ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική εργασία με τίτλο:

«*Εισαγωγή στις άπειρες διαδικασίες και στη σύγκλιση ακολουθίας. Μετάβαση από τη διαίσθηση στον τυπικό ορισμό*».

ΒΑΣΙΛΕΙΑΔΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Α.Μ. Δ201512

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΘΕΟΔΟΣΙΟΣ ΖΑΧΑΡΙΑΔΗΣ

ΑΘΗΝΑ
Ιανουάριος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη

από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Θεοδόσιος Ζαχαριάδης (επιβλέπων)	Καθηγητής	……………
2) Δέσποινα Πόταρη	Καθηγήτρια	……………
3) Γεώργιος Ψυχάρης	Επ. Καθηγητής	…………..

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για την καθοριστική συμβολή του στην παρούσα ερευνητική εργασία. Οι στοχευμένες παρατηρήσεις του και η πολύτιμη καθοδήγησή του σε όλο το διάστημα της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας με επηρέασαν βαθιά και ανέδειξαν τη σημασία της συνεργασίας μας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια κ. Δέσποινα Πόταρη και τον επίκουρο Καθηγητή κ. Γεώργιο Ψυχάρη για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή επιτροπή και για τις παρατηρήσεις τους στο σύνολο της εργασίας.

Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω τους μαθητές που συμμετείχαν στην ερευνητική διαδικασία και επίσης τον συνάδελφο κ. Γεώργιο Καφετζόπουλο για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε τόσο κατά τις διδακτικές παρεμβάσεις όσο και για τα σχόλιά του κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής.

Επίσης ευχαριστώ τους φίλους και τις φίλες που με βοήθησαν με τα σχόλιά τους και συγκεκριμένα την φίλη και συνάδελφο κ. Κοραλία Τσαγκογέωργα για τη συντακτική και ορθογραφική επιμέλεια της διπλωματικής εργασίας.

Βασιλειάδης Ιωάννης , Ιανουάριος 2018

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η έννοια του ορίου είναι θεμελιώδης αλλά ταυτόχρονα και δύσκολα διαχειρίσιμη από τους μαθητές του λυκείου, οι οποίοι έρχονται αντιμέτωποι για πρώτη φορά σε επαφή με την έννοια στην περίπτωση συναρτήσεων με πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων στην Γ΄Λυκείου. Όπως προκύπτει από ερευνητικά δεδομένα, στο σύνολό τους οι καθηγητές των μαθηματικών συμφωνούν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του ορίου. Οι μαθητές προσεγγίζουν την έννοια με διαφορετικό τρόπο και τις περισσότερες φορές με ελάχιστη επιτυχία στο ζήτημα της κατανόησής της (Cottrill et all, 1996). Στην παρούσα εργασία καταθέτουμε μια διδακτική πρόταση για την διδασκαλία της έννοιας του ορίου σε σχολικό περιβάλλον. Συγκεκριμένα, η διδασκαλία απευθύνθηκε σε μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου και στόχος της ήταν να έρθουν σε επαφή οι μαθητές, με τις άπειρες διαδικασίες και την έννοια του ορίου στη διακριτή περίπτωση σύγκλισης ακολουθίας στο μηδέν, αξιοποιώντας τη διαίσθηση των μαθητών και φτάνοντας μέχρι τον τυπικό ορισμό του ορίου μέσω των συμβόλων.

Η δομή της παρούσας εργασίας σχεδιάστηκε έτσι ώστε ο αναγνώστης να αποκτήσει μια διαχρονική εικόνα των εννοιών του ορίου και των άπειρων διαδικασιών όπως αυτές διαμορφώθηκαν με το πέρασμα των αιώνων. Για το λόγο αυτό, πέραν της εισαγωγής, στο κεφάλαιο δύο (2) αναφερόμαστε σε ιστορικά στοιχεία και στη διαχρονική εξέλιξη των εννοιών αυτών. Στο κεφάλαιο τρία (3) αναδεικνύουμε τον ρόλο που διαδραματίζουν τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά εγχειρίδια στη διδασκαλία του ορίου και στο κεφάλαιο τέσσερα (4) επισημαίνουμε τα ευρήματα της διεθνούς έρευνας και βιβλιογραφίας που άπτονται της διδασκαλίας των μαθηματικών και ιδιαίτερα της έννοιας του ορίου. Τα επόμενα κεφάλαια αφιερώνονται στο τρόπο με τον οποίο σχεδιάστηκε και εκτελέστηκε η όλη διαδικασία καθώς επίσης και στα αποτελέσματα αυτής.

Η διαδικασία σχεδιάστηκε και έγινε σε δύο φάσεις· στη πρώτη φάση οι μαθητές βρέθηκαν αντιμέτωποι με το πρόβλημα υπολογισμού του εμβαδού του κύκλου μέσω ενός φύλλου εργασίας χρησιμοποιώντας και κατάλληλο λογισμικό, με σκοπό την ανάδειξη της αναγκαιότητας των άπειρων διαδικασιών και την εισαγωγή τους σε αυτές. Στη δεύτερη φάση, οι μαθητές ήρθαν αντιμέτωποι με το πρόβλημα της διχοτόμησης, δηλαδή του συνεχούς υποδιπλασιασμού της μονάδας, που αποσκοπούσε καταρχάς στη διαισθητική ανακάλυψη του ορίου και στη συνέχεια στην απόδοση των ευρημάτων μέσω του τυπικού ορισμού.

Στη διαδικασία πήραν μέρος οικειοθελώς είκοσι δύο (22) μαθητές τέσσερις (4) από την Α΄ και δεκαοχτώ (18) Β΄ τάξη ενός Γενικού Λυκείου των νοτίων προαστίων

της Αθήνας και χρειάστηκαν τέσσερις διδακτικές ώρες. Οι μαθητές εργάζονταν ανά δυάδες και τα ευρήματά τους ανακοινώνονταν σε όλη την ομάδα με αποτέλεσμα να προκαλούνται συζητήσεις. Ο ρόλος του καθηγητή ήταν αποσαφηνιστικός και οργανωτικός και οι παρεμβάσεις του αποσκοπούσαν στην ομαλή διεξαγωγή της διαδικασίας, η οποία μαγνητοσκοπήθηκε και μαγνητοφωνήθηκε.

Τα αποτελέσματα προέκυψαν όχι μόνο από την ανάλυση των φύλλων εργασίας αλλά και την προσεκτική παρατήρηση των οπτικοακουστικών δεδομένων.

Λέξεις κλειδιά: Άπειρες διαδικασίες, σύγκλιση ακολουθίας, διαίσθηση, τυπικός ορισμός.

Abstract

The concept of the limit is fundamental but at the same time difficult to be managed by high school students who encounter this concept for the first time in the case of functions. As it comes of research data, the high school teachers of mathematics agree that students confront difficulties in understanding the notion of the limit. Students approximate the concept most of the time as a procedure. In this paper we suggest a didactical suggestion for teaching the concept of the limit in a school environment. To be more specific, the teaching was on students of the first and second high school classes and its purpose was to make students to have a first contact with infinite procedures and the sense of the limit in the specific case that the sequence tends to zero.

The structure of the paper was designed in a way that the reader will be able to obtain a timeless image of the concepts of the limit and the infinities as these were shaped through centuries. For this reason, except for the introduction, in chapter two (2) we refer to historical data and the timeless evolution of these concepts. In chapter three (3) we highlight the role that the analytic programs and school play in the teaching of the limit. In chapter four (4) we highlight the finds of the international research and bibliography that refer to the teaching of mathematics and especially to the concept of the limit. The next chapters are dedicated to the way that the procedure was planned and carried out as also to its results.

The procedure was planned and carried out in two phases, in the first phase the students confronted the problem of calculating the acreage of the circle via a work sheet and the use of proper software, with the purpose of highlighting the necessity of infinite procedures and their introduction in them. In the second phase, students confronted the problem of dichotomy, which aimed at the intuitive discovery of the limit and then in the output of the results through the formal definition.

Twenty-two (22) students participated in the procedure. The students were in the first and second class of a high school in the southern suburbs of Athens. Eighteen (18) of them were in the second class and four (4) in the first and the procedure lasted four didactic hours. Students worked in pairs and their findings were announced to the whole team, so discussions were evoked. The role of the teacher was clarifying and organizing and his interventions aimed only to the normal conduct of the procedure, which was videotaped and recorded.

The results came of not only by analyzing the work sheets but also by the careful observation of the videotaped and recorded data.

Key words: Infinite procedures, convergence of the sequence, intuition, formal definition.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το όριο είναι η θεμελιώδης έννοια της Μαθηματικής Ανάλυσης με πολλές εφαρμογές σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών καθώς και σε άλλα πεδία θετικών και θεωρητικών επιστημών. Στο όριο στηρίζεται ο Διαφορικός και ο Ολοκληρωτικός Λογισμός. Πέρα από την θεμελιώδη σημασία που έχει για τα Μαθηματικά, αποτελεί ταυτόχρονα και μια πολυσύνθετη έννοια που ξεκίνησε από τα βάθη των αιώνων και ύστερα από πολλές διεργασίες πέρασε από την γεωμετρική οπτική γωνία, στην αριθμητικοποίηση, όπως και επισημοποιήθηκε τελικά τον 19ο αιώνα.

Όμως πέρα από την γενικώς παραδεκτή αξία της έννοιας του ορίου, ποια είναι η ειδοποιός διαφορά του από τις άλλες έννοιες των Μαθηματικών; Κατά τη γνώμη μας, η απάντηση στο ερώτημα αυτό βρίσκεται στη στενή σχέση που διατηρεί η έννοια με την έννοια του απείρου. Το όριο και το άπειρο (δυνητικό ή ενεστωτικό) είναι δύο έννοιες άμεσα συνυφασμένες. Η αλληλεξάρτησή τους άρχισε να διαφαίνεται από τους Πυθαγόρειους και σύμφωνα με την παράδοση ο Ίππασος ήταν ο πρώτος ο οποίος αντιλήφθηκε την συνύπαρξή τους. Η μέθοδος της εξάντλησης και της συμπίεσης εμπνευσμένες από τον Αρχιμήδη, αποτελούν παραδείγματα όπου οι δύο παραπάνω έννοιες έρχονται σε επαφή, επιλύοντας προβλήματα αλλά ταυτόχρονα αποτελούν σκαλοπάτι για περαιτέρω αναζητήσεις.

Η έννοια του ορίου περικλείει την έννοια του απείρου. Ο «προσδιορισμός» του απείρου αποτελεί πρόκληση και απασχολεί τους στοχαστές επί αιώνες· ο *G. Cantor* μόλις στα τέλη του 19^{ου} αιώνα, μας έδωσε μια ικανοποιητική διάσταση και μια θεωρία που το προσδιορίζει. Επίσης, η έννοια του ορίου, είναι άμεσα συνδεδεμένη με τους πραγματικούς αριθμούς και τις ιδιότητες αυτών. Έτσι, λοιπόν, αφού το όριο είναι πολυδιάστατο, αναπόφευκτα αποτελεί μια δύσκολη έννοια τόσο για τους μαθητές να την κατανοήσουν όσο και για τους καθηγητές να την διδάξουν.

Πάρα πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την έννοια του ορίου και τη διδασκαλία αυτού. (Artique, 1991, Cornu, 1983, Davis & Vinner, 1986, Li & Tall, 1993, Sierpinska, 1987, Tall, 1980, Tall, 1992, Tall & Vinner, 1981, Williams, 1991, Μαμμονά, 2001). Οι έρευνες αποδεικνύουν, πέρα από την δυσκολία στη διδασκαλία της έννοιας που οφείλονται στη δομή της, ότι η δυσκολία αυτή προκύπτει και από την διδακτική πρακτική η οποία αντί να εστιάζει στην εννοιολογική της πτυχή επικεντρώνεται στην διαδικαστική προσέγγιση (Bezuidenhout, 2001). Η δυσκολία αυτή επιτείνεται και από τις επιρροές που έχουν οι μαθητές από άλλες ερμηνείες της λέξης «όριο» ή από κοινωνικές και φυσικές εμπειρίες αυτών (Μαμμονά,2001).

Ο Cornu (1981,1983) αναφέρεται στις «αυθόρμητες αντιλήψεις» εννοώντας την διάσταση που δίνουν οι μαθητές στην έννοια του ορίου πριν την διδαχθούν, όπως επίσης αυτό που αναφέρουν οι Schwarzenberger και Tall (1978), δηλαδή ότι οι όροι «τείνει» και «όριο» έχουν υπόσταση για τον μαθητή πριν ακόμα διδαχθούν το όριο. Επιπλέον, οι Davis και Vinner (1986) επισημαίνουν ότι υπάρχει ένα πλούσιο υπόστρωμα απλοϊκών (naive) ιδεών για το όριο που «εναντιώνονται» στην διδασκαλία της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεται με τον «επίσημο» ορισμό της.

Σε αυτή την εργασία γίνεται μια προσπάθεια καταρχάς να καταγραφούν τα εμπόδια που ανακύπτουν κατά τη διάρκεια διδασκαλίας του ορίου, όπως έχουν παρουσιαστεί στην διεθνή βιβλιογραφία, αλλά και τα εμπόδια που προκύπτουν ιδιαίτερα από την ελληνική πραγματικότητα. Ο κύριος στόχος, όμως, είναι να καταγράψουμε τις ιδέες και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από μια πρόταση διδασκαλίας για την έννοια του ορίου. Η πρόταση αυτή αναφέρεται σε μαθητές λυκείου που η επαφή τους με το όριο είναι μόνο εξωδιδακτική. Πέρα από τον καθαρά μαθηματικό στόχο, η παρέμβαση είχε και ως σκοπό οι μαθητές να ενεργοποιηθούν, να εκφράσουν τις απόψεις τους, να συζητήσουν και τελικά να απαντήσουν στα ερωτήματα που τους είχαν τεθεί.

Ειδικότερα, σχεδιάσαμε και εκτελέσαμε δύο διδακτικές παρεμβάσεις σε μαθητές πρώτης και δευτέρας λυκείου ώστε να εκτιμήσουμε τις αντιδράσεις τους όταν έρχονται αντιμέτωποι με την έννοια του ορίου χωρίς την πίεση του εξεταστικού συστήματος. Η πρώτη διδακτική παρέμβαση είχε ως στόχο να φέρει σε επαφή τους μαθητές με τις άπειρες διαδικασίες και η δεύτερη με την έννοια του ορίου στη διακριτή περίπτωση σύγκλισης ακολουθίας στο μηδέν, αξιοποιώντας τη διαίσθηση των μαθητών, και φτάνοντας μέχρι τον τυπικό ορισμό του ορίου μέσω των συμβόλων.

Η σχεδίαση και η εκτέλεση των παρεμβάσεων ακολουθούν τα πρότυπα και τις επιταγές της κοινωνικο-κατασκευαστικής θεωρίας στη μαθηματική εκπαίδευση. Επιπλέον προσπαθήσαμε να δημιουργήσουμε κλίμα διαλόγου στην τάξη, γιατί πιστεύουμε ότι είναι πιο πιθανό οι μαθητές εκφραζόμενοι ανεμπόδιστα να οδηγηθούν στις ιδέες εκείνες που είναι απαραίτητες για τον προσδιορισμό του ορίου. Ειδικότερα, με τις άπειρες διαδικασίες, η πρόθεσή μας ήταν ο μαθητής να προσεγγίσει τη συμπεριφορά της διαδικασίας, δηλαδή να έρθει σε επαφή με την δυναμική έννοια του ορίου, και με την δεύτερη παρέμβαση να έρθει αντιμέτωπος με την «στατική» του διάσταση, δηλαδή με τον επίσημο ορισμό.

Η επιλογή στην δομή της εργασίας ήταν αρχικά να παρουσιαστεί η έννοια του απείρου και ο διαχωρισμός του σε ενεστωτικό και δυνητικό, όπως αυτά είχαν καταγραφεί από αρχαίους στοχαστές, αναφέροντας τις διαφορετικές θεωρήσεις. Επιπλέον, γίνεται αναφορά στις αντιπαραθέσεις των σύγχρονων θεωρητικών σχετικά με το άπειρο, φτάνοντας μέχρι τον *G.Cantor* και τον πληθικό αριθμό άλεφ μηδέν. Στη συνέχεια δίνονται οι διάφοροι «πρωταρχικοί ορισμοί» του ορίου και η διαχρονική εξέλιξη αυτού, όπως αυτός εξελίσσεται από τον 17ο ως τον 19ο αιώνα, φτάνοντας ως τον ε-δ ορισμό του *A-L. Cauchy* και του *K.Weierstrass.*

Κατόπιν παρουσιάζονται κάποιες ενδεικτικές αναφορές στην έννοια του ορίου, όπως αυτές υπάρχουν στα σχολικά βιβλία μέχρι την Β΄Λυκείου. Οι αναφορές αυτές σχετίζονται άμεσα με τις πρωταρχικές εικόνες που αποκτούν οι μαθητές για την έννοια και δίνουν ουσιαστικά άτυπους ορισμούς για το όριο, χωρίς όμως αυτό να δηλώνεται ρητά. Καταγράφουμε τις απόψεις μας για τις αναφορές αυτές και αναδεικνύουμε τον σοβαρό ρόλο τους στην κατανόηση της έννοιας από τους μαθητές.

Η διδακτική των Μαθηματικών χρησιμοποιεί μεθόδους έρευνας (τεστ, συνεντεύξεις, πειραματικές διδασκαλίες) με σκοπό να ανιχνευτούν οι λειτουργίες εκείνες που δίνουν θετικό πρόσημο στην διδασκαλία αλλά και αυτές που την παρεμποδίζουν. Η άποψή μας στον σχεδιασμό της διδασκαλίας επηρεάστηκε από τις κοινωνικο-κατασκευαστικές θεωρίες μάθησης όπως αυτές διατυπώνονται από τον *Vygotsky* και *Piaget*. Θεωρούμε λοιπόν ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης επιτυγχάνεται με την ενεργητική προσπάθεια των μαθητών κι όχι με έτοιμους ορισμούς, θεωρήματα και αποδείξεις, ούτε με παθητική απομνημόνευση, διότι η γνώση προϋποθέτει αυτόνομη κατασκευή και όχι αντιγραφές προτύπων.

Επιπλέον, επισημαίνουμε τον καθοριστικό ρόλο του καθηγητή στην όλη διαδικασία, ο οποίος δεν περιορίζεται στη μεταφορά υποδειγμάτων ή οδηγιών αλλά αντιθέτως αλληλοεπιδρά με το μαθητή, βοηθά να χρησιμοποιείται σωστά η γλώσσα και η ορολογία και αναλύει την σκέψη των μαθητών.

Η μελέτη της υπάρχουσας βιβλιογραφίας μας βοήθησε στην εκπαιδευτική πρακτική. Προετοιμασμένοι πλέον για τα συνηθισμένα λάθη και τις απλοϊκές απόψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του ορίου, η προσπάθεια μας δεν παρεξέκλινε από τον αρχικό της σχεδιασμό, όσον αφορά τον χρονικό περιορισμό των εν λόγω παρεμβάσεων αλλά και από τον τελικό στόχο, που ήταν η διατύπωση της έννοιας του ορίου με την βοήθεια των απόλυτων τιμών.

Η παρούσα εργασία ολοκληρώνεται με την πλήρη περιγραφή της διαδικασίας τόσο τεχνικά όσο και θεωρητικά. Καταγράφονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων αλλά επιπλέον γίνεται και η σχετική συζήτηση στην οποία παρατίθενται οι απόψεις του ερευνητή που αφορούν την αξιολόγηση της διαδικασίας αλλά και κατατίθενται προτάσεις που αφορούν στην βελτίωση της.

Ως επίλογο στην τρέχουσα ενότητα, θα θέλαμε να αναφέρουμε και κάποιους «βαθύτερους» λόγους, οι οποίοι μας οδήγησαν στην προσπάθεια αυτή. Από την προσωπική μας εμπειρία αλλά και από την βιβλιογραφία, διαπιστώνεται ότι ως επί το πλείστον οι μαθητές δεν χαίρονται στο μάθημα των Μαθηματικών, το ίδιο το αντικείμενο το θεωρούν δυσνόητο, χωρίς κάποια ρητή χρησιμότητα (για τεχνικά - υπολογιστικά προβλήματα υπάρχουν τα κατάλληλα λογισμικά) και το αποδέχονται μόνο ως μέσο για την εισαγωγή σε κάποια σχολή της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Ειδικότερα η έννοια του ορίου γίνεται αντιληπτή από τους μαθητές μόνο ως διαδικασία και όχι ως μια έννοια θεμελιώδης για την γνώση και για την πνευματική τους ανάπτυξη. Από την σκοπιά της διδακτικής πρακτικής αποφύγαμε την συνηθισμένη τακτική, η οποία αναλώνεται στην αυθαίρετη διατύπωση του ορισμού και στο τρίπτυχο θεώρημα-απόδειξη-άσκηση. Δίνοντας στην αρχή το πρόβλημα και στη συνέχεια ερωτήματα που βοηθούσαν τον προβληματισμό και τη συμμετοχή, κατορθώσαμε να παρακινήσουμε τους μαθητές να συμμετάσχουν, να εικάσουν και τελικά να συμπεράνουν.

Επομένως είναι βάσιμη η ελπίδα μας ότι τελικά κατορθώσαμε το ελάχιστο, δηλαδή να δώσουμε την πραγματική διάσταση των Μαθηματικών που δεν είναι η συσσώρευση στείρων γνώσεων, αλλά η χάραξη δρόμων σκέψης και στρατηγικής που βοηθούν τους ανθρώπους να προσανατολίζονται σε νέες καταστάσεις αλλά και σε προβληματισμούς.

Κεφάλαιο 2

Το Άπειρο από τα Αρχαία Χρόνια έως Σήμερα

2.1 Άπειρο και άπειρες διαδικασίες

«Είμαι τόσο πολύ υπέρ του ενεστωτικού απείρου ώστε, αντί να δεχτώ πως η φύση το απεχθάνεται, πιστεύω πως αυτό την επηρεάζει παντού έτσι ώστε να καταδεικνύει την τελειότητα του Δημιουργού. Έτσι πιστεύω πως κάθε μέρος της ύλης είναι, δεν λέω διαιρετό αλλά πράγματι διαιρεμένο και επομένως και το πιο μικρό σωματίδιο θα πρέπει να θεωρείται σαν ένας κόσμος γεμάτος από μια απειρία όντων».

(Leibniz, Journal des Savants, 1693)

Η παραπάνω ρήση του *Leibniz*, χρησιμοποιώντας τον όρο ενεστωτικό άπειρο σε αντιδιαστολή με το δυνητικό άπειρο (διαχωρισμός κατά τον *Αριστοτέλη*), είναι ίσως η ουσία της δυσκολίας στην προσέγγιση και κατανόηση της έννοιας του απείρου. Η λέξη άπειρο ετυμολογικά προκύπτει από το στερητικό πρόθεμα "α-" και τη λέξη "πέρας" που σημαίνει τέλος. Η λέξη άπειρος-η-ο χρησιμοποιείται στην καθομιλουμένη προσπαθώντας να υποδείξει κάτι το πολύ μεγάλο ή κάτι που έχει διαστάσεις που είναι έξω από τα συνηθισμένα (πολύ μικρό ή πολύ μεγάλο).

Το άπειρο και ειδικά οι άπειρες διαδικασίες ανέκαθεν προξενούσαν ιδιαίτερες δυσκολίες στον καθορισμό τους αλλά και στην κατανόησή τους. Το ερώτημα που μπορεί να τεθεί εδώ προκύπτει αβίαστα : ποια σκέψη, ποια κατάσταση, ποιος προβληματισμός ανάγκασε τους ανθρώπους να επινοήσουν την έννοια αυτή;

Από τους *L.Graham και J-M.Kantor* (*Ονοματίζοντας το άπειρο,* σελ. *30*) πληροφορούμαστε ότι «[η] ελληνική λέξη «άπειρον» περικλείει τρεις βασικές ιδέες που διατηρήθηκαν και στους επόμενους αιώνες:

- Τον απέραντο χαρακτήρα του χώρου και του χρόνου.

- Τον μη ορθολογικό, θρησκευτικό ή μυστικιστικό χαρακτήρα του ατέρμονος.

- Την αδυναμία ορισμού και περιγραφής (το άφατο) του απείρου.

Τι εννοούμε όμως όταν χαρακτηρίζουμε το άπειρο ως δυνητικό; Δυνητικό (*εν δυνάμει*) άπειρο είναι η διαδικασία εκείνη η οποία έχει μια συγκεκριμένη αρχή και συντελείται σε τελείως διακριτά βήματα το ένα πίσω από το άλλο. Αν λοιπόν για τη διαδικασία αυτή δεν γνωρίζουμε πού τελειώνει και αν τελειώνει, τότε έχουμε το δυνητικό άπειρο (*Δ.Α. Απολιτάνος*, 1978). Ενώ το ενεστωτικό (*πραγματικό ή εν ενεργεία*) άπειρο είναι οτιδήποτε δεν είναι πεπερασμένο και υπάρχει, δηλαδή μπορεί να δηλωθεί. Επί παραδείγματι η συνεχής διχοτόμηση της μονάδας είναι μια ατέρμονη διαδικασία δηλαδή ένα δυνητικό άπειρο αν δούμε όμως το σύνολο των φυσικών αριθμών σαν ένα αντικείμενο τότε αυτό περιέχει άπειρα στοιχεία δηλαδή είναι ενεστωτικό άπειρο. Οι παραπάνω Αριστοτελικοί ορισμοί του απείρου ουσιαστικά διαχωρίζουν το άπειρο με δύο διαφορετικούς τρόπους: α) ως δυνατότητα και β) ως ενεστωτική ύπαρξη.

Η έννοια του απείρου εμφανίζεται ιστορικά στην Ιώνια Φιλοσοφία. Για τους Ίωνες φιλόσοφους σήμαινε «*μια ουσία χωρίς όρια, μορφή ή ιδιότητες*», απροσδιόριστη κι αδύνατον να εκφραστεί με λόγια. Ένα χαρακτηριστικό στοιχείο των προσωκρατικών φιλοσόφων είναι ότι διέκριναν τις έννοιες Κόσμος και Σύμπαν. Σύμπαν (συν + πάν): καθετί που υπάρχει, το όλον ενώ Κόσμος είναι το προσιτό μέρος του Σύμπαντος, μία έκταση κάπου 10-15 δισεκατομμύρια έτη φωτός (*Ε. Ρούσσος*, 2000).

Το *άπειρον,* λοιπόν, σήμαινε για πολύ καιρό αυτό που υπήρξε η πρώτη του έννοια, όπως ορίστηκε από τον *Αναξίμανδρο*, στο πρώτο ιστορικά κείμενο της ελληνικής φιλοσοφικής παράδοσης. Σήμαινε την *πρώτη ουσία*, αυτήν από την οποία προέκυψαν όλες οι άλλες. Το παρακάτω απόσπασμα μας εξηγεί «*Αναξίμανδρος δ' ο Μιλήσιος φησί των όντων την αρχήν είναι το άπειρον. εκ γαρ τούτου πάντα γίνεσθαι και εις τούτο πάντα φθείρεσθαι διό και γεννάσθαι απείρους κόσμους και πάλιν φθείρεσθαι εις το εξ ου γίνονται. Λέγει γουν διά τι άπειρόν εστίν, ίνα μηδέν ελλείπηι η γένεσις η υφισταμένη*».(*Αριστοτέλης, Φυσικά. Γ4, 203b 18sq).* Σε μετάφραση: « *Ο Αναξίμανδρος* από την Μίλητο ισχυρίζεται ότι η αρχή των όντων είναι το άπειρο, διότι από αυτό ξεκινούν τα πάντα και σε αυτό καταλήγουν. Γι' αυτό τον λόγο λοιπόν δημιουργούνται άπειροι κόσμοι και πάλι καταλήγουν σε αυτό από το οποίο προήλθαν. Επομένως υποστηρίζει ότι για αυτόν τον λόγο υπάρχει άπειρο, για να μην σταματάει η υπάρχουσα γένεση». Κατά τον *Αναξίμανδρο,* επομένως, το άπειρο είναι αρχή, είναι αυτό που διατηρείται παρ' όλες τις αλλαγές οι οποίες πραγματοποιούνται στη φύση. Στον ορισμό του απείρου από τον *Αναξίμανδρο* υπάρχει ήδη ο πυρήνας του πολύ μεταγενέστερου ορισμού του απείρου από τους μαθηματικούς: «*Άπειρον έστιν, ίνα μηδέν ελλείπηι η γένεσις η υφισταμένη*».

Μετέπειτα συναντάμε την έννοια του απείρου στους *Πυθαγόρειους*. Ο *Αριστοτέλης* παραθέτει έναν πίνακα του *Αλκμαίωνα* του Κροτωνιάτη με τα βασικά αντίθετα των *Πυθαγορείων*: πέρας - άπειρον, περιττόν - άρτιον , εν - πλήθος κλπ δηλαδή παρουσιάζεται το άπειρο ως το αντίθετο του πεπερασμένου. Από τους *Πυθαγόρειους*, ακόμα, εμφανίζεται η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής (χωρίς να αναφέρεται ρητά) και της άπειρης διαδικασίας, συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από το Απόσπασμα 6 του *Φιλόλαου* ότι η πολλαπλασιαστική ανθυφαίρεση της Πυθαγόρειας αρμονίας είναι άπειρη. Επίσης , όπως αναφέρει ο *Θέων* ο Σμυρναίος, οι *Πυθαγόρειοι* χρησιμοποιώντας την διαδικασία της ανθυφαίρεσης ασχολήθηκαν με την τετραγωνική ρίζα του 2 και ανακάλυψαν ορισμένες προσεγγίσεις της με τη μορφή των λεγομένων πλευρικών-διαμετρικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα:

ανακάλυψαν ότι η ακολουθία πηλίκων της ανθυφαίρεσης του λόγου διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου είναι 1,2,2,2,...(επ' άπειρον).

Για τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται το άπειρο ο *Αναξαγόρας*, μας πληροφορεί το παρακάτω κείμενο: «*οὔτε γάρ τοῦ σμικροῦ ἐστι τὸ γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεί (τὸ γάρ ἐόν οὐκ ἐστὶ τὸ μὴ οὐκ εἶναι) ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἀεί ἐστι μεῖζον, καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ σμικρῷ πλῆθος, πρὸς ἑαυτὸ δὲ ἕκαστόν ἐστι καὶ μέγα καὶ σμικρόν.»* (*Συμπλίκιος, Φυσικά. 164, 16*). Δηλαδή «ούτε και υπάρχει το ελάχιστο κομμάτι του μικρού, αλλά υπάρχει πάντα ένα μικρότερο κομμάτι (γιατί αυτό που είναι, δεν είναι δυνατόν να πάψει να είναι). Επίσης, υπάρχει πάντα κάτι μεγαλύτερο από το μεγάλο, και ως προς το πλήθος, είναι ίσο με το μικρό, γιατί κάθε πράγμα συγκρινόμενο ως προς τον εαυτό του είναι και μεγάλο και μικρό.

Ο *Δημόκριτος* ο Αβδηρίτης πίστευε ότι το σύμπαν δεν είναι μόνο άπειρο αλλά και χωρίς κέντρο. Οι οπαδοί της σχολής αυτής, επηρεασμένοι από τους Πυθαγόρειους, δέχονταν την ύπαρξη ελάχιστων σωματιδίων, των ατόμων, που η σκληρότητά τους τα καθιστά αδιαίρετα.

Έτσι, γνωρίζοντας ότι «οι αριθμοί (φυσικοί) δεν τελειώνουν ποτέ» -όσο και να τους μετράς πάντοτε υπάρχει επόμενος, η προσέγγιση του λόγου διαμέτρου προς την πλευρά τετραγώνου δεν σταματά ποτέ κλπ- θεμελιώθηκε η «απόδειξη» της ύπαρξης στους αρχαίους φιλοσόφους του *εν δυνάμει απείρου·* η ιδέα όμως ενός «ενεστωτικού» απείρου, ενός π.χ. σύμπαντος με ενεργώς άπειρες διαστάσεις, δεν γινόταν αποδεκτή από τους περισσότερους αρχαίους φιλοσόφους, με κύριο εκπρόσωπο τον *Αριστοτέλη*.

Ο κυριότερος λόγος γι' αυτό, πέρα από τις τεράστιες δυσκολίες εποπτείας, ήταν πως η ιδέα του εν ενεργεία απείρου οδηγούσε σε μια σειρά από παράδοξα και αντινομίες, μεταξύ των οποίων τα γνωστότερα είναι του *Ζήνωνα* του Ελεάτη. Οι *Πυθαγόρειοι,* με βάση την αρχική τους ιδέα ότι όλες οι ποσότητες έχουν κοινό μέτρο, θεώρησαν ότι οποιαδήποτε ποσότητα μπορεί να χωριστεί σε «μονάδες» οσοδήποτε μικρές έτσι ώστε αυτές να μπορούν να αποτελούν κοινό μέτρο για οποιαδήποτε ομοειδή ποσότητα. Ο *Ζήνων* ο Ελεάτης, μαθητής του *Παρμενίδη,* σ' αυτόν τον ισχυρισμό των *Πυθαγορείων* διατύπωσε τα παρακάτω επιχειρήματα.

Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να διαχωριστεί σε άπειρο πλήθος σημείων τότε το μήκος αυτό ή θα είναι άπειρο ή θα είναι μηδέν, αφού: Αν το μήκος του σημείου δεν είναι μηδέν και τοποθετήσουμε άπειρα διαδοχικά σημεία, τότε το αποτέλεσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα με άπειρο μήκος. Αν το μήκος των σημείων είναι μηδέν, τότε και άπειρα σημεία να τοποθετηθούν, τότε το αποτέλεσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα με μηδέν μήκος.

Ο *Ζήνων* δηλαδή υποστηρίζει ότι αν δεχτούμε την πολλαπλότητα που υποστηρίζουν οι *Πυθαγόρειοι*, τότε κάθε ευθύγραμμο τμήμα ή θα έχει άπειρο μήκος ή δεν θα έχει μήκος. Και αυτό διότι δεν υπάρχει μέγεθος στο οποίο να προσθέτουμε άλλο μέγεθος και να μην γίνεται μεγαλύτερο ή να αφαιρούμε άλλο μέγεθος και να μη γίνεται μικρότερο.(Ε. Αυγερινός, Μ. Κιουλάφας, 2004).

Είναι γνωστά τα παράδοξα του *Ζήνωνα* με τα οποία επιχειρηματολόγησε ως προς την αλήθεια των συμπερασμάτων του. Η αδυναμία να αναιρεθεί η «απόδειξη» πως ο Αχιλλέας(ή ο λαγός) δεν θα προσπερνούσε ποτέ τη χελώνα, αν την άφηνε να προηγηθεί στον αγώνα δρόμου, ή το πρόβλημα της διχοτομίας, ήταν μεγάλο εμπόδιο στα μαθηματικά και τη φιλοσοφία για 2000 και πλέον χρόνια.

Ο *Ευκλείδης* δεν ξεκαθαρίζει στο έργο του *« Στοιχεία»* την άποψή του για το άπειρο της ευθείας ή των σημείων που περικλείει ένα ευθύγραμμο τμήμα. Τη μόνη ίσως έμμεση αναφορά την βρίσκουμε στο 2^0 Αίτημα των Στοιχείων (Βιβλίο 1^o) « *Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.»,* δηλαδή, « και ότι η πεπερασμένη ευθεία (ευθύγραμμο τμήμα) μπορεί να προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως» Σύμφωνα με τον *Maurice Caveing*, ο Ευκλείδης δανείζεται τον όρο «συνεχές» από τον *Αριστοτέλη* που τον χρησιμοποιούσε κυρίως για μεγέθη και συνδέεται με τη θέση του, η οποία ήταν αντίθετη με των ατομικών φιλοσόφων (Δημόκριτος), ότι το : « *συνεχές είναι επ' άπειρον διαιρετό*» (*Φυσικά, Α΄,*2) και απορρίπτει την ύπαρξη αδιαιρέτων τέτοιων που να μπορούν να τοποθετηθούν το ένα πλάι στο άλλο ώστε να αποτελέσουν μια ευθεία (*Φυσικά, ΣΤ΄,*1)

Όσο αναπτύσσονταν τα Μαθηματικά τόσο οι άπειρες διαδικασίες (*εν δυνάμει άπειρο*) εμφανίζονταν. Πέρα από τον *Ίπασσο,* που όπως πιθανολογείται είναι ο πρώτος που ανακάλυψε - απέδειξε την απειρία προσέγγισης του λόγου διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, η πρόταση Χ.2 των Στοιχείων του *Ευκλείδη* είναι χαρακτηριστική της διείσδυσης της απειρίας (επαναληπτικής) στην αποδεικτική διαδικασία· μας πληροφορεί η πρόταση σε ελεύθερη μετάφραση: «Αν α,β είναι δύο ομογενή μεγέθη (π.χ ευθύγραμμα τμήματα), με α > β και η ανθυφαίρεση του α ως προς το β είναι άπειρη, τότε τα α και β είναι ασύμμετρα».

Στις άπειρες διαδικασίες βασίστηκε ο *Αρχιμήδης* στην προσπάθειά του να «προσεγγίσει» το **π**, να «τετραγωνίσει» την παραβολή, την έλλειψη, τη σφαίρα κ.α. Η μέθοδος της εξάντλησης και της συμπίεσης, που το σκεπτικό τους είναι να περιοριστεί το επιλεγέν σχήμα ανάμεσα από δύο άλλα σχήματα και με την βοήθεια της «εις άτοπον απαγωγήν» να προσεγγιστεί το μέγεθος, περιέχει τα πρώτα ψήγματα της ολοκλήρωσης. Στο σύγγραμμά του *«Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος*» περιγράφεται μια τέτοια μέθοδος. Η λέξη «έφοδος» στην αρχαία ελληνική σημαίνει «προσέγγιση» , «δρόμος προς κάτι», η μέθοδος που ακολουθεί για τον τετραγωνισμό της παραβολής είναι πολύ κοντά στην ολοκλήρωση χωρίου, όπως την αντιλαμβανόμαστε σήμερα, μόνο που αντί για ορθογώνια παραλληλόγραμμα ο *Αρχιμήδης* χρησιμοποιούσε τραπέζια.

Το μέγεθος της επιρροής των ιδεών του Αρχιμήδη στην ανάπτυξη του Διαφορικού λογισμού και κατά συνέπεια στην έννοια του ορίου μας την δίνει ο *Leibniz* προσπαθώντας να αιτιολογήσει τις μεθόδους του. Έγραφε λοιπόν, περίπου στο 1690 *« Επειδή για το απείρως μικρό ή το άπειρο, θεωρούμε μεγέθη **οσοδήποτε** μικρά ή **οσοδήποτε** μεγάλα, κατά περίπτωση, ώστε το σφάλμα να είναι **μικρότερο από το δοθέν,** ώστε η διαφορά από το ύφος του Αρχιμήδη βρίσκεται μόνο στην έκφραση, η οποία στη δική μας μέθοδο είναι πιο άμεση και ταιριάζει περισσότερο στην τέχνη της εύρεσης.»* (Katz,2013, σελ.607)

Η έννοια του απείρου δεν απασχόλησε μόνο τους αρχαίους φιλόσοφους αλλά και τους σύγχρονους μαθηματικούς. Ιδιαίτερα η έννοια του πραγματικού απείρου, με τα «περίεργα» χαρακτηριστικά ότι το μέρος είναι «*ίσο*» με το *όλο,* υπήρξε στα τέλη του $19^{ου}$ και αρχές του $20^{ου}$ αιώνα πεδίο έντονων αντιπαραθέσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής κοινότητας.

Η έννοια του ενεστωτικού απείρου (μαθηματικώς) συνδέεται με την ύπαρξη ενός μη πεπερασμένου αντικειμένου μέσα στην μαθηματική οντότητα και όχι με τη μορφή μιας ατέρμονης διαδικασίας. Έτσι λοιπόν, το να διαιρούμε την μονάδα μπορούμε να το κάνουμε στο διηνεκές (ως διαδικασία)· υπάρχει όμως μαθηματική οντότητα που να μπορούμε να την χαρακτηρίσουμε απεριόριστη;

Την απάντηση στο ερώτημα αυτό προσπάθησε να τη δώσει ο μεγάλος μαθηματικός G. Cantor με τη Θεωρία Συνόλων. Μέσω του ορισμού της έννοιας «σύνολο» έδωσε ένα ορισμό του απείρου και μάλιστα του «έδωσε» και μέτρο. Οι φυσικοί αριθμοί παράγονται προσθέτοντας κάθε φορά τον αριθμό ένα στον προηγούμενο και αυτή η διαδικασία είναι ατέρμονη. Αν «δούμε» τώρα όλους τους αριθμούς που παράγονται με την διαδικασία ως μια ολότητα, ως ένα αντικείμενο, τότε το αντικείμενο αυτό περιέχει απεριόριστα σε πλήθος στοιχεία, δηλαδή έχει άπειρα στοιχεία.

Το συγκεκριμένο άπειρο, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του συνόλου των φυσικών αριθμών, το ονόμασε άλεφ μηδέν (με σύμβολο, $\aleph_0$) και είναι το « μικρότερο» άπειρο, το ίδιο άπειρο με το άπειρο των ακεραίων και των ρητών, αλλά διαφορετικό από το άπειρο των πραγματικών, σύμφωνα πάντα με τον Cantor.

Ο ορισμός του πληθάριθμου, ως το πλήθος των στοιχείων που περιέχει ένα σύνολο, και το άλεφ μηδέν, ως ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών αριθμών, έδωσε την απαραίτητη βάση στο Cantor για να «μετρήσει» κάθε τι απεριόριστο. Έτσι, αν υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία των στοιχείων του συνόλου των φυσικών με τα στοιχεία ενός συνόλου A, τότε τα στοιχεία του συνόλου A είναι άπειρα και το σύνολο λέγεται αριθμήσιμο.

2.2. Μια σύντομη ιστορική αναδρομή του ορισμού του ορίου από την Αναγέννηση μέχρι σήμερα.

Η έννοια του ορίου περιείχε πολλές ασάφειες στα πρώτα στάδια της εξέλιξής της, αφού οι ερευνητές αντιμετώπιζαν τα ίδια εμπόδια όπως και οι αρχαίοι φιλόσοφοι αναφορικά με το άπειρο το δυνητικό ή το ενεστωτικό. Υπάρχουν τα αδιαίρετα ή συνεχίζεται επ' άπειρον η διχοτόμηση;

Την έννοια του ορίου σε πρώιμο στάδιο τη συναντάμε γύρω στα 1630 από τον P. de *Fermat* δίνοντας τη λύση στο πρόβλημα «δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα να διαιρεθεί σε δύο μέρη ώστε το γινόμενο που θα προκύψει από τον πολλαπλασιασμό μεταξύ των να είναι το μέγιστο δυνατό». Θεωρώντας το αρχικό μέγεθος α και το τμήμα που αποκόπτεται x, το γινόμενο θα ήταν $(\alpha\text{-}x)\ x = \alpha x - x^2$. Αν λοιπόν x είναι η λύση του προβλήματος τότε για πολύ μικρή μεταβολή ϵ του x θα είχαμε $\alpha x\text{-}x^2 \approx \alpha(x+\epsilon) - (x+\epsilon)^2$, από την οποία προκύπτει $\alpha\epsilon \approx 2\epsilon x + \epsilon^2$· στη συνέχεια διαιρώντας με ϵ και διαγράφοντας κατόπιν το ϵ, θεωρώντας το μηδέν, προκύπτει ότι $x= \alpha/2$, που είναι και η λύση του προβλήματος. O Fermat παρατήρησε για την μέθοδο ότι : «δεν θα μπορούσαμε να περιμένουμε μια πιο γενική μέθοδο». Πράγματι, ουσιαστικά εδώ αναγνωρίζεται η μέθοδος που εφαρμόζουμε στις μέρες μας χωρίς την χρησιμοποίηση των συμβόλων, δηλαδή εμφανίζεται η ποσότητα ϵ, η οποία δεν είναι μηδέν αλλά για να προκύψει το αποτέλεσμα θεωρείται μηδέν.

Το έτος 1684, ο Leibniz έγραφε: «*Αν προταθεί οποιαδήποτε συνεχής μετάβαση που ολοκληρώνεται σε ορισμένο όριο, τότε είναι δυνατό να διατυπώσουμε ένα γενικό συλλογισμό που καλύπτει και το τελικό όριο*». Με άλλα λόγια αν κάποιος υπολογίσει ότι ένας ορισμένος λόγος αληθεύει γενικά, δηλαδή ότι ένας λόγος περιγράφει μια μαθηματική έννοια, όταν τα μεγέθη dx και dy είναι πεπερασμένα, ο ίδιος λόγος θα αληθεύει και στην οριακή περίπτωση, δηλαδή όταν τα μεγέθη αυτά είναι μηδέν. (Katz, σελ.607).

Στη συνέχεια , ο *Newton* (1687) παρατηρεί κάτι ανάλογο για το όριο: *« Ο απώτατος λόγος φευγαλέων ποσοτήτων … είναι όρια προς τα οποία συγκλίνουν πάντοτε οι λόγοι ποσοτήτων που ελαττώνονται απεριόριστα, και στα οποία προσεγγίζουν περισσότερο από οποιαδήποτε δοθείσα διαφορά, αλλά ουδέποτε πηγαίνουν πέρα από αυτά, και με τα οποία στην πραγματικότητα ουδέποτε ταυτίζονται, έως ότου οι ποσότητες ελαττωθούν ad infinitum (στο άπειρο)»*. Μεταφράζοντας τα λεγόμενα του Newton σε αλγεβρική ορολογία θα φτάναμε σε ένα ορισμό κοντινό με τον σύγχρονο. Φαίνεται όμως ότι γνώριζε διαισθητικά τη λειτουργία των ποσοτήτων που περιείχαν το εξαφανιζόμενο «ϵ» και στο τέλος την αντικατάστασή του με το μηδέν.

Στις παραπάνω «διατυπώσεις» άσκησε κριτική ο *G. Berkeley* (Katz, σελ.662), αναφέροντας τον έντονο προβληματισμό του για τις ποσότητες που άλλοτε είναι μηδέν και άλλοτε δεν είναι. Γράφει ο ίδιος προσπαθώντας να αιτιολογήσει τους ισχυρισμούς του στο φυλλάδιό του «Ο Αναλύστας»: «*Διότι όταν λέμε έστω ότι οι αυξήσεις μηδενίζονται, δηλαδή έστω ότι οι αυξήσεις γίνονται μηδέν ή έστω δεν συμβαίνουν, η προηγούμενη υπόθεση ότι οι αυξήσεις ήταν μη μηδενικές ή ότι όντως υπήρχαν αυξήσεις, παύει να ισχύει, και ωστόσο μία συνέπεια (αποτέλεσμα) αυτής της υπόθεσης, δηλαδή μία έκφραση στην οποία καταλήξαμε εξαιτίας της, διατηρείται (ισχύει)*». Αναρωτιέται, δηλαδή, , πώς είναι δυνατόν να ξεκινήσουμε με μια μη μηδενική αύξηση και αφού εκτελέσουμε όλους τους υπολογισμούς με αυτήν όντας διάφορη του μηδενός, για να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα τελικά τη θέτουμε ίση με το μηδέν;

Ο *Maclaurin,* (Katz, σελ.666), απέρριψε τις αιτιάσεις του Berkeley, ότι η μέθοδος πρώτα να υποθέτουμε ότι υπάρχει μια πεπερασμένη αύξηση και μετά να την αφήνουμε να μηδενίζεται, είναι αντιφατική. Έγραφε για τον λόγο, ο οποίος είναι το όριο των διαφόρων λόγων που σχηματίζουν μεταξύ τους πεπερασμένες ταυτόχρονες αυξήσεις δύο μεταβλητών ποσοτήτων, καθώς οι δύο αυξήσεις ελαττώνονται μέχρι να μηδενιστούν. Παρατηρούσε ότι, για να υπολογίσουμε το όριο αυτό, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το λόγο των αυξήσεων και κατόπιν να αναχθούμε σε απλούστερους όρους, έτσι ώστε ένα τμήμα του αποτελέσματος να είναι ανεξάρτητο από τις τιμές των αυξήσεων αυτών. Το επιθυμητό αποτέλεσμα (όριο) εμφανίζεται τότε αμέσως, αν υποθέσουμε ότι « *οι αυξήσεις ελαττώνονται μέχρι να μηδενιστούν»* . Επί παραδείγματι, για να υπολογίσουμε το λόγο της ροής του x^2, προς τη ροή ax, ο λόγος των αυξήσεων θα είναι $2\boldsymbol{0}x+0^2$: a$\boldsymbol{0}$,(οι παραστάσεις προέκυψαν από τις $(x+\boldsymbol{0})^2-x^2$ και $a(x+\boldsymbol{0})-ax$.), δηλαδή $2x+\boldsymbol{0}$: a. « *Ο λόγος του* 2x+**0** *προς το a συνεχώς ελαττώνεται, και είναι πάντα μεγαλύτερος προς τον λόγο* 2x:a, *όταν το* **0** *είναι οποιαδήποτε πραγματική αύξηση, αλλά είναι πρόδηλο ότι με συνεχή τρόπο, προσεγγίζει οριακά τον λόγο* 2x *προς* a»

Εν συνεχεία ο *d' Alembert* (1754) (Katz, σελ.668), παρόλο που έχει ταυτόσημες απόψεις με τον Maclaurin για την έννοια του ορίου, πηγαίνει λίγο μακρύτερα και δίνει έναν άμεσο ορισμό του όρου «όριο» στο άρθρο του στην *Encyclopèdie (Limite)*. «*Ένα μέγεθος λέμε ότι είναι το όριο κάποιου άλλου όταν αυτό το δεύτερο μπορεί να προσεγγίσει το πρώτο κατά δοθέν μέγεθος οσοδήποτε μικρό, μολονότι ουδέποτε μπορεί να υπερβεί το μέγεθος το οποίο προσεγγίζει*». Η ιδέα αυτή του *d' Alembert* η οποία είναι περισσότερη γεωμετρική και λιγότερο αλγεβρική δεν ακολουθήθηκε από άλλους ερευνητές του 18ου αιώνα.

Με την αυγή του 19ου αιώνα, συγκεκριμένα στα 1802, ο *Lacroix* στο βιβλίο του, *Traité élémentaire du calcul différentiel et de du calcul intégral,* προσπάθησε να δώσει έναν ορισμό για το όριο μέσα από το όριο ενός λόγου διαφορών. Έτσι λοιπόν αν $u = ax^2$ και $u_1= a(x+h)^2$, τότε το 2ax είναι « *το όριο του λόγου (u_1-u)/ h, … είναι η τιμή προς την οποία αυτός τείνει καθώς η ποσότητα h ελαττώνεται και την οποία [τιμή] μπορεί να προσεγγίσει όσο κοντά θέλουμε*». (αναφέρεται στο, V.Katz, σελ.804),

Ο *Augustin-Louis Cauchy* στο έργο του *Le Cours d' analyse de l' Ecole Polytechnique* (1821), δίνει την έννοια του ορίου με αριθμητικό τρόπο αφήνοντας στην άκρη την γεωμετρική ερμηνεία του ορίου όπως έκαναν οι προηγούμενοι μαθηματικοί. Ο *Cauchy* ανέπτυξε την έννοια του ορίου στηριζόμενος στις έννοιες του αριθμού, της μεταβλητής και της συνάρτησης περισσότερο, παρά στην διαισθητική προσέγγιση μέσα από την Γεωμετρία. Έγραφε λοιπόν « *Εάν οι διαδοχικές τιμές που δίνονται στην ίδια μεταβλητή προσεγγίζουν αόριστα μια σταθερή τιμή, έτσι ώστε τελικά να διαφέρουν από αυτήν όσο λίγο θέλουμε τότε η σταθερή αυτή τιμή λέγεται όριο των άλλων»*. (αναφέρεται στο V.Katz, σελ.804). Εισάγοντας την έννοια του ορίου, δήλωσε ότι ένας άρρητος αριθμός είναι το όριο των διαφόρων ρητών κλασμάτων, τα οποία δημιουργούνται συνεχώς από κατάλληλες τιμές των όρων τους.

Ο ορισμός του ορίου, όπως τον γνωρίζουμε σήμερα, πρώτα δόθηκε ως τυπικός ορισμός από τον *Bernard Bolzano* το 1817, και η οριστική σύγχρονη μορφή του τέθηκε τελικά από τον *Karl Weierstrass*. «Έστω μια συνάρτηση και $\mathbf{x_0}$ ένα σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της (D_f). Λέμε ότι **το όριο της f στο $\mathbf{x_0}$ υπάρχει και είναι ίσο με τον πραγματικό αριθμό L**, αν: για κάθε ε>0 υπάρχει (τουλάχιστον ένα) δ = δ(ε)>0 τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D_f$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να έχουμε: $| f(x) - L | < \varepsilon$.»

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ο προσδιορισμός της έννοιας του απείρου και του ορίου δεν ήταν ούτε εύκολος αλλά ούτε και σύντομος. Η αδυναμία των ερευνητών-στοχαστών να κατανοήσουν τις έννοιες «απείρως» μικρό ή μεγάλο και να τις αποδώσουν με μαθηματική αυστηρότητα όπως και η κατανόηση του «συνεχούς» και των αδιαιρέτων, ήταν τα μεγάλα εμπόδια στην προσέγγιση της έννοιας. Όταν οι μαθηματικοί αποσύνδεσαν την έννοια από την κίνηση και απομόνωσαν την γεωμετρική οπτική της, μπόρεσαν να διατυπώσουν τον ορισμό βασισμένο στο μέτρο και στις ανισότητες. Η διατύπωση του ορισμού του ορίου αποτέλεσε καταλύτη στην εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού, με άμεση συνέπεια οι έννοιες συνέχεια, παράγωγος και ολοκλήρωμα να ερμηνευθούν με αυστηρότητα και λογική συνέπεια.

Κεφάλαιο 3

Το άπειρο και το όριο στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών

3.1 Αναλυτικά Προγράμματα Σχολικά Εγχειρίδια και Εκπαιδευτική Πραγματικότητα

Γιατί διδάσκουμε Μαθηματικά; Η ερώτηση αυτή είναι μια πολύ συνηθισμένη ερώτηση, είναι μια απορία που έχει εκφρασθεί από πολλούς εμπλεκόμενους ή μη, με την μαθηματική εκπαίδευση και είναι ένα ερώτημα διαχρονικό. Όσο εύκολα διατυπώνεται το ερώτημα αυτό με ανάλογη ευκολία θα μπορούσε κάποιος να απαντήσει δίνοντας ποικίλους λόγους · ας αφήσουμε, όμως, την πολιτεία να απαντήσει στο παραπάνω ερώτημα:

«*Ο γενικός σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι:*

α) Η μεθοδική άσκηση του μαθητή στην ορθολογική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες, καθώς και η μύηση στη μαθηματική αποδεικτική διαδικασία. β) Η γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και η συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή, καθόσον τα Μαθηματικά αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την πειθαρχημένη σκέψη και συμπεριφορά, καλλιεργούν το αίσθημα του ωραίου και του ηθικού και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα. γ) Η ανάπτυξη ικανότητας για την ακριβή σύλληψη των εννοιών, των μεγεθών, των ιδιοτήτων και των μεταξύ τους σχέσεων και ιδιαιτέρως εκείνων που είναι απαραίτητες για την κατανόηση και επίλυση προβλημάτων της σύγχρονης ζωής και για την επαφή με τη σύγχρονη τεχνική, οικονομική και κοινωνική πραγματικότητα. δ) Ο εθισμός των μαθητών στη διατύπωση των διανοημάτων με τη χαρακτηριστική στη μαθηματική γλώσσα τάξη, σαφήνεια, ακρίβεια, αυστηρότητα, λιτότητα και κομψότητα. ε) Η κατανόηση του ρόλου των Μαθηματικών στους διάφορους τομείς της γνώσης και η επαρκής προπαρασκευή των μαθητών για τη συνέχιση των σπουδών τους» (Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ του ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ,1997).

Για την επίτευξη των παραπάνω σκοπών τίθενται επιμέρους στόχοι, δηλαδή στόχος ανάλογα και με την εκπαιδευτική βαθμίδα που διδάσκουμε, όπως:

α) Ο μαθητής να κατανοεί έννοιες, μαθηματικές διαδικασίες, γεγονότα και αρχές.

β) Ο μαθητής να εκτελεί πράξεις και να ακολουθεί διαδικασίες με ακρίβεια και ταχύτητα.

γ) Ο μαθητής να είναι ικανός να λύνει προβλήματα.

δ) Ο μαθητής να κατανοεί τη λογική δομή μιας απόδειξης.

ε) Ο μαθητής να αναπτύσσει θετικές στάσεις, να του προκαλείται το ενδιαφέρον και η περιέργεια και να αναπτύσσει πρωτοβουλίες.

ζ) Ο μαθητής να αναπτύσσει αποδοτικούς τρόπους μάθησης και επικοινωνίας στα μαθηματικά, καθώς και συνήθειες μελέτης και αναζήτησης της γνώσης για αυτόνομη πρόοδο.

Με τον όρο «γενικός σκοπός» εννοούμε τα κίνητρα και τους λόγους που προσφέρεται η μαθηματική παιδεία σ' ένα εκπαιδευτικό σύστημα. Αυτοί οι σκοποί είναι τα αναμενόμενα οφέλη που δικαιώνουν την ύπαρξη του μαθήματος των Μαθηματικών, ενώ με τον όρο «στόχο» εννοούμε κάθε τι ειδικότερο που η διδασκαλία των Μαθηματικών θέλει να εμφυσήσει μέσα σε ένα μικρό ή μεγάλο κομμάτι της εκπαιδευτικής διαδικασίας. (Τ. Πατρώνης- Δ. Σπανός, 2013, σελ.103).

Αφού λοιπόν δόθηκαν οι ορισμοί του «γενικού σκοπού» και των «στόχων» και αφού αναλύθηκαν οι σκοποί και οι στόχοι από την πολιτεία, θα περίμενε κανείς τα αποτελέσματα να εναρμονίζονται με τους σκοπούς αυτούς, έστω και αν κάτι τέτοιο δεν είναι τόσο εύκολα μετρήσιμο ή παρατηρήσιμο. Έτσι, επί παραδείγματι, πόσοι μαθητές θα απαντούσαν θετικά στο ερώτημα « συμφωνείτε ότι από την διδασκαλία των Μαθηματικών, αποκομίσατε τα παραπάνω; (όπως αναφέρονται στο κείμενο)». Χωρίς η απάντησή μας να είναι αποτέλεσμα ερευνητικής εργασίας αλλά μόνο από την προσωπική μας εμπειρία, οι μαθητές που θα απαντούσαν καταφατικά, θα ήταν πολύ λίγοι.

Υπάρχει λοιπόν, μια φανερή απόσταση μεταξύ του επιδιωκόμενου αποτελέσματος και του υπάρχοντος αποτελέσματος. Στην διαμορφωμένη αυτή πραγματικότητα πολύ λόγοι διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο· δύο από αυτούς είναι τα σχολικά εγχειρίδια και η διδακτική πρακτική.

Σύμφωνα με το Π.Ι (1999) «Το σχολικό εγχειρίδιο δεν κατασκευάζει απλώς το μήνυμα, δηλαδή τη σχολική εκδοχή της επιστημονικής γνώσης, αλλά διαμορφώνει και το δέκτη, δηλαδή τον αναγνώστη –μαθητή, μέσω της σύνθεσης της εικονογράφησης και του κειμένου, πρέπει λοιπόν να αξιολογηθεί». Ακόμα από *Ξωχέλλης* (2005) , το σχολικό εγχειρίδιο επιτελεί τις παρακάτω λειτουργίες: « α) πληροφορεί και ενημερώνει τον μαθητή για μια γνωστική περιοχή με ποικίλους τρόπους δηλαδή με κείμενο, εικόνες, σχεδιαγράμματα, και γραφικές παραστάσεις β) βοηθά τον εκπαιδευτικό στη μεθόδευση της διδασκαλίας, στην οργάνωση της ύλης και στη διαφοροποίηση της σχολικής διαδικασίας (με διαφορετικά κείμενα και ασκήσεις για κάθε μαθητή ή ομάδες μαθητών) και αποτελεί οδηγό για το μαθητή στη διαδικασία μάθησης γ) συμβάλλει επίσης στην εμπέδωση της παρεχόμενης γνώσης για το μαθητή, με παρακίνηση για επανάληψη, ασκήσεις- ερωτήσεις, παραδείγματα, κ.λπ., καθώς και στη δημιουργία κινήτρων μάθησης με διαμεσολάβηση για παραπέρα μελέτη- μάθησης» (Ο.ΕΠ.ΕΚ, 2008, σελ. 15)

Οι παραπάνω «λειτουργίες» είναι εκείνες που πρέπει να παρέχει ένα σχολικό εγχειρίδιο και η αξιολόγησή των σχολικών εγχειριδίων ως προς το περιεχόμενο τους διανέμεται στα παρακάτω κριτήρια (Chiappetta, Fillman & Sethna, 1991): α) κατανόηση της επιστημονικής γνώσης β) παρότρυνση για κατάκτηση επιστημονικής γνώσης γ) ανάπτυξη της κριτικής σκέψης δ) αλληλεπίδραση επιστήμης, τεχνολογίας και κοινωνίας. Βέβαια ένα σχολικό εγχειρίδιο πέρα από την «καθαρή» επιστημονική γνώση που μεταφέρει αξιολογείται και ως κοινωνικοποιητικό εργαλείο σαν μέσο για την διαμόρφωση στάσεων, αντιλήψεων και αξιών. (Kalmus, 2004, Woodward et Al, 1988; Johnsen, 1993; Mikk 2000). Στην παρούσα εργασία θα επικεντρωθούμε στο περιεχόμενο που αφορά την επιστημονική πλευρά.

Η σχετική έρευνα αποκαλύπτει ότι οι εκπαιδευτικοί αφιερώνουν το 90 έως 95% της διδακτικής ώρας αξιοποιώντας το διδακτικό υλικό των σχολικών εγχειριδίων (Eden, 1984, Καψάλης & Χαραλάμπους, 1995; Μπονίδης 2004). Επίσης, το 70% των δραστηριοτήτων που υλοποιούνται κατά τη διάρκεια του διδακτικού χρόνου καθορίζονται από το σχολικό εγχειρίδιο (Welss, 1988, σελ. 329), ενώ το 80% της όλης διδακτικής διαδικασίας αφιερώνεται σε θέματα που θίγονται στα σχολικά εγχειρίδια (Johnsen, 1993). Σύμφωνα με τα παραπάνω, η συγγραφή ενός σχολικού εγχειριδίου πρέπει να γίνεται πολύ προσεκτικά αφού αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο στην διαδικασία της εκπαίδευσης.

Ειδικότερα για την ελληνική πραγματικότητα, από έρευνα που έγινε το 2006 και μετείχαν 217 εκπαιδευτικοί από την πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οι απόψεις των εκπαιδευτικών, για το επιστημονικό περιεχόμενο των εγχειριδίων ταυτίζεται ως προς τα χαρακτηριστικά του με εκείνα της βιβλιογραφίας. Απαιτείται λοιπόν, να χρησιμοποιεί **ορθά τους επιστημονικούς όρους**, με επάρκεια και επιστημονική εγκυρότητα, να συνδέει την επιστήμη με την τεχνολογία , να προβάλλει διαθεματικά τη γνώση και να την προσεγγίζει με επαγωγικό τρόπο, προβάλλοντας τις σχέσεις αιτίου και αιτιατού, ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να εξοικειωθούν με τον επιστημονικό λόγο και να κατακτήσουν τις γνώσεις. (Ο.ΕΠ.ΕΚ, 2008, σελ. 78).

Είναι γενικά παραδεκτό ότι οι μαθητές του Λυκείου δείχνουν ελάχιστο ενδιαφέρον για τις σπουδές τους μέσα στο Λύκειο. Ειδικότερα για τα μαθήματα που δεν εξετάζονται στις πανελλαδικές εξετάσεις πρόσβασης για την τριτοβάθμια εκπαίδευση, το ενδιαφέρον των μαθητών είναι ανύπαρκτο. Τα φαινόμενα αυτά διαχέονται με μικρότερη ένταση και στο Γυμνάσιο. Η κυριότερη συνέπεια αυτής της πρακτικής είναι η δημιουργία ανεπιθύμητων «ικανοτήτων, δεξιοτήτων» και αντιλήψεων στους μαθητές, όπως η παρεμπόδιση της κριτικής σκέψης που επιχειρεί να φτάσει ένα στόχο, να ξεπεράσει μια αμφιβολία ή να αποφασίσει για την πορεία μιας δράσης.

Το ίδιο συμβαίνει σε μικρότερη ένταση ακόμα και για τα μαθήματα που εξετάζονται πανελλαδικά, επομένως και για τα μαθηματικά. Συνήθως οι μαθητές έχουν από καιρό διδαχθεί τη συγκεκριμένη ύλη στα φροντιστήρια, με συνέπεια το ενδιαφέρον για τη διδασκαλία του μαθήματος στο σχολείο να περιορίζεται. Το ενδιαφέρον για την γνώση παύει να υπάρχει και αυτό που παίρνει τη θέση του είναι η ανάγκη εισαγωγής σε κάποια τριτοβάθμια σχολή με οποιοδήποτε αντίτιμο. Ο μαθητής έτσι επιδίδεται σε ένα συνεχή ανταγωνισμό προκειμένου να επιτύχει τον στόχο του. Η στείρα απομνημόνευση, η επιμονή στη μεθοδολογία-διαδικασία και η λύση όσων περισσότερων τυποποιημένων ασκήσεων γίνεται, είναι η πρακτική που χρησιμοποιείται για την διδασκαλία των μαθηματικών στο Λύκειο από όλες τις πλευρές. (δημόσιο ή ιδιωτικό σχολείο - φροντιστήριο). Η διδασκαλία των μαθηματικών στο Λύκειο περιγράφεται από το παρακάτω μοτίβο: **θεώρημα ή ορισμός – απόδειξη (αν υπάρχει) - ασκήσεις**. Για μια τρίωρη γραπτή εξέταση πάνω σε πολύ συγκεκριμένη ύλη, μετά από χρόνια η μετά από μήνες, η παραπάνω διαδικασία όχι μόνο λειτουργεί αλλά βγάζει και από τη δύσκολη θέση τον εκπαιδευτικό αφού μπορεί να προγραμματίσει και να συντονίσει εύκολα την διδασκαλία του.

Υπάρχουν όμως και αρνητικά που πιστώνονται στην παραπάνω πρακτική. Αυτό μπορεί κάποιος να το δει παρατηρώντας τους λεγόμενους «καλούς» μαθητές να επεξεργάζονται μαθηματικά προβλήματα (βλ. Τ. Πατρώνης-Δ. Σπανός, 2013,σελ21). Τότε βρίσκει ότι έχουν σοβαρές παρανοήσεις σε βασικά θέματα. Η «επιτυχία» τους οφείλεται στο γεγονός ότι μεγάλο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης αναλώνεται στην διδασκαλία διαδικασιών.

Με άλλα λόγια, αυτό που μαθαίνουν οι περισσότεροι μαθητές είναι να εκτελούν ένα μεγάλο αριθμό τυποποιημένων διαδικασιών, συνδεδεμένων με γνωστούς σε αυτούς φορμαλισμούς, ώστε να μπορούν να δώσουν απαντήσεις σε σαφώς οριοθετημένες κλάσεις ερωτήσεων. Αποκτούν μια ικανότητα να λειτουργούν, με πολύ μικρότερη βέβαια ταχύτητα, όπως ένας υπολογιστής εφοδιασμένος με ένα κατάλληλο πρόγραμμα. Με τον τρόπο αυτό, καταλήγουν σε μια υπολογίσιμη μαθηματικά γνώση, χωρίς όμως τη μεθοδολογία εργασίας του μαθηματικού. Αυτό σημαίνει ότι στερούνται τον τρόπο που θα τους επέτρεπε να χρησιμοποιήσουν τη γνώση τους ευέλικτα για να λύσουν προβλήματα τύπου που δεν τους είναι γνωστά.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις και τα αποτελέσματα των διάφορων ερευνών συνθέτουν την εικόνα της μαθηματικής εκπαίδευσης στη δευτεροβάθμια. Οι αποκλίσεις από τον σκοπό της διδασκαλίας των μαθηματικών έχουν αιτίες, οι οποίες είναι σαφώς αναγνωρίσιμες. Επιβάλλεται λοιπόν να κατατεθούν διδακτικές πρακτικές και να αξιολογηθούν τα σχολικά εγχειρίδια ώστε να πλησιάσουμε τους στόχους τους οποίους θέτουμε κατά την σχεδίαση της διδακτικής των μαθηματικών.

3.2. Αναφορές των σχολικών βιβλίων στις άπειρες διαδικασίες στο άπειρο και το όριο

Παρόλο που η έννοια του απείρου και οι άπειρες διαδικασίες καθώς και οι έννοιες του συνεχούς των πραγματικών αριθμών όπως και η έννοια του ορίου δεν τονίζονται ρητά ούτε οριοθετούνται στα σχολικά εγχειρίδια (μέχρι την Β΄ Λυκείου), εντούτοις αυτές έννοιες εμφανίζονται στα βιβλία αυτά. Η πρώτη έμμεση αναφορά στο άπειρο και στις άπειρες (επαναληπτικές) διαδικασίες γίνεται ήδη από το βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου, όπου οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια αρκετές φορές και αυτό συνεχίζεται σχεδόν σε κάθε τάξη.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ενδεικτικά μερικά σημεία στα οποία αναφέρονται οι παραπάνω έννοιες· οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με αυτές, χωρίς να υπάρχει αποσαφήνισή τους, με *πιθανό* αποτέλεσμα οι *προσωπικοί ορισμοί* των μαθητών που δημιουργούνται κατά την διαδικασία αυτή να αποτελούν τροχοπέδη στην κατανόηση τους.

<u>Στην Α΄ Γυμνασίου</u>

Στην παράγραφο Β.1.1 υπάρχει η παρακάτω δραστηριότητα.

Το παρακάτω απόσπασμα είναι από το βιβλίο του καθηγητή που δίνει οδηγίες για ποιο λόγο τοποθετήθηκε η δραστηριότητα:

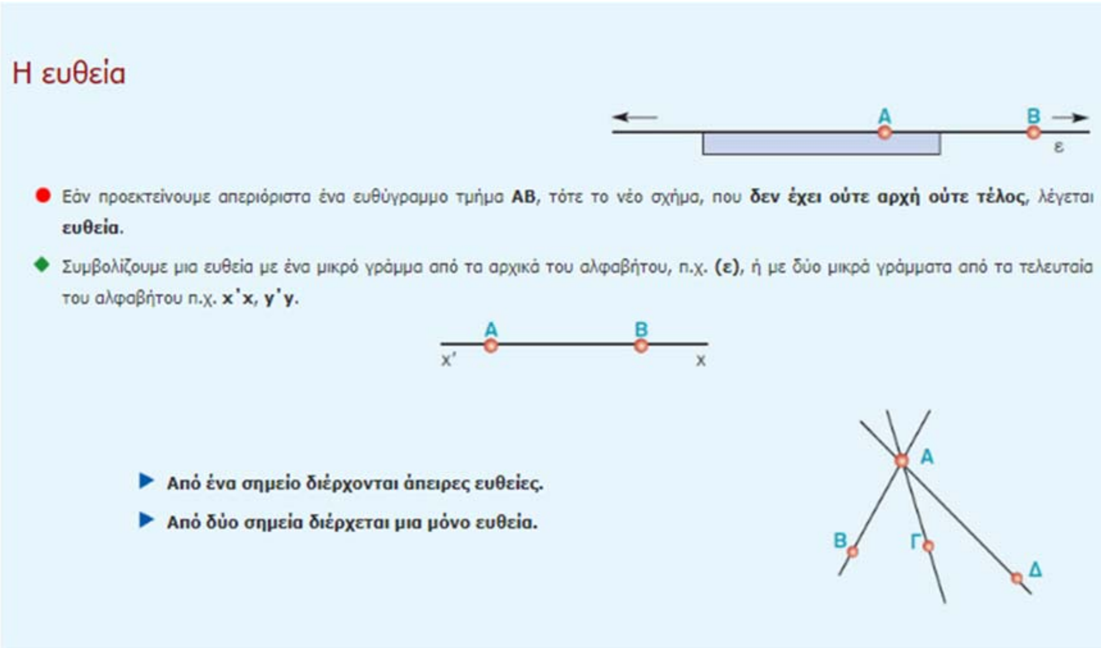
« *να γίνει κατανοητή η έννοια του ευθυγράμμου τμήματος, ως ονομασία, του γνωστού σε όλους φυσικού αντικειμένου, της τεντωμένης κλωστής, σε αντίθεση με μια συλλογή διακεκριμένων σημείων, ως αντιπαράδειγμα»*

Είναι βέβαιο ότι ο οι συγγραφείς προσπαθούν να αποδώσουν την έννοια του συνεχούς, σε μαθητές 12-13 χρονών, διαισθητικά χωρίς κάποια άλλη αναφορά.

Επίσης αξίζει να αναφερθεί ότι στην ίδια παράγραφο (σελ. 148) δίνεται και ορισμός του σημείου:

«Η άκρη του μολυβιού μας, οι κορυφές ενός σχήματος, η μύτη μιας βελόνας, μας δίνουν την έννοια του σημείου».

Εύλογος, μάλλον, θα είναι και ο προβληματισμός των μαθητών αν το ευθύγραμμο τμήμα θα αποτελείται από σημεία ή και από κάτι «άλλο».



Η ευθεία

- Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα **ΑΒ**, τότε το νέο σχήμα, που **δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος**, λέγεται **ευθεία**.
- Συμβολίζουμε μια ευθεία με ένα μικρό γράμμα από τα αρχικά του αλφαβήτου, π.χ. **(ε)**, ή με δύο μικρά γράμματα από τα τελευταία του αλφαβήτου π.χ. **x'x, y'y**.

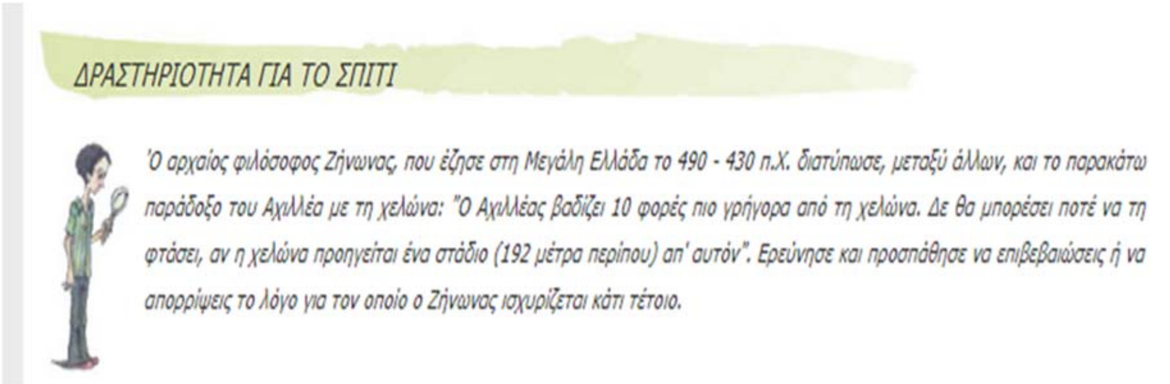
- **Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.**
- **Από δύο σημεία διέρχεται μια μόνο ευθεία.**

«Δεν έχει αρχή ούτε τέλος» ενεστωτικό άπειρο

« από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες» δυνητικό άπειρο.

στην τοποθέτηση αυτή πιστεύουμε ότι θα υπάρξουν μαθητές που θα αναρωτηθούν: « μα αν πάρω το μολύβι μου θα μπορέσω να φτιάξω πάνω από 100; (συμβολικός αριθμός)»

Κατά την άποψή μας, θα ήταν καλύτερα να υπήρχε το σχόλιο: «επεκτείνεται απεριόριστα και από τα δύο άκρα» και η λέξη «άπειρες» θα ήταν προτιμότερο να αντικατασταθεί με την έκφραση «όσες θέλουμε».


ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

'Ο αρχαίος φιλόσοφος Ζήνωνας, που έζησε στη Μεγάλη Ελλάδα το 490 - 430 π.Χ. διατύπωσε, μεταξύ άλλων, και το παρακάτω παράδοξο του Αχιλλέα με τη χελώνα: "Ο Αχιλλέας βαδίζει 10 φορές πιο γρήγορα από τη χελώνα. Δε θα μπορέσει ποτέ να τη φτάσει, αν η χελώνα προηγείται ένα στάδιο (192 μέτρα περίπου) απ' αυτόν". Ερεύνησε και προσπάθησε να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις το λόγο για τον οποίο ο Ζήνωνας ισχυρίζεται κάτι τέτοιο.

Στην παράγραφο Α. 7.7, υπάρχει η παρακάτω δραστηριότητα:

Παραθέτω τον στόχο της δραστηριότητας αλλά και τη λύση αυτής που δίνεται από τους συγγραφείς στο βιβλίο του καθηγητή.

«Η προτεινόμενη δραστηριότητα για το σπίτι έχει στόχο να δείξει ότι με το παράδοξο του Ζήνωνα μπορούμε να φθάσουμε στην περιοδική δεκαδική μορφή του κλασματικού ρητού αριθμού που είναι το αποτέλεσμα του υπολογισμού της απόστασης S που πρέπει να διανύσει ο Αχιλλέας μέχρι να φθάσει τη χελώνα, που είναι S = 1+0,1+0,01+0,001+… =1,111… = »

Πιθανώς οι συγγραφείς από την λύση που δίνουν εννοούν ότι:

Όταν ο Αχιλλέας έχει διανύσει τη διαφορά που είναι ένα στάδιο, η χελώνα θα έχει κάνει το 1/10 του σταδίου, όταν έχει ο Αχιλλέας καλύψει τη διαφορά του 1/10 του σταδίου η χελώνα θα έχει προχωρήσει το 1/100 του σταδίου κ.ο.κ.

Τι συμβολίζουν άραγε οι τρεις τελείες που φαίνονται και στη λύση; Μπορώ να προσθέσω αριθμούς που δεν ξέρω πόσοι είναι αλλά και ποιοι είναι; Εύλογα ερωτήματα που αναμένεται να έχουν αρκετοί μαθητές.

Παρατηρούμε ότι οι μαθητές στη συγκεκριμένη δραστηριότητα έρχονται σε επαφή με τις άπειρες διαδικασίες και το άθροισμα απείρων όρων μιας ακολουθίας εντελώς απροετοίμαστοι για την ενέργεια αυτή.

<u>Στη Β΄ Γυμνασίου</u>

Στο βιβλίο των μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου στην παράγραφο 2.2 γίνεται αναφορά στον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας του δύο ($\sqrt{2}$).

Αυτό σημαίνει ότι κάθε άρρητος αριθμός δεν μπορεί να γραφεί ούτε ως δεκαδικός, ούτε ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός.
Για να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$, παρατηρούμε διαδοχικά ότι:

$$
\begin{array}{rcl}
1 = 1^2 & < 2 < & 2^2 = 4 \\
1{,}96 = 1{,}4^2 & < 2 < & 1{,}5^2 = 2{,}25 \\
1{,}9881 = (1{,}41)^2 & < 2 < & (1{,}42)^2 = 2{,}0164 \\
1{,}9994 = (1{,}414)^2 & < 2 < & (1{,}415)^2 = 2{,}0022 \\
1{,}99996 = (1{,}4142)^2 & < 2 < & (1{,}4143)^2 = 2{,}00024 \\
1{,}9999899 = (1{,}41421)^2 & < 2 < & (1{,}41422)^2 = 2{,}000018 \\
& \cdots\cdots\cdots &
\end{array}
$$

Άρα:

$$
\begin{array}{rcl}
1 < & \sqrt{2} & < 2 \\
1{,}4 < & \sqrt{2} & < 1{,}5 \\
1{,}41 < & \sqrt{2} & < 1{,}42 \\
1{,}414 < & \sqrt{2} & < 1{,}415 \\
1{,}4142 < & \sqrt{2} & < 1{,}4143 \\
1{,}41421 < & \sqrt{2} & < 1{,}41422 \\
& \cdots\cdots\cdots &
\end{array}
$$

45 19/1/2013

46 Μέρος Α' - 2.2. Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

Επομένως, τον αριθμό $x = \sqrt{2}$, που προσπαθούμε να βρούμε, δεν μπορούμε να τον υπολογίσουμε με ακρίβεια, παρά μόνο προσεγγιστικά. Με τους προηγούμενους υπολογισμούς μπορούμε να προσεγγίσουμε τον $\sqrt{2}$ ως εξής:

Άρα:

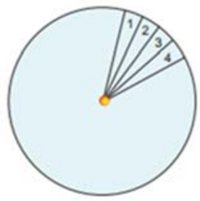
Έχουμε:
με **προσέγγιση χιλιοστού**: $\sqrt{2} = 1{,}414$
με **προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού**: $\sqrt{2} = 1{,}4142$
με **προσέγγιση εκατοντάκις χιλιοστού**: $\sqrt{2} = 1{,}41421$ κ.ο.κ.
Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{2}$**.

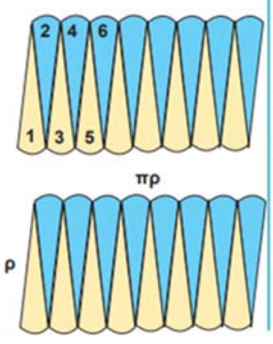
Παρατηρούμε ότι εδώ «εμφανίζεται» η μέθοδος της συμπίεσης του Αρχιμήδη. Οι τελείες προφανώς υποδηλώνουν το ατέρμονο της διαδικασίας, αλλά η επιλογή των ρητών τετραγώνων είναι μερικώς αυθαίρετη.

Επίσης στην παράγραφο 3.5 που αναφέρεται στον υπολογισμό του εμβαδού του κυκλικού δίσκου.

3.5. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου, χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο σε όσο πιο μικρά μέρη μπορούμε. Κόβουμε τα κομματάκια αυτά και κατόπιν τα τοποθετούμε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:





Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται ένα σχήμα που «μοιάζει» με ορθογώνιο. Αν συνεχίσουμε να χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο ολοένα σε πιο μικρά ίσα μέρη, τότε το τελικό σχήμα θα προσεγγίζει όλο και περισσότερο ένα ορθογώνιο, του οποίου η «βάση» είναι ίση με το μισό του μήκους του κύκλου, δηλαδή με **πρ**, και το «ύψος» με την ακτίνα του κύκλου.

Επομένως, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται, δηλαδή με $\rho \cdot \pi\rho$.

Επομένως:

Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ, ισούται με $E = \pi\rho^2$

Αναφέροντας το βιβλίο «*χωρίζουμε τον κυκλικό δίσκο σε όσο πιο μικρά μέρη μπορούμε*», υπονοεί μάλλον ότι η διαδικασία διαμέρισης δεν έχει τέλος αλλά ταυτόχρονα αποδέχεται και την ύπαρξη του ορίου αφού αναφέρει ότι: « *το τελικό σχήμα θα προσεγγίζει όλο και περισσότερο το ορθογώνιο»*.

Οι μαθητές στο παραπάνω κείμενο έρχονται σε διαισθητική επαφή με το όριο σαν άνω φράγμα μιας διαδικασίας.

<u>Στη Γ΄ Γυμνασίου</u>

Στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου δεν υπάρχει καμία αναφορά στο άπειρο ή στις άπειρες διαδικασίες ή και στο όριο. Θα περίμενε κανείς ότι η διαδικασία θα ήταν αντίστροφη, δηλαδή ότι όσο αυξάνονται οι γνώσεις και η ωριμότητα των μαθητών τόσο θα έρχονται σε επαφή με έννοιες που είναι δύσκολα προσδιορίσιμες. Όμως στην προκειμένη περίπτωση συμβαίνει ακριβώς το αντίστροφο.

<u>Στη Α΄ Λυκείου</u>

Οι αναφορές στο άπειρο ή στις άπειρες διαδικασίες στο σχολικό βιβλίο της Α΄ Λυκείου της Άλγεβρας είναι πολλές. Θα αναφερθούμε σε μερικές ενδεικτικά. Στην παράγραφο 2.2 σελ. 57 δίνεται ο ορισμός του διαστήματος με την βοήθεια της έννοιας του συνόλου.

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ 57

Διαστήματα

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $α \leq x \leq β$ λέγεται **κλειστό διάστημα από α μέχρι β** και συμβολίζεται με **[α, β]**.

Αν τώρα από το κλειστό διάστημα **[α, β]** παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο **ανοικτό διάστημα από το α μέχρι β** που συμβολίζεται με **(α, β)**.

Οι αριθμοί **α** και **β** λέγονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των **α** και **β** λέγεται **εσωτερικό σημείο** αυτών.

Η διαφορά δηλαδή μεταξύ ενός κλειστού και του αντίστοιχου ανοικτού διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.

Άλλες μορφές διαστημάτων είναι:

- ✓ Το **ανοικτό δεξιά διάστημα [α, β)** που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $α \leq x < β$ και
- ✓ Το **ανοικτό αριστερά διάστημα (α, β]** που αποτελείται από τους αριθμούς με x για τους οποίους ισχύει $α < x \leq β$.

Τέλος, υπό μορφή διαστήματος,

- ✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $α \leq x$ συμβολίζεται με **[α, +∞)**, ενώ
- ✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $x \leq α$ συμβολίζεται με **(−∞, α]**.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα **(α, +∞)** και **(−∞, α)**. Τα σύμβολα +∞ και −∞, που διαβάζονται **«συν άπειρο»** και **«πλην άπειρο»** αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

Αναφέρεται χαρακτηριστικά

*«Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$, που διαβάζονται **«συν άπειρο»** και **«πλην άπειρο»** αντιστοίχως δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς».* Το παραπάνω μάλλον θα προξενήσει προβληματισμούς και λιγότερο θα βοηθήσει στην αποσαφήνιση της έννοιας του απείρου.

Στην εισαγωγή του βιβλίου της Α΄Λυκείου δίνεται ο ορισμός του συνόλου κατά Cantor. Θα μπορούσε να έχει γίνει μια αναφορά για τον πληθάριθμο των συνόλων και να οριστεί το άπειρο όπως το ορίζει ο Cantor, έστω και επιγραμματικά. Εύλογα θα είναι τα ερωτήματα των μαθητών, για το πλήθος των στοιχείων του [α, β], και για ποιο σύνολο περιέχει περισσότερα στοιχεία το [α, β] ή το [α,+∞);

Στο κεφάλαιο 7 του ίδιου βιβλίου υπάρχει η παρακάτω παράγραφος.

7. 1 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f(x) = \alpha x^2$

Η συνάρτηση $g(x) = x^2$

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια, διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της g έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y. Άρα, σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως, αρχικά θα μελετήσουμε και θα παραστήσουμε γραφικά την g στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Έχουμε λοιπόν:

- **Μονοτονία:** Έστω τυχαία $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε θα είναι $x^2_1 < x^2_2$, οπότε θα έχουμε $g(x_1) < g(x_2)$. Άρα η συνάρτηση $g(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- **Ακρότατα:** Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει:

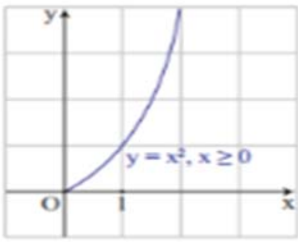
  $$g(x) = x^2 \geq 0 = g(0).$$

  Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο, το $g(0) = 0$.

- ***Συμπεριφορά της g για "μεγάλες" τιμές του x:*** Ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών της g για "πολύ μεγάλες" τιμές του x:

x	10^{10}	10^{20}	10^{50}	10^{100}	10^{1000}	...	$\to +\infty$
$g(x) = x^2$	10^{20}	10^{40}	10^{100}	10^{200}	10^{2000}	...	$\to +\infty$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα, ή όπως λέμε "**τείνει στο** $+\infty$", το x^2 αυξάνεται και αυτό απεριόριστα και μάλιστα γρηγορότερα και άρα "**τείνει στο** $+\infty$". Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της g προεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω, καθώς το x απομακρύνεται προς το $+\infty$.



Στην παράγραφο 7.1, έχουμε ένα άτυπο ορισμό της έννοιας του απείρου,

« αυξάνεται απεριόριστα... αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της g προεκτείνεται απεριόριστα...» Επίσης εμφανίζεται για πρώτη φορά το « τείνει στο .. » και μάλιστα σε εισαγωγικά για να δηλώσει μάλλον ότι ή έκφραση δεν είναι των συγγραφέων αλλά δανεική ίσως από τον *Lacroix*. Φαίνεται ότι επικρατεί γενικώς η ιδέα ότι είναι προτιμότερο να υπάρχει μια διαισθητική αντίληψη των εννοιών άπειρο, άπειρη διαδικασία και όριο, με ό,τι συνεπάγεται μια τέτοια τακτική, παρά μια προσπάθεια αποσαφήνισης των εννοιών, έστω και επιφανειακής.

Στη Β΄ Λυκείου

Στη Β΄ Λυκείου οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τρία διαφορετικά βιβλία αν έχουν επιλέξει τον θετικό προσανατολισμό ή με δύο αν έχουν επιλέξει διαφορετικό προσανατολισμό .Τα βιβλία της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας είναι κοινά για όλους τους μαθητές της Β΄ Λυκείου, ενώ το βιβλίο των Μαθηματικών του προσανατολισμού απευθύνεται μόνο σε όσους έχουν επιλέξει ως βασικό μάθημα τα Μαθηματικά.

Παρακάτω παραθέτουμε ενδεικτικά τρία διαφορετικά αποσπάσματα, ένα από κάθε βιβλίο, τα οποία περιέχουν την έννοια του ορίου. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθούν τα παρακάτω:

1) Για το κάθε βιβλίο υπάρχει διαφορετική ομάδα συγγραφέων.

2) Η έννοια της επαναληπτικής διαδικασίας μάλλον θεωρείται από τους συγγραφείς γνωστή στους μαθητές , γιατί δεν αναφέρεται σε κανένα σημείο αλλά υπονοείται.

Το πρώτο απόσπασμα, είναι από το βιβλίο της Γεωμετρίας. Στην παράγραφο 13.18 υπάρχει η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος

• **Εμβαδόν επιφάνειας σφαίρας**

Θεώρημα III

Το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας (Ο,ρ) ισούται με το εμβαδόν τεσσάρων μέγιστων κύκλων, δηλαδή:

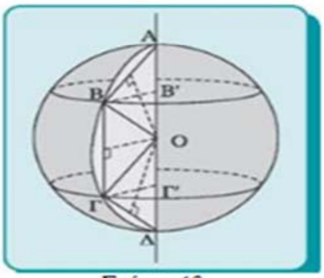
$$\mathbf{E=4\pi\rho^2.}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε ότι η σφαίρα (Ο,ρ) παράγεται από την περιστροφή ενός μέγιστου κύκλου της, με άξονα μία διάμετρο. Στο μέγιστο κύκλο εγγράφουμε ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο πλήθος κορυφών, π.χ. ένα εξάγωνο (σχ. 49). Κατά την περιστροφή γύρω από τη διάμετρο ΑΔ, η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ, σύμφωνα με το θεώρημα Ι του Πάππου, παράγει επιφάνεια εμβαδού:

$$E_6=2\pi\alpha_6(AB'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta)=2\pi\alpha_6\cdot A\Delta=4\pi\rho\alpha_6,$$

όπου α_6 είναι το απόστημα του κανονικού εξαγώνου.



Σχήμα 49

Διπλασιάζοντας συνεχώς τις πλευρές του εγγεγραμμένου πολυγώνου, στο όριο, η πλευρά του εγγεγραμμένου πολυγώνου συνεχώς μειώνεται, το πολύγωνο τείνει στο μέγιστο κύκλο και το απόστημα τείνει στην ακτίνα του κύκλου. Στο όριο λοιπόν, έχουμε:

$$\mathbf{E}=4\pi\rho\cdot\rho=4\pi\rho^2.$$

Αναφέρεται χαρακτηριστικά: *« διπλασιάζοντας συνεχώς τις πλευρές του εγγεγραμμένου πολυγώνου, στο όριο (!)*[1]*, η πλευρά του πολυγώνου συνεχώς μειώνεται, το πολύγωνο τείνει στο μέγιστο κύκλο και το απόστημα τείνει στην ακτίνα του κύκλου. Στο όριο λοιπόν έχουμε…»*

Οι συγγραφείς σε όλο το βιβλίο της Γεωμετρίας προσπαθούν να ακολουθήσουν το ύφος των πρωτότυπων κειμένων, αλλά χρησιμοποιούν έννοιες οι οποίες δεν ήταν καθορισμένες την περίοδο εκείνη. Η λέξη όριο, που υπάρχει στην απόδειξη, είναι τελείως αυθαίρετη.

Ακόμα και αν υποθέσουμε ότι οι μαθητές έχουν εξοικειωθεί με την έννοια του ορίου, αφού την έχουν «ακούσει» αρκετές φορές, ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται στην περίπτωση αυτή μόνο σύγχυση μπορεί να προκαλέσει. Αυτό συμβαίνει γιατί χρησιμοποιείται το όριο με διττή φύση, δηλαδή και ως κάτι που τερματίζεται, που

[1]Η επισήμανση δικιά μας. Η λέξη όριο εμφανίζεται αρκετές φορές στο βιβλίο της Γεωμετρίας˙ η αναφορά της λέξης εμφανίζεται για πρώτη φορά στο Ιστορικό Σημείωμα του κεφ. 7 και την παραθέτουμε αυτούσια. «*Η γενική θεωρία των αναλογιών αποτελεί τη βάση της μεθόδου της εξάντλησης, η οποία εφαρμόστηκε από τους αρχαίους Έλληνες στη μέτρηση (μη στοιχειωδών) επιφανειών και όγκων. Στηρίζεται στην ιδέα ότι αν από κάποιο μέγεθος αφαιρέσουμε περισσότερο από το μισό, από το υπόλοιπο επίσης κ.ο.κ., τότε μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων παίρνουμε υπόλοιπο μικρότερο από οποιοδήποτε δεδομένο μέγεθος(«Στοιχεία», Βιβλίο Χ, Πρόταση 1). Με άλλα λόγια, η διαφορά ανάμεσα σε μια μεταβλητή ποσότητα που τείνει σε ένα όριο, και στο όριο αυτό, μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε με υποδιπλασιασμό της*»

φτάνει στην άκρη το όριο δηλαδή ως σύνορο *« διπλασιάζοντας συνεχώς τις πλευρές του εγγεγραμμένου πολυγώνου, στο όριο…»,* αλλά και ως αποτέλεσμα μιας διαδικασίας *«Στο όριο λοιπόν έχουμε…».*

Οι συγγραφείς του βιβλίου του προσανατολισμού αναφέρουν μια άλλη εκδοχή για το όριο που ταιριάζει στις πρώιμες αναζητήσεις του, από τους μαθηματικούς που πρωτοασχολήθηκαν με την έννοια.. Στην παράγραφο 3.2, αναφέρονται τα παρακάτω :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}.$$

Έτσι, η εξίσωση (2) θα πάρει τη μορφή

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}(x - x_1),$$

δηλαδή τη μορφή

$$(y_2 + y_1)(y - y_1) = 2p(x - x_1). \qquad (3)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο $M_2(x_2,y_2)$, κινούμενο πάνω στην παραβολή *C*, τείνει να συμπέσει με το σημείο $M_1(x_1,y_1)$. Τότε το y_2 τείνει να γίνει ίσο με y_1 , οπότε η εξίσωση (3) της τέμνουσας ζ τείνει να πάρει τη μορφή

$$(y_1 + y_1)(y - y_1) = 2p(x - x_1),$$

δηλαδή τη μορφή

$$y_1(y - y_1) = p(x - x_1). \qquad (4)$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει την ευθεία ε, που είναι η *οριακή θέση της τέμνουσας ζ*, καθώς το M_2 *τείνει να συμπέσει με το* M_1 . Η ευθεία ε λέγεται **εφαπτομένη** της παραβολής στο σημείο M_1 . Η εξίσωση της εφαπτομένης γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} y_1 y - y_1^2 &= px - px_1 \\ yy_1 - 2px_1 &= px - px_1 \\ yy_1 &= px + px_1 \\ yy_1 &= p(x + x_1). \end{aligned}$$

Επομένως, η εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$\boxed{yy_1 = p(x + x_1)}$$

Όπως παρατηρείται , για την εύρεση της εφαπτόμενης της παραβολής, θεωρείται στην αρχή ότι μεταξύ των δύο σημείων υπάρχει κάποια διαφορά (είναι διαφορετικά), όταν όμως πρέπει να βρεθεί η τελική θέση η διαφορά μηδενίζεται. Τη θέση αυτή την ονομάζει *οριακή θέση της τέμνουσας.*(γεωμετρική άποψη της έννοιας του ορίου)

Στο βιβλίο της Άλγεβρας υπάρχει μια τρίτη διαφορετική εκδοχή για τον υπολογισμό του ορίου και την ερμηνεία του. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί ότι δίνεται και ο συμβολισμός.

Ο αριθμός e

Μια Τράπεζα για να διαφημιστεί κάνει μια πολύ ειδική προσφορά. Όποιος καταθέσει την επόμενη μέρα ποσό 1 εκατομμυρίου ευρώ, αυτό θα τοκιστεί με ετήσιο επιτόκιο 100% και με δυνατότητα ανατοκισμού του 1, 2, 3, … ή ν φορές το χρόνο, σε ίσα χρονικά διαστήματα, ανάλογα με την επιθυμία του καταθέτη.

Έχει σημασία για τον καταθέτη το πόσες φορές το χρόνο θα ανατοκιστεί το κεφάλαιο:

Από το γνωστό τύπο του ανατοκισμού $α_ν = α_0(1+τ)^ν$, όπου $τ = \frac{ε}{100}$

- αν ν = 1, είναι τ = 1 και $α_1 = 1\cdot(1+1)^1 = 2$ εκατομμύρια ευρώ.
- αν ν = 2, είναι $τ = \frac{1}{2}$ και $α_2 = 1\cdot(1+\frac{1}{2})^2 = 2{,}25$ εκατομμύρια ευρώ.
- αν ν = 3, είναι $τ = \frac{1}{3}$ και $α_3 = 1\cdot(1+\frac{1}{3})^3 = 2{,}44$ εκατομμύρια ευρώ.

………………………………………………………………………………………

- αν ν = ν, είναι $τ = \frac{1}{ν}$ και $α_ν = 1\cdot(1+\frac{1}{ν})^ν = (1+\frac{1}{ν})^ν$ εκατομμύρια ευρώ.

Αν χρησιμοποιήσουμε υπολογιστή τσέπης κατασκευάζουμε τον πίνακα:

ν	1 (ανά έτος)	2 (ανά εξάμηνο)	4 (ανά εποχή)	12 (ανά μήνα)	52 (ανά εβδομάδα)
$(1+\frac{1}{ν})^ν$	2	2,25	2,441406	2,613035	2,704813

1000	10000	100000	1000000
2,716923	2,718145	2,718268	2,718280

Παρατηρούμε ότι, καθώς το ν αυξάνει, αυξάνει και το $(1+\frac{1}{ν})^ν$ και προσεγγίζει έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και συμβολίζεται με **e**. Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στο μεγάλο Ελβετό, μαθηματικό **Leohard Euler** (1707-1783). Ο αριθμός **e** με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων είναι **e** = 2,71828.

Συμβολικά γράφουμε

$$\mathbf{e} = \lim_{ν\to\infty}\left(1+\frac{1}{ν}\right)^ν$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι τιμές του ν έχουν μεγάλη σημασία όσο αυτές παραμένουν «μικρές». Από μια τιμή όμως και μετά, όσο και αν αυξάνει το ν, το τελικό ποσό δεν μεταβάλλεται ουσιαστικά.

Ο ορισμός, για το όριο, που διαφαίνεται από την παραπάνω πρακτική είναι: *«αν μεγαλώνουν οι τιμές του ν και το αποτέλεσμα της παράστασης έχει μικρές μεταβολές τότε υπάρχει όριο».* Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό, οι τιμές της ακολουθίας $\frac{ημν}{10^{10}}$ δεν παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές όσο το ν αυξάνεται επομένως σύμφωνα με τον ορισμό που δίδεται, το όριο της ακολουθίας υφίσταται.

Κεφάλαιο 4

Θεωρητικό Πλαίσιο

4.1 Η μάθηση των Μαθηματικών κατά Piaget και Vygotsky

Τι εννοούμε με τον όρο μάθηση, αλλά και με ποιους τρόπους μαθαίνουμε, είναι θέματα ευρείας μελέτης από τους ερευνητές. Κατά τον Piaget η μάθηση δεν είναι τίποτα άλλο παρά η εξέλιξη της νοημοσύνης· η απόκτηση γνώσης, με την ευρεία έννοια, και η εξέλιξη της νοημοσύνης (ή της σκέψης) είναι ταυτόσημες έννοιες.

Σύμφωνα με τον Piaget μπορούμε να διακρίνουμε τη γνώση σε τρεις μεγάλες περιοχές: τη γνώση της φυσικής πραγματικότητας, τη γνώση της κοινωνικής πραγματικότητας και την λογικο-μαθηματική γνώση. Ενώ άλλοι πιστεύουν (εμπειρικοί γνωσιολόγοι) ότι η πηγή όλων των γνώσεων είναι το εξωτερικό περιβάλλον, ο Piaget θεωρεί, για την τρίτη περιοχή, σαν κύρια πηγή το ίδιο το υποκείμενο. Η λογικό-μαθηματική γνώση δεν προέρχεται απευθείας από τα αντικείμενα παρατήρησης. Το υποκείμενο την οικοδομεί (την κατασκευάζει) βήμα – βήμα, ενεργώντας πάνω στα αντικείμενα και εγκαθιστώντας σχέσεις μεταξύ τους, νέες σχέσεις μεταξύ αυτών των σχέσεων κ.ο.κ. (Τ. Πατρώνης- Δ. Σπανός,2013,σελ 15)»).

Αν λοιπόν δεχθούμε ότι μαθαίνω κάτι σημαίνει πως αυτό δημιουργείται στη σκέψη μου, καθώς ενεργώ πάνω σε άλλα γνωστά πράγματα, με σκοπό να λύσω το πρόβλημα, τότε η «διαδικασία» απόκτησης της μαθηματικής γνώσης από το υποκείμενο, θα είναι και αυτή αποτέλεσμα λύσης προβλήματος, το οποίο το υποκείμενο θα θέλει να το λύσει και θα αποτελεί κίνητρο για αυτό· και αυτό γιατί, οι ενέργειες που κάνει πάνω στα δεδομένα και στα ζητούμενα του προβλήματος του επιτρέπουν να πειραματιστεί, να υποθέσει, να εξερευνήσει και τελικά να εξαγάγει το συμπέρασμα αυξάνοντας την αφαιρετική του ενέργεια. Για να επιτευχθούν τα παραπάνω, πρέπει και το πρόβλημα να είναι κατάλληλα δομημένο ώστε ούτε να ξεπερνά κατά πολύ τις γνώσεις του μαθητή άλλα ούτε και να είναι απλοϊκό. Για να μεταβεί ο μαθητής όμως από τις συγκεκριμένες στις αφηρημένες πράξεις, δηλαδή από τις πράξεις πάνω σε συγκεκριμένα αντικείμενα στη νοητική δημιουργία μαθηματικών δομών, έχει ανάγκη τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσει να είναι οικεία. Σε αντίθετη περίπτωση τότε υπάρχει αβεβαιότητα, με όξυνση των προβλημάτων που απορρέουν από τον συμβολισμό των αντικειμένων αλλά και από τον συλλογισμό για μη πραγματικές καταστάσεις.

Με ένα κριτικό πνεύμα απέναντι στις απόψεις του *Piaget* για την μάθηση βρίσκονται οι απόψεις του *L. Vygotsky*. O Vygotsky στο βιβλίο του «*Γλώσσα και σκέψη*», όχι μόνο ανάπτυξε τη θεωρία του για τη γνωστική εξέλιξη των παιδιών, αλλά πρόσφερε μια διαφορετική ερμηνεία της σχέσης μεταξύ της εξέλιξης της γλώσσας και της εξέλιξης της σκέψης, από αυτή που είχε εκφράσει ο *Piaget*.

Για τον *Vygotsky* η μάθηση δεν είναι μια απλή σχέση μεταξύ ατόμου και γνώσης, αλλά η εισαγωγή του ατόμου σε μια υπάρχουσα κουλτούρα, δηλαδή στο σύνολο των πρακτικών και των γνώσεων, της κοινωνίας. Οι συνέπειες του γεγονότος αυτού, για την διδασκαλία, είναι πολύ μεγάλες, ειδικά όσον αφορά το ρόλο του δασκάλου και την αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλου μαθητή. Μια από τις βασικές διαδικασίες αυτής της αλληλεπίδρασης είναι η σημειωτική μεσολάβηση, δηλαδή η μεταφορά σημασιών και νοημάτων μέσω ενός συμβολικού συστήματος. (Vygotsky, 1978)

Η προσέγγιση του *Vygotsky* είναι γνωστή ως κοινωνικοπολιτιστική θεωρία γιατί φανερώνει τον δυναμισμό της επίδρασης που έχουν οι κοινωνικές σχέσεις και οι πολιτιστικές διεργασίες στην ανάπτυξη των παιδιών. Σύμφωνα με τον *Vygotsky* η κοινωνική αλληλεπίδραση προκαλεί αλλαγές στη σκέψη και στη συμπεριφορά των παιδιών. Η ανάπτυξη των παιδιών εξαρτάται όχι μόνο από τις αλληλεπιδράσεις τους με άλλους ανθρώπους, αλλά και από την διαδικασία της μάθησης που συντελείται μέσου της αλληλεπίδρασης του παιδιού με κάποιο άτομο που διαθέτει περισσότερες γνώσεις από αυτόν είτε είναι ο γονέας είτε ο δάσκαλος είτε κάποιος συνομήλικος.

Όσον αφορά στις απόψεις του για την μαθηματική διδασκαλία, αυτές είναι πολύ κοντά με του *Piaget*. Θεωρεί λοιπόν ότι η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης επιτυγχάνεται με την κατασκευή της και την ενεργητική προσπάθεια των μαθητών κι όχι με έτοιμους ορισμούς, θεωρήματα και αποδείξεις, ούτε με παθητική απομνημόνευση.

Η καλλιέργεια και η συνειδητοποίηση της μαθηματικής γνώσης προωθείται με κοινωνική και πολιτισμική επίγνωση, παρά ως ατομοκεντρικό επίτευγμα. Το νόημα, η αξία και η εγκυρότητα κάθε μαθηματικής γνώσης είναι διαποτισμένα από την κοινωνία και από τον πολιτισμό αυτής και όχι από εγωπαθή συμπτώματα ή υπερφυσικές ενατενίσεις, δηλαδή από νοερές προσηλώσεις σε κάτι αφηρημένο. Η μετάβαση από τον εμπειρικό τρόπο σκέψης στον επιστημονικό (δηλ. τον θεωρητικό) πραγματοποιείται με την απόκτηση ικανοτήτων χρήσης και συνειδητοποίησης των νοητικών εργαλείων, δηλαδή των γλωσσικών σημασιών και συμβόλων. Οι μαθητές «κατασκευάζουν» τη γνώση και για να ευδοκιμήσει η μαθησιακή τους πορεία , απαιτείται η ενεργός συμμετοχή τους. (Vygotsky, 1978)

Ο *Vygotsky* ασχολήθηκε και με την πρακτική πλευρά της θεωρίας του και προέκρινε το μοντέλο της «διαμεσολάβησης» (scaffolding). Είναι ένα μοντέλο εργασίας που σκοπός του είναι να καθοδηγεί και να εξελίσσεται μέσω της κοινωνικής αλληλεπίδρασης που διενεργείται κατά τη διάρκεια της μάθησης. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας, ο δάσκαλος δημιουργεί και χρησιμοποιεί τη γνώση που προκύπτει από ενέργειες προσαρμοσμένες στο περιεχόμενο του μαθήματος.

Η αλληλεπίδραση μεταξύ δάσκαλου - μαθητή, καθοδηγεί τις αναλύσεις και τις αποφάσεις του δασκάλου σχετικά με το πλάνο διδασκαλίας και τις ενέργειες του κατά τη διάρκειά της . Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να καθοδηγεί τις αναλύσεις και τις αποφάσεις του δασκάλου σχετικά με το πώς μπορούν οι μαθητές να συγκεκριμενοποιούν νέες μεθόδους και με εποπτικά υλικά, και να αναδομούν τη διδασκαλία τους, κάνοντας μια έρευνα στην τάξη τους.

Η διαμεσολάβηση του δασκάλου σημαίνει κάτι περισσότερο από το να μεταφέρει υποδείγματα ή οδηγίες για το πώς γίνεται κάτι. Καθώς ο δάσκαλος αλληλοεπιδρά με τον μαθητή αναλύει συνεχώς τον τρόπο σκέψης των μαθητών και ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν για τη σωστή χρήση της γλώσσας και την κατασκευή των εννοιών. Με βάση αυτή την ανάλυση ο δάσκαλος αποφασίζει πόση και ποιου τύπου υποστήριξη προσφέρει. Στόχος της διδακτικής διαμεσολάβησης είναι να βοηθά το μαθητή να αναπτύξει τη δική του αυτογνωσία, για να γίνει ανεξάρτητος και αυτοκαθοδηγούμενος.

4.2. Εμπόδια που εμφανίζονται κατά την διδασκαλία της έννοιας του ορίου

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε εν συντομεία στα διαφορετικά γνωστικά εμπόδια που παρουσιάζονται, όπως αυτά αναφέρονται στην διεθνή βιβλιογραφία, κατά την διδασκαλία του ορίου και θα αναλύσουμε εκείνα για τα οποία κατά τη γνώμη μας πρέπει να γίνει πιο εκτενή παρουσίαση.

Ανάλογα με την προέλευσή τους ο *Brousseau* (1983) ταξινομεί τα γνωστικά εμπόδια σε επιστημολογικά (που σχετίζονται με την ίδια τη γνώση) σε οντογενετικά (που σχετίζονται με την προσωπική νοητική ανάπτυξη), πολιτιστικά (που σχετίζονται με κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες) και σε διδακτικά (που σχετίζονται με επιλογές του εκπαιδευτικού συστήματος).

Επιστημολογικά Εμπόδια

Τα επιστημολογικά εμπόδια εμφανίζονται στην ιστορική ανάπτυξη της επιστημονικής σκέψης και στην εκπαιδευτική πρακτική. Αποτελούν αναπόφευκτα και ουσιαστικά συστατικά της αποκτώμενης γνώσης. *Ο Brousseau* (1983), ορίζει το επιστημολογικό εμπόδιο ως τη γνώση που λειτουργεί καλά για μια ορισμένη περιοχή της δραστηριότητας και επομένως εδραιώνεται, αλλά στη συνέχεια αποτυγχάνει να λειτουργήσει ικανοποιητικά σε ένα άλλο πλαίσιο και οδηγεί στις αντιφάσεις. Επομένως καθίσταται αναγκαίο να καταστραφεί η αρχική ανεπαρκής και λανθασμένα σχηματισμένη γνώση και να αντικατασταθεί με τη νέα έννοια που λειτουργεί ικανοποιητικά στο νέο πεδίο. Η απόρριψη και η διευκρίνιση ενός τέτοιου εμποδίου αποτελεί ουσιαστικό μέρος της ίδιας της γνώσης. Ο μετασχηματισμός δεν μπορεί να γίνει χωρίς την αποσταθεροποίηση των αρχικών ιδεών, με την τοποθέτηση τους σε ένα νέο πλαίσιο όπου φαίνεται σαφώς ότι αποτυγχάνουν. Αυτό επομένως αποτελεί μια μεγάλη προσπάθεια γνωστικής ανακατασκευής.

Τα επιστημολογικά εμπόδια προκύπτουν ως συνέπεια της φύσης της ίδιας της έννοιας (Herscovics,1989). Από αυτή την άποψη, η *Sierpinska* (1990) γράφει ότι ενώ μπορούμε με κάποιο τρόπο να έχουμε γνώση για κάποιο θέμα, όταν ανακαλύπτουμε ότι κάτι δεν είναι σωστό με την γνώση αυτή, τότε προσπαθούμε να διαφοροποιήσουμε την οπτική μας και να ανασυντάξουμε τη νέα γνώση. Αυτός ο νέος τρόπος γνώσης μπορεί, με τη σειρά του, να λειτουργήσει ως επιστημολογικό εμπόδιο σε διαφορετική κατάσταση.

Ο Cornu (1991), μελέτησε τα επιστημολογικά εμπόδια που εμφανίζονται στη ιστορική ανάπτυξη της έννοιας του ορίου. Διέκρινε τέσσερα σημαντικά επιστημολογικά εμπόδια:

1) Η αποτυχία σύνδεσης της γεωμετρίας με τους αριθμούς

Η μέθοδος της εξάντλησης, που αποδίδεται στον *Εύδοξο*, φαίνεται να είναι εξαιρετικά κοντά στην έννοια του ορίου. Δεν μπορούμε όμως να βεβαιώσουμε υπεύθυνα ότι οι αρχαίοι Έλληνες κατείχαν τη σύγχρονη έννοια του ορίου. Η μέθοδος της εξάντλησης είναι ουσιαστικά μια γεωμετρική μέθοδος που επιτρέπει την απόδειξη αποτελεσμάτων χωρίς να πρέπει να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα του απείρου. Δεν υπάρχει καμία μεταφορά από τα γεωμετρικά σχήματα σε μία καθαρά αριθμητική ερμηνεία, οπότε η έννοια του αριθμητικού ορίου απουσιάζει. Η γεωμετρική ερμηνεία και η επιτυχία της στην επίλυση συναφών προβλημάτων φαίνεται ότι προκάλεσε ένα εμπόδιο που απέτρεψε τη μετάβαση στην έννοια του αριθμητικού ορίου.

2) Η έννοια του απείρως μεγάλου και του απείρως μικρού

Το άπειρο ένα σημείο διαμάχης ανάμεσα στους μαθηματικούς, στους προγενέστερους αλλά και τους σύγχρονους (βλέπε κεφ. 2), είναι μια πρόκληση για τους μαθητές καθώς τα «διαδικαστικά» εμπόδια αντανακλώνται στη διάκριση, μεταξύ, του αν το άπειρο μπορεί να υπάρξει (ενεστωτικό) ή αν είναι απλά μια διαδικασία (δυνητικό) (Juter, 2006b). Ο τρόπος με το οποίο το άπειρο έχει «αποσαφηνιστεί» και από τη μεταφυσική του πλευρά, προκύπτει ακόμα ένα «εννοιολογικό» εμπόδιο.

3) Η μεταφυσική άποψη της έννοιας του ορίου

Η μεταφυσική πλευρά της έννοιας του ορίου, δηλαδή τι ακριβώς είναι το όριο με τι προσομοιάζει, αποτελεί ένα από τα βασικά εμπόδια και για τους σημερινούς μαθητές. Αυτό το εμπόδιο καθιστά την κατανόηση της έννοιας του ορίου ιδιαίτερα δύσκολη, ειδικά όταν ένα όριο δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα με τη χρήση γνωστών μεθόδων άλγεβρας και αριθμητικής.

Σε όλη την ιστορία της έννοιας του ορίου συναντάμε την υπόθεση της ύπαρξης απειροελάχιστων ποσοτήτων. Είναι πιθανό να υπάρξουν ποσότητες που να είναι τόσο μικρές ώστε να είναι σχεδόν μηδενικές και όμως να έχουν ένα σχεδόν «προσδιορίσιμο» μέγεθος; Η ιδέα μιας ενδιάμεσης κατάστασης, μεταξύ εκείνου που είναι τίποτα και εκείνου που δεν είναι, συναντάται συχνά στους σύγχρονους μαθητές. Πολλές φορές θεωρούν πως το σύμβολο «ε» αναπαριστά έναν αριθμό που δεν είναι μηδέν αλλά ταυτόχρονα είναι μικρότερος από οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό. Με τον ίδιο τρόπο ορισμένοι μαθητές μπορεί να πιστεύουν ότι το 0,999… είναι ο τελευταίος αριθμός πριν από το 1 αλλά που δεν είναι ίσος με 1.

4) Επιτυγχάνεται το όριο ή όχι;

Αυτό το τελευταίο ζήτημα έχει απασχολήσει τους μαθηματικούς για πολλά χρόνια, υπογραμμίζοντας τον τρόπο με τον οποίο, στην ανάπτυξη της οριακής αντίληψης, οι μαθηματικοί έχουν επανειλημμένα αντιμετωπίσει θεωρητικές δυσκολίες, και τις οποίες οι μαθητές συνήθως αντιμετωπίζουν και αυτοί κατά την εκμάθηση του ορίου (Juter, 2006a & Juter, 2006b).

Οντογενετικά – Πολιτιστικά εμπόδια

Τα οντογενετικά εμπόδια είναι ασαφή, πολύπλοκα και είναι δύσκολο να εντοπιστούν και να κατανοηθούν. Οι βασικές δυσκολίες των μαθητών προέρχονται από την αδυναμία τους να παρακολουθήσουν το ανώτερο δομικό επίπεδο και οι ομοιότητες ανάμεσα στη φυλογένεση και την οντογένεση δεν είναι ούτε τυχαίες ούτε μικρές (Sfard, 1995).

Ο τυπικός ορισμός του ορίου είναι μια αυστηρά μαθηματική έκφραση δυσνόητη για τους μαθητές. Η εφαρμογή του προϋποθέτει δεξιότητες από τους μαθητές, όπως είναι ο χειρισμός των απολύτων τιμών και των ανισοτήτων. Επίσης ο χειρισμός των ποσοδεικτών τους δημιουργεί προβλήματα (Cottrill et al.1996). O Tall (1986) αναφέρει ότι, τα στοιχεία από έρευνες όσον αφορά τις δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας του ορίου, κατέστησαν εντελώς ακατάλληλη την προσέγγιση της είτε μέσω του τυπικού ορισμού είτε μέσω της γεωμετρικής εμπειρίας μιας τέμνουσας που τείνει σε μια εφαπτομένη (όταν αναφερόμαστε στην έννοια της παραγώγου).

Πολλά από αυτά τα εμπόδια προκύπτουν ως συνέπεια της διαδικασίας αφαίρεσης που εμπλέκεται στην τυποποίηση της έννοιας. Για παράδειγμα, μελέτες έχουν εντοπίσει διαφορές μεταξύ του τυπικού ορισμού της οριακής έννοιας και της εικόνας που χρησιμοποιούν οι μαθητές στο μυαλό τους όταν εργάζονται μαζί της, κάτι που συχνά οδηγεί σε ασυμβατότητα μεταξύ της αντίληψης του ατόμου και του τυπικού ορισμού του ορίου (Parameswaran, 2007, Tall & Vinner, 1981)

Όσο πιο αφηρημένη είναι η έννοια, τόσο πιο εννοιολογικές είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και τόσο λιγότερο είναι σε θέση να συντονίσουν τις ιδέες τους με τον ορισμό της έννοιας, σπέρνοντας τους σπόρους των μελλοντικών γνωστικών εμποδίων (Tall & Schwarzenberger, 1978).Επίσης, σύμφωνα με την *Szydllik* (2000) , οι απόψεις που έχουν οι μαθητές για το άπειρο, τις συναρτήσεις και τους πραγματικούς αριθμούς μπορεί επίσης να δημιουργούν εμπόδια στην κατανόηση της έννοιας του ορίου.

Δεδομένου ότι οι μαθηματικές έννοιες έχουν μια διπλή φύση, , ως έννοιες και ως διαδικασία, το ίδιο συμβαίνει και με το σύμβολο του ορίου, (Gray & Tall, 1994, Tall, 2000) μια πραγματικότητα που δημιουργεί εμπόδια στους μαθητές. Η συμβολική αναπαράσταση του ορίου, υποδηλώνει μια διαδικασία που πιθανώς δεν τελειώνει ποτέ, μια διαδικασία που όλο και «πλησιάζει», αλλά και το ίδιο το όριο σαν αντικείμενο (αριθμό) (Gray & Tall, 1994). Η πρώτη, που θεωρείται ως έννοια, αντιπροσωπεύεται συνήθως από λέξεις που υποδηλώνουν κίνηση και επικεντρώνεται στη συμπεριφορά της συνάρτησης κοντά στο σημείο στο οποίο ενδιαφερόμαστε. Η δεύτερη, που θεωρείται ως μαθηματικό αντικείμενο, επικεντρώνεται στην ολοκλήρωση της διαδικασίας , μια στατική ποσότητα,, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάποιο άλλο σκοπό. Αυτή η εναλλαγή στη θεώρηση του ορίου από δυναμικό σε στατικό δημιουργεί εμπόδια στη μάθηση.

Επίσης, οι αυθόρμητες-διαισθητικές και προγενέστερες αντιλήψεις των μαθητών συνήθως παραμένουν επί μακρόν στο μυαλό τους , υποδεικνύοντας ότι οι αντιλήψεις και οι εικόνες που σχηματίζονται κατά τη διάρκεια των μαθημάτων στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, μπορούν να παραμείνουν στους μαθητές (Prezenioslo, 2004) και εξακολουθούν να υφίστανται ακόμη και μετά την τριτοβάθμια εκπαίδευση (Szydlik, 2000).

Διδακτικά Εμπόδια

Τα διδακτικά εμπόδια προκύπτουν ως συνέπεια της φύσης της διδασκαλίας και της μάθησης. Οι τρόποι παρουσίασης της έννοιας στα σχολικά εγχειρίδια, η σειρά της διδασκαλίας των συναφών εννοιών και ο τρόπος με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί θα προσεγγίσουν την έννοια, αποτελούν τις συνιστώσες οι οποίες επηρεάζουν την κατανόηση του ορίου, από τους μαθητές.

Πράγματι, η διδασκαλία που δίνει έμφαση στις διαδικαστικές αντί για τις εννοιολογικές πτυχές των ορίων μπορεί να οδηγήσει σε κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές ως μεμονωμένες διαδικασίες (Bezuidenhout, 2001). Τα διάφορα εννοιολογικά προβλήματα όμως μπορούν να αμβλυνθούν μέσω της διδασκαλίας που δίνει έμφαση στις σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών, αριθμητικών, αλγεβρικών και λεκτικών αναπαραστάσεων του ορίου (Stewart, 2008).

Η απουσία προσπάθειας των δασκάλων να οδηγήσουν τους μαθητές να συνδέσουν την έννοια των ορίων με την ιστορική τους εξέλιξη μπορεί να θεωρηθεί ως πηγή ασυνέχειας, και να αποτελέσει πιθανό διδακτικό εμπόδιο, μεταξύ στοιχειωδών και προηγμένων μαθηματικών Cornu (1991).

Επίσης, η έρευνα έχει δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί και τα βιβλία ενθαρρύνουν τους μαθητές να αναπτύξουν αυθόρμητα μοντέλα για το όριο των συναρτήσεων που βασίζονται σε ένα μείγμα μαθηματικών, κοινωνικών, γνωστικών και διδακτικών κανόνων, που μπορεί να επηρεάσουν την ικανότητά τους να σκέφτονται μαθηματικά (Hardy, 2009).

4.3 Ο ρόλος των ορισμών στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών

Οι ορισμοί γενικά διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες (R. Gorski, 1981). Σε ***ονοματικούς*** ορισμούς (nominal definitions) οι οποίοι ορίζουν μόνο το νόημα με το οποίο χρησιμοποιείται ένα όνομα ή μια έκφραση και όχι το αντικείμενο που ονομάζεται με τους όρους αυτούς. Επίσης και σε ορισμούς (πραγματικούς) του ***περιεχομένου*** (real definitions) οι οποίοι ορίζουν κατευθείαν το περιεχόμενο ή τα αντικείμενα καθαυτά. Ο αυστηρός ορισμός του ορίου είναι ένας ***ονοματικός*** ορισμός, αφού μας καθορίζει την έννοια του, ενώ ο ορισμός : *«Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο όταν έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες»* είναι ορισμός ***περιεχομένου*** αφού μας ορίζει το περιεχόμενο του αντικειμένου.

Στην εισαγωγή στο άρθρο της *Judith Grabiner* " Who gave you the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus", εμφανίζεται η παρακάτω στιχομυθία

Student: The car has a speed of 50 miles an hour. What does that mean?
Teacher: Given any $\varepsilon > 0$, there exists a δ such that if $|t_2 - t_1| < \delta$, then $\left|\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} - 50\right| < \varepsilon$.
Student: How in the world did anybody ever think of such an answer?

Η απορία του μαθητή μπορεί να μην έχει καταγραφεί, αλλά σίγουρα σε όλους μας είναι οικεία, αφού όλοι ή σχεδόν όλοι κάναμε την ίδια σκέψη όταν ακούσαμε για πρώτη φορά τον αυστηρό ορισμό του ορίου. Παρουσιάζεται εδώ λοιπόν, ξεκάθαρα, πόσο δύσκολο είναι για τους μαθητές να αποδεχτούν τους ορισμούς της σύγχρονης μαθηματικής ανάλυσης αφού είναι πολύ μακριά από τη διαίσθησή τους.

Ο ορισμός (ονοματικός) δημιουργεί ένα σοβαρό πρόβλημα στη μάθηση των μαθηματικών. Αντιπροσωπεύει, ίσως, περισσότερο από οτιδήποτε άλλο τη σύγκρουση μεταξύ της δομής των μαθηματικών, όπως σχεδιάστηκαν από τους επαγγελματίες μαθηματικούς, και των γνωστικών διαδικασιών της απόκτησης ιδεών. Όλοι όσοι ασχολούνται με τα μαθηματικά συμφωνούν, ότι αυτά είναι μια επαγωγική θεωρία και ως εκ τούτου βασίζονται στον ορισμό θεμελιωδών εννοιών και προτάσεων (αξιώματα). Από τις θεμελιώδεις έννοιες ορίζονται όλες οι άλλες έννοιες. Όλα τα θεωρήματα, τα οποία δεν είναι αξιώματα, αποδεικνύονται από τα αξιώματα με ορισμένους κανόνες συμπερασμάτων. Αυτή, είναι σε γενικές (απλές) γραμμές, η εικόνα των Μαθηματικών, όπως θα μπορούσε κάποιος σύντομα να την παρουσιάσει.

Όπως είδαμε και παραπάνω, οι έννοιες των Μαθηματικών αναπτύσσονται σταδιακά, για μεγάλο χρονικό διάστημα . Μαθητές και φοιτητές δεν έχουν συνείδηση ότι πολλοί ορισμοί (και ομοίως, και εναλλακτικοί προς αυτούς ορισμοί) παρουσιάζουν «αδύνατα σημεία», δηλαδή, αποκλίσεις μεταξύ του τυπικού ορισμού μιας έννοιας και της κατάστασης που θέλουμε να χαρακτηρίσουμε την έννοια αυτή (Kronfellner, 2003). Δηλαδή, όπως έχει περιγραφεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, η δημιουργία ενός ορισμού δεν είναι μια διαδικασία χωρίς επαναπροσδιορισμούς μέχρι να φτάσουμε στην πλήρη απόδοση της έννοιας.

Ένας «προσωπικός» ορισμός έννοιας, μπορεί να είναι ένας δοθείς ορισμός ή ένας που κατασκευάζεται από το ίδιο το άτομο συνδυάζοντας πολλές «διαδικασίες» (processes) που ενεργοποιούνται συνειδητά και ασυνείδητα, και ενδεχομένως να διαφέρει από ένα «τυπικό» ορισμό έννοιας (Tall & Vinner 1981,). Ο προσωπικός ορισμός έννοιας μπορεί να διαφέρει από καιρό σε καιρό και από άτομο σε άτομο· ενώ ο τυπικός ορισμός έννοιας είναι ο αντικειμενικός, είναι αυτός που δεν αλλάζει από καιρό σε καιρό ούτε από άτομο σε άτομο. Ο τελευταίος όντας ένας ορισμός έννοιας είναι αυτός που γίνεται αποδεκτός από την ευρύτερη μαθηματική κοινότητα. Το γεγονός αυτό αποδίδεται στη διαφορετικότητα της γνωστικής δομής που υπάρχει στο μυαλό του κάθε ατόμου, καθώς επηρεάζεται από μία ποικιλία από προσωπικών νοητικών εικόνων (mental images) . (Tall & Vinner, 1981).

Συνήθως, για να διδάξουμε μαθηματικά, ξεκινάμε με γνωστές αντιλήψεις και γνωστά θεωρήματα και προχωράμε με τον ορισμό νέων εννοιών και την απόδειξη νέων θεωρημάτων. Οι έννοιες και τα γνωστά θεωρήματα αποτελούν σκαλοπάτι για νέα αποτελέσματα (έννοιες-θεωρήματα). Ο τρόπος αυτός «παρουσίασης» των νέων εννοιών δεν είναι πάντα ο ενδεδειγμένος· συνήθως οι καθηγητές των Μαθηματικών κατά τη διδασκαλία τους, παραθέτουν μια σειρά από ορισμούς, θεωρήματα και αποδείξεις ως πρόταση για την μορφή της διδασκαλίας τους. Όμως, αυτού του είδους η διδασκαλία μπορεί να είναι, τις περισσότερες φορές, άρτια από επιστημονική πλευρά, μπορεί όμως να είναι παιδαγωγικά λανθασμένη, δεδομένου ότι η διδασκαλία θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη και τις συνήθεις ψυχολογικές διεργασίες της απόκτησης ιδεών αλλά και τους λογικούς συμπερασμούς. (Vinner, 1991)

Το όνομα μιας έννοιας, όταν το βλέπουμε ή όταν το ακούμε προκαλεί ένα ερέθισμα στη μνήμη μας, αυτό το ερέθισμα δεν πρόκειται συνήθως, για τον τυπικό ορισμό της έννοιας. Αυτό που έρχεται στη μνήμη μας όταν ακούμε η βλέπουμε το όνομα μιας έννοιας αποκαλείται «εικόνα έννοιας» (concept image) (Tall & Vinner, 1981, Vinner, 1983) ή «πλαίσιο έννοιας» (concept frame) (Davis, 1984). Αυτή μπορεί να είναι μια οπτική αναπαράσταση της έννοιας στην περίπτωση που έχει οπτικές αναπαραστάσεις. Μπορεί επίσης, να είναι μια συλλογή εντυπώσεων ή εμπειριών οι οποίες όμως ενδέχεται να παραπλανούν δηλαδή να δίνουν εσφαλμένη ή ελλιπή εικόνα της. Η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει τον σχηματισμό μιας εικόνας για αυτήν. Η αποστήθιση του τυπικού ορισμού της δεν εγγυάται την κατανόηση της. Για να την κατανοήσουμε πρέπει να διαθέτουμε μια σωστή εικόνα της. (Vinner, 1991)

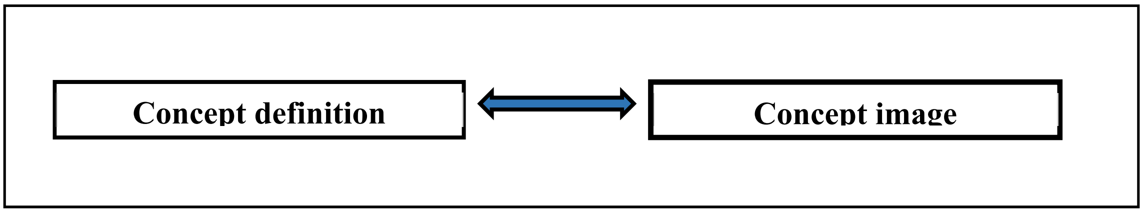
Στην καθημερινότητα οι ορισμοί μπορεί να μην παίζουν τόσο σοβαρό ρόλο ώστε να μπορούμε να είμαστε λειτουργικοί. Στα Μαθηματικά όμως, οι ορισμοί έχουν εξαιρετικά σημαντικό ρόλο, όχι μόνο γιατί βοηθούν στο σχηματισμό της εικόνας της έννοιας αλλά και γιατί πολύ συχνά διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο ως προς δύο αντίθετες κατευθύνσεις. Επίσης, αποτελούν σκαλοπάτι και τροφή για ανώτερες σκέψεις αλλά ταυτόχρονα μπορεί να αποτελέσουν και ανυπέρβλητο εμπόδιο στην μαθηματική εξέλιξη των μαθητών .

Οι μαθηματικοί ορισμοί, απαιτούν από τους μαθητές κάποιες νοητικές συνήθειες που είναι εντελώς διαφορετικές από εκείνες που υφίστανται στα πλαίσια της καθημερινής ζωής. Είναι πολύ πιθανό, τουλάχιστον στην αρχή της διαδικασίας της μάθησης, οι νοητικές συνήθειες που διαμορφώνονται από την καθημερινή ζωή να κυριαρχήσουν πάνω στις νοητικές συνήθειες που απαιτούνται. (Vinner, 1991).

Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές ο ορισμός μιας έννοιας αποτελεί ένα αρκετά διαφορετικό θέμα . Θεωρούν ότι ο ορισμός της έννοιας (concept definition) είναι ένα σχήμα λέξεων που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει εκείνη την έννοια. Είναι δυνατόν να τον μάθει κάποιος μηχανικά ή να του αποδώσει βαθύτερο νόημα ή να τον συσχετίσει σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό με την έννοια στο σύνολο της. Μπορεί επίσης να είναι μια προσωπική του εξήγηση για την δική του (προκαλούμενη) εικόνα της έννοιας. Ο μαθητής μπορεί να μεταβάλλει χρονικά τον ορισμό που του δίνεται ή κατασκευάζει μόνος του. Μ' αυτόν τον τρόπο ένας προσωπικός ορισμός της έννοιας μπορεί να διαφέρει από τον τυπικό ορισμό της ο οποίος είναι αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα. Για κάθε μαθητή ένας ορισμός της έννοιας παράγει τη δική του εικόνα έννοιας ο οποίος θα μπορούσε να ονομαστεί *«εικόνα του ορισμού της έννοιας»*. Αυτό φυσικά είναι τμήμα της εικόνας έννοιας. Σε κάποιους μαθητές μπορεί να είναι ουσιαστικά ανύπαρκτο. Σε άλλους μπορεί ή όχι να συσχετίζεται λογικά με άλλα τμήματα της εικόνας έννοιας.

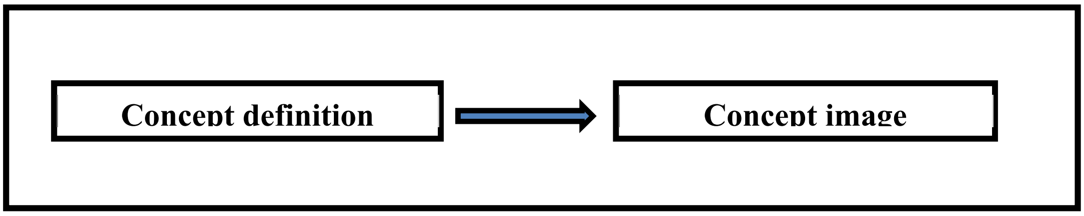
Ας υποθέσουμε την ύπαρξη δύο διαφορετικών «κελιών» στη γνωστική μας δομή. Το ένα κελί είναι για τον (τυπικό) ορισμό της έννοιας και το δεύτερο για την εικόνα της έννοιας. Ένα από τα κελιά ή ακόμα και τα δύο μπορεί να είναι κενά. Το κελί της εικόνας της έννοιας θεωρείται κενό, εφόσον δεν αποδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί σε πολλές περιπτώσεις όπου η απομνημόνευση του ορισμού της έννοιας γίνεται με έναν τρόπο άνευ νοήματος . Μπορεί επίσης, να υπάρξει κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ των κελιών αν και μπορούν να διαμορφωθούν ανεξάρτητα.

Μια παρόμοια διαδικασία ενδέχεται να εμφανιστεί όταν μια έννοια εισάγεται αρχικά μέσω ενός ορισμού. Εδώ, το κελί της εικόνας της έννοιας είναι κενό αρχικά. Μετά από πολλά παραδείγματα και επεξηγήσεις γεμίζει βαθμιαία.



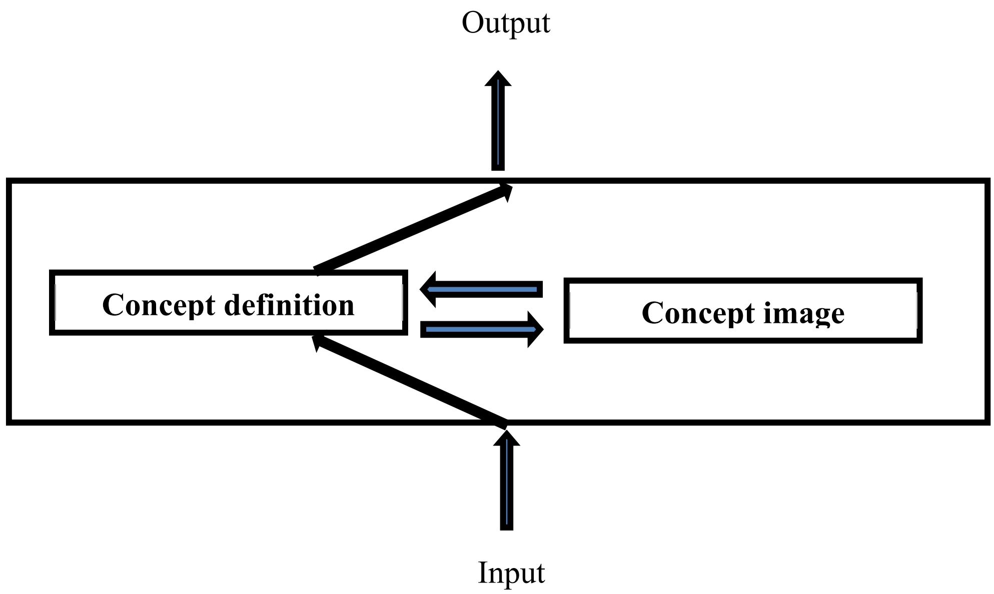
Σχήμα 1: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας έννοιας & ορισμού έννοιας

Το σχήμα ένα **(1)** αναφέρεται στις μακροχρόνιες διαδικασίες του σχηματισμού μιας έννοιας μέσω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των περιεχομένων των δύο κελιών. Όμως πολλοί εκπαιδευτικοί στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση αναμένουν μια διαδικασία μονής κατεύθυνσης για το σχηματισμό έννοιας, όπως φαίνεται στο σχήμα δύο **(2)**. Αναμένουν, δηλαδή, ότι η εικόνα έννοιας θα διαμορφωθεί με τη βοήθεια του ορισμού και θα ελέγχεται πλήρως από αυτήν.

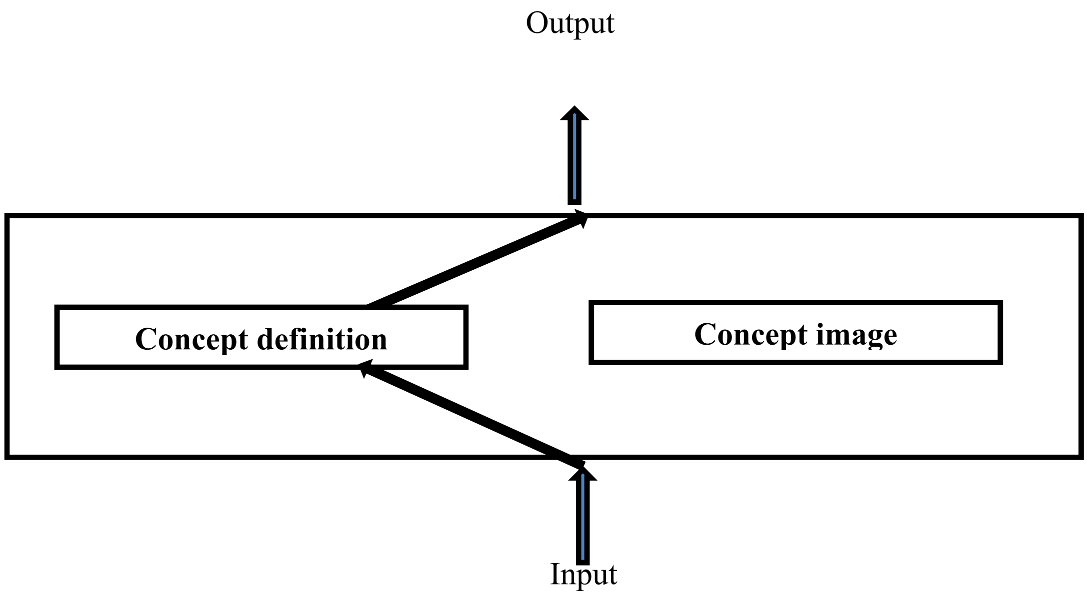


Σχήμα 2: Γνωστική ανάπτυξη μιας τυπικής έννοιας

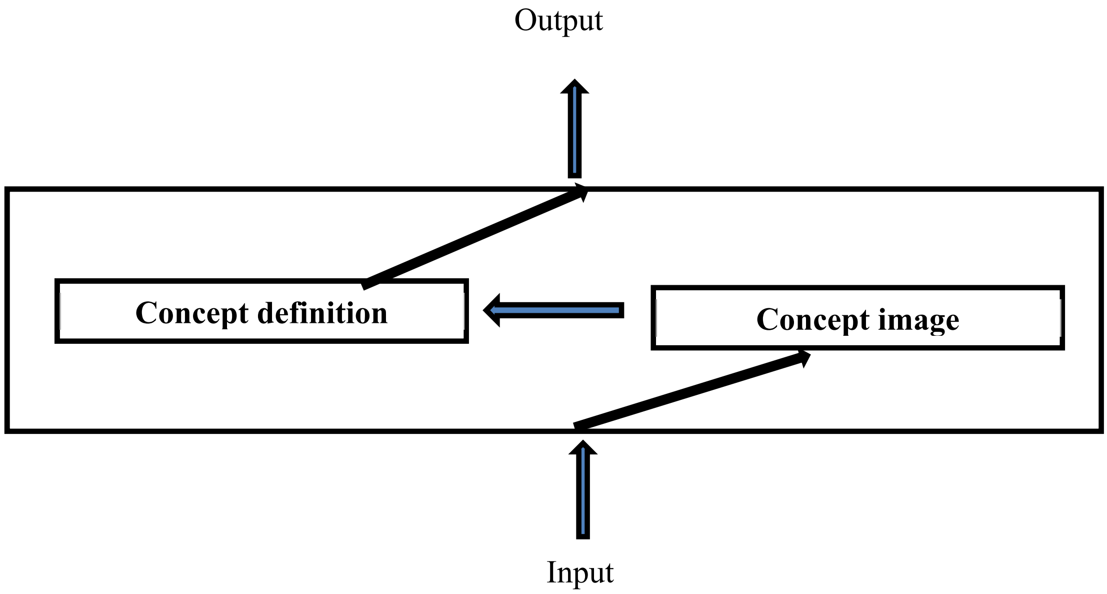
Εκτός από τη διαδικασία του σχηματισμού έννοιας υπάρχουν επίσης οι διαδικασίες της επίλυσης προβλήματος. Όταν τίθεται ένα πρόβλημα σε έναν μαθητή, οι κυψέλες της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας υποτίθεται ότι πρόκειται να ενεργοποιηθούν. Στη πράξη, φαίνεται, πως πολλοί εκπαιδευτικοί στη δευτεροβάθμια αλλά και στη τριτοβάθμια εκπαίδευση αναμένουν ότι οι διανοητικές διαδικασίες που ενεργοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος θα πρέπει σχηματικά να εκφράζονται με ένα από τα τρία παρακάτω σχήματα. (Τα σχήματα αντιπροσωπεύουν μόνο την πτυχή της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας που εμπλέκονται στη διαδικασία και τα βέλη στα σχήματα αντιπροσωπεύουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους ένα γνωστικό σύστημα ενδέχεται να λειτουργήσει.)



Σχήμα 3: Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και της εικόνας έννοιας

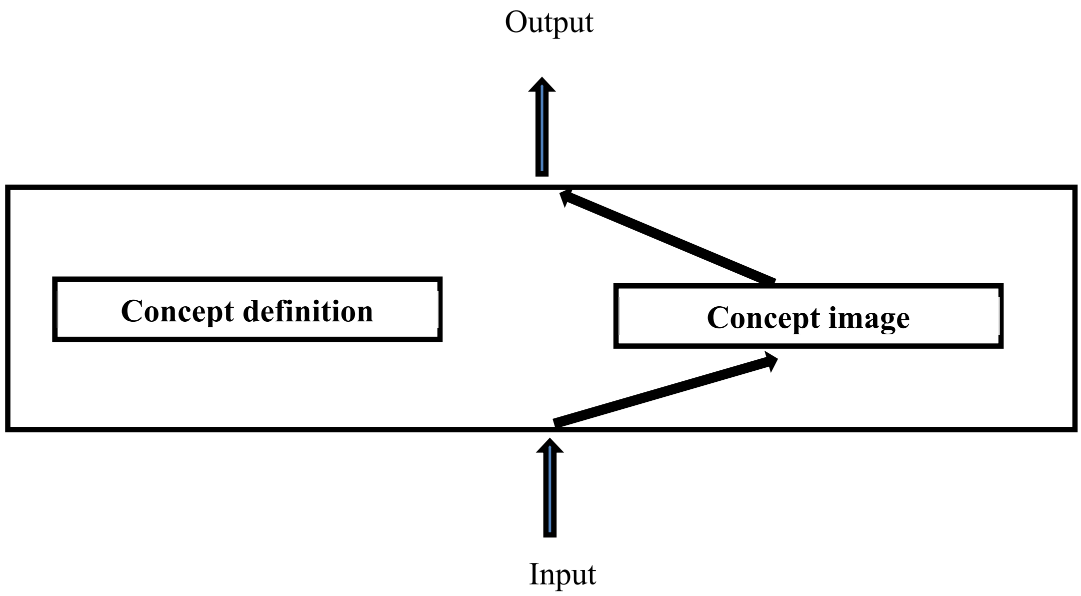


Σχήμα 4: Καθαρά τυπική αφαίρεση



Σχήμα 5: Αφαίρεση μετά από τη διαισθητική σκέψη

Το κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα όλων των παραπάνω σχημάτων είναι ότι για την επίλυση ενός προβλήματος οι διανοητικές διαδικασίες που συντελούνται περιλαμβάνουν τον ορισμό της έννοιας. Αυτό είναι φυσικά η επιθυμητή διαδικασία. Δυστυχώς, στη πράξη με τους μαθητές δε συμβαίνει πάντοτε αυτό. Ερευνητικά αποτελέσματα, δείχνουν ότι ένα πιο κατάλληλο πρότυπο για τις διαδικασίες που ακολουθούν στη πράξη οι περισσότεροι μαθητές είναι το ακόλουθο:



Σχήμα 6 : Διαισθητική απάντηση

Εδώ η κυψέλη του ορισμού έννοιας, αν και μπορεί να είναι μη κενή, δεν ενεργοποιείται κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Ο τρόπος σκέψης που έχει συνηθίσει ο μαθητής στα πλαίσια της καθημερινής ζωής κυριαρχεί και έτσι αγνοεί την ανάγκη να συμβουλευτεί τον τυπικό ορισμό. Στις περισσότερες περιπτώσεις στην πράξη, η αναφορά μόνο στην κυψέλη της εικόνας της έννοιας οδηγεί τον μαθητή στην επιτυχία. Το γεγονός αυτό δεν του δημιουργεί την ανάγκη να αλλάξει τον τρόπο σκέψης που έχει συνηθίσει στην καθημερινή ζωή ώστε να χρησιμοποιεί τον τυπικό ορισμό. Μόνο τα μη στερεότυπα προβλήματα, στα οποία οι ελλιπείς εικόνες έννοιας μπορεί να είναι παραπλανητικές, μπορούν να ενθαρρύνουν τους μαθητές να στραφούν και στον ορισμό της έννοιας.

4.4. Οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών σύμμαχος ή εμπόδιο στην κατανόηση του ορίου ;

Οι αυθόρμητες πρωτογενείς αντιλήψεις είναι το σύνολο των διαισθητικών εκτιμήσεων, εικόνων και γνώσεων που από την καθημερινή εμπειρία συσσωρεύει το άτομο. Ο *Cornu* (1981,1983) αναφέρεται στις αντιλήψεις αυτές, για μια έννοια, που εμφανίζονται πριν από την τυπική διδασκαλία της και τις ονομάζει «αυθόρμητες αντιλήψεις» (spontaneous conceptions).

Κατά την άποψη του *Bruner*, ένας από τους βασικούς σκοπούς της διδασκαλίας των Μαθηματικών θα πρέπει να είναι και η καλλιέργεια της διαισθητικής σκέψης του μαθητή. Μια από τις κύριες επιδιώξεις των θα πρέπει να είναι η δημιουργία προϋποθέσεων που θα υποβοηθούν την διαισθητική σκέψη. (Τουμάσης,1999).

Σύμφωνα με τον *Bruner*, η διαισθητική σκέψη, αντίθετα με την αναλυτική, δεν προχωρά με σαφή διαδοχικά βήματα και η συνειδητοποίηση της διαδικασίας είναι μάλλον ανύπαρκτη. Πολλές φορές η διαισθητική σκέψη αναπτύσσεται ταχύτερα όταν η προσφερόμενη γνώση είναι οικεία κάτι που επιτρέπει ελευθερία στην κίνηση, άλματα και χρήση της σύντομης οδού, ώστε να καθίσταται αναγκαίο να ελεγχθούν αργότερα τα συμπεράσματα με αναλυτικότερα μέσα. Η διαισθητική σκέψη, επομένως είναι συμπληρωματικής φύσεως. Η αξία της βρίσκεται στο ότι οδηγεί σε λύσεις που δεν θα ήταν εφικτές μόνο με την αναλυτική σκέψη, καθώς επίσης και σε εικασίες και υποθέσεις άξιες ελέγχου και διερεύνησης. Επομένως, είναι πολύ σημαντικό για την μάθηση και την διδασκαλία των μαθηματικών να επιτυγχάνουμε μια διαισθητική αντίληψη των εννοιών και των ιδεών, πριν εκθέσουμε τον μαθητή στις πιο τυπικές μεθόδους του συμπεράσματος και της απόδειξης. (Bruner,1970)

Στον τομέα της διδασκαλίας των Μαθηματικών, σ' αυτό συμφωνούν όλοι οι ερευνητές, η διδασκαλία μιας έννοιας μπορεί να είναι αποτελεσματική, όταν η διαισθητική γνώση του μαθητή που αποκτήθηκε σε εξωσχολικό περιβάλλον ή σε προηγούμενα έτη σπουδών ληφθεί υπόψιν κατά την διδασκαλία (Grugnetti & Rizza, 2002). Τέτοιες γνώσεις μπορεί πράγματι να είναι καθοριστικής σημασίας σε σχέση με τη διευκόλυνση ή την παρεμπόδιση της μάθησης της ίδιας της έννοιας. Συγκεκριμένα, ο *Fischbein* (1973, 1987) αναφέρεται σε τέτοιες διαισθητικές ιδέες ως "πρωτογενείς διαισθήσεις", υπογραμμίζοντας τη σημασία της διατήρησης και ενίσχυσης τους κατά τέτοιο τρόπο ώστε να τους επιτρέψει να εξελιχθούν στο στάδιο της "δευτεροβάθμιας διαίσθησης". Με αυτό τον τρόπο αποτελούν ένα καλό θεμέλιο για την απόκτηση και κατανόηση της εννοούμε έννοιας.

Στην περίπτωση των ορίων, πριν από οποιαδήποτε διδασκαλία γι' αυτό το θέμα, ο μαθητής έχει ήδη ορισμένες ιδέες, διαισθήσεις, εικόνες, γνώσεις, που προέρχονται από την καθημερινή εμπειρία, όπως είναι οι κοινές σημασίες του όρου που εμφανίζονται πριν από την τυπική διδασκαλία. Όταν ένας μαθητής συμμετέχει σ' ένα μάθημα Μαθηματικών, αντίθετα με αυτό που μπορεί να φαντάζονται οι περισσότεροι καθηγητές, αυτές οι ιδέες (αυθόρμητες αντιλήψεις) δεν εξαφανίζονται. Αναμειγνύονται με τη νεοαποκτηθείσα γνώση, τροποποιούνται και προσαρμόζονται για να σχηματίσουν τις προσωπικές αντιλήψεις των μαθητών.

Επίσης ο *Cornu* μας πληροφορεί ότι για να επιλυθεί ένα πρόβλημα, γενικά δεν στηριζόμαστε μόνο στην επαρκή επιστημονική θεωρία αλλά και στον φυσιολογικό ή αυθόρμητο συλλογισμό ο οποίος είναι θεμελιωμένος στις αυθόρμητες αυτές ιδέες. Οι αντιλήψεις αυτές μπορούν να είναι χρήσιμες ακόμη και αν προκαλούν εμπόδια στην προσπάθεια κατανόησης μιας έννοιας. Οι δάσκαλοι των μαθηματικών πρέπει να παίρνουν σοβαρά υπόψη τους αυτές τις αντιλήψεις και την ανθεκτικότητα που ενδεχομένως παρουσιάζουν ορισμένες απ' αυτές, με αποτέλεσμα να προκαλούν δυσκολίες στη κατανόηση μιας έννοιας ή να οδηγούν σε ανεπιθύμητες παρανοήσεις. (Ζουλινάκη, 2006)

Σύμφωνα με *Grugnetti & Rizza* (2002) αυτές οι διαισθήσεις, στη διδακτική πρακτική, δεν βρίσκουν την ευκαιρία για ανάπτυξη και εδραίωση. Τα αποτελέσματά των ερευνών τους δείχνουν ότι μια διδασκαλία που συχνά βασίζεται στον αυτοματισμό μπορεί να εμποδίσει την παραγωγή *φυσικών* και *καλών* διαισθήσεων. Με βάση τα παραπάνω, το βασικό σημείο είναι να προσδιοριστούν στρατηγικές διδασκαλίας και εποικοδομητικές δραστηριότητες ικανές να εμπλουτίσουν τη μαθησιακή εμπειρία και να προωθήσουν την εξέλιξη της διαισθητικής κατανόησης προς τη θεωρητική έννοια του ορίου παρά να επικεντρωθούν στον επίσημο ορισμό του ορίου. Με έναν τέτοιο σχεδιασμό πιστεύουμε οι μαθητές θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν αυτή την πρακτική για να αξιοποιήσουν τη δική τους εμπειρία και γνώση που έχουν συσσωρεύσει από τα προηγούμενα χρόνια στο σχολείο.

Ωστόσο, επισημαίνουν ότι μια τέτοια εξέλιξη δεν είναι εύκολη και ότι συχνά υπάρχουν πολύ σοβαρές συγκρούσεις ανάμεσα σε «ευρηματικές» ιδέες και τη διαίσθηση, και των μαθηματικών εννοιών που προσπαθούν οι μαθητές να σχηματίσουν μέσα από την συνεχή αναδιοργάνωση των νοητικών εικόνων τους. (Μαμμονά, 2001)

Σαν κατακλείδα της συγκεκριμένης ενότητας, απαντώντας στο ερώτημα που τίθεται, στην επικεφαλίδα παραθέτουμε την παρακάτω ρήση του *Papert*:

«*Οι νέες γνώσεις συχνά αντιβαίνουν στην παλιά (γνώση) και η αποτελεσματική μάθηση απαιτεί στρατηγικές για την αντιμετώπιση τέτοιων συγκρούσεων. Μερικές φορές τα συγκρουόμενα κομμάτια της γνώσης μπορούν να συμφιλιωθούν, μερικές φορές πρέπει να* *εγκαταλειφθεί η μία ή η άλλη (γνώση) και μερικές φορές και οι δύο μπορούν να «κρατηθούν», αν διατηρούνται με ασφάλεια σε χωριστά διαμερίσματα.» (Papert, 1980)*

Κεφάλαιο 5

Μεθοδολογία

5.1. Σκοπός της έρευνας και διατύπωση των ερευνητικών ερωτημάτων

Όπως έχει αναλυτικά αναφερθεί και παραπάνω, η διδασκαλία του ορίου συναντά ποικίλων ειδών δυσκολίες οι οποίες προκύπτουν από πολλούς παράγοντες. Οι παράγοντες αυτοί είναι εσωτερικοί, δηλαδή προκύπτουν από το είναι του ατόμου, τις αντιλήψεις, τις πεποιθήσεις εν ολίγοις από την κουλτούρα του, αλλά και από εξωτερικούς παράγοντες όπως το πρόγραμμα σπουδών, από τους εκπαιδευτικούς αλλά και από την υφή της ίδιας της έννοιας του ορίου.

Η δική μας προσπάθεια επικεντρώθηκε στη διδασκαλία της έννοιας του ορίου, όχι με τον συμβατικό τρόπο. Δηλαδή να μη διδαχθεί το όριο ως μέσο για την κατάκτηση γνωστικά άλλων εννοιών όπως η συνέχεια ή η παράγωγος, ούτε ως γνώση η οποία θα κατατεθεί για την εισαγωγή σε κάποια τριτοβάθμια σχολή μέσω των πανελληνίων εξετάσεων. Η προσπάθειά μας επικεντρώθηκε να διδαχθεί ως μια έννοια κεντρική - βασική για τον Απειροστικό Λογισμό, αλλά ταυτόχρονα και αυτόνομη με προεκτάσεις που δεν άπτονται μόνο των Μαθηματικών, αλλά που καθορίζει και τρόπους αντίδρασης πάνω σε προβληματισμούς. Ο σχεδιασμός έγινε βασιζόμενος στις κοινωνικό-κατασκευαστικές θεωρίες μάθησης και στην δημιουργία ενός κλίματος ασφάλειας ώστε να μπορούν οι μαθητές να εκφρασθούν ανεμπόδιστα. Έτσι, ο κύριος παιδαγωγικός στόχος της όλης διαδικασίας ήταν οι μαθητές να ενεργοποιηθούν να εκφράσουν τις απόψεις τους, να συζητήσουν και τελικά να αποφασίσουν.

Στο πλαίσιο αυτό, οργανώσαμε και εκτελέσαμε δύο διδακτικές παρεμβάσεις με σκοπό να αξιολογήσουμε κατά πόσο μπορούν οι μαθητές της Α΄ και Β΄ τάξης γενικού λυκείου να ενσωματώσουν την έννοια του ορίου, στην ειδική περίπτωση ακολουθίας που συγκλίνει στο μηδέν. Θέσαμε ως πρωταρχικό στόχο οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με τις άπειρες διαδικασίες και την έννοια του ορίου διαισθητικά, δηλαδή μέσω των προβλημάτων να σχηματοποιήσουν την «προσέγγιση» και κατόπιν ο αμέσως επόμενος στόχος ήταν να συνδεθεί η άπειρη διαδικασία και η προσέγγιση με τον αυστηρό ορισμό του ορίου. Η στρατηγική μας ήταν μέσα από την κατάθεση των απόψεων των μαθητών, για το πώς αντιλαμβάνονται την άπειρη διαδικασία και το άπειρο, να δημιουργήσουν τις κατάλληλες εκείνες νοητικές εικόνες και στη συνέχεια να τις αριθμητικοποιήσουν, ώστε οι μαθητές να προσεγγίσουν τον τυπικό ορισμού του ορίου.

5.2 Συλλογή Δεδομένων

Για την καλύτερη ανάλυση των αποτελεσμάτων, ούτως ώστε να είναι όσο το δυνατόν πιο έγκυρα, επιλέξαμε η συλλογή των δεδομένων να γίνει με ενδελεχή τρόπο. Για αυτό το λόγο τα δεδομένα, συνελέγησαν από βιντεοσκόπηση και μαγνητοφώνηση των παρεμβάσεων καθώς επίσης και από τη μελέτη των φύλλων εργασίας στα οποία οι μαθητές είχαν καταγράψει τις απόψεις και τις απαντήσεις τους.

Η βιντεοσκόπηση που έλαβε χώρα κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων εστίαζε στον καθηγητή και στους μαθητές με τους οποίους διαλεγόταν καθώς και σε ομάδες μαθητών που αντάλλασσαν απόψεις, ενώ τα μηχανήματα καταγραφείς των ομιλιών ήταν σταθερά σε τρεις διαφορετικές ομάδες μαθητών, οι οποίες διαφέραν στις δύο παρεμβάσεις.

Η μελέτη των δεδομένων βασίστηκε και στις τρεις πηγές, οι οποίες αλληλοσυμπληρώνονταν ώστε να καταγράψουμε τις απόψεις, τις ιδέες και τις εντυπώσεις των μαθητών με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη εγκυρότητα και σαφήνεια. Πιστεύουμε ότι το υλικό περιγράφει με μεγάλη αξιοπιστία τις αντιδράσεις και τις ιδέες των μαθητών λόγω και της βιντεοσκόπησης δηλαδή της «ζωντανής εικόνας», παράλληλα με τη μαγνητοφώνηση, όπου ακούγονταν οι «αρχικές» απόψεις των μαθητών, και με τα φύλλα εργασίας στα οποία οι μαθητές εκφράζονταν ως επί το πλείστον αυθόρμητα.

5.3 Συμμετέχοντες

Το όλο εγχείρημα εξελίχθηκε στις αίθουσες ενός Γενικού Λυκείου της νότιας Αθήνας, κατά την διάρκεια του σχολικού ωραρίου. Πήραν μέρος εθελοντικά είκοσι δύο (22) μαθητές. Δεκαοχτώ (18) μαθητές από τρία διαφορετικά τμήματα της Β΄ τάξης και τέσσερις (4) μαθητές από την Α΄ τάξη που ανήκαν όλοι στο ίδιο τμήμα. Αξίζει εδώ να επισημανθεί ότι υπήρχε και από άλλους μαθητές ενδιαφέρον για συμμετοχή στην όλη διαδικασία, αλλά για πρακτικούς λόγους το πλήθος των συμμετεχόντων περιορίστηκε στους 22.

Η κοινωνικό-οικονομική κατάσταση των μαθητών ως επί το πλείστο ήταν άνω του μέσου, δηλαδή οι μαθητές προέρχονταν από οικογένειες οι οποίες δεν αντιμετώπιζαν κάποιο σοβαρό οικονομικό η κοινωνικό πρόβλημα. Ως προς την επιλογή του προσανατολισμού, υπήρχαν και μαθητές που δεν είχαν επιλέξει ως κύριο μάθημα τα Μαθηματικά αλλά τους ενδιέφερε ως αντικείμενο. Το γνωστικό επίπεδο των μαθητών που συμμετείχαν ήταν αντιπροσωπευτικό του επιπέδου των μαθητών του σχολείου, δηλαδή οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα με βάση τους βαθμούς τους κάλυπταν σχεδόν όλο το φάσμα της αξιολόγησης, από το σχεδόν καλώς μέχρι το άριστα.

Θα θέλαμε στο σημείο αυτό να αναφέρουμε δύο κρίσιμα σημεία που άπτονται της σχολικής πραγματικότητας. Δεν επιλέξαμε να κάνουμε πρώτα μια πιλοτική παρέμβαση και να διορθώσουμε εκ των υστέρων τα όποια προβλήματα θα προέκυπταν, ούτε είχαμε σκοπό να δημιουργήσουμε ιδανικές συνθήκες αφού μας ενδιέφερε να είμαστε όσο γίνεται πιο κοντά στις πραγματικές συνθήκες που επικρατούν στα ελληνικά σχολεία. Γι' αυτόν τον λόγο, οι μαθητές δεν γνώριζαν εκ των προτέρων το θέμα της παρέμβασης. Επίσης, λόγω προβλημάτων που προέκυψαν εκτάκτως την ημέρα της δεύτερης παρέμβασης, οι μαθητές που πήραν μέρος στην δεύτερη φάση ήταν επτά λιγότεροι από την αρχική ομάδα.

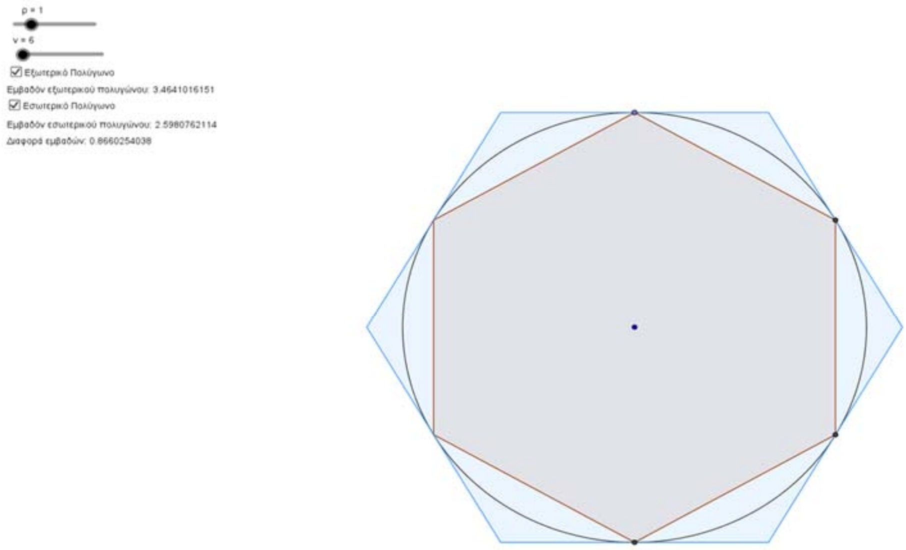
5.4 Ανάλυση της Διαδικασίας

Η διδακτική παρέμβαση περιείχε δύο ξεχωριστές φάσεις, δύο διδακτικών ωρών η κάθε μία. Στην πρώτη φάση της διαδικασίας είχαμε ως στόχο να φέρουμε τους μαθητές σε άμεση επαφή με τις άπειρες διαδικασίες μέσω ενός φύλλου εργασίας (Calgeo,2005, Παράρτημα Α). Η δόμηση αυτού του φύλλου εργασίας ξεκινούσε θέτοντας το ερώτημα στους μαθητές, αν υπάρχει κάποια μέθοδος ή κάποια διαδικασία, ώστε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του μοναδιαίου κύκλου. Τα μαθηματικά δημιουργούνται από την διατύπωση προβλημάτων και από την προσπάθεια επίλυσης αυτών. Επομένως η εισαγωγή της άπειρης διαδικασίας και της έννοιας του ορίου αποφασίστηκε να γίνει με την τοποθέτηση προβλήματος που δεν μπορούσε να αντιμετωπιστεί με τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών.

Μέσω του ερωτήματος αυτού, ο στόχος ήταν να προβληματιστούν οι μαθητές και να εισαχθούν στην άπειρη διαδικασία. Περιμέναμε οι απαντήσεις τους να είναι κοντά στο τύπο του εμβαδού του κύκλου, κάτι που άλλωστε έγινε. Γι' αυτό το λόγο οι επόμενες τρεις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας είχαν στόχο να βοηθήσουν τους μαθητές να οριοθετήσουν την έννοια του εμβαδού και να εισάγουμε σε αυτούς τον τρόπο μέτρησης επιφανειών. Ειδικότερα η ερώτηση Ε3 είχε ως στόχο να εντοπίσουν οι μαθητές την διαφορά που υπάρχει μεταξύ των πολυγώνων που οι πλευρές τους είναι ευθύγραμμα τμήματα από τον κύκλο, ως προς την ευκολία υπολογισμού του εμβαδού τους.

Οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών για τον υπολογισμό του εμβαδού σχημάτων δεν μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν, αφού ο κύκλος δεν είναι δυνατόν να χωριστεί σε πολύγωνα. Η προσπάθεια προσέγγισης του εμβαδού του κύκλου, από τις γνωστές ποσότητες του εμβαδού του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου και του αντίστοιχου περιγεγραμμένου, ίσως να μην αποτελεί μια εύκολη σκέψη για τους μαθητές. Αν όμως υποθέσουμε ότι αυτή είναι δυνατόν να δημιουργηθεί, δηλαδή, το εμβαδόν του κύκλου να είναι ανάμεσα από τα εμβαδά των πολυγώνων, τότε η καλύτερη προσέγγιση που προκύπτει από το αυξανόμενο πλήθος των πλευρών των πολυγώνων, έρχεται ομαλά ως εικόνα με αποτέλεσμα να αρχίσει να διαφαίνεται η άπειρη διαδικασία.

Η όλη προσπάθεια της προσέγγισης διδακτικά της άπειρης διαδικασίας βοηθήθηκε από τη χρήση ενός ηλεκτρονικού δομήματος στην πλατφόρμα Geogebra. Το ψηφιακό εργαλείο είχε ως βάση ένα κύκλο και τα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σε αυτόν κανονικά πολύγωνα. και είχε τη δυνατότητα να αυξάνει το πλήθος των πλευρών των πολυγώνων. Συγχρόνως το λογισμικό υπολόγιζε τα δύο εμβαδά των πολυγώνων και τη διαφορά τους, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 1

Η χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, εκτός από την γραφική αναπαράσταση του προβλήματος, απαλλάσσει τους μαθητές από τις υπολογιστικές δυσκολίες που εμπεριέχονται στον υπολογισμό των εμβαδών των πολυγώνων, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα να επικεντρώσουν το ενδιαφέρον τους στην άπειρη διαδικασία.

Οι τρεις επόμενες ερωτήσεις του φύλλου εργασίας δηλαδή οι Ε5, Ε6, Ε7 καθώς και η συμπλήρωση του πίνακα (Ε8), είχαν ως στόχο την εισαγωγή των μαθητών στην προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου μέσω των διαδοχικών προσεγγίσεων αυτού από τη συνεχή αύξηση των πλευρών των κανονικών πολυγώνων. Ειδικότερα η συμπλήρωση του πίνακα οδηγεί τους μαθητές στη σκέψη ότι η διαφορά μεταξύ εμβαδού κύκλου και κανονικού πολυγώνου μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή.

Οι επόμενες ερωτήσεις μέχρι και την Ε14, αποσκοπούσαν να γίνει σαφές στους μαθητές ότι η διαδικασία είναι ατέρμονη και ότι δεν μπορεί να συμπέσει το εμβαδόν του πολυγώνου με τον κύκλο. Ειδικότερα, στην ερώτηση δέκα (Ε10), ρωτάμε τους μαθητές αν κατά τη γνώμη τους θα τερματιστεί η διαδικασία με σκοπό να περάσουμε στις άπειρες διαδικασίες αλλά και στην επόμενη ερώτηση (Ε11) που σκοπό είχε να εξακριβώσουμε αν μπορούν οι μαθητές να εκφράσουν τα αποτελέσματα με μαθηματική γλώσσα και να αναφερθούν στην έννοια της ακολουθίας. Στην τελευταία ερώτηση (Ε15) ζητήσαμε να αναφέρουν προβλήματα που θα μπορούσαμε να προσεγγιστούν με μια τέτοια μεθοδολογία με σκοπό την ανατροφοδότηση των σκέψεων τους.

Ο στόχος της δεύτερης φάσης ήταν να εισαγάγουμε τον αυστηρό ορισμό του ορίου στην ειδική περίπτωση της μηδενικής συγκλίνουσας ακολουθίας. Και στη φάση αυτή χρησιμοποιήθηκε φύλλο εργασίας (Calgeo,2005, Παράρτημα Β). Η λογική ήταν ίδια με το πρώτο φύλλο εργασίας, δηλαδή η τοποθέτηση προβλήματος (το πρόβλημα της επαναληπτικής διχοτόμησης του Ζήνωνα), έτσι ώστε οι μαθητές να προβληματιστούν να εικάσουν και τελικά να οδηγηθούν στην διατύπωση του αυστηρού ορισμού. Η παρακαταθήκη από την επαφή με τις άπειρες διαδικασίες, από την πρώτη φάση της παρέμβασης, έδινε ένα ισχυρό υπόβαθρο στην όλη διαδικασία και συγχρόνως άφηνε χρόνο στην προσπάθεια διατύπωσης του ορισμού του ορίου.

Αναλυτικότερα, το πρόβλημα τοποθετείται ως εξής: *«Ένα κινητό κινείται κατά μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ μήκους 1, από το Α προς το Β:Κατά τη διάρκεια της πρώτης μέρας, το κινητό καλύπτει διάστημα ΑΑ1 ίσο με το μισό του διαστήματος ΑΒ. Κατά τη διάρκεια της δεύτερης μέρας, το κινητό καλύπτει διάστημα Α1Α2 ίσο με το μισό του διαστήματος Α1Β. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατά τη διάρκεια της «η» μέρας το κινητό καλύπτει διάστημα Αη-1Αη ίσο με το μισό του διαστήματος Αη-1Β.»* Μέσω της ερώτησης αυτής προσπαθήσαμε να προβληματίσουμε τους μαθητές ως προς το αποτέλεσμα αλλά ταυτόχρονα να τους παρωθήσουμε στην ανάγκη της τεκμηριωμένης απάντησης ώστε να έρθουν στην επιφάνεια απόψεις και πεποιθήσεις που άπτονται των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών.

Οι επόμενες τέσσερις ερωτήσεις δηλαδή οι Ε2,Ε3,Ε4 και Ε5, έχουν διπλό σκοπό, πρώτο να αριθμητικοποιήσουν (αλγεβρικοποιήσουν) την κατάσταση που περιγράφεται στο πρόβλημα και δεύτερο, ως προς τη σειρά και όχι ως προς την αξία, να γίνει αντιληπτό ότι η προσέγγιση του κινητού στο σημείο Β μπορεί να επιτευχθεί όσο μικρό και αν είναι το σφάλμα προσέγγισης. Οι δύο επόμενες ερωτήσεις, δηλαδή οι Ε6 και η Ε7 αποσκοπούσαν η μεν πρώτη στην αριθμητικοποίηση του αποτελέσματος με μια γενική τοποθέτηση και η δε δεύτερη στην διατύπωση του αυστηρού ορισμού του ορίου, δεδομένων των συγκεκριμένων στοιχείων του προβλήματος (θετικοί όροι ακολουθίας, σύγκλιση στο μηδέν). Στην τελευταία ερώτηση του φύλλου εργασίας (Ε8), ζητάμε πλέον από τους μαθητές να απαντήσουν αυστηρά στο ερώτημα αν η συγκεκριμένη ακολουθία συγκλίνει στο μηδέν δίκην αξιολόγησης της όλης διαδικασίας.

Στη δεύτερη φάση δεν χρησιμοποιήσαμε κάποιο λογισμικό, αφενός γιατί δεν ήταν απολύτως απαραίτητο αφετέρου γιατί θέλαμε οι μαθητές να είναι κοντά στην συνηθισμένη διδακτική πρακτική των μαθηματικών, δηλαδή στη χρησιμοποίηση μόνο χαρτιού και μολυβιού. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, σύμφωνα με τον *Vygotsky* οι πολιτιστικές διεργασίες βοηθούν στην ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών όταν αυτές είναι συμβατές με την κουλτούρα τους. Έτσι λοιπόν θεωρήσαμε ότι η χρησιμοποίηση εργαλείων οικείων προς τους μαθητές θα συνέβαλε θετικά στο όλο εγχείρημα.

Στο σημείο αυτό είναι θεμιτό να αναφέρουμε ότι η επιλογή του λογισμικού, για την πρώτη φάση, ήταν τέτοια ώστε να βοηθήσει τους μαθητές να δημιουργήσουν την κατάλληλη εικόνα και όχι μέσω του ψηφιακού περιβάλλοντος να δοθούν έννοιες που δεν έχουν κατασκευαστεί στο νου των μαθητών. Για τους παραπάνω λόγους, πιστεύαμε ότι, ο συνδυασμός των δύο πρακτικών, δηλαδή, η χρήση του συγκεκριμένου λογισμικού και των παραδοσιακών εργαλείων θα ήταν κοντά στην διδακτική κουλτούρα των μαθητών έτσι ώστε να μην παρεμποδιστεί η μαθησιακή τους δυναμική.

Η επιλογή της μεθόδου διδασκαλίας, η οποία ακολουθήθηκε και για τις δύο φάσεις, είχε να κάνει καταρχάς με τον χωρισμό των μαθητών σε ομάδες δύο η τριών ατόμων χωρίς να παρέμβουμε στον σχηματισμό τους, και αυτό γιατί πιστεύουμε ότι στις ηλικίες της ύστερης εφηβείας η επιλογή συνεργάτη είναι συνειδητή και ώριμη ώστε η όλη διαδικασία να αποδώσει. Οι μαθητές ανακοίνωναν τα συμπεράσματά τους στην ολομέλεια καταγράφοντάς τα στα φύλλα εργασίας, όμως ταυτόχρονα συζητούσαν τις ιδέες τους και με τον συνεργάτη τους.

Η θέση του ερευνητή στην όλη διαδικασία ήταν κυρίως συντονιστική, επεξηγηματική στο θέμα των ερωτήσεων των φύλλων εργασίας, όπως επίσης επί των απόψεων αλλά και των ιδεών των μαθητών. Κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων φρόντιζε οι απαντήσεις των μαθητών να ακούγονται στην ολομέλεια και όπου υπήρχε ανάγκη, για την αποσαφήνιση των απαντήσεων αυτών ο ερευνητής επεξηγούσε, ώστε να γίνουν αντιληπτές οι ιδέες αυτές στην ολομέλεια.

Η προσπάθειά μας επικεντρώθηκε στη δημιουργία κλίματος εμπιστοσύνης και ασφάλειας ώστε οι μαθητές να εκφρασθούν ανεμπόδιστα. Στην προσπάθεια αυτή βοήθησαν πέρα από το οικείο περιβάλλον και η επιλογή ερωτήσεων, όπου χρειαζόταν κατά την διάρκεια της διδασκαλίας, που θα προβλημάτιζαν και θα ωθούσαν τους μαθητές να προάγουν τις σκέψεις τους και όχι ερωτήσεις που απλώς καθοδηγούσαν τις απαντήσεις. Δηλαδή, ερωτήσεις διηθητικές που εστίαζαν στο «πώς» και στο «γιατί».

Κεφάλαιο 6

Αποτελέσματα

6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των παρεμβάσεων όπως αυτά προέκυψαν από τα δεδομένα που αντλήθηκαν από τις πηγές στις οποίες έχουμε ήδη αναφερθεί. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων προέκυψε από τα δεδομένα αυτά αλλά και από συζητήσεις με τους μαθητές που έγιναν κατόπιν των παρεμβάσεων.

Ειδικότερα, για την καταγραφή των αποτελεσμάτων αντήλθηκε υλικό από περίπου τεσσάρων (4) ωρών μαγνητοσκόπησης, εννιά (9) ωρών μαγνητοφώνησης και τριανταέξι (36) φύλλων εργασίας. Μετέπειτα των παρεμβάσεων και στοχευμένα, ζητήθηκαν διευκρινήσεις από τους μαθητές όσον αφορά τις απαντήσεις τους ώστε η παρουσίαση των αποτελεσμάτων και η ανάλυσή τους να είναι όσο το δυνατό πιο έγκυρη.

,6.2 Παρουσίαση και Ανάλυση των Αποτελεσμάτων

Τα αποσπάσματα τα οποία επιλέχθηκαν να παρουσιαστούν στην ενότητα αυτή είχε σκοπό να αναδείξει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές προσεγγίζουν την πληθώρα των διαφορετικών εννοιών που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας και πώς δομείται η σκέψη τους. Αναλύουμε αυτά τα αποσπάσματα, έχοντας ως αφετηρία το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας μας και αναδεικνύουμε μέσω των κρίσιμων συμβάντων τα στοιχεία εκείνα των οποίων ο ρόλος είναι καταλυτικός.

<u>1η Φάση</u>

Στο πρώτο φύλλο εργασίας δίνεται στους μαθητές το ερώτημα. «*Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα R=1;*». Ο διάλογος που ακολούθησε ήταν ο παρακάτω.

Απόσπασμα 1Α

Ερ: Ποιος μπορεί να μας απαντήσει σε αυτό το ερώτημα;
Σοφία: Είναι $\pi\rho^2$
Ναταλία: ναι $\pi\rho^2$
Ε: Έχει κάποιος/ κάποια να πει κάτι άλλο;
Ομαδικά: όχι, $\pi\rho^2$

Οι απαντήσεις των μαθητών αποτελούνταν μόνο από τον τύπο υπολογισμού του εμβαδού του κύκλου και μάλιστα χωρίς να αντικαθιστούν την τιμή της ακτίνας. Από τις απαντήσεις προκύπτει ότι υπάρχει μια προχειρότητα κατά την μελέτη της ερώτησης από τους μαθητές, ταυτόχρονα όμως διαφαίνεται και το μπιχεβιοριστικό μοντέλο (σύνηθες μοντέλο για τα υπάρχοντα αναλυτικά προγράμματα και την διδακτική πρακτική) από το οποίο είναι επηρεασμένοι οι μαθητές δηλαδή: κύκλος-εμβαδόν (*ερέθισμα*) → $\pi\rho^2$ (*αντίδραση*).

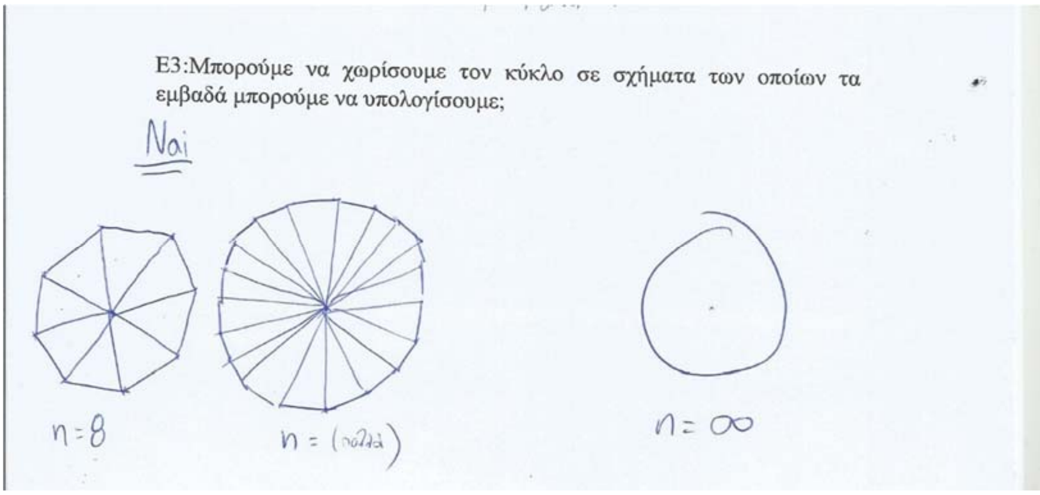
Οι ερωτήσεις Ε1και Ε2 είχαν ένα βοηθητικό χαρακτήρα, συγκεκριμένα ρωτήσαμε του μαθητές αν κατανοούν την έννοια του εμβαδού και αντιλαμβάνονται τη σημασία της μέτρησης αυτού και σε ποια σχήματα μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν. Οι απαντήσεις όμως, όπως αναμενόταν, ήταν και καταφατικές και αρνητικές. Κάποιοι μαθητές απάντησαν, ότι είναι εφικτό να χωριστεί ο κύκλος σε σχήματα στα οποία μπορούμε να υπολογιστεί το εμβαδόν τους. Στην προηγούμενη ερώτηση, όμως, είχε γίνει αποδεκτό ότι το εμβαδόν ενός σχήματος, είναι δυνατόν να υπολογιστεί μόνο στην περίπτωση που δεν έχουμε καμπυλόγραμμα σχήματα. Είναι πιθανό, οι συγκεκριμένοι μαθητές ορμώμενοι από το γεγονός ότι υπάρχει ο τύπος για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου, να αναίρεσαν την προηγούμενη άποψή τους.

Παρακάτω αναφέρουμε τέσσερις από τις απαντήσεις των μαθητών.

Απόσπασμα 2Α

Μιχάλης: Δεν μπορούμε να το χωρίσουμε τον κύκλο σε «απλούστερα» σχήματα δηλαδή σε τρίγωνα γιατί δεν έχει γωνίες.
Σοφία.: Όσο παράξενο και αν μας φαίνεται στη Γεωμετρία μας είχαν πει ότι χωρίζεται σε τρίγωνα.(ο κύκλος). Άρα μπορούμε.
Ματίνα: Δεν θα μπορούσαμε να πούμε ότι ένας κύκλος μοιάζει με ένα πολύγωνο και αν εμβαθύνουμε πάρα πολύ μπορούμε να πάρουμε μικρά ευθύγραμμα τμήματα τα οποία θα ενωθούν με το κέντρο του κύκλου και θα φτιάξουμε τρίγωνα πολύ - πολύ μικρά

Επίσης ο Κώστας στο γραπτό του έχει γράψει:



Εικόνα 2

Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν όχι, δηλαδή ότι δεν μπορούμε να τον χωρίσουμε σε τρίγωνα· όπως επισημαίνεται όμως από τους διαλόγους, αλλά και από τη γραπτή απάντηση, αρκετοί μαθητές πίστευαν ότι μπορούμε να το χωρίσουμε σε τρίγωνα.

Ο Μιχάλης διαφωνεί και ο «λόγος» είναι ότι δεν έχει γωνίες ο κύκλος. Προφανώς γίνεται σύνδεση της γωνίας με τα ευθύγραμμα τμήματα, γιατί, σύμφωνα με τον μαθητή, οι γωνίες έχουν πλευρές αποκλειστικά ευθύγραμμα τμήματα. Διαφαίνεται, στο συγκεκριμένο σημείο η κακή χρήση της γλώσσας κάτι που είναι πολύ συνηθισμένο όπως θα φανεί και σε άλλα αποσπάσματα. Οι άλλες δύο μαθήτριες είναι επηρεασμένες από το σχήμα που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου παράγραφος 3.5 (σελίδα 38 της παρούσης εργασίας). Στο σημείο φαίνεται ότι η «γνώση» που προϋπάρχει αποτελεί εμπόδιο στην όλη διαδικασία. Η έκφραση της Ματίνας να «*εμβαθύνουμε*» επισημαίνει τον ουσιαστικό ρόλο της γλώσσας και ο χειρισμός αυτής στην αποσαφήνιση των εννοιών.

Μεγάλο ενδιαφέρον έχει η απάντηση του Κώστα. Η πρώτη παρατήρηση που θα μπορούσε να κάνει κάποιος είναι ότι όχι μόνο απαντά στο ερώτημα αλλά αιτιολογεί και το πώς μπορούμε να χωρίσουμε τον κύκλο σε τρίγωνα. Η μεθοδολογία είναι η εξής: πρώτα επιλέγουμε ένα οκτάγωνο, μετά το κάνουμε πολύγωνο και μετά το μετατρέπουμε σε ένα είδος «απειρογώνου». Όταν γίνουν άπειρα τα τρίγωνα τότε το σχήμα από πολύγωνο μετατρέπεται σε κύκλο. Διαισθητικά «εκφυλίζει» τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου σε σημείο. Η προσέγγιση που έχει ο μαθητής, φαίνεται να είναι κάτι ανάλογο με την ολοκλήρωση κατά Riemann, πρόσθεση «άπειρων» κομματιών συγκεκριμένου σχήματος

Αυτό όμως που είναι σίγουρα παρατηρήσιμο είναι ότι χωρίζει του αριθμούς (φυσικούς) σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με την πληθικότητά τους, στους συγκεκριμένους (η=8), στους πολλούς - μεγάλους (η = πολλά) και στο άπειρο που είναι μεν αριθμός αλλά είναι πιο «μεγάλος» από τους «μεγάλους».

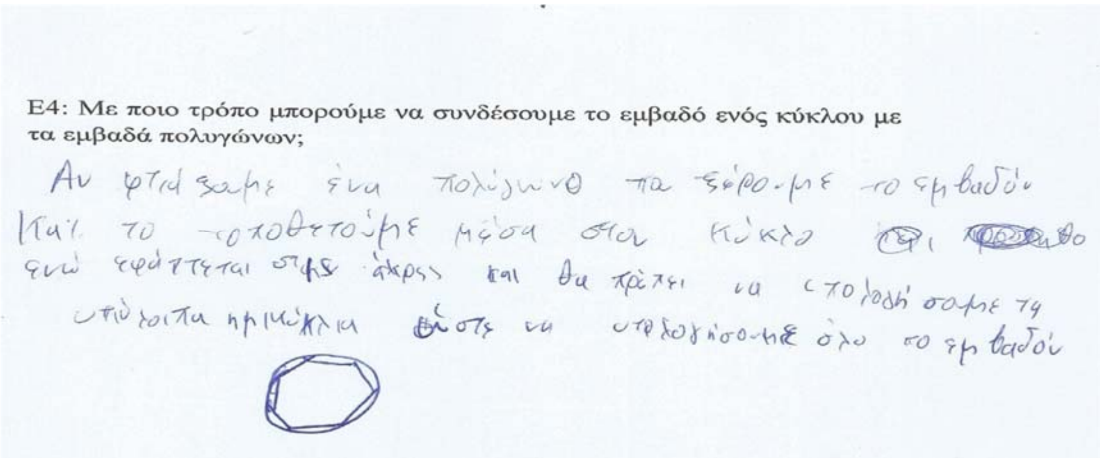
Στην ερώτηση Ε4, ρωτάμε τους μαθητές με ποιο τρόπο μπορεί να συνδεθεί το εμβαδόν του κύκλου με το εμβαδόν του πολυγώνου. Η παραπάνω ερώτηση έδωσε στους μαθητές πρόσφορο έδαφος για συζήτηση, που ήταν και ο στόχος της ερώτησης. Αρκετοί μαθητές προβληματίστηκαν έντονα και χρειάστηκε χρόνος μέχρι να δώσουν κάποια απάντηση. Πολλοί απάντησαν όπως και στην προηγούμενη ερώτηση, δηλαδή να χωρίσουμε τον κύκλο σε τρίγωνα. Η παρακάτω στιχομυθία διάλογος είναι μεταξύ δύο μαθητών, με επιδόσεις στα Μαθηματικά εκ διαμέτρου αντίθετες, του Μάρκου (πολύ χαμηλή επίδοση) και του Βασίλη (άριστη επίδοση). Επομένως, μπορούμε να ισχυριστούμε, ότι η πρακτική της συγκεκριμένης διδασκαλίας παρώθησε τους μαθητές να συμμετάσχουν, να δραστηριοποιηθούν και τελικά να γίνουν ενεργά μέλη.

Απόσπασμα 3Α

Ερ: Έχει κάποιος κάποια ιδέα που θα μας βοηθήσει να φτάσουμε στην απάντηση;
Μάρκος: Όπως το σκέφτομαι να φέρουμε ένα σχήμα έξω από τον κύκλο και κάπως το εμβαδό που είναι έξω από τον κύκλο να το αφαιρούσαμε. (εννοεί, το κομμάτι του σχήματος που περισσεύει από τον κύκλο να το αφαιρούσαμε από το όλο, που μπορούμε να βρούμε, έτσι θα είχαμε το εμβαδόν του κύκλου).

Ε: Κάποιος άλλος;
Βασίλης: Να φτιάξουμε ένα τετράγωνο έξω από τον κύκλο και μετά να αφαιρούσαμε τις γωνίες.

Ο Κώστας έγραψε στο φύλλο εργασίας προσπαθώντας να απαντήσει στο ερώτημα:


E4: Με ποιο τρόπο μπορούμε να συνδέσουμε το εμβαδό ενός κύκλου με τα εμβαδά πολυγώνων;

Αν φτιάξαμε ένα πολύγωνο πα ξέρουμε το εμβαδόν και το τοποθετούμε μέσα στον κύκλο ενώ εφάπτεται στις άκρες και θα πρέπει να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα ημικύκλια ώστε να υπολογίσουμε όλο το εμβαδόν

Εικόνα 3

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος μαθητής λειτουργεί σαν «σκαλοπάτι» λέγοντας τη λέξη «σχήμα» γενικώς και απροσδιόριστα, και στην συνέχεια ο δεύτερος βελτιώνει και συγκεκριμενοποιεί την διαδικασία «μετατρέποντας» το σχήμα σε τετράγωνο. Επίσης, παρατηρείται η αδυναμία έκφρασης με μαθηματική ορολογία από τον Μάρκο που είναι άμεση συνδεδεμένη με την χαμηλή επίδοσή του ως αποτέλεσμα της ελλιπής εργασίας του. Αυτό που παρατηρούμε στο σημείο αυτό είναι το γεγονός ότι μαθητές που ασχολούνται ιδιαίτερα με τα μαθηματικά χρειάστηκαν τη «βοήθεια» του Μάρκου για να εκφράσουν την άποψή τους. Το τελευταίο είναι κάτι που έχει εντοπιστεί από τους διαλόγους και σε άλλους μαθητές, δηλαδή οι καινοτόμες ιδέες είναι ανεξάρτητες από την επίδοση στα μαθηματικά. Η έκφραση του Βασίλη «*να αφαιρούσαμε τις γωνίες*» υπονοεί να αφαιρεθούν τα καμπυλόγραμμα τρίγωνα που εμφανίζονται. Δεν υπάρχει εδώ ολοκληρωμένη απάντηση, αλλά είναι προφανές ότι η κεντρική ιδέα έχει δημιουργηθεί στο μυαλό των μαθητών, κάτι που γίνεται φανερό και από την γραπτή απάντηση του Κώστα.

Από την ερώτηση Ε5 και μετά οι μαθητές πειραματίζονται με το λογισμικό· οι απαντήσεις τους προκύπτουν λαμβάνοντας δεδομένα από τη χρήση του. Το λογισμικό μέσω της εικόνας, έδωσε στους μαθητές την ευκαιρία να σκεφθούν βαθύτερα και να κατανοήσουν την διαδικασία ενδελεχώς. Ο καταλυτικός ρόλος του προκύπτει από το γεγονός, ότι οι μαθητές απάντησαν χωρίς καμία δυσκολία στις ερωτήσεις, Ε5, Ε6, Ε7 και Ε8 (συμπλήρωση πίνακα).

Παρατηρείται, λοιπόν, ότι η υπάρχουσα δυνατότητα της αναπαράστασης μέσω του λογισμικού, δηλαδή το γεγονός ότι η όλη διαδικασία έγινε αντιληπτή και μέσω των αισθήσεων, βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν την μέθοδο. Έτσι λοιπόν, ενώ υπήρχε μεγάλη δυσκολία στην πρωταρχική ιδέα, δηλαδή στο πώς μπορούμε να συσχετίσουμε το εμβαδόν του πολυγώνου με τον κύκλο, όταν προέκυψε η ανάγκη του προσδιορισμού του εμβαδού αμέσως δημιουργήθηκε η ιδέα στους μαθητές να δημιουργήσουν πολύγωνα με αύξοντα πλήθος πλευρών.

Η ερώτηση Ε9 αποσκοπεί στο να εικάσουν οι μαθητές αν σε κάποια στιγμή θα ταυτιστεί το εμβαδόν του κύκλου με εκείνο του πολυγώνου. Οι σκέψεις και οι αντιλήψεις των μαθητών αποκαλύπτονται από τις παρακάτω απαντήσεις και διαλόγους.

Απόσπασμα 4Α

Στέλιος: Όταν η διαφορά γίνει μηδέν θα έχω το εμβαδόν του κύκλου.
Ε: Πότε θα γίνει μηδέν;
Στέλιος: Όταν το n γίνει άπειρο.
Νίκος: Δηλαδή ποτέ.
Στέλιος: Θα γίνει! Μπορεί να είναι άπειρο αλλά κάποτε θα γίνει!
Νίκος: Όχι δε θα φτάσουμε ποτέ στο μηδέν.
Στέλιος: Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ του απειροελάχιστου και του μηδέν!

Η συγκεκριμένη ερώτηση «γέννησε» τον διάλογο μεταξύ του Στέλιου και του Νίκου. Ο Στέλιος θεωρεί ότι η διαφορά των δύο εμβαδών θα γίνει μηδέν επομένως τότε θα βρεθεί και το εμβαδόν του κύκλου. Δέχεται, επίσης, ότι η διαδικασία αυτή είναι ατέρμονη αφού θεωρεί ότι για να φθάσει η διαφορά στο μηδέν πρέπει το πλήθος των πλευρών των πολυγώνων να γίνει άπειρο. Στον αντίποδα ο Νίκος είναι κατηγορηματικός, και ισχυρίζεται ότι η διαφορά ότι δεν θα γίνει ποτέ μηδέν, αφού το άπειρο είναι αυτό που λέει και η λέξη, δηλαδή κάτι που δεν έχει πέρας.

Κατά τη γνώμη μας η διαφορά των δύο απόψεων είναι πολύ μικρή. Η φράση του Στέλιου δείχνει μια αντίληψη που φαίνεται να συνδέεται με την αντίληψη που είχαν και οι πρώτοι ερευνητές μαθηματικοί για την έννοια του ορίου. Η φράση: «*Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ του απειροελάχιστου και του μηδέν!*» το υποδηλώνει· δηλαδή θα υπάρχει πάντα μια διαφορά ώστε να μπορούμε να κάνουμε ¨πράξεις¨ με αυτήν, αλλά όταν χρειαστεί να βγάλουμε αποτέλεσμα θα τη θεωρήσουμε ίση με μηδέν.

Πέρα, όμως, από την καθαρά αριθμητική εικόνα που έχουν οι μαθητές για το αν θα συμπέσουν τα εμβαδά υπάρχει και η γεωμετρική εικόνα, η οποία παρουσιάζεται στις παρακάτω απαντήσεις:

Απόσπασμα 5Α

Ερ: Υπάρχει κατά τη γνώμη σας κάποιο βήμα της διαδικασίας που θα συμπέσουν τα εμβαδά; (του κύκλου και των πολυγώνων)
Βασίλης: Όχι!
Ερ: Γιατί;
Βασίλης: Γιατί, δεν γίνεται δύο σχήματα με γωνίες να φτάσουνε ένα σχήμα που έχει άπειρες γωνίες (εννοεί τον κύκλο).
Ερ: Ας ακούσουμε και την άποψη της Βέρας.
Βέρα: Εγώ πιστεύω ότι το εμβαδόν ενός κύκλου για να συμπέσει με ένα άλλο εμβαδόν πρέπει να είναι και το άλλο να είναι κύκλος, αφού ένα ν-γωνο θα έχει πάντα γωνίες ενώ ο κύκλος δεν έχει.

Η παραπάνω αιτιολόγηση φάνηκε πειστική και την αποδέχτηκαν οι μαθητές. Διαφαίνεται ότι υπάρχει ο εξής συλλογισμός: όσο και αν αυξηθούν οι γωνίες του πολυγώνου δεν θα φθάσουν στο «άπειρο», που είναι το πλήθος των «γωνιών» του κύκλου. Αυτό προκύπτει από τις απαντήσεις της Βέρας και του Βασίλη, γιατί θεωρούν ότι ένα πολύγωνο δεν μπορεί να έχει άπειρες γωνίες ώστε να γίνει κύκλος. Υπάρχει στο σημείο αυτό από τους μαθητές ένας διαχωρισμός του απείρου. Η σύνδεση που γίνεται μεταξύ της γεωμετρικής άποψης (γωνίες) και της άλγεβρας (όσο και αν αυξήσουμε το πλήθος των γωνιών, άπειρο δεν θα γίνει) είναι αξιοσημείωτη. Η εικόνα βοηθάει στην διατύπωση του συλλογισμού, δηλαδή τα πολύγωνα δεν θα γίνουν κύκλος επομένως η διαδικασία δεν θα σταματήσει αλλά και αντίστροφα, το εμβαδό του κύκλου δεν μπορεί να ταυτιστεί με εμβαδό πολυγώνου αφού δεν έχει γωνίες. Η συγκεκριμένη διδακτική πρακτική βοήθησε τους μαθητές να εμπλουτίσουν την εμπειρία τους και να προωθήσουν την εξέλιξη της διαισθητικής κατανόησης.

Στην ερώτηση 12 ρωτάμε τους μαθητές *ποιον αριθμό πλησιάζει η διαφορά των δύο εμβαδών* (του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου πολυγώνου)

Απόσπασμα 6Α

Ερ: Ποιον αριθμό πλησιάζει η διαφορά των δύο αριθμών;

Αλέξης: Το μηδέν. (όλοι οι μαθητές συμφώνησαν)
Ερ: Θα ήθελε κάποιος να το εξηγήσει;
Βασίλης: Γιατί όσο πάμε πλησιάζουμε να έχουν το ίδιο εμβαδόν.
Ερ: Ποια;
Βασίλης: Τα δύο σχήματα.
Ερ: Ποιο εμβαδόν πλησιάζουν τα δύο σχήματα;
Βασίλης: Του κύκλου

και στην επόμενη ερώτηση, την 13, *πόσο κοντά μπορούμε να φτάσουμε στο εμβαδόν του κύκλου.*

Απόσπασμα 7Α

Ερ: Επομένως πόσο κοντά μπορούμε να φτάσουμε στο εμβαδόν του κύκλου;
Χρίστος: Πάρα-πάρα πολύ κοντά.
Ερ: Δηλαδή;
Μιχάλης: Άπειρα κοντά.
Ερ: Τι εννοείς;
Μιχάλης: Δηλαδή πολύ κοντά αλλά δεν μπορούμε να το ορίσουμε!
Ερ: Για ξανακοιτάξτε τον πίνακα στην τελευταία στήλη, αν σας έβαζε τον αριθμό 0,000009 θα μπορούσε να γίνει μικρότερη η διαφορά;
Σμαράγδα: Θα μπορούσε.
Ερ: Επομένως πόσο κοντά μπορούμε να φτάσουμε στο εμβαδόν του κύκλου;
Κώστας: Όσο θέλω.

Από τις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση 12 αντιλαμβανόμαστε ότι η διαδικασία έχει αποσαφηνιστεί. Οι μαθητές απαντούν με σιγουριά και ταυτόχρονα μπορούν εύκολα να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Ισχυριζόμαστε ότι οι αναπαραστάσεις των πολυγώνων και ο πίνακας έπαιξαν καταλυτικό ρόλο στις συγκεκριμένες απαντήσεις . Εν αντιθέσει με τις απαντήσεις που δίνουν στην ερώτηση 13, οι οποίες είναι του τύπου « *πάρα-πάρα πολύ κοντά*» ή *« άπειρα κοντά*», φαίνεται ότι η εικόνα υπάρχει στο μυαλό των μαθητών όμως δεν μπορεί να συγκεκριμενοποιηθεί. Βέβαια, δεν περιμέναμε να δοθεί η απάντηση με «αυστηρή» γλώσσα , αλλά πιστεύαμε ότι η έκφραση *«όσο κοντά επιθυμούμε»* θα ήταν επιλογή στην απάντηση των μαθητών και δεν θα προέκυπτε μετά από τη σχετική καθοδήγηση του καθηγητή.

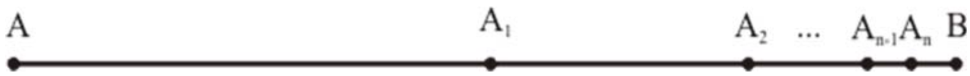
Παρατηρείται ξανά, όπως και σε προηγούμενο επεισόδιο, όχι μόνο σχετική αδυναμία έκφρασης από πλευράς των μαθητών, αλλά και η επεξεργασία των αποτελεσμάτων του πίνακα να περιορίζεται μόνο στο υπολογιστικό σκέλος. Δεν έγινε μάλλον, αντιληπτό από τους μαθητές αυτό που προέκυπτε από την τελευταία στήλη του πίνακα, ότι η διαφορά μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλο πλήθος πλευρών. Από την στιχομυθία προκύπτει ότι, οι μαθητές αντιλαμβάνονται την προσέγγιση. Η κεντρική ιδέα είναι πραγματικά ότι μπορούμε να φτάσουμε πολύ κοντά αλλά η ειδοποιός διαφορά προκύπτει μόνο όταν ο καθηγητής επιμείνει έτσι ώστε να φανεί ότι το πόσο κοντά μπορεί να φθάσουμε στο εμβαδόν, είναι θέμα επιλογής.

2η Φάση

Στη δεύτερη φάση, δόθηκε στους μαθητές το δεύτερο φύλλο εργασίας με το παρακάτω πρόβλημα, ως εισαγωγή:

«Ένα κινητό κινείται κατά μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος AB μήκους 1, από το A προς το B: Κατά τη διάρκεια της πρώτης μέρας, το κινητό καλύπτει διάστημα AA_1 *ίσο με το μισό του διαστήματος AB. Κατά τη διάρκεια της δεύτερης μέρας, το κινητό καλύπτει διάστημα* A_1A_2 *ίσο με το μισό του διαστήματος* A_1B*.Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατά τη διάρκεια της «η» μέρας το κινητό καλύπτει διάστημα* $A_{η-1}A_η$ *ίσο με το μισό του διαστήματος* $A_{η-1}B$*.*

(Δηλαδή κάθε μέρα το κινητό καλύπτει το μισό της απόστασης που έχει απομείνει μέχρι το B)



Η πρώτη ερώτηση που δόθηκε στους μαθητές ήταν η εξής:

E1: Το κινητό θα φτάσει στο σημείο στο B;

Όπως ήταν αναμενόμενο, άλλοι μαθητές απάντησαν ότι θα φθάσει στο B και άλλοι ότι δεν θα φθάσει το κινητό στο B . Το ενδιαφέρον όμως επικεντρώνεται στις αιτιολογήσεις που δίνουν οι μαθητές στους ισχυρισμούς τους:

Η ομάδα που αναφέρει ότι το κινητό θα φθάσει στο B, δίνει τις παρακάτω αιτιολογήσεις:

Απόσπασμα 1Β

«Θα φθάσει κάποια στιγμή μετά από αρκετές υποδιαιρέσεις και άπειρο (δηλαδή πολύ) χρόνο».

«Πρακτικά δεν θα έφθανε αλλά επειδή L= 0,999… θα φθάσει»

« Αν επαναληφθεί η διαδικασία άπειρες φορές θα φθάσει, αλλά πρακτικά δεν θα φθάσει».

« Θα μικραίνει συνέχεια η απόσταση άρα θα φθάσει.»

Οι θετικές απαντήσεις αντλούνται από την πεποίθηση των μαθητών ότι κάτι που αυξάνεται συνεχώς δεν μπορεί να έχει άνω φράγμα ή ότι μικραίνει συνέχεια δεν έχει κάτω φράγμα. Η συνεχόμενη μείωση της απόστασης οδηγεί διαισθητικά τους μαθητές, στην απάντηση ότι το κινητό θα φτάσει στο σημείο Β. Είναι επίσης προφανές ότι το άπειρο οι μαθητές το θεωρούν αριθμό, όχι κάποιον συγκεκριμένο ίσως , αλλά πάντως αριθμό.

Άξια σχολιασμού αποτελεί η απάντηση: *«Πρακτικά δεν θα έφθανε αλλά επειδή L= 0,999… θα φθάσει»*. Η προϋπάρχουσα γνώση του μαθητή ότι 0.9999…= 1 τον οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τελικά το κινητό θα καλύψει την αρχική απόσταση. Το σκεπτικό του όπως διαφαίνεται είναι το εξής: ένα δεν μπορεί να γίνει αλλά μπορεί να γίνει 0.9 άρα και 0.99 κλπ, δηλαδή τελικά ένα. Το άπειρο για τον μαθητή έχει πάλι την ιδιότητα του πολύ μεγάλου αριθμού μη συγκεκριμένου ίσως, αλλά υπαρκτού, και δεν έχει την έννοια του απεριόριστου.

Η ομάδα που αναφέρει ότι το κινητό δεν θα φθάσει στο Β:

Απόσπασμα 2Β

« Το κινητό δεν θα φθάσει στο Β, αφού πάντα μεταξύ δύο σημείων υπάρχει πάντα ένα ενδιάμεσο».
«Νομίζω ότι δεν θα φθάσει ποτέ, ακόμα και αν διαδικασία συνεχιστεί επ' άπειρον γιατί πάντα θα υπάρχει μια απειροελάχιστη διαφορά.»
« Όχι, γιατί οι αριθμοί ανάμεσα στο 0 και στο 1 είναι άπειροι και πάντα θα υπάρχει μια απόσταση στο κινητό σώμα και στο σημείο Β.»

Φαίνεται ότι οι μαθητές της αρχικής ομάδας ακολουθώντας τη διαίσθησή τους απαντούν ότι θα φθάσει. Η άλλη ομάδα μαθητών, απαντά ότι δεν θα φθάσει, χωρίς όμως να μπορούν να αιτιολογήσουν ακριβώς το λόγο. Οι μαθητές αυτοί βασιζόμενοι σε πρότερες γνώσεις, που δεν αποκτήθηκαν από την διδασκαλία, απαντούν σωστά αλλά με αναπαραγωγή προτάσεων συνδυασμένες με προσωπικούς ορισμούς. Χαρακτηριστική είναι η απάντηση της μαθήτριας Μάγδας.

Απόσπασμα 3Β

Μάγδα: « *Ο Ευκλείδης είπε ότι μεταξύ δύο σημείων υπάρχει πάντα ένα ανάμεσα έτσι τα σημεία είναι άπειρα άρα δεν θα φθάσει ποτέ».*

Οι παραπάνω απαντήσεις των μαθητών περιγράφουν και την εικόνα που έχουν σχηματίσει για το συνεχές των πραγματικών και την πυκνότητα του. Η αριθμητικοποίηση της ευθείας τους βοηθά να κατανοήσουν την απειρία των σημείων με αποτέλεσμα το κινητό να μην φθάσει ποτέ στο σημείο Β. Ο λογικός συμπερασμός είναι ότι αν τα σημεία ήταν τοποθετημένα σε μία σειρά, το ένα μετά το άλλο, σε κάποια στιγμή το κινητό θα έφθανε στη θέση Β, όμως τα σημεία είναι άπειρα και εφόσον ανάμεσα από οποιαδήποτε δύο υπάρχει και άλλο, επομένως δεν θα φθάσει.

Οι παραπάνω διατυπώσεις των μαθητών δεν προέρχονται από στοχευμένη πρότερη διδασκαλία ούτε υπάρχει ενότητα στα σχολικά εγχειρίδια, εκτός ίσως της αναπαράστασης των πραγματικών με μια ευθεία, που να αναδεικνύει και να αποσαφηνίζει τις έννοιες αυτές. Οι απαντήσεις τους, αντλούν υλικό από συζητήσεις που είχαν γίνει στο περιθώριο του μαθήματος με σαφώς εγκυκλοπαιδική χροιά και δεν πηγάζουν από προγραμματισμένη διδασκαλία. Το γεγονός αυτό εξηγεί την έλλειψη σιγουριάς στις απαντήσεις των μαθητών, άλλωστε οι εκφράσεις *«νομίζω»* ή *«ο Ευκλείδης είπε»* το καταδεικνύουν.

Η δεύτερη ερώτηση αφορούσε τον υπολογισμό του μήκους των διαστημάτων $Α_ηΒ$ για η=1,2,….. Ο παρακάτω είναι ένας χαρακτηριστικός διάλογος μεταξύ μαθητών και του ερευνητή.

Απόσπασμα 4Β

Ματίνα: Βλέπουμε ότι κάθε φορά διαιρούμε το προηγούμενο διά 2, θα είναι $A_1B = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$, $A_2B = \frac{A_1B}{2} = \frac{1}{4}$ *κ.ο.κ..*
Ερ: Με πόσο θα ισούται η απόσταση $A_ηB$*;*
Ματίνα: Θα είναι το προηγούμενο δια δύο.
Ερ: Δηλαδή πόσο;
Ματίνα: ...
Νάσος: Το $A_ηB= 1/2^η$

Το πλαίσιο εργασίας που επιλέξαμε, του οποίου σκοπός ήταν η καθολική συμμετοχή των μαθητών και μέσω της καθοδήγησης από τον καθηγητή και της κοινωνικής αλληλεπίδρασης να προκύψει η μάθηση, φαίνεται να πετυχαίνει. Οι μαθητές με σχετική ευκολία απάντησαν στο ερώτημα, αν και παρατηρήθηκε ξανά η δυστοκία της έκφρασης μέσω των μαθηματικών συμβόλων. Τα παραπάνω πιστοποιούνται και από την ερώτηση που έκανε ο Ηλίας, η οποία προέκυψε στη συγκεκριμένη στιγμή.

Απόσπασμα 5Β

Ηλίας*: Που ανήκει ο «n» ; (σε πιο σύνολο)*
Ερ: Μπορεί κάποιος να απαντήσει ο αριθμός «n» σε ποιο σύνολο παίρνει τιμές;
Νάσος: Στους φυσικούς.
Ερ: Γιατί; από που προκύπτει;
Νάσος: Γιατί αν βάλουμε έναν αρνητικό στο «n» θα προκύψει αριθμός μεγαλύτερος του 1, κάτι που δεν μπορεί να είναι σωστό.
Ερ: Α! για αυτό το λόγο λοιπόν.
Νάσος; Ναι, είναι ένας λόγος αυτός.
Ερ: Θα ήταν σωστό αν στη θέση του «n» βάζαμε έναν θετικό πραγματικό και όχι φυσικό;
Νάσος: …
Ερ: Κάποιος άλλος θέλει να μας πει κάτι σχετικό;
Μάγδα: Αφού κάθε φορά έχουμε τον επόμενο μιλάμε για το σύνολο των φυσικών!

Το παραπάνω απόσπασμα είναι διαφωτιστικό για το πως οι μαθητές χρησιμοποιούν τις γνώσεις που έχουν αποκομίσει κατά την διάρκεια των σχολικών τους χρόνων και για τον βαθμό αντίληψης που έχουν για θεμελιώδη έννοιες των μαθηματικών. Η αρχική ερώτηση , δηλαδή από ποιο σύνολο παίρνει τιμές ο «n», δεν μπορούσε να απαντηθεί από την πλειονότητα των μαθητών, κάτι που για μας ήταν αναπάντεχο. Η έκπληξη μας συνεχίστηκε από την απάντηση του Νάσου, η οποία βασίστηκε στην εξίσωση και όχι στον τρόπο δημιουργίας αυτής. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι ο Νάσος έχει άριστες επιδόσεις στα μαθηματικά και μάλιστα θεωρείται μαθητής με ιδιαίτερη κλίση σε αυτά. Όμως, όπως διαφαίνεται, ο καθαρά φορμαλιστικός τρόπος σκέψης του τον οδηγεί σε σφάλμα, «βλέπει» τον τύπο και βρίσκει το πεδίο ορισμού αναγνωρίζοντας μοναδικό περιορισμό ότι η ποσότητα πρέπει να είναι μικρότερη του ένα, χωρίς να αντιλαμβάνεται ότι ο τύπος είναι η μαθηματική έκφραση του προβλήματος που δόθηκε. Έτσι το αποτέλεσμα είναι να απαντήσει άστοχα.

Η απάντηση της Μάγδας, έχει προέλθει από γνώσεις που είχε αποκτήσει κατά την διάρκεια των μαθημάτων και εμφανώς τις αξιοποίησε. Παρατηρείται, όμως, και από αυτό το απόσπασμα να μην επιτυγχάνονται οι στόχοι της εκπαίδευσης των Μαθηματικών, αφού σχεδόν όλοι οι μαθητές που μετείχαν στη διαδικασία δεν αναγνώρισαν το σύνολο των φυσικών.

Για την ερώτηση, *Ε3: Έστω $Γ_1$ ένα σημείο του ΑΒ τέτοιο ώστε $Γ_1Β = 10^{-6}$. Το κινούμενο σημείο θα περάσει το $Γ_1$;* υπήρξε ο παρακάτω διάλογος.

Απόσπασμα 6Β

Νίκος: Θα πρέπει η διαφορά μεταξύ του κινούμενου και του σημείου Β να είναι μικρότερη του 10^{-6}.
Ερ: Ωραία, πώς όμως θα το εκφράσουμε αυτό με σύμβολα;
Νάσος: Θα πρέπει $Α_ηΒ < ΑΓ_1$.
Ερ: Εντάξει, με μαθηματικά σύμβολα;
Νάσος: Θα πρέπει $1/2^η<10^{-6}$.
Ερ: Ποιος μπορεί να μας κάνει πιο απλή την ανίσωση;
Μάγδα: Θα πρέπει $2^η>10^6$
Ερ: Υπάρχει αριθμός «n» που αν μπει εκθέτης στο 2 να «περάσει» το 10^6;
Ματίνα: Υπάρχει αφού στη θέση του «n» μπορούμε να βάλουμε όποιον φυσικό θέλουμε, αφού οι φυσικοί είναι άπειροι και δεν σταματούν να μεγαλώνουν, άρα το 2^n θα γίνει μεγαλύτερο του 10^6 .

Στις ερώτηση 4 που είναι η ακόλουθη Ε4: Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για τα σημεία Γ2 , Γ3 , τέτοια ώστε Γ2Β=10-100 και Γ3Β=10-1000 οι μαθητές απάντησαν με σχετική ευκολία. Χαρακτηριστική είναι η παρακάτω απάντηση:

Απόσπασμα 7Β

Μιχάλης: Εγώ πιστεύω ότι θα περάσει το κινητό τα σημεία.
Ερ: Πως το καταλαβαίνεις;

Μιχάλης: Θα κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία, μόνο που τώρα το 2^n θα είναι μεγαλύτερο του 10^6.
Ερ: Δηλαδή πρέπει να συμβαίνει το εξής: $2^n > 10^{1000}$ γίνεται;
Νίκος: Εφόσον κατασκευάζουμε εμείς την πράξη μπορούμε να ξεπεράσουμε οποιοδήποτε αριθμό.
Ερ: Άρα το 2^n τι τιμές μπορεί να πάρει;
Νίκος: Μεγαλύτερο από οποιοδήποτε αριθμό !
Ερ: Δηλαδή;
Νίκος: Από όποιον αριθμό και αν επιλέξουμε μπορεί να γίνει μεγαλύτερος.

Η αναλογικότητα βοήθησε τους μαθητές να απαντήσουν εύκολα στο ερώτημα 4, όμως, η απάντηση του Νίκου στην ερώτησή μας, ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός 2^n, υποδηλώνει ότι η εικόνα και ο ορισμός έχουν αμφίδρομη πορεία και ο σχηματισμός της έννοιας είναι πλήρης στο μυαλό του μαθητή. Ο μαθητής ουσιαστικά με την έκφραση « *Εφόσον κατασκευάζουμε εμείς την πράξη…*» δηλαδή εφόσον επιλέγουμε τελικά εμείς τον «n», ο 2^n μπορεί να γίνει μεγαλύτερος από οποιοδήποτε δοσμένο αριθμό, δεν απαντάει μόνο στο συγκεκριμένο ερώτημα, αλλά γενικεύει την απάντησή του και την τοποθετεί στη διάσταση της μαθηματικής πρότασης. Η συγκεκριμένη απάντηση υπονοεί τον ορισμού του ορίου στο άπειρο. Φαίνεται ότι ο στόχος της παρέμβασης επιτυγχάνεται, η επισήμανσή μας είναι έντονη για να καταδείξουμε τον πλούτο των ιδεών που μπορεί να προκύψουν από διαδικασίες του συγκεκριμένου πλαισίου. Για να ενισχύσουμε την άποψή μας παραθέτουμε και το συμπέρασμα της Κατερίνας.

Απόσπασμα 8Β

Κατερίνα: Για μένα τα ερωτήματα 3 ως 5 είναι τα ίδια! Είναι προφανές αφού περνάει το $Γ_1$ θα περνάει και κάθε άλλο σημείο που βρίσκεται ανάμεσα στο Α και στο Β.

Η Κατερίνα αναφέρεται και στο ερώτημα Ε5 που είναι το εξής: *Ε5: Έστω Γ ένα τυχαίο σημείο ανάμεσα στα Α και Β . Το κινούμενο σημείο θα ξεπεράσει το Γ;* Η Σοφία όμως είχε διαφορετική άποψη από την Κατερίνα. Ο διάλογος που ακολουθεί είναι αποκαλυπτικός για το πως αντιλαμβάνεται την κατάσταση.

Απόσπασμα 9Β

Ερ: Πες μας, Σοφία, την άποψή σου.
Σοφία: Σκέφτηκα ότι, σε αυτήν την απόσταση, όπως είχαμε δείξει στο πρώτο ερώτημα, ότι θα υπάρχει κάποιο σημείο που θα είναι σε κάποια απόσταση από το Β, επομένως αν το σημείο Γ είναι στο διάστημα αυτό το μικρό, δεν θα το ξεπεράσει.
Ερ: Πόσο μικρό να είναι το διάστημα;
Σοφία: Ξέρω εγώ, κάποια δύναμη του 10 με αρνητικό εκθέτη.
Ερ: Πόσο δηλαδή;
Σοφία: Δέκα στη μείον ένα δισεκατομμύριο;
Ερ: Ωραία λοιπόν, ας το δούμε μαζί, θέλουμε λοιπόν το $\frac{1}{2^{\eta}} < 10^{-10^{9}} \Leftrightarrow 10^{10^{9}} < 2^{\eta}$ *γίνεται αυτό;*
Σοφία: Γίνεται, μάλλον.
Ερ: Βοηθήθηκες από αυτή την αντιμετώπιση ή ακόμα έχεις αμφιβολίες ότι το κινητό θα προσπεράσει το σημείο Γ;
Σοφία: Δεν είμαι σίγουρη, γιατί παίρνω σαν δεδομένο την απάντηση από το πρώτο ερώτημα. (η συγκεκριμένη μαθήτρια είχε απαντήσει ότι το κινητό θα φθάσει στο Β, αλλά αποδέχτηκε τελικά ότι δεν θα φθάσει, όταν έγινε η σχετική συζήτηση).

Το σκεπτικό της Σοφίας είναι το εξής: αφού δεν θα φθάσει στο Β σημαίνει ότι το κινητό θα έχει πάντα μια απόσταση από αυτό, αν υποθέσουμε ότι το Γ είναι το «αμέσως» *προηγούμενο* σημείο από το Β δεν θα το φθάσει γιατί τότε θα έφθανε και το Β. Η εντύπωση που έχει αποκτήσει για την ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι εσφαλμένη, καθώς προφανώς αναγνωρίζει τα σημεία σαν τελείες διαδοχικά τοποθετημένες. Η στρεβλή εικόνα που έχει σχηματίσει για το συνεχές και την πυκνότητα των πραγματικών δεν την βοηθά να κατανοήσει την έννοια, ακόμα και όταν η πραγματική διάσταση αποδεικνύεται με αλγεβρικό τρόπο.

Οι παρακάτω προτάσεις είναι μερικές από τις αιτιολογήσεις των μαθητών στο ερώτημα αν θα περάσει το κινητό το τυχαίο σημείο Γ.

Απόσπασμα 10Β

« ναι, αφού το σημείο θα πλησιάζει κάθε φορά το Β, σίγουρα θα ξεπεράσει το Γ.» *« ναι, γιατί τα σημεία ανάμεσα σε Α και Β είναι άπειρα οπότε θα υπάρχουν σημεία μετά το Γ.»* *« οποιοδήποτε σημείο μπορεί να οριστεί ως διπλάσιο ενός άλλου οπότε θα υπάρχει πάντα σημείο πιο κοντά στο Β»*

Η απάντηση του μαθητή, λέγοντας ότι κάθε σημείο έχει διπλάσιο, εννοεί ότι το επόμενο βήμα θα μπορεί να εκτελεστεί πάντα αφού διανύει το κινητό μισή απόσταση από αυτή που πρέπει να διανύσει μέχρι να φτάσει στο Β. Είναι πρέπον να τονιστεί εδώ ότι, ο συγκεκριμένος μαθητής στην ερώτηση E_1 είχε απαντήσει: *« θα φτάσει κάποια στιγμή έπειτα από άπειρες υποδιαιρέσεις».* Παρατηρείται λοιπόν ότι στη διάρκεια της εν λόγω παρέμβασης ο μαθητής φαίνεται να έχει αποσαφηνίσει τις έννοιες και απαντά μάλλον με σιγουριά και αιτιολογώντας επαρκώς ότι το κινητό θα περάσει οποιοδήποτε σημείο ανάμεσα στο Α και στο Β.

Η ερώτηση *Ε6: Να διατυπωθεί το Ε5 με μαθηματικό συμβολισμό.*

Οι μαθητές δεν μπόρεσαν να απαντήσουν στο δύσκολο αυτό ερώτημα. Ουσιαστικά τους ζητήσαμε να εκφρασθούν αφαιρετικά και να χρησιμοποιούσαν τους ποσοδείκτες *«για κάθε»* και *«υπάρχει».* Εκ των υστέρων καταλάβαμε ότι ο στόχος αυτός ήταν ιδιαίτερα φιλόδοξος και αυτό γιατί δεν συνεκτιμήσαμε, το γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν έρθει σε επαφή με ποσοδείκτες κατά τη σχολική τους διαδρομή, εξαιρώντας ίσως ελάχιστες περιπτώσεις. Κατά τη γνώμη μας, αν υπήρχε το κατάλληλο υπόβαθρο, θα ήταν πιθανό οι μαθητές να είχαν φθάσει στη διατύπωση που επιδιώκαμε. Ο παρακάτω διάλογος είναι αποκαλυπτικός ως προς την επιβεβαίωση των ισχυρισμών μας.

Απόσπασμα 11Β

Κατερίνα: Εγώ έγραψα $A_\eta B<\Gamma B$ *δηλαδή* $1/2^\eta < \Gamma B$.
Ερ: Σωστά, πιο γενικά μπορείς; Δεδομένου ότι το Γ είναι τυχαίο σημείο;
Κατερίνα:….
Ερ: Εντάξει, κάποιος άλλος;
Νίκος: Έχω ορίσει το σημείο Γ ως x και έχω πει ότι $x > 1/2^\eta$.
Ερ: Σημείο μεγαλύτερο από έναν αριθμό;

Νίκος: Απόσταση! Την απόσταση ΓΒ. Δηλαδή $x > 1/2^{\eta}$.

Η Κατερίνα διατυπώνει ορθώς την ανισότητα εκφράζοντας την απόσταση με ΓΒ, δηλαδή όπως είναι δοσμένη στην ερώτηση, αδυνατεί όμως να εκφρασθεί αφαιρετικά χρησιμοποιώντας το *«για κάθε»* απόσταση. Ο Νίκος στην πρώτη του απάντηση περιγράφει με αριθμητικά σύμβολα θέσεις σημείων, και όταν γίνεται η διόρθωση απαντάει ικανοποιητικά θέτοντας με (x) την τυχαία απόσταση χωρίς όμως και αυτός να χρησιμοποιεί τους ποσοδείκτες. Παρατηρείται ότι οι μαθητές προσπαθούν να εκφρασθούν μαθηματικώς, ώστε να αποδώσουν την έννοια αυστηρά, αλλά το υπόβαθρό τους δεν τους βοηθά να δώσουν ακριβή απάντηση. Η τελευταία φράση του παραπάνω διαλόγου το δηλώνει εμφανώς. Επίσης πρέπει να τονίσουμε ότι ο καθηγητής προσπάθησε να εκμαιεύσει την απάντηση, αφιερώνοντας πολύ χρόνο, όμως οι μαθητές δεν μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν το *«για κάθε» ή το «υπάρχει»* στις απαντήσεις τους.

Στην ερώτηση επτά (7) ουσιαστικά ζητούσαμε να δώσουν τον ορισμό του ορίου για ακολουθίες που συγκλίνουν στο μηδέν.

Απόσπασμα 12Β

Νίκος: Όπως έχουμε γράψει τώρα, (εννοεί $\alpha_\eta < \varepsilon$), θα βάλουμε $\alpha_{\eta+1} < \alpha_\eta < \varepsilon$.
Ερ: Μπορεί κάποιος να μας το γράψει πιο γενικά χρησιμοποιώντας ποσοδείκτες; Αν υποθέσουμε ότι ο η_0 είναι ο πρώτος που έχει μικρότερη τιμή από το ε.
Νάσος: Για κάθε $\eta > \eta_0$ θα ισχύει $\alpha_\eta < \varepsilon$.
Ερ: Αυτό που είπε ο Νίκος, ο Νάσος το διατύπωσε πιο γενικά. Ουσιαστικά οι εκφράσεις αυτές είναι ισοδύναμες. Για να δούμε τώρα, έχει γίνει κατανοητό τι ακριβώς βρήκαμε; Επιλέγω απόσταση πάρα πολύ μικρή από το Β. Πόσοι είναι οι όροι της ακολουθίας που θα βρίσκονται σ 'αυτό το διάστημα; (δηλαδή σε απόσταση από το Β, μικρότερη από το ε).
Μιχάλης: Άπειροι!
Ερ: Όσο μικρό και αν είναι το ε;
Μαθ: (όλοι μαζί) Ναι, θα είναι άπειροι.
Ερ: Δηλαδή που θα βρίσκονται τελικά «όλα» τα σημεία που βρίσκω με τον τρόπο αυτό;
Νάσος: Πάρα, πάρα πολύ κοντά στο Β!

Ερ: Πόσο κοντά στο Β;
Μιχάλης: Όσο θέλουμε κοντά !
Ερ: Και πόσα θα είναι αυτά ;
Μάγδα: Άπειρα!

Πολύ εύκολα οι μαθητές αναγνώρισαν το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής. Το γεγονός ότι καθολικά οι μαθητές συνειδητοποίησαν ότι άπειροι όροι θα βρίσκονται σε απόσταση από το Β όσο μικρή θέλουμε εμείς, δείχνει ότι η έννοια του ορίου αναδύθηκε μέσα από όλη την διαδικασία χωρίς φορμαλισμούς και αυστηρά επιλεγμένη ορολογία.

Όμως στο σημείο αυτό οφείλουμε στον αναγνώστη μια διευκρίνιση στο γεγονός ότι, κατά τη διάρκεια της παρέμβασης στο συγκεκριμένο σημείο, έγινε αντιληπτό μετά από σχετική ερώτηση στους μαθητές ότι οι όροι που δεν θα βρίσκονται στο διάστημα αυτό θα έχουν συγκεκριμένο πλήθος (πεπερασμένο), και όλοι οι υπόλοιποι (άπειρου πλήθους) θα βρίσκονται στο διάστημα αυτό. Η έκφραση «άπειροι» που χρησιμοποιούν οι μαθητές ουσιαστικά είναι πολύ κοντά στην έκφραση «τελικά όλοι».

Η επιλογή της ερώτησης 8, είχε να κάνει με την αξιολόγηση της όλης διαδικασίας δηλαδή να ελέγξουμε κατά πόσο οι μαθητές μπορούσαν να δικαιολογήσουν αν μια ακολουθία συγκλίνει η όχι στο μηδέν. Η ερώτηση ήταν η εξής:

Ε8: Ισχύει το ίδιο για την ακολουθία;

Παρακάτω παραθέτουμε μια εκτενή στιχομυθία μεταξύ του ερευνητή και του μαθητών για να αναδείξουμε σημαντικά ζητήματα που άπτονται της διδασκαλίας του ορίου αλλά και της συγκεκριμένης διδακτικής πρακτικής.

Απόσπασμα 13Β

Ερ: Για την ακολουθία ισχύει το ίδιο; Δηλαδή τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται οσοδήποτε κοντά σε κάποιον αριθμό;
Ματίνα: Είπαμε προηγουμένως ότι για κάθε $\nu > \nu_0$ *οι όροι της ακολουθίας θα είναι μικρότεροι του ε. Θα πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε για αυτήν την ακολουθία ότι* $\alpha_\nu < \varepsilon$ *. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει τα δύο* α_ν *να είναι ίσα!*

Νίκος: Θα πρέπει να δείξουμε ότι το απόλυτο του $α_ν$ να είναι μεγαλύτερο μάλλον του απολύτου του $α_{ν+1}$, βάζω απόλυτο γιατί αλλάζει πρόσημο!;
Ερ: Όσο το ν μεγαλώνει τι κάνουν κατά απόλυτη τιμή οι τιμές της ακολουθίας
Νάσος: Όσο το ν μεγαλώνει τότε οι τιμές της ακολουθίας πλησιάζουν στο μηδέν.
Ερ: Πως θα το δείξουμε αυτό;
Μάγδα: Θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ν οι όροι της ακολουθίας γίνονται μικρότεροι ενός αριθμού.
Ερ: Ποιου αριθμού;
Μάγδα: Του 0,1 ας πούμε.
Ερ: Ωραία, τι θα γράψουμε τώρα;
Μάγδα:
Ερ: Μπορείς να τη λύσεις; (την ανίσωση)
Μάγδα: Ναι αρκεί να πάρουμε ν> 10
Ερ: Δηλαδή δείξαμε ότι αν επιλέξω για ν αριθμό μεγαλύτερο του 10 τότε η απόσταση του από το μηδέν θα είναι μικρότερη του 1/10.
Μαθ: (όλοι μαζί) Σωστά.
Ερ: Πως θα το δείξουμε αυτό γενικά ; Πως το αποδείξαμε αυτό προηγουμένως;
Βέρα: Θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ε οι όροι της ακολουθίας γίνονται μικρότεροι του ε. Άρα θα γράψουμε .
Ερ: Μπορούμε να το λύσουμε αυτό;
Μιχάλης: Ναι αρκεί να πάρουμε ν> 1/ε.
Ερ: Δηλαδή πόσο κοντά στο μηδέν μπορούμε να φτάσουν τελικά «όλοι» οι όροι της ακολουθίας;
Νάσος: Όσο θέλουμε!

Ερ: Θα μπορούσε κάποιος να οριοθετήσει την έννοια του ορίου; Να μου δώσει έναν ορισμό του ορίου;	
Κατερίνα: Όταν μπορούμε να το πλησιάσουμε πάρα πολύ κοντά χωρίς να το ακουμπήσουμε.	
Ερ: Πόσοι όροι της ακολουθίας θα βρίσκονται εκεί;	
Μαθ: (όλοι μαζί) Άπειροι! (τελικά όλοι)	

Η πρώτη παρατήρηση που πρέπει να γίνει στο σημείο αυτό είναι η πρόταση που καταθέτει η Ματίνα για την απόδειξη της σύγκλισης, αναφέρει χαρακτηριστικά, *αφού γνωρίζουμε ότι η πρώτη ακολουθία συγκλίνει στο μηδέν, αν αποδείξουμε ότι τα* $α_ν$ *είναι ίσα τότε και η νέα ακολουθία θα συγκλίνει στο μηδέν.* Αν είμαστε λίγο προσεκτικοί, θα διαπιστώσουμε ότι ουσιαστικά η μαθήτρια περιγράφει το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών. Η πεποίθησή μας ότι οι μαθηματικές προτάσεις, όσο δύσκολες και αν είναι, μπορούν να **σχηματιστούν** στο μυαλό των μαθητών αρκεί να υπάρχει το κατάλληλο περιβάλλον φαίνεται να επιβεβαιώνεται.

Ο παραπάνω διάλογος μας αποκαλύπτει ότι, σ' αυτόν συμμετέχουν πλήθος μαθητών αλλά και την αδυναμία των μαθητών να χειριστούν μαθηματικές εκφράσεις αφαιρετικού χαρακτήρα. Η Μάγδα (όπως και το σύνολο των μαθητών) δεν είναι έτοιμη ακόμη να σκεφθεί ολικά δηλαδή να αναφερθεί για κάθε θετικό αριθμό, αλλά ξεκινάει την απάντησή της παίρνοντας αρχικά τον αριθμό 1/10, (ο καθηγητής βοήθησε την διαδικασία παίρνοντας και το 1/1000). Ύστερα από την τοποθέτηση, μπόρεσαν οι μαθητές να εκφρασθούν γενικά, και πάντα κάτω από τη βοήθεια του καθηγητή.

Το γεγονός ότι οι μαθητές συνειδητοποίησαν ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουν την έννοια του απολύτου, αποτελεί σίγουρα ένα καθαρό βήμα προόδου στη συλλογιστική τους. Όμως γίνεται αντιληπτό, από την ανάλυση του συγκεκριμένου αποσπάσματος, ότι οι διαδικασίες είναι πιο «εύκολα» διαχειρίσιμες από τις έννοιες. Ενώ λοιπόν οι μαθητές εύκολα μπορούν να «λύσουν» τη συγκεκριμένη ανισότητα, αυτό που βρίσκουν δεν μπορούν να το νοηματοδοτήσουν. Έτσι λοιπόν, οι μαθητές, δεν αντιμετώπισαν κάποιο πρόβλημα να λύσουν τις ανισώσεις, η όλη διαδικασία χόλωνε στην μαθηματική έκφραση των ιδεών τους και την εννοιολογική διάσταση που δίνανε σ' αυτές.

Ο ορισμός του ορίου που δίνει η Κατερίνα επιβεβαιώνει τα παραπάνω, λέγοντας χαρακτηριστικά: «*Όταν μπορούμε να το πλησιάσουμε πάρα πολύ κοντά χωρίς να το ακουμπήσουμε*». Ο απλοϊκός ορισμός που δίνει στερείται των πληροφοριών που είχαν προκύψει κατά την διάρκεια της διαδικασίας, αλλά και αμέσως μετά, που δίνει την απάντηση στην ερώτηση «*Πόσοι όροι της ακολουθίας θα βρίσκονται εκεί;»*. Βέβαια, αντιλαμβανόμαστε ότι με στοχευμένες ερωτήσεις θα βελτίωνε την διατύπωσή της, όμως δεν ήταν αυτός ο στόχος μας. Οι επισημάνσεις έχουν να κάνουν με το γεγονός ότι η συγκεκριμένη μαθήτρια έμεινε στο πρόβλημα και δεν μπόρεσε να δει την διάσταση της έννοιας. Ο ορισμός που δίνει μένει στην εικόνα του προβλήματος, υπονοεί με τα λεγόμενά της, αφού το κινητό δεν θα φθάσει στο Β (εικόνα), αλλά μπορεί να φθάσει οσοδήποτε κοντά (όριο = σύνορο), τότε αυτό σημαίνει ότι υπάρχει όριο, και όχι το γεγονός ότι τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας θα βρίσκονται οσοσδήποτε κοντά στον αριθμό αυτό.

Κεφάλαιο 7

Συζήτηση – Συμπεράσματα

Η βασική ιδέα εκπόνησης της εργασίας αυτής ήταν να ελεγχθεί κατά πόσο είναι εφικτό να διδαχθεί η έννοια του ορίου σε μαθητές Λυκείου μικρότερους από την τρίτη τάξη, και μέσω των διδακτικών παρεμβάσεων να αναδειχθούν και να αναλυθούν τα όποια εμπόδια θα προέκυπταν. Ο κεντρικός στόχος της όλης διαδικασίας ήταν να διατυπώσουν οι μαθητές τον αυστηρό ορισμό του ορίου αφού πρώτα αποκτούσαν μια διαισθητική αντίληψη της έννοιας του ορίου.

Για να το πετύχουμε αυτό, προσπαθήσαμε να προσεγγίσουμε την έννοια μέσω διαδοχικών στοχευμένων βημάτων δίνοντας έμφαση στη ενεργό ατομική συμμετοχή, αλλά και στην αλληλεπίδραση που παράγεται από τις απόψεις και τις ενέργειες του καθηγητή και των μαθητών μέσα σε μία τάξη. Για το σκοπό αυτό, επιλέξαμε δύο «εύκολα» στη διατύπωση προβλήματα τα οποία δεν ήταν «ξένα» στους μαθητές, ώστε να τους παρωθήσουμε και να τους ενεργοποιήσουμε. Στον όλο σχεδιασμό πέρα από την πάγια θέση μας ότι η μάθηση παράγεται μέσω της ενεργητικής συμμετοχής, συνυπολογίσαμε την ελληνική σχολική πραγματικότητα και τη δομή των αναλυτικών προγραμμάτων σε συνδυασμό με την ύλη των σχολικών εγχειριδίων, ώστε τα συμπεράσματα να έχουν ικανοποιητικό βαθμό εγκυρότητας.

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να τονίσουμε το θετικό ψυχολογικό κλίμα που προσπαθήσαμε να δημιουργήσουμε στην τάξη. Βοηθήσαμε τους μαθητές να ενισχύσουν την αυτοεκτίμησή τους και αυτό είχε ως αποτέλεσμα την δημιουργία κατάλληλου περιβάλλοντος για την έκφραση νέων ιδεών και πρακτικών, απαλλαγμένο από το άγχος που δημιουργεί μια λανθασμένη απάντηση. Το ενδιαφέρον του καθηγητή, καθώς και ο σεβασμός στην προσωπικότητα του μαθητή πιστεύουμε ότι δημιούργησαν το κατάλληλο ψυχολογικό κλίμα, ώστε η όλη διαδικασία να έχει την πρέπουσα υποστήριξη.

Η επιδίωξή μας ως προς την δημιουργία θετικού ψυχολογικού κλίματος στην τάξη φαίνεται ότι επιτεύχθηκε. Οι μαθητές εξέφρασαν τις ιδέες τους χωρίς δισταγμό, άκουγαν με προσοχή τις απόψεις των συμμαθητών τους, μετείχαν στις συζητήσεις αλλά και στις δραστηριότητες που προωθούσε ο καθηγητής. Πέρα από τις δικές μας διαπιστώσεις, οι ίδιοι οι μαθητές εξέφρασαν μετά το τέλος των δύο διδακτικών παρεμβάσεων την ικανοποίησή τους για την όλη διαδικασία επισημαίνοντας ότι τέτοιες πρακτικές πρέπει να είναι ο κανόνας στη διδασκαλία.

Είναι απαραίτητο εδώ τονιστεί ότι η σχολική λυκειακή πραγματικότητα, λόγω του εξεταστικού συστήματος, ευνοεί έναν ακραίο μπιχεβιοριστικό τρόπο διδασκαλίας βασισμένο στο τρίπτυχο θεώρημα-απόδειξη-άσκηση, με παραλλαγές ίσως, όχι όμως τέτοιες που να αλλάζουν την υφή της διδασκαλίας. Ο συγκεκριμένος τρόπος διδασκαλίας όχι μόνο ενδείκνυται για το εξεταστικό σύστημα, αλλά εξυπηρετεί και τους διδάσκοντες, γιατί η εργασία και η προετοιμασία τους γίνεται ευκολότερη αφού αρκεί ένα καλά επιμελημένο «ασκησιολόγιο» ώστε να είναι επαρκείς. Αποτέλεσμα αυτών των πρακτικών είναι το γεγονός, το οποίο εντοπίζεται και στους διαλόγους, ότι οι μαθητές μπορούν πολύ εύκολα να εκτελέσουν διαδικασίες αλλά πολύ δύσκολα να αιτιολογήσουν και να ερμηνεύσουν τα αποτέλεσματά τους. Δεν εμβαθύνουν στις λύσεις τους, απλά μένουν στο αριθμητικό αποτέλεσμα.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα στην παραπάνω διαπίστωση είναι το απόσπασμα 5Β στο οποίο ο μαθητής απαντάει στο ερώτημα ακολουθώντας μια συγκεκριμένη τεχνική χωρίς να μπορέσει να προσθέσει στη συλλογιστική του τις παραμέτρους του προβλήματος. Με λίγα λόγια, αυτό που μαθαίνουν οι περισσότεροι μαθητές (στην συγκεκριμένη περίπτωση με άριστη βαθμολογία στα μαθηματικά) είναι να εκτελούν ένα μεγάλο αριθμό τυποποιημένων διαδικασιών, συνδεδεμένων με γνωστούς σε αυτούς φορμαλισμούς, ώστε να μπορούν να δώσουν απαντήσεις σε σαφώς οριοθετημένες κλάσεις ερωτήσεων.

Αποκτούν μια ικανότητα να λειτουργούν, με πολύ μικρότερη βέβαια ταχύτητα, όπως ένας υπολογιστής εφοδιασμένος με ένα κατάλληλο πρόγραμμα. Με τον τρόπο αυτό, καταλήγουν σε μια υπολογίσιμη μαθηματικά γνώση, χωρίς όμως τη μεθοδολογία εργασίας του μαθηματικού. Αυτό σημαίνει ότι στερούνται τον τρόπο που θα τους επέτρεπε να χρησιμοποιήσουν τη γνώση τους ευέλικτα για να λύσουν προβλήματα τύπου που δεν τους είναι **«γνωστά».**

Σε απόσπασματα που αναφέρονται στην προηγούμενη ενότητα, φαίνεται ότι οι μαθητές μπορούσαν πολύ εύκολα να λύσουν τις ανισώσεις που προέκυπταν (βλέπε απόσπασμα 13Β), αφού πρώτα ο καθηγητής είχε δώσει ένα σχετικό παράδειγμα. Ενώ λοιπόν, μπόρεσαν με σχετική ευκολία να βρουν τις λύσεις της ανίσωσης, στο επίμαχο ερώτημα της ερμηνείας του αποτελέσματος, δεν μπόρεσαν να δώσουν την εννοιολογική διάσταση της λύσης.

Ένα γενικότερο συμπέρασμα που προέκυψε κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων από την επεξεργασία του οπτικό-ακουστικού υλικού ήταν η μη προσήκουσα χρήση της μαθηματικής γλώσσας από τους μαθητές. Υπάρχει ένα είδος μηχανοποίησης της γλώσσας (γενικότερα) η οποία αποσκοπεί στη διατήρηση της αυξημένης παραγωγής, δηλαδή όσο περισσότερες ασκήσεις ***γνωρίζεις***, τόσο καλύτερα θα είναι για τις εξετάσεις. Πραγματικά, αυτή η οπτική γωνία για την διδασκαλία των μαθηματικών, είναι η ενδεδειγμένη για το τρόπο εξέτασης, όπως γίνεται σήμερα, των μαθητών για την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Όμως αυτή η επιφανειακή, πολλές φορές και άστοχη χρησιμοποίηση της γλώσσας, μπορεί να αφήνει ανεπηρέαστες εσφαλμένες αντιλήψεις βασικών εννοιών των μαθηματικών. Οι μαθητές χτίζοντας την γνώση σε τέτοιου είδους υπόβαθρο, είναι μάλλον αδύνατο να χρησιμοποιήσουν αυστηρή μαθηματική γλώσσα ώστε να μπορέσουν να αποδώσουν ολιστικά μαθηματικές έννοιες όπως το όριο.

Τα παραπάνω διαπιστώνονται στα στιγμιότυπα 1Α, 2Α, 3Α, 11Β, 12Β, 13Β, αλλά και σε πλείστα άλλα σημεία κατά την διάρκεια των παρεμβάσεων, τα οποία λόγω οικονομίας χώρου δεν παρουσιάζονται. Στα παραπάνω στιγμιότυπα φαίνεται η φτωχή χρήση της γλώσσας από τους μαθητές με συνέπεια οι σκέψεις τους να μην αποτυπώνονται με ακρίβεια. Χαρακτηριστικό το παράδειγμα της Ματίνας, που στην προσπάθειά της να εξηγήσει ότι ο κύκλος είναι ένα πολύγωνο χρησιμοποίησε τον όρο «εμβαθύνω» αντί του όρου «απειροελάχιστο τόξο» ή «πολύ μικρού τόξου», με σκοπό να εξηγήσει ότι ένας κύκλος μπορεί να χωριστεί σε τρίγωνα.

Η τεχνική της διδασκαλίας που χρησιμοποιήσαμε είχε ως συνέπεια το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών να συμμετάσχει ενεργά. Οι ερωτήσεις βοήθησαν τους μαθητές, στην διατύπωση εικασιών, στη σκέψη τους στον προβληματισμό και στην έκφραση και διατύπωση των απόψεων τους. Στις συζητήσεις υπήρχε συμμετοχή πλήθους μαθητών και οι πρωταρχικές τους ιδέες, δηλαδή μη ολοκληρωμένες σκέψεις, μέσω της διαδικασίας αυτής σχηματοποιούνταν σε έννοιες με μεγάλη αφαιρετική δομή. Πολλά είναι τα στιγμιότυπα από τους διαλόγους στους οποίους, μία θαμπή εικόνα μετατρέπονταν μέσω της συζήτησης, σε μια αποκρυσταλλωμένη και άρτια δομημένη έννοια. Βέβαια, υπήρχαν ερωτήσεις που οι μαθητές αδυνατούσαν να απαντήσουν ή ίσως και να κατανοήσουν την διάσταση τους. Στο θέμα αυτό η άποψή μας είναι ότι μεγάλο μερίδιο ευθύνης έχει το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. (πώς είναι δυνατόν π.χ να χρησιμοποιήσουν ποσοδείκτες οι μαθητές, όταν δεν τους έχουν διδαχθεί ποτέ;).

Στα αποσπάσματα 1Β, 2Β και 3Β διαφαίνεται ο σημαντικός ρόλος των αναλυτικών προγραμμάτων αλλά και των σχολικών εγχειριδίων στη διαμόρφωση των σκέψεων και των πεποιθήσεων των μαθητών. Η απουσία προσεκτικού σχεδιασμού των αναλυτικών προγραμμάτων καθώς και οι *ανάλαφρες* διατυπώσεις των εννοιών του απείρου, του ορίου και της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών στα σχολικά εγχειρίδια, δημιουργούν σοβαρά εμπόδια στην διαμόρφωση δομημένων σκέψεων στους μαθητές. Η συνέπεια αυτής της πραγματικότητας, έχει ως αποτέλεσμα η εικόνα που έχουν οι μαθητές για τις έννοιες αυτές να είναι στρεβλή.

Πολλοί ερευνητές αναφέρονται στην έντονη επιρροή που ασκείται στον συλλογισμό και στα συμπεράσματα των μαθητών από προηγούμενες γνώσεις, που έχουν αποκτηθεί και εμπειρικά, δηλαδή χωρίς επιστημονική επεξεργασία, σε πρότερο χρόνο, στο σχολείο ή από κάποιον άλλο φορέα (Cornu, Tall, Schwarzenberger, Vinner). Στη διάρκεια του δικού μας ερευνητικού έργου την παραπάνω διαπίστωση την εντοπίσαμε αρκετές φορές.

Πλήθος μαθητών εξέφραζε απόψεις που είχαν πάρει μορφή από εμπειρικά δεδομένα ή από ιδέες τρίτων που τις αποδέχτηκαν χωρίς ιδιαίτερη επεξεργασία (απόσπασμα 1Α,3Β κ.α.). Οι απόψεις αυτές συνήθως αποτελούσαν τροχοπέδη στην εύρυθμη λειτουργία του συλλογισμού των μαθητών. Είναι χαρακτηριστικός ένας διάλογος, που αναφέρεται στα αποτελέσματα, στον οποίο φαίνεται ότι η μαθήτρια ενώ έχει αποδεχθεί ότι το κινητό δεν θα φθάσει στο σημείο Β, με την ενδεδειγμένη αιτιολόγηση, όταν κλήθηκε να απαντήσει σε άλλο ερώτημα που είχε άμεση σχέση με το αρχικό ερώτημα, όχι απλώς απάντησε λανθασμένα αλλά οι απλοϊκές ιδέες που είχε επανήλθαν, με αποτέλεσμα να οδηγηθεί σε λανθασμένο συμπερασμό, και μάλιστα χωρίς να μπορεί να εντοπίσει το λάθος της.

Παρατηρείται το φαινόμενο, ότι οι παγιωμένες αντιλήψεις των μαθητών επηρεάζουν καταλυτικά τη σκέψη τους. Η γνώση που απέκτησαν κατά τη διάρκεια της σχολικής τους θητείας δημιουργεί ένα σκληρό πυρήνα πάνω στον οποίο οικοδομείται κάθε νέα έννοια. Η ανεπαρκής κατανόηση της διάστασης των θεμελιωδών εννοιών των μαθηματικών από τους μαθητές, θεωρούμε ότι είναι ένας πολύ βασικός παράγοντας στη δημιουργία ακατάλληλου περιβάλλοντος, ώστε αυτοί να μπορούν να «κάνουν» μαθηματικά.

Οι μαθητές, σχεδόν όλοι (από τους συμμετέχοντες), έχουν την διαισθητική αντίληψη του σημείου-μπίλια. Ακόμα και αυτοί που απαντάνε σωστά δεν είναι σίγουροι για αυτά που ισχυρίζονται, απλώς εκφέρουν οι ίδιοι, απόψεις που έχουν ακούσει, χωρίς να έχουν τη δυνατότητα τις απόψεις αυτές να τις επεξεργαστούν. Θα ήταν θεμιτό, όμως, στα σχολικά βιβλία της δευτεροβάθμιας να εισαχθούν οι βασικότερες και βαθύτερες έννοιες του μαθηματικού συνεχούς των πραγματικών που είναι η πληρότητα και η πυκνότητά του; Σίγουρα όχι, για λόγους παιδαγωγικούς αλλά και καθαρά τεχνικούς, μια τέτοια με αυστηρό τρόπο αντιμετώπιση μάλλον θα έφερνε αντίθετα αποτελέσματα ως προς τα επιδιωκόμενα, σε ό,τι αφορά την μαθηματική εκπαίδευση. Όμως, αν τα σχολικά εγχειρίδια δεν σταματούσαν στην «γεωμετρική» περιγραφή του συνόλου των πραγματικών σαν μια ευθεία αλλά προσπαθούσαν να περιορίσουν τη διαισθητική προσέγγιση του συνεχούς, μέσω των διαπιστώσεων ότι είναι επ’ άπειρο διαιρετό, το μήκος ενός συνεχούς δεν προκύπτει από την άθροιση των μέτρων των σημείων, ούτε από την αρχή και το πέρας και ότι δοθέντος ενός αριθμού (πραγματικού) δεν υπάρχει επόμενος, αφού η απόσταση μεταξύ διακεκριμένων σημείων είναι πάντοτε θετική και πεπερασμένη, τότε η προσέγγιση της έννοιας του ορίου, κατά τη γνώμη μας, θα ήταν πιο εύκολη από τους μαθητές.

Το παραπάνω συμπέρασμα αιτιολογείται από τις απαντήσεις αρκετών μαθητών, οι οποίες έγιναν αποδεκτές σχεδόν από την πλειοψηφία αυτών, όπως καταγράφονται στο Απόσπασμα 10Β. Οι μαθητές έχοντας πλέον τις «γνώσεις» που προέκυψαν από το ερώτημα ένα (1) του δεύτερου φύλλου εργασίας, απαντούν με σιγουριά αφού πλέον έχουν αποδεχτεί τις ιδιότητες του συνεχούς των πραγματικών, παραμερίζοντας την αρχική διαισθητική εικόνα.

Μια σημαντική παρατήρηση που προκύπτει από την ανάγνωση των αποσπασμάτων είναι το γεγονός ότι πολλές «ιδέες» που υπήρχαν στο μυαλό των στοχαστών αλλά και θεωρημάτων της ανάλυσης, εμφανίστηκαν και στην διάρκεια των παρεμβάσεων. Οι απόψεις όπως *«πιο μεγάλο από το μεγάλο»* ή το *«απειροελάχιστο είναι πρακτικά μηδέν»* ή ακόμα και θεωρήματα της ανάλυσης, όπως *«αν μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι τα δύο a_n είναι ίσα τότε θα είχε το ίδιο όριο»* φανερώνουν την πιο πάνω διαπίστωση.

Αυτό το φαινόμενο, που είναι σύνηθες στο χώρο των θετικών επιστημών, δηλαδή οι πρωταρχικές ιδέες που είχαν οι ερευνητές να εμφανίζονται και στις σκέψεις άλλων, μάλλον δεν είναι ανεξήγητο. Ο προβληματισμός που γεννάται από εύλογα ερωτήματα δημιουργεί με κάποιο τρόπο παραπλήσιες ιδέες σε όλα τα υποκείμενα, ανεξάρτητα από την συμβολική γλώσσα που χρησιμοποιούν για να εκφράσουν τις ιδέες τους. Ίσως αυτή η διαπίστωση επιβεβαιώνει την άποψη πολλών ότι τα μαθηματικά ανακαλύπτονται και δεν εφευρίσκονται.

Όμως οι μαθητές αντιλήφθηκαν

α) ότι για να υπάρχει όριο πρέπει *«τελικά όλοι»* οι όροι της ακολουθίας να βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στον αριθμό αυτό.

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι η λέξη άπειρο, που ακούγεται στην απομαγνητοφώνηση πέραν των γνωστών ερμηνειών, για τους μαθητές έχει και άλλη διάσταση. Περιγράφουν με την λέξη άπειρο γενικώς κάτι που δεν έχει συνηθισμένες διαστάσεις π.χ το πολύ κοντά, μεταφράζεται απείρως κοντά ή το τελικά όλοι, με το άπειρο. Παραπλήσια με την παραπάνω έκφραση των μαθητών , ήταν και η έκφραση *« απείρως (απειροστά) μικρή ποσότητα»* (V. Katz, σελ. 804) που την είχε χρησιμοποιήσει ο Cauchy για να ορίσει μια μεταβλητή που το όριό της είναι μηδέν. Οι εκφράσεις λοιπόν όταν κάνεις μαθηματικά, για ένα περίεργο λόγο, προκύπτουν αυθόρμητα ανεξάρτητα του χρόνου και του μαθηματικού υπόβαθρου.

β) Συνέδεσαν την απόσταση και το πλήθος (*τελικά όλων*) των όρων με την έννοια του ορίου.

Η παραπάνω διαπίστωση αποτελεί ίσως και το μεγαλύτερο κέρδος των μαθητών από την όλη διαδικασία. Ο λογικός συμπερασμός, που είναι το ζητούμενο στα μαθηματικά, αποτελεί μια ικανότητα υψηλού επιπέδου, προϋποθέτει σύνθεση δεδομένων αλλά και διασύνδεση εννοιών. Η λειτουργία αυτή έχει ως αποτέλεσμα την παγιωμένη γνώση, γιατί αυτή έχει κατασκευαστεί και δεν αποτελεί προϊόν αναπαραγωγής.

γ) Χρησιμοποίησαν τις ανισότητες για να αποδείξουν την ύπαρξη ορίου.

Ο αλγεβρικός χειρισμός, η ενεργητική διαδικασία να εκφραστεί μια ιδέα με μαθηματικά σύμβολα, δηλαδή τελικά η αριθμητικοποίηση του ορίου, που ήταν ένας επιμέρους στόχος ο οποίος φαίνεται να επιτεύχθηκε.

Αν θέλαμε να συνοψίσουμε τα συμπεράσματα των παρεμβάσεων και να αξιολογήσουμε τα αποτελέσματά τους θα μπορούσαμε να καταγράψουμε τα εξής:

1) Ως προς τον κεντρικό στόχο που ήταν η διατύπωση του αυστηρού ορισμού του ορίου, οι μαθητές δεν μπόρεσαν να τον διατυπώσουν. Φαίνεται ότι αποκόμισαν μια ελλιπή εικόνα για την έννοια του ορίου η οποία προκύπτει από τις διατυπώσεις τους στην σχετική ερώτηση. Επίσης η απουσία εμπειριών από τη χρήση των ποσοδεικτών έκανε την επίτευξη του συγκεκριμένου στόχου μάλλον αδύνατη.

2) Ως προς τους επιμέρους στόχους, που ήταν η διαισθητική προσέγγιση του ορίου, ο προβληματισμός και η ενασχόληση με την έννοια, πιστεύουμε ότι επιτεύχθηκαν. Οι μαθητές διατύπωσαν ενδιαφέρουσες απόψεις κατά την προσπάθεια που κατέβαλαν για την επίλυση των προβλημάτων που τους δόθηκαν. Αναγκάστηκαν να κάνουν μια σειρά σκέψεων, γεγονός το οποίο είχε ως αποτέλεσμα την ενεργό συμμετοχή τους στην όλη διαδικασία όχι μόνο διατηρώντας την προσοχή τους αλλά και εγκεφαλικά προσπαθώντας να ανακαλύψουν τις βαθύτερες δομές που θα περιγράψουν την έννοια.

Αξιολογώντας την διαδικασία και απαντώντας στο ερώτημα αν μπορούν οι μαθητές να διατυπώσουν τον αυστηρό ορισμό η απάντηση είναι αρνητική. Όπως διαπιστώσαμε οι εν λόγω μαθητές, υστερούν αρκετά στην περιγραφή μαθηματικώς ιδεών. Δεν ισχυριζόμαστε βέβαια ότι κάτι τέτοιο είναι εύκολο, αφού η διατύπωση μιας ιδέας ή η αποτύπωση μια εικόνας προϋποθέτουν αυξημένη γλωσσική ικανότητα και ταυτόχρονα ικανότητα σύνθεσης δομών και εννοιών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η απουσία γνώσης των ποσοδεικτών, οι θολές και πολλές φορές στρεβλές εικόνες για τις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών, δυσχέραναν την προσπάθεια των μαθητών να διατυπώσουν τον αυστηρό ορισμό του ορίου.

Όμως, αν απομονώσουμε τον κεντρικό στόχο και δούμε συνολικά την όλη διαδικασία, οι μαθητές ανταποκρίθηκαν στην πρόκληση της διδασκαλίας της έννοιας του ορίου. Πεποίθηση μας είναι ότι οι μαθητές διαπίστωσαν το βάθος της έννοιας του ορίου σε αντιδιαστολή με την επιφανειακή αντιμετώπιση αυτής από όλες τις παραμέτρους της δευτεροβάθμιας σχολικής πραγματικότητας. Έχουμε την άποψη ότι με μια προσεκτικότερη και στοχευμένη προετοιμασία από προηγούμενες τάξεις η διδασκαλία της έννοιας του ορίου θα ήταν εφικτή σε μη τελειόφοιτους μαθητές με αρκετά μεγάλη επιτυχία.

Στην κατακλείδα της εργασίας, θα θέλαμε να τονίσουμε ότι, πέραν του ειδικού σκοπού αυτής, υπήρξε και μια γενικότερη επιδίωξη. Η προσπάθειά μας είχε και την διάσταση μιας εναλλακτικής πρότασης διδασκαλίας όχι μόνο του ορίου αλλά γενικότερα των Μαθηματικών. Επισημαίνουμε ότι ο ενεργός ρόλος των μαθητών και η δημιουργία εικασιών με την βοήθεια κατάλληλων εργαλείων, αποτελούν θετική συνεισφορά στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Η παραπάνω υπόθεση στην περίπτωση της συγκεκριμένης παρέμβασης έγινε βεβαιότητα, αφού οι μαθητές με μικρή βοήθεια ανέπτυξαν προβληματισμούς και τελικά δημιούργησαν μαθηματικές έννοιες. Η δημιουργία εικασιών απουσιάζει πλήρως από τη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και κατά τη γνώμη μας η απουσία αυτή συνδέεται με το εξεταστικό σύστημα. Η καλύτερη μαθηματική παιδεία απαιτεί την αποφυγή των αυτοματισμών αφού η μάθηση προκύπτει από διαδικασίες προβληματισμού, σαν κάποιος να ξεκινάει από την αρχή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artique, M. (1991), Analysis. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, 153-166, Dordrecht.

Artique, M., Didirem, E.: (1997), *Teaching and learning elementary Analysis: What can we learn from didactical research and curriculum evolution?*, In Proceedings of First Mediterranean Conference on Mathematics G. Makridis, 207 – 219, Nicosia, Cyprus.

Brousseau, G, (1983), *Les obstacles epistemologiques et les problems en mathematiques,* Recherches en Didactique des Mathematiques, 4, 165-198.

Cornu, B. (1983), *Quelques obstacies a l' apprentissage de la notion delimite*, Recherches en Didactique des Mathematiques. 4, 236-268.

Cornu, B. (1984), *Interference des models spontanes dans l' appresintage de la notion de limite*, Seminaire de Recherche Pedagogique, IMAG, 236- 268.

Cornu, B. (1991), Limits. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 153-166.

Cotrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., Vidakovic, D. (1996), Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema, Journal of Mathematical Behavior, 5, 281-303.

Davis, R., Vinner, S. (1986), *The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages*, Journal of Mathematical Behavior, 5,281-303.

Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*. In D. Reidel (Ed.), International Handbook of Mathematics Education, 615-645, Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1999), *Intuitions and schemata in mathematical reasoning*, Educational Studies in Mathematics, 38, 11-50.

Gray, E., Tall, D. (1992), *Success and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept*, Mathematics Teaching, 142, 6-10

Grugnetti, L., Rizza, A. (2003), *A lengthy process for the establishment of the concept of limit*, Proceedings of the Third Conference of the European Group for Research in Mathematics Education, (CERME 3) Bellaria, Italy.

Mamona – Downs, J. (1990), *Sequences and series – Sequences and functions: Students' confusions*, International Journal of Mathematics in Science and Technology, 21(2), 333-337.

Mamona – Downs, J. (2001*), Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence*, Educational Studies in Mathematics, 48, 259–288.

Monaghan, J. D. (1991), *Problems with the language of limits*, For the Learning of Mathematics, 11 (3), 20-24.

Parameswaran, R. (2006), *On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities*, International Journal of Science and Mathematics Education, June 2007, Volume 5, Issue 2, 193–216.

Sierpinska, A. (1987*), Humanities students and epistemological obstacles related to limits,* Educational Studies in Mathematics, 18, 371-397.

Sierpinska, A. (1990), *Some remarks on understanding in mathematics*, For the Learning of Mathematics, 10, 24-36.

Sfard, A. (1995*). The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives*. Journal of Mathematical Behavior, 14, 15-39.

Szydlik, J. E. (2000), *Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function,* Journal for Research in Mathematics Education, 31 (3), 258-276.

Tall, D., Schwarzenberger, R. (1978), *Conflicts in the learning of real numbers and limits*, Mathematics Teaching, 83, 44-49.

Tall, D., Vinner, S. (1981), *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Tall, D. (1980), *Mathematical intuition with special reference to limiting processes,* Proceedings of the Forth International Congress on Mathematical Education, Berkeley, 170-176.

Tall, D. (1992), *The transition to advanced mathematical thinking; functions, limits, infinity and proof.* In Grows D. A., Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, 495-511.

Vinner, S. (1983), *Concept definition, concept image and the notion of function,* The international Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 14, 293-305.

Vinner, S. (1991), *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*, In D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 65-81, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ. Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2006), *Μαθηματικά Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Αναπολιτάνος, Δ. (1978), *Το άπειρο στα Μαθηματικά*, Μαθηματική επιθεώρηση τεύχος 12, 35-58.

Αναπολιτάνος, Δ. (1985), *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, Νεφέλη, Αθήνα.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2006), *Άλγεβρα Α' Ενιαίου Λυκείου*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α. (2006), *Άλγεβρα Β' Ενιαίου Λυκείου*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., Χρυσοβέργης, Μ., *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου* , (2007) Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., Σίδερης, Π.(2006), *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου*, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Ε. Αυγερινός, Μ. Κιουλάφας, (2004), «*Η έννοια του ορίου στην Αρχαία Ελλάδα και η διδακτική του στη σχολική πραγματικότητα*», 21^0 Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας., Εισήγηση 62, 654-664.

Βανδουλάκης Ι., Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν., Φερεντίνος Σ. , Μαθηματικά Α' Γυμνασίου , (2007) Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

Βυγκότσκι, Λ. (1988), *Σκέψη και γλώσσα*, Γνώση, Αθήνα.

Βυγκότσκι, Λ. (1997), *Νους στην κοινωνία: Η ανάπτυξη των ανώτερων ψυχολογικών διαδικασιών*, Gutenberg, Αθήνα.

Γιασουμής Ν. , 2015, *Η διδασκαλία της έννοιας του ορίου – ένα θεωρητικό μοντέλο,* Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Κύπρου, Τμήμα Επιστημών Αγωγής.

Ζουλινάκη, Φ. (2006*), Αναπαραστάσεις και η έννοια του ορίου συνάρτησης στο Λύκειο*, Διπλωματική Εργασία, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κολέζα, Ε. (2000) , *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών,* Leader Books.

Κολέζα, Ε. (2006), Μαθηματικά και σχολικά μαθηματικά*: Επιστημολογική και κοινωνιολογική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

L. Graham, J.-M. Kantor, *Ονοματίζοντας το άπειρο*, μετ. Τ. Μιχαηλίδης, Εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα 2013.

Katz, V. (2013), *Ιστορία των Μαθηματικών*, *Μια εισαγωγή,* μετ. Κ. Χατζηκυριάκου επιστημονική επιμέλεια Γ. Χριστιανίδης Παν. Εκδόσεις Κρήτης.

Ματσαγγούρας Η. (2003), *Η Σχολική Τάξη,* Αθήνα.

Μποχώτης Αθ. (2014), *Διδασκαλία και μάθηση της κυρτότητας συνάρτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση*, Διπλωματική Εργασία, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

ΟΕΠΕΚ, 2008, *Κριτήριο αξιολόγησης και αξιοποίησης διδακτικού υλικού.*

Παντελάκη Ε. (2007), *Η Συγκρότηση της Έννοιας του Ορίου -Διερεύνηση των αυθόρμητων και τυπικών αντιλήψεων που συγκροτούν οι μαθητές ως αποτέλεσμα της καθημερινής εμπειρίας και της τυπικής διδασκαλίας των μαθηματικών*, Διπλωματική εργασία, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στις Επιστήμες της Αγωγής κατεύθυνση: Διδακτική των Μαθηματικών.

Παπασταυρίδης Στ., (2010) , *Η Σύγκρουση μεταξύ του Θεσμού του Λυκείου και της Διαδικασίας Πρόσβασης στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση,* 12ο Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδεία (κεντρική ομιλία).

Στεργίου, Β., Πατρώνης, Τ. (2006), John Wallis και Isaac Barrow: *Δύο διαφορετικές απόψεις για την εφαρμογή απειροστικών μεθόδων στα μαθηματικά του 17ου αιώνα.* Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Ιστορία των μαθηματικών και μαθηματική εκπαίδευση*, Πρακτικά 5ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Α.Π.Θ., Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Θεσσαλονίκη, 109-128

Στεργίου, Β. , (2007), *Ιστορική εξέλιξη, ερμηνείες και διδακτικές προσεγγίσεις της έννοιας του απειροστού,* Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών τομέας Θετικών Επιστημών τμήμα Μαθηματικών.

Τουμάσης Μ. (2002) *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών,* Εκδόσεις Gutenberg.

Ρούσσος Ε.(1999), *Προσωκρατικοί - Ιστορική Εισαγωγή*, Εκδόσεις Στιγμή.

ΥΠΕΠΘ, (1999), Προγράμματα Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Μαθηματικών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Αθήνα.

ΥΠΕΠΘ, (2006), Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο και το Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2006-2007, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Φύλλο εργασίας

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα R=1;

Ε1: Τι σημαίνει ότι ένα τρίγωνο έχει εμβαδόν ίσο με 4,5;.

Ε2: Σε ποια γεωμετρικά σχήματα είναι «εύκολο» να υπολογίσουμε το εμβαδό με την παραπάνω μέθοδο;

Ε3:Μπορούμε να χωρίσουμε τον κύκλο σε σχήματα των οποίων τα εμβαδά μπορούμε να υπολογίσουμε;

Ε4: Με ποιο τρόπο μπορούμε να συνδέσουμε το εμβαδό ενός κύκλου με τα εμβαδά πολυγώνων;

Ε5: Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στο εμβαδόν Ε του κύκλου και στα εμβαδά των δύο αυτών τετραγώνων;

Ε6: Ποια είναι η διαφορά των εμβαδών των δύο τετραγώνων;

Ε7: Μέσω ποιας διαδικασίας μπορούμε να βρούμε καλύτερη προσέγγιση του εμβαδού Ε του κύκλου;

Ε8: Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

a/a	ν	Εμβαδόν Εγγεγραμμένου ν-γώνου	Εμβαδόν Περιγεγραμμένου ν-γώνου	Διαφορά των εμβαδών μικρότερη ή ίση από
1	4			
2	5			
3	6			
7	10			
…	12			
…				0,09

…		3,1…	3,1…	
…				0,009
…		3,14…	3,14…	
…				0,0009
…		3,141…	3,141…	
…				0,00009

Ε9: Υπάρχει κάποιο βήμα της διαδικασίας που θα συμπέσουν το εμβαδόν του κύκλου θα είναι ίδιο με το εμβαδόν του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου πολυγώνου;

Ε10: Η διαδικασία θα τερματιστεί κατά την γνώμη σας;

Ε11: Μπορείτε να περιγράψετε τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα, δηλαδή την παραπάνω επαναληπτική διαδικασία με μαθηματικούς όρους ; Πως θα χαρακτηρίζατε την παραπάνω διαδικασία;

Ε12: Ποιον αριθμό πλησιάζει η διαφορά των εμβαδών;

Ε13: Πόσο κοντά στον αριθμό αυτό μπορεί να φτάσει η διαφορά των εμβαδών;

Ε14: Πόσο κοντά στο εμβαδόν του κύκλου μπορούμε να φτάσουμε;

Ε15: Μπορεί κατά την γνώμη σας αυτή η διαδικασία να εφαρμοστεί και σε άλλα προβλήματα; Αν ναι, αναφέρετε μερικά καθώς και την διαδικασία επίλυσής τους.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Φύλλο εργασίας

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

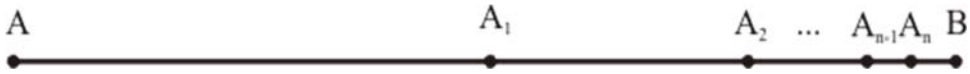
«Ένα κινητό κινείται κατά μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ μήκους 1, από το Α προς το Β:

Κατά τη διάρκεια της πρώτης μέρας, το κινητό καλύπτει διάστημα AA_1 ίσο με το μισό του διαστήματος ΑΒ.

Κατά τη διάρκεια της δεύτερης μέρας, το κινητό καλύπτει διάστημα A_1A_2 ίσο με το μισό του διαστήματος A_1B.

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατά τη διάρκεια της «η» μέρας το κινητό καλύπτει διάστημα $A_{\eta-1}A_\eta$ ίσο με το μισό του διαστήματος $A_{\eta-1}B$.

(Δηλαδή κάθε μέρα το κινητό καλύπτει το μισό της απόστασης που έχει απομείνει μέχρι το Β)



Ε1: Το κινητό θα φθάσει στο σημείο Β;

Ε2: Υπολογίστε τα μήκη των διαστημάτων $A_\eta B$ η=1,2,…

Ε3: Έστω Γ_1 ένα σημείο του ΑΒ τέτοιο ώστε $\Gamma_1B = 10^{-6}$. Το κινούμενο σημείο θα περάσει το Γ_1 ;

Ε4: Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για τα σημεία Γ_2 , Γ_3 , τέτοια ώστε $\Gamma_2B=10^{-100}$ και $\Gamma_3B=10^{-1000}$.

Ε5: Έστω Γ ένα τυχαίο σημείο ανάμεσα στα Α και Β . Το κινούμενο σημείο θα ξεπεράσει το Γ;

Ε6: Να διατυπωθεί το Ε5 με μαθηματικό συμβολισμό.

Ε7: Συμπληρώστε την απάντησή σας στην ερώτηση 6 με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπεριλάβει και την πληροφορία ότι αν μια μέρα το σημείο βρίσκεται μετά το Γ, τότε και όλες τις επόμενες ημέρες θα συμβαίνει το ίδιο.

Ε8: Ισχύει το ίδιο για την ακολουθία: $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$