμε οι δυναμικές αναπαραστάσεις των μεταβολών της παραβολής p(x) να καλλιεργήσουν την ιδέα της μη αρνητικής διακρίνουσας του τριωνύμου. Όπως μπορεί να γίνει αντιληπτό, κάτι αντίστοιχο δεν είναι εφικτό να πραγματοποιηθεί στο στατικό περιβάλλον του πίνακα. Λαμβάνοντας υπόψη ότι στο e-δόμημα εξελίσσονται ταυτόχρονα στις δύο οθόνες γραφικών του Geogebra οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί του εμβαδού E_2 και στη $2^η$ οθόνη οι μετασχηματισμοί της παραβολής p(x), θεωρούμε ότι καλλιεργείται ένα μείγμα πολλαπλών αναπαραστάσεων και άρα νοημάτων, που αφορούν στην προσέγγιση του προβλήματος. Παραμένει ασφαλώς ως ζητούμενο αν και κατά πόσο οι συγκεκριμένες συνδυαστικές αναπαραστάσεις, θα δημιουργήσουν κι εδώ το κατάλληλο εννοιολογικό υπόβαθρο (συνθήκες bfp) ώστε από την ερμηνεία τους να υπάρξει η ανακάλυψη της σχέσης – κλειδί για το τελικό στάδιο που αφορά στην απόδειξη της εικασίας που διατυπώθηκε στα προηγούμενα.





Εικ. 34: Αλγεβρική αναπαράσταση της μη αρνητικής διακρίνουσας του τριωνύμου p(x)

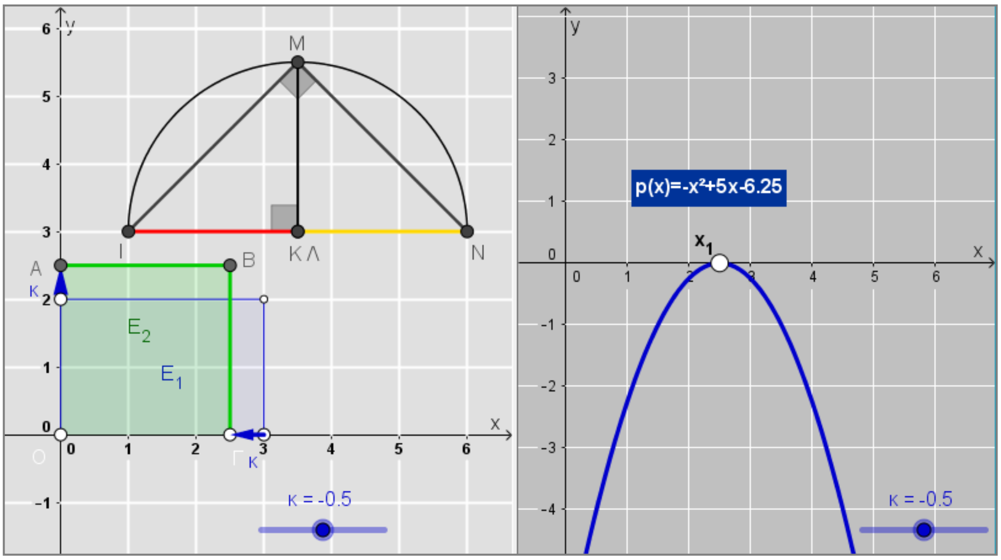
Ε6. Πρόκειται για το τελικό στάδιο της δραστηριότητας, στο οποίο ζητούμενο από τους μαθητές είναι η απόδειξη ότι το εμβαδόν E_2 μεγιστοποιείται όταν x=y=2.5 δηλαδή όταν το ορθογώνιο μετασχηματιστεί σε τετράγωνο (βλ. εκφώνηση σελ. 125). Σε αυτό το στάδιο οι μαθητές θα πρέπει να αξιοποιήσουν τη σχέση $\Delta_p \geq 0$ του προηγούμενου ερωτήματος. Θα πρέπει επομένως από την ερμηνεία της προηγούμενης σχέσης ($\Delta_p \geq 0$)να «ξεκλειδώσουν» τον παρακάτω συλλογισμό:

$$\Delta_p \geq 0 \Rightarrow 25 - 4E_2 \geq 0 \Rightarrow E_2 \leq \frac{25}{4} \text{ από όπου συνάγεται άμεσα ότι } E_{2,max} = \frac{25}{4}.$$

Τότε θα είναι $\Delta_p = 0$ και επομένως η εξίσωση p(x)=0 (που θυμίζουμε είναι η ισοδύναμη εξίσωση του συστήματος (Σ) που περιγράφει το πρόβλημα, βλ. σελ. 73) θα έχει μία διπλή ρίζα που δίνεται από τον τύπο $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = 2{,}5 \overset{x+y=5}{\Rightarrow} y = 2{,}5$.

Το τελικό συμπέρασμα επομένως είναι ότι το εμβαδόν E_2 μεγιστοποιείται όταν το ορθογώνιο μετασχηματιστεί σε τετράγωνο. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι στο συγκεκριμένο στάδιο έχουμε σαφή χαρακτηριστικά παραγωγικού συλλογισμού αφού η συνθήκη $\Delta_p \geq 0$ οδηγεί άμεσα στο συμπέρασμα.

Παρόλα αυτά, δεν θεωρείται δεδομένο ότι οι μαθητές θα αξιοποιήσουν την παραπάνω σχέση αφού με βάση τα σχολικά δεδομένα δεν έχουν προηγούμενη εμπειρία στο χειρισμό αντίστοιχων θεμάτων. Ακόμη και αν σκεφτούν να συνδυάσουν το προηγούμενο ερώτημα, δεν έχουν την κατάλληλη εμπειρία χειρισμού αντίστοιχων σχέσεων για την εύρεση ακροτάτων τιμών μιας παράστασης. Αξίζει ασφαλώς να σημειωθεί ότι η απόδειξη που ζητείται σε αυτό το ερώτημα, δεν αφορά τα κεντρικά ερευνητικά ζητήματα που εξετάζουμε στην παρούσα εργασία. Είναι αρκετά φανερό ότι τα ερευνητικά ζητήματα που τέθηκαν στη σελ. 58 επί της ουσίας δεν αφορούν το παρόν ερώτημα, η απάντηση του οποίου έχει σαφή χαρακτηριστικά μαθηματικού φορμαλισμού. Εξάλλου, η συμβολή του e-δομήματος για το συγκεκριμένο ερώτημα δεν έχει να προσφέρει κάτι προς την τελική απόδειξη. Ωστόσο κρίναμε σημαντικό να εξετάσουμε τους διαλόγους που μπορούν να προκύψουν με την αφορμή του ερωτήματος ανάμεσα στις ομάδες των μαθητών και τις –πιθανές- αναφορές τους σε στοιχεία που προέκυψαν από τον προηγούμενο πειραματισμό τους στο e-δόμημα. Μάλιστα ο πειραματισμός με χειροκίνητη μετακίνηση του δρομέα κ στο προηγούμενο βήμα είναι δυνατό να τροφοδοτήσει την ιδέα της μεγιστοποίησης του εμβαδού για την τιμή κ=-0.5 κατά την οποία (ταυτόχρονα) η παραβολή p(x) εφάπτεται στον άξονα xx΄ (δηλαδή $\Delta_p = 0$). Επιπλέον με ανοικτή τη γεωμετρική αναπαράσταση του προβλήματος μέσω του ημικυκλίου, υπάρχει ακόμη μια ταυτόχρονη σήμανση του μέγιστου εμβαδού ενώ τέλος και ο μετασχηματισμός του ορθογωνίου σε τετράγωνο (βλ. επόμενο σχήμα) αποτελεί άλλο ένα στοιχείο προς τη δημιουργία της ιδέας για την απόδειξη.



Εικ. 35: Αλγεβρική και γεωμετρική αναπαράσταση μεγιστοποίησης του εμβαδού E_2

Κλείνοντας το σχολιασμό του συγκεκριμένου ερωτήματος, επισημαίνουμε ότι και σε αυτό το στάδιο απαιτούνται λεπτοί χειρισμοί από τον εκπαιδευτικό, σε περίπτωση όπου οι μαθητές δεν σκεφτούν να αξιοποιήσουν την ανισοϊσοτική σχέση της διακρίνουσας από το προηγούμενο ερώτημα. Προτεινόμενη πορεία προς τη διαχείριση του πιθανού αδιεξόδου, θα ήταν η υπόδειξη για ερμηνεία σχέσεων της μορφής $\alpha \le \beta$ όπου α είναι μία μεταβλητή ποσότητα και το β μία σταθερή τιμή. [22] Ιδιαιτέρως μπορεί να τεθεί σχετικό ερώτημα, ως προς τις δυνατές τιμές που μπορεί να λάβει η μεταβλητή α και ο ρόλος της σταθερής ποσότητας β. Επισημαίνουμε επίσης ότι αν και θα μπορούσε το ερώτημα να τεθεί ως 2^o σκέλος του προηγούμενου ερωτήματος Ε6, ώστε να είναι περισσότερο προφανής η σύνδεσή των ερωτημάτων, εν τούτοις τέθηκε ως ανεξάρτητο ώστε να διερευνήσουμε τη δυνατότητα σύνδεσης της σχέσης της διακρίνουσας με την αποδεικτική ισχύ σχέσης αυτής για το πρόβλημα.

[22] Από εμπειρικά δεδομένα, προκύπτει ότι υπάρχουν δυσκολίες στην ερμηνεία τέτοιων μορφών σχέσεων από τους μαθητές, όσον αφορά στη νοηματοδότηση ακροτάτων τιμών για την παράσταση α.

Σχόλιο: Είναι πιθανό να έχει προκληθεί στον αναγνώστη, το ερώτημα γιατί –αντί όλης της προηγούμενης διαδικασίας- να μην υποβληθεί το ερώτημα στους μαθητές, ότι «αφού το x στη δευτεροβάθμια εξίσωση p(x)=0 είναι πραγματικός, άρα ποιο συμπέρασμα θα προκύπτει για τη διακρίνουσα του τριωνύμου;» το οποίο οδηγεί εντελώς άμεσα στη συνθήκη της μη αρνητικής διακρίνουσας. Σε μια τέτοια περίπτωση, είναι προφανές ότι ανάγουμε το ερώτημα σε μια εντελώς εργαλειακή πορεία απόδειξης, ενώ το αντικείμενο της έρευνάς μας αφορά στη δημιουργία συνθηκών bfp με τη διαμεσολάβηση των DGEs, οι οποίες μπορούν να νοηματοδοτήσουν έννοιες και σχέσεις που αφορούν στην απόδειξη μιας πρότασης. Παράλληλα θεωρούμε ότι με τον τρόπο που υποδεικνύουμε, οι μαθητές αποκτούν την απαραίτητη κιναισθητική αντίληψη του ρόλου του προσήμου της διακρίνουσας για τη σχετική θέση μιας παραβολής αναφορικά με τον άξονα xx΄ προσδίδοντας περισσότερη διδακτική αξία. Τέλος, αρκετά στοιχεία σχεδιασμού της έρευνας στοχεύουν στην αποτύπωση της δυναμικής που είναι δυνατό να αναπτυχθεί στην αιτιολογία από ερμηνεία μέσω των δυναμικών αναπαραστάσεων που δημιουργούνται στα DGEs συγκριτικά με την αντίστοιχη αιτιολογία στον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας.

Ε7. Στην τελική φάση της δραστηριότητας ζητείται από τους μαθητές να αποτιμήσουν και να οριστικοποιήσουν συνολικά την πρόταση τους προς τον Ιδιοκτήτη. Με άλλα λόγια ότι η πλέον συμφέρουσα για εκείνον ανταλλαγή είναι η μείωση του μήκους κατά 0,5 (εκατ.m) και η αντίστοιχη αύξηση του πλάτους επίσης κατά 0.5 (εκατ.m). Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να πάρει τη μέγιστη δυνατή έκταση στην ανταλλαγή που θα κάνει και η οποία θα ανέρχεται στα 62,5 στρέμματα, ενώ τέλος η συγκεκριμένη έκταση θα εκτείνεται Βόρειο – Δυτικά της αρχικής έκτασης και θα έχει σχήμα τετραγώνου. Το ερώτημα αποσκοπεί στο να προκληθεί μια ανασύνθεση των αρχικών και βασικών ερωτημάτων της δραστηριότητας. Συγκεκριμένα μέσω της ανασκόπησης που συντελείται σε αυτό το βήμα, οι μαθητές αντιλαμβάνονται αρχικά τη σημασία του τρόπου μεταβολής του εμβαδού (Β-Δ ή Ν-Α μεταβολή του αρχικού ορθογωνίου E_1), δηλαδή ότι οι δύο τρόποι είναι διακριτοί μεταξύ τους, αφού δεν δίνουν τις ίδιες λύσεις στο πρόβλημα. Επομένως είναι πιθανό να ανατραπεί η –πιθανή- τοποθέτηση ότι δεν παίζει ρόλο ο τρόπος μεταβολής του αρχικού ορθογωνίου. Επιπλέον συνειδητοποιούν ότι μία αρχική-ενδεικτική απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα μπορεί να δοθεί μέσω του πειραματισμού τους στο e-δόμημα αλλά ρητή απάντηση, δίνεται (μόνο) από τις μαθηματικές σχέσεις που απαιτούνται για το ερώτημα. Στο ίδιο πλαίσιο έρευνας, πειραματισμού και οριστικής απάντησης αναφέρονται και τα υπόλοιπα ερωτήματα που περιγράφηκαν στα προηγούμενα.

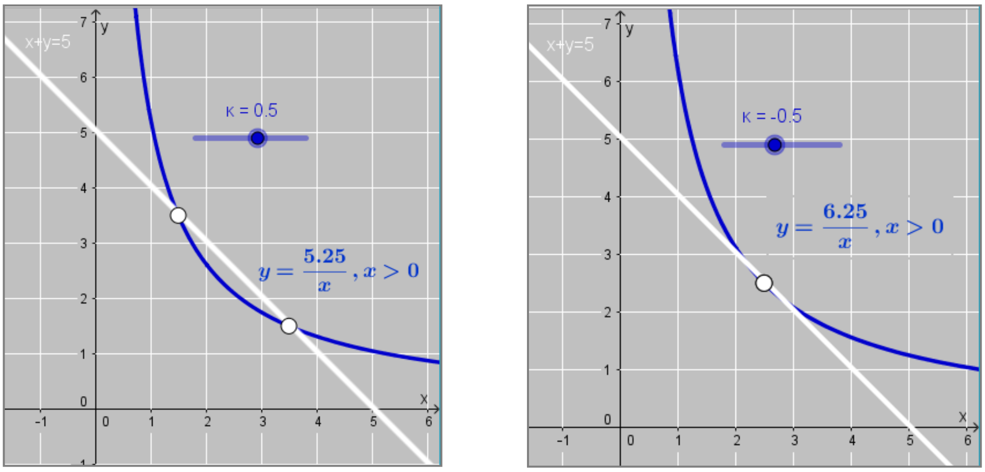
2.7 Επεκτάσεις [23]

Ε8. Γεωμετρική επίλυση του συστήματος: $(\Sigma):\begin{cases} x+y=5 \\ xy=E_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ y=\dfrac{E_2}{x} \end{cases}$

[23] Η επέκταση της δραστηριότητας δεν παρουσιάστηκε στην παρούσα εργασία λόγω έλλειψης επιπρόσθετου χρόνου. Προτείνεται όμως σε όποιον (α) θα ήθελε να χρησιμοποιήσει τη δραστηριότητα ως εργαλείο για διερεύνηση θεμάτων που σχετίζονται με το ρόλο των δυναμικών αναπαραστάσεων στο πεδίο των συμμεταβολών, να χρησιμοποιήσει εφ' όσον το επιθυμεί και το μέρος αυτό των επεκτάσεων . Το συγκεκριμένο τμήμα, μπορεί να δοθεί ως άσκηση ή να ολοκληρωθεί σε κάποια άλλη διακριτή φάση από την κύρια δραστηριότητα.
Σχόλιο: Ενδεχομένως να αποτελεί και απαραίτητο συμπλήρωμα ως επιπρόσθετη διαδικασία αξιολόγησης.

Οι μαθητές θα πρέπει να αναγνωρίσουν ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας $x+y=5$ και της υπερβολής $y=\frac{E_2}{x}$ (x,y θετικά) αποτελούν τη γεωμετρική - γραφική επίλυση του συστήματος (Σ). Με άλλα λόγια να νοηματοδοτήσουν μέσω της δυναμικής αναπαράστασης που προσφέρεται από το e-δόμημα και σε πολλαπλά επίπεδα, το γεωμετρικό ισοδύναμο της αλγεβρικής επίλυσης ενός συστήματος, αποκτώντας με αυτόν τον τρόπο τη δυναμική εικόνα που λειτουργεί παρασκηνιακά (;) κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός μη γραμμικού συστήματος. Δηλαδή ότι επί της ουσίας αναζητείται η σχετική θέση δύο γραμμών (στο παράδειγμα μας, μιας ευθείας και μιας υπερβολής).

Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε ότι ανάλογα προβλήματα καλούνται οι μαθητές να επιλύσουν αλγεβρικά και στη συνέχεια να δώσουν τη γεωμετρική ερμηνεία τους, τόσο στην Άλγεβρα Γενικής Παιδείας όσο και στην ύλη του Προσανατολισμού.



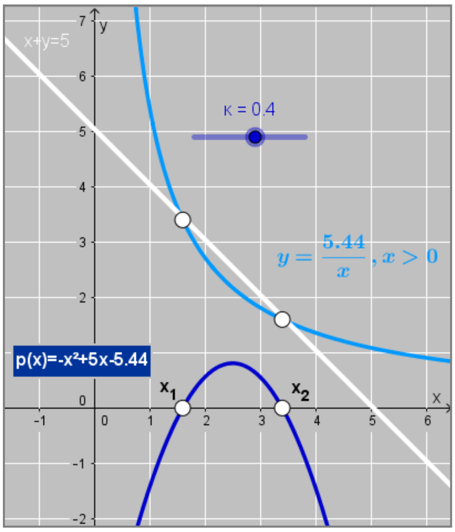
Εικ. 36: Γεωμετρική αναπαράσταση του συνόλου λύσεων του συστήματος (Σ)

Υποστηρίζουμε συνεπώς τη σημασία και το ρόλο που έχουν οι δυναμικές αναπαραστάσεις ιδιαιτέρως στο πεδίο των συμμεταβολών, προκειμένου οι μαθητές να βοηθηθούν στην εσωτερίκευση νοημάτων πλούσιων σε περιεχόμενο, τα οποία υπάρχουν «εκεί» αλλά δεν διακρίνονται εύκολα χωρίς τη χρήση DGEs.

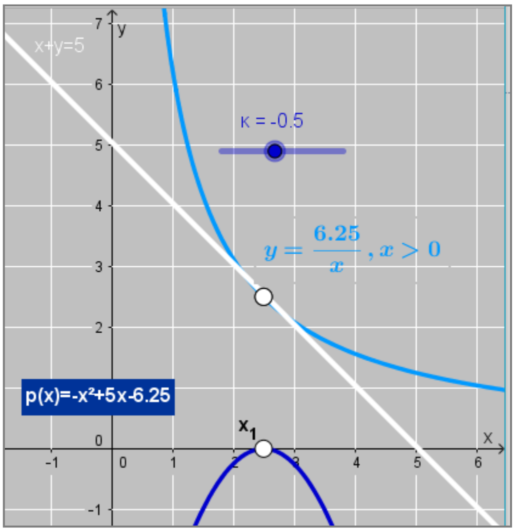
Ε9. Γεωμετρική ερμηνεία και οπτικοποίηση της ισοδυναμίας του συστήματος (Σ) με τη δευτεροβάθμια εξίσωση: $-x^2+5x-E_2=0$

Σε αυτό το στάδιο και από τη συγκεκριμένη οπτικοποίηση, οι μαθητές μπορούν να νοηματοδοτήσουν γεωμετρικά την ισοδυναμία του συστήματος (Σ) με την εξίσωση 2ου βαθμού $-x^2+5x-E_2=0$ (1).

Με άλλα λόγια να διαπιστώσουν ότι το σύνολο λύσεων της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (1) προσδιορίζει το σύνολο λύσεων του συστήματος (Σ) και αντίστροφα. Σε όλη αυτή τη διαδικασία παρατηρούν τις μεταβολές που λαμβάνουν χώρα ανάμεσα στην ευθεία x+y=5 και στην υπερβολή $y=\frac{E_2}{x}$ αναφορικά με τα κοινά τους σημεία, καθώς και στη σχετική θέση της παραβολής $p(x)=-x^2+5x-E_2$ και του άξονα xx΄. Έτσι λοιπόν όταν η ευθεία και η υπερβολή έχουν δύο κοινά σημεία, ταυτόχρονα η παραβολή p(x) τέμνει επίσης σε δύο σημεία τον άξονα των x, ενώ όταν η ευθεία και η υπερβολή έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται) η παραβολή p(x) επίσης εφάπτεται στον άξονα των x. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι η ισοδυναμία του συστήματος (Σ) με την εξίσωση 2^{ου} βαθμού p(x)=0, ουσιαστικά είναι και πάλι ισοδυναμία συστήματος μιας κωνικής τομής (της παραβολής p(x)) με μια ευθεία (την ευθεία y=0, δηλαδή τον άξονα των x). Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό μέσω της συγκεκριμένης οπτικοποίησης και της δυναμικής που αυτή διαθέτει, αφού θεωρούμε ότι το στατικό περιβάλλον του πίνακα δεν προσφέρει τη δυνατότητα για βαθύτερη κατανόηση της παρακάτω ισοδυναμίας των δύο συστημάτων:



Δ>0: Η ευθεία x+y=5 και η υπερβολή $y=\frac{E_2}{x}$ έχουν δύο κοινά σημεία για $\kappa \neq -0.5$ αφού σε αυτή την περίπτωση η διακρίνουσα της (1) είναι θετική

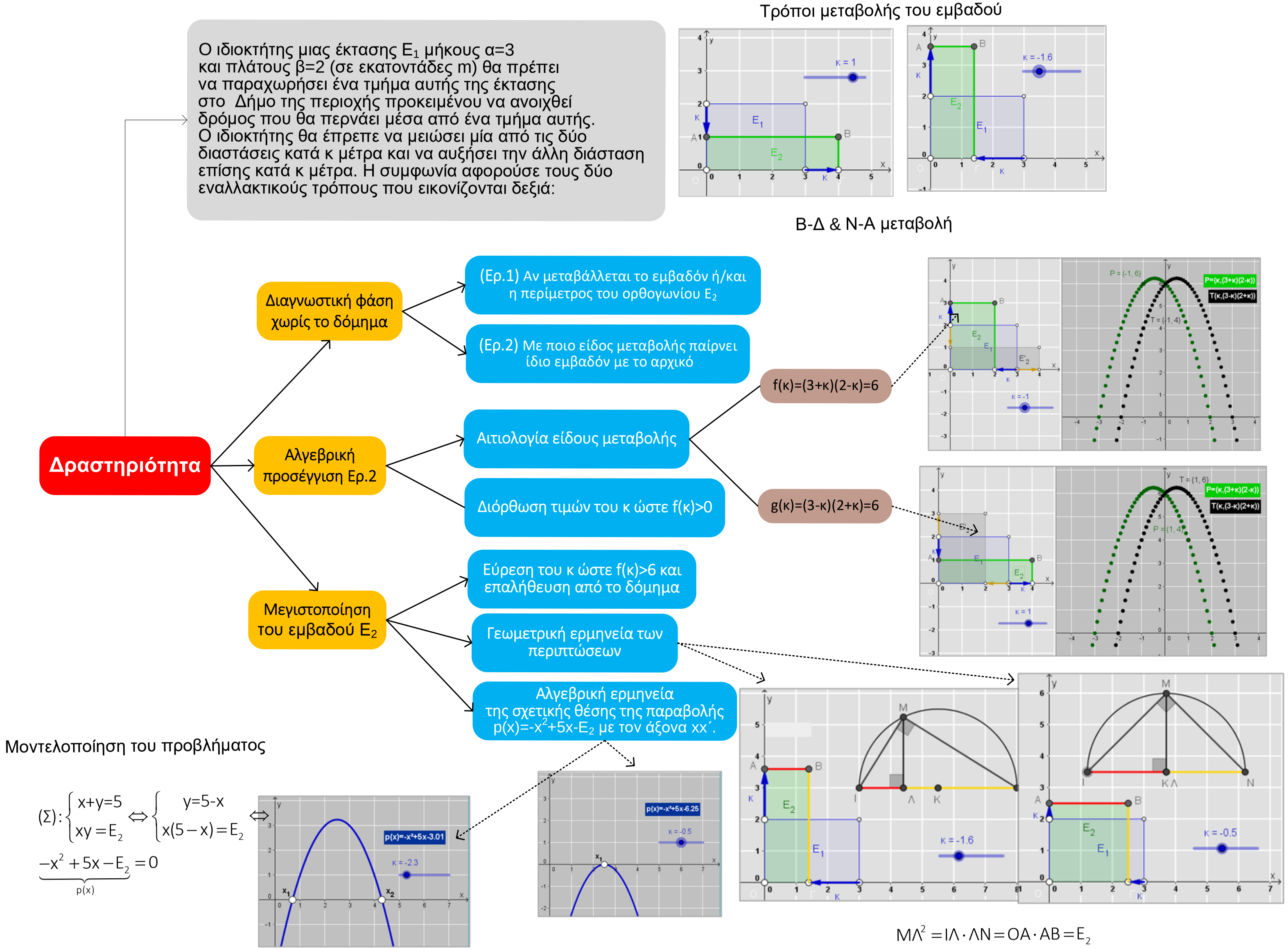


Δ=0: Η ευθεία x+y=5 και η υπερβολή $y=\frac{E_2}{x}$ έχουν ένα κοινό σημείο για $\kappa=-0.5$ αφού σε αυτή την περίπτωση η διακρίνουσα της (1) είναι μηδέν.

Εικ. 37: Γεωμ. αναπαράσταση της ισοδυναμίας του συστήματος (Σ) και της εξίσωσης p(x)=0

Σε κάθε περίπτωση όπως αναφέραμε και στη σελ. 52),):«Κάθε μαθηματική έννοια, ή τεχνική ή στρατηγική - ή οτιδήποτε άλλο μαθηματικό που περιλαμβάνει είτε πληροφορίες ή κάποια νοήματα επεξεργασμένης πληροφορίας- αν θέλουμε να παραμείνει στο μυαλό, πρέπει να εκπροσωπείται με κάποιο τρόπο. " (Davis, 1984). Ισχυριζόμαστε στο εδάφιο αυτό ότι οι δυναμικές αναπαραστάσεις των DGEs είναι σε θέση να εκπροσωπήσουν με πρόσθετη παιδαγωγική αξία θέματα συμμεταβολών όπως αυτά που περιγράφηκαν στα προηγούμενα. .

Στα επόμενα δίνουμε συνοπτικά τη χαρτογράφηση των σταδίων της κύριας δραστηριότητας με σύντομες αναφορές στα βασικά χαρακτηριστικά και ζητούμενα.

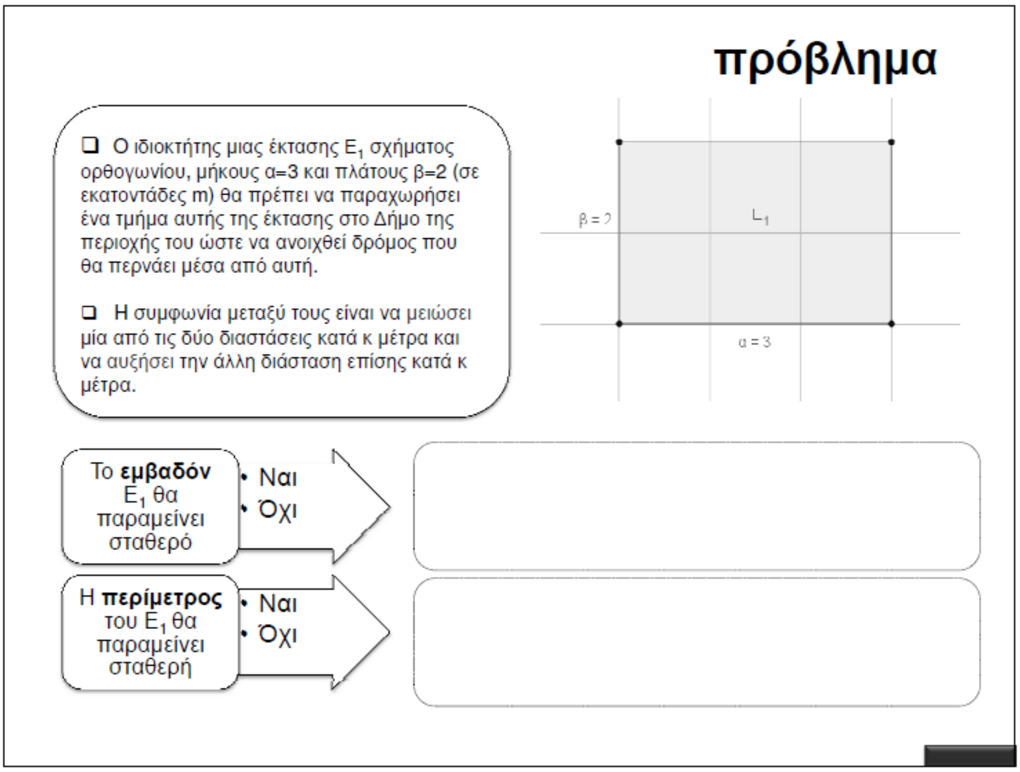


Εικ. 38: Σχεδιάγραμμα βασικών σταδίων της δραστηριότητας

Κεφάλαιο 3ο - Αποτελέσματα

3.1 Η ακολουθούμενη μέθοδος ως προϋπόθεση και ως προϊόν

Στην εισαγωγική φάση της δραστηριότητας και μετά την εκφώνηση του προβλήματος, ζητήθηκε από τις ομάδες να απαντήσουν στο ερώτημα αν παραμένουν σταθερά ή όχι το εμβαδόν και η περίμετρος του ορθογωνίου E_1 και να συμπληρώσουν στο έντυπο που τους δόθηκε την αιτιολογία για την απάντησή τους. Στις ομάδες δόθηκε χρόνος 8΄ για να διαπραγματευτούν τις απαντήσεις.



Εικ. 39: Εισαγωγική φάση δραστηριότητας

Σε αυτό το στάδιο όπως και στο επόμενο, δεν ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για κάποιο συγκεκριμένο ερευνητικό ερώτημα. Ασφαλώς διερευνάμε τη δυναμική της αιτιολογίας για ερμηνεία που αναπτύσσουν οι ομάδες των μαθητών. Ωστόσο, παραμένει κεντρικό σημείο, η διερεύνηση των πιθανών αλλαγών ή/και των αναθεωρήσεων των μαθητών στις απαντήσεις τους, που θα προέλθουν από τη διαμεσολάβηση του e-δομήματος και επομένως και (για) την επαλήθευση / διάψευση του διακριτού ρόλου μεταξύ της ακολουθούμενης μεθόδου και του αποτελέσματος. Ειδικότερα, το βαθμό επηρεασμού των ομάδων με διακριτές τις ακολουθούμενες μεθόδους: παραδοσιακή διερεύνηση του προβλήματος στο χαρτί και στη συνέχεια διερεύνηση των ίδιων ερωτημάτων με πειραματισμό στο ψηφιακό περιβάλλον.

Οι απαντήσεις των δύο ομάδων αναφέρονται στα επόμενα:

Ομάδες	Απαντήσεις
Ο1	Για κ=2 έχουμε α=3−2=1 και β=2+2=4 Άρα το Ε=αβ=4·1=4 } άρα μεταβάλλεται Ενώ κανονικά Ε=2·3=6 κ≠0
	Η περίμετρος είναι το άθροισμα των μηκών των πλευρών. Άρα αφού από τις δύο πλευρές αφαιρούμε το κ και από τις άλλες δύο προσθέτουμε το κ, η περίμετρος θα μείνει σταθερή.
Ο2	1η περίπτωση Εστω κ=1 Νοτιοανατολική −1 = 1 α+1 = 4 Ε=4 2η περίπτωση Βορειοδυτική β+1=3 α−1=2 Ε=6
	Παραμένει σταθερή Π = 2(α+κ) + 2(β−κ) = 2α+2β Π = 2(α−κ) + 2(β+κ) = 2α+2β

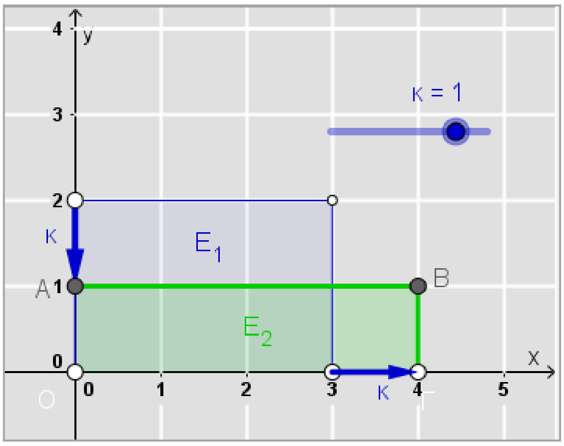
Και οι δύο ομάδες χρησιμοποιούν αριθμητικά παραδείγματα για να αιτιολογήσουν ότι το εμβαδόν E_1 μεταβάλλεται. Ωστόσο η Ο2 δεν απαντάει ρητά αφού στη Ν-Α μεταβολή βρίσκει E_2=4 (θεωρώντας ότι αυτή συντελείται μόνο για θετικές τιμές του κ) και στη Β-Δ μεταβολή «πετυχαίνει» τις διαστάσεις ώστε να είναι E_2=6. Το 2^o αποτέλεσμα την εμποδίζει να απαντήσει ρητά αν (γενικά) μεταβάλλεται το εμβαδόν.

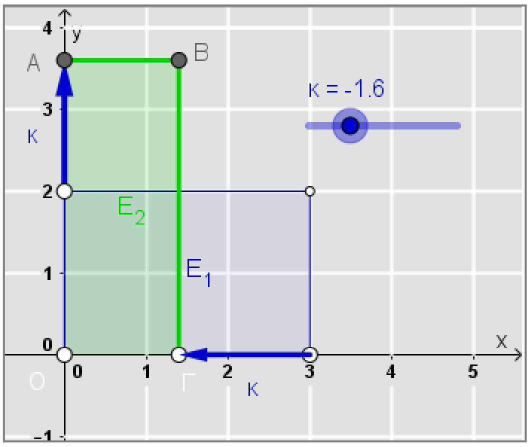
Στην περίπτωση της περιμέτρου, η Ο1 περιγράφει με θεωρητικό τρόπο την απάντηση, δείχνοντας ορισμένα σημάδια διαισθητικής κατανόησης αναφορικά με την έννοια της περιμέτρου ενός επίπεδου σχήματος, Η Ο2 χρησιμοποιεί γενικευμένες εκφράσεις για τις διαστάσεις του ορθογωνίου και αποδεικνύει ότι η περίμετρος παραμένει σταθερή. Στο σημείο αυτό, παρατηρούμε ότι η Ο2 φαίνεται να αποδίδει εξαρχής θετικές τιμές στην παράμετρο κ, παίρνοντας τα ζεύγη πλευρών (α+κ, β-κ) και (α-κ,β+κ) ώστε να αποδείξει ότι η περίμετρος του ορθογωνίου παραμένει σταθερή. Κύρια όμως παρατήρηση, είναι ότι επιστρατεύει ανάμεικτα και αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα (βλ. σελ. 34) στην περίπτωση της περιμέτρου, αλλά και εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα στην περίπτωση του εμβαδού.

3.2 Αιτιολογία από ερμηνεία υπό έλλειψη bfp συνθηκών

Στο 2^o στάδιο της εισαγωγικής φάσης, έγινε αρχικά μία σύντομη επίδειξη του e-δομήματος που περιείχε μόνο την 1^η οθόνη γραφικών του Geogebra και στο οποίο παρουσιάζονταν τα 2 είδη μεταβολής του εμβαδού E_1 (να σημειωθεί ότι καμία μέτρηση από το λογισμικό δεν ήταν εμφανής σε αυτό το σημείο). Στη συνέχεια ετέθη προφορικά το ερώτημα «αν παίζει ρόλο ο τρόπος μεταβολής του εμβαδού E_1» (Β-Δ ή Ν-Α) ώστε ο Ιδιοκτήτης να πάρει έκταση ίση με την αρχική και ζητήθηκε από τις ομάδες να σκεφτούν διαισθητικά την απάντηση (βλ και σελ.64). Και οι δύο ομάδες απάντησαν ότι δεν παίζει ρόλο ο τρόπος μεταβολής του εμβαδού και ότι ήταν δυνατό ο Ιδιοκτήτης να πάρει το ίδιο εμβαδόν με το αρχικό και με τους δύο τρόπους. Στην αιτιολογία (για ερμηνεία) που ακολούθησε, υπήρχε η κοινή γραμμή και των δύο ομάδων, ότι «αφού όσο αυξάνει η μία διάσταση του ορθογωνίου μειώνεται η άλλη, άρα στη μία περίπτωση θα έχουμε τον έναν τρόπο μεταβολής π.χ Β-Δ και στη 2η περίπτωση τον Ν-Α τρόπο» χωρίς όμως να είναι σε θέση να καταλάβουν ποιος τρόπος μεταβολής του εμβαδού θα ισχύει κάθε φορά. Από τις απαντήσεις συνεπώς των δύο ομάδων, δεν φάνηκε να λειτουργεί κάποιο είδος ισχυρής διαίσθησης που να προκαλέσει αμφιβολίες στους μαθητές.

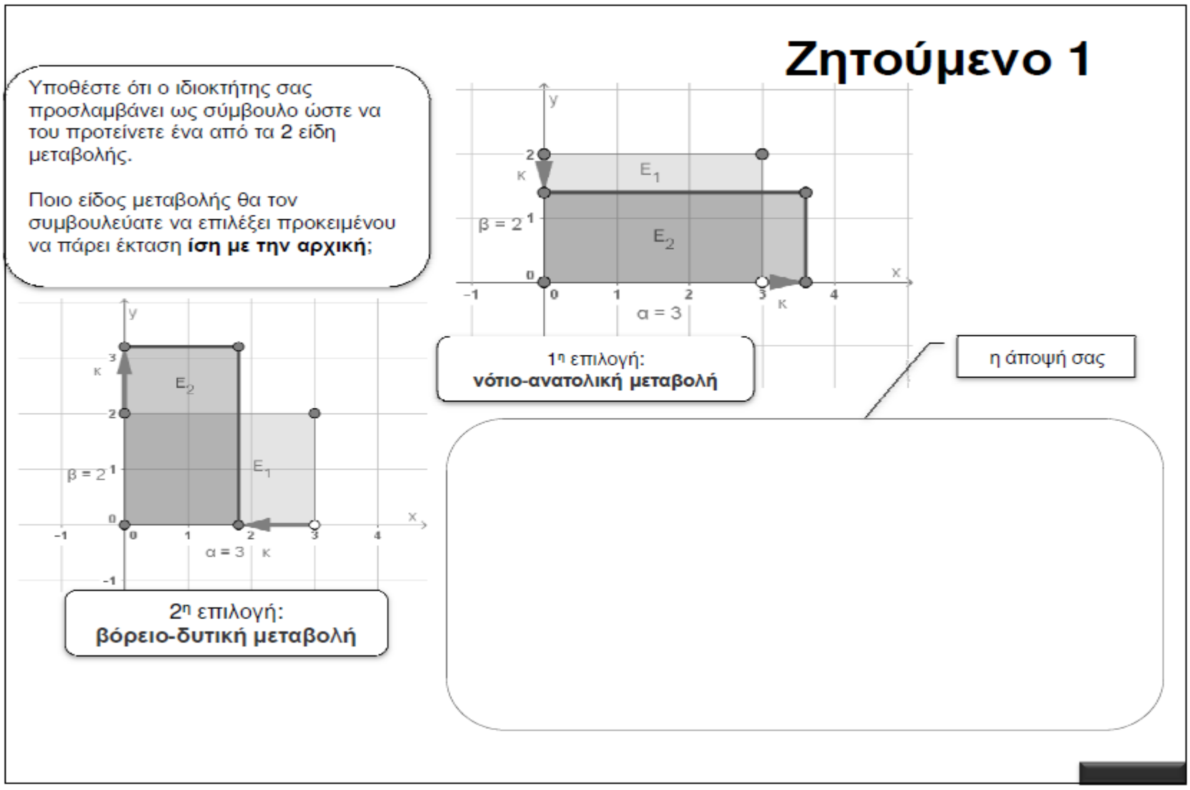
Επίσης συμπεραίνουμε ότι η δυναμική μεταβολή του εμβαδού που παρατήρησαν στην οθόνη γραφικών του Geogebra δεν προκάλεσε κάποια βάσιμη αιτιολογία για το αν παίζει ή όχι ρόλο ο τρόπος μεταβολής. Όπως είχε επισημανθεί και στη σελ.64 το ερώτημα είναι δύσκολο να απαντηθεί εφόσον δεν εμφανίζονται οι μετρήσεις των εμβαδών από το λογισμικό. Αν και στις ομάδες των μαθητών δεν ήταν ενεργό το πλέγμα στην οθόνη γραφικών που παρακολούθησαν, παραθέτουμε και τα σχήματα παρακάτω με την ενεργοποίηση του πλέγματος, από όπου και πάλι – είναι πιθανό να- δημιουργείται η (εσφαλμένη) εντύπωση ότι και οι 2 τρόποι μεταβολής του εμβαδού μπορούν να δώσουν εμβαδόν ίσο με το αρχικό.





Να αναφέρουμε επίσης ότι επαληθεύτηκε και η αρχική μας εκτίμηση για τη δυσκολία στη ρητή απάντηση του ερωτήματος χωρίς να χρησιμοποιηθεί κατάλληλη μοντελοποίηση μαθηματικών σχέσεων που περιγράφουν το πρόβλημα. Εναλλακτικά η ενεργοποίηση των μετρήσεων του Geogebra θα έδινε τη δυνατότητα στις ομάδες να απαντήσουν «κατηγορηματικά» για το συγκεκριμένο ερώτημα. Σε κάθε περίπτωση η απουσία σε αυτό το στάδιο bfp συνθηκών σε ότι αφορά τη διαμεσολάβηση του λογισμικού, δημιούργησε την αντίστοιχη εσφαλμένη εντύπωση για τις απαντήσεις των ομάδων.

Στη συνέχεια οι δύο ομάδες εργάστηκαν περίπου 10΄ στη φωτοτυπία που τους δόθηκε, προκειμένου να επεξεργαστούν το ίδιο ερώτημα χρησιμοποιώντας πλέον μαθηματικές προσεγγίσεις για την απάντηση του ερωτήματος. Παραθέτουμε τη φωτοτυπία που δόθηκε στους μαθητές καθώς και τις απαντήσεις τους:



Εικ. 40: Εργασία στο χαρτί - Ζητούμενο 1

Ομάδες	Απαντήσεις
Ο1	Αρχικο Εμβαδό : $E = β \cdot υ = α \cdot β = 6$ Βοριοδυτικά. για $κ=1$ $α' = 3-1 = 2$ $β' = 2+1 = 3$ $E' = β \cdot υ = α' \cdot β' = 2 \cdot 3 = 6$ Νοτιοανατολικά για $κ=1$ $E = 4 \neq 6$ για $κ=2$ $E = 0 \neq 6$ Άρα δεν γίνεται με τέτοια μεταβολη να επιτύχει το αρχικο Εμβαδο
Ο2	Βορειοδυτική: $(β+κ)(α-κ) = 6$ $βα - βκ + κα - κ^2 = 6$ $\cancel{6} - 2κ + 3κ - κ^2 = \cancel{6}$ $κ - κ^2 = 0$ $κ(1-κ) = 0$ $κ=0$ ή $κ=1$ απορρίπτεται $\boxed{κ>0}$ Άρα θα έχω το ίσιο με βορειοδυτική μεταβολή κατά $κ=1$ Νοτιοανατολική: $(β-κ)(α+κ) = 6$ $\cancel{6} - 3κ + 2κ - κ^2 = \cancel{6}$ $-κ - κ^2 = 0$ $κ^2 + κ = 0$ $κ=0$ ή $κ=-1 \Rightarrow$ η μεταβολή γίνεται βορειοδυτική απορρίπτεται $\boxed{κ>0}$

Η Ο1 επιχειρεί με αριθμητικές τιμές του κ να προσεγγίσει το ερώτημα. Προφανής ο περιοριστικός τρόπος προσέγγισης (χρησιμοποιεί την ίδια τιμή του κ=1 για να εξετάσει τους δύο τρόπους μεταβολής του εμβαδού) και απορρίπτει με αυτό τον τρόπο τη Ν-Α μεταβολή. Διακρίνεται επίσης η ελλιπής και αναποτελεσματική αιτιολογία για ερμηνεία της συγκεκριμένης ομάδας. Για το 2^{ο} είδος μεταβολής δυσκολεύεται να βρει κατάλληλο αριθμητικό παράδειγμα και την απορρίπτει αυθαίρετα εξαιτίας αυτής της δυσκολίας.

Η Ο2 προσεγγίζει με γενικευμένες εκφράσεις των διαστάσεων το πρόβλημα, παίρνοντας και τις 2 μορφές τριωνύμου (βλ. και σελ. 65) αποδίδοντας όμως εξαρχής θετικές τιμές στο κ για να περιγράψει με τη μία μορφή τη Β-Δ μεταβολή και με τη 2^{η} τη Ν-Α μεταβολή. Το αποτέλεσμα είναι να δημιουργηθεί σύγχυση στην αιτιολογία για ερμηνεία της τιμής κ= -1, που ενώ φαίνεται ότι την απορρίπτει ως αρνητική τιμή, εν τούτοις ερμηνεύει στη συνέχεια σωστά τη μεταβολή που θα προκληθεί στο εμβαδόν. Τελικά την αποδέχεται και ερμηνεύει την αντίστοιχη μεταβολή ως Β-Δ, χωρίς να εξηγεί περαιτέρω το σκεπτικό της.

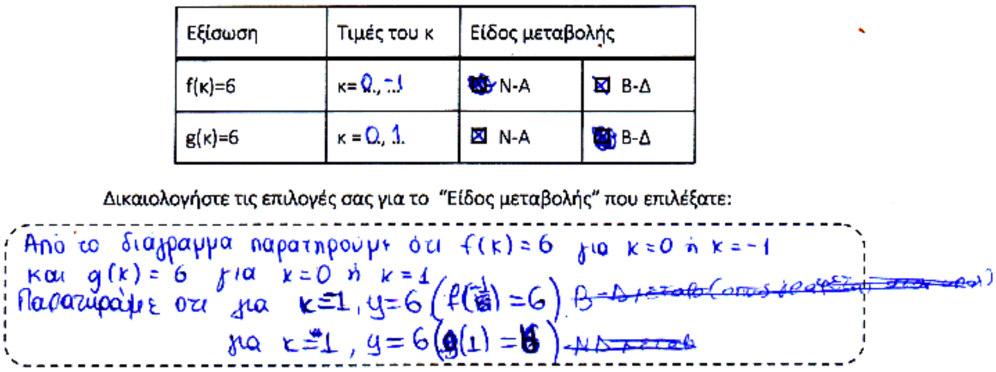
Εστιάζοντας στην απάντηση της ομάδας Ο2, παρατηρούμε την ανακολουθία που προκύπτει στην ερμηνεία της αρνητικής τιμής κ=-1 που βρέθηκε. Ειδικότερα: θεωρώντας (αυθαίρετα), ότι το κ παίρνει θετικές τιμές και στα δύο είδη μεταβολών, απορρίπτει την τιμή κ=-1 στην Ν-Α μεταβολή. Χρησιμοποιώντας αιτιολογία για ερμηνεία (στην απάντηση της ομάδας γράφεται ότι επειδή κ>0 άρα η τιμή κ=-1 απορρίπτεται) οδηγείται στη (λανθασμένη) απόρριψη αυτής της τιμής του κ. Χρησιμοποιώντας αιτιολογία για ερμηνεία της τιμής κ=-1, οδηγείται στη (σωστή) επιλογή της Β-Δ μεταβολής του εμβαδού, γιατί παρατηρεί ότι τότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου γίνονται α+κ=2 και β-κ=3 άρα το εμβαδόν παραμένει 6 και το είδος της μεταβολής είναι (και πάλι) Β-Δ. Θυμίζουμε την πρόβλεψή μας για τη δυσκολία ερμηνείας της συγκεκριμένης περίπτωσης (βλ. και σελ. 65) όπως και την –κατά τη γνώμη μας- επιτυχή έκβαση του ερωτήματος αφού η Ο2 κατορθώνει, έστω με κάποιες ελλείψεις, να λάβει υπόψη και τις δύο μεταβολές και να απορρίψει τη Ν-Α μεταβολή.

Από τη σύγκριση των απαντήσεων των δύο ομάδων, είναι σαφές κατά τη γνώμη μας, το προβάδισμα που αναπτύσσεται στην αιτιολογία για ερμηνεία της Ο2 σε σχέση με την Ο1.

3.3 Δημιουργία bfp συνθηκών και επαγωγικός, απαγωγικός συλλογισμός

Όπως έχει αναλυθεί και στη σελ. 65 σχετικά με το ερώτημα Ε1, οι ομάδες των μαθητών έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με μια δυναμική αναπαράσταση του προβλήματος μέσω του e-δομήματος που έχει σχεδιαστεί για το σκοπό αυτό στο Geogebra. Από τους διαλόγους των ομάδων προκύπτει ότι αρχικά υπήρχε προβληματισμός για τον τρόπο που θα αξιοποιούσαν τις δυναμικές μεταβολές που απεικονίζονταν στο e-δόμημα. Η ομάδα Ο2 ρώτησε αν η συμπλήρωση του πίνακα θα έπρεπε να γίνει από τις τιμές του κ που παρατηρούσαν στο e-δόμημα ή αν θα έπρεπε να λύσουν τις εξισώσεις f(κ)=6 και g(κ)=6 για να υπολογίσουν τις αντίστοιχες τιμές του κ. Αν και δόθηκε διευκρίνιση στις ομάδες ότι σε αυτό το στάδιο θέλουμε να χρησιμοποιήσουν τα στοιχεία που εμφανίζονται στο e-δόμημα, η Ο2 προέβη σε τυπικές μεθόδους εύρεσης των τιμών του κ, σε αντίθεση με την ομάδα Ο1 που αξιοποίησε αποκλειστικά τις πληροφορίες του e-δομήματος. Στην περίπτωση αυτής της ομάδας διακρίνεται μία μικρής κλίμακας λειτουργία των bfp συνθηκών Αντίθετα, η συγκεκριμένη δράση της ομάδας Ο2 χαρακτηρίζεται ως ενδεικτική της αιτιολογίας (κυρίως) για ερμηνεία που έδειξε εξαρχής, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τυπικά αποδεικτικά σχήματα όπως και στο συγκεκριμένο στάδιο που αφορά στη συμπλήρωση του πίνακα του ερωτήματος.

Οι απαντήσεις των δύο ομάδων σε αυτό το στάδιο εικονίζονται στα επόμενα:

Ομάδα	Απαντήσεις
Ο1	

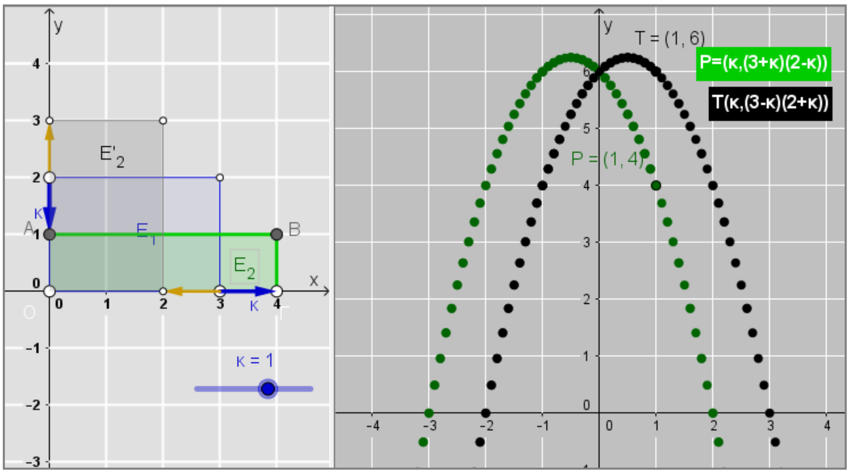
Εξίσωση	Τιμές του κ	Είδος μεταβολής	
f(κ)=6	κ= 0, -1	N-A	B-Δ
g(κ)=6	κ = 0, 1	N-A	B-Δ

Δικαιολογήστε τις επιλογές σας για το "Είδος μεταβολής" που επιλέξατε:

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι f(κ)=6 για κ=0 ή κ=-1
και g(κ)=6 για κ=0 ή κ=1
Παρατηρούμε ότι για κ=-1, y=6 (f(-1)=6) ~~B-Δ μεταβολ~~
για κ=1, y=6 (g(1)=6) ~~N-Δ μεταβ~~

Αναφορικά με την ομάδα Ο1 διακρίνουμε ότι «διάβασε» σωστά τα διαγράμματα των σημείων Ρ(κ,f(κ)) και Τ(κ,g(κ)) και επακόλουθα συμπληρώνει σωστά τις τιμές του κ και στις δύο περιπτώσεις. Ως προς το αντίστοιχο είδος μεταβολής ερμηνεύει σωστά την $1^η$ περίπτωση και επιλέγει τη Β-Δ μεταβολή (σε αντίθεση με την ανακόλουθη ερμηνεία της ομάδας Ο2 που είδαμε στο προηγούμενο στάδιο στο οποίο δεν υπήρχε ανατροφοδότηση από το e-δόμημα).

Η ομάδα αυτή στη $2^η$ γραμμή, για την τιμή κ=1 επιλέγει λανθασμένα τη Ν-Α μεταβολή αν και στο προηγούμενο στάδιο την είχε απορρίψει (για διαφορετικούς λόγους). Από τους διαλόγους της ομάδας προκύπτει ότι δεν ερμήνευσαν σωστά το σχηματισμό του $3^{ου}$ ορθογωνίου $Ε'_2$ (γκρι χρώματος) αν και στην αρχική εισήγηση του ερωτήματος, δόθηκε εξήγηση από τον ερευνητή για τον τρόπο σχηματισμού του. Το συγκεκριμένο ορθογώνιο $Ε'_2$ σχηματίζεται από τη συμμεταβολή Τ(κ,g(κ)) και για την τιμή κ=1 έχει εμβαδόν 6 με Β-Δ μεταβολή όμως του αρχικού εμβαδού $Ε_1$ (βλ. Σχήμα)



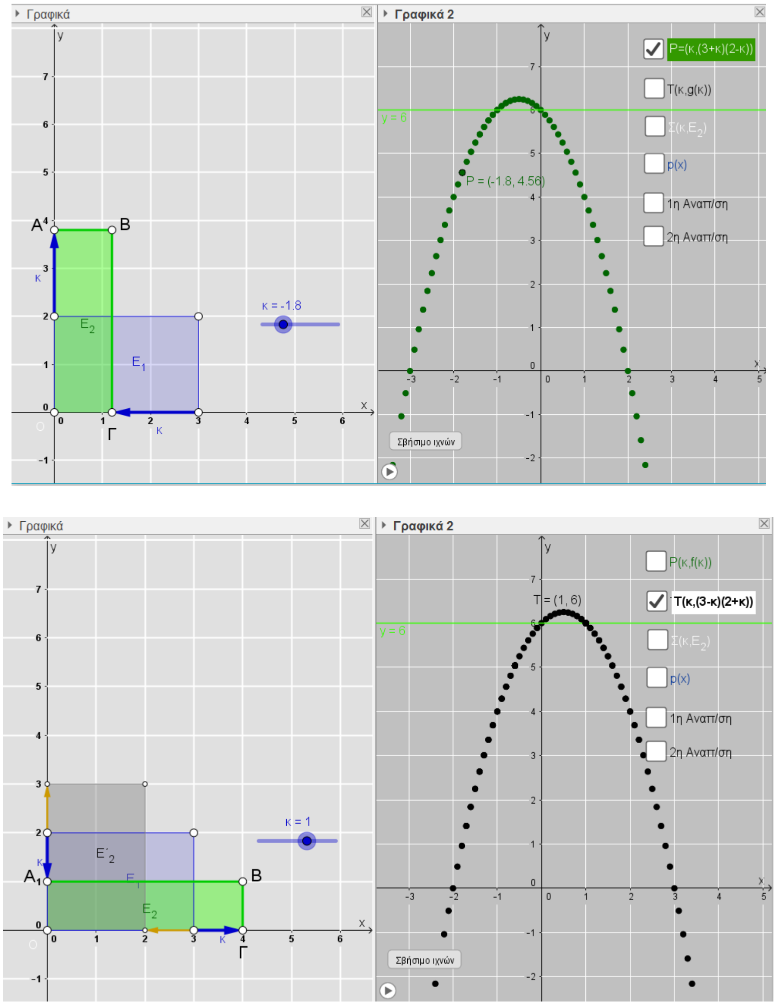
Πιθανολογείται επίσης ότι (είναι δυνατό να) επηρέασε την επιλογή της ομάδας Ο1, η ένδειξη στο λογισμικό «Ν-Α μεταβολή» για την τιμή κ=1 που αφορούσε όμως μόνο στο ορθογώνιο $Ε_2$. Σε κάθε περίπτωση, η ομάδα Ο1 ακόμη και μετά από τον πειραματισμό στο e-δόμημα, δεν δικαιολογεί επαρκώς καμία από τις επιλογές της στον τρόπο μεταβολής του εμβαδού. Παράλληλα, με την επιλογή της Ν-Α μεταβολής καθώς και με τα σβησίματα που διακρίνονται στη φωτοτυπία, φαίνεται να έχει συγκεχυμένη εικόνα σχετικά με τις μεταβολές του εμβαδού E_1 που συντελούνται στο πρόβλημα. Επιπλέον από τις απαντήσεις της ομάδας δεν διακρίνεται κάποιο είδος συλλογισμού πολύ περισσότερο του επαγωγικού που είχε προβλεφθεί στο σχεδιασμό.

Σχετικά με την ομάδα Ο2, διακρίνουμε μια «ξαφνική» αναθεώρηση στις απαντήσεις της, σε σχέση με την αρχική απάντηση που είχε δώσει στο Ζητούμενο1. Σε αυτό το στάδιο, βλέπουμε να επιλέγει και τη Ν-Α μεταβολή στην περίπτωση όπου κ=-1 ενώ για το ίδιο ερώτημα στο προηγούμενο στάδιο την είχε απορρίψει. Διακρίνουμε ότι αντιστοιχεί τη μορφή g(κ) στη Β-Δ μεταβολή ερμηνεύοντας τον τύπο g(κ)=(3-κ)(2+κ) ως μείωση του μήκους α=3 και αύξησης του πλάτους β=2 και με αντίστοιχη συλλογιστική τη μορφή f(κ) ως Β-Δ μεταβολή. Ξεκινώντας (σωστά) με τον περιορισμό ότι $κ \neq 0$, λύνει την εξίσωση g(κ)=6 και στη συνέχεια ερμηνεύει σωστά το αποτέλεσμα για την τιμή κ=1, διατηρώντας την αρχική της τοποθέτηση που είχε λύνοντας το ίδιο θέμα χωρίς τον πειραματισμό στο e-δόμημα. Σημειώνουμε ότι από τους διαλόγους της ομάδας, φαίνεται εξαρχής να θεωρούν τη μεταβολή g(κ) εκείνη που περιγράφει τη Β-Δ μεταβολή και τη μεταβολή f(κ) τη Ν-Α μεταβολή. Παραθέτουμε κάποιες αναφορές από τους διαλόγους αυτής της ομάδας:

	Διάλογος	Παρατηρήσεις
Κ1	…τώρα βρίσκουμε τις τιμές από το διάγραμμα έτσι;.. και όχι από…	Εννοεί την επίλυση των εξισώσεων f(κ)=6 και g(κ)-6.
Ε	Ναι… χρησιμοποιείστε τις αναπαραστάσεις από το e-δόμημα όπως εσείς νομίζετε για να απαντήσετε στο ερώτημα …	
Κ1	Μπορούμε και συνδυασμό;	Διακρίνεται η σχετική ανασφάλεια του συγκεκριμένου μέλους της ομάδας σχετικά με την αξιοπιστία των πληροφοριών του e-δομήματος…
Ε	Αν το θεωρείτε απαραίτητο… αλλά θέλουμε να καταγράψετε τί είδατε και γράψατε τη συγκεκριμένη απάντηση …	Προσπάθεια να καταγράψουν τους τρόπους που χρησιμοποιούν για να χρησιμοποιήσουν τις πληροφορίες του e-δομήματος.
Κ1	Εδώ πέρα βλέπουμε την κόκκινη… το κόκκινο είναι το f(κ) το οποίο έχει την τιμή -1. Τη -1 τη βρήκαμε και πριν στις νοτιοανατολικές…	…εννοεί την τιμή του κ
Κ1	Ενώ το άλλο έχει την τιμή 1 που είναι βορειοδυτικές μεταβολές ενώ οι τιμές 0 δεν μας αφορούν… Ωραία και τώρα πώς θέλετε να το δικαιολογήσουμε;	αναφέρεται στη μεταβολή g(κ)…
Α	Τι θέλει τώρα αλγεβρικά ή μαθηματικά και τέτοια; Λέω να το κάνουμε αλγεβρικά…	
Κ1	Γιατί να το κάνουμε αλγεβρικά… το κάναμε έτσι προηγουμένως, ενώ τώρα ζητάει να τα βρούμε από το πρόγραμμα…	Φανερή η αμηχανία για το πώς θα αξιοποιήσουν τις δυναμικές αναπαραστάσεις του δομήματος. Το αγόρι της ομάδας επιμένει στην αλγεβρική αιτιολογία.
Κ2	Παιδιά… γιατί να το κάνουμε πάλι αλγεβρικά αφού έχει το διάγραμμα;	Η εύστοχη επισήμανση της Κ2 δεν φαίνεται να γίνεται αποδεκτή από τα άλλα μέλη τα οποία επιμένουν για αλγεβρική αιτιολογία…

Από τους διαλόγους που καταγράφηκαν, θεωρούμε ότι προκύπτει σχεδόν κατά οριστικό τρόπο το γεγονός ότι η συγκεκριμένη ομάδα έχει προσκολληθεί στην αιτιολογία για ερμηνεία, αναζητώντας διαρκώς, κάποιο μεθοδολογικό τρόπο προσέγγισης. Η προσκόλληση αυτή, την εμποδίζει να αντλήσει πληροφορίες και ανατροφοδότηση από τις συμμεταβολές που διακρίνονται στο e-δόμημα, προκειμένου να επικυρώσει (ή/και να ακυρώσει) τις προηγούμενες απαντήσεις της στο χαρτί. Διακρίνουμε επίσης ότι δεν παρατηρεί τη μέτρηση του εμβαδού που είναι ενεργή στο ορθογώνιο E'_2 ώστε να επαληθεύσει ότι για κ=1 παίρνει εμβαδόν 6 και πάλι με Β-Δ μεταβολή του αρχικού εμβαδού E_1.

Εν κατακλείδι, διακρίνεται ένα είδος σύγχυσης στα μέλη της ομάδας, που κατά τη γνώμη μας οφείλεται στην έλλειψη εμπειρίας σε περιβάλλοντα εργασίας με την παρουσία λογισμικού. Από τη συγκεκριμένη έλλειψη δημιουργείται αντανακλαστικά η ανάγκη στα μέλη της ομάδας να μετέλθουν συνηθέστερα για αυτήν σχήματα αιτιολογίας, προκειμένου να αιτιολογήσουν τις θέσεις τους. Θα ήταν ίσως περισσότερο αντιπροσωπευτικό για αυτή την ομάδα, να αναφερθούμε σε εγχειρήματα αιτιολόγησης αντί αιτιολογίας, με δεδομένο ότι δεν διακρίνονται προσεγγίσεις που βασίζονται στην ανάγνωση και στην ερμηνεία των εμφανιζόμενων αναπαραστάσεων. Εν τούτοις, ούτε και με τις συγκεκριμένες προσεγγίσεις φαίνεται να αιτιολογούν με επιτυχία το συγκεκριμένο ερώτημα.



Ο πειραματισμός στο e-δόμημα και οι πληροφορίες των διαγραμμάτων δεν αξιοποιούνται πλήρως από τις δύο ομάδες

Οι απαντήσεις της 2ης ομάδας σχετικά με το ερώτημα

Ομάδα	Απαντήσεις
Ο2	(βλ. παρακάτω)

Συμπληρώστε τα κενά και τις επιλογές στον παρακάτω πίνακα όπου Ν-Α είναι η νότιο-ανατολική μεταβολή και Β-Δ η βόρειο-δυτική :

Εξίσωση	Τιμές του κ	Είδος μεταβολής	
f(κ)=6	κ= 0, 1	☑ Ν-Α	☐ Β-Δ
g(κ)=6	κ = 0, 1	☐ Ν-Α	☑ Β-Δ

Δικαιολογήστε τις επιλογές σας για το "Είδος μεταβολής" που επιλέξατε:

Εστω κ ∈ R^* όπου κ η μεταβολή του 6
$(6+κ)(α-κ)=6$
$\cancel{6}+3κ-2κ-κ^2=\cancel{6}$
$κ-κ^2=0$
$κ(1-κ)=0$ οποτε το 6 αυξανεται αρα εχω βορειοδυτικη
$κ=0 \quad κ=1$

Παρατηρω οτι για τεταγμενη 6 η μαυρη συναρτηση εχει τεταγμενη 0 και 1. Αρα ειναι αυτη η βορειοδυτικη (g(κ)) ομοιως συμπεραινω για την νοτιοανατολικη (f(κ))

E2. Με ανοικτούς τους διακόπτες [Ρ] και [Σ] δώστε κίνηση στο δρομέα κ. Στην οθόνη σχηματίζονται οι καμπύλες των σημείων Ρ(κ,f(κ)) και Σ(κ,E_2) που αναπαριστά τη μεταβολή του εμβαδού E_2 συναρτήσει των τιμών του κ.

I. Ποια συνάρτηση φαίνεται να παριστάνει το γράφημα των σημείων Σ(κ,E_2);

$E_2 = |f(κ)|$

II. Για ποιες τιμές του κ φαίνεται στο λογισμικό ότι οι 2 προηγούμενες καμπύλες ταυτίζονται;
Τιμές του κ: [-3, +2]

για κ = 0 στην κοκκινη ειναι το 2 που ισουται με το 6 ενω στην μαυρη ειναι το 3 που ισουται με το 6

Δικαιολογήστε αλγεβρικά την απάντησή σας:

$E_2 = f(κ)$ για $f(κ) \geq 0$
$(6-κ)(α+κ) \geq 0$
$6-3κ+2κ-κ^2 \geq 0$
$-κ^2-κ+6 \geq 0$
$κ^2+κ-6 \leq 0$ — $κ=-3$, $κ=2$

Πινακας Προσημων: $κ^2+κ-6$: + (-3) − (2) +

Για κ ∈ [-3, 2] $κ^2+κ-6 \leq 0$, $f(κ) \leq 0$

Διορθώστε τώρα τις τιμές του κ στο δόμημα 9δεξί κλικ στο δρομέα κ και Ιδιότητες.

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε τις απαντήσεις των δύο ομάδων που αφορούν στο ερώτημα Ε2. Στο συγκεκριμένο ερώτημα υπάρχει ο σχεδιασμός για την εμφάνιση απαγωγικού συλλογισμού στις ομάδες. Αυτό φάνηκε να συνέβη και στις δύο ομάδες με περισσότερη ευκρίνεια στην 1η ομάδα.

Οι απαντήσεις των δύο ομάδων στο συγκεκριμένο ερώτημα:

<table>
<tr><th>Ομάδα</th><th>Απαντήσεις</th></tr>
<tr><td>Ο1</td><td>E2. Με ανοικτούς τους διακόπτες [P] και [Σ] δώστε κίνηση στο δρομέα κ. Στην οθόνη σχηματίζονται οι καμπύλες των σημείων P(κ,f(κ)) και Σ(κ,E_2) που αναπαριστά τη μεταβολή του εμβαδού E_2 συναρτήσει των τιμών του κ.

I. Ποια συνάρτηση φαίνεται να παριστάνει το γράφημα των σημείων Σ(κ,E_2);
για $\kappa \in [-3,2]$ $E_2=f(\kappa)$
$\kappa \in (-\infty,-3] \cup [2,+\infty)$ $E_2=-f(\kappa)$

II. Για ποιες τιμές του κ φαίνεται στο λογισμικό ότι οι 2 προηγούμενες καμπύλες ταυτίζονται;
Τιμές του κ: $[-3,2]$

Δικαιολογήστε αλγεβρικά την απάντησή σας:
Αφου απο τις συγκεκριμενες τιμες του κ προκυψε με παρατηρηση ο τυπος της συνάρτησης τοτε αυτες ειναι και οι τιμες του κ που την επαληθευαν.</td></tr>
<tr><td>Ο2</td><td>$E_2 = |f(\kappa)|$

II. Για ποιες τιμές του κ φαίνεται στο λογισμικό ότι οι 2 προηγούμενες καμπύλες ταυτίζονται;
Τιμές του κ: $[-3, +2]$

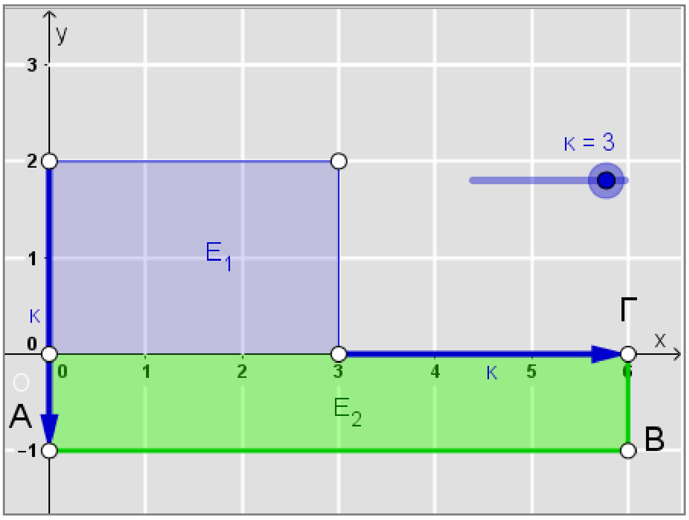
Δικαιολογήστε αλγεβρικά την απάντησή σας:
$E_2 = f(\kappa)$ για $f(\kappa) \geq 0$
$(6-\kappa)(a+\kappa) \geq 0$
$6-3\kappa+2\kappa-\kappa^2 \geq 0$
$-\kappa^2-\kappa+6 \geq 0$
$\kappa^2+\kappa-6 \leq 0$ $\kappa=-3$, $\kappa=2$
Πίνακας Προσημών
-3 2
$\kappa^2+\kappa-6$ $+$ 0 $-$ 0 $+$
Για $\kappa \in [-3,2]$ $\kappa^2+\kappa-6 \leq 0$
$f(\kappa) \leq 0$</td></tr>
</table>

Στο συγκεκριμένο στάδιο και οι δύο ομάδες λειτούργησαν προς τη σωστή κατεύθυνση με κάποιες παραλείψεις από την ομάδα Ο1. Κάθε ομάδα εντόπισε με το δικό της τρόπο τη διαφορά μεταξύ των σημείων P και των σημείων Σ. Υπενθυμίζουμε ότι τα σημεία Σ που εμφανίζονται στη 2^{η} οθόνη γραφικών του Geogebra, παριστάνουν τη συμμεταβολή (κ, E_2) όπου E_2 είναι οι μετρήσεις του εμβαδού (βλ. και σελ. 67) και επομένως η γραφική παράσταση της συμμεταβολής (κ, E_2) είναι η συνάρτηση |f(κ)|.

Από τους διαλόγους των δύο ομάδων προκύπτει, όπως είχαμε προβλέψει και στην ανάλυση της δραστηριότητας, κάποιος προβληματισμός για το λόγο που τα σημεία P(κ,f(κ)) «πηγαίνουν» και κάτω από τον άξονα xx΄. Επίσης κάποιο μέλος της ομάδας Ο1 ακούγεται να λέει «… ταυτίζονται για f(κ)$\geq$0, ενώ μετά τα πράσινα σημεία πάνε κάτω». Ωστόσο στην τελική της απάντηση, η ομάδα Ο1 απαντά σωστά ότι για κ$\in$[-3,2] είναι E_2=f(κ) αλλά συμπληρώνει λανθασμένα ότι για τα υπόλοιπα κ ισχύει ότι: E_2=-f(κ) [24]. Φαίνεται συνεπώς να ερμηνεύει τις μεταβλητές f(κ) και E_2 με την αλγεβρική τους σημασία χωρίς να λαμβάνει υπόψη ή πιθανό να έχει κατανοήσει τη σημασία της έκφρασης f(κ) ως έκφραση του εμβαδού E_2 . Με άλλα λόγια φαίνεται ότι δεν έχει αντιληφθεί τη φυσική σημασία της συμμεταβολής f(κ) που περιγράφει εμβαδόν και ότι εξαιτίας αυτού, οι θετικές τιμές

[24] Αναμενόμενο, αφού καμία ομάδα δεν πήρε περιορισμούς για τις τιμές του κ.

του εμβαδού δεσμεύουν και τις τιμές του κ ώστε να (πρέπει) ισχύει f(κ)>0. Επομένως η αιτιολογία για ερμηνεία δεν οδηγεί σε ολοκληρωμένη απάντηση. Παράλληλα, δεν διακρίνεται κάποιο είδος αιτιολογίας από την ερμηνεία των γραφημάτων αλλά και του μετασχηματισμού του εμβαδού. Αναδιατυπώνοντας, θα λέγαμε ότι δεν φαίνεται να βάζει σε σκέψεις τα μέλη της ομάδας Ο1, το γεγονός ότι για τις τιμές $\kappa \notin [-3,2]$ δεν είναι ούτε f(κ)>0 αλλά ούτε και το ορθογώνιο E_2 που σχηματίζεται στην οθόνη του Geogebra είναι ρεαλιστικό (βλ. Εικ. 41), αφού έχει προκύψει με μεταβολές που υπερβαίνουν τις αρχικές διστάσεις του ορθογωνίου.



Εικ. 41: Το σκόπιμο λάθος στο σχεδιασμό του e-δομήματος

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο, ότι από τον καταγραφέα οθόνης της Ο1, δεν διακρίνεται έντονος πειραματισμός με το e-δόμημα, σε αντίθεση με την ομάδα Ο2 η οποία φαίνεται να δείχνει μεγαλύτερη εξοικείωση με το χειρισμό του e-δομήματος (αλλάζει θέσεις στο σύστημα συντεταγμένων, σύρει τα σημεία Ρ και Σ και όχι το δρομέα, μεταφέρεται από τη μία οθόνη στην άλλη ανάλογα με τα ερωτήματα που θέτουν τα μέλη της ομάδας κ.ο.κ). Με άλλα λόγια η Ο1 δεν φαίνεται να έχει αποκτήσει άνεση με το χειρισμό – και κατά συνέπεια;- και με την αξιοποίηση του e-δομήματος και πιθανό αυτό να επηρεάζει σε κάποιο βαθμό το συλλογισμό της.

Η ομάδα Ο2 συμπληρώνει άμεσα τον τύπο |f(κ)| για τη συμμεταβολή E_2(κ), αν και όπως έχουμε προαναφέρει οι μαθητές της Β΄ Λυκείου δεν έχουν διδαχθεί τη γραφική παράσταση της απόλυτης τιμής για μία γενικευμένη συνάρτηση f. Σε αντίθεση λοιπόν με την ομάδα Ο1, φαίνεται στο συγκεκριμένο στάδιο να χρησιμοποιεί αποτελεσματικά την αιτιολογία από ερμηνεία των γραφημάτων. Συμπερασματικά καταλήγουμε ότι η αιτιολογία από ερμηνεία λειτουργεί αποτελεσματικά στην Ο2, ενώ στην Ο1 κατά ένα μόνο μέρος.

Όσον αφορά τη συμπλήρωση των τιμών του κ ώστε οι καμπύλες των σημείων Ρ και Σ να ταυτίζονται, δηλαδή για $\kappa \in [-3,2]$, και οι δύο ομάδες συμπληρώνουν το σωστό αποτέλεσμα σχεδόν άμεσα, από την ανατροφοδότηση του e-δομήματος. Όμως η ομάδα Ο1 δείχνει και πάλι αδυναμία να κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να αιτιολογήσει αλγεβρικά αυτό το αποτέλεσμα. Αντί αυτού επικαλείται τις πληροφορίες του e-δομήματος αν και δίνεται κατεύθυνση από τον ερευνητή για τυπική αιτιολογία του συγκεκριμένου ερωτήματος μέσω χειρισμού κατάλληλων σχέσεων. Φαίνονται συνεπώς κάποια δείγματα αποδοχής των αποτελεσμάτων μέσω του e-δομήματος και περιορισμός της ανάγκης για αιτιολογία. Επισημαίνεται επίσης ότι το συγκεκριμένο ερώτημα δεν σχεδιάστηκε για τη δημιουργία bfp συνθηκών, παρά μόνο σε ό,τι αφορά στην παρατήρηση των τιμών του κ ώστε να ισχύει f(κ)>0. [25]

Αντίθετα με την ομάδα Ο1, η ομάδα Ο2 επιλύει την κατάλληλη ανίσωση 2^{ου} βαθμού f(κ)≥0 και επομένως δικαιολογεί πλήρως με αλγεβρικό συλλογισμό τις τιμές του κ που έχει βρει προηγουμένως. Αξίζει να σημειωθεί ο παρακάτω διάλογος που εξελίσσεται κατά τον πειραματισμό της ομάδας Ο2 στο e-δόμημα και που αφορά για το αν διάστημα τιμών του κ, δηλαδή το διάστημα (-3,2) θα πρέπει να είναι ανοικτό ή κλειστό (Κ1,Κ2 τα κορίτσια της ομάδας και Α το αγόρι το οποίο χειρίζεται και το e-δόμημα):

	Διάλογος	Παρατηρήσεις
Κ1	…για κ=-3 η μία πλευρά γίνεται 5 και η άλλη 0. Και για κ=2 γίνεται το ίδιο…	Αρχική θέση για τις ακραίες τιμές του κ.
Α	Τότε όμως το εμβαδόν γίνεται 0! Αυτό σκεφτόμουνα τώρα αν θα πρέπει να το γράψουμε ανοικτό ή κλειστό…	Προκύπτει προβληματισμός στα μέλη της ομάδας για τις ακραίες τιμές του κ, τις τιμές -3 & 2.
Κ2	… έχει δίκιο, το εμβαδόν τότε γίνεται 0. Θέλετε να το βάλουμε ανοικτό; Το f(κ) μπορεί να πάρει όλες τις τιμές, το E_2 δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0…	
Κ1	…και το E_2 μπορεί να πάρει την τιμή 0…Ως εμβαδόν ορίζεται να πάρει και την τιμή 0…	
Κ2	…οπότε άστο έτσι κλειστό… Ορίζεται, αφού έτσι κι αλλιώς δε λέγαμε ότι για ένα τρίγωνο όταν δεν ορίζεται, ότι (τότε) το εμβαδόν του είναι 0; …	

3.4 Συνθήκες bfp και σχηματισμός εννοιολογικού πλαισίου

Στο συγκεκριμένο στάδιο οι ομάδες διαπραγματεύονται στο χαρτί τα ερωτήματα «αν υπάρχει περίπτωση ο Ιδιοκτήτης να πάρει έκταση μεγαλύτερη από την αρχική και με ποιον τρόπο μεταβολής του εμβαδού. Σε καταφατική περίπτωση, ποια μπορεί να είναι η μέγιστη έκταση που μπορεί να πάρει». Στο συγκεκριμένο στάδιο διαφαίνεται ότι και οι δύο ομάδες έχουν αποκτήσει την απαραίτητα εξοικείωση με τις λειτουργίες του e-δομήματος, με αποτέλεσμα να έχουν περίπου ισοδύναμες ως προς την πληρότητα αιτιολογίες στις προσεγγίσεις τους. Διακρίνεται επίσης ότι οι συνθήκες bfp που δημιουργούνται διαρκώς από τις δυναμικές αναπαραστάσεις, δημιουργούν το εννοιολογικό πλαίσιο ώστε η ομάδα Ο1 να μην υπολείπεται της Ο2 στην τεκμηρίωση των θέσεων της. Οι απαντήσεις των δύο ομάδων φαίνονται στα επόμενα:

[25] (βλ και σελ. 39 .Από μια άλλη θεώρηση όμως, «… οι μαθητές είναι εύκολο να πειστούν για την εγκυρότητα μιας πρότασης κατόπιν των συνεχών μετασχηματισμών που μπορούν να δημιουργούν μόνοι τους σε περιβάλλοντα DGEs» (De Villiers, 1993 & 2003). Σχετική επίσης και η αναφορά στην ίδια σελίδα: «…τα περιβάλλοντα DGEs βοηθούν τους μαθητές ώστε να ανακαλύψουν ή/και να προσδιορίσουν γεωμετρικές ιδιότητες αλλά δεν συμβάλλουν κατ΄ ανάγκη και στην ανάπτυξη της αποδεικτικής τους ικανότητας.» (Hoyles και Healy ,1999)

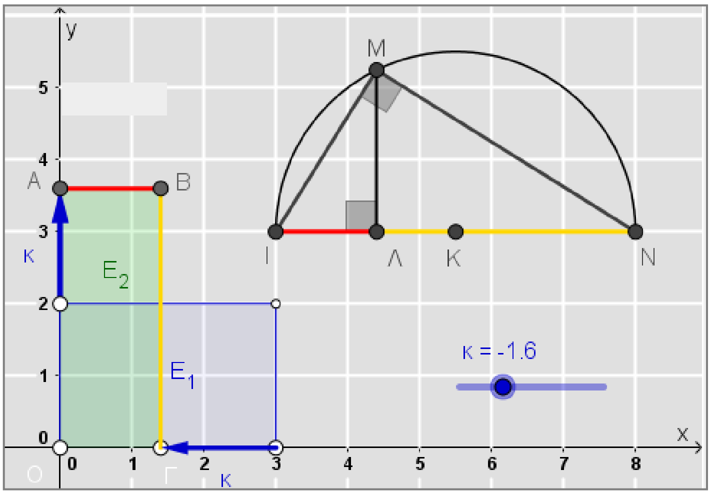
Ομάδα	Απαντήσεις
Ο1	$f(\kappa)$: [illegible] $(\alpha+\kappa)(\beta-\kappa)>6$ $\alpha\beta-\alpha\kappa+\beta\kappa-\kappa^2-6>0$ $6-3\kappa+2\kappa-\kappa^2-6>0$ $-\kappa^2-\kappa>0$ $\kappa^2+\kappa<0$ $\kappa(\kappa+1)<0$ $\kappa\in(-1,0)$ $\begin{array}{c\|ccccc} \kappa & & -1 & & 0 & \\ \hline \kappa^2+\kappa & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$ Άρα το διάστημα (-1,0) ως Ν.Α μεταβολής το εμβαδόν θα είναι μεγαλύτερο από το αρχικό. Η μεταβολή αυτή ισοδύναμη με των αντίθετων τιμών Β.Δ. Άρα θα έχουμε μεγαλύτερο εμβαδόν για τα $\kappa\in(-1,0)$
Ο2	$(\beta+\kappa)(\alpha-\kappa)>6$ κ μεταβολή του β, $\kappa\in R^*$ $\cancel{6}+3\kappa-2\kappa-\kappa^2>\cancel{6}$ $\kappa-\kappa^2>0$ $\kappa(1-\kappa)>0$ $\kappa=0$ $\kappa=1$ $\begin{array}{c\|ccccc} & & 0 & & 1 & \\ \kappa-\kappa^2 & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$ Άρα για $\kappa\in(0,1)$ το Εμβαδόν είναι μεγαλύτερο του 6 Παρατηρώ ότι κάθε φορά έχουμε ζεύγη τιμών π.χ $\kappa=0{,}4$ $\beta=2{,}4$ $\alpha=2{,}6$ $E_2=6{,}24$ οπότε η μέγιστη τιμή είναι στο μέσο του διαστήματος άρα για $\kappa=0{,}5$ $E_2=6{,}25$ (Βορειοδυτική) $g(\kappa)\leq g(0{,}5) \Leftrightarrow \ldots (\kappa-0{,}5)^2\geq 0$ $\forall\kappa\in\mathbb{R}$ άρα $g_{max}=6{,}25$ για $\kappa=0{,}5$ όμως $f(0{,}5)=g(0{,}5)$ [redacted]

Οι δύο ομάδες διαπραγματεύονται διαφορετικές εκφράσεις του εμβαδού, αν και έχει επισημανθεί στα προηγούμενα ότι η έκφραση που θα χρησιμοποιηθεί για το εμβαδόν E_2 θα είναι πλέον μόνο η έκφραση f(κ)=(3+κ)(2-κ). Η Ο1 ερμηνεύει το είδος μεταβολής του εμβαδού, ενώ η Ο2 δεν αναφέρεται σε αυτό. Σημαντική η αλλαγή που παρατηρείται στην Ο1, η οποία φαίνεται να διαχειρίζεται πιο αποτελεσματικά σε σχέση με τα προηγούμενα ερωτήματα την ερμηνεία των αποτελεσμάτων της επίλυσης της ανίσωσης f(κ)>6. Αν και συνεχίζει να βλέπει περιοριστικά το διάστημα τιμών για το κ ∈(-1,0) ως εκείνο της Ν-Α μεταβολής, εν τούτοις αναφέρει αυτή τη μεταβολή ως «αντίθετη» της Β-Δ μεταβολής, με τις «ακριβώς αντίθετες τιμές του κ» και καταλήγει ότι και στις δύο περιπτώσεις πρόκειται για το ίδιο είδος μεταβολής. Η ομάδα Ο2 δεν ερμηνεύει το είδος μεταβολής του εμβαδού τις τιμές του κ∈(0,1) που βρίσκει, διατυπώνει όμως μια ενδιαφέρουσα (αν και ασαφή) επιχειρηματολογία για τη μεγιστοποίηση του εμβαδού. Στο σημείο αυτό γίνεται ένας διευκρινιστικός διάλογος του ερευνητή (Ε) κυρίως με την ομάδα Ο2 αλλά και παρεμβάσεις από την Ο1:

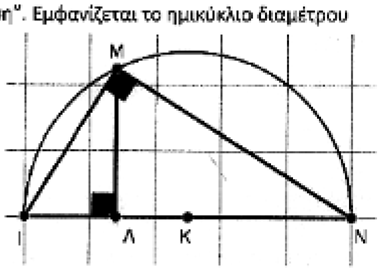
Ο2	Διάλογος	Παρατηρήσεις
Ε	… ένα βασικό ζητούμενο της δραστηριότητας είναι να ερμηνεύετε τις τιμές που βρίσκετε για το κ, ως προς το είδος μεταβολής του εμβαδού που αυτές θα προκαλούν…	
Α	…οι τιμές του f(κ) δείχνουν μεταβολή της πλευράς α και της g(κ) μεταβολή της πλευράς β…	Αν και η ομάδα έχει απαντήσει σωστά στα προηγούμενα ερωτήματα, στο σημείο αυτό εκφράζει την παρανόηση της για το «πώς» ερμηνεύει τις εκφράσεις f(κ) και g(κ) (ως μεταβολές των πλευρών α και β και όχι ως εκφράσεις του εμβαδού E_2).
Ε	… διευκρινίζω στο σημείο αυτό ότι οι τιμές του κ=-1 ή κ=1 που βρέθηκαν προηγουμένως προκαλούν το ίδιο είδος μεταβολής του εμβαδού και στις 2 περιπτώσεις. Δηλαδή Β-Δ μεταβολή…	Οι ομάδες έχουν δώσει ήδη τις φωτοτυπίες στις οποίες έχουν καταγράψει τις απόψεις τους…
Κ1	… το έχουμε γράψει κύριε αυτό ότι είναι το ίδιο είδος μεταβολής…	Διακρίνεται ότι η διευκρίνιση του ερευνητή αποσαφηνίζει την κατάσταση, αφού από τα γραπτά της ομάδας, δεν προκύπτει με ρητό τρόπο ότι οι διαφορετικές τιμές του κ προκαλούν το ίδιο είδος μεταβολής…(βλ. και σελ.86).
Α	… στο ένα είδος το β αυξάνεται κατά 1 και στο άλλο είδος το α μειώνεται κατά 1…	
Κ1 & Κ2	… ναι είναι ακριβώς το ίδιο…	
Ε	…ωραία, αφού το ξεκαθαρίσαμε αυτό, οι τιμές του κ στο διάστημα (0,1) που απαντήσατε ότι δίνουν εμβαδόν μεγαλύτερο του 6, τί είδους μεταβολής προκαλούν στο αρχικό εμβαδόν;	Επανέρχεται προκειμένου να διαπιστώσει με οριστικό τρόπο την αιτιολογία από ερμηνεία της ομάδας.
Α	…γιατί το κ είναι η μεταβολή του β…	Η ομάδα ερμηνεύει τις θετικές τιμές του κ ως μεταβολή του β και τις αρνητικές τιμές ως μεταβολή του α.
Ε	Δηλαδή δεν μπορεί να είναι και η μεταβολή του α;	
Κ1 Κ2 & Α	Γιατί όταν παίρνουμε αρνητικές τιμές του κ, παίρνουμε το αντίθετο διάνυσμα… (Δεν παίρνουν κάποια θέση)	Η αριστερή κατεύθυνση του κ στον οριζόντιο άξονα που φαίνεται στο λογισμικό, ερμηνεύεται από την ομάδα ως αρνητικό πρόσημο του «διανύσματος» κ. Η προς τα πάνω κατεύθυνση του κ στον κατακόρυφο άξονα, ερμηνεύεται ως θετική φορά του διανύσματος κ. [26]
Ε	Δηλαδή αν χρειαζόταν να πείτε στον Ιδιοκτήτη πρακτικά γιατί πρέπει να μεταβληθεί Β-Δ το εμβαδόν, πώς θα του το εξηγούσατε;	Προσπάθεια για να έρθει στο προσκήνιο η αιτιολογία από ερμηνεία.
Κ1	Η Β-Δ θα είναι και στις 2 περιπτώσεις γιατί όταν το κ είναι αρνητικό έχουμε β-(-κ) άρα αύξηση του β και μείωση του α, ενώ όταν το κ είναι θετικό γίνεται το ίδιο στην έκφραση όμως (α-κ)(β+κ) για το εμβαδόν.	Διακρίνεται πλέον οριστική κατανόηση του τρόπου επίδρασης των τιμών του κ, στο είδος μεταβολής του αρχικού εμβαδού, μετά από τον παραπάνω διάλογο…

[26] Διαφαίνεται ότι η αυθαίρετη υιοθέτηση της έννοιας του διανύσματος για το κ, επηρεάζει περιοριστικά την αιτιολογία για ερμηνεία του είδους μεταβολής του εμβαδού.

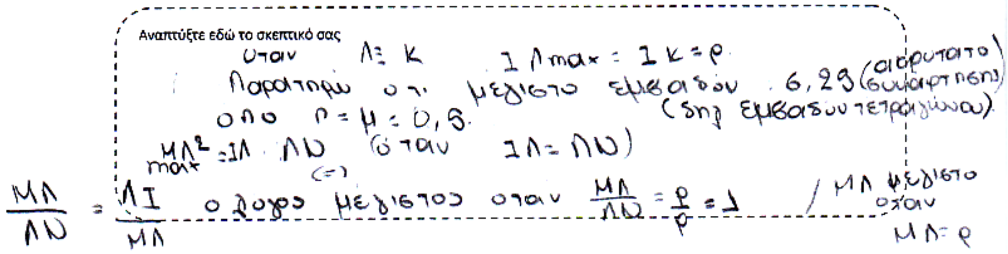
Σε αντιδιαστολή με το συγκεκριμένο στάδιο, στο επόμενο στάδιο, διακρίθηκε και από τις δύο ομάδες έντονος απαγωγικός συλλογισμός με την εμφάνιση του γεωμετρικού ισοδύναμου του προβλήματος αναφορικά με τη μεγιστοποίηση του εμβαδού E_2. Σε αυτό το στάδιο όπως έχει αναφερθεί (σελ. 70), δίνεται ένα γεωμετρικό ισοδύναμο της μεταβολής του εμβαδού E_2 μέσω του ημικυκλίου διαμέτρου ΙΝ όπου ΙΛ και ΛΝ είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου E_2. Μέσω αυτής της κατασκευής θέλουμε οι ομάδες των μαθητών να προσεγγίσουν το θέμα της μεγιστοποίησης του εμβαδού E_2.



Όπως προκύπτει από τις τοποθετήσεις και των δύο ομάδων, η δυναμική αναπαράσταση του εμβαδού E_2 από το μέγεθος $MΛ^2$, έδωσε ισχυρό έναυσμα και στις δύο ομάδες για να ισχυροποιήσει η $1^η$ ομάδα την εικασία της και την αρχική της πειραματική προσέγγιση και εν συνεχεία την απόδειξη (με την έλλειψη της μοναδικότητας της τιμής του κ) από την ομάδα Ο2. Οι απαντήσεις των δύο ομάδων φαίνονται στα επόμενα:

Ομάδα	Απαντήσεις
Ο1	Ε4. Ανοίξτε το διακόπτη "$1^η$ Αναπαράσταση". Εμφανίζεται το ημικύκλιο διαμέτρου $IN = IΛ + ΛN$ όπου: $IΛ = AB$ και $ΛN = OA$. Τότε σε κάθε θέση του σημείου Λ, για το ύψος ΜΛ του ορθογωνίου τριγώνου ΙΜΝ θα ισχύει: $MΛ^2 = IΛ \cdot ΛN$  Μπορείτε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω στοιχεία ώστε να εξετάσετε αν και πότε μεγιστοποιείται το εμβαδόν E_2 ; Αναπτύξτε εδώ το σκεπτικό σας Όταν Λ≡Κ σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο και ισοσκελές διότι ΙΜ = ΝΜ ως ίσες χορδές κύκλου, διότι Κ + Λ = 90° που είναι επίκεντρη γωνία. Άρα τότε μόνο μεγιστοποιείται, όπως φαίνεται και από το σχήμα.

O2



Από την απάντηση της ομάδας Ο1, διακρίνεται η σύλληψη της θέσης για την οποία μεγιστοποιείται το εμβαδόν, δηλαδή όταν τα σημεία Κ και Λ ταυτιστούν, αφού προηγουμένως αντιλήφθηκε τη σύνδεση του εμβαδού E_2 με το μέγεθος $ΜΛ^2$. Στη συνέχεια χρησιμοποιεί άστοχα γεωμετρικά στοιχεία για την επιχειρηματολογία της. Στο τέλος της απάντησης, γίνεται αναφορά στο ό,τι «τότε μόνο μεγιστοποιείται» προκειμένου να απαντηθεί το ερώτημα «αν υπάρχουν και άλλες τιμές του κ για τις οποίες μεγιστοποιείται το εμβαδόν». Η ομάδα Ο1 χρησιμοποιεί σε αυτό το σημείο αιτιολογία από ερμηνεία τόσο για τη μεγιστοποίηση του εμβαδού, όσο και για να αποκλείσει ότι αυτό μπορεί να συμβαίνει για περισσότερες τιμές του κ. Ωστόσο δεν είναι σε θέση να διατυπώσει πειστικά τη θέση της, ακόμη και μετά από παρέμβαση του ερευνητή για διευκρινήσεις. Από τους διαλόγους όμως που καταγράφηκαν μεταξύ των μελών της ομάδας σε αυτό το στάδιο, διαφαίνεται μεγαλύτερη άνεση στο χειρισμό του e-δομήματος προκειμένου να αντλήσουν στοιχεία που αφορούν στα ερωτήματα. Ταυτόχρονα όμως παρατηρείται και κάποια (συνεχιζόμενη) ασάφεια όσον αφορά τη μαθηματική επικύρωση των αποτελεσμάτων αυτής της ομάδας. Συγκρίνοντας τις απαντήσεις της συγκεκριμένης ομάδας με εκείνες στις αρχικές φάσεις της δραστηριότητας, θα ήταν ανακριβής ο ισχυρισμός ότι «η σιγουριά της λειτουργίας του e-δομήματος και των εμφανιζόμενων αποτελεσμάτων από αυτό» αδρανοποίησε μερικώς το μαθηματικό συλλογισμό της ομάδας. Και αυτό, διότι από την αρχή της δραστηριότητας, παρατηρούνται ελλείψεις τόσο ως προς την επιχειρηματολογία όσο και ως προς τη μαθηματική τεκμηρίωση της συγκεκριμένης ομάδας. Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε φαίνεται να εξελίσσεται η δυνατότητα της ομάδας να αξιοποιεί στοιχεία του e-δομήματος τουλάχιστον προς την κατεύθυνση διαμόρφωσης της επιχειρηματολογίας της. Ενδεικτικό στοιχείο γι αυτό, αποτελεί η ανάγκη της ομάδας να αναφερθεί στη μοναδικότητα της τιμής του κ ώστε να μεγιστοποιείται το εμβαδόν.

Ως προς την ομάδα Ο2 που και αυτή έχει διατυπώσει την ίδια θέση με την ομάδα Ο1 σχετικά με το «αν» και το «πότε» μεγιστοποιείται το εμβαδόν E_2, εξελίσσεται ο παρακάτω διάλογος που αφορά στο ερώτημα του ερευνητή «γιατί» έχουμε σε αυτή την περίπτωση το μέγιστο εμβαδόν (δηλαδή με άλλα λόγια γιατί όταν τα σημεία Κ και Λ ταυτίζονται, τότε το τμήμα ΜΛ γίνεται μέγιστο)[27].

Ο2	Διάλογος	Παρατηρήσεις
Κ1	… εμείς έχουμε πολλές αιτιολογήσεις… αρχικά πότε το ΜΛ γίνεται μέγιστο… όταν το ΜΛ ισούται με την ακτίνα	

[27] Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι η στροφή προς αυτή τη δικαιολόγηση δεν είχε προσχεδιαστεί. Ο ερευνητής εξετάζει την πρόκληση νοημάτων στους μαθητές από τη δυναμική αναπαράσταση των μεταβολών του τμήματος ΜΛ στο e-δόμημα, προκειμένου να αιτιολογηθεί η μεγιστοποίηση του όταν τα σημεία Κ και Λ ταυτιστούν. Θα ήταν πιθανό περισσότερο αποτελεσματική, η εμφάνιση του ορθογωνίου τριγώνου ΜΚΛ προς αυτή την κατεύθυνση.

Ε	Γιατί συμβαίνει αυτό;	Προσπάθεια του ερευνητή για αιτιολογία από ερμηνεία της σχέσης $ΜΛ \leq R$ (στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΚΛ, το οποίο δεν είναι σχηματισμένο στην οθόνη του e-δομήματος, η ΜΚ=R ως υποτείνουσα θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη ΜΛ…)
Κ1	Γιατί η μέγιστη απόσταση του Μ από τη διάμετρο είναι όταν αυτή είναι ίση με την ακτίνα…	
Ε	Γιατί συμβαίνει αυτό;	
Κ1	Εεε….	
Ε	Καλά, ας επιστρέψουμε στο ερώτημα για τη μεγιστοποίηση του εμβαδού… Τί σχήμα φαίνεται να έχει τότε το ορθογώνιο E_2;	Για την εξέλιξη του ερωτήματος αφήνεται αναπάντητη η αιτιολογία και ο ερευνητής επανέρχεται στο κεντρικό ερώτημα που αφορά στην παρατήρηση ότι όταν τα Κ και Λ ταυτιστούν το εμβαδόν E_2 μεγιστοποιείται.
Κ1	Τετράγωνο…	Η ομάδα Ο1 δεν φαίνεται να το έχει παρατηρήσει
Ε	Φαίνεται ή είναι κιόλας;	
Κ1	Είναι…. Το έχουμε γράψει κιόλας…	

Στη συνέχεια ξεκινά διάλογος του ερευνητή με τις ομάδες σχετικά με τη μεγιστοποίηση του εμβαδού E_2. Σημαντικά αποσπάσματα περιγράφουμε στα επόμενα:

Ο2	Διάλογος	Παρατηρήσεις
Κ1	… δοκιμάσαμε κάποιες τιμές και είδαμε ότι για κ=0.5 το εμβαδόν γίνεται μέγιστο…	Η Ο2 εργαζόταν στο 2^{ο} μοντέλο του εμβαδού που περιγράφεται από τη συνάρτηση g(κ)=(3-κ)(2+κ)
Ε	Και πώς ξέρετε ότι τότε το εμβαδόν γίνεται μέγιστο;	
Κ1	..είδαμε ότι δημιουργούνται ζεύγη τιμών στο διάστημα (0,1)	
Ε	Δηλαδή;	Δεν δίνεται κάποια πειστική απάντηση
Κ1	Μετά το αποδείξαμε κιόλας	Ότι για κ=0.5 μεγιστοποιείται το εμβαδόν
Ε	Πώς το αποδείξατε;	
Κ1	Υποθέσαμε ότι πρέπει να είναι $g(x) \leq g(0.5)$ και καταλήξαμε σε μια ταυτότητα που ισχύει ότι είναι μη αρνητική…	Διακρίνεται προσπάθεια αιτιολογίας για ερμηνεία που εν πολλοίς στηρίζεται στη συμπτωματική εύρεση της τιμής του κ.
Ε	Ωραία…κι αν η επίμαχη τιμή του κ ήταν για παράδειγμα η 0.333… πώς θα την εντοπίζατε;	Προσπάθεια του ερευνητή να αντλήσει κάποια ερμηνεία για την επιλογή της τιμής του κ. Προσπάθεια επίσης για να τεθεί έμμεσα το ερώτημα αν υπάρχουν κι άλλες τιμές του κ ώστε το εμβαδόν να μεγιστοποιείται… Εν τούτοις από τις απαντήσεις της ομάδας δεν φαίνεται κάποιο πειστικό επιχείρημα για την επιλογή αυτής της τιμής, ούτε κάποιος σχετικός προβληματισμός για το αν υπάρχουν κι άλλες τιμές.
Κ1	… μα αν παρατηρώ κάτι και μετά το αποδεικνύω, δεν μπορεί να μου πει κανείς κάτι…	
Ε	Μιλήσατε για κάποια ζεύγη τιμών… σας έδωσε αυτό κάποια ιδέας	
Κ1	Εεε….	
Ε	Σκεφτήκατε μήπως διαισθητικά την τιμή 0.5 ως κέντρο του διαστήματος (0,1);	

Κ2	Μας ρωτάει γιατί το πήραμε ως δεδομένο αυτό και δεν πήραμε κάποια άλλη τιμή του κ…	
Ε	Πώς είμαστε σίγουροι ότι δεν υπάρχουν και άλλες τιμές του κ για τις οποίες το εμβαδόν μεγιστοποιείται;	Αμηχανία ανάμεσα στα μέλη της ομάδας και αναφορά πάλι στα «ζεύγη τιμών» για τα οποία δεν έχει γίνει σαφές ο ρόλος και η χρήση τους.

Η ομάδα Ο1 απαντά σχεδόν μονολεκτικά, ότι βρίσκει την τιμή κ=-0.5 από το e-δόμημα (η ομάδα αυτή εργαζόταν στην έκφραση f(κ) για το εμβαδόν) και μάλιστα ότι δεν «φαίνεται» να υπάρχει άλλη τιμή του κ που μεγιστοποιεί το εμβαδόν. Αν και η συγκεκριμένη φάση απαιτούσε θεωρητική προσέγγιση, η ομάδα αυτή αισθάνεται «σιγουριά» αιτιολογώντας για ερμηνεία την επιλογή της συγκεκριμένης τιμής του κ παίρνοντας ανατροφοδότηση από το e-δόμημα.

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η πρόβλεψη μας για το ό,τι οι μαθητές δεν θα σκέφτονταν να χρησιμοποιήσουν τον τύπο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ που έχουν διδαχθεί στην Α΄ Λυκείου και ο οποίος υπολογίζει την τετμημένη της κορυφής μιας παραβολής και που ταυτόχρονα είναι και η θέση εμφάνισης του ακροτάτου. Πέραν του γεγονότος ότι ο συγκεκριμένος τύπος έχει διδαχθεί στην Α΄ Λυκείου και επομένως θα ήταν δύσκολη η απομνημόνευσή του σε αυτή τη φάση, διακρίνουμε –από την απουσία κάποιας αντίστοιχης ερώτησης από τις ομάδες- την έλλειψη ουσιαστικής κατανόησης του ρόλου και της σημασίας της κορυφής μιας παραβολής. Με άλλα λόγια η ανάγκη για αιτιολογία από ερμηνεία –ή η απουσία της-, της αλγεβρικής σημασίας της κορυφής μιας παραβολής ως σημείου στο οποίο εμφανίζεται μέγιστο ή ελάχιστο της συνάρτησης του τριωνύμου, θα ήταν δυνατό να προκαλέσει κάποιο ερώτημα στις ομάδες, για το «αν υπάρχει κάποιος τύπος που προσδιορίζει την τετμημένη της παραβολής», κάτι το οποίο όμως δεν συνέβη στην παρούσα φάση (βλ. σχετική ανάλυση του Ε4 σελ. 69).

Σε κάθε περίπτωση και αναλύοντας τις θέσεις κυρίως της ομάδας Ο2 που ανέπτυξε κάποια συλλογιστική, διακρίνουμε ότι η ενασχόληση στο χαρτί για την απάντηση των συγκεκριμένων ερωτημάτων, ανέδειξε κατά τη γνώμη μας τις ελλείψεις της αιτιολογίας για ερμηνεία. Κυρίως ανέδειξε την αδυναμία των ομάδων στο είδος της αιτιολογίας από ερμηνεία που αν και είχε καταστεί πλέον σαφές και στις δύο ομάδες ότι το πρόβλημα εν γένει αφορά την αλγεβρική συμπεριφορά τριωνύμων, εν τούτοις δεν προέκυψαν ερωτήματα που σχετίζονταν με την ανάγκη αιτιολογίας αυτού του τύπου. Παράδειγμα αποτελεί πέραν των άλλων και η τελευταία μας αναφορά στην ερμηνεία της κορυφής της παραβολής ως σημείο της γραφικής παράστασης ενός τριωνύμου που εμφανίζεται το ακρότατο για τη συνάρτηση ενός τυχαίου τριωνύμου. Αναδιατυπώνοντας, σε αυτό το σημείο, φαίνεται να είναι αρκετά βάσιμη η ένδειξη ότι ο εργαλειακός χειρισμός τύπων, όπως αυτός του $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ που δίνει την τετμημένη της κορυφής μιας παραβολής, δεν ήταν σε θέση να δώσει διέξοδο στις ομάδες για την αντιμετώπιση του ερωτήματος μεγιστοποίησης του εμβαδού. Κι αυτό, δεδομένου ότι δεν φάνηκε επίκληση του τύπου από καμία ομάδα, ακόμη και υπό μορφή υπενθύμισής του, απευθύνοντας στον ερευνητή κάποιο σχετικό ερώτημα. [28]

[28] Αναφερόμαστε ειδικότερα στην ομάδα Ο2 η οποία έχει διαφανεί ότι παρουσιάζει μέχρι αυτού του σημείου πιο πλούσια επιχειρηματολογία.

3.5 Η αιτιολογία από ερμηνεία ως πλαίσιο διατύπωσης εικασίας

Στο συγκεκριμένο στάδιο, όπως έχει αναφερθεί ερευνάμε τη δυνατότητα (ή την αδυναμία) των ομάδων να οδηγηθούν σε μια κατά το δυνατό ασφαλή εικασία, σε σχέση με τα ευρήματα τους στα προηγούμενα στάδια. Από τις πιλοτικές διδασκαλίες που πραγματοποιήθηκαν πριν από την αναφερόμενη, διακρίναμε τη δυσκολία από τους συμμετέχοντες μαθητές να διατυπώσουν σχετική εικασία που αφορούσε στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Δηλαδή, ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν. Κάτι αντίστοιχο συνέβη και στην παρούσα ερευνητική διδασκαλία: Ο ερευνητής χρειάστηκε να επανέλθει τουλάχιστον δύο φορές, με διευκρινήσεις ως προς το ερώτημα που αφορούσαν κυρίως στο ότι τα ορθογώνια όπως το E_2 είχαν κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (τη σταθερή περίμετρο), χωρίς όμως να αποκαλύπτει πληροφορίες σχετικά με αυτό. Και οι δύο ομάδες, τόσο στην αρχική προσέγγιση του ερωτήματος όσο και κατά τη διάρκεια αυτής, δεν φάνηκε να χρησιμοποιούν το κύριο χαρακτηριστικό αυτών των ορθογωνίων, που ήταν η σταθερή περίμετρός τους, αν και είχαν απαντήσει επιτυχώς το αντίστοιχο ερώτημα στην εισαγωγική φάση. Παρόλα αυτά δεν έγινε αναφορά από καμία ομάδα στη χαρακτηριστική ιδιότητα των ορθογωνίων όπως του E_2 με σταθερή περίμετρο. [29]

Παραθέτουμε τις απαντήσεις των δύο ομάδων:

Ομάδα	Απαντήσεις
Ο1	E5. Από τα ευρήματα της προηγούμενης ερώτησης, διατυπώστε παρακάτω κάποιον ισχυρισμό που φαίνεται να ισχύει σχετικά με τα εμβαδά ορθογωνίων όπως του E_2: $E_2 = (3+κ)(2-κ) = ΙΛ \cdot ΛΝ$ $ΙΛ = ΑΒ = α = 3$ $ΛΝ = ΟΑ = β = 2$ $(ΙΛ+κ)(ΛΝ-κ) = E_2$
Ο2	Το εμβαδου ορθογωνιου παραλληλογραμμου ειναι μεγιστο οταν εχει ισες πλευρες, δηλ ειναι τετραγωνο οταν $β+κ=α-κ$

Από την απάντηση της ομάδας Ο1 προκύπτει ότι δεν έχει κατανοήσει τι ακριβώς πρέπει να κάνει κι αναφέρεται σε σημειολογικά στοιχεία της δραστηριότητας. Με άλλα λόγια, δεν φαίνεται να οδηγείται προς τη διατύπωση μιας γενικευμένης ιδιότητας για τη μεγιστοποίηση του εμβαδού των ορθογωνίων με σταθερή περίμετρο. Από τους διαλόγους της ομάδας δεν προκύπτει ότι υπάρχει κάποια σκέψη για να διατυπωθεί κάποιος «κανόνας» ή κάποια «ιδιότητα» επί του θέματος. Σχετικά με την ομάδα Ο2, παρατηρούμε ότι αν και διατυπώνει μια εικασία που βρίσκεται αρκετά

[29] Άποψη συμμετέχοντος εκπαιδευτικού που παρακολούθησε σχεδόν όλη τη δραστηριότητα, ότι «… το θεωρούν τόσο δεδομένο (τη σταθερή περίμετρο) που δεν νομίζουν πως πρέπει να το αναφέρουν…»

κοντά στην επιζητούμενη, εν τούτοις δεν αναφέρει τη χαρακτηριστική ιδιότητα των ορθογωνίων E_2 για τη σταθερή περίμετρο. Στους διαλόγους αυτής της ομάδας, έχουν καταγραφεί αναφορές σε συγκεκριμένα αριθμητικά στάδια της δραστηριότητας (όπως και στην Ο1) και όχι σε μία γενικευμένη θεώρηση αυτών.

Κάποια σημεία αυτού του διαλόγου ανάμεσα στα μέλη της Ο2, παραθέτουμε στα επόμενα:

Ο2	Διάλογος	Παρατηρήσεις
Ε	Το συγκεκριμένο ορθογώνιο μεταβάλλεται όπως ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο;	Επισήμανση προκειμένου οι μαθητές να θυμηθούν την ιδιότητα της σταθερής περιμέτρου…
Α	… θέλει και τιμές για τις πλευρές… μήπως να πούμε ότι το α είναι ανάμεσα στις τιμές… και το β σε κάποιες άλλες;	
Κ1	Όχι , θέλει να πούμε για το εμβαδόν… όταν οι πλευρές είναι ίσες…	
Α	Τι λες αυτό είναι γενικό, δεν έχει σχέση με το εμβαδόν..	
Κ1 & Κ2	… έχει σχέση με το εμβαδόν…	
Κ2	… ήρεμα ήρεμα…!	Επικρατεί ένταση…!
Κ2	… τί άλλη ιδιότητα έχει το συγκεκριμένο;	
Α	… θέλει την ιδιότητα του ορθογωνίου με αυτές τις διαστάσεις…	… επιμένει να περιγράψουν τιμές των πλευρών α και β και τις αντίστοιχες του εμβαδού
Κ2	… μα δεν έχει συγκεκριμένες διαστάσεις… Θέλεις να το πάς με περιπτώσεις;	
Κ1	Από ότι έχω καταλάβει δεν σου ζητάει αυτό. Σου ζητάει μια ιδιότητα του εμβαδού αυτού και πότε ισχύει… και η ιδιότητα του είναι το εμβαδόν τετραγώνου όταν αυτά (οι πλευρές) είναι ίσα.	Η ασάφεια στη διατύπωση αυτής της θέσης φαίνεται να μπερδεύει όλη την ομάδα…

Από τα παραπάνω ευρήματα, καθώς κι από τα αντίστοιχα που προηγήθηκαν στις πιλοτικές διδασκαλίες της δραστηριότητας, προκύπτει εμφανώς η αδυναμία διατύπωσης εικασίας ή ισχυρισμού ή δείγματα μιας γενικευμένης ιδιότητας που υπάρχει «πίσω από όλα αυτά….». Οι συνεχείς επισημάνσεις του ερευνητή ώστε οι ομάδες να ανατρέξουν στην ιδιότητα που έχουν τα ορθογώνια όπως το E_2 και να την επικαλεστούν ώστε να καταλήξουν σε κάποιο ισχυρισμό, δεν φαίνεται να έχει αποτέλεσμα. Είναι πιθανό να θεωρήσουμε ως αιτία για αυτή την αδυναμία των μαθητών στη συγκεκριμένη φάση, το γεγονός ότι δόθηκαν συγκεκριμένες διαστάσεις για το αρχικό ορθογώνιο ($\alpha=3$ και $\beta=6$) και επομένως αυτό περιόρισε τη δυνατότητα γενίκευσης των ομάδων. Ωστόσο κάτι τέτοιο μπορεί να αντικρουστεί, δεδομένου ότι σε κάποιες από τις απαντήσεις που έχουν προαναφερθεί κυρίως της ομάδας Ο2, διακρίνεται μια τάση γενίκευσης τόσο στις απαντήσεις όσο και στην αιτιολογία που αναπτύσσει.

Από τα ερευνητικά δεδομένα αυτού του σταδίου φαίνεται να επικαιροποιείται η θέση "…Από την άλλη θα πρέπει να αναρωτηθούμε πόσο συμβάλλει σε αυτό και το «περιβάλλον» της τάξης. Ο Lambert (1990) υποστηρίζει ότι η κατανόηση της απόδειξης καθίσταται δύσκολη εξ αιτίας του τυπικού περιβάλλοντος της τάξης: «Στην τάξη, ο δάσκαλος και το βιβλίο είναι η αρχή και τα μαθηματικά δεν είναι ένα θέμα που διερευνάται ή δημιουργείται. Η αλήθεια δίνεται από τις (και στις) εξηγήσεις του δασκάλου καθώς και από τις απαντήσεις του βιβλίου. Δεν υπάρχει ευελιξία ανάμεσα σε εικασίες και επιχειρήματα για την εγκυρότητά τους».

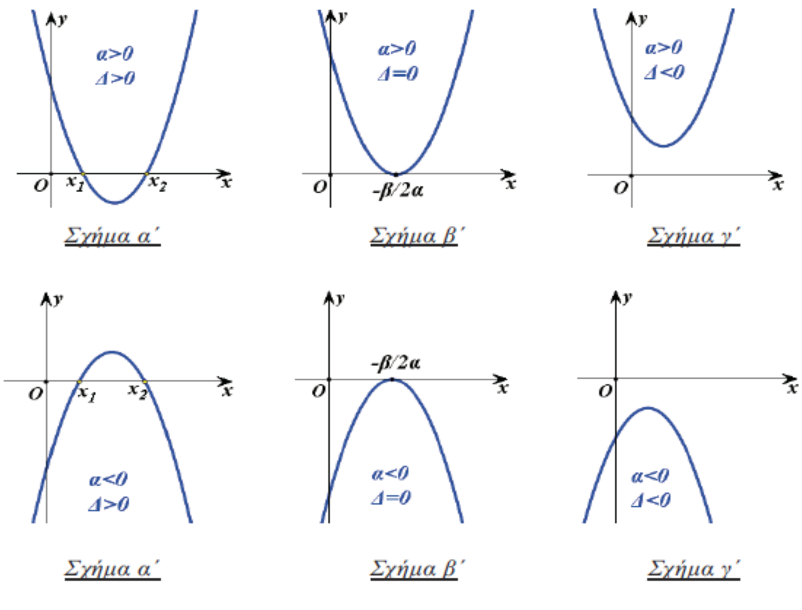
(βλ. περισσότερα και σελ. 41).

Ωστόσο, στο τελικό στάδιο όπου επιχειρείται να δημιουργηθεί εννοιολογικό πλαίσιο ώστε οι ομάδες να επικυρώσουν με τυπικά αποδεικτικά σχήματα τον ισχυρισμό του προηγούμενου σταδίου (βλ. σελ. 72), παρατηρούμε αρκετές ανατροπές αναφορικά με την $1^{η}$ ομάδα. Σε αυτό το στάδιο οι μαθητές δείχνουν αρχικά την ισοδυναμία του συστήματος

$$(\Sigma):\begin{cases} x+y=5 \\ xy=E_2 \end{cases} \text{ με την εξίσωση } 2^{ου} \text{ βαθμού } \underbrace{-x^2+5x-E_2}_{p(x)}=0$$

και στη συνέχεια παρατηρούν στην οθόνη του λογισμικού τις μεταβολές της γραφικής παράστασης της συνάρτησης του τριωνύμου p(x). Από τις σχετικές θέσεις που αναπτύσσονται τότε μεταξύ της γραφικής παράστασης του τριωνύμου και του άξονα των xx΄ πρέπει να νοηματοδοτήσουν την (καθοριστική για την απόδειξη) σχέση ότι η διακρίνουσα Δ αυτού του τριωνύμου είναι μη αρνητική.

Στην εξέλιξη αυτού του σταδίου, σημειώθηκε ένα είδος «ανατροπής» των επιδόσεων των δύο ομάδων. Ενώ δηλαδή η ομάδα Ο1 αντιλαμβάνεται σχεδόν άμεσα την παραπάνω αλγεβρική σχέση, χρησιμοποιώντας φανερά αιτιολογία από ερμηνεία ως συστατικό στοιχείο νοηματοδότησης των συμμεταβολών που λαμβάνουν χώρα, η ομάδα Ο2 χρειάζεται υπενθύμιση από τον ερευνητή σχετικά με το ρόλο της διακρίνουσας ενός τριωνύμου για τη σχετική θέση της γραφικής του παράστασης ως προς τον άξονα xx΄. Με άλλα λόγια, στο συγκεκριμένο στάδιο διακρίνεται η ανεπάρκεια της αιτιολογίας για ερμηνεία που έως τώρα χρησιμοποιεί σχεδόν αποκλειστικά η συγκεκριμένη ομάδα. Προκειμένου ο ερευνητής να υποστηρίξει την προσπάθεια της $2^{ης}$ ομάδας στην αιτιολογία από ερμηνεία, δείχνει μια σχετική διαφάνεια από την ύλη της Α΄ Λυκείου προκειμένου οι μαθητές να θυμηθούν τις σχέσεις που καθορίζουν τη γραφική παράσταση του τριωνύμου.



Εικ. 42: Γραφική παράσταση της παραβολής

Οι απαντήσεις των δύο ομάδων διακρίνονται στα επόμενα:

Ομάδα	Απαντήσεις
Ο1	**ΙΙ. Ανοίξτε το διακόπτη p(x). Σχηματίζεται η γραφική παράσταση της παραβολής $p(x)=-x^2+5x-E_2$.** **Πειραματιστείτε για τις διάφορες τιμές του κ. Τί παρατηρείτε για τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης με τον άξονα xx΄ καθώς μεταβάλλεται το κ και από ποια σχέση ερμηνεύεται αλγεβρικά αυτή η παρατήρηση;** Εφάπτεται στον x'x για Δ=0 δηλαδή για κ=-0,5 Τέμνει τον x'x σε x_1 και x_2 για Δ>0 δηλαδή για κ∈(-3,2) αρα Δ≥0
Ο2	**σχέση ερμηνεύεται αλγεβρικά αυτή η παρατήρηση;** $-x^2+9x-E_2=0$ Για x=0 κ=-0,5 / με Υπεύθ/ση Για Δ>0 $x_1 \neq x_2$ Δ=0 $x_1=x_2$ Δ<0 κανένα κοινό σημείο

Από τους διαλόγους της ομάδας Ο2 προκύπτει ότι τα μέλη της ομάδας διακρίνουν ότι η παραβολή p(x) ή θα τέμνει ή θα εφάπτεται του άξονα xx΄, όμως, δεν φαίνεται παράλληλα και να μπορούν να ερμηνεύσουν αλγεβρικά αυτό το φαινόμενο. Η ερώτηση του ερευνητή «πώς ερμηνεύεται αλγεβρικά η παρατήρησή σας;» δεν φαίνεται να οδηγεί τους μαθητές προς τη διατύπωση της αντίστοιχης σχέσης. Χαρακτηριστικά αποσπάσματα αυτού του διαλόγου παρατίθενται στα επόμενα:

Ο2	Διάλογος	Παρατηρήσεις
Ε	Τι βλέπετε για τη σχετική θέση της παραβολής με τον άξονα xx΄;	
Α	Ότι τέμνει σε 2 σημεία τον άξονα εκτός αν είναι στο κ=-0.5 και στο x_1=0…	Στο σημείο αυτό φαίνεται η παρανόηση ότι το μέλος της ομάδας θεωρεί ότι το x_1 είναι 0 . Η σύγχυση μεταφέρεται και στα άλλα μέλη της ομάδας. Η ομάδα εκλαμβάνει τη ρίζα x_1 του τριωνύμου ως 0, πιθανό συγχέοντας τις εξής έννοιες: ρίζα τριωνύμου ή/και τεταγμένη του σημείου x_1.
Ε	Ζητάμε να ερμηνεύσουμε αυτό με κάποια αλγεβρική σχέση…	
Κ1	Βάσει της σχέσης… ότι για x=0 το εμβαδόν θα είναι 6.25…	Γίνεται περισσότερη φανερή η σύγχυση… ενώ έχουν παρατηρήσει ότι όταν η παραβολή εφάπτεται του άξονα xx΄ έχουμε το μέγιστο εμβαδόν, εν τούτοις θεωρούν ότι τότε είναι x=0, ακολουθώντας τη λανθασμένη θέση του Α από προηγούμενα.
Ε	Δεν ζητάμε σε αυτό το στάδιο απόδειξη για το μέγιστο εμβαδόν αλλά πώς ερμηνεύεται αλγεβρικά η σχετική θέση της παραβολής με	Γίνεται συνεχής αναφορά του ερευνητή για «κάποια σχέση που καθορίζει πότε η παραβολή θα

	τον άξονα xx΄;	τέμνει και πότε θα εφάπτεται του άξονα xx΄»
K2	Πότε τον τέμνει; …p(x)=0	
A	Η απόσταση… η απόσταση από την κορυφή της… όταν αυτή η απόσταση της κορυφής από τον άξονα των x είναι μεγαλύτερη από το 0 τότε…	Η απάντηση του αγοριού της ομάδας φαίνεται να έχει καταβολές από την ύλη προσανατολισμού, αλλά κυρίως από τη σχετική θέση ευθείας – κύκλου (αφού εκεί η απόσταση του κέντρου από μια ευθεία καθορίζει και τη σχετική τους θέση).
K1	Το κ καθορίζει πότε θα συμβαίνει ένα από τα δύο… Το κ δεν καθορίζει πότε θα τέμνει και πότε θα εφάπτεται;	
K2	Παιδιά άλλη μία την εκφώνηση!	Αναγνωρίζεται από την ομάδα ότι κάτι δεν κάνουν σωστά…
K1	Παιδιά το κ καθορίζει τι θα συμβαίνει με τη θέση της παραβολής… και πουθενά δεν υπάρχει το κ παρά μόνο μέσα στο E_2...	Σε αυτό το σημείο ο ερευνητής δείχνει διαφάνεια από το σχολικό βιβλίο της Α΄ Λυκείου για τις σχετικές θέσεις μιας παραβολής και του άξονα xx΄ προκειμένου να προχωρήσει και να ολοκληρωθεί η διαδικασία
K2	…είναι η διακρίνουσα…	Στο σημείο αυτό ακούγονται επιφωνήματα από την ομάδα Ο1 που είχε ήδη αντιληφθεί το ρόλο της διακρίνουσας του τριωνύμου p(x) για το συγκεκριμένο ερώτημα…
A	… η διακρίνουσα του συστήματος είναι ίση…	
K1	Να γράψουμε όλες τις περιπτώσεις για Δ>0 ότι τέμνει τον άξονα σε 2 διαφορετικά σημεία, για Δ=0 ότι εφάπτεται σε 1 σημείο και για Δ<0 δεν έχει κοινά σημεία.	Ακόμη και μετά την υπενθύμιση του ερευνητή, η ομάδα Ο2 δεν συνδέει την ανατροφοδότηση με το συγκεκριμένο φαινόμενο αλλά θεωρεί ότι καλείται να αναφέρει γενικά την αντίστοιχη θεωρία συνολικά για τη σχετική θέση παραβολής και του άξονα xx΄. Το αποτέλεσμα να καταγράψει όλες τις περιπτώσεις, ακόμη και της περίπτωσης Δ<0 που δεν αφορά το πρόβλημα…

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι αν και η απάντηση της ομάδας Ο2 δείχνει να λαμβάνει υπόψη όλες τις περιπτώσεις για το πρόσημο της διακρίνουσας (δηλαδή και την άσχετη περίπτωση Δ<0), εν τούτοις, στο επόμενο στάδιο της τελικής απόδειξης αντιλαμβάνεται ότι η περίπτωση του πειράματος σχετίζεται με τη σχέση της μη αρνητικής διακρίνουσας του τριωνύμου p(x). Εξαιτίας αυτού ενισχύεται η άποψη ότι, η ομάδα Ο2 αντιμετωπίζει κάποια δυσκολία από τις διαδοχικές μεταβάσεις του γεωμετρικού ισοδύναμου του προβλήματος στο αλγεβρικό και αφού προηγούμενα υπήρξαν στάδια αντιμετώπισης ερωτημάτων με τυπικό φορμαλισμό. Από τους ηχογραφημένους διαλόγους της συγκεκριμένης ομάδας διακρίνεται και αμηχανία και δυσκολία κατανόησης του συγκεκριμένου ερωτήματος. Με άλλα λόγια, η (σιωπηλή) πεποίθηση ότι η Άλγεβρα και η Γεωμετρία λειτουργούν περίπου ως ερμητικά κλειστοί χώροι ο ένας ως προς τον άλλον, φαίνεται να επαληθεύεται στην περίπτωση αυτής της ομάδας. Διακρίνουμε επίσης τη δυσκολία της Ο2 να προβεί σε αιτιολογία από ερμηνεία στο συγκεκριμένο ερώτημα για το οποίο χρειάζεται να ερμηνεύσει «κάτι» που φαίνεται στον υπολογιστή. Η ομάδα Ο2 έχει επιδείξει αρκετή δεινότητα στο να προσεγγίζει με τυπικά και αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα κάποια από τα ερωτήματα που είχαν προηγηθεί. Εν τούτοις, δυσκολεύεται στο συγκεκριμένο στάδιο να ερμηνεύσει αυτό που βλέπει στο λογισμικό, σε αντίθεση με την ομάδα Ο1 που στα προηγούμενα στάδια είχε επιδείξει σημαντικά μικρότερη ευστοχία σε τυπικές και συντακτικές προσεγγίσεις της απόδειξης.

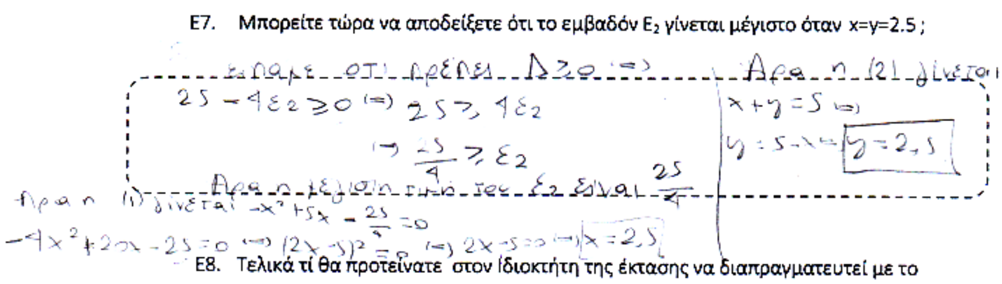
Τα μέλη της ομάδας Ο1 φαίνεται να οδηγούνται ευθύβολα στον προσδιορισμό της ζητούμενης σχέσης. Στην απάντησή τους καταγράφουν τις τιμές του κ και τις αντίστοιχες τιμές της διακρίνουσας αλλά και τις αντίστοιχες θέσεις που παίρνει η παραβολή σχετικά με τον άξονα xx΄: για κ=-0.5 είναι Δ=0 και εφάπτεται του xx΄ και για κ∈(-3,2) τέμνει τον άξονα xx΄ (έχει βέβαια εδώ συμπεριλάβει λανθασμένα και την τιμή του κ=-0.5 πιθανώς από κεκτημένη ταχύτητα).

Το γεγονός αυτό κατά τη γνώμη μας δείχνει στοιχεία ωρίμανσης και εξοικείωσης ως προς τη χρήση του e-δομήματος και κυρίως της σύνδεσης των αποτελεσμάτων που «φαίνονται» στην οθόνη με μαθηματικές σχέσεις που τα ερμηνεύουν. Αναδιατυπώνοντας τον παραπάνω ισχυρισμό, η δημιουργία συνθηκών bfp φαίνεται να λειτουργούν περισσότερο αποτελεσματικά στα μέλη της ομάδας Ο1. Όσον αφορά την Ο2, φαίνεται να εγκλωβίζεται σε αδιέξοδες προσεγγίσεις, τουλάχιστον όσον στο συγκεκριμένο στάδιο. Η ομάδα Ο1 φαίνεται να ξεπερνά τα προηγούμενα στάδια, όπου οι απαντήσεις της χαρακτηρίζονταν από ασάφεια και ελλιπείς τοποθετήσεις και να αποκτά σταθερό βηματισμό προκειμένου στη χρήση αιτιολογίας από ερμηνεία που περιέχεται στο συγκεκριμένο στάδιο.

Στα επόμενα αναφερόμαστε στο τελικό στάδιο της δραστηριότητας, στο οποίο ζητείται από τις ομάδες και η τυπική απόδειξη του ισχυρισμού τους για τη μεγιστοποίηση του εμβαδού E_2 όταν αυτό μετασχηματιστεί σε τετράγωνο.

3.6 Αιτιολογία από ερμηνεία και παραγωγή τυπικών αποδεικτικών σχημάτων

Στο συγκεκριμένο στάδιο τίθεται στις ομάδες το ερώτημα αν με τη χρήση των προηγούμενων ευρημάτων, μπορούν να αποδείξουν ότι το εμβαδόν E_2 μεγιστοποιείται όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο. Στο συγκεκριμένο στάδιο παρατηρούμε ότι η $1^η$ ομάδα έχει εντάξει πλήρως στον τρόπο αιτιολογίας την αιτιολογία από ερμηνεία, γεγονός που της επιτρέπει να ολοκληρώσει πλήρως την απόδειξη, ενώ η $2^η$ ομάδα χρησιμοποιεί και πάλι εργαλειακές προσεγγίσεις, με αποτέλεσμα να εμφανίζει σημαντικές ελλείψεις στην πληρότητα της απόδειξης που παρουσιάζει. Οι απαντήσεις των δύο ομάδων φαίνονται στα επόμενα:

Ομάδα	Απαντήσεις
Ο1	 E7. Μπορείτε τώρα να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_2 γίνεται μέγιστο όταν x=y=2.5 ; Είπαμε ότι πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow$ $25 - 4E_2 \geq 0 \Leftrightarrow 25 \geq 4E_2$ $\Leftrightarrow \frac{25}{4} \geq E_2$ Άρα η μέγιστη τιμή του E_2 είναι $\frac{25}{4}$ Άρα η (2) γίνεται $x+y=5 \Leftrightarrow$ $y=5-x \Leftrightarrow \boxed{y=2,5}$ Άρα η (1) γίνεται $-x^2+5x-\frac{25}{4}=0$ $-4x^2+20x-25=0 \Leftrightarrow (2x-5)^2=0 \Leftrightarrow 2x-5=0 \Leftrightarrow \boxed{x=2,5}$ E8. Τελικά τί θα προτείνατε στον ιδιοκτήτη της έκτασης να διαπραγματευτεί με το

O2	E7. Μπορείτε τώρα να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_2 γίνεται μέγιστο όταν x=y=2.5 ;

$p(x) = -x^2 + 5x - E_2 = 0$

$\Delta = 25 - 4(-1)(-E_2)$

$\Delta = 25 - 4E_2 \geq 0$

$4E_2 \leq 25$

$E_2 \leq 6{,}25$ $E_2 = 6{,}25$

$E_2 = 6{,}25 \Leftrightarrow (3+\kappa)(2-\kappa) = 6{,}25 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \kappa = 0{,}5$

$x = 3+\kappa$

$y = 2-\kappa$

$x = y = 2{,}5$

E8. Τελικά τί θα προτείνατε στον Ιδιοκτήτη της έκτασης να διαπραγματευτεί με το Δήμο της περιοχής του;

Στην απάντηση της ομάδας O1 διαφαίνεται πληρότητα εντελώς η οποία ανατρέπει εντελώς την αρχική της εικόνα. Σημειώνουμε βέβαια, ότι χρειάστηκαν ορισμένες διευκρινήσεις του ερευνητή, προκειμένου να δώσουν έμφαση στη διατύπωση του ερωτήματος που αναφέρει «*Μπορείτε τώρα να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_2 γίνεται μέγιστο όταν…*». Κατόπιν τούτων, προχωράει με απόλυτη σαφήνεια και πληρότητα στην τυπική απόδειξη του ζητούμενου. Αναφέρουμε ότι η συγκεκριμένη ομάδα δεν οδηγείται απευθείας στη χρήση της μη αρνητικής διακρίνουσας, καθότι πιστεύει ότι (και) σε αυτό το στάδιο πρέπει να αναζητήσει κάποια πληροφορία από το e-δόμημα ως αποδεικτικό στοιχείο. Τελικά και ύστερα από τις συνεχείς αναφορές του ερευνητή στη διατύπωση του συγκεκριμένου ερωτήματος, αντιλαμβάνεται ότι πρέπει να συνθέσει τυπική απόδειξη και χρησιμοποιεί την εύρεση της συνθήκης της μη αρνητικής διακρίνουσας από το προηγούμενο ερώτημα για να προβεί στη συνέχεια στον εντοπισμό του μέγιστου εμβαδού. Μάλιστα, αντί να χρησιμοποιήσει ότι για τη μέγιστη αυτή τιμή του εμβαδού η διακρίνουσα είναι μηδέν και επομένως υπάρχει μια διπλή ρίζα της εξίσωσης p(x)=0, αντικαθιστά την τιμή του εμβαδού $E_2=\frac{25}{4}$ στην εξίσωση p(x)=0 και καταλήγει στην ταυτότητα $(2x-5)^2=0 \Rightarrow x=2.5$ και αφού x+y=5 άρα και y=2.5.

Από τα προηγούμενα, παρατηρούμε ένα «άνοιγμα» αυτής της ομάδας και στο μέρος της τυπικής απόδειξης, όπου φαίνεται να αντιμετωπίζει με περισσότερη σιγουριά και αυτοπεποίθηση το συγκεκριμένο στάδιο. Για την απόδειξη της μεταβολής του ορθογωνίου σε τετράγωνο, δεν χρησιμοποιεί την αιτιολογία για ερμηνεία (θεωρώντας εργαλειακά την ειδική περίπτωση της συνθήκης Δ=0 και επομένως την ύπαρξη της διπλής ρίζας που δίνεται από τη σχέση $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ για να καταλήξει ότι x=2.5) αλλά την αιτιολογία από ερμηνεία της τιμής $E_2=\frac{25}{4}$ που βρήκε παραπάνω.

Αντικαθιστά την τιμή αυτή στην εξίσωση p(x)=0 και καταλήγει στην ταυτότητα $(2x-5)^2=0 \Rightarrow x=2.5$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η έλλειψη της παρατήρησης ότι για $E_2=\frac{25}{4}$ η διακρίνουσα είναι μηδέν δεν στέκεται εμπόδιο στην ομάδα να ολοκληρώσει την απόδειξη χρησιμοποιώντας αιτιολογία από ερμηνεία: με αντικατάσταση αυτής της τιμής του E_2 στην εξίσωση $p(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+5x-E_2=0$ καταλήγει στο αποτέλεσμα του τύπου $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{5}{-2}=2.5$.

Συνοπτικά, από την εξέλιξη αυτής της ομάδας στα δύο τελικά στάδια της δραστηριότητας, ότι η –άτυπη- προσάρτηση της αιτιολογίας από ερμηνεία στις προσεγγίσεις της, αποκτά ιδιαίτερη δυναμική και ταυτόχρονα και αποτελεσματικότητα, τόσο στη διαμόρφωση επιχειρηματολογίας όσο και στην αποδεικτική της ικανότητα. Αντίθετα, οι προσπάθειες με αιτιολογία για ερμηνεία που –επίσης άτυπα- είχε ενσωματώσει στα προηγούμενα στάδια, περιείχε αρκετές ατέλειες και ασάφειες στην επιχειρηματολογία της ομάδας καθώς και στις θέσεις που διατύπωνε.

Όσον αφορά την ομάδα Ο2, μετά από μια «περιπλάνηση» σε θεωρητικές προσεγγίσεις που καταγράφηκαν στους διαλόγους των μελών της σε αυτό το στάδιο, αποφασίζει ότι πρέπει να χρησιμοποιήσει τη συνθήκη της μη αρνητικής διακρίνουσας για να προχωρήσει στην τυπική απόδειξη. Η συγκεκριμένη ομάδα αν και αποδεικνύει τη μεγιστοποίηση του εμβαδού για την τιμή $E_2=\frac{25}{4}$ μέσω της συνθήκης της μη αρνητικής διακρίνουσας, εν τούτοις δεν ολοκληρώνει την απόδειξη ως προς το «γιατί» το ορθογώνιο E_2 μετασχηματίζεται σε τετράγωνο. Αφού περιπλανάται για αρκετή ώρα σε υπολογισμούς, αξιοποιεί τη μη αρνητική διακρίνουσα για τον εντοπισμό του μέγιστου εμβαδού, σχηματίζει την εξίσωση (3+κ)(2-κ)=6.25 και υπονοώντας ότι έχουν γίνει πράξεις, καταλήγει στην εύρεση του κ=-0.5 από όπου συμπεραίνει ότι αφού x=α+κ και y=β-κ άρα x=y=2.5.

Από την εξέλιξη της ομάδας Ο2 στο συγκεκριμένο στάδιο ,σημειώνουμε ότι η συνεχής προσπάθεια της να χρησιμοποιεί αιτιολογία για ερμηνεία σχεδόν σε κάθε ερώτημα, την οδηγεί τελικά στο σημείο να αντιμετωπίζει συγκεχυμένα το ερώτημα που απαιτείται τυπική απόδειξη. Από τους διαλόγους της ομάδας, καταγράφεται ένα είδος αδιεξόδου για το τί πρέπει να αποδείξει. Φαίνεται επίσης να απομακρύνεται περισσότερο από τη διπλή χρήση του e-δομήματος ως μέσου παραγωγής νοημάτων δια του πειραματισμού, αλλά και ως επαλήθευσης αποτελεσμάτων. Αυτό φαίνεται και από τον καταγραφέα οθόνης της ομάδας, όπου σχεδόν στο σύνολο της διαπραγμάτευσης μεταξύ των μελών της ομάδας σε αυτό το στάδιο, δεν κινεί σχεδόν τίποτα στο e-δόμημα προκειμένου να ελέγξει μετασχηματισμούς και μεταβολές. Το επαγόμενο αυτής της κατάστασης, να υπάρχει έντονος προβληματισμός ανάμεσα στα μέλη τόσο για το «τί» πρέπει να αποδείξουν όσο και για το «πώς».

Στο σημείο αυτό, αναφέρουμε επίσης την επιβεβαίωση από τη συγκεκριμένη ομάδα του ισχυρισμού μας, σχετικά με τη δυσκολία που έχουν οι μαθητές να ερμηνεύουν το μαθηματικό περιεχόμενο σχέσεων της μορφής $\alpha \leq \beta$, αναφορικά με την ένδειξη μέγιστης ή ελάχιστης τιμής για τα α και β αντίστοιχα. Αυτό, όπως έχουμε αναφέρει (βλ. σελ. 77) είναι ως ένα σημείο αναμενόμενο, διότι οι μαθητές ακόμη και της Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού δεν έχουν εμπειρία στην ερμηνεία σχέσεων τέτοιας μορφής προς αυτή την κατεύθυνση. Επιπρόσθετα, το γεγονός ότι -όπως αναφέρθηκε – δεν παρατηρείται κινητικότητα στον καταγραφέα της οθόνης της συγκεκριμένης ομάδας (σε αντίθεση με την ομάδα Ο1) δείχνει ότι η ομάδα Ο2 δεν αξιοποιεί επαρκώς την ταυτόχρονη απεικόνιση των μετασχηματισμών του ορθογωνίου E_2 και της παραβολής p(x). Σε μία τέτοια περίπτωση, θα ήταν μικρότερη η ανασφάλεια και η σύγχυσή της (που προκύπτει από τους διαλόγους που παραθέτουμε στα επόμενα) σχετικά με την επικύρωση της συνθήκης της μη αρνητικής διακρίνουσας του τριωνύμου p(x) και τη χρήση της για την τελική απόδειξη.

Παραθέτουμε ορισμένους διαλόγους των μελών της σε αυτό το στάδιο από όπου θεωρούμε ότι τεκμηριώνονται οι προηγούμενες θέσεις:

Ο2	Διάλογος	Παρατηρήσεις
Κ1	Τώρα πάλι με τη διακρίνουσα θα δουλέψουμε… ναι…	
Κ1	… ωραία θέλουμε εμείς να είναι μεγαλύτερη του	Κατά τη διάρκεια του σχηματισμού της

	μηδενός τώρα…; ή ίσο με μηδέν για να	διακρίνουσας του τριωνύμου p(x)…
Α	.. βγαίνει 6.25 …εγώ το΄χω βρει αυτό ώρα…	Προσπάθεια σχηματισμού της διακρίνουσας και αποσαφήνισης για το αν θα θεωρήσουν Δ=0 ή Δ>0…
Κ1	Δεν θέλει το Ε max, θέλει τη διακρίνουσα…	
Κ1	Άρα πρέπει να βρούμε το y για x=2.5… αυτό είναι;..ή αυτό που έκανε η Κ2 πρίν;	Απευθυνόμενη στο Α και στην Κ2
Κ2	Αυτό παιδιά είναι τελείως άσχετο γιατί θέλουμε με βάση τα παραπάνω να το κάνουμε… εγώ το πήγα με ακρότατα..	
Κ1	Δεν είναι το μεγαλύτερο… καταρχήν είναι το μεγαλύτερο βάσει των προηγουμένων…	Αναφέρεται μάλλον στη μέγιστη τιμή του E_2.
Α	Πρέπει να ισχύει ότι 25 μεγαλύτερο ίσο του $4E_2$ όπου το max είναι αυτό…	Αρχίζει να φαίνεται ότι θεωρούν πλέον τη συνθήκη της μη αρνητικής διακρίνουσας ως το εργαλείο απόδειξης και προχωρούν στην ανάπτυξη της συνθήκης $\Delta \geq 0$…
Ε	Τι εννοείς εδώ;	Τα γραπτά τους στο φύλλο εργασίας δεν αποτυπώνουν με σαφήνεια κάποιο σκεπτικό…
Κ1	Ότι αυτή είναι η διακρίνουσα και για να είναι ίση με 0 πρέπει…	
Ε	Γιατί πρέπει να είναι ίση με 0;	
Κ1	Για να είναι $x_1=x_2$…	
Ε	Και γιατί πρέπει να είναι $x_1=x_2$;	
Κ1	Για να έχουμε το μέγιστο εμβαδόν….	Ο ερευνητής δεν επιμένει σε άλλες ερωτήσεις… αλλά η ομάδα αντιλαμβάνεται πώς κάνει κυκλικές αναφορές χωρίς να εισέρχεται στην ουσία της απόδειξης…
Α	Κοίτα η διακρίνουσα είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός … αυτό ισχύει έτσι….; ε από εδώ βγαίνει ότι $4E_2$ μικρότερο ίσο του 25…. Άρα E_2 μικρότερο ίσο 6.25…	Φαίνεται να αντιλαμβάνεται τον τρόπο χρήσης της μη αρνητικής διακρίνουσας και περίπου επιτακτικά ζητάει να το καταγράψουν .
Κ2	Ααα… και βάζουμε τα ακρότατα εδώ…	
Κ1	Ωραία εντάξει το γράφω… τόσην ώρα λέμε το ίδιο πράγμα και..	Διακρίνεται ένα είδος απογοήτευσης που συζητούν τόση ώρα «το ίδιο πράγμα» , ομολογώντας (σιωπηρά) και την έκπληξή τους για το ό,τι δεν οδηγήθηκαν απευθείας σε αυτή τη σχέση. Ταυτόχρονα σβήνουν ότι είχαν γράψει προηγούμενα στο φύλλο εργασίας.
Ε	Τι αλλάζετε τώρα; γιατί το σβήνετε όλο;	
Α & Κ2	Δεν μας αρέσει… πρέπει Δ μεγαλύτερη ή ίση του 0	
Κ1	Ναι παιδιά αλλά γιατί;	Φαίνεται να εξακολουθεί ακόμη η σύγχυση της Κ1
Ε	Γιατί το αλλάξατε αυτό τώρα;	
Α	Πρέπει η διακρίνουσα να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός για να έχουμε σημεία τομής.	Ενώ η Κ1 συνεχίζει να έχει απορία γιατί πρέπει να ισχύει αυτό….
Ε	Ωραία το κεντρικό στοιχείο τώρα που το	

	αλλάξατε ποιο είναι;	
Κ1 & Κ2	Ότι για να έχω σημεία τομής… ότι δεν θα πάρω μόνο να εφάπτεται… θα πάρω ότι για να έχει και δύο κοινά σημεία … άρα μεγαλύτερη ίση του μηδενός… άρα E_2 μικρότερο ίσο του 6.25 που αυτό είναι το μέγιστο !	Φαίνεται να προβαίνει στην ολοκλήρωση εύρεσης του μέγιστου εμβαδού με τον υπολογισμό της διακρίνουσας και την απαραίτητη συνθήκη να είναι μη αρνητική.
Κ2	Εεε πάλι με ακρότατα είναι! Συγγνώμη δηλαδή αυτό δεν είναι με ακρότατα…;	Ενώ η Κ2 έχει συλλάβει αρκετή ώρα πριν την ιδέα ύπαρξης ακροτάτου μέσω της μη αρνητικής διακρίνουσας, φαίνεται να μην είναι σίγουρη για τον ακολουθούμενο τρόπο απόδειξης. Αν και το μέγιστο εμβαδόν που η σχέση αυτή κομίζει απαντάει στο ερώτημα, εκείνη φαίνεται να έχει κάτι άλλο στο μυαλό της.
Κ1	Άκουσέ με λίγο… δε βρίσκεις το κ, βρίσκεις το x …σου ζητάει να αποδείξεις (ότι x=2.5)… καλά βρες το μόνος σου,,,!	Ο Α γράφει τις διαστάσεις των α και β ως 3+κ και 2-κ και σχηματίζει την εξίσωση (3+κ)(2-κ)=6.25 και βάζοντας … καταλήγει ότι κ=-0.5
Κ1	Τώρα όμως δεν απέδειξες ότι x=y…αυτό θέλει να αποδείξεις… Θα βρεις το κ… και;	
Ε	Αυτό πώς βγήκε εδώ;	Αναφέρεται στην εξίσωση
Κ1	Δηλαδή μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο τύπο;	Εννοεί την έκφραση του εμβαδού E_2 μέσω της συνάρτησης f(κ)…
Ε	Μα αυτό δεν είναι το εμβαδόν που συζητάμε;	
Κ1	Α, νόμιζα ότι αυτό θέλουμε να αποδείξουμε… εγώ νόμιζα ότι πρέπει να βρούμε κάτι καινούργιο…	(και) άλλο σημάδι σύγχυσης… ακούγεται διάλογος μεταξύ των Κ1 και Κ2 που δείχνουν έκπληξη και απορία…

3.7 Σύνοψη αποτελεσμάτων

3.7.1 1η Ομάδα

Από την εξέλιξη αυτής της ομάδας στα τελικά στάδια της δραστηριότητας, προκύπτει ότι η ανάπτυξη bfp εννοιολογικού πλαισίου, συνέβαλλε στη νοηματοδότηση των δυναμικών αναπαραστάσεων του δομήματος με αποτέλεσμα την πρόκληση απαγωγικού συλλογισμού που κατά τον Arzarello (1998) είναι κρίσιμος για την παραγωγή εικασιών.

Ειδικά στα τελικά στάδια η ομάδα αναπτύσσει εποικοδομητική επιχειρηματολογία, που συμβάλλει στην κατασκευή εικασίας και αναπτύσσει στη συνέχεια δομική επιχειρηματολογία (Pedemonte, 2007), με την οποία αιτιολογεί την εικασία.

Στην περίπτωση αυτής της ομάδας φαίνεται να επαληθεύεται η θέση, ότι ενώ στο στατικό περιβάλλον χαρτί - μολύβι, η αφαιρετική διαδικασία της απόδειξης παράγεται κυρίως λόγω της ευφυΐας των υποκειμένων, στα δυναμικά περιβάλλοντα είναι η διαδικασία του συρσίματος που μπορεί να τη διαμεσολαβήσει" (Arzarello et al, 1998).

Η εξέλιξη της συγκεκριμένης ομάδας μπορεί να περιγραφεί ως ένα είδος περάσματος από τα "μαθηματικά" με την έννοια του έτοιμου προϊόντος, στη "μαθηματικοποίηση" και στις διαδικασίες που τη συγκροτούν. Δηλαδή, στη διερεύνηση, στο συλλογισμό και στην επικοινωνία (Winter 1975)οι οποίες αποτελούν σημαντικές προϋποθέσεις της αιτιολογίας από ερμηνεία.

3.7.2 $2^{η}$ Ομάδα

Από την εξέλιξη της $2^{ης}$ ομάδας στα τελικά στάδια, προκύπτει ότι η συνεχής εστίαση της στις συντακτικές και διαδικαστικές πτυχές της απόδειξης και λιγότερο ή καθόλου στην άντληση νοημάτων από την προσπάθεια στοιχειοθέτησης της, προκαλεί συνεχή χρήση αιτιολογίας για ερμηνεία και ως εκ τούτου επάλληλη ατροφική εμφάνιση της αιτιολογίας από ερμηνεία.

Σχεδόν στο σύνολο της δραστηριότητας λειτουργεί αποκλειστικά με παραγωγικούς συλλογισμούς , αναχαιτίζοντας με αυτό τον τρόπο την εμφάνιση του απαγωγικού. Παράλληλα, διαφαίνεται να αναζητά διαρκώς εργαλειακές αιτιολογίες τόσο για τη διατύπωση εικασιών όσο και για την απόδειξή τους.

Κλείνοντας , φαίνεται στο σημείο αυτό να ακυρώνεται η (έτσι κι αλλιώς αμφισβητούμενη ερευνητικά) ερώτηση για το "αν ένας μαθητής μπορεί να μάθει και να κάνει περισσότερα μαθηματικά με υπολογιστή ή με τον παραδοσιακό τρόπο;" και να επικαιροποιείται (μάλιστα να αναδεικνύεται η αξία) η (αποδεκτή ερευνητικά) ερώτηση " Ποιες είναι οι περιστάσεις όπου κάθε μέθοδος είναι κατάλληλη;" (Kaput 1992)

Κεφάλαιο 4ο - Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα διαπιστώσαμε τη συμβολή ορισμένων χαρακτηριστικών του ψηφιακού δομήματος για τη δημιουργία bfp εννοιολογικού πλαισίου, προς την κατεύθυνση πρόκλησης και των τριών τύπων συλλογισμού: παραγωγικού, επαγωγικού και απαγωγικού. Ως προς την 1η ομάδα μαθητών είναι κατά τη γνώμη μας φανερή η επίδραση του μέσου για την πρόκληση κυρίως επαγωγικού και απαγωγικού συλλογισμού που καταγράφονται ειδικά στα τελευταία στάδια της δραστηριότητας.

Αντίθετα, η 2η ομάδα έδειξε εν γένει δυσκολίες στην υιοθέτηση του απαγωγικού συλλογισμού μέσω των αναπαραστάσεων του ψηφιακού δομήματος, τις οποίες χρησιμοποιεί ως προέκταση της λύσης του προβλήματος και όχι ως μέρος αυτής . Η συγκεκριμένη ομάδα δείχνει σχεδόν στο σύνολο της δραστηριότητας, να “εμπιστεύεται” περισσότερο τα αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα ακόμα και όταν αυτά δεν είναι ζητούμενα. Διακρίνεται η εμμονή της να χρησιμοποιεί αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πειθούς, ακόμη και στα στάδια διατύπωσης εικασιών κάνοντας τυπικές χρήσεις παρουσίασης και συμβολικών μορφών των επιχειρημάτων που αναπτύσσει. Παράλληλα αποφεύγει να διατυπώσει εικασίες που προκαλούνται από τις αναπαραστάσεις του δομήματος και που –κατά τη γνώμη της- βασίζονται σε ένα απλό εμπειρισμό, χωρίς να υπάρχει η “ασφάλεια” κάποιου μεθοδολογικού και ταυτόχρονα διαπιστωτικού εργαλείου. Σε αυτό το σημείο, θεωρούμε εύλογη την αναφορά στην άριστη βαθμολογική επίδοση των μελών αυτής της ομάδας, τα οποία πιθανώς εξαιτίας αυτού, να έχουν παγιώσει –πιθανό μόνο- συντακτικές αποδεικτικές κατασκευές[30] (Weber, 2005, σελ.353) στο μαθηματικό συλλογισμό τους, θεωρώντας ότι τους παρέχουν μεγαλύτερη ασφάλεια και δεδομένου ότι αποτελούν τον κανόνα όσον αφορά την απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά. Παρατηρήσαμε επίσης ότι, ακόμη και στο τελικό στάδιο όπου απαιτείται αναλυτικό αποδεικτικό σχήμα, η ομάδα δείχνει αδυναμία να εξετάσει τη γενικότητα της εικασίας κάνοντας χρήση κάποιου αντίστοιχου αποδεικτικού σχήματος. Το γεγονός αυτό είναι δυνατό να ερμηνευτεί από τις ασυνέχειες που παρατηρήθηκαν στην εμπλοκή των μελών της ομάδας με την ανάγνωση και την εσωτερίκευση νοημάτων από τις αναπαραστάσεις του δομήματος. Φαίνεται επιπλέον η αδυναμία της να εντάξει ως αποδεικτικό σχήμα στο συλλογισμό της, το μετασχηματισμό των αναπαραστάσεων ως μέρος μιας αφαιρετικής διαδικασίας (βλ. σελ 35 τυπικά αποδεικτικά σχήματα κατά Harel & Sowder). Το εν λόγω γεγονός ερμηνεύεται από την εστίαση του εκπαιδευτικού μας συστήματος στα κατασκευαστικά κυρίως και αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα. Προκύπτει συνεπώς το συμπέρασμα, ότι η εμπειρική φύση μιας απόδειξης, τουλάχιστον στο επίπεδο άντλησης κεντρικών νοημάτων που θα πλαισιώσουν –ή θα οδηγήσουν- την ολοκλήρωση της, αποτελεί αχαρτογράφητη περιοχή για τη συγκεκριμένη κατηγορία μαθητών. Παράλληλα φαίνεται να επαληθεύονται ερευνητικά δεδομένα με βάση τα οποία η απόδειξη (πρέπει να;) διαχωρίζεται ως διαδικασία και ως τελικό προϊόν (Douek, 1998). Από την εξέλιξη της 2ης ομάδας συμπεραίνουμε την εστίαση της στη δομή της απόδειξης και λιγότερο ή καθόλου στην άντληση νοημάτων από την προσπάθεια στοιχειοθέτησης της. Αναδιατυπώνοντας, η συστηματική ενασχόληση αυτής της ομάδας κυρίως με συντακτικές και διαδικαστικές πτυχές της απόδειξης στα πλαίσια των σχολικών μαθηματικών, την απομακρύνει από τις σημασιολογικές πτυχές σύνταξης των αποδεικτικών σχημά-

[30] συντακτική αποδεικτική κατασκευή: (syntactic proof construction) κατά την οποία ξεκινώντας από ορισμούς και υποθέσεις, συνάγονται συμπεράσματα σχετικά με δηλώσεις με την εφαρμογή γνωστών θεωρημάτων και κανόνων λογικής

των. Το συμπέρασμα μας έρχεται σε συμφωνία και με την υποκατηγοριοποίηση από τους Weber & Alcock (2004) των αποδεικτικών σχημάτων του Balacheff, οι οποίοι θεωρούν ότι υπάρχουν τρεις τρόποι κατασκευής μιας τυπικής απόδειξης: ο συντακτικός, ο σημασιολογικός και ο διαδικαστικός.

Σημαντικά κρίνονται τα ευρήματα που προέκυψαν από την παρουσία του γεωμετρικού ισοδυνάμου του προβλήματος σχετικά με τη μεγιστοποίηση του εμβαδού. Στο σημείο αυτό και οι δύο ομάδες κινητοποιήθηκαν με πηγαίο τρόπο προς την αιτιολογία από ερμηνεία που συναγόταν μέσω των συμμεταβολών που δημιουργούνταν σε αυτό. Ωστόσο στη διατύπωση της αντίστοιχης εικασίας για τη μεγιστοποίηση του εμβαδού, δεν διακρίθηκαν στοιχεία "λειτουργικά αναμεμειγμένα" (Boero κ.ά στο Baccaglini-Frank & Mariotti, 2009) προς την κατεύθυνση της αιτιολογίας της αληθοφάνειας του ισχυρισμού τους, ούτε "έντονη δραστηριότητα επιχειρηματολογίας" (βλ. σελ.24) . Εξ αυτού είναι πιθανό να συμπεράνουμε, ότι τα εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα είναι σε θέση να νοηματοδοτήσουν ένα επιχείρημα, δεν αποτελούν όμως απαραίτητα και συστατικό στοιχείο για τη σύλληψη κάποιας αξιωματικής απόδειξης. Επίσης, σε αυτό το σημείο φαίνεται να επαληθεύεται η άποψη της Pedemonte (2007) που δείχνει να διαχωρίζει τη θέση της από τη θεώρηση μιας εικασίας ως το τρίπτυχο: μία δήλωση, μια επιχειρηματολογία και ένα σύστημα εννοιών (Balacheff & Margolinas, 2005), αναφέροντας ότι η εικασία δεν είναι πάντα το αποτέλεσμα μιας επιχειρηματολογίας. Αυτό έγινε σαφές από τις τοποθετήσεις των δύο ομάδων όσον αφορά τη διατύπωση της θέσης τους για τη μεγιστοποίηση του εμβαδού, όπου δεν παρατηρήθηκαν αναφορές σε επιχειρήματα. Φαίνεται επίσης να επαληθεύεται η θέση ότι η διατύπωση της εικασίας μπορεί να θεωρηθεί ως "γεγονός" που προέρχεται απευθείας από ένα σχέδιο ή από τη διαίσθηση ή κάτι ανάλογο. Σε μια τέτοια περίπτωση δεν υπάρχει ρητή επιχειρηματολογία που να αιτιολογεί αυτό το γεγονός (βλ. και σελ. 24). Με βάση αυτές τις αναφορές, μπορούμε να διαπιστώσουμε τη σημασία των εμπειρικών αποδεικτικών σχημάτων προς την κατεύθυνση πρόκλησης κάποιας εικασίας χωρίς όμως (απαραίτητα και) το σχηματισμό ακολουθίας νοημάτων που οδηγούν στην απόδειξη.

Σε αυτό επίσης θεωρούμε ότι επικαιροποιείται και η ανάγκη διάκρισης των σταδίων που αφορούν στη διαδικασία διατύπωσης μιας εικασίας και στη διαδικασία της απόδειξης της. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η σκοπιμότητα αυτής της διάκρισης έγκειται στην ανάγκη να μελετηθούν οι (πιθανές) ασυνέχειες μεταξύ της δομής της επιχειρηματολογίας που χρησιμοποιείται κατά τη διαδικασία παραγωγής εικασιών και από την άλλη, των αποδεικτικών χειρισμών που εν συνεχεία παράγονται για την απόδειξη της (Pedemonte, 2007). Αν και ο στόχος στο σχεδιασμό του συγκεκριμένου σταδίου δεν ήταν η αποκάλυψη στοιχείων που θα οδηγήσουν σε κάποια αναλυτική απόδειξη, εν τούτοις αποτελεί σημαντική αφορμή για τη μελέτη των ασυνεχειών που παρατηρήθηκαν στη συνέχεια μεταξύ της παραγωγής εικασίας και των χειρισμών από τις ομάδες μαθητών που αφορούσαν στην απόδειξή της. Ωστόσο στο συγκεκριμένο σημείο (αλλά και στο επόμενο όπου οι μαθητές εικάζουν το πρόσημο της διακρίνουσας) επαληθεύεται ερευνητικά η θέση " ότι το στάδιο κατά το οποίο διατυπώνεται μια εικασία αποτελεί μια βασική δραστηριότητα σε νοήματα: Το να εικάζεις αποτελεί μία βασική δραστηριότητα στην οποία η επιχειρηματολογία και η απόδειξη πρέπει να συνδέονται.... "(Mariotti , 2012). Λαμβάνοντας τη συγκεκριμένη θεώρηση αλλά και αντίστοιχες με βάση τις οποίες θεωρείται ότι τα στάδια επιχειρηματολογικής δραστηριότητας και διατύπωσης εικασιών θεωρούνται σημαντικά ώστε να γίνει πιο προσιτή η απόδειξη, επαληθεύονται από την έρευνά μας οι συγκεκριμένες θέσεις, μέσω της εξέλιξης της $1^{ης}$ ομάδας. Διατυπώνουμε παράλληλα τις επιφυλάξεις μας για τη γενικευμένη ισχύ αυτής της θέσης, με δεδομένη την αστοχία και τις ελλείψεις στις απαντήσεις της $2^{ης}$ ομάδας.

Προκειμένου να ερμηνεύσουμε τη διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων, φαίνεται αρκετά ασφαλές να χρησιμοποιήσουμε το ρόλο και τη σημασία της εξασκούμενης μεθόδου ως το εργαλείο αλλά –ταυτόχρονα- και ως το αποτέλεσμα της μελέτης. Από τα δεδομένα που συλλέχτηκαν κατά τη φάση διεξαγωγής της δραστηριότητας, μπορούμε να συμπεράνουμε με αρκετή ασφάλεια, την επαλήθευση ερευνητικών θέσεων Βιγκοτσκιανων καταβολών, που αφορούν στο διπλό ρόλο της εξασκούμενης μεθόδου: ως προϋπόθεσης και ως προϊόντος. Με άλλα λόγια, της θεώρησης ότι μια ακολουθούμενη μέθοδος λειτουργεί ταυτόχρονα ως εργαλείο αλλά και ως το αποτέλεσμα της μελέτης (βλ. σχετικά και σελ.50). Στην παρούσα έρευνα φαίνεται να επαληθεύεται με αρκετή πληρότητα, η ευθεία αμφισβήτηση από ερευνητές, της διάκρισης ανάμεσα στη μέθοδο και στο αποτέλεσμα αυτής. Αναδιατυπώνοντας, διαπιστώνουμε την αμφισβήτηση του δίπολου εργαλείο – αποτέλεσμα με την έννοια της ανεξαρτησίας αυτών των δύο (Newman και Holzman 1993). Χαρακτηριστικό στοιχείο για τις προηγούμενες αναφορές αποτελεί η εξέλιξη της 1ης ομάδας κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας. Στο εισαγωγικό στάδιο το οποίο δεν αφορούσε στη χρήση του e-δομήματος, διαπιστώσαμε ότι η προσπάθεια αιτιολογίας για ερμηνεία των μαθητών δεν έδωσε ολοκληρωμένες απαντήσεις από τη συγκεκριμένη ομάδα. Σε αυτό το στάδιο όπως έχει προαναφερθεί, δεν ενδιαφερόμαστε για κάποιο από τα ερευνητικά μας ερωτήματα. Το χρησιμοποιήσαμε για να διαπιστώσουμε τις αλλαγές ή/και τις αναθεωρήσεις των μαθητών στις απαντήσεις που θα προέλθουν από τη διαμεσολάβηση του e-δομήματος και επομένως και (για) την επαλήθευση / διάψευση του διακριτού ρόλου μεταξύ της ακολουθούμενης μεθόδου και του αποτελέσματος. Όπως είδαμε καμία ομάδα δεν έδωσε πλήρη απάντηση και μάλιστα η 1η ομάδα φαίνεται να υπολείπεται σημαντικά στην αιτιολογία της σε σχέση με τη 2η ομάδα, γεγονός που ανατρέπεται στην πορεία από την εξέλιξη της 1ης ομάδας.

Ωστόσο κρίνοντας από την εξέλιξη αυτής της ομάδας στα επόμενα στάδια, φαίνεται η σημασία της διαμεσολάβησης του δομήματος στην αλλαγή του τρόπου νοηματοδότησης των ιδιοτήτων και των σχέσεων που υποδηλώνονταν σε αυτό. Ασφαλώς προς αυτή την κατεύθυνση συνέτεινε η οικειοποίηση αυτής της ομάδας με τις ακολουθούμενες διαδικασίες τέτοιου τύπου. Συνάγεται συνεπώς η σημασία καθώς και ο ρόλος της ακολουθούμενης μεθόδου (τυπικές διαδικασίες προσέγγισης έναντι λιγότερο τυπικών όπως ο πειραματισμός στο e-δόμημα). Επομένως προκύπτει το συμπέρασμα ότι για την εν γένει πορεία της 1ης ομάδας, οι εξασκούμενες μέθοδοι δημιούργησαν το αντικείμενο της γνώσης ταυτόχρονα με τη δημιουργία του εργαλείου μέσω του οποίου αυτή η γνώση θα μπορούσε να γίνει γνωστή. Τα αποτελέσματα αυτής της εξέλιξης είναι ορατά ειδικά στα τελικά στάδια της δραστηριότητας, όπου η 1η ομάδα έχει αναπτύξει σε σημαντικό βαθμό την αιτιολογία από ερμηνεία, την οποία χρησιμοποιεί τόσο για διατύπωση της εικασίας για τη μη αρνητική διακρίνουσα του τριωνύμου p(x) όσο και για να συντάξει την τυπική απόδειξη που αφορά στη μεγιστοποίηση του εμβαδού. Με αυτή συνεπώς την έννοια θεωρούμε ότι πραγματοποιήθηκε μια ιδιότυπη εργαλειοποίηση του δομήματος. [31]

Στην περίπτωση και πάλι της 1ης ομάδας, φαίνεται να ενισχύεται η άποψη ότι κατά τη διάρκεια εργασίας σε ψηφιακά περιβάλλοντα, δημιουργείται –πιθανό σε όχι και τόσο ορατό βαθμό- πλούτος νοημάτων αλλά και δυνατοτήτων για παραγωγή εικασιών. Επίσης μέσω αυτής της εξέλιξης φαίνεται να επαληθεύεται η θέση ότι “στο στατικό περιβάλλον χαρτί - μολύβι, η αφαιρετική διαδικασία της απόδειξης παράγεται κυρίως λόγω της ευφυΐας των υποκειμένων, ενώ στο δυνα-

[31] (βλ. 1.6.1 Θεωρία κατασκευής εργαλείου (Instrumental Genesis))

μικό περιβάλλον είναι η διαδικασία του συρσίματος που μπορεί να τη διαμεσολαβήσει" (Arzarello et al, 1998).

Αντίθετα με τη 2η ομάδα, η 1η ομάδα έδειξε να προσαρμόζεται σταδιακά στο περιβάλλον του e-δομήματος και κατ' επέκταση να αξιοποιεί εποικοδομητικά την ανατροφοδότηση που λαμβάνει από αυτό, αναπτύσσοντας –άτυπα- απαγωγικό συλλογισμό αλλά και παραγωγικό, παρόλο που και αυτή η ομάδα δεν είχε εργαστεί στο παρελθόν σε αντίστοιχα περιβάλλοντα. Σε αυτή την περίπτωση, φαίνεται να επαληθεύεται ο ισχυρισμός μας για τη δυναμική της αιτιολογίας από ερμηνεία με τη διαμεσολάβηση των DGEs σε αυτή -τουλάχιστον- την κατηγορία μαθητών. Κι αυτό γιατί μέσω της συγκεκριμένης έρευνας, διακρίνεται η εξέλιξη στην πορεία της συγκεκριμένης ομάδας: ενώ στα αρχικά στάδια της δραστηριότητας προσφεύγει σε αριθμητικές μεθόδους που είναι αναντίστοιχες του επιπέδου γνώσεων της συγκεκριμένης τάξης , στην πορεία χρησιμοποιεί τη ρευστότητα των δυναμικών αναπαραστάσεων (αιτιολογία από ερμηνεία) και καταλήγει να αιτιολογεί με πληρότητα τα κεντρικά ερωτήματα της εργασίας. Με άλλα λόγια, φαίνεται να ενσωματώνει άτυπα την αιτιολογία από ερμηνεία που προκαλείται μέσω των συνθηκών bfp από τη διαμεσολάβηση των DGEs.

Τα ευρήματα μας αναφορικά με τη 2η ομάδα, δείχνουν ότι η ακολουθούμενη μέθοδος δημιουργεί σταδιακά κάποιο είδος αποδιοργάνωσης της ομάδας, γεγονός που αποτυπώνεται εμφατικά στα τελευταία στάδια, με έκδηλη την αδυναμία της να κατανοήσει ακόμη και το ζητούμενο προς απόδειξη ερώτημα. Στα αρχικά ερωτήματα, δείχνει να χειρίζεται δυναμικά και ως ένα σημείο αποτελεσματικά την αιτιολογία για ερμηνεία. Στην πορεία όμως και ειδικά στα τελικά στάδια της δραστηριότητας, δείχνει σημαντικές αδυναμίες στην αιτιολογία από ερμηνεία οι οποίες αποτυπώνονται στις απαντήσεις της. Η διαφορετική αυτή εξέλιξη της συγκεκριμένης ομάδας, μας υποδεικνύει να επανεξετάσουμε το σχεδιασμό της δραστηριότητας τόσο ως προς το e-δόμημα όσο και ως προς τη σύνθεση των ερωτημάτων του φύλλου εργασίας. Τα ευρήματα της έρευνας μάς υποχρεώνουν να θεωρήσουμε ότι στην περίπτωση της 1ης ομάδας το πλήθος αλλά και το είδος των δυναμικών αναπαραστάσεων συνέδραμαν αρκετά στο να σημειωθεί σημαντική εξέλιξη στο συλλογισμό της. Στην περίπτωση της συγκεκριμένης ομάδας θεωρούμε ότι η προσωπική νοηματοδότηση των δυναμικών αναπαραστάσεων της δραστηριότητας, δημιούργησε το κατάλληλο σημειωτικό δυναμικό (semiotic potential, βλ. και σελ.44) ώστε να αναδυθούν ατομικά νοήματα, τα οποία στη συνέχεια μέσω της διαπραγμάτευσης μεταξύ των μελών της ομάδας, την οδήγησαν σε εύστοχες κατασκευές επιχειρημάτων και αποδείξεων. Για την περίπτωση όμως της 2ης ομάδας και στα πλαίσια της Θεωρίας της σημειωτικής διαμεσολάβησης, δεν φαίνεται να επαληθεύεται ο κρίσιμος ρόλος της αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών της ομάδας αλλά και ανάμεσα στην ομάδα και τον ερευνητή. Οι διάλογοι τόσο μεταξύ των μελών αυτής της ομάδας όσο και με τον ερευνητή, δεν κατέγραψαν σημαντικά ευρήματα που να συντείνουν προς την κατεύθυνση δημιουργίας κατάλληλων δομών περιβάλλοντος ανακαλυπτικής μάθησης, αναφορικά με τα τελικά και πλέον κρίσιμα στάδια της δραστηριότητας. Η συγκεκριμένη ομάδα, σχεδόν στο σύνολο της δραστηριότητας χρησιμοποιεί παραγωγικούς συλλογισμούς δείχνοντας και με αυτόν τον τρόπο την προσκόλλησή της σε τυπικές μεθόδους προσέγγισης των ερωτημάτων. Η αδυναμία της να ενσωματώσει στη συλλογιστική της, ερμηνείες από την ανατροφοδότηση του e-δομήματος (αιτιολογία από ερμηνεία), την περιορίζει σχεδόν αποκλειστικά σε μορφές παραγωγικών συλλογισμών θέτοντας φραγμούς στην εμφάνιση απαγωγικού συλλογισμού. Από τους διαλόγους που αναφέραμε στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων, διακρίνονται κάποια ίχνη προσπάθειας απαγωγικής συλλογιστικής, εν τούτοις η συγκεκριμένη ομάδα δείχνει να εμπιστεύεται περισσότερο τυπικές προσεγγίσεις που καταλήγουν να λειτουργούν περιοριστικά στην ανάπτυξη απαγωγικού συλλογισμού, απομακρύνοντας την παράλληλα από ανακαλυπτικές πρακτικές. Αναδιατυπώνοντας τις προηγούμενες θέσεις, θα λέγαμε ότι η διαμεσολάβηση του e-δομήματος, συνέτεινε στη δημιουργία ενός “φυσικού παραθύρου” για τη δημιουργία νέας γνώσης, με την έννοια του *learner's meaningmaking* που αναφέρεται στη βιβλιογραφία και αφορά ειδικά τα υπολογιστικά περιβάλλοντα (Noss, Healy and Hoyles – 1997) ως προς την 1η ομάδα, κάτι που δεν ίσχυσε στον ίδιο βαθμό και για τη 2η ομάδα.

Αναφορικά με το ρόλο των δυναμικών αναπαραστάσεων του e-δομήματος, διακρίθηκε η σημαντική συμβολή τους στην 1η ομάδα, προκειμένου οι μαθητές να εσωτερικεύσουν συγκεκριμένες ιδιότητες πριν προβούν σε τυπικές αποδείξεις (συνθήκες bfp). Σε αρκετά στάδια της δραστηριότητας διακρίναμε ότι η 1η ομάδα αντιμετώπιζε την ερμηνεία των αναπαραστάσεων του προβλήματος ως συστατικό στοιχείο νοηματοδότησης, προκειμένου να προχωρήσει στη διατύπωση κάποιας εικασίας και στη συνέχεια να αναζητήσει κατάλληλη απόδειξη. Ειδικά στα δύο τελευταία στάδια, διακρίνονται στρατηγικές γνώσης με χαρακτηριστικά σημασιολογικής και συντακτικής παραγωγής απόδειξης (Weber, 2001). Σε αυτά τα στάδια η 1η ομάδα προτάσσει μια διαισθητική και σχεσιακή κατανόηση ως βάση για την κατασκευή ενός επιχειρήματος και στη συνέχεια μιας τυπικής απόδειξης (βλ. σχετικά και σελ.20). Φανερά δεν ισχύει το ίδιο για τη 2η ομάδα, όσον αφορά τον τρόπο λειτουργίας του δυναμικού περιβάλλοντος του δομήματος. Στην περίπτωση αυτή, το πλήθος των αναπαραστάσεων καθώς και οι πολλαπλές (γεωμετρικές και αλγεβρικές) προσεγγίσεις του προβλήματος δεν λειτούργησαν με τον ίδιο τρόπο που λειτούργησαν στην 1η ομάδα. Με άλλα λόγια, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ισχυρό σημείο της δραστηριότητας που –κατά τη γνώμη μας- είναι η αυξανόμενη ρευστότητα των αναπαραστάσεων των συμμεταβολών του προβλήματος, μπορεί δυνητικά να αποτέλεσε τροχοπέδη για τη συγκεκριμένη ομάδα μαθητών και κατ’ επέκταση και σε αντίστοιχες κατηγορίες μαθητικών κοινών.

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι θα παρουσίαζε κατά τη γνώμη μας ενδιαφέρον μία μελλοντική έρευνα με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα σε μαθητές της Α΄ Λυκείου[32], οι οποίοι δεν έχουν κάποια επαφή με τη μετρική σχέση που χρησιμοποιήθηκε στο γεωμετρικό ισοδύναμο και η οποία διδάσκεται για πρώτη φορά στη Β΄ Λυκείου. Επιπλέον, το ερευνητικό ενδιαφέρον θα μπορούσε να εστιάσει στη δυνατότητα ή στην αδυναμία των μαθητών της Α΄ Λυκείου, να διατυπώσουν εικασίες καθώς και στους τύπους συλλογιστικής που θα μπορούσαν να αναπτύξουν σε μια τέτοια περίπτωση. Ο ισχυρισμός μας για αυτό, στηρίζεται στο γεγονός ότι η συγκεκριμένη τάξη του Λυκείου, βρίσκεται σε κάποιο ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ του γυμνασιακού αποδεικτικού πλαισίου με κύριο χαρακτηριστικό συμβολικά αποδεικτικά σχήματα και εκείνου του λυκειακού πλαισίου με έμφαση στα αναλυτικά – αξιωματικά αποδεικτικά σχήματα.

Ως προς τη δυνατότητα των δύο ομάδων να διατυπώσουν κάποια σχετική εικασία στο ερώτημα Ε5, διακρίνεται η δυσκολία έως και η αδυναμία και των δύο ομάδων προς αυτή την κατεύθυνση. Συγκεκριμένα φαίνεται η δυσκολία γενίκευσης των ευρημάτων που προηγήθηκαν στα προηγούμενα στάδια. Από τα διευκρινιστικά ερωτήματα που υπέβαλλαν και οι δύο ομάδες στον ερευνητή, παρατηρείται η δυσκολία καθώς και η πιθανή ανασφάλεια των μελών των δύο ομάδων να διατυπώσουν με σιγουριά κάποιο γενικό συμπέρασμα που θα μπορούσε να προκύψει από τον πειραματισμό που είχε προηγηθεί. Στο σημείο αυτό φαίνεται να μην επαληθεύονται πλήρως οι ερευνητικές θέσεις σχετικά με την ύπαρξη γνωστικής συνέχειας στις διαδικασίες οικοδόμησης εικασιών και απόδειξής τους, καθώς και ότι αυτό εμφανίζεται σε σημασιολογικούς όρους (Pede-

[32] Με βάση το υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα οι μαθητές της Α΄ Λυκείου διδάσκονται για πρώτη φορά την παραβολή ενώ αυτό γινόταν στο παρελθόν σε μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου.

monte, 2001) και όχι τόσο στις διαρθρωτικές (Duval, 1999) και επιστημολογικές πτυχές (Arzarello, Olivero, Robutti & Paola, 1999), αφού οι μορφές της δομής καθεμιάς από αυτές τις διεργασίες και τα αποτελέσματα τους είναι διαφορετικά. Ενώ δηλαδή και οι δύο ομάδες αδυνατούν να διατυπώσουν την εικασία που αφορά στη μεγιστοποίηση του εμβαδού ορθογωνίων με σταθερή περίμετρο, η 1η ομάδα προβαίνει -παρόλα αυτά - στο επόμενο στάδιο στην τυπική απόδειξή της. Αντίστοιχα, η $2^{η}$ ομάδα ενώ διατυπώνει μερικώς την εικασία στο θέμα αυτό, δείχνει δυσκολίες τόσο στις σημασιολογικές όσο και στις διαρθρωτικές πτυχές της απόδειξης που παρουσιάζει.

Από μια άλλη οπτική τώρα, παρατηρούμε ότι επαληθεύονται σε μεγάλο βαθμό, ερευνητικά δεδομένα τα οποία αναφέρονται στη δυσκολία των μαθητών να διατυπώνουν εικασίες θεωρώντας ότι κάτι τέτοιο είναι περίπου απαγορευτικό στον κόσμο των μαθηματικών (βλ. "μιμητικός συλλογισμός - αυθεντία", Lithner, 2008). Από την έρευνα επιβεβαιώνεται ότι αυτό είναι σύνηθες ειδικά σε εκπαιδευτικά συστήματα που έχουν στα αναλυτικά τους προγράμματα ως κεντρική στόχευση τα αναλυτικά –αξιωματικά αποδεικτικά σχήματα και μάλιστα κυρίως εκείνα με δομικό (structural) περιεχόμενο (βλ. αποδείξεις προτάσεων και θεωρημάτων). Με διαφορετική διατύπωση αναφερόμαστε σε συστήματα που επικεντρώνονται περισσότερο στις συντακτικές πτυχές μιας αποδεικτικής διαδικασίας αντί των σημασιολογικών (βλ. διατύπωση εικασιών και ανάπτυξη επιχειρηματολογίας μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων). Υπό αυτή τη θεώρηση, παρατηρήσαμε στην έρευνά μας τη δυσκολία των μαθητών να συλλάβουν τη φάση διατύπωσης μιας εικασίας ως τον προθάλαμο δημιουργίας νοήματος που θα χρησιμοποιηθεί εν συνεχεία ως βάση για την παραγωγή της αντίστοιχης απόδειξης. Επίσης φαίνεται να επαληθεύονται ερευνητικά δεδομένα που αφορούν στο θεσμικό περιβάλλον της τάξης (κατά Godino και Batanero) και της θεώρησης του εκπαιδευτικού ως μιας μορφής αυθεντίας. Εντοπίζεται σε αυτό το σημείο, η ανάγκη επαναπροσδιορισμού των ρόλων εκπαιδευτικού και μαθητών ως κοινά ενεργούμενων κοινοτήτων πρακτικού προσανατολισμού προς την κατεύθυνση κατασκευής συμπερασμάτων με δραστηριότητες που διευκολύνουν εύλογες εικασίες σε ψηφιακά περιβάλλοντα. Αναδιατυπώνοντας την τελευταία θέση, υποστηρίζουμε την ανάγκη αλλαγής της κεντρικής στόχευσης του ρόλου μιας απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά, από την έμφαση στη δομή προς την κατασκευή νοημάτων μέσω αυτής. Ασφαλώς κάτι τέτοιο, δεν πρέπει να αγνοεί ή να παραμερίζει τη ρητή αυστηρότητα που πρέπει να περιβάλλει τόσο το στάδιο διαμόρφωσης συνθηκών διατύπωσης μιας εικασίας όσο και στο στάδιο της απόδειξής της.

Αναφορικά με ορισμένα γενικότερα συμπεράσματα, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές δεν χρησιμοποιούσαν το σύρσιμο πολύ συχνά στα αρχικά στάδια της δραστηριότητας. Πρόκειται βέβαια για ένα συνηθισμένο φαινόμενο το οποίο διατρέχει μαθητές όλων των σχολικών επιπέδων που δεν είχαν (ή είχαν μικρή) προηγούμενη εμπειρία. Είναι σαφές ότι απαιτείται πριν από την εξαγωγή συμπερασμάτων από τους ίδιους, να μάθουν πρώτα να μετακινούν τα μεταβλητά αντικείμενα. Για να είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί το σύρσιμο με παραγωγικό τρόπο απαιτείται η "εσωτερίκευση" της λειτουργίας του (Vygotsky, 1978). Διαπιστώσαμε επίσης ότι το σύρσιμο είναι δυνατό να θεωρηθεί ως ένα στοιχείο που αποσπά και ως εκ τούτου παρεμβάλλει εμπόδια, καθώς οι μαθητές δεν είναι συνηθισμένοι να βλέπουν αντικείμενα να μετακινούνται στην οθόνη γραφικών του υπολογιστή λόγω της συνεχούς εργασίας τους στο χαρτί. Επομένως μέχρι να επιτευχθεί μια συνειδητή χρήση του συρσίματος, ήταν απίθανο οι μαθητές να μπορούν πραγματικά να το αξιοποιήσουν για να νοηματοδοτήσουν τα είδη των συμμεταβολών της δραστηριότητας. Από την άλλη φαίνεται να επικαιροποιείται σε αυτό το σημείο, το διδακτικό δίλημμα σχετικά με το βαθμό ελευθερίας του dragging όπου στην έρευνά μας ήταν σαφώς περιορισμένο: Αν είναι μεγάλος τότε η έρευνα πιθανό να μη μπορεί να διερευνήσει συγκεκριμένα ερωτήματα, ενώ αν είναι μικρός υπάρχει ο κίνδυνος να μελετάμε τις δικές μας επιλογές και όχι τις (πηγαίες) αντιδράσεις των μαθητών. Επανερχόμαστε σε αυτό το σημείο στο ρόλο του εκπαιδευτικού - ερευνητή καθώς αυτός είναι επικεφαλής της δόμησης διδακτικών αλληλουχιών, τέτοιων ώστε να λαμβάνει χώρα η "εσωτερίκευση" που προαναφέρθηκε ώστε (αυτή) να αποτελέσει μέρος της σχολικής κουλτούρας σε διδασκαλίες με ψηφιακά μέσα. Καθοριστικός επίσης ο ρόλος του εκπαιδευτικού-ερευνητή όσον αφορά στο σχεδιασμό αλλά και στην υλοποίηση σημειωτικών διαδικασιών που θα καλλιεργήσουν προσωπικά νοήματα και σημασίες στους μαθητές, επιβεβαιώνοντας το ρόλο του ως σημειωτικού μεσολαβητή (semiotic mediator).

Ειδικότερα:

Όσον αφορά στο 1ο ερευνητικό ερώτημα , μπορούμε να απαντήσουμε καταφατικά σε αυτό όσον αφορά την πρόκληση και στις δύο ομάδες και των τριών τύπων συλλογισμών, ανεξάρτητα από τις επί μέρους διαφοροποιήσεις τους κατά την εξέλιξη της δραστηριότητας. Αναφορικά με τις δομές κατάλληλου εννοιολογικού πλαισίου, θεωρούμε ότι αναπτύχθηκαν και στις δύο ομάδες δομές του συγκεκριμένου τύπου με περισσότερο εμφανή χαρακτηριστικά στην 1η ομάδα. Θεωρούμε επίσης ότι οι συγκεκριμένες δομές έχουν χαρακτηριστικά πρόσθετης παιδαγωγικής αξίας, με βάση το παρακάτω πλαίσιο:[33]

- Τα μαθηματικά σε χρήση και διαπραγμάτευση
- Έμφαση στο μαθηματικό συλλογισμό
- Η ιδιαιτερότητα των μαθηματικών: γενίκευση, βεβαιότητα, ακρίβεια και συντομία
- Τα μαθηματικά ως εμπειρία και ως κουλτούρα: εμπλοκή με τα μαθηματικά
- Έκφραση και νοηματοδότηση

Με βάση το συγκεκριμένο πλαίσιο, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η διαμεσολάβηση του e-δομήματος συνέτεινε ώστε να δημιουργηθούν δομές εννοιολογικού εδάφους (συνθήκες bfp) που προηγούνται της τυπικής απόδειξης και στις δύο ομάδες, με αποτελεσματικότερη λειτουργία όμως στην 1η ομάδα. Ισχυριζόμαστε ότι οι λειτουργίες του e-δομήματος και ο πειραματισμός σε αυτό δημιούργησε την ανάγκη για μαθηματικό συλλογισμό και επικύρωση των αποτελεσμάτων, ώστε να ακολουθήσει η απαιτούμενη βεβαιότητα για τη γενικευμένη ισχύ των αποτελεσμάτων του πειραματισμού. Επίσης συνέτεινε στο να καλλιεργηθεί η ιδέα "των μαθηματικών σε χρήση", αφού οι μαθητές κλήθηκαν να διεκπεραιώσουν ένα ρεαλιστικό πρόβλημα, ενώ για το σκοπό αυτό διαπραγματεύτηκαν μεταξύ τους σε ευρύ φάσμα συλλογισμών. Επιπλέον, όπως καταγράφηκε και στη συνέντευξη που επακολούθησε με τους συμμετέχοντες, η διάδραση με το δόμημα προσέφερε στους μαθητές μια ιδιαίτερη εμπειρία με σαφή και διακριτά στοιχεία από την ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά στη σχολική καθημερινότητα. Τέλος, σε αρκετά στάδια διακρίθηκε η νοηματοδότηση των δυναμικών αναπαραστάσεων του δομήματος, γεγονός που στη συνέχεια προκάλεσε την ανάγκη για έκφραση μαθηματικών συλλογισμών και στις δύο ομάδες (με έμφαση και πάλι στην 1η ομάδα). Εν πολλοίς, η διαφοροποίηση των δύο ομάδων ως προς τον τρόπο λειτουργίας και χρήσης του e-δομήματος εντοπίζεται στα εξής: η 1η ομάδα δημιούργησε μέσω της χρήσης αυτού κατάλληλη υποδομή για σημασιολογικές κατασκευές νοημάτων ενώ η 2η ομάδα εμμένοντας προσκολλη-

[33] (Κυνηγός, 2017): ΠΜΣ – Διδακτική ΙΙ

μένη σε συντακτικές κατασκευές αιτιολογιών και νοημάτων περιχαρακώθηκε γύρω από τυπικές διαδικασίες που εν πολλοίς και ειδικά στα τελικά στάδια της δραστηριότητας ήταν αδιέξοδες .

Σχετικά με το 2ο ερευνητικό ερώτημα τα συμπεράσματα έχουν εν γένει αναφερθεί στα προηγούμενα. Στο σημείο αυτό απλώς κρίνουμε σκόπιμο να επισημάνουμε ότι μέσω της έρευνας, φαίνεται η διαφορά δυναμικού στη φύση μεταξύ των δύο τρόπων αιτιολογίας: την αιτιολογία από ερμηνεία και την αιτιολογία για ερμηνεία. Θεωρούμε ότι αυτό έγινε περίπου σαφές από τις προηγούμενες αναφορές στην εξέλιξη της 1ης ομάδας κατά την ανάπτυξη της δραστηριότητας. Καθοριστικός παράγοντας κατά τη γνώμη μας για αυτή την εξέλιξη, ήταν ο διαμεσολαβητικός ρόλος των DGEs καθώς και το σημειωτικό δυναμικό που αναπτύχθηκε από αυτή τη διαμεσολάβηση. Σημειώνεται επίσης η περιορισμένη στα αρχικά στάδια οπτικο-χωρική ανάγνωση των διαγραμμάτων και των αναπαραστάσεων από αυτή την ομάδα, σε σχέση με την αντιστροφή που παρατηρήθηκε από το μέσο της δραστηριότητας και μετά. Ερμηνεύουμε την εξέλιξη της συγκεκριμένης ομάδας ως ένα είδος περάσματος από τα "μαθηματικά" με την έννοια του έτοιμου "προϊόντος" στη "μαθηματικοποίηση" και στις διαδικασίες που τη συγκροτούν: στη διερεύνηση, στο συλλογισμό και στην επικοινωνία (Winter 1975).

Αντίθετα, για την περίπτωση της 2ης ομάδας φαίνεται ότι το εννοιολογικό πλαίσιο bfp συνθηκών δε λειτούργησε με τον ίδιο τρόπο. Η ίδια ομάδα λειτουργεί περιοριστικά ως προς τα μαθηματικά ερεθίσματα που προκαλούνται από τις δυναμικές αναπαραστάσεις. Συμπεραίνουμε κατ' επέκταση ότι για τη συγκεκριμένη ομάδα θεωρείται περισσότερη "φυσιολογική" η αιτιολογία για ερμηνεία – κυρίως στα αναλυτικά αποδεικτικά σχήματα- η οποία υπαγορεύει στην ομάδα την αναζήτηση τυπικών διαδικασιών. Εξαιτίας της συγκεκριμένης στάσης, η ομάδα αποφεύγει τη συστηματική εμπλοκή με την ανάγνωση των αναπαραστάσεων του δομήματος και ως εκ τούτου καταφεύγει σε περισσότερο συνήθεις για αυτήν και άρα "ασφαλέστερες" διαδικασίες. Φαίνεται ότι η επαφή με το e-δόμημα προκαλεί ένα είδος δυναμικής αποδιοργάνωσης των γνωστικών σχημάτων της ομάδας, που έχει ως συνέπεια την - άτυπη- άρνηση της να συμμετάσχει στην πρόσκτηση νοημάτων με χαρακτηριστικά της φυσικής αρχής δράση – αντίδραση. Μπορούμε συνεπώς να θέσουμε τον προβληματισμό αν η συγκεκριμένη ομάδα σε επόμενη εργασία με αντίστοιχα χαρακτηριστικά, εμφάνιζε διαφοροποιήσεις ως προς αυτές τις παρατηρήσεις και προς ποια κατεύθυνση;

Εν κατακλείδι διαπιστώνουμε ότι η τεχνολογία από μόνη της δεν προκαλεί εκπαιδευτική αλλαγή. Πολύ συχνά υπάρχει η πεποίθηση ότι αν η χρήση της τεχνολογίας γίνεται με σωστές πρακτικές, τότε οι διδακτικές σίγουρα θα βελτιωθούν (Arzarello, ZDM 2002 Vol. 34 (3)). Αυτή η υπόθεση δεν αναγνωρίζει ότι ένα μαθησιακό περιβάλλον που βασίζεται στην τεχνολογία μπορεί να είναι πολύ σύνθετο και μπορεί να χρειάζεται κάποιο διάστημα για να αξιοποιηθεί με τρόπο χρήσιμο (από τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές) σύμφωνα με τα σύνολα μαθησιακών στόχων που ενίοτε τίθενται. Γενικά, η χρήση νέων τεχνολογιών στην τάξη συνεπάγεται τον επανακαθορισμό περιεχομένων, μεθόδων και του ρόλου του εκπαιδευτικού- ερευνητή (Bottino & Chiappini, 1995; Noss, 1995). Έχοντας απλώς διαθέσιμο ένα λογισμικό, δεν σημαίνει ότι η εκπαιδευτική κοινότητα αυτόματα θα ωφεληθεί λιγότερο ή περισσότερο από τις δυνατότητες που παρέχει (Perkins, 1985). Με άλλα λόγια κρίνεται σκόπιμη η συνεχής διερεύνηση της (αμφισβητούμενης) ερώτησης για το "αν ένας μαθητής μπορεί να μάθει και να κάνει περισσότερα μαθηματικά με υπολογιστή ή με τον παραδοσιακό τρόπο;" και της ερώτησης που χρήζει διαρκούς έρευνας ως προς το περιεχόμενο " Ποιες είναι οι περιστάσεις όπου κάθε μέθοδος είναι κατάλληλη;» (Kaput, 1992).

Με τις θέσεις που διατυπώθηκαν στα προηγούμενα δεν ισχυριζόμαστε ότι τα συμπεράσματα αυτής της έρευνας έχουν καθολική ισχύ. Πιστεύουμε όμως ότι είναι αρκετά ενδεικτικά ώστε να εμπλουτίσουν τις ερευνητικές μας θέσεις σχετικά με τα δύο είδη αιτιολογίας όπως επίσης και τον –πιθανώς- καταλυτικό ρόλο των DGEs προς την κατεύθυνση καλλιέργειας αιτιολογίας από ερμηνεία. Πιστεύουμε επίσης ότι χρειάζονται περισσότερες έρευνες και μελέτες για τον ίδιο σκοπό. Θεωρούμε ότι με δραστηριότητες που διαθέτουν κατάλληλο σχεδιασμό και αφορούν σε βασικές μαθηματικές έννοιες, θα ήταν εφικτό με τη διδασκαλία τους να προσφέρουν στους μαθητές ένα πλούσιο εννοιολογικό υπόβαθρο. Κυρίως όμως ότι θα ήταν δυνατό να (τους) προσφέρουν τη δυνατότητα για πειραματισμό, κατασκευή νέας γνώσης και αυτενέργεια που απουσιάζουν αισθητά από τα τυπικά περιβάλλοντα μάθησης.

Τέλος, βιβλιογραφικά τεκμαίρεται ότι η εισαγωγή κάθε είδους τεχνολογίας στο σχολείο επηρεάζει όχι μόνο τη διδακτική διαδικασία , αλλά ακόμα και τη σύλληψη και τον έλεγχο των διδακτικών κατά-στάσεων. Όσον αφορά στην παρούσα έρευνα, θα ήταν σχετικό να αναφέρουμε ότι ο σχεδιασμός της δραστηριότητας καθώς και η διαμεσολάβηση του ψηφιακού εργαλείου φάνηκε να συντείνει σημαντικά στην αυτονόμηση και αυτοτέλεια των μαθητών, στοιχείο καθοριστικό αλλά και ενδεικτικό της κονστρουκτιβιστικής αντίληψης για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Πιστεύ-ουμε ότι ως προς την ακολουθούμενη μαθησιακή διαδικασία της εργασίας μας, συμβάλλαμε κατ' ελάχιστο στη διαμόρφωση της αντίληψης στους μαθητές, ότι οι μαθηματικές έννοιες, οι δομές και οι ιδέες έχουν εφευρεθεί ως εργαλεία για να οργανώσουν τα φαινόμενα του φυσικού, κοινωνικού και διανοητικού κόσμου. Με αυτή την έννοια θεωρούμε ότι ενθαρρύνουμε τη δημιουργικότητα των μαθητών μας, που παρότι δεν είναι εύκολα ορατή, ωστόσο παραμένει άφθονη.

Παράρτημα

Φύλλα Εργασίας

Επεκτάσεις δραστηριότητας

Ευρετήριο όρων και ονομάτων

Φύλλο Εργασίας

αιτιολογία από /ή για ερμηνεία
στο μαθηματικό συλλογισμό με τη διαμεσολάβηση DGEs

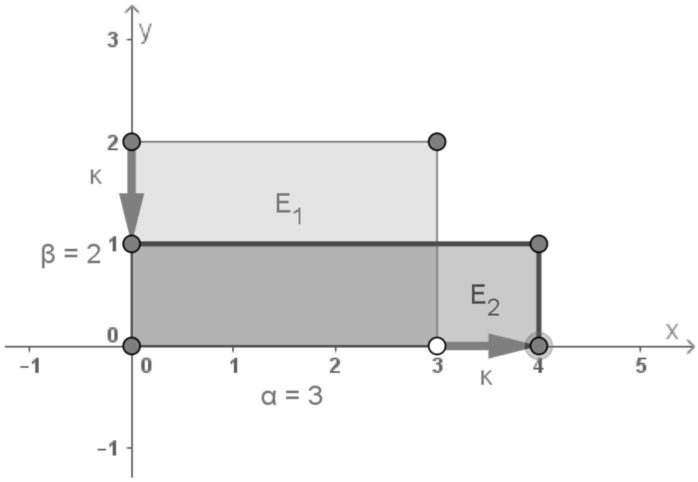
Φύλλο Εργασίας

Ερευνητική Διδασκαλία	• Θέμα: ποια ανταλλαγή είναι η πιο συμφέρουσα;
Τάξη	• Β΄Λυκείου
Ομάδα	• Α Β Γ Δ Ε
Εκπρόσωποι Ομάδας	• 1. • 2.

Μ. Τσιλπιρίδης

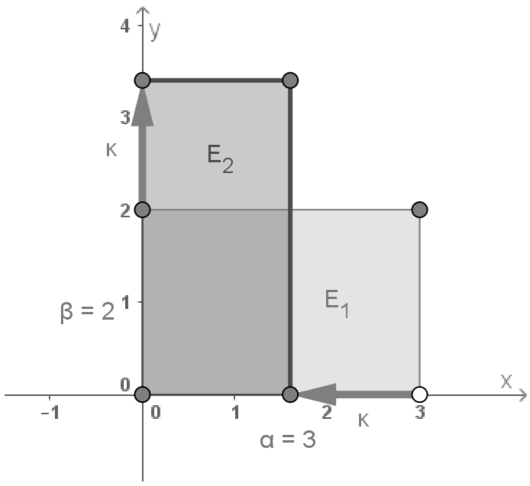
Μάρτιος 2017

Ο ιδιοκτήτης μιας έκτασης E_1 σχήματος ορθογωνίου, μήκους α=3 ($\times 10^2$ m) και πλάτους β=2 ($\times 10^2$ m) θα πρέπει να παραχωρήσει ένα τμήμα αυτής της έκτασης στο Δήμο της περιοχής ώστε να ανοιχθεί δρόμος που θα περνάει μέσα από αυτή. Η συμφωνία μεταξύ τους αφορούσε στο να μειωθεί μία από τις δύο διαστάσεις κατά κ μέτρα και να αυξηθεί η άλλη διάσταση επίσης κατά κ μέτρα. Αυτό μπορούσε να γίνει με δύο εναλλακτικούς τρόπους που φαίνονται στα σχήματα 1 & 2.



Νότιο – Ανατολική μεταβολή

σχ.1



Βόρειο - Δυτική μεταβολή

σχ.2

1^o στάδιο (χωρίς τη χρήση του e-δομήματος)

Α. Υποθέστε ότι ο ιδιοκτήτης σας προσλαμβάνει ως σύμβουλο ώστε να του προτείνετε ένα από τα 2 είδη μεταβολής. Ποιο είδος μεταβολής θα τον συμβουλεύατε να επιλέξει προκειμένου να πάρει έκταση ίση με την αρχική; Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

2ο στάδιο (χρήση του e-δομήματος)

Ανοίξτε το e-δόμημα MSC_emathisis.ggb. Σε αυτό υπάρχει ο δρομέας κ από τον οποίο μεταβάλλονται το μήκος α και το πλάτος β του ορθογωνίου E_1 κατά $\alpha \pm \kappa$, $\beta \mp \kappa$ αντίστοιχα.

Ε1. Ανοίξτε τους διακόπτες [P] και [T] και δώστε κίνηση στο δρομέα κ από το διακόπτη κάτω αριστερά. Στην οθόνη σχηματίζονται οι καμπύλες από το σημείο $P(\kappa, f(\kappa))$ με $f(\kappa) = (3+\kappa)(2-\kappa)$ και το σημείο $T(\kappa, g(\kappa))$ με $g(\kappa) = (3-\kappa)(2+\kappa)$.

Συμπληρώστε τα κενά και τις επιλογές στον παρακάτω πίνακα όπου Ν-Α είναι η νότιο-ανατολική μεταβολή και Β-Δ η βόρειο-δυτική :

Εξίσωση	Τιμές του κ	Είδος μεταβολής	
f(κ)=6	κ= …, …	☐ N-A	☐ B-Δ
g(κ)=6	κ = …, …	☐ N-A	☐ B-Δ

Δικαιολογήστε τις επιλογές σας για το “Είδος μεταβολής” που επιλέξατε:

E2. Με ανοικτούς τους διακόπτες [P] και [Σ] δώστε κίνηση στο δρομέα κ. Στην οθόνη σχηματίζονται οι καμπύλες των σημείων $P(\kappa, f(\kappa))$ και $\Sigma(\kappa, E_2)$ που αναπαριστά τη μεταβολή του εμβαδού E_2 συναρτήσει των τιμών του κ.

I. Ποια συνάρτηση φαίνεται να παριστάνει το γράφημα των σημείων $\Sigma(\kappa, E_2)$;

II. Για ποιες τιμές του κ φαίνεται στο λογισμικό ότι οι 2 προηγούμενες καμπύλες ταυτίζονται;
Τιμές του κ: ....

Δικαιολογήστε τώρα αλγεβρικά την απάντησή σας:

Διορθώστε τώρα τις τιμές του δρομέα κ ώστε οι καμπύλες των σημείων P και Σ να ταυτίζονται (δεξί κλικ στο δρομέα κ, Ιδιότητες & Δρομέας).

3ο στάδιο (διατύπωση εικασίας)

Υποθέστε τώρα ότι στις διαπραγματεύσεις του Ιδιοκτήτη με το Δήμο, του προσφέρθηκε η δυνατότητα να ανταλλάξει την έκταση E_1 με έκταση μεγαλύτερου εμβαδού από τη δική του, μεταβάλλοντας πάλι το μήκος και το πλάτος με τον ίδιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο ερώτημα.

Σε αυτό το στάδιο εξετάζουμε την περίπτωση αν είναι δυνατό ο Ιδιοκτήτης να πάρει έκταση μεγαλύτερη από την αρχική και σε καταφατική περίπτωση με ποιον τρόπο μεταβολής του αρχικού εμβαδού. Εργαστείτε μόνο με το μοντέλο f(κ) για το εμβαδόν E_2.

E3. Από το γράφημα των σημείων P, βρείτε τις τιμές του κ ώστε $E_2 > 6$.

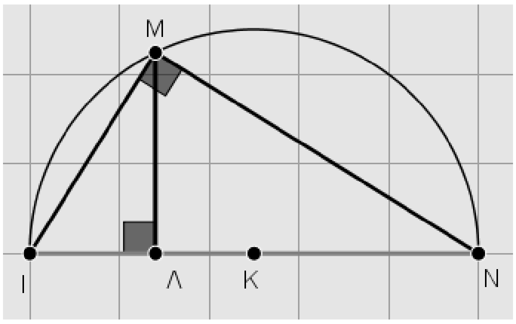
Τιμές του κ: ....

Δικαιολογήστε αλγεβρικά την απάντησή σας:

E4. Ανοίξτε το διακόπτη "1η Αναπαράσταση". Εμφανίζεται το ημικύκλιο διαμέτρου $IN = I\Lambda + \Lambda N$ όπου: $I\Lambda = AB$ και $\Lambda N = OA$.

Τότε σε κάθε θέση του σημείου Λ, για το ύψος ΜΛ του ορθογωνίου τριγώνου ΙΜΝ θα ισχύει:

$M\Lambda^2 = I\Lambda \cdot \Lambda N$



Μπορείτε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω στοιχεία ώστε να εξετάσετε αν και πότε μεγιστοποιείται το εμβαδόν E_2 ;

Αναπτύξτε εδώ το σκεπτικό σας

E5. Από τα ευρήματα της προηγούμενης ερώτησης, διατυπώστε παρακάτω κάποιον ισχυρισμό που φαίνεται να ισχύει σχετικά με τα εμβαδά ορθογωνίων όπως του E_2:

4^o στάδιο: Απόδειξη ισχυρισμού

Ε6. I. Αν συμβολίσουμε με x και y τις διαστάσεις του ορθογωνίου E_2, δείξτε ότι το σύστημα :

(Σ): $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=E_2 \end{cases}$ είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $-x^2+5x-E_2=0$

II. Ανοίξτε το διακόπτη p(x). Σχηματίζεται η γραφική παράσταση της παραβολής $p(x)=-x^2+5x-E_2$.

Πειραματιστείτε για τις διάφορες τιμές του κ. Τί παρατηρείτε για τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης με τον άξονα xx΄ καθώς μεταβάλλεται το κ και από ποια σχέση ερμηνεύεται αλγεβρικά αυτή η παρατήρηση;

Ε7. Μπορείτε τώρα να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_2 γίνεται μέγιστο όταν x=y=2.5 ;

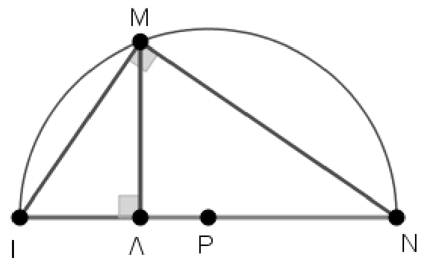
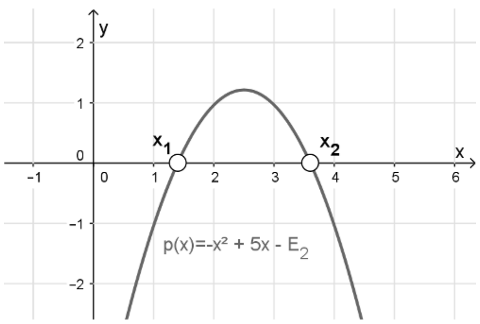
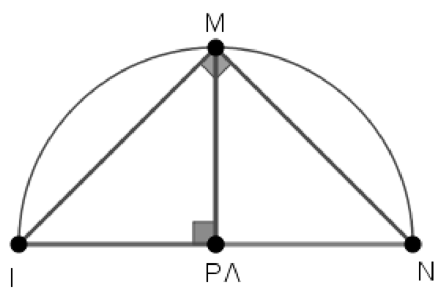
Ε8. Τελικά ποια λύση θα προτείνατε στον Ιδιοκτήτη της έκτασης να διαπραγματευτεί με το Δήμο της περιοχής του;

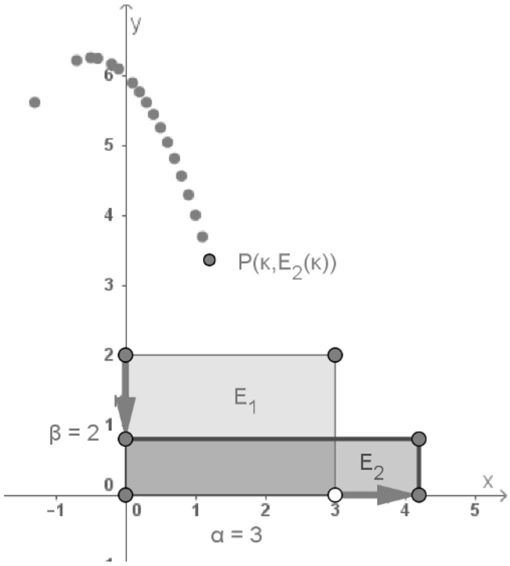
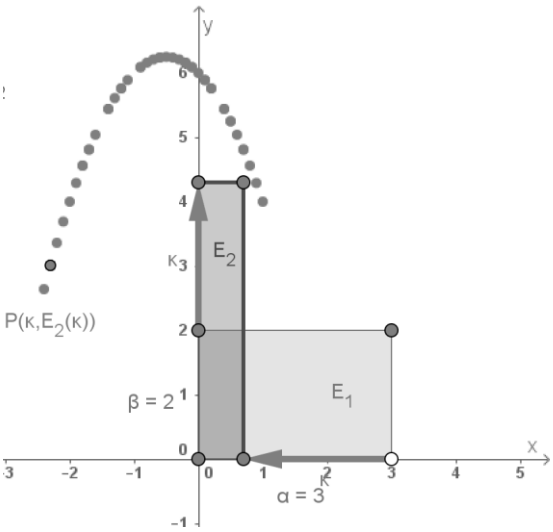
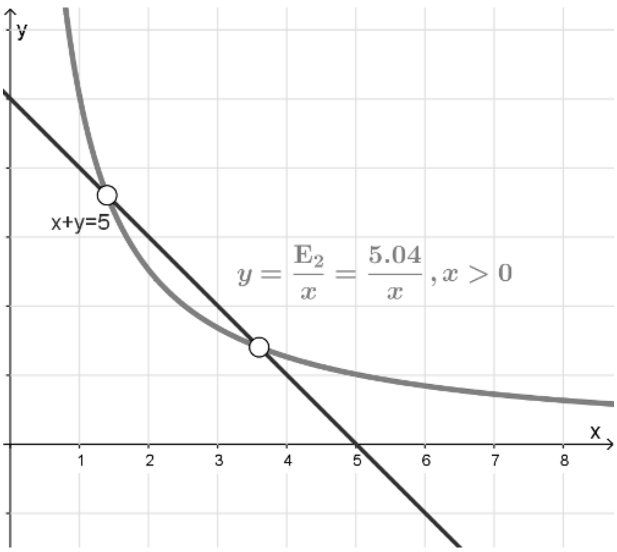
Ερωτήματα αυτοαξιολόγησης

Στα επόμενα δίνεται ένα σύνολο ερωτημάτων που αφορούν στο σύνολο της δραστηριότητας. Η πρόταση μας αφορά στη διακριτική ευχέρεια του εκπαιδευτικού αναφορικά με κάποια ενδεικτικά ερωτήματα που μπορούν να δοθούν για επεξεργασία στο σπίτι. Με τον τρόπο αυτό είναι εφικτή μια μορφή αυτοαξιολόγησης τόσο από την πλευρά του εκπαιδευτικού όσο και των συμμετεχόντων μαθητών και μαθητριών.

Άσκηση:

Από τις πληροφορίες των σχημάτων που δίνονται παρακάτω συμπληρώστε με Σ ή Λ τις αντίστοιχες προτάσεις:

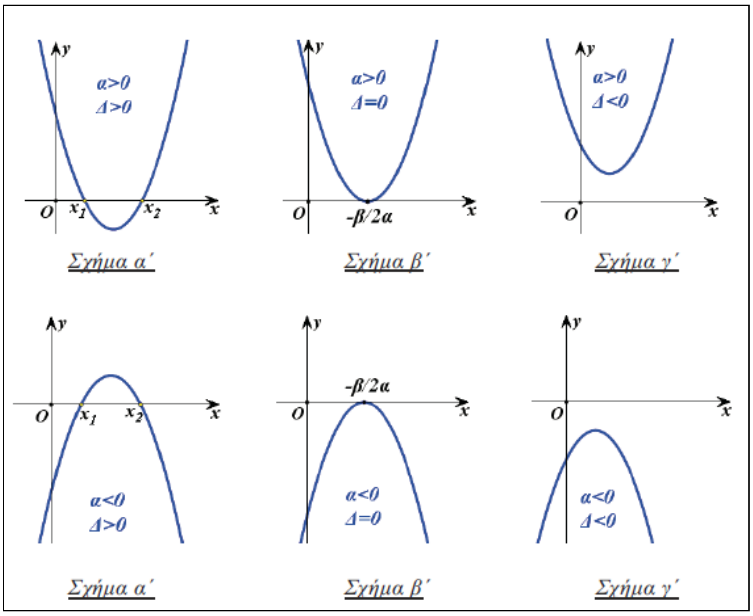
Σχήμα	Ισχυρισμός	Σ	Λ
	$\kappa = -0.5$	☐	☐
	$\kappa \neq -0.5$	☐	☐
	E_2 = max	☐	☐

	$E_2<E_1$	☐	☐
	$-1<κ<0$	☐	☐
	$E_2<4$	☐	☐
	$E_2 \neq max$	☐	☐

Εκτεταμένο φύλλο εργασίας

Υπενθυμίσεις

Ι. **Η συνάρτηση του τριωνύμου:** $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha \neq 0$

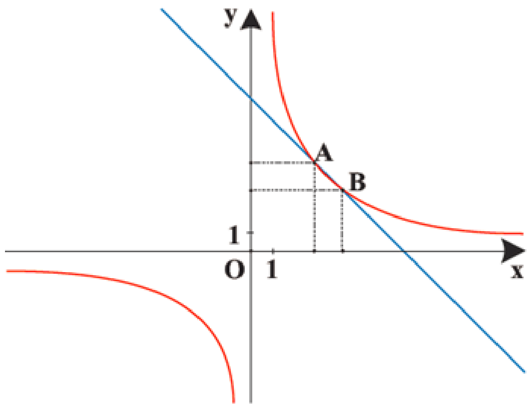


ΙΙ. Σχετική θέση υπερβολής και ευθείας. Γραφική επίλυση μη γραμμικών συστημάτων

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ (Σ)

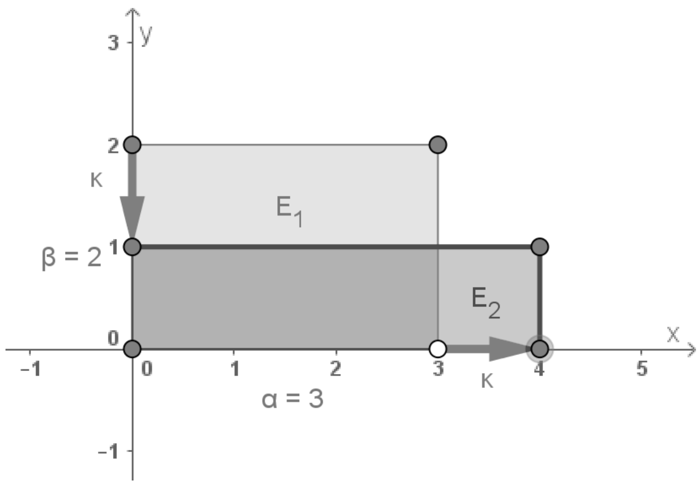
Αλγεβρική επίλυση: Το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με την εξίσωση 2ου βαθμού $x^2-5x+6=0$ από την οποία προκύπτει ότι $x=2$ ή x=3 οπότε y=3 ή y=2 αντίστοιχα.

Γεωμετρική Ερμηνεία: Η 1η εξίσωση του (Σ) παριστάνει ευθεία, ενώ η 2η εξίσωση παριστάνει την υπερβολή $y=\frac{6}{x}$. Επομένως οι συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της υπερβολής, δηλαδή τα σημεία Α(2,3) & Β(3,2), θα μας δώσουν τις λύσεις του συστήματος (Σ).



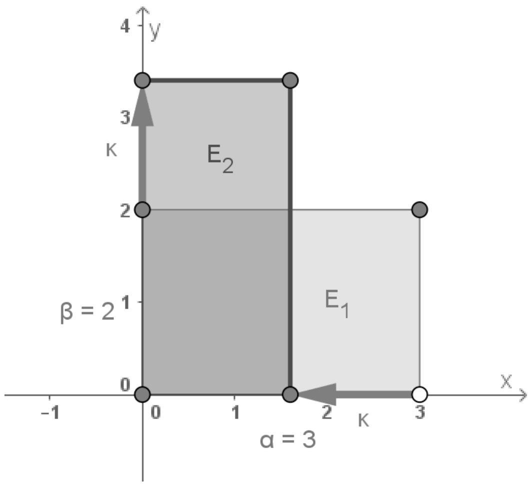
Εισαγωγή προβλήματος

Ο ιδιοκτήτης μιας έκτασης E_1 σχήματος ορθογωνίου, μήκους α=3 ($x10^2$ m) και πλάτους β=2 ($x10^2$ m) θα πρέπει να παραχωρήσει ένα τμήμα αυτής της έκτασης στο Δήμο της περιοχής ώστε να ανοιχθεί δρόμος που θα περνάει μέσα από αυτή. Η συμφωνία μεταξύ τους είναι να μειώσει μία από τις δύο διαστάσεις κατά κ μέτρα και να αυξήσει την άλλη διάσταση επίσης κατά κ μέτρα και αφορούσε δύο εναλλακτικούς τρόπους (σχ.1 και σχ.2).



Νότιο – Ανατολική μεταβολή

σχ.1



Βόρειο - Δυτική μεταβολή

σχ.2

1ο στάδιο

Υποθέστε ότι ο ιδιοκτήτης σας προσλαμβάνει ως σύμβουλο, ώστε να του προτείνετε ένα από τα 2 είδη μεταβολής. Ποιο είδος μεταβολής θα τον συμβουλεύατε να επιλέξει προκειμένου να πάρει έκταση ίση με την αρχική;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας:

Ανοίξτε το δόμημα MSC_emathisis.ggb. Σε αυτό υπάρχουν ο δρομέας κ από τον οποίο μεταβάλλονται το μήκος α και το πλάτος β του ορθογωνίου E_1.

E9. Να σημειώσετε στον πίνακα ποια από τα μεγέθη μεταβάλλονται και ποια όχι:

Μέγεθος	Μεταβάλλεται;
Μήκος α	☐Ναι ☐Όχι
Πλάτος β	☐Ναι ☐Όχι
Εμβαδόν ορθογωνίου E_2	☐Ναι ☐Όχι
Περίμετρος ορθογωνίου E_2	☐Ναι ☐Όχι

E10. Ανοίξτε τους διακόπτες [P] και [T] και δώστε κίνηση στο δρομέα κ από το διακόπτη κάτω αριστερά. Στην οθόνη σχηματίζονται οι καμπύλες από το σημείο $P(\kappa,f(\kappa))$ όπου $f(\kappa)=(3+\kappa)(2-\kappa)$ και το σημείο $T(\kappa,g(\kappa))$ όπου $g(\kappa)=(3-\kappa)(2+\kappa)$.

I. Τι είδους καμπύλες φαίνεται να σχηματίζονται;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας:

II. Συμπληρώστε τα κενά και τις επιλογές στον παρακάτω πίνακα όπου Ν-Α είναι η νοτιο-ανατολική μεταβολή και Β-Δ η βορειο-δυτική :

Εξίσωση	Τιμές του κ	Είδος μεταβολής	
f(κ)=6	κ=	☐ Ν-Α	☐ Β-Δ
g(κ)=6	κ = ...	☐ Ν-Α	☐ Β-Δ

Δικαιολογήστε τις επιλογές σας για το "Είδος μεταβολής":

E11. Με ανοικτή τη μέτρηση του εμβαδού E_2, πειραματιστείτε για τις τιμές του κ=-4 και κ=3 όπου και πάλι ισχύει ότι $f(\kappa)=6$.

Θα συμβουλεύατε τον Ιδιοκτήτη να συμφωνήσει την ανταλλαγή με την έκταση E_2 που προκύπτει για αυτές τις τιμές του κ;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας:

Ε12. I. Με ανοικτούς τους διακόπτες [Ρ] και [Σ] δώστε κίνηση στο δρομέα κ. Στην οθόνη σχηματίζονται οι καμπύλες των σημείων $P\big(\kappa, f(\kappa)\big)$ και $\Sigma(\kappa, E_2)$ που αναπαριστά τη μεταβολή του εμβαδού E_2 συναρτήσει των τιμών του κ.

Μπορείτε να αιτιολογήσετε πού οφείλονται οι διαφορές μεταξύ των δύο γραμμών;

II. Ποια συνάρτηση πιστεύετε ότι παριστάνει το γράφημα των σημείων $\Sigma(\kappa, E_2)$;

III. Για ποιες τιμές του κ φαίνεται στο λογισμικό ότι οι 2 προηγούμενες καμπύλες ταυτίζονται;

....< κ < .....

Δικαιολογήστε την απάντησή σας με επίλυση κατάλληλης ανίσωσης:

Διορθώστε τώρα τις τιμές του δρομέα κ ώστε οι καμπύλες των σημείων Ρ και Σ να ταυτίζονται (δεξί κλικ στο δρομέα κ, Ιδιότητες & Δρομέας).

2ο Στάδιο

Β. Υποθέστε τώρα ότι στις διαπραγματεύσεις του Ιδιοκτήτη με το Δήμο, του προσφέρθηκε η δυνατότητα να ανταλλάξει την έκταση E_1 με έκταση μεγαλύτερου εμβαδού από τη δική του, μεταβάλλοντας πάλι το μήκος και το πλάτος με τον ίδιο τρόπο όπως και στο 1^{ο} στάδιο.

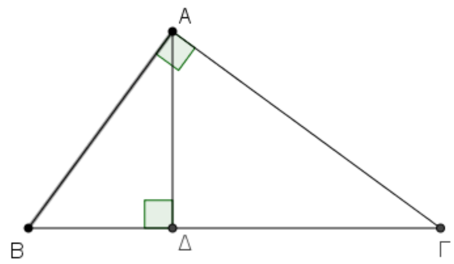
- Να εξετάσετε στο χαρτί αν υπάρχει περίπτωση ο Ιδιοκτήτης να πάρει έκταση μεγαλύτερη από την αρχική.
- Σε καταφατική περίπτωση, ποια μπορεί να είναι η μέγιστη έκταση που μπορεί να πάρει και με ποιο τρόπο μεταβολής;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας:

E13. Ανοίξτε **μόνο** το διακόπτη "1^{η} Αναπαράσταση". Εμφανίζεται το ημικύκλιο διαμέτρου $ΙΝ=ΙΛ+ΛΝ$ όπου: $ΙΛ=ΑΒ$ και $ΛΝ=ΟΑ$.
Λαμβάνοντας υπόψη το παρακάτω Θεώρημα, συμπληρώστε τα κενά:

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.



$$ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$$

I. Για το ορθογώνιο τρίγωνο ΙΜΝ θα ισχύει ότι: $ΜΛ^2$ = ___________________

II. Τί θα εκφράζει το μέγεθος $ΜΛ^2$;____

III. Από τον πειραματισμό σας, μπορείτε να εξετάσετε αν το εμβαδόν E_2 μεγιστοποιείται;
Αν ναι τότε:

Α. Για ποια θέση του σημείου Λ; (____)
Β. Τί φαίνεται να ισχύει για το σχήμα του E_2 (________________________) και πόσο είναι το εμβαδόν E_2 ; (______________________)

Δικαιολογήστε την απάντησή σας:

E14. Ανοίξτε το διακόπτη [P]. Να εντοπίσετε την τιμή του κ για την οποία το εμβαδόν E_2 μεγιστοποιείται; κ =_________

Δικαιολογήστε αλγεβρικά την απάντησή σας:

E15. Από τα ευρήματα της προηγούμενης ερώτησης, διατυπώστε παρακάτω έναν ισχυρισμό σχετικά με τα εμβαδά ορθογωνίων όπως του E_2:

3ο στάδιο: Απόδειξη ισχυρισμού

E16. Αν συμβολίσουμε με x και y τις διαστάσεις του ορθογωνίου E_2, συμπληρώστε τις εξισώσεις στο παρακάτω σύστημα (Σ):

$$(\Sigma):\begin{cases} x+y=\dots\dots\dots\dots \\ xy=\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

II. Να δείξετε ότι το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $-x^2+5x-E_2=0$

E17. Στην οθόνη "Γραφικά2" ανοίξτε το διακόπτη p(x). Βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $q(x)=-x^2+5x-E_2$. Πειραματιστείτε για τις διάφορες τιμές του κ (από το οποίο θυμίζουμε ότι μεταβάλλεται και το E_2).

I. Τι είδους καμπύλη είναι η συγκεκριμένη γραφική παράσταση;

____

II. Τι παρατηρείτε για τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης με τον άξονα xx΄ καθώς μεταβάλλεται το κ;

III. Από ποια σχέση ερμηνεύεται αλγεβρικά η παραπάνω παρατήρηση;

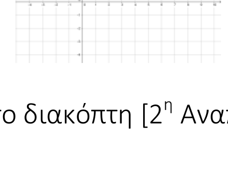
E18. Μπορείτε τώρα να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_2 γίνεται μέγιστο όταν $x=y=2.5$;

E19. Τελικά τι θα συμβουλεύατε τον Ιδιοκτήτη της έκτασης να διαπραγματευτεί με το Δήμο της περιοχής του;

4^{ο} Στάδιο

E20. I. Τι είδους γραμμές παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος $(\Sigma): \begin{cases} x+y=5 \\ xy=E_2 \end{cases}$

II. Να παραστήσετε γραφικά τις εξισώσεις του συστήματος (Σ).



Ανοίξτε το διακόπτη [2^{η} Αναπαράσταση] για να επικυρώσετε τις απαντήσεις σας.

E21. Πειραματιστείτε για τις διάφορες τιμές του κ. Τι παρατηρείτε για τις σχετικές θέσεις των 2 γραμμών;

E22. Ποια θα είναι η σχετική θέση των γραμμών που χαράξατε στην προηγούμενη ερώτηση όταν:

I. $\kappa \neq -0.5$ ____

II. $\kappa = -0.5$ ____

Ανοίξτε και το διακόπτη [p(x)]. Συγκρίνετε τη σχετική θέση της παραβολής p(x) με τον άξονα xx΄ για τις τιμές του κ του προηγούμενου ερωτήματος.

Παρατηρείτε κάποια σχέση ανάμεσα στις σχετικές θέσεις των γραμμών του ερωτήματος Ε22 και της παραβολής p(x) με τον άξονα xx΄;

Αιτιολογήστε την απάντηση σας αλγεβρικά:

Βιβλιογραφία & Αναφορές

A Aberdein, (2006). *The informal logic of mathematical proof*

A Aberdein, (2010). *The uses of argument in mathematics*

Ackermann E. (2001), Piaget's Constructivism, Papert's Constructionism: What's the difference?

Allen Leung, (2009). *Written proof in dynamic Geometry environment: Inspiration from a student's work*

Artigue, M. (2002), *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*, International Journal of Computers for Mathematical Learning 7: 245-274, 2002

Arzarello, F., Ferrara, F., & Robutti, O. (2012). *Mathematical modelling with technology: the dynamic role of representations, Teaching Mathematics and its Applications,* 31 (1), pp. 20-30. ISSN 1471-6976.

Ferdinando Arzarello, Valeria Andriano, Federica Olivero & Ornella Robutti, (1998). *Abduction and Conjecturing in Mathematics.*

Ferdinando Arzarello, Federica Olivero, Domingo Paola, Ornella Robutti, (2002). *A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments*

Ferdinando Arzarello, Domingo Paola (2007). *Semiotic games: The role of the teacherIn* Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 17-24. Seoul: PME.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). *Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 15(3), 225-253

Balachef N. (1988). *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics*

Bretscher, N. (2009), *Dynamic Geometry software: The teacher's role in facilitating instrumental genesis,* King's College London

Carraher, D. and Schliemann, A. (2002), *Modeling reasoning, Tool Use in Mathematics Education*, 295-304

Carpenter TP., Hiebert J. (1992). *Learning and teaching with understanding.*

Catherine Houdement CERME 5 (2007)-page 971 - Geometry 1. *Geometrical working space. A tool for comparison*

Dreyfus, T. (1993). '*Didactic design of computer-based learning environments*', Keitel,C.,& Ruthven, K. (Eds), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, pp. 100–130.

Dreyfus, T., and Kidron, I. (2014). *From proof image to formal proof—A transformation*. In S. Rezat, M. Hattermann, & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation—A fundamental idea in mathematics education—Festschrift for Rudolf Strässer* (pp. 269–289). Berlin, Germany: Springer.

Duval R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.*

Falcade, R., Laborde, C., Mariotti, M-A. (2007). *Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation.* Education Stud Math, 66, 317 – 333.

Ferrara F., Pratt D., Robutti O. (2006). *The role and uses of technologies for the teaching of Algebra and Calcullus.* Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education

Hanna G. (2000). *Proof, Explanation and Exploration: an overview*

Harel & Sowder (1998). *Students' proof schemes: Results from exploratory studies*

Hazzan, O., Goldberg, E-P. (1997). *Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments.* International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3, 263-291

Hoffkamp, A. (2009). *Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer.* Proceedings of CERME 6, Lyon.

C. Hoyles, D Küchemann - Proceedings of CERME, (2003). *The quality of student's explanations on a non – standard Geometry item.*

Richard Noss, Lulu Healy and Celia Hoyles (1997). *The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic*

C. Kynigos, G. Psycharis (2003). *13 Year-Olds' Meanings around Intrinsic Curves with a Medium for Symbolic Expression and Dynamic Manipulation*

Kynigos, C., & Argyris, M. (2004). *Teacher beliefs and practices formed during an innovation with computer-based exploratory mathematics in the classroom. Teachers and Teaching: Theory and Practice,* 10(3), 247–273.

C. Kynigos, G. Psycharis (2009). *Investigating the role of context in experimental research involving the use of digital media for the learning of mathematics: Boundary objects as vehicles for integration*

C. Kynigos, (2012). *Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design?*

C. Kynigos, G. Psycharis (2013). *Designing for instrumentalisation: Constructionist perspectives on instrumental theory*

Collette Laborde, Chronis Kynigos, Karen Hollebrands and Rudolf Strasser (2006). *Teaching and learning Geometry with Technology*

F. Lopez-Real , A. Leung (2014). *Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments*

Lagrange, J-B., Artigue, M., Laborde, C. & Trouche, L. (2001). *A Meta Study on IC Technologies in Education. Towards a Multidimensional Framework to Tackle their Inegration.* In M. vanden Heuvel – Panhuizen (Eds), Proceedings of the 25th conference for the Psychology of Mathematics Education, 1, 111 – 123

Lagrange, J.-B., & Psycharis, G. (2013). *Exploring the Potential of Computer Environments for the Teaching and Learning of Functions: A Double Analysis From Two Traditions of Research.* Paper presented at CERME8 conference, July 6th-10th, 2013, Manavgat-Side, Antalya – Turkey.

Leung, A., (2008). *Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation.* International journal Math Learning, 13, 135-157.

Punya Mishra , Matthew J. Koehler (2015). *Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge*

Monaghan J. (2004). *Teachers' activities in Technology – based Mathematics lessons*, International Journal of Computers for Mathematical Learning 9: 327–357, 2004._ 2004 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands

Moutsios-Rentzos A. Simpson A. *The transition to postgraduate study in Mathematics: A thinking styles perspective.* Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 329-336. Melbourne: PME

Panagiotis Spyrou, Andreas Moutsios-Rentzos, Dimos Triantafyllou (2009). *Teaching for the objectification of the Pythagorean Theorem*

Panagiotis Spyrou, Andreas Moutsios-Rentzos (2013). *The need for proof in geometry: a theoretical investigation through Husserl's phenomenology.*

A Moutsios-Rentzos (2009). *University mathematics students: thinking styles and strategies*

A Moutsios-Rentzos, F Kalavasis, E Sofos - *Paths and Teaching Bridges: The Emergent Mathematics Classroom within the Open System of a Globalised Virtual Social Network.* Mathematics and Technology, 2017 – Springer *Learning*

Richard Noss, Lulu Healy and Celia Hoyles (1997). *The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic*

C.Christou, N.Mousoulides, M.Pittalis and D.Pitta-Panatzi (2002). *Proofs through exploration in Dynamic Geometry Environments*

Kate Mackrell (2011). *Design decisions in interactive geometry software*

Mariotti, M. A. (1995). *Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason*

Mariotti, M. A. (2000). *Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment*

Falcade, R., Laborde, C., Mariotti, M-A. (2007). *Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation.* Education Stud Math, 66, 317 – 333.

Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). *Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective*. Handbook of international research in mathematics education, New York, 746-783.

Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). *Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective.* Handbook of international research in mathematics education, New York, 746-783.

Mariotti, M.A (2012). *Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation*

Rossana Falcade & Colette Laborde & Maria Alessandra Mariotti (2002). *Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation*

Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). *Teaching proof in a dynamic geometry environment: what mediation?*. Proceedings of CIEAEM53: Mathematical Literacy in the digital Era.

Papert, S. (1980). *Mindstorms*. *Children, Computers and Powerful Ideas.* New York: Basic books.

Papert, S (1991). Preface, In: I. Harel & S. Papert (Eds), *Constructionism, Research reports and essays, 1985-1990 (p. 1)*, Norwood NJ.

Pedemonte B. (2007). *How can the relationship between argumentation and proof be analysed?*

Pedemonte B. , Reid D. (2011). *The role of abduction in proving processes*

D Potari, B Jaworski (2002). *Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis.* Journal of Mathematics Teacher Education, Springer

M Kordaki, D Potari (2002). *The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld.* International Journal of Computers for Mathematical - Springer

B Jaworski, D Potari (2009). *Bridging the macro-and micro-divide: Using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development.* Educational Studies in Mathematics, 2009 - Springer

D Potari, H Sakonidis, R Chatzigoula (2010)- *Teachers' and researchers' collaboration in analysing mathematics teaching: A context for professional reflection and development.* Journal of Mathematics 2010 - Springer

G Psycharis, C. Kynigos (2004). *Normalising geometrical constructions: A context for the generation of meanings for ratio and proportion*

Psycharis, G. (2006), *Dynamic Manipulation schemes of geometrical constructions instrumental genesis as an abstraction process,* Educational Technology Lab, School of Philosophy, University of Athens

A Papadopulou, B. Pedemonte, G Psycharis (2006). *Developing a joint methodology for comparing the in fluence of different theoretical frameworks in technology enhanced learn ing in mathematics: the TELMA approach*

Antonio Rizzo, Marco Palmonari (2005) *The Mediating Role of Artefacts in Deductive Reasoning*

Kenneth Ruthven, Sara Hennessy, Rosemary Deaney (2007). *Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice*

Tall D. (1989). *The nature of mathematical proof*

Tall D. (1989). *The nature of mathematical proof*

Tall, D. (1993). *Technology and mathematics education; computer environments for the learning of mathematics, Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. pp. 189–199.

Stylianides, A. (2007). *Proof and Proving in School Mathematics*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 38, No 3. 289-231

Tommy Dreyfous & Ivy Kidrom. *From Proof Image to Formal Proof- a Transformation*

William P. Thurston (1994). *On Proof and Progress In Mathematics.* Bulletin of the American Mathematical Society.

Guershon Harel& Larry Sowder (1998). *Students'Proof Schemes: Results from Exploratory Studies*

Vinner S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*

K Weber, L Alcock - *Semantic and syntactic proof productions in* Educational studies in mathematics, 2004 – Springer

K. Weber (2002). *The role of instrumental and relational understanding in proofs about group isomorphisms*

Kosze Lee, John P. Smith III (2009, p-21), *Cognitive and Linguistic challenges in understanding proving*

Patrick Barmby, Tony Harries, Steve Higgins and Jennifer Suggate (2013). *How can we assess mathematical understaning?*

Ελληνόγλωσση

Ζαχαριάδης Θ., Πόταρη Δ. , Στουραΐτης Κ. (2011). *Επιμορφωτικό υλικό για τους Καθηγητές Μαθηματικών Γυμνασίου*

Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των Εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης (ΚΣΕ) (Πάτρα 2010) *http://blogs.sch.gr/mathsmagnesia/files/2011/01/ylikoKSE_PE03_201012.pdf*

Κλαουδάτος, Ν., Παπασταυρίδης, Σ. (1997). *Θέματα διδακτικής μαθηματικών ΙΙΙ. Τα μαθηματικά του σχολείου και ο πραγματικός κόσμος: Πώς θα συνδέσουμε θεωρία και πράξη*. Αθήνα: Gutenberg

Κλαουδάτος, Ν. Η διδασκαλία των μαθηματικών ως λύση προβλήματος: ο ρόλος των ερευνητικών δραστηριοτήτων, Διάσταση τεύχος 2, 1997.

Κείσογλου Σ., Κυνηγός Χ. (2005). *Ο ρόλος φυσικών και υπολογιστικών εργαλείων σε διαδικασίες μαθηματικοποίησης.* Πρακτικά Εισηγήσεων *του Πρώτου Συνέδριου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών*, Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (www.etl.ppp.uoa.gr), Τομέας Παιδαγωγικής, Τμήμα Φ.Π.Ψ., Φιλοσοφική Σχολή, Ε.Κ.Π.Α σελ. 439 – 449.

Κυνηγός, Χ. (2006). *Το μάθημα της διερεύνησης. Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη.* Αθήνα: Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα

Μ. Τσιλπιρίδης (2002). *Διδάσκοντας με πάθος και έμπνευση: Εναλλακτικοί τρόποι προσέγγισης της γνώσης στην προσχολική, στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Πρακτικά 9ου τριήμερου επιμορφωτικού σεμιναρίου* – Εκδόσεις Πατάκη http://www.patakis.gr/SearchTableLookupVirtual.aspx?TableId=1&val=547244

Μ. Τσιλπιρίδης (2010). *«Περιβάλλοντα Ηλεκτρονικής Μάθησης (e-learning)», Δυνατότητες και Παραδείγματα συνεργατικής μάθησης, αυτενέργειας των μαθητών και εξατομίκευσης γνώσης http://www.ekped.gr/praktika10/posters/035.pdf) ,* 2ο Πανελλήνιο Εκπαιδευτικό Συνέδριο Ημαθίας

Μ. Τσιλπιρίδης (2014): *Το σύγχρονο σχολείο στην ψηφιακή εποχή* http://www.arsakeio.gr/images/stories/Epikoinonia/2012/EPIKOINONIA%2053/index.html#p=6

Μ. Τσιλπιρίδης (2015). *Ημερίδα στα Αρσάκεια Σχολεία : «Διδακτικές προτάσεις Θετικών επιστημών με τη χρήση των Νέων Τεχνολογιών»* http://www.e-arsakeio.gr/student.php?lessons_ID=699M.

Μ. Τσιλπιρίδης (2016). *Δύναμη σημείου ως προς κύκλο: Ένας αθέατος κόσμος συμμεταβολών* http://www.e-mathematica.gr/?p=1508

Μ. Τσιλπιρίδης (2016). *Νοητικές και Εννοιολογικές διαδρομές* http://www.e-mathematica.gr/?p=1869

Μ. Τσιλπιρίδης (2016): *Δημιουργία συνθηκών bfp (before formal proof) με τη χρήση ψηφιακού δομήματος* http://www.e-mathematica.gr/?p=1614

Μ. Τσιλπιρίδης (2013-2017). *Ψηφιακά δομήματα στο Geogebra Tube* https://www.geogebra.org/mtsilp

Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ Λυκείου, (Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος, Α. Σβέρκος, Λ. Αδαμόπουλος, Χ. Δαμιανού), Εκδόσεις Διόφαντος 2017

Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου, (Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος, Α. Σβέρκος), Εκδόσεις Διόφαντος 2017

Ευρετήριο Όρων και Ονομάτων