ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Π.Μ.Σ. "Ιστορία και Φιλοσοφία της Επιστήμης και της Τεχνολογίας (ΙΦΕΤ)"

Διπλωματική Εργασία

«David Hilbert και η Θεμελίωση των Μαθηματικών»

BARDHYL SULA

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ, 2017

Πίνακας περιεχομένων

«Τι ευτυχία να είναι κανείς μαθηματικός σήμερα!. Παντού τα μαθηματικά ανθίζουν, και καινούργιοι βλαστοί ξεπετάγονται. Διότι με τις εφαρμογές τους στις φυσικές επιστήμες και με τη σύνδεσή τους με τη φιλοσοφία, τα μαθηματικά γίνονται όλο και πιο σημαντικά, και βρίσκονται στη διαδικασία επανάκτησης της παλιάς, κεντρικής τους θέσης!»

1. ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

1.1 Ο Χίλμπερτ και το έργο του.

Ο Ντάβιντ Χίλμπερτ γεννήθηκε στην πόλη Καινιξβέργη της Πρωσίας την 23η Ιανουαρίου του 1862 και φοίτησε τόσο στο Γυμνάσιο όσο και στο Πανεπιστήμιο της περιοχής. Το 1884, εκπόνησε τη διδακτορική του διατριβή και, δύο χρόνια αργότερα, αναγορεύτηκε καθηγητής του ίδιου Πανεπιστημίου. Στη συνέχεια, κλήθηκε στο πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν, όπου και διατήρησε την έδρα του μέχρι το τέλος της καριέρας του, το 1930. Ο Χίλμπερτ απέκτησε γρήγορα ιδιαίτερα μεγάλη φήμη, αφού απέδειξε με καινοφανείς και μεγαλοφυείς μεθόδους το γενικό θεώρημα που καθορίζει το πέρας της βάσης στο σύστημα των αμετάβλητων και των συμμεταβλητών ενός αλγεβρικού τύπου, με οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών. Το πρώτο του έργο, με τίτλο "Zahlbericht", παρέμεινε επί 40 χρόνια στην κορυφή του τομέα της θεωρίας των αλγεβρικών αριθμών, όμως ως γνωστότερο και σημαντικότερο έργο του θεωρείται το βιβλίο " Οι Βάσεις της Γεωμετρίας" που κυκλοφόρησε το 1899. Σε αυτό, ο Χίλμπερτ προσπάθησε να συμβιβάσει τα "στοιχεία" του Ευκλείδη, με τις αυστηρά αμετάβλητες βάσεις που απαιτεί η κλασική γεωμετρία, προκαλώντας έντονες συζητήσεις και σημειώνοντας τη γέννηση της γενικής τοπολογίας. Σημαντικότατη, ήταν η συμβολή του στη θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων, που δημιούργησε ο Fredholm, ενώ σε αυτόν οφείλεται, επίσης, η πρώτη γενική απόδειξη της περίφημης υπόθεσης του E. Waring, σχετικά με τη δυνατότητα να εκφραστεί κάθε ακέραιος αριθμός ως άθροισμα δυνάμεων ακέραιων αριθμών. Με το έργο του αυτό , ο Χίλμπερτ συνέβαλε στην εξέλιξη της μαθηματικής φυσικής, της κινητικής θεωρίας των αερίων και της θεωρίας της σχετικότητας.

Το 1895, μετά από πρόσκληση του Felix Klein, ο Hilbert αφήνει το Καινιξβέργη και γίνεται δεκτός ως Καθηγητής στο Γκέτινγκεν. Παρέμεινε εκεί για το υπόλοιπο της ζωής του. Η καριέρα του Χίλμπερτ χωρίζεται σε πέντε περιόδους. Η κάθε μία περίοδος συνδυάζεται με ένα συγκεκριμένο σύμπλεγμα μαθηματικών προβλημάτων[1].

Κατά την πρώτη περίοδο, που διαρκεί περίπου ανάμεσα στα έτη 1893-1898, ο Χίλμπερτ μελέτησε εντατικά τη θεωρία των Αλγεβρικών Αριθμών. Δημοσίευσε μια σειρά μελετών

[1] Όπως ο Weyl σημειώνει στην 1944b, στο Χίλμπερτ άρεσε να συγκεντρώνει την ενέργειά του και όταν προχωρούσε σε έναν νέο τομέα έρευνας, αφιέρωνε σε αυτόν την πλήρη προσοχή του.

σχετικά με το θέμα, συμπεριλαμβανομένων του έργου «Theorie der algebraischen Zahlkorper»[2] του 1897. Το γνωστό και ως «Zahlbericht», που χαρακτηρίζεται από τον Weyl ως «ένα στολίδι της μαθηματικής λογοτεχνίας», συστηματοποίησε την Αλγεβρική Θεωρία των Αριθμών, και άσκησε ισχυρή επιρροή στην ανάπτυξή της, στον 20^{o} αιώνα. Το “Zahlbericht” αποτέλεσε την αφετηρία μελέτης για τα έργα των Artin, Hecke, Hasse, Chevalley, Weyl, και άλλων.

Η δεύτερη περίοδος της καριέρας του Χίλμπερτ, αφιερώνεται στα θεμέλια της γεωμετρίας και στην αξιωματική μέθοδο με κάποιες παραπομπές στα θεμέλια της αριθμητικής. Αυτή η περίοδος διήρκεσε από το 1898 έως το 1903. Τα δύο πρώτα επιλεγμένα κείμενα της εργασίας λαμβάνονται από αυτή ακριβώς την περίοδο.

Η τρίτη περίοδος διήρκεσε από το 1903 μέχρι περίπου το 1910. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου ο Χίλμπερτ εργάστηκε στη θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων και του υπολογισμού των αποκλίσεων.

Μετά το θάνατο του Minkowski στο 1909, ο Χίλμπερτ εισήλθε σε μια τέταρτη περίοδο και μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 1920 έστρεψε το ενδιαφέρον του στη μαθηματική φυσική. Εργάστηκε ιδιαίτερα επί της κινητικής θεωρίας των αερίων, και στη θεωρία της ακτινοβολίας.

Η πέμπτη και τελευταία φάση της καριέρας του Χίλμπερτ αρχίζει με την παράδοση της μελέτης της «Αξιωματικής Σκέψης» το 1917, με το οποίο, μετά από δεκατρία χρόνια επιστρέφει και πάλι στα θεμέλια των μαθηματικών. Κατά το χειμερινό εξάμηνο του 1917-1918 παρέδωσε μαθήματα και διαλέξεις για τις αρχές των μαθηματικών. Οι διαλέξεις γράφτηκαν από τον Paul Bernays, και περιέχουν πολλές από τις ιδέες που θα εμφανιστούν το 1928 στο έργο «Hilbert and Ackermann». Αλλά ο Χίλμπερτ μέχρι τις αρχές του 1920 δεν είχε αφιερωθεί πλήρως στο τεχνικό μέρος των θεμελίων των μαθηματικών. Οι περισσότερες από τις παρακάτω επιλογές χρονολογούνται στην τελευταία περίοδο της καριέρας του Χίλμπερτ (όταν αυτός ήταν ήδη στα εξήντα του). Οι ιδέες του Χίλμπερτ για τη Λογική και την Θεωρία Αποδείξεων κυριάρχησαν στην έρευνα για τα θεμέλια των μαθηματικών στη δεκαετία του 1920, εμπνέοντας νεότερους μελετητές της Λογικής όπως τους Ackermann, Bernays, von Neumann, Herbrand και Gentzen, και ανοίγοντας το δρόμο για τον Kurt Gödel.

Σπουδαιότατη θεωρείται, επιπλέον, η φιλοσοφική πλευρά των μελετών του περί μαθηματικής λογικής. Έτσι, ο επιστήμονας αυτός άσκησε τεράστια επίδραση στα μαθηματικά της εποχής του, όμως η επικράτηση του χιτλερισμού έθεσε τέλος στο έργο του.

[2] (Θεωρία των Αλγεβρικών Αριθμών)

Πέθανε στο Καινιξβέργη την 14η Φεβρουαρίου του 1943.

1.2 Οι Προσδοκίες και οι Προκλήσεις του Χίλμπερτ.

Ο Χίλμπερτ επιλέγει να δημοσιεύσει τις διαλέξεις του με την μορφή άρθρων και κάθε διάλεξη σε κάθε συνέδριο είναι μια θεατρική παράσταση. Το κοινό έχει κάποιες προσδοκίες και ο ομιλητής κάποιες ελπίδες .

Στο Παρίσι το 1900 στα πλαίσια του Διεθνούς Συνεδρίου Μαθηματικών, ο Χίλμπερτ άρχισε την ομιλία του ως εξής :

«Ποίος ανάμεσα μας, δεν θα ήθελε να ανασηκώσει το πέπλο πίσω από το οποίο βρίσκεται κρυμμένο το μέλλον; Να ρίξει μια ματιά στη μελλοντική πρόοδο της επιστήμης μας και να μάθει τα μυστικά των εξελίξεων στους αιώνες που έρχονται; Να μάθει ποίοι θα είναι οι συγκεκριμένοι στόχοι προς τους οποίους οι κορυφαίες μαθηματικές διάνοιες των επερχόμενων γενεών θα στρέψουν τις προσπάθειες τους. Ποίες νέες μεθόδους και ποία νέα στοιχεία από το πλούσιο και ευρύ πεδίο της μαθηματικής σκέψεις θα αποκαλύψουν οι επόμενοι αιώνες;»

Με αυτά τα λόγια ο Χίλμπερτ άρπαξε την ευκαιρία να προβάλει δοκιμαστικά κείμενα της ομιλίας του στους φίλους του, επιλέγοντας τα θέματα που του φαίνονταν πιο παραγωγικά. Γνώριζε πολύ καλά ότι επιλέγοντας κάποια προβλήματα θα τους προσέδιδε ένα μέρος από το δικό του κύρος, καθιστώντας τα πόλο έλξης για τους μαθηματικούς οι οποίοι θα έσπευδαν να ασχοληθούν μαζί τους.

Ο Χίλμπερτ πίστευε ότι τα μαθηματικά αναπτύσσονται με την επίλυση προβλημάτων. Τα προβλήματα όπως έλεγε, στο ακροατήριο του, αποτελούν την ένδειξη ότι ένας επιστημονικός κλάδος είναι ζωντανός. Το κέρδος από τα προβλήματα είναι ότι λύνοντάς τα ο επιστήμονας κατακτά μια ευρύτερη εικόνα του αντικειμένου του. Όπως είναι λογικό ορισμένα προβλήματα είναι καλύτερα από άλλα. Τα προβλήματα θα πρέπει να είναι δύσκολα , όχι όμως ολότελα απρόσιτα και η αποκάλυψη μιας επιτυχούς λύσης θα πρέπει να αποτελεί πηγή ικανοποίησης.

Η σύνδεση της αξίας των προβλημάτων με τις θεωρίες που εμπνέουν έμελλε να αποδειχθεί το κλειδί που θα εξασφάλιζε τη μακροβιότητα των προβλημάτων, αφού έδινε στον επίδοξο λύτη έναν επιπρόσθετο λόγο να είναι προσεκτικός σχετικά με το ποιο πρόβλημα θα επιλέξει.

Ο Χίλμπερτ δεν αρκέστηκε να παρατηρήσει ότι τα προβλήματα οδηγούν σε θεωρίες που με τη σειρά τους γεννούν νέα προβλήματα τόσο στα εφαρμοσμένα όσο και στα θεωρητικά μαθηματικά. Σκοπός του ήταν να αποδείξει ότι αυτή η διαδικασία γεφυρώνει το χάσμα που είχε αρχίσει να δημιουργείται ανάμεσα στα εφαρμοσμένα και τα θεωρητικά μαθηματικά. Κατά την άποψή του τα προβλήματα μπορούν να έχουν την πιο απροσδόκητη εξέλιξη. Τα μαθηματικά αντλούν μερικά από τα προβλήματά τους από τον πραγματικά κόσμο. Ισχυρίστηκε ακόμα ότι η σύγχρονη εμπειρία δείχνει ότι η ενδοσκόπηση και η κριτική επίσης γεννούν ενδιαφέροντα προβλήματα. Δηλαδή, από την μία πλευρά έχουμε προβλήματα σαν αυτό του Μπερνούλι, από την άλλη πλευρά σαν αυτό του Φερμά. Οι εντυπωσιακές και γόνιμες αναλογίες ανάμεσα στα διάφορα ερωτήματα, μεθόδους και ιδέες που ο μαθηματικός συχνά παρακολουθεί εν τη γενέσει τους αποτελούν , λέει ο Χίλμπερτ, την αιώνια ανατροφοδοτούμενη αλληλεπίδραση ανάμεσα στη σκέψη και την πράξη. Σύμφωνα με τον Χίλμπερτ τα μαθηματικά δεν αποτελούν μια συλλογή ετερόκλητων αντικείμενων αλλά ένα συνεκτικό δυναμικό, εξελισσόμενο σύνολο.

Ο ίδιος προχώρησε ακόμα πιο πέρα το επιχείρημά του. Ένα πρόβλημα για να λυθεί έλεγε, ή θα πρέπει να υπάρχει ένα επιχείρημα που να αρχίζει από ένα πεπερασμένο πλήθος σαφώς διατυπωμένων υποθέσεων και να καταλήγει ύστερα από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων στο συμπέρασμα, γεγονός που εξασφαλίζει την αυστηρότητα της μεθόδου απόδειξης, ή από την άλλη πλευρά η αυστηρότητα δεν θα έπρεπε να δυσφημίζεται. Ο Χίλμπερτ έλεγε ότι η αυστηρότητα θα μπορούσε να αποτελέσει το μέσο με το οποίο εξασφαλίζεται η σαφήνεια και απλοποιείται η θεωρία. Η αυστηρότητα δεν αποτελεί αποκλειστικότητα ορισμένων κλάδων των μαθηματικών, όπως είναι η θεωρία αριθμών και η ανάλυση. Στην πραγματικότητα και η γεωμετρία και η μηχανική, ακόμα και η φυσική μπορούν να διατυπωθούν με απόλυτη αυστηρότητα. Κατά τον 19^{ο} αιώνα η γεωμετρία είχε ακολουθήσει φθίνουσα πορεία ως υπόδειγμα αυστηρότητας, παρόλο που αποτελούσε μια πλούσια πηγή προβλημάτων και θεωριών. Η μαθηματική αυστηρότητα είχε μετατοπιστεί σε άλλους κλάδους των μαθηματικών λ.χ η θεωρία αριθμών και οι απόψεις του Χίλμπερτ σχετικά με τις απαιτήσεις μια τέτοιας θεώρησης ήταν απόλυτα σαφής.

Ο Χίλμπερτ έδωσε και μερικές συμβουλές για το πώς μπορούν να λυθούν τα δύσκολα προβλήματα, υποστηρίζοντας ότι η οπτική γωνία του μαθηματικού επιτρέπει να στερείται της αναγκαίας γενικότητας. Υποστήριζε ότι αν το πρόβλημα αντιμετωπιστεί στο πλαίσιο μιας ευρύτερης θεωρίας, ίσως να μπορέσει να θεωρηθεί ως μια προσιτή ειδική περίπτωση. Ή ίσως αυτό να συμβαίνει συχνότερα, να απαιτείται περισσότερη εξειδίκευση. Το πρόβλημα ενδεχομένως να είναι ακόμα πιο δύσκολο, διότι ακόμα και απλές ειδικές περιπτώσεις του παρουσιάζουν μεγάλες δυσκολίες για τον επιστήμονα. Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν μπορεί να γίνει τίποτα για τη γενική περίπτωση, αν δεν λυθούν πρώτα οι απλούστερες ειδικές περιπτώσεις. Υπαινίχθηκε ότι το πρόβλημα είναι απρόσιτο διότι δεν είναι διατυπωμένο με τον κατάλληλο τρόπο και όταν διατυπωθεί σωστά γίνεται εφικτό να αποδειχθεί ότι δεν μπορεί να λυθεί. Έτσι οι αρχαίοι Έλληνες ανακάλυψαν ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός που να ισούται με την τετραγωνική ρίζα του 2. Ωστόσο το κατάλληλα διατυπωμένο πρόβλημα και η θεωρία που το συνόδευσε οδήγησαν σε μια λύση: την αυστηρή μαθηματική απόδειξη της αδυναμίας επίτευξης του αρχικού στόχου.

Ο Χίλμπερτ διατύπωσε την ακόλουθη άποψη που έγινε αργότερα συνηθισμένο σημείο αναφοράς. «Η πεποίθηση της επιλυσιμότητας οποιουδήποτε μαθηματικού προβλήματος αποτελεί ισχυρό κίνητρο για τον ερευνητή. Μέσα μας ακούμε να επαναλαμβάνεται η αιώνια παραίνεση :να το πρόβλημα. Βρες την λύση του. Μπορείς να τη βρεις αποκλειστικά και μόνο με καθαρούς συλλογισμούς, διότι στα μαθηματικά δεν υπάρχει δεν θα μάθουμε ποτέ».

Αυτό που ο Χίλμπερτ κατανόησε είναι ότι δεν υπάρχει μια απλή αντιπαράθεση ανάμεσα στα προβλήματα (καλά, χρήσιμα) και στη θεωρία (κακή, αφηρημένη) ή ανάμεσα στα προβλήματα (περιορισμένα, σκοταδιστικά) και στη θεωρία (καλή, ενοποιητική). Υπάρχουν προβλήματα που είναι βαρετά καθώς και δύσκολα προβλήματα που είναι και αυτά βαρετά. Υπάρχουν μεγάλες και μικρές θεωρίες, όμως οι μεγάλες θεωρίες μπορεί να είναι άχρηστες. Αυτό που κοσκινίζει τα κακά του κάθε είδους είναι η παλινδρομική διαδικασία μέσω της οποίας οι θεωρίες δημιουργούνται για να λύσουν προβλήματα και τα προβλήματα φέρνουν τις θεωρίες στο επίκεντρο της προσοχής. Το καλύτερο παράδειγμα αυτής της διαδικασίας είναι η απόδειξη του Γουάιλς για το τελευταίο θεώρημα του Φερμά.

Ο Χίλμπερτ έθεσε το πρόβλημα της απόδειξης ότι τα αξιώματα της αριθμητικής είναι συνεπή. Έλεγε ότι είναι μάλλον απίθανο η αριθμητική του δημοτικού σχολείου να αποδειχθεί ξαφνικά θεμελιωδώς αντιφατική. Πώς να αποδείξει κανείς σύμφωνα με το Χίλμπερτ κάτι τέτοιο σύμφωνα με τις αυστηρές προδιαγραφές; Για να το πετύχουν οι μαθηματικοί θα πρέπει να διατυπώσουν σαφείς υποθέσεις και στην συνέχεια να αποδείξουν τη συνέπεια των αξιωμάτων με έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Χωρίς κάποιο αυστηρό επιχείρημα υπάρχει έλλειμμα σαφήνειας.

Στην συνέχεια ο Χίλμπερτ έθεσε το θέμα της αξιωματικοποιήσης της φυσικής προτείνοντας την αξιωματική μέθοδο των μαθηματικών ως βασική οργανωτική αρχή που θα επέβαλε μια σαφή λογική δομή σε κάθε κλάδο της φυσικής. Υποστήριζε ότι οι διάφοροι κλάδοι της φυσικής θα έπρεπε να αποκτήσουν αυστηρή θεμελίωση με τρόπο που να μην τους καθιστά αντιφατικούς μεταξύ τους. Ο Χίλμπερτ γνώριζε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις. Αντίθετα, οι φυσικοί είχαν την συνήθεια να χρίζουν ως αξίωμα οποιαδήποτε υπόθεση τους φαινόταν αρκούντως διαισθητική ή χρήσιμη, χωρίς να ασχολούνται με θέματα συνέπειας. Το γεγονός αυτό καθιστούσε δύσκολο να προβλέψει κανείς ποιοι ισχυρισμοί ενδεχομένως θα κατέρρεαν μόλις θα έκανε την εμφάνισή του κάποιο νέο ευρηματικό πείραμα. Οι περισσότεροι φυσικοί θεωρούσαν ότι το αντικείμενό τους , που σύντομα έμελλε να βυθιστεί στον αποπροσανατολιστικό στρόβιλο της κβαντομηχανικής, εξελισσόταν γρήγορα για να μπορεί να εκμεταλλευτεί την συμβουλή του Χίλμπερτ. Από την άλλη μεριά οι μαθηματικοί συνέχισαν να επεξεργάζονται τα μαθηματικά που χρειάζονταν η φυσική, συχνά εφαρμόζοντας τις μεθόδους του Χίλμπερτ.

Ο Χίλμπερτ διατύπωσε κάποια προβλήματα από τη θεωρία αριθμών . Η γερμανική παράδοση στο θέμα αυτό αρχίζει με τον Γκάους, ο οποίος κυριάρχησε το πρώτο μισό του $19^{ο}$ αιώνα. Ο Γκάους περίγραψε την θεωρία των αριθμών ως εξής: «Τα μαθηματικά είναι η βασίλισσα των επιστημών και η αριθμητική η βασίλισσα των μαθηματικών» . Τα προβλήματα που ο Χίλμπερτ επέλεξε για να πλαισιώσει τις θέσεις του ήταν κατάλληλα επιλεγμένα με βάση το ακροατήριο. Το 1873 ο Σαρλ Ερμίτ είχε δείξει ότι ο αριθμός e, η βάση των φυσικών λογάριθμων, είναι υπερβατικός. Το γεγονός αυτό σημαίνει πως δεν είναι ρίζα καμιάς πολυωνυμικής εξίσωσης οποιουδήποτε βαθμού με ακέραιους συντελεστές. Ο Λίντεμαν δέκα χρόνια αργότερα είχε αποδείξει ότι και ο π είναι υπερβατικός αριθμός. Με το πέρασμα των χρόνων αρκετοί μαθηματικοί ανάμεσα τους και ο Χίλμπερτ είχαν απλοποιήσει την αρχική απόδειξη του Λίντεμαν. Ο Κλάιν υποστήριξε ότι η υπερβατικότητα του e και του π θα πρέπει να εισαχθεί παντού στην πανεπιστημιακή εκπαίδευση [3]. Οι αριθμοί π και e είναι από τους πιο χρήσιμους και θεμελιώδεις στο σύνολο των μαθηματικών και συνεπώς αυτά τα θεωρήματα δίνουν μια σαφή εικόνα της εννοιολογικής ακρίβειας των μαθηματικών στην αυγή του $20^{ο}$ αιώνα.

[3] Κλάιν (Klein) σελ 53 . Ευχαριστώ τον Ρότζερ Κουκ που με πληροφόρησε πως η αρχική απόδειξη του Λιντερμαν είχε κριθεί από τον Βάιερστρας ως μη ικανοποιητική. Συνεπώς οι μεταγενέστερες εκδοχές της απόδειξης δεν ήταν μόνο απλούστερες αλλά και αυστηρότερες.

Ο Χίλμπερτ αναφέρθηκε στο γεγονός ότι ο Ρίμαν είχε δημοσιεύσει ένα άρθρο όπου αποδείκνυε ότι κάποιες βαθιές τεχνικές ιδιότητες μιας συνάρτησης έχουν σημαντική συνάφεια με την κατανομή των πρώτων αριθμών. Οι θέσεις του Ρίμαν τοποθετούσαν το συγκεκριμένο πρόβλημα της κατανομής των πρώτων αριθμών στο σωστό εννοιολογικό του πλαίσιο, χωρίς ωστόσο να το λύνουν. Ο Ανταμάρ και ο Ντε λα Βάλε Πουσέν παρατηρεί ο Χίλμπερτ είχαν πραγματοποιήσει σημαντική πρόοδο. Είχαν αποδείξει ανεξάρτητα ένα από τα βασικά συμπεράσματα που ο Ρίμαν είχε παραλείψει και το οποίο θα είχε συμβάλει στην εδραίωση της πεποίθησης ότι η συνάρτηση ζήτα ήταν το κλειδί[4].

Ο Χίλμπερτ ζητούσε από τους μαθηματικούς να ανακαλύψουν νέες και απροσδόκητες σχέσεις μεταξύ ανεξάρτητων κλάδων των μαθηματικών. Δεν υπήρχε λόγος κανείς να φοβάται ότι μια τέτοια πρόκληση θα ήταν υπερβολικά μεγάλη για να αντιμετωπίσει ένας μαθηματικός. Αντίθετα, η πείρα δείχνει ότι αποτελεσματικότερα εργαλεία και απλούστερες μέθοδοι θα ανακαλύπτονται συνεχώς για να ρίχνουν νέο φως σε παλιότερες θεωρίες και να παροπλίζουν προγενέστερες μεθόδους. Με αυτό τον τρόπο τα μαθηματικά θα παραμένουν ενοποιημένα και θα αποτελούν τη βάση της ακριβούς κατανομής των φυσικών φαινομένων.

1.3 Ιστορική Αναδρομή στα Θεμέλια των Μαθηματικών.

Οι πιο σημαντικές πρόοδοι στα θεμέλια των μαθηματικών έχουν συμβεί κατά τη διάρκεια τριών περιόδων: της κλασικής αρχαιότητας, του δεκάτου εβδόμου αιώνα, και της σύγχρονης περιόδου. Σε αυτές τις περιόδους μεγάλοι φιλόσοφοι είναι επίσης μεγάλοι μαθηματικοί και τα μεγάλα προβλήματα των μαθηματικών είναι μεγάλα προβλήματα της φιλοσοφίας.

Η πρώτη περίοδος μας έδωσε τον Αριστοτέλη, τον Ευκλείδη, τον Πλάτωνα, τον Πυθαγόρα, τον Ζήνωνα και τον Αρχιμήδη. Οι μελέτες και οι σκέψεις τους για τους άρρητους αριθμούς, τα παράδοξα της κίνησης, τις μαθηματικές αποδείξεις, τα αξιώματα της γεωμετρίας, τη συλλογιστική λογική «έριξαν» τα θεμέλια για όλα όσα επρόκειτο να ακολουθήσουν.

[4] Η περιγραφή της υπόθεσης Ρίμαν που παραμένει αναπόδεικτη, θα απαιτούσε ένα ολόκληρο , δύσκολο βιβλίο. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στον Patterson (1988). Για την ιστορία του προβλήματος μπορεί να συμβουλευθεί τον Edwards(1974).

Η δεύτερη περίοδος μας έδωσε τον Γαλιλαίο, τον Καρτέσιο, τον Νεύτωνα και τον Λάιμπνιτς. Την περίοδο αυτή εμφανίστηκε ο απειροστικός λογισμός, η αναλυτική γεωμετρία, ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός, η μαθηματική φυσική, και μια πληθώρα εμπνευσμένων μαθηματικών συστημάτων της μεταφυσικής. Αυτή η περίοδος έχει λιγότερο διερευνηθεί. Τα γραπτά είναι ογκώδη, η γλώσσα είναι αρχαΐζουσα και τα μαθηματικά κείμενα είναι πολύπλοκα και δυσανάγνωστα. Για παράδειγμα ακόμη και σήμερα τα γραπτά του Λάιμπνιτς εξακολουθούν να δημοσιεύονται. Γραπτές μελέτες με λιγότερα αριθμητικά στοιχεία συχνά θάβονται σε σκοτεινά αρχεία κάποιας βιβλιοθήκης. Παρά την ύπαρξη κάποιων υπέροχων μονογραφιών, ο δέκατος έβδομος αιώνας παραμένει η λιγότερο κατανοητή και η λιγότερο προσιτή από τις τρεις περιόδους.

Η σύγχρονη περίοδος χωρίζεται σε δύο υποπεριόδους που επικαλύπτονται τόσο χρονολογικά όσο και εννοιολογικά. Η πρώτη περίοδος αρχίζει με τον Καντ και διαρκεί μέχρι τον Χίλμπερτ. Η δεύτερη αρχίζει με τον Φρέγκε και συνεχίζει μέχρι σήμερα.

1.4 Το έργο του Χίλμπερτ στα Θεμέλια των Μαθηματικών.

Η έρευνα του Χίλμπερτ στα θεμέλια των μαθηματικών έγινε κατά τη διάρκεια δύο ξεχωριστών περιόδων στην αρχή και το τέλος της καριέρας του. Οι δύο περίοδοι χωρίζονται από ένα διάστημα περίπου δώδεκα χρόνων. Στην πρώτη περίοδο ανήκουν οι τρεις πρώτες εκδόσεις του έργου του με τον τίτλο «Grundlagen der Geometrie» , δύο άρθρα σχετικά με τα θεμέλια της Αριθμητικής (Χίλμπερτ 1900Α και 1904). Στη δεύτερη περίοδο ανήκουν τα βιβλία που συνέγραψε με τον Wilhelm Ackerman (Grundzüge der theoretischen Logik 1928) και τον Paul Bernays (Grundlagen der Mathematik, σε δύο τόμους το 1934, 1939), καθώς και οκτώ άρθρα σχετικά με την θεωρία της Απόδειξης, τη λογική και τη φιλοσοφία των μαθηματικών.

Η παρούσα εργασία βασίζεται στα δημοσιευμένα άρθρα του Χίλμπερτ πάνω στα θεμέλια των μαθηματικών. Τα πρώτα τρία από αυτά τα άρθρα είναι ζητήματα καίριας σημασίας για τα θεμέλια των μαθηματικών. Έχουν μεταφραστεί από τον Stefan Bauer-Mengelberg, και είναι άμεσα διαθέσιμα στο van Heijenoort το 1967.

Πέρα από αυτό το δημοσιευμένο υλικό, η "περιουσία" του Χίλμπερτ στο Γκέτινγκεν περιλαμβάνει μια εκτεταμένη συλλογή από επιστολές και χειρόγραφα στην βιβλιοθήκη «Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek», και μια συλλογή από ογδόντα ογκώδεις τόμους των επίσημων πρακτικών από τις διαλέξεις του. Οι σημειώσεις έγιναν από τους βοηθούς του (μεταξύ των οποίων, οι Ackerman, Courant, Hellinger, Schinfinkel και Bernays), διορθώθηκαν από τον Χίλμπερτ, δεσμεύτηκαν και έχουν κατατεθεί στη βιβλιοθήκη του Ινστιτούτου Μαθηματικών στο Γκέτινγκεν. Ένας κατάλογος των θεμάτων που καλύπτει ο Χίλμπερτ στις διαλέξεις του Γκέτινγκεν βρίσκεται στο προσάρτημα του τρίτου τόμου του έργου του Χίλμπερτ με τον τίτλο “Gesammelte Abhandlungen” (Χίλμπερτ 1932-5). Περίπου είκοσι από αυτούς τους τόμους ασχολούνται με θέματα λογικής, θεωρία των συνόλων, τη θεωρία της απόδειξης, τα θεμέλια της γεωμετρίας, και τη φιλοσοφία των μαθηματικών και της φυσικής.

Το μεγαλύτερο έργο του Χίλμπερτ, κατά τη διάρκεια που έζησε στην Καινιξβέργη ήταν πάνω στην τότε-ανθούσα θεωρία των αλγεβρικών σταθερών. Αποδεικνύοντας την τελική βάση του θεωρήματος ο Χίλμπερτ έλυσε το κεντρικό πρόβλημα στον τομέα, και έθεσε το επιστέγασμα σχετικά με τη θεωρία των σταθερών, των οποίων η προέλευση ανάγεται στην εποχή του George Boole. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου στην Καινιξβέργη ο Χίλμπερτ απλοποιεί έτσι τις υπάρχουσες αποδείξεις της υπερβατικότητας των σταθερών e και π.

2. Ο ΧΙΛΜΠΕΡΤ ΚΑΙ Η ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ (ΧΊΛΜΠΕΡΤ 1900a).

2.1 Εισαγωγή.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το πρώτο δοκίμιο του Χίλμπερτ πάνω στα θεμέλια της Αριθμητικής. Στηρίζεται άμεσα στην έρευνά του στην αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας. Ο Χίλμπερτ είχε παρακολουθήσει μια διάλεξη στην Χάλε του Herman Wiener με θέμα τα θεμέλια και τη δομή της γεωμετρίας. Κατά την επιστροφή του στην Καινιξβέργη, υπό την επίδραση της αφηρημένης άποψης του Wiener για την προσέγγιση των γεωμετρικών οντοτήτων είχε πει στοχαστικά στους συνάδελφους του: «Ανά πάσα στιγμή πρέπει κάποιος – αντί για σημεία, ευθείες γραμμές και επίπεδα – να μπορεί να αναφέρεται σε τραπέζια σε καρέκλες και κύπελλα μπίρας». Σ' αυτή την απλή δήλωση βρίσκεται η ουσία της σειράς διαλέξεων που τώρα σχεδίαζε να παρουσιάσει.

Για να κατανοήσουμε την προσέγγιση του Χίλμπερτ στη γεωμετρία, πρέπει να θυμηθούμε ότι στην αρχή τα μαθηματικά ήταν μια λίγο –πολύ άτακτη συλλογή δηλώσεων που είτε φαινόταν αυτονόητα προφανείς, είτε προέκυπταν με ένα σαφή, λογικό τρόπο από άλλες δηλώσεις που έμοιαζαν προφανείς. Αυτό το κριτήριο του προφανούς εφαρμόστηκε χωρίς επιφύλαξη στην επέκταση της μαθηματικής γνώσης.

Ο Χίλμπερτ, ήταν ο πρώτος που έθεσε μαζί, με ένα ενιαίο – σύστημα, τις ιδέες του καθαρά συντακτικού λογισμού, με δυνατότητα πολλαπλών ερμηνειών, και δημιουργώντας θεωρήματα με πλήρη συμπεράσματα, έδειξε πώς θα μπορούσε να δημιουργηθεί ένα τυπικό σύστημα που θα έδινε ένα ισχυρό μαθηματικό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, στη θεμελίωση της γεωμετρίας (Χίλμπερτ 1899), χρησιμοποίησε τεχνικές που σήμερα ονομάζονται, «τεχνικές μοντελοποιημένης θεωρίας» για να διερευνήσει τις λογικές σχέσεις μεταξύ των διαφόρων γεωμετρικών αξιωμάτων. Η μελέτη του στα αριθμητικά μοντέλα των γεωμετρικών αξιωμάτων, έδωσε όχι μόνο ανεξάρτητα αποτελέσματα και μια σχετική απόδειξη της μη αντιφατικότητας, αλλά επίσης και νέες μη Αρχιμήδειες γεωμετρίες, έναν νέο χαρακτηρισμό του επιπέδου, νέες γνώσεις σχετικά με τη φύση της συνέχειας, και νέα θεωρήματα σχετικά με τις σχέσεις μεταξύ της γεωμετρίας και της αριθμητικής. Αυτές οι μετα-γεωμετρικές έρευνες έμελλαν να έχουν σημαντική επίδραση όχι μόνο για την Γεωμετρία, αλλά και για τη Λογική: Η θεωρία αποδείξεων και η θεωρία μοντέλων αναπτύχθηκε από την διορατικότητα του Χίλμπερτ που περιέχεται στην παρατήρησή του, σχετικά με το τραπέζι, τη καρέκλα και τα κύπελλα μπύρας. Με άλλα λόγια είτε ονομάζονταν σημεία ευθείες γραμμές και επίπεδα, είτε ονομάζονταν τραπέζια, καρέκλες και κύπελλα μπύρας, θα ήταν εκείνα τα αντικείμενα για τα οποία θα ίσχυαν οι σχέσεις που εκφράζονταν από τα αξιώματα.

Επίσης στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως ο Χίλμπερτ εισάγει στη θεμελίωση της πραγματικής ανάλυσης, την αξιωματική μέθοδο, που έχει προσφέρει τόσο σημαντικές υπηρεσίες στις γεωμετρικές μελέτες. Διακρίνει την αξιωματική μέθοδο από τη γενετική μέθοδο η οποία ήταν προηγουμένως η τυπική προσέγγιση στις αριθμητικές μελέτες, και που στηριζόταν, σε παραδείγματα στο έργο «Χειραφέτηση» του Ντέντεκιντ, «σχετικά με την εισαγωγή νέων πράξεων στα μαθηματικά» (Ντέντεκιντ 1854). Ο Χίλμπερτ παρατηρεί ότι η αξιωματική μέθοδος του παρέχει ένα εργαλείο για τη διερεύνηση όχι μόνο στα θεμέλια των μαθηματικών, αλλά και στα θεμέλια των φυσικών επιστημών. Μια πτυχή των απόψεων του, που θα έπρεπε να λάβουν υπόψη τους, όσοι έμπαιναν στον πειρασμό να δουν τον Χίλμπερτ ως «φορμαλιστή», δηλαδή ως κάποιον που υποστήριζε ότι τα μαθηματικά είναι απλώς ένα παιχνίδι που παίζεται με σύμβολα.

Ο Χίλμπερτ χαρακτηρίζει τους πραγματικούς αριθμούς, αξιωματικά ως ένα διατεταγμένο, Αρχιμήδειο σώμα που δεν μπορεί να ενσωματωθεί σε κανένα μεγαλύτερο σώμα. Εκτός από την τελευταία προϋπόθεση (το Αξίωμα της Πληρότητας του Χίλμπερτ) η μορφή της αξιωματικοποίησης είναι απόλυτα σύγχρονη, και υπήρξε η πρώτη στο είδος της. Στο 3^{ο} μέρος ο Χίλμπερτ αναφέρει την ανάγκη να αποδείξει τη μη αντιφατικότητα και την πληρότητα των δεδομένων αξιωμάτων. Και μάλλον με βεβαιότητα παρατηρεί ότι η απόδειξη της μη αντιφατικότητας «χρειάζεται μόνο μια κατάλληλη τροποποίηση των γνωστών μεθόδων εξαγωγής πορισμάτων». Ο Χίλμπερτ στην πραγματικότητα, διένυσε το υπόλοιπο της καριέρας του αναζητώντας μια τέτοια απόδειξη.

Δεν είναι απολύτως σαφές τι είχε στο μυαλό του ο Χίλμπερτ με τον όρο "γνωστές μεθόδους" όταν έγραφε αυτά τα λόγια το 1899. Στο βιβλίο του «Grundlagen der Geometrie», είχε αποδείξει τα αποτελέσματα της ανεξαρτησίας, χρησιμοποιώντας τεχνικές που σήμερα ονομάζονται «Θεωρητικά Μοντέλα». Για να αποδείξει ότι ένα δεδομένο αξίωμα Α είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα, ο Χίλμπερτ κατασκεύασε ένα μοντέλο στο οποίο το αξίωμα Α αποτυγχάνει, αλλά τα υπόλοιπα αξιώματα ικανοποιούνται. Ομοίως, απέδειξε τη μη αντιφατικότητα του συνόλου των αξιωμάτων εφοδιάζοντάς τα με ένα αριθμητικό μοντέλο (συγκεκριμένα, το μοντέλο που προέρχεται από την αναλυτική γεωμετρία). Αυτό του έδωσε μια απόδειξη της μη αντιφατικότητας σχετική με τη θεωρία των πραγματικών αριθμών. Μια αντίφαση στα γεωμετρικά αξιώματα, με το αριθμητικό μοντέλο του, θα έδινε επίσης μια αντίφαση στα αξιώματα για τους ίδιους τους πραγματικούς αριθμούς. Το πρόβλημα τώρα ήταν να αποδείξει την μη αντιφατικότητα της θεωρίας των πραγματικών αριθμών. Φαίνεται, από τις παρατηρήσεις του σχετικά με το πρόβλημα, όπως παρουσιάζονται στην εισαγωγή του βιβλίου του «Mathematical problems» (Χίλμπερτ 1900b), ότι κατά κάποιο τρόπο σχεδιάζει να τροποποιήσει τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται από τους Weierestrass, Ντέντεκιντ και Cantor στη θεωρία των άρρητων αριθμών. Αλλά οι λεπτομέρειες δεν είναι σαφείς. Και παρά τον έντονο τόνο αυτοπεποίθησης στη διάλεξη A του 1900, ο Χίλμπερτ τοποθετεί το πρόβλημα ως δεύτερο στην περίφημη λίστα των προβλημάτων του. Έτσι, ίσως δεν ήταν τόσο βέβαιος, όσο ο ίδιος δείχνει.

Το 1904 στην διάλεξή του στη Χαϊδελβέργη με τίτλο «Επί των Θεμελίων της Λογικής και της Αριθμητικής», ο Χίλμπερτ περιγράφει μια ουσιαστικά διαφορετική στρατηγική για την απόδειξη της μη αντιφατικότητας. Παρατήρησε ότι, ενώ μια απόδειξη της μη αντιφατικότητας θα μπορούσε να αποδειχθεί για την γεωμετρία, παρέχοντας μια αριθμητική ερμηνεία των γεωμετρικών αξιωμάτων, η ίδια στρατηγική δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην αριθμητική. Όπως λέει : «Βοήθεια από κάποιο άλλο βασικό τομέα δεν φαίνεται να επιτρέπεται όταν μιλάμε για τη θεμελίωση της αριθμητικής». Αντί να προχωρήσει σημασιολογικά, ο Χίλμπερτ πρότεινε να αποδείξει την μη αντιφατικότητα άμεσα, με μια απόδειξη συντακτικής συμβιβαστότητας. Οι μαθηματικές αποδείξεις έπρεπε να μεταφραστούν σε μια ειδική τυπική γλώσσα. Αυτή η γλώσσα ήταν τότε η ίδια , το αντικείμενο μιας μαθηματικής έρευνας, η οποία θα κορυφωθεί με μια απόδειξη ότι μια τυπική αντίφαση ποτέ δεν θα μπορούσε να προκύψει μέσα σε ένα σύστημα.

Παρά το γεγονός ότι η διάλεξη του Χίλμπερτ το 1904 περιέχει το σπέρμα της μετέπειτα Θεωρίας Αποδείξεων του ιδίου, αυτός ακόμα δεν είναι πλήρως σίγουρος σχετικά με τις λεπτομέρειες, ούτε σχετικά με την ισχύ των τρόπων εξαγωγής των συμπερασμάτων που επιθυμεί να υποστηρίξει στην ίδια την απόδειξη της μη αντιφατικότητας. Πράγματι, η παρουσίαση του Χίλμπερτ έδωσε σε κάποιους μαθηματικούς την εντύπωση ότι η συλλογιστική του ήταν ένας φαύλος κύκλος. Ο Πουανκαρέ έσπευσε να εκμεταλλευτεί το γεγονός, και να κατηγορήσει τον Χίλμπερτ ότι προϋποθέτει την αλήθεια της μαθηματικής επαγωγής, προκειμένου να αποδείξει τη συμβιβαστότητά του. Η ένσταση αυτή συνεχίστηκε μέχρι την δεκαετία του 1920 όταν ο Χίλμπερτ δημοσίευσε τα δοκίμια της Θεωρίας Αποδείξεων, όπου για πρώτη φορά έκανε μια σαφή διάκριση μεταξύ των ισχυρών αρχών της επαγωγής που εκφράζονται στην τυπική γλώσσα και της ασθενέστερης επαγωγής που χρησιμοποιείται στη μετα-γλώσσα.

2.2 Η Διάλεξη του Χίλμπερτ (1900α) για την Θεωρία Αριθμών.

Ο Χίλμπερτ επιλέγει να αρχίσει την διάλεξή του για τη Θεωρία Αριθμών αναπτύσσοντας την διαφορά στην μέθοδο της έρευνας, ανάμεσα στις αρχές της αριθμητικής και τα αξιώματα της γεωμετρίας:

«Αν ρίξει μια ματιά κανείς στα πολυάριθμα έργα που υπάρχουν στη βιβλιογραφία σχετικά με τις αρχές της αριθμητικής και στα αξιώματα της γεωμετρίας, λέει, και αν τα συγκρίνουμε μεταξύ τους, τότε, εκτός από πολλές αναλογίες και σχέσεις μεταξύ των δύο αυτών κλάδων, παρατηρούμε και μια διαφορά στη μέθοδο της έρευνας».

Υπενθυμίζει τον τρόπο που εισάγουμε την έννοια του αριθμού:

«Ξεκινώντας από την έννοια του αριθμού 1, κάποιος συνήθως φαντάζεται τους επόμενους θετικούς ακεραίους 2,3,4 .... όπως προκύπτει από τη διαδικασία της καταμέτρησης, και κάποιος θα αναπτύσσει τους νόμους του υπολογισμού. Στη συνέχεια, με την απαίτηση ότι η αφαίρεση είναι γενικά εφαρμόσιμη, κάποιος ανακαλύπτει και τους αρνητικούς αριθμούς. Στη συνέχεια κάποιος θα μπορούσε να ορίσει τα κλάσματα, ως ένα ζεύγος αριθμών - έτσι ώστε κάθε γραμμική συνάρτηση να διαθέτει ένα μηδέν. Και τέλος, κάποιος άλλος θα όριζε τον πραγματικό αριθμό ως ένα κομμάτι ή μια θεμελιώδη σειρά, επιτυγχάνοντας έτσι το αποτέλεσμα ότι κάθε ακέραια ρητή αόριστη (και πράγματι κάθε συνεχώς αόριστη) συνάρτηση έχει μία ρίζα».

Και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι:

«Μπορούμε να καλέσουμε τη μέθοδο εισαγωγής της έννοιας του αριθμού, ως γενετική λύση, επειδή η πιο γενική έννοια του πραγματικού αριθμού δημιουργείται από τη διαδοχική επέκταση της απλής έννοιας του αριθμού».

Ισχυρίζεται ότι θα μπορούσε κάποιος να προχωρήσει διαφορετικά στην θεμελίωση της γεωμετρίας αρχίζοντας συνήθως με την παραδοχή της ύπαρξης όλων των στοιχείων. Για παράδειγμα, κάποιος θεωρεί δεδομένη εξαρχής την ύπαρξη τριών συστημάτων πραγμάτων (δηλαδή, τα σημεία, τις γραμμές και τα επίπεδα) και στη συνέχεια - ουσιαστικά κατά το πρότυπο του Ευκλείδη – συσχετίζει αυτά τα στοιχεία μεταξύ τους με τη βοήθεια ορισμένων αξιωμάτων - δηλαδή, τα αξιώματα της σύνδεσης, της διάταξης, της αντιστοιχίας και της συνέχειας. Αυτό που χρειάζεται στη συνέχεια είναι να αποδειχθεί η μη αντιφατικότητα και η πληρότητα αυτών των αξιωμάτων δηλαδή πρέπει να αποδειχθεί ότι η εφαρμογή των συγκεκριμένων αξιωμάτων δεν μπορεί ποτέ να οδηγήσει σε αντιφάσεις και, περαιτέρω, ότι το σύστημα των αξιωμάτων είναι επαρκές για να αποδείξει όλες τις γεωμετρικές προτάσεις. Καλεί αυτή τη διαδικασία της έρευνας, «αξιωματική μέθοδο».

Έπειτα θέτει το ερώτημα κατά πόσον η γενετική μέθοδος είναι στην πραγματικότητα η μόνη κατάλληλη για τη μελέτη της έννοιας του αριθμού, και η αξιωματική μέθοδος για τη θεμελίωση της γεωμετρίας. Συγκρίνοντας αυτές τις δύο μεθόδους προσπαθεί να διερευνήσει ποια μέθοδος είναι πιο συμφέρουσα για μια λογική εξερεύνηση στη θεμελίωση της μηχανικής και των φυσικών επιστημών.

Κατά τη γνώμη του, βέβαια, παρά την υψηλή παιδαγωγική και ευρετική αξία της γενετικής μεθόδου για την τελική παρουσίαση και την πλήρη λογική παγίωση της γνώσης μας η αξιωματική μέθοδος υπερέχει.

Κατά τη θεωρία της έννοιας του αριθμού, η αξιωματική μέθοδος παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Θεωρούμε ένα σύστημα πραγμάτων. Καλούμε αυτά τα πράγματα αριθμούς και τα προσδιορίζουμε με τα α, β, γ ... Σκεφτόμαστε αυτούς τους αριθμούς σε ορισμένες αμοιβαίες σχέσεις των οποίων η ακριβής και πλήρης περιγραφή αναφέρεται στα ακόλουθα αξιώματα:

I. **Αξιώματα Σύνδεσης.**

I 1. Από τον αριθμό a και τον αριθμό b προκύπτει με την πρόσθεσή τους ένας καθορισμένος αριθμός c. Και συμβολικά

$$a + b = c \text{ ή } c = a + b$$

I 2. Αν τα a και b είναι δεδομένοι αριθμοί τότε θα υπάρχει πάντα ένας και μόνο ένας αριθμός x και ένας και μόνο ένας αριθμός y ώστε:

$$a + x = b \text{ και } y + a = b \text{ αντίστοιχα.}$$

I 3. Υπάρχει ένας ορισμένος αριθμός – που καλείται 0 – τέτοιος ώστε για κάθε a

$$\boldsymbol{a + 0 = a \quad \textit{και} \quad 0 + a = a}$$

Ι 4. Από τον αριθμό a και τον αριθμό b προκύπτει, μέσω του «πολλαπλασιασμού», ένας ορισμένος αριθμός c. Συμβολικά:

$$\boldsymbol{a\, b = c \;\textit{ή}\; c = a\, b}$$

Ι 5. Αν a και b είναι αυθαίρετοι αριθμοί και ο a δεν είναι 0 τότε πάντα θα υπάρχει ένας και μόνο ένας αριθμός x και ένας και μόνο ένας αριθμός y τέτοιος ώστε :

$$\boldsymbol{a\, x = b \;\textit{και}\; \quad y\, a = b}$$

Ι 6. Υπάρχει ένας ορισμένος αριθμός – που καλείται 1 – τέτοιος ώστε για κάθε α:

$$\boldsymbol{a.1 = a \;\textit{και}\; 1\,.a = a}$$

ΙΙ. Αξιώματα Υπολογισμού.

Αν a,b,c είναι αυθαίρετοι αριθμοί τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις :

ΙΙ 1. $\boldsymbol{a + (b + c) = (a + b) + c}$

ΙΙ 2. $\boldsymbol{a + b = b + a}$

ΙΙ 3. $\boldsymbol{a\,(b\,c) = (a\,b)\,c}$

ΙΙ 4. $\boldsymbol{a\,(b + c) = a\,b + a\,c}$

ΙΙ 5. $\boldsymbol{(a + b)\,c = a\,c + b\,c}$

ΙΙ 6. $\boldsymbol{a\,b = b\,a.}$

ΙΙΙ. **Αξιώματα Διάταξης.**

ΙΙΙ1. Αν a , b είναι δύο διαφορετικοί αριθμοί, και θεωρήσουμε έναν από αυτούς (έστω το a) ότι είναι μεγαλύτερος από τον άλλο, τότε ο δεύτερος καλείται μικρότερος του πρώτου.

Με σύμβολα: $a > b$ και $b < a$

ΙΙΙ 2. Αν $a>b$ και $b > c$ τότε $a > c$

ΙΙΙ 3 Αν $a > b$ τότε θα ισχύει $a + c > b+ c$ και $c + a > c + b$

ΙΙΙ4. Αν $a > b$ και $c > 0$ τότε θα ισχύει ότι $ac > bc$ και $ca > cb$

IV. **Αξιώματα Συνέχειας.**

IV 1. (Αξίωμα Αρχιμήδους). Αν a > 0 και b> 0 είναι δύο αυθαίρετοι αριθμοί, τότε είναι πάντοτε δυνατόν να προσθέτουμε το a με τον εαυτό του τόσες φορές ώστε το άθροισμα τους να έχει την ιδιότητα:

$$\boldsymbol{a + a + a \ldots + a > b}$$

IV.2 (Αξίωμα της πληρότητας). Δεν είναι δυνατόν να προστεθεί στο σύστημα αριθμών άλλο σύστημα πραγμάτων, έτσι ώστε να ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα Ι, ΙΙ, ΙΙΙ και IV.1 στο μικτό σύστημα. Εν ολίγοις, οι αριθμοί αποτελούν ένα σύστημα πραγμάτων το οποίο δεν είναι ικανό να επεκταθεί ικανοποιώντας όλα τα αξιώματα.

Αρκετά από τα αξιώματα Ι 1-6, ΙΙ 1-6, ΙΙΙ 1-4, IV, 1-2 είναι συνέπειες των άλλων, και έτσι είμαστε αντιμέτωποι με το ζήτημα των λογικών εξαρτήσεων από τα παραπάνω αξιώματα. Το ζήτημα αυτό προσκομίζει πολλές νέες και γόνιμες ιδέες για τη διερεύνηση των αρχών της αριθμητικής. Για παράδειγμα, αναγνωρίζουμε τα ακόλουθα γεγονότα:

Η ύπαρξη του αριθμού 0 (αξίωμα Ι 3) είναι μια συνέπεια των αξιωμάτων Ι1,2 και ΙΙ1. Συνεπώς στηρίζεται ουσιαστικά στην προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης.

Η ύπαρξη του αριθμού 1 (αξίωμα Ι 6) είναι συνέπεια των αξιωμάτων Ι4,5 και ΙΙ3. Συνεπώς στηρίζεται ουσιαστικά στην προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού.

Ο συμμετρικός νόμος της πρόσθεσης (αξίωμα ΙΙ2) είναι συνέπεια των αξιωμάτων Ι, ΙΙ, 1,4,5. Συνεπώς εμφανίζεται ουσιαστικά ως συνέπεια του προσεταιρισμού.

Απόδειξη:

$$\boldsymbol{(a+b)(1+1)=(\alpha+b)1+(a+b)1=a+b+a+b=}$$

$$\boldsymbol{a(1+1)+b(1+1)=a+a+b+b}$$

συνεπώς

$$\boldsymbol{a+b+a+b=a+a+b+b}$$

και έτσι από το Ι2

$$\boldsymbol{b+a=a+b}$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού (αξίωμα ΙΙ6) είναι συνέπεια των αξιωμάτων Ι,Ι 1-5, ΙΙΙ, IV 1 αλλά δεν προκύπτει από τα αξιώματα Ι, ΙΙ 1-5, ΙΙΙ. Συνεπώς αυτός ο νόμος μπορεί να συναχθεί από τα υπόλοιπα αξιώματα αν και μόνο αν κάποιος προσαρτήσει το Αρχιμήδειο Αξίωμα (αξίωμα IV 1). Το γεγονός αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για την θεμελίωση της γεωμετρίας.

Τα αξιώματα IV 1 και IV 2 είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Δεν σχολιάζει τίποτα σχετικά με την έννοια της σύγκλισης ή για την ύπαρξη ορίων, αλλά παρόλα αυτά υπονοεί το θεώρημα του Bolzano για την ύπαρξη ενός σημείου συσσώρευσης. Ως εκ τούτου, αναγνωρίζει τη συμφωνία του δικού του συστήματος-αριθμών με το σύνηθες σύστημα των πραγματικών αριθμών.

Για πρώτη φορά εισάγει έναν τρόπο για να διευκολύνει την απόδειξη της μη αντιφατικότητας των αξιωμάτων και όπως λέει χαρακτηριστικά:

« Για να αποδείξει κάποιος την μη αντιφατικότητα των παραπάνω αξιωμάτων, χρειάζεται μια κατάλληλη τροποποίηση των γνωστών μεθόδων εξαγωγής συμπερασμάτων. Σε αυτή την απόδειξη βλέπουμε την ύπαρξη της ολότητας των πραγματικών αριθμών ή – με την ορολογία του G. Cantor- την απόδειξη ότι το σύστημα των πραγματικών αριθμών είναι ένα μη αντιφατικό τελικό σύνολο.

Έτσι, η αμφιβολία που έχει τεθεί κατά την ύπαρξη του συνόλου των πραγματικών αριθμών (και κατά την ύπαρξη των άπειρων συνόλων γενικά) χάνει κάθε νόημα. Διότι για το σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν πρέπει να φανταστεί κανείς, το σύνολο όλων των πιθανών νόμων σύμφωνα με τους οποίους τα στοιχεία μιας θεμελιώδους ακολουθίας μπορεί να επαληθευτεί αλλά, όπως περιγράφεται, ένα σχήμα πραγμάτων, των οποίων οι αμοιβαίες σχέσεις δίνονται από το πεπερασμένο και το κλειστό σύστημα των αξιωμάτων Ι – IV και για το οποίο νέες προτάσεις ισχύουν μόνο αν κάποιος μπορεί να τα αντλήσει από τα αξιώματα μέσω ενός πεπερασμένου αριθμού λογικών κανόνων».

Καταλήγοντας αναφέρει ότι αν προσπαθούσαμε να αποδείξουμε με παρόμοιο τρόπο την ύπαρξη μιας οντότητας όλων των δυνάμεων, η προσπάθεια θα αποτύγχανε διότι στην πραγματικότητα η ολότητα όλων των δυνάμεων δεν υπάρχει ή – με όρους του Cantor – το σύστημα όλων των δυνάμεων είναι ένα αντιφατικό σύνολο.

3. Ο ΧΙΛΜΠΕΡΤ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (1900b).

3.1 Εισαγωγικό Σημείωμα .

Το ακόλουθο κεφάλαιο περιέχει το εισαγωγικό υλικό από τη διάλεξη του Χίλμπερτ στο Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών στο Παρίσι το 1900, μια διάλεξη στην οποία ο Χίλμπερτ παρουσίασε στην μαθηματική κοινότητα την περίφημη λίστα των 23 άλυτων μέχρι τότε μαθηματικών προβλημάτων. Η διάλεξη αναφέρει μερικά από τα χαρακτηριστικά θέματα της φιλοσοφίας των μαθηματικών - την φερεγγυότητα, κατ 'αρχήν κάθε μαθηματικού προβλήματος. Τη σύνδεση μεταξύ της αυστηρής απόδειξης και της απλότητας και τη φύση της μαθηματικής ύπαρξης. Την σύνδεση μεταξύ της φυσικής και των μαθηματικών, της εμπειρίας και της σκέψης. Στο παρόν δοκίμιο περιλαμβάνονται επίσης οι αναφορές του για τα δύο πρώτα προβλήματα του Χίλμπερτ: Την Υπόθεση του Συνεχούς και τη Συμβιβαστότητα της Αριθμητικής.[5]

3.2 Η διάλεξη για τα Μαθηματικά Προβλήματα – Το μέλλον των Μαθηματικών.

Η ιστορία μας διδάσκει τη συνεχή ανάπτυξη της επιστήμης. Γνωρίζουμε ότι κάθε εποχή έχει τα δικά της προβλήματα, τα οποία ή τα λύνει ή τα βάζει στην άκρη ως δευτερεύοντα και τα αντικαθιστά με νέα προβλήματα. Αν αποκρούσαμε μια ιδέα για την πιθανή εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης στο άμεσο μέλλον, θα πρέπει να αφήσουμε τα εκκρεμή ζητήματα να περάσουν από το μυαλό μας και να κοιτάξουμε τα προβλήματα τα οποία η επιστήμη σήμερα θέτει και των οποίων τη λύση περιμένουμε στο μέλλον. Η συνάντηση στο Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών στο Παρίσι το 1900, ήταν μια πρώτης τάξεως ευκαιρία για την επανεξέταση των τότε προβλημάτων. Γιατί, όπως επισήμανε ο Χίλμπερτ στον πρόλογο της διάλεξής του:

[5] Η μετάφραση είναι από την Mary Winston Newson, και αρχικά εμφανίστηκε στο 1902. Έχει ελαφρώς αναθεωρηθεί από τον William Ewald για να προσαρμόσει στην ορολογία με τις άλλες μεταφράσεις του Χίλμπερτ, καθώς και για την αποκατάσταση της παραγραφοποίησης με εκείνη του αρχικού κειμένου του Χίλμπερτ .

«Το κλείσιμο μιας μεγάλης εποχής μας καλεί όχι μόνο να κοιτάξουμε πίσω στο παρελθόν, αλλά επίσης κατευθύνει τις σκέψεις μας για το άγνωστο μέλλον».

Και συνεχίζει λέγοντας:

«Η βαθιά σημασία ορισμένων προβλημάτων για την πρόοδο της μαθηματικής επιστήμης γενικότερα και το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζουν στο έργο του κάθε ερευνητή δεν αμφισβητείται από κανέναν. Όσο ένας κλάδος της επιστήμης προσφέρει μια πληθώρα προβλημάτων, τόσο ζωντανός είναι. Η έλλειψη προβλημάτων προαναγγέλλει την εξαφάνιση ή την παύση της ανεξάρτητης ανάπτυξης. Ακριβώς όπως κάθε ανθρώπινο εγχείρημα θέτει στόχους, έτσι και η μαθηματική έρευνα απαιτεί να λύσει τα προβλήματά της. Από τη λύση των προβλημάτων ο ερευνητής ελέγχει την δύναμή του και βρίσκει νέες μεθόδους και νέες προοπτικές, αποκτώντας ένα ευρύτερο και πιο ελεύθερο ορίζοντα.

Είναι δύσκολο και συχνά αδύνατο να κρίνουμε την αξία ενός προβλήματος εκ των προτέρων. Διότι η τελική αποτίμηση εξαρτάται από το κέρδος που η επιστήμη αποκτά από το πρόβλημα. Παρ 'όλα αυτά μπορούμε να αναρωτηθούμε αν υπάρχουν γενικά κριτήρια που να χαρακτηρίζουν ένα καλό μαθηματικό πρόβλημα».

Ένα παλιός Γάλλος μαθηματικός είπε: «Μια μαθηματική θεωρία δεν πρέπει να θεωρείται πλήρης έως ότου έχει γίνει τόσο σαφής ώστε να μπορεί να την εξηγήσουμε στον πρώτο άνθρωπο τον οποίο θα συναντήσουμε στο δρόμο». Αυτή η σαφήνεια και η ευκολία της κατανόησης, που ισχύει για μια μαθηματική θεωρία, ο Χίλμπερτ απαιτεί να ισχύει και για κάθε μαθηματικό πρόβλημα ώστε αυτό να είναι τέλειο. Γιατί ό,τι είναι σαφές και εύκολα κατανοητό προσελκύει, ενώ το περίπλοκο μας απωθεί.

Επιπλέον, ένα μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να είναι δύσκολο για να μας δελεάσει, αλλά όχι εντελώς απρόσιτο, για να μην χλευαστούν οι προσπάθειές μας. Θα πρέπει να μας θέτει σε θέση οδηγού σε δαιδαλώδη μονοπάτια με κρυμμένες αλήθειες, και, τελικά, ένα ενθύμιο ευτυχίας σε περίπτωση επίλυσής του.

Οι μαθηματικοί των περασμένων αιώνων είχαν συνηθίσει να αφοσιώνονται στην επίλυση των ιδιαίτερα δύσκολων προβλημάτων με πάθος και με ζήλο. Ήξεραν την αξία των δύσκολων προβλημάτων. Ο Χίλμπερτ φέρνει ως αρχικό παράδειγμα το «πρόβλημα της βραχυστόχρονης καμπύλης[6]» που πρότεινε ο Μπερνούλι. Η εμπειρία μας διδάσκει, εξήγησε ο Μπερνούλι κατά

[6]Δηλαδή το πρόβλημα της γραμμής ταχύτερης καθόδου το οποίο το 1696 ο Johann Bernoulli έθεσε στους μαθηματικούς της εποχής του: "Έστω δυο δεδομένα σημεία Α και Γ σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Να βρεθεί η

την δημόσια ανακοίνωση του προβλήματος, ότι οι ανώτερες διάνοιες οδηγούνται στον αγώνα τους για την πρόοδο της επιστήμης από τα δύσκολα και συνάμα χρήσιμα προβλήματα που θέτουν στους εαυτούς τους. Ο ίδιος προσδοκούσε να εξασφαλίσει την ευγνωμοσύνη του μαθηματικού κόσμου ακολουθώντας το παράδειγμα ανθρώπων, όπως ο Μερσέν, ο Πασκάλ, ο Φερμά, και άλλοι, θέτοντας ενώπιον των διακεκριμένων μαθηματικών της εποχής του ένα πρόβλημα για να το χρησιμοποιήσουν ως κριτήριο ελέγχου της αξίας και της ισχύος των μεθόδων τους. Ο Λογισμός των μεταβολών οφείλει την γέννησή του στο πρόβλημα του Μπερνούλι και σε παρόμοια προβλήματα.

Ο Χίλμπερτ υποστηρίζει ότι ακόμη και η αδυναμία επίλυσης ενός προβλήματος αποτελεί πεδίο έμπνευσης φέρνοντας ως χαρακτηριστικό παράδειγμα την Διοφαντική εξίσωση του Φερμά. Ο Φερμά λοιπόν είχε ισχυριστεί, ότι η Διοφαντική εξίσωση[7] $\mathbf{x^n + y^n = z^n}$ (x, y και z ακέραιοι) είναι άλυτη –με εξαίρεση μερικές προφανείς αυταπόδεικτες περιπτώσεις. Όμως ο Κούμερ, υποκινούμενος από το πρόβλημα του Φερμά, οδηγήθηκε στην εισαγωγή των ιδεωδών αριθμών και την ανακάλυψη του νόμου για τη μοναδικότητα της ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων σε ένα κυκλοτομικό σώμα[8].

Αναφερόμενος σε ένα πολύ διαφορετικό πεδίο έρευνας, ο Χίλμπερτ επικαλείται το πρόβλημα των τριών σωμάτων. Οι γόνιμες μέθοδοι και οι μεγάλης εμβέλειας αρχές που ο Πουανκαρέ έφερε στην ουράνια μηχανική και οι οποίες αναγνωρίζονται και εφαρμόζονται στην πρακτική αστρονομία σήμερα οφείλονται στο γεγονός ότι ανέλαβε να επιλύσει εκ νέου το δύσκολο πρόβλημα και να πλησιάσει πιο κοντά μια λύση[9].

καμπύλη την οποία πρέπει να διαγράψει μια σημειακή μάζα υπό την επίδραση της βαρύτητας, έτσι ώστε ξεκινώντας από το Α και χωρίς αρχική ταχύτητα να φτάσει χωρίς τριβές στο Γ στον ελάχιστο χρόνο." Λύσεις στο πρόβλημα Bernoulli έδωσαν οι Leibniz, de l’ Hospital, Jacob Bernoulli (αδελφός του Johann) και πιθανώς ο ίδιος ο Νεύτωνας με ψευδώνυμο. Η ευφυέστερη όλων ίσως ήταν η λύση που δόθηκε από τον ίδιο τον Johann Bernoulli που ξεκινώντας από ένα πρόβλημα Μηχανικής έφθασε σε ένα πρόβλημα Οπτικής, χρησιμοποιώντας την αρχή Φερμά (Fermat), ότι "το φως όταν κινείται μεταξύ δυο σημείων διασχίζει τη διαδρομή που απαιτεί το ελάχιστο χρονικό διάστημα".

[7] Η εξίσωση $x^n + y^n + z^n = 0$ είναι αδύνατη σε μη μηδενικούς ακεραίους αριθμούς. Δηλώνοντας το τελευταίο θεώρημα του Φερμά (Fermat) σε αυτή τη μορφή, έχουμε το πλεονέκτημα ότι μπορούμε να εναλλάσσουμε τους ρόλους των μη μηδενικών ακεραίων αριθμών x, y και z.

[8] Ένα νόμο που σήμερα, στη γενίκευσή του σε κάθε αλγεβρικό τομέα από τους Ντέντεκιντ και Κρόνεκερ, βρίσκεται στο κέντρο της σύγχρονης θεωρίας αριθμών και η σημασία της οποίας εκτείνεται πολύ πέρα από τα όρια της θεωρίας αριθμών, στον κόσμο της άλγεβρας και της θεωρίας συναρτήσεων.

[9] Ο Πουανκαρέ (Poincare) αποκάλυψε το χάος στο Ηλιακό σύστημα και μαζί ανακάλυψε την απρόβλεπτη εξέλιξη ενός μη γραμμικού συστήματος. Είχε κατανοήσει πως πολύ μικρές επιδράσεις μπορούν να μεγεθυνθούν μέσω της ανάδρασης. Γι’ αυτό και διατύπωσε την άποψη "Μια ελάχιστη αιτία που διαφεύγει της προσοχής μπορεί να προκαλέσει ένα σημαντικό αποτέλεσμα".

Τα δύο τελευταία αναφερθέντα προβλήματα, αυτό του Φερμά και το πρόβλημα των τριών σωμάτων, φαίνονται, σύμφωνα με το Χίλμπερτ, να βρίσκονται σε ακριβώς αντίθετους πόλους. Το πρώτο είναι μια ελεύθερη εφεύρεση σαφούς αιτιολόγησης, και ανήκει στην περιοχή της Θεωρίας των Αφηρημένων Αριθμών. Το δεύτερο μας «επιβλήθηκε» από την αστρονομία και είναι αναγκαίο για την κατανόηση των απλούστερων θεμελιωδών φαινομένων της φύσης.

Έχοντας πλέον ανακαλέσει στο μυαλό του ακροατηρίου του, τη γενική σημασία των προβλημάτων στα μαθηματικά, στρέφει το ερώτημα στο από ποιες πηγές αυτή η επιστήμη αντλεί τα προβλήματά της:

«Σίγουρα το πρώτο και παλαιότερο πρόβλημα σε κάθε κλάδο των μαθηματικών προέρχεται από την εμπειρία και προτείνεται από τον κόσμο των εξωτερικών φαινομένων. Ωστόσο, στην περαιτέρω ανάπτυξη ενός κλάδου των μαθηματικών, το ανθρώπινο μυαλό, ενθαρρύνεται από την επιτυχία των λύσεων και αποκτά τη συνείδηση της ανεξαρτησίας του. Εξελίσσεται από την ίδια και μόνο, συχνά χωρίς αξιόλογη επιρροή, με τη βοήθεια λογικών συνδυασμών, της γενίκευσης, της εξειδίκευσης, με το διαχωρισμό και τη συλλογή ιδεών που παράχθηκαν τυχαία, από νέα και γόνιμα προβλήματα, και που προκύπτουν όποτε κάποιος κάνει νέες ερωτήσεις[10].

Εν τω μεταξύ, ενώ η δημιουργική δύναμη της καθαρής λογικής ασκείται, ο εξωτερικός κόσμος έρχεται και πάλι στο προσκήνιο, μας θέτει νέες ερωτήσεις από την πραγματική εμπειρία, ανοίγει νέους κλάδους των μαθηματικών, και ενώ επιδιώκουμε να κατακτήσουμε αυτά τα νέα πεδία της γνώσης για τη σφαίρα της καθαρής σκέψης, συχνά βρίσκουμε τις απαντήσεις σε παλιά άλυτα προβλήματα και, επομένως, την ίδια στιγμή προάγονται πιο επιτυχώς οι παλιές θεωρίες».

Ακολούθως, θίγει εν συντομία τις γενικές απαιτήσεις που χρειάζεται να καθοριστούν για τη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος. Η πρώτη απαίτηση, σύμφωνα με το Χίλμπερτ είναι να διαπιστωθεί η ορθότητα της λύσης με τη βοήθεια ενός πεπερασμένου αριθμού βημάτων με βάση ένα πεπερασμένο αριθμό υποθέσεων οι οποίες τίθενται στην πρόταση του προβλήματος και η οποία πρέπει να παραμείνει ακριβώς όπως διατυπώθηκε. Αυτή η απαίτηση λογικών συναγωγών μέσω ενός πεπερασμένου αριθμού υποθέσεων είναι απλά η απαίτηση της αυστηρότητας στη συναγωγή. Πράγματι, η απαίτηση της αυστηρότητας, η οποία έχει γίνει παροιμιώδης στα μαθηματικά, αντιστοιχεί σε μια καθολική φιλοσοφική αναγκαιότητα της κατανόησής μας. Και,

[10] Έτσι προέκυψε το πρόβλημα των πρώτων αριθμών και των άλλων προβλημάτων της θεωρίας αριθμών, η θεωρία των εξισώσεων του Galois, η θεωρία των αλγεβρικών αναλλοίωτων, η θεωρία των αβελιανών και αυτομορφικών εξισώσεων.

από την άλλη πλευρά, μόνο με την ικανοποίηση αυτής της απαίτησης το περιεχόμενο της σκέψης και η υποβλητικότητα του προβλήματος, επιτυγχάνουν την πλήρη ισχύ τους.

Εξάλλου όπως υποστηρίζει :

«Η αυστηρότητα στην απόδειξη είναι ο εχθρός της απλότητας. Αντιθέτως διαπιστώνουμε όπως επιβεβαιώνεται από πολυάριθμα παραδείγματα ότι η αυστηρή μέθοδος είναι την ίδια στιγμή το απλούστερο και το πιο εύκολα αντιληπτό. Η ίδια η απαίτηση για αυστηρότητα, μας αναγκάζει να μάθουμε απλούστερες μεθόδους απόδειξης. Συχνά, επίσης, βρίσκουμε το δρόμο για μεθόδους που αναπτύσσονται πιο ικανά σε σχέση με παλιές μεθόδους λιγότερης αυστηρότητας. Έτσι, για παράδειγμα, η θεωρία των αλγεβρικών καμπυλών γνώρισε μια σημαντική απλούστευση και επιτυγχάνεται μεγαλύτερη ενότητα με τη βοήθεια των πιο αυστηρών μεθόδων θεωρητικής λειτουργίας και τη συνεπή εφαρμογή υπερβατικών εργαλείων».

Σαν παράδειγμα αναφέρει πως η απόδειξη ότι οι τέσσερεις στοιχειώδεις πράξεις και η όρος προς όρο παραγώγιση και ολοκλήρωση μπορούν να εφαρμοστούν στις δυναμοσειρές και ως συνέπεια αυτής της απόδειξης, η ανάδειξη της χρησιμότητας των δυναμοσειρών συνέλαβε ουσιαστικά στην απλοποίηση της ανάλυσης, ιδιαίτερα της θεωρίας της απαλοιφής και της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων, καθώς επίσης και από τις υπάρχουσες αποδείξεις που απαιτούσαν οι θεωρίες αυτές.

Αλλά το πιο εντυπωσιακό παράδειγμα που αναφέρει είναι ο λογισμός των μεταβολών:

«Ο χειρισμός της πρώτης και της δεύτερης μεταβολής ορισμένων ολοκληρωμάτων απαιτούσε από τη μια εξαιρετικά πολύπλοκους υπολογισμούς, και από τη άλλη οι διαδικασίες που εφαρμόζονταν από τους παλαιούς μαθηματικούς δεν είχαν την απαραίτητη αυστηρότητα. Ο Βάιερστρας μας έδειξε το δρόμο προς μια νέα και ασφαλή βάση στον Λογισμό των μεταβολών. Από τα παραδείγματα του απλού και διπλού ολοκληρώματος οδηγούμαστε ταυτόχρονα σε μια εκπληκτική απλούστευση του λογισμού των μεταβολών. Διότι με την επίδειξη των αναγκαίων και ικανών κριτηρίων για την ύπαρξη μεγίστων και ελάχιστων, ο υπολογισμός της δεύτερης μεταβολής η, πράγματι, δύσκολη συλλογιστική που συνδέεται με την πρώτη μεταβολή, μπορεί να παραλειφθεί εντελώς».

Αν και επιμένοντας στην αυστηρότητα στην απόδειξη ως προϋπόθεση για μια τέλεια λύση ενός προβλήματος, ο Χίλμπερτ αντιτάσσεται στην άποψη ότι μόνο οι έννοιες της ανάλυσης, ή ακόμη και εκείνες της αριθμητικής, προσφέρονται για αυστηρή επεξεργασία. Την άποψη αυτή τη θεωρούσε εντελώς λανθασμένη γιατί όπως υποστηρίζει:

«Μια τέτοια μονόπλευρη ερμηνεία της απαίτησης της αυστηρότητας θα οδηγήσει σύντομα στην αγνόηση όλων των εννοιών που αναδεικνύονται από τη γεωμετρία, τη μηχανική και τη φυσική, με μια διακοπή της ροής του νέου υλικού από τον έξω κόσμο, και, τέλος, πράγματι, ως έσχατη συνέπεια, την απόρριψη των ιδεών των άπειρων και άρρητων αριθμών».

Αλλά ότι είναι ζωτικής σημασίας για την μαθηματική επιστήμη, θα πρέπει να αποκόπτεται και να εκριζώνεται από τη γεωμετρία και την μαθηματική φυσική; Σύμφωνα με τον Χίλμπερτ όχι, καθώς από οποιοδήποτε πεδίο γνώσης ή της γεωμετρίας, ή από θεωρίες της φυσικής ή της φυσικής επιστήμης, αναδύονται μαθηματικές ιδέες, το πρόβλημα που προκύπτει για τη μαθηματική επιστήμη είναι να διερευνήσει τις αρχές που διέπουν αυτές τις ιδέες και να τις αναπτύξει μέσω ενός απλού και πλήρους συστήματος αξιωμάτων, ώστε η ακρίβεια των νέων ιδεών και η δυνατότητα εφαρμογής τους για την εξαγωγή συμπερασμάτων να μην είναι σε καμία περίπτωση κατώτερη από εκείνη των παλαιών αριθμητικών εννοιών.

Οι νέες έννοιες θέτουν την ανάγκη για νέα σύμβολα. Αυτά τα επιλέγουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να μας θυμίζουν τα φαινόμενα που ήταν η αφορμή για το σχηματισμό των νέων εννοιών. Έτσι, τα γεωμετρικά σχήματα είναι σήματα ή μνημονικά σύμβολα της διαίσθησης στο χώρο και χρησιμοποιούνται ως τέτοια από όλους τους μαθηματικούς. Ποιος δεν χρησιμοποιεί πάντα μαζί με τη διπλή ανισότητα $a > b > c$ την εικόνα τριών σημείων διατεταγμένων πάνω σε μια ευθεία για να αναδείξει την έννοια του "μεταξύ";

Τα αριθμητικά σύμβολα είναι γραμμένες εικόνες και τα γεωμετρικά σχήματα είναι σχεδιασμένοι μαθηματικοί τύποι. Κανένας μαθηματικός δεν θα μπορούσε να εργαστεί χωρίς αυτούς τους σχεδιασμένους τύπους, όπως δεν θα μπορούσε στους υπολογισμούς του να εργαστεί χωρίς παρενθέσεις και άλλα αναλυτικά σύμβολα.

Η χρήση των γεωμετρικών συμβόλων ως μέσο για την αυστηρή απόδειξη προϋποθέτει την ακριβή γνώση και πλήρη έλεγχο των αξιωμάτων που διέπουν αυτά τα στοιχεία. Και για να ενσωματωθούν αυτά τα γεωμετρικά σχήματα στον γενικότερο θησαυρό των μαθηματικών συμβόλων, είναι απαραίτητη μια αυστηρή αξιωματική διερεύνηση του εννοιολογικού περιεχομένου τους. Ακριβώς όπως και στην πρόσθεση δύο αριθμών, πρέπει κανείς να τοποθετήσει τα ψηφία το ένα κάτω από το άλλο με τη σωστή σειρά, έτσι ώστε μόνο οι κανόνες λογισμού , για παράδειγμα τα αξιώματα της αριθμητικής, να καθορίσουν τη σωστή χρήση των ψηφίων, έτσι και η χρήση των γεωμετρικών συμβόλων καθορίζεται από τα αξιώματα που διέπουν τις γεωμετρικές έννοιες και τους συνδυασμούς τους.

Η αναλογία γεωμετρικής και αριθμητικής σκέψης φαίνεται και από ότι δεν συνηθίζουμε να παρακολουθούμε την αλυσίδα των συλλογισμών μας μέχρι και τα αξιώματα, ούτε στις αριθμητικές ούτε στις γεωμετρικές αποδείξεις. Αντίθετα, ειδικά όταν για πρώτη φορά προσεγγίζουμε το πρόβλημα, εφαρμόζουμε κάποιον γρήγορο, ασυνείδητο και όχι απαραίτητα σίγουρο συνδυασμό, εμπιστευόμενοι ένα κάποιο αριθμητικό σχετικά με τη συμπεριφορά των αριθμητικών συμβόλων το οποίο μας είναι το ίδιο απαραίτητο όσο μας είναι και η γεωμετρική φαντασία στη γεωμετρία[11].

Έπειτα ο Χίλμπερτ εκθέτει ορισμένες παρατηρήσεις για τις δυσκολίες που μπορεί να προσφέρουν τα μαθηματικά προβλήματα, προτείνοντας και μέσα διεξόδου από αυτές:

«Αν δεν επιτύχουμε την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, ο λόγος συνίσταται συχνά στην αδυναμία μας να αναγνωρίσουμε τη γενικότερη άποψη, σύμφωνα με την οποία, το πρόβλημα που έχουμε μπροστά μας, εμφανίζεται μόνο, ως ένας ενιαίος κρίκος μιας αλυσίδας σχετικών προβλημάτων. Μετά τη διαπίστωση αυτής της άποψης, όχι μόνο το πρόβλημα γίνεται πιο προσιτό για την έρευνά μας, αλλά ταυτόχρονα αποκτούμε μια μέθοδο η οποία μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα προβλήματα.

Για την αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων, η εξειδίκευση παίζει, ένα ακόμα πιο σημαντικό ρόλο από ό,τι η γενίκευση. Ίσως στις περισσότερες περιπτώσεις όπου αναζητούμε μάταια την απάντηση σε μια ερώτηση, η αιτία της αποτυχίας έγκειται στο γεγονός ότι απλούστερα και ευκολότερα προβλήματα που κατέχουμε, είτε δεν έχουν λυθεί καθόλου, είτε έχουν λυθεί ατελώς. Όλα εξαρτώνται, έτσι, στην εξεύρεση αυτών των ευκολότερων προβλημάτων, καθώς και στην επίλυσή τους με τη βοήθεια τεχνασμάτων όσο το δυνατόν καλύτερα και με έννοιες που είναι ικανές να γενικευτούν.

Μερικές φορές συμβαίνει να επιδιώκουμε τη λύση ενός προβλήματος, κάτω από ανεπαρκείς υποθέσεις ή κατά κάποια λανθασμένη έννοια, και για το λόγο αυτό δεν τα καταφέρνουμε. Τότε προκύπτει το πρόβλημα: να αποδείξουμε την αδυναμία της λύσης υπό τις δεδομένες υποθέσεις. Τέτοιες αποδείξεις της αδυναμίας πραγματοποιήθηκαν από τους αρχαίους, για παράδειγμα, όταν έδειξαν ότι ο λόγος της υποτείνουσας προς την πλευρά του ισοσκελούς

[11] Ως ένα παράδειγμα μιας αριθμητικής θεωρίας που λειτουργεί αυστηρά με γεωμετρικά ιδέες και σημεία, ο Χίλμπερτ εδώ αναφέρει το έργο του Minkowski, «Die Geometrie der Zahlen»

ορθογωνίου τριγώνου είναι άρρητος αριθμός. Στα νεότερα μαθηματικά, το ερώτημα ως προς την αδυναμία ορισμένων λύσεων παίζει σημαντικό ρόλο, και αντιλαμβανόμαστε με αυτόν τον τρόπο ότι τα παλαιά και δύσκολα προβλήματα, όπως είναι η απόδειξη του αξιώματος των παραλλήλων[12], ο τετραγωνισμός του κύκλου[13], ή η επίλυση των εξισώσεων πέμπτου βαθμού με ριζικά, έχουν βρει επιτέλους πλήρως ικανοποιητικές και έγκυρες λύσεις, αν και υπό μια άλλη έννοια από εκείνη που προβλεπόταν αρχικά».

Καταλήγει ότι το σημαντικό αυτό γεγονός, μαζί με άλλους φιλοσοφικούς λόγους, οδήγησε στη καταδίκη της σκέψης ότι για κάθε μαθηματικό πρόβλημα πρέπει απαραιτήτως να υπάρχει μια ακριβής επίλυση, είτε με τη μορφή μιας πραγματικής απάντηση στο ερώτημα, ή με την απόδειξη της αδυναμίας της λύσης του και με αυτήν την απαραίτητη αποτυχία όλων των προσπαθειών. Και φέρνει ως παράδειγμα το ζήτημα της ασυμμετρίας της σταθεράς γ των Όιλερ-Μασκερόνι[14], ή την ύπαρξη άπειρων πρώτων της μορφής $2^n + 1$. Παρόλα αυτά τονίζει ότι όσο απρόσιτα κι αν μας φαίνονται αυτά τα προβλήματα και όσο αμήχανοι κι αν στεκόμαστε μπροστά τους, έχουμε παρ 'όλα αυτά, την πεποίθηση ότι η λύση τους πρέπει να ακολουθήσει έναν πεπερασμένο αριθμό από καθαρά λογικές διεργασίες.

«Αυτή η πεποίθηση της επιλυσιμότητας του κάθε μαθηματικού προβλήματος είναι ένα ισχυρό κίνητρο για τον ερευνητή. Ακούμε μέσα μας την αέναη κλήση: Υπάρχει το πρόβλημα. Ζητήστε τη λύση του. Μπορείτε να το βρείτε από τον καθαρό λόγο, στα μαθηματικά τίποτα δεν είναι ignorabimus[15]. Βέβαια ο όγκος των προβλημάτων στα μαθηματικά είναι ανεξάντλητος, και μόλις ένα πρόβλημα επιλύεται πολλά άλλα έρχονται και παίρνουν τη θέση του».

---

[12] Το 5ο αξίωμα του Ευκλείδη – Αξίωμα Παραλληλίας Από δοθέν σημείο εκτός δοθείσης γραμμής (ευθείας), διέρχεται το πολύ μία γραμμή (ευθεία), που δεν τέμνει την δοθείσα.

[13] Ο Τετραγωνισμός του κύκλου είναι ένα από τα αρχαιότερα γεωμετρικά προβλήματα. Η διατύπωση του είναι απλή: Ζητείται η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με το εμβαδόν ενός δοθέντος κύκλου. Το 1882, ο μαθηματικός Φέρντιναντ Φον Λίντεμαν (Ferdinand von Lindemann) απέδειξε το αδύνατο της επίλυσης του προβλήματος.

[14] Σταθερά των Euler–Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\log(n)\right]=\int_1^\infty\left(\frac{1}{\lfloor x\rfloor}-\frac{1}{x}\right)dx.$$

γ = 0.57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421 59335 93992 ... (Τα πρώτα 50 δεκαδικά ψηφία.) Leonhard Euler, De Progressionibus harmonicis observationes (Eneström Index 43) ,1735 1790, Lorenzo Mascheroni

[15] «Ignoramus et ignorabimus» (αγνοούμε και θα αγνοούμε) ήταν η προσφιλής φράση του γερμανού φιλόσοφου Εμίλ ντυ Μπουά Ρειμον που ισχυριζόταν με αυτό τον τρόπο ότι υπάρχει ένα απώτατο όριο γνώσης της φύσης, πέρα από το οποίο ο άνθρωπος δεν θα φτάσει ποτέ .

3.3 Το πρόβλημα του Κάντορ (Cantor) σχετικά με τον πληθάριθμο[16] του συνεχούς.

Δύο συστήματα, λ.χ, δύο σύνολα απλών συνηθισμένων πραγματικών αριθμών ή σημείων, λέγεται ότι είναι (σύμφωνα με τον Κάντορ) ισοδύναμα ή ίσου πληθαρίθμου, αν μπορούν να συσχετισθούν το ένα με το άλλο, έτσι ώστε σε κάθε αριθμό του ενός συνόλου να αντιστοιχεί ένας και μόνο ένας συγκεκριμένος αριθμός του άλλου. Οι έρευνες του Κάντορ σε τέτοια σημειοσύνολα υποδηλώνουν ένα πολύ εύλογο θεώρημα, το οποίο, ωστόσο, παρά τις πιο επίπονες προσπάθειες, κανείς δεν έχει καταφέρει να αποδείξει. Αυτό είναι το θεώρημα:

Κάθε σύστημα απείρων πραγματικών αριθμών, λ.χ. κάθε σύνολο άπειρων αριθμών (ή σημείων), είναι ή ισοδύναμο με το σύνολο των ακέραιων 1, 2, 3, ... ή με το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών και, συνεπώς, με το συνεχές, δηλαδή, το σύνολο των σημείων της ευθείας. Όσον αφορά την ισοδυναμία υπάρχουν, ως εκ τούτου, μόνο δύο άπειρα σύνολα αριθμών, το αριθμήσιμο σύνολο και το συνεχές.

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει αμέσως ότι το συνεχές έχει τον επόμενο πληθικό αριθμό έπειτα από αυτόν του αριθμήσιμου συνόλου. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος ως εκ τούτου, θα αποτελούσε μια νέα γέφυρα ανάμεσα στο αριθμήσιμο σύνολο και το συνεχές .

Ας αναφέρω ακόμα μια πολύ αξιοσημείωτη πρόταση του Κάντορ, η οποία βρίσκεται σε στενή σχέση με το θεώρημα που αναφέρθηκε και το οποίο, ίσως, αποτελεί το κλειδί της απόδειξης. Ένα σύστημα πραγματικών αριθμών λέγεται διατεταγμένο, αν για κάθε δύο αριθμούς του συστήματος είναι καθορισμένο ποιός είναι ο προηγούμενος και ποιος ο επόμενος, και αν ταυτόχρονα αυτός ο καθορισμός είναι τέτοιος που εάν ο α είναι πριν τον b και ο b είναι πριν το c, τότε το α είναι οπωσδήποτε πριν από το c. Η φυσική διάταξη των αριθμών ενός συστήματος ορίζεται ως εκείνη στην οποία το μικρότερο προηγείται του μεγαλύτερου. Αλλά υπάρχουν, όπως φαίνεται εύκολα απείρως πολλοί άλλοι τρόποι με τους οποίους ένα αριθμητικό σύστημα μπορεί να διαταχθεί.

---

[16] Στα Μαθηματικά ο πληθάριθμος ή πληθικός αριθμός (Cardinality) είναι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου. Για παράδειγμα, ο πληθάριθμος του συνόλου A={2.92, 6.28, -1.35} είναι 3, ενώ το σύνολο B={5, 10, 15, 20, 25} έχει πληθάριθμο 5. Ο πληθάριθμος μπορεί να ανήκει στο σύνολο των φυσικών, ή στην κλάση των πληθικών αριθμών (δεν υπάρχει το σύνολο των πληθαρίθμων). Ο πληθάριθμος του συνόλου A συμβολίζεται με cardA(<(Αγγλικά) cardinality που σημαίνει πληθάριθμος).

Αν σκεφτούμε μια συγκεκριμένη διάταξη αριθμών και επιλέξομε μεταξύ αυτών των αριθμών ένα υποσύστημα ή υποσύνολο, αυτό το υποσύστημα θα είναι επίσης διατεταγμένο. Τώρα ο Κάντορ θεωρεί ένα συγκεκριμένο τύπο διατεταγμένου συνόλου τον οποίο χαρακτηρίζει ως καλώς διατεταγμένο και το οποίο χαρακτηρίζεται έτσι διότι, όχι μόνο στο ίδιο το σύνολο, αλλά και σε κάθε του υποσύνολο θα υπάρχει ένα πρώτο στοιχείο. Το σύστημα των ακεραίων 1, 2, 3, ... με την φυσική τους διάταξη είναι προφανώς καλώς διατεταγμένο. Από την άλλη πλευρά, το σύστημα των πραγματικών αριθμών, λ.χ. το συνεχές με τη φυσική του διάταξη, προφανώς δεν είναι καλώς διατεταγμένο. Γιατί, αν σκεφτούμε ως υποσύνολο τα σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος, με εξαίρεση το αρχικό σημείο, σαφώς αυτό το υποσύνολο δεν θα είχε πρώτο στοιχείο. Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι αν το σύνολο όλων των αριθμών δεν μπορεί να διαταχθεί με κάποιον άλλο τρόπο, έτσι ώστε κάθε υποσύνολό του να μπορεί να έχει ένα πρώτο στοιχείο, λ.χ. εάν το συνεχές δεν μπορεί να θεωρηθεί ως καλώς διατεταγμένο σύνολο. Ο Κάντορ πιστεύει ότι αυτό το ερώτημα πρέπει να απαντηθεί καταφατικά. Φαίνεται πιο επιθυμητό να ληφθεί μια ευθεία απόδειξη αυτού του σημαντικού ισχυρισμού του Κάντορ, ενδεχομένως επιδεικνύοντας μια διάταξη των αριθμών στην οποία κάθε υποσύστημα θα έχει ένα πρώτο στοιχείο.

3.4 Η Συμβιβαστότητα (μην αντιφατικότητα) των Αξιωμάτων της Αριθμητικής .

Όταν ασχολούμαστε με τη διερεύνηση των θεμελίων μιας επιστήμης, θα πρέπει να δημιουργήσουμε ένα σύστημα αξιωμάτων που να περιέχει μια ακριβή και πλήρη περιγραφή των σχέσεων που υφίστανται μεταξύ των στοιχειωδών εννοιών αυτής της επιστήμης. Τα αξιώματα αυτά είναι ταυτόχρονα οι ορισμοί αυτών των στοιχειωδών εννοιών. Κανένας ισχυρισμός σχετικός προς την επιστήμη της οποίας εξετάζουμε τις αρχές δεν θα γίνει δεκτός ως ακριβής, εάν δεν προκύπτει ύστερα από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων από τα αξιώματα. Με μια πιο προσεκτική εξέταση, τίθεται το ερώτημα: μήπως ορισμένες καταφάσεις που περιέχονται στα αξίωμα αλληλεξαρτώνται και μήπως συνεπώς τα αξιώματα περιέχουν πλεονάζοντα μέρη που οφείλουμε να τα απαλείψουμε αν θέλουμε να έχουμε ένα σύστημα πλήρως ανεξάρτητων αξιωμάτων;

Αλλά το πιο σημαντικό από τα πολλά ερωτήματα που τίθενται από την εξέταση των αξιωμάτων σύμφωνα με τον Χίλμπερτ είναι να αποδειχτεί ότι τα αξιώματα δεν είναι αντιφατικά, δηλαδή, να αποδειχθεί ότι βασιζόμενοι σε αυτά τα αξιώματα δεν θα μπορέσουμε ποτέ να καταλήξομε σε αντιφατικά αποτελέσματα μέσα από ένα πεπερασμένο πλήθος λογικών συνεπαγωγών.

Στην γεωμετρία, η απόδειξη της συμβιβαστότητας (μη αντιφατικότητας) των αξιωμάτων μπορεί να πραγματοποιηθεί με την δημιουργία ενός κατάλληλου πεδίου αριθμών, έτσι ώστε στα γεωμετρικά αξιώματα να αντιστοιχούν ανάλογες σχέσεις μεταξύ των αριθμών αυτού του πεδίου και συνεπώς έτσι ώστε κάθε αντιγραφή στα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα γεωμετρικά αξιώματα να είναι αναγκαστικά αναγνωρίσιμη στην αριθμητική αυτού του πεδίου . Με αυτόν τον τρόπο η επιθυμητή απόδειξη για την μη αντιφατικότητα των γεωμετρικών αξιωμάτων ανάγεται στην απόδειξη της μη αντιφατικότητας των αξιωμάτων της αριθμητικής.

Από την άλλη πλευρά, απαιτείται μια άμεση μέθοδος για την απόδειξη της μη αντιφατικότητας των αξιωμάτων της αριθμητικής. Τα αξιώματα της αριθμητικής δεν είναι ουσιαστικά τίποτα άλλο από τους συνήθεις κανόνες λογισμού, στους οποίους πρέπει να προστεθεί το αξίωμα της συνέχειας. Ο Χίλμπερτ είχε ήδη απαριθμήσει αυτά τα αξιώματα αντικαθιστώντας ταυτόχρονα το αξίωμα της συνεχείας από δύο απλούστερα, ήτοι το γνωστό αξίωμα του Αρχιμήδη[17], και ένα νέο αξίωμα σύμφωνα με το οποίο οι αριθμοί σχηματίζουν ένα σύστημα «όντων» το οποίο δεν είναι ικανό για περαιτέρω επέκτασή του, εφ 'όσον διατηρούν ανέπαφα όλα τα άλλα αξιώματα (αξίωμα της πληρότητας). Χρειάζεται να βρεθεί μια άμεση απόδειξη για την μη αντιφατικότητα των αξιωμάτων της αριθμητικής, μέσω μιας προσεκτικής μελέτης και με την κατάλληλη τροποποίηση των γνωστών μεθόδων της συλλογιστικής στην θεωρία των άρρητων αριθμών.

Για να δείξει τη σημασία του προβλήματος από μια άλλη σκοπιά, ο Χίλμπερτ προσθέτει την ακόλουθη παρατήρηση:

---

[17] Η Αρχιμήδεια ιδιότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλώνει ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y με x > 0, υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε ν x>y.
Η απόδειξη της ιδιότητας αυτής προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι το σύνολο N των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο. Επειδή λοιπόν το N δεν είναι άνω φραγμένο ο πραγματικός αριθμός y/x δεν μπορεί να είναι άνω φράγμα του και επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένας φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε νx>y.
Η γεωμετρική ερμηνεία της αρχιμήδειας ιδιότητας είναι η εξής: για οποιαδήποτε δύο ευθύγραμμα τμήματα, με ένα πεπερασμένο αριθμό ευθυγράμμων τμημάτων ίσων με το μικρότερο από τα δύο, τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο μπορούμε να σχηματίσουμε ευθύγραμμο τμήμα που να ξεπερνά το μεγαλύτερο από τα δύο σε μήκος.

«Αν προσδώσουμε σε μια έννοια, ιδιότητες που αντιφάσκουν μεταξύ τους, θα έλεγα ότι από μαθηματική άποψη αυτή η έννοια δεν υπάρχει. Έτσι, για παράδειγμα, στα μαθηματικά δεν υπάρχει κανένας πραγματικός αριθμός που το τετράγωνό του να ισούται με -1. Αντίθετα αν μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι ιδιότητες που δόθηκαν σε μια έννοια δεν θα μπορέσουν ποτέ, με την εφαρμογή ενός πεπερασμένου πλήθους λογικών συναγωγών να οδηγήσουν σε αντίφαση θα έλεγα ότι με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε αποδείξει την μαθηματική ύπαρξη της εν λόγω έννοιας. Στην προκειμένη περίπτωση, όπου πρόκειται για αξιώματα σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς, η απόδειξη της μη αντιφατικότητάς τους θα ήταν ταυτόχρονα και απόδειξη της μαθηματικής ύπαρξης του συνόλου των πραγματικών αριθμών δηλαδή του συνεχούς. Πράγματι, όταν η απόδειξη για τη μη αντιφατικότητα των αξιωμάτων επιτευχθεί πλήρως, οι αντιρρήσεις που έχουν εκφραστεί κατά καιρούς ως προς την ύπαρξη των πραγματικών αριθμών θα μετατραπούν σε απολύτως αβάσιμες. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή το συνεχές σύνολο, όπως το αντιμετωπίζουμε εδώ, δεν είναι το σύνολο όλων των δυνατών αναπτυγμάτων σε δεκαδικά κλάσματα, ή το σύνολο όλων των πιθανών νόμων σύμφωνα με τους οποίους μπορούν να εξελιχθούν τα στοιχεία μιας θεμελιώδους ακολουθίας: είναι μάλλον ένα σύστημα όντων, των οποίων οι αμοιβαίες σχέσεις διέπονται από τα διατυπωμένα αξιώματα και για τις οποίες είναι αληθή όλα τα δεδομένα, και μόνο αυτά, που μπορούν να προκύψουν από τα αξιώματα μέσω ενός πεπερασμένου πλήθος λογικών βημάτων. Μόνο με αυτή την έννοια πιστεύω ότι το συνεχές είναι αυστηρά και λογικά κατανοητό. Φαίνεται, πράγματι, ότι αυτή ανταποκρίνεται καλύτερα στην εμπειρία και την διαίσθησή μας, Η έννοια του συνεχούς ή ακόμα και το σύνολο όλων των συναρτήσεων υπάρχει κατά απόλυτο τρόπο όπως ακριβώς υπάρχει π.χ. το σύνολο των ρητών ή ακόμα οι ανώτερες κλάσεις πληθικών αριθμών που όρισε ο Κάντορ. Γιατί φρονούμε ότι η ύπαρξη αυτών των εννοιών μπορεί εξίσου καλά να αποδειχθεί όπως και η ύπαρξη του συνεχούς, ενώ ισχύει το αντίθετο για το σύστημα όλων των πληθαρίθμων ή ακόμα για το σύνολο όλων των άλεφ υπερπερασμένων αριθμών του Κάντορ[18], για τους οποίους δεν μπορούμε να διατυπώσουμε, με την έννοια που περιέγραψα πιο πάνω, ένα μη αντιφατικό σύστημα αξιωμάτων και οι οποίοι συνεπώς δεν έχουν μαθηματική ύπαρξη».

[18] το πρώτο γράμμα του εβραϊκού αλφαβήτου που συμβολίζει πληθάριθμο απειροσυνόλου

4. ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ (ΧΊΛΜΠΕΡΤ 1918).

4.1 Εισαγωγικό Σημείωμα.

Η διάλεξη περί «Αξιωματικής Σκέψης», που εκφωνήθηκε πριν από την συνάντηση της Ελβετικής Μαθηματικής Εταιρείας στην Ζυρίχη στις 11 Σεπτεμβρίου 1917, σηματοδοτεί την έναρξη της δεύτερης περιόδου του Χίλμπερτ δηλαδή της περιόδου της έρευνας για τα θεμέλια των μαθηματικών. Στο διάστημα που μεσολάβησε από το 1904, έλαβαν χώρα πολλές σημαντικές εξελίξεις στα θεμέλια των μαθηματικών[19]. Ο Χίλμπερτ στην εν λόγω διάλεξη, δεν καταπιάνεται άμεσα με τα τεχνικά προβλήματα που τίθενται από αυτές τις εξελίξεις. Ούτε ο ίδιος θα τα εκφράσει γραπτώς μέχρι να εκδώσει την Θεωρία Αποδείξεων το1922[20]. Αντί για αυτό ο Χίλμπερτ ερευνά το ρόλο του αξιωματικού συστήματος στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες. Ο ίδιος επαναλαμβάνει και τελειοποιεί την έκθεσή του για την αξιωματική μέθοδο και, στον απόηχο των «Principia» και του αξιωματικού συστήματος του Ζερμέλο[21], τονίζει και πάλι την ανάγκη για μια άμεση απόδειξη της σχέσης της αριθμητικής θεωρίας και της θεωρίας συνόλων. Ο ίδιος επιδιώκει επίσης να στρέψει την προσοχή των μαθηματικών στη μελέτη των αποδείξεων, και εκτός από την συνέχεια και την ανεξαρτησία των αξιωμάτων προωθεί το

[19] Ο Ernst Zermelo είχε ήδη αποδείξει το θεώρημά του (Zermelo 1904 και 1908a). Τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων είχαν γίνει ευρέως γνωστά και είχαν οδηγήσει σε έντονες λογομαχίες μεταξύ των Russell, Poincarè, Richard, König, Zermelo και Peano. Η αξιωματική μέθοδος του Χίλμπερτ που χρησιμοποιείται για πρώτη φορά στο έργο «Grundlagen der Geometrie (1899)», είχε εφαρμοστεί σε πολυάριθμες έρευνες στη γεωμετρία, την άλγεβρα και την μαθηματική φυσική. Ο Poincarè δημοσίευσε τις επικρίσεις του Χίλμπερτ 1904 και των δασκάλων της Λογικής (Poincare1905b, 1906a και 1908b). Ο Zermelo παρείχε αξιώματα για τη θεωρία των Συνόλων του Dedekind και Cantor (Zermelo 1908b). Οι Whitehead και Russell είχαν δημοσιεύσει το έργο «Principia Mathematica». Ο Brouwer άρχισε να αναπτύσσει τα διαισθητικά μαθηματικά. Ο ταλαντούχος πρώην μαθητής του Χίλμπερτ, Hermann Weyl συντάχθηκε με τις ιδέες του Brouwer και σύντομα θα δημοσίευε το Das Kontinuum (Weyl 1917).

[20] Οι Brouwer και Weyl που ήταν οι κύριοι στόχοι του στα μεταγενέστερα άρθρα του, δεν αναφέρονται. Οι Cantor και Poincarè και τα παράδοξά τους θίγονται μόνο ελαφρά.

[21] Το πρότυπο για την αξιωματική θεμελίωση του Zermelo ήταν η αξιωματική ευκλείδεια γεωμετρία. Από τη σκοπιά της θεμελιώσεως, δύο είναι τα καίρια σημεία της απόδειξης του Zermelo:

1) Ότι η απόδειξή του είναι με εις άτοπο απαγωγή. Αν υπάρχει μη κενό σύνολο που δεν μπορεί να διαταχθεί καλώς, θα έχουμε άτοπο.
2) Υποθέτουμε ότι ισχύει το αξίωμα επιλογής.

Το θεώρημα του Zermelo είναι θεμελιώδες, γιατί είναι το μόνο που στηρίζει λογικά τη δυνατότητα μεταβάσεως με καλά διαταγμένη πορεία από το αριθμήσιμο στο μη αριθμήσιμο.

πρόβλημα της λήψης απόφασης για προβλήματα που απαιτούν ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων, τα κριτήρια για την απλοποίηση των αποδείξεων, τη σχέση μεταξύ του περιεχομένου και της τυπικότητας των μαθηματικών, και της κατ' αρχήν επίλυσης κάθε μαθηματικού προβλήματος. Όπως παραδέχεται ο Χίλμπερτ, οι θέσεις εδώ είναι σε προκαταρκτικό στάδιο.

Το δοκίμιο είναι αξιοσημείωτο για τις πολυάριθμες απεικονίσεις της αξιωματικής μεθόδου που προέρχονται από διάφορους κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής, καθώς και για τη σχετική έλλειψη χώρου που διατίθεται για τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων. Ο Χίλμπερτ επίμονα παρερμηνεύεται ως «φορμαλιστής», δηλαδή ως κάποιος που είχε τόσο ταραχτεί από τα παράδοξα ώστε υποστήριζε τη θεωρία ότι τα μαθηματικά είναι απλώς ένα παιχνίδι που παίζεται με σύμβολα χωρίς νόημα. Αλλά το πνευματικό υπόβαθρο της Θεωρίας Αποδείξεων του Χίλμπερτ ήταν πλουσιότερο από αυτό. Για να είμαστε ειλικρινείς, τα παράδοξα ήταν ένα σημαντικό ερέθισμα. Αλλά είχε μεγαλύτερες φιλοδοξίες από την αποφυγή του παραδόξου[22]. Η μελέτη του για την αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας είχε επιφέρει μια πλούσια συγκομιδή μαθηματικών συμπερασμάτων - την μη Αρχιμήδεια γεωμετρία, έναν νέο τοπολογικό χαρακτηρισμό του επιπέδου, νέα θεωρήματα σχετικά με τη φύση του απείρου - και υπήρχε κάθε λόγος να ελπίζουμε ότι το ίδιο ισχυρό εργαλείο θα αποδειχθεί εξίσου χρήσιμο και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής που αναφέρονται σε αυτό το άρθρο.

Όσο για τον όρο «φορμαλιστής» είναι τόσο παραπλανητικός ώστε θα εγκαταλειφθεί τελείως ως τίτλος για τη φιλοσοφία των μαθηματικών του Χίλμπερτ. Στο πρόσωπό του, ο «φορμαλισμός» δεν είναι μια ευτυχής περιγραφή για το τρόπο ή το σκεπτικό που βρίσκει κανείς στο «Anschauliche Geometrie»[23] ένα έργο που γράφτηκε όταν ο Χίλμπερτ ήδη επεξεργαζόταν την Θεωρία Αποδείξεών του. Ούτε μεταφέρει με ακρίβεια τις πεποιθήσεις του ανθρώπου που, στις διαλέξεις του στο Γκέτινγκεν, χλευάστηκε από εκείνους που έβλεπαν τα μαθηματικά απλά ως έναν σωρό από συμπεράσματα που παράγονται μηχανικά από ένα δεδομένο απόθεμα αξιωμάτων. Ούτε είναι φορμαλιστής ο άνθρωπος που τελείωνε το δοκίμιό του, «Στο άπειρο», λέγοντας ότι: «Έχουμε την πεποίθηση ότι, για να είναι η επιστημονική γνώση δυνατή, είναι απαραίτητες ορισμένες διαισθητικές αντιλήψεις και ιδέες. Η Λογική από μόνη της δεν αρκεί.» (Χίλμπερτ 1926). Είναι σαφές ότι, ο Χίλμπερτ θεωρεί τα συστήματα τυπικών αξιωμάτων, ως ένα

[22] (Ο Χίλμπερτ, στην πραγματικότητα, σε αδημοσίευτες διαλέξεις του στο Göttingen, κατ 'επανάληψη είχε δηλώσει ότι κατά τη γνώμη του η μελέτη του Zermelo είχε επιλύσει με επιτυχία τα γνωστά παράδοξα.)

[23] " Η έξυπνη γεωμετρία" (Χίλμπερτ και Cohn - Vossen 1932).

ισχυρό εργαλείο για τη μαθηματική έρευνα, ένα εργαλείο που πρέπει να χρησιμοποιείται όταν ένα πεδίο είχε φτάσει σε σημείο επαρκούς ωριμότητας.

Αλλά πουθενά δεν προκύπτει ότι το σύνολο των μαθηματικών μπορεί απλώς να ταυτίζεται με τη μελέτη των τυπικών συστημάτων. Και πράγματι στα γραπτά κείμενα για την θεωρητική απόδειξη προσπάθησε να πείσει ότι τα γνήσια μαθηματικά , λαμβάνουν χώρα, όχι στο φορμαλισμό, αλλά στην μεταγλώσσα. Για όλους αυτούς τους λόγους, ο ίδιος ο Χίλμπερτ απέρριψε τον τίτλο «φορμαλιστής» και οι μαθητές της σκέψης του θα ήταν καλό να ακολουθήσουν το παράδειγμά του.

4.2 Η διάλεξη για την Αξιωματική Μέθοδο.

Όπως, και στη ζωή των εθνών κάθε έθνος μπορεί να ευδοκιμήσει μόνο όταν όλες οι γειτονικές χώρες είναι υγιείς, και όπως απαιτεί το συμφέρον των κρατών, όχι μόνο θα πρέπει να επικρατεί η τάξη μέσα σε κάθε επιμέρους κράτος, αλλά πρέπει και οι σχέσεις του με τα άλλα μέλη να είναι σε καλή κατάσταση, έτσι και στο χώρο των επιστημών. Αναγνωρίζοντας αυτό το γεγονός ο Χίλμπερτ δικαιολογεί τον λόγο για τον οποίο οι σημαντικότεροι εκπρόσωποι της μαθηματικής σκέψης εξέφραζαν πάντα μεγάλο ενδιαφέρον για τους νόμους και τη δομή των γειτονικών επιστημών, και πάνω απ 'όλα, προς όφελος των μαθηματικών, καλλιεργούσαν πάντα τις σχέσεις με τις γειτονικές επιστήμες, ιδιαίτερα με τις μεγάλες «αυτοκρατορίες» της φυσικής και της επιστημολογίας. Η ουσία αυτών των σχέσεων, και ο λόγος για την καρποφορία τους, θα εμφανιστεί ξεκάθαρα όταν θα έχει περιγράψει τη γενική μέθοδο της έρευνας η οποία φαίνεται να εξαπλώνεται στα σύγχρονα μαθηματικά: Δηλαδή την **αξιωματική μέθοδο**.

Όταν συγκεντρώνουμε τις αλήθειες ενός βέβαιου, λιγότερο ή περισσότερο ολοκληρωμένου, τομέα της γνώσης σύντομα παρατηρούμε ότι τα στοιχεία αυτά είναι ικανά να ταξινομηθούν. Αυτή η ταξινόμηση γίνεται πάντα με τη βοήθεια ενός συγκεκριμένου πλαισίου εννοιών με τον ακόλουθο τρόπο: η έννοια του πλαισίου αυτού αντιστοιχεί σε κάθε επιμέρους αντικείμενο του τομέα της γνώσης, και μια λογική σχέση μεταξύ των εννοιών αντιστοιχεί σε κάθε γεγονός στον τομέα της γνώσης. Το πλαίσιο των εννοιών δεν είναι τίποτα άλλο από τη θεωρία του πεδίου της γνώσης.

Έτσι οι αλήθειες της Γεωμετρίας ταξινομούνται στην Γεωμετρία, οι αλήθειες της αριθμητικής στην θεωρία των αριθμών, οι αλήθειες της στατικής, της μηχανικής και της ηλεκτροδυναμικής στη θεωρία της στατικής, της μηχανικής, ηλεκτροδυναμικής, και οι αλήθειες από την φυσική των αερίων στη θεωρία των αερίων.

Αν μελετήσουμε πιο στενά μια συγκεκριμένη θεωρία, μπορούμε πάντα να δούμε ότι μερικές διακεκριμένες προτάσεις της στον τομέα της γνώσης διέπουν την κατασκευή του πλαισίου των εννοιών, και αυτές οι προτάσεις στη συνέχεια επαρκούν από μόνες τους για την κατασκευή, με λογικές αρχές, ενός ολόκληρου πλαισίου.

Κατά συνέπεια, στη γεωμετρία η πρόταση της γραμμικότητας της εξίσωσης του επιπέδου και του ορθογώνιου μετασχηματισμού σημειακών συντεταγμένων- είναι απολύτως επαρκής για να παράγει το σύνολο της ευρείας επιστήμης της Ευκλείδειας γεωμετρίας του χώρου, μέσω της ανάλυσης. Επιπλέον, οι νόμοι υπολογισμού και οι κανόνες για τους ακέραιους αριθμούς επαρκούν για την δημιουργία της Θεωρίας Αριθμών. Στην στατική τον ίδιο ρόλο παίζει η πρόταση της παραλληλίας των δυνάμεων. Στη μηχανική οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του Λαγκράντζ, και στην ηλεκτροδυναμική οι εξισώσεις του Μάξγουελ. Η Θερμοδυναμική μπορεί να οικοδομηθεί πλήρως, επάνω στην έννοια της λειτουργίας της ενέργειας και τον ορισμό των θερμοκρασιών και της πίεσης, σαν παράγωγα των μεταβλητών της, της εντροπίας και του όγκου. Στην καρδιά της στοιχειώδους θεωρίας της ακτινοβολίας είναι το θεώρημα του Κίρκοφ πάνω στις σχέσεις μεταξύ εκπομπής και απορρόφησης. Στη Λογική των πιθανοτήτων ο Νόμος των σφαλμάτων του Γκάους είναι θεμελιώδης πρόταση. Στη θεωρία των αερίων, η πρόταση ότι η εντροπία είναι ο αρνητικός λογάριθμος της πιθανότητας της κατάστασης. Στη θεωρία εξισώσεων, η πρόταση σχετίζεται με την ύπαρξη των ριζών. Στη θεωρία των πρώτων αριθμών, η πρόταση σχετίζεται με την πραγματικότητα και τη συχνότητα των συνάρτησης $\zeta(s)$ του Ρίμαν.

Αυτές οι θεμελιώδεις προτάσεις μπορεί να θεωρηθούν από την αρχή ως τα αξιώματα των επιμέρους πεδίων της γνώσης: η προοδευτική ανάπτυξη του κάθε ξεχωριστού πεδίου γνώσης, έπειτα, έγκειται αποκλειστικά στην περαιτέρω λογική επεξεργασία του ήδη αναφερθέντος πλαισίου εννοιών. Αυτή η άποψη είναι κυρίαρχη στα καθαρά μαθηματικά, και στον αντίστοιχο τρόπο εργασίας οφείλουμε την ανάπτυξη της γεωμετρίας, της αριθμητικής, της θεωρίας των συναρτήσεων και του συνόλου της ανάλυσης.

Κατά συνέπεια, στις περιπτώσεις που αναφέρονται παραπάνω το πρόβλημα της θεμελίωσης κάθε ξεχωριστού τομέα της γνώσης είχε βρει μια λύση. Αλλά η λύση αυτή ήταν μόνο προσωρινή. Στην πραγματικότητα, στους επιμέρους τομείς της γνώσης προέκυψε η ανάγκη να στηριχθούν οι θεμελιώδεις αξιωματικές προτάσεις. Έτσι, κάποιος αποκτά "αποδείξεις" της γραμμικότητας της εξίσωσης του επιπέδου και της ορθογωνιότητας του μετασχηματισμού που εκφράζει μια κίνηση, των νόμων των αριθμητικών υπολογισμών, της παραλληλίας των δυνάμεων, των εξισώσεων της κίνησης του Λαγκράτζ, του νόμου του Κίρκοφ σχετικά με την εκπομπή και την απορρόφηση, του νόμου της εντροπίας και της πρότασης σχετικά με την ύπαρξη των ριζών μιας εξίσωσης.

Αλλά η προσεκτική μελέτη αυτών των «αποδείξεων» δείχνει ότι δεν είναι από μόνες τους αποδείξεις, αλλά βασικά μόνο καθιστούν δυνατό τον εντοπισμό πραγμάτων πίσω από ορισμένες βαθύτερες προτάσεις, οι οποίες με τη σειρά τους τώρα για να θεωρηθούν ως νέα αξιώματα αντί για προτάσεις πρέπει να αποδειχθούν. Τα πραγματικά λεγόμενα αξιώματα της γεωμετρίας, της αριθμητικής, της στατικής, της μηχανικής, της θεωρίας ακτινοβολίας, ή της θερμοδυναμικής προέκυψαν με αυτό τον τρόπο. Αυτά τα αξιώματα σχηματίζουν ένα "στρώμα" αξιωμάτων που κείτεται βαθύτερα από το "στρώμα" των αξιωμάτων που δίνουν τα πρόσφατα θεμελιώδη θεωρήματα κάθε τομέα της γνώσης. Η διαδικασία της αξιωματικής μεθόδου, ισοδυναμεί με την εμβάθυνση των θεμελίων των επιμέρους τομέων της γνώσης - μια εμβάθυνση που είναι απαραίτητη για κάθε δημιούργημα που κάποιος επιθυμεί να επεκτείνει και να οικοδομήσει υψηλότερο, παράλληλα με τη διατήρηση της σταθερότητας του.

Ο Χίλμπερτ ισχυρίζεται ότι αν η θεωρία του πεδίου της γνώσης - δηλαδή, το πλαίσιο των εννοιών που αντιπροσωπεύει - πρέπει να εξυπηρετεί το σκοπό του προσανατολισμού και της διάταξης, τότε θα πρέπει να πληρούνται δύο προϋποθέσεις. Πρώτον ότι, θα πρέπει να μας δίνει μια γενική εικόνα της ανεξαρτησίας και της εξάρτησης από τις προτάσεις της θεωρίας. Δεύτερον, θα πρέπει να μας δίδει μια εγγύηση για τη μη αντιφατικότητα του συνόλου των προτάσεων της θεωρίας. Στην πραγματικότητα, τα αξιώματα κάθε θεωρίας πρέπει να εξετάζονται ως προς τις δύο αυτές προϋποθέσεις.

Στηρίζει την πρώτη προϋπόθεση ήτοι, την ανεξαρτησία ή την εξάρτηση των αξιωμάτων (μεταξύ τους) με παραδείγματα:

«Το αξίωμα της παραλληλίας στη γεωμετρία είναι κλασικό παράδειγμα της ανεξαρτησίας ενός αξιώματος. Όταν ο Ευκλείδης πρόσθεσε την παραλληλία μεταξύ των αξιωμάτων, αρνήθηκε ότι η πρόταση της παραλληλίας υπονοείται από τα υπόλοιπα αξιώματα. Η μέθοδος έρευνας του Ευκλείδη έγινε το πρότυπο για την αξιωματική έρευνα, και έτσι η Ευκλείδεια Γεωμετρία έγινε το χαρακτηριστικό παράδειγμα της αξιωματικής επιστήμης.

Η κλασική μηχανική κομίζει ένα άλλο παράδειγμα μιας έρευνας της ανεξαρτησίας των αξιωμάτων. Οι εξισώσεις της κίνησης του Λαγκράντζ ήταν προς το παρόν ικανές να θεωρηθούν ως αξιώματα της μηχανικής - γιατί η μηχανική μπορεί φυσικά να βασίζεται εξ ολοκλήρου σε αυτές τις εξισώσεις, όταν είναι γενικά σχεδιασμένες για αυθαίρετες δυνάμεις και αυθαίρετους πλευρικούς περιορισμούς. Αλλά η περαιτέρω έρευνα δείχνει ότι δεν είναι απαραίτητο για την δομή της μηχανικής, να προϋποθέτουμε αυθαίρετες δυνάμεις ή αυθαίρετους δευτερεύοντες περιορισμούς. Έτσι, το σύστημα των προϋποθέσεων μπορεί να μειωθεί. Αυτό το κομμάτι της γνώσης οδηγεί, αφενός, στο σύστημα αξιωμάτων του Μπόλτζμαν, ο οποίος υποθέτει μόνο δυνάμεις (και μάλιστα ειδικές κεντρικές δυνάμεις), αλλά κανέναν πλευρικό περιορισμό, και στο σύστημα των αξιωμάτων του Χερτζ, που απορρίπτει τις δυνάμεις που σχετίζονται με πλευρικούς περιορισμούς (και μάλιστα ειδικούς πλευρικούς περιορισμούς με σταθερές συνδέσεις). Αυτά τα δύο συστήματα αξιωμάτων σχηματίζουν ένα βαθύτερο στρώμα στην προοδευτική αξιωματικοποίηση της μηχανικής.

Αν για την καθιέρωση της θεωρίας των εξισώσεων του Γκαλουά, θεωρούμε ως αξίωμα την ύπαρξη των ριζών μιας εξίσωσης, τότε αυτό είναι σίγουρα ένα εξαρτώμενο αξίωμα. Διότι, ο Γκάους πρώτος απέδειξε ότι το θεώρημα ύπαρξης (ριζών) μπορεί να αποδειχθεί από τα αξιώματα της αριθμητικής.

Ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον ζήτημα για την αξιωματική θεωρία σχετίζεται με την ανεξαρτησία των προτάσεων κάποιου πεδίου γνώσης από το αξίωμα της συνέχειας.

Κατά τη θεωρία των πραγματικών αριθμών αποδεικνύεται ότι το αξίωμα μέτρησης - το λεγόμενο Αρχιμήδειο αξίωμα - είναι ανεξάρτητο από όλα τα άλλα αριθμητικά αξιώματα. Όπως όλοι γνωρίζουν, η πληροφορία αυτή έχει μεγάλη σημασία για τη γεωμετρία, αλλά φαίνεται ότι παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον και για τη φυσική, καθώς, οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα: το γεγονός ότι από τις επίγειες αποστάσεις τους, μπορούμε να ανακαλύψουμε τις διαστάσεις και τις αποστάσεις των σωμάτων στο διάστημα (δηλαδή ότι μπορούμε να μετρήσουμε ουράνια αποστάσεις με επίγεια κριτήρια) και το γεγονός ότι η απόσταση μέσα σε ένα άτομο μπορεί να εκφραστεί με όρους «μέτρου» - αυτά τα γεγονότα δεν είναι καθόλου μια απλή λογική συνέπεια των προτάσεων σχετικά με την αναλογία των τριγώνων ή για τις γεωμετρικές μορφές, αλλά είναι αποτέλεσμα της εμπειρικής έρευνας. Η ισχύς του Αρχιμήδειου αξιώματος στη φύση βρίσκεται εξίσου σε ανάγκη επιβεβαίωσης από το πείραμα, όπως και η γνωστή πρόταση για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου».

Καταλήγοντας διατυπώνει το αξίωμα της συνέχειας στη φυσική ως εξής:

«Αν για την εγκυρότητα μιας πρότασης της φυσικής μπορούμε να προϋποθέσουμε έναν οποιοδήποτε βαθμό απόλυτης ακρίβειας, τότε είναι δυνατόν να δείξουμε μικρές περιοχές εντός των οποίων οι προϋποθέσεις που έχουν γίνει για την πρόταση ενδέχεται να ποικίλουν ελεύθερα, χωρίς η απόκλιση της πρότασης να υπερβαίνει τον καθορισμένο βαθμό ακρίβειας».

Το αξίωμα αυτό ουσιαστικά δεν λέει τίποτα περισσότερο από ό, τι ρητά συμβαίνει στην ουσία του πειράματος. Ο φυσικός προϋποθέτει κάτι, το οποίο όμως έχει ήδη διατυπωθεί. Για παράδειγμα, αν κάποιος ακολουθήσει τον Πλανκ και εξαγάγει τον δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο από το αξίωμα της αδυναμίας της αέναης κίνησης δεύτερου τύπου, τότε το αξίωμα της συνέχειας πρέπει να χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη.

Στη συνέχεια εξετάζει την δεύτερη προϋπόθεση δηλαδή, το ζήτημα που σχετίζεται με την μη αντιφατικότητα των αξιωμάτων. Αυτό το ζήτημα έχει σαφώς μεγάλη σημασία για την ύπαρξη μιας αντίρρησης σε μια θεωρία που απειλεί το περιεχόμενο όλης της θεωρίας.

Ακόμη και για πετυχημένες θεωρίες που είναι επί μακρόν αποδεκτές, είναι δύσκολο να ξέρει κανείς αν είναι εντελώς παγιωμένες. Συμβαίνει συχνά η πλήρης παγίωση μιας θεωρίας να θεωρείται προφανής, ενώ στην πραγματικότητα η απόδειξη χρειάζεται βαθειά μαθηματική επεξεργασία. Ο Χίλμπερτ θέτει ως παράδειγμα το πρόβλημα από την στοιχειώδη θεωρία της μεταβίβασης της θερμότητας, δηλαδή της μεταβίβασης της θερμότητας μέσα σε ένα ομογενές σώμα του οποίου οι επιφάνειες διατηρούν μια ορισμένη θερμοκρασία που διαφέρει από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντός του: τότε στην πραγματικότητα η απαίτηση να υπάρχει μια ισορροπία των θερμοκρασιών δεν συνεπάγεται καμία εσωτερική θεωρητική αντίφαση. Αλλά για να το γνωρίζουμε αυτό, είναι αναγκαίο να αποδειχθεί ότι το γνωστό πρόβλημα της οριακής τιμής στη θεωρία του δυναμικού είναι πάντα επιλύσιμο. Μόνο με αυτή την απόδειξη είναι δυνατή μια κατανομή θερμοκρασίας που ικανοποιεί τις εξισώσεις της μεταβίβασης της θερμότητας.

Ιδιαίτερα στη φυσική δεν αρκεί οι προτάσεις της θεωρίας να βρίσκονται σε αρμονία μεταξύ τους. Εξακολουθεί να υπάρχει η απαίτηση να μην έρχονται σε αντίθεση με τις γνωσιακές προτάσεις των συγγενών τομέων της. Έτσι, τα αξιώματα της στοιχειώδους θεωρίας της ακτινοβολίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδείξουν όχι μόνο το νόμο του της εκπομπής και απορρόφησης του Κίρκοφ, αλλά και ένα ειδικό νόμο για την ανάκλαση και τη διάθλαση των επιμέρους ακτίνων του φωτός, δηλαδή, τον νόμο που λέει ότι: Αν δύο δέσμες φυσικού φωτός και ίδιας ενέργειας πέσουν στην επιφάνεια που χωρίζει δύο μέσα από διαφορετικές πλευρές κατά τέτοιο τρόπο ώστε η μία δέσμη μετά την ανάκλασή της, και η άλλη μετά το πέρασμά της, να έχουν την ίδια κατεύθυνση, τότε η ακτίνα που προκύπτει από τη συνένωση των δύο είναι επίσης φυσικό φως και της ίδιας ενέργειας. Το θεώρημα αυτό όπως δείχνουν τα γεγονότα, δεν έρχεται σε αντίθεση με την οπτική, αλλά μπορεί να προκύψει ως συμπέρασμα από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία του φωτός. Επίσης, τα αποτελέσματα της κινητικής θεωρίας των αερίων έρχονται σε αρμονία με την Θερμοδυναμική. Ομοίως, η ηλεκτροδυναμική αδράνεια και η βαρύτητα του Αϊνστάιν είναι συμβατές με τις αντίστοιχες έννοιες των κλασικών θεωριών δεδομένου ότι οι κλασικές έννοιες μπορούν να θεωρηθούν ως οριακές περιπτώσεις από τις πιο γενικές έννοιες στις νέες θεωρίες.

Αντιθέτως η σύγχρονη κβαντική θεωρία και η ανάπτυξη της γνώσης μας για την εσωτερική δομή του ατόμου έχουν οδηγήσει σε νόμους που έρχονται σε αντίθεση με προηγούμενους νόμους της ηλεκτροδυναμικής και για το λόγο αυτό απαιτείται μια νέα βάση και μια ουσιαστική αναδιατύπωση.

Συνεπώς οι αντιφάσεις που προκύπτουν στις θεωρίες της φυσικής εξαλείφονται πάντα αλλάζοντας την επιλογή των αξιωμάτων. Η δυσκολία είναι να τα επιλέξουμε (τα αξιώματα), έτσι ώστε όλοι οι παρατηρούμενοι φυσικοί νόμοι να είναι λογικές συνέπειες των επιλεγμένων αξιωμάτων.

Ωστόσο, συνεχίζει ο Χίλμπερτ, τα πράγματα είναι διαφορετικά όταν η αντίφαση εμφανίζεται σε καθαρά θεωρητικά πεδία γνώσης. Η Θεωρία συνόλων περιέχει το κλασικό παράδειγμα μιας τέτοιας εμφάνισης (αντίφασης), δηλαδή το παράδοξο του συνόλου όλων των συνόλων που ανάγεται στον Κάντορ. Αυτό το παράδοξο είναι τόσο σοβαρό που έφερε σε διένεξη τους μαθηματικούς. Για παράδειγμα, οι Κρόνεκερ και Πουανκαρέ, αισθάνθηκαν την ανάγκη να απαρνηθούν την θεωρία των συνόλων - έναν από τους πιο γόνιμους και ισχυρούς κλάδους της γνώσης παντού στα μαθηματικά - ως κλάδο που δεν έχει λόγο ύπαρξης.

Σε αυτή την επισφαλή κατάσταση των πραγμάτων, η αξιωματική μέθοδος του Χίλμπερτ έρχεται για να φέρει την λύση. Με τη δημιουργία κατάλληλων αξιωμάτων που με ακριβή τρόπο περιορίζουν, τόσο την αυθαιρεσία των ορισμών των συνόλων, όσο και την παραδοχή προτάσεων σχετικά με τα στοιχεία τους, ο Ζερμέλο ανέπτυξε την θεωρία συνόλων με τέτοιο τρόπο ώστε, οι αντιφάσεις εξαφανίζονται, αλλά ο στόχος και οι δυνατότητες εφαρμογής της θεωρίας συνόλων παραμένουν αναλλοίωτες.

Η κύρια απαίτηση της θεωρίας των αξιωμάτων είναι να δείξει ότι μέσα σε κάθε πεδίο γνώσης οι αντιφάσεις που βασίζονται σε υποκείμενο σύστημα αξιωμάτων, είναι απολύτως αδύνατες[24].

Για τους τομείς της φυσικής γνώσης επίσης, είναι αρκετό να περιοριστεί το πρόβλημα της εσωτερικής μη αντιφατικότητας στη μη αντιφατικότητα των αριθμητικών αξιωμάτων. Κάποιος μπορεί και πρέπει σε ορισμένες περιπτώσεις να προχωρήσει ομοίως στην κατασκευή μιας μαθηματικής θεωρίας[25].

Το πρόβλημα της μη αντιφατικότητας του αξιωματικού συστήματος για τους πραγματικούς αριθμούς θα μπορούσε επίσης να αναχθεί με τη χρήση εννοιών της θεωρίας συνόλων στο ίδιο πρόβλημα για τους ακέραιους αριθμούς: αυτή είναι η αξία των θεωριών των αρρήτων αριθμών που αναπτύχθηκε από τους Βάιερστρας και Ντέντεκιντ.

Κατά τον Χίλμπερτ, σε δύο μόνο περιπτώσεις δεν είναι διαθέσιμη η μέθοδος της αναγωγής σε έναν άλλο ειδικό τομέα της γνώσης. Όταν πρόκειται για αξιώματα που αφορούν τους ίδιους τους ακέραιους αριθμούς, και για θέματα που αφορούν την θεμελίωση της θεωρίας συνόλων. Γιατί εδώ δεν υπάρχει άλλη αρχή, εκτός από τη λογική που θα ήταν δυνατόν να επικαλεσθεί κάποιος. Όμως, δεδομένου ότι η εξέταση της μη αντιφατικότητας είναι ένας στόχος, ο οποίος δεν μπορεί να αποφευχθεί, φαίνεται αναγκαίο να αξιωματοποιηθεί η ίδια η λογική και να αποδειχθεί ότι η θεωρία των αριθμών και η θεωρία των συνόλων είναι μόνο μέρη (ή τμήματα) της λογικής.

Η μέθοδος προετοιμαζόταν πολύ καιρό. Έχει εξηγηθεί πιο επιτυχώς από τον μαθηματικό και δάσκαλο της Λογικής τον Ράσσελ. Θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι η ολοκλήρωση αυτής της υπέροχης δουλειάς της αξιωματικοποίησης της λογικής αποτελεί το επιστέγασμα του έργου της αξιωματικοποίησης εν γένει.

Εξετάζοντας πιο προσεκτικά το θέμα, αμέσως καταλαβαίνουμε ότι το ζήτημα της μη αντιφατικότητας των ακεραίων και των συνόλων δεν είναι κάτι ανεξάρτητο αλλά ότι ανήκει σε

[24] Σύμφωνα με την απαίτηση αυτή αποδείχθηκε η συνέπεια των αξιωμάτων που καθορίζονται στο "Grundlagen der Geometrie" δείχνοντας ότι οποιαδήποτε αντίφαση στα συμπεράσματα των γεωμετρικών αξιωμάτων πρέπει να εμφανίζεται κατ 'ανάγκην και στην αριθμητική του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

[25] Για παράδειγμα, αν στην ανάπτυξη της θεωρίας των ομάδων του Γκαλουά έχουμε λάβει την πρόταση για την ύπαρξη των ριζών ως αξίωμα, ή αν στη θεωρία των πρώτων αριθμών έχουμε πάρει την υπόθεση σχετικά με την ύπαρξη των μηδενικών της συνάρτησης ζ(s) του Ρίμαν (Ρίμαν)- ως αξίωμα στη συνέχεια, σε κάθε περίπτωση, η απόδειξη της συμβιβαστότητας του συστήματος αξιωμάτων, ανάγεται σε μια απόδειξη που χρησιμοποιεί τα μέσα της ανάλυσης, της πρότασης για την ύπαρξη των ριζών ή της υπόθεσης Ρίμαν που αφορά την συνάρτηση ζ (s) - και μόνο τότε η θεωρία έχει ολοκληρωθεί ασφαλώς.

μια μεγάλη περιοχή δύσκολων επιστημονικών ερωτημάτων που έχουν ειδική μαθηματική απόχρωση: για παράδειγμα, το πρόβλημα της μεταγενέστερης επαλήθευσης των αποτελεσμάτων της μαθηματικής έρευνας, το ζήτημα του κριτηρίου της απλότητας για τις μαθηματικές αποδείξεις, το ζήτημα της σχέσης ανάμεσα στο περιεχόμενο και τον φορμαλισμό στα μαθηματικά και τη λογική και, τέλος, το πρόβλημα της απάντησης σε μια μαθηματική ερώτηση με έναν πεπερασμένο αριθμό πράξεων.

Ο Χίλμπερτ δεν ικανοποιείται με την αξιωματικοποίηση της λογικής μέχρι να κατανοηθούν και να επιλυθούν όλα αυτού του είδους τα ζητήματα και ότι συνδέεται με αυτά.

Ανάμεσα στα αναφερόμενα ζητήματα, το τελευταίο δηλαδή αυτό που σχετίζεται με την απάντηση σε μια μαθηματική ερώτηση με ένα πεπερασμένο αριθμό πράξεων είναι το πιο γνωστό και συζητημένο. Κι αυτό γιατί παραπέμπει στην ύπαρξη μαθηματικής σκέψης.

Ο Χίλμπερτ επικεντρώνεται σε αυτό το ζήτημα υποδεικνύοντας μερικά ιδιαίτερα μαθηματικά προβλήματα στα οποία παίζει σημαντικό ρόλο:

«Στη θεωρία των Αλγεβρικών Αναλλοίωτων[26] έχουμε το θεμελιώδες θεώρημα σύμφωνα με το οποίο υπάρχει πάντα ένας πεπερασμένος αριθμός ακέραιων ρητών αναλλοίωτων μέσω των οποίων μπορούν να εκπροσωπούνται όλες οι άλλες αναλλοίωτες. Κατά τη γνώμη μου, η πρώτη γενική απόδειξη του θεωρήματος ικανοποίησε πλήρως τις απαιτήσεις μας για την απλότητα και την ευκρίνεια, αλλά είναι αδύνατο να διατυπώσουμε αυτήν την απόδειξη, ώστε να μπορούμε να έχουμε από αυτή ένα δεσμευτικό όριο για τον αριθμό των πεπερασμένων πλήθους αναλλοίωτων του πλήρους συστήματος, πόσο μάλλον να ανακτήσουμε έναν πραγματικό κατάλογο αυτών. Αντ 'αυτού, νέες αρχές και εκτιμήσεις εντελώς διαφορετικού είδους ήταν απαραίτητες προκειμένου να αποδειχθεί ότι η δημιουργία του πλήρους συστήματος των

[26] Η θεωρία των Αναλλοίωτων του 19ου αιώνα συνίσταται στην μελέτη ενός γενικού ομογενούς πολυωνύμου οποιουδήποτε βαθμού και με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών. Οι ειδικοί της θεωρίας των Αναλλοίωτων αναζητούν σχέσεις μεταξύ των συντελεστών του δοσμένου πολυωνύμου και των μεταβλητών του που να παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από οποιοδήποτε γραμμικό μετασχηματισμό των μεταβλητών, που να μην μεταβάλλονται δηλαδή πέρα από τον πολλαπλασιασμό τους με μια δύναμη της ορίζουσας του μετασχηματισμού. Τέτοιες σχέσεις όταν υπεισέρχονται οι μεταβλητές ονομάζονται συναλλοίωτα ενώ όταν αφορούν μόνο τους συντελεστές ονομάζονται αναλλοίωτα. Σύντομα οι μαθηματικοί ανακάλυψαν ότι η τετραγωνική συνάρτηση δύο μεταβλητών είναι απογοητευτικά απλή.

αναλλοίωτων, απαιτεί μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό πράξεων και ότι ο αριθμός αυτός είναι μικρότερος από ένα όριο που μπορεί να δηλωθεί πριν από τον υπολογισμό[27]».

Το ερώτημα σχετικά με τη δυνατότητα επίλυσης σε ένα πεπερασμένο αριθμό πράξεων - φαίνεται να αποτελεί ένα νέο πεδίο έρευνας, το οποίο θα πρέπει να αναπτυχθεί. Για να κατανοήσει κανείς αυτό το πεδίο θα πρέπει, να καταστήσει την ίδια τη συγκεκριμένη έννοια της μαθηματικής απόδειξης ως ένα αντικείμενο έρευνας, όπως ακριβώς ο αστρονόμος θεωρεί την κίνηση της θέσης του, ο φυσικός μελετά τη θεωρία της συσκευής του και ο φιλόσοφος κρίνει τον ίδιο του το λόγο.

Σίγουρα, η εφαρμογή αυτού του προγράμματος προς τον παρόν είναι μια άλυτη υπόθεση.

Εν κατακλείδι, ο Χίλμπερτ συνοψίζει σε μερικές φράσεις τη γενική αντίληψη του για την ουσία της αξιωματικής μεθόδου.

---

[27] Βλέπουμε το ίδιο πράγμα να συμβαίνει σε ένα παράδειγμα από τη θεωρία των επιφανειών. Είναι θεμελιώδους σημασίας ζήτημα στην γεωμετρία των επιφανειών του τέταρτου βαθμού να προσδιοριστεί ο μέγιστος αριθμός των ξεχωριστών φύλλων που χρειάζεται για να δημιουργηθεί μια τέτοια επιφάνεια.

Το πρώτο βήμα για την απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι η απόδειξη ότι ο αριθμός των φύλλων μιας καμπυλωμένης επιφάνειας πρέπει να είναι πεπερασμένος. Αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχθεί θεωρητικά ως εξής. Ένας υποθέτει την ύπαρξη απείρως πολλών φύλλων, και επιλέγει ένα σημείο στο εσωτερικό κάθε χωρικής περιοχής που οριοθετείται από ένα φύλλο. Ένα σημείο συσσώρευσης για αυτά τα απείρως πολλά επιλεγμένα σημεία τότε θα είναι ένα σημείο μοναδικότητας το οποίο αποκλείεται για μια αλγεβρική επιφάνεια. Η υποθετική αυτή πορεία δεν θα οδηγήσει σε ένα ανώτερο όριο για τον αριθμό των επιφανειακών - φύλλων. Για αυτό, χρειαζόμαστε ορισμένες παρατηρήσεις σχετικά με τον αριθμό των σημείων τομής, τα οποία στη συνέχεια δείχνουν ότι ο αριθμός των φύλλων σίγουρα δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από 12. Η δεύτερη μέθοδος είναι εντελώς διαφορετική από την πρώτη και με τη σειρά της δεν μπορεί να εφαρμοστεί ή να δείξει αν η επιφάνεια τετάρτου βαθμού των δώδεκα φύλλων πραγματικά υπάρχει. Δεδομένου ότι μια τεταρτοταγής μορφή τετάρτου βαθμού, διαθέτει 35 ομογενείς συντελεστές, μπορούμε να φανταστούμε μια δεδομένη επιφάνεια του τετάρτου βαθμού, ως ένα σημείο σε έναν χώρο με 34 διαστάσεις. Η διακρίνουσα της τεταρτοταγούς μορφής της τέταρτης τάξης είναι 108ου βαθμού ως προς τους συντελεστές της. Αν έχει οριστεί ίση με μηδέν, αντιπροσωπεύει αντίστοιχα στον 34-διάστατο χώρο, μια επιφάνεια 108ης τάξης. Δεδομένου ότι οι συντελεστές της διακρίνουσας είναι οι ίδιοι συγκεκριμένοι ακέραιοι, ο τοπολογικός χαρακτήρα της διακρίνουσας επιφάνειας μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια από τους κανόνες που είναι οικείοι σε μας από τον 2 και 3-διάστατο χώρο. Έτσι μπορούμε να λάβουμε ακριβείς πληροφορίες σχετικά με τη φύση και τη σημασία των επιμέρους υποτομέων, στους οποίους η διακρίνουσα επιφάνεια χωρίζει τον 34-διάστατοχώρο. Τώρα, οι επιφάνειες του τετάρτου βαθμού που αντιπροσωπεύονται από σημεία των εν λόγω υποτομέων, όλες σίγουρα έχουν τον ίδιο αριθμό φύλλων και είναι συνεπώς δυνατόν να διαπιστωθεί μετά από έναμακρύ και κοπιαστικό, αλλά πεπερασμένο υπολογισμό, αν έχουμε μια επιφάνεια τετάρτου βαθμού, με $n \leq 12$ φύλλα ή όχι.

Η γεωμετρική μέθοδος που μόλις περιγράφηκε είναι επομένως ένας τρίτος τρόπος ή χειρισμός της ερώτησής μας σχετικά με το μέγιστο αριθμό φύλλων μιας επιφάνειας τετάρτου βαθμού. Αποδεικνύει την δυνατότητα επίλυσης του ζητήματος αυτού σε ένα πεπερασμένο αριθμό πράξεων. Έτσι, κατ 'αρχήν, ένα σημαντικό αίτημα του προβλήματός μας έχει ικανοποιηθεί: έχει μειωθεί σε ένα πρόβλημα του επιπέδου δυσκολίας προσδιορισμού ενός ψηφίου της τάξεως του $10^{10(10)}$ του δεκαδικού αναπτύγματος για τον αριθμό π, ένας στόχος που είναι σαφώς επιλύσιμος, αλλά που παραμένει άλυτος .

Χρειάστηκε μια βαθιά και δύσκολη αλγεβρο- γεωμετρική έρευνα από τον Rohn να δείξει ότι 11 φύλλα δεν είναι δυνατά σε μία επιφάνεια τετάρτου βαθμού, ενώ τα 10 φύλλα, πράγματι εμφανίζονται. Μόνο αυτή η τέταρτη μέθοδος έδωσε την πλήρη λύση του προβλήματος.

«Πιστεύω πως οτιδήποτε είναι αντικείμενο της επιστημονικής σκέψης εξαρτάται από την αξιωματική μέθοδο, και με τον τρόπο αυτό έμμεσα από τα μαθηματικά, από τη στιγμή που είναι ώριμο για το σχηματισμό μιας θεωρίας. Προχωρώντας βαθύτερα στα στρώματα του αξιωμάτων, με την έννοια που εξηγήθηκε παραπάνω, κερδίζουμε επίσης ολοένα βαθύτερες γνώσεις σχετικά με την ουσία της ίδιας της επιστημονικής σκέψης, και συνειδητοποιούμε περισσότερο τα της γνώσης μας. Με οδηγό την αξιωματική μέθοδο, τα μαθηματικά καλούνται να διαδραματίσουν ηγετικό ρόλο στον τομέα της επιστήμης».

5. Η ΝΕΑ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΠΡΩΤΗ ΑΝΑΦΟΡΑ (ΧΊΛΜΠΕΡΤ 1922a).

5.1 Εισαγωγή .

Οι επόμενες δύο διαλέξεις δείχνουν ότι η θεωρία αποδείξεων του Χίλμπερτ προχωράει στο στάδιο ωρίμανσής της. Αποτυπώνουν επίσης την έναρξη των δημόσιων συζητήσεων με τους ιντουισιονιστές[28]. Κατά τις πρώτες ημέρες της καριέρας του, ο Χίλμπερτ υπερασπίστηκε τις νέες ιδέες για τη θεωρία Συνόλων του Καντόρ, μια στάση που τον είχε ταυτίσει με την πρωτο-ιντουισινιστική θέση του Κρόνεκερ. Μετά την αξιωματικοποίηση της θεωρίας συνόλων από τον Ζερμέλο, οι ιδέες του Κάντορ φάνηκε να κερδίζουν ευρεία αποδοχή, και οι ριζοσπαστικές κριτικές του Κρόνεκερ υποχώρησαν. Αλλά στα χρόνια που ακολούθησαν τον Πρώτο Παγκόσμιο Πόλεμο, ο Μπράουερ και στη συνέχεια ο Βέϋλ δημοσίευσαν κριτικές των κλασικών μαθηματικών που φαινόταν να αναβιώνουν τις ιδέες τον Κρόνεκερ. Σε απάντηση ο Χίλμπερτ πρόσθεσε σε άλλες υποθέσεις της βασικής του έρευνας ότι ανατρέποντας αυτές τις κριτικές και εγκαταλείποντάς τες για πάντα, οι αμφιβολίες προκαλούνται από τα παράδοξα.

Παρά τον ισχυρό πόλεμο του Χίλμπερτ εναντίον στους Κρόνεκερ, Βέυλ και Μπράουερ, πρέπει να σημειωθεί ότι η όλη διαμάχη είναι μια εσωτερική διαμάχη μεταξύ κονστρουκτιβιστών[29]. Στο επίπεδο των μετα-μαθηματικών, ο Χίλμπερτ υιοθέτησε τις επικρίσεις των ιντουσιονιστών για τα μαθηματικά του απείρου και προσπάθησε να χρησιμοποιήσει μόνο το

[28] Στη φιλοσοφία των μαθηματικών, ιντουισιονισμός, ή νέο-ιντουισιονισμός (σε αντίθεση με προ-ιντουισιονισμό), είναι μια προσέγγιση όπου τα μαθηματικά θεωρείται ότι είναι καθαρά το αποτέλεσμα της πνευματικής δραστηριότητας του ανθρώπου και όχι η ανακάλυψη των θεμελιωδών αρχών που φέρεται να υπάρχουν σε μια αντικειμενική πραγματικότητα. Δηλαδή, η λογική και τα μαθηματικά δεν θεωρούνται αναλυτικές δραστηριότητες όπου οι βαθιές ιδιότητες της αντικειμενικής πραγματικότητας αποκαλύπτονται και εφαρμόζονται, αλλά θεωρείται η εφαρμογή των μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση των πιο πολύπλοκων νοητικών δημιουργημάτων, ανεξαρτήτως της πιθανής ανεξάρτητης ύπαρξής τους σε μια αντικειμενική πραγματικότητα. Ο Ιντουσιονισμός ως σχολή φιλοσοφίας μαθηματικών εμφανίστηκε στις αρχές του 20ου αιώνα και ιδρυτής του ήταν ο Ολλανδός μαθηματικός L.E.J Brower που προσπάθησε να δώσει τη δική του λύση στην κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών, θεσμοθετώντας μια ιδιαίτερη έννοια κατασκευασιμότητας και εισάγοντας κυριολεκτικά ρηξικέλευθες ιδέες γύρω από την επιτρεπτή μαθηματική πρακτική.

[29] Οι κονστρουκτιβιστές φιλόσοφοι των μαθηματικών (Κάντ, Brouwer, Piaget), κάνουν δεκτή την νομιμότητα των μαθηματικών αντικειμένων (ο όρος νομιμότητα χρησιμοποιείται ως ηπιότερος όρος από τον όρο ύπαρξη) εάν αυτά μπορούν να συλληφθούν νοητικά, δηλαδή αναφέρονται σε αντικείμενα που κατασκευάζονται με την χρήση των ανθρώπινων δυνατοτήτων.

σκεπτικό που ήταν ιντουϊσιονιστικά αποδεκτό. Πράγματι, σε αυτό το επίπεδο, ο φινιτισμός[30] του Χίλμπερτ ξεπέρασε αυτόν του Μπράουερ. Οι διαφωνίες προήλθαν μάλλον από μια διαφορά απόψεων σχετικά με το τι αποτελεί θεμέλιο για τα μαθηματικά και αφορούσε, αρχικά τη σκοπιμότητα των τυποποιημένων μαθηματικών. Έπειτα η χρησιμότητα, η γνησιότητα, και το μαθηματικό ενδιαφέρον για τους κλασσικούς, τρόπους της απειροκρατικής εξαγωγής συμπερασμάτων εκφράστηκαν στο τυπικό σύστημα του Χίλμπερτ .

Σε αντίθεση με τον Χίλμπερτ του 1904, η παρούσα έκθεση αντλεί τώρα μια σαφή διάκριση μεταξύ του λογικο-μαθηματικού φορμαλισμού και της σημασιολογικής μετα-μαθηματικής επιχειρηματολογίας περί αυτής. Η διάκριση αυτή επιτρέπει στον Χίλμπερτ να απαντήσει στην κατηγορία για κυκλικότητα που αναδείχθηκε από τον Πουανκαρέ στη διάλεξη του 1905b κατά του Χίλμπερτ 1904. Ο Πουανκαρέ κατηγόρησε τον Χίλμπερτ ότι έπρεπε να προϋποθέσει την αλήθεια της μαθηματικής επαγωγής για να αποδείξει την συμβιβαστότητα της. Αλλά ο Χίλμπερτ μπορεί τώρα να κάνει διάκριση μεταξύ της ισχυρής αρχής της πλήρους επαγωγής όπως εκφράζεται στην τυπική γλώσσα από την ασθενέστερη αρχή που χρησιμοποιείται στη μετα-γλώσσα.

Ο Χίλμπερτ καθορίζει τις βασικές ιδέες της δικής του θεωρίας αποδείξεων, περιγράφει ένα απλό τυπικό σύστημα αξιωμάτων για ένα τμήμα της αριθμητικής και αποδεικνύει τη συμβιβαστότητά της. Αυτός καθορίζει επίσης τα θεμέλια για τις μετέπειτα έρευνές του για τα θεμέλια της θεωρίας συνόλων και της πραγματικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα, στο τέλος του άρθρου αναφέρει ότι το tertium non datur[31] είναι να τυποποιηθεί μέσω μιας υπερ-πεπερασμένης συνάρτησης $\chi(f)$ τέτοιας ώστε $\chi\ (f) = 0$ αν και μόνο αν $f(\alpha) = 1$ για κάθε θετικό ακέραιο α. Διαφορετικά, η $\chi(f)$ είναι το ελάχιστο a τέτοια ώστε $f\ (\alpha) \neq 1$. Αλλά αυτά τα θέματα αναφέρονται απλά, και ο Χίλμπερτ δεν κάνει καμία προσπάθεια να δώσει μια απόδειξη της συμβιβαστότητας για το υπερπερασμένο τμήμα της θεωρίας του.

[30] Finitism είναι μια φιλοσοφία των μαθηματικών που δέχεται την ύπαρξη μόνο των πεπερασμένων μαθηματικών αντικειμένων. Είναι καλύτερα κατανοητή σε σχέση με την κύρια φιλοσοφία των μαθηματικών, όπου τα άπειρα μαθηματικά στοιχεία (π.χ., άπειρες σειρές) γίνονται δεκτά εξ ορισμού.

[31] Ένα λογικό αξίωμα που υποστηρίζει ότι μια πρόταση είναι είτε αληθής είτε ψευδής και δεν υπάρχει Τρίτη επιλογή.

5.2 Η διάλεξη πάνω στη Νέα Θεμελίωση των Μαθηματικών.

Η θεμελίωση των μαθηματικών είχε μελετηθεί από διάφορους συγγραφείς και με ποικίλους τρόπους. Κατά συνέπεια, υπέροχες ακολουθίες ιδεών είχαν αναπτυχθεί. Σημαντικά και διαχρονικά αποτελέσματα είχαν επιτευχθεί. Ο Χίλμπερτ, αν πιστεύει ότι είναι απαραίτητη μια βαθύτερη αντιμετώπιση του προβλήματος, και αν δοκιμάζει μια τέτοια προσπάθεια, αυτό δεν το κάνει τόσο για να ενισχύσει τις μεμονωμένες μαθηματικές θεωρίες. Ούτε γιατί, όλες οι προηγούμενες έρευνες για τη θεμελίωση των μαθηματικών είχαν αποτύχει να δείξουν έναν τρόπο διατύπωσης των ερωτημάτων που αφορούν την θεμελίωσή τους. Στόχος του είναι να αποδείξει ότι στις μαθηματικές υποθέσεις δεν πρέπει να υπάρχει εξαρχής καμία αμφιβολία. Δεν υπάρχουν μισές αλήθειες ή αλήθειες διαφορετικών ειδών. Έτσι όπως χαρακτηριστικά λέει, το αξίωμα του Ζερμέλο της επιλογής πρέπει να μπορεί να διατυπωθεί με τέτοιο τρόπο που, να είναι τόσο «έγκυρο» όσο έγκυρη και αξιόπιστη είναι η φράση $2 + 2 = 4$.

Σύμφωνα με τον Χίλμπερτ, οι διακεκριμένοι και εξαιρετικοί μαθηματικοί, Weyl και Brouwer, αναζήτησαν τη λύση σε αυτά τα προβλήματα, ακολουθώντας μια λανθασμένη διαδρομή. Στην κριτική του προηγούμενου τρόπου θεμελίωσης για την αντίληψη του αριθμού, ο Weyl ισχυρίζεται ότι η συνήθης διαδικασία περιλαμβάνει έναν φαύλο κύκλο (Circulus vitiosus). Βρίσκει αυτόν τον κύκλο στο γεγονός ότι, κατά τον καθορισμό των πραγματικών αριθμών, χρησιμοποιούνται διαμερίσεις που καθορίζονται από το αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί με μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Ο Χίλμπερτ θέτει το θέμα ως εξής:

«Αν κάποιος πάρει τους συνηθισμένους ορισμούς των πραγματικών αριθμών από τις τομές του Ντέντεκιντ, τις ακολουθίες των αριθμών ή των θεμελιωδών σειρών, βλέπει κανείς ότι για τους μαθηματικούς υπάρχουν διάφορες παραπλήσιες μεθοδολογικές απόψεις. Η άποψη που επιλέγει ο Weyl και από την οποία εκθέτει τον φαύλο κύκλο του δεν είναι καθόλου μια τέτοια άποψη. Αντ 'αυτού, μου φαίνεται τεχνητά επινοημένη. Ο Weyl δικαιολογεί την περίεργη άποψή του λέγοντας ότι διατηρεί την αρχή της συμβιβαστότητας. Αλλά κατά τη γνώμη μου, ακριβώς επειδή τελειώνει με ένα φαύλο κύκλο, θα πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι η άποψή του (και ως εκ τούτου η αρχή της συμβιβαστότητας όπως ο ίδιος την αντιλαμβάνεται και την εφαρμόζει) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, και αυτό σταματά κάθε περαιτέρω διαδικασία».

Έτσι, κρίνοντας ότι οι θέσεις που λαμβάνουν συνήθως οι μαθηματικοί δεν βασίζονται, καθόλου, στην αρχή της συμβιβαστότητας, ούτε εκθέτουν τον φαύλο κύκλο του Weyl, παραθέτει τις δύο παρακάτω βασικές θέσεις:

Η πρώτη θέση λέει ότι ένας πραγματικός αριθμός είναι μια διαμέριση των ρητών αριθμών που ικανοποιεί μια τομή του Ντέντεκιντ. Σε αυτόν τον ορισμό η έννοια της διαμέρισης των ρητών αριθμών οριοθετείται επακριβώς σε σχέση με το πεδίο εφαρμογής και το περιεχόμενό της. Η γνωστή αντίρρηση σε αυτήν την άποψη είναι ότι η έννοια της διαμέρισης των ρητών αριθμών ισοδυναμεί με το ίδιο πράγμα όπως η έννοια του συνόλου. Αλλά η γενική έννοια του συνόλου έχει στην πραγματικότητα οδηγήσει σε παράδοξα. Αν ο Weyl κάνει κάποια εκδοχή αυτής της ένστασης, τότε η άμεση απάντηση είναι ότι δεν είναι επιτακτική. Η έννοια του συνόλου στην πιο γενική σημασία, δεν είναι παραδεκτή, χωρίς επιφυλάξεις. Αλλά αυτό δεν σημαίνει σε καμία περίπτωση ότι κάτι δεν πάει καλά με την έννοια του συνόλου των ακεραίων. Και τα παράδοξα της θεωρίας των συνόλων, δεν μπορούν να θεωρηθούν ως απόδειξη του ότι η έννοια του συνόλου ακεραίων οδηγεί σε αντιφάσεις. Αντιθέτως: όλη η μαθηματική εμπειρία μας μιλάει για την ορθότητα και τη συμβιβαστότητα αυτής της έννοιας.

Ωστόσο, για κάποιον που θα ισχυριστεί ότι είναι μια παραβίαση της μαθηματικής ακρίβειας να δημιουργήσει μια σιωπηρή προϋπόθεση στα θεμέλια της μαθηματικής επιστήμης, ο Χίλμπερτ θέτει, τη δεύτερη άποψη για τη θεμελίωση της έννοιας του αριθμού. Αυτή η άποψη - η μέθοδος της αξιωματικής θεμελίωσης - δεν είναι ευάλωτη σε αυτή την ένσταση. Αναπτύσσεται ως εξής. Το συνεχές των πραγματικών αριθμών είναι ένα σύστημα πραγμάτων τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με καθορισμένες σχέσεις, τα λεγόμενα αξιώματα. Ειδικότερα, στη θέση του ορισμού του πραγματικού αριθμού κατά Ντέντεκιντ, έχουμε τα δύο αξιώματα της συνέχειας, δηλαδή, το αξίωμα του Αρχιμήδη και το λεγόμενο αξίωμα πληρότητας. Οι τομές του Ντέντεκιντ μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν για να καθορίσουν μεμονωμένους πραγματικούς αριθμούς, αλλά δεν παρέχουν τον ορισμό της έννοιας του πραγματικού αριθμού. Μάλλον ένας πραγματικός αριθμός είναι εννοιολογικά μόνο κάτι που ανήκει στο σύστημά μας.

Αυτή η θεμελίωση της θεωρίας της συνέχειας δεν είναι αντίθετη με τον ιντουισιονισμό. Η έννοια του εκτεταμένου μεγέθους, όπως απορρέει από τη διαίσθηση, είναι ανεξάρτητη από την έννοια του αριθμού . Και πράγματι έχουμε τη διαίσθηση ότι υπάρχει θεμελιώδης διάκριση μεταξύ του αριθμού και του αριθμού ως μέτρου ή ποσότητας.

Αυτή η άποψη είναι λογικά παραδεκτή και το μόνο πράγμα που μένει να μελετηθεί είναι αν ένα σύστημα τέτοιου είδους είναι νοητό, δηλαδή, αν τα αξιώματα δεν οδηγούν, σε μια αντίφαση. Δεν υπάρχει σχεδόν οποιοδήποτε θέμα, είτε εντός είτε εκτός των μαθηματικών επιστημών, που έχει τόσο καλά μελετηθεί όσο η πραγματική ανάλυση. Και όπως χαρακτηριστικά ο Χίλμπερτ λέει:

«Αν ο Weyl εδώ βλέπει μια «εσωτερική αστάθεια» των θεμελίων επί των οποίων οικοδομήθηκε η αυτοκρατορία και αν ανησυχεί για την επικείμενη διάλυση της «κοινοπολιτείας της ανάλυσης», τότε βλέπει φαντάσματα. Αντίθετα, παρά την εφαρμογή των πιο τολμηρών και πιο πολλαπλών συνδυασμών των υπό δοκιμή τεχνικών, μια πλήρης ασφάλεια της εξαγωγής συμπερασμάτων και μια σαφής ομοφωνία του αποτελέσματος κυριαρχεί στην ανάλυση. Ως εκ τούτου, το να είμαστε σε θέση υποθέτοντας αυτά τα αξιώματα που αποτελούν τη βάση αυτής της ασφάλειας και της συμφωνίας, να αμφισβητήσουμε την αιτιολόγηση αυτή, θα σήμαινε ότι αφαιρούμε εκ των προτέρων, από κάθε επιστήμη τη δυνατότητα να λειτουργήσει, δηλαδή τη δυνατότητα να ορισθεί οτιδήποτε ως αξίωμα».

Σίγουρα, το πρόβλημα ανάγεται στην απόδειξη της συμβιβαστότητας των αξιωμάτων. Αυτό είναι γνωστό πρόβλημα, και για δεκαετίες δεν έχει φύγει από το μυαλό μας. Η έκθεση αυτή αφορά τη λύση αυτού του προβλήματος.

Συνεχίζοντας την κριτική του για τους Weyl και Brouwer, ισχυρίζεται ότι:

«Αυτό που κάνουν οι Weyl και Brouwer κατ 'αρχήν είναι να ακολουθούν την πάλαι ποτέ διαδρομή του Κρόνεκερ: Επιδιώκουν να θεμελιώσουν τα μαθηματικά "πετώντας στον κάλαθο των αχρήστων" όλα τα φαινόμενα που τους κάνουν τη ζωή δύσκολη και θεσπίζοντας απόλυτες απαγορεύσεις à la Κρόνεκερ. Αλλά αυτό σημαίνει τον διαμελισμό και τον ακρωτηριασμό της επιστήμης μας και αν ακολουθήσουμε τέτοιους μεταρρυθμιστές, διατρέχουμε τον κίνδυνο να χάσουμε ένα μεγάλο αριθμό από τους πιο πολύτιμους θησαυρούς μας. Οι Weyl και Brouwer διαβάλλουν τη γενική έννοια της άρρητου αριθμού, της συνάρτησης, ακόμα και τη αριθμοθεωρητική συνάρτηση, τους αριθμούς ανωτέρας τάξεως του Cantor, κλπ. Η πρόταση ότι μεταξύ απείρως πολλών ακεραίων υπάρχει πάντα ο μικρότερος, και ακόμη και η λογική του tertium non datur (για παράδειγμα, στον ισχυρισμό: ή υπάρχει μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός πρώτων αριθμών, ή υπάρχουν άπειροι) - όλα αυτά είναι παραδείγματα απαγορευμένων προτάσεων ή συμπερασματικών τρόπων. Πιστεύω ότι, ακριβώς όπως ο Κρόνεκερ στην εποχή του δεν ήταν σε θέση να απαλλαχθεί από τους άρρητους αριθμούς, έτσι και σήμερα οι Weyl και

Brouwer δεν θα είναι σε θέση να προωθήσουν το σχέδιό τους. Όχι, ο Brower δεν είναι, όπως ο Weyl πιστεύει, η επανάσταση, αλλά μόνο μια επανάληψη, με τα παλιά εργαλεία, μιας απόπειρας πραξικοπήματος που, στις μέρες του, έκανε κρότο, αλλά παρ 'όλα αυτά απέτυχε πλήρως. Και τώρα που η εξουσία του κράτους έχει οπλιστεί και ενισχυθεί με τους Φρέγκε, Ντέντεκιντ και Cantor, αυτό το πραξικόπημα είναι καταδικασμένο να αποτύχει».

Εν κατακλείδι, θα ήθελα να πω, ότι αν κάποιος μιλάει για μια μαθηματική κρίση, σε κάθε περίπτωση, κανείς δεν μπορεί να μιλήσει, όπως κάνει ο Weyl, για μια νέα κρίση. Έχει προτείνει τεχνητά το φαύλο κύκλο στην ανάλυση. Η αναφορά του για την αβεβαιότητα των αποτελεσμάτων της σύγχρονης ανάλυσης δεν ανταποκρίνεται στην πραγματική κατάσταση των πραγμάτων. Και όσο για τις κατασκευαστικές τάσεις που ο ίδιος και ο Brouwer υπογραμμίζει τόσο έντονα, κατά τη γνώμη μου, είναι ο ίδιος ο Weyl που απέτυχε να δει την πορεία προς την εκπλήρωση αυτών των τάσεων».

Ο στόχος της εξεύρεσης μιας ασφαλούς θεμελίωσης των μαθηματικών, δηλαδή να ξανακερδίσουν τα μαθηματικά την παλιά φήμη της αναμφισβήτητης αλήθειας, την οποία φαίνεται να έχουν χάσει ως αποτέλεσμα των παραδόξων της θεωρίας συνόλων, είναι εφικτός διατηρώντας πλήρως τα επιτεύγματά τους. Η μέθοδος που ο Χίλμπερτ παρακάτω περιγράφει, δεν είναι άλλη από την αξιωματική μέθοδο. Η ουσία της μεθόδου έχει ως εξής:

Προκειμένου να διερευνηθεί ένα δευτερεύον πεδίο της επιστήμης, κάποιος βασίζεται στο μικρότερο δυνατό αριθμό αρχών, οι οποίες πρέπει να είναι απλές, διαισθητικές και κατανοητές όσο το δυνατόν, και τις οποίες κάποιος τις συλλέγει και τις θέτει ως αξιώματα. Τίποτα δεν μας εμποδίζει να λάβουμε ως αξιώματα προτάσεις οι οποίες είναι αποδείξιμες, ή που πιστεύουμε ότι είναι αποδείξιμες. Πράγματι, όπως δείχνει η ιστορία, η διαδικασία αυτή είναι απολύτως σωστή: παραδείγματα είναι το αξίωμα του πρώτου αριθμού του Legendre, στη θεωρία των τετραγωνικών υπολοίπων, η υπόθεση του Ρίμαν για τα μηδενικά της συνάρτησης ζ (ς), το θεώρημα για την ύπαρξη ριζών στην άλγεβρα, και, τέλος, η λεγόμενη εργοδική υπόθεση [32], μια μαθηματική πρόταση η απόδειξη της οποίας βασίζεται σε παλαιά στοιχεία αλλά η οποία, έχει γίνει το θεμέλιο της στατιστικής μηχανικής.

Η αξιωματική μέθοδος είναι και παραμένει το απαραίτητο εργαλείο, προσαρμοσμένη στις δυνατότητες του μυαλού μας , για όλες τις ακριβείς έρευνες σε οποιονδήποτε τομέα: είναι

[32] Σύμφωνα με την **εργοδική υπόθεση**, η χρονική μέση τιμή (time average) μιας ιδιότητας ενός συστήματος σε ισορροπία είναι η ίδια με τη μέση τιμή πάνω στο στατιστικό σύνολο (ensemble average).

λογικά αναμφισβήτητη και ταυτόχρονα γόνιμη, και έτσι εγγυάται τη μέγιστη ευελιξία στον τομέα της έρευνας. Να προχωράς αξιωματικά δεν σημαίνει τίποτα άλλο από το να σκέφτεσαι με τη συνείδηση: αν και σε παλαιότερες εποχές, χωρίς την αξιωματική μέθοδο συνέβη εκείνο που κάποιος αφελώς πίστεψε σε ορισμένες διασυνδέσεις σαν να ήταν δόγματα, η αξιωματική μέθοδος εξαλείφει αυτή την αφέλεια, αλλά μας αφήνει το πλεονέκτημα της πίστης.

Το ερώτημα που τίθεται είναι πως η αξιωματική μέθοδος, θα μας οδηγεί σε πλήρη σαφήνεια σχετικά με τις αρχές της εξαγωγής συμπερασμάτων στα μαθηματικά. Ο Χίλμπερτ απαντάει ότι δεν μπορούμε ποτέ να είμαστε βέβαιοι εκ των προτέρων για τη συμβιβαστότητα των αξιωμάτων μας, αν δεν έχουμε μια ειδική απόδειξη για αυτά. Ως εκ τούτου, το αξιωματικό σύστημα μας αναγκάζει να λάβουμε θέση σχετικά με αυτό το δύσκολο επιστημολογικό πρόβλημα. Η απόδειξη της συμβιβαστότητας των αξιωμάτων πετυχαίνει σε πολλές περιπτώσεις - για παράδειγμα, στη γεωμετρία, στη θερμοδυναμική, στη θεωρία της ακτινοβολίας, καθώς και σε άλλες φυσικές επιστήμες – στο βαθμό που περιορίζουμε την απόδειξη, στο ζήτημα της συμβιβαστότητας των αξιωμάτων της ανάλυσης. Το ζήτημα αυτό είναι με τη σειρά του ένα μέχρι σήμερα άλυτο πρόβλημα.

Μέχρι τότε δεν είχε γίνει πραγματική προσπάθεια να εκφραστεί η συμβιβαστότητα των αξιωμάτων, είτε στην θεωρία των αριθμών είτε στην ανάλυση είτε στη θεωρία συνόλων.

Ο Κρόνεκερ είχε επινοήσει το εξής: «ο Θεός δημιούργησε τους ακεραίους, όλα τα άλλα είναι ανθρώπινο έργο». Κατά συνέπεια ο ίδιος περιφρονούσε τα πάντα που δεν φαίνονταν σ 'αυτόν να είναι «ακέραιοι». Από την άλλη πλευρά, ήταν επίσης πολύ μακριά από την πρακτική του και την πρακτική της σχολής του, το να σκεφτεί κάτι πέραν από τους ίδιους τους ακέραιους.

Ο Πουανκαρέ ήταν από την αρχή πεπεισμένος για την αδυναμία μιας απόδειξης της συμβιβαστότητας των αξιωμάτων της αριθμητικής. Σύμφωνα με τον ίδιο, η αρχή της πλήρους επαγωγής είναι μια ιδιότητα του μυαλού μας - δηλαδή (στη γλώσσα του Κρόνεκερ) δημιουργήθηκε από τον Θεό. Η αντίρρησή του ότι η αρχή αυτή δεν θα μπορούσε να αποδειχθεί, εκτός από τη χρήση της ίδιας της πλήρους επαγωγής είναι αδικαιολόγητη και θα διαψευστεί από τη θεωρία μου.

Η σημασία του ερωτήματός μας σχετικά με τη συμβιβαστότητα των αξιωμάτων είναι γνωστή στους φιλοσόφους. Αλλά στην βιβλιογραφία, δεν βρίσκουμε πουθενά μια σαφή αναζήτηση λύσης του προβλήματος με τη μαθηματική έννοια. Σε αντίθεση, το ερώτημά μας επηρεάστηκε στην ουσία του, από παλιές απόπειρες θεμελίωσης της θεωρίας των Αριθμών και της ανάλυσης στην θεωρία των συνόλων και της θεωρίας των συνόλων στην Λογική.

Ο Φρέγκε προσπάθησε να βασίσει την θεωρία των Αριθμών στην καθαρή Λογική. Ο Ντέντεκιντ προσπάθησε να τη βασίσει στη θεωρία των συνόλων ως κεφάλαιο της καθαρής λογικής: Και οι δύο απέτυχαν στο στόχο τους. Ο Φρέγκε δεν αντιμετώπισε αρκετά προσεκτικά τους συνήθεις σχηματισμούς εννοιών της λογικής κατά την εφαρμογή τους στα μαθηματικά: Έτσι επεξεργάστηκε το σκοπό εφαρμογής μιας έννοιας σαν να ήταν ήδη δεδομένη, και πίστευε ότι είχε το δικαίωμα να λάβει τον ίδιο αυτό σκοπό άνευ περιορισμού. Έτσι έπεσε σε κάποιο βαθμό σε ένα ακραίο σφάλμα που συνίσταται στο γεγονός ότι πήρε το σύστημα όλων των πραγμάτων ως σημείο εκκίνησης. Παρά την εκθαμβωτική και σαγηνευτική ιδέα του Ντέντεκιντ της θεμελίωσης των πεπερασμένων αριθμών στη αναφορά του απείρου, η ιδέα αυτή δεν μπορούσε να προχωρήσει.

Σύμφωνα με τον Χίλμπερτ, οι έρευνες του Φρέγκε και του Ντέντεκιντ εγκαινίασαν την «σύγχρονη κριτική της ανάλυσης». Είναι αυτή, που συνεχίστηκε με τους Cantor, Zermelo και Russell , και που δεν «καταλήγει», όπως ισχυρίζεται ο Weyl, «στο χάος και τον παραλογισμό»: Για τον Χίλμπερτ, αντίθετα, πρέπει να είμαστε ευγνώμονες σε αυτήν, από την μια για τις βαθυστόχαστες θεωρίες στις οποίες στηρίζεται μια αξιωματική θεμελίωση, και από την άλλη πλευρά για τη σωστή ανάπτυξη του λεγομένου λογικού του λογισμού, του οποίου οι βασικές ιδέες αναπτύσσονται όλο και περισσότερο και γίνονται απαραίτητα εργαλεία για τις λογικο-μαθηματικές έρευνες.

Κάπως έτσι ο Χίλμπερτ περιγράφει την τότε κατάσταση του ζητήματος που αφορά τη θεμελίωση των μαθηματικών, και συνεπώς μια ικανοποιητική κατάληξη στην έρευνά του για τη θεμελίωση μπορούσε μόνο να επιτευχθεί με την επίλυση του προβλήματος της συμβιβαστότητας των αξιωμάτων της ανάλυσης. Όπως χαρακτηριστικά λέει:

«Αν μπορούμε να παραγάγουμε αυτήν την απόδειξη, τότε μπορούμε να πούμε ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι στην πραγματικότητα αναμφισβήτητες και οι τελικές αλήθειες είναι υψίστης σημασίας για εμάς».

Για τον Χίλμπερτ, η στέρεα φιλοσοφική στάση πάνω στην οποία στηρίζεται η θεμελίωση των καθαρών μαθηματικών, όπως και για όλη την επιστημονική σκέψη, και την κατανόηση της είναι η εξής: «Στην αρχή υπάρχει το σύμβολο».

Με αυτή τη φιλοσοφική στάση επιστρέφει στη θεωρία της στοιχειώδους αριθμητικής, και προτρέπει το ακροατήριό του να αναρωτηθεί, κατά πόσο και σε ποιο βαθμό με αυτή την καθαρά διαισθητική βάση συγκεκριμένων ενδείξεων, η επιστήμη της θεωρίας αριθμών μπορεί να υπάρξει. Ακολούθως συνεχίζει με την εξήγηση των αριθμών ως εξής:

- Το σύμβολο **1** είναι ένας αριθμός
- (Ένα σύμβολο που αρχίζει από **1** και τελειώνει σε **1** και ανάμεσά τους έχουν το + το οποίο πάντα ακολουθεί το **1** και το **1** ακολουθεί το **+**, είναι επίσης αριθμός. Για παράδειγμα τα σύμβολα αριθμών

1 + 1

1 + 1 + 1

- Τα αριθμο - σύμβολα αυτά που είναι αριθμοί και τα οποία φτιάχνουν τους αριθμούς, αποτελούν το αντικείμενο του συλλογισμού μας, αλλιώς είναι έννοιες χωρίς νόημα[33]. Εκτός από αυτά τα σύμβολα, θα κάνουμε χρήση και άλλων συμβόλων που σημαίνουν κάτι και που θα χρησιμεύσει στην επικοινωνία μας, για παράδειγμα, το σύμβολο **2** ως συντομογραφία για τον αριθμό **1 + 1**, ή το σύμβολο **3** ως συντομογραφία για τον αριθμό - **1 + 1 + 1**. Επιπλέον χρησιμοποιούμε τα σύμβολα **=, >** τα οποία χρησιμεύουν για την απεικόνιση ισχυρισμών. Έτσι 2 + 3 = 2 + 3 δεν είναι ένας τύπος, αλλά απλώς χρησιμεύει για να αποτυπώσουμε το γεγονός ότι 2 + 3 και 3 + 2 με βάση με τις συντομογραφίες που χρησιμοποιούμε, είναι ο ίδιος αριθμός - σύμβολο, δηλαδή, το **1 + 1 + 1 + 1 + 1**. Ούτε είναι το **3> 2** ένας τύπος, μάλλον χρησιμεύει για να αποτυπώσουμε το γεγονός ότι το σημείο **3** (δηλαδή, **1 + 1 + 1**) εκτείνεται πέρα από το σύμβολο 2 (δηλαδή **1 + 1**), ή ότι το τελευταίο σύμβολο είναι ένα μέρος του προηγούμενου.

Για σκοπούς συνεννόησης χρησιμοποιεί επίσης γράμματα **a,b,c** για να συμβολίσει αριθμο-σύμβολα. Τότε το **b> a** δεν είναι, επίσης, τύπος, αλλά μόνο η αποτύπωση ότι ο αριθμός - σύμβολο **b** εκτείνεται πέρα από τον αριθμό **a**. Και με τον ίδιο τρόπο, με αυτή τη λογική **a +b = b + a** είναι μόνο η αποτύπωση του γεγονότος ότι ο αριθμός – σύμβολο **a + b** είναι ο ίδιος με τον **b + a**. Στη συνέχεια ερμηνεύει το σύμβολο επικοινωνίας με τον ακόλουθο τρόπο:

[33] Η έκφραση «σύμβολο χωρίς νόημα» προσβάλει του φιλόσοφους (Ο ενδιαφερόμενος μπορεί να ανατρέξει στις σημειώσεις του Aloys Muller, «Uber Zalhen als Zeichen» και την έκθεση του P.Bernays, και τα δύο στο (περιοδικό) Math. Ann. Vol 90 (1923). Στις αναφορές του Χίλμπερτ στην Θεμελίωση των Μαθηματικών, ο όρος «αριθμο-σύμβολο» (number-sign) αντικαθίσταται από τον όρο «ψηφίο» (numeral).

«Αν και έχουμε το δικαίωμα να υποθέσουμε ότι **b> a**, (δηλαδή, ο αριθμός b επεκτείνεται πέρα του a) τότε το b μπορεί να αναλυθεί με τη μορφή **a + c**, όπου το **c** χρησιμεύει για να αποτυπώσουμε έναν αριθμό, τότε χρειάζεται να δείξει ότι **a + a + c = a +c + a** το οποίο σημαίνει ότι ο **a + a + c** είναι ο ίδιος αριθμός με τον **a + c + a**. Αλλά αυτό συμβαίνει όταν ο **a+c** είναι ο ίδιος με τον **c + a**, δηλαδή **a + c = c + a.** Όμως σε αντίθεση με την αρχική διατύπωση, τουλάχιστον ένα **1** έχει απομακρυνθεί από την αποσύνθεση του a, και αυτή η διαδικασία αποσύνθεσης μπορεί να συνεχίζεται έως ότου οι προσθετέοι που ανταλλάσσονται συμφωνήσουν μεταξύ τους. Γιατί κάθε αριθμός-σύμβολο **a** φτιάχνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να περιγράφεται από τα σημεία 1 και +. Επομένως, μπορούν επίσης να αποσυνδεθούν από τη διάσπαση και την ακύρωση των επιμέρους συμβόλων».

Καθώς αναπτύσει την Θεωρία των Αριθμών, με αυτό τον τρόπο, δεν υπάρχουν αξιώματα, και ούτε οποιουδήποτε είδους αντιφάσεις. Απλά υπάρχουν συγκεκριμένα ενδεικτικά αντικείμενα, που συνδυάζονται μεταξύ τους, και φτιάχνουμε σημασιολογικές προτάσεις με αυτά. Ειδικότερα, όσον αφορά την παραπάνω απόδειξη, ότι δηλαδή **a + b = b + a**, τονίζει ότι η απόδειξη αυτή είναι απλώς μια διαδικασία που στηρίζεται στην κατασκευή και αποδόμηση του αριθμού – συμβόλου και ότι είναι ουσιαστικά διαφορετική από την αρχή της πλήρους επαγωγής ή του συμπεράσματος από το n στο n +1. Αυτή η αρχή είναι μάλλον, μια τυπική αρχή που μας πάει παρακάτω και που ανήκει σε ένα ανώτερο επίπεδο. Χρειάζεται απόδειξη και απόδειξη μπορεί να δοθεί.

Ο Χίλμπερτ τονίζει ότι μπορούμε να κάνουμε σημαντική περαιτέρω πρόοδο της θεωρίας αριθμών χρησιμοποιώντας την διαίσθηση και σημασιολογικούς τρόπους χειρισμών που έχουμε ήδη εφαρμόσει. Αλλά δεν μπορούμε να συλλάβουμε το σύνολο των μαθηματικών με αυτόν τον τρόπο. Ήδη , όπως αναφέρει, όταν περνάμε στην ανώτερη αριθμητική και την άλγεβρα - για παράδειγμα, αν θέλουμε να κάνουμε υποθέσεις σχετικά με τους άπειρους αριθμούς ή συναρτήσεις - η συνεχής διαδικασία αποτυγχάνει. Διότι δεν μπορούμε να γράψουμε αριθμούς - σύμβολα ή να εισάγουμε συντομογραφίες για άπειρους αριθμούς. Αν δεν λαμβάναμε σοβαρά υπόψη αυτή τη δυσκολία, θα υποπίπταμε στα ατοπήματα που ο Φρέγκε επεσήμανε πολύ σωστά στις επικριτικές του παρατηρήσεις σχετικά με τους παραδοσιακούς ορισμούς των αρρήτων αριθμών. Και η ανάλυση, επισημαίνει, δεν μπορεί να δομηθεί από την συγκεκριμένη διαδικασία που έχουμε μόλις δώσει στη στοιχειώδη θεωρία αριθμών. Διότι, απλά και μόνο με τη χρήση αυτού του είδους της διαδικασίας, δεν εξαντλούμε την ουσία της ανάλυσης. Μάλλον χρειαζόμαστε πραγματικούς τύπους για την δόμησή της.

Ο Χίλμπερτ προσθέτει ότι μπορούμε να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, αν κινηθούμε σε ένα ανώτερο επίπεδο του στοχασμού, στον οποίο τα αξιώματα, οι τύποι και οι αποδείξεις της μαθηματικής θεωρίας είναι τα ίδια τα αντικείμενα μιας σημασιολογικής έρευνας. Όμως για το σκοπό αυτό, οι σημασιολογικές ιδέες της μαθηματικής θεωρίας πρέπει να αντικατασταθούν από τύπους και κανόνες. Με άλλα λόγια, πρέπει να έχουμε μια αυστηρή τυποποίηση του συνόλου της μαθηματικής θεωρίας, συμπεριλαμβανομένων και των αποδείξεων της, έτσι ώστε - ακολουθώντας το παράδειγμα του λογικού λογισμού – τα μαθηματικά συμπεράσματα και οι ορισμοί, να αποτελέσουν ένα επίσημο μέρος του οικοδομήματος των μαθηματικών. Τα αξιώματα, οι τύποι, και οι αποδείξεις που συνθέτουν αυτό το επίσημο οικοδόμημα είναι ακριβώς ό, τι ήταν ο αριθμός - σύμβολο για την δόμηση της στοιχειώδους αριθμητικής θεωρίας που περιγράψαμε νωρίτερα. Και μόνο με αυτά, πραγματοποιείται η σημασιολογική σκέψη - δηλαδή μόνο με τα αξιώματα, τους τύπους και τις αποδείξεις, ασκείται η πραγματική σκέψη. Με τον τρόπο αυτό οι σημασιολογικές σκέψεις μεταφέρονται σε ένα ανώτερο επίπεδο, και ταυτόχρονα καθίσταται δυνατό να σχεδιαστεί μια έντονη και συστηματική διάκριση στα μαθηματικά μεταξύ τύπων και τυπικών αποδείξεων, από τη μία πλευρά και σημασιολογικών ιδεών από την άλλη.

Ο στόχος του Χίλμπερτ με την παρούσα διάλεξη ήταν να δείξει πώς αυτή η βασική ιδέα μπορεί να πραγματοποιηθεί με αυστηρό και αναντίρρητο τρόπο, και να αποδείξει ότι τα προβλήματα της απόδειξης αξιωμάτων της αριθμητικής και της ανάλυσης λύνονται με τον ίδιο τρόπο.

Τα σημεία 1 και + αρκούν στη θεωρία αριθμών για συγκεκριμένα περιεχόμενα. Για την δόμηση του συνόλου των μαθηματικών εισάγει πρόσθετες προτάσεις διαφόρων ειδών και εξηγεί πώς λειτουργούν. Έτσι έχουμε:

I. Ατομικά σύμβολα (τα περισσότερα με ελληνικούς χαρακτήρες)
    1. 1, + (μέρος των αριθμο-συμβόλων)
    2. φ(*), ψ(*), σ (*,*), δ(*,*), μ(*,*) (ατομικές συναρτήσεις με κενές θέσεις, ατομικές συναρτήσεις συναρτήσεων)
    3. = (ισότητα) , ≠ (ανισότητα), > (μεγαλύτερο από) (μαθηματικά σύμβολα)
    4. Z (είναι ένας αριθμός), Φ (είναι μια συνάρτηση)

5. → («συνεπάγεται», ένα λογικό σύμβολο)
6. ( ) (σύμβολο «για κάθε»)

II. Μεταβλητές (με λατινικούς χαρακτήρες)

1. a, b, c, d, p, q, r, s, (βασικές μεταβλητές)
2. f(*), g(*) (μεταβλητές συναρτήσεις, μεταβλητές συναρτήσεις συναρτήσεων)
3. A, B, C, D, S, T, U, V W (μεταβλητοί τύποι)

III. Σύμβολα Επικοινωνίας (Γερμανικοί Χαρακτήρες)

1. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$ (συναρτησιακά)
2. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{E}, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ (Τύποι)

Σύμβολα που βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο ονομάζονται **γραμμή**, και γραμμές που βρίσκονται η μια πάνω από την άλλη ονομάζονται **σχήματα.**

Τα ατομικά σύμβολα (I) και οι μεταβλητές (II) είναι τα μόνα που χρησιμοποιούνται στο λογισμό, και φτιάχνουν το τυπικό οικοδόμημα, το τελικό είδος συμβόλων (III) χρησιμεύει μόνο για την επικοινωνία των σημασιολογικών σκέψεων. Χρησιμοποιεί εν γένει ελληνικό αλφάβητο για τα ατομικά σύμβολα (I) λατινικό αλφάβητο για τις μεταβλητές (II) και γερμανικό αλφάβητα για τα επικοινωνιακά σύμβολα (III). Αυτά τα τελευταία σύμβολα (III) επίσης περιστασιακά και προσωρινά θα χρησιμεύσουν ως σύμβολα συντόμευσης[34].

Ένας αριθμός - σύμβολο, μια βασική μεταβλητή, μια ατομική ή μεταβλητή συνάρτηση των οποίων οι κενές θέσεις καλύπτονται από αριθμό - σύμβολα, βασικές μεταβλητές, ή συναρτήσεις, ή μια ατομική ή μεταβλητή συνάρτηση συναρτήσεων των οποίων οι κενές θέσεις είναι συμπληρωμένες ονομάζεται συναρτησιακό. Ένα συναρτησιακό σύμβολο μπορεί πάντα το ίδιο να τοποθετηθεί σε μια κατάλληλη κενή θέση. Εάν στην πορεία, οι κενές θέσεις μιας συνάρτησης ή μιας συνάρτησης συναρτήσεων είναι όλες συμπληρωμένες, τότε η προκύπτουσα γραμμή ονομάζεται επίσης συναρτησιακή. Συναρτησιακό είναι έτσι ένα σύμβολο που

[34] Σύμβολο συντόμευσης είναι ένα σύμβολο που υπάρχει μόνο για να συντομεύσει το μήκος της έντυπης έκφρασης, και το οποίο αναφέρεται σε άλλο καθορισμένο σύμβολο. Τονίζω όμως ότι η εισαγωγή των συμβόλων συντόμευσης δεν είναι απαραίτητη για την δόμηση των μαθηματικών και ότι χρειαζόμαστε αυτά τα σύμβολα (III) μόνο για την επικοινωνία με την κυριολεκτική έννοια του όρου - δηλαδή για τις σημασιολογικές πράξεις στις τυπικές αποδείξεις.

αποτελείται από σύμβολα από τις κατηγορίες Ι 1,2, ΙΙ 1,2 αλλά όχι από τις κατηγορίες Ι 3,4,5,6, ΙΙ 3.

Αν κάποιος τοποθετήσει ένα συναρτησιακό σύμβολο εκατέρωθεν του συμβόλου = ή του συμβόλου ≠, η προκύπτουσα γραμμή ονομάζεται πρωταρχικός τύπος. Ομοίως, ένας πρωταρχικός τύπος προκύπτει αν κάποιος συμπληρώσει την άδεια θέση του λογικού σημείου Z με ένα συναρτησιακό. Έτσι, αν a και b οριστούν ως συναρτησιακά τότε

$$a = b,$$

$$a \neq b,$$

$$Z\,(a)$$

είναι πρωταρχικοί τύποι.

Αν κάποιος τοποθετήσει έναν πρωτεύοντα τύπο ή μια μεταβλητή τύπου ΙΙ και στις δύο πλευρές ενός συμβόλου συνεπαγωγής τότε, προκύπτει ένας τύπος συνεπαγωγής. Αν κάποιος τοποθετήσει έναν πρωτεύοντα τύπο ή έναν μεταβλητό τύπο ή έναν τύπο συνεπαγωγής και στις δύο πλευρές ενός συμβόλου συνεπαγωγής, τότε η προκύπτουσα γραμμή ονομάζεται επίσης τύπος. Και σε γενικές γραμμές.

$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$

είναι τύπος , αν $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ είναι μεταβλητές ή ήδη κατασκευασμένοι τύποι.

Ορισμένοι τύποι οι οποίοι χρησιμεύουν ως δομικά υλικά του οικοδομήματος των μαθηματικών ονομάζονται αξιώματα. Στο χειρισμό των αξιωμάτων και στις πράξεις με αυτά, τονίζει ότι, πρέπει να τηρούνται οι ακόλουθοι γενικοί κανόνες:

- Τα ατομικά σύμβολα είναι αναντικατάστατα, οι βασικές μεταβλητές μπορεί να αντικατασταθούν με συναρτησιακά.
- Οι παρενθέσεις χρησιμοποιούνται με τον συνήθη τρόπο για να διαχωρίσουν τα μέρη των συμβόλων μας, χρησιμεύουν για να σηματοδοτήσουν κενές θέσεις και προσφέρουν ασφάλεια και ακρίβεια στην εισαγωγή των γραμμών.
- Το σύμβολο του «για κάθε» (Ι6) είναι ένα λογικό σύμβολο: μια παρένθεση με μια μεταβλητή στο εσωτερικό της. Ο επόμενος υποτύπος, ο οποίος περιέχει αυτήν τη μεταβλητή, περικλείεται

από μια ειδική παρένθεση και με αυτό τον τρόπο αναγνωρίζεται ως το πεδίο του συμβόλου του «για κάθε». Οι ακόλουθοι ειδικοί κανόνες ισχύουν και για το σύμβολο του «για κάθε»:

- Μια μεταβλητή σε έναν τύπο ονομάζεται «ελεύθερη» αν δεν εμφανίζεται στο «για κάθε»-σύμβολο του τύπου αυτού. Ένα «για κάθε» σύμβολο που περιέχει μια ελεύθερη μεταβλητή μπορεί να προτάσσεται σε κάθε τύπο έτσι ώστε όλος ο τύπος να είναι το πεδίο του συμβόλου του «για κάθε». Αντίθετα ένα σύμβολο του «για κάθε» του οποίου το πεδίο είναι το υπόλοιπο του τύπου μπορεί πάντα να παραλειφθεί.
- Μια μεταβλητή που υπάρχει στο «για κάθε» - σύμβολο μπορεί να αντικατασταθεί εκεί και συγχρόνως στο αντίστοιχο πεδίο από οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή που δεν υπάρχει στο εν λόγω πεδίο.
    - Δύο σύμβολα «για κάθε», μπορεί να εναλλάσσονται, εφόσον υπάρχουν σε άμεση διαδοχή και εφόσον τα πεδία εφαρμογής τους επεκτείνονται εξίσου.
    - Αν ένα μέρος του τύπου έχει την μορφή

$$(b)(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(b))$$

όπου το $\mathfrak{A}$ δεν περιέχει την μεταβλητή b, τότε το (b) μπορεί να τοποθετηθεί μετά από το σύμβολο → ώστε να προκύψει ο τύπος:

$$\mathfrak{A} \to (b)\mathfrak{B}(b)$$

Χρησιμοποιώντας το νέο τρόπο σκέψης, αποδεικνύει πως ανακτώνται τα θεωρήματα του στοιχειώδους υπολογισμού. Γι 'αυτό χρειάζεται έναν πίνακα των αξιωμάτων που αρχίζει ως εξής:

1. a = a
2. 1 + (a + 1) = (1 + a) + 1
3. a = b → a + 1 =b +1
4. a+ 1 = b + 1 →a = b
5. a = c → (b = c → a = b)

Περαιτέρω χρησιμοποιεί το επόμενο σχήμα συμπερασμού

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}$$

Στη συνέχεια, οι τυπικές αποδείξεις για τις αριθμητικές εξισώσεις μπορεί να δοθούν με τον τρόπο που παρουσιάζεται από το ακόλουθο ειδικό παράδειγμα:

- Από το αξίωμα 1 με αντικατάσταση έχουμε 1 = 1

Επιπλέον , χρησιμοποιώντας το σύμβολο συντόμευσης **2** για το **1 + 1** και το σύμβολο συντόμευσης **3** για το **2 + 1** έχουμε

2 = 2 (1)

και

3 = 3 (2)

- Από το αξίωμα 2 επίσης έχουμε με αντικατάσταση

1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 ή 1 + 2 = 2 + 1 ή 1 + 2 = 3 (3)

- Από το αξίωμα 5, έχουμε με αντικατάσταση

3 = 3 -> (1 + 2 = 3 -> 3 = 1 + 2),

και από τη σχέση (2) έχουμε, εφαρμόζοντας το αναφερόμενο σχήμα, τον τύπο

1 + 2 = 3 - > 3 = 1 + 2

Και τέλος από τη σχέση (3) έχουμε, εφαρμόζοντας το αναφερόμενο σχήμα, τον τύπο

3 = 1 + 2

Πρόκειται λοιπόν για έναν τύπο που μπορεί να αποδειχθεί από τα αξιώματα που έχουν ήδη εισαχθεί.

Δεδομένου ότι δεν έχει ακόμη στη διάθεσή του όλους τους τύπους που χρειάζεται από τα αξιώματα που έχουν προταθεί μέχρι τώρα, ο δρόμος είναι ανοικτός για να εισάγει πρόσθετα αξιώματα. Αλλά πρώτα απαιτείται μια διευκρίνιση για το τι είναι απόδειξη και μια ακριβής περιγραφή της χρήσης των αξιωμάτων την οποία αναπτύσσει ως εξής:

«Μια απόδειξη είναι ένα σχήμα, που αποτελείται από εφαρμογές του σχήματος:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}\end{array}}{\mathfrak{T}}$$

όπου σε κάθε στάδιο καθεμία από τις προτάσεις - δηλαδή, κάθε τύπος $\mathfrak{S}$ και $\mathfrak{S}\to\mathfrak{T}$ είναι ένα αξίωμα, ή προκύπτει απευθείας από ένα αξίωμα με αντικατάσταση ή συμφωνεί με τον τελικό τύπο $\mathfrak{T}$ ενός συμπερασμού που εμφανίζεται νωρίτερα στην απόδειξη ή προκύπτει από έναν τελικό τύπο με αντικατάσταση.

Ένας τύπος λέγεται ότι είναι αποδείξιμος αν είναι ένα αξίωμα ή προκύπτει από ένα αξίωμα με αντικατάσταση ή είναι ο τελικός τύπος μιας απόδειξης ή προκύπτει από τον τελικό τύπο με αντικατάσταση. Στην παρούσα έρευνά μας, η ίδια η απόδειξη είναι κάτι συγκεκριμένο, οι σημασιολογικές σκέψεις ακολουθούν τις ίδιες τις αποδείξεις. Ακριβώς όπως ο φυσικός ερευνά τη συσκευή του, ο αστρονόμος ερευνά την τοποθεσία του, ακριβώς όπως ο φιλόσοφος ασκεί την κριτική της λογικής. Έτσι, κατά τη γνώμη μου, ο μαθηματικός πρέπει να σιγουρέψει τα θεωρήματα του με μια κριτική των αποδείξεων του και γι 'αυτό χρειάζεται η θεωρία αποδείξεων».

Επανέρχεται στην πρόθεσή του να αποδείξει τη συμβιβαστότητα των αξιωμάτων. Από την παρούσα άποψη, το πρόβλημα αυτό φαίνεται να μην έχει νόημα, δεδομένου ότι προς το παρόν οι μόνοι «αποδείξιμοι» τύποι που προκύπτουν είναι τύποι που είναι ισοδύναμοι με αμιγώς θετικούς ισχυρισμούς, και οι οποίοι δεν μπορούν, συνεπώς, να παράγουν καμία αντίφαση.

Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει:

«Θα μπορούσαμε να επιτρέψουμε το **1 = 1 + 1** να θεωρηθεί ως τύπος μαζί με το **1 = 1**, με την προϋπόθεση ότι ήταν ένας αποδείξιμος τύπος που προέκυψε από τους κανόνες του συμπεράσματος. Αλλά αν ο φορμαλισμός μας πρέπει να προσφέρει μια πλήρη αντικατάσταση για τη προηγούμενη πραγματική θεωρία που αποτελείται από συμπεράσματα και ισχυρισμούς, τότε, μια σημασιολογική αντίφαση πρέπει να έχει το τυπικό ισοδύναμό της. Για να ισχύει αυτό, πρέπει η ανισότητα να έχει μια θετική έκφραση, όπως την ισότητα που την εισάγουμε με ένα νέο σύμβολο ≠ με νέα αξιώματα. Αυτό το σύμβολο λειτουργεί με τρόπο που συνάδει με τους προηγούμενους κανόνες μας. Και τότε λέμε ότι ένα αξιωματικό σύστημα είναι μη αντιφατικό εάν οι τύποι

$$\mathbf{a = b \text{ και } a \neq b}$$

είναι μη αποδείξιμοι τύποι, όπου το a και το b είναι συναρτησιακά».

Ακολουθώντας το γενικό πλάνο, εισάγει το νέο αξίωμα

$$\mathbf{6.\ \alpha + 1 \neq 1}$$

Χάριν απλοποίησης, παραλείπει το αξίωμα 2. Στη συνέχεια, η πρώτη δοκιμή μιας πραγματικής απόδειξης της συμβιβαστότητας στα νέα θεωρία αποδείξεων έγκειται στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος

Το αξιωματικό σύστημα που αποτελείται από τα επόμενα 5 αξιώματα:

1. $a = a$

3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$

4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$

5. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$

6. $a + 1 \neq 1$ είναι συμβιβαστό (μη αντιφατικό).

Η διαδικασία απόδειξης του θεωρήματος σύμφωνα με τον Χίλμπερτ έχει ως εξής:

1. Πρώτα αποδεικνύουμε το εξής :

Λήμμα. <u>Ένας αποδείξιμος τύπος μπορεί να περιέχει το πολύ δύο εμφανίσεις του συμβόλου</u> →

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι είχαμε μια απόδειξη για έναν τύπο με περισσότερα από δύο σύμβολα →. Προχωρούμε αυτή την απόδειξη μέχρι να βρούμε τον πρώτο τύπο που θα έχει αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι κανένας προηγούμενος τύπος στην απόδειξη αυτού του τύπου δεν περιέχει το σύμβολο → περισσότερο από δύο φορές. Ο τύπος αυτός δεν μπορεί να προκύψει άμεσα από ένα αξίωμα με αντικατάσταση, γιατί τα γράμματα a ,b c που εμφανίζονται στα αξιώματα μπορούν να αντικατασταθούν μόνο από συναρτησιακά και αυτά δεν μπορούν να εισάγουν ένα νέο σύμβολο →. Αλλά ούτε μπορεί ο τύπος να εμφανιστεί ως ο τελικός τύπος της $\mathfrak{T}$ ενός συμπεράσματος. Γιατί τότε το δεύτερο σκέλος αυτού του συμπεράσματος $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$ θα ήταν ένας προγενέστερος τύπος με περισσότερα από δύο σύμβολα → και ως εκ τούτου η $\mathfrak{T}$ δεν θα είναι ο πρώτος τύπος με αυτή την ιδιότητα.

2. Μετά αποδεικνύουμε

Λήμμα. <u>Ο τύπος a =b είναι αποδείξιμος αν ο a και ο b είναι το ίδιο σύμβολο</u>

Απόδειξη:

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Κατ 'αρχάς, ας υποθέσουμε ότι ο τύπος είναι το άμεσο αποτέλεσμα της αντικατάστασης σε ένα αξίωμα. Τότε μόνο το αξίωμα 1 λαμβάνεται υπόψη, και σε αυτή την περίπτωση το θεώρημα προφανώς ισχύει. Δεύτερον, υποθέτουμε ότι έχουμε μια απόδειξη με τον τελικό τύπο a = b τέτοια ώστε a και b δεν είναι τα ίδια σύμβολα και τέτοια ώστε κανένας τέτοιος τύπος δεν εμφανίστηκε προγενέστερα στην απόδειξη. Τότε στο συμπερασματικό μας σχήμα, το $\mathfrak{T}$ θα πρέπει να συμφωνεί με το a = b και το $\mathfrak{S}$ και πρέπει να είναι ένας αποδείξιμος τύπος , έτσι ώστε η δεύτερη πρόταση θα είχε τη μορφή

$$\mathfrak{S} \rightarrow a = b \qquad (4).$$

Ο τύπος αυτός με τη σειρά του πρέπει να είναι είτε αποτέλεσμα αντικατάστασης σε ένα αξίωμα, είτε να είναι ο τελικός τύπος σε μια απόδειξη. Στην πρώτη περίπτωση, μόνο τα αξιώματα 3 και 4 λαμβάνονται υπόψη. Αν λάβουμε υπόψη το αξίωμα 3, τότε το a θα πρέπει να είναι του τύπου a'+1 και το b του τύπου b' +1 και το $\mathfrak{S}$ θα πρέπει να είναι του τύπου a' = b'. Αλλά αν a' και b' ήταν το ίδιο σύμβολο, τότε τα a και b θα ήταν επίσης, αντίθετα με την υπόθεσή μας. Όμως αν από την άλλη μεριά a' και b' δεν ήταν τα ίδια σύμβολα τότε το $\mathfrak{S}$ (δηλαδή α' = b') θα ήταν ένας τύπος υπό αμφισβήτηση και θα αποδεικνυόταν πριν από το $\mathfrak{T}$. Και αυτό θα ήταν άτοπο. Αλλά αν πάρουμε το αξίωμα 4, τότε το $\mathfrak{S}$ θα πρέπει να είναι ο τύπος a + 1 = b + 1 , στον οποίο δεν έχουμε το ίδιο σύμβολο στα δύο σκέλη του συμβόλου της ισότητας. Όμως και αυτό θα είναι αδύνατον καθώς το $\mathfrak{S}$ προηγούμενα αποδείχτηκε. Έτσι η μόνο δυνατότητα που απομένει ότι η σχέση (4) είναι ο τελικός τύπος μιας απόδειξης της οποίας το τελευταίο αποτέλεσμα θα έχει την μορφή

$$\begin{array}{c} \mathfrak{A} \\ \underline{\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow a = b)} \\ \mathfrak{S} \rightarrow a = b \end{array}$$

Αντίστοιχα ερευνούμε και την προέλευση της δεύτερης πρότασης

$$\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow a = b) \qquad (5)$$

Αν αυτή η πρόταση προκύπτει απευθείας από την αντικατάσταση ενός αξιώματος, τότε μόνο το αξίωμα 5 λαμβάνεται υπόψη, και σε αυτή την περίπτωση το $\mathfrak{S}$ θα είχε την μορφή b = c και το $\mathfrak{A}$ θα είχε την μορφή a = b, και αυτός ο τύπος έχει ήδη εμφανιστεί σε μια προγενέστερη θέση της απόδειξης. Αλλά αν το c δεν είναι το ίδιο με το b τότε ο τύπος b = c είναι ο τύπος που είδαμε προηγουμένως στην απόδειξη να έχει την ιδιότητα που αρχικά απαιτείτο στο $\mathfrak{T}$. Κατά συνέπεια, η μόνη δυνατότητα που απομένει είναι ότι η (5) είναι ο τελικός τύπος του συμπεράσματος, αλλά στη συνέχεια η δεύτερη παραδοχή αυτού του συμπεράσματος πρέπει να είναι ένας τύπος με τουλάχιστον τρία σύμβολα →, και από προηγούμενο λήμμα, αυτό δεν θα μπορούσε να είναι ένας αποδείξιμος τύπος .

Έτσι το δεύτερο λήμμα αποδείχθηκε.

Ένα σύστημα αξιωμάτων είναι συμβιβαστό (μη αντιφατικό) αν τα

$$a = b \text{ και } a \neq b$$

δεν είναι ποτέ ταυτόχρονα αποδείξιμοι τύποι. Τώρα, δεδομένου ότι, σύμφωνα με το λήμμα που ακριβώς αποδείχθηκε, $a = b$ είναι ένας αποδείξιμος τύπος μόνο αν οι a και b είναι το ίδιο σύμβολο, η απόδειξή του Χίλμπερτ για τη συμβιβαστότητα των αξιωμάτων περιορίζει το πρόβλημα στα να δείξουμε ότι το σύστημα αξιωμάτων μας, δεν μπορεί ποτέ να οδηγήσει σε έναν αποδείξιμο τύπο της μορφής

$$\mathbf{a \neq a \ (6)}$$

Και αυτό το αποδεικνύει ως εξής:.

«Για να αποκτήσουμε ένα τύπο της μορφής (6) που περιέχει το σημείο ≠ απευθείας από ένα αξίωμα με αντικατάσταση θα ήταν απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε το αξίωμα 6, αλλά ένας τύπος που απορρέει από το αξίωμα 6 με αντικατάσταση πάντα έχει τη μορφή:

$$\mathbf{a' + 1 \neq 1}$$

και εδώ το **a'+ 1** δεν είναι σίγουρα το ίδιο σύμβολο με 1.

Εάν, από την άλλη πλευρά, η σχέση (6) προκύπτει ως τελικός τύπος ενός συμπερασμού, τότε η δεύτερη παραδοχή αυτού του συμπερασμού πρέπει να είναι της μορφής

$$\mathfrak{S} \rightarrow \mathbf{a \neq a} \qquad (7)$$

Και αφού ένας τέτοιος τύπος δεν μπορεί να προκύψει από αντικατάσταση σε ένα αξίωμα, αυτός ο τύπος (7) θα πρέπει ο ίδιος να είναι το αποτέλεσμα ενός συμπερασμού. Η δεύτερη πρόταση αυτού του συμπερασμού πρέπει να είναι

$\mathfrak{T} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow \mathbf{a \neq a})$ και αυτός ο τύπος για τον ίδιο λόγο πρέπει να προέρχεται από ένα συμπερασμό που η δεύτερη πρόταση θα πρέπει αναγκαστικά να έχει την μορφή

$\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{T} \rightarrow (\mathfrak{S} \rightarrow \boldsymbol{\alpha \neq \alpha}))$

Αλλά από το πρώτο λήμμα μας, αυτός ο τύπος δεν είναι αποδείξιμος διότι προφανώς περιέχει περισσότερα από δύο σύμβολα →. Αυτό αποκλείει την πιθανότητα ότι η σχέση (6) είναι ένας αποδείξιμος τύπος και αυτό περατώνει την απόδειξή μας για την συμβιβαστότητα του συστήματος αξιωμάτων μας».

Ο νέος στόχος του είναι να πραγματοποιήσει την αντίστοιχη έρευνα, αφού επαναφέρει το αποκλειόμενο πριν Αξίωμα 2. Έτσι θα ήταν δυνατόν να αποδείξει την συμβιβαστότητα του συστήματος αξιωμάτων.

1. $a = a$
2. $1 + (a + 1) = (1 + a) + 1$
3. $a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$
4. $a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$
5. $a = c \rightarrow (b = c \rightarrow a = b)$
6. $a + 1 \neq 1$

Είναι φανερό ότι δεν έχει εισαγάγει μέχρι τώρα κανένα λογικό σύμβολο πέραν από το σύμβολο → και το σύμβολο του «για κάθε».. Στην πραγματικότητα, έχει αποφύγει την τυποποίηση της λογικής πράξης του «όχι». Αυτός ο τρόπος αντιμετώπισης της άρνησης είναι χαρακτηριστικός για τη θεωρία αποδείξεων: ένα τυπικό ισοδύναμο για την απούσα άρνηση έγκειται αποκλειστικά στο σύμβολο ≠. Εισάγοντας αυτό το σύμβολο, η ανισότητα εκφράζεται εξίσου θετικά και αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και το αντίστοιχο σύμβολο της ισότητας. Όπως λέει ο ίδιος:

«Συνεχώς χρησιμοποιούμε άρνηση μόνο στην απόδειξη της συμβιβαστότητας της ισότητας. Άρα χρησιμοποιούμε άρνηση μόνο στην απόδειξη της συμβιβαστότητας και μόνο στο μέτρο που αντιστοιχεί στην βασική μας άποψη. Υπό το πρίσμα του γεγονότος αυτού, μου φαίνεται ότι η Θεωρία Αποδείξεων, μας δίνει επίσης μια επιστημολογικά σημαντική εικόνα για την έννοια και την ουσία της άρνησης».

Η λογική έννοια του «για κάθε» εκτίθεται στη θεωρία του από τις μεταβλητές που εμφανίζονται εκεί και από τους κανόνες που έχουν τεθεί για να γίνονται πράξεις με το σύμβολο του «για κάθε». Εξηγεί ότι:

«Η μόνη λογική έννοια που πρέπει να σχηματιστεί είναι η έννοια του «υπάρχει» μια έννοια η οποία, όπως είναι γνωστό, μπορεί να εκφραστεί στην τυπική λογική από την άρνηση και την έννοια του «για κάθε». Αλλά δεδομένου ότι η άρνηση δεν μπορεί να έχει καμία άμεση αντιπροσώπευση στη θεωρία αποδείξεων, η μορφοποίηση του «υπάρχει» είναι έμμεσος ορισμός, έτσι ώστε «αυτό που υπάρχει» είναι αυτό που στην πραγματικότητα παράγεται από μια συνάρτηση. Το απλούστερο παράδειγμα αυτού είναι το εξής:

Για να εκφράσουμε την πρόταση: «Αν το a δεν είναι 1 τότε «υπάρχει» ένας αριθμός που προηγείται του α» εισάγουμε την συνάρτηση δ(*) με μια κενή θέση ως ατομικό σύμβολο και θέτουμε ως αξίωμα τον τύπο

7. $\alpha \neq 1 \rightarrow \alpha = \delta(\alpha) + 1$».

Αναφέρει εδώ ότι μπορεί να αποδειχθεί με διαδοχικές υποθέσεις πως το σύστημα αξιωμάτων που αποτελείται από τα αξιώματα 1-7 είναι συμβιβαστό (μη αντιφατικό).

Παρά το γεγονός ότι αυτές οι εξηγήσεις περιέχουν μόνο την αρχή της θεωρίας αποδείξεων, αντιλαμβάνεται κανείς μέσα τους την γενική τάση και την κατεύθυνση στην οποία η νέα θεμελίωση των μαθηματικών θα έπρεπε να προχωρήσει. Κι έτσι προκύπτουν δύο ιδιαίτερες σκέψεις του που έχουν ενδιαφέρον:

Πρώτον, σημειώνει, πως ό, τι μέχρι τώρα φτιάχτηκε σωστά στα μαθηματικά θα πρέπει αυστηρά να τυποποιηθεί, έτσι ώστε τα σωστά μαθηματικά, ή τα μαθηματικά με την αυστηρή έννοια του όρου, να γίνουν ένα απόθεμα αποδείξιμων τύπων. Οι τύποι του αποθέματος αυτού διακρίνονται από τους συνήθεις τύπους των μαθηματικών μόνο από το γεγονός ότι, εκτός από τα μαθηματικά σύμβολα, περιέχουν επίσης το σύμβολο →, και το σύμβολο του «για κάθε», και το σύμβολο για τις προτάσεις. Το γεγονός αυτό αντιστοιχεί σε μια πεποίθηση που είχε από καιρό, ότι μια ταυτόχρονη δόμηση της αριθμητικής και της τυπικής λογικής είναι απαραίτητη εξαιτίας της στενής σύνδεσης και του αδιαίρετου της αριθμητικής και των λογικών αληθειών.

Δεύτερον, επισημαίνει ότι εκτός από τα κοινά μαθηματικά, φαίνεται ότι υπάρχουν και μαθηματικά που είναι σε κάποιο βαθμό νέα, τα μετα-μαθηματικά που χρησιμεύουν για την ασφαλή προστασία από τον τρόμο των περιττών απαγορεύσεων, καθώς και από τη δυσκολία των παραδόξων. Σε αυτά τα μετα-μαθηματικά - σε αντίθεση με τις αμιγώς τυπικές πράξεις εξαγωγής συμπερασμάτων στα κοινά μαθηματικά - εφαρμόζουμε σημασιολογικούς συμπερασμούς, ιδίως για την απόδειξη της συμβιβαστότητας των αξιωμάτων.

Η ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης αναλόγως γίνεται με δύο τρόπους που συνεχώς εναλλάσσονται: (i) την παραγωγή νέων "αποδείξιμων" τύπων από τα αξιώματα μέσω τυπικών συμπερασμών, και (ii) η προσθήκη νέων αξιωμάτων, μαζί με μια απόδειξη της συμβιβαστότητάς αυτών μέσω σημασιολογικών συμπερασμών.

Τηρώντας αυτές τις αρχές και τάσεις που έχει περιγράψει, μπορεί τώρα να εφαρμόσει την νέα θεμελίωση των μαθηματικών.

Το προηγούμενο απόθεμα των αξιωμάτων στοιχειοθετείται από τα αξιώματα 1-7 που έχει ήδη αναφέρει. Αυτά τα αξιώματα έχουν καθαρά αριθμητικό χαρακτήρα. Οι αποδείξιμοι τύποι που προκύπτουν από αυτά δεν παρέχουν στο ελάχιστο μια θεμελίωση για την θεωρία των πραγματικών αριθμών, και αποτελούν μόνο ένα μικρό μέρος, ακόμη και της αριθμητικής. Από τα αξιώματα 1-7 προκύπτει ότι οι μόνες μεταβλητές που παρουσιάζονται (με μικρά λατινικά γράμματα χωρίς κενές θέσεις) είναι οι βασικές μεταβλητές Αλλά ακόμη και για τη θεμελίωση της αριθμητικής, αξιώματα τέτοιου είδους είναι εντελώς ανεπαρκή. Μάλλον υπάρχει η ανάγκη μιας σειράς αξιωμάτων που περιέχουν μεταβλητές τύπων (με μεγάλα λατινικά γράμματα). Έτσι ορίζει τα ακόλουθα αριθμητικά αξιώματα καθένα με μια μεταβλητή τύπου:

Αξίωμα της μαθηματικής Ισότητας

$$8.\, a = b \to \big(A\,(a) \to A\,(b)\big).$$

Αξίωμα της Τέλειας Επαγωγής

$$9.\, (\alpha)\big(A(\alpha) \to A(\alpha+1)\big) \to \{A(1) \to (Z(b) \to A(b))\}$$

Υπάρχει επίσης η ανάγκη ενός συνόλου αξιωμάτων που σχετίζονται με τους συνηθισμένους τύπους των λογικών συμπερασμών. Έτσι ορίζει τα ακόλουθα τέσσερα αξιώματα με μεταβλητές τύπων:

Αξιώματα λογικών συμπερασμών.

10. $A \to (B \to A)$,

11. $\{A \to (A \to B)\} \to (A \to B)$,

12. $\{A \to (B \to C)\} \to \{B \to (A \to C)\}$

13. $(B \to C) \to \{(A \to B) \to (B \to C)\}$

Επιπλέον, χρειάζεται δύο αξιώματα για τη μαθηματική ανισότητα, αυτά τα αξιώματα του προσφέρουν μια ισορροπία για ορισμένους τύπους εξαγωγής συμπερασμάτων που είναι απαραίτητα σε σημασιολογικές σκέψεις. Έτσι ορίζει τα ακόλουθα αξιώματα.

14. $\alpha \neq \alpha \rightarrow A,$

15. $(a = b \rightarrow A) \rightarrow \{(a \neq b \rightarrow A) \rightarrow A\}$

Τα αξιώματα 1-7 είναι μόνο μερικά από τα αριθμητικά αξιώματα που είναι αναγκαία. Για την συμπλήρωσή τους, παρίσταται ανάγκη να εισάγει την λογική συνάρτηση με το σύμβολο Ζ («που συμβολίζει ένα θετικό ακέραιο»). Από την άλλη πλευρά, είναι αναγκαίο να περιοριστεί το αξίωμα 6. Αφού, στο όνομα της ορθογραφικής ομοιομορφίας, χρησιμοποιήσει το σύμβολο * -1, αντί του συμβόλου της συνάρτησης δ (*), και αφού γενικεύσει και συμπληρώσει τα αξιώματα 2 και 7 και τέλος αφού απορρίψει τα αξιώματα 3,4 και 5 (επειδή είναι τώρα αποδείξιμοι τύποι), τελικά καταλήγει στα ακόλουθα αξιώματα στην θέση των 1-7.

16. Z(1)
17. Z(a) →Z (a+1)
18. Z(a) →(a≠1→Z(a-1)),
19. Z(a) →(a+1≠1),
20. (a+1) – 1 = a
21. (a – 1) + 1 = a
22. a + (b + 1) = (a + b) + 1
23. a – (b + 1) = (a – b) -1

Με βάση το σύστημα αξιωμάτων 8-23 του Χίλμπερτ γίνεται εφικτή η παραγωγή όλου του εύρους των τύπων και αξιωμάτων στην αριθμητική, απλά εφαρμόζοντας τους κανόνες που έχει θέσει. Πρώτος και σημαντικός στόχος του είναι να αποδείξει την συμβιβαστότητα αυτού του συστήματος αξιωμάτων, των τύπων 8-23. Η απόδειξη μπορεί να πραγματοποιηθεί και ο τρόπος εξαγωγής συμπερασμάτων της τέλειας επαγωγής (αξίωμα 9), η οποία είναι χαρακτηριστική στην αριθμητική, είναι ως εκ τούτου εξασφαλισμένη[35].

[35] Ο Bernays σημειώνει ότι η αναφερόμενη απόδειξη ισχύει μόνο αν κάποιος εξαιρέσει το σύμβολο του «για κάθε» και αντικαταστήσει το Αξίωμα 9 από το επαγωγικό σχήμα.

Αλλά το πιο ουσιαστικό βήμα που απομένει να γίνει, τονίζει ο Χίλμπερτ, είναι η απόδειξη της εφαρμογής της λογικής αρχής «tertium non datur», με την έννοια του παραδεκτού συμπεράσματος, για απείρως πολλούς αριθμούς, συναρτήσεις ή συναρτήσεις συναρτήσεων, ότι δηλαδή μια πρόταση είτε ισχύει για όλους αυτούς τους αριθμούς, συναρτήσεις και τις συναρτήσεις των συναρτήσεων ή ότι υπάρχει κατ 'ανάγκην ένα από αυτά για τα οποία η πρόταση δεν ισχύει. Μόνο με την απόδειξη της εφαρμογής αυτής της αρχής ολοκληρώνεται η θεμελίωση της θεωρίας των πραγματικών αριθμών και δημιουργούνται οι «γέφυρες» με την ανάλυση και τη θεωρία συνόλων.

Η απόδειξη αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί στην βάση των θεμελιωδών ιδεών που έχει ήδη περιγράψει. Εισάγει συναρτήσεις συναρτήσεων **τ** και **α** θέτοντας συστήματα αξιωμάτων και αποδεικνύει την συμβιβαστότητα των αξιωμάτων αυτών. Και συμπληρώνει χαρακτηριστικά:

«Το πιο απλό παράδειγμα μιας συνάρτησης συναρτήσεων που εξυπηρετούν αυτό το σκοπό είναι η συνάρτηση κ (f) όπου το f είναι μια μεταβλητή αριθμο-θεωρητική συνάρτηση μιας μεταβλητής a που έχει ως εξής:

$Z(a) \to \{f(a) \neq 1 - 1 \to Z\ (f(a))\}$

Ισχύει, όταν κ (f) = 1 -1 αν η f έχει την τιμή 1 για κάθε a, διαφορετικά, κ (f) είναι το μικρότερο όρισμα για το οποίο η f δεν είναι 1. Το σύστημα - αξιωμάτων για αυτό το κ (f) είναι:

24. $(\kappa(f) = 1 - 1) \to (Z(a) \to f(a) = 1)$,
25. $(\kappa(f) \neq 1\text{-}1) \to Z\kappa(f)$,
26. $(\kappa(f) \neq 1\text{-}1) \to (f(\kappa(f)) \neq 1)$,
27. $Z(a) \to \{Z(\kappa(f) - a) \to f(\kappa(f) - a) = 1\}$.

Κατά παρόμοιο τρόπο ένα ορισμένο ζεύγος συναρτήσεων των συναρτήσεων τ, α που ανήκουν μαζί μπορούν να εισαχθούν με τη βοήθεια των οποίων η πλήρης θεμελίωση της θεωρίας των πραγματικών αριθμών - και ειδικότερα η απόδειξη της ύπαρξης του ανώτερου ορίου για ένα οποιοδήποτε αυθαίρετο σύνολο πραγματικών αριθμών – καθίσταται δυνατή».

6. Η ΛΟΓΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (HILBERT 1923 A).

6.1 Εισαγωγή.

Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει μια διάλεξη στην «Deutche Naturforscher Gesellschaft» στη Λειψία το Σεπτέμβριο 1922, αποτελεί μια συνέχεια του Hilbert 1902α, και εισάγει τη θεωρία αποδείξεων του Hilbert ως πλέον μια ώριμη θεωρία. Ο Hilbert εδώ εισάγει διάφορες τεχνικές βελτιώσεις και διευκρινίσεις για την μελέτη του. Συγκεκριμένα: (i) Βελτιώνει το τυπικό σύστημα, προσθέτοντας ένα ειδικό σύμβολο, την τυπική άρνηση. (Θυμίζουμε ότι προηγουμένως είχε επιτραπεί μόνο το αρχικό σύμβολο σημάδι ≠ για την αριθμητική ανισότητα). (ii) Τελειοποιεί την αναφορά του για τη διάκριση μεταξύ της τυπικής γλώσσας και της μεταγλώσσας, και ο ίδιος διακρίνει τώρα σαφώς τους τρόπους εξαγωγής συμπερασμού που επιτρέπονται σε κάθε μία. Στη μεταγλώσσα, κάποιος κάνει πράξεις με την πεπερασμένη λογική , δηλαδή, μια λογική που ασχολείται με πεπερασμένες οντότητες, αλλά στην επίσημη γλώσσα οι τρόποι εξαγωγής συμπερασμάτων είναι πιο ισχυροί. Στις παραγράφους 13-15 της διάλεξης, ο Χίλμπερτ βεβαιώνει την ύπαρξη των ποσοδεικτών στις άπειρες οντότητες, ως το ακριβές σημείο όπου τα παραδοσιακά μαθηματικά απομακρύνονται από την πεπερασμένη λογική. (iii) Ο ίδιος περιγράφει μια απόδειξη της συμβιβαστότητας ενός στοιχειώδους, χωρίς ποσοδείκτες, τυπικού συστήματος της θεωρίας των αριθμών. (iv) Αρχίζει να επεκτείνει τη θεωρία της απόδειξής του για την ανάλυση και τη θεωρία των συνόλων και στο τέλος της μελέτης σκιαγραφεί μια στρατηγική για την απόδειξη της συμβιβαστότητας μιας έκδοσης του αξιώματος της επιλογής του Zermelo, για τους πραγματικούς αριθμούς. (v) Χειρίζεται μεταβατικά τμήματα των μαθηματικών, εισάγει ένα ειδικό τελεστή "τ" στις προτάσεις. Το "τ" διέπεται από ένα ενιαίο μεταβατικό αξίωμα

$A\ (\tau A) \rightarrow A\ (\alpha)$

Ο "τ" πρέπει να θεωρηθεί ως τελεστής αντιπαραδείγματος. Δηλαδή, για κάθε πρόταση A, ο τA υποτίθεται ότι επιλέγει ένα αντιπαράδειγμα για το A, εφόσον υπάρχει ένα τέτοιο αντιπαράδειγμα. Με λίγα λόγια, το αξίωμα λέει ότι αν το A ισχύει, ακόμη και στο υποτιθέμενο αντιπαράδειγμα, τότε ισχύει γενικά. Ο Χίλμπερτ μπορεί τώρα να καθορίσει τους ποσοδείκτες με όρους του "τ". Γιατί το $(\forall x)A(x)$ ισχυει μόνο στην περίπτωση που το A(x) ισχύει για κάθε τ(A). Έτσι ορίζουμε:

$(\forall x)A(x) \equiv A(\tau(A))$

Και με την ίδια συλλογιστική

$(\exists x)A(x) \equiv A(\tau\bar{A})$

Έτσι ο τελεστής «τ» συνδέει τους ποσοδείκτες, μια αρχή της μεταβατικής επιλογής, και το tertium non datur για τις άπειρες οντότητες. Από το μεταβατικό αξίωμα και τον ορισμό των ποσοδεικτών , προκύπτει ότι

$$\left(\overline{\forall\alpha}\right)A(\alpha) \equiv (\exists\alpha) - \bar{A}\,(\alpha)$$

Και τον τύπο αυτό ο Χίλμπερτ αναγνωρίζει ως «tertium non datur» για τις άπειρες οντότητες

Ο ειδικός τελεστής «τ» (που ο Χίλμπερτ και ο Μπέρνεϋς αντικατέστησαν γρήγορα με το γνωστό, ελληνικό ε) επιτρέπει επίσης στον Χίλμπερτ την εξάλειψη των ποσοδεικτών από την τυπική γλώσσα του: Γιατί έχουν αντικατασταθεί από τον τελεστή «ε», ο οποίος διέπεται από ένα μεμονωμένο μεταβατικό αξίωμα. Αυτό απλοποιεί σημαντικά τη θεωρία αποδείξεων. Γιατί η τυπική απόδειξη, αποτελείται αποκλειστικά από αντικαταστάσεις και από εφαρμογές προτασιακού λογισμού. Η στρατηγική του Χίλμπερτ για την απόδειξη της συμβιβαστότητας ήταν η εξής: Να αντικαταστήσει τους (πεπερασμένου πλήθους) «ε-όρους» σε όλες τις αποδείξεις από διαδοχικές αριθμητικές τιμές με τον πιο αποτελεσματικό τρόπο. Η ελπίδα του ήταν ότι η διαδικασία αυτή θα μπορούσε να αποδειχθεί ότι θα κατέληγε σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων, αφήνοντας τύπους παραδεκτούς από όλους χωρίς ποσοδείκτες.

6.2 Το δοκίμιο η Λογική Θεμελίωση των Μαθηματικών.

Οι προσπάθειες του Χίλμπερτ στη νέα θεμελίωση των μαθηματικών έχουν ως στόχο να εξαλειφθεί, μια για πάντα, η γενική αμφιβολία για την αξιοπιστία των μαθηματικών συμπερασμάτων. Για να δούμε πόσο αναγκαία ήταν μια τέτοια έρευνα, ας σκεφτούμε πόσο ευμετάβλητες και ασαφείς ήταν οι ιδέες ακόμα και των πιο διακεκριμένων μαθηματικών στον χώρο ή ας θυμηθούμε ότι τα συμπεράσματα που είχαν προηγουμένως θεωρηθεί ως τα πιο σίγουρα στα μαθηματικά, αμφισβητήθηκαν από μερικούς διάσημους μαθηματικούς της σύγχρονης εποχής.

Ο Χίλμπερτ πίστευε ότι οι δυσκολίες των υπό συζήτηση αρχών, δεν μπορεί να λυθούν πλήρως, χωρίς τη θεωρία της ίδιας της μαθηματικής απόδειξης. Με τη βοήθεια του Paul Bernays είχε ήδη αναπτύξει τη θεωρία αποδείξεων τόσο ώστε να μπορεί στην πραγματικότητα, αυτή να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μια απόλυτα παραδεκτή βάση για την ανάλυση και τη θεωρία των συνόλων. Μπορούσε έτσι να αντιμετωπίσει με επιτυχία τα μεγάλα κλασικά προβλήματα της θεωρίας συνόλων όπως το πρόβλημα του απείρου και τα εξίσου σημαντικά ανοικτά προβλήματα της μαθηματικής λογικής.

Κατά τη διάρκεια της έρευνάς του, μια σειρά από νέες ιδέες και διασυνδέσεις είχαν έρθει στο φως, καθεμία από τις οποίες είναι ενδιαφέρουσα για τους δικούς της λόγους. Αναφέρει χαρακτηριστικά το αξίωμα της επιλογής πάνω στη θεωρία συνόλων, την οποία ο Ζερμέλο ήταν ο πρώτος που διατύπωσε και με βάση την οποία έδωσε μια απόδειξη διάταξης του απείρου. Οι ενστάσεις που εγέρθηκαν εναντίον αυτής της απόδειξης έπρεπε να στρέφονται κατά του αξιώματος της επιλογής. Και ήταν γεγονός ότι οι περισσότεροι τότε αποδέχονταν το αξίωμα της επιλογής μόνο και μόνο επειδή οι άλλοι τρόποι εξαγωγής συμπερασμάτων που υπήρχαν στη θεωρία συνόλων ήταν λιγότερο αποδεκτοί. Ο Χίλμπερτ πίστευε όμως ότι αυτή η άποψη είναι λανθασμένη. Αντί της λογικής ανάλυσης του είδους που είχε μελετηθεί, η δική του θεωρία αποδείξεων αποδείκνυε ότι η ουσιώδης σκέψη που στηρίζεται στην αρχή της επιλογής ήταν μια γενική λογική αρχή, η οποία ήταν αναγκαία και απαραίτητη, ακόμη και για τα πιο στοιχειώδη βασικά στοιχεία των μαθηματικών συμπερασμάτων.

Την βασική ιδέα της θεωρίας αποδείξεων την αναπτύσσει ως εξής:

« Ό, τι προηγουμένως έχει δομηθεί στα μαθηματικά πρέπει να φτιαχτεί με αυστηρούς τύπους έτσι ώστε τα κοινά μαθηματικά ή τα μαθηματικά με την αυστηρή έννοια να γίνουν ένα απόθεμα τύπων. Αυτοί οι τύποι διακρίνονται από τους συνηθισμένους τύπους των μαθηματικών μόνο από το γεγονός ότι περιέχουν λογικά σύμβολα εκτός από συνηθισμένα σύμβολα - ειδικότερα, λογικά σύμβολα για το "συνεπάγεται" (→) και για το "δεν($\overline{\quad}$)" . Ορισμένοι τύποι που χρησιμεύουν ως δομικά στοιχεία του τυπικού οικοδομήματος των μαθηματικών ονομάζονται αξιώματα. Μια μαθηματική απόδειξη είναι μια διάταξη τύπων που πρέπει να θεωρείται ως τέτοια στην εποπτική μας αντίληψη. Αποτελείται από συμπεράσματα, σύμφωνα με το σχήμα:

$$\frac{\begin{matrix}\mathfrak{S}\\ \mathfrak{S}\to\mathfrak{T}\end{matrix}}{\mathfrak{T}}$$

όπου κάθε μία από τις υποθέσεις - ήτοι ο τύπος $\mathfrak{S}$ και $\mathfrak{S}\to\mathfrak{T}$ της σειράς αυτής - είτε είναι ένα αξίωμα είτε ένα άμεσο αποτέλεσμα από ένα αξίωμα με αντικατάσταση, είτε συμφωνεί με τον τελικό τύπο $\mathfrak{T}$ του συμπεράσματος που εμφανίζεται νωρίτερα στην απόδειξη, είτε το αποτέλεσμα από έναν τελικό τύπο με αντικατάσταση. Ένας τύπος θα πρέπει να ονομάζεται αποδείξιμος αν είναι είτε ένα αξίωμα είτε αποτέλεσμα από ένα αξίωμα με αντικατάσταση είτε είναι ο τελικός τύπος της απόδειξης.

Εκτός από τα τυποποιημένα κοινά μαθηματικά, έχουμε τα μαθηματικά που είναι σε κάποιο βαθμό νέα: τα μετα-μαθηματικά τα οποία είναι απαραίτητα για την διασφάλιση των μαθηματικών και στα οποία - σε αντίθεση με τους αμιγώς τυπικούς τρόπους της εξαγωγής συμπερασμάτων στα μαθηματικά - κάποιος μπορεί να εφαρμόσει το τρόπο των συνεχόμενων συμπερασμάτων αλλά μόνο για να αποδείξει τη συμβιβαστότητα του αξιώματος. Σε αυτά τα μετα-μαθηματικά λειτουργούμε με τις αποδείξεις των κοινών μαθηματικών, και αυτές οι αποδείξεις είναι οι ίδιες, αντικείμενο του συνεχόμενου συλλογισμού».

Έτσι, ο Χίλμπερτ συμπεραίνει ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης ως συνόλου πραγματοποιείται με δύο τρόπους που συνεχώς εναλλάσσονται: στη μία πλευρά έχουμε αντλήσει έναν νέο αποδείξιμο τύπο από τα αξιώματα με τυπική συμπερισματολογία, από την άλλη, προσθέτουμε νέα αξιώματα και αποδεικνύουμε τη συμβιβαστότητα τους, με συνεχόμενους συλλογισμούς.

Τα αξιώματα και τα αποδείξιμα θεωρήματα (δηλαδή οι τύποι που προκύπτουν σε αυτή την αλληλεπίδραση) είναι οι εικόνες από τις σκέψεις που συνθέτουν τη συνήθη διαδικασία των παραδοσιακών μαθηματικών, αλλά δεν είναι οι ίδιες αλήθειες, σε μια απόλυτη έννοια. Μάλλον οι απόλυτες αλήθειες είναι οι ιδέες που η θεωρία της απόδειξης προσκομίζει στην αποδειξιμότητα και τη συμβιβαστότητα αυτών των τυπικών συστημάτων.

Το πρόγραμμα αυτό επηρεάζει ήδη την επιλογή των αξιωμάτων για τη θεωρία αποδείξεων. Ο Χίλμπερτ παραθέτει την ακολουθία των αξιωμάτων ως εξής:

I. Αξιώματα της συνεπαγωγής.

$A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (1)

(εισαγωγή μια υπόθεσης)

$\{A \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow (A \rightarrow B)$ (2)

(Απαλοιφή μιας υπόθεσης)

$\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}$ (3)

(Ανταλλαγή μιας υπόθεσης)

$\{B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$ (4)

(Απαλοιφή μιας πρότασης)

II. Αξιώματα της Άρνησης.

$A \rightarrow ((\bar{A}) \rightarrow B)$ (5)

(νόμος της Αντίφασης)

$(A \rightarrow B) \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B\}$ (6)

(Αρχή του tertium non datur)

III. Αξιώματα της Ισότητας.

$\alpha = \alpha$ (7)

$a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$ (8)

IV. Αξιώματα του Αριθμού.

$a + 1 \neq 0$ (9)

$\delta(\alpha+1) = \alpha$ (10)

Σχετικά με τη σχέση (IV) σημειώνει ότι ο τύπος της άρνησης των a = b (δηλαδή $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$) μπορεί να γραφεί και ως a ≠b και έτσι η σχέση a + 1 ≠0 είναι η άρνηση της σχέσης a + 1 = 0.

Από τα παραπάνω αξιώματα 1-10, μπορούμε εύκολα να αποκτήσουμε τους θετικούς ακεραίους αριθμούς και τις αριθμητικές εξισώσεις που ισχύουν γι' αυτούς. Η στοιχειώδης θεωρία αριθμών μπορεί επίσης να ληφθεί από αυτές τις αρχές με τη βοήθεια της «πεπερασμένης» λογικής και η καθαρά διαισθητική σκέψη (η οποία περιλαμβάνει αναδρομή και διαισθητική επαγωγή για πεπερασμένες υπάρχουσες οντότητες) εδώ δεν είναι απαραίτητο να εφαρμόσει κάθε αμφίβολο ή προβληματικό τρόπο εξαγωγής συμπεράσματος.

Οι αποδείξιμοι τύποι που έχουμε αποκτήσει με αυτό τον τρόπο έχουν όλοι το χαρακτήρα της πεπερασμένης λογικής Ωστόσο, στη θεωρία αποδείξεων ο Χίλμπερτ προχωράει πέρα από αυτό το πεδίο της πεπερασμένης λογικής και έχει σκοπό να αποκτήσει αποδείξιμους τύπους που είναι, εικόνες των υπερπερασμένων θεωρημάτων από τα απλά μαθηματικά. Η αληθινή επίδειξη της δύναμης της θεωρίας αποδείξεων θα προκύψει όταν, αφού προστεθούν ορισμένα υπερπερασμένα αξιώματα, θα είμαστε σε θέση να δώσουμε της απόδειξη της συμβιβαστότητας. Ο Χίλμπερτ ξεκινάει με την εφαρμογή των εννοιών του "για κάθε" και του "υπάρχει". Ο Χίλμπερτ γράφει σχετικά με αυτές τις έννοιες τα εξής:

«Ο ισχυρισμός ότι όλα τα αντικείμενα μιας πεπερασμένης οντότητας κατέχουν μια ιδιαίτερη ιδιότητα είναι λογικά ισοδύναμη με ένα συνδυασμό διαφόρων μεμονωμένων ισχυρισμών. Για παράδειγμα, «όλοι οι πάγκοι σε αυτή την αίθουσα είναι ξύλινοι» σημαίνει: «Αυτός ο πάγκος είναι ξύλινος και εκείνος ο πάγκος είναι ξύλινος και ... και ο πάγκος που υπάρχει εκεί είναι φτιαγμένος από ξύλο». Ομοίως, ο ισχυρισμός ότι υπάρχει ένα αντικείμενο με μια ιδιότητα σε ένα πεπερασμένο σύνολο είναι ισοδύναμος με μια διάζευξη μεμονωμένων ισχυρισμών, για παράδειγμα, «υπάρχει μεταξύ αυτών των κιμωλιών μια που είναι κόκκινη» σημαίνει: «αυτή η κιμωλία είναι κόκκινη ή εκείνη η κιμωλία είναι κόκκινη ή … ή εκείνη η κιμωλία είναι κόκκινη»».

Από αυτό εξάγει την αρχή του tertium non datur για τις πεπερασμένες οντότητες με το ακόλουθο σχήμα:

«Είτε όλα τα αντικείμενα έχουν μια σταθερή ιδιότητα ή υπάρχει ένα αντικείμενο που δεν έχει αυτή την ιδιότητα και ταυτόχρονα σκοπεύουμε (χρησιμοποιώντας τα συνήθη σύμβολα «για κάθε α» : (α), «όχι για όλα τα α» : ($\bar{\alpha}$) , «υπάρχει ένα α»: (Εα) , «δεν υπάρχει ένα α»: ($\overline{E\alpha}$)), την αυστηρή εγκυρότητα των ισοδυναμιών.

$$(\bar{\alpha})A(\alpha)eq.(E\alpha)\bar{A}(\alpha)$$

και

$$(\overline{E\alpha})A(\alpha)eq.(\alpha)\bar{A}\,(\alpha)$$

όπου το Α(α) δηλώνει μια πρόταση με την μεταβλητή α, δηλαδή έναν δείκτη.

Όμως, στα μαθηματικά αυτές οι ισοδυναμίες συνήθως θεωρούνται, χωρίς περαιτέρω απόδειξη, ότι είναι έγκυρες για απείρως πολλά άτομα, και με αυτό τον τρόπο παραμερίζουμε την δύναμη του πεπερασμένου και εισάγουμε τη μέθοδο των υπερβατικών τρόπων εξαγωγής συμπερασμάτων. Αν πρέπει συνεχώς να εφαρμόζουμε σε άπειρες οντότητες διαδικασίες που είναι αποδεκτές σε πεπερασμένες περιπτώσεις, τότε θα άνοιγαν οι πύλες των σφαλμάτων. Σύμφωνα με τον Χίλμπερτ θα επαναληφθεί, έτσι, η ίδια πηγή λαθών που γνωρίζουμε από την ανάλυση. Καθώς στην ανάλυση, έχουμε τη δυνατότητα να επεκτείνουμε θεωρήματα που ισχύουν για πεπερασμένα ποσά και αποτελέσματα για άπειρα ποσά και αποτελέσματα, μόνο εάν μια ειδική έρευνα της σύγκλισης εγγυάται την συμπερασματολογία. Ομοίως, κι εδώ δεν μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τις άπειρες ποσότητες και τα άπειρα αποτελέσματα σαν να ήταν περιορισμένα, εκτός και αν η θεωρία απόδειξης για την οποία συζητάμε, μπορεί να θεραπεύσει μια τέτοια περίπτωση.

Ο Χίλμπερτ εξετάζει τις ισοδυναμίες που έχει μόλις δημιουργήσει και σχολιάζει τα εξής: «Για έναν άπειρο αριθμό πραγμάτων η άρνηση της καθολικής απόφασης (α) Αα δεν έχει ακριβές ανεξάρτητο περιεχόμενο, ούτε η άρνηση του Αα υπαρξιακής απόφασης (Εα). Σίγουρα, αυτές οι αρνήσεις μπορούν σε ορισμένες περιπτώσεις να έχουν νόημα, αν ο ισχυρισμός (α) Αα διαψεύδεται από ένα αντιπαράδειγμα ή αν μια αντίφαση προέρχεται από την υπόθεση ότι (α) Αα ή (Εα) Αα. Αλλά οι περιπτώσεις αυτές δεν αντιφάσκουν μεταξύ τους. Για το αν το Α (α) δεν ισχύει για κάθε a, εμείς δεν γνωρίζουμε ακόμη, διότι υπάρχει πραγματικά ένα αντικείμενο με την ιδιότητα του "όχι-Α". Ούτε μπορούμε απλά να πούμε: είτε ότι το (α) Αα (ή: (Εα) Αα) ισχύει είτε ότι αυτοί οι ισχυρισμοί πραγματικά οδηγούνε σε μια αντίφαση. Για πεπερασμένες οντότητες το «υπάρχει» και το «δεν υπάρχει» είναι συνώνυμο. Για άπειρες οντότητες, μόνο η τελευταία έννοια είναι σαφές ότι ισχύει.

Ο Χίλμπερτ συμπεραίνει ότι αν θέλουμε να δώσουμε μια στέρεα θεμελίωση των μαθηματικών, δεν έχουμε το δικαίωμα να υιοθετήσουμε ως μη - προβληματικούς τους συνήθεις τρόπους εξαγωγής συμπερασμάτων που βρίσκουμε στην ανάλυση. Αντίθετα, στόχος μας είναι ακριβώς να ανακαλύψουμε γιατί και σε ποιο βαθμό μπορούμε πάντα να λάβουμε σωστά αποτελέσματα από την εφαρμογή των υπερπερασμένων τρόπων εξαγωγής συμπερασμάτων, οι οποίοι εμφανίζονται στην ανάλυση και στη θεωρία συνόλων. Η ελεύθερη χρήση και η πλήρης γνώση αυτού που υπερβαίνει τον αριθμό ή του υπερπερασμένου συνόλου είναι να επιτευχθεί στο έδαφος του πεπερασμένου! Πώς ο Χίλμπερτ κάνει δυνατή τη λύση αυτού του εγχειρήματος;

Σύμφωνα με το σχέδιό του, προσθέτει στις τέσσερις προηγούμενες ομάδες αξιωμάτων, νέες ομάδες που εκφράζουν υπερπερασμένους τρόπους εξαγωγής συμπερασμάτων. Χρησιμοποιεί την ιδέα που κρύβεται πίσω από την αρχή της επιλογής με την εισαγωγή μιας λογικής συνάρτησης

$\tau(A)$ ή $\tau_\alpha(A(\alpha))$

η οποία αποδίδει ένα καθορισμένο $\tau(A)$ σε κάθε πρόταση $A(\alpha)$ - δηλαδή σε κάθε προκείμενη με μια μεταβλητή α.

Η συνάρτηση τ υπάρχει για να ικανοποιεί το ακόλουθο αξίωμα :

V. Υπερπερασμένο αξίωμα.

$$A(\tau A) \rightarrow A(\alpha) \tag{11}$$

Σε απλή γλώσσα, αυτό το αξίωμα λέει ότι αν μια πρόταση Α ισχύει για το αντικείμενο τΑ, τότε θα ισχύει και για όλα τα αντικείμενα a. Η συνάρτηση «τ» είναι ένα σταθερός επιμέρους παράγοντας ενός απλού κατηγορήματος - μεταβλητής Α. Ο Χίλμπερτ τον ονομάζει υπερπερασμένο παράγοντα και το αξίωμα 11, υπερπερασμένο αξίωμα. Για να καταλάβουμε το περιεχόμενό του , ας πάρουμε για το Α το κατηγόρημα: «δωροδοκήσιμος». Τότε το «τΑ» θα συμβολίζει έναν άνθρωπο που έχει τέτοιο αίσθημα δικαιοσύνης που, αν αποδειχθεί ότι είναι «δωροδοκήσιμος», στη συνέχεια, στην πραγματικότητα όλοι οι άνθρωποι είναι απολύτως «δωροδοκήσιμοι».

Το υπερπερασμένο αξίωμα V μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η αυθεντική πηγή όλων των υπερπερασμένων εννοιών και αξιωμάτων. Έπειτα προσθέτει τα ακόλουθα αξιώματα:

VI. Αξιώματα που ορίζουν το «για κάθε» και τα σύμβολα «ύπαρξης».

A(τA)→(α)A(α)

(α)A(α)→A(τA)

A(τ$\bar{A}$)→(Eα)A(α)

(Eα)A(α)→A(τ$\bar{A}$)

Τότε όλες οι καθαρά λογικές υπερπερασμένες αρχές μετατρέπονται σε αποδείξιμους τύπους, δηλαδή:

$$(\alpha)A(\alpha) \rightarrow A\alpha$$

(Αρχή του Αριστοτέλη)

$$A(\alpha) \rightarrow (E\alpha)A\alpha$$

(Υπαρξιακή Αρχή)

$$(\bar{\alpha})A\alpha \rightarrow (E\alpha)\bar{A}\alpha$$

$$(E\alpha)\bar{A}\alpha \rightarrow (\bar{\alpha})A\alpha$$

$$(\overline{E\alpha})A\alpha \rightarrow (\alpha)\bar{A}\alpha$$

$$(\alpha)\bar{A}\alpha \rightarrow (\overline{E\alpha})A\alpha$$

Στους τελευταίους τέσσερις τύπους, οι ισοδυναμίες που έχει θέσει για τις πεπερασμένες οντότητες όπως και η tertium non datur, θεωρεί ότι ισχύουν για τις άπειρες οντότητες. Μετά από αυτές τις εξηγήσεις, ο Χιλμπερτ πλησιάζει στην απόδειξη της συμβιβαστότητας των αξιωμάτων I έως V (1 έως 11). Η βασική ιδέα μιας τέτοιας απόδειξης, όπως την καθορίζει βήμα βήμα ο Χίλμπερτ, έχει ως εξής:

«Υποθέτουμε ότι παρουσιάζουμε μια απτή απόδειξη που έχει ως τελικό τύπο $0 \neq 0$. Η παρουσία μιας αντίφασης μπορεί στην πραγματικότητα να περιοριστεί σε αυτή την περίπτωση. Στη συνέχεια, με την εξέταση του θέματος με έναν πεπερασμένο και συνεχή τρόπο, δείχνουμε ότι αυτό δεν μπορεί να είναι μια απόδειξη που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας.

Πρέπει πρώτα να δώσουμε την απόδειξη της συμβιβαστότητας των αξιωμάτων I έως IV (1 έως 10). Προχωρούμε με τη σταδιακή αλλαγή της υποτιθέμενης απόδειξης ότι $0 \neq 0$. Δηλαδή:

1. Επαναλαμβάνοντας και παραλείποντας τύπους η απόδειξη μπορεί να μετατραπεί σε μια απόδειξη στην οποία κάθε τύπος χρησιμεύει για να δικαιολογήσει ένα και μόνο ένα «προηγούμενο» τύπο. Με τον τρόπο αυτό η απόδειξη αποσυντίθεται σε θέματα που αρχίζουν από τα αξιώματα και καταλήγουν στον τελικό τύπο.

2. Οι μεταβλητές που εμφανίζονται στην απόδειξη μπορούν να παραλειφθούν

3. Μπορούμε να τακτοποιήσουμε την απόδειξη ώστε κάθε τύπος να περιέχει μόνο λογικά σύμβολα και αριθμούς 0, $0 +1$, $0 +1 + 1$, …… ώστε κάθε τύπος της απόδειξης να γίνεται ένας "αριθμητικός" τύπος.

4. Κάθε τύπος μετατρέπεται σε μια συγκεκριμένη λογική «κανονική μορφή».

Αφού γίνουν αυτές οι πράξεις, είναι δυνατόν να ελέγξουμε κάθε τύπο της απόδειξης άμεσα, δηλαδή, να διαπιστώσουμε αν είναι "σωστό" ή "λάθος" υπό την έννοια που έχουμε θέσει επακριβώς. Τώρα, αν η υποτιθέμενη απόδειξη έπρεπε να ικανοποιήσει όλες τις απαιτήσεις μας, τότε σαφώς κάθε τύπος της απόδειξης θα πρέπει να περάσει αυτή τη δοκιμή με τη σειρά. Έτσι, ο τελικός τύπος $0 \neq 0$, θα πρέπει επίσης να είναι «σωστός», αλλά «δεν είναι σωστός».

Με τον τρόπο αυτό μπορεί να δοθεί, σε γενικές γραμμές, η απόδειξη της συμβιβαστότητας των ομάδων - αξιωμάτων I έως IV (1 έως 10).

Όμως ο Χίλμπερτ ενδιαφέρεται περισσότερο για τη συμβιβαστότητα του αξιώματος V (11) γιατί αυτό το αξίωμα προσφέρει την αιτιολόγηση για τον υπερπεπερασμένο τρόπο εξαγωγής συμπερασμάτων στα μαθηματικά. Ο Χίλμπερτ αναπτύσσει τον βασικό πυρήνα αυτής της απόδειξης, λεπτομερώς, χρησιμοποιώντας την πρώτη και απλούστερη περίπτωση ως παράδειγμα. Αυτή η πρώτη περίπτωση εμφανίζεται καθώς επεκτείνει την Θεωρία Αριθμών, που έως τώρα έχει παραμείνει αυστηρά περιορισμένη. Λέει χαρακτηριστικά:

«Όταν στο αξίωμα V (ii) θέτουμε το "α" ως αριθμητικό σύμβολο (δηλαδή των θετικών ακέραιων, συμπεριλαμβανομένου και του 0) και τα κατηγορήματα A (α) είναι οι εξισώσεις f (α) = 0, όπου f είναι μια συνηθισμένη συνάρτηση των ακέραιων αριθμών. Η λογική του παράγοντα τ εκχωρεί ένα αντικείμενο σε κάθε κατηγόρημα. Δηλαδή, εκχωρεί έναν αριθμό σε κάθε μαθηματική συνάρτηση f. Έτσι το τ γίνεται ένας συνηθισμένος αριθμητικός παράγοντας των συναρτήσεων- δηλαδή αν η f είναι σταθερή συνάρτηση, το "τ" είναι ένας σταθερός αριθμός. Καλούμε την τ (f) έτσι ώστε το αξίωμα

$$\tau(f) = \tau_{\alpha}\,(f(a) = 0)$$

Το αξίωμα V στη συνέχεια μετατρέπεται στο αξίωμα

$$f(\tau(f))=0 \rightarrow f(a)=0 \qquad (12)$$

Είναι πιο εύκολο να κατανοήσουμε τη συνάρτηση τ (f) αν σκεφτούμε το τ (f) ως τον αριθμό 0 με f (α) = 0 για κάθε α. Διαφορετικά η συνάρτηση τ (f) είναι το μικρότερο α για το οποίο f (α) ≠ 0. Η συνάρτηση τ (f) είναι μια υπερπερασμένη συνάρτηση και είναι μία από τις συναρτήσεις που απαγορεύονται από τους Brouwer και Weyl.

Πρέπει έπειτα να αποδείξει ότι αν το αξίωμα 12, προστεθεί στα αξιώματα 1 έως 10, δεν θα προκύψει αντίφαση. Για το σκοπό αυτό λαμβάνει την απόδειξη της συμβιβαστότητας των αξιωμάτων 1 έως 10 και προσπαθεί να την επεκτείνει στην παρούσα υπόθεση. Κάνοντας αυτή την επέκταση συναντά μια νέα δυσκολία, καθώς το σύμβολο τ (f), στη συγκεκριμένη απόδειξη και αυθαίρετα πολλές συναρτήσεις φ, φ '.... μπορούν να υποκαταστήσουν τη συναρτησιακή - μεταβλητή f. Αλλά προς το παρόν κάνει την απλουστευτική παραδοχή ότι μόνο μια τέτοια ειδική συνάρτηση φ εμφανίζεται ως υποκατάστατο για την f, έτσι ώστε η δεδομένη απόδειξη να μπορεί τελικά να μετατραπεί σε μια απόδειξη που θα περιέχει λογικά σύμβολα , αριθμητικά σύμβολα, και την τ(φ) όπου το φ ορίζει μια ειδική συνάρτηση, της οποίας οι ορισμοί, δεν θα χρησιμοποιούν το "τ".

Έπειτα εκτελεί τις ακόλουθες πράξεις στην απόδειξη:

«1. Αντικαταστούμε σε όλες τις εμφανίσεις του τ(φ) το αριθμο-σύμβολο 0. Η απόδειξή μας μετατρέπεται στη συνέχεια σε μια σειρά από «αριθμητικούς» τύπους. Όλοι αυτοί οι τύποι είναι με προηγούμενα δεδομένα μας «σωστοί», με την πιθανή εξαίρεση εκείνων που προέρχονται από το αξίωμα 12. Αλλά αν στην εξίσωση 12 αντικαταστήσουμε το φ με το f και κάνουμε τις κατάλληλες αντικαταστάσεις για το α και αντικαταστήσουμε το τ(f) με το αριθμο-σύμβολο 0 τότε οι μόνοι τύποι που προκύπτουν είναι της μορφής

$\varphi(0)=0 \rightarrow \varphi\ (\mathfrak{z})=0$

Δεδομένου ότι με το ($\mathfrak{z}$) εδώ ορίσαμε ως το αριθμο-σύμβολο α και το φ ως μια συνάρτηση που ορίζεται από αναγωγή τότε το φ($\mathfrak{z}$) περιορίζεται επίσης σε ένα αριθμο-σύμβολο. Ουσιαστικά τίθεται το ερώτημα αν σε αυτούς τους τύπους, η αναγωγή του φ($\mathfrak{z}$) σε ένα αριθμο-σύμβολο, πάντοτε παράγει το αριθμό-σύμβολο 0 ή αν το φ($\mathfrak{z}$) παράγει έναν αριθμο-σύμβολο που είναι διαφορετικό από το 0. Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε ήδη επιτύχει την απόδειξή μας για τη συμβιβαστότητα. Διότι όλοι οι τύποι που προέρχονται από το αξίωμα 12 είναι ήδη σωστοί. Η ακολουθία των τύπων που έχουμε λάβει από την απόδειξη μετατρέπεται με τη σειρά της σε μια απόδειξη στην οποία μπορούμε να ελέγξουμε όλους τους τύπους ένα προς ένα και να δούμε αν είναι σωστοί. Άρα, ο λανθασμένος τύπος $0 \neq 0$ δεν μπορεί να εμφανίζεται ως τελικός τύπος.

2. Τώρα υποθέτουμε ότι ισχύει η δεύτερη εναλλακτική πρόταση. Τότε έχουμε ένα ($\mathfrak{z}$) ώστε το «$\varphi(\mathfrak{z}) = 0$», είναι ψευδής πρόταση. Εκτελούμε μια διαφορετική πράξη με τη δεδομένη απόδειξη: Αντικαθιστούμε όπου εμφανίζεται το τ(φ) όχι με το 0 αλλα με το αριθμο-σύμβολο ($\mathfrak{z}$). Οι τύποι τότε που προέρχονται από το αξίωμα 12 θα έχουν την μορφή

$\varphi\ (\mathfrak{z})=0 \rightarrow \varphi\ (\mathfrak{z})=0$

και αυτοί οι τύποι θα είναι σωστοί, καθώς ο προηγούμενος τύπος που προηγείται του συμβόλου της συνεπαγωγής είναι ψευδής. Η απόδειξη και πάλι γίνεται με καθαρά αριθμητικούς τύπους οι οποίοι είναι ορθοί, κι έτσι ο τελικός τύπος δεν μπορεί να είναι $0 \neq 0$.

Με τα παραπάνω, η απόδειξη της συμβιβαστότητας της υπερπερασμένης συνάρτησης τ(f) έχει ολοκληρωθεί. Την ίδια στιγμή έχουμε εξασφαλίσει το «tertium non datur» για την έννοια της άπειρης σειράς των αριθμών που αντιπροσωπεύεται από μια μεταβλητή όλων των αριθμών στην συνάρτηση f: που σημαίνει με βάση τα αξιώματα της άρνησης ΙΙ (5 και 6) η τυπική άρνηση ισοδυναμεί με αντιφατικά αντίθετο, καθώς από την μία το fτ(f) ≠ 0 είναι τυπική άρνηση του fτ (f) = 0, και από την άλλη μεριά, σύμφωνα με το VI το fτ (f) ≠ 0 ισοδυναμεί με το (Ea) (f(a)≠0) και το fτ (f) = 0 ισοδυναμεί με το (a) (f(a)=0).

Μπορεί κανείς να καταλάβει τη λύση που η θεωρία αποδείξεων δίνει στο πρόβλημα ως εξής: «Δεν υποστηρίζουμε στην θεωρία αποδείξεων ότι μπορούμε πάντα να βρούμε ένα αντικείμενο μεταξύ των απείρως πολλών πραγμάτων, αλλά μάλλον ότι κάποιος μπορεί πάντα να κάνει μια επιλογή χωρίς να διακινδυνεύσει ένα λάθος. Μπορούμε να συμφωνήσουμε με τον Weyl για την παρουσία ενός «κύκλου», αλλά αυτός ο κύκλος δεν είναι φαύλος. Και πιο σωστά, η εφαρμογή της «tertium no datur» δεν μπορεί ποτέ να οδηγήσει σε τέτοιο κίνδυνο».

Δηλαδή, σύμφωνα με τον Χίλμπερτ, στην θεωρία Αποδείξεων, τα υπερπερασμένα αξιώματα και οι υπερπερασμένοι τύποι προσαρμόζονται στα πεπερασμένα αξιώματα, όπως ακριβώς και στη θεωρία μιγαδικών μεταβλητών, και το φανταστικό στοιχείο προσαρμόζεται στο πραγματικό, ακριβώς όπως στη γεωμετρία τα ιδανικά σχήματα προσαρμόζονται στα πραγματικά. Το κίνητρο και η επιτυχία της διαδικασίας ταυτίζεται στην θεωρία αποδείξεων του Χίλμπερτ, και τα αποτελέσματα των υπερπερασμένων αξιωμάτων προσαρμόζονται για την απλούστευση και την ολοκλήρωση της θεωρίας του.

Κατά συνέπεια, η υπερπερασμένη συνάρτηση τ(f) μπορεί να εφαρμοστεί στα μαθηματικά - σε μαθηματικές αποδείξεις, καθώς και στον ορισμό των νέων συναρτήσεων ή στην δημιουργία νέων εννοιών.

Η συνάρτηση $\varphi(\alpha) = \lfloor \alpha^{\sqrt{\alpha}} \rfloor$ μπορεί να χρησιμεύσει ως ένα παράδειγμα του ορισμού μιας συνάρτησης όπου το δεξί σκέλος είτε είναι 0 είτε 1 ανάλογα αν το $\lfloor \alpha^{\sqrt{\alpha}} \rfloor$ είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.

Όσον αφορά την εφαρμογή στην απόδειξη, ο Χίλμπερτ τονίζει ότι μπορεί κανείς να πει αρκετά εύκολα αν μια απόδειξη που κάποιος βρίσκει στην βιβλιογραφία κάνει ουσιαστική χρήση μιας υπερπερασμένης συνάρτησης. Δίδει ένα καλό παράδειγμα βασισμένο σε δύο εντελώς διαφορετικές αποδείξεις του πεπερασμένου του πλήρους συστήματος των σταθερών. Στην πρώτη απόδειξη εφαρμόζει την υπερπερασμένη συνάρτηση της εξαγωγής συμπερασμάτων.

Δεν πράττει το ίδιο και στη δεύτερη απόδειξη. Η πρώτη απόδειξη του πεπερασμένου του πλήρους συστήματος των σταθερών είναι τέτοια ώστε ο υπερπερασμένος τρόπος του συμπεράσματος είναι απαραίτητος και δεν μπορεί να εξαλειφθεί. Βέβαια, προσθέτει ότι ένα πεπερασμένο θεώρημα μπορεί πάντα να αποδεικνύεται χωρίς την εφαρμογή του υπερπερασμένου τρόπου συμπεράσματος, αλλά ο ισχυρισμός αυτός είναι του τύπου ότι κάθε μαθηματική πρόταση μπορεί είτε να αποδειχθεί είτε να καταρριφθεί[36].

Με τον ίδιο τρόπο που έχει αποδείξει την συμβιβαστότητα του υπερπερασμένου παράγοντα των συναρτήσεων τ(f) αποδεικνύει και την συμβιβαστότητα της συνάρτησης των συναρτήσεων μ(f) - που όπως η τ(f) έχει την ιδιότητα ότι είναι μηδέν - εάν η f (α) εξαφανίζεται για όλες τις τιμές των α, ειδάλλως υποθέτουμε ότι έχει τη μικρότερη τιμή για την οποία f (α) δεν είναι μηδέν[37].

Η αρχή της τέλειας επαγωγής ήτοι, η $[A(0)\rightarrow(\alpha)(A(\alpha)\rightarrow A(\alpha+1))]\rightarrow A(\alpha)$, τότε μετατρέπεται σε έναν αποδείξιμο τύπο.[38]

Για την θεμελίωση της ανάλυσης ορίζει έναν πραγματικό αριθμό z που βρίσκεται μεταξύ 0 και 1 με δυαδικό κλάσμα, και το δυαδικό κλάσμα με τη σειρά του από μια συνάρτηση f (n) η οποία είναι ικανή μόνο να πάρει τις τιμές 0 ή 1.

$z=0.a_1\ a_2\ a_3\ldots(a_n=f(n))$.

Ένα παράδειγμα ενός υπερπερασμένα οριζόμενου δυαδικού κλάσματος είναι:

$$0.[2^{\sqrt{2}}]\ [3^{\sqrt{3}}][4^{\sqrt{4}}]\ \ldots..$$

Αυτή η έκφραση αποτελεί ένα καλά καθορισμένο πραγματικό αριθμό, ακόμη και αν στην παρούσα κατάσταση της επιστήμης δεν μπορεί να υπολογιστεί ούτε η πρώτη θέση.

---

[36] Ο P. Gordan είχε μια ασαφή έννοια του μεταβατικού τρόπου του συμπεράσματος στην πρώτη πρόταση της απόδειξης του Χίλμπερτ. Ο ίδιος αποκάλεσε την απόδειξη «θεολογική». Στη συνέχεια τροποποίησε την παρουσίαση της απόδειξης του Χίλμπερτ φέρνοντάς την στο συμβολισμό του, και πίστευε ότι είχε με αυτόν τον τρόπο την απόδειξη του «θεολογικού» χαρακτήρα της. Αλλά στην πραγματικότητα ο μεταβατικός τρόπος εξαγωγής του συμπεράσματος απλώς κρύβεται πίσω από τον φορμαλισμό.

[37] [Τα αξιώματα για το μ(f) είναι: $f\big(\mu(f)\big)=0\ \rightarrow f(a)=0, (a)(f(a)=0)\rightarrow \mu(f)=0,$ $f(a)\neq 0\ \rightarrow \mu(f)\leq a.$ - Σημείωση του Bernays].

[38] [Το αξίωμα $\alpha\neq 0 \rightarrow \alpha = \delta(\alpha)+1$ πρέπει να προστεθεί στο αξίωμα IV - Σημείωση του Bernays].

Η βάση της ανάλυσης είναι το θεώρημα για το άνω όριο (φράγμα). Η υπερπερασμένη συνάρτηση τ καθιστά δυνατή την απόδειξη του θεωρήματος ότι το άνω όριο μιας ακολουθίας πραγματικών αριθμών υπάρχει πάντα.

Για να το πετύχει αυτό πρώτα εισάγει τα λογικά σύμβολα το "&" για το "και" και το "V" για το "ή". Αυτό γίνεται και με τη χρήση των προηγούμενων λογικών συμβόλων του " → " και "——" ως εξής:

$$\mathfrak{A} \,\&\, B \; \textit{και} \;\; \mathfrak{A} \, V \, \mathfrak{B}$$

θα είναι ίσο με

$$\overline{\mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathfrak{B}}} \; \textit{και} \;\; \overline{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathfrak{B} \text{ αντίστοιχα.}$$

Μετά θέτουμε τον τύπο

$(\alpha)(fa = 0 \; V \; fa = 1)\& \,(a)(Eb)(f(a+b) = 1)$ με το $\mathfrak{R}$(f), όπου $\mathfrak{R}$(f) σημαίνει ότι η συνάρτηση f(a) αντιπροσωπεύει έναν πραγματικό αριθμό που βρίσκεται μεταξύ του 0 (αποκλειστικά) και του 1 όπως το (πάντα άπειρο) δυαδικό κλάσμα.

$$0.f(1)f(2)f(3) \ldots.$$

Μια ακολουθία ζ_1, ζ_2 ζ_3 .... πραγματικών αριθμών αντιπροσωπεύεται από μια συνάρτηση φ(α,n) για την οποία ο τύπος $\mathfrak{R}$φ (α, n) είναι αποδείξιμος για ένα αυθαίρετο ακέραιο n. Η περαιτέρω συνέχιση της απόδειξης στηρίζεται στο ακόλουθο σχήμα:

ζ_1=0.φ(1,1)φ(2,1)φ(3,1)….

ζ_2=0.φ(1,2)φ(2,2)φ(3,2)…..

ζ_3=0.φ(1,3)φ(2,3)φ(3,3)…...

Θεωρεί πρώτα τους αριθμούς στην πρώτη κάθετη στήλη μετά την υποδιαστολή. Αν όλοι αυτοί είναι μηδέν (δηλαδή, εάν φ (1, n) = 0 για κάθε n), τότε έχουμε ψ (1) = 0, αλλιώς, ψ (1)=1. Τώρα αν στην δεύτερη κάθετη στήλη όλοι οι αριθμοί είναι 0 δηλαδή ο αντίστοιχος αριθμός στην ίδια οριζόντια σειρά της πρώτης στήλης είναι ψ(1) τότε έχουμε ψ (2) = 0 διαφορετικά ψ (2) = 1. Εάν στην τρίτη κάθετη στήλη όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι μηδέν δηλαδή και οι δύο αριθμοί στην πρώτη και δεύτερη στήλη της ίδια οριζόντιας σειράς είναι ψ (1) και ψ (2) αντίστοιχα, τότε ψ (3) = 0. Διαφορετικά, ψ (3) = 1 κτλ.. Με βάση αυτή την παρατήρηση μπορούμε να ορίσουμε το άνω φράγμα ψ (α) της ακολουθίας φ (α, n) των πραγματικών αριθμών από την ακόλουθη ταυτόχρονη αναδρομή:

$\chi\ (0,n)=0$

$\psi(a+1) \quad = \quad \pi_n\ \{\chi(a,n)=0 \rightarrow \varphi(\alpha+1,n)=0\}$

$\chi(\alpha+1,n) \quad = \quad \chi\ (\alpha,n) + \iota\ (\psi(\alpha+1), \varphi(\alpha+1,n))$

Εδώ ι (a, b) είναι η συνάρτηση των a,b, η οποία δίνει 0 ή 1 ανάλογα αν $a = b$ ή $a \neq b$ και π_n είναι ο υπερπερασμενος παράγοντας που ορίζεται από τα ακόλουθα αξιώματα:

$(n)\mathfrak{A}(n) \rightarrow \pi_n\ (\mathfrak{A}n)=0$

$(\bar{n}\ )\mathfrak{A}(n) \rightarrow \pi_n\ (\mathfrak{A}n)=1$

Δηλαδή: π_n $(\mathfrak{A}_n)$ είναι 0 ή 1 ανάλογα αν η πρόταση $\mathfrak{A}$ ισχύει για όλα τα n ή όχι .

Σύμφωνα με τον Χίλμπερτ θα μπορούσε κάποιος στο πνεύμα της θεωρίας αποδείξεων να αποδείξει ότι η $\mathfrak{N}\psi$ ισχύει και ότι επιπλέον ο πραγματικός αριθμός ψ(n) έχει ένα άνω όριο, όπου η έννοια "μικρότερος" για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς f, g ορίζεται από τον τύπο

$(E\alpha)\{(b)\ (b<a \rightarrow fb = gb)\ \&\ \ fa=0\ \&\ ga=1\}$.

Τώρα υποθέτει ότι αν αντί για μια ακολουθία πραγματικών αριθμών μας δίνονται αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί - τέτοιοι ώστε για την συναρτησιακή μεταβλητή f δίνεται μια σταθερή πρόταση $\mathfrak{N}$ (f) η οποία και χαρακτηρίζει την f ως συνάρτηση που αντιπροσωπεύει έναν πραγματικό αριθμό και ξεχωρίζει επίσης με ακρίβεια τους πραγματικούς αριθμούς του συνόλου. Το άνω όριο ψ (α) αυτού του συνόλου $\mathfrak{N}$ (f) των πραγματικών αριθμών στη συνέχεια λαμβάνεται από την ακόλουθη ταυτόχρονη αναδρομή:

$\chi(0,f)=0$

$\psi(a+1) \quad = \quad \pi_f\ \{\mathfrak{N}f \rightarrow (\chi(\alpha,f)=0 \rightarrow f(\alpha+1)=0)\}$

$\chi(\alpha+1,f) \quad = \quad \chi(\alpha,f)+\iota\,(\psi(\alpha+1),f(\alpha+1))$

όπου π_f υποδηλώνει την υπερπερασμένη συνάρτηση που ορίζεται από τα αξιώματα

$(f)\mathfrak{A}(f)\rightarrow\pi_f\,(\mathfrak{N}f)=0$

$(\bar{f})\mathfrak{A}(f)\rightarrow\pi_f\,(\mathfrak{A}f)=1$

Εν κατακλείδι, εφαρμόζει αυτές τις σκέψεις στην αρχή της επιλογής του Ζερμέλο για τα σύνολα των πραγματικών αριθμών. Προηγουμένως ένα σύνολο πραγματικών αριθμών f δόθηκε από μια ορισμένη πρόταση $\mathfrak{N}$ (f) με f μια μεταβλητή συνάρτηση. Τώρα προσθέτουμε τα αξιώματα:

$\mathfrak{N}f\rightarrow v(f)=1$

$\overline{\mathfrak{N}f}\rightarrow v(f)=0$

η συμβιβαστότητα των οποίων αναγνωρίζεται εύκολα. Με τον τρόπο αυτό το σύνολο ορίζεται από την συνάρτηση των συναρτήσεων v(f) ο οποίος έχει την τιμή 1 για τους πραγματικούς αριθμούς της f του συνόλου και τιμή 0 για όλους τους άλλους πραγματικούς αριθμούς f.

Ο τύπος $\mathfrak{N}f\rightarrow\mathfrak{N}f$, που ισχύει για την $\mathfrak{N}$, δίνει $v(f) = 1 \rightarrow \mathfrak{N}f$

όπου v είναι μια ειδική συνάρτηση συναρτήσεων. Ας είναι το r η αντίστοιχη μεταβλητή, δηλαδή μία μεταβλητή για συναρτήσεις συναρτήσεων των οποίων το όρισμα είναι μια συνηθισμένη συνάρτηση ενός ορίσματος.

Ένα ειδικό σύνολο από σύνολα πραγματικών αριθμών αντιπροσωπεύεται στη συνέχεια από μια ειδική πρόταση $\mathfrak{M}$ (r) που περιέχει το r, για την οποία ισχύει ο τύπος

$$\mathfrak{M}(r) \,\&\, (rf=1) \rightarrow \mathfrak{N}f$$

Υποθέτει ότι αυτό το σύνολο των συνόλων έχει την ιδιότητα ότι κάθε σύνολο των πραγματικών αριθμών το οποίο είναι ένα στοιχείο της, περιέχει τουλάχιστον ένα πραγματικό αριθμό ή σε τύπο :

$$\mathfrak{M}(r) \rightarrow (Ef)(r(f)=1)$$

Έπειτα ορίζει μια υπερπερασμένη συνάρτηση τ_f, όπως και οι προηγούμενες τ_a, με τη μόνη διαφορά ότι στη θέση της μεταβλητής a παίρνουμε μια μεταβλητή συνάρτηση f - δηλαδή η τ_f, που ορίζεται από το αξίωμα

$$r\,(\tau_f\ (\,r\,) = 0 \ \rightarrow r\,(\,f\,) = 0$$

το οποίο αντιστοιχεί στο αξίωμα μας 12 για την τ_a και μπορεί επίσης να προκύψει απευθείας από το λογικό αξίωμα V (II), αν λάβει κανείς ως στοιχεία, τις συναρτήσεις f και τα κατηγορήματα να είναι οι εξισώσεις r(f) = 0. Τότε η τ_f , έχει την ιδιότητα να αντιπροσωπεύει πάντα μια συνάρτηση, ενώ το όρισμα είναι παράγοντας των συναρτήσεων r.

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος αποδείξιμος τύπος:

$$(Ef)(r(f) = 1) \rightarrow (\bar{f})(rf = 0)$$

$$(\bar{f})(rf = 0) \rightarrow r(\tau_f(r)) \neq 0),$$

$$r(\tau_f(r) \neq 0 \ \rightarrow r\left(\tau_f(r)\right) = 1$$

και έτσι

$$\mathfrak{M}\ (r) \rightarrow r(\tau_f\ (r)) = 1$$

δηλαδή σε κάθε στοιχείο r του συνόλου $\mathfrak{M}$(r) αντιστοιχεί μια ολόκληρη – αριθμημένη συνάρτηση δηλαδή η τ_f(r). Αυτή η συνάρτηση αντιπροσωπεύει έναν πραγματικό αριθμό. Διότι από έναν προηγούμενο τύπο προκύπτει αμέσως το $\mathfrak{N}$ (τ_f (r)). Οι συναρτήσεις του τύπου τ_f, (r) αποτελούν ένα σύνολο. Διότι προκειμένου να πάρουμε μια πρόταση που θα καθορίζει το σύνολο αυτών των συναρτήσεων (που θα τις αποκαλούμε g (α)) χρειάζεται μόνο να δηλώσει ότι κάθε μία από αυτές συμφωνεί με το αντίστοιχο τ_f (r) του συνόλου r που ανήκει στο $\mathfrak{M}$. Αυτό γίνεται με τον τύπο:

$$(Er)\{\ \mathfrak{M}\ (r)\ \&\ (a)(g(a) = \tau_f r\ (a)\ )\}$$

Έτσι, σύμφωνα με την αρχική μέθοδο της αναπαράστασης υπάρχει πραγματικά ένα σύνολο.

Έτσι ο Χίλμπερτ δίνει την απόδειξη της αρχής της επιλογής του Ζερμέλο για σύνολα των συνόλων ή για σύνολα πραγμαιτκών αριθμών. Λόγω της εμφάνισης του υπαρξιακού συμβόλου (E,r) εξακολουθεί να είναι απαραίτητο να αποδειχθεί η συμβιβαστότητα της υπερπερασμένης συνάρτησης $τ_f(r)$, η οποία ανήκει στο νέο είδος μεταβλητής r. Η απόδειξη αυτή πρέπει να ακολουθήσει το πρότυπο της απόδειξης για την υπερπερασμένη συνάρτηση $τ_a$ όπως κάνουν οι αποδείξεις για το $π_n$ και $π_f$.

7. Η ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ (ΧΙΛΜΠΕΡΤ 1931 a).

7.1 Εισαγωγή.

Η παρακάτω διάλεξη διαβάστηκε στην «Philosophische Gesellschaft» στο Αμβούργο, τον Δεκέμβριο 1930. Η διάλεξη αυτή περιέχει ορισμένες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις σχετικά με τα φιλοσοφικά κίνητρα που διέπουν τη θεωρία αποδείξεων του Χίλμπερτ, καθώς και μια πολεμική απάντηση στους επικριτές του. Οι συντάκτες του Χίλμπερτ του 1932 έως 1935 αναπαρήγαν μόνο το τεχνικό τμήμα του Χίλμπερτ 1931 α. Η παρούσα μετάφραση έχει γίνει από την πλήρη έκδοση, η οποία εμφανίστηκε στο «Mathematische Annalen».

7.2 Η Διάλεξη του Χίλμπερτ για τη Θεμελίωση της Στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών.

Στη σφαίρα των Μαθηματικών, όταν ερευνούμε τις δύο πηγές της γνώσης , δηλαδή την εμπειρία και την καθαρή σκέψη, συναντάμε μια σειρά από ιδέες που έχουν και φιλοσοφικό ενδιαφέρον. Οι ιδέες αυτές υποδηλώνουν ομοιότητες μεταξύ αυτών των δύο πηγών της γνώσης, οι οποίες, από μόνες τους, είναι τόσο διαφορετικές. Η ενότητα των νόμων της φύσης, που τόσο συχνά συναντάμε με τέτοιο εκπληκτικό τρόπο, μπορεί να χρησιμεύσει ως παράδειγμα και για τις δύο πηγές της γνώσης. Αλλά ακόμα πιο εντυπωσιακό αυτής της ενότητας είναι ένα φαινόμενο που ονομάζουμε προκαθορισμένη αρμονία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της προκαθορισμένης αρμονίας βρίσκουμε στη διάσημη θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν. Εδώ οι αρκετά πολύπλοκες διαφορικές εξισώσεις για την δύναμη της βαρύτητας προκύπτουν από τη γενική απαίτηση του αναλλοίωτου και μόνο. Και αυτό το αποτέλεσμα δεν θα ήταν δυνατό χωρίς τις βαθιές και δύσκολες μαθηματικές έρευνες που ο Ρίμαν, είχε εκτελέσει παλαιότερα. Η απόδειξη της θεωρίας του Χίλμπερτ, είναι επίσης ένα παράδειγμα προκαθορισμένης αρμονίας. Διότι χρησιμοποιεί το λεγόμενο λογικό λογισμό, ο οποίος επινοήθηκε νωρίτερα και για εντελώς διαφορετικούς λόγους, δηλαδή, μόνο για τη συντόμευση και την κατανόηση των προτάσεων.

Ο Χίλμπερτ υποστηρίζει ότι εκτός από την εμπειρία και τη σκέψη, υπάρχει ακόμα μια τρίτη πηγή γνώσης, η a priori γνώση. Ακόμη και αν δεν συμφωνεί πλήρως με τον Καντ, ο Χίλμπερτ εξακολουθεί να πιστεύει ότι η πιο γενική και βασική ιδέα της καντιανής επιστημολογίας διατηρεί τη σημασία της, που είναι να εξακριβώσει τον a priori διαισθητικό τρόπο σκέψης, και ως εκ τούτου να ερευνήσει την συνθήκη δυνατότητας όλης της γνώσης. Στις αρχές των μαθηματικών, η a priori γνώση, δεν είναι εδώ τίποτα περισσότερο και τίποτα λιγότερο από έναν θεμελιώδη τρόπο σκέψης, τον οποίο, αποκαλεί επίσης, πεπερασμένο τρόπο σκέψης ήτοι, κάτι που έχει ήδη δοθεί σε μας εκ των προτέρων ως παραστατική εικόνα, ή με την μορφή υπερ-λογικών συγκεκριμένων αντικειμένων που υπάρχουν διαισθητικά ως άμεση εμπειρία πριν από κάθε σκέψη. Αυτά τα στοιχεία, σύμφωνα με το Χίλμπερτ, πρέπει να ερευνηθούν διεξοδικά, και η παρουσίασή τους, οι διαφορές τους, η διαδοχή τους και η διάταξή τους προσφέρονται άμεσα, παράλληλα με τα αντικείμενα, ως κάτι που δεν μπορεί να διαιρεθεί περαιτέρω σε οτιδήποτε άλλο, ούτε που χρειάζεται να διαιρεθεί. Αυτός ο θεμελιώδης τρόπος σκέψης είναι αναγκαίος για τα μαθηματικά και για όλη την επιστημονική κατανόηση της σκέψης και επικοινωνίας και χωρίς την οποία η διανοητική δραστηριότητα, δεν θα ήταν δυνατή.

Οι a priori ιδέες είναι αυτές οι διαισθητικές γνώσεις καθώς και οι λογικές ιδέες που έχουν επιτευχθεί στο πλαίσιο του πεπερασμένου τρόπου σκέψης. Συγκεκριμένα λέει:

«Υπάρχουν προτάσεις που ο Καντ θεωρεί ως a priori, και που εμείς αποδίδουμε στην εμπειρία. Για παράδειγμα, όλα τα βασικά στοιχεία της γεωμετρίας, καθώς και οι στοιχειώδεις ιδιότητες του χώρου και της ύλης. Αλλά υπάρχουν επίσης προτάσεις που θεωρούνται γενικώς ότι είναι a priori, αλλά οι οποίες δεν μπορούν να επιτευχθούν στο πλαίσιο του πεπερασμένου τρόπου σκέψης - για παράδειγμα, η αρχή της tertium non datur, καθώς και οι λεγόμενες υπερπεπερασμένες προτάσεις γενικότερα».

Εισέρχεται στο κύριο θέμα της διάλεξής του, υποστηρίζοντας κατ' αρχήν ότι η πιο προφανής εφαρμογή και η πρώτη εμφάνιση των μεταβατικών προτάσεων παρατηρείται στην θεωρία αριθμών. Δηλώνει χαρακτηριστικά:

«Είναι ήδη αξιόλογο και φιλοσοφικά σημαντικό το γεγονός ότι η πρώτη και πιο απλή ερώτηση σχετικά με τους αριθμούς 1,2,3 ..., παρουσιάζει τόσο σοβαρές δυσκολίες. Οι δυσκολίες αυτές πρέπει να ξεπεραστούν. Διότι πώς μπορεί να είναι δυνατή η γνώση για όλα, αν ούτε και η θεωρία των αριθμών δεν μπορεί να έχει μια σταθερή βάση, και αν η πλήρης ενότητα και η απόλυτη ορθότητα δεν μπορεί να επιτευχθεί ούτε ακόμη κι εδώ!

Θα ήταν πάρα πολύ μεγάλη παρέκβαση και επίσης περιττό να παραθέσουμε τα πολλά λανθασμένα βήματα που σήμερα αναγνωρίζονται: κάποιοι προσπάθησαν να ορίσουν τους αριθμούς καθαρά με λογικό τρόπο. Άλλοι απλά χαρακτήρισαν τους συνηθισμένους τρόπους εξαγωγής συμπερασμάτων από την Θεωρία Αριθμών ως αυτονόητους. Και στις δύο πορείες αντιμετώπισαν εμπόδια που αποδείχθηκαν αξεπέραστα. Η πρώτη διαδρομή δεν ήταν ακόμη πεπατημένη και φαινόταν η πιο προφανής σε έναν μαθηματικό. Πριν περιγράψω αυτή τη διαδρομή, η οποία στην πραγματικότητα οδηγεί στο στόχο, θα ήθελα να κάνω ορισμένες παρατηρήσεις σχετικά με τις σημαντικότερες ημερομηνίες στην προ-ιστορία αυτού του ζητήματος.

Κατά το έτος 1888 ως νεαρός λέκτορας από την Καινιξβέργη έκανα μια περιήγηση στα γερμανικά πανεπιστήμια. Στην πρώτη στάση μου, στο Βερολίνο, άκουσα ανθρώπους στους νέους και παλαιούς μαθηματικούς κύκλους, να συζητούν το ζήτημα του Ντέντεκιντ «Τι είναι και τι θα έπρεπε να είναι οι αριθμοί» ερώτημα που μόλις τότε εμφανίστηκε. Οι παρατηρήσεις τους ήταν ως επί το πλείστον ενδιαφέρουσες. Η εργασία αυτή αποτελεί, μαζί με την έρευνα του Φρέγκε, την πιο σημαντική και βαθιά πρώιμη προσπάθεια προς τη θεμελίωση της στοιχειώδους θεωρίας αριθμών. Περίπου την ίδια στιγμή και πριν από μια γενιά, ο Κρόνεκερ εξέφρασε σαφώς μια αντίληψη η οποία παρουσιάζεται με πολυάριθμα παραδείγματα. Αυτή η αντίληψη σήμερα ουσιαστικά ταυτίζεται με την πεπερασμένη λειτουργία της σκέψης μας.

Εκείνες τις ημέρες έχουμε νέους μαθηματικούς, καθηγητές και φοιτητές, που έπαιξαν το παιχνίδι του μετασχηματισμού των υπερπεπερασμένων αποδείξεων μαθηματικών θεωρημάτων σε πεπερασμένους όρους, ακολουθώντας το παράδειγμα του Κρόνεκερ. Ο Κρόνεκερ έκανε μόνο το λάθος να δηλώσει ότι ο υπερπεπερασμένος τρόπος εξαγωγής συμπεράσματος, είναι απαράδεκτος. Εξέδωσε απαγορεύσεις εναντίον του υπερπερασμένου τρόπου συμπερασματολογίας. Ειδικότερα, σύμφωνα με τον ίδιο, κάποιος δεν μπορεί να συμπεράνει ότι, αν μια πρόταση **u(n)** δεν ισχύει για κάθε ακέραιο **n**, τότε πρέπει να υπάρχει ένας ακέραιος **n** για τον οποίο αυτή η πρόταση είναι ψευδής. Εκείνη την εποχή, το σύνολο των μαθηματικών απέρριπτε ομόφωνα τις απαγορεύσεις του και συνεχίστηκε αυτή η δουλειά μέχρι τις μέρες μας».

Τι όμως εντέλει πιστεύει ότι ισχύει με τη χρήση των υπερπεπερασμένων τρόπων εξαγωγής συμπερασμάτων;

«Η θεωρία των αριθμητικών πεδίων, για παράδειγμα, είναι σαν ένα εξαιρετικά κατασκευασμένο οικοδόμημα το οποίο μελετήθηκε διεξοδικά, και συνδέεται με τις πιο αναπτυγμένες θεωρίες της ανάλυσης. Στην ομορφιά και την τελειότητα, δεσπόζει πολύ πάνω από όλα τα άλλα αποτελέσματα του ανθρώπινου μυαλού, και σε κάθε βήμα του , χρησιμοποιεί το «tertium non datur» και τις υπερπεπερασμένους μεθόδους εξαγωγής συμπερασμάτων, μεθόδους απαγορευτικές κατά τον Κρόνεκερ. Όλες οι ιδιοφυΐες πριν από τον Γκάους – όπως και από τον Γκάους, τον Έρμιτ, τον Τζάκομπι μέχρι και τον Πουανκαρέ - έχουν χρησιμοποιήσει την υπερπερασμένη μέθοδο εξαγωγής συμπεράσματος. Τέλος, αν εμείς απλά σκεφτούμε όλες τις εφαρμογές και καταστήσουμε σαφές στους εαυτούς μας, τι πληθώρα υπερπεπερασμένων συμπερασμάτων από τις πιο δύσκολες και επίπονες του είδους, περιλαμβάνονται για παράδειγμα στη θεωρία της σχετικότητας και στην κβαντική θεωρία, και στο πώς η φύση συμπεριφέρεται σε αυτά τα συμπεράσματα, πώς, θα μπορούσαμε ακόμη και για μια στιγμή να αμφιβάλλουμε για την νομιμότητα της εφαρμογής του "tertium non datur", μόνο και μόνο για τα "όμορφα μάτια" του Κρόνεκερ και μόνο επειδή μερικοί φιλόσοφοι που μεταμφιέζονται σε μαθηματικούς έχουν προβάλει λόγους, που είναι εντελώς αυθαίρετοι και δεν είναι καν τυποποιήσιμοι;

Κάθε κομμάτι της επιστημονικής γνώσης στηρίζεται απολύτως στην εύλογη εκτίμηση της πιθανότητας, την επικαλούμενη συμφωνία και σε αμοιβαίες σχέσεις: σκεφτείτε θεωρίες στη φυσική ή την αστρονομία (για παράδειγμα, η κατασκευή του κόσμου των άστρων) ή, στον τομέα της βιολογίας, των νόμων της κληρονομικότητας ή της ιδέας της εξέλιξης - όλα τα συμπεράσματα που σήμερα θεωρούμε ως απλές αλήθειες. Θα ήταν ο θάνατος όλων των επιστημών και το τέλος όλης της προόδου αν δεν επιτρέπαμε νόμους σαν κι αυτούς που η αριθμητική θεωρεί ως αλήθειες. Παρ 'όλα αυτά, ακόμη και σήμερα ο τρόπος σκέψης του Κρόνεκερ έχει τους οπαδούς του, οι οποίοι δεν πιστεύουν στην παραδοχή του «tertium non datur». Αυτό αποτελεί ίσως τη μεγαλύτερη έλλειψη εμπιστοσύνης που έχουμε συναντήσει στην ιστορία της ανθρωπότητας

Ωστόσο, μια επιστήμη σαν τα μαθηματικά δεν πρέπει να επικαλεστεί την πίστη, όσο ισχυρή κι αν είναι. Έχει μάλλον το καθήκον να παρέχει πλήρη διαύγεια. Τώρα, δεδομένου ότι η δυνατότητα εφαρμογής της "tertium non datur" σε πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων είναι αυτονόητη, ολόκληρη η προσοχή μας στρέφεται αμέσως στην έννοια του "άπειρου".

Η Φυσική διδάσκει ότι ένα ομοιογενές άπειρο θα επιτρέψει τη συνέχιση της διαιρετότητας και θα μπορούσε έτσι να γίνει αντιληπτό το απείρως μικρό, που πουθενά δεν συναντάται στην πραγματικότητα. Η ατελείωτη διαιρετότητα του απείρου είναι μια πράξη που υφίσταται μόνο στη σκέψη - είναι μόνο μια ιδέα, η οποία αντικρούεται από τις παρατηρήσεις μας για τη φύση και τις εμπειρίες της φυσικής και της χημείας. Από την άλλη μεριά στην αστρονομία υπάρχουν σοβαρές αμφιβολίες για την ύπαρξη του άπειρου χώρου, και συνεπώς, για το απείρως μεγάλο. Και τα πάντα στη δράση μας είναι πεπερασμένα. Το άπειρο δεν έχει θέση σε αυτό. Το άπειρο πραγματοποιείται στο πουθενά. Δεν υπάρχει στη φύση, ούτε είναι παραδεκτό ως θεμέλιο της ορθολογικής σκέψης μας. Κι όμως, δεν μπορούμε να απαλλαχθούμε από την άνευ όρων εφαρμογή του «tertium non datur» και της άρνησης, διότι διαφορετικά η χωρίς κενά και ενιαία κατασκευασμένη επιστήμη μας θα ήταν αδύνατη. Έτσι, η πράξη με το άπειρο πρέπει να επιβεβαιώνεται στο πεπερασμένο. Και ακριβώς αυτό συμβαίνει στην θεωρία αποδείξεων».

Η βασική ιδέα της θεωρίας αποδείξεών του, όπως ο ίδιος την αναπτύσσει έχει ως εξής:

«Ό,τι έχουν φτιάξει τα μαθηματικά με την παραδοσιακή έννοια είναι αυστηρά τυποποιημένο, έτσι ώστε τα κοινά μαθηματικά (ή τα μαθηματικά με τη στενή έννοια του όρου) μετατρέπονται σε ένα απόθεμα τύπων. Αυτοί οι τύποι διακρίνονται από τους συνηθισμένους τύπους των μαθηματικών μόνο με τον ακόλουθο τρόπο: ότι, εκτός από τα συνηθισμένα σύμβολα της λογικής εμφανίζονται, τα σύμβολα του "συνεπάγεται" (→) και του «δεν» (------). Ορισμένοι τύποι που εξυπηρετούν ως βασικά στοιχεία για την επίσημη δόμηση των μαθηματικών ονομάζονται αξιώματα. Μια μαθηματική απόδειξη είναι μια διάταξη τύπων που πρέπει να θεωρείται ως τέτοια στην εποπτική μας αντίληψη. Αποτελείται από συμπεράσματα, που κάθε μία πρότασή της, είναι είτε ένα αξίωμα, είτε συμφωνεί με τον τελικό τύπο του συμπεράσματος που υπάρχει πριν στην απόδειξη, ή είναι το αποτέλεσμα από έναν τέτοιο τύπο με αντικατάσταση. Αντί για σημασιολογικούς συμπερασμούς, στη θεωρία αποδείξεων έχουμε μια εξωτερική δράση σύμφωνα με τους κανόνες, δηλαδή, τη χρήση των συμπερασματικών σχημάτων και της αντικατάστασης. Ένας τύπος θα πρέπει να ονομάζεται αποδείξιμος, αν είναι είτε ένα αξίωμα είτε ο τελικός τύπος μιας απόδειξης.

Αυτά τα κοινά τυποποιημένα μαθηματικά συνοδεύονται από μαθηματικά που είναι σε κάποιο βαθμό νέα – τα μετα - μαθηματικά τα οποία είναι χρήσιμα για να εξασφαλίσουν τα τυποποιημένα μαθηματικά. Σε αυτά τα μετα-μαθηματικά εφαρμόζονται οι σημασιολογικοί συμπερασμοί , αλλά μόνο για να αποδειχθεί η μη αντιφατικότητα των αξιωμάτων».

Κατά την επιλογή των αξιωμάτων, ταξινομεί ποιοτικά διακριτές ομάδες, ως εξής:

I. Αξιώματα συνεπαγωγής.

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(\textit{εισαγωγή μιας υπόθεσης})$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$$

$$(\textit{απαλοιφή μιας πρότασης})$$

$$\{A \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow (A \rightarrow B)$$

II. Αξιώματα σχετικά με το «και» (&) και το «ή» (V).

III. Αξιώματα Άρνησης.

$$\{A \ \to (B \ \& \ \bar{B})\} \to \bar{A}$$

(αρχή της αντίφασης)

$$\bar{\bar{A}} \to A$$

(αρχή της διπλής άρνησης)

Αυτά τα αξιώματα των ομάδων I, II και III δεν είναι άλλα από τα αξιώματα του προτασιακού λογισμού.

VII. Υπερπεπερασμένα Αξιώματα.

$$(x)A\,(x) \to \ A(b)$$

$(\mathit{Συμπέρασμα\ από\ το\ καθολικό\ στο\ ειδικό,} \qquad \mathit{Αξίωμα\ του\ Αριστοτέλη})$

Αντιστροφή μέσω του σχήματος:

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{A} \to (x)\mathfrak{B}(x)};$$

$$A(a) \to (\mathrm{E}x)A(x)$$

Αντιστροφή και πάλι μέσω του σχήματος. Περαιτέρω τύποι προκύπτουν, για παράδειγμα:

$$\overline{(x)}A(x) \rightleftarrows (\mathrm{E}x)\bar{A}(x)$$

(Αν ένα κατηγόρημα δεν ισχύει για όλα τα ορίσματα τότε υπάρχει ένα αντιπαράδειγμα και αντιστρόφως)

$$(\overline{Ex})A(x) \rightleftarrows (x)\bar{A}(x)$$

(Αν δεν υπάρχει τίποτε επιμέρους για το οποίο να ισχύει μια πρόταση, τότε η πρόταση είναι ψευδής για κάθε α).

Τα αξιώματα αυτής της ομάδας IV είναι αυτά του κατηγορηματικού λογισμού

Αξιώματα της ισότητας:

$$a = a;$$
$$a = b \to (A(a) \to A(b))$$

και

Αξιώματα αριθμού:

$a + 1 \neq 0$

καθώς και το αξίωμα της τέλειας επαγωγής και το σχήμα της αναδρομής.

Σημειώνει ότι η απόδειξη της μη αντιφατικότητας έχει ήδη γίνει από τον Άκερμαν και τον Φον Νόιμαν και τα αξιώματα που μόλις έχει αναπτύξει, για την στοιχειώδη θεωρία αριθμών έχουν αποδειχθεί ότι είναι μη αντιφατικά, και ως εκ τούτου ο υπερπεπερασμένος τρόπος εξαγωγής συμπερασμάτων θεωρεί ότι είναι παραδεκτός στον τομέα της στοιχειώδους θεωρίας αριθμών. Περαιτέρω, πρέπει να αποδείξει το εξής:

1. Αν μια πρόταση μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι μη αντιφατική , τότε είναι επίσης αποδείξιμη, και επιπλέον

2. Εάν μια πρόταση $\mathfrak{S}$ μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι μη αντιφατική με τα αξιώματα της Θεωρίας Αριθμών, τότε η πρόταση $\overline{\mathfrak{S}}$ δεν μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι επίσης μη αντιφατική με αυτά τα αξιώματα.

Έχοντας καταφέρει να αποδείξει θεωρήματα, τουλάχιστον για ορισμένες απλές περιπτώσεις πετυχαίνει το αποτέλεσμα που θέλει, προσθέτοντας στους ήδη δεδομένους κανόνες συμπερασμού (αντικατάσταση και σχήμα συμπερασμού) τον ακόλουθο πεπερασμένο νέο κανόνα εξαγωγής συμπερασμάτων:

«Αν έχει αποδειχθεί ότι για κάθε αριθμό g, ο τύπος $\mathfrak{A}$ (g) είναι πάντοτε ορθός αριθμητικός τύπος, τότε ο τύπος $(x)\mathfrak{A}(x)$ μπορεί να τεθεί ως αρχικός τύπος.

Η πρόταση (x)$\mathfrak{A}$(x) επεκτείνεται πέρα από τον τύπο $\mathfrak{A}$(g) όπου το g είναι ένας αυθαίρετος αριθμός. Διότι στην προηγούμενη περίπτωση δεν είναι απλώς ένας αριθμός, αλλά κάθε έκφραση, του φορμαλισμού μας που έχει έναν αριθμητικό χαρακτήρα, μπορεί να αντικατασταθεί από το x στο $\mathfrak{A}$(x) . Επιπλέον, η άρνηση μπορεί να σχηματιστεί σύμφωνα με τον λογικό λογισμό».

Στην αρχή παρατηρεί ότι ακόμη και με την προσθήκη του νέου κανόνα, το αξιωματικό σύστημα παραμένει μη αντιφατικό:

« Πράγματι ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένα αποδεικτικό σχήμα που καταλήγει σε αντίφαση. Η προηγούμενη απόδειξη της μη αντιφατικότητας συνίσταται στο μετασχηματισμό όλων των τύπων της δεδομένης απόδειξης σε αριθμητικούς τύπους σύμφωνα με μια καθορισμένη διαδικασία. Τότε είναι θέμα να ελέγξουμε αν είναι σωστοί όλοι οι πρώτοι τύποι. Τώρα στο πλαίσιο της διαδικασίας μας, οι τύποι που έχουν καταγραφεί σύμφωνα με το νέο μας κανόνα επίσης μετατρέπονται σε αριθμητικούς τύπους. Συγκεκριμένα, από το (x)$\mathfrak{A}$(x) παίρνουμε το $\mathfrak{A}$(g) όπου g είναι ένας προσδιορισμένος αριθμός. Αλλά με την προϋπόθεση του νέου κανόνα, αυτός ο τύπος είναι επίσης σωστός. Έτσι, όπως και πριν, η διαδικασία που ακολουθούμε, μετατρέπει όλους τους πρώτους τύπους της απόδειξης, σε σωστούς τύπους. Έτσι αποδεικνύεται η μη αντιφατικότητα.

Τώρα έστω $\mathfrak{S}$ είναι τύπος της μορφής (x)$\mathfrak{A}$(x) που δεν περιέχει άλλες μεταβλητές εκτός από το x και ώστε ότι ο $\mathfrak{S}$ είναι συμβιβαστός με τα αξιώματα. Τότε το $\mathfrak{A}$(g) είναι προφανώς σωστό όταν ένας αριθμός αντικαθίσταται από το g. Διότι διαφορετικά το $\overline{\mathfrak{A}}\,(g)$ θα ήταν σωστό και αποδείξιμο. Και αυτό θα ερχόταν σε αντίφαση με το (x) $\mathfrak{A}$(x) , καθώς είναι αντίθετο με την υπόθεσή μας.

Γι'αυτό ο τύπος $\mathfrak{S}$ αποδεικνύεται από τον νέο τρόπο εξαγωγής συμπεράσματος. Άρα το Θεώρημα 1 ισχύει για κάθε πρόταση $\mathfrak{S}$ του τύπου (x) $\mathfrak{A}$(x) που δεν περιέχει άλλες μεταβλητές εκτός από το x. Για τις προτάσεις της μορφής $\mathfrak{S}$, η εγκυρότητα του Θεωρήματος 2 προκύπτει από το Θεώρημα 1.

Αν τώρα θεωρήσουμε μια πρόταση $\mathfrak{T}$ της μορφής $\mathfrak{T}: (\boldsymbol{Ex})\boldsymbol{\mathfrak{A}}(\boldsymbol{x})$ τότε η άρνησή της θα είναι της μορφής $\overline{\mathfrak{T}}: (\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{\mathfrak{A}}}\,(\boldsymbol{x})$ όπως προκύπτει από την πρόταση της μορφής $\mathfrak{T}$. Έτσι από το θεώρημα 2 δεν είναι δυνατόν να προκύψει μια απόδειξη της συμβιβαστότητας και των δύο προτάσεων $\mathfrak{T}$ και $\overline{\mathfrak{T}}$. Συνεπώς, ας υποθέσουμε ότι δίνεται η απόδειξη της συμβιβαστότητας της $\mathfrak{T}$. Προφανώς η μη αντιφατικότητα της $\overline{\mathfrak{T}}$ δεν μπορεί να αποδειχθεί. Έτσι το θεώρημα 2 έχει αποδειχθεί για κάθε πρόταση της μορφής $\mathfrak{T}$. Φυσικά, δεν μπορούμε να αποδείξουμε από αυτό ότι το $\mathfrak{T}$ είναι αποδείξιμο».

Ακολούθως προσπαθεί να καταρρίψει τις διαφόρων ειδών ενστάσεις που είχαν εγερθεί κατά της θεωρίας αποδείξεών του, αναφέροντας χαρακτηριστικά:

«1. Οι επικριτές της θεωρίας μου πρέπει να αναφέρουν το ακριβές σημείο στην απόδειξή μου, όπου παρατηρείται το ισχυριζόμενο σφάλμα. Διαφορετικά, αρνούμαι να εξετάσω την επιχειρηματολογία τους.

2. Η θεωρία μου έχει υποστεί την μομφή ότι, αν και τα θεωρήματα είναι πράγματι μη αντιφατικά δεν υπάρχει λόγος απόδειξης. Φυσικά, είναι αποδείξιμα, όπως έχω δείξει εδώ σε απλές περιπτώσεις. Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι η επίτευξη της μη αντιφατικότητας είναι το ουσιαστικό ζήτημα στη θεωρία απόδειξης, και το ζήτημα της αποδειξιμότητας είναι την ίδια στιγμή λυμένο. Ωστόσο, δεν μπορεί να απαιτηθεί από μια θεωρία ότι όλες οι σχετικές ερωτήσεις που θέτει , θα πρέπει να επιλυθούν πλήρως από την αρχή. Αρκεί να έχει υποδειχθεί η διαδρομή προς αυτόν τον στόχο.

3. Οι κριτικές της θεωρίας μου πρέπει να χρησιμοποιούν όρους όπως "συμβιβαστός" με τον τρόπο που τους χρησιμοποιώ εγώ, και όχι με τον τρόπο που άλλοι συγγραφείς φαντάζονται . Σε αυτά τα σημεία η ερμηνεία μου είναι έγκυρη, γιατί είναι το μόνο που λαμβάνεται υπόψη για τη θεωρία μου.

4. Οι αντιρρήσεις για τη θεωρία μου συχνά στηρίζονται σε δευτερεύοντα και εντελώς αδιάφορα θέματα. Για παράδειγμα, όταν στρέφονται κατά του όρου «ιδανικός» - που χρησιμοποιώ και που, παρ 'όλες τις ενστάσεις, θεωρώ απολύτως εύστοχο ως ένα παράδειγμα για την κατανόηση. Και σε πολλές άλλες περιπτώσεις, μονόπλευρες προκαταλήψεις και συνθήματα εισάγονται αλόγιστα. Έχω ήδη συζητήσει το όνειδος του φορμαλισμού σε προηγούμενα δοκίμια. Οι τύποι είναι απαραίτητο βοήθημα στη λογική έρευνα. Φυσικά η χρήση τους απαιτεί ακριβή διανοητική εργασία και καθιστά αδύνατη την κενολογία.

5. Μέχρι σήμερα δεν έχει υπάρξει καμία άλλη θεωρία (και μάλιστα κατά τη γνώμη μου, δεν υπάρχει άλλη κατανοητή θεωρία) εξίσου επιτυχής. Γιατί η θεωρία αποδείξεων μου δεν κάνει τίποτα άλλο από το να μιμείται τη δραστηριότητα της κατανόησής μας και να φτιάξει ένα πρωτόκολλο κανόνων σύμφωνα με το οποίο η σκέψη μας προχωρεί στην πραγματικότητα. Η σκέψη λαμβάνει χώρα παράλληλα με την ομιλία και τη γραφή: από το σχηματισμό και την σύνταξη προτάσεων. Και για να το αιτιολογήσω δεν χρειάζομαι ούτε το Θεό, όπως ο Κρόνεκερ,

ούτε την υπόθεση μιας ειδικής ικανότητας της κατανόησης που κατευθύνεται προς την αρχή της τέλειας επαγωγής, όπως ο Πουανκαρέ, ούτε κάποια υπερ-διαίσθηση, όπως ο Brouwer, ούτε όπως οι Whitehead και Russell τα αξιώματα του απείρου και της αναγωγιμότητας , που είναι πραγματικές σημασιολογικές προϋποθέσεις, αλλά που δεν αντισταθμίζονται από τις αποδείξεις της μη αντιφατικότητας και για τις οποίες η τελευταία δεν είναι καν εφικτή».

Τελειώνει τη διάλεξη του σχολιάζοντας τη φιλοσοφική άποψη ότι **«Το «τίποτα» είναι η απόλυτη άρνηση της «ολότητας του όντος»»:**

«Αυτή η φράση είναι διδακτική για τους εξής λόγους: παρά τη λακωνικότητά της, παρουσιάζει τις κυριότερες παραβάσεις κατά των αρχών που καθορίζονται στην αποδεικτική θεωρία μου. Έννοιες όπως "η ολότητα του όντος" ενέχουν μια αντίφαση και έχουν ήδη θέσει σε κίνδυνο την κατανόηση της κάθε πρότασης. Αλλά εκτός από αυτό, η άρνηση εφαρμόζεται τώρα στην προβληματική έννοια της «ολότητας του όντος». Είναι ακριβώς ένα από τα πιο σημαντικά καθήκοντα της θεωρίας αποδείξεων να παρουσιάσει με σαφήνεια το νόημα και το παραδεκτό της άρνησης: άρνηση είναι μια τυπική διαδικασία, μέσω της οποίας από μια πρόταση **$\mathfrak{S}$,** προκύπτει μια άλλη που είναι συνδεδεμένη με την $\mathfrak{S}$ από τα αξιώματα της άρνησης που αναφέρονται παραπάνω (ουσιαστικά την αρχή της αντίφασης και την αρχή "tertium non datur ") Η διαδικασία της άρνησης είναι ένα απαραίτητο μέσο για την θεωρητική διερεύνηση. Η άνευ όρων εφαρμογή της, κατ' αρχήν κάνει δυνατή την πληρότητα και το κλείσιμο της λογικής. Αλλά σε γενικές γραμμές η κατάσταση που προκύπτει μέσω της άρνησης είναι μια ιδανική κατάσταση, και αν εκμεταλλευτούμε αυτή την ιδανική κατάσταση - ότι δηλαδή είναι από μόνη της μια πραγματική δήλωση - θα μπορέσουμε να κατανοήσουμε την φύση και την ουσία της σκέψης».

Πιστεύοντας ότι η θεωρία αποδείξεων έχει πετύχει αυτό που επιθυμούσε και είχε υποσχεθεί, θεωρεί ότι ο κόσμος έχει απαλλαχθεί, μια για πάντα, από το ζήτημα των θεμελίων των μαθηματικών. Ελπίζει ότι η θεωρία του, θα κεντρίσει το ενδιαφέρον όλων των φιλοσόφων αφού μια επιστήμη όπως τα μαθηματικά, αποτελεί τη βάση όλων των επιστημών.

8. ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ Η ΓΝΩΣΗ ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ (ΧΙΛΜΠΕΡΤ 1930 Β).

8.1 Εισαγωγή.

Η παρακάτω διάλεξη δόθηκε στην Καινιξβέργη το φθινόπωρο του 1930 με την ευκαιρία της απονομής στον Χίλμπερτ, τιμητικής τίτλου της πόλης. Ο Χίλμπερτ είχε αποσυρθεί και εδώ συνοψίζει την αντίληψή του για την πρακτική των μαθηματικών. Λίγα χρόνια αργότερα, ο κύκλος Χίλμπερτ στο Γκέτινγκεν εκκαθαρίσθηκε από τους Ναζί. Πολλοί από τους φίλους και τους συνεργάτες του οδηγήθηκαν στην εξορία. Ο Χίλμπερτ, τώρα στα εβδομήντα του, έμεινε πίσω. Του δίνονταν μια απλή σύνταξη στο Γκέτινγκεν, όπου και πέθανε το 1943. Οι ακροτελεύτιες λέξεις που είπε στη διάλεξη στην Καινιξβέργη χαράχτηκαν στον τάφο του.

8.2 Η Διάλεξη του Χίλμπερτ για την Λογική και τη Γνώση της Φύσης .

Ο Χίλμπερτ ξεκινάει την διάλεξή του για την Λογική και την Γνώση της Φύσης εξετάζοντας ένα παλιό φιλοσοφικό πρόβλημα, δηλαδή, το επίμαχο ερώτημα σχετικά με τι ποσοστό σκέψης και εμπειρίας, έχουν οι γνώσεις μας. Το ερώτημα αυτό είναι βασικό, μια και από την απάντησή του, θα εξακριβώσει το γενικό χαρακτήρα της γνώσης του στις φυσικές επιστήμες.

Ισχυρίζεται ότι μπορούμε να δώσουμε σήμερα μια σωστή απάντηση σε αυτό το ερώτημα, με περισσότερη βεβαιότητα για δύο λόγους :

«Ο πρώτος λόγος, είναι ο ταχύς ρυθμός με τον οποίο οι επιστήμες μας αναπτύσσονται σήμερα. Οι πιο σημαντικές ανακαλύψεις της προηγούμενης περιόδου, από τον Κοπέρνικο, τον Κέπλερ, τον Γαλιλαίο και τον Νεύτωνα έως τον Μάξγουελ, κατανέμονται σε μεγάλα χρονικά διαστήματα σχεδόν τεσσάρων αιώνων. Η σύγχρονη περίοδος αρχίζει με την ανακάλυψη των ερτζιανών κυμάτων. Και από τότε τα γεγονότα εξελίσσονται με ταχύ ρυθμό: Ο Ρέντγκεν ανακαλύπτει τις ακτίνες Χ, ο Κιουρί ανακαλύπτει την ραδιενέργεια, ο Πλάνκ καθιερώνει την κβαντική θεωρία. Και στην πιο πρόσφατη περίοδο, οι ανακαλύψεις των νέων φαινομένων και οι εκπληκτικές συνδέσεις τους έρχονται συσσωρευτικά, έτσι ώστε η αφθονία των προσδοκιών γίνεται σχεδόν ανησυχητική: η θεωρία του Ράδερφορντ της ραδιενέργειας, η εξήγηση του Νόμου hv του Αϊνστάιν, του φάσματος του Μπορ, η αρίθμηση των στοιχείων του Μόσλευ, η θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν, η αποσύνθεση του αζώτου του Ράδερφορντ, η δομή των στοιχείων του Μπορ, η θεωρία των ισοτόπων του Άστον».

Έτσι, κατά τον Χίλμπερτ στο πεδίο της φυσικής και μόνο, υπήρξε μια ατέλειωτη αλληλουχία ανακαλύψεων, όπου η θεωρία και η πράξη, η σκέψη και η εμπειρία συνεχώς αποδεικνύονται να διαπλέκονται πολύ στενά. Προχωρούσε πότε η θεωρία και πότε το πείραμα, πάντα επιβεβαιώνοντας αμοιβαία, την ολοκλήρωση και την ενδυνάμωσή τους. Το ίδιο ισχύει και για τη χημεία, την αστρονομία και τις βιολογικές επιστήμες.

Ως εκ τούτου, σύμφωνα με το Χίλμπερτ υφίστανται δύο πλεονεκτήματα σε σχέση με τους παλαιούς φιλοσόφους:

«Πρώτον, έχουμε ζήσει μέσα από ένα μεγάλο αριθμό τέτοιων ανακαλύψεων, και έχουμε εξοικειωθεί με τις προκύπτουσες νέες απόψεις κατά τη διάρκεια του σχηματισμού τους. Και δεύτερον, μεταξύ των νέων ανακαλύψεων υπήρχαν πολλές που τροποποίησαν τις παλαιές, για παράδειγμα, η νέα αντίληψη του χρόνου στη θεωρία της σχετικότητας, ή της αποσύνθεσης των χημικών στοιχείων, καθώς και για το πώς εξαλείφονται προκαταλήψεις που παλαιότερα δεν μπορούσε κανένας να αγγίξει».

Ο δεύτερος λόγος, ισχυρίζεται ο Χίλμπερτ είναι ότι η τεχνική του πειραματισμού και η τέχνη της δημιουργίας θεωρητικών κατασκευασμάτων στη φυσική, έφθασε τότε σε νέα ύψη, αλλά η ομόλογή τους επιστήμη, αυτή της λογικής, είχε επίσης σημειώσει σημαντική πρόοδο. Υπήρχε μια γενική μέθοδος για τη θεωρητική επεξεργασία των ζητημάτων στις φυσικές επιστήμες, η οποία σε κάθε περίπτωση διευκόλυνε την ακριβή διατύπωση του προβλήματος και βοηθούσε στην προετοιμασία της λύσης του , δηλαδή η αξιωματική μέθοδος.

Το ερώτημα που θέτει ο Χίλμπερτ είναι, τι συμβαίνει με αυτή την αξιωματική μέθοδο, η οποία είναι σήμερα στα χείλη όλων μας; Η βασική της ιδέα, στηρίζεται στο γεγονός ότι γενικά ακόμη και σε ολοκληρωμένους τομείς της γνώσης, μερικές προτάσεις - που ονομάζονται αξιώματα – αρκούν για την εύστοχη λογική κατασκευή ολόκληρου του οικοδομήματος της θεωρίας. Αλλά η σημασία τους δεν έχει εξηγηθεί πλήρως με αυτή την παρατήρηση. Τα παραδείγματα σύμφωνα με το Χίλμπερτ θα είναι ο ευκολότερος τρόπος για να διευκρινιστεί η αξιωματική μέθοδος. Το παλαιότερο και πιο γνωστό παράδειγμα της αξιωματικής μεθόδου είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Αλλά ο Χίλμπερτ προτιμά να απεικονίσει την αξιωματική μέθοδο αρκετά σύντομα με δύο παραδείγματα: ένα παράδειγμα από τη σύγχρονη βιολογία, και ένα άλλο παράδειγμα από τις θεωρητικές επιστήμες.

Ξεκινάει πρώτα με ένα παράδειγμα από την Βιολογία:

«Η Δροσοφίλα (Drosophila) είναι μια μικρή μύγα, αλλά το ενδιαφέρον μας σε αυτήν είναι μεγάλο. Είναι το αντικείμενο του πιο εκτεταμένου, προσεκτικού, και πιο επιτυχημένου πειράματος αναπαραγωγής. Αυτή η μύγα είναι συνήθως γκρι, με κόκκινα μάτια, χωρίς κηλίδες , με στρογγυλά και μακριά φτερά. Αλλά υπάρχουν επίσης μύγες με αποκλίνοντα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά: είναι κίτρινες μέχρι γκρι, έχουν άσπρα μάτια ή κόκκινα μάτια κ.λπ. Αυτά τα πέντε ειδικά χαρακτηριστικά συχνά συνδυάζονται. Δηλαδή, όταν μια μύγα είναι κίτρινη, έχει επίσης λευκά μάτια και κηλίδες, με σχισμένα και κολοβά φτερά. Και όταν έχουν κολοβά φτερά τότε έχουν επίσης κίτρινα με λευκά μάτια και ούτω καθεξής. Αλλά τώρα με κατάλληλες διασταυρώσεις – παράγουμε μελλοντικές γενιές που εμφανίζουν μικρότερο αριθμό αποκλίσεων από αυτές που συμβαίνουν στους συνηθισμένους συνδυασμούς - μάλιστα το ποσοστό είναι ένας σταθερός αριθμός. Οι αριθμοί που έτσι κάποιος βρίσκει πειραματικά συμπίπτουν με τα Ευκλείδεια αξιώματα της γραμμικής ισοτιμίας και με τα αξιώματα της γεωμετρικής έννοιας του "μεταξύ" και έτσι οι νόμοι της κληρονομικότητας εφαρμόζονται ως εφαρμογές τέλειων αξιωμάτων τόσο εκπληκτικά, που πιθανότατα ούτε η πιο τολμηρή φαντασία δεν θα μπορούσε να επινοήσει».

Στην συνέχεια αναπτύσσει ένα δεύτερο παράδειγμα για την αξιωματική μέθοδο από τις θεωρητικές επιστήμες:

«Στις θεωρητικές επιστήμες έχουμε συνηθίσει την εφαρμογή των τυπικών διαδικασιών σκέψης και αφηρημένων μεθόδων. Η αξιωματική μέθοδος ανήκει στη λογική. Με τη λέξη λογική, πολλοί καταλαβαίνουν κάτι πολύ βαρετό και δύσκολο. Σήμερα η επιστήμη της λογικής έχει γίνει εύκολο να κατανοηθεί και πολύ ενδιαφέρουσα. Για παράδειγμα, κάποιος ξέρει ότι υπάρχουν ήδη στην καθημερινή ζωή, μέθοδοι και σχηματισμοί εννοιών που χρησιμοποιούνται, και απαιτούν μεγάλο ποσό αφαίρεσης και ότι μπορεί να γίνουν κατανοητοί μόνο από την ασυνείδητη εφαρμογή της αξιωματικής μεθόδου. Για παράδειγμα, η γενική διαδικασία της άρνησης και ιδίως η έννοια του "άπειρου". Όσον αφορά την έννοια του "άπειρου" θα συνειδητοποιήσουμε ότι το "άπειρο" δεν έχει διαισθητική έννοια και ότι χωρίς λεπτομερέστερη έρευνα δεν έχει απολύτως κανένα νόημα. Γιατί παντού υπάρχουν καθορισμένα αντικείμενα. Δεν υπάρχει άπειρη ταχύτητα και καμία δύναμη ή αποτέλεσμα δεν μπορεί να διαδίδεται απείρως γρήγορα. Επιπλέον το ίδιο το αποτέλεσμα είναι αδύνατον να μπορεί να διαιρεθεί απείρως. Ακόμη και το φως έχει ατομική δομή, όπως ακριβώς και τα κβάντα της δράσης του. Πιστεύω ακράδαντα ότι ακόμη και το διάστημα είναι πεπερασμένο, και ότι μια μέρα οι αστρονόμοι θα είναι σε θέση να μας πουν πόσα χιλιόμετρα μακρύ, ψηλό και πόσο μεγάλο είναι. Και παρόλο που υπάρχουν στην πραγματικότητα συχνά περιπτώσεις πολύ μεγάλων αριθμών (για παράδειγμα, η απόσταση των άστρων σε χιλιόμετρα, ή ο αριθμός των διαφορετικών παρτίδων στο σκάκι), ωστόσο η απεραντοσύνη ή η γιγαντιαία αφαίρεση - είναι εφικτή μόνο μέσα από τη συνειδητή ή ασυνείδητη εφαρμογή της αξιωματικής μεθόδου. Αυτή η αντίληψη του απείρου, το οποίο έχω θεμελιώσει μέσω λεπτομερών ερευνών, απαντά σε μια σειρά από σημαντικά ερωτήματα. Ειδικότερα, αυτό δείχνει την αβασιμότητα των αντινομιών του Καντ[39] για το χώρο και της απεριόριστης δυνατότητας της διαίρεσης και, επομένως, τις δυσκολίες που ανακύπτουν με αυτόν τον τρόπο».

Έπειτα ο Χίλμπερτ επιστρέφει στο αρχικό ερώτημά του, δηλαδή κατά το πώς η φύση και η σκέψη είναι αλληλένδετες, δηλώνοντας τα τρία κύρια σημεία της άποψής του. Το άπειρο σύμφωνα με τα παραπάνω πουθενά δεν παρουσιάζεται. Ούτε απαντά στη φύση, ούτε είναι παραδεκτό ως θεμέλιο της σκέψης μας χωρίς ιδιαίτερες προφυλάξεις. Εδώ ο Χίλμπερτ βλέπει ήδη έναν σημαντικό παραλληλισμό ανάμεσα στη φύση και τη σκέψη, μια βασική συμφωνία μεταξύ εμπειρίας και θεωρίας.

Αντιλαμβάνεται τον παραλληλισμό μεταξύ φύσης και σκέψης ως εξής:

«Η σκέψη μας προχωρά από την ενότητα και επιδιώκει να διαμορφώσει την ενότητα. Παρατηρούμε την ενότητα του υλικού στην ύλη και εμείς παντού ανιχνεύουμε την ενότητα των νόμων της φύσης. Έτσι, η φύση στην πραγματικότητα μας φιλοξενεί σε μεγάλο βαθμό στην έρευνά μας, και είναι προετοιμασμένη και στην ευχάριστη θέση να αποκαλύψει τα μυστικά της. Η αραιή κατανομή της μάζας στο διάστημα καθιστά δυνατή την ανακάλυψη και την πιο τέλεια επιβεβαίωση του νόμου του Νεύτωνα. Παρά τη μεγάλη ταχύτητα του φωτός, ο Μίκελσον ήταν σε θέση να αποδείξει με βεβαιότητα την ακυρότητα του νόμου της πρόσθεσης των ταχυτήτων, επειδή η γη μας κινείται αρκετά γρήγορα στην τροχιά της γύρω από τον ήλιο. Ο Ερμής απλά μας βοήθησε με την περιήλια κίνησή του, έτσι ώστε να μπορούμε να ελέγξουμε τη θεωρία του

39 Αντινομίες. Λογικές αντιθέσεις οι οποίες, κατά τον Καντ, προκύπτουν από την προσπάθεια γνώσης της πραγματικότητας καθ’ αυτήν και όχι μόνο ως σύνολο φαινομένων. Κάθε αντινομία περιλαμβάνει δύο αντίθετες προτάσεις, οι οποίες μας παρουσιάζονται ως αντιφατικές. Δύο προτάσεις λέγονται αντιφατικές, όταν η μία συνεπάγεται το ψεύδος της άλλης και αντίστροφα, δηλαδή όταν δεν μπορούν και οι δύο να είναι (ταυτόχρονα) αληθείς ή (ταυτόχρονα) ψευδείς. Δύο προτάσεις λέγονται αντίθετες, όταν δεν μπορούν να είναι και οι δύο (ταυτόχρονα) αληθείς, αλλά μπορούν και οι δύο να είναι (ταυτόχρονα) ψευδείς.

Αϊνστάιν. Και οι ακτίνες από τα αστέρια περνούν από τον ήλιο με τέτοιο τρόπο ώστε μπορούμε να παρατηρήσουμε την θεωρία της απόκλισης».

Αλλά ακόμα πιο εντυπωσιακή είναι μια παρατήρηση για τον Χίλμπερτ η οποία είναι ουσιαστικά μια ενσάρκωση και μια υλοποίηση μαθηματικής σκέψης την οποία καλεί εν αντιθέσει με τον Λάιμπνιτς, προκαθορισμένη αρμονία. Τα παλαιότερα παραδείγματα για αυτό ήταν οι κωνικές τομές που κάποιος μελέτησε πολύ πριν υποψιαστεί ότι οι πλανήτες μας ή ακόμα και τα ηλεκτρόνια κινούνται σε μια τέτοια πορεία. Αλλά το πιο υπέροχο και θαυμάσιο παράδειγμα προκαθορισμένης αρμονίας, είναι η διάσημη θεωρία της σχετικότητας του Αϊνστάιν. Εδώ αποκλειστικά μέσω της γενικής απαίτησης για το αναλλοίωτο σε συνδυασμό με την αρχή της μεγαλύτερης απλότητας, δημιουργήθηκαν μαθηματικές διαφορικές εξισώσεις με μοναδικό τρόπο. Η δημιουργία αυτή δεν θα ήταν δυνατή χωρίς τις βαθιές και δύσκολες μαθηματικές έρευνες του Ρίμαν, που προϋπήρχαν.

Σύμφωνα με το Χίλμπερτ, μπορούμε να κατανοήσουμε τη συμφωνία ανάμεσα στη φύση και τη σκέψη, μεταξύ εμπειρίας και θεωρίας, μόνο αν λάβουμε υπόψη τόσο το τυπικό στοιχείο όσο και τον μηχανισμό που συνδέεται με αυτό. Και πρέπει να το κάνουμε αυτό, τόσο για τη φύση όσο και για την κατανόησή μας. Η μαθηματική διαδικασία της απαλοιφής κομίζει, όπως φαίνεται και τα επόμενα σημεία και σταθμούς όπου τόσο τα σώματα στον πραγματικό κόσμο όσο και οι σκέψεις στον ψυχικό κόσμο αργοπορούν και, στη διαδικασία αυτοπαρουσιάζονται για έλεγχο και σύγκριση.

Αλλά αυτή η προκαθορισμένη αρμονία δεν έχει ακόμη εξαντλήσει τις σχέσεις ανάμεσα στη φύση και τη σκέψη και δεν έχει ακόμη αποκαλύψει τα βαθύτερα μυστικά του προβλήματός. Για να το κάνει, στρέφει το βλέμμα του προς ολόκληρο το συγκρότημα των φυσικών και αστρονομικών γνώσεων. Στη σύγχρονη επιστήμη, ισχυρίζεται ότι βρίσκουμε μια άποψη που πηγαίνει πολύ πιο πέρα από παλιούς στόχους και τυποποιήσεις των ερωτημάτων:

«Η σύγχρονη επιστήμη δε διδάσκει απλά, όπως η κλασική μηχανική, πώς από τα σημερινά δεδομένα μπορούμε να καθορίσουμε εκ των προτέρων τις μελλοντικές κινήσεις και αναμενόμενες εμφανίσεις, αλλά δείχνει επίσης ότι η σημερινή πραγματική κατάσταση της φυσικής ύλης στη γη και στο διάστημα δεν είναι αυθαίρετα τυχαία, αλλά προκύπτει από τους νόμους της φυσικής.

Οι σημαντικότερες αποδείξεις είναι τα ατομικά μοντέλα του Μπορ, η κατασκευή του σύμπαντος, και τελικά ολόκληρη η εξελικτική ιστορία της οργανικής ζωής. Φαίνεται ότι η επιδίωξη αυτών των μεθόδων θα έπρεπε πράγματι να οδηγήσει σε ένα σύστημα νόμων της φύσης που θα ίσχυε για το σύνολο της πραγματικότητας και θα έπρεπε, στη συνέχεια, στην πραγματικότητα να χρειαστούμε μόνο τη σκέψη (δηλαδή την εννοιολογική παραγωγή) για την απόκτηση όλων των φυσικών γνώσεων. Ο Χέγκελ θα είχε το δικαίωμα να νιώσει ικανοποιημένος αφού είναι δυνατό να συναχθούν όλα τα δρώμενα της φύσης από τις έννοιες. Αλλά αυτό το συμπέρασμα δεν ισχύει. Γιατί πώς προκύπτει από τους νόμους του σύμπαντος; Πώς μπορούμε να τις αποκτήσουμε; Και ποιος μας διδάσκει ότι ταιριάζουν στην πραγματικότητα; Η απάντηση είναι ότι η εμπειρία από μόνη της το καθιστά αυτό δυνατό. Σε αντίθεση με τον Χέγκελ πιστεύουμε ότι οι νόμοι του σύμπαντος δεν μπορούν να αποκτηθούν με κανέναν άλλο τρόπο πέρα από την εμπειρία. Στην κατασκευή του πλαισίου των φυσικών εννοιών, διάφορες θεωρητικές απόψεις μπορούν να συνεργάζονται, όμως, αν οι νόμοι που έχουν προταθεί και το λογικό πλαίσιο των εννοιών που έχει κατασκευαστεί από αυτές είναι σωστό, είναι κάτι που μόνο η εμπειρία είναι αρμόδια να αποφασίσει. Μερικές φορές μια ιδέα έχει την προέλευσή της στην καθαρή σκέψη, όπως για παράδειγμα, ο ατομισμός του Δημόκριτου, ενώ η ύπαρξη των ατόμων αποδείχθηκε από την πειραματική φυσική δύο χιλιάδες χρόνια αργότερα. Μερικές φορές η εμπειρία δείχνει το δρόμο και επιβάλλει την θεωρητική άποψη στο μυαλό. Έτσι, η ισχυρή ώθηση του πειράματος του Μίκελσον ξεκαθάρισε τη βαθιά ριζωμένη προκατάληψη του απόλυτου χρόνου και κατέστησε δυνατό για τον Αϊνστάιν να αντιληφθεί την ιδέα της γενικής σχετικότητας».

Ο Χίλμπερτ ισχυρίζεται ότι όποιος θέλει να αρνηθεί ότι οι νόμοι του κόσμου προέρχονται από την εμπειρία, πρέπει να υποστηρίζει ότι εκτός από την παραγωγή και την εμπειρία υπάρχει και μια τρίτη πηγή γνώσης.

Οι φιλόσοφοι έχουν στην πραγματικότητα υποστηρίξει -και ο Καντ είναι ο κλασσικός εκπρόσωπος της αυτής της άποψης - ότι πέρα από τη λογική και την εμπειρία, έχουμε μια ορισμένη εκ των προτέρων (a priori) γνώση της πραγματικότητας. Ο Χίλμπερτ ομολογεί ότι ήδη για την κατασκευή του θεωρητικού πλαισίου ορισμένες εκ των προτέρων γνώσεις είναι απαραίτητες και ότι αποτελούν παντοτινή βάση της γένεσης της γνώσης μας. Πιστεύει, επίσης, ότι η μαθηματική γνώση στο τέλος στηρίζεται σε τέτοιου είδους διαισθητικές αντιλήψεις και ακόμη ότι χρειαζόμαστε μερικές ευφυείς, εκ των προτέρων αξιολογήσεις για την κατασκευή της Θεωρίας Αριθμών. Έτσι, η πιο γενική και θεμελιώδης ιδέα της καντιανής επιστημολογίας διατηρεί τη σημασία της: δηλαδή το φιλοσοφικό πρόβλημα του προσδιορισμού αυτής της διαίσθησης, μια εκ των προτέρων αξιολόγηση και διερεύνηση της κατάστασης της δυνατότητας όλων των εννοιολογικών γνώσεων και της κάθε εμπειρίας. Πιστεύει ότι ουσιαστικά αυτό έχει συμβεί στην έρευνά του πάνω στις Αρχές των μαθηματικών. Η εκ των προτέρων αξιολόγηση δεν είναι τίποτα περισσότερο και τίποτα λιγότερο από μια θεμελιώδη αξιολόγηση, ή η έκφραση ορισμένων απαραίτητων προϋποθέσεων της σκέψης και της εμπειρίας. Αλλά, εν αντιθέσει με τον Καντ, πρέπει να χαραχθούν τα όρια ανάμεσα σε αυτό που έχουμε εκ των προτέρων και αυτό που απαιτεί η εμπειρία: Ο Καντ υπερεκτιμά το ρόλο και την έκταση της εκ των προτέρων αξιολόγησης[40].

Ο Χίλμπερτ εφιστά την προσοχή στην ένταξη στον χώρο της a priori γνώσης . Όπως υποστηρίζει, ένα μεγάλο μέρος της γνώσης που παλαιότερα είχε θεωρηθεί ως a priori σήμερα θεωρείται ότι δεν είναι καν σωστή γνώση. Το πλέον χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της άποψης είναι η ιδέα του απόλυτου παρόντος. Δεν υπάρχει απόλυτο παρόν, όμως από την παιδική μας ηλικία υποθέτουμε ότι υπάρχει. Γιατί η καθημερινή ζωή είναι πάντα θέμα μικρών αποστάσεων και αργών κινήσεων.

Αν τα πράγματα ήταν διαφορετικά, θα μπορούσε κάποιος να εισαγάγει τον απόλυτο χρόνο. Αλλά ακόμη και μεγάλοι στοχαστές όπως ο Νεύτωνας και ο Καντ δεν τολμούσαν να αμφισβητήσουν το απόλυτο του χρόνου. Τις επιφυλάξεις του ο Νεύτωνας τις διατύπωσε ακροθιγώς: **η απόλυτη αλήθεια του χρόνου, στην αρετή της φύσης, ρέει από μόνη της, ομοιόμορφα και χωρίς σχέση με το αντικείμενο**. Ο Νεύτωνας έτσι ακυρώνει κάθε δυνατότητα υποχώρησης ή συμβιβασμού. Ο Καντ ο κριτικός φιλόσοφος, εδώ δεν είναι καθόλου κριτικός,

[40] Στις ημέρες του Καντ θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί ότι οι παραστάσεις που κάποιος είχε για το χώρο και το χρόνο ήταν εξίσου άμεσες και γενικά ίσχυαν στην πραγματικότητα, όπως, για παράδειγμα, οι αναπαραστάσεις των αριθμών, της ακολουθίας και της ποσότητας - που χρησιμοποιούμε από τη μαθηματική και τη φυσική θεωρία. Στη συνέχεια, η θεωρία του χώρου και του χρόνου (και ιδιαίτερα η γεωμετρία) θα ήταν κάτι που, όπως η αριθμητική, προηγείται κάθε γνώσης της φύσης. Αλλά ακόμη και πριν την επιβάλει, η ανάπτυξη της φυσικής, αυτή η καντιανή άποψη είχε ήδη εγκαταλειφθεί από τον Ρίμαν και τον Χέλμχολτζ - και πολύ σωστά, γιατί η γεωμετρία δεν είναι τίποτα άλλο από εκείνο το μέρος του συνολικού πλαισίου των φυσικών εννοιών που σχεδιάζει τις πιθανές σχετικές θέσεις μεταξύ στερεών σωμάτων στον κόσμο των πραγματικών αντικειμένων. Το αν υπάρχουν απόλυτα κινητά άκαμπτα σώματα, και ποιες είναι οι τοπογραφικές σχέσεις τους, είναι αποκλειστικά θέμα εμπειρίας. Όπως ο Γκάους έχει ήδη αναγνωρίσει, η πρόταση ότι το άθροισμα των γωνιών σε ένα τρίγωνο ισούται με δύο ορθές γωνίες και ότι το αξίωμα των παραλλήλων είναι έγκυρο, ισχύουν αφού επικυρωθούν ή αποκλειστούν από το πείραμα.

γιατί απλά αποδέχεται την γνώμη του Νεύτωνα. Μόνο ο Αϊνστάιν απελευθερώθηκε οριστικά από αυτή την επιφύλαξη και η a priori θεωρία, δεν θα μπορούσε πιο εντυπωσιακά να καταλήξει σε παραλογισμό με την ανάπτυξη της φυσικής επιστήμης. Γιατί η υπόθεση του απόλυτου χρόνου έχει ως συνέπεια, μεταξύ άλλων, το θεώρημα, ότι η σύνθεση των ταχυτήτων δίνεται από την πρόσθεση των ταχυτήτων (μια πρόταση η οποία μπορεί να φαίνεται προφανής, αλλά δύσκολα μπορεί να υπάρξουν αποδεικτικά στοιχεία) και ωστόσο, διάφορα πειράματα στην οπτική, την αστρονομία και τη θεωρία της ηλεκτρικής ενέργειας είχαν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι αυτό το θεώρημα της προσθήκης των ταχυτήτων δεν είναι σωστό. Στην πραγματικότητα ένας άλλος πιο πολύπλοκος νόμος ισχύει και για τη σύνθεση των δύο ταχυτήτων. Η αντίληψη της εμπειρικής φύσης της γεωμετρίας, όπως είχε αναπτυχθεί από τους Γκάους και Χέλμολτζ είχε γίνει ένα ασφαλές αποτέλεσμα της επιστήμης. Αποτελούσε ένα σταθερό σημείο στήριξης για όλες τις φιλοσοφικές εικασίες που αφορούν το χώρο και το χρόνο. Η θεωρία της βαρύτητας του Αϊνστάιν καθιστούσε πρόδηλο, ότι γεωμετρία δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένας κλάδος της φυσικής. Οι αλήθειες στην Γεωμετρία δεν διέφεραν από τις αλήθειες στην Φυσική[41].

Ο Χίλμπερτ υποστηρίζει ότι το εργαλείο που μεσολαβεί ανάμεσα στη θεωρία και την πρακτική, ανάμεσα στη σκέψη και την παρατήρηση, είναι τα μαθηματικά. Όπως λέει χαρακτηριστικά:

«Αυτά κτίζουν τις γέφυρες. Γι’ αυτό ολόκληρος ο σύγχρονος πολιτισμός μας, στο μέτρο που στηρίζεται στη εμβάθυνση και αξιοποίηση της φύσης, έχει τις βάσεις του στα μαθηματικά. Ο Γαλιλαίος είχε ήδη πει: «ο άνθρωπος μπορεί να καταλάβει τη φύση, όταν έχει εξοικειωθεί με τη γλώσσα της και με τα σημεία με τα οποία μας μιλάει. Αυτή η γλώσσα είναι τα μαθηματικά και τα σημάδια της είναι τα μαθηματικά στοιχεία». Ο Καντ έκανε την παρατήρηση: «Υποστηρίζω ότι σε κάθε συγκεκριμένη φυσική επιστήμη, η ποσότητα των μαθηματικών που περιέχει είναι ίση με το ποσό της πραγματικής επιστήμης που μπορούμε να βρούμε σε αυτήν» Και πράγματι, δεν θα γνωρίζαμε ούτε μια θεωρία στις φυσικές επιστήμες προτού αποκαλυφτεί

[41] Έτσι, για παράδειγμα, το Πυθαγόρειο θεώρημα και οι νόμοι της έλξης του Νεύτωνα συνδέονται ουσιαστικά με την έννοια ότι και τα δύο διέπονται από την ίδια βασική φυσική έννοια, δηλαδή το δυναμικό. Αλλά ακόμη περισσότερο είναι σίγουρο για όποιον γνωρίζει τη θεωρία της βαρύτητας του Αϊνστάιν, ότι αυτοί οι δύο νόμοι είναι τόσο διαφορετικοί και μέχρι τώρα είχαν μεγάλη απόσταση μεταξύ τους. Ο πρώτος ήταν ένα θεώρημα της στοιχειώδους γεωμετρίας, που ήταν γνωστό από την αρχαιότητα και διδάσκονταν παντού στα σχολεία, και ο δεύτερος είναι ένας νόμος για τη δράση των μαζών μεταξύ τους. Συνεπώς οι δύο νόμοι δεν είναι του ίδιου χαρακτήρα, αλλά είναι παρολ’ αυτά κομμάτια του ίδιου γενικότερου νόμου.

πλήρως ο μαθηματικός πυρήνας της. Χωρίς τα μαθηματικά, η σύγχρονη αστρονομία και η φυσική δεν θα ήταν δυνατή. Αυτές οι επιστήμες, στο θεωρητικό τους κομμάτι, σχεδόν μετατράπηκαν σε μαθηματικά. Σε αυτές και σε πολλές άλλες εφαρμογές τα μαθηματικά απολαμβάνουν το κύρος τους, και την αποδοχή από το ευρύ κοινό».

Ωστόσο ο Χίλμπερτ παρατηρεί ότι οι μαθηματικοί έχουν αρνηθεί, την ανάγκη των μαθηματικών σε όλες τις εφαρμογές. Αναφέρει χαρακτηριστικά:

« Ο πρίγκιπας των μαθηματικών ο Γκάους [42] συμφωνούσε με αυτούς τους μαθηματικούς. Η καθαρή θεωρία αριθμών είναι ο τομέας των μαθηματικών που μέχρι τώρα δεν έχει βρει εφαρμογή. Αλλά είναι ακριβώς η θεωρία αριθμών που ο Γκάους καλούσε τη βασίλισσα των μαθηματικών, και που δοξάζεται από τον ίδιο και σχεδόν όλους τους μεγάλους μαθηματικούς. Ο Γκάους μιλάει για τη μαγική γοητεία που έχει κάνει την Θεωρία Αριθμών, την αγαπημένη της επιστήμης από τους σημαντικότερους μαθηματικούς –για να μην μιλήσουμε για τον ανεξάντλητο πλούτο της, η οποία ξεπερνά όλα τα είδη των μαθηματικών. Ο Γκάους εξιστορεί πώς ήδη από την νεότητά του η γοητεία του αριθμού – τον παγίδευε , έτσι ώστε δεν θα μπορούσε ποτέ να τον αφήσει. Επαίνεσε τους Φερμά, Όιλερ, Λαγκράντζ και Λεζάντρ, επειδή είχαν βρει το μονοπάτι προς το εσωτερικό ιερό της ουράνιας επιστήμης, και είχαν δείξει τον πλούτο με τον οποίο ήταν γεμάτος. Και οι μαθηματικοί όπως πριν τον Γκάους και μετά τον Γκάους μιλούν με τον ίδιο ενθουσιασμό - μαθηματικοί όπως οι Λεζέν-Ντίριχλετ, Κούμμερ, Ερμίτ, Κρόνεκερ και Μινκόφσκι, συγκρίνουν τους Θεωρητικούς των Αριθμών με τους Λωτοφάγους, οι οποίοι από τη στιγμή που δοκίμαζαν αυτό το φρούτο δεν μπορούσαν να απεξαρτηθούν από αυτό.

Ο Πουανκαρέ επίσης ο πιο λαμπρός μαθηματικός της γενιάς του, ο οποίος ήταν επίσης φυσικός και αστρονόμος, είναι της ίδιας άποψης. Με αξιοσημείωτη τραχύτητα ο Πουανκαρέ επιτέθηκε στον Τολστόι, ο οποίος είχε πει ότι ήταν ανόητο να απαιτήσεις «την επιστήμη για χάρη της επιστήμης». «Όπως έχουμε επιλέξει τις επιδιώξεις μας» ρώτησε τον Τολστόι, «θα πρέπει να επιτρέπουμε στον εαυτό μας να καθοδηγείται από τις διαθέσεις της απληστίας μας για τη γνώση. Δεν θα ήταν καλύτερο να λάβουμε τις αποφάσεις μας σύμφωνα με τη χρησιμότητά

[42] Που ήταν ταυτόχρονα και εκπληκτικός γνώστης των εφαρμοσμένων μαθηματικών, γνώστης που δημιούργησε εκ νέου ολόκληρες επιστήμες, όπως τη θεωρία των σφαλμάτων, ή της γεωδαισίας, προκειμένου τα μαθηματικά να παίξουν ηγετικό ρόλο, αυτός που, όταν οι αστρονόμοι είχαν χαθεί και δεν μπορούσαν να βρουν τον πρόσφατα ανακαλυμμένο πλανήτη Ceres- ένα ιδιαίτερα σημαντικό και ενδιαφέροντα πλανήτη επινόησε μια νέα μαθηματική θεωρία την οποία ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσει για να προβλέψει τη θέση του, αυτός που, εφηύρε τον τηλέγραφο, και πολλά άλλα πρακτικά πράγματα.

της, δηλαδή, σύμφωνα με τις πρακτικές και ηθικές ανάγκες μας;» Περιέργως, αλλά είναι ο Τολστόι που εμείς οι μαθηματικοί θα πρέπει να απορρίψουμε ως πεπλανημένο ρεαλιστή και έναν στενόμυαλο πραγματιστή. Ο Πουανκαρέ τάχθηκε κατά του Τολστόι διότι, αν κάποιος είχε ακολουθήσει την προτροπή του Τολστόι, η επιστήμη δεν θα είχε προκύψει καθόλου. Κάποιος πρέπει να έχει τα μάτια του ανοικτά, καταλήγει ο Πουανκαρέ να δει ότι, για παράδειγμα, τα επιτεύγματα της βιομηχανίας δεν θα είχαν επιτευχθεί , αν υπήρχαν μόνο πρακτικοί άνθρωποι και αυτά τα επιτεύγματα δεν είχαν προωθηθεί από ανιδιοτελείς ανόητους που ποτέ δεν σκέφτονταν για πρακτικές εφαρμογές. Οι πάντες συμφωνούν σε αυτό.

Έτσι πίστευε και ο μέγας μαθηματικός Τζάκομπι. Όταν ο διάσημος Φουριέ είπε κάποτε ότι ο κύριος σκοπός των μαθηματικών είναι η εξήγηση των φυσικών φαινομένων, ήταν ο Τζάκομπι που τον επέπληξε με όλο το πάθος της ιδιοσυγκρασίας του. «Ένας φιλόσοφος, όπως ο Φουριέ, όφειλε να γνωρίζει,» έλεγε ο Τζάκομπι, «ότι ο μοναδικός σκοπός όλων των επιστημών είναι η τιμή του ανθρώπινου πνεύματος, και από αυτήν την άποψη το πρόβλημα της καθαρής θεωρίας αριθμών είναι εξίσου πολύτιμο όσο ένα πρόβλημα με πρακτικές εφαρμογές».

Κι ο Χίλμπερτ καταλήγει :

«Όποιος αισθάνεται την αλήθεια του υπέροχου τρόπο σκέψης και της προβολής του κόσμου που λάμπει σε αυτά τα λόγια του Τζάκομπι δεν θα οπισθοδρομήσει σε άκαρπο σκεπτικισμό. Δεν θα πίστευε όσους σήμερα, με φιλοσοφικό αέρα και τόνο ανωτερότητας, προφητεύουν την πτώση του πολιτισμού και την πτώση του σε ignorabimus (δεν γνωρίζουμε και δεν θα μάθουμε). Για τον μαθηματικό δεν υπάρχει ignorabimus, ούτε κατά τη γνώμη μου , για οποιοδήποτε τμήμα της φυσικής επιστήμης. Ο ίδιος φιλόσοφος Κομτ είπε κάποτε - με την πρόθεση να αναφερθεί σε ένα πρόβλημα που ήταν σίγουρα άλυτο - ότι η επιστήμη ποτέ δεν θα είναι σε θέση να κατανοήσει το μυστικό της χημικής σύνθεσης των ουρανίων σωμάτων. Λίγα χρόνια αργότερα, το πρόβλημα-αυτό λύνεται με την φασματική ανάλυση των Μπούνσεν και Κίρκοφ και σήμερα μπορούμε να πούμε ότι θεωρούμε τα πιο μακρινά αστέρια όπως τα πιο σημαντικά φυσικά και χημικά εργαστήρια - εργαστήρια που δεν βρίσκουμε πουθενά στη γη. Ο πραγματικός λόγος για τον οποίο ο Κομτ δεν μπορούσε να λύσει το άλυτο πρόβλημα, είναι, κατά τη γνώμη μου ότι δεν υπάρχει απολύτως κανένα άλυτο πρόβλημα. Αντί για το ανόητο ignorabimus, η απάντησή μας είναι το αντίθετο:

Πρέπει να ξέρουμε,

και θα μάθουμε».

9. ΕΠΙΛΟΓΟΣ .

Ο Χίλμπερτ ήταν ένας από τους κορυφαίους μαθηματικούς της εποχής του, επωφελήθηκε από την ευκαιρία στα διάφορα Συνέδρια για να θέσει τα 23 προβλήματα που αναδείκνυαν τις απόψεις του σχετικά με το μέλλον των μαθηματικών, και να παρουσιάσει τις θεωρίες του σχετικά με την θεωρία των αριθμών και τις σχέσεις των μαθηματικών με την φυσική. Ποια προβλήματα ήταν σημαντικότερα να λυθούν; Ποια ήταν η καλύτερη θεμελίωση των μαθηματικών; Ποια ήταν η ενδεδειγμένη σχέση των μαθηματικών με τις φυσικές επιστήμες; Σκοπός του δεν ήταν απλώς να ανασηκώσει το πέπλο που καλύπτει το μέλλον, αλλά να συμβάλει στη διαμόρφωση και καθοδήγηση του μέλλοντος. Με το κύρος του και αυτό του πανεπιστημίου στο οποίο ανήκε τα προβλήματα που έθεσε είχαν όλες τις προοπτικές να βρεθούν στο προσκήνιο της μαθηματικής έρευνας και πράγματι έτσι έγινε.

Ο Jean Piaget είχε δηλώσει: «Μπορεί κανείς, μαζί με τον Χίλμπερτ, να συλλάβει τις λογικές σχέσεις ως μια υπο-κατηγορία των μαθηματικών όντων: συνεπώς τα τελευταία, δεν μπορούν να αναχθούν όλα στις λογικές δομές, αλλά περιλαμβάνουν αυτές τις τελευταίες, ως ιδιαίτερες περιπτώσεις».

Κατά την διάρκεια της δεκαετίας του 1920, το ενδιαφέρον του στράφηκε έντονα προς τη θεμελίωση των μαθηματικών. Το 1900 είχε ισχυριστεί ότι στα μαθηματικά το κάθε πρόβλημα έχει την λύση του, ότι δεν υπάρχει τίποτα που δεν μπορούμε να μάθουμε. Η αισιοδοξία του συμβάδιζε με το κλίμα αυτοπεποίθησης που κυριάρχησε το 1900. Αντίθετα το 1920 συγκρούστηκε με την απαισιοδοξία που κυριαρχούσε στον πνευματικό κλάδο. Το 1920 είχε ανταγωνιστές που προσπάθησε να τους κατατροπώσει αποδεικνύοντας κάτι αληθινά εκπληκτικό :ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα είναι κατά βάση επιλύσιμο και ότι η επιλυσιμότητά του μπορεί να δειχθεί με ένα πεπερασμένο πλήθος λογικών βημάτων.

Ο Χίλμπερτ ενδιαφέρθηκε ιδιαίτερα για την σωστή σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά και την φυσική. Δεν αρκέστηκε στην καταγραφή μιας σειράς από εν δυνάμει θεωρήματα. Πρότεινε την αξιωματική μέθοδο των μαθηματικών ως βασική οργανωτική αρχή που θα επέβαλε μια σαφή λογική δομή σε κάθε κλάδο της φυσικής.

Χωρίς αμφιβολία ο Χίλμπερτ ήταν ένας θεωρητικός μαθηματικός. Ένας από τους κλάδους που αγαπούσε περισσότερο ήταν η θεωρία αριθμών που τον προμήθευσε σε γενικές γραμμές με το ένα τέταρτο των προβλημάτων που πρότεινε. Ένα από τα κλειδιά της επιτυχίας των προβλημάτων στα χρόνια που ακολούθησαν ήταν ότι ο Χίλμπερτ τα παρουσίασε ενταγμένα μέσα σε ένα γενικότερο πλαίσιο που αναδείκνυε τη σημασία τους και έδινε στους άλλους μαθηματικούς κίνητρα για να ασχοληθούν με αυτά.

Η ιστορία των προβλημάτων του Χίλμπερτ είναι ακόμα μια ιστορία κύρους. Πως λειτουργούν οι προτεραιότητες στα μαθηματικά; Ποιος τις καθορίζει, ποιος διαφωνεί; Πως αντιμετωπίζονται οι διαφωνίες; Πως κερδίζεται η φήμη και τι την κρατά ζωντανή; Το κύρος στα μαθηματικά δεν αναφέρεται μόνο σε πρόσωπα και πανεπιστήμια αλλά ακόμα σε κλάδους και συγκεκριμένα προβλήματα. Το γεγονός αυτό μπορεί να θεωρηθεί σωστό και δίκαιο, μπορεί όμως να χαρακτηριστεί επιπόλαιο και ιδιόρρυθμο. Οι πνευματικές και οι κοινωνικές τάσεις είναι αλληλένδετες.

Τα μαθηματικά μπορούν να μελετηθούν σε διάφορα επίπεδα και όπως είναι λογικό μερικά είναι προσιτά μόνο στους ειδικούς. Μπορούμε όμως να ρωτάμε: Τι είναι ενδιαφέρον; Τι είναι σημαντικό με αυτό το θέμα; Η απάντηση είναι ότι τότε θα δούμε ότι ούτε οι ειδικοί αρκούνται σε μια μακροσκελή τεχνική επιχειρηματολογία. Μια εννοιολογική προσέγγιση η οποία να εξηγεί γιατί κάποιο θεώρημα είναι αληθές είναι προτιμότερη από έναν υπολογισμό που μπορεί μόνο να ελεγχθεί γραμμή προς γραμμή. Σε αυτό το θέμα ο Χίλμπερτ ήταν απόλυτα σαφής και με τα λεγόμενά του απηχούσε τις απόψεις πολλών συγχρόνων του μαθηματικών .

Η αξία του Χίλμπερτ έγκειται στην ικανότητά του να συλλάβει, ή να δημιουργήσει το κατάλληλο γενικό πλαίσιο που έκανε τα παλιά δύσκολα προβλήματα να μοιάζουν εύκολα αλλά συνάμα δημιούργησε αποτελεσματικές θεωρίες. Μπορεί να παρήγαγε το σημαντικότερο έργο του σε μερικούς από τους πιο θεωρητικούς κλάδους των μαθηματικών, αξίζει όμως να θυμόμαστε ότι σε όλη του τη ζωή ενδιαφερόταν και για την φυσική. Ο Χίλμπερτ ήταν, όπως τον περιέγραψε ο Μπλούμενταλ, άνθρωπος των προβλημάτων.

Ο Ρίχαρντ Κουράντ έγραψε τα εξής για το έργο του Χίλμπερτ και τη σημασία του για τα μαθηματικά: «Μολονότι τα μαθηματικά έχουν διαδραματίσει σημαντικό ρόλο για περισσότερα από δύο χιλιάδες χρόνια, υπόκειται ακόμη σε αλλαγές του συρμού και πάνω από όλα, σε αποκλίσεις από την παράδοση. Στην σύγχρονη εποχή της υπερδραστήριας βιομηχανοποίησης της επιστήμης, της προπαγάνδας, και της εκρηκτικής χειραγώγησης της κοινωνικής και της προσωπικής βάσης της επιστήμης, πιστεύω ότι βρισκόμαστε σε μια τέτοια επικίνδυνη περίοδο.

Στη εποχή μας τα Μ.Μ.Ε., το κάλεσμα για μεταρρύθμιση, εξαιτίας της προπαγάνδας, μπορεί εξίσου εύκολα να οδηγήσει τόσο σε περιορισμό και σε στραγγαλισμό, όσο και σε μια απελευθέρωση της μαθηματικής γνώσης. Ο κίνδυνος έγκειται στο ότι οι συνδυασμένες δυνάμεις πιέζουν τόσο πολύ προς την κατεύθυνση της αφαίρεσης ώστε μόνο αυτή η πλευρά της μεγάλης παράδοσης του Χίλμπερτ συνεχίζεται. Τα ζωντανά μαθηματικά βασίζονται στη διακύμανση ανάμεσα στις αντιθετικές δυνάμεις της ενόρασης και της λογικής, της ατομικότητας των «προσγειωμένων» προβλημάτων και της γεννητικότητας των εκτενών αφαιρέσεων. Εμείς οι ίδιοι δεν πρέπει να επιτρέψουμε να ωθείται η ανάπτυξη μόνο προς τον έναν πόλο αυτής της ζωοποιού αντίθεσης.

Τα μαθηματικά πρέπει να καλλιεργηθούν και να ενισχυθούν ως ένας ενοποιημένος, ζωτικός κλάδος του μεγάλου ποταμού της επιστήμης. Δεν μπορούν να κυλήσουν σαν ένα ρυάκι στην άμμο. Ο Χίλμπερτ με το εντυπωσιακό παράδειγμά του, μας βοήθησε να καταλάβουμε ότι τέτοιοι κίνδυνοι μπορούν να αποφευχθούν εύκολα , ότι δεν υπάρχει χάσμα ανάμεσα στα θεωρητικά και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, και ότι μια γόνιμη σχέση μπορεί να εδραιωθεί ανάμεσα στα μαθηματικά και στην επιστήμη ως όλον. Για αυτό είμαι πεπεισμένος ότι η μεταδοτική αισιοδοξία του Χίλμπερτ διατηρεί ακόμη και σήμερα τη ζωτική σημασία της στα μαθηματικά που θα επιτύχουν μόνο με το πνεύμα του Χίλμπερτ .

Είναι αυτή η αισιοδοξία που θα ηχεί, όσο επιβιώνει μια πέτρα, από τη στήλη που τοποθετήθηκε μετά το θάνατο του Χίλμπερτ στον τάφο του στο Γκέτινγκεν:

Wir müssen wissen
Wir werden wissen».

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: Τα 23 προβλήματα του Hilbert

Πρόβλημα	**Σύντομη εκφώνηση**	**Κατάσταση**	**Έτος επίλυσης**
1ο	Η υπόθεση του συνεχούς (αυτή είναι, ότι δεν υπάρχει σύνολο του οποίου ο πληθάριθμος είναι αυστηρά ανάμεσα στον πληθάριθμο των ακέραιων και στον πληθάριθμων των πραγματικών αριθμών.	Αποδείχθηκε ότι είναι αδύνατο να το αποδείξεις αλλά και να το απορρίψεις μέσα στη θεωρία συνόλων των Ζερμέλο-Φρένκελ με ή χωρίς το αξίωμα της επιλογής. Δεν υπάρχει ομοφωνία στο αν αυτό αποτελεί λύση για το πρόβλημα.	1963
2ο	Απόδειξη ότι τα αξιώματα της αριθμητικής είναι συνεπή.	Δεν υπάρχει ομοφωνία εάν τα αποτελέσματα των Γκέντελ και Γκέντζεν δίνουν λύση στο πρόβλημα έτσι όπως διατυπώθηκε από τον Χίλμπερτ. Το δεύτερο θεώρημα της μη πληρότητας του Γκέντελ, το οποίο αποδείχθηκε το 1931, δείχνει ότι καμία απόδειξη της συνέπειας (των αξιωμάτων) δεν μπορεί να μεταφερθεί μέσα στη ίδια την αριθμητική. Ο Γκέντζεν απέδειξε το 1936 ότι η συνέπεια των αξιωμάτων της αριθμητικής έπεται από την καλή-θεμελίωση των αριθμών[[ε_0]].	1936;
3ο	Δοσμένων δύο οποιονδήποτε πολυέδρων ίσου όγκου, είναι πάντα δυνατό να χωρίσουμε το πρώτο σε πεπερασμένο αριθμό πολυέδρων έτσι ώστε να μπορούμε να ξανασχηματίσουμε το δεύτερο;	Λύθηκε με χρήση των αναλλοίωτων του Ντεν.	1900

Πρόβλημα	Σύντομη εκφώνηση	Κατάσταση	Έτος επίλυσης
4ο	Κατασκευάστε όλες τις μετρικές όπου όλες οι γραμμές είναι γεωδαισιακές.	Πολύ ασαφές έτσι ώστε να χαρακτηριστεί λυμένο ή όχι.	–
5ο	Είναι οι συνεχείς ομάδες αυτόματα διαφορίσιμες ομάδες;	Λύθηκε από τον Άντριου Γκλίσον, αναλόγως με το πως είχε διατυπωθεί το πρόβλημα. Αν όμως θεωρηθεί ως παρόμοιο με την εικασία των Χίλμπερτ-Σμιθ, παραμένει ακόμη άλυτο.	1953;
6ο	Η αξιωματοποίηση της φυσικής	Η κλασσική μηχανική αξιωματικοποιήθηκε από τον Χάμελ (1903).	1903
		Η Θερμοδυναμική αξιωματικοποιήθηκε από το Καραθεοδωρή	1909
		Η ειδική σχετικότητας αξιωματικοποιήθηκε από τον Ρόμπ και ανεξάρτητα από τον Καραθεοδωρή .	1914 & 1924
		Η θεωρία πιθανοτήτων αξιωματικοποιήθηκε από τον Κολμογκόρωφ .	1930
		Η κβαντική θεωρία πεδίου αξιωματικοποιήθηκε από τον Γουάιτμαν περί τα τέλη της δεκαετίας του 1950.	1950
7ο	Είναι ο α^{β} υπερβατικός, για αλγεβρικό $\alpha \neq 0{,}1$ και	Λύθηκε. Αποτέλεσμα: Ναι, παρουσιάζεται στο θεώρημα των	1935

Πρόβλημα	Σύντομη εκφώνηση	Κατάσταση	Έτος επίλυσης
	για άρρητο αλγεβρικό β ;	Γκέλφοντ-Σνάϊντερ.	
8ο	Η υπόθεση του Ρίμαν ("το πραγματικό μέρος κάθε μη-τετριμμένης ρίζας της συνάρτησης ζήτα είναι ½") και άλλα προβλήματα πρώτων αριθμών, όπως η εικασία του Γκόλντμπαχ και η εικασία των δίδυμων πρώτων αριθμών	Παραμένει άλυτο παρόλο που ανάλογα προβλήματα έχουν λυθεί. Η εικασία του Γκόλντμπαχ παραμένει επίσης άλυτη.	–
9ο	Βρείτε τον πιο γενικό νόμο του θεωρήματος αμοιβαιότητας σε κάθε αλγεβρικό σώμα αριθμών.	Ανακαλύφθηκε από τον Εμίλ Αρτίν	1923
10ο	Βρείτε έναν αλγόριθμο έτσι ώστε να καθορίσετε εάν κάθε δοσμένη πολυωνυμική Διοφαντική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές έχει ακέραια λύση.	Λύθηκε. Αποτέλεσμα: αδύνατο, στο Θεώρημα του Ματιγιάσεβιτς αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει τέτοιος αλγόριθμος.	1970
11ο	Λύστε τετραγωνικές μορφές με αλγεβρικούς αριθμητικούς συντελεστές.	Λύθηκε για τους ρητούς αριθμούς από τον Χάσσε και για τους ακέραιους από τον Σίγκελ κατά τη δεκαετία του 1930.	1923-1924 & 1930
12ο	Επεκτείνετε το θεώρημα των Κρόνεκερ-Βέμπερ σε αβελιανές επεκτάσεις των ρητών αριθμών σε κάθε αριθμητική βάση.	Η θεωρία αβελιανών σωμάτων κλάσεων δημιουργήθηκε από τον Τακάζι	1920
13ο	Να λυθούν οι εξισώσεις βαθμού 7 χρησιμοποιώντας αλγεβρικές συναρτήσεις δύο παραμέτρων.	Το πρόβλημα λύθηκε μερικώς από τον Βλαδιμήρ Άρνολντ ο οποίος βασίστηκε σε εργασία του Άντρει Κολμογκόροφ.	1957
14ο	Συμπεριφέρεται ο δακτύλιος των αναλλοίωτων μιας αλγεβρικής ομάδας σε	Λύθηκε. Αποτέλεσμα: Όχι, αντιπαράδειγμα κατασκευάστηκε	1959

Πρόβλημα	Σύντομη εκφώνηση	Κατάσταση	Έτος επίλυσης
	ένα πολυωνυμικό δακτύλιο πάντα ως πεπερασμένα παραγόμενος;	από τον Μασαγιόσι Ναγκάτα.	
15ο	Αυστηρή διατύπωση του απαριθμητικού λογισμού του Σούμπερτ.	Λύθηκε μερικώς: Μια αυστηρά μαθηματική θεωρία οφείλεται στον βαν ντερ Βέρντεν στα τέλη της δεκαετίας του 1930 και σε συναφή περιβάλλοντα, σε διάφορους άλλους ερευνητές	1930
16ο	Περιγράψτε τις σχετικές θέσεις των οβάλ που προέρχονται από πραγματικές αλγεβρικές καμπύλες και ως οριακοί κύκλοι ενός πολυωνυμικού διανυσματικού πεδίου στο επίπεδο.	Σχετικά με την τοπολογία των καμπύλων τα καλύτερα αποτελέσματα οφείλονται στους Ίτενμπεργκ και Βίρο. Σχετικά με τους οριακούς τύπους των ροών που δίνοντα από πολυώνυμα, τα καλύτερα μερικά αποτελέσματα οφείλονται στους Ιλιασένκο και Εκάλ στις αρχές της δεκαετίας του 1960.	1996
17ο	Εκφράστε μια μη αρνητική ρητή συνάρτηση ως πηλίκο αθροισμάτων τετρ αγώνων.	Λύθηκε. Αποτέλεσμα: Ναι, χάρις τον Εμίλ Αρτέν. Επιπλέον, τέθηκε ένα άνω όριο για τον αριθμό των τετραγωνικών όρων που είναι αναγκαίοι.	1927
18ο	(α) Υπάρχει πολύεδρο το οποίο δέχεται μόνο μια ανισόεδρη επικάλυψη σε τρεις διαστάσεις; (β) Ποιο είναι το πυκνότερο πακετάρισμα της σφαίρας?	(α) Λύθηκε. Αποτέλεσμα: Ναι (από τον Καρλ Ράινχαρτ). (β) Πιστεύεται ευρέως πως έχει λυθεί, από τον Τόμας Κάλιστερ Χέιλς με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Αποτέλεσμα: Η μεγαλύτερη πυκνότητα που μπορεί να επιτευχθεί από κλειστό πακετάρισμα, το καθένα με πυκνότητα περίπου 74%, όπως το κυβικό και αυτό του εξαγώνου.	

Πρόβλημα	Σύντομη εκφώνηση	Κατάσταση	Έτος επίλυσης
19ο	Οι λύσεις των κανονικών προβλημάτων του λογισμού των μεταβολών είναι πάντα αναλυτικές;	Λύθηκε. Αποτέλεσμα: ναι, αποδείχτηκε από τον Έννιο ντε Γκιόργκι και ,με διαφορετικές μεθόδους, από τον Τζων Φορμπς Νας.	1957
20ο	Έχουν λύσεις όλα τα προβλήματα μεταβολών με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες ;	Λύθηκε. Ένα σημαντικό θέμα της έρευνας του 20ου αιώνα, που κορυφώθηκε με τις λύσεις για την μη γραμμική περίπτωση .	1904
21ο	Απόδειξη της ύπαρξης των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που έχουν προκαθορισμένη μονοδρομική ομάδα.	Λύθηκε. Αρνητικά από τους Ανόσωφ και Μπόλιμπρουχ	1994
22ο	Ομογενοποίηση των αναλυτικών σχέσεων με την βοήθεια αυτομορφικών συναρτήσεων	Λύθηκε από τον Κέμπε (1907) και ανεξάρτητα από τον Πουανκαρέ	1907
23ο	Περαιτέρω ανάπτυξη του λογισμού μεταβολών.	Πολύ ασαφές για να θεωρηθεί λυμένο ή όχι	–

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ – Θεμελίωση της Γεωμετρίας

➢ Ευκλείδης – «Στοιχεία» (300 π.Χ)

Αξιώματα

Α1. Από κάθε δύο σημεία μπορούμε να φέρουμε ευθεία γραμμή.
Α2. Ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να προεκτείνεται συνεχώς και ευθύγραμμα.
Α3. Με οποιοδήποτε σημείο ως κέντρο και με οποιαδήποτε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος.
Α4. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.
Α5. Αν μια ευθεία γραμμή τέμνει δυο άλλες ευθείες γραμμές έτσι ώστε οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται να έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε, όταν οι δύο ευθείες προεκταθούν απεριόριστα, θα συναντηθούν από εκείνο το μέρος όπου σχηματίζονται οι μικρότερες των δύο ορθών γωνίες.

Κοινές έννοιες

1. Πράγματα που είναι ίσα προς τρίτο είναι και μεταξύ τους ίσα.
2. Αν ίσα προστεθούν με ίσα, τότε το άθροισμα θα είναι ίσα.
3. Αν ίσα αφαιρεθούν από ίσα, τότε τα υπόλοιπα θα είναι ίσα.
4. Πράγματα που εφαρμόζουν το ένα πάνω στο άλλο, είναι ίσα μεταξύ τους.
5. Το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους.

➢ Χίλμπερτ - Τα θεμέλια της Γεωμετρίας (1889)

Ι. Αξιώματα συνδέσεως

Ι1. Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β υπάρχει πάντοτε μια ευθεία a, η οποία τα περιέχει.
Ι2. Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β δεν υπάρχουν περισσότερες από μια ευθείες που να τα περιέχει.
Ι3. Επί μιας ευθείας υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία.
Ι4. Προς τρία οποιαδήποτε σημεία Α,Β,C, που δεν βρίσκονται πάνω σε μία και την ίδια ευθεία, υπάρχει ένα επίπεδο α το οποίο περιέχει τα τρία σημεία Α,Β,C.
Ι5. Προς τρία οποιαδήποτε σημεία Α,Β,C, τα οποία δεν ανήκουν (συγχρόνως) πάνω σε μία και την ίδια ευθεία, δεν υπάρχει παρά ένα και μόνον ένα επίπεδο που τα περιέχει.

I6. Αν δύο σημεία A, B μιας ευθείας a βρίσκονται σε ένα επίπεδο α τότε κάθε σημείο της a βρίσκεται στο επίπεδο α.
I7. Αν δύο επίπεδα α, β έχουν ένα κοινό σημείο A, τότε αυτά έχουν τουλάχιστον ένα ακόμα κοινό σημείο B.
I8. Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά σημεία που δεν βρίσκονται σε ένα επίπεδο
II. Αξιώματα διατάξεως

II1. Αν ένα σημείο B κείται μεταξύ δύο σημείων A και C, (συμβολικά A– B- C) τότε τα A, B,C είναι τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας και το B κείται επίσης μεταξύ των C και A,(συμβολικά C– B- A).
II2. Ως προς δύο σημεία A και C υπάρχει πάντοτε ένα σημείο B της ευθείας AC, τέτοιο ώστε το C να κείται μεταξύ των A και B,(συμβολικά A– C- B).
II3. Σε ότι αφορά τρία οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία μιας ευθείας, ένα και μόνο ένα από αυτά κείται μεταξύ των δύο άλλων.
II4. Οποιαδήποτε τέσσερα διαφορετικά σημεία A, B, C, D μιας ευθείας, μπορούν πάντα να διαταχθούν έτσι ώστε το B να κείται μεταξύ του A και του C και επίσης μεταξύ των A και D, και επιπροσθέτως, έτσι ώστε το C να κείται μεταξύ του A και D και επίσης μεταξύ του B και D.
II5. (Αξίωμα του Pasch) Ας είναι A, B,C τρία σημεία μη κείμενα σε ευθεία γραμμή και a μια ευθεία στο επίπεδο ABC, η οποία δεν συναντά κανένα από τα σημεία A, B,C. Αν κατ' ακολουθίαν η ευθεία a διέρχεται από ένα σημείο του τμήματος AB, τότε αυτή θα διέρχεται επίσης οπωσδήποτε από ένα σημείο του τμήματος AC ή από ένα σημείο του τμήματος BC.

III. Αξιώματα ισότητας

III1. Αν A, B είναι δύο σημεία μιας ευθείας a και ακόμα A΄ ένα σημείο πάνω στην ίδια ή σε μιαν άλλη ευθεία a΄ τότε σε μια καθορισμένη μεριά της a΄ ως προς το A΄ μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα και μόνον ένα σημείο B΄, τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB να είναι ίσο με το A΄B΄.
III2. Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα A΄B΄ και ένα τμήμα A″B″ είναι ίσα προς το αυτό τμήμα AB, τότε και το A΄B΄ είναι ίσο προς το τμήμα A″B″. Συντομότερα, αν δύο τμήματα είναι ίσα προς ένα τρίτο, τότε αυτά είναι και μεταξύ τους ίσα.
III3. Έστω AB και BC δύο ευθύγραμμα τμήματα πάνω σε μιαν ευθεία a, χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία και ακόμα A΄B΄ και B΄C΄ δύο τμήματα πάνω στην ίδια ή σε άλλη ευθεία a΄, επίσης χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία αν είναι AB ≡ A΄B΄ και BC ≡ B΄C΄, τότε θα είναι επίσης και AC ≡ A΄C΄.
III4. Θεωρούμε γωνία ∠ (h, k) κορυφής O και μια ευθεία a΄. Αν h΄ ημιευθεία της a΄ εκπορευόμενη από ένα σημείο O΄ επί της ευθείας τότε υπάρχει μία και μόνο μίαημιευθεία k΄ έτσι ώστε η γωνία ∠ (h, k) να είναι ίση προς τη γωνία ∠ (h΄, k΄). Συμβολικά γράφουμε ∠ (h, k) ≡ ∠ (h΄, k΄). Κάθε γωνία είναι ίση με τον εαυτό της, δηλαδή ∠ (h, k) ≡ ∠ (h, k) και ∠ (h, k) ≡ ∠ (k, h).

III5. Αν σε δύο τρίγωνα ABC και A΄B΄C΄ ισχύουν οι ισότητες AB ≡ A΄B΄, AC ≡ A΄C΄ και ∠BAC ≡ ∠B΄A΄C΄ τότε θα εκπληρώνονται επίσης και οι ισότητες ∠ABC ≡ ∠A΄B΄C΄ και ∠ACB ≡ ∠A΄C΄B΄.

IV. Αξίωμα παραλληλίας (Ευκλείδειο Αξίωμα).

IV.(Αξίωμα Playfair) Αν a ευθεία και A ένα σημείο κείμενο εκτός της ευθείας a, τότε υπάρχει μια και μόνο μία ευθεία που διέρχεται από το A και δεν τέμνει την a. Η ευθεία αυτή καλείται παράλληλη προς την a που διέρχεται από το A.

V. Αξιώματα συνέχειας

V1. (Αρχιμήδειο αξίωμα) Αν AB και CD είναι δυο ευθύγραμμα τμήματα, τότε πάνω στην ευθεία AB υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος από σημεία A_1, A_2, A_3, .., $A_{ν-1}$, Aν τέτοια ώστε τα τμήματα AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{ν-1}$ $A_ν$, να είναι ίσα προς το τμήμα CD και το σημείο B να κείται μεταξύ των $A_{ν-1}$ και $A_ν$.

V2. (Αξίωμα πληρότητας) Τα σημεία μιας ευθείας a συγκροτούν ένα τέτοιο σύστημα, το οποίο με τις σχέσεις της διάταξης και της ισότητας, δεν μπορεί να επεκταθεί (δηλαδή να του επισυνάψουμε και άλλα σημεία) εις τρόπον ώστε να παραμένουν αληθείς οι σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των στοιχείων του καθώς και οι βασικές ιδιότητες που απορρέουν από τα αξιώματα I-III και V1 .

➢ ΓΛΩΣΣΑΡΙ

Αξίωμα: Στην λογική, αξίωμα είναι μια πρόταση η οποία δεν αποδεικνύεται, αλλά θεωρείται είτε προφανής, είτε αφετηρία για έναν συλλογισμό . Έτσι, αξίωμα είναι μια λογική πρόταση, της οποίας η αλήθεια θεωρείται δεδομένη και χρησιμεύει ως αρχικό σημείο για την αναγωγή και το συμπέρασμα άλλων αληθών προτάσεων, ανάλογα με τη θεωρία που εφαρμόζεται. Στα μαθηματικά, ο όρος αξίωμα χρησιμοποιείται με δυο σχετικές αλλά διαφορετικές έννοιες: τα «λογικά» και «μη λογικά» αξιώματα. Και στις δύο περιπτώσεις, αξίωμα είναι μια μαθηματική πρόταση που χρησιμεύει ως αρχή για την εξαγωγή άλλων προτάσεων με λογικό τρόπο. Αντίθετα με τα θεωρήματα, τα αξιώματα δεν μπορούν γενικά να παραχθούν με αρχές επαγωγής (εκτός αν πλεονάζουν), ούτε γίνεται να αποδειχθούν, αφού αποτελούν αρχικά σημεία: δεν υπάρχει κάτι από το οποίο να απορρέουν (τότε θα ήταν θεωρήματα).Τα λογικά αξιώματα είναι συνήθως προτάσεις που γίνονται αποδεκτές ως καθολικά αληθείς (π.χ. το Α και Β συνεπάγεται το Α). Τα μη-λογικά αξιώματα (π.χ. $a + b = b + a$) ορίζουν ιδιότητες για την περιοχή κάποιας συγκεκριμένης μαθηματικής θεωρίας (όπως η Αριθμητική). Όταν χρησιμοποιείται με αυτή την έννοια, η λέξεις «αξίωμα», «αρχή» και «υπόθεση» σημαίνουν το ίδιο. Γενικά, ένα μη-λογικό αξίωμα δεν είναι μια προφανής αλήθεια, αλλά μάλλον μια τυπική λογική έκφραση που χρησιμοποιεί παραγωγικούς συλλογισμούς για την ανάπτυξη μιας μαθηματικής θεωρίας. Η διαδικασία του να δειχθεί ότι όλες οι προτάσεις μιας θεωρίας ή ενός συστήματος μπορούν να παραχθούν από ένα μικρό αριθμό από προτάσεις (τα αξιώματα) λέγεται αξιωματικοποίηση της θεωρίας. Συνήθως υπάρχουν πολλοί τρόποι να αξιωματικοποιηθεί μια μαθηματική περιοχή. Το σύνολο αυτό υπόκειται σε δύο περιορισμούς: α)τα αξιώματα να είναι συμβιβαστά, και β)ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Ακόμη θα πρέπει το πλήθος των αξιωμάτων να είναι όσο το δυνατό λιγότερο.

Αξιωματικό Σύστημα : Αξιωματικό σύστημα είναι ένα σύνολο κανόνων λογισμού που διέπουν ένα σύνολο αντικειμένων. Τα αξιωματικά συστήματα για να αντιπροσωπεύουν κάτι υπαρκτό, πρέπει να είναι συμβιβαστά. Ενδέχεται να υπάρχει ουσιαστικά μόνο ένα είδος αντικειμένων που να υπακούει στους κανόνες και σ’ αυτή την περίπτωση το σύστημα ονομάζεται κατηγορικό ή και να υπάρχουν πολλά (λόγω χάριν υπάρχουν άπειρες ομάδες). Ενδέχεται ένα δεδομένο σύνολο κανόνων να είναι τέτοιο που κάθε πρόταση που βγάζει νόημα να μπορεί είτε να αποδειχθεί είτε να καταρριφθεί. Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται παραγωγικά πλήρες.

Άπειρα σύνολα. Σύνολα με άπειρα στοιχεία που δημιούργησαν μεγάλα προβλήματα όποτε οι μαθηματικοί θέλησαν να χρησιμοποιήσουν λογική για την μελέτη των συνόλων. Για παράδειγμα το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι απειροσύνολο. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ένα άλλο απειροσύνολο.

Υπάρχει υποσύνολο απειροσυνόλου που είναι ισοδύναμο με γνήσιο υποσύνολό του. Έστω A το σύνολο των φυσικών αριθμών και B το σύνολο των τετραγώνων των φυσικών αριθμών. Το B είναι υποσύνολο του A, γιατί κάθε τετράγωνο φυσικού αριθμού είναι φυσικός αριθμός. Το 3 δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, άρα το B είναι γνήσιο υποσύνολο του A. Η συνάρτηση φ(κ)=κ2 είναι συνάρτηση αντιστοίχισης, με βάση την οποία κάθε στοιχείο του A και του B αντιστοιχεί και αντιστοιχίζεται. Άρα το B είναι ισοδύναμο με το A.

Το απειροσύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι ισοδύναμο με το απειροσύνολο των πραγματικών.

Απόδειξη:

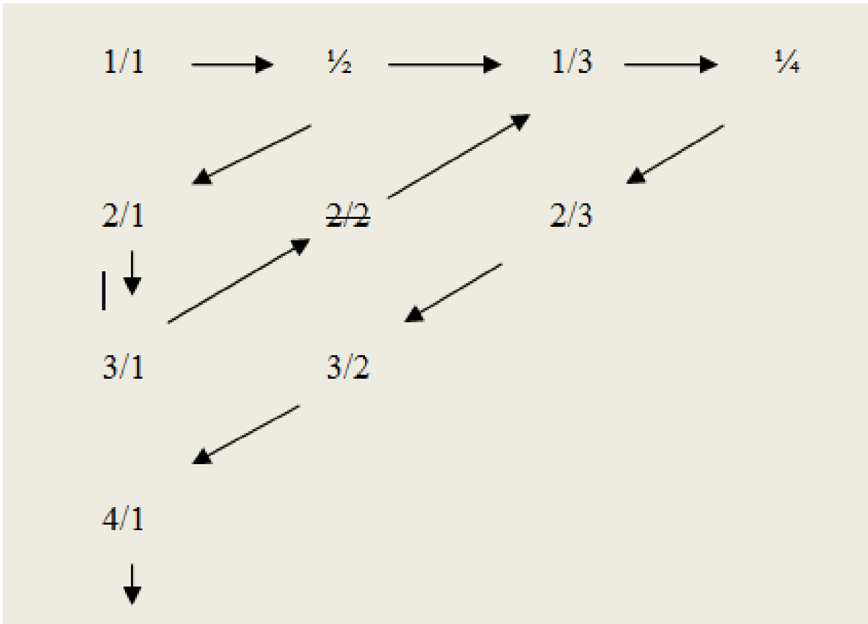
Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση f(n)=r η οποία αντιστοιχεί κάθε φυσικό n στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Έστω ο πραγματικός αριθμός q τέτοιος, ώστε το i-στο ψηφίο του στο δεκαδικό σύστημα να είναι 9 πλην το i-στο ψηφίο του f(i). Υπάρχει κάποιος φυσικός m, τέτοιος ώστε f(m)=r. Επομένως, το μιοστό ψηφίο του τ είναι a=9-a, άρα 2a=9, άρα a=4,5 που είναι άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει συνάρτηση f. Άρα το σύνολο των φυσικών δεν είναι ισοδύναμο με το σύνολο των πραγματικών. Το σύνολο των φυσικών είναι υποσύνολο των πραγματικών, άρα ο πληθάριθμος των φυσικών είναι μικρότερος από τον πληθάριθμο των πραγματικών.

Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα Ένα σύνολο λέγεται αριθμήσιμο αν υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα σε αυτό και τους φυσικούς αριθμούς, έτσι ώστε το κάθε στοιχείο του να έχει μια ετικέτα που θα φέρει έναν μοναδικό θετικό αριθμό, αν δηλαδή σε κάθε θετικό ακέραιο αντιστοιχήσουμε και από ένα μοναδικό στοιχείο του συνόλου.

Για παράδειγμα οι τετράγωνοι αριθμοί αποτελούν αριθμήσιμο σύνολο.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \nu \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 4 & 9 & \nu^2 \end{array}$$

Το ίδιο ισχύει για τους θετικούς ρητούς αριθμούς Αυτό επιτυγχάνεται κατά τον καλύτερο τρόπο αν τους διατάξουμε σ’ ένα ορθογώνιο και διαγράψουμε τους διπλούς (π.χ. 1/3 = 2/6=3/9=…). Στη συνέχεια διατρέχουμε τους υπόλοιπους όπως φαίνεται στο σχήμα μετρώντας κάθε νέο ρητό που συναντάμε:



Ο Καντόρ ήταν αυτός που πραγματοποίησε την εντυπωσιακή ανακάλυψη ότι υπάρχουν σύνολα που δεν είναι αριθμήσιμα. Οι πραγματικοί αριθμοί ανάμεσα στο 0 και το 1 αποτελούν ένα τέτοιο σύνολο. Όπως έδειξε, αν ήταν αριθμήσιμο, θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε σε αντίφαση με τον ακόλουθο τρόπο: Ας τους απαριθμήσουμε σε έναν κατάλογο, φροντίζοντας να αποφύγουμε τις επαναλήψεις που οφείλονται στα επαναλαμβανόμενα εννιάρια (λ.χ. 0,012=0,011999999999999…) . Ας πάρουμε το πρώτο ψηφίο του πρώτου αριθμού, το δεύτερο ψηφίο του δευτέρου αριθμού και ούτω καθεξής το νιοστό ψηφίο του νιοστού αριθμού και ας δημιουργήσουμε έναν νέο αριθμό ως εξής: αν το ψηφίο που έχουμε μπροστά μας είναι το 5, το αντικαθιστούμε με δύο. Αν δεν είναι 5, το αντικαθιστούμε με 5. Ας θεωρήσουμε τώρα τον αριθμό που δημιουργήσαμε με αυτόν τον τρόπο. Ο αριθμός δεν ανήκει στον κατάλογό μας γιατί αν ανήκε θα κατείχε για κάποιον ν τη νιοστή θέση . Όμως ο αριθμός μας διαφέρει από τον νιοστό αριθμό στο νιοστό ψηφίο. Συνεπώς ο αριθμός δεν ανήκει στον κατάλογό μας. Είχαμε ωστόσο υποθέσει ότι ο κατάλογος περιείχε όλους τους πραγματικούς αριθμούς ανάμεσα στο 0 και το 1.Οδηγηθήκαμε λοιπόν σε αντίφαση και συνεπώς οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι αριθμήσιμοι.

Θεωρία Αριθμών Η θεωρία αριθμών είναι η μελέτη των ακεραίων. Η θεωρία αριθμών χωρίζεται σε πολλούς κλάδους ανάλογα με τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται. Η αναλυτική θεωρία αριθμών χρησιμοποιεί την ανάλυση, συνήθως υπολογίζοντας ποσότητες που εκφράζονται ως ολοκληρώματα. Η αλγεβρική θεωρία αριθμών χρησιμοποιεί ολοένα και περισσότερο τις δομικές ιδιότητες της Άλγεβρας. Με βάση αυτήν την έννοια του ακεραίου: ένας αλγεβρικός ακέραιος είναι μια ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης της μορφής $x^{\nu} + \alpha_1 x^{\nu-1} +\ldots+ \alpha_{\nu} = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Οι συνήθεις ακέραιοι είναι αλγεβρικοί ακέραιοι (ο ακέραιος κ είναι ρίζα της εξίσωσης $x - \kappa = 0$). Επίσης οι ρίζες των ακεραίων είναι αλγεβρικοί ακέραιοι (η $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$).

Λογική. Είναι η μελέτη των τρόπων συλλογισμού. Με άλλα λόγια, είναι το σύνολο των κανόνων που αποδεχόμαστε όταν επιχειρηματολογούμε , όπως :ο Σωκράτης είναι άνθρωπος, όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί, άρα ο Σωκράτης είναι θνητός. Ο σκοπός της είναι να βρει τους συλλογισμούς εκείνους με τους όποιους θα σκεπτόμαστε λογικά (σωστά). Τα προβλήματα αναφύονται όταν εφαρμόζουμε αυτούς τους κανόνες στα άπειρα σύνολα.

Μαθηματική λογική ονομάστηκε από τον Τζουζέπε Πεάνο αυτό που αργότερα ονομάστηκε συμβολική λογική. Στην κλασσική της έκδοση, οι βασικές αρχές θυμίζουν τη λογική του Αριστοτέλη, γραμμένες όμως με συμβολικό τρόπο αντί για φυσική γλώσσα. Ορισμένοι από τους πιο φιλοσοφικούς μαθηματικούς έκαναν προσπάθειες να χειριστούν τις πράξεις της τυπικής λογικής με συμβολικό ή αλγεβρικό τρόπο, όπως ο Λάιμπνιτς και ο Λάμπερτ, αλλά οι προσπάθειές τους έμειναν άγνωστες και απομονωμένες. Ήταν ο Τζορτζ Μπουλ και ο Αύγουστος Ντε Μόργκαν, στο μέσο του 19ου αιώνα που παρουσίασαν ένα συστηματικό τρόπο μελέτης της λογικής. Το παραδοσιακό Αριστοτέλειο δόγμα της λογικής αναμορφώθηκε και συμπληρώθηκε, και από αυτή την εξέλιξη προέκυψε ένα επαρκές εργαλείο για τη μελέτη των θεμελιακών ιδεών των μαθηματικών. Θα ήταν παραπλανητικό να ισχυριστεί κανείς ότι οι θεμελιακές διαμάχες που υπήρχαν την περίοδο 199-1925 έχουν όλες λυθεί, αλλά η φιλοσοφία των μαθηματικών έχει διευκρινιστεί σε μεγάλο βαθμό από τη «νέα» λογική.

Η αρχική Ελληνική ανάπτυξη της λογικής έδωσε μεγάλη έμφαση στις μορφές των ισχυρισμών, ενώ η συμπεριφορά της τρέχουσας μαθηματικής λογικής μπορεί να συνοψιστεί ως η συνδυαστική μελέτη του περιεχομένου. Αυτό καλύπτει τόσο το συντακτικό όσο και την ερμηνεία, δηλαδή τόσο τη μορφή των εκφράσεων όσο και το νόημά τους. Στην επιστήμη υπολογιστών, εντελώς συντακτική μελέτη επιτρέπει σε μια συμβολοσειρά από μια τυπική γλώσσα να μετασχηματιστεί από ένα μεταγλωττιστή σε μια σειρά εντολών μηχανής. Η εννοιολογική μελέτη επιτρέπει σε έναν προγραμματιστή να επιλέξει ποιες συμβολοσειρές να χρησιμοποιήσει για να επιτύχει ένα συγκεκριμένο στόχο.

Μη αρχιμήδειες ποσότητες:

Το αξίωμα του Αρχιμήδη λέει ότι αν x και y είναι δύο ποσότητες με $x < y$ τότε υπάρχει αριθμός ν τέτοιος ώστε $\nu x > y$. Με άλλα λόγια, αν το x επαναληφθεί αρκετές φορές, το αποτέλεσμα θα είναι μια ποσότητα μεγαλύτερη από του y. Το απλούστερο παράδειγμα ότι κάτι τέτοιο δεν είναι πάντα υποχρεωτικό να ισχύει δίνεται από τους «αριθμούς» της μορφής $\alpha + \beta t$ με τον κανόνα $\alpha + \beta t < \gamma + \delta t$ αν και μόνο αν $\alpha < \gamma$ ή $\alpha = \gamma$ και $\beta < \delta$. Προσθέτουμε αυτού του είδους «αριθμούς» σύμφωνα με τον κανόνα

$$(\alpha + \beta t) + (\gamma + \delta t) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta t).$$

Τους πολλαπλασιάζουμε σύμφωνα με τον κανόνα

$(\alpha + \beta t)(\gamma + \delta t) = (\alpha\gamma) + (\beta\gamma + \alpha\delta)t$.

Έτσι το $t=0+1t$ είναι μικρότερο από το $1 = 1 + 0t$ και δεν υπάρχει «αριθμός» ν τέτοιος ώστε $\nu t > 1$. Για να το διαπιστώσουμε θέτουμε το $\nu = \alpha + \beta t$. Τότε $\nu t=(\alpha+\beta t)t = \alpha t$. Όμως $\alpha t<1$.

Οι αριθμοί αυτού του είδους δεν είναι εντελώς αλλόκοτοι. Μπορούμε να τους θεωρήσουμε ως πληροφορίες σχετικά με το γράφημα μιας συνάρτησης. Το τμήμα «α» του $\alpha + \beta t$ είναι η τιμή της συνάρτησης σε ένα συγκεκριμένο σημείο και το «β» είναι η κλίση του γραφήματος στο συγκεκριμένο σημείο. Ο κανόνας είναι ότι στο συγκεκριμένο σημείο μια συνάρτηση είναι μεγαλύτερο από την άλλη αν είτε έχει μεγαλύτερη τιμή είτε οι τιμές είναι ίδιες αλλά έχει μεγαλύτερη κλίση.

Συνάρτηση. Στα μαθηματικά, συνάρτηση, ή απεικόνιση όπως ονομάζεται διαφορετικά, είναι μια αντιστοίχιση μεταξύ δύο συνόλων, που καλούνται σύνολο ορισμού και σύνολο τιμών, κατά την οποία κάθε ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο στοιχείο του πεδίου τιμών. Αν f είναι μια συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B, γράφουμε $f:A \rightarrow B$. Ιστορικά η έννοια της συνάρτησης εισήχθη στα μαθηματικά από τον θεμελιωτή του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού Γερμανό μαθηματικό Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς το 1694. Οι όροι συνάρτηση και απεικόνιση είναι συνώνυμοι. Ο πρώτος χρησιμοποιείται περισσότερο στην στοιχειώδη άλγεβρα και τον απειροστικό λογισμό, ενώ ο δεύτερος στα διακριτά μαθηματικά.

Σύνολο. Ο Γκέοργκ Καντόρ, ιδρυτής της Αφελούς Θεωρίας Συνόλων, στο «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre», έδωσε τον ακόλουθο ορισμό για το σύνολο: «Σύνολο ονομάζουμε κάθε συλλογή M, (σαφώς) διακριτών αντικειμένων m (που ονομάζουμε «στοιχεία» του συνόλου M), της διαίσθησης ή της σκέψης μας, που θεωρούμε ως ολότητα.»Τα αντικείμενα αυτά καλούνται στοιχεία του συνόλου και μπορούν να είναι οτιδήποτε, από αριθμούς μέχρι ανθρώπους ή γράμματα του αλφαβήτου. Ένα σύνολο λοιπόν αποτελείται από στοιχεία. Στοιχεία ενός συνόλου μπορεί να είναι άλλα σύνολα ή και σύνολα συνόλων. Αν το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο A τότε λέμε ότι το στοιχείο x περιέχεται στο σύνολο A ή ότι το σύνολο A περιέχει το στοιχείο x ή ακόμα ότι το στοιχείο x είναι μέλος του συνόλου A. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $x \in A$ αν το x ανήκει στο A και το συμβολισμό $x \notin A$ αν το x δεν ανήκει στο A.

Υπάρχει ένα σύνολο το οποίο δεν έχει στοιχεία. Αυτό το σύνολο ονομάζεται το κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\{\}$ ή $\emptyset$. Η ύπαρξη αυτού του συνόλου αποτελεί ένα από τα αξιώματα της συνηθέστερης αξιωματικής θεωρίας συνόλων, αυτής των Zermelo–Fraenkel ή ZF. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μόνο ένα κενό σύνολο. Σημειώνεται ότι στην ZF, αντίθετα με την Αφελή Θεωρία Συνόλων, τα σύνολα μπορούν να έχουν στοιχεία μόνο άλλα σύνολα.

Βιβλιογραφία:

Αναπολιτάνος Α. Διονύσιος, Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, Εκδόσεις Νεφέλη, 7η έκδοση, Αθήνα 2009.

Χριστοδουλίδης, Παύλος. (Επιμ.) Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών: από τον Frege ως τον Kreisel 1884-1979, Επιλογή άρθρων, 2 τόμοι, Εκδόσεις Εγνατία, Θεσσαλονίκη 1980.

Reid Constance, Ο προκλητικός κος Χίλμπερτ, Το παρελθόν και το μέλλον των Μαθηματικών, Μετάφραση: Γεώργιος Κυριακόπουλος, 1η έκδοση Εκδοτικός Οίκος Τραυλός, Αθήνα 2007.

Ewald William (1996) , *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics (Volume II),* σελ.1012-1052, Oxford University Press, (επανέκδοση 2005).

Hilbert David, Για το Άπειρο, Μετάφραση: Μ. Κωνσταντινίδης, Εκδόσεις Τροχαλία – Γ. Τρουφάκος & ΣΙΑ Ε.Ε, 1η έκδοση Αθήνα Ιούλιος 1998.

Hilbert, D. (1888) «Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten», Mathematische Annalen, 32, 342-350, στο Gesammelte Abhandlungen 2, 154-161.

Hilbert, D. (1891) «Über die reellen, Züge algebraischer Kurven», Mathematische Annalen 38, 115-138, στο Gesammelte Abhandlungen 2, 415-436.

Hilbert, D. (1893) «Über die Theorie der algebraischen Invarianten», Mathematical papers read at the International Mathematical Congress, Chicago, 1893, 116-124, Macmillan, Νέα Υόρκη, στο Gesammelte Abhandlungen 2, 276-383.

Hilbert, D. (1897) «Die Theorie der algebraischen Zahlkörper» (Zahlbericht), Jahresbericht den Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 4, 175-546 στο Gesammelte Abhandlungen, I, 63-363, αγγλική έκδοση, μετάφραση και επιμέλεια F. Lemmermeyer and N. Schappacher, Springer Verlag, Νέα Υόρκη.

Hilbert, D. (1899) Grundlagen der Geometrie (Festschrift zur Einweihung des Göttinger Gauss-Weber Denkmals), Λειψία αναθεωρημένη 2η έκδ. 1903, πολλές επανεκδόσεις.

Hilbert, D. (1900) «Über den Zahlbegriff», Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 8, 180-184, στο Grundlagen der Geometrie, 7η εκδ., παράρτημα VI, σελ 241-246.

Hilbert, D. (1901) «Mathematische Probleme», Archiv für Mathematik und Physik 1, 44-63 και 213-237 ανατύπωση στο Gesammelte Abhandlungen, τ. 3, σελ. 290-329, αγγλική μετάφραση «Mathematical Problems: Lecture Delivered Before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900», μετφρ. Mary F. Winston (1902), Bulletin of the American Mathematical Society, 8, 437-479.

Hilbert, D. (1904) «Über das Dirichlesche Prinzip», Mathematische Annalen, 59, 161-186 στο Gesammelte Abhandlungen, 3, 15-37.

Hilbert, D. (1906) «Zur Varationsrechnung», Mathematische Annalen, 62, 351-370 στο Gesammelte Abhandlungen, 3, 38-55.

Hilbert, D. (1909) «Hermann Minkowski», Göttingen Nachrichten, 72-101 ανατύπωση στο Mathematische Annalen, 68 (1910), 445-471, ανατύπωση στο Gesammelte Abhandlungen 3, 339-364.

Hilbert, D. (1917) « Axiomatisches Denken», Mathematische Annalen, 78, 405-415, στο Gesammelte Abhandlungen 3, 146-156.

Hilbert, D. (1922) «Neubegründung der Mathematik, Erste Mitteilung, Abhandlungen Mathematische Seminar», Hamburg I, 157-177, στο Gesammelte Abhandlungen 3, 157-177.

Hilbert, D. (1926) «Über das Unendliche», Mathematische Annalen, 95, 161-190, στο Grundlagen der Geometrie, 7η εκδ. Παράρτημα VIII, 262-288.

Hilbert, D. (1935) Gesammelte Abhandlungen, 3 τόμοι, Springer Verlag, Βερολίνο, 1932, 1933, 1935.

Hilbert, D. (1993) «Theory of Algebraic Invariants», μετάφραση του Reinhard C. Laubenbachei, επμέλεια – εισαγωγή του Bernd Sturmfels, Cambridge University Press, Καίμπριτζ.

Kreisel, G. «Hilbert's Programm» στο P.Benacerraf – H. Putnam (eds) Philosophy of Mathematics: Selected Readings σ.σ. 157-180

------- «Mathematical Significance of Consistency Proofs» Journal of Symbolic Logic 23, 1958 σσ.155-182.

https://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ge/hilbert.htm

https://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hilbert.html