

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1837
2017
YEARS



ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ευστάθεια του Πεδίου Higgs και Μελανές
Οπές στο Πρώιμο Σύμπαν

Διμίτερ Δ. Τσάνκο

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Τετράδης

ΑΘΗΝΑ
ΙΟΥΝΙΟΣ 2017

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

1837
2017
YEARS



ΒΑΣΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ ΜΕ ΕΙΔΥΚΕΥΣΗ ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Ευστάθεια του Πεδίου Higgs και Μελανές Οπές στο
Πρώιμο Σύμπαν

Διμίτερ Δ. Τσάνκο
ΑΜ: 201526

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Πρώτο Μέλος: *N. Τετράδης*, Καθηγητής (Επιβλέπων)
Δεύτερο Μέλος: *K. Σφέτσος*, Καθηγητής
Τρίτο Μέλος: *Θ. Χριστοδουλάκης*, Αναπληρωτής Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αν το δυναμικό μιας θεωρίας περιέχει περισσότερα από ένα κενά (τοπικά ελάχιστα) τότε μπορούμε να έχουμε μετάβαση από το ένα κενό στο άλλο, είτε μέσω κβαντικού φαινομένου σήραγγας (κβαντική διάσπαση κενού) είτε μέσω θερμικών αναπηδήσεων (θερμική διάσπαση κενού). Η μετάβαση αυτή συμβαίνει μέσω μιας αλλαγής φάσης πρώτης τάξης η οποία ενεργοποιείται στον χώρο όπου το πεδίο βρίσκεται στο ψευδές κενό με την δημιουργία μιας φυσαλίδας, μέσα στην οποία το πεδίο βρίσκεται στο νέο κενό. Η φυσαλίδα αυτή διαστέλλεται μέχρι να καλύψει όλο τον χώρο. Υπό την παρουσία βαρύτητας το φαινόμενο αυτό γίνεται πιο περίπλοκο όμως παράλληλα και πιο ενδιαφέρον. Στα πλαίσια αυτής της μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας μελετάμε την επίδραση των αρχέγονων μελανών οπών στην θερμική διάσπαση του ηλεκτρασθενούς κενού του Καθιερωμένου Προτύπου σε υψηλές θερμοκρασίες. Συγκεκριμένα προσδιορίζουμε τον εκθετικό παράγοντα καταστολής του ρυθμού διάσπασης και συμπεραίνουμε ότι αυτός μπορεί να μειωθεί αισθητά ακόμα και να μηδενιστεί τελείως παρουσία της μελανής οπής, αν το πεδίο Higgs αλληλεπιδρά με την Βαρύτητα μέσω ενός επανακανονικοποιησίου non-minimal coupling όρου $\xi R h^2$.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Στοιχειώδη Σωματίια, Κοσμολογία, Θεωρία Πεδίου

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: διάσπαση κενού, πεδίο Higgs, μελανές οπές

ABSTRACT

If the potential of a theory has more than one vacuum (local minimum), then it is possible due to quantum tunneling (quantum vacuum decay) and/or thermal jumps (thermal vacuum decay), to have transitions between the vacua. The transition happens through a first order phase transition induced by the nucleation of a bubble of the new vacuum, within the space of the old vacuum. The bubble expands until it fills all the space. In the presence of gravity this phenomenon gets more complicated and at the same time more interesting. Within this MSc thesis we study the effect of primordial black holes on the thermal decay of the standard electroweak vacuum at high temperature. Specifically, we find the exponential suppression of the nucleation rate, which can be reduced significantly, or even eliminated completely, in the black hole background if the Higgs field is coupled to gravity through the renormalizable term $\xi\mathcal{R}h^2$.

SUBJECT AREA: Particle Physics, Cosmology, Field Theory

KEY WORDS: vacuum decay, Higgs field, black holes

Ευχαριστίες

Πρώτα από όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου Καθηγητή κ. Νικόλαο Τετράδη για αυτό το πολύ ενδιαφέρον θέμα που μου ανέθεσε, για την πολύτιμη βοήθεια και υποστήριξη του, καθώς και για τις γνώσεις που απόκτησα μέσα από τις συζητήσεις μας. Επίσης θα ήθελα ιδιαίτερος να ευχαριστήσω τον συνάδερφο και φίλο Ιωάννη Γιαλαμά με τον οποίο συνεργαστήκαμε σε κάποια κομμάτια της διπλωματικής εργασίας καθώς και τους συναδέλφους και φίλους Δημήτρη Λούπα, Άρη Γιώτη και Άρη Κάτση για τις εποικοδομητικές συζητήσεις. Επιπλέον ευχαριστώ όλους όσους με δίδαξαν και με αυτόν τον τρόπο με βοήθησαν να αποκτήσω τις γνώσεις που έχω σήμερα. Τέλος δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, τον αδερφό μου, Αλέξανδρο, καθώς και τους φίλους μου για την υποστήριξη, την συμπαράσταση, και την εμπιστοσύνη τους κατά την διάρκεια των φοιτητικών μου χρόνων.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Κβαντική Διάσπαση Κενού	3
2.1	Φαινόμενο Σήραγγας Μέσω Ολοκληρώματα Διαδρομών στην Κβαντική Μηχανική	3
2.2	Κβαντική Διάσπαση Κενού Ενός Βαθμωτού Πεδίου	18
2.3	Κβαντική Διάσπαση Κενού Ενός Βαθμωτού Πεδίου Παρουσία Βαρύτητας	28
3	Διάσπαση Κενού Παρουσία Πεπερασμένης Θερμοκρασίας	37
3.1	Χρήσιμα Στοιχεία από την Θερμική Κβαντική θεωρία Πεδίου	37
3.2	Μηχανισμοί Διάσπασης Κενού Παρουσία μη Μηδενικής Θερμοκρασίας	40
3.3	Θερμική Διάσπαση στη Προσέγγιση Λεπτού Τοιχώματος	45
4	Θερμική Διάσπαση του Higgs Παρουσία Αρχέγονης Μελανής Οπής	49
4.1	Εισαγωγή	49
4.2	Εξισώσεις της Κίνησης	50
4.3	Επιδράσεις Ενεργού Δυναμικού Πεπερασμένης Θερμοκρασίας	55
4.4	Αστάθεια Ηλεκτρασθενούς Κενού Παρουσία Μελανής Οπής στο Πρώιμο Σύμπαν	59
4.5	Συμπεράσματα	62
A'	One-Loop Διορθώσεις στο Μηδενικής Θερμοκρασίας Ενεργό Δυναμικό του Higgs	65
A'.1	Generating Functionals	65
A'.2	Επανακανονικοποίηση και Καθιερωμένο Πρότυπο	67
A'.3	Gauge Εξάρτηση της Ενεργού Δράσης	68
A'.4	Saddle-Point Υπολογισμός της Ενεργού Δράσης	68
A'.5	Συνεισφορές από Βαθμωτά Πεδία	70
A'.6	Συνεισφορές από Φερμιονικά Πεδία	73
A'.7	Συνεισφορές από Πεδία Βαθμίδας	74
A'.8	One-Loop Ενεργό Δυναμικό Καθιερωμένου Πρότυπου	75
B'	One-Loop Διορθώσεις στο Πεπερασμένης Θερμοκρασίας Ενεργό Δυναμικό του Higgs	79
B'.1	Μεγαλοκανονική Συλλογή	79
B'.2	Generating Functionals στην Θερμική Θεωρία Πεδίου	79
B'.3	Two-Point Θερμικές Συναρτήσεις Συσχετισμού (Διαδότες)	80
B'.4	Φορμαλισμός Φανταστικού Χρόνου	82
B'.5	Συνεισφορές από Βαθμωτά Πεδία	84
B'.6	Συνεισφορές από Φερμιονικά Πεδία	86
B'.7	Συνεισφορές από Πεδία Βαθμίδας	87
B'.8	One-Loop Ενεργό Δυναμικό Καθιερωμένου Πρότυπου σε Πεπερασμένη Θερμοκρασία	88
	Αναφορές	89

1 Εισαγωγή

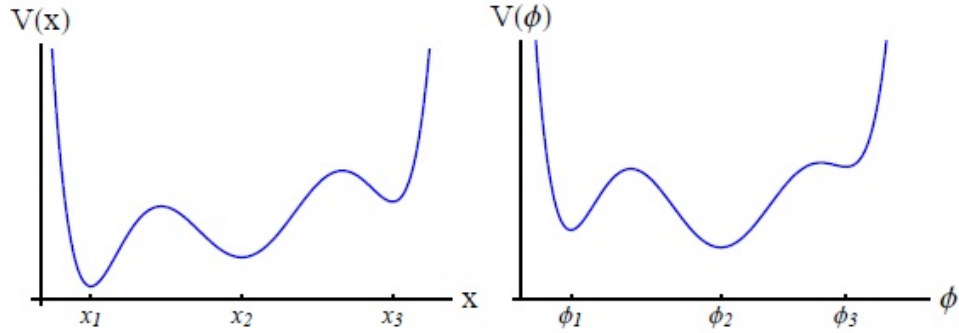
Το κβαντικό φαινόμενο σήραγγας αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά φαινόμενα που προβλέφθηκαν από την Κβαντική Φυσική, τόσο για το μεγάλο αριθμό εφαρμογών που έχει σε διάφορους τομείς, όσο και για το ότι υπήρξε ένας από τους δομικούς λίθους στην δόμηση της σύγχρονης επιστήμης. Στα πλαίσια της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου το φαινόμενο αυτό γενικεύεται στην διάσπαση κενού, η οποία έχει προσελκύσει το ερευνητικό ενδιαφέρον τις τελευταίες δεκαετίες. Ακόμα περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διάσπαση κενού παρουσία βαρύτητας η οποία έχει ακόμα περισσότερες εφαρμογές στην Κοσμολογία καθώς βοηθάει στην κατανόηση του πρώιμου σύμπαντος και σχετίζεται με μοντέλα πληθωρισμού.

Ας δούμε όμως λίγο περιγραφικά πως συμβαίνει η διάσπαση κενού στην φύση. Έστω το μονοδιάστατο πρόβλημα ενός σωματιδίου που υπόκειται σε ένα δυναμικό $V(x)$, το οποίο έχει την μορφή που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.1. Αν το σωματίο βρίσκεται σε ηρεμία σε οποιοδήποτε από τα τρία τοπικά ελάχιστα του δυναμικού τότε σύμφωνα με την Κλασική Μηχανική αυτό θα παραμείνει στο ίδιο σημείο επί άπειρον. Έστω τώρα ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$ το οποίο υπόκειται σε ένα δυναμικό $V(\phi)$ που παρουσιάζει τρία τοπικά ελάχιστα (κενά της θεωρίας), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1, θεωρώντας ότι ο χωρόχρονος είναι επίπεδος. Ομοίως, αν το πεδίο βρεθεί σε ηρεμία σε οποιοδήποτε από τα τρία αυτά κενά τότε σύμφωνα με την Κλασική θεωρία Πεδίου θα παραμείνει στο ίδιο κενό για πάντα.

Όσα είδαμε μέχρι τώρα όμως δεν ισχύουν αν συμπεριλάβουμε στην μελέτη μας την Κβαντική Φυσική. Η Κβαντική Φυσική επιτρέπει στο σωματίδιο και στο πεδίο να πραγματοποιήσουν φαινόμενο σήραγγας διαπερνώντας τον ενεργειακό φραγμό και έτσι επιτρέπει ουσιαστικά σε αυτά να διαφύγουν από το μετασταθές τοπικό ελάχιστο στο οποίο βρίσκονται σε ένα άλλο πιο ευσταθές. Το ίδιο πράγμα μπορεί να συμβεί και αν φέρουμε το κλειστό σύστημα του σωματιδίου, ή του πεδίου, σε επαφή με ένα θερμικό λουτρό. Τότε αυτά μπορούν να απορροφήσουν αρκετή ενέργεια έτσι ώστε να ξεπεράσουν κλασικά (σκαφαλώνοντας) τον ενεργειακό φραγμό και να μεταπηδήσουν σε ένα πιο ευσταθές τοπικό ελάχιστο. Σε αυτή τη περίπτωση μάλιστα θα υπήρχε η δυνατότητα το σωματίδιο και το πεδίο να απορροφήσουν τόση ενέργεια ώστε να μεταπηδήσουν σε ένα πιο μετασταθές τοπικό ελάχιστο από αυτό στο οποίο ήδη βρίσκονται. Η πιθανότητα βέβαια να συμβεί αυτό είναι πολύ μικρότερη από την πιθανότητα μετάβασης σε ένα πιο ευσταθές τοπικό ελάχιστο.

Για το σύστημα του ενός σωματιδίου η πιθανότητα να συμβεί ένα από αυτά τα δύο φαινόμενα μετάβασης (κβαντικό ή θερμικό) από το ένα ελάχιστο στο άλλο είναι μη μηδενική. Για το σύστημα όμως του ενός πεδίου μέσα σε ένα απειροδιάστατο σύμπαν η κατάσταση μας είναι πιο περίπλοκη. Η πιθανότητα το πεδίο να πραγματοποιήσει φαινόμενο σήραγγας ή να ξεπεράσει κλασικά τον ενεργειακό φραγμό, μονομιάς σε όλα τα σημεία του σύμπαντος είναι ταυτοτικά μηδέν. Αυτό που συμβαίνει στην πραγματικότητα είναι η δημιουργία μιας φυσαλίδας που περιέχει στο εσωτερικό της το πεδίο στο νέο κενό (το κενό μετά την μετάβαση) και η οποία επεκτείνεται στον χώρο όπου το πεδίο βρίσκεται στο παλιό κενό. Αυτή μας η περιγραφή για την διάσπαση κενού αποτελεί ουσιαστικά την περιγραφή μιας συνήθους αλλαγής φάσης πρώτης τάξης, όπως αυτής της εξάτμισης του νερού. Όταν βράζουμε νερό αυτό δεν εξατμίζεται όλο μονομιάς αλλά αντίθετα η διαδικασία της εξάτμισης γίνεται μέσω της δημιουργίας φυσαλίδων της νέας φάσης (αέρια) μέσα στην παλιά φάση (υγρή), οι οποίες διαστέλλονται μέχρις ότου όλη η υγρή φάση έχει μετατραπεί σε αέρια.

Η διάσπαση κενού σε καμπύλο χωρόχρονο, δηλαδή παρουσία βαρυτικού πεδίου, αποτελεί ένα ακόμα πιο περίπλοκο πρόβλημα. Παρ' όλη την πρόοδο που έχει παρατηρηθεί τις τελευταίες δεκαετίες, αυτό το φαινόμενο δεν είναι πλήρως κατανοητό. Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα που εμποδίζουν την πλήρη κατανόηση αυτού του φαινομένου αποτελεί το πρόβλημα της μη καλά ορισμένης ενέργειας σε



Σχήμα 1.1: Στα αριστερά παρουσιάζεται το δυναμικό για το μονοδιάστατο σύστημα του ενός σωματιδίου, ενώ στα δεξιά παρουσιάζεται το δυναμικό για το σύστημα του βαθμωτού πεδίου. Όπως παρατηρούμε και τα δύο δυναμικά έχουν τρία τοπικά ελάχιστα.

καμπυλωμένους χωρόχρονους, ενώ επίσης άλλα προβλήματα όπως ο αριθμός των αρνητικών ιδιοτιμών, η συμμετρία της λύσης με την ελάχιστη δράση και η αναπαράσταση των λύσεων bounce, δεν είναι ακόμα τόσο ξεκάθαρα.

Στα επόμενα δύο κεφάλαια θα θεμελιώσουμε φορμαλιστικά για ένα βαθμωτό πεδίο την κβαντική διάσπαση κενού και την διάσπαση κενού παρουσία πεπερασμένης θερμοκρασίας απουσία βαρύτητας ενώ επίσης θα επεκτείνουμε την μελέτη μας συμπεριλαμβάνοντας και την βαρύτητα στα φαινόμενα αυτά, ακολουθώντας την μέθοδο των Coleman-De Luccia. Οι Coleman-De Luccia (χρησιμοποιώντας ουσιαστικά την αναλογία με τα αποτελέσματα στον επίπεδο χωρόχρονο) χρησιμοποίησαν τον φορμαλισμό του επίπεδου χωρόχρονου προσθέτοντας την δράση Hilbert-Einstein στην δράση του συστήματος, ενώ επίσης θεώρησαν ότι οι λύσεις bounce παρουσία βαρύτητας πρέπει να έχουν την ίδια συμμετρία με τις λύσεις bounce απουσία βαρύτητας.

Στο τελευταίο κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε τον φορμαλισμό που γνωρίσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια για την μελέτη της θερμικής διάσπασης του ηλεκτρασθενούς κενού του Καθιερωμένου Πρότυπου των Στοιχειωδών Σωματιδίων στο πρώιμο σύμπαν παρουσία αρχέγονων μελανών οπών. Στην μελέτη μας αυτή θα θεωρήσουμε ότι το πεδίο Higgs αλληλεπιδράει με την βαρύτητα μέσω ενός non-minimal coupling όρου $\xi R h^2$, και θα χρησιμοποιήσουμε για το ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας μια προσεγγιστική μορφή που ισχύει στο όριο των υψηλών θερμοκρασιών.

2 Κβαντική Διάσπαση Κενού

2.1 Φαινόμενο Σήραγγας Μέσω Ολοκληρώματα Διαδρομών στην Κβαντική Μηχανική

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα ασχοληθούμε, στα πλαίσια της Κβαντικής Μηχανικής, με τον υπολογισμό του πλάτους μετάβασης (transition amplitude) στο μονοδιάστατο πρόβλημα ενός σωματιδίου χωρίς σπιν που κινείται σε ένα δυναμικό $V(x)$. Για να είναι πιο προφανής η γενίκευση της μεθόδου που θα ακολουθήσουμε για τον υπολογισμό του πλάτους μετάβασης μετέπειτα στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου θεωρούμε ότι το σωματίδιο έχει μάζα $m = 1$. Έτσι η Λαγκραζιανή και η Χαμιλτονιανή αυτού του συστήματος παίρνουν τις ακόλουθες απλές μορφές:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \quad \text{και} \quad H = \frac{p^2}{2} + V(x). \quad (2.1)$$

Το πλάτος μετάβασης για την μετάβαση του σωματιδίου από την αρχική θέση x_i την χρονική στιγμή $-t_0/2$ στην τελική θέση x_f την χρονική στιγμή $t_0/2$, δίνεται σύμφωνα με τον Feynman από το εξής ολοκλήρωμα διαδρομών

$$\langle x_f | e^{-iHt_0/\hbar} | x_i \rangle = N \int \mathcal{D}x(t) e^{iS_M[x(t)]/\hbar}, \quad (2.2)$$

όπου το $\mathcal{D}x(t)$ υποδηλώνει ολοκλήρωση πάνω σε όλες τις συναρτήσεις $x(t)$ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $x(-t_0/2) = x_i$ και $x(t_0/2) = x_f$. Θεωρούμε ότι η θεμελιώδης κατάσταση του συστήματος είναι μη εκφυλισμένη και ότι η ενέργεια της, E_0 , ικανοποιεί την ανισότητα $0 < E_0 < E_n$. Επειδή εμείς ενδιαφερόμαστε για την θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος βολεύει να μετασχηματίσουμε τα ταλαντούμενα εκθετικά της σχέσης (2.2) σε φθίνοντα εκθετικά. Αυτό το πετυχαίνουμε κάνοντας ένα Wick rotation στον χρόνο $t \rightarrow -i\tau$ και χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια μορφή της δράσης, η οποία ορίζεται μέσω της Minkowskian δράσης ως εξής

$$S = -iS_M(t = -i\tau) \Rightarrow S = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau L_E(x, \partial_\tau x, \tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right]. \quad (2.3)$$

Επομένως το πλάτος μετάβασης με βάση αυτούς τους μετασχηματισμούς παίρνει την εξής μορφή

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = N \int \mathcal{D}x(\tau) e^{-S[x(\tau)]/\hbar}, \quad (2.4)$$

και οι συνοριακές συνθήκες για τις συναρτήσεις $x(\tau)$ γίνονται $x(-T/2) = x_i$ και $x(T/2) = x_f$.

Παρατήρηση: Ο Ευκλείδειος χώρος προκύπτει από τον Minkowski χωρόχρονο κάνοντας στον δεύτερο μια αναλυτική συνέχιση της χρονικής συντεταγμένης, δηλαδή $x^0 = -ix^4$. Στον Ευκλείδειο χώρο τα πρόσημα της μετρικής γίνονται $(+ + + +)$ και τα ανταλλοίωτα και τα συναλλοίωτα ανύσματα είναι ταυτόσημα. Επίσης όσον αφορά τον συμβολισμό, στην συνέχεια όταν θα γράφουμε $df(\bar{x})/d\bar{x}$ θα εννοούμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$ ως προς x στο σημείο $x = \bar{x}$.

Το αριστερό μέλος της σχέσης (2.4) μπορούμε χρησιμοποιώντας την σχέση πληρότητας των ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας, $\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$, να το γράψουμε ως

$$\langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n T/\hbar} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle . \quad (2.5)$$

Έτσι για μεγάλους χρόνους ($T \rightarrow \infty$) από την παραπάνω έκφραση ο κυρίαρχος όρος αντιστοιχεί στην θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος, δηλαδή

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle = e^{-E_0 T/\hbar} \langle x_f | n=0 \rangle \langle n=0 | x_i \rangle \simeq \Psi_0(x_f) \Psi_0^*(x_i) e^{-E_0 T/\hbar} . \quad (2.6)$$

Ας προχωρήσουμε τώρα στον υπολογισμό του ολοκληρώματος διαδρομών που βρίσκεται στο δεξί μέλος της σχέσης (2.4). Έστω ότι $X(\tau)$ είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις επιθυμητές συνοριακές συνθήκες. Τότε μια αυθαίρετη συνάρτηση $x(\tau)$ που ικανοποιεί τις επιθυμητές συνοριακές συνθήκες μπορεί να γραφεί συναρτήσει της $X(\tau)$ ως ακολούθως

$$x(\tau) = X(\tau) + \sum_n c_n x_n(\tau) , \quad (2.7)$$

όπου τα c_n είναι αυθαίρετες σταθερές και τα $x_n(\tau)$ είναι ένα πλήρες και ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων που μηδενίζονται στα σύνορα, δηλαδή

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x_n(\tau) x_m(\tau) = \delta_{nm} \quad \text{και} \quad x_n(\pm T/2) = 0 . \quad (2.8)$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ολοκλήρωση στα $\mathcal{D}x$ με ολοκληρώσεις ως προς τους αυθαίρετους συντελεστές και να γράψουμε

$$\mathcal{D}x = \prod_n \left(\frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right) , \quad (2.9)$$

όπου ο συντελεστής αναλογίας έχει επιλεγθεί έτσι ώστε να διευκολύνει τον μετέπειτα συμβολισμό μας (δεν εμπεριέχει μόνος του κάποια συγκεκριμένη σημασία και αλλάζει ανάλογα με την κανονικοποίηση, για αυτό χρειαζόμαστε και την σταθερά κανονικοποίησης N).

Πηγαίνουμε τώρα στο ημικλασσικό όριο ($\hbar \rightarrow 0$) όπου στο ολοκλήρωμα διαδρομών η κύρια συνεισφορά έρχεται από τις διαδρομές που στασιμοποιούν την δράση, και άρα από την κλασσική τροχιά \bar{x} (στάσιμο σημείο). Έστω ότι έχουμε ένα μόνο στάσιμο σημείο. Χρησιμοποιώντας την διαταρακτική μέθοδο και κρατώντας όρους μέχρι πρώτης τάξης ως προς το δx (διαταραχή έχουμε μόνο ως προς το \bar{x} με το δx να μηδενίζεται στα σύνορα και όχι ως προς το τ) μπορούμε να δούμε ότι το \bar{x} ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} \delta S = S[\bar{x} + \delta x] - S[\bar{x}] = 0 &\Rightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau [L_E(\bar{x} + \delta x, \partial_\tau(\bar{x} + \delta x), \tau) - L_E(\bar{x}, \partial_\tau(\bar{x}), \tau)] = 0 \xrightarrow{\Theta. \text{ Taylor}} \\ &\Rightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \left[L_E(\bar{x}, \partial_\tau(\bar{x}), \tau) + \frac{\partial L_E}{\partial \bar{x}} \delta x + \frac{\partial L_E}{\partial(\partial_\tau \bar{x})} (\partial_\tau \delta x) - L_E(\bar{x}, \partial_\tau(\bar{x}), \tau) \right] = 0 \xrightarrow{\text{Παραγοντική Ολοκλήρωση}} \end{aligned}$$

$$\int d\tau \left[\frac{\partial L_E}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L_E}{\partial (\partial_\tau \bar{x})} \right) \right] \delta x = \int d\tau \left[\frac{dV(\bar{x})}{d\bar{x}} - \frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} \right] \delta x = 0 \Rightarrow -\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} + \frac{dV(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0 \quad (2.10)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η γνωστή μας εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου μοναδιαίας μάζας που κινείται σε ένα δυναμικό $-V(x)$. Επομένως συμπεραίνουμε ότι η ακόλουθη ποσότητα αποτελεί σταθερά της κίνησης και αποτελεί κάτι σαν την γνωστή μας ενέργεια ενός κλασσικού σωματιδίου

$$-E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 - V(\bar{x}). \quad (2.11)$$

Αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω για να οδηγηθούμε στην εξίσωση (2.10) κρατώντας μέχρι τετραγωνικής τάξης όρους ως προς τις διαταραχές στο \bar{x} προκύπτει ότι για την δεύτερη συναρτησιακή παραγωγή της δράσης το εξής

$$S[\bar{x} + \delta x] - S[\bar{x}] = \int d\tau \delta x \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 V(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right] \delta x \Rightarrow \left. \frac{\delta^2 S}{\delta x(\tau) \delta x(\tau')} \right|_{x=\bar{x}} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{d^2 V(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \quad (2.12)$$

Θεωρούμε τώρα ότι οι συναρτήσεις x_n είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της σχέσης (2.12), δηλαδή ισχύει

$$-\frac{d^2 x_n}{d\tau^2} + \frac{d^2 V(\bar{x})}{d\bar{x}^2} x_n = \lambda_n x_n. \quad (2.13)$$

Αφού βρισκόμαστε στο ημικλασσικό όριο και αναμένουμε στο εκθετικό της δράσης στην σχέση (2.4) να συνεισφέρουν μόνο η κλασσική διαδρομή και οι τροχίες που βρίσκονται κοντά σε αυτή, μπορούμε την δράση $S[x]$ να την γράψουμε ως $S[\bar{x} + \sum_n c_n x_n]$ (όπου πήραμε $X(\tau) = \bar{x}$) και να την αναπτύξουμε κατά Taylor γύρω από την κλασσική τροχιά κρατώντας μέχρι όρους δεύτερης τάξης ως προς την διαταραχή $\delta x = \sum_n c_n x_n$. Έτσι αφού ισχύει $(\delta S / \delta \bar{x}) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} S[x] &= S[\bar{x}] + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \frac{\delta x}{2} \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{d^2 V(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right) \delta x + \dots = S[\bar{x}] + \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \left(\sum_n c_n x_n \right) \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{d^2 V(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right] \\ &\left(\sum_m c_m x_m \right) + \dots = S[\bar{x}] + \sum_{n,m} \frac{\lambda_m}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau c_n c_m x_n x_m + \dots \xrightarrow{(2.8)} S[x] = S[\bar{x}] + \sum_n \sum_m \frac{\lambda_m}{2} c_n c_m \delta_{nm} + \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow S[x] = S[\bar{x}] + \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n c_n^2 + \dots \quad (2.14) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στο ολοκλήρωμα διαδρομών προκύπτει

$$\begin{aligned} N \int \mathcal{D}x e^{-\frac{S[x]}{\hbar}} &= N \int \prod_n \left(\frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right) e^{-(S[\bar{x}] + \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n c_n^2 + \dots)/\hbar} = N e^{-\frac{S[\bar{x}]}{\hbar}} \int \prod_n \left(\frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right) e^{\sum_n -\frac{\lambda_n c_n^2}{2\hbar} + \dots} \Rightarrow \\ &\Rightarrow N \int \mathcal{D}x e^{-S[x]/\hbar} = N e^{-S[\bar{x]}/\hbar} \prod_n (\lambda_n)^{-\frac{1}{2}} \cdot [1 + O(\hbar)], \quad (2.15) \end{aligned}$$

όπου παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το ολοκλήρωμα Gauss $\int dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$ και το ημικλασσικό όριο $\hbar \rightarrow 0$. Άρα στο ημικλασσικό όριο και για μεγάλους χρόνους ισχύει τελικά η ακόλουθη σχέση

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle x_f | e^{-HT/\hbar} | x_i \rangle \simeq \Psi_0(x_f) \Psi_0^*(x_i) e^{-E_0 T/\hbar} = \frac{N e^{-S[\bar{x]}/\hbar}}{[\det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))]^{\frac{1}{2}}} \cdot [1 + O(\hbar)], \quad (2.16)$$

όπου παραπάνω ο τόνος υποδηλώνει παράγωγο ως προς x . Για να οδηγηθούμε στο παραπάνω αποτέλεσμα θεωρήσαμε ότι όλες οι ιδιοτιμές λ_n είναι θετικές. Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντα καθώς σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να έχουμε και μηδενικές ιδιοτιμές, και μια τέτοια περίπτωση θα μελετήσουμε μετέπειτα στα πλαίσια αυτού του υποκεφαλαίου.

Ας δούμε τώρα ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι το δυναμικό $V(\bar{x})$ είναι δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή $V(\bar{x}) = \omega^2 \bar{x}^2/2$, και ότι για την αρχική και τελική θέση της μετάβασης ισχύει $x_i = x_f = 0$. Οπότε για να βρούμε την τροχιά \bar{x} που στασιμοποιεί την δράση πρέπει να λύσουμε το εξής πρόβλημα

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} = \omega^2 \bar{x} \quad \text{και} \quad \bar{x}(-T/2) = \bar{x}(T/2) = 0. \quad (2.17)$$

Η μόνη λύση του παραπάνω προβλήματος είναι η τετριμμένη $\bar{x} = 0$. Αντικαθιστώντας αυτή την λύση στην δράση προκύπτει προφανώς $S[\bar{x}] = 0$, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα η σχέση (2.16) για αυτό το σύστημα να γίνεται

$$|\Psi_0(0)|^2 e^{-E_0 T/\hbar} = \frac{N \cdot [1 + O(\hbar)]}{[\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)]^{1/2}}. \quad (2.18)$$

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του τελεστή $(-\partial_\tau^2 + \omega^2)$ πρέπει να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα ιδιοτιμών - ιδιοκαταστάσεων

$$(-\partial_\tau^2 + \omega^2) x_m = \lambda_m x_m \Rightarrow \frac{d^2 x_m}{d\tau^2} + (\lambda_m - \omega^2) x_m = 0 \quad \text{με} \quad x_m(\pm T/2) = 0. \quad (2.19)$$

Η λύση του παραπάνω προβλήματος που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $x_m(-T/2) = 0$ είναι η

$$x_m = A \sin\left(\sqrt{\lambda_m - \omega^2} \left[\tau + \frac{T}{2}\right]\right). \quad (2.20)$$

Από την απαίτηση να ικανοποιείται και η συνοριακή συνθήκη $x_m(T/2) = 0$ από την παραπάνω συνάρτηση, βρίσκουμε

$$\sqrt{\lambda_m - \omega^2} T = m\pi \xrightarrow{\lambda_m \neq \omega^2 \rightarrow m \geq 0} \lambda_m = \left(\frac{m\pi}{T}\right)^2 + \omega^2 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.21)$$

Όμως το δεξί μέλος της σχέσης (2.18) μπορούμε να το γράψουμε και ως ακολούθως

$$N \prod_{m=1}^{\infty} (\lambda_m)^{-1/2} = N \underbrace{\prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{T}\right)^{-1}}_A \cdot \underbrace{\left(\prod_{m=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2 m^2}\right]\right)^{-1/2}}_B. \quad (2.22)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι το A αντιστοιχεί στον διαδότη $\langle x_f = 0 | e^{-H_0 T/\hbar} | x_i = 0 \rangle$ ενός ελεύθερου σωματιδίου. Έτσι για αυτό πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} A &= \langle x_f = 0 | e^{-\hat{p}^2 T/2\hbar} | x_i = 0 \rangle = \int dp \langle x_f = 0 | e^{-\hat{p}^2 T/2\hbar} | p \rangle \langle p | x_i = 0 \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-p^2 T/2\hbar} \Rightarrow \\ &\xrightarrow{\text{Gaussian Integral}} A = \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{\pi}{T/2\hbar}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{2\pi T\hbar}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Για τον υπολογισμό του B αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη σχέση που μπορεί πολύ εύκολα να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τον τρόπο άθροισης σειρών μέσω Μιγαδικής Ανάλυσης

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{n^2}\right) = \frac{\sinh(\pi y)}{\pi y}. \quad (2.24)$$

Επομένως αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.23) και (2.24) (για $y^2 = \omega^2 T^2 / \pi^2$) στην σχέση (2.18) προκύπτει για μεγάλους χρόνους ($T \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} |\Psi_0(0)|^2 e^{-E_0 T / \hbar} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi T \hbar}} \cdot \left[\frac{\sinh(\omega T)}{\omega T} \right]^{-1/2} [1 + O(\hbar)] = \sqrt{\frac{\omega}{\pi \hbar}} \cdot [2 \sinh(\omega T)]^{-1/2} [1 + O(\hbar)] = \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi \hbar}} \cdot (e^{\omega T} - e^{-\omega T})^{-1/2} [1 + O(\hbar)] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} |\Psi_0(0)|^2 e^{-E_0 T / \hbar} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi \hbar}} \cdot e^{-\omega T / 2} [1 + O(\hbar)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Συγκρίνοντας στην σχέση (2.25) το δεξί με το αριστερό μέλος συμπεραίνουμε ότι για την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης και το $|\Psi_0(0)|^2$ ισχύει, αντίστοιχα

$$E_0 = \frac{\hbar \omega}{2} + O(\hbar^2) \quad \text{και} \quad |\Psi_0(0)|^2 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi \hbar}} \cdot [1 + O(\hbar)], \quad (2.26)$$

τα οποία είναι και τα ορθά ημικλασσικά αποτελέσματα για το σύστημα του αρμονικού ταλαντωτή.

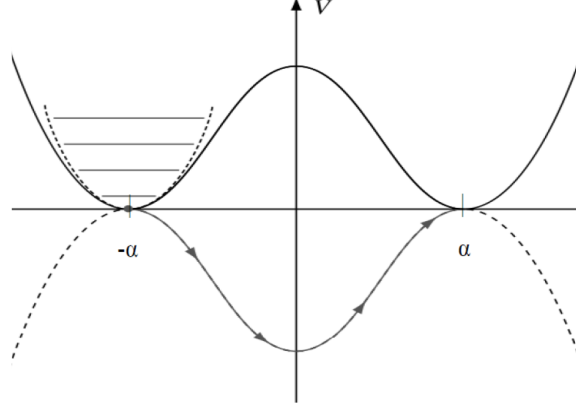
Αφού μελετήσαμε το θεμελιώδες σύστημα του αρμονικού ταλαντωτή κοντά στην θέση ισορροπίας του χρησιμοποιώντας αυτήν την περίπλοκη μέθοδο υπολογισμού του πλάτους μετάβασης στο ημικλασσικό όριο, μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την μέθοδο αυτή σε ένα λιγότερο τετριμμένο πρόβλημα, στο οποίο εμφανίζονται φαινόμενα σήραγγας. Αυτό το πρόβλημα είναι το σύστημα ενός σωματιδίου που υπόκειται σε ένα δυναμικό συμμετρικού διπλού πηγαδιού (βλέπε Σχήμα 2.1), το οποίο είναι και το πιο απλό σύστημα όπου είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος των instantons για την μελέτη του φαινομένου σήραγγας. Στην μελέτη μας αυτή θεωρούμε ότι τα δύο ελάχιστα του δυναμικού βρίσκονται στις θέσεις $x = \pm a$, ότι το δυναμικό είναι μια άρτια συνάρτηση του x (δηλαδή $V(-x) = V(x)$) και ότι ισχύει $V''(x = \pm a) = \omega^2$. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε κάποια συγκεκριμένη αναλυτική μορφή για το δυναμικό αυτό αλλά απλά θα αρκεστούμε στην σχηματική μορφή που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1. Αν κάποιος επιθυμεί να οδηγηθεί σε πιο χειροπιαστά αποτελέσματα μπορεί να χρησιμοποιήσει για το δυναμικό την μορφή $V(x) = \lambda(x^2 - a^2)^2$, η να ανατρέξει στο αντίστοιχο παράδειγμα που παρουσιάζεται στο βιβλίο *ABC of Instantons*. Ανεξαρτήτως όμως της φορμαλιστικής μορφής του δυναμικού αυτού μπορεί εύκολα κανείς να συμπεράνει από την σχηματική μορφή ότι κοντά στα ελάχιστα ισχύει

$$\tilde{V}(x) = \frac{\omega^2}{2}(x - a)^2 + O((x - a)^3). \quad (2.27)$$

Στα πλαίσια αυτού του προβλήματος ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό των ακόλουθων πλατών μετάβασης, που εμπεριέχουν tunneling, στο ημικλασσικό όριο και για μεγάλους χρόνους

$$\langle -a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \langle a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle \quad \text{και} \quad \langle -a | e^{-HT/\hbar} | a \rangle = \langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle. \quad (2.28)$$

Για να πραγματοποιήσουμε αυτούς τους υπολογισμούς πρέπει να επιλύσουμε την κλασσική Ευκλείδεια εξίσωση κίνησης, που δίνεται από την σχέση (2.10), για το σύστημα του συμμετρικού διπλού



Σχήμα 2.1: Σχηματική μορφή του δυναμικού και του ανεστραμμένου δυναμικού του διπλού πηγαδιού.

πηγαδιού με την εφαρμογή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών. Δυο τετριμμένες λύσεις αυτής της εξίσωσης που αντιστοιχούν και σε μηδενική δράση είναι οι $\bar{x} = -a$ και $\bar{x} = a$ για το πρώτο πλάτος μετάβασης, σε αντιστοιχία με την λύση $\bar{x} = 0$ που είχαμε στο σύστημα του αρμονικού ταλαντωτή. Ωστόσο στο σύστημα που μελετάμε τώρα υπάρχουν και άλλες πιο ενδιαφέρουσες λύσεις, όπου η μια από αυτές είναι το σωματίδιο την χρονική στιγμή $-T/2$ να βρίσκεται στην θέση $x_i = -a$ και να πηγαίνει στην θέση $x_f = a$ την χρονική στιγμή $T/2$ και η άλλη είναι ακριβώς η ίδια κίνηση - λύση μόνο που το σωματίδιο ξεκινάει από την θέση $x_i = a$ και πηγαίνει στην θέση $x_f = -a$. Για αυτές τις δύο ενδιαφέρουσες λύσεις συμπεραίνουμε από την γραφική μορφή του ανεστραμμένου δυναμικού ότι έχουμε να κάνουμε με μεταβάσεις σταθερού και συγκεκριμένα μηδενικού E , $E = 0$. Έτσι για την πρώτη από αυτές τις λύσεις προκύπτει από την εξίσωση (2.11)

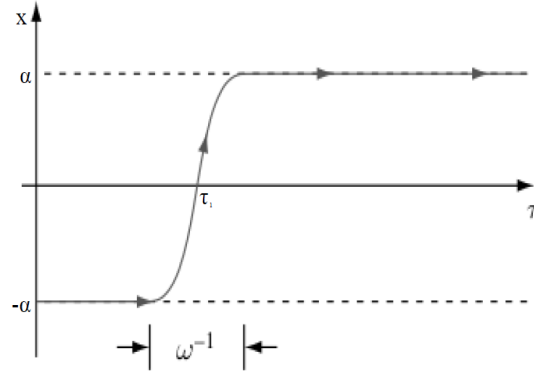
$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 - V(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right) = \sqrt{2V(\bar{x})} \Rightarrow d\tau = \frac{d\bar{x}}{\sqrt{2V(\bar{x})}} \Rightarrow \tau = \tau_1 + \int_0^{\bar{x}} \frac{dx'}{\sqrt{2V(x')}} , \quad (2.29)$$

όπου το τ_1 είναι η χρονική στιγμή στην οποία έχουμε $\bar{x}(\tau_1) = 0$. Από την σχέση (2.29) προκύπτει ότι το \bar{x} έχει μια εξάρτηση τύπου υπερβολικής εφαπτομένης από τον χρόνο και έχει σχηματικά την μορφή που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2. Αυτή η λύση ονομάζεται instanton και το τ_1 αποτελεί το κέντρο του instanton. Η άλλη ενδιαφέρουσα λύση που μας πηγαίνει από το $x_i = a$ στο $x_f = -a$ ονομάζεται anti-instanton και προκύπτει πολύ εύκολα από το instanton άμα αντικαταστήσουμε σε αυτό τον χρόνο τ με $-\tau$. Λόγω της εξάρτησης του instanton από το κέντρο του (τ_1) έχουμε ουσιαστικά μια οικογένεια λύσεων (instantons) που διαφέρουν ως προς αυτή την παράμετρο και που έχουν την ίδια δράση.

Για την δράση του instanton, η οποία είναι ίδια με την δράση του anti-instanton, έχουμε σύμφωνα με τις σχέσεις (2.3) και (2.29)

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 + V(\bar{x}) \right] = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 = \int_{-a}^a d\bar{x} \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_0 = \int_{-a}^a d\bar{x} \sqrt{2V(\bar{x})} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Για μεγάλους χρόνους ($\tau \gg 1$) το \bar{x} πλησιάζει στο ένα από τα δύο ελάχιστα και όπως αναφέραμε προηγουμένως το δυναμικό του συμμετρικού διπλού πηγαδιού έχει προσεγγιστικά την μορφή που



Σχήμα 2.2: Σχηματική μορφή του instanton όπου σημειώνεται και το εύρος του στον χρόνο, ω^{-1} .

απεικονίζεται στην σχέση (2.27). Τότε από την σχέση (2.29) έχουμε

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \sqrt{2\tilde{V}(\bar{x})} = \omega(a - \bar{x}) \Rightarrow (a - \bar{x}) \propto e^{-\omega\tau}. \quad (2.31)$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας λέει ουσιαστικά ότι αυτοί οι τοπολογικοί σχηματισμοί, που ονομάζονται instantons και anti-instantons, είναι εντοπισμένοι στον χρόνο και το χαρακτηριστικό χρονικό τους εύρος είναι της τάξης του ω^{-1} . Από αυτήν την ιδιότητα πηγάζει και η ονομασία instanton (instant=στιγμιαίο). Αυτή η ιδιότητα είναι πολύ σημαντική καθώς υποδεικνύει ότι για μεγάλους χρόνους οι προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης κίνησης που ικανοποιούν και τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες δεν είναι μόνο το instanton και το anti-instanton αλλά υπάρχουν και άλλες προσεγγιστικές λύσεις που αποτελούνται από σειρές ευρέως διαχωρισμένων ($T \gg \omega^{-1}$) instantons και anti-instantons.

Ας υπολογίσουμε τώρα τα πλάτη μετάβασης της σχέσης (2.28) αθροίζοντας πάνω σε όλους τους σχηματισμούς (σειρές από instantons και anti-instanton) που περιέχουν n instantons και anti-instantons κεντραρισμένα στους χρόνους $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. Για τα κέντρα αυτά ισχύει αναγκαστικά η διάταξη

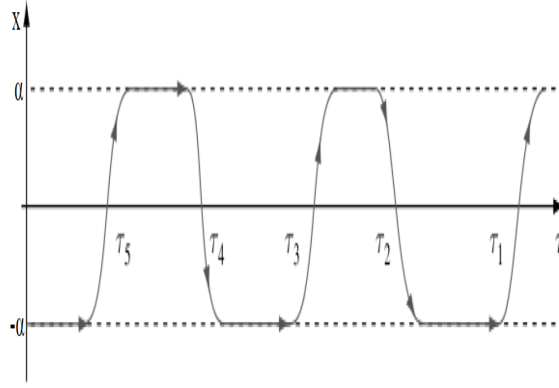
$$T/2 > \tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n > -T/2. \quad (2.32)$$

Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζεται ένας τέτοιος σχηματισμός. Για να πραγματοποιήσουμε αυτούς τους υπολογισμούς θα χρειαστούμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις - συνεπαγωγές:

1) Για την δράση n ευρέως διαχωρισμένων instantons και anti-instantons, δεδομένου ότι η δράση του instanton είναι ίση με την δράση του anti-instanton όπως αναφέραμε προηγουμένως, προφανώς ισχύει

$$S[\bar{x}] = nS_0. \quad (2.33)$$

2) Για τον υπολογισμό της ορίζουσας $N[\det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))]^{-\frac{1}{2}}$ αυτού του συστήματος αρκεί να κάνουμε τον εξής απλό συλλογισμό. Δεδομένου ότι ισχύει $V''(\pm a) = \omega^2$, αν κατά την μετάβαση δεν υπήρχαν τα ενδιάμεσα μικρά διαστήματα που περιέχουν τα instantons και anti-instantons τότε η ορίζουσα αυτή θα μας έδινε το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που είχαμε βρει στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή $(\omega/\pi\hbar)^{1/2}e^{-\omega\tau/2}$. Όμως λόγω της ύπαρξης αυτών των χρονικών διαστημάτων η έκφραση αυτή διορθώνεται μέσω ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα $K \cdot T$ για κάθε instanton ή anti-instanton. Το K προκύπτει από την απαίτηση η έκφραση $KT(\omega/\pi\hbar)^{1/2}e^{-\omega\tau/2}$ να δίνει το σωστό



Σχήμα 2.3: Σειρά από 5 instantons και anti-instantons που ξεκινάει από την θέση $x_i = -a$ και τελειώνει στην θέση $x_f = a$.

αποτέλεσμα για μια μετάβαση μέσω ενός μόνου instanton. Έτσι για μετάβαση μέσω n instanton και anti-instanton η ορίζουσα αυτού του συστήματος γίνεται

$$N[\det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))]^{-\frac{1}{2}} = N[\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)]^{-\frac{1}{2}} \frac{K^n T^n}{n!} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \frac{K^n T^n}{n!}. \quad (2.34)$$

Πριν συνεχίσουμε στις υπόλοιπες παρατηρήσεις πρώτα ας υπολογίσουμε τον διορθωτικό παράγοντα K και ας εξηγήσουμε πως προκύπτει ο παράγοντας $T^n/n!$. Η εξίσωση ιδιοτιμών - ιδιοκαταστάσεων που δίνεται από την σχέση (2.13) όπου η τροχιά \bar{x} είναι αυτή ενός μόνου instanton (αυτή είναι μια εξίσωση τύπου Schrödinger), λόγω της παρουσίας του instanton με ένα συγκεκριμένο κέντρο τ_1 χάνει την αναλλοιώτητα της στις χρονικές μεταθέσεις για μεγάλους χρόνους, πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι αυτή περιέχει μια ιδιοκατάσταση με μηδενική ιδιοτιμή. Για το instanton γνωρίζουμε σύμφωνα με την σχέση (2.29) ότι έχουμε

$$\left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right)^2 = 2V(\bar{x}) \xrightarrow{\frac{d}{d\tau}} 2\frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} \cdot \frac{d\bar{x}}{d\tau} = 2V'(\bar{x}) \cdot \frac{d\bar{x}}{d\tau} \Rightarrow \frac{d^2\bar{x}}{d\tau^2} = V'(\bar{x}) \xrightarrow{\frac{d}{d\tau}} \frac{d^3\bar{x}}{d\tau^3} = V''(\bar{x}) \frac{d\bar{x}}{d\tau}. \quad (2.35)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση για την ιδιοκατάσταση με την μηδενική ιδιοτιμή, έχουμε από την σχέση (2.13) το ακόλουθο

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} - V''(\bar{x})x_1 = 0 \xrightarrow{(2.35)} \frac{d^2x_1}{d\tau^2} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{d^2}{d\tau^2} \left[\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right] \cdot \left(\frac{d\tau}{d\bar{x}} \right) \Rightarrow x_1 = N \frac{d\bar{x}}{d\tau}. \quad (2.36)$$

Όμως αφού τα x_n είναι ορθοκανονικές συναρτήσεις πρέπει σύμφωνα με την σχέση (2.8) να ισχύει

$$\int_{-T/2}^{T/2} x_1^2 d\tau = 1 \Rightarrow \int_{-T/2}^{T/2} N^2 \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 d\tau = 1 \xrightarrow{(2.30)} N^2 S_0 = 1 \Rightarrow N = \pm (S_0)^{-1/2}. \quad (2.37)$$

Οπότε κρατώντας ως λύση για το N αυτή με το - (τον λόγο θα τον δούμε αργότερα) βρήκαμε ουσιαστικά ότι η ιδιοκατάσταση που έχει μηδενική ιδιοτιμή είναι η ακόλουθη

$$x_1 = -(S_0)^{-1/2} \frac{d\bar{x}}{d\tau} \Rightarrow x_1 = (S_0)^{-1/2} \frac{d\bar{x}}{d\tau_1}. \quad (2.38)$$

Η ύπαρξη της μηδενικής ιδιοτιμής μας δημιουργεί πρόβλημα καθώς χαλάει το Γκαουσιανό ολοκλήρωμα που θα προέκυπτε για την σταθερά c_1 (που αντιστοιχεί στην x_1) στο ολοκλήρωμα διαδρομών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ολοκλήρωση ως προς την αυθαίρετη σταθερά c_1 να οδηγεί σε απειρισμό

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc_1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\lambda_1 c_1^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc_1}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \infty. \quad (2.39)$$

Όμως μπορούμε να αποφύγουμε αυτόν τον απειρισμό αν αντί να ολοκληρώσουμε ως προς την αυθαίρετη σταθερά c_1 ολοκληρώσουμε ως προς το κέντρο του instanton, τ_1 . Αυτές οι δυο ολοκληρώσεις είναι ισοδύναμες και μπορούμε να το δούμε αυτό ως εξής. Η μεταβολή του $x(\tau)$ λόγω μιας μικρής μεταβολής στο τ_1 , σύμφωνα με την σχέση (2.7) για $X = \bar{x}$, δίνεται από την σχέση

$$\frac{dx}{d\tau_1} = \frac{d\bar{x}}{d\tau_1} \Rightarrow dx = \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau_1} \right) d\tau_1 \xrightarrow{(2.38)} dx = x_1(S_0)^{1/2} d\tau_1. \quad (2.40)$$

Επίσης από την σχέση (2.7) παρατηρούμε ότι η μεταβολή του $x(\tau)$ λόγω μιας μικρής μεταβολής στο c_1 είναι η εξής

$$\frac{dx}{dc_1} = x_1 \Rightarrow dx = x_1 dc_1. \quad (2.41)$$

Εξισώνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις και διαιρώντας με $\sqrt{2\pi\hbar}$ συμπεραίνουμε ότι το dc_1 συνδέεται με το $d\tau_1$ μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\frac{dc_1}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} d\tau_1, \quad (2.42)$$

και άρα όντως η ολοκλήρωση ως προς c_1 είναι ισοδύναμη με αυτήν ως προς τ_1 . Τώρα είναι εμφανές και ο λόγος για τον οποίο επιλέξαμε $N = -\sqrt{S_0}$. Αυτός είναι ότι με αυτόν τον τρόπο όπως στην ολοκλήρωση του c_1 πηγαίνουμε από το $-\infty$ στο $+\infty$ έτσι πηγαίνουμε και στην ολοκλήρωση του τ_1 από το $-\infty$ ($-T/2$) στο $+\infty$ ($T/2$), ενώ άμα είχαμε επιλέξει την άλλη λύση η ολοκλήρωση στο τ_1 θα άλλαζε φορά λόγω ενός πρόσημου $-$. Έτσι η ολοκλήρωση ως προς c_1 όταν η μετάβαση από το $x_i = -a$ στο $x_f = a$ γίνεται μέσω ενός instanton θα μας δώσει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dc_1}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \int_{-T/2}^{+T/2} \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} d\tau_1 = T \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{1/2}. \quad (2.43)$$

Επομένως όταν έχουμε μετάβαση μέσω n instantons και anti-instanton η ολοκλήρωση ως προς τα κέντρα τους, διατηρώντας την χρονική διάταξη της σχέσης (2.32), μας δίνει τον εξής όρο (για αυτό στην σχέση (2.34) εμφανίζεται αυτός ο όρος)

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\tau_1 \int_{-T/2}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{-T/2}^{\tau_{n-1}} d\tau_n = \frac{T^n}{n!}. \quad (2.44)$$

Με βάση όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για την ορίζουσα $N[\det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))]^{-\frac{1}{2}}$ όταν η μετάβαση γίνεται μέσω ενός instanton ή anti-instanton ισχύει η ακόλουθη σχέση από την οποία βρίσκουμε και την μορφή του K

$$N[\det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))]^{-\frac{1}{2}} = N[\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)]^{-\frac{1}{2}} KT = NT \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} [Det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left[\frac{\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)}{\text{Det}(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))} \right]^{1/2}, \quad (2.45)$$

όπου με τον συμβολισμό Det εννοούμε την κανονική ορίζουσα παραλείποντας από αυτήν την μηδενική ιδιοτιμή.

Παρατήρηση: Αφού η εξίσωση (2.13) είναι μια μονοδιάστατη εξίσωση τύπου Schrödinger, όπως γνωρίζουμε από την Κβαντική Μηχανική και θεωρώντας ότι δεν υπάρχει εκφυλισμός, σε αυτήν η ιδιοκατάσταση της χαμηλότερης ιδιοτιμής δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο, η ιδιοκατάσταση της επόμενης ιδιοτιμής μηδενίζεται σε ένα σημείο, κ.ο.κ.. Έτσι δεδομένου ότι το instanton είναι μια μονότονα αύξουσα συνάρτηση του τ , η ιδιοκατάσταση με την μηδενική ιδιοτιμή, x_1 , που είναι ανάλογη της χρονικής παράγωγου του instanton δεν θα μηδενίζεται σε κανένα σημείο. Αυτό σημαίνει ότι η μικρότερη ιδιοτιμή της εξίσωσης (2.13) παρουσία ενός instanton (και άρα και παρουσία πολλών instantons και anti-instantons) είναι η μηδενική και άρα όλες οι υπόλοιπες ιδιοτιμές είναι θετικές.

3) Συνεχίζοντας με τις παρατηρήσεις-συνεπαγωγές, δεν μπορούμε να αλλάζουμε αυθαίρετα την σειρά των instantons και anti-instantons στην μετάβαση από μια αρχική σε μια τελική θέση. Πιο συγκεκριμένα, μετά από ένα instanton θα ακολουθεί ένα anti-instanton και αντίστροφα. Άμα ξεκινάμε την μετάβαση μας από την θέση $x_i = -a$ θα αρχίζουμε με instanton, ενώ άμα ξεκινάμε από την θέση $x_i = a$ θα αρχίζουμε με anti-instanton. Αν επιθυμούμε να μεταβούμε τελικά στην θέση $x_f = -a$ θα πρέπει το τελευταίο στοιχείο να είναι anti-instanton, ενώ αντίστοιχα άμα θέλουμε να οδηγηθούμε στην τελική θέση $x_f = a$ θα πρέπει το τελευταίο στοιχείο να είναι instanton. Φυσικά υπάρχουν και οι μεταβάσεις από $x_i = -a$ σε $x_f = -a$ και από $x_i = a$ σε $x_f = a$ που μπορούν να γίνουν και χωρίς την μεσολάβηση κανενός instanton ή anti-instanton. Έτσι άμα ξεκινάμε από την θέση $x_i = -a$ [$x_i = a$] και θέλουμε να μεταβούμε στην θέση $x_f = -a$ [$x_f = a$] θα πρέπει ο αριθμός n των μεσολαβούντων instantons και anti-instantons να είναι άρτιος, ενώ αν θέλουμε να μεταβούμε στην θέση $x_f = a$ [$x_f = -a$] θα πρέπει ο αριθμός n να είναι περιττός.

Χρησιμοποιώντας τις τρεις προηγούμενες παρατηρήσεις-συνεπαγωγές συμπεραίνουμε ότι για το πλάτος μετάβασης $\langle -a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle$ του συστήματος που μελετάμε ισχύει

$$\langle -a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \sum_{\substack{\text{άρτια} \\ n}} \left(\frac{K e^{-S_0/\hbar T}}{n!} \right)^n \cdot [1 + O(\hbar)], \quad (2.46)$$

όπου παραπάνω αθροίζουμε σε άρτια n ($n = 0, 2, 4, \dots$) γιατί παίρνουμε όλες τις περιπτώσεις που μας πάνε από το $x_i = -a$ στο $x_f = -a$, δηλαδή μετάβαση μέσω κανενός instanton, μετάβαση μέσω instanton \rightarrow anti-instanton, μετάβαση μέσω instanton \rightarrow anti-instanton \rightarrow instanton \rightarrow anti-instanton, κ.ο.κ.. Αντίστοιχα για το πλάτος μετάβασης $\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle$ έχουμε

$$\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \sum_{\substack{\text{περιττά} \\ n}} \left(\frac{K e^{-S_0/\hbar T}}{n!} \right)^n \cdot [1 + O(\hbar)]. \quad (2.47)$$

Τα αθροίσματα όμως που εμφανίζονται στις σχέσεις (2.46) και (2.47) είναι ουσιαστικά τα αναπτύγματα Taylor του υπερβολικού συνημίτονου και του υπερβολικού ημίτονου, αντίστοιχα. Οπότε χρησιμοποιώντας αυτή την πληροφορία οδηγούμαστε τελικά στην ακόλουθη γενική και πιο χρήσιμη μορφή για

τα πλάτη μετάβασης

$$\langle \pm a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \frac{e^{-\omega T/2}}{2} \left[e^{(Ke^{-S_0/\hbar}T)} \mp e^{-(Ke^{-S_0/\hbar}T)} \right] \cdot [1 + O(\hbar)]. \quad (2.48)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την σχέση (2.6) συμπεραίνουμε ότι η θεμελιώδης ενέργεια του συστήματος σπάει σε δύο ενέργειες, όπου η μια αποτελεί την ιδιοτιμή του χωρικά άρτιου συνδυασμού των θεμελιωδών ιδιοκαταστάσεων του καθενός πηγαδιού ξεχωριστά, $|-\rangle$, και η άλλη αποτελεί την ιδιοτιμή του χωρικά περιττού συνδυασμού αυτών των ιδιοκαταστάσεων, $|+\rangle$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιοκαταστάσεις $|-\rangle$ και $|+\rangle$ μπορούμε να φέρουμε τα πλάτη μετάβασης που μας ενδιαφέρουν στην εξής μορφή, αντίστοιχα

$$\langle -a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = |\langle -a | + \rangle|^2 e^{-E_+T/\hbar} + |\langle -a | - \rangle|^2 e^{-E_-T/\hbar}, \quad (2.49)$$

και

$$\langle a | e^{-HT/\hbar} | -a \rangle = \langle a | + \rangle \langle + | -a \rangle e^{-E_+T/\hbar} + \langle a | - \rangle \langle - | -a \rangle e^{-E_-T/\hbar}. \quad (2.50)$$

Παρατηρώντας τώρα τις σχέσεις (2.48), (2.49) και (2.50) συμπεραίνουμε ότι για τις ιδιοτιμές E_+ , E_- και τους συντελεστές μπροστά από τα εκθετικά στις σχέσεις (2.49) και (2.50) ισχύει

$$E_{\pm} = \frac{\hbar\omega}{2} \pm \hbar K e^{-S_0/\hbar} + O(\hbar^2), \quad (2.51)$$

και

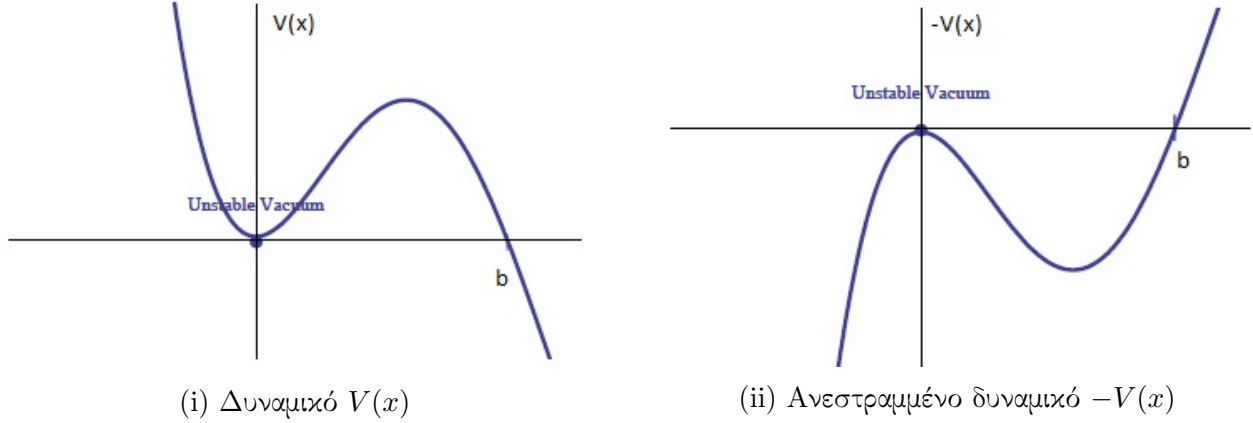
$$|\langle + | \pm a \rangle|^2 = |\langle - | \pm a \rangle|^2 = \langle a | - \rangle \langle - | -a \rangle = -\langle a | + \rangle \langle + | -a \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \cdot [1 + O(\hbar)]. \quad (2.52)$$

Ο εκφυλισμός των δύο ενεργειών (E_+ , E_-) σπάει λόγω του φαινομένου σήραγγας και για αυτόν τον λόγο η διαφορά των ενεργειών αυτών, $E_+ - E_- = 2\hbar K e^{-S_0/\hbar}$, είναι ανάλογη του εκθετικού παράγοντα WKB. Στην πραγματικότητα αυτή η διαφορά στις ενέργειες είναι πολύ μικρή.

Στον προσεγγιστικό υπολογισμό των πλατών μετάβασης που πραγματοποιήσαμε προηγουμένως θεωρήσαμε ότι όλα τα instantons και anti-instantons, στα οποία αθροίζουμε, απέχουν μεγάλες χρονικές αποστάσεις μεταξύ τους (dilute-gas approximation). Για να ελέγξουμε την ορθότητα αυτής μας της θεώρησης πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι η κύρια συνεισφορά στο άθροισμα μας προέρχεται από όρους όπου η πυκνότητα των instantons και anti-instantons, n/T είναι αρκετά μικρή. Για μια σταθερή τιμή y , οι όροι στο ανάπτυγμα Taylor του εκθετικού $\sum_n y^n/n!$, αυξάνονται με την αύξηση του n μέχρις ότου το n γίνει περίπου ίσο με το y . Από αυτό το σημείο και μετά οι όροι που προστίθενται στο άθροισμα φθίνουν πολύ γρήγορα. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον συλλογισμό για τα αναπτύγματα Taylor που εμφανίζονται στις σχέσεις (2.46) και (2.47), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι όροι που κυρίως συνεισφέρουν σε αυτά τα αθροίσματα είναι αυτοί για τους οποίους έχουμε

$$n \leq K e^{-S_0/\hbar} T \Rightarrow \frac{n}{T} \leq K e^{-S_0/\hbar}. \quad (2.53)$$

Έτσι στην ημικλασική προσέγγιση όπου βρισκόμαστε, αφού ο εκθετικός όρος $e^{-S_0/\hbar}$ είναι πολύ μικρός αυτό σημαίνει ότι για τους κυρίαρχους όρους του αθροίσματος και το n/T είναι πολύ μικρό. Επομένως η προσέγγιση των ευρέως διαχωρισμένων instanton και anti-instanton που χρησιμοποιήσαμε είναι σωστή και μάλιστα τα ενδιαμέσα χρονικά διαστήματα είναι τεράστια για τους κυρίως συνεισφέροντες όρους του αθροίσματος.

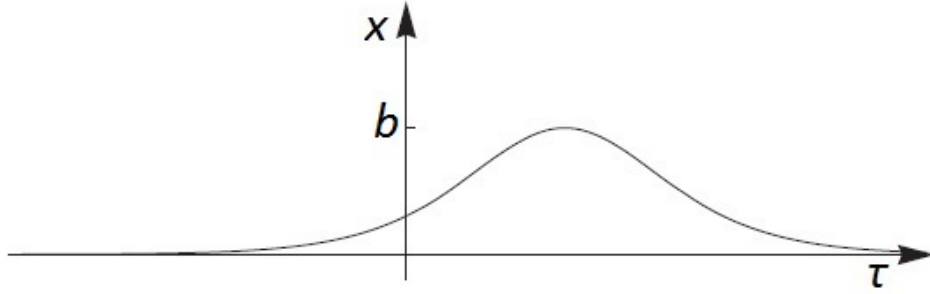


Σχήμα 2.4: Στην εικόνα (i) παρουσιάζεται η σχηματική μορφή του δυναμικού μέσω του οποίου θα μελετήσουμε το bounce, $V(x)$, ενώ στην εικόνα (ii) παρουσιάζεται η σχηματική μορφή του $-V(x)$.

Ας μελετήσουμε τώρα, χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο, το πρόβλημα που περιγράφεται από το δυναμικό που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.4. Για το δυναμικό αυτό ισχύει $V''(x=0) = \omega^2$. Γύρω από το ελάχιστο αυτού του δυναμικού υπάρχει μια ενεργειακή κατάσταση η οποία καθίσταται ασταθής λόγω φαινομένου σήραγγας. Αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τις διορθώσεις στην ενέργεια αυτής της κατάστασης λόγω του φαινομένου σήραγγας, θεωρώντας μετάβαση από την αρχική θέση $x_i = 0$ την χρονική στιγμή $-T/2$ στην τελική θέση $x_f = 0$ την χρονική στιγμή $T/2$, για μεγάλους χρόνους ($T \rightarrow \infty$). Από την μορφή του ανεστραμμένου δυναμικού αυτού του συστήματος παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μη τετριμμένη λύση της Ευκλείδειας εξίσωσης κίνησης, (2.10), στην οποία το σωματίο ξεκινάει να κυλάει από την κορυφή στην θέση $x = 0$ προς τα δεξιά φτάνοντας μέχρι την θέση $x = b$ με μηδενική ταχύτητα και στην συνέχεια επιστρέφει πίσω στην κορυφή $x = 0$. Αυτή η κίνηση (τοπολογικός σχηματισμός) ονομάζεται bounce και η γραφική μορφή του απεικονίζεται στο Σχήμα 1.5. Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι το bounce είναι τοπικά εντοπισμένο στον χρόνο και το εύρος του είναι της τάξης του ω^{-1} , ενώ επίσης μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει από το διάγραμμα του $V(x)$ ότι για την μετάβαση αυτή ισχύει $E = 0$, πράγματα τα οποία ίσχυαν και για το instanton.

Για τον υπολογισμό του πλάτους μετάβασης $\langle 0|e^{-HT/\hbar}|0\rangle$ που μας ενδιαφέρει, πρέπει να ανθροίσουμε πάνω σε όλους τους σχηματισμούς που περιέχουν n ευρέως διαχωρισμένα bounces (δηλαδή ουσιαστικά ανθροίζουμε την πιθανότητα όλων των δυνατών τρόπων μετάβασης από το $x_i = 0$ στο $x_f = 0$ για αυτό το σύστημα), όπως ακριβώς στο προηγούμενο παράδειγμα του συμμετρικού διπλού πηγαδιού όπου ανθροίσαμε πάνω σε όλους τους σχηματισμούς που περιείχαν n ευρέως διαχωρισμένα instantons και anti-instantons. Η μόνη διαφορά σε αυτά τα δυο ανθροίσματα είναι ότι στο άθροισμα των bounces δεν είμαστε υποχρεωμένοι να ανθροίζουμε ξεχωριστά σε περιττά και άρτια n , αλλά ανθροίζουμε σε όλα τα n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Επομένως σε αντιστοιχία με το αποτέλεσμα που είχαμε βρει στην σχέση (2.46) για το σύστημα του συμμετρικού διπλού πηγαδιού, συμπεραίνουμε ότι για το πλάτος μετάβασης $\langle 0|e^{-HT/\hbar}|0\rangle$ αυτού του συστήματος ισχύει

$$\begin{aligned} \langle 0|e^{-HT/\hbar}|0\rangle &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{K e^{-S_0/\hbar T}}{n!}\right)^n [1 + O(\hbar)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle 0|e^{-HT/\hbar}|0\rangle = e^{-\omega T/2} \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{KT e^{-S_0/\hbar}} [1 + O(\hbar)], \end{aligned} \quad (2.54)$$



Σχήμα 2.5: Σχηματική μορφή του bounce

όπου παραπάνω τα K και $S_0 = 2 \int_0^b d\bar{x} \sqrt{2V(\bar{x})}$ είναι οι αντίστοιχες ποσότητες που είχαμε υπολογίσει προηγουμένως για το instanton, αλλά για το bounce. Συγκρίνοντας τώρα την παραπάνω σχέση με την σχέση (2.6) παρατηρούμε ότι για την ιδιοτιμή της ενεργειακής κατάστασης γύρω από το ελάχιστο αυτού του δυναμικού έχουμε

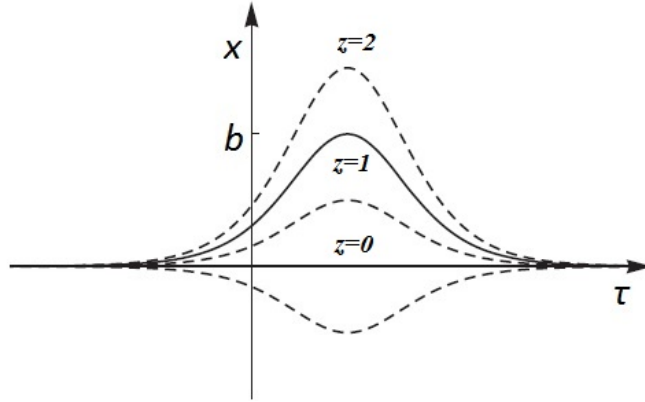
$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega - \hbar K e^{-S_0/\hbar} + O(\hbar^2). \quad (2.55)$$

Στην τελευταία σχέση δεδομένου ότι βρισκόμαστε στο ημικλασσικό όριο ο εκθετικός όρος είναι πολύ μικρότερος από τους όρους $O(\hbar^2)$ που έχουμε παραλείψει, όμως παρόλα αυτά τον κρατάμε διότι είναι η μόνη φανταστική συνεισφορά στην ενέργεια αυτής της κατάστασης. Αυτός ο όρος είναι φανταστικός λόγω του ότι το K είναι ένας φανταστικός αριθμός. Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής. Στην περίπτωση μετάβασης μέσω ενός bounce (όπως και στην περίπτωση μετάβασης μέσω ενός instanton) η εξίσωση ιδιοτιμών - ιδιοκαταστάσεων, που δίνεται από την σχέση (2.13), λόγω της παρουσίας του bounce με ένα συγκεκριμένο κέντρο τ_1 χάνει την αναλλοιώτητα στις χρονικές μεταθέσεις, πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι αυτή περιέχει μια ιδιοκατάσταση με μηδενική ιδιοτιμή. Η ιδιοκατάσταση αυτή είναι η εξής

$$x_1 = -(S_0)^{-1/2} \frac{d\bar{x}}{d\tau}, \quad (2.56)$$

Όμως από το Σχήμα 2.5 παρατηρούμε ότι το bounce, \bar{x} , παρουσιάζει ένα ακρότατο, το οποίο συνεπάγεται σύμφωνα με την σχέση (2.56) ότι η ιδιοκατάσταση x_1 έχει ένα σημείο μηδενισμού. Δεδομένου ότι η εξίσωση (2.13) είναι εξίσωση τύπου Schrödinger (όπως έχουμε προαναφέρει), το παραπάνω πόρισμα σημαίνει ότι η ιδιοκατάσταση x_1 δεν είναι η θεμελιώδης ιδιοκατάσταση του συστήματος αλλά αυτή είναι μια άλλη ιδιοκατάσταση, x_0 , με ιδιοτιμή μικρότερη από αυτήν της x_1 , δηλαδή στην x_0 αντιστοιχεί μια αρνητική ιδιοτιμή. Επομένως το K θα πρέπει να είναι ένας φανταστικός αριθμός και άρα η ιδιοτιμή της ενέργειας E_0 περιέχει ένα φανταστικό κομμάτι το οποίο αντιστοιχεί στον ρυθμό διάσπασης ανά μονάδα χρόνου της ασταθής κατάστασης που μελετάμε. Η ύπαρξη όμως της αρνητικής ιδιοτιμής οδηγεί σε απειρισμό του ολοκληρώματος ως προς τον συντελεστή c_0 , καθώς χαλάει το Γκαουσιανό ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα διαδρομών.

Οπότε τώρα έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα τεράστιο πρόβλημα. Το πρόβλημα αυτό προέκυψε λόγω του ότι προσπαθήσαμε να υπολογίσουμε την ιδιοτιμή της ενέργειας μιας ασταθούς κατάστασης, ενώ όπως γνωρίζουμε από την Κβαντική Μηχανική η ενέργεια μιας ασταθούς κατάστασης δεν περιλαμβάνεται στο φάσμα ιδιοτιμών της Χαμιλτονιανής. Πως θα μπορούσε άλλωστε αφού η Χαμιλτονιανή είναι ένας ερμητιανός τελεστής και έτσι έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές. Ο σωστός τρόπος για να διαχειριστούμε αυτή την ενέργεια είναι η αναλυτική συνέχιση, και με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε το φανταστικό κομμάτι του K και κατ' επέκταση τον ρυθμό διάσπασης ανά μονάδα



Σχήμα 2.6: Σχηματική μορφή του bounce (συμπαγής γραμμή) και μερικών άλλων συναρτήσεων που συμπεριλαμβάνονται στην διαδρομή, στον συναρτησιακό χώρο, που παραμετροποιείται μέσω της πραγματικής μεταβλητής z .

χρόνου, Γ , ο οποίος ορίζεται από το φανταστικό μέρος της ενέργειας E_0 μέσω της σχέσης

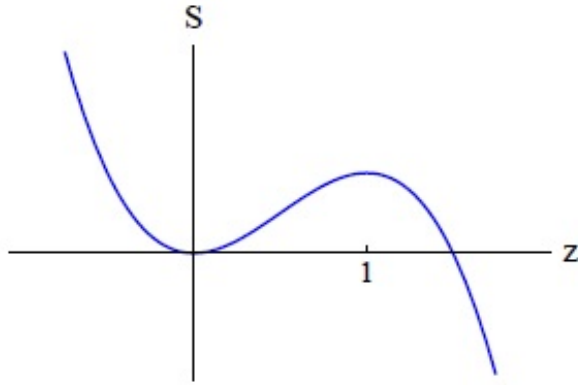
$$\Gamma = -2 \frac{\text{Im}(E_0)}{\hbar}. \quad (2.57)$$

Το ολοκλήρωμα διαδρομών που έχουμε να υπολογίσουμε έχει πρόβλημα μόνο στην ολοκλήρωση ως προς τον συντελεστή c_0 , όπως προαναφέραμε. Για να δούμε πως θα διαχειριστούμε αυτό το ολοκλήρωμα θεωρούμε το ακόλουθο ανάλογο ολοκλήρωμα

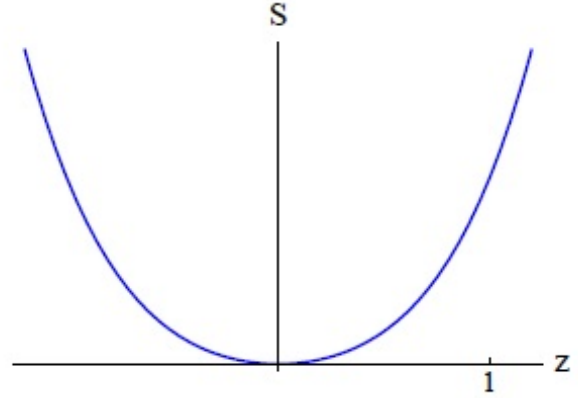
$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} e^{-S(z)/\hbar}. \quad (2.58)$$

Έτσι ώστε να κάνουμε τον υπολογισμό όσο πιο απλό γίνεται περιορίζομαστε σε μια διαδρομή, στον συναρτησιακό χώρο, που παραμετροποιείται μέσω της πραγματικής μεταβλητής z . Η σχηματική μορφή μερικών συναρτήσεων που συμπεριλαμβάνονται σε αυτή τη διαδρομή παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.6. Την διαδρομή αυτή την έχουμε επιλέξει έτσι ώστε να περιέχει για $z = 0$ την συνάρτηση $\bar{x} = 0$ (τετριμμένη λύση της Ευκλείδειας εξίσωσης κίνησης) και για $z = 1$ το bounce. Επιπλέον η διαδρομή αυτή έχει επιλεγεί έτσι ώστε το επαπτόμενο άνυσμα στην διαδρομή στο $z = 1$ να είναι η ιδιοκατάσταση x_0 . Οπότε το bounce αποτελεί ένα τοπικό μέγιστο της συνάρτησης $S(z)$ καθώς αυτή για $z \gg 1$ τείνει στο $-\infty$ διότι οι συναρτήσεις που προκύπτουν για όλο και μεγαλύτερα z (με $z > 1$) παραμένουν όλο και περισσότερο χρόνο στην περιοχή πέρα της θέσης $x = b$, όπου το δυναμικό είναι αρνητικό. Στο Σχήμα 2.7 (i) παρουσιάζεται το γράφημα της δράσης $S(z)$ συναρτήσεως του z , για το δυναμικό του συστήματος που μελετάμε. Από το σχήμα αυτό συμπεραίνουμε ότι το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.58) συγκλίνει στο όριο $z \rightarrow -\infty$ ($S(z) \rightarrow \infty$) αλλά αποκλίνει στο όριο $z \rightarrow \infty$ ($S(z) \rightarrow -\infty$).

Για ένα δυναμικό το οποίο στην θέση $x = 0$ έχει ένα απόλυτο ελάχιστο, και άρα μια ευσταθή κατάσταση με πραγματική ενέργεια, το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.58) είναι πεπερασμένο καθώς για ένα τέτοιο δυναμικό η δράση $S(z)$ έχει συναρτήσεως του z την μορφή που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.7 (ii). Άρα για να διορθώσουμε την απόκλιση του ολοκληρώματος (2.58) για το δυναμικό που μας ενδιαφέρει πραγματοποιούμε μια κατάλληλη αναλυτική συνέχιση της μεταβλητής z στο δυναμικό με το απόλυτο ελάχιστο έτσι ώστε αυτό να αντιστοιχίζεται στο δυναμικό που μελετάμε. Επιλέγουμε αυτήν την αναλυτική συνέχιση με τέτοιο τρόπο ώστε κατά τον πραγματικό άξονα του z να ανακτούμε



(i) Η δράση για το δυναμικό που μελετάμε



(ii) Η δράση για το δυναμικό με το απόλυτο ελάχιστο

Σχήμα 2.7: Στην εικόνα (i) παρουσιάζεται η σχηματική μορφή της $S(z)$ συναρτήσεως του z για το σύστημα που μελετάμε, ενώ στην εικόνα (ii) παρουσιάζεται η σχηματική μορφή της $S(z)$ συναρτήσεως του z για ένα δυναμικό το οποίο παρουσιάζει ένα απόλυτο ελάχιστο στην θέση $x = b$.

το δυναμικό που μελετάμε και έτσι ώστε στο άνω μέρος του μιγαδικού επιπέδου να συνεχίζουμε στο δυναμικό με το απόλυτο ελάχιστο. Για να πραγματοποιήσουμε τώρα την ολοκλήρωση στο z χρησιμοποιούμε, σύμφωνα με την μέθοδο της απότομης κατάβασης (steepest descent method), την καμπύλη που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.8. Με αυτό τον τρόπο το ολοκλήρωμα (2.58) αποκτάει ένα φανταστικό κομμάτι για το οποίο σύμφωνα με την μέθοδο της απότομης κατάβασης ισχύει

$$\begin{aligned} \text{Im}J &= \text{Im} \int_1^{1+i\infty} \frac{dz}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} e^{-S(z=1)/\hbar} \cdot e^{-S''(z=1) \cdot [(z-1)^2/2\hbar]} = e^{-S(z=1)/\hbar} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} e^{-|S''(z=1)| \cdot [y^2/2\hbar]} = \\ &= \frac{e^{-S(z=1)/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi\hbar}{|S''(z=1)|} \right)^{1/2} \Rightarrow \text{Im}J = \frac{1}{2\sqrt{|S''(z=1)|}} e^{-S(z=1)/\hbar}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

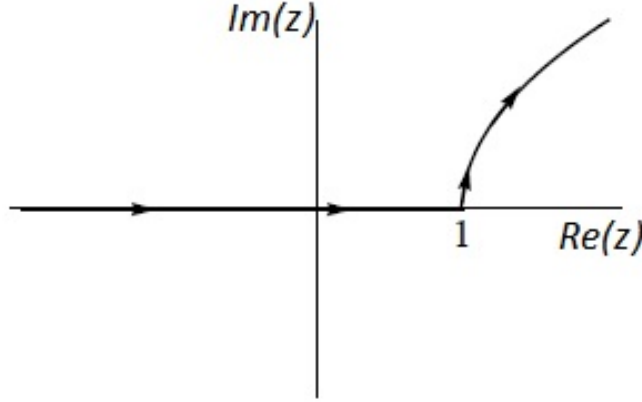
Γενικεύοντας τώρα την παραπάνω ανάλυση για το ολοκλήρωμα διαδρομών $N \int \mathcal{D}x e^{-S[x]/\hbar}$ για μετάβαση μέσω ενός bounce συμπεραίνουμε, λαμβάνοντας υπόψη και τα αποτελέσματα που έχουμε δει στα προηγούμενα παραδείγματα μας για τις ολοκληρώσεις ως προς τους συντελεστές c_1 (που αντιστοιχεί στην μηδενική ιδιοτιμή) και c_n με $\lambda_n > 0$ [και συγκεκριμένα λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2.15), (2.43) και (2.58)], ότι για το φανταστικό του μέρος έχουμε

$$\text{Im} \left(N \int \mathcal{D}x e^{-S[x]/\hbar} \right)_{\text{one bounce}} = \frac{N}{2} e^{-S_0/\hbar} \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \frac{T[1 + O(\hbar)]}{|\text{Det}[-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x})]|^{1/2}}. \quad (2.60)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του K , ο οποίος στην περίπτωση που μελετάμε είναι να διορθώνει με την παρουσία του την έκφραση

$$\langle 0|e^{-HT/\hbar}|0\rangle = \left(N \int \mathcal{D}x e^{-S[x]/\hbar} \right)_{\text{one bounce}} = N e^{-S_0/\hbar} \frac{KT[1 + O(\hbar)]}{[\text{det}(-\partial_\tau^2 + \omega^2)]^{1/2}}. \quad (2.61)$$

έτσι ώστε αυτή να περιγράφει την μετάβαση από την αρχική θέση $x_i = 0$ στην τελική θέση $x_f = 0$ μέσω ενός bounce, συμπεραίνουμε συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις ότι για το φανταστικό



Σχήμα 2.8: Σχηματική μορφή της κατάλληλης καμπύλης που πρέπει να επιλέξουμε στο μιγαδικό επίπεδο για την μεταβλητή z έτσι ώστε να πετύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα μέσω της αναλυτικής συνέχισης.

μέρος του K προκύπτει

$$\text{Im}K = \frac{1}{2} \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left| \frac{\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)}{\text{Det}[-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x})]} \right|^{1/2}. \quad (2.62)$$

Επομένως τελικά ύστερα από όλη αυτή τη διαδικασία βρήκαμε, σύμφωνα με τις σχέσεις (2.55), (2.57), και (2.62), ότι ο ρυθμός διάσπασης ανά μονάδα χρόνου της ασταθούς κατάστασης του συστήματος που μελετάμε δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\Gamma = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{1/2} \left| \frac{\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)}{\text{Det}[-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x})]} \right|^{1/2} e^{-S_0/\hbar} \cdot [1 + O(\hbar)]. \quad (2.63)$$

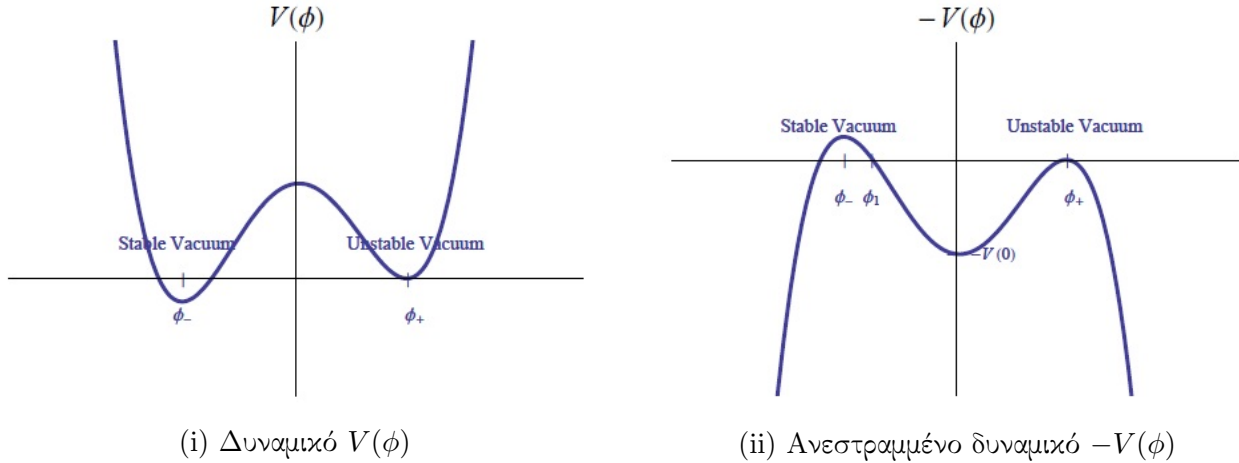
Γενικεύοντας η παραπάνω σχέση περιγράφει τον ρυθμό διάσπασης ανά μονάδα χρόνου μιας ασταθούς κατάστασης ενός οποιουδήποτε συστήματος αρκεί σε αυτή να κάνουμε τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις για τις ποσότητες που αλλάζουν από σύστημα σε σύστημα.

2.2 Κβαντική Διάσπαση Κενού Ενός Βαθμωτού Πεδίου

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των instantons στο ημικλασικό όριο, που θεμελιώσαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο στα πλαίσια της Κβαντικής Μηχανικής, για να μελετήσουμε την διάσπαση κενού (vacuum decay) μέσω κβαντικού tunneling ενός βαθμωτού πεδίου στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου. Σε αντιστοιχία με την σχέση (2.3), η Ευκλείδεια δράση του βαθμωτού πεδίου ϕ που θα μελετήσουμε στην συνέχεια, έχει την εξής μορφή

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right], \quad (2.64)$$

όπου το δυναμικό $V(\phi)$ έχει την μορφή που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.9 (i). Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι το δυναμικό έχει δύο ελάχιστα, ένα ολικό ελάχιστο στην θέση $\phi(x) = \phi_-$ και ένα τοπικό ελάχιστο στην θέση $\phi(x) = \phi_+$. Σύμφωνα με την Κλασική Θεωρία Πεδίου τα δύο αυτά ελάχιστα αποτελούν ευσταθείς καταστάσεις του συστήματος, όμως στα πλαίσια της Κβαντικής



Σχήμα 2.9: Στις δύο εικόνες (i) και (ii) παρουσιάζεται η γραφική παράσταση του $V(\phi)$ και του $-V(\phi)$, αντίστοιχα, για το σύστημα που μελετάμε. Το ϕ_+ αποτελεί το ασταθές κενό που μπορεί να διασπαστεί στο ϕ_- , το οποίο ϕ_- αποτελεί το ευσταθές κενό (απόλυτο κενό) της θεωρίας.

Θεωρίας Πεδίου μόνο η κατάσταση $\phi(x) = \phi_-$ είναι πραγματικά ευσταθής κατάσταση του συστήματος (πραγματικό κενό της θεωρίας) καθώς η κατάσταση $\phi(x) = \phi_+$ καθίσταται ασταθής λόγω φαινομένου σήραγγας. Έτσι το ϕ_+ αποτελεί ένα ψευδές κενό (false vacuum) της θεωρίας.

Η ποιοτική περιγραφή της διάσπασης του ψευδούς κενού είναι παρόμοια με την ποιοτική περιγραφή μιας αλλαγής φάσης πρώτης τάξης στην Στατιστική Φυσική. Για παράδειγμα, έστω η περίπτωση βρασμού ενός υπερθερμασμένου υγρού. Σε αυτή τη περίπτωση στο Σχήμα 2.9 αντί της απεικόνισης του δυναμικού συναρτήσεως του βαθμωτού πεδίου θα είχαμε την απεικόνιση της ελεύθερης ενέργειας του ρευστού συναρτήσεως της πυκνότητάς του. Τότε το ψευδές κενό αντιστοιχεί στην υπερθερμασμένη κατάσταση του υγρού και το πραγματικό κενό αντιστοιχεί στην αέρια κατάσταση του (υδρατμοί). Λόγω θερμικών διακυμάνσεων, μέσα στο υγρό δημιουργούνται συνεχώς φυσαλίδες που εμπεριέχουν υδρατμούς του υγρού στο εσωτερικό τους. Αν ο σχηματισμός αυτών των φυσαλίδων δεν ευνοείται ενεργειακά (πράγμα το οποίο σχετίζεται με το αρχικό μέγεθος της σχηματιζόμενης φυσαλίδας και συγκεκριμένα από την διαφορά της ενέργειας σχηματισμού της φυσαλίδας λόγω του όγκου της με την ενέργεια που αποθηκεύεται λόγω επιφανειακής τάσης στην επιφάνειά της) τότε αυτές συρρικνώνονται μέχρι να εξαλειφθούν, ενώ αντίθετα όταν ο σχηματισμός των φυσαλίδων ευνοείται τότε αυτές διαστέλλονται μέχρι ότου να μετατρέψουν όλο το υπερθερμασμένο υγρό σε υδρατμούς. Με βάση τώρα αυτή την εικόνα από την Στατιστική Φυσική συμπεραίνουμε ότι η διάσπαση του ψευδούς κενού συμβαίνει μέσω του σχηματισμού μιας φυσαλίδας που εμπεριέχει στο εσωτερικό της το βαθμωτό πεδίο στο πραγματικό κενό της θεωρίας, και βρίσκεται μέσα σε έναν εξωτερικό χώρο όπου το πεδίο βρίσκεται στο ψευδές κενό. Όμως η διάσπαση του ψευδούς κενού στην περίπτωση που μελετάμε δεν συμβαίνει λόγω θερμικών διακυμάνσεων, όπως στο παράδειγμα που δώσαμε από την Στατιστική Φυσική, αλλά λόγω του Κβαντικού φαινομένου σήραγγας.

Αυτό το οποίο ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε σε αυτό το σύστημα είναι ο ρυθμός διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου του ψευδούς κενού, Γ/V , στο ημικλασσικό όριο και για μεγάλους χρόνους ($T \rightarrow \infty$). Για να υπολογίσουμε αυτή τη ποσότητα πρέπει σύμφωνα με το προηγούμενο υποκεφάλαιο να κατασκευάσουμε την λύση bounce, $\bar{\phi}$, της Ευκλείδειας εξίσωσης κίνησης του συστήματος που μελετάμε. Όμως στην περίπτωση της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου δεν

έχουμε μόνο μια μηδενική ιδιοτιμή στην αντίστοιχη εξίσωση (2.13) του συστήματος μας, αλλά έχουμε τέσσερις μηδενικές ιδιοτιμές, όπου η πρώτη οφείλεται στο σπάσιμο της συμμετρίας της εξίσωσης αυτής στις χρονικές μεταθέσεις και οι υπόλοιπες τρεις στο σπάσιμο των συμμετριών στις χωρικές μεταθέσεις στις τρεις διαστάσεις (λόγω του bounce). Για αυτό το λόγο οι ολοκληρώσεις ως προς τους συντελεστές c_n που αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιοτιμές θα μετατραπούν σε ολοκληρώσεις ως προς το τετραδιάστατο κέντρο του bounce, δηλαδή ολοκληρώσεις ως προς dt_c , dx_c , dy_c , και dz_c . Έτσι οι ολοκληρώσεις ως προς τους συντελεστές που αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιοτιμές θα μας δώσουν στην ορίζουσα έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα $T \cdot V \cdot (S_0/2\pi\hbar)^2$ αντί του $T \cdot (S_0/2\pi\hbar)^{1/2}$ που είχαμε πάρει στην Κβαντική Μηχανική. Επομένως με βάση αυτή την απλή συνεπαγωγή που κάναμε από την Κβαντική Μηχανική κατανοούμε πως προκύπτει ο παράγοντας $1/V$ στον ρυθμό διάσπασης στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου και πιο συγκεκριμένα συμπεραίνουμε ότι το Γ/V έχει την εξής μορφή

$$\frac{\Gamma}{V} = \left(\frac{S_0^2}{4\pi^2\hbar^2} \right) \left| \frac{\det \left(-\partial_\mu \partial^\mu + \ddot{V}(\phi_+) \right)}{\text{Det} \left(-\partial_\mu \partial^\mu + \ddot{V}(\bar{\phi}) \right)} \right|^{1/2} e^{-S_0/\hbar} \cdot [1 + O(\hbar)] = A \cdot e^{-B/\hbar} \cdot [1 + O(\hbar)], \quad (2.65)$$

όπου το $S_0 = S[\bar{\phi}]$ είναι η δράση του bounce και όπου με το \cdot συμβολίζουμε την παραγώγιση ως προς το πεδίο ϕ . Στα πλαίσια αυτής της πτυχιακής θα περιοριστούμε στον υπολογισμό του συντελεστή B .

Κανονικά ο συντελεστής B δεν ισούται απλά με S_0 αλλά δίνεται από την σχέση

$$B = S[\bar{\phi}] - S[\phi_+], \quad (2.66)$$

η οποία συμφωνεί με την σχέση ($B = S[\bar{x}] - S[a]$) που παίρνουμε για το πλάτος μετάβασης στην Κβαντική Μηχανική και στην WKB προσέγγιση. Ουσιαστικά στις σχέσεις που έχουμε οδηγηθεί για τους συντελεστές A και B πρέπει να αντικαταστήσουμε το S_0 με το B που ορίσαμε μέσω της σχέσης (2.66). Όσον αφορά την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού μας μπορεί κανείς να ανατρέξει στο βιβλίο *Classical Solutions In Quantum Field Theory* του E. J. Weinberg. Το ότι στην μέχρι τώρα διαδικασία που έχουμε ακολουθήσει στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, αλλά και σε αυτό, δεν έχει φανεί ότι αντί του S_0 πρέπει να χρησιμοποιούμε το B οφείλεται στο ότι έχουμε επανακανονικοποιήσει κατάλληλα τα δυναμικά μας έτσι ώστε να ισχύει $V(a) = 0$ και $V(\phi_+) = 0$, το οποίο συνεπάγεται $S(a) = 0$ και $S(\phi_+) = 0$. Αυτό το πράγμα όμως δεν μπορούμε να το κάνουμε και στην περίπτωση όπου θέλουμε να λάβουμε υπόψη μας και την επιρροή που έχει η παρουσία βαρύτητας στην διάσπαση του κενού. Τον λόγο για τον οποίο συμβαίνει αυτό θα το εξηγήσουμε στο επόμενο υποκεφάλαιο, όπου θα ασχοληθούμε με αυτό το θέμα. Επομένως από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε την σχέση (2.66) για τον συντελεστή στο εκθετικό του Γ/V . Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι η δράση του μονοδιάστατου instanton στην περίπτωση του συμμετρικά διπλού πηγαδιού στην Κβαντική Μηχανική μπορεί ναδειχθεί ότι για $V(a) \neq 0$ παίρνει την εξής μορφή

$$S_1 = \int_{-a}^a dx \sqrt{2[V(x) - V(a)]}. \quad (2.67)$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, το bounce πρέπει να αποτελεί λύση της Ευκλείδειας εξίσωσης κίνησης που προκύπτει από την εφαρμογή των εξισώσεων Euler-Langrange στην Ευκλείδεια λαγκραζιανή πυκνότητα που εμφανίζεται μέσα στην δράση της σχέσης (2.64). Άρα το bounce πρέπει να είναι λύση της εξίσωσης

$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{\phi} - \frac{dV(\bar{\phi})}{d\bar{\phi}} = 0. \quad (2.68)$$

Επίσης το bounce θα πρέπει, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε για αυτό στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, να ξεκινάει από το ψευδές κενό την χρονική στιγμή $\tau \rightarrow -\infty$ και να καταλήγει στο ψευδές κενό την χρονική στιγμή $\tau \rightarrow \infty$, δηλαδή

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \bar{\phi}(\vec{x}, \tau) = \phi_+. \quad (2.69)$$

Στην παραπάνω συνοριακή συνθήκη στον χρόνο που πρέπει να ικανοποιεί το bounce έρχεται τώρα να προστεθεί και η ακόλουθη συνοριακή συνθήκη στον χώρο, η οποία προκύπτει από την απαίτηση η δράση $S[\bar{\phi}]$ να είναι πεπερασμένη

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \bar{\phi}(\vec{x}, \tau) = \phi_+. \quad (2.70)$$

Πριν κατασκευάσουμε την λύση bounce αυτού του συστήματος θα κάνουμε τα εξής σχόλια:

1) Μπορεί να υπάρχουν και άλλες λύσεις του προβλήματος που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.68)–(2.70) πέρα από το bounce. Εμείς όμως ενδιαφερόμαστε μόνο για το bounce διότι αυτό αποτελεί την λύση με την ελάχιστη δράση και άρα αυτό έχει την κυρίαρχη συνεισφορά στο ολοκλήρωμα διαδρομών και επομένως και στον ρυθμό διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου.

2) Η σχέση που έχουμε βρει για το Γ/V προϋποθέτει την ύπαρξη μιας μόνο αρνητικής ιδιοτιμής του διαφορικού τελεστή $\partial_\mu \partial^\mu - \ddot{V}(\bar{\phi})$. Αν ο τελεστής αυτός έχει περισσότερες από μια αρνητικές ιδιοτιμές τότε η ανάλυση μας για τον προσδιορισμό του Γ/V πρέπει να αλλάξει. Ευτυχώς όμως, τελικά δεν χρειάζεται να αλλάξουμε την ανάλυση μας γιατί όπως έδειξαν οι Coleman, Martin και Glaser στο paper *Action Minima Among Solutions to a Class of Euclidean Scalar Field Equations*, ο τελεστής αυτός διαθέτει μια μόνο αρνητική ιδιοτιμή.

Συνεχίζοντας τώρα με την κατασκευή του bounce, επειδή οι σχέσεις (2.68)–(2.70) είναι $O(4)$ αναλλοίωτες θεωρούμε ότι και το $\bar{\phi}$ είναι $O(4)$ αναλλοίωτο. Δηλαδή το $\bar{\phi}(\vec{x}, \tau) = \bar{\phi}(\rho = [|\vec{x}|^2 + \tau^2]^{1/2})$ εξαρτάται μόνο από την απόσταση από κάποιο σημείο του τετραδιάστατου Ευκλείδειου χώρου. Οι Coleman, Martin και Glaser, στο ίδιο paper που αναφέραμε προηγουμένως, απέδειξαν ότι για ένα δυναμικό το οποίο ικανοποιεί ήπιες συνθήκες (συνθήκες οι οποίες συνήθως ικανοποιούνται) πάντα υπάρχει ένα $O(4)$ αναλλοίωτο bounce, του οποίου η δράση είναι πάντα μικρότερη από τις δράσεις των μη- $O(4)$ αναλλοίωτων bounces. Γνωρίζουμε ότι για τον όγκο μιας n -διάστατης σφαίρας και για την συνάρτηση Γάμμα ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις, αντίστοιχα

$$V_n(\rho) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \rho^n \quad \text{και} \quad \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad \text{με} \quad \Gamma(1) = 1. \quad (2.71)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι ισχύει $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 2$, και άρα για τον στοιχειώδη όγκο μιας τετραδιάστατης σφαίρας έχουμε

$$V_4(\rho) = \frac{\pi^2 \rho^4}{2} \Rightarrow dV_4(\rho) = \frac{4\pi^2}{2} \rho^3 d\rho \Rightarrow d^4x = 2\pi^2 \rho^3 d\rho. \quad (2.72)$$

Έτσι η Ευκλείδεια δράση του συστήματός μας, που δίνεται από την σχέση (2.64), παίρνει για $O(4)$ αναλλοίωτα πεδία ϕ την εξής μορφή

$$S[\phi] = 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.73)$$

Επίσης η Ευκλείδεια εξίσωση κίνησης (2.68) για $O(4)$ αναλλοίωτα πεδία, και άρα και για την $O(4)$ αναλλοίωτη λύση bounce που ψάχνουμε, παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \delta S[\phi] = 0 &\Rightarrow 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left[\frac{d\phi}{d\rho} \frac{d\delta\phi}{d\rho} + \frac{dV}{d\phi} \delta\phi \right] = 0 \Rightarrow 2\pi^2 \int_0^\infty d\rho \left[\rho^3 \frac{dV}{d\phi} - \frac{d}{d\rho} \left(\rho^3 \frac{d\phi}{d\rho} \right) \right] \delta\phi = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left(\frac{dV}{d\phi} - \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} - \frac{d^2\phi}{d\rho^2} \right) \delta\phi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\bar{\phi}}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\bar{\phi}}{d\rho} = \frac{dV(\bar{\phi})}{d\bar{\phi}}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Για $O(4)$ αναλλοίωτο bounce οι συνοριακές συνθήκες (2.69) και (2.70) συνοψίζονται μαζί στην συνοριακή συνθήκη

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \bar{\phi}(\rho) = \phi_+, \quad (2.75)$$

ενώ πρέπει επιπλέον να εισάγουμε και την ακόλουθη συνοριακή συνθήκη η οποία εξασφαλίζει τον μη απειρισμό της δεύτερης παραγώγου του πεδίου στην απόσταση $\rho = 0$

$$\left. \frac{d\bar{\phi}}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0. \quad (2.76)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη της λύσης bounce που να ικανοποιεί τις σχέσεις (2.74)-(2.76) χρησιμοποιώντας την συνέχεια των λύσεων ως επιχείρημα. Η εξίσωση κίνησης (2.74) μπορεί να ερμηνευθεί ως η εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου με μετατόπιση $\bar{\phi}$ κινούμενο σε χρόνο ρ , στο οποίο ασκείται μια δύναμη $[-\dot{V}(\phi)]$ και μια δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας $d\bar{\phi}/d\rho$, με έναν χρονοεξαρτώμενο συντελεστή τριβής $3/\rho$. Ας κοιτάξουμε τώρα στο Σχήμα 2.9 (ii) την γραφική παράσταση του $-V(\phi)$, όπου το ϕ_1 είναι ένα σημείο όπου μηδενίζεται το δυναμικό. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει λύση $\bar{\phi}$ η οποία ξεκινώντας από το σημείο ϕ_0 με μηδενική ταχύτητα την στιγμή $\rho = 0$ φτάνει στο ϕ_+ την στιγμή $\rho \rightarrow \infty$. Αν το σωματίδιο ξεκινάει από την θέση $\phi_0 > \phi_1$ τότε προφανώς δεν θα φτάσει ποτέ στην θέση ϕ_+ . Αντίθετα αν το σωματίδιο ξεκινάει από μια θέση ϕ_0 επαρκώς κοντά στο ϕ_- και μένει κοντά σε αυτή για ένα αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα έτσι ώστε η δύναμη τριβής να είναι πια αμελητέα, τότε λόγω του ότι το σύστημα γίνεται συντηρητικό (διατηρείται η ενέργεια) το σωματίδιο θα ξεπεράσει την θέση ϕ_+ στο $\rho \rightarrow \infty$. Επομένως λόγω συνέχειας θα υπάρχει κάποια κατάλληλη θέση ϕ_0 από την οποία όταν ξεκινήσει το σωματίδιο θα καταλήξει στην θέση ϕ_+ σε άπειρο χρονικό διάστημα, και άρα υπάρχει η λύση bounce.

Μπορούμε να πάρουμε μια προσεγγιστική αναλυτική μορφή για το $\bar{\phi}$ και τον συντελεστή B θεωρώντας ότι η διαφορά ενεργειακής πυκνότητας μεταξύ των δύο κενών της θεωρίας είναι πολύ μικρή. Αυτή η προσέγγιση ονομάζεται thin-wall approximation (προσέγγιση λεπτού τοιχώματος). Ορίζουμε την διαφορά της ενεργειακής πυκνότητας μεταξύ του πραγματικού και του ψευδούς κενού ως εξής

$$\varepsilon = V(\phi_+) - V(\phi_-). \quad (2.77)$$

Αφού αυτή η διαφορά είναι πολύ μικρή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το δυναμικό του συστήματος που μελετάμε μπορεί να γραφεί και ως ακολούθως

$$V(\phi) = V_0(\phi) + O(\varepsilon), \quad (2.78)$$

όπου το $V_0(\phi)$ είναι ένα κατάλληλα επιλεγμένο συμμετρικό (ως προς τα δύο κενά) δυναμικό, για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$1) V_0(\phi_+) = V_0(\phi_-), \quad 2) \left. \frac{dV_0(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_\pm} = 0, \quad \text{και} \quad 3) \left. \frac{d^2V_0(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_\pm} = \mu^2, \quad (2.79)$$

και όπου με τον όρο $O(\varepsilon)$ εννοούμε ότι υπάρχει και ένα ακόμα μικρό κομμάτι δυναμικού τάξης ανώτερης ή ίσης του ε , το οποίο προστίθεται στο $V_0(\phi)$ έτσι ώστε να χαλάσει την συμμετρία αυτού του δυναμικού και να του δώσει την μορφή που παρατηρούμε στο Σχήμα 2.9.

Ο λόγος που αυτή η προσέγγιση ονομάζεται thin-wall approximation μπορεί να φανεί αν επιστρέψουμε για λίγο πίσω στην αναλογία του συστήματος μας με αυτό της κίνησης ενός σωματιδίου. Το σωματίδιο σε αυτή τη προσέγγιση αρχικά βρίσκεται πολύ κοντά στην θέση ϕ_- και για να μην χάσει πολύ ενέργεια λόγω του παράγοντα τριβής παραμένει εκεί μέχρι μια πολύ μεγάλη χρονική στιγμή $\rho = R$, από την οποία και μετά η δύναμη τριβής θεωρείται αμελητέα. Μετά για ένα μικρό χρονικό διάστημα κοντά στο R το σωματίδιο κυλάει γρήγορα μέσα στην κοιλάδα που παρατηρούμε στο Σχήμα 2.9, και φτάνει σιγά-σιγά στην θέση ϕ_+ την χρονική στιγμή $\rho \rightarrow \infty$. Μεταφερόμενοι τώρα πίσω στην εικόνα της Κβαντικής θεωρίας Πεδίου για το σύστημά μας, το bounce με αυτή την περιγραφή αποτελεί ουσιαστικά μια τετραδιάστατη σφαιρική φυσαλίδα ακτίνας R με ένα λεπτό τοίχωμα, το οποίο διαχωρίζει το πραγματικό κενό μέσα από το ψευδές κενό έξω.

Για ρ κοντά στο R (και μεγαλύτερο του R) ο συντελεστής τριβής στην εξίσωση κίνησης του $\bar{\phi}$ είναι αμελητέος και επιπλέον μπορούμε σε αυτή να παραλείψουμε το κομμάτι $O(\varepsilon)$ από το δυναμικό. Έτσι συμπεραίνουμε ότι κοντά στο R το bounce ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση κίνησης

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{\phi}}{d\rho^2} &= \frac{dV_0(\bar{\phi})}{d\bar{\phi}} \Rightarrow \int_{\rho}^{\infty} \frac{d^2\bar{\phi}}{d\rho'^2} \cdot \frac{d\bar{\phi}}{d\rho'} d\rho' = \int_{\bar{\phi}}^{\phi_+} \frac{dV_0(\bar{\phi}')}{d\bar{\phi}'} d\bar{\phi}' = V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_{\pm}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{d\rho} \right)^2 = V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_{\pm}). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση θεωρώντας ότι στο $\rho = R$ το $\phi = [\phi_+ + \phi_-]/2$ βρίσκουμε τελικά την ακόλουθη σχέση η λύση της οποίας μας δίνει την προσεγγιστική μορφή του $\bar{\phi}$ στο thin-wall approximation

$$\int_{\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}}^{\bar{\phi}} \frac{d\phi}{\sqrt{2[V_0(\phi) - V_0(\phi_{\pm})]}} = \rho - R. \quad (2.81)$$

Ως παράδειγμα θα υπολογίσουμε την προσεγγιστική μορφή του bounce στην περίπτωση όπου το δυναμικό $V_0(\phi)$ έχει την μορφή

$$V_0(\phi) = \frac{1}{8}\lambda(\phi^2 - \mu^2/\lambda)^2. \quad (2.82)$$

Για τα δύο κενά της θεωρίας μας σε αυτή τη περίπτωση ισχύει

$$\left. \frac{dV_0(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_{\pm}} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{2}\phi_{\pm}^3 - \mu^2\frac{\phi_{\pm}}{2} = 0 \Rightarrow \phi_{\pm} = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (2.83)$$

πράγμα το οποίο μας οδηγεί στις σχέσεις

$$\frac{\phi_+ + \phi_-}{2} = 0 \quad \text{και} \quad V_0(\phi_{\pm}) = 0. \quad (2.84)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.82) και (2.84) στο ολοκλήρωμα της σχέσης (2.81) έχουμε

$$\int_0^{\bar{\phi}} \frac{d\phi}{\sqrt{2V_0(\phi)}} = \frac{2}{\mu} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} \bar{\phi} \right). \quad (2.85)$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στην σχέση (2.81) συμπεραίνουμε ότι για το παράδειγμα μας το bounce έχει την ακόλουθη προσεγγιστική μορφή

$$\bar{\phi} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{\mu}{2}[\rho - R]\right). \quad (2.86)$$

Επιστρέφοντας τώρα στην γενική περίπτωση που μελετάμε, όπου το $V_0(\phi)$ δεν έχει κάποια συγκεκριμένη αναλυτική μορφή, θέλουμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή B και να προσδιορίσουμε την ακτίνα R της φυσαλίδας. Το R θα το προσδιορίσουμε από την απαίτηση ο συντελεστής $B = S[\bar{\phi}] - S[\phi_+]$ να στασιμοποιείται κάτω από την εφαρμογή της διαταραχτικής μεθόδου ως προς R , δηλαδή ουσιαστικά από την απαίτηση να ισχύει $dB/dR = 0$. Όσον αφορά τώρα τον υπολογισμό του B , χωρίζουμε τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που εμπεριέχονται σε αυτό σε τρεις διαφορετικές περιοχές: στην περιοχή έξω από την φυσαλίδα, στην περιοχή μέσα, και στην περιοχή που αποτελείται από το πάχος του τοιχώματος της φυσαλίδας.

Στον χώρο έξω από την φυσαλίδα βρισκόμαστε στο ψευδές κενό της θεωρίας και έτσι έχουμε $\bar{\phi} = \phi_+$, το οποίο μας οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα για τον συντελεστή B σε αυτή τη περιοχή

$$B_{\text{outside}} = S[\phi_+] - S[\phi_+] \Rightarrow B_{\text{outside}} = 0. \quad (2.87)$$

Στον εσωτερικό χώρο της φυσαλίδας βρισκόμαστε στο πραγματικό κενό της θεωρίας και έτσι ισχύει $\bar{\phi} = \phi_-$. Επομένως για τον συντελεστή B έχουμε

$$\begin{aligned} B_{\text{inside}} &= S[\phi_-] - S[\phi_+] = 2\pi^2 \int_0^R \rho^3 V(\phi_-) d\rho - 2\pi^2 \int_0^R \rho^3 V(\phi_+) d\rho \xrightarrow{(2.78)} \\ &\Rightarrow B_{\text{inside}} = -2\pi^2 \varepsilon \int_0^R \rho^3 d\rho = -\frac{\pi^2}{2} \varepsilon R^4. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Στην περιοχή μέσα στο τοίχωμα της φυσαλίδας, δεδομένου ότι βρισκόμαστε στο thin-wall approximation, το ρ είναι περίπου ίσο με R και το κομμάτι $O(\varepsilon)$ του δυναμικού είναι αμελητέο σε σχέση με το $V_0(\phi)$. Οπότε για τον συντελεστή B σε αυτή τη περιοχή προκύπτει

$$\begin{aligned} B_{\text{wall}} &= S[\bar{\phi}] - S[\phi_+] = 2\pi^2 R^3 \int d\rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{d\rho} \right)^2 + V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_+) \right] \stackrel{(2.80)}{=} \\ &= 2\pi^2 R^3 \int d\rho \cdot 2 [V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_+)] = 2\pi^2 R^3 \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\bar{\phi} \cdot \frac{d\rho}{d\bar{\phi}} \cdot 2 [V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_+)] \stackrel{(2.80)}{=} \\ &= 2\pi^2 R^3 \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\bar{\phi} [2 (V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_+))]^{1/2} \Rightarrow B_{\text{wall}} = 2\pi^2 R^3 S_1, \end{aligned} \quad (2.89)$$

όπου παραπάνω το S_1 το οποίο δίνεται από την σχέση

$$S_1 = \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi [2 (V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_+))]^{1/2}, \quad (2.90)$$

αποτελεί την δράση ενός μονοδιάστατου instanton, σύμφωνα με την σχέση (2.67).

Αθροίζοντας τα B_{inside} , B_{outside} και B_{wall} που βρήκαμε παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι για τον συντελεστή B στο thin-wall approximation ισχύει

$$B = 2\pi^2 R^3 S_1 - \frac{\pi^2}{2} \varepsilon R^4. \quad (2.91)$$

Απαιτώντας τώρα να ισχύει $dB/dR = 0$ βρίσκουμε ότι το R δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\frac{dB}{dR} = 0 \Rightarrow R = \frac{3S_1}{\varepsilon}. \quad (2.92)$$

Επομένως τελικά για τον συντελεστή B έχουμε

$$B = \frac{27\pi^2 S_1^4}{2\varepsilon^3}. \quad (2.93)$$

Η ανάλυση που έχουμε κάνει μέχρι τώρα ισχύει ως προσέγγιση στο όριο όπου το ε είναι πολύ μικρό. Τώρα που πραγματοποιήσαμε τους υπολογισμούς μας μπορούμε να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι σχετικά με την συνθήκη που κάνει την προσέγγιση αυτή έγκυρη. Η προσέγγιση αυτή είναι σωστή όταν η ακτίνα της φυσαλίδας, R , είναι πολύ μεγαλύτερη από το πάχος του τοιχώματος της φυσαλίδας. Το πάχος του τοιχώματος της φυσαλίδας περιγράφεται από το μέγεθος του bounce, το οποίο είναι τοπικά εντοπισμένο όπως και το instanton και επομένως το μέγεθος του είναι προσεγγιστικά $[\ddot{V}_0(\phi_{\pm})]^{-1/2} = \mu^{-1}$. Οπότε το R πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερο του μ^{-1} , ή ισοδύναμα

$$R \gg 1/\mu \Rightarrow 3S_1\mu \gg \varepsilon. \quad (2.94)$$

Συνεχίζουμε τώρα την ανάλυση μας όσον αφορά την διάσπαση του ψευδούς κενού θέλοντας να δούμε την εξέλιξη του κλασσικού πεδίου ϕ και την διαστολή της φυσαλίδας στον τετραδιάστατο χωρόχρονο Minkowski. Για αυτή την περιγραφή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την λύση bounce. Βέβαια αυτή η περιγραφή που θα κάνουμε δεν θα είναι πολύ ακριβής όσον αφορά παρατηρήσεις αμέσως μετά το κβαντικό tunneling του πεδίου, αλλά πιο ορθά θα αποτελεί μια ασυμπτωτική περιγραφή για το τι συμβαίνει αρκετό χρόνο μετά και αρκετά μακριά από το σημείο όπου συνέβη το κβαντικό tunneling. Οι αρχικές συνθήκες τις οποίες ικανοποιεί το πεδίο αμέσως μετά την διάσπαση του ψευδούς κενού (θεωρώντας $t = 0$ την στιγμή που έγινε η διάσπαση) είναι οι εξής

$$\phi(\vec{x}, t = 0) = \bar{\phi}(\vec{x}, \tau = 0) \quad \text{και} \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\phi}(\vec{x}, \tau) \right|_{\tau=0} = 0. \quad (2.95)$$

Στην συνέχεια το πεδίο εξελίσσεται σύμφωνα με την κλασσική Minkowskian εξίσωση κίνησης

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi(\vec{x}, t) = -\frac{dV(\phi)}{d\phi}. \quad (2.96)$$

Η πρώτη από τις συνθήκες της σχέσης (2.95) υποδηλώνει ότι η συνάρτηση $\bar{\phi}(\rho)$ που μας δίνει το σχήμα του bounce στον τετραδιάστατο Ευκλείδειο χώρο είναι και η ίδια συνάρτηση που δίνει το σχήμα της φυσαλίδας την στιγμή που αυτή δημιουργείται στον τριεδιάστατο Minkowskian χώρο. Οπότε όντως την στιγμή $t = 0$ έχουμε την δημιουργία μιας φυσαλίδας ακτίνας R που εμπεριέχει το πραγματικό κενό της θεωρίας το οποίο διαχωρίζεται από το ψευδές κενό στον εξωτερικό χώρο μέσω

ενός λεπτού τοιχώματος. Επειδή όμως η Minkowskian εξίσωση κίνησης προκύπτει απλά από την αναλυτική συνέχιση πίσω στον πραγματικό χρόνο t της Ευκλείδειας εξίσωσης κίνησης, η λύση του προβλήματός που περιγράφεται από τις σχέσεις (2.95) και (2.96) θα αποτελεί απλά την αναλυτική συνέχιση πίσω στον πραγματικό χρόνο του bounce, δηλαδή

$$\phi(\vec{x}, t) = \bar{\phi} \left(\rho = \sqrt{|\vec{x}|^2 - t^2} \right) \quad (2.97)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η παραπάνω λύση ισχύει μόνο για $|\vec{x}|^2 > t^2$. Έτσι από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι η $O(4)$ αναλλοiotτητα της Ευκλείδειας λύσης bounce αντικαθίσταται από την $O(3,1)$ αναλλοiotτητα της λύσης της κλασσικής Minkowskian εξίσωσης κίνησης. Αυτό σημαίνει ότι μετά από τον σχηματισμό της φυσαλίδας, η εξέλιξή της φαίνεται ίδια από οποιοδήποτε Lorentz παρατηρητή.

Όταν δημιουργείται η φυσαλίδα η ακτίνα της είναι $r = |\vec{x}| = R$. Μετέπειτα η ακτίνα αυτή εξελίσσεται σύμφωνα με την υπερβολοειδή εξίσωση

$$r^2 - t^2 = R^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 + t^2}. \quad (2.98)$$

Η εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.10 (i). Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα με την οποία διαστέλλεται στον χώρο η φυσαλίδα ως εξής

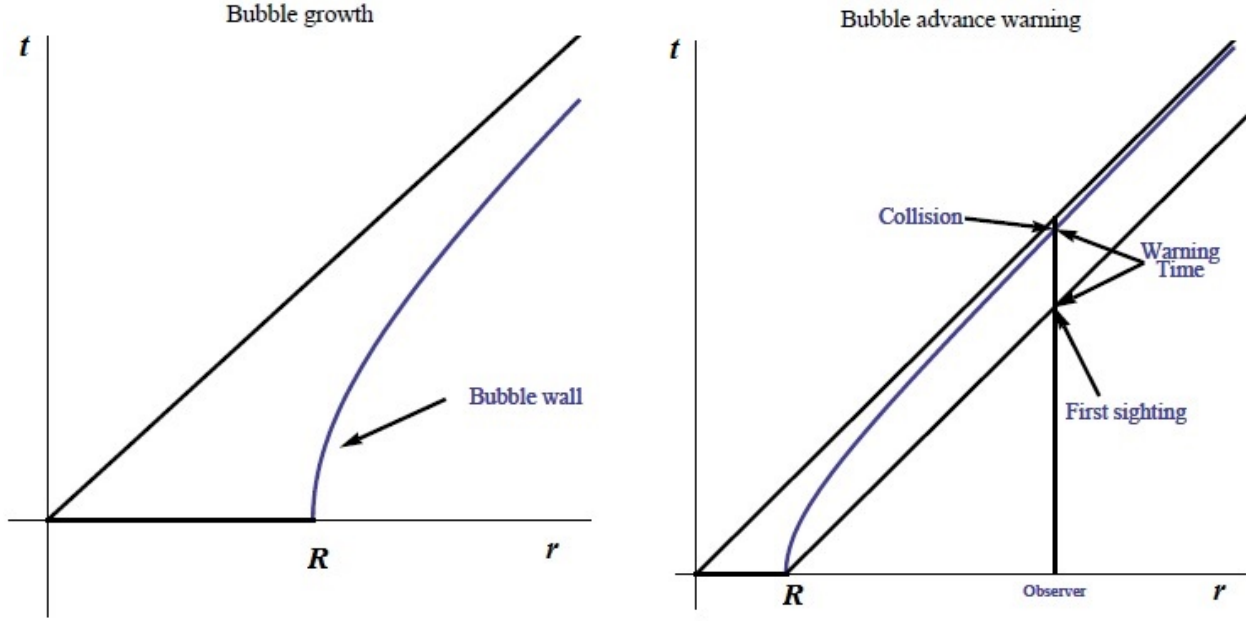
$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{R^2 + t^2} = \frac{t}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r} = \sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}}. \quad (2.99)$$

Οπότε δεδομένου ότι αναμένουμε το R να είναι ένας μικρός αριθμός της τάξης του $10^{-10} - 10^{-25}$ m, συμπεραίνουμε ότι αφότου η φυσαλίδα σχηματιστεί αυτή θα διαστέλλεται (σχεδόν ακαριαία) με ταχύτητα η οποία τείνει ασυμπτωτικά στην ταχύτητα του φωτός (υπενθυμίζουμε ότι στο σύστημα μονάδων που χρησιμοποιούμε ισχύει $c = 1$).

Μια συνέπεια της ταχείας διαστολής της φυσαλίδας είναι το ότι αν κάποια φυσαλίδα επεκτεινόταν αυτή τη στιγμή προς το μέρος μας, θα το καταλαβαίναμε αυτό μόνο όταν θα έφτανε σε εμάς. Ο χρόνος προειδοποίησης για τον ερχομό της φυσαλίδας προς έναν ακίνητο παρατηρητή προκύπτει από την αφαίρεση του χρόνου που κάνει η φυσαλίδα να επεκταθεί μέχρι τον παρατηρητή (τομή της κοσμικής γραμμής με την καμπύλη εξέλιξης της ακτίνας της φυσαλίδας [μπλε γραμμή]) από τον χρόνο που κάνει το φως που μεταφέρει την πληροφορία της δημιουργίας της φυσαλίδας να φτάσει στον παρατηρητή (τομή του κώνου φωτός που ξεκινάει από το R με την κοσμική γραμμή [κάθετη γραμμή] του παρατηρητή). Ο χρόνος αυτός, όπως βλέπουμε από το Σχήμα 2.10 (ii), εξαρτάται από την αρχική ακτίνα της σφαίρας και επομένως είναι πολύ μικρός (μικρότερος από τον χρόνο απόκρισης των νευρώνων του ανθρώπινου οργανισμού). Έτσι αν κάποια φυσαλίδα επεκτείνεται αυτή τη στιγμή προς το μέρος μας δεν θα καταλάβουμε ποτέ τι μας χτύπησε! Προφανώς μέσα στο πραγματικό κενό οι μάζες και οι σταθερές αλληλεπίδρασης των στοιχειωδών σωματιδίων είναι διαφορετικές από αυτές στο ψευδές κενό, πράγμα το οποίο αποτελεί ένα δυσάρεστο νέο για τους ζωντανούς οργανισμούς στο ψευδές κενό.

Ας δούμε τώρα πόση είναι η ενέργεια που φέρει το τοίχωμα της διαστελλόμενης φυσαλίδας. Για την ενέργεια που φέρει το τοίχωμα ανά μονάδα επιφάνειας έχουμε

$$E = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{r \simeq R} \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \bar{\phi})^2 + V(\bar{\phi}) - V(\phi_+) \right] d^3x = \int dr \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \bar{\phi})^2 + V(\bar{\phi}) - V(\phi_+) \right] =$$



(i) Εξέλιξη της φυσαλίδας

(ii) Χρόνος προειδοποίησης

Σχήμα 2.10: Στην πρώτη εικόνα παρουσιάζεται η εξέλιξη της ακτίνας της φυσαλίδας από την στιγμή δημιουργία της και μετά, ενώ στην δεύτερη εικόνα επεξηγείται ο χρόνος προειδοποίησης του ερχομού της φυσαλίδας προς έναν ακίνητο παρατηρητή.

$$= \int dr \cdot 2 [V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_+)] = \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi [2 (V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_+))]^{1/2} \Rightarrow E = S_1, \quad (2.100)$$

δηλαδή ισούται με την δράση του μονοδιάστατου instanton, S_1 , η οποία αποτελεί ουσιαστικά έναν όρο επιφανειακής τάσης. Όμως η ακτίνα της φυσαλίδας όπως έχουμε ήδη δει αυξάνεται σύμφωνα με την σχέση (2.98). Έτσι μετά το πέρας κάποιου χρόνου η φυσαλίδα θα διαστέλλεται με την ταχύτητα v που δίνεται από την σχέση (2.99) και επομένως η ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας που είναι αποθηκευμένη στο τοίχωμα της φυσαλίδας θα μετασχηματίζεται κατά Lorentz όπως ακριβώς μετασχηματίζεται η μηδενική συνιστώσα ενός τετρανύσματος, δηλαδή

$$S_1 \rightarrow \frac{S_1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (2.101)$$

Οπότε όταν η ακτίνα της φυσαλίδας έχει κάποια τυχαία τιμή r , η ενέργεια του τοιχώματος της θα είναι

$$E_{\text{wall}} = 4\pi r^2 \frac{S_1}{\sqrt{1-v^2}} = 4\pi r^2 \frac{S_1}{\sqrt{1-(1-R^2/r^2)}} = 4\pi r^2 S_1 \frac{r}{R} = \frac{4}{3}\pi r^3 \left(\frac{3S_1}{R}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{\text{wall}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \varepsilon, \quad (2.102)$$

όπου παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την σχέση $R = 3S_1/\varepsilon$ που έχουμε δει ότι ισχύει στο thin-wall approximation. Από την σχέση (2.102) συμπεραίνουμε ότι στο thin-wall approximation όλη η ενέργεια που απελευθερώνεται από την μετατροπή του ψευδούς κενού σε πραγματικό κενό μέσω της υλοποίησης μια σφαιρας ακτίνας r , αποθηκεύεται στο τοίχωμα της φυσαλίδας.

2.3 Κβαντική Διάσπαση Κενού Ενός Βαθμωτού Πεδίου Παρουσία Βαρύτητας

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε την ανάλυσή που πραγματοποιήσαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε την επίδραση της βαρύτητας στο πρόβλημα της κβαντικής διάσπασης κενού και τον υπολογισμό του συντελεστή B , ακολουθώντας τον συλλογισμό και την διαδικασία που ακολούθησαν στο πολύ γνωστό paper *Gravitational effects on and of vacuum decay* οι S. Coleman και F. De Luccia. Σύμφωνα με τους προαναφερθέντες, για να συμπεριλάβουμε τις επιδράσεις της βαρύτητας στην Ευκλείδεια δράση που δίνεται από την σχέση (2.64) πρέπει να προσθέσουμε σε αυτήν την Ευκλειδευοποιημένη δράση Hilbert-Einstein και να αντικαταστήσουμε το στοιχείο όγκου d^4x με το αναλλοίωτο στοιχείο όγκου σε έναν καμπυλωμένο χωρόχρονο $\sqrt{g}d^4x$. Επομένως η Ευκλείδεια δράση του συστήματος που μελετάμε έχει την ακόλουθη μορφή

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) - \frac{\mathcal{R}}{16\pi G} \right], \quad (2.103)$$

όπου \mathcal{R} είναι η βαθμωτή καμπυλότητα.

Στην σχέση (2.103) δεν μπορούμε να προσθέσουμε κάποια σταθερά στο δυναμικό έτσι ώστε να ρυθμίσουμε την τιμή του δυναμικού στο ψευδές και το πραγματικό κενό, καθώς αυτό ισοδυναμεί με την προσθήκη στην βαρυτική λαγκραζιανή πυκνότητα ενός σταθερού όρου ανάλογου του \sqrt{g} , δηλαδή στην εισαγωγή μιας κοσμολογικής σταθεράς η οποία αλλάζει την γεωμετρία του συστήματός μας. Όταν η κοσμολογική σταθερά είναι θετική τότε ο χωρόχρονος του συστήματός μας είναι de Sitter, όταν είναι αρνητική είναι Anti-de Sitter και όταν ισούται με το μηδέν είναι επίπεδος Minkowski. Μετά την διάσπαση του κενού έχουμε διαφορετική γεωμετρία μέσα και έξω από την φυσαλίδα καθώς έχουμε διαφορετικές τιμές της κοσμολογικής σταθεράς μέσα ($\sqrt{g}V(\phi_-)$) και έξω ($\sqrt{g}V(\phi_+)$) από την φυσαλίδα. Επομένως πρέπει εξαρχής να προσδιορίσουμε τις τιμές του δυναμικού στο πραγματικό και το ψευδές κενό της θεωρίας.

Γνωρίζουμε ότι απουσία βαρύτητας το $O(4)$ αναλλοίωτο bounce αποτελεί το bounce με την ελάχιστη δράση, και άρα είναι αυτό το οποίο κυρίως συνεισφέρει στον ρυθμό διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και όγκου. Τώρα επειδή δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη αιτία λόγω της οποίας η παρουσία της βαρύτητας να επηρεάζει τις συμμετρίες του συστήματος του βαθμωτού πεδίου, είναι γενικά αποδεκτό (αν και δεν έχει αποδειχθεί) ότι το bounce με την ελάχιστη δράση παρουσία βαρύτητας είναι επίσης το $O(4)$ αναλλοίωτο bounce. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η Ευκλείδεια μετρική του συστήματος μας να παίρνει την εξής μορφή (η οποία είναι η πιο γενική μορφή μιας Ευκλείδειας μετρικής που είναι αναλλοίωτη σε στροφές στις τέσσερις διαστάσεις)

$$ds^2 = d\xi^2 + \rho^2(\xi) d\Omega_3^2, \quad (2.104)$$

όπου το ξ είναι μια ακτινική παράμετρος, το $d\Omega_3^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2 + \sin^2 \psi \sin^2 \theta d\phi^2$ με $0 \leq \psi, \theta \leq \pi$ και $0 \leq \phi \leq 2\pi$ είναι η μετρική μιας μοναδιαίας 3-σφαίρας, και το $\rho(\xi)$ είναι η ακτίνα καμπυλότητας κάθε μιας 3-σφαίρας που προσδιορίζεται από το ξ . Από την σχέση (2.104) επίσης παρατηρούμε ότι η μορφή της μετρικής του συστήματος δεν αλλάζει άμα προσθέσουμε στο ξ μια σταθερά, το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε να ξεκινήσουμε να μετράμε το ξ από όποια τιμή επιθυμούμε. Μπορεί κανείς να δείξει χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις από την Διαφορική Γεωμετρία ότι η βαθμωτή καμπυλότητα της μετρικής (2.104) είναι

$$\mathcal{R} = \frac{6}{\rho^2} (1 - \rho\rho'' - (\rho')^2), \quad (2.105)$$

όπου με ' συμβολίζουμε τις παραγωγίσεις ως προς ξ .

Τώρα αφού το bounce είναι $O(4)$ συμμετρικό έχουμε για το πεδίο $\bar{\phi} = \bar{\phi}(\xi)$ και έτσι, δεδομένου και της μορφής της μετρικής, $g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = (\phi')^2$. Επίσης για το αναλλοίωτο στοιχείο όγκου ισχύει $\sqrt{g}d^4x = \rho^3(\xi)d\xi d\Omega_3$. Οπότε η δράση (2.103) γίνεται

$$S[\phi] = \int d\Omega_3 \int d\xi \cdot \rho^3 \left[\frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi) - \frac{6}{16\pi G\rho^2} (1 - \rho\rho'' - (\rho')^2) \right] \xrightarrow[\Omega_3=2\pi^2]{\kappa=8\pi G}$$

$$\Rightarrow S[\phi] = 2\pi^2 \int d\xi \left[\rho^3 \left(\frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi) \right) + \frac{3}{\kappa} (\rho^2\rho'' + \rho\rho'^2 - \rho) \right]. \quad (2.106)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω μορφή της δράσης και τις συναλλοίωτες εξισώσεις Euler-Langrange (αφού βρισκόμαστε σε καμπυλωμένο χωρόχρονο) προκύπτει η ακόλουθη Ευκλείδεια εξίσωση κίνησης για το bounce

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \Gamma_{\kappa\mu}^\kappa \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi'' + \frac{3\rho'}{\rho}\phi' = \frac{dV(\phi)}{d\phi}. \quad (2.107)$$

Επιπλέον από τις Ευκλείδειες εξισώσεις πεδίου Einstein για το σύστημα μας ($G_{\mu\nu} \equiv \mathcal{R}_{\mu\nu} - (\mathcal{R}/2)g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$) και συγκεκριμένα από την ξξ συνιστώσα μπορεί να δει κανείς ότι προκύπτει

$$\rho'^2 = 1 + \frac{\kappa}{3}\rho^2 \left(\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi) \right). \quad (2.108)$$

Όλες οι υπόλοιπες συνιστώσες των Ευκλείδειων εξισώσεων πεδίου Einstein δεν μας παρέχουν κάποια επιπλέον πληροφορία καθώς αυτές είτε αποτελούν εξισώσεις που ανάγονται στην εξίσωση (2.108) είτε είναι ταυτοτικές εξισώσεις.

Την μορφή της δράσης (2.106) μπορούμε να την απλοποιήσουμε χρησιμοποιώντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση ($\rho^2\rho'' = \rho^2(\rho')' = [\rho^2\rho']' - 2\rho\rho'^2$) και τον Gibbons-Hawking συνοριακό όρο, ως εξής

$$(2.106) \Rightarrow S[\phi] = 2\pi^2 \int d\xi \left[\rho^3 \left(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right) - \frac{3}{\kappa} (\rho\rho'^2 + \rho) \right] + \frac{6\pi^2}{\kappa} (\rho^2\rho') \Big|_{\text{boundary}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S[\phi] = 2\pi^2 \int d\xi \left[\rho^3 \left(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right) - \frac{3}{\kappa} (\rho\rho'^2 + \rho) \right]. \quad (2.109)$$

Παραπάνω έχουμε απαλείψει τον επιφανειακό όρο (που είναι επιβλαβής για $\xi \rightarrow \infty$) διότι για τον συντελεστή B που ενδιαφερόμαστε αφαιρούμε από την δράση του bounce την δράση του ψευδούς κενού, και επομένως αυτός ο όρος δεν συνεισφέρει στο B . Όμως χρησιμοποιώντας επιπλέον και την σχέση (2.108) μπορούμε να απλοποιήσουμε ακόμα περισσότερο την μορφή της δράσης του συστήματος μας. Συγκεκριμένα έχουμε

$$S[\phi] = 2\pi^2 \int d\xi \left[\rho^3 \left(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \right) - \frac{3}{\kappa} \left(\rho + \rho \left\{ 1 + \frac{\kappa}{3}\rho^2 \left(\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi) \right) \right\} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S[\phi] = 4\pi^2 \int d\xi \left[\rho^3 V(\phi) - \frac{3}{\kappa}\rho \right]. \quad (2.110)$$

Για να βγάλουμε αναλυτικά αποτελέσματα για τον συντελεστή B και το $\bar{\rho}$ (το οποίο είναι το ρ στην επιφάνεια της σφαίρας) υπό την παρουσία βαρύτητας και για να τα συγκρίνουμε αυτά με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του προηγούμενου υποκεφάλαιου, θα συνεχίσουμε την μελέτη μας στο thin-wall approximation. Επομένως για το δυναμικό μας ισχύουν οι σχέσεις (2.77)-(2.79) που είδαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Επιπλέον το πεδίο $\bar{\phi}$ ικανοποιεί (για τους ίδιους λόγους με προηγουμένως) τις συνοριακές συνθήκες (2.75)-(2.76), όπου σε αυτές όμως τώρα την θέση του ρ παίρνει το ξ . Συγκρίνοντας την εξίσωση κίνησης (2.74) του προηγούμενου υποκεφάλαιου με την εξίσωση κίνησης (2.107) παρατηρούμε ότι αυτές έχουν δύο διαφορές. Η πρώτη είναι ότι στην (2.74) η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το ρ ενώ στην (2.107) είναι το ξ , και η δεύτερη είναι το ότι ο όρος ϕ' στην (2.74) πολλαπλασιάζεται με $1/\rho$ ενώ στην (2.107) πολλαπλασιάζεται με ρ'/ρ . Βέβαια αυτός ο όρος δεν παίζει κάποιο σημαντικό ρόλο στο thin-wall approximation. Άρα οι λύσεις των δύο αυτών εξισώσεων είναι ουσιαστικά ίδιες, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η προσεγγιστική λύση για το bounce παρουσία βαρύτητας προσδιορίζεται από την σχέση

$$\int_{\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}}^{\bar{\phi}} \frac{d\phi}{\sqrt{2[V_0(\phi) - V_0(\phi_{\pm})]}} = \xi - \bar{\xi}, \quad (2.111)$$

όπου το $\bar{\xi}$ είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Αφού κάποιος υπολογίσει από την παραπάνω σχέση το ϕ μπορεί στην συνέχεια μέσω της σχέσης (2.108) και μιας συνοριακής συνθήκης (αφού η εξίσωση (2.108) είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης) να υπολογίσει και την μορφή το ρ σαν συνάρτηση του ξ . Η συνοριακή συνθήκη που απαιτούμε να ικανοποιεί το $\rho(\xi)$ είναι η εξής

$$\rho(\bar{\xi}) = \bar{\rho}, \quad (2.112)$$

όπου το $\bar{\rho}$ είναι η ακτίνα καμπυλότητας στο τοίχωμα της φυσαλίδας. Αυτό το υπολογίζουμε με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο υπολογίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο το R , δηλαδή από την απαίτηση ο συντελεστής B να στασιμοποιείται κάτω από την διαταρακτική μέθοδο ως προς $\bar{\rho}$ ($dB/d\bar{\rho} = 0$).

Ας υπολογίσουμε τώρα τον συντελεστή B . Όπως γνωρίζουμε στο thin-wall approximation η λύση bounce περιέχει τρεις ξεχωριστές περιοχές, όπου στην πρώτη το πεδίο βρίσκεται στο πραγματικό κενό (εντός της φυσαλίδας), στην δεύτερη το πεδίο βρίσκεται στο ψευδές κενό (έξω από την φυσαλίδα) και στην τρίτη το πεδίο πηγαίνει πολύ γρήγορα από το πραγματικό στο ψευδές κενό (λεπτό τοίχωμα φυσαλίδας). Επομένως, όπως και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, θα υπολογίσουμε τον συντελεστή B σε κάθε μια από αυτές τις περιοχές ξεχωριστά και θα αθροίσουμε τις τρεις συνιστώσες που θα βρούμε. Στον χώρο έξω από την φυσαλίδα βρισκόμαστε στο ψευδές κενό, $\phi = \phi_+$ και έτσι για το B_{outside} ισχύει

$$B_{\text{outside}} = S[\phi_+] - S[\phi_+] \Rightarrow B_{\text{outside}} = 0. \quad (2.113)$$

Στην περιοχή μέσα στο τοίχωμα της φυσαλίδας μπορούμε, όπως κάναμε και στην περίπτωση απουσία βαρύτητας, να αντικαταστήσουμε το ρ με $\bar{\rho}$ και το $V(\phi)$ με $V_0(\phi)$. Κάνοντάς το αυτό βρίσκουμε για το B_{wall}

$$\begin{aligned} B_{\text{wall}} &= S[\bar{\phi}] - S[\phi_+] = 4\pi^2 \int d\xi \left(\bar{\rho}^3 V_0(\bar{\phi}) - \frac{3\bar{\rho}}{\kappa} \right) - 4\pi^2 \int d\xi \left(\bar{\rho}^3 V_0(\phi_+) - \frac{3\bar{\rho}}{\kappa} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow B_{\text{wall}} = 4\pi^2 \bar{\rho}^3 \int d\xi [V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_+)] \xrightarrow[(2.90) \text{ για } \xi]{(2.80) \text{ και}} B_{\text{wall}} = 2\pi^2 \bar{\rho}^3 S_1. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Στον χώρο που περικλείει η φυσαλίδα έχουμε σταθερό ϕ , και συγκεκριμένα $\phi = \phi_-$, και έτσι από την σχέση (2.108) βλέπουμε ότι το $d\xi$ συνδέεται με το $d\rho$ μέσω της σχέσης

$$\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2 = 1 - \frac{\kappa}{3}\rho^2 V(\phi_-) \Rightarrow d\xi = d\rho \cdot \left(1 - \frac{\kappa}{3}\rho^2 V(\phi_-)\right)^{-1/2}. \quad (2.115)$$

Η ίδια σχέση ισχύει και για $\phi = \phi_+$ για την σύνδεση του $d\xi$ με το $d\rho$ μόνο που αντί για $V(\phi_-)$ έχουμε $V(\phi_+)$. Οπότε με βάση την σχέση (2.115) για τον συντελεστή B στη περιοχή μέσα στην φυσαλίδα προκύπτει

$$\begin{aligned} B_{\text{inside}} &= S[\phi_-] - S[\phi_+] = 4\pi^2 \int_0^{\bar{\rho}} d\rho \cdot \left(1 - \frac{\kappa}{3}\rho^2 V(\phi_-)\right)^{-1/2} \left[\rho^3 V(\phi_-) - \frac{3\rho}{\kappa}\right] - (\phi_- \rightarrow \phi_+) \Rightarrow \\ \Rightarrow B_{\text{inside}} &= \frac{12\pi^2}{V(\phi_-)\kappa^2} \left(\left[1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2}{3}V(\phi_-)\right]^{\frac{3}{2}} - 1\right) - \frac{12\pi^2}{V(\phi_+)\kappa^2} \left(\left[1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2}{3}V(\phi_+)\right]^{\frac{3}{2}} - 1\right). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Επομένως αθροίζοντας τους συντελεστές B που βρήκαμε σε κάθε περιοχή ξεχωριστά συμπεραίνουμε ότι για τον συντελεστή B ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$B = \frac{12\pi^2}{V(\phi_-)\kappa^2} \left(\left[1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2}{3}V(\phi_-)\right]^{\frac{3}{2}} - 1\right) - \frac{12\pi^2}{V(\phi_+)\kappa^2} \left(\left[1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2}{3}V(\phi_+)\right]^{\frac{3}{2}} - 1\right) + 2\pi^2\bar{\rho}^3 S_1. \quad (2.117)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για τον συντελεστή B στο thin-wall approximation ανεξαρτήτως της τιμής του δυναμικού $V(\phi)$ στο πραγματικό και στο ψευδές κενό της θεωρίας μας. Για να συνεχίσουμε τώρα με τον υπολογισμό του $\bar{\rho}$ και έτσι ώστε να οδηγηθούμε σε πιο κομψά αποτελέσματα (συγκρίσιμα με τα αποτελέσματα απουσία βαρύτητας), θα μελετήσουμε δυο συγκεκριμένες περιπτώσεις όσον αφορά την τιμή του δυναμικού στο ψευδές και το πραγματικό κενό. Στην πρώτη περίπτωση, θεωρούμε ότι ισχύει

$$V(\phi_-) = 0 \quad \text{και} \quad V(\phi_+) = \varepsilon, \quad (2.118)$$

δηλαδή όσον αφορά την γεωμετρία του συστήματος έχουμε μετάβαση από de Sitter χωρόχρονο (θετική ενεργειακή πυκνότητα) σε Minkowski (μηδενική ενεργειακή πυκνότητα). Για το $\bar{\rho}$ σε αυτή τη περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dB}{d\bar{\rho}} = 0 &\Rightarrow -\frac{12\pi^2}{\kappa^2} \left[\frac{3}{2V(\phi_-)} \left(1 - \frac{\kappa\bar{\rho}^2}{3}V(\phi_-)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}\kappa\bar{\rho}V(\phi_-) - (\phi_- \rightarrow \phi_+) \right] + 6\pi^2\bar{\rho}^2 S_1 = 0 \xrightarrow[V(\phi_+)=\varepsilon]{V(\phi_-)=0} \\ \Rightarrow S_1 &= \frac{2}{\kappa\bar{\rho}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{3}\kappa\bar{\rho}\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \right] \Rightarrow \bar{\rho} = \frac{12S_1}{3\kappa S_1^2 + 4\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Την παραπάνω σχέση μπορούμε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $R = 3S_1/\varepsilon$ και $\Lambda = (\kappa\varepsilon/3)^{-1/2}$ να την φέρουμε στην ακόλουθη πιο κομψή μορφή

$$\bar{\rho} = \frac{12S_1/4\varepsilon}{1 + (3\kappa S_1^2/4\varepsilon)} = \frac{R}{1 + (9S_1^2/4\varepsilon^2) \cdot (\kappa\varepsilon/3)} \Rightarrow \bar{\rho} = \frac{R}{1 + (R/2\Lambda)^2}. \quad (2.120)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας στην σχέση (2.117) την σχέση (2.119), την γνωστή ταυτότητα $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$, την σχέση $B_0 = 27\pi^2 S_1^4 / 2\varepsilon^3$ (συντελεστής B απουσία βαρύτητας) και το

ανάπτυγμα Taylor του $(1-x)^{3/2}$ συμπεραίνουμε ότι παρουσία βαρύτητας ο συντελεστής B στην περίπτωση όπου έχουμε μετάβαση από έναν de Sitter χωρόχρονο σε έναν Minkowski χωρόχρονο, γίνεται

$$\begin{aligned}
B &= \frac{12\pi^2}{\kappa^2} \lim_{V(\phi_-) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{V(\phi_-)} \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\kappa \bar{\rho}^2}{3} V(\phi_-) - 1 \right) \right] - \frac{12\pi^2}{\kappa^2 \varepsilon} \left[\left(1 - \frac{\kappa \varepsilon \bar{\rho}^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] + 2\pi^2 \bar{\rho}^3 S_1 = \\
&= -\frac{-6\pi^2 R^2}{\kappa [1 + (R/2\Lambda)^2]^2} - \frac{4\Lambda^2 \pi^2}{\kappa} (-R^2/2\Lambda^2) [3 + (R/2\Lambda)^4] + \frac{2\pi^2 R^3 S_1}{[1 + (R/2\Lambda)^2]^3} \xrightarrow[\Lambda^2 = 3/\kappa\varepsilon]{R=3S_1/\varepsilon} \\
&\Rightarrow B = \frac{B_0}{[1 + (R/2\Lambda)^2]^2}. \tag{2.121}
\end{aligned}$$

Πριν σχολιάσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα ας δούμε λίγο και τα αποτελέσματα που προκύπτουν για την δεύτερη περίπτωση, στην οποία θεωρούμε ότι για τα $V(\phi_-)$ και $V(\phi_+)$ ισχύει

$$V(\phi_-) = -\varepsilon \quad \text{και} \quad V(\phi_+) = 0, \tag{2.122}$$

δηλαδή έχουμε μετάβαση από Minkowski χωρόχρονο σε Anti-de Sitter (αρνητική ενεργειακή πυκνότητα). Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία πράξεων που ακολουθήσαμε στην πρώτη περίπτωση, μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι για τα $\bar{\rho}$ και B της δεύτερης περίπτωσης προκύπτει

$$\bar{\rho} = \frac{R}{1 - (R/2\Lambda)^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{B_0}{[1 - (R/2\Lambda)^2]^2}. \tag{2.123}$$

Από τις σχέσεις (2.120) και (2.121) παρατηρούμε ότι η παρουσία βαρύτητας αυξάνει την πιθανότητα διάσπασης του ψευδούς κενού όταν πάμε από $V(\phi_+) = \varepsilon$ σε $V(\phi_-) = 0$, καθώς ελαττώνει τον συντελεστή B ($\Gamma \sim e^{-B/\hbar}$), ενώ επίσης ελαττώνει και την ακτίνα $\bar{\rho}$ της φυσαλίδας την στιγμή δημιουργίας της (αφού η φυσαλίδα είναι σφαιρική την στιγμή δημιουργίας της τότε η ακτίνα καμπυλότητας της ισούται με την ακτίνα της). Αντίθετα τώρα από την σχέση (2.123) συμπεραίνουμε ότι η παρουσία βαρύτητας μειώνει την πιθανότητα διάσπασης του ψευδούς κενού όταν πάμε από $V(\phi_+) = 0$ σε $V(\phi_-) = -\varepsilon$ καθώς αυξάνει τον συντελεστή B , ενώ παράλληλα αυξάνει και το $\bar{\rho}$. Το εντυπωσιακό όμως στην δεύτερη περίπτωση είναι ότι η παρουσία της βαρύτητας μπορεί να σταθεροποιήσει πλήρως το ασταθές κενό, μηδενίζοντας τον ρυθμό διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και όγκου, καθώς για $R = 2\Lambda \Rightarrow \varepsilon = (3/4)\kappa S_1^2$ έχουμε απειρισμό του συντελεστή B και της ακτίνας της φυσαλίδας. Μπορεί κανείς να προσέξει από την σχέση (2.123) ότι και για μικρότερες τιμές του ε υπάρχουν προβλήματα (αρνητική ακτίνα την στιγμή δημιουργίας της φυσαλίδας!) και επομένως μπορούμε γενικά να πούμε ότι στην δεύτερη περίπτωση που μελετάμε δεν παρατηρείται κβαντική διάσπαση του ψευδούς για τις ακόλουθες τιμές του ε

$$\varepsilon \leq \frac{3}{4}\kappa S_1^2. \tag{2.124}$$

Τον λόγο για τον οποίο συμβαίνει αυτό μπορούμε να τον εξηγήσουμε. Σε χωροχρόνους που είναι ασυμπτωτικά Minkowski έχουμε διατήρηση της ενέργειας και επομένως μια φυσαλίδα η οποία δημιουργείται και εμπεριέχεται σε έναν Minkowski χωρόχρονο (όπως συμβαίνει με την δεύτερη περίπτωση που μελετάμε, $V(\phi_+) = 0$) πρέπει να έχει μηδενική συνολική ενέργεια. Επιστρέφοντας για λίγο στην περίπτωση που μελετήσαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, απουσία βαρύτητας η ενέργεια

της φυσαλίδας αποτελείται από το άθροισμα ενός αρνητικού όρου όγκου με έναν θετικό επιφανειακό όρο. Οπότε θεωρώντας ότι η ακτίνα της φυσαλίδας έχει κάποια τυχαία τιμή $\bar{\rho}$, αγνοώντας προς το παρόν την γνώση μας ότι κανονικά ισχύει $\bar{\rho} = R$, έχουμε για την ενέργεια της φυσαλίδας απουσία βαρύτητας την στιγμή δημιουργίας της το εξής

$$E = -\frac{4\pi}{3}\bar{\rho}^3\varepsilon + 4\pi S_1\bar{\rho}^2 \xrightarrow{(2.92)} E = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho}^2\varepsilon \cdot (R - \bar{\rho}). \quad (2.125)$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι όντως για την πραγματική ακτίνα ($\bar{\rho} = R$) της φυσαλίδας την στιγμή δημιουργίας της έχουμε μηδενισμό της συνολικής της ενέργειας, όπως και θα έπρεπε. Ας υπολογίσουμε τώρα την επίδραση της βαρύτητας στην ακτίνα της φυσαλίδας, στο όριο όπου το $G \rightarrow 0$ (όριο ασθενούς επίδρασης της βαρύτητας). Για να το κάνουμε αυτό αρκεί να υπολογίσουμε την συνεισφορά της βαρύτητας στην συνολική ενέργεια της φυσαλίδας. Αν η συνεισφορά αυτή είναι θετική τότε η ακτίνα της φυσαλίδας θα πρέπει να αυξάνεται ενώ αντίθετα αν αυτή είναι αρνητική θα πρέπει η ακτίνα να ελαττώνεται, έτσι ώστε πάντα η συνολική ενέργεια της φυσαλίδας να ισούται με το μηδέν. Ήδη από την σχέση (2.123) γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση που μελετάμε αυτό που συμβαίνει τελικά είναι η αύξηση της ακτίνας, αλλά μέσω αυτής της διαδικασίας που θα ακολουθήσουμε θα καταλάβουμε γιατί συμβαίνει αυτό.

Υπάρχουν δυο όροι οι οποίοι αποτελούν την ενεργειακή συνεισφορά της βαρύτητας στην ενέργεια της φυσαλίδας. Ο πρώτος όρος είναι η κλασική Νευτώνεια δυναμική ενέργεια της φυσαλίδας, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss. Η φυσαλίδα μας έχει άλλη πυκνότητα στο εσωτερικό της και άλλη πυκνότητα στην επιφάνειά της, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η Νευτώνεια δυναμική ενέργεια της προκύπτει από την αλληλεπίδραση της εσωτερικής πυκνότητας με τον εαυτό της, την αλληλεπίδραση της επιφανειακής πυκνότητας με τον εαυτό της και την αλληλεπίδραση της εσωτερικής πυκνότητας με την επιφανειακή. Για την αλληλεπίδραση της εσωτερικής πυκνότητας με τον εαυτό της έχουμε

$$U_{\text{inside}} = -\int_0^R \frac{G\left(-\frac{4\pi}{3}\varepsilon r^3\right)\left(-4\pi r^2\varepsilon\right)}{r} dr = -\frac{16\pi^2}{3}G\varepsilon^2 \int_0^R r^4 dr = -\frac{16}{15}\pi^2G\varepsilon^2 R^2. \quad (2.126)$$

Για την αλληλεπίδραση της επιφανειακής πυκνότητας με τον εαυτό της ισχύει

$$U_{\text{surface}} = -\frac{G}{R} \left(\varepsilon \frac{4\pi}{3} R^3 \right) \left(\varepsilon \frac{4\pi}{3} R^3 \right) \Rightarrow U_{\text{surface}} = -\frac{16}{9}\pi^2G\varepsilon^2 R^5. \quad (2.127)$$

Επίσης για την αλληλεπίδραση της εσωτερικής πυκνότητας με την επιφανειακή έχουμε

$$U_{\text{in-s}} = -G \left(\varepsilon \frac{4\pi}{3} R^3 \right) \int_0^R \frac{(-4\pi\varepsilon r^2)}{r} dr = G \frac{16\pi^2}{3}\varepsilon^2 R^3 \int_0^R r dr = \frac{16}{6}\pi^2\varepsilon^2 G R^5. \quad (2.128)$$

Οπότε για την συνολική Νευτώνεια δυναμική ενέργεια της φυσαλίδας προκύπτει με βάση τις τρεις τελευταίες σχέσεις

$$E_{\text{Newton}} = U_{\text{inside}} + U_{\text{surface}} + U_{\text{in-s}} = -\frac{\varepsilon\pi R^5}{15\Lambda^2}. \quad (2.129)$$

Ο δεύτερος όρος προκύπτει από το γεγονός ότι η μη μηδενική ενεργειακή πυκνότητα ($V(\phi_-) = -\varepsilon$) στο εσωτερικό της φυσαλίδας διαταράσσει την γεωμετρία του εσωτερικού χωροχρόνου. Αυτό έχει ως

αποτέλεσμα την διόρθωση του όγκου της φυσαλίδας και έτσι την διόρθωση του αρνητικού ενεργειακού όρου όγκου. Αυτή την διόρθωση μπορούμε να την προσδιορίσουμε από το στοιχειώδες στοιχείο όγκου

$$dV_{\text{inside}} = 4\pi\rho^2 d\xi, \quad (2.130)$$

χρησιμοποιώντας την σχέση (2.115) στο όριο $G \rightarrow 0$, και για $V(\phi_-) = -\varepsilon$. Από αυτήν έχουμε

$$d\xi = d\rho \left(1 + \frac{\kappa\varepsilon}{3}\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} \simeq d\rho \left(1 - \frac{\kappa\varepsilon}{6}\rho^2\right) \xrightarrow{\Lambda^2=3/\kappa\varepsilon} d\xi \simeq d\rho \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\Lambda^2}\right) + O(G^2). \quad (2.131)$$

Έτσι η επιπλέον συνεισφορά που προκύπτει στην ενέργεια της φυσαλίδας από τον δεύτερο όρο λόγω αλλαγής της γεωμετρίας στον εσωτερικό χωρόχρονο είναι

$$E_{\text{geom}} = \int_0^R \left(-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\Lambda^2}\right) (-4\pi\rho^2\varepsilon) d\rho = \frac{2\pi\varepsilon}{\Lambda^2} \int_0^R \rho^4 d\rho \Rightarrow E_{\text{geom}} = \frac{2\pi\varepsilon R^5}{5\Lambda^2}. \quad (2.132)$$

Με βάση τις σχέσεις (2.129) και (2.132) συμπεραίνουμε ότι η συνολική βαρυτική συνεισφορά στην ενέργεια της φυσαλίδας δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$E_{\text{grav}} = E_{\text{Newton}} + E_{\text{geom}} = -\frac{\varepsilon\pi R^5}{15\Lambda^2} + \frac{6\pi\varepsilon R^5}{15\Lambda^2} \Rightarrow E_{\text{grav}} = \frac{\pi\varepsilon R^5}{3\Lambda^2}, \quad (2.133)$$

η οποία είναι μια θετική ποσότητα και άρα η ακτίνα της φυσαλίδας την στιγμή δημιουργίας της, παρουσία βαρύτητας θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη (για την περίπτωση $V(\phi_-) = -\varepsilon$ πάντα) από την ακτίνα απουσία βαρύτητας.

Τώρα μπορούμε να καταλάβουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση διάσπασης από $V(\phi_+) = 0$ σε $V(\phi_-) = -\varepsilon$. Απουσία βαρύτητας μπορούμε πάντα να δημιουργήσουμε μια φυσαλίδα μηδενικής ενέργειας ανεξαρτήτως του πόσο μικρό είναι το ε καθώς το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να δημιουργήσουμε μια φυσαλίδα αρκετά μεγάλη έτσι ώστε ο ενεργειακός όρος όγκου να απαλείφεται από τον επιφανειακό όρο ενέργειας. Ωστόσο, παρουσία βαρύτητας, η επιπλέον ενεργειακή συνεισφορά που προκύπτει διαταράσσει αυτή την ισότητα μεταξύ του ενεργειακού όρου όγκου και του επιφανειακού όρου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για αρκετά μικρά ε [σχέση (2.124)] να μην μπορεί να δημιουργηθεί φυσαλίδα, όσο μεγάλη και ε είναι αυτή, η οποία να έχει μηδενική συνολική ενέργεια.

Ας δούμε τώρα ποια είναι η συνθήκη αυτοσυνέπειας που πρέπει να ικανοποιείται έτσι ώστε να ισχύει το thin-wall approximation παρουσία βαρύτητας. Απουσία βαρύτητας είδαμε ότι αυτή η προσέγγιση ικανοποιούνταν όταν η ακτίνα της φυσαλίδας R ήταν πολύ μεγαλύτερη από το χαρακτηριστικό εύρος στο οποίο μεταβάλλεται το ϕ (ουσιαστικά από το χαρακτηριστικό εύρος του instanton). Αυτό συνέβαινε διότι ο παράγοντας που πολλαπλασιαζόταν με τον όρο ϕ' στην Ευκλείδεια εξίσωση κίνησης ήταν το $1/\rho$. Έτσι σε αντιστοιχία με αυτό που είδαμε στην απουσία βαρύτητας, μπορούμε να πούμε ότι παρουσία βαρύτητας η ποσότητα που πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από το χαρακτηριστικό εύρος μεταβολής του ϕ είναι το ρ'/ρ στο τοίχωμα, το οποίο πολλαπλασιάζεται με τον όρο ϕ' στην Ευκλείδεια εξίσωση κίνησης παρουσία βαρύτητας. Από την εξίσωση (2.108) μπορούμε να δούμε ότι για το ρ'/ρ έχουμε

$$\frac{\rho'}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi) \right). \quad (2.134)$$

Οπότε για να είναι το ρ'/ρ επιθυμητά μικρό στο τοίχωμα θα πρέπει να είναι οι δύο όροι στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης επιθυμητά μικροί στο τοίχωμα. Ο πρώτος όρος αποτελεί το $(1/\rho)^2$ το

οποίο έπρεπε να είναι μικρό και στην περίπτωση απουσίας βαρύτητας. Στον δεύτερο όρο η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η ποσότητα μέσα στην παρένθεση είναι το ε , διότι αυτή η ποσότητα πάει από το 0 στο ε καθώς πάμε από τον εξωτερικό στον εσωτερικό χώρο της φυσαλίδας, οπότε αν την αντικαταστήσουμε αυτήν με το ε παντού τότε προφανώς ισχύει

$$\frac{\rho'^2}{\rho^2} \leq +\frac{1}{\rho^2} + \frac{\kappa\varepsilon}{3} \Rightarrow \frac{\rho'^2}{\rho^2} \leq \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\Lambda^2}. \quad (2.135)$$

Η παραπάνω ανισότητα μας λέει ουσιαστικά ότι η συνθήκη αυτόσυνέπειας έτσι ώστε να ισχύει το thin-wall approximation παρουσία βαρύτητας, είναι τα $\bar{\rho}$ και Λ να είναι πολύ μεγαλύτερα από το χαρακτηριστικό εύρος μεταβολής του ϕ .

3 Διάσπαση Κενού Παρουσία Πεπερασμένης Θερμοκρασίας

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το φυσικό σύστημα μονάδων όπου ισχύει $\hbar = c = k_B = 1$.

3.1 Χρήσιμα Στοιχεία από την Θερμική Κβαντική θεωρία Πεδίου

Η συμβατική Κβαντική Θεωρία Πεδίου έχει θεμελιωθεί σε μηδενική θερμοκρασία. Οι θεωρητικές προβλέψεις που γίνονται σε αυτό το πλαίσιο, για παράδειγμα για τις ενεργές διατομές στοιχειωδών σωματιδίων που συγκρούονται μέσα σε έναν επιταχυντή, περιγράφουν ικανοποιητικά σωστά τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. Ωστόσο ο πραγματικός κόσμος γύρω μας βρίσκεται (και βρισκόταν) σε μηδενική θερμοκρασία πράγμα το οποίο οδήγησε στην ανάγκη δημιουργίας μιας Κβαντικής θεωρίας πεδίου η οποία να περιγράφει συστήματα σε πεπερασμένη μη μηδενική θερμοκρασία. Στο υποκεφάλαιο αυτό θα δούμε μερικά στοιχεία αυτής της θεωρίας τα οποία θα μας χρησιμεύσουν στην συνέχεια του κεφαλαίου ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της διάσπασης του κενού στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου παρουσία πεπερασμένης θερμοκρασίας. Για ευκολία, όσον αφορά τον φορμαλισμό της Θερμικής Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου θα χρησιμοποιήσουμε για την περιγραφή του συστήματος μας την κανονική στατιστική συλλογή όπου τα χημικά δυναμικά ισούνται με το μηδέν. Όπως γνωρίζουμε από την Στατιστική Φυσική, η κανονική συλλογή περιγράφει ένα σύστημα που βρίσκεται σε θερμική ισορροπία και το οποίο είναι σε επαφή με μια δεξαμενή θερμότητας σταθερής θερμοκρασίας T . Μεταξύ του συστήματος και της δεξαμενής μπορούμε να έχουμε ανταλλαγή ενέργειας αλλά ο αριθμός των σωματιδίων N και ο όγκος V του συστήματος παραμένουν σταθερά.

Η συνάρτηση επιμερισμού στην κανονική συλλογή, η οποία είναι ένα πολύ σημαντικό μέγεθος που παίζει τον κεντρικό ρόλο στην μελέτη της Θερμικής Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου, ορίζεται ως εξής

$$Z = e^{-\beta F} = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}), \quad (3.1)$$

όπου \hat{H} είναι η χαμιλτονιανή και F είναι η ελεύθερη ενέργεια (κατά Helmholtz) του συστήματος που μελετάμε, ενώ επίσης ο παράγοντας β συνδέεται με την θερμοκρασία μέσω της σχέσης

$$\beta = \frac{1}{T}. \quad (3.2)$$

Στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου μηδενικής θερμοκρασίας, όπως γνωρίζουμε, η αναμενόμενη (μέση) τιμή ενός τελεστή \hat{A} δίνεται από την σχέση

$$\langle \hat{A} \rangle_{T=0} = \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle. \quad (3.3)$$

όπου τα $|n\rangle$ είναι μια πλήρης βάση του συστήματος αποτελούμενη από ορθοκανονικές καταστάσεις. Στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου μη μηδενικής θερμοκρασίας όμως η ύπαρξη ενός λουτρού θερμότητας έχει ως αποτέλεσμα η αναμενόμενη τιμή ενός τελεστή να πρέπει να υπολογιστεί, σύμφωνα με την Στατιστική Φυσική, μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\langle \hat{A} \rangle_T = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} \hat{A} | n \rangle \Rightarrow \langle \hat{A} \rangle_T = \frac{\text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}} \hat{A})}{\text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}})}. \quad (3.4)$$

Υπενθυμίζουμε ότι για την χρονική εξέλιξη ενός τελεστή στην εικόνα Heisenberg ισχύει

$$\widehat{A}(\vec{x}, t) = e^{i\widehat{H}t} \widehat{A}(\vec{x}, 0) e^{-i\widehat{H}t} \quad \text{και} \quad \widehat{A}(\vec{x}, \tau) = e^{\widehat{H}\tau} \widehat{A}(\vec{x}, 0) e^{-\widehat{H}\tau}. \quad (3.5)$$

Τώρα με βάση όλα τα παραπάνω είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε μια θεμελιώδη σχέση της Θερμικής Θεωρίας Πεδίου. Για την συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων (two-point correlation function), χρησιμοποιώντας την ιδιότητα κυκλικής μετάθεσης των τελεστών μέσα σε ένα ίχνος, έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \phi(\vec{x}, \tau) \phi(\vec{y}, 0) \rangle_T &= \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[e^{-\beta \widehat{H}} \phi(\vec{x}, \tau) \phi(\vec{y}, 0) \right] = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[\phi(\vec{x}, \tau) e^{-\beta \widehat{H}} e^{\beta \widehat{H}} \phi(\vec{y}, 0) e^{-\beta \widehat{H}} \right] \xrightarrow{(3.5)} \\ &\Rightarrow \langle \phi(\vec{x}, \tau) \phi(\vec{y}, 0) \rangle_T = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[\phi(\vec{x}, \tau) e^{-\beta \widehat{H}} \phi(\vec{y}, \beta) \right] = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[e^{-\beta \widehat{H}} \phi(\vec{y}, \beta) \phi(\vec{x}, \tau) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle \phi(\vec{x}, \tau) \phi(\vec{y}, 0) \rangle_T = \langle \phi(\vec{y}, \beta) \phi(\vec{x}, \tau) \rangle_T. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως KMS (Kubo-Martin-Schwinger) σχέση, και από αυτήν αμέσως προκύπτει

$$\phi(\vec{x}, 0) = \pm \phi(\vec{x}, \beta), \quad (3.7)$$

όπου παραπάνω το πρόσημο \pm εξαρτάται από το αν τα πεδία μετατίθενται μεταξύ τους, δηλαδή εξαρτάται από το αν τα πεδία είναι μποζονικά ή φερμιονικά. Επομένως η KMS σχέση μας λέει ότι σε πεπερασμένη μη μηδενική θερμοκρασία και όταν το σύστημά μας βρίσκεται σε θερμική ισορροπία τα μποζονικά πεδία (όπως το πεδίο Higgs που θα μας απασχολήσει στο επόμενο κεφάλαιο) είναι περιοδικά στον Ευκλείδειο χρόνο τ με περίοδο β , ενώ αντίθετα τα φερμιονικά πεδία είναι αντί-περιοδικά.

Μπορούμε την συνάρτηση επιμερισμού που δίνεται από την σχέση (3.1) να την φέρουμε σε μορφή ολοκληρώματος διαδρομών. Θα το κάνουμε αυτό στα πλαίσια της μονοδιάστατης Κβαντικής Μηχανικής για ένα σωματίο με μάζα $m = 1$, και στην συνέχεια θα γενικεύσουμε το αποτέλεσμα μας για την Κβαντική Θεωρία Πεδίου. Έστω ότι η χαμιλτονιανή του συστήματος που μελετάμε έχει την ακόλουθη μορφή

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2} + V(\widehat{x}). \quad (3.8)$$

Ως πλήρης βάση για τον υπολογισμό της συνάρτησης επιμερισμού επιλέγουμε την βάση που αποτελείται από τις ιδιοκαταστάσεις του τελεστή θέσης \widehat{x} , δηλαδή

$$Z = \text{Tr} \left(e^{-\beta \widehat{H}} \right) = \int dx \langle x | e^{-\beta \widehat{H}} | x \rangle. \quad (3.9)$$

Στην συνέχεια τους αριθμητικούς πολλαπλασιαστικούς παράγοντες που θα προκύπτουν μπροστά από τα ολοκληρώματα θα τους παραλείψουμε καθώς αυτούς μπορούμε να τους απορροφήσουμε στην τελική μορφή του παράγοντα κανονικοποίησης N . Μπορούμε παραπάνω να διαμερίσουμε το χρονικό διάστημα β σε n μικρά τμήματα διαστήματος $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \dots, \Delta\tau_n$ και να πάρουμε τα όρια $n \rightarrow \infty$ και $\Delta\tau_i \rightarrow 0$ στο τέλος. Έτσι μπορούμε να γράψουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα της σχέσης (3.9) ως εξής

$$\langle x | e^{-\beta \widehat{H}} | x \rangle = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta\tau_i \rightarrow 0}} \langle x | \prod_i^n e^{-\Delta\tau_i \widehat{H}} | x \rangle. \quad (3.10)$$

Εισάγοντας ανάμεσα στο κάθε εκθετικό της σχέσης (3.9) τον ταυτοτικό τελεστή χρησιμοποιώντας την σχέση πληρότητας των ιδιοκαταστάσεων του τελεστή θέσης έχουμε ($x_0 \equiv x$)

$$\int dx \langle x | e^{-\beta \hat{H}} | x \rangle = \int \prod_{\kappa=0}^n dx_{\kappa} \delta(x_0 - x_n) \langle x_0 | e^{-\Delta\tau_1 \hat{H}} | x_1 \rangle \cdot \langle x_1 | e^{-\Delta\tau_2 \hat{H}} | x_2 \rangle \cdot \dots \cdot \langle x_{n-1} | e^{-\Delta\tau_n \hat{H}} | x_n \rangle . \quad (3.11)$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις

$$\langle x' | V(\hat{x}) | x \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} V(x) e^{ip(x-x')} \quad \text{και} \quad \langle x' | \hat{p}^2/2 | x \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{p^2}{2} e^{ip(x-x')} . \quad (3.12)$$

Παραλείποντας τους αριθμητικούς παράγοντες που προκύπτουν από την χρήση των παραπάνω σχέσεων και της σχέσης (3.8) (αναπτύσσουμε πρώτα το εκθετικό κατά Taylor, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.12) και στην συνέχεια ξανά δημιουργούμε το εκθετικό, όπου τώρα οι τελεστές έχουν γίνει αριθμοί) μπορούμε να γράψουμε κάθε εσωτερικό γινόμενο της σχέσης (3.11) ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \langle x_{\kappa-1} | e^{-\Delta\tau_{\kappa} \hat{H}} | x_{\kappa} \rangle &= \int dp_{\kappa} e^{ip_{\kappa}(x_{\kappa}-x_{\kappa-1})} \cdot e^{-\left[\frac{p_{\kappa}^2}{2} + V(x_{\kappa})\right] \Delta\tau_{\kappa}} = \int dp_{\kappa} e^{\Delta\tau_{\kappa} \cdot \left[ip_{\kappa} \cdot \frac{x_{\kappa}-x_{\kappa-1}}{\Delta\tau_{\kappa}} - \frac{p_{\kappa}^2}{2} - V(x_{\kappa}) \right]} \Rightarrow \\ &\xrightarrow{\dot{x}_{\kappa} = [x_{\kappa}-x_{\kappa-1}]/[\Delta\tau_{\kappa}]} \int dp_{\kappa} e^{-\Delta\tau_{\kappa} \cdot \left[\frac{p_{\kappa}^2}{2} - ip_{\kappa} \dot{x}_{\kappa} - \frac{\dot{x}_{\kappa}^2}{2} \right]} \cdot e^{-\Delta\tau_{\kappa} \left[\frac{\dot{x}_{\kappa}^2}{2} + V(x_{\kappa}) \right]} \xrightarrow{z_{\kappa} = p_{\kappa} - i\dot{x}_{\kappa}} \\ &\Rightarrow \langle x_{\kappa-1} | e^{-\Delta\tau_{\kappa} \hat{H}} | x_{\kappa} \rangle = e^{-\Delta\tau_{\kappa} \left[\frac{\dot{x}_{\kappa}^2}{2} + V(x_{\kappa}) \right]} \int dz_{\kappa} e^{-\frac{\Delta\tau_{\kappa} z_{\kappa}^2}{2}} . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση είναι ένα Γκαουσιανό ολοκλήρωμα οπότε μπορεί να υπολογιστεί και να μας δώσει έναν αριθμητικό πολλαπλασιαστικό παράγοντα. Άρα κάνοντας αυτόν τον υπολογισμό για κάθε εσωτερικό γινόμενο που εμφανίζεται στην σχέση (3.11) και παίρνοντας τα όρια $n \rightarrow \infty$ και $\Delta\tau_i \rightarrow 0$ προκύπτει η ακόλουθη μορφή ολοκληρώματος διαδρομών για την συνάρτηση επιμερισμού (και άρα και για το εκθετικό που περιέχει την ελεύθερη ενέργεια)

$$Z = e^{-\beta F} = N \int_{x(\beta)=x(0)} \mathcal{D}x(\tau) e^{-S^{(\beta)}[x(\tau)]} , \quad (3.14)$$

όπου παραπάνω έχουμε μαζέψει όλους τους αριθμητικούς παράγοντες που είχαμε παραλείψει μέχρι τώρα στον παράγοντα κανονικοποίησης N , και όπου το $S^{(\beta)}[x(\tau)]$ δίνεται από την σχέση

$$S^{(\beta)}[x(\tau)] = \int_0^{\beta} d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) \right] , \quad (3.15)$$

δηλαδή αυτό αποτελεί την γνωστή μας (από το δεύτερο κεφάλαιο) Ευκλείδεια δράση με $\tau_i = 0$ και $\tau_f = \beta$, όπου $\dot{x} = dx/d\tau$. Όπως παρατηρούμε στο ολοκλήρωμα της σχέσης (3.14) συμπεριλαμβάνονται μόνο οι τροχιές $x(\tau)$ που είναι περιοδικές στον Ευκλείδειο χρόνο με περίοδο β .

Η παραπάνω απόδειξη γενικεύεται και για την περίπτωση της Θερμικής Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου για μποζονικά πεδία (υπάρχει και αντίστοιχη απόδειξη για φερμιονικά πεδία τα οποία όμως όπως έχουμε ήδη δει πρέπει να είναι αντί-περιοδικά). Επομένως σε αντιστοιχία με την σχέση (3.14) μπορούμε

να πούμε ότι στην Κβαντική θεωρία Πεδίου πεπερασμένης μη μηδενικής θερμοκρασίας και για ένα μποζονικό πεδίο ισχύει η ακόλουθη σχέση για το εκθετικό της ελεύθερης ενέργειας του συστήματος

$$e^{-\beta F} = \int \mathcal{D}\phi(\vec{x}, \tau) e^{-S^{(\beta)}[\phi(\vec{x}, \tau)]}, \quad (3.16)$$

όπου στο παραπάνω συναρτησιακό ολοκλήρωμα περιλαμβάνονται μόνο οι διαδρομές $\phi(\vec{x}, \tau)$ που είναι περιοδικές στον Ευκλείδειο χρόνο με περίοδο β , δηλαδή $\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta)$, και όπου για την Ευκλείδεια δράση $S^{(\beta)}[\phi(\vec{x}, \tau)]$ έχουμε

$$S^{(\beta)}[\phi(\vec{x}, \tau)] = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.17)$$

3.2 Μηχανισμοί Διάσπασης Κενού Παρουσία μη Μηδενικής Θερμοκρασίας

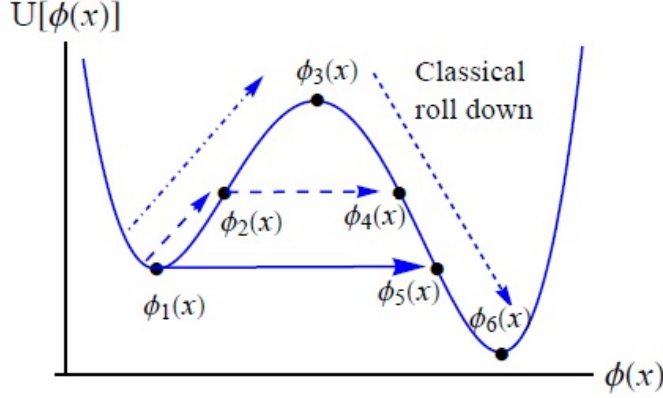
Σε αυτή τη παράγραφο θα μελετήσουμε στα πλαίσια της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου τις επιδράσεις που έχει η ύπαρξη μη μηδενικής θερμοκρασίας στο φαινόμενο της διάσπασης του κενού ενός μποζονικού βαθμωτού πεδίου ϕ . Θεωρούμε ότι το σύστημά μας βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με ένα θερμικό λουτρό θερμοκρασίας $T = 1/\beta$, και ότι το πεδίο του συστήματος μας μπορεί να απορροφήσει ενέργεια από το θερμικό λουτρό (κανονική συλλογή). Αφού το σύστημα μας βρίσκεται σε μη μηδενική θερμοκρασία το μποζονικό βαθμωτό πεδίο ϕ είναι περιοδικό στον Ευκλείδειο χρόνο τ με περίοδο β , σύμφωνα με όσα είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Για να μην οδηγηθούμε σε λανθασμένα αποτελέσματα θα πρέπει στην μελέτη της διάσπασης κενού παρουσία πεπερασμένης θερμοκρασίας να χρησιμοποιήσουμε το ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας $V_{\text{eff}}(\phi, T)$ στην θέση του δυναμικού $V(\phi)$ που χρησιμοποιούσαμε μέχρι τώρα. Για την επεξήγηση της έννοιας του ενεργού δυναμικού μπορεί να ανατρέξει κανείς στα Παραρτήματα Α' και Β'. Επίσης πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου τον ρόλο του $V(x)$ της Κβαντικής Μηχανικής δεν τον παίζει το δυναμικό του βαθμωτού πεδίου $V(\phi)$ αλλά το δυναμικό $U[\phi]$, το οποίο δίνεται από την σχέση

$$U[\phi(\vec{x}, \tau)] = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.18)$$

Το δυναμικό $U[\phi(\vec{x}, \tau)]$ είναι ένα συναρτησοειδές. Εξαρτάται από τον άπειρο βαθμό των μεταβλητών $\phi(\vec{x}, \tau)$ (το βαθμωτό πεδίο ϕ είναι ένα σύστημα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας) και παίρνει μια πεπερασμένη τιμή μόνο όταν η απεικόνιση $\phi(\vec{x}, \tau)$ είναι πλήρως προσδιορισμένη. Έτσι σε αντιστοιχία με την Κβαντική Μηχανική, η κβαντική διάσπαση του ψευδούς κενού στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου μπορεί να περιγραφεί ως μια διαφυγή μέσω φαινομένου σήραγγας των απείρως πολλών βαθμών ελευθερίας από το τοπικό ελάχιστο του δυναμικού $U[\phi(\vec{x}, \tau)]$. όπου βρίσκεται το ψευδές κενό.

Έτσι έστω τώρα ότι το δυναμικό $U[\phi(\vec{x}, \tau)]$ έχει την μορφή που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1. Λόγω της ύπαρξης μη μηδενικής θερμοκρασίας, πέρα από την κβαντική διάσπαση κενού (η οποία στο Σχήμα 3.1 περιγράφεται μέσω της διαδρομής $\phi_1 \rightarrow \phi_5 \rightarrow \phi_6$) που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τώρα υπάρχουν και δυο νέοι μηχανισμοί οι οποίοι μπορούν να οδηγήσουν στην διάσπαση του ψευδούς κενού. Ο πρώτος μηχανισμός ονομάζεται θερμικά ενισχυμένη κβαντική διάσπαση κενού (thermal assisted quantum vacuum decay), και στα πλαίσια αυτού το πεδίο απορροφά κάποιο



Σχήμα 3.1: Σχηματική μορφή του δυναμικού $U[\phi(x)]$ συναρτήσεως της απεικόνισης $\phi(x)$. Στο πεδίο $\phi_1(x)$ βρίσκεται το ψευδές κενό της θεωρίας ενώ στο $\phi_6(x)$ βρίσκεται το πραγματικό.

ποσό ενέργειας από το θερμικό περιβάλλον και διεγείρεται σε μια ενεργειακή κατάσταση από όπου πραγματοποιεί την κβαντική διάσπαση κενού διαπερνώντας ένα φράγμα δυναμικού μικρότερου πάχους. Στην συνέχεια αφού έχει πραγματοποιήσει το πεδίο το φαινόμενο σήραγγας κυλάει κλασικά προς το πραγματικό κενό της θεωρίας. Η διαδρομή που περιγράφει τον μηχανισμό αυτόν στο Σχήμα 3.1 είναι η $\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \phi_4 \rightarrow \phi_6$. Η διάσπαση του ψευδούς κενού σε αυτόν τον μηχανισμό συμβαίνει μέσω της δημιουργίας μιας τρισδιάστατης (στις χωρικές συντεταγμένες) φυσαλίδας πραγματικού κενού που εμπεριέχεται σε έναν χώρο ψευδούς κενού. Λόγω του ότι παρουσία πεπερασμένης θερμοκρασίας τα βαθμωτά μποζονικά πεδία είναι περιοδικά στον Ευκλείδειο χρόνο, η λύση bounce δεν θα είναι πια $O(4)$ -συμμετρική όπως στην περίπτωση της κβαντικής διάσπασης κενού αλλά $O(3)$ -συμμετρική (μέγιστη μορφή συμμετρίας στις τρεις διαστάσεις) και μάλιστα με την αύξηση της θερμοκρασίας θα παραμορφώνεται η μορφή της στην διεύθυνση τ . Για $T \rightarrow 0$ η περιοδικότητα στην διεύθυνση τ χάνεται, το bounce γίνεται πάλι $O(4)$ -συμμετρικό και έχουμε μόνο κβαντική διάσπαση κενού. Πρακτικά και για πολύ μικρές θερμοκρασίες μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συμμετρία του bounce της θερμικά ενισχυμένης κβαντικής διάσπασης κενού είναι προσεγγιστικά $O(4)$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι για τον συντελεστή B του ρυθμού διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και όγκου (βλέπε σχέση 2.65) της θερμικά ενισχυμένης κβαντικής διάσπασης κενού ισχύει

$$B = S[\bar{\phi}] - S[\phi_{\text{false}}], \quad (3.19)$$

όπου η δράση του bounce $S[\bar{\phi}]$ έχει, σε αντιστοιχία με την σχέση (3.17) λόγω της περιοδικότητας του bounce στον Ευκλείδειο χρόνο και της $O(3)$ -συμμετρικότητάς του, την ακόλουθη μορφή

$$S[\bar{\phi}(\vec{x}, \tau)] = \int_0^\beta d\tau \int 4\pi r^2 dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dr} \right)^2 + V_{\text{eff}}(\bar{\phi}, T) \right]. \quad (3.20)$$

Ο δεύτερος μηχανισμός ονομάζεται θερμική διάσπαση κενού ή καθαρά θερμική διάσπαση κενού (thermal vacuum decay), και στα πλαίσια αυτού το πεδίο απορροφά το κατάλληλο ποσό ενέργειας από το θερμικό περιβάλλον έτσι ώστε να ανέβει (διεγερθεί) από το ψευδές κενό στο τοπικό μέγιστο του δυναμικού (ϕ_3 στο Σχήμα 3.1) και μετέπειτα από εκεί κυλάει κλασικά προς το πραγματικό κενό της θεωρίας. Αυτή αποτελεί ουσιαστικά μια κλασική κίνηση καθώς το πεδίο δεν πραγματοποιεί φαινόμενο σήραγγας. Η διαδρομή που περιγράφει τον μηχανισμό αυτό στο Σχήμα 3.1 είναι η $\phi_1 \rightarrow$

$\phi_3 \rightarrow \phi_6$. Ο μηχανισμός αυτός υπερισχύει στις μεγάλες θερμοκρασίες ($T \gg R^{-1}$) έναντι των άλλων δύο. Η λύση bounce $\bar{\phi}$ που περιγράφει αυτόν τον μηχανισμό προκύπτει από την στασιμοποίηση του συναρτησοειδούς $U[\phi, T]$, δηλαδή

$$\left. \frac{\delta U[\phi, T]}{\delta \phi} \right|_{\phi=\bar{\phi}} = 0 \Rightarrow \partial_i \partial^i \bar{\phi} - \left. \frac{dV_{\text{eff}}(\phi, T)}{d\phi} \right|_{\phi=\bar{\phi}} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \bar{\phi} = \left. \frac{dV_{\text{eff}}(\phi, T)}{d\phi} \right|_{\phi=\bar{\phi}}, \quad (3.21)$$

και επομένως το $\bar{\phi}$ αποτελεί μια στατική λύση των πλήρων εξισώσεων κίνησης του συστήματος, $\partial_\mu \partial^\mu \phi = dV_{\text{eff}}(\phi, T)/d\phi$. Οπότε δεδομένου του παραπάνω αποτελέσματος, της περιοδικότητας στον Ευκλείδειο χρόνο, και το γεγονός ότι στις τρεις διαστάσεις η μέγιστη συμμετρία είναι η σφαιρική, συμπεραίνουμε ότι η λύση bounce για αυτόν τον μηχανισμό είναι O(3)-συμμετρική και χρονικά ανεξάρτητη. Άρα και πάλι η διάσπαση του ψευδούς κενού συμβαίνει μέσω της δημιουργίας μιας τρισδιάστατης φουσαλίδας στον χώρο όπου το πεδίο βρίσκεται στο ψευδές κενό, η οποία περιέχει στο εσωτερικό της το πεδίο στο πραγματικό κενό της θεωρίας. Λόγω της O(3)-συμμετρίας του bounce η σχέση (3.21), από όπου προσδιορίζουμε το bounce, παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\frac{d^2 \bar{\phi}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\bar{\phi}}{dr} = \left. \frac{dV_{\text{eff}}(\phi, T)}{d\phi} \right|_{\phi=\bar{\phi}}. \quad (3.22)$$

Μπορεί να δείξει κανείς ότι ο τελεστής $\delta^2 U / \delta \phi^2 |_{\phi=\bar{\phi}}$ εμπεριέχει μια μόνο ιδιοκατάσταση με αρνητική ιδιοτιμή, για την οποία ισχύει

$$\left(-\nabla^2 + \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\phi^2} \right|_{\phi=\bar{\phi}} \right) n_- = -\lambda_-^2 n_-. \quad (3.23)$$

Παρατήρηση: Οι συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το bounce και στους δύο νέους μηχανισμούς που προκύπτουν παρουσία μη μηδενικής θερμοκρασίας είναι παρόμοιες με αυτές που ικανοποιούσε το bounce στην περίπτωση της κβαντικής διάσπασης κενού, μόνο που σε αυτές την θέση της απόστασης ρ ($\rho^2 = \tau^2 + r^2$) παίρνει η απόσταση $r = |\vec{x}|$. Δηλαδή έχουμε $\bar{\phi}(r \rightarrow \infty) = \phi_{\text{false}}$ και $d\bar{\phi}/dr|_{r=0} = 0$.

Με βάση τώρα την σχέση (3.20) συμπεραίνουμε ότι για την δράση του O(3)-συμμετρικού bounce που περιγράφει την θερμική διάσπαση κενού προκύπτει

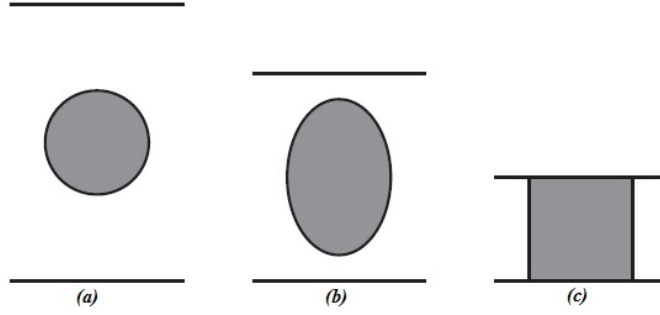
$$S[\bar{\phi}(r), T] = \int_0^\beta d\tau \int 4\pi r^2 dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dr} \right)^2 + V_{\text{eff}}(\bar{\phi}, T) \right] \Rightarrow S[\bar{\phi}(r), T] = \frac{S_3[\bar{\phi}(r), T]}{T}, \quad (3.24)$$

όπου παραπάνω έχουμε ορίσει ως $S_3[\bar{\phi}(r), T]$ την ακόλουθη ποσότητα

$$S_3[\bar{\phi}(r), T] = \int 4\pi r^2 dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dr} \right)^2 + V_{\text{eff}}(\bar{\phi}, T) \right]. \quad (3.25)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορεί να δείξει κανείς ότι ο ρυθμός διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και όγκου για την θερμική διάσπαση κενού παίρνει την εξής μορφή

$$\Gamma(T) = \frac{\lambda_-}{2\pi} \left(\frac{B_3}{2\pi T} \right)^{3/2} \left| \frac{\det[-\nabla^2 + \ddot{V}_{\text{eff}}(\phi_{\text{false}})]}{\text{Det}[-\nabla^2 + \ddot{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi})]} \right|^{1/2} e^{-B_3/T}, \quad (3.26)$$



Σχήμα 3.2: Σχηματική αναπαράσταση στο thin-wall approximation των περιοδικών bounces που υπάρχουν παρουσία πεπερασμένης θερμοκρασίας. Και στις τρεις εικόνες οι οριζόντιες γραμμές ορίζουν τις υπερεπιφάνειες $\tau = 0$ (κάτω γραμμή) και $\tau = \beta$. Οι εικόνες (a) και (b) (με $T_{(a)} < T_{(b)}$) περιγράφουν bounces που δημιουργούνται μέσω του μηχανισμού θερμικά ενισχυμένης κβαντικής διάσπασης κενού, και εικονογραφούν την παραμόρφωση της (γκρι) περιοχής πραγματικού κενού ως προς τον Ευκλείδειο χρόνο με την αύξηση της θερμοκρασίας. Στην εικόνα (c) παρουσιάζεται το τ -ανεξάρτητο bounce της θερμικής διάσπασης κενού.

όπου με το $\bar{\phi}$ συμβολίζουμε την παραγωγή ως προς ϕ , με το Det συμβολίζουμε την κανονική ορίζουσα παραλείποντας από αυτήν τις τρεις μηδενικές ιδιοτιμές που προκύπτουν από το σπάσιμο της συμμετρίας τις εξίσωσης ιδιοτιμών-ιδιοανυσμάτων του τελεστή $\delta^2 S / \delta \phi^2|_{\phi=\bar{\phi}}$ στις χωρικές μεταθέσεις (λόγω του bounce), και όπου το B_3 δίνεται από την σχέση

$$B_3 = S_3 [\bar{\phi}, T] - S_3 [\phi_{\text{false}}] . \quad (3.27)$$

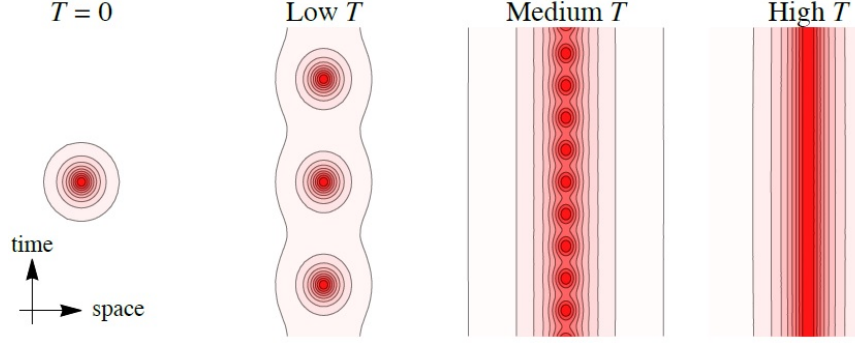
Στην σχέση (3.26) ο παράγοντας $(B_3/2\pi T)^{3/2}$ προκύπτει, σε αναλογία με το Κεφάλαιο 2, από την ολοκλήρωση ως προς τους συντελεστές που αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιοτιμές. Ο υπολογισμός των οριζουσών της σχέσης (3.26) είναι συνήθως περίπλοκος και για αυτόν χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι. Συνήθως γίνεται επίκληση στην διαστατική ανάλυση για να προσεγγιστεί αυτός ο όρος και έτσι σύμφωνα με αυτήν μπορεί η σχέση που δίνει το $\Gamma(T)$ να προσεγγιστεί ικανοποιητικά καλά από την ακόλουθη

$$\Gamma(T) \sim T^4 \left(\frac{B_3}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-B_3/T} . \quad (3.28)$$

Ας πραγματοποιήσουμε τώρα τα ακόλουθα σημαντικά σχόλια για τις σχέσεις και τα συμπεράσματα στα οποία έχουμε οδηγηθεί για την διάσπαση κενού παρουσία πεπερασμένης θερμοκρασίας:

1) Η σχέση (3.26) ισχύει στην περίπτωση όπου το σύστημά μας βρίσκεται σε θερμική ισορροπία. Για τον ρυθμό διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και όγκου των περιπτώσεων όπου το σύστημα δεν βρίσκεται σε θερμική ισορροπία το $\Gamma(T)$ που δίνεται από την σχέση (3.26) αποτελεί ένα άνω όριο.

2) Από τις σχέσεις (3.16) και (3.17) του προηγούμενου υποκεφαλαίου και την σχέση (3.24), παρατηρούμε ότι για την χρονοανεξάρτητη O(3)-συμμετρική λύση bounce η δράση $S_3[\bar{\phi}, T]$ ισούται με την ελεύθερη ενέργεια κατά Helmholtz του συστήματος. Επομένως είναι ξεκάθαρο ότι ο εκθετικός παράγοντας $e^{-B_3/T}$ που εμφανίζεται στο $\Gamma(T)$ συμπίπτει με τον γνωστό μας, από την Στατιστική Φυσική (Βλέπε L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Moscow, Nauka, 1964), εκθετικό παράγοντα $e^{-\Delta F/T}$ που εμφανίζεται στην θεωρία βρασμού στον ρυθμό σχηματισμού μιας φυσαλίδας ατμού μέσα στο νερό ανά μονάδα όγκου και χρόνου. Το ΔF αποτελεί την αλλαγή της ελεύθερης ενέργειας της ύλης λόγω του σχηματισμού της φυσαλίδας.



Σχήμα 3.3: Bounces σε διαφορετικές θερμοκρασίες. Στον οριζόντιο άξονα έχουμε την ακτινική απόσταση από το κέντρο της φυσαλίδας και στον κατακόρυφο άξονα έχουμε τον Ευκλείδειο χρόνο. Σε μηδενική θερμοκρασία το bounce είναι $O(4)$ -συμμετρικό, ενώ σε πεπερασμένη θερμοκρασία αυτό γίνεται μια σειρά από φυσαλίδες των οποίων τα κέντρα απέχουν απόσταση $1/T$ στην διεύθυνση τ . Στις υψηλές θερμοκρασίες το bounce δεν εξαρτάται πια από τον Ευκλείδειο χρόνο (επικρατεί η θερμική διάσπαση κενού).

3) Ας δούμε την σχηματική αναπαράσταση των λύσεων bounce των δύο νέων μηχανισμών που έχουμε δει ότι υπάρχουν παρουσία πεπερασμένης θερμοκρασίας. Η αναπαράσταση αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.2 και στο Σχήμα 3.3. Στις χαμηλές θερμοκρασίες το bounce που αντιστοιχεί στην θερμικά ενισχυμένη κβαντική διάσπαση κενού είναι προσεγγιστικά $O(4)$ -συμμετρικό. Όσο η θερμοκρασία αυξάνει το bounce διατηρεί μια $O(3)$ συμμετρία στις τρεις χωρικές διαστάσεις αλλά παραμορφώνεται στον Ευκλείδειο χρόνο. Έτσι άμα πάρουμε σχηματικά ένα τέτοιο bounce και τις περιοδικές επαναλήψεις του (δηλαδή άμα επεκτείνουμε την εικόνα στο Σχήμα 3.2 για τ πέρα από $\tau = \beta$, όπως συμβαίνει στο Σχήμα 3.3) παρατηρούμε ότι η περιοχή του πραγματικού κενού επιμηκύνεται, και συγκεκριμένα από μια θερμοκρασία και μετά (όταν το T γίνει συγκρίσιμο με την ακτίνα της φυσαλίδας) οι διαδοχικές φυσαλίδες στον Ευκλείδειο χρόνο τελικά συγκρούονται μεταξύ τους, όπως μπορεί να δει κανείς στις ενδιάμεσες εικόνες στο Σχήμα 3.3. Όσον αφορά την τ -ανεξάρτητη λύση bounce που περιγράφει την θερμική διάσπαση κενού, αυτή αποτελεί έναν κύλινδρο στις τέσσερις διαστάσεις με περίοδο β όπου κάθε λεπτό τεμάχιο (λεπτή φέτα) αυτού του κυλίνδρου μας δίνει την $O(3)$ -συμμετρική τρισδιάστατη φυσαλίδα, όπως παρουσιάζεται στις τελευταίες εικόνες των Σχημάτων 3.2 και 3.3. Στις υψηλές θερμοκρασίες ο μηχανισμός που επικρατεί για την διάσπαση του ψευδούς κενού είναι η θερμική διάσπαση κενού καθώς η λύση bounce της έχει την ελάχιστη δράση, δηλαδή οι δράσεις των άλλων μηχανισμών σε υψηλές θερμοκρασίες είναι πολύ μεγαλύτερες από την δράση της θερμικής διάσπασης κενού και έτσι δεν συνεισφέρουν στο ολοκλήρωμα διαδρομών.

4) Η τ -ανεξάρτητη λύση bounce της θερμικής διάσπασης κενού αποτελεί λύση της Ευκλείδειας εξίσωσης κίνησης σε όλες τις θερμοκρασίες. Ωστόσο, στις χαμηλότερες θερμοκρασίες η διάσπαση μέσω αυτού του μηχανισμού δεν είναι μόνο υποδεέστερη (όχι επικρατέστερη) καθώς η δράση της είναι μεγαλύτερη από την δράση των άλλων μηχανισμών, αλλά επίσης είναι και μη αποδεκτή καθώς σε αυτήν ο τελεστής $\delta^2 S / \delta \phi^2 |_{\phi=\bar{\phi}}$ με περιοδικές συνθήκες στον Ευκλείδειο χρόνο έχει παραπάνω από μια αρνητικές ιδιοτιμές. Ας το δούμε αυτό μέσω ενός απλού και σύντομου συλλογισμού. Αναφέραμε προηγουμένως ότι ο τελεστής $\delta^2 U / \delta \phi^2 |_{\phi=\bar{\phi}}$ εμπεριέχει μια ιδιοκατάσταση $n_-(\vec{x})$ στην οποία αντιστοιχεί μια αρνητική ιδιοτιμή, δηλαδή ισχύει

$$\left(-\nabla^2 + \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} \right) n_-(\vec{x}) = -\lambda_-^2 n_-(\vec{x}). \quad (3.29)$$

Γνωρίζουμε ότι οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή $\delta^2 S / \delta \phi^2 |_{\phi=\bar{\phi}}$ με περιοδικές συνθήκες στον Ευκλείδειο χρόνο, ο οποίος τελεστής έχει την μορφή

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + \dot{V}_{\text{eff}}(\bar{\phi}_{\text{thermal}}) \right], \quad (3.30)$$

είναι αυτές που εμπεριέχονται στο εκθετικό του ολοκληρώματος διαδρομών, και άρα είναι αυτές οι οποίες μας ενδιαφέρουν. Σε αυτές τις ιδιοκαταστάσεις όμως εμπεριέχονται και ιδιοκαταστάσεις της μορφής $\cos(2\pi n \tau / \beta) n_-(\vec{x})$, με ιδιοτιμές $(2\pi n / \beta)^2 - \lambda_-^2$. Οπότε αν ισχύει $T = 1/\beta < \lambda_- / 2\pi$ τότε στο φάσμα του τελεστή υπάρχουν πολλαπλές αρνητικές ιδιοτιμές.

3.3 Θερμική Διάσπαση στη Προσέγγιση Λεπού Τοιχώματος

Ας μελετήσουμε τώρα στα πλαίσια του thin-wall approximation την θερμική διάσπαση κενού για ένα βαθμωτό πεδίο ϕ το οποίο υπόκειται σε ένα δυναμικό, $V_{\text{eff}}(\phi, T) = V(\phi)$, της μορφής που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.9. Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι το δυναμικό παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο (ψευδές κενό) στην θέση $\phi = \phi_+$ και ένα ολικό ελάχιστο (πραγματικό κενό) στην θέση $\phi = \phi_-$. Στο τέλος θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με αυτά που είχαμε βρει για το ίδιο σύστημα όταν αυτό το μελετούσαμε ως προς την κβαντική διάσπαση κενού στα πλαίσια του υποκεφάλαιου 2.2. Η βασική ποσότητα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι ο συντελεστής B ο οποίος στην περίπτωση της θερμικής διάσπασης κενού, όπως έχουμε δει, έχει την μορφή

$$B_{\text{therm}} = \beta (S_3[\bar{\phi}(r)] - S_3[\phi_+]) = \beta B_3, \quad (3.31)$$

όπου η δράση $S_3[\bar{\phi}(r)]$ δίνεται από την σχέση (3.25), αφού η λύση bounce είναι O(3)-συμμετρική. Το $\bar{\phi}$ όπως είδαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες και διαφορική εξίσωση (Ευκλείδεια εξίσωση κίνησης)

$$\frac{d^2 \bar{\phi}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\bar{\phi}}{dr} = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \Big|_{\phi=\bar{\phi}}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\phi}(r) = \phi_+ \quad \text{και} \quad \frac{d\bar{\phi}}{dr} \Big|_{r=0} = 0. \quad (3.32)$$

Αφού βρισκόμαστε στο thin-wall approximation μπορούμε για το δυναμικό $V(\phi)$ να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που είχαμε δει στο υποκεφάλαιο 2.2, δηλαδή

$$V(\phi) = V_0(\phi) + O(\varepsilon), \quad (3.33)$$

όπου το $\varepsilon = V(\phi_+) - V(\phi_-)$ είναι η διαφορά ενεργειακής πυκνότητας μεταξύ των δύο κενών της θεωρίας μας, η οποία είναι πολύ μικρή, και το $V_0(\phi)$ είναι ένα κατάλληλα επιλεγμένο συμμετρικό (ως προς τα δύο κενά) δυναμικό για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$1) V_0(\phi_+) = V_0(\phi_-), \quad 2) \frac{dV_0(\phi)}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_{\pm}} = 0, \quad \text{και} \quad 3) \frac{d^2 V_0(\phi)}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_{\pm}} = \mu^2, \quad (3.34)$$

Όσον αφορά την προσεγγιστική μορφή της λύσης bounce $\bar{\phi}$, λόγω του ότι βρισκόμαστε στο thin-wall approximation και πάλι ο όρος που πολλαπλασιάζεται με την παράγωγο $d\bar{\phi}/dr$ στην Ευκλείδεια

εξίσωση κίνησης θεωρείται αμελητέος, και επομένως αυτή θα είναι ίδια με την προσεγγιστική μορφή του $\bar{\phi}$ στο υποκεφάλαιο 2.2, δηλαδή το $\bar{\phi}$ θα προσδιορίζεται προσεγγιστικά από την σχέση

$$\int_{\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}}^{\bar{\phi}} \frac{d\phi}{\sqrt{2[V_0(\phi) - V_0(\phi_{\pm})]}} = r - R_{\text{therm}}, \quad (3.35)$$

όπου το R_{therm} είναι η ακτίνα της τρισδιάστατης φυσαλίδας.

Για τον υπολογισμό του συντελεστή B θα ακολουθήσουμε την διαδικασία που είχαμε ακολουθήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή θα υπολογίσουμε το B_{therm} σε κάθε μια από τις τρεις διαφορετικές περιοχές του χώρου (εσωτερικό, εξωτερικό και τοίχωμα φυσαλίδας) ξεχωριστά, και θα αθροίσουμε τα τρία αποτελέσματά μας. Για ευκολία θα πραγματοποιήσουμε αυτές τις πράξεις για το B_3 για να μην κουβαλάμε στις πράξεις μας και την αντίστροφη θερμοκρασία του συστήματος, β . Στον χώρο έξω από την φυσαλίδα το σύστημά μας βρίσκεται στο ψευδές κενό της θεωρίας όπου ισχύει $\bar{\phi} = \phi_+$, πράγμα το οποίο μας οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα για τον συντελεστή B_3 σε αυτή τη περιοχή

$$B_3^{\text{outside}} = S_3[\phi_+] - S_3[\phi_+] \Rightarrow B_3^{\text{outside}} = 0. \quad (3.36)$$

Στον εσωτερικό χώρο της φυσαλίδας το σύστημά μας βρίσκεται στο πραγματικό κενό, $\bar{\phi} = \phi_-$, και άρα για τον συντελεστή B_3 έχουμε

$$B_3^{\text{inside}} = S_3[\phi_-] - S_3[\phi_+] = 4\pi \int_0^{R_{\text{therm}}} r^2 [V(\phi_-) - V(\phi_+)] dr = -\frac{4\pi\epsilon}{3} R_{\text{therm}}^3. \quad (3.37)$$

Στην περιοχή μέσα στο τοίχωμα της φυσαλίδας το r είναι περίπου ίσο με R_{therm} και το δυναμικό $V(\phi)$ είναι ίσο με $V_0(\phi)$, όποτε για το B_3 προκύπτει

$$\begin{aligned} B_3^{\text{wall}} &= S_3[\bar{\phi}] - S_3[\phi_+] = 4\pi R_{\text{therm}}^2 \int dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\phi}}{dr} \right)^2 + V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_+) \right] \xrightarrow{(2.80)} \\ &\Rightarrow B_3^{\text{wall}} = 4\pi R_{\text{therm}}^2 \int dr 2 [V_0(\bar{\phi}) - V_0(\phi_+)] = 4\pi R_{\text{therm}}^2 S_1, \end{aligned} \quad (3.38)$$

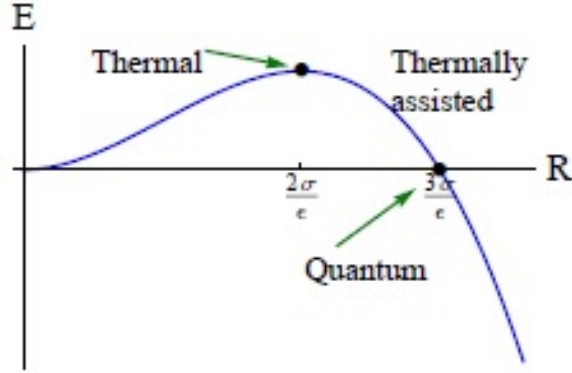
όπου το S_1 είναι η δράση ενός μονοδιάστατου instanton και δίνεται από την σχέση (2.90). Οπότε αθροίζοντας τα B_3^{outside} , B_3^{inside} και B_3^{wall} , και πολλαπλασιάζοντας τα με την αντίστροφη θερμοκρασία συμπεραίνουμε ότι για τον συντελεστή B της θερμικής διάσπασης κενού ισχύει

$$B_{\text{therm}} = 4\pi R_{\text{therm}}^2 S_1 \beta - \frac{4\pi}{3} R_{\text{therm}}^3 \epsilon \beta. \quad (3.39)$$

Απαιτώντας τώρα η παραπάνω ποσότητα να στασιμοποιείται στην ακτίνα της φυσαλίδας (την στιγμή δημιουργίας της), δηλαδή απαιτώντας να ισχύει $dB_{\text{therm}}/dR_{\text{therm}} = 0$, βρίσκουμε ότι το R_{therm} δίνεται από την εξής σχέση

$$\frac{dB_{\text{therm}}}{dR_{\text{therm}}} = 0 \Rightarrow R_{\text{therm}} = \frac{2S_1}{\epsilon}. \quad (3.40)$$

Συγκρίνοντας την ακτίνα R_{therm} της φυσαλίδας που προκύπτει στην θερμική διάσπαση κενού με την ακτίνα $R = 3S_1/\epsilon$ της φυσαλίδας που προκύπτει στην κβαντική διάσπαση κενού, παρατηρούμε ότι για



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα για την ενέργεια της φυσαλίδας την στιγμή δημιουργίας της συναρτήσει της ακτίνας της την ίδια χρονική στιγμή. Στο διάγραμμα αυτό το σ αποτελεί την δράση του μονοδιάστατου instanton την οποία την έχουμε συμβολίσει με S_1 μέσα στο κείμενο.

το ίδιο δυναμικό (ίδιο σύστημα) η R_{therm} είναι μικρότερη από την R . Αντικαθιστώντας την σχέση (3.40) στην σχέση (3.39) έχουμε τελικά για το B_{therm}

$$B_{\text{therm}} = \frac{4\pi S_1}{T} \cdot \frac{4S_1^2}{\epsilon^2} - \frac{4\pi\epsilon}{3T} \cdot \frac{8S_1^3}{\epsilon^3} = \frac{16\pi S_1^3}{3\epsilon^2 T}. \quad (3.41)$$

Η ενέργεια της φυσαλίδας την στιγμή δημιουργίας της αποτελεί το άθροισμα ενός αρνητικού όρου όγκου με έναν θετικό επιφανειακό όρο και ισούται ουσιαστικά για την περίπτωση της θερμικής διάσπασης κενού με τον συντελεστή B_3 που έχουμε υπολογίσει. Επομένως για την ενέργεια της φυσαλίδας την στιγμή δημιουργίας της, όταν αυτή έχει δημιουργηθεί μέσω του μηχανισμού θερμικής διάσπασης κενού, ισχύει

$$E_{\text{therm}} = \frac{16\pi S_1^3}{3\epsilon^2}. \quad (3.42)$$

Δηλαδή στην περίπτωση της θερμικής διάσπασης κενού η φυσαλίδα δημιουργείται έχοντας μη μηδενική ενέργεια την οποία έχει απορροφήσει από το θερμικό λουτρό. Αυτό το αναμέναμε καθώς ο μηχανισμός αυτός δεν παραβιάζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση της θερμικά ενισχυμένης χβαντικής διάσπασης κενού. Συγκεκριμένα μπορεί να δει κανείς ότι για την ενέργεια της φυσαλίδας συναρτήσει της ακτίνας της την στιγμή δημιουργίας της ισχύει το διάγραμμα που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.4. Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι η ενέργεια της φυσαλίδας της θερμικής διάσπασης κενού αντιστοιχεί στο ολικό μέγιστο της συνάρτησης $E(R)$ ενώ αυτή της χβαντικής διάσπασης κενού αντιστοιχεί στο σημείο όπου ισχύει $E(R) = 0$. Η ενέργεια της φυσαλίδας για την περίπτωση της θερμικά ενισχυμένης χβαντικής διάσπασης κενού κυμαίνεται μεταξύ αυτών των δύο σημείων.

4 Θερμική Διάσπαση του Higgs Παρουσία Αρχέγονης Μελανής Οπής

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το φυσικό σύστημα μονάδων όπου ισχύει $\hbar = c = k_B = 1$ και επίσης θα χρησιμοποιήσουμε για την μετρική την σύμβαση $(- + + +)$.

4.1 Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι για τις τρέχοντες μετρούμενες τιμές των μαζών του μποζονίου Higgs και του top κουάρκ, το ενεργό δυναμικό του Καθιερωμένου Προτύπου εμφανίζει μια αστάθεια. Συγκεκριμένα για τιμές του πεδίου Higgs κοντά στα $5 \cdot 10^{10}$ GeV λόγω μεταβολής της σύζευξης λ (από τον όρο λh^4 στο δυναμικό), το ενεργό δυναμικό παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο πέρα από το οποίο τείνει με την αύξηση του πεδίου στο πλην άπειρο (είναι δηλαδή μη φραγμένο από κάτω). Το ηλεκτρασθενές κενό έχει διάρκεια ζωής πολύ μεγαλύτερη (αρκετές τάξεις μεγέθους) από την ηλικία του σύμπαντος σήμερα, και για αυτό τον λόγο αυτό καθίσταται ευσταθές έναντι κβαντικών διασπάσεων κενού.

Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση αποτελεί αυτή που έχει να κάνει με την μοίρα του ηλεκτρασθενούς κενού κατά την εξέλιξη του σύμπαντος σε καταστάσεις όπου οι επιδράσεις της βαρύτητας είναι πολύ έντονες (λόγω της εξαιρετικής ευαισθησίας του ενεργού δυναμικού του πεδίου Higgs στις μάζες που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο). Όπως έχουμε δει στα προηγούμενα κεφάλαια η παρουσία βαρύτητας μπορεί να έχει σημαντική επίδραση στον ρυθμό διάσπασης του κενού, ενισχύοντας ή καταστέλλοντας τον. Το γεγονός ότι οι επιδράσεις της βαρύτητας είναι πολύ έντονες κατά την διάρκεια του κοσμολογικού πληθωρισμού, έχει οδηγήσει σε εκτεταμένη έρευνα σχετικά με την ευστάθεια του ηλεκτρασθενούς κενού κατά την διάρκεια αυτής της εποχής του σύμπαντος.

Επίσης η ύπαρξη ισχυρών βαρυτικών πεδίων που προέρχονται από μελανές οπές έχει οδηγήσει στη μελέτη της ευστάθειας του ηλεκτρασθενούς κενού στην γειτονιά των μελανών οπών. Έχει υποστηριχθεί (βλέπε [29]) ότι οι μελανές οπές μπορούν να δράσουν σαν προσμίξεις που ενισχύουν τον ρυθμό κβαντικής διάσπασης κενού, σε βαθμό ασύμβατο με την ηλικία του σύμπαντος. Έτσι αναμένουμε μια παρόμοια ενίσχυση του ρυθμού θερμικής διάσπασης κενού του κενού του πεδίου Higgs στο θερμικό περιβάλλον υψηλής θερμοκρασίας του πρώιμου σύμπαντος (Βλέπε [30]). Αυτός ο δεύτερος μηχανισμός μπορεί να διερευνηθεί μέσω μιας πιο διαισθητικής προσέγγισης με λιγότερες τεχνικές αβεβαιότητες. Σε κάθε περίπτωση, το ερώτημα του αν η ύπαρξη αρχέγονων μελανών οπών είναι σύμφωνη με την ευστάθεια του ηλεκτρασθενούς κενού έχει σημαντικές συνέπειες για την συμβατότητα του Καθιερωμένου Προτύπου των στοιχειωδών σωματιδίων και του κοσμολογικού μοντέλου.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε σε υψηλές θερμοκρασίες την θερμική διάσπαση του ηλεκτρασθενούς κενού παρουσία μελανής οπής, χρησιμοποιώντας το ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας και επιτρέποντας στο πεδίο Higgs να αλληλεπιδράει με την βαρύτητα μέσω ενός non-minimal coupling όρου της μορφής $\xi \mathcal{R} h^2$. Ανάλογα με το πρόσημο του ξ ο ρυθμός διάσπασης μπορεί να ελαττωθεί αν η ενεργός μάζα του πεδίου Higgs αυξάνει ή να αυξηθεί πάρα πολύ αν η μάζα αυτή μηδενιστεί. Μια τέτοια συμπεριφορά είναι γνωστή ότι συμβαίνει στα πλαίσια του κοσμολογικού πληθωρισμού και έτσι παρόμοιες συμπεριφορές αναμένονται υπό την ύπαρξη ενός ισχυρού βαρυτικού πεδίου που προκαλείται από μια μελανή οπή.

4.2 Εξισώσεις της Κίνησης

Η Minkowskian δράση του πεδίου Higgs παρουσία βαρυτικού πεδίου, όταν επιτρέπουμε σύζευξη του πεδίου Higgs με την βαρύτητα μέσω ενός non-minimal coupling επανακανονικοποιήσιμου όρου (του οποίου η ισχύς παραμετροποιείται από την σύζευξη ξ) είναι η ακόλουθη

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} (\nabla_\mu h)^2 - V(h) + \frac{\mathcal{R}}{16\pi G} + \frac{\xi}{2} \mathcal{R} h^2 \right). \quad (4.1)$$

Οι εξισώσεις της κίνησης για το σύστημα που περιγράφεται από την παραπάνω δράση προκύπτουν από την απαίτηση να ισχύει $\delta_g S = 0$ για $\delta g^{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ και $\delta_h S = 0$ για $\delta h|_{\partial\mathcal{M}} = 0$. Ας ξεκινήσουμε τον προσδιορισμό των εξισώσεων της κίνησης από αυτές που προκύπτουν από την εφαρμογή της διαταρακτικής μεθόδου ως προς τον μετρικό ταυσιτή $g^{\mu\nu}$. Θα υπολογίσουμε κάθε όρο της $\delta_g S = 0$ ξεχωριστά. Από την εφαρμογή της διαταρακτικής μεθόδου ως προς $g^{\mu\nu}$ στους δύο πρώτους όρους της δράσης έχουμε

$$\begin{aligned} \delta_g S_1 &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \frac{\nabla_\mu h \nabla_\nu h}{2} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \frac{(\nabla_\mu h)^2}{2} \delta \sqrt{-g} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta_g S_1 = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\nabla_\mu h \nabla_\nu h}{2} - g_{\mu\nu} \frac{(\nabla_\mu h)^2}{4} \right) \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.2)$$

και

$$\delta_g S_2 = \int_{\mathcal{M}} d^4x V(h) \delta \sqrt{-g} \Rightarrow \delta_g S_2 = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} V(h) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

όπου παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την σχέση $\delta \sqrt{-g} = (-1/2) \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$. Από την εφαρμογή της διαταρακτικής μεθόδου ως προς $g^{\mu\nu}$ στον τρίτο όρο της δράσης προκύπτει

$$\delta_g S_3 = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \right) \delta g^{\mu\nu} \Rightarrow \delta_g S_3 = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.4)$$

Η εφαρμογή της διαταρακτικής μεθόδου ως προς $g_{\mu\nu}$ στον τελευταίο όρο της δράσης μας δίνει

$$\begin{aligned} \delta_g S_4 &= \frac{\xi}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x h^2 [\mathcal{R} \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta \mathcal{R}] \equiv \delta_g S_{4,a} + \delta_g S_{4,b} \xrightarrow{\mathcal{R}=g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}} \\ &\Rightarrow \delta_g S_4 = \frac{\xi}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} h^2 \left[\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \right] \delta g^{\mu\nu} + \frac{\xi}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} h^2 g^{\mu\nu} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Χρησιμοποιώντας όμως την εξίσωση Palatini $\delta \mathcal{R}_{\mu\nu} = \nabla_a \delta \Gamma_{\mu\nu}^a - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu a}^a$ και το ότι ισχύει $\nabla_a g_{\mu\nu} = 0$ έχουμε

$$g^{\mu\nu} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu} = \nabla_a (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^a) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu a}^a) = \nabla_a [g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^a - g^{\mu a} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu] = \nabla_a \delta V^a, \quad (4.6)$$

όπου παραπάνω έχουμε θέσει $\delta V^a \equiv g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^a - g^{\mu a} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu$. Χρησιμοποιώντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση για το $\delta_g S_{4,b}$ μπορούμε να το γράψουμε αυτό ως εξής

$$\delta_g S_{4,b} = \frac{\xi}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} h^2 \nabla_a \delta V^a = \frac{\xi}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_a (h^2 \delta V^a) - \frac{\xi}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_a (h^2) \delta V^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_g S_{4,b} = \frac{\xi}{2} \int_{\partial \mathcal{M}} d^3 y \sqrt{-g_{\text{ind}}} h^2 \delta V^a n_a - \frac{\xi}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4 x \sqrt{-g} \nabla_a (h^2) \delta V^a. \quad (4.7)$$

Ο πρώτος όρος της τελευταίας σχέσης μπορεί να δείξει κανείς ότι σε έναν χώρο χωρίς σύνορα μη-δενίζεται, ενώ όταν ο χωρόχρονος περιέχει κάποιο σύνορο τότε αυτός απαλείφεται από τον όρο που προκύπτει από την εφαρμογή της διαταρακτικής μεθόδου ως προς $g^{\mu\nu}$ στον Gibbons-Hawking επιφανειακό όρο που πρέπει να προσθέσουμε για λόγους συνοχής στην συνολική δράση του συστήματος (βλέπε [31]). Άρα μπορούμε γενικά για το $\delta_g S_4$ να γράψουμε

$$\delta_g S_4 = \frac{\xi}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4 x \sqrt{-g} h^2 \left[\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \right] \delta g^{\mu\nu} - \frac{\xi}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4 x \sqrt{-g} \nabla_a (h^2) \delta V^a. \quad (4.8)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την ποσότητα $\nabla_a (h^2) \delta V^a$. Από την Διαφορική Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι για την διαταραχή των συμβόλων του Christoffel ως προς $g^{\mu\nu}$ ισχύει

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\nabla_{\nu} \delta g_{\mu\rho} + \nabla_{\mu} \delta g_{\nu\rho} - \nabla_{\rho} \delta g_{\mu\nu}), \quad (4.9)$$

Για τον υπολογισμό αυτό θα χρειαστούμε τις ακόλουθες γνωστές σχέσεις

$$\delta g^{\lambda\alpha} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\lambda} \delta g_{\mu\nu} \quad \text{και} \quad g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω έχουμε για το $\nabla_a (h^2) \delta V^a$ το εξής

$$\begin{aligned} \nabla_a (h^2) \delta V^a &= \frac{\nabla_a (h^2)}{2} [g^{\mu\nu} g^{\alpha\rho} (\nabla_{\nu} \delta g_{\mu\rho} + \nabla_{\mu} \delta g_{\nu\rho} - \nabla_{\rho} \delta g_{\mu\nu}) - g^{\mu\alpha} g^{\nu\kappa} (\nabla_{\nu} \delta g_{\mu\kappa} + \nabla_{\mu} \delta g_{\nu\kappa} - \nabla_{\kappa} \delta g_{\mu\nu})] \Rightarrow \\ &\stackrel{(4.10)}{\Rightarrow} \nabla_a (h^2) \delta V^a = h \nabla_a h [-\nabla_{\nu} \delta g^{\nu\alpha} - \nabla_{\mu} \delta g^{\mu\alpha} - \nabla^{\alpha} (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) + \nabla_{\nu} \delta g^{\alpha\nu} - \nabla^{\alpha} (g^{\nu\kappa} \delta g_{\nu\kappa}) - \nabla_{\kappa} \delta g^{\alpha\kappa}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla_a (h^2) \delta V^a = -h \nabla_a h [2\nabla_{\kappa} \delta g^{\alpha\kappa} + 2\nabla^{\alpha} (g^{\nu\kappa} \delta g_{\nu\kappa})]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα στην τελευταία σχέση ξανά την σχέση (4.10), πραγματοποιώντας μια κατά παράγοντες ολοκλήρωση δεδομένου ότι ισχύει $\delta g^{\mu\nu}|_{\partial \mathcal{M}} = 0$ και ονοματίζοντας τους βουβούς δείκτες προκύπτει

$$\nabla_a (h^2) \delta V^a = 2\nabla_{\kappa} (h \nabla_a h) \delta g^{\alpha\kappa} - 2g_{\nu\kappa} \nabla_a (h \nabla^{\alpha} h) \delta g^{\nu\kappa} = 2\nabla_{\mu} (h \nabla_{\nu} h) \delta g^{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} (h \nabla^{\lambda} h) \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στο $\delta_g S_{4,b}$ προκύπτει η εξής σχέση

$$\delta_g S_{4,b} = -\frac{\xi}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4 x \sqrt{-g} [2\nabla_{\mu} (h \nabla_{\nu} h) - 2g_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} (h \nabla^{\lambda} h)] \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

Έτσι από τις σχέσεις (4.2), (4.3), (4.4), (4.8) και (4.13) συμπεραίνουμε ότι για το σύστημα μας η απαίτηση $\delta_g S = 0$ οδηγεί στις ακόλουθες εξισώσεις κίνησης (εξισώσεις Einstein)

$$\begin{aligned} \delta_g S = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{M}} d^4 x \sqrt{-g} \left[\frac{G_{\mu\nu}}{16\pi G} + \frac{\xi}{2} h^2 G_{\mu\nu} - \xi [\nabla_{\mu} (h \nabla_{\nu} h) - g_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} (h \nabla^{\lambda} h)] \right] \delta g^{\mu\nu} + \\ + \int_{\mathcal{M}} d^4 x \sqrt{-g} \left[-\frac{\nabla_{\mu} h \nabla_{\nu} h}{2} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left(\frac{(\nabla_{\mu} h)^2}{2} + V(h) \right) \right] \delta g^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{8\pi G} + \xi h^2 \right) G_{\mu\nu} = \nabla_\mu h \nabla_\nu h - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} (\nabla_\mu h)^2 + V(h) \right) + 2\xi \left[\nabla_\mu (h \nabla_\nu h) - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda (h \nabla^\lambda h) \right]. \quad (4.14)$$

Από την εφαρμογή της διαταρακτικής μεθόδου ως προς h στην δράση προκύπτουν οι συναλλοίωτες εξισώσεις Euler-Lagrange, δηλαδή

$$\delta_h S = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu h)} \right) = 0 \Rightarrow \nabla_\mu \nabla^\mu h + \xi h \mathcal{R} = \frac{dV(h)}{dh}. \quad (4.15)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της κίνησης μπορούμε να απλοποιήσουμε ακόμα περισσότερο την μορφή της δράσης του συστήματος. Συγκεκριμένα παίρνοντας το ίχνος της σχέσης (4.14) προκύπτει

$$\mathcal{R} \left(\frac{1}{8\pi G} + \xi h^2 \right) = (1 + 6\xi) (\nabla_\mu h)^2 + 4V(h) + 6\xi h \nabla_\mu \nabla^\mu h. \quad (4.16)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την σχέση (4.16) στην σχέση (4.1) φέρνουμε την δράση του συστήματος στην εξής μορφή

$$\begin{aligned} S &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} (\nabla_\mu h)^2 - V(h) + \frac{1+6\xi}{2} (\nabla_\mu h)^2 + 2V(h) + 3\xi h \nabla_\mu \nabla^\mu h \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} [V(h) + 3\xi \nabla_\mu (h \nabla^\mu h)]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης μετατρέπεται σε έναν επιφανειακό όρο χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gauss.

Θεωρούμε τώρα ότι το πεδίο Higgs βρίσκεται στην γειτονιά της μελανής οπής, η οποία (σύμφωνα με το [29]) μπορεί να ενεργοποιήσει την διαδικασία θερμικής διάσπασης του ηλεκτρασθενούς κενού. Η διάσπαση αυτή πραγματοποιείται μέσω της δημιουργίας μιας στατικής $O(3)$ συμμετρικής φουσαλίδας πραγματικού κενού, γύρω από την μελανή οπή. Στην μελέτη μας αυτή δεν βρισκόμαστε στο thin-wall approximation, η φουσαλίδα έχει ένα πεπερασμένου πάχους τοίχωμα και το προφίλ της μπορούμε να το συνάγουμε από την επίλυση των εξισώσεων κίνησης για το πεδίο Higgs, χρησιμοποιώντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Οι τιμές που παίρνει το πεδίο μέσα στο τοίχωμα κυμαίνονται μεταξύ τιμών δεξιά και αριστερά του τοπικού μεγίστου του δυναμικού. Η συνολική ενεργός μάζα της φουσαλίδας, όπως αυτή γίνεται αντιληπτή από έναν παρατηρητή σε απόσταση $r \rightarrow \infty$, αποτελεί ένα μέτρο του ενεργειακού φραγμού που πρέπει να υπερβεί το πεδίο για να πραγματοποιήσει την θερμική διάσπαση κενού. Σε ένα θερμικό περιβάλλον ο λόγος αυτής της μάζας και της θερμοκρασίας προσδιορίζει την εκθετική μείωση του ρυθμού διάσπασης του κενού.

Η κατάλληλη μετρική για την μελέτη μας αυτή έχει την ακόλουθη μορφή

$$ds^2 = -N(r)e^{2\delta(r)} dt^2 + N^{-1}(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad \text{με} \quad N(r) = 1 - \frac{2GM(r)}{r}. \quad (4.18)$$

Η ύπαρξη του ορίζοντα στην ακτίνα $r = R_h$ απαιτεί την εισαγωγή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών στο πρόβλημά μας. Σύμφωνα με τους Gibbons και Hawking (βλέπε [32]) όταν ο χωρόχρονος μας έχει κάποιο σύνορο τότε η συνεκτικότητα της διαταρακτικής αρχής απαιτεί την ύπαρξη στην δράση ενός συνοριακού όρου της μορφής

$$S_b = 2\epsilon \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{-g_{\text{ind}}} \left(\frac{1}{16\pi G} + \frac{1}{2} \xi h^2 \right) \mathcal{K}, \quad (4.19)$$

όπου $(g_{\text{ind}})_{ab}$ είναι η επαγομένη μετρική (induced metric) πάνω στην επιφάνεια, $\epsilon = \pm 1$ ανάλογα με το αν η επιφάνεια είναι χρονοειδής ή χωροειδής, αντίστοιχα, και \mathcal{K} είναι το ίχνος της εξωτερικής καμπυλότητας. Ο δεύτερος όρος της σχέσης (4.19) υπάρχει όταν έχουμε ένα non-minimal coupling όρο στην δράση μας. Εμείς λύνουμε τις εξισώσεις κίνησης ξεκινώντας λιγάκι έξω από τον ορίζοντα θεωρώντας την ύπαρξη ενός τέτοιου συνοριακού όρου με $\epsilon = -1$ (αφού οι επιφάνειες έξω από τον ορίζοντα είναι χωροειδείς). Η συνάρτηση $N(r)$ μηδενίζεται στον ορίζοντα πράγμα το οποίο μας δίνει την συνοριακή συνθήκη

$$2GM(R_h) = R_h. \quad (4.20)$$

Την ποσότητα $R_h/(2G)$ την αναγνωρίζουμε ως την μάζα της μελανής οπής, M_{bh} . Επίσης απαιτούμε να ισχύει $h(r) \rightarrow 0$ για $r \rightarrow \infty$, δηλαδή απαιτούμε στο άπειρο να μην έχει γίνει διάσπαση κενού και το πεδίο Higgs να βρίσκεται στο γνωστό ηλεκτρασθενές κενό. Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η ενεργός μάζα του πεδίου Higgs, δηλαδή η εξής

$$\delta M(r) = M(r) - R_h/(2G). \quad (4.21)$$

Η ασυμπτωτική τιμή $\delta M_{\text{tot}} \equiv \delta M(\infty)$ μας δίνει μια εκτίμηση για τον ενεργειακό φραγμό που πρέπει να ξεπεραστεί από το πεδίο Higgs για να δημιουργηθεί η φυσαλίδα γύρω από το κέντρο μιας μελανής οπής με ορίζοντα R_h .

Η χαρακτηριστική κλίμακα των λύσεων μας καθορίζεται από το h_{max} (τιμή του πεδίου Higgs στο τοπικό μέγιστο του δυναμικού) και την θερμοκρασία T , τα οποία αναμένεται να είναι πολύ μικρότερα από την κλίμακα Planck, M_{Pl} . Αυτό οδηγεί σε μια σημαντική απλοποίηση στην διαδικασία που θα ακολουθήσουμε καθώς θα έχουμε $\delta M(r) \ll R_h/(2G)$. Αφού η μάζα της μελανής οπής είναι ο κύριος παράγοντας που καθορίζει το βαρυτικό υπόβαθρο, μπορούμε στην μελέτη μας να γράψουμε $M(r) = R_h/(2G) + \delta M(r)$ και να κρατήσουμε τις κύριες συνεισφορές ως προς G (παίρνουμε ουσιαστικά το $G \rightarrow 0$). Με αυτό τον τρόπο οι εξισώσεις της κίνησης (4.14) και (4.15) απλοποιούνται παίρνοντας την ακόλουθη μορφή

$$h'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{R_h}{r(r - R_h)} \right) h' = \frac{r}{r - R_h} \frac{dV(h)}{dh}, \quad (4.22)$$

$$\delta M' = 4\pi r^2 \left(\frac{1}{2} \frac{r - R_h}{r} h'^2 + V(h) \right) + 4\pi \xi r^2 \left(2 \frac{r - R_h}{r} h'^2 + 2h \frac{dV(h)}{dh} - \frac{R_h}{r^2} h h' \right), \quad (4.23)$$

όπου με $'$ συμβολίζουμε την παραγωγή ως προς r . Κανονικά προκύπτει και μια διαφορική εξίσωση για το $\delta(r)$ η οποία όμως στην προσέγγισή μας απλοποιείται σε $\delta' = 0$ και έτσι επιλέγουμε $\delta(r) = 1$. Για να αποφύγουμε την εμφάνιση απειρισμού στην διαφορική εξίσωση (4.22) στον ορίζοντα της μελανής οπής θα πρέπει να ισχύει

$$\left[\frac{R_h}{r(r - R_h)} h' = \frac{r}{r - R_h} \frac{dV(h)}{dh} \right]_{r=R_h} \Rightarrow h'(R_h) = R_h \left. \frac{dV(h(r))}{dh} \right|_{r=R_h}. \quad (4.24)$$

Η παραπάνω συνοριακή συνθήκη ορθά αναπαράγει την συνήθη συνοριακή συνθήκη $h'(0) = 0$ που ισχύει απουσία μελανής οπής. Η τιμή του $h(R_h)$ πρέπει να ρυθμιστεί κατάλληλα έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη $h(r) \rightarrow 0$ για $r \rightarrow \infty$.

Από την μορφή της εξίσωσης (4.22) συμπεραίνουμε ότι το πεδίο Higgs δεν επηρεάζεται από την non-minimal σύζευξη του με την βαρύτητα και για αυτό το λόγο παραμένει ανεξάρτητο του ξ . Η συνεισφορά της φυσαλίδας στο βαρυτικό υπόβαθρο (το οποίο καθορίζεται σε πολύ καλή προσέγγιση

από την μάζα της μελανής οπής) είναι αμελητέα. Υπενθυμίζουμε ότι στο βαρυτικό υπόβαθρο μιας μελανής οπής το \mathcal{R} μηδενίζεται. Ωστόσο από την εξίσωση (4.23) παρατηρούμε ότι η ενεργός μάζα της φυσαλίδας δM λαμβάνει μια συνεισφορά ανάλογη του ξ . Έτσι ολοκληρώνοντας την σχέση (4.23) ως προς r από $r_i = R_h$ έως $r_f \rightarrow \infty$ συμπεραίνουμε ότι για την ποσότητα δM_{tot} που ενδιαφερόμαστε ισχύει η εξής σχέση

$$\delta M_{\text{tot}} = F_1(R_h) + \xi F_2(R_h), \quad (4.25)$$

όπου οι συναρτήσεις $F_1(R_h)$ και $F_2(R_h)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$F_1(R_h) = 4\pi \int_{R_h}^{\infty} dr r^2 \left(\frac{1}{2} \frac{r - R_h}{r} h'^2 + V(h) \right), \quad (4.26)$$

$$F_2(R_h) = 4\pi \int_{R_h}^{\infty} dr r^2 \left(2 \frac{r - R_h}{r} h'^2 + 2h \frac{dV(h)}{dh} - \frac{R_h}{r^2} h h' \right). \quad (4.27)$$

Μπορούμε όμως τις παραπάνω συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της κίνησης να τις φέρουμε σε μια διαφορετική πιο απλοϊκή μορφή. Συγκεκριμένα πολλαπλασιάζοντας την σχέση (4.22) με $r(r - R_h)h$ μπορούμε να την γράψουμε ως

$$r(r - R_h)h''h + 2(r - R_h)h'h + R_h h'h = hr^2 \frac{dV(h)}{dh} \Rightarrow (r(r - R_h)h')'h = hr^2 \frac{dV(h)}{dh}. \quad (4.28)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την παραπάνω σχέση μπορούμε να φέρουμε το $F_1(R_h)$ στην ακόλουθη μορφή

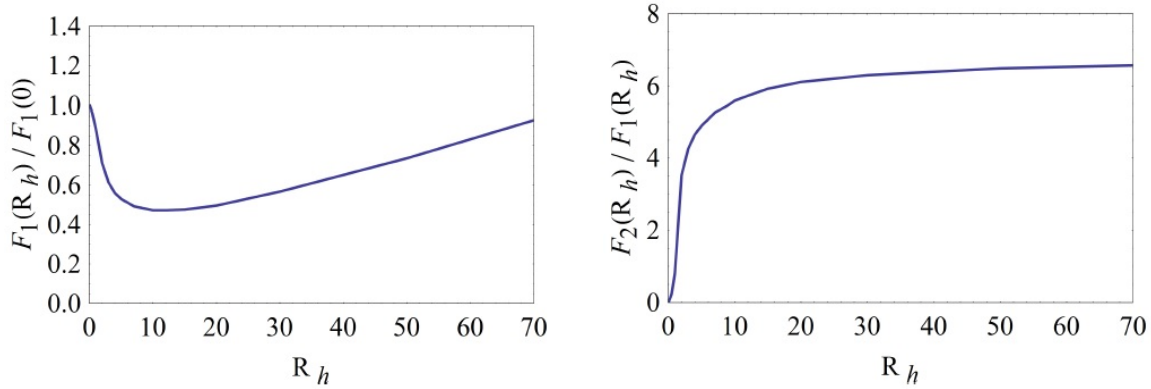
$$\begin{aligned} \frac{F_1(R_h)}{4\pi} &= \int_{R_h}^{\infty} dr \left(\frac{r(r - R_h)h'^2}{2} + r^2 V(h) \right) = \int_{R_h}^{\infty} dr \left[\frac{(r(r - R_h)h h')'}{2} - \frac{r^2}{2} h \frac{dV(h)}{dh} + r^2 V(h) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_1(R_h) = 4\pi \int_{R_h}^{\infty} dr r^2 \left(-\frac{1}{2} h \frac{dV(h)}{dh} + V(h) \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την σχέση (4.28) στην (4.27) προκύπτει για την συνάρτηση $F_2(R_h)$

$$\begin{aligned} \frac{F_2(R_h)}{4\pi} &= \int_{R_h}^{\infty} dr \left(2r(r - R_h)h'^2 + 2hr^2 \frac{dV(h)}{dh} - R_h h h' \right) = \int_{R_h}^{\infty} dr \left(2r(r - R_h)h h' - \frac{1}{2} R_h h^2 \right)' \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_2(R_h) = 2\pi R_h h^2(R_h). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Στο [30] για τον υπολογισμό της ενεργού μάζας της φυσαλίδας ως συνάρτηση της μάζας της μελανής οπής για $\xi = 0$, είχε χρησιμοποιηθεί το μηδενικής θερμοκρασίας ενεργό δυναμικό του πεδίου Higgs. Στην συνέχεια αυτή η μάζα χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του ρυθμού διάσπασης του ηλεκτρασθενούς κενού σε μη μηδενική θερμοκρασία. Στο επόμενο υποκεφάλαιο θα βελτιώσουμε αυτόν τον υπολογισμό χρησιμοποιώντας το ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας για το πεδίο Higgs. Πριν το κάνουμε όμως αυτό παρουσιάζουμε εδώ την γενίκευση των αποτελεσμάτων του [30] για μη μηδενικό ξ . Για το δυναμικό Higgs χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική μορφή $V(h) \sim \lambda(h)h^4/4$, η οποία αποτελεί μια καλή προσέγγιση για τιμές του πεδίου Higgs κοντά στο τοπικό μέγιστο $h_{\text{max}} \sim 5 \times 10^{10}$ GeV. Η σταθερά λ κυμαίνεται μεταξύ του 0.02 και του -0.02 για τιμές του πεδίου Higgs μεταξύ των 10^6 GeV και των 10^{20} GeV, αντίστοιχα. Κοντά στο τοπικό μέγιστο του δυναμικού, το δυναμικό μπορεί να προσεγγιστεί (σύμφωνα με το [33]) μέσω της σχέσης

$$V(h) \simeq -b \ln \left(\frac{h^2}{h_{\text{max}}^2 \sqrt{e}} \right) \frac{h^4}{4}, \quad (4.31)$$



Σχήμα 4.1: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων $F_1(R_h)$ και $F_2(R_h)$ που καθορίζουν την ενεργό μάζα της φυσαλίδας δM_{tot} συναρτήσει του οριζοντα της μελανής οπής. Όλες οι ποσότητες μετρούνται σε μονάδες του h_{max} , την τιμή του πεδίου Higgs στο τοπικό μέγιστο του δυναμικού.

με $b \simeq 0.16/(4\pi)^2$.

Στο Σχήμα 4.1 σχεδιάζουμε τις συναρτήσεις $F_1(R_h)/F_1(0)$ και $F_2(R_h)/F_1(R_h)$ συναρτήσει του οριζοντα της μελανής οπής, όπου το $F_1(0)$ είναι η τιμή της συνάρτησης $F_1(R_h)$ απουσία μελανής οπής. Όλες οι ποσότητες μετρούνται σε μονάδες του h_{max} . Από το αριστερό διάγραμμα του σχήματος 4.1 παρατηρούμε ότι για τιμές του οριζοντα κοντά στο $R_h = 10h_{\text{max}}$ το $F_1(R_h)$ είναι περίπου ίσο με $F_1(0)/2$. Επίσης από το δεξί διάγραμμα του ίδιου σχήματος παρατηρούμε ότι το κλάσμα $F_2(R_h)/F_1(R_h)$ μηδενίζεται για $R_h \rightarrow 0$, όμως γρήγορα αυξάνει με την αύξηση του R_h , πλησιάζοντας μια περίπου σταθερή τιμή $\simeq 6.6$ για $R_h \geq 20h_{\text{max}}$.

4.3 Επιδράσεις Ενεργού Δυναμικού Πεπερασμένης Θερμοκρασίας

Ας μελετήσουμε τώρα το σύστημα μελανής οπής - πεδίου Higgs στο θερμικό περιβάλλον του πρώιμου σύμπαντος. Σε αυτό το πλαίσιο εγείρονται ορισμένα εννοιολογικά ζητήματα που πρέπει να διευκρινιστούν. Σε ένα θερμικό περιβάλλον, η ποσότητα που σχετίζεται με τις μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών καταστάσεων είναι η ελεύθερη ενέργεια, η οποία λαμβάνει υπόψη και την επίδραση της εντροπίας. Έτσι είναι αναμενόμενο να χρησιμοποιήσουμε το ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας το οποίο μπορεί να ταυτιστεί με την πυκνότητα της ελεύθερης ενέργειας. Από την άλλη πλευρά, το βαρυτικό πεδίο προέρχεται από τον ταυστή ενέργειας-ορμής ο οποίος εμπεριέχει την ενεργειακή πυκνότητα που ταυτίζεται με το ενεργό δυναμικό μηδενικής θερμοκρασίας. Η απόδειξη των κατάλληλων εκφράσεων που πρέπει να χρησιμοποιηθούν υπό την ύπαρξη ενός ισχυρού βαρυτικού υπόβαθρου είναι δύσκολη. Για παράδειγμα, η επίδραση της θερμοκρασίας λαμβάνεται υπόψη παίρνοντας περιοδικότητα $1/T$ στον Ευκλείδειο χρόνο. Στο υπόβαθρο μιας μελανής οπής όμως η κλίμακα της περιοδικότητας καθορίζεται από την θερμοκρασία Hawking, η οποία δεν συμπίπτει απαραίτητα με την θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Όπως είδαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο η επίδραση του πεδίου Higgs στο βαρυτικό υπόβαθρο είναι αμελητέα, και έτσι μπορούμε για την περιγραφή του βαρυτικού υπόβαθρου να χρησιμοποιήσουμε με πολύ καλή προσέγγιση την μετρική Schwarzschild. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην χρειάζεται να ληφθούν υπόψη οι συνεισφορές του θερμικού περιβάλλοντος στις εξισώσεις Einstein. Οι εξισώσεις (4.22), (4.23) που σχετίζονται με το πρόβλημά μας προσδιορίζουν την μορφή και την ενέργεια του

σχηματισμού Higgs που πρέπει να ξεπεράσει το σύστημά μας για να πραγματοποιηθεί η διάσπαση κενού. Σε μη μηδενική θερμοκρασία η ενέργεια αναμένεται να αντικατασταθεί από την ελεύθερη ενέργεια. Με αυτόν τον τρόπο δικαιολογείται διαισθητικά η αντικατάσταση του ενεργού δυναμικού μηδενικής θερμοκρασίας με αυτό πεπερασμένης υψηλής θερμοκρασίας που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια. Οι προκύπτουσες εξισώσεις παίρνουν την σωστή μορφή στα όρια όπου η θερμοκρασία ή η μάζα της μελανής οπής μηδενίζεται, πράγμα το οποίο αποτελεί μια θετική ένδειξη για την ορθότητα των εξισώσεων αυτών. Ωστόσο, τονίζουμε ότι δεν υπάρχει κάποια απόδειξη.

Όπως έχουμε προαναφέρει, η χαρακτηριστική κλίμακα των λύσεων μας καθορίζεται από το h_{\max} και την θερμοκρασία T . Για $T \gg h_{\max}$, όπως ισχύει στο πρώιμο σύμπαν, το μηδενικής θερμοκρασίας ενεργό δυναμικό κοντά στο h_{\max} δεν είναι κατάλληλο για τον υπολογισμό που θέλουμε να πραγματοποιήσουμε. Η παρουσία θερμικού λουτρού πεπερασμένης θερμοκρασίας επηρεάζει το ενεργό δυναμικό (βλέπε παράρτημα Β') και συγκεκριμένα μετατοπίζει το μέγιστο του δυναμικού σε μια τιμή που είναι ανάλογη του T . Η θερμοκρασία είναι και αυτή που καθορίζει την κλίμακα στην οποία πρέπει να υπολογιστούν οι συζεύξεις (running couplings) που εμφανίζονται στο δυναμικό. Οι θερμικές διορθώσεις στο ενεργό δυναμικό του πεδίου Higgs συνοψίζονται στο [26]. Σύμφωνα με αυτό, το πεδίο Higgs σε υψηλές θερμοκρασίες αποκτάει μια θερμική μάζα $m_T^2 = \kappa^2 T^2$, όπου το κ^2 δίνεται από την εξής σχέση

$$\kappa^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{3}{4}g'^2 + \frac{9}{4}g^2 + 3y_t^2 + 6\lambda \right) - \frac{1}{32\pi} \sqrt{\frac{11}{6}} (g'^3 + 3g^3) - \frac{3\lambda}{16\pi} \sqrt{g'^2 + 3g^2 + 8\lambda + 4y_t^2}. \quad (4.32)$$

Στην παραπάνω σχέση τα g, g' (running gauge couplings για τα μποζόνια W^\pm, Z), η Yukawa σταθερά αλληλεπίδρασης του top κουάρκ y_t και το λ (που αντιστοιχεί στην σύζευξη λ στο tree level δυναμικό του πεδίου Higgs $V_0(h) = (-m/2)h^2 + (\lambda/4)h^4$) πρέπει να υπολογιστούν σε μια κλίμακα που καθορίζεται από την θερμοκρασία.

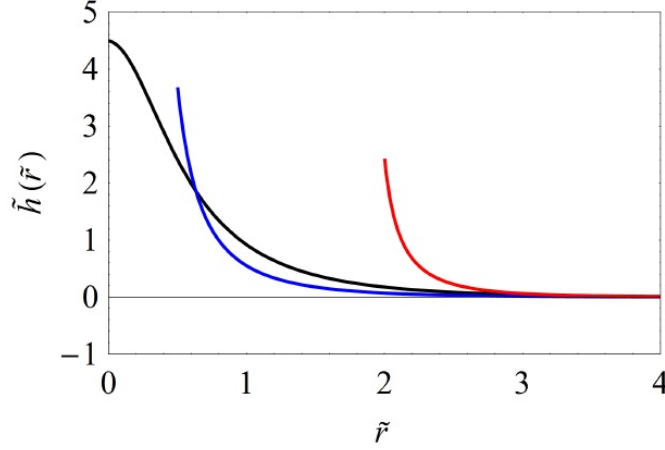
Μια ήμι-αναλυτική μελέτη των επιδράσεων του βαρυτικού υπόβαθρου της μελανής οπής στην θερμική διάσπαση του ηλεκτασθενοús κενού, στο θερμικό περιβάλλον του πρώιμου σύμπαντος και θεωρώντας ότι το πεδίο Higgs έχει μια non-minimal σύζευξη με την βαρύτητα, είναι δυνατή αν προσεγγίσουμε το ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας του πεδίου Higgs μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$V(h, T) \simeq \frac{1}{2} \kappa^2 T^2 h^2 + \frac{1}{4} \lambda h^4. \quad (4.33)$$

Το παραπάνω δυναμικό προκύπτει αν λάβουμε στο ενεργό δυναμικό του πεδίου Higgs διορθώσεις μηδενικής θερμοκρασίας μέχρι two-loops (βλέπε διόρθωση one-loop στο παράρτημα Α'), διορθώσεις πεπερασμένης θερμοκρασίας μέχρι one-loop (βλέπε παράρτημα Β'), ring διορθώσεις πεπερασμένης θερμοκρασίας (βλέπε [26]) και όλα αυτά στο όριο των υψηλών θερμοκρασιών. Στο εύρος θερμοκρασιών μεταξύ 10^{14} και 10^{18} GeV, που μας ενδιαφέρει, έχουμε $\kappa \simeq 0.3$ με 10% μείωση με την αύξηση της θερμοκρασίας και $\lambda = -|\lambda| = -0.015$ με 15% μείωση με την αύξηση της θερμοκρασίας (βλέπε [26]). Επομένως στην ανάλυση μας μπορούμε προσεγγιστικά να θεωρήσουμε σταθερά τα κ, λ . Η μελέτη μας αυτή μπορεί εύκολα να επαναληφθεί και για χαμηλότερες θερμοκρασίες (reheating θερμοκρασίες) όμως είναι απαραίτητη η αριθμητική ανάλυση του προβλήματος προκειμένου να υπάρχει ποσοτική ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Χρησιμοποιώντας τους ακόλουθους μετασχηματισμούς

$$h = \frac{\kappa T}{\sqrt{|\lambda|}} \tilde{h}, \quad r = \frac{1}{\kappa T} \tilde{r} \quad \text{και} \quad R_h = \frac{1}{\kappa T} \tilde{R}_h, \quad (4.34)$$



Σχήμα 4.2: Γραφική παράσταση του rescaled πεδίου Higgs \tilde{h} έξω από τον rescaled ορίζοντα \tilde{R}_h της μελανής οπής για τρεις διαφορετικές τιμές $\tilde{R}_h = 0.01, 0.5, 2$ (από αριστερά προς τα δεξιά).

μπορούμε να εκφράσουμε την ελεύθερη ενέργεια της φυσαλίδας ως $\kappa T/|\lambda|$ επί έναν αριθμητικό παράγοντα. Συγκεκριμένα με τον συγκεκριμένο μετασχηματισμό έχουμε για το δυναμικό

$$V(h, T) = \frac{1}{2}\kappa^2 T^2 \left(\frac{\kappa T}{\sqrt{|\lambda|}} \tilde{h} \right)^2 - \frac{1}{4}|\lambda| \left(\frac{\kappa T}{\sqrt{|\lambda|}} \tilde{h} \right)^4 = \frac{\kappa^4 T^4}{|\lambda|} \tilde{V}(\tilde{h}), \quad (4.35)$$

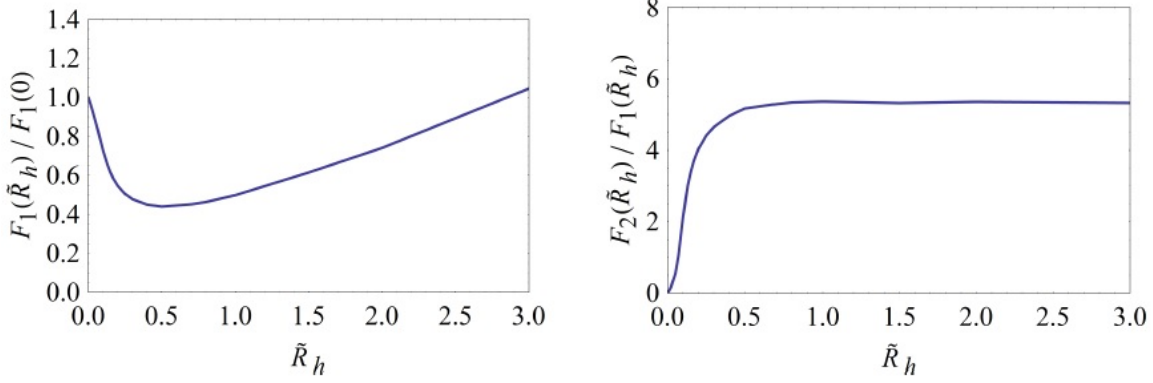
με $\tilde{V}(\tilde{h}) = (\tilde{h}^2/2) - (\tilde{h}^4/4)$. Με αυτόν τον μετασχηματισμό οι εξισώσεις της κίνησης (4.22) και (4.23) μετασχηματίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} (4.22) \Rightarrow \frac{\kappa^3 T^3}{\sqrt{|\lambda|}} \frac{d^2 \tilde{h}}{d\tilde{r}^2} + \left(\frac{2\kappa T}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{R}_h \kappa T}{\tilde{r}(\tilde{r} - \tilde{R}_h)} \right) \frac{\kappa^2 T^2}{\sqrt{|\lambda|}} \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{r}} &= \frac{\tilde{r}}{\tilde{r} - \tilde{R}_h} \frac{\kappa^4 T^4}{|\lambda|} \frac{\sqrt{|\lambda|}}{\kappa T} \frac{d\tilde{V}(\tilde{h})}{d\tilde{h}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{h}'' + \left(\frac{2}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{R}_h}{\tilde{r}(\tilde{r} - \tilde{R}_h)} \right) \tilde{h}' &= \frac{\tilde{r}}{\tilde{r} - \tilde{R}_h} \frac{d\tilde{V}(\tilde{h})}{d\tilde{h}}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^3 T^3}{4\pi \tilde{r}^2} \frac{d\delta M}{d\tilde{r}} &= \frac{\tilde{r} - \tilde{R}_h}{2\tilde{r}} \frac{\kappa^4 T^4}{|\lambda|} \left(\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{r}} \right)^2 + \frac{\kappa^4 T^4}{|\lambda|} \tilde{V} + \xi \frac{\kappa^4 T^4}{|\lambda|} \left(2 \frac{\tilde{r} - \tilde{R}_h}{\tilde{r}} \left(\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{r}} \right)^2 + 2\tilde{h} \frac{d\tilde{V}}{d\tilde{h}} - \frac{\tilde{R}_h}{\tilde{r}^2} \tilde{h} \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{r}} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta M' &= \frac{\kappa T}{|\lambda|} \left[4\pi \tilde{r}^2 \left(\frac{\tilde{r} - \tilde{R}_h}{2\tilde{r}} \tilde{h}'^2 + \tilde{V}(\tilde{h}) \right) + 4\pi \xi \tilde{r}^2 \left(2 \frac{\tilde{r} - \tilde{R}_h}{\tilde{r}} \tilde{h}'^2 + 2\tilde{h} \frac{d\tilde{V}(\tilde{h})}{d\tilde{h}} - \frac{\tilde{R}_h}{\tilde{r}^2} \tilde{h} \tilde{h}' \right) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

όπου παραπάνω τώρα με το ' συμβολίζουμε την παραγωγή ως προς \tilde{r} . Άρα παρατηρούμε ότι η μορφή της εξίσωσης κίνησης (4.22) δεν άλλαξε καθόλου με την χρήση του συγκεκριμένου μετασχηματισμού, το μόνο που άλλαξε είναι η μορφή του δυναμικού που εμπεριέχεται σε αυτή. Οι λύσεις της εξίσωσης (4.36) για τρεις διαφορετικές τιμές του ορίζοντα (και κατ' επέκταση της μάζας) της μελανής οπής παρίστανται συναρτήσει της απόστασης \tilde{r} στο Σχήμα 4.2. Από αυτό το διάγραμμα είναι σαφές ότι η



Σχήμα 4.3: Γραφική αναπαράσταση των αδιάστατων συναρτήσεων $F_1(\tilde{R}_h)$ και $F_2(\tilde{R}_h)$ συναρτήσεως του rescaled ορίζοντα της μελανής οπής.

χαρακτηριστική κλίμακα του σχηματισμού Higgs είναι συγκρίσιμη με τον ορίζοντα της μελανής οπής για $\tilde{R}_h = O(1)$. Για τέτοιες μελανές οπές, η θερμοκρασία Hawking ικανοποιεί την σχέση

$$\frac{T_H}{T} = \frac{\kappa}{4\pi\tilde{R}_h} = O(10^{-2}). \quad (4.38)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει θερμική ισορροπία μεταξύ της μελανής οπής και του περιβάλλοντος, ενώ παράλληλα η επίδραση της ακτινοβολίας Hawking στο θερμικό λουτρό του περιβάλλοντος μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Θα δούμε στην συνέχεια ότι μελανές οπές με $\tilde{R}_h \simeq 0.5$ έχουν μια σημαντική επίδραση στον θερμικό ρυθμό διάσπασης κενού. Αυτή η επίδραση είναι καθαρά βαρυτική και τοπικά εντοπισμένη στην γειτονιά της μελανής οπής.

Από την σχέση (4.37) παρατηρούμε τώρα ότι για την ελεύθερη ενέργεια της φουσαλίδας προς την θερμοκρασία του περιβάλλοντος (αυτό το κλάσμα αποτελεί και τον εκθετικό παράγοντα που καταστέλλει την θερμική διάσπαση κενού) έχουμε

$$\frac{\delta M_{\text{tot}}}{T} = \frac{\kappa}{|\lambda|} \left(F_1(\tilde{R}_h) + \xi F_2(\tilde{R}_h) \right), \quad (4.39)$$

όπου το $\kappa/|\lambda| \simeq 20$ και για τις συναρτήσεις $F_1(\tilde{R}_h)$ και $F_2(\tilde{R}_h)$ ισχύει

$$F_1(\tilde{R}_h) = 4\pi \int_{\tilde{R}_h}^{\infty} d\tilde{r} \tilde{r}^2 \left(-\frac{1}{2}\tilde{h} \frac{d\tilde{V}(\tilde{h})}{d\tilde{h}} + \tilde{V}(\tilde{h}) \right) = 4\pi \int_{\tilde{R}_h}^{\infty} d\tilde{r} \tilde{r}^2 \frac{\tilde{h}^4}{4}, \quad (4.40)$$

$$F_2(\tilde{R}_h) = 2\pi \tilde{R}_h \tilde{h}^2(\tilde{R}_h). \quad (4.41)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε ότι απουσία μελανής οπής έχουμε $F_1(0) \simeq 18.9$ και $F_2(0) = 0$ και επομένως για το κλάσμα $\delta M_{\text{tot}}/T$ απουσία μελανής οπής στην προσέγγιση μας προκύπτει

$$\left(\frac{\delta M_{\text{tot}}}{T} \right)_0 = \frac{18.9\kappa}{|\lambda|} \Rightarrow \left(\frac{\delta M_{\text{tot}}}{T} \right)_0 \simeq 380, \quad (4.42)$$

δηλαδή αυτό είναι ανεξάρτητο της θερμοκρασίας. Η πλήρης ανάλυση για την επανακανονικοποιημένη δράση του πεδίου Higgs του Καθιερωμένου Πρότυπου συμφωνεί με την παραπάνω τιμή, όμως επίσης

υποδεικνύει και μια μείωση κατά 20% της δράσης για θερμοκρασίες μεταξύ των 10^{14} και των 10^{18} GeV (βλέπε [26],[34]). Για χαμηλότερες θερμοκρασίες, το λ εμφανίζει μια έντονη λογαριθμική εξάρτηση από την κλίμακα και έτσι για τον προσδιορισμό του προφίλ της φυσαλίδας χρειάζεται αριθμητική ανάλυση για κάθε θερμοκρασία. Ωστόσο, αναμένουμε ότι η επίδραση της μελανής οπής στο κλάσμα $\delta M_{\text{tot}}/T$ μπορεί και πάλι να περιγραφεί μέσω ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα $(F_1(\tilde{R}_h) + \xi F_2(\tilde{R}_h))/F_1(0)$ όπως στην σχέση (4.39). Αυτή η προσδοκία υποστηρίζεται και από την ανάλυση στο [30], όπου έχει χρησιμοποιηθεί το μηδενικής θερμοκρασίας ενεργό δυναμικό για το πεδίο Higgs.

Στο Σχήμα 4.3 απεικονίζονται οι συναρτήσεις $F_1(\tilde{R}_h)/F_1(0)$ και $F_2(\tilde{R}_h)/F_1(\tilde{R}_h)$ συναρτήσεως του \tilde{R}_h . Η μορφή του $F_1(\tilde{R}_h)$ είναι παρόμοια με αυτήν του $F_1(R_h)$ που είδαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, δηλαδή αυτό γίνεται ίσο με $F_1(0)/2$ για τιμές του ορίζοντα κοντά στο $R_h = 0.5/(\kappa T) \simeq 1.7/T$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για $\xi = 0$ ο θερμικός ρυθμός διάσπασης κενού του πεδίου Higgs (που τότε θα εξαρτάται μόνο από το $F_1(\tilde{R}_h)$) να αυξάνεται αισθητά στο βαρυτικό πεδίο μιας μελανής οπής, για συγκεκριμένες τιμές του ορίζοντα. Επίσης από το Σχήμα 4.3 παρατηρούμε ότι το κλάσμα $F_2(\tilde{R}_h)/F_1(\tilde{R}_h)$ μηδενίζεται για $\tilde{R}_h \rightarrow 0$, όμως γρήγορα αυξάνει με την αύξηση του \tilde{R}_h , πλησιάζοντας μια περίπου σταθερή τιμή $\simeq 5.3$ για $\tilde{R}_h \geq 0.5$.

Ένα πολύ ενδιαφέρον γεγονός αποτελεί η επίδραση του non-minimal coupling στην ενεργό μάζα της φυσαλίδας. Όπως μπορούμε να δούμε από την σχέση (4.39) αυτή εξαρτάται γραμμικά από το ξ , και έτσι για μεγάλες θετικές τιμές του ξ το κλάσμα $\delta M_{\text{tot}}/T$ αυξάνει και έχει ως αποτέλεσμα την μείωση του θερμικού ρυθμού διάσπασης. Αυτό συμβαίνει διότι το non-minimal coupling τροποποιεί την ενεργό μάζα του πεδίου Higgs στις περιοχές υψηλής καμπυλότητας. Ανάλογα με το πρόσημο του ξ ο θερμικός ρυθμός διάσπασης μπορεί είτε να ελαττωθεί είτε να αυξηθεί. Συγκεκριμένα, από την σχέση (4.39) είναι σαφές ότι για οποιαδήποτε μάζα (και κατ'επέκταση ορίζοντα) της μελανής οπής σε μια δεδομένη θερμοκρασία, υπάρχει μια αρνητική κρίσιμη τιμή $\xi_{\text{cr}} = -F_1(\tilde{R}_h)/F_2(\tilde{R}_h)$ για την οποία η εκθετική καταστολή του ρυθμού θερμικής διάσπασης ($\Gamma \propto e^{-\delta M_{\text{tot}}/T}$) μηδενίζεται. Σίγουρα το saddle-point approximation που έχουμε χρησιμοποιήσει για να οδηγηθούμε στην γνωστή μας σχέση για τον ρυθμό διάσπασης του κενού, καταρρέει πριν φτάσουμε σε αυτό το κρίσιμο σημείο. Από την άλλη πλευρά όμως, ο ρυθμός θερμικής διάσπασης του ηλεκτρασθενούς κενού στο πρώιμο σύμπαν εξαρτάται επίσης και από τον συνολικό αριθμό των αρχέγονων μελανών οπών που μπορούν να δημιουργηθούν μέχρι εκείνη την χρονική περίοδο, πράγμα το οποίο θα μελετήσουμε με περισσότερη λεπτομέρεια στο επόμενο υποκεφάλαιο.

4.4 Αστάθεια Ηλεκτρασθενούς Κενού Παρουσία Μελανής Οπής στο Πρώιμο Σύμπαν

Η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου σχηματισμού της φυσαλίδας πραγματικού κενού στο υπόβαθρο μιας μελανής οπής κατά την εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας (radiation-dominated era) στο πρώιμο σύμπαν δίνεται από την σχέση

$$\frac{dP}{dt} \sim T e^{-\delta M_{\text{tot}}/T}. \quad (4.43)$$

Στην παραπάνω σχέση δεν υπάρχει ο συνήθης παράγοντας όγκου που είχαμε δει στα προηγούμενα κεφάλαια λόγω του ότι η παρουσία της μελανής οπής εξαλείφει την συμμετρία στις χωρικές μεταθέσεις. Το χαρακτηριστικό χρονικό διάστημα που μπορεί να συσχετιστεί με την θερμοκρασία T είναι ο χρόνος Hubble $1/H \sim M_{\text{Pl}}/T^2$. Η δημιουργία της φυσαλίδας μπορεί να είναι εφικτή και σε μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα αλλά εμείς ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό ενός κάτω φραγμού για την

πιθανότητα. Έτσι αμελώντας την εξάχνωση που μπορεί να συμβαίνει σε μερικές από τις αρχέγονες μελανές οπές συμπεραίνουμε ότι για την πιθανότητα σχηματισμού της φουσαλίδας ισχύει

$$P \sim \frac{M_{Pl}}{T} e^{-\delta M_{tot}/T}. \quad (4.44)$$

Ο πιο αβέβαιος παράγοντας σε αυτή μας την ανάλυση αποτελεί ο αριθμός των αρχέγονων μελανών οπών που υπάρχουν μέσα στον παρελθοντικό κώνο φωτός μας. Η συνήθης παραδοχή είναι ότι οι αρχέγονες μελανές οπές μπορούν να σχηματιστούν μετά τον πληθωρισμό όταν υπέρπυκνες περιοχές με διάσταση όσο περίπου ο ορίζοντας της σχηματιζόμενης μελανής οπής, καταρρεύσουν βαρυτικά. Ο αριθμός των αιτιατά ανεξάρτητων περιοχών που μπορεί να έχουν καταρρεύσει βαρυτικά και βρίσκονται αυτή τη στιγμή μέσα στον ορίζοντα μας μπορεί να είναι μεγάλος. Ο όγκος του ορίζοντα μας στις μέρες μας είναι $(3.4/H_0)^3$ και αυτός συμπεριζόταν κατά έναν παράγοντα a^3 σε προγενέστερους χρόνους, όταν ο κοσμικός παράγοντας κλίμακας ήταν $a < 1$. Από την άλλη πλευρά, ο όγκος μιας περιοχής με μέγεθος όσο ο ορίζοντας κατά την εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας ισούται με $(1/H)^3$. Για αυτό το λόγο ο αριθμός των αιτιατά ανεξάρτητων περιοχών είναι χοντρικά $N \simeq a^3(3.4H/H_0)^3$. Όμως το κλάσμα H/H_0 μπορούμε να το εκφράσουμε ως $H/H_0 = \sqrt{g_*\Omega_\gamma/2}(T/T_0)^2$, όπου $g_* = 106.75$ είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του Καθιερωμένου Πρότυπου, $T_0 \simeq 2.4 \times 10^{-13}$ GeV είναι η επί του παρόντος θερμοκρασία των φωτονίων και $\Omega_\gamma \simeq 5 \times 10^{-5}$ είναι το τρέχον ενεργειακό ποσοστό των φωτονίων. Ο κοσμικός παράγοντας κλίμακας a μπορεί να συσχετιστεί με την θερμοκρασία μέσω της διατήρησης της εντροπίας $g_*T^3a^3 = g_{*s0}T_0^3$, όπου $g_{*s0} = 3.94$ είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας που συνεισφέρουν στην εντροπία μετά την εποχή της e^-e^+ εξαύλωσης. Χρησιμοποιώντας τώρα όλα αυτά συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός των αιτιατά ανεξάρτητων περιοχών σε κάποια χρονική στιγμή με θερμοκρασία T κατά την διάρκεια της εποχής κυριαρχίας της ακτινοβολίας, που βρίσκονται αυτή τη στιγμή μέσα στον ορίζοντα μας δίνεται από την σχέση

$$N \simeq 10^{34} \left(\frac{T}{\text{GeV}} \right)^3. \quad (4.45)$$

Η επόμενη ποσότητα που χρειάζεται να υπολογίσει κανείς τώρα είναι η πιθανότητα p να υπάρχει μια αρχέγονη μελανή οπή μέσα σε μια από αυτές τις περιοχές. Αυτή η πιθανότητα εξαρτάται από την επιλογή του μηχανισμού δημιουργίας μελανών οπών.

Σε κάθε περίπτωση, χρησιμοποιώντας αυτά που αναφέραμε παραπάνω βρίσκουμε ότι ο λογάριθμος της πιθανότητας θερμικής διάσπασης του ηλεκτρασθενούς κενού παρουσία μελανών οπών με ορίζοντα R_h , μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\ln(NpP) = 205 + 2 \ln \left(\frac{T}{M_{Pl}} \right) + \ln p - \left(\frac{\delta M_{tot}}{T} \right)_0 A(R_h T) [1 + \xi B(R_h T)], \quad (4.46)$$

όπου $M_{Pl} = (8\pi G)^{-1/2} \simeq 2.435 \times 10^{18}$ GeV, $(\delta M_{tot}/T)_0$ είναι το $(\delta M_{tot}/T)$ απουσία μελανής οπής (βλέπε σχέση 4.42), $A(R_h T) \equiv F_1(\tilde{R}_h)/F_1(0)$ και $B(R_h T) \equiv F_2(\tilde{R}_h)/F_1(\tilde{R}_h)$ (βλέπε Σχήμα 4.3 για αυτές τις δύο ποσότητες). Όπως προαναφέραμε και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, η ύπαρξη του non-minimal coupling του πεδίου Higgs με την βαρύτητα έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη μιας κρίσιμης τιμής $\xi_{cr} = -1/B(R_h T)$ για την οποία η εκθετική καταστολή του ρυθμού θερμικής διάσπασης μηδενίζεται. Σίγουρα το saddle-point approximation που έχουμε χρησιμοποιήσει καταρρέει πριν φτάσουμε σε αυτό το κρίσιμο σημείο. Από την άλλη πλευρά, από την σχέση (4.46) παρατηρούμε ότι

ο μεγάλος αριθμός αιτιατά ανεξάρτητων περιοχών μέσα στον ορίζοντά μας, στο πρώιμο σύμπαν, έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη ενός μεγάλου θετικού παράγοντα που υποδεικνύει ότι είναι πολύ πιθανό το ηλεκτρασθενές κενό να γίνει ολοκληρωτικά ασταθές.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως η μεγαλύτερη αβεβαιότητα στον υπολογισμό μας βρίσκεται στην πιθανότητα p να υπάρχει μια μελανή οπή μέσα σε κάθε μία από τις αιτιατά ανεξάρτητες περιοχές την χρονική στιγμή όπου η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι T . Οι αρχέγονες μελανές οπές μπορούν να δημιουργηθούν όταν οι διακυμάνσεις στην πυκνότητα είναι αρκετά μεγάλες έτσι ώστε μια υπέρπυκνη περιοχή να καταρρεύσει βαρυτικά. Ως συγκεκριμένη εφαρμογή για τον υπολογισμό του p θεωρούμε την περίπτωση που εξετάζεται στο [35], η οποία είναι σύμφωνη με τους τρέχοντες φραγμούς για το μέγεθος των αρχέγονων διακυμάνσεων στην πυκνότητα. Σε αυτή τη περίπτωση θεωρείται ότι μετά την εποχή του κοσμολογικού πληθωρισμού ακολουθεί μια περίοδος κατά την διάρκεια της οποίας το inflaton ταλαντώνεται και διασπάται σε σωματίδια. Η ενεργός καταστατική εξίσωση σε αυτή τη περίοδο είναι παρόμοια με αυτήν ενός σύμπαντος όπου κυριαρχεί η ύλη (matter-dominated universe). Για αυτό τον λόγο είναι δυνατόν οι διαταραχές που δημιουργήθηκαν κατά την διάρκεια του πληθωρισμού να εισέλθουν ξανά στον ορίζοντα, να μεγαλώσουν και να καταρρεύσουν βαρυτικά σχηματίζοντας μελανές οπές. Όταν ξεκινήσει η διαδικασία του thermalization (διαδικασία κατά την οποία τα σωματίδια έρχονται σε θερμική ισορροπία μέσω αμοιβαίων αλληλεπιδράσεων) των προϊόντων της διάσπασης του inflaton, η ενεργός καταστατική εξίσωση αλλάζει και η αύξηση των διαταραχών καταστέλλεται. Σε ένα τέτοιο σενάριο, οι μελανές οπές που είναι σημαντικές για την δικιά μας ανάλυση είναι αυτές που έχουν δημιουργηθεί λίγο πριν το thermalization, καθώς είναι αυτές που έχουν την μεγαλύτερη μάζα. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την ανάλυση για την κβαντική διάσπαση του ηλεκτρασθενούς κενού παρουσία μελανής οπής, όπου οι μελανές οπές που κυρίως συνεισφέρουν είναι οι ελαφρότερες, λόγω της μεγάλης τους θερμοκρασίας Hawking ([29], [35]).

Οι σχηματισμοί (διαταραχές) που οδηγούν στην δημιουργία μελανής οπής ξεκινούν από μια αρχική τιμή $\delta\rho/\rho = \delta_i \sim 10^{-4}$ όταν εισέρχονται στον ορίζοντα και μεγαλώνουν μέχρι την τιμή $\delta\rho/\rho \sim 1$, όπου αποσυνδέονται από το Hubble flow, αναστρέφονται και καταρρέουν. Σύμφωνα με το [36], η πιθανότητα για αυτούς τους σχηματισμούς να καταρρεύσουν και να σχηματίσουν μια μελανή οπή δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$P_{\text{BH}} \simeq 2 \times 10^{-2} \left(\frac{R_h}{R} \right)^{13/2}, \quad (4.47)$$

όπου $R_h = 2GM$ είναι η ακτίνα Schwarzschild (ορίζοντας της σχηματιζόμενης μελανής οπής) και R είναι η ακτίνα αναστροφής. Η μάζα της σχηματιζόμενης μελανής οπής M είναι ίση με την μάζα που εμπεριέχεται μέσα σε μια σφαίρα ακτίνας ίσης με την ακτίνα αναστροφής, δηλαδή $M = (4\pi/3)\rho R^3$. Η εξίσωση Friedmann γνωρίζουμε ότι για την εποχή όπου κυριαρχεί η ύλη στο σύμπαν ($\rho \propto a^{-3}$) έχει την εξής μορφή

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} \rho \propto \frac{1}{a^3}. \quad (4.48)$$

Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα ύλης από την παραπάνω σχέση μπορούμε να γράψουμε το κλάσμα R_h/R ως εξής

$$\frac{R_h}{R} = \frac{2GM}{R} \simeq \frac{8\pi G}{3} R^2 \rho \simeq \frac{8\pi G}{3} R^2 \frac{3H^2}{8\pi G} \Rightarrow \frac{R_h}{R} \simeq H^2 R^2 \simeq \delta_i. \quad (4.49)$$

Από την σχέση (4.49) βρίσκουμε επίσης ότι ισχύει $R_h \simeq H^2 R^3 \simeq \delta_i^{3/2}/H \Rightarrow H^3 R^3 \simeq \delta_i^{3/2}$. Σε έναν όγκο $1/H^3$ χωράνε περίπου $(HR)^{-3}$ περιοχές μεγέθους R και επομένως τελικά για την πιθανότητα

εύρεσης μιας μελανής οπής μέσα στον ορίζοντα έχουμε

$$p \simeq 2 \times 10^{-22} \left(\frac{\delta_i}{10^{-4}} \right)^5. \quad (4.50)$$

Ο ρυθμός θερμικής διάσπασης του ηλεκτρασθενούς κενού όπως είδαμε στα προηγούμενα υποκεφάλαια ενισχύεται αν στην απαρχή της εποχής κυριαρχίας της ακτινοβολίας υπάρχουν μελανές οπές με $\tilde{R}_h = \kappa R_h T \gtrsim 0.5$. Σε αυτή τη χρονική στιγμή ισχύει $\rho = (g_* \pi^2 / 30) T_{\text{reh}}^4$. Επομένως την στιγμή του reheating έχουμε για το \tilde{R}_h

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{h,\text{reh}} &= \kappa R_h T_{\text{reh}} \simeq \kappa T_{\text{reh}} \delta_i^{3/2} \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}} = \kappa T_{\text{reh}} M_{Pl} \delta_i^{3/2} \left(\frac{90}{g_* \pi^2} \right)^{1/2} \frac{1}{T_{\text{reh}}^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{R}_{h,\text{reh}} \simeq \kappa \left(\frac{90}{g_* \pi^2} \right)^{1/2} \delta_i^{3/2} \frac{M_{Pl}}{T_{\text{reh}}} \simeq 0.1 \delta_i^{3/2} \frac{M_{Pl}}{T_{\text{reh}}}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Αν η reheating θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από $10^{-7} M_{Pl}$ τότε το $\tilde{R}_{h,\text{reh}}$ είναι πολύ μικρό στην απαρχή της εποχής κυριαρχίας της ακτινοβολίας για να έχουν μια σημαντική επίδραση οι μελανές οπές στον ρυθμό θερμικής διάσπασης κενού. Αργότερα, η δημιουργία μελανών οπών καταστέλλεται, η θερμοκρασία μειώνεται και η μάζα των μελανών οπών μειώνεται λόγω εξάχνωσης (evaporation). Αυτά έχουν ως αποτέλεσμα την περαιτέρω μείωση του \tilde{R}_h .

Επομένως φαίνεται ότι η ύπαρξη υψηλής reheating θερμοκρασίας εξαλείφει τον κίνδυνο που δημιουργεί η παρουσία μελανών οπών. Από την άλλη πλευρά, για $T_{\text{reh}} \geq 10^{-7} M_{Pl}$ η τυπική μάζα μιας μελανής οπής είναι της τάξης του $M \leq 10^{27} \text{ GeV} \simeq 10^3 \text{ gr}$. Τέτοιες μικρές μελανές οπές εξατμίζονται πολύ γρήγορα και έτσι χαίρουν πολύ μικρού φαινομενολογικού ενδιαφέροντος. Έτσι από αυτή την άποψη, η πιθανότητα ύπαρξης reheating θερμοκρασίας μικρότερης του $10^{-7} M_{Pl}$ φαίνεται πιο ενδιαφέρουσα. Ως παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η reheating θερμοκρασία είναι $T_{\text{reh}} \simeq 5 \times 10^{11} \text{ GeV}$, για την οποία από την σχέση (4.51) βρίσκουμε $\tilde{R}_h \simeq 0.5$. Για $\tilde{R}_h \simeq 0.5$ από το Σχήμα 4.3 παρατηρούμε ότι έχουμε $A(R_h T) \simeq 0.5$ και $B(R_h T) \simeq 5.3$, και άρα σύμφωνα με την σχέση (4.46) για τον λογάριθμο της πιθανότητας θερμικής διάσπασης του ηλεκτρασθενούς κενού παρουσία μελανών οπών με ορίζοντα $\tilde{R}_h \simeq 0.5$ προκύπτει

$$\ln(NpP) \simeq 124 - 0.5(1 + 5.3\xi) \left(\frac{\delta M_{\text{tot}}}{T} \right)_0. \quad (4.52)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι η ευστάθεια του ηλεκτρασθενούς κενού παρουσία μελανής οπής επιβάλλει έναν ισχυρό περιορισμό για το non-minimal coupling του πεδίου Higgs με την βαρύτητα, λόγω του ότι πρέπει να ισχύει $\ln(NpP) \leq 0$. Στο παράδειγμά μας ο περιορισμός που προκύπτει για το ξ είναι αυτό να ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα

$$\xi \geq -0.19 + 47 \left[\left(\frac{\delta M_{\text{tot}}}{T} \right)_0 \right]^{-1}. \quad (4.53)$$

4.5 Συμπεράσματα

Δεδομένου της απουσίας πειραματικών δεδομένων από το LHC που να υποδεικνύουν την ύπαρξη νέας φυσικής πέρα από το Καθιερωμένο Πρότυπο, η μελέτη της ευστάθειας του Ηλεκτρασθενούς κενού

έχει γίνει ένα φλέγον ζήτημα. Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύσαμε το πως η παρουσία μιας αρχέγονης μελανής οπής μπορεί να προκαλέσει την διάσπαση του Ηλεκτρασθενούς κενού στο πρώιμο σύμπαν, σε πεπερασμένη θερμοκρασία. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματά μας υποδεικνύουν ότι η ύπαρξη μιας επανακανονικοποιήσιμης nonminimal σύζευξης μεταξύ του πεδίου Higgs και της βαρύτητας, μπορεί να μεταβάλλει σημαντικά τον ρυθμό διάσπασης.

Τελικά η τελική μοίρα του ηλεκτρασθενούς κενού εξαρτάται από το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό της πιθανότητας σχηματισμού μιας μελανής οπής σε μια αιτιατά ανεξάρτητη περιοχή, p , και άρα πάσχει από την άγνοια μας για την ακριβή δυναμική του πρώιμου σύμπαντος και την ακριβή εξάρτηση της μάζας των μελανών οπών από τον χρόνο. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματά μας υποδεικνύουν ότι ακόμα και μέτριες τιμές της nonminimal σύζευξης ξ μπορούν να κάνουν πιο ευσταθές ή πιο ασταθές το ηλεκτρασθενές κενό, ανάλογα με το πρόσημο της σύζευξης. Ενώ απαιτείται μια βελτίωση της ανάλυσης μας (για παράδειγμα πιο ακριβής υπολογισμός του p), τα αποτελέσματά μας καταδεικνύουν για ακόμη μια φορά την σημαντική επιρροή της βαρύτητας στη διάσπαση κενού.

A' One-Loop Διορθώσεις στο Μηδενικής Θερμοκρασίας Ενεργό Δυναμικό του Higgs

Στο παράρτημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το φυσικό σύστημα μονάδων όπου ισχύει $\hbar = c = k_B = 1$ και επίσης θα χρησιμοποιήσουμε για την μετρική την σύμβαση (+ - - -).

A'.1 Generating Functionals

Στην Κλασική Θεωρία Πεδίου η θεμελιώδης ποσότητα που περιγράφει μια θεωρία είναι το συναρτησοειδές της δράσης. Ωστόσο, στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου η δράση δεν περιέχει όλες τις πληροφορίες σχετικά με την δυναμική του συστήματος. Στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου στρεφόμεστε στον φορμαλισμό των συναρτησοειδών για να περιγράψουμε την κβαντική δυναμική και έτσι ορίζουμε το generating functional (vacuum to vacuum amplitude), το οποίο δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{(iS[\phi(x)] + i \int d^4x \phi(x)J(x))}. \quad (A'.1)$$

όπου το $S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi)$, το $J(x)$ είναι μια εξωτερική πηγή, και το ολοκλήρωμα διαδρομών είναι πάνω σε όλες τις δυνατές συναρτήσεις ϕ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $\phi(x_i) = \phi_i$ και $\phi(x_f) = \phi_f$. Για τις συναρτησιακές παραγώγους του $Z[J]$ στο $J = 0$ γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = i^n \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}. \quad (A'.2)$$

Από την άλλη πλευρά, γνωρίζουμε από τον φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομών στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου ότι για τις συναρτήσεις συσχετισμού ισχύει η εξής σχέση

$$\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}, \quad (A'.3)$$

όπου παραπάνω έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό $\phi(x_i) = \phi_i$. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (A'.2) και (A'.3) μεταξύ τους συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις συσχετισμού παράγονται από το generating function μέσω της σχέσης

$$\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle = \frac{(-i)^n}{Z[J=0]} \cdot \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} \quad (A'.4)$$

Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη συντομογραφία

$$\langle \mathcal{O}(x_1 \dots x_n) \rangle_J = \langle \Omega | \mathcal{O}(x_1 \dots x_n) | \Omega \rangle_J = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}(x_1 \dots x_n) \exp(iS[\phi] + i \int d^4x \phi(x)J(x))}{\int \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi] + i \int d^4x \phi(x)J(x))}. \quad (A'.5)$$

Μπορούμε τώρα μέσω του $Z[J]$ να ορίσουμε ένα άλλο συναρτησοειδές, το $W[J]$, ως εξής

$$Z[J] \equiv e^{iW[J]} \Rightarrow W[J] \equiv -i \ln Z[J]. \quad (A'.6)$$

Αυτό το συναρτησοειδές μπορεί ναδειχθεί ότι γεννάει τις συνδεδεμένες (connected) συναρτήσεις συσχετισμού, σύμφωνα με την εξής σχέση

$$\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle_{\text{conn}} = (-i)^{n+1} \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}. \quad (\text{A'.7})$$

Ας το δείξουμε αυτό για την δεύτερη συναρτησιακή παράγωγο του $W[J]$ ως εξής. Η πρώτη συναρτησιακή παράγωγος του $W[J]$ ορίζει την κλασικά αναμενόμενη τιμή του πεδίου $\phi(x)$ παρουσία της πηγής $J(x)$

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{-i}{Z[J]} \cdot \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J}{\langle \Omega | \Omega \rangle_J} = \phi_c(x). \quad (\text{A'.8})$$

Θέτοντας $J = 0$ στην παραπάνω σχέση προκύπτει η 1-point συνάρτηση συσχετισμού, δηλαδή

$$\left. \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = \phi_c(x)|_{J=0} = \langle \phi(x) \rangle. \quad (\text{A'.9})$$

Η δεύτερη συναρτησιακή παράγωγος του $W[J]$ μας δίνει

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} &= \frac{-i}{Z[J]} \cdot \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} + \frac{i}{Z[J]^2} \cdot \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \cdot \frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} &= i \left(\frac{\langle \Omega | \widehat{T}[\phi(x)\phi(y)] | \Omega \rangle_J}{\langle \Omega | \Omega \rangle_J} - \frac{\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J}{\langle \Omega | \Omega \rangle_J} \frac{\langle \Omega | \phi(y) | \Omega \rangle_J}{\langle \Omega | \Omega \rangle_J} \right). \end{aligned} \quad (\text{A'.10})$$

Οπότε θέτοντας $J = 0$ στην παραπάνω σχέση προκύπτει η 2-point συνδεδεμένη συνάρτηση συσχετισμού

$$\left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \right|_{J=0} = i (\langle \phi(x)\phi(y) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle) = i \langle \phi(x)\phi(y) \rangle_{\text{conn}}. \quad (\text{A'.11})$$

Χρησιμοποιούμε τώρα το πεδίο $\phi_c(x)$ που ορίζεται από την σχέση (A'.8) για να πάρουμε τον μετασχηματισμό Legendre του $W[J]$, και έτσι ορίζουμε την ακόλουθη ποσότητα η οποία ονομάζεται ενεργός δράση

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x \phi_c(x) J(x). \quad (\text{A'.12})$$

Η ενεργός δράση περιέχει όλη την κβαντική δυναμική της θεωρίας. Για να το δούμε αυτό ας υπολογίσουμε την πρώτη συναρτησιακή παράγωγο του $\Gamma[\phi_c]$ και ας θέσουμε στην συνέχεια το $J = 0$, ή ισοδύναμα το $\phi_c(x) = \phi_c(x)|_{J=0} = \langle \phi(x) \rangle$, ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_c(x)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta \phi_c(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \phi_c(y) - \int d^4y J(y) \frac{\delta \phi_c(y)}{\delta \phi_c(x)} \xrightarrow{\delta \phi_c(y)/\delta \phi_c(x) = \delta(x-y)} \frac{\delta \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_c(x)} = \\ &= \int d^4y \underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J[y]}}_{=\phi_c(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \phi_c(y) - J(x) = -J(x) \Rightarrow \left. \frac{\delta \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_c(x)} \right|_{\phi_c=\langle \phi \rangle} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A'.13})$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μας λέει ότι η αναμενόμενη τιμή $\langle \phi \rangle$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange μόνο και μόνο αν η ενεργός δράση είναι στάσιμη στο $\phi_c = \langle \phi \rangle$. Μπορεί κανείς να δείξει

(βλέπε [13]) ότι όλες οι μεγαλύτερης τάξης συναρτησιακές παράγωγοι της ενεργού δράσης μας δίνουν τις 1-particle irreducible (1PI) συναρτήσεις συσχετισμού σύμφωνα με την σχέση

$$\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle_{1PI} = i \frac{\delta^n \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)} \Big|_{\phi_c = \langle \phi \rangle}. \quad (A'.14)$$

Παρατήρηση: Η γενική μορφή της ενεργού δράσης περιέχει τον συνήθη κινητικό όρο πολλαπλασιασμένο με έναν μη τετριμμένο παράγοντα $Z_{\text{eff}}(\phi_c)$, ένα ενεργό δυναμικό και στην γενική περίπτωση διορθώσεις που αποτελούνται από μια άπειρη σειρά από ανώτερης τάξης παραγώγους, δηλαδή έχει την μορφή

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^4x (Z_{\text{eff}}(\phi_c) \partial_\mu \phi_c \partial^\mu \phi_c - V_{\text{eff}}(\phi_c) + \text{higher-der.}).$$

Από την ενεργό δράση μπορούμε να ορίσουμε το ενεργό δυναμικό της θεωρίας μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$V_{\text{eff}}(\phi_c) = - \frac{\Gamma[\phi_c]}{VT} \Big|_{\phi_c = \text{const.}}, \quad (A'.15)$$

όπου το VT είναι ο τυπικά άπειρος συνολικός χωροχρονικός όγκος.

A'.2 Επανακανονικοποίηση και Καθιερωμένο Πρότυπο

Στην κβαντική ενεργό δράση περιέχονται ποσότητες τις οποίες όταν πάμε να τις υπολογίσουμε προκύπτουν απειρισμοί. Αυτό το πρόβλημα μπορούμε να το διαχειριστούμε επιβάλλοντας ένα πεπερασμένο σημείο αποκοπής στα αποκλίνοντα ολοκληρώματα. Έπειτα μπορούμε να επανακανονικοποιήσουμε την θεωρία μας αντιστοιχώντας τις παραμέτρους στην ενεργό δράση με τα πειραματικά αποτελέσματα. Οι παράμετροι αυτοί θα εξαρτώνται γενικά από την κλίμακα του σημείου αποκοπής. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να διαχειριστεί κανείς αυτούς απειρισμούς, και αυτοί όλοι μαζί ονομάζονται renormalization schemes (συστήματα επανακανονικοποίησης).

Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής θα χρησιμοποιήσουμε ένα από τα πιο κοινά χρησιμοποιούμενα συστήματα στην Σωματιδιακή Φυσική, αυτό του modified minimal subtraction, το οποίο συμβολίζεται και ως \overline{MS} . Σε αυτό το σύστημα μετατρέπουμε όλα τα τετραδιάστατα ολοκληρώματα σε d -διάστατα ολοκληρώματα, όπου το $d = 4 - 2\epsilon$. Στην συνέχεια, αφού κάνουμε τους υπολογισμούς, απλά αφαιρούμε από το αποτέλεσμα μας (χρησιμοποιώντας τους counterterms) το κομμάτι που είναι ανάλογο της ποσότητας $\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi$, όπου το $\gamma_E \simeq 0.57721$ είναι η σταθερά Euler-Mascheroni. Το αποτέλεσμα θα εξαρτάται στην γενική περίπτωση από μια αυθαίρετη ενεργειακή σταθερά κλίμακας μ . Έστω μια γενικής μορφής δράση, η οποία εξαρτάται από πολλά πεδία $\phi_i = Z_i^{1/2} \phi_i^r$ και εμπεριέχει μάζες m_a^2 και σταθερές αλληλεπίδρασης λ_b . Τότε η εξίσωση Callan-Symanzik, που περιγράφει το πως η επανακανονικοποιημένη n-point 1PI συνάρτηση συσχετισμού εξελίσσεται συναρτήσει του μ , είναι η εξής

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_a \mu \frac{\partial m_a^2}{\partial \mu} + \sum_b \mu \frac{\partial \lambda_b}{\partial \mu} + \sum_{i=1}^n \frac{\mu}{2Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial \mu} \right) \Gamma^{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n; \mu, m_a^2, \lambda_b) = 0. \quad (A'.16)$$

Έχοντας αναφέρει τώρα όλα αυτά, χρειάζεται να αναρωτηθούμε για το εάν η θεωρία με την οποία θα ασχοληθούμε είναι επανακανονικοποιήσιμη. Εκ κατασκευής, το Καθιερωμένο Πρότυπο

είναι μια Yang-Mills θεωρία βαθμίδας και έχει αποδειχθεί (βλέπε [15][16]) ότι είναι διαταρακτικά επανακανονικοποιήσιμη. Επομένως τα μαθηματικά εργαλεία που περιγράψαμε προηγουμένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς δισταγμούς και δυσκολίες.

A.3 Gauge Εξάρτηση της Ενεργού Δράσης

Εφόσον το Καθιερωμένο Πρότυπο περιέχει πεδία βαθμίδας (gauge fields), είναι απαραίτητο να προσθέσουμε gauge fixing όρους στην κλασική δράση έτσι ώστε να κβαντώσουμε την θεωρία μας. Χρησιμοποιώντας την Fadeev-Popov μέθοδο των ghost πεδίων (βλέπε [17]), πρέπει να προσθέσουμε επιπλέον συνεισφορές έτσι ώστε να πετύχουμε gauge-αναλλοίωτη και Lorentz-συναλλοιώτη κβάντωση. Αυτό σημαίνει ότι η ενεργός δράση θα έχει εξάρτηση από την παράμετρο βαθμίδας ξ , δηλαδή $\partial\Gamma/\partial\xi \neq 0$. Οι ταυτότητες του Nielsen (βλέπε [18]) μας δίνουν την ακριβή συναρτησιακή εξάρτηση της ενεργού δράσης, και κατ'επέκταση του ενεργού δυναμικού, από την παράμετρο βαθμίδας. Συγκεκριμένα σύμφωνα με αυτές το ενεργό δυναμικό θα πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση

$$\left[\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + C(\phi, \xi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] V_{\text{eff}}(\xi, \phi) = 0, \quad (\text{A.17})$$

όπου το $C(\phi, \xi)$ είναι μια συνάρτηση που υπολογίζεται όρο προς όρο στην θεωρία διαταραχών. Από την σχέση αυτή μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για $dV_{\text{eff}}/d\phi = 0$, δηλαδή στα ακρότατα του ενεργού δυναμικού, ισχύει $dV_{\text{eff}}/d\xi = 0$ το οποίο σημαίνει ότι αυτά δεν εξαρτώνται από την παράμετρο βαθμίδας (είναι gauge-invariant).

A.4 Saddle-Point Υπολογισμός της Ενεργού Δράσης

Ας υπολογίσουμε τώρα την ενεργό δράση. Για να το κάνουμε αυτό γράφουμε την κλασική λαγκραζιανή πυκνότητα συναρτήσεως του επανακανονικοποιημένου πεδίου $\phi_r = Z^{-1/2}\phi$ ως εξής

$$\mathcal{L}[\phi_r] = \mathcal{L}_r[\phi_r] + \Delta\mathcal{L}[\phi_r] \Rightarrow S[\phi_r] = S_r[\phi_r] + \Delta S[\phi_r]. \quad (\text{A.18})$$

όπου το \mathcal{L}_r είναι το επανακανονικοποιημένο κομμάτι της λαγκραζιανής πυκνότητας που περιέχει τις φυσικές παραμέτρους, και το $\Delta\mathcal{L}$ είναι το κομμάτι που περιέχει όλους τους counterterms. Μπορούμε να διαχωρίσουμε με παρόμοιο τρόπο και την εξωτερική πηγή J ως

$$J(x) = J_r(x) + \Delta J(x), \quad (\text{A.19})$$

όπου το $J_r(x)$ ορίζεται έτσι ώστε να επιβάλει τον ορισμό του ϕ_c στην κατώτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών, δηλαδή

$$\left. \frac{\delta S_r[\phi_r]}{\delta \phi_r(x)} \right|_{\phi_r=\phi_c} = -J_r(x), \quad (\text{A.20})$$

ενώ το counterterm κομμάτι ΔJ της πηγής ορίζεται έτσι ώστε να επιβάλει τον όρο προς όρο ορισμό του ϕ_c στην θεωρία διαταραχών, δηλαδή

$$\phi_c(x) = \langle \phi_r(x) \rangle_{J_r+\Delta J}. \quad (\text{A.21})$$

Οπότε με βάση όλα τα παραπάνω μπορούμε να φέρουμε το generating functional στην ακόλουθη μορφή

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi_r \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_r[\phi_r] + J_r\phi_r + \Delta\mathcal{L}[\phi_r] + \Delta J\phi_r) \right]. \quad (\text{A'.22})$$

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα διαδρομών θεωρούμε ότι η κυρίαρχη συνεισφορά σε αυτό προέρχεται από το $\phi_c(x)$ (classical field configuration) και γράφουμε $\phi_r(x) = \phi_c(x) + n(x)$, όπου το $\phi_c(x)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange και το $n(x)$ αποτελεί μια μικρή διαταραχή. Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε το ακριβές ολοκλήρωμα δημιουργώντας ένα saddle-point ανάπτυγμα, το οποίο αντιστοιχεί σε ένα loop ανάπτυγμα σε δυνάμεις του \hbar (Βλέπε Quantum Field Theory, V. P. Nair). Για τους δύο πρώτους όρους του εκθετικού της σχέσης (A'.22) σύμφωνα με αυτή την μέθοδο έχουμε

$$\begin{aligned} S_r[\phi_r] + \int d^4x J_r\phi_r &= S_r[\phi_c] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n n(x_1) \dots n(x_n) \left. \frac{\delta^n S_r[\phi_r]}{\delta\phi_r(x_1) \dots \delta\phi_r(x_n)} \right|_{\phi_r=\phi_c} + \\ &\int d^4x (J_r\phi_c + J_r n) \Rightarrow S_r[\phi_r] + \int d^4x J_r\phi_r = S_r[\phi_c] + \int d^4x J_r\phi_c + \int d^4x n(x) \left(\left. \frac{\delta S_r[\phi_r]}{\delta\phi_r(x)} \right|_{\phi_r=\phi_c} + J_r \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y n(x)n(y) \left. \frac{\delta^2 S_r[\phi_r]}{\delta\phi_r(x)\delta\phi_r(y)} \right|_{\phi_r=\phi_c} + O(S_r^{(3)}). \end{aligned} \quad (\text{A'.23})$$

Στην παραπάνω σχέση ο γραμμικός όρος ως προς $n(x)$ μηδενίζεται σύμφωνα με την σχέση (A'.20) και έτσι σε αυτή μένουν τελικά οι όροι $S_r[\phi_c] + \int d^4x J_r\phi_c$, οι τετραγωνικοί όροι ως προς $n(x)$ και οι όροι μεγαλύτερης τάξης ως προς $n(x)$ (higher order self-interaction vertices terms). Αντίστοιχα για τους δυο τελευταίους όρους του εκθετικού της σχέσης (A'.22) έχουμε

$$\begin{aligned} \int d^4x (\Delta\mathcal{L}[\phi_r] + \Delta J\phi_r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n n(x_1) \dots n(x_n) \left. \frac{\delta^n \Delta S[\phi_r]}{\delta\phi_r(x_1) \dots \delta\phi_r(x_n)} \right|_{\phi_r=\phi_c} + \int d^4x \Delta J\phi_c + \\ &+ \int d^4x \Delta J n = \Delta S[\phi_c] + \int d^4x \Delta J\phi_c + \int d^4x n(x) \left(\left. \frac{\delta \Delta S[\phi_r]}{\delta\phi_r(x)} \right|_{\phi_r=\phi_c} + \Delta J \right) + O(\Delta S^{(2)}). \end{aligned} \quad (\text{A'.24})$$

Στην τελευταία σχέση ο γραμμικός όρος ως προς το $n(x)$ πρέπει να μηδενίζεται έτσι ώστε να ισχύει $\langle n(x) \rangle_J = 0$ και να ανακτήσουμε την σχέση (A'.21), $\langle \phi_r(x) \rangle_J = \phi_c(x)$. Επομένως με βάση τις δύο τελευταίες σχέσεις οδηγούμαστε στην ακόλουθη έκφραση για το generating functional

$$Z[J] = \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_r[\phi_c] + J_r\phi_c + \Delta\mathcal{L}[\phi_c] + \Delta J\phi_c) \right] \cdot \int \mathcal{D}n \exp (i\bar{S}[n] + i\Delta\bar{S}[n]), \quad (\text{A'.25})$$

όπου για τις συναρτήσεις $\bar{S}[n]$ και $\Delta\bar{S}[n]$ που εμφανίζονται παραπάνω ισχύει

$$\bar{S}[n] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n n(x_1) \dots n(x_n) \left. \frac{\delta^n S_r[\phi_r]}{\delta\phi_r(x_1) \dots \delta\phi_r(x_n)} \right|_{\phi_r=\phi_c}, \quad (\text{A'.26})$$

$$\Delta\bar{S}[n] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n n(x_1) \dots n(x_n) \left. \frac{\delta^n \Delta S[\phi_r]}{\delta\phi_r(x_1) \dots \delta\phi_r(x_n)} \right|_{\phi_r=\phi_c} \quad (\text{A'.27})$$

Για τον υπολογισμό του generating functional της σχέσης (Α'.25) θεωρούμε ότι η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα διαδρομών προέρχεται από τον τετραγωνικό όρο. Έτσι η ολοκλήρωση ως προς n δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια απλή γενίκευση του πεπερασμένων διαστάσεων ολοκληρώματος *Gauss*

$$\int dx_1 \dots dx_n \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j \right) = \mathcal{N} (\det A)^{-1/2(+1)}, \quad (\text{Α'.28})$$

όπου το \mathcal{N} είναι μια σταθερά και το $-1/2$ (**(+1)**) είναι για μποζόνια (**φερμιόνια**), αντίστοιχα. Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\int \mathcal{D}n \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y n(x) A(x,y) n(y) \right] = \mathcal{N} (\det[-A])^{-1/2(+1)}, \quad (\text{Α'.29})$$

όπου τώρα το \mathcal{N} είναι μια τυπικά άπειρη σταθερά η οποία απαλείφεται όταν θα υπολογίζουμε τις συναρτήσεις συσχετισμού, και όπου το μείον μπροστά από το A οφείλεται στην σύμβαση προσημών που έχουμε πάρει για την μετρική. Οπότε χρησιμοποιώντας την σχέση του Jacobi $\det A = \exp(\ln(\det A)) = \exp(\text{Tr}[\ln A])$ και διαχειριζοντας τους υπόλοιπους όρους (αυτούς μεγαλύτερης τάξης ως προς n) ως διαταραχές, μπορούμε να γράψουμε το εξής

$$\int \mathcal{D}n \exp (i\bar{S}[n] + i\Delta\bar{S}[n]) = \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\text{+1}) \text{Tr} \ln \left(-\frac{\delta^2 S_r}{\delta\phi_r^2} [\phi_c] \right) + (\text{higher order}) \right\}. \quad (\text{Α'.30})$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι παραπάνω εκθετοποιήσαμε τα διαγράμματα μεγαλύτερης τάξης, πράγμα το οποίο είναι πάντα δυνατόν καθώς το e^z για $z \in \mathbb{C}$ παίρνει τιμές σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Επίσης μπορούμε εκ του ασφαλούς, να παραλείψουμε από το τελικό αποτέλεσμα την σταθερά \mathcal{N} καθώς οι συναρτήσεις συσχετισμού διαιρούνται πάντα με το $Z[0]$, το οποίο απαλείφει αυτή την σταθερά.

Άρα σύμφωνα με τις σχέσεις (Α'.30), (Α'.25) και (Α'.6) βρίσκουμε ότι για το $W[J]$ ισχύει

$$W[J] = S_r[\phi_c] + \Delta S[\phi_c] + \int d^4x [J_r \phi_c + \Delta J \phi_c] + \frac{i}{2}(\text{-i}) \text{Tr} \ln \left(-\frac{\delta^2 S_r}{\delta\phi_r^2} [\phi_c] \right) - i(\text{higher order}). \quad (\text{Α'.31})$$

Οπότε πραγματοποιώντας στην παραπάνω σχέση τον μετασχηματισμό Legendre (σχέση Α'.12) που μας δίνει την ενεργό δράση προκύπτει τελικά για αυτήν

$$\Gamma[\phi_c] = S_r[\phi_c] + \Delta S[\phi_c] + \frac{i}{2}(\text{-i}) \text{Tr} \ln \left(-\frac{\delta^2 S_r}{\delta\phi_r^2} [\phi_c] \right) - i(\text{higher order}). \quad (\text{Α'.32})$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι η ενεργός δράση αποτελεί το άθροισμα της tree-level κλασικής δράσης με έναν one-loop διορθωτικό όρο (τον τρίτο όρο της παραπάνω σχέσης) και με ένα άπειρο άθροισμα που μας δίνει διορθωτικούς όρους περισσότερων loops. Στην γενική περίπτωση, στην ενεργό δράση, και κατ'επέκταση στο ενεργό δυναμικό, θα υπάρχουν συνεισφορές από πολλαπλά πεδία, και έτσι σε επίπεδο one-loop διορθώσεων θα πρέπει να υπολογίσουμε τις συνεισφορές από βαθμωτά και φερμιονικά πεδία, καθώς και αυτές από μποζονικά πεδία βαθμίδας.

Α'.5 Συνεισφορές από Βαθμωτά Πεδία

Ας ξεκινήσουμε τον υπολογισμό των one-loop συνεισφορών στο ενεργό δυναμικό από τις συνεισφορές από βαθμωτά πεδία. Έστω ότι η λαγκραζιανή πυκνότητα της θεωρίας μας έχει σε tree-level την

ακόλουθη μορφή

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i + \frac{1}{2} m^2 (\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4} [(\phi^i)^2]^2, \quad (\text{A'.33})$$

όπου το $i = 1, 2, \dots, N$ με N τον αριθμό των βαθμωτών πεδίων της θεωρίας μας, και όπου παραπάνω (και γενικά στην συνέχεια όταν εμφανίζονται επαναλαμβανόμενοι δείκτες) χρησιμοποιούμε την αθροιστική σύμβαση Einstein. Από την μορφή της $\mathcal{L}(\phi)$ μπορούμε αμέσως να παρατηρήσουμε ότι αυτή είναι $O(n)$ -συμμετρική και επίσης αμέσως να συμπεραίνουμε ότι για την δεύτερη συναρτησιακή παράγωγο της δράσης ($-$ inverse propagator) στο $\phi = \phi_c$ έχουμε

$$-\frac{\delta^2 S}{\delta \phi_i \delta \phi_j}[\phi_c] = \delta^{ij} \square - m^2 \delta^{ij} + \lambda (\phi_c^2 \delta^{ij} + 2\phi_c^i \phi_c^j) = \delta^{ij} (\square - m^2 + \lambda \phi_c^2) + 2\lambda \phi_c^i \phi_c^j, \quad (\text{A'.34})$$

όπου παραπάνω έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό $\phi_c^2 = \phi_c^i \phi_c^i$. Όμως έχουμε την ελευθερία να επιλέξουμε μια διεύθυνση για το ϕ_c , έτσι ώστε να ισχύει $\phi_c^i = (0, 0, \dots, \phi_c)$. Με αυτόν τον τρόπο ο τελεστής που δίνεται από την σχέση (A'.34) γίνεται ίσος με τον τελεστή Klein-Gordon, $(-\square - m_i^2(\phi_c)) \delta^{ij}$, όπου για τις παραμέτρους μάζας $m_i^2(\phi_c)$ ισχύει η εξής σχέση

$$m_i^2(\phi_c) = \begin{cases} \lambda \phi_c^2 - m^2, & (N-1) \text{ fields} \\ 3\lambda \phi_c^2 - m^2, & 1 \text{ field} \end{cases}. \quad (\text{A'.35})$$

Ο συνολικός διορθωτικός όρος $\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left(-\frac{\delta^2 S_r}{\delta \phi_r^2}[\phi_c] \right)$ στην ενεργό δράση στην περίπτωση που μελετάμε θα αποτελεί το άθροισμα των διορθωτικών όρων κάθε βαθμωτού πεδίου ξεχωριστά, δηλαδή θα ισχύει

$$\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left(-\frac{\delta^2 S_r}{\delta \phi_r^2}[\phi_c] \right) = (N-1) \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\square + \lambda \phi_c^2 - m^2) + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\square + 3\lambda \phi_c^2 - m^2), \quad (\text{A'.36})$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε οποιοδήποτε από τα ίχνη που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση ακολουθώντας την εξής διαδικασία. Αντικαθιστούμε το ίχνος του τελεστή με ένα άθροισμα στις ιδιοτιμές του ως εξής

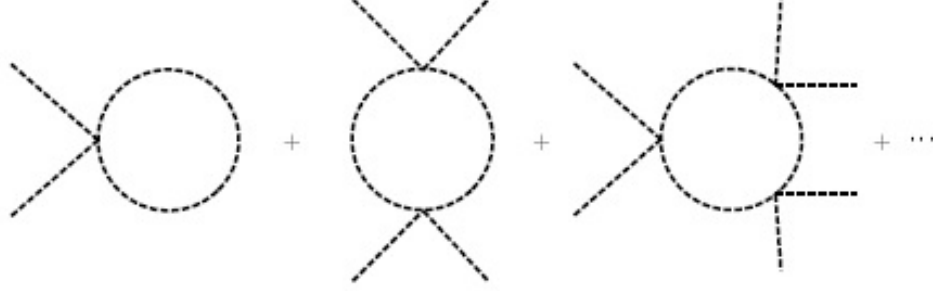
$$\text{Tr} \ln (\square + m_i^2) = \langle k|k \rangle \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln (-k^2 + m_i^2) = VT \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln (-k^2 + m_i^2), \quad (\text{A'.37})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση $\langle k|p \rangle = \int d^4 x e^{i(k-p)x}$ για να προκύψει ο χωροχρονικός παράγοντας όγκου VT . Κάνοντας τώρα ένα Wick Rotation στην παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\begin{aligned} (\text{A'.37}) &\xrightarrow[k^0=ik_E^0]{W.R.} iVT \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \ln (k_E^2 + m_i^2) = -iVT \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + m_i^2)^a} \Big|_{a=0} = \\ &= -iVT \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(a-d/2)}{\Gamma(a)} \frac{1}{(m_i^2)^{a-d/2}} \right) \Big|_{a=0} = -iVT \frac{\Gamma(-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} (m_i^2)^{d/2}, \end{aligned} \quad (\text{A'.38})$$

όπου παραπάνω έχουμε χρησιμοποιήσει για να οδηγηθούμε στο τελικό αποτέλεσμα τις εξής σχέσεις

$$1) \frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a \quad 2) \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \frac{1}{(x^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-d/2} \quad \text{και} \quad \Gamma(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} 1/a. \quad (\text{A'.39})$$



Σχήμα Α'.1: One-particle irreducible διαγράμματα που συνεισφέρουν στην one-loop διόρθωση του ενεργού δυναμικού από τη θεωρία που περιγράφεται από την σχέση (Α'.33).

Στην σχέση (Α'.38) όμως παρατηρούμε ότι για $d = 4$ έχουμε απειρισμό της συνάρτησης Γάμμα. Για αυτό το λόγο για να διαχειριστούμε αυτή την απειρία θέτουμε $d = 4 - 2\epsilon$ με $\epsilon \rightarrow 0$ και πολλαπλασιάζουμε την σχέση (Α'.38) με μ^{4-d} , όπου το μ έχει διαστάσεις ενέργειας, έτσι ώστε να διατηρήσουμε σωστές τις διαστάσεις του ίχνους (και άρα και του ενεργού δυναμικού). Αυτό που έχουμε κάνει ουσιαστικά είναι να χρησιμοποιήσουμε το \overline{MS} renormalization scheme για τον διαχειρισμό της απειρίας. Επομένως σύμφωνα με όλα αυτά που αναφέραμε έχουμε για το $\text{Tr} \ln(\square + m_i^2)$ το ακόλουθο

$$\text{Tr} \ln(\square + m_i^2) = -iVT \frac{\Gamma(-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \mu^4 \left(\frac{m_i^2}{\mu^2}\right)^{d/2} = \frac{-iVT}{\frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - 1\right)} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} m_i^4 \left(\frac{\mu^2}{m_i^2}\right)^{2-d/2}. \quad (\text{A'.40})$$

Μπορούμε όμως στην παραπάνω σχέση το $\Gamma(2 - d/2)$ να το προσεγγίσουμε μέσω της ακόλουθης σχέσης

$$\Gamma(2 - d/2) = \Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + O(\epsilon). \quad (\text{A'.41})$$

Επίσης από το θεώρημα Taylor γνωρίζουμε ότι ισχύει $a^\epsilon = e^{\epsilon \ln a} \simeq 1 + \epsilon \ln a + O(\epsilon^2)$. Χρησιμοποιώντας αυτό το ανάπτυγμα μπορούμε να γράψουμε τις ποσότητες $(1/4\pi)^{d/2}$, $(\mu^2/m_i^2)^{2-d/2}$ και $[\frac{d}{2}(\frac{d}{2} - 1)]^{-1}$ που εμφανίζονται στην σχέση (Α'.40), δεδομένου ότι ισχύει $d = 4 - 2\epsilon$, ως εξής

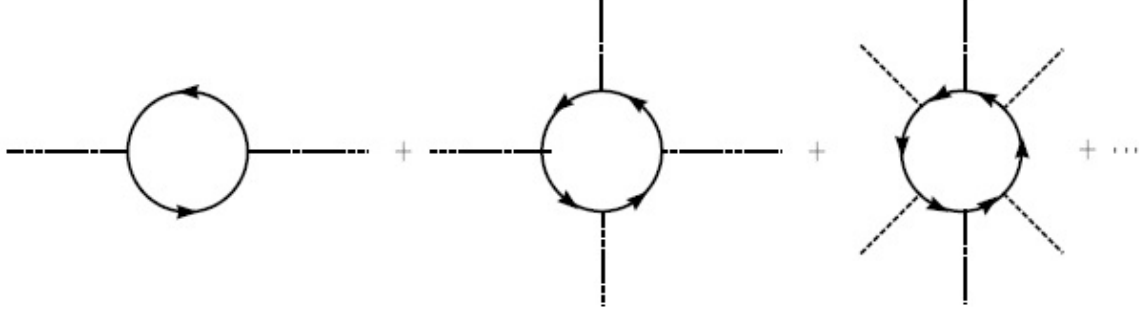
$$\text{i) } \left(\frac{\mu^2}{m_i^2}\right)^{2-d/2} = \left(\frac{\mu^2}{m_i^2}\right)^\epsilon = e^{\epsilon \ln(\mu^2/m_i^2)} \simeq 1 + \epsilon \ln\left(\frac{\mu^2}{m_i^2}\right) + O(\epsilon^2), \quad (\text{A'.42})$$

$$\text{ii) } \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{d/2} = \frac{(4\pi)^\epsilon}{(4\pi)^2} = \frac{e^{\epsilon \ln(4\pi)}}{(4\pi)^2} \simeq \frac{1}{(4\pi)^2} (1 + \epsilon \ln(4\pi) + O(\epsilon^2)), \quad (\text{A'.43})$$

$$\text{iii) } \frac{1}{\frac{d}{2}(\frac{d}{2} - 1)} = \frac{1}{(2 - \epsilon)(1 - \epsilon)} \simeq \frac{1}{2 - 3\epsilon} \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\right) + O(\epsilon^2). \quad (\text{A'.44})$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (Α'.41), (Α'.42), (Α'.43) και (Α'.44) στην σχέση (Α'.40) προκύπτει

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln(\square + m_i^2) &= -\frac{iVT}{2} m_i^4 \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\right) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E\right) \frac{1}{(4\pi)^2} (1 + \epsilon \ln(4\pi)) \left(1 + \epsilon \ln\left(\frac{\mu^2}{m_i^2}\right)\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Tr} \ln(\square + m_i^2) = -i \frac{VT m_i^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + \ln\left(\frac{\mu^2}{m_i^2}\right) + \frac{3}{2} + O(\epsilon)\right). \end{aligned} \quad (\text{A'.45})$$



Σχήμα Α'.2: One-particle irreducible διαγράμματα που συνεισφέρουν στην one-loop διόρθωση του ενεργού δυναμικού από τη φερμιονική θεωρία που περιγράφεται από την σχέση (Α'.49).

Οπότε τώρα με βάση τις σχέσεις (Α'.45), (Α'.32), και (Α'.15) συμπεραίνουμε ότι η one-loop συνεισφορά ενός βαθμωτού πεδίου στο ενεργό δυναμικό είναι η εξής

$$V_S^1(\phi_c) = -\frac{1}{64\pi^2} m_i^4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + \ln \left(\frac{\mu^2}{m_i^2(\phi_c)} \right) + \frac{3}{2} + O(\epsilon) \right) + \Delta V(\phi_c). \quad (\text{Α'.46})$$

Όμως, όπως συζητήσαμε και στο υποκεφάλαιο Α'.2, στο \overline{MS} renormalization scheme επιλέγουμε τα counterterms έτσι ώστε να απαλείφονται με το κομμάτι του δυναμικού που είναι ανάλογο του $\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi$. Έτσι το τελικό αποτέλεσμα για το $V_S^1(\phi_c)$ παίρνοντας και το όριο $\epsilon \rightarrow 0$ είναι

$$V_S^1(\phi_c) = \frac{1}{64\pi^2} m_i^4(\phi_c) \left(\ln \left(\frac{m_i^2(\phi_c)}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right). \quad (\text{Α'.47})$$

Τελικά η συνολική one-loop συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό, που προκύπτει από ένα σύστημα βαθμωτών πεδίων που περιγράφεται από την λαγκραζιανή πυκνότητα της σχέσης (Α'.33), δίνεται από την σχέση

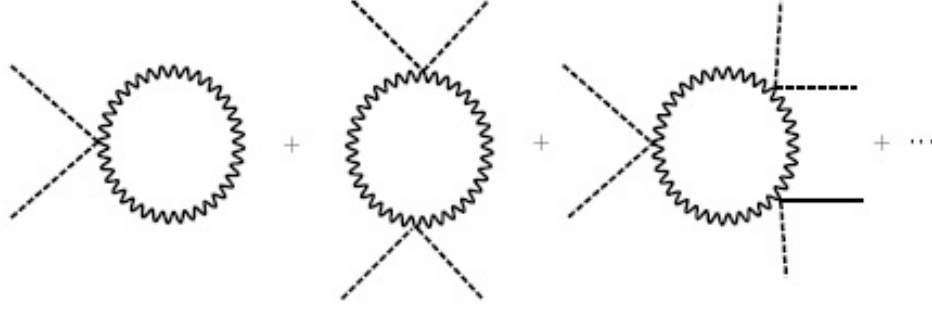
$$V_S(\phi_c) = \frac{-1}{64\pi^2} (3\lambda\phi_c^2 + m^2)^2 \left(\ln \left[\frac{\mu^2}{3\lambda\phi_c^2 + m^2} \right] + \frac{3}{2} \right) - \frac{N-1}{64\pi^2} (\lambda\phi_c^2 + m^2)^2 \left(\ln \left[\frac{\mu^2}{\lambda\phi_c^2 + m^2} \right] + \frac{3}{2} \right). \quad (\text{Α'.48})$$

Α'.6 Συνεισφορές από Φερμιονικά Πεδία

Ας υπολογίσουμε τώρα την one-loop συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό που προέρχεται από φερμιονικά πεδία, δηλαδή το $V_F(\phi_c)$. Θεωρούμε μια θεωρία φερμιονικών πεδίων η οποία περιγράφεται από την λαγκραζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_a \gamma^\mu \partial_\mu \psi^a - \bar{\psi}_a (M_f)_b^a \psi^b, \quad (\text{Α'.49})$$

όπου ο πίνακας μαζών $(M_f)_b^a$ είναι μια γραμμική συνάρτηση των βαθμωτών πεδίων ϕ_c^i , δηλαδή ισχύει $(M_f)_b^a = \Gamma_{bi}^a \phi_c^i$. Για να υπολογίσουμε το $V_F(\phi_c)$ ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε προηγουμένως για τα βαθμωτά πεδία, με τις μόνες διαφορές να είναι ότι τώρα θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας των φερμιονίων, να κρατήσουμε στην σχέση (Α'.32) το $(-i)$, να χρησιμοποιήσουμε στην θέση του αντιστρόφου διαδότη της σχέσης (Α'.34) τον φερμιονικό αντίστροφο διαδότη $(-\delta^2 S / \delta\psi\delta\bar{\psi})[\phi_c] = -i\gamma^\mu \partial_\mu + M_f$, να χρησιμοποιήσουμε την σχέση



Σχήμα Α'.3: One-particle irreducible διαγράμματα που συνεισφέρουν στην one-loop διόρθωση του ενεργού δυναμικού από πεδία βαθμίδας για μια θεωρία που περιγράφεται από την σχέση (Α'.52).

$\text{Tr} \ln(-i\gamma^\mu \partial_\mu + M_f) = \text{Tr} \ln(i\gamma^\mu \partial_\mu + M_f) = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(\square + (M_f)^2)$ (που είναι συνέπεια των ιδιοτήτων των γάμμα πινάκων, βλέπε [13]) και να πάρουμε ένα άθροισμα (ίχνος) πάνω σε όλα τα φερμιονικά πεδία. Επίσης για να κάνει κανείς τον υπολογισμό του $V_F(\phi_c)$ πρέπει να ορίσει έναν τελεστή ίχνους Tr για φερμιόνια σε d διαστάσεις, ο οποίος μπορεί για λόγους ευκολίας να επιλεγθεί έτσι ώστε να ισχύει $\text{Tr} I = n$ σε όλες τις d διαστάσεις, όπου n είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών των φερμιονικών πεδίων και ισούται με 2 για Weyl σπίνορες και με 4 για Dirac σπίνορες. Αυτές οι επιπλέον προσθήκες έχουν ως αποτέλεσμα η διόρθωση $V_F(\phi_c)$ να παίρνει την εξής μορφή

$$V_F(\phi_c) = -\frac{n}{2} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \ln [k_E^2 + (M_f)^2], \quad (\text{A'.50})$$

Επομένως εφαρμόζοντας το \overline{MS} renormalization scheme όπως κάναμε προηγουμένως για τα βαθμωτά πεδία, καταλήγουμε τελικά στην ακόλουθη σχέση για την one-loop συνεισφορά των φερμιονικών πεδίων στο ενεργό δυναμικό

$$V_F(\phi_c) = \frac{-n}{64\pi^2} (M_f)^4 \left(\ln \left(\frac{M_f^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right). \quad (\text{A'.51})$$

Α'.7 Συνεισφορές από Πεδία Βαθμίδας

Ας θεωρήσουμε τώρα μια θεωρία με πεδία βαθμίδας, η οποία περιγράφεται από την εξής λαγκραζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \text{Tr} (D_\mu \phi_a)^\dagger D^\mu \phi^a, \quad (\text{A'.52})$$

όπου παραπάνω έχουμε ένα πεδίο βαθμίδας $A^\mu = A_a^\mu T^a$ με T^a τους γεννήτορες της ομάδας $\text{SU}(n)$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu]$ και g τη gauge σταθερά αλληλεπίδρασης. Η μόνη συνεισφορά (σε one-loop) στο ενεργό δυναμικό προέρχεται από τον όρο αλληλεπίδρασης scalar-scalar-vector-vector της λαγκραζιανής πυκνότητας (προκύπτει από τον δεύτερο όρο της σχέσης Α'.52)

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{1}{2} (M_{gb})_{ab}^2 A^{a\mu} A_\mu^b, \quad (\text{A'.53})$$

όπου για το $(M_{gb})_{ab}^2(\phi_c)$ έχουμε $(M_{gb})_{ab}^2(\phi_c) = g^2 \text{Tr} [(T_{ac}^i \phi_i) + (T_{bj}^c \phi_j)]$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με προηγουμένως οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση για την one-loop συνεισφορά στο

ενεργό δυναμικό από gauge μποζονικά πεδία

$$V_B(\phi_c) = \frac{\Delta}{2} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \ln [k_E^2 + (M_{gb})^2] , \quad (\text{A'.54})$$

όπου παραπάνω το $\Delta = d - 1 = 3 - 2\epsilon$ είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας ενός έμμοζου μποζονικού πεδίου βαθμίδας. Τελικά εφαρμόζοντας το \overline{MS} renormalization scheme όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για το $V_B(\phi_c)$

$$V_B(\phi_c) = \frac{3}{64\pi^2} (M_{gb})^4 \left(\ln \left(\frac{M_{gb}^2}{\mu^2} \right) - \frac{5}{6} \right) . \quad (\text{A'.55})$$

Στην παραπάνω σχέση ο παράγοντας $5/6$ προέρχεται από το γεγονός ότι έχουμε μια επιπλέον συνεισφορά από τον όρο $(3 - 2\epsilon)/\epsilon$ όταν χρησιμοποιούμε τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιήσαμε και προηγουμένως για μικρά ϵ στο \overline{MS} . Αυτός ο όρος μπορεί να δει κανείς ότι εξαρτάται ουσιαστικά από το renormalization scheme που χρησιμοποιούμε (βλέπε [20]).

A'.8 One-Loop Ενεργό Δυναμικό Καθιερωμένου Πρότυπου

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε όλα όσα είδαμε στα προηγούμενα υποκεφάλαια για το πεδίο Higgs του καθιερωμένου πρότυπου για το οποίο γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} . \quad (\text{A'.56})$$

Για το tree-level δυναμικό του πεδίου Higgs γνωρίζουμε ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$V_0(\phi_c) = -\frac{m^2}{2} \phi_c^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_c^4 \quad (\text{A'.57})$$

όπου τα λ και m^2 είναι θετικές σταθερές οι οποίες προσδιορίζουν το κενό της θεωρίας στο tree-level ($v^2 = m^2/\lambda$, όπου το $v \simeq 246$ GeV αποτελεί το vacuum expectation value). Το ενεργό δυναμικό του πεδίου Higgs επιδέχεται διορθώσεις από βαθμωτά, φερμιονικά και gauge (μποζονικά) πεδία. Έτσι μπορούμε να γράψουμε για την one-loop διόρθωση στο ενεργό δυναμικό

$$V_1(\phi_c) = V_S(\phi_c) + V_F(\phi_c) + V_B(\phi_c) . \quad (\text{A'.58})$$

Παρατήρηση: Κανονικά το $V_1(\phi_c)$ επιδέχεται διορθώσεις και από ghost πεδία αλλά επειδή έχουμε χρησιμοποιήσει την βαθμίδα Landau για τα πεδία βαθμίδας δεν χρειάζεται η εισαγωγή ghost πεδίων.

Με βάση όσα είδαμε προηγουμένως για να υπολογίσουμε αυτή τη διόρθωση αυτό που χρειάζεται να κάνουμε είναι να συμπεράνουμε τις παραμέτρους μάζας από την λαγκραζιανή πυκνότητα του καθιερωμένου πρότυπου. Για τα βαθμωτά πεδία της σχέσης (A'.56) οι παράμετροι μάζας έχουν την μορφή

$$m_i^2(\phi_c) = \begin{cases} \lambda\phi_c^2 - m^2, & \text{for 3 fields (Goldstone bosons)} \\ 3\lambda\phi_c^2 - m^2, & \text{for 1 field (Higgs boson)} \end{cases} . \quad (\text{A'.59})$$

Για το φερμιονικό κομμάτι της λαγκραζιανής πυκνότητας που περιέχει τον όρο αλληλεπιδράσεων ισχύει $\mathcal{L} = \frac{h_f}{\sqrt{2}}\phi_c\bar{\psi}\psi$, όπου το h_f είναι η Yukawa σταθερά αλληλεπίδρασης του αντίστοιχου φερμιονίου f . Εμείς στα πλαίσια αυτής της προσέγγισης ενδιαφερόμαστε μόνο για το top κουάρκ που είναι το μόνο φερμιόνιο που μπορεί να δώσει μια σημαντική συνεισφορά στο one-loop ενεργό δυναμικό. Επομένως για την παράμετρο μάζας του top κουάρκ έχουμε

$$M_t^2(\phi_c) = \frac{1}{2}h_t^2\phi_c^2. \quad (\text{A'.60})$$

Για τα έμμαζα μποζονικά πεδία βαθμίδας W^\pm και Z γνωρίζουμε ότι για τις μάζες τους ισχύει

$$M_W^2(\phi_c) = \frac{1}{4}g^2\phi_c^2 \quad \text{και} \quad M_Z^2(\phi_c) = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)\phi_c^2. \quad (\text{A'.61})$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλες οι ϕ_c -εξαρτώμενες παράμετροι μάζας είναι τέτοιες ώστε όταν αυτές υπολογίζονται στο vacuum expectation value (VEV) να μας δίνουν τις φυσικές μάζες των σωματιδίων (για παράδειγμα στο VEV οι μάζες των Goldstone bosons, που περιγράφονται από την πρώτη γραμμή της σχέσης (A'.59), μηδενίζονται). Τελικά με βάση τις σχέσεις (A'.59), (A'.60), (A'.61), (A'.55), (A'.51) και (A'.47) συμπεραίνουμε ότι για την one-loop διόρθωση στο ενεργό δυναμικό του Higgs ισχύει η εξής σχέση

$$V_1(\phi_c) = \sum_{S,F,B} \frac{\sigma(i)}{64\pi^2} (M_i^2(\phi_c))^2 \left(\ln \left(\frac{M_i^2(\phi_c)}{\mu^2} \right) - C(i) \right), \quad (\text{A'.62})$$

όπου παραπάνω με S συμβολίζουμε τα βαθμωτά πεδία, με F τα φερμιονικά πεδία και με B τα μποζονικά πεδία βαθμίδας. Επίσης παραπάνω το $\sigma(i)$ ισούται με 1 για τα μποζόνια και με -1 για τα φερμιόνια, ενώ το $C(i)$ ισούται με 3/2 για βαθμωτά και φερμιονικά πεδία και με 5/6 για μποζονικά πεδία βαθμίδας. Η παραπάνω έκφραση όμως δεν είναι απολύτως ορθή καθώς σε αυτή πρέπει να λάβουμε υπόψη και τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας για κάθε πεδίο στο άθροισμα. Εμείς σε αυτή μας την μελέτη θα λάβουμε υπόψη μας συνεισφορές στο ενεργό δυναμικό που προέρχονται από το ίδιο το πεδίο Higgs (1 βαθμός ελευθερίας), τα Goldstone bosons (3 β. ε.), το μποζόνιο Z (3 β. ε.), τα μποζόνια W^\pm (6 β. ε.) και το top κουάρκ (4×3 (χρώμα) β. ε.), και θα αγνοήσουμε τις συνεισφορές που προέρχονται από τα άλλα κουάρκ και λεπτόνια καθώς οι σταθερές αλληλεπίδρασης τους είναι αμελητέες. Επομένως συμπεραίνουμε με βάση όλα τα παραπάνω ότι το one-loop διορθωμένο ενεργό δυναμικό του Higgs σε μηδενική θερμοκρασία, έχει την ακόλουθη μορφή

$$V_{\text{eff}}(\phi_c) = -\frac{m^2}{2}\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_c^4 + \sum_{i=W,Z,t,\chi,h} \frac{n_i}{64\pi^2} M_i^4(\phi_c) \left[\ln \left(\frac{M_i^2(\phi_c)}{\mu^2} \right) - C(i) \right], \quad (\text{A'.63})$$

όπου με h συμβολίζουμε το μποζόνιο Higgs και με χ τα Goldstone bosons, και όπου για τους συντελεστές n_i και $C(i)$ ισχύει

$$n_W = 6, \quad n_\chi = n_Z = 3, \quad n_t = -12, \quad n_h = 1, \quad C_W = C_Z = \frac{5}{6} \quad \text{και} \quad C_t = C_\chi = C_h = \frac{3}{2} \quad (\text{A'.64})$$

ενώ παράλληλα για τις παραμέτρους μάζας $M_i^2(\phi_c)$ έχουμε

$$M_W^2 = \frac{1}{4}g^2\phi_c^2, \quad M_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)\phi_c^2, \quad M_h = 3\lambda\phi_c^2 - m^2, \quad M_\chi = \lambda\phi_c^2 - m^2, \quad M_t^2 = \frac{1}{2}h_t^2\phi_c^2. \quad (\text{A'.65})$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι από την σχέση (Α'.63) φαίνεται να έχει εισαχθεί στο ενεργό δυναμικό μια εξάρτηση από μια αυθαίρετη σταθερά κλίμακας μ με μονάδες ενέργειας, πράγμα το οποίο αναμέναμε σύμφωνα με το υποκεφάλαιο (Α'.2). Μπορεί να δει βέβαια κανείς ότι το ενεργό δυναμικό ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dt}(t, \lambda_a(t), M_i^2(t)) = 0, \quad \text{με} \quad t = \ln \mu^2, \quad (\text{Α'.66})$$

όπου λ_a είναι οι σταθερές αλληλεπίδρασης της θεωρίας μας. Δηλαδή το ενεργό δυναμικό είναι scale independent.

B' One-Loop Διορθώσεις στο Πεπερασμένης Θερμοκρασίας Ενεργό Δυναμικό του Higgs

Στο παράρτημα αυτό, όπως και στο προηγούμενο, θα χρησιμοποιήσουμε το φυσικό σύστημα μονάδων όπου ισχύει $\hbar = c = k_B = 1$ και επίσης θα χρησιμοποιήσουμε για την μετρική την σύμβαση $(+---)$.

B'.1 Μεγαλοκανονική Συλλογή

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα αναφερθούμε σε μερικούς ορισμούς από την Θερμοδυναμική και την Στατιστική Φυσική που θα μας χρειαστούν στην συνέχεια. Η μικροκανονική συλλογή χρησιμοποιείται για να περιγράψει απομονωμένα συστήματα με συγκεκριμένο όγκο V , αριθμό σωματιδίων N και ενέργεια E . Η κανονική συλλογή περιγράφει ένα σύστημα το οποίο βρίσκεται σε επαφή με ένα θερμικό λουτρό θερμοκρασίας T . Σε αυτή τη περίπτωση μπορεί να υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ του συστήματος και του θερμικού λουτρού, όμως τα T , N και V παραμένουν σταθερά. Τέλος στην μεγαλοκανονική συλλογή το σύστημα μπορεί να ανταλλάζει ενέργεια και σωματίδια με το θερμικό λουτρό όμως τα T , V και τα χημικά δυναμικά παραμένουν σταθερά. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την εικόνα Heisenberg.

Έστω ένα σύστημα το οποίο περιγράφεται από μια χαμιλτονιανή H και περιέχει ένα σύνολο διατηρουμένων φορτίων Q_A , τα οποία μετατίθενται μεταξύ τους. Η κατάσταση ισορροπίας του συστήματος (σε ηρεμία) περιγράφεται από τον τελεστή πυκνότητας (density operator) της μεγαλοκανονικής συλλογής

$$\rho \equiv \frac{e^{-\sum_A a_A Q_A - \beta H}}{\text{Tr}(e^{-\sum_A a_A Q_A - \beta H})} = e^{-\Phi} \cdot e^{-\sum_A a_A Q_A - \beta H}, \quad (\text{B'.1})$$

όπου $\Phi = \ln \text{Tr}(e^{-\sum_A a_A Q_A - \beta H})$, $\beta = 1/T$ και $a_A = -\beta \mu_A$, με T την θερμοκρασία του συστήματος και μ_A τα χημικά δυναμικά. Η μέση τιμή ενός οποιουδήποτε τελεστή \mathcal{O} στην μεγαλοκανονική συλλογή ορίζεται ως εξής

$$\langle \mathcal{O} \rangle \equiv \text{Tr}(\mathcal{O}\rho) = \frac{\text{Tr}(\mathcal{O}e^{-\sum_A a_A Q_A - \beta H})}{\text{Tr}(e^{-\sum_A a_A Q_A - \beta H})}. \quad (\text{B'.2})$$

η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα $\langle I \rangle = 1$. Στην συνέχεια αυτού του παραρτήματος θα μελετήσουμε την υποπερίπτωση όπου τα χημικά δυναμικά ισούνται με μηδέν (κανονική συλλογή).

B'.2 Generating Functionals στην Θερμική Θεωρία Πεδίου

Ξεκινάμε θεωρώντας την περίπτωση ενός πραγματικού βαθμωτού πεδίου $\phi(x)$, όπου ο χρόνος $x_0 = t$ έχει συνεχιστή αναλυτικά στο μιγαδικό επίπεδο. Γνωρίζουμε ότι η χρονική εξέλιξη ενός βαθμωτού πεδίου δίνεται από την σχέση

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(0, \vec{x}) e^{-iHt}. \quad (\text{B'.3})$$

Ορίζουμε την θερμική n -point συνάρτηση συσχετισμού ως την μεγαλοκανονική μέση τιμή των n χρονικά διατεταγμένων πεδίων, δηλαδή

$$G^{(C)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle T_C[\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)] \rangle, \quad (\text{B'.4})$$

όπου ο δείκτης C στον τελεστή χρονικής διάταξης, T_C , σημαίνει ότι τα πεδία πρέπει να διαταχθούν κατά μήκος της τροχιάς C στο t -μιγαδικό επίπεδο. Για παράδειγμα για το χρονικά διατεταγμένο γινόμενο δυο πεδίων $\phi(x)$ και $\phi(y)$ κατά μήκος της τροχιάς C έχουμε

$$T_C[\phi(x)\phi(y)] = \theta_C(x_0 - y_0)\phi(x)\phi(y) + \theta_C(y_0 - x_0)\phi(y)\phi(x). \quad (\text{B'.5})$$

Αν παραμετροποιήσουμε την διαδρομή C ως $t = z(\tau)$, όπου το τ είναι μια πραγματική μεταβλητή, τότε η T_C χρονική διάταξη σημαίνει κανονική διάταξη κατά μήκος του τ . Για αυτό οι συναρτήσεις θήτα και δέλτα δίνονται σε αυτή τη περίπτωση από τις εξής σχέσεις

$$\theta_C(t) = \theta(\tau) \quad \text{και} \quad \delta_C(t) = \left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial \tau} \right)^{-1} \delta(\tau). \quad (\text{B'.6})$$

Οι κανόνες και οι ορισμοί του φορμαλισμού των συναρτησοειδών που είδαμε στο προηγούμενο παράρτημα στα πλαίσια της συμβατικής Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου μπορούν να εφαρμοσθούν και στην περίπτωση της Θερμικής Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου με την αλλαγή $\delta J(y)/\delta J(x) = \delta_C(x_0 - y_0)\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$. Έτσι το generating functional στην Θερμική Κβαντική Θεωρία Πεδίου δίνεται από την ακόλουθη σχέση (βλέπε [20], [22])

$$Z^{(\beta)}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int_C d^4x \mathcal{L} + i \int_C d^4x J(x)\phi(x)} \quad \text{ή} \quad Z^{(\beta)}[J] = \langle T_C e^{i \int_C d^4x J(x)\phi(x)} \rangle, \quad (\text{B'.7})$$

όπου στον δεύτερο (ισοδύναμο) ορισμό η $Z^{(\beta)}[J]$ είναι κανονικοποιημένη έτσι ώστε να ισχύει $Z^{(\beta)}[0] = 1$, και όπου το ολοκλήρωμα στον χρόνο ακολουθεί την διαδρομή C στο μιγαδικό επίπεδο. Ομοίως, η γεννήτρια συνάρτηση των συνδεδεμένων συναρτήσεων συσχετισμού, $W^{(\beta)}[J]$ ορίζεται ως εξής

$$Z^{(\beta)}[J] \equiv e^{iW^{(\beta)}[J]} \Rightarrow W^{(\beta)}[J] \equiv -i \ln Z^{(\beta)}[J], \quad (\text{B'.8})$$

και η γεννήτρια συνάρτηση των 1PI συναρτήσεων συσχετισμού, $\Gamma^{(\beta)}[\phi_c]$ (ενεργός δράσης), δίνεται από τον μετασχηματισμό Legendre του $W^{(\beta)}[J]$ ως προς την κλασσικά αναμενόμενη τιμή του πεδίου παρουσία της πηγής $J(x)$, $\phi_c(x) = \delta W^{(\beta)}[J]/\delta J(x)$,

$$\Gamma^{(\beta)}[\phi_C] = W^{(\beta)}[J] - \int_C d^4x \frac{\delta W^{(\beta)}[J]}{\delta J(x)}. \quad (\text{B'.9})$$

Όπως και στην περίπτωση της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου μηδενικής θερμοκρασίας, το ενεργό δυναμικό στην Κβαντική θεωρία Πεδίου πεπερασμένης θερμοκρασίας ορίζεται από την αντίστοιχη ενεργό δράση μέσω της σχέσης

$$V_{\text{eff}}^{(\beta)}(\phi_c) = - \left. \frac{\Gamma^{(\beta)}[\phi_c]}{\int d^4x} \right|_{\phi_c = \text{const.}}. \quad (\text{B'.10})$$

B'.3 Two-Point Θερμικές Συναρτήσεις Συσχετισμού (Διαδότες)

Ας δούμε τώρα μερικά πράγματα για τις θερμικές two-point συναρτήσεις συσχετισμού (συναρτήσεις Green) βαθμωτών και φερμιονικών πεδίων, οι οποίες είναι και αυτές που συνεισφέρουν στην one-loop διόρθωση του ενεργού δυναμικού σύμφωνα με την σχέση (A'.31), ξεκινώντας από αυτήν των βαθμωτών πεδίων. Δεν είναι όλες οι καμπύλες C επιτρεπτές αν απαιτήσουμε οι συναρτήσεις Green

να είναι αναλυτικές συναρτήσεις του t . Χρησιμοποιώντας την σχέση (B'.5) μπορούμε να γράψουμε την θερμική two-point συνάρτηση συσχετισμού ενός βαθμωτού πεδίου ως ακολούθως

$$G^{(C)}(x-y) = \theta_C(x_0-y_0)G_+(x-y) + \theta_C(y_0-x_0)G_-(x-y), \quad (\text{B'.11})$$

με

$$G_+(x-y) = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle \quad \text{και} \quad G_-(x-y) = G_+(y-x). \quad (\text{B'.12})$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το $G_+(x-y)$ στο σημείο $\vec{x} = \vec{y} = 0$ χρησιμοποιώντας ως ίχνος τις ιδιοκαταστάσεις $|n\rangle$ της χαμιλτονιανής, $H|n\rangle = E_n|n\rangle$. Έτσι σύμφωνα με τις σχέσεις (B'.2), (B'.4) και (B'.12) έχουμε

$$\begin{aligned} G_+(x_0-y_0) &= \langle \phi(x_0,0)\phi(y_0,0) \rangle = \sum_n \langle n|\phi(x_0,0)\phi(y_0,0)e^{-\beta H}|n\rangle e^{-\Phi} = \sum_{n,m} \langle n|e^{iHx_0}\phi(0)e^{-iHx_0}|m\rangle \cdot \\ &\cdot \langle m|e^{iHy_0}\phi(0)e^{-iHy_0}e^{-\beta H}|n\rangle e^{-\Phi} \Rightarrow G_+(x_0-y_0) = e^{-\Phi} \sum_{n,m} |\langle m|\phi(0)|n\rangle|^2 e^{iE_m(y_0-x_0)} e^{iE_n(x_0-y_0+i\beta)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow G_+(x_0-y_0) = e^{-\Phi} \sum_{n,m} |\langle m|\phi(0)|n\rangle|^2 e^{E_m\text{Im}(x_0-y_0)} e^{-iE_m\text{Re}(x_0-y_0)} e^{iE_n\text{Re}(x_0-y_0)} e^{-E_n[\text{Im}(x_0-y_0)+\beta]}. \end{aligned} \quad (\text{B'.13})$$

Για να συγκλίνει το άθροισμα που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση πρέπει να ισχύει $-\beta \leq \text{Im}(x_0-y_0) \leq 0$ το οποίο απαιτεί $\theta_C(x_0-y_0) = 0$ για $\text{Im}(x_0-y_0) > 0$. Επίσης από την σχέση (B'.12) προκύπτει ότι για να συγκλίνει και το $G_-(x_0-y_0)$ πρέπει να ισχύει $0 \leq \text{Im}(x_0-y_0) \leq \beta$ το οποίο απαιτεί $\theta_C(y_0-x_0) = 0$ για $\text{Im}(x_0-y_0) \leq 0$. Επομένως η γενική συνθήκη για να συγκλίνει η συνολική συνάρτηση Green στο διάστημα

$$-\beta \leq \text{Im}(x_0-y_0) \leq \beta, \quad (\text{B'.14})$$

είναι να ορίσουμε την συνάρτηση $\theta_C(t)$ έτσι ώστε να ισχύει $\theta_C(t) = 0$ για $\text{Im}(t) > 0$. Μια πολύ σημαντική σχέση περιοδικότητας για τις συναρτήσεις Green των βαθμωτών πεδίων μπορεί να αποδειχθεί από τον ορισμό των συναρτήσεων $G_+(x)$ και $G_-(x)$ στην σχέση (B'.12). Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μεγαλοκανονικής μέσης τιμής και την ιδιότητα κυκλικών μεταθέσεων των τελεστών μέσα στο ίχνος μπορούμε να δείξουμε (Βλέπε υποκεφάλαιο 3.1) ότι ισχύει

$$G_+(t-i\beta, \vec{x}) = G_-(t, \vec{x}), \quad (\text{B'.15})$$

η οποία είναι η γνωστή σχέση Kubo-Martin-Schwinger.

Για να υπολογίσει κανείς την θερμική two-point συνάρτηση συσχετισμού ενός ελεύθερου βαθμωτού πεδίου

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2\omega_p)^{1/2}} [a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx}], \quad (\text{B'.16})$$

όπου το $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, πρέπει να λύσει την ακόλουθη διαφορική εξίσωση Green

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m^2] G^{(C)}(x-y) = -i\delta_C(x-y) = -i\delta_C(x_0-y_0)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}). \quad (\text{B'.17})$$

Όσον αφορά την θερμική two-point συνάρτηση συσχετισμού των φερμιονικών πεδίων, αυτή δίνεται από την εξής σχέση

$$S_{ab}^{(C)}(x-y) \equiv \langle T_C [\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)] \rangle = \theta_C(x_0-y_0)S_{ab}^+(x-y) - \theta_C(y_0-x_0)S_{ab}^-(x-y), \quad (\text{B'.18})$$

όπου τα a, b είναι σπινωριακοί δείκτες και όπου για τις συναρτήσεις $S_{ab}^+(x-y)$ και $S_{ab}^-(x-y)$ ισχύει

$$S_{ab}^+(x-y) = \langle \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) \rangle \quad \text{και} \quad S_{ab}^-(x-y) = \langle \bar{\psi}_b(y) \psi_a(x) \rangle. \quad (\text{B'.19})$$

Μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι η σχέση Kubo-Martin-Schwinger για τις συναρτήσεις Green των φερμιονικών πεδίων παίρνει την (αντι-περιοδική) μορφή

$$S_{ab}^+(t-i\beta, \vec{x}) = -S_{ab}^-(t, \vec{x}). \quad (\text{B'.20})$$

Αντίστοιχα, για να υπολογίσει κανείς την θερμική two-point συνάρτηση συσχετισμού ενός ελεύθερου φερμιονικού πεδίου πρέπει να επιλύσει την ακόλουθη διαφορική εξίσωση Green

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)_{ad} S_{db}^{(C)}(x-y) = i\delta_C(x-y)\delta_{ab}. \quad (\text{B'.21})$$

B'.4 Φορμαλισμός Φανταστικού Χρόνου

Ο υπολογισμός των two-point συναρτήσεων συσχετισμού που είδαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο εξαρτάται από την επιλογή της καμπύλης C που ξεκινάει από μια αρχικά αυθαίρετη χρονική στιγμή t και καταλήγει στην $t-i\beta$, σύμφωνα με τις σχέσεις Kubo-Martin-Schwinger (B'.15) και (B'.20). Η απλούστερη διαδρομή που μπορεί να επιλέξει κανείς αποτελεί αυτή της ευθείας γραμμής κατά μήκος του φανταστικού άξονα $t = -i\tau$. Αυτή η καμπύλη ονομάζεται καμπύλη Matsubara και σε αυτή τη περίπτωση σύμφωνα με την σχέση (B'.6) για την συνάρτηση δέλτα ισχύει $\delta_C(t) = i\delta(\tau)$. Ο φορμαλισμός που πραγματοποιεί υπολογισμούς στην Θερμική Θεωρία Πεδίου χρησιμοποιώντας την καμπύλη Matsubara ονομάζεται φορμαλισμός φανταστικού (Ευκλείδειου) χρόνου.

Την θερμική two-point συνάρτηση συσχετισμού για βαθμωτά πεδία μπορούμε να την φέρουμε χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό φανταστικού χρόνου στην εξής μορφή

$$G(\tau, \vec{x}) = G_+(\tau, \vec{x})\theta(\tau) + G_-(\tau, \vec{x})\theta(-\tau). \quad (\text{B'.22})$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την Kubo-Martin-Schwinger σχέση (B'.15) συμπεραίνουμε ότι ισχύει $G(\tau + \beta) = G(\tau)$ για $-\beta \leq \tau \leq 0$ και $G(\tau - \beta) = G(\tau)$ για $0 \leq \tau \leq \beta$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι ο θερμικός διαδότης των βαθμωτών πεδίων (μποζονίων) είναι περιοδικός στον φανταστικό χρόνο τ με περίοδο β . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για τα φερμιόνια μπορούμε να δούμε ότι ο θερμικός διαδότης των φερμιονικών πεδίων είναι αντι-περιοδικός στον φανταστικό χρόνο τ με περίοδο β . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την διακριτοποίηση των επιτρεπτών συχνοτήτων ω για γενική off-shell διάδοση, έτσι ώστε αυτές να αποτελούν πολλαπλάσια της συχνότητας Matsubara π/β . Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier των διαδοτών γίνεται μια σειρά για τον Ευκλείδειο χρόνο ενώ παραμένει ένα ολοκλήρωμα για τις χωρικές συντεταγμένες. Δηλαδή έχουμε

$$G(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i(\omega_n \tau - \vec{p} \cdot \vec{x})} \bar{G}(\omega_n, \vec{p}), \quad (\text{B'.23})$$

και

$$\bar{G}(\omega_n, \vec{p}) = \int_0^\beta d\tau \int d^3x e^{i(\omega_n \tau - \vec{p} \cdot \vec{x})} G(\tau, \vec{x}), \quad (\text{B'.24})$$

όπου τα ω_n είναι οι συχνότητες Matsubara, οι οποίες ισούνται με $\omega_n = 2n\pi/\beta$ για τα μποζόνια (λόγω της περιοδικότητας του διαδότη πρέπει οι συχνότητες να είναι άρτιες) και με $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$ για τα φερμιόνια (λόγω αντι-περιοδικότητας του διαδότη πρέπει οι συχνότητες να είναι περιττές).

Από την εξίσωση (B'.17) για $t = -i\tau$ και $\delta_C(t) = i\delta(\tau)$ προκύπτει

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \nabla^2 - m^2\right) G(\tau, \vec{x}) = -\delta(\tau)\delta^{(3)}(\vec{x}). \quad (\text{B'.25})$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση το $G(\tau, \vec{x})$ από την σχέση (B'.23) και χρησιμοποιώντας μια διακριτή μορφή για την $\delta(\tau)$, βρίσκουμε ότι για το $\bar{G}(\omega_n, \vec{p})$ των βαθμωτών πεδίων ισχύει

$$\bar{G}(\omega_n, \vec{p}) = \frac{1}{\vec{p}^2 + \omega_n^2 + m^2}. \quad (\text{B'.26})$$

Όπως παρατηρούμε από την παραπάνω σχέση η μορφή του μετασχηματισμού Fourier του θερμικού διαδότη των βαθμωτών πεδίων παραμένει ίδια με την μορφή του αντίστοιχου διαδότη στην συμβατική Κβαντική θεωρία Πεδίου, πράγμα το οποίο συμβαίνει διότι η διαφορική εξίσωση Green που ικανοποιεί ο διαδότης είναι τοπική. Επομένως και ο μετασχηματισμός Fourier του θερμικού διαδότη των φερμιονικών πεδίων διατηρεί την μορφή που είχε στην συμβατική Κβαντική Θεωρία Πεδίου, και έτσι μπορεί εύκολα κανείς να δείξει ότι για αυτόν ισχύει

$$\bar{S}_{ab}(\omega_n, \vec{p}) = \left[\frac{1}{\gamma_0\omega_n + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m} \right]_{ab}, \quad (\text{B'.27})$$

Μπορούμε να ορίσουμε τώρα τον Ευκλείδειο διαδότη, $\Delta(-i\tau, \vec{x})$, μέσω της σχέσης

$$\Delta(-i\tau, \vec{x}) = -iG(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\omega_n\tau + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{-i}{\vec{p}^2 + \omega_n^2 + m^2}, \quad (\text{B'.28})$$

από τον οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε τους κανόνες Feynman για βαθμωτά και φερμιονικά (από τον αντίστοιχο Ευκλείδειο διαδότη) πεδία στον φορμαλισμό φανταστικού χρόνου στην Θερμική Κβαντική Θεωρία Πεδίου. Συγκεκριμένα συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες

$$\text{Boson Propagator : } \frac{i}{p^2 - m^2} \quad \text{with} \quad p^\mu = \left(i\omega_n = \frac{2n i\pi}{\beta}, \vec{p} \right) \quad (\text{B'.29})$$

$$\text{Fermion Propagator : } \frac{i}{\gamma_\mu p^\mu - m} \quad \text{with} \quad p^\mu = \left(i\omega_n = \frac{(2n+1)i\pi}{\beta}, \vec{p} \right) \quad (\text{B'.30})$$

$$\text{Loop Integral : } \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (\text{B'.31})$$

Χρησιμοποιώντας όλα τα εργαλεία που είδαμε σε αυτό και τα προηγούμενα υποκεφάλαια καθώς και τα εργαλεία του προηγούμενου παραρτήματος, θα υπολογίσουμε στην συνέχεια τις one-loop συνεισφορές από βαθμωτά και φερμιονικά πεδία καθώς και αυτές από μποζονικά πεδία βαθμίδας, στο πεπερασμένης θερμοκρασίας ενεργό δυναμικό του πεδίου Higgs. Όπως θα δούμε στην συνέχεια το ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας αποτελείται από το ενεργό δυναμικό μηδενικής θερμοκρασίας, που υπολογίσαμε στο προηγούμενο παράρτημα, και έναν επιπλέον όρο που εξαρτάται από την θερμοκρασία.

B'.5 Συνεισφορές από Βαθμωτά Πεδία

Έστω ότι η λαγκραζιανή πυκνότητα της θεωρίας βαθμωτών πεδίων που ενδιαφερόμαστε είναι ίδια με αυτήν που είδαμε στο υποκεφάλαιο A'.5 του προηγούμενου παραρτήματος, δηλαδή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i + \frac{1}{2} m^2 (\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4} [(\phi^i)^2]^2, \quad (\text{B'.32})$$

όπου το $i = 1, 2, \dots, N$ με N τον αριθμό των βαθμωτών πεδίων της θεωρίας μας. Για τις παραμέτρους μάζας $m_i(\phi_c)$ αυτής της θεωρίας είδαμε στο ίδιο υποκεφάλαιο ότι ισχύει

$$m_i^2(\phi_c) = \begin{cases} \lambda \phi_c^2 - m^2, & (N-1) \text{ fields} \\ 3\lambda \phi_c^2 - m^2, & 1 \text{ field} \end{cases}. \quad (\text{B'.33})$$

Με βάση όσα είδαμε στο προηγούμενο παράρτημα και τους κανόνες Feynman που συμπεράναμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, συμπεραίνουμε ότι η one-loop συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας ενός εκ των N βαθμωτών πεδίων δίνεται από την σχέση

$$V_{S,1}^{(\beta)}(\phi_c) = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \omega^2), \quad (\text{B'.34})$$

όπου το ω_n είναι οι μποζονικές συχνότητες Matsubara και όπου για το ω ισχύει η εξής σχέση

$$\omega^2 = \vec{p}^2 + m_i^2(\phi_c). \quad (\text{B'.35})$$

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα που εμφανίζεται στην σχέση (B'.34) θα ακολουθήσουμε την εξής μέθοδο. Ορίζουμε την ακόλουθη συνάρτηση

$$v(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(\omega_n^2 + \omega^2), \quad (\text{B'.36})$$

για την παράγωγο ως προς ω της οποίας έχουμε

$$\frac{\partial v(\omega)}{\partial \omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\omega}{\omega_n^2 + \omega^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\omega}{\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + \omega^2} \Rightarrow \frac{\partial v(\omega)}{\partial \omega} = \frac{\beta}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta\omega/2\pi}{(\beta\omega/2\pi)^2 + n^2}. \quad (\text{B'.37})$$

Γνωρίζουμε όμως από την Μαθηματική Ανάλυση ότι ισχύει

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{y}{y^2 + n^2} = \pi \coth(\pi y) = \pi \left(\frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \right) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{y}{y^2 + n^2} = \pi \left(1 + 2 \frac{e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \right). \quad (\text{B'.38})$$

Οπότε εφαρμόζοντας την σχέση (B'.38) στην σχέση (B'.37) για $y = \beta\omega/2\pi$ προκύπτει

$$\frac{\partial v(\omega)}{\partial \omega} = 2\beta \left[\frac{1}{2} + \frac{e^{-\beta\omega}}{1 - e^{-\beta\omega}} \right] \xrightarrow{\int d\omega} v(\omega) = 2\beta \left[\frac{\omega}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right]. \quad (\text{B'.39})$$

Αντικαθιστώντας τώρα το παραπάνω αποτέλεσμα στην σχέση (B'.34) καταφέραμε να υπολογίσουμε το άθροισμα και να φέρουμε το $V_{S,1}^{(\beta)}$ στην ακόλουθη μορφή

$$V_{S,1}^{(\beta)}(\phi_c) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega}{2} + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega}) . \quad (\text{B'.40})$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης αποτελεί ουσιαστικά την one-loop συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό μηδενικής θερμοκρασίας από ένα βαθμωτό πεδίο. Για να το δούμε αυτό αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \ln(-p_0^2 + \omega^2) &= -\frac{i}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \ln(-p_0^2 + \omega^2 - i\epsilon) = \frac{\omega}{2} \xrightarrow{d/d\omega} \\ &\Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{-p_0^2 + \omega^2 - i\epsilon} = \frac{1}{2\omega} . \end{aligned} \quad (\text{B'.41})$$

Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων της Μιγαδικής Ανάλυσης. Συγκεκριμένα το ολοκλήρωμα της σχέσης (B'.41) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{-p_0^2 + \omega^2 - i\epsilon} = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_C \frac{dz}{z^2 - \omega^2 + i\epsilon} = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_C \frac{dz}{(z - \omega + i\epsilon)(z + \omega - i\epsilon)} , \quad (\text{B'.42})$$

όπου η διαδρομή C ξεκινάει από το $-\infty$, πηγαίνει διασχίζοντας τον πραγματικό άξονα στο $+\infty$ και επιστρέφει πίσω στο $-\infty$ μέσω μιας καμπύλης στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο με φορά αντίθετη από την φορά των δεικτών του ρολογιού. Το κομμάτι του επικαμπύλιου ολοκληρώματος που σχετίζεται με την καμπύλη στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο δεν συνεισφέρει (ισούται με το μηδέν) στο συνολικό ολοκλήρωμα λόγω του ότι πάνω σε αυτή την καμπύλη έχουμε $|z| \rightarrow \infty$, και αυτός είναι ο λόγος της ισοδυναμίας που παρατηρούμε μεταξύ ενός πραγματικού και ενός μιγαδικού ολοκληρώματος στην εξίσωση (B'.42). Η διαδρομή C περικλείει τον πόλο πρώτης τάξης $z_0 = -\omega + i\epsilon$ και έτσι σύμφωνα με το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{-p_0^2 + \omega^2 - i\epsilon} &= \frac{-1}{2\pi i} 2\pi i \text{Res}(f(z), z_0) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\lim_{z \rightarrow -\omega + i\epsilon} \frac{(z + \omega - i\epsilon)}{(z - \omega + i\epsilon)(z + \omega - i\epsilon)} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{1}{-p_0^2 + \omega^2 - i\epsilon} = \frac{1}{2\omega} . \end{aligned} \quad (\text{B'.43})$$

Τώρα με βάση την σχέση (B'.41) και πραγματοποιώντας ένα Wick Rotation ($p_0 = ip_E$) μπορούμε να γράψουμε το $V_{S,1}^{(\beta)}(\phi_c)$ ως εξής

$$\begin{aligned} V_{S,1}^{(\beta)}(\phi_c) &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(-p_0^2 + \omega^2) + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \xrightarrow{\text{W. R.}} \\ &\Rightarrow V_{S,1}^{(\beta)}(\phi_c) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \ln[p_E^2 + m_i^2(\phi_c)] + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega}) , \end{aligned} \quad (\text{B'.44})$$

όπου αμέσως αναγνωρίζουμε ότι ο πρώτος όρος αποτελεί την one-loop συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό μηδενικής θερμοκρασίας από ένα βαθμωτό πεδίο, που υπολογίσαμε στο υποκεφάλαιο Α'.5. Τον

δεύτερο όρο της παραπάνω σχέσης μπορούμε πραγματοποιώντας μερικές πράξεις να τον γράψουμε και ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega}) &= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} 4\pi p^2 \ln\left(1 - e^{-\beta\sqrt{p^2 + m_i^2(\phi_c)}}\right) \xrightarrow{x=p\beta} \\ \Rightarrow \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega}) &= \frac{1}{2\pi^2 \beta^4} \int_0^\infty dx x^2 \ln\left(1 - e^{-\sqrt{x^2 + \beta^2 m_i^2(\phi_c)}}\right). \end{aligned} \quad (\text{B'.45})$$

Επομένως οδηγηθήκαμε τελικά στο ότι η one-loop συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας, ενός εκ των N βαθμωτών πεδίων της θεωρίας μας, δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$V_{S,1}^{(\beta)}(\phi_c) = V_S^1(\phi_c) + \frac{1}{2\pi^2 \beta^4} J_B[m_i^2(\phi_c)\beta^2], \quad (\text{B'.46})$$

όπου το $V_S^1(\phi_c)$ περιγράφεται από την σχέση (Α'.47) ενώ ως $J_B[m_i^2(\phi_c)\beta^2]$ ορίσαμε την συνάρτηση

$$J_B[m_i^2(\phi_c)\beta^2] = \int_0^\infty dx x^2 \ln\left(1 - e^{-\sqrt{(x)^2 + \beta^2 m_i^2(\phi_c)}}\right). \quad (\text{B'.47})$$

B'.6 Συνεισφορές από Φερμιονικά Πεδία

Ας υπολογίσουμε τώρα την one-loop συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας που προέρχεται από φερμιονικά πεδία, δηλαδή ας υπολογίσουμε την ποσότητα $V_F^{(\beta)}(\phi_c)$. Θεωρούμε ότι η λαγκραζιανή πυκνότητα της θεωρίας μας είναι ίδια με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε στο υποκεφάλαιο Α'.6, δηλαδή

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_a \gamma^\mu \partial_\mu \psi^a - \bar{\psi}_a (M_f)_b^a \psi^b, \quad (\text{B'.48})$$

όπου ο πίνακας μαζών $(M_f)_b^a$ είναι μια γραμμική συνάρτηση των βαθμωτών πεδίων ϕ_c^i , δηλαδή ισχύει $(M_f)_b^a = \Gamma_{bi}^a \phi_c^i$. Σύμφωνα με τους κανόνες Feynman που συμπεράναμε στο υποκεφάλαιο Β'.4 και την σχέση (Α'.50) που είχαμε δει στο προηγούμενο παράρτημα για την one-loop συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό μηδενικής θερμοκρασίας από φερμιονικά πεδία, συμπεραίνουμε ότι για το $V_F^{(\beta)}(\phi_c)$ έχουμε

$$V_F^{(\beta)}(\phi_c) = -\frac{n}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \omega^2), \quad (\text{B'.49})$$

όπου το ω_n είναι οι φερμιονικές συχνότητες Matsubara, το n είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών των φερμιονικών πεδίων, και για το ω ισχύει

$$\omega^2 = \vec{p}^2 + M_f^2. \quad (\text{B'.50})$$

Ο υπολογισμός του αθροίσματος στην σχέση (B'.49) πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας το ίδιο τέχνασμα που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως για τα βαθμωτά πεδία. Έτσι ορίζουμε την συνάρτηση

$$v(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln(\omega_n^2 + \omega^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln\left[\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{\beta^2} + \omega^2\right] = 2 \sum_{n=1,3,\dots} \ln\left[\frac{\pi^2 n^2}{\beta^2} + \omega^2\right], \quad (\text{B'.51})$$

για την παράγωγο ως προς ω της οποίας έχουμε

$$\frac{\partial v(\omega)}{\partial \omega} = 2 \sum_{n=1,3,\dots} \frac{2\omega}{\frac{\pi^2 n^2}{\beta^2} + \omega^2} = \frac{4\beta}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{(\beta\omega/\pi)}{(\beta\omega/\pi)^2 + n^2}. \quad (\text{B'.52})$$

Από την Μαθηματική Ανάλυση γνωρίζουμε όμως ότι ισχύει

$$\sum_{n=1,3,\dots} \frac{y}{y^2 + n^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + e^{\pi y}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \frac{e^{-\pi y}}{e^{-\pi y} + 1}. \quad (\text{B'.53})$$

Οπότε εφαρμόζοντας στην σχέση (B'.52) την (B'.53) για $y = \beta\omega/\pi$ προκύπτει

$$\frac{\partial v(\omega)}{\partial \omega} = 2\beta \left[\frac{1}{2} - \frac{e^{-\beta\omega}}{e^{-\beta\omega} + 1} \right] \xrightarrow{\int d\omega} v(\omega) = 2\beta \left[\frac{\omega}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta\omega}) \right], \quad (\text{B'.54})$$

Αντικαθιστώντας τώρα την σχέση (B'.54) στην σχέση (B'.49) προκύπτει η ακόλουθη μορφή για το $V_F^{(\beta)}(\phi_c)$

$$V_F^{(\beta)}(\phi_c) = -n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta\omega}) \right], \quad (\text{B'.55})$$

όπου ο πρώτος όρος μπορεί να δειχθεί, όπως και στα βαθμωτά πεδία, ότι αποτελεί την one-loop φερμιονική συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό μηδενικής θερμοκρασίας. Τον δεύτερο όρο μπορούμε να τον φέρουμε, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτήν στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, στην εξής μορφή

$$-\frac{n}{\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(1 + e^{-\beta\omega}) = -\frac{n}{2\pi^2 \beta^4} J_F [M_f^2(\phi_c) \beta^2], \quad (\text{B'.56})$$

όπου η συνάρτηση $J_F [M_f^2(\phi_c) \beta^2]$ δίνεται από την σχέση

$$J_F [M_f^2(\phi_c) \beta^2] = \int_0^\infty dx x^2 \ln \left(1 + e^{-\sqrt{x^2 + \beta^2 M_f^2(\phi_c)}} \right). \quad (\text{B'.57})$$

Επομένως τελικά για την one-loop φερμιονική συνεισφορά μιας θεωρίας που περιγράφεται μέσω της λαγκραζιανής πυκνότητας (B'.48) στο ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$V_F^{(\beta)}(\phi_c) = V_F(\phi_c) - \frac{n}{2\pi^2 \beta^4} J_F [M_f^2(\phi_c) \beta^2], \quad (\text{B'.58})$$

όπου το $V_F(\phi_c)$ δίνεται από την σχέση (A'.51).

B'.7 Συνεισφορές από Πεδία Βαθμίδας

Έστω τώρα η ίδια θεωρία με πεδία βαθμίδας που μελετήσαμε στο υποκεφάλαιο A'.7. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε στα προηγούμενα υποκεφάλαια βρίσκουμε τελικά την ακόλουθη σχέση για την one-loop συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας από μποζονικά πεδία βαθμίδας

$$V_B^{(\beta)}(\phi_c) = V_B(\phi_c) + \frac{3}{2\pi^2 \beta^4} J_B [M_{gb}^2(\phi_c) \beta^2], \quad (\text{B'.59})$$

όπου το $V_B(\phi_c)$ είναι η one-loop συνεισφορά από μποζονικά πεδία βαθμίδας στον ενεργό δυναμικό μηδενικής θερμοκρασίας και δίνεται από την σχέση (Α'.55), ενώ ο δεύτερος όρος αποτελεί την επιπρόσθετη θερμική συνεισφορά που βρήκαμε για βαθμωτά πεδία στο ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας πολλαπλασιασμένη με τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας (3) των μποζονικών πεδίων βαθμίδας της θεωρίας μας.

Β'.8 One-Loop Ενεργό Δυναμικό Καθιερωμένου Πρότυπου σε Πεπερασμένη Θερμοκρασία

Όπως είδαμε στο υποκεφάλαιο Α'.8 του προηγούμενου παραρτήματος, άμα για το one-loop ενεργό δυναμικό του πεδίου Higgs σε μηδενική θερμοκρασία λάβουμε υπόψη μας συνεισφορές που προέρχονται μόνο από το ίδιο το πεδίο Higgs (1 β. ε.), τα Goldstone bosons (3 β. ε.), το μποζόνιο Z (3 β. ε.), τα μποζόνια W^\pm (6 β. ε.) και το top κουάρκ (4×3 (χρώμα) β. ε.) τότε αυτό έχει την εξής μορφή

$$V_{\text{eff}}^{T=0}(\phi_c) = -\frac{m^2}{2}\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_c^4 + \sum_{i=W,Z,t,\chi,h} \frac{n_i}{64\pi^2} M_i^4(\phi_c) \left[\ln \left(\frac{M_i^2(\phi_c)}{\mu^2} \right) - C(i) \right], \quad (\text{B'.60})$$

όπου για τους συντελεστές n_i και $C(i)$ ισχύει

$$n_W = 6, \quad n_\chi = n_Z = 3, \quad n_t = -12, \quad n_h = 1, \quad C_W = C_Z = \frac{5}{6} \quad \text{και} \quad C_t = C_\chi = C_h = \frac{3}{2} \quad (\text{B'.61})$$

ενώ παράλληλα για τις παραμέτρους μάζας $M_i^2(\phi_c)$ έχουμε

$$M_W^2 = \frac{1}{4}g^2\phi_c^2, \quad M_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)\phi_c^2, \quad M_h = 3\lambda\phi_c^2 - m^2, \quad M_\chi^2 = \lambda\phi_c^2 - m^2, \quad M_t^2 = \frac{1}{2}h_t^2\phi_c^2. \quad (\text{B'.62})$$

Επομένως θεωρώντας συνεισφορές στο one-loop ενεργό δυναμικό πεπερασμένης θερμοκρασίας του πεδίου Higgs ($V_{\text{eff}}(\phi_c)$) από τα ίδια πεδία που λάβαμε συνεισφορές και στο μηδενικής θερμοκρασίας ενεργό δυναμικό, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (B'.46), (B'.58) και (B'.59) και λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του κάθε πεδίου (n_i) οδηγούμαστε στην ακόλουθη σχέση για το $V_{\text{eff}}(\phi_c)$

$$V_{\text{eff}}(\phi_c) = V_{\text{eff}}^{T=0}(\phi_c) + \sum_{i=W,Z,\chi,h} \frac{n_i T^4}{2\pi^2} J_B(M_i^2/T^2) + \frac{n_t T^4}{2\pi^2} J_F(m_t^2/T^2), \quad (\text{B'.63})$$

όπου οι θερμικές συναρτήσεις $J_B(M_i^2/T^2)$ και $J_F(m_t^2/T^2)$ δίνονται από τις σχέσεις (B'.47) και (B'.57), αντίστοιχα.

Αναφορές

- [1] S. Coleman: *Aspects of Symmetry (Selected Erice Lectures)*, Cambridge University Press, 1985.
- [2] S. Coleman, F. De Luccia: *Gravitational effects on and of vacuum decay*, Phys. Rev. D 21, 3305, 1980.
- [3] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov: *ABC of Instantons*, Usp. Phys. Nauk 136 (1982) 553.
- [4] E. J. Weinberg: *Classical Solutions In Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2012.
- [5] C. G. Callan, S. Coleman: *Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections*, Phys. Rev. D 16, 1762, 1977.
- [6] D. S. Gorbunov, V. A. Rubakov: *Introduction to the Theory of the Early Universe (Hot Big Bang Theory)*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011.
- [7] V. Mukhanov: *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005.
- [8] M. Laine, A. Vuorinen: *Basics of Thermal Field Theory (a Tutorial on Perturbative Computations)*, Springer International Publishing, 2016.
- [9] A. Linde: *Fate of the false vacuum at finite temperature: Theory and Applications*, Phys. Lett. 100B (1981) 37-40.
- [10] A. Linde: *Decay of the false vacuum at finite temperatures*, Nucl. Phys. B216 (1983) 421, Erratum: Nucl. Phys. B223 (1983) 544.
- [11] A. Strumia, N. Tetradis, A. Urbano, A. Salvio: *On gravitational and thermal corrections to vacuum decay*, JHEP 1609 (2016) 054.
- [12] J. I. Kapusta, C. Gale: *Finite-Temperature Field Theory (Principles and Applications)*, Cambridge University Press, 2006.
- [13] C. Scrucca: *Advanced Quantum Field Theory*, Lecture notes, EPFL, 2013.
- [14] M. Maggiore: *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, Oxford University Press, 2005.
- [15] G. t'Hooft: *Renormalization of massless Yang-Mills fields*, Nuclear Physics. B 33 (1 1971).
- [16] G. t'Hooft: *Renormalizable Lagrangians of massive Yang-Mills fields*, Nuclear Physics B 35 (1 1971).
- [17] S. Weinberg: *Quantum Theory of Fields. Modern Applications*, 1st ed. Vol. 2, Cambridge University Press 1996.
- [18] N. K. Nielsen: *On the gauge dependence of spontaneous symmetry breaking in gauge theories*, Nuclear Physics B 101.1 (1975), pp. 173-188.

- [19] M. E. Peskin, D. V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Pub. Co, 1995.
- [20] M. Quiros: *Finite temperature field theory and phase transitions*, hep-ph/9901312, 1999.
- [21] A. Das: *Finite Temperature Field Theory*, World Scientific Pub. Co, 1997.
- [22] M. Le Bellac: *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press, 2000.
- [23] F. Khanna, A. and J. Malbouisson, A. Santana: *Thermal Quantum Field Theory (Algebraic Aspects and Applications)*, World Scientific Pub. Co, 2009.
- [24] C. Wetterich: *Quantum Field Theory I*, Lecture notes, University of Heidelberg, 2006.
- [25] J. Cline: *Quantum Field Theory*, Lecture notes, McGill University, 2011.
- [26] L. Delle Rose, C. Marzo, A. Urbano: *On the fate of Standard Model at finite temperature*, JHEP 1605 (2016) 050.
- [27] S. Carroll: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley Pub. Co, 2004.
- [28] A. Masoumi: *Topics in vacuum decay*, arXiv: 1505.06397 [hep-th].
- [29] P. Burda, R. Gregory and I. Moss, Phys. Rev. Lett. 115 (2015) 071303 [arXiv:1501.04937 [hep-th]]; JHEP 1508 (2015) 114 [arXiv:1503.07331 [hep-th]]; arXiv:1601.02152 [hep-th].
- [30] N. Tetradis: *Black holes and Higgs stability*, JCAP 09 (2016) 030.
- [31] E. Poisson: *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, 2004.
- [32] G. W. Gibbons, S. W. Hawking: *Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation*, Phys. Rev. D 15, 2738, 1977.
- [33] J. R. Espinosa, G. F. Giudice, E. Morgante, A. Riotto, L. Senatore, A. Strumia and N. Tetradis, JHEP 1509 (2015) 174 [arXiv:1505.04825 [hep-ph]].
- [34] A. Salvio, A. Strumia, N. Tetradis, A. Urbano, JHEP 1609 (2016) 054 [arXiv:1608.02555 [hep-ph]].
- [35] D. Gorbunov, D. Levkov and A. Panin, arXiv:1704.05399 [astro-ph.CO].
- [36] M. Y. Khlopov and A. G. Polnarev, Phys. Lett. 97B (1980) 383; A. G. Polnarev and M. Y. Khlopov, Sov. Phys. Usp. 28 (1985) 213 [Usp. Fiz. Nauk 145 (1985) 369].
- [37] D. Canko, I. Gialamas, G. Jelic-Cizmek, A. Riotto, N. Tetradis, *On the Catalysis of the Electroweak Vacuum Decay by Black Holes at High Temperature*, (2017) [arXiv:1706.01364 [hep-th]].