

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και στοιχειωδών
σωματιδίων



**Κβαντική Πληροφορία με Συνεχείς
Μεταβλητές:**
Παραγωγή κβαντικής διεμπλοκής και εντροπίας

Ευαγγελία Μπισκετζή

Επιβλέπων Καθηγητής Αναπληρωτής Καθηγητής
Αλέξανδρος Καρανίκας

Αθήνα, Ιούλιος 2017

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Τίτλος: Κβαντική Πληροφορία με Συνεχείς Μεταβλητές:
Παραγωγή κβαντικής διεμπλοκής και εντροπίας

Συγγραφέας: Ευαγγελία Μπισκετζή

Αριθμός Μητρώου: 201519

Επιβλέπων Καθηγητής: Αναπληρωτής Καθηγητής Αλέξανδρος Καρανίκας

Τριμελής Επιτροπή: Αναπληρωτής Καθηγητής Αλέξανδρος Καρανίκας
Αναπληρωτής Καθηγητής Φώτιος Διάκονος
Επίκουρος Καθηγητής Ξάνθος Μαϊντάς

Η διπλωματική εργασία κατατέθηκε τον Ιούλιο του 2017

Περιεχόμενα

1	Δομή Κβαντικής Μηχανικής	9
1.1	Δομή κβαντικής μηχανικής	9
1.2	Τελεστής πυκνότητας	10
1.3	Σύνθετα συστήματα	12
1.4	Κβαντική Διεμπλοκή	13
2	Καταστάσεις του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου	17
2.1	Κβάντωση Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου	17
2.2	Σύμφωνες Καταστάσεις	22
2.3	Squeezed Καταστάσεις	25
2.4	Squeezed Καταστάσεις δύο τρόπων ταλάντωσης	28
2.5	Θερμικές Καταστάσεις	28
2.6	Κβαντικοί Οπτικοί Μετασχηματισμοί	30
2.6.1	Μετατόπιση φάσης	31
2.6.2	Beam splitter	31
2.6.3	Squeezer	32
2.6.4	Bloch-Messiah Reduction	33
3	Εντροπία της πληροφορίας	35
3.1	Εντροπία Shannon	35
3.1.1	Εντροπία δύο πηγών σήματος	37
3.2	Κβαντική Εντροπία von Neumann	38
3.2.1	Ιδιότητες της Εντροπίας von Neumann	40
3.2.2	Εντροπία και μέτρηση	41
3.2.3	Ιδιότητες της εντροπίας σύνθετων συστημάτων	42
3.2.4	Εντροπία της κβαντικής διεμπλοκής	44
4	Κβαντική διεμπλοκή με συνεχείς μεταβλητές	45
4.1	Κβαντικός φασικός χώρος	45
4.1.1	Συνάρτηση Wigner	46
4.1.2	Κατανομή Q	48

4.1.3	Κατανομή P	48
4.2	Διεμπλοκή γκαουσιανών καταστάσεων	50
4.2.1	Καθαρές γκαουσιανες καταστάσεις σε διεμπλοκη	53
5	Παραγωγή εντροπίας	55

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τα μέλη της 3-μελούς επιτροπής και συγκεκριμένα:

τον κ. Α. Καρανίκα, επιβλέποντα, για την αμέριστη βοήθεια, τη φροντίδα, την καθοδήγηση και την ηθική υποστήριξη.

τον κ Φ. Διάκονο και τον κ. Ξ. Μαϊντά για την υποστήριξή τους.

Εισαγωγή

Η μελέτη συστημάτων συνεχών μεταβλητών έχει θεωρητικό ενδιαφέρον, καθώς όλα τα φαινόμενα των διακριτών μεταβλητών μπορούν να επεκταθούν σε συνεχείς μεταβλητές. Πέρα, όμως, από το θεωρητικό κίνητρο, το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας έχει στραφεί στα συστήματα συνεχών μεταβλητών, καθώς αυτά είναι υλοποιήσιμα με κβαντικές οπτικές καταστάσεις, οι οποίες μπορούν να παραχθούν στο εργαστήριο με οπτικά μέσα και να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά σε όλους τους χειρισμούς που απαιτούνται από πρωτόκολλα επικοινωνίας. Η επεξεργασία πληροφορίας που βασίζεται στην παραγωγή κβαντικών οπτικών καταστάσεων και τη μέτρηση συνιστωσών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου αναφέρεται ως κβαντική πληροφορία με συνεχείς μεταβλητές. Η παραγωγή εντροπίας και ισχυρά συσχετισμένων συστημάτων βρίσκεται στο επίκεντρο των εφαρμογών της κβαντικής πληροφορίας. Η εντροπία von Neumann αποτελεί μια σημαντική ποσότητα, καθώς αποτελεί μέτρο της διεμπλοκής.

Είναι έκδηλο ότι προκειμένου να μελετηθεί η κβαντική πληροφορία με συνεχείς μεταβλητές, πρέπει να μελετηθούν κάποιες προαπαιτούμενες έννοιες. Έτσι, στο πρώτο κεφάλαιο μελετήθηκαν τα χαρακτηριστικά των σύνθετων καταστάσεων και οι ιδιότητές της κβαντικής διεμπλοκής.

Στη συνέχεια, εξετάστηκαν οι κβαντικές καταστάσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, καθώς αυτές είναι που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση της κβαντικής πληροφορίας με συνεχείς μεταβλητές. Ο χειρισμός αυτών των καταστάσεων γίνεται με κβαντικούς οπτικούς μετασχηματισμούς που υλοποιούνται άμεσα στο εργαστήριο με οπτικά μέσα. Επομένως, η μελέτη των κβαντικών οπτικών μετασχηματισμών αποτέλεσαν, επίσης, μέρος της διπλωματικής εργασίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο, μελετήθηκε αρχικά η κλασική εντροπία της πληροφορίας, ώστε να αποκτηθεί μια κατανόηση της κλασικής περίπτωσης, που είναι πιο εύκολα αντιληπτή, και στη συνέχεια έγινε η μετάβαση στην κβαντική εντροπία von Neumann. Εξετάστηκαν οι ιδιότητες της και οι ιδιότητες της εντροπίας σύνθετων συστημάτων. Ορίστηκε η εντροπία της διεμπλοκής, η οποία είναι ένα καλό μέτρο της διεμπλοκής για καθαρές διμερείς καταστάσεις.

Η χρήση του φασικού χώρου για συστήματα συνεχών μεταβλητών είναι διαδεδομένη. Επομένως, κρίθηκε σημαντικό να μελετηθούν οι διάφορες αναπαραστά-

σεις στον κβαντικό φασικό χώρο, καθώς και κάποια στοιχεία από τη συμπλεκτική μορφή των Γκαουσιανών καταστάσεων.

Τέλος, μελετήθηκε η παραγωγή εντροπίας από τη δράση του τελεστή squeezing σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της ρέπλικας, η οποία επιτυγχάνει να υπολογίσει σχετικά απλά την εντροπία της διεμπλοκής.

Κεφάλαιο 1

Δομή Κβαντικής Μηχανικής

1.1 Δομή κβαντικής μηχανικής

Αρχικά, θα παρουσιαστεί μια τυπική προσέγγιση της κβαντικής μηχανικής. Βασίζεται στις παραδοχές που διαμορφώθηκαν από τους Dirac και von Neumann όσον αφορά τις καταστάσεις των φυσικών συστημάτων, καθώς επίσης και της εξέλιξής τους. Οι παραδοχές είναι οι εξής:

1. *Καταστάσεις*: Κάθε απομονωμένο σύστημα αντιστοιχίζεται σε ένα μιγαδικό χώρο \mathcal{H} εφοδιασμένο με εσωτερικό γινόμενο, ο οποίος ονομάζεται χώρος Hilbert. Κάθε φυσική κατάσταση μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα κανονικοποιημένο άνυσμα $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$, το οποίο είναι μοναδικό, έχοντας μια απροσδιοριστία φάσης, η οποία, όμως, δεν έχει φυσικό νόημα.

2. *Εξέλιξη*: Η εξέλιξη ενός κλειστού συστήματος για δεδομένο χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$ περιγράφεται από ένα μοναδικό μετασχηματισμό \hat{U} , ο οποίος αντιστοιχίζει τις καταστάσεις $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ της στιγμής t_0 στην κατάσταση $|\phi'\rangle = \hat{U}|\phi\rangle$ στη στιγμή t_1 . Ο γεννήτορας αυτού του μετασχηματισμού είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής, ο οποίος είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος.

3. *Παρατηρούμενα μεγέθη*: Κάθε φυσική ιδιότητα ενός συστήματος η οποία μπορεί να μετρηθεί είναι ένα παρατηρούμενο μέγεθος και κάθε παρατηρούμενο μέγεθος αναπαρίσταται από έναν αυτοσυζυγή γραμμικό τελεστή που δρα στο χώρο \mathcal{H} . Κάθε ιδιοτιμή x του παρατηρούμενου \hat{O} αντιστοιχεί σε μια δυνατή τιμή του παρατηρούμενου. Απ' τη στιγμή που ο \hat{O} είναι αυτοσυζυγής μπορεί να γραφεί στη μορφή $\hat{O} = \sum_x x \hat{P}_x$, όπου \hat{P}_x είναι ο προβολικός τελεστής στον υπόχωρο με ιδιοτιμή x .

4. *Μέτρηση*: Το αποτέλεσμα της μέτρησης ενός παρατηρούμενου \hat{O} είναι μια ιδιοτιμή x . Αν το σύστημα είναι σε μια κατάσταση $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ η πιθανότητα να παρατηρηθεί το αποτέλεσμα x δίνεται από: $P(x) = |\hat{P}_x|\phi\rangle|^2$. Η κατάσταση μετά τη μέτρηση θα είναι $|\phi'_x\rangle$ και κανονικοποιημένη θα δίνεται από: $|\phi'_x\rangle = \frac{\hat{P}_x|\phi\rangle}{\sqrt{P(x)}}$.

5. *Σύνθεση*: Για οποιαδήποτε δύο φυσικά συστήματα που αντιστοιχούν σε χώρους \mathcal{H}_A και \mathcal{H}_B , ο χώρος και για τα δύο συστήματα θα είναι το τανυστικό γινόμενο $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Επιπλέον, αν τα επιμέρους συστήματα είναι σε κατάσταση $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A$ και $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_B$, τότε η συνολική κατάσταση θα είναι:

$$|\Psi_{AB}\rangle = |\phi\rangle_A |\psi\rangle_B \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (1.1)$$

Τα ανύσματα καταστάσεων $|\phi\rangle$ περιέχουν τη μέγιστη πληροφορία που επιτρέπεται από τις αρχές της κβαντομηχανικής για ένα σύστημα. Επίσης, αν $|\phi_1\rangle$ και $|\phi_2\rangle$ είναι δύο δυνατές κβαντικές καταστάσεις, τότε και η υπέρθεση τους είναι επίσης κβαντική κατάσταση $|\phi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle$.

Οι κβαντικές καταστάσεις οι οποίες περιγράφονται από ανύσματα στο χώρο Hilbert ονομάζονται καθαρές καταστάσεις. Σε μια κατάλληλα επιλεγμένη βάση, μια καθαρή κατάσταση είναι ιδιοκατάσταση ενός πλήρους συνόλου μετατιθέμενων παρατηρούμενων (Complete Set of Commuting Observables), δηλαδή υπάρχει πάντα ένα πλήρες σύνολο διαδικασιών μέτρησης που θα οδηγούν με βεβαιότητα σε συγκεκριμένα αποτελέσματα.

1.2 Τελεστής πυκνότητας

Στις περισσότερες περιπτώσεις οι καταστάσεις δεν περιγράφονται από ένα άνυσμα στο χώρο Hilbert. Αυτές ονομάζονται μικτές καταστάσεις. Μια μεικτή κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί ως μια στατιστική συλλογή καθαρών καταστάσεων.

Θεωρείται πεπερασμένη συλλογή N καθαρών καταστάσεων $|\psi_i\rangle$, με $i = 1, \dots, N$, οι οποίες δεν ορθογώνιες ή γραμμικά ανεξάρτητες. Σε κάθε μια από αυτές τις καθαρές καταστάσεις αντιστοιχεί (κλασική) πιθανότητα p_i , με $\sum_i^N p_i = 1$. Αυτή είναι μια στατιστική συλλογή $|\psi_i\rangle, p_i$. Με βάση αυτά ορίζεται ο τελεστής πυκνότητας

$$\hat{\rho} = \sum_i^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_i^N p_i \hat{\rho}_i \quad (1.2)$$

Ο τελεστής αυτός έχει τις εξής ιδιότητες:

α) Είναι αυτοσυζυγής: $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$.

- β) Είναι θετικός: $\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle \geq 0, \forall | \phi \rangle \in \mathcal{H}$
 γ) Το ίχνος του ισούται με τη μονάδα: $tr[\hat{\rho}] = 1$.

Χρησιμοποιώντας τελεστή πυκνότητας μπορούν να περιγραφούν και οι καθαρές καταστάσεις, όπου για μια κατάσταση $|\psi_k\rangle$ θα ισχύει $p_k = 1$ και $p_{i \neq k} = 0$. Επομένως, οι βασικές αρχές που περιγράφηκαν παραπάνω γενικεύονται ως εξής:

1. *Καταστάσεις*: Η κβαντική κατάσταση περιγράφεται από έναν τελεστή πυκνότητας $\hat{\rho}$. Ο τελεστής πυκνότητας περιγράφει πλήρως το κβαντικό σύστημα.

2. *Εξέλιξη*: Η εξέλιξη μιας κατάστασης για δεδομένο χρονικό διάστημα $[t_0, t_1]$ περιγράφεται από ένα μοναδικό μετασχηματισμό \hat{U} και

$$\hat{\rho}(t_1) = U \hat{\rho} U^\dagger$$

Από αυτό προκύπτει η σχέση

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \quad (1.3)$$

4. *Μέτρηση*: Η πιθανότητα να παρατηρηθεί το αποτέλεσμα x ενός παρατηρούμενου \hat{O} δίνεται από: $P(x) = tr[\hat{P}_x \hat{\rho}]$. Η κατάσταση μετά τη μέτρηση θα είναι

$$|\phi'_x\rangle \text{ και κανονικοποιημένη θα δίνεται από: } \hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_x \hat{\rho} \hat{P}_x}{tr[\hat{P}_x \hat{\rho}]}.$$

5. *Σύνθεση*: Για δύο συστήματα που δεν αλληλεπιδρούν και βρίσκονται σε κατάσταση $\hat{\rho}^A$ και $\hat{\rho}^B$, η συνολική κατάσταση θα είναι: $\hat{\rho}^{AB} = \hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B$.

Επίσης, ο τελεστής πυκνότητας ικανοποιεί τη σχέση:

$$tr[\hat{\rho}^2] \leq 1 \quad (1.4)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για τις καθαρές καταστάσεις. Άρα, για καθαρές καταστάσεις $tr[\hat{\rho}^2] = tr[\hat{\rho}] = 1$.

Σύμφωνα με τον ορισμό (1.2.1) ο τελεστής πυκνότητας μπορεί να αναλυθεί σε μία ορθοκανονική βάση $|j\rangle$

$$\hat{\rho} = \sum_j^d \lambda_j |j\rangle \langle j| = \sum_j^d \lambda_j \hat{\rho}_j \quad (1.5)$$

αρκεί $\lambda_j = \lambda_j^*$, $\lambda_j \geq 0$ και $\sum_j \lambda_j = 1$, άρα $0 \leq \lambda_j \leq 1$. Επομένως, ο τελεστής πυκνότητας μπορεί να θεωρηθεί ένα κυρτό άθροισμα (convex sum), σε

αντίθεση με τις καθарές καταστάσεις, οι οποίες δεν μπορούν να αναλυθούν σε κυρτό άθροισμα. Η έλλειψη μοναδικότητας στην έκφραση του τελεστή πυκνότητας για μια μεικτή κατάσταση έχει ως απόρροια να υπάρχουν άπειρες διαδικασίες για την προετοιμασία της. Από τη στιγμή που γνωρίζει κανείς το $\hat{\rho}$, γνωρίζει όλη τη διαθέσιμη πληροφορία και είναι αδύνατον να ξανακατασκευάσει τις αρχικές καταστάσεις $\hat{\rho}_i$ παρόλο που οι διαδικασίες θα μπορούσαν να είναι μακροσκοπικά διαφορετικές. Η μέγιστα αναμειγμένη κατάσταση είναι αυτή για την οποία όλες οι πιθανές διαδικασίες είναι ισοπίθανες $\hat{\rho} = \frac{1}{d}\mathbb{I}$. [1]

Τέλος, για μοναδιακή χρονική εξέλιξη του τελεστή πυκνότητας ισχύουν οι σχέσεις:

$$\text{tr} [\hat{\rho}(t)] = \text{tr} [\hat{\rho}(t_0)] \text{ και } \text{tr} [\hat{\rho}^2(t)] = \text{tr} [\hat{\rho}^2(t_0)]$$

Επομένως, με μοναδιακή εξέλιξη δεν μπορεί μια καθαρή κατάσταση να εξελιχθεί σε μεικτή ή το αντίστροφο.

1.3 Σύνθετα συστήματα

Σύνθετο (composite) σύστημα είναι το σύστημα το οποίο μπορεί να χωριστεί σε αρκετά υποσυστήματα και αντίστροφα ξεχωριστά συστήματα μπορούν να συνδυαστούν ώστε να προκύψουν σύνθετα συστήματα. Σημειώνεται ότι, ενώ το κλασικό συνολικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τα επιμέρους συστήματα και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις, αυτό δεν ισχύει στην κβαντική μηχανική.

Για διάφορα φυσικά συστήματα που αντιστοιχούν σε χώρους $\mathcal{H}^A, \mathcal{H}^B, \dots, \mathcal{H}^N$, ο χώρος του σύνθετου συστήματος θα είναι το τανυστικό γινόμενο των χώρων $\mathcal{H}^{AB\dots} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^N$. Μια γενική κατάσταση θα περιγράφεται από έναν τελεστή πυκνότητας $\hat{\rho}^{AB\dots}$ στο χώρο $\mathcal{H}^{AB\dots}$, ενώ μόνο στην περίπτωση όπου τα συστήματα δεν αλληλεπιδρούν θα ισχύει $\hat{\rho}^{AB\dots} = \hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B \otimes \dots \otimes \hat{\rho}^N$. Ακόμα μπορούν να υπάρχουν στατιστικά μίγματα της μορφής

$$\hat{\rho}^{AB\dots} = \sum_i^m p_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_i^N \quad (1.6)$$

με $\sum_i^m p_i = 1$. Καταστάσεις αυτής της μορφής ονομάζονται διαχωρίσιμες.

Τα παρατηρούμενα μεγέθη στα σύνθετα συστήματα χωρίζονται τώρα σε δυο κατηγορίες. Αρχικά, υπάρχουν οι επεκτάσεις των παρατηρούμενων μεγεθών που αφορούν μόνο ένα σύστημα:

$$\hat{C}^{AB\dots N} = \hat{C}^A \otimes \mathbb{I}^B \otimes \dots \otimes \mathbb{I}^N$$

Αυτός ο τελεστής δρα μόνο σε ένα από τα υποσυστήματα. Τέτοιοι τελεστές περιγράφουν τοπικές μετρήσεις. Υπάρχουν, όμως, πιο γενικοί ερμιτιανοί τελεστές, οι οποίοι δεν μπορούν να γραφούν σαν επεκτάσεις τελεστών. Αυτοί αντιπροσωπεύουν μη-τοπικά παρατηρούμενα μεγέθη. Αντίστοιχα, οι μετασχηματισμοί που μπορούν να εκτελεστούν σε ένα σύστημα μπορεί να είναι είτε τοπικοί, είτε μη τοπικοί. Το σύνολο των τοπικών μετρήσεων και μετασχηματισμών αναφέρεται ως "Τοπικοί Χειρισμοί" του συστήματος (Local Operations- LO). Στον τομέα της κβαντικής πληροφορίας είναι συνηθισμένο να εκτελούνται διάφοροι τοπικοί χειρισμοί (LO) και να επιτρέπεται επιπλέον η κλασική επικοινωνία μεταξύ των τοπικά διαχωρισμένων υποσυστημάτων. Αυτή η περίπτωση αναφέρεται ως "Τοπικός Χειρισμός και Κλασική Επικοινωνία" (Local Operation and Classical Communication - LOCC). Η κλασική επικοινωνία μεταδίδει πληροφορία για το αποτέλεσμα της τοπικής μέτρησης και υποδεικνύει ποιος τοπικός χειρισμός πρέπει να εφαρμοστεί στη συνέχεια, ώστε να υπάρξει το επιθυμητό αποτέλεσμα.[2]

Είναι χρήσιμο να οριστεί ο μειωμένος τελεστής πυκνότητας. Για απλότητα θα οριστεί για ένα διμερές σύστημα. Ο μειωμένος τελεστής πυκνότητας σχετίζεται με ένα υποσύστημα, αν υπολογιστεί το μερικό ίχνος του ολικού τελεστή πυκνότητας ως προς το άλλο υποσύστημα:

$$\hat{\rho}^A = \text{tr}_B [\hat{\rho}^{AB}] \quad (1.7)$$

Όσον αφορά τις τοπικές μετρήσεις σε ένα υποσύστημα A, τα αποτελέσματα των μετρήσεων μπορούν να υπολογιστούν από τον μειωμένο τελεστή πυκνότητας $\hat{\rho}^A$ και τους τελεστές που δρουν σε αυτό το υποσύστημα, σαν αυτό να ήταν απομονωμένο. Για παράδειγμα, για τον τελεστή της σχέσης () θα ισχύει

$$\langle C^A \rangle = \text{tr}_{AB} [\hat{C}^{AB} \hat{\rho}^{AB}] = \text{tr}_A [\hat{C}^A \hat{\rho}^A] \quad (1.8)$$

Η δυναμική εξέλιξη ενός μη αλληλεπιδρώντος υποσυστήματος A θα δίνεται από την επέκταση του τελεστή που δρα στο A: $\hat{U}^{AB} = \hat{U}^A \otimes \mathbb{I}^B$. Γενικά, όμως, η δυναμική εξέλιξη ενός υποσυστήματος δεν είναι μοναδιακή. Η εξέλιξη του συνολικού συστήματος, όντας απομονωμένο, θα είναι μοναδιακή. Η εξέλιξη του υποσυστήματος A, το οποίο θεωρείται ανοιχτό υποσύστημα, θα εξελίσσεται σύμφωνα με κάποια Master equation και η εξέλιξή του δεν θα είναι μοναδιακή.

1.4 Κβαντική Διεμπλοκή

Στις προηγούμενες παραγράφους αναφέρθηκαν περιπτώσεις σύνθετων συστημάτων της μορφής (1.1) και (1.4), τα οποία ήταν διαχωρίσιμα. Κάθε κατάσταση (καθαρή ή μεικτή) ενός σύνθετου συστήματος η οποία δεν είναι διαχωρίσιμη, δεν μπορεί να γραφεί, δηλαδή, ως ταυυστικό γινόμενο άλλων καταστάσεων, λέγεται

ότι βρίσκεται σε κβαντική διεμπλοκή (entanglement). Τα συστήματα σε κβαντική διεμπλοκή δεν μπορούν να δημιουργηθούν μέσω LOCC χειρισμών.

Μερικά χαρακτηριστικά των συζευγμένων καταστάσεων είναι τα εξής: Μια κατάσταση σε κβαντική διεμπλοκή περιέχει μη κλασικές συσχετίσεις, οι οποίες ονομάζονται συσχετίσεις EPR. Η κβαντική διεμπλοκή των συστημάτων δεν αυξάνεται κάτω από LOCC μετασχηματισμούς. Επίσης, η κβαντική διεμπλοκή δεν αλλάζει κάτω από τοπικούς μοναδιακούς μετασχηματισμούς. Τέλος, υπάρχουν μέγιστα κβαντικά συζευγμένες καταστάσεις. Για δύο d -διαστάσεων υποσυστήματα, αυτές είναι οι καταστάσεις στις οποίες κάθε καθαρή κατάσταση είναι τοπικά και μοναδιακά ισοδύναμη με την μέγιστα αναμειγμένη κατάσταση $\hat{\rho} = \frac{1}{d}\mathbb{I}$. Δεν υπάρχει αντίστοιχη διατύπωση για περισσότερα από δύο συστήματα σε διεμπλοκή. [2]

Ανάλυση Schmidt Είναι χρήσιμο να αναφερθεί η ανάλυση Schmidt, η οποία αφορά κβαντική διεμπλοκή καθαρών καταστάσεων διμερών συστημάτων (συστήματα τα οποία αποτελούνται από δύο υποσυστήματα). [3]

Έστω $|\psi^{AB}\rangle$ μια κανονικοποιημένη καθαρή κατάσταση ενός διμερούς συστήματος S^{AB} στο χώρο Hilbert $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ με $\dim\mathcal{H}^A = a$ και $\dim\mathcal{H}^B = b$. Τότε ισχύουν τα εξής:

i) Το άνυσμα $|\psi^{AB}\rangle$ μπορεί να αναλυθεί κατά Schmidt και να γραφεί στη μορφή:

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{n=1}^k \sqrt{p_n} |u_n^A, w_n^B\rangle \quad (1.9)$$

όπου $p_n > 0$, $k \leq \min(a, b)$ και $|u_n^A\rangle, |w_n^B\rangle$ ορθοκανονικά ιδιοάνυσματα του $\hat{\rho}^A$ στο \mathcal{H}^A (ή του $\hat{\rho}^B$ στο \mathcal{H}^B). Εάν δεν υπάρχει εκφυλισμός στις τιμές του p_n τα ανύσματα $|u_n^A\rangle, |w_n^B\rangle$ είναι μοναδικώς προσδιορισμένα. Από αυτό προκύπτει ότι:

ii) Οι μειωμένοι τελεστές πυκνότητας $\hat{\rho}^A$ και $\hat{\rho}^B$ έχουν τις ίδιες θετικές ιδιοτιμές p_1, p_2, \dots, p_k . Για εκφυλισμό g τάξης η αντίστοιχη ιδιοτιμή θα επαναλαμβάνεται g φορές.

Ο αριθμός k ονομάζεται τάξη του $|\psi^{AB}\rangle$ και ο αριθμός p_n συντελεστής Schmidt. Η ανάλυση Schmidt είναι μια υπέρθεση διαχωρίσιμων καταστάσεων και όλη η πληροφορία για την κβαντική διεμπλοκή περιέχεται στους συντελεστές Schmidt. Μια κατάσταση $|\psi^{AB}\rangle$ είναι διαχωρίσιμη (και επομένως όχι σε διεμπλοκή) αν και μόνο αν η τάξη Schmidt k είναι ίση με τη μονάδα. Τότε οι $\hat{\rho}^A$ και $\hat{\rho}^B$ ονομάζονται τάξης 1. Αυτό ισοδυναμεί με την συνθήκη $\text{tr}[\hat{\rho}] = 1$. Αν ο αριθμός k είναι μεγαλύτερος της μονάδας, τότε οι καταστάσεις βρίσκονται σε διεμπλοκή. Επομένως,

ο αριθμός Schmidt μπορεί να χρησιμεύσει σαν μέτρο της διεμπλοκής καθαρών καταστάσεων.

Η πρόταση (ii) έχει ως συνέπεια κάθε συνάρτηση του τελεστή πυκνότητας που εξαρτάται μόνο στις ιδιοτιμές του να έχει την ίδια τιμή και για τους δύο μειωμένους τελεστές πυκνότητας. (Μια τέτοια συνάρτηση είναι η εντροπία von Neumann).

Τέλος, σημειώνεται ότι η ανάλυση Schmidt δεν μπορεί, εν γένει, να γενικευτεί για παραπάνω από δυο υποσυστήματα.

Κεφάλαιο 2

Καταστάσεις του Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου

2.1 Κβάντωση Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου

Η κλασική θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού περιγράφεται από τις εξισώσεις του Maxwell για το ηλεκτρικό $\vec{E}(\vec{r}, t)$ και μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Αυτές στο κενό και απουσία πηγών είναι

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

Τα πεδία μπορούν να γραφτούν συναρτήσει ενός βαθμωτού $\phi(\vec{r}, t)$ και ενός διανυσματικού δυναμικού $\vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Οι εξισώσεις του Maxwell παραμένουν αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς βαθμίδας, επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η βαθμίδα Coulomb, για την οποία ισχύει $\phi = 0$ και $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Τότε τα πεδία γράφονται

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.5)$$

Αν εισαχθούν οι σχέσεις (5) στις εξισώσεις του Maxwell, προκύπτει ότι το διανυσματικό δυναμικό \vec{A} ικανοποιεί την κυματική εξίσωση

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.6)$$

Για να υπολογιστεί το διανυσματικό δυναμικό, χρησιμοποιείται η μέθοδος των χωριζομένων μεταβλητών και θεωρούνται περιοδικές συνοριακές συνθήκες για μια κυβική κοιλότητα μήκους L . Επομένως, προκύπτουν οι λύσεις

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k (A_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} + A_k^* \vec{u}_k^*(\vec{r}) e^{+i\omega_k t}) \quad (2.7)$$

όπου τα \vec{u}_k πρέπει να ικανοποιούν την κυματική εξίσωση $(\nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2}) \vec{u}_k(\vec{r}) = 0$, την $\nabla \cdot \vec{u}_k(\vec{r}) = 0$ και τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Με βάση αυτά, το \vec{u} υπολογίζεται

$$\vec{u}_{k,\lambda}(\vec{r}) = L^{-3/2} \hat{e}_{\vec{k},\lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad (2.8)$$

Λόγω των περιοδικών συνθηκών, οι τιμές του \vec{k} είναι $k_x = 2\pi n_x/L$ με $n_x = \pm 1, \pm 2, \dots$ και ομοίως για τις y και z συνιστώσες. Επίσης, τα ω_k συνδέονται με τα κυματανύσματα, μέσω της σχέσης διασποράς $\omega_k = ck$. Λόγω της συνθήκης Coulomb, για κάθε \vec{k} πρέπει να επιλεγθούν δύο μοναδιαία διανύσματα, κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στο \vec{k} . Αυτά είναι τα ανύσματα $\hat{e}_{\vec{k},\lambda}$ της σχέσης (8), τα οποία ονομάζονται διανύσματα πόλωσης, και το λ παίρνει τις τιμές 1, 2 και αντιπροσωπεύουν την κάθε πόλωση.

$$\begin{aligned} \hat{e}_{\vec{k},\lambda} \cdot \hat{e}_{\vec{k},\lambda'} &= \delta_{\lambda,\lambda'} \\ \vec{k} \cdot \hat{e}_{\vec{k},\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Τα $\vec{u}_{k,\lambda}$ είναι ορθοκανονικά

$$\frac{1}{V} \int_V d^3r \vec{u}_{k,\lambda}^*(r) \vec{u}_{k',\lambda'}(r) = \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{k,k'} \quad (2.10)$$

Λόγω της μορφής των χωρικών και χρονικών ιδιοσυναρτήσεων, η έκφραση του $\vec{A}(\vec{r}, t)$ είναι το ανάπτυγμα Fourier του δυναμικού. Απ' όλα τα παραπάνω, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο γράφονται ως

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_k \hat{e}_{\vec{k},\lambda} (A_{k,\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - A_k^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}) \quad (2.11)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_k \vec{k} \times \hat{e}_{\vec{k},\lambda} (A_{k,\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + A_k^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}) \quad (2.12)$$

Η ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} \int_V d^3r (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0^{-1} \vec{B}^2)$$

Αν στην παραπάνω σχέση αντικατασταθούν τα πεδία από τις σχέσεις (11) και (12), προκύπτει

$$E = \epsilon_0 V \sum_{\vec{k}, \lambda} \omega_k^2 (A_{k, \lambda} A_{k, \lambda}^* + A_{k, \lambda}^* A_{k, \lambda})$$

Αντικαθιστώντας τα $A_{k, \lambda}$ με $A_{k, \lambda} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} a_{k, \lambda}$ συνεπάγεται

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_k (a_{k, \lambda} a_{k, \lambda}^* + a_{k, \lambda}^* a_{k, \lambda}) \quad (2.13)$$

Αν γίνει αλλαγή μεταβλητών και εισαχθούν οι πραγματικές μεταβλητές $q_{\vec{k}, \lambda}$ και $p_{\vec{k}, \lambda}$

$$\begin{aligned} q_{\vec{k}, \lambda} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_{k, \lambda} + a_{k, \lambda}^*) \\ p_{\vec{k}, \lambda} &= -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2}} (a_{k, \lambda} - a_{k, \lambda}^*) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Η σχέση (13) γίνεται

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} (p_{\vec{k}, \lambda}^2 + \omega_k^2 q_{\vec{k}, \lambda}^2) \quad (2.15)$$

Μπορεί κανείς να πει ότι η ενέργεια του ΗΜΠ είναι το άθροισμα των ενεργειών ενός άπειρου συνόλου ανεξάρτητων αρμονικών ταλαντωτών, με $q_{\vec{k}, \lambda}$ και $p_{\vec{k}, \lambda}$ να είναι η κανονική θέση και η κανονική ορμή αντίστοιχα.

Για την κβαντική περιγραφή του ΗΜΠ, ακολουθείται η διαδικασία της κανονικής κβάντωσης [4]. Οι μεταβλητές $q_{\vec{k}, \lambda}$ και $p_{\vec{k}, \lambda}$ αντιστοιχούνται στους ερμητιανούς τελεστές $\hat{q}_{\vec{k}, \lambda}$ και $\hat{p}_{\vec{k}, \lambda}$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{q}_{\vec{k}, \lambda}, \hat{p}_{\vec{k}', \lambda'}] = i\hbar \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{k, k'} \quad [\hat{q}_{\vec{k}, \lambda}, \hat{q}_{\vec{k}', \lambda'}] = [\hat{p}_{\vec{k}, \lambda}, \hat{p}_{\vec{k}', \lambda'}] \quad (2.16)$$

Και κατ' αντιστοιχία με τις σχέσεις (14), ορίζονται οι τελεστές $\hat{a}_{k, \lambda}$ και $\hat{a}_{k, \lambda}^\dagger$, οι οποίοι υπακούν τις παρακάτω σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}, \hat{a}_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{k, k'} \quad [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}, \hat{a}_{\vec{k}', \lambda'}] = [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger] = 0 \quad (2.17)$$

Οι τελεστές $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$ και $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ έχουν τις ίδιες μαθηματικές ιδιότητες με αυτούς που ορίζονται για τον αρμονικό ταλαντωτή. Με τη χρήση αυτών των μεταβλητών, η Χαμιλτονιανή του ΗΜΠ γράφεται

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_k (\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2}) \quad (2.18)$$

Όπως και στον αρμονικό ταλαντωτή, οι κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας $|n_{\vec{k},\lambda}\rangle$ μπορούν να γραφτούν συναρτήσει του τελεστή $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ ως

$$|n_{\vec{k},\lambda}\rangle = \frac{(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (2.19)$$

Ο τελεστής $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ μπορεί να ερμηνευτεί ως τελεστής δημιουργίας ενός φωτονίου ορμής $\hbar k$, πόλωσης λ και ενέργειας $\hbar\omega_k$. Ένα σύστημα με $n_{\vec{k},\lambda}$ φωτόνια ορμής $\hbar k$, δημιουργείται αν ο τελεστής δημιουργίας $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ δράσει $n_{\vec{k},\lambda}$ φορές στην κατάσταση του κενού $|0\rangle$, την κατάσταση όπου δεν υπάρχουν φωτόνια. Ο τελεστής $\hat{N}_k = \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},\lambda}$ ονομάζεται τελεστής καταμέτρησης και έχει ιδιοτιμές τους θετικούς ακεραίους $n_{\vec{k},\lambda}$ και προσδιορίζει τον αριθμό των των φωτονίων σε κάθε τρόπο ταλάντωσης.

Οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας $|n_{\vec{k},\lambda}\rangle$ αποτελούν μια πλήρη και ορθοκανονική βάση στο χώρο Hilbert του κάθε ανεξάρτητου αρμονικού ταλαντωτή. Επομένως, μια γενική κατάσταση του ΗΜΠ μπορεί να γραφτεί ως ταυυστικό γινόμενο των ιδιοκαταστάσεων του κάθε τρόπου ταλάντωσης

$$|n_{\vec{k}_1,\lambda_1}\rangle \otimes |n_{\vec{k}_2,\lambda_2}\rangle \otimes \dots \otimes |n_{\vec{k}_i,\lambda_i}\rangle$$

Στην εξαγωγή των παραπάνω σχέσεων, ο χώρος είναι πεπερασμένος (κουτί διαστάσεων L). Η μετάβαση στον άπειρο χώρο γίνεται στην οριακή περίπτωση, όπου οι διαστάσεις του κουτιού να τείνουν στο άπειρο $L \rightarrow \infty$. Τότε το άθροισμα στα \vec{k} θα αντικατασταθεί με ολοκλήρωμα στον k -χώρο: $\sum_k \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k$.

Για έναν τρόπο ταλάντωσης και για συγκεκριμένη πόλωση το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται[5]

$$\begin{aligned} \hat{E}_k(\vec{r}, t) &= E_0 [\hat{a}_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + \hat{a}_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}] = \\ &= 2E_0 \hat{e}_k [(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) \cos(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r}) + i(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger) \sin(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})] \end{aligned}$$

με $E_0 = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}}$. Οι τελεστές $\hat{X}_k = \frac{1}{2}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)$ και $\hat{P}_k = \frac{1}{2i}(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger)$ ονομάζονται quadratures του πεδίου, είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του

πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου και μπορούν να ειπωθούν σαν τα πλάτη δύο πεδίων που έχουν διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$. Ουσιαστικά, είναι οι τελεστές θέσης και ορμής, αλλά βαθμισμένα, ώστε να είναι αδιάστατα. Η πιο γενική μορφή των τελεστών των quadratures είναι

$$\hat{x}_k^{(\Theta)} = \frac{1}{2}(\hat{a}_k e^{-i\Theta} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\Theta})$$

και αντίστοιχα για το $\hat{p}_k^{(\Theta)}$.

Στη συνέχεια θα εξεταστούν, για απλότητα, οι λύσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε μια κοιλότητα με απείρως αγωγίμα τοιχώματα:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a}_{k,\lambda}^\dagger + \hat{a}_{k,\lambda}) \vec{u}_k(\vec{r})$$

με $\vec{u}_{k,x}(\vec{r}) = E_{0,x} \cos(m_{k,x}x) \sin(m_{k,y}y) \sin(m_{k,z}z)$, ενώ οι υπόλοιπες συνιστώσες βρίσκονται με κυκλική εναλλαγή των δεικτών.

Η αναμενόμενη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου για μια τέτοια κατάσταση μπορεί να υπολογιστεί και βρίσκεται

$$\langle n_{k_1,\lambda_1}, n_{k_2,\lambda_2} \dots | \vec{E}(\vec{r}, t) | n_{k_1,\lambda_1}, n_{k_2,\lambda_2} \dots \rangle = 0.$$

ενώ η μέση τιμή του τετραγώνου του είναι

$$\langle |\hat{E}|^2 \rangle = \frac{\hbar}{\epsilon_0 V} \sum_{k,\lambda} \omega_k (n_k + \frac{1}{2}) |\vec{u}_k|^2$$

Το άθροισμα σε όλους τους τρόπους ταλάντωσης είναι άπειρο. Η διακύμανση του πεδίου, ακόμα και στη θεμελιώδη κατάσταση, είναι άπειρη.

Τα αποτελέσματα αυτά έρχονται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της κλασικής ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας: Αρχικά, για υψηλές ενέργειες (n πολύ μεγάλο), η διαφορά μεταξύ δύο ενεργειακών σταθμών είναι πολύ μικρή, $\frac{\Delta E_k}{E_k} =$

$\frac{\hbar\omega_k}{n + 1/2\hbar\omega_k} \approx 0$, η ενέργεια γίνεται συνεχής, όπως και στην κλασική περίπτωση. Όμως, η αναμενόμενη τιμή για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ιδιοκατάσταση της ενέργειας είναι 0, σε αντίθεση με την κλασική περίπτωση, όπου η ένταση του πεδίου είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου. Πρέπει να βρεθεί

μια κατάσταση $|\psi_{cl}\rangle$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\langle \hat{E} \rangle = \langle \psi_{cl} | \hat{E} | \psi_{cl} \rangle = E_{cl}$, όπως απαιτεί και το θεώρημα του Ehrenfest. Οι καταστάσεις που επιτυγχάνουν αυτό το αποτέλεσμα είναι οι σύμφωνες καταστάσεις, οι οποίες ορίστηκαν πρώτα από τον R. J. Glauber.[6]

2.2 Σύμφωνες Καταστάσεις

Οι σύμφωνες καταστάσεις είναι οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή καταστροφής

$$\hat{a}|a\rangle = a|a\rangle \quad (2.20)$$

όπου a ένας μιγαδικός αριθμός. Μια σύγχρονη κατάσταση $|a\rangle$ μπορεί να αναλυθεί την κατάσταση στη βάση των ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή:

$$|a\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle n|a\rangle |n\rangle \quad (2.21)$$

Τα πλάτη $\langle n|a\rangle$ υπολογίζονται πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (2.20) με $\langle n|$. Λαμβάνοντας υπόψη την (2.19) προκύπτει

$$\langle n|a\rangle = \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|a\rangle \quad (2.22)$$

Άρα η $|a\rangle$ μπορεί να γραφεί

$$|a\rangle = \langle 0|a\rangle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.23)$$

Η σταθερά $\langle 0|a\rangle$ υπολογίζεται από την απαίτηση οι καταστάσεις $|a\rangle$ να είναι κανονικοποιημένες, επομένως

$$|a\rangle = e^{-|a|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.24)$$

Η κατάσταση $|n\rangle$, όμως, δίνεται από τη σχέση (2.19). Αντικαθιστώντας στην (2.24) και παρατηρώντας ότι το άθροισμα είναι το ανάπτυγμα Taylor του εκθετικού ως προς \hat{a}^\dagger συνεπάγεται

$$|a\rangle = e^{-|a|^2/2} e^{a\hat{a}^\dagger} |0\rangle \quad (2.25)$$

Γράφοντας το $e^{-|a|^2/2}$ ως $e^{-aa^*/2}$ και δεδομένου ότι $e^{-a^*\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$ η σχέση (2.25) μπορεί να γραφεί

$$|a\rangle = e^{-aa^*/2} e^{a\hat{a}^\dagger} e^{-a^*\hat{a}} |0\rangle \quad (2.26)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Glauber, η τελευταία σχέση γίνεται

$$|a\rangle = e^{a\hat{a}^\dagger - a^*\hat{a}}|0\rangle = \hat{D}(a)|0\rangle \quad (2.27)$$

Ο τελεστής

$$\hat{D}(a) = e^{a\hat{a}^\dagger - a^*\hat{a}} \quad (2.28)$$

είναι μοναδιακός και ισχύει

$$\hat{D}^\dagger(a) = \hat{D}(-a) = \hat{D}^{-1}(a) \quad (2.29)$$

Μπορεί κανείς να δείξει τις παρακάτω ιδιότητες για τον τελεστή αυτό [4]

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(a)\hat{a}\hat{D}(a) &= \hat{a} + a \\ \hat{D}^\dagger(a)\hat{a}^\dagger\hat{D}(a) &= \hat{a}^\dagger + a^* \\ \hat{D}^\dagger(a)\hat{q}\hat{D}(a) &= \hat{q} + \sqrt{2\hbar}Re(a) \\ \hat{D}^\dagger(a)\hat{p}\hat{D}(a) &= \hat{p} + \sqrt{2\hbar}Im(a) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Από τις σχέσεις (2.30) φαίνεται ότι ο τελεστής $\hat{D}(a)$ είναι ένας τελεστής μετατόπισης στο φασικό χώρο. Επομένως, μια σύμφωνη κατάσταση μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η κατάσταση του κενού $|0\rangle$, μετατοπισμένη στο φασικό χώρο.

Το γινόμενο $(\Delta\hat{x})^2(\Delta\hat{p})^2$ μπορεί να υπολογιστεί για μία σύμφωνη κατάσταση κατάσταση και προκύπτει ίσο με

$$(\Delta\hat{x})(\Delta\hat{p}) = \frac{\hbar}{2} \quad \text{και} \quad \Delta\hat{x} = \Delta\hat{p} \quad (2.31)$$

Αρα, οι σύμφωνες καταστάσεις είναι καταστάσεις ελάχιστης αβεβαιότητας και οι κυματοσυναρτήσεις τους είναι Γκαουσιανά κυματοπακέτα με διάφορες τιμές για τις μέσες τιμές $\langle\hat{x}\rangle$ και $\langle\hat{p}\rangle$, οι οποίες αποτελούν παραμέτρους για τη κάθε σύμφωνη κατάσταση[7].

$$\psi_a(q) = \langle q|a\rangle = \left(\frac{\omega}{2\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{a^2/2 + aq\sqrt{2\omega/\hbar} - q^2\omega/2\hbar}$$

Η χρονική εξέλιξη των σύμφωνων καταστάσεων μπορεί να βρεθεί αν δράσει σε αυτές ο τελεστής χρονικής εξέλιξης

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{H}t/\hbar}|a\rangle &= e^{-i\omega t/2} e^{-i\omega t\hat{a}^\dagger\hat{a}t} e^{-|a|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-i\omega t/2} e^{-|a|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n e^{-i\omega n}}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= |ae^{-i\omega t}\rangle e^{-i\omega t/2} \end{aligned}$$

Δηλαδή, μια σύμφωνη κατάσταση παραμένει σύμφωνη κατάσταση με διαφορά μιας χρονικά εξαρτώμενης φάσης.

Το σύνολο των σύγχρονων καταστάσεων είναι πλήρες, αλλά όχι ορθογώνιο, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση του χώρου. Η μη ορθογωνιότητα αποδεικνύεται ως εξής:

$$\langle \beta | a \rangle = e^{-(|a|^2 + |\beta|^2)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a\beta^*)^n}{n!} = e^{-|a|^2 - |\beta|^2 + a\beta^*/2} \quad (2.32)$$

το οποίο είναι μικρό για $|a - \beta| \gg 1$, αλλά δεν είναι ποτέ μηδέν. Για την πληρότητα, αν το a γραφεί ως $|a|e^{i\theta}$ μπορεί να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int |a\rangle\langle a|d^2a$:

$$\begin{aligned} \int |a\rangle\langle a|d^2a &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \iint e^{-|a|^2} (a^*a)^n d^2a \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_0^{\infty} e^{-|a|^2} |a|^{2n} |a|d|a| \int_0^{2\pi} d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \pi n! = \Leftrightarrow \\ \frac{1}{\pi} \int |a\rangle\langle a|d^2a &= \mathbb{I} \end{aligned} \quad (2.33)$$

η οποία είναι η σχέση πληρότητας.

Στη συνέχεια θα υπολογιστεί η μέση τιμή του ηλεκτρικού πεδίου σε μια σύμφωνη κατάσταση για τις λύσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε μια κοιλότητα με απείρως αγώγιμα τοιχώματα, που βρέθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

$$\langle a | \hat{E} | a \rangle = \sum_{k,\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{\epsilon_0 V}} [a_k^* e^{i\omega_k} + a_k e^{-i\omega_k}] u_m$$

το οποίο είναι ακριβώς η ανάπτυξη του κλασικού ΗΜΠ σε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και η παράμετρος a_k αναπαριστά το πλάτος του κάθε τρόπου ταλάντωσης. Αν υπολογιστεί η διακύμανση για έναν τρόπο ταλάντωσης

$$\Delta E = \sqrt{\langle |\hat{E}|^2 \rangle - \langle \hat{E} \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} |u_k|^2$$

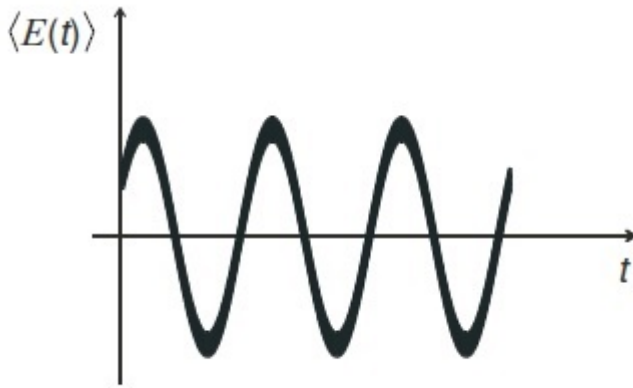
βρίσκεται ίδια με τη διακύμανση του κενού. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς οι σύγχρονες καταστάσεις είναι μετατοπισμένες καταστάσεις του κενού.

Τέλος, ο μέσος αριθμό φωτονίων σε μια σύγχρονη κατάσταση είναι $\bar{n} = \langle a | \hat{n} | a \rangle = |a|^2$. Το τετράγωνο του μέτρου της ιδιοτιμής του τελεστή \hat{a} είναι ο μέσος αριθμός φωτονίων. Ακόμα, όπως φαίνεται από τη σχέση (3), η πιθανότητα να μετρηθούν n φωτόνια είναι

$$P(n) = |\langle n | a \rangle|^2 = e^{-|a|^2} \frac{|a|^n}{n!} = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$$

η οποία είναι μια κατανομή Poisson. Επομένως, $\Delta n = \bar{n}^{1/2}$. Άρα $\frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$, το οποίο τείνει στο 0, καθώς αυξάνεται ο μέσος αριθμός φωτονίων.

Οι σύμφωνες καταστάσεις είναι κβαντικές καταστάσεις που είναι πιο κοντά στις κλασικές, καθώς η αναμενόμενη τιμή του πεδίου έχει τη μορφή της κλασικής έκφρασης, η διακύμανση στο ηλεκτρικό πεδίο είναι μόνο η διακύμανση του κενού και η σχετική διακύμανση για το μέσο αριθμό φωτονίων τείνει στο 0, καθώς αυξάνεται ο μέσος αριθμός τους. [8]



Σχήμα 2.1: Η αναμενόμενη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου για μια σύγχρονη κατάσταση ως συνάρτηση του χρόνου, για συγκεκριμένη θέση. Αναπαρίστανται και οι κβαντικές διακυμάνσεις, οι οποίες είναι ίδιες κάθε χρονική στιγμή

2.3 Squeezed Καταστάσεις

Οι σύμφωνες καταστάσεις είναι καταστάσεις ελάχιστης αβεβαιότητας, με το χαρακτηριστικό ότι $\Delta \hat{x} = \Delta \hat{p}$. Ένα γενικότερο σύνολο καταστάσεων ελάχιστης αβεβαιότητας είναι οι squeezed καταστάσεις, όπου μια από τις δύο μεταβλητές έχει μικρότερη διακύμανση από την άλλη, ώστε το γινόμενο τους να ελαχιστοποιεί τη σχέση αβεβαιότητας. Μπορούμε να παραμετροποιήσουμε τις αποκλίσεις των x και p με έναν πραγματικό αριθμό ζ [7]

$$(\Delta \hat{x})^2 = \frac{1}{2} e^{-2\zeta} \quad \text{και} \quad (\Delta \hat{p})^2 = \frac{1}{2} e^{+2\zeta} \quad (2.34)$$

από τις τιμές της βασικής κατάστασης. Ο αριθμός ζ ονομάζεται παράμετρος squeezing. Οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις βρίσκονται αν κάνουμε βάρθρωση (scale) στην κυματοσυνάρτηση για της βασικής κατάστασης $\psi_0(q)$

$$\phi(q) = e^{\zeta/2} \psi_0(e^\zeta q) \quad \text{και} \quad \tilde{\phi}(p) = e^{-\zeta/2} \tilde{\psi}_0(e^{-\zeta} p) \quad (2.35)$$

όπου οι παράγοντες $e^{\pm\zeta/2}$ προκύπτουν από την κανονικοποίηση των καινούριων κυματοσυναρτήσεων. Παραγοντοποιούμε την ϕ ως προς την παράμετρο squeezing ζ και προκύπτει

$$\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q}q + q\frac{\partial}{\partial q}\right)\phi(q) = \frac{1}{2}(i\hat{q}\hat{p} + i\hat{p}\hat{q})\phi(q) = \frac{1}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})\phi(q) \quad (2.36)$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε τη λύση αυτής της διαφορικής ως

$$\phi(q, \zeta) = e^{\zeta(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})/2}\phi_0(q) \quad (2.37)$$

όπου $\phi_0(q)$ η κατάσταση του κενού. Ή αλλιώς $|\phi\rangle = \hat{S}(\zeta)|0\rangle$ με

$$\hat{S}(\zeta) = e^{\zeta(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})/2} \quad (2.38)$$

ο τελεστής squeezing. Ο τελεστής αυτός είναι μοναδιακός και ισχύει

$$\hat{S}^\dagger(\zeta) = \hat{S}^{-1}(\zeta) = \hat{S}(-\zeta) \quad (2.39)$$

Επομένως, οι καταστάσεις ελάχιστης αβεβαιότητας είναι μετατοπισμένες squeezed καταστάσεις του κενού.

$$|a, \zeta\rangle = \hat{D}(a)\hat{S}(\zeta)|0\rangle \quad (2.40)$$

Λόγω του ορισμού του τελεστή squeezing (scaling της κυματοσυνάρτησης), η δράση του στα quadratures είναι [7]

$$\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{q}\hat{S}(\zeta) = \hat{q}e^{-\zeta} \quad \text{και} \quad \hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{p}\hat{S}(\zeta) = \hat{p}e^{+\zeta} \quad (2.41)$$

Αν αντικαταστήσουμε τα \hat{p} και \hat{q} με τα \hat{a} και \hat{a}^\dagger προκύπτει

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{a}\hat{S}(\zeta) &= \hat{a} \cosh |\zeta| - \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \sinh |\zeta| \\ \hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\zeta) &= \hat{a}^\dagger \cosh |\zeta| - \hat{a} e^{-i\phi} \sinh |\zeta| \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ακόμα, οι τελεστές \hat{S} και \hat{D} δεν μετατίθενται, αλλά ισχύει [9]

$$|a, \zeta\rangle = \hat{S}(\zeta)\hat{D}(\beta)|0\rangle \quad (2.43)$$

με $\hat{D}(\beta) = \hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{D}(a)\hat{S}(\zeta)$, απ' όπου προκύπτει $\hat{D}(\beta) = \hat{D}(a \cosh |\zeta| + a^* e^{i\phi} \sinh |\zeta|)$
Η squeezed κατάσταση του κενού είναι

$$|\zeta\rangle = \hat{S}(\zeta)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh|\zeta|}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{in\phi}}{2^n n!} \tanh^n |\zeta| \sqrt{(2n!)} |2n\rangle \quad (2.44)$$

Η squeezed κατάσταση του κενού είναι υπέρθεση καταστάσεων με άρτιο αριθμό φωτονίων. Η πιο γενική squeezed κατάσταση είναι [9]

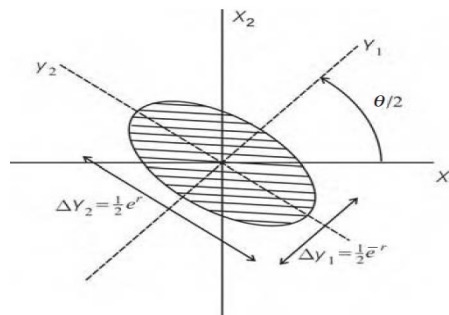
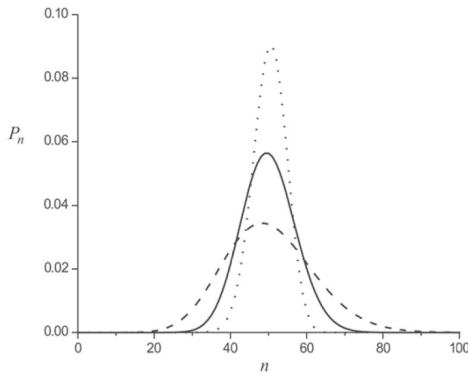
$$|a, \zeta\rangle = \hat{D}(a)\hat{S}(\zeta)|0\rangle = \frac{e^{\frac{1}{2}[|a|^2 - a^*e^{i\theta}\tanh|\zeta|]}}{\sqrt{\cosh|\zeta|}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{e^{i\theta}\tanh|\zeta|}{2}\right]^{n/2}}{\sqrt{n!}} H_n \left[\gamma (e^{i\theta}\sinh(2|\zeta|))^{1/2} \right] |n\rangle \quad (2.45)$$

όπου $H_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα Hermite. Αν $|a|^2 \gg \sinh^2|\zeta|$, τότε η κατάσταση είναι πιο κοντά σε σύμφωνη κατάσταση. Απο την τελευταία σχέση φαίνεται ότι η πιθανότητα να βρεθούν n φωτόνια στο πεδίο ($P_n = |\langle n|a,\zeta\rangle|^2$) εξαρτάται από τη φάση του a .

Μπορεί κανείς να υπολογίσει τις αναμενόμενες τιμές για τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, καθώς και για τον αριθμό φωτονίων σε μια squeezed κατάσταση:

$$\langle a, \zeta | \hat{a} | a, \zeta \rangle = a \quad \text{και} \quad \langle a, \zeta | \hat{n} | a, \zeta \rangle = \sinh^2|\zeta| + |a|^2$$

Τέλος, η αναμενόμενη τιμή για το $\hat{q}^{(\Theta)}$ είναι με βάση τα προηγούμενα $\langle a, \zeta | \hat{q}^{(\Theta)} | a, \zeta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (ae^{-i\Theta} + a^*e^{i\Theta})$, ίδια με την αναμενόμενη τιμή για μία σύμφωνη κατάσταση. Ο τελεστής squeezing δεν επηρεάζει την αναμενόμενη τιμή των quadratures, ενώ επηρεάζει τις αποκλίσεις τους.



(α') Η κατανομή πιθανότητας του αριθμού των φωτονίων: για μια σύμφωνη κατάσταση με $|a|^2 = 50$ (συμπαγής γραμμή), για squeezed καταστάσεις με $|\zeta| = 0.5$, $|a|^2 \gg \sinh^2|\zeta|$ για διαφορά φάσης του a και ζ 0 (γραμμή με τελίστες) και $\pi/2$ (διακεκομμένη γραμμή) (β') Μια squeezed κατάσταση στο φασικό χώρο. Το squeezing έγινε στην διεύθυνση $\theta/2$.

2.4 Squeezed Καταστάσεις δύο τρόπων ταλάντωσης

Σε αναλογία με τον single-mode squeezing τελεστή, ορίζεται ο τελεστής squeezing δύο τρόπων ταλάντωσης:

$$\hat{S}(\xi) = e^{\xi^* \hat{a} \hat{b} - \xi \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger} \quad (2.46)$$

με $\xi = |\xi|e^{i\theta}$ και $[\hat{a}, \hat{b}^\dagger] = 0$. Η δράση του τελεστή στην two-mode κατάσταση του κενού $|00\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B$ είναι:

$$|00, \xi\rangle = \hat{S}(\xi)|00\rangle = \frac{1}{\cosh|\xi|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{|\xi|^n} \tanh^n |\xi| |n, n\rangle \quad (2.47)$$

Ο two-mode squeezing τελεστής παράγει ζεύγη φωτονίων. Όπως φαίνεται, η two-mode squeezed κατάσταση του κενού δεν μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο δύο squeezed καταστάσεων του κενού, αλλά είναι μια συζευγμένη κατάσταση. Οι δύο τελεστές μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) &= \hat{a} \cosh|\xi| - e^{i\theta} \hat{b}^\dagger \sinh|\xi| \\ \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{b} \hat{S}(\xi) &= \hat{b} \cosh|\xi| - e^{i\theta} \hat{a}^\dagger \sinh|\xi| \end{aligned} \quad (2.48)$$

2.5 Θερμικές Καταστάσεις

Όλες οι καταστάσεις που περιγράφηκαν μέχρι τώρα είναι καθαρές καταστάσεις. Το φυσικό φως είναι κατά κύριο λόγο θερμική ακτινοβολία. Η θερμική ακτινοβολία είναι μια κατάσταση του ΗΜΠ σε θερμοδυναμική ισορροπία. Σε συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας (μέγιστη εντροπία) οι καταστάσεις του ΗΜΠ είναι στάσιμες (Stationary states).[7] Η πιο γενική στάσιμη κατάσταση είναι ένα στατιστικό μείγμα ιδοκαταστάσεων της ενέργειας, ένα μείγμα καταστάσεων Fock:

$$\hat{\rho}_{th} = \sum_n P_n |n\rangle \langle n| \quad (2.49)$$

με P_n η πιθανότητα το σύστημα να βρεθεί στην κατάσταση $|n\rangle$. Από τις απαιτήσεις το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση μέγιστης εντροπίας και οι πιθανότητες να αθροίζονται στη μονάδα, μπορούν να βρεθούν οι πιθανότητες P_n :

$$P_n = \frac{1}{Z} e^{-E_n/k_B T} \quad (2.50)$$

με Z η συνάρτηση επιμερισμού $Z = \sum_n e^{-E_n/k_B T}$ και $E_n = \hbar\omega (n + \frac{1}{2})$. Επομένως, η $\hat{\rho}_{th}$ μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{th} &= \frac{1}{Z} \sum_n e^{-E_n/k_B T} |n\rangle\langle n| \\ &= \frac{e^{-\hat{H}/k_B T}}{\text{Tr} [e^{-\hat{H}/k_B T}]}\end{aligned}\quad (2.51)$$

όπου $\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$, η χαμιλτονιανή του ΗΜΠ. Η συνάρτηση επιμερισμού γράφεται:

$$Z = e^{-\hbar\omega/2k_B T} \sum_n e^{-\hbar\omega n/k_B T} \quad (2.52)$$

Το $e^{-\hbar\omega/k_B T}$ είναι μικρότερο της μονάδας, επομένως το άθροισμα είναι γεωμετρική σειρά και προκύπτει .

$$Z = \frac{e^{-\hbar\omega/2k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}} \quad (2.53)$$

Ο μέσος αριθμός φωτονίων υπολογίζεται

$$\begin{aligned}\langle \hat{n} \rangle &= \text{Tr} (\hat{n} \hat{\rho}_{th}) = \frac{e^{-\hbar\omega/k_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}} \\ &= \frac{1}{e^{-\hbar\omega/k_B T} - 1}\end{aligned}\quad (2.54)$$

από τη σχέση (2.54) προκύπτει ότι

$$e^{-\hbar\omega/k_B T} = \frac{\langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle + 1}$$

και επομένως η $\hat{\rho}_{th}$ γράφεται

$$\hat{\rho}_{th} = \frac{1}{\langle \hat{n} \rangle + 1} \sum_n \left(\frac{\langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle + 1} \right)^n |n\rangle\langle n| \quad (2.55)$$

Αν τεθεί $|\tau|^2 = \langle \hat{n} \rangle / (\langle \hat{n} \rangle + 1)$, τότε η παραπάνω έκφραση λαμβάνει τη μορφή

$$\hat{\rho}_{th} = (1 + |\tau|^2)^{-1} \sum_n |\tau|^{2n} |n\rangle\langle n| \quad (2.56)$$

Ο μέσος αριθμός φωτονίων είναι $\hbar\omega \langle \hat{n} \rangle$. Αν η μέση ενέργεια των φωτονίων πολλαπλασιαστεί με την πυκνότητα των τρόπων ταλάντωσης προς $d\omega$ και μονάδα όγκου, $\rho(\omega) = \omega^2/\pi^2 c^3$, προκύπτει η μέση πυκνότητα ενέργειας συναρτήσει της συχνότητας ω , η οποία είναι ίση με

$$\bar{U}(\omega) = \hbar\omega \bar{n} \rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{-\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

το οποίο είναι ο νόμος του Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος.

2.6 Κβαντικοί Οπτικοί Μετασχηματισμοί

Οι κβαντικοί οπτικοί μετασχηματισμοί είναι μοναδιακοί μετασχηματισμοί. Χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τους παθητικούς και τους ενεργητικούς. Οι πρώτοι διατηρούν τον αριθμό των φωτονίων, σε αντίθεση με τους ενεργητικούς. Ως μοναδιακοί μετασχηματισμοί υπάρχει ερμιτιανή Χαμιλτονιανή που τους παράγει. [4]

Στους παθητικούς μετασχηματισμούς, όπου διατηρείται ο αριθμός των φωτονίων, οι τελεστές καταστροφής (και αντίστοιχα δημιουργίας) μετασχηματίζονται μόνο γραμμικά. Οι παθητικοί μετασχηματισμοί υλοποιούνται από γραμμικά οπτικά μέσα (συσκευές), όπως καθρέφτες, phase shifters και beam splitters. Ορισμένες διαδικασίες, όμως, απαιτούν μη γραμμικούς μετασχηματισμούς όπως το squeezing, αφού ο τελεστής είναι τετραγωνικός ως προς τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, αλλά τους αναμειγνύει γραμμικά. Ο πιο γενικός γραμμικός μετασχηματισμός των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής του κάθε τρόπου ταλάντωσης, ο οποίος εμπεριέχει τόσο παθητικά γραμμικά στοιχεία όσο και μη γραμμικά είναι ο *γραμμικός μοναδιακός μετασχηματισμός Bogoliubov*, ο οποίος, για ένα μετασχηματισμό N τρόπων ταλάντωσης, έχει τη γενική μορφή

$$\begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{b}^\dagger \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{bmatrix} + \Gamma \quad (2.57)$$

όπου $\hat{b} = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_N)^T$, (ομοίως για το \hat{a}), U είναι ένας $N \times N$ πίνακας και Γ ένας $N \times 1$ πίνακας. Σε μορφή πίνακα ο U θα είναι της μορφής:

$$U = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

ή σε μορφή συνιστωσών $\hat{b}_i = \sum_j A_{ij} \hat{a}_j + B_{ij} \hat{a}_j^\dagger + \gamma_i$.

Τόσο οι αρχικοί, όσο και οι μετασχηματισμένοι τελεστές πρέπει να υπακούν στις σχέσεις μετάθεσης (1.17). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τους πίνακες A και B :

$$AB^T = (AB^T)^T \text{ και}$$

$$AA^\dagger = BB^\dagger + \mathbb{I} \quad (2.59)$$

Στην περίπτωση των παθητικών μετασχηματισμών, όπου οι τελεστές καταστροφής (δημιουργίας) μετασχηματίζονται σε τελεστές καταστροφής (δημιουργίας) χωρίς να εμπλέκονται οι ερμιτιανοί συζυγείς τους, προκύπτει ότι

$$\hat{b}_i = \sum_j A_{ij} \hat{a}_j \quad (2.60)$$

με $AA^\dagger = \mathbb{I}$. Η μοναδιακότητα του μετασχηματισμού ανακλά το γεγονός ότι ο αριθμός των φωτονίων διατηρείται. Οι μετασχηματισμοί που δρουν σε δύο τρόπους ταλάντωσης μπορούν να γραφούν σε όρους ιδανικών beam splitters και phase shifters.

2.6.1 Μετατόπιση φάσης

Ο τελεστής ο οποίος προσθέτει μια φάση στον τελεστή καταστροφής είναι ο

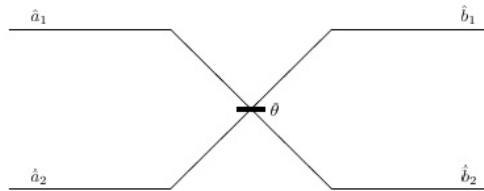
$$\hat{U}_\phi = e^{-i\phi\hat{n}} \quad (2.61)$$

και η δράση του είναι η εξής:

$$\hat{b} = \hat{U}_\phi \hat{a} \hat{U}_\phi^\dagger = \hat{a} e^{-i\phi} \quad (2.62)$$

2.6.2 Beam splitter

Ο ιδανικός beam splitter είναι ένα παθητικό οπτικό στοιχείο, στο οποίο δύο προσπίπτουσες δέσμες συμβάλλουν και δημιουργούν δυο εξερχόμενες δέσμες. Η διαδικασία είναι αντιστρεπτή, εφόσον δεν αλλάζουν οι φάσεις των εξερχόμενων δεσμών.



Σχήμα 2.3: Beam Splitter

Μπορεί κανείς να πει ότι ο beam splitter απορροφά το εισερχόμενο φωτόνιο του 1 τρόπου ταλάντωσης και πόλωσης λ και δημιουργεί ένα καινούργιο φωτόνιο στην έξοδο με k τρόπο ταλάντωσης και πόλωσης λ . Αυτό υποδεικνύει ότι η Χαμιλτονιανή που περιγράφει αυτή τη διαδικασία είναι [4]:

$$\hat{H}_{k,l}(\zeta, \phi) = \hbar\zeta e^{i\phi} \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{l\lambda} + \hbar\zeta e^{-i\phi} \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}_{l\lambda}^\dagger \quad (2.63)$$

Οι μετασχηματισμοί των $\hat{a}_{l\lambda}$ και $\hat{a}_{k\lambda}$ υπολογίζονται:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{k\lambda} &= e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{k,l}} \hat{a}_{k\lambda} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{k,l}} = \hat{a}_{k\lambda} \cos\zeta - ie^{i\phi} \hat{a}_{l\lambda} \sin\zeta \\ \hat{b}_{l\lambda} &= e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{k,l}} \hat{a}_{l\lambda} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{k,l}} = -ie^{-i\phi} \hat{a}_{k\lambda} \sin\zeta + \hat{a}_{l\lambda} \cos\zeta \end{aligned} \quad (2.64)$$

Και γραμμένες σε μορφή πίνακα

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_{k\lambda} \\ \hat{b}_{l\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\zeta & -ie^{i\phi}\sin\zeta \\ -ie^{-i\phi}\sin\zeta & \cos\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{k\lambda} \\ \hat{a}_{l\lambda} \end{pmatrix}$$

το οποίο είναι ο μετασχηματισμός της σχέσης (4). Επειδή $AA^\dagger = \mathbb{I}$, ο συνολικός αριθμός των φωτονίων $\hat{a}_{k\lambda}^\dagger \hat{a}_{k\lambda} + \hat{a}_{l\lambda}^\dagger \hat{a}_{l\lambda}$ διατηρείται. Αν ο ζ είναι πραγματικός αριθμός τα εκθετικά δεν εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις. Στον παραπάνω beam splitter οι εισερχόμενες δέσμες είχαν ίδια πόλωση και διαφορετικό κυματάνυσμα. Είναι δυνατόν οι εισερχόμενες δέσμες να έχουν διαφορετική πόλωση και ίδιο κυματάνυσμα.

Κάθε μοναδιακός (παθητικός) μετασχηματισμός που δρα σε δύο τρόπους ταλάντωσης μπορεί να εκφραστεί από τον πίνακα:

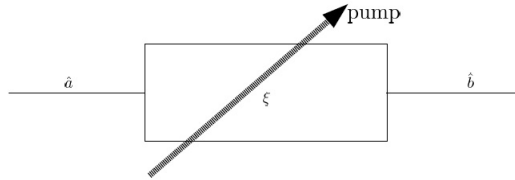
$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2)e^{i(\Phi+\Psi)/2} & e^{i(\Phi-\Psi)/2}\sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2)e^{i(-\Phi+\Psi)/2} & \cos(\Theta/2)e^{i(-\Phi-\Psi)/2} \end{pmatrix}$$

με Λ , Θ , Ψ και Φ πραγματικούς αριθμούς. Ο παραπάνω πίνακας μπορεί να γραφτεί:

$$U = e^{i\Lambda/2} \begin{pmatrix} e^{i\Phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & \sin(\Theta/2) \\ -\sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi/2} \end{pmatrix}$$

Επομένως, μοναδιακός μετασχηματισμός που δρα σε δύο τρόπους ταλάντωσης μπορεί να περιγραφεί σαν μια ακολουθία διαδικασιών από phase shifters και beam splitters. Αυτό μπορεί να γενικευτεί και για παραπάνω από δυο τρόπους ταλάντωσης: Κάθε μοναδιακός μετασχηματισμός που αναμειγνύει N τρόπους ταλάντωσης μπορεί να εκφραστεί σαν μια ακολουθία διαδικασιών από phase shifters και beam splitters. [7]

2.6.3 Squeezer



Σχήμα 2.4: Beam Splitter

Ένας βασικός μετασχηματισμός είναι ο one-mode squeezer, ο οποίος δεν διατηρεί τον αριθμό των φωτονίων. Το squeezing των φωτονίων είναι χρήσιμο, γιατί

είναι ένας τρόπος να παραχθεί κβαντική διεμπλοκή (entanglement) με συνεχής μεταβλητές. Για να παραχθεί squeezed φως πρέπει η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης να είναι τετραγωνική ως προς τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής του πεδίου, χρειάζεται επιπλέον (pump) ενέργεια και χρησιμοποιείται μη γραμμικό διηλεκτρικό. [8] Ο μετασχηματισμός αυτός παράγεται από τη Χαμιλτονιανή[4]

$$\hat{H}_k(\xi, \phi) = \hbar\xi e^{i\phi} \hat{a}_{k,\lambda}^2 + \hbar\xi e^{-i\phi} \hat{a}_{k,\lambda}^{\dagger 2} \quad (2.65)$$

όπου $\xi = |\xi|e^{i\phi}$, με $|\xi|$ η παράμετρος squeezing και ϕ η γωνία της διεύθυνσης κατά την οποία γίνεται το squeezing. Ο μετασχηματισμός γράφεται σε μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_{k\lambda} \\ \hat{b}_{k\lambda}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(2\xi) & -ie^{-i\phi} \sinh(2\xi) \\ ie^{i\phi} \sinh(2\xi) & \cosh(2\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{k\lambda} \\ \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \end{pmatrix}$$

Two Mode Squeezer Ομοίως μπορεί να οριστεί ο two-mode squeezing μετασχηματισμός, ο οποίος περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή

$$\hat{H}_{k,l}(\xi, \phi) = \hbar\xi e^{i\phi} \hat{a}_{k,\lambda} \hat{a}_{l,\lambda'} + \hbar\xi e^{-i\phi} \hat{a}_{k,\lambda}^\dagger \hat{a}_{l,\lambda'}^\dagger \quad (2.66)$$

Ο πίνακας μετασχηματισμού υπολογίζεται:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_{k\lambda} \\ \hat{b}_{k\lambda}^\dagger \\ \hat{b}_{l\lambda'} \\ \hat{b}_{l\lambda'}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\xi) & 0 & 0 & -ie^{i\phi} \sinh(\xi) \\ 0 & \cosh(\xi) & ie^{-i\phi} \sinh(\xi) & 0 \\ 0 & ie^{i\phi} \sinh(\xi) & \cosh(\xi) & 0 \\ -ie^{-i\phi} \sinh(\xi) & 0 & 0 & \cosh(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{k\lambda} \\ \hat{a}_{k\lambda}^\dagger \\ \hat{a}_{l\lambda'} \\ \hat{a}_{l\lambda'}^\dagger \end{pmatrix}$$

2.6.4 Bloch-Messiah Reduction

Οι πιο γενικοί μετασχηματισμοί, όπως περιγράφηκε παραπάνω, είναι οι μετασχηματισμοί Bogoliubov και είναι τις μορφής

$$\hat{b}_i = \sum_j A_{ij} \hat{a}_j + B_{ij} \hat{a}_j^\dagger \quad (2.67)$$

και, λόγω των σχέσεων μετάθεσης, υπακούν στις σχέσεις (2.59)

$$AB^T = (AB^T)^T \quad \text{και} \quad AA^\dagger = BB^\dagger + \mathbb{I} \quad (2.68)$$

Η δεύτερη εξίσωση υποδεικνύει ότι τα AA^\dagger και BB^\dagger διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα από τον ίδιο πίνακα U . Τότε οι πίνακες A και B διαγωνοποιούνται, σύμφωνα με την ανάλυση σε ιδιάζουσες τιμές (singular value decomposition theorem):

$$A = UA_D V^\dagger \quad \text{και} \quad B = UB_D W^\dagger \quad (2.69)$$

όπου A_D και B_D διαγώνιοι πίνακες. Για να βρεθεί η σχέση μεταξύ των W και V , θα εξεταστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός:

$$\hat{a}_i = \sum_j A_{ij}^* \hat{b}_j - B_{ij}^* \hat{b}_j^\dagger \quad (2.70)$$

και, λόγω των σχέσεων μετάθεσης

$$A^\dagger B^T = (A^\dagger B^T)^T \quad \text{και} \quad A^\dagger A = (B^\dagger B)^T + \mathbb{I} \quad (2.71)$$

Από τις τελευταίες σχέσεις συνεπάγεται ότι $V^* = W$, επομένως

$$A = U A_D V^\dagger \quad \text{και} \quad B = U B_D V^T \quad (2.72)$$

Αρα για μετασχηματισμό N τρόπων ταλάντωσης $\hat{b} = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_N)^T$, η σχέση (2.57) γράφεται

$$\begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{b}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_D & B_D \\ B_D^* & A_D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^\dagger & 0 \\ 0 & V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Ο πρώτος και ο τελευταίος διαγώνιος πίνακας της σχέσης (2.73) δεν αναμιγνύουν τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, αναπαριστούν, επομένως, παθητικά οπτικά στοιχεία, όπως beam splitters και phase shifters. Ο μεσαίος πίνακας αναμιγνύει τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, αντιστοιχεί, επομένως, σε ενεργητικά οπτικά στοιχεία, και από τη στιγμή που οι A_D και B_D είναι διαγώνιοι πίνακες, αντιστοιχεί σε single mode squeezers. Κάθε κβαντικός οπτικός μετασχηματισμός μπορεί να αναλυθεί σε μια ακολουθία διαδικασιών από παθητικούς μετασχηματισμούς, single-mode squeezers και ξανά παθητικούς μετασχηματισμούς. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται Bloch-Messiah reduction. [10]

Ο γεννήτορας του μετασχηματισμού Bogoliubov της σχέσης (2.67) γράφεται

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \sum_i \hat{b}_i \hat{b}_i^\dagger \quad (2.74)$$

Αντικαθιστώντας τα \hat{b}_i από τη σχέση (2.67) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hbar}{2} \sum_{i,j,k} \left[\left(A_{ij} \hat{a}_j + B_{ij} \hat{a}_j^\dagger \right) \left(B_{ik}^* \hat{a}_k + A_{ik}^* \hat{a}_k^\dagger \right) \right] \\ &= \frac{\hbar}{2} \sum_{j,k} \left[\hat{a}_j F_{jk} \hat{a}_k + 2 \hat{a}_j^\dagger G_{jk} \hat{a}_k + \hat{a}_j^\dagger F_{jk}^* \hat{a}_k^\dagger \right] \end{aligned} \quad (2.75)$$

όπου $F_{jk} = \sum_i A_{ij} B_{ik}^*$ και $G_{jk} = \sum_i A_{ij} A_{ik}^*$. Η παραπάνω Χαμιλτονιανή είναι η πιο γενική τετραγωνική Χαμιλτονιανή. Περιγράφει τη δυναμική του συστήματος όταν δρουν στο σύστημα μετασχηματισμοί Bogoliubov. [4]

Κεφάλαιο 3

Εντροπία της πληροφορίας

Η κβαντική θεωρία της πληροφορίας περιγράφει τη μεταφορά και επεξεργασία της πληροφορίας χρησιμοποιώντας κβαντικά συστήματα ως φορείς της πληροφορίας. Τα βασικά ζητήματα με τα οποία ασχολείται είναι:

- α) Η μεταφορά κλασικής πληροφορίας με κβαντικούς φορείς πληροφορίας.
- β) Η μεταφορά κβαντικής πληροφορίας με κβαντικούς φορείς πληροφορίας.
- γ) Η ποσοτικοποίηση του βαθμού κβαντικής διεμπλοκής των συστημάτων.

Κύριο μέγεθος είναι η κβαντική εντροπία von Neumann. Πριν παρουσιαστεί αυτή, θεωρείται χρήσιμο να αναφερθεί συνοπτικά η κλασική εντροπία του Shannon και το κλασικό πρόβλημα της μεταφοράς της πληροφορίας.

Ένα βασικό πρόβλημα της θεωρίας της πληροφορίας είναι πόσο μπορεί να συμπιεστεί ένα μήνυμα, δηλαδή τι μπορεί να απαλειφθεί από ένα μήνυμα και να υπάρχει ακόμα αξιόπιστη επικοινωνία. Αυτό συνδέεται με την αναζήτηση ενός μέτρου του πληροφοριακού περιεχομένου σε ένα μήνυμα, ή αντιστρόφως της αβεβαιότητας για το αποστελλόμενο μήνυμα, εάν είναι γνωστή η πηγή του μηνύματος. Η ιδέα του Claude Shannon (1948) ήταν να χρησιμοποιήσει την εντροπία ως κατάλληλο μέτρο της αβεβαιότητας.

3.1 Εντροπία Shannon

Η εντροπία του Shannon για μια τυχαία μεταβλητή εξαρτάται από την κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής και είναι ένα μέτρο του πόσο αβέβαιος είναι ο παραλήπτης ενός μηνύματος για την πραγματική τιμή της μεταβλητής. [3]

Το πρόβλημα είναι το εξής: Υπάρχει μια πηγή σήματος η οποία παράγει ένα

γραπτό μήνυμα το οποίο αποτελείται από n γράμματα μιας αλφαβήτου

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

Ο αριθμός των γραμμάτων της αλφαβήτου είναι πεπερασμένος και κάθε γράμμα x_i έχει πιθανότητα να εμφανιστεί p_i και επιπλέον $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Η πηγή θεωρείται ότι είναι στοχαστική και δεν έχει μνήμη, δηλαδή η πιθανότητα να εμφανιστεί οποιοδήποτε γράμμα είναι ανεξάρτητη από το προηγούμενο. Μια τέτοια πηγή χαρακτηρίζεται μόνο από τη συλλογή $\{x_i, p_i\}$.

Το μήνυμα αποστέλλεται από έναν πομπό A σε έναν παραλήπτη B , χρησιμοποιώντας ένα φυσικό σύστημα να μεταφέρει την πληροφορία. Ο παραλήπτης δεν ξέρει το μήνυμα που θα λάβει, ξέρει, όμως, τη συλλογή $\{x_i, p_i\}, i = 1, 2, \dots, N$ που χρησιμοποιεί η πηγή. Για ένα μήνυμα n γραμμάτων υπάρχουν N^n όμοιες ακολουθίες. Αν το n είναι μεγάλος αριθμός, τότε το γράμμα x_i εμφανίζεται στο μήνυμα με συχνότητα $n_i = np_i$. Υπάρχουν $n!$ τρόποι να τοποθετηθούν οι n χαρακτήρες και για κάθε γράμμα x_i υπάρχουν $n_i!$ μεταθέσεις. Επομένως, υπάρχουν

$$Z_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_N!} \quad (3.1)$$

ακολουθίες με $\sum_{i=1}^N n_i = n$. Το n θεωρείται πολύ μεγάλο ($n \rightarrow \infty, n_i \rightarrow \infty$). Στη συνέχεια, επειδή $p_i = \frac{n_i}{n}$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling προκύπτει η σχέση:

$$\log Z_n = -n \sum_{i=1}^N p_i \log p_i \quad (3.2)$$

Αν διαιρεθεί ο αριθμός $\log Z_n$ των πιθανών μηνυμάτων με n , προκύπτει η εντροπία του Shannon της κατανομής:

$$H(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i \geq 0 \quad (3.3)$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι η εντροπία $H(X)$ είναι ένα μέτρο της μέσης a priori αβεβαιότητας για ένα χαρακτήρα που έχει ο παραλήπτης. Η ποσότητα αυτή είναι καλό μέτρο της αβεβαιότητας, καθώς είναι μη αρνητική ποσότητα, η τιμή αυτής της ποσότητας είναι 0 όταν η πιθανότητα ενός γράμματος είναι μονάδα και γίνεται μεγαλύτερη όσο μικρότερη είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί ένας χαρακτήρας. Αντίστροφα, η ποσότητα αυτή είναι και μέτρο της ποσότητας της πληροφορία που περιέχεται κατα μέσο όρο σε κάθε χαρακτήρα x_i της συλλογής. Όταν ο λογάριθμος υπολογίζεται με βάση το 2, η τιμή της εντροπίας $H(X)$ δίνει την ποσότητα πληροφορίας σε μονάδες bit. Προσδιορίζει, δηλαδή, τον ελάχιστο αριθμό κλασικών φορέων της πληροφορίας (που μπορούν να πάρουν μόνο

δύο τιμές) που χρειάζονται για να μεταδοθεί η πληροφορία που εμπεριέχεται στο μήνυμα.

Η εντροπία του Shannon έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Είναι αμετάβλητη κάτω από μεταθέσεις των στοιχείων.
2. Είναι μη αρνητική.
3. Η μέγιστη τιμή της λαμβάνεται εάν η κατανομή είναι ομοιόμορφη, που συνεπάγεται ότι $H(X) \leq \log N$.

3.1.1 Εντροπία δύο πηγών σήματος

Στην κβαντική μηχανική, ξεχωριστές μετρήσεις σε υποσυστήματα σύνθετων συστημάτων εμφανίζουν συσχετίσεις. Μέσω της εντροπίας μπορούν να οριστούν ποσότητες, οι οποίες χρησιμοποιούνται ως μέτρα της συσχέτισης των συσχετίσεων μεταξύ των μετρήσεων σε δύο υποσυστήματα. Αρχικά, οι ποσότητες αυτές θα οριστούν για την κλασική περίπτωση και θα εξεταστούν οι ιδιότητες τους. Για δύο πηγές σήματος X με $\{x_i, p_i\}, i = 1, 2, \dots, N$ και Y με $\{y_j, p_j\}, j = 1, 2, \dots, N$ ορίζονται οι εξής ποσότητες: Αυτές είναι χρήσιμες ποσότητες για τη μελέτη διμερών συστημάτων και γενικεύονται και στη κβαντομηχανική περίπτωση.

Joint entropy Η ποσότητα αυτή ορίζεται ως

$$H(X, Y) = - \sum_{x,y} p(x \cap y) \log p(x \cap y) \quad (3.4)$$

Η joint entropy περιγράφει τη μέση αβεβαιότητα της εμφάνισης ενός ζεύγους γνωστών συλλογών $\{(x, y), p(x \cap y)\}, i = 1, 2, \dots, N$.

Εντροπία υπό συνθήκη (Conditional entropy) Η εντροπία υπό συνθήκη ορίζεται ως εξής:

$$H(X|Y) = - \sum_{x,y} p(x \cap y) \log p(x|y) \quad (3.5)$$

όπου $p(x|y) = \frac{p(x \cap y)}{p(y)}$. Αυτή η ποσότητα περιγράφει ποια είναι η αβεβαιότητα για την τιμή του x , όταν είναι ήδη γνωστή η τιμή του y . Καθώς ισχύει η σχέση

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$$

μπορεί ακόμα να ερμηνευτεί ως τον αριθμό των επιπλέον bits που χρειάζονται, εάν είναι γνωστή η τιμή της μεταβλητής y .

Αμοιβαία πληροφορία (Mutual information) Η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ δύο μεταβλητών X και Y ορίζεται ως η ποσότητα για την οποία η εντροπία της X μειώνεται όταν είναι γνωστή η τιμή της Y :

$$I(X : Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (3.6)$$

Η αμοιβαία πληροφορία μπορεί να ερμηνευτεί ως η μέση πληροφορία που αποκτάται για την τιμή του X , όταν είναι γνωστή η τιμή του Y . Η αμοιβαία πληροφορία είναι και αυτή μη αρνητική ποσότητα.

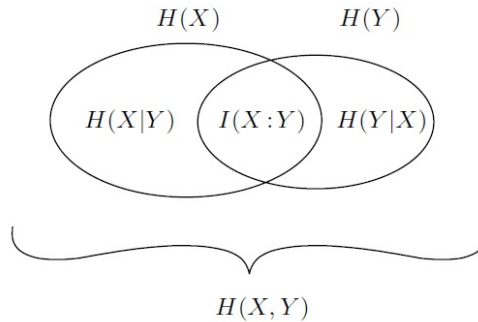
Επίσης, ισχύει η σχέση

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (3.7)$$

Επειδή η $I(X : Y)$ είναι μη αρνητική ποσότητα, συνεπάγεται ότι

$$H(X) + H(Y) \geq H(X, Y) \quad (3.8)$$

Η παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται subadditivity της εντροπίας.



Σχήμα 3.1: Διαγράμματα Venn για τα διαφορετικά είδη εντροπίας

3.2 Κβαντική Εντροπία von Neumann

Το πρόβλημα τώρα είναι το εξής: Υπάρχει μια κλασική πηγή, η οποία παράγει μια ακολουθία χαρακτήρων. Η πηγή είναι στοχαστική, χωρίς μνήμη και περιγράφεται από τη συλλογή $\{x_i, p_i\}, i = 1, 2, \dots, N$. Το μήνυμα θα διαδοθεί μέσω ενός κβαντικού καναλιού. Σε αυτή τη περίπτωση, ταυτόσημα κβαντικά αντικείμενα (για παράδειγμα σωματίδια ίδιου σπιν, όπως ηλεκτρόνια) είναι οι φορείς της πληροφορίας. Για κάθε χαρακτήρα x_i μια συσκευή παράγει ένα κβαντικό σύστημα

σε μια κανονικοποιημένη κατάσταση $|\psi_i\rangle$ (Αυτή η διαδικασία ονομάζεται κωδικοποίηση του μηνύματος). Η αντιστοίχιση μεταξύ του χαρακτήρα x_i και $|\psi_i\rangle$ είναι μονοσήμαντη, έτσι η κλασική πληροφορία κωδικοποιείται σε καθαρές κβαντικές καταστάσεις. Αυτή η διαδικασία παράγει μια στατιστική συλλογή καταστάσεων $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$, η οποία θεωρείται ότι παράγεται από μια "κβαντική πηγή σήματος". Η συλλογή αυτή θα έχει τελεστή πυκνότητας

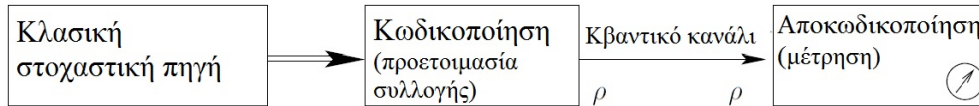
$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (3.9)$$

σε ένα χώρο Hilbert \mathcal{H}_d διάστασης d . Τα ανύσματα $|\psi_i\rangle$ δεν είναι ανάγκη να είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Επίσης, η διάσταση d δεν είναι ανάγκη να είναι ίση με N .

Αφού η πληροφορία διαδοθεί μέσω του κβαντικού καναλιού, πρέπει να διαβαστεί η πληροφορία μέσω ορθογώνιων μετρήσεων (αποκωδικοποίηση). Γι' αυτό το λόγο μετράται ένα συγκεκριμένο μέγεθος D . Τα ορθοκανονικά ιδιοανύσματα του μεγέθους D

$$\hat{D}|d_m\rangle = d_m|d_m\rangle \quad (3.10)$$

αποτελούν βάση του \mathcal{H}_d . Οι ιδιοτιμές d_m δεν θεωρούνται εκφυλισμένες. Η πιθανότητα να μετρηθεί η τιμή d_m , ενώ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $\hat{\rho}$ συμβολίζεται $p(d_m)$.



Ο τελεστής πυκνότητας μπορεί να γραφεί συναρτήσει των ιδιοκαταστάσεων και των ιδιοτιμών του

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^d \lambda_i |i\rangle \langle i| \quad (3.11)$$

Θα θεωρηθεί μια ειδική περίπτωση, όπου η κλασική πληροφορία θα διαδοθεί χωρίς απώλειες. Το κβαντικό σύστημα επιλέγεται έτσι ώστε η διάσταση του \mathcal{H}_Γ να είναι ίση με N . Στην κβαντική πηγή σήματος επιλέγεται κατάλληλη διαδικασία, ώστε ο χαρακτήρας x_i να αντιστοιχίζεται σε μια ιδιοκατάσταση $|d_i\rangle$ του παρατηρούμενου μεγέθους. Τότε

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N \lambda_i |i\rangle \langle i| = \sum_{i=1}^N p_i |d_i\rangle \langle d_i| \quad (3.12)$$

Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει $p_i = d_i$ και $|i\rangle = |d_i\rangle$. Η κβαντική πηγή σήματος γίνεται μια ημι-κλασική πηγή. Στη μέτρηση, κάθε πιθανό αποτέλεσμα του παρατηρούμενου D θα αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε ένα χαρακτήρα x_i του αρχικού μηνύματος και $p(d_i) = p_i = \lambda_i$. Σ' αυτή την περίπτωση, όπου το αρχικό σήμα αποτελείται από ορθογώνιες και καθαρές καταστάσεις η κβαντική εντροπία von Neumann είναι η εντροπία Shannon των ιδιοτιμών της κατάστασης του συστήματος, $H(\rho) = S(\hat{\rho})$

$$S(\hat{\rho}) = - \sum_{i=1}^N \lambda_i \log \lambda_i = -tr [\hat{\rho} \log \hat{\rho}] \quad (3.13)$$

Η μονάδα της μεταφοράς πληροφορίας είναι το κβαντικό bit ή qubit. Η εντροπία von Neumann ποσοτικοποιεί το κβαντικό πληροφοριακό περιεχόμενο ανά χαρακτήρα του σήματος (όπως η εντροπία Shannon ποσοτικοποιεί το πληροφοριακό περιεχόμενο μιας κλασικής πηγής), δηλαδή τον ελάχιστο αριθμό qubit που χρειάζονται για να μεταφερθεί αξιόπιστα η πληροφορία, αλλά και το κλασικό πληροφοριακό περιεχόμενό τους, δηλαδή τον μέγιστο αριθμό πληροφορίας ανά χαρακτήρα σε κλασικά bit που κερδίζει ο δέκτης αν εκτελέσει την καλύτερη δυνατή μέτρηση. Τέλος, η εντροπία $S(\hat{\rho})$ χαρακτηρίζει μια κατάσταση $\hat{\rho}$ ανεξαρτήτως του τρόπου με τον οποίο το σύστημα αυτό δημιουργήθηκε φυσικά.

3.2.1 Ιδιότητες της Εντροπίας von Neumann

Η εντροπία $S(\hat{\rho})$ έχει μια σειρά από ιδιότητες, αρκετές από τις οποίες είναι ανάλογες των ιδιοτήτων της εντροπίας του Shannon. Αναφέρονται οι εξής:

i) Μια καθαρή κατάσταση $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ έχει $S(\hat{\rho}) = 0$.

ii) Για έναν τελεστή πυκνότητας με d μη μηδενικές ιδιοτιμές, η $S(\hat{\rho})$ παίρνει τιμές

$$0 \leq S(\hat{\rho}) \leq \log d \quad (3.14)$$

Η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται όταν όλες οι μη μηδενικές ιδιοτιμές είναι ίσες, δηλαδή για την μέγιστη αναμεμειγμένη κατάσταση $\hat{\rho} = \frac{1}{d}\mathbb{I}$.

iii) Λόγω της κυρτότητας (concavity) του λογαρίθμου, η εντροπία $S(\hat{\rho})$ έχει την ιδιότητα για $p_j > 0$ και $\sum_j p_j = 1$

$$S(p_1\hat{\rho}_1 + \dots + p_r\hat{\rho}_r) \geq p_1S(\hat{\rho}_1) + \dots + p_rS(\hat{\rho}_r) \quad (3.15)$$

Δηλαδή η εντροπία είναι μεγαλύτερη αν δεν ξέρουμε με ποια διαδικασία προετοιμάστηκε μια κατάσταση. Απόρροια αυτού είναι ότι η εντροπία δεν μπορεί να

μειωθεί κατά την ανάμειξη συστημάτων.

iv) Η εντροπία παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μοναδιακούς μετασχηματισμούς

$$S(\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger) = S(\hat{\rho}) \quad (3.16)$$

Επομένως η πληροφορία για ένα σύστημα δεν αλλάζει, αν η χρονική του εξέλιξη είναι μοναδιακή.

v) Μπορεί να οριστεί η κβαντομηχανική σχετική εντροπία (relative entropy) $S(\hat{\rho}||\hat{\sigma})$ του $\hat{\rho}$ ως προς $\hat{\sigma}$

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) = \text{tr} [\hat{\rho} \log \hat{\rho}] - \text{tr} [\hat{\rho} \log \hat{\sigma}] \quad (3.17)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$S(\hat{\rho}||\hat{\sigma}) \geq 0 \quad (3.18)$$

Δηλαδή η κβαντική σχετική εντροπία είναι μη αρνητική ποσότητα. Η ισότητα ισχύει όταν $\hat{\rho} = \hat{\sigma}$, όταν τα συστήματα είναι ίδια.

3.2.2 Εντροπία και μέτρηση

Στην προηγούμενη περιγραφή της κβαντικής πηγής σήματος, υπήρχε μονοσήμαντη αντιστοίχιση των κλασικών χαρακτήρων με τις κβαντικές καταστάσεις, οι οποίες ήταν καθαρές καταστάσεις, ορθογώνιες μεταξύ τους. Το ερώτημα που τίθεται είναι ποιες είναι η απώλειες σε περίπτωση που δεν υπάρχει αυτή η ιδανική αντιστοίχιση. Τρία είναι τα προβλήματα που υπεισέρχονται: Πρώτον, οι μη ορθογώνιες καταστάσεις δεν μπορούν να διακριθούν απόλυτα μεταξύ τους. Δεύτερον, μια κβαντομηχανική μέτρηση αλλάζει εν γένει το σύστημα. Τρίτον, λόγω της έλλειψης μοναδικότητας της έκφρασης του τελεστή πυκνότητας, υπάρχουν πολλές κλασσικές συλλογές με την ίδια εντροπία Shannon που οδηγούν στον ίδιο τελεστή πυκνότητας, οι οποίες δε θα μπορούν να διακριθούν κατά τη δεύτερη μέτρηση.

Εντροπία ορθογώνιων μετρήσεων Έστω ότι στην κατάσταση $\hat{\rho}$ εκτελείται μέτρηση του μεγέθους D , η οποία οδηγεί στην κατάσταση $\hat{\rho}'$:

$$\hat{\rho}' = \sum_{m=1}^d p(d_m) |d_m\rangle \langle d_m| = \sum_{m=1}^d \hat{P}_m \hat{\rho} \hat{P}_m \quad (3.17)$$

όπου \hat{P}_m οι προβολικοί τελεστές. Προκύπτει, δηλαδή, μια συλλογή $\{p(d_m)\}$ των μετρούμενων τιμών d_m . Αυτή η συλλογή έχει κλασσική εντροπία $H(p(d_m))$. Οι πιθανότητες $\{p(d_m)\}$ είναι και οι κατανομή πιθανότητας και για τις καταστάσεις

$|d_m\rangle$, επομένως η εντροπία $H(p(d_m))$ των μετρούμενων τιμών και η εντροπία von Neumann $S(\hat{\rho}')$ είναι ίδιες $H(p(d_m)) = S(\hat{\rho}')$.

Η σχετική εντροπία επιτρέπει τη σύγκριση των εντροπιών $S(\hat{\rho})$ και $S(\hat{\rho}')$ πριν και μετά τη μέτρηση. Λόγω της ιδιότητας (v):

$$S(\hat{\rho}||\hat{\rho}') = -S(\hat{\rho}) - \text{tr} [\hat{\rho} \log \hat{\rho}'] \geq 0 \quad (3.19)$$

Αν στον δεύτερο όρο της παραπάνω έκφρασης εισαχθεί η μονάδα $\mathbb{I} = \sum_l \hat{P}_l$ προκύπτει

$$\text{tr} [\hat{\rho} \log \hat{\rho}'] = \text{tr} \left[\left(\sum_l \hat{P}_l \right) \hat{\rho} \log \hat{\rho}' \right] = \text{tr} \left[\sum_l \hat{P}_l \hat{\rho} \hat{P}_l \log \hat{\rho}' \right] = \text{tr} [\hat{\rho}' \log \hat{\rho}'] = S(\hat{\rho}')$$

Επομένως, λόγω της ανισότητας (3.18) προκύπτει

$$S(\hat{\rho}') \geq S(\hat{\rho}) \quad (3.20)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν η μέτρηση γίνει στις ιδιοκαταστάσεις του τελεστή πυκνότητας. Επομένως, σε μια ορθογώνια μέτρηση η εντροπία von Neumann πριν και μετά τη μέτρηση είναι ίδια αν και μόνο αν η μέτρηση γίνεται ως προς ιδιοκατάσταση της αρχικής κατάστασης $\hat{\rho}$, αλλιώς είναι μεγαλύτερη.

Entropy of preparation Όπως ειπώθηκε, στην κβαντική κωδικοποίηση, το κλασικό σήμα $\{x_i, p_i\}$ αντιστοιχίζεται (κωδικοποιείται) στην κβαντική συλλογή $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$ που περιγράφεται από τον τελεστή $\hat{\rho}$ της σχέσης (3.8). Λόγω της έλλειψης μοναδικότητας της έκφρασης του τελεστή πυκνότητας, υπάρχουν πολλές κλασικές συλλογές που μπορούν να οδηγήσουν στην ίδια εντροπία $S(\hat{\rho})$. Η σχέση της εντροπίας της preparation $H(X)$ και της εντροπίας της κβαντικής συλλογής θα είναι

$$H(X) \geq S(\hat{\rho}) \quad (3.21)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που οι καταστάσεις $|\psi\rangle$ είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Αν οι καταστάσεις δεν είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, δεν μπορούν να διακριθούν και δεν υπάρχει μέγεθος η μέτρηση του οποίου να επιτρέπει να διαβαστεί όλη η πληροφορία του αρχικού μηνύματος, καθώς λόγω της σχέσης (3.19) δεν μπορεί η πληροφορία που αποκτάται με τη μέτρηση να υπερβαίνει την $S(\hat{\rho})$.

3.2.3 Ιδιότητες της εντροπίας σύνθετων συστημάτων

Αντίστοιχα με την κλασική περίπτωση, ορίζονται εντροπίες για τα σύνθετα κβαντικά συστήματα. Για την κατάσταση $\hat{\rho}^{AB}$ ενός διμερούς συστήματος S^{AB}

γενικεύονται οι κλασικοί ορισμοί για:

i) **Joint entropy**

$$S(A, B) = S(\hat{\rho}^{AB}) = -\text{tr}_{AB} [\hat{\rho}^{AB} \log \hat{\rho}^{AB}] \quad (3.22)$$

ii) **Εντροπία υπο συνθήκη**

$$S(A|B) = S(A, B) - S(B) \quad (3.23)$$

iii) **Αμοιβαία πληροφορία**

$$S(A : B) = S(A) - S(A|B) = S(A) + S(B) - S(A, B) \quad (3.24)$$

Μερικές από τις ιδιότητες είναι οι εξής:

Αν η κατάσταση είναι διαχωρίσιμη, τότε ισχύει η προσθετική ιδιότητα:

$$S(\hat{\rho}^{AB}) = S(\hat{\rho}^A \otimes \hat{\rho}^B) = S(\hat{\rho}^A) + S(\hat{\rho}^B) \quad (3.25)$$

Αν η κατάσταση δεν είναι διαχωρίσιμη, τότε ισχύει η σχέση

$$S(\hat{\rho}^{AB}) \leq S(\hat{\rho}^A) + S(\hat{\rho}^B) \quad (3.26)$$

η οποία είναι η αντίστοιχη της (3.7). Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται subadditivity της εντροπίας. Ισχύει γιατί κάποια πληροφορία μεταξύ των δύο συστημάτων εμπεριέχεται στις μεταξύ τους συσχετίσεις. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν οι καταστάσεις είναι διαχωρίσιμες. Λόγω της σχέσης (3.23), η σχέση (3.25) μπορεί να γραφεί και ως

$$S(A : B) \geq 0 \quad (3.27)$$

Η αμοιβαία πληροφορία $S(A : B)$ μπορεί να θεωρηθεί μέτρο της επιπλέον πληροφορίας που είναι "αποθηκευμένη" στο σύνθετο σύστημα απ' ότι στα επιμέρους.

Επίσης, ισχύει η ανισότητα

$$S(\hat{\rho}^{AB}) \geq |S(\hat{\rho}^A) - S(\hat{\rho}^B)| \quad (3.28)$$

Αυτή η ανισότητα διαφέρει από την αντίστοιχη ανισότητα για την κλασική εντροπία του Shannon

$$H(X, Y) \geq H(X), H(Y)$$

Η εντροπία του Shannon είναι μεγαλύτερη από την εντροπία οποιουδήποτε υποσυστήματος. Αυτό δεν ισχύει για την εντροπία von Neumann. Για παράδειγμα, για μια κατάσταση Bell η εντροπία του σύνθετου συστήματος είναι 0, ενώ η εντροπία των υποσυστημάτων είναι η μέγιστη δυνατή.

Για ένα τριμερές σύστημα S^{ABC} ισχύει η ιδιότητα:

$$S(\hat{\rho}^{ABC}) + S(\hat{\rho}^B) \leq S(\hat{\rho}^{AB}) + S(\hat{\rho}^{BC}) \quad (3.29)$$

Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται strong subadditivity, γιατί οδηγεί στην απλή subadditivity αν ο χώρος \mathcal{H}_B είναι μίας διάστασης.

3.2.4 Εντροπία της κβαντικής διεμπλοκής

Έστω ένα διμερές σύστημα S^{AB} , τα υποσυστήματα του οποίου βρίσκονται σε κβαντική διεμπλοκή. Η κατάσταση του διμερούς συστήματος $|\psi_{AB}\rangle$ είναι καθαρή κατάσταση. Επομένως, $S(AB) = 0$. Η κατάσταση $|\psi_{AB}\rangle$ μπορεί να αναλυθεί κατά Schmidt με αριθμό Schmidt μεγαλύτερη της μονάδας

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^k c_i |a_i\rangle |b_i\rangle$$

Η εντροπία των υποσυστημάτων $\hat{\rho}^A$ και $\hat{\rho}^B$ θα είναι ίσες, καθώς κάθε συνάρτηση του τελεστή πυκνότητας που εξαρτάται μόνο στις ιδιοτιμές του να έχει την ίδια τιμή και για τους δύο μειωμένους τελεστές πυκνότητας, αφού οι δύο τελεστές έχουν τις ίδιες θετικές ιδιοτιμές.

$$S(A) = S(B) = - \sum_{i=1}^k c_i \log c_i > 0$$

Η εντροπία των υποσυστημάτων είναι μεγαλύτερη από την εντροπία του σύνθετου συστήματος. Για ένα διμερές σύστημα σε κατάσταση $|\psi_{AB}\rangle$ η ποσότητα

$$E(\psi) = S(A) = S(B)$$

ορίζεται ως εντροπία της κβαντικής διεμπλοκής και αποτελεί μέτρο της διεμπλοκής των συστημάτων. Αυτό είναι καλό μέτρο της διεμπλοκής μόνο για καθαρές καταστάσεις διμερών καταστάσεων, καθώς, όπως έχει αναφερθεί, η ανάλυση Schmidt δεν μπορεί, εν γένει, να γενικευτεί για παραπάνω από δυο υποσυστήματα.

Η εντροπία της διεμπλοκής εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές Schmidt. Είναι ανεξάρτητη της βάσης και δεν αλλάζει κάτω από μοναδιακούς μετασχηματισμούς.

Κεφάλαιο 4

Κβαντική διεμπλοκή με συνεχείς μεταβλητές

4.1 Κβαντικός φασικός χώρος

Η κατάσταση ενός συστήματος στην κλασική φυσική μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια μιας κατανομής πιθανότητας στον φασικό χώρο, δηλαδή μια συνάρτηση των κανονικών θέσεων και ορμών του συστήματος $f(q, p)$, από την οποία εξάγεται η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα σε θέση q με ορμή p . Γνωρίζοντας την κατανομή πιθανότητας στον φασικό χώρο, μπορούν να προβλεφθούν όλες οι φυσικές ποσότητες. Η $f(q, p)$ ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$P(q) = \int dp f(q, p) \quad , \quad P(p) = \int \frac{dq}{2\pi\hbar} f(q, p) \quad (4.1)$$

Η αρχή του Heisenberg στην κβαντική μηχανική δεν επιτρέπει την ταυτόχρονη και ακριβή μέτρηση της θέσης και της ορμής, επομένως ένας κβαντικός φασικός χώρος δεν φαίνεται να είναι χρήσιμος. Παρόλ' αυτά, ο κβαντικός φασικός χώρος χρησιμοποιείται για να υπολογιστούν παρατηρούμενα μεγέθη. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορεί να υπάρξει αντίστοιχη συνάρτηση στην κβαντική μηχανική που να ικανοποιεί σχέσεις της μορφής (4.1). Μια τέτοια συνάρτηση είναι η συνάρτηση Wigner, η οποία εισήχθη από τον Eugene Wigner το 1932 στην προσπάθειά του να συνδέσει την κυματοσυνάρτηση σε μια κατανομή πιθανότητας στον φασικό χώρο. Παρά το γεγονός ότι η συνάρτηση Wigner ικανοποιεί τη σχέση (4.1), δεν μπορεί να θεωρηθεί κατανομή πιθανότητας, καθώς μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές. Ο φορμαλισμός του κβαντικού φασικού χώρου χρησιμοποιείται στην κβαντική οπτική, καθώς τα quadratures του πεδίου σχηματίζουν ένα ζεύγος συζυγών μεταβλητών.

4.1.1 Συνάρτηση Wigner

Η συνάρτηση Wigner για ένα κβαντικό σύστημα που βρίσκεται σε κατάσταση $\hat{\rho}$ ορίζεται ως εξής [11]:

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \langle q + \frac{\xi}{2} | \hat{\rho} | q + \frac{\xi}{2} \rangle \quad (4.2)$$

Η συνάρτηση Wigner ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις, οι οποίες είναι ανάλογες των σχέσεων (1):

$$P(q) = \int dp W(q, p) = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle \quad (4.3)$$

$$P(p) = \int dq W(q, p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle$$

$$\int dp \int dq W(q, p) = 1 \quad (4.4)$$

Η σχέση (4) είναι ισοδύναμη με την $tr[\hat{\rho}] = 1$. Επίσης, η $W(q, p)$ είναι πραγματική συνάρτηση, λόγω της ερμιτιανότητας του τελεστή πυκνότητας. Όμως, παρόλο που ο τελεστής πυκνότητας είναι μη αρνητικός, δεν ισχύει το ίδιο για τη συνάρτηση Wigner.

Ο μετασχηματισμός Fourier $\tilde{W}(u, v)$ της συνάρτησης Wigner ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση και δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{W}(u, v) = \int dp \int dq W(q, p) e^{-iuq - ivp} \quad (4.5)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι ο μετασχηματισμός Fourier της πιθανότητας $P(q)$ σε πολικές συντεταγμένες [7]. Επίσης, ισχύει ότι

$$\tilde{W}(u, v) = tr [\hat{\rho} e^{-iu\hat{q} - iv\hat{p}}] \quad (4.6)$$

Ο τελεστής $e^{-iu\hat{q} - iv\hat{p}}$ ονομάζεται τελεστής Weyl.

Κατά τον ίδιο τρόπο, μπορούν να οριστούν οι συναρτήσεις Wigner για τυχάιους τελεστές με τον ίδιο τρόπο, όπως και για τον τελεστή πυκνότητας.

$$g(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \langle q + \frac{\xi}{2} | \hat{G} | q + \frac{\xi}{2} \rangle \quad (4.7)$$

Συνεπώς, οι αναμενόμενες τιμές των τελεστών μπορούν να υπολογιστούν

$$\langle \hat{G} \rangle = tr [\hat{\rho} \hat{G}] = \int dq \int dp W(q, p) g(q, p) \quad (4.8)$$

Με αλλαγή μεταβλητών η συνάρτηση Wigner μπορεί να γραφεί συναρτήσει των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής και των ιδιοτελεστών τους.

$$W(a, a^*) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta e^{\beta^* a - \beta a^*} \text{tr} \left[\hat{\rho} e^{\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}} \right] \quad (4.9)$$

Τέλος, σημειώνεται μια ιδιότητα της συνάρτησης Wigner. Η μέση τιμή ενός τελεστή, ο οποίος είναι συμμετρικός ως προς τα \hat{q} και \hat{p} , εξαρτάται μόνο από τις δυνάμεις των \hat{q} , \hat{p} :

$$\text{tr} [\hat{\rho} S(\hat{q}^n \hat{p}^m)] = \int W(q, p) q^n p^m dq dp \quad (4.10)$$

όπου $S(\hat{q}^n \hat{p}^m)$ ένας συμμετρικός τελεστής.

Επομένως, οι συναρτήσεις Wigner επιτρέπουν μια εναλλακτική περιγραφή της κβαντικής μηχανικής. Αυτή η περιγραφή έχει πλεονεκτήματα στις Γκαουσιανές καταστάσεις και στους οπτικούς κβαντικούς μετασχηματισμούς. Η συνάρτησή Wigner δεν είναι η μοναδική κατανομή στο φασικό χώρο. Στη συνέχεια θα οριστούν δύο ακόμα κατανομές.

Παράδειγμα υπολογισμού συνάρτησης Wigner Στη συνέχεια θα υπολογιστεί η συνάρτηση Wigner για τη θεμελιώδη κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή. Είναι γνωστό ότι η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους κατάστασης είναι

$$\Psi(q) = \pi^{-1/4} e^{-q^2/2} \quad (4.11)$$

Αντικαθιστώντας τον τελεστή πυκνότητας για τη θεμελιώδη κατάσταση είναι $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$ στη σχέση (2) συνεπάγεται

$$\begin{aligned} W(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int d\xi e^{-ip\xi} \langle q + \frac{\xi}{2} | 0 \rangle \langle 0 | q + \frac{\xi}{2} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\xi e^{-ip\xi} \Psi_0 \left(q + \frac{\xi}{2} \right) \Psi_0^* \left(q - \frac{\xi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \pi^{-1/2} \int d\xi e^{-ip\xi} e^{-\left(q + \frac{\xi}{2}\right)^2/2} e^{-\left(q - \frac{\xi}{2}\right)^2/2} \end{aligned}$$

με τελικό αποτέλεσμα

$$W_0(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(q^2 + p^2)} \quad (4.12)$$

Οι σύμφωνες και squeezed καταστάσεις προκύπτουν από αυτή: Η σύμφωνη κατάσταση είναι η μετατοπισμένη κατάσταση του κενού με πλάτος $a = (q_0 - ip_0/\sqrt{2})$

$$W_{coh}(q, p) = W_0(q - q_0, p - p_0) \quad (4.13)$$

ενώ οι squeezed καταστάσεις βαθμισμένες (scaled) καταστάσεις του κενού

$$W_{sq}(q, p) = W_0(e^\zeta q, e^{-\zeta} p) \quad (4.14)$$

4.1.2 Κατανομή Q

Η αναπαράσταση Q ορίστηκε έτσι ώστε να είναι μη αρνητική

$$Q(a, a^*) = \frac{1}{\pi} \langle a | \hat{\rho} | a \rangle \quad (4.15)$$

Η παραπάνω μορφή είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα, είναι πάντα θετική και φραγμένη: $0 \leq Q(a, a^*) \leq 1/\pi$.

Αν η κατάσταση $\hat{\rho}$ είναι σύμφωνη κατάσταση και αν τα a, a^* εκφραστούν ως προς q, p , τότε η σχέση (4.15) παίρνει τη μορφή:

$$Q(q, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(q', p') e^{-(q-q')^2 - (p-p')^2} dq' dp' \quad (4.16)$$

όπου $W(q, p)$ είναι η συνάρτηση Wigner μια σύμφωνης κατάστασης με πλάτος $a = (q + ip)/\sqrt{2}$. Η παραπάνω σχέση εκφράζει μια "λείανση" (smoothing) της συνάρτησης Wigner με μια Γκαουσιανή συνάρτηση, η οποία έχει το ίδιο πλάτος με το κενό, δηλαδή υπολογίζει το μέσο όρο της συνάρτησης Wigner σε κύκλο με κέντρο το σημείο του φασικού χώρου (q, p) με ακτίνα που αντιστοιχεί στη διακύμανση του κενού.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής Q υπολογίζεται συναρτήση των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής

$$\tilde{Q}(\beta) = \text{tr} \left[\hat{\rho} e^{-\beta^* \hat{a}} e^{\beta \hat{a}^\dagger} \right] \quad (4.17)$$

και, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, μια εναλλακτική γραφή της συνάρτησης Q είναι

$$Q(a, a^*) = \int d^2 \beta e^{\beta^* a - \beta a^*} \tilde{Q}(\beta) \quad (4.18)$$

Η αναπαράσταση Q χρησιμοποιείται στον υπολογισμό αναμενόμενων τιμών τελεστών που είναι anti-normally ordered:

$$\text{tr} [\hat{\rho} \hat{a}^n \hat{a}^{\dagger m}] = \int W(q, p) q^n p^m dq dp$$

4.1.3 Κατανομή P

Η τρίτη κατανομή είναι η κατανομή P. Ένας τυχαίος τελεστής πυκνότητας μπορεί να γραφεί στη βάση των σύμφωνων καταστάσεων ως εξής

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 a \int d^2 a' \langle a' | \hat{\rho} | a \rangle |a'\rangle \langle a| \quad (4.19)$$

Η συνάρτηση $P(a)$ ορίζεται έτσι ώστε η κατάσταση $\hat{\rho}$ να είναι διαγώνια στη βάση των σύμφωνων καταστάσεων

$$\hat{\rho} = \int d^2a P(a, a^*) |a\rangle \langle a| \quad (4.20)$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι normal ordered

$$\tilde{P}(\beta) = \text{tr} \left[\hat{\rho} e^{\beta \hat{a}^\dagger} e^{-\beta^* \hat{a}} \right] \quad (4.21)$$

και ισχύει επίσης

$$P(a, a^*) = \int d^2\beta e^{\beta^* a - \beta a^*} \tilde{P}(\beta) \quad (4.22)$$

Η συνάρτηση P χρησιμοποιείται για υπολογισμούς τελεστών οι οποίοι είναι normal ordered.

Παράδειγμα εύρεσης συνάρτησης P Στη συνέχεια θα υπολογιστεί η συνάρτηση P για μια θερμική κατάσταση με έναν γενικό τρόπο που παρουσιάστηκε από τον Mehta [12], [13]. Αρχικά, θεωρείται ότι ο τελεστής πυκνότητας γράφεται στη μορφή (4.16) και υπολογίζουμε το στοιχείο $\langle -u | \hat{\rho} | u \rangle$, όπου τα $|u\rangle, |-u\rangle$ είναι σύμφωνες καταστάσεις. Τότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} \langle -u | \hat{\rho} | u \rangle &= \int d^2a P(a, a^*) \langle -u | a \rangle \langle a | u \rangle \\ &= e^{-|u|^2} \int d^2a P(a, a^*) e^{-|a|^2} e^{u^* a - u a^*} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Η παραπάνω σχέση είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $\langle -u | \hat{\rho} | u \rangle e^{|u|^2}$. Αυτό φαίνεται πιο εύκολα, αν γίνει η αντικατάσταση $u = p + iq, v = P + iQ$, ώστε $e^{u^* a - u a^*} = e^{2i(qP - pQ)}$. Άρα μπορεί να υπολογιστεί το

$$P(a, a^*) e^{-|a|^2} = \frac{1}{\pi^2} = \int d^2u \langle -u | \hat{\rho} | u \rangle e^{|u|^2} e^{u^* a - u a^*}$$

θεωρώντας ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $|u| \rightarrow \infty$. Αντικαθιστώντας των τελεστή πυκνότητας της σχέσης (2.56) προκύπτει

$$\begin{aligned} P(a, a^*) e^{-|a|^2} &= \frac{1 - |\tau|^2}{\pi^2} \int d^2u e^{|u|^2} \sum_n |\tau|^{2n} \langle -u | n \rangle \langle n | u \rangle e^{u^* a - u a^*} \\ &= \frac{1 - |\tau|^2}{\pi^2} \int d^2u e^{|u|^2} e^{-|u|^2} \sum_n \frac{|\tau|^{2n} (-u^* u)^n}{n!} e^{u^* a - u a^*} \\ &= \frac{1 - |\tau|^2}{\pi^2} \int d^2u e^{-|\tau|^2 |u|^2} e^{u^* a - u a^*} \\ &= \frac{1 - |\tau|^2}{\pi} \frac{e^{-|\tau|^2 |a|^2}}{|\tau|^2} \end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει η σχέση

$$P(a, a^*) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - |\tau|^2}{|\tau|^2} e^{-|a|^2 \frac{1-|\tau|^2}{|\tau|^2}} \quad (4.24)$$

η οποία θα χρησιμοποιηθεί στους υπολογισμούς στο τελευταίο κεφάλαιο.

4.2 Διεμπλοκή γκαουσιανών καταστάσεων

Ένα σύστημα συνεχών μεταβλητών είναι το σύστημα το οποίο σχετίζεται με έναν απειροδιάστατος χώρος Hilbert. Πολλές ιδιότητες της κβαντικής διεμπλοκής αλλάζουν λόγω του γεγονότος ότι ο χώρος Hilbert είναι απειροδιάστατος. Για παράδειγμα, η εντροπία της διεμπλοκής εν γένει είναι άπειρη, όπως και η εντροπία του συστήματος.[14]

Τα συστήματα που θα περιγραφούν είναι κβαντικά συστήματα με n κανονικούς βαθμούς ελευθερίας. Αυτά μπορούν να περιγραφούν από n αρμονικούς ταλαντωτές ή n τρόπους ταλάντωσης του πεδίου. Είναι βολικό να ορισθεί το άνυσμα:[15]

$$O = \left(\hat{O}_1, \dots, \hat{O}_{2n} \right)^T = \left(\hat{X}_1, \hat{P}_1, \dots, \hat{X}_n, \hat{P}_n \right)^T \quad (4.25)$$

Οι κανονικές συνθήκες μετάθεσης λαμβάνουν τη μορφή

$$\left[\hat{O}_j, \hat{O}_k \right] = i\sigma_{j,k} \quad (4.26)$$

όπου σ είναι ένας διαγώνιος πραγματικός $2n \times 2n$ πίνακας

$$\sigma = \bigoplus_{j=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Με αυτό το συμβολισμό, ο τελεστής Weyl που ορίστηκε για έναν τρόπο ταλάντωσης, γενικεύεται και έχει τη μορφή

$$\hat{W}_\xi = e^{i\xi^T \sigma O} \quad (4.28)$$

με $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$.

Οι Γκαουσιανές καταστάσεις μπορούν να οριστούν εναλλακτικά ως οι καταστάσεις των οποίων η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι μια Γκαουσιανή συνάρτηση στο φασικό χώρο:

$$\chi_\rho(\xi) = \chi_\rho(0) e^{-\frac{1}{4}\xi^T \Gamma \xi + D^T \xi} \quad (4.29)$$

όπου Γ ένας $2n \times 2n$ πίνακας και $D \in \mathbb{R}^{2n}$. Γκαουσιανές καταστάσεις είναι οι σύμφωνες καταστάσεις, οι squeezed καταστάσεις και οι θερμικές καταστάσεις.

Μια Γκαουσιανή χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να χαρακτηριστεί από την πρώτη και δεύτερη ροπή της, πράγμα που σημαίνει ότι μια Γκαουσιανή κατάσταση n τρόπων ταλάντωσης χρειάζεται $2n^2 + n$ πραγματικές παραμέτρους για μια πλήρη περιγραφή, το οποίο είναι πολυώνυμο, αντί για εκθετικό του n . [15]

Η πρώτη ροπή αποτελεί ένα άνυσμα, το οποίο ονομάζεται άνυσμα μετατόπισης $d \in \mathbb{R}^{2n}$, με στοιχεία

$$\bar{d}_j = \langle O_j \rangle_\rho = \text{tr} [O_j \hat{\rho}] \quad (4.30)$$

$j = 1, 2, \dots, 2n$. Τα d_j είναι οι αναμενόμενες τιμές των κανονικών συντεταγμένων και συνδέονται με το άνυσμα D της (4.13) μέσω της σχέσης $D = \sigma \bar{d}$. Μια μετατόπιση στο χώρο των φάσεων μπορεί να μηδενίσει το άνυσμα D . Συνεπώς, οι πρώτες ροπές δεν περιέχουν πληροφορία για το αν το σύστημα βρίσκεται σε διεμπλοκή.

Οι δεύτερες ροπές μπορεί να γραφούν σε μορφή πίνακα, ο οποίος ονομάζεται covariance matrix και είναι πραγματικός και συμμετρικός:

$$\gamma_{j,k} = \langle \Delta O_j \Delta O_k + \Delta O_k \Delta O_j \rangle = 2\Re \text{tr} [\hat{\rho} (O_j - \langle O_j \rangle_\rho) (O_k - \langle O_k \rangle_\rho)] \quad (4.31)$$

Ο πίνακας με τα παραπάνω στοιχεία συνδέεται με τον πίνακα Γ της (4.13) μέσω της σχέσης $\Gamma = \sigma^T \gamma \sigma$. Τα διαγώνια στοιχεία αναπαριστούν τη διακύμανση των μεταβλητών.

Η συνάρτηση Wigner για τις Γκαουσιανές καταστάσεις υπολογίζεται:

$$W_\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\det \gamma}} e^{-\frac{1}{2}(\xi-d)^T \gamma^{-1}(\xi-d)} \quad (4.32)$$

Κάθε πραγματικός, συμμετρικός $2n \times 2n$ πίνακας, δεν μπορεί να είναι covariance matrices φυσικών καταστάσεων. Για να αντιστοιχεί ο πίνακας σε φυσική κατάσταση θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση αβεβαιότητας του Heisenberg. Αυτό μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας τους πίνακες που ορίστηκαν ως:

$$\gamma + i\sigma \geq 0 \quad (4.33)$$

Αντίστροφα, για κάθε πραγματικό, συμμετρικό πίνακα γ που ικανοποιεί τη σχέση (4.17) υπάρχει μια Γκαουσιανή κατάσταση, ο covariance πίνακας της οποίας είναι ο γ . Ο covariance πίνακας χρησιμοποιείται για εναλλακτική διατύπωση των κριτηρίων διαχωρισιμότητας των Γκαουσιανών καταστάσεων.

Μια σημαντική ομάδα μετασχηματισμών είναι η συμπλεκτική ομάδα $Sp(2n, \mathbb{R})$ [16]. Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι κανονικοί, δηλαδή για έναν μετασχηματισμό $\mathcal{U}(S)$ με πίνακα μετασχηματισμού S :

$$S : \quad \xi \rightarrow \xi' = S\xi \quad (4.34)$$

ισχύει

$$S\sigma S^T = \sigma \quad (4.35)$$

όπου σ ο πίνακας της σχέσης (4.11). Οι οπτικοί μετασχηματισμοί είναι στοιχεία αυτής της ομάδας. Όλοι οι πίνακες μετασχηματισμού ικανοποιούν τη σχέση $\det S = 1$, ενώ για τους παθητικούς μετασχηματισμούς ισχύει επιπλέον η σχέση $SS^T = \mathbb{I}$. Όλες οι Γκαουσιανές καταστάσεις με covariance πίνακα γ διαγωνοποιούνται από συμπλεκτικούς πίνακες. Επίσης, οι συμπλεκτικοί πίνακες μετασχηματίζουν την πρώτη και δεύτερη ροπή ως εξής

$$\begin{aligned} \bar{d}' &= S\bar{d}S^T = \sigma \\ \gamma' &= S\gamma S^T \end{aligned} \quad (4.36)$$

Οι δράση των μετασχηματισμών αυτών είναι:

$$U(S) : \hat{\xi} \rightarrow \hat{\xi}' = U(S)^\dagger \hat{\xi} U(S) = \sum_{\beta=1}^{2n} S_{\alpha\beta} \xi_\beta \quad (4.37)$$

Αυτοί οι μετασχηματισμοί γράφονται σε πιο απλή μορφή στην περιγραφή Wigner:

$$S : \hat{\rho} \rightarrow U(S)^\dagger \hat{\rho} U(S) \iff W(\xi) \rightarrow W'(\xi) = W(S^{-1}\xi) \quad (4.38)$$

επομένως $W'(S\xi) = W(\xi)$ για κάθε τέτοιο μετασχηματισμό, δηλαδή η συνάρτηση Wigner μετασχηματίζεται σαν ένα $Sp(2n, \mathbb{R})$ βαθμωτό πεδίο.

Ένα κριτήριο για τη διαχωρισιμότητα των καταστάσεων είναι το PPT (Positivity under Partial Transposition). Έστω μια διαχωρίσιμη κατάσταση

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_i p_i (\hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B) \quad (4.39)$$

Η αναστροφή είναι μια θετική απεικόνιση, υπό την έννοια ότι απεικονίζει ένα θετικό πίνακα σε έναν άλλο θετικό πίνακα. Επομένως, ο ανάστροφος ενός τελεστή πυκνότητας $\hat{\rho}$ θα είναι επίσης θετικά ορισμένος τελεστής. Το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και όταν η αναστροφή αυτή γίνεται σε ένα από τα υποσυστήματα (partial transposition), έστω στο B. Δηλαδή η κατάσταση:

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_i p_i (\hat{\rho}_i^A \otimes (\hat{\rho}_i^B)^T) \quad (4.40)$$

πρέπει να είναι επίσης φυσική κατάσταση. Όμως, αν εφαρμοστεί αυτή η μερική αναστροφή (partial transposition) σε μια μη διαχωρίσιμη κατάσταση, τότε δεν είναι σίγουρο ότι το αποτέλεσμα θα είναι θετικός τελεστής. Η αναστροφή (και η

μερική) του τελεστή πυκνότητας ισοδυναμεί με το να ληφθούν οι μιγαδικοί συζυγής των στοιχείων του πίνακα πυκνότητας στην αναπαράσταση θέσης. Αυτό στην περιγραφή Wigner ισοδυναμεί με reversal της ορμής:

$$T : W(q, p) \rightarrow W'(q, p) = W(q, -p) = W(\Lambda\xi) \quad (4.41)$$

$$\mu\epsilon\Lambda = \text{diag}(1, -1; 1, -1; \dots; 1, -1)$$

Αυτά τα κριτήρια μπορούν να εξειδικευτούν για τους covariance πίνακες. Αν εφαρμοστεί η reversal της ορμής για ένα από τα υποσυστήματα, θα προκύψει ο τελεστής $\tilde{\gamma}$. Για να είναι φυσική Γκαουσιανή κατάσταση θα πρέπει και αυτός να ικανοποιεί το κριτήριο (4.17)

$$\tilde{\gamma} + i\sigma \geq 0 \quad (4.42)$$

Αν $\tilde{\gamma} + i\sigma$ είναι αρνητικό τότε το σύστημα στην κατάσταση $\hat{\rho}$ βρίσκεται σε διεμπλοκή. Επίσης, μια Γκαουσιανή κατάσταση ενός διμερούς συστήματος, στην οποία αντιστοιχεί ο covariance πίνακας γ , είναι διαχωρίσιμη αν και μόνο αν υπάρχουν covariance πίνακες γ_A και γ_B τέτοιοι ώστε

$$\gamma \geq \gamma_A \oplus \gamma_B$$

Τέλος, σημειώνεται ότι μια Γκαουσιανή κατάσταση είναι καθαρή αν και μόνο αν ο covariance πίνακας της γράφεται στη μορφή

$$\gamma = S^T S \quad (4.43)$$

με S ένας συμπλεκτικός πίνακας.

4.2.1 Καθαρές γκαουσιανες καταστάσεις σε διεμπλοκή

Το βασικό παράδειγμα για μια καθαρή Γκαουσιανή κατάσταση σε κβαντική διεμπλοκή είναι η squeezed κατάσταση δύο τρόπων ταλάντωσης. Έχει υπολογιστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο η squeezed κατάσταση δύο τρόπων ταλάντωσης:

$$|00, r\rangle = \hat{S}(r)|00\rangle = \frac{1}{\cosh|r|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-r)^n}{|r|^n} \tanh^n|r| |n, n\rangle \quad (4.44)$$

Θέτοντας $c_n = \frac{1}{\cosh|r|} \frac{(-r)^n}{|r|^n} \tanh^n|r|$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$|00, r\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle_A |n\rangle_B \quad (4.45)$$

Η σχέση αυτή είναι η ανάλυση Schmidt για την squeezed κατάσταση και c_n οι συντελεστές Schmidt.

Η συνάρτηση Wigner για την squeezed κατάσταση είναι

$$W(\xi) = \frac{4}{\pi^2} e^{-e^{-2r}[(q_1+q_2)^2+(p_1-p_2)^2]-e^{2r}[(q_1+q_2)^2+(p_1+p_2)^2]} \quad (4.46)$$

Αυτή η συνάρτηση τείνει στην $C\delta(x_1 - x_2)\delta(p_1 - p_2)$ στο όριο του άπειρου squeezing $r \rightarrow \infty$. Η squeezed κατάσταση δύο τρόπων ταλάντωσης θεωρείται το αντίστοιχο της μέγιστως συζευγμένης κατάστασης (οι τελεστές Schmidt δεν είναι ίσοι). Από τη σχέση (4.30) αυτή προκύπτει ο covariance πίνακας [17]

$$\gamma = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cosh 2r & 0 & \sinh 2r & 0 \\ 0 & \cosh 2r & 0 & -\sinh 2r \\ \sinh 2r & 0 & \cosh 2r & 0 \\ 0 & -\sinh 2r & 0 & \cosh 2r \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Από τον παραπάνω πίνακα εξάγεται αμέσως η διακύμανση για τη σχετική θέση και την ολική ορμή

$$\langle (\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^2 \rangle = \langle \hat{q}_1^2 \rangle + \langle \hat{q}_2^2 \rangle - 2\langle \hat{q}_1 \hat{q}_2 \rangle = e^{-2r} \quad (4.48)$$

$$\langle (\hat{p}_1 + \hat{p}_2)^2 \rangle = \langle \hat{p}_1^2 \rangle + \langle \hat{p}_2^2 \rangle + 2\langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle = e^{-2r} \quad (4.49)$$

Οι μειωμένοι τελεστές πυκνότητας υπολογίζονται

$$\hat{\rho}_A = \hat{\rho}_B = \sum_n \frac{1}{(\cosh|r|)^2} (\tanh|r|)^{2n} |n\rangle \langle n| \quad (4.50)$$

οι οποίοι είναι ο τελεστής πυκνότητας για μια θερμική κατάσταση, αν ο μέσος αριθμός φωτονίων ισούται με $\langle n \rangle = \sinh^2 r$. Μπορεί να υπολογιστεί και η συνάρτηση Wigner για το υποσύστημα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\xi) dq_1 dp_1 = \frac{2}{\pi(1+2\bar{n})} e^{-\left[\frac{2(q_2^2 + p_2^2)}{1+2\bar{n}}\right]} \quad (4.51)$$

Η οποία είναι η συνάρτηση Wigner για τη θερμική κατάσταση. Η θερμική κατάσταση είναι το αντίστοιχο της μέγιστως αναμειγμένης κατάστασης.

Η εντροπία της διεμπλοκής προκύπτει

$$E(\hat{\rho}_{TH}) = -tr[\hat{\rho}_{TH} \log \hat{\rho}_{TH}] = \cosh^2 r \log(\cosh^2 r) - \sinh^2 r \log(\sinh^2 r) \quad (4.52)$$

Κεφάλαιο 5

Παραγωγή εντροπίας

Στα προηγούμενα κεφάλαια υπολογίστηκαν οι καταστάσεις που προκύπτουν αν σε μια κατάσταση Fock δράσει ένας γκαουσιανός μετασχηματισμός. Ο υπολογισμός της εντροπίας von Neumann δεν είναι εύκολος, καθώς οι καταστάσεις είναι μια υπέρθεση άπειρων καταστάσεων Fock και απαιτείται η εύρεση των άπειρων ιδιοτιμών του τελεστή πυκνότητας, με εξαίρεση τη θερμική κατάσταση, η οποία είναι σε διαγώνια μορφή. Για την αποφυγή της διαγωνιοποίησης της μήτρας πυκνότητας χρησιμοποιείται η μέθοδος της ρεπλίκας (replica method), η οποία χρησιμοποιείται στη στατιστική φυσική σε συστήματα όπως τα spin glasses και στην κβαντική θεωρία πεδίου.

Η μέθοδος της ρεπλίκας

Η μέθοδος της ρεπλίκας είναι μια μαθηματική τεχνική που βασίζεται στη χρήση της σχέσης

$$\log Z = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{Z^n - 1}{n}$$

Στη σχέση της εντροπίας εμφανίζεται ο όρος $x \log x$, επομένως η σχέση που χρειάζεται είναι η $x \log x = \lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{x^n - x}{n} = \left. \frac{\partial}{\partial n} (x^n) \right|_{n=1^+}$. Η εντροπία von Neumann μπορεί να γραφεί ως

$$S(\hat{\rho}) = - \left. \frac{\partial}{\partial n} \text{tr}(\hat{\rho}^n) \right|_{n=1^+} \quad (5.1)$$

Η μέθοδος της ρεπλίκας δίνει τη μέση τιμή $\langle \log \hat{A} \rangle$ κάποιου ερμιτιανού τελεστή \hat{A} , εάν είναι γνωστές οι ροπές του $\langle \hat{A}^n \rangle$. Επομένως, αν βρεθεί μια έκφραση για το ίχνος $\text{tr}(\hat{\rho}^n) = f(n)$ συναρτήσεως του $n \in \mathbb{N}^*$, αυτή θα πρέπει να επεκταθεί στην περίπτωση όπου το $n \in \mathbb{R}$, ώστε να υπολογιστεί η παράγωγος στο $n = 1$.

Η εφαρμογή της μεθόδου της ρεπλίκας έχει δύο προϋποθέσεις. Πρώτον, πρέπει οι ροπές $\langle \hat{A}^n \rangle$ να περιέχουν όλη την πληροφορία για την αντίστοιχη κατανομή πιθανότητας, ώστε να έχει νόημα να υπολογιστούν μέσες τιμές διάφορων εκφράσεων για τη μεταβλητή χρησιμοποιώντας τις ροπές αυτές. Δεύτερον, ότι η επέκταση από τη συνάρτηση $f(n)$ με $n \in \mathbb{N}^*$ στους πραγματικούς ($f(x), x \in \mathbb{R}$) μπορεί να πραγματοποιηθεί.

Η πρώτη προϋπόθεση ικανοποιείται από τους τελεστές πυκνότητας. Η απόδειξη γίνεται με τη χρήση του θεωρήματος Hausdorff για τις ροπές. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό [18], αν υπάρχει μια γνησίως μονότονη ακολουθία c_r , δηλαδή μια ακολουθία η οποία ικανοποιεί τη σχέση $(-1)^r \Delta^r c_k \geq 0$, και επιπλέον $c_0 = 1$, τότε αυτή ταυτίζεται με την ακολουθία ροπών μιας μοναδικής κατανομής πιθανότητας που ορίζεται στο $[0, 1]$. Ορίζεται ο τελεστής διαφοράς $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$, $\Delta^2 a_i = \Delta(\Delta a_i)$, ..., $\Delta^r a_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} a_{i+j}$.

Ορίζουμε την ακολουθία

$$m_n = \text{tr}(\hat{\rho}^n) = \mathbb{E}(\hat{\rho}^{n-1}) \quad (5.2)$$

όπου $\mathbb{E}(\hat{\rho}^{n-1})$ η αναμενόμενη τιμή του $\hat{\rho}^{n-1}$. Η ακολουθία m_n είναι γνησίως μονότονη, καθώς

$$\begin{aligned} (-1)^k \Delta^k m_n &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j m_{n+j} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \mathbb{E}(\hat{\rho}^{n+j}) \\ &= \sum_i \lambda_i^n (1 - \lambda_i)^k > 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

γιατί τα λ_i είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή $\hat{\rho}$ και είναι ορισμένες στο $[0, 1]$. Επομένως, η γνώση των ροπών προσδιορίζει μια μοναδική κατανομή και με βάση αυτές μπορούν να υπολογιστούν και άλλες μέσες τιμές, όπως $\langle \ln \hat{\rho} \rangle$.

Το δεύτερο πρόβλημα είναι το αν μπορεί η έκφραση $f(n)$ να επεκταθεί στους πραγματικούς (ή μιγαδικούς) αριθμούς, γιατί μπορεί η αντικατάσταση $n \rightarrow x$ να μη δίνει το σωστό $\text{tr}(\hat{\rho}^x)$ με το να υπολογιζόταν κατευθείαν το $\text{tr}(\hat{\rho}^x)$ με $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι

$$\text{tr}(\hat{\rho}^n) = f_0(n) \longrightarrow f_0(a), n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C} \quad (5.4)$$

και

$$\text{tr}(\hat{\rho}^a) = f(a) \quad (5.5)$$

Η συνάρτηση $f(a)$ πρέπει να είναι αναλυτική και φραγμένη, καθώς αναπαριστά ροπές

$$|f(a)| < 1 \quad (5.6)$$

Οι συναρτήσεις $f_0(n)$ και $f(a)$ πρέπει να είναι ίσες όταν τα ορίσματά τους είναι φυσικοί αριθμοί. Άρα μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} f(a) &= f_0(n) + g(a) \\ g(a) &= h(a)\sin\pi a \\ g(n) &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

όπου η $h(a)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε αναλυτική συνάρτηση. Λόγω της σχέσης (5.7) προκύπτει ότι

$$|f_0(n) + g(a)| < 1 \quad (5.8)$$

Όπου $|g(a)| = |\sin\pi a||h(a)|$. Το $g(a)$ είναι προβληματικός όρος καθώς περιέχει υπερβολικά ημίτονα τα οποία αποκλίνουν $|\sin\pi a| (e^{\pi|y|})$. Επομένως, η συνάρτηση $h(a)$ πρέπει να αποκλίνει $|h(a)| (e^{-|\tau||y|})$, ώστε $|g(a)| O(e^{(\pi-|\tau|)|y|})$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Carlson[19], αν μία συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες: **α** Η συνάρτηση ικανοποιεί τη συνθήκη $|f(z)| \leq Ce^{\zeta|z|} \quad z \in \mathbb{C}$ **β** Υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $|f(iy)| \leq Ce^{c|y|}$, $y \in \mathbb{R}$ **γ** $f(n) = 0$ για κάθε φυσικό αριθμό, τότε η συνάρτηση f είναι ταυτοτικά μηδέν. Η συνάρτηση $g(a)$ ικανοποιεί το θεώρημα του Carlson. Αυτό σημαίνει ότι είτε υπολογιστεί το $tr(\hat{\rho}^n)$ και επεκτείνουμε στους πραγματικούς (μιγαδικούς) αριθμούς είτε υπολογιστεί το $tr(\hat{\rho}^a)$, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο.

Υπολογισμός της εντροπίας μίας θερμικής κατάστασης με τη μέθοδο της ρεπλίκας

Έχει υπολογιστεί η θερμική κατάσταση και δίνεται από τη σχέση (5.9):

$$\hat{\rho}_0 = (1 - |\tau|^2) \sum_{k=0}^{\infty} |\tau|^{2k} |k\rangle \langle k| \quad (5.9)$$

με $|\tau| = \langle \hat{n} \rangle / (1 + \langle \hat{n} \rangle)$. Ο υπολογισμός της εντροπίας von Neumann είναι άμεσος, καθώς ο τελεστής πυκνότητας βρίσκεται σε διαγώνια μορφή:

$$\begin{aligned} S(\hat{\rho}_0) &= (\langle \hat{n} \rangle + 1) \log(\langle \hat{n} \rangle + 1) - \langle \hat{n} \rangle \log \langle \hat{n} \rangle \\ &= \ln \frac{1}{1 - |\tau|^2} + \frac{|\tau|^2}{1 - |\tau|^2} \ln \frac{1}{|\tau|^2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Στη συνέχεια θα υπολογιστεί με τη μέθοδο της ρεπλίκας. Θα χρησιμοποιηθεί η μια διαγώνια μορφή της σχέσης (5.11):

$$\hat{\rho}_0 = \int \frac{d^2 a}{\pi} P(a, a^*) |a\rangle \langle a| = \frac{1}{\pi} \frac{1 - |\tau|^2}{|\tau|^2} \int d^2 a e^{-|a|^2 \frac{1 - |\tau|^2}{|\tau|^2}} |a\rangle \langle a| \quad (5.11)$$

Με αλλαγή μεταβλητών $a \rightarrow |\tau|a$ η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{\pi} \frac{1 - |\tau|^2}{|\tau|^2} \int d^2a e^{-|a|^2(1-|\tau|^2)} ||\tau|a\rangle \langle |\tau|a| \quad (5.12)$$

Η έκφραση για το ίχνος $tr(\hat{\rho}_0^n)$ μπορεί να γραφεί

$$tr(\hat{\rho}_0^n) = \int \frac{d^2a_1}{\pi} \langle a_1 | \hat{\rho}_0^n | a_1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2a_1 \int d^2a_2 \dots \int d^2a_n \rho(a_1, a_2) \dots \rho(a_n, a_1) \quad (5.13)$$

με

$$\rho(a_i, a_j) = \langle a_i | \hat{\rho} | a_j \rangle = (1 - |\tau|^2) e^{-|a_i|^2/2 - |a_j|^2/2 + |\tau|^2 a_i^* a_j} \quad (5.14)$$

Επομένως, η σχέση (5.13) γράφεται

$$tr(\hat{\rho}_0^n) = \frac{(1 - |\tau|^2)^n}{\pi^n} \int d^2a_1 \int d^2a_2 \dots \int d^2a_n e^{-\bar{a}^\dagger M \bar{a}} \quad (5.15)$$

όπου $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ και

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -|\tau|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -|\tau|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|\tau|^2 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Η ορίζουσα αυτού του πίνακα είναι $det M = 1 - |\tau|^{2n}$ και τα ολοκληρώματα είναι Γκαουσιανά, συνεπάγεται, λοιπόν, ότι

$$tr(\hat{\rho}_0^n) = \frac{(1 - |\tau|^2)^n}{1 - |\tau|^{2n}} \quad (5.17)$$

Από την οποία προκύπτει ότι

$$-\frac{\partial}{\partial n} tr(\hat{\rho}_0^n) \Big|_{n=1+} = \ln \frac{1}{1 - |\tau|^2} + \frac{|\tau|^2}{1 - |\tau|^2} \ln \frac{1}{|\tau|^2} \quad (5.18)$$

Αποτέλεσμα που συμπίπτει με τη σχέση (5.10).

Παραγωγή εντροπίας από τη δράση του τελεστή Squeezing σε μια κατασταση Fock

Στη συνέχεια, θα εξετασθεί η παραγωγή εντροπίας από έναν two mode squeezer. Όπως αναλύθηκε στην παράγραφο 2.4, ο two mode squeezer δίνεται από τη σχέση

$$\hat{U} = e^{-\xi \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + \xi^* \hat{a} \hat{b}} \quad (5.19)$$

με $\xi = |\xi|e^{i\phi}$ η παράμετρος squeezing. Αυτός θα δράσει στην κατάσταση $|m\rangle_a|0\rangle_b$ (το σύστημα a ονομάζεται signal mode και το b idler mode) και η παραγόμενη κατάσταση θα είναι $\hat{\rho}_{SQ}$. Ο μειωμένος τελεστής πυκνότητας $\hat{\rho}_m$ έχει υπολογιστεί στη βιβλιογραφία [20], [21] και δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\rho}_m = \text{tr}(\hat{\rho}_{SQ}) = \sum_k p_k^m |k\rangle\langle k|$$

με

$$p_k^m = (1 - |\tau|^2)^{m+1} \binom{k+m}{k} |\tau|^{2k}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (5.20)$$

Με βάση αυτό, υπολογίζεται

$$\text{tr}(\hat{\rho}_m^n) = \sum_{l_1} \langle l_1 | \hat{\rho}_m^n | l_1 \rangle = \sum_{l_i} \langle l_1 | \hat{\rho}_m | l_2 \rangle \dots \langle l_n | \hat{\rho}_m | l_1 \rangle \quad (5.21)$$

Το κάθε στοιχείο ισούται με $\langle l_i | \hat{\rho}_m^n | l_j \rangle = p_i^m \delta_{ij}$ και συνεπώς ότι

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{\rho}_m^n) &= \sum_j p_j^m = \sum_j \left[(1 - |\tau|^2)^{m+1} \binom{j+m}{j} |\tau|^{2nj} \right]^n \\ &= \frac{(1 - |\tau|^2)^{n(m+1)}}{|\tau|^{2n}} \sum_j \binom{j+m}{j}^n (|\tau|^{2n})^{j+1} \\ &= \frac{(1 - |\tau|^2)^{n(m+1)}}{|\tau|^{2n}} \text{Li}_{-n}^m(|\tau|^{2n}) \end{aligned} \quad (5.22)$$

όπου

$$\text{Li}_{-n}^{(m)}(\zeta) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m}{k}^n \zeta^{k+1}. \quad (5.23)$$

και ο όρος $\text{Li}_{-n}^{(1)}(\zeta)$ είναι γνωστός σαν τον πολυλογάριθμο τάξης $-n$.

Τώρα μπορεί να υπολογιστεί η εντροπία για το υποσύστημα $\hat{\rho}_m$

$$\begin{aligned} S_m &= -\frac{\partial}{\partial n} \text{tr}(\hat{\rho}_m^n) \Big|_{n=1} = \ln \frac{|\tau|^2}{(1 - |\tau|^2)^{m+1}} \\ &\quad - \frac{(1 - |\tau|^2)^{m+1}}{|\tau|^2} \frac{\partial}{\partial n} \text{Li}_{-n}^{(m)}(|\tau|^{2n}) \Big|_{n=1}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

όπου λήφθηκε υπόψη ότι $\text{Li}_{-1}^{(m)}(\zeta) = \zeta/(1 - \zeta)^{m+1}$.

Εαν η αρχική κατάσταση η $|m\rangle_a$ ήταν η $|0\rangle_a$, τότε με βάση τη σχέση (5.24) η εντροπία S_0 είναι η εντροπία μιας θερμικής κατάστασης, όπως αναμενόταν, αφού

ο μειωμένος τελεστής πυκνότητας για μια two mode squeezed κατάσταση του κενού είναι αυτός της θερμικής κατάστασης με $|\tau| = \tanh|\xi|$. Η σχέση (5.24) μπορεί να γραφεί επίσης στη μορφή

$$S_m = (m+1)S_0 + \ln m! - (1 - |\tau|^2)^{m+1} \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m}{k} |\tau|^{2k} \ln \frac{(k+m)!}{k!}. \quad (5.25)$$

Παραγωγή εντροπίας από τη δράση του τελεστή Squeezing σε μια υπέρθεση καταστάσεων Fock

Στη συνέχεια, θα εξεταστεί η περίπτωση που αντί για την $|m\rangle$ η κατάσταση θα είναι μια υπέρθεση καταστάσεων Fock, μια εκ των οποίων είναι η κατάσταση του κενού. [22]

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + z|m\rangle}{\sqrt{1+z^2}} \quad (5.26)$$

όπου $z \in \mathbb{R}$. Σ' αυτή την περίπτωση, ο μειωμένος τελεστής πυκνότητας δεν είναι διαγώνιος. Ο τελεστής της σχέσης (5.19), με χρήση της σχέσης των Baker-Campbell-Hausdorff, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\hat{U} = e^{-\nu} e^{-\nu(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b})} e^{\tau^* \hat{a} \hat{b}} \quad (5.27)$$

με $\nu = \ln(\cosh|\xi|)$ και $\tau = \frac{\xi}{|\xi|} \tanh|\xi|$. Η δράση του τελεστή αυτού στην $|\psi\rangle|0\rangle$ δίνει την κατάσταση $|\Psi\rangle$. Στη βάση των σύμφωνων καταστάσεων προκύπτει

$$\begin{aligned} \langle a, \beta | \Psi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \left(\langle a, \beta | \hat{U} | 0, 0 \rangle + z \langle a, \beta | \hat{U} | m, 0 \rangle \right) \\ &= \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1+z^2}} \left(e^{-\tau a^* \beta^*} \langle a, \beta | 0, 0 \rangle + z e^{-\tau a^* \beta^*} \langle a, \beta | m, 0 \rangle \right) \\ &= \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1+z^2}} e^{-|a|^2/2 - |\beta|^2/2 - \tau a^* \beta^*} \left(1 + z e^m \frac{a^*}{\sqrt{m!}} \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Σημειώνεται ότι $e^{-2\nu} = 1 - \tanh^2|\xi| = 1 - |\tau|^2$, επομένως $e^{-\nu} = \sqrt{1 - |\tau|^2}$. Η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\langle a, \beta | \Psi \rangle = \frac{\sqrt{1 - |\tau|^2}}{\sqrt{1+z^2}} e^{-|a|^2/2 - |\beta|^2/2 - \tau a^* \beta^*} (1 + ca^*) \quad (5.29)$$

όπου $c = z \frac{(1-|\tau|^2)^{m/2}}{\sqrt{m!}}$. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα στοιχεία πίνακα του μειωμένου τελεστή πυκνότητας στη βάση των σύμφωνων καταστάσεων:

$$\begin{aligned} \rho(a_1, a_2) &= \langle a_1 | \text{tr}_B[|\Psi\rangle\langle\Psi|] | a_2 \rangle \\ &= \int \frac{d^2\beta}{\pi} \langle a, \beta | \Psi \rangle (\langle a, \beta | \Psi \rangle)^* \\ &= \frac{1-|\tau|^2}{1+z^2} e^{-|a_1|^2/2-|a_2|^2/2} (1+ca_1^{*m})(1+ca_2^m) \int \frac{d^2\beta}{\pi} e^{-|\beta|^2/2-\tau a_1^* \beta^* - \tau^* a_2 \beta} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Τελικά

$$\rho(a_1, a_2) = \frac{1-|\tau|^2}{1+z^2} e^{-|a_1|^2/2-|a_2|^2/2+|\tau|^2 a_1^* a_2} (1+ca_1^{*m})(1+ca_2^m) \quad (5.31)$$

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, μπορεί να υπολογιστεί η ροπή για τον τελεστή πυκνότητας

$$\text{tr}(\hat{\rho}^n) = \frac{(1-|\tau|^2)^n}{\pi^n (1+z^2)^n} \prod_{j=1}^n \int d^2 a_j |1+ca_j^m|^2 e^{-\bar{a}^\dagger M \bar{a}} \quad (5.32)$$

όπου ο πίνακας M είναι αυτός της σχέσης (5.16). Για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα εισάγονται πηγές: $x^m e^{-x^2} = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} e^{-x^2 + \lambda x} |_{\lambda=0}$. Με βάση αυτό η σχέση (5.32) γράφεται

$$\text{tr}(\hat{\rho}^n) = \frac{(1-|\tau|^2)^n}{\pi^n (1+z^2)^n} \Pi_{\partial\lambda}(n) \prod_{j=1}^n \int d^2 a_j e^{-\bar{a}^\dagger M \bar{a} + \bar{a}^\dagger \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^\dagger \bar{a}} \Big|_{\bar{\lambda}=0} \quad (5.33)$$

όπου $\Pi_{\partial\lambda}(n) = \prod_{j=1}^n |1+c\partial^m/\partial\lambda_j^m|$. Το ολοκλήρωμα της σχέσης (5.33) είναι Γκαουσιανό και υπολογίζεται

$$\text{tr}(\hat{\rho}^n) = \frac{\text{tr}(\hat{\rho}_0^n)}{(1+z^2)^n} \Pi_{\partial\lambda}(n) e^{\bar{\lambda}^\dagger N \bar{\lambda}} \Big|_{\bar{\lambda}=0} \quad (5.34)$$

όπου ο όρος $\text{tr}(\hat{\rho}_0^n)$ είναι αυτός της σχέσης (5.17) και $N = (1-|\tau|^{2n})^m M^{-1}$, ενώ ο αντίστροφός του M είναι

$$M^{-1} = \frac{1}{1-|\tau|^{2n}} \begin{pmatrix} 1 & |\tau|^2 & \dots & |\tau|^{2(n-1)} \\ |\tau|^{2(n-1)} & 1 & \dots & |\tau|^{2(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |\tau|^2 & |\tau|^4 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

Όσον αφορά τις παραγωγίσεις που εμφανίζονται στην σχέση (5.34) ισχύουν τα εξής: οι παραγωγίσεις περιττής τάξης δεν θα υπάρχουν, καθώς το εκθετικό έχει

δύο όρους του λ και στις περιττές παραγωγίσεις ένα από αυτά θα επιβιώνει και θα μηδενίζεται στο τέλος, όταν τεθεί $\lambda=0$. Για τον ίδιο λόγο θα πρέπει ο αριθμός των παραγωγίσεων ως προς λ και λ^* να είναι ο ίδιος. Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι ο όρος $\Pi_{\partial\lambda}(n)$ μπορεί να υπολογιστεί ως άθροισμα των παρακάτω όρων:

$$\begin{aligned} k = 0 & : \quad \Pi_0(n) = 1 \\ k = 1 & : \quad \Pi_2(n) = \sum_{j_1, j_2=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda_{j_1} \partial \lambda_{j_2}^*} \right)^m \\ & \quad \vdots \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$k = n : \quad \Pi_{2n}(n) = \left(\frac{\partial^{2n}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_1^* \dots \partial \lambda_n \partial \lambda_n^*} \right)^m \tag{5.37}$$

Αρα η σχέση (5.34) μπορεί να γραφεί

$$\text{tr}(\hat{\rho}_m^n) = \frac{\text{tr}(\hat{\rho}_0^n)}{(1+z^2)^n} \sum_{k=0}^n c^{2k} \Pi_{2k}(n) e^{\bar{\lambda}^\dagger N \bar{\lambda}} \Big|_{\bar{\lambda}=\bar{0}} \tag{5.38}$$

Για $k = n$ αποδεικνύεται [22] ότι

$$\Pi_{2n} \exp(\bar{\lambda}^\dagger N \bar{\lambda}) \Big|_{\bar{\lambda}=\bar{0}} = m!^n \frac{1 - |\tau|^{2n}}{|\tau|^{2n}} \text{Li}_{-n}^{(m)}(|\tau|^{2n}) \tag{5.39}$$

Εαν διαχωριστούν οι όροι που δεν έχουν εξάρτηση από το $|\tau|$ στον αριθμητή αυτοί είναι ακριβώς $\binom{n}{k}$:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{\rho}_m^n) &= \frac{\text{tr}(\hat{\rho}_0^n)}{(1+z^2)^n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} c^{2k} \Pi_{2k}(n) e^{\bar{\lambda}^\dagger N \bar{\lambda}} \Big|_{\bar{\lambda}=\bar{0}} + c^{2n} m!^n \frac{1 - |\tau|^{2n}}{|\tau|^{2n}} \text{Li}_{-n}^{(m)}(|\tau|^{2n}) \right] \\ &= \frac{\text{tr}(\hat{\rho}_0^n)}{(1+z^2)^n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{c^{2k}}{(1-|\tau|^{2n})^{km}} + \sum_{k=0}^{n-1} c^{2k} \tilde{\Pi}_{2k}(n) e^{\bar{\lambda}^\dagger N \bar{\lambda}} \Big|_{\bar{\lambda}=\bar{0}} \right. \\ &\quad \left. + c^{2n} m!^n \frac{1 - |\tau|^{2n}}{|\tau|^{2n}} \text{Li}_{-n}^{(m)}(|\tau|^{2n}) \right] \\ &= \frac{\text{tr}(\hat{\rho}_0^n)}{(1+z^2)^n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z^{2k} \left(\frac{1 - |\tau|^2}{1 - |\tau|^{2n}} \right)^{km} + \sum_{k=0}^{n-1} c^{2k} \tilde{\Pi}_{2k}(n) e^{\bar{\lambda}^\dagger N \bar{\lambda}} \Big|_{\bar{\lambda}=\bar{0}} \right. \\ &\quad \left. + z^{2n} \left(\frac{1 - |\tau|^2}{1 - |\tau|^{2n}} \right)^{mn} - z^{2n} \left(\frac{1 - |\tau|^2}{1 - |\tau|^{2n}} \right)^{mn} + \frac{z^{2n}}{\text{tr} \hat{\rho}_0^n} \frac{(1 - |\tau|^2)^{n(m+1)}}{|\tau|^{2n}} \text{Li}_{-n}^{(m)}(|\tau|^{2n}) \right] \end{aligned}$$

Συνεπάγεται

$$\text{tr}(\hat{\rho}_m^n) = \frac{\text{tr}(\hat{\rho}_0^n)}{(1+z^2)^n} \left[\left(1 + z^2 \left(\frac{1 - |\tau|^2}{1 - |\tau|^{2n}} \right)^m \right)^n - z^{2n} \left(\frac{1 - |\tau|^2}{1 - |\tau|^{2n}} \right)^{mn} + F^{(m)}(n) + z^{2n} \frac{\text{tr}(\hat{\rho}_m^n)}{\text{tr} \hat{\rho}_0^n} \right] \tag{5.40}$$

όπου το $tr(\hat{\rho}_m)$ δίνεται από τη σχέση (5.22). Για να βρεθεί η εντροπία, πρέπει να παραγωγιστεί η παραπάνω σχέση ως προς n . Από αυτή τη διαδικασία προκύπτει

$$S(z) = \frac{1}{1+z^2}S_0 + \frac{z^2}{1+z^2}S_m - \frac{\partial}{\partial n}F^{(m)}(n)\Big|_{n=1}. \quad (5.41)$$

Ο όρος $F^{(m)}(n)$ μπορεί να γραφεί

$$F^{(m)}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{2k}}{m!^k} \left(\frac{1-|\tau|^2}{1-|\tau|^{2n}} \right)^{mk} \sum_{l=0}^{(n-1)k} A_k(n, l) |\tau|^{2(l+m-1)} \quad (5.42)$$

με τον περιορισμό

$$\begin{aligned} A_k(1, l) &= 0 \\ A_0(n, l) &= 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

καθώς οι όροι αυτοί έχουν εξεταστεί χωριστά. Για ευκολία η σχέση (5.42) μπορεί να γραφεί

$$F^{(m)}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} R^{(m)}(n, k). \quad (5.44)$$

Ο όρος n υπάρχει και στο άνω όριο του αθροίσματος. Για να παραγωγιστεί το άνω όριο του αθροίσματος χρησιμοποιείται ο τύπος των Euler-McLaurin:

$$\begin{aligned} F^{(m)}(n) &= \int_0^{n-1} dx R^{(m)}(n, x) + \frac{1}{2} [R^{(m)}(n, n-1) + R^{(m)}(n, 0)] + \\ &+ \sum_{r=1}^p \frac{B_{2r}}{(2r)!} [R^{(m)(2r-1)}(n, n-1) - R^{(m)(2r-1)}(n, 0)] + \text{Rem} \end{aligned}$$

όπου Rem κάποιο υπόλοιπο και B_{2r} οι αριθμοί Bernoulli. Αν εφαρμοστεί ο παραπάνω τύπος και εκτελεστούν οι παραγωγίσεις ως προς n ως προς το πρώτο όρισμα και στη συνέχεια αντικατασταθεί το n με 1, το δεύτερο όρισμα θα γίνει 0, το οποίο σύμφωνα με τη σχέση (5.43) θα μηδενίσει όλο τον όρο. Επομένως

$$\frac{d}{dn} F^{(m)}(n)\Big|_{n=1} = 0. \quad (5.45)$$

Άρα η εντροπία του υπόσυστηματος λαμβάνει την τελική μορφή

$$S(z) = \frac{1}{1+z^2}S_0 + \frac{z^2}{1+z^2}S_m \quad (5.46)$$

Το αποτέλεσμα έχει απλή μορφή. Η εντροπία του συστήματος είναι ένας κυρτός συνδυασμός των S_0 και S_m . Τέλος, φαίνεται ότι η αρχική κατάσταση που ελαχιστοποιεί την εντροπία της διεμπλοκής είναι αυτή του κενού.

Βιβλιογραφία

- [1] Preskill J., *Lecture notes*, <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>
- [2] Plenio M., Virmani S., *An introduction to entanglement measures*, quant-ph/0504163, 2005
- [3] J. Audretsch , *Entangled Systems*, Wiley-VCH, (2007)
- [4] P. Kok, B. W. Lovett, *Optical Quantum Information Processing*, Cambridge University Press (2010)
- [5] S. L. Braunstein, P. van Loock, *Quantum Information with Continuous variables*, Rev. Mod. Phys. 77 (2005)
- [6] J. R. Glauber, *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*, Phys. Rev. 131, 6 (1963)
- [7] U. Leonhardt, *Essential Quantum Optics: From Quantum Measurements to Black Holes*, Cambridge University Press (2010)
- [8] C. C. Gerry, P. L. Knight, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press (2005)
- [9] J. J. Gong and P. K. Aravind, *Expansion coefficients of a squeezed coherent state in the number state basis*, Am. J. Phys. 58 1003 (1990)
- [10] S. L. Braunstein, *Squeezing as an irreducible resource*, quant-ph/9904002v2 (2008)
- [11] P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley-VCH (2001)
- [12] C.L. Mehta, *Diagonal coherent state representation of quantum operators*, Phys. Rev. Lett. 18 (1967)
- [13] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press (1995)

- [14] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, *Quantum Entanglement*, quant-ph/0702225v2 (2007)
- [15] J. Eisert, M.B. Plenio, *Introduction to the basics of entanglement theory in continuous-variable systems*, quant-ph/0312071v2 (2003)
- [16] J. Eisert, M. Wolf, *Gaussian Quantum Channels*, Quantum Information with Continuous Variables of Atoms and Light, Imperial College Press (2007)
- [17] C. Weedbrook, S. Pirandola, R. Garcia-Patron, N. J. Cerf, T. C. Ralph, J. H. Shapiro, S. Lloyd *Gaussian Quantum Information*, arXiv:1110.3234 [quant-ph] (2011)
- [18] W. Feller *Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol II, John Wiley and Sons, 1950
- [19] F. Carlson, *Sur une classe de series de Taylor*, Uppsala, Sweden, 1914
- [20] R. Garcia-Patron, C. Navarrete-Benlloch, S. Lloyd, J. H. Shapiro, and N. J. Cerf, *Majorization Theory Approach to the Gaussian Channel Minimum Entropy Conjecture*, Phys. Rev. Lett. 108, 110505 (2012)
- [21] C. Navarrete-Benlloch, R. Garcia-Patron, J. H. Shapiro, and N. J. Cerf, *Enhancing quantum entanglement by photon addition and subtraction*, Phys. Rev. A 86, 012328 (2012)
- [22] C.N. Gagatsos, A. I. Karanikas, G. Kordas, N.J. Cerf *Entropy generation in Gaussian quantum transformations: applying the replica method to continuous-variable quantum information theory*, npj Quantum information (2015) 2, 15008, doi:10.1038/npjqi.2015.8
- [23] P. Lambropoulos, D. Petrosyan *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*
- [24] A. Ekert, P. Knight, *Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition*, Am. J. of Phys. 63, 415 (1995)