



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ
ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ

Όνομα: Κωνσταντίνα

Επώνυμο: Δαχλύθρα

Αρ. Μητρώου: 201100041

Επιβλέπων καθηγητής: Βασίλειος Σπανός

Μήνας: Ιούλιος

Ακαδημαϊκό Έτος: 2016 - 2017

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Βασίλειο Σπανό που με βοήθησε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της πτυχιακής εργασίας.

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	4
ABSTRACT	5
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	7
ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ.....	9
1. ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ.....	11
1.1 Η ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ – ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ HUBBLE:.....	12
1.2 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ FRIEDMANN:.....	15
1.3 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (equation of state):.....	19
1.4 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ:.....	27
1.5 ΠΙΘΑΝΑ ΣΕΝΑΡΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ:	29
1.6 ΗΛΙΚΙΑ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ:	33
1.7 ΟΜΟΚΙΝΟΥΜΕΝΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ, ΓΩΝΙΑΚΗ ΔΙΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ, ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΦΩΤΕΙΝΟΤΗΤΑΣ & ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ:.....	37
2. ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ (INFLATION).....	55
2.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΠΙΛΥΕΙ Ο ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ.....	56
2.2 ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ.....	58
2.2.1 ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΟΥ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ	58
2.2.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ	59
2.2.3 ΤΟ ΠΕΔΙΟ INFLATON, Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΑΡΓΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ.....	62
2.2.4 Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ.....	69
3. ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ	76
Εισαγωγή.....	77
3.1 ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ	78
3.2 ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΟΥ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ	88

3.3	ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΣΕ ΚΛΙΜΑΚΕΣ ΥΠΕΡ-ΟΡΙΖΟΝΤΑ	96
3.4	ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΣΕ ΚΛΙΜΑΚΕΣ ΥΠΟ-ΟΡΙΖΟΝΤΑ	102
4.	Η ΚΟΣΜΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ ΚΑΙ Η ΠΟΛΩΣΗ ΤΗΣ	113
4.1	Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΠΟΛΩΣΗΣ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ	114
4.2	ΣΚΕΔΑΣΗ THOMSON, ΠΟΛΩΣΗ ΤΗΣ ΚΟΣΜΙΚΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ	115
4.3.	ΤΡΟΠΟΙ ΠΟΛΩΣΗΣ Ε ΚΑΙ Β ΤΗΣ ΚΟΣΜΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ	121
4.4.	ΤΟ ΦΑΣΜΑ C_{ℓ}^{TE}	124
	ΕΠΙΛΟΓΟΣ	127
	Αναφορές	129

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην πτυχιακή αυτή εργασία, αναλύεται το σύγχρονο κοσμολογικό μοντέλο, με τη βοήθεια της συμβολής του πληθωρισμού, της θεωρίας διαταραχών και της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB), με σκοπό να δημιουργηθεί μία σύνδεση μεταξύ της τρέχουσας δομής του σύμπαντος και της πρώιμης δομής του.

Αρχικά, κάνουμε μία εισαγωγή και μία ιστορική αναδρομή για το κοσμολογικό αυτό μοντέλο.

Κατόπιν, αναλύουμε τις βασικές συνιστώσες του κοσμολογικού προτύπου (Friedmann – Robertson – Walker), μέσω των εξισώσεων Friedmann, της διαστολής Hubble του σύμπαντος και της καταστατικής εξίσωσης των στοιχείων που το αποτελούν. Επιπρόσθετα, συζητούμε κάποια πιθανά σενάρια της εξέλιξης του σύμπαντος, ορίζουμε κάποια απαραίτητα μεγέθη για τις κοσμολογικές κλίμακες και πραγματοποιούμε τον υπολογισμό της ηλικίας του σύμπαντος.

Στη συνέχεια, αναφερόμαστε στην περίοδο του πληθωρισμού. Παραθέτουμε τους λόγους για τους οποίους είναι αναγκαία η θεωρία του πληθωρισμού, περιγράφουμε συνοπτικά το βασικό μοντέλο και μελετάμε την εξέλιξη των κοσμολογικών κλιμάκων.

Έπειτα, κάνουμε μία περαιτέρω συζήτηση για τη θεωρία διαταραχών, η οποία απαντά στο ερώτημα του πως οι πρώιμες διαταραχές πυκνότητας εξελίχθηκαν στις σημερινές μεγάλης κλίμακας δομές. Αφού παραθέσουμε κάποια γενικά στοιχεία της Νευτώνειας θεωρίας διαταραχών, μελετάμε τις διαταραχές κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού και τη μετέπειτα εξέλιξή τους σε κλίμακες υπερ-ορίζοντα και υπο-ορίζοντα αντίστοιχα.

Τέλος, κάνουμε μία αναφορά στην κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου και στην πόλωσή της, η οποία αποτελεί ιδιαίτερα σημαντική πηγή πληροφοριών για την ανακατασκευή του κοσμολογικού μοντέλου. Ασχολούμαστε με τη σκέδαση Thomson, η οποία αποτελεί το μηχανισμό δημιουργίας της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου και την αιτία της πόλωσής της και εισάγουμε τις παραμέτρους Stokes, μέσω των οποίων μπορούμε να συνθέσουμε τους E και B τρόπους πόλωσης.

ABSTRACT

In this paper, we attempt to analyze the contemporary cosmological model, through inflation and perturbation theories and the anisotropies in cosmic microwave background radiation and its polarization. This effort is made in order to achieve to establish a connection between the current structure of the universe and its primordial form.

First of all, we will make an introduction and a brief reference of the historical evolution of this cosmological model.

In addition, we will analyze the basic components of the cosmological model : the Friedmann equations, Hubble's expansion and the equation of state, which characterizes all the elements of the universe. We will also discuss some possibilities concerning further evolution of the universe, we will give the definitions of some quantities that are necessary when the discussion concerns cosmological scales and use all the information above in order to compute the age of the universe.

Furthermore, we will make an extended reference to the inflationary epoch. We will point out the reasons why inflation is needed and the problems that its presence may solve. Then, we will describe the basic inflationary model which assumes a scalar field called the inflaton as the cause for the beginning of inflation and present the framework of the slow-roll approximation. After that, we will discuss the importance of inflation for the evolution of cosmological scales.

Moreover, we will attempt a discussion about the perturbation theory, which answers the question how the small primordial fluctuations turned into the present large-scale structure of the universe. After giving a general description of the Newtonian perturbation theory, we will study the perturbations during inflation and their evolution at sub-horizon and super-horizon scales.

Finally, the analysis will focus on the cosmic microwave background radiation and its polarization, which constitutes a very important source of information and can lead to the reconstruction of the cosmological model. We study the Thomson scattering of the primordial photons as the mechanism responsible for the production of the cosmic

microwave background radiation and the cause of the generation of its polarization. We also induce the Stokes parameters and the combination of two of them. Those quantities can fully describe the properties of the polarization as well as they can compose the E and B modes of the polarization. At the end, we present the temperature-polarization cross-correlation power spectrum and make a brief commentary about the information that this provides.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

[10]Το μοντέλο Λ CDM (Lamda Cold Dark Matter) είναι μία παραμετροποίηση του γνωστού κοσμολογικού μοντέλου της Μεγάλης Έκρηξης (Big Bang), το οποίο κυριάρχησε στο τέλος της δεκαετίας του 1990. Σύμφωνα με το κοσμολογικό αυτό μοντέλο, η σκοτεινή ενέργεια (ή ενέργεια του κενού) είναι το στοιχείο εκείνο που προκαλεί την παρατηρούμενη επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος, παρά την ελκτική επίδραση των βαρυτικών δυνάμεων. Επιπρόσθετα, η θεωρία αυτή καθιστά υπεύθυνη την ψυχρή σκοτεινή ύλη για το σχηματισμό των μεγάλης κλίμακας δομών που παρατηρούμε σήμερα σε γαλαξίες και συμπλέγματα γαλαξιών (clusters). Χαρακτηρίζεται ως *ψυχρή* σκοτεινή ύλη, διότι η ταχύτητά της είναι πολύ μικρότερη από εκείνη του φωτός, κατά την περίοδο της ίσης κυριαρχίας ακτινοβολίας και ύλης.

Άλλοι παράγοντες, που εμπεριέχονται στην περιγραφή του μοντέλου, είναι μια διαστολή του μετρικού χώρου (η οποία τεκμηριώνεται μέσω της ερυθρομετατόπισης (z) φασματικών απορροφήσεων ή γραμμών εκπομπής στο φως μακρινών γαλαξιών) και η καθιέρωση της γενικής σχετικότητας ως η κατάλληλη βαρυτική θεωρία για την εξέλιξη των πρώιμων ανισοτροπιών στις σημερινές δομές του σύμπαντος.

Το μοντέλο Λ CDM συχνά αναφέρεται στην κοσμολογία ως *το πρότυπο μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης*, καθώς είναι το απλούστερο μοντέλο που μπορεί να εξηγήσει τα ακόλουθα:

- Την ύπαρξη και τη δομή της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB)
- Την αφθονία σε ελαφρότερα στοιχεία, όπως το υδρογόνο, το δευτέριο, το ήλιο και το λίθιο (H, D, He, Li), που παρατηρείται στο σύμπαν.
- Τη μεγάλης κλίμακας δομή στην κατανομή των γαλαξιών.
- Την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος που παρατηρείται από το φως μακρινών γαλαξιών και υπερκαινοφανών αστέρων

Μία απαραίτητη προσθήκη στο μοντέλο Λ CDM είναι η θεωρία του πληθωρισμού, η οποία εδραιώνει τον πληθωρισμό ως την αιτία δημιουργίας των πρώιμων ανισοτροπιών που εξελίχθηκαν στις σημερινές παρατηρούμενες δομές.

Σημειώνεται ότι, ιστορικά, είναι η πρώτη φορά που υπάρχει ξεκάθαρη εικόνα για το κοσμολογικό μοντέλο που επικρατεί και στο γεγονός αυτό βοήθησαν οι παρατηρήσεις από το φάσμα της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου, το οποίο αποτελεί ένα ‘στιγμιότυπο’ των συνθηκών που επικρατούσαν στο σύμπαν κατά την περίοδο της τελευταίας σκέδασης. [10]

Τέλος, αναφέρουμε ενδεικτικά ότι το απλό Λ CDM κοσμολογικό μοντέλο στηρίζεται σε έξι παραμέτρους:

Φυσική παράμετρος της βαρυονικής πυκνότητας (physical baryon density parameter)	$\Omega_b h^2$	0.02226 ± 0.00023
Φυσική παράμετρος πυκνότητας της σκοτεινής ύλης (physical dark matter density parameter)	$\Omega_c h^2$	0.1186 ± 0.0020
Ηλικία του σύμπαντος	T_0	13.8 ± 0.04 Gyr
Βαθμωτός φασματικός δείκτης (scalar spectral index)	n_s	0.968 ± 0.006
Εύρος της διαταραχής της καμπυλότητας $\Delta^2 \mathcal{R}$ (curvature fluctuation amplitude)	$\ln(10^{10} \Delta^2 \mathcal{R})$	3.062 ± 0.029
Οπτικό βάθος για την περίοδο του επαναιονισμού (reionization optical depth)	τ_a	0.066 ± 0.016

Με βάση τις παραμέτρους αυτές, μπορούν να υπολογιστούν οι τιμές και για τις υπόλοιπες παραμέτρους του μοντέλου, όπως, για παράδειγμα, για την παράμετρο Hubble.

Οι τιμές του πίνακα πάρθηκαν από το [2].

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ

Η ανακάλυψη της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου, το 1965, αποτέλεσε έναν θεμέλιο λίθο για τα κοσμολογικά μοντέλα της Μεγάλης Έκρηξης. Από εκείνη τη στιγμή και μετά, έγινε γενικά αποδεκτό ότι το σύμπαν βρισκόταν αρχικά σε μία θερμή, πυκνή κατάσταση και από τότε και μετά διαστέλλεται με το χρόνο, με το ρυθμό διαστολής να εξαρτάται από τα διαφορετικά στοιχεία που το αποτελούν.

Κατά τη δεκαετία του 1970, η κοσμολογική έρευνα εστιάστηκε σε καθαρά βαρυονικά μοντέλα. Τα μοντέλα αυτά, ωστόσο, δεν ήταν ικανά να εξηγήσουν τις μεγάλης κλίμακας δομές των γαλαξιών, δεδομένων των μικρών ανισοτροπιών που παρατηρούνταν στο φάσμα της ακτινοβολίας υποβάθρου. Συνεπώς, στις αρχές της δεκαετίας του 1980, οι κοσμολόγοι συνειδητοποίησαν ότι το πρόβλημα αυτό θα μπορούσε να λυθεί αν η ψυχρή σκοτεινή ύλη κυριαρχούσε της βαρυονικής.

Το γεγονός αυτό έφερε στο προσκήνιο τη θεωρία του πληθωρισμού, η οποία κινητοποίησε τη μελέτη μοντέλων, στα οποία η πυκνότητα της ενέργειας είχε την κρίσιμη τιμή της. Η έρευνα, λοιπόν, το διάστημα εκείνο, επικεντρώθηκε στην ψυχρή σκοτεινή ύλη για μοντέλα με κρίσιμη πυκνότητα ύλης, η οποία αποτελούνταν κατά 95% από ψυχρή σκοτεινή ύλη και κατά 5% από βαρυονική ύλη.

Το μοντέλο αυτό είχε επιτυχία ως προς την εξήγηση του σχηματισμού των γαλαξιών και των συμπλεγμάτων τους, όμως, απαιτούσε μικρότερη τιμή για την παράμετρο Hubble από αυτήν που επιδείκνυαν οι παρατηρήσεις. Επιπρόσθετα, παρατηρήσεις κατά το 1988-1990, έδειξαν μεγαλύτερης κλίμακας δομές σε συμπλέγματα γαλαξιών από τις προβλεπόμενες από το μοντέλο. Οι δυσκολίες αυτές οξύνθηκαν με την ανακάλυψη της ανισοτροπίας της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου (COBE, 1992), γεγονός το οποίο έφερε στο προσκήνιο διάφορα τροποποιημένα μοντέλα, ένα εκ των οποίων ήταν και το Λ CDM.

Το Λ CDM επικράτησε ως το πρότυπο μοντέλο, εξαιτίας των παρατηρήσεων του 1998 που υπέδειξαν επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος. [10]

Άλλες παρατηρήσεις που υποστήριξαν την επικράτηση του Λ CDM μοντέλου ήταν: το πείραμα BOOMERanG το 2000, το οποίο υπέδειξε ολική πυκνότητα περίπου ίση με την κρίσιμη πυκνότητα και η μέτρηση της πυκνότητας ύλης μέσω της ερυθρομετατόπισης του γαλαξία 2dFGRS, η οποία βρέθηκε ότι είναι περίπου το 25% της κρίσιμης πυκνότητας. Ο συνδυασμός των δύο αυτών πειραμάτων οδήγησε στο συμπέρασμα πως υπάρχει μία κοσμολογική σταθερά Λ που σχετίζεται με τη σκοτεινή ενέργεια. Το μοντέλο αυτό υποστηρίχθηκε και από πιο ακριβείς μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν από WMAP και Planck, κατά τα διαστήματα 2003-2010 και 2013-2015 αντίστοιχα.

1. ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ

1.1 Η ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ – ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ HUBBLE:

Αν το σύμπαν όντως διαστέλλεται, τότε θα πρέπει να μπορούμε να παρατηρήσουμε τους υπόλοιπους γαλαξίες να απομακρύνονται σταδιακά από τον δικό μας. Ο πρώτος που έκανε αυτήν την παρατήρηση ήταν ο Hubble, το 1925, ο οποίος υποστήριξε ότι όντως όλοι οι γαλαξίες απομακρύνονται από εμάς και μάλιστα με ταχύτητες, v , ανάλογες της απόστασής τους. Οι ταχύτητες αυτές μπορούν να βρεθούν πειραματικά χρησιμοποιώντας την ερυθρομετατόπιση z (redshift), δηλαδή, τη μετατόπιση που παρατηρείται στις φασματικές γραμμές της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από ένα αντικείμενο/ πηγή, όταν αυτό απομακρύνεται από τον παρατηρητή. Η μετατόπιση αυτή προς το ερυθρό (τέλος) του ορατού φάσματος οφείλεται στην αύξηση του μήκους κύματος της ακτινοβολίας που παρατηρείται σε σχέση με εκείνο της ακτινοβολίας που εκπέμπεται. Ισχύει:

$$z = (\lambda_{obs} - \lambda_{em}) / \lambda_{em} \Rightarrow 1+z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{1}{a}.$$

Από τη γενική θεωρία της σχετικότητας μας παρέχεται η σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την ερυθρομετατόπιση z :

$$z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1,$$

η οποία για μικρά z παίρνει τη μορφή $z \approx \beta = v/c$.

Έχοντας λοιπόν την δυνατότητα να υπολογίσουμε την ταχύτητα, έπρεπε να βρεθεί ένας τρόπος και για την εύρεση της τιμής της απόστασης. Το έργο αυτό διευκολύνεται ιδιαίτερα όταν έχουμε στη διάθεσή μας πηγές γνωστής φωτεινότητας L (‘standard candles’). Αν έχουμε μία πηγή τέτοιου είδους, τότε, με δεδομένο πως η

πηγή αυτή εκπέμπει ισοτροπικά, η απόστασή της r υπολογίζεται εύκολα μέσω της σχέσης:

$$F=L/4\pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}},$$

όπου F = η μετρούμενη ροή ακτινοβολίας.

Τα διαγράμματα $v = f(r)$, που προέκυψαν από συλλογή δεδομένων, έδειξαν μία προσεγγιστικά γραμμική σχέση (πλήρως γραμμική για τα μικρότερα z) ανάμεσα στην ταχύτητα και την απόσταση, η οποία ονομάστηκε νόμος του Hubble:

$$v = H_0 * r,$$

όπου H_0 = η σταθερά Hubble.

Η τιμή της σταθεράς αυτής, σύμφωνα με τους πιο πρόσφατους υπολογισμούς (Planck Collaboration), βρίσκεται πως είναι:

$$H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km} * \text{s}^{-1} * \text{Mpc}^{-1}$$

Η τιμή για το H_0 πάρθηκε από το [2].

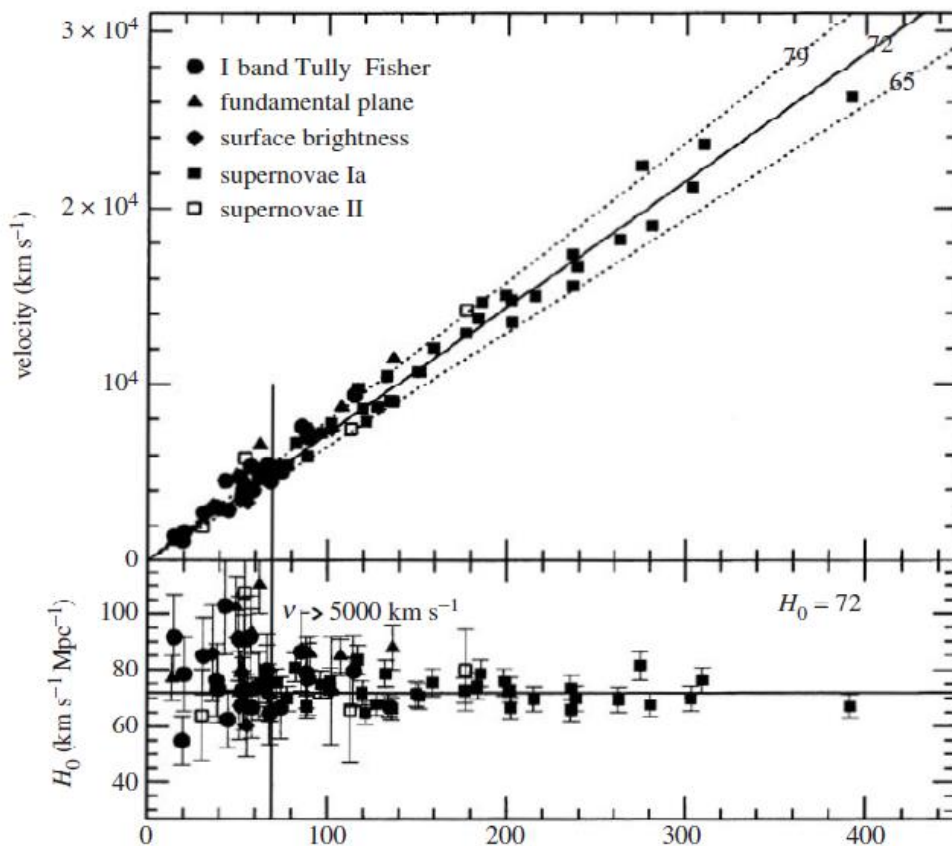
Η παράμετρος H_0 , ωστόσο, δεν είναι ανεξάρτητη του χρόνου και μπορεί να δοθεί και από την παρακάτω σχέση:

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)},$$

όπου $\dot{R} = dR(t)/dt$ και $R(t)$ είναι η χρονικά μεταβαλλόμενη απόσταση ενός τυχαίου ζεύγους γαλαξιών, η οποία ονομάζεται παράγοντας κλίμακας (scale factor).

Θα δούμε στη συνέχεια πόσο σημαντικός είναι ο ρόλος του παράγοντα κλίμακας στην περιγραφή του σύμπαντος. Προς το παρόν αναφέρεται πως θα χρησιμοποιούμε κατά σύμβαση ως παράγοντα κλίμακας όχι το R αλλά το $a = R/R_0$, όπου $R_0 = R(0) =$ η τιμή του παράγοντα αυτού την τρέχουσα περίοδο.

Παρακάτω παραθέτουμε ένα διάγραμμα Hubble, όπου παρουσιάζονται οι ταχύτητες αντικειμένων που απομακρύνονται συναρτήσει της απόστασής τους:



Εικόνα 1.1.

Η εικόνα πάρθηκε από το [6]. Από το διάγραμμα αυτό η τιμή της παραμέτρου Hubble φαίνεται να είναι $H_0 = 72$, κάτι το οποίο διορθώθηκε αργότερα από το Planck Collaboration.

1.2 ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ FRIEDMANN:

Οι εξισώσεις Friedmann είναι θεμελιώδεις σχέσεις της περιγραφής του σύμπαντος, με βάση το πρότυπο κοσμολογικό μοντέλο και μπορούν να αποδειχθούν ισάξια και από τη γενική σχετικότητα (μέσω των εξισώσεων πεδίου του Einstein) αλλά και από τη Νευτώνεια μηχανική. Στην εργασία αυτή επιλέχθηκε ως τρόπος απόδειξης η προσέγγιση με βάση τη Νευτώνεια μηχανική. [3]

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, με βάση το εξεταζόμενο μοντέλο, το σύμπαν είναι ισοτροπικό και ομοιογενές σε μεγάλες αποστάσεις, άνω των 100 Mpc. Για το λόγο αυτό, υποθέτουμε μία σφαίρα σε κάποια περιοχή του σύμπαντος με ακτίνα $R > 100$ Mpc, έτσι ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενής. Αν υποθέσουμε ακόμα ότι το σύμπαν είναι ηλεκτρικά ουδέτερο, τότε η μόνη δύναμη που μας ενδιαφέρει, σε τέτοιες κλίμακες, είναι η βαρύτητα. Θεωρούμε ως αντικείμενο της μελέτης μας μία μάζα, m , που βρίσκεται στην 'επιφάνεια' της επιλεγμένης σφαίρας. Η μάζα αυτή υφίσταται μία βαρυτική έλξη από όλους τους γαλαξίες που βρίσκονται μέσα στο σφαιρικό όγκο, ίδια με εκείνη που θα υφίστατο εάν η συνολική μάζα του εσωτερικού της σφαίρας ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο της. Επιπρόσθετα, η συνισταμένη των βαρυτικών επιδράσεων που δέχεται η μάζα m από γαλαξίες εκτός της σφαίρας είναι 0 (τα παραπάνω απορρέουν από την εξάρτηση $1/r^2$ της βαρύτητας). Τέλος, αν η χωρική κατανομή των γαλαξιών στο εσωτερικό του σφαιρικού όγκου έχει μία μέση πυκνότητα ρ , τότε η μάζα της σφαίρας είναι:

$$M = 4/3\pi R^3 \rho$$

και η ολική ενέργεια του m υπολογίζεται ως το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας:

$$E = T+V = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 - GmM/R = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 - 4/3\pi GmR^2\rho = \frac{1}{2}mR^2 \left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{8\pi}{3} G\rho \right).$$

Κάνουμε την αλλαγή $R \rightarrow \alpha$:

$$E = \frac{1}{2} * m\alpha^2 \left(\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} - \frac{8\pi}{3} G\rho \right)$$

και κατόπιν υπολογίζουμε την παράμετρο καμπυλότητας $k = -2E/m$, καταλήγοντας έτσι στην εξίσωση:

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} + \frac{k}{\alpha^2} = \frac{8\pi}{3} G\rho$$

1^η εξίσωση Friedmann

Αν τώρα πάρουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, για το αντικείμενο μάζας m θα έχουμε τη σχέση:

$$m\ddot{\alpha} = -GMm/\alpha^2 \Rightarrow \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{4\pi}{3}\rho.$$

Η εξίσωση αυτή, ωστόσο, δεν αντιστοιχεί στη δεύτερη εξίσωση Friedmann, καθώς η τελευταία, πέραν του όρου της πυκνότητας ύλης/ενέργειας ρ , περιλαμβάνει και εκείνον της πίεσης P. Χρειαζόμαστε έτσι μία ακόμα εξίσωση πρώτα, την εξίσωση

των ρευστών (fluid equation), η οποία θα εδραιώσει μία σχέση μεταξύ της πυκνότητας ρ , της παραγώγου της πυκνότητας $\dot{\rho}$ καθώς και της πίεσης P .

Η σχέση αυτή απορρέει από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής για ένα σύστημα με ενέργεια U , θερμοκρασία T , εντροπία S και όγκο V :

$$dU = TdS - PdV.$$

Το νόμο αυτό θα τον εφαρμόσουμε τώρα για έναν όγκο α^3 κάπου μέσα στο διαστελλόμενο σύμπαν μας. Λόγω συμμετρίας, θεωρούμε πως η διαστολή αυτή είναι αδιαβατική, δηλαδή, πως δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας από και προς τον καθορισμένο όγκο και άρα $dQ = TdS = 0$. Έχουμε λοιπόν:

$$dU + PdV = 0 \Rightarrow dU/dt + P dV/dt = 0. \quad (1)$$

Εφόσον η συνολική ενέργεια είναι $U = \alpha^3 \rho$, ο πρώτος όρος στην εξίσωση υπολογίζεται από μερική παραγωγή ότι ισούται με:

$$dU/dt = 3\alpha^2 \dot{\rho} + \alpha^3 \dot{\rho}. \quad (2)$$

Αντίστοιχα, ο δεύτερος όρος δίνει:

$$dV/dt = 3\alpha^2 \dot{\alpha}. \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2) και (3) στην εξίσωση (1) παίρνουμε την εξίσωση των ρευστών:

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{\alpha}}{\alpha}(\rho + P) = 0.$$

Εξίσωση των ρευστών

Είμαστε τώρα έτοιμοι να προχωρήσουμε στην απόδειξη της 2^{ης} εξίσωσης Friedmann. Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση Friedmann με α^2 , παραγωγίσουμε ως προς το χρόνο και ξαναγράψουμε την εξίσωση των ρευστών ως προς $\dot{\rho}$, προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = \frac{8\pi}{3}G\dot{\rho}\alpha^2 + \frac{8\pi}{3}G\rho 2\alpha\dot{\alpha}$$

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{\alpha}}{\alpha}(\rho + P).$$

Αντικαθιστώντας τη δεύτερη σχέση στην πρώτη, προκύπτει τελικά και η δεύτερη εξίσωση Friedmann:

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3P).$$

2^η εξίσωση Friedmann

Παρατήρηση:

Σημειώνεται ότι στις εξισώσεις αυτές ο όρος της πυκνότητας ρ δεν αναφέρεται απλά στην πυκνότητα της ύλης, αλλά στη συνολική πυκνότητα ύλης/ενέργειας όλων των συστατικών του σύμπαντος.

Αν στις παραπάνω εξισώσεις θέλουμε να διαχωρίσουμε την πυκνότητα των στοιχείων ύλης από εκείνη της ενέργειας του κενού, τότε αντικαθιστούμε:

$$\rho \rightarrow \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G},$$

όπου $\rho_v = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ είναι η πυκνότητα της ενέργειας του κενού και Λ είναι η κοσμολογική σταθερά.

Με την αντικατάσταση αυτή και χρησιμοποιώντας τη σχέση για την παράμετρο Hubble, οι εξισώσεις Friedmann παίρνουν την τελική τους μορφή:

$H^2 + \frac{k}{\alpha^2} = \frac{8\pi}{3} G\rho + \frac{\Lambda}{3}$	<u>1^η εξίσωση Friedmann</u>
$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = \frac{-4\pi G}{3} (\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}$	<u>2^η εξίσωση Friedmann</u>

Παρατήρηση:

Πρακτικά, δηλαδή, οι εξισώσεις Friedmann συνδέουν τις γεωμετρικές μεταβλητές $\alpha(t)$ και k με τις μεταβλητές ύλης ρ και P .

1.3 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (equation of state):

Η επίλυση των εξισώσεων Friedmann μπορεί να μας παράσχει πληροφορίες για την εξέλιξη που θα έχει το σύμπαν. Η εξέλιξη αυτή, όμως, είναι άμεσα εξαρτώμενη από το ενεργειακό περιεχόμενο του σύμπαντος. Συνεπώς, εξίσου αναγκαία με τις εξισώσεις Friedmann (που αποτελούν διαφορικές εξισώσεις με παραμέτρους την πίεση και την πυκνότητα), είναι και μία εξίσωση που να συνδέει την πίεση με την πυκνότητα. Το ρόλο αυτό παίζει η καταστατική εξίσωση:

$$P = w\rho c^2 ,$$

Καταστατική εξίσωση

όπου $c = \eta$ ταχύτητα του φωτός και $w = \text{μία σταθερά}$, η τιμή της οποίας είναι διαφορετική για καθένα από τα στοιχεία που περιέχονται στο σύμπαν.

Αν πάρουμε τώρα την καταστατική εξίσωση σε συνδυασμό με την εξίσωση των ρευστών, μπορούμε να βρούμε μία αναλογία ανάμεσα στην πυκνότητα ενός στοιχείου και στον παράγοντα κλίμακας.

Έστω λοιπόν ένα στοιχείο σ το οποίο εμπεριέχεται στο σύμπαν. Η πυκνότητά του στοιχείου αυτού, ρ_σ , θα υπακούει στις παρακάτω εξισώσεις:

$$P_\sigma = w\rho_\sigma c^2 \tag{4}$$

$$\dot{\rho}_\sigma + \frac{3\dot{\alpha}}{\alpha}(\rho_\sigma + P_\sigma) = 0 \tag{5}$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση (4) στην (5) για $c=1$, χωρίζουμε τους όρους και από ολοκλήρωση παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση:

$$\frac{\dot{\rho}_\sigma}{-3\rho_\sigma(1+w)} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \Rightarrow \int \frac{\dot{\rho}_\sigma}{-3\rho_\sigma(1+w)} dt = \int \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} dt \Rightarrow \frac{1}{-3(1+w)} \ln(\rho_\sigma) = \ln(\alpha) + c \Rightarrow$$

$$\rho_\sigma \sim \alpha^{-3*(1+w)}, \tag{6}$$

όπου $c = \text{τυχαία σταθερά}$.

Εφόσον ο παράγοντας κλίμακας είναι συνάρτηση *μόνο* του χρόνου, η σχέση που βρήκαμε αντιστοιχεί στην εξέλιξη της πυκνότητας κάθε στοιχείου. Για να βρούμε όμως μία πιο ακριβή προσέγγιση της $\rho(t)$ πρέπει πρώτα να λύσουμε ως προς $\alpha(t)$. Χρησιμοποιώντας και πάλι τον πρώτο νόμο του Friedmann με ολοκλήρωση και χρήση της σχέσης (6) παίρνουμε :

$$t_0 - t = \int \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} = \int_{\alpha}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\alpha} * [(8\pi/3) * \Sigma \rho_{\sigma}(\alpha_0) (\alpha/\alpha_0)^{-3(1+w)} - k\alpha^{-2}]^{-1/2} . \quad (7)$$

Κανονικά, η σχέση αυτή θα απαιτούσε τις τωρινές τιμές των πυκνοτήτων όλων των στοιχείων που απαρτίζουν το σύμπαν. Ωστόσο, είπαμε πριν ότι το w παίρνει διαφορετική τιμή για κάθε στοιχείο, με αποτέλεσμα ο ρυθμός εξέλιξης της πυκνότητας κάθε στοιχείου να είναι διαφορετικός. Άμεση συνέπεια είναι ότι σε κάθε εποχή κυριαρχεί ένα μόνο στοιχείο. Αν λοιπόν αγνοήσουμε όλα τα στοιχεία εκτός από ένα και υποθέσουμε ότι $k = 0$, η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι:

$$\alpha/\alpha_0 = (t/t_0)^{2/3(1+w)}.$$

Συμπερασματικά, για ένα μόνο στοιχείο μπορούμε να γράψουμε μία σχέση $\rho(t)$ ως εξής:

$$\rho \sim \alpha^{-3(1+w)} \Rightarrow \rho \sim [t^{2/3(1+w)}]^{-3(1+w)} \Rightarrow \rho \sim t^{-2} .$$

Η σχέση (7), ωστόσο, έχει διπλή σημασία, καθώς μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε μέσα από αυτήν και την ηλικία του σύμπαντος. Με το κομμάτι αυτό θα ασχοληθούμε αναλυτικά όμως σε επόμενη υπο-ενότητα. Προς το παρόν, απλά αναφέρουμε ενδεικτικά ότι για ένα στοιχείο να κυριαρχεί ανά δεδομένη χρονική περίοδο, η σχέση (7) για $\alpha = t = 0$ εκτιμά την ηλικία του σύμπαντος ως :

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)} \cdot \frac{1}{H_0} ,$$

όπου $\frac{1}{H_0}$ = ο χρόνος Hubble.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ:

- $P = w\rho c^2$
- $\rho \sim a^{-3(1+w)}$
- $\rho \sim t^{-2}$
- $t_0 = \frac{2}{3(1+w)} \cdot \frac{1}{H_0}$

Ας δούμε τώρα, με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων, τι συμβαίνει για την κυριαρχία κάθε στοιχείου ξεχωριστά [5], [6],[7].

- **Κυριαρχία της ύλης (matter-dominated universe):**

Έστω ότι το σύμπαν κυριαρχείται από μη σχετικιστική κρύα ύλη στη μορφή μη ακτινοβολούσας σκόνης, με $P=0$. Από την καταστατική εξίσωση, παίρνουμε σε αυτήν την περίπτωση ότι $w=0$ και άρα:

$$\rho_m(a) \sim a^{-3} = (1+z)^3.$$

Από την παραπάνω σχέση, μπορούμε να υπολογίσουμε και την εξέλιξη της παραμέτρου πυκνότητας της ύλης Ω_m :

$$\Omega_m(a) = \Omega_m \frac{H_0^2}{H^2} a^{-3}$$

και κατά συνέπεια την εξέλιξη της παραμέτρου Hubble (μιλώντας πάντα συγκεκριμένα για την περίπτωση κυριαρχίας της ύλης):

$$H(\alpha) = \frac{H_0}{\alpha} \sqrt{1 - \Omega_m - \frac{\Omega_m}{\alpha}} = H_0 (1+z) \sqrt{1 + \Omega_m * z}.$$

Η πυκνότητα της ύλης, λοιπόν, μειώνεται ανάλογα με τον όγκο του σύμπαντος και κάθε αύξηση του όγκου του σύμπαντος, λόγω διαστολής, συμπεριλαμβάνεται στην αναλογία αυτή.

- **Κυριαρχία της ακτινοβολίας (radiation-dominated universe):**

Έστω ότι το σύμπαν κυριαρχείται από σχετικιστικό θερμό αέριο, αποτελούμενο από ελαστικώς σκεδαζόμενα σωματία ενεργειακής πυκνότητας ϵ . Από τη στατιστική μηχανική, έχουμε ότι η μορφή της καταστατικής εξίσωσης σε αυτήν την περίπτωση θα είναι:

$$P_r = \frac{1}{3} \epsilon \Rightarrow P_r = \frac{1}{3} \rho_r c^2 \Rightarrow w = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho_r(\alpha) \sim \alpha^{-4} = (1+z)^4.$$

Τώρα, δηλαδή, η πυκνότητα μεταβάλλεται πιο αργά και άρα πιο αργή θα είναι και η διαστολή του σύμπαντος στην περίπτωση της κυριαρχίας της ακτινοβολίας. Αυτό συμβαίνει διότι, σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, τώρα υπάρχει πίεση $P \neq 0$.

- **Κυριαρχία ύλης και ακτινοβολίας μαζί:**

Μία πιο γενική περίπτωση είναι αυτή, στην οποία το σύμπαν βρίσκεται υπό την ανάμεικτη κυριαρχία ύλης και ακτινοβολίας. Αρχικά, ισχύουν όπως και πριν οι σχέσεις:

$$\rho_m(\alpha) \sim \alpha^{-3} \quad \text{και} \quad \rho_r(\alpha) \sim \alpha^{-4} .$$

Διαθέτουμε, όμως, μόνο ένα σετ εξισώσεων Friedmann, οπότε θα πρέπει να αντιστοιχίσουμε την τιμή της πυκνότητας στο άθροισμα $\rho = \rho_m + \rho_r$. Στην περίπτωση αυτή, ωστόσο, ο παράγοντας κλίμακας έχει μία πιο πολύπλοκη συμπεριφορά κι έτσι καθίσταται αρκετά δύσκολο να εξάγουμε από το $\rho(\alpha)$ το $\rho(t)$, όπως κάναμε πρωτύτερα από την σχέση (7), για την κυριαρχία ενός μόνο στοιχείου. Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό, υποθέτουμε ότι το ένα εκ των δύο στοιχείων έχει πολύ μεγαλύτερη πυκνότητα σε σχέση με το άλλο και εξετάζουμε κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

➤ Για $\rho_m \ll \rho_r$:

Αν η ακτινοβολία υπερισχύει της ύλης, τότε εφόσον $w = 1/3$ και με βάση τις παραπάνω σχέσεις:

$$\alpha(t) \sim t^{1/2} \Rightarrow \rho_m \sim t^{-3/2} \sim \alpha^{-3} \quad \text{και} \quad \rho_r \sim t^{-2} \sim \alpha^{-4} .$$

Βλέπουμε, με άλλα λόγια, ότι η πυκνότητα της ύλης ελαττώνεται πιο αργά από αυτήν της ακτινοβολίας. Αυτό σημαίνει ότι η κυριαρχία της ακτινοβολίας δεν γίνεται να διαρκέσει επ' άπειρον και πως, όσο μικρή και αν είναι η πυκνότητα της ύλης αρχικά (συγκριτικά με της ακτινοβολίας), στο τέλος θα κυριαρχήσει.

➤ Για $\rho_m \gg \rho_r$:

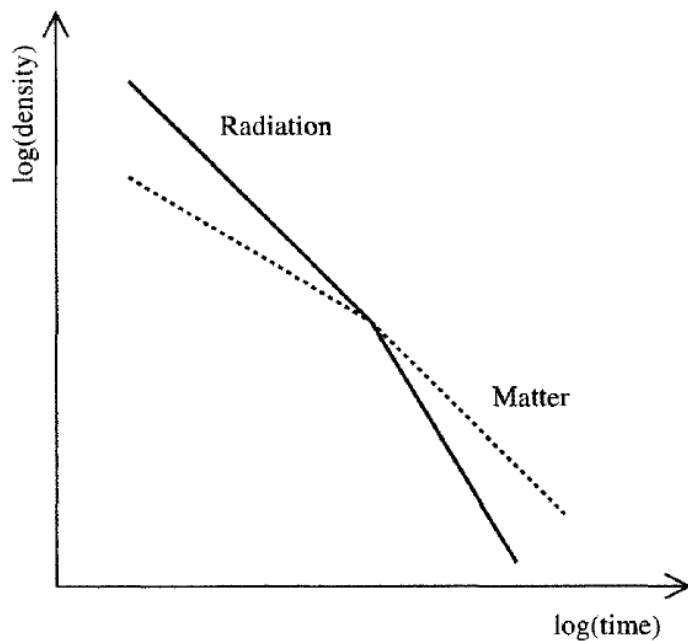
Στην περίπτωση αυτή είπαμε ότι $w=0$ και άρα θα έχουμε αντίστοιχα:

$$\alpha(t) \sim t^{2/3} \Rightarrow \rho_m \sim t^{-2} \sim a^{-3} \text{ και } \rho_r \sim t^{-8/3} \sim a^{-4}.$$

Εδώ μαρτυρούμε και πάλι τη σταθερή κυριαρχία της ύλης.

Παρατήρηση:

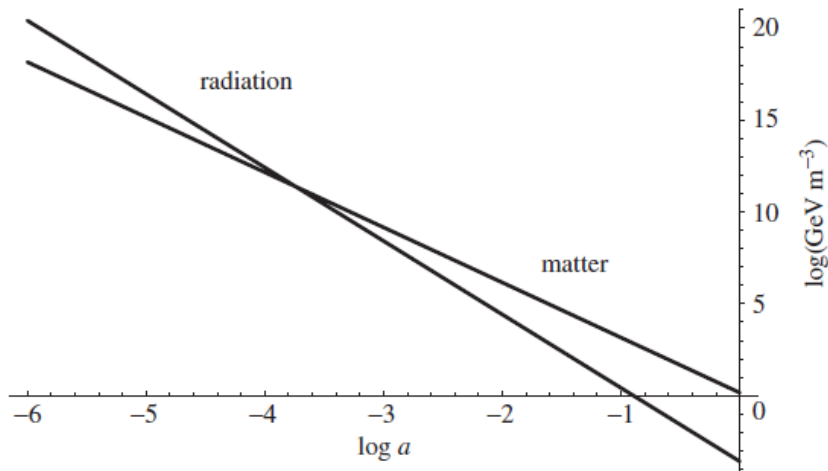
Το συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ότι η κυριαρχία της ύλης εξασφαλίζεται όσο περνά ο χρόνος.



Εικόνα 1.2.

Η εικόνα πάρθηκε από το [7] και αποτελεί μία σχηματική αναπαράσταση της εξέλιξης του σύμπαντος, στην περίπτωση της ύλης και της ακτινοβολίας μαζί.

Adiabatic Expansion



Εικόνα 1.3.

Η εικόνα πάρθηκε από το [6] και μας δείχνει πως η ακτινοβολία κυριαρχεί μόνο για πολύ μικρές τιμές του παράγοντα κλίμακας, σε αντίθεση με την ύλη που κυριαρχεί για μεγαλύτερες τιμές του a .

- **Κυριαρχία της ενέργειας του κενού (vacuum energy- dominated universe):**

Ένα σύμπαν το οποίο κυριαρχείται από ενέργεια κενού, αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο και στατικό σύμπαν. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε, λοιπόν, προκειμένου να βρούμε την καταστατική εξίσωση σε αυτήν την περίπτωση, είναι να αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις Friedmann τις τιμές $\ddot{a} = 0$, $\dot{a} = 0$, $k=0$, απ' όπου προκύπτει:

$$P_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda} c^2 \Rightarrow w = -1.$$

Η σχέση αυτή μας λέει πρακτικά ότι η πίεση της ενέργειας του κενού είναι αρνητική, γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με την εξίσωση:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} = -\rho_0,$$

η οποία αποδίδει αρνητικό πρόσημο στην πυκνότητα της ενέργειας του κενού.

Παραθέτουμε παρακάτω έναν πίνακα που παρουσιάζει συνοπτικά τα όσα αναλύθηκαν σε αυτήν την υποενότητα:

	W	$\rho(\alpha)$	$\alpha(t)$	t_0
Matter	0	$\sim \alpha^{-3}$	$\sim t^{2/3}$	$(2/3)*1/H_0$
Radiation	1/3	$\sim \alpha^{-4}$	$\sim t^{1/2}$	$(1/2)*1/H_0$
Cosmological constant	-1	$\sim \alpha^0$	$\sim \exp(H_0*t)$	∞

Πίνακας 1.1.

1.4 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ:

Επιστρέφουμε τώρα στην 1^η εξίσωση Friedmann, την οποία θα ξαναγράψουμε ως προς k και θα αντικαταστήσουμε $\rho + \Lambda/8\pi G \rightarrow \rho$, ούτως ώστε η πυκνότητα της ενέργειας του κενού να απορροφηθεί στον όρο της ολικής πυκνότητας. Έχουμε λοιπόν:

$$k = \alpha^2 \left(\frac{8\pi G \rho}{3} - H^2 \right)$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι υπάρχει μία κρίσιμη τιμή της πυκνότητας, ρ_c , για την οποία η καμπυλότητα του χώρου παίρνει την τιμή 0. Ορίζουμε την κρίσιμη πυκνότητα αυτή ως:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Προφανώς, η τιμή της κρίσιμης πυκνότητας μεταβάλλεται με το χρόνο, εφόσον $H=H(t)$. Αν πάρουμε την πιο πρόσφατη τιμή για τη σταθερά Hubble $H=H_0= 67.8 \text{ km/s}\cdot\text{Mpc}$ και για $G= 6.67\cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg}\cdot\text{sec}^2$, τότε η κρίσιμη πυκνότητα παίρνει την τιμή $\rho_c= 1.87 \cdot h^2 \cdot 10^{-26} \text{ kg}\cdot\text{m}^3$, όπου $h=0.678$ και $1 \text{ Mpc}= 3.086 * 10^{22} \text{ m}$.

Ορίζουμε ακόμα μία νέα παράμετρο πυκνότητας Ω , η οποία μας επιτρέπει να εκφράζουμε, από εδώ και στο εξής, την πυκνότητα συναρτήσει της κρίσιμης τιμής της:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}.$$

Τη μετατροπή αυτή, μπορούμε προφανώς να την εφαρμόσουμε ξεχωριστά για κάθε ένα από τα στοιχεία που απαρτίζουν το σύμπαν. Έχουμε λοιπόν:

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_m$$

$$\Omega_r = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_r$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_\Lambda.$$

Επιπρόσθετα, αν χρησιμοποιήσουμε όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη υπο-ενότητα, είναι προφανές ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\Omega = \Omega_{\text{tot}} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$$

$$\rho = \rho_{\text{tot}} = \frac{3H^2}{8\pi G} \left[\Omega_{\Lambda} + \frac{\alpha_0^3}{\alpha^3} \Omega_m + \frac{\alpha_0^4}{\alpha^4} \Omega_r \right]$$

Με βάση τα παραπάνω, η αρχική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$k = \alpha^2 (\Omega - 1) H^2, \quad (8)$$

από τις τιμές της οποίας για το Ω και το k , μπορούν να προκύψουν σημαντικά συμπεράσματα για την πορεία που θα ακολουθήσει το σύμπαν. Αυτό φυσικά θα μελετηθεί συνδυαστικά πάντα με το ενεργειακό περιεχόμενο του σύμπαντος καθώς, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, αυτό είναι που καθορίζει την εξέλιξή του.

Παρατήρηση:

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι το k εδώ αντιστοιχεί στη χωρική καμπυλότητα του σύμπαντος και όχι στην καμπυλότητα του χωροχρόνου.

1.5 ΠΙΘΑΝΑ ΣΕΝΑΡΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ:

Τα πιθανά σενάρια για την εξέλιξη του σύμπαντος είναι διαφορετικά ανάλογα με το ενεργειακό του περιεχόμενο, δηλαδή, ανάλογα με το ποιο συστατικό κυριαρχεί για κάθε χρονική περίοδο. Σύμφωνα με τα παραπάνω διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

➤ $w > -1/3$

Εδώ, εννοούμε ουσιαστικά την κυριαρχία της ύλης, καθώς, όπως είπαμε, η κυριαρχία της ακτινοβολίας είναι μία ασταθής και προσωρινή κατάσταση. Στην

περίπτωση αυτή, η πυκνότητα μειώνεται $\rho \sim a^{-3}$ και άρα, βλέπουμε από την 1^η εξίσωση Friedmann, ότι ο όρος που θα κυριαρχήσει, τελικά, θα είναι αυτός της καμπυλότητας.

Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές του k . Από τη γενική σχετικότητα, λόγω παραμετροποίησης, προκύπτει ότι για την καμπυλότητα μπορούμε να έχουμε 3 διακριτές τιμές $k = -1, 0, +1$.

$k = -1$:

Από τον ορισμό της καμπυλότητας, $k = -2E / m$, βλέπουμε ότι η ολική ενέργεια θα είναι θετική. Επίσης, από τη σχέση (8), συμπεραίνουμε ότι $k < 0$ σημαίνει και $\Omega < 1$ και άρα $\rho < \rho_c$. Επομένως, το σύμπαν θα συνεχίσει να διαστέλλεται επ' άπειρον : ανοιχτό σύμπαν (open universe).

$k = 0$:

Έχουμε τώρα, κοιτώντας πάλι τη σχέση (8), ότι $\Omega = 1$ και $\rho = \rho_c$. Στην περίπτωση αυτή, η διαστολή επιβραδύνεται, με την παράμετρο H να πλησιάζει πάντα ασυμπτωτικά το μηδέν. Λέμε, τότε, πως αναφερόμαστε σε ένα επίπεδο σύμπαν (flat universe). Για ένα επίπεδο, κυριαρχημένο από ύλη σύμπαν με $\Omega_\Lambda = 0$, η ηλικία του σύμπαντος υπολογίζεται από τον πίνακα 1.1 ότι είναι:

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \Rightarrow t_0 \approx 9.6 \pm 1.4 \text{ Gyr.}$$

Η τιμή αυτή, όμως, έρχεται σε αντίθεση με την ηλικία που υπολογίστηκε από τους μεγαλύτερους σε ηλικία γνωστούς αστέρες και είναι $14.1 \pm 2.5 \text{ Gyr}$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το μοντέλο αυτό παρουσιάζει προβλήματα.

Σημειώνεται, ότι στις παραπάνω υποθέσεις, μία θετική τιμή της κοσμολογικής σταθεράς, Λ , απλά θα επιτάχυνε τη διαστολή.

$k = +1$:

Αντίστοιχα προκύπτει, εδώ, $\Omega > 1$ και $\rho > \rho_c$. Το σύμπαν τώρα διαστέλλεται έως ότου $H=0$. Έπειτα, η κίνηση αντιστρέφεται και το σύμπαν αρχίζει να συστέλλεται: κλειστό σύμπαν (closed universe). Ο χρόνος που χρειάζεται το σύμπαν για να αποκτήσει ‘μηδενικές’ διαστάσεις, λόγω συστολής, είναι ο διπλάσιος από το χρόνο που χρειάζεται η παράμετρος H ώστε να γίνει 0 και αναφέρεται ως μεγάλη σύνθλιψη (Big Crunch).

	K	Ω	Evolution
Ανοιχτό σύμπαν	-1	< 1	‘Μεγάλο κενότητα’
Επίπεδο σύμπαν	0	$= 1$	‘Μεγάλη ακτή’
Κλειστό σύμπαν	+1	> 1	‘Μεγάλη σύνθλιψη’

Πίνακας 1.2

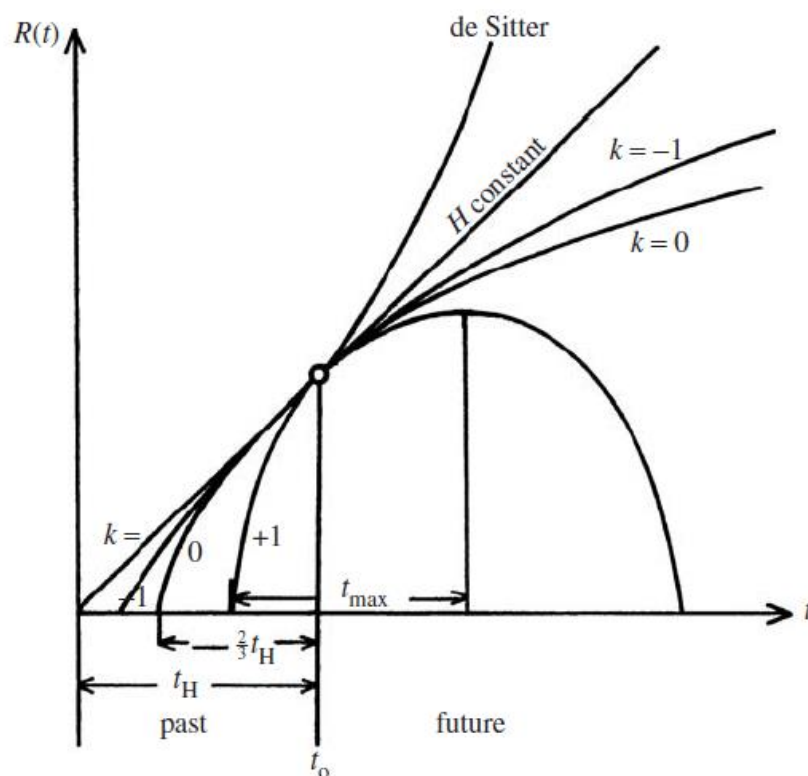
➤ $w < - 1/3$

Στην περίπτωση αυτή, αναφερόμαστε στην κυριαρχία της ενέργειας του κενού. Από τη δεύτερη εξίσωση Friedmann, βλέπουμε ότι μία θετική τιμή της κοσμολογικής σταθεράς, Λ , παρέχει μία θετική συμβολή στην επιτάχυνση (\ddot{a}) και συνεπώς δρα αποτελεσματικά ως μία αποθητική δύναμη. Συγκεκριμένα, αν η τιμή της σταθεράς Λ είναι επαρκώς μεγάλη, τότε μπορεί να υπερβεί τη βαρυτική έλξη που αντιπροσωπεύει ο πρώτος όρος της εξίσωσης και να οδηγήσει το σύμπαν σε επιταχυνόμενη διαστολή,

ανεξαρτήτως της τιμής του k (και του Ω). Η περίπτωση αυτή, λοιπόν, προβλέπει πως ακόμα κι ένα κλειστό σύμπαν θα διαστέλλεται επ' άπειρον.

Σήμερα γνωρίζουμε, από τα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν, ότι το σύμπαν είναι επίπεδο και κυριαρχημένο από την ενέργεια του κενού: $\Omega = 1$, $\Omega_\Lambda \approx 0.7$. Με άλλα λόγια, είναι ένα σύμπαν που διαστέλλεται επιταχυνόμενα.

Απεικονίζονται παρακάτω σε κοινό διάγραμμα όλα τα μοντέλα που παρουσιάστηκαν:



Εικόνα 1.4.

Η εικόνα πάρθηκε από το [6]. Στο διάγραμμα παρουσιάζεται η εξάρτηση του παράγοντα κλίμακας, a , από το χρόνο t , για καθένα από τα διαφορετικά σενάρια που αναφέραμε αλλά για την ίδια τιμή H_0 . Παρατηρούμε πως ένα κλειστό σύμπαν ($k=+1$) έχει μικρότερο χρόνο ζωής από ένα επίπεδο σύμπαν ($k=0$), ενώ ένα επίπεδο σύμπαν έχει με τη σειρά του μικρότερο χρόνο ζωής από ένα ανοιχτό σύμπαν ($k=-1$).

1.6 ΗΛΙΚΙΑ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ:

Οι πειραματικές μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της ηλικίας του σύμπαντος ανάγονταν κυρίως στον υπολογισμό της ηλικίας των γηραιότερων αστερών (λευκών νάνων) και αστρικών σμηνών (clusters). Οι μετρήσεις αυτές αποκαλύψαν αστέρες ηλικίας 11 Gyr στο γαλαξία μας (Milky way) και αστρικά σμήνη ηλικίας τουλάχιστον 12 Gyr. Από συνδυασμό όλων των δεδομένων, προέκυψε ένα κατώτατο όριο για την ηλικία του σύμπαντος, περίπου 12-13 Gyr. Ας προσπαθήσουμε, όμως, να εκτιμήσουμε την ηλικία του σύμπαντος θεωρητικά με βάση το μοντέλο Λ CDM.

Αρχικά, γράφουμε την 1^η εξίσωση Friedmann για $k = 0$ και κάνουμε την αντικατάσταση $\rho + \rho_\nu \rightarrow \rho$:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G\rho \Rightarrow \dot{a} = a \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \sum_{\sigma} \rho_{\sigma} (\alpha_0) \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{-3(1+w)}}, \quad (\alpha_0=1) \Rightarrow$$

$$\frac{da}{dt} = a \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \sum_{\sigma} \rho_{\sigma} \alpha^{-3(1+w)}} \Rightarrow \frac{da}{dt} = \alpha H_0 \sqrt{\frac{1}{\rho_c} [\rho_m \alpha^{-3} + \rho_\Lambda]} \Rightarrow$$

$$\frac{da}{a \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_c} \alpha^{-3} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}}} = H_0 dt \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{a \sqrt{\Omega_m \alpha^{-3} + \Omega_\Lambda}} = H_0 dt \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} + a^3}} = \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\dot{a}} \frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} + a^3}} = \int_t^{t_0} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 dt = (t_0 - t) H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}$$

Για να βρω την τωρινή ηλικία του σύμπαντος θεωρώ $t = 0$ και άρα:

$$\int_0^{\dot{a}} \frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} + a^3}} = t_0 H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_0^{\dot{a}} \frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} + a^3}}.$$

Βλέπουμε άρα πως η ηλικία του σύμπαντος υπολογίζεται από το γινόμενο του Hubble time επί έναν παράγοντα διόρθωσης, για τις διαφορετικές τιμές των παραμέτρων πυκνότητας Ω . Δηλαδή:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \cdot f(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_r).$$

Σημειώνεται ότι στον υπολογισμό αυτό εμείς δεν συμπεριλάβαμε την παράμετρο Ω_r της ακτινοβολίας, καθώς, όπως θα δείξουμε και αργότερα, έχει πολύ μικρή τιμή σε σχέση με αυτές της ύλης και του Λ και άρα σχεδόν αμελητέα συμβολή στην εκτίμηση της ηλικίας του σύμπαντος. Οι παραπάνω υπολογισμοί αναφέρονται στην περίπτωση όπου $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$.

Πραγματοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $a = \frac{\Omega_m^{1/3}}{\Omega_\Lambda^{1/3}} (\sinh w)^{2/3}$, οπότε έχουμε:

$$\int_0^w \frac{\frac{\Omega_m^{1/3} \Omega_m^{-1/6}}{\Omega_\Lambda^{1/3} \Omega_\Lambda^{-1/6}} \frac{2}{3} \frac{(\sinh w)^{1/3} (\sinh w)^{-1/3} \sinh w}{\frac{\Omega_m^{1/2} \sinh w}{\Omega_\Lambda^{1/2}}}}{dw} = \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot H_0 \cdot t_0 \quad \Rightarrow$$

$$w = \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot H_0 \cdot t_0$$

Επομένως, για τη μεταβλητή α έχουμε τελικά τη σχέση:

$$\alpha(t) = \frac{\Omega_m^{1/3}}{\Omega_\Lambda^{1/3}} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot H_0 \cdot t_0 \right),$$

την οποία λύνουμε ως προς t :

$$\sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot H_0 \cdot t_0 \right) = \alpha \frac{\Omega_\Lambda^{1/3}}{\Omega_m^{1/3}} \Rightarrow \sinh \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot H_0 \cdot t_0 \right) = \alpha^{3/2} \frac{\Omega_\Lambda^{1/2}}{\Omega_m^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot H_0 \cdot t_0 = \sinh^{-1} \left[\alpha^{3/2} \frac{\Omega_\Lambda^{1/2}}{\Omega_m^{1/2}} \right] \Rightarrow t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \frac{1}{H_0} \sinh^{-1} \left[\alpha^{3/2} \frac{\Omega_\Lambda^{1/2}}{\Omega_m^{1/2}} \right].$$

Συνεπώς, ο παράγοντας διόρθωσης είναι:

$$f(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_r) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \sinh^{-1} \left[\alpha^{3/2} \frac{\Omega_\Lambda^{1/2}}{\Omega_m^{1/2}} \right].$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, καταλήγουμε στη σχέση του παράγοντα διόρθωσης, μέσω της οποίας θα υπολογίσουμε τελικά την ηλικία του σύμπαντος:

$$f(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_r) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln \left(\frac{\sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_m}} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} + 1} \right) \Rightarrow$$

$$f(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_r) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln \left(\frac{\sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_m}} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda + \Omega_m}{\Omega_m}} \right) \xrightarrow{\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1}$$

$$f(\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_r) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{1-\Omega_\Lambda}} \right).$$

Παρατήρηση:

Καθώς θέλουμε να υπολογίσουμε την τωρινή ηλικία του σύμπαντος έχουμε $z=0$, διότι δεν υπάρχει ερυθρομετατόπιση. Επομένως για τον παράγοντα κλίμακας θα ισχύει $a = \frac{1}{1+z} = 1$.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε την καταληκτική σχέση για τον υπολογισμό της ηλικίας του σύμπαντος:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{1-\Omega_\Lambda}} \right).$$

Αντικαθιστώντας με τις τιμές $H_0=67.8 \pm 0.9 \text{ km/s}\cdot\text{Mpc}$ και $\Omega_\Lambda = 0.692 \pm 0.012$ βρίσκουμε ότι η ηλικία του σύμπαντος είναι:

$t_0 = 13.80 \pm 0.18 \text{ Gyr.}$

Οι τιμές αυτές πάρθηκαν από το [2].

Παρατηρούμε ότι η τιμή αυτή βρίσκεται σε καλή συμφωνία με την ήδη γνωστή τιμή για την ηλικία του σύμπαντος, $t_0 = 13.80 \pm 0.04 \text{ Gyr}$ (αναφορά [2]), που προέκυψε με τη βοήθεια της μελέτης της CMB ακτινοβολίας και των μεγάλης-κλίμακας δομών. Το γεγονός ότι το σφάλμα στον δικό μας υπολογισμό είναι μεγαλύτερο, πιθανώς να οφείλεται στο ότι συμπεριλάβαμε και την αβεβαιότητα για τη σταθερά Hubble και φυσικά στο γεγονός ότι τα μέσα που χρησιμοποιούνται στα

υπερσύγχρονα πειράματα που πραγματοποιούνται προσφέρουν μεγαλύτερη ακρίβεια στην προσέγγιση από έναν θεωρητικό υπολογισμό.

Σημειώνεται ότι, για τον υπολογισμό του σφάλματος της ηλικίας του σύμπαντος, χρησιμοποιήθηκε ο τύπος διάδοσης σφαλμάτων : $\delta t_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial t_0}{\partial H_0} \delta H_0\right)^2 + \left(\frac{\partial t_0}{\partial \Omega_\Lambda} \delta \Omega_\Lambda\right)^2}$. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιήθηκε ο μετασχηματισμός $1 \text{ Gy} = 315576 \cdot 10^{22} \text{ s}$.

1.7 ΟΜΟΚΙΝΟΥΜΕΝΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ, ΓΩΝΙΑΚΗ ΔΙΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ, ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΦΩΤΕΙΝΟΤΗΤΑΣ & ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ:

Προτού προχωρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, που αφορά στο μηχανισμό δημιουργίας των ανισοτροπιών στο φάσμα της ακτινοβολίας υποβάθρου, είναι απαραίτητο να δώσουμε κάποιους ορισμούς για τα παραπάνω μεγέθη. [8]

Ομοκινούμενη απόσταση (Comoving distance), $d^c(z)$:

Με τον όρο αυτό εννοούμε την απόσταση που είναι προσαρμοσμένη στη σημερινή τιμή του παράγοντα κλίμακας. Αν ένα αντικείμενο δεν έχει ιδιόμορφη ταχύτητα, τότε η ομοκινούμενη απόστασή του είναι ίση με την τιμή της απόστασής του επί του παρόντος.

Ξεκινώντας από τη μετρική Robertson-Walker:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta + r^2 \sin^2\theta d\phi \right],$$

έχουμε ότι η απόσταση που αφορά στη συντεταγμένη r δίνεται από τον τύπο:

$$d(t) = \int_0^r a(t) \frac{dr^2}{\sqrt{1-Kr^2}} = \begin{cases} a(t)K^{-\frac{1}{2}} \arcsin\left(K^{\frac{1}{2}}r\right), & K > 0 \\ a(t)r, & K = 0 \\ a(t)|K|^{-1/2} \sinh\left(|K|^{\frac{1}{2}}r\right), & K < 0 \end{cases}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση του ‘γενικευμένου ημιτόνου’ ως:

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin(x), & k = 1 \\ x, & k = 0 \\ \sinh(x), & k = -1 \end{cases}$$

και τη λίγο πιο γενική μορφή της παραπάνω συνάρτησης:

$$S_K(x) = \begin{cases} K^{-\frac{1}{2}} \sin\left(K^{\frac{1}{2}}x\right), & K > 0 \\ x, & K = 0 \\ |K|^{-1/2} \sinh\left(|K|^{\frac{1}{2}}x\right), & K < 0 \end{cases}$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι για την απόσταση ισχύει:

$$d(t) = a(t) S_K^{-1}(r) = a(t) |K|^{-1/2} S_K^{-1}\left(|K|^{\frac{1}{2}}r\right).$$

Όσο όμως το σύμπαν διαστέλλεται, η απόσταση αυτή αυξάνεται ως εξής:

$$d(t) = a(t) S_K^{-1}(r) = \frac{\alpha_0}{1+z} S_K^{-1}(r) = \frac{d_0}{1+z},$$

όπου $\delta = d_0(z) = d^c(z)$ είναι η σημερινή τιμή της ομοκινούμενης απόστασης της r συντεταγμένης.

Θα υπολογίσουμε τώρα τη σχέση που μας δίνει την ομοκινούμενη απόσταση (σχέση μεταξύ απόστασης και redshift).

Για το φως ισχύει $ds^2=0$ και άρα από τη μετρική R-W θα έχουμε :

$$-dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1-Kr^2} = 0 \Rightarrow dt = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = \frac{d}{a} = \frac{d_0}{a_0}$$

Έτσι λοιπόν η ομοκινούμενη απόσταση για ερυθρομετατόπιση z δίνεται από τη σχέση:

$$d_0(z) = d^c(z) = a_0 \int_{t_0}^{t_1} \frac{a_0}{a(t)} dt = \int \frac{dt}{x} = \int \frac{dx}{x} \frac{1}{dx/dt}. \quad (9)$$

Ο όρος dx/dt στην παραπάνω εξίσωση υπολογίζεται ως εξής:

$$x = a/a_0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{a_0} \frac{da}{dt}, \quad (10)$$

Γράφουμε την 1^η εξίσωση Friedmann για κάθε στοιχείο ξεχωριστά:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \Omega_r \rho_c \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \frac{8\pi G}{3} \Omega_m \rho_c \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda H_0^2 - \frac{K}{a^2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \Omega_r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + H_0^2 \Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda H_0^2 - \frac{K}{a^2} \Rightarrow$$

$$\frac{da}{dt} = H_0 a_0 \sqrt{\Omega_r a_0^2 a^{-2} + \Omega_m a_0 a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2 a_0^{-2} - K H_0^{-2} a_0^{-2}}. \quad (11)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (11) στη σχέση (10) προκύπτει:

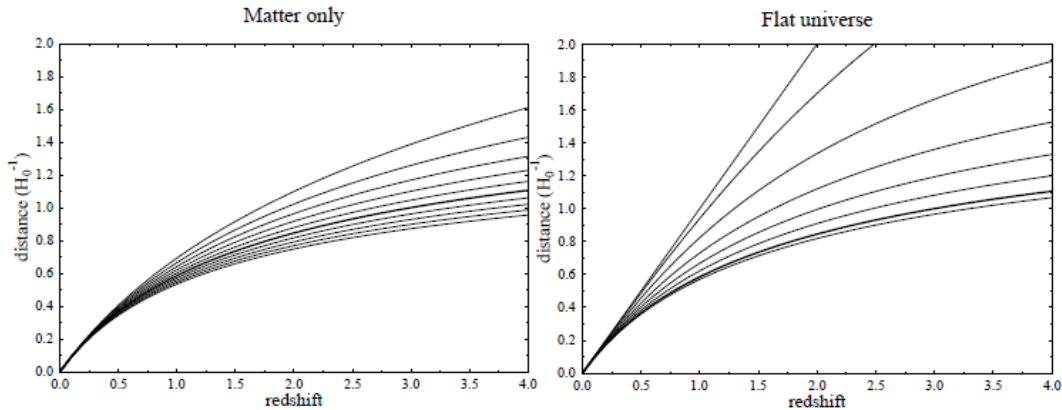
$$\frac{dx}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_r x^{-2} + \Omega_m x^{-1} + \Omega_\Lambda x^2 + (1 - \Omega_0)}, \quad (12)$$

όπου $1 - \Omega_0 = \Omega_k =$ παράμετρος καμπυλότητας.

Συνεχίζουμε με την αντικατάσταση της σχέσης (12) στην αρχική σχέση (9), για την εύρεση της ομοκινούμενης απόστασης, όπου παίρνουμε:

$$\begin{aligned} d^c(z) = d_0(z) &= \int \frac{dx}{x} \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_r x^{-2} + \Omega_m x^{-1} + \Omega_\Lambda x^2 + (1 - \Omega_0)}} = \\ &= H_0^{-1} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_r + \Omega_m x + \Omega_\Lambda x^4 + (1 - \Omega_0)x^2}} \Rightarrow \\ d^c(z) = d_0(z) &= H_0^{-1} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_0(x-x^2) - \Omega_\Lambda(x-x^4) + x^2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

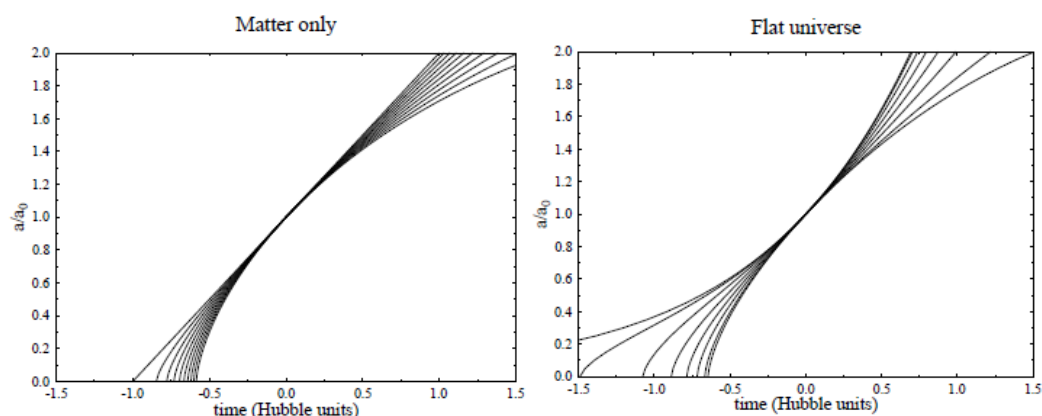
Σημειώνεται ότι, για την εξαγωγή της τελευταίας σχέσης, αγνοήσαμε την παράμετρο πυκνότητας της ακτινοβολίας, Ω_r , καθώς η τιμή της θεωρείται αμελητέα σε σχέση με τις τιμές των παραμέτρων των υπόλοιπων στοιχείων.



Εικόνα 1.5.

Οι εικόνες αυτές αναπαριστούν την ομοκινούμενη απόσταση συναρτήσει της ερυθρομετατόπισης z στην περίπτωση: (α) κυριαρχημένου από ύλη σύμπαντος $\Omega_\Lambda=0$, (β) επίπεδου σύμπαντος $\Omega_\Lambda+\Omega_m=1$. Και στις 2 εικόνες η παχιά γραμμή αντιστοιχεί στο μοντέλο όπου $\Omega_\Lambda=0$ και $\Omega_m=1$. Η εικόνα πάρθηκε από το [8].

Η εξίσωση (13) μας δίνει τη σχέση μεταξύ της απόστασης και της ερυθρομετατόπισης z και εξαρτάται όπως βλέπουμε από 3 ανεξάρτητες κοσμολογικές παραμέτρους: H_0 , Ω_0 και Ω_Λ . Αν αυξήσουμε την τιμή του Ω_0 , κρατώντας την τιμή του Ω_Λ σταθερή (αν αυξήσουμε με άλλα λόγια την τιμή του Ω_m), η απόσταση που αντιστοιχεί σε μία δεδομένη ερυθρομετατόπιση z μειώνεται. Αυτό συμβαίνει, διότι το σύμπαν θα διαστελλόταν γρηγορότερα στο παρελθόν κι έτσι ο χρόνος μεταξύ ενός δοσμένου παράγοντα κλίμακας a και της σημερινής του τιμής, a_0 , είναι μικρότερος. Δηλαδή, η ομοκινούμενη απόσταση ενός γαλαξία με ερυθρομετατόπιση z , π.χ., μικραίνει, διότι τα φωτόνια έχουν τώρα λιγότερο χρόνο να διανύσουν την απαιτούμενη απόσταση. Αντίθετα, αν αυξήσουμε το Ω_Λ , κρατώντας σταθερή την τιμή του Ω_0 , η τιμή της comoving distance θα αυξηθεί και αυτή.



Εικόνα 1.6.

Γραφική αναπαράσταση της εξάρτησης του παράγοντα κλίμακας από το χρόνο $a(t)$ στην περίπτωση: (α) κυριαρχημένου από ύλη σύμπαντος $\Omega_\Lambda=0$, (β) επίπεδου σύμπαντος $\Omega_\Lambda+\Omega_m=1$. Η τιμή 0.0 στον άξονα του χρόνου αντιστοιχεί στον παρόντα χρόνο. Η εικόνα πάρθηκε από το [8].

Όπως ήδη αναφέραμε, αν το αντικείμενο που εξετάζουμε δεν έχει κάποια ιδιάζουσα ταχύτητα (παραμένει στη συντεταγμένη r), τότε η ομοκινούμενη απόσταση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t , έχει την σημερινή τιμή της απόστασής του.

Η απόσταση από έναν γαλαξία τη χρονική στιγμή t_1 , όπου το φως εγκατέλειψε το γαλαξία ισούται με:

$$d_I(z) = \frac{d_0(z)}{1+z}.$$

Αν θεωρήσουμε την ‘αρχή του χρόνου’, δηλαδή αν αντικαταστήσουμε $t = 0$, $a = 0$ ή $z = \infty$, τότε η ομοκινούμενη απόσταση που διένυσε το φως από τότε έως σήμερα περιγράφεται από τη σχέση:

$$d_{\text{hor}} = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_r + \Omega_m x + \Omega_\Lambda x^4 + (1 - \Omega_0)x^2}}.$$

Αυτή η απόσταση (ή αυτή η σφαίρα με ακτίνα d_{hor} και κέντρο τον παρατηρητή) ονομάζεται ορίζοντας, καθώς αποτελεί τη μέγιστη απόσταση που μπορούμε να ‘δούμε’ και να λάβουμε πληροφορίες.

Στην πραγματικότητα, στην κοσμολογία υπάρχουν διάφοροι ορισμοί για τον ορίζοντα. Στην παραπάνω περίπτωση περιγράψαμε τον *σωματιδιακό ορίζοντα* (*particle horizon*).

Ένας άλλος ορισμός οδηγεί στον *ορίζοντα γεγονότων* (*event horizon*), που σχετίζεται με το πόσο μακριά μπορεί να ταξιδέψει το φως στο μέλλον.

Επιπρόσθετα, πολλές φορές η απόσταση Hubble, H^{-1} , αναφέρεται ως *ορίζοντας Hubble (Hubble horizon)*, ειδικά όταν εξετάζονται κλίμακες υπο-ορίζοντα και υπερ-ορίζοντα.

Τέλος, υπάρχει ο *ηχητικός ορίζοντας (sound horizon)*, $r_s(t)$, ο οποίος αντιπροσωπεύει την ομοκινούμενη απόσταση που διένυσε ο ήχος, έως τη στιγμή t .

$$r_s(t) = \int_0^t c_s d\eta = a_0 \int_0^t \frac{c_s(t)}{a(t)} dt .$$

Γωνιακή διαμετρική απόσταση (Angular diameter distance), $d_A(z)$:

Η εξίσωση (13), που συσχετίζει την απόσταση με την ερυθρομετατόπιση z , θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη αν γνωρίζαμε τις τιμές των κοσμολογικών παραμέτρων H_0 , Ω_0 και Ω_Λ . Θα μπορούσαμε να αντιστρέψουμε την κατάσταση και να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση μεταξύ απόστασης και ερυθρομετατόπισης προκειμένου να καθορίσουμε τις τιμές των κοσμολογικών παραμέτρων. Για να επιτευχθεί αυτό, ωστόσο, χρειαζόμαστε μία διαφορετική σχέση συσχέτισης των δύο μεγεθών, στην οποία η απόσταση να αντικαθίσταται από κάποια άμεσα παρατηρούμενη ποσότητα. Για το σκοπό αυτό, οι κοσμολόγοι χρησιμοποιούν την γωνιακή διαμετρική απόσταση (angular diameter distance) ή την απόσταση φωτεινότητας (luminosity distance).

Η γωνιακή διαμετρική απόσταση μας δίνει το φυσικό μέγεθος ενός αντικειμένου, το οποίο παρατηρούμε σε ερυθρομετατόπιση z και υπόκειται σε γωνία θ στον ουρανό. Αν η πραγματική διάμετρος του αντικειμένου (η διάμετρος που είχε όταν το φως που βλέπουμε το εγκατέλειψε) είναι s και η γωνία που το παρατηρούμε είναι θ , τότε η γωνιακή διαμετρική απόστασή του είναι:

$$d_A = s / \theta, \tag{14}$$

ενώ, η ομοκινούμενη γωνιακή διαμετρική απόστασή του είναι:

$$d_A^c = s_0 / \theta,$$

όπου $s_0 = (1+z)s$ είναι η ομοκινούμενη διάμετρος του αντικειμένου.

Συγκρίνοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι:

$$d_A^c = (1+z)d_A. \tag{15}$$

Από τη μετρική R-W η ακριβής απόσταση που αντιστοιχεί σε γωνία θ είναι:

$$ds^2 = \alpha^2(t)r^2d\theta^2 \Rightarrow s = \alpha(t)r\theta \tag{16}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (16) στη σχέση (14) παίρνουμε:

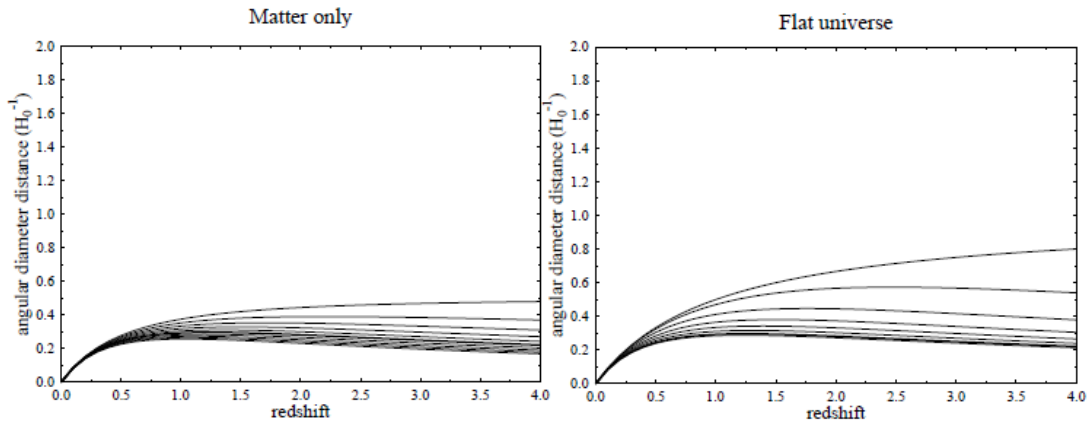
$$d_A = \alpha(t)r = \frac{\alpha_0}{1+z} r. \tag{17}$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η συντεταγμένη r σχετίζεται με την ομοκινούμενη απόσταση μέσω της σχέσης:

$$r = S_K (d_0 / \alpha_0). \tag{18}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (13) στην εξίσωση (18) και την εξίσωση (18), με τη σειρά της, στην εξίσωση (17), προκύπτει τελικά για την angular diameter distance:

$$d_A(z) = \frac{a_0}{1+z} S_K \left[\frac{1}{a_0 H_0} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_0(x-x^2) - \Omega_\Lambda(x-x^4) + x^2}} \right].$$



Εικόνα 1.7.

Στην παραπάνω εικόνα αναπαρίσταται γραφικά η σχέση της γωνιακής διαμετρικής απόστασης με την ερυθρομετατόπιση z στην περίπτωση: (α) ενός σύμπαντος κυριαρχημένου από ύλη $\Omega_\Lambda = 0$, (β) ενός επίπεδου σύμπαντος $\Omega_\Lambda + \Omega_m = \Omega_0 = 1$.

Παρατηρούμε πως η γωνιακή διαμετρική απόσταση μειώνεται για μεγάλες τιμές του z , πράγμα το οποίο σημαίνει πως μακρινότερα αντικείμενα μπορεί να εμφανίζονται μεγαλύτερα στον ουρανό. Η εικόνα πάρθηκε από το [8].

Επιπρόσθετα, για την ομοκινούμενη γωνιακή διαμετρική απόσταση έχουμε:

$$d^c_A(z) = a_0 S_K \left[\frac{1}{a_0 H_0} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_0(x-x^2) - \Omega_\Lambda(x-x^4) + x^2}} \right].$$

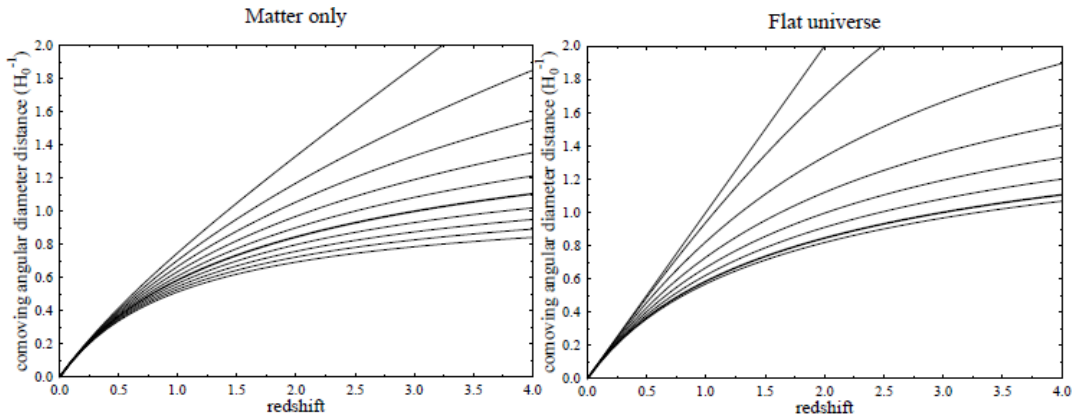
Για ένα επίπεδο σύμπαν η ομοκινούμενη γωνιακή διαμετρική απόσταση ισούται με την ομοκινούμενη απόσταση και έτσι μπορούμε να διακρίνουμε περιπτώσεις:

➤ Επίπεδο σύμπαν:

$$d_A^c(z) = d_0(z) = H_0^{-1} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_0(x-x^2) - \Omega_\Lambda(x-x^4) + x^2}}. \quad (19)$$

➤ Ανοικτό / κλειστό σύμπαν:

$$d_A^c(z) = \frac{H_0^{-1}}{\sqrt{|\Omega_0 - 1|}} S_k \left[\sqrt{|\Omega_0 - 1|} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_0(x-x^2) - \Omega_\Lambda(x-x^4) + x^2}} \right]. \quad (20)$$



Εικόνα 1.8.

Τα παραπάνω γραφήματα αναπαριστούν την εξάρτηση της ομοκινούμενης γωνιακής διαμετρικής απόστασης από την ερυθρομετατόπιση z στην περίπτωση: (α) ενός σύμπαντος κυριαρχημένου από ύλη $\Omega_\Lambda = 0$, (β) ενός επίπεδου σύμπαντος $\Omega_\Lambda + \Omega_m = \Omega_0 = 1$. Στην περίπτωση (β), συγκρίνοντας με την εικόνα 1.7, βλέπουμε κατά τα γνωστά $d_A^c = d_0(z)$. Η εικόνα πάρθηκε από το [8].

Οι σχέσεις $d_A(z)$ και $d_A^c(z)$ που υπολογίστηκαν είναι ιδιαίτερα χρήσιμες, καθώς βοηθούν στον υπολογισμό των κοσμολογικών παραμέτρων.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο από αντικείμενα που έχουν όλα το ίδιο μέγεθος s (standard rulers), τα οποία παρατηρήθηκαν σε διαφορετικά z . Οι παρατηρούμενες γωνίες θ των αντικειμένων αυτών, θα μας δώσουν τις παρατηρούμενες γωνιακές διαμετρικές τους αποστάσεις $d_A(z)$. Η σύγκριση των τιμών αυτών με τις αντίστοιχες τιμές που προκύπτουν από το μοντέλο FRW του σύμπαντος, μας δίνει τις βέλτιστες τιμές των κοσμολογικών παραμέτρων, για καλή προσαρμογή των θεωρητικών τιμών στα πειραματικά δεδομένα.

Επιπρόσθετα, οι παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιούνται για τη συσχέτιση των παρατηρούμενων ανισοτροπιών, που εμφανίζονται στο φάσμα της ακτινοβολίας υποβάθρου, με την κλίμακα του φυσικού μεγέθους των διαταραχών πυκνότητας που αντιπροσωπεύουν. Ως παράδειγμα, θα κάνουμε τον υπολογισμό της γωνίας θ στην οποία εμφανίζεται το 1^ο ακουστικό μέγιστο στο φάσμα ακτινοβολίας CMB.

Υπολογισμός 1^ο ακουστικού μεγίστου

Οι διακυμάνσεις της θερμοκρασίας T/T_0 της CMB ακτινοβολίας αποτελούν μία συνάρτηση πάνω σε μία σφαίρα. Κάνοντας ανάπτυξη σε πολύπολα έχουμε:

$$\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \varphi) = \sum \alpha_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi),$$

όπου $\ell = 1, 2, \dots, \infty$, $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$ και $Y_{\ell m}$ = οι σφαιρικές αρμονικές.

Οι διαφορετικές τιμές του ℓ αντιστοιχούν σε διαφορετικές γωνιακές κλίμακες: μικρά ℓ αντιστοιχούν σε μεγάλες κλίμακες και μεγάλα ℓ σε μικρές κλίμακες. Μια περαιτέρω μελέτη των σφαιρικών αρμονικών δείχνει πως οι συναρτήσεις αυτές

αντιστοιχούν σε ℓ ‘μήκη κύματος’ ταλάντωσης, που πραγματοποιείται πάνω σε έναν κύκλο που εμπεριέχει τη σφαίρα.

Η γωνία που αντιστοιχεί σε αυτό το μήκος κύματος είναι:

$$\theta_\lambda = \frac{2\pi}{\ell} = \frac{360^\circ}{\ell},$$

ενώ, η γωνία που αντιστοιχεί σε ‘μισό μήκος κύματος’ (δηλαδή, το διάστημα ανάμεσα σε ένα μέγιστο και το γειτονικό του ελάχιστο) είναι:

$$\theta_{\text{res}} = \frac{\pi}{\ell} = \frac{180^\circ}{\ell}.$$

Αυτή είναι η γωνιακή ανάλυση που χρειάζεται ένας ανιχνευτής μικροκυμάτων, προκειμένου να μπορέσει να αναλύσει το φάσμα της ακτινοβολίας μέχρι το αντίστοιχο ℓ ($\ell = \pi / \theta_{\text{res}}$).

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι γωνίες που παρατηρούνται στον ουρανό συνδέονται με πραγματικές, φυσικές ή ομοκινούμενες αποστάσεις, μέσω της σχέσης $d_A(z)$.

Ξέρουμε ακόμα:

$$d_A = \frac{\lambda_{\text{phys}}}{\theta}$$

$$d_A^c = \frac{\lambda^c}{\theta},$$

όπου $\lambda^c = (1+z) \lambda_{\text{phys}}$ είναι το ομοκινούμενο μήκος.

Επιπρόσθετα:

$$\lambda^c = \frac{2\pi}{k},$$

όπου k είναι ο ομοκινούμενος κυματάριθμος.

Συγκρίνοντας τις παραπάνω σχέσεις:

$$\theta_\lambda = \frac{\lambda^c}{d_A^c} = \frac{2\pi}{k d_A^c} = \frac{2\pi}{\ell},$$

καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$\boxed{\ell = k d_A^c}, \quad (21)$$

η οποία μας είναι απαραίτητη στον υπολογισμό του 1^{ου} ακουστικού μεγίστου που επιχειρούμε.

Στις σχέσεις (19) και (20), υπολογίσαμε τη σχέση μεταξύ της ομοκινούμενης γωνιακής απόστασης και της ερυθρομετατόπισης z για επίπεδο και ανοικτό / κλειστό σύμπαν. Ενδιαφερόμαστε τώρα για την ομοκινούμενη γωνιακή απόσταση για την σφαίρα της τελευταίας σκέδασης (last scattering sphere), $d_A^c(z_{\text{dec}})$, για την οποία έχουμε $1+z_{\text{dec}} \approx 1100$. Διακρίνουμε δύο ειδικές περιπτώσεις:

A) Ανοικτό σύμπαν χωρίς σκοτεινή ενέργεια, $\Omega_\Lambda=0$ και $\Omega_m = \Omega_0 < 1$:

$$d_A^c(z_{\text{dec}}) = \frac{H_0^{-1}}{\sqrt{1-\Omega_m}} \sinh \left(\sqrt{1-\Omega_m} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-\Omega_m)x^2 + \Omega_m x}} \right) =$$

$$\frac{H_0^{-1}}{\sqrt{1-\Omega_m}} \sinh \left(\int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{\Omega_m}{1-\Omega_m} x}} \right) =$$

$$\frac{H_0^{-1}}{\sqrt{1-\Omega_m}} \sinh \left(2 \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}} - 2 \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m} \frac{1}{1+z_{dec}}} \right) \approx$$

$$\frac{H_0^{-1}}{\sqrt{1-\Omega_m}} \sinh \left(2 \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}} \right) \Rightarrow$$

$$d_A^c(z_{dec}) \approx \frac{2H_0^{-1}}{\Omega_m} . \quad (22)$$

B) Επίπεδο σύμπαν με σκοτεινή ενέργεια, $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$:

Εδώ το ολοκλήρωμα δεν δίνει κάποια βασική συνάρτηση, αλλά μία λογική προσέγγιση:

$$d_A^c(z_{dec}) = d^c(z_{dec}) = \frac{2}{\Omega_m^{0.4}} H_0^{-1} . \quad (23)$$

Προκειμένου να συνεχίσουμε τον υπολογισμό μας κάνουμε την ‘χοντρική’ προσέγγιση ότι, κατά την τελευταία σκέδαση, τη χρονική στιγμή t_{dec} , το σύμπαν ήταν κυριαρχημένο από ύλη. Με άλλα λόγια, αγνοούμε για την περίοδο εκείνη την συμβολή της ακτινοβολίας και, από την 1η εξίσωση Friedmann, παίρνουμε:

$$H_{dec}^2 \approx \frac{8\pi G}{3} \rho_m = \Omega_m (a) H^2 = \Omega_m H_0^2 (1+z_{dec})^3 .$$

Ορίζουμε τώρα την ομοκινούμενη κλίμακα Hubble ως εξής:

$$\mathcal{H} = \frac{a}{a_0} H = \frac{1}{1+z} H.$$

Επομένως για τη χρονική στιγμή t_{dec} έχουμε:

$$k^{-1} = \mathcal{H}^{-1} = (1+z_{\text{dec}}) H_{\text{dec}}^{-1} = (1+z_{\text{dec}})^{-1/2} \frac{H_0^{-1}}{\sqrt{\Omega_m}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m}} 90 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}.$$

Η κλίμακα λοιπόν που κάνει την είσοδό της κατά τη χρονική στιγμή $t = t_{\text{dec}}$ είναι:

$$k_{\text{dec}} = \mathcal{H}_{\text{dec}} = (1+z_{\text{dec}})^{1/2} \sqrt{\Omega_m} H_0. \quad (24)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (22),(23),(24) στη σχέση (21), προκύπτει τελικά ο αριθμός πολυπόλου ℓ_H και η γωνία θ_H (μισού μήκους κύματος) που αντιστοιχούν σε αυτήν την κλίμακα k , στην σφαίρα της τελευταίας σκέδασης. Οι τιμές αυτές του ℓ_H και της θ_H δίνουν τις αντίστοιχες τιμές στις οποίες εντοπίζεται το πρώτο ακουστικό μέγιστο, στο φάσμα της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου.

$$\ell_H = k_{\text{dec}} d_A^c = (1+z_{\text{dec}})^{1/2} \sqrt{\Omega_m} * \begin{cases} \frac{2}{\Omega_m} = 66.3 \Omega_m^{-0.5} & (\Omega_\Lambda = 0) \\ \frac{2}{\Omega_m^{0.4}} \approx 66.3 \Omega_m^{0.1} & (\Omega_0 = 1) \end{cases}$$

$$\theta_H = \frac{\pi}{\ell_H} = \frac{180^\circ}{\ell_H} = \begin{cases} 2.7^\circ \Omega_m^{0.5} \\ 2.7^\circ \Omega_m^{-0.1} \end{cases}$$

Παρατήρηση:

Παρατηρούμε στους παραπάνω υπολογισμούς τη στενή σχέση του I^{ov} ακουστικού μεγίστου με την παράμετρο καμπυλότητας $\Omega_k = \Omega_0 - 1$, η οποία αποτελεί πόλο της συνάρτησης $d_A^c(z)$.

Απόσταση φωτεινότητας (Luminosity distance), d_L :

Στον Ευκλείδειο χώρο, ένα αντικείμενο η απόσταση του οποίου είναι d και η απόλυτη φωτεινότητα L , θα έχει φαινόμενη λαμπρότητα $l = L / 4\pi d^2$. Έτσι, ορίζουμε την απόσταση φωτεινότητας ως:

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} . \quad (25)$$

Έστω ότι βρισκόμαστε στην περίπτωση του σύμπαντος FRW. Η απόλυτη φωτεινότητα μπορεί να περιγραφεί ως:

$$L = \frac{\# \text{ φωτονίων που εκπέμφθηκαν}}{\text{χρόνος}} \cdot \text{η μέση ενέργειά τους} = \frac{N_{\gamma} E_{em}}{t_{em}} .$$

Αν ο παρατηρητής βρίσκεται σε απόσταση r από την πηγή, τα φωτόνια σε αυτήν την απόσταση έχουν διαχυθεί σε μία περιοχή:

$$A = 4\pi a_0^2 r^2 .$$

Η φαινόμενη λαμπρότητα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$l = \frac{\# \text{ φωτονίων που παρατηρούνται}}{\text{επιφάνεια} \cdot \text{χρόνος}} \cdot \text{η μέση ενέργειά τους} = \frac{N_{\gamma} E_{obs}}{t_{obs} A} . \quad (26)$$

Αν και ο αριθμός N_{γ} διατηρείται για την ενέργεια των φωτονίων και το χρόνο, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$E_{obs} = \frac{E_{em}}{1+z}$$

$$t_{obs} = (1+z)t_{em} .$$

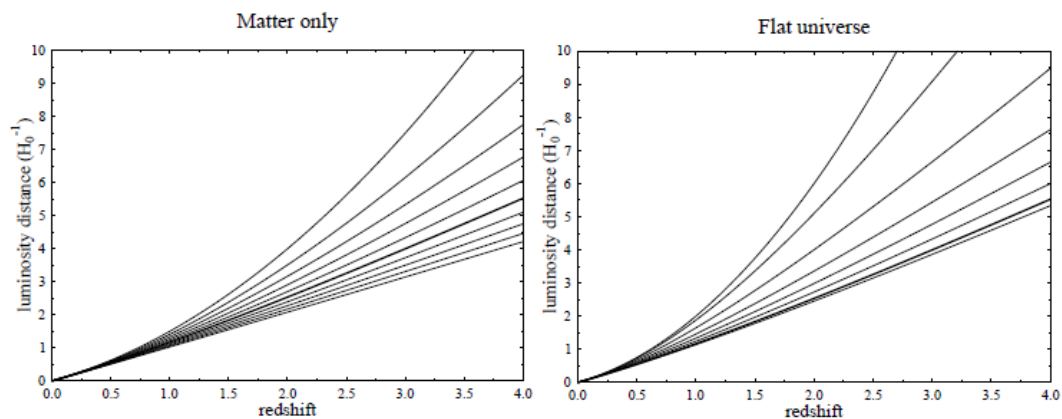
Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στη σχέση (26) και τη σχέση (26), με τη σειρά της, στη σχέση (25) έχουμε για τη φαινόμενη φωτεινότητα και την απόσταση φωτεινότητας:

$$l = \frac{N_{\gamma} E_{obs}}{t_{obs} A} = \frac{N_{\gamma} E_{em}}{t_{em}} \frac{1}{(1+z)^2} \frac{1}{4\pi a_0^2 r^2}$$

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} = (1+z)a_0 r = (1+z) H_0^{-1} \sqrt{\frac{K}{\Omega_0 - 1}} S_K \left[\sqrt{\frac{\Omega_0 - 1}{K}} \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_0(x-x^2) - \Omega_{\Lambda}(x-x^4) + x^2}} \right] \Rightarrow$$

$$d_L = (1+z)^2 d_A(z) = (1+z) d_A^c(z).$$

Στα παρακάτω γραφήματα αναπαρίσταται η απόσταση φωτεινότητας συναρτήσει της ερυθρομετατόπισης z , για τις δύο διακριτές περιπτώσεις που εξετάσαμε και προωτέρα.



Εικόνα 1.9.

Η εικόνα πάρθηκε από το [8].

Η εξίσωση που συσχετίζει την απόσταση φωτεινότητας με την ερυθρομετατόπιση z , μπορεί να αποδειχτεί ιδιαίτερα χρήσιμη στον υπολογισμό των κοσμολογικών παραμέτρων. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο από αντικείμενα που έχουν όλα την ίδια απόλυτη φωτεινότητα L (standard candles). Από τις παρατηρούμενες ερυθρομετατοπίσεις των αντικειμένων αυτών και τις φαινόμενες λαμπρότητές τους, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία σχέση $d_L(z) = \sqrt{L/4\pi l}$ και, συγκρίνοντάς τη με αυτήν που προκύπτει από τη θεωρία, να βρούμε τις βέλτιστες δυνατές τιμές για τις κοσμολογικές παραμέτρους. Ένα παράδειγμα μίας τέτοιας ομάδας αντικειμένων που χρησιμοποιούνται συχνά για το σκοπό αυτό, είναι οι υπερκαινοφανείς αστέρες τύπου Ια (SNIa).

2. ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ (INFLATION)

2.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΠΙΛΥΕΙ Ο ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΣ

➤ Το πρόβλημα της επιπεδότητας (The flatness problem):

Από την 1^η εξίσωση Friedmann έχουμε τη σχέση (8):

$$\Omega - 1 = \frac{K}{a^2 H^2} .$$

Αν $\Omega=1$ τότε το $K=0$. Αν όμως $\Omega \neq 1$ τότε το Ω μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου, $\Omega=\Omega(t)$, ανάλογα με το ποιο στοιχείο κυριαρχεί σε πυκνότητα, για την εκάστοτε χρονική περίοδο.

Κυριαρχία της ύλης: $a \sim t^{3/2}, H \sim t^{-1} \Rightarrow \frac{1}{aH} \sim t^{1/3} \Rightarrow |\Omega - 1| \sim t^{2/3} .$

Κυριαρχία της ακτινοβολίας: $a \sim t^{1/2}, H \sim t^{-1} \Rightarrow \frac{1}{aH} \sim t^{1/2} \Rightarrow |\Omega - 1| \sim t .$

Σήμερα γνωρίζουμε ότι $\Omega_0 = 1$ και άρα $|\Omega(t_{\text{BBN}}) - 1| \lesssim 10^{-16}$.

Προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα αυτό, επιβάλλεται ως αρχική συνθήκη μία τιμή της παραμέτρου Ω πολύ κοντά στη μονάδα. Εναλλακτικά:

- Αν $\Omega > 1$, τότε το σύμπαν θα κατέρρεε σχεδόν αμέσως.
- Αν $\Omega < 1$, τότε το σύμπαν θα διαστελλόταν με εκρηκτικό ρυθμό και η θερμοκρασία του θα έπεφτε σε τιμές κάτω των 3K , σε λιγότερο από 1 s .

➤ **Το πρόβλημα του ορίζοντα / της ομοιογένειας (The horizon/ homogeneity problem):**

Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στο γεγονός ότι, παρατηρώντας σήμερα το χαρτογραφημένο από τη CMB ακτινοβολία σύμπαν, βρίσκουμε διάφορες περιοχές, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους πάνω από 1° και έχουν την ίδια θερμοκρασία, με ακρίβεια της τάξης 10^{-4} . Σύμφωνα με τη θεωρία, ωστόσο, περιοχές που βρίσκονται σε τέτοια απόσταση δεν είχαν χρόνο να αλληλεπιδράσουν και συνεπώς για την επίλυση του προβλήματος καθίσταται απαραίτητη η ομοιογένεια ως αρχική συνθήκη.

➤ **Τα ‘ανεπιθύματα κατάλοιπα’ (Unwanted relics):**

Αν το μοντέλο Hot Big Bang ξεκινήσει σε πολύ υψηλή θερμοκρασία T , είναι δυνατόν να παραχθούν ‘αντικείμενα’ και σωμάτια, τα οποία δύνανται να επιβιώσουν μέχρι και σήμερα. Παραδείγματα αυτών είναι τα γκραβιτίνο (τα υπερσυμμετρικά σωμάτια των γκραβιτονίων), τα μαγνητικά μονόπολα και άλλες τοπολογικές ελαττώματα (topological defects), όπως είναι οι κοσμικές χορδές. Όλα αυτά, όμως, έχουν αποκλειστεί σήμερα μέσω παρατηρήσεων. Ωστόσο, αν τα ‘απολιθώματα’ αυτά παράχθηκαν όντως στο παρελθόν, τότε αυτό θα συνέβη πολύ νωρίς στην ιστορία του σύμπαντος, όταν ακόμη η θερμοκρασία ήταν εξαιρετικά υψηλή, $T \gtrsim 10^{14}$ GeV. Από την νουκλεοσύνθεση της Μεγάλης Έκρηξης (BB), γνωρίζουμε ότι το μοντέλο ‘Hot Big Bang’ θα πρέπει να ξεκινήσει σε θερμοκρασία περίπου $T \lesssim 1$ MeV.

Αυτό που χρειαζόμαστε, τελικά, για να επιλύσουμε όλα αυτά τα προβλήματα είναι να παράξουμε, ως μία αρχική συνθήκη για το Big Bang, ένα σύμπαν με θερμοκρασία $1 \text{ MeV} < T < 10^{14} \text{ GeV}$, το οποίο είναι σχεδόν ομοιογενές και ικανοποιεί για την παράμετρο Ω τη συνθήκη $\Omega=1$, με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

2.2 ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ

2.2.1 ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΟΥ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ

Ο πληθωρισμός είναι μία προσθήκη στο μοντέλο της Θερμής Μεγάλης Έκρηξης (Hot Big Bang model), η οποία βοηθά στην αντιμετώπιση όλων των παραπάνω προβλημάτων. Η βασική ιδέα είναι ότι κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού (ο οποίος έλαβε χώρα πολύ νωρίς στην ιστορία του σύμπαντος, $t \sim 10^{-35}$ s), το σύμπαν διαστέλλεται εκθετικά κατά έναν παράγοντα $\sim e^{60}$. Η διαστολή αυτή ελαττώνει τη θερμοκρασία του σύμπαντος σε $T \sim 0$ K, ενώ, μετά το τέλος της περιόδου του πληθωρισμού, το σύμπαν επαναθερμαίνεται, έως ότου φτάσει πάλι σε υψηλή θερμοκρασία. Έπειτα, ακολουθεί το μοντέλο 'Hot Big Bang', όπως το γνωρίζουμε.

Με βάση τα παραπάνω, καταγράφουμε κάποιες βασικές ιδιότητες για την περίοδο του πληθωρισμού:

- Καθ' όλη τη διάρκεια του πληθωρισμού, η διαστολή του σύμπαντος επιταχύνεται:
 $\ddot{a} > 0$.
- Καθ' όλη τη διάρκεια του πληθωρισμού το ομοκινούμενο μήκος Hubble \mathcal{H}^{-1} ελαττώνεται: $\frac{d}{dt}(\mathcal{H}^{-1}) = \frac{d}{dt}(1/\mathcal{H}) < 0$.
- Ο πληθωρισμός απαιτεί αρνητική πίεση $p < -1/3\rho$.

Παρατήρηση:

Η 3^η ιδιότητα προκύπτει από τη 2^η εξίσωση Friedmann και την 1^η ιδιότητα:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3} (\rho + 3p) \\ \ddot{a} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho + 3p < 0. \quad (27)$$

Θα δούμε τώρα πως οι ιδιότητες αυτές του πληθωρισμού βοηθούν στην αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων.

2.2.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ

Ας ξεκινήσουμε με το πρόβλημα της επιπεδότητας. Η ρίζα του προβλήματος είναι ότι η ποσότητα $|\Omega-1| = \frac{|K|}{\alpha^2 H^2}$ αυξάνεται με το χρόνο. Δηλαδή:

$$\frac{d}{dt} |\Omega-1| = |K| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\alpha^2 H^2} \right) = |K| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{a}^2} \right) = \frac{-2|K|}{\dot{a}^3} \ddot{a} > 0.$$

Για ένα επιταχυνόμενο σύμπαν ισχύει $\alpha H = \alpha \frac{\dot{a}}{a} = \dot{\alpha} > 0$ και επομένως $\dot{\alpha}^3 > 0$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε $\ddot{a} < 0$.

Το πρόβλημα της επιπεδότητας, με άλλα λόγια, βασίζεται στο ότι η διαστολή του σύμπαντος επιβραδύνεται. Εάν είχαμε μία πρώιμη περίοδο στην ιστορία του σύμπαντος, όπου η διαστολή να είναι επιταχυνόμενη, θα μπορούσε να μας οδηγήσει σε μία πολύ μικρή αυθαίρετη αρχική τιμή της ποσότητας $|\Omega-1| = \frac{|K|}{\alpha^2 H^2} \Rightarrow \Omega \rightarrow 1$.

Κατά τον τρόπο αυτόν, αν και η τιμή της ποσότητας αυτής έχει μεγαλώσει από το τέλος του πληθωρισμού, παραμένει πολύ μικρή μέχρι και σήμερα. Πιο συγκεκριμένα, η θεωρία του πληθωρισμού προβλέπει για τη σημερινή τιμή της παραμέτρου Ω ότι $\Omega_0=1$ και μάλιστα με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

Όσον αφορά τώρα στο πρόβλημα του ορίζοντα, αυτό έχει τις ρίζες του στο γεγονός ότι ο ορίζοντας κατά την αποδέσμευση των φωτονίων (photon decoupling) ήταν πολύ μικρότερος σε σχέση με το κομμάτι του σύμπαντος που μπορούμε να δούμε σήμερα.

Συγκρίνοντας το μέγεθος του ορίζοντα κατά την περίοδο της αποδέσμευσης με εκείνο του σημερινού ορίζοντα, μέσω των ομοκινούμενων διαστάσεων αυτών των δύο, βλέπουμε ότι:

$$\left. \begin{array}{l} d_{hor}^c(t_{dec}) \sim \frac{a_0}{a_{dec}} H_{dec}^{-1} \\ d_{hor}^c(t_0) \sim H_0^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d_{hor}^c(t_{dec})}{d_{hor}^c(t_0)} \sim \frac{a_0 H_0}{a_{dec} H_{dec}} \ll 1. \quad (28)$$

Το πρόβλημά μας, με άλλα λόγια, φαίνεται πως είναι ότι η ποσότητα aH ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου και επομένως:

$$\frac{d}{dt}(aH) = \frac{d}{dt}(\dot{a}) = \ddot{a} < 0. \quad (29)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως μία περίοδος με $\ddot{a} > 0$ θα μπορούσε να μας λύσει το πρόβλημα.

Παρατήρηση:

Κατά το καθιερωμένο κοσμολογικό μοντέλο, το σύμπαν αρχικά κυριαρχείται από ακτινοβολία και κατόπιν, λίγο πριν την αποδέσμευση των φωτονίων, επικρατεί η κυριαρχία της ύλης. Έτσι, ο ορίζοντας κατά την περίοδο της αποδέσμευσης, $d_{hor}(t_{dec})$, κυμαίνεται μεταξύ των τιμών H^{-1} και $2H^{-1}$, που αναφέρονται στην κυριαρχία της ακτινοβολίας και της ύλης αντίστοιχα.

Στο κεφάλαιο 1.7 ορίσαμε την ομοκινούμενη παράμετρο Hubble \mathcal{H} , με τη βοήθεια της οποίας, θα ορίσουμε τώρα δύο νέα, χρήσιμα μεγέθη για την ενότητα αυτή.

- Μήκος Hubble (Hubble length): $\ell_H = H^{-1}$.
- Ομοκινούμενο μήκος Hubble (Comoving Hubble length):

$$\ell_H^C = \frac{a_0}{a} \ell_H = \frac{a_0}{aH} = \frac{a_0}{\dot{a}} = 1/\mathcal{H} = \mathcal{H}^{-1}.$$

Το ομοκινούμενο μήκος Hubble μας δίνει την ομοκινούμενη απόσταση που διένυσε το φως σε μία κοσμολογική χρονική κλίμακα, δηλαδή το χρόνο Hubble. Έτσι, αποτελεί και ένα μέτρο της απόστασης, επί της οποίας δύναται να υπάρξει *αιτιακή σχέση* ανάμεσα σε δύο περιοχές του σύμπαντος.

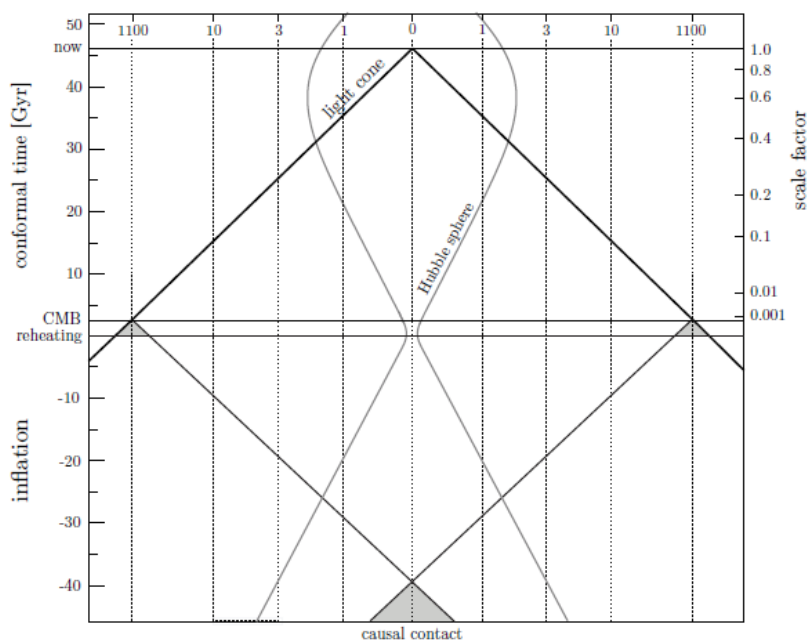
$$\text{Από τη σχέση (28) προκύπτει ότι } \mathcal{H}(t_{\text{dec}})^{-1} < \mathcal{H}(t_0)^{-1}.$$

Με άλλα λόγια, το πρόβλημα του ορίζοντα οφείλεται στο ότι το ομοκινούμενο μήκος Hubble αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου.

Κατά τον πληθωρισμό, καθώς η επιτάχυνση της διαστολής του σύμπαντος είναι θετική, έχουμε από τη σχέση (29):

$$\frac{d}{dt} (1/\mathcal{H}) < 0.$$

Άρα, καθ' όλη τη διάρκεια του πληθωρισμού, το ομοκινούμενο μήκος Hubble ελαττώνεται. Δηλαδή, ο πληθωρισμός ελαττώνει την απόσταση κατά την οποία μπορεί να υπάρξει αιτιακή σχέση μεταξύ δύο περιοχών του σύμπαντος, καθιστώντας δυνατό οι περιοχές αυτές να έχουν αλληλεπιδράσει πριν τον πληθωρισμό, όπου η τιμή της αιτιακής απόστασης ήταν σημαντικά μεγαλύτερη. Συγκεκριμένα, η απόσταση αυτή πριν τον πληθωρισμό υπολογίζεται πως ήταν πολύ μεγαλύτερη από το μέγεθος του σημερινού ορίζοντα. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως το κομμάτι του σύμπαντος που μπορούμε να δούμε εμείς σήμερα είναι ένα πολύ μικρό τμήμα μίας περιοχής που, επειδή ήταν μικρή πριν τον πληθωρισμό, ήταν σε αιτιακή σχέση. Έτσι, είναι λογικό οι συνθήκες να ήταν ομοιογενείς στην περιοχή εκείνη.



Εικόνα 2.1

Απεικονίζεται εδώ η λύση που δίνει ο πληθωρισμός στο πρόβλημα του ορίζοντα. Η ομοκινούμενη σφαίρα Hubble συρρικνώνεται κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού φέρνοντας σε επαφή τμήματα που πριν δεν βρίσκονταν σε αιτιακή απόσταση και διαστέλλεται και πάλι μετά το τέλος του πληθωρισμού, έως ότου επικρατήσει η σκοτεινή ενέργεια για $a \approx 0.5$. Η εικόνα πάρθηκε από το [9].

Τέλος, ο πληθωρισμός δίνει απάντηση και στο πρόβλημα των ανεπιθύμητων κατάλοιπων. Αν υποθέσουμε ότι τα κατάλοιπα αυτά παρήχθησαν πριν τον πληθωρισμό, τότε η τεράστια εκθετική διαστολή του σύμπαντος θα έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό, σχεδόν, των πυκνοτήτων των στοιχείων αυτών και άρα την εξαφάνισή τους.

2.2.3 ΤΟ ΠΕΔΙΟ INFLATON, Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΑΡΓΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ

Το πεδίο inflaton (the inflaton field):

Σε πολλά κοσμολογικά μοντέλα, ο πληθωρισμός οφείλεται σε ένα βαθμωτό πεδίο, το inflaton ϕ , το οποίο υπόκειται σε κβαντικές διακυμάνσεις. Κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, το inflaton είναι σχεδόν ομοιογενές κι έτσι η πίεση και η ενεργειακή του πυκνότητα δίνονται από τις αντίστοιχες σχέσεις για ένα βαθμωτό και ομοιογενές πεδίο:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) .$$

Σύμφωνα με τη θεωρία πεδίου, η αρνητική πίεση που απαιτεί ο πληθωρισμός προέρχεται από τον όρο του δυναμικού $V(\phi)$. Προς το παρόν, θεωρούμε τον όρο αυτό ως μία αυθαίρετη συνάρτηση. Διαφορετικά μοντέλα για το inflaton αντιστοιχούν σε διαφορετικά δυναμικά $V(\phi)$. Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι συνδυασμοί:

$$\rho + p = \dot{\phi}^2$$

$$\rho + 3p = 2[\dot{\phi}^2 - V(\phi)] .$$

Η εξίσωση πεδίου για το χώρο Minkowski είναι:

$$\ddot{\phi} - \nabla^2\phi = -V'(\phi).$$

Στην περίπτωση ομοιογενούς πεδίου, η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή:

$$\ddot{\phi} = -V'(\phi).$$

Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω εξισώσεις για την ενεργειακή πυκνότητα και την πίεση, σε συνδυασμό με την εξίσωση συνέχειας θα πάρουμε την εξίσωση πεδίου του inflaton, στην περίπτωση του διαστελλόμενου σύμπαντος που μας ενδιαφέρει. Προκύπτει τελικά:

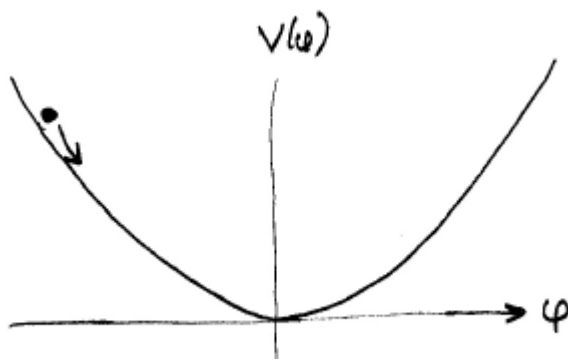
$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi), \quad (30)$$

όπου, λόγω διαστολής, προστέθηκε στην εξίσωση ο όρος $3H\dot{\phi}$, ο οποίος λειτουργεί ως ένας όρος τριβής που καθυστερεί την εξέλιξη του ϕ .

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, η συνθήκη (27) για τον πληθωρισμό ικανοποιείται τελικά όταν:

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi).$$

Παραθέτουμε παρακάτω τη γραφική απεικόνιση του πεδίου inflaton ϕ και του δυναμικού του $V(\phi)$:



Εικόνα 2.2.

Η εικόνα πάρθηκε από το [8].

Η βασική ιδέα για τον πληθωρισμό είναι ότι το inflaton ήταν αρχικά μακριά από το ελάχιστο του δυναμικού του, $V(\phi)$. Αν το δυναμικό έχει κατάλληλο σχήμα (σχετικά επίπεδο), τότε ο όρος τριβής θα κάνει σύντομα αρκετά μικρό το $\dot{\phi}$, ούτως ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη, ακόμα και αν δεν ικανοποιούταν αρχικά.

Η εξίσωση Friedmann για ένα επίπεδο σύμπαν είναι:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \rho ,$$

όπου M_{Pl} είναι η ελαττωμένη μάζα Planck που δίνεται από τη σχέση:

$$M_{Pl} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} = 2.436 \cdot 10^{18} \text{ GeV}.$$

Εισάγοντας τη σχέση για την ενεργειακή πυκνότητα ενός βαθμωτού και ομοιογενούς πεδίου στην παραπάνω σχέση Friedmann, παίρνουμε την εξίσωση:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (31)$$

Παρατήρηση:

Στους παραπάνω υπολογισμούς συμπεριλάβαμε μόνο την ενεργειακή πυκνότητα και την πίεση του inflaton. Κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, το inflaton ϕ μεταβάλλεται αργά και έτσι η ενεργειακή του πυκνότητα, που κυριαρχείται από το $V(\phi)$, μεταβάλλεται εξίσου αργά. Εάν στην ενεργειακή πυκνότητα συμμετείχαν και η ακτινοβολία και η ύλη, τότε οι δικές τους ενεργειακές πυκνότητες θα ελαττώνονταν γρήγορα ($\rho \sim a^{-4}$ και $\rho \sim a^{-3}$

αντίστοιχα) και σύντομα θα γίνονταν αμελητέες. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για να ξεκινήσει ο πληθωρισμός απαιτείται, ως αρχική συνθήκη, μία σχετική κυριαρχία του inflaton ως προς τα υπόλοιπα στοιχεία. Ωστόσο, εφόσον ξεκινήσει ο πληθωρισμός, μπορούμε να αγνοήσουμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία στο σύμπαν πέραν του inflaton.

Η προσέγγιση αργής εξέλιξης του πληθωρισμού (slow-roll inflation):

Στην προσέγγιση αυτή για τον πληθωρισμό ισχύουν οι συνθήκες:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$$

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|.$$

Λόγω των ανισοτήτων αυτών, οι προηγούμενες εξισώσεις για το inflaton (30), (31) παίρνουν τη μορφή:

$$H^2 = \frac{V(\phi)}{3M_{Pl}^2}$$

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi).$$

Επιπρόσθετα, για την προσέγγιση αργής εξέλιξης, ορίζουμε τις παραμέτρους ϵ και η ως εξής:

$$\epsilon(\phi) = \frac{1}{2} M_{Pl}^2 \left(\frac{V'}{V} \right)^2$$

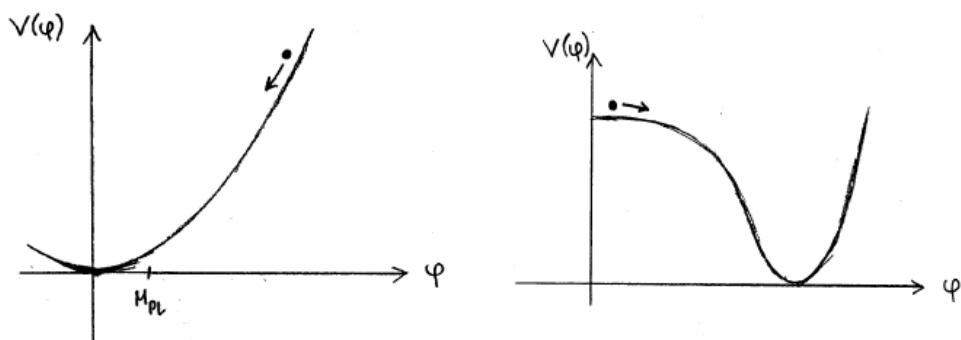
$$\eta(\phi) = M_{Pl}^2 \frac{V''}{V}.$$

Για να ισχύει η προσέγγιση αργής εξέλιξης, θα πρέπει οι παράμετροι αυτοί να ικανοποιούν τις συνθήκες :

$$\varepsilon \ll 1 \quad \text{και} \quad |\eta| \ll 1.$$

Οι συνθήκες αυτές είναι αναγκαίες, αλλά όχι επαρκείς για να εξασφαλίσουν ότι ο πληθωρισμός θα ακολουθήσει αυτή την προσέγγιση. Ουσιαστικά, είναι συνθήκες που αφορούν στο σχήμα του δυναμικού και ‘εντοπίζουν’ σε αυτό ένα τμήμα (slow-roll section), όπου η προσέγγιση αργής εξέλιξης δύναται να εφαρμοστεί.

Στην περίπτωση αυτή, οι λύσεις των εξισώσεων (30), (31) αποτελούν έναν ελκυστή για τις αντίστοιχες γενικές λύσεις των εξισώσεων αυτών. Με άλλα λόγια, οι δεύτερες προσεγγίζουν ταχύρρυθμα τις πρώτες, ξεκινώντας από τυχαίες αρχικές συνθήκες.



Εικόνα 2.3.

Το δυναμικό $V(\varphi)$ για την αργή προσέγγιση μεγάλου και μικρού πεδίου αντίστοιχα ($|\varphi| > M_{Pl}$ και $|\varphi| < M_{Pl}$ αντίστοιχα). Η εικόνα πάρθηκε από το [8].

Έχοντας αναφέρει κάποια στοιχεία για το inflaton, θα δούμε τώρα πως, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες σχέσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των e-foldings, $N(\varphi)$, κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Σημειώνεται ότι e-folding είναι το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε ώστε το σύμπαν να διασταλλεί κατά έναν παράγοντα e .

Κατά τον πληθωρισμό, ο παράγοντας κλίμακας $a(t)$ αυξάνεται ραγδαία. Ο αριθμός των e-foldings από τη χρονική στιγμή t ως το τέλος του πληθωρισμού t_{end} , δίνεται από τη σχέση:

$$N(t) = \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)}.$$

Η επίλυση των προβλημάτων της επιπεδότητας και του ορίζοντα απαιτεί για την τιμή N να ικανοποιείται η συνθήκη $N \geq 55$.

Όταν είναι δόκιμη η προσέγγιση αργής εξέλιξης, ο παράγοντας $a(t)$ μεταβάλλεται πολύ πιο γρήγορα από την παράμετρο Hubble $H(t)$ (το $a(t)$ αυξάνεται γρήγορα, ενώ το $H(t)$ ελαττώνεται αργά) και έτσι το ομοκινούμενο μήκος Hubble ελαττώνεται περίπου κατά τον ίδιο αριθμό e-foldings.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή $N(t) = N(\varphi(t)) = N(\varphi)$, από το σχήμα του δυναμικού $V(\varphi)$ και την τιμή του φ τη χρονική στιγμή t :

$$\dot{a} = Ha \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{a} = d(\ln a) = H dt,$$

$$\text{όπου } dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}$$

$$N(\varphi) = \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} = \int_t^{t_{end}} H(t) dt = \int_{\varphi}^{\varphi_{end}} \frac{H}{\dot{\varphi}} d\varphi.$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις της αργής προσέγγισης, προκύπτει τελικά για τον αριθμό των e-foldings:

$$N(\varphi) \approx \frac{1}{M_{Pl}^2} \int_{\varphi}^{\varphi_{end}} \frac{V}{V'} d\varphi. \quad (32)$$

2.2.4 Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

Στην υπο-ενότητα αυτή, μας ενδιαφέρει η εξέλιξη κάθε ομοκινούμενης κλίμακας ή αλλιώς κάθε ομοκινούμενου κυματάριθμου k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$k^{-1} = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Σημειώνεται ότι με τον όρο κλίμακα στο εξής θα εννοούμε την ποσότητα k^{-1} και όχι την αντίστροφή της, k .

Μία σημαντική ερώτηση είναι αν μία κλίμακα είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από το μήκος Hubble για μία δεδομένη χρονική στιγμή t . Κατατάσσουμε την κλίμακα αυτή με βάση τα ακόλουθα:

- Υπερ-ορίζοντας (superhorizon), όταν $k < \mathcal{H}$ ($k^{-1} > \mathcal{H}^{-1}$).
- Ορίζοντας (horizon, η κλίμακα εξέρχεται ή εισέρχεται στον ορίζοντα), όταν $k = \mathcal{H}$.
- Υπο-ορίζοντας (subhorizon), όταν $k > \mathcal{H}$ ($k^{-1} < \mathcal{H}^{-1}$).

Παρατηρούμε εδώ ότι οι μεγάλες κλίμακες (μεγάλες τιμές του k^{-1}) αντιστοιχούν σε μικρές τιμές του k και αντίστροφα. Σημειώνεται, επίσης, ότι κάποιες φορές αναφερόμαστε στο μήκος Hubble με τον όρο ‘ορίζοντας’.

Με βάση αυτά που αναπτύξαμε στην υπο-ενότητα 2.2.2 καταλήξαμε στο εξής συμπέρασμα:

κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού:

$$\mathcal{H}^{-1} \downarrow$$

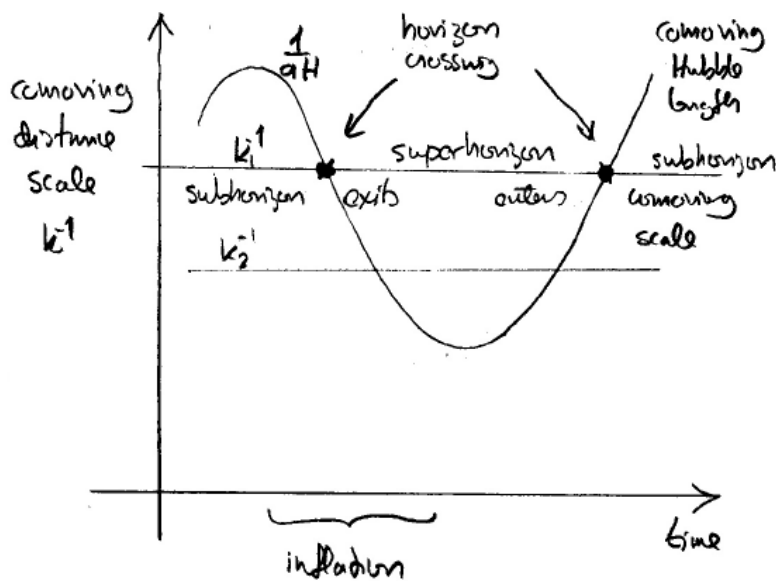
κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε άλλης χρονικής περιόδου :

$$\mathcal{H}^{-1} \uparrow$$

Εξαίρεση αποτελεί η πρόσφατη περίοδος, όπου η διαστολή του σύμπαντος άρχισε να επιταχύνεται και πάλι, με αποτέλεσμα να αυξάνεται και πάλι η ποσότητα \mathcal{H}^{-1} .

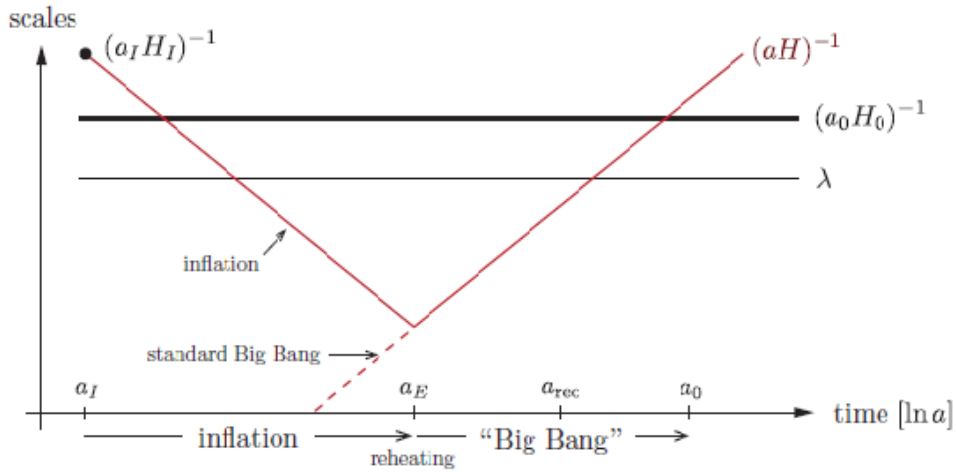
Κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, όπου το \mathcal{H}^{-1} ελαττώνεται, οι κλίμακες υπο-ορίζοντα εξέρχονται από τον ορίζοντα και παραμένουν υπερ-ορίζοντες, μέχρι το τέλος του πληθωρισμού. Προφανώς, πρώτες εξέρχονται οι μεγαλύτερες κλίμακες και τελευταίες οι μικρότερες. Μετά το τέλος του πληθωρισμού, όπου το \mathcal{H}^{-1} αυξάνεται και πάλι, οι κλίμακες εισέρχονται και πάλι στον ορίζοντα, γίνονται δηλαδή και πάλι υπο-ορίζοντες, με την αντίστροφη σειρά απ' ότι εξήλθαν: πρώτες εισέρχονται οι μικρότερες κλίμακες και τελευταίες οι μεγαλύτερες. Οι μεγαλύτερες κλίμακες που μπορούμε να παρατηρήσουμε σήμερα είναι αυτές που βρίσκονται στο 'σημερινό ορίζοντα'. Τώρα που η διαστολή του σύμπαντος επιταχύνεται ξανά (και άρα το \mathcal{H}^{-1}), οι μεγαλύτερες κλίμακες εξέρχονται και πάλι από τον ορίζοντα.

Τα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζουν την εξέλιξη του μήκους Hubble, συναρτήσει του χρόνου και 2 κλίμακες k_1^{-1} και k_2^{-1} , σε ομοκινούμενες συντεταγμένες.



Εικόνα 2.4.

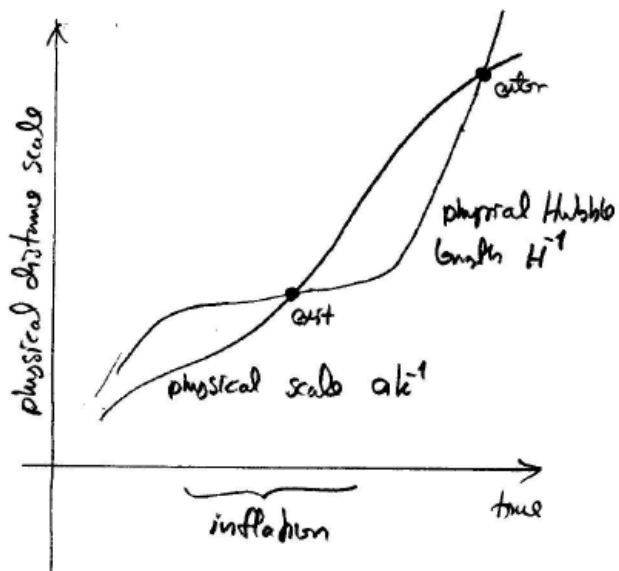
Η εικόνα πάρθηκε από το [8].



Εικόνα 2.5.

Η εικόνα πάρθηκε από το [9].

Παραθέτουμε ακόμα τη γραφική απεικόνιση του μήκους Hubble και μίας κλίμακας k^{-1} , οι οποίες αναπαρίστανται με όρους φυσικής απόστασης.



Εικόνα 2.6.

Η εικόνα πάρθηκε από το [8].

Θέλουμε τώρα να ταυτοποιήσουμε τις κλίμακες που εξήλθαν από τον ορίζοντα κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού με τις αντίστοιχες κλίμακες του παρόντος σύμπαντος. Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει να συνυπολογίσουμε όλη την πορεία που ακολούθησε μία κλίμακα από τον πληθωρισμό έως τώρα. Χωρίζουμε την πορεία αυτή σε τέσσερις χρονικές περιόδους:

1. Από τη στιγμή όπου η κλίμακα που μας ενδιαφέρει εξήλθε από τον ορίζοντα έως το τέλος του πληθωρισμού: $t_k \rightarrow t_{\text{end}}$
2. Από το τέλος του πληθωρισμού έως το χρόνο επαναθέρμανσης, δηλαδή, το χρόνο όπου επιτυγχάνεται θερμική ισορροπία σε υψηλή θερμοκρασία. Θεωρούμε πως, σε αυτό το χρονικό διάστημα, το σύμπαν συμπεριφέρεται σαν να κυριαρχείται από ύλη ($\rho \sim a^{-3}$): $t_{\text{end}} \rightarrow t_{\text{reh}}$.
3. Από την επαναθέρμανση μέχρι την ίση κυριαρχία ακτινοβολίας-ύλης. Το διάστημα αυτό αναφέρεται ως η εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας ($\rho \sim a^{-4}$): $t_{\text{reh}} \rightarrow t_{\text{eq}}$.
4. Από την ίση κυριαρχία ακτινοβολίας- ύλης έως σήμερα. Το διάστημα αυτό αναφέρεται ως η εποχή της κυριαρχίας της ύλης: $t_{\text{eq}} \rightarrow t_0$.

Υποθέτουμε πως έχουμε μία κλίμακα k , η οποία εξήλθε από τον ορίζοντα τη στιγμή $t = t_k$, όπου $a = a_k$ και $H = H_k$:

$$k = \mathcal{H}_k = \frac{a_k}{a_0} H_k.$$

Για να υπολογίσουμε πόσο μεγάλη είναι αυτή η κλίμακα σήμερα, θα πρέπει να τη συγκρίνουμε με τη σημερινή τιμή του ορίζοντα και άρα την τρέχουσα τιμή της κλίμακας Hubble:

$$\frac{k}{H_0} = \frac{a_k H_k}{a_0 H_0} = \frac{a_k}{a_{end}} \cdot \frac{a_{end}}{a_{reh}} \cdot \frac{a_{reh}}{a_{eq}} \cdot \frac{a_{eq}}{a_0} \cdot \frac{H_k}{H_0} . \quad (33)$$

Από την προηγούμενη υπο-ενότητα γνωρίζουμε:

$$\frac{a_k}{a_{end}} = e^{-N(k)} ,$$

όπου $N(k)$ ο αριθμός των e-διαστημάτων αφού εξέλθει η κλίμακα k από τον ορίζοντα, για τον οποίο έχουμε βρει πως ισχύει:

$$N(k) = N(\varphi_k) \approx \frac{1}{M_{Pl}^2} \int_{\varphi}^{\varphi_{end}} \frac{V}{V'} d\varphi .$$

Ο παράγοντας $(a_{reh} / a_{eq})(a_{eq} / a_0)$ σχετίζεται με τη μεταβολή στην ενεργειακή πυκνότητα στο χρονικό διάστημα $t_{reh} \rightarrow t_{eq} \rightarrow t_0$:

$$t_{reh} \rightarrow t_{eq} : \quad \rho \sim \alpha^{-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{reh}}{a_{eq}} = \left(\frac{\rho_{eq}}{\rho_{reh}} \right)^{1/4} .$$

$$t_{eq} \rightarrow t_0 : \quad \rho \sim \alpha^{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{eq}}{a_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_{eq}} \right)^{1/3} .$$

Μπορούμε να συγχωνεύσουμε τα δύο παραπάνω βήματα σε ένα, εάν σκεφτούμε την τρέχουσα ενεργειακή πυκνότητα της ακτινοβολίας ρ_{r0} :

$$t_{\text{reh}} \rightarrow t_0 : \quad \rho_r \sim \alpha^{-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_{\text{reh}}}{a_0} = \left(\frac{\rho_{r0}}{\rho_{\text{reh}}} \right)^{1/4} .$$

Σημειώνεται ότι στις ενεργειακές πυκνότητες ρ και ρ_0 δεν συμπεριλαμβάνουμε τη σκοτεινή ενέργεια.

Αντίστοιχα έχουμε:

$$t_{\text{end}} \rightarrow t_{\text{reh}} : \quad \rho \sim \alpha^{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_{\text{end}}}{\alpha_{\text{reh}}} = \left(\frac{\rho_{\text{reh}}}{\rho_{\text{end}}} \right)^{1/3} .$$

Την αναλογία $\frac{H_k}{H_0}$ την υπολογίζουμε ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} H_k &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_k} \\ H_0 &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{H_k}{H_0} = \left(\frac{\rho_k}{\rho_c} \right)^{1/2} ,$$

όπου ρ_k είναι η ενεργειακή πυκνότητα όταν η κλίμακα k εξέρχεται από τον ορίζοντα.

Αντικαθιστώντας τους υπολογισμούς αυτούς στη σχέση (33) παίρνουμε τελικά:

$$\frac{k}{H_0} = e^{-N(k)} \left(\frac{\rho_{\text{reh}}}{\rho_{\text{end}}} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_{r0}}{\rho_{\text{reh}}} \right)^{1/4} \left(\frac{\rho_k}{\rho_c} \right)^{1/2} .$$

Κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού ισχύει $\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$, όπου $\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ κατά τη διάρκεια της προσέγγισης αργής εξέλιξης του πληθωρισμού. Έτσι, στα παραπάνω μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση $\rho_k \approx V_k$. Λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς $N(k)$ προκύπτει η εξίσωση:

$$N(k) = -\ln \frac{k}{H_0} - \frac{1}{3} \ln \frac{\rho_{end}^{1/4}}{\rho_{reh}^{1/4}} + \ln \frac{V_k^{1/4}}{\rho_{end}^{1/4}} + \ln \frac{V_k^{1/4}}{10^{16} \text{ GeV}} + \ln \frac{10^{16} \text{ GeV} \cdot \rho_{r0}^{1/4}}{\rho_c^{1/2}},$$

όπου η ποσότητα 10^{16} GeV χρησιμεύει ως μία κλίμακα αναφοράς για το V_k . Στην παραπάνω σχέση αντικαθιστούμε με τις τιμές $\rho_{r0}^{1/4} = 2.375 \cdot 10^{-13} \text{ GeV}$, $\rho_c^{1/2} = 3.000 \cdot 10^{-12} \text{ GeV}$ και παίρνουμε:

$$N(\varphi_k) = -\ln \frac{k}{H_0} - \frac{1}{3} \ln \frac{\rho_{end}^{1/4}}{\rho_{reh}^{1/4}} + \ln \frac{V_k^{1/4}}{\rho_{end}^{1/4}} + \ln \frac{V_k^{1/4}}{10^{16} \text{ GeV}} + (60.85 - \ln h).$$

Για οποιαδήποτε ‘σημερινή’ κλίμακα απόστασης k , που εκφράζεται σε αναλογία με την τρέχουσα τιμή της παραμέτρου Hubble, η εξίσωση αυτή δίνει την τιμή φ_k που είχε το inflaton όταν η κλίμακα αυτή εξήλθε από τον ορίζοντα κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού.

Σε γενικές γραμμές, το $N(\varphi_k) \approx 50$ e-διαστήματα, μετά την έξοδο των μεγαλύτερων παρατηρήσιμων κλιμάκων από τον ορίζοντα.

Το κεφάλαιο 2 περιείχε αναφορές από το [2].

3. ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

Εισαγωγή

Γνωρίζουμε ότι το σύμπαν μας σήμερα είναι αρκετά ανομοιογενές. Με τον όρο ‘σχηματισμός δομών’, αναφερόμαστε στη γέννηση και την εξέλιξη αυτής της ανομοιογένειας. Οι σημερινές δομές του σύμπαντος προήλθαν από την ενίσχυση κάποιας πρώιμης ανομοιογένειας, με τη βοήθεια της βαρύτητας. Η ιστορία του σχηματισμού των δομών χωρίζεται σε δύο βασικά μέρη:

1. Τη γέννηση αυτής της πρώιμης ανομοιογένειας, με τη βοήθεια του πληθωρισμού. Με βάση τη θεωρία του πληθωρισμού, η δομή προέρχεται από κβαντικές διακυμάνσεις του inflaton, ϕ , κοντά στη χρονική στιγμή όπου η εκάστοτε κλίμακα που εξετάζουμε εξέρχεται από τον ορίζοντα.
2. Την ανάπτυξη αυτής της αρχικά μικρής ανομοιογένειας και την εξέλιξή της στη σημερινή δομή που παρατηρούμε στο σύμπαν. Η εξέλιξη αυτή οφείλεται κυρίως στη βαρύτητα, αλλά επηρεάζεται και από τις δυνάμεις πίεσης.

Η βασική θεωρία που χρησιμοποιείται για τη μελέτη της εξέλιξης των δομών είναι η θεωρία διαταραχών 1^{ης} τάξης (γραμμική θεωρία διαταραχών). Σύμφωνα με αυτήν, μπορούμε να γράψουμε όλες τις ανομοιογενείς ποσότητες ως το άθροισμα μίας τιμής υποβάθρου (background value), η οποία αντιστοιχεί στο ισοτροπικό και ομοιογενές μοντέλο και μίας διαταραχής, η οποία αντιστοιχεί στην απόκλιση από την τιμή υποβάθρου. Για παράδειγμα, για την ενεργειακή πυκνότητα θα έχουμε:

$$\rho(t,x) = \overline{\rho(t)} + \delta\rho(t,x).$$

Κατόπιν, θεωρούμε ότι η διαταραχή είναι μικρή, οπότε η λογική προσέγγιση είναι να μην συμπεριλάβουμε στις εξισώσεις μας όρους που αποτελούνται από δύο ή περισσότερες διαταραχές. Έτσι, η εξίσωση που προκύπτει περιέχει όρους διαταραχής που θα είναι είτε μηδενικής (background values) είτε πρώτης τάξης.

Για τις διαταραχές του υπο-οριζοντα χρησιμοποιούμε τη Νευτώνεια θεωρία διαταραχών, ενώ για εκείνες που είναι υπερ-οριζοντα ή βρίσκονται πολύ κοντά στον οριζοντα η καλύτερη προσέγγιση είναι η σχετικιστική θεωρία διαταραχών.

3.1 ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

Οι Νευτώνειες εξισώσεις που αφορούν στη δυναμική ρευστών, όπου συμπεριλαμβάνεται η βαρύτητα είναι:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla(\rho_m u) = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla)u + \frac{1}{\rho_m} \nabla p + \nabla \tilde{\Phi} = 0 \quad (35)$$

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} = 4\pi G \rho_m, \quad (36)$$

όπου ρ_m είναι η πυκνότητα μάζας, p είναι η πίεση, u η ταχύτητα ροής του ρευστού και $\tilde{\Phi}$ το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό (χρησιμοποιούμε $\tilde{\Phi}$ για το βαρυτικό δυναμικό ώστε να μπορούμε να ονομάσουμε Φ τη διαταραχή του).

Η 1^η εξίσωση είναι η αρχή διατήρησης της μάζας και η 2^η είναι η εξίσωση Euler, που ουσιαστικά αποτελεί το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για ένα ρευστό. Αν θέλουμε μία Νευτώνεια εξίσωση που να αναφέρεται στην πυκνότητα ενέργειας, θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και τη μεταβολή του πραγματοποιείται λόγω της πίεσης στην εξίσωση και θέτοντας $\rho = \rho_m + \rho_u$ ($\rho_u =$ Νευτώνεια ενεργειακή πυκνότητα), καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) + p \nabla u = 0.$$

Ωστόσο, για μη σχετικιστική ύλη ισχύει $\rho_u \ll \rho_m$, οπότε στους υπολογισμούς που ακολουθούν θα στηριχθούμε μόνο στις τρεις πρώτες εξισώσεις.

Για ένα ομοιογενώς διαστελλόμενο ρευστό, οι εξισώσεις αυτές έχουν λύσεις:

$$\begin{aligned}\rho_m &= \rho_m(t_0) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} \\ \mathbf{u} &= \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{r} \\ \tilde{\Phi} &= \frac{2\pi G}{3} \rho_m r^2,\end{aligned}\tag{37}$$

οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0\tag{38}$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3} \rho_m.\tag{39}$$

Οι δύο αυτές σχέσεις, δεν είναι παρά η εξίσωση συνέχειας και η 2^η εξίσωση Friedmann για ένα επίπεδο σύμπαν, κυριαρχημένο από ύλη. Σημειώνεται ότι στα παραπάνω αντικαταστήσαμε $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

Θεωρούμε τώρα μία μικρή διαταραχή ώστε:

$$\rho_m(t,r) = \overline{\rho(t)} + \delta\rho(t,r)\tag{40}$$

$$p(t,r) = \overline{p(t)} + \delta p(t,r)\tag{41}$$

$$\mathbf{u}(t,r) = H(t)\mathbf{r} + \mathbf{v}(t,r)\tag{42}$$

$$\tilde{\Phi}(t,r) = \frac{2\pi G}{3} \bar{\rho} r^2 + \Phi(t,r),\tag{43}$$

όπου $\bar{\rho}, \bar{p}, H$ είναι οι τιμές υποβάθρου (οι ομογενείς λύσεις) και $\delta\rho, \delta\rho, v$ και Φ είναι μικρές ανομοιογενείς διαταραχές.

Αν εισάγουμε τις εξισώσεις (40),(41),(42),(43) στις πρώτες τρεις Νευτώνειες εξισώσεις και αφαιρέσουμε από αυτές τις ομοιογενείς εξισώσεις (37),(38),(39) τότε θα καταλήξουμε στις εξισώσεις διαταραχών:

$$\delta\dot{\rho} + 3H\delta\rho + Hr\nabla\delta\rho + \bar{\rho}\nabla v = 0 \quad (44)$$

$$\dot{v} + Hv + Hr\nabla v + \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\delta\rho + \nabla\Phi = 0 \quad (45)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\delta\rho. \quad (46)$$

Θέλουμε τώρα να βρούμε τις εξισώσεις διαταραχών στο χώρο Fourier. Για να συμβεί αυτό ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Αρχικά ορίζουμε τις ομοκινούμενες συντεταγμένες χ και τη σχετική διαταραχή πυκνότητας δ ως εξής:

$$\chi = \frac{a_0 r}{a(t)}$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}.$$

Κατόπιν, αναπτύσσουμε κατά Fourier τις διαταραχές $\delta\rho, \delta\rho, v, \Phi$ με όρους επίπεδων κυμάτων (modes) με ομοκινούμενο κυματάριθμο k . Τέλος, λαμβάνουμε υπόψιν το γεγονός ότι επειδή οι εξισώσεις διαταραχών είναι γραμμικές για τις μικρές ποσότητες $\delta\rho, \delta\rho, v, \Phi$, κάθε τρόπος Fourier εξελίσσεται ανεξάρτητα από τα άλλα.

Εισάγοντας τις εξισώσεις που προέκυψαν για τα $\delta\rho, \delta\rho, v, \Phi$ στις σχέσεις (44),(45),(46) προκύπτουν οι εξισώσεις διαταραχών στο χώρο Fourier:

$$\delta\dot{k} + \frac{ia_0 k v_k}{a} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a}{a_0} v_k \right) + ik \frac{\delta p_k}{\bar{\rho}} + ik\Phi_k = 0 \quad (48)$$

$$\Phi_k = -4\pi G \left(\frac{a}{a_0 k}\right)^2 \bar{\rho} \delta_k . \quad (49)$$

Οι διαταραχές διακρίνονται σε βαθμωτές και διανυσματικές. Οι διανυσματικές διαταραχές δεν σχετίζονται με τις διαταραχές πυκνότητας ή τη δομή του σύμπαντος. Επιπρόσθετα, οποιαδήποτε πρώιμη διανυσματική διαταραχή αναμένεται να γίνει πολύ μικρή καθώς διαστέλλεται το σύμπαν, όσο είναι σε ισχύ η θεωρία διαταραχών πρώτης τάξης. Άρα, σε ό,τι αφορά στο σχηματισμό δομών, ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά για τις βαθμωτές διαταραχές (scalar perturbations).

Αν τώρα στην εξίσωση (48) αντικαταστήσουμε τις παραμέτρους v_k και Φ_k , όπως δίνονται από τις εξισώσεις (47) και (49) αντίστοιχα, θα καταλήξουμε στην εξίσωση:

$$\delta_k \ddot{+} 2H\delta_k \dot{=} - \frac{a_0^2 k^2}{a^2} \frac{\delta p_k}{\bar{\rho}} + 4\pi G \bar{\rho} \delta_k .$$

Στο σημείο αυτό, για να προχωρήσουμε τη συζήτηση αυτή, θα πρέπει να κάνουμε μία προσθήκη σχετικά με τις αδιαβατικές διαταραχές και τις διαταραχές εντροπίας,

Έστω ότι η καταστατική εξίσωση είναι της μορφής $p = p(\rho)$. Τότε για τις διαταραχές δp , $\delta \rho$ και για τις παραγώγους των τιμών υποβάθρου \dot{p} , $\dot{\rho}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\delta p = \frac{dp}{d\rho} \delta \rho$$

$$\dot{\delta p} = \frac{dp}{d\rho} \dot{\delta \rho} .$$

Υποθέτοντας ότι η ποσότητα $dp/d\rho$ δεν είναι αρνητική, ορίζουμε την ταχύτητα του ήχου c_s :

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

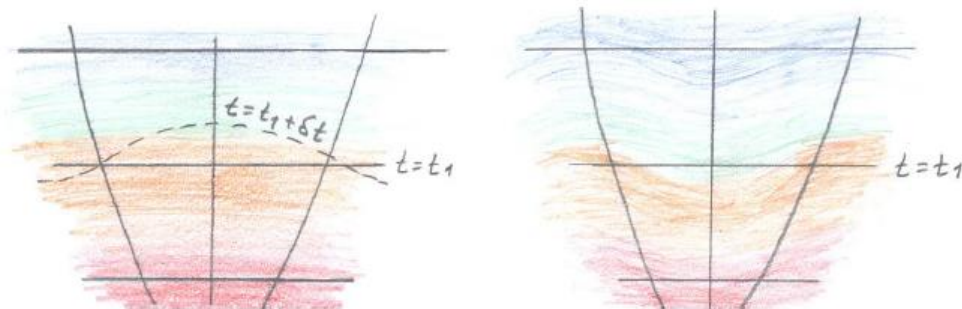
και προφανώς ισχύει η σχέση:

$$\frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = c_s^2 .$$

Παρατηρούμε στο σημείο αυτό, ότι η ποσότητα c_s^2 ισούται με την ποσότητα w , η οποία συμμετέχει στην καταστατική εξίσωση όπως αναλύθηκε στην υπο-ενότητα 1.3.

Διαταραχές με την ιδιότητα $\frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}$ καλούνται στην κοσμολογία *αδιαβατικές* διαταραχές. Αν $p = p(\rho)$, τότε οι διαταραχές είναι σίγουρα αδιαβατικές. Οι αδιαβατικές διαταραχές έχουν την ιδιότητα ότι η τοπική ‘κατάσταση της ύλης’ (που καθορίζεται από την ενεργειακή πυκνότητα και την πίεση ρ και p σε κάποιο σημείο (t, x) του διαταραγμένου σύμπαντος (perturbed universe) είναι η ίδια με εκείνη του ομοιογενούς σύμπαντος, σε ελάχιστα διαφορετικό χρόνο $t + \delta t$. Η χρονική αυτή διαφορά εξαρτάται από τις διαφορετικές θέσεις x .

Αδιαβατικές είναι και οι πρώιμες διαταραχές (πριν την είσοδο στον ορίζοντα).



Εικόνα 3.1.

Για αδιαβατικές διαταραχές, οι συνθήκες για το διαταραγμένο σύμπαν (δεξιά), στο σημείο (t_1, x) , είναι ίσες με τις συνθήκες για το σημείο $(t_1 + \delta t, x)$ του σύμπαντος υποβάθρου (αριστερά). Η εικόνα πάρθηκε από το [8].

Αν θεωρήσουμε τώρα αδιαβατικές διαταραχές για ένα μη σχετικιστικό ρευστό που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο, οδηγούμαστε στην εξίσωση Jeans:

$$\delta_k'' + 2H\delta_k' + \left[\frac{c_s^2 a_0^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho} \right] \delta_k = 0 \quad \text{Εξίσωση Jeans} \quad (50)$$

Η φύση της λύσης της εξίσωσης Jeans, εξαρτάται από τους όρους που βρίσκονται μέσα στις αγκύλες. Ο 1^{ος} όρος στην αγκύλη οφείλεται στην πίεση, η οποία προσπαθεί να αντισταθεί στις ελκτικές δυνάμεις της βαρύτητας και επομένως όταν αυτός ο όρος επικρατεί έχουμε ταλαντωτικές λύσεις, δηλαδή, στάσιμα (ηχητικά) κύματα πυκνότητας. Αντίθετα, αν επικρατήσει ο δεύτερος όρος που βρίσκεται εντός της αγκύλης, ο οποίος οφείλεται στη βαρύτητα, οι διαταραχές αναπτύσσονται. Ο κυματάρημος για τον οποίο αυτοί οι όροι είναι ίσοι, ονομάζεται κυματάρημος Jeans, k_J , και το αντίστοιχο μήκος κύματος καλείται μήκος κύματος Jeans λ_J (Jeans length). Τα μεγέθη k_J και λ_J ορίζονται ως εξής:

$$k_J = \frac{a}{a_0} \frac{\sqrt{4\pi G \bar{\rho}}}{c_s} \quad (51)$$

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} \quad (52)$$

Για μη σχετικιστική ύλη ισχύει $c_s \ll 1$, οπότε το μήκος κύματος Jeans είναι πολύ μικρότερο από το μήκος Hubble, $k_J \gg \mathcal{H}$. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη Νευτώνεια θεωρία διαταραχών για κλίμακες και μικρότερες αλλά και μεγαλύτερες από το μήκος Jeans, με την προϋπόθεση πάντα αυτές οι κλίμακες να παραμένουν υπο-ορίζοντα.

- Για κλίμακες πολύ μικρότερες από το μήκος Jeans, $k \gg k_J$ ($k^{-1} \ll k_J^{-1}$):

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση Jeans γίνεται:

$$\delta_k'' + 2H\delta_k' + \frac{c_s^2 a_0^2 k^2}{a^2} \delta_k = 0 .$$

Επικρατεί, δηλαδή, ο όρος της πίεσης. Επομένως, οι λύσεις θα ταλαντώνονται:

$$\delta_k(t) \sim e^{\pm i\omega t} ,$$

$$\text{όπου } \omega = c_s (a_0/a)k .$$

Οι ταλαντώσεις αυτές υφίστανται απόσβεση, μέσω του όρου τριβής $2H\delta_k'$, οπότε το πλάτος των ταλαντώσεων ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου. Συμπεραίνουμε, άρα, πως σε υπό-Jeans κλίμακες δεν υπάρχει ανάπτυξη δομής.

- Για κλίμακες πολύ μεγαλύτερες από το μήκος Jeans (που βρίσκονται όμως εντός του ορίζοντα), $\mathcal{H} \ll k \ll k_J$ ($\mathcal{H}^{-1} \gg k^{-1} \gg k_J^{-1}$):

Προσεγγίζουμε τώρα την εξίσωση Jeans ως εξής:

$$\delta_k'' + 2H\delta_k' - 4\pi G\bar{\rho}\delta_k = 0$$

Για ένα σύμπαν που κυριαρχείται από ύλη, η λύση υποβάθρου για τον παράγοντα κλίμακας είναι $a(t) \sim t^{2/3}$, οπότε έχουμε:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$$

$$\frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} = H^2 = \frac{4}{9t^2} \Rightarrow \bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2}.$$

Αντικαθιστώντας με τα παραπάνω, η εξίσωση Jeans γίνεται:

$$\delta_k'' + \frac{4}{3t} \delta_k' - \frac{2}{3t^2} \delta_k = 0.$$

Η γενική λύση είναι:

$$\delta_k(t) = bt^{2/3} + ct^{-1}.$$

Ο 1^{ος} όρος είναι όρος ανάπτυξης (growing mode), ενώ ο 2^{ος} όρος είναι όρος διάσπασης (decaying mode). Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, ο όρος διάσπασης εξασθενεί πλήρως και η διαταραχή αναπτύσσεται:

$$\delta \sim t^{2/3} \sim a.$$

Επομένως, οι διαταραχές πυκνότητας στην ύλη αναπτύσσονται αναλογικά με τον παράγοντα κλίμακας.

Ακόμη, από την εξίσωση (49) έχουμε ότι:

$$\Phi \sim a^2 \bar{\rho} \delta \sim a^2 a^{-3} a = \text{σταθ.}$$

Άρα, η διαταραχή του βαρυτικού δυναμικού παραμένει σταθερή στο χρόνο, κατά τη διάρκεια της περιόδου όπου το σύμπαν κυριαρχείται από ύλη.

Στην περίπτωση της ακτινοβολίας τώρα, όπου ισχύει $p = \rho/3$, έχουμε $c_s^2 = 1/3 = w$. Επομένως, το μήκος Jeans μπορεί να συγκριθεί με το μήκος Hubble και άρα όλες οι

κλίμακες που είναι υπο-ορίζοντες, θα είναι και υπό-Jeans, στην περίπτωση της ακτινοβολίας. Συνεπώς, τώρα έχουμε μόνο ταλαντωτικές λύσεις.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το 'κοσμικό ρευστό' που εξετάζουμε αποτελείται από διάφορα στοιχεία i (διαφορετικά είδη ύλης ή ενέργειας), τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους παρά μόνο βαρυτικά. Αυτό σημαίνει πως κάθε στοιχείο 'βλέπει' μόνο τη δική του πίεση και ότι τα στοιχεία αυτά μπορούν να έχουν διαφορετικές ταχύτητες ροής. Έτσι, οι εξισώσεις για κάθε στοιχείο i θα είναι:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla(\rho_i u_i) = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_i \nabla) u_i + \frac{1}{\rho_i} \nabla \rho_i + \nabla \tilde{\Phi} = 0$$

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} = 4\pi G \rho_m,$$

όπου $\rho_m = \sum \rho_i$. Ωστόσο, υπάρχει μόνο ένα βαρυτικό δυναμικό $\tilde{\Phi}$, το οποίο οφείλεται στην ολική πυκνότητα κι έτσι όλα τα στοιχεία αλληλεπιδρούν βαρυτικά.

Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει και πάλι ομογενής λύση, για την οποία κάθε στοιχείο θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\dot{\rho}_i + 3H\rho_i = 0,$$

ενώ, ο νόμος της διαστολής καθορίζεται και πάλι από την ολική πυκνότητα:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3} \rho_m.$$

Εισάγουμε τώρα τις διαταραχές στην πυκνότητα, την πίεση και την ταχύτητα κάθε στοιχείου:

$$\rho_i(t,r) = \overline{\rho_i(t)} + \delta\rho_i(t,r)$$

$$p_i(t,r) = \overline{p_i(t)} + \delta p_i(t,r)$$

$$u_i(t,r) = H(t)r + v_i(t,r)$$

καθώς και την κοινή διαταραχή στο βαρυτικό δυναμικό:

$$\tilde{\Phi}(t,r) = \frac{2\pi G}{3} \bar{\rho} r^2 + \Phi(t,r).$$

Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία, βρίσκουμε τις εξισώσεις διαταραχών για κάθε στοιχείο στο χώρο των συντεταγμένων:

$$\delta\dot{\rho}_i + 3H\delta\rho_i + Hr\nabla\delta\rho_i + \bar{\rho}_i\nabla v_i = 0$$

$$\dot{v}_i + H v_i + Hr\nabla v_i + \frac{1}{\rho_i}\nabla\delta p_i + \nabla\Phi = 0$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\delta\rho.$$

και στο χώρο Fourier:

$$\delta\dot{k}_i + \frac{ia_0 k v_{ki}}{a} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a}{a_0} v_{ki} \right) + ik \frac{\delta p_{ki}}{\rho_i} + ik\Phi_k = 0$$

$$\Phi_k = -4\pi G \left(\frac{a}{a_0 k} \right)^2 \bar{\rho}_i \delta_{ki}.$$

Στις παραπάνω σχέσεις ισχύουν:

$$\delta\rho = \Sigma\delta\rho_i$$

$$\delta_i = \frac{\delta \rho_i}{\rho_i}.$$

Επιλέγοντας μόνο τις βαθμωτές διαταραχές, καταλήγουμε τελικά στις εξισώσεις για ένα ρευστό που αποτελείται από περισσότερα στοιχεία:

$$\delta_{ki}'' + 2H\delta_{ki}' = -\frac{a_0^2 k^2}{a^2} \frac{\delta p_{ki}}{\rho_i} + 4\pi G \bar{\rho} \delta \rho_k$$

$$\delta \rho_k = \sum_j \bar{\rho}_j \delta k_j.$$

Σαν τελευταία προσθήκη στην υπο-ενότητα αυτή, θα αναφερθούμε στα 'λεία' στοιχεία (smooth components). Σε πολλές περιπτώσεις επιλέγουμε να αγνοούμε τις διαταραχές ορισμένων στοιχείων (επειδή είναι μικρές για τις κλίμακες που μας ενδιαφέρουν). Τα στοιχεία αυτά ονομάζονται 'λεία' στοιχεία και τα συμβολίζουμε, με όρους πυκνότητας, σαν ένα ενιαίο στοιχείο ρ_s . Επιπρόσθετα, δεν συμπεριλαμβάνονται στον όρο διαταραχής της πυκνότητας, $\delta \rho$, ενώ, συμβάλλουν στην ομογενή (background) λύση των εξισώσεων.

Στη συνέχεια, θα ακολουθήσουμε τις διαταραχές με βάση την ιστορική πορεία που διαγράφουν οι κλίμακες, k , στο σύμπαν:

Πληθωρισμός $\xrightarrow{\text{έξοδος από τον ορίζοντα}}$ υπερ-ορίζοντας $\xrightarrow{\text{είσοδος στον ορίζοντα}}$ υπο-ορίζοντας

3.2 ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΟΥ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟΥ

Έως τώρα, γράφαμε τις διαταραχές σε όρους πυκνότητας και πίεσης, $\delta\rho$ και δp . Ωστόσο, κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, το σύμπαν κυριαρχείται από ένα βαθμωτό πεδίο (το inflaton φ) και, επομένως, θα ήταν προτιμότερο να εκφράσουμε τη διαταραχή σαν μία διαταραχή του πεδίου αυτού:

$$\varphi(t,x) = \overline{\varphi(t)} + \delta\varphi(t,x) . \quad (53)$$

Για ένα επίπεδο FRW σύμπαν, η εξίσωση πεδίου είναι:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2}\nabla^2\varphi + V'(\varphi) = 0. \quad (54)$$

Επίσης για την ομογενή λύση της εξίσωσης, ισχύει προφανώς $\nabla^2\varphi=0$, καθώς και η σχέση (30):

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi) .$$

Εισάγουμε τη σχέση (53) στη σχέση (54) και κατόπιν αφαιρούμε από αυτήν τη σχέση (30). Προκύπτει έτσι η εξίσωση διαταραχών του πεδίου inflaton:

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} - \frac{\alpha_0^2}{\alpha^2}\nabla^2\delta\varphi + V''(\overline{\varphi})\delta\varphi = 0.$$

Αντίστοιχα, στο χώρο Fourier έχουμε:

$$\delta\ddot{\varphi}_k + 3H\delta\dot{\varphi}_k + \left[\frac{\alpha_0^2}{\alpha^2}k^2 + m^2(\overline{\varphi}) \right] \delta\varphi_k = 0 , \quad (55)$$

$$m^2(\overline{\varphi}) = V''(\overline{\varphi}).$$

Η γενική λύση δίνεται από τις σχέσεις:

$$\delta\phi_k(t) = A_k w_k(t) + B_k w_k^*(t)$$

$$w_k(t) = \left(i + \frac{a_0 k}{aH}\right) \exp\left(\frac{ia_0 k}{aH}\right).$$

Αρκετά πριν την έξοδο από τον ορίζοντα $a_0 k \gg aH$ ($k^{-1} \ll \mathcal{H}^{-1}$), ο εκθετικός όρος παίρνει μεγάλες τιμές. Καθώς αυξάνεται, όμως, ο παράγοντας $a(t)$, η λύση ταλαντώνεται γρήγορα και το πλάτος της ταλάντωσης ελαττώνεται (λόγω απόσβεσης). Μετά την έξοδο από τον ορίζοντα, όταν πλέον $a_0 k \ll aH$, η λύση σταματά να ταλαντώνεται και προσεγγίζει τη σταθερή τιμή $i(A_k - B_k)$.

Παρατήρηση:

Στο σημείο αυτό, είναι πλέον προφανές τι θέλουμε από τον πληθωρισμό. Θέλουμε να βρούμε τις διαταραχές του inflaton, $\delta\phi_k$, λίγο χρόνο μετά την έξοδο από τον ορίζοντα. Για το σκοπό αυτό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω σταθερή τιμή που αναφέραμε. Κατόπιν, όταν η κλίμακα έχει εξέλθει πλέον από τον ορίζοντα, θα χρησιμοποιήσουμε μία άλλη ποσότητα για να μεταφέρουμε τις διαταραχές, την ομοκινούμενη διαταραχή καμπυλότητας (comoving curvature perturbation), \mathcal{R} , η οποία παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια που μία κλίμακα είναι υπερ-ορίζοντας.

Οι διαταραχές αυτές παράγονται από τις κβαντικές διαταραχές του κενού του πεδίου inflaton. Θα δούμε κάποια στοιχεία για τη διαδικασία αυτή ξεκινώντας από τη γενική περίπτωση, για έναν χώρο Minkowski.

Στο χώρο αυτό, η εξίσωση πεδίου για ένα ελεύθερο ($V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$), πραγματικό, βαθμωτό πεδίο που έχει μάζα είναι:

$$\ddot{\phi} - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0$$

ή

$$\ddot{\phi}_k + E_k^2 \phi_k = 0,$$

$$E_k^2 = m^2 + k^2,$$

για τα στοιχεία Fourier.

Αναγνωρίζουμε τη δεύτερη εξίσωση πεδίου ως την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή κι έτσι συμπεραίνουμε πως κάθε στοιχείο Fourier του πεδίου συμπεριφέρεται σαν ένας ανεξάρτητος αρμονικός ταλαντωτής.

Όταν χρησιμοποιούμε τον όρο ‘κενό’ αναφερόμαστε στην κατάσταση ελάχιστης ενέργειας του συστήματος, την κατάσταση $|0\rangle$, στην οποία δεν υπάρχουν σωμάτια (τα σωμάτια είναι κβάντα ταλαντώσεων του πεδίου). Για να προσθέσουμε στο σύστημα ένα κβάντο με ορμή k και ενέργεια E_k , δηλαδή για να δημιουργηθεί ένα σωματίο (και να βρεθούμε στην αντίστοιχη κατάσταση $|1k\rangle$), πρέπει να δράσουμε στην κατάσταση $|0\rangle$ με τον, γνωστό από την κβαντομηχανική, τελεστή δημιουργίας \widehat{a}_k^+ (υπενθυμίζεται ο συζυγής του, τελεστής καταστροφής \widehat{a}_k):

$$\widehat{a}_k^+ |0\rangle = |1k\rangle.$$

Επιπλέον, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\widehat{a}_k |0\rangle = 0$$

$$\langle 0 | \widehat{a}_k = \langle 1k |$$

$$\langle 0 | \widehat{a}_k^+ = 0.$$

Όταν πάμε από την κλασσική στην κβαντική φυσική, τότε διάφορα μεγέθη αντικαθίστανται από τελεστές, όπως εδώ, για παράδειγμα, έχουμε:

$$\widehat{\varphi}(\tau, x) = \sum \widehat{\varphi}_k(t) e^{ikx}$$

$$\widehat{\varphi}_k(t) = w_k(t) \widehat{\alpha}_k + w_k^*(t) \widehat{\alpha}_{-k}^\dagger$$

$$w_k(t) = V^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} e^{-iE_k t} .$$

Κλασικά, η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας θα ήταν η $\varphi = 0 =$ σταθ. Ωστόσο, γνωρίζουμε από την κβαντική μηχανική ενός αρμονικού ταλαντωτή, ότι υπάρχουν ταλαντώσεις ακόμα και σε αυτήν την κατάσταση. Αντίστοιχα, σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχουν διακυμάνσεις του βαθμωτού πεδίου ακόμα στην κατάσταση του κενού ('vacuum fluctuations').

Το φάσμα αυτών των διακυμάνσεων του κενού (power spectrum*) δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{P}_\varphi(k) = V \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |\varphi_k|^2 \rangle .$$

Η τιμή $|\varphi_k|^2$ υπολογίζεται από την κατάσταση ελάχιστης ενέργειας, με τη βοήθεια των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής:

$$|\varphi_k|^2 = \langle 0 | \widehat{\varphi}_k \widehat{\varphi}_k^\dagger | 0 \rangle = |w_k|^2 .$$

Επομένως, καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για το φάσμα:

$$\mathcal{P}_\varphi(k) = V \frac{k^3}{2\pi^2} |w_k|^2 .$$

Θα επεκτείνουμε τώρα τη θεωρία αυτή και για τις διακυμάνσεις κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού. Η εξίσωση πεδίου του inflaton δίνεται από τη σχέση (55):

$$\delta\ddot{\varphi}_k + 3H\delta\dot{\varphi}_k + \left[\frac{a_0^2}{a^2}k^2 + m^2(\bar{\varphi})\right] \delta\varphi_k = 0 ,$$

όπου εδώ η συνάρτηση $\omega(k)$ δίνεται από τον τύπο:

$$w_k(t) = V^{-1/2} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(i + \frac{a_0 k}{aH} \right) \exp\left(\frac{ia_0 k}{aH}\right)$$

και ο τελεστής πεδίου για τις διαταραχές του inflaton από τη σχέση:

$$\widehat{\delta\varphi}_k(t) = w_k(t) \widehat{\alpha}_k + w_k^*(t) \widehat{a}_{-k}^+ .$$

Το φάσμα ισχύος των διακυμάνσεων του πεδίου inflaton είναι:

$$\mathcal{P}_\varphi(k) = V \frac{k^3}{2\pi^2} |w_k|^2 .$$

Αρκετά πριν την έξοδο από τον ορίζοντα $a_0 k \gg aH$, ο τελεστής πεδίου $\widehat{\delta\varphi}_k(t)$ γίνεται ίδιος με εκείνον του χώρου Minkowski και έχουμε σταθερά κβαντικές διακυμάνσεις του κενού για την ποσότητα $\delta\varphi$.

Αρκετά μετά την έξοδο από τον ορίζοντα, $a_0 k \ll aH$, όπως προ είπαμε, η συνάρτηση $w(k)$ προσεγγίζει τη σταθερή τιμή:

$$w_k(t) \rightarrow V^{-1/2} \frac{iH}{\sqrt{2k^3}} .$$

Στην περίπτωση αυτή, οι διακυμάνσεις του κενού ‘παγώνουν’ και το φάσμα ισχύος αποκτά τη σταθερή τιμή :

$$\mathcal{P}_\phi(k) = V \frac{k^3}{2\pi^2} |w_k|^2 = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2.$$

Παρατήρηση:

Το αποτέλεσμα των κβαντικών διακυμάνσεων του κενού του inflaton ήταν να παράξουν από το 'τίποτα' τις διαταραχές του inflaton, $\delta\phi_k$. Η παραγωγή τους αυτή από τις κβαντικές διακυμάνσεις, είναι μία τυχαία διαδικασία και επομένως δεν είναι δυνατό να γνωρίζουμε τις διακριτές τιμές των διαταραχών, παρά μόνο τις στατιστικές τους ιδιότητες. Πρόκειται, με άλλα λόγια, για μία Γκαουσιανή (Gaussian) διαδικασία.

Ο σκοπός της υπο-ενότητας αυτής ήταν να ακολουθήσουμε τις διαταραχές του inflaton, από την παραγωγή τους έως την έξοδο από τον ορίζοντα. Όταν οι κλίμακες που εξετάζουμε βρίσκονται πλέον αρκετά 'έξω' από τον ορίζοντα, τότε πραγματοποιούμε αλλαγή μεταβλητής και χρησιμοποιούμε πλέον την ομοκινούμενη διαταραχή καμπυλότητας, \mathcal{R}_k , για να μεταφέρει τις διαταραχές. Η ποσότητα αυτή παραμένει σταθερή εκτός του ορίζοντα, σε αντίθεση με το H που μεταβάλλεται. Επομένως, θα πρέπει να επιλέξουμε, για κάθε κλίμακα k που μας ενδιαφέρει, μία τιμή του H που να είναι αντιπροσωπευτική ως προς την εξέλιξή της καθώς αυτή εξέρχεται από τον ορίζοντα. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί επιλέγοντας την τιμή που παίρνει η παράμετρος H τη στιγμή που πραγματοποιείται η έξοδος από τον ορίζοντα, όταν δηλαδή $a_0k = aH$. Γράφουμε το αποτέλεσμα αυτό για το φάσμα των διακυμάνσεων ως:

$$\mathcal{P}_\phi(k) = V \frac{k^3}{2\pi^2} |\omega_k|^2 = \left(\frac{H}{2\pi}\right)_{aH=\alpha_0k}^2, \quad (56)$$

προκειμένου να υπογραμμίσουμε ότι η τιμή H , για κάθε κλίμακα k , λήφθηκε για τη στιγμή της εξόδου της κλίμακας αυτής από τον ορίζοντα.

*Φάσμα ισχύος (Power spectrum):

Η εξάρτηση της διακύμανσης των φ_k από τον κυματάριθμο k ονομάζεται το φάσμα ισχύος του φ (inflaton fluctuations) και ορίζεται ως:

$$\mathcal{P}_\varphi(k) = V \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |\varphi_k|^2 \rangle .$$

Για τη διακύμανση του $\varphi(x)$ βρίσκουμε:

$$\langle \varphi(x)^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\varphi(k) = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{P}(k) d \ln k .$$

Για μία διαταραχή Gauss, το φάσμα αυτό παρέχει μία πλήρη στατιστική περιγραφή και όλες οι στατιστικές ποσότητες μπορούν να υπολογιστούν από αυτό.

Ένας εναλλακτικός ορισμός για το φάσμα ισχύος είναι:

$$P_\varphi(k) = L^3 \langle |\varphi_k|^2 \rangle$$

και οι δύο ορισμοί σχετίζονται μέσω του τύπου:

$$P_\varphi(k) = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\varphi(k). \quad (57) \quad *$$

3.3 ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΣΕ ΚΛΙΜΑΚΕΣ ΥΠΕΡ-ΟΡΙΖΟΝΤΑ

Όταν οι διαταραχές είναι πλέον εκτός του ορίζοντα ($k^{-1} \gg H^{-1}$), πολύ λίγα συμβαίνουν σε αυτές και είναι δυνατόν να βρούμε ποσότητες, οι οποίες παραμένουν σταθερές για κλίμακες υπερ-ορίζοντα. Μία τέτοια ποσότητα είναι η ομοκινούμενη διαταραχή καμπυλότητας, \mathcal{R} , η οποία παραμένει σταθερή για αδιαβατικές διαταραχές εκτός του ορίζοντα και ορίζεται ως:

$$\mathcal{R} = -\frac{5+3w}{3+3w}\Phi - \frac{2}{3+3w}H^{-1}\dot{\Phi},$$

όπου $w = \bar{p} / \bar{\rho}$.

Καθώς η ποσότητα \mathcal{R}_k παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια που η κλίμακα είναι υπερ-ορίζοντα, αποτελεί μία πολύ χρήσιμη ποσότητα που μεταφέρει τις διαταραχές από τη γέννησή τους, κατά την έξοδο από τον ορίζοντα (κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού), έως την είσοδο στον ορίζοντα, σε μετέπειτα εποχές. Με τον όρο ‘πρώιμη διαταραχή’, θα αναφερόμαστε στο εξής στη διαταραχή όταν οι κλίμακες βρίσκονται πολύ εκτός του ορίζοντα. Για αδιαβατικές διαταραχές, η πρώιμη διαταραχή χαρακτηρίζεται πλήρως από το σύνολο αυτών των σταθερών τιμών \mathcal{R}_k .

Όταν η ποσότητα \mathcal{R}_k παραμένει σταθερή, η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{2}{3}H^{-1}\dot{\Phi}_k + \frac{5+3w}{3}\Phi_k = -(1+w)\mathcal{R}_k.$$

Για οποιαδήποτε περίοδο, κατά τη διάρκεια της οποίας το w παραμένει σταθερό, η λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_k = -\frac{3+3w}{5+3w} \mathcal{R}_k + \text{ένας όρος διάσπασης.}$$

Εφόσον το w παραμείνει σταθερό για κάποιο διάστημα, ο όρος διάσπασης εξασθενεί και η λύση παίρνει τη μορφή:

$$\Phi_k = -\frac{3+3w}{5+3w} \mathcal{R}_k .$$

➤ κυριαρχία της ακτινοβολίας ($w = 1/3$): $\Phi_k = -\frac{2}{3} \mathcal{R}_k$

➤ κυριαρχία της ύλης ($w = 0$): $\Phi_k = -\frac{3}{5} \mathcal{R}_k$

Εφόσον το δυναμικό εισέλθει στον ορίζοντα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Νευτώνεια θεωρία διαταραχών, όπου παίρνουμε τη διαταραχή για την πυκνότητα μέσω της σχέσης (49):

$$\delta_k = -\left(\frac{\alpha_0 k}{a}\right)^2 \frac{\Phi_k}{4\pi G \bar{\rho}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_0 k}{aH}\right)^2 \Phi_k .$$

Το θέμα είναι να έχουμε μία πλήρη εικόνα για το Φ_k από τη σταθερή τιμή που έχει ως υπερ-ορίζοντα, έως την είσοδο στον ορίζοντα και την εποχή του ως υπο-ορίζοντα, όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε Νευτώνεια θεωρία διαταραχών.

Για κλίμακες που εισέρχονται όταν το σύμπαν είναι κυριαρχημένο από ύλη, το εγχείρημα είναι εύκολο, καθώς το Φ_k παραμένει σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια (έως ότου η σκοτεινή ενέργεια να γίνει σημαντική). Συνεπώς, μπορούμε να συνδέσουμε τις σταθερές τιμές Φ_k και τις αντίστοιχες διαταραχές πυκνότητας δ_k του υπο-ορίζοντα, κατά τη διάρκεια της περιόδου κυριαρχίας της ύλης, με τις πρώιμες διαταραχές \mathcal{R}_k ως εξής:

$$\Phi_k = -\frac{2}{3}\mathcal{R}_k \quad (58)$$

$$\delta_k = -\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha_0 k}{aH}\right)^2 \Phi_k = \frac{2}{5}\left(\frac{\alpha_0 k}{aH}\right)^2 \mathcal{R}_k \sim \frac{1}{(aH)^2} \sim t^{2/3} \sim a. \quad (59)$$

Για διαταραχές που εισέρχονται κατά την περίοδο της κυριαρχίας της ακτινοβολίας, το δυναμικό Φ_k δεν παραμένει σταθερό, καθώς, στην περίπτωση αυτή, οι διαταραχές πυκνότητας ταλαντώνονται με περίπου σταθερό πλάτος και έτσι το πλάτος του δυναμικού $\Phi \sim a^2 \bar{\rho} \sim a^{-2}$. Η ταλάντωση αυτή εφαρμόζεται στο μείγμα βαρυονίων – φωτονίων, ενώ οι διαταραχές της ψυχρής σκοτεινής ύλης (CDM perturbations) αναπτύσσονται σταδιακά. Εφόσον το σύμπαν κυριαρχηθεί από ύλη, οι διαταραχές της ψυχρής σκοτεινής ύλης είναι οι διαταραχές που έχουν κύρια σημασία.

Έστω διαταραχές που εισέρχονται στον ορίζοντα κατά την περίοδο όπου το σύμπαν κυριαρχείται από ύλη. Υποθέτουμε ότι η σχέση $\Phi_k = -\frac{2}{3}\mathcal{R}_k$ ισχύει καθ' όλη τη διάρκεια έως την είσοδο στον ορίζοντα και ότι ισχύει ήδη η Νευτώνεια σχέση για τις διαταραχές πυκνότητας. Τότε, στον ορίζοντα ($\alpha_0 k = aH$) ισχύει:

$$\delta_k \approx -\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha_0 k}{aH}\right)^2 \Phi_k = \delta_k = -\frac{2}{3}\Phi_k \approx \frac{4}{9}\mathcal{R}_k.$$

Εφόσον βρισκόμαστε στην εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας, ισχύει $\delta_{rk} = \delta_k$ και, καθώς οι πρώιμες διαταραχές είναι αδιαβατικές διαταραχές, ισχύουν οι αδιαβατικές σχέσεις $\delta_c = \frac{3}{4}\delta_r$, $\delta_\gamma = \delta_r$ και για κλίμακες υπερ-ορίζοντα (δ_c , δ_r , δ_γ : οι διαταραχές πυκνότητας σε 'CDM', ακτινοβολία και φωτόνια αντίστοιχα). Επομένως:

$$\delta_{ck} \approx \frac{3}{4}\delta_k \approx \frac{1}{3}\mathcal{R}_k.$$

Όταν το σύμπαν κυριαρχηθεί από ύλη ($t = t_{eq}$), τότε θα έχουμε $\delta_k \approx \delta_{ck}$ και ισχύουν:

$$\delta_k(t_{eq}) \approx \frac{1}{3} \mathcal{R}_k$$

$$\delta_k(t) \approx \frac{1}{3} \mathcal{R}_k \left(\frac{\alpha_{eq} H_{eq}}{aH} \right)^2 = \frac{1}{3} \mathcal{R}_k \left(\frac{\alpha_0 k_{eq}}{aH} \right)^2 \quad (t > t_{eq}),$$

καθ' όλη τη διάρκεια όπου το σύμπαν παραμένει κυριαρχημένο από ύλη.

Στο σημείο αυτό, θα ασχοληθούμε λίγο με το φάσμα των πρώιμων διαταραχών. Η ποσότητα \mathcal{R}_k σχετίζεται με τις διαταραχές του inflaton μέσω της σχέσης:

$$\mathcal{R}_k = -H \frac{\delta\varphi_k}{\dot{\varphi}}.$$

Επομένως, το 'πρώιμο φάσμα' μπορεί να εκφραστεί μέσω της εξίσωσης:

$$\mathcal{P}_R(k) = \left(\frac{H}{\dot{\varphi}} \right)^2 \mathcal{P}_\varphi(k) = \left[\left(\frac{H}{\dot{\varphi}} \right) \left(\frac{H}{2\pi} \right) \right]^2.$$

Το φάσμα αυτό, είναι το σημείο εκκίνησης για να μελετήσουμε το σχηματισμό δομών και την ανισοτροπία της ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB).

Ορίζουμε το φασματικό δείκτη n (spectral index) του πρώιμου φάσματος, για τον οποίο ισχύει:

$$n(k)-1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_R}{d \ln k}.$$

Αν ο δείκτης n ισούται με τη μονάδα, τότε το $\mathcal{P}_R(k)$ έχει σταθερή τιμή και το φάσμα είναι ανεξάρτητο από την κλίμακα (scale invariant). Σύμφωνα με μετρήσεις, η τιμή του n για το πρώιμο φάσμα δίνεται ότι είναι:

$$n = 0.968 \pm 0.006$$

[2]

και επομένως θα το αντιμετωπίσουμε ως ένα ανεξάρτητο κλίμακας (scale-invariant) φάσμα, με σταθερό πλάτος (όπως προέκυψε από παρατηρήσεις από την κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου και τις μεγάλης κλίμακας δομές):

$$\mathcal{P}_R(k) \approx 25 \cdot 10^{-10} .$$

Για το φασματικό δείκτη αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση:

$$n - 1 = -6\varepsilon + 2\eta ,$$

όπου ε, η οι γνωστές παράμετροι της slow-roll προσέγγισης για τον πληθωρισμό.

Εφόσον η προσέγγιση αυτή απαιτεί $\varepsilon \ll 1$ και $|\eta| \ll 1$, τότε $n \rightarrow 1$.

Το φάσμα της \mathcal{R}_k παρουσιάζει μεταβολές για μικρές κλίμακες, που εισέρχονται στον ορίζοντα την περίοδο της κυριαρχίας της ακτινοβολίας ($k^{-1} \ll k_{eq}^{-1}$), ενώ, παραμένει σταθερό για μεγάλες κλίμακες ($k^{-1} \gg k_{eq}^{-1}$), για το χρονικό διάστημα που το σύμπαν παραμένει κυριαρχημένο από ύλη. Μέσω των σχέσεων (58) και (59), μπορούμε να βρούμε τα φάσματα ισχύος των διαταραχών πυκνότητας και βαρυτικού δυναμικού αντίστοιχα (για σύμπαν κυριαρχημένο από ύλη) ως εξής:

$$\mathcal{P}_\varphi(k) = \frac{9}{25} \mathcal{P}_R(k) = \frac{9}{25} A^2 = \text{σταθερό}$$

$$\mathcal{P}_\delta(k) = \frac{4}{9} \left(\frac{\alpha_0 k}{aH}\right)^4 \mathcal{P}_\varphi(k) = \frac{4}{25} \left(\frac{\alpha_0 k}{aH}\right)^4 \mathcal{P}_R(k) = \frac{4}{25} \left(\frac{\alpha_0 k}{aH}\right)^4 A^2 \sim t^{4/3} k^4 .$$

Παρατηρούμε, επομένως, ότι το φάσμα των διαταραχών του βαρυτικού δυναμικού Φ είναι ανεξάρτητο κλίμακας, ενώ εκείνο των διαταραχών πυκνότητας όχι. Αντίθετα,

το $\mathcal{P}_\delta(k)$ αυξάνεται απότομα, γεγονός το οποίο υποδεικνύει ότι υπάρχει πολύ περισσότερη δομή στις μικρές κλίμακες απ' ότι στις μεγάλες.

Αν εφαρμόσουμε τη σχέση για το φάσμα των διαταραχών πυκνότητας κατά την είσοδο στον ορίζοντα ($\alpha_0 k = \alpha H$), βρίσκουμε:

$$\delta_H(k) = "P_\delta(k, t_k)" = \frac{4}{25} \mathcal{P}_R(k) = \left(\frac{2}{5} A\right)^2 = \text{σταθερό}.$$

Η παραπάνω σχέση είναι πολύ σημαντική, καθώς μας δείχνει ότι για πρώιμες διαταραχές που είναι ανεξάρτητες κλίμακας, οι διαταραχές πυκνότητας όλων των κλιμάκων k εισέρχονται στον ορίζοντα με το ίδιο πλάτος ($\frac{2}{5} A \sim 2 \cdot 10^{-5}$). Το συμπέρασμα αυτό έχει ισχύ και για τις μικρότερες κλίμακες που εισέρχονται στον ορίζοντα κατά την εποχή της ακτινοβολίας, εφόσον οι διαταραχές πυκνότητας ξεκινούν να εξελίσσονται μετά την είσοδό τους στον ορίζοντα.

Παρατήρηση:

Ο βαθύτερος λόγος, για τον οποίο ο πληθωρισμός γεννά διαταραχές που είναι σχεδόν ανεξάρτητες κλίμακας, είναι πως κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού το σύμπαν είναι σχεδόν ένα σύμπαν 'de Sitter'. Αναφερόμαστε, με άλλα λόγια, σε έναν μέγιστα συμμετρικό χωρόχρονο. Εκτός, λοιπόν, από την ομοιογένειά του, το σύμπαν έχει την ιδιότητα να 'φαίνεται' το ίδιο για διαφορετικούς χρόνους. Συνεπώς, διαφορετικές κλίμακες που εξέρχονται από τον ορίζοντα σε διαφορετικούς χρόνους αποκτούν όλες το ίδιο είδος διαταραχών.

Με βάση τα τελευταία δεδομένα, το φάσμα των πρώιμων διαταραχών ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathcal{P}_\delta(k) = \frac{4}{25} \left(\frac{\alpha_0 k}{\alpha H}\right)^4 T(k, t)^2 \mathcal{R}(k) ,$$

$$\begin{cases} T(k) = 1, & k \ll k_{eq} \\ T(k) \sim \left(\frac{k_{eq}}{k}\right)^2, & k \gg k_{eq} \end{cases}$$

Όπως είπαμε και προηγουμένως, από τη μορφή της εξίσωσης, είναι εμφανές ότι υπάρχει περισσότερη δομή στις μικρότερες κλίμακες. Αυτό συμβαίνει, διότι η ανάπτυξη των διαταραχών πυκνότητας αναστάλθηκε όταν οι διαταραχές αυτές ήταν εντός του ορίζοντα, κατά την εποχή της ακτινοβολίας. Ο παράγοντας $\sim \ln k$, προέρχεται από την αργή ανάπτυξη των διαταραχών της ψυχρής σκοτεινής ύλης, κατά τη διάρκεια εκείνης της περιόδου.

Το παρόν φάσμα των διαταραχών πυκνότητας, $\mathcal{P}_\delta(k)$, μπορεί να καθοριστεί μέσω παρατηρήσεων της κατανομής των γαλαξιών. Η ποσότητα μέσω της οποίας απεικονίζεται συνήθως το φάσμα αυτό είναι η $P_\delta(k)$, όπως ορίστηκε από τη σχέση (57). Ισχύουν οι σχέσεις:

$$P_\delta(k) \sim k^n, \quad k \ll k_{eq}$$

$$P_\delta(k) \sim k^{n-4} \ln k, \quad k \gg k_{eq}.$$

3.4 ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΣΕ ΚΛΙΜΑΚΕΣ ΥΠΟ-ΟΡΙΖΟΝΤΑ

Η Νευτώνεια θεωρία διαταραχών εφαρμόζεται μόνο για κλίμακες για τις οποίες ισχύει $k^{-1} \ll \mathcal{H}^{-1}$. Κατά τη διάρκεια της ‘κανονικής’, επιβραδυνόμενης διαστολής του σύμπαντος (δηλαδή μετά τον πληθωρισμό αλλά πριν την πρόσφατη επέλαση της σκοτεινής ενέργειας), οι κλίμακες εισέρχονται στον ορίζοντα. Πρώτα εισέρχονται οι μικρές κλίμακες και κατόπιν οι μεγαλύτερες. Η ιστορία των διαφορετικών κλιμάκων, μετά την είσοδό τους στον ορίζοντα, εξαρτάται από την εποχή κατά την οποία

εισέρχονται. Οι κλίμακες που εισέρχονται κατά τη διάρκεια περιόδων μετάβασης από την κυριαρχία ενός στοιχείου του σύμπαντος στην κυριαρχία κάποιου άλλου, είναι ειδικές κλίμακες που χαρακτηρίζουν τη σημερινή δομή του σύμπαντος. Τέτοιες κλίμακες είναι η k_{eq}^{-1} που εισέρχεται όταν $t = t_{\text{eq}}$, δηλαδή κατά την ίση κυριαρχία ακτινοβολίας – ύλης, καθώς και η k_{dec}^{-1} , η οποία εισέρχεται κατά την περίοδο της αποδέσμευσης των φωτονίων, $t = t_{\text{dec}}$. Οι κλίμακες αυτές σύμφωνα με το [2] παίρνουν τιμές:

$$k_{\text{eq}}^{-1} = (\mathcal{H}_{\text{eq}})^{-1} \sim 14\Omega_{\text{m}}^{-1} h^{-2} \approx 99 \text{ Mpc}$$

$$k_{\text{dec}}^{-1} = (\mathcal{H}_{\text{dec}})^{-1} \sim 90\Omega_{\text{m}}^{-1/2} h^{-1} \approx 239 \text{ Mpc} .$$

Η κλίμακα που αντιστοιχεί στην τρέχουσα τιμή του ορίζοντα είναι:

$$k_0^{-1} = (\mathcal{H}_0^{-1}) \sim 4200 \text{ Mpc}.$$

Εξαιτίας της επιτάχυνσης της διαστολής, που οφείλεται στη σκοτεινή ενέργεια, η κλίμακα αυτή ουσιαστικά εξέρχεται πάλι από τον ορίζοντα, μαζί με άλλες, μεγαλύτερες από αυτήν κλίμακες, οι οποίες μόλις που εισήλθαν στον ορίζοντα αλλά εξήλθαν και πάλι στο πρόσφατο παρελθόν.

Θα αναφέρουμε, στο σημείο αυτό, κάποια στοιχεία που θα μας βοηθήσουν στη μελέτη της εξέλιξης των διαταραχών πυκνότητας της ύλης.

Το σύμπαν μας αποτελείται από πέντε βασικά συστατικά: α) την ψυχρή σκοτεινή ύλη (CDM), β) τη βαρυονική ύλη, γ) τα φωτόνια (ακτινοβολία γ), δ) τα νετρίνο, ε) τη σκοτεινή ενέργεια.

Μπορούμε να γράψουμε επομένως για την πυκνότητα $\rho = \rho_{\text{c}} + \rho_{\text{b}} + \rho_{\gamma} + \rho_{\text{v}} + \rho_{\text{d}}$.

Ωστόσο, τα βαρυόνια και τα φωτόνια αλληλεπιδρούν έως ότου $t = t_{\text{dec}}$, οπότε για $t < t_{\text{dec}}$, αντιμετωπίζουμε τα δύο αυτά στοιχεία ως ένα στοιχείο το οποίο ορίζουμε:

$$\rho_{b\gamma} = \rho_b + \rho_\gamma .$$

Τα υπόλοιπα στοιχεία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, παρά μόνο βαρυτικά. Μετά την αποδέσμευση, τα φωτόνια εξελίσσονται σε ένα αρκετά ομοιογενές στοιχείο και επομένως θα τα υπολογίζουμε ως ένα 'λείο στοιχείο'. Την ίδια προσέγγιση θα υιοθετήσουμε και για τα νετρίνα καθώς και για τη σκοτεινή ενέργεια, την ομοιογένεια της οποίας υποδεικνύει η κοσμολογική σταθερά Λ .

Μπορούμε τελικά να γράψουμε την πυκνότητα ως άθροισμα ενός όρου ύλης $\rho_m = \rho_c + \rho_b$ και ενός όρου $\rho_s = \bar{\rho}_s$, ο οποίος περιέχει όλα τα λεία στοιχεία ($\rho = \rho_m + \rho_s$). Η διαταραχή θα βρίσκεται αναμενόμενα στον πρώτο όρο, καθώς ο δεύτερος είναι ομογενής. Διακρίνοντας δύο χρονικές περιόδους με σημείο αναφοράς τη χρονική περίοδο της αποδέσμευσης των φωτονίων έχουμε:

$$\begin{aligned} t < t_{\text{dec}} : & \quad \rho = \rho_c + \rho_{b\gamma} + \rho_s & \quad (\rho_s = \rho_v + \rho_d) \\ t > t_{\text{dec}} : & \quad \rho = \rho_c + \rho_b + \rho_s & \quad (\rho_s = \rho_\gamma + \rho_v + \rho_d) . \end{aligned}$$

Μετά την αποδέσμευση τα στοιχεία ρ_c και ρ_b συμπεριφέρονται ως μέρος της ύλης ($p \ll \rho$).

ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΨΥΧΡΗΣ ΣΚΟΤΕΙΝΗΣ ΥΛΗΣ

Η ψυχρή σκοτεινή ύλη θεωρείται το κύριο συστατικό για το σχηματισμό δομής στο σύμπαν. Η σκοτεινή ενέργεια, αν και κυριαρχεί στην ενεργειακή πυκνότητα, δεν σχηματίζει δομές και ακόμη και αν σχηματίζει, οι δομές αυτές είναι σχεδόν ομογενείς. Παρατηρησιακά δεδομένα υποδεικνύουν $\rho_b \lesssim 0.2 \rho_c$ και επομένως κάνουμε την προσέγγιση $\rho_m \approx \rho_c$.

Για την ψυχρή σκοτεινή ύλη έχουμε $p = 0$ και επομένως η ταχύτητα του ήχου, στην περίπτωση αυτή, θα είναι ίση με το 0. Μηδενική τιμή θα λάβει εδώ και το μήκος Jeans, σύμφωνα με τη σχέση (52). Συνεπώς, για την ψυχρή σκοτεινή ύλη, όλες οι κλίμακες θα είναι μεγαλύτερες της κλίμακας Jeans και άρα οι διαταραχές δεν θα εμφανίζουν ταλαντωτική συμπεριφορά. Αντιθέτως, οι διαταραχές πυκνότητας της ψυχρής σκοτεινής ύλης θα αναπτύσσονται για όλες τις κλίμακες.

Από την άλλη πλευρά, οι διαταραχές του ρευστού βαρυονίων – φωτονίων $\rho_{b\gamma}$ ταλαντώνονται πριν την αποδέσμευση των φωτονίων. Για το λόγο αυτό, οι διαταραχές της ποσότητας $\rho_{b\gamma}$ θα είναι μικρότερες από εκείνες της ποσότητας ρ_c κι έτσι κάνουμε την χονδρική προσέγγιση ότι το $\rho_{b\gamma}$ αποτελεί ένα ομογενές (smooth) συστατικό πριν την αποδέσμευση. Αυτό είναι σημαντικό, καθώς, ενώ $\rho_b \ll \rho_c$, αυτό δεν ισχύει και για το $\rho_{b\gamma}$ κατά την εποχή της ακτινοβολίας. Κατά την αποδέσμευση των φωτονίων $\rho_b < \rho_{b\gamma} < \rho_c$, ενώ πριν την ίση κυριαρχία ακτινοβολίας – ύλης υπήρξε μία περίοδος όπου $\rho_{b\gamma} > \rho_c$ αλλά $\delta\rho_c > \delta\rho_{b\gamma}$. Γράφουμε χάριν απλότητας:

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_d ,$$

όπου $\rho_m = \rho_c$ και $\rho_r = \rho_v + \rho_{b\gamma} =$ λείο στοιχείο.

Μπορούμε, λοιπόν, πλέον να μελετήσουμε την εξέλιξη των CDM διαταραχών πυκνότητας, ακόμα και για την εποχή της ακτινοβολίας, εφόσον το στοιχείο της ακτινοβολίας έχει προσεγγιστεί ως ομογενές και επηρεάζει μόνο το ρυθμό διαστολής.

Παρατήρηση:

*Στην παραπάνω προσέγγιση αγνοήσαμε τα βαρυόνια, καθώς δεν έχουν πρωταρχικό ρόλο ούτε πριν ($\rho_{b\gamma}$) αλλά ούτε και μετά το *decoupling* ($\rho_b \ll \rho_c$).*

Θέτοντας στην εξίσωση Jeans (σχέση (50)) $c_s = 0$, η σχέση παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\delta_k'' + 2H\delta_k' - 4\pi G\bar{\rho}\delta_k = 0 .$$

Υποθέτουμε τώρα ένα επίπεδο σύμπαν και αγνοούμε το στοιχείο της σκοτεινής ενέργειας ρ_d . Η εξίσωση Friedmann δίνεται από:

$$H^2 = \left(\frac{d\alpha}{\alpha}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} ,$$

$$\text{όπου } \bar{\rho} = \bar{\rho}_m + \bar{\rho}_r , \quad \bar{\rho}_m \sim \alpha^{-3} \quad \text{και} \quad \bar{\rho}_r \sim \alpha^{-4} .$$

$$\text{Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε την αλλαγή μεταβλητής } y = \frac{a}{a_{eq}} = \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r} .$$

Εισάγοντας τη σχέση αυτή στην προηγούμενη εξίσωση και πραγματοποιώντας τις κατάλληλες μετατροπές, καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$$\delta'' + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \delta' - \frac{3}{2y(1+y)} \delta = 0 . \quad \text{\underline{Εξίσωση Meszaros}}$$

Η σχέση αυτή έχει δύο λύσεις, μία ανάπτυξης και μία διάσπασης. Η λύση για την οποία αναπτύσσονται οι διαταραχές πυκνότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\delta = \delta_{\text{prim}} \left(1 + \frac{3y}{2} \right) = \delta_{\text{prim}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{a}{a_{eq}} \right) .$$

Παρατηρούμε ότι:

- Κατά τη διάρκεια της εποχής της κυριαρχίας της ακτινοβολίας, οι διαταραχές παραμένουν 'παγωμένες' στην πρώιμη τιμή τους $\delta \approx \delta_{\text{prim}}$ ($y \rightarrow 0$).

- Μέχρι την περίοδο $t = t_{\text{eq}}$, οι διαταραχές έχουν αναπτυχθεί, φτάνοντας την τιμή $\delta = \frac{5}{2} \delta_{\text{prim}} (y \rightarrow 1)$.
- Κατά τη διάρκεια της κυριαρχίας της ύλης, οι διαταραχές της ψυχρής σκοτεινής ύλης αναπτύσσονται αναλογικά με τον παράγοντα κλίμακας: $\delta \sim y \sim a \sim t^{2/3}$ ($y > 1$).

Όταν το σύμπαν κυριαρχηθεί από την σκοτεινή ενέργεια, οι διαταραχές σταματούν να αναπτύσσονται.

ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΟΝΙΚΗΣ ΥΛΗΣ

Παρότι η ψυχρή σκοτεινή ύλη είναι το κυρίαρχο στοιχείο ύλης στο σύμπαν μας, δεν είναι ένα στοιχείο άμεσα παρατηρήσιμο. Η βασική μέθοδος που μας επιτρέπει να παρατηρήσουμε τις διαταραχές στην πυκνότητά της, είναι η μελέτη της κατανομής των γαλαξιών. Ωστόσο, το κομμάτι των γαλαξιών που μπορούμε να δούμε αποτελείται από βαρυονική ύλη. Προκειμένου, λοιπόν, να συγκρίνουμε τη θεωρία για το σχηματισμό δομών με τις παρατηρήσεις, είναι αναγκαίο να μελετήσουμε πως εξελίσσονται οι διαταραχές της βαρυονικής ύλης. Ορίζουμε το μήκος Jeans για τη βαρυονική ύλη (baryon Jeans length) ως:

$$\lambda_J = 2\pi k_J^{-1},$$

$$k_J^{-1} = \frac{a_0 c_s}{a \sqrt{4\pi G \bar{\rho}}},$$

όπου c_s είναι η ταχύτητα του ήχου για τα βαρυόνια (δηλαδή για το ρευστό βαρυονίων – φωτονίων πριν την αποδέσμευση και για το ρευστό βαρυονίων μετά την

αποδέσμευση). Θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή της ποσότητας αυτής πριν και μετά την αποδέσμευση των φωτονίων, προκειμένου να βγάλουμε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά των διαταραχών.

➤ Πριν την αποδέσμευση των φωτονίων:

Η εντροπία στο ρευστό βαρυονίων – φωτονίων κυριαρχείται πλήρως από τα φωτόνια:

$$s_{b\gamma} \sim s_{\gamma} = \frac{4\pi^2}{45} T^3 = \frac{2\pi^4}{45\zeta(3)} \eta_{\gamma} .$$

Επομένως, η εντροπία / βαρυόνιο δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \frac{s_{b\gamma}}{\eta_b} \sim \frac{s_{\gamma}}{\eta_b} = \frac{2\pi^4}{45\zeta(3)} \frac{\eta_{\gamma}}{\eta_b} \approx 3.6016 \left(\frac{1}{\eta} \right) ,$$

όπου η είναι η αναλογία βαρυονίων / φωτόνια.

Υπολογίζουμε την ταχύτητα του ήχου, μεταβάλλοντας τις ποσότητες $\rho_{b\gamma}$ και $p_{b\gamma}$ αδιαβατικά, δηλαδή κρατώντας το η σταθερό. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\rho_b = m\eta_b = m\eta\eta_{\gamma} = m\eta \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad \Rightarrow \quad \delta\rho_b = \overline{\rho_b} 3\delta T$$

$$\rho_{\gamma} = \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad \Rightarrow \quad \delta\rho_{\gamma} = \overline{\rho_{\gamma}} 4\delta T$$

$$p_{\gamma} = \frac{\pi^2}{90} T^4 \quad \Rightarrow \quad \delta p_{\gamma} = \overline{p_{\gamma}} 4\delta T = \overline{\rho_{\gamma}} \frac{4}{3} \delta T$$

Για την πίεση βαρυονίων και φωτονίων ισχύει η σχέση $p_b \ll p_\gamma \Rightarrow \delta p_b \ll \delta p_\gamma$ και, επομένως, καταλήγουμε στη σχέση:

$$c_s^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\delta p_\gamma}{\delta \rho_\gamma + \delta \rho_b} = \frac{\frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma}{4\bar{\rho}_\gamma + 3\bar{\rho}_b} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{3\bar{\rho}_b}{4\bar{\rho}_\gamma}} .$$

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για πριν την αποδέσμευση. Όσο πάμε πίσω στο χρόνο, $\frac{\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}_\gamma} \rightarrow 0$ και $c_s^2 \rightarrow 1/3$. Όσο πλησιάζουμε την αποδέσμευση, η πυκνότητα $\bar{\rho}_b$ γίνεται συγκρίσιμη (αν και παραμένει μικρότερη) από την πυκνότητα $\bar{\rho}_\gamma$ και η ταχύτητα του ήχου ελαττώνεται κατά έναν μικρό παράγοντα.

Η αναλογία του μήκους Jeans για τα βαρυόνια με το ομοκινούμενο μήκος Hubble είναι:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_J &= \frac{2\pi a_0 c_s}{a\sqrt{4\pi G \bar{\rho}}} \\ \mathcal{H}^{-1} &= \frac{a_0}{a\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\lambda_J}{\mathcal{H}^{-1}} = \mathcal{H}\lambda_J = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} c_s .$$

Παρατηρούμε, επομένως, πως για $t < t_{\text{dec}}$, το βαρυονικό μήκος Jeans είναι συγκρίσιμο με το μήκος Hubble και επομένως όλες οι κλίμακες, στην περίπτωση αυτή, θα είναι υπό-Jeans. Συνεπώς, αν οι βαρυονικές διαταραχές είναι αδιαβατικές, τότε ταλαντώνονται πριν την αποδέσμευση.

➤ Μετά την αποδέσμευση των φωτονίων :

Μετά την αποδέσμευση, κάθε στοιχείο 'βλέπει' μόνο τη δικιά του πίεση. Το μήκος Jeans για τα βαρυόνια τώρα είναι $\ll \text{Mpc}$. Για το λόγο αυτό, κάνουμε την προσέγγιση ότι, στην περίπτωση αυτή, το ρευστό των βαρυονίων έχει πίεση $p = 0$. Για την περίοδο $t > t_{\text{dec}}$, η εξέλιξη των βαρυονικών διαταραχών κυβερνάται από τις

βαρυτικές αλληλεπιδράσεις του κυρίαρχου στοιχείου, της ψυχρής σκοτεινής ύλης.
Για την πυκνότητα έχουμε:

$$\rho = \rho_c + \rho_b + \rho_s ,$$

$$\text{όπου } \rho_s = \rho_\gamma + \rho_d + \rho_\nu .$$

Με βάση τα παραπάνω, οι εξισώσεις διαταραχών για την ψυχρή σκοτεινή και τη βαρυονική ύλη αντίστοιχα είναι:

$$\delta_c'' + 2H\delta_c' = 4\pi G\overline{\rho_m}\delta$$

$$\delta_b'' + 2H\delta_b' = 4\pi G\overline{\rho_m}\delta ,$$

όπου $\overline{\rho_m} = \overline{\rho_c} + \overline{\rho_b}$ είναι η ολική πυκνότητα ύλης και $\delta = \frac{\delta\rho_c + \delta\rho_b}{\overline{\rho_c} + \overline{\rho_b}}$ η ολική διαταραχή πυκνότητας στην ύλη.

Ορίζουμε τώρα τη διαταραχή εντροπίας βαρυονικής-σκοτεινής ύλης $S_{cb} = \delta_c - \delta_b$, η οποία εκφράζει πως αποκλίνουν οι διαταραχές στα δύο στοιχεία.

Η εξίσωση για τη διαταραχή αυτή της εντροπίας είναι:

$$S_{cb}'' + 2HS_{cb}' = 0.$$

Υποθέτουμε πως οι πρώιμες διαταραχές ήταν αδιαβατικές και άρα πως είχαμε $\delta_b = \delta_c$ ($S_{cb} = 0$) κατά την είσοδο στον ορίζοντα. Για μεγάλες κλίμακες, που εισήλθαν στον ορίζοντα μετά την αποδέσμευση των φωτονίων, η S_{cb} δεν αναπτύσσεται ποτέ και,

επομένως, η εξέλιξη των διαταραχών βαρυονικής και σκοτεινής ύλης είναι η ίδια. Ωστόσο, για κλίμακες που εισέρχονται πριν την αποδέσμευση, η διαταραχή S_{cb} αναπτύσσεται, καθώς οι διαταραχές των βαρυονίων είναι δεσμευμένες με τις διαταραχές των φωτονίων, ενώ οι διαταραχές ψυχρής σκοτεινής ύλης όχι. Μετά την αποδέσμευση, $\delta_b \ll \delta_c$, καθώς η διαταραχή δ_c εξελισσόταν, ενώ η διαταραχή δ_b ταλαντωνόταν. Επομένως, σαν αρχική συνθήκη για τις εξισώσεις διαταραχών, θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση $S_{cb} \sim \delta_c$.

Κατά τη διάρκεια της κυριαρχίας της ύλης, οι λύσεις για τις διαταραχές εντροπίας και πυκνότητας (έχοντας αγνοήσει τη συμβολή των βαρυονίων) είναι:

$$S_{cb} = A + Bt^{-1/3}$$

$$\delta_c = Ct^{2/3} + Dt^{-1} \sim Ct^{2/3}.$$

Μετά από ένα χρονικό διάστημα, δηλαδή, παραμένει μόνο ο όρος ανάπτυξης των διαταραχών πυκνότητας της ψυχρής σκοτεινής ύλης.

Η αρχική συνθήκη $S_{cb} \sim \delta_c$ υποδεικνύει ότι κατά την περίοδο της αποδέσμευσης:

$$A \lesssim Ct_{dec}^{2/3}.$$

Αργότερα, όταν $t \gg t_{dec}$:

$$S_{cb} \sim A \lesssim Ct_{dec}^{2/3}$$

$$\delta_c \sim Ct^{2/3} \gg S_{cb} = \delta_c - \delta_b \Rightarrow \delta_b \sim \delta_c.$$

Επομένως, η βαρυονική διαταραχή δ_b μεγαλώνει για να φτάσει τη διαταραχή της σκοτεινής ύλης δ_c μέχρι που έχουμε τελικά $\delta_b = \delta_c = \delta$, με μεγάλη ακρίβεια.

Η δ_b ξεκινά να αναπτύσσεται μόνο μετά την αποδέσμευση των φωτονίων. Πριν, η πίεση που ασκεί η ακτινοβολία αναστέλλει την ανάπτυξή της. Χωρίς την παρουσία της ψυχρής σκοτεινής ύλης, εξελίσσεται μόνο σύμφωνα με τη σχέση $\delta_b \sim \alpha \sim t^{2/3}$ μετά την αποδέσμευση (κατά τη διάρκεια της κυριαρχίας της ύλης και η εξέλιξη αυτή σταματά όταν το σύμπαν κυριαρχηθεί από τη σκοτεινή ενέργεια). Δηλαδή, ο μέγιστος δυνατός παράγοντας κατά τον οποίο θα αναπτυσσόταν μετά την αποδέσμευση θα ήταν $\alpha_0 / \alpha_{\text{dec}} = 1 + z_{\text{dec}} \sim 1100$.

Μελετώντας τις ανισοτροπίες στο φάσμα της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου, μπορούμε να παρατηρήσουμε άμεσα τις βαρυονικές διαταραχές πυκνότητας τη χρονική στιγμή $t = t_{\text{dec}}$. Με τον τρόπο αυτό, συμπεραίνουμε ότι η τιμή του παραπάνω παράγοντα δεν επαρκεί ώστε να οδηγήσει στις μεγάλες σημερινές δομές του σύμπαντος που παρατηρούνται.

Το πρόβλημα αυτό επιλύει η παρουσία της ψυχρής σκοτεινής ύλης. Οι 'CDM' διαταραχές ξεκινούν να αναπτύσσονται νωρίτερα, όταν $t \sim t_{\text{eq}}$ και μέχρις ότου $t = t_{\text{dec}}$, η ανάπτυξή τους έχει υπερβεί κατά πολύ τις βαρυονικές διαταραχές. Μετά την αποδέσμευση από τα φωτόνια, τα βαρυόνια έχασαν την υποστήριξη από την πίεση που ασκούσαν από τα φωτόνια και βρέθηκαν σε δυναμικά πηγάρια της ψυχρής σκοτεινής ύλης, όπου άρχισαν να συμβαδίζουν με τις διαταραχές της.

Η παρουσία, λοιπόν, της σκοτεινής ύλης 'επιτρέπει' στις βαρυονικές διαταραχές να είναι ακόμα μικρές όταν $t = t_{\text{dec}}$ και να αναπτύσσονται αργότερα, κατά έναν παράγοντα $\gg 10^3$.

Η παραπάνω εξήγηση είναι και ένα από τα επιχειρήματα στα οποία βασίστηκε η υπόθεση για την ύπαρξη της ψυχρής σκοτεινής ύλης.

4. Η ΚΟΣΜΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ ΚΑΙ Η ΠΟΛΩΣΗ ΤΗΣ

4.1 Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΠΟΛΩΣΗΣ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ

Το φάσμα της κοσμικής μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου μπορεί να ταυτιστεί με εκείνο της ακτινοβολίας ενός μέλανος σώματος που βρίσκεται σε θερμοκρασία $T_0 = 2.7255$ K. Η ακτινοβολία αυτή είναι (σε μεγάλο βαθμό) ιστροπική, γεγονός το οποίο υποδεικνύει ότι το πρώιμο σύμπαν ήταν αρκετά ομογενές κατά την εποχή της τελευταίας σκέδασης. Οποιοσδήποτε ανισοτροπίες της θερμοκρασίας γύρω από την κεντρική τιμή αντιστοιχούν σε διαταραχές πυκνότητας κατά την περίοδο του σχηματισμού της ακτινοβολίας υποβάθρου και παρέχουν βασικές πληροφορίες για τις κοσμολογικές παραμέτρους.

Ιδιαίτερα σημαντικές πληροφορίες παρέχει και η πόλωση των ανισοτροπιών της θερμοκρασίας της ακτινοβολίας υποβάθρου, που μπορεί να απεικονιστεί παράλληλα με το φάσμα της θερμοκρασίας. Η πόλωση των ανισοτροπιών, αυτή καθαυτή, αποτελεί βασική πρόβλεψη της θεωρίας ότι οι μεγάλης κλίμακας δομές που παρατηρούνται σήμερα προέκυψαν από μικρές διακυμάνσεις πυκνότητας στο πρώιμο σύμπαν.

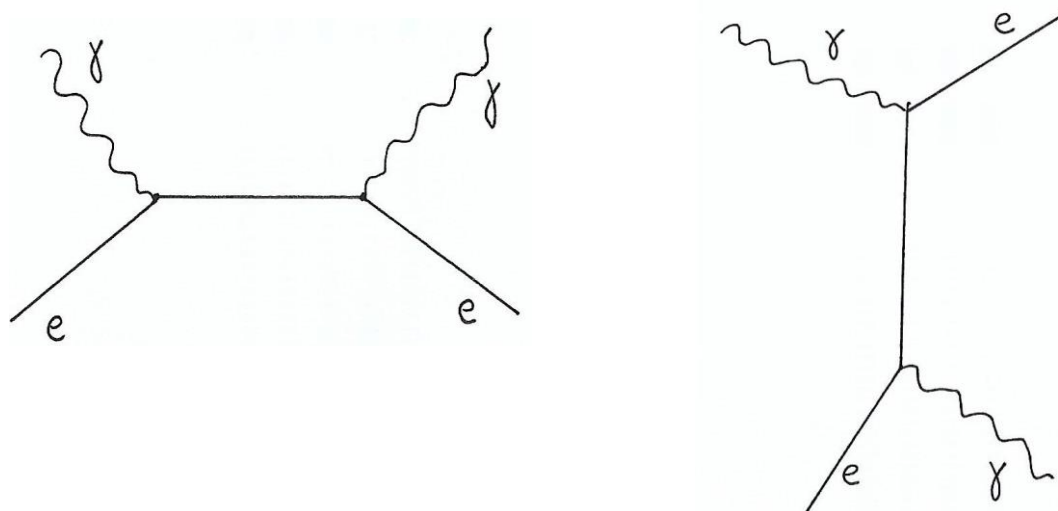
Το φάσμα της πόλωσης της κοσμικής ακτινοβολίας υπερτερεί εκείνου της θερμοκρασίας της, υπό την έννοια ότι, το πρώτο απεικονίζει 'άμεσα' την εποχή της τελευταίας σκέδασης σε σχέση με το δεύτερο, το οποίο περιλαμβάνει και την εξέλιξη των διακυμάνσεων της θερμοκρασίας από την εποχή εκείνη έως σήμερα. Επομένως, το φάσμα της πόλωσης αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την ανακατασκευή του μοντέλου του πρώιμου σύμπαντος. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι διαφορετικές πηγές διακυμάνσεων (βαθμωτές, ανυσματικές, τανυστικές) δίνουν διαφορετικά φάσματα πόλωσης, μπορούμε να διακρίνουμε τα στοιχεία που είναι υπαίτια για τη σύνθεση του φάσματος των ανισοτροπιών της θερμοκρασίας και κατά συνέπεια του κοσμολογικού μοντέλου. Τέλος, η άντληση πληροφοριών από το φάσμα της πόλωσης, σε συνδυασμό με το φάσμα της θερμοκρασίας, είναι πολύ χρήσιμη για την άρση του εκφυλισμού των κοσμολογικών παραμέτρων και επομένως για τον ακριβέστερο προσδιορισμό τους.

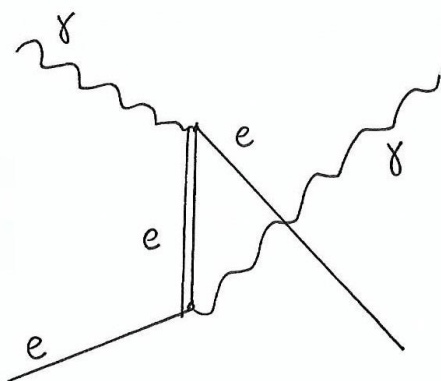
Ο βαθμός στον οποίο είναι γραμμικά πολωμένες οι ανισοτροπίες σχετίζεται με την τετραπολική ανισοτροπία των φωτονίων κατά την τελευταία τους σκέδαση. Λόγω αιτιότητας, η πόλωση κορυφώνεται σε γωνιακές κλίμακες μικρότερες από την τιμή του ορίζοντα, κατά την περίοδο εκείνη. Αναφέρεται ενδεικτικά πως, μόνο ένα μικρό ποσοστό, της τάξης του 10%, της κοσμικής μικροκυματικής ακτινοβολίας είναι πολωμένη, καθώς μόνο τα φωτόνια που σκεδάστηκαν σε μία συγκεκριμένη μικρή περιοχή του ορατού φάσματος δύνανται να παρουσιάσουν τετραπολική ανισοτροπία.

[11]

4.2 ΣΚΕΔΑΣΗ THOMSON, ΠΟΛΩΣΗ ΤΗΣ ΚΟΣΜΙΚΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ

Ο μηχανισμός δημιουργίας της κοσμικής μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου περιγράφεται από τη σκέδαση Thomson, δηλαδή, από την ελαστική σκέδαση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από ελεύθερα ηλεκτρόνια. Η σκέδαση Thomson αποτελεί το μη σχετικιστικό όριο της σκέδασης Compton (τα ηλεκτρόνια την περίοδο εκείνη είναι μη σχετικιστικά καθώς το πλάσμα έχει θερμοκρασία $T = 1 \text{ keV} \ll m_e \sim 0.5 \text{ MeV}$) και μπορεί να πραγματοποιηθεί με τρεις δυνατούς τρόπους / κανάλια σκέδασης s, t και u αντίστοιχα όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:





Εικόνα 4.1.

Για ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που προσπίπτει σε ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, E και B , είναι κάθετα πολωμένα στη διεύθυνση διάδοσης και κάθετα πολωμένα μεταξύ τους. Σε συνοπτική περιγραφή, το προσπίπτον κύμα θέτει σε ταλάντωση το ηλεκτρόνιο – στόχο στη διεύθυνση της πόλωσης του ηλεκτρικού πεδίου, έστω e , και από τη διεύθυνση αυτή εξαρτάται η διεύθυνση πόλωσης της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας, έστω e' . Η ένταση της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας κορυφώνεται ανάλογα με τη διεύθυνση του προσπίπτοντος κύματος και με διεύθυνση πόλωσης παράλληλη σε αυτήν της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Η εξάρτηση της ενεργού διατομής της σκέδασης Thomson από τις διευθύνσεις πόλωσης της προσπίπτουσας και σκεδαζόμενης ακτινοβολίας είναι της μορφής:

$$\frac{d\sigma_{\tau}}{d\Omega} \propto |\hat{e} \hat{e}'|^2 .$$

Παρατήρηση

Η σχέση για την εξάρτηση της ενεργού διατομής από τις διευθύνσεις πόλωσης προκύπτει από αντικαταστάσεις στην εξίσωση Kramers-Heisenberg, η οποία γράφεται

τελικά επακριβώς ως
$$\frac{d\sigma_{\tau}}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi mc^2} \right)^2 |\hat{e} \hat{e}'|^2 .$$

Το ηλεκτρικό πεδίο για το κύμα περιγράφεται από τη σχέση:

$$E = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = (E_x^0 \mathbf{x} + E_y^0 \mathbf{y}) e^{i(kz - \omega t)} = E_x^0 e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{x} + E_y^0 e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{y},$$

όπου x, y τα μοναδιαία ανύσματα στις κατευθύνσεις x και y αντίστοιχα.

Η μορφή της πόλωσης εξαρτάται από τη διαφορά φάσης ανάμεσα στα E_x^0 και E_y^0 , έστω δ .

➤ $\delta=0$:

Αν οι δύο συνιστώσες έχουν την ίδια φάση τότε:

$$E_x^0 = |E_x^0| e^{i\alpha}$$

$$E_y^0 = |E_y^0| e^{i\alpha}$$

$$\text{Re} (E(\mathbf{r},t)) = (\mathbf{x} |E_x^0| + \mathbf{y} |E_y^0|) \cos (kz - \omega t + \alpha)$$

$$\frac{E_y}{E_x} = C = \tan\varphi.$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε πως, όταν δεν υπάρχει διαφορά φάσης ανάμεσα στις δύο συνιστώσες, η πόλωση είναι γραμμική.

➤ $\delta = \pi / 2$:

Στην περίπτωση αυτή, το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι μία κυκλική πόλωση, με γωνιακή συχνότητα ω , η φορά της οποίας εξαρτάται από το ποια συνιστώσα προπορεύεται σε φάση.

Όταν οι δύο συνιστώσες διαφέρουν μεταξύ τους κατά $\pi/2$ με την E_y^0 να προπορεύεται της E_x^0 , τότε η πόλωση χαρακτηρίζεται κατά σύμβαση ως θετική κυκλική και είναι αριστερόστροφη, ενώ όταν η E_x^0 προπορεύεται της E_y^0 , η πόλωση χαρακτηρίζεται ως αρνητική κυκλική και είναι δεξιόστροφη.

➤ $\delta = \pi/4$:

Όταν η διαφορά φάσης των συνιστωσών είναι $\pi/4$ τότε έχουμε ελλειπτική πόλωση, με γωνιακή συχνότητα ω , η φορά της οποίας εξαρτάται από τις συνθήκες που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

➤ τυχαία δ :

Εάν η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο αρχικών συνιστωσών είναι τυχαία, τότε η πόλωση θα είναι και πάλι ελλειπτική.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ STOKES

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε τις παραμέτρους Stokes, οι οποίες είναι στην πραγματικότητα εκείνες που ορίζουν το είδος της πόλωσης που θα προκύψει. Από τις παρακάτω σχέσεις δίνονται οι παράμετροι I, Q, U και V αντίστοιχα [12]:

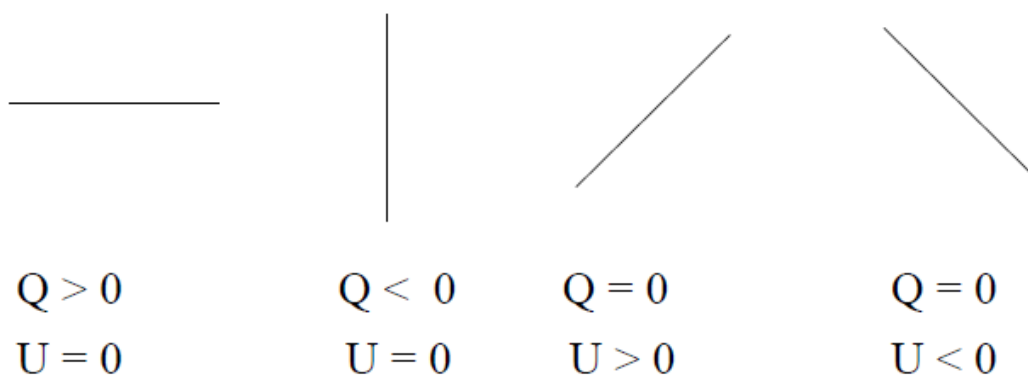
$$I = |E_x^0|^2 + |E_y^0|^2$$

$$Q = |E_x^0|^2 - |E_y^0|^2$$

$$V = 2\text{Re}(E_x E_y^*)$$

$$U = -2\text{Im}((E_x E_y^*)).$$

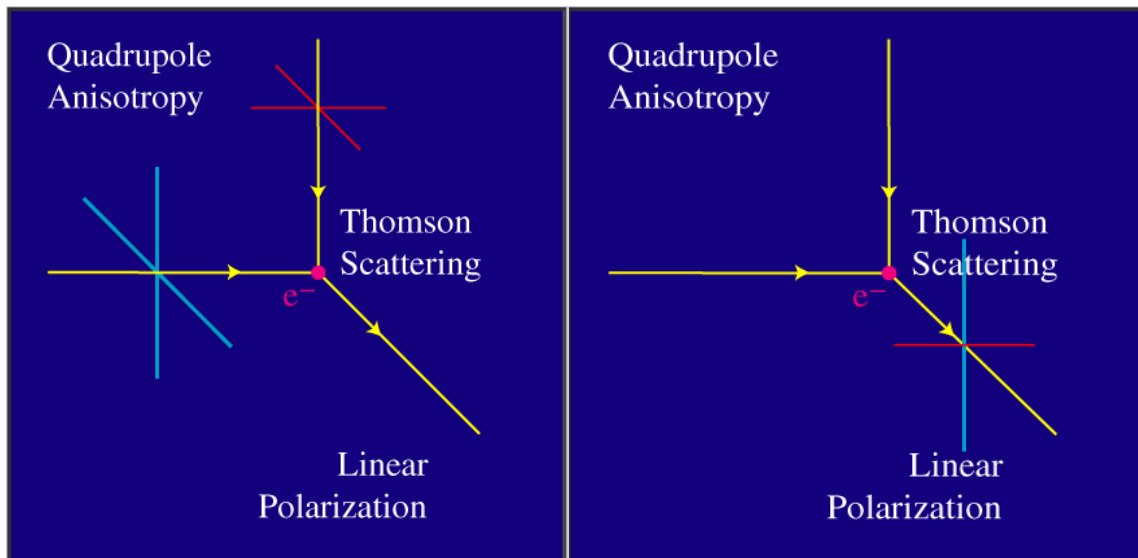
Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, η πρώτη παράμετρος Stokes, I, αποτελεί την ένταση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Οι παράμετροι Q και U είναι παράμετροι γραμμικής πόλωσης. Η παράμετρος Q ποσοτικοποιεί την πόλωση κατά μήκος των αξόνων x και y, ενώ η παράμετρος U ποσοτικοποιεί την πόλωση κατά μήκος αξόνων που έχουν στραφεί κατά $\pi/4$. Στο παρακάτω σχήμα, παραθέτουμε κάποια είδη γραμμικής πόλωσης που περιγράφονται από διαφορετικούς συνδυασμούς των Q και U παραμέτρων Stokes:



Εικόνα 4.2.

Η εικόνα πάρθηκε από το [12].

Τέλος, η παράμετρος V αποτελεί παράμετρο κυκλικής πόλωσης. Στην περίπτωση της πόλωσης των ανισοτροπιών της θερμοκρασίας, η παράμετρος αυτή εξαφανίζεται καθώς η σκέδαση Thomson ακτινοβολίας που παρουσιάζει τετραπολική ανισοτροπία γεννά γραμμική πόλωση.



Εικόνα 4.3.

Η εικόνα πάρθηκε από το [13].

Παρατήρηση

Όταν λέμε ότι η ακτινοβολία παρουσιάζει τετραπολική ανισοτροπία εννοούμε ότι η ένταση της ακτινοβολίας παρουσιάζει κορυφές ανά διαστήματα ίσα με $\pi/2$.

Υπάρχουν πολλοί φυσικοί λόγοι για την ύπαρξη μίας τέτοιας τετραπολικής ανισοτροπίας, ένας όμως ξεχωρίζει. Τα βαρυτικά κύματα που διαδίδονται διαμέσου του πλάσματος εισάγουν αλλαγές στην πυκνότητα με ακριβώς την τετραπολικότητα που χρειάζεται για να παραχθεί η πόλωση της κοσμικής ακτινοβολίας.

4.3. ΤΡΟΠΟΙ ΠΟΛΩΣΗΣ Ε ΚΑΙ Β ΤΗΣ ΚΟΣΜΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΥΠΟΒΑΘΡΟΥ

Θα δούμε τώρα πως ο συνδυασμός των παραμέτρων Stokes Q και U μπορεί να μας οδηγήσει στους διαφορετικούς τρόπους πόλωσης E και B της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου [14].

Αναφέρεται ενδεικτικά πως στα όσα ακολουθούν τα μοναδιαία ανύσματα θα γράφονται με έντονους χαρακτήρες.

Όπως αναφέρθηκε, η πόλωση της ακτινοβολίας μπορεί να περιγραφεί χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους Stokes. Τα πειράματα που πραγματοποιούνται επιτρέπουν τη μέτρηση των παραμέτρων αυτών για ακτινοβολία υποβάθρου που φτάνουν από μία κατεύθυνση του ουρανού που ορίζεται από το μοναδιαίο άνυσμα \mathbf{n} . Για να υπολογίσουμε την παράμετρο $Q(\mathbf{n})$ χρησιμοποιούμε τις πολώσεις κατά μήκος των διευθύνσεων που ορίζονται από τους μοναδιαίους δείκτες $\mathbf{e}\leftrightarrow = -\mathbf{e}_\varphi$ και $\mathbf{e}\updownarrow = -\mathbf{e}_\theta$ και , ανάλογα με το επίπεδο που ορίζεται από το \mathbf{n} . Με τον όρο $f(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ ορίζουμε τη συνάρτηση κατανομής των φωτονίων στο πλάσμα με ορμή στη διεύθυνση του μοναδιαίου δείκτη \mathbf{k} στη σφαίρα της τελευταίας σκέδασης και στην ουράνια διεύθυνση \mathbf{n} . Η κατανομή αυτή δεν εξαρτάται από την πόλωση των φωτονίων καθώς η εισερχόμενη ακτινοβολία δεν θεωρείται πολωμένη. Χρησιμοποιώντας την έκφραση για την ενεργό διατομή Thomson και κάνοντας τις απαραίτητες ολοκληρώσεις πάνω στις διευθύνσεις των εισερχόμενων φωτονίων, για την παράμετρο Q προκύπτει η σχέση:

$$Q(\mathbf{n}) \sim -\frac{1}{2} \int d\Omega(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}, \mathbf{n}) [(\mathbf{k}\mathbf{e}\leftrightarrow)^2 - (\mathbf{k}\mathbf{e}\updownarrow)^2] .$$

Όσον αφορά τώρα στην παράμετρο U για τον υπολογισμό της χρειαζόμαστε τις πολώσεις κατά τη διεύθυνση των μοναδιαίων δεικτών που δίνονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{e}_{\nearrow} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{\varphi} + \mathbf{e}_{\theta})$$

$$\mathbf{e}_{\searrow} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{\varphi} - \mathbf{e}_{\theta}).$$

Η παράμετρος τότε θα δίνεται από τη διαφορά στην ένταση της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας με αυτές τις πολώσεις ως:

$$U(\mathbf{n}) \sim -\frac{1}{2} \int d\Omega(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}, \mathbf{n}) [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\nearrow})^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\searrow})^2].$$

Η μέτρηση των $Q(\mathbf{n})$ και $U(\mathbf{n})$ παρέχει σημαντικές πληροφορίες για την κατανομή των φωτονίων κατά την αποδέσμευσή τους. Για να ολοκληρώσουμε τις παραπάνω σχέσεις ως προς \mathbf{k} χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων των μοναδιαίων δεικτών $\mathbf{e}_{\leftrightarrow}$, $\mathbf{e}_{\updownarrow}$ και \mathbf{n} , απ' όπου καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση για το συνδυασμό των Q και U :

$$Q(\mathbf{n}) \pm iU(\mathbf{n}) \sim - \int d\Omega(\theta', \varphi') f(\theta', \varphi'; \mathbf{n}) \sin^2 \theta' e^{\pm 2i\varphi'},$$

όπου η εξάρτηση από τον μοναδιαίο δείκτη \mathbf{k} υποδεικνύεται από τις σφαιρικές συντεταγμένες θ, φ .

Η έκφραση αυτή μας παρέχει μία πολύ σημαντική πληροφορία η οποία έγκειται στο ότι η εξάρτηση από το \mathbf{k} του τελευταίου όρου μέσα στο ολοκλήρωμα είναι αυτή των σφαιρικών αρμονικών:

$$Y_{2}^{\pm 2}(\theta', \varphi') = 3 \sqrt{\frac{5}{96\pi}} \sin^2 \theta' e^{\pm 2i\varphi'}.$$

Επομένως, η μόνη περίπτωση το προηγούμενο ολοκλήρωμα να μην είναι μηδενικό είναι η συνάρτηση κατανομής των φωτονίων $f(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ να περιέχει κάποια τετραπολική ανισοτροπία. Με άλλα λόγια, από τους παραπάνω υπολογισμούς, συμπεράναμε ότι η μέτρηση της πόλωσης της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου δίνει άμεσα πληροφορίες για την τετραπολικότητα της συνάρτησης κατανομής των φωτονίων κατά την περίοδο αποδέσμευσής τους.

Η διάκριση ανάμεσα στις παραμέτρους Q και U είναι σχετικά αυθαίρετη, καθώς η μία παράμετρος μπορεί να μετασχηματιστεί στην άλλη με κατάλληλη περιστροφή γύρω από το \mathbf{n} . Ειδικά, κάτω από μία περιστροφή κατά γωνία φ οι πεπλεγμένοι συνδυασμοί των δύο αυτών παραμέτρων του Stokes μετασχηματίζονται ως:

$$Q(\mathbf{n}) \pm iU(\mathbf{n}) \rightarrow e^{\mp 2i\varphi} [Q(\mathbf{n}) \pm iU(\mathbf{n})] .$$

Ο συνδυασμός $Q(\mathbf{n}) \pm iU(\mathbf{n})$ ορίζει δύο σύνθετες συναρτήσεις σε σφαίρα δύο διαστάσεων, τα σημεία της οποίας ορίζονται από το μοναδιαίο δείκτη \mathbf{n} . Η παραπάνω εξίσωση μετασχηματισμού καθορίζει μία τοπική ομάδα στροφών $SO(2)$ μέσα στη σφαίρα, κάτω από τις οποίες, η ποσότητα $Q(\mathbf{n}) \pm iU(\mathbf{n})$ μετασχηματίζεται όπως οι ποσότητες με σπιν ± 2 . Αν μιλούσαμε για βαθμωτές ποσότητες, θα αναπτύσσαμε χρησιμοποιώντας τις συνήθεις σφαιρικές αρμονικές $Y_\ell^m(\mathbf{n})$. Ωστόσο λόγω των ιδιοτήτων που παρουσιάζουν οι ποσότητες αυτές κάτω από μετασχηματισμούς, η ανάπτυξη πρέπει να γίνει σε ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace στη σφαίρα S^2 , με τους απαραίτητους μετασχηματισμούς υπό στροφές $SO(2)$. Η βάση του αναπτύγματος θα είναι κάποιες γενικευμένες συναρτήσεις των συνήθων σφαιρικών αρμονικών που θα έχουν σπιν ± 2 . Οι συναρτήσεις αυτές καλούνται ‘σπιν-σταθμισμένες’ σφαιρικές αρμονικές και συμβολίζονται ως ${}_{\pm 2}Y_\ell^m(\mathbf{n})$. Είμαστε πλέον σε θέση να γράψουμε το ανάπτυγμα της ποσότητας $Q(\mathbf{n}) \pm iU(\mathbf{n})$:

$$Q(\mathbf{n}) \pm iU(\mathbf{n}) = - \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (E_{\ell m} \pm iB_{\ell m}) {}_{\pm 2}Y_\ell^m(\mathbf{n}),$$

όπου οι συντελεστές $E_{\ell m}, B_{\ell m}$ καθορίζουν τους E και B τρόπους πόλωσης της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου.

Όπως συμβαίνει και με τις διακυμάνσεις στη θερμοκρασία, η πόλωση της ακτινοβολίας υποβάθρου μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μία σειρά τυχαίων μεταβλητών, οι κατανομές πιθανότητας των οποίων χαρακτηρίζονται από τις συναρτήσεις συσχέτισης:

$$\langle E_{\ell m}^* E_{\ell' m'} \rangle = C_\ell^{EE} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

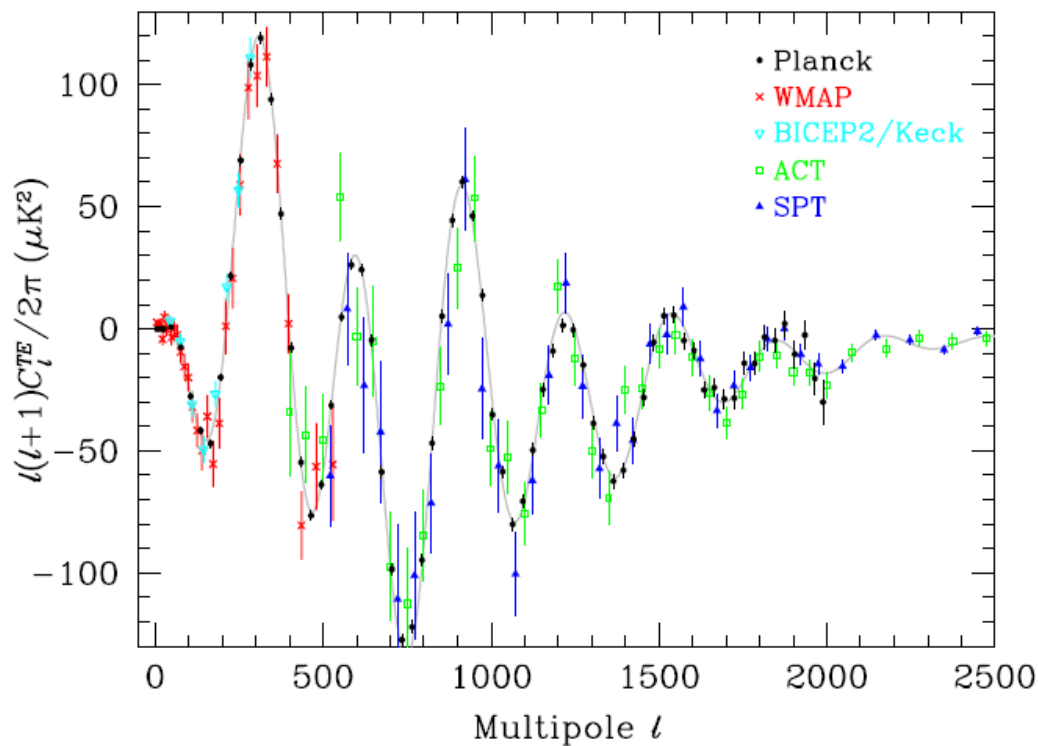
$$\langle B_{\ell m}^* B_{\ell' m'} \rangle = C_\ell^{BB} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

Οι συντελεστές C_ℓ^{EE} και C_ℓ^{BB} μπορούν να υπολογιστούν από διάφορα θεωρητικά μοντέλα για το πρώιμο σύμπαν και να συγκριθούν με άμεσες μετρήσεις της πόλωσης της ακτινοβολίας υποβάθρου.

Ο τρόπος E έχει μετρηθεί με ιδιαίτερη ακρίβεια από την ομάδα Planck Collaboration και από το πείραμα WMAP, ενώ η ύπαρξη του τρόπου B στο πρώιμο σύμπαν υποδεικνύεται από διάφορα πειράματα όπως BICEP-2, Planck και άλλα. Ο ρόλος του B τρόπου είναι ιδιαίτερα σημαντικός καθώς η μέτρησή του μπορεί να οδηγήσει στην ανίχνευση πρώιμων βαρυτικών κυμάτων σε μεγάλες κλίμακες ℓ .

4.4. ΤΟ ΦΑΣΜΑ C_ℓ^{TE}

Παραθέτουμε παρακάτω ενδεικτικά το διάγραμμα συσχέτισης του φάσματος της θερμοκρασίας T και του τρόπου πόλωσης E συναρτήσει του ℓ :



Εικόνα 4.4.

Η εικόνα πάρθηκε από το [15].

Τα πρώτα εμφανή στοιχεία στο διάγραμμα αυτό ήταν η αντι-συσχέτιση που παρατηρήθηκε σε κλίμακα $\ell \approx 150$ και η κορυφή σε μήκος $\ell \approx 300$, ωστόσο, από το φάσμα αυτό μπορούν πλέον να παρατηρηθούν ξεκάθαρα ολόκληρες σειρές από ταλαντώσεις. Το σχήμα του φάσματος υποστηρίζει το κοσμολογικό μοντέλο που επικρατεί, ενώ, παράλληλα θέτει όρια για το πάχος της επιφάνειας της τελευταίας σκέδασης.

Η συνολική εικόνα για τις πηγές που προκαλούν την πόλωση της κοσμικής ακτινοβολίας και τις ταλαντώσεις της έχει επιβεβαιωθεί και μέσω πειραμάτων γύρω από ψυχρά και θερμά σημεία της θερμοκρασίας. Οι πηγές της πόλωσης είναι βαθμωτές και τανυστικές, με το λόγο του τανυστικού ως προς το βαθμωτό κομμάτι του φάσματος να είναι $r = 0.1$. Τα εφαπτομενικά και ακτινικά μοτίβα της πόλωσης, καθώς και η μετατόπιση φάσης μεταξύ πόλωσης και θερμοκρασίας που φαίνονται

στο διάγραμμα αποτελούν απόδειξη ότι η πόλωση προέρχεται από σκέδαση Thomson σε ερυθρομετατόπιση $z \approx 1100$. [15]

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στα πλαίσια της πτυχιακής αυτής εργασίας, αναλύθηκαν το σύγχρονο κοσμολογικό πρότυπο και κάποιες συγκεκριμένες προεκτάσεις του, προκειμένου να δημιουργηθεί μία σύνδεση μεταξύ της τρέχουσας δομής του σύμπαντος και αυτής του πρώιμου σύμπαντος.

Αρχικά, επιχειρήθηκε μία περιγραφή του σύγχρονου κοσμολογικού προτύπου, η οποία εμπεριείχε τη θεμελίωση των εξισώσεων Friedmann, της καταστατικής εξίσωσης που περιγράφει τα στοιχεία που αποτελούν το σύμπαν καθώς και τον ορισμό απαραίτητων εννοιών και μεγεθών για τη συζήτηση σε επίπεδο κοσμολογικών κλιμάκων. Τα παραπάνω είχαν ως στόχο να μπορέσει να επιτευχθεί μία επισκόπηση για τα πιθανά σενάρια εξέλιξης του σύμπαντος καθώς και ένας υπολογισμός για την ηλικία του σύμπαντος.

Στη συνέχεια, έγινε μία εκτενής αναφορά στην περίοδο του πληθωρισμού, ο οποίος αποτελεί απαραίτητη προσθήκη στο σύγχρονο κοσμολογικό μοντέλο και δίνει λύση σε δύο βασικά προβλήματα: αυτά της αιτιότητας και της επιπεδότητας. Στο εν λόγω κεφάλαιο περιγράφηκε ακόμα το βασικό μοντέλο του πληθωρισμού, που προκαλείται από ένα βαθμωτό πεδίο και ακολουθεί την προσέγγιση αργής εξέλιξης και η αναλύθηκε η εξέλιξη των κλιμάκων τόσο του υπερ-ορίζοντα όσο και του υπο-ορίζοντα.

Κατόπιν, η συζήτηση εστιάστηκε στη θεωρία διαταραχών, η οποία απαντά στο πως οι πρώιμες μικρές αδιαβατικές διαταραχές πυκνότητας εξελίχθηκαν στις μεγάλης κλίμακας δομές που παρατηρούνται σήμερα στο σύμπαν. Η συζήτηση ξεκινά από τη νευτώνεια θεωρία διαταραχών, συνεχίζει με τις διαταραχές κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού και την εξέλιξή τους σε κλίμακες υπο-ορίζοντα και υπερ-ορίζοντα.

Τέλος, αναλύεται μία άλλη σημαντική παράμετρος του σύγχρονου κοσμολογικού μοντέλου: αυτή της κοσμικής μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου και της πόλωσής της. Στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται μία επισκόπηση στις πληροφορίες που παρέχει το φάσμα της πόλωσης της ακτινοβολίας υποβάθρου, η οποία υποδυκνώνει τη μεγάλη σημασία της για την ανακατασκευή του κοσμολογικού μοντέλου για το

πρώιμο σύμπαν. Ακόμη, ορίζονται οι παράμετροι Stokes και ο συνδυασμός των παραμέτρων Q και U. Οι ποσότητες αυτές μπορούν να περιγράψουν επαρκώς την πόλωση και υπολογισμοί επί αυτών οδηγούν στη διαπίστωση ότι η πόλωση της ακτινοβολίας υποβάθρου δίνει άμεση εικόνα για την τετραπολικότητα στην κατανομή των φωτονίων κατά την αποδέσμευσή τους. Επιπρόσθετα, περαιτέρω μελέτη και αξιοποίηση των δεδομένων του φάσματος συσχέτισης της E πόλωσης και της θερμοκρασίας T οδηγεί στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι η πόλωση αυτή παράγεται από την ίδια τη σκέδαση Compton.

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι η πόλωση της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου αποτελεί μία πολύ προσοδοφόρα πηγή πληροφοριών για τις ανισοτροπίες στο πρώιμο σύμπαν και δεν είναι λίγες οι επιστημονικές ομάδες που έχουν εστιάσει την έρευνά τους στο κομμάτι αυτό. Επαναλαμβανόμενα πειράματα από ομάδες όπως είναι οι BICEP-2 και Keck Array collaboration επιχειρούν να περιορίσουν τις διάφορες παραμέτρους που εμπλέκονται στο φάσμα της πόλωσης προκειμένου αυτό να αποτελέσει μία ακόμη πιο αξιόπιστη πηγή πληροφοριών. Ένα παράδειγμα αποτελεί η αναφορά των δύο παραπάνω, μόλις τον Ιούνιο του 2017, για την επίτευξη περιορισμού της μέγιστης εκτιμώμενης τιμής για τις ανισοτροπίες της περιστροφής της πόλωσης της ακτινοβολίας υποβάθρου καθώς και της πιθανότητας ύπαρξης πρώιμων μαγνητικών φασμάτων.

Αναφορές

- [1] Modern Cosmology, Scott Dodelson.
- [2] <http://pdg.lbl.gov/index.html>, Cosmological Parameters, Revised November 2015 by O. Lahav, A.R. Liddle.
- [3] Astroparticle Physics, C. Grupen.
- [4] Cosmology, Steven Weinberg.
- [5] First Principles of Cosmology, Eric V. Linder.
- [6] Introduction to Cosmology, Matts Roos, third edition.
- [7] An Introduction to Modern Cosmology, Andrew Liddle.
- [8] <http://www.helsinki.fi/~hkurkisu/cmbphysics/CMB07notes.html>
- [9] Cosmology, lectures by Daniel Baumann.
- [10] Wikipedia, online encyclopedia.
- [11] A CMB Polarization Primer, Wayne Hu & Martin White.
- [12] Theory of Cosmic Microwave Background Polarization, Paolo Cabella & Marc Kamionkowski.
- [13] Polarization by Scattering, Wayne Hu.
- [14] An Invitation to Quantum Field Theory, Luis Álvarez-Gaumé & Miguel Á. Vázquez-Mozo.
- [15] <http://pdg.lbl.gov/index.html>, Cosmic Microwave Background, Revised September 2015 by D. Scott & G. F. Smoot.
- [16] BICEP2 / Keck Array IX: New Bounds on Anisotropies of CMB Polarization Rotation and Implications for Axion-Like Particles and Primordial Magnetic Fields