ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μοντέλο περιγραφής των διαστάσεων της Αλγεβρικής σκέψης μαθητών Γυμνασίου

Ιωάννης Ζαχαρίας
Δ201402

Επιβλέπων Καθηγητής: Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Αθήνα
Σεπτέμβριος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 21η Σεπτεμβρίου 2017 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Επικ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪ Θ. Ζαχαριάδη (Επιβλέπων)	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Μ. Πιττάλη	Εξωτ. Συνεργάτης Παν. Κύπρου

Αφιερώνεται στην Ελένη,

την Σοφία

και την Μαρία

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο και την Καθηγήτρια, κα Πόταρη Δέσποινα που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στη συμβουλευτική επιτροπή αυτής της εργασίας.

Θα ήθελα να εκφράσω τις απεριόριστες ευχαριστίες μου στον Δρ. Πιττάλη Μάριο, ο οποίος με καθοδήγησε σε όλη τη διάρκεια της ερευνάς μου, και του οποίου ο επαγγελματισμός και η αφοσίωσή του με βοήθησαν στον προγραμματισμό και την ολοκλήρωση της εργασίας. Ελπίζω η φιλική πλέον σχέση που έχουμε καλλιεργήσει να μας προσφέρει ευκαιρίες συνεργασίας και στο μέλλον.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές αυτού του Μεταπτυχιακού προγράμματος, που μέσα από τις διαλέξεις τους, αλλά και από τις συζητήσεις στις οποίες με πάθος συμμετείχα, με βοήθησαν να αναπτυχθώ επαγγελματικά και να γίνω καλύτερος δάσκαλος.

Ευχαριστώ μέσα από την καρδιά μου, τους συνάδελφους εκπαιδευτικούς που γνώρισα στο μεταπτυχιακό αυτό πρόγραμμα, ένα μεγάλο πλήθος αξιόλογων ανθρώπων, για τη συνεργασία και τις συζητήσεις που κάναμε εντός και εκτός των αιθουσών του πανεπιστημίου.

Ευχαριστώ πολύ την κα. Διονυσία Μπακογιάννη και την κα. Ελένη Κλη, για την πολύτιμη βοήθειά τους.

Αλλά περισσότερο από όλους ευχαριστώ τη σύζυγό μου Ελένη που χωρίς την παρότρυνσή της και την υποστήριξή της δε θα μπορούσα να είχα ξεκινήσει και ολοκληρώσει το πρόγραμμα αυτό. Ευχαριστώ όμως και τα μικρά μου κορίτσια, Σοφία και Μαρία, που με στήριξαν με υπομονή και αγάπη.

Περίληψη

Το τι είναι άλγεβρα ή το τι είναι αλγεβρική σκέψη ή αλγεβρικός συλλογισμός απασχολεί τους ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών για περισσότερο από είκοσι χρόνια. Οι θεωρητικές προσεγγίσεις διερευνούν το είδος των αλγεβρικών δραστηριοτήτων, τη συμπεριφορά των μαθητών που ασχολούνται με αυτές τις δραστηριότητες και το είδος της αφαιρετικής σκέψης και της αλγεβρικής κατανόησης. Μέσα στο πλήθος των θεωρητικών προσεγγίσεων, στη προσπάθεια να διασαφηνίσουμε τις έννοιες αυτές, ξεχωρίζουμε τους φακούς ανάγνωσης των Kieran (2007) και Kaput (2008) που έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: βλέπουν τις ικανότητες του μαθητή που ενεργεί, ο Kaput μέσα από τις δραστηριότητες που μπορούν να χαρακτηριστούν αλγεβρικές και η Kieran μέσα από τον τρόπο σκέψης των μαθητών που ασχολούνται με τις δραστηριότητες αυτές. Με βάση τη θεωρητική προσέγγιση των δύο αυτών ερευνητών προτείναμε ένα μοντέλο της δομής της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Υποθέσαμε ότι η Αλγεβρική σκέψη έχει τέσσερις διακριτές διαστάσεις που τις ονομάσαμε (α) Γενικευμένη αριθμητική, (β) Συναρτησιακή σκέψη, (γ) Μετασχηματιστική ικανότητα και (δ) Μοντελοποίηση – μετα-άλγεβρα – αποδείξεις. Στόχος της έρευνας ήταν να επιβεβαιώσουμε εμπειρικά το μοντέλο που προτείνουμε, έτσι σχεδιάσαμε και πραγματοποιήσαμε έρευνα σε 134 μαθητές τις Γ γυμνασίου, μέσω έργων που δομήσαμε βάσει προηγούμενων ερευνών και της υπάρχουσας βιβλιογραφίας. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε υψηλό βαθμό συσχέτισης των παραγόντων «συναρτησιακή σκέψη» και «Μοντελοποίηση – μετα-άλγεβρα – απόδειξη». Ως εκ τούτου εξετάσαμε την εγκυρότητα ενός εναλλακτικού μοντέλου βάσει του οποίου οι παράγοντες «συναρτησιακή σκέψη» και «Μοντελοποίηση – μετα-άλγεβρα – απόδειξη» σχηματίζουν ένα ενιαίο παράγοντα. Το νέο μοντέλο των τριών διακριτών παραγόντων της αλγεβρικής σκέψης των

μαθητών επιβεβαιώθηκε με τα αποτελέσματα της έρευνας. Η έρευνα έδειξε ότι υπάρχει μία ιεραρχική σχέση μεταξύ των τριών παραγόντων της αλγεβρικής σκέψης: η μετασχηματιστική ικανότητα και η ικανότητα χειρισμού της αλγεβρικής γλώσσας αποτελούν βασική προϋπόθεση ώστε οι μαθητές να επιτύχουν τη χρήση των αλγεβρικών δομών για σκοπούς γενίκευσης και εξαγωγής συμπερασμάτων και τέλος ακολουθεί ο παράγοντας της μετα-άλγεβρας που εμπεριέχει πιο δύσκολες ικανότητες όπως η συναρτησιακή σκέψη, η επίλυση προβλημάτων που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών, η χρήση μοντέλων για αναπαράσταση προβλημάτων και σχέσεων καθώς και η λειτουργία της απόδειξης. Η εμπειρική επιβεβαίωση του μοντέλου αυτού αποτελεί τη συνεισφορά της παρούσας εργασίας και μπορεί να προσφέρει στους εκπαιδευτικούς και στους ερευνητές ένα μέσο για να εξετάσουν την πολύπλοκη φύση της αλγεβρικής σκέψης μαθητών γυμνασίου.

Λέξεις κλειδιά

Αλγεβρική σκέψη, συλλογισμός, ικανότητα, γενίκευση.

Abstract

What is algebra or what is algebraic thinking or algebraic reasoning concerns mathematics teaching researchers for more than twenty years. Theoretical approaches investigate the type of algebraic activities, the behavior of the students involved in these activities and the type of abstract thinking and algebraic understanding. Within the multitude of theoretical approaches, in the effort to clarify these concepts, we distinguish the reading lenses of Kieran (2007) and Kaput (2008) that have a common feature: they see the abilities of the student acting, Kaput, through activities that can be characterized as algebraic and Kieran through the way of thinking of the students engaged in these activities. Based on the theoretical approach of these two researchers, we proposed a model of the structure of students' algebraic thinking. We assumed that Algebraic thinking has four distinct dimensions, which we have called (a) Generalized Arithmetic, (b) Functional Thinking, (c) Transformation and (d) Modeling - Meta-Algebra - Proof. The aim of the research was to empirically confirm the model we propose, so we designed and completed a research with 134 high school students through projects we built on previous research and existing literature. The analysis of the data showed a high degree of correlation between the factors "functional thinking" and "modeling - meta-algebra - proof". We therefore examined the validity of an alternative model whereby factors "functional thinking" and "modeling - meta-algebra - proof" form a single factor. The new model of the three distinct factors of algebraic thinking of students was confirmed with the results of the survey. Research has shown that there is a hierarchical relationship between the three factors of algebraic thinking: transformational ability and ability to handle algebraic language are a basic prerequisite for students to achieve the use of algebraic structures for the purpose of generalizing and inferring conclusions, and finally the factor of post-algebra involving more difficult abilities such as functional thinking, solution of problems involving relations between variables, the use of models to represent problems and relations and proof. Empirical confirmation of this model is the contribution of this work and can provide teachers and researchers with a means to examine the complexity of the algebraic thinking of high school students.

Key words

Algebraic thinking, reasoning, ability, generalization.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σημαντικός αριθμός ερευνητικών εργασιών έχουν εξετάσει το είδος των αλγεβρικών δραστηριοτήτων στην εκπαίδευση (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008· Drijvers, Goddijn, & Kindt, 2011· Kaput, 2000). Παρόλα αυτά στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν έχει διευκρινιστεί η έννοια της αλγεβρικής σκέψης στο γυμνάσιο με τέτοιο τρόπο, ώστε να αποτελέσει αναπόσπαστο κομμάτι τις διδασκαλίας και της μάθησης των μαθητών. Το έγγραφο των επιπέδων του National Council of Teachers of Mathematics (2000) διαχωρίζει τις δραστηριότητες της σχολικής άλγεβρας σε κατηγορίες, δίνοντας έμφαση στην ικανότητα γενίκευσης, τη διερεύνηση μοτίβων, σχέσεων, συναρτήσεων, την αναπαράσταση σχέσεων με τη χρήση συμβόλων και την ανάλυση της μεταβολής σε διαφορετικά πλαίσια. Επιπρόσθετα, είναι ευρέως αποδεκτός ο διαχωρισμός μεταξύ της αλγεβρικής σκέψης σε σχέση με το τι διδάσκεται στα σχολείο ως άλγεβρα. Η αλγεβρική σκέψη θεωρείται ότι μπορεί να κατακτηθεί από όλους τους μαθητές και αξιολογείται ως ζωτικής σημασίας για τις ανάγκες της κοινωνίας και της εργασίας (Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2005). Ο όρος αλγεβρική σκέψη αναφέρεται πλέον σε ένα ευρύτερο εννοιολογικό πλαίσιο που ξεφεύγει από την απλή καταγραφή συγκεκριμένων έργων. Για αυτό τα τελευταία χρόνια δίνεται ιδιαίτερη σημασία στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης σε όλο το φάσμα της εκπαίδευσης παρά στην απλή διδασκαλία εννοιών σε θεματικές ενότητες άλγεβρας στο γυμνάσιο και στο λύκειο (NCTM, 2000). Ο σχεδιασμός των αναλυτικών προγραμμάτων κινείται γύρω από άξονες που θέλουν τους μαθητές να εμπλέκονται με αλγεβρικές δραστηριότητες από την αρχή της εκπαίδευσής τους, ακόμα και από το νηπιαγωγείο, ώστε οι μαθητές να αναπτύξουν ικανότητες που μπορούν να χαρακτηριστούν αλγεβρικές. Οι δραστηριότητες αυτές περιλαμβάνουν εργασίες με μοτίβα, σχέσεις και συναρτήσεις, μελέτη μαθηματικών δομών, αναπαράσταση σχέσεων σε μαθηματικό πλαίσιο, δημιουργία μοντέλων, και μελέτη της έννοιας της αλλαγής σε ποικίλα πλαίσια (NCTM, 2000).

Η ανάγκη ενσωμάτωσης της άλγεβρας σε όλο το φάσμα της εκπαίδευσης προκύπτει από το γεγονός ότι η άλγεβρα συνδέεται με την δημιουργία, την ανάπτυξη και την επικοινωνία των εννοιών σε όλους τους τομείς των μαθηματικών, εξασφαλίζοντας την ενότητα της γνώσης, από την αριθμητική, τη γεωμετρία μέχρι και τη στατιστική (NCTM, 2000). Ο σημαντικός ρόλος της άλγεβρας δεν περιορίζεται στο χώρο των μαθηματικών αλλά είναι και βασικό συστατικό γνώσης στις επιστήμες και τη μηχανική και οι αλγεβρικές ικανότητες είναι προϋπόθεση για σπουδές σε ανώτερα μαθηματικά αλλά και για την πρόσβαση σε επιστημονικά, οικονομικά και βιομηχανικά επαγγέλματα (Hatfield, Edwards, Bitter, & Morrow, 2000).

Η ανάγκη ενσωμάτωσης της άλγεβρας σε όλα τα στάδια της εκπαίδευσης και η προσπάθεια εύρεσης τρόπων ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης από τις μικρές τάξεις του δημοτικού, έχει απασχολήσει μεγάλη ομάδα ερευνητών. Σε αυτές τις έρευνες υπάρχουν θεωρητικές προσεγγίσεις για το τι είναι άλγεβρα και αλγεβρική σκέψη (Sfard and Linchevsky, 1994; English και Sharry, 1996; Rivera and Becker, 2007) και πως αυτές οι έννοιες σχετίζονται με τον τρόπο σκέψης των μαθητών. Κάποιοι ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τη σχέση της άλγεβρας με την αριθμητική (Herscovics, N. & Linchevsky, L. , 1994; Carraher et al., 2006; Lins & Kaput, 2004; Radford, 2015), άλλοι με το ποια είναι η δομή (Usiskin, 1988, Watson, 2009; Radford, 2015) και ποια τα χαρακτηριστικά των αλγεβρικών δραστηριοτήτων (Kieran, 1996, Kaput, 1995). Άλλες έρευνες ασχολούνται με τρόπους διδασκαλίας που ενισχύουν την απόκτηση αλγεβρικών γνώσεων (Kieran, 1996, 2011; Kaput, 1995) και σε αρκετές περιπτώσεις οι προτάσεις αυτές αλλά και η προσπάθεια ορισμού των εννοιών που σχετίζονται με την άλγεβρα στηρίζονται στα παρατηρούμενα λάθη των μαθητών στην εργασία τους με αλγεβρικές δραστηριότητες (Kieran, 1981; Booth, 1988; Tall, 1989; Pedemonte, 2008; Healy, L., & Hoyles, C., 2000; MacGregor, M., & Stacey, K., 1993; Prediger, 2010).

Το μεγάλο αυτό πλήθος των ερευνών ασχολείται κυρίως με την ανάγκη ένταξης της άλγεβρας σε όλο το φάσμα της εκπαίδευσης σε αντίθεση με το παραδοσιακό μοντέλο σχολικής εκπαιδευτικής δομής που θέλει την άλγεβρα να διδάσκεται στο γυμνάσιο και στο λύκειο. Παρόλο το μεγάλο πλήθος εργασιών που οδηγούν σε ορισμούς και περιγραφές των εννοιών που σχετίζονται με την άλγεβρα και την αλγεβρική σκέψη των μαθητών δεν μπορέσαμε να βρούμε κάποια έρευνα που να έπεται των αποτελεσμάτων του μεγάλου όγκου ερευνών που να ασχολείται με την άλγεβρα, ή με την εμπειρική επιβεβαίωση κάποιου μοντέλου αλγεβρικής σκέψης ή αλγεβρικής δραστηριότητας στο γυμνάσιο. Η ανάγκη ενσωμάτωσης της άλγεβρας στις πρώτες τάξεις του δημοτικού είναι δεδομένη, αλλά τι γίνεται με το γυμνάσιο; Πώς η μέχρι τώρα διαμόρφωση των αναλυτικών προγραμμάτων έχει επηρεάσει τη δομή της αλγεβρικής σκέψης στο γυμνάσιο; Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών του γυμνασίου και ποια είναι η συμπεριφορά τους όταν ασχολούνται με αλγεβρικές δραστηριότητες;

Θεωρητικό πλαίσιο

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η ανασκόπηση της βασικότερης βιβλιογραφίας για την κατανόηση των εννοιών των όρων «άλγεβρα», «αλγεβρική σκέψη» ή «αλγεβρικός συλλογισμός». Μέσα από διαφορετικούς φακούς ανάγνωσης των ερευνών που υπάρχουν στο πλαίσιο αυτό, αναγνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά των εννοιών που είναι κοινά στις διαφορετικές αναγνώσεις.

Η βάση της θεωρητικής προσέγγισης είναι η άλγεβρα και η ανάλυση του όρου ξεκινάει από γενικούς ορισμούς, από το ότι άλγεβρα είναι ένας κλάδος των μαθηματικών, και στη συνέχεια, μέσα από τις υπάρχουσες αναλύσεις παρουσιάζουμε την εξέλιξη των ορισμών προς την παρουσίαση του όρου «άλγεβρα» σε σχέση με το διδασκόμενο μάθημα στα σχολεία και με τον τρόπο δράσης και σκέψης των μαθητών. Οι θεωρητικές αναλύσεις των Kieran (1996) και Kaput (1995) πιστεύουμε ότι περιγράφουν πλήρως την έννοια της «αλγεβρικής σκέψης» των μαθητών και για αυτό το λόγο αναλύουμε τις αναγνώσεις τους οι οποίες οριοθετούν τους στόχους της έρευνάς μας.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου αναλύουμε τα λάθη που κάνουν οι μαθητές στην ενασχόλησή τους με αλγεβρικές δραστηριότητες και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν με την κατανόηση των εν χρήση εννοιών.

Με βάση τις έρευνες των Kieran και Kaput, στις οποίες αναγνωρίζουμε την κοινή «ουσία» που είναι η σκέψη των μαθητών, συνθέτουμε ένα μοντέλο παραγόντων αλγεβρικής σκέψης, το οποίο παρουσιάζουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου.

Τι είναι Άλγεβρα

Μία πολύ δύσκολη ερώτηση ως προς την απάντησή της είναι το «τι είναι άλγεβρα». Είναι ένας μεγάλος κλάδος των μαθηματικών, είναι ένας τρόπος μαθηματικής δραστηριότητας, ή είναι ένας τρόπος σκέψης; Και πότε μία δραστηριότητα χαρακτηρίζεται αλγεβρική;

Η άποψη ότι η άλγεβρα είναι ένας κλάδος των μαθηματικών με την έννοια ότι ξεκινάει όταν σταματάει η αριθμητική, επικρατούσε στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών για μεγάλο χρονικό διάστημα και έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές. Ενώ κάποιες έρευνες μελέτησαν το «γνωστικό κενό» που δημιουργούσε η μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα (Herscovics, N. & Linchevsky, L. , 1994), κάποιες άλλες έρευνες επικεντρώθηκαν στην ιδέα ότι δεν υπάρχει εμφανής διάκριση μεταξύ της αριθμητικής και της άλγεβρας και ότι η αριθμητική είναι εγγενώς αλγεβρική και η άλγεβρα εγγενώς αριθμητική (Carraher et al., 2006; Lins & Kaput, 2004). Ο Radford (2015) υποστηρίζει ότι οι δραστηριότητες με μοτίβα είναι ο χώρος που η αριθμητική και η άλγεβρα συνυπάρχουν, ενώ ο Watson (2009) παρατηρεί ότι η αναγνώριση της δομής των αλγεβρικών εκφράσεων προϋποθέτει την αναγνώριση της δομής των αριθμητικών εκφράσεων.

Η άλγεβρα ως τρόπος σκέψης έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές. Οι Sfard and Linchevsky (1994) παρατήρησαν ότι οι μαθητές όταν αντιμετωπίζουν αλγεβρικά προβλήματα αντιμετωπίζουν δύο σημαντικές μεταβάσεις: από την κατανόηση απλών λειτουργιών και διαδικασιών, στην κατανόηση της δομής μίας έκφρασης με χρήση αγνώστου και στη συνέχεια στη έννοια της συναρτησιακής διάστασης μίας έκφρασης με χρήση μεταβλητών. Υπάρχει δηλαδή αλλαγή στον τρόπο σκέψης και αντίληψης των αντικειμένων, μία μετάβαση από το διαδικαστικό τρόπο σκέψης στον αφαιρετικό τρόπο σκέψης για την κατανόηση των δομών. Οι English και Sharry (1996), υποστηρίζουν ότι η αναλογική σκέψη, η διαδικασία σύγκρισης αλγεβρικών αντικειμένων, η ανακάλυψη των κοινών τους χαρακτηριστικών, είναι το εργαλείο ανακάλυψης των αλγεβρικών δομών. Οι Rivera και Becker (2007) παρατήρησαν ότι οι μαθητές παράγουν γενικεύσεις για κλάσεις αφηρημένων αντικειμένων μέσω απαγωγικής και επαγωγικής συλλογιστικής: οι απαγωγικές διαδικασίες, στη μελέτη για παράδειγμα ενός μοτίβου, στηρίζει την επαγωγική διαδικασία παραγωγής γενίκευσης. Υπάρχει δηλαδή μία διαδικασία απαγωγικής – επαγωγικής σκέψης. Άλλες έρευνες υποστηρίζουν ότι η επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων σχετίζεται με την ικανότητα επαγωγικής σκέψης αλλά και για τη σύνδεση απαγωγικής δημιουργίας επιχειρημάτων που προηγούνται μίας αλγεβρικής απόδειξης και της παραγωγικής διαδικασίας δημιουργίας της απόδειξης.

Μία κοινή οπτική σε διάφορες προσεγγίσεις του τι είναι Άλγεβρα, είναι το ότι η Άλγεβρα είναι η μελέτη των μαθηματικών συμβόλων και των κανόνων για το χειρισμό των συμβόλων αυτών (Herstein, 1964). Και ενώ η προσέγγιση αυτή είναι και κατανοητή και αποδεκτή, είναι αμφίβολο αν καλύπτει μεγάλο μέρος της αίσθησης που έχουμε για το τι είναι Άλγεβρα. Μία πιο ακριβής προσπάθεια ορισμού είναι το ότι η άλγεβρα είναι ο τρόπος να εκφράζουμε γενικεύσεις για τους αριθμούς, τις ποσότητες, τις σχέσεις και τις συναρτήσεις (Watson, 2009). Και αυτός ο ορισμός παρουσιάζει μία από τις πολλές πτυχές της άλγεβρας. Ο Usiskin (1988) συμπληρώνει ότι άλγεβρα είναι και η μελέτη των δομών αλλά και ένα σύνολο διαδικασιών για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων, δίνει δηλαδή, την πραγματιστική διάσταση της άλγεβρας. Ο Kaput (1995) αναγνώρισε πέντε χαρακτηριστικά της άλγεβρας: γενίκευση και τυποποίηση (generalization and formalization), συντακτικά καθοδηγούμενους χειρισμούς (syntactically guided manipulations), η μελέτη των δομών, η μελέτη συναρτήσεων, σχέσεων και συμμεταβολής και η γλώσσα τυποποίησης. Και για να είμαστε πιο ακριβείς, ο Kaput παρουσίασε τα πέντε αυτά χαρακτηριστικά της άλγεβρας ως τις πέντε μορφές αλγεβρικής σκέψης μαθητών. Σκοπός του ήταν να δείξει ότι η άλγεβρα ενυπάρχει και εμπλουτίζει τις περισσότερες μαθηματικές δραστηριότητες.

Αποτέλεσμα της έρευνας που οδήγησε στη σύνθεση ορισμών για το τι είναι η σχολική άλγεβρα ήταν η θέση του NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (1998), ότι το περιεχόμενο της σχολικής άλγεβρας μπορεί να αναλυθεί θεματικά σε τέσσερις κατηγορίες: συναρτήσεις και σχέσεις, μοντελοποίηση, δομή, γλώσσα και αναπαράσταση.

Ο Howe (2005) ορίζει την άλγεβρα σε σχέση με τη μορφή εργασίας σε μαθηματικά προβλήματα όπως η εργασία με μεταβλητές, αναπαράσταση και μοντελοποίηση καταστάσεων, χειρισμός και μετατροπές εκφράσεων και εξισώσεων και η ανάδειξη των αλγεβρικών δομών σε αριθμητικές παραστάσεις. Ένας άλλος ορισμός που φαίνεται να συγκεντρώνει τις πιθανές προσεγγίσεις της έννοιας της άλγεβρας είναι αυτός που αναπτύχθηκε από τους Mason, Graham και Johnston-Wilder (2005) και που ορίζει την άλγεβρα σύμφωνα με την εκτιμώμενη συμπεριφορά των μαθητών. Ένας μαθητής λοιπόν που ασχολείται με αλγεβρικές δραστηριότητες μπορεί να εκφράζει γενικευμένες προτάσεις και κατανοεί την έννοια της γενίκευσης, έρχεται αντιμέτωπος με πολλές εκφράσεις της ίδιας γενίκευσης, χρησιμοποιεί με άνεση τα σύμβολα, είτε όταν χρησιμοποιούνται ως άγνωστοι είτε ως απροσδιόριστες ποσότητες σε εξισώσεις ή ανισότητες, κατανοεί τις αλγεβρικές δομές που αναδεικνύουν και τους κανόνες τις αριθμητικής και τους κανόνες χειρισμού αλγεβρικών εκφράσεων.

Σε μία άλλη έρευνα (Lee, 1997), ρωτήθηκαν καθηγητές μαθηματικών, μαθηματικοί, φοιτητές και ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών, το τι είναι άλγεβρα. Οι απαντήσεις ανέδειξαν εφτά διαφορετικές οπτικές: γενικευμένη αριθμητική, εργαλείο, γλώσσα, κουλτούρα, τρόπος σκέψης, δραστηριότητα. Ο Lee (1997) αναφερόμενος στις συνεντεύξεις αυτές επισήμανε ότι το ότι η Άλγεβρα αναφερόταν ως δραστηριότητα στις περισσότερες απαντήσεις των ερωτηθέντων: «Η Άλγεβρα είναι κάτι που κάνεις, ένας τόπος δράσης» (σελ.187). Μπορεί η άλγεβρα να έχει να κάνει με τα σύμβολα αλλά η χρήση και ο μετασχηματισμός των συμβόλων είναι αυτό που μας ενδιαφέρει και όχι από μόνα τους τα σύμβολα. Η δημιουργία των αλγεβρικών εκφράσεων και ο μετασχηματισμός τους είναι συστατικό της άλγεβρας, δηλαδή και πάλι αναφερόμαστε στη δράση (action).

Με βάση την ιδέα ότι η άλγεβρα είναι δραστηριότητα, η Kieran (1996) ανέπτυξε ένα μοντέλο που χωρίζει τις αλγεβρικές δραστηριότητες σε τρία είδη: δραστηριότητες γενίκευσης, δραστηριότητες μετασχηματισμών που ακολουθούν συγκεκριμένους κανόνες και μετα-αλγεβρικές δραστηριότητες (meta-level activities), δηλαδή μαθηματικές δραστηριότητες που στηρίζονται στην αλγεβρική σκέψη, δραστηριότητες δηλαδή που δεν είναι αποκλειστικά αλγεβρικές, αλλά προϋποθέτουν ικανότητα αλγεβρικής σκέψης και που περιλαμβάνουν γενικευμένες μαθηματικές μεθόδους, όπως επίλυση προβλημάτων, μοντελοποίηση, γενίκευση, διατύπωση εικασιών, αιτιολόγηση, απόδειξη.

Η οπτική του Kaput (1995) και της Kieran (1996) χρησιμοποιούν, κατά την άποψη μας, τον ίδιο φακό ανάγνωσης με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο Kaput γράφει στο άρθρο του (1995),

> Επέλεξα να οργανώσω το υλικό γύρω από τις πέντε διαφορετικές μορφές

αλγεβρικής συλλογιστικής (reasoning) όπως τις βλέπω, με σκοπό να παρουσιάσω πως η άλγεβρα μπορεί να εμποτίσει και να εμπλουτίσει τις περισσότερες μαθηματικές δραστηριότητες από τις πρώτες τάξεις και μετά (σελ. 4).

Και οι δύο ερευνητές μελετούν το υποκείμενο που ενεργεί, δηλαδή τον μαθητή. Η Kieran διερευνά το είδος των αλγεβρικών δραστηριοτήτων και ο Kaput μελετά τη σκέψη του μαθητή που ενεργεί στις δραστηριότητες αυτές. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται επιγραμματικά οι άξονες των δύο προσεγγίσεων.

Kaput (1995)

1. Γενίκευση και τυποποίηση (formalization)
2. Χειρισμός και μετασχηματισμός αντικειμένων σε πλαίσιο μαθηματικών κανόνων.
3. Μελέτη των δομών.
4. Μελέτη συναρτήσεων, σχέσεων και συμμεταβολής.
5. Γλώσσα τυποποίησης.

Kieran (1996)

1. Δραστηριότητες γενίκευσης
2. Δραστηριότητες μετασχηματισμών που ακολουθούν συγκεκριμένους κανόνες.
3. Μετα-αλγεβρικές δραστηριότητες (meta-level activities).

Το μοντέλο Αλγεβρικής δραστηριότητας της Kieran (1996)

Η Kieran (1996) κατηγοριοποίησε την σχολική άλγεβρα με κριτήριο το είδος των δραστηριοτήτων με τις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές:

1. Δραστηριότητες γενίκευσης
2. Δραστηριότητες μετασχηματισμών που ακολουθούν συγκεκριμένους κανόνες.
3. Μετα-αλγεβρικές δραστηριότητες (meta-level activities), δηλαδή

μαθηματικές δραστηριότητες που στηρίζονται στην αλγεβρική σκέψη, δραστηριότητες δηλαδή δεν είναι αποκλειστικά αλγεβρικές, που περιλαμβάνουν γενικευμένες μαθηματικές μεθόδους, όπως επίλυση προβλημάτων, μοντελοποίηση, γενίκευση, διατύπωση εικασιών, αιτιολόγηση, απόδειξη, δραστηριότητες που προϋποθέτουν ικανότητα αλγεβρικής σκέψης.

Δραστηριότητες γενίκευσης

Οι δραστηριότητες γενίκευσης στην άλγεβρα έχουν να κάνουν με τη δημιουργία των εκφράσεων και των εξισώσεων που είναι αντικείμενο της άλγεβρας. Σε αυτές τις εκφράσεις χρησιμοποιούνται μεταβλητές ως άγνωστοι και παράμετροι με χρήση του συμβόλου της ισότητας και ανήκουν στο χώρο της επίλυσης εξισώσεων.

Δηλαδή συναντάμε δραστηριότητες που περιλαμβάνουν:

i. Εξισώσεις μίας μεταβλητής που αναπαριστούν προβληματικές καταστάσεις (Bell, 1995).

Παράδειγμα: Έχουμε 31 πέτρες τοποθετημένες σε τρεις σειρές. Η πρώτη έχει 5 πέτρες λιγότερες από την τρίτη και η δεύτερη έχει 15 πέτρες περισσότερες από την Τρίτη. Να βρείτε το πλήθος των πετρών κάθε σειράς. (Bell, 1995)

ii. Εκφράσεις γενίκευσης που προκύπτουν από γεωμετρικά μοτίβα ή αριθμητικές ακολουθίες (Mason, 1996).

Παράδειγμα: Παρατηρήστε τη παρακάτω σειρά σχημάτων. Διατυπώστε έναν κανόνα σύμφωνα με τον οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε σχήματα για να συνεχίσουμε τη σειρά σχημάτων της εικόνας (Mason, 1996).

Εικόνα 1. Γεωμετρικό μοτίβο

iii. Εκφράσεις που προκύπτουν από τους κανόνες που ισχύουν σε αριθμητικές σχέσεις. (Lee and Weeler, 1987).

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι περιττός αριθμός (Lee and Weeler, 1987).

Η δημιουργία νοήματος στην άλγεβρα συμβαίνει κυρίως μέσω των δραστηριοτήτων γενίκευσης. Σε σχέση με τη δημιουργία νοήματος, οι αλγεβρικές δραστηριότητες κινούνται μεταξύ δύο πλαισίων. Το πρώτο είναι το πλαίσιο των συναρτήσεων και το άλλο είναι το πλαίσιο της γενικευμένης αριθμητικής.

Στο πλαίσιο των συναρτήσεων συναντάμε δραστηριότητες που σχετίζονται με α) τη δημιουργία αναπαραστάσεων μέσω πινάκων και γραφικών παραστάσεων, που βοηθούν στην κατανόηση των εννοιών των συγκεκριμένων δραστηριοτήτων, β) το χειρισμό μεταβλητών σε εκφράσεις, που βρίσκονται σε σχέση με άλλες μεταβλητές, γ) Εξισώσεις πρώτου βαθμού μίας μεταβλητής που μπορεί να θεωρηθούν ότι προκύπτουν από την ισότητα δύο γραμμικών συναρτήσεων που η γραφική τους παράσταση είναι ευθεία, δ) την ερμηνεία της λύσης μίας εξίσωσης ως την τιμή του x για την οποία δύο συναρτήσεις είναι ίσες ή το σημείο τομής των δύο συναρτήσεων.

Στο πλαίσιο της γενικευμένης αριθμητικής έχουμε δραστηριότητες όπου ο άγνωστος έχει προτεραιότητα σε σχέση με τη μεταβλητή και οι εκφράσεις και οι εξισώσεις λειτουργούν ως αναπαραστάσεις αριθμητικών διαδικασιών.

Η δραστηριότητα γενίκευσης είναι ο χώρος που η άλγεβρα έχει το ρόλο της γλώσσας που διατυπώνει το νόημα (Radford, 2001) και που η αλγεβρική σκέψη μπορεί να εκφραστεί (Cuoco, Goldenberg, & Mark, 1996).

Δραστηριότητες μετασχηματισμών που ακολουθούν συγκεκριμένους κανόνες. Οι δραστηριότητες αυτές περιλαμβάνουν το μετασχηματισμό παραστάσεων με παραγοντοποίηση, πράξεις, άνοιγμα παρενθέσεων, απλοποίηση κλασμάτων, πράξεις πολυωνύμων, όπως και δημιουργία ισοδύναμων εκφράσεων και εξισώσεων με πράξεις, παραγοντοποίηση και απλοποίηση, απαλοιφή παρενθέσεων, επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων κ.λ.π. Το μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων αυτών είναι η αλλαγή της συμβολικής μορφής μίας έκφρασης ή μίας εξίσωσης με σκοπό να διατηρηθεί η ισοδυναμία. Όλες οι αλλαγές και οι μετασχηματισμοί πρέπει να ακολουθούν κανόνες και προϋποθέτουν τη κατανόηση των κανόνων αυτών. Βασικοί κανόνες οδηγούν σε αρχικούς μετασχηματισμούς και καθώς η διαδικασία σύνθεσης ισοδύναμων εκφράσεων γίνεται πιο σύνθετη, νέοι κανόνες χρησιμοποιούνται, οι αρχικοί κανόνες χρησιμοποιούνται με διαφορετικό τρόπο, σε ευρύτερο πεδίο και με τη διαδικασία αυτή συνθέτεται το νόημα, η κατανόηση. Ακόμα και η τεχνική της παραγοντοποίησης έχει τη δυνατότητα να οδηγήσει στην κατανόηση βαθύτερου νοήματος στην άλγεβρα. Για παράδειγμα η πρόταση $x^6 - 1$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί μέσω δύο διαφορετικών δομών: ως διαφορά τετραγώνων ή ως διαφορά κύβων. Η σύνδεση των δομών αυτών και οι μετασχηματισμοί με τον ένα ή τον άλλο τρόπο δημιουργεί τις προϋποθέσεις δημιουργίας νοήματος. Επίσης δραστηριότητες τέτοιας μορφής οδηγούν και σε γενικεύσεις για τις σχέσεις των διαφορετικών δομών. Στο παράδειγμα αυτό η παραγοντοποίηση της έκφρασης $x^6 - 1$

έχει τις παρακάτω μορφές:

$$x^6 - 1 = \left(x^2\right)^3 - 1 = \left(x^2 - 1\right)\left(x^4 + x^2 + 1\right) = \left(x - 1\right)\left(x + 1\right)\left(x^4 + x^2 + 1\right)$$

$$x^6 - 1 = \left(x^3\right)^2 - 1 = \left(x^3 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) = \left(x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)\left(x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)$$

$$x^6 - 1 = \left(x - 1\right)\left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)$$

Οι διαφορετικοί τρόποι παραγοντοποίησης και η σύνδεση των διαφορετικών προϊόντων μπορεί να κατευθύνει σε γενικεύσεις και δίνει μία ευρεία οπτική του αλγεβρικού αντικειμένου.

Κάποιος που γνωρίζει τους κανόνες και έχει κατανοήσει τις έννοιες και τη αλγεβρική δομή τους, μπορεί να μετασχηματίζει αλγεβρικές παραστάσεις και εξισώσεις με τρόπο που φαίνεται να είναι αυτόματος. Όταν κάποιος κατέχει τους κανόνες και τις ιδιότητες των αντικειμένων ανακαλεί τους αλγόριθμους μετατροπής σχεδόν αυτόματα, θα μπορούσε να πει κάποιος, χωρίς ιδιαίτερη σκέψη. Όπως όμως έχει τονίσει ο Paolo Boero (1993), κάθε αλγεβρικός χειρισμός περιέχει ένα στόχο που καθορίζει την πορεία του χειρισμού του αλγεβρικού αντικειμένου, μία αίσθηση για το πως θέλεις να μετατρέψεις μία αλγεβρική παράσταση ή μία εξίσωση, που θέλεις να καταλήξεις, πως θέλεις να μοιάζει η αλγεβρική έκφραση που χειρίζεσαι όταν τελειώσεις. Υπάρχει δηλαδή ένας παράλληλος, σχεδόν υποσυνείδητος σχεδιασμός στρατηγικής, που καθορίζει την πορεία χειρισμού των αλγεβρικών αντικειμένων. Εξ' άλλου, όπως παρατηρεί και ο Mason (1996), υπάρχει μία ανθρώπινη επιθυμία να «αποφεύγονται τα ενδιάμεσα στάδια», δηλαδή κατά το χειρισμό των εκφράσεων και τον μετασχηματισμό τους, αποφεύγονται ενδιάμεσες ισοδύναμες εκφράσεις, ώστε ο στόχος να επιτευχθεί συντομότερα. Η άνεση αυτή προκύπτει βέβαια, από την εμπειρία. Εδώ υπάρχει μία αντίφαση: αν θέλεις να αποκτήσεις άνεση στο χειρισμό αλγεβρικών εκφράσεων, για να μπορείς να αναγνωρίζεις τις έννοιες πίσω από τον «στεγνό» μετασχηματισμό των αλγεβρικών αντικειμένων, πρέπει να εργάζεσαι χωρίς να παρατηρείς τις λεπτομέρειες, δηλαδή να εργάζεσαι με δραστηριότητες που απομακρύνουν την προσοχή σου από την ερμηνεία των εκφράσεων αυτών (Gattegno, 1987).

Ανιχνεύοντας βαθύτερα την ικανότητα χειρισμού των αλγεβρικών αντικειμένων, κατανοούμε ότι για να μπορέσουμε να μετασχηματίσουμε μία αλγεβρική έκφραση, να χειριστούμε τα σύμβολα με επιτυχία πρέπει να έχουμε κατανοήσει τις δομικές ιδιότητες των μαθηματικών λειτουργιών και των σχέσεων ώστε να μπορούμε να κατανοήσουμε ποιοι μετασχηματισμοί είναι επιτρεπτοί και ποιοι δεν είναι (Booth, 1989). Η αναγνώριση και η μελέτη των αλγεβρικών δομών είναι ένα από τα χαρακτηριστικά της άλγεβρας (Kaput, 1995) που, μπορούμε να πούμε, που εμφανίζεται στους μετασχηματισμούς και τους χειρισμούς των αλγεβρικών αντικειμένων και συμβόλων. Οι «χωρίς νόημα» μετασχηματισμοί έπονται της ικανότητας αναγνώρισης των αφηρημένων εννοιών που βρίσκονται πίσω από τα σύμβολα (Sfard, Linchevski, 1994), με τρόπο που τα σύμβολα γίνονται, όπως υποστηρίζει και ο Kaput (1995), διάφανα.

Με αυτή την προσέγγιση του τρόπου που πραγματοποιούνται οι δραστηριότητες μετασχηματισμού συμπεραίνουμε ότι μία τέτοια δραστηριότητα δεν στηρίζεται απλά σε τεχνικές, δεν στερείται νοήματος. Κάθε δραστηριότητα μετασχηματισμού περιλαμβάνει θεωρητικά και εννοιολογικά στοιχεία τα όποια είναι περισσότερο εμφανή κατά την εκμάθηση και αρχική εφαρμογή των τεχνικών αυτών. Οι τεχνικές έχουν ένα πραγματιστικό ρόλο για την παραγωγή αποτελεσμάτων αλλά προϋποθέτουν και οδηγούν σε κατανόηση εννοιών που χειρίζεται η άλγεβρα (Lagrance, 2002).

Μετα-αλγεβρικές δραστηριότητες (Global/meta-level).

Σε αυτές τις δραστηριότητες χρησιμοποιείται η άλγεβρα ως εργαλείο και γι' αυτό το λόγο αναφέρονται και ως μετα-αλγεβρικές. Σε αυτές τις δραστηριότητες ανήκει η επίλυση προβλημάτων με κατασκευή εξίσωσης, η μοντελοποίηση, η ανάδειξη μαθηματικών δομών, η μελέτη αλλαγών και σχέσεων, η γενίκευση, η αιτιολόγηση, η εξήγηση και η απόδειξη, η πρόβλεψη και η έκφραση εικασιών, η μελέτη της αλλαγής σε περιβάλλοντα συναρτήσεων και γενικά όλες οι δραστηριότητες με τις οποίες ασχολούνται οι μαθητές, στις οποίες δε χρησιμοποιείται η άλγεβρα μέσω της κατασκευής «αλγεβρικών» αντικειμένων, που είναι δυνατό δηλαδή, να μη χρησιμοποιηθούν καθόλου γράμματα ως μεταβλητές, άγνωστοι ή παράμετροι. Σε τέτοιες δραστηριότητες ο μαθητής χρησιμοποιεί μαθηματικές ικανότητες που δεν μπορούν να χαρακτηριστούν αποκλειστικά αλγεβρικές, γεωμετρικές ή κάτι άλλο, αλλά το υπόβαθρο τους είναι εμφανέστατα αλγεβρικό. Εξ' άλλου αν το αρνηθούμε αυτό είναι σα να τοποθετούμε την άλγεβρα σε χαμηλό επίπεδο χρησιμότητας. Οι μετα-αλγεβρικές δραστηριότητες προϋποθέτουν αλγεβρικές ικανότητες, αλλά χρησιμοποιούνται και ως εργαλείο για την απόκτηση και ενίσχυση νέων ικανοτήτων αλγεβρικής σκέψης για την ενασχόληση με πιο σύνθετες δραστηριότητες γενίκευσης και μετατροπής των δύο πρώτων κατηγοριών. Δημιουργούν δηλαδή το περιβάλλον ενασχόλησης γενικά με μία μαθηματική, ή ειδικά με μία αλγεβρική δραστηριότητα.

Η σημαντικότητα των μετα-αλγεβρικών δραστηριοτήτων οφείλεται σε σημαντικό βαθμό και στο ότι σε αυτή την κατηγορία ανήκουν δραστηριότητες που η αρχική προσέγγιση τους δεν απαιτεί τη χρήση γραμμάτων (μεταβλητές, παράμετροι) και κατασκευή εξισώσεων, αλλά καταλήγουν σε αυτή οι μαθητές είτε λόγω ανάγκης είτε λόγω ευκολίας. Δίνουν δηλαδή, την δυνατότητα στο μαθητή να κινείται μεταξύ του συμβολικού και μη συμβολικού τρόπου επίλυσης προβληματικών καταστάσεων, ώστε η ικανότητα δημιουργίας γενικευμένων μαθηματικών μοντέλων με χρήση συμβόλων (γραμμάτων) να αναπτύσσεται σταδιακά, βάσει ανάγκης ή ευκολίας.

Ωστόσο η άλγεβρα δεν είναι επίλυση προβλημάτων, μοντελοποίηση, απόδειξη ή κάποια άλλη μετα-αλγεβρική δραστηριότητα. Δεν είναι ούτε τρόπος διδασκαλίας της άλγεβρας. Τα χαρακτηριστικά των μετα-αλγεβρικών δραστηριοτήτων περιλαμβάνονται στα άλλα δύο είδη αλγεβρικών δραστηριοτήτων της γενίκευσης και του μετασχηματισμού. Δηλαδή η έννοια της μετα-αλγεβρικής δραστηριότητας είναι ταυτόχρονα ευρύτερη και πιο περιορισμένη από την έννοια της αλγεβρικής δραστηριότητας.

Το μοντέλο αλγεβρικής συλλογιστικής (algebraic reasoning) του Kaput (1995).

Ο Kaput ανίχνευσε πέντε διαφορετικές αλληλοσχετιζόμενες μορφές αλγεβρικής συλλογιστικής που δημιουργούν ένα σύνθετο ενιαίο σύνολο. Οι πρώτες δύο μορφές αποτελούν τη βάση των υπολοίπων, οι επόμενες δύο αποτελούν θεματικές πτυχές (;) και η τελευταία μορφή που διαχέεται σε όλες τις προηγούμενες, εμφανίζει την άλγεβρα ως ένα δίκτυο γλωσσών. Υπάρχει πλούσια εννοιολογική αλληλεπίδραση μεταξύ των πέντε μορφών αλγεβρικής συλλογιστικής. Αυτές είναι:

1. Η άλγεβρα ως γενίκευση και τυποποίηση μοτίβων.
2. Η άλγεβρα ως συντακτικά καθοδηγούμενος χειρισμός φορμαλισμών.
3. Η άλγεβρα ως η μελέτη των δομών που προκύπτουν από τους υπολογισμούς και τις σχέσεις.

4. Η άλγεβρα ως η μελέτη συναρτήσεων, σχέσεων και συμμεταβολής.
5. Η άλγεβρα ως πρώτη ύλη μοντελοποίησης.

Γενίκευση και τυποποίηση μοτίβων

Παρόλο που η υπολογιστική αριθμητική που επικρατεί στη βασική εκπαίδευση, η αρίθμηση και η ταξινόμηση που χρησιμοποιείται στη συνδυαστική και η ικανότητα της χωρικής αντίληψης δεν φαίνεται να προϋποθέτουν και να περιλαμβάνουν την ικανότητα γενίκευσης και μαθηματικής τυποποίησης, είναι δύσκολο να αφαιρέσει κάποιος τις δύο αυτές ικανότητες από οποιαδήποτε μαθηματική δραστηριότητα. Η γενίκευση και η μαθηματική τυποποίηση είναι στον πυρήνα της μαθηματικής δραστηριότητας και σκέψης, είναι αυτό που χαρακτηρίζει κάτι μαθηματικό.

Η γενίκευση που πραγματοποιείται στα μαθηματικά, περιλαμβάνει τη σκόπιμη διεύρυνση του εύρους της συλλογιστικής και των εν χρήση εννοιών πέρα από τα σύνορα της εκάστοτε δραστηριότητας, αναγνωρίζει και αποκαλύπτει ρητά τις ομοιότητες που έχουν τα μαθηματικά αντικείμενα του ίδιου χώρου. Η γενίκευση που πραγματοποιείται στα μαθηματικά κατά τη μελέτη ενός μαθηματικού αντικειμένου, μίας μαθηματικής δραστηριότητας, αναπτύσσει τη συλλογιστική πέρα από το επίπεδο του συγκεκριμένου αντικειμένου ή δραστηριότητας και αναγνωρίζει τη δομή, τα μοτίβα, τους κανόνες, τις διαδικασίες και τις σχέσεις ώστε το αντικείμενο μελέτης παύει να είναι η αρχική δραστηριότητα αλλά αυτά που προκύπτουν από τη γενίκευση. Αλλά η διατύπωση της γενίκευσης απαιτεί τη χρήση γλώσσας που μπορεί να είναι η τυποποιημένη και αυστηρά «μαθηματική» ή το σύνολο που περιλαμβάνει τη γλώσσα επικοινωνίας, τις χειρονομίες, και όλα αυτά που κάνουν οι μαθητές για να επικοινωνήσουν τις ιδέες τους.

Η γενίκευση και η τυποποίηση μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες με κριτήριο το πλαίσιο εμφάνισης τους, ανάλογα αν προκύπτουν από τη συλλογιστική και την επικοινωνία σε μαθηματικό περιβάλλον, και από τη συλλογιστική και επικοινωνία σε καταστάσεις που δεν χαρακτηρίζονται μαθηματικές αλλά που στον πυρήνα τους είναι. Μπορεί να φαίνεται ότι οι δύο κατηγορίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους αλλά στην ουσία όχι μόνο καταλήγουν στο ίδιο σημείο που είναι η γενίκευση και η τυποποίηση αλλά και προϋποθέτουν το ίδιο υπόβαθρο που είναι η εμπειρία. Όταν ένας μαθητής ασχολείται με ασκήσεις μαθηματικών που χρειάζονται απλές ή και πιο σύνθετες πράξεις, ανατρέχει στην εμπειρία του. Οι ικανότητες που έχει αναπτύξει σε προηγούμενες δραστηριότητες είναι το εργαλείο για τις νέες. Αλλά και όταν κάποιος ασχολείται με ένα πρόβλημα που δεν χαρακτηρίζεται μαθηματικό, αλλά έχει τα μαθηματικά στον πυρήνα του, στηρίζεται στην εμπειρία που έχει αποκτήσει μέχρι εκείνη τη στιγμή, από άλλα προβλήματα, ώστε να βελτιώσει τις ικανότητες του για να μπορέσει να ξεπεράσει την προβληματική της κάθε δραστηριότητας. Η μαθηματική σκέψη τελικά προκύπτει από την εμπειρία και γίνεται μαθηματική μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων και διαδικασιών (Kaput, 1995).

Η Άλγεβρα ως συντακτικά καθοδηγούμενος χειρισμός φορμαλισμών.

Όταν χειριζόμαστε αλγεβρικούς φορμαλισμούς, αλγεβρικές παραστάσεις, σχέσεις τύπους κλπ. η προσοχή μας επικεντρώνεται στα σύμβολα και τους συντακτικούς κανόνες που πρέπει να τηρήσουμε και λίγη σημασία δίνουμε στο τι αντιπροσωπεύουν τα αντικείμενα αυτά. Όσο πιο σύνθετη γίνεται μία αλγεβρική παράσταση ή μία εξίσωση, τόσο περισσότερο εμφανές γίνεται το φαινόμενο αυτό. Στην προσπάθεια να μπορέσουμε να χειριστούμε δυσκολότερα σύμβολα δεν ανακαλύπτουμε τις έννοιες που κρύβονται πίσω από αυτά, τις σχέσεις που τα συνδέουν και μηχανιστικά ακολουθούμε κανόνες για να μετατρέψουμε τους μαθηματικούς φορμαλισμούς. Αντί να εστιάζουμε στα σύμβολα κοιτάμε μέσα από αυτά για να δούμε με λεπτομέρεια τους συντακτικούς κανόνες (Kaput, 1995). Έτσι όσο προχωράμε «βαθύτερα» στην Άλγεβρα σκεφτόμαστε διαρκώς λιγότερο.

Αν, για παράδειγμα, παρατηρήσουμε το πως οι μαθητές της Β γυμνασίου χειρίζονται τις εξισώσεις και τις ανισώσεις, θα επιβεβαιώσουμε όσα αναφέραμε παραπάνω. Όταν οι μαθητές φτάνουν στο κεφάλαιο των εξισώσεων, γνωρίζουν ότι είναι μία ισότητα που περιλαμβάνει ένα άγνωστο, συνήθως το «x» αλλά δεν θυμούνται ή δεν γνωρίζουν ότι η εξίσωση αυτή συνδέεται με ένα πρόβλημα. Στην αρχή λοιπόν του κεφαλαίου υπάρχει μία πολύ καλή δραστηριότητα με ζυγαριές για την κατανόηση της έννοιας της εξίσωσης και αρκετά σύντομα, στις επόμενες δραστηριότητες η σύνδεση των εξισώσεων με το αρχικό πρόβλημα χάνεται στην προσπάθεια να μάθουν οι μαθητές να απλοποιούν και να μετασχηματίζουν τις εξισώσεις. Και επειδή, η αντίληψη των περισσότερων ότι οι εξισώσεις είναι το σημαντικότερο και το κατεξοχήν μαθηματικό αντικείμενο γνώσης, οι ασκήσεις στη β γυμνασίου γίνονται όλο και πιο σύνθετες, ως προς τις πράξεις που απαιτούν για να απλοποιηθούν, δηλαδή ως προς το σύνολο των συντακτικών κανόνων που πρέπει κάποιος να ακολουθήσει. Έτσι το πραγματικό νόημα χάνεται και οι μαθητές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν μηχανικά κανόνες και διαδικασίες, ακόμα και σε περιπτώσεις που δεν μπορούν. Για παράδειγμα το «χιαστί» γινόμενο, η ιδιότητα των αναλογιών, εφαρμόζεται πολλές φορές και στην πρόσθεση κλασμάτων ή στον πολλαπλασιασμό. Τέτοιες ιδιότητες, διαδικασίες ξεκόβονται από τις έννοιες που τις συνοδεύουν με αποτέλεσμα να χάνεται το νόημα.

Οι έρευνες χρησιμοποιούν αρκετά παραδείγματα που δείχνουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση των αλγεβρικών αντικειμένων και των εννοιών που βρίσκονται στον πυρήνα τους.

Άλλα συχνά λάθη παρατηρούνται στις ανισώσεις που το σύμβολο της ανίσωσης, είναι για κάποιους μαθητές, ένα άλλο σύμβολο που μπήκε στη θέση του συμβόλου της ισότητας, μεταξύ δύο αλγεβρικών παραστάσεων που χρησιμοποιούν τον ίδιο άγνωστο. Βλέπουμε συχνά, κυρίως στις πρώτες δραστηριότητες, ότι οι μαθητές θέλουν να εφαρμόσουν στις ανισώσεις τις ίδιες διαδικασίες που ισχύουν στις εξισώσεις και «μαθαίνουν» να μην το κάνουν αυτό και να είναι προσεκτικοί όταν δεν βλέπουν ισότητα, μαθαίνουν νέους κανόνες και οι περισσότεροι δεν αντιλαμβάνονται την εννοιολογική διαφορά της εξίσωσης με την ανίσωση, αδυναμία που ενισχύεται όλο και περισσότερο με τις διαρκώς αυξανόμενης δυσκολίας ασκήσεις.

Ένα άλλο παράδειγμα δυσκολίας των μαθητών παρατηρείται στο κεφάλαιο των ταυτοτήτων στην γ γυμνασίου, όπου κάποιοι μαθητές πιστεύουν ότι $(α+β)^2=α^2+β^2$ ακόμα και μετά το τέλος του κεφαλαίου και άλλοι πιστεύουν ότι ισχύει ταυτόχρονα η προηγούμενη ισότητα με την ταυτότητα που μαθαίνουν στο κεφάλαιο αυτό. Τέτοιες δυσκολίες παρουσιάζονται γιατί τα μαθηματικά αυτά αντικείμενα διδάσκονται στεγνά, ως τύποι, δεν συνδέονται με παραδείγματα που θα βοηθούσαν στην κατανόηση αλλά και επειδή δεν έχουν οι μαθητές αρκετές ευκαιρίες να συλλογιστούν τι είναι αυτό που μαθαίνουν, να αντιληφθούν το αντικείμενο της γνώσης και να δοκιμάσουν με παραδείγματα που θα κατασκευάσουν οι ίδιοι την ισχύ των αλγεβρικών προτάσεων.

Η σχέση δυσκολότερες ασκήσεις – λιγότερο νόημα που παρατηρείται στην μαθηματική εκπαίδευση, έχει ως αποτέλεσμα την ανικανότητα των μαθητών να διακρίνουν το νόημα των μαθηματικών και φτάνοντας στις τελευταίες τάξεις του Λυκείου οι μαθητές πιστεύουν ότι τα μαθηματικά δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για τη ζωή τους και η πεποίθηση αυτή ενισχύει την αποξένωση τους από το μάθημα, τους οδηγεί να αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά στεγνά, χωρίς ενδιαφέρον, αφιερώνουν λίγο χρόνο στα μαθηματικά ο οποίος αναλώνεται σε πράξεις και διαδικασίες και στην πορεία αυτή χάνουν κάποιοι μαθητές την ευκαιρία να αναπτύξουν σε βαθύτερο επίπεδο τη μαθηματική τους σκέψη.

O Kaput (1992) αναφέρει στο άρθρο του ένα παράδειγμα που κατέγραψε ο Guershon Harel στο οποίο μία μαθήτρια του γυμνασίου προσπάθησε να λύσει την ανίσωση $(x-1)^2 > 1$. Η μαθήτρια έδωσε τη λύση: $x > 1$. Όταν ρωτήθηκε πως έφτασε στη λύση αυτή η μαθήτρια χρησιμοποίησε τη διαδικασία που είχε μάθει στις εξισώσεις και υποστήριξε πως επειδή η λύση της εξίσωσης $(x-1)^2 = 0$ είναι $x-1=0$ ή $x-1=0$, δηλαδή τελικά $x = 1$, επομένως και στην ανίσωση θα έχουμε $x > 1$. Όταν ρωτήθηκε η μαθήτρια για το πως θα μπορούσε να λύσει την εξίσωση

$(x-1)(x-1) = 3$, απάντησε $(x-1) = 3$ ή $(x-1) = 3$. O Harel σχολίασε για το παράδειγμα αυτό, ότι η μαθήτρια είχε δημιουργήσει πολύ επιφανειακές συμβολικές δομές, δεν μπόρεσε να αντιληφθεί το τι αντιπροσωπεύουν οι συμβολικές προτάσεις των ασκήσεων που προσπάθησε να λύσει και γι' αυτό πίστεψε ότι μοιράζονται την ίδια δομή, έχουν δηλαδή παρόμοια μέθοδο λύσης. Η λανθασμένη αντίληψη ότι η ισότητα και η ανισότητα έχουν παρόμοιες ιδιότητες και ότι οι διαδικασίες που χειρίζονται ασκήσεις με τις σχέσεις αυτές είναι παρόμοιες, εμφανίζεται σε αρκετούς μαθητές. Ενώ τα παιδιά του γυμνασίου αλλά και του Λυκείου μπορούν να χειρίζονται τα σύμβολα και να μαθαίνουν διαδικασίες, τις οποίες ανακαλούν όταν τις χρειαστούν, η δυνατότητα αυτή δε συνδέεται με την κατανόηση. Ο τυπικός μαθητής πιστεύει ότι η απομνημόνευση κανόνων και διαδικασιών είναι ο στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Αντιθέτως η κατανόηση της Άλγεβρας περιλαμβάνει την ικανότητα σύνδεσης γνώσης των διαδικασιών με τη γνώση των εννοιών (Kaput, 1992).

Η άλγεβρα ως η μελέτη των δομών που προκύπτουν από τους υπολογισμούς και τις σχέσεις.

Οι δραστηριότητες υπολογισμών και οι εργασίες εξάσκησης και γενικά οι δραστηριότητες που ακολουθούν τους κανόνες και τις ιδιότητες των αλγεβρικών αντικειμένων οδηγούν σε γενικεύσεις μέσω αφαίρεσης που αναδεικνύουν τις αλγεβρικές δομές των αντικειμένων. Οι δομές αυτές είναι αρχικά αφηρημένες και η αναγνώριση τους προϋποθέτει εμπειρία, εκφράζονται από τους μαθητές λεκτικά σε φυσική γλώσσα, η αναγνώριση τους εμπλουτίζει την εννοιολογική κατανόηση των συστημάτων από τα οποία προέκυψαν οι δομές, βοηθούν τη σύνθεση και ανακάλυψη γενικευμένων δομών και είναι εργαλείο που βοηθάει τους μαθητές να φτάσουν σε υψηλότερα επίπεδα αφαίρεσης (Kaput, 1992).

Η άλγεβρα ως μελέτη συναρτήσεων, σχέσεων και συμμεταβολής.

Όταν συζητάμε για την άλγεβρα σκεφτόμαστε μεταβλητές. Μία αλγεβρική πρόταση ή ένας τύπος περιέχει γράμματα, μεταβλητές, σταθερές ή παραμέτρους. Κεντρικό σημείο της αλγεβρικής σκέψης είναι η έννοια της μεταβλητής με όλες τις πιθανές ερμηνείες και συνδέσεις με άλλες έννοιες (Usiskin, 1988). Αυτό που είναι σημαντικό και ενδιαφέρον για τη δυναμική φύση της μεταβλητής δεν είναι μόνο ότι μπορεί να αλλάζει τιμές αλλά το πως η αλλαγή στις τιμές μίας μεταβλητής επηρεάζει τις τιμές άλλων μεταβλητών. Η μελέτη λοιπόν των μεταβλητών συνδέεται με τη μελέτη των συναρτήσεων (Heid, 1996).

Όταν συζητάμε για συναρτήσεις, έχουμε στο μυαλό μας την έννοια της συμμεταβολής δύο ποσοτήτων, όπου η μεταβολή στην τιμή μίας μεταβλητής συνδέεται με τη μεταβολή στην τιμή μίας άλλης μεταβλητής. Συνήθως η εισαγωγή στην έννοια γίνεται με τον κλασικό τρόπο ορισμού της συνάρτησης, μέσω του τύπου της, μελέτη βασικών συναρτήσεων κ.λ.π. Αλλά όταν συζητάμε για τη συναρτησιακή διάσταση της άλγεβρας δεν εννοούμε απαραίτητα τη μελέτη συναρτήσεων. Στη διάσταση αυτή υπάρχει η χρήση γραμμάτων ως μεταβλητές και ως άγνωστοι. Για παράδειγμα μπορούμε να δούμε την έκφραση $2x + 4$ ως συνάρτηση αν σκεφτούμε ότι αντιστοιχεί κάθε αριθμό x σε κάποιον άλλο. Αν όμως έχουμε την ισότητα των συναρτήσεων $2x + 4$ και 8, το x λαμβάνεται ως άγνωστος και είναι η τιμή για την οποία οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες. Αλλά και πάλι, όταν συζητάμε για την έννοια των συναρτήσεων σε σχέση με την άλγεβρα, συζητάμε και για τη σχέση των τιμών του x και των αντίστοιχων τιμών της συνάρτησης, για το πως η μεταβολή στις τιμές του x δημιουργεί συγκεκριμένες μεταβολές στις τιμές της συνάρτησης (Kieran, Boileau, Garancon, 1996).

Η ιδέα της επικοινωνίας μεταξύ δύο μεταβλητών και της παράλληλης μεταβολής των τιμών τους διατρέχει την έννοια της συνάρτησης και μπορεί να παρουσιαστεί στους μαθητές μέσω δραστηριοτήτων αρίθμησης, μέτρησης, εκτίμησης αποτελέσματος. Και επειδή εμπεριέχει πολλαπλές αναπαραστάσεις όπως καταγραφή σε πίνακες, λίστες, γραφικές παραστάσεις, γίνεται εμφανής η διαδικασία γενίκευσης στην προσπάθεια να ανακαλυφθεί τι κοινό έχουν όλες αυτές οι διαφορετικές αναπαραστάσεις. Ένας μαθητής χρειάζεται να αναπτύξει την ικανότητα να ερμηνεύει και να κατανοεί τις διαφορετικές αναπαραστάσεις μίας συνάρτησης όπως και την ικανότητα να αναγνωρίζει οικογένειες συναρτήσεων μέσω των διαφορετικών αναπαραστάσεων τους (Heid, 1996).

Η άλγεβρα μέσω μοντελοποίησης

Η έννοια της μοντελοποίησης στα μαθηματικά έχει ευρύ φάσμα. Ένας ορισμός είναι ότι μαθηματικό μοντέλο είναι η περιγραφή ενός φαινομένου με τη χρήση μαθηματικών εννοιών και μαθηματικής γλώσσας και η μοντελοποίηση είναι η μεθοδολογία και η διαδικασία κατασκευής μαθηματικών σχέσεων από μη μαθηματικές καταστάσεις (Aris, 2012). Πιο απλά όμως, η μοντελοποίηση περιλαμβάνει τη δημιουργία πολλαπλών αναπαραστάσεων (γραφήματα, σχέσεις, εξισώσεις κ.λπ.) ενός προβλήματος, μίας μαθηματικής σχέσης που περιγράφει ή εξηγεί ένα φαινόμενο.

Σύμφωνα με τον Burkhardt (1981), de Lange (1987), αλλά και άλλους, η μοντελοποίηση περιλαμβάνει το στάδιο της δημιουργίας, της διατύπωσης του μοντέλου και ακολουθεί το στάδιο της επικύρωσης. Στο στάδιο της δημιουργίας εξετάζεται ένα φαινόμενο ή μία κατάσταση με σκοπό να ανιχνευτούν οι σχέσεις των μεταβλητών της κατάστασης. Οι σχέσεις αυτές ανακαλύπτονται είτε μέσω παρατήρησης ή μέτρησης ή απλά από έξυπνες δοκιμές και εικασίες πάνω στο προς εξέταση φαινόμενο. Για παράδειγμα αν μελετάμε τη συμπεριφορά ενός καλωδίου ρεύματος κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, μπορούμε αρχικά να θεωρήσουμε ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος δεν επηρεάζει. Η αρχική υπόθεση καθορίζει το πλαίσιο κατανόησης και ερμηνείας του φαινομένου, ακολουθεί μία σειρά μαθηματικών μετασχηματισμών των σχέσεων που δημιουργούνται, ώστε τελικά να προκύψει το μοντέλο εκφρασμένο συμβολικά. Συνήθως το μοντέλο είναι ένας τύπος, η σχέση μίας μεταβλητής με τις υπόλοιπες. Αλλά μοντέλο μπορεί να είναι και ένα γράφημα ή ένας πίνακας με αριθμούς που μπορεί να είναι προϊόν προσομοίωσης του φαινομένου σε υπολογιστή. Στο στάδιο της επικύρωσης, ελέγχεται η ορθότητα του μοντέλου με την επιστροφή στη μελέτη του φαινομένου ή της κατάστασης που περιγράφει. Στο στάδιο αυτό μπορούν να επιβεβαιωθούν οι αρχικές υποθέσεις ή και να απορριφθούν. Με δοκιμές, μπορεί στο παράδειγμα που αναφέραμε, να διαπιστώσουμε ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος τελικά δεν συμφωνεί με την αρχική μας εικασία, έτσι επιστρέφουμε στη φάση της δημιουργίας για τη διόρθωση του αρχικού μοντέλου.

Η μοντελοποίηση ορίζεται ως μία λειτουργία, που αποτελείται από δύο στάδια, το στάδιο της σύνθεσης, της κατασκευής στο πλαίσιο αρχικών υποθέσεων και το στάδιο της επικύρωσης. Και τα δύο στάδια περιλαμβάνουν λειτουργίες γενίκευσης και μετασχηματισμών. Οι αρχικές υποθέσεις οδηγούν σε τύπους ή γραφήματα τα οποία μετασχηματίζονται, συνδυάζονται και ελέγχονται. Τα προϊόντα της μοντελοποίησης είναι η γενίκευση που ισχύει για παρόμοια φαινόμενα με αυτό που δημιούργησε το μοντέλο. Η παρατήρηση ενός φαινομένου, η διατύπωση εικασιών για τις σχέσεις και την ισχύ των μεταβλητών μίας κατάστασης και η πορεία προς τη δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου περιγραφής του φαινομένου είναι η μετάβαση από το ειδικό στο γενικό.

Κάποιος μπορεί να υποστηρίξει ότι η μοντελοποίηση δεν αποτελεί σημαντική μαθηματική λειτουργία κυρίως όταν πραγματοποιείται με τη βοήθεια υπολογιστών. Παρόλο που οι υπολογιστές είναι μέσο μοντελοποίησης, η προσπάθεια ανακάλυψης των τύπων που θα εισάγουμε στον υπολογιστή, ή τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε ένα φαινόμενο, προϋποθέτει κατανόηση των μαθηματικών εννοιών του φαινομένου (Kaput, 1992). Ακόμα και η επιλογή γλώσσας προγραμματισμού και ο προγραμματισμός είναι μαθηματική λειτουργία.

Τα λάθη στην άλγεβρα

Το αποτέλεσμα της αλγεβρικής δραστηριότητας.

Στην αριθμητική, ο στόχος μίας δραστηριότητας είναι η παραγωγή ενός αριθμητικού αποτελέσματος. Στην άλγεβρα όμως ο στόχος είναι διαφορετικός. Στην άλγεβρα έχουμε παραγωγή διαδικασιών και σχέσεων εκφρασμένες σε γενική απλοποιημένη μορφή (Booth, 1988). Οι γενικευμένες προτάσεις χρησιμοποιούνται ως κανόνες για την παραγωγή νέων διαδικασιών που χρησιμοποιούνται ως εργαλεία για νέες δραστηριότητες που μπορεί να έχουν ως αποτέλεσμα έναν αριθμό, αλλά ο στόχος δεν είναι ο αριθμός αλλά η παραγωγή, η έκφραση και ο χειρισμός της γενίκευσης και των διαδικασιών. Οι μαθητές δεν μπορούν να ανιχνεύσουν τον στόχο αυτό και πολύ συχνά αναζητούν το αριθμητικό αποτέλεσμα (Booth, 1988). O Booth παρατηρεί ότι ενώ ορισμένοι μαθητές παράγουν μία σωστή αλγεβρική έκφραση εξακολουθούν να αναζητούν το αριθμητικό αποτέλεσμα, καθώς αυτό που παρήγαγαν δε θεωρούν ότι είναι αρκετό.

Απόδειξη.

Μία αιτία δημιουργίας παρανοήσεων των μαθητών για την έννοια της απόδειξης είναι η σημαντική διαφορά μεταξύ του δεχόμαστε ότι κάτι είναι σωστό βάσει εμπειρίας και του αποδεικνύουμε ότι κάτι είναι σωστό βάσει λογικής αφαίρεσης (logical deduction) (Tall, 1989). Παρόμοιας φύσης προβλήματα δημιουργεί η σημαντική διαφορά μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης, όπου στην επιχειρηματολογία τα συμπεράσματα βασίζονται στο περιεχόμενο ενώ στην απόδειξη παράγονται βάσει λογικής διαδικασίας που ακολουθεί συγκεκριμένους κανόνες (Pedemonte, 2008).

Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι απόδειξη είναι μία σειρά συμβολικών μετασχηματισμών, που πολλοί μαθητές δεν μπορούν εύκολα να ακολουθήσουν ενώ ταυτόχρονα αναρωτιούνται ποιος είναι ο λόγος να αποδείξουμε κάτι που γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι ισχύει (Tall, 1989). Ταυτόχρονα ο μαθητής που εφαρμόζει μία διαδικασία διαδοχικών συμβολικών μετασχηματισμών, είναι προετοιμασμένος να δεχτεί το αποτέλεσμα της διαδικασίας, όποιο και να είναι αυτό. Εκτός από την προηγούμενη παρατήρηση, ο Tall (1989) συμπληρώνει ότι οι μαθητές έχουν διάφορες ενστάσεις για το ρόλο της απόδειξης: αν η αλήθεια μίας πρότασης μπορεί να επαληθευτεί μέσω υπολογιστή, τότε αρκετές επαληθεύσεις είναι ικανές να αποδείξουμε κάτι. Δηλαδή ο μαθητής είναι σαν τον επιστήμονα του εργαστηρίου όπου πειραματικές επιβεβαιώσεις μίας εικασίας είναι απόδειξη της ισχύς της.

Στις προτάσεις της μορφής «δείξε ότι αν κάτι ισχύει τότε θα ισχύει και κάτι άλλο», δηλαδή αποδείξεις της μορφής: αν P τότε Q, υπάρχουν μαθητές που δεν μπορούν να διακρίνουν τη διαφορά της πρότασης από την «αν Q τότε P». Ο Tall σημειώνει ότι οι δυσκολίες σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν γιατί στις αποδείξεις αυτής της μορφής και οι δύο προτάσεις P και Q είναι ισοδύναμες, δηλαδή ισχύουν ταυτόχρονα. Η επιλογή κατεύθυνσης απόδειξης από την πρόταση P στην Q ή από την Q στην P δημιουργεί προβλήματα και στους δάσκαλους των μαθηματικών (Tall, 1989).

Ο Tall (1989) υποστηρίζει ότι προβλήματα κατανόησης δημιουργούνται λόγω των χαρακτηριστικών μίας μαθηματικής απόδειξης. Το πρώτο είναι ότι απαιτεί σαφώς διατυπωμένους ορισμούς και δηλώσεις και το άλλο είναι ότι απαιτεί συμφωνημένες διαδικασίες για την εξαγωγή της αλήθειας μιας δήλωσης από την άλλη. Και τα δύο χαρακτηριστικά της μαθηματικής απόδειξης δημιουργούν προβλήματα στους μαθητές. Οι έννοιες των ορισμών και η διατύπωση τους, αλλά και οι διαδικασίες «εξαγωγής της αλήθειας» είναι πηγές δυσκολιών. Η διαδικασία της απόδειξης είναι ιδιαίτερα σύνθετη και προϋποθέτει ένα ευρύ φάσμα ικανοτήτων που πρέπει να κατέχουν οι μαθητές: αναγνώριση και οργάνωση υποθέσεων, σύνδεση με ορισμούς ιδιότητες και υπάρχουσες δομές, οργάνωση λογικών επιχειρημάτων και διατύπωση των επιχειρημάτων σε φορμαλιστικό πλαίσιο (Healy, L., & Hoyles, C., 2000). Οι μαθητές προτιμούν να κάνουν υπολογισμούς παρά να προσπαθούν να παράγουν αλήθειες από αφαιρετικούς ορισμούς, δυσνόητα διατυπωμένους, μέσω ασαφών διαδικασιών παραγωγής νοήματος.

Πέρα των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο να συνθέτουν μία τυπικά διατυπωμένη ακολουθία επιχειρημάτων για την παραγωγή μίας απόδειξης και στο να αντιλαμβάνονται τη διάφορα της εμπειρικής απόδειξης από τη μαθηματική απόδειξη, δημιουργούνται προβλήματα στις διαφορετικές διαστάσεις της έννοιας της απόδειξης (Healy, L., & Hoyles, C., 2000). Μία απόδειξη μπορεί να έχει πραγματιστικό ρόλο για τη δημιουργία εργαλείων, μπορεί να είναι διατύπωση επιχειρημάτων για τις σχέσεις και τις ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων, να περιλαμβάνει απλή ή πιο σύνθετη φορμαλιστική διατύπωση και να παρουσιάζεται με διαφορετικούς τρόπους, με σχήματα, πίνακες, αυστηρούς φορμαλισμούς κλπ.

Η χρήση των μεταβλητών.

Αρκετοί μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα με τη δημιουργία μαθηματικών προτάσεων εκφρασμένες με φορμαλιστικό τρόπο, από πληροφορίες που συλλέγουν από κείμενο σε φυσική γλώσσα. Ακόμα και απλές γραμμικές εξισώσεις είναι αρκετές φορές δύσκολο να σχηματιστούν από κάποιους μαθητές (MacGregor, M., & Stacey, K., 1993). Ένας βασικός λόγος που συμβαίνει αυτό είναι οι μαθητές επιχειρούν να δημιουργήσουν μία εξίσωση από μία πρόταση σε φυσική γλώσσα, αντικαθιστώντας τις βασικές λέξεις με μεταβλητές και η διαδικασία αυτή ταυτόχρονα με την ανάγνωση του κειμένου. Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως «συντακτική μετάφραση» (MacGregor, M., & Stacey, K., 1993). Ένα παράδειγμα που αναφέρει ο Clement, (1982) είναι το παρακάτω πρόβλημα: υπάρχουν έξι φορές περισσότεροι μαθητές από τους καθηγητές. Στο πρόβλημα αυτό αν συμβολίσουμε με S το πλήθος των μαθητών και με P το πλήθος των καθηγητών, υπάρχει μεγάλο ποσοστό μαθητών που θα σχηματίσουν την ισότητα: $6S = P$. Ίσως το πρόβλημα αυτό να οφείλεται στα παραδείγματα που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία που στις περισσότερες περιπτώσεις, οι μαθητές σχηματίζουν παραστάσεις ή εξισώσεις με απλή αντικατάσταση λέξεων με μεταβλητές. Για παράδειγμα, αν δούμε το σχολικό βιβλίο της β γυμνασίου, στο κεφάλαιο των εξισώσεων και στη παράγραφο 1.4 – «Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων», οι οδηγίες που δίνονται στους μαθητές για τη δημιουργία εξίσωσης με σκοπό να λυθεί ένα πρόβλημα, αλλά και τα τέσσερα παραδείγματα που υπάρχουν μετά τις οδηγίες, ευνοούν την υιοθέτηση της συντακτικής μετάφρασης του κειμένου με αντικατάσταση λέξεων με μεταβλητές.

Για να καταφέρει ένας μαθητής να σχηματίσει μία αλγεβρική πρόταση, μία εξίσωση ή μία ανίσωση, ή για να δημιουργήσει τα εργαλεία με σκοπό να κατασκευάσει μία απόδειξη, πρέπει πριν την προσπάθεια για συντακτική μετάφραση του κειμένου να έχει κατανοήσει πλήρως το φυσικό κείμενο από το οποίο θα αντλήσει πληροφορίες.

Απαιτείται, όπως αναφέρουν και οι MacGregor και Stacey (1993), η «σημασιολογική μετάφραση του κειμένου». Αυτή η διαδικασία όμως, στηρίζεται στα γνωστικά σχήματα των μαθητών και ελλιπή γνωστικά σχήματα δημιουργούν εμπόδια στην σημασιολογική κατανόηση ενός κειμένου με σκοπό τη δημιουργία του αντίστοιχου αλγεβρικού αντικειμένου.

Κατά τη μετάφραση του κειμένου παρατηρείται και ένα άλλο φαινόμενο. Τα αλγεβρικά γράμματα χρησιμοποιούνται ως συντομεύσεις των λέξεων του φυσικού κειμένου. Το γράμμα P στο προηγούμενο παράδειγμα συμβολίζει, για τους μαθητές, ένα καθηγητή και αντίστοιχα το S, ένα μαθητή, ενώ η χρήση των αντίστοιχων μεταβλητών είναι για την αντιστοίχισή τους με το πλήθος των καθηγητών και των μαθητών αντίστοιχα (MacGregor, M., & Stacey, K., 1993).

Η χρήση των συμβόλων.

Ο Booth (1988) αντίστοιχα παρατηρεί ότι κάποιοι μαθητές συναντούν εμπόδια προσπαθώντας να απλοποιήσουν εκφράσεις της μορφής: $2α + 5β =$, λόγω της ερμηνείας του συμβόλου της πράξης της πρόσθεσης και του συμβόλου της ισότητας. Θεωρούν κάποιοι μαθητές ότι τα σύμβολα αυτά πρέπει να συνοδεύονται από κάποια ενέργεια. Η εμφάνιση του συμβόλου «+» είναι η ένδειξη ότι πρέπει να προστεθούν κάποια αντικείμενα και το «=» σημαίνει την εύρεση και τη καταγραφή ενός αποτελέσματος, μετά το σύμβολο της ισότητας πρέπει δηλαδή να υπάρχει κάποιο αριθμητικό αποτέλεσμα (Kieran, 1981). Παραδείγματα, παρόμοια με το παραπάνω όπου κάποιοι μαθητές ενώνουν όρους στη μορφή 2α + 5β = 7αβ, ενδέχεται να οφείλονται στην περιορισμένη εμπειρία των μαθητών και στην προσκόλλησή τους στη δομή της αριθμητικής όπου μπορούμε να έχουμε ένωση όρων όπως για παράδειγμα: 3 δεκάδες και 7 μονάδες = 37. Υπάρχει όμως και στην δομή της άλγεβρας περίπτωση «ένωσης» όρων. Στον πολλαπλασιασμό, 5 φορές το α, είναι το 5α, βλέπουμε δηλαδή ότι εξαφανίστηκε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού και το αποτέλεσμα προκύπτει από την ένωση των όρων (Booth, 1988).

Συγκεκριμένα για το πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές την χρήση του συμβόλου της ισότητας, υπάρχουν αρκετές έρευνες που έχουν καταλήξει ότι η ισότητα ερμηνεύεται με δύο τρόπους, ως λειτουργική και ως σχεσιακή (Prediger, 2010). Η Kieran (1981) αναφέρει ότι το σύμβολο της ισότητας είναι για πολλούς μαθητές, από το δημοτικό μέχρι και την τριτοβάθμια εκπαίδευση, σήμα για να κάνεις κάτι. Για τα παιδιά του δημοτικού το σύμβολο της ισότητας είναι το διαχωριστικό μεταξύ του προβλήματος και της λύσης του. Στο δημοτικό, οι δραστηριότητες των μαθηματικών ευνοούν τη λειτουργική ερμηνεία του συμβόλου της ισότητας, ενώ στο γυμνάσιο προσεγγίζεται η σχεσιακή ερμηνεία του συμβόλου. Η Prediger (2010) παρατηρεί ότι υπάρχουν μαθητές στη μέση εκπαίδευση που θεωρούν ότι η ισότητα $24 \times 7 = 20 \times 7 + 4 \times 7$ είναι λανθασμένη διότι το δεύτερο μέλος δεν περιέχει το αποτέλεσμα της πράξης του πρώτου μέλους. Αυτοί οι μαθητές δεν μπορούν να αντιληφθούν τη σχεσιακή ερμηνεία του συμβόλου της ισότητας και η χρήση του είναι σωστή μόνο όταν ακολουθεί το σύμβολο η λύση του προβλήματος, το αποτέλεσμα.

Η κατανόηση της αριθμητικής.

Έχουμε συζητήσει την πλευρά της άλγεβρας ως γενικευμένη αριθμητική που εμφανίζεται μέσω γενικεύσεων των αριθμητικών σχέσεων και διαδικασιών. Προηγείται βέβαια η κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων και των διαδικασιών στο πλαίσιο της αριθμητικής (Booth, 1988). Υπάρχουν δηλαδή μαθητές που έχουν δυσκολίες στην άλγεβρα λόγω προβλημάτων που έχουν στο πλαίσιο της αριθμητικής.

Μία κατηγορία λαθών που κάνουν κάποιοι μαθητές σχετίζεται με τη χρήση των παρενθέσεων. Οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν παρενθέσεις ή κάποιες φορές δεν τις λαμβάνουν υπόψιν τους. (Kieran, 1979). Τα λάθη οφείλονται στη σειρά που πραγματοποιούνται οι πράξεις, ανεξάρτητα από την ύπαρξη των παρενθέσεων, και που είναι με τη σειρά που είναι γραμμένη η έκφραση, δεν ακολουθούνται δηλαδή οι κανόνες της αριθμητικής στην προτεραιότητα των πράξεων και στη χρήση των παρενθέσεων. Ένα αριθμητικό παράδειγμα λάθους που αντιστοιχεί σε πληθώρα αλγεβρικών είναι η πράξη $27 + 19 \times 18$ που κάποιοι μαθητές πιστεύουν πως το αποτέλεσμα είναι το ίδιο είτε εκτελεστεί πρώτα η πρόσθεση, είτε ο πολλαπλασιασμός (Booth, 1984). Λάθη αυτής της μορφής είναι συνήθως η αιτία λαθών στην άλγεβρα όπου κάποιοι μαθητές είτε αγνοούν, είτε δε χρησιμοποιούν παρενθέσεις ή τις χρησιμοποιούν λανθασμένα.

Οι Herscovics, και Linchevski, (1994), παρατήρησαν μία κατηγορία λαθών που κάνουν οι μαθητές στην οποία αναφέρονται ως «αποσύνδεση από το σύμβολο του μείον». Παρατήρησαν την τάση κάποιων μαθητών να αγνοούν το σύμβολο του μείον που βρίσκεται μπροστά από ένα αριθμό. Σε μία έρευνα τους, κάποιοι μαθητές είτε έκαναν πράξεις με την απόλυτη τιμή του αριθμού, χωρίς να λαμβάνουν υπόψιν τους το αρνητικό σύμβολο μπροστά από τον αριθμό, είτε παρέλειπαν το μείον σε κάποιο σημείο της σειράς των μετασχηματισμών. Αυτά τα λάθη ίσως να προέρχονται από γνωστικά εμπόδια (Herscovics, 1989), είτε από παρανοήσεις των μαθητών στη σειρά των πράξεων. Μαθαίνοντας ότι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση προηγούνται της πρόσθεσης και της αφαίρεσης , κάποιοι μαθητές πιστεύουν ότι η πρόσθεση προηγείται του πολλαπλασιασμού (Herscovics, και Linchevski, 1994). Η Kieran (1989) υποστηρίζει ότι τέτοια λάθη οφείλονται στην ελλιπή κατανόηση της δομής της αριθμητικής. Οι μαθητές δομούν τα αλγεβρικά τους νοήματα στην εμπειρία τους με δραστηριότητες της αριθμητικής.

Μοντέλο Αλγεβρικής σκέψης

Η προσπάθεια περιγραφής της έννοιας της Αλγεβρικής σκέψης, όσο λεπτομερής και αναλυτική να είναι, βρίσκεται σε θεωρητικό επίπεδο και δίνει μια γενική εικόνα της έννοιας που δεν είναι ιδιαίτερα ξεκάθαρη. Η υπάρχουσα βιβλιογραφία δημιουργεί ένα πέπλο εννοιών και ορισμών σε μία σύνθεση αλγεβρικής σκέψης (γενίκευση, επίλυση, απόδειξη), διαδικασιών συλλογισμού και μαθηματικών θεμάτων (συναρτήσεις, μοντελοποίηση).

Σκοπός αυτής της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσει ένα μοντέλο διάστασης της αλγεβρικής σκέψης – δραστηριοτήτων των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μέσω του οποίου θα μπορέσει να ανιχνευτεί η φύση της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Στόχος είναι να επαληθευτεί το μοντέλο αυτό εμπειρικά και να ανιχνευτεί αν υπάρχει ιεράρχηση στα προτεινόμενα χαρακτηριστικά αλγεβρικής σκέψης που αναπτύσσουν οι μαθητές.

Στην εργασία αυτή συνθέτουμε ένα μοντέλο διάστασης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών με κριτήριο το είδος των εργασιών και το τρόπο εργασίας στις δραστηριότητες αυτές, βασιζόμενοι στις ιδέες του Kaput (1995) και της Kieran (1996). Σύμφωνα με το μοντέλο που προτείνουμε, υποθέτουμε ότι συγκεκριμένα είδη δραστηριοτήτων απαιτούν και διαφορετικό τρόπο σκέψης. Υποθέτουμε ότι η Αλγεβρική ικανότητα - σκέψη συντίθεται από τέσσερις παράγοντες ικανοτήτων που καθορίζονται σύμφωνα με το είδος των δραστηριοτήτων και τις ικανότητες που πρέπει να έχει αναπτύξει ένας μαθητής για να εργαστεί με τις δραστηριότητες αυτές. Οι τέσσερις αυτοί παράγοντες είναι:

α) Γενικευμένη αριθμητική

β) Συναρτησιακή σκέψη

γ) Μετασχηματιστική ικανότητα

δ) Μοντελοποίηση – μετα-άλγεβρα – αποδείξεις.

Ο παράγοντας «γενικευμένη αριθμητική» σχετίζεται με την ικανότητα που πρέπει να κατέχουν οι μαθητές για να εργαστούν με δραστηριότητες που βασίζονται στην αριθμητική, και διακρίνουμε τρία είδη δραστηριοτήτων γενικευμένης αριθμητικής: (α) δραστηριότητες που περιλαμβάνουν πράξεις και ιδιότητες αριθμών, (β) δραστηριότητες που προϋποθέτουν την αναγνώριση της δομής των αριθμητικών αντικειμένων και (γ) ασκήσεις ισότητας και ανισότητας, χωρίς τη χρήση συμβόλων.

Ο παράγοντας «συναρτησιακή σκέψη» σχετίζεται με δραστηριότητες που έχουν σχέση με (α) την μελέτη μοτίβων (β) την αναγνώριση σχέσεων μεταξύ μεταβλητών και (γ) την αναγνώριση σχέσης σε γράφημα.

Ο παράγοντας «μετασχηματιστική ικανότητα» σχετίζεται με δραστηριότητες που έχουν σχέση με τον μετασχηματισμό (α) αριθμητικών παραστάσεων, (β) αλγεβρικών παραστάσεων και την (γ) στην επίλυση εξισώσεων.

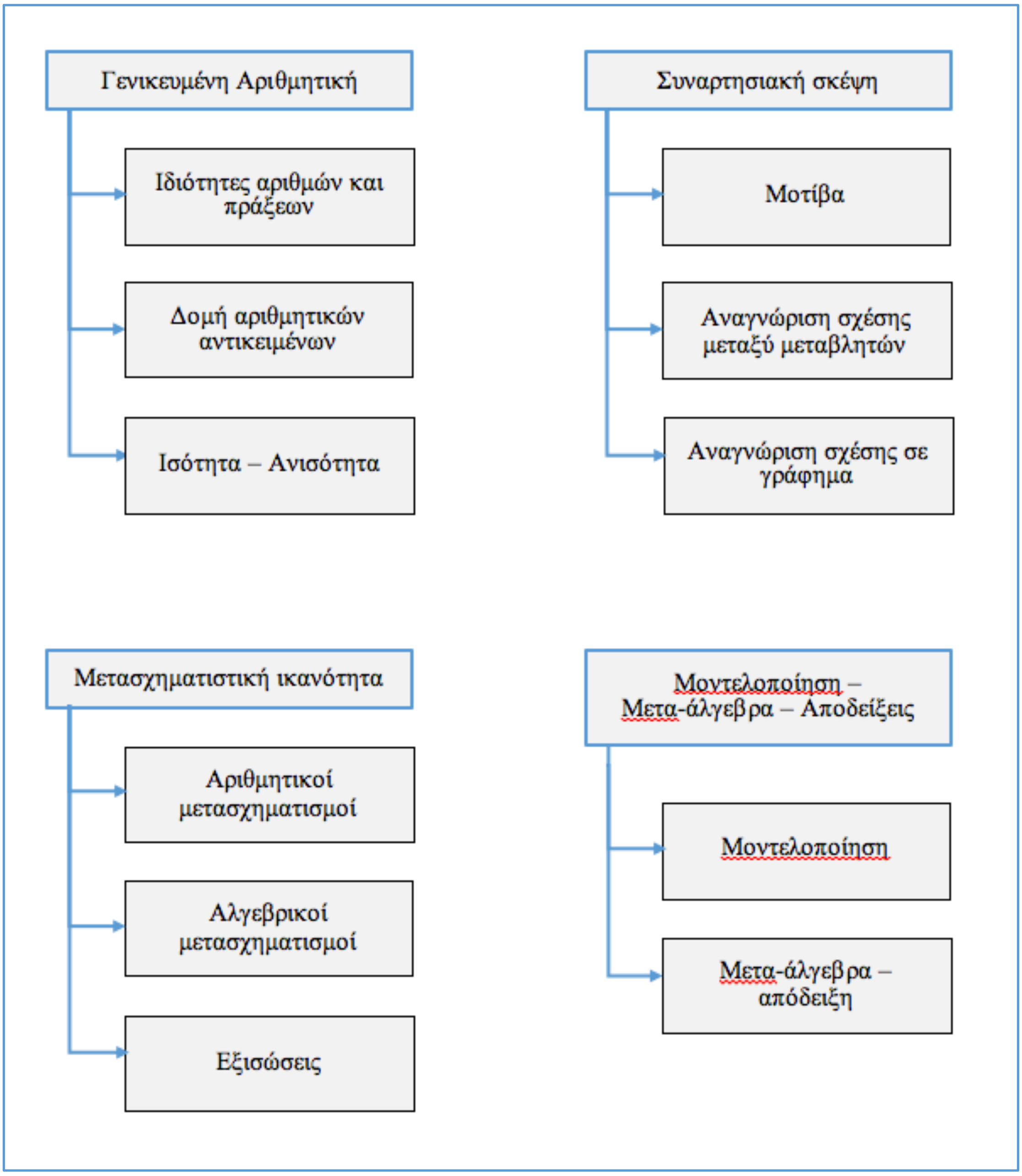
Ο παράγοντας «μοντελοποίηση – μετα-άλγεβρα – αποδείξεις» σχετίζεται με δραστηριότητες που έχουν σχέση με την (α) μοντελοποίηση και (β) μετα-άλγεβρα και αποδείξεις.

Οι εξειδικευμένες αλγεβρικές ικανότητες και ο αντίστοιχος τρόπος σκέψης που πρέπει να έχουν οι μαθητές για να εργαστούν με αλγεβρικές δραστηριότητες υποθέτουμε ότι μπορούν να ερμηνευτούν ως μία έκφραση μίας κατηγορίας ικανοτήτων – σκέψης, από το σύνολο των έντεκα που προτείνουμε, που είναι:

1. Ιδιότητες αριθμών και πράξεων
2. Δομή αριθμητικών αντικειμένων
3. Ισότητα – Ανισότητα
4. Μοτίβα
5. Αναγνώριση σχέσης μεταξύ μεταβλητών
6. Αναγνώριση σχέσης σε γράφημα
7. Αριθμητικοί μετασχηματισμοί
8. Αλγεβρικοί μετασχηματισμοί
9. Εξισώσεις
10. Μοντελοποίηση
11. Μετα-άλγεβρα – απόδειξη

Κάθε ειδική ικανότητα υποθέτουμε ότι διατηρεί τα δικά της ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, είναι θεμελιώδης και είναι η βάση για πιο εξειδικευμένες ικανότητες. Υποθέτουμε λοιπόν, ότι οι ικανότητες και ο αλγεβρικός τρόπος σκέψης των μαθητών αντιστοιχούν σε έντεκα διαφορετικούς παράγοντες πρώτης τάξης. Οι παράγοντες αυτοί συγκροτούν τέσσερις διαφορετικούς παράγοντες δεύτερης τάξης που συνθέτουν την αλγεβρική σκέψη και το σύνολο των αλγεβρικών ικανοτήτων των μαθητών.

Γράφημα 1 – Μοντέλο Αλγεβρικής Σκέψης



Αλγεβρική σκέψη.

Οι όροι αλγεβρική σκέψη και αλγεβρικός συλλογισμός εναλλάσσονται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία. Ο όρος αλγεβρική σκέψη (algebraic thinking) είναι καταλληλότερος καθώς η αναφορά σε είδος συλλογισμού δημιουργεί την εντύπωση ότι αναφερόμαστε σε ένα άλλο είδος από τα είδη συλλογισμού: απαγωγικός, επαγωγικός, παραγωγικός, αναλυτικός (Kieran, 2011). Ο όρος «αλγεβρική σκέψη» μπορεί να περιγράψει την πολυδιάστατη έννοια της σκέψης των μαθητών που εργάζονται σε δραστηριότητες της άλγεβρας. Σε αυτή την εργασία ακολουθούμε την άποψη των Blanton και Kaput (2005) ότι η αλγεβρικής σκέψη είναι η διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές γενικεύουν μαθηματικές ιδέες που προκύπτουν από συγκεκριμένα παραδείγματα και εκφράζουν αυτές τις ιδέες είτε με τυπικό είτε με μη τυπικό τρόπο. Επομένως η γενίκευση είναι το χαρακτηριστικό που διαποτίζει όλα τα είδη της αλγεβρικής σκέψης.

Γενικευμένη αριθμητική.

Οι περισσότεροι μαθητές που εισέρχονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση γνωρίζοντας τις βασικές πράξεις της αριθμητικής και διαδικασίες επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων. Όμως παρόλο που οι διαδικασίες αυτές εφαρμόζονται σωστά, υπάρχουν αρκετοί μαθητές που παρουσιάζουν προβλήματα κατά τη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα. Πολλά από αυτά τα προβλήματα οφείλονται στην έλλειψη κατανόησης των ιδιοτήτων και της δομής των αντικειμένων (Russell et. al., 2011).

Με τον όρο «Γενικευμένη αριθμητική» αναφερόμαστε στη γενίκευση της γνώση της αριθμητικής, στη κατανόηση και χρήση των κανόνων και των ιδιοτήτων των πράξεων της αριθμητικής και της σχέσης των αριθμών, στη διατύπωση γενικεύσεων π.χ. για την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού, για τις ιδιότητες του 0, ή την κατανόηση της ισότητας και της ανισότητας μεταξύ αριθμών στο πλαίσιο της αριθμητικής ώστε να επεκταθεί στο χώρο της άλγεβρας. Στην κατηγορία αυτή βρίσκονται δραστηριότητες που δεν κάνουν χρήση μεταβλητών και αγνώστων και βασίζονται στη γνώση των κανόνων και λειτουργιών της αριθμητικής. Στην αριθμητική οι δραστηριότητες βασίζονται στις τέσσερις βασικές πράξεις μεταξύ φυσικών αριθμών και στις ιδιότητες των πράξεων αυτών. Η κατανόηση των λειτουργιών και κανόνων της αριθμητικής είναι μέσο κατανόησης της άλγεβρας. Η επανάληψη δημιουργεί μοτίβα που στηρίζονται στη δομή της αριθμητικής και δημιουργούν τις προϋποθέσεις για γενίκευση (Usiskin, 1998). Για παράδειγμα το $4 + 3 = 3 + 4$ γενικεύεται $α + β = β + α$. Επίσης το μοτίβο αναδεικνύει τη δομή του αντικειμένου και η έκφραση της δομής παράγει γενικεύσεις που ανήκουν στο χώρο της άλγεβρας (Mason, 1996). Μοτίβα της μορφής

$$2 + 3 = 3 + 2$$

$$5 + 4 = 4 + 5$$

$$6 + 3 = 3 + 6$$

είναι εργαλεία γενίκευσης μέσω συμπερασμάτων των μαθητών της μορφής: «η σειρά δεν μετράει». Τέτοιου είδους μοτίβα βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τη δομή της αριθμητικής και να οδηγηθούν σε γενικεύσεις του χώρου της άλγεβρας. Σύμφωνα με τον Usiskin (1998) το μοτίβο:

$3 \cdot 5 = 15$

$2 \cdot 5 = 10$

$1 \cdot 5 = 5$

$0 \cdot 5 = 0$

επεκτείνεται στον πολλαπλασιασμό με αρνητικούς:

$-1 \cdot 5 = -5$

$-2 \cdot 5 = -10$

και στη συνέχεια η ιδέα επεκτείνεται στη γενίκευση $-x \cdot y = -xy$. Η κατανόηση της δομής μπορεί να βοηθήσει στην επέκταση των ιδιοτήτων πέρα από το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Όταν εργαζόμαστε σε ένα παράδειγμα της αριθμητικής αναγνωρίζουμε τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών που θέλουμε να τις εκφράσουμε μαθηματικά. Περνάμε μέσα από μία διαδικασία μετάφρασης και γενίκευσης που είναι δύο βασικές ικανότητες που δομούνται στο χώρο της αριθμητικής και είναι πολύ βασικές για την άλγεβρα (Usiskin, 1998). Επίσης, η εξέταση και η κατανόηση της σχέσης και της λειτουργίας των αριθμών του παραδείγματος, βοηθούν να περάσουμε το πλαίσιο του συγκεκριμένου, και να κατανοήσουμε τη δομή του αντικειμένου. Η γενικευμένη αριθμητική είναι ουσιαστικά, μέρος της διαδικασίας απομάκρυνσης από το συγκεκριμένο. Η αναγνώριση της και η κατανόηση των σχέσεων των αριθμών και της δομής των σχέσεων αυτών είναι βασικό χαρακτηριστικό της αλγεβρικής σκέψης Fujii and Stephens (2001).

Συναρτησιακή σκέψη.

Όποτε συζητάμε για την εξάρτηση μίας ποσότητας από μία ή περισσότερες διαφορετικές ποσότητες συζητάμε για συναρτήσεις. Η έννοια της συνάρτησης είναι βασική στην σχολική άλγεβρα και αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν τη σημαντικότητα που κατέχει στη διδασκαλία της άλγεβρας (Kieran, 1996). Δεν είναι μόνο η αναγνώριση της σχέσης εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών που είναι σημαντική αλλά οι διαφορετικές αναπαραστάσεις μίας τέτοιας σχέσης και η σύνδεση των αναπαραστάσεων αυτών, είναι εξαιρετικά σημαντική (Kieran, 1996). Υπάρχουν όμως και πρακτικοί λόγοι της σημαντικότητας της κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. Η ικανότητα συναρτησιακής σκέψης είναι προϋπόθεση για την κατανόηση δυσκολότερων αλγεβρικών εννοιών (Kaput, 1992). Στο άρθρο των Romberg et al. (1993) αλγεβρικών αναφέρεται ότι η έννοια της συνάρτησης είναι από τις πιο σημαντικές και χρήσιμες έννοιες των μαθηματικών. Και είναι εξαιρετικά σημαντικό η αναγνώριση της σχέσης να γίνεται σε διαφορετικές αναπαραστάσεις αλλά και ο τρόπος έκφρασης της σχέσης αυτής.

Μία από τις σημαντικότερες θέσεις στον πυρήνα της συναρτησιακής σκέψης κατέχουν τα μοτίβα. Ο Lee (1996) αναφέρει ότι «η άλγεβρα, στην πραγματικότητα τα μαθηματικά έχουν να κάνουν με τη γενίκευση μοτίβων (σελ. 103). Η κατανόηση των μοτίβων, των σχέσεων και των συναρτήσεων είναι ένας από τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης όπως αναφέρει η έκθεση Algebra standard in the Principles and Standards for school mathematics (NCTM, 2000). Οι English and Warren (1998) υποστηρίζουν ότι μέσω των μοτίβων δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να παρατηρήσουν και να εκφράσουν τις γενικεύσεις τους και στη συνέχεια να τις καταγράψουν με συμβολικό τρόπο.

Τα γεωμετρικά μοτίβα είναι μία ακολουθία σχημάτων στα οποία τα αντικείμενα των σχημάτων αυτών αλλάζουν συνήθως με ένα προβλεπόμενο τρόπο, εξελίσσονται βάσει συναρτησιακών κανόνων μεταξύ συνήθως δύο μεταβλητών. Τα γεωμετρικά μοτίβα έχουν χαρακτηριστικά που τα κάνει ιδανικά εργαλεία ανάπτυξης της συναρτησιακής σκέψης. Η δημιουργία νοητικών αναπαραστάσεων που βασίζονται στη σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών ποσοτήτων, η αναγνώριση της σχέσης σε ένα συγκεκριμένο περιστατικό και η σκέψη που οδηγεί σε γενικεύσεις της σχέσης αυτής στη μετάβαση από το ειδικό στο γενικό, είναι τα βασικά χαρακτηριστικά της συναρτησιακής σκέψης (E. Smith, 2008). Στα γεωμετρικά μοτίβα αναγνωρίζεται βάσει παρατήρησης, η σχέση των μεταβλητών στα αρχικά σχήματα μετά από υποθέσεις, δοκιμές και ελέγχους και γενικεύεται στην πορεία εξέλιξης του μοτίβου.

Υπάρχουν δύο είδη κανόνων που μπορεί ένας μαθητής να παράγει μελετώντας ένα μοτίβο. Μπορεί ο μαθητής να αναγνωρίσει τον αναδρομικό τύπο, δηλαδή πως κάθε σχέδιο δημιουργείται από το προηγούμενό του στη σειρά των σχημάτων. Μπορεί όμως να δημιουργήσει τον γενικό τύπο, τη σχέση δηλαδή που ισχύει μεταξύ των μεταβλητών του μοτίβου. Ο γενικός τύπος δίνει και τη δυνατότητα υπολογισμού οποιουδήποτε όρου του μοτίβου, χωρίς να είναι απαραίτητο να υπολογιστούν οι ενδιάμεσοι όροι. Οι γενικοί τύποι είναι όμως πιο δύσκολο να παραχθούν και συνδέονται πιο άμεσα με τη συναρτησιακή σκέψη Lannin, et al., (2006).

Μετασχηματιστική ικανότητα

Για το είδος της αλγεβρικής σκέψης που ενεργοποιούν οι μαθητές όταν μετασχηματίζουν αλγεβρικά αντικείμενα, υιοθετούμε την άποψη της Kieran (1996), παρατηρώντας ότι η προσέγγισή της καλύπτει την κατηγορία των αλγεβρικών δραστηριοτήτων που ο Kaput αναφέρει ως: «Η Άλγεβρα ως συντακτικά καθοδηγούμενος χειρισμός φορμαλισμών».

Οι δραστηριότητες αυτές περιλαμβάνουν το μετασχηματισμό παραστάσεων με παραγοντοποίηση, πράξεις, άνοιγμα παρενθέσεων, απλοποίηση κλασμάτων, πράξεις πολυωνύμων, όπως και δημιουργία ισοδύναμων εκφράσεων και εξισώσεων με πράξεις, παραγοντοποίηση και απλοποίηση, απαλοιφή παρενθέσεων, επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων κλπ. Το μεγαλύτερο μέρος των δραστηριοτήτων αυτών είναι η αλλαγή της συμβολικής μορφής μίας έκφρασης ή μίας εξίσωσης με σκοπό να διατηρηθεί η ισοδυναμία. Όλες οι αλλαγές και οι μετασχηματισμοί πρέπει να ακολουθούν κανόνες και προϋποθέτουν τη κατανόηση των κανόνων αυτών.

Βασικοί κανόνες μετατρέπονται σε εργαλεία χειρισμού των αλγεβρικών αντικειμένων, μετατρέπονται όσο πιο σύνθετοι γίνονται οι μετασχηματισμοί. Αυτή η διαδικασία δε στερείται νοήματος και για να είναι αποτελεσματική, σε σύνθετους κυρίως μετασχηματισμούς απαιτείται η βαθιά κατανόηση της αλγεβρικής δομής. Ακόμα και οι αυτόματοι, όπως μπορεί να φαίνονται μετασχηματισμοί περιέχει ένα στόχο που καθορίζει την πορεία του χειρισμού του αλγεβρικού αντικειμένου, μία αίσθηση για το πως θέλεις να μετατρέψεις μία αλγεβρική παράσταση ή μία εξίσωση, που θέλεις να καταλήξεις, πως θέλεις να μοιάζει η αλγεβρική έκφραση που χειρίζεσαι όταν τελειώσεις (Paolo Boero, 1993). Ο αλγεβρικός μετασχηματισμός ακολουθεί μία αρχικά σχεδιασμένη στρατηγική και πολλές φορές αποφεύγονται τα ενδιάμεσα στάδια ενός μετασχηματισμού, με σκοπό να προσεγγιστεί συντομότερα ο στόχος (Mason, 1996). Επίσης για να μπορέσουμε να εργαστούμε σε μία δραστηριότητα μετασχηματισμού πρέπει να έχουμε κατανοήσει τις δομικές ιδιότητες των μαθηματικών λειτουργιών και των σχέσεων ώστε να μπορούμε να κατανοήσουμε ποιοι μετασχηματισμοί είναι επιτρεπτοί και ποιοι δεν είναι (Booth, 1989). . Κάθε δραστηριότητα μετασχηματισμού περιλαμβάνει θεωρητικά και εννοιολογικά στοιχεία τα όποια είναι περισσότερο εμφανή κατά την εκμάθηση και αρχική εφαρμογή των τεχνικών αυτών. Οι τεχνικές έχουν ένα πραγματιστικό ρόλο για την παραγωγή αποτελεσμάτων αλλά προϋποθέτουν και οδηγούν σε κατανόηση εννοιών που χειρίζεται η άλγεβρα (Lagrance, 2002).

Μοντελοποίηση – Μετα-άλγεβρα – Αποδείξεις

Οι δραστηριότητες της μετα-άλγεβρας είναι όπως αναφέρει και η Kieran (1996) είναι αυτές στις οποίες χρησιμοποιείται η άλγεβρα ως εργαλείο και γι' αυτό το λόγο αναφέρονται και ως μετα-αλγεβρικές. Σε αυτές τις δραστηριότητες ανήκει η επίλυση προβλημάτων με κατασκευή εξίσωσης, η μοντελοποίηση, η ανάδειξη μαθηματικών δομών, η μελέτη αλλαγών και σχέσεων, η γενίκευση, η αιτιολόγηση, η εξήγηση και η απόδειξη, η πρόβλεψη και η έκφραση εικασιών, η μελέτη της αλλαγής σε περιβάλλοντα συναρτήσεων και γενικά όλες οι δραστηριότητες με τις οποίες ασχολούνται οι μαθητές, στις οποίες δε χρησιμοποιείται η άλγεβρα μέσω της κατασκευής «αλγεβρικών» αντικειμένων, που είναι δυνατό δηλαδή, να μη χρησιμοποιηθούν καθόλου γράμματα ως μεταβλητές, άγνωστοι ή παράμετροι. Σε τέτοιες δραστηριότητες ο μαθητής χρησιμοποιεί μαθηματικές ικανότητες που δεν μπορούν να χαρακτηριστούν αποκλειστικά αλγεβρικές, γεωμετρικές ή κάτι άλλο, αλλά το υπόβαθρο τους είναι εμφανέστατα αλγεβρικό.

Μαθηματικό μοντέλο είναι ένα μαθηματικό αντικείμενο που προσεγγίζει και περιγράφει τα βασικά χαρακτηριστικά μίας κατάστασης. Το μοντέλο μπορεί να έχει τη μορφή εξίσωσης, γραφήματος, πίνακα, ή οποιουδήποτε άλλου μαθηματικού εργαλείου κατάλληλου για την εκάστοτε περίπτωση (Timmons et. al., 2012).

Η μοντελοποίηση ορίζεται ως μία λειτουργία, που αποτελείται από δύο στάδια, το στάδιο της σύνθεσης, της κατασκευής στο πλαίσιο αρχικών υποθέσεων και το στάδιο της επικύρωσης. Και τα δύο στάδια περιλαμβάνουν λειτουργίες γενίκευσης και μετασχηματισμών. Οι αρχικές υποθέσεις οδηγούν σε τύπους ή γραφήματα τα οποία μετασχηματίζονται, συνδυάζονται και ελέγχονται. Τα προϊόντα της μοντελοποίησης είναι η γενίκευση που ισχύει για παρόμοια φαινόμενα με αυτό που δημιούργησε το μοντέλο. Η παρατήρηση ενός φαινομένου, η διατύπωση εικασιών για τις σχέσεις και την ισχύ των μεταβλητών μίας κατάστασης και η πορεία προς τη δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου περιγραφής του φαινομένου είναι η μετάβαση από το ειδικό στο γενικό.

Το τι είναι απόδειξη στα μαθηματικά δεν είναι πολύ ξεκάθαρο για τους μαθητές και πολλές φορές το τι σημαίνει απόδειξη είναι διαφορετικό από αυτό που πιστεύει ο καθηγητής, όπως και πολλοί καθηγητές ερμηνεύουν διαφορετικά τον όρο αυτό (Tall 1989). Και ενώ δεν μπορούμε να ορίσουμε το τί είναι απόδειξη και ούτε μπορούμε να βρούμε κάποιο ορισμό στα σχολικά βιβλία, η απόδειξη είναι βασικό συστατικό της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η απόδειξη στα μαθηματικά είναι μία ακολουθία παραγωγικών συλλογισμών ώστε από κάποιες μαθηματικές «αλήθειες» να παράγουμε μία αλήθεια, να μπορέσουμε να επιβεβαιώσουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα. Όμως κάποιες αποδείξεις είναι επαγωγικές. Οι επιστήμονες αποδεικνύουν βάσει παρατήρησης ενώ στα μαθηματικά το παράδειγμα δεν αποδεικνύει, επιβεβαιώνει την αλήθεια ενός γεγονότος. Για την παραγωγή μίας απόδειξης η παραγωγική σκέψη εναλλάσσεται με τον επαγωγικό συλλογισμό βάσει παρατήρησης και τα τυπικά, φορμαλιστικά επιχειρήματα ακολουθούν τα άτυπα επιχειρήματα και τις εικασίες (Healy και Hoyles, 2000)

Σε πολλές αποδείξεις του Λυκείου ο μαθητής πρέπει να περάσει μέσα από μία σειρά συμβολικών μετασχηματισμών ώστε να παράγει ένα αποτέλεσμα που είναι προετοιμασμένος να δεχτεί, κάτι που είναι σωστό. «Και γιατί είναι απαραίτητο να αποδείξουμε κάτι το οποίο είναι σωστό;» Συνήθως οι μαθητές αντιμετωπίζουν την έννοια της απόδειξης ως επιστήμονες, δηλαδή αρκετές επιβεβαιώσεις μίας εικασίας επιβεβαιώνει την ισχύ της (Tall, 1989). Όπως υποστηρίζει ο Tall (1998), η φύση της τυπικής απόδειξης είναι πολύ δύσκολο να γίνει κατανοητή από τους μαθητές. Ως εκ τούτου ως απόδειξη δεχόμαστε τη διαδικασία παραγωγής ενός αποτελέσματος ξεκινώντας από κάποια δεδομένα ή υποθέσεις στο πλαίσιο της γενικότητας, δηλαδή η ακολουθία των παραγωγικών συλλογισμών να ισχύει για όλα τα αντικείμενα στα οποία αναφέρεται, και να χρησιμοποιεί όλες τις ιδιότητες των αρχικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, αν η απόδειξη χρησιμοποιεί διαδοχικούς ακέραιους πρέπει σε γενική μορφή να έχουμε τους ν, ν+1, όπου ν ένας ακέραιος και όχι απλά τους μ, ν που δεν έχουν το χαρακτηριστικό να είναι διαδοχικοί.

Σκοπός και στόχοι της έρευνας

Ο σκοπός αυτής της της εργασίας είναι η βαθύτερη κατανόηση και διασαφήνιση της έννοιας της αλγεβρικής σκέψης στο διδακτικό πλαίσιο του γυμνασίου.

Ο βασικός στόχος της έρευνας αυτής είναι η σύνθεση και ο εμπειρικός έλεγχος ενός θεωρητικού μοντέλου, που συνδυάζει υφιστάμενα θεωρητικά πλαίσια για την περιγραφή της δομής της αλγεβρικής σκέψης μαθητών γυμνασίου, έχοντας ως στόχο την περιγραφή των σχέσεων μεταξύ των συνιστωσών της αλγεβρικής σκέψης. Επιμέρους στόχοι της έρευνας είναι να εξετάσουμε αν υπάρχουν ομάδες μαθητών που παρουσιάζουν παρόμοια επίπεδα αλγεβρικής ικανότητας και αν υπάρχει ιεράρχηση στην ανάπτυξη των παραγόντων της αλγεβρικής σκέψης.

Ερευνητικά ερωτηματα

Ο σκοπός και οι στόχοι της έρευνας καθορίζουν τρία ερευνητικά ερωτήματα:

1. Μπορούμε να συνθέσουμε ένα μοντέλο των παραγόντων της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών του γυμνασίου το οποίο επιβεβαιώνεται και εμπειρικά;
2. Υπάρχουν ομάδες μαθητών με παρόμοιες αλγεβρικές ικανότητες λόγω κοινών χαρακτηριστικών αλγεβρικής σκέψης;

3. Υπάρχει κάποιου είδους ιεράρχηση στους διαφορετικούς παράγοντες αλγεβρικής σκέψης των μαθητών;

Μεθοδολογία

Ο βασικός στόχος της έρευνας αυτής είναι η εμπειρική επιβεβαίωση του μοντέλου των παραγόντων της αλγεβρικής σκέψης που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε το σχεδιασμό και τη μεθοδολογία της έρευνας που πραγματοποιήσαμε για την επιτυχία του συγκεκριμένου στόχου.

Συμμετέχοντες

Η εργασία με αλγεβρικές δραστηριότητες συνδέεται και με ικανότητες αναπτυξιακής φύσης, ώστε να υπάρχει η ικανότητα κατανόησης των λειτουργιών και της δομής των αντικειμένων (Piaget, 1969, Wertheimer, 1960). Όπως υποστηρίζει ο Watson (2009), ο μαθητής που εργάζεται με επιτυχία στο χώρο της άλγεβρας πρέπει να κατανοεί τη λειτουργία και τις ιδιότητες των πράξεων, να αναγνωρίζει τις λειτουργίες και τους κανόνες χρήσης των συμβολισμών, να αναγνωρίζει τη διαφορετική χρήση των γραμμάτων ως μεταβλητές, άγνωστους, σταθερές ή παραμέτρους και να έχει εμπειρία με μετασχηματισμό αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων. Για το λόγο αυτό επιλέξαμε να διεξάγουμε την έρευνα σε μαθητές της γ γυμνασίου, που θεωρούμε ότι τηρούν τις προϋποθέσεις ανάπτυξης αλγεβρικής σκέψης.

Στην έρευνα μας συμμετείχαν 134 μαθητές, 6 διαφορετικών τμημάτων της γ γυμνασίου ενός ιδιωτικού σχολείου της Αττικής στο οποίο εργάζεται ο ερευνητής. Οι μαθητές ήταν από όλα τα επίπεδα ακαδημαϊκής επίδοσης. Τα αγόρια ήταν σε πλήθος περίπου όσα και τα κορίτσια. Η έρευνα διεξήχθη τις δύο εβδομάδες πριν τις διακοπές του Πάσχα και επιλέχθηκε αυτή η περίοδος ώστε οι μαθητές να έχουν αποκτήσει εμπειρία σε κάποια κεφάλαια της γ γυμνασίου που θεωρήσαμε ότι είναι σημαντικά για τη διεξαγωγή της έρευνας όπως οι ταυτότητες και η παραγοντοποίηση. Επίσης στη γ γυμνασίου περισσότερο από τις υπόλοιπες τάξεις του γυμνασίου, οι μαθητές έχουν αρκετή εμπειρία με το μετασχηματισμό αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων και με την επίλυση εξισώσεων. Προτιμήσαμε να διεξάγουμε την έρευνα στο γυμνάσιο και όχι στο Λύκειο καθώς υποθέσαμε ότι ο τρόπος εργασίας στο Λύκειο ίσως να περιόριζε την ελευθερία συμμετοχής των μαθητών.

Η περίοδος πριν το Πάσχα είναι κατάλληλη καθώς έχει καλυφθεί το μεγαλύτερο κομμάτι της ύλης της γ γυμνασίου, ταυτόχρονα όμως είναι μία περίοδος που οι μαθητές είναι κουρασμένοι και δύσκολα εμπλέκονται ενεργά σε δραστηριότητες μέσα στην τάξη που ξεφεύγουν από τα πλαίσια του καθημερινού προγράμματος.

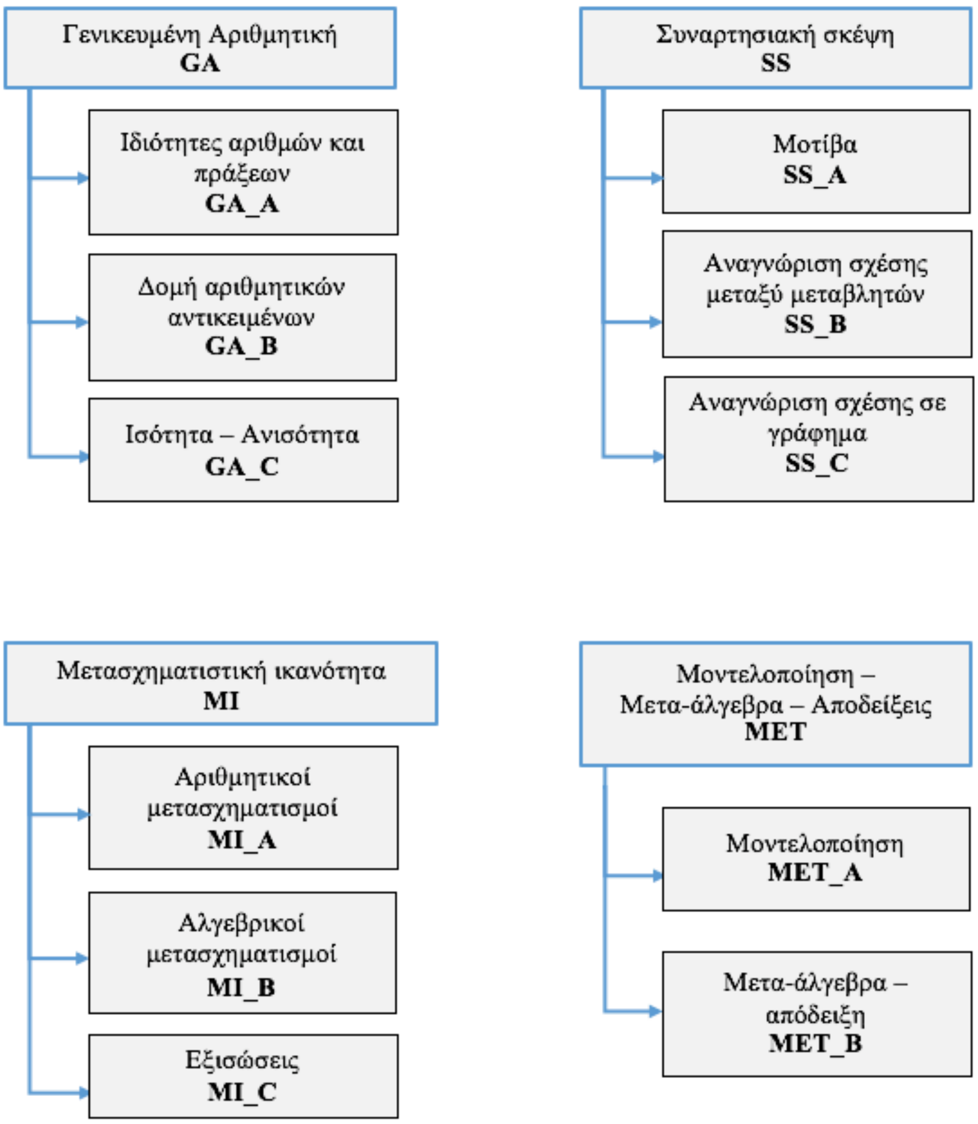
Εργαλεία

Για να επιβεβαιώσουμε το μοντέλο αλγεβρικής σκέψης των μαθητών συνθέσαμε 25 δραστηριότητες που τις χωρίσαμε σε δύο μέρη ώστε να μπορέσουμε να διεξάγουμε την έρευνα σε δύο διδακτικές ώρες. Το κριτήριο επιλογής των δραστηριοτήτων κάθε μέρους ήταν ο χρόνος που θεωρήσαμε ότι απαιτείται για την ολοκλήρωση τους. Στόχος ήταν να προλάβουν όλοι οι μαθητές να ασχοληθούν με όλες τις δραστηριότητες κάθε μέρους.

Κάποιες από τις δραστηριότητες ήταν ανοικτού τύπου ενώ κάποιες άλλες ήταν πολλαπλής επιλογής. Τις δραστηριότητες που θέλαμε να δούμε τον τρόπο που απάντησαν οι μαθητές, και τη διαδικασία που επέλεξαν για να απαντήσουν, τις αφήσαμε ανοικτές, ενώ στις υπόλοιπες δραστηριότητες που η απάντηση ήταν σωστό οι μαθητές έπρεπε να διαλέξουν μία απάντηση από 4 ή 5 πιθανές απαντήσεις.

Στο γράφημα 2 βλέπουμε το προτεινόμενο μοντέλο αλγεβρικής σκέψης με την κωδικοποίηση των αντίστοιχων δραστηριοτήτων και των παραγώντων της κάθε διάστασης.

Γράφημα 2 – Διαστάσεις Αλγεβρικής σκέψης, κωδικοποίηση



Για τη μέτρηση του παράγοντα «Γενικευμένη αριθμητική» δομήσαμε οκτώ δραστηριότητες (βλ. Πίνακα 1). 3 δραστηριότητες που σχετίζονται με την κατανόηση των ιδιοτήτων των αριθμών και των πράξεων, 3 δραστηριότητες που σχετίζονται με τη δομή των αντικειμένων και 2 δραστηριότητες για την κατανόηση της ισότητας και της ανισότητας.

Στην πρώτη και στην τρίτη δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τις ιδιότητες των αριθμητικών πράξεων που ισχύουν στην αριθμητική για να υπολογίσουν το αποτέλεσμα δύο πράξεων: $3 \cdot (-13212) - 5 \cdot (-13212)$ και

$-1245 \cdot 15 + 245 \cdot 15$.

Πίνακας 1. Έργα του παράγοντα «Γενικευμένη αριθμητική»

Είδος έργου	Παράδειγμα
Ιδιότητες αριθμών και πράξεων	**(ga_a1)** Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα της πράξης: $3 \cdot (-13212) - 5 \cdot (-13212) =$
	(ga_a2) Να βρείτε ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρτιος. a. 2^{348} b. 3^{348} c. 5^{348} d. 7^{348} e. Είναι πολύ δύσκολες οι πράξεις για να απαντήσουμε.
	(ga_a3) Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα της πράξης: $-1245 \cdot 15 + 245 \cdot 15 =$
Δομή αριθμητικών αντικειμένων	**(ga_b1)** Να βρείτε ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου $3^2 \cdot 11^{12}$. a. 0 b. 1 c. 3 d. 9
	(ga_b2) Να βρείτε ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος 946 + 950 + 952 + 960 διά του 950
	(ga_b3) Έστω ο αριθμός 3^{400}. Να εξετάσετε αν ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 9 και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.
Ισότητα – Ανισότητα	**(ga_c1)** Αν Α + Β = 4, να βρείτε ποια είναι η τιμή της παράστασης 2Α + 2Β – 5 a. 8 b. -1 c. 3 d. -5
	(ga_c2) Να βρείτε για ποια τιμή του αριθμού α η παρακάτω ανίσωση είναι σωστή. $-10 > (-5)\alpha$ a. 2 b. -2 c. 1 d. 3

Και στις δύο δραστηριότητες οι μαθητές μπορούσαν να απαντήσουν με δύο τρόπους:

μπορούσαν απλά να βρουν τα δύο γινόμενα της αριθμητικής παράστασης και στη συνέχεια να προσθέσουν τα γινόμενα αυτά, ή να αναγνωρίσουν ότι μπορούν να εφαρμόσουν την επιμεριστική ιδιότητα, βλέποντας ότι στους δύο όρους υπάρχει κοινός παράγοντας. Ανάμεσα στις δύο δραστηριότητες, που ανήκουν στην «γενικευμένη αριθμητική», καθώς είναι πράξεις ακεραίων, υπάρχουν διαφορές. Στην πρώτη δραστηριότητα ο κοινός παράγοντας είναι αρνητικός, υπάρχει γινόμενο αρνητικών αριθμών και το τελικό αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός. Στη δεύτερη δραστηριότητα ο κοινός παράγοντας είναι θετικός και το τελικό αποτέλεσμα είναι αρνητικός αριθμός. Η μορφή των δραστηριοτήτων είναι τέτοια που υποθέσαμε ότι ο μαθητής θα αναγνώριζε εύκολα την επιμεριστική ιδιότητα, παρατηρώντας την ύπαρξη του κοινού παράγοντα στους δύο όρους. Σκόπιμα συμπεριλάβαμε χρονοβόρα για τον υπολογισμό τους γινόμενα, για να κατευθύνουμε τους μαθητές προς τη χρήση επιμεριστικής ιδιότητας. Με τις δραστηριότητες αυτές θέλαμε να εξετάσουμε κατά πόσο οι μαθητές ανατρέχουν σε βασικές ιδιότητες των αριθμητικών πράξεων που χρησιμοποιούνται και σε αλγεβρικές πράξεις. Υποθέσαμε ότι ποιοτικά η χρήση των ιδιοτήτων αυτών δημιουργεί κατάλληλες προϋποθέσεις ανάπτυξης αλγεβρικών ικανοτήτων. Βασικά όμως θέλαμε να απαντήσουμε το απλό ερώτημα: μπορούν οι μαθητές να κάνουν πράξεις που στηρίζονται στην αριθμητική;

Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποιος από τους 2^{348}, 3^{348}, 5^{348}, 7^{348} είναι άρτιος, ή να επιλέξουν την απάντηση ότι είναι πολύ δύσκολες οι πράξεις για να απαντήσουμε, οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν ότι το 2^{348} είναι άρτιος ως γινόμενο άρτιων αριθμών. Η προπαίδεια του 2 έχει πάντα άρτιο αποτέλεσμα και αυτό το γνωρίζουν οι μαθητές από πολύ νωρίς στο δημοτικό. Επίσης ο άρτιος εκθέτης δεν είναι κριτήριο για να δούμε αν το αποτέλεσμα της δύναμης είναι άρτιος αριθμός. Μπορεί η δραστηριότητα αυτή να παραπέμπει στην προπαίδεια του

2, αλλά οι δυνάμεις ανήκουν στο χώρο της άλγεβρας και γι' αυτό το λόγο η δραστηριότητα αυτή ανήκει στην κατηγορία της γενικευμένης αριθμητικής. Για τη δραστηριότητα αυτή υποθέσαμε ότι οι μαθητές σε αυτή την ηλικία γνωρίζουν ποιοι αριθμοί ονομάζονται άρτιοι και ποιοι περιττοί αλλά επίσης μαθητές σε αυτό το επίπεδο έχουν εμπειρία με τις έννοιες και τις ιδιότητες των δυνάμεων. Θέλαμε λοιπόν να εξετάσουμε κατά πόσο μπορούν οι μαθητές να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε δραστηριότητα με αριθμητικούς όρους συνδυάζοντας ικανότητες γενίκευσης του πλαισίου της άλγεβρας.

Στην υποκατηγορία «δομή» της γενικευμένης αριθμητικής, συμπεριλάβαμε τρεις δραστηριότητες. Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ των 0, 1, 3 και 9, ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $3^2 \cdot 11^{12}$. Θέλαμε να εξετάσουμε αν οι μαθητές μπορούν να ανιχνεύσουν τη δομή του γινομένου αυτού, να καταλάβουν ότι όλες οι δυνάμεις του 11 δίνουν αριθμό που το τελευταίο τους ψηφίο είναι το 1 και ότι κάθε αριθμός που τελειώνει σε 1, όταν πολλαπλασιάζεται με το 3^2, δηλαδή με το 9, δίνει γινόμενο που το τελευταίο ψηφίο του είναι το 9. Μέσω της δομής της δραστηριότητας αυτής, μπορούν οι μαθητές να καταλήξουν σε απάντηση που προϋποθέτει γενικεύσεις αλγεβρικής φύσης;

Στη δεύτερη δραστηριότητα της ίδιας υποκατηγορίας, οι μαθητές έπρεπε να βρουν ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος 946 + 950 + 952 + 960 διά του 950. Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές θα μπορούσαν υπολογίσουν το άθροισμα και στη συνέχεια να κάνουν τη διαίρεση, αλλά θα μπορούσαν να υπολογίσουν τη διαφορά που έχει κάθε όρος του αθροίσματος από το 950. Και σε αυτή την δραστηριότητα θέλαμε να εξετάσουμε αν κάποιοι μαθητές θα επέλεγαν να απαντήσουν χωρίς να υπολογίσουν το άθροισμα, βγάζοντας έτσι ποιοτικά συμπεράσματα για τη φύση της αλγεβρικής τους σκέψης. Αλλά θέλαμε επίσης να εξετάσουμε, αν όσοι δε επέλεγαν να απαντήσουν με τη διαφορά κάθε όρου του αθροίσματος από το 950, μπορούσαν να σκεφτούν και εκτελέσουν με ταχύτητα τον τρόπο λύσης με πράξεις.

Στην τρίτη δραστηριότητα της υποκατηγορίας «Δομή», οι μαθητές έπρεπε να εξετάσουν αν ο αριθμός 3^{400} διαιρείται με το 9. Εδώ οι μαθητές, αναγνωρίζοντας τη δομή του αντικειμένου, μέσω των ιδιοτήτων των δυνάμεων, έπρεπε να απαντήσουν βλέποντας το ισοδύναμο αντικείμενο 9^{200}, που διαιρείται με το 9. Θέλαμε να εξετάσουμε αν μία ιδιότητα των δυνάμεων, μπορεί να εφαρμοστεί αντίστροφα. Υποθέσαμε ότι ίσως κάποιοι μαθητές να μπορούσαν να απαντήσουν αναλύοντας το 3^{400} σε γινόμενο τετρακοσίων τριαριών, το οποίο είναι γινόμενο διακοσίων ζευγαριών από τριάρια, δηλαδή γινόμενο διακοσίων εννιαριών. Και οι δύο τρόποι προϋποθέτουν κατανόηση της δομής του αντικειμένου.

Στην υποκατηγορία «Ισότητα – Ανισότητα» συμπεριλάβαμε 2 δραστηριότητες. Στην πρώτη δραστηριότητα δίνονταν στους μαθητές η πληροφορία ότι $Α + Β = 4$ και βάσει αυτής της πληροφορίας έπρεπε οι μαθητές να βρουν την τιμή της παράστασης $2Α + 2Β – 5$. Εδώ έπρεπε οι μαθητές να αντιμετωπίσουν το $Α + Β$ ως ένα αντικείμενο και να δουν ότι η τελική παράσταση περιέχει το διπλάσιο του αριθμού αυτού, μειωμένο κατά 5. Θέλαμε να εξετάσουμε αν μπορούν οι μαθητές να αντιμετωπίσουν τη δομή $Α + Β$ ως ένα αντικείμενο και αν μπορούν να δουν ότι η παράσταση $2Α + 2Β – 5$ χρησιμοποιεί το ίδιο αντικείμενο.

Στη δεύτερη δραστηριότητα που σχετίζεται με τη γενίκευση αριθμητικών ιδιοτήτων σε ανισοτικές σχέσεις, οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποια τιμή του α από τις 2, -2, 1 και 3 επαληθεύει την ανισότητα $- 10 > (-5)α$. Σε αυτή τη δραστηριότητα μπορούσαν οι μαθητές να λύσουν την ανίσωση, αλλά υποθέσαμε ότι οι περισσότεροι να απαντούσαν με δοκιμές των πιθανών απαντήσεων. Η γενίκευση την αριθμητικής αναδεικνύεται στην αναγνώριση της θέσης των γινομένων του -5 με τους αριθμούς των απαντήσεων στην αριθμογραμμή των ακεραίων. Έπρεπε δηλαδή οι μαθητές να επιλέξουν τον μεγαλύτερο θετικό αριθμό διότι αυτός δίνει το μικρότερο γινόμενο, που κατά απόλυτη τιμή είναι το μεγαλύτερο από τα γινόμενα των άλλων απαντήσεων. Θέλαμε λοιπόν να εξετάσουμε κατά πόσο μπορούν οι μαθητές να επιλέξουν τη σωστή απάντηση αναγνωρίζοντας τις ιδιότητες και τη φύση των αριθμών και της ανίσωσης.

Για τη μέτρηση του παράγοντα «Συναρτησιακή σκέψη» δομήσαμε έξι δραστηριότητες. Δύο δραστηριότητες που σχετίζονται με την μελέτη των μοτίβων, δύο δραστηριότητες που σχετίζονται με την αναγνώριση της σχέσης μεταξύ μεταβλητών και δύο δραστηριότητες για την αναγνώριση της σχέσης σε γράφημα (βλ. Πίνακα 2). Σε όλες τις δραστηριότητες που επιλέξαμε επιθυμούσαμε να εξετάσουμε αν μπορούσαν οι μαθητές να αναγνωρίσουν μεταβλητές και να φτάσουν σε γενίκευση αναγνωρίζοντας τη σχέση μεταξύ των εν χρήση μεταβλητών.

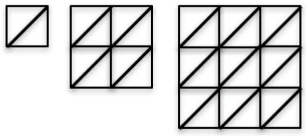
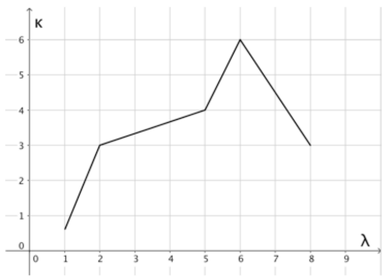
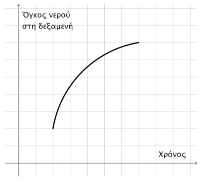
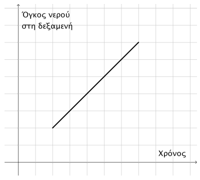
Στην πρώτη υποκατηγορία που σχετίζεται με τα μοτίβα συμπεριλάβαμε ένα γεωμετρικό και ένα αριθμητικό μοτίβο. Στο γεωμετρικό μοτίβο, οι μαθητές έπρεπε να βρουν πόσα τρίγωνα περιέχει το 10ο κατά σειρά σχήμα από τη σειρά των σχημάτων που δίνονται. Σε κάθε σχήμα ο αριθμός των τριγώνων είναι ο διπλάσιος από τον αριθμό των τετραγώνων. Έπρεπε δηλαδή αρχικά οι μαθητές να δουν πως δημιουργείται η ακολουθία των τετράγωνων των σχημάτων και πως το πλήθος των τριγώνων σχετίζεται με το πλήθος των τετραγώνων. Υποθέσαμε ότι κάποιοι μαθητές μπορεί να έφταναν και σε γενίκευση κατασκευάζοντας ένα τύπο που θα περιέγραφε τη σχέση αυτή, αλλά πιστεύαμε πως οι περισσότεροι μαθητές θα υπολόγιζαν το πλήθος των τριγώνων διπλασιάζοντας το πλήθος των τετραγώνων, που προκύπτει, με σχετικά εύκολο για το επίπεδο αυτό, τρόπο. Στην αριθμητική ακολουθία οι μαθητές έπρεπε να βρουν τον 8ο όρο της ακολουθίας -2, 4, -8, 16. Έπρεπε δηλαδή να κατανοήσουν ότι κάθε όρος δημιουργείται αναδρομικά από τον προηγούμενο πολλαπλασιάζοντας με -2.

Στην αναγνώριση σχέσης μεταξύ μεταβλητών, δομήσαμε δύο δραστηριότητες. Στην πρώτη δραστηριότητα δώσαμε έναν πίνακα που περιείχε 5 ζευγάρια τιμών και οι

μαθητές έπρεπε να βρουν ποια σχέση από τις τέσσερις που δίνονταν μπορούσε ναπεριγράψει τη σχέση των μεταβλητών που δίνονταν. Οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν τη σχέση σε όλα τα ζευγάρια τιμών καθώς υπήρχαν σχέσεις που επαληθευόντουσαν από κάποια αλλά όχι από όλα τα ζευγάρια. Εδώ έπρεπε οι μαθητές να συνδέσουν τις δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης και να κατανοήσουν ότι η περιγραφή της συναρτησιακής σχέσης πρέπει να πραγματοποιείται από όλα τα ζευγάρια τιμών του πίνακα.

Στη δεύτερη δραστηριότητα για την αναγνώριση της σχέσης μεταξύ μεταβλητών είχαμε μία λεκτική περιγραφή της σχέσης δύο μεταβλητών και θέλαμε να ανιχνεύσουμε κατά πόσο θα μπορούσαν οι μαθητές να αναγνωρίσουν τη σχέση των μεταβλητών αυτών και να την περιγράψουν φορμαλιστικά. Το πρόβλημα έλεγε ότι ο Γιώργος εργάζεται σε μία ασφαλιστική εταιρία για ασφάλειες αυτοκινήτου. Ο μισθός του είναι 50€ και παίρνει και 20€ για κάθε ασφάλεια που πουλάει. Το πρώτο ερώτημα ζητούσε να απαντήσουν οι μαθητές πόσα χρήματα κερδίζει ο Γιώργος κάθε εβδομάδα. Καθώς τα χρήματα που κερδίζει εξαρτώνται από το πόσες ασφάλειες θα πουλήσει και δε γνωρίζουμε πόσες ασφάλειες πούλησε, η ερώτηση έχει γενική

Πίνακας 2. Έργα μέτρησης του παράγοντα «Συναρτησιακή σκέψη»

Είδος έργου	Παράδειγμα
Μοτίβα	**(ss_a1)** Παρατηρήστε την παρακάτω σειρά σχημάτων.  Βρείτε πόσα τριγωνάκια έχει το 10ο κατά σειρά σχήμα.
	(ss_a2) Να βρείτε τον 8ο όρο της παρακάτω ακολουθίας αριθμών: – 2, 4, –8, 16
Αναγνώριση σχέσης μεταξύ μεταβλητών	**(ss_b1)** Να βρείτε ποια είναι η εξίσωση που περιγράφει τη σχέση των μεταβλητών στο διπλανό πίνακα. y = 2x y = 2x + 1 $y = x^2 + 1$ $y = x^2 + x$ Κανένα από τα παραπάνω 0 | 1 1 | 2 2 | 5 3 | 10 4 | 17
	(ss_b2) Ο Γιώργος εργάζεται σε μία ασφαλιστική εταιρία για ασφάλειες αυτοκινήτου. Ο μισθός του είναι 50€ και παίρνει και 20€ για κάθε ασφάλεια που πουλάει. Πόσα είναι τα χρήματα που κερδίζει ο Γιώργος κάθε εβδομάδα; Αν σε μία εβδομάδα έβγαλε 190€ πόσες ασφάλειες είχε πουλήσει;
Αναγνώριση σχέσης σε γράφημα	**(ss_c1)** Παρακάτω ακολουθεί η γραφική παράσταση της σχέσης δύο μεταβλητών κ και λ.  Πόσα σημεία πιστεύετε ότι έχει η γραφική παράσταση;
	(ss_c2) Μία βρύση είναι ανοικτή στο τέρμα και γεμίζει μία δεξαμενή. Σιγά σιγά, με αργό ρυθμό, κλείνουμε τη βρύση μέχρι να κλείσει τελείως. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αναπαριστά το παράδειγμα αυτό; α.  β.  γ.  δ. 

διάσταση και υποθέσαμε ότι αυτό θα κατανοούσαν και οι μαθητές, δομώντας για την απάντηση τους ένα τύπο που να συνδέει τις μεταβλητές πλήθος ασφαλειών (ως ανεξάρτητη μεταβλητή) και εβδομαδιαίο μισθό. Στο δεύτερο ερώτημα έπρεπε οι μαθητές να απαντήσουν πόσες ασφάλειες πούλησε ο Γιώργος αν γνωρίζαμε ότι έβγαλε 190€. Εδώ οι μαθητές θα μπορούσαν να απαντήσουν αντιστρέφοντας τις πράξεις, δηλαδή αφαιρώντας 50€ που είναι ο βασικός μισθός και βρίσκοντας το ποσό που κερδίζει ο Γιώργος από τις ασφάλειες και στη συνέχεια διαιρώντας με το 20 για να βρουν το πλήθος των ασφαλειών. Θα μπορούσαν όμως να εξισώσουν τα χρήματα που βρήκαν σε γενική μορφή από το πρώτο ερώτημα και στη συνέχεια να έλυναν την εξίσωση που θα πρόκυπτε.

Στην τελευταία υποκατηγορία της διάστασης «Συναρτησιακή σκέψη», στην υποκατηγορία που σχετίζεται στην αναγνώριση σχέσης σε γράφημα συμπεριλάβαμε δύο δραστηριότητες. Στην πρώτη δραστηριότητα έπρεπε οι μαθητές να απαντήσουν πόσα σημεία έχει μία δοσμένη γραφική παράσταση. Εδώ είχαμε την γραφική αναπαράσταση μίας συναρτησιακής σχέσης και θέλαμε να ανιχνεύσουμε αν μπορούν οι μαθητές να ερμηνεύσουν τη συνέχεια της σχέσης που διαφαίνεται σε όλα τα σημεία μίας γραφικής παράστασης. Η αναπαράσταση μίας συναρτησιακής σχέσης με τύπο υπονοεί τα άπειρα ζευγάρια τιμών που επαληθεύουν τη σχέση αυτή, ενώ η αναπαράσταση της συνάρτησης με πίνακα παρουσιάζει στιγμιότυπα της σχέσης των μεταβλητών. Η γραφική παράσταση δίνει και αυτή τη έννοια των άπειρων ζευγαριών τιμών που την επαληθεύουν και θέλαμε να ανιχνεύσουμε αν αυτό είναι εμφανές και στους μαθητές.

Στη δεύτερη δραστηριότητα θέλαμε να δούμε αν οι μαθητές μπορούσαν να κατανοήσουν την ποιότητα της σχέσης ανιχνεύοντας τις ιδιότητες της. Το πρόβλημα έλεγε ότι μία βρύση είναι ανοικτή στο τέρμα και γεμίζει μία δεξαμενή. Σιγά σιγά, με αργό ρυθμό, κλείνουμε τη βρύση μέχρι να κλείσει τελείως. Έπρεπε οι μαθητές να επιλέξουν μία από τις τέσσερις γραφικές παραστάσεις που δίναμε. Οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν ότι η αύξηση του νερού γίνεται με φθίνοντα ρυθμό και να επιλέξουν την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

Για τη μέτρηση του παράγοντα «Μετασχηματιστική ικανότητα» δομήσαμε έξι δραστηριότητες. Δύο δραστηριότητες με αριθμητικούς μετασχηματισμούς, δύο δραστηριότητες με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και δύο δραστηριότητες με εξισώσεις (βλ. Πίνακα 3). Η αξία των μετασχηματισμών διαφαίνεται, σύμφωνα με

Πίνακας 3. Έργα μέτρησης του παράγοντα «Μετασχηματιστική ικανότητα»

Είδος έργου	Παράδειγμα
Αριθμητικοί μετασχηματισμοί	**(mi_a1)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}+\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}+\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{5}{4}}$
	(mi_a2) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+7\sqrt{2}+4\sqrt{3}+5$
Αλγεβρικοί μετασχηματισμοί	**(mi_b1)** Να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση: $A=\frac{2x}{xy-y^2}-\frac{2y}{x^2-xy}+\frac{x+y}{2xy}$
	(mi_b2) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $B = (\alpha - 2\beta)(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta(\beta + \alpha)$
Εξισώσεις	**(mi_c1)** Να λύσετε την εξίσωση: $16(x+1)+1-2(3-x)=-3(x+6)$
	(mi_c2) Να λύσετε την εξίσωση: $6-\frac{x-1}{2}=\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{3}$

ό,τι έχουμε αναφέρει ως τώρα σε αυτές τις τρεις κατηγορίες και θέλαμε να δούμε αν οι μαθητές μπορούν να εφαρμόσουν ικανότητες μετασχηματισμών σε αριθμητικές παραστάσεις, σε αλγεβρικές παραστάσεις και σε εξισώσεις. Δώσαμε δύο αριθμητικές παραστάσεις:

$$A=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}+\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}+\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{5}{4}}$$

$$A=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+7\sqrt{2}+4\sqrt{3}+5$$

Στην πρώτη έπρεπε οι μαθητές να μετατρέψουν αρχικά τα κλάσματα σε σύνθετα, κάνοντας πράξεις στους όρους των κλασμάτων και στη συνέχεια να μετασχηματίσουν τα σύνθετα κλάσματα σε απλά για να μπορέσουν, μετατρέποντάς τα σε ομώνυμα, να τα προσθέσουν.

Στη δεύτερη δραστηριότητα που είναι μία παράσταση με άρρητους αριθμούς έπρεπε οι μαθητές να αναγνωρίσουν τα όμοια αντικείμενα και να τα προσθέσουν, γνωρίζοντας ότι δεν είναι δυνατό να καταλήξουν σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα, παρόλο που η παράσταση είναι αριθμητική.

Στην υποκατηγορία που είχε σχέση με τους μετασχηματισμούς αλγεβρικών παραστάσεων είχαμε δύο δραστηριότητες. Στην πρώτη έπρεπε οι μαθητές να μετασχηματίσουν την παράσταση $\frac{2x}{xy-y^2}-\frac{2y}{x^2-xy}+\frac{x+y}{2xy}$. Εδώ οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τις διαδικασίες μετασχηματισμού τέτοιων αλγεβρικών παραστάσεων, όπως είχαν μάθει με δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου της γ γυμνασίου. Έπρεπε να παραγοντοποιήσουν τους παρονομαστές, να βρουν το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, να μετατρέψουν τα κλάσματα σε ομώνυμα, να προσθέσουν τα κλάσματα, να κάνουν τις πράξεις στον αριθμητή, να παραγοντοποιήσουν το κλάσμα για να μπορέσουν τελικά να το απλοποιήσουν. Η δεύτερη δραστηριότητα έπρεπε οι μαθητές να απλοποιήσουν, με μετασχηματισμούς την παράσταση: (α – 2β)(α + β) – (α + β)(α – β) +β(β + α). Εδώ έπρεπε οι μαθητές να προσέξουν στην εκτέλεση των πράξεων και στην αναγωγή όμοιων όρων.

Στην κατηγορία των εξισώσεων δομήσαμε δύο δραστηριότητες που είχαν εξισώσεις. Η πρώτη εξίσωση ήταν η $16(x + 1) + 1 – 2(3 – x) = -3(x + 6)$ στην οποία έπρεπε οι μαθητές να εφαρμόσουν τη διαδικασία πράξεις, χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους κ.λπ.

Η δεύτερη εξίσωση είχε διαφορετική μορφή: $6-\frac{x-1}{2}=\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{3}$, που απαιτούσε τη διαδικασία επίλυσης εξίσωσης με απαλοιφή παρονομαστών.

Για τη μέτρηση του παράγοντα «Μοντελοποίηση, μετα-άλγεβρα, αποδείξεις» δομήσαμε πέντε δραστηριότητες. Τρεις δραστηριότητες που σχετίζονται με τη μοντελοποίηση και δύο δραστηριότητες που έχουν σχέση με τη μετα-άλγεβρα και την απόδειξη (βλ. Πίνακα 4).

Στην υποκατηγορία «Μοντελοποίηση» προτείναμε τρεις δραστηριότητες. Στην πρώτη δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να εκφράσουν με συμβολικό τρόπο την πρόταση «το διπλάσιο του τετραγώνου ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό αυτό», να κατασκευάσουν δηλαδή το μοντέλο περιγραφής της λεκτικής πρότασης. Οι μαθητές έπρεπε απλά να μεταφράσουν από αριστερά προς τα δεξιά, την πρόταση αυτή χρησιμοποιώντας μία μεταβλητή, καθώς η πρόταση κάνει χρήση μίας μεταβλητής.

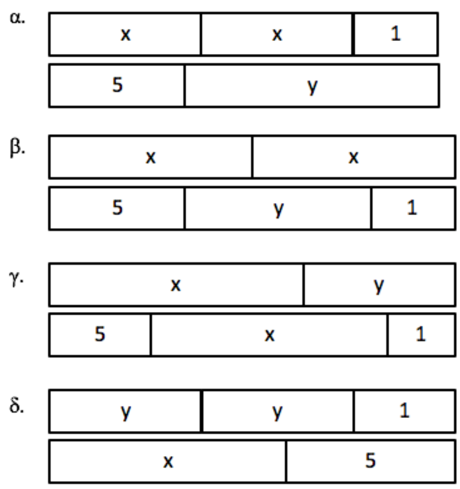
Στην δεύτερη δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν μία πρόταση από ένα μοντέλο που δίνονταν με τη μορφή πίνακα. Το πρόβλημα έλεγε πως μία εταιρία κινητής τηλεφωνίας είχε δημοσιεύσει ένα πίνακα για τα χρηματικά ποσά που χρεώνει στους πελάτες της. Οι μαθητές έπρεπε να βρουν ποια από τις 4 προτάσεις που δίναμε αντιστοιχούσε στο μοντέλο του δεδομένου πίνακα. Σε αυτή τη δραστηριότητα θέλαμε να ανιχνεύσουμε αν οι μαθητές μπορούν αν συνδέσουν το μοντέλο που δίνεται νε μορφή πίνακα και την λεκτική περιγραφή του. Εδώ δεν ήταν δυνατή η μετάφραση της πρότασης όπως στην πρώτη δραστηριότητα, αλλά έπρεπε να γίνει με έλεγχο όλων των προτάσεων η επιλογή.

Στην τρίτη δραστηριότητα της ίδιας υποκατηγορίας, που κατά την άποψή μας είχε πολύ μεγάλο ενδιαφέρον, έπρεπε οι μαθητές να επιλέξουν ποιο σχηματικό μοντέλο από τα τέσσερα που δίναμε περιέγραφε την πρόταση: το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 1 είναι ίσο με ένα άλλο αριθμό αυξημένο κατά 5. Τα τέσσερα μοντέλα φαίνονται στον πίνακα 4 και για να διαλέξουν οι μαθητές το σωστό, υποθέσαμε ότι πρώτα θα έπρεπε εννοιολογικά να καταλήξουν στο φορμαλιστικό μοντέλο $2x – 1 = y + 5$.

Στην υποκατηγορία μετα-άλγεβρα που συμπεριλάβαμε και τις αποδείξεις συνθέσαμε δύο δραστηριότητες. Στην πρώτη δραστηριότητα είχαμε το παρακάτω πρόβλημα: μία εταιρία ενοικίασης αυτοκινήτων χρεώνει 20€ την ημέρα και 0,50€ για κάθε χιλιόμετρο. Μία άλλη εταιρία χρεώνει 40€ με απεριόριστα χιλιόμετρα. Για ποιες αποστάσεις θα διαλέγατε τη δεύτερη εταιρία αντί της πρώτης; Εδώ οι μαθητές δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν κάποιο εργαλείο από την εργαλειοθήκη τους, δεν υπάρχει κάποια διαδικασία που μπορούν να εφαρμόσουν, ούτε έχουν μάθει κάποια τεχνική που να βοηθάει στη λύση του προβλήματος. Η λύση δεν ανήκει εξολοκλήρου στην άλγεβρα, αλλά όπως έχουμε αναφέρει στην επισκόπηση της βιβλιογραφίας, η άλγεβρα είναι το εργαλείο, ο δρόμος για τη λύση. Υποθέσαμε ότι οι μαθητές μπορούσαν να επιλέξουν διάφορους δρόμους επίλυσης του προβλήματος. Ένας τρόπος είναι να δημιουργήσουν την ανίσωση $40 < 20 + 0{,}5x$, ώστε να προκύψει $x > 40$. Ένας άλλος τρόπος είναι να λύσουν οι μαθητές την εξίσωση $40 + 20 + 0{,}5x$, για να βρουν για πόσα χιλιόμετρα το κόστος ενοικίασης από τις δύο εταιρίες είναι το ίδιο και στη συνέχεια, καθώς η δεύτερη εταιρία δε χρεώνει για τα χιλιόμετρα χρήσης, να επιλέξουν τη δεύτερη εταιρία. Ένας άλλος τρόπος λύσης που υποθέσαμε ότι θα βλέπαμε στις απαντήσεις των μαθητών είναι να βρουν αρχικά τη διαφορά του 20 από το 40 ώστε να προκύψει ότι 20 ευρώ είναι η διαφορά της χρέωσης λόγω χιλιομέτρων και στη συνέχεια να βρουν με διαίρεση πόσα χιλιόμετρα πρέπει να κάνει κάποιος που έχει ενοικιάσει αυτοκίνητο από τη δεύτερη εταιρία για να ισοφαρίσει το χρέος που θα είχε αν είχε ενοικιάσει αυτοκίνητο από την πρώτη. Έτσι θα κατέληγαν ότι για παραπάνω χιλιόμετρα θα συνέφερε η δεύτερη εταιρία.

Πίνακας 4. Έργα μέτρησης του παράγοντα «Μοντελοποίηση, μετα-άλγεβρα, απόδειξη»

<table>
<tr><th>Είδος έργου</th><th>Παράδειγμα</th></tr>
<tr><td>Μοντελοποίηση</td><td>(met_a1) Να εκφράσετε με συμβολικό τρόπο την πρόταση: «Το διπλάσιο του τετραγώνου ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό αυτό».</td></tr>
<tr><td></td><td>(met_a2) Είστε συνδρομητές της εταιρίας κινητής τηλεφωνίας Mobifon και θέλετε να μάθετε πως χρεώνεστε για τη χρήση του κινητού σας. Η εταιρία σας στέλνει τα παρακάτω παραδείγματα χρεώσεων:
<table>
<tr><th>Χρόνος ομιλίας</th><th>Χρέωση</th></tr>
<tr><td>70 min</td><td>13€</td></tr>
<tr><td>90 min</td><td>13€</td></tr>
<tr><td>130 min</td><td>28€</td></tr>
</table>
Με ποιο τρόπο υπολογίζει η εταιρία τις χρεώσεις;
a. Η εταιρία χρεώνει 0,1€ το λεπτό και προσθέτει και 6€ έξοδα δικτύου.
b. Η εταιρία έχει πάγιο 15€, χρεώνει και 0,01€ για κάθε λεπτό ομιλίας. και δίνει μία επιπλέον έκπτωση 2€ για χρήση πάνω από 80 λεπτά.
c. Η εταιρία έχει πάγιο 13€, 100 λεπτά δωρεάν χρόνο ομιλίας και χρεώνει και 0,5€ για κάθε λεπτό ομιλίας πάνω από τα 100 λεπτά.
d. Η εταιρία έχει πάγιο 20€ και χρεώνει και άλλα 8€ για απεριόριστο χρόνο ομιλίας του χρήστη.</td></tr>
<tr><td></td><td>(met_a3) Το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 1 είναι ίσο με ένα άλλο αριθμό αυξημένο κατά 5. Ποιο από τα παρακάτω μοντέλα αναπαριστά την πρόταση αυτή;</td></tr>
</table>

	
Μετα-άλγεβρα απόδειξη	**(met_b1)** Μια εταιρία ενοικίασης αυτοκινήτων χρεώνει 20€ την ημέρα και 0,50€ για κάθε χιλιόμετρο. Μία άλλη εταιρία χρεώνει 40€ με απεριόριστα χιλιόμετρα. Για ποιες αποστάσεις θα διαλέγατε τη δεύτερη εταιρία αντί της πρώτης;
	(met_b2) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο ενός άρτιου με ένα περιττό είναι περιττός αριθμός.

Η τελευταία δραστηριότητα που σχετίζεται με την απόδειξη και ανήκει στη διάσταση της αλγεβρικής σκέψης «μετα-άλγεβρα» ζητούσε να αποδείξουν οι μαθητές ότι το γινόμενο άρτιου με περιττό αριθμό είναι άρτιος αριθμός. Σε αυτή την δραστηριότητα οι μαθητές έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τη συμβολική αναπαράσταση των άρτιων και των περιττών, προσέχοντας ότι η απόδειξη αναφερόταν σε τυχαίους αριθμούς και όχι σε διαδοχικούς. Έτσι θα έπρεπε οι μαθητές να συμβολίσουν με 2ρ τον τυχαίο άρτιο και με $2\lambda + 1$ τον τυχαίο περιττό και ότι το γινόμενο τους $2\rho(2\lambda + 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 2, επομένως είναι άρτιο. Υποθέσαμε ότι οι μαθητές θα δυσκολευόντουσαν να αποδείξουν την πρόταση αυτή καθώς μέχρι την γ γυμνασίου δεν έχουν την εμπειρία γενικεύσεων αυτού του επιπέδου. Όμως πιστεύαμε ότι θα μπορούσαν να φτάσουν σε μία απόδειξη, όχι απαραίτητα φορμαλιστική, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των αντικειμένων της απόδειξης.

Ανάλυση Δεδομένων – Αποτελέσματα

Για την επιβεβαίωση της εγκυρότητας του προτεινόμενου μοντέλου χρησιμοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση. Η χρήση της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης κρίθηκε κατάλληλη για το λόγο ότι θέλαμε να επιβεβαιώσουμε την εγκυρότητα ενός μοντέλου που αναπτύχθηκε με βάση προηγούμενες ερευνητικές εργασίες και τη σχετική βιβλιογραφία. Θέλαμε δηλαδή να εξετάσουμε αν το σύνολο των μέτρων της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών έχει την τετραπλή διάσταση που υποθέσαμε, αν δηλαδή υπάρχουν 4 παράγοντες (γενικευμένη αριθμητική, συναρτησιακή σκέψη, μετασχηματιστική ικανότητα, μετα-άλγεβρα) που καθορίζουν την διάσταση της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών. Για τη διεξαγωγή των αναλύσεων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό MPLUS (Muthén & Muthén, 2007). Για την επιβεβαίωση των μοντέλων χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθοι τρεις δείκτες: (α) O λόγος $x2/df$ (< 2), ο δείκτης Comparative Fit Index, CFI, ($> 0,9$) και (γ) ο δείκτης Root Mean-Square Error of Approximation, RMSEA, ($< 0,08$).

Τρόπος αξιολόγησης των απαντήσεων στα έργα της έρευνας

Οι απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν σε κλίμακα 0 – 1. Οι μαθητές είχαν αρκετό χρόνο για να ασχοληθούν με τα φύλλα δραστηριοτήτων και τις δύο φορές που πραγματοποιήθηκε η έρευνα. Ως εκ τούτου οι δραστηριότητες που δεν είχαν καμία απάντηση βαθμολογήθηκαν με 0. Οι σωστές απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με άριστα 1.

Η ανάλυση που ακολουθεί είναι ανά δραστηριότητα με σειρά βάσει κωδικοποίησης που φαίνεται στο γράφημα 2.

Στη δραστηριότητα ga_a1 οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ 5 διαφορετικών απαντήσεων για το αποτέλεσμα της πράξης: $3 \cdot (-13212) – 5 \cdot (-13212)$. Οι πρώτες τέσσερις επιλογές ήταν 26424, -2, $-2 \cdot 13212$, $8 \cdot 13212$ και η τελευταία επιλογή ήταν ότι καμία από τις παραπάνω δεν ήταν σωστή. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 και η λανθασμένη απάντηση με 0. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στη δραστηριότητα ga_a2 οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποιος από τους 2^{348}, 3^{348}, 5^{348}, 7^{348} είναι άρτιος, ή να επιλέξουν την απάντηση ότι είναι πολύ δύσκολες οι πράξεις για να απαντήσουμε. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 και η λανθασμένη απάντηση με 0. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στη δραστηριότητα ga_a3 οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν το αποτέλεσμα της πράξης: $-1245 \cdot 15 + 245 \cdot 15$, που είναι το -15000. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1, η λάθος και η κενή απάντηση με 0. Με 0,50 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα των μαθητών που είτε η απάντηση τους ήταν η αντίθετη της σωστής, παρέλειψαν δηλαδή το αρνητικό πρόσημο, είτε μετά την παραγοντοποίηση έκαναν μικρό αριθμητικό λάθος στην παρένθεση αλλά συνέχισαν σωστά, ή έδωσαν κατευθείαν τη σωστή απάντηση χωρίς ανάλυση. Με 0,75 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα των μαθητών, που έκαναν σωστά όλες τις πράξεις αλλά επέλεξαν να κάνουν πρώτα κάθε πράξη ξεχωριστά, να υπολογίσουν δηλαδή κάθε όρο της αριθμητικής παράστασης, αλλά τελικά ενώ φαίνεται στο χαρτί τους ότι η τελική πράξη είναι η σωστή, δίνουν σαν απάντηση την αντίθετη της, δηλαδή γράφουν 15000.

Στην δραστηριότητα ga_b1 οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ των 0, 1, 3 και 9, ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $3^2 \cdot 11^{12}$. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 και η λανθασμένη απάντηση με 0. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στη δραστηριότητα ga_b2, οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ των αριθμών 0, 8, -8, 12 ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος 946 + 950 + 952 + 960 διά του 950. Εναλλακτικά θα μπορούσαν να επιλέξουν την τελευταία απάντηση, ότι καμία από τις παραπάνω τιμές δεν είναι σωστή. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 και η λανθασμένη απάντηση με 0. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στη δραστηριότητα ga_b3, οι μαθητές έπρεπε να εξετάσουν αν ο αριθμός 3^{400} διαιρείται με το 9. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 και η λανθασμένη απάντηση με 0. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα. Στη δραστηριότητα αυτή είχαμε απαντήσεις μαθητών που απάντησαν σωστά ότι το 3^{400} διαιρείται με το 9 αλλά η αιτιολόγηση τους δεν ήταν πλήρης. Κάποιοι έγραψαν ότι το 3^{400} είναι πολλαπλάσιο του 3^2, κάποιοι άλλοι $3^{400} = (3^2)^{200}$ και είχαμε και απαντήσεις μαθητών που στην αιτιολόγηση τους είχαν γράψει ότι $3^4 = 81$ που είναι πολλαπλάσιο του 9, επομένως και το 81^{100} είναι πολλαπλάσιο του 9. Δηλαδή περιέγραψαν λεκτικά την ισότητα: $3^{400} = (3^4)^{100}$. Το πολύ μικρό πλήθος των σωστών απαντήσεων μας ώθησε να αυξήσουμε την ελαστικότητα για το ποιες απαντήσεις θα έπαιρναν κάποιους βαθμούς. Με 0,25 βαθμολογήσαμε τα φύλλα που απάντησαν ότι επειδή το $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, δηλαδή οι δυνάμεις του 3 είναι πολλαπλάσια του 9, τότε και το 3^{400} είναι πολλαπλάσιο του 9. Με 0,5 βαθμολογήσαμε τα φύλλα των μαθητών που είχαν γράψει ότι $3^2 = 9$ και το 9 είναι υποπολλαπλάσιο του 3^{400}, ενώ με 0,75 βαθμολογήσαμε τους μαθητές που έγραψαν ότι $3^{400} = 3·3·3·3·3·3·3… = 9·3·3·3·3…$, επομένως είναι πολλαπλάσιο του 9.

Στην δραστηριότητα ga_c1 δίνονταν στους μαθητές η πληροφορία ότι Α + Β = 4 και βάσει αυτής της πληροφορίας οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποια από τους αριθμούς 8, -1, 3 και -5 είναι η τιμή της παράστασης 2Α + 2Β – 5. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 και η λανθασμένη απάντηση με 0. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στη δραστηριότητα ga_c2 οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποια τιμή του α από τις 2, -2, 1 και 3 επαληθεύει την ανισότητα - 10 > (-5)α. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 και η λανθασμένη απάντηση με 0. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Η δραστηριότητα ss_a1 που ήταν ένα γεωμετρικό μοτίβο, ήταν ανοικτού τύπου και οι μαθητές έπρεπε να βρουν πόσα τρίγωνα περιέχει το 10ο κατά σειρά σχήμα από τη σειρά των σχημάτων που δίνονται. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 και η λανθασμένη απάντηση με 0. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα. Κάποιοι από τους μαθητές που βαθμολογήθηκαν με 1 σε αυτή την δραστηριότητα, είχαν γράψει ότι το πλήθος των τριγώνων είναι $2ν^2$, κάποιων άλλων οι απαντήσεις βασίζονταν σε διαδοχικά σχήματα που είχαν σχεδιάσει οι μαθητές και είχαν γράψει και την ακολουθία 2, 8, 18 άρα 200 και είχαμε και απαντήσεις που στην αιτιολόγηση τους είχαν γράψει ότι έχουμε 20 επί 10, δηλαδή 200 τρίγωνα. Με 0,25 βαθμολογήσαμε τους μαθητές που είχαν γράψει ότι έχουμε 10 επί 10 τρίγωνα δηλαδή αυτούς που είχαν ασχοληθεί με το δύσκολο μέρος του υπολογισμού και στη συνέχεια δεν πρόσεξαν τι ακριβώς ζητούσε το πρόβλημα. Θεωρήσαμε δηλαδή, ότι η απάντηση αυτή δείχνει κάποια μορφή αλγεβρικής ικανότητας.

Με 0,5 βαθμολογήσαμε τους μαθητές που έδωσαν σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση και 0,75 δώσαμε στις απαντήσεις των μαθητών που είτε είχαν βρει σωστά το πλήθος των τετραγώνων και είχαν αιτιολογήσει πλήρως την απάντηση τους, αλλά δεν ασχολήθηκαν με τα τρίγωνα είτε είχαν φτάσει στο σωστό πλήθος τριγώνων αλλά η αιτιολόγηση τους ήταν ελλιπής. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στη δραστηριότητα ss_a2 οι μαθητές έπρεπε να βρουν τον 8ο όρο της ακολουθίας -2, 4, -8, 16. Με 1 βαθμολογήθηκαν οι μαθητές που στην απάντηση τους είχαν γράψει όλους τους όρους μέχρι το 256. Με 0,5 βαθμολογήσαμε τους μαθητές που έγραψαν τους όρους της ακολουθίας αλλά σταμάτησαν σε προηγούμενο όρο και όχι στο 256. Με 0,5 βαθμολογήσαμε επίσης απαντήσεις μαθητών που είχαν βρει ότι κάθε όρος της ακολουθίας προκύπτει από τον προηγούμενο πολλαπλασιάζοντας με το -2, αλλά έκαναν λάθος σε έναν πολλαπλασιασμό. Με 0,75 απαντήσεις που δεν είχαν πλήρη αιτιολόγηση αλλά σωστό αποτέλεσμα. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στη δραστηριότητα ss_b1 δώσαμε έναν πίνακα που περιείχε 5 ζευγάρια τιμών (0, 1), (1,2), (2, 5), (3, 10), (4, 17) και οι μαθητές έπρεπε να βρουν ποια σχέση από τις τέσσερις που δίνονταν μπορούσε να περιγράψει τη σχέση των μεταβλητών. Η σωστή απάντηση ήταν η τρίτη στη σειρά των επιλογών, δηλαδή η σχέση $y = x^2 + 1$. Οι πρώτες δύο σχέσεις δεν επαληθευόντουσαν από το πρώτο ζευγάρι τιμών ως εκ τούτου εύκολα θα το απέρριπταν οι μαθητές. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1 και η λανθασμένη απάντηση με 0. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στη δραστηριότητα ss_b2 είχαμε ένα πρόβλημα με δύο ερωτήματα στα οποία δώσαμε τους κωδικούς ss_b2a και ss_b2b αντίστοιχα. Το πρόβλημα έλεγε ότι ο Γιώργος εργάζεται σε μία ασφαλιστική εταιρία για ασφάλειες αυτοκινήτου. Ο μισθός του είναι 50€ και παίρνει και 20€ για κάθε ασφάλεια που πουλάει. Το πρώτο ερώτημα (ss_b2a) ζητούσε να απαντήσουν οι μαθητές πόσα χρήματα κερδίζει ο Γιώργος κάθε εβδομάδα. Με 1 βαθμολογήθηκαν οι μαθητές που έγραψαν 50 + 20x, που ήταν και η σωστή απάντηση. Δύο μαθητές μέσα σε πολλά που είχαν γράψει, είχαν δώσει και την απάντηση 50 + 20x = y και αυτοί βαθμολογήθηκαν με 0,75. Ένας μαθητής βαθμολογήθηκε με 0,5 διότι έδωσε την απάντηση x = 50 + 20x. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που είχαν λανθασμένη απάντηση ή δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στο δεύτερο ερώτημα έπρεπε οι μαθητές να απαντήσουν πόσες ασφάλειες πούλησε ο Γιώργος αν γνωρίζαμε ότι έβγαλε 190€. Η σωστή απάντηση ήταν το 7 η οποία βαθμολογήθηκε με 1. Κάποιοι από τους μαθητές που βαθμολογήθηκαν με 1, είχαν γράψει: x = (190 – 50)/20, άρα x = 7, κάποιοι άλλοι έλυσαν το πρόβλημα με αντιστροφή της διαδικασίας, δηλαδή έγραψαν 190 – 50 = 140, επομένως 140/20 = 7 ασφάλειες, ενώ είχαμε και ένα μαθητή που στην απάντηση του είχε γράψει ότι η μία ασφάλεια αντιστοιχεί στα 20€, οι x στα 140€, άρα x = 7. Με 1 βαθμολογήθηκε η απάντηση 50 + 7 φορές το 20 = 140 αλλά και η λύση του προβλήματος με την εξίσωση 50 + 20x = 190. Σε αυτή τη δραστηριότητα δεν είχαμε απαντήσεις που θεωρήσαμε ότι έπρεπε να πάρουν βαθμολογία διαφορετική από 1 ή 0. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που είχαν λανθασμένη απάντηση ή δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στη δραστηριότητα ss_c1 έπρεπε οι μαθητές να απαντήσουν πόσα σημεία έχει μία δοσμένη γραφική παράσταση. Η σωστή απάντηση, δηλαδή η απάντηση των μαθητών που αναγνώρισαν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει άπειρα σημεία βαθμολογήθηκε με 1. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που είχαν λανθασμένη απάντηση ή δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στην δραστηριότητα ss_c2 είχαμε ένα πρόβλημα. Το πρόβλημα έλεγε ότι μία βρύση είναι ανοικτή στο τέρμα και γεμίζει μία δεξαμενή. Σιγά σιγά, με αργό ρυθμό, κλείνουμε τη βρύση μέχρι να κλείσει τελείως. Έπρεπε οι μαθητές να επιλέξουν μία από τις τέσσερις γραφικές παραστάσεις που δίναμε. Οι μαθητές που απάντησαν σωστά βαθμολογήθηκαν με 1. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που είχαν λανθασμένη απάντηση ή δεν είχαν απάντηση σε αυτή τη δραστηριότητα.

Στην δραστηριότητα mi_a1 οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}+\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}+\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{5}{4}}$. Στη δραστηριότητα αυτή είχαμε απαντήσεις που πήραν βαθμό 1, 0,25, 0,5, ή 0,75. Οι μαθητές που έφτασαν στο τελικό αποτέλεσμα βαθμολογήθηκαν με 1. Με 0,25 βαθμολογήθηκε η λύση κατά την οποία ο μαθητής έκανε μόνο ομώνυμα τα κλάσματα σε κάθε όρο των κλασμάτων της παράστασης και δε συνέχισε. Με 0,5 βαθμολογήθηκε η λύση κατά την οποία ο μαθητής, αφού έφτασε στο άθροισμα τριών κλασμάτων μετά συνέχισε με απαλοιφή και με μικρό αριθμητικό λάθος. Με 0,75 βαθμολογήθηκε η λύση κατά την οποία ο μαθητής προχώρησε αρκετά τις πράξεις αλλά είτε έκανε μικρό αριθμητικό λάθος ή σταμάτησε λίγο πριν τον υπολογισμό του τελικού αποτελέσματος. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση.

Στη δραστηριότητα mi_a2 οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την τιμή της παράστασης: $A=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+7\sqrt{2}+4\sqrt{3}+5$. Με 1 βαθμολογήθηκαν οι μαθητές που έφτασαν στο τελικό αποτέλεσμα. Με 0,25 βαθμολογήθηκαν οι μαθητές που πρόσθεσαν τους όρους με τις όμοιες ρίζες αλλά στο τέλος πρόσθεσαν τις διαφορετικές ρίζες ($9\sqrt{2}+\sqrt{3}=10\sqrt{5}$ ή $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2}\sqrt{3}$). Με 1 βαθμολογήθηκε και ένας μαθητής που πολλαπλασίασε και τα δύο μέλη της ισότητας που δίναμε με το $\sqrt{2}$. Με 0,5 βαθμολογήθηκαν οι μαθητές που αφού πρόσθεσαν τις όμοιες ρίζες, στη συνέχεια έκαναν λάθος πράξεις, και με 0,75 οι μαθητές που έκαναν σωστά τις πράξεις αλλά έγραψαν ότι $9\sqrt{2} = \sqrt{6}$ ή ότι $9\sqrt{2} = 6$. Με 0 βαθμολογήθηκαν οι λανθασμένες απαντήσεις και τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση.

Στη δραστηριότητα mi_b1 οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την τιμή της παράστασης: $\frac{2x}{xy-y^2}-\frac{2y}{x^2-xy}+\frac{x+y}{2xy}$. Με 1 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που είχαν φτάσει μέχρι το τελικό αποτέλεσμα. Με 0,25 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα των μαθητών που στη λύση τους έφτασαν μέχρι την παραγοντοποίηση των παρονομαστών, ενώ με 0,5 οι μαθητές που στη λύση τους μετά την παρογοντοποίηση των παρονομαστών έκαναν τα κλάσματα ομώνυμα και τα πρόσθεσαν φτάνοντας σε ένα κλάσμα αλλάδε συνέχισαν. Με 0,75 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα των μαθητών που έφτασαν μέχρι ένα κλάσμα και παρογοντοποίησαν και τον αριθμητή. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση και εκείνα που είχαν αρκετά λάθη στη λύση τους.

Στη δραστηριότητα mi_b2 οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την τιμή της παράστασης: Β = (α – 2β)(α + β) – (α + β)(α – β) +β(β + α). Με 1 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα των μαθητών που έφτασαν στο τελικό αποτέλεσμα είτε με παραγοντοποίηση με κοινό παράγοντα το (α+β), είτε με πράξεις, με χρήση της ταυτότητας, της διαφοράς των τετραγώνων ή με την επιμεριστική ιδιότητα. Με 0,25 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που ενώ άνοιξαν σωστά τις παρενθέσεις στη συνέχεια έκανα πολλά λάθη. Με 0,5 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που εκτέλεσαν σωστά τις πράξεις αλλά δεν υπολόγισαν το τελικό αποτέλεσμα, και με 0,75 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που παραγοντοποίησαν την παράσταση με κοινό παράγοντα το (α+β) και έφτασαν στο αποτέλεσμα (α+β)·0, αλλά δεν έγραψαν το τελικό αποτέλεσμα. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση, ή η λύση τους ήταν λανθασμένη. Τα λάθη οφείλονταν σε λάθος πράξεις.

Στη δραστηριότητα mi_c1 είχαμε την εξίσωση: $16(x + 1) + 1 – 2(3 – x) = -3(x + 6)$. Με 1 βαθμολογήθηκαν οι μαθητές που έφτασαν στο τελικό αποτέλεσμα. Με 0,25 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που ενώ άνοιξαν σωστά τις παρενθέσεις στη συνέχεια έκανα πολλά λάθη. Με 0,5 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, που είτε έκαναν σωστά τις πράξεις σε κάθε μέλος αλλά δε συνέχισαν, είτε έφτασαν μέχρι το σημείο που είχαν χωρίσει τους γνωστούς από τους αγνώστους, ή είχαν κάνει δύο μικρά λάθη, στην επιμεριστική και στο άθροισμα ή κάποιο λάθος στην προτεραιότητα των πράξεων αλλά συνέχισαν σωστά. Με 0,75 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που ενώ έφτασαν την εξίσωση στη μορφή $21x = -29$, είτε βρήκαν κατά απόλυτη τιμή το σωστό αποτέλεσμα ή έκαναν μικρό αριθμητικό λάθος. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που είχαν λάθος στην λύση ή δεν είχαν απάντηση. Τα λάθη οφείλονταν σε λάθος πράξεις.

Στη δραστηριότητα mi_c2 είχαμε την εξίσωση: $6-\frac{x-1}{2}=\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{3}$. Με 1 βαθμολογήθηκαν οι μαθητές που έφτασαν στο τελικό αποτέλεσμα. Με 0,25 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που στη λύση τους δεν πολλαπλασίασαν το 6 με το ΕΚΠ, οι απαντήσεις των μαθητών που έκαναν λάθος σε ένα πρόσημο και στη συνέχεια ένα αριθμητικό λάθος αλλά συνέχισαν τη διαδικασία σωστά, τα φύλλα των μαθητών που έκαναν σωστά την απαλοιφή αλλά μετά έκαναν αρκετά λάθη, και οι μαθητές που είτε έδιωξαν το 6 με την απαλοιφή, είτε εκτέλεσαν σωστά τη διαδικασία αλλά έκαναν κάποια λάθη.

Με 0,5 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που στη λύση τους έκαναν σωστά την απαλοιφή και τη διαδικασία αλλά έκαναν 2 αριθμητικά λάθη που διαμόρφωσε το τελικό τους αποτέλεσμα, ή έκαναν σωστά τις αρχικές πράξεις στη διαδικασία επίλυσης αλλά σταμάτησαν σε κάποιο σημείο. Με 0,75 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που στη λύση τους έκαναν σωστά τις πράξεις και ακολούθησαν επίσης σωστά τη διαδικασία, αλλά δε συνέχισαν στον υπολογισμό του αγνώστου. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που είχαν λανθασμένη ή δεν είχαν απάντηση. Τα λάθη οφείλονταν σε λάθος πράξεις.

Στη δραστηριότητα met_a1 οι μαθητές έπρεπε να εκφράσουν με συμβολικό τρόπο την πρόταση «το διπλάσιο του τετραγώνου ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό αυτό». Τη σωστή απάντηση τη βαθμολογήσαμε με 1. Με 0,5 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που στη λύση τους είτε είχαν γράψει $2x^2<x$, είτε $2x^2=x$. Με 0,75 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που στη λύση τους έγραψαν $2x^2>y$. Με 0 βαθμολογήθηκαν τα φύλλα που είχαν λανθασμένη ή δεν είχαν απάντηση.

Στην δραστηριότητα met_a2 που ήταν πολλαπλής επιλογής, οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποιος από τους 4 τρόπους υπολογισμού των χρεώσεων που δίναμε χρησιμοποιεί μία εταιρία κινητής τηλεφωνίας. Την απάντηση θα έδιναν οι μαθητές βάσει του πίνακα παραδειγμάτων χρέωσης που δίναμε. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1, ενώ η λανθασμένη με 0. Τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση βαθμολογήθηκαν και αυτά με 0.

Στην δραστηριότητα met_a3 που ήταν πολλαπλής επιλογής, οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποιο σχηματικό μοντέλο από τα τέσσερα που δίναμε περιέγραφε την πρόταση: το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 1 είναι ίσο με ένα άλλο αριθμό αυξημένο κατά 5. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1, ενώ η λανθασμένη με 0. Με 0,5 βαθμολογήσαμε τα φύλλα των μαθητών που ενώ απάντησαν λάθος, έγραψαν σωστά τη σχέση που περιγράφει την πρόταση, δηλαδή παρόλο που κατανόησαν την πρόταση και κατάφεραν να κατασκευάσουν το μοντέλο με ένα τύπο, δεν μπόρεσαν να αναγνωρίσουν ποιο σχέδιο αντιστοιχεί στο μοντέλο αυτό. Δεν μπόρεσαν να μετατρέψουν το μοντέλο που κατασκεύασαν σε άλλη μορφή. Τα φύλλα που δεν είχαν απάντηση βαθμολογήθηκαν και αυτά με 0.

Στην δραστηριότητα met_b1 είχαμε το παρακάτω πρόβλημα: μία εταιρία ενοικίασης αυτοκινήτων χρεώνει 20€ την ημέρα και 0,50€ για κάθε χιλιόμετρο. Μία άλλη εταιρία χρεώνει 40€ με απεριόριστα χιλιόμετρα. Για ποιες αποστάσεις θα διαλέγατε τη δεύτερη εταιρία αντί της πρώτης;

Με 1 βαθμολογήσαμε τα φύλλα των μαθητών που έφτασαν στο τελικό αποτέλεσμα. Με 0,25 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που απάντησαν σωστά χωρίς αιτιολόγηση. Με 0,75 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που απάντησαν σωστά με δοκιμές ή με παραδείγματα ή απάντησαν $x = 40$ με λύση εξίσωσης. Με 0 βαθμολογήθηκαν οι λανθασμένες και οι κενές απαντήσεις.

Στην δραστηριότητα met_b2 οι μαθητές έπρεπε να αποδείξουν ότι το γινόμενο άρτιου με περιττό αριθμό είναι άρτιος αριθμός. Οι μαθητές δεν κατάφεραν να αποδείξουν την πρόταση αυτή και μόνο ένας μαθητής έγραψε μία μορφή απόδειξης, όπου έγραμε πως αν μ είναι ένας άρτιος και ν ένας περιττός τότε το μν είναι πολλαπλάσιο του 2 γιατί και το μ είναι πολλαπλάσιο του 2. Η απάντηση αυτή βαθμολογήθηκε με 1 και στη βαθμολόγηση των υπόλοιπων απαντήσεων είμασταν ελαστικοί.

Με 0,25 βαθμολογήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που κάποιοι από αυτούς έγραψαν στη λύση τους, ότι είναι άρτιος διότι $2x(2x+1)$, και κάποιοι άλλοι έγραψαν

$2x(2x-1)=4x^2-2x$. Με 0,5 βαθμολογήθηκαν οι μαθητές που απάντησαν ότι $2x(2x+1)$ είναι άρτιος γιατί είναι 2 επί κάτι άλλο, και οι μαθητές που έγραψαν ότι το γινόμενο άρτιου με περιττό αριθμό είναι άρτιος αριθμός γιατί θα είναι 2 επί κάτι, άρα πολλαπλάσιο του 2. Ένας μαθητής πήρε 0,75 που απάντησε ότι $2x(2x+1)=4x^2+2x$, δηλαδή άρτιος και άρτιος που θα είναι άρτιος. Με 0 βαθμολογήθηκαν οι κενές και οι λανθασμένες απαντήσεις.

Περιγραφική Στατιστική

Βαθμολόγηση

Στη δραστηριότητα ga_a1 οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ 5 διαφορετικών απαντήσεων για το αποτέλεσμα της πράξης: $3 \cdot (-13212) - 5 \cdot (-13212)$. Οι πρώτες τέσσερις επιλογές ήταν 26424, -2, $-2\cdot13212$, $8\cdot13212$ και η τελευταία επιλογή ήταν ότι καμία από τις παραπάνω δεν ήταν σωστή. Σε αυτή τη δραστηριότητα 73, δηλαδή το 54,5% των μαθητών έδωσαν σωστή απάντηση και βαθμολογήθηκε η απάντησή τους με 1, 57 μαθητές, δηλαδή το 42,5%, έδωσαν λανθασμένη απάντηση, ενώ 4 μαθητές (3%) δεν απάντησαν καθόλου. Δηλαδή το 45,5% των μαθητών βαθμολογήθηκε με 0. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή την δραστηριότητα ήταν 0,545.

Στη δραστηριότητα ga_a2 οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποιος από τους 2^{348}, 3^{348}, 5^{348}, 7^{348} είναι άρτιος, ή να επιλέξουν την απάντηση ότι είναι πολύ δύσκολες οι πράξεις για να απαντήσουμε. Το 76,1% των μαθητών απάντησε σωστά στην δραστηριότητα αυτή. Δεν υπήρχαν μαθητές που δεν απάντησαν σε αυτή την ερώτηση. Η μέση τιμή των απαντήσεων σε αυτή την δραστηριότητα ήταν 0,761.

Στη δραστηριότητα ga_a3 οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν το αποτέλεσμα της πράξης: $-1245 \cdot 15 + 245 \cdot 15$, που είναι το -15000. Η σωστή απάντηση βαθμολογήθηκε με 1, η λάθος και η κενή απάντηση με 0. Οι 84 μαθητές, δηλαδή το 63% απάντησαν σωστά. Από αυτούς το 45% (το 28,3% του συνόλου) των μαθητών έδωσε σωστή απάντηση κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς και μετά την πρόσθεση των ακεραίων, ενώ το υπόλοιπο 55% (το 34,3% του συνόλου) έφτασε στη σωστή απάντηση με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας. Οι 22 μαθητές, δηλαδή το 16,4% βαθμολογήθηκαν με 0 για αυτή την δραστηριότητα γιατί έκαναν λάθος και στα δύο βήματα των πράξεων, δηλαδή και στον πολλαπλασιασμό και στην πρόσθεση. Μόλις το 3% δεν απάντησε σε αυτήν την ερώτηση. Από τους μαθητές που δεν πήραν 0 για την απάντηση τους, 9 μαθητές, δηλαδή το 7% βαθμολογήθηκαν με 0,25 διότι έκαναν σωστά τους πολλαπλασιασμούς αλλά είτε δεν προχώρησαν στην πρόσθεση των γινομένων, είτε έκαναν λάθος στην πρόσθεση των γινομένων, ή πρόσθεσαν τις απόλυτες τιμές των γινομένων. Με 0,50 βαθμολογήθηκε το 10% των απαντήσεων που πήρε κάποιο βαθμό και το 9% του συνόλου (12 μαθητές), που είτε η απάντηση τους ήταν η αντίθετη της σωστής, παρέλειψαν δηλαδή το αρνητικό πρόσημο, είτε μετά την παραγοντοποίηση έκαναν μικρό αριθμητικό λάθος στην παρένθεση αλλά συνέχισαν σωστά, ή έδωσαν κατευθείαν τη σωστή απάντηση χωρίς ανάλυση. Με 0,75 βαθμολογήθηκαν 7 μαθητές, δηλαδή το 6% των μη μηδενικών απαντήσεων και το 5,2% του συνόλου, που έκαναν σωστά όλες τις πράξεις αλλά όχι σε μία αριθμητική παράσταση αλλά κάθε πράξη ξεχωριστά, αλλά τελικά ενώ φαίνεται στο χαρτί τους ότι η τελική πράξη είναι η σωστή, δίνουν σαν απάντηση την αντίθετη της, δηλαδή γράφουν 15000. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή την δραστηριότητα είναι ήταν 0,724.

Στην δραστηριότητα ga_b1 οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ των 0, 1, 3 και 9, ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $3^2 \cdot 11^{12}$. Οι 92 μαθητές, δηλαδή το 63,4%, επέλεξε τη σωστή απάντηση. Η μέση τιμή της βαθμολογίας ήταν 0,634.

Στη δραστηριότητα ga_b2, οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ των αριθμών 0, 8, -8, 12 ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος 946 + 950 + 952 + 960 διά του 950. Εναλλακτικά θα μπορούσαν να επιλέξουν την τελευταία απάντηση, ότι καμία από τις παραπάνω τιμές δεν είναι σωστή. Σε αυτή τη δραστηριότητα οι 67 μαθητές, δηλαδή το 46,2% των μαθητών απάντησαν σωστά και το υπόλοιπο 53,8% απάντησε λάθος. Ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι το 32,8% των μαθητών επέλεξε την πέμπτη απάντηση, ότι δηλαδή καμία απάντηση από τις δοσμένες δεν ήταν σωστή. 5 μαθητές (3,7%) δεν απάντησαν καθόλου. Η μέση τιμή της βαθμολογίας της δραστηριότητας αυτής ήταν 0,462.

Στη δραστηριότητα ga_b3, οι μαθητές έπρεπε να εξετάσουν αν ο αριθμός 3^{400} διαιρείται με το 9. Το 21,6% (29 μαθητές) δεν απάντησαν καθόλου και το 52,9% των μαθητών (71 μαθητές) απάντησε λάθος. Δηλαδή το 74,5% των μαθητών (100 μαθητές) βαθμολογήθηκαν με 0 στη δραστηριότητα αυτή. Φαίνεται ότι σε αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά και δεν μπόρεσαν να εφαρμόσουν τις ιδιότητες της συγκεκριμένης δομής. Από τους υπόλοιπους 34 μαθητές (25,5%) που πήρε βαθμούς για τις απαντήσεις που έδωσαν έχουμε 13 μαθητές, δηλαδή το 38,2% (9,7% του συνόλου), που απάντησαν σωστά ότι το 3^{400} διαιρείται με το 9. Οι 11 απάντησαν ότι το 3^{400} είναι πολλαπλάσιο του 3^2, κάποιοι έγραψαν και $3^{400} = (3^2)^{200}$. Οι άλλοι 2 έγραψαν ότι το $3^4 = 81$ που είναι πολλαπλάσιο του 9, επομένως και το 81^{100} είναι πολλαπλάσιο του 9. Δηλαδή περιέγραψαν λεκτικά την ισότητα: $3^{400} = (3^4)^{100}$. Το πολύ μικρό πλήθος των σωστών απαντήσεων μας ώθησε να αυξήσουμε την ελαστικότητα για το ποιες απαντήσεις θα έπαιρναν κάποιους βαθμούς. Με 0,25 βαθμολογήσαμε τα φύλλα που απάντησαν ότι επειδή το $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, δηλαδή οι δυνάμεις του 3 είναι πολλαπλάσια του 9, τότε και το 3^{400} είναι πολλαπλάσιο του 9. Συνολικά 18 μαθητές, δηλαδή το 13,4% του συνόλου των απαντήσεων και το 52,9% των απαντήσεων που δεν βαθμολογήθηκαν με 0, απάντησαν με αυτό τον τρόπο, εκ των οποίων οι 4 έγραψαν και ότι όλες οι δυνάμεις του 3, εκτός του 3^1 διαιρούνται με το 9. Με 0,5 βαθμολογήσαμε 2 μαθητές, δηλαδή το 1,5% του συνόλου των απαντήσεων και το 5,9% των απαντήσεων που δεν βαθμολογήθηκαν με 0, που απάντησαν ότι $3^2 = 9$ και το 9 είναι υποπολλαπλάσιο του 3^{400}. Με 0,75 βαθμολογήσαμε άλλους 2 μαθητές που έγραψαν ότι $3^{400} = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\ldots = 9\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\ldots$, επομένως είναι πολλαπλάσιο του 9. Η μέση τιμή της βαθμολογίας στη δραστηριότητα αυτή ήταν 0,146.

Στην δραστηριότητα ga_c1 δίνονταν στους μαθητές η πληροφορία ότι $A + B = 4$ και βάσει αυτής της πληροφορίας οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποια από τους αριθμούς 8, -1, 3 και -5 είναι η τιμή της παράστασης $2A + 2B – 5$. Το 90,3% των μαθητών απάντησαν σωστά, 2 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου και 11 μαθητές απάντησαν λάθος. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν 0,903.

Στη δραστηριότητα ga_c2 οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποια τιμή του α από τις 2, -2, 1 και 3 επαληθεύει την ανισότητα $- 10 > (-5)α$. Τη σωστή απάντηση επέλεξε το 65,7% των μαθητών (88 μαθητές), ενώ 21,6% των μαθητών απάντησε ότι το 1 είναι η σωστή απάντηση, δηλαδή από τις 44 λανθασμένες απαντήσεις οι 29, δηλαδή το 65,9% ήταν η απάντηση 1. Η μέση τιμή της βαθμολογίας αυτής της απάντησης ήταν το 0,659.

Η δραστηριότητα ss_a1 που ήταν ένα γεωμετρικό μοτίβο, ήταν ανοικτού τύπου και οι μαθητές έπρεπε να βρουν πόσα τρίγωνα περιέχει το 10ο κατά σειρά σχήμα από τη σειρά των σχημάτων που δίνονται. Το 51,4% των μαθητών βρήκαν σωστά το πλήθος των τριγώνων. Αυτοί ήταν 69 μαθητές και από αυτούς οι 10, δηλαδή το 14,5% των σωστών απαντήσεων, κατέληξαν και σε γενίκευση, έγραψαν δηλαδή ότι το πλήθος των τριγώνων είναι $2ν^2$. Οι 9 σωστές απαντήσεις βασίζονταν σε διαδοχικά σχήματα που είχαν σχεδιάσει οι μαθητές και είχαν γράψει και την ακολουθία 2, 8, 18 άρα 200. Οι 2 από τους 69 μαθητές είχαν γράψει ότι τα τρίγωνα είναι 20 επί 10, δηλαδή 200. Με 0,25 βαθμολογήσαμε 3 μαθητές (2,2%) που είχαν γράψει ότι έχουμε 10 επί 10 τρίγωνα. Με 0,5 βαθμολογήσαμε 13 μαθητές, δηλαδή το 9,7%, που έδωσαν σωστή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση και 0,75 δώσαμε σε 15 μαθητές που απάντησαν σωστά εκ των οποίων οι 8 είχαν βρει σωστά το πλήθος των τετραγώνων και δεν ασχολήθηκαν με τα τρίγωνα και οι υπόλοιποι 7 απάντησαν σωστά αλλά η αιτιολόγηση τους δε αιτιολογούσε επακριβώς την απάντηση τους. Οι λανθασμένες απαντήσεις ήταν 37 (27,6%) και είχαμε και 7 φύλλα χωρίς καμία απάντηση, δηλαδή 5,2% των μαθητών. Από τις 37 λανθασμένες απαντήσεις, 1 μαθητής προσπάθησε να βρει τη λύση κάνοντας διαδοχικά σχήματα αλλά μάλλον αυτό δεν τον βοήθησε, 2 μαθητές απάντησαν ότι έχουμε 20 επί 20 τρίγωνα, 6 προσπάθησαν με πολλά σχήματα να μετρήσουν το πλήθος και τα υπόλοιπα ήταν λάθος στον τρόπο σκέψης. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή την ερώτηση ήταν 0,653.

Στη δραστηριότητα ss_a2 οι μαθητές έπρεπε να βρουν τον 8ο όρο της ακολουθίας -2, 4, -8, 16. Οι 84 μαθητές, δηλαδή το 62,7% των μαθητών απάντησαν σωστά παίρνοντας 1 και έφτασαν στη σωστή απάντηση γράφοντας όλους τους όρους μέχρι το 256. Με 0,5 βαθμολογήσαμε 16 μαθητές, δηλαδή το 11,9% του συνόλου των απαντήσεων και το 19% των απαντήσεων που δεν βαθμολογήθηκαν με 0, εκ των οποίων οι 15 έγραψαν τους όρους της ακολουθίας αλλά σταμάτησαν σε προηγούμενο όρο και όχι στο 256 και ο ένας από τους 16 βρήκε ότι πολλαπλασιάζοντας με το -2 ένα όρο δημιουργούμε τον επόμενο, αλλά έκανε λάθος σε έναν πολλαπλασιασμό. Με 0,75 βαθμολογήσαμε 4 απαντήσεις, 2,9% του συνόλου και 4,7% των σωστών απαντήσεων που ήταν σωστή η απάντηση αλλά η αιτιολόγηση δεν ήταν επαρκής. 6 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου, δηλαδή ποσοστό 4,5%. Η μέση τιμή της βαθμολογίας στη δραστηριότητα αυτή ήταν 0,709.

Στη δραστηριότητα ss_b1 δώσαμε έναν πίνακα που περιείχε 5 ζευγάρια τιμών (0, 1), (1,2), (2, 5), (3, 10), (4, 17) και οι μαθητές έπρεπε να βρουν ποια σχέση από τις τέσσερις που δίνονταν μπορούσε να περιγράψει τη σχέση των μεταβλητών. Η σωστή απάντηση ήταν η τρίτη στη σειρά των επιλογών, δηλαδή η σχέση $y = x^2 + 1$. Οι πρώτες δύο σχέσεις δεν επαληθευόντουσαν από το πρώτο ζευγάρι τιμών ως εκ τούτου εύκολα θα το απέρριπταν οι μαθητές. Τη σωστή απάντηση επέλεξαν οι 101 μαθητές, δηλαδή το 75,4%, ενώ 5 μαθητές (3,7%) δεν απάντησαν καθόλου και 28 μαθητές (20,9%) απάντησαν λάθος. Από τους 28 μαθητές οι 20, το 14,9% του συνόλου των απαντήσεων και το 71,4% των απαντήσεων που δεν βαθμολογήθηκαν με 0 επέλεξαν την σχέση $y = 2x +1$ καθώς αυτή η σχέση επαληθεύεται από τα τρία πρώτα ζευγάρια και φαίνεται ότι οι μαθητές αρκέστηκαν στο γεγονός αυτό και δεν προχώρησαν στη δοκιμή της τέταρτης σχέσης. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή την ερώτηση ήταν 1,01.

Στη δραστηριότητα ss_b2 είχαμε ένα πρόβλημα με δύο ερωτήματα στα οποία δώσαμε τους κωδικούς ss_b2a και ss_b2b αντίστοιχα. Το πρόβλημα έλεγε ότι ο Γιώργος εργάζεται σε μία ασφαλιστική εταιρία για ασφάλειες αυτοκινήτου. Ο μισθός του είναι 50€ και παίρνει και 20€ για κάθε ασφάλεια που πουλάει. Το πρώτο ερώτημα (ss_b2a) ζητούσε να απαντήσουν οι μαθητές πόσα χρήματα κερδίζει ο Γιώργος κάθε εβδομάδα. Οι 72 μαθητές, δηλαδή το 53,7%, έγραψαν $50 + 20x$, που ήταν και οι σωστή απάντηση. Δύο μαθητές (1,5%) μέσα σε πολλά που είχαν γράψει, είχαν δώσει και την απάντηση $50 + 20x = y$ και αυτοί βαθμολογήθηκαν με 0,75. Ένας μαθητής

(),75%) βαθμολογήθηκε με 0,5 διότι έδωσε την απάντηση x = 50 + 20x. Οι υπόλοιποι 59 μαθητές, δηλαδή το 44%, βαθμολογήθηκε με 0. Απ' αυτούς, οι 25, δηλαδή το 148,7% του συνόλου των απαντήσεων και το 42,4% των απαντήσεων που βαθμολογήθηκαν με 0 δεν έδωσαν κάποια απάντηση. Από τους 34 μαθητές (25,4%) που έδωσαν λανθασμένη απάντηση, 17 έγραψαν ότι ο Γιώργος θα βγάζει την εβδομάδα 20€ και ότι ασφάλειες πουλήσει, οι 12 από αυτούς έγραψαν και το άθροισμα 50 + x, ένας μαθητής έγραψε 20·50x = y, 8 μαθητές έγραψαν 50€. Η μέση τιμή της βαθμολογίας του πρώτου ερωτήματος της δραστηριότητας αυτής ήταν 0,552.

Στο δεύτερο ερώτημα έπρεπε οι μαθητές να απαντήσουν πόσες ασφάλειες πούλησε ο Γιώργος αν γνωρίζαμε ότι έβγαλε 190€. Η σωστή απάντηση ήταν το 7 και οι 92 μαθητές, δηλαδή το 68,7% απάντησε σωστά και βαθμολογήθηκε με 1. Από αυτούς, 5 μαθητές, το 5,2% του συνόλου των απαντήσεων και το 7,6% των σωστών απαντήσεων, έγραψαν ότι x = (190 – 50)/20, άρα x = 7. Οι 62 από τους 92 μαθητές που απάντησαν σωστά, δηλαδή το 46,3% του συνόλου των απαντήσεων και το 67,4% των σωστών απαντήσεων έλυσαν το πρόβλημα με αντιστροφή της διαδικασίας, δηλαδή έγραψαν 190 – 50 = 140, επομένως 140/20 = 7 ασφάλειες. Ένας μαθητής έγραψε ότι η μία ασφάλεια αντιστοιχεί στα 20€, οι x στα 140€, άρα x = 7. Ένας μαθητής έγραψε 50 + 7 φορές το 7 = 140 και 20 μαθητές, το 14,9% του συνόλου των απαντήσεων και το 21,7% των σωστών απαντήσεων έλυσαν το πρόβλημα με την εξίσωση 50 + 20x = 190. Χωρίς απάντηση είχαμε 14 φύλλα, δηλαδή ποσοστό 10,4%. Η μέση τιμή της βαθμολογίας του δεύτερου ερωτήματος της δραστηριότητας αυτής ήταν 0,687.

Στη δραστηριότητα ss_c1 έπρεπε οι μαθητές να απαντήσουν πόσα σημεία έχει μία δοσμένη γραφική παράσταση. Τη σωστή απάντηση, έδωσε το 35,8% των μαθητών, δηλαδή 48 μαθητές αναγνώρισαν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει άπειρα σημεία. Χωρίς απάντηση παράδωσαν το φύλλο τους οι 19 μαθητές, το 14,2% του συνόλου. Από τους 67 (50%) μαθητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση, οι 49 (το 36,6% του συνόλου των απαντήσεων και το 73,1% των λανθασμένων απαντήσεων), ένας μαθητής περισσότερος δηλαδή από αυτούς που απάντησαν σωστά, έγραψαν ότι η γραφική παράσταση έχει 5 σημεία, μετρώντας μάλλον τα άκρα των ευθύγραμμων τμημάτων της τεθλασμένης γραμμής. Ότι η γραφική παράσταση έχει 13 σημεία, όσα είναι και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τις ευθείες του πλέγματος, απάντησαν 3 μαθητές (2,2%), ενώ 13 μαθητές (9,7%) έδωσαν την απάντηση 4, που ίσως η απάντηση αυτή συνδέεται με το πλήθος των διαφορετικών ευθύγραμμων τμημάτων της γραφικής παράστασης. Η μέση τιμή της βαθμολογίας στη δραστηριότητα αυτή ήταν 0,358.

Στην δραστηριότητα ss_c2 είχαμε ένα πρόβλημα. Το πρόβλημα έλεγε ότι μία βρύση είναι ανοικτή στο τέρμα και γεμίζει μία δεξαμενή. Σιγά σιγά, με αργό ρυθμό, κλείνουμε τη βρύση μέχρι να κλείσει τελείως. Έπρεπε οι μαθητές να επιλέξουν μία από τις τέσσερις γραφικές παραστάσεις που δίναμε. Οι μαθητές που απάντησαν σωστά ήταν 75, δηλαδή το 56%. Σε αυτή την δραστηριότητα είχαμε 8 φύλλα (6%) χωρίς απάντηση. Η μέση τιμή της βαθμολογίας στη δραστηριότητα αυτή ήταν 0,56.

Στην δραστηριότητα mi_a1 οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την τιμή της παράστασης: $A=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}+\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}+\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{5}{4}}$. Συνολικά είχαμε 61 απαντήσεις (45,5%) που πήραν βαθμό 1, 0,25, 0,5, ή 0,75. Στο τελικό αποτέλεσμα έφτασαν 32 μαθητές, δηλαδή το 23,9%. Ένας μαθητής (0,75% του συνόλου των απαντήσεων και 1,6% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν), βαθμολογήθηκε με 0,25 που έκανε ομώνυμα τα κλάσματα σε κάθε όρο των κλασμάτων της παράστασης, ένας μαθητής (0,75% του συνόλου των απαντήσεων και 1,6% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκε με 0,5 που αφού έφτασε στο άθροισμα τριών κλασμάτων μετά συνέχισε με απαλοιφή και με μικρό αριθμητικό λάθος, και 27 μαθητές (20,2% του συνόλου των απαντήσεων και 44,3% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκαν με 0,75 που προχώρησαν αρκετά τις πράξεις αλλά είτε έκαναν μικρό αριθμητικό λάθος ή σταμάτησαν λίγο πριν τον υπολογισμό του τελικού αποτελέσματος. Με 0 βαθμολογήθηκαν 73 φύλλα (54,5%), εκ των οποίων το 54,8%, δηλαδή τα 40 (30% του συνόλου), δεν είχαν απάντηση. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν 0,396.

Στη δραστηριότητα mi_a2 οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την τιμή της παράστασης: $A = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 5$. Συνολικά είχαμε 97 απαντήσεις (72,4%) που πήραν βαθμό 1, 0,25, 0,5, ή 0,75. Στο τελικό αποτέλεσμα έφτασαν 78 μαθητές, δηλαδή το 58,2%. 7 μαθητές (5,2% του συνόλου των απαντήσεων και 9% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν), βαθμολογήθηκαν με 0,25 που οι 6 από αυτούς πρόσθεσαν τους όρους με τις όμοιες ρίζες αλλά στο τέλος πρόσθεσαν τις διαφορετικές ρίζες ($9\sqrt{2} + \sqrt{3} = 10\sqrt{5}$ ή $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2}\sqrt{3}$) και ο ένας πολλαπλασίασε και τα δύο μέλη στην ισότητα που δίναμε με το $\sqrt{2}$.

5 μαθητές (3,7% του συνόλου των απαντήσεων και 5,2% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκε με 0,5 που αφού πρόσθεσαν τις όμοιες ρίζες, στη συνέχεια έκαναν λάθος πράξεις, και 7 μαθητές (3,7% του συνόλου των απαντήσεων και 5,2% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκαν με 0,75 που έκαναν σωστά τις πράξεις αλλά έγραψαν ότι $9\sqrt{2} = \sqrt{6}$ ή ότι $9\sqrt{2} = 6$. Με 0 βαθμολογήθηκαν 47 φύλλα (35,1%), εκ των οποίων το 49%,

δηλαδή τα 23 (30% του συνόλου), δεν είχαν απάντηση. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν 0,653.

Στη δραστηριότητα mi_b1 οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την τιμή της παράστασης: $\frac{2x}{xy-y^2}-\frac{2y}{x^2-xy}+\frac{x+y}{2xy}$. Συνολικά είχαμε 55 απαντήσεις (41%) που πήραν βαθμό 1, 0,25, 0,5, ή 0,75. Στο τελικό αποτέλεσμα έφτασαν 10 μαθητές, δηλαδή το 7,5% του συνόλου των απαντήσεων και το 18,2% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν. 18 μαθητές (13,4% του συνόλου των απαντήσεων και 32,7% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν), βαθμολογήθηκαν με 0,25 που έκαναν μέχρι την παραγοντοποίηση των παρονομαστών. 11 μαθητές (8,2% του συνόλου των απαντήσεων και 20% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκε με 0,5 που μετά την παρογοντοποίηση των παρονομαστών έκαναν τα κλάσματα ομώνυμα και τα πρόσθεσαν φτάνοντας σε ένα κλάσμα και 7 μαθητές (3,7% του συνόλου των απαντήσεων και 12,7% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκαν με 0,75 που έφτασαν σε ένα κλάσμα και παρογοντοποίησαν και τον αριθμητή. Με 0 βαθμολογήθηκαν 79 φύλλα (59%), εκ των οποίων το 44,3%, δηλαδή τα 35 (26,1% του συνόλου), δεν είχαν απάντηση. Τα λάθη οφείλονταν σε λάθος πράξεις, ή μη σωστή επιλογή διαδικασίας, καθώς 13 μαθητές προσπάθησαν να κάνουν απαλοιφή των παρονομαστών. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν 0,239.

Στη δραστηριότητα mi_b2 οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την τιμή της παράστασης: Β = (α – 2β)(α + β) – (α + β)(α – β) +β(β + α). Συνολικά είχαμε 75 απαντήσεις (56%) που πήραν βαθμό 1, 0,25, 0,5, ή 0,75. Στο τελικό αποτέλεσμα έφτασαν 53 μαθητές, δηλαδή το 39,6% του συνόλου των απαντήσεων και το 70,7% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν. Οι 6 από τις 53 σωστές απαντήσεις (11,3%) ήταν με παραγοντοποίηση του (α+β). Οι υπόλοιποι 47 (88,7%) δεν είδαν τον κοινό παράγοντα και από τους 47, οι 13 (το 24,5 των σωστών απαντήσεων) έκαναν τις πράξεις με χρήση της ταυτότητας, της διαφοράς των τετραγώνων ενώ οι υπόλοιποι 34 (64,2% των σωστών απαντήσεων) εφάρμοσαν την επιμεριστική ιδιότητα. 15 μαθητές (11,2% του συνόλου των απαντήσεων και 20% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν), βαθμολογήθηκαν με 0,25 που ενώ άνοιξαν σωστά τις παρενθέσεις στη συνέχεια έκανα πολλά λάθη. 4 μαθητές (3% του συνόλου των απαντήσεων και 5,3% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκε με 0,5 που εκτέλεσαν σωστά τις πράξεις αλλά δεν υπολόγισαν το τελικό αποτέλεσμα, και 3 μαθητές (2,2% του συνόλου των απαντήσεων και 4% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκαν με 0,75 που παραγοντοποίησαν την παράσταση με κοινό παράγοντα το (α+β) και έφτασαν στο αποτέλεσμα (α+β)·0, αλλά δεν έγραψαν το τελικό αποτέλεσμα. Με 0 βαθμολογήθηκαν 60 φύλλα (44,8%), εκ των οποίων το 33,3%, δηλαδή τα 20 (15% του συνόλου), δεν είχαν απάντηση. Τα λάθη οφείλονταν σε λάθος πράξεις. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν 0,448.

Στη δραστηριότητα mi_c1 είχαμε την εξίσωση: $16(x + 1) + 1 – 2(3 – x) = -3(x + 6)$. Συνολικά είχαμε 127 απαντήσεις (94,8%) που πήραν βαθμό 1, 0,25, 0,5, ή 0,75. Στο τελικό αποτέλεσμα έφτασαν 83 μαθητές, δηλαδή το 61,9% του συνόλου των απαντήσεων και το 65,4% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν. 2 μαθητές (1,5% του συνόλου των απαντήσεων και 1,6% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν), βαθμολογήθηκαν με 0,25 που ενώ άνοιξαν σωστά τις παρενθέσεις στη συνέχεια έκανα πολλά λάθη. 5 μαθητές (3,7% του συνόλου των απαντήσεων και 3,9% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκε με 0,5, 1 από αυτούς έκανε σωστά τις πράξεις σε κάθε μέλος αλλά δε συνέχισε, 2 έφτασαν μέχρι το σημείο που είχαν χωρίσει τους γνωστούς από τους αγνώστους, 1 είχε κάνει δύο μικρά λάθη, στην επιμεριστική και στο άθροισμα και 1 είχε κάνει λάθος στην προτεραιότητα των πράξεων αλλά συνέχισε σωστά. 37 μαθητές (27,6% του συνόλου των απαντήσεων και 29,1% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκαν με 0,75, όπου οι 8 από αυτούς έφτασαν την εξίσωση στη μορφή 21x = -29, 6 βρήκαν κατά απόλυτη τιμή το σωστό αποτέλεσμα και οι υπόλοιποι 21 έκαναν μικρό αριθμητικό λάθος. Με 0 βαθμολογήθηκαν 7 φύλλα (5,2%), εκ των οποίων το 42,9%, δηλαδή τα 4 (3% του συνόλου), δεν είχαν απάντηση. Τα λάθη οφείλονταν σε λάθος πράξεις. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν 0,849.

Στη δραστηριότητα mi_c2 είχαμε την εξίσωση: $6-\frac{x-1}{2}=\frac{x-2}{2}-\frac{x-3}{3}$. Συνολικά είχαμε 111 απαντήσεις (82,8%) που πήραν βαθμό 1, 0,25, 0,5, ή 0,75. Στο τελικό αποτέλεσμα έφτασαν 61 μαθητές, δηλαδή το 45,5% του συνόλου των απαντήσεων και το 55% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν. 13 μαθητές (9,7% του συνόλου των απαντήσεων και 11,7% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν), βαθμολογήθηκαν με 0,25, εκ των οποίων οι 2 δεν πολλαπλασίασαν το 6 με το ΕΚΠ, 1 έκανε λάθος σε ένα πρόσημο και στη συνέχεια ένα αριθμητικό λάθος αλλά συνέχισε τη διαδικασία σωστά, 5 έκαναν σωστά την απαλοιφή αλλά μετά έκαναν αρκετά λάθη, 1 έδιωξε το 6 με την απαλοιφή, και 3 έκαναν σωστή τη διαδικασία αλλά με κάποια λάθη. 11 μαθητές (8,2% του συνόλου των απαντήσεων και 9,9% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκε με 0,5, 5 από αυτούς έκαναν σωστά την απαλοιφή και τη διαδικασία αλλά έκαναν 2 αριθμητικά λάθη που διαμόρφωσε το τελικό τους αποτέλεσμα, και οι υπόλοιποι 6 έκαναν σωστά τις αρχικές πράξεις στη διαδικασία επίλυσης αλλά σταμάτησαν σε κάποιο σημείο. 22 μαθητές (16,4% του συνόλου των απαντήσεων και 19,8% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκαν με 0,75, που έκαναν σωστά τις πράξεις και ακολούθησαν επίσης σωστά τη διαδικασία, αλλά δε συνέχισαν στον υπολογισμό του αγνώστου. Με 0 βαθμολογήθηκαν 23 φύλλα (17,2%), εκ των οποίων το 65,2%, δηλαδή τα 15 (11,2% του συνόλου), δεν είχαν απάντηση. Τα λάθη οφείλονταν σε λάθος πράξεις. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν 0,659.

Στη δραστηριότητα met_a1 οι μαθητές έπρεπε να εκφράσουν με συμβολικό τρόπο την πρόταση «το διπλάσιο του τετραγώνου ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό αυτό». Συνολικά είχαμε 113 απαντήσεις (84,3%) που πήραν βαθμό 1, 0,25, 0,5, ή 0,75. Τη σωστή απάντηση έδωσαν 107 μαθητές, δηλαδή το 79,9% του συνόλου των απαντήσεων και το 94,7% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν. 3 μαθητές (2,2% του συνόλου των απαντήσεων και 2,7% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκε με 0,5, 1 από αυτούς είχε απαντήσει $2x^2<x$ και οι άλλοι 2 είχαν απαντήσει $2x^2=x$. 3 μαθητές (2,2% του συνόλου των απαντήσεων και 2,7% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκαν με 0,75, που έγραψαν $2x^2>y$. Με 0 βαθμολογήθηκαν 21 φύλλα (15,7%), εκ των οποίων το 33,3%, δηλαδή τα 7 (5,2% του συνόλου), δεν είχαν απάντηση. Από τις λανθασμένες απαντήσεις 3 είχαν την απάντηση $2(2^2)>2$, 3 είχαν την απάντηση $(x^2)^2>x$, 2 είχαν την απάντηση $(x^2)^2<x$ και οι υπόλοιπες είχαν απαντήσεις της μορφής $2x>2$, $2x>x$, $x^2>x$, $x^2>2$, $2x^2>x^2$, $2x^2=x+1$. που Τα λάθη οφείλονταν σε λάθος πράξεις. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν 0,826.

Στην δραστηριότητα met_a2 που ήταν πολλαπλής επιλογής, οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποιος από τους 4 τρόπους υπολογισμού των χρεώσεων που δίναμε χρησιμοποιεί μία εταιρία κινητής τηλεφωνίας. Την απάντηση θα έδιναν οι μαθητές βάσει του πίνακα παραδειγμάτων χρέωσης που δίναμε. 95 μαθητές, δηλαδή το 70,9% του συνόλου των μαθητών απάντησαν σωστά. 22 μαθητές, δηλαδή 16,4%, δεν απάντησε σε αυτή την δραστηριότητα. Η μέση τιμή την βαθμολογίας σε αυτή την δραστηριότητα ήταν 0,709.

Στην δραστηριότητα met_a3 που ήταν πολλαπλής επιλογής, οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν ποιο σχηματικό μοντέλο από τα τέσσερα που δίναμε περιέγραφε την πρόταση: το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 1 είναι ίσο με ένα άλλο αριθμό αυξημένο κατά 5. 39 μαθητές, δηλαδή το 29,1% του συνόλου των μαθητών απάντησαν σωστά, ενώ 12 μαθητές (9%) ενώ απάντησαν λάθος, έγραψαν σωστά τη σχέση που περιγράφει την πρόταση, δηλαδή παρόλο που κατανόησαν την πρόταση και κατάφεραν να κατασκευάσουν το μοντέλο με ένα τύπο, δεν μπόρεσαν να αναγνωρίσουν ποιο σχέδιο αντιστοιχεί στο μοντέλο αυτό. Δεν μπόρεσαν να μετατρέψουν το μοντέλο που κατασκεύασαν σε άλλη μορφή. Τις 12 αυτές απαντήσεις τις βαθμολογήσαμε με 0,5. Επομένως είχαμε 51 απαντήσεις που πήραν κάποιο βαθμό (38,1%) και 83 φύλλα που βαθμολογήθηκαν με 0 (61,9%). Από αυτά 4 δεν είχαν απάντηση (3% του συνόλου και 4,8% των απαντήσεων που βαθμολογήθηκαν με 0). Κανένας μαθητής δεν επέλεξε την τρίτη απάντηση, ενώ οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις ήταν αυτές που είχαν επιλέξει το d. Η μέση τιμή την βαθμολογίας σε αυτή την δραστηριότητα ήταν 0,328.

Στην δραστηριότητα met_b1 είχαμε το παρακάτω πρόβλημα: μία εταιρία ενοικίασης αυτοκινήτων χρεώνει 20€ την ημέρα και 0,50€ για κάθε χιλιόμετρο. Μία άλλη εταιρία χρεώνει 40€ με απεριόριστα χιλιόμετρα. Για ποιες αποστάσεις θα διαλέγατε τη δεύτερη εταιρία αντί της πρώτης; Συνολικά είχαμε 58 απαντήσεις (43,3%) που πήραν βαθμό 1, 0,25, 0,5, ή 0,75. Στο τελικό αποτέλεσμα έφτασαν 20 μαθητές, δηλαδή το 14,9% του συνόλου των απαντήσεων και το 34,5% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν. 32 μαθητές (23,9% του συνόλου των απαντήσεων και 55,2% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν), βαθμολογήθηκαν με 0,25, που απάντησαν σωστά χωρίς αιτιολόγηση, 6 μαθητές (4,5% του συνόλου των απαντήσεων και 10,3% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκε με 0,75. Από αυτούς 3 απάντησαν σωστά με δοκιμές ή με παραδείγματα και 3 απάντησαν x = 40 με λύση εξίσωσης. Είχαμε 76 φύλλα που βαθμολογήθηκαν με 0 εκ των οποίων το 30,3% δηλαδή τα 23 ήταν χωρίς απάντηση, δηλαδή το 17,2% του συνόλου. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν 0,241.

Στην δραστηριότητα met_b2 οι μαθητές έπρεπε να αποδείξουν ότι το γινόμενο άρτιου με περιττό αριθμό είναι άρτιος αριθμός. Οι μαθητές δεν κατάφεραν να αποδείξουν την πρόταση αυτή και μόνο ένας μαθητής έγραψε μία μορφή απόδειξης όπου έγραμε πως αν μ είναι ένας άρτιος και ν ένας περιττός τότε το μν είναι πολλαπλάσιο του 2 γιατί και το μ είναι πολλαπλάσιο του2. Η απάντηση αυτή βαθμολογήθηκε με 1 και στη βαθμολόγηση των υπόλοιπων απαντήσεων είμασταν ελαστικοί. Συνολικά είχαμε μόλις 17 απαντήσεις (12,7%) που πήραν βαθμό 1, 0,25, 0,5, ή 0,75. Στο τελικό αποτέλεσμα έφτασε μόνο ένας μαθητής, δηλαδή το 0,75% του συνόλου των απαντήσεων και το 5,9% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν. 8 μαθητές (6% του συνόλου των απαντήσεων και 35,3% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν), βαθμολογήθηκαν με 0,25, όπου οι 6 έγραψαν ότι είναι άρτιος διότι 2x(2x+1), 2 έγραψαν $2x(2x-1)=4x^2-2x$, 7 μαθητές (5,2% του συνόλου των απαντήσεων και 41,2% των απαντήσεων που δε βαθμολογήθηκαν με μηδέν) βαθμολογήθηκε με 0,5. Από αυτούς 5 απάντησαν ότι 2x(2x+1) είναι άρτιος γιατί είναι 2 επί κάτι άλλο, και 2 έγραψαν ότι το γινόμενο άρτιου με περιττό αριθμό είναι άρτιος αριθμός γιατί θα είναι 2 επί κάτι, άρα πολλαπλάσιο του 2. Ένας μαθητής πήρε 0,75 που απάντησε ότι $2x(2x+1)=4x^2+2x$, δηλαδή άρτιος και άρτιος που θα είναι άρτιος. Είχαμε 117 φύλλα που βαθμολογήθηκαν με 0 εκ των οποίων το 23,1% δηλαδή τα 27 ήταν χωρίς απάντηση, δηλαδή το 20,1% του συνόλου. Η μέση τιμή της βαθμολογίας σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν 0,047.

Η δραστηριότητα με τη μικρότερη μέση τιμή, M = 0,047 ήταν η met_b2 που αναφερόταν στον παράγοντα μετα-άλγεβρα, ενώ τη μεγαλύτερη μέση τιμή είχε η δραστηριότητα ga_c1 με M = 0,903. Οι μέσες τιμές κινήθηκαν γύρω από το 0,56 με διακύμανση 0,05. Η γενική μέση επίδοση ήταν η ίδια με όποιον τρόπο και αν την υπολογίσαμε.

Η μεταβλητή GA είναι η σύνθεση των μεταβλητών GA_A, GA_B, GA_C, η μεταβλητή SS είναι η σύνθεση των μεταβλητών SS_A, SS_B, SS_C, η μεταβλητή MI είναι η σύνθεση των μεταβλητών MI_A, MI_B, MI_C, η μεταβλητή MET είναι η σύνθεση των μεταβλητών MET_A, MET _B.

Οι δραστηριότητες του παράγοντα «Γενικευμένη αριθμητική» (GA) είχαν μέση τιμή βαθμολογιών M_{GA} = 0,63, του παράγοντα «Συναρτησιακή Σκέψη» (SS), M_{SS} = 0,601, του παράγοντα «Μετασχηματιστική ικανότητα» (MI), M_{MI} = 0,54 και του παράγοντα «Μετα-άλγεβρα» (MET) M_{MET} = 0,382. (GA=Γενικευμένη αριθμητική, SS =Συναρτησιακή σκέψη, MI=Μετασχηματιστική ικανότητα , MET=Μετα-άλγεβρα).

Από τις μέσες τιμές των βαθμολογιών φαίνεται ότι οι μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση στις δραστηριότητες της «γενικευμένης αριθμητικής» αλλά και της «συναρτησιακής σκέψης» όπου οι μέσες τιμές διέφεραν κατά 0,29. Μέτρια επίδοση είχαν στις δραστηριότητες της «μετασχηματιστικής ικανότητας» και τη χειρότερη επίδοση είχαν στις δραστηριότητες της κατηγορίας «Μοντελοποίηση - Μετα-άλγεβρα – αποδείξεις» και απ' ότι φαίνεται η τελευταία δραστηριότητα, η απόδειξη ότι το γινόμενο άρτιου με περιττό είναι άρτιος, διαμόρφωσε τη χαμηλή μέση τιμή.

Σε όλες της δραστηριότητες είχαμε ελάχιστη τιμή το 0 και μέγιστη το 1, γεγονός που δείχνει ότι υπήρχαν μαθητές που απάντησαν σωστά και μαθητές που απάντησαν λάθος. Οι τιμές της λοξότητας και της κύρτωσης για τις μεταβλητές GA, SS, MI, MET φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί και τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι επιδόσεις των μαθητών στις τέσσερις κατηγορίες ακολουθούν την κανονική κατανομή.

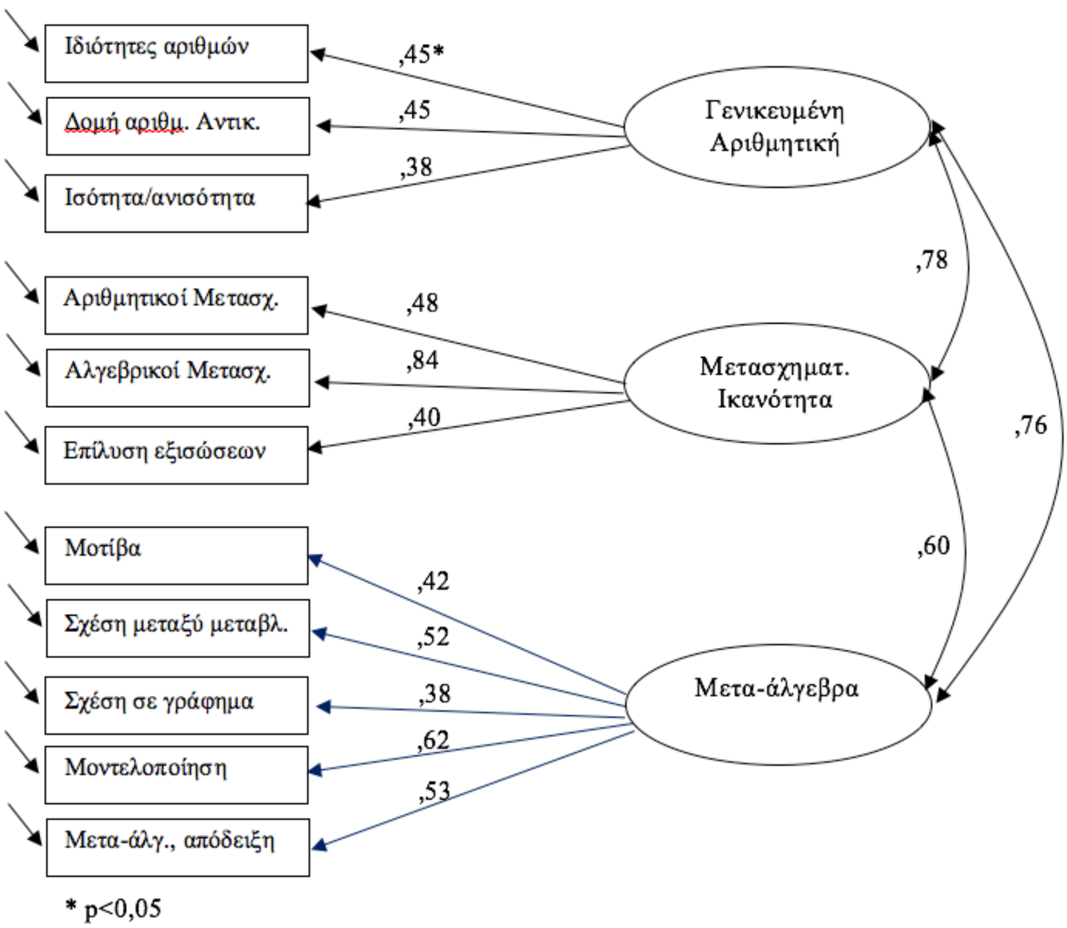
Πίνακας 5 –
Αποτελέσματα της επίδοσης των μαθητών στους παράγοντες της Αλγεβρικής σκέψης

Είδος έργου	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Λοξότητα	Κύρτωση
Γενικευμένη Αριθμητική GA	0,63	0,175	-0,063	-0,57
Συναρτησιακή σκέψη SS	0,601	0,193	-0,135	-0,08
Μετασχηματιστική ικανότητα MI	0,54	0,213	0,071	-0,79
Μοντελοποίηση – μετα-άλγεβρα – αποδείξεις Met	0,382	0,177	0,458	0,489

Επιβεβαίωση του μοντέλου της διάστασης της αλγεβρικής σκέψης

Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση που χρησιμοποιήθηκε είχε ως σκοπό να εξετάσει την εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής του μοντέλου. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι οι δείκτες προσαρμογής δεν ήταν ικανοποιητικοί, για να υποστηρίξουν τη δομή του προτεινόμενου μοντέλου (χ^2/df>2, CFI<,95, και RMSEA=,08). Εξετάζοντας τα αποτελέσματα της ανάλυσης διαπιστώθηκε ότι ο βαθμός συσχέτισης μεταξύ των παραγόντων συναρτησιακή σκέψη και μετα-άλγεβρα, μοντελοποίηση, αποδείξεις ήταν ιδιαίτερα υψηλός, για αυτό αποφασίσαμε να εξετάσουμε την εγκυρότητα ενός εναλλακτικού μοντέλου με βάση το οποίο η ικανότητα των μαθητών στα έργα συναρτησιακής σκέψης, μετα-άλγεβρας, μοντελοποίησης και απόδειξης σχηματίζουν έναν ενιαίο παράγοντα. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι οι δείκτες προσαρμογής του εναλλακτικού μοντέλου ήταν εξαιρετικοί (χ^2/df=1,07, CFI=,97, και RMSEA=,03), επιβεβαιώνοντας την προσαρμογή του εναλλακτικού μοντέλου στα εμπειρικά δεδομένα της έρευνας. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαίωσαν ότι η αλγεβρική σκέψη μαθητών γυμνασίου αποτελεί σύνθεση τριών διακριτών, αλλά αλληλοσχετιζόμενων παραγόντων που αναφέρονται στη (α) γενικευμένη αριθμητική, (β) στη μετασχηματιστική ικανότητα και (γ) στη μετα-άλγεβρα που εμπεριέχει τη συναρτησιακή σκέψη, τη μοντελοποίηση και την απόδειξη. Η τυποποιημένη λύση του μοντέλου έδειξε ότι όλες οι φορτίσεις ήταν στατιστικά σημαντικές και στην πλειοψηφία τους ήταν ικανοποιητικές και κυμάνθηκαν από 0,38 έως 0,84 (δείτε Διάγραμμα 2). Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι κάθε είδος έργου φόρτιζε επαρκώς σε έναν μόνο από τους παράγοντες πρώτης τάξης, επιβεβαιώνοντας με αυτόν τον τρόπο την υπόθεση ότι οι τρεις παράγοντες πρώτης τάξης αναπαριστούν τρεις διακριτές ικανότητες όσον αφορά την αλγεβρική σκέψη.

Διάγραμμα 2: Οι Παράγοντες της Αλγεβρικής Σκέψης



Ο παράγοντας «Γενικευμένη Αριθμητική» συμβολίζεται με τη μεταβλητή GA που είναι η σύνθεση των μεταβλητών GA_A, GA_B, GA_C, ο παράγοντας «Μετασχηματιστική Ικανότητα» συμβολίζεται με τη μεταβλητή MI και είναι η σύνθεση των μεταβλητών MI_A, MI_B, MI_C και ο παράγοντας «Μετα-άλγεβρα» που εμπεριέχει τη συναρτησιακή σκέψη, τη μοντελοποίηση και τις αποδείξεις, συμβολίζεται με τη μεταβλητή η μεταβλητή MET είναι η σύνθεση των μεταβλητών SS_A, SS_B, SS_C , MET_A, MET _B.

Η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση η λοξότητα και η κύρτωση καθενός από τους τρεις παράγοντες φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 6 –
Αποτελέσματα της επίδοσης των μαθητών στους 3 παράγοντες της Αλγεβρικής σκέψης

Είδος έργου	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Λοξότητα	Κύρτωση
Γενικευμένη Αριθμητική GA	0,63	0,175	-0,063	-0,57
Μετασχηματιστική ικανότητα MI	0,54	0,213	0,071	-0,79
Μετα-άλγεβρα META	0,514	0,155	0,223	-0,038

Σχέσεις μεταξύ των παραγόντων της διάστασης της Αλγεβρικής σκέψης

Οι συσχετίσεις μεταξύ των τριών παραγόντων ήταν υψηλές, καταδεικνύοντας ότι οι τρεις διαστάσεις της αλγεβρικής σκέψης σχετίζονται μεταξύ τους. Συγκεκριμένα η συσχέτιση μεταξύ του παράγοντα της μετασχηματιστικής ικανότητας και της γενικευμένης αριθμητικής ήταν 0,78 ($p<0.05$), η συσχέτιση μεταξύ της μετασχηματιστικής ικανότητας και του παράγοντα της μετα-άλγεβρας ήταν 0,60 ($p<0.05$) και τέλος η συσχέτιση μεταξύ γενικευμένης αριθμητικής και μετα-άλγεβρας ήταν 0,78 ($p<0.05$).

Για να διερευνήσουμε τις σχέσεις μεταξύ των παραγόντων της αλγεβρικής σκέψης εξετάσαμε διαδοχικά τον βαθμό προσαρμογής προς τα δεδομένα της έρευνας γραμμικών δομικών μοντέλων με τα οποία υποθέσαμε ότι υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των τριών παραγόντων. Το μοντέλο που είχε τους υψηλότερους δείκτες προσαρμογής ($\chi^2/df=1,04$, CFI=,98, and RMSEA=,02) έδειξε ότι ο παράγοντας μετασχηματιστική ικανότητα αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης του παράγοντα γενικευμένη αριθμητική και ο τελευταίος αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης του παράγοντα μετα-άλγεβρα (δείτε Διάγραμμα 3). Ο συντελεστής παλινδρόμησης της μετασχηματιστικής ικανότητας στη γενικευμένη αριθμητική ήταν 0,79 (p<0.05) και ο αντίστοιχος συντελεστής παλινδρόμησης της γενικευμένης αριθμητικής στη μετα-άλγεβρα ήταν 0,78 (p<0.05).

Διάγραμμα 3: Γραμμική Σχέση μεταξύ Παραγόντων Αλγεβρικής Σκέψης

Κατηγορίες μαθητών επίπεδου αλγεβρικής σκέψης και ικανότητας

Για να εξετάσουμε αν υπάρχουν ομάδες μαθητών με παρόμοια επίδοση στο σύνολο των δραστηριοτήτων της έρευνας ώστε να δούμε αν υπάρχουν ομάδες μαθητών με παρόμοιο επίπεδο αλγεβρικής σκέψης και αλγεβρικών ικανοτήτων, πραγματοποιήσαμε ανάλυση Latent Class Analysis. Η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχουν τέσσερις ομάδες μαθητών με παρόμοια επίδοση στις δραστηριότητες της έρευνας. Το πλήθος και το ποσοστό των μαθητών που ανήκει σε κάθε κατηγορία φαίνεται στον πίνακα 7. Η μέση τιμή της πιθανότητας των μαθητών της κάθε κατηγορίας να ανήκουν στην κατηγορία που τους εντάσσει η ανάλυση φαίνεται παρακάτω στον πίνακα 8.

Πίνακας 7 – Πλήθος μαθητών κάθε κατηγορίας (Class Counts)

Κατηγορία	Πλήθος	Ποσοστό %
1	36	26,87
2	58	43,28
3	36	26,87
4	4	2,99

Πίνακας 8 – Μέση Τιμή Πιθανότητας Κάθε Κατηγορίας (Average Latent Class Probabilities)

Πιθανότητα να ανήκουν στην	Κατηγορία 1	Κατηγορία 2	Κατηγορία 3	Κατηγορία 4
Μαθητής Κατηγορίας 1	.893	.107	0	0
Μαθητής Κατηγορίας 2	.112	.855	.032	0
Μαθητής Κατηγορίας 3	0	.067	.929	.004
Μαθητής Κατηγορίας 4	0	0	.042	.958

Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της επίδοσης των μαθητών κάθε κατηγορίας φαίνεται στον πίνακα 9 που ακολουθεί. Στην πρώτη κατηγορία επιδόσεων ανήκουν οι μαθητές που είχαν επίδοση κάτω από τη γενική μέση επίδοση 0,56, στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι μαθητές που είναι κοντά στη γενική μέση επίδοση, στην Τρίτη κατηγορία έχουμε μαθητές που φαίνεται ότι η αλγεβρική τους σκέψη είναι σε καλό επίπεδο, καθώς η μέση επίδοσή τους είναι αρκετά πάνω από τη γενική μέση επίδοση και στην τέταρτη κατηγορία, έχουμε τους λιγότερους μαθητές με άριστη επίδοση.

Πίνακας 9 – Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της επίδοσης των μαθητών κάθε κατηγορίας

Κατηγορία	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση
1	.411	.003
2	.533	.003
3	.712	.003
4	.914	.003

Στον πίνακα 10 φαίνεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των μαθητών κάθε κατηγορίας σε κάθε μία από τις ομάδες των δραστηριοτήτων που αντιστοιχούν στους τρεις παράγοντες της αλγεβρικής σκέψης.

Πίνακας 10 – Μέση τιμή και τυπική απόκλιση της επίδοσης των μαθητών κάθε κατηγορίας σε κάθε παράγοντα αλγεβρικής σκέψης

Κατηγορία	Γενικευμένη Αριθμητική		Μετασχηματιστική Ικανότητα		Μετα-άλγεβρα, Συναρτησιακή σκέψη	
	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση
1	0,4473	0,1198	0,3635	0,1447	0,3828	0,1199
2	0,6027	0,1303	0,4946	0,158	0,5025	0,12
3	0,7692	0,1121	0,7371	0,1448	0,6316	0,1033
4	0,8889	0	0,9444	0,6365	0,9167	0,7638
Συν.	0,6137	0,17521	0,5374	0,2154	0,5167	0,1612

Στην πρώτη κατηγορία μαθητών βλέπουμε ότι οι 36 μαθητές είχαν καλύτερη επίδοση στις δραστηριότητες της γενικευμένης αριθμητικής και το ίδιο συμβαίνει και για τους μαθητές της δεύτερης και της τρίτης κατηγορίας. Στις πρώτες δύο κατηγορίες η χαμηλότερη επίδοση εμφανίστηκε στις δραστηριότητες που σχετίζονταν με την Μετασχηματιστική ικανότητα των μαθητών. Στην τρίτη κατηγορία η χαμηλότερη επίδοση εμφανίστηκε στις δραστηριότητες του παράγοντα Μετα-άλγεβρα, Συναρτησιακή σκέψη, μοντελοποίηση, αποδείξεις. Στην τέταρτη κατηγορία μαθητών, η καλύτερη επίδοση εμφανίστηκε στις δραστηριότητες που σχετίζονταν με τη μετασχηματιστική ικανότητα των μαθητών και η χαμηλότερη στις δραστηριότητες της γενικευμένης αριθμητικής.

Περιγραφή Ικανοτήτων των Μαθητών των Τεσσάρων Επιπέδων Αλγεβρικής Σκέψης

Ικανότητες των μαθητών της πρώτης κατηγορίας

Στον πίνακα 11 φαίνονται οι μέσες τιμές της επίδοσης των μαθητών της πρώτης κατηγορίας στις δραστηριότητες του φύλλου της έρευνας.

Πίνακας 11 – Μέση επίδοση των μαθητών της πρώτης κατηγορίας

ga_a1	ga_a2	ga_a3	ga_b1	ga_b2	ga_b3
0,25	0,53	0,59	0,5	0,31	0,07
ga_c1	**ga_c2**	**ss_a1**	**ss_a2**	**ss_b1**	**ss_b2a**
0,89	0,5	0,4	0,63	0,56	0,25
ss_b2b	**ss_c1**	**ss_c2**	**mi_a1**	**mi_a2**	**mi_b1**
0,56	0,17	0,47	0,13	0,4	0,11
mi_b2	**mi_c1**	**mi_c2**	**met_a1**	**met_a2**	**met_a3**
0,2	0,75	0,61	0,64	0,64	0,15
met_b1	**met_b2**				
0,13	0,01				

Οι μαθητές της πρώτης κατηγορίας είχαν καλύτερη επίδοση στις δραστηριότητες της γενικευμένης αριθμητικής. Φαίνεται ότι το επίπεδο της αλγεβρικής τους σκέψης ήταν τέτοιο που μπόρεσαν να έχουν ικανοποιητική επίδοση σε δραστηριότητες που είχαν μεγάλη σχέση με την αριθμητική. Δηλαδή οι μαθητές αυτοί είχαν επιδόσεις με μέση τιμή πάνω από 0,5 στις δραστηριότητες με πράξεις στο σύνολο των φυσικών αριθμών, δραστηριότητες με απλές δυνάμεις φυσικών αριθμών και στη πρώτη δραστηριότητα της ισότητας που ήταν σχετικά απλή. Στις δραστηριότητες που υπήρχε ανάγκη γενίκευσης και αναγνώρισης αλλά και εφαρμογής της δομής των πράξεων, δεν παρατηρήθηκαν ικανοποιητικές επιδόσεις. Αρκετά ελλιπής μπορεί να χαρακτηριστεί η επίδοση των μαθητών αυτών στη δραστηριότητα που έπρεπε να βρουν το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος 946 + 950 + 952 + 960 διά του 950, που η μέση τιμή της επίδοσης ήταν 0,31, αλλά και στη δραστηριότητα που έπρεπε να εξετάσουν αν το 3^{400} διαιρείται με το 9, που η μέση επίδοση ήταν 0,07. Χαμηλή επίδοση με μέση τιμή 0,25 είχαν οι μαθητές αυτής της κατηγορίας στη δραστηριότητα που έπρεπε να υπολογίσουν το αποτέλεσμα της πράξης 3(-1312)-5(-1312).

Στις δραστηριότητες που απαιτούσαν ικανότητες μετασχηματισμού, οι μαθητές είχαν μη ικανοποιητική επίδοση, σε βαθμό που φαίνεται ότι δεν μπορούν να κάνουν πράξεις σε παραστάσεις ούτε σε αριθμητικό ούτε σε αλγεβρικό πλαίσιο. Οι επιδόσεις των μαθητών στις δραστηριότητες των αριθμητικών και των αλγεβρικών μετασχηματισμών είχαν μέση τιμή κάτω από 0,2, εκτός από τη δραστηριότητα με τις ρίζες που η μέση τιμή ήταν 0,4. Παρόλα αυτά όμως οι μαθητές είχαν πολύ καλή επίδοση, με μέσες τιμές 0,75 και 0,61 στις εξισώσεις. Φαίνεται λοιπόν ότι οι μαθητές αυτής της κατηγορίας μπορούν να εφαρμόσουν διαδικασίες επίλυσης και αυτό φαίνεται και από τις εξισώσεις αλλά και από τη δραστηριότητα με τις ρίζες.

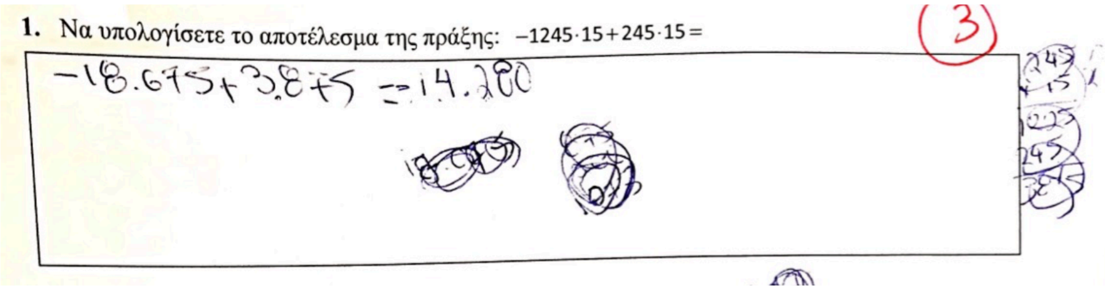
Στις δραστηριότητες που σχετίζονταν με τον παράγοντα «Μετα-άλγεβρα» που περιέχει τη συναρτησιακή σκέψη, τη μοντελοποίηση και τις αποδείξεις φαίνεται ότι οι μαθητές δεν μπόρεσαν να επιλύσουν ασκήσεις και προβλήματα που απαιτούσαν εμβάθυνση και γενίκευση των γνώσεων που διέπουν τις δραστηριότητες που εμφανίζονται στα σχολικά βιβλία. Στις δραστηριότητες της συναρτησιακής σκέψης παρατηρήθηκαν χαμηλές επιδόσεις, σε σημείο που μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το επίπεδο κατανόησης των εννοιών της συνάρτησης, ανεπαρκές. Οι μαθητές δεν μπόρεσαν να εργαστούν σε καλό βαθμό με το γεωμετρικό μοτίβο (ΜΤ = 0,4), δεν κατάφεραν να βρουν το γενικό τύπο στη δραστηριότητα που έπρεπε να βρουν πόσα χρήματα κερδίζει ο Γιώργος πουλώντας ασφάλειες αυτοκινήτου(ΜΤ = 0,25) και δεν αντιλαμβάνονται ότι μία γραφική παράσταση αποτελείται από τα άπειρα σημεία που προκύπτουν από τη σχέση των μεταβλητών, όπου στην αντίστοιχη δραστηριότητα η μέση τιμή ήταν 0,17. Στις υπόλοιπες δραστηριότητες που είχαν κάποια σχέση με δραστηριότητες του βιβλίου, η επίδοση μπορεί να χαρακτηριστεί ικανοποιητική.

Με μέση επίδοση 0,64 στις δραστηριότητες που έπρεπε να εκφράσουν με συμβολικό τρόπο την πρόταση «Το διπλάσιο του τετραγώνου ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό αυτό» και στη δραστηριότητα που έπρεπε να βρουν με ποιο τρόπο μία εταιρία κινητής τηλεφωνίας χρεώνει τους πελάτες της, φαίνεται ότι οι μαθητές μπορούν να εργαστούν με δραστηριότητες μοντελοποίησης αυτού του είδους. Παρόμοιες δραστηριότητες υπάρχουν και στα σχολικά βιβλία. Φαίνεται όμως ότι οι μαθητές δεν έχουν την ικανότητα να δουν πως ένα μοντέλο που περιγράφεται λεκτικά μπορεί να αναπαρασταθεί με διαφορετικό τρόπο, σε αυτή την περίπτωση με ένα σχήμα, όπως φαίνεται στη αντίστοιχη δραστηριότητα με κωδικό met_a3 που η μέση τιμή ήταν 0,15. Χαμηλή επίδοση με μέση τιμή κάτω από 0,13 είχαν οι μαθητές στις δραστηριότητες της μετα-άλγεβρας και της απόδειξης. Φαίνεται ότι οι μαθητές δεν έχουν τις απαραίτητες ικανότητες ώστε να επιλύουν προβλήματα που σχετίζονται με την άλγεβρα και που περιγράφονται είτε σε μαθηματικό, είτε σε μη μαθηματικό πλαίσιο.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις απαντήσεις μίας μαθήτριας που ανήκει στην πρώτη κατηγορία μαθητών, σε κάποιες από τις δραστηριότητες της έρευνας.

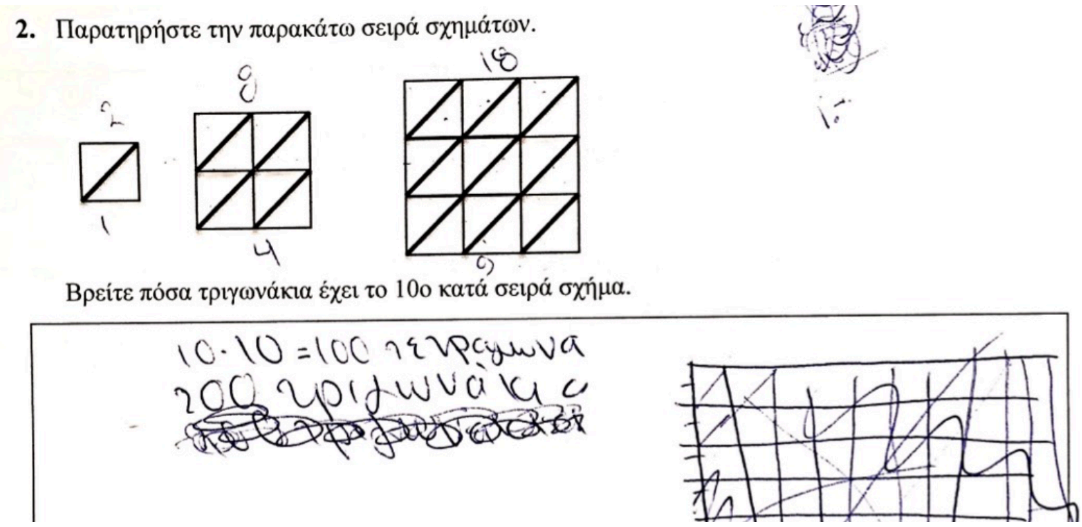
Στην εικόνα 2 φαίνεται η δραστηριότητα ga_a3 και η απάντηση της μαθήτριας που περιέχει λάθη στις πράξεις.

Εικόνα 2.
Απάντηση μαθήτριας της πρώτης κατηγορίας στη δραστηριότητα ga_a3



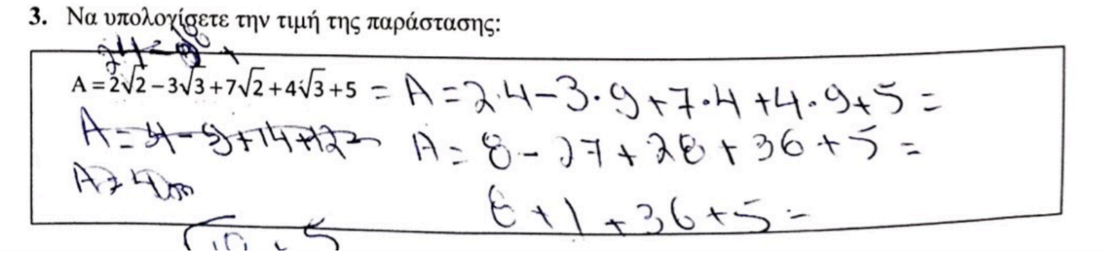
Η ίδια μαθήτρια απάντησε σωστά στη δραστηριότητα ss_a1, που περιείχε ένα γεωμετρικό μοτόβο, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.

Εικόνα 2.
Απάντηση μαθήτριας της πρώτης κατηγορίας στη δραστηριότητα ga_a3



Στη δραστηριότητα που σχετίζονταν με τον παράγοντα «μετασχηματιστική ικανότητα», η ίδια μαθήτρια απάντησε όπως φαίνεται στην εικόνα 3.

Εικόνα 3.
Απάντηση μαθήτριας της πρώτης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_a2


3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

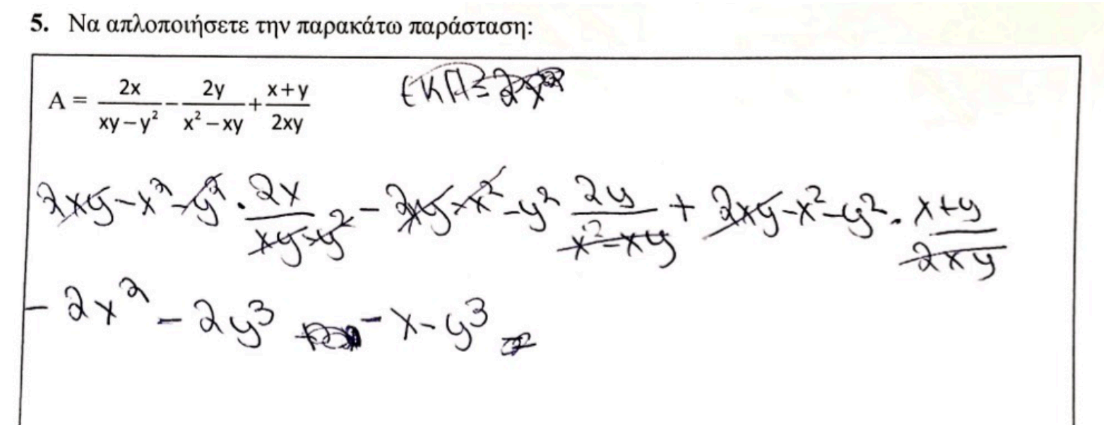
$A = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 5$ $= A = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 9 + 7 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 5 =$

$A = 8 - 27 + 28 + 36 + 5 =$

$8 + 1 + 36 + 5 =$

Όπως φαίνεται στην λύση της δραστηριότητας αυτής, αλλά και στις απαντήσεις της μαθήτριας στις δραστηριότητες με το μετασχηματισμό παραστάσεων (βλ. εικόνα 4), η μαθήτρια κατέχει χαμηλό επίπεδο ικανότητας μετασχηματισμού παραστάσεων.

Εικόνα 4.
Απάντηση μαθήτριας της πρώτης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_b1

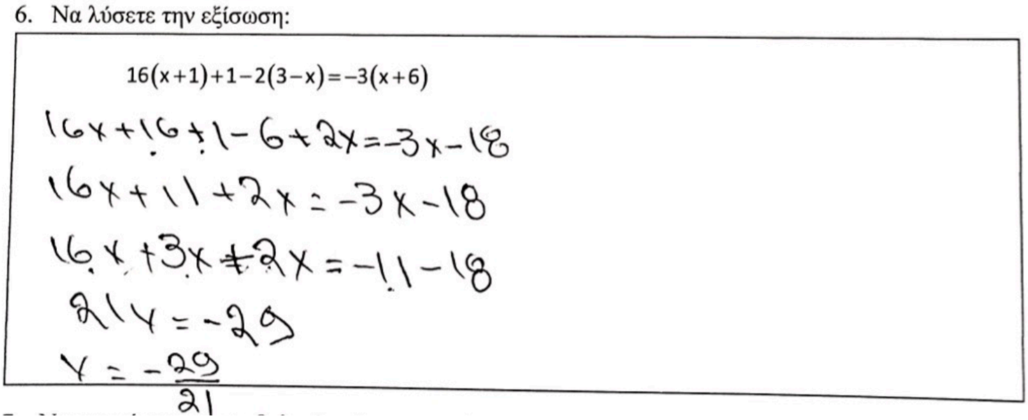

5. Να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:

$A = \frac{2x}{xy-y^2} - \frac{2y}{x^2-xy} + \frac{x+y}{2xy}$

$-2x^2 - 2y^3 - x - y^3$

Αντιθέτως, η μαθήτρια αυτή μπορεί να εφαρμόζει τις διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων, όπως φαίνεται στην εικόνα 5.

Εικόνα 5.
Απάντηση μαθήτριας της πρώτης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_c1

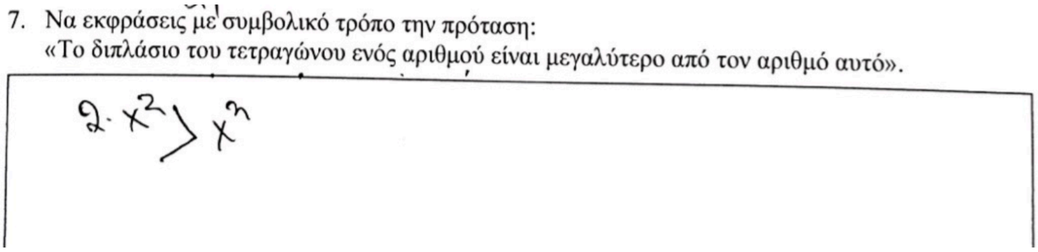

6. Να λύσετε την εξίσωση:

$16(x+1)+1-2(3-x)=-3(x+6)$

$16x+16+1-6+2x=-3x-18$
$16x+11+2x=-3x-18$
$16x+3x+2x=-11-18$
$21x=-29$
$x=-\frac{29}{21}$

Η απάντηση στην πρώτη δραστηριότητα του παράγοντα μοντελοποίηση φαίνεται στην εικόνα 6.

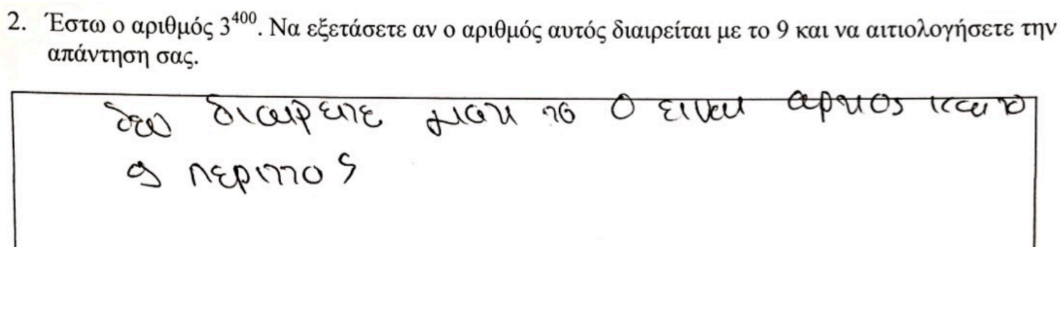
Εικόνα 6.
Απάντηση μαθήτριας της πρώτης κατηγορίας στη δραστηριότητα met_a1


7. Να εκφράσεις με συμβολικό τρόπο την πρόταση:
«Το διπλάσιο του τετραγώνου ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό αυτό».

$2\cdot x^2 > x^2$

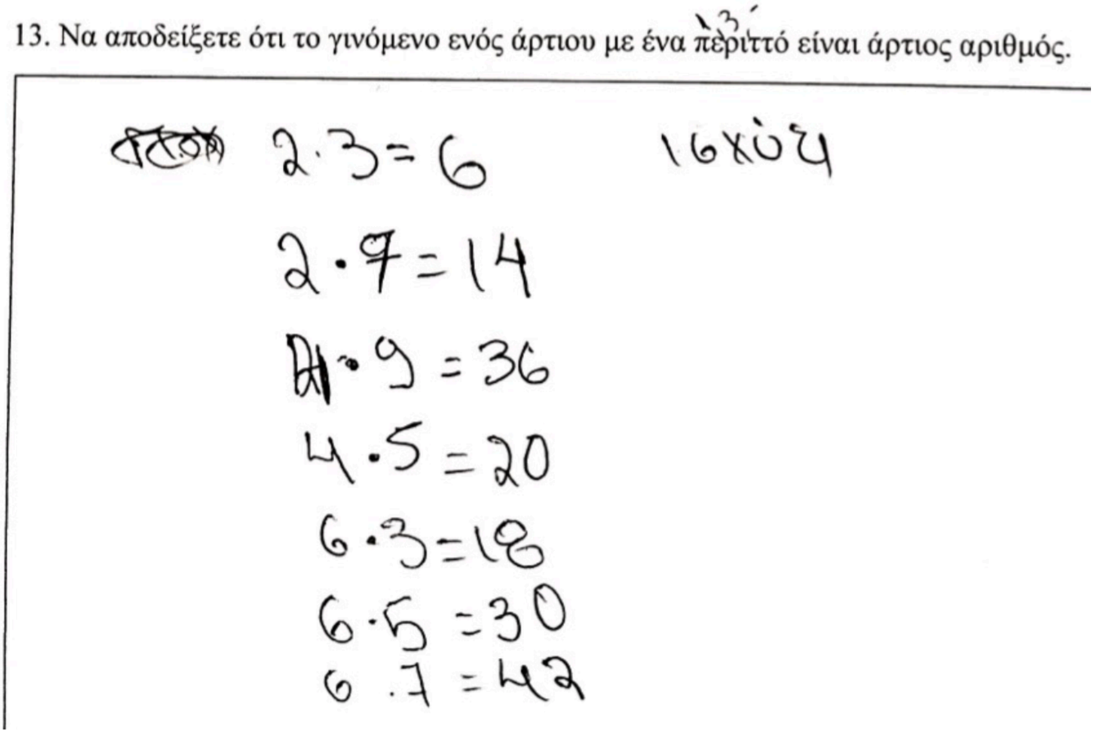
Η προσπάθεια να αποδείξει η ίδια μαθήτρια, ότι ο 3^{400} διαιρείται με το 9 και ότι το γινόμενο άρτιου με περιττό είναι άρτιος αριθμός, φαίνεται στην εικόνα 7 και 8 αντίστοιχα.

Εικόνα 7.
Απάντηση μαθήτριας της πρώτης κατηγορίας στη δραστηριότητα met_b2


2. Έστω ο αριθμός 3^{400}. Να εξετάσετε αν ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 9 και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

δεν διαιρειτε γιατι το 0 ειναι αρτιος και το 9 περιττος

Εικόνα 8.
Απάντηση μαθήτριας της πρώτης κατηγορίας στη δραστηριότητα ga_b3



Ικανότητες των μαθητών της δεύτερης κατηγορίας

Στον πίνακα 12 φαίνονται οι μέσες τιμές της επίδοσης των μαθητών της δεύτερης κατηγορίας στις δραστηριότητες του φύλλου της έρευνας.

Πίνακας 12 – Μέση επίδοση των μαθητών της δεύτερης κατηγορίας

ga_a1	ga_a2	ga_a3	ga_b1	ga_b2	ga_b3
0,52	0,81	0,64	0,72	0,47	0,06
ga_c1	**ga_c2**	**ss_a1**	**ss_a2**	**ss_b1**	**ss_b2a**
0,84	0,66	0,65	0,66	0,74	0,59
ss_b2b	**ss_c1**	**ss_c2**	**mi_a1**	**mi_a2**	**mi_b1**
0,66	0,38	0,55	0,47	0,64	0,16
mi_b2	**mi_c1**	**mi_c2**	**met_a1**	**met_a2**	**met_a3**
0,33	0,86	0,63	0,85	0,67	0,27
met_b1	**met_b2**				
0,3	0,03				

Από τον πίνακα φαίνεται ότι οι μαθητές αυτής της κατηγορίας είχαν χαμηλές επιδόσεις στη δραστηριότητα ga_b3, όπου η μέση τιμή ήταν 0,06, παρόμοια με την επίδοση των μαθητών της πρώτης κατηγορίας. Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι μέσες τιμές σε όλες τις υπόλοιπες του παράγοντα «Γενικευμένη αριθμητική» είναι μεγαλύτερες από 0,55 και φτάνουν μέχρι 0,84, μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές αυτής της ομάδας ικανοτήτων κατέχουν τις απαραίτητες αλγεβρικές ικανότητες ώστε να εργαστούν με δραστηριότητες της γενικευμένης αριθμητικής. Φαίνεται να παρουσιάζουν κάποια δυσκολία στις δραστηριότητες που απαιτείται η κατανόηση της δομής των αλγεβρικών αντικειμένων και ιδιαίτερα στη δραστηριότητα που έπρεπε να εξετάσουν αν το 3^{400} διαιρείται με το 9. Και οι μαθητές αυτής της κατηγορίας δεν κατάφεραν να συνδυάσουν τις ιδιότητες των δυνάμεων και των αριθμών ώστε να απαντήσουν με επιτυχία στην αντίστοιχη δραστηριότητα.

Και οι μαθητές αυτής της κατηγορίας δεν εμφάνισαν ικανοποιητικές επιδόσεις στις δραστηριότητες που είχαν μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων, με μέση επίδοση 0,16 και 0,33 στις αντίστοιχες δραστηριότητες, αλλά η επίδοση τους ήταν ικανοποιητική στις δραστηριότητες των αριθμητικών παραστάσεων με μέση επίδοση 0,47 και 0,54. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι μαθητές της δεύτερης κατηγορίας είναι πιο ικανοί με τις πράξεις αλλά δεν μπορούν και αυτοί να εργαστούν ικανοποιητικά με αλγεβρικές παραστάσεις. Και οι δύο κατηγορίες μαθητών έχουν παρόμοιες, ικανοποιητικές επιδόσεις στις δραστηριότητες με εξισώσεις.

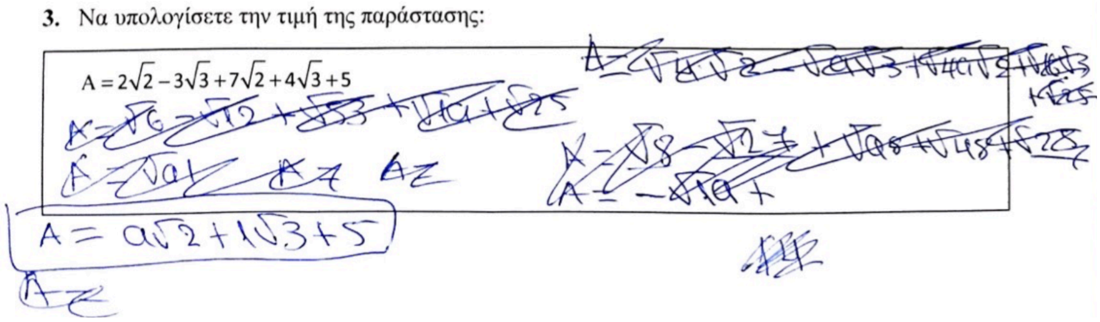
Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας φαίνεται ότι αντιλαμβάνονται τις έννοιες που σχετίζονται με τις συναρτήσεις, καθώς η επίδοσή τους στις αντίστοιχες δραστηριότητες έχουν μέση τιμή μεγαλύτερες από 0,55, με μέγιστη μέση επίδοση 0,74, με εξαίρεση τη δραστηριότητα που σχετίζονταν με την ικανότητα αναγνώρισης του πλήθους των σημείων μίας γραφικής παράστασης, όπου η μέση επίδοση ήταν 0,38. Και οι μαθητές αυτής της κατηγορίας δεν μπορούν να κατανοήσουν ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης αποτελείται από τα άπειρα σημεία που προκύπτουν από τη σχέση των μεταβλητών. Σημαντική βελτίωση είχαμε στη δραστηριότητα όπου έπρεπε οι μαθητές να βρουν τον γενικό τύπο που περιγράφει τη σχέση των χρημάτων που κερδίζει ο Γιώργος σε σχέση με το πλήθος των ασφαλειών που πουλάει. Η μέση επίδοση σε αυτή τη δραστηριότητα ήταν 0,59 ενώ στην προηγούμενη κατηγορία ήταν 0,25.

Φαίνεται ότι στις δραστηριότητες που σχετίζονται με την μετα-άλγεβρα και την μοντελοποίηση, οι μαθητές αυτής της κατηγορίας είχαν ελαφρώς καλύτερες επιδόσεις. Εξακολουθούν όμως οι επιδόσεις στη τελευταία δραστηριότητα της μοντελοποίησης και τις δύο δραστηριότητες της μετα-άλγεβρας και την απόδειξη, να είναι χαμηλές. Μπορούμε δηλαδή να συμπεράνουμε ότι οι μαθητές αυτής της κατηγορίας δεν μπορούν να εφαρμόσουν τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει σε νέες δραστηριότητες που στηρίζονται στην άλγεβρα.

Στις εικόνες που ακολουθούν παρουσιάζουμε κάποιες απαντήσεις ενός μαθητή που ανήκει στη δεύτερη κατηγορία.

Όπως φαίνεται από τις απαντήσεις στις δραστηριότητες, ο μαθητής μπορεί να εφαρμόζει τις ιδιότητες των πράξεων (εικόνα 9 και 10), αλλά κάνει κάποια βασικά λάθη σε δραστηριότητες των μετασχηματισμών (εικόνα 11) και στην εξίσωση (εικόνα 13). Στην αλγεβρική παράσταση φαίνεται ότι ενώ ξέρει ο συγκεκριμένος μαθητής πως να κάνει τα κλάσματα ομώνυμα, παραλείπει σε κάποιο βήμα τον παρονομαστή των δύο πρώτων κλασμάτων. Αλλά και στην εξίσωση αναγνωρίζει ότι πρέπει να κάνει απαλοιφή αλλά δεν πολλαπλασιάζει με το Ε.Κ.Π τον πρώτο όρο. Τα λάθη και οι παραλείψεις στις απαντήσεις του μαθητή στις δραστηριότητες των εικόνων 14, 15 και 16, δικαιολογούν την κατάταξη του μαθητή στη δεύτερη ομάδα μαθητών.

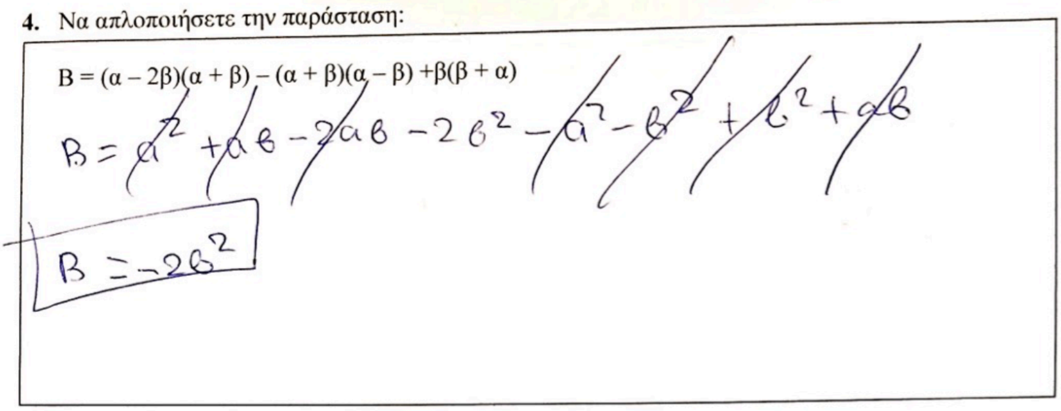
Εικόνα 9.
Απάντηση μαθητή της δεύτερης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_a2


3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 5$

$A = 9\sqrt{2} + 1\sqrt{3} + 5$

Εικόνα 10.
Απάντηση μαθητή της δεύτερης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_b2

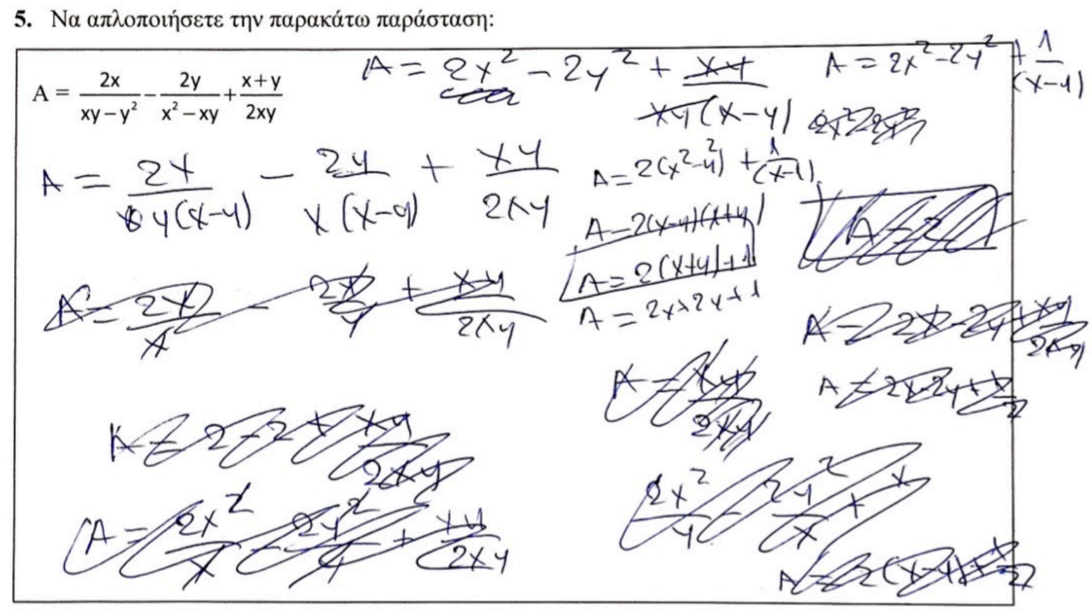

4. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

B = (α – 2β)(α + β) – (α + β)(α – β) +β(β + α)

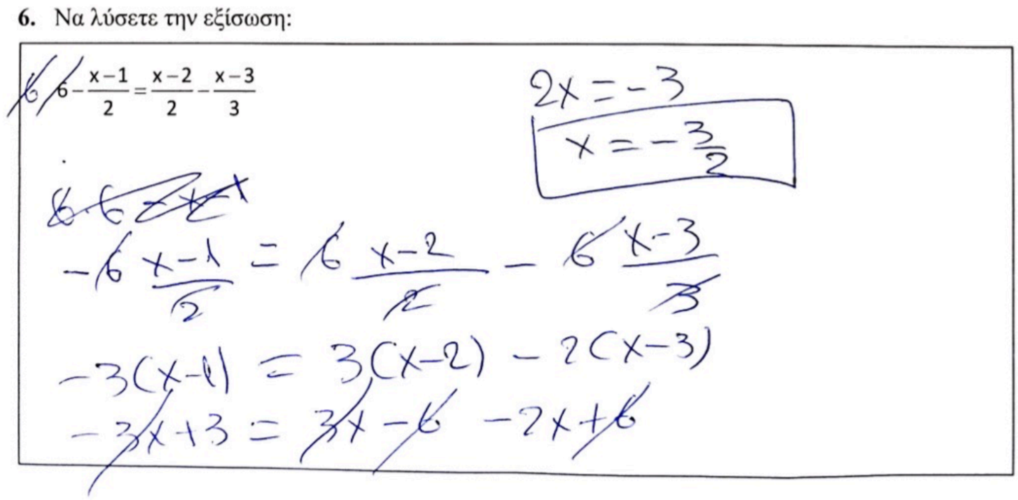
$B = \cancel{a^2} + \cancel{ab} - \cancel{2ab} - 2b^2 - \cancel{a^2} - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} + \cancel{ab}$

$B = -2b^2$

Εικόνα 11.
Απάντηση μαθητή της δεύτερης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_b1

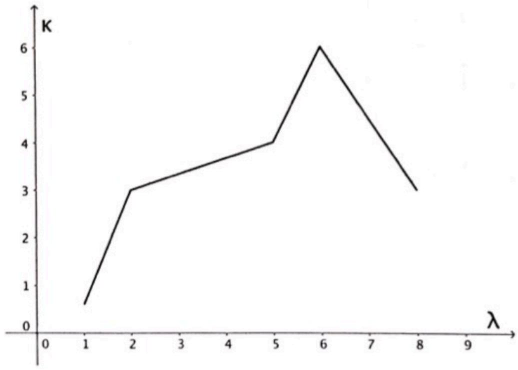


Εικόνα 13.
Απάντηση μαθητή της δεύτερης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_c2



Εικόνα 14.
Απάντηση μαθητή της δεύτερης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_a2

11. Παρακάτω ακολουθεί η γραφική παράσταση της σχέσης δύο μεταβλητών κ και λ.



Να βρείτε πόσα σημεία έχει η γραφική παράσταση.

έχει 5 σημεια

Εικόνα 15.
Απάντηση μαθητή της δεύτερης κατηγορίας στη δραστηριότητα met_b2

13. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο ενός άρτιου με ένα περιττό είναι ~~περιττός~~ άρτιος αριθμός.

Έστω ο άρτιος 2 και περιττός 3 τότε

$2 \cdot 3 = \boxed{6}$

Ομοίως $4 \cdot 5 = \boxed{20}$

ίδια $6 \cdot 7 = \boxed{42}$

Βλέπουμε πως ισχύει για κάθε άρτιο και περιττο [illegible]

Εικόνα 16.
Απάντηση μαθητή της δεύτερης κατηγορίας στη δραστηριότητα ss_b2

4. Ο Γιώργος εργάζεται σε μία ασφαλιστική εταιρία για ασφάλειες αυτοκινήτου. Ο μισθός του είναι 50€ και παίρνει και 20€ για κάθε ασφάλεια που πουλάει.
   a. Πόσα είναι τα χρήματα που κερδίζει ο Γιώργος κάθε εβδομάδα;
   b. Αν σε μία εβδομάδα έβγαλε 190€ πόσες ασφάλειες είχε πουλήσει;

4a.

4b. $1 \to 20$
$x \to 140$

$20x = 140$
$x = 140 : 20$

$\boxed{x = 7}$
ασφαλειες

Εικόνα 17.
Απάντηση μαθητή της δεύτερης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_c1

6. Να λύσετε την εξίσωση:

$$16(x+1)+1-2(3-x)=-3(x+6)$$

$16x+16+1-6+2x=-3x-18$

$16x+2x+3x=-16-1+6-18$

$21x=-29$

$\boxed{x=\frac{-29}{21}}$

Εικόνα 18.
Απάντηση μαθητή της δεύτερης κατηγορίας στη δραστηριότητα met_a1

7. Να εκφράσεις με συμβολικό τρόπο την πρόταση:
«Το διπλάσιο του τετραγώνου ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό αυτό».

$2x^2=x+1$

Ικανότητες των μαθητών της τρίτης κατηγορίας

Στον πίνακα 13 φαίνονται οι μέσες τιμές της επίδοσης των μαθητών της τρίτης κατηγορίας στις δραστηριότητες του φύλλου της έρευνας.

Πίνακας 13 – Μέση επίδοση των μαθητών της τρίτης κατηγορίας

ga_a1	ga_a2	ga_a3	ga_b1	ga_b2	ga_b3
0,58	0,89	0,97	0,83	0,69	0,31
ga_c1	**ga_c2**	**ss_a1**	**ss_a2**	**ss_b1**	**ss_b2a**
1	0,86	0,88	0,86	0,94	0,75
ss_b2b	**ss_c1**	**ss_c2**	**mi_a1**	**mi_a2**	**mi_b1**
0,83	0,44	0,64	0,5	0,92	0,42
mi_b2	**mi_c1**	**mi_c2**	**met_a1**	**met_a2**	**met_a3**
0,83	0,92	0,71	0,96	0,81	0,53
met_b1	**met_b2**				
0,2	0,06				

Σύμφωνα με τη μέση τιμή των επιδόσεων στις δραστηριότητες της γενικευμένης αριθμητικής, φαίνεται ότι οι μαθητές αυτής της κατηγορίας, κατέχουν τις απαραίτητες αλγεβρικές ικανότητες και τον αντίστοιχο τρόπο σκέψης. Με εξαίρεση τη δραστηριότητα ga_b3, όπου φαίνεται ότι με μέση επίδοση 0,31 και οι μαθητές αυτής της κατηγορίας δεν κατάφεραν να αναγνωρίσουν την αντίστοιχη δομή, οι επιδόσεις ήταν αρκετά καλές. Η χαμηλότερη επίδοση ήταν 0,58, στην πρώτη δραστηριότητα όπου φαίνεται ότι οι μαθητές έχουν δυσκολία με τις πράξεις αρνητικών αριθμών. Η υψηλότερη μέση επίδοση ήταν στη δραστηριότητα που είχε σχέση με την ισότητα των αντικειμένων, όπου όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά.

Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας φαίνεται ότι μπορούν να μετασχηματίζουν αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις, αλλά φαίνεται ότι δυσκολεύονται όταν οι παραστάσεις αυτές περιέχουν κλάσματα. Η επίλυση εξισώσεων είχε τις μεγαλύτερες μέσες τιμές. Φαίνεται ότι οι μαθητές έχουν ευκολία στην εφαρμογή διαδικασιών για την επίλυση εξισώσεων. Σημαντική βελτίωση στους μαθητές αυτής της κατηγορίας, εμφανίζει η επίδοση στην αλγεβρική παράσταση της δραστηριότητας mi_b2, όπου η αντίστοιχη επίδοση των μαθητών της πρώτης κατηγορίας ήταν 0,2, της δεύτερης 0,33, ενώ της τρίτης ήταν 0,83. Παρατηρούμε λοιπόν μία μεγάλη διαφορά στην ικανότητα μετασχηματισμού αλγεβρικών παραστάσεων όπου απαιτούνται αρκετές πράξεις σε πολλά βήματα, μεταξύ μεταβλητών, που φαίνεται ότι δυσκολεύουν τους μαθητές.

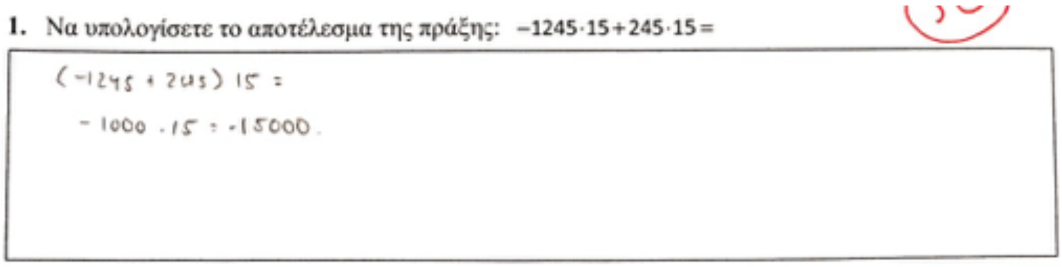
Βελτίωση παρατηρείται και στην επίδοση των μαθητών της κατηγορίας αυτής και στις δραστηριότητες που έχουν σχέση με τη συναρτησιακή σκέψη. Φαίνεται ότι οι μαθητές κατέχουν τις αντίστοιχες ικανότητες σε σημαντικό βαθμό, καθώς η μικρότερη μέση επίδοση ήταν 0,64 και η υψηλότερη 0,94, με εξαίρεση και πάλι τη δραστηριότητα ss_c1, όπου με μέση επίδοση 0,44, φαίνεται ότι και οι μαθητές αυτής της κατηγορίας δεν μπορούν να κατανοήσουν το άπειρο πλήθος των σημείων μίας γραφικής παράστασης. Στις δραστηριότητες της μοντελοποίησης, οι επιδόσεις ήταν ικανοποιητικές, και οι μέσες τιμές 0,96, 0,81 και 0,53 μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές κατέχουν τις αντίστοιχες ικανότητες. Βέβαια η χαμηλή μέση τιμή 0,53 στην τελευταία δραστηριότητα της μοντελοποίησης δείχνει ότι οι μαθητές δεν έχουν εμπειρία με δραστηριότητες που σχετίζονται με διαφορετικές αναπαραστάσεις μαθηματικών μοντέλων και τη σχέση των αναπαραστάσεων αυτών και αυτό είναι ένα γεγονός που χρήζει λεπτομερέστερης συζήτησης.

Η επίδοση στις δραστηριότητες της μετα-άλγεβρας και την απόδειξη ήταν χαμηλή και για τους μαθητές αυτής της κατηγορίας, υποδεικνύοντας ότι ο τρόπος εκπαίδευσης δεν διευκολύνει την απόκτηση αλγεβρικών ικανοτήτων που απαιτούν οι δραστηριότητες αυτής της μορφής.

Στις εικόνες που ακολουθούν παρουσιάζουμε κάποιες απαντήσεις μίας μαθήτριας που ανήκει στην τρίτη κατηγορία.

Βλέπουμε ότι η μαθήτρια μπορεί να κάνει αριθμητικές και αλγεβρικές πράξεις και να μετασχηματίζει αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις αλλά και να λύνει με άνεση εξισώσεις (εικόνες 19 έως 23).

Εικόνα 19.
Απάντηση μαθήτριας της τρίτης κατηγορίας στη δραστηριότητα ga_a3

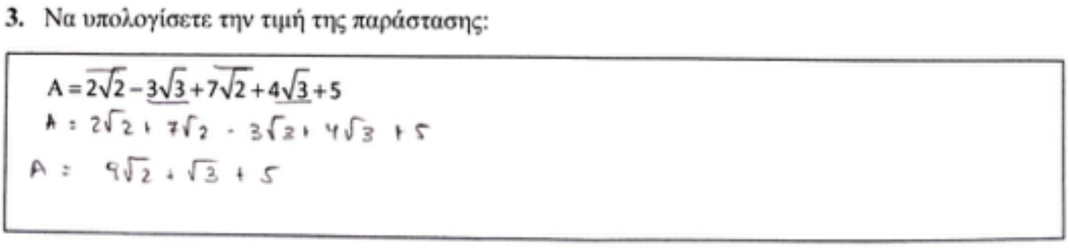


1. Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα της πράξης: $-1245 \cdot 15 + 245 \cdot 15 =$

$(-1245 + 245)\,15 =$

$-1000 \cdot 15 = -15000.$

Εικόνα 20.
Απάντηση μαθήτριας της τρίτης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_a2



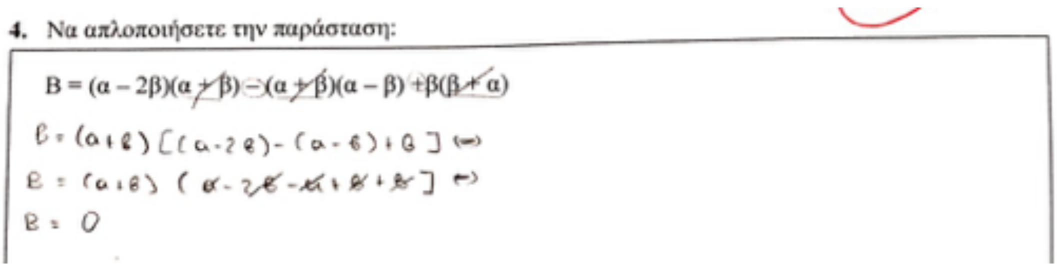
3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 5$

$A = 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 5$

$A = 9\sqrt{2} + \sqrt{3} + 5$

Εικόνα 21.
Απάντηση μαθήτριας της τρίτης κατηγορίας στη δραστηριότητα m1_b2



4. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

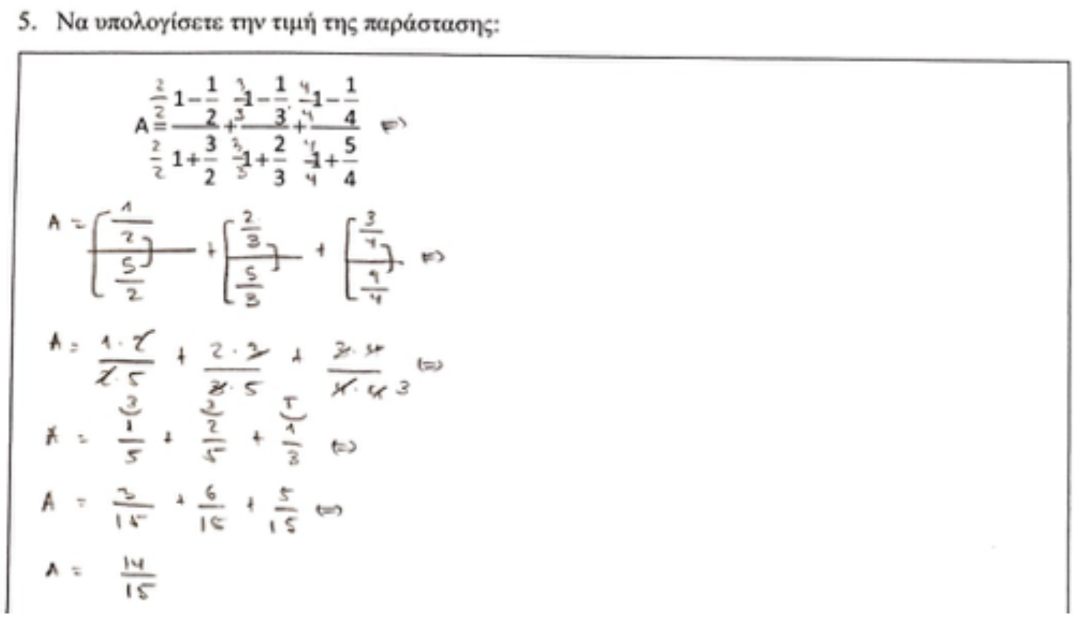
$B = (\alpha - 2\beta)(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta(\beta + \alpha)$

$B = (\alpha+\beta)[(\alpha-2\beta) - (\alpha-\beta) + \beta] \Leftrightarrow$

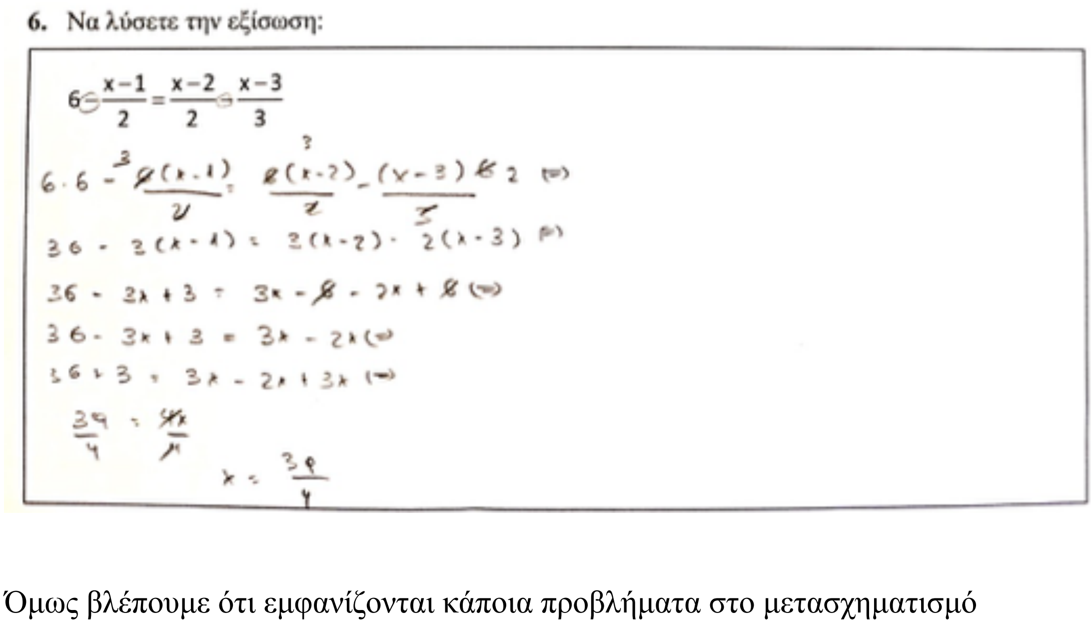
$B = (\alpha+\beta)(\cancel{\alpha} - 2\cancel{\beta} - \cancel{\alpha} + \cancel{\beta} + \cancel{\beta}] \Leftrightarrow$

$B = 0$

Εικόνα 22.
Απάντηση μαθήτριας της τρίτης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_a1



Εικόνα 23.
Απάντηση μαθήτριας της τρίτης κατηγορίας στη δραστηριότητα mi_c2



Όμως βλέπουμε ότι εμφανίζονται κάποια προβλήματα στο μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων, όπου την αντίστοιχη δραστηριότητα με τις αλγεβρικές πράξεις σε κλάσματα (mi_b1), η μαθήτρια επιλέγει να μην την απαντήσει. Υπάρχουν επίσης ελλείψεις στην κατανόηση της δομής των αριθμητικών αντικειμένων και των ιδιοτήτων των αριθμών (εικόνα 24), στη δραστηριότητα του παράγοντα συναρτησιακή σκέψη (εικόνα 25), στη δραστηριότητα του παράγοντα μετα-άλγεβρα (εικόνα 26) και στην απόδειξη που η απάντηση της μαθήτριας δεν είναι σωστή.

Εικόνα 24.
Απάντηση μαθήτριας της τρίτης κατηγορίας στη δραστηριότητα ga_b2

8. Να βρείτε ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος 946 + 950 + 952 + 960 διά του 950.
   a.0
   b. 8
   c.-8
   d. 12
   e.Κανένα από τα παραπάνω

Εικόνα 25.
Απάντηση μαθήτριας της τρίτης κατηγορίας στη δραστηριότητα ss_b1

10. Να βρείτε ποια είναι η εξίσωση που περιγράφει τη σχέση των μεταβλητών στο διπλανό πίνακα;
   a. $y = 2x$
   b. $y = 2x + 1$
   c. $y = x^2 + 1$
   d. $y = x^2 + x$
   e.Κανένα από τα παραπάνω

0	1
1	2
2	5
3	10
4	17

Εικόνα 26.
Απάντηση μαθήτριας της τρίτης κατηγορίας στη δραστηριότητα met-b1

8. Μια εταιρία ενοικίασης αυτοκινήτων χρεώνει 20€ την ημέρα και 0,50€ για κάθε χιλιόμετρο. Μία άλλη εταιρία χρεώνει 40€ με απεριόριστα χιλιόμετρα. Για ποιες αποστάσεις θα διάλεγες τη δεύτερη εταιρία αντί της πρώτης;

θα διάλεγα τη δευτερη εταιρια αντί την πρώτης αν ήθελα να κανω πολύ μεγάλη αποστάσεις όχι αναγκαστικα καθημερινά. Έτσι θα χρεωθώ λιγότερο, αφού εδώ θα χρεώνομαι καθε μερα χωρις να το χρησιμοποιώ αλλά θα κανω όσο μεγαλύτερες αποστάσεις θέλω

Ικανότητες των μαθητών της τέταρτης κατηγορίας

Στον πίνακα 14 φαίνονται οι μέσες τιμές της επίδοσης των μαθητών της τέταρτης κατηγορίας στις δραστηριότητες του φύλλου της έρευνας.

Πίνακας 14 – Μέση επίδοση των μαθητών της τέταρτης κατηγορίας

ga_a1	ga_a2	ga_a3	ga_b1	ga_b2	ga_b3
0,5	1	1	1	1	0,5
ga_c1	**ga_c2**	**ss_a1**	**ss_a2**	**ss_b1**	**ss_b2a**
1	1	1	0,75	1	1
ss_b2b	**ss_c1**	**ss_c2**	**mi_a1**	**mi_a2**	**mi_b1**
1	1	0,75	0,75	0,81	0,88
mi_b2	**mi_c1**	**mi_c2**	**met_a1**	**met_a2**	**met_a3**
1	0,94	1	1	1	1
met_b1	**met_b2**				
0,75	0,5				

Οι μαθητές της τέταρτης κατηγορίας είναι οι μαθητές που χαρακτηρίζονται ως άριστοι. Κατέχουν τις αλγεβρικές ικανότητες που αντιστοιχούν στο επίπεδό τους και η αλγεβρική τους σκέψη φαίνεται ότι είναι σε υψηλό επίπεδο. Κάποια δυσκολία εμφανίζεται στις αριθμητικές παραστάσεις με κλάσματα, στην αναγνώριση περίπλοκων δομών και την εφαρμογή των ιδιοτήτων της δομής και στις αποδείξεις. Οι μαθητές αυτής της κατηγορίας εμφανίζουν μεγάλη διαφορά στην επίδοσή τους στις δραστηριότητες της μετα-άλγεβρας γεγονός που επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι οι μαθητές μπορούν να εμβαθύνουν γύρω από τις αλγεβρικές έννοιες και να διευρύνουν το επίπεδο δράσης των εννοιών αυτών. Η απόδειξη εξακολουθεί να είναι δύσκολο κομμάτι της αλγεβρικής ικανότητας, αλλά κάτι τέτοιο ίσως να θεωρείται και αναμενόμενο καθώς οι μαθητές μέχρι και την γ γυμνασίου έχουν ασχοληθεί ελάχιστα με αποδείξεις.

Στη συνέχεια παραθέτουμε κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις δύο μαθητών της κατηγορίας αυτής. Σε όλους τους μαθητές της κατηγορίας παρατηρούμε άνεση στις πράξεις σε αριθμητικές και αλγεβρικές παραστάσεις και στην επίλυση εξισώσεων. Αλλά παρατηρούμε επίσης και εφαρμογή γνώσεων σε δραστηριότητες του παράγοντα «συναρτησιακή σκέψη» (εικόνα 27), σε μετα-αλγεβρικό επίπεδο, σε προβλήματα (εικόνα 28) και επίσης ικανοποιητικό επίπεδο ικανοτήτων στην απόδειξη (εικόνα 29). Αξιοσημείωτο είναι ότι η μαθήτρια κατάφερε να φτάσει και σε γενίκευση στη δραστηριότητα του γεωμετρικού μοτίβου (εικόνα 30).

Εικόνα 27.
Απάντηση μαθήτριας της τέταρτης κατηγορίας στη δραστηριότητα ss_b2

4. Ο Γιώργος εργάζεται σε μία ασφαλιστική εταιρία για ασφάλειες αυτοκινήτου. Ο μισθός του είναι 50€ και παίρνει και 20€ για κάθε ασφάλεια που πουλάει.
   a. Πόσα είναι τα χρήματα που κερδίζει ο Γιώργος κάθε εβδομάδα;
   b. Αν σε μία εβδομάδα έβγαλε 190€ πόσες ασφάλειες είχε πουλήσει;

a. $50+20x$

b. $50+20x=190 \Rightarrow 20x=190-50 \Rightarrow 20x=140 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=7$ ασφάλειες.

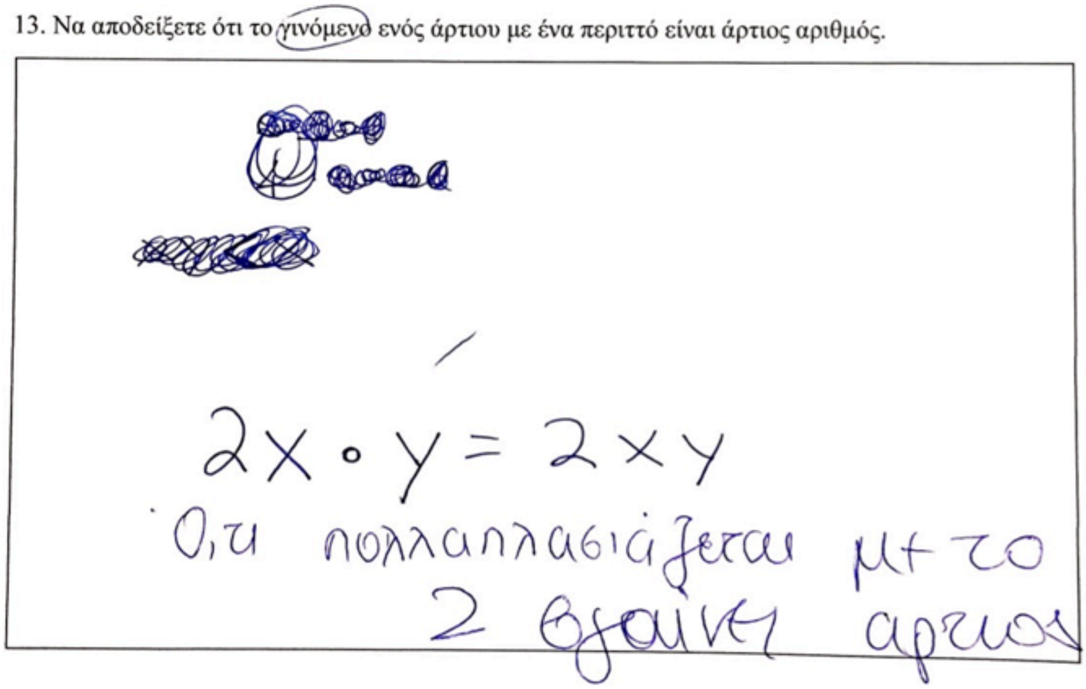
Εικόνα 28.
Απάντηση μαθήτριας της τέταρτης κατηγορίας στη δραστηριότητα met_b1

8. Μια εταιρία ενοικίασης αυτοκινήτων χρεώνει 20€ την ημέρα και 0,50€ για κάθε χιλιόμετρο. Μία άλλη εταιρία χρεώνει 40€ με απεριόριστα χιλιόμετρα. Για ποιες αποστάσεις θα διάλεγες τη δεύτερη εταιρία αντί της πρώτης;

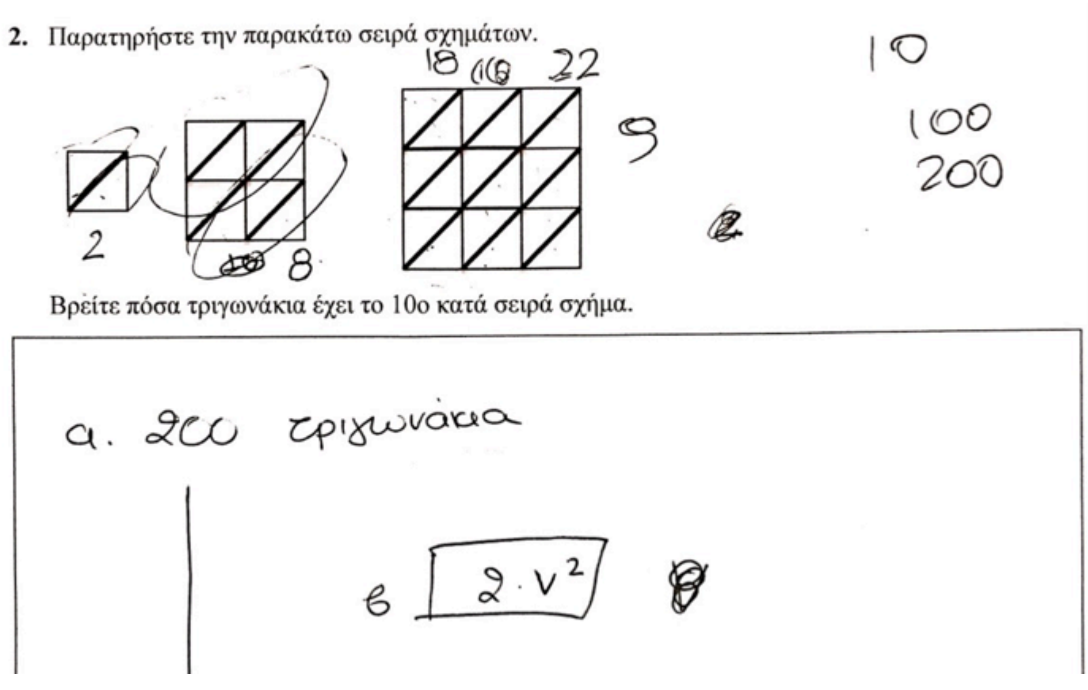
$40-20=20€$ $\quad \frac{20€}{0,5}=40$

Για αποστάσεις μικρότερες των 40χλμ. συμφέρει η Α' εταιρεία.
Για αποστάσεις μεγαλύτερες των 40χλμ. συμφέρει η άλλη.

Εικόνα 29.
Απάντηση μαθήτριας της τέταρτης κατηγορίας στη δραστηριότητα met_b2



Εικόνα 30.
Απάντηση μαθήτριας της τέταρτης κατηγορίας στη δραστηριότητα ss_a1



Συζήτηση

Η συνεισφορά της παρούσας εργασίας εδράζεται κυρίως στην εμπειρική επιβεβαίωση του μοντέλου περιγραφής της δομής της αλγεβρικής σκέψης μαθητών Γ΄ γυμνασίου. Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η αρχική μας υπόθεση αναφορικά με τις διαστάσεις της αλγεβρικής σκέψης δεν επιβεβαιώθηκε, αλλά τα δεδομένα της έρευνας επιβεβαίωσαν ένα εναλλακτικό μοντέλο περιγραφής της αλγεβρικής σκέψης μαθητών Γ΄ γυμνασίου που εδράζεται κυρίως στο μοντέλο της Kieran (2007). Επομένως, με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας μπορεί να λεχθεί ότι το μοντέλο περιγραφής αλγεβρικής σκέψης της Kierean (2007) αποτελεί ένα έγκυρο εργαλείο ανάλυσης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών Γ΄ γυμνασίου. Το καινοτόμο στοιχείο της εργασίας ως προς το μοντέλο της Kierean (2007), πέρα από την εμπειρική επιβεβαίωσή του, στηρίζεται στο γεγονός ότι νοηματοδοτεί με ξεκάθαρο τρόπο τις υπο-παραμέτρους των τριών παραγόντων και αναδεικνύει το ρόλο της μοντελοποίησης (Kaput, 2008) ως θεμελιώδους στοιχείου του παράγοντα μετα-άλγεβρα. Επιπρόσθετα, στον παράγοντα μετα-άλγεβρα περιλαμβάνονται οι τρεις μορφές συναρτησιακής σκέψης (μοτίβα, σχέσεις μεταξύ μεταβλητών, σχέσεις σε διαγράμματα), όπως προτείνονται, επίσης, από τον Kaput (2008). Συμπερασματικά μπορεί να λεχθεί ότι με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας, λόγω των υψηλών συσχετίσεων μεταξύ των διαφορετικών παραμέτρων της αλγεβρικής σκέψης, το μοντέλο των τριών διαστάσεων της Kieran (2007) μπορεί να περιγράψει με πιο επαρκές τρόπο τη δομή της αλγεβρικής σκέψης μαθητών γυμνασίου, χρησιμοποιώντας, επιμέρους στοιχεία από το μοντέλο του Kaput (2008).

Επιπλέον, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έδειξαν ότι υπάρχει μια ιεραρχική σχέση μεταξύ των τριών παραγόντων της αλγεβρικής σκέψης. Ο παράγοντας «μετασχηματιστική ικανότητα» που αναφέρεται στο χειρισμό των αριθμητικών και αλγεβρικών συμβόλων προβλέπει σε σημαντικό βαθμό την επίδοση των μαθητών στον παράγοντα γενικευμένη αριθμητική που αναφέρεται στην ικανότητα γενίκευσης αριθμητικών και αλγεβρικών δομών. Επιπρόσθετα, ο παράγοντας γενικευμένη αριθμητική επηρεάζει άμεσα την επίδοση των μαθητών στον παράγοντα μετα-άλγεβρα που εμπεριέχει την συναρτησιακή σκέψη, την ικανότητα μοντελοποίησης καθώς και τη χρήση αλγεβρικών δομών για σκοπούς απόδειξης και συλλογισμού. Η ιεραρχική αυτή σχέση μεταξύ των τριών παραγόντων υποδηλώνει μια πιθανή τροχιά μάθησης στηριζόμενη στο σκεπτικό ότι η μετασχηματιστική ικανότητα και η ικανότητα χειρισμού της αλγεβρικής γλώσσας αποτελούν βασική προϋπόθεση ώστε οι μαθητές να επιτύχουν τη χρήση των αλγεβρικών δομών για σκοπούς γενίκευσης και εξαγωγής συμπερασμάτων και τέλος ακολουθεί ο παράγοντας της μετα-άλγεβρας που εμπεριέχει πιο δύσκολες ικανότητες όπως η συναρτησιακή σκέψη, η επίλυση προβλημάτων που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών, η χρήση μοντέλων για αναπαράσταση προβλημάτων και σχέσεων καθώς και η λειτουργία της απόδειξης.

Η ανάλυση έδειξε ότι υπάρχουν τέσσερα επίπεδα αλγεβρικής σκέψης και αλγεβρικών ικανοτήτων, όπως αυτά καθορίστηκαν από την επίδοση των μαθητών στα έργα της έρευνας. Οι ομάδες παρουσιάζουν διαφορές στην επίδοσή τους στις διάφορες κατηγορίες έργων. Από την ανάλυση φάνηκε ότι στους μαθητές χαμηλής επίδοσης εμφανίζονται προβλήματα στις πράξεις με κλάσματα και αλγεβρικές παραστάσεις, στην σύνδεση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων και αρκετά μεγάλη δυσκολία στην εφαρμογή γνώσεων σε μετα-αλγεβρικό επίπεδο, στην εργασία με προβλήματα, με μοντελοποίηση και με αποδείξεις. Οι μαθητές στα υπόλοιπα επίπεδα, φάνηκε ότι είχαν ισχυρότερες αλγεβρικές ικανότητες στο χειρισμό αλγεβρικών και αριθμητικών παραστάσεων αλλά και στην κατανόηση των εννοιών της συνάρτησης, αλλά κάποιες δυσκολίες συνέχισαν να φαίνονται στο επίπεδο της μετα-άλγεβρας και την απόδειξη, γεγονός που ίσως είναι αναμενόμενο καθώς δραστηριότητες των παραγόντων αυτών εμφανίζονται στην ύλη της Α Λυκείου.

Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή την εργασία μπορεί να προσφέρει στους εκπαιδευτικούς και στους ερευνητές ένα μέσο για να εξετάσουν την πολύπλοκη φύση της αλγεβρικής σκέψης μαθητών γυμνασίου. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν το μοντέλο, για να συμπεριλάβουν στη διδασκαλία τους δραστηριότητες που μπορούν να συμβάλουν στην ανάπτυξη των επιμέρους διαστάσεων της αλγεβρικής σκέψης και κατ' επέκταση στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης. Από την πλευρά των ερευνητών, το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για περαιτέρω μελέτη της δομής της αλγεβρικής σκέψης και εν δυνάμει τροχιών μάθησης, με βάση τις οποίες θα μπορούν να σχεδιαστούν προγράμματα διδασκαλίας που θα λαμβάνουν υπόψη τις προϋποθέσεις ανάπτυξης των παραμέτρων της αλγεβρικής σκέψης.

Βιβλιογραφία

1. Aris, R. (2012). Mathematical modelling techniques. Courier Corporation.

2. Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. In C. Kieran (Ed.), New perspectives on school algebra: Papers and discussions of the ICME-7 Algebra Working Group (special issue). Journal of Mathematical Behavior, 14, 41-73.

3. Booth, L. R. (1984). Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project

4. Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. The ideas of algebra, K-12, 19, 20-32.

5. Booth, L. R. (1989). A question of structure. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (Vol. 4 of Research agenda for mathematics education, pp. 57–59). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

6. Boero, P. (1993). About the transformation function of the algebraic code. In R. Sutherland (Ed.), Algebraic processes and the role of symbolism (working conference of the ESRC seminar group, pp. 48-55). London: University of London, Institute of Education.

7. Burkhardt, H. (1981). *The real world and mathematics.* London: Blackie & Son.

8. Carracher, D.W., Schliemann, A.D., Brizuela, B.M. & Earnest, D. (2006).Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education, 37(2), p. 87-115

9. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

10. Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 375–402.

11. de Lange, J. (1987). *Mathe11llJtics insight and meaning.* Utrecbt, The Netherlands: Rijksuniversiteit, OW&OC.

12. Gattegno, C. (1987). *The science of education part 1: theoretical considerations*. Educational Solutions.

13. Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. Journal for research in mathematics education, 16-30.

14. English, L.D. & Sharry, P.V. (1996). Analogical reasoning and the development of algebraic abstraction. Educational Studies in Mathematics, 30(2), 135-157. doi: 10.1007/BF0030262

15. English, L.D. and Warren, E.A.: 1998; ‘Introducing the variable through pattern explora- tion’, Mathematics Teacher 91(2), 166–170.

16. Fujii, T. and Stephens, M.: 2001, ‘Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions’, in H. Chick, K. Stacey, J. Vincent and J. Vincent (eds.), Proceedings of the 12th Conference of the International Commission on Mathematical Instruction, Vol. 1, Melbourne, Australia, pp. 258–264.

17. Hatfield, M. M., Edwards, N. T., Bitter, G. G., & Morrow, J. (2007). Mathematics methods for elementary and middle school teachers. John Wiley & Sons Incorporated.

18. Harel, G. Symbolic reasoning and transformational reasoning and their effect on algebraic reasoning. Employing children's natural powers to build algebraic reasoning in the content of elementary mathematics.

19. Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for research in mathematics education, 396-428.

20. Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. In *Approaches to algebra* (pp. 239-255). Springer Netherlands.

21. Herscovics, N. & Linchevsky, L. (1994).A cognitive gap between arithmetic and algebra. Educational Studies and Mathematics, 27(1), 59-78. doi: 10.1007/BF01284528

22. Herstein, I. N. (1964). Topics in Algebra. 1964. *Blaisdell, Menlo Park, CA.*

23. Howe, R. (2005). Comments on NAEP algebra problems. Available online at www.brookings.edu/~/media/Events/2005/9/14algebraicreasoning/Howe_Presentation.PDF

24. Kaput, J. J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? In D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), Proceedings of the 17th Annual Meeting of PME-NA (Vol. 1, pp. 71-94). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

25. Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. Educational Studies in Mathematics, 12(3), 317–326.

26. Kieran, C., Boileau, A., & Garançon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In *Approaches to algebra* (pp. 257-293). Springer Netherlands.

27. Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. The Mathematics Educator, 8(1), 139-151.

28. Kieran C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research andteaching. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), Early algebraization. A global dialogue frommultiple perspectives (pp. 557-577). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

29. Lagrange, J.-B. (2002). Étudier les mathématiques avec les calculatrices symboliques. Quelle place pour les techniques? [Studying mathematics with symbolic calculators: What place for techniques?] In D. Guin & L. Trouche (Eds.), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique* (pp. 151– 185). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

30. Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding? Journal of Mathematical Behavior, 25(4), 299-317.

31. Lee, L.: 1996, ‘An initiation into algebraic culture through generalization activities’, in N. Bednarz, C. Kieran and Lee, L. (eds.), Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 87–106.

32. Lee, L. (1997). *Algebraic understanding: The search for a model in the mathematics education community*. Unpublished doctoral dissertation, Université du Québec à Montréal.

33. Lester, F. K. (2007). Second handbook of research on mathematics teaching and learning. IAP.

34. Love, E. (1986). What is algebra? Mathematics Teaching, 117, 48-50.

35. MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. Journal for Research in Mathematics Education, 217-232.

36. Mathematics Learning Study Committee. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academies Press.

37. Mason, J. (1996). “When is a Problem?”: Questions from History and Classroom Practice in Algebra. In *Approaches to Algebra* (pp. 187-193). Springer Netherlands.

38. Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

39. Mason, J., & Graham, A. Johnston--Wilder, S.(2005). *Developing thinking in algebra*.

40. Nemirovsky, R. (1996). Mathematical narratives, modeling, and algebra. In *Approaches to Algebra* (pp. 197-220). Springer Netherlands.

41. Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. ZDM, 40(3), 385-400.

42. Piaget, J., & Inhelder, B. (1969). The psychology of the child (Vol. 5001). Basic books.

43. Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: The case of meanings of the equal sign. Journal of Mathematics Teacher Education, 13(1), 73-93.

44. Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 13–36). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191–228.

45. Radford, L. (2015). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. In The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 209-227). Springer International Publishing.

46. Rivera, F. & Becker, J. (2007). Abduction – Induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns of algebra. Journal of Mathematical Behavior, 26 (2), 140-155. doi: 10.1016/j.jmathb.2007.05.00

47. Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. Early algebraization, 43-69.

48. Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification — The case of algebra. Educational Studies in Mathematics, 26(2-3), 191-228. doi: 10.1007/BF01273663

49. Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 133-160). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates

50. Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. Mathematics Teaching, 127, 28-32.

51. Timmons, D., Johnson, C., & McCook, S. (2012). Fundamentals of Algebraic Modeling. Nelson Education.

52. Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

53. Watson, A. (2009). Key understandings in mathematics learning, Paper 6: Algebraic Reasoning. London: Nuffield Foundation. Available online at: http://www.nuffieldfoundation.org/key-understandings-mathematics-learning

54. Wertheimer, M., Studies of-some Gestalt qtialities of words. In Gestalthaftes Sehen: Ergebnisse and Aufgaben der Morphologie, F; Weinhandl (Ed.). Darmstadt, Germany: Wissenschaftliche Budbgesellschaft (1960), 398-405.

Παράρτημα

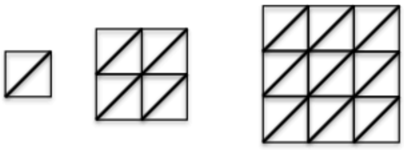
Πρώτο φύλλο δραστηριοτήτων της έρευνας

Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών 1

Ονοματεπώνυμο: ____ Τμήμα: _________

1. Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα της πράξης: $-1245 \cdot 15 + 245 \cdot 15 =$

2. Παρατηρήστε την παρακάτω σειρά σχημάτων.



Βρείτε πόσα τριγωνάκια έχει το 10ο κατά σειρά σχήμα.

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 5$

4. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$B = (\alpha - 2\beta)(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta(\beta + \alpha)$

5. Να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:

$A = \frac{2x}{xy - y^2} - \frac{2y}{x^2 - xy} + \frac{x+y}{2xy}$

6. Να λύσετε την εξίσωση:

$6 - \frac{x-1}{2} = \frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{3}$

7. Να βρείτε ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου $3^2 \cdot 11^{12}$.

a. 0
b. 1
c. 3
d. 9

8. Να βρείτε ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος $946 + 950 + 952 + 960$ διά του 950.

a. 0
b. 8
c. -8
d. 12
e. Κανένα από τα παραπάνω

9. Αν $A + B = 4$, να βρείτε ποια είναι η τιμή της παράστασης $2A + 2B - 5$.

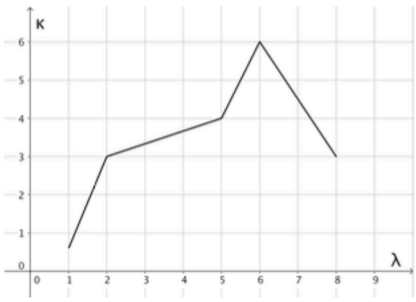
a. 8
b. -1
c. 3
d. -5

10. Να βρείτε ποια είναι η εξίσωση που περιγράφει τη σχέση των μεταβλητών στο διπλανό πίνακα;

0	1
1	2
2	5
3	10
4	17

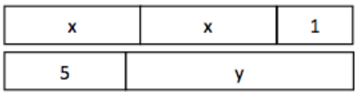
a. $y = 2x$
b. $y = 2x + 1$
c. $y = x^2 + 1$
d. $y = x^2 + x$
e. Κανένα από τα παραπάνω

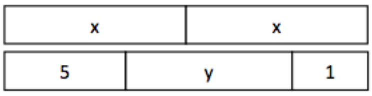
11. Παρακάτω ακολουθεί η γραφική παράσταση της σχέσης δύο μεταβλητών κ και λ.

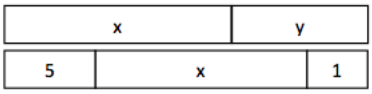


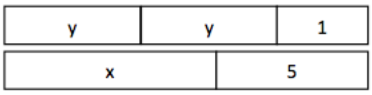
Να βρείτε πόσα σημεία έχει η γραφική παράσταση.

12. Το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 1 είναι ίσο με ένα άλλο αριθμό αυξημένο κατά 5. Ποιο από τα παρακάτω μοντέλα αναπαριστά την πρόταση αυτή;

a.


b.


c.


d.


13. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο ενός άρτιου με ένα περιττό είναι άρτιος αριθμός.

Δεύτερο φύλλο δραστηριοτήτων της έρευνας

Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών 1

Ονοματεπώνυμο: ____ Τμήμα: __________

1. Να βρείτε το αποτέλεσμα της πράξης: $3\cdot(-13212)-5\cdot(-13212)=$
   a. 26424
   b. -2
   c. $-2\cdot 13212$
   d. $8\cdot 13212$
   e. Κανένα από τα παραπάνω

2. Έστω ο αριθμός 3^{400}. Να εξετάσετε αν ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 9 και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

3. Να βρείτε τον 8ο όρο της παρακάτω ακολουθίας αριθμών:
   $-2, 4, -8, 16$

4. Ο Γιώργος εργάζεται σε μία ασφαλιστική εταιρία για ασφάλειες αυτοκινήτου. Ο μισθός του είναι 50€ και παίρνει και 20€ για κάθε ασφάλεια που πουλάει.
   a. Πόσα είναι τα χρήματα που κερδίζει ο Γιώργος κάθε εβδομάδα;
   b. Αν σε μία εβδομάδα έβγαλε 190€ πόσες ασφάλειες είχε πουλήσει;

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}+\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}+\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{5}{4}}$$

6. Να λύσετε την εξίσωση:

$$16(x+1)+1-2(3-x)=-3(x+6)$$

7. Να εκφράσεις με συμβολικό τρόπο την πρόταση:
«Το διπλάσιο του τετραγώνου ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό αυτό».

8. Μια εταιρία ενοικίασης αυτοκινήτων χρεώνει 20€ την ημέρα και 0,50€ για κάθε χιλιόμετρο. Μία άλλη εταιρία χρεώνει 40€ με απεριόριστα χιλιόμετρα. Για ποιες αποστάσεις θα διάλεγες τη δεύτερη εταιρία αντί της πρώτης;

9. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρτιος;

   a. 2^{348}
   b. 3^{348}
   c. 5^{348}
   d. 7^{348}
   e. Είναι πολύ δύσκολες οι πράξεις για να απαντήσουμε.

10. Για ποια τιμή του αριθμού α η παρακάτω ανίσωση είναι σωστή;
    $-10 > (-5)\alpha$
    a. 2
    b. -2
    c. 1
    d. 3

11. Είσαι συνδρομητής της εταιρίας κινητής τηλεφωνίας Mobifon και θέλεις να μάθεις πως χρεώνεσαι για τη χρήση του κινητού σου. Η εταιρία σου στέλνει τα παρακάτω παραδείγματα χρεώσεων:

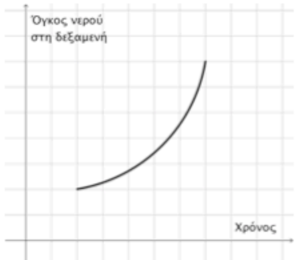
Χρόνος ομιλίας	Χρέωση
70 min	13€
90 min	13€
130 min	28€

Με ποιο τρόπο υπολογίζει η εταιρία τις χρεώσεις;

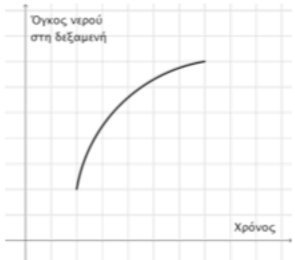
   a. Η εταιρία χρεώνει 0,1€ το λεπτό και προσθέτει και 6€ έξοδα δικτύου.
   b. Η εταιρία έχει πάγιο 10€, 100 λεπτά δωρεάν χρόνο χρήσης, χρεώνει και 3€ για το φόρο χρήσης κινητού.
   c. Η εταιρία έχει πάγιο 13€, 100 λεπτά δωρεάν χρόνο ομιλίας και χρεώνει και 0,5€ για κάθε λεπτό ομιλίας πάνω από τα 100 λεπτά
   d. Η εταιρία έχει πάγιο 20€ και χρεώνει και άλλα 8€ για απεριόριστο χρόνο ομιλίας του χρήστη.

12. Μία βρύση είναι ανοικτή στο τέρμα και γεμίζει μία δεξαμενή. Σιγά σιγά, με αργό ρυθμό, κλείνουμε τη βρύση μέχρι να κλείσει τελείως. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αναπαριστά το παράδειγμα αυτό;

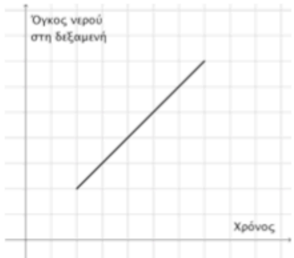
a.



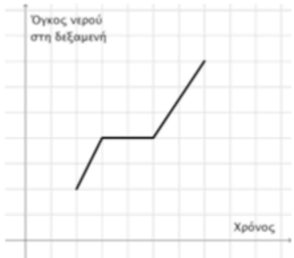
b.



c.



d.



13. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο ενός άρτιου με ένα περιττό είναι άρτιος αριθμός.