

Η Θεωρία του Γνωστικού Φορτίου

στη Διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο

Σάλτα Μαρία (Α.Μ. 201514)

Τμήμα Ψυχολογίας, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Σχολικής Ψυχολογίας

Κατεύθυνση: Εφαρμογές της Ψυχολογίας στη Σχολική Κοινότητα

Σημείωμα του Συγγραφέα

Το δοκίμιο αυτό αποτελεί διπλωματική εργασία που συντάχθηκε για το Τμήμα Ψυχολογίας του Πανεπιστημίου Αθηνών και υποβλήθηκε τον Σεπτέμβριο 2017.

Η συγγραφέας βεβαιώνει ότι το περιεχόμενο του παρόντος είναι αποτέλεσμα προσωπικής εργασίας και ότι έχει γίνει κατάλληλη αναφορά στην εργασία τρίτων, όπου κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο, σύμφωνα με τους κανόνες της ακαδημαϊκής δεοντολογίας.

## Περίληψη

Στην παρούσα μελέτη εξετάζεται η συμβολή των επιλυμένων παραδειγμάτων, μιας πειραματικά ελεγμένης μεθόδου της θεωρίας του γνωστικού φορτίου, στην ενίσχυση της επίδοσης των μαθητών του δημοτικού σχολείου στο μάθημα των μαθηματικών. Με βάση την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας αναμενόταν ότι οι μαθητές της πειραματικής ομάδας θα είχαν υψηλότερη επίδοση σε ένα κριτήριο αξιολόγησης σε σχέση με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου. Το δείγμα της έρευνας αποτελούσαν 40 μαθητές ενός δημοτικού σχολείου της Ραφήνας του νομού Αττικής. Στους συμμετέχοντες πραγματοποιήθηκε μια διδασκαλία, που διαφοροποιούνταν ανάλογα την ομάδα, ώστε να ακολουθεί τις μεθόδους της θεωρίας του γνωστικού φορτίου ή όχι, και στη συνέχεια χορηγήθηκε ένα κριτήριο αξιολόγησης για τον έλεγχο της επίδοσης. Τα αποτελέσματα των επαγωγικών στατιστικών αναλύσεων έδειξαν πως όντως οι μαθητές της πειραματικής ομάδας είχαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου. Το εύρημα αυτό συζητείται σε συνάρτηση με την ξενόγλωσση βιβλιογραφία ερευνών πάνω στα επιλυμένα παραδείγματα και τη θεωρία του γνωστικού φορτίου.

*Λέξεις – κλειδιά:* μαθηματικά, επιλυμένα παραδείγματα, θεωρία του γνωστικού φορτίου

## Περιεχόμενα

Περίληψη .....	2
Πρόλογος .....	5
Εισαγωγή .....	6
Η Αρχιτεκτονική του Γνωστικού Συστήματος .....	6
Το Γνωστικό Φορτίο .....	16
Μέθοδοι της Θεωρίας του Γνωστικού Φορτίου .....	22
Η Μέθοδος των Επιλυμένων Παραδειγμάτων.....	28
Σκοπός Έρευνας και Ερευνητικά Ερωτήματα.....	33
Μέθοδος .....	35
Συμμετέχοντες .....	35
Μέσα Συλλογής Δεδομένων .....	35
Διαδικασία Συλλογής Δεδομένων .....	36
Αποτελέσματα .....	40
Περιγραφικοί Στατιστικοί Δείκτες .....	40
Έλεγχος Υποθέσεων .....	42
Συζήτηση .....	43
Περιορισμοί .....	45
Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα .....	47

Βιβλιογραφία ..... 48

Παράρτημα ..... 55

## Πρόλογος

Στον πρόλογο της παρούσας μελέτης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κο Πέτρο Ρούσσο για τη συνεργασία, την επιστημονική του καθοδήγηση και το χρόνο που διέθεσε για να με υποστηρίξει στην επιτυχή ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διευθυντή, τους εκπαιδευτικούς της Δ' δημοτικού, αλλά και τους μαθητές του 2<sup>ου</sup> Δημοτικού Σχολείου Ραφήνας που έκαναν δυνατή τη διεξαγωγή της έρευνάς μου.

Προσωπικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τους γονείς μου, Τάκη και Δέσποινα, για την πολύτιμη ηθική και υλική υποστήριξη που μου έχουν προσφέρει σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, για τον ενθουσιασμό με τον οποίο με παρακινούν να συνεχίσω να «κυνηγάω» τα όνειρά μου και για την εμπιστοσύνη που μου εξέφραζαν κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον σύντροφό μου, Παναγιώτη, για την υποστήριξη, την κατανόηση και τη βοήθεια που μου προσέφερε όλο αυτό το διάστημα. Τέλος, ευχαριστώ τους κοντινούς μου φίλους και φίλες, που βρίσκονταν δίπλα μου και παρείχαν τη βοήθεια και υποστήριξή τους.

## **Η Θεωρία του Γνωστικού Φορτίου στη Διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο**

### **Εισαγωγή στη Θεωρία του Γνωστικού Φορτίου**

Η θεωρία του Γνωστικού Φορτίου (Cognitive Load Theory) είναι μια θεωρία διδακτικής μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε από τον John Sweller στις αρχές της δεκαετίας του 1980. Προσπαθεί μέσω πειραματικών σχεδιασμών να διαμορφώσει διδακτικές προτάσεις, αξιοποιώντας την αρχιτεκτονική του γνωστικού συστήματος και πιο συγκεκριμένα τις συσχετίσεις μεταξύ της εργαζόμενης μνήμης και της μακροπρόθεσμης μνήμης. Βέβαια, είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι οι διδακτικές προτάσεις της θεωρίας, και η αποτελεσματικότητά τους, εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες με κυριότερο το γνωστικό φορτίο, όπως θα αναλυθεί στη συνέχεια (Sweller, 2011). Επίσης, ένα από τα πλεονεκτήματά της είναι πως η θεωρία επικεντρώνεται στα περίπλοκα γνωστικά έργα, όπου οι μαθητές κατακλύζονται από ένα μεγάλο αριθμό αλληλεπιδρώντων στοιχείων, τα οποία πρέπει να επεξεργαστούν ταυτόχρονα, ώστε να κατανοήσουν μια πληροφορία και να αποκτήσουν μια νέα γνώση (Paas, Renkl & Sweller, 2004. Kirschner, Ayres & Chandler, 2011. Paas, van Cog & Sweller, 2010).

### **Η Αρχιτεκτονική του Ανθρώπινου Γνωστικού Συστήματος**

Η θεωρία του Γνωστικού Φορτίου έχει υιοθετήσει μια εξελικτική οπτική για το ανθρώπινο γνωστικό σύστημα. Αρχικά, ακολουθεί την κατηγοριοποίηση της γνώσης σε βιολογικά πρωτεύουσα και βιολογικά δευτερεύουσα. Επιπλέον, εξετάζει την απόκτηση της γνώσης, και ιδιαίτερα της βιολογικά δευτερεύουσας γνώσης, μέσα από τη διαδικασία της «Φυσικής Επιλογής», παρά το γεγονός ότι η θεωρία της φυσικής επιλογής είναι μια

βιολογική θεωρία, που εξηγεί την εξέλιξη των ειδών. Αντιμετωπίζει, με άλλα λόγια, το γνωστικό μας σύστημα ως ένα σύστημα επεξεργασίας φυσικών πληροφοριών (natural information processing system) (Sweller & Sweller, 2006. Sweller, 2011).

**Βιολογικά Πρωτεύουσα Γνώση.** Η βιολογικά πρωτεύουσα γνώση αναφέρεται σε ικανότητες που ο άνθρωπος έχει εξελιχθεί να αποκτήσει μέσα στο πέρασμα πολλών γενεών. Οι δεξιότητες αυτές αποκτώνται φυσικά και ασυνείδητα, χωρίς προσπάθεια και οργανωμένη διδασκαλία. Ο κατάλογος των δεξιοτήτων αυτών είναι μεγάλος. Οι κυριότερες από αυτές μπορεί να θεωρηθούν η ομιλία (ο λόγος), η αναγνώριση προσώπων, η βάδιση, η αναγνώριση κοινωνικών σχέσεων κτλ. Ένα βασικό στοιχείο της πρωτεύουσας βιολογικά γνώσης είναι πως οι εξωτερικοί παράγοντες ή η ενθάρρυνση από τα άτομα του περιβάλλοντος δε διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο για την απόκτησή της (Sweller & Sweller, 2006. Sweller, 2011).

**Βιολογικά Δευτερεύουσα Γνώση.** Η φύση και οι διαδικασίες απόκτησης της βιολογικά δευτερεύουσας γνώσης είναι αρκετά διαφορετικές σε σχέση με της πρωτεύουσας. Η διαφοροποίηση έγκειται στο ότι ο άνθρωπος ναι μεν έχει εξελιχθεί για να αποκτήσει τη βιολογικά δευτερεύουσα γνώση και αντίστοιχες δεξιότητες, αλλά όχι ως αυτόνομες και ξεχωριστές ικανότητες. Με άλλα λόγια, οι γνωστικοί μηχανισμοί που υποστηρίζουν τη βιολογικά δευτερεύουσα γνώση έχουν εξελιχθεί για διαφορετικούς λόγους και όχι αποκλειστικά για την υποστήριξη αυτών των διαδικασιών (Sweller & Sweller, 2006. Sweller, 2011).

Η βιολογικά δευτερεύουσα γνώση, δηλαδή, αναφέρεται σε δεξιότητες που έχουν γίνει πολιτισμικά σημαντικές και πρέπει να αποκτηθούν προκειμένου το άτομο να λειτουργεί αποτελεσματικά και να εντάσσεται σε μια κοινωνία. Για παράδειγμα, η γραφή και η ανάγνωση είναι τέτοιες δεξιότητες. Ο άνθρωπος διαθέτει τα απαραίτητα

εφόδια και τους απαραίτητους γνωστικούς μηχανισμούς για να μπορεί να γράφει και να διαβάζει, αλλά αυτές οι ικανότητες δεν αναδύονται φυσικά, όπως η ομιλία. Αντίθετα, χρειάζονται αναλυτική και συστηματική διδασκαλία (Paas & Sweller, 2012).

**Οι Συνέπειες του Διαχωρισμού Βιολογικά Πρωτεύουσας και Δευτερεύουσας Γνώσης.** Ο διαχωρισμός της γνώσης σε βιολογικά πρωτεύουσας και δευτερεύουσας έχει κυρίως διδακτικές συνέπειες και υπαγορεύει τη δόμηση των εκπαιδευτικών συστημάτων με τέτοιο τρόπο, ώστε τα άτομα – μαθητές να αποκτούν τις επιθυμητές για την εκάστοτε κοινωνία βιολογικά δευτερεύουσες δεξιότητες (Sweller, 2011). Επομένως, γίνεται κατανοητό ότι τα διάφορα διδακτικά αντικείμενα του σχολικού προγράμματος περιλαμβάνουν δευτερεύουσα βιολογικά γνώση.

**Η Απόκτηση της Βιολογικά Δευτερεύουσας Γνώσης.** Η δομή του ανθρώπινου γνωστικού συστήματος, ο διδακτικός σχεδιασμός και τα χαρακτηριστικά της βιολογικά δευτερεύουσας γνώσης βρίσκονται σε άμεση συνάφεια. Υπάρχουν πέντε βασικές αρχές σύμφωνα με τις οποίες, το σύστημα επεξεργασίας φυσικών πληροφοριών του ανθρώπου ή αλλιώς το γνωστικό μας σύστημα αποκτά, διατηρεί και οργανώνει τη βιολογικά δευτερεύουσα γνώση (Sweller, 2006. Paas & Sweller, 2012).

**Η αρχή της αποθήκευσης πληροφοριών.** Το ανθρώπινο γνωστικό σύστημα πρέπει να έχει την εποπτεία ενός πολυσύνθετου περιβάλλοντος και για το λόγο αυτό χρειάζεται ένα μεγάλο αποθηκευτικό χώρο. Αυτό τον χώρο παρέχει η μακροπρόθεσμη μνήμη. Η μακροπρόθεσμη μνήμη έχει κεντρικό ρόλο σε όλες τις γνωστικές λειτουργίες, ως «αποθετήριο» των γνώσεων και των ικανοτήτων μας (Sweller, 2006. Kirschner, 2002).

Η σημασία της άρχισε να γίνεται φανερή μέσω της έρευνας στο πεδίο της επίλυσης προβλημάτων και των αρχικών μελετών του deGroot τη δεκαετία του 1960,



σχετικά με τους γνωστικούς παράγοντες που ευθύνονται για την υπεροχή των έμπειρων - επαγγελματιών παικτών σκάκι σε σχέση με τους απλούς παίκτες. Ο deGroot βρήκε, όπως και οι Chase & Simon στη συνέχεια, πως οι έμπειροι παίκτες είχαν αποθηκευμένους στη μακροπρόθεσμη μνήμη χιλιάδες σχηματισμούς του ταμπλό του σκακιού. Για το λόγο αυτό, και όχι για έτερες στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, υπερείχαν των απλών παικτών. Τα αποτελέσματα αυτά έχουν επιβεβαιωθεί και με άλλες έρευνες και έχουν επεκταθεί και σε άλλες δεξιότητες, σχετικές με την εκπαιδευτική πράξη, όπως η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Sweller & Chandler, 1994. Sweller, van Merriënboer & Paas, 1998).

Η μακροπρόθεσμη μνήμη, όμως, δε χρησιμεύει απλώς στην αποθήκευση των πληροφοριών. Κατά κάποιον τρόπο καθορίζει και τις ικανότητες και δεξιότητές μας, εφόσον η εξειδίκευση και η αυξημένη επίδοση στις διάφορες δραστηριότητες εξαρτώνται από την ποσότητα των σχετικών πληροφοριών που έχουν αποθηκευτεί στη μακροπρόθεσμη μνήμη. Εξετάζοντας το στοιχείο αυτό από εκπαιδευτική σκοπιά, γίνεται φανερό ότι εκπαιδευτικός στόχος είναι και η αύξηση της γνώσης, για διάφορα διδακτικά αντικείμενα, που αποθηκεύεται στη μνήμη (Sweller, 2011).

***Η αρχή του δανεισμού και της αναδιοργάνωσης.*** Εκτός από την αποθήκευση των πληροφοριών, ένα σημαντικό ζήτημα είναι η διαδικασία μέσω της οποίας αυτές αποκτώνται. Η θεωρία υποστηρίζει πως το μεγαλύτερο όγκο των πληροφοριών που αποθηκεύουμε στη μακροπρόθεσμη μνήμη τον «δανειζόμαστε» από τους άλλους, αν και τροποποιούμε τις προς αποθήκευση πληροφορίες, με βάση την προϋπάρχουσα γνώση. Με τον όρο «δανειζόμαστε» εννοείται ότι αποκτούμε γνώσεις μέσω της μίμησης της συμπεριφοράς άλλων προσώπων και της κοινωνικής αλληλεπίδρασης, μέσω της διδασκαλίας, της προσωπικής μελέτης βιβλίων κτλ. Με άλλα λόγια, αποκτούμε βιολογικά δευτερεύουσα γνώση μέσα από την επαφή μας με το περιβάλλον και κυρίως

μέσα από τη συστηματική διδασκαλία. Με τον όρο «τροποποιούμε» εννοείται ότι συνδυάζουμε τις νέες πληροφορίες με τις ήδη αποθηκευμένες και, έτσι, αυτό που τελικά αποθηκεύεται στη μακροπρόθεσμη μνήμη είναι μια νέα «αναδιοργανωμένη» πληροφορία και όχι ακριβές αντίγραφο της αρχικής, που μας παρουσιάστηκε από τους άλλους (Sweller, 2006. Sweller & Sweller, 2006).

***Η αρχή της τυχαιότητας ως μηχανισμού γένεσης.*** Η αρχή αυτή αναφέρεται στη δημιουργία νέων πληροφοριών από το άτομο και όχι στην πρόσληψη-αναδιοργάνωσή τους από τους άλλους. Η δημιουργία νέας γνώσης είναι αναγκαία όταν το άτομο αντιμετωπίζει ανοίκειες καταστάσεις και προβλήματα, ενώ παράλληλα δεν είναι σε θέση να αποκτήσει την απαραίτητη γνώση μέσω κάποιας τρίτης πηγής (π.χ. μίμηση, διδασκαλία). Η μέθοδος της δοκιμής και πλάνης είναι κεντρική για τη λύση νέων προβλημάτων. Εξαιτίας της έλλειψης αποθηκευμένων πληροφοριών στη μακροπρόθεσμη μνήμη, που θα πληροφορήσουν το άτομο για το ποια είναι η κατάλληλη λύση στο πρόβλημα, αυτό αναγκάζεται να προβεί σε μία τυχαία προσπάθεια και να ελέγξει την αποτελεσματικότητά της. Εάν αυτή αποδειχθεί επιτυχής, αποθηκεύεται ως νέα γνώση στη μακροπρόθεσμη μνήμη (Sweller & Sweller, 2006).

***Η αρχή των στενών ορίων αλλαγής.*** Η αρχή αυτή σχετίζεται με την αρχή της τυχαιότητας ως μηχανισμού γένεσης. Για να προβεί το άτομο σε μια τυχαία προσπάθεια, πρέπει να συνδυάσει τα στοιχεία του προβλήματος με έναν κατάλληλο τρόπο. Για να γίνει, όμως, αυτό, τα στοιχεία που πρέπει να συνεξετάσει ταυτόχρονα πρέπει να είναι περιορισμένα. Το γεγονός αυτό είναι απαραίτητο εξαιτίας των περιορισμών της μνήμης εργασίας (ή εργαζόμενης μνήμης) (Paas et al., 2010).

Η μνήμη εργασίας λειτουργεί κατά κάποιον τρόπο ως συνδετικός κρίκος ανάμεσα στο εξωτερικό περιβάλλον και στη μακροπρόθεσμη μνήμη. Ωστόσο, έχει

περιορισμούς τόσο ως προς την ποσότητα των στοιχείων που μπορεί κάθε φορά να αποθηκεύσει όσο και στο χρονικό διάστημα που μπορεί να τα διατηρήσει. Σύμφωνα με τη δημοσίευση του Miller το 1956, η μνήμη εργασίας μπορεί να διατηρήσει περίπου επτά μονάδες πληροφοριών για περίπου 20 δευτερόλεπτα. Μάλιστα, σύμφωνα με νεότερες μελέτες, όταν απαιτείται και επεξεργασία, πέρα από διατήρηση, οι μονάδες των πληροφοριών που μπορεί να επεξεργαστεί ταυτόχρονα η μνήμη εργασίας περιορίζονται σε περίπου τρεις ή τέσσερις (Sweller & Chandler, 1994. Kirschner, 2002. Paas et al., 2010).

Έχει υποστηριχθεί, λοιπόν, πως η ανθρώπινη γνωστική ικανότητα βασίζεται κατά κύριο λόγο στην εκτεταμένη μακροπρόθεσμη μνήμη που αποθηκεύει πλήθος πληροφοριών, των αλληλεπιδράσεων μεταξύ τους και των διαδικασιών που τις αφορούν, και όχι από τη μνήμη εργασίας, που είναι περιορισμένη ως προς τα στοιχεία που μπορεί να διαχειριστεί. Ωστόσο, είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι οι περιορισμοί επεξεργασίας στοιχείων από τη μνήμη εργασίας αίρονται όταν τα στοιχεία αυτά δεν προέρχονται από το περιβάλλον (νέα ερεθίσματα – πληροφορίες) αλλά ανακαλούνται από τη μακροπρόθεσμη μνήμη (Kirschner, 2002. Sweller, 2011. Paas et al., 2010).

Επομένως, η αρχή των στενών ορίων της αλλαγής, που σχετίζεται με τους περιορισμούς της μνήμης εργασίας όταν επεξεργάζεται νέες πληροφορίες, όπως γίνεται κατά τη μαθησιακή διαδικασία, έχει και διδακτικές συνέπειες, εφόσον ο σχεδιασμός της διδασκαλίας πρέπει να λαμβάνει υπόψη τις δυνατότητες του γνωστικού συστήματος (Sweller, 2006). Η διδασκαλία αφενός πρέπει να μην οδηγεί σε «υπερφόρτωση» της μνήμης εργασίας αφετέρου πρέπει να εξασφαλίσει την αποθήκευση πληροφοριών στη μακροπρόθεσμη μνήμη, με απώτερο σκοπό αυτές πλέον να επεξεργάζονται χωρίς περιορισμό από τη μνήμη εργασίας σε νέα γνωστικά έργα (Paas et al., 2010).

**Η αρχή της περιβαλλοντικής οργάνωσης και σύνδεσης.** Η μνήμη εργασίας όχι μόνο επεξεργάζεται τις πληροφορίες από το εξωτερικό περιβάλλον, αλλά ταυτόχρονα τις χρησιμοποιεί για να οργανώσει καλύτερα τις πληροφορίες της μακροπρόθεσμης μνήμης και να καθορίσει πώς αυτές θα χρησιμοποιηθούν στο μέλλον. Η αρχή της περιβαλλοντικής οργάνωσης και σύνδεσης επιτρέπει στις πληροφορίες του περιβάλλοντος να επηρεάσουν τις αποθηκευμένες πληροφορίες, με σκοπό την καλύτερη λειτουργία του ατόμου υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Με άλλα λόγια, η μνήμη εργασίας με βάση τις περιβαλλοντικές πληροφορίες καθορίζει ποιες αποθηκευμένες πληροφορίες είναι απαραίτητες για την επεξεργασία των περιβαλλοντικών, τις ανακαλεί και τελικά επεξεργάζεται συνδυαστικά τις νέες πληροφορίες με τις ήδη αποθηκευμένες (Sweller & Sweller, 2006. Sweller, 2011).

**Οι Βασικοί Γνωστικοί Μηχανισμοί Απόκτησης Γνώσης.** Υπάρχουν δύο βασικοί μηχανισμοί απόκτησης γνώσης, η κατασκευή σχημάτων και η αυτοματοποίηση διαδικασιών (Sweller, 1994). Και οι δύο αυτοί μηχανισμοί στοχεύουν κυρίως στο να παρακάμψουν την περιορισμένη μνήμη εργασίας, δίνοντας έμφαση στην θεωρητικά απεριόριστη μακροπρόθεσμη μνήμη (Sweller & Chandler, 1994).

**Η κατασκευή σχημάτων.** Το σχήμα είναι μια γνωστική κατασκευή που οργανώνει τα στοιχεία της γνώσης ανάλογα με τον τρόπο που αυτά θα χρησιμοποιηθούν. Τα σχήματα επιτρέπουν στους ανθρώπους να διαχειριστούν τη θεωρητικά άπειρη ποικιλία αντικειμένων ή προβλημάτων/διαδικασιών, επιτρέποντας τη κατηγοριοποίησή τους, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους ή τον τρόπο αντιμετώπισής τους (Paas, Renkl & Sweller, 2003. Sweller, 1994. Sweller & Chandler, 1994. Leahy, 2009). Για παράδειγμα, αναγνωρίζουμε κάθε φορά ως δέντρο το αντικείμενο που έχει κορμό, κλαδιά και φύλλα ή λύνουμε με παρόμοιο τρόπο προβλήματα πρόσθεσης που μας ζητούν να βρούμε το σύνολο δύο συλλογών αντικειμένων.

Από την άλλη, τα στοιχεία της γνώσης είναι κάθε μεμονωμένη πληροφορία που πρέπει να μαθευτεί. Είναι πολύ δύσκολο να καθοριστεί ο αριθμός των στοιχείων που αποτελούν κάθε γνώση, ακόμα και μέσω της ανάλυσής της, αφού αυτός ο αριθμός εξαρτάται τόσο από τα χαρακτηριστικά της όσο και από το επίπεδο της προηγούμενης γνώσης του κάθε ατόμου. Όσο περισσότερη είναι η προηγούμενη γνώση – εξειδίκευση του ατόμου τόσο πιο πολύπλοκα είναι τα στοιχεία που μπορεί να επεξεργαστεί (Paas, Renkl & Sweller, 2003. Sweller, 1994. Sweller, 2010). Παραδείγματος χάριν, ένας άπειρος μαθητής αντιμετωπίζει μια εξίσωση σαν πολλά στοιχεία που πρέπει να επεξεργαστεί ταυτόχρονα, ενώ ένας έμπειρος λύτης αντιμετωπίζει την εξίσωση σαν ένα μόνο στοιχείο, το οποίο μάλιστα μπορεί να αξιοποιήσει για να λύσει ακόμα συνθετότερα προβλήματα.

Τα σχήματα αποτελούν τη βασική μονάδα της γνώσης, αποθηκεύονται στη μακροπρόθεσμη μνήμη και εξηγούν τη δυνατότητα του ανθρώπου για την εκμάθηση όλο και συνθετότερων πληροφοριών, αφού οργανώνουν και «ενοποιούν» τα στοιχεία μιας πληροφορίας. Από τη στιγμή που θα κατασκευαστεί ένα σχήμα από τη σύνθεση των επιμέρους στοιχείων μιας πληροφορίας, μπορεί να λειτουργήσει σαν ένα και μόνο νέο στοιχείο, στη προσπάθεια του ατόμου να μάθει μια πολυπλοκότερη πληροφορία (Sweller, 1994). Με άλλα λόγια, μπορούμε να διακρίνουμε τα σχήματα σε κατώτερου και ανώτερου επιπέδου πολυπλοκότητας. Τα απλούστερα σχήματα αξιοποιούνται ως στοιχεία για την κατασκευή συνθετότερων σχημάτων κ.ό.κ. και έτσι μπορεί να εξηγηθούν οι ανεπτυγμένες πνευματικές ικανότητες του ανθρώπου (Sweller et al, 1998).

***Η αυτοματοποίηση διαδικασιών.*** Όταν κάποιος αποκτά μια νέα γνώση, η δυνατότητα αξιοποίησής της είναι αρκετά περιορισμένη και απαιτεί προσπάθεια και σκέψη. Φαίνεται, λοιπόν, πως ο τρόπος με τον οποίο το γνωστικό σύστημα επεξεργάζεται τις πληροφορίες μπορεί να είναι είτε αυτόματος είτε συνειδητός –

«ελεγχόμενος» από τη μνήμη εργασίας. Κάθε γνωστική δραστηριότητα που απαιτεί σκέψη και συνειδητό έλεγχο γίνεται με ελεγχόμενη από τη μνήμη εργασίας επεξεργασία. Αντίθετα, οι κατακτημένες γνώσεις, το ήδη γνωστό υλικό, μπορεί να επεξεργαστεί αυτόματα χωρίς συνειδητή προσπάθεια, επιτρέποντας παράλληλα στην προσοχή και στους πόρους της μνήμης εργασίας να επικεντρωθούν σε κάποιο άλλο γνωστικό έργο (Sweller et al., 1998). Μέσω του χρόνου και της εξάσκησης όλες οι γνωστικές διεργασίες μπορούν να αυτοματοποιηθούν (Sweller & Chandler, 1994).

Παραδείγματος χάριν, ένας μαθητής που μαθαίνει πρώτη φορά ανάγνωση διαβάζει αργά και καταβάλλοντας προσπάθεια, ενώ ένας ενήλικος διαβάζει με ταχύτητα και άνεση. Αντίστοιχα, ο μαθητής χρειάζεται να επικεντρώσει όλη του την προσοχή στην αποκωδικοποίηση προκειμένου να είναι εφικτή η ανάγνωση και έτσι δεν μπορεί να δώσει έμφαση στην κατανόηση. Αντίθετα, ο ενήλικος, ο οποίος έχει αυτοματοποιήσει τη διαδικασία της ανάγνωσης, μπορεί να δώσει έμφαση στην κατανόηση του κειμένου και των μηνυμάτων του (Leahy, 2009).

Η μετάβαση από την ελεγχόμενη στην αυτόματη επεξεργασία είναι μια αργή και βαθμιαία διαδικασία, ανάλογη με την εξάσκηση του ατόμου στο συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο. Η αυτοματοποίηση είναι βασικός γνωστικός μηχανισμός εφόσον επηρεάζει την απόκτηση νέων γνώσεων, την αποτελεσματικότερη χρήση των νέων γνώσεων (χωρίς αυτήν η επίδοση είναι πάντα αργή και ευάλωτη σε λάθη) αλλά και την ίδια την κατασκευή σχημάτων (Sweller, 1994).

***Οι λειτουργίες των γνωστικών μηχανισμών.*** Τα αυτοματοποιημένα σχήματα αποθηκεύονται στη μακροπρόθεσμη μνήμη. Η αποθήκευση των αυτοματοποιημένων σχημάτων οδηγεί στη συνέχεια στη μείωση του γνωστικού φορτίου για τη μνήμη εργασίας (Sweller, 1994. Sweller et al., 1998).

Όπως αναφέρθηκε, η μνήμη εργασίας μπορεί να επεξεργαστεί ταυτόχρονα περιορισμένο αριθμό στοιχείων. Τα σχήματα αυξάνουν την ποσότητα των πληροφοριών που μπορεί να επεξεργαστεί η μνήμη εργασίας «ενώνοντας» μεμονωμένα στοιχεία σε ένα νέο ενιαίο στοιχείο (Sweller, 1994. Sweller et al., 1998). Κάθε σχήμα μπορεί να ενσωματώνει μεγάλη ποσότητα στοιχείων και παρ' όλ' αυτά να αντιμετωπίζεται ως μία μονάδα πληροφορίας από τη μνήμη εργασίας. Δηλαδή, η μάθηση μέσω της κατασκευής και οργάνωσης σχημάτων μειώνει το γνωστικό φορτίο της μνήμης εργασίας μειώνοντας τον αριθμό των αλληλεπιδρώντων στοιχείων που αυτή πρέπει να επεξεργαστεί (Kirschner, 2002).

Μάλιστα, εάν το σχήμα είναι και αυτοματοποιημένο τότε το φορτίο που επιβάλλει στη μνήμη εργασίας είναι το ελάχιστο. Η αυτοματοποιημένη επεξεργασία απαιτεί ένα πολύ μικρό χώρο της μνήμης εργασίας και έτσι οι περισσότεροι γνωστικοί πόροι μπορεί να αφιερωθούν σε άλλες διαδικασίες, που θα διευκολύνουν την απόκτηση νέων γνώσεων, την κατανόηση πληροφοριών κτλ. (Sweller & Chandler, 1994. Sweller et al., 1998).

Για παράδειγμα, ο μαθητής που μαθαίνει ανάγνωση και διαβάζει μια τετρασύλλαβη λέξη μπορεί να την αντιμετωπίζει σαν οκτώ (περίπου) ξεχωριστά γράμματα ή ως τέσσερις συλλαβές, επιβαρύνοντας αρκετά τη μνήμη εργασίας του, ενώ, αντίθετα, ένας έμπειρος αναγνώστης την αντιμετωπίζει σαν ένα ενιαίο σύνολο. Έτσι, υπάρχει «χώρος» στη μνήμη εργασίας του για την επεξεργασία και άλλων δεδομένων ταυτόχρονα.

Επομένως, ο ρόλος των σχημάτων είναι διττός. Αφενός επιτρέπουν την αποθήκευση μεγάλου όγκου πληροφοριών στη μακροπρόθεσμη μνήμη, αφετέρου βελτιώνουν τη λειτουργία της μνήμης εργασίας, παρακάμπτοντας ως ένα βαθμό τους

περιορισμούς της για την επεξεργασία περιορισμένων στοιχείων ταυτοχρόνως, δημιουργώντας νέες μονάδες πληροφοριών (Sweller, 2011).

### **Το Γνωστικό Φορτίο**

Η βιολογικά δευτερεύουσα γνώση ποικίλει ως προς το βαθμό που επιβάλλει γνωστικό φορτίο στη μνήμη εργασίας. Το γνωστικό φορτίο αναφέρεται στην πνευματική προσπάθεια που πρέπει να καταβάλλει η μνήμη εργασίας προκειμένου να κατανοήσει μια πληροφορία (Sweller, 2011).

Υπάρχουν δύο βασικές πηγές γνωστικού φορτίου, οι οποίες και οι δύο εξαρτώνται από την αλληλεπιδραστικότητα των στοιχείων της γνώσης που πρέπει να αποκτηθεί. Η πρώτη πηγή αναφέρεται στη φύση της ίδιας της πληροφορίας και για το λόγο αυτό, το φορτίο ονομάζεται εγγενές ή εσωτερικό γνωστικό φορτίο. Η δεύτερη πηγή αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζεται η πληροφορία (π.χ. κατά τη διδασκαλία) και για το λόγο αυτό, το φορτίο ονομάζεται εξωγενές ή εξωτερικό γνωστικό φορτίο (Paas et al., 2010).

Το γνωστικό φορτίο εξηγεί σε μεγάλο βαθμό το λόγο για τον οποίο κάποια γνωστικά αντικείμενα και διαδικασίες δυσκολεύουν ιδιαίτερα τους μαθητές, ενώ άλλα όχι. Η ποσότητα των πληροφοριών που πρέπει να αποκτηθούν είναι μεν αναγκαίος αλλά όχι και επαρκής παράγοντας για να εξηγηθεί η δυσκολία, αφού υπάρχουν περιπτώσεις όπου υπάρχει μεγάλη ποσότητα πληροφοριών αλλά οι μαθητές κατακτούν εύκολα τη νέα γνώση (Sweller, 1994).

Ο διαχωρισμός του γνωστικού φορτίου σε εγγενές και εξωγενές, αλλά και σε συναφές όπως θα υποστηριχθεί στη συνέχεια, έχει μικρότερη σημασία για τους μαθητές, αφού σε κάθε περίπτωση θα δυσκολευτούν να αποκτήσουν μία νέα γνώση, αλλά έχει



μεγάλη σημασία για τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι θα πρέπει να λάβουν υπόψη το κάθε γνωστικό φορτίο ξεχωριστά προκειμένου να σχεδιάσουν μια αποτελεσματική διδασκαλία και να διευκολύνουν την απόκτηση της νέας γνώσης από τους μαθητές (Sweller, 1994).

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφερθεί πως σε έρευνες φάνηκε πως τόσο το πολύ υψηλό γνωστικό φορτίο όσο και το πολύ χαμηλό γνωστικό φορτίο επηρεάζουν αρνητικά τη μάθηση. Επομένως, σε διδακτικά αντικείμενα με χαμηλές απαιτήσεις επεξεργασίας από τη μνήμη εργασίας θα πρέπει να αυξηθεί το γνωστικό φορτίο (και συγκεκριμένα το συναφές γνωστικό φορτίο), ώστε να κινητοποιείται ο μαθητής να εμπλακεί στη διδακτική διαδικασία. Αντίθετα, σε έργα με υψηλές απαιτήσεις επεξεργασίας από τη μνήμη εργασίας το γνωστικό φορτίο θα πρέπει να μειωθεί, προκειμένου να μη δυσχεράνει την απόκτηση νέας γνώσης (Paas et al., 2004).

**Το Εγγενές Γνωστικό Φορτίο.** Το εγγενές γνωστικό φορτίο αναφέρεται στην πολυπλοκότητα της γνώσης που πρέπει να αποκτηθεί, χωρίς να έχει σημασία ο τρόπος με τον οποίο θα αποκτηθεί (Paas, Renkl & Sweller, 2003. Beckmann, 2010). Βασικό στοιχείο είναι πως το εγγενές γνωστικό φορτίο μιας συγκεκριμένης πληροφορίας δεν μπορεί να αλλάξει, ενώ παράλληλα εξαρτάται και από την προηγούμενη γνώση – εξειδίκευση του ατόμου.

Το εγγενές γνωστικό φορτίο καθορίζεται από τον αριθμό των στοιχείων που πρέπει να επεξεργαστεί παράλληλα η μνήμη εργασίας (αλληλεπιδραστικότητα των στοιχείων), προκειμένου να κατανοήσει και στη συνέχεια να αποθηκεύσει την πληροφορία. Όλα τα επιμέρους στοιχεία της πληροφορίας, λοιπόν, πρέπει να επεξεργαστούν ταυτόχρονα και όχι σειριακά, προκειμένου αυτή να αποκτήσει νόημα. Άρα, το εγγενές γνωστικό φορτίο προκαλείται από την ανάγκη για ταυτόχρονη

επεξεργασία πολλών στοιχείων από την περιορισμένη μνήμη εργασίας (Sweller, 1994. Sweller & Chandler, 1994. Sweller et al., 1998. Sweller, 2010).

Για παράδειγμα, για να μπορέσει ένας μαθητής να λύσει μια μαθηματική εξίσωση πρέπει να επεξεργαστεί ταυτόχρονα όλα τα δεδομένα, καθώς εάν αγνοήσει κάποιο από αυτά (ή προσπαθήσει να τα επεξεργαστεί το ένα μετά το άλλο) δε θα καταφέρει να επιλύσει το πρόβλημα.

Όταν τα στοιχεία μιας πληροφορίας μπορούν να γίνουν κατανοητά το ένα ξεχωριστά από το άλλο, η αλληλεπιδραστικότητά τους είναι χαμηλή και αντίστοιχα χαμηλό είναι και το εγγενές γνωστικό φορτίο. Παραδείγματος χάριν, μπορούμε να μάθουμε ξεχωριστά την ορθογραφία ενός μεγάλου καταλόγου λέξεων, χωρίς να σχετίζεται η μία με την άλλη. Η δυσκολία αυτής της δραστηριότητας οφείλεται στην ποσότητα της πληροφορίας και όχι στην αλληλεπιδραστικότητα των στοιχείων. Αντίθετα, όταν τα στοιχεία αλληλεπιδρούν και σχετίζονται μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε να πρέπει να επεξεργαστούν όλα μαζί προκειμένου να υπάρξει κατανόησή τους, το εγγενές γνωστικό φορτίο είναι υψηλό (Sweller, 1994. Leahy, 2009. Sweller, 2010).

Με άλλα λόγια, ένα γνωστικό έργο μπορεί να είναι δύσκολο για δύο λόγους. Πρώτον, γιατί πρέπει να αφομοιωθεί ένας μεγάλος αριθμός στοιχείων. Η δυσκολία προκύπτει όχι από την περιορισμένη ικανότητα επεξεργασίας των στοιχείων από τη μνήμη εργασίας αλλά από την ανάγκη να αποθηκευτούν στη μακροπρόθεσμη μνήμη πολλές πληροφορίες σε σύντομο χρονικό διάστημα. Το γνωστικό φορτίο είναι χαμηλό. Δεύτερον, το γνωστικό έργο είναι δύσκολο γιατί πρέπει πολλά στοιχεία να αφομοιωθούν ταυτόχρονα καθώς αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η δυσκολία προκύπτει από την περιορισμένη ικανότητα επεξεργασίας τους από τη μνήμη εργασίας και το γνωστικό φορτίο είναι υψηλό (Sweller & Chandler, 1994. Sweller, 2010).

Δεδομένου ότι το εγγενές γνωστικό φορτίο, όπως αναφέρθηκε, είναι δεδομένο για κάθε γνωστικό έργο, αφού καθορίζεται από τον αριθμό των αλληλεπιδρώντων στοιχείων της πληροφορίας, οι μόνοι τρόποι για να μεταβληθεί είναι είτε να αλλάξει το ίδιο το γνωστικό έργο είτε να αυξηθεί σταδιακά το επίπεδο εξειδίκευσης του μαθητή (Sweller, 2010).

**Το Εξωγενές Γνωστικό Φορτίο.** Το εξωγενές γνωστικό φορτίο αναφέρεται στον τρόπο παρουσίασης των πληροφοριών και όχι στην εσωτερική πολυπλοκότητα της γνώσης και έτσι τα αλληλεπιδρώντα στοιχεία μπορεί να μειωθούν αλλάζοντας το διδακτικό σχεδιασμό. Η αύξησή του οφείλεται στο γεγονός ότι κάποιες διδακτικές μέθοδοι αναγκάζουν τους μαθητές να επεξεργαστούν πολλά στοιχεία ταυτόχρονα, ενώ κάτι τέτοιο μπορεί να μην επιβάλλεται καν από την ίδια την πληροφορία (Paas, Renkl & Sweller, 2003. Sweller, 1994. Paas et al., 2010).

Σε πολλές περιπτώσεις φαίνεται δύσκολο να διευκρινιστεί εάν το γνωστικό φορτίο ενός γνωστικού έργου είναι εγγενές ή εξωγενές. Η αλληλεπιδραστικότητα των στοιχείων, η οποία καθορίζει, εκτός από το εγγενές, και το εξωγενές φορτίο μπορεί να βοηθήσει στη διάκριση των δύο τύπων φορτίου. Εάν τα αλληλεπιδρώντα στοιχεία μπορούν να μειωθούν χωρίς να αλλάξει η φύση της πληροφορίας, τότε το γνωστικό φορτίο είναι εξωγενές, ενώ εάν δεν μπορούν να μειωθούν, τότε το γνωστικό φορτίο είναι εγγενές (Sweller, 2010).

Εάν είναι παράλληλα υψηλό το εξωγενές και το εγγενές γνωστικό φορτίο, τότε μπορεί να υπάρξει «υπερφόρτωση» της μνήμης εργασίας και να παρεμποδιστεί σημαντικά η μάθηση. Ωστόσο, εάν το εγγενές γνωστικό φορτίο είναι χαμηλό, συνήθως το εξωγενές γνωστικό φορτίο των διδακτικών σχεδιασμών δεν μπορεί να επιβαρύνει τόσο τη μνήμη εργασίας ώστε να δυσχεραίνει τη μάθηση (Sweller & Chandler, 1994).

**Το συναφές γνωστικό φορτίο.** Το συναφές γνωστικό φορτίο αντανακλά τη γνωστική προσπάθεια του ατόμου που στοχεύει στη διαχείριση του εγγενούς γνωστικού φορτίου και που συμβάλλει στην κατασκευή των σχημάτων (Beckmann, 2010). Το συναφές γνωστικό φορτίο αποδεικνύεται ιδιαίτερα σημαντικό σε πολύπλοκα γνωστικά έργα, στα οποία η κατασκευή σχημάτων εξαρτάται από τις υψηλές αλληλεπιδράσεις των στοιχείων της πληροφορίας, δηλαδή από ένα υψηλό εγγενές φορτίο (Kirschner, 2002. Paas et al., 2010).

Το συναφές γνωστικό φορτίο εξαρτάται από τις προηγούμενες γνώσεις του μαθητή, δηλαδή το επίπεδο εξειδίκευσής του πάνω σε ένα συγκεκριμένο γνωστικό έργο. Έτσι, το γνωστικό φορτίο που είναι συναφές για έναν μαθητή με χαμηλό επίπεδο προηγούμενων γνώσεων μπορεί να είναι εξωγενές για έναν «έμπειρο» μαθητή. Δηλαδή, πληροφορίες που θα βοηθούσαν την κατασκευή σχημάτων από έναν «άπειρο» μαθητή, μπορεί να είναι πλεονάζουσες και να εμποδίζουν τον εμπλουτισμό των σχημάτων από έναν «έμπειρο» μαθητή (Paas et al., 2004).

Ένας σωστός διδακτικός σχεδιασμός μειώνει το εξωγενές γνωστικό φορτίο, αυξάνοντας παράλληλα το συναφές γνωστικό φορτίο (εφόσον απελευθερώνει πόρους της μνήμης εργασίας). Η θεωρία υποστηρίζει πως το χαμηλό εξωγενές γνωστικό φορτίο μπορεί να ενισχύσει ακόμα περισσότερο τη μάθηση, εάν συνδυαστεί περαιτέρω με την ενθάρρυνση των μαθητών να εμπλακούν σε γνωστικές διεργασίες που σχετίζονται άμεσα με την κατασκευή των σχημάτων (Paas, Renkl & Sweller, 2003. Paas et al., 2004). Αυτές οι γνωστικές διεργασίες αναφέρονται στο συναφές γνωστικό φορτίο (Paas et al., 2010).

Βέβαια, για να εμφανιστεί θετική επίδραση πρέπει το σύνολο και των τριών φορτίων να μην ξεπερνά τις δυνατότητες της μνήμης εργασίας (Sweller et al., 1998. Kirschner, 2002. Beckmann, 2010).

Για παράδειγμα, όπως θα αναλυθεί στη συνέχεια, τα επιλυμένα παραδείγματα είναι μια αποτελεσματική διδακτική τεχνική, που μειώνει το εξωγενές γνωστικό φορτίο. Ωστόσο, οι μαθητές συχνά τα παραβλέπουν. Διδακτικές μέθοδοι, λοιπόν, όπως οι ερωτήσεις ή η ασκήσεις συμπλήρωσης στοιχείων στα παραδείγματα, αυξάνουν το συναφές γνωστικό φορτίο, επειδή κατευθύνουν την προσοχή των μαθητών στη μελέτη των παραδειγμάτων (Sweller, 2011).

Τέλος, έχει φανεί πως η μείωση του γνωστικού φορτίου δεν είναι απαραίτητα θετική, εάν δεν υπερβαίνονται οι περιορισμοί της μνήμης εργασίας. Εφόσον το γνωστικό φορτίο είναι διαχειρίσιμο, σημασία έχει η πηγή του. Εάν το γνωστικό φορτίο είναι εξωγενές και παρεμποδίζει την κατασκευή σχημάτων, πρέπει να μειωθεί. Όμως, εάν το φορτίο σχετίζεται με γνωστικές διαδικασίες που ενισχύουν την κατασκευή σχημάτων, είναι δηλαδή συναφές, θα έχει θετικά αποτελέσματα στη μάθηση (Paas et al., 2004). Με άλλα λόγια, πρωταρχικός στόχος δεν είναι τόσο η μείωση του γνωστικού φορτίου αλλά η βελτιστοποίησή του προς όφελος της απόκτησης νέων γνώσεων. Αυτό προϋποθέτει τη μείωση του εξωγενούς φορτίου, την αύξηση του συναφούς φορτίου και τη διατήρηση του συνδυασμού των δύο μαζί με το εγγενές γνωστικό φορτίο της πληροφορίας σε επίπεδο διαχειρίσιμο από τη μνήμη εργασίας (Kirschner et al., 2011).

**Μέτρηση του Γνωστικού Φορτίου.** Η μέτρηση του γνωστικού φορτίου που επιβάλλουν στη μνήμη εργασίας διάφορες δραστηριότητες και γνωστικά έργα δεν είναι δυνατή χωρίς να συνυπολογίζεται η προηγούμενη γνώση του κάθε ατόμου.

Λαμβάνοντας υπόψη την προϋπάρχουσα γνώση, μπορεί να γίνει μία κατά προσέγγιση εκτίμηση του αριθμού των αλληλεπιδρώντων στοιχείων της δραστηριότητας και κατ' επέκταση του εγγενούς γνωστικού φορτίου της, για το συγκεκριμένο όμως άτομο ή γενικά για τα άτομα που βρίσκονται σε ένα ίδιο επίπεδο εξειδίκευσης. Επομένως, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι το γνωστικό φορτίο καθορίζεται από την

αλληλεπίδραση ανάμεσα στη φύση της πληροφορίας και στο βαθμό εξειδίκευσης – προηγούμενων γνώσεων του εκάστοτε ατόμου (Sweller et al., 1998).

Εκτός αυτών, όμως, έχει φανεί και ερευνητικά πως ο βαθμός του γνωστικού φορτίου ενός γνωστικού έργου επηρεάζεται και από μια επιπλέον διάσταση, τη πνευματική προσπάθεια που συνειδητά καταβάλλει το άτομο για το συγκεκριμένο έργο, μετά από αξιολόγηση της σπουδαιότητας ενασχόλησης με αυτό το γνωστικό έργο ανάλογα με τη σημασία που θα έχει για τον ίδιο η απόκτηση μιας νέας γνώσης μέσα από αυτό (Kirschner, 2002).

Όπως γίνεται κατανοητό, εξαιτίας των πρακτικών δυσκολιών, δεν έχει αναπτυχθεί μία απόλυτη αποδεκτή μέθοδος για τη μέτρηση του γνωστικού φορτίου. Οι Paas & Merriënboer (1993), πρότειναν μια μέθοδο που συγκρίνει τους τυπικούς βαθμούς (z-τιμές) μεταξύ της επίδοσης των μαθητών και των απαντήσεών τους σε ένα ερωτηματολόγιο σχετικά με την πνευματική προσπάθεια. Επίσης, η μεθόδός τους συνδυάζει ψυχο-φυσιολογικές μετρήσεις (Paas & Merriënboer, 1993).

### **Μέθοδοι της Θεωρίας του Γνωστικού Φορτίου**

Η θεωρία του γνωστικού φορτίου έχει καταλήξει σε διάφορες διδακτικές μεθόδους που μειώνουν το γνωστικό φορτίο και διευκολύνουν τη μάθηση. Μάλιστα, οι διδακτικές αυτές μέθοδοι ελέγχονται πειραματικά για να φανεί η αποτελεσματικότητά τους.

Οι περισσότερες σχετίζονται με το εξωγενές γνωστικό φορτίο, καθώς, όπως αναφέρθηκε, το εγγενές γνωστικό φορτίο σχετίζεται με τη φύση της πληροφορίας και τον αριθμό των αλληλεπιδρώντων στοιχείων, και έτσι μπορεί να αλλάξει μόνο

τροποποιώντας την ίδια την πληροφορία, τους διδακτικούς στόχους ή τα επίπεδα εξειδίκευσης των μαθητών (Sweller, 2011).

Ωστόσο, ένας περιορισμός που αναφέρεται συχνά ως κριτική ενάντια στη θεωρία είναι το γεγονός πως οι πειραματικοί σχεδιασμοί δε λαμβάνουν επαρκώς υπόψη τους τις ατομικές διαφορές των μαθητών, όπως η παρώθηση, το στυλ μάθησης ή το γένος παραδείγματος χάριν (Leahy, 2009). Τα στοιχεία αυτά είναι ιδιαίτερα σημαντικά, καθώς επηρεάζουν τη πνευματική προσπάθεια που καταβάλλει ένα άτομο για ένα γνωστικό έργο και κατά συνέπεια τις γνώσεις που αποκτώνται. Η δέσμευση στην καταβολή προσπάθειας, σύμφωνα με τους Paas et al. (2005), εξαρτάται από την αντιλαμβανόμενη χρησιμότητα της νέας γνώσης, τη σημασία ολοκλήρωσης της δραστηριότητας, την αίσθηση αυτό-αποτελεσματικότητας κτλ. Παρ' όλ' αυτά, έχουν γίνει κάποιες μελέτες που προσπαθούν να συμπεριλάβουν και τη διάσταση αυτή για τον καθορισμό της αποτελεσματικότητας των μεθόδων της θεωρίας.

Σε κάθε περίπτωση, απαραίτητη προϋπόθεση για την εμφάνιση των φαινομένων της θεωρίας και την αποτελεσματικότητα των μεθόδων της θεωρείται το υψηλό εγγενές γνωστικό φορτίο. Εάν το εγγενές γνωστικό φορτίο είναι χαμηλό, τότε οι πληροφορίες μπορούν να επεξεργαστούν από τη μνήμη εργασίας, ακόμα και σε συνδυασμό με ένα υψηλό εξωγενές γνωστικό φορτίο (Sweller & Chandler, 1994).

**Η επίδραση της ποικιλίας (The variability effect).** Το φαινόμενο επίδρασης της ποικιλίας, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους της θεωρίας, οφείλεται στην αύξηση και όχι στη μείωση του γνωστικού φορτίου, και μάλιστα του εγγενούς γνωστικού φορτίου. Αναφέρεται ουσιαστικά στην ενασχόληση των μαθητών με μια ποικιλία διαφορετικών προβλημάτων, τα οποία δεν διαφέρουν μόνο στους αριθμούς που περιλαμβάνουν, αλλά και στον τρόπο με τον οποίο πρέπει να επιλυθούν. Εφόσον υπάρχει επαρκής χώρος στη

μνήμη εργασίας για τη διαχείριση όλων των αλληλεπιδρώντων στοιχείων, οι μαθητές θα ωφεληθούν από τους διαφορετικούς τύπους προβλημάτων, αφού θα αποκτήσουν πιο σύνθετες γνώσεις (Paas & Merrienboer, 1994. Sweller, 2011).

**Η επίδραση των απομονωμένων στοιχείων (The isolated elements effect).** Η μέθοδος των απομονωμένων στοιχείων προτιμάται σε πληροφορίες με υψηλό γνωστικό φορτίο, που μπορεί να υπερβαίνει τους περιορισμούς της μνήμης εργασίας. Τότε, τα αλληλεπιδρώντα στοιχεία παρουσιάζονται το ένα απομονωμένο από το άλλο, με σκοπό την αρχική επεξεργασία τους και την κατασκευή απλών σχημάτων. Παρά το γεγονός ότι με την απομόνωση των στοιχείων δεν μπορεί να υπάρξει πλήρης κατανόηση, η μέθοδος αυτή επιτρέπει τη σταδιακή αύξηση των επιπέδων εξειδίκευσης των μαθητών στο συγκεκριμένο θέμα έως ότου μπορούν να διαχειριστούν την πληροφορία ως σύνολο και να την κατανοήσουν (Pollock, Chandler & Sweller, 2002. Blayney, Kalyuga & Sweller, 2010).

**Η επίδραση των προβλημάτων ανοιχτού στόχου (The goal-free effect).** Ήδη οι πρώτες έρευνες της θεωρίας έδειξαν πως διδακτικές μέθοδοι μείωσης του εξωγενούς γνωστικού φορτίου, όπως τα προβλήματα ανοιχτού στόχου, είναι περισσότερο αποτελεσματικές για τη μάθηση πολύπλοκων γνωστικών έργων σε σχέση με τη συμβατική μέθοδο της επίλυσης προβλημάτων (Paas et al., 2004). Τα προβλήματα ανοιχτού στόχου δεν οδηγούν στη διατύπωση μιας συγκεκριμένης ερώτησης αλλά ζητούν από τους μαθητές να υπολογίσουν όσα περισσότερα στοιχεία μπορούν με τα δοθέντα δεδομένα. Για παράδειγμα, τους δίνεται ένα σύστημα ευθειών και ζητείται να υπολογίσουν όσες περισσότερες γωνίες μπορούν.

Σύμφωνα με τη συμβατική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων, τη μέθοδο της δοκιμής και της πλάνης (means-ends analysis), οι μαθητές πρέπει ταυτόχρονα να



εξετάσουν την παρούσα κατάσταση του προβλήματος (τα δεδομένα), την κατάσταση στόχο (το ζητούμενο), τις διαφορές μεταξύ των δύο αυτών καταστάσεων και τρόπους ώστε να επιλύσουν αυτή τη διαφορά. Όλα τα στοιχεία αυτά αλληλεπιδρούν οδηγώντας σε υψηλό εξωγενές γνωστικό φορτίο. Αντίθετα, ένα πρόβλημα ανοιχτού στόχου απαιτεί την ταυτόχρονη εξέταση δύο μόνο στοιχείων, της παρούσας κατάστασης του προβλήματος και έναν οποιοδήποτε τρόπο για να αλλάξει αυτή η κατάσταση, οπότε και μειώνεται το εξωγενές γνωστικό φορτίο. Βέβαια, η μέθοδος αυτή χαρακτηρίζεται από περιορισμούς, αφού μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε περιπτώσεις όπου μπορούν να υπολογιστούν πολλές μεταβλητές από τα δεδομένα ενός προβλήματος (Sweller, 1988).

**Η επίδραση της διαίρεσης της προσοχής (The split-attention effect).** Σε πολλές περιπτώσεις, ειδικά σε γεωμετρικά προβλήματα, οι πληροφορίες παρουσιάζονται τόσο σε κειμενική μορφή όσο και σε διάγραμμα και οι μαθητές απαιτείται να συνδυάσουν τις δύο πληροφορίες. Ωστόσο, η διαδικασία αυτή απαιτεί να ψάξουν τόσο στο κείμενο όσο και στο διάγραμμα τα δεδομένα, να τα συνδυάσουν μεταξύ τους και στη συνέχεια να τα χρησιμοποιήσουν για να επιλύσουν το πρόβλημα. Αυτό οδηγεί σε ένα υψηλό εξωγενές γνωστικό φορτίο, αφού απαιτείται η προσοχή των μαθητών να μοιράζεται μεταξύ κειμένου και διαγράμματος. Έχει φανεί πως η ενσωμάτωση των κειμενικών πληροφοριών μέσα στο διάγραμμα ή η σύνδεση τους με κάποιο σύμβολο, όπως τα βελάκια, μειώνει το εξωγενές γνωστικό φορτίο και διευκολύνει τη μάθηση (Chandler & Sweller, 1992. Cierniak, Scheiter & Gerjets, 2009).

Αντίστοιχα, το ίδιο συμβαίνει και σε άλλες περιπτώσεις, όπου για παράδειγμα οι μαθητές πρέπει να διαβάσουν ένα κείμενο και να διακόπτουν, ώστε να ψάξουν σε άλλο σημείο της σελίδας, για τον ορισμό κάποιας άγνωστης λέξης, και πάλι με αποτέλεσμα τη διαίρεση της προσοχής (Yeung, Jin & Sweller, 1998).

Βέβαια, σε κάθε περίπτωση για να εμφανίζεται η αρνητική επίδραση της διαίρεσης της προσοχής πρέπει και οι δύο διαφορετικές πηγές πληροφορίας να είναι απαραίτητες για την κατανόηση της πληροφορίας. Σε διαφορετική περίπτωση, όταν για παράδειγμα, και στα δύο παρουσιάζονται οι ίδιες πληροφορίες, το φαινόμενο της διαίρεσης της προσοχής δεν ισχύει, αλλά εμφανίζεται το φαινόμενο του πλεονασμού, όπως θα συζητηθεί στη συνέχεια (Sweller, 2011).

**Η επίδραση του τρόπου παρουσίασης των πληροφοριών (The modality effect).** Σε περιπτώσεις όπου και οι δύο πηγές είναι απαραίτητες για την κατανόηση των πληροφοριών, αντί να ενσωματωθούν σε μία πηγή, υπάρχει και η μέθοδος της παρουσιάσής τους με διαφορετικό τρόπο. Για παράδειγμα, η μία πηγή μπορεί να είναι γραπτή ενώ η άλλη προφορική. Αυτή η μέθοδος θεωρείται πως μπορεί να αυξήσει την αποτελεσματικότητα της μνήμης εργασίας (Mousavi, Low & Sweller, 1995).

Σύμφωνα με το μοντέλο της μνήμης εργασίας του Baddeley, η μνήμη εργασίας περιλαμβάνει ένα ακουστικό και ένα οπτικό κανάλι, που επεξεργάζονται τον προφορικό λόγο και το οπτικό υλικό αντίστοιχα. Με τη μέθοδο αυτή, αξιοποιούνται και τα δύο κανάλια της μνήμης εργασίας και έτσι αυξάνεται η χωρητικότητά της. Για παράδειγμα, όταν χρησιμοποιείται διάγραμμα και κείμενο, το κείμενο μπορεί να παρουσιαστεί προφορικά, ώστε να επεξεργαστεί από το ακουστικό κανάλι, και να αφιερωθούν όλοι οι διαθέσιμοι πόροι του οπτικού καναλιού στην επεξεργασία του διαγράμματος (Mousavi, Low & Sweller, 1995).

**Η επίδραση του πλεονασμού (The redundancy effect).** Το φαινόμενο της επίδρασης του πλεονασμού εμφανίζεται όταν πλεονάζουσες πληροφορίες προστίθενται στις απαραίτητες και δυσχεραίνουν την απόκτηση νέας γνώσης. Κατά συνέπεια, χωρίς να είναι αναγκαίο, αυξάνεται ο αριθμός των αλληλεπιδρώντων στοιχείων που πρέπει να

επεξεργαστεί ο μαθητής και κατ' επέκταση το εξωγενές γνωστικό φορτίο. Επομένως, η αφαίρεση τέτοιων πλεονάζοντων στοιχείων θα μειώσει το εξωγενές φορτίο και θα διευκολύνει την κατανόηση και τη μάθηση (Sweller & Chandler, 1994).

**Η αντίστροφη επίδραση της εξειδίκευσης (The expertise reversal effect).** Το φαινόμενο της αντίστροφης επίδρασης της εξειδίκευσης επηρεάζεται από την αύξηση των επιπέδων προηγούμενης γνώσης των μαθητών και της επακόλουθης κατασκευής σχημάτων, που μειώνουν τα αλληλεπιδρώντα στοιχεία μιας πληροφορίας. Αυτό σημαίνει πως ένας διδακτικός σχεδιασμός που μπορεί να ενδείκνυται για άπειρους μαθητές, δεν είναι το ίδιο αποτελεσματικός για έμπειρους μαθητές. Το φαινόμενο της αντίστροφης επίδρασης της εξειδίκευσης σχετίζεται άμεσα με το φαινόμενο του πλεονασμού. Οι άπειροι μαθητές μπορεί να έχουν ανάγκη, για παράδειγμα, κάποιο συμπληρωματικό υλικό για να κατανοήσουν μια πληροφορία, ή να ευνοούνται από την κατάτμηση της πληροφορίας σε μικρά τμήματα. Όμως, το ίδιο υλικό, ή η ίδια διδακτική παρέμβαση, μπορεί να είναι πλεονάζουσα για τους έμπειρους μαθητές και έτσι να επιβάλλει εξωγενές γνωστικό φορτίο που δυσχεραίνει τη μάθησή τους (Kalyuga, Ayres, Chandler & Sweller, 2003).

**Η επίδραση της φαντασίας (The imagination effect).** Το φαινόμενο της επίδρασης της φαντασίας σχετίζεται με το φαινόμενο της αντίστροφης επίδρασης της εξειδίκευσης. Εμφανίζεται όταν ζητείται από τους μαθητές να φανταστούν τη λύση ενός προβλήματος ή την εξέλιξη μιας διαδικασίας. Στην περίπτωση όπου οι προηγούμενες γνώσεις ενός μαθητή είναι αρκετές, το να φανταστεί τη λύση ενός προβλήματος μπορεί να είναι πιο αποτελεσματικό από το να μελετήσει, για παράδειγμα, ένα επιλυμένο παράδειγμα αυτού του τύπου προβλήματος. Αυτό συμβαίνει διότι μπορεί να συγκρατήσει όλα τα απαραίτητα στοιχεία, ενσωματωμένα ήδη σε σχήματα, στη μνήμη εργασίας και να τα διαχειριστεί προκειμένου να φανταστεί τη λύση. Αντίθετα, ένας πιο

άπειρος μαθητής δεν μπορεί να συγκρατήσει όλα τα μεμονωμένα αλληλεπιδρώντα στοιχεία στη μνήμη εργασίας και έτσι δυσκολεύεται να φανταστεί τη λύση. Για τους άπειρους μαθητές η μελέτη του υλικού είναι πιο ευεργετική για τη μάθηση μιας νέας πληροφορίας σε σύγκριση με το να φανταστούν την πορεία ενός προβλήματος ή μιας διαδικασίας (Leahy & Sweller, 2008).

**Η επίδραση της προσωρινά προσβάσιμης/διαθέσιμης πληροφορίας (The transient information effect).** Το φαινόμενο αυτό μελετήθηκε σχετικά πρόσφατα, εξαιτίας της σχέσης του με τη χρήση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση. Συχνά, οι πληροφορίες που παρουσιάζονται στους μαθητές κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας με τη χρήση τεχνολογικών μέσων, όπως βίντεο, κινούμενες εικόνες κτλ. είναι προσβάσιμες για ένα περιορισμένο χρονικό διάστημα και στη συνέχεια χάνονται ώστε να εμφανιστούν νέες. Ως αποτέλεσμα, ο μαθητής δεν μπορεί να ανατρέξει εύκολα σε αυτές, όπως θα έκανε σε ένα γραπτό κείμενο. Επομένως, οι πληροφορίες πρέπει να συγκρατηθούν στη μνήμη εργασίας. Εάν το εγγενές γνωστικό φορτίο είναι υψηλό, η παρουσίαση πληροφοριών για περιορισμένο χρονικό διάστημα έχει αρνητικές συνέπειες στη μάθηση, καθώς η διατήρηση και επεξεργασία του υψηλών απαιτήσεων υλικού από τη μνήμη εργασίας είναι ένα δύσκολο έργο, το οποίο οι μαθητές ενδέχεται να μην μπορούν να διεκπεραιώσουν (Leahy & Sweller, 2011).

### **Η Μέθοδος των Επιλυμένων Παραδειγμάτων**

Τα επιλυμένα παραδείγματα έχουν αποδειχθεί μια αποτελεσματική μέθοδος για την ενίσχυση της μάθησης μαθητών που έρχονται σε επαφή με νέο υλικό, και έτσι έχουν περιορισμένα γνωστικά σχήματα σχετικά με το περιεχόμενό του (van Merriënboer &

Sluijsmans, 2009. Sweller et al., 2011). Η χρήση των επιλυμένων παραδειγμάτων σε μαθητές με περιορισμένη εξειδίκευση οδηγεί στη μείωση του εξωγενούς γνωστικού φορτίου και παράλληλη αύξηση του συναφούς γνωστικού φορτίου (Kirschner, 2002. Salden et al., 2010. van Gog & Rummel, 2010. van Merriënboer & Sluijsmans, 2009).

Ήδη οι πρώτες έρευνες της θεωρίας του γνωστικού φορτίου έδειξαν ότι η μελέτη επιλυμένων παραδειγμάτων είναι περισσότερο αποτελεσματική για την καλλιέργεια δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος σε σχέση με τη συμβατική μέθοδο επίλυσης, αυτής της δοκιμής και πλάνης (Paas et al., 2004).

Η μέθοδος αυτή έχει φανεί ότι οδηγεί σε ενισχυμένα μαθησιακά αποτελέσματα όταν εφαρμόζεται σε μαθησιακά αντικείμενα που απαιτούν τη χρήση αλγορίθμων ή τυποποιημένων βημάτων επίλυσης προβλημάτων, όπως τα μαθηματικά, οι φυσικές επιστήμες, αλλά και πιο αδόμητα μαθησιακά αντικείμενα, όπως οι ανθρωπιστικές επιστήμες (Carroll, 1994. Sweller et al., 2011).

Παραδείγματος χάριν, ο Carroll (1994) διαπίστωσε πως τα επιλυμένα παραδείγματα οδήγησαν σε ανώτερη επίδοση των μαθητών που μελέτησαν προβλήματα άλγεβρας ως επιλυμένα παραδείγματα και στη συνέχεια κλήθηκαν να τα επιλύσουν. Με λιγότερη εξάσκηση επίλυσης οι μαθητές αυτοί έκαναν λιγότερα λάθη, ολοκλήρωσαν τις δραστηριότητές τους σε λιγότερο χρόνο και είχαν ανάγκη μειωμένης καθοδήγησης από το δάσκαλο. Επίσης, οι Ward & Sweller (1990) εφάρμοσαν τη μέθοδο των επιλυμένων παραδειγμάτων σε προβλήματα φυσικής, και συγκεκριμένα οπτικής, και διαπίστωσαν ότι, όταν τα παραδείγματα είναι δομημένα με τέτοιο τρόπο, ώστε να προσανατολίζουν την προσοχή των μαθητών και να μειώνουν το εξωγενές γνωστικό φορτίο, είναι αποτελεσματικότερα από τη συμβατική μέθοδο επίλυσης προβλήματος για την καλλιέργεια δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων.

Τα επιλυμένα παραδείγματα βοηθούν τους μαθητές με δύο τρόπους. Αφενός, βοηθούν στην οργάνωση των πληροφοριών, αφού παρουσιάζουν τον ενδεδειγμένο τρόπο επίλυσης ενός προβλήματος σε βήματα. Αφετέρου, αυτά τα επιλυμένα βήματα οδηγούν στην κατασκευή των απαραίτητων γνωστικών σχημάτων, προκειμένου οι μαθητές να αποκτήσουν τις δεξιότητες ανεξάρτητης επίλυσης προβλημάτων και να οδηγηθούν, μάλιστα, στην επίλυση και πιο πολύπλοκων προβλημάτων (Kopp, Stark, Kühne-Eversmann, & Fischer, 2009. van Merriënboer & Sluismans, 2009).

Επίσης, έχει αποδειχθεί πως τα επιλυμένα παραδείγματα βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν και να μάθουν να εφαρμόζουν νέες στρατηγικές και τρόπους επίλυσης προβλημάτων. Το στοιχείο αυτό είναι βασικό για τη μεταφορά της αποκτηθείσας νέας γνώσης στην επίλυση άλλων προβλημάτων γενικότερα (Stark, Mandl, Gruber & Renkl, 2002).

Έχει φανεί ερευνητικά ότι όσο περισσότερο περιορισμένη είναι η προηγούμενη γνώση των μαθητών πάνω στο συγκεκριμένο θέμα, το οποίο πραγματεύονται τα επιλυμένα παραδείγματα, τόσο περισσότερο θα επωφεληθούν από αυτά (McLaren et al., 2006. Sweller, 2011). Το εύρημα αυτό συσχετίζεται με τη χρήση από την πλευρά των μαθητών της στρατηγικής της δοκιμής και πλάνης, όταν δεν έχουν στη διάθεσή τους επιλυμένα παραδείγματα. Οι μαθητές αναγκάζονται να δοκιμάσουν διαφορετικές λύσεις, ώστε να διαπιστώσουν από μόνοι τους ποια από αυτές θα αποδειχθεί κατάλληλη για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Έτσι, υπάρχει αύξηση του γνωστικού φορτίου, με αποτέλεσμα να παρεμποδίζεται η κατανόηση και η κατασκευή σχημάτων και κατ' επέκταση η ίδια η μάθηση (Sweller et al., 2011).

Το γεγονός, ότι η αποτελεσματικότητα των επιλυμένων παραδειγμάτων μειώνεται όσο αυξάνεται η εξειδίκευση των μαθητών, σχετίζεται με το ότι τα επιλυμένα

παραδείγματα λειτουργούν πλέον ως πλεονάζον υλικό, όταν η προηγούμενη γνώση των μαθητών για ένα συγκεκριμένο ζήτημα αυξάνεται. Έτσι, η μέθοδος της επίλυσης προβλήματος αποδεικνύεται χρησιμότερη και για το λόγο αυτό σε μαθητές με αυξημένα επίπεδα εξειδίκευσης (Kalyuga, Chandler, Tuovinen & Sweller, 2001. Renkl & Atkinson, 2003).

Επίσης, η έρευνα πάνω στα επιλυμένα παραδείγματα έχει εγείρει συζήτηση σχετικά με το ζήτημα της καθοδήγησης του μαθητή κατά την επίλυση προβλημάτων. Η μάθηση μέσω επιλυμένων παραδειγμάτων είναι άκρως καθοδηγούμενη, ενώ η αυτόνομη επίλυση ελάχιστα καθοδηγούμενη. Μια εναλλακτική είναι η προσφορά βοήθειας από τον εκπαιδευτικό όταν και για όσο ο μαθητής νιώθει ότι τη χρειάζεται. Ωστόσο, ανασκόπηση των σχετικών ερευνών έδειξε πως τα επιλυμένα παραδείγματα οδήγησαν σε πιο αυξημένα μαθησιακά αποτελέσματα, είτε εξετάζοντας την επίδοση, είτε εξετάζοντας τον χρόνο επίλυσης είτε και τα δύο, σε σχέση με την καθοδήγηση του μαθητή από τον εκπαιδευτικό (Koedinger and Alevan, 2007. Salden et al., 2010).

Ωστόσο, ένα μειονέκτημα των επιλυμένων παραδειγμάτων είναι ότι μπορεί να οδηγήσουν και σε επιφανειακή επεξεργασία της πληροφορίας. Επειδή η λύση παρουσιάζεται έτοιμη στους μαθητές, πολλές φορές τείνουν να μη δίνουν την απαιτούμενη σημασία στα επιμέρους βήματα της λύσης, αλλά να τη διαβάζουν γρήγορα, με αποτέλεσμα στη συνέχεια να μην μπορούν να εφαρμόσουν σωστά τη μεθοδολογία που διδάχθηκαν. Έτσι, δεν υπάρχει αύξηση του συναφούς γνωστικού φορτίου και δεν ευνοείται η κατασκευή σχημάτων. Σαν αντιστάθμισμα, ο διδακτικός σχεδιασμός μπορεί να παρακινεί τους μαθητές να συγκρίνουν τις διαδικασίες του παραδείγματος, να συμπληρώσουν στοιχεία σε αυτό ή να εξηγήσουν τη λογική πίσω από τα βήματα του παραδείγματος (Renkl, 2002. Paas et van Gog, 2006).

Μια καλή συμπληρωματική εναλλακτική, επομένως, που χρησιμοποιείται συχνά με τα επιλυμένα παραδείγματα είναι η μέθοδος της συμπλήρωσης προβλήματος (The fading worked solution steps) (Kirschner, 2002). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, στους μαθητές σταδιακά δίνονται επιλυμένα λιγότερα βήματα από το κάθε πρόβλημα, με σκοπό να πρέπει και οι ίδιοι να συμπληρώσουν στοιχεία ώστε να ολοκληρωθεί η λύση. Με τον τρόπο αυτό θεωρείται πως είναι περισσότερο ομαλή η μετάβαση από τη μελέτη παραδειγμάτων στην αυτόνομη επίλυση προβλημάτων. Έτσι, σε κάθε περίπτωση οι μαθητές αναγκάζονται να «αλληλεπιδράσουν» με το επιλυμένο παράδειγμα και να καταλάβουν τον τρόπο λύσης του προβλήματος. Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι οι απαιτήσεις για πόρους του γνωστικού συστήματος και συγκεκριμένα της μνήμης εργασίας δεν ξεπερνούν τις δυνατότητές των μαθητών, αφού κάθε βήμα που καλούνται να επιλύσουν, πρώτα το έχουν μελετήσει και κατανοήσει (Renkl, Atkinson & Grobe, 2004).

Αντίστοιχα, η παρουσίαση επιλυμένων παραδειγμάτων, τα οποία δεν έχουν τη σωστή δομή ή και δεν παρουσιάζονται με οργανωμένο τρόπο που δείχνει τα βήματα και τη μεθοδολογία επίλυσης ενός προβλήματος και κατευθύνει την προσοχή των μαθητών κατάλληλα, μπορεί να οδηγήσει στην αύξηση του εξωγενούς γνωστικού φορτίου και να μην συμβάλλει στην ενίσχυση της μάθησης (Ward & Sweller, 1990. van Merriënboer & Sluijsmans, 2009). Σύμφωνα με τους Vural & Zellner (2010), τα επιλυμένα παραδείγματα που δεν παρουσιάζονται οργανωμένα, σε μεμονωμένα βήματα, δεν βοηθούν στην κατασκευή σχημάτων, ούτε οδηγούν στη μείωση του εξωγενούς γνωστικού φορτίου.

Σε έρευνες που έχουν γίνει σχετικά με τη μέθοδο των επιλυμένων παραδειγμάτων με τη χρήση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση, και κυρίως με τη χρήση βίντεο, έχει φανεί πως η παρουσίαση των βίντεο με παύσεις, οι



οποίες λειτουργούν σαν ανεξάρτητα βήματα στην επίλυση ενός προβλήματος είναι περισσότερο αποτελεσματική από την παρουσίαση βίντεο χωρίς παύσεις. Δηλαδή, οι παύσεις φαίνεται πως εξυπηρετούν το «κομμάτιασμα» της πληροφορίας, μειώνουν περαιτέρω το εξωγενές γνωστικό φορτίο, αφού μειώνουν και τα αλληλεπιδρώντα στοιχεία και βοηθούν πιο αποτελεσματικά τους μαθητές να κατασκευάσουν ολοένα και πιο πολύπλοκα γνωστικά σχήματα (Scheiter et al., 2010. Spanjers et al., 2010).

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι η μέθοδος των επιλυμένων παραδειγμάτων έχει εφαρμοστεί και σε άλλους τομείς πέρα από τα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες ή την ηλεκτρονικά υποβοηθούμενη μάθηση, στην επαγγελματική εκπαίδευση φοιτητών, όπως στη λογιστική επιστήμη, στη διοίκηση επιχειρήσεων, στην ιατρική, με ανάλογα ενθαρρυντικά αποτελέσματα (Mostyn, 2012. Stark, 2004. Kopp et al., 2009).

### **Σκοπός Έρευνας και Ερευνητικά Ερωτήματα**

Όπως έγινε φανερό από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, τα επιλυμένα παραδείγματα έχουν φανεί αποτελεσματικά στη μείωση του εξωγενούς γνωστικού φορτίου, που επιβάλλεται από τον διδακτικό σχεδιασμό, και έχουν συσχετιστεί με ενίσχυση της επίδοσης των μαθητών σε μαθηματικά ή άλλα προβλήματα. Η χρήση τους, επομένως, κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να αποβεί ευεργετική για την επίτευξη των στόχων του Αναλυτικού Προγράμματος και την καλλιέργεια δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων.

Ο σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξετάσει κατά πόσον η μελέτη επιλυμένων παραδειγμάτων πριν από την επίλυση προβλημάτων από την πλευρά των μαθητών της πειραματικής ομάδας θα οδηγήσει στη βελτιωμένη επίδοσή τους σε ένα

μετέπειτα κριτήριο αξιολόγησης, σε σχέση με τους μαθητές της ομάδας ελέγχου, οι οποίοι θα προσπαθήσουν να επιλύσουν εξ αρχής μόνοι τους τα ίδια προβλήματα.

Το ερευνητικό ερώτημα διατυπώνεται ως εξής: «Υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ της επίδοσης στο κριτήριο αξιολόγησης της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου;».

## Μέθοδος

### Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 40 μαθητές (17 αγόρια και 23 κορίτσια) της Δ' Δημοτικού του 2<sup>ου</sup> Δημοτικού Σχολείου Ραφήνας. Το δείγμα χωρίστηκε σε δύο ομάδες, την πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου, με κριτήριο το τμήμα (Δ1 ή Δ2) στο οποίο φοιτούσαν. Η πειραματική ομάδα αποτελούνταν από 20 μαθητές (8 αγόρια και 12 κορίτσια) και η ομάδα ελέγχου αποτελούνταν επίσης από 20 μαθητές (9 αγόρια και 11 κορίτσια). Η επιλογή του δείγματος ήταν συμπτωματική (καθώς σε αυτή τη σχολική μονάδα εξασφαλίστηκε πρόσβαση για τη διεξαγωγή της έρευνας), με τους ανάλογους περιορισμούς που αυτό συνεπάγεται για τη γενίκευση των ευρημάτων. Ωστόσο, ο διαχωρισμός των δύο τμημάτων σε πειραματική ομάδα και ομάδα ελέγχου έγινε τυχαία, κατόπιν κλήρωσης.

### Μέσα Συλλογής Δεδομένων

Τα μέσα συλλογής δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα αφορούσαν την διδακτική ενότητα 31 του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών της Δ' Δημοτικού, με θέμα «Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν» (βλ. Παράρτημα 1).

Οι μαθητές των δύο ομάδων είχαν στη διάθεσή τους ένα φυλλάδιο με τη θεωρία του μαθήματος, την οποία διδάχθηκαν κατά τη φάση της διδασκαλίας, με σκοπό να διευκολυνθούν κατά την επίλυση των προβλημάτων (βλ. Παράρτημα 2).

Επίσης, συμπλήρωσαν, κατά τη φάση εφαρμογής, ένα φυλλάδιο με μαθηματικά προβλήματα με σκοπό την εξάσκησή τους πριν από τη φάση αξιολόγησης, κατά την

οποία συμπλήρωσαν ένα κριτήριο αξιολόγησης. Τα φυλλάδια της φάσης διδασκαλίας που συμπλήρωσαν οι μαθητές διαφοροποιούνταν ανάλογα με την ομάδα στην οποία ανήκαν. Στην πειραματική ομάδα δόθηκε ένα φυλλάδιο, το οποίο περιλάμβανε ένα επιλυμένο παράδειγμα για κάθε τύπο προβλήματος που έπρεπε να λύσουν στην συνέχεια οι μαθητές (βλ. Παράρτημα 3). Αντίθετα, στην ομάδα ελέγχου δόθηκε ένα διαφορετικό φυλλάδιο, το οποίο περιλάμβανε μόνο ένα επιλυμένο παράδειγμα και στη συνέχεια όλους τους τύπους προβλημάτων, τα οποία έπρεπε οι μαθητές να λύσουν μόνοι τους (βλ. Παράρτημα 4).

Τέλος, για τη φάση της αξιολόγησης, δόθηκε στους μαθητές και των δύο ομάδων το ίδιο κριτήριο αξιολόγησης, το οποίο περιλάμβανε προβλήματα του ίδιου τύπου, στα οποία είχαν ήδη εξασκηθεί (βλ. Παράρτημα 5).

### **Διαδικασία Συλλογής Δεδομένων**

Η έρευνα διεξάχθηκε ως μέρος του ωρολογίου σχολικού προγράμματος. Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε από την ερευνήτρια και στις δύο ομάδες, ενώ έγινε ενημέρωση των μαθητών για τον σκοπό της έρευνας. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές έλαβαν γνώση πως συμμετέχουν σε μία έρευνα σχετικά με τους τρόπους που οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να διευκολύνουν τους μαθητές στο να λύνουν μαθηματικά προβλήματα. Για το λόγο αυτό, οι ίδιοι θα ακολουθούσαν τις οδηγίες της ερευνήτριας και θα συμπλήρωναν τα φυλλάδια που θα τους έδινε, ώστε στο τέλος να εξετάσει η ίδια ποια σημεία τους δυσκόλεψαν και ποια όχι. Επίσης, έγινε σαφές πως όσα συμπληρώσουν θα είναι ανώνυμα, δε θα αξιολογηθούν από τον εκπαιδευτικό της τάξης τους, ενώ το μόνο στοιχείο που χρειάζεται να συμπληρώσουν πάνω στα φυλλάδια είναι το φύλο τους.

Η διδασκαλία που πραγματοποιήθηκε, όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, αφορούσε τη διδακτική ενότητα 31 του του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών της Δ' Δημοτικού, με θέμα «Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν». Ο διδακτικός στόχος της συγκεκριμένης ενότητας, σύμφωνα με το βιβλίο του Δασκάλου είναι ο εξής: «Να γνωρίσουν οι μαθητές της τυπικές μονάδες μέτρησης της επιφάνειας και να μετρούν την επιφάνεια με τη χρήση τους» (βλ. Παράρτημα 1). Προαπαιτούμενες γνώσεις θεωρούνται οι έννοιες της περιμέτρου και της επιφάνειας. Με σκοπό οι ασκήσεις που σχεδιάστηκαν για τους μαθητές να έχουν άμεση σχέση με τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου, εξετάστηκε όχι μόνο η μέτρηση της επιφάνειας με τη χρήση των τυπικών μονάδων μέτρησης, αλλά και η μέτρηση της περιμέτρου και ο διαχωρισμός της από τη μέτρηση της επιφάνειας.

Η διαδικασία διεξαγωγής του πειράματος χωρίστηκε σε τρεις φάσεις και διήρκεσε τέσσερις διδακτικές ώρες. Η πρώτη φάση, η φάση διδασκαλίας (περίπου μία διδακτική ώρα), αφορούσε στην παρουσίαση των νέων εννοιών της διδακτικής ενότητας, και πιο συγκεκριμένα των τυπικών μονάδων μέτρησης της επιφάνειας, δηλαδή του τετραγωνικού μέτρου και των υποδιαιρέσεών του. Επίσης, σκοπός ήταν να ελεγχθεί ότι οι μαθητές έχουν κατακτήσει την έννοια της περιμέτρου και της επιφάνειας και ότι είναι σε θέση να διαχωρίσουν τη μία από την άλλη, αφού τα στοιχεία αυτά θεωρούνται σύμφωνα με το βιβλίο του Δασκάλου προαπαιτούμενες γνώσεις. Στη φάση αυτή πραγματοποιήθηκε η Δραστηριότητα Ανακάλυψης από το βιβλίο του μαθητή (βλ. Παράρτημα 1) σύμφωνα με τις οδηγίες του βιβλίου του Δασκάλου, παρουσιάστηκαν εποπτικά το τετραγωνικό μέτρο, το τετραγωνικό δεκατόμετρο και το τετραγωνικό εκατοστό και δόθηκε στους μαθητές το φυλλάδιο θεωρίας (βλ. Παράρτημα 2), ώστε να το μελετήσουν, να διατυπώσουν απορίες και τελικά να μπορούν να ανατρέξουν σε αυτό

εάν χρειαστεί στη συνέχεια. Στην πρώτη φάση του πειράματος δεν υπήρχε διαφοροποίηση μεταξύ των δύο ομάδων.

Η φάση διδασκαλίας οδήγησε αμέσως μετά στη φάση εφαρμογής (μία διδακτική ώρα), κατά την οποία οι μαθητές έπρεπε να εξασκηθούν επιλύοντας μαθηματικά προβλήματα διαφόρων τύπων σχετικών με το διδακτικό στόχο της ενότητας. Στη φάση αυτή υπήρχε διαφοροποίηση μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου. Οι μαθητές της πρώτης ομάδας συμπλήρωσαν ένα φυλλάδιο με έξι μαθηματικά προβλήματα, για καθένα από τα οποία υπήρχε ένα επιλυμένο παράδειγμα (βλ. Παράρτημα 3). Η οδηγία που δόθηκε στους μαθητές ήταν να μελετήσουν προσεκτικά το επιλυμένο παράδειγμα με σκοπό να το κατανοήσουν σωστά, ώστε στη συνέχεια να προσπαθήσουν οι ίδιοι να λύσουν ένα παρόμοιο πρόβλημα. Οι μαθητές της δεύτερης ομάδας, συμπλήρωσαν επίσης ένα φυλλάδιο με έξι μαθηματικά προβλήματα. Όμως, στην περίπτωση αυτή υπήρχε μόνο ένα επιλυμένο παράδειγμα, του δυσκολότερου τύπου προβλήματος (βλ. Παράρτημα 4). Η οδηγία που τους δόθηκε ήταν να μελετήσουν προσεκτικά το ένα επιλυμένο παράδειγμα και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να λύσουν τα υπόλοιπα προβλήματα μόνοι τους. Η ερευνήτρια παρέμεινε στην σχολική τάξη επιτηρώντας τους μαθητές και επιβλέποντας τη διαδικασία συμπλήρωσης των φυλλαδίων, χωρίς να δίνει επιπλέον διευκρινίσεις.

Η τελευταία φάση του πειράματος, η φάση αξιολόγησης (δύο διδακτικές ώρες) πραγματοποιήθηκε μία εβδομάδα μετά τις φάσεις της διδασκαλίας και της εφαρμογής. Όπως αναφέρθηκε, στη φάση αυτή δεν υπήρχε διαφοροποίηση μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου, αφού το σύνολο του δείγματος συμπλήρωσε το ίδιο κριτήριο αξιολόγησης. Δόθηκε στους μαθητές ένα φυλλάδιο αξιολόγησης (βλ. Παράρτημα 5), που περιείχε έξι μαθηματικά προβλήματα, των ίδιων τύπων στα οποία είχαν εξασκηθεί κατά τη φάση εφαρμογής. Στην περίπτωση αυτή, βέβαια, δεν υπήρχε

κανένα επιλυμένο παράδειγμα ούτε πρόσβαση στο φυλλάδιο θεωρίας, έγινε σαφές ότι οι μαθητές πρέπει να εργαστούν ατομικά και δε δόθηκαν επιπλέον διευκρινίσεις.

Μετά τη συλλογή των κριτηρίων, ακολούθησε η βαθμολόγησή τους με σκοπό την ανάλυση των δεδομένων. Για κάθε στοιχείο της απάντησης οι μαθητές λάμβαναν ένα βαθμό. Συγκεκριμένα, σε κάθε πρόβλημα εξετάζονταν τα εξής στοιχεία:

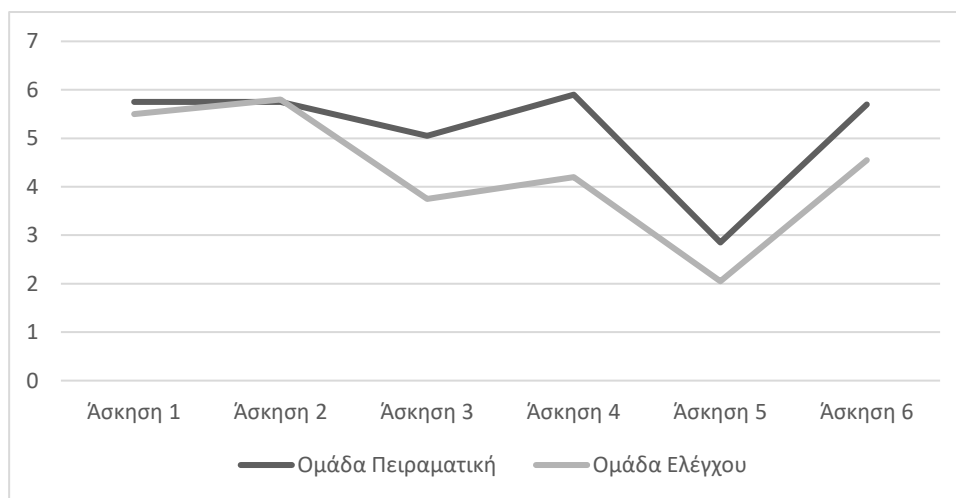
- Ο μαθητής έχει γράψει τη σωστή μαθηματική πράξη.
- Ο μαθητής έχει βρει το σωστό αποτέλεσμα της μαθηματικής πράξης.
- Ο μαθητής έχει γράψει τη σωστή μονάδα μέτρησης δίπλα στο αποτέλεσμα.
- Ο μαθητής έχει δώσει μια ολοκληρωμένη απάντηση στο πρόβλημα.
- Ο μαθητής έχει επεξεργαστεί σωστά το γεωμετρικό σχήμα προκειμένου να μπορέσει να υπολογίσει την περίμετρο και το εμβαδόν του.

## Αποτελέσματα

### Περιγραφικοί Στατιστικοί Δείκτες

Για την ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν από τα κριτήρια αξιολόγησης των μαθητών και των δύο ομάδων αξιοποιήθηκαν τόσο περιγραφικοί όσο και επαγωγικοί στατιστικοί δείκτες.

Ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών της πειραματικής ομάδας ήταν 31,00 ενώ ο μέσος όρος της βαθμολογίας της ομάδας ελέγχου ήταν 25,85. Εξετάζοντας και κάθε τύπο προβλήματος μεμονωμένα, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1, η επίδοση της πειραματικής ομάδας ήταν υψηλότερη σε καθένα από τους τύπους προβλημάτων.

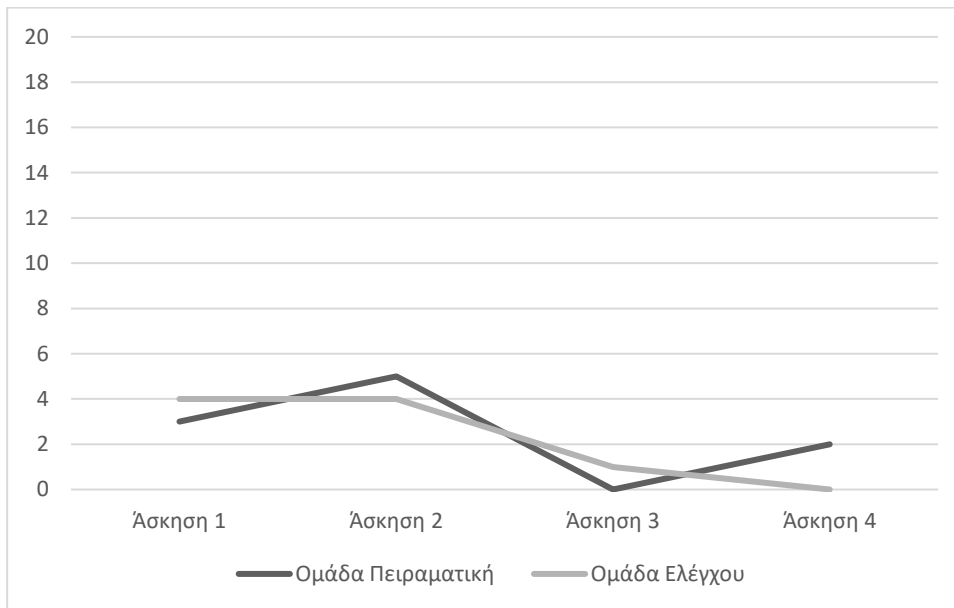


Σχήμα 1. Μέσος όρος βαθμολογίας των μαθητών ανά άσκηση

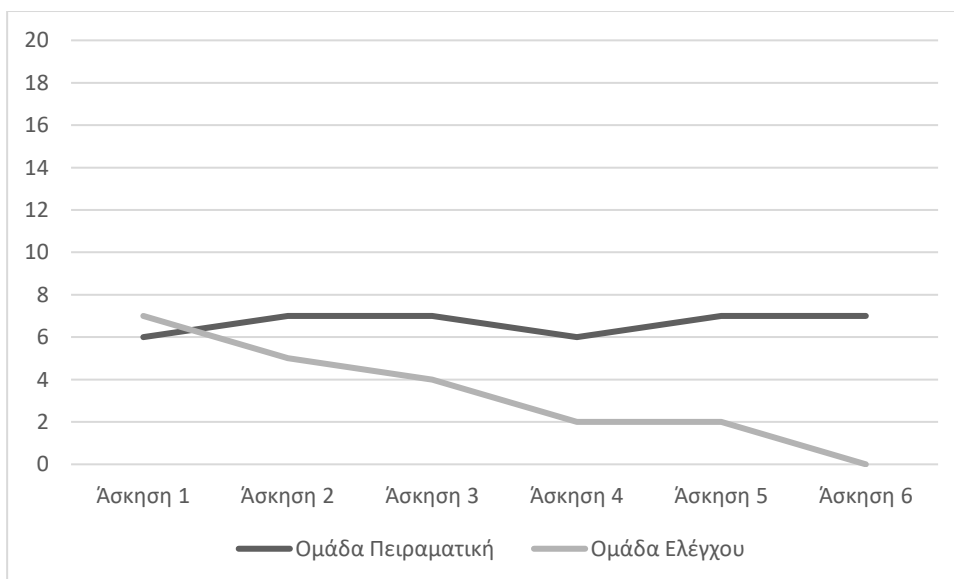
Περαιτέρω διερεύνηση των δεδομένων έδειξε, ωστόσο, πως η πλειονότητα του δείγματος δεν κατάφερε να δώσει πλήρως σωστές απαντήσεις (σωστή πράξη, σωστό αποτέλεσμα και σωστή μονάδα μέτρησης) τόσο στα υποερωτήματα των προβλημάτων που ζητούσαν τον υπολογισμό της περιμέτρου ενός σχήματος όσο και στα υποερωτήματα που ζητούσαν τον υπολογισμό του εμβαδού του.



Πιο συγκεκριμένα, μόνο το 13% των μαθητών της πειραματικής ομάδας κατάφερε να δώσει ολοκληρωμένη απάντηση στα υποερωτήματα της περιμέτρου και το 33% στα υποερωτήματα του εμβαδού. Στην ομάδα ελέγχου το ποσοστό των μαθητών με πλήρη απάντηση ήταν περισσότερο μειωμένο και ήταν 17% για τα υποερωτήματα της περιμέτρου και 11% για τα υποερωτήματα του εμβαδού.



Σχήμα 2. Αριθμός μαθητών που έδωσαν ολοκληρωμένη απάντηση στα υποερωτήματα της περιμέτρου



Σχήμα 3. Αριθμός μαθητών που έδωσαν ολοκληρωμένη απάντηση στα υποερωτήματα του εμβαδού

**Έλεγχος Υποθέσεων**

Με σκοπό να εξεταστεί αν η διαφορά στην επίδοση μεταξύ των δύο ομάδων είναι στατιστικά σημαντική ή όχι, χρησιμοποιήθηκε το Independent Samples t-test και το στατιστικό πακέτο SPSS (Statistical Package for Social Sciences).

Με βάση τα αποτελέσματα του στατιστικού ελέγχου  $t$ , διαφαίνεται ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ( $t=2.051$ ,  $df=38$ ,  $p<0.05$ ) στο μέσο όρο της επίδοσης της πειραματικής ομάδας ( $M= 31.00$ ,  $SD= 7.941$ ) από τον μέσο όρο της επίδοσης της ομάδας ελέγχου ( $M=25.85$ ,  $SD= 7.942$ ) στο κριτήριο αξιολόγησης σε επίπεδο  $\alpha=0.05$ .

Πίνακας 1

*Independent Samples t-test*

Ομάδα	Μέσος Όρος ( $M$ )	Τυπική Απόκλιση ( $SD$ )	$t$	$df$	$p$
Πειραματική ομάδα	31,00	7,941	2,051	38	0,04
Ομάδα ελέγχου	25,85	7,942			

## Συζήτηση

Ο πειραματικός σχεδιασμός που πραγματοποιήθηκε είχε ως σκοπό να ελέγξει την υπόθεση εάν οι μαθητές της πειραματικής ομάδας, που δέχθηκαν μια διδασκαλία σύμφωνη με τα πορίσματα της θεωρίας του γνωστικού φορτίου και πιο συγκεκριμένα σύμφωνη με τη μέθοδο των επιλυμένων παραδειγμάτων, θα είχαν υψηλότερη επίδοση από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου, που δεν ακολούθησαν τη μέθοδο των επιλυμένων παραδειγμάτων, αλλά τη συμβατική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων. Η επίδοσή τους ελέγχθηκε με ένα αυτοσχέδιο κριτήριο αξιολόγησης, στο οποίο κάθε σωστή απάντηση στις λύσεις που έδωσαν στα προβλήματα περιμέτρου και εμβαδού βαθμολογούνταν με ένα βαθμό.

Η ανάλυση των δεδομένων με το κριτήριο Independent Samples t-test έδειξε πως υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά στον μέσο όρο της επίδοσης των δύο ομάδων ( $t=2.051$ ,  $df=38$ ,  $p<0.05$ ). Τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύουν την όντως υψηλότερη επίδοση της πειραματικής ομάδας και επιβεβαιώνουν την αρχική υπόθεση.

Τα ευρήματα της συγκεκριμένης έρευνας συμφωνούν και επιβεβαιώνουν τη βιβλιογραφία σχετικά με έρευνες πάνω στα επιλυμένα παραδείγματα. Σε αντίστοιχα αποτελέσματα είχαν καταλήξει οι Ward & Sweller (1990) σε πειράματα που είχαν πραγματοποιήσει με επιλυμένα παραδείγματα στο μάθημα της φυσικής. Μάλιστα, η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην παρούσα έρευνα βασίστηκε στη μεθοδολογία των Ward & Sweller, με μία κοινή φάση διδασκαλίας εννοιών, μια διαφοροποιημένη ανάλογα την ομάδα φάση εφαρμογής – εξάσκησης και μια επίσης κοινή φάση αξιολόγησης της αποτελεσματικότητας της παρέμβασης.

Την ενισχυμένη επίδοση των μαθητών σε προβλήματα γεωμετρίας διαπίστωσαν και οι Paas & van Merriënboer (1994) μετά την μελέτη επιλυμένων παραδειγμάτων. Η πειραματική ομάδα επωφελήθηκε από τη μελέτη των παραδειγμάτων και οδηγήθηκε σε καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα σε σχέση με την ομάδα ελέγχου, που πρώτα εξασκήθηκε στην επίλυση προβλημάτων και στη συνέχεια μελέτησε κάποια επιλυμένα παραδείγματα.

Στην υπεροχή της μελέτης επιλυμένων παραδειγμάτων πριν από την προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος φυσικής (με ηλεκτρικά κυκλώματα) καταλήγουν και οι Reisslein, Atkinson, Seeling & Reisslein (2006) αξιοποιώντας μάλιστα τον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Επίσης, οι μαθητές που έχουν μελετήσει πρώτα επιλυμένα παραδείγματα, εκτός του ότι οδηγούνται σε λιγότερα μαθηματικά λάθη, συνήθως χρειάζονται και λιγότερο χρόνο για την επίλυση των προβλημάτων (Sweller & Cooper, 1985).

Οι van Gog, Kester & Paas (2011) συμπεραίνουν ότι η μάθηση ενισχύεται από τη μελέτη παραδειγμάτων, θεωρούν κρίσιμο στοιχείο τα παραδείγματα να παρουσιάζονται πριν από τα προς επίλυση προβλήματα. Σε διαφορετική περίπτωση, δηλαδή όταν οι μαθητές πρώτα επιλύσουν ένα πρόβλημα και μετά μελετήσουν το παράδειγμα για να διαπιστώσουν εάν το έλυσαν σωστά ή με τον ενδεδειγμένο τρόπο, η επίδραση της μεθόδου δεν εμφανίζεται και δεν υπάρχουν διαφορές στη μετέπειτα επίδοση.

Μάλιστα, ένα σημαντικό στοιχείο είναι πως η παρούσα έρευνα κατάφερε να εντοπίσει στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στην επίδοση της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου όχι σε εργαστηριακές συνθήκες, όπως γίνεται συνήθως, αλλά στο περιβάλλον της γενικής τάξης μέσα στο σχολικό πλαίσιο. Οι van Loon-Hiller, van Gog & Brand-Gruwel (2012) όταν εφάρμοσαν τη μέθοδο των επιλυμένων

παραδειγμάτων στην τυπική τάξη ενός δημοτικού σχολείου δε βρήκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στην επίδοση των δύο ομάδων, αν και διαπίστωσαν ότι η πειραματική ομάδα επέτυχε παρόμοια μαθησιακά αποτελέσματα με την ομάδα ελέγχου σε λιγότερο χρόνο.

### **Περιορισμοί**

Η παρούσα έρευνα διέπεται από ορισμένους περιορισμούς. Ο πρώτος είναι ότι η επιλογή του δείγματος δεν ακολούθησε τις αρχές της τυχαίας δειγματοληψίας, αλλά ήταν συμπωματική. Αυτό ήταν αναγκαίο εξαιτίας της δυσκολίας εξασφάλισης δείγματος (π.χ. περιορισμοί Υπουργείου Παιδείας, άρνηση σχολικών μονάδων να συμμετέχουν στην έρευνα). Έτσι, η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε σχολική μονάδα και τάξη που δέχθηκε να συμμετέχει. Παρ' όλ' αυτά, η επιλογή της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου έγινε με τυχαίο τρόπο, κατόπιν κλήρωσης.

Επίσης, το δείγμα των 40 μαθητών, σε συνδυασμό και με το μη τυχαίο τρόπο επιλογής τους, είναι αρκετά μικρό για να επιτρέψει τη γενίκευση των αποτελεσμάτων της έρευνας σε έναν ευρύ πληθυσμό. Ουσιαστικά, τα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης θεωρείται ότι αφορούν τον πληθυσμό των μαθητών Δ' δημοτικού μέσης κοινωνικο-οικονομικής τάξης, λαμβάνοντας υπόψη και την περιοχή διεξαγωγής του πειράματος, δηλαδή τη Ραφήνα του νομού Αττικής.

Ένας επιπλέον περιορισμός είναι το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο έπρεπε να ολοκληρωθεί η έρευνα. Συγκεκριμένα, συμφωνήθηκε με τη σχολική μονάδα η διαδικασία να διαρκέσει τέσσερις διδακτικές ώρες. Έτσι, μέσα στις δύο πρώτες διδακτικές ώρες έπρεπε να ολοκληρωθούν οι φάσεις της διδασκαλίας και της εξάσκησης. Ακόμη, δεν υπήρχε η δυνατότητα για επιπλέον εξάσκηση των μαθητών στο

σπίτι με την παροχή επιπρόσθετων παραδειγμάτων και προβλημάτων προς επίλυση, όπως προέβλεπε ο αρχικός σχεδιασμός, που βασίστηκε στη μεθοδολογία των Ward & Sweller (1990).

Ως αποτέλεσμα των χρονικών περιορισμών, κάθε τύπος προβλήματος ακολουθούταν από ένα μόνο επιλυμένο παράδειγμα και ένα πρόβλημα προς επίλυση, περιορίζοντας αντίστοιχα και την επίδραση της μεθόδου, όπως υποστηρίζει και η βιβλιογραφία. Σύμφωνα με τους Catrambone & Yuasa (2006), ένα μοναδικό επιλυμένο παράδειγμα μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να μην είναι αρκετό για να εμφανιστεί η επίδραση της μεθόδου στην ενίσχυση της επίδοσης. Όντως, το στοιχείο αυτό μπορεί να συσχετιστεί με το χαμηλό ποσοστό μαθητών, όχι μόνο της ομάδας ελέγχου αλλά και της πειραματικής ομάδας, που κατάφεραν να δώσουν ολοκληρωμένες και πλήρως σωστές απαντήσεις στα υποερωτήματα περιμέτρου και εμβαδού. Δηλαδή, το ένα και μόνο επιλυμένο παράδειγμα, ίσως δεν ήταν αρκετό για να κατανοήσουν πλήρως οι μαθητές τη διαδικασία επίλυσης που έπρεπε να ακολουθήσουν στη συνέχεια και να την εφαρμόσουν σωστά απαντώντας σε όλα τα στοιχεία της.

Ένα στοιχείο που δεν εξετάστηκε στην παρούσα έρευνα, λόγω μεθοδολογικών δυσκολιών, ενώ έχει αξιοποιηθεί ήδη σε πολλές από τις αρχικές έρευνες πάνω στα επιλυμένα παραδείγματα, σύμφωνα με την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, είναι ο χρόνος τον οποίο χρειάστηκαν οι μαθητές για να ολοκληρώσουν το κριτήριο αξιολόγησης.

Τέλος, στην παρούσα έρευνα τα επιλυμένα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν αφορούσαν απλώς στην παρουσίαση του ενδεδειγμένου τρόπου επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος για τον υπολογισμό της περιμέτρου και του εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων. Δεν περιείχαν ούτε στοιχεία που έπρεπε να συμπληρώσουν οι

μαθητές σε αυτά, ώστε να προσανατολίζεται η προσοχή τους στη λεπτομερή μελέτη τους, ούτε υπήρχε η ανάγκη να εξηγήσουν οι μαθητές τη λογική επίλυσης πίσω από τα επιλυμένα παραδείγματα, κάτι το οποίο θα αύξανε το συναφές γνωστικό φορτίο και θα ενίσχυε περαιτέρω την επίδοσή τους. Μάλιστα, η επεξήγηση των παραδειγμάτων ωφελεί ιδιαίτερα τους αδύναμους μαθητές και ενισχύει τη μετέπειτα επίδοσή τους, ενώ δεν είναι τόσο αποτελεσματική για τους μαθητές με ήδη υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά (Renkl, 2002).

### **Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα**

Η θεωρία του γνωστικού φορτίου θεωρείται ένα νέο ερευνητικό πεδίο για την Ελλάδα. Έτσι, υπάρχουν πολλές προοπτικές για μελλοντική έρευνα σε διάφορες πτυχές της θεωρίας. Θα μπορούσε αρχικά να μελετηθεί η αποτελεσματικότητα των υπολοίπων μεθόδων στην εκπαιδευτική πράξη. Επόμενες έρευνες θα μπορούσαν να εστιάσουν στην επίδραση της διαίρεσης της προσοχής, αφού σε πολλές περιπτώσεις και ειδικά στη γεωμετρία, όπως υποστηρίζει και η βιβλιογραφία, κείμενο και διάγραμμα λειτουργούν συμπληρωματικά και επιβαρύνουν τη μνήμη εργασίας των μαθητών. Επίσης, θα μπορούσε να μελετηθεί εάν η χρήση βίντεο επηρεάζει αρνητικά τη μάθηση εξαιτίας της επίδρασης της προσωρινά προσβάσιμης πληροφορίας και εάν οι παύσεις στα βίντεο ή άλλες σχετικές διαφοροποιήσεις ενισχύουν τελικά τη μάθηση.

Ειδικότερα σε σχέση με τα επιλυμένα παραδείγματα, που ήταν το θέμα της παρούσας έρευνας, θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί η αποτελεσματικότητά τους και σε άλλα μαθήματα όπως οι φυσικές επιστήμες. Επίσης, θα ήταν χρήσιμο να αξιοποιηθούν επιλυμένα παραδείγματα που προβλέπουν την αύξηση του συναφούς γνωστικού

φορτίου, όπως παραδείγματα που θα ακολουθούνται από επεξηγήσεις από την πλευρά των μαθητών, ή και η συμπληρωματική μέθοδος της συμπλήρωσης προβλήματος.



**Βιβλιογραφία**

- Beckmann, J. (2010). Taming a beast of burden - On some issues with the conceptualisation and operationalisation of cognitive load. *Learning and Instruction, Vol.20, pp. 250-264.*
- Blayney, P., Kalyuga, S., & Sweller, J. (2010). Interactions between the isolated–interactive elements effect and levels of learner expertise: experimental evidence from an accountancy class. *Instructional Science, Vol. 38 (3), pp. 277-287.*
- Carroll, W. (1994). Using Worked Examples as an Instructional Support in the Algebra Classroom. *Journal of Educational Psychology, Vol. 86(3), pp. 360-367.*
- Catrambone, R., & Yuasa, M. (2006). Acquisition of procedures: The effects of example elaborations and active learning exercises. *Learning and Instruction, Vol. 16(2), pp. 139-153.*
- Chandler, P., & Sweller, J. (1992). The split-attention effect as a factor in the design of instruction. *British Journal of Educational Psychology, Vol. 62(2), pp. 233-246.*
- Cierniak, G., Scheiter, K., & Gerjets, P. (2009). Explaining the split-attention effect: Is the reduction of extraneous cognitive load accompanied by an increase in germane cognitive load? *Computers in Human Behavior, Vol. 25(2), pp. 315-324.*
- Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P., & Sweller, J. (2003). The Expertise Reversal Effect. *Educational Psychologist, Vol. 38, pp. 23-31.*
- Kalyuga, S., Chandler, P., Tuovinen, J., & Sweller, J. (2001). When problem solving is superior to studying worked examples. *Journal of Educational Psychology, Vol.93(3), pp.579-588.*

- Kirschner, P. (2002). Cognitive load theory: implications of cognitive load theory on the design of learning. *Learning and instruction, Vol. 12, pp. 1-10.*
- Kirschner, P., Ayres, P., & Chandler, P. (2011). Contemporary cognitive load theory research: The good, the bad and the ugly. *Computers in Human Behavior, Vol.27, pp. 99–105.*
- Koedinger, K., & Aleven, V. (2007). Exploring the assistance dilemma in experiments with cognitive tutors. *Educational Psychology Review, Vol.19, pp. 239–264.*
- Kopp, V., Stark, R., Kühne-Eversmann, L., & Fischer, M. (2009). Do worked examples foster medical students' diagnostic knowledge of hyperthyroidism? *Medical Education, 43(12), 1210-1217.*
- Leahy, W. (2009). Cognitive load theory and instructional design: an outline of the theory and reflections on a need for new directions to cater for individual differences and motivation. *Educational Psychology.*
- Leahy, W., & Sweller, J. (2008). The imagination effect increases with an increased intrinsic cognitive load. *Applied Cognitive Psychology, Vol. 22(2), pp.273-283.*
- Leahy, W., & Sweller, J. (2011). Cognitive load theory, modality of presentation and the transient information effect. *Applied Cognitive Psychology, Vol. 25(6), pp.943-951.*
- McLaren, B., Lim, S., Gagnon, F., Yaron, D., & Koedinger, K. (2006). Studying the effects of personalized language and worked examples in the context of a web based intelligent tutor. *Proceedings of the 8th International Conference on Intelligent Tutoring Systems. Jhongli, Taiwan, 1-11.*

- Mostyn, G. (2012). Cognitive load theory: What it is, why it's important for Accounting instruction and research. *Issues in Accounting Education, Vol.27, pp.227-245.*
- Mousavi, S., Low, R., & Sweller, J. (1995). Reducing cognitive load by mixing auditory and visual presentation modes. *Journal of Educational Psychology, Vol. 87(2), pp. 319-334.*
- Paas, F. G. W. C., & Van Merriënboer, J. J. G. (1994). Variability of worked examples and transfer of geometrical problem-solving skills: A cognitive-load approach. *Journal of Educational Psychology, 86(1), 122-133.*
- Paas, F., & Sweller, J. (2012). An Evolutionary Upgrade of Cognitive Load Theory: Using the Human Motor System and Collaboration to Support the Learning of Complex Cognitive Tasks. *Educational Psychology Review, Vol. 24, pp. 27-45.*
- Paas, F., & van Gog, T. (2006). Optimising worked example instruction: Different ways to increase germane cognitive load. *Learning and Instruction, Vol. 16, pp. 87-91.*
- Paas, F., & van Merriënboer, J. (1993). The efficiency of instructional conditions: An approach to combine mental effort and performance measures. *The Human Factors and Ergonomics Society, Vol.35(4), pp.737-743.*
- Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2003). Cognitive Load Theory and Instructional Design: Recent Developments. *Educational Psychologist, Vol. 38, pp.1-4.*
- Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2004). Cognitive load theory: Instructional Implications of the Interaction between information structures and cognitive architecture. *Instructional Science, Vol. 32, pp.1-8.*
- Paas, F., Tuovinen, J., van Merriënboer, J., & Darabi, A. (2005). A motivational perspective on the relation between mental effort and performance: optimizing

learner involment in instruction. *Educational Psychology, Research and Development, Vol. 53 (3), pp. 25-34.*

Paas, F., van Gog, T., & Sweller, J. (2010). Cognitive load theory: New conceptualizations, specifications, and integrated research perspectives. *Educ Psychol Rev, Vol.22, pp. 115–121.*

Pollock, E., Chandler, P., & Sweller, J. (2002). Assimilating complex information. *Learning and Instruction, Vol. 12(1), pp. 61-86.*

Reisslein, J., Atkinson, R., Seeling, P., & Reisslein, M. (2006). Encountering the expertise reversal effect with a computer-based environment on electrical circuit analysis. *Learning and Instruction, Vol. 16(2), pp. 92-103.*

Renkl, A. (2002). Worked-out examples: instructional explanations support learning by self-explanations. *Learning and Instruction, Vol. 12, pp. 529-566.*

Renkl, A., & Atkinson, R. (2003). Structuring the Transition From Example Study to Problem Solving in Cognitive Skill Acquisition: A Cognitive Load Perspective. *Educational Psychologist, Vol. 32 pp. 15-22.*

Renkl, A., Atkinson, R., & Grobe, C. (2004). How Fading Worked Solution Steps Works – A Cognitive Load Perspective. *Instructional Science, Vol., pp. 59–82.*

Salden, R., Koedinger, K., Renkl, A., Aleven, V., & McLaren, B. (2010). Accounting for beneficial effects of worked examples in tutored problem solving. *Educational Psychology Review.*

Salden, R., Koedinger, K., Renkl, A., Aleven, V., & McLaren, B. (2010). Accounting for beneficial effects of worked examples in tutored problem solving. *Educational Psychology Review, 22(4), 379-392.*

- Scheiter, K., Gerjets, P., & Schuh, J. (2010). The acquisition of problem solving skills in mathematics: How animations can aid understanding of structural problem features and solution procedures. *Instructional Science*, 38(5), 487-502.
- Spanjers, I., van Gog, T., & van Merriënboer, J. (2010). A theoretical analysis of how segmentation of dynamic visualizations optimizes students' learning. *Educational Psychology Review*, 22(4), 411-423.
- Stark, R. (2004). Implementing example-based learning and teaching in the context of vocational school education in business administration. *Learning Environments Research*, Vol.7, pp.143-163.
- Stark, R., Mandl, H., Gruber, H., & Renkl, A. (2002). Conditions and effects of example elaboration. *Learning and Instruction*, Vol. 12(1), pp. 39-60.
- Sweller, J. (1988). Cognitive Load During Problem Solving: Effects on Learning. *Cognitive Science*, Vol. 12(2), pp. 257-285.
- Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction*, Vol. 4, pp. 295-312.
- Sweller, J. (2006). Discussion of emerging topics in cognitive load research: Using learner and information characteristics in the design of powerful learning environments. *Applied Cognitive Psychology*, Vol. 20, pp.353-357.
- Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous and germane cognitive load. *Educ Psychol Rev*, Vol.22, pp.123-138.
- Sweller, J. (2011). Cognitive load theory. *Psychology of Learning and Motivation*, Vol.55, pp. 37-76.

Sweller, J., & Chandler, P. (1994). Why some material is difficult to learn. *Cognition and Instruction, Vol. 12(3), pp. 185-233.*

Sweller, J., & Cooper, G. (1985). The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra. *Cognition and Instruction, Vol. 2(1), pp. 59-89.*

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory*. New York, NY: Springer.

Sweller, J., van Merriënboer, J., & Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review, Vol. 10 (3), pp. 251-296.*

Van Gog, T., & Rummel, N. (2010). Example-based learning: Integrating cognitive and social-cognitive research perspectives. *Educational Psychology Review, 22(2), 155-174.*

Van Gog, T., Kester, L., & Paas, F. (2011). Effects of worked examples, example-problem, and problem-example pairs on novices' learning. *Contemporary Educational Psychology, Vol. 36, pp. 212-218.*

Van Loon-Hillen, N., van Gog, T., & Brand-Gruwel, S. (2012). Effects of worked examples in a primary school mathematics curriculum. *Interactive Learning Environments, Vol. 20(1), pp. 89-99.*

Van Merriënboer, J., & Sluijsmans, D. (2009). Toward a synthesis of cognitive load theory, four-component instructional design, and self-directed learning. *Educational Psychology Review, 21(1), 55-66.*

Vural, Ö., & Zellner, R. (2010). Using concept mapping in video-based learning. *University of Gaziantep Journal of Social Sciences, 9(3), 747-757.*

Ward, M., & Sweller, J. (1990). Structuring effective worked examples. *Cognition and Instruction, Vol. 7(1), pp. 1-39.*

Yeung, A., Jin, P., & Sweller, J. (1998). Cognitive Load and Learner Expertise: Split-Attention and Redundancy Effects in Reading with Explanatory Notes. *Contemporary Educational Psychology, Vol. 23(1), pp. 1-21.*

## Παράρτημα 1

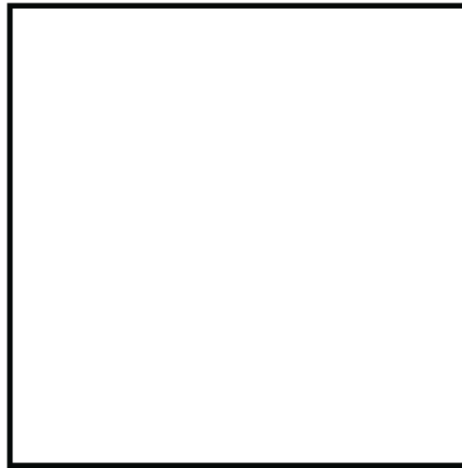
## Βιβλίο Μαθητή


# 31 Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν

## Υπολογίζω το εμβαδόν

🎯 Πώς μπορούμε να συγκρίνουμε την επιφάνεια δύο σχημάτων;

α) Χρωματίζω με κίτρινο χρώμα την επιφάνεια του τετραγώνου και με πορτοκαλί την επιφάνεια του ορθογωνίου.



β)  Ποιο απ' τα δύο σχήματα έχει μεγαλύτερη επιφάνεια; Εκτιμούμε: .....  
Χρησιμοποιούμε όσα από τα παρακάτω εργαλεία χρειαζόμαστε για να συγκρίνουμε τις δύο επιφάνειες.

Χαρτόνι  
σχήματος  
τετραγώνου, με  
πλευρά 4 εκ.



• Εξηγούμε πώς τα χρησιμοποιούμε: .....





**Εργασίες**

1)



Μια μονάδα μέτρησης επιφανειών είναι το **τετραγωνικό εκατοστό (τ.εκ.)**. Το τ.εκ. είναι ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 1 εκ.

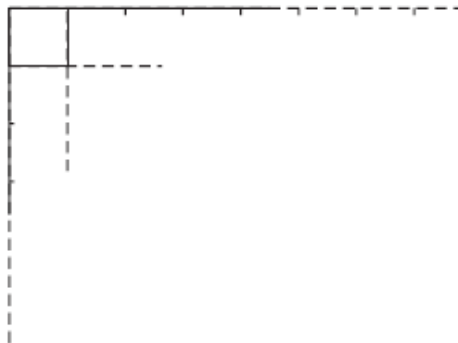
Το σχεδιάζω



2)

Μια μεγαλύτερη μονάδα μέτρησης επιφανειών είναι το **τετραγωνικό δεκατόμετρο (τ.δεκ.)**. Το **τ.δεκ.** είναι ένα .....

Το σχεδιάζω



- Πόσα τ.εκ. ισοδυναμούν με ένα τ.δεκ.;  
.....
- Στο σχέδιό μου χρωματίζω κόκκινη μια επιφάνεια που ισοδυναμεί με το  $\frac{1}{10}$  του τ.δεκ.
- Το  $\frac{1}{100}$  του τ.δεκ. ισοδυναμεί με ..... τ.εκ.

3)



Σχεδιάζουμε σε χαρτόνι **1 τ.μ.** Το χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε επιφάνειες στο σχολείο μας.

**Συμπέρασμα**


Η βασική **μονάδα μέτρησης της επιφάνειας** είναι το **τ.μ.** Οι υποδιαιρέσεις του είναι το **τ.δεκ.** και το **τ.εκ.** Το **1 τ.μ. = 100 τ.δεκ. = 10.000 τ.εκ.** Το αποτέλεσμα της μέτρησης της επιφάνειας ενός σχήματος λεγεται **εμβαδόν** του σχήματος.




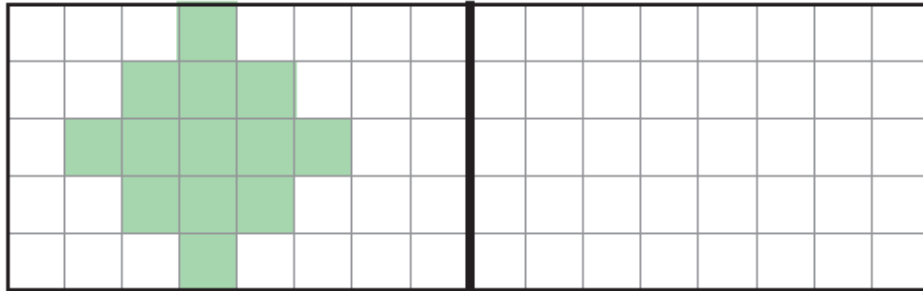
Τετράδιο Εργασιών

# 31


## Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν

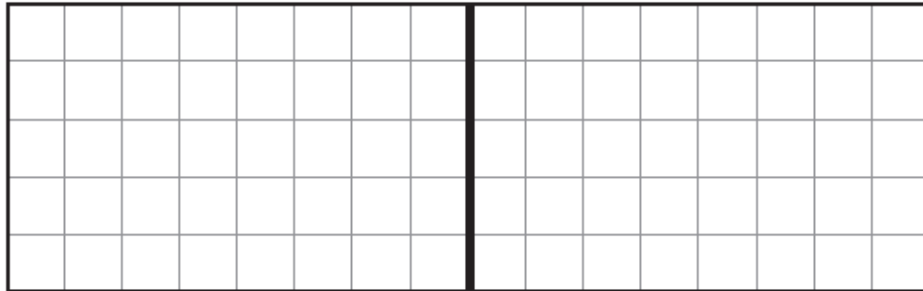
- 1)  Υπολογίζω το εμβαδόν του σχήματος. Δίπλα σχεδιάζω και χρωματίζω ένα διαφορετικό σχήμα με το ίδιο εμβαδόν. Το διπλανό μου παιδί ελέγχει την εργασία μου.

 = 1 τ.εκ.



Είναι . . . . . τ.εκ.

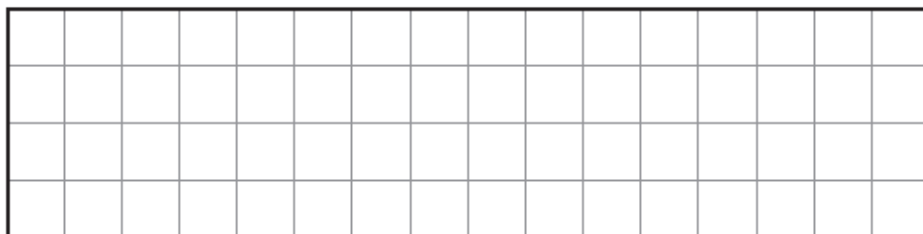
- 2)  Φτιάχνω ένα σχήμα χρωματίζοντας ολόκληρα τετράγωνα. Το διπλανό μου παιδί φτιάχνει ένα άλλο σχήμα με το μισό εμβαδόν.




Είναι . . . . . τ.εκ.

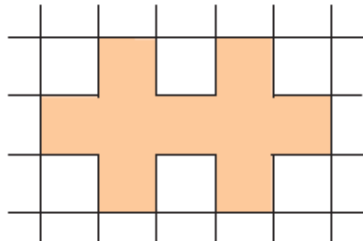
Είναι . . . . . τ.εκ.

- 3) ● Πόσα τ.εκ. ισοδυναμούν με 1 τ.δεκ; .....
- Πόσα τ.εκ. ισοδυναμούν με το  $\frac{1}{4}$  του τ.δεκ. ; Τα χρωματίζω:

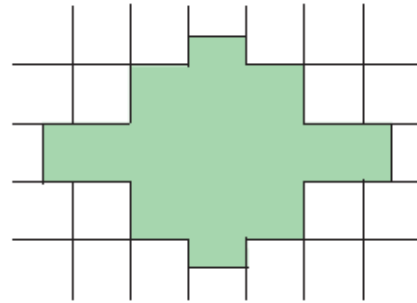


4) Υπολογίζω το εμβαδόν και την περίμετρο των σχημάτων:

 = 1 τ.εκ.



Εμβαδόν = .....  
Περίμετρος = .....



Εμβαδόν = .....  
Περίμετρος = .....

5) Υπολογίζω σε τ.εκ. το εμβαδόν του σχήματος.

Εξηγώ πώς εργάστηκα:

.....  
.....



E = ..... τ.εκ.

6) 

Όρα για χειροτεχνία !!



- Σχεδιάζουμε σε χαρτόνι ένα 1 τ.μ. και το χωρίζουμε σε τ.δεκατόμετρα.
- Τα παιδιά της τάξης μας χωρίζονται σε 4 ομάδες, όσες και οι εποχές του χρόνου.
- Η κάθε ομάδα φτιάχνει από απλό χαρτί 25 κάρτες με Εμβαδόν = 1 τ.δεκ. η καθεμία.
- Κάθε ομάδα ζωγραφίζει στις κάρτες της τις εικόνες της εποχής που επέλεξε.
- Χωρίζουμε το χαρτόνι σε 4 ίσα τετράγωνα.
- Κάθε ομάδα κολλάει τις κάρτες της σε ένα από τα μέρη αυτά.

## Βιβλίο Δασκάλου

## ΒΙΒΛΙΟ ΔΑΣΚΑΛΟΥ Δ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Ξανακούσει τον όρο «επιφάνεια» και σε ποιες περιπτώσεις.

**Ανάλυση Εργασιών:**

**BM 1, 2.** Διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του εμβαδού. Στην εργασία 1, υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν 6 μικρές εικόνες, 4 μεγάλες ή 3 μικρές και 2 μεγάλες. Ρωτάμε αν κάποια από τις απαντήσεις είναι λανθασμένη. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όλες είναι σωστές. Στην εργασία 2 συμπεραίνουμε ότι όλοι χρησιμοποιούν 18 εικόνες με λουλούδια, αφού όλες έχουν ίσα εμβαδά. (Κάθε εικόνα είναι μια άτυπη μονάδα μέτρησης).

**TM 1.** Βοηθάμε όσα παιδιά ενδεχομένως να δυσκολευτούν από το γεγονός ότι οι μονάδες μέτρησης είναι χρωματισμένες με διαφορετικά χρώματα.

**TM 2.** Τ' αποτελέσματα κάποιων μετρήσεων δεν είναι ακέραιοι αριθμοί.

**TM 3.** Τα προβλήματα της εργασίας αυτής είναι ανοικτά. Για το πρώτο πρόβλημα, επισημαίνουμε ότι η απόσταση ανάμεσα σε δύο κουκκίδες είναι 1 εκ.

**TM 4,5.** Εμπειρική σύγκριση επιφανειών.

**Εναλλακτικές διδακτικές προτάσεις:**

Δίνουμε στα παιδιά κόλλες Α4 και ζητάμε να καλύψουν με αυτές την επιφάνεια του θρανίου τους. Για την επιφάνεια που περισσεύει, κόβουν λωρίδες από την **ίδια** κόλλα και συμπληρώνουν. Στο τέλος, υπολογίζουν πόσες **περίπου** ολόκληρες κόλλες Α4 χρειάστηκαν (συμπεριλαμβανομένων και αυτών που έκοψαν).

**Προτάσεις για ολιγοθέσια σχολεία:**

- Στις εμπειρικές μετρήσεις μπορούν να συμμετέχουν και παιδιά από τη Γ' τάξη.

**Προτεινόμενες δραστηριότητες:**

- Ζητάμε από τα παιδιά να μετρήσουν την επιφάνεια (με μη τυπικές αλλά κοινές μονάδες) και την περίμετρο (με τυπικές μονάδες) μιας κόλλας Α4. Στη συνέχεια, ζητάμε να κόψουν την κόλλα σε δύο ίσα μέρη και να προβλέψουν τι θα συμβεί με την περίμετρο και το εμβαδόν της μισής κόλλας. Ακολούθως, προτρέπουμε τα παιδιά να υπολογίσουν την περίμετρο και το εμβαδόν της μισής κόλλας, ώστε να διαπιστώσουν ότι ενώ το εμβαδόν είναι το μισό του αρχικού, δεν ισχύει το ίδιο και με την περίμετρο.
- Δείχνουμε στα παιδιά το περίγραμμα δύο φιγούρων του τάνγκραμ. Τους ζητάμε να εκτιμήσουν ποια έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια και ποια τη μεγαλύτερη περίμετρο. Στη συνέχεια, τα παιδιά κατασκευάζουν τις φιγούρες με το τάνγκραμ και υπολογίζουν περίπου την περίμετρο της κάθε μιας. Συζητάμε για την επιφάνεια που καλύπτουν οι δύο φιγούρες (είναι ίσες, εφόσον προκύπτουν από τα ίδια ακριβώς κομμάτια του τάνγκραμ).

**Κεφάλαιο 31****Υπολογισμός του Εμβαδού**

Κύρια γνωστική περιοχή: Μετρήσεις

*Προτεινόμενος χρόνος διδασκαλίας: 2 ώρες*

**Διδακτικοί στόχοι:** Μέτρηση επιφάνειας με τυπικές μονάδες μέτρησης.

**Αναλυτικά:** Στόχοι μας είναι να είναι ικανά τα παιδιά:

- να γνωρίσουν τις συνήθεις μονάδες μέτρησης επιφάνειας.

**Προσπατούμενες γνώσεις:** Η έννοια της επιφάνειας. Η έννοια της περιμέτρου.

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Έλεγχος:** Ζητάμε από τα παιδιά να χαράξουν με πράσινη ξυλομπογιά το περίγραμμα των σχημάτων της Δραστηριότητας-Ανακάλυψης και να υπολογίσουν την περίμετρό τους. Διασφαλίζουμε ότι διαχωρίζουν την επιφάνεια από το περίγραμμα.

**Διαφορετικά πλαίσια ανάπτυξης του κύριου διδακτικού στόχου:** Γεωμετρία. Μετρήσεις.

**Μαθηματικές έννοιες που εμφανίζονται στο κεφάλαιο και δε θ' αναπτυχθούν αναλυτικά:** Οι μετατροπές μονάδων μέτρησης επιφάνειας.

**Εποπτικό υλικό - Διδακτικά εργαλεία:** Χάρακας, διάφανο χαρτί, ψαλίδι, χαρτόνι. 1 τ.μ. χωρισμένο σε τ.δεκ.

**Ενδεικτικό διάγραμμα ροής μαθήματος:**

Φάση α': Έλεγχος.

Φάση β': Ανάδειξη προσωπικών αντιλήψεων/ προϋπάρχουσας γνώσης:  
Ερώτηση Αφόρμησης.

Φάση γ': Δραστηριότητες ανακάλυψης: Δ/Α, ΒΜ 1,2, 3.

Φάση δ': Επιστημοποίηση: Συμπέρασμα.

Φάση ε': Εφαρμογή / Εμπέδωση: ΤΜ 1, 2, 3, 4, 5.

Φάση στ': Επέκταση: ΤΜ 6.

**Ερώτηση Αφόρμησης / Δραστηριότητα Ανακάλυψης:**

Εναλλακτικές προσεγγίσεις στη σύγκριση των 2 επιφανειών της εικόνας της Δ/Α: Σύγκριση των δύο επιφανειών χωρίς μέτρηση: αντιγράφω το ένα σχήμα με διάφανο χαρτί, το κόβω κατάλληλα και εξετάζω τι μέρος της επιφάνειας του δεύτερου καλύπτεται. Σύγκριση με μέτρηση: χρησιμοποιώ το δοσμένο τετράγωνο ως μονάδα μέτρησης. Με το χάρακα χωρίζω κάθε σχήμα σε τετράγωνα (0,5x0,5, 1x1, 2x2) και τα μετρώ. Στο τέλος, επιστημαίνουμε ότι, ενώ τα δύο σχήματα είναι ισομβαδικά, δεν έχουν όμως ίσες περιμέτρους.

**Ανάλυση Εργασιών:**

**ΒΜ 1** Δίνεται ο ορισμός του τ.εκ. και τα παιδιά το σχεδιάζουν.

**ΒΜ 2.** Τα παιδιά διατυπώνουν τον ορισμό του τ.δεκ. - κατ' αναλογία με τον ορισμό του τ.εκ.- και το σχεδιάζουν. Ρωτάμε ποιος είναι ο ευκολότερος τρόπος να υπολογιστεί το πλήθος των τ.εκ. (πολλαπλασιασμός, πλήθος τ.εκ. ανά σειρά επί πλήθος σπλών). Προετοιμάζουμε έτσι τον τύπο του εμβαδού του τετραγώνου-ορθογωνίου.

**ΒΜ 3.** Δείχνουμε το τετραγωνικό μέτρο στα παιδιά. Συζητούμε τη σχέση του τ.δεκ. με το τ.μ. Ως επέκταση, ζητάμε από τα παιδιά να υπολογίσουν πόσα τ.εκ. έχει το 1 τ.μ. Επιστημαίνουμε ότι δεν ισχύει  $1\text{τ.μ.}=100\text{τ.εκ.}$  κατ' αναλογία με το  $1\mu=100\text{εκ.}$

Τα παιδιά, σε ομάδες, εκτιμούν αρχικά επιφάνειες όπως ο διάδρομος ή το μπαλκόνι έξω από την τάξη, το δάπεδο του γυμναστηρίου ή ενός "γηπέδου" στο χώρο του σχολείου. Στη συνέχεια μετρούν με τα χάρτινα τ.μ. και ελέγχουν την εκτίμησή τους.

**ΤΜ 1.** Όπως και στη Δραστηριότητα-Ανακάλυψη, δύο διαφορετικά σχήματα μπορεί να είναι ισομβαδικά. Ως επέκταση, ζητάμε από τα παιδιά να υπολογίσουν την περίμετρο των δύο σχημάτων.

**ΤΜ 2.** Εργασία ανοικτού τύπου. Ως επέκταση, προτείνουμε στα παιδιά να σχεδιάσουν το πρώτο σχήμα χρωματίζοντας ολόκληρα ή μισά τετράγωνα.

**ΤΜ 3.** Συχνό λάθος:  $1\text{τ.δεκ}=10\text{τ.εκ.}$

**ΤΜ 4.** Προτεινόμενη στρατηγική: Χρήση χάρακα για χωρισμό του σχήματος σε τ.εκ.

**ΤΜ 5.** Παρόμοια με την ΤΜ 4.

**ΤΜ 6.** Διαθεματική δραστηριότητα για την αισθητοποίηση της έννοιας του τ.μ. και την

## ΒΙΒΛΙΟ ΔΑΣΚΑΛΟΥ Δ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

κατανόηση της σχέσης του τ.δεκ. με το τ.μ. (σύνδεση με το μάθημα της **Αισθητικής Αγωγής**).

**Εναλλακτικές διδακτικές προτάσεις:**

- Η εργασία ΤΜ 6 μπορεί ν' αξιοποιηθεί ως δραστηριότητα ανακάλυψης. (Σύνδεση με το μάθημα της **Αισθητικής Αγωγής**).

**Προτάσεις για ολιγοθέσια σχολεία:**

- Οι μετρήσεις με το τ.μ. μπορούν να γίνουν με τη συμμετοχή και παιδιών της Ε' Δημοτικού.
- Η εργασία ΤΜ 6 μπορεί να γίνει και με συμμετοχή παιδιών της Γ' Δημοτικού.

**Προτεινόμενες δραστηριότητες:**

**A)** Τα παιδιά σχεδιάζουν και κόβουν σε χαρτόνι 1 τ. δεκ. και μετρούν με αυτό την επιφάνεια του θρανίου τους. Ανακαλύπτουν ότι χρειάζονται υποδιαιρέσεις του τ.δεκ. για να μετρήσουν με μεγαλύτερη ακρίβεια. Οδηγούνται έτσι είτε στους δεκαδικούς (π.χ. 1,50 τ.δεκ.) είτε σε συμμιγείς (π.χ. 1 τ.δεκ. 40 τ.εκ.). Παρόμοια δουλειά μπορεί να γίνει για τη μέτρηση, π.χ., του δαπέδου της τάξης με τ.μ. **B)** Ρωτάμε τα παιδιά τι μονάδες μέτρησης χρειαζόμαστε για να μετρήσουμε μια μεγάλη επιφάνεια (π.χ. ένα μεγάλο χωράφι).

**Κεφάλαιο 32****Παραλληλόγραμμα**

Κύρια γνωστική περιοχή: Γεωμετρία

*Προτεινόμενος χρόνος διδασκαλίας: 1 ώρα*

**Διδακτικοί στόχοι:** Διαχείριση του τετραγώνου, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του ρόμβου και του πλάγιου παραλληλογράμμου.

**Αναλυτικά:** Στόχοι μας είναι να είναι ικανά τα παιδιά:

- να αναγνωρίζουν τα παραλληλόγραμμα σε σύνθετο σχήμα,
- να γνωρίζουν τα χαρακτηριστικά του κάθε παραλληλογράμμου που αφορούν στο πλήθος των κορυφών, στο πλήθος και στο είδος των γωνιών (ορθές-μη ορθές), στη σχέση μεταξύ των μηκών των πλευρών, στην παραλληλία των πλευρών,
- να περιγράφουν τα παραλληλόγραμμα βάσει αυτών των χαρακτηριστικών,
- να σχεδιάζουν το τετράγωνο και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ή χωρίς πλέγμα, με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων,
- να σχεδιάζουν ρόμβο αξιοποιώντας την ιδιότητα των διαγωνίων του να διχοτομούνται κάθετα (να σχηματίζουν «σταυρό»),
- να αντιληφθούν ότι το τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση ρόμβου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

**Προσπατούμενες γνώσεις:** Έννοια και σχεδιασμός ορθής γωνίας, παραλλήλων και κάθετων ευθειών. Η έννοια του πολυγώνου και τα χαρακτηριστικά του (κορυφές, πλευρές, γωνίες). Βασικές γνώσεις για την ονομασία των παραλληλογράμμων.

**Έλεγχος:** Σχεδιάζουμε στον πίνακα ένα τυχαίο τετράπλευρο και δηλώνουμε στα παιδιά ότι είναι τετράγωνο. Καλούμε τα παιδιά να σχολιάσουν αν ο ισχυρισμός είναι σωστός ή λανθασμένος.

**Διαφορετικά πλαίσια ανάπτυξης του κύριου διδακτικού στόχου:** Γεωμετρία.



Παράρτημα 2

Φυλλάδιο Θεωρίας

**31**

Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν

Ημερομηνία: \_\_\_\_\_

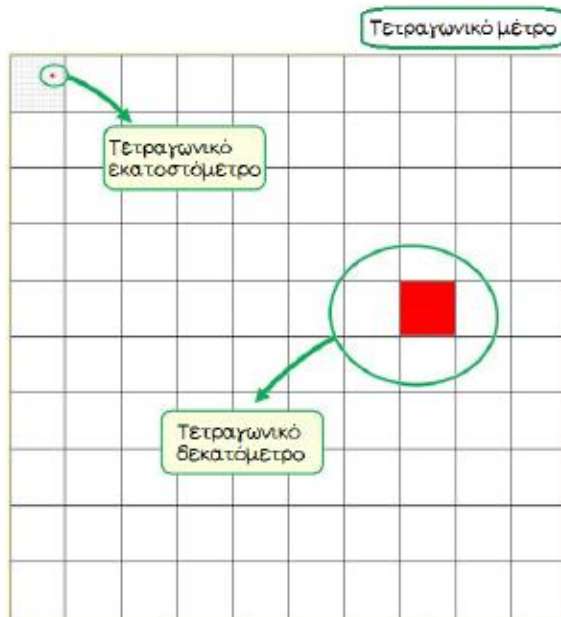
Όταν μετρώ την επιφάνεια που καταλαμβάνει ένα σχήμα βρίσκω το **εμβαδόν** του.

Η μονάδα μέτρησης της επιφάνειας είναι το τετραγωνικό μέτρο.



Το τετραγωνικό μέτρο υποδιαιρείται σε τετραγωνικά δέκατα και τετραγωνικά εκατοστά.

Θυμάμαι  
 **$1 \text{ τμ.} = 100 \text{ τδεκ.} = 10000 \text{ τεκ.}$**



Το τετραγωνικό μέτρο είναι ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 1 μέτρο.

Το τετραγωνικό δεκατόμετρο είναι ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 1 δεκατόμετρο.

Το τετραγωνικό εκατοστό είναι ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 1 εκατοστό.

*(Προσοχή!! Εδώ δεν είναι το πραγματικό μέγεθος!)*

## Παράρτημα 3

Φυλλάδιο Εξάσκησης με Επιλυμένα Παραδείγματα για την Πειραματική Ομάδα

# 31

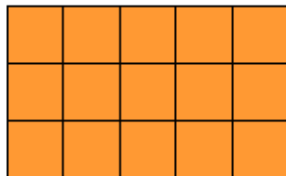
Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν

Ημερομηνία: \_\_\_\_\_

Παράδειγμα

Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος.

Κάθε  = 1 τεκ.



Λύση:

Α. Για να βρω τη περίμετρο μετρώ πόσα εκατοστά είναι το περίγραμμα του σχήματος.

Οι δύο πλευρές του έχουν μήκος 5 εκ. και οι άλλες δύο 3 εκ.

Άρα,  $5 + 5 + 3 + 3 = 16$  εκατοστά

Η περίμετρος του σχήματος είναι 16 εκατοστά.

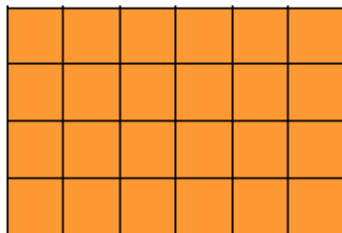
Β. Για να βρω το εμβαδόν μετρώ από πόσα τετράγωνα αποτελείται το σχήμα. Το κάθε τετράγωνο έχει εμβαδόν 1 τετραγωνικό εκατοστό.

Αποτελείται από 15 τετράγωνα.

Άρα,  $15 \times 1 = 15$  τετραγωνικά εκατοστά.

Το εμβαδόν του σχήματος είναι 15 τετραγωνικά εκατοστά.

1. Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος.



Λύση	Απάντηση
	_____
	_____
	_____
	_____
	_____



Παράδειγμα

Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος.

Κάθε  = 1 τ.εκ.



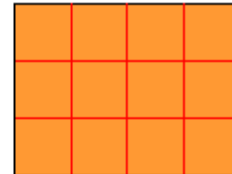
Λύση:

A. Για να βρω τη περίμετρο μετρώ πόσα εκατοστά είναι το περίγραμμο του σχήματος. Χωρίζω το σχήμα σε τετράγωνα με μήκος πλευράς 1 εκ.

Οι δύο πλευρές του έχουν μήκος 4 εκ. και οι άλλες δύο 3 εκ.

Άρα,  $4 + 4 + 3 + 3 = 14$  εκατοστά

Η περίμετρος του σχήματος είναι 14 εκατοστά.

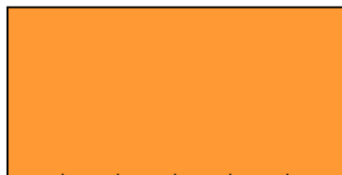


B. Για να βρω το εμβαδόν μετρώ από πόσα τετράγωνα αποτελείται το σχήμα. Χωρίζω το σχήμα σε τετράγωνα με μήκος πλευράς 1 εκ. Το κάθε τετράγωνο έχει εμβαδόν 1 τετραγωνικό εκατοστό. Αποτελείται από 12 τετράγωνα.

Άρα,  $12 \times 1 = 12$  τετραγωνικά εκατοστά.

Το εμβαδόν του σχήματος είναι 12 τετραγωνικά εκατοστά.

2. Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος.

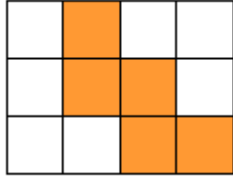


Λύση	Απάντηση
	_____
	_____
	_____
	_____
	_____

Παράδειγμα

Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του χρωματισμένου σχήματος.

Κάθε  = 1 τεκ.



Λύση:

Α. Για να βρω τη περίμετρο μετρώ πόσα εκατοστά είναι το περίγραμμα του σχήματος. Το σχήμα έχει 12 πλευρές του 1 εκατοστού.

Άρα,  $12 \times 1 = 12$  εκατοστά

Η περίμετρος του σχήματος είναι 12 εκατοστά.

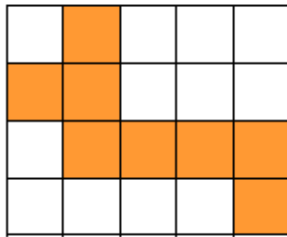
Β. Για να βρω το εμβαδόν μετρώ από πόσα τετράγωνα αποτελείται το σχήμα. Το κάθε τετράγωνο έχει εμβαδόν 1 τετραγωνικό εκατοστό.

Αποτελείται από 5 τετράγωνα.

Άρα,  $5 \times 1 = 5$  τετραγωνικά εκατοστά.

Το εμβαδόν του σχήματος είναι 5 τετραγωνικά εκατοστά.


3. Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του χρωματισμένου σχήματος

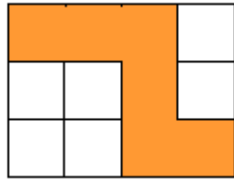


Λύση	Απάντηση

Παράδειγμα

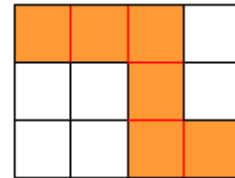
Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του χρωματισμένου σχήματος.

Κάθε  = 1 τεκ.



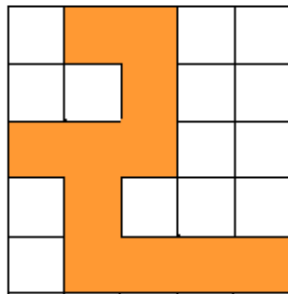
Λύση:

Α. Για να βρω τη περίμετρο μετρώ πόσα εκατοστά είναι το περίγραμμα του σχήματος. Χωρίζω το σχήμα σε τετράγωνα με μήκος πλευράς 1 εκ. Το σχήμα έχει 14 πλευρές του 1 εκατοστού.  
Άρα,  $14 \times 1 = 14$  εκατοστά  
Η περίμετρος του σχήματος είναι 14 εκατοστά.



Β. Για να βρω το εμβαδόν μετρώ από πόσα τετράγωνα αποτελείται το σχήμα. Χωρίζω το σχήμα σε τετράγωνα με μήκος πλευράς 1 εκ. Το κάθε τετράγωνο έχει εμβαδόν 1 τετραγωνικό εκατοστό.  
Αποτελείται από 6 τετράγωνα.  
Άρα,  $6 \times 1 = 6$  τετραγωνικά εκατοστά.  
Το εμβαδόν του σχήματος είναι 6 τετραγωνικά εκατοστά.


4. Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του χρωματισμένου σχήματος

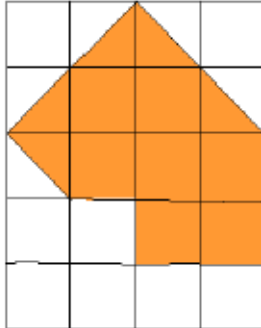


Λύση	Απάντηση
	_____
	_____
	_____
	_____
	_____

Παράδειγμα

Να υπολογίσεις το εμβαδόν του χρωματισμένου σχήματος.

Κάθε  = 1 τε.κ.



Λύση:

Β. Για να βρω το εμβαδόν μετρώ από πόσα τετράγωνα αποτελείται το σχήμα. Το κάθε τετράγωνο έχει εμβαδόν 1 τετραγωνικό εκατοστό.

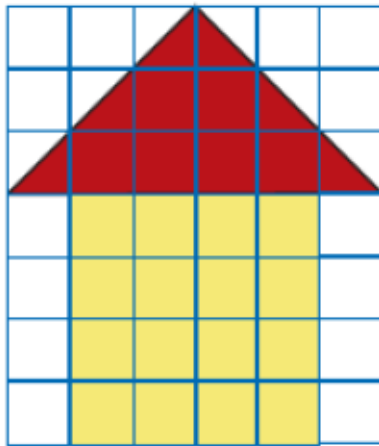
Αποτελείται από 7 ολόκληρα τετράγωνα. Άρα,  $7 \times 1 = 7$  τετραγωνικά εκατοστά.

Αποτελείται και από 5 μισά τετράγωνα. Άρα,  $5 \times 0,5 = 2,5$  τετραγωνικά εκατοστά.

Συνολικά, λοιπόν  $7 + 2,5 = 9,5$  τετραγωνικά εκατοστά.

Το εμβαδόν του σχήματος είναι 9,5 τετραγωνικά εκατοστά.

5. Να υπολογίσεις το εμβαδόν του σχήματος.



Λύση	Απάντηση
	_____
	_____
	_____
	_____
	_____
	_____

Παράδειγμα

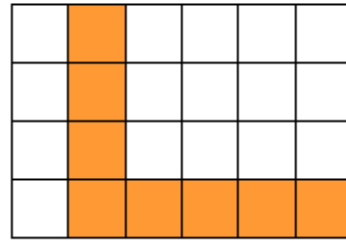
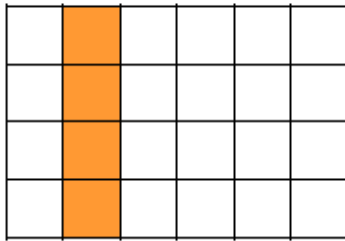
Να φτιάξεις δύο διαφορετικά σχήματα. Το πρώτο να έχει εμβαδόν διπλάσιο από του δεύτερου.

Κάθε  = 1 τεκ.

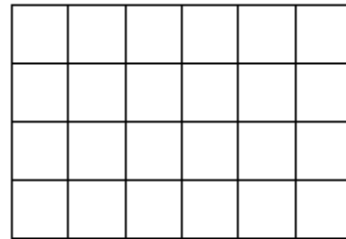
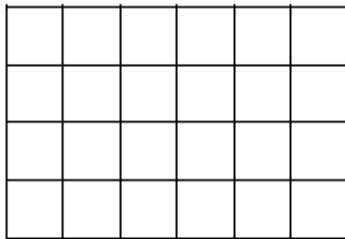
Λύση:

Αποφασίζω το δεύτερο σχήμα να έχει εμβαδόν 4 τεκ. Άρα, το πρώτο σχήμα θα έχει εμβαδόν 8 τεκ.

Τα κατασκευάζω:



**6. Να φτιάξεις δύο διαφορετικά σχήματα. Το πρώτο να έχει εμβαδόν διπλάσιο από το δεύτερο.**



Εμβαδόν: \_\_\_\_\_

Εμβαδόν: \_\_\_\_\_

## Παράρτημα 4

Φυλλάδιο Εξάσκησης χωρίς Επιλυμένα Παραδείγματα για την Ομάδα Ελέγχου

# 31

Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν

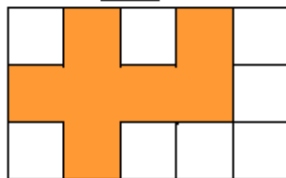
Ημερομηνία: \_\_\_\_\_

Είμαι:  Αγόρι  
 Κορίτσι

### Παράδειγμα

Υπολόγισε την περίμετρο και το εμβαδόν του χρωματισμένου σχήματος.

Κάθε  = 1 τεκ.



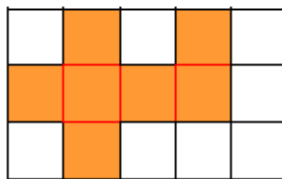
Λύση:

Α. Για να βρω την περίμετρο μετρώ πόσα εκατοστά είναι το περίγραμμα του σχήματος. Χωρίζω το σχήμα σε τετράγωνα με πλευρά 1 εκ.

Κάθε πλευρά θα έχει μήκος 1 εκ. Το σχήμα έχει 17 πλευρές.

Άρα,  $17 \times 1 = 17$  εκατοστά.

Η περίμετρος του σχήματος είναι 17 εκατοστά.



Β. Για να βρω το εμβαδόν θα μετρήσω από πόσα τετράγωνα αποτελείται το σχήμα. Χωρίζω το σχήμα σε τετράγωνα με πλευρά 1 εκ. Κάθε τετράγωνο έχει εμβαδόν 1 τετραγωνικό εκατοστό.

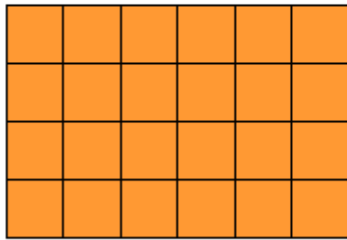
Το σχήμα αποτελείται από 7 τετράγωνα.

Άρα,  $7 \times 1 = 7$  τετραγωνικά εκατοστά.

Το εμβαδόν του σχήματος είναι 7 τετραγωνικά εκατοστά.

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος.



Λύση	Απάντηση
	_____
	_____
	_____
	_____
	_____

2. Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος.

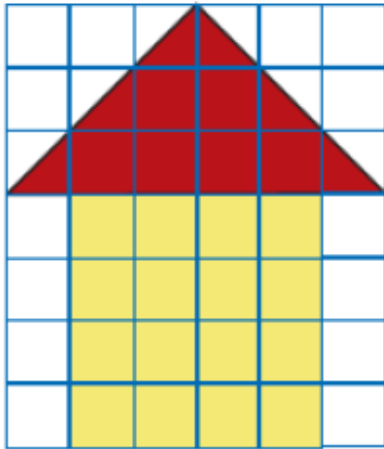


Λύση	Απάντηση
	_____
	_____
	_____
	_____
	_____



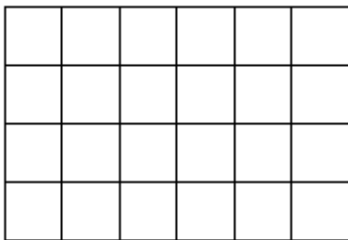


5. Να υπολογίσεις το εμβαδόν του σχήματος.

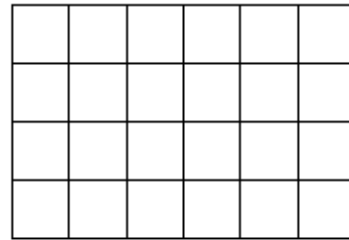


Λύση	Απάντηση
	_____
	_____
	_____
	_____
	_____
	_____

6. Να φτιάξεις δύο διαφορετικά σχήματα. Το πρώτο να έχει εμβαδόν διπλάσιο από το δεύτερο.



Εμβαδόν: \_\_\_\_\_



Εμβαδόν: \_\_\_\_\_

Παράρτημα 5

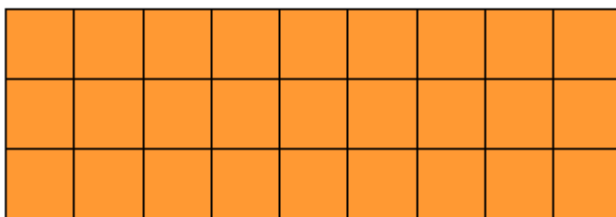
Κριτήριο Αξιολόγησης

**31**

Μετρώ την επιφάνεια, βρίσκω το εμβαδόν

Είμαι:  Αγόρι  
 Κορίτσι

1. Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος.



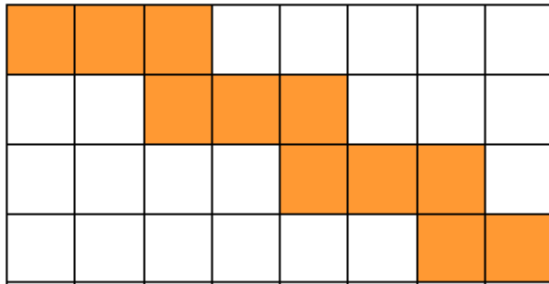
Λύση	Απάντηση

2. Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος.



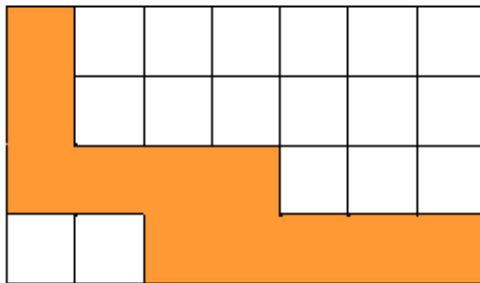
Λύση	Απάντηση

3. Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του χρωματισμένου σχήματος.



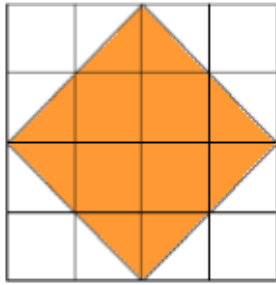
Λύση	Απάντηση
	_____
	_____
	_____
	_____
	_____

4. Να υπολογίσεις την περίμετρο και το εμβαδόν του χρωματισμένου σχήματος.



Λύση	Απάντηση
	_____
	_____
	_____
	_____
	_____

5. Να υπολογίσεις το εμβαδόν του χρωματισμένου σχήματος.

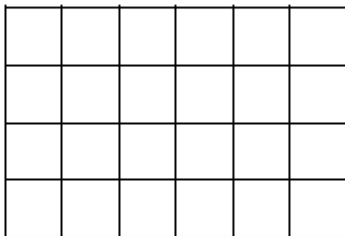


Λύση	Απάντηση
	<hr/> <hr/> <hr/> <hr/>

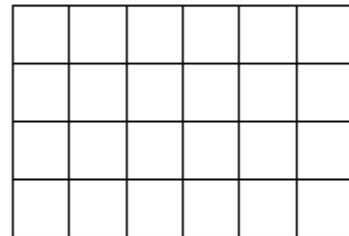
6. Να φτιάξεις δύο διαφορετικά σχήματα.

A. το ένα να έχει εμβαδόν διπλάσιο από το άλλο.

B. το ένα να έχει εμβαδόν μισό από το άλλο.

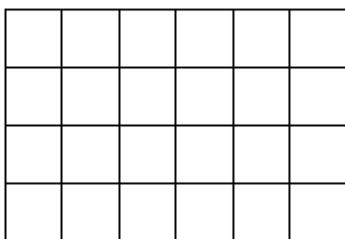


A

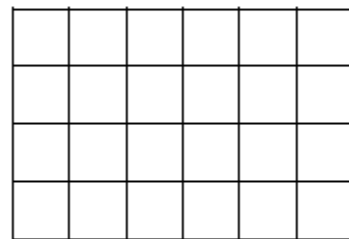


Εμβαδόν: \_\_\_\_\_

Εμβαδόν: \_\_\_\_\_



B



Εμβαδόν: \_\_\_\_\_

Εμβαδόν: \_\_\_\_\_