ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΟΙ ΧΩΡΟΙ SOBOLEV ΣΤΗΝ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΣΚΕΔΑΣΗ

ΝΙΚΟΣ ΚΑΤΣΟΥΡΟΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Π.Μ.Σ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ:
ΚΟΤΤΑ-ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ

ΑΘΗΝΑ 2017

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τους γονείς μου, τον αδερφό μου και τη σύντροφό μου Αργυρώ για τη συμπαράσταση που μου προσέφεραν.

Θα ήθελα να εκφράσω, επίσης, την εκτίμηση και τις ευχαριστίες μου στον Ομότιμο Καθηγητή Χριστόδουλο Αθανασιάδη για το ενδιαφέρον και την καθοδήγηση του σε όλη τη διάρκεια των Μεταπτυχιακών μου Σπουδών. Η επιστημονική του αρτιότητα, η πολυδιάστατη επιστημονική του σκέψη και η υποδειγματική του διδασκαλία αποτελούν παράδειγμα για μενα.

Ιδιαίτερα θερμές ευχαριστίες απευθύνω στην επιβλέπουσα Επίκουρο Καθηγήτρια Ευαγγελία Κοττα- Αθανασιάδη για την αμέριστη συμπαράστασή της κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Το ανθρώπινο της ενδιαφέρον προς τους φοιτητές και τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν είναι αξιοσημείωτο. Με την καθοδήγηση και τις πολύτιμες συμβουλές της μπόρεσα να φέρω σε πέρας με επιτυχία την εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας.

Συνεχίζοντας, θέλω να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή Μπαρμπάτη Γεράσιμο και τον Επίκουρο Καθηγητη Σεβρόγλου Βασίλη για τις εύστοχες παρατηρήσεις και τις χρησιμες υποδείξεις τους τόσο στην διπλωματική εργασία όσο και κατά τη διάρκεια της παρουσίασης.

Είναι υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Ευγένιο Αυγερινό για τις επίμονες παροτρύνσειςτου, την σημαντική ενθάρρυνση του στο πρόσωπό μου και την σχεδόν πατρική του επιμονή και φροντίδα στο να συνεχίσω και να φέρω σε πέρας τις σπουδές μου σε Μεταπτυχιακό Επίπεδο. Δείχνει πραγματικά την αγάπη του προς τις Επιστήμες και την πίστη του στην πρόοδό τους.

Ιδιαιτέρως ευχαριστώ τον φίλο μου και συνάδελφο Δημήτρη Μαυριδόπουλο για την πολύτιμη υποστήριξή του, τις καίριες επισημάνσεις και τις απολαυστικές συζητήσεις μας πάνω στα Μαθηματικά.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον μαθηματικό των σχολικών μου χρόνων, στο Λεόντειο Λύκειο Πατησίων, Στάθη Παπαδόπουλο, για την αγάπη που μου ενέπνευσε στα Μαθηματικά.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το κύριο πρόβλημα το οποίο μελετάμε στην παρούσα διπλωματική, είναι το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης. Θεωρήσαμε αναγκαίο, για να προχωρήσουμε σε πληρέστερη μελέτη του προβλήματος, να αναπτύξουμε την στοιχειώδη θεωρία των χώρων Sobolev, και να παραθέσουμε βασικά αποτελέσματα της συναρτησιακής ανάλυσης, ειδικότερα αποτελέσματα που αφορούν συμπαγείς τελεστές όπως το θεώρημα Hilbert-Schmidt. Είναι εύλογο απο την αναζήτηση λύσεων σε ευρύτερους χώρους, που περιέχουν συναρτήσεις λιγότερο ομαλές, να προκύψουν πιο πολλές λύσεις. Μια πολύ ενδιαφέρουσα θεωρία, που θίγουμε στοιχειωδώς στη παρούσα μελέτη, είναι αυτή της κανονικοποίησης. Αιτία για να συμπεριλάβουμε αυτό το κεφάλαιο στη παρουσίαση μας, ήταν το ζήτημα της καλής τοποθέτησης του προβλήματος $A\phi = f$, όπου ο A είναι συμπαγής τελεστής $A : X \to Y$. Συγκεκριμένα, η θεωρία κανονικοποίησης χρησιμοποιείται όταν ο A^{-1} είναι μη-φραγμένος, και συνεπώς προκαλεί αστάθεια. Η λύση που προτείνει είναι η αντικατάσταση του A^{-1}, απο τελεστές R_α που τον προσεγγίζουν, και είναι 1-1 και φραγμένοι, με αποτέλεσμα να κερδίζουμε σε ευστάθεια και να χάνουμε σε ακρίβεια. Παραθέτουμε και δύο δημοφιλή σχήματα κανονικοποίησης: της φασματικής αποκοπής και του Tikhonov. Τέλος, αναφερόμαστε ακροθιγώς στην μη καλή τοποθέτηση του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης, και την αποδεικνύουμε για τα ευθέα προβλήματα σκέδασης.

Κεφάλαιο 1

Συναρτησιακή ανάλυση και οι χώροι Sobolev

1.1 Χώροι με νόρμα

Ξεκινάμε με τον θεμελιώδη ορισμό του χώρου με νόρμα X .

Ορισμός 1.1.1. *Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επι του σώματος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Θα λέμε οποιαδήποτε συνάρτηση $||\ || : X \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $||\phi|| \geq 0$,
2. $||\phi|| = |\alpha|\ ||\phi||$ *για κάθε* $\alpha \in \mathbb{C}$
3. $||\alpha\phi|| = |\alpha|||\phi||$ *για κάθε* $\alpha \in \mathbb{C}$
4. $||\phi + \psi|| \leq ||\phi|| + ||\psi||$

για κάθε $\phi, \psi \in X$ νόρμα στον χώρο X . Ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με νόρμα, θα καλείται χώρος με νόρμα.

Παράδειγμα 1.1.2. *Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^n$, το σύνολο όλων των διατεταγμένων n -άδων απο μιγαδικούς αριθμούς $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, με την συνήθη πρόσθεση και τον συνήθη κλιμακωτό πολλαπλασιασμό, είναι χώρος με νόρμα. Συγκεκριμένα με την νόρμα*

$$||x|| := \left(\sum_{1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

όπου το $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Παράδειγμα 1.1.3. *Έστω ο διανυσματικός χώρος X όλων των συνεχών συναρτήσεων, που παίρνουν μιγαδικές τιμές και είναι ορισμένες στο $[a, b]$. Τότε*

$$||\phi|| := \ max_{\alpha \leq x \leq \beta} \ |\phi(x)|$$

ορίζει μια νόρμα στον X, τον οποίο θα συμβολίζουμε απο εδώ και πέρα με $C[a, b]$.

Παράδειγμα 1.1.4. *Έστω Xο διανυσματικός χώρος όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ορισμένων στο $[a, b]$ ως προς το μέτρο Lebesgue. Τότε μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε οτι η*

$$||\phi|| := \left[\int_a^b |\phi(x)|^2 \ dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

ορίζει μια νόρμα στον χώρο X, τον οποίο απο και πέρα θα συμβολίζουμε με $L^2[a, b]$.

Προχωρούμε τώρα στη περιγραφή τοπολογικής δομής για ένα χώρο με νόρμα X. Έστω μια ακολουθία $\{\phi_n\}, \phi_n \in X$, θα λέμε οτι συγκλίνει στο στοιχείο $\phi \in X$ αν $||\phi_n - \phi|| \to \ 0$ καθώς $n \to \infty$ και θα γράφουμε $\phi_n \to \phi$. Έστω Yένας άλλος χώρος νόρμας, θα λέμε οτι μια συνάρτηση $A : X \to Y$ είναι συνεχής στο $\phi \in X$ αν η σχέση $\phi_n \to \phi$ συνεπάγεται την $A\phi_n \to A\phi$. Συγκεκριμένα δεν είναι δύσκολο να δείξουμε οτι η συνάρτηση της νόρμας είναι συνεχής. Ένα υποσύνολο $U \subset X$ είναι κλειστό αν περιέχει ολα τα όρια των συγλινουσών ακολουθιών στο U. Η κλειστότητα του U την οποία θα συμβολίζουμε με $\overline{U}$ είναι το σύνολο όλων των ορίων συγκλινουσών ακολουθιών στο U.Θα λέμε οτι ένα συνολο U είναι πυκνό εάν η κλειστότητα του είναι ολόκληρος ο X $\overline{U} = X$.
Στις εφαρμογές μας ενδιαφέρουν κυρίως οι χώροι νορμών που έχουν την ιδιότητα της πληρότητας. Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό αύτης της ιδιότητας, πρώτα πρέπει να δώσουμε τον ορισμό την ακολουθίας Cauchy. Μια ακολουθία $\{\phi_n\}, \phi \in X$, χαρακτηρίζεται ως ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $N = N(\epsilon)$ τέτοιος ώστε $||\phi_n - \phi_m|| < \epsilon$ για κάθε $m, n \geq N$. Θα λέμε ένα υποσύνολο U του X πλήρες, εάν κάθε ακολουθία Cauchy στο σύνολο U , συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του U.

Ορισμός 1.1.5. *Ενάς πλήρης, χώρος με νόρμα X λέγεται χώρος Banach.*

Μπορεί κανείς δείξει οτι για κάθε χώρο με νόρμα X υπάρχει ένας χώρος Banach $\hat{X}$ έτσι ώστε ο X να είναι ισομορφικός και ισομετρικός με έναν πυκνό υπόχωρο του $\hat{X}$, δηλαδή υπάρχει μια γραμμική, 1-1 και επι συνάρτηση I απο τον X στον πυκνό υπόχωρο του $\hat{X}$, τέτοια ώστε $||I\phi||_{\hat{X}} = ||\phi||_X$ για κάθε $\phi \in X$. O καλείται πλήρωση του X. Για παράδειγμα, το διάστημα $[a, b]$ με την νόρμα της αποστασης απο το 0, $||x|| = |x|$ για κάθε $x \in [a, b]$ είναι η πλήρωση του συνόλου όλων των ρητών αριθμών στο $[a, b]$ ως προς την νόρμα της απολύτου τιμής. Μπορεί να αποδειχθεί οτι η πλήρωση του χώρου όλων των συνεχών συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές, ορισμένων στο διάστημα $[a, b]$ ως προς την νόρμα που ορίζεται ως εξής:

$$||\phi|| = \left[\int_a^b |\phi(x)|^2 \ dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

είναι ακριβώς ο χώρος $L^2[a,b]$ που ορίσαμε παραπάνω. Τώρα θα προχωρήσουμε στον ορισμό διανυσματικών χώρων με εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 1.1.6. *Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επι των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.*
Μια συνάρτηση $(,): X \times X \to \mathbb{C}$ η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω:

1.$(\phi,\phi) \geq 0$,
2.$(\phi,\phi) = 0$ *αν και μόνο αν* $\phi = 0$,
3.$(\phi,\psi) = \overline{(\psi,\phi)}$,
4.$(\alpha\phi + \beta\psi, \xi) = \alpha(\phi,\xi) + \beta(\psi,\xi)$ *για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

για κάθε $\phi, \psi, \xi \in X$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον X .

Παράδειγμα 1.1.7. *Για $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ στον $\mathbb{C}^n$., το*

$$(x,y) = \sum_1^n \xi_i \overline{\eta_i}$$

αποτελεί εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$.

Παράδειγμα 1.1.8. *Το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2[a,b]$ δίνεται απο το*

$$(\phi,\psi) = \int_a^b \phi\overline{\psi}\, dx$$

Θεώρημα 1.1.9. *Το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την ανισότητα Cauchy-Schwarz*

$$|(\phi,\psi)|^2 \leq (\phi,\phi)(\psi,\psi)$$

για κάθε $\phi, \psi \in X$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν τα ϕ και ψ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη. Η απόδειξη της ανισότητας είναι τετριμμένη για $\phi = 0$. Για $\phi \neq 0$ και

$$\alpha = -\frac{\overline{(\phi,\psi)}}{(\phi,\psi)}, \quad \beta = (\phi,\phi)$$

έχουμε οτι

$$\begin{aligned} 0 \leq (\alpha\phi + \beta\psi, \alpha\phi + \beta\psi) = |\alpha|^2(\phi,\phi) + 2Re\{\alpha\overline{\beta}(\phi,\psi)\} + |\beta|^2(\psi,\psi) \\ = (\phi,\phi)(\psi,\psi) - |(\phi,\psi)|^2 \end{aligned}$$

απο την οποία προκύπτει άμεσα η ανισότητα Cauchy-Schwartz. Η ισότητα επαληθέυεται αν και μόνον αν $\alpha\phi + \beta\psi = 0$, η οποία με τη σειρά της συνεπάγεται οτι οι ϕ και ψ είναι γραμμικώς εξαρτημένες εφόσον $\beta \neq 0$. □

Ένας διανυσματικός χώρος, εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο, λέγεται χώρος εσωτερικού γινομένου. Έστω X χώρος εσωτερικού γινομένου, τότε η $||\phi|| = (\phi,\phi)^{\frac{1}{2}}$ ορίζει νόρμα στον X. Εαν ο χώρος X είναι πλήρης ως προς την επαγόμενη απο το εσωτερικό γινόμενο νόρμα, τότε λέγεται χώρος Hilbert. Ένα υποσύνολο U ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο X είναι διανυσματικός υπόχωρος του X, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο περιορισμένο στο $U \times U$.

Παράδειγμα 1.1.10. *Θα αποδείξουμε οτι ο $L^2[a,b]$ είναι χώρος Hilbert.*

Δύο στοιχεία ενός χώρου Hilbert λέγονται ορθογώνια αν $(\phi,\psi) = 0$ και το συμβολίζουμε $\phi \perp \psi$. Ένα υποσύνολο $U \subset X$ λέγεται ένα ορθογώνιο σύστημα ενα $(\phi,\psi) = 0$ για κάθε $\phi,\psi \in U$ με $\phi \neq \psi$. Ένα ορθογώνιο σύστημα U λέγεται ορθοκανονικό εαν $||\phi|| = 1$ για κάθε $\phi \in U$. Το σύνολο

$$U^{\perp} = \{\psi \in X \ : \ \psi \perp U\}$$

καλείται το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υποσυνόλου U.
Έστω τώρα $U \subset X$ χώρου με νόρμα, και έστω $\phi \in X$. Θα λέμε ένα στοιχείο $v \in U$ βέλτιστη προσέγγιση στο ϕ απο το U εάν

$$||\phi - v|| = inf_{u\in U}||\phi - u||.$$

Θεώρημα 1.1.11. *Έστω U υπόχωρος ενός χώρου Hilbert X. Τότε το v αποτελεί βέλτιστη προσέγγιση του στοιχείου $\phi \in X$ απο το σύνολο U αν και μόνο αν $\phi - v \perp U$. Για καθένα απο τα $\phi \in X$ υπάρχει το πολύ μια βέλτιστη προσέγγιση απο το σύνολο U.*

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα προκύπτει απο την

$$||(\phi - v) + \alpha u||^2 = ||\phi - v||^2 + 2\alpha Re(\phi - v, u) + \alpha^2||u||^2$$

που επαληθέται για κάθε $u, v \in U$ και για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, αν $u \neq 0$ τότε το ελάχιστο της δεξιάς πλευρας της εξίσωσης πιάνεται όταν

$$\alpha = -\frac{Re(\phi - v, u)}{||u||^2}$$

και άρα $||(\phi - v) + \alpha u||^2 > ||\phi - v||^2$ εκτός εάν $\phi - v \perp U$. Απο την άλλη, εαν $\phi - v \perp U$ τότε $||(\phi - v) + \alpha u||^2 \geq ||\phi - v||^2$ για κάθε α και u το οποίο συνεπάγεται οτι το v είναι η βέλτιστη προσέγγιση στο ϕ. Έστω υπήρχαν δύο βέλτιστες προσεγγίσεις v_1 και v_2, τοτε $(\phi - v_1, u) = (\phi - v_2, u) = 0$ και άρα $(\phi, u) = (v_1, u) = (v_2, u)$ για κάθε $u \in U$. Έτσι $(v_1 - v_2, u) = 0$ για κάθε $u \in U$ και, θέτοντας $u = v_1 - v_2$, βλέπουμε οτι $v_1 = v_2$. □

Θεώρημα 1.1.12. *Έστω U ένας πλήρης υπόχωρος του χώρου Hilbert X. Τότε σε κάθε στοιχείο του X αντιτοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο που αποτελεί βέλτιστη προσέγγιση απο το U.*

Απόδειξη. Έστω $\phi \in X$ και επιλέγουμε $\{u_n\}, u_n \in U$, τέτοια ώστε

$$||\phi - u_n||^2 \le d^2 + \frac{1}{n} \tag{1.1}$$

όπου $d = inf_{u \in U}||\phi - u||$. Τότε απο την εύκολα επαληθεύσιμη ταυτότητα του παραλληλογράμου

$$||\phi + \psi||^2 + ||\phi - \psi||^2 = 2\big(||\phi||^2 + ||\psi||^2\big)$$

έχουμε οτι

$$\begin{aligned} ||(\phi - u_n) + (\phi - u_m)||^2 + ||u_n + u_m||^2 = 2||\phi - u_n||^2 + 2||\phi - u_m||^2 \\ 4d^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} \end{aligned}$$

Οπότε έπεται οτι η $\{u_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy και, εφοσον ο χώρος U είναι πλήρης, η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του χώρου $v \in U$. Παιρνώντας στο όριο στην 1.1 συνεπάγεται οτι η v είναι η βέλτιστη προσέγγιση του ϕ απο το U. Η μοναδικότητα προκυπτει απο το προηγούμενο θεώρημα που αποδείξαμε. □

Σημειώνουμε οτι αν ο U είναι κλειστός (και άρα πλήρης υπόχωρος ενός χώρου Hilbert X, τότε μπορούμε να γράψουμε $\phi = v + \phi - v$ όπου $\phi - v \perp U$, δηλαδή ο X είναι το ευθύ άθροισμα του U και του ορθογώνιου συμπληρώματος του, η αλλιώς

$$X = U \oplus U^{\perp}.$$

Αν το U είναι υποσύνολο του διανυσματικού χώρου X , το σύνολο όλων των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του U, το συμβολίζουμε $spanU$. Ενα σύνολο ϕ_n σε έναν χώρο Hilbert X για το οποίο ισχύει οτι το $span\{\phi_n\}$ είναι πυκνό στο X το λέμε πλήρες σύνολο.

Θεώρημα 1.1.13. *Έστω $\{\phi_n\},\ n = 1, 2, 3..$ ένα ορθοκανονικό σύστημα σε έναν χώρο Hilbert X. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

α. $\{\phi_n\}$ είναι πλήρες σύνολο.
β. Κάθε στοιχειό $\phi \in X$ μπορεί να επεκταθεί σε σειρά Fourier,

$$\phi = \sum_1^\infty (\phi, \phi_n)\ \phi_n.$$

ς. Για κάθε $\phi \in X$ έχουμε την ανισότητα του Parseval,

$$||\phi||^2 = \sum_1^\infty |(\phi, \phi_n)|^2.$$

δ. Το στοιχείο $\phi = 0$ είναι το μόνο στοιχείο του χώρου X για το οποίο ισχύει $(\phi, \phi_n) = 0$ για κάθε n φυσικό αριθμό.

Απόδειξη. $a \Rightarrow b$: Απο τα θεωρήματα 1.11 και 1.12 συνεπάγεται οτι η

$$u_n = \sum_{1}^{\infty} (\phi, \phi_k)\phi_k$$

είναι η βέλτιστη προσέγγιση στο ϕ απο το σύνολο $span\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$. Εφόσον το σύνολο $\{\phi_n\}_1^\infty$ είναι πλήρες, υπάρχει ένα στοιχείο $\hat{u}_n \in span\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ τέτοιο ώστε $||u_n - \phi|| \to 0$ καθώς $n \to \infty$ και εφόσον $||\hat{u}_n - \phi|| \geq ||u_n - \phi||$ συμπεραίνουμε οτι $u_n \to \phi$ καθώς $n \to \infty$.
$b \Rightarrow c$: Έχουμε οτι

$$||u_n||^2 = (u_n, u_n) = \sum_{1}^{\infty} |(\phi, \phi_k)|^2$$

Τώρα παίρνουμε το $n \to \infty$, και χρησιμοποιούμε την συνέχεια τη συνάρτησης της νόρμας.
$c \Rightarrow d$: Αυτό είναι τετριμμένο.

$d \Rightarrow a$ Θέτουμε $U := \overline{span\{\phi_n\}}$ και υποθέτουμε οτι $X \neq U$. Τότε βέβαια υπάρχει $\phi \in X$ με $\phi \notin U$. Το U είναι πλήρες υποσύνολο του X εφόσον ειναι κλειστός υπόχωρος του X. Άρα απο το Θεώρημα 1.12, η βέλτιστη προσέγγιση v στο ϕ απο το σύνολο U υπάρχει και ικανοποιεί την $(v - \phi, \phi_n) = 0$ για κάθε φυσικό αριθμό n. Απο την υπόθεση αυτο συνεπάγεται οτι $v = \phi$, που είναι αντιφατικό. Άρα $X = U$.

Λόγω του b πιο πάνω, ένας πλήρες ορθοκανονικό σύστημα σε έναν χώρο Hilbert X λέγεται και ορθοκανονική βάση του X. □

1.2 Φραγμένοι Γραμμικοί Τελεστές

Ένας τελεστής $A : X \to Y$ που απεικονίζει τον διανυσματικό χώρο X στον διανυσματικό χώρο U καλείται γραμμικός εαν

$$A(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha A\phi + \beta A\psi$$

για κάθε $\psi, \phi \in X$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω X και U δύο χώροι με νόρμα και $A : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τότε ο A είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής σε ένα σημείο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε οτι ο A είναι συνεχής στο σημείο $\phi_0 \in X$. Τότε για κάθε $\phi \in X$ και $\phi_n \to \phi$ έχουμε οτι

$$A\phi_n = A(\phi_n - \phi + \phi_0) + A(\phi - \phi_0) \to A\phi_0 + A(\phi - \phi_0) = A\phi$$

εφόσον $\phi_n - \phi + \phi_0 \to \phi_0$. □

Ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ απο έναν χώρο με νόρμα X σε έναν άλλο χώρο με νόρμα Y καλείται φραγμένος αν υπάρχει θετική σταθερά C τέτοια ώστε

$$||A\phi|| \leq C||\phi||$$

για κάθε $\phi \in X$. Η νόρμα του A είναι ο μικρότερη θετικη σταθερά για την οποία ισχύει η ανισότητα (δηλαση διαιρώντας με $||\phi||$ και χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του A)

$$||A|| = sup_{||\phi||=1}||A\phi||,\ \phi \in X.$$

Εάν $Y = \mathbb{C}$, λέμε οτι ο A είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό. Ο χώρος X^* όλων των γραμμικών συναστησιακών σε έναν χώρο με νόρμα X και λέγεται δυικός χώρος του Q.

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω Q και U δύο χώροι με νόρμα και γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$. Τότε ο A είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Έστω $A : X \to Y$ ένας φραγμένος τελεστής και ϕ_n μια ακολουθία στον X τέτοια ώστε $\phi_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Τότε η $||A\phi_n|| \leq C\ ||\phi_n||$ συνεπάγεται την $A\phi_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, δηλαδή οτι ο A είναι συνεχής στο σημείο $\phi = 0$. Οπότε απο το Θεώρημα 1.14 ο A είναι συνεχής για κάθε $\phi \in X$.
Για το αντίστροφο, έστω οτι ο A είναι συνεχής τελεστής, και θα υποθέσουμε οτι δεν υπάρχει θετική σταθερά τέτοια ώστε $||A\phi|| \leq C||\phi||$ για κάθε $\phi \in X$. Τότε θα υπάρχει μια ακολουθία $\{\phi_n\}$ με $||\phi_n|| = 1$ τέτοια ώστε $||A\phi_n|| \geq n$. Θέτουμε τώρα $\psi_n = ||A\phi_n||^{-1}\ \phi_n$. Τότε $\psi_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$ και άρα απο την συνέχεια του τελεστή A έχουμε οτι $A\psi_n \to A0 = 0$ που είναι αντιφατικό διότι $||A\psi_n|| = 1$ για κάθε φυσικό αριθμό n. Άρα ο A είναι φραγμένος τελεστής. □

Παράδειγμα 1.2.3. *Έστω $K(x, y)$ συνεχής στο $[a, b] \times [a, b]$ και ορίζουμε $A : L^2[a, b] \to L^2[a, b]$ απο την σχέση*

$$(A\phi)(x) = \int_a^b K(x, y)\phi(y)\ dy.$$

Τότε

$$\begin{aligned} ||A\phi||^2 &= \int_a^b |(A\phi)(x)|^2\ dx \\ &= \int_a^b \left| \int_a^b\ K(x, y)\ \phi(y)\ dy \right|^2\ dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2\ dy\ \int_a^b |\phi(y)|^2\ dydx \\ &= ||\phi||^2 \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2\ dxdy. \end{aligned}$$

Άρα ο A είναι φραγμένος και μάλιστα

$$||A|| \leq \left[\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 \; dxdy \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Έστω χώρος Hilbert X και μη-τετριμμένος υπόχωρος του U. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $P : X \to U$ με την ιδιότητα $P\phi = \phi$ για κάθε $\phi \in U$ καλείται τελεστής προβολής απο τον Q επι του U. Ας υποθέσουμε οτι οτι ο U είναι κλειστός υπόχωρος του Q. Τότε $X = U \oplus U^\perp$ και ορίζουμε την ορθογώνια προβολή $P : X \to U$ απο τη σχέση $P\phi = v$ όπου v είναι η βέλτιστη προσέγγιση στο ϕ. Τότε βέβαια ισχυεί $P\phi = \phi$ για $\phi \in U$ και ο τελεστής P είναι φραγμένος εφόσον $||\phi||^2 = ||P\phi + (\phi - P\phi)||^2 = ||P\phi||^2 + ||\phi - P\phi||^2 \geq ||P\phi||^2$ απο την ορθογωνιότητα του v (Θεώρημα 1.11). Εφόσον $||P\phi|| \leq ||\phi||$ και $P\phi = \phi$ για $\phi \in U$, έχουμε οτι $||P|| = 1$.

Το επόμενο βήμα είναι να εισάγουμε την έννοια της συμπάγειας στη μελέτη μας. Ενα υποσύνολο U ενός χώρου με νόρμα X καλείται συμπαγές εαν κάθε ακολουθία στοιχείων του U έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του U. Το U θα λέμε οτι είναι σχετικά συμπαγές εάν η κλειστότητα του είναι συμπαγές σύνολο. Ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ οπου X και U είναι και οι δύο χώροι με νόρμα, λέγεται σύμπαγής εαν αντιστοιχεί σε κάθε φραγμένο σύνολο στον X, ένα σχετικώς συμπαγές σύνολο στον Y. Ή ισοδυναμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: ο A αντιστοιχεί σε κάθε φραγμένη ακολουθία $\{\phi_n\}$ στον X, μια ακολουθία $A\phi_n$ η οποία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον Y. Σημειώνουμε εδώ οτι εφόσον τα συμπαγή σύνολα είναι φραγμένα, οι συμπαγείς τελεστές είναι και φραγμένοι. Είναι επίσης προφανές οτι γραμμικοί συνδυασμοί συμπαγών τελεστών ειναι επίσης συμπαγής, καθώς και το γινόμενο ενός φραγμένου με έναν συμπαγή τελεστή είναι επίσης συμπαγής τελεστής.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω Q χώρος με νόρμα και Y χώρος Banach. Επίσης έστω ακολουθία συμπαγών τελεστών $A_n : X \to Y$ για την οποία υπάρχει τελεστής A για τον οποίο ισχύει $||A - A_n|| \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Τότε ο A είναι συμπαγής τελεστής.*

Απόδειξη. Έστω $\{\phi_m\}$ μια φραγμένη ακολουθία στον χώρο X. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα διαγώνιο επιχείρημα για να δείξουμε οτι η $\{A\phi_m\}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον Y. Εφόσον ο A_1 είναι συμπαγής τελεστής, η $\{\phi_m\}$ έχει υπακολουθία $\{\phi_{1,m}\}$ ώστε η $\{A_1\phi_{1,m}\}$ να είναι συγκλίνουσα. Ομοία η ακολουθία $\{\phi_{1,m}\}$ έχει υπακολουθία $\{\phi_{2,m}\}$ τέτοια ώστε η $\{A_2\phi_{2,m}\}$ να είναι συγκλίνουσα. Συνεχίζοντας με αυτον τον τρόπο, παρατηρούμε οτι η διαγώνια ακολουθία $\{\phi_{m,m}\}$ είναι υπακολουθία της $\{\phi_m\}$ τέτοια ώστε για κάθε σταθεροποιημένο φυσικό αριθμό n, η ακολουθία $\{A_n\phi_{m,m}\}$ είναι συγκλίνουσα. Εφόσον η $\{\phi_m\}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει σταθερά C ώστε $||\phi_m|| \leq C$ για κάθε m, $||\phi_{m,m}|| \leq c$ για κάθε m. Τώρα χρησιμοποιούμε το $||A_n - A|| \to 0$ καθώς το $n \to \infty$ για να συμπεράνουμε οτι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(\epsilon)$ τέτοιο ώστε

$$||A - A_{no}|| < \frac{\epsilon}{3C}$$

και, εφόσον η $\{A_{n_0}\phi_{m,m}\}$ είναι συγκλίνουσα, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $N = N(\epsilon)$ τέτοιος ώστε

$$||A_{n_0}\phi_{j,j} - A_{n_0}\phi_{k,k}|| < \frac{\epsilon}{3}$$

για $j, k > N$. Άρα, για $j, k > N$, έχουμε οτι

$$\begin{aligned} ||A\phi_{j,j} - A\phi_{k,k}|| &\leq ||A\phi_{j,j} - A_{n_0}\phi_{j,j}|| + ||A_{n_0}\phi_{j,j} - A_{n_0}\phi_{k,k}|| \\ &\qquad + ||A_{n_0}\phi_{k,k} - A\phi_{k,k}|| \\ &\leq ||A - A_{n_0}||\ ||\phi_{j,j}|| + \frac{\epsilon}{3} + ||A_{n_0} - A||\ ||\phi_{k,k}|| < \epsilon \end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία $\{A\phi_{m,m}\}$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνουσα στον χώρο Banach Y. □

Παράδειγμα 1.2.5. *Θεωρούμε τον τελεστή $A : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ ορισμένο όπως το προηγούμενο παράδειγμα*

$$(A\phi)(x) = \int_a^b K(x,y)\phi(y)\ dy$$

όπου ο $K(x,y)$ είναι συνεχής στο $[a,b] \times [a,b]$. Έστω $\{\phi_n\}$ ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο στον $L^2[a,b]$. Τότε είναι εύκολο να δείξουμε οτι το σύνολο $\{\phi_n\phi_m\}$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2([a,b] \times [a,b])$. Άρα

$$K(x,y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\phi_i(x)\phi_j(y)$$

και απο την ανισότητα του Parseval

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2\ dx\ dy = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$$

Επιπλέον,

$$\int_a^b \int_a^b \left| K(x,y) - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\phi_j(x)\phi_j(y) \right|^2 dx\ dy = \sum_{i,j=n+1}^{\infty} |a_{ij}|^2$$

το οποίο μπορούμε να φέρουμε αύθαιρετα κοντά στο 0, εάν κάνουμε το n αρκετά μεγάλο. Άρα ο A μπορεί να προσεγγιστεί με την έννοια της νόρμας απο τους τελεστές A_n όπου

$$(A_n\phi)(x) = \int_a^b \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\phi_i(x)\phi_j(y) \right] \phi(y)\ dy.$$

Άλλα καθένας απο τους τελεστές $A_n : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ έχει εικόνα πεπερασμένης διάστασης. Άρα αν το $U \subset X$ είναι ένα φραγμένο σύνολο, ο χώρος $A_n(U)$ είναι ένα σύνολο σε έναν ευρύτερο χώρο $A_n(X)$, που είναι πεπερασμένης διάστασης. Απο το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, ο χώρος $A_n(U)$ είναι σχετικά συμπαγές, δηλαδή ο A_n είναι συμπαγής τελεστής. Τώρα το Θεώρημα 1.17 μας εγγυάται οτι ο A συμπαγής τελεστής.

Λήμμα 1.2.6. ***(Το λήμμα του Riesz)*** *Έστω X χώρος με νόρμα, $U \subset X$ ένας κλειστός υπόχωρος τέτοιος ώστε $U \neq X$ και $\alpha \in (0,1)$. Τότε υπάρχει $\psi \in X$, $||\psi|| = 1$, τέτοιο ώστε $||\psi - \phi|| \geq \alpha$ για κάθε $\phi \in U$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $f \in X$, $f \notin U$, και εφόσον το U είναι κλειστό σύνολο έχουμε οτι

$$\beta = inf_{\phi \in U} \ ||f - \phi|| > 0.$$

Τώρα επιλέγουμε ένα $g \in U$ ώστε

$$\beta \leq ||f - g|| \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

και θέτουμε

$$\psi = \frac{f - g}{||f - g||}.$$

Τότε $||\psi|| = 1$ και για κάθε $\phi \in U$ έχουμε οτι, εφόσον $g + ||f - g||\phi \in U$,

$$||\psi - \phi|| = \frac{1}{||f - g||}||f - (g + ||f - g||\phi)|| \geq \frac{\beta}{||f - g||} \geq \alpha.$$

□

Το λήμμα του Riesz αποτελεί θεμέλιο λίθο για την απόδειξη πολλών βασικών αποτελεσμάτων για του συμπαγείς τελεστές, τα οποία θα χρειαστούμε στη μέλετη μας παρακάτω. Το επόμενο θεώρημα, είναι το πρώτο απο τα βασικά αποτελέσματα για συμπαγείς τελεστές.

Θεώρημα 1.2.7. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ο ταυτοτικός τελεστής $I : X \to X$ είναι συμπαγής αν και μόνον αν ο Q είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, θα υποθέσουμε οτι ο I είναι συμπαγής τελεστής, ενώ ο X δεν έχει πεπερασμένη διάσταση. Επιλέγουμε $\phi \in X$ με $||\phi_1|| = 1$. Τότε ο υπόχωρος $U_1 = span\{\phi_1\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του X και απο το λήμμα του Riesz υπάρχει $\phi_2 \in X$, $||\phi_2|| = 1$, με $||\phi_2 - \phi_1|| \geq \frac{1}{2}$. Έστω τώρα οτι $U_2 = span\{\phi_1, \phi_2\}$. Χρησιμοποιώντας ξανά το θεώρημα του Riesz, υπάρχει $\phi \in X, ||\phi_3|| = 1$, και $||\phi_3 - \phi_1|| \geq \frac{1}{2}$, $||\phi_3 - \phi_2|| \geq \frac{1}{2}$. Συνεχίζοντας με αυτόν τρόπο, παίρνουμε μια ακολουθία $\{\phi_n\}$ στον Q για την οποία ισχύει $||\phi_n|| = 1$ και $||\phi_n - \phi_m|| \geq \frac{1}{2}$ για $n \neq m$. Άρα η $\{\phi_n\}$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλαδή ο ταυτοτικός τελεστής I δεν είναι συμπαγής. Άλλα αυτο αντιβαίνει την υπόθεση μας. Άρα ο Q είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης. Για το αντίστροφο εαν ο χώρος X είναι πεπερασμένης διάστασης, ο χώρος $I(Q)$ είναι πεπερασμένης διάστασης, και απο το θεώρημα Bolzano-Weierstrass συμπαιρένουμε οτι χώρος $I(X)$ είναι σχετικώς συμπαγής, δηλαδή οτι ο I είναι συμπαγής τελεστής. □

Το επόμενο θεώρημα, που το οφείλουμε στον Riesz, είναι απο τα πιο πολυτραγουδισμένα θεωρήματα της μαθηματικής επιστήμης.

Θεώρημα 1.2.8. *Θεώρημα του Riesz .* *Έστω $A : X \to X$ ένας συμπαγής τελεστής, σε έναν χώρο με νόρμα X. Τότε είτε 1) η ομογενής εξίσωση*

$$\phi - A\phi = 0$$

έχει μη-τετριμμένη λύση $\phi \in X$ είτε 2) για κάθε $f \in X$ η εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

έχει μοναδική λύση $\phi \in X$. Εάν ο τελεστής $I - A$ είναι 1-1 (άρα και επί), τότε ο τελεστής $(I - A)^{-1} : X \to X$ είναι φραγμένος.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε 4 βήματα.
Βήμα 1: Θέτουμε $L = I - A$ και $N(L) = \{\phi \in X : L\phi = 0\}$ ο μηδενόχωρος του L. Θα δείξουμε οτι υπάρχει θετική σταθερά C τέτοια ώστε

$$inf_{\chi \in N(L)} \; ||\phi - \chi|| \leq ||L\phi||$$

για κάθε $\phi \in X$. Ας υποθέσουμε οτι αυτο δεν είναι αληθές. Τότε υπάρχει ακολουθία $\{\phi_n\}$ στον X τέτοια ώστε $||L\phi_n|| = 1$ και $d_n = inf_{\chi \in N(L)}||\phi_n - \chi|| \to \infty$. Επιλέγουμε $\{\chi_n\} \subset N(L)$ τέτοια ώστε $d_n \leq ||\phi_n - \chi_n|| \leq 2d_n$, και θέτουμε

$$\psi_n = \frac{\phi_n - \chi_n}{||\phi_n - \chi_n||}$$

Τότε $||\psi_n|| = 1$ και $||L\psi_n|| \leq {d_n}^{-1} \to 0$. Άλλα εφόσον ο A είναι συμπαγής τελεστής, παιρνώντας σε μια υπακολουθία αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε οτι η ακολουθία $\{A\psi_n\}$ συγκλίνει σε ένα στοιχείο $\phi_0 \in X$. Εφόσον $\psi_n = (L + A)\psi_n$, έχουμε οτι η $\{\psi_n\}$ συγκλίνει στο ϕ_0 και άρα οτι $\phi_0 \in N(L)$. Αλλά

$$\begin{aligned} inf_{\chi \in N(L)}||\psi_n - \chi|| &= ||\phi_n - \chi||^{-1} \; inf_{\chi \in N(L)}||\phi_n - \chi_n - ||\phi_n - \chi_n||\chi|| \\ &= ||\phi_n - \chi_n||^{-1} \; inf_{\chi \in N(L)}||\phi_n - \chi|| \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

που όμως αντιβαίνει την $\psi_n \to \phi_0 \in N(L)$.
Βήμα 2: Θα δείξουμε τώρα η εικόνα του τελεστή L αποτελεί κλειστό υπόχωρο του χώρου X. Ο $L(X) = \{x \in X : x = L\phi$ για κάποιο $\phi \in X\}$ είναι προφανώς υπόχωρος. Συνεπώς εαν η $\{\phi_n\}$ είναι μια ακολουθία του X για την οποία ισχύει οτι η ακολουθία $\{L\phi_n\}$ συγκλίνει στο $f \in X$, πρέπει να δείξουμε οτι $f = L\phi$ για κάποιο $\phi \in X$. Απο το αποτέλεσμα που αποδείξαμε παραπάνω η ακολουθία $\{d_n\}$ όπου $d_n = inf_{\chi \in N(L)}||\phi_n - \chi||$ είναι φραγμένη. Διαλέγοντας την $\chi_n \in N(L)$ όπως παραπάνω και παίρνωντας $\tilde{\phi_n} = \phi_n - \chi_n$, έχουμε οτι η $\{\tilde{\phi_n}\}$ είναι φραγμένη και $L\tilde{\phi_n} \to f$. Εφόσον ο A είναι συμπαγής, παιρνώντας αν χρειαστεί σε μια υπακόλουθια, μπορούμε να υποθέσουμε οτι η $\{A\tilde{\phi_n}\}$ συγκλίνει σε κάποιο $\tilde{\phi_0} \in X$. Συνεπώς η $\tilde{\phi_n}$ συγκλίνει στο στοιχείο $f + \phi_0$ και απο την συνέχεια του τελεστή L παίρνουμε οτι $L(f + \phi_0) = f$. Συνεπώς ο $L(x)$ είναι κλειστός. Βήμα 3: Τό επόμενο βήμα είναι να δείξουμε οτι αν$N(L) = \{0\}$ τότε $L(x) = X$, δηλαδή οτι αν δεν ισχύει η περίπτωση 1) του θεωρήματος τότε ισχύει το 2). Με αυτό τον

στόχο, σημειώνουμε οτι απο το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε οτι τα σύνολα $L^n,\ n = 1, 2, ..$ αποτελούν μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών υπόχωρων του X. Ας υποθέσουμε οτι ανά δύο οι χώροι αυτοί είναι ξένοι μεταξύ τους. Τότε κάθε επόμενος όρος της ακολουθίας είναι γνήσιο υποσύνολο του προηγούμενου όρου. Άρα απο το λήμμα του Riesz υπάρχει μια ακολουθία $\{\psi_n\}$ στον Q τέτοια ώστε $\psi_n \in L^n(X), ||\psi_n|| = 1,$ και $||\psi_n - \psi|| \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $\psi \in L^{n+1}(X)$. Άρα εαν $m > n$ τότε

$$A\psi_n - A\psi_m = \psi_n - (\psi_m + L\psi_n - L\psi_m)$$

και $\psi_m + L\psi_n - L\psi_m \in L^{n+1}(X)$ εφόσον

$$\psi_m + L\psi_n - L\psi_m = L^{n+1}(L^{m-n-1}\phi_m + \phi_n - L^{m-n}\phi_m).$$

Συνεπώς $||A\psi_n - A\ psi_m|| \geq \frac{1}{2}$ που αντιβαίνει της συμπάγεια του τελεστή A. Μπορούμε να συμπεράνουμε οτι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε $L^n(X) = L^{n_0}(X)$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω τώρα $\phi \in X$. Τότε $L^{n_0}\phi \in L^{n_0}(X) = L^{n_0+1}(X)$ και έτσι $L^{n_0}\phi = L^{n_0+1}\psi$ για κάποιο $\psi \in X$, δηλαδή $L^{n_0}(\phi - L\psi) = 0$. Άλλα εφόσον $N(L) = \{0\}$ έχουμε οτι $N(L^{n_0}) = 0$ και άρα $\phi = L\psi$. Οπότε $X = L(X)$.
Βήμα 4: Ερχόμαστε τώρα στο τελευταίο βήμα, που είναι να δείξουμε οτι εαν $L(X) = X$ τότε $N(L) = 0$, δηλαδή οτι είτε το 1) είτε το 2) του θεωρήματος επαληθεύεται. Για να το δείξουμε αυτό πρωτα σημειώνουμε οτι απο την συνέχεια του τελεστή L έχουμε οτι ο $N(L^n)$ είναι κλειστός υπόχωρος για κάθε $n = 1, 2, 3...$ Ένα παρόμοιο επιχείρημα με αυτό μου χρησιμοποιήσαμε στο τριτο βήμα μας δίνει οτι υπάρχει n_0 φυσικός ώστε $N(L^n) = N(L^{n_0})$ για κάθε $n \geq n_0$. Οπότε εαν $L(X) = X$ τότε κάθε $\phi \in N(L^{n_0})$ ικανοποιεί την $\phi = L^{n_0}\psi$ για κάποιο $\psi \in X$ οπότε $L^{2n_0}\psi = 0$. Άρα $\psi \in N(L^{2n_0}) = N(L^{n_0})$ και άρα $\phi = L^{n_0}\psi = 0$. Εφόσον η $L\phi = 0$ συνεπάγεται την $L^{n_0}\phi = 0$, η απόδειξη του βήματος έχει ολοκληρωθεί. Το οτι ο τελεστής $(I - A)^{-1}$ είναι φραγμένος στην περίπτωση 2) συνεπάγεται απο το βήμα 1 εφόσον σε αυτήν την περίπτωση $N(L) = \{0\}$ □

Έστω $A : X \to X$ ένας συμπαγής τελεστής και X ένας χώρος νόρμας. Θα λέμε οτι ένας μιγαδικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ αποτελεί ιδιοτιμή του A με ιδιοσυνάρτηση $\phi \in X$, εαν υπάρχει $\phi \in X, \phi \neq 0$, ώστε $A\phi = \lambda\phi$. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί οτι ιδιοσυναστήσεις που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές, είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Τη διάσταση του μηδενόχωρου του τελεστή $L_\lambda = \lambda I - A$, θα την καλούμε πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ. Αν το $\lambda \neq 0$ δεν αποτελεί ιδιοτιμή του A, τότε απο το θεώρημα του Riesz οτι ο *επιλύων τελεστής* $(\lambda I - A)^{-1}$ είναι καλώς ορισμένος φραγμένος γραμμικώς τελεστής που εικονίζει τον X στον εαυτό του. Απο την άλλη , εαν $\lambda = 0$ τότε ο A^{-1} δεν μπορεί να είναι φραγμένος στον $A(X)$ εκτός εάν ο Q είναι πεπερασμένης διάστασης, διότι αν ήταν τότε ο ταυτοτικός τελεστής $I = AA^{-1}$ θα ηταν συμπαγής.

Θεώρημα 1.2.9. *Έστω συμπαγής τελεστής $A : X \to X$, οπου X χώρος με νόρμα. Τότε οι ιδιοτιμές του A, αποτελόύν ενα το πολύ αριθμήσιμο σύνολο το οποίο είτε δεν έχει σημεία συσσώρευσης, είτε έχει ακριβώς ένα, το $\lambda = 0$. Κάθε μια απο τις μη-μηδενικές ιδιοτιμές έχει πεπερασμένη πολλαπλότητα.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε οτι υπάρχει ακολουθία λ_n ιδιοτιμών, όχι κατάνάγκη διακεκριμένων μεταξυ τους, με αντίστοιχες γραμμικώς ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις $\{\phi_n\}$ τέτοια ώστε $\lambda_n \to \lambda \neq 0$. Θέτουμε

$$U_n = span\{\phi_1, ..., \ \phi_n\}.$$

Τότε απο λήμμα του Riesz, υπάρχει υπακολουθία $\{\psi\}$ ώστε $\psi \in U_n, \ ||\psi|| = 1$ και $||\psi_n - \psi|| \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $\psi \in U_{n-1}, \ n = 1, 2, 3...$ Εάν $n > m$, έχουμε οτι

$$\begin{aligned} {\lambda_n}^{-1} A\psi_n - {\lambda_m}^{-1} A\psi_m = \psi_n + (-\psi_n - {\lambda_n}^{-1} L\lambda_n\psi_n + {\lambda_m}^{-1} L\lambda_m\psi_m) \\ = \psi_n - \psi \end{aligned}$$

όπου $\psi \in U_{n-1}$ εφόσον αν $\psi_n = \sum_1^n \beta_j\phi_j$ τότε

$$\psi_n - {\lambda_n}^{-1} A\psi_n = \sum_1^n \beta_j(1 - {\lambda_n}^{-1}\lambda_j)\phi_j \in U_{n-1}$$

ομοίως $L_{\lambda_m}\psi_m \in U_{m-1}$. Συνεπώς, έχουμε οτι $||{\lambda_n}^{-1} A\psi_n - {\lambda_m}^{-1} A\psi_m|| \geq \frac{1}{2}$ το οποίο, εφόσον $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, αντιβαίνει την συμπάγεια του τελεστή A. Οπότε η αρχική μας υπόθεση αποδεικνύεται εσφαλμένη, και επαληθέυεται το θέωρημα. □

1.3 Ο συζυγής τελεστής

Υποθέτουμε τώρα οτι ο X είναι ένας χώρος Hilbert, και θα δούμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα που χαρακτηρίζει όλες τα φραγμένα, γραμμικά συναρτησιακά στον X.

Θεώρημα 1.3.1. ***(Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz)*** *Έστω X χώρος Hilbert. Τότε για κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $F : X \to \mathbb{C}$ υπάρχει μια μοναδικό στοιχείο $f \in X$ τέτοιο ώστε*

$$F(\phi) = (\phi, f)$$

για κάθε $\phi \in X$. Επιπλέον $||f|| = ||F||$.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε την μοναδικότητα της αναπαράστασης. Ξεκινάμε με το $(\phi, f_1) = (\phi, f_2) \ \forall \phi \in X$ τότε $(\phi, f_1 - f_2) = 0 \ \forall \phi \in X$ και θέτοντας $\phi = f_1 - f_2$ παίρνουμε οτι $||f_1 - f_2||^2 = 0$. Άρα $f_1 = f_2$. Τώρα γυρίζουμε στο ερώτημα της ύπαρξης της f. Αν $F = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $f = 0$. Αρά περιοριζόμαστε στη περίπτωση που η F δεν είναι ταυτοτικά μηδεν, δηλαδή υπάρχει $w \in X$ τέτοιο ώστε $F(w) \neq 0$. Εφόσον η F είναι συνεχές συναρτησιακό, ο χώρος $N(F) = \{\phi \in X : F(\phi) = 0\}$ είναι κλειστός και άρα πλήρης υπόχωρος του X. Άρα απο το Θεώρημα 1.12, υπαρχει μοναδική βέλτιστη προσέγγιση v στο w απο το σύνολο $N(F)$, και απο το Θεώρημα 1.11 έχουμε οτι $w - v \perp N(F)$. Οπότε για $g = w - v$ έχουμε οτι

$$(F(g)\phi - F(\phi)g, g) = 0$$

$\forall\phi \in X$ εφόσον $F(g)\phi - F(\phi)g \in N(F)$ $\forall\phi \in X$. Επομένως

$$F(\phi) = \left(\phi, \frac{\overline{F(g)}g}{||g||^2}\right)$$

$\forall\phi \in X$ δηλαδή

$$f = \frac{\overline{F(g)}g}{||g||^2}$$

είναι το στοιχείο που ψάχνουμε. Τέλος, για να δείξουμε την $||f|| = ||F||$, σημειώνουμε οτι απο την ανισότητα Cauchy-Schwartz παίρνουμε οτι $|F(\phi)| \leq ||f||\ ||\phi||$ για οποιοδήποτε $\phi \in X$ και άρα $||F|| \leq ||f||$. Απο την άλλη, $F(f) = (f, f) = ||f||^2$ και άρα $||f|| \leq ||F||$. Μπορούμε τώρα να συμπαιράνουμε οτι $||F|| = ||f||$. □

Με το επιπλέον θεωρητικό όπλο του θεωρήματος της αναπαράστασης του Riesz, μπορούμε τώρα να ορίσουμε τον συζυγή τελεστή του A, που θα συμβολίζουμε με A^*.

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω X και Y δύο χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε υπάρχει μοναδικώς προσδιορισμένος τελεστής $A^* : Y \to X$ για το οποίον ισχύει $(A\phi, \psi) = (\phi, A^*\psi)$, $\forall\phi \in X, \forall\psi \in Y$. Ο A^* καλείται ο συζυγής τελεστής του A, και είναι γραμμικός γραγμένος τελεστής που ικανοποιεί την $||A^*|| = ||A||$.*

Απόδειξη. Για οποιοδήποτε $\psi \in Y$ η απεικόνιση $\phi \to (A\phi, \psi)$ ορίζει ενα γραμμικό φραγμένο συναρτησιακό στον X, εφόσον

$$|(A\phi, \psi)| \leq ||A||\ ||\phi||\ ||\psi||.$$

Επομένως απο το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz μπορούμε να γράψουμε $(A\phi, \psi) = (\phi, f)$ για κάποιο $f \in X$. Ορίζουμε τώρα τον τελεστή $A^* : Y \to X$, με $A^*\psi = f$. Ο συζυγής τελεστής είναι μοναδικός εφόσον εαν $0 = (\phi, ({A_1}^* - {A_2}^*)\ \psi)$ $\forall\phi \in X$. Τότε αν θέσουμε $\phi = ({A_1}^* - {A_2}^*)\psi)$ έχουμε οτι $||{A_1}^* - {A_2}^*\psi||^2 = 0 \forall\psi \in Y$ και άρα ${A_1}^* = {A_2}^*$. Για να δείξουμε οτι ο A^* είναι γραμμικός, παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned}
(\phi, \beta_1 A^*\psi_1 + \beta_2 A^*\psi_2) &= \overline{\beta_1}(\phi, A^*\psi_1) + \overline{\beta_2}(\phi, A^*\psi_2) \\
&= \overline{\beta_1}(A\phi, \psi_1) + \overline{\beta_2}(A\phi, \psi_2) \\
&= (A\phi, \beta_1\psi_1\beta_2\psi_2) \\
&= (\phi, A^*(\beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2))
\end{aligned}$$

για κάθε $\phi \in X, \psi_1, \psi_2 \in Y$ και $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$. Άρα $\beta_1 A^*\psi_1 + \beta_2 A^*\psi_2 = A^*(\beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2)$ δηλαδή ο A^* είναι γραμμικός. Για να δείξουμε οτι οA^* είναι φραγμένος, σημειώνουμε οτι απο την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε οτι

$$||A^*\psi||^2 = (A^*\psi, A^*\psi) = (AA^*\psi, \psi) \leq ||A||\ ||A^*\psi||\ ||\psi||$$

για κάθε $\psi \in Y$. Οπότε $||A^* \leq ||A||$. Και αντίστροφα εφόσον ο A είναι ο συζυγής του A^*, εχούμε επίσης οτι $||A|| \leq ||A^*||$ και άρα $||A^*|| = ||A||$. □

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω δυο χώροι Hilbert και έστω συμπαγής τελεστής $A : X \to Y$. Τότε και ο συζυγής τελεστής $A^* : Y \to X$ είναι και αυτός συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $||\psi_n|| \leq C$ για κάποια θετική σταθερά. Τότε, εφόσον ο A^* είναι φραγμένος, ο $AA^* : Y \to Y$ είναι συμπαγής τελεστής. Επομένως, πηγαίνοντας σε υπακολουθία αν είναι αναγκαίο, μπορούμε να υποθέσουμε οτι η ακόλουθια $\{AA^*\psi_n\}$ συγκλίνει στον Y. Αλλά

$$\begin{aligned} ||A^*(\psi_n - \psi_m)||^2 &= (AA^*(\psi_n - \psi_m), \psi_n - \psi_m) \\ &\leq 2C||AA^*(\psi_n - \psi_m)|| \end{aligned}$$

δηλαδή η ακολουθία $\{A^*\psi_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy, και άρα εφόσον βρισκόμαστε σε χώρο Hilbert , συγκλίνουσα ακολουθία. Μπορούμε τώρα να συμπαιράνουμε οτι ο A^* είναι συμπαγής τελεστής. □

Λήμμα 1.3.4. *Έστω U ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert X. Τότε $U^{\perp\perp} = U$.*

Απόδειξη. Εφόσον το U είναι κλείστος υπόχωρος, έχουμε οτι $X = U \oplus U^\perp$ και $X = U^\perp \oplus U^{\perp\perp}$. Επομένως για $\phi \in X$ έχουμε οτι $\phi = \phi_1 + \phi_2$ όπου $\phi_1 \in U$ και $\phi_2 \in U^\perp$, και $\phi = \psi_1 + \psi_2$ όπου $\psi_1 \in U^{\perp\perp}$ και $\psi_2 \in U^\perp$. Συγκεκριμένα $0 = (\phi_1 - \psi_1) + (\phi_2 - \psi_2)$ και εφόσον είναι εύκολα επαληθεύσιμο οτι $U \subset U^{\perp\perp}$ έχουμε οτι $(\phi_1 - \psi_1) + (\psi_2 - \phi_2) \in U^\perp$. Άλλα $\phi_1 - \psi_1 \in U^{\perp\perp}$ και επομένως $\phi_1 = \psi_1$. Μπορούμε τώρα να διαπιστώσουμε οτι $U^{\perp\perp} = U$. □

Θεώρημα 1.3.5. *Έστω X, Y δύο χώροι Hilbert . Τότε για εναν φραγμένο και γραμμικό τελεστή $A : X \to Y$ έχουμε οτι για την εικόνα του $A(X) = \{y \in Y : y = Ax$ για κάποιο $x \in X\}$ ισχύει*

$$A(X)^\perp = N(A^*) \text{ και } N(A^*)^\perp = \overline{A(X)}.$$

Απόδειξη. Έχουμε οτι $g \in A(X)^\perp$ αν και μόνο αν $(A\phi, g) = 0$ για κάθε $\phi \in X$. Εφόσον $(A\phi, g) = (\phi, A^*g)$ μπορούμε τώρα να συναγάγουμε οτι $A^*g = 0$, δηλαδή $g \in N(A*$. Απο την άλλη, απο το Λήμμα 1.26, $\overline{A(X)} = \overline{A(X)}^{\perp\perp} = N(A^*)^\perp$ εφόσον $A(X)^\perp = \overline{A(X)}^\perp = N(A^*)$. □

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί ένα απο τα διαμάντια της συναστησιακής ανάλυσης. Σημειώνουμε οτι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \to X$ οπου X είναι χώρος Hilbert, θα λέγεται αυτοσυζυγής τελεστής εαν $A = A^*$ δηλαδή $(A\phi, \psi) = (\phi, A\psi)\ \forall \phi, \psi \in X$.

Θεώρημα 1.3.6. ***(Θεώρημα Hilbert-Schmidt—gr)*** *Έστω $A : X \to X$ ένας συμπαγής, αυτοσυζυγής τελεστής, σε έναν χώρο Hilbert X. Τότε, εαν $A \neq 0$, ο A έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή διαφορετική απο το μηδέν, όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές, και ο X έχει μια ορθοκανονική βάση που αποτελείται απο ιδιοσυναρτήσεις του A.*

Απόδειξη. Είναι μια απλή συνέπεια της αυτοσυζυγίας του A οτι 1) ιδιοσυναρήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι κάθετες μεταξύ τους και 2) όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές. Οπότε το πρώτο σοβαρό πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι να δείξουμε οτι ο $A \neq 0$ έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή διαφορετική απο το μηδέν. Με αυτόν τον σκοπό, θέτουμε $\lambda = ||A|| > 0$ και θεωρούμε τον τελεστή $T = \lambda^2 I - A^2$. Θα δείξουμε οτι η $+\lambda, -\lambda$ είναι ιδιοτιμή του A. Για να το δείξουμε αυτό, πρώτα σημειώνουμε οτι $\forall \phi \in X$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned}(T\phi, \phi) = ((\lambda^2 I - A^2)\phi, \phi) &= \lambda^2 ||\phi||^2 - (A^2\phi, \phi)\\ &= \lambda^2 ||\phi||^2 - ||A\phi||^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Τώρα επιλέγουμε μια ακολουθία $\{\phi_n\} \in X$ τέτοια ώστε $||\phi_n|| = 1$ και $||A\phi_n|| \to \lambda$ καθώς το $n \to \infty$. Τότε, απο την παραπάνω ταυτότητα, $(T\phi_n, \phi_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Για να προχωρήσουμε περαιτέρω, ορίζουμε πρώτα ένα νέο εσωτερικό γινόμενο στον X ως εξης:

$$< \phi, \psi >= (T\phi, \psi).$$

Για να επαληθεύσουμε τον ισχυρισμό αρκεί να προσέξουμε οτι αφού ο A είναι αυτοσυζυγής, συνεπάγεται οτι και ο T είναι αυτοσυζυγής, και απο το γεγονός οτι $(T\phi, \phi) \geq 0$ $\forall \phi \in X$. Έχουμε τώρα απο την ανισότητα Cauchy-Schwarz οτι

$$\begin{aligned}||T\phi_n||^2 = (T\phi_n, T\phi_n) &=< T\phi_n, T\phi_n >\\ &\leq< \phi_n, \phi_n >^{\frac{1}{2}} < T\phi_n, T\phi_n >^{\frac{1}{2}}\\ &= (T\phi_n, \phi_n)^{\frac{1}{2}} (T^2\phi_n, T\phi)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq (T\phi, \phi_n)^{\frac{1}{2}} ||T^2\phi_n||^{\frac{1}{2}} \ ||T\phi_n||^{\frac{1}{2}}\\ &\leq ||T||^{\frac{3}{2}} \ (T\phi_n, \phi_n)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Όμως $(T\phi_n, \phi_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$ και επομένως απο την παραπάνω ανισότητα $T\phi_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Εφόσον ο A είναι συμπαγής, περνώντας σε μια υπακολουθία αν είναι αναγκαίο, μπορούμε να υποθέσουμε οτι η $\{A\phi_n\}$ συγκλίνει στο όριο ϕ το οποίο ικανοποιεί $||\phi|| = lim_{n\to\infty}||A\phi_n|| = \lambda > 0$ και $T\phi = lim_{n\to\infty}T \ A\phi_n = lim_{n\to\infty}AT\phi_n = 0$, δηλαδή $\phi \neq 0$ και

$$T\phi = (\lambda I + A)(\lambda I - A)\phi = 0.$$

Οπότε είτε $A\phi = \lambda\phi$ είτε $\lambda\phi - A\phi \neq 0$ για $\psi = \lambda\phi - A\phi$. Συνεπώς είτε το λ είτε το$-\lambda$ είναι μη-μηδενική ιδιοτιμή του A. Ολοκληρώνουμε τώρα την απόδειξη δείχνοντας οτι ο X έχει ορθοκανονική βάση απο ιδιοδιανύσματα του A. Σημειώνουμε πρώτα οτι αν ο Y είναι υπόχωρος X τέτοιος ώστε $A(Y) \subset Y$, τότε απο την αυτοσυζυγία του A έχουμε οτι $A(U^\perp) \subset Y^\perp$. Συγκεκριμένα, έστω Y ένας κλειστότητα του χώρου που παράγεται απο όλες τις ιδιοσυναρτήσεις του A. O περιορισμός του A πάνω στον μηδενόχωρο του $L = \lambda I - A$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον κλειστό υπόχωρο $N(L)$. Εφόσον ο τελεστής του περιορισμού του τελεστή A πάνω στον χώρο $N(L)$ είναι συμπαγής απο τον $N(L)$ στον $N(L)$, μπορούμε να συμπεράνουμε απο το Θεώρημα 1.21 οτι ο $N(L)$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Επιλέγουμε τώρα μια ορθοκανονική βάση για καθέναν απο τους ιδιοχώρους, και ύστερα παίρνουμε την ένωση τους. Εφόσον ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετες μεταξύ τους, αυτή η ένωση αποτελεί μια ορθοκανονική βάση για τον Y. Σημειώνουμε τώρα οτι ο $A : Y^\perp \to Y^\perp$ είναι συμπαγής τελεστής που δεν έχει καθόλου ιδιοτιμές, εφόσον όλα τα ιδιοδιανύσματα του A ανήκουν στον Y. Άλλα απο το πρώτο μέρος της απόδειξης, γνωρίζουμε οτι αυτό είναι αδύνατο, εκτός αν είτε ο A περιορισμένος στον χώρο$Y^\perp$ είναι ο ταυτοτικά μηδενικός τελεστής είτε $Y^\perp = \{0\}$. Αν ισχύει η πρώτη εκδοχή, τότε $Y^\perp = \{0\}$ εφόσον διαφορετικά τα μη-μηδενικά στοιχεία του $Y^\perp$ θα αποτελούσαν ιδιοδιανύσματα του A που θα αντιστοιχούσαν στην ιδιοτιμη 0, και άρα στον Y, που είναι αντιφατικό. Συνεπώς σε κάθε περίπτωση $Y^\perp = \{0\}$, δηλαδή $Y = X$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Κεφάλαιο 2

Οι χώροι Sobolev

2.1 Οι χώροι Sobolev $H^p[0,2\pi]$

Οι κλασσικοί χώροι λείων συναρτήσεων, αποδεικνύονται ανεπαρκείς οταν μελεταμε αντίστροφα προβλήματα. Η αποτελεσματική αντιμετώπιση αντίστοφων προβλημάτων μας αναγκάζει να αναζητήσουμε λύσεις σε χώρους που περιέχουν λιγότερο ομαλές συναρτήσεις. Η φυσιολογική επέκταση που θα προτείνουμε σε αυτή την μελέτη, ουτώς ώστε να αξιοποιήσουμε και τα αναλυτικά εργαλεία που αναπτύξαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, είναι η επέκταση στούς χώρους Sobolev. Επόμενως σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την στοιχειώδη θεωρία των χώρων Sobolev. Η ανάπτυξη της θεωρίας μας θα στηριχθεί στην στοιχειώδη θεωρία Fourier . Αυτό, μας το επιτρέπει ο περιορισμός μας σε σύνολα του επιπέδου των οποίων τα σύνορα είναι τουλάχιστον C^2.

Ξεκινάμε λέγωντας οτι το ορθοκανονικό σύστημα $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi e^{imt}}}\}_{-\infty}^{+\infty}$, $m \in \mathbb{Z}$ είναι πλήρες στον $L^2[0,2\pi]$. Επομένως, απο το Θεώρημα 1.13, για $\phi \in L^2[0,2\pi]$ έχουμε με την έννοια της L^2 σύγκλισης οτι ισχύει το παρακάτω

$$\phi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_m \; e^{imt}$$

όπου οι συντελεστές Fourier α_m μας δίνονται απο την σχέση

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(t) e^{-imt} \; dt.$$

Συμβολίζοντας κλασσικά το εσωτερικό γινόμενο στον L^2 με $(,)$ και την νόρμα με $||||$ απο την ανισότητα του Parseval έχουμε οτι

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} \; |\alpha_m|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(t)|^2 \; dt \\ &= \frac{1}{2\pi} ||\phi||^2 \end{aligned}$$

Τώρα έστω $0 \le p < \infty$. Τότε ορίζουμε τον χώρο $H^p[0,2\pi]$ ώστε να περιέχει όλες τις $\phi \in L^2[0,2\pi]$ ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+m^2)^p \ |\alpha_m|^2 < \infty$$

όπου α_m είναι βέβαια οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης ϕ. Ο χώρος $H^p = H^P[0,2\pi]$ καλείται χώρος Sobolev.Σημειώνουμε οτι $H^0[0,2\pi] = L^2[0,2\pi]$.

Θεώρημα 2.1.1. *Ο $H^p[0,2\pi]$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο*

$$(\phi,\psi)_p = \int_{-\infty}^{\infty} (1+m^2)^p \ \alpha_m \overline{b}_m$$

είναι οι συντελεστές Fourier των ϕ και ψ αντίστοιχα. Το σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνό στον $H^p[0,2\pi]$.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς οτι ο χώρος H^P είναι διανυσματικός και οτι το $(,)_p$ είναι εσωτερικό γινόμενο. Πρέπει να σημειώσουμε οτι ο λόγος που το εσωτερικό γινόμενο είναι καλώς ορισμένο δίνεται απο την παρακάτω χρήση της ανισότητας Caychy - Schwartz

$$|\sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^p \alpha_m \ \overline{b_m}|^2 \le \sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^p \ |\alpha_m|^2 \ \sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^p \ |b_m|^2.$$

Για να δείξουμε οτι ο H^p είναι πλήρης, έστω $\{\phi_n\}$ μια ακολουθία Cauchy , δηλαδή

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^p |\alpha_{m,n} - \alpha_{m,k}|^2 < \epsilon^2$$

για κάθε $n, k \ge N = N(\epsilon)$ όπου τα $\alpha_{m,n}$ είναι οι συντελεστές Fourier της ϕ_n. Συγκεκριμένα,

$$\sum_{-M_1}^{M_2} (1+m^2) \ |\alpha_{m,n} - \alpha_{m,k}|^2 < \epsilon^2 \tag{2.1}$$

$\forall \ M_1, M_2$ και $n, k \ge N(\epsilon)$. Εφόσον ο $\mathbb{C}$ είναι πλήρης, υπάρχει μια ακολουθία $\{\alpha_m\}$ στον $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\alpha_{m,n} \to \alpha_m$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε σταθερό m. Παίρνωντας το $k \to \infty$ στην παραπάνω εξίσωση, συμπεραίνουμε οτι

$$\sum_{-M_1}^{M_2} (1+m^2)^p \ |\alpha_m, n - \alpha_m|^2 \le \epsilon^2$$

για κάθε $n \ge N(\epsilon)$ και κάθε M_1 και M_2. Επομένως

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^p \ |\alpha_{m,n} - \alpha_m|^2 \le \epsilon^2 \tag{2.2}$$

για κάθε $n \geq N(\epsilon)$. Ορίζωντας

$$f_m(t) = e^{imt}$$

και

$$\phi =: \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_m f_m$$

έχουμε απο την (1.4) και την τριγωνική ανισότητα

$$\left[\sum_{-\infty}^{+\infty}(1+m^2)^p|\alpha_m|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon + \left[\sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^p|\alpha_{m,n}|^2\right] < \infty$$

δηλαδή $\phi \in H^p$. Απο την (1.4) μπορούμε να συναγάγουμε $||\phi - \phi_n|| \to 0$ καθώς $n \to \infty$ και άρα ο H^p είναι πλήρης.

Για να αποξείξουμε τον τελευταίο ισχυρισμό του θεωρήματος, έστω $\phi \in H^p$ με συντελεστές Fourier α_m. Τότε για

$$\phi_n = \sum_{-n}^{n} \alpha_m f_m$$

έχουμε οτι

$$||\phi - \phi_n||_p{}^2 = \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1+m^2)^p|\alpha_m|^2 \to 0 \tag{2.3}$$

καθώς $n \to \infty$ εφόσον η σειρά είναι συγκλίνουσα. Απο αυτό μπορούμε να συναγάγουμε οτι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον H^p. □

Θεώρημα 2.1.2. ***Το θεώρημα του Rellich*** *Έστω οτι $q > p$ τότε ο χώρος $H^q[0,2\pi]$ είναι πύκνος στον $H^p[0,2\pi]$ και ο τελεστής ενσφήνωσης $I : H^q \to H^p$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Εφόσον $(1+m^2)^p \leq (1+m^2)^q$ για $0 \leq p < q < \infty$, συνεπάγεται $H^q \subset H^p$ και $||\phi||_p \leq ||\phi_q||$ για κάθε $\phi \in H^q$. Η πυκνότητα του χώρου H^q μέσα στον H^p συνεπάγεται απο την πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων μέσα στον H^p.

Για να δείξουμε οτι ο τελεστής $I : H^q \to H^p$ είναι συμπαγής, θέτουμε τον $I_n : H^q \to H^p$ όπου

$$I_n\phi = \sum_{-n}^{n} \alpha_m f_m$$

για $\phi \in H^q$ που έχει συντελεστές Fourier α_m. Τότε

$$\begin{aligned}
||(I_n - I)\phi||_p{}^2 &= \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1+m^2)^p \ |\alpha_m|^2 \\
&\leq \frac{1}{(1+n^2)^{q-p}} \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1+m^2)^q \ |\alpha_m|^2 \\
&\leq \frac{1}{(1+n^2)^{q-p}} ||\phi||_p{}^2.
\end{aligned}$$

Συνεπώς εφόσον ο I_n έχει εικόνα πεπερασμένης διάστασης, ο I_n είναι συμπαγής, και απο την παραπάνω ανισότητα έχουμε οτι $||I_n - I|| \leq (1+n^2)^{\frac{(p-q)}{2}} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Οπότε ο I είναι συμπαγής απο το Θεώρημα 1.17. □

Θεώρημα 2.1.3. (Θεώρημα ενσφήνωσης του Sobolev) *Έστω $p > \frac{1}{2}$ και $\phi \in H^p[0, 2\pi]$. Τότε η ϕ συμπίπτει σχεδόν παντού με μια συνεχή, 2π-περιοδική συνάρτηση (δηλαδή η συνάρτηση που προκύπτει απο την διαφορά της ϕ με αυτήν την συνάρτηση, είναι μια νέα συναρτηση η τέτοια ώστε $||\eta||_p = 0$).*

Απόδειξη. Για $\phi \in H^p[0, 2\pi]$ έχουμε οτι για $p > \frac{1}{2}$

$$\left[\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_m \ e^{imt}|\right]^2 \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+m^2)^p} \ \sum_{-\infty}^{\infty} (1+m^2)^p \ |\alpha_m|^2$$

απο την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Επομένως η σειρά Fourier της ϕ είναι απολύτως και ομοιόμορφα συγκλίνουσα και άρα συμπίπτει με μια συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση. Τώρα εφόσον η σειρά Fourier της ϕ συμπίπτει με την ϕ σχεδόν παντού, η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Ορισμός 2.1.4. *Για ορίζουμε τον χώρο $0 \leq p < \infty$, $H^{-p} = H^{-p}[0, 2\pi]$ να είναι ο δυικός χώρος του $H^p[0, 2\pi]$, δηλαδή ο χώρος όλων των γραμμικών φραγμένων συναρτησιακών, ορισμένων στο $H^p[0, 2\pi]$.*

Υπενθυμίζουμε οτι για ένα γραμμικό, φραγμένο συναρτησιακό F η νόρμα ορίζεται ως εξής:

$$||F||_p = sup_{\phi \in H^p, \ ||\phi||_p = 1} |F\phi|$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει μια περιγραφή της $||F||$ και έναν χαρακτηρισμό του χώρου H^{-p}.

Θεώρημα 2.1.5. *Έστω $F \in H^{-p}[0, 2\pi]$, τότε η νόρμα δίνεται απο την σχέση*

$$||F||_p = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} (1+m^2)^{-p} \ |c_m|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

όπου $c_m = F(f_m)$. Αντίστροφα, για κάθε ακολουθία c_m στον $\mathbb{C}$ που ικανοποιεί

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^{-p}\ |c_m|^2 < \infty,$$

υπάρχει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $F \in H^{-p}[0,2\pi]$ με $F(\phi_m) = c_m$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε οτι η ακολουθία c_m ικανοποιεί την ανισότητα του θεωρήματος και ορίζουμε $F : H^p \to \mathbb{C}$ ώστε

$$F(\phi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_m\ c_m$$

για $\phi \in H^p$ με συντελεστές Fourier α_m. Τότε η F είναι καλώς ορισμένη εφόσον απο την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$|F(\phi)|^2 \leq \sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^{-p}\ |c_m|^2\ \sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^{p}\ |\alpha_m|^2$$

και επιπλέον

$$||F||_p \leq \left[\sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^{-p}\ |c_m|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Απο την άλλη, έστω $F \in H^{-p}$ τέτοια ώστε $F(f_m) = c_m$ και ορίζουμε την ϕ_n ως εξής:

$$\phi_n = \sum_{-n}^{n}(1+m^2)^{-p}\ \overline{c_m} f_m.$$

Τότε

$$||\phi_n||_p = \Big[\sum_{-n}^{n}(1+m^2)^{-p}\ |c_m|^2]^{\frac{1}{2}}$$

και επομένως

$$||F||_p \geq \frac{|F(\phi_n)|}{||\phi_n||_p} = \left[\sum_{-n}^{n}(1+m^2)^{-p}\ |c_m|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Απο τον υπολογισμό στο πρώτο κομμάτι του θεωρήματος, μπορούμε τώρα να συναγάγουμε

$$||F||_p = \left[\sum_{-\infty}^{\infty}(1+m^2)^{-p}\ |c_m|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Άρα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 1.33 οτι το θεώρημα του Rellich ισχύει και για τις περιπτώσεις $-\infty < p, q < \infty$. $\square$

Θεώρημα 2.1.6. *Για $g \in L^2[0,2\pi]$, ο δυικός μετασχηματισμός*

$$G(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(t)g(t)\ dt,\ \phi \in H^p$$

ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον $H^p[0,2\pi]$. Συγκεκριμένα, ο $L^2[0,2\pi]$ μπορεί να ιδωθεί ως υπόχωρος του δυικού χώρου $H{-}p[0,2\pi]$, $0 \le p < \infty$, και τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $H^{-p}[0,2\pi]$.

Απόδειξη. Έστω b_m οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης g. Τότε εφόσον $G(f_m) = b_m$, απο το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 1.33 έχουμε οτι $G \in H^{-p}$. Τώρα ας υποθέσουμε οτι $F \in H^{-p}$ με $F(f_m) = c_m$ και ορίζουμε $F_n \in H^{-p}$ ως εξής

$$F_n(\phi) = \frac{1}{2\pi}\ \int_0^{2\pi} \phi(t)\ g_n(t)\ dt$$

όπου

$$g_n = \sum_{-n}^{n} c_m\ \overline{f_m}$$

Τότε

$$||F - F_n||_p{}^2 = \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1+m^2)^{-p}\ |c_m|^2$$

τείνει στο μηδέν καθως το $n \to \infty$ που συνεπάγεται οτι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $H^{-p}[0,2\pi]$. □

Ο παραπάνω δυικός μετασχηματισμός μπορεί να επεκταθεί και σε γραμμικά και φραγμένα συναρτησιακά που ανήκουν στον H^{-p}. Συγκεκριμένα για $\phi \in H^p$ και $g \in H^{-p}$ ορίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \phi(t)\ g(t)\ dt$$

να είναι $g(\phi)$. Επίσης σημειώνουμε οτι ο H^{-p} γίνεται χώρος Hilbert επεκτείνοντας το εσωτερικό γινόμενο που προηγουμένως είχαμε ορίσει μόνο για $p \le 0$ και για $p < 0$.

Πιο γενικά, αν ο χώρος X είναι ένας χώρος νόρμας και X^* ο δυικός του χώρος, τότε για $g \in X^*$ και $\phi \in X$ ορίζουμε τον δυικό μετασχηματισμό $< g, \phi >$ ως εξής $< g, \phi >= g(\phi)$.

2.2 Ο χώρος Sobolev $H^p(\partial D)$

Σκοπός μας τώρα είναι να ορίσουμε χώρους Sobolev σε σύνορα ∂D συνόλων του επιπέδου D, χώρους Sobolev σε σύνολα D, και την σχέση που έχουν αυτοί οι χώροι μεταξύ τους. Με αυτόν τον σκοπό, έστω ∂D το σύνορο ενος απλού συνεκτικού φραγμένου συνόλου του επιπέδου $D \subset \mathbb{R}^2$ έτσι ώστε το σύνορο ∂D

να είναι τάξης C^k, δηλαδή το ∂D έχει μια k-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική παραμετρική αναπαράσταση $\partial D = \{x(t) : t \in [0, 2\pi),\ x \in C^k[0, 2\pi]\}$. Τότε για $0 \leq p \leq k$ μπορούμε να ορίσουμε χώρο Sobolev $H^p(\partial D)$ ως τον χώρο όλων των συναρτήσεων $\phi \in L^2(\partial D)$ για τις οποίες ισχύει $\phi(x(t)) \in H^p[0, 2\pi]$. Το εσωτερικό γινόμενο, και η νόρμα στον $H^p(\partial D)$, ορίζονται μέσω του εσωτερικού γινομένου στον $H^p[0, 2\pi]$ ως εξής

$$(\phi, \psi)_{H^p(\partial D)} = (\phi(x(t)), \psi(x(t)))_{H^p[0,2\pi]}$$

Μπορεί να αποδειχθεί οτι οι παραπάνω ορισμοί δεν εξαρτώνται απο την παραμέτρηση που θα επιλέξουμε.

Ο χώρος Sobolev $H^1(D)$ για ένα φραγμένο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ με σύνορο ∂D κλάσης C^1 ορίζεται ως πλήρωση του χώρου $C^1(\overline{D})$ ως προς την νόρμα

$$||u||_{H^1(D)} = \Big[\int_D (|u(x)|^2 + |grad\ u(x)|^2)\ dx \Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Είναι εύκολο κανείς να διαπιστώσει οτι ο $H^1(D)$ είναι υπόχωρος του χώρου $L^2(D)$. Ο κύριος στόχος αυτής της ενότητας, είναι να δείξουμε οτι συναρτήσεις του $H^1(D)$ έχουν νόημα όταν περιοριστούν στο σύνορο ∂D, δηλαδή το ίχνος συναρτήσεων του $H^1(D)$ πάνω στο σύνορο ∂D είναι καλώς ορισμένο. Θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο θέωρημα απο την κλασσική ανάλυση

Θεώρημα 2.2.1. ***(Το θεώρημα του Dini)*** *Έστω $\{\phi_n\}_1^\infty$ μια ακολουθία απο συνεχείς συναρτήσεις με πραγματικές τιμές, που συγκλίνει κάτα σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση ϕ σε ένα σύνολο D, και αν $\phi_n(x) \geq \phi_{n+1}(x)$ για κάθε $x \in D$ και κάθε $n = 1, 2, 3..$ τότε $\phi_n \to \phi$ ομοιόμορφα στο D.*

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Dini, μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το επόμενο βασικό αποτέλεσμα που καλείται το θεώρημα του ίχνους. Στη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων τα θεωρήματα ίχνους παίζουν σημαντικό ρόλο.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα απλά συνεκτικό φραγμένο χωρίο, και σύνορο ∂D κλάσης C^2. Τότε υπάρχει μια θετική σταθερά C τέτοια ώστε*

$$||u||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} \leq C\ ||u||_{H^1(D)}$$

για κάθε $u \in H^1(D)$, δηλαδή για $u \in H^1(D)$ ο τελεστής $u \to u|_{\partial D}$ είναι καλώς ορισμένος και φραγμένος απο τον $H^1(D)$ στον $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$.

Απόδειξη. Πρώτα θεωρούμε συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις u ορισμένες στη λουρίδα $\mathbb{R} \times [0, 1]$ που είναι 2π-περιδικές ως προς την πρώτη μεταβλητή. Έστω $Q = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ και για $0 \leq \eta \leq 1$ ορίζουμε

$$\alpha_m(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, \eta)\ e^{-imt}\ dt.$$

Τότε απο την ισότητα του Parseval έχουμε οτι

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_m(\eta)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t, \eta)|^2\ dt,\ 0 \leq \eta \leq 1.$$

Απο το θεώρημα του Dini η σειρά είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα. Οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο-όρο και να πάρουμε

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\alpha_m(\eta)|^2 \ d\eta = \frac{1}{2\pi} ||u||_{L^2(Q)}{}^2.$$

Ομοίως, απο την σχέση

$$\alpha_m^{\prime}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \eta}(t,\eta) \ e^{-imt} \ dt$$

και

$$im \ \alpha_m(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,\eta) e^{-imt} \ dt$$

βλέπουμε οτι

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\alpha_m^{\prime}(\eta)|^2 \ d\eta = \frac{1}{2\pi} \ ||\frac{\partial u}{\partial \eta}||^2_{L^2(Q)}$$

και

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 m^2 \ |\alpha_m(\eta)|^2 \ d\eta = \frac{1}{2\pi} ||\frac{\partial u}{\partial t}||^2_{L^2(Q)}$$

Τώρα θα υποθέσουμε οτι $u(,1) = 0$. Τότε απο την ανισότητα Cauchy- Schwarz και το $\alpha_m(1) = 0$ για κάθε m έχουμε οτι

$$\begin{aligned}
||u(,0)||^2_{H^{\frac{1}{2}[0,2\pi]}} &= \sum_{-\infty}^{\infty} (1+m^2)^{\frac{1}{2}} \ |\alpha_m(0)|^2 \\
&= 2 \sum_{-\infty}^{\infty} (1+m^2)^{\frac{1}{2}} \ Re \int_0^1 \alpha_m^{\prime}(\eta) \ \overline{\alpha_m(\eta)} \ d\eta \\
&\leq 2 \sum_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_0^1 |\alpha_m^{\prime}(\eta)|^2 \ d\eta \Big]^{\frac{1}{2}} \ \Big[(1+m^2) \ \int_0^1 \ |\alpha_m|^2 \ d\eta \Big]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2 \Big[\sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\alpha_m^{\prime}(\eta)|^2 \ d\eta \Big]^{\frac{1}{2}} \ \Big[\sum_{-\infty}^{\infty} (1+m^2) \ \int_0^1 \ |\alpha_m|^2 \ d\eta \Big]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\pi} ||\frac{\partial u}{\partial \eta}||_{L^2(Q)} \ \Big[||u||^2_{L^2(Q)} + ||\frac{\partial u}{\partial t}||^2_{L^2(Q)} \Big]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\pi} \ ||u||^2_{H^1(Q)}
\end{aligned}$$

Επιστρέφουμε τώρα στο χωρίο D και επιλέγουμε μια παράλληλη λωρίδα $D_h = \{x + \eta h \nu : x \in \partial D, \ eta \in [0,1]\}$ όπου ν είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial D, h > 0$, τέτοιο ώστε κάθε $y \in D_h$ είναι μοναδικά αναπαραστάσιμο μέσω προβολής πάνω στο σύνορο ∂D με την μορφή $y = x + \eta h \nu(x)$ με $x \in \partial D$ με $x \in \partial D, \ \eta \in [0,1]$. Με ∂D_h θα συμβολίζουμε το εσωτερικό σύνορο του D_h.

Με την εξής παραμέτρηση $\partial D = \{x(t) : 0 \le t \le 2\pi\}$ παίρνουμε παραμέτρηση του D_h της μορφής

$$x(t,\eta) = x(t) + \eta h \nu,\ 0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le \eta \le 1.$$

Απο την ανισότητα (1.5) μπορούμε να συναγάγουμε οτι για κάθε $u \in C^1(D_h)$ με $u = 0$ στο ∂D_h έχουμε οτι

$$\begin{aligned} ||u||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} = ||u(x(t))||_{H^{\frac{1}{2}}[0,2\pi]} &\le \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ ||u(x(t,\eta))||_{H^1(Q)} \\ &\le C||u||_{H^1(D_h)} \end{aligned}$$

όπου C είναι θετική σταθερά εξαρτάται απο το μέγεθος των πρώτων παραγώγων των απεικονήσεων $x(t,\eta)$ άλλα και το μέγεθος της αντίστροφης του απεικόνησης. Στη συνέχεια επεκτείνουμε την εκτίμηση για μια αυθαίρετη $u \in C^1(\overline{D})$. Προς την επίτευξη αυτού, διαλέγουμε μια συνάρτηση $g \in C^1(\overline{D})$ώστε $g(y) = 0$ για $y \notin D_h$ και $g(y) = f(\eta)$ για $y = x + \eta h \nu(x) \in D_h$ όπου

$$f(\eta) =: (1-\eta^2)(1+3\eta)$$

Τότε για $f(0) = \acute{f}(0) = 1$ και $f(1) = \acute{f}(1) = 0$ που συνεπάγεται οτι

$$||u||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} = ||gu||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D)} \le C||gu||_{H^1(D)} \le C_1||u||_{H^1(D)}$$

για όλα τα $u \in C(\overline{D})$ όπου C_1 είναι θετική σταθερά που εξαρτάται απο το μέγεθος της g και των πρώτων μερικών παραγώγων της.

Έχουμε αποδείξει την επιθυμητή ανισότητα για $u \in C^1(\overline{D})$, δηλαδή οτι ο $A : u \to u|_{\partial D}$ είναι φραγμένος απο τον $C^1(\overline{D})$ στον $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί οτι αν ο X είναι πυκνός υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα $\hat{X}$, και ο Y είναι χώρος Banach τότε αν ο $A : X \to Y$ είναι φραγμένος, γραμμικός τελεστής, τότε μπορεί να επεκταθεί σε έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή $\hat{A} : \hat{X} \to Y$ όπου $||\hat{A}|| = ||A||$. Η επιθυμητή ανισότητα τώρα προκύπτει απο αυτό το αποτέλεσμα επεκτείνοντας τον τελεστή A απο τον $C^1(\overline{D})$ στον $H^1(D)$. $\square$

Σημειώνουμε οτι στην παραπάνω απόδειξη το ∂D πρέπει να είναι τάξης C^2 εφόσον $\nu = \nu(x)$ πρέπει να είναι συνεχώς παραγωγίσιμο.

Κεφάλαιο 3

Μη καλά τοποθετημένα προβλήματα

3.1 Επιλυσιμότητα

Ο Hadamard πρότεινε τρείς ιδιότητες ως τις πιο σημαντικές για προβλήματα της μαθηματικής φυσικής :

1. Ύπαρξη λύσης.
2. Μοναδικότητα λύσης
3. Συνεχή εξάρτηση της λύσης απο τα δεδομένα του προβλήματος

Ένα πρόβλημα που ικανοποιεί και τις τρεις προυποθέσεις θα το καλούμαι καλώς τοποθετημένο. Για να είμαστε ακριβείς, έστω ένας τελεστής $A : U \to V$ ένας τελεστής απο ένα υποσύνολο U ενός χώρου με νόρμα X σε ένα υποσύνολο V ενός χώρου με νόρμα Y. Η εξίσωση $A\phi = f$ θα λέγεται καλώς τοποθετημένο, εάν ο A είναι 1-1 και επί και ο $A^{-1} : V \to U$ είναι συνεχής. Αλλιώς θα λέμε οτι το $A\phi = f$ είναι κακώς τοποθετημένο. Τα τελευταία χρόνια έχει γίνει καταφανές, οτι οι προυποθέσεις του Hadamard είναι περιοριστικές διότι σημαντικά προβλήματα της φυσικής είναι κακώς τοποθετημένα. Συγκεκριμένα πολλά αντίστροφα προβλήματα σκέδασης είναι κακώς τοποθετημένα. Ας εκθέσουμε ένα τέτοιο:

Παράδειγμα 3.1.1. *Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ στο } [0,\pi]\times[0,T] \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0, \quad 0 \le t \le T \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad 0 \le x \le \pi \end{aligned}$$

όπου $\phi \in C[0,\pi]$ είναι δοθείσα συνάρτηση. Τότε με την μέθοδο χωριζομένων *μεταβλητών προκύπτει η λύση*

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \; sin \; nx$$
$$a_n = \frac{2}{\pi} \; \int_0^{\pi} \phi(y) \; sin \; ny \; dy$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε οτι η λύση είναι μοναδική, και οτι εξαρτάται συνεχώς απο τα δεδομένα, ως προς την maximum νόρμα, δηλαδη:

$$max_{[0,\pi]\times[0,T]} \; |u(x,t)| \leq C \; max_{[0,\pi]} \; |\phi(x)|$$

για κάποια θετική σταθερά C. Τώρα θεωρούμε το αντίστροφο πρόβλημα για το προσδιορισμό της ϕ απο την $f = u(,T)$. Σε αυτή την περίπτωση

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} b_n e^{n^2(T-t)} sin \; nx$$
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) sin \; ny \; dy$$

επομένως

$$||\phi||^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} |b_n|^2 e^{2n^2 T}$$

που απειρίζεται εκτός εαν τα b_n φθίνουν ραγδαία. Ακόμα και σε αυτή την περίπτωση μικρές διαταραχές στην f (και άρα στα b_n) θα έχουν ως αποτέλεσμα το πρόβλημα να μην έχει λύση. Να σημειώσουμε επίσης οτι το αντίστροφο πρόβλημα μπορεί να γραφτεί και ως ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους με ομαλό πυρήνα

$$\int_0^{\pi} K(x,y) \; \phi(y) \; dy = f(x) \; , \; 0 \leq x \leq \pi$$

όπου

$$K(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} e^{-n^2 T} sin \; nx \; sin \; ny \; , \; 0 \leq x, y \leq \pi.$$

Συγκέκριμενα ο παραπάνω ολοκληρωτικός τελεστής στον χώρο $L^2[0,\pi]$ είναι συμπαγής.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω Q και Y δύο χώροι με νόρμα, και $A : X \to Y$ ένας συμπαγής τελεστής. Τότε η εξίσωση $A\phi = f$ είναι κακώς τοποθετημένο εάν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε οτι υπάρχει ο A^{-1} και οτι είναι συνεχής. Τότε ο $I = A^{-1}A : X \to X$ είναι συμπαγής και άρα με το θεώρημα 1.20 ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης. □

Παρακάτω θα αναπτύξουμε την βασική θεωρία για να αντιμετωπίσουμε προβλήματα κακώς τοποθετημένα.

3.2 Μέθοδοι Κανονικοποίησης

Τις μεθόδους που χρησιμοποιούμε για την κατασκευή ευσταθούς, προσεγγιστικής λύσης για ένα κακώς τοποθετημένο πρόβλημα τις ονομάζουμε μεθόδους κανονικοποίησης. Συγκεκριμένα, για έναν τελεστή A που είναι φραγμένος και γραμμικός, θέλουμε να προσεγγίσουμε την λύση ϕ της $A\phi = f$ γνωρίζοντας μια διαταραγμένη μορφή της f, με σφάλμα απο την πραγματική

$$||f - f^\delta|| \leq \delta$$

Έστω οτι η $f \in A(X)$ τότε εαν ο A είναι 1-1 υπάρχει μοναδική λύση ϕ του $A\phi = f$. Ωστόσο, γενικά δεν μπορούμε να έχουμε την προσδοκία οτι $f^\delta \in A(X)$. Πώς θα κατασκευάσουμε μια προσέγγιση ϕ^δ για το ϕ που εξαρτάται συνεχώς απο το f^δ

Ορισμός 3.2.1. *Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα και έστω $A : X \to Y$ 1-1, φραγμένος και γραμμικός τελεστής. Τότε μια οικογένεια απο φραγμένους γραμμικούς τελεστές $R_\alpha : Y \to X,\ \alpha > 0$, τέτοια ώστε*

$$lim_{\alpha\to 0} R_\alpha A\phi = \phi$$

για κάθε $\phi \in X$ καλείται ένα κανονιστικό σχήμα για τον τελεστή A. Η παράμετρος α η παράμετρος κανονικοποίησης.

Είναι καταφανές οτι $R_\alpha f \to A^{-1} f$ καθώς το $\alpha \to 0$ για κάθε $f \in A(X)$. Το επόμενο θεώρημα δείχνει οτι για συμπαγείς τελεστές αυτή η σύκγλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα και έστω $A : X \to Y$ τελεστής 1-1 και συμπαγή, και υποθέτουμε οτι ο X έχει άπειρη διάσταση. Τότε οι τελεστές R_α δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφα φραγμένη ως προς το α καθώς $\alpha \to 0$ και ο $R_\alpha A$ δεν μπορεί να συγκλίνει κάτα νόρμα καθώς $\alpha \to 0$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε οτι $||R_\alpha|| \leq C$ καθώς $\alpha \to 0$. Τότε εφόσον $R_\alpha f \to A^{-1} f$ καθώς $\alpha \to 0$ για κάθε $f \in A(X)$ έχουμε οτι $||A^{-1}f|| \leq C||f||$ και άρα ο A^{-1} είναι φραγμένος στον χώρο $A(X)$. Αυτό συνεπάγεται οτι ο τελεστής $I = A^{-1}A$ είναι συμπαγής στον X που αντιφάσκει με το γεγονός οτι ο X έχει άπειρη διάσταση. ☐

Τώρα ας υποθέσουμς οτι $R_\alpha A$ συγκλίνει κάτα νόρμα καθώς $\alpha \to 0$, δηαλδή $R_\alpha A - I|| \to 0$ καθώς $\alpha \to 0$. Τότε υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $||R_\alpha A - I|| < \frac{1}{2}$ επομένως για κάθε $f \in A(X)$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} ||A^{-1}f|| &= ||A^{-1}f - R_\alpha A A^{-1} f + R_\alpha f|| \\ &\leq ||A^{-1}f - R_\alpha A A^{-1} f|| + ||R_\alpha f|| \\ &\leq ||I - R_\alpha A||\ ||A^{-1}f|| + ||R_\alpha||\ ||f|| \\ &\leq \frac{1}{2}||A^{-1}f|| + ||R_\alpha||\ ||f||. \end{aligned}$$

Συνεπώς $||A^{-1}f|| \leq 2||R_\alpha||\,||f||$, δηλαδή $A^{-1} : A(X) \to X$ είναι φραγμένος, κάτι που είναι αντιφατικό. Ένα σχήμα κανονικοποίησης προσεγγίζει την λύση ϕ του $A\phi = f$ με την

$$\phi_\alpha{}^\delta := R_\alpha f^\delta.$$

Γράφοντας

$$\phi_\alpha{}^\delta - \phi = R_\alpha f^\delta - R_\alpha f + R_\alpha A\phi - \phi,$$

έχουμε την εκτίμηση

$$||\phi_\alpha{}^\delta - \phi|| \leq ||R_\alpha||\delta + ||R_\alpha A\phi - \phi||.$$

Απο το θεώρημα 2.4 ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος είναι οταν το α είναι μικρό, ενώ ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος είναι μεγάλος όταν το α δεν είναι μικρό. Πως λοιπόν να επιλέξουμε το α; Μια λογική επιλογή θα ήταν να επιλέγαμε το $\alpha = \alpha(\delta)$ έτσι ώστε $\phi_\alpha{}^\delta \to \phi$ καθώς $\delta \to 0$.

Ορισμός 3.2.3. *Μια στρατηγική για το σχήμα κανονικοποίησης R_α, $\alpha > 0$ δηλαδή μια μέθοδο για την επιλογή της παραμέτρου κανονικοποίησης $\alpha = \alpha(\delta)$, καλείται κανονική, εαν για κάθε $f \in A(X)$ και $f^\delta \in Y$ τέτοιο ώστε $||f^\delta - f|| \leq \delta$ έχουμε οτι*

$$R_{\alpha(\delta)} f^\delta \to A^{-1} f$$

καθώς $\delta \to 0$.

Ενα εύλογο κριτήριο επιλογής του $\alpha = \alpha(\delta)$ είναι το κριτήριο διαφοράς του Morozov δηλαδή οτι το υπόλοιπο $||A\phi_\alpha{}^\delta - f^\delta||$ πρέπει να είναι μικρότερο απο την ακρίβεια των μετρήσεων των τιμών της f. Συγκεκριμένα το $\alpha = \alpha(\delta)$ πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε $||AR_\alpha f^{\delta - f^\delta}|| = \gamma\ \delta$ για κάποια σταθερά $\gamma \geq 1$. Δεδομένου ενός σχήματος κανονικοποίησης, το ερώτημα βέβαια είναι κατα πόσο μια τέτοια στρατηγικη είναι κανονική.

3.3 Ιδιάζουσες τιμές

Απο εδώ και στο εξής οι χώροι X και Y θα είναι πάντα χώροι Hilbert άπειρης διάστασης και ο τελεστής $A : X \to Y$, $A \neq 0$ πάντα συμπαγής τελεστής. Σημειώνουμε οτι ο $A^*A : X \to X$ είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής. Άρα απο το θεώρημα Hilbert- Schmidt υπάρχει ένα το πολύ αριθμήσιμο το πλήθος σύνολο που απαρτίζεται απο τις ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}$ του A^*A και αν $A^*A\phi_n\lambda_n\phi_n$ τότε $(A^*A\phi_n, \phi_n) = \lambda_n\ ||\phi_n||^2$, δηλαδή $||A\phi_n||^2 = \lambda_n||\phi_n||^2$ που συνεπάγεται οτι $\lambda \geq 0$, για $n = 1, 2, 3..$ Οι μη αρνητικές ρίζες των ιδιοτιμών του τελεστή A^*A λέγονται ιδιάζουσες τιμές του A.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $\{\mu_n\}$ η ακολουθία μη-μηδενικών ιδιαζουσών τιμών του συμπαγούς τελεστή $A : X \to Y$ διατεταγμένων ετσι ώστε*

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq ...$$

Τότε υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{\phi_n\}$ στον X και $\{g_n\}$ στον Y τέτοιες ώστε

$$A\phi_n = \mu_n g_n \ , \ A^* g_n = \mu_n \phi_n.$$

Για κάθε $\phi \in X$ έχουμε την ανάλυση ιδιαζουσών τιμών

$$\phi = \sum_1^{\infty} (\phi, \phi_n) \ \phi_n + P\phi$$

όπου $P : X \to N(A)$ είναι ο ορθογώνιος τελεστής προβολής του X επι του $N(A)$ και

$$A\phi = \sum_1^{\infty} \mu_n (\phi, \phi_n) g_n.$$

Το σύστημα (μ_n, ϕ_n, g_n) καλείται το ιδιάζον σύστημα του τελεστή A.

Απόδειξη. Έστω $\{\phi_n\}$ τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του A^*A που αντιστοιχούν στις $\{\mu_n\}$ δηλαδή

$$A^*A\phi = {\mu_n}^2 \phi_n$$

και ορίζουμε μια δεύτερη ορθοκανονική ακολουθία

$$g_n =: \frac{1}{\mu_n} A\phi_n.$$

□

Τότε $A\phi_n = \mu_n g_n$ και $A^* g_n = \mu_n \phi_n$. Το θεώρημα Hilbert-Schmidt συνεπάγεται οτι

$$\phi = \sum_1^{\infty} (\phi, \phi_n) \phi_n + P\phi$$

όπου $P : X \to N(A^*A)$ είναι ο τελεστής προβολής του X επι του χώρου $N(A^*A) = N(A)$. Τέλος, εφαρμόζοντας τον τελεστή A στην παραπάνω έκφραση (για να είμαστε ακριβείς, πρώτα εφαρμόζουμε τον A στο μερικό άθροισμα, και ύστερα παίρνουμε το όριο στο άπειρο) παίρνουμε οτι

$$A\phi = \sum_1^{\infty} \mu_n (\phi, \phi_n) g_n.$$

Θα παραθέσουμε τώρα ενα σημαντικό αποτέλεσμα για την μελέτη εξισώσεων της μορφής $A\phi = f$ όπου ο A είναι συμπαγής τελεστής.

Θεώρημα 3.3.2. *Το θεώρημα του Picard)* *Έστω $A : X \to Y$ ένας συμπαγής τελεστής με ιδιάζον σύστημα (μ_n, ϕ_n, g_n). Τότε η εξίσωση $A\phi = f$ είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν $f \in N(A^*)^{\perp}$ και*

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{{\mu_n}^2} \ |(f, g_n)|^2 < \infty.$$

Σε αυτη την περίπτωση η λύση της $A\phi = f$ δίνεται απο την

$$\phi = \sum_1^\infty \frac{1}{\mu_n}(f, g_n)\phi_n.$$

Απόδειξη. Το οτι είναι αναγκαίο η $f \in N(A^*)^\perp$ έπεται απο το Θεώρημα 1.27. Αν η ϕ είναι λύση της $A\phi = f$ τότε

$$\mu_n(\phi, \phi_n) = (\phi, A^* g_n) = (A\phi, g_n) = (f, g_n).$$

Όμως απο την ανάλυση ιδιάζουσας τιμής του ϕ έχουμε οτι

$$||\phi||^2 = \sum_1^\infty |(\phi, \phi_n)|^2 + ||P\phi||^2$$

επομένως

$$\sum_1^\infty \frac{1}{{\mu_n}^2}|(f, g_n)|^2 = \sum_1^\infty |(\phi, \phi_n)|^2 \leq ||\phi||^2$$

που δικαιολογεί την απαίτηση (2.1).
Αντίστροφα ας υποθέσουμε οτι $f \in N(A^*)^\perp$ και οτι ταυτόχρονα ισχύει η (2.1). Τότε απο την (2.1) έχουμε οτι ισχύει

$$\phi = \sum_1^\infty \frac{1}{\mu_n}(f, g_n)\phi_n$$

συγκλίνει στον χώρο Hilbert . Αν εφαρμόσουμε τον A σε αυτήν την σειρά τότε έχουμε οτι

$$A\phi = \sum_1^\infty (f, g_n)g_n.$$

Άλλα εφόσον $f \in N(A^*)^\perp$, αυτή είναι η ανάλυση ιδιάζουσας τιμής της συνάρτησης f που αντιστοιχεί στον τελεστή A^*, συνεπώς $A\phi = f$. □

Το θεώρημα του Picard δείχνει οτι η εξίσωση $A\phi = f$ είναι κακώς τοποθετημένη. Συγκεκριμένα, αν θέσουμε $f^\delta = f + \delta g_n$, παίρνουμε μια λύση του $A\phi^\delta = f^\delta$ που είναι η $\phi^\delta = \phi + \frac{\delta\phi_n}{\mu_n}$. Επομένως, εαν ο A(X) δεν είναι πεπερασμένης διάστασης,

$$\frac{||\phi^\delta - \phi||}{||f^\delta - f||} - \frac{1}{\mu_n} \to \infty$$

εφόσον απο το θεώρημα 1.14 έχουμε οτι $\mu_n \to 0$. Θα λέμε οτι το $A\phi = f$ είναι ηπίως κακά τοποθετημένο αν οι ιδιάζουσες τιμές τείνουν αργά στο μηδέν και ιδιαίτερα κακώς τοποθετημένο, εαν τείνουν στο μηδεν ταχύτατα π.χ εκθετικά. Απο εδω και πέρα, θα εστιάσουμε σε κακώς τοποθετημένα προβλήματα, οπότε θα υποθέτουμε πάντα οτι ο χώρος A(X) είναι άπειρης διάστασης, δηλαδή οτι το σύνολο των ιδιασουσών τιμών είναι άπειρο.

Παράδειγμα 3.3.3. *Το πρόβλημα που αντιμετωπίσαμε στο παράδειγμα 2.1 είναι ισοδύναμο με την επίλυση μιας εξίσωσης συμπαγούς τελεστή* $A\phi = f$ *όπου*

$$(A\phi)(x) = \int_0^\pi K(x,y)\phi(y)\ dy,\ 0 \le x \le \pi$$

και

$$K(x,y) = \frac{2}{\pi}\ \sum_1^\infty e^{-n^2T} sinnxsinny.$$

Τότε ο A *είναι αυτοσυζυγής και οι ιδιοτιμές του ειναι οι* $\lambda_n = e^{-n^2T}$ *Επομένως* $\mu_n = \lambda_n$ *και η* $A\phi = f$ *είναι ιδιαίτερα κακώς τοποθετημένο.*

Μια εύλογη στρατηγική για την κανονικοποίηση της εξίσωσης $A\phi = f$ που προκύπτει απο το θεώρημα του Picard , είναι να φιλτράρουμε την επιρροή των όρων μεγαλύτερου βαθμού στην λύση της ϕ

$$\phi = \sum_1^\infty \frac{1}{\mu_n}(f, g_n)\phi_n.$$

Αυτο επιδιώκουμε με το επόμενο θεώρημα. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε δύο σχήματα κανονικοποίησης, κάνοντας συγκεκριμένες επιλογές του q, που εμφανίζεται στο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω ο 1-1 συμπαγής τελεστής* $A : X \to Y$ *με ιδιάζον σύστημα* (μ_n, ϕ_n, g_n) *και έστω* $q : (0,\infty)\times(0, ||A||] \to \mathbb{R}$ *μια φραγμένη σύναρτηση τέτοια ώστε για κάθε* $\alpha > 0$ *υπάρχει μια θετική σταθερά* $c(\alpha)$ *τέτοια ώστε*

$$|q(\alpha, \mu)| \le \mu c(\alpha)$$

και

$$lim_{\alpha\to 0} q(\alpha, \mu) = 1\ ,\ 0 < \mu \le ||A||.$$

Τότε οι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές $R_\alpha : Y \to X,\ \alpha > 0$, *που ορίζονται ως εξής:*

$$R_\alpha f := \sum_1^\infty \frac{1}{\mu_n} q(\alpha, \mu_n)(f, g_n)\phi_n$$

για $f \in Y$ *περιγράφουν ένα σχήμα κανονικοποίησης με*

$$||R_\alpha|| \le c(\alpha).$$

Απόδειξη. Απο την ανάλυση ιδιάζουσών τιμών της f ως προς τον τελετή A^* έχουμε οτι

$$||f||^2 = \sum_1^\infty |(f, g_n)|^2 + ||Pf||^2$$

όπου $P: X \to N(A^*)$ είναι η ορθογώνια προβολή του X επι του $N(A^*)$, βλέπουμε οτι για κάθε $f \in Y$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} ||R_\alpha f||^2 &= \sum_1^\infty \frac{1}{{\mu_n}^2} |q(\alpha,\mu_n)|^2 \; |(f,g_n)|^2 \\ &\le |c(\alpha)|^2 \; \sum_1^\infty |(f,g_n)|^2 \\ &\le |c(\alpha)|^2 \; ||f||^2 \end{aligned}$$

και άρα $||R_\alpha|| \le c(\alpha)$. Απο την σχέση

$$\begin{aligned} (R_\alpha, A\phi, \phi_n) &= \frac{1}{\mu_n} q(\alpha,\mu_n)(A\phi, g_n) \\ &= q(\alpha,\mu_n)(\phi,\phi_n) \end{aligned}$$

και την ανάλυση ιδιαζουσών τιμών για τον τελεστή $R_\alpha A\phi - \phi$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} ||R_\alpha A\phi - \phi||^2 &= \sum_1^\infty |R_\alpha A\phi - (\phi,\phi_n)|^2 \\ &= \sum_1^\infty |q(\alpha,\mu_n) - 1|^2 \; |(\phi,\phi_n)|^2. \end{aligned}$$

Τώρα έστω $\phi \in X, \phi \neq 0$ και έστω M ένα φράγμα για την συνάρτηση q. Πρώτα σημειώνουμε πως για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ενα $N = N(\epsilon)$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{N+1}^\infty |(\phi,\phi_n)|^2 < \frac{\epsilon}{2(M+1)^2}.$$

Εφόσον $lim_{\alpha\to 0} q(\alpha,\mu) = 1$, υπάρχει $\alpha_0 = \alpha_0(\epsilon)$ τέτοιο ώστε

$$|q(\alpha,\mu_n) - 1|^2 < \frac{\epsilon}{2||\phi||^2}$$

για $n = 1, 2, .., N$ και όλα τα α με $0 < \alpha \le \alpha_0$. Τώρα έχουμε οτι για $0 < \alpha \le \alpha_0$,

$$\begin{aligned} ||R_\alpha A\phi - \phi||^2 &= \sum_1^N |q(\alpha,\mu_n) - 1|^2 \; |(\phi,\phi_n)|^2 \\ &\quad + \sum_{N+1}^\infty |q(\alpha,\mu_n) - 1|^2 |(\phi,\phi_n)|^2 \\ &\le \frac{\epsilon}{2||\phi||^2} \sum_1^N |(\phi,\phi_n)|^2 + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Άλλα εφόσον ο A είναι 1-1,

$$||\phi||^2 = \sum_1^\infty |(\phi, \phi_n)|^2$$

επομένως $||R_\alpha A\phi - \phi||^2 \leq \epsilon$ για $0 < \alpha \leq \alpha_0$. Μπορούμε τώρα να συμπεράνουμε οτι $R_\alpha A\phi \to \phi$ καθώς $\alpha \to 0$ για κάθε $\phi \in X$ που ητάν το ζητούμενο. □

Θα κάνουμε τώρα μια συγκεκριμένη επιλογή του q που οδηγεί στο πρώτο σχήμα κανονικοποίησης που θα παρουσιάσουμε.

Θεώρημα 3.3.5. *Έστω $A : X \to Y$ ένας 1-1 συμπαγής τελεστής με ιδιάζον σύστημα (μ_n, ϕ_n, g_n). Τότε η φασματική αποκοπή*

$$R_m f := \sum_{\mu_n \geq \mu_m} \frac{1}{\mu_n}(f, g_n)\phi_n$$

περιγράφει ενα σχήμα κανονικοποίησης, με παράμετρο κανονικοποίησης $m \to \infty$ και $||R_m|| = \frac{1}{\mu_m}$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε q ώστε $q(m, n) = 1$ για $\mu \geq \mu_m$ και $q(m, \mu) = 0$ για $\mu < \mu_m$. Τότε εφόσον $\mu_m \to 0$ καθώς $m \to \infty$ οι προυποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος πληρούνται εαν $c(m) = \frac{1}{\mu_m}$. Άρα $||R_m|| \leq \frac{1}{\mu_m}$. Η ισότητα έπεται απο την ταυτότητα $R_m g_m = \frac{\phi_m}{\mu_m}$. □

Θα κλείσουμε αυτήν την υποενότητα αποδεικνύοντας μια αρχή διαφοράς για το σχήμα κανονικοποίησης φασματικής αποκοπής.

Θεώρημα 3.3.6. *Έστω $A : X \to Y$ ένας 1-1 και συμπαγής τελεστής με πυκνή εικόνα μέσα στον χώρο Y, και έστω $f \in Y$ και $\delta > 0$. Τότε υπάρχει ελάχιστος φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε*

$$||AR_m f - f|| \leq \delta.$$

Απόδειξη. Απο την υπόθεση έχουμε οτι $A(\bar{X}) = Y$ άρα ο A^* είναι 1-1. Επομένως η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών με σύστημα (μ_n, g_n, ϕ_n) του A^* συνεπάγεται οτι για κάθε $f \in Y$ έχουμε οτι

$$f = \sum_1^\infty (f, g_n)g_n.$$

Άρα

$$||(AR_m - I)f||^2 = \sum_{\mu_n < \mu_m} |(f, g_n)|^2 \to 0$$

καθώς το $m \to \infty$. Συγκεκριμένα, υπάρχει ελάχιστος φυσικός αριθμός $m = m(\delta)$ τέτοιος ώστε $||AR_m f - f|| \leq \delta$. □

Σημειώνουμε οτι απο την (2.2) και την (2.3) παίρνουμε οτι

$$||AR_m f - f||^2 = ||f||^2 - \sum_{\mu_n \geq \mu_m} |(f, g_n)|^2$$

Συγκεκριμένα, το $m(\delta)$ καθορίζεται μονοσήμαντα απο την συνθήκη οτι είναι ο μικρότερος απο όλους τους φυσικούς αριθμούς για τον οποίον η το δεξί μέλος της (2.4) είναι μικρότερο ή ίσο απο το δ^2. Στο παράδειγμα 2.1 στο οποίο είχαμε οτι $g_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} sin\ nx$, επομένως το m προσδιορίζεται μονοσήμανταναπο την απαίτηση να είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο

$$||f||^2 = \sum_{1}^{m} |b_n|^2 \leq \delta^2$$

όπου b_n είναι οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης f.

3.4 Κανονικοποίηση Tikhonov

Θα μελετήσουμε τώρα το πιο δημοφιλές σχήμα κανονικοποίησης στο πεδίο των κακώς τοποθετημένων προβλημάτων.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $A : X \to Y$ ένας συμπαγής τελεστής. Τότε για κάθε $\alpha > 0$ ο τελεστής $\alpha I + A^*A : X \to X$ είναι 1-1 και επί και έχει φραγμένο αντίστροφο. Επιπλέον, εαν ο A είναι 1-1 τότε*

$$R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^*$$

περιγράφει ενα σχήμα κανονικοποίησης με $||R_\alpha|| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$

Απόδειξη. Απο την

$$\alpha ||\phi||^2 \leq (\alpha\phi + A^*A\phi, \phi)$$

για $\phi \in X$ μπορούμε να συμπεράνουμε οτι για $\alpha > 0$ ο τελεστής $\alpha I + A^*A$ είναι 1-1. Επομένως εφόσον ο A^*A είναι συμπαγής, απο το θεώρημα του Riesz έχουμε οτι ο $(\alpha I + A^*A)^{-1}$ υπάρχει και είναι φραγμένος.

Τώρα ας υποθέσουμε οτι ο A είναι 1-1 και οτι το ιδιάζον σύστημα αυτού είναι το (μ_n, ϕ_n, g_n). Τότε για $f \in Y$ η μοναδική λύση ϕ_α της εξίσωσης

$$\alpha\phi_\alpha + A^*A\phi_\alpha = A^*f$$

δίνεται απο την

$$\phi_\alpha = \sum_{1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\alpha + \mu^2} (f, g_n)\phi_n,$$

δηλαδή ο τελεστής R_α μπορεί να γραφεί ως

$$R_\alpha f = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} q(\alpha, \mu_n)(f, g_n)\phi_n$$

όπου

$$q(\alpha,\mu) = \frac{\mu^2}{\alpha+\mu^2}.$$

Εφόσον $0 < q(\alpha,\mu) < 1$ και $\sqrt{\alpha}\mu \leq \frac{(\alpha+\mu^2)}{2}$, έχουμε οτι $|q(\alpha,\mu)| \leq \frac{\mu}{2\sqrt{\alpha}}$ και το ζητούμενο ακολουθεί απο το θεώρημα 2.9. $\square$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει οτι η συνάρτηση $\phi_\alpha = R_\alpha f$ μπορεί να προσδιοριστεί ως η λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης.

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω $A : X \to Y$ ένας συμπαγής τελεστής και $\alpha > 0$. Τότε για κάθε $f \in Y$ υπάρχει μια μοναδική $\phi_\alpha \in X$ τέτοια ώστε*

$$||A\phi_\alpha - f||^2 + \alpha||\phi_\alpha||^2 = inf_{\phi\in X}\Big\{||A\phi - f||^2 + \alpha||\phi||^2\Big\}.$$

Το στοιχείο που ελαχιστοποεί αυτη την έκφραση, αποτελεί την μοναδική λύση του $\alpha\phi_\alpha + A^*A\phi_\alpha = A^*f$.

Απόδειξη. Απο την

$$\begin{aligned}||A\phi - f||^2 + \alpha||\phi||^2 = ||A\phi_\alpha - f||^2 + \alpha||\phi_\alpha||^2 \\ +2Re(\phi - \phi_\alpha, \alpha\phi_\alpha + A^*A\phi_\alpha - A^*f) \\ +||A(\phi - \phi_\alpha||^2 + \alpha||\phi - \phi_\alpha||^2\end{aligned}$$

που επαληθέυεται για κάθε $\phi, \phi_\alpha \in X$, βλέπουμε οτι αν η ϕ_α ικανοποιεί την $\alpha\phi_\alpha + A^*A\phi_\alpha = A^*f$ τότε η ϕ_α ελαχιστοποιεί το συναστησιακό Tikhonov

$$||A\phi - f||^2 + \alpha||\phi||^2.$$

Απο την άλλη, αν η συνάρτηση ϕ_α ελαχιστοποιεί το συναστησιακό Tikhonov , θέτουμε

$$\psi := \alpha\phi_\alpha + A^*A\phi_\alpha - A^*f$$

και υποθέτουμε οτι $\psi \neq 0$. Τότε για $\phi = \phi_\alpha - t\psi$, t πραγματικός, έχουμε ότι

$$||A\phi - f||^2 + \alpha||\phi||^2 = ||A\phi_\alpha - f||^2 + \alpha||\phi_\alpha||^2 - 2t||\psi||^2 + t^2(||A\psi||^2 + \alpha||\psi||^2). \tag{3.1}$$

Το ελάχιστο του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης πιάνεται οταν

$$t = \frac{||\psi||^2}{||A\psi||^2 + \alpha||\psi||^2}$$

και για αυτό το t έχουμε οτι $||A\phi - f||^2 + \alpha||\phi||^2 < ||A\phi\alpha - f||^2 + \alpha||\phi_\alpha||^2$ που αντιβαίνει τον ορισμό της ϕ_α. Επομένως $\psi = 0$, δηλαδή $\alpha\phi_\alpha + A^*A\phi_\alpha = A^*f$. $\square$

Ύπο αυτή την ερμηνεία της κανονικοποίησης Tikhonov ως ελαχιστοποιητή του συναρτησιακού Tikhonov, η λύση του ϕ_α κρατά το υπόλοιπο $||A\phi_\alpha - f||^2$ μικρό και σταθεροποιείται μέσω του όρου τιμωρίας $\alpha||\phi_\alpha||^2$. Απο αυτό έπονται δύο προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς:

Λύση ελάχιστης νόρμας: Για δεδομένο $\delta > 0$ ελαχιστοποιείσε το $||\phi||$ έτσι ώστε $||A\phi - f||\delta$.
Λύσεις Για δεδομένο $\rho > 0$ ελαχιστοποιούμε το $||A\phi - f||$ δεδομένου οτι $||\phi|| \leq \rho$.

Ξεκινάμε με την ιδέα μια λύσης ελάχιστης νόρμας, και τη θεώρηση της ως ευρέση της ϕ με αρχή διαφοράς σε μια κανονικοποίηση Tikhonov .

Θεώρημα 3.4.3. *Έστω ένας τελεστής $A : X \to Y$ 1-1, συμπαγής με πυκνή εικόνα μέσα στον Y και έστω $f \in Y$ με $||f|| > \delta > 0$. Τότε υπάρχει μοναδικό α τέτοιο ώστε*

$$||AR_\alpha f - f|| = \delta.$$

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε οτι το

$$F(\alpha) := ||AR_\alpha f - f||^2 - \delta^2$$

έχει μοναδική ρίζα. Όπως στο θεώρημα 2.11 έχουμε οτι

$$f = \sum_1^\infty (f, g_n) g_n$$

και για $\phi_\alpha = R_\alpha f$ έχουμε οτι

$$\phi_\alpha = \sum_1^\infty \frac{\mu_n}{\alpha + \mu_n^2} (f, g_n) \phi_n.$$

Συνεπώς

$$F(\alpha) = \sum_1^\infty \frac{\alpha^2}{(\alpha + \mu_n^2)^2} |(f, g_n)|^2 - \delta^2$$

Εφόσον η F είναι συνεχής συνάρτηση του α και γνησίως αύξουσα με $F(\alpha) \to ||f||^2 - \delta^2$ καθώς $\alpha \to \infty$ και $F(\alpha) \to -\delta^2$ καθώς $\alpha \to 0$, η F έχει ακριβώς μια ρίζα $\alpha = \alpha(\delta)$. □

Για να αποδείξουμε την κανονικότητα της παραπάνω αρχής της διαφοράς για την κανονικοποίηση Tikhonov, χρειάζεται να ορίσουμε την έννοια της ασθενούς σύγλισης.

Ορισμός 3.4.4. *Μια ακολουθία $\{\phi_n\}$ στον χώρο X θα λέμε οτι συγκλίνει ασθενώς στο στοιχείο $\phi \in X$ αν*

$$lim_{n\to\infty}(\psi, \phi_n) = (\psi, \phi)$$

για κάθε $\psi \in X$ και θα γράφουμε $\phi_n \rightharpoonup \phi$, $n \to \infty$. Είναι προφανές πως η σύγκλιση κάτα νόρμα συνεπάγεται την ασθενή σύγκλιση. Όπως θα δούμε στο παρακάτω παράδειγμα το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα 3.4.5. *Έστω ℓ^2 ο χώρος όλων των ακολουθιών $\{a_n\}, a_n \in \mathbb{C}$ τέτοιων ώστε*

$$\sum_{1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty. \tag{3.2}$$

Ο χώρος ℓ^2 είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$(a, b) = \sum_{1}^{\infty} a_n \bar{b_n} \tag{3.3}$$

όπου $a = \{a_n\}$ και $b = \{b_n\}$. Τώρα ορίζουμε την ακολουθία του ℓ^2, $\phi_n = (0, 0, 0, ..., 1, 0, 0, ...)$ οπου η μονάδα εμφανίζεται στην $n-$οστή θέση. Τότε η $\{\phi_n\}$ δεν συγκλίνει κάτα νόρμα εφόσον δεν είναι ακολουθία Cauchy , $||\phi_n - \phi_m|| = \sqrt{2}, m \neq n$. Απο την άλλη, για $\psi = a_n \in \ell^2$ έχουμε οτι $(\psi, \phi_n) = a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$ επειδή συγκλίνει η σειρά $\sum_1^{\infty} |a_n|^2$. Άρα η $\{\phi_n\}$ συγκλίνει ασθενώς στο 0 στο ℓ^2.

Θεώρημα 3.4.6. *Κάθε φραγμένη ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert έχει μια υπακολουθία που είναι ασθενώς συγκλίνουσα.*

Απόδειξη. Έστω ϕ_n μια φραγμένη ακολουθία, $||\phi_n|| \leq C$. Τότε για κάθε φυσικό αριθμό m η ακολουθία (ϕ_m, ϕ_n) είναι φραγμένη για όλα τα n. Επομένως απο το θεώρημα $Bolzano-Weierstrass$ και χρησιμοποιώντας και το διαγώνιο επιχείρημα, επιλέγουμε μια υπακολουθία $\{\phi_{n(k)}\}$ τέτοια ώστε η $(\phi_m, \phi_{n(k)})$ να συγκλίνει καθώς $k \to \infty$ για κάθε φυσικό αριθμό m. Έτσι το γραμμικό συναρτησιακό F που ορίζεται απο τη σχέση

$$F(\psi) := lim_{k\to\infty}(\psi, \phi_{n(k)})$$

είναι καλώς ορισμένο στο $U := span\{\phi_m\}$ και, απο την συνεχεια του συναρτησιακού σε όλο το $\bar{U}$. Τώρα έστω $P : X \to \bar{U}$ ο τελεστής προβολής και για αυθαίρετο $\psi \in X$ γράφουμε $\psi = P\psi + (I - P)\psi$. Για αυθαίρετο $\psi \in X$ ορίζουμε το $F(\psi)$ ως εξής

$$F(\psi) := lim_{k\to\infty}(\psi, \phi_{n(k)}) = lim_{k\to\infty}\big[(P\psi, \phi_{n(k)}) + ((I - P)\psi, \phi_{n(k)})\big] = lim_{l\to\infty}(P\psi, \phi_{n(k)})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός οτι ο P είναι αυτοσυζυγής. Έτσι η F ορίζεται σε όλο τον Q. Επιπλέον, $||F|| \leq C$. Επομένως απο το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μοναδικό $\phi \in X$ τέτοιο ώστε $F(\psi) = (\psi, \phi)$ για κάθε $\psi \in X$. Μπορούμε τώρα να συμπεράνουμε οτι $lim_{k\to\infty}(\psi, \phi_{n(k)}) = (\psi, \phi)$ για κάθε $\psi \in X$, δηλαδή $\phi_{n(k)}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα στο ϕ καθώς $k \to \infty$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε οτι η αρχή της διαφοράς του θεωρήματος 2.14 είναι κανονική.

Θεώρημα 3.4.7. *Έστω $A : X \to Y$ ένας 1-1 και συμπαγής τελεστής με πυκνή εικόνα στον Y. Έστω $f \in A(X)$ και $f^\delta \in Y$ που ικανοποιούν την $||f^\delta - f|| \leq \delta < ||f^\delta||$ με $\delta > 0$. Τότε υπάρχει μοναδικό $\alpha = \alpha(\delta)$ τέτοια ώστε*

$$||AR_{\alpha(\delta)}f^\delta - f^\delta|| = \delta$$

και

$$R_{\alpha(\delta)}f^\delta \to A^{-1}f$$

καθώς $\delta \to 0$.

Απόδειξη. Υπο το φως των ευρημάτων του θεωρήματος 2.14, χρειάζεται μόνο να αποδείξουμε την σύγκλιση. Εφόσον η $\phi^\delta = R_{\alpha(\delta)}f^\delta$ ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό Tikhonov, έχουμε οτι

$$\begin{aligned}\delta^2 + \alpha||\phi^\delta||^2 &= ||A\phi^\delta - f^\delta||^2 + \alpha||\phi^\delta||^2 \\ &\leq ||AA^{-1}f - f^\delta||^2 + \alpha||A^{-1}f||^2 \\ &\leq \delta^2 + \alpha||A^{-1}f||^2\end{aligned}$$

και άρα $||\phi^\delta|| \leq ||A^{-1}f||$. Τώρα έστω $g \in Y$. Τότε

$$|(A\phi^\delta - f, g)| \leq (||A\phi^\delta - f^\delta|| + ||f^\delta - f||)\ ||g|| \tag{3.4}$$

$$\leq 2\delta||g|| \to 0 \tag{3.5}$$

καθώς $\delta \to 0$. Εφόσον ο A είναι 1-1, ο χώρος $A^*(Y)$ είναι πυκνός στον X, και άρα για κάθε $\psi \in X$ υπάρχει μια ακολουθία $\{g_n\}$ στον Y τέτοια ώστε $A^*g_n \to \psi$.. Τότε

$$(\phi^\delta - \phi, \psi) = (\phi^\delta - \phi, A^*g_n) + (\phi^\delta - \phi, \psi - A*g_n) \tag{3.6}$$

και, για κάθε $\epsilon > 0$,

$$|(\phi_\delta - \phi, \psi - A^*g_n)| \leq ||\phi^\delta - \phi||\ ||\psi - A^*g_n|| < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.7}$$

για κάθε $\delta > 0$ και $N > N_0$ εφόσον η ποσότητα $\phi^\delta - \phi||$ είναι φραγμένη. Άρα, για $N > N_0$ και για δ αρκετά μικρό, έχουμε απο τις (3.4)-(3.7) οτι

$$\begin{aligned}|(\phi^\delta - \phi, \psi)| &\leq |(\phi^\delta - \phi, A^*g_n)| + |(\phi^\delta - \phi, \psi - A^*g_n)| \\ &\leq |(A\phi^\delta - f, g_n)| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

όπου έχουμε θέσει $f = A\phi$. Μπορούμε τώρα να συναγάγουμε $\phi^\delta \rightharpoonup A^{-1}f$ καθώς $\delta \to 0$. Τότε, χρησιμποποιώντας πάλι το γεγονός οτι $||\phi^\delta|| \leq ||A^{-1}f||$, έχουμε οτι

$$\begin{aligned}||\phi^\delta - A^{-1}f||^2 &= ||\phi^\delta||^2 - 2Re(\phi^\delta, A^{-1}f) + ||A^{-1}f||^2 \\ &\leq 2\big(||A^{-1}f||^2 - Re(\phi^\delta, A^{-1}f)\big) \to 0\end{aligned}$$

καθώς $\delta \to 0$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Με επιπρόσθετες συνθήκες για την f, που μπορούν να ιδωθούν ως συνθήκες ομαλότητας για την f, μπορούμε να να αντλήσουμε επιπλέον αποτελέσματα για την τάξη της σύγκλισης. □

Θεώρημα 3.4.8. *Με τις υποθέσεις που κάναμε για το θεώρημα 2.18, εαν* $f \in AA^*(Y)$ *τότε*

$$||\phi^\delta - A^{-1}f|| = O\big(\delta^{\frac{1}{2}}\big)\ ,\ \delta \to 0.$$

Απόδειξη. Έχουμε οτι $A^{-1}f = A^*g$ για κάποιο $g \in Y$. Τότε απο την (3.7) έχουμε οτι

$$\begin{aligned} ||\phi^\delta - A^{-1}f||^2 &\leq 2\big(||A^{-1}f||^2 - Re(\phi^\delta, A^{-1}f)\big) \\ &= 2Re(A^{-1}f - \phi^\delta, A^{-1}f) \\ &= 2Re(f - A\phi^\delta, g) \\ &\leq 2(||f - f^\delta|| + ||f^\delta - A\phi^\delta||)||g|| \\ &\leq 4\delta||g|| \end{aligned}$$

□

Μέθοδοι κανονικοποίησης Tikhonov μπορούν να εφαρμοστούν και στη περίπτωση που διαταρασσονται και οι δυο πλευρές της εξίσωσης, δηλαδή στη περίπτωση που και οι δυο πλευρές παρουσιάζουν θόρυβο. Συγκεκριμένα, ας μελετήσουμε την περίπτωση της τελεστικής εξίσωσης $A_h\phi = f^\delta, A_h : X \to Y$, όπου $||A_h - A|| \leq h$ και $||f - f^\delta|| \leq \delta$ αντίστοιχα. Τότε ο τελεστής κανονικοποίησης Tikhonov δίνεται απο τον τύπο

$$R_\alpha =: (\alpha I + {A_h}^* A_h)^{-1}\ {A_h}^*$$

και η κανονιστική λύση $\phi^\alpha := R_\alpha f^\delta$ που βρίσκεται απο την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού Tikhonov

$$||A_h\phi - f^\delta|| + \alpha||\phi||.$$

Η παράμετρος κανονικοποίησης $\alpha = \alpha(\delta, h)$ καθορίζεται απο την εξίσωση

$$||A_h\phi_\alpha - f^\delta||^2 = \big(\delta + h||\phi_\alpha||^2\big).$$

Τότε ολα τα αποτελέσματα που αποδείξαμε παραπάνω για την περίπτωση που A δεν παρουσιάζει διαταραχές, μπορούν να γενικευθούν για την παρούσα περίπτωση οπου και ο πίνακας A και η συνάρτηση f παρουσιάζουν διαταραχές.

Θεώρημα 3.4.9. *Έστω τελεστής* $A : X \to Y$ *1-1 και συμπαγής και* $\rho > 0$. *Τότε για κάθε* $f \in Y$ *υπάρχει μοναδικό* $\phi_0 \in X$ *με* $||\phi_0|| = \rho$ *τέτοιο ώστε*

$$||A\phi_0 - f|| \leq ||A\phi - f||$$

για κάθε ϕ *που ικανοποιεί την* $||\phi|| \leq \rho$. *Το στοιχείο* ϕ_0 *καλείται quasi-λύση του* $A\phi = f$ *με περιορισμό το* ρ.

Απόδειξη. Παρατηρούμε οτι η ϕ_0 είναι quasi-λύσεις με περιορισμό ρ αν και μόνον αν είναι βέλτιστη προσέγγιση στην f, απο το σύνολο $V = \{A\phi : ||\phi|| \leq \rho\}$. Εφόσον ο A είναι γραμμικός, το V είναι κυρτό σύνολο, δηλαδή $\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2 \in V$ για κάθε $\phi_1, \phi_2 \in V$ και $0 \leq \lambda \leq 1$. Ας υποθέσουμε οτι υπήρχαν δύο βέλτιστες προσεγγίσεις στην f, δηλαδή οτι υπάρχουν $v_1, v_2 \in V$ τέτοια ώστε

$$||f - v_1|| = ||f - v_2|| = inf_{v \in V}||f - v||.$$

Τότε, εφόσον το V είναι κυρτό, $\frac{1}{2}(v_1 + v_2) \in V$ και άρα

$$\left|\left|f - \frac{v_1 + v_2}{2}\right|\right| \geq ||f - v_1||.$$

Απο την ισότητα των παραλληλογράμων έχουμε οτι

$$\begin{aligned} ||v_1 - v_2||^2 = 2||f - v_1||^2 + 2||f - v_2||^2 \\ -4\left|\left|f - \frac{v_1 + v_2}{2}\right|\right|^2 \\ \leq 0 \end{aligned}$$

επομένως $v_1 = v_2$. Οπότε αν υπήρχαν δύο quasi-λύσεις ϕ_1 και ϕ_2 τότε $A\phi_1 = A\phi_2$. Άλλα εφόσον ο A είναι 1-1, $\phi_1 = \phi_2$ δηλαδή η quasi-λύση είναι μοναδική αν υπάρχει. Για να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας quasi-λύσης, έστω $\{\phi_n\}$ ελαχιστοποιούσα ακολουθία, δηλαδή $||\phi_n|| \leq \rho$ και

$$lim_{n\to\infty}||A\phi_n - f|| = inf_{||\phi|| \leq \rho}||A\phi - f||. \tag{3.8}$$

Απο το θεώρημα 2.17 υπάρχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία της $\{\phi_n\}$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι $\phi_n \rightharpoonup \phi_0$ καθώς $n \to \infty$ για κάποιο $\phi_0 \in X$. Θα δείξουμε οτι $A\phi_n \to A\phi_0$ καθώς $n \to \infty$. Εφόσον για κάθε $\phi \in X$ έχουμε οτι

$$lim_{n\to\infty}(A\phi_n, \phi) = lim_{n\to\infty}(\phi_n, A^*\phi) = (\phi_0, A^*\phi) = (A\phi_0, \phi)$$

μπορούμε να συναγάγουμε οτι $A\phi_n \rightharpoonup A\phi_0$. Τώρα ας υποθέσουμε οτι η ακολουθία $A\phi_n$ δεν συγκλίνει στο $A\phi_0$. Τότε η $\{A\phi_n\}$ έχει μια υπακολουθία ώστε $||A\phi_{n(k)} - A\phi_0|| \geq \delta$ για κάποιο $\delta > 0$. Εφόσον $||\phi_n|| \leq \rho$ και A συμπαγής. η $\{A\phi_{n(k)}\}$ έχει μια συγλίνουσα υπακολουθία που θα ξανα-συμβολίσουμε με $\{A\phi_{n(k)}\}$. Άλλα ισχυρώς συγκλίνουσες ακολουθίες είναι και ασθενώς συγκλίνουσες και έχουν το ίδιο όριο, $A\phi_{n(k)} \to A\phi_0$ κάτι που είναι αντιφατικό. Άρα $A\phi_n \to A\phi_0$. Απο την (2.11) μπορούμε τώρα να συμπεράνουμε οτι

$$||A\phi_0 - f|| = inf_{||\phi|| \leq \rho}||A\phi - f||$$

και εφόσον $||\phi_0||^2 = lim_{n\to\infty}(\phi_n, \phi_0) \leq \rho||\phi_0||$ έχουμε οτι $||\phi_0|| \leq \rho$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Θεώρημα 3.4.10. *Έστω $A : X \to Y$ ένας 1-1 και συμπαγής τελεστής με πυκνή εικόνα και έστω $f \in A(X)$ και $\rho \geq ||A^{-1}f||$. Για $f^\delta \in Y$ με $||f^\delta - f|| \leq \delta$, έστω ϕ^δ μια quasi-λύση της $A\phi = f^\delta$ με περιορισμό ρ. Τότε $\phi^\delta \rightharpoonup A^{-1}f$ καθώς $\delta \to 0$ και αν $\rho = ||A^{-1}f||$ τότε $\phi^\delta \to A^{-1}f$ καθώς $\delta \to 0$.*

Απόδειξη. Έστω $g \in Y$. Τότε εφόσον $||A^{-1}f|| \leq \rho$ και $||A\phi^\delta - f^\delta|| \leq ||A\phi - f^\delta||$ για $f = A\phi$ έχουμε οτι

$$\begin{aligned} |(A\phi^\delta - f, g)| &\leq (||A\phi^\delta - f^\delta|| + ||f^\delta - f||)||g|| \\ &\leq (||AA^{-1}f - f^\delta|| + ||f^\delta - f||)||g|| \\ &\leq 2\delta||g||. \end{aligned}$$

Άρα $(A\phi^\delta - f, g) = (\phi^\delta - A^{-1}f, A^*g) \to 0$ καθώς $\delta \to 0$ για κάθε $g \in Y$. Εφόσον ο A είναι 1-1, ο χώρος $A^*(Y)$ είναι πυκνός στον X και μπορούμε να συμπεράνουμε οτι $\phi^\delta \rightharpoonup A^{-1}f$ καθώς $\delta \to 0$. Όταν $\rho = ||A^{-1}f||$ έχουμε (χρησιμοποιώντας την $||\phi^\delta|| \leq \rho = ||A^{-1}f||$) οτι καθώς $\delta \to 0$.

$$||\phi^\delta - A^{-1}f||^2 = ||\phi^\delta||^2 - Re(\phi^\delta, A^{-1}f) + ||A^{-1}f||^2 \tag{3.9}$$

$$\leq 2Re(A^{-1}f - \phi^\delta, A^{-1}f \to 0 \tag{3.10}$$

□

Σημειώνουμε οτι για την κανονικοποίηση πρέπει να γνωρίζουμε εξαρχής την νόρμα της λύσης στο πρόβλημα με μη διαταραγμένα δεδομένα.

Θεώρημα 3.4.11. *Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.4.7, εαν $f \in AA^*(Y)$ και $\rho = ||A^{-1}f||$ τότε*

$$||\phi^\delta - A^{-1}f|| = \left(\delta^{\frac{1}{2}}\right), \ \delta \to 0.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε $A^{-1}f = A^*g$ για κάποιο $g \in Y$. Απο την 3.4.7 έχουμε οτι $||\phi^\delta - A^{-1}f||^2 \leq 2Re(f - A\phi^\delta, g) \leq 4\delta||g||$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Κεφάλαιο 4

Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης

Θα δείξουμε οτι το πρόβλημα σκέδασης για έναν ατελή αγωγό στον $\mathbb{R}^2$ είναι καλά τοποθετημένο. Απο εδώ και στο εξής θα θεωρούμε οτι το χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι φραγμένο, οτι περιέχει την αρχή των αξόνων και οτι το σύνορο ∂D είναι κλάσης C^2. Αποσκοπούμε στο να αποδείξουμε την ύπαρξη μοναδικής λύσης $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ για το εξωτερικό πρόβλημα εμπέδησης συνοριακών τιμών

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{4.1}$$

$$u(x) = e^{ikx\dot{d}} + u^s(x) \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = 0 \tag{4.3}$$

$$lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\big(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\big) = 0 \tag{4.4}$$

Θα δείξουμε επίσης οτι η λύση u εξαρτάται συνεχώς απο τα δεδομένα στο πεδίο συμβάντων u^s αν επιλέξουμε την κατάλληλη νόρμα. Ορίζουμε την θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz ως

$$\Phi(x,y) := \frac{i}{4}{H_0}^{(1)}(k|x-y|) \tag{4.5}$$

και σημειώνουμε οτι η $\Phi(x,y)$ ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld ως προς τις x και y ξεχωριστά, και καθώς $|x-y| \to 0$ και έχουμς οτι

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi} log \frac{1}{|x-y|} + O(1).$$

Θεώρημα 4.0.1. ***((Θεώρημα αναπαράστασης)*** *Έστω $u^s \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus D) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ μια λύση της εξίσωσης του Helmholtz έξω απο το D που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld . Τότε για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ έχουμε οτι*

$$u^s(x) = \int_{\partial D} \big(u^s(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\Phi(x,y) - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y)\big)\, ds(y).$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ και

$$\Omega_{x,\epsilon} := \{y : |x-y| < \epsilon\}$$

όπου $\Omega_{x,\epsilon} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$. Έστω Ω_R ένας δίσκος ακτίνας R με κέντρο το μηδέν που περιέχει το D και το $\Omega_{x,\epsilon}$ στο εσωτερικό του. Τότε απο το θεώρημα του Green έχουμε οτι

$$\int_{\partial D + \partial\Omega_{x,\epsilon} + \partial\Omega_R} \left(u^s(y) \frac{\partial}{\partial\nu(y)} \Phi(x,y) - \frac{\partial u^s}{\partial\nu}(y)\Phi(x,y) \right) ds(y) = 0.$$

Απο τον ορισμό της συνάρτησης του Helmholtz έχουμε οτι

$$\frac{d}{dr} {H_0}^{(1)}(r) = -{H_1}^{(1)}(r)$$

και άρα στο $\partial\Omega_{x,\epsilon}$ έχουμε οτι

$$\frac{\partial}{\partial\nu(y)} \Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x-y|} + O(|x-y| \; log|x-y|).$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις και αφήνωντας το $\epsilon \to 0$ έχουμε οτι

$$u^s(x) = \int_{\partial D} \left(u^s(y) \frac{\partial}{\partial\nu(y)} \Phi(x,y) - \frac{\partial u^s}{\partial\nu}(y)\Phi(x,y) \right) ds(y) \tag{4.6}$$

$$- \int_{|y|=R} \left(u^s(y) \frac{\partial}{\partial\nu(y)} \Phi(x,y) - \frac{\partial u^s}{\partial\nu}(y)\Phi(x,y) \right) ds(y) \tag{4.7}$$

όπου με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο στο σύνορο του εσωτερικού του χωρίου. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε οτι το δεύτερο ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν καθώς $R \to \infty$.
Θα δείξουμε πρώτα οτι

$$lim_{R\to\infty} \int_{|y|=R} |u^s|^2 \; ds = O(1).$$

Με αυτό το σκοπό, απο την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld έχουμε οτι

$$0 = lim_{R\to\infty} \int_{|y|=R} |\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s|^2 \; ds =$$

$$lim_{R\to\infty} \int_{|y|=R} \left(|\frac{\partial u^s}{\partial r}|^2 + k^2|u^s|^2 + 2kIm(u^s \frac{\partial \bar{u^s}}{\partial r}) \right) ds.$$

Απο το θεώρημα του Green εφαρμοζόμενο στο $D_R = \Omega_R \setminus \bar{D}$ παίρνουμε οτι

$$\int_{|y|=R} u^s \frac{\partial \bar{u^s}}{\partial r} ds = \int_{\partial D} u^s \frac{\partial \bar{u^s}}{\partial\nu \; ds} - k^2 \int_{D_R} |u^s|^2 \; dy + \int_{D_R} |grad \; u^s|^2 \; dy$$

και άρα απο την παραπάνω σχέση έχουμε οτι

$$lim_{R\to\infty} \int_{|y|=R} \left(|\frac{\partial u^s}{\partial r}|^2 + k^2|u^s|^2 \right) ds = -2kIm \int_{\partial D} u^s \frac{\partial \bar{u^s}}{\partial \nu} ds \tag{4.8}$$

και επομένως συναγάγουμε οτι η αποδεικτέα είναι αληθής.
Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, σημειώνουμε οτι

$$\begin{aligned}\int_{|y|=R} \big(u^s(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\Phi(x,y) - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y)\big)\, ds(y) = \\ = \int_{|y|=R} u^s(y)\big(\frac{\partial}{\partial |y|}\Phi(x,y) - ik\Phi(x,y)\big)\, ds(y) \\ - \int_{|y|=R} \Phi(x,y)\big(\frac{\partial u^s}{\partial |y|}(y) - iku^s(y)\big)\, ds(y).\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy- Schwarz σε καθένα απο τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της ισότητας, και χρησιμοποιώντας την αποδειχθείσα, και οτι $\Phi(x,y) = O(\frac{1}{\sqrt{R}})$ και επίσης οτι οι Φ και u^s ικανοποιούν την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld έχουμε οτι

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|y|=R} \left(u^s(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\Phi(x,y) - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y)\right) ds(y) = 0$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Έστω D ένα φραγμένο χωρίο, με σύνορο ∂D κλάσης C^2 και $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ μια λύση της εξίσωσης του Helmholtz μέσα στο D. Τότε επαναλαμβάνοντας κάποιες απο τις τεχνικές που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, μπορεί να αποδειχθεί για $x \in D$ έχουμε την εξίσωση αναπαράστασης

$$u(x) = \int_{\partial D} \big(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\Phi(x,y)\Big)\, ds(y).$$

Συνεπώς, εφόσον η $\Phi(x,y)$ είναι μια πραγματική-αναλυτική συνάρτηση των x_1 και x_2 όπου $x = (x_1, x_2)$ και $x \neq y$, έχουμε οτι η u είναι πραγματική-αναλυτική στο D.α Αυτό αποδεικνύει το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 4.0.2. *Οι λύσεις τις εξίσωσης Helmholtz είναι πραγματικές και αναλυτικές συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών τους.*

Απο το θεώρημα ταυτότητας για πραγματικές, αναλυτικές συναρτήσεις και το παραπάνω θεώρημα συνεπάγεται οτι οι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz ικανοποιούν την εξής αρχή: εάν u είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz σε ένα χωρίο D και $u(x) = 0$ για κάθε x σε μια περιοχή ενός σημείου $x_0 \in D$ τότε $u(x) = 0$ για κάθε $x \in D$.
Αφού προηγήθηκαν τα παράπανω, είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε οτι αν υπάρχει λύση στο πρόβλημα σκέδασης, τότε είναι μοναδική.

Θεώρημα 4.0.3. *Έστω $u^s \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ μια λύση της εξίσωσης Helmholtz στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και την συνοριακή συνθήκη $\frac{\partial u^s}{\partial \nu} + i\lambda u^s = 0$ στο ∂D. Τότε $u^s = 0$.*

Απόδειξη. Έστω Ω ένας δίσκος με κέντρο την αρχη των αξόνων που περιέχει το D στο εσωτερικό του. Τότε απο την δεύτερη ταυτότητα του Green και το γεγονός οτι τα R και λ είναι πραγματικά και άρα

$$\frac{\partial u^s}{\partial \nu} + i\lambda u^s = \frac{\partial \bar{u^s}}{\partial \nu} - i\lambda \bar{u^s} = 0 \text{ στο } \partial D$$

έχουμε οτι

$$\int_{\partial\Omega} \big(\bar{u^s}\frac{\partial u^s}{\partial r} - u^s\frac{\partial \bar{u^s}}{\partial r}\big)\ ds = \int_{\partial D} \big(\bar{u^s}\frac{\partial u^s}{\partial \nu} - u^s\frac{\partial \bar{u^s}}{\partial \nu}\big)\ ds \tag{4.9}$$

$$= -2i\int_{\partial D} \lambda |u^s|^2\ ds. \tag{4.10}$$

Αλλά, εφόσον απο το θεώρημα 3.2 $u^s \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus D)$, έχουμε οτι για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega u^s$ μπορεί να επεκταθεί με σειρα Fourier

$$u^s(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n(r) e^{in\theta}$$

$$\alpha_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^s(r,\theta) e^{-in\theta}\ d\theta$$

όπου η σειρά και όλες τις οι παράγωγοι ως προς r συγκλίνουν απολύτως και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Συγκεκριμένα μπορεί να επαληθευτεί οτι το $\alpha_n(r)$ είναι λύση της εξίσωσης του Bessel , εφόσον η u^s ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld

$$\alpha_n(r) = \alpha_n\ {H_n}^{(1)}(kr) \tag{4.11}$$

όπου τα α_n είναι σταθερές. Αντικαθιστώντας στην (4.10) και ολοκληρωντας κατ΄ ορο, συναγάγουμε απο το $\overline{{H_n}^{(1)}(kr)} = {H_n}^{(2)}(kr)$ οτι

$$8i\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 = -2i\int_{\partial D} \lambda |u^s|^2\ ds.$$

Εφόσον $\lambda > 0$, μπορούμε τώρα να συναγάγουμε οτι $\alpha_n = 0$ για κάθε ακέραιο και επομένως $u^s(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Απο το θεώρημα ταυτότητας για πραγματικες και αναλυτικές συναρτήσεις, μπορούμε τώρα να συναγάγουμε οτι $u^s(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$. □

Το επόμενο θεώρημα είναι ένα κλασσικό αποτέλεσμα που αποδείχθηκε απο τον Rellich .

Θεώρημα 4.0.4. *Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ μια λύση της εξίσωσης του Helmholtz που ικανοποιεί την*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|y|=R} |u|^2 \ ds = 0.$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$.

Απόδειξη. Έστω Ω ένας δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων που περιέχει το D στο εσωτερικό του. Τότε, απο προηγούμνο θεώρημα, έχουμε οτι για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$

$$u(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n(r) e^{in\theta}$$

$$\alpha_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r,\theta) e^{-in\theta} \ d\theta$$

και το $\alpha_n(r)$ είναι λύση της εξίσωσης του Bessel δηλαδή

$$\alpha_n(r) = \alpha_n {H_n}^{(1)}(kr) + \beta_n {H_n}^{(2)}(kr)$$

όπου τα α_n και β_n είναι σταθερές. Απο την ανισότητα του Parseval έχουμε οτι

$$\int_{|y|=R} |u|^2 \ ds = 2\pi R \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n(R)|^2$$

προκύπτει απο την υπόθεση του θεωρήματος λοιπόν οτι

$$\lim_{R\to\infty} R|\alpha_n(R)|^2 = 0. \tag{4.12}$$

Απο την $\alpha_n(r)$ ασυμπτωτική επέκταση του ${H_n}^{(1)}(kr)$ και το γεγονός οτι $\overline{{H_n}^{(1)}(kr)} = {H_n}^{(2)}(kr)$ προκύπτει $\alpha_n = \beta_n = 0$ για κάθε n και άρα $u = 0$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Απο το θεώρημα 3.2 και το θεώρημα ταυτότητας για πραγματικές λαι αναλυτικές συναρτήσεις, μπορούμε να συναγαγουμε οτι $u(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. □

Θεώρημα 4.0.5. *Έστω $u^s \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ μια λύση της εξίσωσης Helmholtz τέτοια ώστε*

$$Im \int_{\partial D} u^s \frac{\partial \bar{u^s}}{\partial \nu} ds \geq 0.$$

Τότε $u^s = 0$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$.

Απόδειξη. Το θεώρημα είναι απόρροια της (4.0.4) και του θεωρήματος του Rellich. □

Θα επιδιώξουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα σκέδασης. Να σημειώσουμε οτι η

$$u^s(x) = \int_{\partial D} \phi(y)\Phi(x,y)\ ds(y),\ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \tag{4.13}$$

με συνεχή πυκνότητα ϕ ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, είναι μια λύση της εξίσωσης του Helmholtz στο $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$, είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^2$. Η (3.47) θα αποτελεί λύση στο πρόβλημα σκέδασης εαν

$$\phi(x) - 2\int_{\partial D} \phi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(x)}\Phi(x,y)\ ds(y) - 2i\lambda(x)\int_{\partial D} \phi(y)\Phi(x,y)\ ds(y) = \tag{4.14}$$

$$2\big[\frac{\partial u^i}{\partial \nu}(x) + i\lambda(x)u^i(x)\big],\quad x \in \partial D \tag{4.15}$$

όπου $u^i(x) = e^{ikx\dot{d}}$. Είναι προφανές οτι αρκεί να αποδείξουμε ύπαρξη λύσης για την προηγούμενη εξίσωση στον χώρο με νόρμα $C(\partial D)$ για να αποφανθούμε για την ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα της σκέδασης.
Σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε οτι η ολοκληρωτικοί τελεστές που εμφανίζονται είναι συμπαγείς. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί αν προσεγγίσουμε καθέναν απο τους πυρήνες $K(x,y)$ με

$$K_n(x,y) := \begin{cases} h(n|x-y|)K(x,y), & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

όπου

$$h(t) = \begin{cases} 0,\ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 2t-1,\ \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 1,\ 1 \le t < \infty \end{cases}$$

και χρησιμοποιώντας το θεώρημα 1.17 και το γεγονός οτι οι ολοκληρωτιοί τελεστές με συνεχείς πυρήνες, είναι συμπαγείς τελεστές στον $C(\partial D)$ Οπότε, απο το θεώρημα του Riesz, αρκεί να δείξουμε οτι η ομογενής εξίσωση έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Δυστυχώς γενικά δεν επαληθέυεται κάτι τέτοιο. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω k^2 μια ιδιοτιμή του προβλήματος Dirichlet , δηλαδή υπάρχει μια $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, u όχι ταυτοτικά μηδέν, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 \text{ στο } D \\ u &= 0 \ \text{ στο } \partial D. \end{aligned}$$

Μπορούμε να δείξουμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα αναπαράστασης οτι η $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ δεν είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν, εφόσον αν ήταν, τότε θα ήταν και u, κάτι που αποκλείεται απο την υπόθεση. Επίσης ισχύει οτι $u \in C^1(\bar{D})$. Επομένως για $\phi := \frac{\partial u}{\partial \nu}$ έχουμε

$$\int_{\partial D} \phi(y)\Phi(x,y)\ ds(y) = 0,\quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{4.16}$$

και απο την συνέχεια, για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Άρα

$$\phi(x) - 2\int_{\partial D} \phi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \Phi(x,y)\ ds(y) = 0, \quad x \in \partial D. \tag{4.17}$$

οι δύο προηγούμενες εξισώσεις συνεπάγονται οτι η ϕ είναι μη-τετριμμένη λύση στην ομογενή λύση που αντιστοιχεί στην (3.48). Άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Riesz για να αποδείξουμε ύπαρξή λύσης στο πρόβλημα (3.48). Θα τροποποιήσουμε τον πυρήνα της αναπαράστασης (3.47) έτσι ώστε η ολοκληρωτική εξίσωση να έχει μοναδική λύση για κάθε κυματικό αριθμό k. Ξεκινάμε ορίζοντας την συνάρτηση $\chi = \chi(x,y)$ ως εξής

$$\chi(x,y) := \frac{i}{4} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n\ {H_n}^{(1)}(kr)\ {H_n}^{(1)}(kr_y)\ e^{in(\theta-\theta_y)} \tag{4.18}$$

όπου το x έχει πολικές συντεταγμένες (r_y, θ_y) και οι συντελεστές α_n επιλέγονται ώστε η σειρά να συγκλίνει για $|x|, |y| > R$ όπου $\Omega_R := \{x : |x| \leq R\} \subset D$. Αυτο μπορεί να γίνει απο τις (3.15), (3.16), (3.18) και το

$$H_{-n}{}^{(1)}(kr) = (-1)^n\ {H_n}^{(1)}(kr)$$

για $n = 0, 1, 2, 3...$ Αυτές οι εξισώσεις συνεπάγονται την

$$|{H_n}^{(1)}(kr)| = O\left(\frac{2^{|n|}(|n|-1)!}{(kr)^{|n|}}\right)$$

για $n = ... - 1, 0, 1, ..$ και r σε συμπαγή υποσύνολα του $(0, \infty)$. Ορίζοντας

$$\Gamma(x,y) := \Phi(x,y) + \chi(x,y),$$

σημειώνουμε οτι η τροποποιημένο δυναμικο απλού στρώματος

$$u^s(x) := \int_{\partial D} \phi(y)\ \Gamma(x,y)\ ds(y) \tag{4.19}$$

για συνεχή πυκνότητα ϕ και $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\partial D \cap \Omega_R)$ ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld, κκαι είναι λύση της εξίσωσης του Helmholtz στο $\mathbb{R}^2 \setminus (\partial D \cap \Omega_R)$ και ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες ασυνέχειας, όπως το μονοστρωματικό δυναμικό 4.13. Άρα η u^s θα λύνει το ευθύ πρόβλημα σκέδασης, αν η ϕ ικανοποιεί την 4.15 αν αντικαταστήσουμε την Φ με την Γ. Απο το θεώρημα του Riesz μια λύση σε αυτή την εξίσωση υπάρχει εαν το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

Ας υποθέσουμε οτι η ϕ είναι μια λύση του ομογενούς προβλήματος. Τότε η 4.19 θα είναι μια λύση του ευθέως προβλήματος σκέδασης με το $e^{ikx\dot{d}}$ να έχει τεθεί ίσο με το μηδέν και άρα απο μοναδικότητα της λύσης, έχουμε οτι αν η u^s ορίζεται απο την (4.19) τότε $u^s(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$. Απο την συνέχεια της 4.19 επι της ∂D, η u^s είναι λύση της εξίσωσης του Helmholtz στο $D \setminus \Omega_R$, $u^s \in C^2(D \setminus \Omega_R) \cap C(D \setminus \Omega_R)$

και $u^s(x) = 0$ για $x \in \partial D$. Απο προηγούμενες προτάσεις μπορούμε να συναγάγουμε οτι υπάρχουν σταθερές α_n τέτοιες ώστε για $R_1 \le |x| \le R_2$ όπου $R < R_1 < R_2$ και $\{x : |x| < R_2\} \subset D$ μπορούμε να αναπαραστήσουμε την u^s στην μορφή

$$u^s(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \big\{ J_n(kr) + \alpha_n H_n(kr) \big\} e^{in\theta}.$$

εφόσον

$$u_+{}^s(x) := \lim_{x \to \partial D,\ x \in D} u^s(x)$$
$$\frac{\partial u_+{}^s}{\partial \nu}(x) := \lim_{x \to \partial D,\ x \in D} \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(x)$$

υπάρχουν και είναι συνεχείς, μπορούμε να εφαρμόσουμε την δεύτερη ταυτότητα του Green στο u^s και στο $\bar{u^s}$ επι του συνόλου $D \setminus \{x : |x| \le R_1\}$. Οπότε

$$0 = \int_{\partial D} \left(u_+{}^s \frac{\partial \bar{u^s}_+}{\partial \nu} - \bar{u^s}_+ \frac{\partial u_+{}^s}{\partial \nu} \right) ds = \int_{|x| = R_1} \left(u^s \frac{\partial \bar{u^s}}{\partial \nu} - \bar{u^s} \frac{\partial u^s}{\partial \nu} \right) ds$$
$$= 2i \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \big(1 - |1 + 2\alpha_n|^2 \big).$$

Άρα, εαν είτε $|1 + 2\alpha_n| < 1$ είτε $|1 + 2\alpha_n| > 1$ για $n = .. - 2, -1, 0, 1, 2..$ τότε $\alpha_n = 0$ για $n = .. - 2, -1, 0, 1, 2..$ δηλαδή $u^s(x) = 0$ για $R_1 \le |x| \le R_2$. Απο το θεώρημα 3.2 και το θεώρημα ταυτότητας για πραγματικές αναλυτικές συνάρτησεις, μπορούμε να συναγάγουμε οτι $u^s(x) = 0$ για $x \in D \backslash \Omega_R$. Όμως $u^s(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R}^2 \backslash D$, μπορούμε τώρα να δούμε οτι απο ιδιότητα ασυνέχειας του μονοστρωματικού δυναμικού οτι

$$0 = \frac{\partial u^s{}_-}{\partial \nu} - \frac{\partial u^s{}_+}{\partial \nu}(x) = \phi(x),$$

δηλαδή η ομογενής εξίσωση υπο μελέτη έχει μόνο την τετριμμένη λύση $\phi = 0$. Επομένως, απο το θεώρημα του Riesz, η αντίστοιχη μη-ομογενής εξίσωση έχει μοναδική λύση η οποία εξαρτλαται συνεχώς στο δεξί μέλος.

Θεώρημα 4.0.6. *Υπάρχει μοναδική λύση στο πρόβλημα σκέδασης, που εξαρτάται συνεχώς απο το $u^i(x) = e^{ikx\dot{d}}$ στο $C^1(\partial D)$.*

Είναι σημαντικό να βρούμε λύση στο πρόβλημα σκέδασης σε έναν χώρο μεγαλύτερο απο τον $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$. Ορίζουμε λοιπόν $\Omega_R = \{x : |x| < R\}$ και ορίζουμε τους χώρους Sobolev

$$H^1{}_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) := \{u : u \in H^1\big((\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap \Omega_R\big) \text{ για κάθε } R > 0 \text{τέτοιο ώστε } (\mathbb{R}^2 \setminus D) \cap \Omega_R \neq \emptyset\}$$
$$H^1{}_{com}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) := \{u : u \in H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}), u \text{ είναι ταυτοτικά μηδέν έξω απο κάποια μπάλα με κέντρο το } 0\}.$$

Να υπενθυμίσουμε σε αυτό το σημείο οτι ο $H^{-p}(\partial D), 0 \le p < \infty$, είναι ο δυικός χώρος του $H^p(\partial D)$. Τότε, για $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$, μια ασθενής λύση του

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ στο} \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{4.20}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0 \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + i\lambda u = f \text{ στο } \partial D \tag{4.22}$$

ορίζεται να είναι μια συνάρτηση $u \in H^1{}_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ τέτοια ώστε

$$-\int_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}} (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv)\ dx + i\int_{\partial D} \lambda uv\ ds = \int_{\partial D} fv\ ds$$

για κάθε $v \in H^1{}_{com}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ τέτοια ώστε η u να ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld.

Θεώρημα 4.0.7. *Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης έχει μοναδική ασθενή λύση, και η απεικόνιση που αντιστοιχεί τα συνοριακά δεδομένα $f \in H^{\frac{-1}{2}}(\partial D)$ στην λύση του προβλήματος $u \in H^1((\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \setminus \Omega_R)$ είναι φραγμένη για κάθε R τέτοιο ώστε $(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap \Omega_R \neq \emptyset$.*

Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε ασθενή λύση της εξίσωσης Helmholtz σε φραγμένο χωρίο να είναι μια συνάρτηση $u \in H^1(D)$ τέτοια ώστε

$$\int_D (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv)\ dx = 0$$

για κάθε $v \in H^1(D)$ τέτοιο ώστε $v = 0$ στο ∂D με την έννοια του θεωρήματος του ίχνους.

Θεώρημα 4.0.8. *Έστω D ένα φραγμένο χωρίο με C^2 σύνορο ∂D τέτοιο ώστε το k^2 να μην είναι μια ιδιοτιμή Dirichlet για το D. Τότε για κάθε $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ υπάρχει μοναδική ασθενής λύση $u \in H^1(D)$ της εξίσωσης Helmholtz στο D τέτοια ώστε $u = f$ στο ∂D με την έννοια του θεωρήματος του ίχνους. Επιπλέον η απεικόνιση που αντιστοιχεί την f στην u είναι φραγμένη.*

Θεώρημα 4.0.9. *Έστω $u \in H^1(D)$ και $\Delta u \in L^2(D)$ σε ένα φραγμένο χωρίο D με C^2 σύνορο ∂D με μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα ν. Τότε υπάρχει μια θετική σταθερά C ανεξάρτητη απο το u τέτοια ώστε*

$$||\frac{\partial u}{\partial \nu}||_{H^{-1/2}(\partial D)} \le C||u||_{H^1(D)}.$$

Κεφάλαιο 5

Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης

5.1 Το μακρινό πεδίο

Το σκεδασμένο πεδίο έχει την ασυμπτωτική μορφή

$$u^s(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} u_\infty(\theta, \phi) + O(r^{-3/2})$$

5.2 Μοναδικότητα της λύσης

Θα αποδείξουμε σε αυτή την ενότητα οτι το D προσδιορίζεται μονοσήμαντα απο τα $u_\infty(\theta, \phi)$ για θ και ϕ μέσα στο $[0, 2\pi]$ χωρίς να γνωρίζουμε το λ εκ των προτέρων.

Λήμμα 5.2.1. *Έστω k^2 μια τιμή που δεν αποτελεί ιδιοτιμή Dirichlet για το φραγμένο χωρίο B με C^2 σύνορο ∂B και οτι το $\mathbb{R}^2 \setminus B$ είναι συνεκτικό. Έστω επίσης $u^i(x, d) = e^{ikx\cdot d}$. Τότε ο περιορισμός του $\{u^i(\cdot, d) : |d| = 1\}$ επι του συνόρου ∂B είναι πλήρης στον $H^{1/2}(\partial B)$, δηλαδή*

$$\overline{span\{u^i(\cdot, d)|_{\partial B} : |d| = 1\}} = H^{1/2}(\partial B).$$

Απόδειξη. Έστω $\phi \in H^{-1/2}(\partial B)$ που ικανοποιεί την

$$\int_{\partial B} \phi(y) e^{-iky\cdot d} \; ds(y) = 0 \tag{5.1}$$

για κάθε d τέτοιο ώστε $|d| = 1$. Απο την δυικότητα αρκεί να δείξουμε οτι $\phi = 0$. Με αυτό τον σκοπό, επισημαίνουμε οτι η προηγούμενη εξίσωση συνεπάγεται την

$$u(x) := \int_{\partial B} \phi(y) \Phi(x, y) \; ds(y) \; , \; x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial B$$

έχει μηδενικό μακρινό πεδίο $u_\infty = 0$. Οπότε απο το λήμμα του Rellich, $u(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B$. Μπορεί κανείς να δείξει εύκολα οτι $\phi \in C(\partial B)$ και εφόσον στην περίπτωση αυτή το μονοστρωματικό δυναμικό είναι συνεχές επι του συνόρου ∂B, η u λύνει την ομογενή εξίσωση του Dirichlet στο B. Έτσι, εφόσον το k^2 δεν είναι ιδιοτιμή Dirichlet για το B, $u(x) = 0$ για $x \in B$. Απο την ιδιότητα ασυνέχειας της κατευθυνόμενης παραγώγου στη διεύθυνση του ν του μονοστρωματικού δυναμικού, μπορούμε τώρα να συναγάγουμε

$$0 = \frac{\partial u^-}{\partial \nu} - \frac{u^+}{\partial \nu} = \phi$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω D_1 και D_2 δύο εμπόδια σκέδασης με αντίστοιχους συντελεστές επιφανειακής εμπέδησης λ_1 και λ_2 τέτοια ώστε για έναν σταθεροποιημένο κυματικό αριθμό τα μοτίβα των μακρινών πεδίων για τους δύο σκεδαστές ταυτίζονται για όλες της διευθύνσεις d. Τότε $D_1 = D_2$.*

Απόδειξη. Απο το λήμμα του Rellich μπορούμε να συναγάγουμε οτι τα πεδία σκέδασης $u^s(\cdot, d)$ που αντιστοιχούν στα πεδία $u^i(x, d) = e^{ikz\cdot d}$ ταυτίζονται με την μη-φραγμένη συνιστώσα του συμπληρώματος του $D_1 \hat{D}_2$. Επιλέγουμε $x_0 \in G$ και θεωρούμε τα δύο εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών

$$\Delta {w^s}_j + k^2 {w^s}_j = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}_j \tag{5.2}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial {w^s}_j}{\partial r} - ik{w^s}_j\right) = 0 \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\big[{w^s}_j + \Phi(\cdot, x_0)\big] + i\lambda_j\big[{w^s}_j + \Phi(\cdot, x_0)\big] = 0 \text{ στο } \partial D_j \tag{5.4}$$

για $j = 1, 2$. Θα δείξουμε πρώτα οτι ${w^s}_1(x) = {w^s}_2(x)$ για $x \in G$. Επιλέγουμε ένα φραγμένο χωρίο B έτσι ώστε το $\mathbb{R}^2 \setminus B$ είναι συνεκτικό, $D_1 \cup \bar{D_2} \subset B,\ x_0 \notin B$ και k^2 δεν είναι ιδιοτιμή Dirichlet για το B. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $\{v_n\}$ στο $span\{u^i(\cdot, d) : |d| = 1\}$ τέτοια ώστε

$$||v_n - \Phi(\cdot, x_0)||_{H^{1/2}(\partial B)}|| \to 0,\ n \to \infty.$$

Απο το θεώρημα 3.9 μπορούμε να συναγάγουμε οτι $v_n \to \Phi(\cdot, x_0)$ και $grad v_n \to grad\ \Phi(\cdot, x_0)$ καθώς $n \to \infty$ ομοιόμορφα στο $D_1 \cup \bar{D_2}$.Εφόσον τα v_n είναι γραμμικοί συνδυασμοί επιπέδων κυμάτων, τα αντίστοιχα σκεδασμένα πεδία ${v^s}_{n,1}$ και ${v^s}_{n,2}$ για D_1 και D_2 αντίστοιχα συμπίπτουν στο G. Όμως απο το θεώρημα 3.7 έχουμε οτι ${u^s}_{n,j} \to {w^s}_j$ καθώς $n \to \infty$ ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^2 \setminus D_j$ για $j = 1, 2$ επομένως ${w^s}_1(x) = {w^s}_2(x)$ για $x \in G$.
Έστω $D_1 \neq D_2$. Τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητος, υπάρχει $x^* \in \partial G$ έτσι ώστε $x^* \in \partial D_1$ και $x^* \notin D_2$. Μπορούμε να επιλέξουμε $h > 0$ τέτοιο ώστε

$$x_n := x^* + \frac{h}{n}\nu(x^*),\ n = 1, 2..$$

περιέχεται στο G και θεωρούμε τις λύσεις $w^s_{n,j}$ στο πρόβλημα σκέδασης όπου έχουμε αντικαταστήσει το x_0 με το x_n. Τότε $w^s_{n,1}(x) = w^s_{n,2}(x)$ για $x \in G$. Άλλα θεωρώντας το $w^s_n = {w^s}_{n,2}$ ως το πεδίο σκέδασης που αντισοιχεί στο D_2, βλέπουμε οτι

$$\frac{\partial {w^s}_n}{\partial \nu}(x^*) + i\lambda_1(x^*) w^s_n(x^*) \tag{5.5}$$

παραμένει φραγμένο καθώς $n \to \infty$. Απο την άλλη, αν θεωρήσουμε το ${w^s}_n = {w^s}_{n,1}$ ως το πεδίο σκέδασης που αντιστοιχεί στο D_1, έχουμε οτι

$$\frac{\partial {w^s}_n}{\partial \nu}(x^*) + i\lambda_1(x^*) {w^s}_n(x^*) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x^*, x_n) + i\lambda_1(x^*)\Phi(x^*, x_0)\right)$$

επομένως η 4.16 γίνεται μη-φραγμένη καθώς $n \to \infty$. Όμως αυτό είναι αντιφατικό συνεπώς $D_1 = D_2$. □

Τώρα σκοπός μας είναι να αποδείξουμε οτι το μοτίβο του μακρινού πεδίου u_∞ καθορίζει μονοσήμαντα οχι μόνο το D άλλα και το συντελεστή επιφανειακής εμπέδησης $\lambda = \lambda(x)$. Θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 5.2.3. *Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα χωρίο που χωρίζεται σε δύο ξένα μεταξύ τους μικρότερα χωρία D_1 και D_2 με κοινό σύνορο $\Gamma = \partial D_1 \cap \partial D_2$. Υποθέτουμε οτι το σύνορο ∂D είναι κλάσης C^2. Επίσης υποθέτουμε οτι η $u_j \in C^2(D_j) \cap C^1(D_j)$ ικανοποιεί την*

$$\Delta u_j + k^2 u_j = 0 \text{ στο } D_j$$

και $u_1 = u_2$ στο Γ και $\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}$ στο Γ όπου ν είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο Γ αν το θεωρήσουμε ως κομμάτι του ∂D_1. Τότε η συνάρτηση

$$u(x) := \begin{cases} u_1(x), & x \in \bar{D}_1 \\ u_2(x), & x \in \bar{D}_2 \end{cases}$$

είναι μια λύση της εξίσωσης Helmholtz στο $D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ενα $x_0 \in \Gamma \cap D$ και έστω $\Omega := \{x : |x - x_0| < \epsilon\} \subset D$. Έστω $\Omega_j := \Omega \cap D_j$ και έστω $x \in \Omega_1$. Τότε απο το θεώρημα αναπαράστασης έχουμε οτι

$$u_1(x) = \int_{\partial \Omega_1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - u_1(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\Phi(x,y)\right] ds(y)$$

για $x \in \Omega_1$. Απο την άλλη,

$$0 = \int_{\partial \Omega_2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - u_2(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\Phi(x,y)\right] ds(y)$$

για $x \in \Omega_1$. Τώρα αν αθροίσουμε αυτές τις δύο εξισώσεις, και αφού παρατηρήσουμε οτι οι δύο όροι επι του συνόλου $\Gamma \cap \Omega$ αλληλοαναιρούνται

$$u_1(x) = \int_{\partial \Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\Phi(x,y)\ ds(y)\right.$$

για $x \in \Omega_1$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε

$$u_2(x) = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\Phi(x,y) \right] ds(y)$$

για $x \in \Omega_2$. Τώρα σημειώνουμε οτι τα δεξιά μέλη συμπίπτουν και ορίζουν λύση της εξίσωσης του Helmholtz στο Ω. $\square$

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω D_1 και D_2 δύο εμπόδια σκέδασης με αντίστοιχους συντελεστές επιφανειακής εμπέδησης λ_1 και λ_2 έτσι ώστε για έναν δεδομένο σταθερό κυματικό αριθμό τα μοτίβα των μακρινών πεδίων να ταυτίζονται για όλες τις διευθύνσεις d. Τότε $D_1 = D_2$ και $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Απόδειξη. Απο το θεώρημα 4.5 έχουμε οτι $D_1 = D_2$. Επομέμως αυτο που πρέπει να δείξουμε είναι οτι $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$ για $x \in \partial D$ όπου $D = D_1 = D_2$. Έστω u_1 και u_2 λύσεις του προβλήματος για $\lambda = \lambda_1$ και $\lambda = \lambda_2$ αντίστοιχα. Τότε απο το λήμμα του Rellich, $u_1(x) = u_2(x)$ για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ επομένως $u_1 = u_2$ και $\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}$ στο ∂D. Απο τις συνοριακές συνθήκες

$$\frac{\partial u_j}{\partial \nu} + i\lambda_j u_j = 0 \text{ στο } \partial D$$

για $j = 1, 2$ έχουμε

$$(\lambda_1 - \lambda_2)u_1 = 0 \text{ στο } \partial D.$$

Ας υποθέσουμε οτι $u_1 = 0$ σε ένα κομμάτι $\Gamma \subset \partial D$. Τότε βέβαια $\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0$ στο Γ και απο το Λήμμα 4.6 έχουμε

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) \ , x \in \mathbb{R}^2 \setminus D \\ 0 \ , x \in D \end{cases}$$

ορίζει μια λύση της εξίσωσης του Helmholtz στο $(\mathbb{R}^2 \setminus D) \cup \Gamma \cup D$. Γνωρίζουμε οτι οι λύσεις της εξίσωσης του Helmholtz είναι πραγματικές και αναλυτικές, άρα μπορούμε να συναγάγουμε οτι $u_1(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$. Αλλά

$$u_1(x) = e^{ikx \cdot d} + {u^s}_1(x)$$

φ και η ${u^s}_1$ ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld αλλά η συνάρτηση $e^{ikx \cdot d}$ δεν την ικανοποιεί. Αυτό είναι αντιφατικό επομένως η u_1 δεν μηδενίζεται σε κανένα κομμάτι $\Gamma \subset \partial D$. Άρα εαν $x \in \partial D$ υπάρχει μια ακολουθία $\{x_n\} \subset \partial D$ τέτοια ώστε $x_n \to x$ καθώς $n \to \infty$ και $u_1(x_n) \neq 0$ για κάθε n. Απο την 4.20 έχουμε οτι $\lambda_1(x_n) = \lambda_2(x_n)$ για κάθε n και εφόσον τα λ_1 και λ_2 είναι συνεχής συναρτήσεις, συμπεραίνουμε οτι $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$. Το $x \in \partial D$ ήταν αυθαίρετο σημείο, άρα το θεώρημα αποδείχθηκε.

$\square$

Βιβλιογραφία

1. Evans L., *Partial Differential Equations.* 2nd ed., AMS, 2010.

2. Angell T, Kirsch A (2004) Optimization Methods in Electromagnetic Radiation.

Springer Verlag, New York. 3. Apostol T (1974) Mathematical Analysis, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

4. Colton D (2004) Partial Differential Equations: An Introduction. Dover Publications, New York

5. Colton D, Kress R (1998) Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, 2nd ed. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

6. Friedman A (1969) Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston, New York.

7. Ghosh Roy DN, Couchman LS (2002) Inverse Problems and Inverse Scattering of Plane Waves. Academic Press, London.

8. Gilbarg D, Trudinger NS (1983) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed. Springer Verlag, Berlin.

9. Isakov V (1998) Inverse Problems for Partial Differential Equations. Springer Verlag, New York.

10. John F (1982) Partial Differential Equations, 4th ed. Springer Verlag, New York.

11. Jones DS (1974) Integral equations for the exterior acoustic problem. Quart. Jour. Mech. Applied Math. 27:129–142.

12. Kirsch A (1996) An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Springer Verlag, New York.

13. Kress R (1999) Linear Integral Equations, 2nd ed. Springer Verlag, New York.

14. Kress R, Lee KM (2003) Integral equation methods for scattering from an impedance crack. J. Comp. Appl. Math. 161:161–177.

15. Kress R, Rundell W (2001) Inverse scattering for shape and impedance. Inverse Problems 17:1075–1085.

16. Kress R, Serranho P (2005) A hybrid method for two-dimensional crack reconstruction. Inverse Problems 21:773–784.

17. Kreyszig E (1978) Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley, New York.

18. Kusiak S, Sylvester J (2003) The scattering support. Comm. Pure Appl. Math. 56:1525–1548.

19. Kusiak S, Sylvester J (2005) The convex scattering support in a background medium. SIAM J. Math. Anal. 36:1142–1158.

20. Lebedev NN (1965) Special Functions and Their Applications. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

21. Lions J, Magenes E (1972) Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Springer Verlag, New York.

22. McLean W (2000) Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge University Press, Cambridge.

23. Monch L (1997) On the inverse acoustic scattering problem by an open arc: the sound-hard case. Inverse Problems 13:1379–1392

24. Monk P (2003) Finite Element Methods for Maxwell's Equations. Oxford University Press, Oxford.

25. Monk P (to appear) Inverse Electromagnetic Scattering. CBMS Series in Applied Mathematics, Philadelphia.

26. Morozov VA (1984) Methods for Solving Incorrectly Posed Problems. Springer Verlag, New York.

27. Pelekanos G, Sevroglou V (2003) Inverse scattering by penetrable objects in two-dimensional elastodynamics. Jour. Comp. Appl. Math. 151:129–140.

28. Piana M (1998) On uniqueness for anisotropic inhomogeneous inverse scattering problems. Inverse Problems 14:1565–1579.

29. Potthast R (1999) Electromagnetic scattering from an orthotropic medium. Jour. Integral Equations Appl. 11:197–215.

30. Potthast R (2000) Stability estimates and reconstructions in inverse acoustic scattering using singular sources. Jour. Comp. Appl. Math. 114:247–274.

31. Potthast R (2001) Point Sourse and Multipoles in Inverse Scattering Theory. Research Notes in Mathematics, Vol 427, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida.
32. Potthast R (2004) A new non-iterative singular sources method for the reconstruction of piecewise constant media.

33. Nintcheu Fata S, Guzina BB (2004) A linear sampling method for near-field inverse problems in elastodynamics. Inverse Problems 20:713–736

34. Riesz F (1918) Uber lineare Funktionalgleichungen. Acta Math. 41:71–98.

35. Rondi L (2003) Unique determination of non-smooth sound-soft scatteres by finitely many far field measurements. Indiana University Math Journal 52:1631–62.

36. Rynne BP, Sleeman BD (1991) The interior transmission problem and inverse scattering from inhomogeneous media. SIAM J. Math. Anal. 22:1755–1762.

37. Schechter M (2002) Principles of Functional Analysis, 2nd ed. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

38. Sevroglou V (2005) The far-field operator for penetrable and absorbing obstacles in 2D inverse elastic scattering. Inverse Problems 21:717–738.

39. Stefanov P, Uhlmann G (2004) Local uniqueness for the fixed energy fixed angle inverse problem in obstacle scattering. Proc. Amer. Math. Soc. 132:1351–54.

40. Stephan EP (1987) Boundary integral equations for screen problems in R3. Integral Equations Operator Theory 10:236–257.

41. Stephan EP, Wendland W (1984) An augmented Galerkin procedure for the boundary integral method applied to two-dimensional screen and crack problems. Appl. Anal. 18:183–219.