ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμημα Μαθηματικων
Τμημα Μεθοδολογιας Ιστοριας και Θεωριας της Επιστημης
Τμημα Φιλοσοφιας - Παιδαγωγικων - Ψυχολογιας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Τμημα Μαθηματικων και Στατιστικης
Τμημα Επιστημων Αγωγης

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Οι απόψεις των μαθητών Λυκείου σχετικά με την εγκυρότητα αποδεικτικών επιχειρημάτων στην Άλγεβρα: Μια συστημική προσέγγιση.

ΚΟΡΔΑ ΜΑΡΙΑ-ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ
Α.Μ. Δ201511

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΠΥΡΟΥ

ΑΘΗΝΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2018

Οι απόψεις των μαθητών Λυκείου σχετικά με την εγκυρότητα αποδεικτικών επιχειρημάτων στην Άλγεβρα: Μια συστημική προσέγγιση.

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 25η Ιανουαρίου 2018 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Π. Σπύρου(Επιβλέπων)	τ. Αναπλ. Καθηγητή
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Π. Σπύρου (Επιβλέπων)	τ. Αναπλ. Καθηγητή
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Α. Μούτσιος-Ρέντζος	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών, Εξωτ. Συνεργάτης

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Τον επιβλέποντα μου κ. Παναγιώτη Σπύρου, για την ανατρεπτική του ματιά, που αποτέλεσε για μένα πηγή έμπνευσης.
- Την κ. Δέσποινα Πόταρη, που με τίμησε με τη συμμετοχή της στη συμβουλευτική επιτροπή.
- Τον κ. Ανδρέα Μούτσιο-Ρέντζο, μέλος της συμβουλευτικής μου επιτροπής, για την άριστη συνεργασία που είχαμε, για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε για μένα, για την αμέριστη υπομονή και κατανόηση που έδειξε, για την υποστήριξη που μου προσέφερε, για τις εύστοχες παρατηρήσεις και συμβουλές του , για τις επιστημονικές του προτάσεις και γενικότερα για την καθοδήγηση του για την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.
- Όλους τους διδάσκοντες και τις διδάσκουσες του μεταπτυχιακού προγράμματος, για τις γνώσεις κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.
- Τη γραμματεία του προγράμματος και ιδιαίτερα την Κ. Ελένη Κλη για την πρόθυμη βοήθεια σε οτιδήποτε χρειάστηκα.
- Τους συμφοιτητές και τις συμφοιτήτριες μου, για τις όμορφες στιγμές που ζήσαμε κατά τη διάρκεια των σπουδών μας και ιδιαίτερα την Ιωάννα για τη στήριξη και την ενθάρρυνση που μου προσέφερε.
- Την οικογένεια μου, που με στηρίζει σε κάθε μου εγχείρημα και ιδιαίτερα τη μητέρα μου Ευαγγελία που χωρίς αυτήν όλα θα ήταν πιο δύσκολα.
- Το σύντροφο μου Σάββα για την ηθική στήριξη, την υπομονή και την κατανόηση που έδειξε.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μελέτη, στην οποία υιοθετήθηκε μια συστημική προσέγγιση, διερευνώνται οι πεποιθήσεις των μαθητών της Α΄ Λυκείου για την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων αλλά και οι ευρύτερες πεποιθήσεις τους για την απόδειξη, οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών και οι διδακτικές τους πρακτικές για την απόδειξη και οι όψεις της απόδειξης που παρουσιάζονται στο βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου καθώς και στο βιβλίο των λύσεων της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου. Η συστημική προσέγγιση υιοθετήθηκε καθώς στόχος μας ήταν να διερευνήσουμε τις σχέσεις μεταξύ των παραπάνω και όχι το καθένα ξεχωριστά. Για την παραπάνω διερεύνηση έγινε σύνθεση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας. Εργαλείο της έρευνας είναι ένα ερωτηματολόγιο με δύο μέρη (αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων, πεποιθήσεις για την απόδειξη) που δόθηκε σε μαθητές και μαθήτριες της Β΄ Λυκείου, ενώ πραγματοποιήθηκαν εξατομικευμένες συνεντεύξεις σε δύο εκπαιδευτικούς που την προηγούμενη χρονιά δίδασκαν Άλγεβρα σε ένα μέρος των μαθητών του δείγματος. Έτσι προέκυψαν και τα δύο συστήματα που μελετήθηκαν. Όσον αφορά το σχολικό βιβλίο και το βιβλίο των λύσεων έγινε μελέτη περιεχομένου, με στόχο να μελετηθεί ποιες λειτουργίες της απόδειξης ενισχύουν, ποιες μέθοδοι απόδειξης εμφανίζονται σε αυτά και ποιες διδακτικές πρακτικές προάγουν. Τα αποτελέσματα της έρευνας υποστηρίζουν την επιλογή της συστημικής προσέγγισης, καθώς από τη μία βρέθηκαν συγκλίσεις με τα υπάρχοντα ευρήματα και από την άλλη αναδείχθηκαν όψεις και πολυπλοκότητες του φαινομένου, οι οποίες δε θα φαινόντουσαν με την παραδοσιακή προσέγγιση.

Λέξεις κλειδιά: *λειτουργίες απόδειξης, πεποιθήσεις, θεσμικό πλαίσιο, συστημική προσέγγιση*

Οι απόψεις των μαθητών Λυκείου σχετικά με την εγκυρότητα αποδεικτικών επιχειρημάτων στην Άλγεβρα: Μια συστημική προσέγγιση.

ABSTRACT

In the present study, where a systemic approach has been adopted, the beliefs of the students of the first grade of Lyceum are evaluated in order to evaluate the evidence and their wider beliefs about the proof, the beliefs of the teachers and their teaching practices for the proof and the aspects of the proof presented in the book of Algebra of the 1st Lyceum as well as in the book of solutions of Algebra of the First Lyceum. The system approach was adopted as our goal was to investigate the relationships between the above and not each separately. For the above investigation a synthesis of the existing literature was made. The research tool is a two-part questionnaire (evaluation of proofs, beliefs for proof) given to pupils of the 2nd Lyceum, and individual interviews took place in two teachers who last year taught Algebra to a part of the pupils in the sample . Thus, both systems were studied. As far as the school book and the book of solutions are concerned, a study of content has been carried out to study which functions of proof are reinforced, which methods of proof they display and what teaching practices they promote. The results of the research support the choice of the systemic approach, since on the one hand there were found inconsistencies with the existing findings and, on the other hand, there were aspects and complexities of the phenomenon, which would not appear with the traditional approach.

Keywords: *functions of proof, beliefs, institutional framework, systemic approach*

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η απόδειξη αναγνωρίζεται από τους μαθηματικούς ως ένα από τα πιο βασικά και κρίσιμα στοιχεία των μαθηματικών και ως εκ τούτου αποτελεί βασικό σημείο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Η απόδειξη βοηθά την κατανόηση των μαθηματικών προτάσεων και ισχυρισμών, ενώ είναι ο μόνος τρόπος πρόσβασης και αξιολόγησης της μαθηματικής αλήθειας των ισχυρισμών (Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2013).

Ενώ οι μαθηματικοί επικεντρώνονται στις αποδείξεις για την επέκταση του τομέα τους, στην εκπαίδευση και διδασκαλία των μαθηματικών ο πρωταρχικός ρόλος της απόδειξης είναι να εξηγήσει γιατί μια δήλωση είναι αληθής (Hanna, 1989). Ωστόσο η απόδειξη, πέρα από την εξήγηση έχει κι άλλες λειτουργίες, όπως την επαλήθευση, οι οποίες σύμφωνα με τη Hanna (2000) θα έπρεπε όλες να αντανακλώνται στη σχολική τάξη. Αυτό όμως σύμφωνα με τον de Villiers (1990) και τους Coe και Ruthven (1994) δε συμβαίνει καθώς κατά κύριο λόγο επικρατεί η λειτουργία της επαλήθευσης ή επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας πρότασης.

Τα τελευταία χρόνια έχουν διεξαχθεί πολυάριθμες έρευνες στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών για το ρόλο των πεποιθήσεων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Οι πεποιθήσεις των μαθητών φαίνεται πολλές φορές να επηρεάζουν τον τρόπο που αυτοί παράγουν αποδείξεις, τις αποδεικτικές στρατηγικές που επιλέγουν, αλλά και τον τρόπο με τον οποίο αξιολογούν αποδείξεις. Από την άλλη, οι πεποιθήσεις αυτές φαίνεται να επηρεάζονται τόσο από τα σχολικά εγχειρίδια, όσο και από τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών.

Πιο συγκεκριμένα, οι εκπαιδευτικοί, όπως επίσης και τα εγχειρίδια που αυτοί χρησιμοποιούν, χρησιμεύουν ως οδηγοί βοηθώντας τους μαθητές να καταλάβουν αυτό που μετρά ως έγκυρη μαθηματική απόδειξη (Bieda, 2010). Επιπλέον, το αξιολογικό σύστημα που προβάλει ο εκπαιδευτικός κατά τη διδακτική πράξη ενδέχεται να επηρεάσει τις πεποιθήσεις των μαθητών για το τι είναι απόδειξη. Για παράδειγμα, αν ο εκπαιδευτικός δέχεται τα εμπειρικά επιχειρήματα ως αποδείξεις, είναι οι φυσικό οι μαθητές να αποκτήσουν την παρανόηση ότι τα εμπειρικά επιχειρήματα είναι αποδείξεις.

Από την άλλη, τα σχολικά εγχειρίδια επιδρούν σημαντικά στην επιλογή των μαθηματικών έργων που γίνονται στην τάξη, όσο και στον τρόπο που επιλέγουν οι μαθητές να εκτελέσουν ένα μαθηματικό έργο. Επιπλέον, σύμφωνα με τους Μούτσιος-

Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2015) «το σχολικό βιβλίο εντάσσεται στους κρίσιμους παράγοντες διαμόρφωσης των κατασκευών σχετικών με το συμβολικό/κανονιστικό επίπεδο (οι αντιλαμβανόμενες επίσημες οδηγίες) που αφορά ένα σχολικό μάθημα· στην περίπτωσή μας, τα ‘επίσημα’ σχολικά μαθηματικά και ειδικότερα τις ‘επίσημες’ όψεις της σχολικής απόδειξης» (σελ.562).

Σύμφωνα με την Kotelawala (2009) η βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εξαρτάται από την ικανότητα να αποδειχθούν ή να δικαιολογηθούν συμπεράσματα, ενώ σύμφωνα με τους Inglis και Alcock (2012) για οποιονδήποτε εμπλέκεται με τα μαθηματικά μια σημαντική δραστηριότητα είναι να διαβάζει αποδείξεις με στόχο να καθορίσει αν αυτές είναι έγκυρες. Γίνεται λοιπόν σαφές ότι η αξιολόγηση ή επικύρωση επιχειρημάτων είναι σημαντική για τη μάθηση των μαθηματικών αφού μέσω αυτής οι μαθητές πείθονται για την αλήθεια του επιχειρήματος και επιπλέον κατανοούν καλύτερα το μαθηματικό του περιεχόμενο. Αυτή η αξιολόγηση ωστόσο, φαίνεται να επηρεάζεται από αρκετούς παράγοντες, όπως για παράδειγμα την εξωτερική μορφή του επιχειρήματος ή την πηγή προέλευσής του.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω οι πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη φαίνεται να επιδρούν στον τρόπο που αυτοί παράγουν αποδείξεις, αλλά και στον τρόπο με τον οποίο αξιολογούν αποδείξεις ή αποδεικτικά επιχειρήματα. Αυτές οι πεποιθήσεις ωστόσο διαμορφώνονται κατά τη διάρκεια των σχολικών χρόνων και κρίνεται απαραίτητη η διερεύνηση του κατά πόσο αυτές οι πεποιθήσεις σχετίζονται με τις εκάστοτε εκπαιδευτικές πρακτικές, αλλά και με το σχολικό εγχειρίδιο και τον τρόπο που αυτό παρουσιάζει την απόδειξη.

Στην παρούσα μελέτη ακολουθώντας μια συστημική προσέγγιση, λόγω της πολυπλοκότητας των υπό μελέτη ζητημάτων, έχουμε σαν στόχο να διερευνήσουμε την ύπαρξη συγκλίσεων και αποκλίσεων μεταξύ των πεποιθήσεων των μαθητών σχετικά με την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων και με την απόδειξη, των εκπαιδευτικών πρακτικών και των όψεων της απόδειξης που παρουσιάζει το σχολικό εγχειρίδιο. Με αυτόν τον τρόπο θα δούμε το φαινόμενο σε όλη του την έκταση και όχι μεμονωμένα. Συμπερασματικά, σε αυτήν την έρευνα αντί να μελετήσουμε ξεχωριστά είτε τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη, είτε τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών, είτε τις όψεις της απόδειξης του σχολικού βιβλίου, υιοθετώντας τη συστημική οπτική θα διερευνήσουμε όλα τα παραπάνω αλλά κυρίως τις σχέσεις μεταξύ αυτών.

Στην παρούσα εργασία, στην $2^η$ ενότητα θα παρουσιαστεί η υπάρχουσα βιβλιογραφία για τα υπό διερεύνηση θέματα που προαναφέρθηκαν. Στην $3^η$ ενότητα θα παρουσιαστεί η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε στην έρευνα με τη σειρά που αυτή πραγματοποιήθηκε. Αφού γίνει η περιγραφή των διαδικασιών και του δείγματος θα παρουσιαστεί η μέθοδος ανάλυσης των ερωτηματολογίων που δόθηκαν στους μαθητές, η μέθοδος ανάλυσης των συνεντεύξεων των εκπαιδευτικών και τέλος η μέθοδος ανάλυσης του σχολικού βιβλίου.

Στην $4^η$ ενότητα θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα με τη σειρά που τέθηκαν τα ερευνητικά ερωτήματα. Πιο αναλυτικά, στην αρχή θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της ποσοτικής έρευνας που πραγματοποιήθηκε για να μελετήσει αφενός το πως αξιολογούν αποδεικτικά επιχειρήματα οι μαθητές και αφετέρου τις ευρύτερες πεποιθήσεις τους για την απόδειξη. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν με στόχο τη μελέτη των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών και τις διδακτικές τους πρακτικές σχετικά με την απόδειξη και μετά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τη μελέτη του σχολικού εγχειριδίου και του βιβλίου των λύσεων της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, με στόχο τη διερεύνηση των όψεων της απόδειξης σε αυτά. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της συστημικής προσέγγισης, η οποία δείχνει τις σχέσεις όλων των παραπάνω.

Στην $5^η$ ενότητα αναδεικνύονται οι συγκλίσεις και οι αποκλίσεις των ευρημάτων της παρούσας μελέτης με την υπάρχουσα βιβλιογραφία, και τέλος στην $6^η$ ενότητα παρουσιάζονται τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε, λαμβάνοντας υπ' όψιν τους περιορισμούς της παρούσας μελέτης καθώς και τα ευρήματά της.

2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

2.1. Σημασία και λειτουργίες της απόδειξης

Μια τεκμηριωμένη θέαση του ρόλου της απόδειξης στα μαθηματικά οδηγεί κάποιον στο συμπέρασμα ότι η απόδειξη πρέπει να είναι μέρος οποιουδήποτε μαθηματικού προγράμματος που φιλοδοξεί να αντικατοπτρίζει τα ίδια τα μαθηματικά και ότι η κύρια λειτουργία της απόδειξης στη σχολική τάξη είναι να προάγει την κατανόηση (Hanna, 1995).

Οι λόγοι για τη διδασκαλία της απόδειξης αλλά και της αποδεικτικής διαδικασίας προέρχονται από την προσδοκία οι μαθητές να έχουν τις ίδιες εμπειρίες με τους μαθηματικούς, που έχουν να κάνουν με την εκμάθηση του κορμού της μαθηματικής γνώσης, καθώς και να αποκτήσουν γνώσεις σχετικά με το ποιοι ισχυρισμοί είναι αληθείς (Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron & Winicki-Landman, 2012). Οι Zaslavsky κ.α. (2012) αναφέρουν ότι η απόδειξη πρέπει να διδάσκεται στην τάξη καθώς ενισχύει την κατανόηση των μαθητών, «ρίχνει φώς» στις ρίζες και τις συνδέσεις της μαθηματικής γνώσης, ενώ δίνει τη δυνατότητα για διδασκαλία μεθόδων στην επίλυση προβλημάτων (problem solving).

Σύμφωνα με τους Ball, Hoyles, Jahnke και Movshovitz-Hadar (2002) η απόδειξη είναι ένα «παιδαγωγικό εργαλείο που υποστηρίζει την διαμόρφωση των πεποιθήσεων κάποιου για την αλήθεια των μαθηματικών συλλογισμών, αλλά και την ικανότητά του να δικαιολογεί αυτές τις πεποιθήσεις» (σελ.916), ενώ σύμφωνα με τους Moutsios-Rentzos και Spyrou (2013) «μέσα σε ένα παιχνίδι του μυαλού για την επιλογή διαφορετικών a priori συνδυασμών η απόδειξη καθίσταται ο μοναδικός τρόπος πρόσβασης και αξιολόγησης της μαθηματικής αλήθειας των ισχυρισμών» (σελ. 334).

Σύμφωνα με την Hanna (2000) όταν επιχειρούμε να καθορίσουμε το ρόλο της απόδειξης στη σχολική τάξη πρέπει να σκεφτούμε όλες τις λειτουργίες της απόδειξης οι οποίες εκτελούνται στη μαθηματική πρακτική. Οι λειτουργίες της απόδειξης σύμφωνα με την Bell (1976) είναι τρεις: η *επιβεβαίωση*, η *εξήγηση* και η *συστηματοποίηση*. Ο de Villiers (1990) διευρύνει τις λειτουργίες σε επτά, την *επαλήθευση*, η οποία έχει να κάνει με την αλήθεια μιας πρότασης, την *εξήγηση* (παροχή κατανόησης για κάτι που είναι αληθές), τη *συστηματοποίηση* (οργάνωση των διαφόρων αποτελεσμάτων), την *ανακάλυψη*, την *επικοινωνία* με την έννοια της μετάδοσης γνώσης, τη *νοητική πρόκληση* και την *αισθητική λειτουργία*, η οποία σχετίζεται με την κομψότητα της απόδειξης.

Κάποιες από αυτές τις λειτουργίες, όπως η συστηματοποίηση, αναφέρονται κυρίως στο προϊόν της απόδειξης, ενώ άλλες, όπως η εξήγηση, αναφέρονται στην αποδεικτική διαδικασία (Furinghetti & Morselli, 2011). Οι Zaslavsky κ.α. (2012) προσπαθώντας να απαντήσουν αν υπάρχει εσωτερική ανάγκη για απόδειξη, εξέτασαν 5 κατηγορίες πνευματικών αναγκών: τη βεβαιότητα, την αιτιότητα, τον υπολογισμό, την επικοινωνία και τη δομή. Οι ανάγκες αυτές, όπως οι ίδιοι αναφέρουν, συνδέονται και σχετίζονται με τις λειτουργίες της απόδειξης.

Σύμφωνα με τη Hanna (2000) η απόδειξη στη σχολική τάξη θα αναμενόταν να αντανακλά όλες αυτές τις λειτουργίες, με κάποιο τρόπο. Ωστόσο σύμφωνα με τον de Villiers (1990) αυτό στην πράξη δε συμβαίνει, καθώς η λειτουργία της απόδειξης που έχει επικρατήσει σχεδόν αποκλειστικά είναι αυτή της επιβεβαίωσης μιας μαθηματικής πρότασης. Σύμφωνοι με αυτοί την άποψη είναι οι Coe και Ruthven (1994), στην έρευνα των οποίων η συνηθέστερα εκφρασμένη λειτουργία της απόδειξης ήταν να εξασφαλίσει τη βεβαιότητα όσων αποδείχτηκαν.

Συνοψίζοντας, η απόδειξη κατέχει, όπως άλλωστε θα έπρεπε, κεντρικό ρόλο στη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς είναι αυτή που ενισχύει την κατανόηση των μαθητών, αναδεικνύει τις συνδέσεις της μαθηματικής επιστήμης και αποτελεί μέσο αξιολόγησης μαθηματικών ισχυρισμών. Για να καθορίσουμε το ρόλο της απόδειξης προέχει να σκεφτούμε τις λειτουργίες της απόδειξης. Για τις λειτουργίες αυτές κάνουν λόγο πολλοί συγγραφείς (για παράδειγμα Bell 1976), ωστόσο στην παρούσα μελέτη υιοθετούμε τις λειτουργίες που αναφέρει ο de Villiers (1990), καθώς φαίνεται αυτή η διάκριση να προσεγγίζει καλύτερα το θέμα αναδεικνύοντας και τις λανθάνουσες λειτουργίες της απόδειξης.

2.2. Πεποιθήσεις

2.2.1. Εννοιοποιήσεις των πεποιθήσεων

Στη διδασκαλία των Μαθηματικών κυρίαρχο ρόλο κατέχει η απόδειξη, η οποία διαδραματίζει διαφορετικούς ρόλους για εκπαιδευτικούς και μαθητές. Ειδικότερα για το θυμικό, οι στάσεις, οι πεποιθήσεις και τα συναισθήματα που έχουν οι μαθητές για την απόδειξη φαίνεται να καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο κάνουν αποδείξεις , τις στρατηγικές που επιλέγουν, το τελικό προϊόν που παράγουν, αλλά και τον τρόπο με τον οποίο αξιολογούν μια απόδειξη.

Πολυάριθμες έρευνες στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών καταδεικνύουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τη μαθηματική απόδειξη. Η φύση αυτών των δυσκολιών σχετίζεται κατά ένα μέρος της με τις πεποιθήσεις των μαθητών για το τι είναι απόδειξη, το οποίο πολλές φορές δεν ταυτίζεται με το τι θεωρεί απόδειξη η μαθηματική κοινότητα. Δηλαδή η προσωπική σημασία των μαθητών για το τι είναι απόδειξη είναι ασύμβατη ή έχει ασύμβατες όψεις με τη θεσμική σημασία της απόδειξης (Recio & Godino, 2001). Για παράδειγμα οι μαθητές μπορούν να πειστούν για την αλήθεια μιας πρότασης μόνο και μόνο επειδή παρατηρούν ότι επαληθεύεται για ένα πεπερασμένο πλήθος περιπτώσεων, κάτι το οποίο δεν είναι αποδεκτό από τη μαθηματική κοινότητα.

Έχουν διεξαχθεί πολλές έρευνες για το ρόλο των πεποιθήσεων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Ο όρος «πεποιθήσεις» χρησιμοποιείται από τους διάφορους ερευνητές για να αποδώσει κάθε φορά διαφορετικές έννοιες, γεγονός που ίσως οφείλεται στην απουσία ενός ορισμού για τις πεποιθήσεις, ο οποίος θα είναι καθολικά αποδεκτός από τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Κάποιοι από τους ερευνητές υποστηρίζουν τη σημασία των ορισμών και την προσεκτική διάκριση των όρων, ενώ άλλοι υποστηρίζουν ότι η έλλειψη συναίνεσης γύρω από τους ορισμούς δεν είναι απαραίτητα αντιπαραγωγική, δεδομένου ότι οι πεποιθήσεις αποτελούν ένα ευέλικτο και βολικό οικοδόμημα (Goldin, Rösken & Törner, 2009).

Σύμφωνα με τον Goldin (2002) οι πεποιθήσεις είναι «πολλαπλώς κωδικοποιημένες εσωτερικές γνωστικές/συναισθηματικές διαπιστώσεις, στις οποίες ο κάτοχος αποδίδει αξία-αλήθεια κάποιου είδους» (σελ.64). Επιπλέον οι Goldin, Rösken και Törner (2009) αναφέρουν ότι οι πεποιθήσεις μπορεί να « είναι σαν "πάλσαρ" δημιουργώντας λάμψεις της διαίσθησης, ή ανάβοντας το δρόμο για περαιτέρω και βαθύτερες ιδέες» (σελ.6). Στο ίδιο πλαίσιο εντάσσεται και ο ορισμός που δίνουν οι Pehkonen and Hannula (2004), σύμφωνα με τους οποίους, οι πεποιθήσεις ενός ατόμου κατανοούνται ως μια μάλλον ευρεία έννοια, αφού η υποκειμενικότητα του ατόμου που βασίζεται στην εμπειρία του, συχνά υπονοείται στη γνώση ή στα συναισθήματα σε κάποιο θέμα.

Ο Phillip (2007) δίνει έναν ορισμό που στηρίζεται περισσότερο σε ψυχολογικούς παράγοντες καθώς αναφέρει «οι πεποιθήσεις ορίζονται ως ψυχολογικά διαμορφωμένες κατανοήσεις ή προτάσεις για τον κόσμο που πιστεύεται ότι είναι αληθείς» (σελ. 259). Από την άλλη, ο Leatham (2006) αναφέρει ότι από όλα τα πράγματα που πιστεύουμε είναι κάποια που «απλά πιστεύουμε» και άλλα που «τα πιστεύουμε περισσότερο- τα γνωρίζουμε». Τα πρώτα αναφέρονται ως πεποιθήσεις, ενώ τα δεύτερα ως γνώση. Έτσι, οι πεποιθήσεις και η γνώση μπορούν να νοηθούν ως συμπληρωματικά υποσύνολα του συνόλου των πραγμάτων που πιστεύουμε (σελ. 92).

Για πολλούς ερευνητές οι πεποιθήσεις ενός ατόμου σχετίζονται με τις στόχους και τις αποφάσεις που λαμβάνονται από το άτομο. Ο Schoenfeld (2005) αναφέρει:

> Οι πεποιθήσεις ενός ατόμου, σε αλληλεπίδραση με το πλαίσιο, διαμορφώνουν το σχηματισμό και την ιεράρχηση των στόχων. Λαμβάνοντας υπ'όψιν ένα συγκεκριμένο σχηματισμό στόχων, το άτομο αναζητά και εφαρμόζει τις γνώσεις που είναι συνεπείς με το σύστημα των πεποιθήσεών του και είναι σχεδιασμένο ώστε να ικανοποιεί έναν ή περισσότερους στόχους υψηλής προτεραιότητας. Δεδομένου ότι οι στόχοι ικανοποιούνται (ή όχι), ή όπως αλλάζει το πλαίσιο, νέοι στόχοι λαμβάνουν υψηλή προτεραιότητα, και στη συνέχεια οι πράξεις γίνονται προς επίτευξη των νέων στόχων. (σελ.41)

Στο ίδιο πλαίσιο τοποθετείται και η άποψη του Bandura σύμφωνα με τον οποίο «Οι άνθρωποι ρυθμίζουν το επίπεδο και την κατανομή των προσπαθειών τους, σύμφωνα με τα αποτελέσματα των δράσεών τους. Ως εκ τούτου, η συμπεριφορά τους μπορεί να προβλεφθεί καλύτερα από τις πεποιθήσεις τους παρά από τις πραγματικές συνέπειες των πράξεών τους» (στο Goldin, Rösken και Törner, 2009, σελ.7).

Ο Green (1971) υποστηρίζει ότι οι πεποιθήσεις δεν εμφανίζονται ποτέ ως ενιαίες οντότητες, αλλά εμφανίζονται σε συστάδες. Λόγω αυτού οι πεποιθήσεις είναι πιο σταθερές. Σύμφωνα με τον Pajares (1992), όταν αυτές οι συστάδες οργανώνονται γύρω από ένα αντικείμενο ή κατάσταση και προδιαθέτουν μια δράση, αυτή η ολιστική οργάνωση γίνεται μια στάση. Οι πεποιθήσεις μπορούν επίσης να γίνουν αξίες. Πεποιθήσεις, στάσεις και αξίες αποτελούν το σύστημα πεποιθήσεων ενός ατόμου.

Συνοψίζοντας έχουν διεξαχθεί πολλές έρευνες για το ρόλο των πεποιθήσεων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και ιδιαίτερα στην απόδειξη. Στο χώρο της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών ο όρος πεποιθήσεις δε χρησιμοποιείται από τους διάφορους ερευνητές για να αποδώσει την ίδια έννοια. Άλλοι ερευνητές, όπως ο Goldin (2002), οι Pehkonen και Hannula (2004), χρησιμοποιούν τον όρο ως τις γνωστικές και συναισθηματικές διαπιστώσεις ενός ατόμου, άλλοι, όπως ο Phillip (2007) δίνουν έναν ορισμό περισσότερο ψυχολογικό, ενώ οι Green (1971) και Pajares (1992) κάνουν λόγο για συστήματα πεποιθήσεων. Τέλος, κάποιοι ερευνητές, όπως ο Schoenfeld (2005) και ο Bandura (1996) συσχετίζουν τις πεποιθήσεις με τους στόχους και τις αποφάσεις που λαμβάνει το άτομο. Στην παρούσα έρευνα, θεωρούμε τις πεποιθήσεις των μαθητών ως ένα σύστημα και ως εκ τούτου υιοθετούμε τον ορισμό του Green (1971).

2.2.2. Διαστάσεις των πεποιθήσεων για τα μαθηματικά

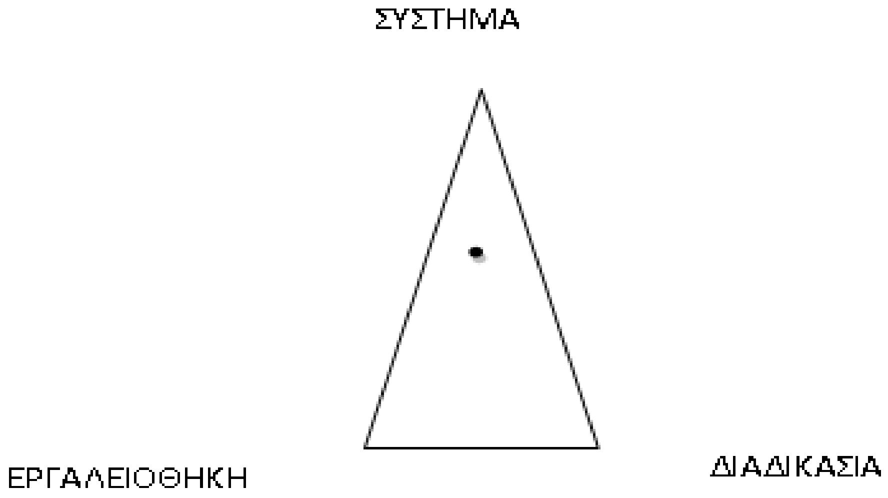
Τα θέματα που σχετίζονται με το θυμικό διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών (McLeod, 1992).Το θυμικό σύμφωνα με τον Hannula (2012) ορίζεται σαν «μια ομπρέλα για τις πτυχές της ανθρώπινης σκέψης όπως οι συγκινήσεις, οι πεποιθήσεις, οι στάσεις, τα κίνητρα, οι αξίες, η διάθεση, οι νόρμες και οι στόχοι» (σελ.138). Ο McLeod αναγνώρισε τρείς πτυχές του θυμικού που σχετίζεται με τα μαθηματικά: τις πεποιθήσεις, τις στάσεις και τις συγκινήσεις, τα οποία όπως λέει διακρίνονται από το διαφορετικό βαθμό σταθερότητας, έντασης και γνωστικής εμπλοκής που παρουσιάζουν. Όσον αφορά τη σταθερότητα οι πεποιθήσεις και οι στάσεις είναι γενικά σταθερές, αλλά οι συγκινήσεις μπορεί να αλλάζουν. Όσον αφορά την ένταση αναφέρει ότι οι συγκινήσεις έχουν έντονη συναισθηματική φόρτιση, οι στάσεις μικρότερη και οι πεποιθήσεις ακόμα πιο μικρή (McLeod, 1992).

Στη συνέχεια, ο Hannula (2012) εισήγαγε μια μεταθεωρία η οποία ενσωματώνει τα βασικά στοιχεία (συγκινήσεις, στάσεις, πεποιθήσεις) καθώς και τις παραμέτρους αυτών δηλαδή την *ένταση*, τη *σταθερότητα* και τη *γνωστική επίδραση*. Σε αυτό το πλαίσιο η σταθερότητα ορίζεται σα μια ξεχωριστή διάσταση, ενώ αναγνωρίζεται και η επίδραση που έχουν τα κίνητρα στις επιλογές. Η μεταθεωρία στηρίζεται σε 3 ξεχωριστές διαστάσεις: α) τις γνωστική, παρακινητική και συγκινησιακή πτυχή του θυμικού, β) τις γρήγορα εναλλασσόμενες συγκινησιακές καταστάσεις έναντι των σταθερών συγκινησιακών χαρακτηριστικών και γ) τη φυσιολογική (με την έννοια της σωματικής), την ψυχολογική και την κοινωνική φύση του θυμικού. Αυτές οι διακρίσεις είναι μεταξύ των κατηγοριών και οι διαστάσεις δε σχετίζονται μεταξύ τους.

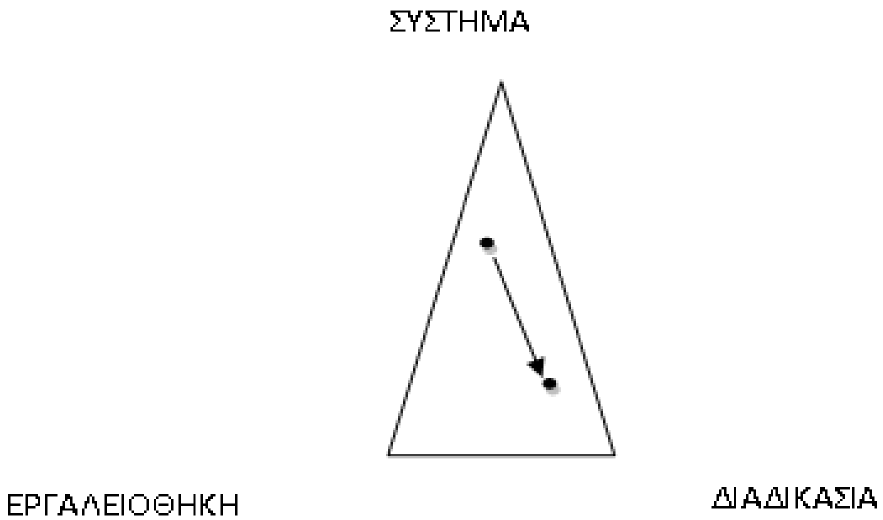
Εστιάζοντας στις πεποιθήσεις ο Törner (2002) διακρίνει τέσσερις διαστάσεις: *οντολογική*, *απαρίθμησης, κανονιστική* και *συναισθηματική*. Η οντολογική διάσταση έχει να κάνει με το γεγονός ότι για να διαμορφωθεί μια πεποίθηση, πρώτα πρέπει να προσδιοριστεί το αντικείμενο στο οποίο αυτή αναφέρεται. Η διάσταση απαρίθμησης με το ότι οι πεποιθήσεις μπορούν να θεωρηθούν σαν ένα σύνολο νοητικών καταστάσεων, η κανονιστική διάσταση με το ότι οι πεποιθήσεις είναι εξαιρετικά εξατομικευμένες και η συναισθηματική διάσταση με το ότι οι πεποιθήσεις είναι συνυφασμένες με το θυμικό.

Σύμφωνα με τον Ernest (1991) υπάρχουν τρεις φιλοσοφίες των μαθηματικών, η *εργαλειακή*, η *πλατωνιστική* και η *επίλυση προβλήματος*. Στο ίδιο φιλοσοφικό πλαίσιο, ο Dione (1984) αναφέρει ότι τα μαθηματικά είναι είτε μια, είτε συνδυασμός τριών συνιστωσών, της *παραδοσιακής,* της *φορμαλιστικής* και της *κονστρουκτιβιστικής*. Οι Törner και Grigutch αναφέρουν αυτές τις συνιστώσες ως *εργαλειακή*, *συστημική* και *διαδικαστική*. «Στην εργαλειακή προσέγγιση εντάσσονται οι πεποιθήσεις ότι τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο από κανόνες και διαδικασίες και ότι η μαθηματική δραστηριότητα έχει να κάνει με υπολογισμούς και εφαρμογή κανόνων. Η συστημική προσέγγιση χαρακτηρίζεται από λογική, αυστηρές αποδείξεις, ακριβείς ορισμούς και μαθηματική ορολογία, ενώ η μαθηματική δραστηριότητα περιέχει αυστηρές αποδείξεις και χρήση της ορολογίας. Η διαδικαστική προσέγγιση θεωρεί τα μαθηματικά ως μια κατασκευαστική διαδικασία όπου οι σχέσεις μεταξύ των εννοιών είναι πολύ σημαντικές, ενώ η μαθηματική δραστηριότητα έχει να κάνει με την επινόηση ή την επινόηση εκ νέου των μαθηματικών» (στο Liljedahl, 2008, σελ. 45-46).

Ωστόσο, σύμφωνα με τον Liljedahl (2008) οι πεποιθήσεις για τα μαθηματικά δεν περιορίζονται σε μία μόνο από τις παραπάνω διακριτές προσεγγίσεις, αλλά μπορούν να νοηθούν ως συνδυασμός αυτών, δείχνοντας προτίμηση σε μερικές από αυτές. Στη γραφική αναπαράσταση που ακολουθεί (βλέπε Σχήμα 1) κάθε κορυφή του τριγώνου δείχνει την κυριαρχία μιας συγκεκριμένης προσέγγισης. Έτσι για παράδειγμα στο συγκεκριμένο σχήμα (1) το άτομο έχει κυρίαρχη την πεποίθηση που εντάσσεται στη συστημική προσέγγιση. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση των Törner και Grigutch (1994), οι Törner και Pehkonen (1998) σχεδίασαν τη διαφορά μεταξύ της πραγματικής και ιδανικής διδασκαλίας, ως βέλη, των οποίων τα μήκη μετρήθηκαν και συγκρίθηκαν (βλέπε Σχήμα 2).



Σχήμα 1. Προσαρμογή της γραφικής αναπαράστασης των τριών πτυχών των πεποιθήσεων για τα μαθηματικά των Törner και Grigutch (στο Liljedahl, 2008, σελ. 35).



Σχήμα 2. Προσαρμογή της διανυσματικής αναπαράστασης της διαφοράς μεταξύ πραγματικής και ιδανικής διδασκαλίας των Törner και Pehkonen (στο Liljedahl, 2008, σελ.35).

Συμπερασματικά, τα θέματα που σχετίζονται με το θυμικό επιδρούν σημαντικά στη μάθηση των μαθηματικών. Ο McLeod (1992), αναγνώρισε τις πτυχές του θυμικού, ενώ στη συνέχεια ο Hannula (2012) ασκώντας κριτική στο πλαίσιο του McLeod εισήγαγε μια μεταθεωρία για τις πτυχές αυτές. Πολλοί ερευνητές (βλέπε Ernest, 1991· Törner, 2002· Törner και Grigutch, 1994) έχουν αναγνωρίσει διάφορες διαστάσεις των πεποιθήσεων για τα μαθηματικά, ωστόσο στην παρούσα μελέτη υιοθετούμε την άποψη του Liljedahl (2008), σύμφωνα με τον οποίο οι πεποιθήσεις για τα μαθηματικά είναι συνδυασμός των διαστάσεων-προσεγγίσεων που αναφέρονται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία.

2.2.3. Πεποιθήσεις για την απόδειξη

Είναι γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές έχουν συγκεχυμένη στο μυαλό τους την έννοια της απόδειξης, ενώ φαίνεται εξαιρετικά δύσκολο να δοθεί ρητός ορισμός για αυτήν. Στην πραγματικότητα η φύση της απόδειξης φαίνεται να αποτελεί αντικείμενο διαμάχης μεταξύ μαθηματικών, φιλοσόφων και ιστορικών (Raman, 2003). Σύμφωνα με τους Coe και Ruthven (1994) η απόδειξη εμφανίζεται σα μια δραστηριότητα, η οποία γίνεται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, αντί για ένα αφηρημένο αντικείμενο με δική του ύπαρξη, ενώ πολλές φορές εμφανίζεται ως ένας τύπος ελέγχου για τον αν ένας κανόνας λειτουργεί.

Οι μαθητές περνώντας από τη μία βαθμίδα εκπαίδευσης στην άλλη, αλλάζοντας σχολικά εγχειρίδια και εκπαιδευτικούς, με διαφορετικές διδακτικές πρακτικές ο καθένας, γίνονται μέλη διαφορετικών μαθηματικών κοινοτήτων, στις οποίες υπάρχουν διαφορετικά πρότυπα για το τί είναι απόδειξη. Έτσι σύμφωνα με τον CadwalladerOlsker (2011) είναι λογικό και οι ίδιοι οι μαθητές να αποκτούν μια ποικιλία πεποιθήσεων για τα κριτήρια που κάνουν μια απόδειξη έγκυρη, αλλά και για τον ορισμό της μαθηματικής απόδειξης.

Σύμφωνα με τον Balacheff (1998) υπάρχει μια ιεραρχία στα είδη των αποδεικτικών επιχειρημάτων κατά τη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Πιο αναλυτικά, προτείνει 4 τύπους επιχειρημάτων, οι οποίοι κυριαρχούν σε αυτή την ανάπτυξη : *αφελής εμπειρισμός*, που έχει να κάνει με την επιβεβαίωση της αλήθειας μέσα από τη δοκιμή ορισμένων περιπτώσεων, το *κρίσιμο πείραμα*, που έχει να κάνει με την επιβεβαίωση μιας πρότασης σε μια τυχαία περίπτωση, το *γενικό παράδειγμα*, που δείχνει τους λόγους που αληθεύει μια πρόταση μέσω πράξεων και μετατροπών σε μια συγκεκριμένη περίπτωση, που όμως αποτελεί αντιπρόσωπο της κλάσης της και τέλος το *πείραμα σκέψης,* το οποίο έχει να κάνει με την αποσύνδεση του αντικειμένου από οποιαδήποτε αναπαράσταση. Το πέρασμα από το ένα είδος στο άλλο σύμφωνα με τον Balacheff (1998) εξαρτάται από τις απαιτήσεις για γενίκευση και για εννοιοποίηση της γνώσης.

Οι Harel και Showder (1998) προτείνουν τρεις κατηγορίες πεποιθήσεων αποδεικτικών σχημάτων: την *εξωτερική πεποίθηση*, την *εμπειρική* και την *παραγωγική*. Τα αποδεικτικά σχήματα της εξωτερικής πεποίθησης κατέχονται από μαθητές οι οποίοι πείθονται για την αλήθεια ενός θεωρήματος από εξωτερικούς παράγοντες, για παράδειγμα από την εμφάνιση της απόδειξης. Αυτά της εμπειρκής πεποίθησης τα έχουν μαθητές οι οποίοι πείθονται από παραδείγματα, ενώ τα αποδεικτικά σχήματα της παραγωγικής πεποίθησης κατέχονται από μαθητές που αποδεικνύουν θεωρήματα μέσω κανόνων λογικής παραγωγής και ισχύουν για κάθε περίπτωση.

Σύμφωνα με την Raman (2003), οι μαθητές φαίνεται να διακρίνουν τη *δημόσια* και *προσωπική* πτυχή των μαθηματικών και κατ’επέκταση και των επιχειρημάτων. Με την έννοια «δημόσιο» επιχείρημα, εννοούμε ένα επιχείρημα με την επαρκή αυστηρότητα, που απαιτεί μια μαθηματικά κοινότητα, ενώ με το «προσωπικό» επιχείρημα, εννοούμε ένα επιχείρημα που οδηγεί στην κατανόηση. Είναι γεγονός ότι στην απόδειξη εμπλέκονται και τα δύο είδη επιχειρημάτων και φαίνεται να σχετίζονται με κάποιες από τις λειτουργίες της απόδειξης. Το «δημόσιο» επιχείρημα μας παραπέμπει περισσότερο στην επικοινωνία, ενώ το «προσωπικό» στην εξήγηση.

Αξίζει να σημειωθεί ότι πολλές φορές η προσωπική σημασία που αποδίδουν οι μαθητές στην απόδειξη έρχεται σε σύγκρουση με το θεσμικό της νόημα, δηλαδή οι μαθητές μπορεί να πειστούν για την εγκυρότητα μιας απόδειξης στηριζόμενοι σε διαφορετικές εγγυήσεις από αυτές που αποδέχονται οι μαθηματικοί (Moutsios-Rentzos & Simpson, 2011). Για παράδειγμα σύμφωνα με τη Segal (1998) η μαθηματική επαγωγή είναι αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα, αλλά δεν είναι απαραίτητα πειστική για το άτομο.

Σύμφωνα με τις Healy και Hoyles (2000) μια άλλη διάκριση στις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη είναι αυτή μεταξύ των επιχειρημάτων που θεωρούν ότι θα πάρουν τον καλύτερο βαθμό, και των επιχειρημάτων που υιοθετούν για τον εαυτό τους. Οι μαθητές φαίνεται να προτιμούν τα εμπειρικά επιχειρήματα (που περιέχουν ένα πεπερασμένο πλήθος παραδειγμάτων για τα οποία ισχύει το προς απόδειξη ερώτημα) για τον εαυτό τους, ενώ καταδεικνύουν τα αλγεβρικά επιχειρήματα ως αυτά που θα λάβουν την καλύτερη βαθμολογία.

Επιπλέον, φαίνεται οι μαθητές πολλές φορές να μην αντιλαμβάνονται τη γενίκευση μιας απόδειξης. Πολλοί είναι αυτοί που θεωρούν τις παραγωγικές αποδείξεις στη γεωμετρία, ως αποδείξεις που ισχύουν για μία μόνο περίπτωση (Chazan, 1993), ενώ σύμφωνα με τον Balacheff (1988) δεν αντιλαμβάνονται τη «γενική» πτυχή των διαγραμμάτων στις γεωμετρικές αποδείξεις. Συμπληρώνοντας τα παραπάνω, σύμφωνα με τον Williams «οι μαθητές με τέτοιες πεποιθήσεις δεν αντιλαμβάνονται την αρχή της γενίκευσης των παραγωγικών αποδείξεων» (στο Chazan, 1993).

Όσον αφορά τις πεποιθήσεις των μαθητών για τις λειτουργίες της απόδειξης, φαίνεται ότι αναγνωρίζουν περισσότερο δύο λειτουργίες, αυτή την εξήγησης και αυτή της επιβεβαίωσης. Οι Coe και Ruthven (1994) αναφέρουν ότι παρόλο που πολλοί μαθητές δήλωσαν την πεποίθηση ότι η απόδειξη παρέχει βεβαιότητα, οι πρακτικές τους δεν ήταν συνεπείς με αυτήν την πεποίθηση. Επιπλέον, οι ίδιοι αναφέρουν ότι μια άλλη λειτουργία της απόδειξης που ειπώθηκε από τους μαθητές ήταν η κατανόηση, ενώ από κάποια σχόλια των συμμετεχόντων φαίνεται κι άλλη μια λειτουργία της απόδειξης, αυτή που δείχνει τη λογική δομή ενός συστήματος και τις σχέσεις του.

Από την άλλη μεριά, σύμφωνα με τον Almeida (2000), ο οποίος έκανε μια έρευνα για τις πεποιθήσεις των φοιτητών για την απόδειξη και το ερωτηματολόγιο του στηρίχθηκε σε αυτό των Coe και Ruthven (1994), καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι φοιτητές βλέπουν την απόδειξη ως μια εξωτερική δραστηριότητα και όχι ως μια εσωτερική δραστηριότητα που αποσκοπεί στην απόκτηση γνώσης και κατανόησης.

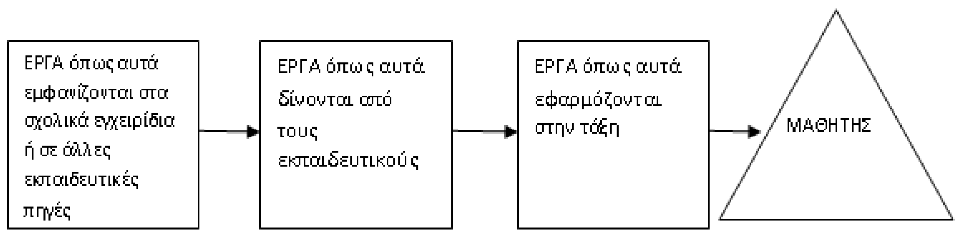
Συνοψίζοντας, οι μαθητές αποκτούν μια ποικιλία πεποιθήσεων για τα κριτήρια που κάνουν μια απόδειξη έγκυρη, αλλά και για τον ορισμό της απόδειξης.

Οι Harel και Sowder (1998) προτείνουν τρεις κατηγορίες πεποιθήσεων αποδεικτικών σχημάτων, ενώ σύμφωνα με τον Raman (2003), οι μαθητές φαίνεται να διακρίνουν τη «δημόσια» και «προσωπική» πτυχή των μαθηματικών. Επιπλέον, φαίνεται οι μαθητές να αξιολογούν ένα επιχείρημα με κριτήριο το βαθμό που θα έβαζε ο εκπαιδευτικός, ενώ πολλές φορές δεν είναι σε θέση να καταλάβουν τη γενίκευση των αποδείξεων. Τέλος, όσον αφορά τις λειτουργίες φαίνεται για τους μαθητές να κυριαρχούν η εξήγηση και η επιβεβαίωση, ενώ η απόδειξη νοείται περισσότερο ως μια εξωτερική δραστηριότητα.

2.3. Διδακτικά Εγχειρίδια

Το σχολικό βιβλίο ορίζει μία από τις όψεις της επίσημης εκπαιδευτικής πραγματικότητας που υπερβαίνει την τάξη, τους εκπαιδευτικούς, τους εκπαιδευόμενους και τη σχολική μονάδα, όντας κοινός τόπος αναφοράς όλων των σχολικών μονάδων στις οποίες χρησιμοποιείται (Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή, 2014). Σε πολλές χώρες, όπως οι Ελλάδα, οι εκπαιδευτικοί τείνουν (σε διαφορετικό βαθμό) να στηρίζονται σε συγκεκριμένα εγχειρίδια, τα οποία είτε υιοθετούνται από τις σχολικές περιφέρειες, είτε εγκρίνονται από την κυβέρνηση (Stylianides, 2014).

Σύμφωνα με τους Cai, Ni και Lester «το συμπέρασμα είναι ότι τα βιβλία των μαθηματικών έχουν ή θα έπρεπε να έχουν, σημαντική επιρροή στην επιλογή και εκτέλεση των μαθηματικών έργων στη σχολική τάξη και ως εκ τούτου και στις ευκαιρίες των μαθητών για μάθηση» (στο Stylianides, 2014, σελ.64). Επιπλέον, σύμφωνα με το Stylianides (2014) το πλαίσιο που προτείνουν οι Stein, Grover και Henningsen (βλέπε Σχήμα 3) για τα μαθηματικά έργα, δείχνει πως αυτά «περνούν από τρεις φάσεις καθεμιά από τις οποίες επιδρά σημαντικά σε αυτό που μαθαίνουν οι μαθητές ή σε αυτό που έχουν την ευκαιρία να μάθουν» (σελ.64).



Σχήμα 3. Μία ελαφρώς προσαρμοσμένη εκδοχή του πλαισίου για τα μαθηματικά έργα των Stein et al. (στο Stylianides, 2014, σελ.64).

Οι Hanna και de Bruyn (1999) μελέτησαν δύο σχολικά βιβλία του Ontario σχετικά με τη συχνότητα εμφάνισης των διαφόρων ειδών αποδείξεων, καθώς και των αντικειμένων που σχετίζονται με την κατασκευή αποδείξεων. Βρήκαν ότι τα βιβλία αυτά ήταν εναρμονισμένα, στο πλαίσιο της απόδειξης, με τις οδηγίες του προγράμματος σπουδών, ενώ ευκαιρίες για μάθηση της απόδειξης παρέχονται μόνο στη Γεωμετρία, όπου πάνω από το 80% των ασκήσεων περιέχουν τουλάχιστον μια απόδειξη.

Επιπλέον, οι Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2014) μελέτησαν το σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου σχετικά με το ποια θεωρήματα αποδεικνύονται και τι είδους αποδείξεις χρησιμοποιούνται σε όσα από αυτά αποδεικνύονται. Βρήκαν ότι το βιβλίο δίνει μεγαλύτερη σημασία στην καθιέρωση των θεωρημάτων ως αληθή, παρά στην ανάδειξη της διαδικασίας με την οποία αυτά αποδείχτηκαν, ενώ ακόμα και στις περιπτώσεις που οι αποδείξεις παρατίθενται αυτές περιορίζονται στη βασική ευθεία απόδειξη και την απόδειξη με ανάλυση. Επιπροσθέτως, βρήκαν ότι στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου η απόδειξη παρουσιάζεται ως κάτι δύσκολο, το οποίο δεν αφορά όλους τους μαθητές και όλες τις μαθήτριες.

Είναι γεγονός ότι στη βιβλιογραφία υπάρχει ποικιλία αναλυτικών πλαισίων για την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων, κάτι το οποίο καθιστά δύσκολη τη σύγκριση των αποτελεσμάτων τους. Ωστόσο σύμφωνα με τον Bergwall (2017) πολλοί ερευνητές επιλέγουν σκόπιμα να χρησιμοποιήσουν πλαίσια και μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί από άλλους. Ένα σημαντικό θεωρητικό πλαίσιο για την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων έχει δοθεί από τον Stylianides (2009), το οποίο χρησιμοποιείται με κάποιες διαφοροποιήσεις από πολλούς ερευνητές, για παράδειγμα από τους Thompson et al. (2012).

Σύμφωνα με τον Stylianides (2009), ένα σημαντικό πλεονέκτημα του πλαισίου που προτείνει είναι ότι ενσωματώνει σημαντικά δραστηριότητες που σχετίζονται με την απόδειξη και επιτρέπει την εξέταση αυτής της συσχέτισης σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Το πλαίσιο αποκαλύπτει δύο αλληλένδετες διαστάσεις (Βλέπε Πίνακα 1).

Πίνακας 1. Αναλυτικό πλαίσιο (Stylianides, 2009, σελ. 262).

		Αιτιολόγηση και Απόδειξη		
	Κάνοντας Μαθηματικές Γενικεύσεις			Παρέχοντας υποστήριξη σε Μαθηματικούς Ισχυρισμούς
	Αναγνωρίζοντας ένα μοτίβο	Κάνοντας μια εικασία	Παρέχοντας μια απόδειξη	Παρέχοντας ένα μη αποδεικτικό επιχείρημα
Διάσταση 1 Συστήματα και υποσυστήματα της Αιτιολόγησης και Απόδειξης	Πιθανό Μοτίβο Ορισμένο Μοτίβο	Εικασία	Γενικό Παράδειγμα Επίδειξη	Εμπειρικό Επιχείρημα Λογικό Επιχείρημα
Διάσταση 2 Σκοποί των Μοτίβων, Εικασιών και Απόδειξης	Πρόδρομος Εικασίας Μη Πρόδρομος Εικασίας	Πρόδρομος Απόδειξης Μη Πρόδρομος Απόδειξης	Επεξήγηση Επιβεβαίωση Παραποίηση Γέννηση της νέας γνώσης	

Εξηγώντας το θεωρητικό του πλαίσιο ο Stylianides (2009) αναφέρει:

> Η διάσταση 1 χρησιμοποιεί (1) την έννοια του «κάνοντας μαθηματικές γενικεύσεις… ώστε να συλληφθούν δύο δραστηριότητες που περιλαμβάνουν αιτιολόγηση-απόδειξη («αναγνωρίζοντας ένα μοτίβου» και «κάνοντας μια εικασία»), και (2) την έννοια του «παρέχοντας υποστήριξη σε μαθηματικούς ισχυρισμούς», ώστε να συλληφθούν οι άλλες δύο δραστηριότητες που περιλαμβάνουν αιτιολόγηση-απόδειξη («παρέχοντας μια απόδειξης» και «παρέχοντας ένα μη αποδεικτικό επιχείρημα»)… Η διάσταση 2 είναι συμπληρωματική της 1 και αφορά τους σκοπούς (λειτουργίες) που τα μοτίβα, οι εικασίες και οι αποδείξεις μπορούν να προσφέρουν στην εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία της αιτιολόγησης-απόδειξης. (σελ.262)

Σύμφωνα με τον Bergwall (2017) όταν οι ευκαιρίες για μάθηση της αιτιολόγησης-απόδειξης μελετώνται στα σχολικά εγχειρίδια υπάρχουν σημαντικές πτυχές που πρέπει να λάβει κανείς υπ’όψιν και υπάρχει και ο κίνδυνος τέτοιες πτυχές να μείνουν εκτός. Οι σημαντικότερες πτυχές που αναφέρει είναι η γενικότητα, οι μορφές αναπαράστασης, η δομή και η σειρά που δίνεται στους μαθητές το υλικό. Αναλύοντας το πλαίσιο των Thompson et al. (2012), το οποίο στηρίζεται σε αυτό του Stylianides (2009) που αναφέρθηκε παραπάνω, ο Bergwall (2017) αναφέρει ότι η ανάλυση των δικαιολογήσεων των σχολικών εγχειριδίων πρέπει να περιλαμβάνει επίσης ανάλυση των προτάσεων και τον ορισμών, ενώ τα θεωρητικά πλαίσια θα πρέπει να λαμβάνουν υπ'όψιν τους διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης. Ο Bergwall (2017) καταλήγει στο εξής συμπέρασμα:

> Για να αναλυθεί αν τα σχολικά εγχειρίδια προσφέρουν ευκαιρίες για να κατανοήσουν οι μαθητές τις αποδείξεις και τις αιτιολογήσεις ως αντικείμενα, τα αναλυτικά πλαίσια και οι μέθοδοι πρέπει να επικεντρωθούν στις ευκαιρίες που δίνονται στους μαθητές να μάθουν τις αντικειμενικές ιδιότητες των αποδείξεων και των δικαιολογήσεων. Η γενικότητα, οι μορφές αναπαράστασης, η δομή και η σειρά που δίνεται στους μαθητές το υλικό είναι παραδείγματα τέτοιων ιδιοτήτων.

Συνοψίζοντας, το σχολικό εγχειρίδιο αποτελεί μια όψη της θεσμικής πραγματικότητας, και είναι αυτό στο οποίο στηρίζεται η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών. Επιπλέον, στη βιβλιογραφία υπάρχει ποικιλία πλαισίων για την ανάλυση εγχειριδίων (βλέπε Hanna και de Bruyn, 1999· Stylianides, 2009), τα οποία σύμφωνα με τον Bergwall (2017) πρέπει να λαμβάνουν υπ'όψιν σημαντικές πτυχές, όπως τις μορφές αναπαράστασης. Στην παρούσα μελέτη, ακολουθήσαμε την ανάλυση των Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2014) οι οποίοι στηρίχθηκαν στους Hanna και de Bruyn (1999).

2.4. Διδακτικές πρακτικές και πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών

Οι διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού είναι γεγονός ότι επηρεάζονται από τις πεποιθήσεις που έχει ο ίδιος σχετικά με την απόδειξη και με το ποιες λειτουργίες αυτή επιτελεί. Αυτές οι πρακτικές επηρεάζουν και τις πεποιθήσεις των μαθητών για το τί συνιστά απόδειξη, τι λειτουργίες αυτή επιτελεί, καθώς και ποια κριτήρια πρέπει να πληρούν τα επιχειρήματα ώστε να είναι έγκυρα.

Σύμφωνα με τους Martin και Harel (1989), οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη είναι πολύ σημαντικές καθώς αν για παράδειγμα ο δάσκαλος στο Δημοτικό οδηγεί τους μαθητές του στην πεποίθηση ότι η επιλογή των κατάλληλων παραδειγμάτων καθιστά μια απόδειξη, είναι φυσικό να αναμένουμε η ιδέα της απόδειξης στη γεωμετρία στο Λύκειο, να είναι δύσκολη για τους μαθητές. Στο ίδιο πλαίσιο οι Stylianides και Stylianides (2009) αναφέρουν ότι αν η κατανόηση της απόδειξης από τον ίδιο το δάσκαλο είναι περιορισμένη, τότε είναι πιθανό πολλές παρανοήσεις των μαθητών να επιμείνουν, όπως για παράδειγμα αν ο δάσκαλος δε μπορεί να διαχωρίσει τα εμπειρικά επιχειρήματα από τις αποδείξεις, τότε οι μαθητές θα αποκτήσουν την παρανόηση ότι τα εμπειρικά επιχειρήματα είναι αποδείξεις.

Επιπροσθέτως, οι εκπαιδευτικοί, όπως επίσης και τα εγχειρίδια που αυτοί χρησιμοποιούν, χρησιμεύουν ως οδηγοί βοηθώντας τους μαθητές να καταλάβουν αυτό που μετρά ως έγκυρη μαθηματική απόδειξη (Bieda, 2010). Αυτό σύμφωνα με τον Herbst (2002) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο ρόλος των εκπαιδευτικών απαιτεί μια ισορροπία μεταξύ της διδασκαλίας έτοιμων αποδείξεων, αλλά και της κατασκευής αποδείξεων από τον μαθητή, ώστε ο μαθητής να ανακαλύψει και να μάθει την αναγκαιότητα και τη χρησιμότητα αυτών των αποδείξεων.

Οι Martin, McCrone, Bower και Dindyal (2005) από μια έρευνα που πραγματοποιήθηκε σε μια σχολική τάξη, στην οποία διερευνήθηκε η σχέση μεταξύ διδασκαλίας και μάθησης, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι:

> Αν ο δάσκαλος θέτει ανοιχτά ερωτήματα παρακινεί τους μαθητές σε λεκτικές αιτιολογήσεις, κάτι που αποτελεί πρόδρομο της απόδειξης. Επιπλέον, με την ανάλυση και την επιστροφή ερωτήσεων στους μαθητές, ο δάσκαλος ελέγχει και επηρεάζει την δημιουργία αλυσιδωτών αιτιολογήσεων και συλλογισμών. Συμπερασματικά, όταν ο δάσκαλος χρησιμοποιεί τις παραπάνω τεχνικές, ώστε οι μαθητές να έχουν ενεργό ρόλο στη δημιουργία εικασιών και στην κατασκευή των αποδείξεων, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία «να μάθουν τους κανόνες του παιχνιδιού (τυπική απόδειξη) παίζοντας το και όχι παρακολουθώντας άλλους να το κάνουν. (σελ.121)

Λόγω του κοινωνικού χαρακτήρα της απόδειξης οι Jones και Herbst (2011) αναφέρουν ότι οι μαθητές στη σχολική τάξη, πρέπει να επικοινωνούν τους συλλογισμούς τους και να κατασκευάζουν νόρμες και αναπαραστάσεις που παρέχουν τις απαραίτητες δομές ώστε η απόδειξη να έχει κεντρικό ρόλο, ενώ ο δάσκαλος πρέπει να οργανώνει τη διδασκαλία της απόδειξης ακόμα κι όταν αυτή δεν είναι το κύριο αντικείμενο διδασκαλίας.

Συμπερασματικά, οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη επηρεάζουν τις διδακτικές πρακτικές που αυτοί ακολουθούν και αυτές με τη σειρά τους φαίνεται να επηρεάζουν τις πεποιθήσεις των μαθητών, καθώς ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που βοηθά το μαθητή να καταλάβει πότε ένα επιχείρημα είναι έγκυρο. Τέλος, από την έρευνα των Martin, McCrone, Bower και Dindyal (2005) προκύπτει ότι υπάρχουν τεχνικές, όπως τα ανοιχτά ερωτήματα, οι οποίες οδηγούν τους μαθητές στη δημιουργία εικασιών, κάτι που αποτελεί πρόδρομο της κατασκευής αποδείξεων.

2.5. Συστημική προσέγγιση

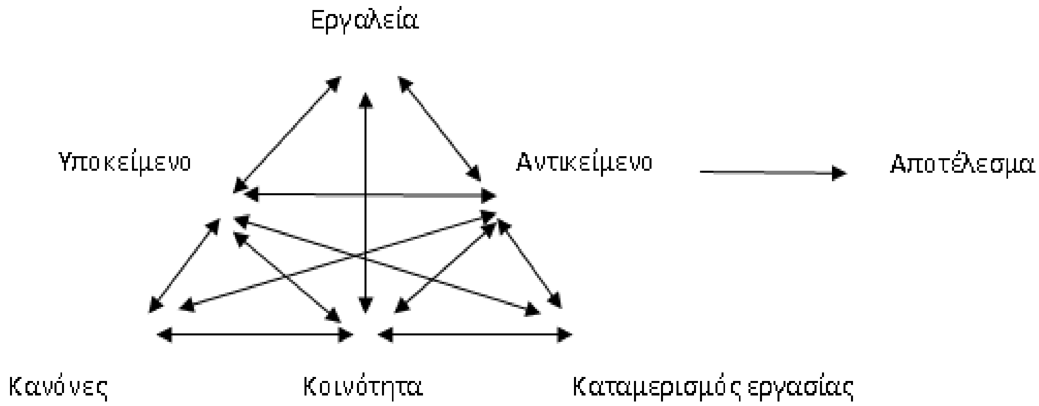
Σύμφωνα με τον Nikolantonakis (2015) η *συστημική προσέγγιση* είναι «ένα νέο επιστημονικό πρότυπο και μια εναλλακτική πρόταση στον τομέα των ψυχοκοινωνικών και εκπαιδευτικών πρακτικών» (σελ.47). Επιπλέον, η συστημική προσέγγιση είναι ένας χώρος που συνεχώς εξελίσσεται και εστιάζει στην πολυπλοκότητα των σχέσεων μεταξύ των ατόμων και των ιδεών και μας υπενθυμίζει ότι είμαστε μέρη ενός διασυνδεδεμένου συνόλου (Bateson, 1972).

Ως *σύστημα* ορίζεται μια ολότητα, τα μέρη της οποίας συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε, η ολότητα να διαφέρει ποιοτικά από τα μέρη της (Moutsios-Rentzos & Kalavasis, 2015). Επιπλέον, σύμφωνα με τον Bertalanffy (1973) το σύστημα είναι ένα σύνολο που αποτελείται από αυτόνομα δομικά στοιχεία, πρόσωπα ή αντικείμενα, τις ιδιότητές τους, τις μεταξύ τους σχέσεις, τις δομές και την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον, δηλαδή πρόκειται για ένα σύμπλεγμα στοιχείων σε αλληλεξάρτηση και δυναμική αλληλεπίδραση.

Το σύστημα καθορίζεται από το σκοπό και τα όριά του και μπορεί να απαρτίζεται από στοιχεία (τα μέρη του) ή υποσυστήματα, ενώ οι δυναμικές συνδέσεις μεταξύ των μερών του καθορίζουν τις ιδιότητές του (Moutsios-Rentzos & Kalavasis, 2015). Μια συστημική δραστηριότητα είναι μια δυναμική δομή, καθώς όλα τα μέρη του συστήματος αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, και έτσι το σύστημα είναι συνεχώς ρυθμιστικό, προσαρμοζόμενο και μεταβαλλόμενο (Chassapis, 2015).

Επιπλέον, τα συστήματα διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το πόσο *ανοιχτά* είναι, δηλαδή σε ποιο επίπεδο αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον τους και άλλα συστήματα, ως προς την *πολυπλοκότητα*, δηλαδή πόσα μέρη και διασυνδέσεις έχουν, και ως προς τη *δυναμική*, δηλαδή ως προς την ένταση και την ταχύτητα εισόδου και εξόδου στο σύστημα (Moutsios-Rentzos & Kalavasis, 2015).

«Σύμφωνα με τον Engeström (1987) το σύστημα της ανθρώπινης δραστηριότητας συνδυάζει ένα σύνολο πρωταρχικών συστατικών και τις αλληλεπιδράσεις τους» (στο Chassapis, 2015).



Σχήμα 4. Μια ελαφρώς προσαρμοσμένη εκδοχή της δομής μιας συστημικής δραστηριότητας (Engeström, 1987, σελ.78).

Σύμφωνα με τον Chassapis (2015) στη μαθηματική εκπαίδευση, το *υποκείμενο* αναφέρεται σε ένα μαθητή ή σύνολο μαθητών, σε εκπαιδευτικούς, σε συμβούλους, στα άτομα που διαμορφώνουν το αναλυτικό πρόγραμμα και στους γονείς. Το *αντικείμενο* αναφέρεται στη μαθηματική γνώση, τις μαθηματικές πρακτικές, τους τρόπου σκέψης κλπ, ενώ, τα *εργαλεία* είναι τόσο υλικά (π.χ. αριθμομηχανή) όσο και συμβολικά (π.χ. γλώσσα, διαγράμματα). Η *κοινότητα* συνήθως είναι οι μαθητές με τον εκπαιδευτικό, ενώ οι *κανόνες* είναι τόσο ρητοί (π.χ. οι κανόνες που προκύπτουν από το σχολικό κανονισμό), όσο και υπόρρητοι (π.χ. διδακτικό συμβόλαιο). Τέλος, ο καταμερισμός εργασίας έχει να κάνει με τις ευθύνες των μελών της κοινότητας όπως αυτές καθορίζονται από το ρόλο του κάθε μέλους, αλλά και από τη μέθοδο διδασκαλίας.

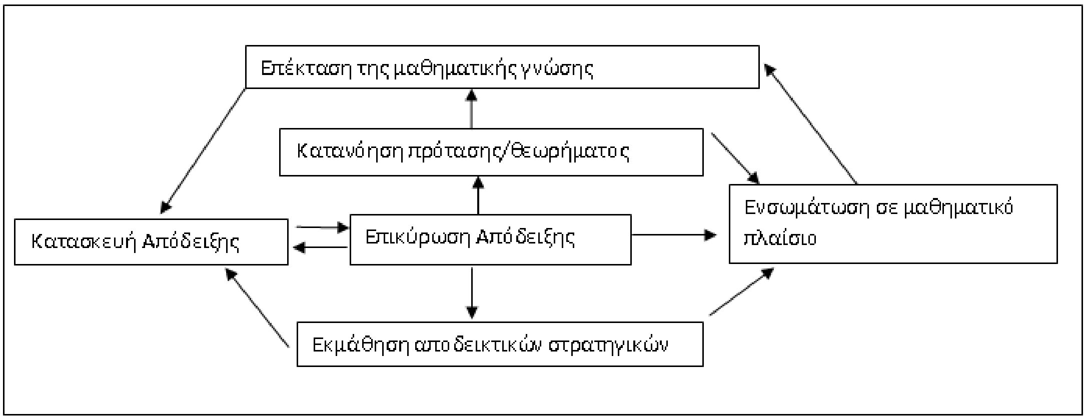
Παρόλο που πολλές φορές οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών δεν αναφέρονται ξεκάθαρα στη συστημική προσέγγιση, έχουν μελετήσει την πολύπλοκη αλληλεπίδραση μεταξύ της σχολικής μονάδας και της οικογένειας, του αναλυτικού προγράμματος, του κοινωνικοπολιτισμικού περιβάλλοντος, των πεποιθήσεων και των στερεοτύπων μαθητών και εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά (Moutsios-Rentzos & Kalavasis, 2015).

Στην παρούσα μελέτη υιοθετώντας μια συστημική προσέγγιση, στην οποία, θεωρούμε ως σύστημα τους μαθητές, τους εκπαιδευτικούς και το διευρυμένο θεσμικό πλαίσιο που αλληλεπιδρά με τη σχολική μονάδα, όπως αυτό εκφράζεται από το σχολικό εγχειρίδιο, θα διερευνήσουμε τις σχέσεις και τις αλληλεπιδράσεις των πεποιθήσεων των μαθητών για την απόδειξη, με τις πεποιθήσεις και τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών και τις όψεις της απόδειξης που παρουσιάζονται στο σχολικό εγχειρίδιο.

2.6. Αξιολόγηση των αποδείξεων από τους μαθητές

Είναι γεγονός ότι για οποιονδήποτε εμπλέκεται με τα μαθηματικά, μια σημαντική δραστηριότητα είναι να διαβάζει αποδείξεις με στόχο να καθορίσει αν αυτές είναι έγκυρες ή όχι (Inglis & Alcock, 2012). Οι Selden και Selden (2003) χαρακτήρισαν αυτήν τη δραστηριότητα ως επικύρωση της απόδειξης, η οποία είναι μια περίπλοκη διαδικασία, που εμπεριέχει αξιολόγηση δηλώσεων, να θέτεις και να απαντάς ερωτήσεις, την κατασκευή υπο-αποδείξεων και την ανάκληση ορισμών και θεωρημάτων.

Επεκτείνοντας τον ορισμό των Selden και Selden, η Pfeiffer (2009) αναφέρει ότι η διαδικασία της επικύρωσης δε γίνεται με μόνο στόχο να εξεταστεί αν το επιχείρημα είναι έγκυρο, καθώς αύτη η διαδικασία παρέχει κατανόηση για την αλήθεια μιας πρότασης, για το περιεχόμενο και τη θέση της αποδεδειγμένης πρότασης σε ένα ευρύτερο πλαίσιο.



Σχήμα 5. Προσαρμογή του σχήματος της επικύρωσης των αποδείξεων στη διαδικασία της μάθησης για τη μαθηματική απόδειξη (Pfeiffer, 2009, σελ.18).

Η αξιολόγηση των αποδείξεων είναι σαφώς πολύ σημαντική για τον εκπαιδευτικό, ο οποίος θα αξιολογήσει τις αποδείξεις που παράγουν οι μαθητές, αλλά εξίσου σημαντική είναι και για τους μαθητές. «Σύμφωνα με το NCTM (2000) οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται ώστε να αναζητούν να διατυπώνουν και να κρίνουν επιχειρήματα ώστε οι σχολικές τάξεις να γίνουν ερευνητικές κοινότητες» (στο Inglis & Alcock, 2012, σελ.360). Σύμφωνη με την παραπάνω άποψη φαίνεται και η Pfeiffer (2009), η οποία υποστηρίζει ότι η ανάπτυξη δεξιοτήτων επικύρωσης βελτιώνουν την πρακτική της ίδιας της επικύρωσης, την ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν αποδείξεις, την κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου, τη γνώση των αποδεικτικών στρατηγικών και των συνδέσεων μεταξύ των διαφορετικών περιοχών των μαθηματικών.

Επιπλέον, σύμφωνα με τους Alcock και Weber (2005) αν ένας μαθητής δε μπορεί να προσδιορίσει με ακρίβεια αν ένα επιχείρημα συνιστά την απόδειξη ενός θεωρήματος, τότε δε μπορεί να εξηγήσει γιατί το θεώρημα είναι σωστό. Σύμφωνα με τους Alcock και Weber (2005), οι μαθητές περνούν μεγάλο μέρος του χρόνου τους στο να παρακολουθούν τον εκπαιδευτικό να παρουσιάζει θεωρήματα και αποδείξεις, κάτι που σύμφωνα με τους Selden και Selden έπεται ότι «αν οι μαθητές δε μπορούν να επικυρώσουν αποδείξεις, τότε είναι απίθανο να πειστούν ή να κατανοήσουν οτιδήποτε από τους λόγους των μετέπειτα μαθηματικών μαθημάτων τους» (στο Alcock & Weber, 2005, σελ.3).

Επιπροσθέτως, φαίνεται η κρίση των μαθητών σχετικά με το αν μια απόδειξη ή ένα επιχείρημα είναι έγκυρα να επηρεάζεται από την εξωτερική μορφή της απόδειξης και του επιχειρήματος αντίστοιχα. Όπως αναφέρουν οι Inglis και Alcock (2012) συγκρίνοντας μαθηματικούς με μαθητές ως προς τη συμπεριφορά τους κατά την αξιολόγηση μιας απόδειξης, οι μαθητές ξοδεύουν περισσότερο χρόνο στα «εξωτερικά χαρακτηριστικά» των επιχειρημάτων καθώς όπως οι ίδιοι υποστηρίζουν αυτά δεν ακολουθούν τη λογική δομή. Είναι λοιπόν φανερό ότι ο τρόπος που παρουσιάζονται οι αποδείξεις στους μαθητές από τους εκπαιδευτικούς και τα σχολικά εγχειρίδια, επηρεάζει τις πεποιθήσεις τους για τα κριτήρια που πρέπει να πληροί μια απόδειξη ώστε να είναι έγκυρη.

Στο ίδιο πλαίσιο οι Harel και Showder (1998) αναφέρουν ότι οι μαθητές κατέχουν εξωτερικά αποδεικτικά σχήματα και κρίνουν αν ένα επιχείρημα είναι απόδειξη ανάλογα με το αν το επιχείρημα είναι διατυπωμένο σε συγκεκριμένη μορφή, αν χρησιμοποιεί μαθηματικά σύμβολα και αν προέρχεται από μια αξιόλογη πηγή, για παράδειγμα τον εκπαιδευτικό. Επιπλέον, σύμφωνα με την Pfeiffer (2009) περισσότεροι από τους μισούς μαθητές θεωρούν σωστή μια απόδειξη με μοναδικό κριτήριο το αν αυτή περιέχει αλγεβρικές εξισώσεις και μαθηματική σημειογραφία, ενώ μια οπτική προσέγγιση για την απόδειξη μιας δήλωσης, για παράδειγμα διάγραμμα, δεν είναι αποδεκτή από τους μαθητές.

Πολλοί μαθητές έχουν την πεποίθηση ότι τα εμπειρικά επιχειρήματα είναι αποδείξεις, κάτι που σαφώς επηρεάζει και την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος. Αυτή η παρανόηση υπάρχει τόσο στους μαθητές όσο και σε ορισμένους εκπαιδευτικούς. Σύμφωνα με την έρευνα των Martin και Harel (1989), στην οποία 101 υποψήφιοι δάσκαλοι Δημοτικού αξιολόγησαν εμπειρικά επιχειρήματα, αποδείξεις και άκυρα γενικά επιχειρήματα, περισσότεροι από τους μισούς δέχτηκαν ένα εμπειρικό επιχείρημα ως απόδειξη. «Συναφή αποτελέσματα είχε και η έρευνα του Goetting (1995), η οποία είχε ως στόχο τη διερεύνηση της κατανόησης της απόδειξης 40 φοιτητών, 11 εκ των οποίων ήταν υποψήφιοι δάσκαλοι Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, εκ των οποίων το 80% δέχτηκαν ως αποδείξεις εμπειρικά επιχειρήματα» (στο Stylianides & Stylianides, 2009).

Στο ίδιο πλαίσιο οι Healy και Hoyles (2000) αναφέρουν ότι τα παραδείγματα παρέχουν μια άμεση είσοδο στην εικασία και βοηθούν τους μαθητές να πείσουν τον εαυτό τους ή τους άλλους για την αλήθεια της εικασίας, ενώ σύμφωνα με την Pfeiffer (2009) η έλλειψη παραδειγμάτων σε ένα επιχείρημα δεν ικανοποιεί τους μαθητές, καθώς ακόμα και όταν δεχτούν ένα επιχείρημα ως έγκυρο, δεν έχουν πειστεί για αυτό μέχρι να το αποδείξουν ότι ισχύει σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Επιπλέον οι μαθητές επιλέγουν ένα επιχείρημα ως πιο πειστικό όταν αυτό περιέχει παραδείγματα, καθώς όπως οι ίδιοι υποστηρίζουν τα παραδείγματα ενισχύουν την κατανόηση του επιχειρήματος, παρέχουν περισσότερη πληροφορία και είναι σημαντικά σε ένα μαθηματικό επιχείρημα (Bieda & Lepak, 2014).

Τέλος, η αξιολόγηση των αποδείξεων από τους μαθητές φαίνεται να εξαρτάται από το ποιόν προορίζονται να πείσουν. Οι Mason, Burton και Stacey (1982) αναφέρουν:

> Το να πείσεις τον εαυτό σου είναι το πρώτο βήμα και είναι το πιο εύκολο. Το δεύτερο βήμα είναι να πείσεις ένα φίλο ή ένα συνεργάτη. Αυτό σε αναγκάζει να αρθρώσεις και να εξωτερικεύσεις αυτό που φαίνεται προφανές σε σένα, ώστε ο φίλος να είναι εφοδιασμένος με πειστικούς λόγους που κάνουν αληθές αυτό που ισχυρίζεσαι… Τα παραδείγματα φυσικά δεν είναι αρκετά. Μπορεί να είναι πειστικά για το φίλο σου αλλά πρέπει να δικαιολογείς κάθε ισχυρισμό του επιχειρήματος σου… Το τρίτο βήμα είναι να προσπαθήσεις να πείσεις κάποιον που αμφιβάλλει ή αμφισβητεί κάθε δήλωσή σου. (σελ. 87-88)

Συνοψίζοντας, η αξιολόγηση αποδείξεων και αποδεικτικών επιχειρημάτων είναι πολύ σημαντική στη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς παρέχει κατανόηση για την αλήθεια μιας πρότασης. Η κρίση των μαθητών σχετικά με το αν μια απόδειξη ή ένα επιχείρημα είναι έγκυρα φαίνεται να επηρεάζεται από την εξωτερική μορφή της απόδειξης και του επιχειρήματος, ενώ η μαθηματική σημειογραφία και η πηγή προέλευσης του επιχειρήματος λειτουργούν ως κριτήρια εγκυρότητας. Επιπλέον, πολλοί μαθητές αποκτούν την παρανόηση ότι τα εμπειρικά επιχειρήματα είναι αποδείξεις, κάτι που σαφώς επηρεάζει και την αξιολόγηση ενός επιχειρήματος. Τέλος, η αξιολόγηση των επιχειρημάτων από τους μαθητές φαίνεται να επηρεάζεται από το ποιόν πρόκειται να πείσουν με αυτά.

2.7. Η παρούσα μελέτη

Η απόδειξη είναι σημαντική τόσο στη διδασκαλία, όσο και στη μάθηση των μαθηματικών, καθώς είναι αυτή που προάγει την κατανόηση των μαθηματικών, αλλά αποτελεί και ένα εκπαιδευτικό εργαλείο για την αξιολόγηση της αλήθειας και της εγκυρότητας μαθηματικών ισχυρισμών και επιχειρημάτων. Προτού μελετηθεί ο ρόλος της απόδειξης σύμφωνα με την Hanna (2000), θα πρέπει να διερευνήσουμε τις λειτουργίες που αυτή επιτελεί.

Οι πεποιθήσεις των μαθητών, πολλές φορές επηρεάζουν τον τρόπο που αυτοί παράγουν αποδείξεις αλλά και τον τρόπο που αξιολογούν αποδείξεις και επιχειρήματα με στόχο να αποφασίσουν αν αυτά είναι έγκυρα. Στη βιβλιογραφία, ο όρος «πεποιθήσεις» δεν έχει μια καθολική σημασία με αποτέλεσμα οι ερευνητές να τον χρησιμοποιούν εννοώντας κάτι διαφορετικό ο καθένας, Άλλοι αποδίδουν με τον όρο τις γνωστικές και συναισθηματικές διαπιστώσεις ενός ατόμου (βλέπε, Goldin, 2002· Pehkonen & Hannula, 2004), άλλοι αποδίδουν στο όρο ψυχολογικές διαστάσεις (βλέπε Phillip, 2007), άλλοι συνδέουν τον όρο με στόχους και αποφάσεις (βλέπε Schoenfeld, 2005· Bandura, 1996), ενώ άλλοι κάνουν λόγω για συστάδες οι οποίες οργανώνουν ένα σύστημα (βλέπε Green, 1971· Pajares, 1992). Στην παρούσα μελέτη, στην οποία υιοθετούμε μια συστημική προσέγγιση, θεωρούμε ότι οι πεποιθήσεις οργανώνονται σε συστάδες και αποτελούν ένα σύστημα.

Όσον αφορά τις πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά υπάρχουν αρκετές κατηγοριοποιήσεις στη βιβλιογραφία. Σημαντική είναι αυτή που διακρίνει την παραδοσιακή, τη φορμαλιστική και κονστρουκτιβιστική διάσταση (Dione, 1984), πάνω στην οποία στηρίζεται και η κατηγοριοποίηση που αναφέρουν οι Törner και Grigutch, 1994 αλλάζοντας τα ονόματα των διαστάσεων σε διαδικαστική, εργαλειακή και συστημική. Ωστόσο λόγω της πολυπλοκότητας των ίδιων των μαθηματικών αλλά και των πεποιθήσεων για αυτά στην παρούσα μελέτη υιοθετούμε την άποψη του Liljedahl (2008), σύμφωνα με τον οποίο οι πεποιθήσεις για τα μαθηματικά είναι συνδυασμός των παραπάνω συνιστωσών.

Ο ορισμός της απόδειξης έχει αποτελέσει πεδίο διαμάχης πολλών ερευνητών και ακόμα δεν έχει δοθεί ένας ρητός και καθολικός ορισμός για αυτήν. Αυτό αποτελεί τροχοπέδη για την κατανόηση της απόδειξης από τους μαθητές, κάτι που γίνεται περισσότερο εμφανές όταν ζητείται από τους μαθητές να αξιολογήσουν μια απόδειξη ή ένα επιχείρημα ως προς την εγκυρότητα του. Τα κριτήρια στα οποία στηρίζονται οι μαθητές για μια τέτοια αξιολόγηση ποικίλλουν ανάλογα με τη βαθμίδα, τον εκπαιδευτικό και το σχολικό εγχειρίδιο. Βασικό κριτήριο για τους μαθητές φαίνεται να είναι η εξωτερική μορφή του επιχειρήματος, αλλά και ο βαθμός που αυτό θα έπαιρνε από τον εκπαιδευτικό.

Τα σχολικά εγχειρίδια φαίνεται να επιδρούν σημαντικά τόσο στην επιλογή των μαθηματικών έργων που γίνονται στη σχολική τάξη, όσο και στον τρόπο που επιλέγουν οι μαθητές να εκτελέσουν ένα μαθηματικό έργο. Στη βιβλιογραφία υπάρχει ποικιλία σε θεωρητικά πλαίσια που αφορούν την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων. Μέσα σε αυτά ανήκει και το αναλυτικό πλαίσιο του Stylianides (2009), το οποίο χρησιμοποιείται από πολλούς άλλους ερευνητές, σύμφωνα με το οποίο υπάρχουν δύο διαστάσεις που αναδεικνύουν τις πτυχές της διαδικασίας αιτιολόγηση-απόδειξη. Ωστόσο σύμφωνα με το Bergwall (2017) τέτοια αναλυτικά πλαίσια, θα πρέπει να λαμβάνουν υπ’όψιν τις ιδιότητες της απόδειξης και της δικαιολόγησης, όπως οι διαφορετικές μορφές αναπαράστασης. Στην παρούσα μελέτη θα αναλυθεί με τη βοήθεια του πλαισίου του Stylianides (2009), το σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α Λυκείου με στόχο να διερευνηθεί ποιες λειτουργίες της απόδειξης προάγει.

Όσον αφορά τους εκπαιδευτικούς, φαίνεται να είναι αυτοί που μαζί με το σχολικό εγχειρίδιο οδηγούν τους μαθητές στη διαμόρφωση κριτηρίων για την εγκυρότητα επιχειρημάτων και αποδείξεων. Επιπλέον, είναι σαφές από τη βιβλιογραφία ότι υπάρχουν συγκεκριμένες εκπαιδευτικές τεχνικές-πρακτικές, οι οποίες οδηγούν τους μαθητές στη διαμόρφωση εικασιών και τελικά στην κατασκευή αποδείξεων.

Η αξιολόγηση επιχειρημάτων φαίνεται να είναι σημαντική στη μάθηση των μαθηματικών, καθώς είναι ένα εργαλείο με το οποίο αφενός οι μαθητές πείθονται για την αλήθεια του επιχειρήματος, αλλά αφετέρου κατανοούν το μαθηματικό περιεχόμενο και αναπτύσσουν αποδεικτικές στρατηγικές. Η επικύρωση των επιχειρημάτων φαίνεται να επηρεάζεται από την εξωτερική μορφή του επιχειρήματος, την πηγή προέλευσής του, τη μαθηματική σημειογραφία που χρησιμοποιείται σε αυτό, τη χρήση παραδειγμάτων σε αυτό, αλλά και από το ποιον προορίζεται να πείσει.

Στην παρούσα μελέτη, υιοθετώντας μια συστημική προσέγγιση, θα διερευνήσουμε τα εξής:

Μαθητές

1. Πως αξιολογούν/κρίνουν το βαθμό πειστικότητας διαφορετικών αποδεικτικών επιχειρημάτων οι μαθητές.
2. Ποιες οι ευρύτερες πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη.

Εκπαιδευτικοί

3. Ποιες είναι οι απόψεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη.
4. Ποιες είναι οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών.
5. Ποιες είναι οι απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τις απόψεις των μαθητών για την απόδειξη.

Σχολικό εγχειρίδιο

6. Ποιες οι όψεις της απόδειξης στο βιβλίο του μαθητή και στο βιβλίο των λύσεων της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου.

Σύστημα (μελέτη δύο περιπτώσεων)

7. Ποιες οι σχέσεις και οι αλληλεπιδράσεις των προαναφερθεισών πραγματικοτήτων σε μια τάξη σε μια σχολική μονάδα.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.2. Μέθοδοι και διαδικασίες

3.2.1. Δείγμα- διαδικασίες

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το Σεπτέμβριο του 2017. Μετά την κατασκευή του ερωτηματολογίου διεξήχθη πιλοτική έρευνα προκειμένου να γίνει δοκιμαστικός έλεγχος στο ερωτηματολόγιο. Στην πιλοτική έρευνα συμμετείχαν 3 μαθητές της Β΄ Λυκείου. Η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου έγινε στο χώρο των μαθητών παρουσία της ερευνήτριας. Εξηγήσαμε στους μαθητές ότι πρόκειται για το αρχικό στάδιο μιας έρευνας η οποία μελετά τις απόψεις τους σχετικά με την απόδειξη, αλλά και το πως οι ίδιοι αξιολογούν/κρίνουν το βαθμό πειστικότητας διαφορετικών αποδεικτικών επιχειρημάτων. Κατά τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου έγιναν κάποιες σημαντικές ερωτήσεις- παρατηρήσεις και στη συνέχεια τους ρωτήσαμε για τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου, ώστε να διαπιστώσουμε αν ήταν όλες κατανοητές, αλλά και αν ρωτούσαν τελικά αυτό που είχαμε σχεδιάσει να διερευνούν. Ο μέσος χρόνος συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου ήταν περίπου 40 λεπτά. Από την πιλοτική έρευνα και τις ερωτήσεις των μαθητών προέκυψε η ανάγκη κάποιων αλλαγών στη διατύπωση ορισμένων ερωτημάτων.

Μετά από μια εβδομάδα διεξήχθη η έρευνα σε δύο δημόσια Λύκεια της Αθήνας με τη συμμετοχή 188 μαθητών και μαθητριών της Β΄ Λυκείου. Τα ερωτηματολόγια συμπληρώθηκαν από τους συμμετέχοντες στις αίθουσες διδασκαλίας τους παρουσία του εκπαιδευτικού τους. Οι εκπαιδευτικοί που έδωσαν τα ερωτηματολόγια διευκρίνισαν στους μαθητές ότι τα ερωτηματολόγια είναι ανώνυμα, ότι δεν θα αξιολογηθούν οι ίδιοι από αυτά και τόνισαν ότι η συμπλήρωσή τους δεν ήταν υποχρεωτική. Από τους μαθητές του ενός σχολείου σε ένα τμήμα 3 αρνήθηκαν να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο και έτσι συλλέξαμε συνολικά 185 ερωτηματολόγια.

Μετά από δύο εβδομάδες από τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων διεξήχθησαν συνεντεύξεις σε δύο εκπαιδευτικούς που δίδασκαν Άλγεβρα στην Α΄ Λυκείου. Και οι δύο εκπαιδευτικοί ήταν γυναίκες. Η Σόνια η οποία δίδασκε πέρυσι

Άλγεβρα στην Α Λυκείου σε 1 από τα τμήματα των μαθητών/τριών του δείγματος, διδάσκει μέχρι σήμερα συνολικά 33 χρόνια. Από αυτά τα 26 διδάσκει σε σχολείο και 18 σε Λύκειο, όπου κάθε χρόνο διδάσκει Άλγεβρα στην Α΄ Λυκείου. Η Αμαλία η οποία δίδασκε πέρυσι Άλγεβρα στην Α΄ Λυκείου σε 3 από τα τμήματα των μαθητών/τριών του δείγματος, διδάσκει μέχρι σήμερα συνολικά 25 χρόνια. Από αυτά τα 15 διδάσκει σε σχολείο και μάλιστα σε Λύκειο, όπου κάθε χρόνο διδάσκει Άλγεβρα στην Α΄ Λυκείου. Έτσι προέκυψαν τα δύο συστήματα που μελετήσαμε. Το πρώτο σύστημα ονομάστηκε *Σόνια* και αποτελείται από την εκπαιδευτικό Σόνια και τους 18 μαθητές του τμήματος στο οποίο δίδασκε πέρυσι Άλγεβρα. Το δεύτερο σύστημα ονομάστηκε *Αμαλία* και αποτελείται από την εκπαιδευτικό Αμαλία και τους 63 μαθητές των 3 τμημάτων στα οποία δίδασκε πέρυσι Άλγεβρα.

Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν στο χώρο του κάθε εκπαιδευτικού μετά από δική μας επίσκεψη. Πριν τη συνέντευξη είχαμε επικοινωνήσει μαζί τους ώστε να εξασφαλίσουμε τις κατάλληλες συνθήκες για τη διεξαγωγή της συνέντευξης (χρόνο, χώρο, μη παρουσία άλλων φυσικών προσώπων στο χώρο διεξαγωγής). Αφού προσήλθαμε στο χώρο τους και έγιναν οι απαραίτητες συστάσεις τους παρακαλέσαμε να απενεργοποιήσουν τα κινητά τηλέφωνά τους ώστε να μην υπάρξουν παρεμβολές κατά τη μαγνητοφώνηση. Στη συνέχεια κάναμε ένα δοκιμαστικό έλεγχο για τη μαγνητοφώνηση και αφού βρήκαμε την κατάλληλη θέση για το μαγνητόφωνο και τους εξηγήσαμε ότι η συνέντευξη είναι ανώνυμη ξεκίνησε η συνέντευξη. Εξηγήσαμε στους εκπαιδευτικούς ότι πρόκειται για μια έρευνα για τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη, τις διδακτικές πρακτικές που ακολουθούν οι ίδιοι για την απόδειξη και την αλληλεπίδραση αυτών. Δεν προέκυψαν προβλήματα, απρόοπτα κατά τη συνέντευξη, ενώ οι εκπαιδευτικοί φάνηκαν πρόθυμοι να απαντήσουν σε όλες τις ερωτήσεις και να δώσουν τις απαραίτητες εξηγήσεις-διευκρινήσεις.

3.2.2. Ερευνητικά εργαλεία

Το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές περιείχε ερωτήσεις κλειστού τύπου και αποτελούνταν από δύο μέρη. Το ερωτηματολόγιο βασίστηκε σε ερευνητικά εργαλεία που έχουν χρησιμοποιηθεί σε άλλες έρευνες και έχουν ελεγχθεί για την εγκυρότητά τους.

Πιο αναλυτικά, το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου βασίστηκε στο θεωρητικό πλαίσιο του Balacheff (1988) και των Stacey, Burton και Mason (1982), με στόχο να διερευνήσουμε πως αξιολογούν οι μαθητές αποδεικτικά επιχειρήματα. Πήραμε 4 προτάσεις, από τις οποίες η Πρόταση 1, η Πρόταση 2 και η Πρόταση 4 υπήρχαν στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, ενώ η Πρόταση 3 είναι γνωστή πρόταση της θεωρίας αριθμών που δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο (βλέπε Παράρτημα Α). Η Πρόταση 1 υπάρχει στο βιβλίο αλλά χωρίς απόδειξη, η Πρόταση 2 υπάρχει ως άσκηση προς λύση και η Πρόταση 4 υπάρχει ως θεώρημα μαζί με την απόδειξή της.

Σε καθεμία από αυτές τις προτάσεις δώσαμε από πέντε αποδεικτικά επιχειρήματα στα οποία χρησιμοποιήσαμε τους τύπους αποδεικτικών επιχειρημάτων που αναφέρει ο Balacheff (1988), αφελή εμπειρισμό (εμπειρικό επιχείρημα), το κρίσιμο πείραμα, το γενικό παράδειγμα και το πείραμα σκέψης. Για το πείραμα σκέψης δώσαμε δύο αποδείξεις, μια βασική ευθεία απόδειξη και μια απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο.

Μέσα από αυτό το μέρος του ερωτηματολογίου θέλαμε να διερευνήσουμε τα εξής για τους μαθητές: α) πόσο πειστικό θεωρούν ότι είναι κάθε αποδεικτικό επιχείρημα για τον εαυτό τους, β) πόσο πειστικό θεωρούν ότι είναι κάθε αποδεικτικό επιχείρημα για το συμμαθητή τους και γ) τι βαθμό θεωρούν ότι θα έβαζε ο καθηγητής τους σε κάθε αποδεικτικό επιχείρημα. Η μέτρηση των δύο πρώτων ερωτημάτων έγινε με κλίμακα Likert 7 σημείων, ενώ η μέτρηση του τρίτου με κλίμακα από 0 έως 20.

Για το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου επιλέχθηκαν διάφορες δηλώσεις σχετικά με την απόδειξη, που η καθεμιά υποδήλωνε και διαφορετική λειτουργία της απόδειξης, ώστε να διερευνήσουμε τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη.

Σε αυτό το μέρος χρησιμοποιήθηκαν δηλώσεις από το ερωτηματολόγιο του Almeida (2000) που μελετά τις απόψεις φοιτητών για την απόδειξη. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκαν δηλώσεις από απαντήσεις που έδωσαν εκπαιδευτικοί για την απόδειξη στην έρευνα των Hemmi, Lepik και Viholainen (2010). Ακόμα χρησιμοποιήθηκαν δηλώσεις από απαντήσεις εκπαιδευτικών για την απόδειξη στην έρευνα των Kögce και Yıldız (2011).

Όλες οι δηλώσεις μεταφράστηκαν από εμάς καθώς δε βρέθηκε αντίστοιχη προγενέστερη μετάφραση. Επίσης έγινε κατάλληλη προσαρμογή στη διατύπωση ορισμένων δηλώσεων ώστε να είναι κατανοητές από τους μαθητές. Το δεύτερο μέρος περιείχε 29 ερωτήσεις που μετρήθηκαν με κλίμακα Likert 5 σημείων (βλέπε Παράρτημα Α).

3.2.3. Μέθοδοι ανάλυσης ερωτηματολογίων

Για τη στατιστική επεξεργασία των δεδομένων, χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό πακέτο Statistical Package for Social Sciences 24 (SPSS 24). Διενεργήθηκε περιγραφική στατιστική με δείκτες κεντρικής τάσης. Σχετικά με την δομή του ερωτηματολογίου διενεργήθηκε παραγοντική ανάλυση με ορθογώνια εξαγωγή παραγόντων βάσει του κριτηρίου του γραφήματος Scree (Principal Axis Factoring. Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization. Screeplot criterion). Τα σκορ των συμμετεχόντων/συμμετεχουσών για τον κάθε παράγοντα για το κάθε σύστημα υπολογίστηκαν βάσει παλινδρόμησης.

3.2.4. Μέθοδοι ανάλυσης συνεντεύξεων

Όσον αφορά τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών, τα ερωτήματα που θέσαμε είχαν χωριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να απαντώνται οι άξονες που σχετίζονται με τις ευρύτερες απόψεις τους για την απόδειξη. Πιο αναλυτικά, η πρώτη ομάδα ερωτήσεων είχε να κάνει με τις απόψεις τους ως μαθηματικοί για την απόδειξη στην επιστήμη των μαθηματικών και ιδιαίτερα για τις λειτουργίες αυτής. Για παράδειγμα ρωτήσαμε τους εκπαιδευτικούς:

> Ερευνήτρια: Ως μαθηματικός ποια η άποψή σας για την απόδειξη στην επιστήμη των μαθηματικών; (Ερευνήτρια, γραμμές 10-11).

Στην ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδευτικών σε αυτήν την ομάδα ερωτήσεων, αναζητούσαμε είτε τις λειτουργίες με το όνομα που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία, είτε λέξεις ή φράσεις που παραπέμπουν σε αυτές. Για παράδειγμα, τα αξιώματα που αναφέρθηκαν από τη μια εκπαιδευτικό καθώς και η θεμελίωση της γνώσης που αναφέρθηκε από την άλλη, μας παρέπεμψαν στη λειτουργία της συστηματοποίησης.

Η δεύτερη ομάδα ερωτήσεων, είχε να κάνει με τις απόψεις τους ως εκπαιδευτικοί, για την απόδειξη στο σχολείο και συγκεκριμένα στην Άλγεβρα της Α΄

Λυκείου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτού του τύπου ερωτήσεων είναι το παρακάτω:

> Ερευνήτρια: […] Ως εκπαιδευτικός ποια η άποψή σας για την απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά και ειδικά στην Άλγεβρα; (Ερευνήτρια, γραμμές 64-65).

Και σε αυτήν την ομάδα, αναζητούσαμε τις λειτουργίες είτε αυτές είχαν ειπωθεί ρητά είτε άρρητα. Για παράδειγμα, κατά την ανάλυση των απαντήσεων των εκπαιδευτικών σε αυτήν την ομάδα ερωτημάτων, είδαμε συχνά φράσεις όπως «σε βοηθάει να σκέφτεσαι» ή «αυξάνει την κριτική ικανότητα», οι οποίες παρέπεμπαν στη λειτουργία της νοητικής πρόκλησης. Επιπλέον, αναφέρθηκαν και φράσεις όπως « θαυμάζεις τη σκέψη του άλλου», εννοώντας αυτόν που σκέφτηκε και κατασκεύασε μια απόδειξη, κάτι που σαφώς εννοεί τη λειτουργία της επικοινωνίας, με την έννοια της μετάδοσης της γνώσης.

Η τρίτη ομάδα ερωτημάτων, είχε να κάνει με τις απόψεις τους για το υπάρχον θεσμικό πλαίσιο για την απόδειξη στο μάθημα της Άλγεβρας στην Α΄ Λυκείου. Πιο αναλυτικά, εξετάσαμε θέματα που αφορούσαν το χρόνο που αφιερώνεται στην απόδειξη, στις οδηγίες διδασκαλίας του ΑΠ για την απόδειξη, στο σχολικό εγχειρίδιο και στον τρόπο που παρουσιάζει την απόδειξη καθώς και στις αλλαγές που θα πρότειναν οι εκπαιδευτικοί σε όλα τα παραπάνω. Για παράδειγμα ρωτήσαμε τους εκπαιδευτικούς:

> Ερευνήτρια: Από την εμπειρία σας λοιπόν θα αλλάζατε κάτι στον τρόπο που το σχολικό εγχειρίδιο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου παρουσιάζει τις αποδείξεις; (Ερευνήτρια, γραμμές 169-170).

Επιπλέον, εξετάσαμε αν θεωρούν όλες τις ασκήσεις του βιβλίου αποδεικτικές, καθώς και τι είναι αυτό που διακρίνει τις αποδεικτικές από τις μη αποδεικτικές ασκήσεις. Για να το μελετήσουμε αυτό δώσαμε στις εκπαιδευτικούς κάποιες ασκήσεις (βλέπε Παράρτημα Γ) και τους ζητήσαμε να μας πουν ποιες από αυτές θεωρούν οι ίδιες ότι είναι αποδεικτικές.

Η επόμενη ομάδα ερωτήσεων, είχε σαν αντικείμενο μελέτης τις διδακτικές-αποδεικτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών κατά τη διδασκαλία της απόδειξης στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου. Σε αυτήν την ενότητα, εστιάσαμε στον τρόπο που η κάθε εκπαιδευτικός εισάγει την απόδειξη στην τάξη, στον τρόπο διδασκαλίας της απόδειξης (αν ακολουθεί πιστά το σχολικό βιβλίο) και στις μεθόδους απόδειξης που διδάσκει και χρησιμοποιεί στην τάξη. Για παράδειγμα ρωτήσαμε:

> Ερευνήτρια: Εσείς με ποιον τρόπο εισάγετε στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου την έννοια της απόδειξης; (Ερευνήτρια, γραμμές 264-265).

Στη συνέχεια, μελετήσαμε αν υπάρχουν θεωρήματα ή ασκήσεις στα οποία οι εκπαιδευτικοί διδάσκουν περισσότερες από μια αποδείξεις, ενώ εξετάσαμε και τα οφέλη των περισσότερων λύσεων σύμφωνα με τις εκπαιδευτικούς. Σε αυτήν τη φάση τους δώσαμε τις λύσεις κάποιων ασκήσεων από το βιβλίο λύσεων της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου (βλέπε Παράρτημα Δ), που προτείνεται να λυθούν με περισσότερους του ενός τρόπους, με στόχο να μελετήσουμε αν και οι ίδιες διδάσκουν αυτές τις ασκήσεις με δύο ή τρεις τρόπους.

Επιπλέον, μελετήσαμε τις απόψεις τους για την κατασκευή αποδείξεων στην τάξη και το τι αυτή μπορεί να προσφέρει αλλά και πόσο εφικτή είναι στη σημερινή σχολική πραγματικότητα. Για παράδειγμα:

> Ερευνήτρια: Μάλιστα. Κατά τη γνώμη σας για τους μαθητές είναι καλύτερο να διαβάζουν έτοιμες τις αποδείξεις ή να κατασκευάζουν αποδείξεις οι ίδιοι; (Ερευνήτρια, γραμμές 490-491).

Η τελευταία ομάδα ερωτήσεων, είχε να κάνει με τις απόψεις τους σχετικά με τις απόψεις των μαθητών τους και συγκεκριμένα με τις απαντήσεις που πιστεύουν ότι έδωσαν οι μαθητές τους στο ερωτηματολόγιο που συμπλήρωσαν. Πιο αναλυτικά, τους ζητήσαμε να μας πουν ποιο επιχείρημα θεωρούσαν ως πιο πειστικό για τους μαθητές τους, καθώς και να βαθμολογήσουν τα επιχειρήματα, ώστε να εξετάσουμε αν θα υπήρχε κάποια συσχέτιση των βαθμών τους και των βαθμών που οι μαθητές πιστεύουν ότι θα τους έβαζαν οι εκπαιδευτικοί. Για παράδειγμα:

> Ερευνήτρια: Στην πρόταση 2 ποιο επιχείρημα πιστεύετε ότι πείθει περισσότερο τους μαθητές και ποιο λιγότερο; (Ερευνήτρια, γραμμές 539-540).

Τέλος, υπήρχαν και ερωτήσεις για τον προφίλ των εκπαιδευτικών και συγκεκριμένα για τη διδακτική τους εμπειρία γενικά, αλλά και ειδικά για τη διδακτική τους εμπειρία στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου, όπως η παρακάτω:

Ερευνήτρια: […] Πόσα χρόνια διδάσκετε Άλγεβρα στην Α΄ Λυκείου;

(Ερευνήτρια, γραμμή 61).

3.2.5. Μέθοδοι ανάλυσης του σχολικού εγχειριδίου

Για την ανάλυση του σχολικού εγχειριδίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου χρησιμοποιήθηκε η κατηγοριοποίηση των Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2014) , η οποία αποτελεί μια τροποποιημένη εκδοχή των Hanna και de Bruyn (1999). Μελετήθηκαν όλες οι αποδείξεις που αναφέρουν οι παραπάνω ότι υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, καθώς επίσης και οι ασκήσεις που οι ίδιοι αναφέρουν ότι είναι αποδεικτικές. Ο τρόπος ανάλυσης ήταν ο εξής: αρχικά διαβάστηκαν οι εκφωνήσεις των αποδείξεων και των ασκήσεων, στη συνέχεια διαβάστηκαν οι αποδείξεις από το βιβλίο και οι λύσεις των ασκήσεων από το βιβλίο των λύσεων.

Στη συνέχεια με βάση την κατηγοριοποίηση των Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2014) ταξινομήσαμε τις αποδείξεις με βάση το είδος τους (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, απόδειξη με ανάλυση και αντιπαράδειγμα) και αναλύσαμε το περιεχόμενο της κάθε απόδειξης και της κάθε άσκησης σύμφωνα με τις λειτουργίες της απόδειξης που εμφανίζονται σε αυτές, καθώς και τις αποδεικτικές πρακτικές που καταδεικνύει η καθεμία από αυτές. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήσαμε ανάλυση περιεχομένου, η οποία θεωρήσαμε ότι ήταν η κατάλληλη για τη μελέτη μας, καθώς όπως αναφέρει και η Downe- Wamboldt (1992) « η ανάλυση περιεχομένου είναι μια μέθοδος έρευνας, η οποία παρέχει ένα συστημικό και αντικειμενικό τρόπο να οδηγηθούμε σε έγκυρα συμπεράσματα από λεκτικά, οπτικά ή γραπτά δεδομένα προκειμένου να περιγραφούν και να ποσοτικοποιηθούν συγκεκριμένα φαινόμενα» (σελ. 314). Επιπλέον, χαρακτηρίσαμε τις αποδείξεις ως προδρόμους απόδειξης ανάλογα με τον αν τις είχαν χαρακτηρίσει ως τέτοιους οι Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2014).

Πιο αναλυτικά, όσον αφορά τις λειτουργίες εστιάσαμε στις λειτουργίες της εξήγησης, της συστηματοποίησης και της επαλήθευσης-επιβεβαίωσης. Αυτή η επιλογή έγινε καθώς αυτές οι 3 λειτουργίες είναι ο κοινός τόπος της βιβλιογραφίας. Για να διαπιστώσουμε ποια ή ποιες από τις λειτουργίες προάγουν οι αποδείξεις και οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου κάναμε ανάλυση περιεχομένου. Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας με τις λέξεις-φράσεις που ψάχναμε σε κάθε απόδειξη- άσκηση, καθώς και τα χαρακτηριστικά που αναζητούσαμε ώστε να καταλήξουμε ποια λειτουργία φαινόταν σε καθεμία. Κάποιες από αυτές τις λέξεις-φράσεις και κάποια από τα χαρακτηριστικά είχαν προαποφασιστεί με βάση τους ορισμούς των λειτουργιών, ενώ κάποια άλλα προέκυψαν κατά την ανάλυση του βιβλίου, καθώς είτε είχαν μεγάλο όγκο παρουσίας στις αποδείξεις, είτε αποκάλυπταν μια καινούργια όψη των λειτουργιών, που δεν είχαμε προβλέψει.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στη λειτουργία της συστηματοποίησης συμπεριλάβαμε τόσο την *τοπική συστηματοποίηση* όσο και την *ολική συστηματοποίηση*. Η τοπική συστηματοποίηση έχει να κάνει με το αν υπάρχει ή όχι σύνδεση-συνοχή των βημάτων εντός της απόδειξης, ενώ η ολική συστηματοποίηση έχει να κάνει με το αν υπάρχει ή όχι σύνδεση μεταξύ των αποδείξεων. Για παράδειγμα όταν αναζητούσαμε αν στην απόδειξη καλούνταν κάποιο βήμα από τα παραπάνω εξετάζαμε αν υπήρχε τοπική συστηματοποίηση, ενώ όταν αναζητούσαμε αν η απόδειξη καλούσε κάποιο θεώρημα ή άλλη απόδειξη, εξετάζαμε αν υπήρχε ολική συστηματοποίηση.

Πίνακας 2. Πεδία αναζήτησης για κάθε λειτουργία.

Εξήγηση	Συστηματοποίηση	Επαλήθευση
πρόδρομος	καλεί προηγούμενη απόδειξη	πράγματι
παράδειγμα	καλεί κάποιο από τα παραπάνω βήματα	όντως
σχήμα	υπάρχει απόδειξη αμέσως μετά που να αναφέρει ρητά ότι στηρίζεται σε αυτήν	επομένως βρήκαμε ότι ισχύει
εφαρμογή ακριβώς μετά	σύμφωνα με άλλη απόδειξη	που ισχύει
γιατί	σύμφωνα με κάποιο θεώρημα	αποδείξαμε ότι
επειδή	σύμφωνα με κάποια ιδιότητα	
διότι	σύμφωνα με τα παραπάνω	
αφού	σύμφωνα με τον ορισμό	
δηλαδή	σύμφωνα με τη σχέση (…)	
για παράδειγμα	από τα παραπάνω προκύπτει	
αν θέσουμε	Επομένως	
που σημαίνει	Οπότε	
όπου	όπως είπαμε προηγουμένως	
	τότε έχουμε	

	σύμβολο συνεπαγωγής/ή σύμβολο ισοδυναμίας/αν και μόνο αν

Όσον αφορά τις αποδεικτικές πρακτικές, μελετήσαμε τρεις άξονες, τις αποδεικτικές μεθόδους, το αν υπήρχε εξήγηση στις αποδείξεις και τέλος το αναπαραστασιακό σύστημα της κάθε απόδειξης. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, για τις αποδεικτικές μεθόδους χρησιμοποιήσαμε την κατηγοριοποίηση των Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2014). Όσον αφορά την εξήγηση, εξετάσαμε αν υπήρχαν παραδείγματα πριν τις αποδείξεις ή εφαρμογές μετά από αυτές, κάτι που μας ενδιέφερε καθώς ρωτήσαμε και τους εκπαιδευτικούς αν οι ίδιο χρησιμοποιούν παραδείγματα κατά τη διδασκαλία αποδείξεων. Έτσι, θα μελετήσουμε αν υπάρχει σχέση και αλληλεπίδραση μεταξύ των αποδεικτικών πρακτικών που προάγει το σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, με τις διδακτικές-αποδεικτικές πρακτικές που τελικά χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί στη σχολική τάξη.

Επιπλέον, όσον αφορά την εξήγηση μελετήσαμε αν στο σχολικό βιβλίο δηλώνεται ρητά όταν κάτι αποδεικνύεται, με στόχο να μελετήσουμε αν προάγεται η αυτενέργεια του μαθητή. Αυτή η διάσταση σχετίζεται πάλι με τους εκπαιδευτικούς και τον τρόπο που οι ίδιοι εισάγουν τους μαθητές της Α΄ Λυκείου στην έννοια της απόδειξης και αν εξαρχής χρησιμοποιούν τη φράση «αποδείξτε ότι» ή «να δείξετε ότι» κλπ.

Τέλος, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω μελετήσαμε το αναπαραστασιακό σύστημα της κάθε απόδειξης. Πιο αναλυτικά, μελετήσαμε αν υπάρχουν αποδείξεις μόνο με μαθηματικά σύμβολα, δηλαδή χωρίς τη χρήση φυσικής γλώσσας, αλλά και το αντίστροφο. Επιπλέον, εξετάσαμε αν στις αποδείξεις γινόταν χρήση σχημάτων. Αυτή η διάσταση μελετήθηκε με στόχο τη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ της αξιολόγησης αποδεικτικών επιχειρημάτων από τους μαθητές και του σχολικού βιβλίου.

Πίνακας 3. Πεδία αναζήτησης για αποδεικτικές πρακτικές.

	Αποδεικτικές πρακτικές	
Αποδεικτικές μέθοδοι	Επεξήγηση	Αναπαραστασιακό σύστημα

Ευθεία απόδειξη	Παράδειγμα πριν την απόδειξη	Αποδείξεις μόνο με μαθηματικά σύμβολα
Απαγωγή σε άτοπο	Εφαρμογή μετά την απόδειξη	Αποδείξεις μόνο με φυσική γλώσσα
Απόδειξη με ανάλυση	Δηλώνεται ρητά ότι αποδεικνύεται	Σχήμα
Αντιπαράδειγμα		

3.2.6. Περιορισμοί της έρευνας

Η παρούσα μελέτη υπόκειται σε ορισμένους περιορισμούς, οι οποίοι κυρίως οφείλονται στην πολυπλοκότητα των υπό διερεύνηση ερωτημάτων. Πιο αναλυτικά, τα ερωτηματολόγια δόθηκαν στους μαθητές από τους καθηγητές τους στη σχολική τάξη, δηλαδή εντός του θεσμικού πλαισίου, στο οποίο οι μαθητές έχουν ίσως υιοθετήσει τα κριτήρια των εκπαιδευτικών τους. Αυτό ίσως είχε ως αποτέλεσμα οι μαθητές να θεώρησαν ότι πρόκειται για μια εξέταση και ότι θα βαθμολογηθούν για αυτήν, παρόλο που ειπώθηκε ρητά από τους εκπαιδευτικούς πως κάτι τέτοιο δε θα συμβεί. Έτσι, οι απαντήσεις που έδωσαν ίσως ήταν αυτές που ανέμεναν ότι θα λάβουν τον υψηλότερο βαθμό και όχι αυτές που οι ίδιοι πίστευαν.

Επιπλέον, όπως αναδείχθηκε και από την πιλοτική έρευνα, αν είχαμε τη δυνατότητα να πάρουμε εξατομικευμένες συνεντεύξεις από ένα μέρος των μαθητών του δείγματος, θα μπορούσαμε να εξάγουμε πιο ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με το λόγο της επιλογής των απαντήσεων από τους μαθητές και να δούμε τις σχέσεις αυτών των επιλογών με τις διδακτικές πρακτικές και το σχολικό βιβλίο.

Τέλος, οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών μελετήθηκαν μέσω των εξατομικευμένων συνεντεύξεων. Αυτό σημαίνει, ότι οι εκπαιδευτικοί παρουσίασαν τη δική τους οπτική σχετικά με τις διδακτικές πρακτικές που ακολουθούν και σχετικά με τις πεποιθήσεις τους για την απόδειξη. Θα είχε ενδιαφέρον, να είχαμε παρακολουθήσει κάποια μαθήματα των εκπαιδευτικών αυτών, ώστε να εξάγουμε μόνοι μας αυτά τα συμπεράσματα, απαλλαγμένοι από την υποκειμενικότητα των εμπλεκομένων.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1. Απόψεις των μαθητών για την απόδειξη

4.1.1. Πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη

Όσον αφορά τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη, η παραγοντική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε ανέδειξε μια δομή με 5 παράγοντες όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 4. Αποτελέσματα παραγοντικής ανάλυσης.

	Εγκυρότητα (Δομή και Αιτιολόγηση)	Μόνο για μερικούς	Κατανόηση	Βεβαιότητα για την αλήθεια	Εξήγηση
Μια απόδειξη στα μαθηματικά επιβεβαιώνει την αλήθεια ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.	0,265				
Αν αποδειχθεί ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά, μπορώ να είμαι βέβαιος/βέβαια ότι είναι αληθές.				0,458	
Παραδείγματα που εξηγούν το συμπέρασμα δε με βοηθούν πάντοτε να καταλάβω γιατί είναι αληθές.					-0,259
Η απόδειξη είναι απαραίτητη στα μαθηματικά.	0,347				
Δε βλέπω το νόημα του να κάνω αποδείξεις, αφού όλα τα συμπεράσματα στο μάθημα έχουν ήδη αποδειχθεί χωρίς αμφιβολία		0,626			
Μόνο οι καλοί μαθητές πρέπει να ασχολούνται με τις	-0,278	0,512			

αποδείξεις.					
Μου αρέσει να αποδεικνύω θεωρήματα και προτάσεις στα μαθηματικά.		-0,308	0,675		
Η απόδειξη ενός θεωρήματος με βοηθά να καταλάβω γιατί το θεώρημα είναι αληθές.		-0,242			0,534
Η ανάγνωση της απόδειξης μιας πρότασης σε ένα βιβλίο με βοηθά να καταλάβω γιατί η πρόταση είναι αληθής.					0,608
Διαφορετικές αποδείξεις ενός θεωρήματος με βοηθούν να το καταλάβω καλύτερα.			0,316		
Μια απόδειξη στα μαθηματικά βασίζεται σε άλλα μαθηματικά συμπεράσματα.	0,378				
Η απόδειξη δείχνει το πώς συνδέονται τα πάντα στα μαθηματικά.	0,422		0,340		
Η απόδειξη βοηθά να δούμε ότι προφανή συμπεράσματα δεν είναι αναγκαστικά/σίγουρα αληθή πριν αποδειχθούν.	0,378				
Οι αποδείξεις δείχνουν την ομορφιά της επιστήμης των μαθηματικών.			0,656		
Δε μπορούν να τα καταφέρουν όλοι οι μαθητές με την απόδειξη, παρά μόνο αυτοί που είναι καλοί στα μαθηματικά.		0,457			

Η απόδειξη είναι μια δομή αιτιολόγησης, όπου τα διάφορα βήματα βασίζονται σε λογική, σε γνωστά θεωρήματα/προτάσεις και γνωστούς ορισμούς.	0,447			
Δε μπορώ να πιστέψω τις προτάσεις χωρίς απόδειξη.			0,319	
Η απόδειξη είναι μια ακολουθία λογικών προτάσεων που συνεπάγονται η μία την άλλη, μια λογική παραγωγή συμπερασμάτων.	0,520			
Η απόδειξη ενισχύει τη λογική σκέψη.	0,560			
Η απόδειξη μερικές φορές αποκαλύπτει την ανακρίβεια μιας μαθηματικής πρότασης που φαίνεται σωστή .	0,610			
Η απόδειξη είναι φτιαγμένη για να πείσουμε κάποιον για τους ισχυρισμούς μας.	0,477			
Η απόδειξη μπορεί να μας οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις στα μαθηματικά.	0,305			
Νομίζω ότι δεν είναι χρήσιμο να κάνουμε αποδείξεις, διότι με μπερδεύει.		0,654		
Οι αποδείξεις δείχνουν από που προέρχονται οι μαθηματικές σχέσεις.			0,310	0,654
Οι αποδείξεις απαντούν στο γιατί ισχύουν θεωρήματα και προτάσεις χωρίς καμία αμφιβολία.				0,573
Οι αποδείξεις εξηγούν μια	0,289			0,302

μαθηματική έκφραση/σχέση με τη βοήθεια της γνώσης που έχει ήδη αποκτηθεί.				
Με τις αποδείξεις τα καταφέρνουν μόνο οι μαθητές που έχουν κλίση στα μαθηματικά.		0,708		
Αν ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά είναι προφανές, τότε δεν έχει νόημα να το αποδείξουμε.		0,495		
Η απόδειξη είναι η αιτιολόγηση που δείχνει την εγκυρότητα ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.	0,540			0,337

Principal Axis Factoring. Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.Screeplot criterion, 44,221 variance explained.

Πιο αναλυτικά, οι δηλώσεις που φόρτισαν στον πρώτο παράγοντα, όπως για παράδειγμα η δήλωση «Η απόδειξη είναι μια ακολουθία λογικών προτάσεων που συνεπάγονται η μία την άλλη, μια λογική παραγωγή συμπερασμάτων» είχαν ως κοινό χαρακτηριστικό ότι αναφέρονταν σε δύο εκφάνσεις της εγκυρότητας, δηλαδή τη δομή και την αιτιολόγηση και για αυτό ο πρώτος παράγοντας ονομάστηκε *Εγκυρότητα.*

Όσον αφορά το δεύτερο παράγοντα οι δηλώσεις οι οποίες φόρτισαν σε αυτόν, όπως η δήλωση «Με τις αποδείξεις τα καταφέρνουν μόνο οι μαθητές που έχουν κλίση στα μαθηματικά», είχαν να κάνουν με το ότι η απόδειξη είναι μόνο για κάποιους (τους καλούς μαθητές) για αυτό ονομάστηκε *Μόνο για μερικούς*.

Σχετικά με τις δηλώσεις που φόρτισαν στον τρίτο παράγοντα, όπως η δήλωση «Διαφορετικές αποδείξεις ενός θεωρήματος με βοηθούν να το καταλάβω καλύτερα», είχαν ως κοινό χαρακτηριστικό ότι αναφέρονταν στην κατανόηση και για αυτόν το λόγο ο παράγοντας ονομάστηκε *Κατανόηση*.

Όσον αφορά τις δηλώσεις που σχετίστηκαν με τον τέταρτο παράγοντα, όπως για παράδειγμα η δήλωση «Αν αποδειχθεί ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά, μπορώ να είμαι βέβαιος/βέβαια ότι είναι αληθές», είχαν ως κοινό χαρακτηριστικό την επιβεβαίωση. Για αυτόν το λόγο, ο τέταρτος παράγοντας ονομάστηκε *Βεβαιότητα για την αλήθεια*.

Τέλος, σχετικά με τις δηλώσεις οι οποίες φορτίστηκαν στην πέμπτο παράγοντα, όπως η δήλωση «Η ανάγνωση της απόδειξης μιας πρότασης σε ένα βιβλίο με βοηθά να καταλάβω γιατί η πρόταση είναι αληθής», είχαν ως κοινό χαρακτηριστικό τον επεξηγηματικό χαρακτήρα της απόδειξης και λόγω αυτού ο παράγοντας ονομάστηκε *Εξήγηση*.

Όσον αφορά τις δηλώσεις οι οποίες φορτίστηκαν στον παράγοντα Εγκυρότητα παρατηρούμε ότι είναι αυτές με τις οποίες οι μαθητές συμφωνούν περισσότερο σε σχέση με τις δηλώσεις των άλλων παραγόντων (βλέπε Πίνακα 5). Για παράδειγμα με τις δηλώσεις «Μια απόδειξη στα μαθηματικά επιβεβαιώνει την αλήθεια ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης» και «Η απόδειξη είναι απαραίτητη στα μαθηματικά» οι μαθητές φαίνεται να συμφωνούν (*Mdn=4,0*).

Πίνακας 5. Περιγραφικά αποτελέσματα των πεποιθήσεων των μαθητών για την απόδειξη.

	M	*Mdn*
Μια απόδειξη στα μαθηματικά επιβεβαιώνει την αλήθεια ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.	4,1	4,0
Αν αποδειχθεί ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά, μπορώ να είμαι βέβαιος/βέβαια ότι είναι αληθές.	3,5	4,0
Παραδείγματα που εξηγούν το συμπέρασμα δε με βοηθούν πάντοτε να καταλάβω γιατί είναι αληθές.	3,1	3,0
Η απόδειξη είναι απαραίτητη στα μαθηματικά.	4,1	4,0
Δε βλέπω το νόημα του να κάνω αποδείξεις, αφού όλα τα συμπεράσματα στο μάθημα έχουν ήδη αποδειχθεί χωρίς αμφιβολία	2,4	2,0
Μόνο οι καλοί μαθητές πρέπει να ασχολούνται με τις αποδείξεις.	1,9	1,0
Μου αρέσει να αποδεικνύω θεωρήματα και προτάσεις στα μαθηματικά.	2,8	3,0
Η απόδειξη ενός θεωρήματος με βοηθά να καταλάβω γιατί το θεώρημα είναι αληθές.	2,9	4,0
Η ανάγνωση της απόδειξης μιας πρότασης σε ένα βιβλίο με βοηθά να καταλάβω γιατί η πρόταση είναι αληθής.	3,3	3,0

Διαφορετικές αποδείξεις ενός θεωρήματος με βοηθούν να το καταλάβω καλύτερα.	3,3	3,0
Μια απόδειξη στα μαθηματικά βασίζεται σε άλλα μαθηματικά συμπεράσματα.	3,6	4,0
Η απόδειξη δείχνει το πώς συνδέονται τα πάντα στα μαθηματικά.	3,4	3,0
Η απόδειξη βοηθά να δούμε ότι προφανή συμπεράσματα δεν είναι αναγκαστικά/σίγουρα αληθή πριν αποδειχθούν.	3,5	4,0
Οι αποδείξεις δείχνουν την ομορφιά της επιστήμης των μαθηματικών.	3,1	3,0
Δε μπορούν να τα καταφέρουν όλοι οι μαθητές με την απόδειξη, παρά μόνο αυτοί που είναι καλοί στα μαθηματικά.	2,6	2,0
Η απόδειξη είναι μια δομή αιτιολόγησης, όπου τα διάφορα βήματα βασίζονται σε λογική, σε γνωστά θεωρήματα/προτάσεις και γνωστούς ορισμούς.	3,9	4,0
Δε μπορώ να πιστέψω τις προτάσεις χωρίς απόδειξη.	3,2	3,0
Η απόδειξη είναι μια ακολουθία λογικών προτάσεων που συνεπάγονται η μία την άλλη, μια λογική παραγωγή συμπερασμάτων.	3,7	4,0
Η απόδειξη ενισχύει τη λογική σκέψη.	3,7	4,0
Η απόδειξη μερικές φορές αποκαλύπτει την ανακρίβεια μιας μαθηματικής πρότασης που φαίνεται σωστή .	3,6	4,0
Η απόδειξη είναι φτιαγμένη για να πείσουμε κάποιον για τους ισχυρισμούς μας.	3,5	4,0
Η απόδειξη μπορεί να μας οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις στα μαθηματικά.	3,5	3,5
Νομίζω ότι δεν είναι χρήσιμο να κάνουμε αποδείξεις, διότι με μπερδεύει.	2,3	2,0
Οι αποδείξεις δείχνουν από που προέρχονται οι μαθηματικές σχέσεις.	3,5	4,0
Οι αποδείξεις απαντούν στο γιατί ισχύουν θεωρήματα και προτάσεις χωρίς καμία αμφιβολία.	3,5	3,0
Οι αποδείξεις εξηγούν μια μαθηματική έκφραση/σχέση με τη βοήθεια της γνώσης που έχει ήδη αποκτηθεί.	3,6	4,0
Με τις αποδείξεις τα καταφέρνουν μόνο οι μαθητές που έχουν κλίση στα μαθηματικά.	2,6	2,0
Αν ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά είναι προφανές, τότε δεν έχει νόημα να το αποδείξουμε.	2,6	3,0
Η απόδειξη είναι η αιτιολόγηση που δείχνει την εγκυρότητα ενός	3,9	4,0

θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.

Σχετικά με τις δηλώσεις του παράγοντα Μόνο για μερικούς, όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα, είναι αυτές με τις οποίες οι μαθητές διαφωνούν περισσότερο σε σχέση με τις δηλώσεις των άλλων παραγόντων. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της δήλωσης «Μόνο οι καλοί μαθητές πρέπει να ασχολούνται με τις αποδείξεις» , με το οποίο φαίνεται οι μαθητές να διαφωνούν περισσότερο από ότι σε οποιαδήποτε άλλη δήλωση (*Mdn=1,0*).

Σχετικά με τις δηλώσεις που φορτίστηκαν στον παράγοντα Κατανόηση, παρατηρούμε ότι οι μαθητές ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν με αυτές. Όπως φαίνεται και στον πίνακα για τους μαθητές οι δηλώσεις αυτές δε διακρίνονται ως προς το επίπεδο συμφωνίας (*Mdn=3,0*).

Όσον αφορά τις δηλώσεις του παράγοντα Βεβαιότητα για την αλήθεια, παρατηρούμε ότι οι μαθητές συμφωνούν με τις περισσότερες από αυτές. Πιο αναλυτικά, η μόνη δήλωση με την οποία ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν είναι η «Οι αποδείξεις απαντούν στο γιατί ισχύουν θεωρήματα και προτάσεις χωρίς καμία αμφιβολία» (*Mdn=3,0*), ενώ με τις άλλες τρεις δηλώσεις του παράγοντα συμφωνούν (*Mdn=4,0*),

Τέλος, όσον αφορά τις δηλώσεις του παράγοντα Εξήγηση, παρατηρούμε ότι οι μαθητές ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν με αυτές, εκτός από μια με την οποία συμφωνούν. Πιο αναλυτικά, η δήλωση «Η απόδειξη ενός θεωρήματος με βοηθά να καταλάβω γιατί το θεώρημα είναι αληθές» είναι αυτή με την οποία οι μαθητές συμφωνούν (*Mdn=4,0*), ενώ οι δηλώσεις «Η ανάγνωση της απόδειξης μιας πρότασης σε ένα βιβλίο με βοηθά να καταλάβω γιατί η πρόταση είναι αληθής» και «Παραδείγματα που εξηγούν το συμπέρασμα δε με βοηθούν πάντοτε να καταλάβω γιατί είναι αληθές» είναι αυτές με τις οποίες οι μαθητές ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν (*Mdn=3,0*).

Συνοψίζοντας, φαίνεται οι μαθητές να συμφωνούν περισσότερο με τις δηλώσεις του πρώτου παράγοντα, που σημαίνει ότι αναγνωρίζουν ότι η απόδειξη σχετίζεται με τη δομή και την αιτιολόγηση άρα και με την εγκυρότητα. Επιπλέον, φαίνεται να διαφωνούν με τις δηλώσεις του δεύτερου παράγοντα, κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές δεν έχουν την πεποίθηση ότι η απόδειξη είναι μόνο για μερικούς μαθητές και συγκεκριμένα για αυτούς που έχουν κλίση στα μαθηματικά. Όσον αφορά τις δηλώσεις που σχετίζονται με την κατανόηση και την εξήγηση δε φαίνεται ούτε να συμφωνούν ούτε να διαφωνούν, κάτι που ίσως σημαίνει ότι για αυτούς η απόδειξη δεν επιτελεί τις συγκεκριμένες λειτουργίες. Τέλος, φαίνεται να συμφωνούν με τις περισσότερες δηλώσεις που σχετίζονται με τη βεβαιότητα για την αλήθεια που παρέχει η απόδειξη.

4.1.2. Αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων από τους μαθητές

Σχετικά με την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων από τους μαθητές εμφανίζεται έντονη η άποψη τους πως όσο πειστικό είναι ένα επιχείρημα για τους ίδιους θεωρούν ότι είναι εξίσου πειστικό και για τους συμμαθητές τους. Επιπλέον, παρατηρούμε μια σχέση μεταξύ πειστικότητας και βαθμού, με την έννοια ότι σε αυτά που οι ίδιοι θεωρούσαν ότι είναι πιο πειστικά, θεωρούσαν ότι οι εκπαιδευτικοί τους θα έβαζαν υψηλότερο βαθμό.

Όσον αφορά τα είδη των αποδεικτικών επιχειρημάτων, παρατηρούμε ότι πιο πειστική για τους μαθητές, τόσο για τον εαυτό τους όσο και για τους συμμαθητές τους, είναι η ευθεία απόδειξη. Από την άλλη μεριά, η λιγότερο πειστική απάντηση φαίνεται να είναι το κρίσιμο πείραμα και σε ορισμένες προτάσεις είναι εξίσου πειστικό με το εμπειρικό επιχείρημα και το γενικό παράδειγμα. Επιπλέον, πιστεύουν ότι οι εκπαιδευτικοί θα έβαζαν μεγαλύτερο βαθμό στις ευθείες αποδείξεις, με εξαίρεση την Πρόταση 3 στην οποία θεωρούν ότι ο μεγαλύτερος βαθμός θα δινόταν από τον εκπαιδευτικό τους στο επιχείρημα με την απαγωγή σε άτοπο.

Πιο αναλυτικά, στην Πρόταση 1, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα περισσότερο πειστική είναι η ευθεία απόδειξη (*Mdn=5,0*) τόσο για τους ίδιους όσο και για τους συμμαθητές τους. Λιγότερο πειστικό για τους ίδιους είναι το κρίσιμο πείραμα (*Mdn=3,0*), ενώ για τους συμμαθητές τους θεωρούν μέτρια πειστικά το εμπειρικό επιχείρημα, το κρίσιμο πείραμα, το γενικό παράδειγμα και την απαγωγή σε άτοπο (*Mdn=4,0*). Όσον αφορά το βαθμό του εκπαιδευτικού, θεωρούν ότι μεγαλύτερο βαθμό θα έβαζε στην ευθεία απόδειξη (*M=15,4*) και μικρότερο στο κρίσιμο πείραμα (*M=11,8*).

Πίνακας 6. Περιγραφικά αποτελέσματα για την αξιολόγηση των επιχειρημάτων της Πρότασης 1.

Πρόταση 1	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	4,1	4,0
Εμπειρικό_Συμμαθητές	4,3	4,0
Εμπειρικό_Καθηγητής	13,7	15
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,4	3,0
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	3,7	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	11,8	13
Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	3,7	4,0
Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	3,9	4,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	12,5	14
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	4,9	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	4,8	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	15,4	16
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,3	4,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	4,3	4,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	14,8	16

Όσον αφορά την Πρόταση 2, περισσότερο πειστική για τους ίδιους θεωρούν την ευθεία απόδειξη (*Mdn=5,0*) και την απαγωγή σε άτοπο (*Mdn=5,0*), ενώ για τους συμμαθητές τους μόνο την ευθεία απόδειξη (*Mdn=5,0*). Λιγότερο πειστικό, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, τόσο για τους ίδιους όσο και για τους συμμαθητές τους θεωρούν το κρίσιμο πείραμα (*Mdn=3,0*). Οι υπόλοιπες απαντήσεις τους πείθουν μέτρια (*Mdn=4,0*), όπως και τους συμμαθητές τους. Όσο για το βαθμό του εκπαιδευτικού, θεωρούν ότι μεγαλύτερο βαθμό θα έπαιρνε η ευθεία απόδειξη (*M=15,5*), με πολύ μικρή διαφορά από την απαγωγή σε άτοπο (*M=15,3*). Το χαμηλότερο βαθμό σύμφωνα με τους μαθητές θα τον έβαζε ο εκπαιδευτικός στο κρίσιμο πείραμα (*M=11,9*).

Πίνακας 7. Περιγραφικά αποτελέσματα για την αξιολόγηση των επιχειρημάτων της Πρότασης 2.

Πρόταση 2	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	4,1	4,0
Εμπειρικό_Συμμαθητές	4,2	4,0
Εμπειρικό_Καθηγητής	13,9	15
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,7	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	3,9	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	12,7	14
Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	3,4	3,0
Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	3,6	3,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	11,9	13
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	4,5	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	4,5	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	15,5	16
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,5	5,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	4,4	4,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	15,3	16

Σχετικά με την Πρόταση 3, περισσότερο πειστικές για τους ίδιους είναι τόσο η ευθεία απόδειξη (*Mdn=5,0*) όσο και η απαγωγή σε άτοπο (*Mdn=5,0*), ενώ για τους συμμαθητές τους είναι μόνο η ευθεία απόδειξη (*Mdn=5,0*) (βλέπε Πίνακα 8). Οι υπόλοιπες απαντήσεις δε διακρίνονται ως προς το βαθμό πειστικότητας από τους μαθητές, καθώς όλες τους πείθουν μέτρια, όπως και τους συμμαθητές τους (*Mdn=4,0*). Μοναδική εξαίρεση, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, είναι η απαγωγή σε άτοπο που θεωρούν ότι πείθει τους συμμαθητές τους παραπάνω από μέτρια (*Mdn=4,5*). Επιπλέον, το μεγαλύτερο βαθμό θεωρούν ότι θα έπαιρνε η απαγωγή σε άτοπο (*M=15,6*), με πολύ μικρή διαφορά από την ευθεία απόδειξη (*M=15,4*), ενώ το μικρότερο το κρίσιμο πείραμα (*M=12,6*), με πολύ μικρή διαφορά από το γενικό παράδειγμα (*M= 12,8*).

Πίνακας 8. Περιγραφικά αποτελέσματα για την αξιολόγηση των επιχειρημάτων της Πρότασης 3.

Πρόταση 3	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	4,1	4,0
Εμπειρικό_Συμμαθητές	4,1	4,0
Εμπειρικό_Καθηγητής	13,8	15
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,5	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	3,7	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	12,6	14
Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	3,6	4,0
Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	3,9	4,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	12,8	14
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	4,7	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	4,7	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	15,4	16
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,6	5,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	4,6	4,5
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	15,6	16

Σχετικά με την Πρόταση 4, (βλέπε Πίνακα 9), περισσότερο πειστικές, τόσο για τους ίδιους όσο και για τους συμμαθητές τους, θεωρούν την ευθεία απόδειξη (*Mdn=5,0*) και την απαγωγή σε άτοπο (*Mdn=5,0*). Οι υπόλοιπες απαντήσεις δε φαίνεται να διακρίνονται ως προς το βαθμό πειστικότητας από τους μαθητές, καθώς όλες τους πείθουν μέτρια, όπως και τους συμμαθητές τους (*Mdn=4,0*). Όσον αφορά το βαθμό του εκπαιδευτικού, θεωρούν ότι μεγαλύτερο βαθμό θα έπαιρνε η ευθεία απόδειξη (*M=16,4*) και χαμηλότερο το κρίσιμο πείραμα και το γενικό παράδειγμα (*M=13,2*).

Πίνακας 9. Περιγραφικά αποτελέσματα για την αξιολόγηση των επιχειρημάτων της Πρότασης 4.

Πρόταση 4	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	4,1	4,0
Εμπειρικό_Συμμαθητές	4,2	4,0
Εμπειρικό_Καθηγητής	14	15
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,7	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	3,9	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	13,2	15
Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	3,8	4,0
Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	4,0	4,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	13,2	14,5
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	5,1	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	5,0	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	16,4	17
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,8	5,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	4,8	5,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	15,7	16,5

4.2. Απόψεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη

4.2.1. Απόψεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στην επιστήμη των μαθηματικών

Σχετικά με τις απόψεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στην επιστήμη των μαθηματικών, παρατηρούμε ότι οι δύο εκπαιδευτικοί συγκλίνουν στις λειτουργίες της συστηματοποίησης και της νοητικής πρόκλησης και μάλιστα με αρκετές αναφορές σε αυτές (βλέπε Πίνακα 10).

Πίνακας 10. Απόψεις εκπαιδευτικών για την απόδειξη στην επιστήμη των μαθηματικών.

Ερευνητικό ερώτημα	Διαστάσεις	Σόνια	Αμαλία
Απόψεις εκπαιδευτικών για την απόδειξη στην επιστήμη των μαθηματικών	Νοητική πρόκληση	3	2
	Συστηματοποίηση	2	1
	Επαλήθευση	2	0
	Εξήγηση	2	0
	Ανακάλυψη	0	2
	Επικοινωνία	0	3
	Ικανοποίηση	0	2

Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά τη συστηματοποίηση η Σόνια την υπονοεί αναφερόμενη στα αξιώματα που στηρίζονται οι αποδείξεις ώστε να προκύψουν τα συμπεράσματα, ενώ η Αμαλία αναφέρεται στη θεμελίωση της γνώσης. Για παράδειγμα, αναφέρουν:

Σόνια: Η απόδειξη στα μαθηματικά είναι ουσιαστικά μια τεκμηρίωση μια τεκμηριωμένη άποψη δεν είναι μόνο θεωρίες, αλλά με λογικά βήματα και στηριζόμενοι σε αξιώματα βγάζουμε τα συμπεράσματά μας (Σόνια, γραμμές 12-14).

Αμαλία: Εεε, πρώτον το θεμελιώνεις, δεύτερον βλέπεις αυτός που την έκανε πως το σκέφτηκε και τρίτον σου δίνει τη δυνατότητα να ψάξεις κι εσύ κάτι άλλο (Αμαλία, γραμμές 27-28).

Όσον αφορά τη νοητική πρόκληση, η οποία εμφανίζεται 3 φορές από τη Σόνια και 2 από την Αμαλία, φαίνεται ότι και οι δύο εκπαιδευτικοί βλέπουν την απόδειξη ως μια ευκαιρία, η οποία ενισχύει τη σκέψη και διευρύνει τους ορίζοντες των εμπλεκομένων με αυτήν. Χαρακτηριστικά αναφέρουν:

Σόνια: Εεε… τον βάζει στη διαδικασία να σκεφτεί, να ξεφύγει λίγο από το καθιερωμένο που υπάρχει κι αυτό που έχει μάθει κι αυτός τόσα χρόνια απέξω… (Σόνια, γραμμές 38-39).

Αμαλία: […] Διευρύνει θα έλεγα, εε τον ορίζοντα αυτού που μελετάει μαθηματικά (Αμαλία, γραμμές 13-14).

Από την άλλη μεριά, υπάρχουν και λειτουργίες που αναφέρονται μόνο από τη μια εκπαιδευτικό. Συγκεκριμένα, η Σόνια αναφέρει ότι η απόδειξη είναι σημαντική στα μαθηματικά, καθώς επαληθεύει και εξηγεί την αποκτηθείσα γνώση. Για παράδειγμα αναφέρει:

> Σόνια: […] σε καθοδηγεί, ξεκινάει μάλλον από το να καταλάβεις τι γίνεται να δεχθείς αυτό γιατί είναι μέσα από λογικές πράξεις και δεν είναι κάτι αυθαίρετο (Σόνια, γραμμές 21-23).

Η Αμαλία από την άλλη, αναφέρει ότι η απόδειξη προσφέρει τη δυνατότητα για ανακάλυψη, καθώς αποτελεί πηγή ιδεών. Επιπλέον, συνδέει την απόδειξη με την επικοινωνία καθώς μπορεί να προκαλέσει θαυμασμό για αυτόν που τη σκέφτηκε, ενώ μπορεί να αποτελέσει πηγή έμπνευσης και ικανοποίησης. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

> Αμαλία: Εεε, δε νομίζω για την κατανόηση, περισσότερο θαυμάζεις αυτόν που το έστησε, που έστησε την απόδειξη καιιι δεύτερον σου δίνει και σένα περισσότερες ιδέες. Αυτό διευρύνει περισσότερο την σκέψη, τη διαίσθηση (Αμαλία, γραμμές 35-37).

> Αμαλία: Πιστεύω ότι απλώς προσφέρει ικανοποίηση και ευχαρίστηση σε αυτόν που κατάφερε και το απέδειξε και το απέδειξε σωστά δηλαδή, στηριζόμενος σε σωστή πορεία (Αμαλία, γραμμές 51-53).

4.2.2. Απόψεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά

Όσον αφορά την απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά, οι δύο εκπαιδευτικοί τη θεωρούν απαραίτητη για μια σειρά από λόγους, με κυριότερο τη νοητική πρόκληση. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρουν και οι δύο ότι η απόδειξη ενισχύει τη λογική τόσο του εκπαιδευτικού όσο και του μαθητή και μάλιστα το αναφέρουν σε αρκετά σημεία της συνέντευξης όπως φαίνεται στον Πίνακα 11.

Πίνακας 11. Απόψεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά.

Ερευνητικό ερώτημα	Διαστάσεις	Σόνια	Αμαλία
Απόψεις	Νοητική πρόκληση	4	2
εκπαιδευτικών για	Συστηματοποίηση	4	1
την απόδειξη στα	Επικοινωνία	1	1

σχολικά μαθηματικά	Ανακάλυψη	0	1
	Εξήγηση	1	0
	Ικανοποίηση	0	1

Για παράδειγμα, αναφέρουν:

Σόνια: […] ότι ξέρεις τι η απόδειξη σε βοηθάει να σκέφτεσαι και επιπλέον σου μαθαίνει τρόπους για το πως πρέπει να κινείσαι μέσα από κάποια λογικά βήματα (Σόνια, γραμμές 136-138).

Αμαλία: […] Θεωρώ ότι βλέποντας, που το 10% των μαθητών θα ασχοληθεί, όχι όλοι, ότι αυτό το πράγμα είναι αποδεδειγμένο και δεν είναι ουρανοκατέβατο, τον βοηθάει να βαθαίνει στη σκέψη του, την κριτική του ικανότητα αυξάνει και να αποκτά έναν άλλο δυναμισμό και ευρύτητα η σκέψη του (Αμαλία, γραμμές 83-86).

Η δεύτερη σε εμφανίσεις λειτουργία (βλέπε Πίνακα 11) είναι η συστηματοποίηση. Περισσότερες φορές αναφέρεται από τη Σόνια, η οποία σε αρκετά σημεία αναφέρει ότι η απόδειξη είναι σημαντική για τους μαθητές, καθώς τους καθοδηγεί να ακολουθήσουν λογικά βήματα για να καταλήξουν στο επιθυμητό συμπέρασμα. Όσον αφορά την Αμαλία αναφέρει ότι η απόδειξη είναι αυτή που θεμελιώνει αυτό που προκύπτει είτε διαισθητικά είτε πειραματικά. Πιο συγκεκριμένα αναφέρουν:

Σόνια: είναι γιατί καθοδηγεί τα παιδιά στο να λύσουν τις ασκήσεις μέσα από λογικά βήματα. Τους μαθαίνει λογική. Βέβαια θεωρώ ότι λογική έρχεται πολύ περισσότερο με τη γεωμετρία αλλά από τη στιγμή που συζητάμε για άλγεβρα έχει πολλά πράγματα κι αυτή (Σόνια, γραμμές 81-84).

Αμαλία: (Γελάει) για αυτό σου το τριγυρίζω από δω και από κει γιατί θεωρώ ότι, για μένα η απόδειξη είναι κάτι το οποίο θεμελιώνει κάτι το οποίο διαισθητικά ή πειραματικά συνέλαβε κάποιος και μετά το θεμελιώνει (Αμαλία, γραμμές 129-131).

Επιπροσθέτως, οι δύο εκπαιδευτικοί αναφέρονται στην επικοινωνία με την έννοια της μετάδοσης γνώσης. Πιο συγκεκριμένα, η Σόνια θεωρεί ότι αυτό που προσφέρει η απόδειξη σε έναν εκπαιδευτικό είναι ότι τον βοηθά να γίνει καλύτερη η διδασκαλία του, εφόσον έχει κι ο ίδιος κατανοήσει καλύτερα αυτό που πρόκειται να διδάξει. Επομένως η Σόνια θεωρεί ότι η εξήγηση που προσφέρει η απόδειξη οδηγεί σε καλύτερη μετάδοση της γνώσης, δηλαδή αναφέρεται σε δύο λειτουργίες της απόδειξης όπως φαίνεται και παρακάτω:

> Σόνια: […] να καταλάβει αυτό που λέει καθημερινά, οπότε είναι ίσως είναι η διδασκαλία του καλύτερη στα παιδιά (Σόνια, γραμμές 40-41).

Η Αμαλία θεωρεί ότι όταν ένας εκπαιδευτικός διαβάζει μια απόδειξη θαυμάζει τη σκέψη αυτού που την σκέφτηκε. Αυτό σημαίνει ότι κι εδώ αναφέρεται η λειτουργία της επικοινωνίας, εφόσον αυτός ο θαυμασμός προϋποθέτει τη μετάδοση της γνώσης.

> Αμαλία: Θαυμάζεις τη σκέψη του άλλου (Αμαλία, γραμμή 100).

Από την άλλη μεριά, υπάρχουν και σε αυτό το μέρος λειτουργίες που αναφέρονται μόνο από τη μια εκπαιδευτικό. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η Σόνια θεωρεί ότι η εξήγηση προηγείται της επικοινωνίας. Όσον αφορά την Αμαλία αναφέρεται στην ανακάλυψη, δηλαδή θεωρεί ότι η απόδειξη θα έπρεπε να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εμπλέκεται ο μαθητής σε μια διαδικασία δημιουργίας, ώστε να την κατασκευάσει μόνος του. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

> Αμαλία: […] Αλλά παρόλα αυτά για να μπαίνουν στη διαδικασία της απόδειξης θεωρώ ότι θα πρεπε να υπάρχει μια διαδικασία δημιουργίας, παιχνιδιού κάτι τέτοιο (Αμαλία, γραμμές 73-75).

Τέλος η Αμαλία αναφέρεται στην ικανοποίηση που αισθάνεται ο εκπαιδευτικός όταν καταφέρει να κατασκευάσει μια απόδειξη, ενώ θεωρεί ότι είναι και το μοναδικό του όφελος καθώς θεωρεί δεδομένη τη θεμελίωση της γνώσης.

> Αμαλία: […] Αν καταφέρει να το θεμελιώσει τι άλλο να του προσφέρει εκτός από αυτό; Ικανοποίηση (Αμαλία, γραμμές 131-132).

Ερευνήτρια: Άρα ουσιαστικά και σε μας προσφέρει τη θεμελίωση της γνώσης; (Ερευνήτρια, γραμμή 133)

Αμαλία: Πρακτικά ναι αλλά το θεωρώ δεδομένο ότι για αυτό γίνεται η απόδειξη, για αυτό σε πάω στο παραπέρα (Αμαλία, γραμμές 134-135).

4.2.3. Απόψεις των εκπαιδευτικών για το υπάρχον θεσμικό πλαίσιο για την απόδειξη

Σχετικά με το υπάρχον θεσμικό πλαίσιο για την απόδειξη οι απόψεις των εκπαιδευτικών φαίνεται να συγκλίνουν απόλυτα. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 12 οι εκπαιδευτικοί αναφέρουν σχεδόν τις ίδιες διαστάσεις, με εξαίρεση μόνο μία που αναφέρεται μόνο από τη μια εκπαιδευτικό. Πιο συγκεκριμένα, και για τις δύο εκπαιδευτικούς έχουμε αρκετές εμφανίσεις της ανεπάρκειας χρόνου τόσο για τη διδασκαλία της απόδειξης αλλά και γενικά για την ύλη της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου. Για παράδειγμα, για την ανεπάρκεια χρόνου γενικότερα αναφέρεται:

Ερευνήτρια: Μάλιστα. Ως εκπαιδευτικός πιστεύετε ότι στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου αφιερώνεται επαρκής χρόνος στις αποδείξεις; (Ερευνήτρια, γραμμές 114-115)

Σόνια: Όχι (Σόνια, γραμμή 116).

Σόνια: […] Δεν προλαβαίνει ένας εκπαιδευτικός να κάνει όλα αυτά τα πράγματα (Σόνια, γραμμές 190-191).

Σόνια: […] Τώρα βέβαια αυτά είναι προς το τέλος της χρονιάς με την ύλη που υπάρχει, με το φόρτο της ύλης όλα αυτά γίνονται πάρα πολύ γρήγορα και δε μένει τίποτα στα παιδιά από πράγματα που θα πρεπε να μείνουν (Σόνια, γραμμές 122-124).

Για την ανεπάρκεια χρόνου ειδικά για τη διδασκαλία της απόδειξης, η Αμαλία τονίζει ότι:

Αμαλία: Όχι. Δε φτάνει ο χρόνος. Είναι υπερβολική η ύλη για την Α΄ Λυκείου. Είναι πολύ μεγάλη για μένα, αν θέλεις να εμβαθύνεις και να μάθεις τα παιδιά να γίνονται ευέλικτα, να χρησιμοποιούν τα πράγματα με, ότι μαθαίνουνε με άνεση. Δε φτάνει ο χρόνος (Αμαλία, γραμμές 172-175).

Επιπλέον, οι δύο εκπαιδευτικοί αναφέρουν ότι δε νομίζουν ότι υπάρχουν σαφείς οδηγίες από το ΑΠ για τη διδασκαλία της απόδειξης στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου, αλλά και οι δύο φαίνεται ότι δεν το έχουν ψάξει ενδελεχώς, ενώ η Αμαλία αναφέρει ότι δεν το κοιτάει πια. Χαρακτηριστικά αναφέρουν:

> Σόνια: εε… να πω την αλήθεια έχουν έρθει κάποιες οδηγίες από το ΙΕΠ… για την απόδειξη αυτή καθεαυτή δε νομίζω ότι έχουμε ακριβείς οδηγίες… (Σόνια, γραμμές 128-129).

> Αμαλία: Όχι. Δεν έχω δει ποτέ. Αν και δεν το κοιτάω τώρα, να σου πω την αλήθεια (Αμαλία, γραμμές 193-194).

Επιπροσθέτως, και οι δύο εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι το σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου δε δείχνει στους μαθητές την αξία και τη σημασία της απόδειξης, ενώ προτείνουν μια διαφορετική δομή βιβλίου. Πιο αναλυτικά, οι δύο εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι κάποιες από τις αποδείξεις δε θα έπρεπε να υπάρχουν στο βιβλίο, είτε γιατί είναι δυσνόητες για τους μαθητές, είτε γιατί όπως χαρακτηριστικά λέει η Σόνια δεν έχουν κάτι να προσφέρουν στους μαθητές. Επιπλέον, η Σόνια προτείνει την εισαγωγή αποδείξεων στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου σε σημαντικά κεφάλαια όπως η ευθεία, ενώ η Αμαλία προτείνει την εισαγωγή στην απόδειξη μέσω παραδειγμάτων ή προβληματισμών. Χαρακτηριστικά παραδείγματα των προτάσεων τους είναι τα παρακάτω.

> Σόνια: Σίγουρα θα πρόσθετα αποδείξεις στην ευθεία. Ένα…εε.. δεν ξέρω αν θα έπρεπε… κατά την προσωπική μου άποψη οι αποδείξεις που έχει στη διάταξη θα έπρεπε να φύγουν ή να γίνουν κάπως αλλιώς (Σόνια, γραμμές 180-182).

> Αμαλία: Αυτό που λέω θα έκανα. Χωρίς να το κάνω γυμνασιακού επιπέδου δηλαδή θα έβαζα το παιδί σε έναν προβληματισμό και βηματισμό και να πηγαίνει προς την απόδειξη. Δηλαδή μέσω, πως να πω σα να λύνει άσκηση, σα νααα… εε… του βάζω ένα ερωτηματολόγιο, κάτι τέτοιο, δεν το έχω φανταστεί περισσότερο δηλαδή γιατί το παρακάμπτω (Αμαλία, γραμμές 233-237).

Όσον αφορά τις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου οι δύο εκπαιδευτικοί συμφωνούν ότι δεν είναι όλες αποδεικτικές. Συγκλίνουν στην άποψη ότι οι υπολογιστικές ασκήσεις και οι ασκήσεις εφαρμογής δεν περιλαμβάνουν κάποια αποδεικτική διαδικασία. Επιπλέον η Σόνια αναφέρει ότι οι ασκήσεις του βιβλίου δεν ωθούν το μαθητή σε μια αποδεικτική διαδικασία. Συγκεκριμένα αναφέρουν:

> Σόνια: Θεωρώ ότι οι μη αποδεικτικές είναι οι καθαρά εφαρμοστικές. Εεε οι αποδεικτικές από τη στιγμή που υπάρχει μέσα τους η έννοια της απόδειξης έχουν κάτι επιπλέον έξω από την απλή εφαρμογή (Σόνια, γραμμές 259-261).

> Αμαλία: […] Στις αποδεικτικές θεωρώ ότι πας σε ένα μοντέλο πάλι που μάλλον θα πρέπει να είναι κάπως τυποποιημένο και αυστηρό ενώ στις οποιεσδήποτε άλλες υπολογιστικές, εύρεσης κλπ θεωρώ ότι είναι πιο ελεύθερη η έκφραση του μαθητή και χωρίς να κάνει λάθος απαραίτητα (Αμαλία, γραμμές 293-297).

Τέλος, η Αμαλία αναφέρει ότι η απόδειξη δε θα έπρεπε να εξετάζεται, καθώς οι περισσότεροι μαθητές θεωρεί ότι τη μαθαίνουν απέξω χωρίς να αποκομίζουν γνώση από αυτήν. Μια επιπλέον διάσταση, η οποία αναφέρεται και από τις δύο εκπαιδευτικούς και μάλιστα σε αρκετά σημεία, είναι η μεγάλη ύλη της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν ρωτήθηκαν κάτι τέτοιο, αλλά το αναφέρουν αυθόρμητα ως κάτι που προκαλεί μείωση του χρόνου που αφιερώνεται στη διδασκαλία της απόδειξης. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα παρακάτω.

> Σόνια: […] Δεν προλαβαίνει ένας εκπαιδευτικός να κάνει όλα αυτά τα πράγματα, η ύλη είναι αρκετή, έχουν αφαιρέσει μεν κάποια κομμάτια αλλά χωρίς λογική δηλαδή πήραν κάποια κομμάτια και απλά τα αφαιρέσανε (Σόνια, γραμμές 190-192).

> Αμαλία: […] Είναι υπερβολική η ύλη για την Α΄ Λυκείου. Είναι πολύ μεγάλη για μένα, αν θέλεις να εμβαθύνεις και να μάθεις τα παιδιά να γίνονται ευέλικτα, να χρησιμοποιούν τα πράγματα με, ότι μαθαίνουνε με άνεση. (Αμαλία, γραμμές 172-175).

Πίνακας 12. Απόψεις των εκπαιδευτικών για το υπάρχον θεσμικό πλαίσιο για την απόδειξη.

Ερευνητικό ερώτημα	Διαστάσεις	Σόνια	Αμαλία
Απόψεις	Ανεπάρκεια χρόνου	4	5

εκπαιδευτικών για το υπάρχον θεσμικό πλαίσιο για την απόδειξη	Απουσία οδηγιών στο ΑΠ για τη διδασκαλία της απόδειξης	1	1
	Το σχολικό βιβλίο δε δείχνει την αξία της απόδειξης	1	1
	Δεν είναι όλες οι ασκήσεις του βιβλίου αποδεικτικές	5	8
	Διαφορετική δομή βιβλίου	3	5
	Δε θα έπρεπε να εξετάζεται η απόδειξη	0	2
	Μεγάλη ύλη *	2	4

4.3. Οι απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τις απόψεις των μαθητών για την απόδειξη

Όσον αφορά τις απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τις απόψεις των μαθητών τους για την απόδειξη, εστιάσαμε στην αξιολόγηση από τους εκπαιδευτικούς των αποδεικτικών επιχειρημάτων που δόθηκαν στους μαθητές ως προς την πειστικότητα. Οι απαντήσεις των δύο εκπαιδευτικών παρουσίασαν αρκετές διαφορές. Πιο αναλυτικά, στις απαντήσεις της Σόνιας εμφανίζεται μια περιοδικότητα, δηλαδή σε κάθε πρόταση θεωρεί ότι η λιγότερο πειστική απάντηση για τους μαθητές είναι αυτή που χρησιμοποιεί την απαγωγή σε άτοπο, καθώς είναι αυτή που δυσκολεύει τους μαθητές. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

Σόνια: Η εις άτοπον απαγωγή είναι αυτή που τους πείθει λιγότερο όλους (Σόνια, γραμμή 542).

Σόνια: Ναι σε κάθε πρόταση. Είναι έξω από το σκεπτικό τους… (Σόνια, γραμμή 544).

Σόνια: Το άτοπο ναι. Το άτοπο είναι παντού (Σόνια, γραμμή 570).

Όσον αφορά την απάντηση που η Σόνια θεωρεί πιο πειστική για τους μαθητές, σχεδόν σε όλες τις προτάσεις είναι το εμπειρικό επιχείρημα, δηλαδή η απάντηση που κάνει 5 δοκιμές. Για παράδειγμα αναφέρει:

Σόνια: Περισσότερο θα τους πείσει η απόδειξη, η απάντηση που έχει 4, 5 νούμερα 4,5 παραδείγματα (Σόνια, γραμμές 550-551).

Η μόνη περίπτωση που αλλάζει η απάντηση που θεωρεί πιο πειστική είναι αυτή στην Πρόταση 4, στην οποία θεωρεί πιο πειστική την ευθεία απόδειξη , δηλαδή την απόδειξη του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, καθώς όπως λέει οι μαθητές την γνωρίζουν άρα θεωρεί ότι δε θα ψάξουν καν. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

Σόνια: Στην 4 επειδή την έχουν κάνει στο σχολείο θα πάνε καραμπινάτοι στην απάντηση 4 (Σόνια, γραμμές 560-561).

Σόνια: Ναι. Είναι κάτι που επειδή ήταν αυτά που λέμε εμείς στο σχολείο ΣΟΣ για τις εξετάσεις την ξέρουν όλοι (Σόνια, γραμμές 563-564).

Η Αμαλία δίνει διαφορετικές απαντήσεις για κάθε πρόταση. Πιο αναλυτικά για την Πρόταση 1 θεωρεί ότι πιο πειστικό το εμπειρικό επιχείρημα, ωστόσο διακρίνει τον καλό μαθητή αφού σε αυτόν όπως αναφέρει δε θα αρκεί αυτή η απάντηση. Λιγότερο πειστικό θεωρεί κρίσιμο πείραμα (βλέπε Παράρτημα Α). Χαρακτηριστικά αναφέρει:

Αμαλία: Εεε οι περισσότεροι θα πείθονταν με τα παραδείγματα (Αμαλία, γραμμή 561).

Αμαλία: Ναι αυτός που γνωρίζει κάποια μαθηματικά και έχει κριτική ικανότητα δε θα του φτάσει κι αν φυσικά το έχει ξανά ακούσει έστω μια φορά για το παράδειγμα που δεν αποδεικνύει όσα και να κάνεις, ότι θέλουμε κάτι πολύ πιο γενικό (Αμαλία, γραμμές 563-565).

Όσον αφορά την Πρόταση 2 πιο πειστική θεωρεί την ευθεία απόδειξη γιατί είναι πιο κατανοητή για τους μαθητές και λιγότερο πειστικό το κρίσιμο πείραμα. Αναφέρει:

Αμαλία: Και περισσότεροο… κάτσε νομίζω όχι, εδώ τώρα να βάλουμε και κάτι διαφορετικό, είναι διαφορετική η πρόταση. Το 4 (Αμαλία, γραμμές 577-578).

Σχετικά με την Πρόταση 3 θεωρεί ότι θα τους πείσει περισσότερο η απαγωγή σε άτοπο, ενώ αναφέρει ξανά ότι παρότι το εμπειρικό επιχείρημα είναι πειστικό δε θα είναι πειστικό για τον καλό μαθητή. Λιγότερο πειστικά θεωρεί το κρίσιμο πείραμα και το γενικό παράδειγμα. Για παράδειγμα λέει:

Αμαλία: Λέω την 5 για να βάζω μέσα και τον καλό μαθητή. Πάντως και η 1 είναι που θα δώσει ένα πάτημα σιγουριάς, αλλά ο καλύτερος μαθητής νομίζω δε θα του αρκεί (Αμαλία, γραμμές 594-596).

Στην τελευταία Πρόταση υπάρχει μια σύγκλιση των δύο εκπαιδευτικών. Πιο αναλυτικά, όπως η Σόνια, έτσι και η Αμαλία θεωρεί πιο πειστική την ευθεία απόδειξη, καθώς οι μαθητές την έχουν διδαχτεί και μάλιστα κατά τη διδασκαλία είχε δοθεί έμφαση σε αυτήν την απόδειξη. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

Αμαλία: Ναι, εδώ θα γίνει παιχνίδι. Λοιπόν, στην Πρόταση 4 νομίζω ότι θα τους πείσει…επειδή συνήθως στις απόλυτες τιμές αναφερόμαστε όλοι αρκετά και κάνουμε καλή ας το πούμε έτσι, επιμένουμε στο να κατανοήσουνε και τον ορισμό και όλα αυτά θεωρώ ότι θα πειστούνε με την 4 κατευθείαν με την απόδειξη, δηλαδή ορθά είναι αυτή η απόδειξη του βιβλίου (Αμαλία, γραμμές 600-604).

4.4. Οι διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών

Σχετικά με τον τρόπο εισαγωγής της απόδειξης στην Άλγεβρα στους μαθητές της Α΄ Λυκείου οι εκπαιδευτικοί παρουσιάζουν μια σημαντική διαφορά. Πιο αναλυτικά, η Σόνια αναφέρει ότι εισάγει τους μαθητές στην απόδειξη διδάσκοντας τις μεθόδους απόδειξης (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο), ενώ στη συνέχεια γίνεται και μια συζήτηση στην τάξη περί απόδειξης. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

Σόνια: εεε, στην αρχή του βιβλίου επειδή έχει τις αποδείξεις, δηλαδή μιλάει για την ευθεία απόδειξη και την απαγωγή εις άτοπο, εεε, γίνεται, γίνεται μια μικρή συζήτηση για την απόδειξη (Σόνια, γραμμές 272-274).

Από την άλλη μεριά, η Αμαλία εισάγει την απόδειξη εμμέσως. Πιο συγκεκριμένα, χωρίς να αναφέρει ότι κάνει την απόδειξη κάποιου θεωρήματος χρησιμοποιεί ένα παράδειγμα ή ένα προβληματισμό και προσπαθεί να εμπλέξει το μαθητή σε μια διαδικασία κατασκευής των αποδείξεων. Προσπαθεί δηλαδή να την εισάγει σαν ένα παιχνίδι, αρκεί να βοηθά όπως λέει το επίπεδο της τάξης.

Αμαλία: […] Το θεωρώ λάθος αυτό. Να τους πεις το θεώρημα και τώρα θα το αποδείξουμε. Τους πάω πολύ πιο έμμεσα, και προσπαθώ να μπαίνουν κι αυτοί στο να τη δημιουργούν και περισσότερο βλέπουμε αυτό που βγάλαμε στο τέλος (Αμαλία, γραμμές 204-206).

Όσον αφορά τον τρόπο διδασκαλίας των αποδείξεων εμφανίζονται ομοιότητες στις πρακτικές των δύο εκπαιδευτικών. Πιο αναλυτικά, και οι δύο εκπαιδευτικοί αναφέρουν ότι διδάσκουν τις αποδείξεις όπως ακριβώς είναι στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου. Παρόλα αυτά, η Σόνια αναφέρει ότι κάποιες αποδείξεις που είναι δυσνόητες για τους μαθητές ή τις διδάσκει με άλλο τρόπο ή δεν τις διδάσκει καθόλου, ενώ η Αμαλία αναφέρει πως αν δοθεί ερέθισμα από την τάξη θα δείξει παραπάνω από μια αποδείξεις για το ίδιο θεώρημα-πρόταση. Για παράδειγμα αναφέρουν:

Σόνια: Με τον τρόπο που υπάρχουν μέσα στο βιβλίο. Εκτός από κάποιες που δεν τις κάνω καθόλου (Σόνια, γραμμές 291-292).

Αμαλία: Σίγουρα, θα πω ότι λέει το βιβλίο, αλλά και αν με παίρνει και για δεύτερη και για τρίτη θα την κάνουμε (Αμαλία, γραμμές 339-340).

Σχετικά με την επίλυση ασκήσεων στην τάξη και οι δύο εκπαιδευτικοί αναφέρουν ότι υπάρχουν ασκήσεις που τις λύνουν με δύο τρόπους. Για τη Σόνια η επίλυση με πολλούς τρόπους είναι σημαντική, καθώς με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές κατανοούν ότι η λύση δεν είναι μοναδική. Για την Αμαλία η επίλυση με περισσότερους από έναν τρόπους διευρύνει τη σκέψη και τη φαντασία των μαθητών. Χαρακτηριστικά όσων είπαν είναι τα παρακάτω:

Σόνια: Νναι. Εεε γιατί τους δείχνουν ότι δεν υπάρχει μόνο μια λύση για όλα. Είναι βασικό αυτό, γιατί έτσι δε μπερδεύονται (Σόνια, γραμμές 364-365).

Αμαλία: ε τους ωφελείιι όχι άμεσα για την άσκηση τους δίνει περισσότερο, τοο πως να πω, εμπειρία που αυτό στο παιδί θεωρώ ότι μπορεί να πολλαπλασιαστεί, να το εφαρμόσει σε κάτι τελείως διαφορετικό μετά, γιατί διευρύνει το νου του και τη φαντασία του. Τη σκέψη και τη φαντασία του, όχι το νου του τι λέω και εγώ τώρα; (Αμαλία, γραμμές 395-398).

Σύμφωνα με τη Σόνια, η ανάγνωση των αποδείξεων ενισχύει την κατανόηση των μαθητών και τη λογική τους, ενώ η κατασκευή αποδείξεων ενισχύει την κριτική τους ικανότητα, τους μαθαίνει λογικά βήματα και είναι κάτι που επειδή το κατασκεύασαν οι ίδιοι το θυμούνται περισσότερο.

Σόνια: Τον βοηθάει να σκέφτεται. Ναααα εξασκεί την κριτική του σκέψη και… να μπορεί να βάζει σε λογική σειρά τη σκέψη του. Έτσι κάνει σωστότερα βήματα και το βασικότερο ότι αυτό θα του μείνει. Ότι προσπαθεί να χτίσει μόνος του θα του μείνει (Σόνια, γραμμές 450-453).

Επιπλέον, στην κατασκευή των αποδείξεων στην τάξη η Σόνια αναφέρει ότι συμμετέχουν λίγοι μαθητές κυρίως αυτοί που τους αρέσουν τα μαθηματικά, ενώ θεωρεί ότι για τους μαθητές είναι καλύτερη η κατασκευή αποδείξεων από την απλή ανάγνωσή τους, κάτι που λόγω των περιορισμών που υπάρχουν δεν είναι εύκολο στη σχολική πραγματικότητα.

Σόνια: Καλύτερο θα ήτανε να κατασκευάζουν, αλλά δε νομίζω ότι είναι εύκολο έτσι όπως είναι αυτή τη στιγμή το σχολείο μας (Σόνια, γραμμές 492-493).

Σόνια: Γιατί με την κατασκευή εεε έξω από το ότι σου μένει το θεώρημα μαθαίνεις και τρόπους να λειτουργείς. Ακολουθείς εσύ, το βγάζεις εσύ το συμπέρασμα και είναι το μόνο σίγουρο ότι θα σου μείνει και θα σου μείνει πολύ καλύτερα (Σόνια, γραμμές 505-508).

Στο ίδιο πλαίσιο είναι και οι απόψεις της Αμαλίας, σύμφωνα με την οποία οι μαθητές συμμετέχουν σε μικρό ποσοστό στην κατασκευή αποδείξεων στη σχολική τάξη, ενώ θεωρεί ότι η ανάγνωση αποδείξεων μπορεί να ωφελήσει τους μαθητές που ενδιαφέρονται για τα μαθηματικά και είναι καλοί στα μαθηματικά, καθώς διευρύνει τη σκέψη τους. Η κατασκευή αποδείξεων από την άλλη, θεωρεί ότι μπορεί να ωφελήσει όλους τους μαθητές ανεξαρτήτως επιπέδου, καθώς θεωρεί ότι μπορεί να τους προσελκύσει στα μαθηματικά, αλλά δεν υπάρχει ο χρόνος για κάτι τέτοιο. Παρόλα αυτά θεωρεί ότι στη σχολική τάξη τουλάχιστον σε μια δύο αποδείξεις πρέπει οι μαθητές να είναι αυτοί που θα τις κατασκευάσουν. Κάποια παραδείγματα όσων αναφέρουν είναι:

Αμαλία: Ε νομίζω ότιι αποκτά μια πιο σταθερή και σοβαρή σχέση με τα μαθηματικά και τον προσελκύεις και στα μαθηματικά. Αλλά για να το κάνεις αυτό θες χρόνο να το κάνεις με όλα τα παιδιά αυτό. Καιι μαθητή μέτριο και με μέτριο μαθητή να το δοκιμάσεις αυτό το πράγμα πραγματικά τον ευχαριστεί (Αμαλία, γραμμές 453-456).

Αμαλία: Εεε, θεωρώ ότι αν μπορούσαν να κατασκευάζουν θα ήταν καλύτερο, πλέον έχει πιο πολύ ενδιαφέρον στην εποχή της πληροφορίας που ζούμε, αρκεί να τον πείσεις ότι πρέπει να κάνει κάτι τέτοιο (Αμαλία, γραμμές 509-511).

Αμαλία: Η κατασκευή, σε μικρότερες τάξεις τώρα μιλάμε όχι για τις πανελλαδικές, θεωρώ ότι θα είχε ενδιαφέρον (Αμαλία, γραμμές 519-520).

Τέλος οι δύο εκπαιδευτικοί αναφέρουν ότι χρησιμοποιούν παραδείγματα κατά τη διδασκαλία της απόδειξης, καθώς τα παραδείγματα ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών και όπως λέει η Αμαλία βοηθούν τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις.

Σόνια: Μέσα από το παράδειγμα το παιδί πιο εύκολα κατανοεί μερικά πράγματα, εεε, όχι μόνο παραδείγματα αλλά οτιδήποτε μπορεί να του μείνει περισσότερο στο μάτι. Μια ζωγραφική, μια γραφική παράσταση, μια χρωματιστή κιμωλία. Αυτά (Σόνια, γραμμές 476-479).

Αμαλία: Εεε, για να εγκαταστήσω και την αξία της απόδειξης στα παιδιά και να τα συνδέσω με κάτι πιο πρακτικό και να τους κεντρίσω το ενδιαφέρον λίγο πιο πολύ (Αμαλία, γραμμές 489-491).

4.5. Όψεις της απόδειξης στο βιβλίο του μαθητή και στο βιβλίο των λύσεων της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου

4.5.1. Λειτουργίες της απόδειξης στο βιβλίο του μαθητή και στο βιβλίο των λύσεων της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου

Μελετώντας το σχολικό εγχειρίδιο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου είναι φανερό πως χωρίζεται στη *θεωρία*, δηλαδή τα θεωρήματα, τα πορίσματα, τις ιδιότητες, τις *ανεπτυγμένες εφαρμογές*, οι οποίες αποτελούν πρότυπα λύσης της θεωρίας που παρουσιάζεται και τις *ασκήσεις προς λύση*. Όσον αφορά τις λειτουργίες της απόδειξης παρατηρούμε ότι τόσο στη θεωρία, όσο και στις ανεπτυγμένες εφαρμογές και στις αποδεικτικές ασκήσεις υπερτερεί η λειτουργία της συστηματοποίησης (βλέπε Πίνακα 13).

Πίνακας 13. Λειτουργίες της απόδειξης που προάγει το βιβλίο του μαθητή.

Ερευνητικό ερώτημα	Διαστάσεις	Θεωρία	Ανεπτυγμένες εφαρμογές	Σύνολο
Λειτουργίες της απόδειξης που επικοινωνεί το σχολικό εγχειρίδιο	Συστηματοποίηση	26	10	36
	Εξήγηση	22	3	25
	Επαλήθευση	7	3	10

Στην παρούσα μελέτη όπως ειπώθηκε και παραπάνω στη λειτουργία της συστηματοποίησης συμπεριλάβαμε την τοπική και ολική, με την έννοια της μη τοπικής. Πιο αναλυτικά, η τοπική συστηματοποίηση έχει να κάνει με το αν υπάρχει ή όχι σύνδεση-συνοχή των βημάτων εντός της απόδειξης, ενώ η ολική συστηματοποίηση έχει να κάνει με το αν υπάρχει ή όχι σύνδεση μεταξύ των αποδείξεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τοπικής συστηματοποίησης είναι οι αποδείξεις που χρησιμοποιούν το σύμβολο της ισοδυναμίας όπως η παρακάτω.

1. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta} &\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}=(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta})^{\nu}\\
&\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu}\cdot(\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}=\alpha\cdot\beta\\
&\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta, \qquad \text{που ισχύει.}
\end{aligned}
$$

Σχήμα 6. Παράδειγμα τοπικής συστηματοποίησης (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.71).

Από την άλλη χαρακτηριστικά παραδείγματα ολικής συστηματοποίησης είναι οι αποδείξεις, οι οποίες καλούν κάποια άλλη απόδειξη, κάποιο γνωστό θεώρημα, κάποια ιδιότητα ή κάποιον ορισμό. Τέτοιο παράδειγμα αποτελεί το παρακάτω, στο οποίο καλείται μια ιδιότητα των ανισοτήτων.

1ο Σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την αφαίρεση. Για παράδειγμα, είναι

$$10 > 6 \text{ και } 7 > 2, \text{ αλλά } 10 - 7 < 6 - 2.$$

Σχήμα 7. Παράδειγμα ολικής συστηματοποίησης (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.56).

Με δεδομένη την παραπάνω διάκριση η λειτουργία της συστηματοποίησης εμφανίζεται σχεδόν σε όλες τις αποδείξεις της θεωρίας, αφού από τις 29 που υπάρχουν συνολικά οι 26 εμφανίζουν είτε τοπική, είτε ολική, είτε και τοπική και ολική συστηματοποίηση. Παρόμοια εικόνα εμφανίζουν και οι ανεπτυγμένες εφαρμογές του βιβλίου του μαθητή με τη διαφορά ότι από αυτές δεν υπάρχει καμία που να μην εμφανίζει κάποιο είδους συστηματοποίησης.

Η δεύτερη σε εμφανίσεις λειτουργία (βλέπε Πίνακα 13) είναι η εξήγηση. Είναι φανερό πως το ποσοστό των εμφανίσεων της εξήγησης στη θεωρία είναι μεγαλύτερο από αυτό των εμφανίσεων της στις ανεπτυγμένες εφαρμογές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής που προάγει τη λειτουργία της εξήγησης είναι το παρακάτω, αφού εξηγεί στην αρχή αυτό που θέτει ως λ, ενώ στο τέλος επεξηγεί χρησιμοποιώντας τη λέξη «δηλαδή».

iv) Για $\beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$, αν θέσουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$, έχουμε:

$\alpha = \lambda\beta$ και $\gamma = \lambda\delta$, οπότε $\alpha + \gamma = \lambda(\beta + \delta)$.

Επομένως, $\lambda = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$.

Σχήμα 8. Παράδειγμα εφαρμογής που προάγει τη λειτουργία της εξήγησης (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.50).

Τελευταία σε εμφανίσεις λειτουργία είναι αυτή της επιβεβαίωσης με 3 εμφανίσεις σε αποδείξεις θεωρίας και 3 εμφανίσεις σε ανεπτυγμένες εφαρμογές. Η συγκεκριμένη λειτουργία εμφανίζεται κατά κύριο λόγο με τη χρήση της φράσης «που ισχύει» στο τέλος της απόδειξης. Για παράδειγμα έχουμε:

1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| &\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2, \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

Σχήμα 9. Παράδειγμα απόδειξης θεωρίας που προάγει τη λειτουργία της επιβεβαίωσης (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.63).

Όσον αφορά τις αποδεικτικές ασκήσεις, των οποίων οι λύσεις μελετήθηκαν από το βιβλίο των λύσεων της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 14, η λειτουργία με τις περισσότερες εμφανίσεις είναι αυτή της συστηματοποίησης με 44 εμφανίσεις, ενώ ακολουθούν η εξήγηση με 32 εμφανίσεις και η επιβεβαίωση με 15.

Πίνακας 14. Λειτουργίες της απόδειξης που προάγει το βιβλίο των λύσεων.

Ερευνητικό ερώτημα	Διαστάσεις	Αποδεικτικές ασκήσεις
Λειτουργίες της απόδειξης που επικοινωνεί το βιβλίο των λύσεων	Συστηματοποίηση	44
	Εξήγηση	32
	Επαλήθευση	15

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει μια σύγκλιση στη συχνότητα εμφάνισης των λειτουργιών της απόδειξης στο βιβλίο του μαθητή (θεωρία, ανεπτυγμένες εφαρμογές) και στο βιβλίο των λύσεων (λύσεις αποδεικτικών ασκήσεων).

4.5.2. Διδακτικές πρακτικές που προάγει το βιβλίο του μαθητή και το βιβλίο των λύσεων της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου

Όσον αφορά τις διδακτικές πρακτικές υπάρχουν αρκετές διαφοροποιήσεις μεταξύ της θεωρίας και των ανεπτυγμένων εφαρμογών. Πιο αναλυτικά, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 15 υπάρχουν 15 αποδείξεις της θεωρίας, μετά τις οποίες υπάρχουν εφαρμογές της θεωρίας που παρουσιάστηκε. Όπως είναι βέβαια αναμενόμενο, μετά τις ανεπτυγμένες εφαρμογές, εκτός μίας, δεν υπάρχουν περαιτέρω εφαρμογές που να στηρίζονται στις προηγούμενες.

Πίνακας 15. Διδακτικές-αποδεικτικές πρακτικές που προάγει το βιβλίο του μαθητή.

Ερευνητικό ερώτημα	Διαστάσεις	Θεωρία	Ανεπτυγμένες εφαρμογές	Σύνολο
Διδακτικές πρακτικές του βιβλίου του μαθητή	Εφαρμογή μετά την απόδειξη	15	1	16
	Παράδειγμα πριν την απόδειξη	2	0	2
	Σχήμα	1	2	3
	Δηλώνει ρητά ότι αποδεικνύεται	15	10	25
	Αποδείξεις μόνο με μαθηματικά σύμβολα	3	6	9
	Αποδείξεις μόνο με λόγια	0	0	0

Επιπλέον, από τις αποδείξεις της θεωρίας μόλις 3 είναι αυτές που χρησιμοποιούν μόνο μαθηματικά σύμβολά χωρίς λόγια, ενώ από τις ανεπτυγμένες εφαρμογές σχεδόν όλες είναι μόνο με μαθηματικά σύμβολα (9 από τις 10). Από την άλλη δεν υπάρχει καμία απόδειξη, ούτε στη θεωρία, ούτε στις ανεπτυγμένες εφαρμογές που να χρησιμοποιεί μόνο φυσική γλώσσα, χωρίς μαθηματικά σύμβολα.

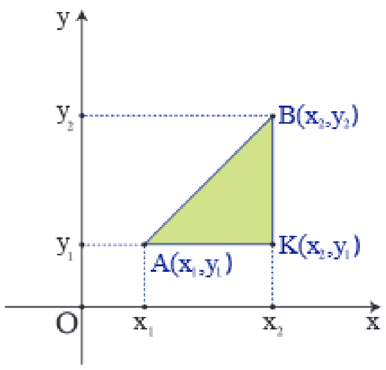
Όσον αφορά τη χρήση παραδειγμάτων πριν την απόδειξη, μόλις 2 αποδείξεις από τη θεωρία έχουν ένα παράδειγμα πριν, ενώ από τις ανεπτυγμένες εφαρμογές καμία. Επιπλέον, σχήμα περιέχουν 2 αποδείξεις από τις ανεπτυγμένες εφαρμογές και 1 από τη θεωρία, η παρακάτω.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $K\hat{A}B$ του διπλανού σχήματος έχουμε:

$$(AB)^2 = (KA)^2 + (KB)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

οπότε:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Σχήμα 10. Παράδειγμα απόδειξης θεωρίας που περιέχει σχήμα (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.154).

Τέλος, σε όλες τις ανεπτυγμένες εφαρμογές δηλώνεται ρητά ότι αποδεικνύονται και σχεδόν στις μισές της θεωρίας (15 από 29).

Όσον αφορά τις αποδεικτικές ασκήσεις (βλέπε Πίνακα 16) σε όλες δηλώνεται ρητά ότι αποδεικνύονται, αφού στην εκφώνηση τους αναφέρονται οι φράσεις «αποδείξτε ότι», «να δείξετε ότι» κλπ.

Πίνακας 16. Διδακτικές-αποδεικτικές πρακτικές που προάγει το βιβλίο των λύσεων.

Ερευνητικό ερώτημα	Διαστάσεις	Αποδεικτικές ασκήσεις
Διδακτικές πρακτικές του βιβλίου των λύσεων	Εφαρμογή μετά την απόδειξη	4
	Παράδειγμα πριν την απόδειξη	24
	Σχήμα	1
	Δηλώνει ρητά ότι αποδεικνύεται	78
	Αποδείξεις μόνο με μαθηματικά σύμβολα	26
	Αποδείξεις μόνο με λόγια	0

Όπως είναι φανερό, στις λύσεις των αποδεικτικών ασκήσεων έχουμε μια σημαντική αύξηση των αποδείξεων που χρησιμοποιούν μόνο μαθηματικά σύμβολα, σε σχέση με τη θεωρία, ενώ όπως ακριβώς και στη θεωρία και στις ανεπτυγμένες εφαρμογές, έτσι και στις ασκήσεις δεν υπάρχουν λύσεις γραμμένες μόνο με λόγια χωρίς μαθηματικά σύμβολα. Για παράδειγμα η παρακάτω απόδειξη χρησιμοποιεί μόνο μαθηματικά σύμβολα.

4. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(\alpha^{\mu})^{\rho}}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}.$$

Σχήμα 11. Παράδειγμα απόδειξης που χρησιμοποιεί μόνο μαθηματικά σύμβολα (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.71).

Σε αντίθεση με τη θεωρία και τις ανεπτυγμένες εφαρμογές, υπάρχουν αρκετές αποδεικτικές ασκήσεις προς λύση, πριν από τις οποίες υπάρχουν συγγενή με αυτές παραδείγματα. Παρακάτω παρατίθεται μια άσκηση, όπως επίσης και το παράδειγμα που υπάρχει πριν από αυτήν.

ii) Έχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Σχήμα 12. Παράδειγμα που προηγείται απόδειξης (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.58).

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$ **ii)** $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

Σχήμα 13. Η απόδειξη που έπεται του παραπάνω παραδείγματος (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.59).

Από την άλλη μεριά, μόνο 4 από τις 78 αποδεικτικές ασκήσεις έχουν κάποια εφαρμογή μετά, ενώ μόνο σε 1 υπάρχει σχήμα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα άσκησης με εφαρμογή είναι η παρακάτω.

1. Δίνεται η παράσταση $A = [(x^2y^3)^{-2} \cdot (xy^3)^4] : \left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$.

i) Να δείξετε ότι $A = x^9 \cdot y^9$.

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 2010$ και $y = \frac{1}{2010}$.

Σχήμα 14. Παράδειγμα άσκησης με εφαρμογή (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.52).

Συμπερασματικά, όσον αφορά τις λειτουργίες της απόδειξης τόσο στη θεωρία όσο και στις ασκήσεις φαίνεται να υπερτερεί η συστηματοποίηση (εσωτερική, εξωτερική, συνδυασμός εσωτερικής και εξωτερικής), ακολουθεί η εξήγηση και έπεται η επιβεβαίωση. Αξίζει να σημειωθεί ότι από τις 7 λειτουργίες που αναφέρει ο de Villiers (1990) στο σχολικό εγχειρίδιο εμφανίζονται οι 3. Επιπλέον, σχετικά με τις διδακτικές πρακτικές τόσο στη θεωρία όσο και στις ασκήσεις στο μεγαλύτερο ποσοστό τους δηλώνεται ρητά ότι αποδεικνύονται. Στη θεωρία υπάρχουν αρκετές εφαρμογές μετά, ενώ σε αρκετές ασκήσεις υπάρχουν παραδείγματα πριν. Επιπροσθέτως, είναι φανερό πως υπάρχει εκτεταμένη χρήση μαθηματικών συμβόλων, σε αρκετές δε περιπτώσεις γίνεται αποκλειστική χρήση αυτών. Τέλος, παρατηρούμε ότι στις αποδείξεις (θεωρία-ασκήσεις) δε χρησιμοποιούνται σχεδόν καθόλου σχήματα.

4.5.3. Σχέση μεθόδων απόδειξης με τις λειτουργίες της απόδειξης

Το σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου παρουσιάζει τις μεθόδους απόδειξης και συγκεκριμένα την ευθεία απόδειξη, την απαγωγή σε άτοπο και το αντιπαράδειγμα. Επιπλέον σε κάποιες αποδείξεις θεωρίας, αλλά και σε ορισμένες αποδεικτικές ασκήσεις χρησιμοποιεί την απόδειξη με ανάλυση. Στον Πίνακα 17 φαίνεται η κατηγοριοποίηση των Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2014) για τις αποδείξεις της θεωρίας (θεωρία και ανεπτυγμένες εφαρμογές) με βάση τη μέθοδο απόδειξης που χρησιμοποιείται σε αυτές και στον Πίνακα 18 η κατηγοριοποίηση των Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2014) των αποδεικτικών ασκήσεων με βάση το ίδιο κριτήριο.

Πίνακας 17. Μέθοδοι απόδειξης του βιβλίου του μαθητή.

Μέθοδοι απόδειξης	Θεωρία	Ανεπτυγμένες εφαρμογές	Σύνολο
Ευθεία	22	6	28
Απαγωγή σε άτοπο	1	1	2
Απόδειξη με ανάλυση	4	3	7
Αντιπαράδειγμα	3	0	3

Πίνακας 18. Μέθοδοι απόδειξης του βιβλίου των λύσεων.

Μέθοδοι απόδειξης	Αποδεικτικές ασκήσεις
Ευθεία	58
Απαγωγή σε άτοπο	2
Απόδειξη με ανάλυση	17
Αντιπαράδειγμα	0
Εύρεση λάθους σε συλλογισμό	1

Όπως είναι φανερό, οι περισσότερες αποδείξεις τόσο στη θεωρία, όσο και στις αποδεικτικές ασκήσεις χρησιμοποιούν την ευθεία απόδειξη, ενώ δεύτερη σε εμφανίσεις είναι η απόδειξη με ανάλυση, με 7 εμφανίσεις στη θεωρία και 17 στις ασκήσεις. Η απαγωγή σε άτοπο χρησιμοποιείται ελάχιστα τόσο στη θεωρία όσο και στις ασκήσεις, ενώ το αντιπαράδειγμα εμφανίζεται μόνο σε 3 αποδείξεις στη θεωρία και σε καμία αποδεικτική άσκηση. Τέλος υπάρχει και 1 άσκηση όπου ζητείται η εύρεση λάθους σε συλλογισμό.

Όσων αφορά τις μεθόδους απόδειξης σε σχέση με τις λειτουργίες της απόδειξης, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 19, σχεδόν όλες οι αποδείξεις της θεωρίας (19 από τις 22), όλες οι ανεπτυγμένες εφαρμογές και σχεδόν οι μισές από τις αποδεικτικές ασκήσεις που χρησιμοποιούν τη ευθεία απόδειξη, ενισχύουν τη λειτουργία της συστηματοποίησης (ολική, τοπική ή συνδυασμός των δύο). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποδεικτής άσκησης με ευθεία απόδειξη, που προάγει τη συστηματοποίηση και μάλιστα και την ολική (καλώντας άλλη ιδιότητα) και την τοπική (με τη χρήση της λέξης «οπότε»), είναι το παρακάτω.

5. i) <u>α΄ τρόπος</u>: Με γενίκευση της ιδιότητας 1iv) των αναλογιών (βλ. εφαρμογή 1, σελ. 26) έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma+\alpha}=1,$$

οπότε $\alpha=\beta=\gamma$.

Σχήμα 15. Παράδειγμα άσκησης με ευθεία απόδειξη, που προάγει τη συστηματοποίηση (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.53).

Επιπλέον, στα ίδια περίπου επίπεδα είναι και τα ποσοστά των αποδείξεων που ενισχύουν την κατανόηση, δηλαδή προάγουν τη λειτουργία της εξήγησης, με μόνη διαφορά τις ανεπτυγμένες εφαρμογές που το ποσοστό πέφτει στο μισό σε σχέση με πριν. Όσο για την επαλήθευση εμφανίζεται σε μόλις 2 από τις αποδείξεις της θεωρίας με ευθεία απόδειξη.

Πίνακας 19. Σχέση μεθόδων απόδειξης και λειτουργιών απόδειξης.

Λειτουργίες	Ευθεία				Απόδειξη με ανάλυση				Απαγωγή σε άτοπο				Αντιπαράδειγμα			
	Θ	Ε	Α	Σ	Θ	Ε	Α	Σ	Θ	Ε	Α	Σ	Θ	Ε	Α	Σ
Συστηματοποίηση	19	6	24	49	4	3	17	24	1	1	2	4	2	0	0	2
Εξήγηση	17	3	22	42	2	0	9	11	0	1	2	3	3	0	0	3
Επαλήθευση	2	0	0	2	4	3	14	21	0	0	0	0	0	0	0	0

* Με το γράμμα Θ συμβολίζονται οι αποδείξεις της θεωρίας, με το γράμμα Ε οι ανεπτυγμένες εφαρμογές, με το γράμμα Α οι αποδεικτικές ασκήσεις και με το γράμμα Σ το σύνολο.

Στις αποδείξεις με ανάλυση παρατηρούμε μείωση των αποδείξεων που ενισχύουν τη συστηματοποίηση με 4 εμφανίσεις στις αποδείξεις της θεωρίας, 3 στις εφαρμογές και 17 στις αποδεικτικές ασκήσεις. Μείωση επίσης παρατηρείται και στη λειτουργία της εξήγησης, με 2 αποδείξεις θεωρίας να προάγουν την εξήγηση, και 9 αποδεικτικές ασκήσεις. Μία από τις αποδεικτικές ασκήσεις, με απόδειξη με ανάλυση, που προάγει την εξήγηση με τη χρήση της λέξης «επειδή» είναι η παρακάτω.

6. Επειδή $(1+\alpha)(1+\beta)>0$ έχουμε

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha}(1+\alpha)(1+\beta)<\frac{\beta}{1+\beta}(1+\alpha)(1+\beta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(1+\beta)<\beta(1+\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\alpha\beta<\beta+\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha<\beta, \text{ που ισχύει.}$$

Σχήμα 16. Παράδειγμα άσκησης με απόδειξη με ανάλυση, που προάγει την εξήγηση (Βιβλίο λύσεων Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.18).

Τέλος σημαντική αύξηση παρουσιάζει η εμφάνιση της λειτουργίας της επαλήθευσης, ιδιαίτερα στις αποδεικτικές ασκήσεις. Συγκεκριμένα από τις 17 αποδεικτικές ασκήσεις που χρησιμοποιείται η απόδειξη με ανάλυση οι 14 ενισχύουν τη λειτουργία της επαλήθευσης κυρίως με τη χρήση της φράσης «που ισχύει». Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το παρακάτω.

3. i) Αρκεί να δείξουμε τα $f(x)\geq f(3)$. Έχουμε

$$f(x)\geq f(3) \Leftrightarrow x^2-6x+10\geq 3^2-6\cdot 3+10 \Leftrightarrow (x-3)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Σχήμα 17. Παράδειγμα άσκησης με απόδειξη με ανάλυση, που προάγει την επαλήθευση (Βιβλίο λύσεων Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.91).

Όσον αφορά τις αποδείξεις με απαγωγή σε άτοπο, τόσο αυτές της θεωρίας όσο και των ασκήσεων, ενισχύουν τη λειτουργία της συστηματοποίησης με χαρακτηριστικό το παρακάτω παράδειγμα, όπου χρησιμοποιείται η λέξη «τότε».

7. Θα εργασθούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

i) Ας υποθέσουμε ότι $\alpha + \beta = \gamma \in \mathbb{Q}$. Τότε θα είναι $\beta = \gamma - \alpha \in \mathbb{Q}$ (ως διαφορά ρητών), που είναι άτοπο.

Σχήμα 18. Παράδειγμα άσκησης με απαγωγή σε άτοπο, που προάγει τη συστηματοποίηση (Βιβλίο λύσεων Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.16).

Επιπλέον, η λειτουργία της εξήγησης εμφανίζεται στη μια εφαρμογή με απαγωγή σε άτοπο που υπάρχει στο βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου και στις 2 αποδεικτικές ασκήσεις. Τέλος, στις αποδείξεις με απαγωγή σε άτοπο δεν εμφανίζεται καθόλου η λειτουργία της επαλήθευσης.

Τέλος, όσον αφορά τις 3 αποδείξεις θεωρίας με αντιπαράδειγμα, οι οποίες εμφανίζονται σε σχόλια, όλες εμφανίζουν τη λειτουργία της εξήγησης, οι 2 τη λειτουργία της συστηματοποίησης και καμία τη λειτουργία της επιβεβαίωσης. Στο παρακάτω παράδειγμα εμφανίζονται η συστηματοποίηση, καλώντας την ιδιότητα και με τη χρήση της λέξης «προκύπτει», και η εξήγηση, με τη χρήση της φράσης «για παράδειγμα».

1ο Σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την αφαίρεση. Για παράδειγμα, είναι

$$10 > 6 \text{ και } 7 > 2, \text{ αλλά } 10 - 7 < 6 - 2.$$

Σχήμα 19. Παράδειγμα απόδειξης με αντιπαράδειγμα που ενισχύει τη συστηματοποίηση και την εξήγηση (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.56)

Συνοψίζοντας, στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου παρουσιάζονται οι μέθοδοι απόδειξης (ευθεία, απαγωγή σε άτοπο, αντιπαράδειγμα), ενώ σε κάποιες αποδείξεις, είτε στη θεωρία, είτε στις αποδεικτικές ασκήσεις, χρησιμοποιείται και η απόδειξη με ανάλυση. Η πλειοψηφία των αποδείξεων γίνεται με την ευθεία απόδειξη τόσο στη θεωρία, όσο και στις ασκήσεις. Επιπλέον, όσον αφορά τις μεθόδους απόδειξης σε σχέση με τις λειτουργίες της απόδειξης, οι περισσότερες ευθείες αποδείξεις ενισχύουν τη συστηματοποίηση και την εξήγηση, ενώ στις αποδείξεις με ανάλυση εμφανίζονται η συστηματοποίηση και η επαλήθευση. Τέλος, οι ελάχιστες αποδείξεις με απαγωγή σε άτοπο και με αντιπαράδειγμα ενισχύουν τη συστηματοποίηση και την κατανόηση, δηλαδή την εξήγηση.

4.5.4. Σχέση μεθόδων απόδειξης με τις διδακτικές πρακτικές

Όσον αφορά τις διδακτικές πρακτικές σε σχέση με τις μεθόδους απόδειξης, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 20, στις μισές αποδείξεις θεωρίας με ευθεία απόδειξη δηλώνεται ρητά ότι αποδεικνύονται, όπως και σε όλες τις ανεπτυγμένες εφαρμογές και αποδεικτικές ασκήσεις που χρησιμοποιούν την ευθεία απόδειξη. Χαρακτηριστικό αυτής της δήλωσης είναι είτε η λέξη «απόδειξη» πριν την απόδειξη, είτε όπως το παρακάτω παράδειγμα η φράση «αποδείξτε ότι» στην εκφώνηση.

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Τα σημεία Α(1,2), Β(4,−2) και Γ(−3,5) είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

ii) Τα σημεία Α(1,−1), Β(−1,1) και Γ(4,2) είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

Σχήμα 20. Παράδειγμα άσκησης που δηλώνεται ρητά ότι αποδεικνύεται (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.158).

Πίνακας 20. Σχέση μεθόδων απόδειξης και αποδεικτικών πρακτικών.

Διδακτικές πρακτικές	Ευθεία				Απόδειξη με ανάλυση				Απαγωγή σε άτοπο				Αντιπαράδειγμα			
	Θ	Ε	Α	Σ	Θ	Ε	Α	Σ	Θ	Ε	Α	Σ	Θ	Ε	Α	Σ
Εφαρμογή μετά την απόδειξη	15	1	4	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Παράδειγμα πριν την απόδειξη	2	0	19	21	0	0	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0
Σχήμα	2	1	1	4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Δηλώνει ρητά ότι αποδεικνύεται	11	6	58	75	4	3	17	24	1	1	2	4	0	0	0	0
Αποδείξεις μόνο με μαθηματικά σύμβολα	1	3	26	30	2	3	2	7	0	0	0	0	0	0	0	0
Αποδείξεις μόνο με λόγια	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Επιπλέον, σε όλες τις αποδείξεις με ανάλυση και απαγωγή σε άτοπο (θεωρία, ασκήσεις) δηλώνεται ρητά ότι αποδεικνύονται, ενώ δε δηλώνεται ότι πρόκειται για αποδείξεις σε καμία από τις 3 αποδείξεις με αντιπαράδειγμα.

Σχετικά με τις ευθείες αποδείξεις που χρησιμοποιούν μόνο μαθηματικά σύμβολα και καθόλου φυσική γλώσσα παρατηρούμε ότι στη θεωρία υπάρχει μόνο μια τέτοια απόδειξη, ενώ το ποσοστό ανεβαίνει αρκετά τόσο στις ανεπτυγμένες εφαρμογές (3 στις 6), όσο και στις ασκήσεις (26 στις 58). Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιας άσκησης είναι το παρακάτω.

2. i) Είναι

$$\Delta = \left(5-\sqrt{2}\right)^2 - 4\left(6-3\sqrt{2}\right) = 25 - 10\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 24 + 12\sqrt{2} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} + 1 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2.$$

Σχήμα 21. Παράδειγμα άσκησης που χρησιμοποιεί μόνο μαθηματικά σύμβολα (Βιβλίο λύσεων Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.42).

Επιπροσθέτως, από τις αποδείξεις με ανάλυση, οι μισές από τη θεωρία και οι μισές από τις εφαρμογές χρησιμοποιούν μόνο μαθηματικά σύμβολα, ενώ μόνο οι 2 από τις 17 ασκήσεις είναι τέτοιου τύπου. Τέλος, καμία από τις αποδείξεις με απαγωγή σε άτοπο, όπως και καμία με αντιπαράδειγμα δεν κάνουν αποκλειστική χρήση των συμβόλων, καθώς χρησιμοποιούν και φυσική γλώσσα.

Όπως είχαν αναφέρει και οι εκπαιδευτικοί στις συνεντεύξεις τους είναι σημαντικό πριν από τις αποδείξεις να γίνονται στην τάξη παραδείγματα, καθώς αυτά ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών και τους βοηθούν να κάνουν συνδέσεις. Αυτό όμως δε φαίνεται να συμβαίνει και στο σχολικό βιβλίο, ιδιαίτερα στο μέρος της θεωρίας. Πιο αναλυτικά, παραδείγματα υπάρχουν πριν από μόλις 2 ευθείες αποδείξεις θεωρίας, ενώ δεν υπάρχουν πριν από καμία ανεπτυγμένη εφαρμογή. Παρακάτω παρατίθεται το παράδειγμα που δίνεται πριν την απόδειξη του τύπου του αθροίσματος των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου. Αξίζει να σημειωθεί ότι το βιβλίο δεν αναφέρει ρητά ότι πρόκειται για παράδειγμα, ενώ χαρακτηριστικά αναφέρει ότι χρησιμοποιώντας την παρακάτω διαδικασία σε μια οποιαδήποτε πρόοδο μπορούμε να αποδείξουμε το γενικό τύπο του αθροίσματος.

Ας θεωρήσουμε την αριθμητική πρόοδο 1, 2, 3, 4, ... και ας βρούμε το άθροισμα 100 πρώτων όρων της

$$S_{100}=1+2+3+...+98+99+100$$

Αντί να προσθέσουμε τους αριθμούς αυτούς με τον συνήθη τρόπο, μπορούμε να βρ συντομότερα το άθροισμά τους ως εξής:
Γράφουμε δυο φορές το παραπάνω άθροισμα, αλλά με αντίθετη τη σειρά των προσθ ων και προσθέτουμε τις δυο ισότητες κατά μέλη:

$$S_{100}=1+2+3+...+98+99+100$$

$$S_{100}=100+99+98+...+3+2+1$$

$$2S_{100}=(1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$

$$\text{ή}\quad 2S_{100}=101+101+101+...+101+101+101$$

$$\text{ή}\quad 2S_{100}=100\cdot 101,\ \text{άρα}\ S_{100}=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$$

Σχήμα 22. Παράδειγμα που δίνεται πριν από απόδειξη (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.127).

Επιπλέον, 19 από τις 58 ασκήσεις με ευθεία απόδειξη και 5 από τις 17 με απόδειξη με ανάλυση έχουν ένα παράδειγμα πριν, ενώ δεν υπάρχει παράδειγμα πριν από καμία απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο, ούτε πριν από τις αποδείξεις με αντιπαράδειγμα. Παρακάτω παρατίθεται μια άσκηση με ευθεία απόδειξη, καθώς και το παράδειγμα που δίνεται πριν από αυτήν.

1. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 2(\sqrt{3}+1)x + 4\sqrt{3} = 0$.

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = 4(\sqrt{3}+1)^2 - 4\cdot 4\sqrt{3} = 4[(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1] = 4(\sqrt{3}-1)^2$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τις

$$x_{1,2} = \frac{2(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{4(\sqrt{3}-1)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}+2 \pm 2(\sqrt{3}-1)}{2} = \begin{cases} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{cases}$$

Σχήμα 23. Παράδειγμα που δίνεται πριν από άσκηση με ευθεία απόδειξη (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.91).

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (5-\sqrt{2})x + 6 - 3\sqrt{2} = 0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (1+\sqrt{2})^2$.

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι 3 και $2-\sqrt{2}$.

Σχήμα 24. Η άσκηση πριν από την οποία παρατίθεται το παραπάνω παράδειγμα (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.95).

Στο ίδιο πλαίσιο με το παράδειγμα εντάσσονται και οι εφαρμογές που υπάρχουν μετά τις αποδείξεις, καθώς και αυτές ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών. Στο σχολικό βιβλίο, υπάρχουν αρκετές εφαρμογές μετά τις αποδείξεις θεωρίας, ενώ όπως είναι λογικό υπάρχουν ελάχιστες μετά τις ανεπτυγμένες εφαρμογές και τις αποδεικτικές ασκήσεις. Πιο αναλυτικά, εφαρμογές έχουμε μόνο μετά από ευθείες αποδείξεις και συγκεκριμένα μετά από 15 ευθείες αποδείξεις θεωρίας, μετά από μια ανεπτυγμένη εφαρμογή και μετά από 4 αποδεικτικές ασκήσεις. Για παράδειγμα μετά την απόδειξη ύπαρξης 2 λύσεων όταν η διακρίνουσα είναι θετική υπάρχει η παρακάτω εφαρμογή.

Για παράδειγμα

✓ Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$ έχει $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$, οπότε έχει δυο ρίζες, τις

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{1}}{2\cdot 2} = 1 \text{ και } x_2 = \frac{3-\sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Σχήμα 25. Παράδειγμα εφαρμογής που υπάρχει μετά από απόδειξη (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.90).

Επίσης, χαρακτηριστικό παράδειγμα άσκησης, που αποδεικνύεται με ευθεία απόδειξη και ακολουθείται από εφαρμογή είναι αυτή στο Σχήμα 14, στην οποία το δεύτερο ερώτημα είναι εφαρμογή του πρώτου.

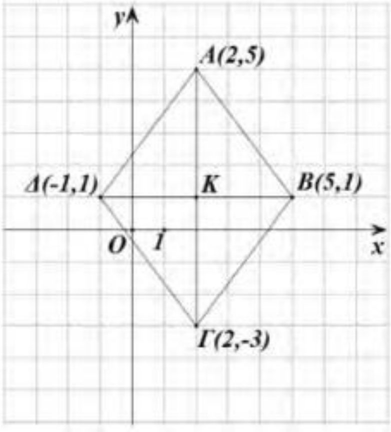
Σχετικά με τη χρήση σχημάτων παρατηρούμε ότι τόσο στις αποδείξεις θεωρίας, όσο στις εφαρμογές και στις ασκήσεις, είναι σπάνια. Πιο αναλυτικά, σχήμα υπάρχει σε 2 ευθείες αποδείξεις θεωρίας, σε 1 ανεπτυγμένη εφαρμογή με ευθεία απόδειξη και σε 1 άσκηση με ευθεία απόδειξη. Χαρακτηριστική είναι η παρακάτω άσκηση, η οποία ζητά το σχήμα από την εκφώνηση. Παρακάτω παρατίθεται και το σχήμα, όπως δίνεται από το βιβλίο των λύσεων.

6. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία:

$$A(2,5),\ B(5,1),\ \Gamma(2,-3),\ \Delta(-1,1)$$

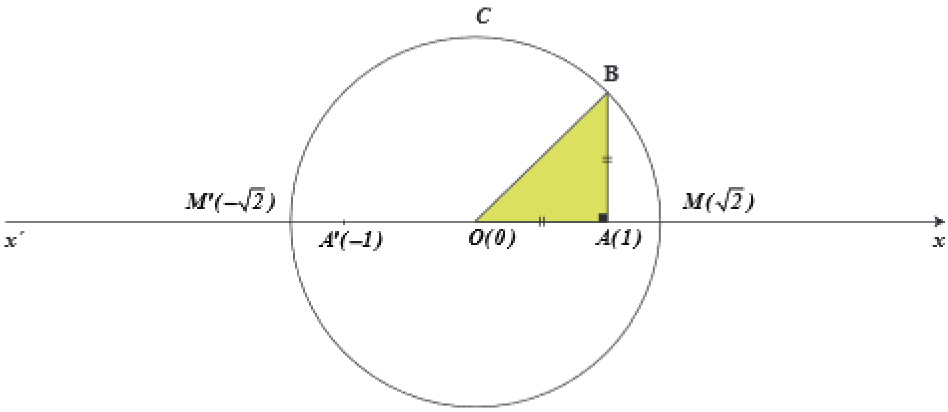
και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό είναι ρόμβος.

Σχήμα 26. Παράδειγμα άσκησης με σχήμα (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.158).



Σχήμα 27. Το σχήμα της παραπάνω άσκησης (Βιβλίο λύσεων Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.82).

Όσον αφορά τις αποδείξεις με ανάλυση, σε καμία δε δίνεται σχήμα, ενώ για τις αποδείξεις με απαγωγή σε άτοπο μόνο σε 1 δίνεται σχήμα και μάλιστα όχι στην απόδειξη αυτή καθεαυτή. Πιο συγκεκριμένα η εφαρμογή αποδεικνύει ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και στη συνέχεια τοποθετούνται οι άρρητοι $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.



Στο σημείο Α του πραγματικού άξονα που παριστάνει τον αριθμό 1 υψώνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ με μήκος 1. Τότε η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$. Στη συνέχεια με κέντρο το Ο και ακτίνα $OB=\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Μ και Μ′ που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντιστοίχως.

Σχήμα 28. Παράδειγμα σχήματος μέσα σε εφαρμογή (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.51).

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ υπάρχουν αποδείξεις, οι οποίες χρησιμοποιούν μόνο μαθηματικά σύμβολα, δεν υπάρχει καμία απόδειξη η οποία να χρησιμοποιεί μόνο τη φυσική γλώσσα.

Συνοψίζοντας, στην πλειοψηφία των αποδείξεων, με οποιαδήποτε μέθοδο κι αν αποδεικνύονται, στο βιβλίο δηλώνεται ρητά ότι αποδεικνύονται, εκτός από αυτές με αντιπαράδειγμα. Επιπλέον, η αποκλειστική χρήση μαθηματικών συμβόλων εμφανίζεται σε κάποιες ευθείς αποδείξεις και σε αποδείξεις με ανάλυση, αλλά κυρίως στις αποδεικτικές ασκήσεις και όχι στη θεωρία. Όσον αφορά τη χρήση παραδειγμάτων πριν τις αποδείξεις έχουμε στις ευθείες αποδείξεις και στις αποδείξεις με ανάλυση και πάλι κυρίως στις ασκήσεις. Επιπροσθέτως, σχετικά με τις εφαρμογές μετά τις αποδείξεις, υπάρχουν μόνο μετά από ευθείες αποδείξεις και κυρίως μετά από ευθείες αποδείξεις θεωρίας. Τέλος, σχήματα υπάρχουν ελάχιστα, σε 4 ευθείες αποδείξεις και σε 1 απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο, ενώ δεν υπάρχουν καθόλου αποδείξεις χωρίς μαθηματικά σύμβολα.

4.6. Προσεγγίζοντας τα φαινόμενα υπό μια συστημική οπτική: δύο μελέτες περίπτωσης

4.6.1. Πεποιθήσεις για την απόδειξη: Σύστημα Σόνια

Όσον αφορά τις πεποιθήσεις των μαθητών της Σόνιας για την απόδειξη, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα, οι μαθητές φαίνεται να συμφωνούν περισσότερο με τις δηλώσεις που σχετίζονται με τη δομή και την αιτιολόγηση, δηλαδή με τις δηλώσεις του παράγοντα Εγκυρότητα και ιδιαίτερα με τη δήλωση «Μια απόδειξη στα μαθηματικά επιβεβαιώνει την αλήθεια ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης», με την οποία φαίνεται να συμφωνούν περισσότερο από ότι με οποιαδήποτε άλλη δήλωση (*Mdn=4,*5). Αυτό ίσως οφείλεται στο ότι αυτές οι δύο εκφάνσεις της εγκυρότητας σχετίζονται με τη λειτουργία της συστηματοποίησης, η οποία όπως είδαμε αναφέρεται συχνά από τη Σόνια. Χαρακτηριστικά ανέφερε:

> Σόνια: Η απόδειξη στα μαθηματικά είναι ουσιαστικά μια τεκμηρίωση μια τεκμηριωμένη άποψη δεν είναι μόνο θεωρίες, αλλά με λογικά βήματα και στηριζόμενοι σε αξιώματα βγάζουμε τα συμπεράσματά μας (Σόνια, γραμμές 12-14).

Επιπλέον, η παραπάνω πεποίθηση ίσως σχετίζεται και με το γεγονός ότι στην πλειοψηφία των αποδείξεων του σχολικού βιβλίου , τόσο στη θεωρία όσο και στις αποδεικτικές ασκήσεις, εμφανίζεται η λειτουργία της συστηματοποίησης, με την έννοια της δομής και της συνοχής (είτε τοπικής, είτε ολικής).

Πίνακας 21. Περιγραφικά αποτελέσματα των πεποιθήσεων των μαθητών της Σόνιας για την απόδειξη.

	M	*Mdn*
Μια απόδειξη στα μαθηματικά επιβεβαιώνει την αλήθεια ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.	4,3	4,5
Αν αποδειχθεί ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά, μπορώ να είμαι βέβαιος/βέβαια ότι είναι αληθές.	3,6	4,0
Παραδείγματα που εξηγούν το συμπέρασμα δε με βοηθούν πάντοτε να καταλάβω γιατί είναι αληθές.	3,3	3,0
Η απόδειξη είναι απαραίτητη στα μαθηματικά.	3,6	3,0
Δε βλέπω το νόημα του να κάνω αποδείξεις, αφού όλα τα συμπεράσματα στο μάθημα έχουν ήδη αποδειχθεί χωρίς αμφιβολία	1,9	2,0
Μόνο οι καλοί μαθητές πρέπει να ασχολούνται με τις αποδείξεις.	1,4	1,0
Μου αρέσει να αποδεικνύω θεωρήματα και προτάσεις στα μαθηματικά.	3,0	3,0
Η απόδειξη ενός θεωρήματος με βοηθά να καταλάβω γιατί το θεώρημα είναι αληθές.	3,9	4,0
Η ανάγνωση της απόδειξης μιας πρότασης σε ένα βιβλίο με βοηθά να καταλάβω γιατί η πρόταση είναι αληθής.	3,7	4,0
Διαφορετικές αποδείξεις ενός θεωρήματος με βοηθούν να το καταλάβω καλύτερα.	3,6	4,0
Μια απόδειξη στα μαθηματικά βασίζεται σε άλλα μαθηματικά συμπεράσματα.	3,3	3,0
Η απόδειξη δείχνει το πώς συνδέονται τα πάντα στα μαθηματικά.	3,4	3,0
Η απόδειξη βοηθά να δούμε ότι προφανή συμπεράσματα δεν είναι αναγκαστικά/σίγουρα αληθή πριν αποδειχθούν.	3,4	3,5
Οι αποδείξεις δείχνουν την ομορφιά της επιστήμης των μαθηματικών.	3,2	3,0
Δε μπορούν να τα καταφέρουν όλοι οι μαθητές με την απόδειξη, παρά μόνο αυτοί που είναι καλοί στα μαθηματικά.	2,3	2,0

Η απόδειξη είναι μια δομή αιτιολόγησης, όπου τα διάφορα βήματα βασίζονται σε λογική, σε γνωστά θεωρήματα/προτάσεις και γνωστούς ορισμούς.	3,8	4,0
Δε μπορώ να πιστέψω τις προτάσεις χωρίς απόδειξη.	3,0	3,0
Η απόδειξη είναι μια ακολουθία λογικών προτάσεων που συνεπάγονται η μία την άλλη, μια λογική παραγωγή συμπερασμάτων.	3,6	4,0
Η απόδειξη ενισχύει τη λογική σκέψη.	3,6	4,0
Η απόδειξη μερικές φορές αποκαλύπτει την ανακρίβεια μιας μαθηματικής πρότασης που φαίνεται σωστή .	3,3	4,0
Η απόδειξη είναι φτιαγμένη για να πείσουμε κάποιον για τους ισχυρισμούς μας.	3,4	4,0
Η απόδειξη μπορεί να μας οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις στα μαθηματικά.	3,4	3,5
Νομίζω ότι δεν είναι χρήσιμο να κάνουμε αποδείξεις, διότι με μπερδεύει.	2,2	2,0
Οι αποδείξεις δείχνουν από που προέρχονται οι μαθηματικές σχέσεις.	3,7	4,0
Οι αποδείξεις απαντούν στο γιατί ισχύουν θεωρήματα και προτάσεις χωρίς καμία αμφιβολία.	3,2	3,0
Οι αποδείξεις εξηγούν μια μαθηματική έκφραση/σχέση με τη βοήθεια της γνώσης που έχει ήδη αποκτηθεί.	3,6	4,0
Με τις αποδείξεις τα καταφέρνουν μόνο οι μαθητές που έχουν κλίση στα μαθηματικά.	2,2	2,0
Αν ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά είναι προφανές, τότε δεν έχει νόημα να το αποδείξουμε.	1,7	1,0
Η απόδειξη είναι η αιτιολόγηση που δείχνει την εγκυρότητα ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.	3,8	4,0

Από την άλλη μεριά, φαίνεται οι μαθητές της Σόνιας να διαφωνούν περισσότερο με τις δηλώσεις του παράγοντα Μόνο για μερικούς με χαρακτηριστική τη δήλωση «Μόνο οι καλοί μαθητές πρέπει να ασχολούνται με τις αποδείξεις» με την οποία διαφωνούν πολύ (*Mdn=1,0*). Παρόλα αυτά η Σόνια αναφέρει ότι οι μαθητές που συμμετέχουν στην τάξη κατά την κατασκευή των αποδείξεων είναι αυτοί που τους αρέσουν τα μαθηματικά. Χαρακτηριστικά αναφέρει:

> Σόνια: Κάποιοι ναι, κάποιοι όχι. Και συνήθως αυτοί που συμμετέχουν είναι αυτοί που αν θέλετε έχουν κάνει μια προεργασία στο σπίτι τους ή κάποιοι που… το … πως να το πω… τους αρέσει να ασχολούνται με τα μαθηματικά (Σόνια, γραμμές 310-312).

Όσον αφορά τις δηλώσεις που σχετίζονται με την κατανόηση, παρατηρούμε ότι οι μαθητές της Σόνιας ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν με αυτές, εκτός από τη δήλωση «Διαφορετικές αποδείξεις ενός θεωρήματος με βοηθούν να το καταλάβω καλύτερα» με την οποία συμφωνούν (*Mdn=4,0*). Το γεγονός ότι ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν με τις δηλώσεις αυτού του παράγοντα, ίσως σχετίζεται με το ότι η Σόνια, όπως αναφέρει η ίδια, θεωρεί ότι οι αποδείξεις στην Άλγεβρα δε συμβάλλουν στην κατανόηση όσο στη Γεωμετρία. Επιπλέον, το γεγονός ότι συμφωνούν με την παραπάνω δήλωση, ίσως σχετίζεται με το ότι η Σόνια σε ορισμένες αποδεικτικές ασκήσεις διδάσκει περισσότερες από μια λύσεις, όπως προτείνει και το βιβλίο των λύσεων.

Σχετικά με τις δηλώσεις που φορτίστηκαν στον παράγοντα Βεβαιότητα για την αλήθεια, παρατηρούμε ότι οι μαθητές της Σόνιας συμφωνούν με αυτές, με εξαίρεση τη δήλωση «Οι αποδείξεις απαντούν στο γιατί ισχύουν θεωρήματα και προτάσεις χωρίς καμία αμφιβολία», με την οποία ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν (*Mdn=3,0*). Η παραπάνω πεποίθηση των μαθητών, ίσως σχετίζεται με το γεγονός ότι η Σόνια αναφέρει ότι η απόδειξη είναι σημαντική στα μαθηματικά, καθώς επαληθεύει και εξηγεί την αποκτηθείσα γνώση. Επιπλέον, η επιβεβαίωση είναι μια λειτουργία, η οποία εμφανίζεται και σε μερικές αποδείξεις στο σχολικό βιβλίο και το βιβλίο των λύσεων.

Τέλος, όσον αφορά τις δηλώσεις που σχετίζονται με την εξήγηση, οι μαθητές της Σόνιας συμφωνούν με τις δηλώσεις «Η απόδειξη ενός θεωρήματος με βοηθά να καταλάβω γιατί το θεώρημα είναι αληθές» και «Η ανάγνωση της απόδειξης μιας πρότασης σε ένα βιβλίο με βοηθά να καταλάβω γιατί η πρόταση είναι αληθής» (*Mdn=4,0*). Αυτό ίσως σχετίζεται με το γεγονός ότι η Σόνια αναφέρει ότι η απόδειξη προάγει την εξήγηση, ενώ η εξήγηση εμφανίζεται και σε αρκετές αποδείξεις του σχολικού βιβλίου, είτε με λέξεις όπως το «δηλαδή» είτε με σχήμα, είτε με παράδειγμα κ.α.

Από την άλλη με τη δήλωση «Παραδείγματα που εξηγούν το συμπέρασμα δε με βοηθούν πάντοτε να καταλάβω γιατί είναι αληθές» οι μαθητές της Σόνιας ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν (*Mdn=3,0*), παρόλο που η Σόνια αναφέρει ότι χρησιμοποιεί παραδείγματα κατά τη διδασκαλία της απόδειξης, αφού θεωρεί ότι τα παραδείγματα ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών. Από την άλλη στο σχολικό βιβλίο υπάρχουν ελάχιστα παραδείγματα, γεγονός που ίσως εξηγεί την παραπάνω πεποίθηση των μαθητών.

4.6.2. Αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων: Σύστημα Σόνια

Όσον αφορά την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων οι μαθητές της Σόνιας φαίνεται να θεωρούν πιο πειστικά τόσο για τον εαυτό τους όσο και για τους συμμαθητές τους την ευθεία απόδειξη και την απαγωγή σε άτοπο, γεγονός που ίσως από τη μια οφείλεται στη συχνότητα χρήσης της ευθείας απόδειξης και της απαγωγής σε άτοπο από τη Σόνια και από την άλλη στη συχνότητα εμφάνισης αυτών των μεθόδων απόδειξης στο σχολικό βιβλίο.

Σχετικά με το ποιο επιχείρημα τους πείθει λιγότερο, ανάλογα με την πρόταση είναι είτε το κρίσιμο πείραμα είτε το γενικό παράδειγμα, κάτι που ίσως σημαίνει ότι δεν τα διακρίνουν και θεωρούν ότι είναι το ίδιο, δηλαδή η δοκιμή μιας και μόνο περίπτωσης. Επίσης, είναι πιθανό να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές έχουν εσωτερικεύσει την πεποίθηση ότι η δοκιμή μιας περίπτωσης δεν αρκεί, ώστε αυτή να θεωρηθεί απόδειξη, ενώ φαίνεται να σχετίζεται και με το γεγονός ότι στο σχολικό βιβλίο δεν υπάρχουν τέτοιου είδους επιχειρήματα.

Η Σόνια από την άλλη, σε κάθε περίπτωση θεωρεί πιο πειστικό για τους μαθητές το εμπειρικό επιχείρημα, με μόνη εξαίρεση την Πρόταση 4 που θεωρεί πιο πειστική την ευθεία απόδειξη, όπως και οι μαθητές της. Λιγότερο πειστική για τους μαθητές σε κάθε περίπτωση θεωρεί την απαγωγή σε άτοπο.

Όσον αφορά το βαθμό που αναμένουν οι μαθητές από τη Σόνια παρατηρούμε ότι σχεδόν σε όλες τις προτάσεις μεγαλύτερος είναι αυτός που αναμένουν στην ευθεία απόδειξη και ακολουθεί η απαγωγή σε άτοπο, ενώ στην Πρόταση 3, που αποτελεί τη μοναδική εξαίρεση αναμένουν το αντίστροφο. Αυτό ίσως σημαίνει ότι οι μαθητές στο αξιολογικό σύστημα που έχει προβληθεί από τη Σόνια στην τάξη κατατάσσουν πιο υψηλόβαθμη την ευθεία απόδειξη. Αυτό ίσως οφείλεται στη συχνότητα χρήσης της ευθείας απόδειξης από τη Σόνια, κάτι που μπορούμε να συμπεράνουμε και από τα λεγόμενά της ότι ακολουθεί το σχολικό βιβλίο, το οποίο όπως είδαμε παραπάνω χρησιμοποιεί στην πλειοψηφία των αποδείξεων ευθεία απόδειξη.

Από την άλλη μεριά, το χαμηλότερο βαθμό παρατηρούμε ότι τον αναμένουν, ανάλογα με την πρόταση, είτε στο κρίσιμο πείραμα (Πρόταση 2, Πρόταση 3), είτε στο γενικό παράδειγμα (Πρόταση 1, Πρόταση 4). Οι χαμηλοί βαθμοί που αναμένουν σε αυτά τα επιχειρήματα βλέπουμε ότι σχετίζονται και με το βαθμό πειστικότητας, δηλαδή ότι τους πείθει λιγότερο θεωρούν ότι αξίζει χαμηλότερο βαθμό, ενώ ότι τους πείθει περισσότερο μεγαλύτερο βαθμό. Εξαίρεση σε αυτό αποτελεί η Πρόταση 2 (βλέπε Πίνακα 23) στην οποία παρόλο που για τον εαυτό τους θεωρούν πιο πειστικό το εμπειρικό επιχείρημα (*Mdn=4,0*) από ότι το γενικό παράδειγμα (*Mdn=3,0*), αναμένουν μεγαλύτερο βαθμό στο γενικό παράδειγμα (*M=12*) από ότι στο εμπειρικό επιχείρημα (*M=10,8*).

Επιπροσθέτως, ο χαμηλός βαθμός που αναμένουν στο κρίσιμο πείραμα και στο γενικό παράδειγμα ίσως έχει να κάνει και με το γεγονός ότι στο σχολικό βιβλίο δε υπάρχουν τέτοιου είδους επιχειρήματα. Αυτό ίσως δείχνει ότι δεν τα διακρίνουν μεταξύ τους, καθώς για αυτούς ίσως είναι απλά η δοκιμή μιας και μόνο περίπτωσης. Επιπλέον, αυτή τους η αξιολόγηση ίσως σχετίζεται με το γεγονός ότι η Σόνια, όπως η ίδια αναφέρει, χρησιμοποιεί παραδείγματα κατά τη διδασκαλία των αποδείξεων και ίσως οι μαθητές της έχουν εσωτερικεύσει την πεποίθηση ότι τα παραδείγματα δεν αρκούν ώστε να θεωρηθούν αποδείξεις.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι παρόλο που σε κάποιες προτάσεις, για παράδειγμα στην Πρόταση 1, το εμπειρικό επιχείρημα και το κρίσιμο πείραμα τα θεωρούν εξίσου πειστικά (*Mdn=4*) για τον εαυτό τους και για τους συμμαθητές τους, οι βαθμοί που αναμένουν από τη Σόνια δεν είναι ίδιοι. Πιο αναλυτικά στην Πρόταση 1 για παράδειγμα, αναμένουν μεγαλύτερο βαθμό στο εμπειρικό επιχείρημα (*M=11,8*), πράγμα που ίσως δείχνει ότι θεωρούν με βάση το αξιολογικό σύστημα που έχει προβληθεί από τη Σόνια ότι είναι πιο αποδεκτή η δοκιμή πολλών περιπτώσεων από ότι η δοκιμή μιας περίπτωσης.

Πίνακας 22. Περιγραφικά αποτελέσματα για την αξιολόγηση επιχειρημάτων για την Πρόταση 1 από τους μαθητές της Σόνιας.

Πρόταση 1	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	4,1	4,0
Εμπειρικό_Συμμαθητές	4,0	4,0
Εμπειρικό_Καθηγητής	11,8	13
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,4	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	3,9	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	10,7	10
Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	2,6	3,0
Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	3,2	3,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	10	13
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	4,8	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	5,1	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	15	17
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,1	5,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	3,9	4,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	13,1	15

Πίνακας 23. Περιγραφικά αποτελέσματα αξιολόγησης επιχειρημάτων για την Πρόταση 2 από τους μαθητές της Σόνιας.

Πρόταση 2	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	3,5	4,0
Εμπειρικό_Συμμαθητές	3,6	3,5
Εμπειρικό_Καθηγητής	10,8	12
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,5	3,0
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	4,0	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	12	12

Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	3,2	3,0
Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	3,3	3,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	10,4	11
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	4,6	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	4,5	4,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	14,5	15
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,1	4,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	4,1	4,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	13,9	15

Στην Πρόταση 3 από την άλλη, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα, θεωρούν εξίσου πειστικό, τόσο για τον εαυτό τους όσο και για τους συμμαθητές τους, το γενικό παράδειγμα και την ευθεία απόδειξη (*Mdn=4,0*), παρόλα αυτά αναμένεται βαθμολογική διαφορά, με υψηλότερο βαθμό στην ευθεία απόδειξη (*M=13,5*). Παρότι όπως είδαμε και παραπάνω ο βαθμός πειστικότητας σχετίζεται με το βαθμό που αναμένουν, αυτό δεν ισχύει όταν εμπλέκεται η ευθεία απόδειξη, στην οποία όπως και να έχει αναμένουν τον υψηλότερο βαθμό για τους λόγους που προαναφέρθηκαν.

Πίνακας 24. Περιγραφικά αποτελέσματα αξιολόγησης επιχειρημάτων για την Πρόταση 3 από τους μαθητές της Σόνιας.

Πρόταση 3	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	4,4	4,5
Εμπειρικό_Συμμαθητές	4,3	4,0
Εμπειρικό_Καθηγητής	12,5	13
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,3	3,5
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	3,4	3,5
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	10,9	12
Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	3,5	4,0

Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	3,7	4,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	11,7	14
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	4,3	4,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	4,4	4,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	13,5	14
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,3	5,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	4,6	4,5
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	14,2	14

Τέλος, η Πρόταση 4 είναι η μόνη πρόταση που η άποψη της εκπαιδευτικού για το ποια απάντηση πείθει περισσότερο τους μαθητές ταυτίζεται με την άποψη των μαθητών. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτήν αναμένουν τον υψηλότερο βαθμό από ότι σε οποιοδήποτε άλλο επιχείρημα (*M=15,6*). Αυτό ίσως οφείλεται από τη μία στο ότι η ευθεία απόδειξη, που θεωρούν και πιο πειστική (βλέπε Πίνακα 25), είναι η απόδειξη που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο και από την άλλη στο ότι η Σόνια, όπως η ίδια αναφέρει, επέμεινε σε αυτήν στην τάξη. Χαρακτηριστικά η ίδια ανέφερε:

> Σόνια: Ναι. Είναι κάτι που επειδή ήταν αυτά που λέμε εμείς στο σχολείο ΣΟΣ για τις εξετάσεις την ξέρουν όλοι (Σόνια, γραμμές 563-564).

Πίνακας 25. Περιγραφικά αποτελέσματα αξιολόγησης επιχειρημάτων για την Πρόταση 4 από τους μαθητές της Σόνιας.

Πρόταση 4	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	3,9	4,0
Εμπειρικό_Συμμαθητές	4,0	3,5
Εμπειρικό_Καθηγητής	13,1	15
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,7	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	4,1	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	12,6	15
Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	3,3	3,0

Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	3,5	3,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	10,8	12
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	4,8	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	5,2	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	15,6	16
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,6	4,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	4,5	4,5
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	14,9	15

4.6.3. Πεποιθήσεις για την απόδειξη: Σύστημα Αμαλία

Όσον αφορά τις πεποιθήσεις των μαθητών της Αμαλίας σχετικά με την απόδειξη, παρατηρούμε ότι περισσότερο συμφωνούν με τις δηλώσεις του παράγοντα Βεβαιότητα για την αλήθεια , αφού συμφωνούν με τις 3 από τις 4 δηλώσεις του παράγοντα όπως για παράδειγμα με τη δήλωση «Οι αποδείξεις απαντούν στο γιατί ισχύουν θεωρήματα και προτάσεις χωρίς καμία αμφιβολία» (*Mdn=4,0*), ενώ με τη δήλωση «Αν αποδειχθεί ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά, μπορώ να είμαι βέβαιος/βέβαια ότι είναι αληθές» ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν (*Mdn=3,0*). Ωστόσο, η Αμαλία δεν αναφέρεται καθόλου στη λειτουργία της επιβεβαίωσης. Από την άλλη όμως, όπως είδαμε παραπάνω η επιβεβαίωση εμφανίζεται σε ορισμένες αποδείξεις του σχολικού βιβλίου, κάτι που ίσως σχετίζεται με την παραπάνω πεποίθηση των μαθητών.

Πίνακας 26. Περιγραφικά αποτελέσματα των πεποιθήσεων των μαθητών της Αμαλίας για την απόδειξη.

	M	Mdn
Μια απόδειξη στα μαθηματικά επιβεβαιώνει την αλήθεια ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.	4,0	4,0
Αν αποδειχθεί ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά, μπορώ να είμαι βέβαιος/βέβαια ότι είναι αληθές.	3,3	3,0

Παραδείγματα που εξηγούν το συμπέρασμα δε με βοηθούν πάντοτε να καταλάβω γιατί είναι αληθές.	3,0	3,0
Η απόδειξη είναι απαραίτητη στα μαθηματικά.	4,0	4,0
Δε βλέπω το νόημα του να κάνω αποδείξεις, αφού όλα τα συμπεράσματα στο μάθημα έχουν ήδη αποδειχθεί χωρίς αμφιβολία	2,7	2,0
Μόνο οι καλοί μαθητές πρέπει να ασχολούνται με τις αποδείξεις.	2,0	1,0
Μου αρέσει να αποδεικνύω θεωρήματα και προτάσεις στα μαθηματικά.	2,8	3,0
Η απόδειξη ενός θεωρήματος με βοηθά να καταλάβω γιατί το θεώρημα είναι αληθές.	4,1	4,0
Η ανάγνωση της απόδειξης μιας πρότασης σε ένα βιβλίο με βοηθά να καταλάβω γιατί η πρόταση είναι αληθής.	3,7	3,0
Διαφορετικές αποδείξεις ενός θεωρήματος με βοηθούν να το καταλάβω καλύτερα.	3,1	3,0
Μια απόδειξη στα μαθηματικά βασίζεται σε άλλα μαθηματικά συμπεράσματα.	3,6	4,0
Η απόδειξη δείχνει το πώς συνδέονται τα πάντα στα μαθηματικά.	3,4	3,0
Η απόδειξη βοηθά να δούμε ότι προφανή συμπεράσματα δεν είναι αναγκαστικά/σίγουρα αληθή πριν αποδειχθούν.	3,3	3,0
Οι αποδείξεις δείχνουν την ομορφιά της επιστήμης των μαθηματικών.	3,1	3,0
Δε μπορούν να τα καταφέρουν όλοι οι μαθητές με την απόδειξη, παρά μόνο αυτοί που είναι καλοί στα μαθηματικά.	2,6	2,0
Η απόδειξη είναι μια δομή αιτιολόγησης, όπου τα διάφορα βήματα βασίζονται σε λογική, σε γνωστά θεωρήματα/προτάσεις και γνωστούς ορισμούς.	3,8	4,0
Δε μπορώ να πιστέψω τις προτάσεις χωρίς απόδειξη.	3,2	3,0
Η απόδειξη είναι μια ακολουθία λογικών προτάσεων που συνεπάγονται η μία την άλλη, μια λογική παραγωγή συμπερασμάτων.	3,6	4,0
Η απόδειξη ενισχύει τη λογική σκέψη.	3,6	4,0

Η απόδειξη μερικές φορές αποκαλύπτει την ανακρίβεια μιας μαθηματικής πρότασης που φαίνεται σωστή .	3,6	4,0
Η απόδειξη είναι φτιαγμένη για να πείσουμε κάποιον για τους ισχυρισμούς μας.	3,3	3,0
Η απόδειξη μπορεί να μας οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις στα μαθηματικά.	3,3	3,0
Νομίζω ότι δεν είναι χρήσιμο να κάνουμε αποδείξεις, διότι με μπερδεύει.	2,5	2,0
Οι αποδείξεις δείχνουν από που προέρχονται οι μαθηματικές σχέσεις.	3,5	4,0
Οι αποδείξεις απαντούν στο γιατί ισχύουν θεωρήματα και προτάσεις χωρίς καμία αμφιβολία.	3,5	4,0
Οι αποδείξεις εξηγούν μια μαθηματική έκφραση/σχέση με τη βοήθεια της γνώσης που έχει ήδη αποκτηθεί.	3,5	4,0
Με τις αποδείξεις τα καταφέρνουν μόνο οι μαθητές που έχουν κλίση στα μαθηματικά.	2,8	3,0
Αν ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά είναι προφανές, τότε δεν έχει νόημα να το αποδείξουμε.	2,7	3,0
Η απόδειξη είναι η αιτιολόγηση που δείχνει την εγκυρότητα ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.	3,8	4,0

Από την άλλη μεριά, οι μαθητές της Αμαλίας φαίνεται να διαφωνούν περισσότερο με τις δηλώσεις του παράγοντα Μόνο για μερικούς και ιδιαίτερα με τη δήλωση «Μόνο οι καλοί μαθητές πρέπει να ασχολούνται με τις αποδείξεις», με την οποία φαίνεται να διαφωνούν περισσότερο από ότι με οποιαδήποτε άλλη δήλωση ($Mdn=1,0$). Επομένως, οι μαθητές της Αμαλίας όπως φαίνεται θεωρούν ότι με τις αποδείξεις πρέπει να ασχολούνται όλοι οι μαθητές ανεξάρτητα από την επίδοσή τους. Παρόλα αυτά η Αμαλία αναφέρει ότι ένα μικρό ποσοστό των μαθητών συμμετέχει στην κατασκευή αποδείξεων στην τάξη.

Σχετικά με τις δηλώσεις που φορτίστηκαν στον παράγοντα Εγκυρότητα φαίνεται οι μαθητές της Αμαλίας, να συμφωνούν με αυτές. Πιο αναλυτικά συμφωνούν με τις 8 από τις 12, όπως για παράδειγμα με τη δήλωση «Μια απόδειξη στα μαθηματικά επιβεβαιώνει την αλήθεια ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης»

(*Mdn=4,0*). Αυτή τους η πεποίθηση ίσως σχετίζεται με το ότι η Αμαλία αναφέρεται στη συστηματοποίηση με την έννοια της θεμελίωσης της γνώσης. Επιπλέον, οι αποδείξεις του σχολικού βιβλίου στην πλειοψηφία τους προάγουν τη συστηματοποίηση με την έννοια της δομής, της συνοχής και της αιτιολόγησης, όπως και οι δηλώσεις αυτού του παράγοντα.

Επιπλέον, με τις υπόλοιπες 4 δηλώσεις οι μαθητές της Αμαλίας ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η δήλωση «Η απόδειξη μπορεί να μας οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις στα μαθηματικά», με την οποία ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν (*Mdn=3,0*), παρόλο που η Αμαλία αναφέρει ότι στην τάξη εισάγει την απόδειξη εμμέσως, ώστε οι μαθητές να εμπλέκονται στην διαδικασία κατασκευής και να οδηγούνται σε ανακαλύψεις. Από την άλλη ωστόσο, στο σχολικό βιβλίο είδαμε ότι υπάρχουν ελάχιστοι πρόδρομοι απόδειξης, οι οποίοι θα οδηγούσαν τους μαθητές σε ανακάλυψη, γεγονός που ίσως σχετίζεται με την παραπάνω πεποίθηση των μαθητών.

Όσον αφορά τις δηλώσεις που σχετίζονται με την εξήγηση, οι μαθητές συμφωνούν με τη δήλωση «Η απόδειξη ενός θεωρήματος με βοηθά να καταλάβω γιατί το θεώρημα είναι αληθές» (*Mdn=4,0*). Αυτό ίσως οφείλεται στο ότι κάποιες αποδείξεις του σχολικού βιβλίου και κάποιες αποδεικτικές ασκήσεις προάγουν τη λειτουργία της εξήγησης. Από την άλλη, με τις άλλες δύο δηλώσεις του παράγοντα οι μαθητές ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η δήλωση «Παραδείγματα που εξηγούν το συμπέρασμα δε με βοηθούν πάντοτε να καταλάβω γιατί είναι αληθές», με την οποία ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν (*Mdn=3,0*), παρόλο που η Αμαλία αναφέρει ότι χρησιμοποιεί παραδείγματα κατά τη διδασκαλία της απόδειξης καθώς ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών. Από την άλλη, στο σχολικό βιβλίο υπάρχουν ελάχιστα παραδείγματα πριν ή μετά τις αποδείξεις, γεγονός που ίσως δικαιολογεί την παραπάνω πεποίθηση των μαθητών.

Τέλος , σχετικά με τις δηλώσεις του παράγοντα κατανόηση παρατηρούμε ότι οι μαθητές της Αμαλίας ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν με αυτές (*Mdn=3,0*). Αξίζει να αναφέρουμε ότι η Αμαλία δεν κάνει καθόλου λόγο για κατανόηση. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η δήλωση «Διαφορετικές αποδείξεις ενός θεωρήματος με βοηθούν να το καταλάβω καλύτερα», με την οποία οι μαθητές της Αμαλίας ούτε συμφωνούν ούτε διαφωνούν παρόλο που η ίδια αναφέρει ότι διδάσκει παραπάνω από μια αποδείξεις όταν το επίπεδο της τάξης το επιτρέπει, όπως χαρακτηριστικά αναφέρει. Από την άλλη βέβαια, στο σχολικό βιβλίο δεν υπάρχουν διαφορετικές αποδείξεις για το ίδιο θεώρημα, κάτι που ίσως σχετίζεται με την πεποίθηση των μαθητών.

4.6.4. Αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων: Σύστημα Αμαλία

Όσον αφορά την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων οι μαθητές της Αμαλίας φαίνεται να θεωρούν πιο πειστικά τόσο για τον εαυτό τους όσο και για τους συμμαθητές τους την ευθεία απόδειξη και την απαγωγή σε άτοπο. Αυτό ίσως από τη μια οφείλεται στη συχνότητα χρήσης της ευθείας απόδειξης και της απαγωγής σε άτοπο από τη Αμαλία κατά τη διδασκαλία αποδείξεων και από την άλλη στη συχνότητα εμφάνισης αυτών των μεθόδων απόδειξης στο σχολικό βιβλίο.

Σχετικά με το λιγότερο πειστικό επιχείρημα τόσο για αυτούς όσο και για τους συμμαθητές τους είναι σε κάθε περίπτωση το κρίσιμο πείραμα, ενώ την ίδια πεποίθηση φαίνεται να έχει και η Αμαλία. Σε κάποιες όμως περιπτώσεις, για παράδειγμα στην Πρόταση 1 θεωρούν εξίσου πειστικά για τους συμμαθητές τους το εμπειρικό επιχείρημα, το κρίσιμο πείραμα, το γενικό παράδειγμα και το πείραμα σκέψης με απαγωγή σε άτοπο (*Mdn=4,0*). Αυτό ίσως σχετίζεται με το γεγονός ότι στο σχολικό βιβλίο δεν υπάρχουν εμπειρικά επιχειρήματα, αλλά ούτε επιχειρήματα όπως το κρίσιμο πείραμα ή το γενικό παράδειγμα, ενώ η συχνότητα εμφάνισης της απαγωγής σε άτοπο είναι μικρή.

Παρόλο που θεωρούν εξίσου πειστικά τα παραπάνω επιχειρήματα, παρατηρούμε ότι ο βαθμός που αναμένουν από την Αμαλία δεν είναι ο ίδιος. Πιο συγκεκριμένα, το χαμηλότερο βαθμό αναμένουν στο κρίσιμο πείραμα (*M=12,6*) κάτι που ίσως οφείλεται στο ότι το αντιλαμβάνονται ως μια απλή δοκιμή. Από την άλλη στο εμπειρικό επιχείρημα αναμένουν μεγαλύτερο βαθμό (*M=14,2*), που ίσως οφείλεται στο αξιολογικό σύστημα που προβάλει η Αμαλία στην τάξη και οι μαθητές έχουν εσωτερικεύσει την πεποίθηση ότι είναι καλύτερη η δοκιμή πολλών περιπτώσεων από ότι μιας περίπτωσης.

Πίνακας 27. Περιγραφικά αποτελέσματα αξιολόγησης επιχειρημάτων για την Πρόταση 1 από τους μαθητές της Αμαλίας.

Πρόταση 1	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	4,2	4,0
Εμπειρικό_Συμμαθητές	4,3	4,0
Εμπειρικό_Καθηγητής	14,2	15
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,5	3,0
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	3,8	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	12,6	13,5
Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	3,7	4,0
Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	3,8	4,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	13	15
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	4,4	4,5
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	4,6	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	15,1	16
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,2	5,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	4,0	4,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	15	16

Σύμφωνα με την Αμαλία πιο πειστικό στην Πρόταση 1 είναι το εμπειρικό επιχείρημα για το οποίο όμως η ίδια αναφέρει ότι αυτό το επιχείρημα δε θα αρκεί στους μαθητές που γνωρίζουν μαθηματικά ή που έχουν ξανακούσει ότι τα παραδείγματα δεν είναι αποδείξεις. Αυτό ίσως δικαιολογεί και το ότι το εμπειρικό επιχείρημα δεν είναι αυτό που πείθει περισσότερο τους μαθητές της. Από την άλλη η Αμαλία θεωρεί λιγότερο πειστικό το κρίσιμο πείραμα σε κάθε περίπτωση είτε μόνο του είτε μαζί με το γενικό παράδειγμα και το εμπειρικό επιχείρημα, κάτι που ίσως δικαιολογεί και ότι οι μαθητές σε αρκετές περιπτώσεις τα θεωρούν εξίσου πειστικά.

Για τις Προτάσεις 2, 3 και 4 φαίνεται να σχετίζονται οι πεποιθήσεις των μαθητών με τις πεποιθήσεις της Αμαλίας. Πιο αναλυτικά, στην Πρόταση 2 για παράδειγμα, οι μαθητές θεωρούν πιο πειστικές για τον εαυτό τους την ευθεία απόδειξη και την απαγωγή σε άτοπο (*Mdn=5,0*) και για τους συμμαθητές τους την ευθεία απόδειξη (*Mdn=5,0*), όπως ακριβώς και η Αμαλία, ενώ λιγότερο πειστικό για όλους θεωρείται το κρίσιμο πείραμα (*Mdn=3,0*). Σε αυτήν την πρόταση υπάρχει και σχέση μεταξύ του βαθμού πειστικότητας και του βαθμού που αναμένουν από την Αμαλία.

Πίνακας 28. Περιγραφικά αποτελέσματα αξιολόγησης επιχειρημάτων για την Πρόταση 2 από τους μαθητές της Αμαλίας.

Πρόταση 2	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	4,0	4,0
Εμπειρικό_Συμμαθητές	4,1	4,0
Εμπειρικό_Καθηγητής	14,4	15,5
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,8	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	3,9	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	13,5	15
Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	3,3	3,0
Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	3,5	3,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	12,2	13
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	4,2	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	4,3	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	15,5	16,5
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,5	5,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	4,4	4,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	15,3	17,5

Επιπλέον, στην Πρόταση 3 παρατηρούμε ότι οι μαθητές θεωρούν εξίσου πειστικά για τον εαυτό τους το εμπειρικό επιχείρημα, το κρίσιμο πείραμα και το γενικό παράδειγμα (*Mdn=4,0*), ενώ η Αμαλία θεωρεί ότι τόσο το κρίσιμο πείραμα όσο και το γενικό παράδειγμα δε θα πείσουν τους μαθητές, διότι θεωρεί ότι έχουν καταλάβει ότι δεν αρκούν ώστε να θεωρηθούν αποδείξεις. Σε αυτή την περίπτωση η μη διάκριση αυτών των επιχειρημάτων ως προς το βαθμό πειστικότητας φαίνεται και στο βαθμό που αναμένουν από την Αμαλία ο οποίος στις περιπτώσεις του γενικού παραδείγματος (*Mdn=13,2*) και του κρίσιμου πειράματος (*Mdn=13,5*) είναι σχεδόν ο ίδιος.

Πίνακας 29. Περιγραφικά αποτελέσματα της αξιολόγησης επιχειρημάτων για την Πρόταση 3 από τους μαθητές της Αμαλίας.

Πρόταση 3	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	4,0	4,0
Εμπειρικό_Συμμαθητές	4,0	4,0
Εμπειρικό_Καθηγητής	14	15
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,8	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	3,9	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	13,5	15
Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	3,8	4,0
Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	4,0	4,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	13,2	14
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	4,5	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	4,5	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	15,9	17
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,5	5,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	4,4	4,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	16,1	18

Τέλος στην Πρόταση 4, όπως προαναφέρθηκε υπάρχει σύγκλιση των πεποιθήσεων των μαθητών με τις πεποιθήσεις της Αμαλίας. Οι μαθητές θεωρούν πιο πειστικές την ευθεία απόδειξη και την απαγωγή σε άτοπο, τόσο για τον εαυτό τους όσο και για τους συμμαθητές τους, ενώ η Αμαλία την ευθεία απόδειξη. Παρόλο που τις θεωρούν εξίσου πειστικές μεγαλύτερο βαθμό αναμένουν στην ευθεία απόδειξη (*M=16,2*), κάτι που από τη μια ίσως οφείλεται στο αξιολογικό σύστημα που προβάλει η Αμαλία στην τάξη μέσα από τη συχνότητα χρήσης της ευθείας απόδειξης και από την άλλη στη μεγάλη συχνότητα εμφάνισης της ευθείας απόδειξης στο σχολικό βιβλίο. Από την άλλη, λιγότερο και εξίσου πειστικά για τους συμμαθητές τους θεωρούν οι μαθητές και η Αμαλία το εμπειρικό επιχείρημα, το κρίσιμο πείραμα και το γενικό παράδειγμα (*Mdn=4,0*), κάτι που ίσως οφείλεται στο ότι όπως ανέφερε η Αμαλία κατά τη διδασκαλία της απόδειξης χρησιμοποιεί παραδείγματα και ίσως οι μαθητές της έχουν εσωτερικεύσει την πεποίθηση ότι τα παραδείγματα δε συνιστούν αποδείξεις.

Πίνακας 30. Περιγραφικά αποτελέσματα της αξιολόγησης επιχειρημάτων για την Πρόταση 4 από τους μαθητές της Αμαλίας.

Πρόταση 4	*M*	*Mdn*
Εμπειρικό_Εαυτό	3,9	4,0
Εμπειρικό_Συμμαθητές	4,1	4,0
Εμπειρικό_Καθηγητής	14,5	15,5
Κρίσιμο πείραμα_Εαυτό	3,6	3,0
Κρίσιμο πείραμα_Συμμαθητές	3,8	4,0
Κρίσιμο πείραμα_Καθηγητής	13,7	15
Γενικό παράδειγμα_Εαυτό	4,0	4,0
Γενικό παράδειγμα_Συμμαθητές	3,9	4,0
Γενικό παράδειγμα_Καθηγητής	13,9	15
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Εαυτό	4,8	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Συμμαθητές	4,9	5,0
Πείραμα σκέψης Ευθεία_Καθηγητής	16,2	17
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Εαυτό	4,8	5,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Συμμαθητές	4,7	5,0
Πείραμα σκέψης Άτοπο_Καθηγητής	15,8	17

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα μελέτη διερευνήσαμε όσον αφορά τους μαθητές, τις πεποιθήσεις τους σχετικά αφενός με την πειστικότητα αποδεικτικών επιχειρημάτων στηριζόμενοι στο θεωρητικό πλαίσιο του Balacheff (1988) και των Stacey, Burton και Mason (1982), και αφετέρου σχετικά με την απόδειξη, στηριζόμενοι σε δηλώσεις που σχετίζονταν με τις λειτουργίες της απόδειξης από τις έρευνες του Almeida (2000), των Hemmi, Lepik και Viholainen (2010) και των Kögce και Yıldız (2011).

Όσον αφορά τους εκπαιδευτικούς διερευνήσαμε τις απόψεις τους για την απόδειξη και τις διδακτικές πρακτικές του και όσον αφορά το σχολικό βιβλίο τις όψεις της απόδειξης που αυτό παρουσιάζει σύμφωνα με το πλαίσιο των Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2014) (λειτουργίες απόδειξης, μέθοδοι απόδειξης, διδακτικές πρακτικές). Επιπλέον, ακολουθώντας μια συστημική προσέγγιση, η οποία επιλέχθηκε λόγω της πολυπλοκότητας του θέματος, διερευνήσαμε τις σχέσεις όλων των παραπάνω.

Σχετικά με την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων, είδαμε ότι οι μαθητές φαίνεται να πείθονται περισσότερο με ευθείες αποδείξεις και λιγότερο με το κρίσιμο πείραμα ή το γενικό παράδειγμα. Αυτό ίσως έρχεται σε συμφωνία με τη βιβλιογραφία, τόσο με τους Harel και Showder (1998) σύμφωνα με τους οποίους, οι μαθητές κρίνουν αν ένα επιχείρημα είναι απόδειξη ανάλογα με το αν το επιχείρημα είναι διατυπωμένο σε συγκεκριμένη μορφή και αν χρησιμοποιεί μαθηματικά σύμβολα, όσο και με τους Inglis και Alcock(2012), οι οποίοι αναφέρουν ότι οι μαθητές κατά την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων ξοδεύουν χρόνο στα εξωτερικά χαρακτηριστικά των επιχειρημάτων.

Επιπλέον, φαίνεται να συμφωνεί και με την Pfeiffer (2009), σύμφωνα με την οποία, περισσότεροι από τους μισούς μαθητές θεωρούν σωστή μια απόδειξη με μοναδικό κριτήριο το αν αυτή περιέχει αλγεβρικές εξισώσεις και μαθηματική σημειογραφία. Θα μπορούσαμε σύμφωνα με τα παραπάνω να πούμε ότι από το πλαίσιο των Harel και Showder (1998), οι μαθητές ίσως να έχουν αποδεικτικά σχήματα εξωτερικής πεποίθησης, τα οποία κατέχονται από μαθητές που πείθονται για την αλήθεια ενός θεωρήματος από εξωτερικούς παράγοντες.

Επιπλέον, το παραπάνω εύρημα από μιαν άλλη οπτική, φαίνεται να συμφωνεί με το Balacheff (1988), σύμφωνα με τον οποίο υπάρχει μια ιεραρχία στα είδη των αποδεικτικών επιχειρημάτων κατά τη γνωστική ανάπτυξη των μαθητών, ενώ το πέρασμα από το ένα είδος στο άλλο εξαρτάται από τις απαιτήσεις για γενίκευση και για εννοιοποίηση της γνώσης. Ίσως λοιπόν, αυτή τους η πεποίθηση να σχετίζεται με το γεγονός ότι οι απαιτήσεις για γενίκευση είναι αρκετά υψηλές στο Λύκειο. Δηλαδή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι σύμφωνα με τους Harel και Showder (1998), οι μαθητές έχουν αποδεικτικά σχήματα παραγωγικής πεποίθησης, αφού δέχτηκαν ως πιο πειστικά τα επιχειρήματα που αποδείκνυαν τις προτάσεις μέσω κανόνων λογικής παραγωγής και ισχύουν για κάθε περίπτωση.

Τα ευρήματα της παρούσας μελέτης δεν έδειξαν κάποια διάκριση μεταξύ προσωπικής και δημόσιας πτυχής της απόδειξης, όπως αναμενόταν από τη βιβλιογραφία (βλέπε Raman, 2003). Πιο αναλυτικά, είδαμε πως ό,τι θεωρούσαν πειστικό για τον εαυτό τους, θεωρούσαν ότι θα είναι στις περισσότερες περιπτώσεις εξίσου πειστικό για τους συμμαθητές τους και ότι θα λάβει και καλό βαθμό από τον καθηγητή τους. Αυτό ίσως οφείλεται στο αξιολογικό σύστημα που έχει προβάλει ο εκπαιδευτικός κατά τη διδασκαλία της απόδειξης και στο γεγονός ότι τα ερωτηματολόγια δόθηκαν από τον καθηγητή στους μαθητές και ίσως θεώρησαν ότι θα βαθμολογηθούν για τις απαντήσεις τους, παρόλο που οι εκπαιδευτικοί κατέστησαν σαφές ότι αυτό δε θα συμβεί.

Επιπλέον, είδαμε ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ του βαθμού πειστικότητας και του βαθμού που αναμένουν από τον εκπαιδευτικό τους. Τα επιχειρήματα που τους έπειθαν περισσότερο στην πλειοψηφία τους, ήταν εκείνα στα οποία ανέμεναν τον υψηλότερο βαθμό από τον καθηγητή τους και αντίστροφα. Αυτό δε φαίνεται να συμφωνεί με τις Healy και Hoyles (2000), οι οποίες αναφέρουν ότι υπάρχει διάκριση μεταξύ των επιχειρημάτων που θεωρούν οι μαθητές ότι θα πάρουν τον καλύτερο βαθμό, και των επιχειρημάτων που υιοθετούν για τον εαυτό τους. Αυτό ίσως οφείλεται στον περιορισμό που αναφέρεται και παραπάνω.

Η συστημική προσέγγιση, φανέρωσε κάποιες σχέσεις μεταξύ των παραπάνω πεποιθήσεων των μαθητών τόσο με τις πεποιθήσεις και τις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών για την απόδειξη, όσο και με τις όψεις της απόδειξης που παρουσιάζει το σχολικό βιβλίο. Πιο αναλυτικά, είδαμε ότι το γεγονός ότι η πιο πειστική για αυτούς απόδειξη ήταν η ευθεία απόδειξη, ίσως είχε να κάνει με το αξιολογικό σύστημα που είχε προβάλει ο εκπαιδευτικός τους στην τάξη κατά τη διδασκαλία αποδείξεων, μέσω της συχνότητας χρήσης της ευθείας απόδειξης στην τάξη. Επιπλέον, αυτό ίσως σχετίζεται με το γεγονός ότι το σχολικό βιβλίο και το βιβλίο των λύσεων στην πλειοψηφία των αποδείξεων κάνουν χρήση αυτής της μεθόδου. Τα παραπάνω είναι σε συμφωνία και με τη βιβλιογραφία, καθώς, οι εκπαιδευτικοί όπως επίσης και τα εγχειρίδια που αυτοί χρησιμοποιούν, χρησιμεύουν ως οδηγοί βοηθώντας τους μαθητές να καταλάβουν αυτό που μετρά ως έγκυρη μαθηματική απόδειξη (Bieda, 2010).

Σχετικά με το ποιο επιχείρημα τους πείθει λιγότερο, είναι είτε το κρίσιμο πείραμα είτε το γενικό παράδειγμα. Αυτό, είναι πιθανό να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές έχουν εσωτερικεύσει την πεποίθηση ότι η δοκιμή μιας περίπτωσης δεν αρκεί, ώστε αυτή να θεωρηθεί απόδειξη, ενώ φαίνεται να σχετίζεται και με το γεγονός ότι στο σχολικό βιβλίο δεν υπάρχουν τέτοιου είδους επιχειρήματα.

Βέβαια, αυτό έρχεται σε σύγκρουση με τη βιβλιογραφία, αφού σύμφωνα με τους Bieda και Lepak (2014) οι μαθητές επιλέγουν ένα επιχείρημα ως πιο πειστικό όταν αυτό περιέχει παραδείγματα, καθώς όπως οι ίδιοι υποστηρίζουν τα παραδείγματα ενισχύουν την κατανόηση του επιχειρήματος, παρέχουν περισσότερη πληροφορία και είναι σημαντικά σε ένα μαθηματικό επιχείρημα και σύμφωνα με τις Healy και Hoyles (2000) οι μαθητές φαίνεται να προτιμούν τα εμπειρικά επιχειρήματα για τον εαυτό τους. Αυτή η διαφωνία, ίσως και πάλι να οφείλεται στο ότι ο εκπαιδευτικός ήταν αυτός που χορήγησε τα ερωτηματολόγια στους μαθητές, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω.

Σχετικά με τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη είδαμε ότι οι δηλώσεις με τις οποίες συμφωνούσαν περισσότερο ήταν αυτές που συνέδεαν την απόδειξη με τη δομή και την αιτιολόγηση. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τους Coe και Ruthven (1994) σύμφωνα με τους οποίους από κάποια σχόλια των συμμετεχόντων στην έρευνα τους φάνηκε να εμφανίζεται μια λειτουργία της απόδειξης, αυτή που δείχνει τη λογική δομή ενός συστήματος και τις σχέσεις του. Επιπλέον, φαίνεται να συνάδει και με τους Zaslavsky κ.α. (2012), οι οποίοι μεταξύ άλλων αναφέρουν ότι η απόδειξη πρέπει να διδάσκεται στην τάξη καθώς δείχνει στους μαθητές τις συνδέσεις της μαθηματικής γνώσης.

Επιπλέον, η συστημική προσέγγισε έδειξε ότι ίσως αυτή τους η πεποίθηση να σχετίζεται αφενός με την πεποίθηση των εκπαιδευτικών ότι η απόδειξη προάγει τη λειτουργία της συστηματοποίησης και αφετέρου με το γεγονός ότι οι περισσότερες αποδείξεις του σχολικού βιβλίου σχετίζονται με τη λειτουργία της συστηματοποίησης. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ταύτιση μεταξύ εκπαιδευτικών και σχολικού βιβλίου έρχεται σε συμφωνία με τη βιβλιογραφία, καθώς όπως αναφέρουν οι Cai, Ni και Lester (2011) «τα βιβλία των μαθηματικών έχουν ή θα έπρεπε να έχουν, σημαντική επιρροή στην επιλογή και εκτέλεση των μαθηματικών έργων στη σχολική τάξη (στο Stylianides, 2014, σελ.64)».

Όσον αφορά τις δηλώσεις που σχετίζονταν με τη βεβαιότητα για την αλήθεια είδαμε ότι με τις περισσότερες από αυτές οι μαθητές συμφωνούσαν, κάτι που συμφωνεί εν μέρει με τον De Villiers (1990), σύμφωνα με τον οποίο η λειτουργία της απόδειξης που έχει επικρατήσει σχεδόν αποκλειστικά είναι αυτή της επιβεβαίωσης μιας μαθηματικής πρότασης.

Επιπλέον, η συστημική προσέγγιση ανέδειξε ότι η συγκεκριμένη πεποίθηση των μαθητών ίσως σχετίζεται με το γεγονός ότι στο σχολικό βιβλίο υπάρχουν αποδείξεις οι οποίες καταδεικνύουν τη λειτουργία της επαλήθευσης-επιβεβαίωσης κάτι που έρχεται σε συμφωνία με τους Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή- Χατζή (2014), σύμφωνα με τους οποίος το βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου δίνει μεγαλύτερη σημασία στην καθιέρωση των θεωρημάτων ως αληθή, παρά στην ανάδειξη της διαδικασίας με την οποία αυτά αποδείχτηκαν. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι η λειτουργία που είδαμε ότι επικρατεί στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου και στο βιβλίο των λύσεων ήταν η συστηματοποίηση και όχι η επιβεβαίωση.

Σχετικά με τις δηλώσεις που σχετίζονταν με την κατανόηση, είδαμε ότι οι μαθητές στο σύνολο τους ούτε συμφωνούσαν ούτε διαφωνούσαν με αυτές, κάτι που ίσως σημαίνει πως δεν έχουν συνδέσει την απόδειξη με την κατανόηση. Το συγκεκριμένο εύρημα φαίνεται να συμφωνεί με τον Almeida (2000), σύμφωνα με τον οποίο οι φοιτητές βλέπουν την απόδειξη ως μια εξωτερική δραστηριότητα και όχι ως μια εσωτερική δραστηριότητα που αποσκοπεί στην απόκτηση γνώσης και κατανόησης.

Από την άλλη μεριά, η παραπάνω πεποίθηση δε φαίνεται να συμφωνεί με τη Hanna (1995), σύμφωνα με την οποία η κύρια λειτουργία της απόδειξης στη σχολική τάξη είναι να προάγει την κατανόηση (Hanna, 1995). Παρόλα αυτά, μέσω της συστημικής προσέγγισης φάνηκε ότι η παραπάνω πεποίθηση των μαθητών ίσως οφείλεται στις διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών, οι οποίες με τη σειρά τους σχετίζονται με τις πεποιθήσεις τους. Για παράδειγμα η μια εκ των δύο εκπαιδευτικών αναφέρει ότι οι αποδείξεις στην Άλγεβρα δεν ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών όσο στη Γεωμετρία.

Όσον αφορά τις δηλώσεις που σχετίζονταν με την εξήγηση, είδαμε ότι οι μαθητές του συστήματος Σόνια συμφωνούσαν στις περισσότερες από αυτές, ενώ οι μαθητές του συστήματος Αμαλία ούτε συμφωνούσαν ούτε διαφωνούσαν με τις περισσότερες από αυτές.

Οι απαντήσεις τον μαθητών του συστήματος Αμαλία, φαίνεται να συμφωνούν τόσο με τον De Villiers (1990), όσο και με τους Coe και Ruthven (1994), καθώς σύμφωνα με αυτούς η επιβεβαίωση είναι αυτή που επικρατεί στη σχολική τάξη και όχι η εξήγηση. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή τους η πεποίθηση έρχεται σε σύγκρουση αφενός με το γεγονός ότι η Αμαλία αναφέρει ότι χρησιμοποιεί παραδείγματα κατά τη διδασκαλία της απόδειξης καθώς ενισχύουν την κατανόηση των μαθητών και αφετέρου με το γεγονός ότι αρκετές αποδείξεις του σχολικού βιβλίου προάγουν την εξήγηση.

Από την άλλη βέβαια, στο σχολικό βιβλίο παρότι χρησιμοποιούνται επεξηγηματικές λέξεις στις αποδείξεις, για παράδειγμα η λέξη «δηλαδή», υπάρχουν ελάχιστα παραδείγματα πριν ή μετά τις αποδείξεις και ελάχιστα σχήματα, τα οποία θα μπορούσαν να λειτουργήσουν επεξηγηματικά. Οι μαθητές ίσως να θεωρούν επεξηγηματικό, μόνο ότι μπορεί να ενισχύσει σαφώς την κατανόηση τους, γεγονός που ίσως δικαιολογεί την παραπάνω πεποίθηση των μαθητών. Αυτό θα μπορούσαμε να πούμε ότι έρχεται σε συμφωνία με τους Μούτσιο-Ρέντζο και Πιτσιλή-Χατζή (2014), σύμφωνα με τους οποίους, το σχολικό βιβλίο ορίζει μία από τις όψεις της επίσημης εκπαιδευτικής πραγματικότητας που υπερβαίνει την τάξη, τους εκπαιδευτικούς, τους εκπαιδευόμενους και τη σχολική μονάδα, όντας κοινός τόπος αναφοράς όλων των σχολικών μονάδων στις οποίες χρησιμοποιείται.

Από την άλλη μεριά, η αυτή πεποίθηση των μαθητών του συστήματος Σόνια φαίνεται να συμφωνεί με την Hanna (1989), σύμφωνα με την οποία στη διδασκαλία των μαθηματικών ο πρωταρχικός ρόλος της απόδειξης είναι να εξηγήσει γιατί μια δήλωση είναι αληθής. Επιπλέον, η συστημική προσέγγιση έδειξε ότι η παραπάνω πεποίθηση των μαθητών του συστήματος Σόνια, ίσως οφείλεται από τη μία στις διδακτικές πρακτικές της Σόνιας, για παράδειγμα η χρήση παραδειγμάτων κατά τη διδασκαλία της απόδειξης, και από την άλλη στο γεγονός ότι στο σχολικό βιβλίο ορισμένες αποδείξεις προάγουν τη λειτουργία της εξήγησης είτε με κάποιες λέξεις, όπως το δηλαδή, είτε με τη χρήση παραδειγμάτων, εφαρμογών και σχημάτων.

Τέλος, οι δηλώσεις που σχετίζονταν με το γεγονός ότι η απόδειξη δεν αφορά όλους τους μαθητές παρά μόνο αυτούς που έχουν κλίση στα μαθηματικά, είδαμε ότι ήταν αυτές με τις οποίες οι μαθητές και των δύο συστημάτων διαφωνούσαν περισσότερο, σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες δηλώσεις. Από την άλλη όμως και οι δύο εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι κατά την κατασκευή αποδείξεων στην τάξη συμμετέχει ένα μικρό ποσοστό των μαθητών και μάλιστα όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν και οι δύο αυτοί που τους αρέσουν τα μαθηματικά.

Επιπλέον, το παραπάνω εύρημα δε φαίνεται να σχετίζεται με το σχολικό βιβλίο, καθώς σύμφωνα με τους Μούτσιο-Ρέντζο και Πιτσιλή-Χατζή (2014), στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου η απόδειξη παρουσιάζεται ως κάτι δύσκολο, το οποίο δεν αφορά όλους τους μαθητές και όλες τις μαθήτριες. Αυτή τους η πεποίθηση ίσως οφείλεται και πάλι στον περιορισμό που αναφέρθηκε παραπάνω σχετικά με το ότι ίσως ανέμεναν ότι οι εκπαιδευτικοί τους θα βαθμολογούσαν τις απαντήσεις τους.

5.1. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Λαμβάνοντας υπ’όψιν τόσο τους περιορισμούς της παρούσας έρευνας, όσο και τα ευρήματα της, προτείνονται τα εξής:

- η διεξαγωγή της έρευνας σε μεγαλύτερο δείγμα, έτσι ώστε να προκύψουν ασφαλέστερα προς γενίκευση συμπεράσματα
- κατά τη διεξαγωγή της έρευνας τα ερωτηματολόγια να δοθούν από τον ίδιο τον ερευνητή, χωρίς την παρουσία εκπαιδευτικού, ώστε να μην ελλοχεύει ο κίνδυνος οι μαθητές να θεωρήσουν πως οι απαντήσεις τους θα βαθμολογηθούν

- μετά τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων να γίνει τυχαία επιλογή μαθητών οι οποίοι θα παραχωρήσουν εξατομικευμένες συνεντεύξεις στον ερευνητή για περαιτέρω διερεύνηση
- εκτός από συνεντεύξεις στους εκπαιδευτικούς, θα ήταν χρήσιμη η παρατήρηση της σχολικής τάξης κατά τη διδακτική πράξη, ώστε τα συμπεράσματα για τις διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού να εξαχθούν από τον ερευνητή και να μην υπόκεινται, όσο είναι δυνατόν, στην υποκειμενικότητα
- σε επόμενη έρευνα, πέρα από τις σχέσεις μεταξύ όσων μελετήθηκαν στην παρούσα μελέτη, να διερευνηθεί η σχέση τους με την επίδοση και το φύλο των μαθητών

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα μελέτη διερευνήσαμε τις πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά αφενός με την πειστικότητα αποδεικτικών επιχειρημάτων στηριζόμενοι στο θεωρητικό πλαίσιο του Balacheff (1988) και των Stacey, Burton και Mason (1982), και αφετέρου σχετικά με την απόδειξη, στηριζόμενοι σε δηλώσεις που σχετίζονταν με τις λειτουργίες της απόδειξης από τις έρευνες του Almeida (2000), των Hemmi, Lepik και Viholainen (2010) και των Kögce και Yıldız (2011). Επιπλέον, διερευνήσαμε τις απόψεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη, καθώς και τις διδακτικές πρακτικές που αυτοί ακολουθούν κατά τη διδασκαλία της απόδειξης, ενώ όσον αφορά το σχολικό βιβλίο μελετήσαμε τις όψεις της απόδειξης που αυτό παρουσιάζει σύμφωνα με το πλαίσιο των Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2014). Επιπλέον, ακολουθώντας μια συστημική προσέγγιση, η οποία επιλέχθηκε λόγω της πολυπλοκότητας του θέματος, διερευνήσαμε τις σχέσεις όλων των παραπάνω.

Σχετικά με την αξιολόγηση αποδεικτικών επιχειρημάτων από τους μαθητές, είδαμε ότι πιο πειστικό τόσο για αυτούς όσο και για τους συμμαθητές τους ήταν η ευθεία απόδειξη, ενώ λιγότερο πειστικό ήταν είτε το κρίσιμο πείραμα, είτε το γενικό παράδειγμα, που ίσως τα θεώρησαν ίδια, δηλαδή ως τη δοκιμή μιας και μόνο περίπτωσης. Ωστόσο αυτό είναι κάτι που φαίνεται από τη μία να διαφωνεί με τη βιβλιογραφία, αφού για παράδειγμα οι Healy και Hoyles (2000) αναφέρουν ότι οι μαθητές φαίνεται να προτιμούν τα εμπειρικά επιχειρήματα για τον εαυτό τους. Από την άλλη ίσως οι μαθητές να επέλεξαν ως πιο πειστική την ευθεία απόδειξη λόγω των εξωτερικών χαρακτηριστικών της και της μαθηματικής σημειογραφίας που χρησιμοποιούσε, κάτι που συμφωνεί με τους Harel και Showder (1998) σύμφωνα με τους οποίους, οι μαθητές κρίνουν αν ένα επιχείρημα είναι απόδειξη ανάλογα με το αν το επιχείρημα είναι διατυπωμένο σε συγκεκριμένη μορφή και αν χρησιμοποιεί μαθηματικά σύμβολα.

Η συστημική προσέγγιση επέτρεψε την περαιτέρω διερεύνηση της παραπάνω πεποίθησης και έδειξε πως αυτή, ίσως σχετίζεται με τις διδακτικές πρακτικές του εκπαιδευτικού, ο οποίος κατά κύριο λόγο χρησιμοποιεί την ευθεία απόδειξη και έτσι το αξιολογικό σύστημα που προβάλει στην τάξη ίσως δημιουργεί στους μαθητές την πεποίθηση ότι η ευθεία απόδειξη είναι η «καλύτερη». Επιπλέον, ίσως αυτή η πεποίθηση να σχετίζεται με το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν παραδείγματα κατά τη διδασκαλία της απόδειξης, με αποτέλεσμα οι μαθητές τους να έχουν εσωτερικεύσει την πεποίθηση ότι τα παραδείγματα και οι δοκιμές πεπερασμένων περιπτώσεων δεν αρκούν ώστε τα επιχειρήματα να θεωρηθούν αποδεικτικά. Ακόμη, η συστημική προσέγγιση έδειξε ότι η προτίμηση στην ευθεία απόδειξη ίσως σχετίζεται με τη μεγάλη συχνότητα εμφάνισής της στο σχολικό βιβλίο.

Επιπλέον, η παρούσα μελέτη έδειξε ότι για τους μαθητές ο βαθμός πειστικότητας ενός επιχειρήματος σχετίζεται με το βαθμό που αναμένουν από τον εκπαιδευτικό τους. Αυτό δε φαίνεται να συμφωνεί με τις Healy και Hoyles (2000), οι οποίες αναφέρουν ότι υπάρχει διάκριση μεταξύ των επιχειρημάτων που θεωρούν οι μαθητές ότι θα πάρουν τον καλύτερο βαθμό, και των επιχειρημάτων που υιοθετούν για τον εαυτό τους. Ωστόσο, αυτή η απόκλιση ενδέχεται να οφείλεται στον περιορισμό της έρευνας που έχει να κάνει με το γεγονός ότι τα ερωτηματολόγια τα χορήγησε ο ίδιος ο εκπαιδευτικός εντός του θεσμικού πλαισίου, στο οποίο ίσως οι μαθητές έχουν εσωτερικεύσει τα κριτήρια του εκπαιδευτικού τους.

Σχετικά με τις πεποιθήσεις των μαθητών για την απόδειξη, η έρευνα έδειξε ότι η απόδειξη για αυτούς είναι περισσότερο συνυφασμένη με τη λειτουργία της συστηματοποίησης, με την έννοια της δομής, των συνδέσεων και της αιτιολόγησης. Παρόλο που αυτό φαίνεται να διαφωνεί με τη βιβλιογραφία, στην οποία αναφέρεται ότι στη σχολική τάξη επικρατεί η λειτουργία της επιβεβαίωσης (βλέπε de Villiers, 1990), η συστημική προσέγγιση διευκόλυνε τη μελέτη των αιτιών αυτής της απόκλισης. Πιο αναλυτικά, είδαμε ότι από τη μία οι εκπαιδευτικοί έχουν την ίδια πεποίθηση, καθώς αναφέρονται και οι ίδιοι στη συστηματοποίηση και από την άλλη οι αποδείξεις του σχολικού βιβλίου κατά κύριο λόγο προάγουν αυτή τη λειτουργία.

Επιπλέον, είδαμε ότι αναδείχθηκε και η λειτουργία της επιβεβαίωσης, κάτι που συμφωνεί με τη βιβλιογραφία (βλέπε de Villiers, 1990). Επιπλέον, η συστημική διερεύνηση έδειξε η πεποίθηση των μαθητών ότι η απόδειξη σχετίζεται με τη βεβαιότητα για την αλήθεια μιας πρότασης, σχετίζεται με το γεγονός ότι στο σχολικό βιβλίο υπάρχουν αποδείξεις που προάγουν την επαλήθευση και μάλιστα σύμφωνα με τους Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή- Χατζή (2014), το βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου δίνει μεγαλύτερη σημασία στην καθιέρωση των θεωρημάτων ως αληθή, από ότι στη διαδικασία της απόδειξης.

Όσον αφορά τη λειτουργία της εξήγησης, κατά τη Hanna (1989), στη διδασκαλία των μαθηματικών ο πρωταρχικός ρόλος της απόδειξης είναι να εξηγήσει γιατί μια δήλωση είναι αληθής. Ωστόσο στην παρούσα μελέτη δεν αναδείχθηκε η συγκεκριμένη λειτουργία από το σύνολο των μαθητών, παρά μόνο από τους μαθητές του ενός συστήματος. Αυτό φαίνεται να σχετίζεται με το γεγονός ότι μόνο η εκπαιδευτικός αυτού του συστήματος αναφέρεται στην εξήγηση. Τέλος, οι μαθητές δε φάνηκε να έχουν την πεποίθηση ότι οι αποδείξεις συμβάλλουν στην κατανόηση, γεγονός που συμφωνεί με τον Almeida (2000), σύμφωνα με τον οποίο οι φοιτητές βλέπουν την απόδειξη ως μια εξωτερική δραστηριότητα και όχι ως μια εσωτερική δραστηριότητα που αποσκοπεί στην απόκτηση γνώσης και κατανόησης.

Συμπερασματικά, η συστημική οπτική που υιοθετήθηκε στην παρούσα μελέτη, από τη μια ανέδειξε τις συγκλίσεις με προγενέστερες έρευνες και την υπάρχουσα βιβλιογραφία και από την άλλη μας επέτρεψε μια αναλυτικότερη και συνθετότερη προσέγγιση, η οποία κατέδειξε τις όψεις και την πολυπλοκότητα των σχέσεων που υπάρχουν εντός του συστήματος. Όλα όσα αναφέρθηκαν, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι κρίνεται αναγκαίος ο σχεδιασμός και η υλοποίηση ερευνών με στόχο τη μελέτη του φαινομένου σε μεγαλύτερη κλίμακα, με στόχο την πλήρη διερεύνηση του. Έτσι λοιπόν, αν γνωρίζουμε τις σχέσεις μεταξύ των πεποιθήσεων των μαθητών, των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών και των διδακτικών τους πρακτικών και του σχολικού βιβλίο, σαφώς θα υπάρξει βελτίωση στη μαθηματική εκπαίδευση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(2), 125-134.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(6), 869-890.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. *216*-235). London: Hodder & Stoughton.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematics* (Vol. 3 (1-3), pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.

Bateson, G. (1972). *Steps to an Ecology of Mind: Collected Essays in Anthropology, Psychiatry, Evolution, and Epistemology*. New York: Chandler Publishing Company.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(1-2), 23-40.

Bergwall, A. (2017, February). *Conceptualizing reasoning-and-proving opportunities in textbook expositions: cases from secondary calculus*. Paper presented at the 10th Congress of European Research in Mathematics Education, Dublin, Ireland.

Bertalanffy, L. V. (1968). *General System Theory: Foundations, Development, Applications*. NY: George Braziller.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(4), 351-382.

Bieda, K. N., & Lepak, J. (2014). Are You Convinced? Middle- Grade Students' Evaluations of Mathematical Arguments. *School Science and Mathematics*, *114*(4), 166-177.

CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof?. *Journal of Humanistic Mathematics*, *1*(1), 33-60.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational studies in Mathematics*, *24*(4), 359-387.

Chassapis, D. (2015). Conceiving mathematics classrooms as activity systems. *International Journal for Mathematics in Education, 7,* 31-46.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41-53.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*(1), 17-24.

Dionne, J. J. (1984). The perception of mathematics among elementary school teachers. In J. M. Moser (Ed.), Proceedings of *6th Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 223-228). Madison (WI): University of Wisconsin: PME-NA.

Downe- Wamboldt, B. (1992). Content analysis: Method, applications, and issues. *Health care for women international*, *13*(3), 313-321.

Ernest, P. (1989). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. *Mathematics teaching: The State of the Art*, *249*-254.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2011). Beliefs and beyond: hows and whys in the teaching of proof. *ZDM*, *43*(4), 587-599.

Goldin, G. A. (2002). Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 59-72). Dordrecht: Kluwer.

Goldin, G., Rösken, B., & Törner, G. (2009). Beliefs no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In J. Maass & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results* (pp. 1-18). Roterdam: Sense.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. Tokyo: McGraw-Hill.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), Annual Proceedings of the *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.45-51). Paris, France: PME.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42-49.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, *44*(1-2), 5-23.

Hanna, G., & de Bruyn, Y. (1999). Opportunity to learn proof in Ontario grade twelve mathematics texts. *Ontario mathematics gazette, 37*(4), 23-29.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education, 14*(2), 137-161.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students proof schemes. *Research in Collegiate Mathematics Education III*, 234–282.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (2010). Upper secondary school teachers' views of proof and proving–an explorative cross-cultural study. In K. Kislenko (Ed.), *Proceeding of the 16 th Conference on Mathematical Views* (pp. 137-156). Tallinn, Estonia: Tallin University of Applied Science.

Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(3), 176-203.

Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 358-390.

Jones, K., & Herbst, P. (2011). Proof, proving, and teacher-student interaction: Theories and Contexts. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (Vol. 15, pp. 261-277). Dordrecht: Springer.

Kögce, D., & Yıldız, C. (2011). A comparision of freshman and senior mathematics student teachers' views of proof concept. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 15*, 1266-1270.

Kotelawala, U. (2009). A survey of teacher beliefs on proving. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the *ICMI Study 19 Conferences: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 250-255). Taipei, Taiwan.

Leatham, K. R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 91-102.

Liljedahl, P. (2008). Teachers' insights into the relationship between beliefs and practice. In J. Maass & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results* (pp. 33-44). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The Interplay of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 95-124.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

McLeod, D. (1992). Research of affect in mathematics education : A reconceptualization. In D. Grouws (Ed.*), Handbook of research in mathematical thinking and learning* (pp. 575-596). New York: MacMillan.

Moutsios-Rentzos, A., & Kalavasis, F. (2015). Systemic approaches to the complexity in mathematics education research. *International Journal for Mathematics in Education, 7,* 97-119.

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., & Πιτσιλή-Χατζή, Δ. (2014). Όψεις της απόδειξης στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α' Λυκείου. Στο Χ. Σκουμπουρδή, & Μ. Σκουμιός (Επ.), Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή *Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες* (σελ. 561-568). Ρόδος: Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Αιγαίου.

Moutsios-Rentzos, A., & Simpson, A. (2011). University mathematics students and exam-style proving questions: The A-B-Δ strategy classification scheme. *International Journal for Mathematics in Education, 3,* 45-64.

Moutsios-Rentzos, A., & Spyrou, P. (2013).The Need For Proof In Geometry: A Theoretical Investigation Through Husserl's Phenomenology. In Lindmeier, A. M.& Heinze, A. (Eds.). Proceedings of the 37th Conference of the International (vol. 3, pp. 329-336). Kiel, Germany: PME.

Nikolantonakis, K. (2015). A Mathematical activity for the training of In-Service Primary school Teachers using a Systemic Approach. *International Journal for Mathematics in Education, 7,* 47-62.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307-332.

Pehkonen, E., & Hannula, M. S. (2004). Mathematical belief research in Finland. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *9*(2), 23-38.

Pehkonen, E., & Törner, G. (1999). *Teachers' beliefs on mathematics teaching-comparing different self-estimation methods-a case study*. Paper presented at MAVI 8, Nicosia, Cyprus. http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-5246/mathe91999.pdf

Pfeiffer, K. (2009). The role of proof validation in students' mathematical learning. In D. Corcoran, T. Dooley, S. Close & R. Ward (Eds.), Proceedings of *third National Conference on Research in Mathematics Education MEI3* (pp. 403-413). Dublin, Ireland: St. Patrick's College.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–317). Charlotte, NC: Information Age Publishing & National Council of Teachers of Mathematics.

Raman, M. (2003). Key ideas: what are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 319-325.

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 83-99.

Schoenfeld, A. H. (2005). Problem solving from cradle to grave. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11,* 41-73.

Segal, J. (1998). Learners' difficulties with induction proofs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29*(2), 159-177.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem?. *Journal for research in Mathematics Education*, *34*(1), 4-36.

Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (1982). *Thinking mathematically*. New York: Addison Wesley.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 237-253.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 258-288.

Stylianides, G. J. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research*, *64*, 63-70.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2009). Affect, subject matter knowledge and pedagogical content knowledge: The case of a kindergarten teacher. In J. Maass & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results*, (pp. 19-32). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A.J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G.(2012). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. *In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), Proof and Proving in Mathematics Education (Vol.15, pp. 215-229).* Netherlands: Springer.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Το ερωτηματολόγιο των μαθητών.

Μέρος 1ο

Δόθηκαν σε μαθητές και μαθήτριες της Α΄ Λυκείου 4 προτάσεις και τους ζητήθηκε να τις αποδείξουν.

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι προτάσεις και οι διαφορετικές απαντήσεις.

Για κάθε μία από τις απαντήσεις που δόθηκαν για την κάθε πρόταση, επιλέξτε την απάντηση που σας αντιπροσωπεύει περισσότερο.

Τονίζεται ότι δεν είναι τεστ και δεν υπάρχουν σωστές και λάθος απαντήσεις.

	Πόσο πείθει εσένα; 1: Καθόλου 2: Σχεδόν καθόλου 3: Λίγο 4: Μέτρια 5: Πολύ 6: Πάρα πολύ 7: Απόλυτα	**Κατά τη γνώμη σου, πόσο πείθει ένα συμμαθητή ή μια συμμαθήτρια σου;** 1: Καθόλου 2: Σχεδόν καθόλου 3: Λίγο 4: Μέτρια 5: Πολύ 6: Πάρα πολύ 7: Απόλυτα	**Κατά τη γνώμη σου, τι βαθμό θα έβαζε ο καθηγητής σου σε κάθε μία από τις παρακάτω απαντήσεις (από 0 έως 20);**
Πρόταση 1 **Αν α>β τότε α-β>0 για κάθε α,β>0.**			
Απάντηση 1 Δοκίμασα 5 ζεύγη θετικών αριθμών: 2 και 1, 5 και 3, 8 και 14, 7 και 32, 49 και 2. Για αυτά τα ζεύγη έχω 2>1 και 2-1=1>0 5>3 και 5-3=2>0 14>8 και 14-8=6>0 32>7 και 32-7=25>0 49>2 και 49-2=47>0 Άρα είδα ότι η πρόταση ισχύει για αυτά τα πέντε ζεύγη θετικών αριθμών. Άρα αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 2 Έστω ένα τυχαίο ζεύγος θετικών αριθμών το 100 και το 84 με 100>84. Τότε 100-84=16>0. Αφού η πρόταση ισχύει για τυχαίο ζεύγος ισχύει για κάθε ζεύγος θετικών. Άρα αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 3 Έστω ένα τυχαίο ζεύγος θετικών αριθμών 90, 45 με 90>45.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη το -45 έχουμε 90-45>45-45, δηλαδή 90-45>0. Το οποίο ισχύει. Και αφού το ζεύγος ήταν τυχαίο, η πρόταση αποδείχτηκε.			
Απάντηση 4 Έστω οι θετικοί αριθμοί α,β. Αν α>β τότε προσθέτοντας και στα δύο μέλη το –β έχουμε α-β>β-β δηλαδή α-β>0. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 5 Έστω ότι η πρόταση δεν ισχύει, δηλαδή α-β<0. Τότε α-β+β<β, άρα α<β που δεν ισχύει (άτοπο). Αφού ξεκίνησα από κάτι που υπέθεσα ότι ισχύει και κατέληξα σε κάτι που δεν ισχύει, τότε η υπόθεση από την οποία ξεκίνησα δεν ισχύει. Άρα ισχύει το αντίθετο από αυτό που ξεκίνησα, το οποίο είναι η πρόταση 1. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Πρόταση 2 **Να δείξτε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών (του μικρότερου από τον μεγαλύτερο) ισούται με το άθροισμα τους.**			
Απάντηση 1 Δοκίμασα 5 ζεύγη διαδοχικών φυσικών: 2 και 3, 3 Και 4, 5 και 6, 11 και 12, 16 και 17 Για αυτά τα ζεύγη έχω $3^2-2^2=9-4=5$, $3+2=5$ $4^2-3^2=16-9=7$, $4+3=7$ $6^2-5^2=36-25=11$, $6+5=11$ $12^2-11^2=144-121=23$, $12+11=23$ $17^2-16^2=289-256-33$, $17+16=33$. Άρα είδα ότι η πρόταση ισχύει για αυτά τα πέντε ζεύγη διαδοχικών θετικών αριθμών. Άρα αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 2 Έστω το τυχαίο ζεύγος διαδοχικών αριθμών 9,8. Για αυτούς έχουμε: $9^2-8^2=81-64=17$ και $9+8=17$. Άρα $9^2-8^2=9+8$ αφού 17=17. Και αφού το ζεύγος ήταν τυχαίο, η πρόταση αποδείχτηκε	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 3 Έστω το τυχαίο ζεύγος διαδοχικών φυσικών 13,12. Τότε $13^2-12^2=13+12$. Αφού η πρόταση ισχύει για τυχαίο ζεύγος ισχύει για κάθε ζεύγος διαδοχικών φυσικών αριθμών, άρα αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 4 Έστω οι διαδοχικοί φυσικοί x,x+1. Για αυτούς έχουμε: $x+x+1=2x+1$ $(x+1)^2-x^2=x^2+2x+1-x^2=2x+1$. Άρα : $x+x+1=(x+1)^2-x^2$. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 5 Έστω ότι η πρόταση δεν ισχύει δηλαδή $x+x+1\neq(x+1)^2-x^2$. Εκτελώντας τις πράξεις και στα δύο μέλη $2x+1\neq x^2+2x+1-x^2$, δηλαδή $1\neq1$,που δεν ισχύει (άτοπο). Αφού ξεκίνησα από κάτι που υπέθεσα ότι ισχύει και κατέληξα σε κάτι που δεν ισχύει, τότε η υπόθεση από την	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20

οποία ξεκίνησα δεν ισχύει. Άρα ισχύει το αντίθετο από αυτό που ξεκίνησα, το οποίο είναι η πρόταση 2. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.			
Πρόταση 3 **Ξέρουμε ότι το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος, ενώ το άθροισμα ενός άρτιου με έναν περιττό είναι περιττός. Αποδείξτε ότι το άθροισμα τριών περιττών είναι περιττός.**			
Απάντηση 1 Δοκίμασα 5 τριάδες περιττών αριθμών: 1,3,5 και 3,7,9 και 13,15,27 και 17,29,3 και 65,73,99. Για αυτές τις τριάδες έχω 1+3+5=9=περιττός 3+7+9=19=περιττός 13+15+27=55=περιττός 17+29+3=49=περιττός 65+73+99=237=περιττός. Άρα είδα ότι η πρόταση ισχύει για αυτές τις πέντε τριάδες περιττών αριθμών. Άρα αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 2 Έστω η τυχαία τριάδα περιττών αριθμών 3,15,37. Το άθροισμα που προκύπτει είναι περιττός. Αφού ισχύει για αυτή την τυχαία τριάδα ισχύει για κάθε τριάδα περιττών άρα αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 3 Έστω η τυχαία τριάδα περιττών αριθμών 7,19,17. Το άθροισμα είναι: 7+19+17=6+1+10+9+16+1= =6+10+16+(9+1)+1=6+10+16+10+1= =2(3+5+8+5)+1=περιττός. Το οποίο ισχύει. Και αφού η τριάδα ήταν τυχαία, η πρόταση αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 4 Ξέρουμε ότι οι άρτιοι (ζυγοί) αριθμοί διαιρούνται με το 2 άρα για τυχαίο κ=φυσικό γράφονται με τη μορφή 2κ ενώ οι περιττοί (μονοί) με τη μορφή 2κ+1. Έστω οι τυχαίοι περιττοί x=2κ+1, y=2λ+5, z=2α+9. Τότε: x+y+z=2κ+1+2λ+5+2α+9=2κ+2λ+2μ+14+1= =2(κ+λ+μ+7)+1=2φ+1 που είναι περιττός. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 5 Έστω οι τυχαίοι περιττοί x=2κ+1, y=2λ+5, z=2α+9 και έστω ότι η πρόταση δεν ισχύει, δηλαδή το άθροισμά τους είναι άρτιος. Τότε: x+y+z=2μ, 2κ+1+2λ+1+2α+9=2μ δηλαδή 2(κ+λ+α+5)+1=2μ,που δεν ισχύει (άτοπο). Αφού ξεκίνησα από κάτι που υπέθεσα ότι ισχύει και κατέληξα σε κάτι που δεν ισχύει, τότε η υπόθεση από την οποία ξεκίνησα δεν ισχύει. Άρα ισχύει το αντίθετο από αυτό που ξεκίνησα, το οποίο είναι η πρόταση 3. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20

Πρόταση 4 **Αν α,β ετερόσημοι τότε $\lvert\alpha+\beta\rvert<\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$.**			
Απάντηση 1 Για $\alpha=2$ και β -5 τότε $\alpha+\beta=-3$, $\lvert\alpha\rvert=2$, $\lvert\beta\rvert=5$ και $\lvert\alpha+\beta\rvert=3$ άρα $\lvert\alpha+\beta\rvert<\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$. Για $\alpha=-6$ και $\beta=9$, $\alpha+\beta=3$, $\lvert\alpha\rvert=6$, $\lvert\beta\rvert=9$ και $\lvert\alpha+\beta\rvert=3$ άρα $\lvert\alpha+\beta\rvert<\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$. Για $\alpha=15$ και $\beta=-1$, $\alpha+\beta=14$, $\lvert\alpha\rvert=15$, $\lvert\beta\rvert=1$ και $\lvert\alpha+\beta\rvert=14$ άρα $\lvert\alpha+\beta\rvert<\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$. Για $\alpha=-10$ και $\beta=10$, $\alpha+\beta=0$,$\lvert\alpha\rvert=10$, $\lvert\beta\rvert=10$ και $\lvert\alpha+\beta\rvert=0$ άρα $\lvert\alpha+\beta\rvert<\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$. Για $\alpha=32$ και $\beta=-30$, $\alpha+\beta=2$, $\lvert\alpha\rvert=32$, $\lvert\beta\rvert=30$ και $\lvert\alpha+\beta\rvert=2$ άρα $\lvert\alpha+\beta\rvert<\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$. Άρα είδα ότι η πρόταση ισχύει για αυτά τα πέντε ζεύγη ετερόσημων αριθμών. Άρα αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 2 Έστω ένα τυχαίο ζεύγος ετερόσημων πραγματικών αριθμών $\alpha=3$, $\beta=-5$ τότε $\alpha+\beta=-2$ άρα $\lvert\alpha+\beta\rvert<\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$. Άρα η πρόταση ισχύει και αφού το ζεύγος ήταν τυχαίο, η πρόταση αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 3 Έστω ένα τυχαίο ζεύγος ετερόσημων πραγματικών αριθμών $\alpha=-8$, $\beta=7$. Τότε $\alpha+\beta=-1$, $\lvert\alpha\rvert=8$, $\lvert\beta\rvert=7$ και $\lvert\alpha+\beta\rvert=1$. Άρα $\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert=8+7=15$, άρα $\lvert\alpha+\beta\rvert<\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$ αφού $1<15$. Και αφού το ζεύγος ήταν τυχαίο, η πρόταση αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 4 Έστω $\lvert\alpha+\beta\rvert<\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι θετικοί αριθμοί έχουμε: $\lvert\alpha+\beta\rvert^2<(\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert)^2$, άρα $(\alpha+\beta)^2<\lvert\alpha\rvert^2+2\lvert\alpha\rvert\lvert\beta\rvert+\lvert\beta\rvert^2$, άρα $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2<\alpha^2+2\lvert\alpha\beta\rvert+\beta^2$. Τελικά $\alpha\beta<\lvert\alpha\beta\rvert$ που ισχύει αφού $\alpha\beta<0$ και $\lvert\alpha\beta\rvert>0$. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20
Απάντηση 5 Έστω ότι η πρόταση δεν ισχύει δηλαδή αν α,β ετερόσημοι τότε $\lvert\alpha+\beta\rvert\geq\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι θετικοί αριθμοί έχουμε: $\lvert\alpha+\beta\rvert^2\geq(\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert)^2$, άρα $(\alpha+\beta)^2\geq\lvert\alpha\rvert^2+2\lvert\alpha\rvert\lvert\beta\rvert+\lvert\beta\rvert^2$, άρα $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^{2\geq}\alpha^2+2\lvert\alpha\beta\rvert+\beta^2$. Τελικά $\alpha\beta\geq\lvert\alpha\beta\rvert$ που δεν ισχύει (άτοπο) αφού $\alpha\beta<0$ και $\lvert\alpha\beta\rvert>0$. Αφού ξεκίνησα από κάτι που υπέθεσα ότι ισχύει και κατέληξα σε κάτι που δεν ισχύει, τότε η υπόθεση από την οποία ξεκίνησα δεν ισχύει. Άρα ισχύει το αντίθετο από αυτό που ξεκίνησα, το οποίο είναι η πρόταση 4. Άρα η πρόταση αποδείχτηκε.	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	__ / 20

Οι απόψεις των μαθητών Λυκείου σχετικά με την εγκυρότητα αποδεικτικών επιχειρημάτων στην Άλγεβρα: Μια συστημική προσέγγιση.

Μέρος 2ο

Για κάθε μία από τις παρακάτω απόψεις επιλέξτε την απάντηση που σας αντιπροσωπεύει περισσότερο.

1: Διαφωνώ πολύ 2: Διαφωνώ 3: Ούτε διαφωνώ, Ούτε συμφωνώ 4: Συμφωνώ 5: Συμφωνώ πολ

Α/Α	Απόψεις	1: Διαφωνώ πολύ 2: Διαφωνώ 3: Ούτε διαφωνώ, Ούτε συμφωνώ 4: Συμφωνώ 5: Συμφωνώ πολύ
1	Μια απόδειξη στα μαθηματικά επιβεβαιώνει την αλήθεια ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.	1 2 3 4 5
2	Αν αποδειχθεί ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά, μπορώ να είμαι βέβαιος/βέβαια ότι είναι αληθές.	1 2 3 4 5
3	Παραδείγματα που εξηγούν το συμπέρασμα δε με βοηθούν πάντοτε να καταλάβω γιατί είναι αληθές.	1 2 3 4 5
4	Η απόδειξη είναι απαραίτητη στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
5	Δε βλέπω το νόημα του να κάνω αποδείξεις, αφού όλα τα συμπεράσματα στο μάθημα έχουν ήδη αποδειχθεί χωρίς αμφιβολία από διάσημους μαθηματικούς.	1 2 3 4 5
6	Μόνο οι καλοί μαθητές πρέπει να ασχολούνται με τις αποδείξεις.	1 2 3 4 5
7	Μου αρέσει να αποδεικνύω θεωρήματα και προτάσεις στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
8	Η απόδειξη ενός θεωρήματος με βοηθά να καταλάβω γιατί το θεώρημα είναι αληθές.	1 2 3 4 5
9	Η ανάγνωση της απόδειξης μιας πρότασης σε ένα βιβλίο με βοηθά να καταλάβω γιατί η πρόταση είναι αληθής.	1 2 3 4 5
10	Διαφορετικές αποδείξεις ενός θεωρήματος με βοηθούν να το καταλάβω καλύτερα.	1 2 3 4 5
11	Μια απόδειξη στα μαθηματικά βασίζεται σε άλλα μαθηματικά συμπεράσματα.	1 2 3 4 5
12	Η απόδειξη δείχνει το πώς συνδέονται τα πάντα στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
13	Η απόδειξη βοηθά να δούμε ότι προφανή συμπεράσματα δεν είναι αναγκαστικά/σίγουρα αληθή πριν αποδειχθούν.	1 2 3 4 5
14	Οι αποδείξεις δείχνουν την ομορφιά της επιστήμης των μαθηματικών.	1 2 3 4 5
15	Δε μπορούν να τα καταφέρουν όλοι οι μαθητές με την απόδειξη, παρά μόνο αυτοί που είναι καλοί στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
16	Η απόδειξη είναι μια δομή αιτιολόγησης, όπου τα διάφορα βήματα βασίζονται σε λογική, σε γνωστά θεωρήματα/προτάσεις και γνωστούς ορισμούς.	1 2 3 4 5
17	Δε μπορώ να πιστέψω τις προτάσεις χωρίς απόδειξη.	1 2 3 4 5
18	Η απόδειξη είναι μια ακολουθία λογικών προτάσεων που συνεπάγονται η μία την άλλη, μια λογική παραγωγή συμπερασμάτων.	1 2 3 4 5
19	Η απόδειξη ενισχύει τη λογική σκέψη.	1 2 3 4 5
20	Η απόδειξη μερικές φορές αποκαλύπτει την ανακρίβεια μιας μαθηματικής πρότασης που φαίνεται σωστή .	1 2 3 4 5
21	Η απόδειξη είναι φτιαγμένη για να πείσουμε κάποιον για τους ισχυρισμούς μας.	1 2 3 4 5
22	Η απόδειξη μπορεί να μας οδηγήσει σε νέες ανακαλύψεις στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
23	Νομίζω ότι δεν είναι χρήσιμο να κάνουμε αποδείξεις, διότι με μπερδεύει.	1 2 3 4 5
24	Οι αποδείξεις δείχνουν από που προέρχονται οι μαθηματικές σχέσεις.	1 2 3 4 5
25	Οι αποδείξεις απαντούν στο γιατί ισχύουν θεωρήματα και προτάσεις χωρίς καμία αμφιβολία.	1 2 3 4 5
26	Οι αποδείξεις εξηγούν μια μαθηματική έκφραση/σχέση με τη βοήθεια της γνώσης που έχει ήδη αποκτηθεί.	1 2 3 4 5
27	Με τις αποδείξεις τα καταφέρνουν μόνο οι μαθητές που έχουν κλίση στα μαθηματικά.	1 2 3 4 5
28	Αν ένα συμπέρασμα στα μαθηματικά είναι προφανές, τότε δεν έχει νόημα να το αποδείξουμε.	1 2 3 4 5
29	Η απόδειξη είναι η αιτιολόγηση που δείχνει την εγκυρότητα ενός θεωρήματος/πορίσματος/πρότασης.	1 2 3 4 5

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Οι ερωτήσεις των συνεντεύξεων των εκπαιδευτικών.

1. Ως μαθηματικός ποια η άποψή σας για την απόδειξη στην επιστήμη των μαθηματικών;

2. Εσείς ως μαθηματικός θεωρείτε ότι η απόδειξη είναι απαραίτητα στα μαθηματικά; Γιατί;

3. Κατά τη γνώμη σας τι προσφέρει σε έναν/μία μαθηματικό το διάβασμα αποδείξεων ενός θεωρήματος και τι του/της προσφέρει η κατασκευή αποδείξεων;

4. Πόσα χρόνια διδάσκετε συνολικά; Πόσα από αυτά διδάσκετε σε σχολείο;

5. Πόσα χρόνια διδάσκετε σε Λύκειο;

6. Πόσα χρόνια διδάσκετε Άλγεβρα στην Α΄ Λυκείου;

7. Ως εκπαιδευτικός ποια η άποψή σας για την απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά και ειδικά στην Άλγεβρα;

8. Εσείς ως εκπαιδευτικός θεωρείτε ότι η απόδειξη είναι απαραίτητη στα σχολικά μαθηματικά και ειδικά στην Άλγεβρα; Γιατί;

9. Κατά τη γνώμη σας τι προσφέρει σε έναν/μία εκπαιδευτικό το διάβασμα αποδείξεων ενός θεωρήματος και τι του/της προσφέρει η κατασκευή αποδείξεων;

10. Ως εκπαιδευτικός πιστεύετε ότι η απόδειξη κατέχει τη θέση που θα θέλατε στο αναλυτικό πρόγραμμα της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου; Ναι όχι και γιατί;

11. Ως εκπαιδευτικός πιστεύετε ότι στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου αφιερώνεται επαρκής χρόνος στις αποδείξεις;

12. Στο ΑΠ δίνονται οδηγίες για τη διδασκαλία της απόδειξης στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου; Αν ναι ποιες είναι;

13. Ως έμπειρη εκπαιδευτικός εσείς τι οδηγίες θα δίνατε σε ένα νέο συνάδελφο για τη διδασκαλία της απόδειξης στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου;

14. Το σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου πως παρουσιάζει τις αποδείξεις;

15. Από την εμπειρία σας θα αλλάζατε κάτι στον τρόπο που το σχολικό εγχειρίδιο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου παρουσιάζει τις αποδείξεις; Αν ναι τι; Γιατί; Αν όχι γιατί;

16. Θεωρείτε ότι όλες οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου ζητούν από τους μαθητές να αποδείξουν κάτι; Δηλαδή θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι όλες αποδεικτικές; Αν διαφέρουν σε τι διαφέρουν;

17. Με ποιον τρόπο εισάγετε στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου την έννοια της απόδειξης; Πέρυσι ειδικά τι εισαγωγή κάνατε;

18. Χρησιμοποιείτε εξαρχής τη φράση «αποδείξτε ότι»;

19. Πώς διδάσκετε τις αποδείξεις του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου; Ακολουθείται το βιβλίο ή δίνετε επιπλέον αποδείξεις στα θεωρήματα;

20. Οι μαθητές συμμετέχουν στην κατασκευή των αποδείξεων;

21. Δίνετε περισσότερες από μια αποδείξεις σε κάθε θεώρημα-πρόταση-πόρισμα; Υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο θεώρημα που θεωρείτε ότι πρέπει να διδάσκεται με περισσότερες από μια αποδείξεις;

22. Ποιες μεθόδους απόδειξης διδάσκετε στην τάξη; Τις χρησιμοποιείτε όλες με την ίδια συχνότητα; Για ποιο λόγο; Οι μαθητές ποια πιστεύετε ότι κατανοούν περισσότερο και ποια χρησιμοποιούν περισσότερο;

23. Κατά τη γνώμη σας τι προσφέρει σε έναν/μία μαθητή/μαθήτρια το διάβασμα αποδείξεων ενός θεωρήματος και τι του/της προσφέρει η κατασκευή αποδείξεων;

24. Αυτό που κερδίζει ο μαθηματικός από την ανάγνωση και κατασκευή αποδείξεων, κατά τη γνώμη σας είναι διαφορετικό από αυτού που κερδίζει ο μαθητής; Αν ναι που οφείλεται η διαφορά; Η απόδειξη πιστεύετε ότι είναι διαφορετική στη μαθηματική επιστήμη και στα σχολικά μαθηματικά;

25. Όταν διδάσκετε την απόδειξη στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου χρησιμοποιείται παραδείγματα; Γιατί;

26. Από την εμπειρία θεωρείτε ότι η χρήση παραδειγμάτων κατά τη διδασκαλία της απόδειξης στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου ενισχύει την κατανόηση των μαθηματικών;

27. Όταν διδάσκετε την απόδειξη στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου χρησιμοποιείται κάποιο λογισμικό;

28. Κατά τη γνώμη σας για τους μαθητές είναι καλύτερο να διαβάζουν έτοιμες αποδείξεις ή να κατασκευάζουν οι ίδιοι (με κάποια βοήθεια) αποδείξεις; Γιατί;

29. Είναι δυνατή με τους περιορισμούς που υπάρχουν (χρόνος, ύλη κλπ) η κατασκευή αποδείξεων στην Άλγεβρα από τους μαθητές της Α΄ Λυκείου μέσα στη σχολική τάξη;

30. Ποιο επιχείρημα πιστεύετε ότι πείθει περισσότερο τους μαθητές και ποιο λιγότερο στην Πρόταση 1;

31. Ποιο επιχείρημα πιστεύετε ότι πείθει περισσότερο τους μαθητές και ποιο λιγότερο στην Πρόταση 2;

32. Ποιο επιχείρημα πιστεύετε ότι πείθει περισσότερο τους μαθητές και ποιο λιγότερο στην Πρόταση 3;

33. Ποιο επιχείρημα πιστεύετε ότι πείθει περισσότερο τους μαθητές και ποιο λιγότερο στην Πρόταση 4;

34. Από την εμπειρία σας θα θέλατε να συμπληρώσετε κάτι σχετικά με την απόδειξη και τα ζητήματα που συζητήσαμε; Έστω κι αν δε σας φαίνεται άμεσα συναφές;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

1. Δίνεται η παράσταση $A=[(x^2y^3)^{-2}\cdot(xy^3)^4]:\left(\dfrac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$.

i) Να δείξετε ότι $A=x^9\cdot y^9$.
ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x=2010$ και $y=\dfrac{1}{2010}$.

2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=[(xy^{-1})^2:(x^3y^7)^{-1}]^2$ για $x=0{,}4$ και $y=-2{,}5$.

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) 1001^2-999^2 **ii)** $99\cdot 101$ **iii)** $\dfrac{(7{,}23)^2-(4{,}23)^2}{11{,}46}$.

4. i) Να δείξετε ότι $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$.
ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(\frac{999}{1000}+\frac{1000}{999}\right)^2-\left(\frac{999}{1000}-\frac{1000}{999}\right)^2.$$

5. i) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2-(\alpha-1)(\alpha+1)=1$.
ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(1{,}3265)^2-0{,}3265\cdot 2{,}3265.$$

Σχήμα 29. Ασκήσεις που ζητήσαμε από τους εκπαιδευτικούς να χαρακτηρίσουν αν είναι αποδεικτικές (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.52).

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\dfrac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-\alpha}$ **ii)** $\dfrac{(\alpha^2-\alpha)+2\alpha-2}{\alpha^2-1}$.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\dfrac{\alpha^3+\alpha^2}{(\alpha+1)^3}$ **ii)** $\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}\cdot\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^3-1}$.

Σχήμα 30. Ασκήσεις που ζητήσαμε από τους εκπαιδευτικούς να χαρακτηρίσουν αν είναι αποδεικτικές (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.53).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

5. Έστω α, β και γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}$.

ii) Αν $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\gamma-\alpha$.

Σχήμα 31. Άσκηση που δείξαμε στους εκπαιδευτικούς (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.53).

5. i) α΄ τρόπος: Με γενίκευση της ιδιότητας 1iv) των αναλογιών (βλ. εφαρμογή 1, σελ. 26) έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma+\alpha}=1,$$

οπότε $\alpha=\beta=\gamma$.

β΄ τρόπος: Θέτουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=k$, οπότε έχουμε

$$\alpha=k\beta,\ \beta=k\gamma \ \text{ και } \ \gamma=k\alpha \qquad (1)$$

Αν, τώρα, προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), βρίσκουμε

$$\alpha+\beta+\gamma=k(\alpha+\beta+\gamma)$$

οπότε έχουμε $k=1$ (αφού $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, διότι τα α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου).

Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ΄ τρόπος: Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να αποδειχθεί, μετά τη διδασκαλία της § 1.3, ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), οπότε έχουμε $\alpha\beta\gamma=k^3(\alpha\beta\gamma)$ και, επειδή $\alpha\beta\gamma\neq 0$, θα είναι $k^3=1$ και άρα $k=1$. Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$.

Σχόλιο: Ο συγκεκριμένος τρόπος μπορεί να εφαρμοσθεί και όταν τα α, β, γ είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί του μηδενός, ενώ για τους δύο πρώτους τρόπους απαιτείται στην περίπτωση αυτή να αποδειχτεί ότι $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Σχήμα 32. Η λύση της παραπάνω άσκησης με 3 τρόπους (Βιβλίο λύσεων Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.15).

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}$

ii) $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}.$

Σχήμα 33. Άσκηση που δείξαμε στους εκπαιδευτικούς (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.74).

7. i) <u>1ος τρόπος</u>:

$$\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[3]{2}.$$

<u>2ος τρόπος</u>:

$$\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt{2\cdot 2^{1/3}}}=\sqrt{\sqrt{2^{4/3}}}$$

$$=\sqrt{\left(2^{4/3}\right)^{1/2}}=\sqrt{2^{2/3}}=\left(2^{2/3}\right)^{1/2}=2^{1/3}=\sqrt[3]{2}.$$

Σχήμα 34. Η λύση της παραπάνω άσκησης με 2 τρόπους (Βιβλίο λύσεων Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, σελ.23).