



ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής

Διπλωματική Εργασία

Πτυχές της AdS/CFT αντιστοιχίας

Λουκάς Π. Γριμανέλλης

A.M.: 201615

Επιβλέπων:

Κωνσταντίνος Σφέτσος

Καθηγητής

Αθήνα

28 Φεβρουαρίου 2018

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η αντιστοιχία AdS/CFT. Πρόκειται για μία αμφίδρομη απεικόνιση μεταξύ της θεωρίας υπερβαρύτητας τύπου IIB στον χώρο $AdS_5 \times S^5$ και της σύμμορφης SYM θεωρίας με $\mathcal{N} = 4$ και σε τέσσερις διαστάσεις. Στην εργασία αυτή εισάγονται οι βασικές έννοιες των χώρων AdS, της σύμμορφης συμμετρίας καθώς και της υπερσυμμετρίας με εφαρμογή τόσο στη θεωρία χορδών όσο και στη βαρύτητα. Αφετηρία της AdS/CFT αντιστοιχίας, η οποία στην παρούσα μελέτη περιορίζεται στην ασθενή εκδοχή της, καθίστανται οι δύο διαφορετικές θεμελιώσεις των γενικευμένων μεμβρανών. Ο υπολογισμός των συναρτήσεων συσχετισμού της σύμμορφης θεωρίας, μέσω της θεωρίας υπερβαρύτητας τύπου IIB, για βαθμωτό, φερμιονικό και ανυσματικό πεδίο, αποτελεί έναν επιτυχή έλεγχο της αντιστοιχίας.

Abstract

In this master thesis, the Anti-de Sitter/Conformal Field Theory correspondence is introduced. It is a map between two distinct theories, namely, a perturbative type IIB supergravity in $AdS_5 \times S^5$ and a non-perturbative conformal Super Yang-Mills theory with $\mathcal{N} = 4$ and in four dimensions. The first part consists of the prerequisite knowledge of the AdS spaces, conformal symmetry as well as supersymmetry with applications in string theory and gravity. Consequently, the branes and their two faces are illustrated and this is the starting point of the derivation of the AdS/CFT correspondence, which is formulated within the context of its weak form. The calculation of 2- and 3-point correlators of scalar, spinor and vector field is carried out and provides a successful test of the conjecture.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	iii
I Θεωρητικό Υπόβαθρο	3
1 Χώροι Anti-de Sitter και σύμμορφη συμμετρία	5
1.1 Χώροι Anti-de Sitter	5
1.1.1 Poincaré και ολικές συντεταγμένες	7
1.1.2 Στροφή Wick σε ευκλείδια υπογραφή	8
1.1.3 Κοσμολογική σταθερά του AdS	9
1.2 Σύμμορφη συμμετρία και θεωρίες πεδίου	10
1.2.1 Σύμμορφη άλγεβρα για $d > 2$	10
1.2.2 Μετασχηματισμοί πεδίων	12
2 Υπερσυμμετρία σε θεωρία χορδών και βαρύτητα	15
2.1 Υπερσυμμετρία: θεμελίωση, αναπαραστάσεις και $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία	15
2.1.1 Άμαξες μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις	17
2.1.2 Αναπαραστάσεις με μάζα χωρίς κεντρικό φορτίο	19
2.1.3 Αναπαραστάσεις με μάζα και κεντρικό φορτίο	19
2.1.4 R-συμμετρία	20
2.1.5 $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills δράση	20
2.2 Υπερβαρύτητα και η $\mathcal{N} = 1$ περίπτωση	23
2.2.1 Τοπική υπερσυμμετρία: υπερβαρύτητα	23
2.2.2 $\mathcal{N} = 1$ υπερβαρύτητα σε $d = 4$	23
2.3 Πεδία υποβάθρου και υπερσυμμετρία στη θεωρία χορδών	24
2.3.1 Θεμελιώδεις έννοιες	24
2.3.2 Χορδές ως πεδία υποβάθρου	26
2.3.3 Υπερχορδές και χαμηλοενεργειακό όριο	27
2.4 Χαμηλοενεργειακή δράση: Υπερβαρύτητα	29
3 Dp-μεμβράνες και p-μεμβράνες	31
3.1 Πεδία και δράση Dirac-Born-Infeld της Dp-μεμβράνης	31
3.2 Παράγοντες Chan-Patton και D3-μεμβράνες	35

3.2.1	N συμπίπτουσες Dp-μεμβράνες και παράγοντες Chan-Paton	35
3.2.2	D3-μεμβράνες και $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία	36
3.3	Dp-μεμβράνες ως λύσεις υπερβαρύτητας: p-μεμβράνες	37
II	Θεμελίωση της AdS/CFT για $\mathcal{N} = 4$ SU(N) SYM vs. $AdS_5 \times S^5$	41
4	Η AdS/CFT Αντιστοιχία	43
4.1	Επισκόπηση της αντιστοιχίας AdS/CFT	43
4.1.1	Βαθμοί ελευθερίας των δύο θεωριών	44
4.1.2	Επιχειρήματα για την Αντιστοιχία	45
4.2	D3-μεμβράνες και οι δύο οπτικές	48
4.2.1	Περίπτωση ανοιχτών χορδών	49
4.2.2	Περίπτωση κλειστών χορδών	50
4.2.3	Συνδυάζοντας και τις δύο περιπτώσεις	52
4.2.4	Σύγκριση Συμμετριών και Ολογραφική Αρχή	53
4.3	Απεικόνιση Πεδίου-Τελεστή	53
4.3.1	Αναπαραστάσεις Σύμμορφων Τελεστών	54
4.3.2	Αναπαραστάσεις Πεδίων Υπερβαρύτητας	56
4.3.3	Απεικόνιση Πεδίου-Τελεστή: Αναπαραστάσεις	56
4.4	Βαθμωτό πεδίο στον AdS_{d+1} και Ασυμπτωτική Συμπεριφορά στο Σύνορο	57
4.4.1	Κανονικοποίηση λύσης και Φυσική Ερμηνεία των β_{\pm}	58
5	Συναρτήσεις Συσχετισμού	61
5.1	Μέθοδος Witten	61
5.1.1	Απεικόνιση Πεδίου-Τελεστή για τις Γεννήτριες Συναρτήσεις	61
5.1.2	Διαγράμματα Witten και AdS διαδοτές	63
5.2	Βαθμωτό πεδίο: Συνάρτηση 2 σημείων	65
5.3	Βαθμωτό πεδίο: Συνάρτηση 3 σημείων	68
5.4	Πεδίο Dirac: Συνάρτηση 2 σημείων	70
5.5	Ανυσματικό πεδίο: Συνάρτηση 2 σημείων	76
5.6	Ανυσματικό πεδίο: Συνάρτηση 3 σημείων και Ανωμαλία R-ρεύματος	80
5.6.1	Αντισυμμετρικός όρος: Συνάρτηση 3 σημείων	81
5.6.2	Συμμετρικός όρος: Ανωμαλία R-ρεύματος	84
A	Υπολογισμοί	89
B	Οροι Chern-Simons	101
C	Ανωμαλία Ρεύματος	103
	Βιβλιογραφία	105

Εισαγωγή

Ο τίτλος προδίδει τη σχέση που υφίσταται μεταξύ μιας θεωρίας πεδίου με σύμμορφη συμμετρία, η οποία ζει σε τέσσερις διαστάσεις, και μιας θεωρίας χορδών, η οποία είναι μια κβαντική θεωρία βαρύτητας και ζεί σε ένα χώρο $AdS_5 \times S^5$, με τον S^5 να είναι συμπαγοποιημένος. Ο χώρος της σύμμορφης θεωρίας ταυτίζεται με το σύνορο του AdS_5 και με αυτόν τον τρόπο η αντιστοιχία εκλαμβάνεται και ως παράδειγμα της ολογραφικής αρχής. Και εδώ ισχύει η ίδια λογική, σύμφωνα με την οποία ένα δισδιάστατο ολόγραμμα κωδικοποιεί την πληροφορία η οποία περικλείεται σε ένα τρισδιάστατο αντικείμενο.

Πριν επιχειρηθεί η περιγραφή της AdS/CFT θα εισαχθούν τα βασικά χαρακτηριστικά των χώρων AdS όσο και της σύμμορφης συμμετρίας. Στη συνέχεια, θα περιγραφούν οι αρχές της υπερσυμμετρίας, των υπερχορδών και της υπερβαρύτητας. Στην τελευταία ενότητα, πριν αναπτυχθεί το κυρίως θέμα, θα αναλυθεί το πώς θεωρούνται οι βράνες από δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες. Κατόπιν θα θεμελιώσουμε την AdS/CFT με συγκεκριμένα επιχειρήματα, ακολουθώντας, κατά βάση, την οργάνωση του στοχασμού των Maldacena και Witten, οι οποίοι ήταν οι πρωτοπόροι πάνω στο θέμα. Να σημειωθεί ότι παρόλες τις γόνιμες προσπάθειες, μέχρι στιγμής, αυτή η αντιστοιχία δεν έχει, πλήρως, αποδειχθεί. Επιχειρώ, σε αυτήν τη μελέτη να την ελέγξω μέσω του υπολογισμού των συναρτησεων συσχετισμού της σύμμορφης θεωρίας, εργαζόμενος αποκλειστικά στην πλευρά της AdS εκμεταλλευόμενος τα εργαλεία που παρέχει η αντιστοιχία. Οι ενδείξεις και η πληθώρα τέτοιων επιτυχιών ελέγχων, καθιστούν σαφές πως δεν πρόκειται περί μιας εικασίας. Αυτό με υποχρεώνει να την αποκαλώ αντιστοιχία.

Μια δυναμική ερώτηση μπορεί να λάβει τη μορφή: για ποιο λόγο η AdS/CFT είναι ενδιαφέρουσα. Η απάντηση που μπορεί να στοιχειωθεί είναι ότι αυτή συνδέει μία διαταρακτική, (=ασθενή σύζευξη), θεωρία χορδών με μία μη διαταρακτική (=ισχυρή σύζευξη) σύμμορφη θεωρία βαθμίδας, και κατ' επέκταση τον υπολογισμό διαφόρων ποσοτήτων. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε δημιουργήσει μια μη διαταρακτική τεχνική μέσω της οποίας αποκτούμε προβλεπτικότητα για συστήματα που δε ήταν εύκολο να μελετηθούν, όπως, επί παραδείγματι, η κβαντική χρωμοδυναμική. Θα μπορούσαμε, ωστόσο, να θεωρήσουμε μια μη διαταρακτική εκδοχή της θεωρίας χορδών και μια διαταρακτική θεωρία πεδίου. Όμως, η περίπτωση αυτή δεν έχει καταστεί απολύτως σαφής, όσο αυτή με την οποία θα εργαστώ. Να σημειωθεί ότι παρόλο που η AdS/CFT αντιστοιχία είναι ένας εξελισσόμενος κλάδος, τα αποτελέσματά της και τα εργαλεία της, ήδη μας βοηθάνε να αντιμετωπίσουμε πληθώρα προβλημάτων.

Μέρος Ι
Θεωρητικό Υπόβαθρο

Κεφάλαιο 1

Χώροι ANTI-DE SITTER και σύμμορφη συμμετρία

1.1 Χώροι Anti-de Sitter

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας μερικά παραδείγματα απλούστερων χώρων και εν τέλει θα στρέψουμε την προσοχή μας στον AdS_{d+1} .

- Σφαίρα S^d

Θεωρούμε για αρχή τη σφαίρα S^d εμβαπτισμένη σε ευκλείδειο χώρο $d + 1$ διαστάσεων, με εξίσωση,

$$X_1^2 + \dots + X_{d+1}^2 = L^2, \quad (1.1)$$

με σταθερή θετική καμπυλότητα $\sim 1/L^2$. Συνεπώς, έχουμε μέγιστη συμμετρία, το οποίο απορρέει από το ότι την εμβαπτίσαμε σε ευκλείδειο χώρο. Έτσι, έχουμε $(d+1)d/2$ ανύσματα Killing, τα οποία αντιστοιχούν στους απειροστούς γεννήτορες της ομάδας ισομετριών της πολλαπλότητας,

$$J_{ij} = X_i \partial_j - X_j \partial_i. \quad (1.2)$$

Η μετρική του ευκλείδειου χώρου είναι,

$$ds^2 = dX_1^2 + \dots + dX_{d+1}^2, \quad (1.3)$$

όπου κάνοντας χρήση της εξίσωσης της σφαίρας, βρίσκουμε την επαγόμενη μετρική στην επιφάνειά της. Η ομάδα ισομετριών είναι η $SO(d+1)$, οποία είναι η υποομάδα της ομάδας ισομετριών του ευκλείδειου χώρου,

$$\mathcal{E}(d+1) = ISO(d+1) \cong \mathbb{E}^{d+1} \rtimes SO(d+1). \quad (1.4)$$

Η $SO(d+1)$ είναι συμπαγής (*compact*) όπως και η πολλαπλότητα ¹.

- Υπερβολοειδές H^d

¹ Σε μία συμπαγή (μη συμπαγή) πολλαπλότητα Riemann, η αντίστοιχη ομάδα ισομετριών θα είναι συμπαγής (μη συμπαγής) ομάδα Lie. Για πολλαπλότητα pseudo-Riemann αυτό δεν ισχύει πάντα.

Θεωρούμε πάλι ότι εμβαπτίζουμε την πολλαπλότητα σε ευκλείδειο χώρο και εξίσωση που την περιγράφει είναι,

$$X_1^2 + \dots + X_d^2 - X_{d+1}^2 = -L^2, \quad (1.5)$$

όπου στην περίπτωση αυτή η καμπυλότητα δεν είναι σταθερή και η H^d χωρίζεται σε δύο υποπολλαπλότητες. Αυτό έχει αντίκτυπο στα ανύσματα Killing, όπου από τα $d(d+1)/2$ τα d δεν αφήνουν αναλλοίωτη τη μετρική. Αν αντικαταστήσουμε τον ευκλείδειο με χώρο Minkowski,

$$ds^2 = dX_1^2 + \dots + dX_d^2 - dX_{d+1}^2, \quad (1.6)$$

έχουμε μέγιστη συμμετρία και η αντίστοιχη ομάδα ισομετριών είναι η $SO(d, 1)$ (ομάδα Lorentz). Η καμπυλότητα της H^d θα είναι σταθερή και αρνητική.

- **de Sitter dS_d**

Θεωρούμε παλι χώρο Minkowski με την εξίσωση του dS_d να είναι,

$$X_1^2 + \dots + X_d^2 - X_{d+1}^2 = L^2. \quad (1.7)$$

Όπως ο dS_d είναι υποπολλαπλότητα του χώρου Minkowski στις $d+1$ διαστάσεις, έτσι και η ομάδα ισομετριών $SO(d, 1)$ του πρώτου είναι υποομάδα της ομάδας ισομετριών του δευτέρου,

$$ISO(d, 1) \cong \mathbb{R}^{d+1} \rtimes SO(d, 1). \quad (1.8)$$

Ο dS_d σε χώρο Minkowski είναι ότι η S^d σε ευκλείδειο χώρο, πρόκειται για το Λορεντσιανό ανάλογο². Έχει σταθερή και θετική καμπυλότητα και είναι μέγιστα συμμετρικός.

- **Anti-de Sitter AdS_d**

Φτάνουμε στο χώρο, ο οποίος θα μας απασχολήσει μέχρι το τέλος και θα είναι παρών στη μία πλευρά της αντιστοιχίας AdS/CFT. Η εξίσωση της πολλαπλότητας είναι,

$$-X_1^2 + \sum_{i=2}^d X_i^2 - X_{d+1}^2 = -L^2, \quad (1.9)$$

και η μετρική του χώρου $\mathbb{R}^{d-1,2}$ στον οποίο εμβαπτίζουμε τον AdS_d για να είναι μέγιστα συμμετρικός,

$$ds^2 = -dX_1^2 + \sum_{i=2}^d dX_i^2 - dX_{d+1}^2. \quad (1.10)$$

Η ομάδα των ισομετριών $SO(d-1, 2)$ του AdS_d είναι υποομάδα της ομάδας ισομετριών του $\mathbb{R}^{d-1,2}$, μιας και η πρώτος χώρος αποτελεί υποπολλαπλότητα του δευτέρου,

$$ISO(d-1, 2) \cong \mathbb{R}^{d-1,2} \rtimes SO(d-1, 2). \quad (1.11)$$

Συγκρίνοντας με την περίπτωση του υπερβολοειδούς βλέπουμε ότι ο AdS_d αποτελεί το Λορεντσιανό ανάλογο του H^d , όπως ο dS_d της S^d που είδαμε παραπάνω. Όπως θα δούμε στη συνέχεια που θα βρούμε την επαγόμενη μετρική, ο AdS_d έχει Λορεντσιανή υπογραφή $(- + \dots +)$.

²Η υπογραφή της μετρικής g είναι (p, q, r) με p, q, r οι αριθμοί των θετικών, αρνητικών και μηδενικών ιδιοτιμών. Για $r = 0$ και $(p, 0)$ έχουμε πολλαπλότητα Riemann, για $(p, 1)$ πολλαπλότητα Lorentz και για (p, q) πολλαπλότητα pseudo-Riemann.

1.1.1 Poincaré και ολικές συντεταγμένες

Ορίζουμε τις συντεταγμένες κώνου φωτός,

$$u = \frac{X_1 - X_d}{L^2}, \quad v = \frac{X_1 + X_d}{L^2} \quad (1.12)$$

και για $i = 2, \dots, d-1$,

$$x_i = \frac{X_i}{Lu}, \quad t = \frac{X_{d+1}}{Lu}. \quad (1.13)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.9) βρίσκουμε το v σε σχέση με το u ,

$$v = \frac{1 - u^2(t^2 - \vec{x}^2)}{L^2u}. \quad (1.14)$$

Λύνοντας ως προς τα X με $\vec{x}^2 = \sum_{i=2}^{d-1} (x_i)^2$, παίρνουμε της συντεταγμένες Poincaré,

$$X_1 = \frac{1}{2u} (1 + u^2(L^2 + \vec{x}^2 - t^2)), \quad X_d = \frac{1}{2u} (1 + u^2(-L^2 + \vec{x}^2 - t^2)), \quad (1.15)$$

$$X_i = Lux_i, \quad X_{d+1} = Lut.$$

Αντικαθιστώντας στη μετρική (1.10) του $\mathbb{R}^{d-1,2}$ με $x_0 = 1/u$ παίρνουμε την επαγόμενη μετρική του AdS_d ,

$$(ds_P)^2 = \frac{L^2}{x_0^2} (dx_0^2 + d\vec{x}^2 - dt^2). \quad (1.16)$$

Η παραπάνω μετρική είναι αναλλοίωτη σε $ISO(d-2, 1)$ μετασχηματισμούς και $-\infty < t, x_i < +\infty$, $0 < x_0 < +\infty$. Συνεπώς, με ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα, έχουμε τη d -διάστατη μετρική Minkowski. Επίσης, βλέπουμε ότι το σύνορο του χώρου βρίσκεται στο $x_0 = 0$. Κάτι που αξίζει να σημειώσουμε είναι ότι οι συντεταγμένες Poincaré δεν καλύπτουν όλο τον AdS_d . Οι συντεταγμένες για τις οποίες θα συμβαίνει αυτό είναι οι ολικές (*global*) που ορίζονται ως,

$$X_1 = L \sec \rho \cos \tau, \quad X_i = L \tan \rho \Omega_i, \quad X_{d+1} = L \sec \rho \sin \tau, \quad (1.17)$$

όπου, $0 \leq \rho < \pi/2$, $-\pi < \tau \leq \pi$ και $-1 \leq \Omega_i \leq 1$ με $\sum_{i=2}^d \Omega_i^2 = 1$. Οι ρ, τ, Ω_i καλύπτουν όλο το χώρο. Όμως, τα Ω_i δεν είναι όλα ανεξάρτητα μεταξύ τους λόγω της προηγούμενης σχέσης. Αντικαθιστώντας στη (1.10) παίρνουμε,

$$(ds_G)^2 = \frac{L^2}{\cos \rho} (-d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho d\Omega_{d-2}^2) \quad (1.18)$$

Βλέπουμε ότι στο κέντρο, δηλαδή, για $\rho \simeq 0$,

$$(ds_G)^2 \sim -d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad (1.19)$$

ο AdS_d έχει τοπολογία $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$.

Πάμε να εξετάσουμε το σύνορο του AdS_d , πως εκφράζεται στο κάθε σύστημα συντεταγμένων και τι τοπολογία έχει. Στις Poincaré το πραγματικό σύνορο είναι μόνο για $x_0 = 0$, σε αντίθεση με το $x_0 = \infty$. Έτσι, η μετρική γίνεται,

$$(ds_P)_{bnd}^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2, \quad (1.20)$$

συνεπώς, θα έχουμε τοπολογία $\mathbb{R}^{d-1,1}$. Στις ολικές το σύνορο αντιστοιχεί στο $\rho = \pi/2$ για το οποίο προκύπτει,

$$(ds_G)_{bnd}^2 = -d\tau^2 + d\Omega_{d-2}^2. \quad (1.21)$$

1.1.2 Στροφή Wick σε ευκλείδια υπογραφή

Είδαμε ότι ο dS_d είναι η Λορεντσιανή εκδοχή της S^d και κατ' αναλογία ο AdS_d του H^d . Μέσω της στροφής Wick μπορούμε να συσχετίσουμε τις εξισώσεις των dS_d και AdS_d με των S^d και H^d αντίστοιχα. Άρα η S^d και η H^d θεωρούνται ως ο ευκλείδειος dS_d και AdS_d αντίστοιχα,

$$S^d = EdS_d, \quad H^d = EAdS_d. \quad (1.22)$$

Θα επικεντρωθούμε στη δεύτερη περίπτωση. Για να μεταφερθούμε από τη μια πολλαπλότητα στην άλλη κάνουμε στροφή Wick θεωρώντας: $X_{d+1}^{(E)} = -iX_{d+1}$. Έτσι, οι σχέσεις (1.9) και (1.10) για $i = 2, \dots, d$ γίνονται,

$$-X_1^2 + \sum_{i=2}^d X_i^2 + X_{d+1}^{(E)} = -L^2 \quad (1.23)$$

$$ds^2 = -dX_1^2 + \sum_{i=2}^d dX_i^2 - dX_{d+1}^2$$

Οι Poincaré συντεταγμένες και η μετρική θα είναι,

$$X_1 = \frac{1}{2u} (1 + u^2(L^2 + \vec{x}^2 - t_E^2)), \quad X_d = \frac{1}{2u} (1 + u^2(-L^2 + \vec{x}^2 - t_E^2)), \quad (1.24)$$

$$X_i = L u x_i, \quad X_{d+1}^{(E)} = L u t_E.$$

$$(ds_P)_E^2 = \frac{L^2}{x_0^2} \left(dt_E^2 + \sum_{i=1}^{d-2} dx_i^2 + dx_0^2 \right). \quad (1.25)$$

Έτσι, πηγαίνοντας στο σύνορο $x_0 = 0$ παίρνουμε,

$$(ds_P)_{E,bnd}^2 = dt_E^2 + d\vec{x}^2, \quad (1.26)$$

όπου αγνοήσαμε τον παράγοντα L^2/x_0^2 . Η τοπολογία του συνόρου είναι ο ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^{d-1} .

Περνάμε στις ολικές συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\sinh x = -i \sin x$ και $\cosh x = \cos ix$,

$$X_1 = L \sec \rho \cosh \tau_E, \quad X_i = L \tan \rho \Omega_i, \quad X_{n+1}^{(E)} = L \sec \rho \sinh \tau_E, \quad (1.27)$$

με $i = 2, \dots, d$. Η μετρική γίνεται,

$$(ds_G)_E^2 = d\tau_e^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho d\Omega_{d-2}^2, \quad (1.28)$$

όπου αγνοήσαμε και πάλι τον αντίστοιχο παράγοντα $L^2 / \cos^2 \rho$. Στο σύνορο, $\rho = \pi/2$, φτάνουμε στην απλούστερη μορφή,

$$(ds_G)_{E,bound}^2 = d\tau_E^2 + d\Omega_{d-2}^2. \quad (1.29)$$

Η τοπολογία του είναι ο $\mathbb{R}_{\tau_E} \times S^{d-2}$.

Οι (1.28) και (1.29) είναι οι ίδιες εκφράσεις με έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα διαφορά. Πράγματι, γράφοντας την Poincaré μετρική σε σφαιρικές έχουμε,

$$(ds_P)_{E,bnd}^2 = dt_E^2 + d\vec{x}^2 = d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 d\Omega_{d-2}. \quad (1.30)$$

Θεωρώντας, $\tilde{\rho} = e^{\tau_E}$, όπου $\tau_E \in \mathbb{R}$ και $\tilde{\rho} \in [0, \infty)$, προκύπτει,

$$(ds_P)_{E,bnd}^2 = e^{2\tau_E} (ds_G)_{E,bnd}^2. \quad (1.31)$$

Άρα μπορούμε σε κάθε περίπτωση να ταυτίσουμε τον \mathbb{R}^{d-1} σα σύνορο του AdS_d . Αυτό που μας λείπει η παραπάνω σχέση είναι ότι οι εκατέρωθεν χώροι των συνόρων είναι ισόμορφοι, $\mathbb{R} \times S^{d-2} \cong \mathbb{R}^{d-1}$. Για παράδειγμα, ένας άπειρος κύλινδρος $\mathbb{R} \times S^1$ μπορεί μέσω ενός σύμμορφου μετασχηματισμού να απεικονιστεί σε ένα επίπεδο \mathbb{R}^2 .

1.1.3 Κοσμολογική σταθερά του AdS

Οι χώροι AdS προκύπτουν να είναι λύσεις των εξισώσεων της βαρύτητας,

$$I = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} [-2\Lambda + R + c_2 R^2 + \dots], \quad (1.32)$$

όπου Λ η κοσμολογική σταθερά, $g = \det(g_{\mu\nu})$ και $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ο βαθμωτός Ricci. Στη συγκεκριμένη περίπτωση που $c_i = 0$, παίρνουμε τη δράση Einstein-Hilbert, της γενικής σχετικότητας με κοσμολογική σταθερά και οι εξισώσεις κίνησης είναι,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.33)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το $R_{\mu\nu}$ με δύο τρόπους. Μέσω της μετρικής (1.16) ή παίρνοντας το ίχνος της (1.33). Ταυτοποιώντας το Λ προκύπτει,

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2L^2}. \quad (1.34)$$

Συνεπώς, η κοσμολογική σταθερά του AdS είναι αρνητική, όπως επίσης και η καμπυλότητά του.

1.2 Σύμμορφη συμμετρία και θεωρίες πεδίου

Σε ευκλείδειο χωρόχρονο, η ομάδα Poincaré μπορεί να επεκταθεί στη σύμμορφη ομάδα, η οποία αποτελείται από μετασχηματισμούς που διατηρούν τις γωνίες. Σε χωρόχρονο Minkowski μπορούμε να ορίσουμε αυτούς τους μετασχηματισμούς ως τους πιο γενικούς που διατηρούν τοπικά την αιτιότητα (*causality*), δηλαδή, χωροειδή (χρονοειδή) χωριστά σημεία απεικονίζονται σε χωροειδή (χρονοειδή). Για το $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$, οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί είναι αυτοί που θα αφήσουν τη μετρική αναλλοίωτη με ένα θετικό πολλαπλασιαστικό παράγοντα. Δηλαδή, για $x \rightarrow f(x)$ έχουμε,

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \Omega^{-2}(x)g_{\mu\nu}(x) = e^{2\sigma(x)}g_{\mu\nu}(x). \quad (1.35)$$

Άρα οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί αλλάζουν το μήκος του απειροστού χωροχρονικού διαστήματος κατά $ds'^2 = e^{2\sigma(x)}ds^2$, αλλά αφήνουν τοπικά τις γωνίες αναλλοίωτες και διατηρούν την αιτιακή δομή. Θεωρούμε επίπεδο χωρόχρονο $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ και κάνουμε ένα απειροστό μετασχηματισμό $x_\mu \rightarrow x_\mu + \epsilon_\mu(x)$ και η μετρική μετασχηματίζεται ως,

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = 2\sigma(x)\eta_{\mu\nu}, \quad (1.36)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\Omega(x) \simeq 1 - \sigma(x)$. Παίρνουμε το ίχνος της παραπάνω σχέσης πολλαπλασιάζοντας με $\eta^{\mu\nu}$ και χρησιμοποιώντας το $\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = d$,

$$\sigma(x) = \frac{2}{d}(\partial\epsilon), \quad (1.37)$$

και προκύπτει,

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial\epsilon). \quad (1.38)$$

Η (1.38) ονομάζεται σύμμορφη εξίσωση Killing και το $\epsilon_\mu(x)$ άνυσμα Killing³. Οι περιπτώσεις για $d = 2$ και $d \neq 2$ χρήζουν διαφορετικής αντιμετώπισης, αφού δίνουν διαφορετικές λύσεις για την (1.38). Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση $d > 2$, όπου μας ενδιαφέρει για την αντιστοιχία AdS/CFT.

1.2.1 Σύμμορφη άλγεβρα για $d > 2$

Η σύμμορφη εξίσωση Killing για την περίπτωση αυτή γίνεται,

$$\square(\partial\epsilon) = 0, \quad (1.39)$$

το οποίο σημαίνει πως το $\epsilon_\mu(x)$ μπορεί να είναι μέχρι δεύτερης τάξης ως προς x . Η γενικότερη μορφή είναι,

$$\epsilon^\mu(x) = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \lambda x^\mu + b^\mu x^2 - 2(b \cdot x)x^\mu. \quad (1.40)$$

³Στη σύμμορφη γεωμετρία, η σύμμορφη εξίσωση Killing σε μία πολλαπλότητα διάστασης n με μετρική g περιγράφει τα άνυσματα X που διατηρούν τη δομή της μετρικής με ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα, δηλ., $\mathcal{L}_X g = \lambda g$, για μία συνάρτηση λ (όπου η \mathcal{L}_X είναι η παράγωγος Lie).

Οι παράμετροι που υπεισέρχονται στο ϵ_μ έχουν πεπερασμένο αριθμό συνιστωσών, και πιο συγκεκριμένα $(d+1)(d+2)/2$. Άρα η σύμμορφη άλγεβρα της ομάδας συμμετρίας θα είναι πεπερασμένης διάστασης.

Όσον αφορά τη γεωμετρική ερμηνεία των παραμέτρων έχουμε τα εξής: Οι γεννήτορες που αντιστοιχούν στα a^μ και $\omega^{\mu\nu}$ είναι οι ορμές P^μ και στροφορμής J^μ . Το λ είναι η παράμετρος βάρθρωσης, στην οποία αντιστοιχεί ο γεννήτορας D και τέλος, η b^μ στους ειδικούς σύμμορφους μετασχηματισμούς K^μ , οι οποίοι συνδυάζουν την αντιστροφή $x^\mu \rightarrow x^\mu/x^2$ με τη μεταφορά $x^\mu \rightarrow a^\mu + x^\mu$. Η άλγεβρα της ομάδας είναι,

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, K_\rho] &= i(\eta_{\mu\rho}K_\nu - \eta_{\nu\rho}K_\mu), & [D, P_\mu] &= iP_\mu, \\ [K_\mu, K_\rho] &= 0, & [K_\mu, P_\nu] &= -2i(\eta_{\mu\nu}D - J_{\mu\nu}), \\ [D, K_\mu] &= -iK_\mu, & [D, J_{\mu\nu}] &= 0. \end{aligned}$$

Οι γεννήτορες $J^{\mu\nu}$ σχηματίζουν μία υπόαλγεβρα, την άλγεβρα Lorentz, $\mathfrak{so}(d-1, 1)$. Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη σύμμορφη άλγεβρα και να την ομαδοποιήσουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να ισοδυναμεί με την $\mathfrak{so}(d, 2)$. Για αρχή θεωρούμε τους δείκτες $A, B = 0, \dots, d+1$ και τη μετρική $\bar{\eta} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1, -1)$ και ορίζουμε,

$$\bar{J}_{d(d+1)} = -D, \quad \bar{J}_{\mu d} \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu), \quad \bar{J}_{\mu(d+1)} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \quad (1.41)$$

όπου κατά τα γνωστά, $\mu = 0, \dots, d-1$. Με τους ορισμούς αυτούς, το \bar{J}_{AB} ικανοποιεί την άλγεβρα,

$$[\bar{J}_{AB}, \bar{J}_{CD}] = i(\bar{\eta}_{AD}\bar{J}_{BC} + \bar{\eta}_{BC}\bar{J}_{AD} - \bar{\eta}_{AC}\bar{J}_{BD} + \bar{\eta}_{DB}\bar{J}_{AC}), \quad (1.42)$$

άρα όντως η σύμμορφη άλγεβρα είναι η $\mathfrak{so}(d, 2)$. Ένας ακόμα σύμμορφος μετασχηματισμός, που θα φανεί αρκετά χρήσιμος κατά τον υπολογισμό των συναρτήσεων συσχετισμού, είναι η αντιστροφή $x^\mu \rightarrow x^\mu/x^2$. Η αντίστοιχη ιακωβιανή είναι αρνητική, το οποίο σημαίνει πως ο μετασχηματισμός δεν συνδέεται με τη μονάδα κατά απειροστά βήματα. Άρα πρόκειται για τη διακριτή περίπτωση που ανήκει στην $O(d, 2)$. Μόνο άρτιος αριθμός μετασχηματισμών αντιστροφής, θα δίνουν ένα συνολικό μετασχηματισμό που θα προσεγγίζεται με απειροστά βήματα από τη μονάδα και κατ' επέκταση θα ανήκει στην $SO(d, 2)$. Σε ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^d η σύμμορφη ομάδα θα είναι η $SO(d+1, 1)$ και όμοια με πριν, η πιο γενική ομάδα που περιλαμβάνει στροφές, μεταφορές και αυθαίρετο αριθμό αντιστροφών είναι η $O(d+1, 1)$. Για κάθε σύμμορφο μετασχηματισμό ορίζουμε την ποσότητα $\mathcal{R}_\rho^\mu(x)$,

$$\mathcal{R}_\rho^\mu = \Omega(x) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}. \quad (1.43)$$

Ο $\mathcal{R}_\rho^\mu(x)$ είναι τοπικός μετασχηματισμός Lorentz διότι από τον ορισμό του προκύπτει,

$$\mathcal{R}_\rho^\mu(x) \mathcal{R}_\sigma^\nu(x) \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}. \quad (1.44)$$

Στην ευκλείδεια περίπτωση αντικαθιστώντας το $\eta_{\mu\nu}$ με $\delta_{\mu\nu}$, ο $\mathcal{R}_\rho^\mu(x)$ θα αναπαριστά τοπική ορθογώνια στροφή και συνεπώς θα ανήκει στην $O(d)$. Για την αντιστροφή θα έχουμε $\Omega(x) = x^2$ και

$$\mathcal{R}^{\mu\nu}(x) = I^{\mu\nu}(x) = \delta^{\mu\nu} - 2 \frac{x^\mu x^\nu}{x^2}, \quad (1.45)$$

όπου ο $I^{\mu\nu}(x)$ ονομάζεται πίνακας αντιστροφής και παίζει το ρόλο της παράλληλης μετατόπισης. Για ένα σύμμορφο μετασχηματισμό το νέο $I^{\mu\nu}$ είναι,

$$I^{\mu\nu}(x' - y') = \mathcal{R}_a^\mu(x) \mathcal{R}_b^\nu(x) I^{ab}(x - y), \quad (1.46)$$

απ' όπου προκύπτει η γενική σχέση μετασχηματισμού για τις συντεταγμένες,

$$(x' - y')^2 = \frac{(x - y)^2}{\Omega(x)\Omega(y)}. \quad (1.47)$$

1.2.2 Μετασχηματισμοί πεδίων

Τα πεδία σε μία σύμμορφη θεωρία πεδίου μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της σύμμορφης άλγεβρας. Πρώτα θεωρούμε το ϕ στο $x = 0$ και ύστερα μετατοπίζουμε το όρισμα με τη βοήθεια του P_μ για να πάρουμε τη γενική μορφή του μετασχηματισμού. Το ϕ θα έχει καλώς ορισμένη σύμμορφη διάσταση και συνολική στροφορμή⁴. Για τους Lorentz μετασχηματισμούς έχουμε,

$$[J_{\mu\nu}, \phi(0)] = -\mathcal{J}_{\mu\nu}\phi(0), \quad (1.48)$$

όπου $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ είναι η πεπερασμένη διάστασης αναπαράσταση της ομάδας Lorentz που καθορίζει το σπιν του $\phi(0)$ ⁵. Για μετασχηματισμούς βάρους έχουμε,

$$[D, \phi(0)] = -i\Delta\phi(0), \quad (1.49)$$

όπου το ϕ έχει σύμμορφη διάσταση Δ και μετασχηματίζεται ως $\phi(x) \rightarrow \lambda^{-\Delta}\phi(x)$.

Από τις σχέσεις μετάθεσης προκύπτει ότι οι P_μ και K_μ δρουν σαν τελεστές δημιουργίας και καταστροφής αντίστοιχα. Ανεβάζουν και κατεβάζουν κατά μία μονάδα την τιμή της σύμμορφης διάστασης Δ .

Για μία μοναδιακή (*unitary*) θεωρία πρέπει όλες οι καταστάσεις σε κάποια αναπαράσταση να έχουν θετική νόρμα. Το γεγονός αυτό επιβάλλει περιορισμούς στις διατηρήσιμες ποσότητες, όπως η σύμμορφη διάσταση στην περίπτωσή μας. Για ένα τυχαίο πεδίο φ η επαναλαμβανόμενη δράση του K_μ θα του κατεβάσει συνεχώς τη διάσταση, μέχρις ότου φτάσει στην ελάχιστη επιτρεπτή τιμή όπου ορίζει η απαίτηση της μοναδιακότητας της θεωρίας, όπου τότε θα δώσει μηδενική ιδιοτιμή. Τα πεδία όπου η μηδενική ιδιοτιμή δίνεται μονάχα από μία δράση του K_μ , ονομάζονται πρωτεύοντα και οι παράγωγοί τους (P_μ) ορίζουν τους απογόνους. Συνεπώς, για ένα πρωτεύον πεδίο ισχύει,

$$[K_\mu, \phi(0)] = 0. \quad (1.50)$$

Αφενός για να γενικεύσουμε τις (1.48) και (1.49) για τυχαίο x και για να βρούμε τις αντίστοιχες σχέσεις για τους υπόλοιπους γεννήτορες, χρησιμοποιούμε τη σχέση $\phi(x) = \mathcal{T}(x)\phi(0)\mathcal{T}^{-1}(x)$

⁴Ο γεννήτορας D παίζει το ρόλο της Χαμιλτονιανής και μετατίθεται με το $J_{\mu\nu}$ (βλ. σύμμορφη άλγεβρα)

⁵Διαισθητικά, το αποτέλεσμα αυτό είναι η γενίκευση της κλασικής περίπτωσης ότι για $x = 0$ δε μπορεί το σύστημα να έχει τροχιακή στροφορμή παρά μόνο ιδιοστροφορμή.

με $\mathcal{T}(x) = \exp(-iP_\mu x^\mu)$,

$$[P_\mu, \phi(x)] = -i\partial_\mu \phi(x) \equiv \mathcal{P}_\mu \phi(x),$$

$$[D, \phi(x)] = -i\Delta \phi(x) - ix^\mu \partial_\mu \phi(x) \equiv \mathcal{D} \phi(x),$$

$$[J_{\mu\nu}, \phi(x)] = -\mathcal{J}_{\mu\nu} \phi(x) + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \phi(x) \equiv \tilde{\mathcal{J}}_{\mu\nu} \phi(x),$$

$$[K_\mu, \phi(x)] = (i(-x^2 \partial^\mu + 2x_\mu x^\rho \partial_\rho + 2x_\mu \Delta) - 2x^\nu \mathcal{J}_{\mu\nu}) \phi(x) \equiv \mathcal{K}_\mu \phi(x).$$

Κάτι που επίσης αξίζει να αναφέρουμε είναι το γεγονός ότι οι συναρτήσεις συσχετισμού στη σύμμορφη θεωρία πεδίου καθορίζονται -ως ένα βαθμό- από τους περιορισμούς λόγω συμμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση δύο σημείων βρίσκεται ακριβώς με ένα συντελεστή κανονικοποίησης, η συνάρτηση τριων σημείων έχει ένα απροσδιόριστο συντελεστή και για τη συνάρτηση τεσσάρων σημείων βρίσκουμε επίσης τη συναρτησιακή μορφή. Αυτά ισχύουν και για κάθε διάσταση, παρόλα αυτά στις $d > 2$ υπάρχει περισσότερη ελευθερία στον καθορισμό τους.

Κεφάλαιο 2

Υπερσυμμετρία σε θεωρία χορδών και βαρύτητα

2.1 Υπερσυμμετρία: θεμελίωση, αναπαραστάσεις και $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία

Μέχρι τις αρχές του 60' οι γνωστές συμμετρίες της σωματιδιακής φυσική ήταν οι Poincaré $ISO(3, 1)$ και οι εσωτερικές συμμετρίες, όπως η τοπική $U(1)$ για τον ηλεκτρομαγνητισμό, η τοπική $SU(3)_c$ της κβαντικής χρωμοδυναμικής και η $SU(2)$ για το ισόσπιν. Έγιναν προσπάθειες να επεκταθούν σε μεγαλύτερες συμμετρίες που θα περιείχαν τις προαναφερόμενες. Κάτι τέτοιο θα σήμαινε $[T_s, P_\mu/J_{\mu\nu}] \neq 0$, δηλαδή η εκτεταμένη ομάδα συμμετρίας να περιλαμβάνει χωροχρονικούς και εσωτερικούς μετασχηματισμούς. Το θεώρημα των Coleman και Mandula έβαλε φρένο σ' αυτές τις προσπάθειες. Έτσι, ορίστικαν οι νέες ποσότητες Q_A^i , όπου θα ικανοποιούσαν τη μεταξύ τους σχέση αντιμετάθεσης,

$$\{Q_A^i, Q_B^j\} = \text{άλλοι γεννήτορες} \quad (2.1)$$

και παράλληλα σχέσεις μετάθεσης με τους γεννήτορες των χωροχρονικών και εσωτερικών μετασχηματισμών P_μ , $J_{\mu\nu}$ και T_r αντίστοιχα. Θα ονομάσουμε άρτιους τους τελευταίους, διότι η μεταξύ τους σχέση μετάθεση κλείνει στους ίδιους, και περιττούς τους τελευταίους με το αντίστοιχο επιχείρημα. Έτσι, σχηματικά,

$$[\text{άρτιος}, \text{άρτιος}] = \text{άρτιος}, \quad \{\text{περιττός}, \text{περιττός}\} = \text{άρτιος}, \quad [\text{άρτιος}, \text{περιττός}] = \text{περιττός} \quad (2.2)$$

Συνεπώς, οι άρτιοι ακολουθούν μποζονική συμπεριφορά, ενώ οι περιττοί φερμιονική. Η νέα εκτεταμένη άλγεβρα που δημιουργήσαμε, με την εισαγωγή των Q_A^i , ονομάζεται διαβαθμισμένη άλγεβρα Lie (*graded Lie algebra*) και οι γεννήτορες ικανοποιούν τις αντίστοιχες ταυτότητες Jacobi. Ο Q_A^i είναι σπίνορας και ως γνωστόν η δράση ενός σπίνορα σε σπίνορα δίνει μποζονικό πεδίο, ενώ σε μποζόνιο δίνει σπίνορα. Έτσι, η ιδέα που προκύπτει είναι η εξής: Ένα μποζόνιο (φερμιόνιο) έχει ένα φερμιονικό (μποζονικό) παρτενέρ, ο οποίος βρίσκεται από τη δράση του Q_A^i στο πρώτο.

Άρα το Q_A^i δίνει μία συμμετρία μεταξύ μποζονίων και φερμιονίων, η οποία ονομάζεται υπερσυμμετρία και σχηματικά έχουμε,

$$\delta(\text{μποζόνιο}) = \text{φερμιόνιο}, \quad \delta(\text{φερμιόνιο}) = \text{μποζόνιο}. \quad (2.3)$$

Ο δείκτης i αναφέρεται στον αριθμό των υπερσυμμετριών που είναι παρούσες στη θεωρία, $i = 1, \dots, \mathcal{N}$ και ο A είναι ο σπινωριακός δείκτης¹. Θα θεωρήσουμε ότι τα Q_A^i είναι σπίνωρες Majorana, όπου θα ικανοποιούν τη συνθήκη,

$$Q_B^i = Q^{iA} C_{AB}, \quad (2.4)$$

όπου ο C είναι ο πίνακας συζυγίας φορτίου (*charge conjugation matrix*) και ικανοποιεί τις σχέσεις,

$$C^T = -C, \quad C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T. \quad (2.5)$$

και γ^μ οι πίνακες γάμμα που ικανοποιούν την άλγεβρα Clifford. Από την ανάλυση των σπινώρων σε d διαστάσεις προκύπτει [17] (σελ. 48),

$$\begin{aligned} C\gamma^\mu C^{-1} &= \sigma\gamma^{\mu T}, \quad \sigma = \pm 1 \\ C^{-1}C^T &= a\mathbb{1}, \quad a = \pm 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Έτσι, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, τις C_\pm . Αναλόγως τη χωροχρονική διάσταση μπορούμε να έχουμε είτε έναν εκ των δύο, είτε και τους δύο. Παράλληλα, αποδεικνύεται ότι δε μπορούμε για κάθε διάσταση να κατασκευάσουμε σπίνωρα Majorana. Στις περιπτώσεις που αυτό συμβαίνει, υπάρχει και η υποπερίπτωση να μπορούμε να κατασκευάσουμε και σπίνωρα Majorana-Weyl. Ας δούμε δύο παραδείγματα που θα μας φανούν χρήσιμα και για τη συνέχεια

- $d = 4$: Έχουμε C_\pm με $C_-^T = -C_-$ και $C_+^T = -C_+$, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο το C_- για να κατασκευάσουμε σπίνωρες Majorana.
- $d = 10$: Έχουμε C_\pm με $C_-^T = C_-$ και $C_+^T = C_+$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τα δύο σπίνωρες Majorana αλλά και Weyl-Majorana.

Η υπερσυμμετρική άλγεβρα για την απλούστερη περίπτωση όπου $\mathcal{N} = 1$ είναι,

$$\begin{aligned} [Q_A, J_{\mu\nu}] &= \frac{1}{2}(\gamma_{\mu\nu})_A^B Q_B, \quad [Q_A, P_\mu] = 0, \\ [Q_A, T_r] &= (V_r)^i_j Q_A, \quad \{Q_A, Q_B\} = 2(C\gamma^\mu)_{AB} P_\mu \end{aligned} \quad (2.7)$$

Για $d = 4$ χώρο Minkowski είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την περιγραφή για σπίνωρες δύο συνιστωσών. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $A, B = 1, \dots, 4$ και ορίζουμε $a, \dot{a} = 1, 2$. Για ένα γενικό σπίνωρα Dirac έχουμε,

$$\psi^A = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

όπου ικανοποιείται η σχέση,

$$\bar{\chi}^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}a} (\chi_a)^\dagger. \quad (2.9)$$

¹ Για σπίνωρα Majorana έχουμε $2^{d/2}$ συνιστώσες (d -άρτιο), άρα για $d = 4$, $A = 1, \dots, 4$.

Η αναπαράσταση του πίνακα C θα είναι,

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} \epsilon^{ab} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{ab} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

και $\epsilon_{ab} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = -\epsilon^{ab}$. Για τους γάμμα πίνακες στην αναπαράσταση Weyl έχουμε,

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

όπου $(\sigma^\mu)_{a\dot{a}} = (\mathbb{I}, \vec{\sigma})_{a\dot{a}}$ και $(\bar{\sigma}^\mu)^{a\dot{a}} = \epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}(\sigma^\mu)_{b\dot{b}} = (\mathbb{I}, -\vec{\sigma})^{a\dot{a}}$. Για ένα σπινόρα Majorana θα ισχύει $\psi_a = \chi_a$ και άρα θα είναι,

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \bar{\psi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Επίσης, θα ισχύουν οι σχέσεις,

$$\psi^b = \psi_a \epsilon^{ab}, \quad \bar{\psi}_{\dot{b}} = \bar{\psi}^{\dot{a}} \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}, \quad \psi_b = \epsilon_{ab} \psi^a, \quad \bar{\psi}^{\dot{b}} = \epsilon_{ba} \bar{\psi}_{\dot{a}}, \quad (2.13)$$

και χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\psi\chi = \psi^a \chi_a$ και $\bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{a}} \bar{\chi}^{\dot{a}}$ που προκύπτει από τη σχέση,

$$\bar{\psi}\chi = \psi^A C_{AB} \chi^B = \psi^b \chi_b + \bar{\psi}_{\dot{b}} \bar{\chi}^{\dot{b}} = \psi\chi + \bar{\psi}\bar{\chi}, \quad (2.14)$$

χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς για το ανέβασμα και το κατέβασμα δεικτών στους σπινόρες δύο συνιστωσών. Έτσι, η άλγεβρα των Q_A^i για \mathcal{N} υπερσυμμετρίες είναι,

$$\begin{aligned} \{Q_a^i, \bar{Q}_{j\dot{a}}\} &= -2(\sigma^\mu)_{a\dot{a}} \delta_j^i P_\mu, \\ \{Q_a^i, Q_b^j\} &= \{\bar{Q}_{i\dot{a}}, \bar{Q}_{j\dot{b}}\} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.1.1 Άμαζες μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις

Μπορούμε να βρούμε ένα σύστημα αναφοράς, όπου $P_\mu = p(1, 0, 0, 1)$ και άρα $\sigma^\mu P_\mu = p(-\mathbb{I} + \sigma_3)$. Έτσι, η άλγεβρα απλοποιείται,

$$\{Q_a^i, \bar{Q}_{j\dot{a}}\} = 2p(\mathbb{I} - \sigma_3) \delta_j^i = 4p \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_j^i. \quad (2.16)$$

Προκύπτει $\{Q_1^i, \bar{Q}_{j\dot{1}}\} = 0$ και έτσι για μια τυχαία κατάσταση $|\phi\rangle$,

$$0 = \langle \phi | \{Q_1^i, \bar{Q}_{j\dot{1}}\} | \phi \rangle = \|Q_1^i |\phi\rangle\|^2 + \|\bar{Q}_{j\dot{1}} |\phi\rangle\|^2. \quad (2.17)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει θα πρέπει ο χώρος Hilbert να έχει θετική νόρμα αν θέλουμε η θεωρία να είναι μοναδιακή. Συνεπώς, είναι αναγκαίο να απαιτήσουμε $Q_1^i |\phi\rangle = \bar{Q}_{j\dot{1}} |\phi\rangle = 0$. Άρα απομένουν μόνο οι Q_2^i και $\bar{Q}_{j\dot{2}}$. Έτσι, θα έχουμε $\{Q_2^i, \bar{Q}_{j\dot{2}}\} = 4p \delta_j^i$ που είναι η άλγεβρα των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας με ένα συνολικό παράγοντα διαφορά. Ορίζουμε,

$$a_i \equiv \frac{1}{\sqrt{2p}} Q_2^i, \quad a_i^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2p}} \bar{Q}_{j\dot{2}}^i, \quad (2.18)$$

$$\{a^i, a^{\dagger j}\} \delta^{ij}, \quad \{a^i, a^j\} = \{a^{\dagger i}, a^{\dagger j}\} = 0.$$

Αυτά είναι τα εργαλεία που χρειαζόμαστε για να κατασκευάσουμε τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Από τη δράση των Q_2^i, \bar{Q}_2^i στην κατάσταση $|\phi\rangle$, αποδεικνύεται ότι αντιστοιχούν στους τελεστές καταστροφής και δημιουργίας, αφού,

$$[J_{12}, Q_2^i] = -\frac{1}{2}Q_2^i, \quad [J_{12}, \bar{Q}_2^i] = \frac{1}{2}\bar{Q}_2^i, \quad (2.19)$$

όπου $J_{12} = J_3$. Άρα, αφού έχουμε άμαζες καταστάσεις αναφερόμαστε στην ελικότητά τους και η μεταβολή θα είναι σε μονάδες του $1/2$. Για να καθορίσουμε τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις θα δράσουμε με τον τελεστή δημιουργίας στην κατάσταση με τη χαμηλότερη ελικότητα $|\lambda\rangle$ (κενό Clifford). Η κατάσταση με τη μεγαλύτερη ελικότητα θα είναι η $|\lambda + N/2\rangle$. Για μία τυχαία ελικότητα $\lambda + k/2$ έχουμε,

$$\text{αριθμός καταστάσεων με ελικότητα } \lambda + k/2 = \binom{\mathcal{N}}{k}, \quad (2.20)$$

όπου $k = 0, 1, \dots, \mathcal{N}$. Άρα ο συνολικός αριθμός καταστάσεων στη μη αναγώγιμη αναπαράσταση θα είναι,

$$\sum_{k=0}^{\mathcal{N}} \binom{\mathcal{N}}{k} = 2^{\mathcal{N}} = (2^{\mathcal{N}-1})_B + (2^{\mathcal{N}-1})_F. \quad (2.21)$$

Οι καταστάσεις που έχουμε εξάγει μέχρι στιγμής δεν είναι αναλλοίωτες κάτω από CPT μετασχηματισμούς, γι' αυτό θα τους προσθέσουμε το CPT συζυγές τους.

$\mathcal{N} = 1$

- $\lambda = 0$, Χειραλική πολλαπλέτα: $|1/2\rangle, |2|0\rangle, |-1/2\rangle$. Περιεχόμενο: ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο και ένα σπίνορα Majorana.
- $\lambda = 1/2$, Ανυσματική πολλαπλέτα: $|1\rangle, |1/2\rangle, |-1\rangle, |-1/2\rangle$. Περιεχόμενο: ένα ανυσματικό πεδίο και ένα σπίνορα Majorana.
- $\lambda = 1$, Βαρυτινιακή πολλαπλέτα: $|1\rangle, |3/2\rangle, |-3/2\rangle, |-1\rangle$. Περιεχόμενο: ένα ανυσματικό πεδίο και ένα πεδίο με σπιν $3/2$.
- $\lambda = 3/2$, Βαρυτονική πολλαπλέτα: $|3/2\rangle, |2\rangle, |-2\rangle, |-3/2\rangle$. Περιεχόμενο: ένα πεδίο με σπιν 2 και ένα με σπιν $3/2$.

Η περίπτωση για $\mathcal{N} = 2$ δε θα μας απασχολήσει στη συνέχεια, σε αντίθεση με την $\mathcal{N} = 4$ η οποία παίζει σημαντικό ρόλο για την AdS/CFT.

$\mathcal{N} = 4$

- $\lambda = -1$, Ανυσματική πολλαπλέτα: $|1\rangle, 4|1/2\rangle, 6|0\rangle, 4|1/2\rangle, |1\rangle$. Περιεχόμενο: ένα ανυσματικό πεδίο, τέσσερα σπίνορες Majorana τρία μιγαδικά βαθμωτά πεδία, που θα ικανοποιούν τη σχέση,

$$\phi_{ij}^\dagger = \phi^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijkl}\phi_{kl}. \quad (2.22)$$

με $i = 1, \dots, 4$ δείκτη της θεμελιώδους αναπαράστασης της $SU(4)$.

2.1.2 Αναπαράστασεις με μάζα χωρίς κεντρικό φορτίο

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε μη μηδενική μάζα και συνεπώς θα πρέπει να μιλάμε για σπιν αντί της ελικοτότητας, μιας και δε θα είναι καλός κβαντικός αριθμός. Διαλέγουμε σύστημα αναφοράς όπου $P^\mu = M(1, 0, 0, 0)$, με $\sigma^\mu P_\mu = -M$ και

$$\{Q_a^i, \bar{Q}_{j\dot{a}}\} = 2M \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Άρα, έχουμε δύο σετ τελεστών δημιουργίας και καστροφής,

$$a_{a,b}^{i\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2M}} \bar{Q}_{\dot{a},b}^i, \quad a_{a,b}^i = \frac{1}{\sqrt{2M}} Q_{a,b}^i. \quad (2.24)$$

Η διάσταση της αναπαράστασης θα είναι $2^{2\mathcal{N}}$, αρκετά μεγαλύτερη από την άμαζη περίπτωση. Οι καλώς ορισμένες ποσότητες θα είναι η μάζα m και το σπιν j .

2.1.3 Αναπαράστασεις με μάζα και κεντρικό φορτίο

Εν γένει η υπερσυμμετρική άλγεβρα επεκτείνεται με την εισαγωγή κεντρικού φορτίου,

$$\begin{aligned} \{Q_a^i, \bar{Q}_{j\dot{a}}\} &= -2(\sigma^\mu)_{a\dot{a}} \delta_j^i P_\mu, \\ \{Q_a^i, Q_b^j\} &= 2\epsilon_{ab} Z^{ij} \\ \{\bar{Q}_{i\dot{a}}, Q_b\} &= 2\epsilon_{\dot{a}b} Z_{ij}^*. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Για απλότητα θεωρούμε πάλι το ίδιο P_μ με πριν και ότι είμαστε στην $\mathcal{N} = 2$. Το Z^{ij} είναι αντισυμμετρικός πίνακας και μπορούμε να τον διαγωνοποιήσουμε με μια στροφή $U(N)$ όπου στην προκειμένη είναι $U(2)$. Για αρχή τον διαγωνοποιούμε με μία στροφή $SU(2)$ και ύστερα εκμεταλλευόμαστε τον εναπομένον $U(1)$ για να κάνουμε πραγματικά τα στοιχεία του. Έτσι έχουμε $Z^{ij} = Z\epsilon^{ij}$ και η άλγεβρα γίνεται,

$$\begin{aligned} \{Q_a^i, \bar{Q}_{j\dot{a}}\} &= 2M\delta_{ab}\delta_j^i P_\mu, \\ \{Q_a^i, Q_b^j\} &= 2Z\epsilon_{ab}\epsilon^{ij} \\ \{\bar{Q}_{i\dot{a}}, Q_{j\dot{b}}\} &= 2Z\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{ij}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

με $\bar{Q}_{i\dot{a}} = (Q_a^i)^\dagger$ και $\bar{Q}_{i\dot{a}} = \epsilon_{i\dot{a}}^b Q_b$. Ορίζοντας,

$$\begin{aligned} a_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} [Q_a^1 + \epsilon_{ab} \bar{Q}_{2\dot{b}}] & a_a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} [Q_{1a} + \epsilon_{ab} Q_b^2], \\ b_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} [Q_a^1 - \epsilon_{ab} \bar{Q}_{2\dot{b}}] & b_a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{Q}_{1\dot{a}} - \epsilon_{ab} Q_b^2], \end{aligned} \quad (2.27)$$

καταλήγουμε στην άλγεβρα,

$$\{a_a, a_b^\dagger\} = 2(M - Z)\delta_{ab}, \quad \{b_a, b_b^\dagger\} = 2(M + Z)\delta_{ab}. \quad (2.28)$$

Η πρώτη σχέση, λόγω μοναδιακότητας, επιβάλλει $M \geq |Z|$, όπου η ανισότητα αυτή ονομάζεται Bogomolnyi-Prasad-Sommerfeld ή BPS όριο. Στην οριακή περίπτωση όπου $M = |Z|$, η πρώτη σχέση μηδενίζεται και ο αριθμός των γεννητόρων μειώνεται κατά το ήμισυ σε \mathcal{N} . Άρα, καταλήγουμε πάλι σε διάσταση της αναπαράστασης $2^{\mathcal{N}}$, όπως στην άμαχη περίπτωση. Έτσι, παίρνουμε τις μικρές πολλαπλέτες (*short multiplets*).

2.1.4 R-συμμετρία

Η R-συμμετρία αναφέρεται στην αναλλοιώτητα της θεωρίας όταν μετασχηματίζουμε τα υπερφορτία Q_{ia} κατά μία φάση. Για την τετριμμένη περίπτωση της $\mathcal{N} = 1$ έχουμε $U(1)$ συμμετρία όπου,

$$Q_a \longrightarrow Q'_a = e^{i\phi} Q_a, \quad \bar{Q}_{\dot{a}} \longrightarrow \bar{Q}'_{\dot{a}} = e^{-i\phi} \bar{Q}_{\dot{a}}. \quad (2.29)$$

Ο αντίστοιχος γεννήτορας αυτού του μετασχηματισμού θα είναι ο R με τις ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης,

$$[Q_a, R] = Q_a, \quad [\bar{Q}_{\dot{a}}, R] = -\bar{Q}_{\dot{a}}. \quad (2.30)$$

Ενδιαφερόμαστε για τέσσερις διαστάσεις όπου οι σπίνορες μπορούν να είναι Weyl (μυγαδικοί). Στην περίπτωση όπου $\mathcal{N} = 2$ έχουμε την $SU(2)$ R-συμμετρία και για $\mathcal{N} = 4$ την $SU(4)$ R-συμμετρία. Άρα γενικά θα έχουμε την $SU(\mathcal{N})$. Στις τρεις διαστάσεις θα έχουμε σπίνορα Majorana (πραγματικός), συνεπώς η αντίστοιχη ομάδα της R-συμμετρίας θα είναι η $SO(\mathcal{N})$.

2.1.5 $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills δράση

Για να προσδιορίσουμε την $\mathcal{N} = 4$ θεωρία θα ασχοληθούμε πρώτα με την $\mathcal{N} = 1$ περίπτωση για λόγους που θα γίνουν προφανείς στην πορεία. Είδαμε ότι η ανυσματική πολλαπλέτα έδινε θεωρία με ένα ανυσματικό πεδίο και ένα φερμιόνιο, $(A_\mu^\alpha, \lambda^\alpha)$, όπου και τα δύο ανήκουν στην προσαρτημένη αναπαράσταση, $A_\mu = A_\mu^\alpha T^\alpha$, $\lambda = \lambda^\alpha T^\alpha$. Οι βαθμοί ελευθερίας για την περίπτωση όπου ικανοποιούνται οι εξ. κίνησης, θα είναι εκατέρωθεν δύο, άρα θα είναι τα μόνα πεδία που θα έχουμε στη δράση,

$$S_{\mathcal{N}=1, d=4} = (-2) \int d^4x \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \not{D} \lambda \right), \quad (2.31)$$

όπου το -2 έρχεται από την κανονικοποίηση των γεννητόρων $\text{Tr}(T^\alpha T^\beta) = -1/2 \delta^{\alpha\beta}$. Η μορφή των μετασχηματισμών υπερσυμμετρίας καθορίζεται και από την απαίτηση για αναλλοιώτητα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας και Lorentz θα έχουμε,

$$\delta A_\mu^\alpha = \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^\alpha, \quad \delta \lambda^\alpha = -\frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^\alpha \epsilon. \quad (2.32)$$

Για να προσδιορίσουμε τη δράση $\mathcal{N} = 4$ θα δουλέψουμε με τον εξής τρόπο: Για την περίπτωση που ικανοποιούνται οι εξ. κίνησης, θα χρησιμοποιήσουμε τη δράση της $\mathcal{N} = 1$ ανυσματικής

πολλαπλέτας σε δέκα χωροχρονικές διαστάσεις και μέσω διαστατικής μείωσης θα πάμε στις τέσσερις έχοντας αποκτήσει τα επιθυμητά πεδία στη θεωρία. Για να δούμε πως θα το κάνουμε αυτό ας δούμε πρώτα τη διαδικασία της διαστατικής μείωσης.

Μείωση των διαστάσεων, σημαίνει συμπαγοποίηση των "ανεπιθύμητων" εξ αυτών. Το σκεπτικό είναι να αναπτύξουμε την υπό εξέταση ποσότητα στις ιδιοκαταστάσεις της λαπλασιανής του χώρου που ορίζουν οι περαιτέρω διαστάσεις και τέλος να πάρουμε το όριο της ακτίνας του στο μηδέν. Η αναγωγή των πεδίων θα γίνει μέσω του τρόπου που μετασχηματίζονται κάτω από την ομάδα ισομετριών του χώρου προκύπτει ².

Στις δέκα διαστάσεις θα έχουμε σπίνορα Majorana-Weyl. Αυτό σημαίνει ότι από τις $2^{10/2} = 32$ μιγαδικές συνιστώσες του σπίνορα Dirac, μόνο οι 16 πραγματικές θα απομείνουν, διότι η συνθήκη Majorana θα τις κάνει όλες πραγματικές, ενώ η Weyl θα αφήσει τις μισές. Θεωρώντας την on-shell περίπτωση θα μείνουμε με 8 συνιστώσες σύνολο, όπως ακριβώς και στο ανυσματικό πεδίο. Ο σπίνορας Weyl Ψ_{Π} , με $\Pi = 1, \dots, 16$, θα ικανοποιεί τις,

$$\Gamma_{11}\Psi = \Psi, \quad \bar{\Psi} = \Psi^T C_{10}. \quad (2.33)$$

Το ανυσματικό πεδίο θα είναι το A_M , με $M = 0, \dots, 9$. Έτσι, η δράση θα είναι,

$$S_{N=1,d=10} = (-2) \int d^{10}x Tr \left(-\frac{1}{4} F^{MN} F_{MN} - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \Gamma^M D_M \lambda \right). \quad (2.34)$$

Για τους πίνακες γάμμα και τον C , έχουμε,

$$\begin{aligned} \Gamma_M &= (\gamma_\mu \otimes \mathbb{I}, \gamma_5 \otimes \gamma_m), \quad \Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes \mathbb{I}, \\ \Gamma_m &= \gamma_5 \otimes \gamma_m, \quad \Gamma_{11} = \gamma_5 \otimes \gamma_7, \quad C_{10} = C_4 \otimes C_6. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Στις δέκα διαστάσεις το $C_{10}\Gamma^\mu = C_4\gamma^\mu \otimes C_6$ πρέπει να είναι συμμετρικό, άρα το C_6 πρέπει να είναι αντισυμμετρικό. Τότε, αφού $C_{10}^T = C_{4-}^T \otimes C_{6-}^T = -C_{10}$, θα πρέπει $C_{10} = -C_{10-}$. Ο δεκαδιάστατος συζυγής σπίνορας σε συμβολισμό τεσσάρων διαστάσεων θα είναι,

$$\bar{\psi}_M = \psi^T C_4 \otimes C_6. \quad (2.36)$$

Ο δεκαδιάστατος σπίνορας θα ανάγεται σε τέσσερις τετραδιάστατους $\Psi_{\Pi} = \psi_{ai}$, με $i = 1, \dots, 4$, ενώ το ανυσματικό πεδίο σε ένα τετραδιάστατο A_μ και έξι βαθμωτά ϕ_m , με $m = 1, \dots, 6$. Μπορούμε να τα γράψουμε και ως,

$$\phi_{[ij]} = \phi_m \tilde{\gamma}_{[ij]}^m, \quad (2.37)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τους συντελεστές Clebsh-Gordan για να πάμε από τους δείκτες m της $SO(6)$, στους i, j της $SU(4)$. Ο συμβολισμός $[ij]$ είναι για την αντισυμμετρική αναπαράσταση της $SU(4)$ και ισχύει,

$$\tilde{\gamma}_{[ij]}^m = \frac{1}{2} (C_6 \gamma_m \gamma_7)_{[ij]}, \quad \tilde{\gamma}_{[ij]}^m \tilde{\gamma}_n^{[ij]} = \delta_n^m \quad (2.38)$$

²Έστω, για παράδειγμα ο ηλεκτρομαγνητισμός σε $4 + n$ διαστάσεις, με $M = (\mu, m)$ όπου $\mu = 0, \dots, 4$ και $m = 4, \dots, 4 + n$. Τότε, το πεδίο μπορεί να γραφτεί ως, $A_M = (A_\mu, A_m)$. Κάτω από $SO(3, 1)$ η πρώτη συνιστώσα μετασχηματίζεται σαν άνυσμα ενώ η δεύτερη σα βαθμωτό πεδίο.

Για τα βαθμωτά πεδία θα ισχύει επίσης,

$$\phi_{ij}^\dagger = \phi^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} \phi_{kl}. \quad (2.39)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των F_{MN} , D_M και την αναγωγή του A_M , η αναγωγή του τανυστή πεδίου, θεωρώντας εξάρτηση μόνο από τις x_μ μεταβλητές, θα είναι,

$$F_{MN} = (F_{\mu\nu}, F_{\mu m}, F_{mn}) = (F_{\mu\nu}, D_\mu \phi_m, g[\phi_m, \phi_n]), \quad (2.40)$$

όπου δίνει τους μποζονικούς όρους της τετραδιάστατης δράσης, ενώ της συναλλοίωτης παραγώγου του σπινόρα,

$$D_M \lambda = (D_\mu \psi_i, g[\phi_m, \psi_i]), \quad (2.41)$$

όπου δίνει τους αντίστοιχους φερμιονικούς όρους. Έτσι, η τελική μορφή της δράσης είναι,

$$S_{\mathcal{N}=4, d=4} = (-2) \int d^4 x Tr \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} \bar{\psi}_i \not{D} \psi^i - \frac{1}{2} D_\mu \psi_m D^\mu \psi^m - g \bar{\psi}^i [\phi_n, \psi^j] \tilde{\gamma}_{[ij]}^n - \frac{g^2}{4} [\phi_m, \phi_n] [\phi^m, \phi^n] \right), \quad (2.42)$$

όπου η συναλλοίωτη παράγωγος είναι, $D_\mu = \partial_\mu + g[A_\mu, \cdot]$. Οι δεκαδιάστατοι μετασχηματισμοί θα είναι απλά μια γενίκευση αυτών που είχαμε στην $\mathcal{N} = 1$ για $d = 10$,

$$\delta A_M^\alpha = \bar{\epsilon} \Gamma_M \lambda^\alpha, \quad \delta \lambda^\alpha = -\frac{1}{2} \Gamma^{MN} F_{MN}^\alpha \epsilon, \quad (2.43)$$

από τους οποίους καταλήγουμε στους τετραδιάστατους,

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^\alpha &= \bar{\epsilon}_i \gamma_\mu \psi^{\alpha i} \\ \delta \phi_\alpha^{[ij]} &= 2 \bar{\epsilon}^{[i} \psi^{j]\alpha} \\ \delta \lambda^{\alpha i} &= -\frac{\gamma_{\mu\nu}}{2} F_{\mu\nu}^\alpha \epsilon^i - 2 \gamma^\mu D_\mu \phi^{\alpha, [ij]} \epsilon_j + 2 g f_{\beta\gamma}^\alpha (\phi^\beta \phi^\gamma)^{[ij]} \epsilon_j \\ & (\phi^\alpha \phi^\beta)^i_j \equiv \phi_k^{\alpha, i} \phi_j^{\beta, k}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Η $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills έχει ολική $SO(6) \cong SU(4)$ συμμετρία, η οποία είναι R-συμμετρία. Τα βαθμωτά ϕ_m ανήκουν στη θεμελιώδη αναπαράσταση της $SO(6)$ ή ως $\phi_{[ij]}$ στην αντισυμμετρική της $SU(4)$. Οι σπινόρες ψ^i ανήκουν στη θεμελιώδη της $SU(4)$ ή τη σπινιορική της $SO(6)$. Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να διαλέξουμε όποια εκ των δύο ομάδων συμμετρίας θέλουμε. Η πολλαπλέτα της θεωρίας είναι $\{A_\mu^\alpha, \psi_a^{\alpha i}, \phi_{[ij]}^\alpha\}$ με δείκτες $\alpha \in SU(N)$, $i \in SU(4)$ και a ο σπινιορικός.

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό της $\mathcal{N} = 4$ SYM είναι πως η βήτα συνάρτηση είναι μηδενική, και έτσι η θεωρία γίνεται ανεξάρτητη της κλίμακας επανακανονικοποίησης. Συνεπώς, είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς κλίμακας και εμφανίζει σύμμορφη συμμετρία.

2.2 Υπερβαρύτητα και η $\mathcal{N} = 1$ περίπτωση

Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε την υπερβαρύτητα, η οποία είναι η υπερσυμμετρική θεωρία βαρύτητας. Λόγω του ότι η κατασκευή θα περιλαμβάνει φερμιόνια θα πρέπει να δούμε πως αυτά συζεύγονται με τη βαρύτητα. Μια καλή οπτική για να δουλέψει κανείς τις θεωρίες βαρύτητας είναι μέσω του φορμαλισμού των πεδίων πλαισίου (*vielbeins*) e_μ^a και των συνδέσεων σπιν (*spin connection*) ω_μ^{ab} . Η μετρική γράφεται ως,

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a(x)e_\nu^b(x)\eta_{ab}, \quad (2.45)$$

όπου μ είναι ο δείκτης του καμπύλου χώρου, ενώ ο a είναι ο τοπικός δείκτης Lorentz, δηλ. επίπεδος. Η περιγραφή της θεωρίας με $g_{\mu\nu}$ ή e_μ^a είναι ισοδύναμη, διότι έχουν τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας. Επίσης, το πεδίο πλαισίου μετασχηματίζεται κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz, $e_\mu^a(x) \rightarrow \Lambda_b^a(x)e_\mu^b(x)$. Η δράση Einstein-Hilbert παίρνει τη μορφή,

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^d x (\det e) R^{ab}(\omega(e)) e_a^\mu e_b^\nu \quad (2.46)$$

2.2.1 Τοπική υπερσυμμετρία: υπερβαρύτητα

Η υπερβαρύτητα μπορεί να οριστεί με δύο τρόπους που δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Είναι μία υπερσυμμετρική θεωρία βαρύτητας και παράλληλα μία θεωρία τοπικής υπερσυμμετρίας. Συνεπώς, μπορούμε να πάρουμε τη δράση ΕΗ και να την υπερσυμμετρικοποιήσουμε ή να πάρουμε ένα υπερσυμμετρικό μοντέλο και να κάνουμε την υπερσυμμετρία τοπική. Πρακτικά, χρησιμοποιούμε ένα συνδυασμό των δύο.

Θέλουμε μία θεωρία τοπικής υπερσυμμετρίας, το οποίο σημαίνει ότι θέλουμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό ϵ^a τοπικό. Γνωρίζουμε από τις θεωρίες βαθμίδας ότι σ' αυτήν την περίπτωση πρέπει να εισάγουμε ένα πεδίο βαθμίδας. Για εμάς αυτό το πεδίο θα είναι το " A_μ^a " (η υπερσυμμετρία θα δρα στο δείκτη a), και θα το ονομάσουμε βαρυτίνο (*gravitino*) $\psi_{\mu a}$. Αν θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε σε επίπεδο χώρο, οι μ, a θα είναι ίδιοι και βλέπουμε ότι το σπιν του $\psi_{\mu a}$ είναι $3/2$. Αφού θέλουμε το βαρυτίνο να είναι ο υπερσυμμετρικός παρτενέρ του βαρυτόνιου, θα πρέπει να μετασχηματίζεται στο τελευταίο κάτω από τον συνήθη υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό, $\psi_{\mu a} = Q_a$ (βαρύτητα). Η δομή των δεικτών μας λέει ότι δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μετρική, διότι χρειαζόμαστε κάτι με ένα καμπύλο δείκτη. Γι' αυτό θα επιλέξουμε το e_μ^a , μιας και αναφέραμε ότι μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε ισοδύναμα με το $g_{\mu\nu}$. Άρα το βαρυτίνο είναι ο υπερπαρτενέρ του πεδίου πλαισίου και παράλληλα το πεδίο βαθμίδας της υπερβαρύτητας. Επίσης, οι βαθμοί ελευθερίας τους συμπιπτουν.

2.2.2 $\mathcal{N} = 1$ υπερβαρύτητα σε $d = 4$

Στην ενότητα της υπερσυμμετρίας αποδείξαμε την ύπαρξη της πολλαπλέτας $(2, 3/2)$ για την $\mathcal{N} = 1$ περίπτωση. Τώρα, θα κατασκευάσουμε την αντίστοιχη δράση. Για το πεδίο πλαισίου ο υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός θα είναι της μορφής,

$$\delta e_\mu^a = \frac{\kappa_N}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\mu, \quad (2.47)$$

όπου κ_N είναι η σταθερά του Newton, που υπεισέρχεται για διαστατικούς λόγους. Για το ψ_μ ξέρουμε ότι είναι το πεδίο βαθμίδας για τους τοπικούς μετασχηματισμούς υπερσυμμετρίας. Δεδομένου ότι η αντίστοιχη παράμετρος είναι το ϵ , θα έχουμε,

$$\delta\psi_\mu = \frac{1}{\kappa_N} D_\mu \epsilon, \quad D_\mu \epsilon = \partial_\mu \epsilon + \frac{1}{4} \omega_c^{ab} \gamma_{ab} \epsilon. \quad (2.48)$$

Η δράση EH για το βαρυτόνιο θα είναι.

$$S_{EH} = \frac{1}{8\kappa_N^2} \int d^4x \epsilon_{abcd} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\mu^a e_\nu^b R_{\rho\sigma}^{cd}. \quad (2.49)$$

Για το βαρυτόνιο θα επικαλεστούμε την Rarita-Schwinger δράση,

$$S_{RS} = \frac{i}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \psi_\sigma. \quad (2.50)$$

Έτσι, η υπερβαρύτητα για $\mathcal{N} = 1$ στις τέσσερις διαστάσεις δίνεται από τη δράση,

$$S_{\mathcal{N}=1} = S_{EH}(\omega, e) + S_{RS}(\psi_\mu), \quad (2.51)$$

η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς που παραθέσαμε στην αρχή.

2.3 Πεδία υποβάθρου και υπερσυμμετρία στη θεωρία χορδών

Η θεωρία χορδών αναπαριστά τα στοιχειώδη σωματΙΑ με μονοδιάστατες χορδές οι οποίες πάλλονται με συγκεκριμένες συχνότητες, κάθε συχνότητα αντιστοιχεί σε διαφορετικό σωματΙΑ και έχουν τάση. Έτσι, θα πρέπει η δράση τους να ελαχιστοποιεί το κοσμικό τους φύλλο με την ίδια έννοια που η δράση ενός σωματιδίου ελαχιστοποιεί την κοσμική του γραμμή.

2.3.1 Θεμελιώδεις έννοιες

Το πρώτο πράγμα που μας έρχεται στο μυαλό για τη δράση είναι να γενικεύσουμε αυτή του σωματιδίου, όπου τώρα εκτός απ' το χρόνο θα πρέπει να ολοκληρώσουμε και ως προς το μήκος της χορδής (συντεταγμένες κοσμικού φύλλου),

$$S_{NG} = -T_p \int d\sigma d\tau \sqrt{-\det(h_{ab})}, \quad T_p = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad (2.52)$$

όπου h_{ab} είναι η επαγόμενη μετρική στο κοσμικό φύλλο. Η δράση αυτή ονομάζεται Nambu-Goto και η μη γραμμικότητά της είναι βασικό εμπόδιο για την κβάντωση της θεωρίας. Έτσι, επιλέγουμε την ισοδύναμη, από άποψη δυναμικής, δράση Polyakov,

$$S_P = -\frac{T_p}{2} \int d\sigma d\tau \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (2.53)$$

όπου $X^\mu(\xi^a)$ είναι οι συντεταγμένες του επίπεδου χώρου μέσα στον οποίο είναι εμβαπτισμένη η χορδή και $\xi^a = (\sigma, \tau)$. Η δράση αυτή είναι αναλλοίωτη σε Poincaré, διαφορομορφισμούς και Weyl μετασχηματισμούς (κλίμακας). Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις συμμετρίες και να θέσουμε $h_{ab} = \eta_{ab}$ (σύμμορφη βαθμίδα) με διαγ(η_{ab}) = (-1, 1). Έτσι, η (2.53) απλοποιείται και η εξίσωση κίνησης είναι η κυματική,

$$\square X^\mu = (\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2) X^\mu = -4\partial_+\partial_- X^\mu = 0, \quad (2.54)$$

με $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ και $\partial_\pm = (\partial_\tau \pm \partial_\sigma)/2$. Κατά τη μεταβολή της δράσης προκύπτει ένας επιφανειακός όρος, όπου για να μηδενίζεται και να παίρνουμε την (2.54) επιβάλλει τρία είδη συνοριακών συνθηκών,

- Περιοδικές: $X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, l)$,
- Neumann: $\partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, l)$,
- Dirichlet: $\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, l) = 0$,

όπου l το μήκος της χορδής. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε κλειστή χορδή, ενώ οι δύο τελευταίες σε ανοιχτή. Η γενική λύση σε άθροισμα δεξιόστροφου και αριστερόστροφου κύματος είναι,

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_R^\mu(\sigma^-) + X_L^\mu(\sigma^+). \quad (2.55)$$

Για κλειστές χορδές με $l = 2\pi$ η λύση είναι,

$$X^\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}x^\mu + a'p^\mu\tau + i\frac{\sqrt{2a'}}{2} \sum_{n \neq 0} \left(a_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \tilde{a}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \right). \quad (2.56)$$

Τα $X_{R,L}$ πρέπει να είναι πραγματικά, άρα θα είναι και τα x^μ, p^μ και επιπλέον θα ισχύει,

$$a_{-n}^\mu = (a_n^\mu)^\dagger, \quad \tilde{a}_{-n}^\mu = (\tilde{a}_n^\mu)^\dagger. \quad (2.57)$$

Για την κλειστή χορδή ορίζουμε $a_0^\mu = \sqrt{\frac{a'}{2}}p^\mu = \tilde{a}_0^\mu$.

Για ανοιχτές χορδές με $l = \pi$ και συνθήκες Neumann, η λύση θα είναι,

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + 2a'p^\mu\tau + i\sqrt{2a'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} a_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (2.58)$$

όπου σε αντιστοιχία με την κλειστή χορδή, ορίζουμε $a_0^\mu = \sqrt{2a'}p^\mu$.

Για να καθορίσουμε τη μάζα της χορδής, που αντιστοιχεί σε κάθε περίπτωση, πρέπει να γυρίσουμε πίσω και να θυμηθούμε την δράση του Polyakov. Στην πραγματικότητα οι μεταβλητές ήταν δύο, το X^μ και το h_{ab} , σε αντίθεση με την Nambu-Goto που ήταν μόνο το X^μ . Η εξίσωση κίνησης για τη μετρική θα δίνει, κατά τα γνωστά από τη θεωρία της γενικής σχετικότητας, τον τανυστή ενέργειας-ορμής, όπου θα πρέπει να μηδενίζεται,

$$T_{ab} = \frac{1}{a'} \left(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial_c X^\mu \partial^c X_\mu \right) = 0 \quad (2.59)$$

Από αυτή τη σχέση παίρνουμε περιορισμούς οι οποίοι μας δίνουν τις μάζες για την ανοιχτή και κλειστή χορδή,

$$M_{open}^2 = -p_\mu p^\mu = -\frac{a_0^2}{2a'} = \frac{1}{a'} \sum_{n \geq 1} a_{-n}^\mu a_n^\mu, \quad (2.60)$$

$$M_{closed}^2 = -p_\mu p^\mu = -\frac{a_0^2 + \tilde{a}_0^2}{a'} = \frac{2}{a'} \sum_{n \geq 1} (a_{-n}^\mu a_n^\mu + \tilde{a}_{-n}^\mu \tilde{a}_n^\mu), \quad (2.61)$$

όπου p_μ είναι η ορμή του κέντρου μάζας της χορδής. Το επόμενο βήμα είναι η κβάντωση και η εύρεση του ενεργειακού φάσματος της ανοιχτής και κλειστής χορδής. Κατά τη διαδικασία της κβάντωσης στη βαθμίδα του κώνου φωτός, η μάζα των των καταστάσεων των χορδών είναι,

$$M_{open}^2 = \frac{1}{a'}(N - 1),$$

$$M_{closed}^2 = \frac{4}{a'}(N - 1),$$

με $N = \sum_{n \geq 1} a_{-n}^i a_n^i$ και έχοντας θεωρήσει $d = 26$. Για $N = 0$ και οι δύο θεωρίες δίνουν ταχυονικές μάζες $M^2 < 0$. Για $N = 1$ από την ανοιχτή χορδή παίρνουμε ένα άμαζο πεδίο βαθμίδας, ενώ από την κλειστή χορδή ένα άμαζο ταυυστικό πεδίο που ανήκει στην αναγώγιμη ταυυστική αναπαράσταση $24 \otimes 24$ της $SO(24)$, η οποία ανάγεται σε $\mathbf{S} \oplus \mathbf{A} \oplus \mathbf{1}$. Ο συμμετρικός μηδενικού ίχνους ταυυστής $g_{\mu\nu}$ αντιστοιχεί στο βαρυτονικό πεδίο σπιν 2, άρα τον ταυτίζουμε με τη μετρική. Ο αντισυμμετρικός ιδίου σπιν είναι το Β-πεδίο $B_{\mu\nu}$ (Kalb-Ramond) και το βαθμωτό ϕ ονομάζεται διαστελόνιο. Οι παραπάνω ταυυστές αποτελούν πεδία βαθμίδας και μετασχηματίζονται ανάλογα,

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu,$$

$$B_{\mu\nu} \longrightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu.$$

Το διαστελόνιο καθορίζει τη σύζευξη της χορδής μέσω της σχέσης $g_s = e^{\langle \phi \rangle}$. Το Β-πεδίο είναι η γενίκευση του πεδίου βαθμίδας για ένα σημειακό σωματίο, στην περίπτωση της μονοδάστατης χορδής.

2.3.2 Χορδές ως πεδία υποβάθρου

Ότι κάναμε μέχρι στιγμής ήταν για επίπεδο χωρόχρονο. Προκειμένου να πάμε σε καμπύλο αντικαθιστούμε το $\eta_{\mu\nu}$ με $g_{\mu\nu}$. Τίποτα δε θα αλλάξει όσον αφορά το ενεργειακό φάσμα που αναφέραμε νωρίτερα. Πάλι για $N = 0$ θα πάρουμε ταχυόνια, τα οποία καθιστούν τη θεωρία ασταθή. Για να τα ξεφορτωθούμε, θα εισάγουμε την υπερσυμμετρία. Οι νέες θεμελιώδεις καταστάσεις της χορδής θα είναι για $N = 1$ και θα περιλαμβάνουν φερμιόνια. Η χωροχρονική διάσταση θα είναι $d = 10$ αντι για 26. Από τις σχέσεις για τη μάζα βλέπουμε ότι για $N > 1$ θα είναι ανάλογη του $1/a'$. Το χαμηλοενεργειακό όριο θα αντιστοιχεί σε $a' \rightarrow 0$. Αυτό για τη δυναμική της θεωρίας

σημαίνει πως θα απομείνουν μόνο οι άμαζες καταστάσεις για $N = 1$. Προς το παρόν θα περιγράψουμε μόνο το μποζονικό κομμάτι, επεκτείνοντας τη δράση του Polyakov ώστε να περιλαμβάνει τα g_{MN} , B_{MN} και ϕ . Το πρώτο το καταφέραμε ήδη με την αντικατάσταση $\eta_{MN} \rightarrow g_{MN}$. Το δεύτερο θα πρέπει να πολλαπλασιάζεται με κάτι αντισυμμετρικό γιατί αλλιώς θα έχουμε μηδενικό αποτέλεσμα. Άρα αντικαθιστούμε την h^{ab} με ϵ^{ab} . Το διαστελόνιο θα συζεύγεται με το βαθμωτό Ricci του κοσμικού φύλλου. Έτσι, η συνολική δράση γίνεται,

$$S = -\frac{1}{4\pi a'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \left(\partial_a X^M \partial_b X^N \left[h^{ab} g_{MN}(X) + \epsilon^{ab} B_{MN}(X) \right] + a' R_h \phi(X) \right). \quad (2.62)$$

Για να διασφαλίσουμε την Weyl αναλλοιωτότητα, που προϋπήρχε στη δράση Polyakov, θα πρέπει το ίχνος του τανυστή ενέργειας-ορμής να είναι μηδεν [3],

$$T^a_a = -\frac{1}{2a'} \beta_{MN}^g h^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N - \frac{1}{2a'} \beta_{MN}^B \epsilon^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N - \frac{1}{2} \beta^\phi R_h = 0, \quad (2.63)$$

όπου β^g , β^B και β^ϕ είναι οι βήτα συναρτήσεις, οι οποίες θα μηδενίζονται για να ικανοποιείται η παραπάνω απαίτηση. Αυτό επιβάλλει περιορισμούς στον χωρόχρονο, όπως για παράδειγμα τη διάστασή του. Για την περίπτωση που ανγοούμε τα φερμιόνια θα πάρουμε το γνωστό αποτέλεσμα $d = 26$. Για τον τανυστή πεδίου του B_{MN} έχουμε,

$$H_{MNL} = \partial_M B_{NL} + \partial_N B_{LM} + \partial_L B_{MN}. \quad (2.64)$$

Η δράση εκπεφρασμένη σε χωροχρονικές συντεταγμένες (στο σύστημα της χορδής) γίνεται,

$$S = \frac{1}{2\kappa_{26}^2} \int d^{26}X \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(R + 4\partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{1}{12} H_{MNR} H^{MNR} + \mathcal{O}(a') \right), \quad (2.65)$$

όπου ο τελευταίος όρος για το χαμηλοενεργειακό όριο $a' \rightarrow 0$ είναι μηδέν. Από την παραπάνω έκφραση μπορούμε να ταυτίσουμε το e^ϕ με το g_s , διότι στη δράση αυτή περιλαμβάνονται πεδία που ανήκουν στο φάσμα των κλειστών χορδών και έτσι θα πρέπει μπροστά να υπάρχει ένας συντελεστής $1/g_s^2$. Επίσης, σημειώνεται ότι στην παρούσα αλλά και στις επόμενες δράσεις βρισκόμαστε στο σύστημα αναφοράς της χορδής (*string frame*), δηλ. σε ότι αφορά τη μετρική που εμφανίζεται στη δράση του Polyakov για τη χορδή³.

2.3.3 Υπερχορδές και χαμηλοενεργειακό όριο

Όπως έχουμε δει από την ανάλυση των μποζονικών χορδών έχουμε δύο βασικά μειονεκτήματα. Το πρώτο είναι ότι στο ενεργειακό φάσμα περιλαμβάνονται ταχυονικές καταστάσεις και το δεύτερο ότι δεν υπάρχουν φερμιόνια. Για να αντιμετωπιστούν αυτά, εισάγουμε την υπερσυμμετρία μέσω της εισαγωγής των σπινόρων ψ^M όπου μετασηματίζονται σε σπινόρες στο κοσμικό

³ Αν θέλουμε να πάμε στο σύστημα αναφοράς του Einstein, που αφορά τη μετρική αυτή, όπου δίνει συντελεστή $1/\kappa^2$ μπροστά απ' τη δράση, κάνουμε ένα Weyl μετασηματισμό $ds_{Einstein}^2 = e^{-\phi/2} ds_{string}^2$.

φύλλο και σαν ανύσματα στο χωρόχρονο ⁴. Κατ' αυτόν τον τρόπο, εισάγουμε την υπερσυμμετρία στο κοσμικό φύλλο. Πιο συγκεκριμένα η δράση που θα θεωρήσουμε είναι η Neveu-Schwarz-Ramond (NSR),

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma (\partial_a X^M \partial^a X_M + \bar{\psi}^M \gamma^a \partial_a \psi_M), \quad (2.66)$$

όπου θεωρήσαμε επίπεδο χωρόχρονο $g_{MN} = \eta_{MN}$. Οι ψ^M είναι σπίνορες Majorana του δισδιάστατου κοσμικού φύλλου και μπορούν να γραφτούν ως $\psi^M = (\psi_-^M, \psi_+^M)^T$ με πραγματικές συνιστώσες. Οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί θα είναι $\delta X^M = \bar{\epsilon} \psi^M$ και $\delta \psi^M = \gamma^a \partial_a X^M \epsilon$. Για δύο διαστάσεις οι γάμμα πίνακες που ικανοποιούν την άλγεβρα Clifford θα είναι,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Έτσι, το φερμιονικό κομμάτι της δράσης (2.66) γράφεται ως,

$$S_f = \frac{i}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma (\psi_-^M \partial_+ \psi_{-M} + \psi_+^M \partial_- \psi_{+M}). \quad (2.68)$$

και οι εξισώσεις κίνησης περιγράφουν δεξιόστροφα και αριστερόστροφα κύματα όπως στην μποζονική περίπτωση,

$$\partial_+ \psi_-^M = \partial_- \psi_+^M = 0. \quad (2.69)$$

Όμως, η μεταβολή της φερμιονικής δράσης (2.68) δίνει τον επιφανειακό όρο,

$$\delta S_f = \frac{i}{4\pi\alpha'} \int d\tau (\psi_-^M \delta \psi_{-M} - \psi_+^M \delta \psi_{+M}) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}, \quad (2.70)$$

ο οποίος επιβάλλει συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες όπως συνέβαινε και στο μποζονικό κομμάτι.

- Ανοιχτές χορδές

Οι δύο συνεισφορές που παίρνουμε για $\sigma = 0, \pi$ θα πρέπει αναγκαστικά να μηδενίζονται ανεξάρτητα, το οποίο είναι ισοδύναμο με,

$$\delta(\psi_{+M})^2 \Big|_{\sigma=0,\pi} = \delta(\psi_{-M})^2 \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0. \quad (2.71)$$

Το πρόσημο ορίζεται αυθαίρετα, άρα θέτουμε $\psi_+^M(\tau, 0) = \psi_-^M(\tau, 0)$. Τότε, η συνοριακή στο $\sigma = \pi$ δίνει δύο επιλογές που αντιστοιχούν στους κλάδους Neveu-Schwarz (NS) και Ramond (R),

$$\text{R: } \psi_+^M(\tau, \pi) = +\psi_-^M(\tau, \pi), \quad \text{NS: } \psi_+^M(\tau, \pi) = -\psi_-^M(\tau, \pi), \quad (2.72)$$

με τα αναπτύγματα Fourier,

$$\text{R: } \psi_{\mp}^M(\tau, \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^M e^{-in\sigma_{\mp}}, \quad \text{NS: } \psi_{\mp}^M(\tau, \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z} - \frac{1}{2}} b_r^M e^{-ir\sigma_{\mp}}, \quad (2.73)$$

⁴Με την ίδια λογική που τα X^M είναι βαθμωτά πεδία για το κοσμικό φύλλο και ανυσματικά για το χωρόχρονο

όπου τα d_n^M, b_r^M ικανοποιούν την άλγεβρα των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής. Όπως και στη βαθμωτή περίπτωση, έτσι και εδώ, από τη δράση των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής στο κενό της θεωρίας, μπορούμε να αναπαράγουμε το ενεργειακό φάσμα των χορδών. Σημειώνεται, επίσης, ότι στην παρούσα περίπτωση το κενό θα είναι το τανυστικό γινόμενο του φερμιονικού $|NS\rangle$ ή $|R\rangle$ και του μποζονικού κενού $|p^+, \vec{p}_T\rangle$. Οι R συνοριακές συνθήκες αντιστοιχούν σε σπίνορες στο χωρόχρονο ενώ οι NS σε μποζόνια στο χωρόχρονο.

• Κλειστές χορδές

Στην περίπτωση των κλειστών χορδών μπορούμε να θέσουμε ανεξάρτητα τις συνοριακές συνθήκες R και NS για τις δεξιόστροφες και αριστερόστροφες συνιστώσες ψ_{\pm} . Συνεπώς, μπορούμε να δημιουργήσουμε τους ακόλουθους κλάδους: NS-NS, R-R, NS-R, R-NS. Οι δύο πρώτοι περιέχουν μποζόνια στο χωρόχρονο, ενώ οι δύο τελευταίο φερμιόνια στο χωρόχρονο. Ο R-R κλάδος παρουσιάζει εκφυλισμό στη θεμελιώδη κατάσταση. Υπάρχουν δύο R-R θεμελιώδεις καταστάσεις που διαφέρουν ως προς τη χειραλικότητα. Έτσι, αποκτάμε δύο θεωρίες *IIA* και *IIB*, όπου η πρώτη περιέχει σπίνορες με διαφορετική χειραλικότητα, όπως 8,8' και 56,56', ενώ η δεύτερη έχει χειραλική δομή. Πληροφοριακά, οι 56,56' αφορούν ανυσματικούς σπίνορες που αντιστοιχούν στα βαρυτίνια. Πιο συγκεκριμένα για την κάθε θεωρία θα έχουμε,

- Τύπος IIA: (NS+,NS+), (R+,NS+), (NS+,R-), (R+,R-),
- Τύπος IIB: (NS+,NS+), (R+,NS+), (NS+,R+), (R+,R+),

όπου στη γλώσσα των αναπαραστάσεων είναι,

- Τύπος IIA: $1 \oplus 8_v \oplus 56_t \oplus 35 \oplus 8 \oplus 8' \oplus 56 \oplus 56'$,
- Τύπος IIB: $1^2 \oplus 28^2 \oplus 35 \oplus 35_+ \oplus 8'^2 \oplus 56^2$.

Ο κλάδος NS-NS περιέχει τα πεδία ϕ, B_{MN}, g_{MN} που αντιστοιχούν στις αναπαραστάσεις 1, 28 και 35, αντίστοιχα, της $SO(8)$. Οι κλάδοι NS-R, R-NS περιέχουν υπερσυμμετρικά σωματίια, όπως το βαρυτίνο και το διαστελίνο. Ο κλάδος R-R περιέχει δύο μη ισοδύναμες βασικές καταστάσεις που διαφέρουν στη χειραλικότητα και αντιστοιχούν στον τύπο *IIA* και *IIB* της θεωρίας υπερχορδών. Στην δεύτερη οι δεξιόστροφοι και αριστερόστροφοι κλάδοι έχουν ίδια χειραλικότητα και δίνουν ένα βαθμωτό πεδίο $C_{(0)}$ και τους αντισυμμετρικούς τανυστές $C_{(2)}$ και $C_{(4)}$ τάξης 2 και 4 αντίστοιχα, όπου όλα τα πεδία είναι άμαζα. Στην πρώτη, οι R-R βασικές καταστάσεις αντίθετης χειραλικότητας, δίνουν το $C_{(1)}$ και το αντισυμμετρικό τανυστή $C_{(3)}$. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν άλλες τρεις ισοδύναμες θεωρίες υπερχορδών, γνωστές ως τύπος I και δύο ετεροτικές θεωρίες χορδών με πεδία βαθμίδας τα $SO(32)$ και $E_8 \times E_8$. Έχει αποδειχθεί ότι χρησιμοποιώντας δυϊκότητες (όπως οι $T-$ και $S-$ δυϊκότητες) μπορούμε να μεταφερθούμε μεταξύ αυτών των πέντε θεωριών.

2.4 Χαμηλοενεργειακή δράση: Υπερβαρύτητα

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, κατά το όριο $a' \rightarrow 0$ αποκτάμε μία θεωρία χορδών που συμμετέχουν αποκλειστικά άμαζες καταστάσεις. Στην περίπτωση των υπερσυμμετρικών χορδών, οι καταστάσεις αυτές ζούνε σε δέκα διαστάσεις, έχουν υπερσυμμετρία και περιλαμβάνουν τη μετρική

$g_{\mu\nu}$. Έτσι, η θεωρία αντιστοιχεί στη 10-διάστατη υπερβαρύτητα και πιο συγκεκριμένα στις *IIA* και *IIB* θεωρίες υπερβαρύτητας. Η δράση των NS-NS πεδίων g_{MN} , B_{MN} , ϕ βρέθηκε απαιτώντας αναλλοίωτητα κάτω από μετασχηματισμούς Weyl. Η δράση των υπόλοιπων όρων αποκτάται από την απαίτηση υπερσυμμετρίας. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με το μποζονικό κομμάτι της.

Στην περίπτωση της *IIA*, ο R-R κλάδος που περιλαμβάνει το $C_{(1)}$ θα έχει τανυστή πεδίου $F_{MN} = \partial_M C_N - \partial_N C_M$ (2-μορφή) και το $C_{(3)}$ τον $F_{M_1\dots M_4} = 4\partial_{[M_1} C_{M_2 M_3 M_4]}$ (4-μορφή). Όμοια για το NS-NS B_{MN} έχουμε τον $H_{MNR} = 3\partial_{[M} B_{NR]}$ (3-μορφή), όπως έχουμε ξαναδεί. Έτσι, το μποζονικό κομμάτι της δράσης *IIA* στο σύστημα αναφοράς της χορδής είναι,

$$S_{IIA} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}X \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} \left(R + 4\partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{1}{2} |H_3|^2 \right) - \frac{1}{2} |F_2|^2 - \frac{1}{2} |\tilde{F}_4|^2 \right] - \frac{1}{2} \int B_2 \wedge F_4 \wedge F_4, \quad (2.74)$$

με συμβολισμό $|F_n| = F_{M_1\dots M_n} F^{M_1\dots M_n} / n!$ και

$$\tilde{F}_4 = dC_{(3)} - C_{(1)} \wedge F_3. \quad (2.75)$$

Για την *IIB* υπερβαρύτητα, ο R-R κλάδος περιέχει ένα βαθμωτό $C_{(0)}$ με "τανυστή πεδίου" $F_M = \partial_M C_{(0)}$ (1-μορφή). Για το $C_{(2)}$, έχουμε $F_{MNR} = 3\partial_{[M} C_{(NR)}$ (3-μορφή) και για το $C_{(4)}$ έχουμε το $F_{M_1\dots M_5}$ (5-μορφή), όπου ικανοποιεί τη συνθήκη αυτοσυζυγίας,

$$F_{M_1\dots M_5} = \frac{1}{5!} \epsilon_{M_1\dots M_5}^{M_6\dots M_{10}} F_{M_6\dots M_{10}}. \quad (2.76)$$

Η δράση για τη *IIB* είναι,

$$S_{IIB} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}X \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} \left(R + 4\partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{1}{2} |H_3|^2 \right) - \frac{1}{2} |F_1|^2 - \frac{1}{2} |\tilde{F}_3|^2 - \frac{1}{4} |\tilde{F}_5|^2 \right] - \frac{1}{2} \int C_{(4)} \wedge H_3 \wedge F_3, \quad (2.77)$$

όπου ορίσαμε,

$$\tilde{F}_3 = F_3 - C_{(0)} \wedge H_3, \quad \tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2} C_{(2)} \wedge H_3 + \frac{1}{2} B_2 \wedge F_3. \quad (2.78)$$

Κεφάλαιο 3

Dp-μεμβράνες και p-μεμβράνες

Η απαίτηση της στάσιμης δράσης στη θεωρία χορδών έφερε δύο κατηγορίες συνοριακών συνθηκών, όπου σε επίπεδο χορδών εκφράζονται ως ανοιχτές και κλειστές χορδές. Κλειστές χορδές σημαίνει περιοδικές συνοριακές συνθήκες, ενώ ανοιχτές σημαίνει Dirichlet $\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, l) = 0$ ή Neumann $\partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, l) = 0$. Στις πρώτες η χορδή έχει προσαρτημένα τα άκρα της σε ένα -εν γένει- πολυδιάστατο αντικείμενο ενώ στις δεύτερες τα άκρα είναι ελεύθερα κινούμενα με την ταχύτητα του φωτός. Και οι δύο περιπτώσεις μπορούν να θεωρηθούν παρούσες για την ίδια χορδή, όπως για παράδειγμα οι $p + 1$ μπορεί να είναι Neumann ενώ οι $D - p - 1$ Dirichlet. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι τα άκρα της χορδής είναι στερεωμένα σε μία $(p + 1)$ -διάστατη πολλαπλότητα που την ονομάζουμε Dp-μεμβράνη¹. Θα συμβολίσουμε με X^a τις κατευθύνσεις όπου η χορδή ικανοποιεί συνθήκες Neumann και X^i στις αντίστοιχες Dirichlet. Η ανάλυση των Dp-μεμβρανών θα περιοριστεί μόνο στο μποζονικό κομμάτι.

3.1 Πεδία και δράση Dirac-Born-Infeld της Dp-μεμβράνης

Οι Dp-μεμβράνες, όπως έδειξαν οι Dai, Leigh και Polchinski [8] είναι δυναμικά αντικείμενα τα οποία περιγράφονται από μία δράση, η οποία θα πρέπει να ελαχιστοποιεί τον κοσμικό της όγκο (*worldvolume*), με την ίδια λογική που η δράση της χορδής ελαχιστοποιεί το κοσμικό της φύλλο και του σωματιδίου την κοσμική του γραμμή.

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(h_{ab})}, \quad (3.1)$$

όπου T_p είναι η τάση της βράνης και h_{ab} η επαγόμενη μετρική στον κοσμικό όγκο της Dp-μεμβράνης,

$$h_{ab}(\xi) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} g_{\mu\nu}(X). \quad (3.2)$$

Πρόκειται για τη γενίκευση της δράσης Nambu-Goto για τη χορδή. Ωστόσο, αυτή δεν είναι η πιο γενική μορφή. Εισάγωντας την υπερσυμμετρία στη θεωρία χορδών, καταφέραμε για αρχή να διώξουμε το ανεπιθύμητο ταχύνοιο που δημιουργούσε πρόβλημα σταθερότητας. Οι θεμελιώδεις

¹Η ονομασία προέρχεται από το όνομα του Dirichlet λόγω των ομώνυμων συνοριακών συνθηκών.

NS-NS καταστάσεις που επιζούσαν στο χαμηλοενεργειακό όριο $a' \rightarrow 0$, ήταν οι τα άμαζα $g_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ και ϕ . Συνεπώς, η δράση με σύζευξη στα $g_{\mu\nu}$ και $B_{\mu\nu}$ παίρνει τη μορφή,

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} (g_{\mu\nu} + a' B_{\mu\nu}) \right)}. \quad (3.3)$$

Η δράση αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από παραμετροποιήσεις και μπορούμε να επιλέξουμε τη στατική βαθμίδα (*static gauge*), όπου $X^a = \xi^a$ για $a = 0, 1, \dots, p$. Τότε τα,

$$X^i(\xi^a) = \frac{\phi^i(\xi^a)}{\sqrt{T_p}} \quad (3.4)$$

είναι τα πεδία που ζουν στον κοσμικό όγκο. Θεωρώντας την απλή περίπτωση όπου $g_{\mu\nu}(X) \simeq \eta_{\mu\nu}$ και $B_{\mu\nu} = 0$ η (3.3) γίνεται,

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det \left(\eta_{ab} + \frac{\partial_a \phi^i \partial_b \phi^i}{T_p} \right)} \quad (3.5)$$

και ονομάζεται βαθμωτή δράση Dirac-Born-Infeld (DBI). Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του συμβόλου Levi-Civita για ένα $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A} = [a_{ij}]$,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \frac{1}{n!} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_n j_n} \\ \epsilon^{i_1 \dots i_{n-1} i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_{n-1} j_n} &= (n-1)! \eta^{i_n j_n}, \\ \epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} &= n!, \end{aligned} \quad (3.6)$$

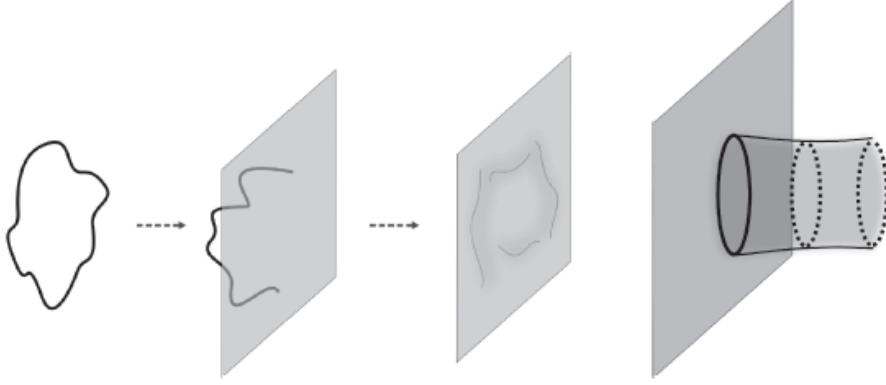
η δράση παίρνει την απλή μορφή,

$$S_p = \int d^{p+1}\xi \sqrt{1 + \frac{\partial^a \vec{\phi} \partial_a \vec{\phi}}{T_p} + \dots} \simeq - \int d^{p+1}\xi \left(T_p + \frac{1}{2} \partial^a \vec{\phi} \partial_a \vec{\phi} \right). \quad (3.7)$$

Βλέπουμε ότι η πρώτη τάξη της δράσης δίνει ένα κανονικοποιημένο κινητικό όρο για το βαθμωτό πεδίο ϕ^i . Με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε τη δράση για την περίπτωση που συμπεριλαμβανουμε διακυμάνσεις της μετρικής $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa h_{\mu\nu}$,

$$S_p = - \int d^{p+1}\xi \left(T_p + \frac{1}{2} \partial^a \vec{\phi} \partial_a \vec{\phi} + 2\kappa \sqrt{T_p} h_{ai} \partial^a \phi^i + \dots \right). \quad (3.8)$$

Παρατηρούμε ότι τώρα έχουμε και όρο αλληλεπίδρασης μεταξύ βαθμωτού πεδίου και βαρυτονίου με σύζευξη $2\kappa \sqrt{T_p} i k^a \delta_j^i$. Το ϕ^i αφού ζει στον κοσμικό όγκο της Dp-μεμβράνης έχοντας προσαρτημένα τα δύο της άκρα, θεωρείται ανοιχτή χορδή, ενώ το βαρυτόνιο κλειστή. Η ερμηνεία της αλληλεπίδρασης (βλ. Σχ.3.1) είναι ότι μια κλειστή χορδή που διαδίδεται στο d -διάστατο

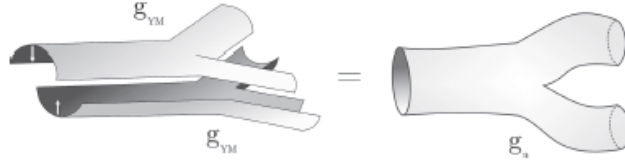


Σχήμα 3.1: Αλληλεπίδραση βαρυτονίου (κλειστή χορδή) με βαθμωτό πεδίο (ανοιχτή χορδή). Οι τρεις πρώτες εικόνες δείχνουν τη διαδικασία όπου η κλειστή χορδή συγκρούεται στη Dp-μεμβράνη, διεγείρει το πεδίο της ανοιχτής χορδής και κάνει τη Dp-μεμβράνη να δονείται. Το τελευταίο σχήμα απεικονίζει το κοσμικό φύλλο της κλειστής χορδής που έρχεται από το άπειρο και καταλήγει στη Dp-μεμβράνη.

χωρόχρονο, συγκρούεται με την Dp-μεμβράνη και σπάζοντας σε ένα σημείο διεγείρει το πεδίο ϕ^i με αποτέλεσμα η Dp-μεμβράνη να αρχίσει να ταλαντώνεται. Πρακτικά ο όρος αλληλεπίδρασης μας λέει ότι η κλειστή χορδή μετατρέπεται σε ανοιχτή.

Μέχρι στιγμής συμπεριλάβαμε στη δράση τα πεδία υποβάθρου $g_{\mu\nu}$ και $B_{\mu\nu}$, αλλά αφήσαμε εκτός το ϕ που είναι η τελευταία κατάσταση κλειστής χορδής του NS-NS κλάδου. Για να το συμπεριλάβουμε σκεπτόμαστε ως εξής: Η δράση της κλειστής χορδής περιλαμβάνει ένα παράγοντα $1/g_s^2$ μπροστά, όπου το g_s είναι η σταθερά σύζευξης της κλειστής χορδής, με $g_s = e^{\langle\phi\rangle}$. Μια κλειστή χορδή μπορεί να δημιουργηθεί από τη σύζευξη δύο ανοιχτών με σταθερά σύζευξης g_o , όπως φαίνεται και στο Σχ. 3.2. Συνεπώς, θα ισχύει $g_s = (g_o)^2$. Δεδομένου, όμως, ότι η δράση της Dp-μεμβράνης αναφέρεται σε ανοιχτές χορδές (οι οποίες ζουν πάνω της), θα πρέπει να έχει μπροστά ένα παράγοντα $1/g_o^2 = 1/g_s = e^{-\langle\phi\rangle}$. Για την περίπτωση μας θα θεωρήσουμε το διαστελόνιο σταθερό. Συνεπώς, αρκεί η έκφραση $g_s = e^{\phi}$.

Δεν τελειώσαμε όμως εδώ. Το φάσμα των ανοιχτών χορδών με Dirichlet συνοριακές συνθήκες δίνει και ένα άμαζο πεδίο $a^{\dagger i}|0, k\rangle$. Στην περίπτωση που έχουμε $p + 1$ κατευθύνσεις X^a σε Neumann σ.σ., το αντίστοιχο άμαζο πεδίο θα είναι το $a^{\dagger a}|0, k\rangle$. Οι $SO(p, 1)$ μετασχηματισμοί αποτελούν τη γενίκευση των Lorentz για p χωρικές και μία χρονική διάσταση, δηλαδή για τον κοσμικό όγκο της Dp-μεμβρανών. Αφού όμως έχουμε αναφέρει ότι οι ανοιχτές χορδές ζούνε προσαρτημένες σ' αυτές, οι καταστάσεις που αντιστοιχούν σε Dirichlet και Neumann σ.σ. και αναφέρονται στα πεδία ϕ^i και A^a , υπό τη σκοπιά του κοσμικού όγκου, θα συμπεριφέρονται σαν βαθμωτό και ανυσματικό πεδίο αντίστοιχα. Η περιγραφή του ϕ^i προέκυψε φυσιολογικά από το επίπεδο μέρος της μετρικής και διαλέγοντας, παράλληλα, συγκεκριμένη βαθμίδα. Για το A^a χρειαζόμαστε κινητικό όρο της μορφής $-1/4 F_{ab} F^{ab}$. Συγκρίνοντας το πως εμφανίζεται το ϕ^i στην αρχική (3.3) και τελική μορφή (3.8) της δράσης, εισάγουμε κατάλληλα το F_{ab} εντός της ρίζας.



Σχήμα 3.2: Δύο ανοιχτές χορδές που σπάνε κατά την αλληλεπίδραση είναι ισοδύναμες με μία κλειστή που υπόκειται στην ίδια μορφή αλληλεπίδρασης

Άρα, σύμφωνα με τις δύο παραπάνω τροποποιήσεις η τελική μορφή της δράσης DBI είναι,

$$S_p = -T_p \int d^{p+1} \xi e^{-\phi} \sqrt{h_{ab} + a' B_{ab} + 2\pi a' F_{ab}}. \quad (3.9)$$

Τώρα που έχουμε αποκαταστήσει το σωστό συντελεστή μπροστά από τη δράση, με $g_s = e^\phi$, μπορούμε να βγάλουμε μια πολύ σημαντική σχέση. Για αρχή, ακολουθώντας τον ορισμό της τάσης για τη χορδή, η γενίκευση για την Dp-μεμβράνη είναι η ακόλουθη,

$$T_p = (2\pi)^{-p} a'^{-(p+1)/2}. \quad (3.10)$$

Ο ολικός συντελεστής είναι τώρα το T_p/g_s που σε αντίθεση με τη χορδή μας δείχνει ότι οι Dp-μεμβράνες είναι μη διαταρακτικά αντικείμενα, διότι το g_s είναι πολύ μικρό. Θεωρώντας τώρα ότι είμαστε σε επίπεδο χωρόχρονο και ότι $B_{\mu\nu} = 0$, παίρνουμε,

$$S_p = -(2\pi a')^2 \frac{T_p}{4g_s} \int d^{p+1} \xi F_{ab} F^{ab}, \quad (3.11)$$

το οποίο μας δείχνει ότι η δράση DBI για μία Dp-μεμβράνη αποτελεί μια γενίκευση της Yang-Mills θεωρίας με πεδίο βαθμίδας $U(1)$. Άρα, για το συντελεστή θα πρέπει να ισχύει,

$$g_{YM}^2 = \frac{g_s}{T_p (2\pi a')^2} = (2\pi)^{p-2} g_s a'^{\frac{p-3}{2}}. \quad (3.12)$$

Η μεγάλη σημασία αυτού του αποτελέσματος θα φανεί κατά τη θεμελίωση της αντιστοιχίας AdS/CFT και θα αποτελέσει μία γέφυρα για τη σύνδεση των σταθερών των δύο υπό εξέταση θεωριών.

Παρόλα αυτά, ούτε τώρα έχουμε φτάσει στο τέλος της περιγραφής των Dp-μεμβρανών. Αναλύοντας τη δράση με σπιν στη θεωρία χορδών είδαμε ότι απ' τον R-R κλάδο εμφανίζονται (αντισυμμετρικές) $(p+1)$ -μορφές $C_{(p+1)}$, οι οποίες ορίζουν φορτία για τις Dp-μεμβράνες. Κατ' αναλογία με το ηλεκτρικά φορτισμένο σωματίο που η κοσμική γραμμή του Σ_1 συζεύγεται με την 1-μορφή πεδίο βαθμίδας,

$$S_0 = \mu_0 \int_{\Sigma_1} A, \quad (3.13)$$

μία γενική $(p+1)$ -μορφή $C_{(p+1)}$ συζεύγεται με τις υπερεπιφάνειες $\Sigma_{(p+1)}$ διάστασης $p+1$ σύμφωνα με τη δράση,

$$\int d^d x j^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \mu_p \int d^{p+1} \xi C_{01 \dots p} \equiv \mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} C_{(p+1)}, \quad (3.14)$$

με $\mu_p = T_p/g_s$. Η δράση αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας,

$$\delta C_{(p+1)} = d\lambda_p, \quad (3.15)$$

όπου λ_p είναι p -μορφή. Δεδομένου, όμως, του ότι στον κοσμικό όγκο της Dp-μεμβράνης έχουμε ακόμα τα πεδία F_{ab} και B_{ab} και το γεγονός ότι οι διαφορικές μορφές εμφανίζονται με περιττό και άρτιο δεικτη ² για IIA και IIB αντίστοιχα, μπορούμε να γενικεύσουμε τον όρο αλληλεπίδρασης ως εξής,

$$S_{p,WZ} = \mu_p \int_{p+1} \left[\exp(a' B_{ab} + 2\pi a' F_{ab}) \wedge \sum_n C_{(n)} \right], \quad (3.16)$$

όπου προφανώς δεν κρατάμε όλους τους όρους που προκύπτουν, αλλά μόνο αυτούς που αντιστοιχούν στις διαφορικές μορφές κάθε θεωρίας (IIA ή IIB). Το εκθετικό των 2-μορφών πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν σε σφηνοειδές γινόμενο. Αυτός ο γενικευμένος όρος αλληλεπίδρασης ονομάζεται όρος Wess-Zumino και από μαθηματικής σκοπιάς αποτελεί μία μορφή Chern-Simons (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ). Η συνολική δράση για την Dp-μεμβράνη θα δίνεται από την έκφραση,

$$S_{Dp-brane} = S_p + S_{p,WZ}. \quad (3.17)$$

Προφανώς θα πρέπει εν γένει να περιλαμβάνει και φερμιόνια, κάτι που μπορεί να προσδιοριστεί επιβάλλοντας την υπερσυμμετρία.

3.2 Παράγοντες Chan-Paton και D3-μεμβράνες

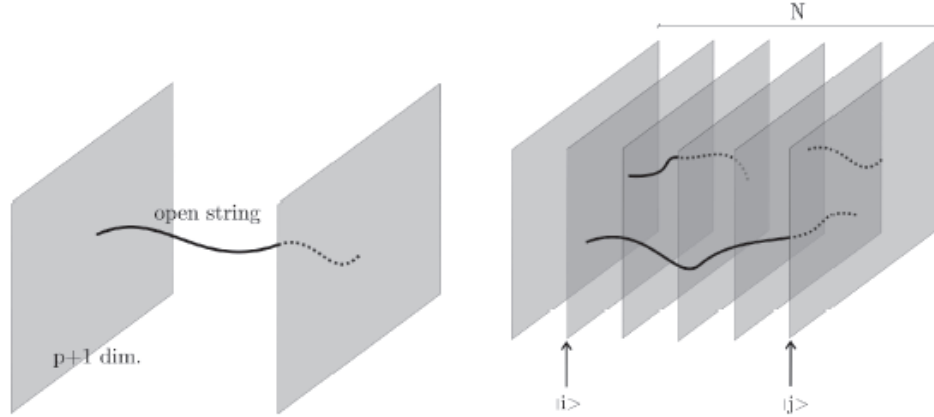
3.2.1 N συμπίπτουσες Dp-μεμβράνες και παράγοντες Chan-Paton

Εξετάσαμε τη δυναμική του συστήματος όπου μία ανοιχτή χορδή έχει τα άκρα της στην ίδια Dp-μεμβράνη. Τι συμβαίνει όταν έχουμε N συμπίπτουσες Dp-μεμβράνες (βλ. Σχ. 3.3); Θα πρέπει να γενικεύσουμε τη μέχρι τώρα περιγραφή. Κάθε άκρο θα έχει N διαφορετικές περιπτώσεις να προσαρτηθεί, όπου κάθε μία αντιστοιχεί στην ιδιοκατάσταση $|i\rangle$. Λαμβάνοντας υπόψιν και το άλλο άκρο θα έχουμε N^2 ιδιοκαταστάσεις $|ij\rangle$. Η κατάσταση της χορδής θα είναι επαλληλία αυτών,

$$|k; A\rangle = \sum_{i,j=1}^N |ij\rangle \lambda_{ij}^A, \quad (3.18)$$

όπου οι συντελεστές λ_{ij}^A ονομάζονται παράγοντες Chan-Paton και είναι στοιχεία ενός $N \times N$ πίνακα. Αυτοί οι νέοι βαθμοί ελευθερίας που προκύπτουν κατά τη γενίκευση σε N Dp-μεμβράνες

²Στη IIA έχουμε τα $C_{(1)}$ και $C_{(3)}$, ενώ στη IIB τα $C_{(0)}$, $C_{(2)}$ και $C_{(4)}^+$.



Σχήμα 3.3: Ανοιχτή χορδή ανάμεσα σε δύο Dp-μεμβράνες (αριστερά). Πολλαπλές Dp-μεμβράνες, όπου τα άκρα της χορδής είναι προσαρτημένα στις $|i\rangle$ και $|j\rangle$ (δεξιά).

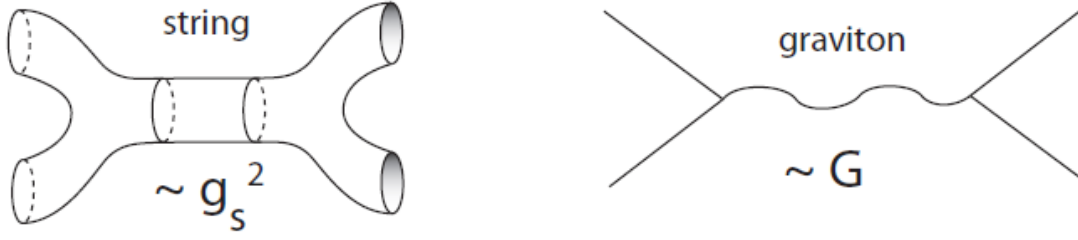
είναι μη δυναμικοί και η χορδή παραμένει πάντα σ' αυτήν την κατάσταση. Οι διαγώνιες συνιστώσες αντιστοιχούν στην περίπτωση που η χορδή έχει και τα δύο άκρα της στην ίδια Dp-μεμβράνη, ενώ οι μη διαγώνιες σε διαφορετική. Δεδομένου ότι οι Dp-μεμβράνες είναι συμπίπτουσες, το μήκος της χορδής μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρό και τα πεδία θεωρούνται άμαζα. Η συμμετρία βαθμίδας γενικεύεται στη $U(N)$, ωστόσο ο συνολικός παράγοντας $u(1)$ αντιστοιχεί στη συνολική θέση της Dp-μεμβράνης και δε μας αφορά. Δεδομένου του ότι σε επίπεδο άλγεβρας ισχύει $u(1) \equiv u(N)/su(N)$, θα κρατήσουμε μόνο την $SU(N)$ συμμετρία. Συνεπώς, θεωρώντας τη μη αβελιανή συμμετρία $SU(N)$ και για $h_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} = 0$, η δράση DBI γίνεται,

$$S_p = \int d^{p+1}\xi (-2) \text{Tr} \left(-\frac{1}{2} D_a \vec{\phi} D^a \vec{\phi} - \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \right), \quad (3.19)$$

όπου είναι η γνωστή μη αβελιανή δράση για τα πεδία ϕ^i και A_a . Τα πεδία αυτά μπορούν να προκύψουν και κάνοντας κβάντωση της Dp-μεμβράνης με την ίδια ακριβώς λογική που ακολουθούμε στην περίπτωση της χορδής [17]. Αν οι Dp-μεμβράνες δεν ήταν συμπίπτουσες, το μήκος της χορδής θα είχε ένα κάτω φράγμα και το αντίστοιχο πεδίο δε θα ήταν άμαζο. Επίσης, η ομάδα συμμετρίας θα ήταν $U(1) \times \dots \times U(1) \equiv U^N(1)$.

3.2.2 D3-μεμβράνες και $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι τα άμαζα πεδία για τις συμπίπτουσες Dp-μεμβράνες είναι τα βαθμωτά ϕ^i και τα πεδία βαθμίδας A_a και η δράση δίνεται από την (3.19). Ας θεωρήσουμε D3-μεμβράνες στην IIB θεωρία υπερχορδών με το πεδίο $C_{\mu\nu\rho\sigma}$. Άρα για $p = 3$ και $d = 10$ έχουμε έξι βαθμωτά πεδία ϕ^i ένα ανυσματικό A_a σε τέσσερις διαστάσεις και τα φερμιόνια που συμπληρώνουν την υπερσυμμετρική πολλαπλέτα. Τα έξι βαθμωτά δίνουν έξι βαθμούς ελευθερίας και το πεδίο βαθμίδας άλλους δύο. Για ένα 4-διάστατο φερμιόνιο Majorana έχουμε άλλους δύο βαθμούς ελευθερίας. Άρα, για να έχουμε υπερσυμμετρική θεωρία χρειαζόμαστε τέσσερα φερμιό-



Σχήμα 3.4: Στη θεωρία χορδών η ανταλλαγή του βαρυτονίου βρίσκεται παίρνοντας το χαμηλο-ενεργειακό όριο της ανταλλαγής μιας κλειστής χορδής.

για ϕ^I , $I = 1, \dots, 4$. Όλα τα πεδία είναι στην προσαρτημένη αναπαράσταση της $SU(N)$, έτσι το συνολικό περιεχόμενο της θεωρίας είναι τα $\{A_a^A, \phi^{iA}, \psi^{IA}\}$, όπου συμπίπτουν με τη $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρία. Μπορούμε, επίσης, να βρούμε ότι η δράση των D3-μεμβράνων είναι αναλλοίωτη κάτω από τέσσερις υπερσυμμετρίες σε τέσσερις διαστάσεις, δηλ., 16 υπερφορτία που αντιστοιχούν στα μισά της IIB θεωρίας υπερχορδών. Ο λόγος είναι ότι στις D3-μεμβράνες έχουμε τη σχέση $\Gamma_0 \Gamma_1 \dots \Gamma_p \epsilon = \epsilon$ για τις παραμέτρους ϵ της υπερσυμμετρίας, η οποία μειώνει στο ήμισυ τον αριθμό των συνιστωσών. Συνεπώς, η δράση των N συμπίπτουσων D3-μεμβρανών αντιστοιχεί στην $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Επίσης, για $p = 3$ η σχέση (3.12) γίνεται,

$$g_{YM}^2 = 2\pi g_s. \quad (3.20)$$

3.3 Dp-μεμβράνες ως λύσεις υπερβαρύτητας: p-μεμβράνες

Η θεωρία χορδών είναι μία θεωρία βαρύτητας όπου η ύλη παραμορφώνει το χωρόχρονο. Η παραμόρφωση αυτή καθορίζεται από τη λύση των εξισώσεων Einstein που απορρέουν από τη δράση,

$$S = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-g} R + \dots \quad (3.21)$$

όπου η σταθερά Newton για $d = 10$ σχετίζεται με τις παραμέτρους της χορδής ως,

$$16\pi G_{10} = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8. \quad (3.22)$$

Η εξάρτηση του G_{10} απ' το l_s προκύπτει από διαστατική ανάλυση, ενώ από το g_s συγκρίνοντας το πλάτος σκέδασης τεσσάρων σημείων της θεωρίας χορδών με της υπερβαρύτητας (βλ. Σχ. 3.4). Για να προσδιορίσουμε τη μορφή της λύσης θεωρούμε ότι είμαστε μακριά από το αντικείμενο. Για τη σημειακή περίπτωση στον d -διάστατο χωρόχρονο η λύση είναι,

$$ds^2 \simeq -(1 + 2\varphi) dt^2 + \left(1 - \frac{2\varphi}{d-3}\right) (dx_1^2 + \dots + dx_{d-1}^2), \quad (3.23)$$

όπου η φ παραμετροποιεί την διακυμάνσεις της μετρικής από τον επίπεδο χώρο Minkowski d διαστάσεων και είναι ανάλογο του Νευτώνιου βαρυτικού δυναμικού,

$$\varphi \sim \frac{G_{10}M}{r^{d-3}}, \quad (3.24)$$

με M η μάζα του σωματιδίου και $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{d-1}^2}$ η ακτινική συνιστώσα του χώρου. Η φ είναι λύση της εξίσωσης Poisson στις $d - 1$ διαστάσεις και ισχύει, $d - 3 = d_T - 2$, όπου d_T οι κάθετες διαστάσεις στο αντικείμενο. Στην περίπτωση που αυτό εκτείνεται σε p χωρικές διαστάσεις, η προηγούμενη μετρική παίρνει τη μορφή,

$$ds^2 \simeq (1 + 2\varphi) (-dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_p^2) + \left(1 - \frac{2(p+1)}{d-p-3}\varphi\right) (dx_{p+1}^2 \dots + dx_{d-1}^2). \quad (3.25)$$

Τότε, ο αριθμός των κάθετων διαστάσεων στο αντικείμενο θα είναι $d_T = d - 1 - p$ και θα έχουμε,

$$\varphi \sim \frac{GM}{r^{d-p-3}}. \quad (3.26)$$

Οι παραπάνω λύση αφορά την απλή περίπτωση ενός χωρικά p -διάστατου αφόρτιστου αντικειμένου και μας δίνει μια εικόνα για το τι να περιμένουμε για την p -μεμβράνη.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, οι DP-μεμβράνες είναι δυναμικά αντικείμενα $(p+1)$ -διαστάσεων που έχουν μάζα. Συνεπώς, θα καμπυλώνουν τον περιβάλλοντα χωρόχρονο και ως αποτέλεσμα θα αποτελούν λύση των εξισώσεων Einstein. Αυτή, λοιπόν, είναι η δεύτερη οπτική γωνία που μπορούμε να έχουμε για τις μεμβράνες. Επίσης, έχουν και φορτίο που πηγάζει από την $(p+1)$ -μορφή $C_{(p+1)}$. Η δράση της $d = 10$ IIA/IIB υπερβαρύτητας στο σύστημα της χορδής, για $B_{MN} = 0$ είναι,

$$S_{IIA/IIB} = \frac{1}{(2\pi)^7 g_s^2 l_s^8} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(e^{-2\phi} (R + 4\partial_M \phi \partial^M \phi) - \frac{1}{2(p+2)} F_{(p+2)}^2 \right), \quad (3.27)$$

με τον τανυστή πεδίου να είναι $F_{(p+2)} = dC_{(p+1)}$. Από λογισμό μεταβολών της παραπάνω δράσης οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν να είναι [1],

$$R_{\mu\nu} + 2\partial_M \partial_N \phi = \frac{e^{2\phi}}{2(p+1)!} \left(F_{\mu\nu}^2 - \frac{g_{\mu\nu}}{2(p+2)} F^2 \right), \quad (3.28)$$

$$d \star F_{(p+2)} = 0, \quad R = 4(\partial\phi)^2 - 4\Box\phi.$$

Έστω, ότι η μετρική είναι της μορφής,

$$ds^2 = H_p(r)^{-1/2} (-f(r)dt^2 + d\vec{x}_p^2) + H_p(r)^{1/2} \left(\frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{8-p}^2 \right), \quad (3.29)$$

όπου το $d\Omega_{8-p}^2$ είναι το στοιχείο στερεάς γωνίας της μοναδιαίας S^{8-p} σφαίρας. Εισάγωντας την υπόθεση (3.29) στις εξισώσεις κίνησης (3.28) βρίσκουμε ότι το διαστελόνιο ισούται με,

$$e^{2\phi} = g_s^2 H_p^{(3-p)/2}, \quad (3.30)$$

και ότι τα H_p και f για $r \neq 0$ είναι αρμονικές συναρτήσεις,

$$\square H_p(r) = 0, \quad \square f(r) = 0. \quad (3.31)$$

Ιδιαίτερη περίπτωση είναι η $p = 3$, όπου τότε το διαστελόνιο είναι σταθερό και θα την επικαλεστούμε κατά την εξέταση της AdS/CFT. Οι λύσεις των παραπάνω σχέσεων είναι,

$$H_p(r) = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^{7-p}, \quad f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{7-p}, \quad (3.32)$$

όπου τις έχουμε κανονικοποιήσει στη μονάδα για $r \rightarrow \infty$, έτσι ώστε να ανακτούμε τον επίπεδο χώρο Minkowski, μιας και οι λύσεις θεωρούνται εντοπισμένες. Η R-R μορφή θα είναι,

$$C_{012\dots p}(r) = \sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^{7-p} \frac{H_p(r) - 1}{H_p(r)}}. \quad (3.33)$$

Για να καθορίσουμε το L_p πρέπει να υπολογίσουμε το φορτίο R-R της p -μεμβράνης, το οποίο μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας σε όλο το χώρο την R-R ροή μέσα από την $(8-p)$ -διάστατη σφαίρα,

$$Q = \frac{1}{(2\pi)^7 g_s^2 l_s^8} \int_{S^{8-p}} \star F_{(p+2)}, \quad (3.34)$$

όπου πρόκειται για τη γενίκευση του νόμου του Gauss της ηλεκτροστατικής με \star να είναι ο 10-διάστατος τελεστής Hodge. Για τη μια Dp-μεμβράνη ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα το φορτίο που πηγάζει από το $C_{(p+1)}$ ως μ_p . Για να έρθουμε σε συμφωνία με την προηγούμενη περιγραφή των μεμβρανών, θεωρούμε αρχικά N συμπίπτουσες p -μεμβράνες με συνολικό φορτίο $Q = N\mu_p$ και για απλότητα θέτουμε $\mu_p = 1$. Υπολογίζοντας το παραπάνω ολοκλήρωμα προκύπτει,

$$N = \frac{A(7-p)\Omega_{7-p}L^{(7-p)/2}\sqrt{r_0^{7-p} + L^{7-p}}}{T_p}, \quad (3.35)$$

$$A = \frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8 g_s}, \quad T_p = \frac{1}{(2\pi)^p l_s^{p+1}}, \quad \Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Από τη συνιστώσα g_{00} της μετρικής μπορούμε να υπολογίσουμε και τη μάζα M ,

$$M = \frac{\Omega_{8-p}V_p}{(2\pi)^7 l_s^8 g_s^2} [(8-p)r_0^{7-p} + (7-p)L^{7-p}], \quad (3.36)$$

όπου V_p ο όγκος μιας επίπεδης Dp-μεμβράνης. Παρατηρούμε από την (3.29) έχουμε ανώμαλη συμπεριφορά για $r = 0$ και $r = r_0$. Για να φανεί πιο καθαρά τι συμβαίνει σ' αυτά τα σημεία αλλάζουμε μεταβλητή,

$$\rho^{7-p} = L^{7-p} + r^{7-p}, \quad \rho_- = L, \quad \rho_+^{7-p} = r_0^{7-p} + L^{7-p}. \quad (3.37)$$

Η (3.29) γράφεται ως,

$$ds^2 = -\frac{f_+(\rho)}{\sqrt{f_-(\rho)}}dt^2 + \sqrt{f_-(\rho)}d\vec{x}_p^2 + f_-(\rho)^{-\frac{1}{2}-\frac{5-p}{7-p}} \left(\frac{d\rho^2}{f_+(\rho)} + \rho^2 f_-(\rho) \right), \quad (3.38)$$

$$f_{\pm}(\rho) = 1 - \frac{\rho_{\pm}}{\rho}.$$

Για $\rho = \rho_{\pm}$ έχουμε απειρισμούς και μηδενισμούς κάποιων συνιστωσών της μετρικής. Για μία πραγματική ανωμαλία κάθε παρατηρητής θα βλέπει το ίδιο. Για να διευρενίσουμε τη φύση αυτών των απειρισμών θα χρειαστούμε μία ποσότητα, η οποία δε θα εξαρτάται από τη θέση του κάθε παρατηρητή. Από μαθηματικής σκοπιάς θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από διαφορομορφισμούς³. Ο κυρίαρχος υποψήφιος είναι ο βαθμωτός Ricci, όπου ο υπολογισμός του δίνει,

$$R \simeq \frac{(p+1)(3-p)(p-7)^2}{4r^{(p-3)/2}L^{(7-p)/2}}[1 + \mathcal{O}(r^{7-p})]. \quad (3.39)$$

Πηγαίνοντας στο σύστημα Einstein μέσω σύμμορφου μετασχηματισμού προκύπτει,

$$g_{\mu\nu}^E = e^{-\phi/2}g_{\mu\nu}^{\sigma}, \quad R^E \simeq r^{-(p-3)^2/8}. \quad (3.40)$$

Άρα, η μετρική έχει πάντα έναν απειρισμό στο ρ_- , σε αντίθεση με το ρ_+ όπου δίνει πάντα πεπερασμένο αποτέλεσμα. Συνεπώς, το ρ_+ είναι ο ορίζοντας γεγονότων, ενώ το ρ_- η ανωμαλία. Σε έναν παρατηρητή σε μεγάλο ρ ο ορίζοντας γεγονότων μπορεί να φαίνεται ανώμαλο σημείο, αλλά σε έναν άλλο που κινείται εντός του ορίζοντα δε φαίνεται καμία ανωμαλία. Στην ειδική περίπτωση, μάλιστα, όπου $p = 3$ δεν υπάρχει καμία ανωμαλία. Η μόνη φυσικά αποδεκτή λύση θα είναι για $\rho_+ \geq \rho_-$ ή $r_0 \geq 0$, αλλιώς έχουμε γυμνή ανωμαλία. Άρα από τις (3.35), (3.36) και την προηγούμενη ανισότητα προκύπτει,

$$\frac{M}{V_p} \geq T_p N. \quad (3.41)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $r_0 = 0$, έχουμε ότι η p-μεμβράνη ικανοποιεί το όριο Bogomolny-Prasad-Sommerfield (BPS), όπου μειώνει κατά το ήμισυ την υπερσυμμετρία του χωρόχρονου με την ίδια λογική που αναφέραμε στην ενότητα της υπερσυμμετρίας. Η περιοχή γύρω απ' το $r = 0$ λέγεται λαιμός της λύσης (*throat*) με μέγεθος L που βρίσκεται από την (3.35),

$$\left(\frac{L}{2\pi l_s} \right)^{7-p} = \frac{g_s N \Gamma\left(\frac{9-p}{2}\right)}{(7-p)2\pi^{(9-p)/2}}, \quad (3.42)$$

όπου για $p = 3$, προκειμένου να έχουμε απόλυτη συμφωνία με την προηγούμενη περιγραφή,

$$L^4 = 4\pi g_s N a'^2. \quad (3.43)$$

Το όριο BPS δίνει τις ακραίες (*extremal*) p-μεμβράνες και είναι αυτές που θα χρειαστούμε για την κατασκευή της αντιστοιχίας AdS/CFT. Θα έχουμε, λοιπόν, $f(r) = 1$ και η (3.29) παίρνει την τελική μορφή,

$$ds^2 = H_p(r)^{-1/2} (-dt^2 + d\vec{x}_p^2) + H_p(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2), \quad (3.44)$$

³Γενικοί μετασχηματισμοί συντεταγμένων, οι οποίοι παίζουν το ρόλο των μετασχηματισμών βαθμίδας.

Μέρος II

Θεμελίωση της AdS/CFT για $\mathcal{N} = 4$
SU(N) SYM vs. $AdS_5 \times S^5$

Κεφάλαιο 4

Η AdS/CFT Αντιστοιχία

Δεν είναι λίγες οι φορές όπου στη θεωρητική φυσική έχουν προκύψει σημαντικά αποτελέσματα από την ανακάλυψη ότι δύο διαφορετικές θεωρίες σχετίζονται σε θεμελιακό επίπεδο. Σύνηθες παράδειγμα αποτελούν οι δυϊκότητες (*dualities*) όπου συνδέουν δύο -φαινομενικά- διαφορετικές θεωρίες, οι οποίες αντιμετωπίζονται σαν ισοδύναμες. Από φυσικής άποψης οι Λαγκραντζιανές μπορεί να διαφέρουν και μάλιστα να περιγράφουν τελείως διαφορετικά συστήματα. Ωστόσο, από μαθηματικής άποψης οι χώροι Hilbert να είναι ίδιοι, όπως και η δυναμική των δύο θεωριών. Το γεγονός αυτό εκφράζει την ισοδυναμία τους. Μερικά γνωστά παραδείγματα είναι η ηλεκτρομαγνητική δυϊκότητα ¹, οι T- και S-δυϊκότητες όπως και πολλές άλλες. Όλες συνδέουν μεταξύ τους είτε θεωρίες πεδίου είτε θεωρίες χορδών. Από την άλλη πλευρά, η AdS/CFT είναι ένας νέος τύπος δυϊκότητας διότι συσχετίζει θεωρία πεδίου με θεωρία χορδών. Το αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι από τη μία πλευρά έχουμε μία θεωρία η οποία αποτελεί βασικό υποψήφιο για την κβαντική βαρύτητα, ενώ από την άλλη, μία θεωρία που δεν έχει κανένα βαρυτικό βαθμό ελευθερίας. Παίρνοντας συγκεκριμένα όρια η αντιστοιχία γίνεται ένα παράδειγμα δυϊκότητας ισχυρούς-ασθενούς σύζευξης και παράλληλα εκδήλωση της ολογραφικής αρχής. Αν η θεωρία πεδίου είναι ισχυρά συζευγμένη, η δυϊκή θεωρία βαρύτητας είναι κλασσική και ασθενώς καμπυλωμένη.

Η μεγάλη σημασία της AdS/CFT έγκειται στο ότι αποτελεί μία μη διαταρακτική προσέγγιση ισχυρά συζευγμένων θεωριών πεδίου, αναλογιζόμενοι ότι από την πλευρά της ασθενούς βαρύτητας, οι υπολογισμοί καθίστανται ευκολότεροι στο χειρισμό.

4.1 Επισκόπηση της αντιστοιχίας AdS/CFT

Δεδομένου ότι έχουμε να κάνουμε με δύο τελείως διαφορετικές θεωρίες (δηλ. πεδίου/ χορδών), γεννιέται ευθύς εξαρχής το ερώτημα: Τι συμβαίνει με τους βαθμούς ελευθερίας των δύο θεωριών και υπό ποιες συνθήκες ταυτίζονται [18];

¹Ελλείπει πηγών ή θεωρώντας την ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων, οι εξισώσεις του Maxwell μένουν αναλλοίωτες κάτω από τον μετασχηματισμό δυϊκότητας $D: \vec{E} \rightarrow \vec{B}$ και $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$.

4.1.1 Βαθμοί ελευθερίας των δύο θεωριών

Ας ξεκινήσουμε με τη θεωρία πεδίου. Για να την ομαλοποιήσουμε τοποθετούμε το σύστημα σε χωρικό κουτί μεγέθους R και εισάγουμε πλεγματική σταθερά ϵ . Με τις τεχνικές αυτές αντιμετωπίζουμε την υπέρυθρη και υπεριώδη απόκλιση αντίστοιχα. Για d χωροχρονικές διαστάσεις το σύστημα έχει R^{d-1}/ϵ^{d-1} κελιά. Έστω c_{QFT} οι βαθμοί ελευθερίας ανά κελί, στο οποίο θα αναφερόμαστε ως κεντρικό φορτίο (*central charge*). Τότε, ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας της θεωρίας πεδίου είναι,

$$N_{dof}^{QFT} = \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-1} c_{QFT}. \quad (4.1)$$

Το κεντρικό φορτίο είναι από τις βασικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν μια σύμμορφη θεωρία. Στην περίπτωση που τυχαίνει να είναι και αναλλοίωτη κάτω από $SU(N)$ μετασχηματισμούς βαθμίδας και θεωρώντας ότι είμαστε στην προσαρτημένη (*adjoint*) αναπαράσταση όπου έχουμε $N^2 - 1$ ανεξάρτητες συνιστώσες, τότε $c_{SU(N)} \sim N^2$.

Περνάμε τώρα στην πλευρα της βαρύτητας που ζει στον AdS_{d+1} . Σύμφωνα με την ολογραφική αρχή και τη σχέση Bekenstein-Hawking, ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας που περιέχονται σε μία περιοχή είναι ίσος με τη μέγιστη εντροπία,

$$N_{dof}^{AdS} = \frac{A_{\partial}}{4G_N}, \quad (4.2)$$

όπου G_N είναι η σταθερά του Newton και A_{∂} η συνοριακή επιφάνεια του AdS_{d+1} που αποκτάμε για $x_0 \rightarrow 0$. Υπολογίζουμε το A_{∂} ολοκληρώνοντας το στοιχείο όγκου που αντιστοιχεί στη μετρική του AdS_{d+1} στο $x_0 = \epsilon \rightarrow 0$,

$$A_{\partial} = \int_{\mathbb{R}^{d-1}, x_0=\epsilon} d^{d-1}x \sqrt{g} = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}x. \quad (4.3)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ο όγκος του \mathbb{R}^{d-1} , ο οποίος είναι άπειρος. Όπως κάναμε στη θεωρία πεδίου, θα τοποθετήσουμε το σύστημα σε κουτί μεγέθους R για να ομαλοποιήσουμε το αποτέλεσμα,

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} d^{d-1}x = R^{d-1}. \quad (4.4)$$

Άρα η επιφάνεια του A_{∂} δίνεται από την έκφραση,

$$A_{\partial} = \left(\frac{RL}{\epsilon}\right)^{d-1}. \quad (4.5)$$

Εισάγουμε τώρα το μήκος l_P και τη μάζα Planck M_P για θεωρία βαρύτητας σε $d+1$ διαστάσεις,

$$G_N = (l_P)^{d-1} = \frac{1}{(M_P)^{d-1}}. \quad (4.6)$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση για τους βαθμούς ελευθερίας της βαρύτητας,

$$N_{dof}^{AdS} = \frac{1}{4} \left(\frac{R}{\epsilon}\right)^{d-1} \left(\frac{L}{l_P}\right)^{d-1}. \quad (4.7)$$

Παρατηρούμε ότι τα N_{dof}^{AdS} και N_{dof}^{QFT} έχουν την ίδια εξάρτηση ως προς το λόγο R/ϵ και ταυτίζονται όταν ισχύει,

$$\frac{1}{4} \left(\frac{L}{l_P} \right)^{d-1} = c_{QFT}. \quad (4.8)$$

Στην περίπτωση που συμπεριλαμβάνουμε και την $SU(N)$ αναλλοιώτητα στη θεωρία πεδίου, θα έχουμε ως ανεξάρτητες παραμέτρους το L και το N από την πλευρά της βαρύτητας και της θεωρίας πεδίου αντίστοιχα. Στην παρούσα φάση δε θα κάνουμε κάποια εικασία για τις τιμές τους και θα προχωρήσουμε στα επιχειρήματα της θεμελίωσης της AdS/CFT.

4.1.2 Επιχειρήματα για την Αντιστοιχία

Φτάσαμε, λοιπόν, στο σημείο όπου μπορούμε να ορίσουμε την αντιστοιχία AdS/CFT. Σύμφωνα με τον Maldacena [15] η AdS/CFT συσχετίζει θεωρίες βαρύτητας σε ασυμπτωτικά Anti-de-Sitter χωρόχρονο με σύμμορφες θεωρίες πεδίου. Υπάρχουν πολυάριθμα παραδείγματα, αλλά εμείς θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο πιο γνωστό, πάνω στο οποίο θεμελιώθηκε για πρώτη φορά η αντιστοιχία:

Η $\mathcal{N}=4$ Super Yang-Mills (SYM) θεωρία με πεδίο βαθμίδας $SU(N)$ και Yang-Mills σταθερά σύζευξης g_{YM} είναι ισοδύναμη με τη IIB θεωρία υπερχορδών με μήκος χορδής $l_s = \sqrt{\alpha'}$ και σταθερά σύζευξης g_s στον $AdS_5 \times S^5$ με ακτίνα καμπυλότητας L και N οι μονάδες ροής του $F_{(5)}$ στην S^5 .

Οι δύο ελεύθερες παράμετροι της θεωρίας πεδίου, g_{YM} και N , απεικονίζονται στις ελεύθερες παραμέτρους g_s και $L/\sqrt{\alpha'}$ της θεωρίας χορδών, μέσω των σχέσεων:

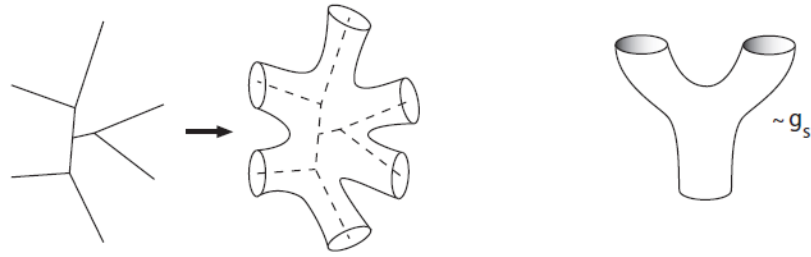
$$g_{YM}^2 = 2\pi g_s \quad \& \quad 2g_{YM}^2 N = L^4/\alpha'^2. \quad (4.9)$$

Η παραδοχή αυτή αποτελεί την ισχυρότερη εκδοχή (*strongest form*) της AdS_5/CFT_4 , μιας και δεν κάνουμε καμία νύξη για τις τιμές των ελεύθερων παραμέτρων.

Όπως είδαμε, το πεδιακό περιεχόμενο της θεωρίας των N συμπίπτουσων D3-μεμβρανών αντιστοιχεί στο ίδιο περιεχόμενο της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας. Η θεωρία υπερχορδών, στην οποία ανήκουν οι D3-μεμβράνες είναι η IIB και αυτός είναι ο λόγος που την επικαλεστήκαμε για την AdS/CFT. Επίσης, αξίζει να αναφέρουμε ότι στις παραπάνω σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων των δύο θεωριών, εμπεριέχεται και η σταθερά σύζευξης του 't Hooft $\lambda = g_{YM}^2 N$.

Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι το εξής: Τι σημαίνει ότι οι δύο θεωρίες είναι ισοδύναμες; Η αντιστοιχία υποστηρίζει ότι οι $\mathcal{N} = 4$ SYM και η IIB θεωρία χορδών στον $AdS_5 \times S^5$, είναι ταυτόσημες και επομένως, περιγράφουν την ίδια φυσική από δύο διαφορετικές οπτικές. Νωρίτερα υπολογίσαμε τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας εκατέρωθεν και βρήκαμε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι προκειμένου να είμαστε σε θέση να συσχετίσουμε τις θεωρίες. Δεδομένου αυτού, η AdS/CFT απεικονίζει την πληροφορία -και κατ'επέκταση τη φυσική- της μίας θεωρίας στην άλλη.

Αφήνοντας το περιγραφικό κομμάτι της αντιστοιχίας, θα πρέπει να μπούμε στα βαθιά και να εξετάσουμε εκ των θεμελίων πως προέκυψε αυτή και πως μπορούμε να την αξιοποιήσουμε σε



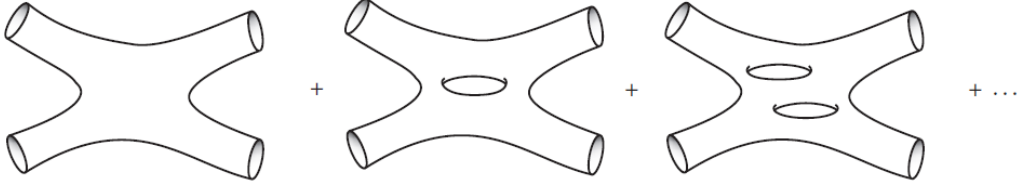
Σχήμα 4.1: Αντιστοιχία κόμβου της θεωρίας πεδίου με τη δισδιάστατη επιφάνεια με σύνορα της θεωρίας χορδών (αριστερά). Τριπλός κόμβος για κλειστές χορδές, ανάλογος της σταθεράς σύζευξης g_s (δεξιά).

υπολογιστικό επίπεδο, προβλέποντας, παρακάτω, τις συναρτήσεις συσχετισμού της σύμμορφης θεωρίας. Το βασικότερο εμπόδιο που συναντάμε σε πρώτη φάση είναι η απροσδιοριστία των ελεύθερων παραμέτρων, το οποίο δε μας επιτρέπει να χειριστούμε υπολογιστικά την αντιστοιχία. Για να το αντιμετωπίσουμε αυτό, είμαστε αναγκασμένοι να μειώσουμε τις απαιτήσεις μας και να δουλέψουμε παίρνοντας συγκεκριμένα όρια για τις παραμέτρους.

Κατά τον τρόπο που έχουμε ορίσει την αντιστοιχία, μπορούμε από τη μία πλευρά να έχουμε ένα ασθενώς συζευγμένο σύστημα, ενώ από την άλλη ένα ισχυρά συζευγμένο. Αν εκμεταλλευτούμε αυτό το αποτέλεσμα θα είμαστε σε θέση να χειριστούμε και να βγάλουμε συμπεράσματα για το τελευταίο υπό την υπολογιστική σκοπιά του πρώτου. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε αποκτήσει μία μη διαταρακτική τεχνική, γεγονός το οποίο έχει τεράστια σημασία αν το εκμεταλλευτούμε για την πλευρά της θεωρίας πεδίου. Άλλωστε, θα ήταν δύσκολο να κάνουμε διαφορετικά, μιας και η θεωρία χορδών είναι γνωστή και αρκετά ευκολότερη στο χειρισμό στο ασθενές όριο, $g_s \ll 1$.

Πριν προχωρήσουμε υποθέτοντας τα όρια των υπόλοιπων παραμέτρων θα χρειαστεί να πούμε δυο λόγια για τις αλληλεπιδράσεις σε επίπεδο θεωρίας χορδών [18]. Κατά τη διάδοση των χορδών στο χωρόχρονο μπορούμε να έχουμε αλληλεπιδράσεις με την ίδια λογική της θεωρίας πεδίου. Μπορούν να σπάσουν σε δύο ή περισσότερα μέρη ή να ενωθούν με άλλες χορδές. Το αντίστοιχο κοσμικό φύλλο θα είναι μία δισδιάστατη επιφάνεια με τρύπες και σύνορα, η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν κόμβος στη διαταρακτική θεωρία πεδίου όπου οι γραμμές του διαγράμματος Feynman έχουν αποκτήσει πάχος, όπως φαίνεται και απ' το Σχ. 4.1. Στη θεωρία χορδών, ο συνήθης κόμβος είναι τριών σημείων, όπως φαίνεται στα δεξιά του ίδιου σχήματος. Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε βρόχο στην αλληλεπίδραση χορδών, χρειαζόμαστε δύο τριπλούς κόμβους, οι οποίοι δίνουν μία επιφάνεια Riemann με μία τρύπα. Όροι ανώτερης τάξης, στη διαταρακτική προσέγγιση, αντιστοιχούν στην ύπαρξη περαιτέρω τρυπών στο κοσμικό φύλλο, σύμφωνα και με το Σχ. 4.2. Συνεπώς, το διαταρακτικό ανάπτυγμα στη θεωρία χορδών, είναι ένα τοπολογικό ανάπτυγμα. Στην τοπολογία των δισδιάστατων επιφανειών, ο αριθμός h των τρυπών (*handles*) της επιφάνειας, ονομάζεται γένος (*genus*) της επιφάνειας. Στη διαταρακτική θεωρία χορδών, το h αντιστοιχεί στον αριθμό των βρόχων.

Δεδομένου ότι ο κάθε τριπλός κόμβος συνεισφέρει σαν g_s , το πλάτος της εκάστοτε διαδικα-



Σχήμα 4.2: Διαταρακτικό ανάπτυγμα του πλάτους σκέδασης για τέσσερις κλειστές χορδές.

σίας θα δίνεται από την έκφραση,

$$\mathcal{A} = \sum_{h=0}^{\infty} g_s^{2h-2} F_h(a'). \quad (4.10)$$

Έχοντας σα δεδομένο ότι $g_s \ll 1$, μπορούμε να θεωρήσουμε αντίστοιχα όρια για τις υπόλοιπες παραμέτρους.

Πάμε για αρχή στην πλευρά του AdS. Θα θεωρήσουμε ότι ο λόγος $L/l_s = L/\sqrt{a'}$ είναι σταθερός. Τότε, το τοπολογικό ανάπτυγμα (4.10) για $g_s \simeq \varepsilon$,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\varepsilon^2} F_0(a') + F_1(a') + \varepsilon^2 F_2(a') + \dots \xrightarrow{\varepsilon \ll 1} \frac{1}{\varepsilon^2} F_0(a'), \quad (4.11)$$

όπου κυριαρχεί ο $h = 0$ όρος και συνεπώς δεν υπάρχουν τρύπες. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε να κάνουμε με διαγράμματα δένδρου και δεν έχουμε κβαντικές διορθώσεις.

Από την πλευρά της θεωρίας πεδίου θα έχουμε τα εξής. Αφού ο λόγος L/l_s είναι σταθερός, θα πρέπει να είναι σταθερή και η ποσότητα $g_{YM}^2 N$ σύμφωνα με τη σχέση (4.9). Δεδομένου, όμως, του ότι είμαστε σε $g_s \ll 1$, συνεπάγεται $N \rightarrow \infty$. Η ενεργός δράση \mathcal{W} βρίσκεται από τον υπολογισμό του αθροίσματος των συνδεδεμένων διαγραμμάτων κενού-κενού,

$$\mathcal{W} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} f_h(\lambda), \quad (4.12)$$

όπου $f_h(\lambda)$ είναι το άθροισμα των διαγραμμάτων που μπορούν να σχεδιαστούν σε μία επιφάνεια γένους h . Άρα τα υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των διαγραμμάτων της $\mathcal{N} = 4$ και της θεωρίας χορδών, αφού τα πρώτα μπορούν να σχεδιαστούν στην επιφάνεια που ορίζουν τα δεύτερα για ίδιο h . Η αντιστοιχία αυτή γίνεται έκδηλη και από το γεγονός ότι από τη σχέση (4.9) δίνει,

$$g_s \sim \frac{1}{N}, \quad (4.13)$$

η οποία συνδέει τα δύο αναπτύγματα (4.12) και (4.10).

$$\mathcal{W} \simeq N^2 f_0(\lambda), \quad (4.14)$$

θεωρώντας τη σταθερά σύζευξης 't Hooft σταθερή. Έτσι, πάμε στο επίπεδο όριο (*planar limit*) της $SU(N)$ θεωρίας βαθμίδας, όπου επιζούν μόνο τα επίπεδα διαγράμματα (*planar diagrams*).

Παρόλα αυτά, η AdS/CFT είναι χρήσιμη στο να συνδέει δύο θεωρίες ασθενούς-ισχυρής σύζευξης. Όπως εξηγήσαμε και παραπάνω, η ισχυρή σύζευξη θα βρίσκεται από την πλευρά της θεωρίας πεδίου. Για να το πετύχουμε αυτό θα εκμεταλλευτούμε την εναπομένουσα ελεύθερη παράμετρο των δύο θεωριών. Από την AdS έχουμε την L/l_s και από τη θεωρία πεδίου το g_{YM} ή ισοδύναμα τη σταθερά 't Hooft. Από την AdS έχουμε,

$$\frac{L^4}{l_s^4} = 2g_{YM}^2 N \Rightarrow \frac{L^4}{l_s^4} = 2\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \frac{L}{l_s} \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Άρα, το μήκος της χορδής είναι πολύ μικρό σε σχέση με την ακτίνα καμπυλότητας του AdS. Έτσι, προσεγγίσουμε το σημειακό όριο όπου η χορδή θεωρείται σημειακό σωματίο και δε θα έχουμε διορθώσεις λόγω της μονοδιάστατης μορφής των χορδών. Επίσης, έχουμε δει ότι για $a' \rightarrow 0$ η θεωρία υπερχορδών ανάγεται σε θεωρία υπερβαρύτητας.

Εκδοχές της αντιστοιχίας AdS/CFT		
Εκδοχή	$\mathcal{N} = 4$ SYM	ΙΙΒ στον $AdS_5 \times S^5$
Ισχυρότερη	για κάθε N , λ	Κβαντική θεωρία χορδών, $g_s \neq 0$, $a'/L^2 \neq 0$
Ισχυρή	$N \rightarrow \infty$, λ σταθερό	Κλασσική θεωρία χορδών, $g_s \rightarrow 0$, $a'/L^2 \neq 0$
Ασθενής	$N \rightarrow \infty$, $\lambda \gg 1$	Κλασσική υπερβαρύτητα, $g_s \rightarrow 0$, $a'/L^2 \rightarrow 0$

4.2 D3-μεμβράνες και οι δύο οπτικές

Στην ενότητα αυτή θα ερευνήσουμε σε μεγαλύτερο βάθος την AdS/CFT αντιστοιχία μέσα στα πλαίσια της ασθενούς εκδοχής. Θα περιγράψουμε τις δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες των D3-μεμβρανών παίρνοντας τα κατάλληλα όρια για την εκδοχή που είπαμε. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να πάρουμε εκατέρωθεν δύο ελεύθερες θεωρίες και αξιοποιώντας την εικασία του Maldacena [15] να φτάσουμε στην αντιστοιχία. Οι δύο οπτικές γωνίες είναι των ανοιχτών και κλειστών χορδών.

- **Ανοιχτές Χορδές.** Όπως έχουμε ήδη αναλύσει, οι Dp-μεμβράνες θεωρούνται πολυδιάστατα αντικείμενα που οι ανοιχτές χορδές προσαρτούν τα άκρα τους. Αφού αντιμετωπίζουμε τις χορδές σαν μικρές διαταραχές, αυτή η οπτική είναι αξιόπιστη μόνο αν η σταθερά σύζευξης για τις ανοιχτές και κλειστές χορδές είναι μικρή, $g_s \ll 1$. Αγνοώντας έμμαζες καταστάσεις που προκύπτουν απ' το φάσμα των Dp-μεμβρανών, παίρνοντας το χαμηλοενεργειακό όριο $E \ll a'^{-1/2}$, απομένει το πεδίο βαθμίδας A^a που αντιστοιχεί σε παράλληλες, στις Dp-μεμβράνες, διεγέρσεις και το βαθμωρό πεδίο ϕ^i που αντιστοιχεί σε κάθετες, στις Dp-μεμβράνες διεγέρσεις. Στην περίπτωση που θεωρούμε N συμπίπτουσες Dp-μεμβράνες, το πεδίο βαθμίδας είναι $U(N)$. Τότε, η ενεργή σταθερά σύζευξης είναι $g_s N$ και η παρούσα οπτική είναι αξιόπιστη για $g_s N \ll 1$.
- **Κλειστές Χορδές.** Από την άλλη πλευρά οι Dp-μεμβράνες μπορούν να θεωρηθούν ως η σολιτονική λύση της χαμηλοενεργειακής θεωρίας υπερχορδών, δηλ. της υπερβαρύτητας.

Μπορούμε να τις δούμε σαν πηγές του βαρυτικού πεδίου που καμπυλώνει τον περιβάλλοντα χωρόχρονο. Για να ικανοποιείται η προσέγγιση της υπερβαρύτητας, χρειαζόμαστε μεγάλη ακτίνα καμπυλότητας L . Για N συμπίπτουσες Dp-μεμβράνες, έχουμε $L^4/a'^2 \sim g_s N$. Συνεπώς, η περίπτωση αυτή γίνεται αξιόπιστη για $g_s N \gg 1$.

Οπότε, προχωράμε στην περαιτέρω ανάλυση των παραπάνω.

4.2.1 Περίπτωση ανοιχτών χορδών

Για την αποφυγή οποιασδήποτε παρανόησης, εννοείται η παρουσία και ανοιχτών και κλειστών χορδών, όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 3 όταν αναλύσαμε τις Dp-μεμβράνες. Οι ανοιχτές αναφέρονται στις διεγέρσεις στο (3+1)-διάστατο υπερεπίπεδο, ενώ οι κλειστές στον (9+1)-διάστατο επίπεδο χωρόχρονο. Πηγαίνοντας στο χαμηλοενεργειακό όριο $E \ll a'^{-1/2}$, παίρνουμε μόνο άμαζες καταστάσεις μιας και οι έμμαζες έχουν ενέργειες ανάλογες των τάξεων του $a'^{-1/2}$. Οι άμαζες κλειστές χορδές αντιστοιχούν σε 10-διάστατη $\mathcal{N} = 1$ πολλαπλέτα υπερβαρύτητας, ενώ οι άμαζες ανοιχτές σε $\mathcal{N} = 4$ υπερπολλαπλέτα που, όπως έχουμε δει, περιλαμβάνει ένα A_μ , έξι ϕ^i και τους φερμιονικούς υπερπαρτενερς. Αρα, συνοπτικά, έχουμε,

- Ανοιχτές χορδές που ζούν στις D3-μεμβράνες, που δίνουν $\mathcal{N} = 4$ θεωρία στο χαμηλοενεργειακό όριο.
- Κλειστές χορδές που ζούν στον 10-διάστατο χωρόχρονο, που δίνει θεωρία με συζευγμένες έμμαζες καταστάσεις των χορδών με την υπερβαρύτητα. Για το ίδιο όριο με πριν, οι συζεύξεις αυτές είναι αμελητέες.
- Αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δύο που δίνουν για παράδειγμα την ακτινοβολία Hawking.

$$S = S_{closed} + S_{open} + S_{int}. \quad (4.16)$$

Πάμε για αρχή στην περίπτωση των κλειστών χορδών. Η αντίστοιχη δράση σε 10 χωροχρονικές συντεταγμένες γίνεται,

$$\begin{aligned} S_{closed} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} (R + 4\partial_M \phi \partial^M \phi) + \dots \\ &\sim -\frac{1}{2} \int d^{10}x \partial_M h \partial^M h + \mathcal{O}(\kappa), \end{aligned}$$

όπου $2\kappa^2 = (2\pi)^7 a'^4 g_s^2$. Η δεύτερη γραμμή δίνει τη χαμηλότερη σε τάξη συνεισφορά της διακύμανσης h της μετρικής, που δίνεται από την ανάπτυξη, $g = \eta + \kappa h$. Ο συντελεστής κ μπροστά απ' το h είναι για να κανονικοποιεί τον κινητικό όρο. Οι υπόλοιποι όροι είναι τανυστές (π.χ. R-R μορφές), βαρυτίνια κ.α. Οι όροι των ανοιχτών χορδών και της αλληλεπίδρασης, πηγάζουν από τη δράση Dirac-Born-Infeld για μία D3-μεμβράνη,

$$S_{DBI} = -\frac{1}{(2\pi)^3 a'^2 g_s} \int d^4x e^{-\phi} \sqrt{-\det(h_{ab} + a' B_{ab} + 2\pi a' F_{ab})}. \quad (4.17)$$

Θέτοντας μηδέν το πεδίο Kalb-Ramond για απλότητα και αναπτύσσοντας τα $e^{-\phi}$ και $g = \eta + \kappa h$, έχουμε,

$$S_{open} = -\frac{1}{2\pi g_s} \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i + \mathcal{O}(a') \right) \quad (4.18)$$

$$S_{int} = -\frac{1}{8\pi g_s} \int d^4x \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \quad (4.19)$$

Ο συγκεκριμένος όρος της αλληλεπίδρασης αντιστοιχεί στη διάσπαση του διαστελονίου σε δύο πεδία βαθμίδας στις D3-μεμβράνες. Για τις N συμπίπτουσες D3-μεμβράνες το παραπάνω αποτέλεσμα της (4.18) γενικεύεται αντικαθιστώντας τις μερικές με τις συναλλοιώτες παραγώγους της $U(N)$ θεωρίας βαθμίδας. Ας πάρουμε τώρα το όριο $a' \rightarrow 0$ που επιβάλλεται στην ασθενή εκδοχή της αντιστοιχίας. Η S_{open} προκύπτει να είναι ίδια με την $\mathcal{N} = 4$ SYM, όπως έχουμε αναφέρει ήδη, δεδομένου ότι $2\pi g_s = g_{YM}^2$. Για τις άλλες δράσεις, ανακαλούμε ότι $\kappa \propto a'^2 \rightarrow 0$, και έτσι η S_{closed} γίνεται η ελεύθερη δράση της υπερβαρύτητας στον (9+1)-διάστατο χωρόχρονο Minkowski. Για το όρο αλληλεπίδρασης θα πρέπει πρώτα να επαναορίσουμε το διαστελόνιο κατά κ για να έχουμε τη σωστή κανονικοποίηση, με την ίδια λογική που βάλαμε κ μπροστά απ' το h στο ανάπτυγμα της g . Έτσι, και ο όρος αυτός μηδενίζεται για $a' \rightarrow 0$. Άρα, στο όριο αυτό, οι κλειστές και ανοιχτές χορδές αποσυζεύγονται και έχουμε δύο ανεξάρτητες θεωρίες,

- ΠΒ Υπερβαρύτητα στον $\mathbb{R}^{9,1}$
- $\mathcal{N} = 4$ SYM στον $\mathbb{R}^{3,1}$.

Μέχρι στιγμής αναφερθήκαμε στο $a' \rightarrow 0$ ως όριο αποσύζευξης, δεδομένων και τον αποτελεσμάτων που έφερε αυτό. Ωστόσο, παίρνοντας το όριο αυτό θα πρέπει όλες οι ποσότητες της θεωρίας πεδίου να παραμένουν σταθερές. Ένα παράδειγμα πόσότητας, η οποία δε θα έμενε σταθερή στην περίπτωση αυτή, είναι η ακόλουθη. Έστω ότι έχουμε $N + 1$ D3-μεμβράνες σε επίπεδο (9+1)-διάστατο χωρόχρονο και χωρίζουμε τη μία βράνη από της υπόλοιπες στην κατεύθυνση $x^9 = r$, κρατώντας τις άλλες N στο $x^9 = 0$. Τότε η $U(N + 1)$ συμμετρία βαθμίδας, σπάει σε $U(N) \times U(1)$ και $\langle \phi^9 \rangle = r/(2\pi a')$. Στο όριο αποσύζευξης απειρίζεται, δημιουργώντας πρόβλημα. Έτσι, το επαναορίζουμε ως,

$$a' \rightarrow 0 \quad \text{με} \quad u = \frac{r}{a'} \sim \text{σταθερό}, \quad (4.20)$$

όπου παίζει το ρόλο του νέου ορίου αποσύζευξης ή αλλιώς όριο Maldacena.

4.2.2 Περίπτωση κλειστών χορδών

Στην περίπτωση αυτή θα θεωρήσουμε ως N D3-μεμβράνες τις λύσεις της υπερβαρύτητας που είναι πολυδιάστατα αντικείμενα με μάζα από τα οποία πηγάζει το πεδίο $C_{01\dots p}$. Σε αυτό το υπόβαθρο, μόνο κλειστές χορδές θα διαδίδονται και όντας στο όριο BPS, μόνο η μισή υπερσυμμετρία διατηρείται και κατ'επέκταση 16 από τα 32 διατηρήσιμα υπερφορτία απομένουν. Η λύση

της ΠΒ υπερβαρύτητας για τον $\mathbb{R}^{9,1}$ είναι,

$$ds^2 = H(r)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H(r)^{1/2} \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

$$e^{2\phi(r)} = g_s^2,$$

$$C_{(4)} = (1 - H(r)^{-1}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \dots,$$

όπου $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ και $i, j = 4, \dots, 9$. Η ακτινική συνιστώσα r ορίζεται από το $r^2 = \sum_{l=4}^9 x_l^2$. Οι επιπλέον όροι του $C_{(4)}$ προέρχονται από τη δράση του hodge star στα διαφορικά και διασφαλίζουν την αυτοσυζυγία του $F_{(5)} = dC_{(4)}$. Η μορφή της αρμονικής συνάρτησης $H(r)$ είναι γνωστή,

$$H(r) = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^4. \quad (4.21)$$

όπου από τη σχέση (3.43) για $p = 3$ έχουμε,

$$L^4 = 4\pi g_s N a'^2. \quad (4.22)$$

Το υπόβαθρο θα αποτελείται από δύο διαφορετικές περιοχές, για μεγάλο και μικρό r αντίστοιχα.

- $r \gg L$

Έτσι έχουμε,

$$H(r) \rightarrow 1 \Rightarrow ds^2 \rightarrow d\vec{x}_4^2 + d\vec{x}_6^2. \quad (4.23)$$

Στο όριο αυτό προκύπτει 10-διάστατος επίπεδος χωρόχρονος Minkowski.

- $r \ll L$

Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στο λαιμό της λύσης και η έκφραση της αρμονικής συνάρτησης γίνεται,

$$H(r) \rightarrow \frac{L^4}{r^4} \Rightarrow ds^2 \rightarrow \frac{r^2}{L^2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{L^2}{r^2} \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.24)$$

Θεωρώντας $x_0 = L^2/r$ και $(r, \Omega_5) \in \mathbb{R}^+ \times S^5$ αντί για $(x^4, \dots, x^9) \in \mathbb{R}^6$, έχουμε,

$$ds^2 = \frac{L^2}{x_0^2} (d\vec{x}_4^2 + dx_0^2) + L^2 d\Omega_5^2. \quad (4.25)$$

Το πρώτο κομμάτι αντιστοιχεί στην μετρική του AdS_5 στις συντεταγμένες Poincaré, ενώ το δεύτερο στη σφαίρα S^5 ,

$$ds^2 = ds_{AdS_5}^2 + ds_{S^5}^2. \quad (4.26)$$

Τι συμβαίνει όμως με τη σύζευξη των δύο θεωριών; Ας θεωρήσουμε την ενέργεια $\sqrt{a'} E_r$ μιας χορδής που ζει στην περιοχή του λαιμού, όπου $r \ll L$ και σταθερό. Συνεπώς, σταθερή θα είναι

και η ενέργειά της. Η ενέργεια που θα μετρήσει ο παρατηρητής σε απόσταση $r' \rightarrow \infty$, θα δίνεται από τη σχέση,

$$E_r \rightarrow i \frac{d}{d\tau} = \frac{i}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} E_\infty$$

$$E_\infty = \sqrt{-g_{00}} E_r = H^{-1/4} E_r \Rightarrow E_\infty \sim r E_r \quad (4.27)$$

$$\sqrt{a'} E_\infty \sim \frac{r}{L} \sqrt{a'} E_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Δηλαδή, ο παρατηρητής βλέπει από μακριά κλειστές χορδές που ζουν στο λαιμό και βρίσκονται σε χαμηλοενεργιακή κατάσταση $\sqrt{a'} E_\infty \ll 1$. Όμως, όπως έχουμε ήδη δείξει για $r \gg L$, στο σημείο που βρίσκεται ο παρατηρητής ζει και η IIB υπερβαρύτητα στον $\mathbb{R}^{9,1}$. Συνεπώς, αυτός βλέπει παράλληλα δύο αποσυσζευγμένες χαμηλοενεργιακές θεωρίες,

- IIB Υπερβαρύτητα στον $\mathbb{R}^{9,1}$
- IIB Υπερβαρύτητα στον $AdS_5 \times S^5$

Για να συνοψίσουμε, το υπόβαθρο αποτελείται από δύο διαφορετικές περιοχές: το λαιμό και την ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή. Η δυναμική των κλειστών χορδών στη δεύτερη, περιγράφεται από IIB υπερβαρύτητα στο 10-διάστατο χωρόχρονο, ενώ οι χορδές στην πρώτη περιοχή, περιγράφονται από τις διακυμάνσεις της $AdS_5 \times S^5$ λύσης της II υπερβαρύτητας. Καθώς παίρνουμε το όριο αποσύζευξης (4.20) οι δύο θεωρίες αποσυσζεύγονται. Επίσης, στο ίδιο όριο έχουμε,

$$\frac{L^4}{r^4} = 4\pi g_s N \frac{a'^2}{r^4} \xrightarrow{a' \rightarrow 0} \infty, \quad (4.28)$$

καθώς κρατάμε σταθερό το u . Το αποτέλεσμα είναι σα να πηγαίνουμε στην περιοχή του λαιμού. Έτσι, το όριο Maldacena ονομάζεται και όριο λαιμού.

4.2.3 Συνδυάζοντας και τις δύο περιπτώσεις

Και στις δύο περιπτώσεις, βρήκαμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές θεωρίες, οι οποίες μάλιστα ζούνε σε διαφορετικό χωρόχρονο και είναι αποσυσζευγμένες. Τη μία πλευρά την περιγράψαμε βασιζόμενοι στη δυναμική των D3-μεμβρανών, ενώ στην άλλη πλευρά χρησιμοποιήσαμε τις p-μεμβράνες, που αποτελούνε λύση των εξισώσεων του Einstein. Η καμπύλωση του χωρόχρονου θα μπορούσε εξίσου να προκληθεί και από τις Dp-μεμβράνες. Γι' αυτό οι δύο περιγραφές θα πρέπει να είναι ισοδύναμες, μιας και το ίδιο αντικείμενο παράγει δύο διαφορετικές εικόνες της δυναμικής του -κατά τα άλλα- ίδιου συστήματος. Στρέφοντας την προσοχή μας στις επιμέρους θεωρίες που προέκυψαν εκατέρωθεν, παρατηρούμε ότι σε κάθε πλευρά είναι παρούσα η IIB υπερβαρύτητα στον $\mathbb{R}^{9,1}$, κάτι που μας κάνει τη ζωή ακόμα πιο εύκολη, μιας και το μόνο που απομένει να αντιστοιχίσουμε είναι οι εναπομένουσες θεωρίες. Με το σκεπτικό αυτό ο Maldacena [15] έκανε την εικασία ότι η $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills θεωρία στις τέσσερις διαστάσεις είναι ισοδύναμη με την IIB θεωρία υπερβαρύτητας στον $AdS_5 \times S^5$.

4.2.4 Σύγκριση Συμμετριών και Ολογραφική Αρχή

Είδαμε πως θεμελιώνεται η AdS/CFT αντιστοιχία μεταξύ δύο τόσο διαφορετικών θεωριών, δηλ. πεδίου και χορδών. Βρήκαμε επίσης, τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν προκειμένου να ταιριάζουν οι βαθμοί ελευθερίας εκατέρωθεν. Οι ομοιότητες και οι αντιστοιχίες παρόλα αυτά, δε σταματούνε εδώ, μιας και εκφράζονται και σε επίπεδο συμμετριών που υπάρχει σε κάθε πλευρά. Το γεγονός αυτό μας δίνει καλύτερη και πιο ευδιάκριτη εικόνα για την αντιστοιχία. Ας εξετάσουμε πιο συγκεκριμένα τι έχουμε.

Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι η $\mathcal{N} = 4$ SYM είναι μία σύμμορφη θεωρία, λόγω του ότι η βήτα συνάρτηση μηδενίζεται. Η σύμμορφη ομάδα σε τέσσερις διαστάσεις είναι η $SO(4, 2)$. Επιπροσθέτως, η $\mathcal{N} = 4$ SYM διατηρεί την υπερσυμμετρία και έτσι υπάρχουν 16 διατηρήσιμα Poincaré υπερφορτία, που ομαδοποιούνται στους σπίνορες Q_α^a , με $\alpha = 1, \dots, 4$ και $a = 1, \dots, 4$. Αφού, επιπλέον, η θεωρία είναι και σύμμορφη, θα έχει άλλα 16 διατηρήσιμα υπερσύμμορφα (*superconformal*) υπερφορτία, S_α^a . Όλες αυτές οι συμμετρίες σχηματίζουν την υπερσύμμορφη ομάδα $PSU(2, 2|4)$, κάτω από την οποία η $\mathcal{N} = 4$ SYM είναι αναλλοίωτη. Η μποζονική υποομάδα της $PSU(2, 2|4)$ δίνεται από τις $SU(2, 2) \cong SO(4, 2)$ και $SU(4) \cong SO(6)$. Το φερμιονικό κομμάτι του $PSU(2, 2|4)$ παράγεται από τα Poincaré και υπερσύμμορφα υπερφορτία Q_α^a και S_α^a αντίστοιχα. Ας θεωρήσουμε τώρα μία θεωρία χορδών σε $AdS_5 \times S^5$ χώρο. Σε γεωμετρικό επίπεδο, η θεωρία θα είναι αναλλοίωτη κάτω από τις ομάδες ισομετρίας των AdS_5 και S^5 , που δίνονται από τις $SO(4, 2)$ και $SO(6)$ αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι συμπίπτουν με τις μποζονικές υποομάδες της $PSU(2, 2|4)$. Συνεπώς, οι συμμετρίες τις των δύο θεωριών συμπίπτουν. Εν γένει, προκύπτει πως η θεωρία χορδών στον $AdS_5 \times S^5$ διατηρεί την $PSU(2, 2|4)$ συμμετρία εξ ολοκλήρου. Αυτό, ωστόσο, δε συμβαίνει και με την $SU(N)$ συμμετρία βαθμίδας της $\mathcal{N} = 4$ SYM, κάτι το οποίο θα συζητηθεί εκτενέστερα στη συνέχεια.

Στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου κάναμε νύξη στο γεγονός ότι η AdS/CFT αντιστοιχία είναι μία εκδήλωση της ολογραφικής αρχής χωρίς ωστόσο να προβούμε σε περαιτέρω ανάλυση. Βρήκαμε ότι μία θεωρία πεδίου έχει τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας με τον AdS χώρο, που αποτελεί λύση των εξισώσεων Einstein, δεδομένου ότι ισχύει η σχέση,

$$\frac{1}{4} \left(\frac{L}{l_p} \right)^3 = c_{QFT}, \quad (4.29)$$

για $d = 4$. Επίσης, παραπάνω βρήκαμε και την αντιστοιχία μεταξύ των συμμετριών των δύο πλευρών. Από την περιγραφή των AdS χώρων είδαμε ότι ο AdS_5 έχει σαν σύνορό του τον $\mathbb{R}^{3,1}$ σε συντεταγμένες Poincaré. Όμως, αυτοί οι χώροι συμπίπτουν με τους χώρους των θεωριών IIB υπερβαρύτητας και $\mathcal{N} = 4$ SYM αντίστοιχα. Άρα, αφού η πληροφορία της IIB υπερβαρύτητας, που ζει στον AdS_5 , είναι κωδικοποιημένη στην $\mathcal{N} = 4$ SYM που ζει στο σύνορο του, φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι η αντιστοιχία AdS_5/CFT_4 αποτελεί μια εκδήλωση της ολογραφικής αρχής.

4.3 Απεικόνιση Πεδίου-Τελεστή

Όπως διαπιστώσαμε, η AdS/CFT αντιστοιχία αποτελεί μία απεικόνιση μεταξύ των δύο θεωριών. Πιο πάνω βρήκαμε ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των συμμετριών, η οποία μας επιτρέπει

να ορίσουμε αντιστοιχία και μεταξύ των τελεστών της θεωρίας πεδίου, που ανήκουν σε μία αναπαράσταση της $PSU(2, 2|4)$, με τις καταστάσεις της χορδής στον $AdS_5 \times S^5$, που ανήκουν στην ίδια αναπαράσταση. Στην ασθενή εκδοχή, αυτό θεωρείται ως απεικόνιση μεταξύ των $\mathcal{N} = 4$ SYM τελεστών με τα πεδία υπερβαρύτητας. Όπως θα δειχτεί και στη συνέχεια, το γεγονός αυτό, μας επιτρέπει σε επόμενο στάδιο να ορίσουμε την απεικόνιση μεταξύ της γεννήτριας συνάρτησης της $\mathcal{N} = 4$ SYM με τη συνάρτηση επιμερισμού της υπερβαρύτητας.

4.3.1 Αναπαραστάσεις Σύμμορφων Τελεστών

Ο σκοπός μας είναι να βρούμε την απεικόνιση μεταξύ των αντικειμένων των δύο θεωριών, εκμεταλλευόμενοι τις κοινές ομάδες συμμετρίας. Θα συσχετίσουμε τελεστές της θεωρίας πεδίου με πεδία υπερβαρύτητας, όπου θα μετασχηματίζονται κατά την ίδια αναπαράσταση της υπερσύμμορφης άλγεβρας $su(2, 2|4)$ ή της μποζονικής υποάλγεβρας $so(6) \oplus so(4, 2)$. Όμως, η θεωρία πεδίου είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας $SU(N)$, κάτι το οποίο δεν ισχύει για τη βαρύτητα. Συνεπώς, τα πεδία $\{A_\mu^a, \psi^{ai}, \phi_{[ij]}^a\}$, με $i, j = \{1, 4\}$, θα μετασχηματίζονται ανάλογα. Αν αντιστοιχίσουμε κάποιο πεδίο υπερβαρύτητας με ένα εξ αυτών, δε θα υπάρχει η ένα προς ένα απεικόνιση που ζητάμε. Άρα, θα πρέπει να βρούμε αναλλοίωτους κατά βαθμίδα τελεστές, οι οποίοι θα ανήκουν στην ίδια αναπαράσταση της $su(2, 2|4)$ με τα πεδία βαρύτητας και επιπλέον, θα σχηματίζονται από τα ήδη υπάρχοντα πεδία της $\mathcal{N} = 4$. Οι τελεστές αυτοί ονομάζονται 1/2 BPS ή χειραλικοί πρωτεύοντες (*chiral primary*) και προσδιορίζονται παίρνοντας το ίχνος γινομένων των $\mathcal{N} = 4$ πεδίων στο ίδιο χωροχρονικό σημείο. Για παράδειγμα, θεωρώντας το βαθμωτό πεδίο ϕ^i , έχουμε,

$$\mathcal{O}_\Delta(x) = Str(\phi^{i_1}(x)\phi^{i_2}(x)\dots\phi^{i_\Delta}(x)) = C_{i_1 i_2 \dots i_\Delta}^\Delta Tr(\phi^{i_1}(x)\phi^{i_2}(x)\dots\phi^{i_\Delta}(x)). \quad (4.30)$$

Τα βαθμωτά πεδία είναι $\phi^i = \phi^{ia}T_a$ και οι γεννήτορες ανήκουν στην προσαρτημένη αναπαράσταση. Το Str συμβολίζει το συμμετροποιημένο ίχνος της άλγεβρας που αντιστοιχεί στη συμμετρία βαθμίδας και δίνεται από την έκφραση,

$$Str(T_{a_1}\dots T_{a_n}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\Delta} Tr(T_{\sigma(a_1)}\dots T_{\sigma(a_n)}) \quad (4.31)$$

και η άθροιση γίνεται σε όλες τις μεταθέσεις των σ . Έτσι, ο τελεστής (4.30) είναι συμμετρικός ως προς την εναλλαγή των δεικτών χρώματος. Δεδομένου, επίσης, του ότι για τέσσερις διαστάσεις τα βαθμωτά πεδία έχουν διάσταση ένα, προκύπτει ότι ο 1/2 BPS τελεστής θα έχει διάσταση Δ που είναι ο αριθμός των πεδίων εντός του ίχνους. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση μας τα ϕ^i μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη θεμελιώδη αναπαράσταση 6 της $so(6) \cong su(4)$ και το $C_{i_1 i_2 \dots i_\Delta}^\Delta$ είναι πλήρως συμμετρικός τανυστής και ορθοκανονικός,

$$C_{i_1 \dots i_{\Delta_1}}^{\Delta_1} C^{\Delta_2, j_1 \dots j_{\Delta_2}} = \delta^{\Delta_1 \Delta_2}. \quad (4.32)$$

Δε θα πρέπει, όμως, να ξεχνάμε ότι από την πλευρά της σύμμορφης θεωρίας δουλεύουμε στο βαθιά μη διαταρακτικό όριο, όπου η ενεργός σταθερά σύζευξης είναι $\lambda \gg 1$. Αυτό φαίνεται να προκαλεί αδυναμία από πλευράς μας να προσδιορίσουμε την κβαντική τιμή της Δ για δεδομένο τελεστή. Τα καλά νέα έρχονται από την ύπαρξη της υπερσύμμορφης συμμετρίας $PSU(2, 2|4)$. Στην

περίπτωση της σύμμορφης συμμετρίας βρίσκουμε τις αναπαραστάσεις δρώντας στους πρωτεύοντες τελεστές \mathcal{O} και στους απογόνους του με το P_μ που παίζει το ρόλο του τελεστή δημιουργίας. Όμοια αποκτάμε τις αναπαραστάσεις για την υπερσύμμορφη ομάδα, μόνο που στην περίπτωση αυτή έχουμε 2^{16} πρωτεύοντες τελεστές για $\mathcal{N} = 4$ σε $d = 4$, όπου υπάρχουν 16 υπερφορτία με το καθένα να δίνει ένα τελεστή δημιουργίας a^+ . Παρόλα αυτά, όπως είδαμε στις αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρίας, παίρνοντας το BPS όριο, παίρνουμε τις λεγόμενες *μικρές αναπαραστάσεις*. Με το ίδιο σκεπτικό, πηγαίνοντας στο αντίστοιχο όριο, παίρνουμε τις μικρές αναπαραστάσεις της υπερσύμμορφης ομάδας, όπου οι γεννήτορές τους είναι οι 1/2 BPS τελεστές που θεωρήσαμε εξ αρχής. Η σύμμορφη διάσταση Δ των 1/2 BPS τελεστών καθορίζεται μονοσήμαντα από το διατηρήσιμο φορτίο της R-συμμετρίας. Αν έχουμε κβαντικές διορθώσεις στο Δ θα έχουμε και στο R-φορτίο, κάτι το οποίο θα κατέστρεφε το BPS όριο και κατ'επέκταση θα άλλαζε ο αριθμός των καταστάσεων της αναπαράστασης. Άρα αδύνατο. Το συμπέρασμα είναι ότι το Δ είναι ανεξάρτητο της τιμής του λ και συνεπώς, δεν επιδέχεται κβαντικές διορθώσεις. Για $d = 4$ τα $\mathcal{N} = 4$ πεδία θα έχουν διαστάσεις,

$$[\phi] = 1, \quad [A] = 1, \quad [\psi] = \frac{3}{2}, \quad [F] = 2. \quad (4.33)$$

Ενδεικτικά παραθέτουμε μερικές περιπτώσεις των 1/2 BPS τελεστών που αποτελούνται από τα παραπάνω πεδία,

- $\mathcal{O}(x) = Tr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}), \quad \Delta = 4$
- $\mathcal{O}(x) = Tr(\phi^{i_1} \dots \phi^{i_n}), \quad \Delta = n$
- $\mathcal{O}(x) = Tr(\epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\alpha A}\psi_{\beta B}\phi^{i_1} \dots \phi^{i_n}), \quad \Delta = n + 3$
- $\mathcal{O}(x) = Tr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\phi^{i_1} \dots \phi^{i_n}), \quad \Delta = n + 4$
- $\mathcal{O}(x) = Tr(\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi_{\alpha A_1}\psi_{\beta A_2}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^{B_1}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}^{B_2}\phi^{i_1} \dots \phi^{i_n}), \quad \Delta = n + 6$
- $\mathcal{O}(x) = Tr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\alpha A}\psi_{\beta B}\phi^{i_1} \dots \phi^{i_n}), \quad \Delta = n + 7$
- $\mathcal{O}(x) = Tr(F_{\mu\nu}^4\phi^{i_1} \dots \phi^{i_n}), \quad \Delta = n + 8,$

Ο \mathcal{O} σύμμορφης διάστασης Δ σε $d = 4$, ανήκει στην αναπαράσταση της $su(4)$ με δείκτες Dynkin $[0, \Delta, 0]$ ή ισοδύναμα στην $so(6)$ με δείκτες $[\Delta, 0, 0]$ ².

²Για παράδειγμα, για την $su(4)$, η αναπαράσταση $[0, 0, 0]$ αντιστοιχεί στην τετριμμένη 1. Δύο από τις τρεις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις είναι η $[1, 0, 0]$ και η $[0, 0, 1]$, όπου η δεύτερη είναι η συζυγής της πρώτης. Έτσι, έχουμε 4 και 4 αντίστοιχα. Η προσαρτημένη που μπορεί να κατασκευαστεί απ' το τανυστικό γινόμενο των 4 και 4, δίνεται από τους δείκτες $[1, 0, 1]$ και συμβολίζεται ως 15.

4.3.2 Αναπαραστάσεις Πεδίων Υπερβαρύτητας

Τα πεδία της υπερβαρύτητας στις πέντε διαστάσεις βρίσκονται από την αναγωγή όλων των πεδίων της ΠΒ θεωρίας που ζει στις δέκα διαστάσεις. Η επικείμενη συμπαγοποίηση στην S^5 , γίνεται αναπτύσσοντας την εκάστοτε ποσότητα στις γενικευμένες σφαιρικές αρμονικές $Y^I(\Omega_5)$, οι οποίες σχηματίζουν βάση και αντιστοιχούν σε μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{so}(6)$ ή της $\mathfrak{su}(4)$ ισοδύναμα. Κάθε συνάρτηση στην S^5 μπορεί να θεωρηθεί σαν περιορισμός των συντεταγμένων x^i που ζουν στον \mathbb{R}^6 , όπου είναι εμβαπτισμένη η S^5 . Τότε, ο συμμετρικός τανυστής $C_{i_1 \dots i_l}^I$ τάξης l ορίζει τη σφαιρική αρμονική,

$$Y^I = C_{i_1 \dots i_l}^I x^{i_1} \dots x^{i_l}, \quad (4.34)$$

όπου τα C έχουν ίχνος μηδέν και ικανοποιούν τη σχέση ορθοκανονικότητας (4.32). Οι σφαιρικές αρμονικές Y^I μετασχηματίζονται σύμφωνα με την αναπαράσταση $[0, l, 0]$ της $\mathfrak{su}(4)$ ή την $[l, 0, 0]$ της $\mathfrak{so}(6)$ ισοδύναμα. Οι Y^I ικανοποιούν επίσης, τη σχέση,

$$\square_{S^5} Y^I = -\frac{1}{L^2} l(l+4) Y^I. \quad (4.35)$$

Έτσι, για ένα πεδίο φ της υπερβαρύτητας (αμελώντας τους δείκτες Lorentz, αν υπάρχουν), παίρνουμε το ανάπτυγμα Kaluza-Klein,

$$\varphi(x_0, \vec{x}, \Omega_5) = \sum_{I=0}^{\infty} \varphi^I(x_0, \vec{x}) Y^I(\Omega_5), \quad (4.36)$$

όπου εισάγοντας την παραπάνω σχέση στη δράση της 10-διάστατης υπερβαρύτητας, προσδιορίζουμε τις μάζες του φ^I . Άρα, τα πεδία της υπερβαρύτητας μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο με τα Y^I .

4.3.3 Απεικόνιση Πεδίου-Τελεστή: Αναπαραστάσεις

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από κάθε πλευρά, βλέπουμε ότι θεωρώντας $L = \Delta$, το βαθμωτό πεδίο s της υπερβαρύτητας, βρίσκεται στην ίδια αναπαράσταση $[0, \Delta, 0]$ της $\mathfrak{su}(4)$ όπως ο 1/2 BPS τελεστής \mathcal{O} (4.30). Συνεπώς, οι s και \mathcal{O} απεικονίζονται ο ένας στον άλλον μέσω της ολογραφικής απεικόνισης, η οποία εκτείνεται και μεταξύ απογόνων των \mathcal{O} και s . Όμοια για ανυσματικά πεδία έχουμε την αντιστοιχία μεταξύ R -ρεύματος της θεωρίας πεδίου και πεδίου βαθμίδας της ΠΒ θεωρίας, όπως θα περιγράψουμε και στην πορεία. Αν και δε θα εξετάσουμε την αντιστοιχία σε επίπεδο τανυστών, αναφέρουμε για λόγους πληρότητας ότι ο τανυστής ενέργειας-ορμής της θεωρίας πεδίου αντιστοιχεί στις διακυμάνσεις της μετρικής του AdS_5 .

$$h^{\mu\nu} \longleftrightarrow T_{\mu\nu}, \quad A^\mu \longleftrightarrow J_\mu. \quad (4.37)$$

Ένα ακόμα παράδειγμα είναι η αντιστοιχία μεταξύ διαστελονίου ϕ και $Tr(F^2)$. Με όλα αυτά κάπου, μπορούμε να βρούμε τη μορφή των πεδίων που ζουν στην AdS_{d+1} (όπου θεωρήσαμε την πιο γενική περίπτωση d διαστάσεων).

4.4 Βαθμωτό πεδίο στον AdS_{d+1} και Ασυμπτωτική Συμπεριφορά στο Σύνορο

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε την απλούστερη περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου στον AdS_{d+1} . Από εδώ και στο εξής θα δουλεύουμε, για απλότητα, με την ευκλείδεια μετρική,

$$ds^2 = \frac{L^2}{x_0^2} [dx_0^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j]. \quad (4.38)$$

Η δράση για βαθμωτό πεδίο ϕ στον AdS_{d+1} είναι,

$$S[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi), \quad (4.39)$$

με εξίσωση κίνησης,

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - m^2 \phi = 0. \quad (4.40)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω μετρική καταλήγουμε στη σχέση,

$$x_0^{d+1} \partial_0 (x_0^{1-d} \partial_0 \phi) + x_0^2 \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 L^2 \phi = 0. \quad (4.41)$$

Αναπτύσσοντας κατά Fourier το ϕ ,

$$\phi(x_0, \vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\vec{x}} f_k(x_0), \quad (4.42)$$

προκύπτει,

$$x_0(1-d)\partial_0 f + x_0^2(\partial_0^2 f) - x_0^2 k^2 f - m^2 L^2 f = 0. \quad (4.43)$$

Η παραπάνω σχέση έχει λύση της μορφής, $f \sim x_0^\beta$, όπου αντικαθιστώντας, παίρνουμε,

$$(\beta^2 - d\beta - m^2 L^2) x_0^\beta - k^2 x_0^{\beta+2} = 0. \quad (4.44)$$

Θέλοντας να βρούμε τη συμπεριφορά στο σύνορο της AdS_{d+1} , κρατάμε τους όρους που κυριαρχούν στο όριο $x_0 \rightarrow 0$,

$$\beta^2 - d\beta - m^2 L^2 = 0, \quad (4.45)$$

όπου,

$$\beta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2}. \quad (4.46)$$

Από εδώ θα πρέπει το υπόριζο να είναι θετική ποσότητα, που σημαίνει ότι,

$$m^2 \geq -\frac{d^2}{4L^2}. \quad (4.47)$$

Επιτρέπεται, δηλαδή, να έχουμε $m^2 < 0$ (όριο Breitlohner-Freedman). Το γεγονός αυτό δε θα έπρεπε να μας ανησυχεί, διότι η θεωρία παραμένει σταθερή. Αυτό μπορεί να φανεί πηγαίνοντας

στη δράση (4.39), και θεωρώντας για απλότητα $\phi = \phi(x_0)$. Αλλάζοντας μεταβλητή $y_0 = \ln x_0$ και για $\phi = x_0^{d/2} \varphi$, έχουμε,

$$S[\varphi] = -\frac{1}{2} \int dy_0 d^d x \left(\partial_{y_0} \varphi \partial_{y_0} \varphi + \left[m^2 + \frac{d^2}{4} \right] \varphi \right), \quad (4.48)$$

όπου η μάζα στον επίπεδο χωρόχρονο είναι το υπόριζο που απαιτήσαμε να είναι θετικό. Άρα, η εν δυνάμει περίπτωση $m^2 < 0$ είναι απόρροια της καμπυλότητας του χωρόχρονου. Επιστρέφοντας στον υπολογισμό, το f_k κοντά στο σύνορο είναι,

$$f_k(x_0) \simeq A(\vec{k}) x_0^{d-\Delta} + B(\vec{k}) x_0^\Delta, \quad (4.49)$$

όπου ορίσαμε $\beta_+ = \Delta$ και $\beta_- = d - \Delta$ για λόγους που θα φανούν στην πορεία. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε το ϕ ,

$$\phi(x_0, \vec{x}) = \left(\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\vec{x}} A(\vec{k}) \right) x_0^{d-\Delta} + \left(\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\vec{x}} B(\vec{k}) \right) x_0^\Delta, \quad (4.50)$$

$$\phi(x_0, \vec{x}) = \phi_0(\vec{x}) x_0^{d-\Delta} + \phi_+(\vec{x}) x_0^\Delta, \quad (4.51)$$

όπου,

$$\phi_0(\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\vec{x}} A(\vec{k}), \quad \phi_+(\vec{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\vec{x}} B(\vec{k}). \quad (4.52)$$

Παίρνοντας το όριο $x_0 \rightarrow 0$,

$$\phi_0(\vec{x}) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \phi(x_0, \vec{x}) x_0^{\Delta-d}. \quad (4.53)$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι το $\phi_0(\vec{x})$ θα αντιστοιχεί στην πηγή του τελεστή της θεωρίας πεδίου. Η σχέση αυτή θα αποτελέσει, αργότερα, τη συνοριακή συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιούν τα πεδία κατά τον υπολογισμό των συναρτήσεων συσχετισμού.

4.4.1 Κανονικοποίηση λύσης και Φυσική Ερμηνεία των β_\pm

Μία λύση ϕ είναι κανονικοποιήσιμη αν η αντίστοιχη δράση συγκλίνει σε κάτι πεπερασμένο. Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τη συμπεριφορά των δύο λύσεων για το x_0 , κοντά στο σύνορο. Έστω ότι θεωρούμε για απλότητα, πάλι την (4.48). Η πρώτη λύση δίνει, $\phi \sim x_0^\Delta$. Ολοκληρώνοντας από το $x_0 = 0$ μέχρι το $x_0 = \epsilon$ έχουμε,

$$S[\phi] \sim \int d^d x x_0^{2\Delta-d} \Big|_0^\epsilon = \epsilon^{2\Delta-d} < \infty. \quad (4.54)$$

Επομένως, για να είναι πεπερασμένο το αποτέλεσμα πρέπει $\Delta \geq d/2$, που όπως βλέπουμε από την (4.46) ισχύει. Από την άλλη πλευρά, η δεύτερη λύση δίνει $\phi \sim x_0^{d-\Delta}$, όπου αντικαθιστώντας στη δράση παίρνουμε,

$$S[\phi] \sim \int d^d x \frac{1}{x_0^{2\Delta-d}} \Big|_0^\epsilon \rightarrow \infty. \quad (4.55)$$

Ανεξαρτήτως του ϵ η δράση δε συγκλίνει για αυτή τη λύση. Άρα, από τις (4.54) και (4.55) βλέπουμε ότι η β_+ λύση είναι κανονικοποιήσιμη, ενώ η β_- μη κανονικοποιήσιμη.

Το τελευταίο σημείο του παρόντος κεφαλαίου θα είναι να εξετάσουμε τη φυσική ερμηνεία των β_{\pm} . Θεωρώντας πως είμαστε στην περίπτωση που $m^2 > 0$ και $d - \Delta < 0$, ο κυρίαρχος όρος, καθώς προσεγγίζουμε το σύνορο, είναι ο $\phi(x_0, \vec{x}) \simeq x_0^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x})$. Προκειμένου να ταυτοποιήσουμε την πηγή της θεωρίας πεδίου από το ϕ πρέπει να εξαλείψουμε τον απειρισμό για $x_0 \rightarrow 0$. Θα θεωρήσουμε ότι η πηγή είναι το ϕ_0 αφού είναι πάντα πεπερασμένο σύμφωνα με τη σχέση (4.53). Για να δούμε το φυσικό νόημα της β_+ χρησιμοποιούμε τον όρο αλληλεπίδρασης των δυϊκών πεδίων των δύο θεωριών και πάμε κοντά στο σύνορο,

$$S_{bound} \sim \int d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} \phi(\epsilon, \vec{x}) \mathcal{O}(\epsilon, \vec{x}), \quad (4.56)$$

όπου το $\gamma_\epsilon = L^{2d}/\epsilon^{2d}$ είναι η ορίζουσα της επαγόμενης μετρικής κοντά στο σύνορο, $x_0 = \epsilon$. Τότε, χρησιμοποιώντας το ότι $\phi(\epsilon, \vec{x}) = \epsilon^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x})$,

$$S_{bound} \sim L^d \int d^d x \phi_0(\vec{x}) \epsilon^{-\Delta} \mathcal{O}(\epsilon, \vec{x}). \quad (4.57)$$

Για να είναι η δράση πεπερασμένη και ανεξάρτητη του ϵ καθώς $\epsilon \rightarrow 0$ θα πρέπει να απαιτήσουμε,

$$\mathcal{O}(\epsilon, \vec{x}) = \epsilon^\Delta \mathcal{O}(\vec{x}), \quad (4.58)$$

όπου πρόκειται για ένα μετασχηματισμό κλίμακας για το \mathcal{O} καθώς παμε από το $x_0 = 0$ στο $x_0 = \epsilon$. Συνεπώς, το $\beta_+ = \Delta$ ερμηνεύεται ως η διάσταση του \mathcal{O} . Με το ίδιο επιχειρήμα και σύμφωνα με τη σχέση $\phi(\epsilon, \vec{x}) = \epsilon^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x})$ προκύπτει ότι το $\beta_- = d - \Delta$ αντιστοιχεί στη διάσταση της πηγής ϕ_0 . Άρα η έκφραση,

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2} \quad (4.59)$$

γίνεται ακόμα σημαντικότερη, δεδομένου ότι εκφράζει τη σχέση μεταξύ της μάζας του ΠΒ πεδίου στον AdS με τη διάσταση του δυϊκού τελεστή \mathcal{O} της σύμμορφης θεωρίας. Για πεδία μεγαλύτερου σπιν, όπως οι p-μορφές η παραπάνω σχέση γίνεται,

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d-2p}{2}\right)^2 + m^2 L^2}. \quad (4.60)$$

Για άμαζο πεδίο βαθμίδας που είναι 1-μορφή έχουμε $\Delta = d - 1$, που είναι το γνωστό αποτέλεσμα από τη θεωρία πεδίου για τη διάσταση του διατηρούμενου ρεύματος. Επίσης, για πεδίο με σπιν 1/2,

$$\Delta = \frac{d}{2} + |mL|. \quad (4.61)$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα το χρειαστούμε και στην πορεία όταν θα ασχοληθούμε με την αντίστοιχη συνάρτηση συσχετισμού.

Κεφάλαιο 5

Συναρτήσεις Συσχετισμού

Όπως είναι γνωστό, μία θεωρία πρέπει να παρέχει προβλεπτική ικανότητα και συνεπώς να συμφωνεί με το πείραμα. Στη σωματιδιακή φυσική η σκέδαση αποτελεί μία από τις κύριες πειραματικές τεχνικές. Σε όρους θεωρίας πεδίου, οι ποσότητες που μας δίνουν την απαραίτητη πληροφορία, είναι οι συναρτήσεις συσχετισμού διότι μέσω αυτών μπορούμε να υπολογίσουμε τα πλάτη σκέδασης. Δεδομένου ότι η μία πλευρά της αντιστοιχίας περιλαμβάνει μία θεωρία πεδίου, θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις συσχετισμού εκμεταλλευόμενοι την αντιστοιχία AdS/CFT.

Πιο συγκεκριμένα, είδαμε ότι υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των πεδίων βαρύτητας ϕ και των τελεστών \mathcal{O} της σύμμορφης θεωρίας. Μέσα από αυτό το γεγονός ερμηνεύσαμε το ϕ_0 ως την πηγή του \mathcal{O} , το οποίο ζει στο (Ευκλείδειο) σύνορο \mathbb{R}^4 . Σκοπός αυτής της ενότητας είναι, κάνοντας υπολογισμούς αποκλειστικά στη θεωρία βαρύτητας, να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις συσχετισμού της σύμμορφης θεωρίας πεδίου:

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle$$

Θα αρκεστούμε σε συναρτήσεις συσχετισμού δύο και τριών σημείων, οι οποίες σύμφωνα με τους περιορισμούς που επιβάλλει η σύμμορφη θεωρία, η συναρτησιακή τους μορφή είναι γνωστή. Άρα, οι υπολογισμοί που θα κάνουμε θα αποτελέσουν έναν έλεγχο για την ευστάθεια της αντιστοιχίας AdS/CFT.

5.1 Μέθοδος Witten

Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε για τον υπολογισμό των συναρτήσεων συσχετισμού στο χώρο των θέσεων στην AdS/CFT, εισήχθη πρώτα από τον Witten, ο οποίος ακολούθησε τη μέθοδο στο χώρο των ορμών των Gubser, Klebanov και Polyakov [12].

5.1.1 Απεικόνιση Πεδίου-Τελεστή για τις Γεννήτριες Συναρτήσεις

Από την πλευρά μιας θεωρίας πεδίου οι συναρτήσεις συσχετισμού μπορούν να υπολογιστούν από τη γεννήτρια συνάρτηση που βρίσκεται προσθέτοντας έναν όρο πηγής στην Λαγκραντζιανή,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + J(x)\mathcal{O}(x)$$

$$Z_{QFT}[J] = \exp\left(-W_{QFT}[J]\right) = \left\langle \exp\left(\int d^d x J(x)\mathcal{O}(x)\right) \right\rangle_{QFT}. \quad (5.1)$$

Οι συνδεδεμένες συναρτήσεις συσχετισμού (*connected correlators*) δίνονται από τις συναρτησιακές παραγωγίσεις:

$$\left\langle \prod_i \mathcal{O}(x_i) \right\rangle = \prod_i \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \log Z_{QFT}[J]|_{J=0}. \quad (5.2)$$

Έστω τώρα ένα πεδίο ϕ που ζει στον AdS_{d+1} και φ η τιμή του στο σύνορο,

$$\varphi(x) = \phi(x_0 = 0, \vec{x}) = \phi|_{\partial AdS}(\vec{x}). \quad (5.3)$$

Έχουμε δει ότι για $x_0 \rightarrow 0$ η καλώς ορισμένη ποσότητα που θα αντιπροσωπεύει την πηγή του \mathcal{O} είναι το:

$$\phi_0(\vec{x}) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} x_0^{\Delta-d} \phi(x_0, \vec{x}). \quad (5.4)$$

Άρα η γεννήτρια συνάρτηση της θεωρίας πεδίου γίνεται:

$$Z_{QFT}[\phi_0] = \left\langle \exp\left(\int d^d x \phi_0(\vec{x})\mathcal{O}(\vec{x})\right) \right\rangle_{QFT}. \quad (5.5)$$

Από την άλλη πλευρά, η βαρύτητα θα περιγράφεται από τη συνάρτηση επιμερισμού:

$$Z_{gravity} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}. \quad (5.6)$$

Δεδομένου, όμως, του ότι δουλεύουμε στην αδύναμη μορφή της αντιστοιχίας, τα σωματάρια θεωρούνται σημειακά ($\alpha' \rightarrow 0$) και στις συναρτήσεις συσχετισμού συνεισφέρουν μόνο διαγράμματα επιπέδου δένδρου (*tree level*) χωρίς, δηλαδή, να έχουμε κβαντικές διορθώσεις ($g_s \rightarrow 0$). Συνεπώς, μόνο η κλασική "τροχιά" ϕ_0 θα λαμβάνεται υπόψιν και εκμεταλλευόμενοι την προσέγγιση σαγματικού σημείου (*saddle-point approximation*), έχουμε:

$$Z_{gravity} \simeq e^{-S_{cl}[\phi]|_{\phi \rightarrow \varphi}} \Rightarrow W_{gravity} \simeq -S_{cl}[\phi]|_{\phi \rightarrow \varphi}, \quad (5.7)$$

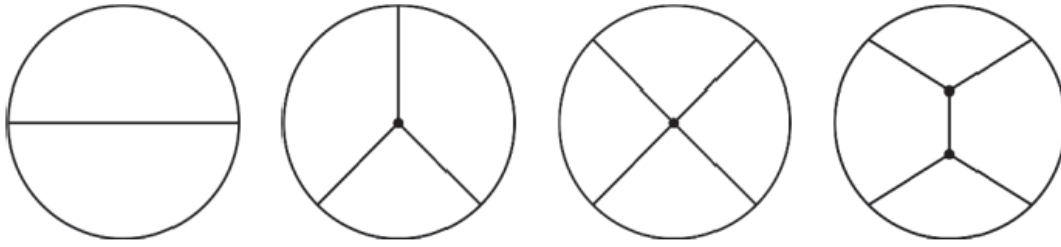
αγνοώντας το συντελεστή. Σύμφωνα με την αντιστοιχία AdS/CFT, αφού οι δύο θεωρίες είναι ισοδύναμες, θα πρέπει αυτό να εκφράζεται και σε επίπεδο συναρτήσεων επιμερισμού/γεννήτριων συναρτήσεων:

$$Z_{QFT}[\phi_0] = Z_{gravity}|_{\phi \rightarrow \varphi} \Rightarrow \left\langle \exp\left(\int d^d x \phi_0(\vec{x})\mathcal{O}(\vec{x})\right) \right\rangle_{QFT} = e^{-S_{cl}[\varphi]}, \quad (5.8)$$

όπου S_{cl} η κλασική δράση με την έννοια των όσων περιγράψαμε παραπάνω. Εν τέλει, η συνάρτηση συσχετισμού n -σημείων θα είναι:

$$\langle \mathcal{O}(\vec{x}_1) \dots \mathcal{O}(\vec{x}_n) \rangle_{QFT} = \lim_{\phi \rightarrow \varphi} \frac{\delta^n S_{cl}[\phi]}{\delta \phi_0(\vec{x}_1) \dots \delta \phi_0(\vec{x}_n)} \Big|_{\phi_0=0}. \quad (5.9)$$

Άρα, όταν ικανοποιούνται οι εξ. κίνησης, η δράση της υπερβαρύτητας παίζει το ρόλο της γεννήτριας συνάρτησης στη θεωρία πεδίου. Η παραπάνω σχέση αποτελεί το τελευταίο βήμα της όλης υπόθεσης. Μέχρι να φτάσουμε όμως εκεί, δουλεύουμε με το εξής πλάνο:



Σχήμα 5.1: Παραδείγματα διαγραμμάτων Witten στον AdS χωρόχρονο. Ο κύκλος αναφέρεται στο σύνορο του AdS ενώ το εσωτερικό στον AdS χώρο. Οι κόμβοι που υποδεικνύονται από τις κουκίδες βρίσκονται στο εσωτερικό. Τα τρία πρώτα διαγράμματα περιλαμβάνουν χώρου-συνόρου διαδότες, ενώ το τελευταίο περιλαμβάνει και ένα διαδότη χώρου-χώρου.

- Καθορίζουμε τη μορφή του πεδίου $\phi(x_0, \vec{x})$ που είναι το δυικό του \mathcal{O} .
- Λύνουμε τις εξισώσεις κίνησης υπερβαρύτητας για το ϕ επιβάλλοντας τη συνοριακή συνθήκη (5.4) για $x_0 \rightarrow 0$.
- Εισάγουμε τη λύση στη δράση πηγαίνοντας στο σύνορο $x_0 \rightarrow 0$.
- Και τέλος, παραγωγίζουμε ως προς την πηγή ϕ_0 για να πάρουμε τις συνδεδεμένες συναρτήσεις συσχετισμού της θεωρίας πεδίου.

5.1.2 Διαγράμματα Witten και AdS διαδότες

Όπως είδαμε από την (5.9) ο υπολογισμός των συναρτήσεων συσχετισμού της θεωρίας πεδίου ανάγεται σε υπολογισμό των διαγραμμάτων δένδρου στην πλευρά της βαρύτητας. Αυτά αναφέρονται ως *διαγράμματα Witten* και συνοδεύονται με τους δικούς τους κανόνες Feynman.

- Το εσωτερικό αντιστοιχεί στον AdS_{d+1} χωρόχρονο, ενώ ο κύκλος στο σύνορο, όπου ζει η θεωρία πεδίου. Οι εξωτερικές πηγές ϕ_0 των σύνθετων και αναλλοίωτων κατά βαθμίδα τελεστών \mathcal{O} ζουν επίσης στον κύκλο.
- Οι διαδότες ξεκινούν από τις εξωτερικές πηγές (δηλαδή από το σύνορο) και καταλήγουν είτε πάλι στο σύνορο είτε σε κάποιο σημείο αλληλεπίδρασης. Η πρώτη περίπτωση αφορά το συνήθη διαδότη, μιας και δεν υπάρχουν βρόχοι, ενώ η δεύτερη διαδότη χώρου-συνόρου (*bulk-to-boundary propagator*).
- Η δομή των σημείων αλληλεπίδρασης καθορίζεται από τον αντίστοιχο όρο αλληλεπίδρασης στη δράση της υπερβαρύτητας.
- Δύο σημεία αλληλεπίδρασης ενώνονται με ένα διαδότη χώρου-χώρου (*bulk-to-bulk propagator*).

Η αναλυτική μορφή των διαδοτών χώρου-συνόρου και χώρου-χώρου, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση Green του τελεστή $\square_g - m^2$ στον AdS, με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Θα

Ξεκινήσουμε με την απλούστερη περίπτωση, τη βαθμωτή υπερβαρύτητα, θεωρώντας την Ευκλείδεια AdS μετρική στις $d + 1$ διαστάσεις,

$$ds^2 = \frac{L^2}{x_0^2} (dx_0^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j), \quad (5.10)$$

όπου $x \in \mathbb{R}^d$. Το βαθμωτο πεδίο ϕ θα έχει μάζα $m^2 L^2 = \Delta(\Delta - d)$. Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση κίνησης $(\square_g - m^2)\phi = 0$ με τη συνοριακή συνθήκη $\phi(x_0, \vec{x}) = x_0^{d-\Delta} \phi_0(\vec{x})$ για $x_0 \rightarrow 0$. Όπως στην κλασσική ηλεκτροδυναμική, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό πυρήνα $K(x_0, \vec{x}; \vec{y})$, μιας και έχουμε ομογενή εξίσωση με μη ομογενή συνοριακή συνθήκη. Ο ολοκληρωτικός πυρήνας θα αντιστοιχεί στο διαδότη χώρου-συνόρου και η λύση παίρνει τη μορφή,

$$\phi(x_0, \vec{x}) = \int_{\partial AdS} d^d y K(x_0, \vec{x}; \vec{y}) \phi_0(\vec{y}), \quad (5.11)$$

όπου το $\phi_0(\vec{y})$ εξαρτάται μόνο από την συνοριακή μεταβλητή y^i . Με παρόμοιο σκεπτικό, ο διαδότης χώρου-χώρου βρίσκεται με το να θεωρήσουμε μια πηγή $J(x_0, \vec{x})$ με εξ. κίνησης $(\square_g - m^2)\phi = J$ και η αντίστοιχη λύση να δίνεται από τη σχέση,

$$\phi(x_0, \vec{x}) = \int_{AdS} dy_0 d^d y \sqrt{g} G(x_0, \vec{x}; y_0, \vec{y}) J(y_0, \vec{y}) \quad (5.12)$$

Οι υπολογισμοί μας στις συναρτήσεις συσχετισμού θα περιοριστούν στις δύο και τριών σημείων. Δεδομένου ότι δε θα συνεισφέρουν διαγράμματα με βρόχους, θα χρειαστούμε μόνο το διαδότη χώρου-συνόρου.

Ένας βαθμωτός διαδότης σε επίπεδο χωρόχρονο Minkowski είναι αναλλοίωτος κάτω από την ομάδα των ισομετριών του χώρου αυτού (ομάδα Poincaré). Έτσι στην περίπτωση μας ο διαδότης θα είναι αναλλοίωτος κάτω από την αντίστοιχη ομάδα ισομετριών του AdS, όπου περιλαμβάνεται και η μεταφορική συμμετρία των x^i . Τότε αν $y^i \rightarrow \infty \Rightarrow x^i \rightarrow \infty$ και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το K θα εξαρτάται αποκλειστικά από το x_0 [20]. Τότε αντικαθιστώντας την (5.11) στην Klein-Gordon και αγνοώντας την x^i εξάρτηση, έχουμε,

$$(x_0(1-d)\partial_0 + x_0^2\partial_0^2 - m^2 L^2)K(x_0) = 0 \quad (5.13)$$

και η λύση που προκύπτει είναι

$$K(x_0) \sim x_0^{\Delta_{\pm}}. \quad (5.14)$$

Η μετρική είναι αναλλοίωτη κάτω από την αντιστροφή $x_\mu \rightarrow x_\mu/x^2$,

$$\frac{1}{x_0^2} \sum_{\mu=0}^d dx_\mu^2 \rightarrow \frac{1}{x_0^2} \sum_{\mu=0}^d (dx_\mu x^2 - 2x_\mu x dx)^2 \Rightarrow ds'^2 = ds^2, \quad (5.15)$$

άρα μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε και για να βρούμε την εξάρτηση του K από τις x^i συνιστώσες,

$$K_{\pm} \sim \left(\frac{x_0}{x_0^2 + \vec{x}^2} \right)^{\Delta_{\pm}}, \quad (5.16)$$

και τέλος με τη μεταφορική συμμετρία να αποκτήσουμε την πλήρη εξάρτηση του K ,

$$K_{\pm}(x_0, \vec{x}; \vec{y}) = C^d \left(\frac{x_0}{x_0^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2} \right)^{\Delta_{\pm}}. \quad (5.17)$$

Από την έκφραση αυτή μπορούμε να δούμε το πως θα μετασχηματίζεται κάτω από αντιστροφή στο $x_0 \rightarrow 0$,

$$K_{\pm}(x_0, \vec{x}; \vec{y}) \rightarrow K_{\pm}(x_0, \vec{x}; \vec{y}) |\vec{x}|^{2\Delta_{\pm}} \quad (5.18)$$

Όμως ο αντίστοιχος μετασχηματισμός για το στοιχείο όγκου και το ϕ_0 δίνει,

$$d^d x \rightarrow \frac{d^d x}{|\vec{x}|^{2d}} \quad (5.19)$$

$$\phi_0 \rightarrow \phi_0 |\vec{x}|^{2(d-\Delta)}$$

Για να παραμένει το $\phi(x_0, \vec{x})$ αναλλοίωτο κάτω από αντιστροφή, θα λάβουμε υπόψιν μόνο τη λύση Δ_+ ,

$$K_+(x_0, \vec{x}; \vec{y}) = C^d \left(\frac{x_0}{x_0^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2} \right)^{\Delta}, \quad (5.20)$$

όπου $\Delta_+ = \Delta$. Παρατηρούμε επίσης ότι έχει τη σωστή συμπεριφορά στο σύνορο,

$$K(x_0, \vec{x}; \vec{y}) \rightarrow x_0^{d-\Delta} \delta^d(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.21)$$

με σταθερά κανονικοποίησης

$$C^d = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}. \quad (5.22)$$

Στο άλλο όριο $x_0 \rightarrow \infty$,

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} K(x_0, \vec{x}; \vec{y}) = 0 \quad (5.23)$$

Το αποτέλεσμα αυτό συνεπάγεται καλή συμπεριφορά του ϕ εντός του AdS , κάτι το οποίο είναι αναγκαίο.

Η μέχρι τώρα ανάλυση είναι αρκετή για να μας επιτρέψει να ξεκινήσουμε τον υπολογισμό των συναρτήσεων συσχετισμού της θεωρίας πεδίου, κάνοντας υπολογισμούς αποκλειστικά στην μεριά της βαρύτητας.

5.2 Βαθμωτό πεδίο: Συνάρτηση 2 σημείων

Στο Σχήμα (5.1) το πρώτο διάγραμμα Witten αντιστοιχεί στην περίπτωση που θα εξετάσουμε σε αυτήν την παράγραφο. Από τη σχέση (5.9) παίρνουμε,

$$\langle \mathcal{O}(\vec{x}_1) \mathcal{O}(\vec{x}_2) \rangle_{QFT} = \lim_{\phi \rightarrow \varphi} \frac{\delta^2 S_{cl}[\phi]}{\delta \phi_0(\vec{x}_1) \delta \phi_0(\vec{x}_2)} \Big|_{\phi_0=0}. \quad (5.24)$$

Θα αγνοήσουμε τυχόν αλληλεπιδράσεις και θα κρατήσουμε μόνο τετραγωνικούς όρους στη δράση.

$$S[\phi] = \frac{C}{2} \int dx_0 d^d x \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2), \quad (5.25)$$

όπου $m^2 L^2 = \Delta(\Delta - d)$ με $\sqrt{g} = (L/x_0)^{d+1}$. Η λύση που θα βρούμε θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη (5.4). Κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης και το γεγονός ότι τα πεδία σβήνουν στο άπειρο, η δράση παίρνει την απλούστερη μορφή,

$$S[\phi] = \int d^d x \sqrt{g} g^{00} \phi \partial_0 \phi \Big|_{x_0 \rightarrow 0}^{x_0 \rightarrow \infty} = - \int d^d x \sqrt{g} g^{00} \phi \partial_0 \phi \Big|_{x_0 \rightarrow 0}. \quad (5.26)$$

Στο πάνω όριο παίρνουμε μηδέν, σύμφωνα με τις (5.23) και (5.11), όμως στο κάτω όριο συναντάμε πρόβλημα διότι ο όρος $\sqrt{g} g^{00}$ συμπεριφέρεται ως x_0^{-d+1} το οποίο απειρίζεται καθώς πηγαίνουμε στο σύνορο. Θα πρέπει να χειριστούμε προσεκτικά το όριο αυτό ομαλοποιώντας το ολοκλήρωμα. Το πρώτο βήμα θα είναι να παραλείψουμε την περιοχή $0 < x_0 < \epsilon$, με $\epsilon \ll 1$, τροποποιώντας ανάλογα και τη συνοριακή συνθήκη (5.4). Αφού $x_0 \geq \epsilon$ δε μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις ισομετρίες του AdS προκειμένου να βρούμε τη γενική λύση ϕ . Έτσι, αναπτύσσουμε κατά Fourier,

$$\phi(x_0, \vec{x}) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i\vec{p}\vec{x}} f_p(x_0), \quad (5.27)$$

με $f_p(x_0) = x_0^{d/2} g_p(x_0)$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης παίρνουμε την εξίσωση Bessel για το $g_p(x_0)$,

$$(x_0^2 \partial_0^2 + x_0 \partial_0 - (\nu^2 + p^2 x_0^2)) g_p(x_0) = 0, \quad (5.28)$$

με $\nu = \Delta - d/2$. Οι λύσεις είναι οι τροποποιημένες εξισώσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους $I_\nu(z)$ και $K_\nu(z)$ αντίστοιχα. Ωστόσο, λόγω της καλής συμπεριφοράς που απαιτείται στο εσωτερικό του AdS , $x_0 \rightarrow \infty$, θα απορρίψουμε τις πρώτες διότι αποκλίνουν εκθετικά. Αντίθετα οι K_ν σβήνουν με τον ίδιο τρόπο και είναι αποδεκτές. Έτσι λοιπόν,

$$f_p(x_0) = A_p x_0^{d/2} K_\nu(x_0 |\vec{p}|) \xrightarrow{x_0 \rightarrow 0} \sim A_p x_0^{d/2 - \nu} = A_p x_0^{d - \Delta} \quad (5.29)$$

και παρατηρούμε ότι παίρνουμε τη σωστή συμπεριφορά και στο σύνορο. Για τον προσδιορισμό των A_p θεωρούμε αρχικά το μετασχηματισμό Fourier της $\phi_0(\vec{x})$,

$$\phi_0(\vec{p}) = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \phi_0(\vec{x}), \quad (5.30)$$

και από τη (5.4) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \rightarrow \epsilon} \left\{ \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \phi(x_0, \vec{x}) e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right\} x_0^{\Delta - d} &= \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} e^{i\vec{p}\vec{x}} \phi_0(x) \\ \lim_{x_0 \rightarrow \epsilon} x_0^{\Delta - d} \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\vec{x}} f_k(x_0) e^{-i\vec{p}\vec{x}} &= \phi_0(\vec{p}) \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow \epsilon} x_0^{\Delta - d} \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i(\vec{k} - \vec{p})\vec{x}} A_k x_0^{d/2} K_\nu(x_0 |\vec{k}|) = \phi_0(\vec{p})$$

Από τη (5.29) και τον ορισμό της δέλτα συνάρτησης, προκύπτει,

$$f_p(x_0) = \frac{x_0^{d/2} K_\nu(x_0|\vec{p}|)}{\epsilon^{d/2} K_\nu(\epsilon|\vec{p}|)} \phi_0(\vec{p}) \epsilon^{d-\Delta} \quad (5.32)$$

Αφού εκφράσαμε τα f_p συναρτήσεως των $\phi_0(p)$ μετατρέπουμε τη δράση σε ολοκλήρωμα ως προς τις ορμές και παραγωγίζουμε ως προς τα $\phi_0(p)$. Το τελικό αποτέλεσμα είναι (Παράρτημα),

$$\left. \frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta\phi_0(-\vec{p})\delta\phi_0(-\vec{q})} \right|_{\phi_0=0} = -\frac{CL^{d-1}\delta^{(d)}(\vec{p}+\vec{q})}{(2\pi)^d \epsilon^{2\Delta-d}} \left(\frac{d}{2} + \frac{\epsilon|\vec{p}|K'_\nu(\epsilon|\vec{p}|)}{K_\nu(\epsilon|\vec{p}|)} \right). \quad (5.33)$$

Από τη (5.24) έχουμε:

$$\langle \mathcal{O}(\vec{p})\mathcal{O}(\vec{q}) \rangle_\epsilon = -(2\pi)^{2d} \left. \frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta\phi_0(-\vec{p})\delta\phi_0(-\vec{q})} \right|_{\phi_0=0} \quad (5.34)$$

$$\langle \mathcal{O}(\vec{p})\mathcal{O}(\vec{q}) \rangle_\epsilon = \frac{(2\pi)^d CL^{d-1}\delta^{(d)}(\vec{p}+\vec{q})}{\epsilon^{2\Delta-d}} \left(\frac{d}{2} + \frac{\epsilon|\vec{p}|K'_\nu(\epsilon|\vec{p}|)}{K_\nu(\epsilon|\vec{p}|)} \right),$$

όπου η παραγωγή είναι ως προς $\epsilon|\vec{p}|$. Αναπτύσσουμε τα $K_\nu(u)$ για $u \ll 1$ θεωρώντας ότι το ν δεν είναι ακέραιος [11]¹:

$$K_\nu(u) = u^{-\nu}(\alpha_0 + \alpha_1 u^2 + \mathcal{O}(u^4)) + u^\nu(\beta_0 + \beta_1 u^2 + \mathcal{O}(u^4)), \quad (5.35)$$

με $\alpha_0 = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)$ και $\beta_0 = -\frac{2^{-(\nu+1)}}{\nu}\Gamma(1-\nu)$ όπου είναι οι μόνοι συντελεστές που θα χρειαστούμε.

$$\frac{d}{2} + \frac{\epsilon|\vec{p}|K'_\nu(\epsilon|\vec{p}|)}{K_\nu(\epsilon|\vec{p}|)} = \frac{d}{2} - \nu \left(1 + \gamma_2(\epsilon|\vec{p}|)^2 + \dots \right) + \frac{2\nu\beta_0}{\alpha_0} (\epsilon|\vec{p}|)^{2\nu} \left(1 + \delta_2(\epsilon|\vec{p}|)^2 + \dots \right). \quad (5.36)$$

Για να βρούμε τη συνάρτηση συσχετισμού στο χώρο των θέσεων θα πρέπει να μετασχηματίσουμε κατά Fourier. Οι πρώτοι δύο όροι θα μας δώσουν δέλτα συνάρτηση με παραγώγους της,

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\nu=0} f_i \square^\nu \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.37)$$

Τέτοιοι όροι συνεισφέρουν, δίνοντας απειρισμούς, για πολύ μικρές αποστάσεις όπου $x \simeq y$ και ονομάζονται όροι επαφής (*contact terms*). Άρα, στην πλευρά της θεωρίας πεδίου έχουμε υπεριώδη αποκλίση (*UV divergence*) από όρους που προέρχονται από την παρουσία του ϵ και παίρνοντας το όριο $\epsilon \rightarrow 0$. Από την άλλη πλευρά, της βαρύτητας είδαμε τον απειρισμό να υπεισέρχεται στη δράση (5.26) καθώς πάμε στο σύνορο, δηλαδή σε άπειρη απόσταση. Άρα εδώ έχουμε υπέρυθη απόκλιση (*IR divergence*). Συνεπώς, το μήκος αποκοπής ϵ για μεγάλες αποστάσεις στον *AdS* χώρο παίζει το ρόλο του αντίστοιχου μήκους αποκοπής για μικρές αποστάσεις στη δυική θεωρία πεδίου. Πρόκειται για τις δύο διαφορετικές όψεις του ίδιου νομίσματος. Τεχνικές όπως

¹Το αντίστοιχο ανάπτυγμα για ν ακέραιο βρίσκεται από την αντικατάσταση του u^ν με $u^\nu \ln u$ [3].

η ολογραφική επανακανονικοποίηση (*holographic renormalization*) έχουν αναπτυχθεί προκειμένου να εξαλειφθούν τέτοιου είδους απειρισμοί εκατέρωθεν, με την εισαγωγή κατάλληλων όρων (*counterterms*) στη δράση [3, 17].

Επομένως, θα αγνοήσουμε τους όρους επαφής μιας και δεν έχουν κάποια φυσική ερμηνεία την οποία περιμέναμε και και επικεντρωνόμαστε στον πρώτο όρο που απομένει,

$$\frac{2\nu\beta_0}{\alpha_0}(\epsilon|\vec{p}|)^{2\nu} = -\epsilon^{2\nu}(2\nu)\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^{2\nu}. \quad (5.38)$$

Αντικαθιστώντας στη (5.34),

$$\langle \mathcal{O}(\vec{p})\mathcal{O}(\vec{q}) \rangle_\epsilon = -(2\pi)^d CL^{d-1} \delta^{(d)}(\vec{p} + \vec{q}) 2\nu \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^{2\nu}, \quad (5.39)$$

και το $\langle \mathcal{O}(\vec{p})\mathcal{O}(\vec{q}) \rangle_\epsilon$ έγινε ανεξάρτητο του μήκους αποκοπής ϵ όπως έπρεπε. Αγνοούμε τη δέλτα συνάρτηση, η οποία επιβάλλει $\delta(\alpha - \beta)f(\beta) = f(\alpha)$ και $\alpha = \beta$ και μετασχηματίζουμε κατά Fourier,

$$\langle \mathcal{O}(\vec{x})\mathcal{O}(\vec{y}) \rangle = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \left(\frac{\langle \mathcal{O}(\vec{p})\mathcal{O}(-\vec{p}) \rangle}{(2\pi^d)} \right). \quad (5.40)$$

Θα χρειαστούμε το ολοκλήρωμα (Παράρτημα),

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} |\vec{p}|^{2\nu} = \frac{2^{2\nu}}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\nu + d/2)}{\Gamma(-\nu)} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2\nu+d}}, \quad (5.41)$$

όπου ο ν δε δίνει όρους επαφής διότι είναι μη ακέραιος. Έτσι, η συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων για βαθμωτό τελεστή της σύμμορφης θεωρίας πεδίου είναι,

$$\langle \mathcal{O}(\vec{x})\mathcal{O}(\vec{y}) \rangle = -C \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta - d/2)} \frac{2\Delta - d}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2\Delta}}, \quad (5.42)$$

όπου παρατηρείται ακριβώς η συμπεριφορά που περιμέναμε από τη σύμμορφη θεωρία πεδίου για διάσταση Δ του τελεστή \mathcal{O} . Ο συντελεστής C καθορίζεται από τη δράση της θεωρίας υπερβαρύτητας. Το παραπάνω αποτέλεσμα συμφωνεί και με το [3], όπου θέσαμε $L = 1$.

5.3 Βαθμωτό πεδίο: Συνάρτηση 3 σημείων

Για την περίπτωση αυτή χρειαζόμαστε στη δράση όρο $\mathcal{L}_{int} = C\lambda\phi_1\phi_2\phi_3$ με τα ϕ_i να δίνονται από την (5.11). Η συνάρτηση συσχετισμού θα δίνεται από την έκφραση,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(\vec{x})\mathcal{O}(\vec{y})\mathcal{O}(\vec{z}) \rangle &= -\frac{\delta^3 S_{int}[\phi_1, \phi_2, \phi_3]}{\delta\phi_{0,1}(\vec{x})\delta\phi_{0,2}(\vec{y})\delta\phi_{0,3}(\vec{z})} \Big|_{\phi_{0,i}=0} \\ \langle \mathcal{O}(\vec{x})\mathcal{O}(\vec{y})\mathcal{O}(\vec{z}) \rangle &= -C\lambda \int \frac{dw_0 d^d w}{w_0^{d+1}} K_1(w, \vec{x}) K_2(w, \vec{y}) K_3(w, \vec{z}) \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\langle \mathcal{O}(\vec{x})\mathcal{O}(\vec{y})\mathcal{O}(\vec{z}) \rangle = -C\lambda \mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}),$$

όπου $w = (w_0, \vec{w})$. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να χρησιμοποιήσουμε την αντιστροφή $w_\mu \rightarrow w_\mu/w^2$. Προκειμένου όμως να χρησιμοποιήσουμε και την ιδιότητα (5.18) θα πρέπει να αντιστρέψουμε και τις συντεταγμένες του συνόρου $x_i \rightarrow x_i/x^2$. Βάζοντας σε εφαρμογή τα παραπάνω παίρνουμε πάλι το ίδιο ολοκλήρωμα,

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \rightarrow \mathcal{A}(\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}') = -|\vec{x}|^{2\Delta_1} |\vec{y}|^{2\Delta_2} |\vec{z}|^{2\Delta_3} \int \frac{dw_0 d^d w}{w_0^{d+1}} K_1(w, \vec{x}) K_2(w, \vec{y}) K_3(w, \vec{z}) \quad (5.44)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και το ότι $dw_0 d^d w/w_0^{d+1} = dw'_0 d^d w'/w_0'^{d+1}$. Συνεπώς, δεν έχουμε τίποτα να κερδίσουμε μόνο με την αντιστροφή. Παρατηρούμε όμως ότι

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \mathcal{A}(\vec{x} - \vec{z}, \vec{y} - \vec{z}, 0) = \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}, 0), \quad (5.45)$$

το οποίο ισοδυναμεί με το να θέσουμε $\vec{z} = 0$ εκμεταλλευόμενοι τη μεταφορική συμμετρία.

$$K_3(w, 0) = \frac{w_0}{w_0^2 + \vec{w}^2} = \frac{w_0}{w^2} = w'_0. \quad (5.46)$$

Χρησιμοποιώντας τη (5.18), έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}, 0) &= -\frac{1}{|\vec{u}|^{2\Delta_1}} \frac{1}{|\vec{v}|^{2\Delta_2}} \frac{\Gamma(\Delta_3)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta_3 - d/2)} \int \frac{dw'_0 d^d w'}{w_0'^{d+1}} K_1(w', \vec{u}') K_2(w', \vec{v}') (w'_0)^{\Delta_3} = \\ &= -\frac{1}{|\vec{u}|^{2\Delta_1}} \frac{1}{|\vec{v}|^{2\Delta_2}} \frac{\Gamma(\Delta_3)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta_3 - d/2)} \int dw'_0 d^d w' \frac{(w'_0)^{\Delta_3 - d - 1 + \Delta_1 + \Delta_2}}{[w_0'^2 + (\vec{w}' - \vec{x}')^2]^{\Delta_1} [w_0'^2 + (\vec{w}' - \vec{y}')^2]^{\Delta_2}} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Για το παραπάνω ολοκλήρωμα η λύση είναι γνωστή (Παράρτημα),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dw_0 \int d^d w \frac{w_0^a}{[w_0^2 + (\vec{w} - \vec{x})^2]^b [w_0^2 + (\vec{w} - \vec{y})^2]^c} &= \mathcal{I}(a, b, c, d) |\vec{x} - \vec{y}|^{1+d+a-2b-2c} \\ \mathcal{I}(a, b, c, d) &= \frac{\pi^{d/2} \Gamma(\frac{a+1}{2}) \Gamma(b+c - \frac{d+a+1}{2}) \Gamma(\frac{1+a+d}{2} - b) \Gamma(\frac{a+d+1}{2} - c)}{2 \Gamma(b) \Gamma(c) \Gamma(1+a+d-d-c)}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

όπου για την περίπτωση μας $a = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - d - 1$, $b = \Delta_1$, $c = \Delta_2$. Επομένως, η (5.47) παίρνει τη μορφή,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}, 0) &= -\frac{1}{|\vec{u}|^{2\Delta_1}} \frac{1}{|\vec{v}|^{2\Delta_2}} \frac{\Gamma(\Delta_3)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta_3 - d/2)} \\ &\cdot \mathcal{I}(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - d - 1, \Delta_1, \Delta_2, d) \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{y}'|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3}} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Από τη σύμμορφη θεωρία είδαμε ότι κάτω από αντιστροφή έχουμε,

$$(\vec{x}' - \vec{y}')^2 = \frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{\Omega(x)\Omega(y)}, \quad (5.50)$$

με $\Omega(x) = x^2$. Έτσι επαναφέροντας τον αρχικό συμβολισμό, η συνάρτηση συσχετισμού 3 σημείων για το βαθμωτό πεδίο είναι:

$$\langle \mathcal{O}(\vec{x})\mathcal{O}(\vec{y})\mathcal{O}(\vec{z}) \rangle = -\frac{C\lambda\Gamma(\Delta_3)}{\pi^{d/2}\Gamma(\Delta_3 - d/2)} \frac{\mathcal{I}(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - d - 1, \Delta_1, \Delta_2, d)}{|\vec{x} - \vec{y}|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |\vec{y} - \vec{z}|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} |\vec{x} - \vec{z}|^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2}}, \quad (5.51)$$

όπου και πάλι παίρνουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα της σύμμορφης θεωρίας πεδίου το οποίο συμφωνεί και με τα [3, 10].

5.4 Πεδίο Dirac: Συνάρτηση 2 σημείων

Η δράση του πεδίου Dirac είναι,

$$S_0[\bar{\psi}, \psi] = \int_{AdS} d^{d+1}x \sqrt{g} \bar{\psi}(x) (\mathcal{D} - m)\psi(x), \quad (5.52)$$

η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από την ομάδα μετασχηματισμών $SO(d+1, 1)$ και οι εξισώσεις κίνησης είναι,

$$(\mathcal{D} - m)\psi(x) = 0 \quad \& \quad \bar{\psi}(x)(-\overleftarrow{\mathcal{D}} - m) = 0. \quad (5.53)$$

Όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις τα πεδία θα ικανοποιούν τις εξισώσεις κίνησης και η συνάρτηση επιμερισμού θα είναι ανάλογη του εκθετικού της αντίστοιχης δράσης. Όμως η παραπάνω δράση (5.52) μηδενίζεται για την περίπτωση αυτή, με αποτέλεσμα η συνάρτηση επιμερισμού να μην μπορεί να αναπαράγει συναρτήσεις συσχετισμού για τη σύμμορφη θεωρία πεδίου. Το πρόβλημα αυτό δε διορθώνεται ούτε με την προσθήκη του όρου,

$$\alpha \int_{AdS} d^{d+1}x \sqrt{g} (\bar{\psi} \overleftarrow{\mathcal{D}}\psi + \bar{\psi} \mathcal{D}\psi), \quad (5.54)$$

ο οποίος δε θα άλλαζε τις εξισώσεις κίνησης,

$$S_0[\bar{\psi}, \psi] = (1 + \alpha) \int_{AdS} d^{d+1}x \sqrt{g} \bar{\psi} (\mathcal{D} - m_\alpha)\psi + \alpha \int_{AdS} d^{d+1}x \sqrt{g} \bar{\psi} (\overleftarrow{\mathcal{D}} + m_\alpha)\psi. \quad (5.55)$$

Από την πλευρά της βαρύτητας το κλασικό όριο $\alpha' \rightarrow 0$ και οι εξισώσεις κίνησης δε θα μπορούσαν να αλλάξουν. Η μόνη επιλογή είναι να προσθέσουμε έναν επιφανειακό όρο στη δράση (5.52), η παρουσία του οποίου θα δίνει και τις συναρτήσεις συσχετισμού [14],

$$S_1[\bar{\psi}, \psi] = G \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial_\epsilon AdS} d^d x \sqrt{h_\epsilon} \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}), \quad (5.56)$$

με h_ϵ η επαγόμενη μετρική της d -διάστατης υποπολλαπλότητας $\partial_\epsilon AdS$ που προσεγγίζει το σύνορο του AdS_{d+1} για $\epsilon \rightarrow 0$. Η δράση (5.56) είναι επίσης $SO(d+1, 1)$ αναλλοίωτη μιας και είναι η ομάδα ισομετρίας του AdS , όπου απεικονίζει το ∂AdS στον εαυτό του. Επίσης, οι εξισώσεις κίνησης δεν αλλάζουν μετά από αυτήν την προσθήκη.

Περνώντας στον υπολογισμό, χρειάζεται πρώτα να συζεύξουμε το πεδίο Dirac με τον AdS_{d+1} διαλέγοντας ένα τοπικό σύστημα Lorentz. Θα χρησιμοποιήσουμε τα πεδία πλαισίου e_μ^a με $a, \mu \in$

$[0, d]$ ο επίπεδος και καμπύλος δείκτης αντίστοιχα. Η μετρική του AdS_{d+1} εκφράζεται συναρτήσει των πεδίων πλαισίου ως,

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} \quad (5.57)$$

Διαλέγουμε, $e_\mu^a = \frac{\delta_\mu^a}{x_0}$ με τη σύνδεση σπιν να είναι (Παράρτημα),

$$\omega_i^{j0} = -\omega_i^{0j} = \frac{\delta_i^j}{x_0}, \quad (5.58)$$

και τους γ^a πίνακες, στην αναπαράσταση Dirac, όπου ικανοποιούν την άλγεβρα Clifford, $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$ με $\gamma^a = (\gamma^0, \gamma^i)$. Η συναλλοίωτη παράγωγος είναι (Παράρτημα),

$$\mathcal{D} = e_a^\mu \gamma^a (\partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_\mu^{bc} \Sigma_{bc}) = x_0 \gamma^a \partial_a - \frac{d}{2} \gamma_0. \quad (5.59)$$

Η εξίσωση Dirac παίρνει τη μορφή,

$$(x_0 \gamma^a \partial_a - \frac{d}{2} \gamma_0 - m) \psi(x) = 0. \quad (5.60)$$

και δρώντας με $\gamma^b \partial_b$ προκύπτει (Παράρτημα):

$$\left[\partial^2 - \frac{d}{x_0} \partial_0 - \frac{1}{x_0^2} \left(m^2 - \frac{d^2}{4} - \frac{d}{2} - \gamma_0 m \right) \right] \psi(x) = 0. \quad (5.61)$$

Όπως στις προηγούμενες ενότητες, στο σημείο αυτό θα αναλύσουμε την ψ κατά Fourier,

$$\psi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}\vec{x}} f_k(x_0), \quad (5.62)$$

με $f_k(x_0) = x_0^{\frac{d+1}{2}} g_k(x_0)$. Επίσης, συμβολίζουμε $a = m^2 - d^2/4 - d/2 - \gamma_0 m$. Από τη (5.61) έχουμε,

$$\begin{aligned} \left(\partial_0^2 - k^2 - \frac{d}{x_0} \partial_0 - \frac{a}{x_0^2} \right) x_0^{\frac{d+1}{2}} g_k(x_0) &= 0 \\ \frac{(d+1)(d-1)}{4} x_0^{-2} g_k + (d+1) x_0^{-1} \partial_0 g_k + \partial_0^2 g_k - k^2 g_k - \\ & - \frac{d(d+1)}{2} x_0^{-2} g_k - d x_0^{-1} \partial_0 g_k - a x_0^{-2} g_k = 0 \\ x_0^2 \partial_0^2 + x_0 \partial_0 g_k - \left[k^2 x_0 + \left(mI - \frac{\gamma_0}{2} \right)^2 \right] g_k &= 0 \end{aligned} \quad (5.63)$$

Παίρνουμε πάλι εξίσωση Bessel με λύση τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel, ωστόσο λόγω καλής συμπεριφοράς στο $x_0 \rightarrow \infty$ θα κρατήσουμε μόνο την K_ν , όπου $\nu = mI - \gamma_0/2$. Άρα οι

δύο ανεξάρτητες λύσεις είναι τα $K_{m-1/2}$ και $K_{m+1/2}$. Έτσι, η γενική λύση της (5.61) παίρνει τη μορφή,

$$\psi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\vec{x}} x_0^{\frac{d+1}{2}} \left(a^+(\vec{k}) K_{m-1/2}(x_0|\vec{k}|) + a^-(\vec{k}) K_{m+1/2}(x_0|\vec{k}|) \right), \quad (5.64)$$

όπου για τους σπίνορες a^\pm ισχύει, $\gamma_0 a^\pm = \pm a^\pm$. Για να φτάσουμε στην (5.61) παραγωγίσαμε την εξίσωση Dirac και έτσι χάσαμε πληροφορία. Συνεπώς, η λύση που ζητάμε είναι ένα υποσύνολο της (5.64). Ως εκ τούτου, θα χρειαστεί να θέσουμε κάποιον περιορισμό στους σπίνορες a^\pm , απαιτώντας η (5.64) να ικανοποιεί τη (5.60). Από αυτό προκύπτει,

$$a^- = \frac{i}{k} k_i \gamma_i a^+, \quad (5.65)$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\vec{x}} x_0^{\frac{d+1}{2}} a^+(\vec{k}) \left(K_{m-1/2}(x_0|\vec{k}|) + \frac{ik_i \gamma_i}{k} K_{m+1/2}(x_0|\vec{k}|) \right). \quad (5.66)$$

Το επόμενο βήμα είναι θέσουμε τις συνοριακές συνθήκες στη λύση. Παρόλα αυτά η περίπτωση του πεδίου Dirac έχει μια σημαντική διαφορά σε σχέση με το βαθμωτό και το ανυσματικό πεδίο που θα δούμε παρακάτω. Στα τελευταία, η εξίσωση κίνησης είναι δεύτερης τάξης ως προς τις παραγώγους, το οποίο απαιτεί την επιβολή δύο ειδών συνοριακών συνθηκών, για το πεδίο και την παράγωγό του. Αντί της τελευταίας, απαιτούμε καλή συμπεριφορά του πεδίου εντός του AdS_{d+1} , για $x_0 \rightarrow \infty$, το οποίο μας δίνει μοναδική λύση στο πρόβλημα Dirichlet. Από την άλλη πλευρά, η εξίσωση Dirac περιλαμβάνει μέχρι πρώτης τάξης παράγωγο. Η $x_0 \rightarrow \infty$ καλή συμπεριφορά πρέπει οπωσδήποτε να ικανοποιείται από το πεδίο. Ως αποτέλεσμα, μόνο οι μισές συνιστώσες του πεδίου Dirac μπορούν να ικανοποιήσουν την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (5.4) και οι άλλες μισές θα θεωρηθούν σταθερές σύμφωνα με τις συνθήκες που θα προσδιοριστούν στη συνέχεια. Το γεγονός αυτό δικαιολογεί και τη μορφή του επιφανειακού όρου (5.56), όπως θα δούμε και παρακάτω.

Η συνθήκη της καλής συμπεριφοράς του πεδίου για $x_0 \rightarrow \infty$, έχει ήδη ικανοποιηθεί από την απόρριψη των I_ν στη γενική λύση (5.64). Σειρά τώρα έχει το όριο $x_0 \rightarrow 0$. Λόγω του όρου $\sqrt{h_\epsilon} = \epsilon^{-d}$ στην (5.56), θα αποκλίσουμε πάλι την περιοχή $0 < x < \epsilon$ και στο τέλος της ημέρας μετά από κατάλληλους χειρισμούς θα θέσουμε $\epsilon \rightarrow 0$. Για $x_0 = \epsilon$ στη (5.66) βρίσκουμε,

$$\psi_\epsilon(\vec{k}) = \epsilon^{\frac{d+1}{2}} \left(K_{m-1/2} + \frac{ik_i \gamma_i}{k} K_{m+1/2} \right), \quad (5.67)$$

με $\psi_\epsilon(\vec{k})$ ο μετασχηματισμός Fourier του $\psi(\epsilon, \vec{x})$. Επίσης, όταν αγνοούμε το όρισμα των Bessel θα εννοείται ότι είναι $\epsilon|\vec{k}|$. Για $\psi_\epsilon^\pm(\vec{k}) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_0)\psi_\epsilon(\vec{k})$, μπορούμε να προσδιορίσουμε το a^+ από τη (5.65) με δύο τρόπους,

$$\psi_\epsilon^+ = \frac{1 + \gamma_0}{2} \epsilon^{\frac{d+1}{2}} \left(K_{m-1/2} + \frac{ik_i \gamma_i}{k} K_{m+1/2} \right) a^+ \quad (5.68)$$

$$a^+(\vec{k}) = \frac{\psi_\epsilon^+(\vec{k})}{K_{m-1/2}} \epsilon^{-\frac{d+1}{2}}$$

$$\psi_\epsilon^- = \frac{1 - \gamma_0}{2} \epsilon^{\frac{d+1}{2}} \left(K_{m-1/2} + \frac{i k_i \gamma_i}{k} K_{m+1/2} \right) a^+ \quad (5.69)$$

$$a^+(\vec{k}) = \frac{k_i \gamma_i}{i k} \frac{\psi_\epsilon^-(\vec{k})}{K_{m+1/2}} \epsilon^{-\frac{d+1}{2}},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\gamma_0 a^\pm = \pm a^\pm$ και την άλγεβρα των γ_μ πινάκων. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε και τη σχέση μεταξύ των ψ_ϵ^\pm ,

$$\psi_\epsilon^+ = \frac{k_i \gamma_i K_{m-1/2}}{i k K_{m+1/2}} \psi_\epsilon^-. \quad (5.70)$$

Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι ποιες συνιστώσες πρέπει να χρησιμοποιήσουμε καθώς προσεγγίζουμε το σύνορο. Η απάντηση δεν είναι αυθαίρετη, θα μας τη δώσει το πρόσημο της μάζας. Γνωρίζουμε ότι για μικρό όρισμα $K_\nu \sim x^{-\nu}$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$m > 0$

Τότε το $K_{m-1/2}$ αποκλίνει πιο αργά απ' το $K_{m+1/2}$ για $\epsilon \rightarrow 0$, και η (5.70) δίνει, $\psi_\epsilon^+ \rightarrow 0$, κρατώντας το ψ_ϵ^- σταθερό.

$m < 0$

Εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$, και η (5.70) γίνεται,

$$\psi_\epsilon^- = i \frac{k_i \gamma_i K_{|m|-1/2}}{k K_{|m|+1/2}} \psi_\epsilon^+, \quad (5.71)$$

όπου τώρα θα έχουμε $\psi_\epsilon^- \rightarrow 0$, κρατώντας το ψ_ϵ^+ σταθερό.

$m = 0$

Από την εξ. Bessel θα έχουμε μία τιμή του ν , κάτι το οποίο ανακτούμε και εδώ αφού $K_{1/2} = K_{-1/2}$, και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ισοδύναμα όποιο εκ των ψ_ϵ^\pm επιθυμούμε.

Για κάθε περίπτωση, λοιπόν, προκύπτει ότι καθώς πάμε στο σύνορο, μόνο οι μισές συνιστώσες του πεδίου είναι μη μηδενικές. Συνεπώς, αν είμαστε σε άρτιο d από σπινόρα Dirac παίρνουμε σπινόρα Weyl και σε περιττό d από ένα ζευγάρι σπινόρων Dirac επιζεί μονάχα ο ένας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα θεωρήσουμε ότι $m > 0$ και η (5.66) παίρνει την τελική μορφή,

$$\psi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left(\frac{x_0}{\epsilon} \right)^{\frac{d+1}{2}} \left(-i \frac{k_i \gamma_i}{k} K_{m-1/2}(x_0|\vec{k}|) + K_{m+1/2}(x_0|\vec{k}|) \right) \frac{\psi_\epsilon^-(\vec{k})}{K_{m+1/2}} \quad (5.72)$$

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία για το συζυγές πεδίο,

$$\bar{\psi}(x) = (\overleftarrow{D} + m) = \bar{\psi}(x) (\overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu x_0 - \frac{d}{2} x_0 + m) = 0, \quad (5.73)$$

καταλήγουμε στην αντίστοιχη έκφραση,

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left(\frac{x_0}{\epsilon} \right)^{\frac{d+1}{2}} \frac{\psi_\epsilon^+(\vec{k})}{K_{m+1/2}} \left(i \frac{k_i \gamma_i}{k} K_{m-1/2}(x_0|\vec{k}|) + K_{m+1/2}(x_0|\vec{k}|) \right), \quad (5.74)$$

με $\bar{\psi}_\epsilon^\pm = \frac{1}{2}\bar{\psi}_\epsilon(1 \pm \gamma_0)$ και,

$$\bar{\psi}_\epsilon^-(\vec{k}) = \bar{\psi}_\epsilon^+(\vec{k})i \frac{k_i \gamma_i K_{m-1/2}}{k K_{m+1/2}}. \quad (5.75)$$

Εισάγοντας τις λύσεις (5.72) και (5.74) στη ολική δράση, ο όρος (5.52) μηδενίζεται και από τον επιφανειακό όρο (5.56) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} S_1 &= G\epsilon^{-d} \int d^d x \bar{\psi}_\epsilon(\vec{x}) \psi_\epsilon(\vec{x}) = G\epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} d^d x e^{-i(\vec{k}+\vec{p})\vec{x}} \bar{\psi}_\epsilon(\vec{k}) \psi_\epsilon(\vec{p}) = \\ &= G\epsilon^{-d} \int \frac{d^d k d^d p}{(2\pi)^d} \delta^{(d)}(\vec{k} + \vec{p}) \bar{\psi}_\epsilon(\vec{k}) \psi_\epsilon(\vec{p}) = G\epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \bar{\psi}_\epsilon(\vec{k}) \psi_\epsilon(-\vec{k}) \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$S_1 = G\epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\bar{\psi}_\epsilon^+(\vec{k}) \psi_\epsilon^+(-\vec{k}) + \bar{\psi}_\epsilon^-(\vec{k}) \psi_\epsilon^-(\vec{k}) \right),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\bar{\psi}^\pm \psi^\mp = 0$. Για να φέρουμε πάλι το ολοκλήρωμα της δράσης στο χώρο των θέσεων χρησιμοποιούμε τις (5.71) και (5.75) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_\epsilon^-(\vec{k}) &= i \frac{k_i \gamma_i K_{m-1/2}}{k K_{m+1/2}} \int d^d x e^{i\vec{k}\vec{x}} \bar{\psi}_\epsilon^+(\vec{x}) \\ \psi_\epsilon^+(-\vec{k}) &= i \frac{k_i \gamma_i K_{m-1/2}}{k K_{m+1/2}} \int d^d y e^{-i\vec{k}\vec{y}} \psi_\epsilon^-(\vec{y}), \end{aligned} \quad (5.77)$$

και η δράση γίνεται,

$$S_1 = G\epsilon^{-d} \int d^d x d^d y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \bar{\psi}_\epsilon^+(\vec{x}) \left(2i \frac{k_i \gamma_i K_{m-1/2}}{k K_{m+1/2}} \right) \psi_\epsilon^-(\vec{y}). \quad (5.78)$$

Χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα του K_ν ,

$$K_\nu = z^{-\nu} 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) \left(1 - \left(\frac{z}{2} \right)^{2\nu} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \right), \quad (5.79)$$

προκειμένου να υπολογίσουμε το λόγο,

$$\frac{K_{m-1/2}(z)}{K_{m+1/2}(z)} = \frac{z \Gamma(m - \frac{1}{2})}{2 \Gamma(m + \frac{1}{2})} + \left(\frac{z}{2} \right)^{2m} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - m)}{\Gamma(\frac{1}{2} + m)} + \mathcal{O}(z^{2n-1}) + \mathcal{O}(z^{2n+2m-1}). \quad (5.80)$$

Οι όροι $\mathcal{O}(z^{2n-1})$, με $n \in \mathbb{N}^*$, θα δώσουν όρους επαφής $\sim \partial^i \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{y})$ στη συνάρτηση συσχέτισμού και με τα ίδια επιχειρήματα της ενότητας (5.2), θα τους απορρίψουμε. Ένας τέτοιος όρος είναι και ο πρώτος. Οι όροι $\mathcal{O}(z^{2n+2m-1})$ θα σβήσουν για $z \rightarrow 0$ και απομένει μόνο ο δεύτερος $\mathcal{O}(z^{2m})$. Έτσι χρειαζόμαστε το παρακάτω ολοκλήρωμα (Παράρτημα),

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} k_i k^\beta = i 2^{2m} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2} + m)}{\pi^{d/2} \Gamma(\frac{1}{2} - m)} \frac{(x-y)_j}{|\vec{x} - \vec{y}|^{d+2m+1}} \quad (5.81)$$

και η δράση παίρνει την τελική της μορφή,

$$S_1 = -2C^d G \int d^d x d^d y \bar{\psi}_0^+(\vec{x}) \frac{\gamma_j(x-y)_j}{|\vec{x}-\vec{y}|^{d+2m+1}} \psi_0^-(\vec{y}), \quad (5.82)$$

όπου για να φύγει η ϵ -εξάρτηση θεωρούμε τα νέα πεδία,

$$\psi_0^\pm = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{m-\frac{d}{2}} \psi_\epsilon^\pm. \quad (5.83)$$

Παρατηρούμε ότι αυτά ικανοποιούν τη αντίστοιχη σχέση (5.4) για σπίνορες, μόνο αν η διάσταση των πεδίων είναι $\Delta = m + \frac{d}{2}$, κάτι το οποίο ισχύει λαμβάνοντας υπόψιν και τον παρονομαστή της (5.82). Το μόνο που απαιτήσαμε εξαρχής ήταν η καλή συμπεριφορά της λύσης στο $x_0 \rightarrow \infty$. Όλα τα υπόλοιπα ήρθαν χωρίς να απαιτήσουμε κάτι περαιτέρω. Σημειώνεται επίσης ότι η σταθερα κανονικοποίησης προέκυψε,

$$C^d = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2} + m)}{\pi^{d/2} \Gamma(m + \frac{1}{2})} \quad (5.84)$$

Τα δικά πεδία της σύμμορφης θεωρίας πεδίου είναι τα χ^+ και $\bar{\chi}^-$ για τα $\bar{\psi}_0^+$ και ψ_0^- αντίστοιχα. Εκμεταλλευόμενοι την αντιστοιχία AdS/CFT έχουμε,

$$\exp(-S_1) = \left\langle \exp \left(\int d^d x (\bar{\chi} \psi_0^- + \bar{\psi}_0^+ \chi^+) \right) \right\rangle, \quad (5.85)$$

και παίρνοντας τις συναρτησιακές παραγώγους η συνάρτηση δύο σημείων για το φερμιονικό πεδίο της θεωρίας πεδίου είναι,

$$\langle \chi^+(\vec{x}) \bar{\chi}^-(\vec{y}) \rangle = 2C^d G \frac{\gamma_j(x-y)_j}{|\vec{x}-\vec{y}|^{d+2m+1}}, \quad (5.86)$$

όπου συμφωνεί και με τα [14, 16]. Πριν περάσουμε στο ανυσματικό πεδίο, θα ήταν χρήσιμο να αναφερθούμε πιο συγκεκριμένα στην προέλευση του επιφανειακού όρου [13]. Έστω η αρχική δράση,

$$S_0 = \int_{AdS} d^{d+1} x \sqrt{g} \bar{\psi} \left[\frac{1}{2} (\overrightarrow{D} - \overleftarrow{D}) - m \right] \psi. \quad (5.87)$$

Μεταβάλλοντας ως προς ψ και $\bar{\psi}$ έχουμε,

$$\delta S_0 = D_S + \text{όροι που μηδενίζονται όταν ικανοποιείται η εξ. Dirac}, \quad (5.88)$$

όπου το D_S είναι επιφανειακός όρος και δίνεται από την έκφραση,

$$D_S = -\frac{1}{2} \int_{\partial AdS} d^d x \left[\bar{\psi}_0^+(\vec{x}) \delta \psi_0^+(\vec{x}) + \delta \bar{\psi}_0^-(\vec{x}) \psi_0^-(\vec{x}) \right]. \quad (5.89)$$

Όμως αυτός μπορεί να γραφτεί σαν τη μεταβολή μία νέας ποσότητας, $D_S = -\delta C_S$,

$$C_S = \frac{1}{2} \int_{\partial AdS} d^d x \left[\bar{\psi}_0^+(\vec{x}) \psi_0^+(\vec{x}) + \bar{\psi}_0^-(\vec{x}) \psi_0^-(\vec{x}) \right], \quad (5.90)$$

διότι σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση έχουμε κρατήσει σταθερά τα ψ_0^- και $\bar{\psi}_0^+$. Λόγω του ότι $D_S \neq 0$, η δράση S_0 δεν είναι στάσιμη στη λύση Dirac. Όμως η $S = S_0 + C_S$ είναι,

$$\delta S = 0. \quad (5.91)$$

Ως εκ τούτου, στην AdS/CFT θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την S και όχι την S_0 . Επιπροσθέτως, αφού τα ψ_0^- και $\bar{\psi}_0^+$ παραμένουν σταθερά, θα μπορούσαμε να προσθέσουμε στην S οποιοδήποτε όρο που να εξαρτάται από αυτά, μιας και δε θα άλλαζε η ιδιότητα (5.91).

Από τη (5.90) αντικαθιστώντας τα αρχικά πεδία $\psi, \bar{\psi}$ φτάνουμε στη δράση S_1 όπου υποθέσαμε στην αρχή.

5.5 Ανυσματικό πεδίο: Συνάρτηση 2 σημείων

Είδαμε ότι η ΠΒ θεωρία υπερβαρύτητας σε 10 διαστάσεις δεν περιέχει κανένα πεδίο βαθμίδας μορφής-1, παρά μόνο μορφές-0,2 και 4. Για να περιγράψουμε ένα ανυσματικό πεδίο της σύμμορφης θεωρίας χρειαζόμαστε ένα αντίστοιχο ανυσματικό και από την πλευρά της βαρύτητας. Ένας τεχνικός μεν, σημαντικός δε λόγος, είναι ότι θα πρέπει να συστέλλονται οι δείκτες στο σχετικό όρο της δράσης. Αυτό το πεδίο βαθμίδας αποκτάται από τη συμπαγοποίηση στην S^5 . Από την πλευρά της σύμμορφης θεωρίας, θα απαιτήσουμε ο τελεστής J_i^a να είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας και να αποτελείται από πεδία της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας. Περισσότερες λεπτομέρειες, για το ποιος είναι και τι μορφή έχει, θα δούμε στην επόμενη παράγραφο. Αφού όμως το J_i^a θα είναι αναλλοίωτο, θα πρέπει το ίδιο να ισχύει και για το πεδίο $a_i^a(\vec{x})$ που θα είναι η πηγή του πρώτου. Για τη συνάρτηση δύο σημείων επικεντρωνόμαστε στον κινητικό όρο της δράσης,

$$S[A] = \frac{1}{2g_{SG}^2} \int_{AdS} F^a \wedge \star F^a = \frac{1}{g^2} \int_{AdS} \left[\delta_{ab} dA^a \wedge \star dA^b + f_{abc} dA^a \wedge \star (A^b \wedge A^c) \right] + \dots, \quad (5.92)$$

όπου οι τελείες υποδηλώνουν όρους ανώτερης τάξης και $F = dA + A \wedge A$. Οι δείκτες a, b και c είναι της ομάδας βαθμίδας και ισχύει για τους γεννήτορες $T_a T_b = \frac{1}{2}(f_{abc} - id_{abc})T_c$, με κανονικοποίηση $Tr[T^a T^b] = -1/2\delta_{ab}$.

Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει μόνο ο πρώτος όρος και έτσι παίρνουμε τις εξ. Maxwell σε Ευκλείδειο AdS χώρο επαναορίζοντας $F = dA$,

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} F^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.93)$$

Η λύση που θα θεωρήσουμε θα είναι κατά τα γνωστά,

$$A_\mu^a(z_0, \vec{z}) = \int d^d x G_{\mu i}(z_0, \vec{z}; \vec{x}) a_i^a(\vec{x}), \quad (5.94)$$

όπου ο $G_{\mu i}$ είναι ο διαδότης χώρου-συνόρου. Αφού το a_i^a θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, το $G_{\mu i}$ είναι αυτό που θα απορροφάει το μετασχηματισμό του A_μ^a ,

$$A_\mu^a(z_0, \vec{z}) \rightarrow A_\mu^a(z_0, \vec{z}) + \partial_\mu \Lambda^a(z_0, \vec{z}). \quad (5.95)$$

Ο παραπάνω ισχυρισμός φαίνεται και από το γεγονός ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι ως προς τη z μεταβλητή, όπου στη σχέση (5.94) περιλαμβάνεται μόνο στο $G_{\mu i}$.

$$G_{\mu i}(z_0, \vec{z}; \vec{x}) \rightarrow G_{\mu i}(z_0, \vec{z}; \vec{x}) + \frac{\partial}{\partial z_\mu} \Lambda_i(z_0, \vec{z}; \vec{x}) \quad (5.96)$$

$$\Lambda^a(z_0, \vec{z}) = \int d^d x \Lambda_i(z_0, \vec{z}; \vec{x}) a_i^a(\vec{x}).$$

Με τα ίδια επιχειρήματα της προηγούμενης παραγράφου θα θεωρήσουμε πάλι πως ο $G_{\mu i}$ εξαρτάται μόνο απ' το x_0 και ύστερα θα εκμεταλλευτούμε την αντιστροφή για να προσδιορίσουμε ακριβώς τη μορφή του. Αντικαθιστούμε την (5.94) στην εξίσωση κίνησης και έχουμε,

$$\partial_0 \left(\sqrt{g} g^{0\rho} g^{\nu\sigma} \left[\int d^d x \partial_\rho G_{\sigma i} a_i^a - \int d^d x \partial_\sigma G_{\rho i} a_i^a \right] \right) = 0 \quad (5.97)$$

Για $\sigma = 0$, δεν παίρνουμε κάτι, οπότε επιλέγουμε $\sigma = j$,

$$\partial_0 \left(z_0^{3-d} \left[\int d^d x \partial_0 G_{j i} a_i^a - \int d^d x \partial_j G_{0 i} a_i^a \right] \right) = 0 \quad (5.98)$$

$$\partial_0 \left(z_0^{3-d} \int d^d x \partial_0 G_{j i} a_i^a \right) = 0.$$

Το πεδίο βαθμίδας σε 1-μορφή είναι $A = A_\mu(x) dx^\mu$, όπου στο σύνορο γίνεται $a = a_i(\vec{x}) dx^i$. Άρα ο διαδότης θα πρέπει να είναι και αυτός 1-μορφή χωρίς τη $\mu = 0$ συνιστώσα $G = G_i dx^i = f(x_0) dx^i$. Έτσι, η παραπάνω σχέση γίνεται,

$$\frac{d}{dz_0} \left(z_0^{3-d} \frac{df}{dz_0} \right) = 0, \quad (5.99)$$

με λύση $f(x_0) = C z_0^{d-2}$. Αντιστρέφοντας $z^\mu \rightarrow z^\mu / z^2$ παίρνουμε,

$$C z_0^{d-2} dx^i \rightarrow C \left(\frac{z_0}{z_0^2 + \vec{z}^2} \right)^{d-2} d \left(\frac{\vec{z}^i}{z_0^2 + \vec{z}^2} \right) \quad (5.100)$$

και ύστερα από μετασχηματισμό μεταφοράς,

$$G = C^d \left(\frac{z_0}{z_0^2 + \vec{z}^2} \right)^{d-2} d \left(\frac{(\vec{z} - \vec{x})^i}{z_0^2 + (\vec{z} - \vec{x})^2} \right) \quad (5.101)$$

$$G_{\mu i}(z, \vec{x}) = C^d \left(\frac{z_0}{R} \right)^{d-2} \partial_\mu \left(\frac{(\vec{z} - \vec{x})^i}{R} \right),$$

με $R = z_0^2 + (\vec{z} - \vec{x})^2$ και

$$C^d = \frac{\Gamma(d)}{2\pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \quad (5.102)$$

που προκύπτει από την απαίτηση $A_i \rightarrow a_i$ στο σύνορο ή αλλιώς $G_{ij}(z, \vec{x}) \rightarrow \delta_{ij}\delta(\vec{z} - \vec{x})$.

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{(z-x)_i}{R} \right) &= \frac{1}{R^2} (\delta_{\mu i} R - 2(z-x)_i (z_0 \delta_{\mu 0} + (z-x)_j \delta_{\mu j})) = \\ &= \frac{1}{R^2} (\delta_{\mu i} R - 2(z-\vec{x})_i (z-\vec{x})_\rho \delta_{\mu\rho}) = \frac{1}{R} I_{\mu i}(z-\vec{x}). \end{aligned} \quad (5.103)$$

Έτσι η διαδότης χώρου-συνόρου γίνεται,

$$G_{\mu i}(z, \vec{x}) = C^d \frac{z_0^{d-2}}{[z_0^2 + (\vec{z} - \vec{x})^2]^{d-1}} I_{\mu i}(z - \vec{x}). \quad (5.104)$$

Δεδομένου ότι το $G_{\mu i}$ είναι και αυτό ένα πεδίο βαθμίδας $G \rightarrow G' = G + d\Lambda$, έχουμε την ελευθερία να επιλέξουμε μία συγκεκριμένη, για λόγους που θα γίνουν ξεκάθαροι στη συνέχεια. Θεωρούμε λοιπόν [17],

$$d\Lambda = -\frac{\tilde{C}^d}{d-2} d \left(\frac{(\vec{z} - \vec{x})_i z_0^{d-2}}{R^{d-1}} \right), \quad (5.105)$$

όπου για μελλοντική διευκόλυνση θέσαμε $\tilde{C}^d = \frac{d-2}{d-1} C^d$. Προχωράμε στον υπολογισμό του $d\Lambda$,

$$\begin{aligned} d \left(\frac{(\vec{z} - \vec{x})_i z_0^{d-2}}{R^{d-1}} \right) &= \frac{1}{R^{d-2}} \left\{ R^{d-1} z_0^{d-2} dz_i + R^{d-1} (\vec{z} - \vec{x})_i (d-2) z_0^{d-3} dz_0 \right\} + \\ &+ \frac{1}{R^{d-2}} (\vec{z} - \vec{x})_i z_0^{d-2} (d-1) R^{d-2} 2 (z_0 dz_0 + (\vec{z} - \vec{x})_j dz_j) = \\ &= (d-1) \frac{z_0^{d-2}}{R^{d-1}} \left\{ \frac{dz_i}{d-1} + (\vec{z} - \vec{x})_i \frac{d-2}{d-1} z_0^{-1} dz_0 \right\} + \\ &- (d-1) \frac{z_0^{d-2}}{R^{d-1}} \left\{ 2(\vec{z} - \vec{x})_i R^{-1} z_0 dz_0 + 2(\vec{z} - \vec{x})_j (\vec{z} - \vec{x})_i R^{-1} dz_j \right\}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Αντικαθιστώντας στο νέο G' ,

$$G' = \tilde{C}^d \left(\frac{z_0^{d-2}}{R^{d-1}} dz_i - z_0^{d-3} \frac{(\vec{z} - \vec{x})_i}{R^{d-1}} dz_0 \right). \quad (5.107)$$

Επιστρέφουμε στη δράση με σκοπό να τη φέρουμε σε τέτοια μορφή που θα μπορούμε να πάρουμε τις συναρτησιακές παραγώγους ως προς τα πεδία a_i^a . Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες,

$$S[A] = \frac{1}{2g_{SG}^2} \int_{AdS} F \wedge \star F = \frac{1}{2g_{SG}^2} \int_{AdS} d(A \wedge \star F) - \frac{1}{2g_{SG}^2} \int_{AdS} A \wedge (d \star F). \quad (5.108)$$

Από την κβαντική ηλεκτροδυναμική οι εξισώσεις του Maxwell σε διαφορική μορφή είναι,

$$dF = 0 \quad \& \quad d \star F = j, \quad (5.109)$$

όπου $j = j_\mu dx^\mu$ με $j_\mu = (\rho, -\vec{j})$. Στην περίπτωση μας δεν έχουμε συμπεριλάβει ύλη στη θεωρία, οπότε $d \star j = 0$,

$$S[A] = \frac{1}{2g_{SG}^2} \int_{AdS} d(A \wedge \star F) = \frac{1}{2g_{SG}^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial_\epsilon AdS} A \wedge \star F, \quad (5.110)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα,

$$\int_M dB = \int_{\partial M} B. \quad (5.111)$$

Αναλύοντας το παραπάνω αποτέλεσμα,

$$\begin{aligned} \star F \wedge A &= \frac{1}{1!2!(d-1)!} \epsilon_{i_1 \dots i_{d-1}}^{j_1 j_2} F_{j_1 j_2} A_k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{d-1}} \wedge dx^k = \\ &= \frac{1}{2(d-1)!} \epsilon_{i_1 \dots i_{d-1}}^{j_1 j_2} \epsilon^{i_1 \dots i_{d-1} k} F_{j_1 j_2} A_k dx^1 \dots dx^d = \end{aligned} \quad (5.112)$$

$$= \frac{1}{2(d-1)!} \epsilon_{i_1 \dots i_{d-1} j_1 j_2} \epsilon^{i_1 \dots i_{d-1} k} F_{j_1 j_2} A_k g^{j_1 j_1'} g^{j_2 j_2'} (\star 1),$$

$$A \wedge \star f = \frac{2}{d-1} x_0^4 A_i F_{0j} \delta^{ij} (\star 1), \quad (5.113)$$

και η (5.110) γίνεται,

$$S[A] = \frac{1}{g_{SG}^2 (d-1)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_0=\epsilon} d^d x x_0^{3-d} \delta^{ij} A_j(x_0, \vec{x}) F_{0j}(x_0, \vec{x}). \quad (5.114)$$

Έτσι, απομένει ο προσδιορισμός των F_{0j} ,

$$F = dA = d \wedge \int d^d x G'_i a_i(\vec{x}) = \int d^d x (dG'_i) a_i(\vec{x}). \quad (5.115)$$

Η εξωτερική παράγωγος είναι $d = \partial^0 dx_0 + \partial^i dx_i$ και ισχύει $dx^\mu \wedge dx^\mu = 0$,

$$\begin{aligned} dG'_i &= \frac{1}{R^{2d-2}} \left\{ (d-2) z_0^{d-3} R^{d-1} dz_0 \wedge dz_i - R^{d-1} z_0^{d-3} dz_i \wedge dz_0 \right\} - \\ &- \frac{1}{R^{2d-2}} \left\{ \left(z_0^{d-2} dz_i - z_0^{d-3} (\vec{z} - \vec{x}) dz_0 \right) (d-1) R^{d-2} \wedge (2z_0 dz_0 + 2(\vec{z} - \vec{x})_j dz_j) \right\}, \\ dG'_i &= \frac{z_0^{d-3}}{R^{d-1}} (d-1) \left\{ \delta_{ij} - \frac{2}{R} (\vec{z} - \vec{x})_i (\vec{z} - \vec{x})_j \right\} dz_0 \wedge dz_i + \mathcal{O}(z_0^2). \end{aligned} \quad (5.116)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $A_i \rightarrow a_i$ καθώς πάμε στο σύνορο,

$$F_{0j} = (d-1)z_o^{d-3}\tilde{C}^d \int \frac{d^d x}{R^{d-1}} I_{ij}(\vec{z} - \vec{x}) a_i(\vec{x}), \quad (5.117)$$

και παίρνοντας το όριο $\epsilon \rightarrow 0$ η (5.114) γίνεται,

$$S[a] = \frac{1}{g_{SG}^2} \int d^d x d^d y a_i^a(\vec{x}) a_k^b(\vec{y}) \frac{I_{jk}(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2(d-1)}}. \quad (5.118)$$

Παραγωγίζοντας ως προς τα a_i παίρνουμε τη συνάρτηση δύο σημείων για το ανυσματικό πεδίο J_i^a ,

$$\langle J_i^a(\vec{x}) J_j^b(\vec{y}) \rangle = \frac{\delta^{ab}}{g_{SG}^2} \frac{\tilde{C}^d}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2(d-1)}} I_{ij}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.119)$$

Το αποτέλεσμα είναι ακριβώς αυτό που περιμέναμε από τη σύμμορφη θεωρία για ρεύμα διάστασης $\Delta = d - 1$ [10]. Μάλιστα, η (5.119), λόγω του δευτέρου όρου του $I_{ij}(\vec{x} - \vec{y})$, εγγυάται τη διατήρηση ρεύματος,

$$\partial_x^i \langle J_i^a(\vec{x}) J_j^b(\vec{y}) \rangle = 0, \quad (5.120)$$

κάτι το οποίο δε θα ίσχυε αν δεν είχαμε κάνει κατάλληλη επιλογή βαθμίδας. Ο αντίστοιχος υπολογισμός από την πλευρά της σύμμορφης θεωρίας, δίνει σε κυρίαρχη τάξη ως προς N για $d = 4$ [10],

$$g_{SG} = \frac{4\pi}{N}, \quad (5.121)$$

μια αναλογία που έχουμε εκφράσει και εμείς κατά τη θεμελίωση της αντιστοιχίας AdS/CFT. Επίσης, από το θεώρημα της μη-επανακανονικοποίησης (*non-renormalization theorem*) [4] δεν περιμένουμε κβαντικές διορθώσεις καθώς $N \rightarrow \infty$.

5.6 Ανυσματικό πεδίο: Συνάρτηση 3 σημείων και Ανωμαλία R-ρεύματος

Στην προηγούμενη παράγραφο επικαλεστήκαμε τη δράση (5.92) για να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση δύο σημείων, αγνοώντας τους μη τετραγωνικούς όρους. Για τον υπολογισμό της συνάρτησης 3 σημείων είναι αναγκαίο να συμπεριλάβουμε έναν απ' αυτούς. Όμως δεν είναι ο μόνος. Σε θεωρίες βαθμίδας σε περιττό αριθμό χωροχρονικών διαστάσεων πρέπει να συμπεριλάβουμε στη δράση τον αντίστοιχο όρο Chern-Simons (CS) [21]. Για $d = 5$ είναι (Παράρτημα),

$$C_5 = \langle A \wedge dA \wedge dA + \alpha_1 A^3 \wedge dA + \alpha_2 A^5 \rangle. \quad (5.122)$$

Θα κρατήσουμε μέχρι κυβικές συνεισφορές στη δράση. Από τον πρώτο όρο του C_5 που μας ενδιαφέρει, βλέπουμε ότι θα είναι ανάλογος του συμμετρικού τανυστή d_{abc} . Έτσι, η δράση για το πεδίο βαθμίδας θα είναι,

$$S[A] = \frac{1}{2g_{SG}^2} \int_{AdS} \left[\delta_{ab} dA^a \wedge \star dA^b + f_{abc} dA^a \wedge \star (A^b \wedge A^c) \right] + \frac{ik}{72\pi^2} \int_{AdS} d_{abc} A^a \wedge dA^b \wedge dA^c. \quad (5.123)$$

Άρα βλέπουμε ότι ο κινητικός όρος θα δώσει αντισυμμετρική συνεισφορά στη συνάρτηση συσχετισμού [10], ενώ ο CS συμμετρική [17].

Από την πλευρά της σύμμορφης θεωρίας, οι συναρτήσεις 2 σημείων καθορίζονται από τη σύμμορφη συμμετρία με απροσδιοριστία τη σταθερά κανονικοποίησης, ενώ οι συναρτήσεις 3 σημείων έχουν απροσδιόριστο ένα συνολικό συντελεστή. Για τη συνάρτηση δύο σημείων, δεν έχουμε κάποια άλλη απαίτηση από τους σύμμορφους τελεστές, εκτός από αυτές που αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο. Ωστόσο, για τη συνάρτηση 3 σημείων θα απαιτήσουμε μία ακόμα ιδιότητα, λόγω της ύπαρξης του απροσδιοριστού συντελεστή, ο οποίος μπορεί θεωρητικά να έχει κβαντικές διορθώσεις όπως και η σύμμορφη διάσταση. Έτσι, θα πρέπει να βρούμε ένα μη επανακανονικοποιήσιμο τελεστή, όπου θα είναι το R-ρεύμα J_i^a που αντιστοιχεί στη συνολική $SU(4)_R \cong SO(6)_R$ συμμετρία. Είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας και επιπλέον αποτελείται από πεδία της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας [7, 17]. Συνεπώς, πληροί τις προϋποθέσεις που έχουμε θέσει για τη μορφή των δυικών τελεστών της βαρύτητας και η μορφή του είναι,

$$J_a^i(x) = \frac{1}{2}\phi(x)T_a^\phi(\overleftrightarrow{\partial}^i + 2gA^i(x))\phi(x) - \frac{1}{2}\bar{\psi}(x)T_a^\psi\gamma^i\frac{1+\gamma_5}{2}\psi. \quad (5.124)$$

5.6.1 Αντισυμμετρικός όρος: Συνάρτηση 3 σημείων

Επικεντρωνόμαστε στον Yang-Mills όρο της δράσης,

$$\frac{1}{2g_{SG}^2} \int \frac{d^d w d w_0}{w_0^{d+1}} i f^{abc} \partial_{[\mu} A_{\nu]}^a(w) w_0^4 A_\mu^b(w) A_\nu^c(w). \quad (5.125)$$

Έχουμε, τότε,

$$\langle J_i^a(\vec{x}) J_j^b(\vec{y}) J_k^c(\vec{z}) \rangle_+ = -\frac{i f^{abc}}{2g_{SG}^2} 2F_{ijk}^{sym}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \quad (5.126)$$

$$F_{ijk}^{sym}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = F_{ijk}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + F_{jki}(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) + F_{kij}(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}),$$

όπου το F_{ijk} δίνεται από την έκφραση,

$$F_{ijk}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \int \frac{d^d w d w_0}{w_0^{d+1}} \partial_{[\mu} G_{\nu]}(w, \vec{x}) w_0^4 G_{\mu j}(w, \vec{y}) G_{\nu k}(w, \vec{z}). \quad (5.127)$$

Θεωρήσαμε τη συμμετρικοποιημένη έκφραση του F_{ijk} , διότι η (5.125) δεν είναι συμμετρική κάτω από την εναλλαγή των πεδίων και κατ'επέκταση των διαδοτών χώρου-συνόρου. Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρειαζόμαστε το μετασχηματισμό των $G_{\mu i}$ και $\partial_{[\mu} G_{\nu]} i$ κάτω από αντιστροφή, προκειμένου να εκμεταλλευτούμε και εδώ την ίδια μέθοδο με πριν. Πρώτα υπολογίζουμε το $\partial_{[\mu} G_{\nu]} i$ (Παράρτημα),

$$\partial_{[\mu} G_{\nu]} i = C^d (d-2) \frac{z_0^{d-3}}{z_0^2 + (\vec{z} - \vec{x})^2} I_{0[\mu}(\vec{z} - \vec{x}) I_{\nu]} i(\vec{z} - \vec{x}) \quad (5.128)$$

Ο μετασχηματισμός των (5.101) και (5.128) δίνεται από τις σχέσεις,

$$G'_{\mu i}(z', \vec{x}') = \frac{\partial z'_\nu}{\partial z^\mu} \frac{\partial z'_k}{\partial z^i} G_{\nu k}(z, \vec{x}) = z^2 I_{\mu\nu}(z) \vec{x}^2 I_{ki}(\vec{x}) (\vec{x})^{2(d-2)} G_{\nu k}(z, \vec{x}) \quad (5.129)$$

$$\partial'_{[\mu} G'_{\nu]i}(z', \vec{x}') = z^2 I_{\mu\rho}(z) z^2 I_{\nu\sigma}(z) \vec{x}^2 I_{ki}(\vec{x}) (\vec{x})^{2(d-2)} \partial_{[\rho} G_{\sigma]k}(z, \vec{x}).$$

Για να εφαρμόσουμε πάλι τη μέθοδο της αντιστροφής, βολεύει να θέσουμε $\vec{x} = 0$. Επίσης, αλλάζουμε μεταβλητή στο ολοκλήρωμα, $w_\mu \rightarrow w'_\mu = w_\mu/w^2$ και αντιστρέφουμε τις συνοριακές μεταβλητές $y_i \rightarrow y_i/y^2$, $z_i \rightarrow z_i/z^2$. Επίσης, χρησιμοποιούμε και τη σχέση $I_{ij}I_{jk} = \delta_{ik}$ και έχουμε,

$$\begin{aligned} F_{ijk}(0, \vec{y}', \vec{z}') &= \int \frac{d^d w' dw'_0}{w_0^{d+1}} \partial'_{[\mu} G'_{\nu]i}(w', \vec{x}') w_0^4 G_{\mu j}(w', \vec{y}') G_{\nu k}(w', \vec{z}') \\ &= (\vec{y}')^{2(d-1)} I_{lj}(\vec{y}') (\vec{z}')^{2(d-1)} I_{km}(\vec{y}') \int \frac{d^d w dw_0}{w_0^{d+1}} w_0^4 \delta_{\rho\lambda} \delta_{\sigma\tau} \partial_{[\rho} G_{\nu]i}(w, 0) G_{\rho l}(w, \vec{y}') G_{\nu m}(w, \vec{z}') \\ &= \frac{I_{lj}(\vec{y}')}{|\vec{y}'|^{2(d-1)}} \frac{I_{km}(\vec{z}')}{|\vec{z}'|^{2(d-1)}} \int \frac{d^d w dw_0}{w_0^{d+1}} w_0^4 \partial_{[\mu} G_{\nu]i}(w, 0) G_{\mu l}(w, \vec{y}') G_{\nu m}(w, \vec{z}') \\ &= (C^d)^3 \frac{I_{lj}(\vec{y}')}{|\vec{y}'|^{2(d-1)}} \frac{I_{km}(\vec{z}')}{|\vec{z}'|^{2(d-1)}} \int \frac{d^d w dw_0}{w_0^{d+1}} w_0^4 \partial_{[\mu}(w_0)^{d-2} \partial_{\nu]}(w_i) \\ &\quad \cdot \left[\frac{w_0^{d-2}}{(w - \vec{y}')^{2(d-1)}} \frac{w_0^{d-2}}{(w - \vec{z}')^{2(d-1)}} I_{\mu l}(w - \vec{y}') I_{\nu m}(w - \vec{z}') \right] \end{aligned}$$

Για την παράγωγο ισχύει,

$$\partial_{[\mu} G_{\nu]i} I_{\mu l} I_{\nu m} = (C^d)^3 (d-2) w_0^{d-2} I_{l[0} I_{i]m}, \quad (5.130)$$

και η παραπάνω σχέση γίνεται,

$$F_{ijk}(0, \vec{y}', \vec{z}') = (C^d)^3 \frac{I_{jl}(\vec{y}')}{|\vec{y}'|^{2(d-1)}} \frac{I_{km}(\vec{z}')}{|\vec{z}'|^{2(d-1)}} \int d^d w dw_0 w_0^{2d-4} \frac{(d-2) I_{l[0}(w - \vec{t}) I_{i]m}(w)}{(w - \vec{t})^{2(d-2)} w^{2(d-2)}}, \quad (5.131)$$

όπου στο τελευταίο βήμα ορίσαμε $\vec{t} = \vec{y}' - \vec{z}'$. Υπολογίζοντας και το γινόμενο $I_{l[0} I_{i]m}$, το ολοκλήρωμα δίνει τους παρακάτω όρους,

$$\begin{aligned} R_{iml} &= -\delta_{im} \int d^d w dw_0 \frac{w_0^{2d-3}}{R^{2d} w^{2(d-1)}} (w - \vec{t})_l + \\ &+ \delta_{li} \int d^d w dw_0 \frac{w_0^{2d-3}}{R^{2(d-1)} w^{2d}} w_m + 2t_i \int d^d w dw_0 \frac{w_0^{2d-3}}{R^{2d} w^{2d}} w_m (w - \vec{t})_l. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Και τα τρία ολοκληρώματα βρίσκονται με τη βοήθεια των παραγώγων του (5.48) και έχουμε κατά σειρά (Παράρτημα),

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{1,l} &= -\frac{d-2}{2(d-1)}I|\vec{t}|^{-d}t_l \\ \mathcal{J}_{2,m} &= \frac{3d-2}{2(d-1)}I|\vec{t}|^{-d}t_m\end{aligned}\quad (5.133)$$

$$\mathcal{J}_{3,ml} = \frac{I|\vec{t}|^{-d}}{4(d-1)}\frac{d-2}{d-1}\left\{\delta_{lm} - d\frac{t_l t_m}{|\vec{t}|^2}\right\},$$

όπου έχουμε ορίσει,

$$I = \frac{\pi^{d/2}\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)\Gamma^2\left(\frac{d}{2}\right)}{2\Gamma(d)\Gamma(d-1)}.\quad (5.134)$$

Από τις ιδιότητες της $\Gamma(z)$,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\quad (5.135)$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z),$$

βρίσκουμε,

$$I = 2^{3-2d}\pi^{\frac{d+2}{2}}\frac{d-1}{d-2}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{d+1}{2}\right)}.\quad (5.136)$$

Αυτό που απομένει είναι να αντικαταστήσουμε στο F_{ijk} όλα τα παραπάνω, επαναφέροντας τη \vec{x} -εξάρτηση,

$$\begin{aligned}F_{ijk}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= -\frac{I_{jl}(\vec{y}-\vec{x})}{|\vec{y}-\vec{x}|^{2(d-1)}}\frac{I_{jl}(\vec{z}-\vec{x})}{|\vec{z}-\vec{x}|^{2(d-1)}}(C^d)^3\pi^{\frac{d+2}{2}}2^{3-2d}\left(\frac{d-2}{d-1}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{d+1}{2}\right)} \\ &\cdot\frac{1}{|\vec{t}|^d}\left[\delta_{lm}t_i + (d-1)\delta_{il}t_m + (d-1)\delta_{im}t_l - d\frac{t_i t_l t_m}{|\vec{t}|^2}\right],\end{aligned}\quad (5.137)$$

με $\vec{t} = (\vec{y}-\vec{x}) - (\vec{z}-\vec{x})$. Για $d=4$ σύμφωνα με τη σύμμορφη θεωρία [9, 19], η συνάρτηση 3 σημείων θα είναι μία επαλληλία δύο σύμμορφων τανυστών C_{ijk}^{sym} και D_{ijk}^{sym} ,

$$\langle J_i^a(\vec{x})J_j^b(\vec{y})J_k^c(\vec{z}) \rangle_+ = f^{abc}(k_1 D_{ijk}^{sym}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + k_2 C_{ijk}^{sym}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})),\quad (5.138)$$

οι οποίοι παίρνουν την εξής απλή μορφή για $\vec{z}=0$ και $\vec{y}\rightarrow\infty$,

$$\begin{aligned}D_{ijk}^{sym}(\vec{x}, \vec{y}, 0) &\xrightarrow{y\rightarrow\infty} -\frac{4}{y^6 x^4}I_{jl}(\vec{y})\left\{\delta_{ik}x_l - \delta_{il}x_k - \delta_{kl}x_i - 2\frac{x_i x_k x_l}{x^2}\right\} \\ C_{ijk}^{sym}(\vec{x}, \vec{y}, 0) &\xrightarrow{y\rightarrow\infty} \frac{8}{y^6 x^4}I_{jl}(\vec{y})\left\{\delta_{ik}x_l - \delta_{il}x_k - \delta_{kl}x_i + 4\frac{x_i x_k x_l}{x^2}\right\}\end{aligned}\quad (5.139)$$

Άρα, υπολογίζουμε αρχικά το συμμετριοποιημένο F_{ijk}^{sym} , θέτουμε $\vec{z} = 0$ και παίρνουμε το όριο $|\vec{y}| \rightarrow \infty$,

$$F_{ijk}^{sym}(\vec{x}, |\vec{y}| \rightarrow \infty, 0) = -(C^d)^3 \pi^{\frac{d+2}{2}} 2^{2-2d} (2d-3) \left(\frac{d-2}{d-1} \right) \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma^2(\frac{d+1}{2})} \cdot \frac{I_{jl}(\vec{y})}{|\vec{y}|^{2(d-1)} |\vec{x}|^d} \left\{ \delta_{ik} x_l - \delta_{il} x_k - \delta_{kl} x_i - \frac{d}{2d-3} \frac{x_i x_k x_l}{x^2} \right\} \quad (5.140)$$

Θέτοντας $d = 4$ και συγκρίνοντας με τη (5.139) προκύπτει,

$$F_{ijk}^{sym}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{\pi^4} \left(D_{ijk}^{sym}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) - \frac{1}{8} C_{ijk}^{sym}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \right) \quad (5.141)$$

Έτσι, η τελική μορφή της συνάρτησης 3 σημείων για το ανυσματικό πεδίο θα δίνεται από την έκφραση,

$$\langle J_i^a(\vec{x}) J_j^b(\vec{y}) J_k^c(\vec{z}) \rangle_+ = \frac{N^2 f^{abc}}{32\pi^6} \left(D_{ijk}^{sym}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) - \frac{1}{8} C_{ijk}^{sym}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \right), \quad (5.142)$$

η οποία σε κυρίαρχη τάξη ως προς N , συμπίπτει με τον υπολογισμό του ενός βρόχου στη σύμμορφη θεωρία [10]. Αυτή η συνάρτηση συσχετισμού αντικατοπτρίζει την ισχυρή σύζευξη της $\mathcal{N} = 4$ SYM θεωρίας λόγω $N \rightarrow \infty$. Όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενη περίπτωση, το γεγονός αυτό δεν προκαλεί κανένα πρόβλημα, αφού εξακολουθεί να ισχύει το θεώρημα της μη επανακανονικοποίησης και επομένως, η παραπάνω έκφραση είναι ακριβής.

5.6.2 Συμμετρικός όρος: Ανωμαλία R-ρεύματος

Είδαμε ότι σε περιττό αριθμό χωροχρονικών διαστάσεων έχουμε επιπρόσθετα έναν όρο CS στη δράση. Η συνεισφορά του στη συνάρτηση συσχετισμού είναι συμμετρική ως προς τους δείκτες Lie. Το αντίστοιχο μέρος της δράσης είναι,

$$S_{CS}[A] = \frac{ik}{72\pi^2} \int_{AdS} d_{abc} A^a \wedge dA^b \wedge dA^c. \quad (5.143)$$

Για τον υπολογισμό, βοηθάει το να ανεβάσουμε το ολοκλήρωμα στις 6 διαστάσεις θεωρώντας πως ο AdS αποτελεί το σύνορο της πολλαπλότητας M_6 . Έτσι, χρειαζόμαστε και την παρακάτω σχέση,

$$d(A^a \wedge dA^b \wedge dA^c) = dA^a \wedge dA^b \wedge dA^c, \quad (5.144)$$

και έχουμε,

$$\begin{aligned}
 S_{CS}[A] &= \frac{k^2}{144\pi^2} \text{Tr} \int_{M_6} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau\epsilon} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F_{\tau\epsilon} \\
 &= \frac{k^2}{144\pi^2} \text{Tr} \int_{M_6} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau\epsilon} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) (\partial_\tau A_\epsilon - \partial_\epsilon A_\tau) \\
 &= \frac{k^2}{18\pi^2} \text{Tr} \int_{M_6} \epsilon^{\epsilon\mu\nu\rho\sigma\tau} \partial_\epsilon (A_\mu (\partial_\nu A_\rho) A_\tau + \mathcal{O}(A^4) + \mathcal{O}(A^5)) \\
 &= \frac{k^2}{18\pi^2} \text{Tr} \int_{AdS_5=\partial M_6} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} (A_\mu (\partial_\nu A_\rho) A_\tau + \mathcal{O}(A^4) + \mathcal{O}(A^5)).
 \end{aligned}$$

Στην πρώτη γραμμή φαίνεται ξεκάθαρα η συμμετρία κάτω από την εναλλαγή των $F_{\mu\nu}$ και κατ'επέκταση η d_{abc} συνεισφορά που δίνουν. Στην τρίτη γραμμή πήραμε 8 όρους με διαφορετικούς δείκτες, όπου με τη βοήθεια των συμβόλων Levi-civita τους φέραμε όλους στην ίδια μορφή και στην τελευταία κάναμε παραγοντική ολοκλήρωση και πήραμε τον επιφανειακό όρο. Από τη σχέση,

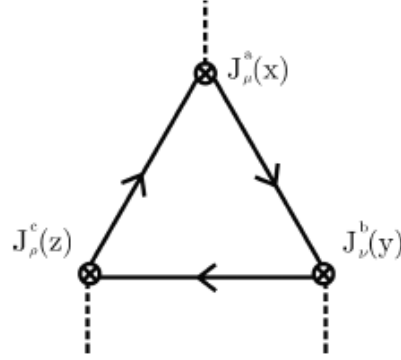
$$\langle J_i^a(\vec{x}) J_j^b(\vec{y}) J_k^c(\vec{z}) \rangle_- = \frac{\delta^3 S_{SC}[A[a]]}{\delta a_i^a(\vec{x}) \delta a_j^b(\vec{y}) \delta a_k^c(\vec{z})} \Big|_{a=0}, \quad (5.145)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνεισφορά του συμμετρικού όρου στη συνάρτηση 3 σημείων. Η διαδικασία είναι ίδια με πριν, οπότε θα προτιμήσουμε να στρέψουμε την προσοχή μας σε κάτι νέο, που επίσης, αποτελεί έναν έλεγχο για την αντιστοιχία AdS/CFT.

Σε μία θεωρία πεδίου, όπως η παρούσα, σε άρτιο αριθμό χωροχρονικών διαστάσεων παρατηρείται η ύπαρξη ανώμαλων ρευμάτων (Παράρτημα). Στην περίπτωση μας η ανωμαλία κρύβεται στο R-ρεύμα και δίνεται από το τριγωνικό διάγραμμα 5.2, όπου ο βρόχος σχηματίζεται από χειραλικά φερμιόνια.

Η μεταβολή του πεδίου βαθμίδας είναι,

$$\delta_\Lambda A_\mu^a = (D_\mu \Lambda)^a = \partial_\mu \Lambda^a + f_{bc}^a A_\mu^b \Lambda^c, \quad (5.146)$$



Σχήμα 5.2: Το τριγωνικό διάγραμμα που συνεισφέρει στη συνάρτηση συσχετισμού $\langle J_i^a(\vec{x}) J_j^b(\vec{y}) J_k^c(\vec{z}) \rangle$. Ο βρόχος σχηματίζεται από χειραλικά φερμιόνια.

και κατ'επέκταση του όρου Chern-Simons,

$$\begin{aligned}
\delta_\Lambda S_{CS}[A] &= \frac{k^2}{24\pi^2} \text{Tr} \int_{AdS_5} d^5x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} (\delta A_\mu F_{\nu\rho} F_{\sigma\tau}) = \\
&= \frac{k^2}{96\pi^2} d_{abc} \int_{AdS_5} d^5x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} (D_\mu \Lambda^a) F_{\nu\rho}^b F_{\sigma\tau}^c = \\
&= -\frac{k^2}{96\pi^2} d_{abc} \int_{AdS_5} d^5x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} \partial \left[\Lambda^a \partial_\mu \left(A_\nu^b \partial_\rho A_\sigma^c + \frac{1}{4} f_{de}^c A_\nu^b A_\rho^d A_\sigma^e \right) \right] = \\
&= -\frac{k^2}{96\pi^2} d_{abc} \int_{\partial AdS_5} d^4x \epsilon^{ijkl} \Lambda^a \partial_i \left(A_j^b \partial_k A_l^c + \frac{1}{4} f_{de}^c A_j^b A_k^d A_l^e \right),
\end{aligned}$$

όπου στην πρώτη γραμμή έχουμε χρησιμοποιήσει $\delta_\Lambda F_{\mu\nu} = 0$, στην τρίτη ολοκλήρωση κατά παράγοντες με $D_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$ και στο τέλος μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα A_i^a με τις συνοριακές τους τιμές a_i^a .

Η αντιστοιχία AdS/CFT επιβάλλει,

$$\begin{aligned}
\delta_\Lambda S_{class}[a] &= \delta_\Lambda (-\ln Z[a]) = \int d^4x \delta a^{ai}(\vec{x}) J_i^a(\vec{x}) = \int d^4x (D^i \Lambda^a) J_i^a(\vec{x}) \\
\delta_\Lambda S_{class}[a] &= - \int d^4x \Lambda^a (D^i J_i)^a.
\end{aligned} \tag{5.147}$$

Έτσι, βρίσκουμε την ανωμαλία του R-ρεύματος,

$$(D^i J_i)^a = \frac{ik}{96\pi^2} d_{abc} \epsilon^{ijkl} \partial_i \left(a_j^b \partial_l^c + \frac{1}{4} f_{de}^c a_j^b a_k^d a_l^e \right). \tag{5.148}$$

Ο αντίστοιχος υπολογισμός στη σύμμορφη θεωρία δίνει το ίδιο αποτέλεσμα για $k = N^2 - 1$ [10]. Συνεπώς, η αντιστοιχία AdS/CFT είναι ένα σαφές παράδειγμα της σχέσης μεταξύ της ανωμαλίας βαθμίδας σε d διαστάσεις και της μεταβολής της $(d + 1)$ -διάστατης δράσης Chern-Simons. Ο Witten [20] υποστήριξε ότι η παραπάνω σχέση είναι ακριβής ακόμα και για πεπερασμένο N και σύζευξη 't Hooft $g_{YM}N$, το οποίο είναι αυτό που περιμένουμε και από το θεώρημα Adler-Bardeen [5].

Παράρτημα Α

Υπολογισμοί

Απόδειξη της σχέσης (5.33)

$$\begin{aligned}
 S[\phi] &= -\frac{C}{2} \int d^d x \sqrt{g} g^{00} \phi(x_0, \vec{x}) \partial_0 \phi(x_0, \vec{x}) \Big|_{x_0=\epsilon} \\
 &= -\frac{CL^{d-1}}{2\epsilon^{d-1}} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \left(\int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} e^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} \right) f_p(x_0) \partial_0 f_q(x_0) \Big|_{x_0=\epsilon} \\
 &= -\frac{CL^{d-1}}{2\epsilon^{d-1}} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \delta^{(d)}(\vec{p} + \vec{q}) f_p(x_0) \partial_0 f_q(x_0) \Big|_{x_0=\epsilon} \\
 &= -\frac{CL^{d-1}}{2\epsilon^{d-1}} \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d p' d^d q' \delta^{(d)}(\vec{p}' + \vec{q}') \frac{x_0^{d/2}}{\epsilon^{d/2}} \frac{K_\nu(x_0|\vec{p}'|)}{K_\nu(\epsilon|\vec{p}'|)} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{d}{dx_0} \left(\frac{x_0^{d/2}}{\epsilon^{d/2}} \frac{K_\nu(x_0|\vec{p}'|)}{K_\nu(\epsilon|\vec{p}'|)} \right) \epsilon^{2(d-\Delta)} \phi_{(0)}(\vec{p}') \phi_{(0)}(\vec{q}') \Big|_{x_0=\epsilon} \cdot \\
 \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{(0)}(-\vec{p}) \phi_{(0)}(-\vec{q})} &= -\frac{CL^{d-1} x_0^{d/2}}{2\epsilon^{2\Delta-1} (2\pi)^d} \int d^d p' d^d q' \delta^{(d)}(\vec{p}' + \vec{q}') \frac{K_\nu(x_0|\vec{p}'|)}{K_\nu(\epsilon|\vec{p}'|)} \frac{d}{dx_0} \left(x_0^{d/2} K_\nu(x_0|\vec{q}'|) \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\delta(\vec{p}' + \vec{p}) + \delta(\vec{q}' + \vec{q}) + \delta(\vec{p}' + \vec{q}) + \delta(\vec{q}' + \vec{p}) \right) \Big|_{x_0=\epsilon}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{CL^{d-1}\delta(\vec{p} + \vec{q})}{2\epsilon^{2\Delta-1}(2\pi)^d} \left\{ \frac{K_\nu(x_0|\vec{p})}{K_\nu(\epsilon|\vec{q})K_\nu(\epsilon|\vec{p})} \frac{d}{dx_0} \left(x_0^{d/2} K_\nu(x_0|\vec{q}) \right) \right. \\
&+ \left. \frac{K_\nu(x_0|\vec{q})}{K_\nu(\epsilon|\vec{q})K_\nu(\epsilon|\vec{p})} \frac{d}{dx_0} \left(x_0^{d/2} K_\nu(x_0|\vec{p}) \right) \right\}_{x_0=\epsilon} \\
&= -\frac{CL^{d-1}\epsilon^{d/2}\delta(\vec{p} + \vec{q})}{2\epsilon^{2\Delta-1}2(2\pi)^d K_\nu(\epsilon|\vec{q})K_\nu(\epsilon|\vec{p})} \left\{ \epsilon^{d/2-1} \frac{d}{2} [K_\nu(\epsilon|\vec{q}) + K_\nu(\epsilon|\vec{p})] K_\nu(\epsilon|\vec{p}) + \right. \\
&+ \left. \epsilon^{d/2} [K_\nu'(\epsilon|\vec{q})|\vec{q}| + K_\nu'(\epsilon|\vec{p})|\vec{p}|] K_\nu(\epsilon|\vec{q}) \right\} \\
&= -\frac{CL^{d-1}\epsilon^{d/2}\delta(\vec{p} + \vec{q})K_\nu(\epsilon|\vec{p})}{2(2\pi)^d \epsilon^{2\Delta-d} K_\nu^2(\epsilon|\vec{q})} \left\{ \frac{d}{2} 2K_\nu(\epsilon|\vec{p}) + 2\epsilon|\vec{p}|K_\nu'(\epsilon|\vec{p}) \right\} \\
&= -\frac{CL^{d-1}\epsilon^{d/2}\delta(\vec{p} + \vec{q})}{(2\pi)^d \epsilon^{2\Delta-d}} \left\{ \frac{d}{2} + \frac{\epsilon|\vec{p}|K_\nu'(\epsilon|\vec{p})}{K_\nu(\epsilon|\vec{p})} \right\}
\end{aligned}$$

Απόδειξη της σχέσης (5.41)

Για το μετασχηματισμό Fourier τυχαίας συνάρτησης $f(k)$, χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες και για $d > 2$ έχουμε,

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\vec{x}} f(k) = \int \frac{d\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dk k^{d-1} f(k) \int_0^\pi d\theta \sin^{d-2} \theta e^{-ikx \cos \theta}, \quad (\text{A.1})$$

όπου $\int \Omega_n = \frac{2\pi^n}{\Gamma(n)}$ είναι το εμβαδόν μιας σφαίρας σε n διαστάσεις. Έχουμε λοιπόν ότι,

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\vec{x}} f(k) = \frac{x^{1-d/2}}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dk k^{d/2} J_{d/2-1}(kx) f(k). \quad (\text{A.2})$$

Ας θεωρήσουμε $f(k) = k^\beta$. Το ολοκλήρωμα αυτό δε συγκλίνει. Συνεπώς, εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι στην προκειμένη περίπτωση μπορούμε να εναλλάξουμε το όριο με το ολοκλήρωμα και καταφεύγουμε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος,

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\vec{x} - \mu k^2} k^\beta \quad (\text{A.3})$$

όπου στο τέλος θα πάρουμε το όριο $\mu \rightarrow 0$. Αυτό είναι δυνατόν για $x > 0$ το οποίο είναι επαρκές

για τον σκοπό που το χρειαζόμαστε. Αρχικά η γωνιακή ολοκλήρωση πραγματοποιείται ως εξής,

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\vec{x} - \mu k^2} k^\beta = \frac{x^{1-d/2}}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dk k^{d/2+\beta} J_{d/2-1}(kx) e^{-\mu k^2} \quad (\text{A.4})$$

Για $d + \beta > 0$ έχουμε,

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\vec{x} - \mu k^2} k^\beta = \frac{\Gamma\left(\frac{d+\beta}{2}\right)}{2^d \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \mu^{(d+\beta)/2}} \Phi\left(\frac{d+\beta}{2}; \frac{d}{2}; -\frac{x^2}{4\mu}\right) \quad (\text{A.5})$$

όπου $\Phi(a; c; z)$ είναι η εκφυλισμένη υπεργεωμετρική συνάρτηση. Εφόσον $\Phi(a; c; 0) = 1$, το ολοκλήρωμα αποκλίνει για $x = 0$ στο όριο $\mu \rightarrow 0$. Ωστόσο για $x > 0$ μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τον μεγιστοβάθμιο όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος της $\Phi(a; c; -z)$ για μεγάλα z . Παίρνοντας και το όριο $\mu \rightarrow 0$, προκύπτει,

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\vec{x} - \mu k^2} k^\beta = \frac{2^\beta \Gamma\left(\frac{d+\beta}{2}\right)}{\pi^{d/2} \Gamma\left(-\frac{\beta}{2}\right)} \frac{1}{x^{d+\beta}} \quad (\text{A.6})$$

Παρατηρούμε ότι η έκφραση εξαφανίζεται για $\beta = 2n$. Αυτό συμφωνεί με την διαίσθηση μας ο μετασχηματισμός Fourier, για παράδειγμα, του k^2 είναι ανάλογος της λαπλασιανής της δέλτα συνάρτησης.

Απόδειξη της σχέσης (5.48)

$$U := \int_0^\infty dz_0 \int_{\mathbb{R}^d} dz \frac{z_0^a}{[z_0^2 + (\vec{z} - \vec{y})^2]^b [z_0^2 + (\vec{z} - \vec{y})^2]^c} \text{ with } b, c > 0 \quad (\text{A.7})$$

Παραμετροποίηση Schwinger:

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty ds s^{n-1} e^{-sA} \quad (\text{A.8})$$

$$U = \frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(c)} \int_0^\infty dz_0 \int_{\mathbb{R}^d} dz \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt z_0^a s^{b-1} t^{c-1} e^{-v_1}$$

$$V_1 := s(z_0^2 + (z-x)^2) + t(z_0^2 + (z-y)^2) = s(z_0^2 + x^2) + t(z_0^2 + y^2) + (s+t)z^2 - 2(sx+ty)z$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} dz e^{-V_1} = e^{-sz_0^2 - tz_0^2 - sx^2 - ty^2} \int_{\mathbb{R}^d} dz e^{-s(z^2 - 2xz) - t(z^2 - 2yz)}$$

$$sz^2 - 2sxz + tz^2 - 2tyt = (s+t) \left\{ z^2 - 2z \frac{sx+ty}{s+t} + \left(\frac{sx+ty}{s+t} \right)^2 \right\} - \frac{(sx+ty)^2}{s+t}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} dz e^{-v_1} = e^{-s(z_0^2+x^2) - t(z_0^2+y^2) + \frac{(sx+ty)^2}{s+t}} \int_{\mathbb{R}^d} dz e^{-(s+t)(z - \frac{sx+ty}{s+t})^2} = e^{V_2} \left(\frac{\pi}{s+t} \right)^d$$

$$V_2 := \frac{(sx+ty)^2}{s+t} - s(z_0^2+x^2) - t(z_0^2+y^2)$$

$$U = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(b)\Gamma(c)} \int_0^\infty dz_0 \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt z_0^a s^{b-1} z^{c-1} (s+t)^{-d/2} e^{\left(\frac{-(s+t)^2 z_0^2 - st(x-y)^2}{s+t} \right)} \quad (\text{A.9})$$

Πραγματοποιούμε αλλαγή μεταβλητής, $z_0 \rightarrow z_0^2$,

$$U = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(b)\Gamma(c)} \int_0^\infty dz_0 \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt z_0^{2a+1} s^{b-1} z^{c-1} (s+t)^{-d/2} e^{\left(\frac{-(s+t)^2 z_0^2 - st(x-y)^2}{s+t} \right)}. \quad (\text{A.10})$$

Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα,

$$\int_0^\infty x^n e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr^{n+1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) \quad (\text{A.11})$$

$$U = \frac{\pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma(b)\Gamma(c)} \int_0^\infty ds dt s^{b-1} t^{c-1} (s+t)^{-(d+a+1)/2} e^{-\frac{st(x-y)^2}{s+t}} \quad (\text{A.12})$$

Διπλή αλλαγή μεταβλητής: $s \rightarrow \frac{s}{(x-y)^2} t \rightarrow \frac{t}{(x-y)^2}$,

$$U = \frac{\pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma(b)\Gamma(c)} |x-y|^{d+a+1-2b-2c} \int_0^\infty ds dt s^{b-1} t^{c-1} (s+t)^{-(d+a+1)/2} e^{-\frac{st}{s+t}}. \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt s^{b-1} t^{c-1} (s+t)^{-(d+a+1)/2} e^{-\frac{st}{s+t}} \\
&= \int_0^\infty du \int_0^\infty dv v^{b-1} (1-v)^{c-1} u^{b+c-1-(d+a+1)/2} e^{v(1-v)u} \\
&= \Gamma(b+c-(d+a+1)/2) \int_0^1 dv u^{-c-1-(d+a)/2} (1-u)^{-b-1-(d+a+1)/2}
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της βήτα συνάρτησης,

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}, \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{A.14})$$

Στην περίπτωση μας,

$$x = \frac{a+d+1}{2} - c, \quad y = \frac{a+d+1}{2} - b \quad (\text{A.15})$$

Έτσι, προκύπτει,

$$W = \frac{\Gamma(b+c-\frac{a+d+1}{2}) \Gamma(\frac{a+d+1}{2}-c) \Gamma(\frac{a+d+1}{2}-b)}{\Gamma(a+d+1-c-d)} \quad (\text{A.16})$$

και το αρχικό ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή,

$$U = \frac{\pi^{d/2}}{2} |x-y|^{a+1+d-2b-2c} \frac{\Gamma(b+c-\frac{a+d+1}{2}) \Gamma(\frac{a+d+1}{2}-c) \Gamma(\frac{a+d+1}{2}-b) \Gamma(\frac{a+1}{2})}{\Gamma(a+d+1-c-d)\Gamma(b)\Gamma(c)} \quad (\text{A.17})$$

Απόδειξη της σχέσης (5.58)

$$\omega_\mu^{ab} = \frac{1}{2} e^{\nu a} (\partial_\mu e_\nu^b - \partial_\nu e_\mu^b) - \frac{1}{2} e^{\nu b} (\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a) - \frac{1}{2} e^{pa} e^{\sigma b} (\partial_p e_{\sigma c} - \partial_\sigma e_{pc}) e_\mu^c \quad (\text{A.18})$$

Από τον ορισμό του πεδίο πλαισίου, προκύπτουν τα εξής,

$$e^{a\mu} = \frac{\delta_\nu^a g^{\mu\nu}}{x_0}, \quad e_{a\mu} = \frac{\delta_\mu^b \eta_{ab}}{x_0}, \quad \partial_0 e_\mu^a = -\frac{\delta_\mu^a}{x_0}, \quad \partial_0 e_{\mu a} = -\frac{\delta_\mu^b \eta_{ab}}{x_0^2} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned}
\omega_i^{0j} &= -\frac{1}{2} (e^{k0} \partial_k e_i^j + e^{p0} e^{mj} e_i^n \partial_l e_{mn}) \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x_0} [\delta_p^0 g^{pk}] (\partial_k e_i^j) + \frac{1}{x_0} \delta_k^j g^{km} \frac{1}{x_0} \delta_i^n \frac{1}{x_0} [\delta_f^0 g^{fl}] (\partial_l e_{mn}) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ x_0 \partial_0 e_i^j + x_0^{-1} \delta_k^j g^{km} \delta_i^n \partial_0 e_{mn} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{x_0} \delta_i^j - \frac{1}{x_0^3} \delta_k^j g^{km} \delta_i^n \delta_m^s \eta_{sn} \right\}
\end{aligned}$$

$$\omega_i^{0j} = -\omega_i^{j0} = \frac{\delta_i^j}{x_0} \quad (\text{A.20})$$

Απόδειξη της σχέσης (5.59)

$$\mathcal{D} = e_a^\mu \gamma^a (\partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_\mu^{bc} \Sigma_{bc}) = e_a^0 \gamma^a (\partial_0 + \frac{1}{2} \omega_0^{bc} \Sigma_{bc}) + e_a^i \gamma^a (\partial_i + \frac{1}{2} \omega_i^{bc} \Sigma_{bc}) \quad (\text{A.21})$$

- $\omega_0^{bc} \Sigma_{bc} = \omega_0^{0c} \Sigma_{0c} + \omega_0^{jc} \Sigma_{jc} = 2\omega_0^{0j} \Sigma_{0j} = \frac{2}{x_0} \delta_0^j \Sigma_{0j} = \frac{2}{x_0} [\gamma_0, \gamma_0] = 0,$
- $\omega_i^{bc} \Sigma_{bc} = 2\omega_i^{0j} \Sigma_{0j} = \frac{2}{x_0} \Sigma_{0j}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= e_a^0 \gamma^a \partial_0 + e_a^i \gamma^a \partial_i + \frac{1}{2} e_a^i \gamma^a \frac{2}{x_0} \Sigma_{0j} \\ &= \frac{1}{x_0} \left(g^{00} \delta_0^b n_{ba} \gamma^a \partial_0 + g^{ii} \delta_i^b n_{ba} \gamma^a \partial_i + g^{ii} \delta_i^b n_{ba} \gamma^a \frac{1}{x_0} \Sigma_{0i} \right) \\ &= x_0 \left(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i + \frac{1}{x_0} \Sigma_{0i} \gamma^i \right). \end{aligned}$$

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις,

$$\gamma^i \Sigma_{0i} = \frac{1}{4} \gamma^i [\gamma_0, \gamma_i] = (\gamma^i \gamma_0 \gamma_i - \gamma^i \gamma_i \gamma_0) \frac{1}{4}, \quad \gamma^i \gamma_i = d \mathbb{I}_d, \quad \gamma^i \gamma^0 \gamma_i = -d \gamma^0. \quad (\text{A.22})$$

$$\gamma^i \Sigma_{0i} = (-d \gamma_0 - d \gamma_0) \frac{1}{4} = -\frac{d}{2} \gamma_0 \quad (\text{A.23})$$

Κατά συνέπεις, η συναλλοίωτη παράγωγος παίρνει τη μορφή,

$$\mathcal{D} = x_0 \gamma^0 \partial_0 + x_0 \gamma^i \partial_i - \frac{d}{2} \gamma_0 = x_0 \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{d}{2} \gamma_0 \quad (\text{A.24})$$

Απόδειξη της σχέσης (5.61)

Δρώντας στην εξ. Dirac με $\gamma_b \partial^b$ έχουμε,

$$\gamma^b \partial_b (x_0 \gamma^a \partial_a - \frac{d}{2} \gamma_0 - m) \psi(x) = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned}\gamma^b \partial_b (x_0 \gamma^a \partial_a) &= \gamma^0 \partial_0 (x_0 \gamma^a \partial_a \psi) + \gamma^i \partial_i (x_0 \gamma^a \partial_a \psi) = \gamma^0 \gamma^a \partial_a \psi + x_0 \gamma^0 \gamma^a \partial_0 \partial_a \psi \\ &= \gamma^0 \gamma^a \partial_a \psi + x_0 \partial_0^2 \psi + x_0 \partial_i^2 \psi = \gamma^0 \gamma^a \partial_a \psi + x_0 \gamma_a \partial^a \psi\end{aligned}$$

$$\gamma^0 (\gamma^a \partial_a \psi) = \frac{1}{x_0} \left(\frac{d}{2} + m \gamma_0 \right) \psi \quad (\text{A.26})$$

$$\gamma^b \partial_b (x_0 \gamma^a \partial_a) = \frac{1}{x_0} \left(\frac{d}{2} + m \gamma_0 \right) \psi + x_0 \gamma_a \partial^a \psi \quad (\text{A.27})$$

$$\gamma^b \partial_b \left(\frac{d}{2} + m \gamma_0 \right) \psi = \left(\frac{d}{2} \gamma_0 - m \right) \psi + \left(-\frac{d}{2} + m \gamma_0 \right) \gamma^i \partial_i \psi \quad (\text{A.28})$$

$$x_0 \gamma^a \partial_a \psi = \left(\frac{d}{2} \gamma_0 + m \right) \psi \rightarrow \gamma^i \partial_i \psi = \frac{1}{x_0} \left(\frac{d}{2} \gamma_0 + m \right) \psi - \gamma^0 \partial_0 \psi \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned}\gamma^b \partial_b \left(\frac{d}{2} + m \gamma_0 \right) \psi &= \left(\frac{d}{2} \gamma_0 - m \right) \gamma^0 \partial_0 \psi + \left(-\frac{d}{2} \gamma_0 + m \right) \psi \left[\frac{1}{x_0} \left(\frac{d}{2} \gamma_0 + m \right) \psi - \gamma^0 \partial_0 \psi \right] \\ &= \left(\frac{d}{2} \gamma_0 - m \right) \gamma^0 \partial_0 \psi + \frac{1}{x_0} \left(-\frac{d^2}{2} + m^2 \right) \psi - \left(-\frac{d}{2} \gamma_0 + m \right) \gamma^0 \partial_0 \psi\end{aligned}$$

Η τελική εξίσωση παίρνει τη μορφή,

$$\left[\partial_a \partial^a - \frac{d}{x_0} \partial_0 - \frac{1}{x_0^2} \left(m^2 - \frac{d^2}{4} - \frac{d}{2} - \gamma_0 m \right) \right] \psi(x) = 0 \quad (\text{A.30})$$

Απόδειξη της σχέσης (5.81)

Για τον υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος παραγωγίζουμε τη σχέση (5.41)

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} k_i k^\beta = -i \partial_j \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} k^\beta = -i \frac{2^\beta \Gamma\left(\frac{d+\beta}{2}\right)}{\pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{-\beta}{2}\right)} \partial_j \frac{1}{|x-y|^{d+\beta}}, \quad (\text{A.31})$$

όπου χρειαζόμαστε την παράγωγο,

$$\partial_j \frac{1}{|x-y|^{d+\beta}} = -\frac{d+\beta}{|x-y|^{d+\beta+1}} \partial_j |x-y|$$

$$\frac{\partial |x-y|}{\partial x^j} = \frac{(x-y)_j}{|x-y|} \Rightarrow \partial_j \frac{1}{|x-y|^{d+\beta}} = -\frac{d+\beta}{|x-y|^{d+\beta+1}} \frac{(x-y)_j}{|x-y|} = -\frac{d+\beta}{|x-y|^{d+\beta+2}} (x-y)_j \quad (\text{A.32})$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω για $\beta = 2m - 1$, προκύπτει,

$$i 2^{2m} \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} \frac{(x-y)_j}{\pi^{d/2} |x-y|^{d+2m+1}} \quad (\text{A.33})$$

Για τη δράση S_1 έχουμε,

$$\begin{aligned} S_1 &= 2iC^d G \epsilon^{2m-d} \int d^d x d^d y \bar{\psi}_\epsilon^+(\vec{x}) \gamma_j \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)}{2^{2m} \Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)} \frac{i 2^{2m} \Gamma\left(\frac{d+1}{2} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right) \pi^{d/2}} \frac{(x-y)_j}{|x-y|^{d+2m+1}} \psi_\epsilon^-(\vec{y}) \\ &= -\frac{2C^d G \epsilon^{2m-d}}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)} \int d^d x d^d y \bar{\psi}_\epsilon^+(\vec{x}) \frac{\gamma_j (x-y)_j}{|x-y|^{d+2m+1}} \psi_\epsilon^-(\vec{y}) \end{aligned}$$

Απόδειξη της σχέσης (5.128)

$$G_{\nu i}(z, \vec{x}) = C^d \frac{z_0^{d-2}}{R^{d-1}} I_{\nu i}(z - \vec{x}) \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu G_{\nu i} &= \frac{C^d}{R^{2d-2}} (\partial_\mu z_0^{d-2} R^{d-1} I_{\nu i} - z_0^{d-2} \partial_\mu R^{d-1} I_{\nu i} + z_0^{d-2} R^{d-1} \partial_\mu I_{\nu i}) \\ &= (d-2) \frac{z_0^{d-3}}{R^{d-1}} \left(\delta_{\mu 0} I_{\nu i} - 2 \frac{d-1}{d-2} \frac{z_0}{R} (z-x)_\mu I_{\nu i} + \frac{z_0}{d-2} \partial_\mu I_{\nu i} \right) \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται επίσης,

$$\partial_\mu I_{\nu i}(z - \vec{x}) = -\frac{2}{R} \delta_{\mu\nu} (z-x)_i - \frac{2}{R} I_{\mu i}(z - \vec{x})_\nu \quad (\text{A.35})$$

Συνεπώς, η παράγωγος θα δίνεται από την έκφραση,

$$\partial_\mu G_{\nu i} = (d-2) \frac{z_0^{d-3}}{R^{d-1}} \left(\delta_{\mu 0} I_{\nu i} - 2 \frac{d-1}{d-2} \frac{z_0}{R} (z-x)_\mu I_{\nu i} - 2 \frac{z_0}{R(d-2)} \delta_{\mu\nu} (z-x)_i - 2 \frac{z_0}{R(d-2)} I_{\mu i}(z-x)_\nu \right) \quad (\text{A.36})$$

Ισχύει επίσης,

$$\begin{aligned}
\partial_{[\mu} G_{\nu]i} &= \frac{1}{2}(\partial_{\mu} G_{\nu i} - \partial_{\nu} G_{\mu i}) \\
&= \frac{C^d}{2}(d-2) \frac{z_0^{d-3}}{R^{d-1}} \left(\delta_{\mu 0} I_{\nu i} - 2 \frac{d-1}{d-2} \frac{z_0}{R} (z-x)_{\mu} I_{\nu i} - 2 \frac{z_0}{R(d-2)} I_{\mu i} (z-x)_{\nu} \right. \\
&\quad \left. - \delta_{\nu 0} I_{\mu i} + 2 \frac{d-1}{d-2} \frac{z_0}{R} (z-x)_{\nu} I_{\mu i} + 2 \frac{z_0}{R(d-2)} I_{\nu i} (z-x)_{\mu} \right) \\
&= \frac{C^d}{2}(d-2) \frac{z_0^{d-3}}{R^{d-1}} \left[I_{\nu i} \left(\delta_{\mu 0} - \frac{2}{R} z_0 (z-x)_{\mu} \right) - I_{\mu i} \left(\delta_{\nu 0} - \frac{2}{R} z_0 (z-x)_{\nu} \right) \right] \\
&= \frac{C^d}{2}(d-2) \frac{z_0^{d-3}}{R^{d-1}} (I_{\nu i} (z-x) I_{\mu 0} (z-x) - I_{\mu i} (z-x) I_{\nu 0} (z-x)) \\
&= C^d (d-2) \frac{z_0^{d-3}}{R^{d-1}} I_{0[\mu} (z-x) I_{\nu]i} (z-x)
\end{aligned}$$

Απόδειξη της σχέσης (5.133)

Από το ολοκλήρωμα (5.48) έχουμε,

$$A_b = I_b |t|^{-v_b} \quad (\text{A.37})$$

Έτσι, το πρώτο ολοκλήρωμα που ψάχνουμε θα δίνεται από την έκφραση,

$$no.1 = \int \frac{w_0^{2d-3} (w-t)_l}{R^{2d} w^{2(d-1)}}, \quad \int \frac{w_0^a (w-t)_i}{R^{2(b+1)} w^{2c}} = \frac{1}{2b} \partial_i A_b \quad (\text{A.38})$$

Ορίζουμε,

$$I(2d-3, d-1, d-1, d) = \frac{\pi^{d/2}}{2} \frac{\Gamma(d-1) \Gamma(d/2-1) \Gamma^2(d/2)}{\Gamma(d) \Gamma(d-1)} = I \quad (\text{A.39})$$

Συνεπώς, το πρώτο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή,

$$no.1 = -\frac{d-2}{2(d-1)} I |t|^{-d} t_l \quad (\text{A.40})$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε τα εξής,

$$\begin{aligned}
A_b &= \int \frac{w_0^a}{R^{2b}w^{2c}} = I_b |t|^{v_b}, \quad \partial_i R^{-2b} = -\frac{2b(w-t)_i}{R^{2(b+1)}} \\
\partial_i A_b &= 2b \int \frac{w_0^a (w-t)_i}{R^{2(b+1)}w^{2c}} = 2b \int \frac{w_0^a w_i}{R^{2(b+1)}w^{2c}} - 2b \int \frac{w_0^a t_i}{R^{2(b+1)}w^{2c}} \\
&\int \frac{w_0^a w_i}{R^{2(b+1)}w^{2c}} = \frac{1}{2b} \partial_i A_b + t_i \int \frac{w_0^a}{R^{2(b+1)}w^{2c}} \\
&\int \frac{w_0^a w_i}{R^{2(b+1)}w^{2c}} = \frac{1}{2b} \partial_i A_b + t_i A_{b+1} \\
\partial_i A_b &= I_b v_b |t|^{v_b-2} t_i
\end{aligned} \tag{A.41}$$

Έχουμε επίσης τις εξής σχέσεις,

$$\begin{aligned}
I_b &= I(2d-3, d-2, d, d) = \frac{\pi^{d/2}}{2} \frac{\Gamma(d-1)\Gamma^2(d/2-1)\Gamma(d/2+1)}{\Gamma^2(d)\Gamma(d-2)} \\
I_{b+1} &= I(2d-3, d-1, d, d) = \frac{\pi^{d/2}}{2} \frac{\Gamma(d-1)\Gamma^2(d/2)\Gamma(d/2-1)}{\Gamma(d)\Gamma^2(d-1)}
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Από τη σχέση $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$ έχουμε, $I_b = \frac{d}{d-1}I$. Έτσι, για το δεύτερο ολοκλήρωμα προκύπτει,

$$\begin{aligned}
no.2 &= \frac{I}{2(d-2)(d-1)} (-d+2) |t|^{-d} t_m + I t_m |t|^{-d} \\
&= -\frac{I}{2(d-2)} d |t|^{-d} t_m + I t_m |t|^{-d} \\
&= I t_m |t|^{-d} = \left(\frac{-d+2(d-1)}{2(d-1)} \right) \\
&= \frac{1d-2}{2d-1} I t_m |t|^{-d}
\end{aligned}$$

Για το τρίτο ολοκλήρωμα έχουμε τα εξής,

$$\begin{aligned}\partial_i A_b &= 2b \int \frac{w_0^a (w-t)_i}{R^{2(b+1)} w^{2c}} \\ \partial_j \partial_i A_b &= -\delta_{ij} 2b \int \frac{w_0^a}{R^{2(b+1)} w^{2c}} + 4b(b+1) \int \frac{w_0^a (w-t)_i (w-t)_j}{R^{2(b+2)} w^{2c}} = \\ &= -\delta_{ij} 2b A_{b+1} + 4b(b+1) \int \frac{w_0^a (w-t)_i w_j}{R^{2(b+2)} w^{2c}} - 4t_j b(b+1) \int \frac{w_0^a (w-t)_i}{R^{2(b+2)} w^{2c}}, \\ \int \frac{w_0^a (w-t)_i w_j}{R^{2(b+2)} w^{2c}} &= \frac{1}{4b(b+1)} \partial_j \partial_i A_b + \frac{1}{2(b+1)} \delta_{ij} A_{b+1} + \frac{1}{2(b+1)} t_j \partial_i A_{b+1} \\ &= \frac{I_b v_b (v_b - 2)}{4b(b+1)} |t|^{v_b-4} t_i t_j + \frac{I_b v_b}{4b(b+1)} |t|^{v_b-2} \delta_{ij} \\ &\quad + \frac{\delta_{ij}}{2(b+1)} I_{b+1} |t|^{v_b+1} + \frac{I_{b+1}}{2(b+1)} v_{b+1} |t|^{v_b+1-2} t_i t_j\end{aligned}$$

Ισχύει επίσης,

$$I_b = I(2b-3, d-2, d, d) = \frac{d}{d-1} I$$

$$I_{b+1} = I(2b-3, d-1, d, d) = I,$$

και το τρίτο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή,

$$\begin{aligned}no.3 &= \frac{d^2 I}{4(d-1)^2} |t|^{-d} \frac{t_l t_m}{|t|^2} - \frac{dI}{4(d-1)^2} |t|^{-d} \delta_{lm} + \frac{\delta_{lm}}{2(d-1)} I |t|^{-d} - \frac{Id}{2(d-1)} |t|^{-d} \frac{t_l t_m}{|t|^2} = \\ &= -\frac{d-2}{d-1} \frac{I |t|^{-d}}{4(d-1)} \left\{ d \frac{t_l t_m}{|t|^2} - \delta_{lm} \right\}\end{aligned}$$

Παράρτημα Β

Όροι CHERN-SIMONS

Οι όροι Chern-Simons δίνουν Λαγκραντζιανές για τις θεωρίες βαθμίδας, οι οποίες είναι αναλλοίωτες κάτω από κάποια ομάδα συμμετρίας G σε πολλαπλότητες περιττών διαστάσεων. Η κύρια διαφορά μεταξύ των όρων CS και των αντίστοιχων Yang-Mills, είναι ότι οι πρώτοι εκφράζονται αποκλειστικά ως συναρτήσεις των συνδέσμων (*connection*) A και των εξωτερικών παραγώγων τους, αλλά δε μπορούν να εκφραστούν μόνο συναρτήσει του $F = dA + A \wedge A$. Η απλούστερη μορφή ενός CS όρου είναι για $d = 1$ και Γ μία μονοδιάστατη καμπύλη,

$$I[A] = \kappa \int \Gamma A, \quad (\text{B.1})$$

όπου είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας $A \rightarrow A + d\Omega$, αν το Ω ικανοποιεί περιοδικές συνοριακές συνθήκες ή σβήνει στο σύνορο. Συνεπώς, μία μη αναλλοίωτη ολοκληρωτέα ποσότητα μπορεί να ορίσει αναλλοίωτο ολοκλήρωμα, δεδομένων των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών. Για $d = 3$ ο CS όρος είναι,

$$I[A] = \kappa \int_{M_3} \langle A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \rangle, \quad (\text{B.2})$$

όπου ο δεύτερος υπάρχει μόνο στην περίπτωση της $SU(N)$ μη αβελιανής συμμετρίας. Γενικεύοντας για $d = 2n + 1$,

$$I[A] = \kappa \int_{M_{2n+1}} \langle A \wedge (dA)^n + \alpha_1 A^3 \wedge (dA)^{n-1} + \dots + \alpha_n A^{2n+1} \rangle, \quad (\text{B.3})$$

όπου το \langle, \rangle συμβολίζει το αναλλοίωτο συμμετρικό ίχνος στην άλγεβρα Lie¹. Οι μορφές CS γράφονται ως,

$$C_{2n+1} = \langle A \wedge (dA)^n + \alpha_1 A^3 \wedge (dA)^{n-1} + \dots + \alpha_n A^{2n+1} \rangle = \langle \tilde{C}_{2n+1} \rangle. \quad (\text{B.4})$$

Ιδιότητες:

¹Το συμμετρικό ίχνος είναι μία απεικόνιση $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, η έκφραση $\langle A \wedge A \wedge A \rangle$ γράφεται ως $1/2 A^a \wedge A^b \wedge A^c \langle T_a, [T_b, T_c] \rangle$, όπου οι T_a είναι οι γεννήτορες της άλγεβρας Lie \mathcal{G} . Για αβελιανή \mathcal{G} , ο όρος αυτός μηδενίζεται.

- Οι σταθερές α_k είναι αδιάστατες και ρητοί αριθμοί και μη επανακανονικοποιησιμες ποσότητες.
- Δε χρειάζεται μετρική στο ολοκλήρωμα λόγω αναλλοιώτητας κλίμακας (*scale invariance*).
- Οι CS όροι καθορίζονται εξ ολοκλήρου από την άλγεβρα Lie και τη διάσταση της πολλαπλότητας.
- Ορίζονται μόνο σε περιττές διαστάσεις.
- Το ολοκλήρωμα του C_{2n+1} είναι αναλλοίωτο σε μετ/μούς βαθμίδας: $\delta C_{2n+1} = d\Omega_{2n}$.
- Η εξωτερική παράγωγος δίνει ένα αναλλοίωτο πολυώνυμο $2n$ -βαθμού συναρτήσει των F : $dC_{2n+1}(A) = P_{2n}(F)$.

Η χρησιμότητα των CS όρων έγκειται στο ότι μεταβάλλονται σαν αβελιανος συνδέσμος A (*abelian connections*) κάτω από απειροστούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, ωστόσο, μεταβάλλονται κατα μία σταθερά αν είναι πεπερασμένος. Το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό είναι το απλούστερο παράδειγμα, όπως φαίνεται από την B.1, για $n = 0$, $C_1(A) = \langle A \rangle = A$. Επιπροσθέτως, οι όροι CS αποτελούν μια γενίκευση της σύζευξης (*minimal coupling*) σημειακού σωματιδίου με HM πεδίο σε αντικείμενα περισσότερων διαστάσεων (π.χ 2p-βράνες) με μη αβελιανά πεδία βαθμίδας,

$$I[A] = \int_M \langle \star j_{2p+1} \tilde{C}_{2p+1}(A) \rangle, \quad (\text{B.5})$$

όπου η βράνη εκτείνεται σε $2p$ χωρικές διαστάσεις. Όπως και στον ηλεκτρομαγνητισμό, η σύζευξη αυτή είναι αναλλοίωτη μόνο αν το ρεύμα διατηρείται, $D \star j_{2p+1} = 0$.

Παράρτημα C

Ανωμαλία Ρεύματος

Σε μία κλασική θεωρία τα ρεύματα που σχετίζονται με κάποια συμμετρία της Λαγκραντζιανής είναι διατηρήσιμα, σύμφωνα με το θεώρημα της Noether, $\partial_\mu J^\mu = 0$. Κβαντώνοντας το σύστημα είναι πιθανό, η διατήρηση να μην ισχύει και να έχουμε ανωμαλία ρεύματος (*current anomaly*), $\langle \partial_\mu J^\mu \rangle \neq 0$. Ο λόγος είναι ότι παρόλο που σε μία κλασική θεωρία οι βαθμοί ελευθερίας μπορεί να είναι πεπερασμένοι, κβαντώνοντας την, έχουμε άπειρους. Αυτό οδηγεί σε ποικίλες αποκλείσεις, ιδιαίτερα στην κβαντική θεωρία πεδίου, τις οποίες αντιμετωπίζουμε με επανακανονικοποίηση. Οι ανωμαλίες προκύπτουν στην περίπτωση που η επανακανονικοποίηση δε σέβεται την αντίστοιχη συμμετρία και επιπλέον, σε άρτιο αριθμό χωροχρονικών διαστάσεων. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την ανωμαλία Adler-Bell-Jackiw [2,6]. Ένα μη αλληλεπιδρών πεδίο Dirac ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης,

$$D\psi = 0, \quad (\text{C.1})$$

η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από χειραλικούς $\psi \rightarrow e^{i\gamma_5\theta}\psi$ και τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$. Τα αντίστοιχα διατηρήσιμα φορτία είναι,

$$Q_5 = \int dV \psi^\dagger \gamma_5 \psi \quad \& \quad Q = \int dV \psi^\dagger \psi. \quad (\text{C.2})$$

Κβαντώνοντας τη θεωρία επιβάλλουμε τη σχέση αντιμετάθεσης

$$\{\psi_m^\dagger(t, \vec{r}) \psi_n(t, \vec{r}')\} = \delta_{mn} \delta^{(d)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (\text{C.3})$$

η οποία στο ίδιο χωρικό σημείο δίνει απειρισμό. Τα παραπάνω διατηρήσιμα φορτία, όμως, αφορούν το $\vec{r} = \vec{r}'$, κάτι το οποίο δημιουργεί πρόβλημα και χρήζει επανακανονικοποίησης. Ωστόσο, παρουσία του A_μ κάθε τεχνική επανακανονικοποίησης θα παραβιάσει κάποια ήδη υπάρχουσα συμμετρία. Στην προκειμένη περίπτωση θα είναι είτε η βαθμίδας είτε η χειραλική αλλά όχι και οι δύο ταυτόχρονα. Η επιλογή της συμμετρίας που θα κρατήσουμε έχει να κάνει με το φυσικό περιεχόμενο της θεωρίας. Οι τοπικές θεωρίες βαθμίδας είναι αναγκαίες για την απαιτούμενη αυτοσυνέπεια (βλ. καθιερωμένο πρότυπο) και εν δυνάμει σχετική ανωμαλία θα δημιουργούσε πρόβλημα στη μοναδιακότητα (*unitarity*) της. Έτσι, η χειραλική συμμετρία είναι αυτή που θα εκδηλώσει την ανωμαλία,

$$\langle \partial^\mu J_\mu^5 \rangle \neq 0. \quad (\text{C.4})$$

Το αποτέλεσμα των ανωμαλιών σε κβαντικό επίπεδο, συνοδεύεται και από ποικίλες φυσικές συνέπειες. Για παράδειγμα, το καθιερωμένο πρότυπο παρουσιάζει συμμετρίες οι οποίες δεν υπάρχουν στη φύση ούτε κατά προσέγγιση. Συνολικές (*global*) συμμετρίες βαθμίδας σε κλασσικό επίπεδο, αν συνεχίζαν να υπάρχουν στην κβαντική θεωρία, δε θα επέτρεπαν τη διάσπαση του (άμαζου) ουδέτερου πιονίου σε δύο φωτόνια. Επίσης, η ίδια συμμετρία προβλέπει την ύπαρξη ενός ουδέτερου ψευδοβαθμωτού μεσονίου σχεδόν ίδιο με το ουδέτερο πiónιο. Κάτι τέτοιο δεν έχει παρατηρηθεί. Οι ανωμαλίες στο κβαντικό καθιερωμένο πρότυπο εξαλείφουν αυτές τις συνολικές συμμετρίες. Επίσης, μας επιτρέπουν τον υπολογισμό της μάζα του π^0 και παύουν την ύπαρξη του πιονικού παρτενέρ.

Συνεπώς, οι ανωμαλίες των κβαντικών συμμετριών δεν αποτελούν παθογένειες της κβαντικής περιγραφής, αλλά περιγράφουν παραδόξως, πτυχές φυσικών φαινομένων.

Βιβλιογραφία

- [1] Κωνσταντίνος Σιάμπος. *Θεωρία χορδών και φυσικές εφαρμογές αυτής σε προβλήματα βαρύτητας και θεωρίες βαθμίδας*. PhD thesis, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2010.
- [2] Stephen L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177:2426–2438, 1969.
- [3] Martin Ammon and Johanna Erdmenger. *Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications 1st Edition*. Cambridge University Press, 2015.
- [4] D. Anselmi, D. Z. Freedman, Marcus T. Grisaru, and A. A. Johansen. Nonperturbative formulas for central functions of supersymmetric gauge theories. *Nucl. Phys.*, B526:543–571, 1998.
- [5] Damiano Anselmi. Adler-Bardeen theorem and cancellation of gauge anomalies to all orders in nonrenormalizable theories. *Phys. Rev.*, D91:105016, 2015.
- [6] J. S. Bell and R. Jackiw. A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$ in the sigma model. *Nuovo Cim.*, A60:47–61, 1969.
- [7] Gordon Chalmers, Horatiu Nastase, Koenraad Schalm, and Ruud Siebelink. R current correlators in $N=4$ superYang-Mills theory from anti-de Sitter supergravity. *Nucl. Phys.*, B540:247–270, 1999.
- [8] Jin Dai, R. G. Leigh, and Joseph Polchinski. New Connections Between String Theories. *Mod. Phys. Lett.*, A4:2073–2083, 1989.
- [9] Daniel Z. Freedman, Gianluca Grignani, Kenneth Johnson, and Nuria Rius. Conformal symmetry and differential regularization of the three gluon vertex. *Annals Phys.*, 218:75–120, 1992.
- [10] Daniel Z. Freedman, Samir D. Mathur, Alec Matusis, and Leonardo Rastelli. Correlation functions in the CFT(d) / AdS(d+1) correspondence. *Nucl. Phys.*, B546:96–118, 1999.
- [11] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen. *Supergravity: 1st Edition*. Cambridge University Press, 2012.

-
- [12] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys. Lett.*, B428:105–114, 1998.
- [13] Marc Henneaux. Boundary terms in the AdS / CFT correspondence for spinor fields. In *Mathematical methods in modern theoretical physics. Proceedings, International Meeting, School and Workshop, ISPM'98, Tbilisi, Georgia, September 5-18, 1998*, pages 161–170, 1998.
- [14] Mans Henningson and Konstadinos Sfetsos. Spinors and the AdS / CFT correspondence. *Phys. Lett.*, B431:63–68, 1998.
- [15] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
- [16] Wolfgang Mueck and K. S. Viswanathan. Conformal field theory correlators from classical field theory on anti-de Sitter space. 2. Vector and spinor fields. *Phys. Rev.*, D58:106006, 1998.
- [17] Horatiu Năstase. *Introduction to the AdS/CFT Correspondence*. Cambridge University Press, 2015.
- [18] Alfonso V. Ramallo. Introduction to the AdS/CFT correspondence. *Springer Proc. Phys.*, 161:411–474, 2015.
- [19] E. J. Schreier. Conformal symmetry and three-point functions. *Phys. Rev.*, D3:980–988, 1971.
- [20] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.
- [21] Jorge Zanelli. Uses of Chern-Simons actions. *AIP Conf. Proc.*, 1031:115–129, 2008.