Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Κατεύθυνση: Μαθηματικά στην Εκπαίδευση

Υποκατεύθυνση: Διδακτική των μαθηματικών

Καράλης Περίανδρος Νικόλαος

Α.Μ.: 213304

«Κατανοώντας τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης»: Μια διδακτική πρόταση για την Γ' Δημοτικού.

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων: Χ. Μισαηλίδου

Μέλη ΔΕΠ: Α. Βουδούρη, Γ. Μπαραλής

Μάρτιος 2018

Στον πατέρα μου Καράλη Κωσταντίνο

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια Χριστίνα Μισαϊλίδου για την πολύτιμη βοήθεια της, καθώς και το Παιδαγωγικό τμήμα δημοτικής εκπαίδευσης Αθηνών και τους υπεύθυνους καθηγητές του μεταπτυχιακού της Διδακτικής των μαθηματικών που μου έδωσαν την ευκαιρία να διευρύνω τις γνώσεις και τους ορίζοντές μου, αλλά να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τους συναδέλφους που μου άνοιξαν τις τάξεις τους.

Περιεχόμενα:

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα έρευνα αποτελεί διπλωματική εργασία του μεταπτυχιακού προγράμματος του Παιδαγωγικού τμήματος δημοτικής εκπαίδευσης Αθηνών, με τίτλο Διδακτική των Μαθηματικών. Ο τίτλος της διπλωματικής εργασίας είναι «Κατανοώντας τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης: Μια διδακτική πρόταση για την Γ' Δημοτικού». Στόχος της έρευνας αυτής είναι να εξετάσει τον τρόπο με τον οποίο μία εναλλακτική διδασκαλία μπορεί να φέρει καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα. Η διπλωματική εργασία, είχε τη μορφή ερευνητικής εργασίας, η οποία μελέτησε τις αντιδράσεις, τις αντιλήψεις και τις παρανοήσεις των μαθητών δύο τμημάτων Γ' Δημοτικού κατά τη διδασκαλία του παραδοσιακού αλγορίθμου της κάθετης Διαίρεσης και είχε σκοπό να παρουσιάσει τις εμπειρίες τους. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δύο τμήματα της Γ' Δημοτικού, όπου το ένα αποτέλεσε την ομάδα ελέγχου (control group) και το άλλο τμήμα την πειραματική ομάδα (experimental group). Η έρευνα οριοθετείται σε τρεις φάσεις. Κατά το πρώτο μέρος δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο αξιολόγησης (pre-test), το οποίο είχε ως στόχο την διερεύνηση του επιπέδου των δύο τμημάτων στα γνωστικά αντικείμενα που προαπαιτούνται για την εισαγωγή στην νέα έννοια, αλλά και την διερεύνηση των παρανοήσεων και των παρερμηνειών που σχετίζονται με την έννοια της διαίρεσης. Με γνώμονα τα αποτελέσματα της πρώτης φάσης σχεδιάστηκε η δεύτερη. Συνεπώς, σχεδιάστηκαν δύο διαφοροποιημένες διδασκαλίες, στοιχειοθετημένες και δομημένες με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μαθητές της πειραματικής ομάδας να κατανοήσουν και να κατακτήσουν το νόημα των βημάτων του αλγορίθμου. Κατά την τρίτη φάση, μοιράστηκε στους μαθητές των δύο τμημάτων εκ νέου ένα φύλλο αξιολόγησης (post-test) με σκοπό την σύγκριση και την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την κατάκτηση της νέας γνώσης. Τα αποτελέσματα έδειξαν να συνάδουν σε γενικές

γραμμές με τη βιβλιογραφία, καθώς η πειραματική ομάδα σημείωσε υψηλότερη βαθμολογία στην τελική αξιολόγηση (post-test), ενώ είχε σημειώσει χαμηλότερο μέσο όρο στην πρώτη φάση. Η σύγκριση δύο διαφορετικών προσεγγίσεων στην διδακτική διαδικασία, όπως επίσης και η εξαγωγή συμπερασμάτων μελετάται σε αυτήν την έρευνα, θέλοντας να δοθεί έναυσμα για περεταίρω έρευνα, καθώς υπάρχει περιορισμένη βιβλιογραφία για την διδασκαλία του αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης αλλά και να προταθούν λύσεις και αλλαγές που θα ενισχύσουν το διδακτικό αντικείμενο.

ABSTRACT

This research is a diploma thesis of the postgraduate program of the Department of Primary School of Athens, titled Didactics of Mathematics. The title of the diploma thesis is ***‘‘Understanding the algorithm of Long - Division, a differentiated teaching, the case of the Third Grade’’.*** The aim of this research is to examine how alternative teaching can bring better learning outcomes. The diploma thesis was in the form of research work, which studied the reactions, perceptions and misunderstandings of the students of the 3rd Grade of the Elementary School during the teaching of the traditional vertical division algorithm and was intended to present their experiences. The research was conducted in two classes of the 3rd Grade, one of which was the control group and the other the experimental group. The research is limited in three phases. In the first part, students were given a pre-test sheet, which aimed to investigate the level of knowledge of the two different classes in the cognitive subjects that were required for the introduction to the new concept, but also to investigate the misunderstandings and misconceptions related to the concept of division. Based on the results of the first phase, the second was planned. Therefore, two differentiated teachings were designed, structured in such a way that the students of the experimental group could fully understand the meaning of the algorithm steps. During the third phase, a post-test sheet was given to the students of the two classes in order to compare and draw conclusions about the acquisition of the new knowledge. The results showed broad consistency with the bibliography as the experimental group

scored higher in the post-test compared to the lower average scored in the first phase. The comparison of two different approaches to the teaching process as well as the drawing of conclusions is studied in this research, in order to trigger further research as there is limited bibliography on the teaching of the long - division algorithm but also to propose solutions and changes that will reinforce the teaching subject in general.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο πλαίσιο του μεταπτυχιακού προγράμματος με τίτλο **Διδακτική των Μαθηματικών** του τομέα Μαθηματικών και Πληροφορικής του Παιδαγωγικού τμήματος δημοτικής εκπαίδευσης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, πραγματοποίησα την διπλωματική μου εργασία με τίτλο ***«Κατανοώντας τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης, μία διαφοροποιημένη διδασκαλία, η περίπτωση της Γ΄ Δημοτικού»***. Η διπλωματική εργασία, που πραγματοποίησα είχε τη μορφή ερευνητικής εργασίας, η οποία μελέτησε τις αντιδράσεις, τις αντιλήψεις και τις παρανοήσεις των μαθητών δύο τμημάτων Γ' Δημοτικού κατά τη διδασκαλία του παραδοσιακού αλγορίθμου της κάθετης Διαίρεσης και είχε σκοπό να παρουσιάσει τις εμπειρίες τους. Στο πλαίσιο της έρευνας το ένα από τα δύο τμήματα αποτέλεσε την πειραματική ομάδα (experimental group) και το άλλο την ομάδα ελέγχου (control group). Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εκμαιεύσει συμπεράσματα μέσα από την αντιπαραβολή των δύο ομαδων, κάθως ακολούθησαν διαφορετική προσεγγιση στη διδασκαλία της έννοιας. Κατά την διεκπεραίωση της διπλωματικής εργασίας, με γνώμονα πάντα μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί από σημαντικούς ερευνητές, μου δόθηκε η δυνατότητα να ασχοληθώ και να μελετήσω τις παρανοήσεις και γενικότερα τις εμπειρίες που παρουσίαζουν οι μαθητές κατά την εισαγωγή και την πρώτη διδασκαλία τους στην έννοια του αλγορίθμου της διαίρεσης, καθώς αυτή διδάσκεται συνήθως με ένα μηχανικό τρόπο, έχοντας ως αποτέλεσμα, αυτή η βήμα - βήμα διαδικασία να δημιούργει αδυναμίες στην κατανόηση της έννοιας. Αυτό αποτέλεσε το έναυσμα, ώστε να σχεδιαστεί μία σειρά εναλλακτικών διδασκαλιών (class episodes), οι οποίες ακολουθήθηκαν από την ερευνητική ομάδα. Οι συγκεκριμένες διδασκαλίες βασιστήκαν σε διάφορους παράγοντες, οι οποίοι ενθάρρυναν τους μαθητές να συμμετάσχουν ενεργά στην κατανόηση του αλγόριθμου, παράγοντες όπως : ασκήσεις που είχαν νόημα και ήταν βασισμένες σε ένα θεωρητικό πλαίσιο, αλλά και στο πρόγραμμα σπουδών, αποτελεσματικά παιδαγωγικά εργαλεία, και τη δυναμική συζήτηση στην τάξη. Εξετάζοντας όλα τα παραπάνω, διαπιστώθηκε ότι η πειραματική ομάδα κατάφερε να επιτύχει υψηλότερα αποτελέσματα στην τελική αξιολόγηση σε σύγκριση με την ομάδα ελέγχου, η οποία προσέγγισε την έννοια του αλγορίθμου με παραδοσιακή δασκαλοκεντρική διδασκαλία. Σε αυτό το σημείο, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τα ιδιωτικά εκπαιδευτήρια Μαλλιάρα, καθώς και τις συναδέλφους της Γ' Δημοτικού, που μου άνοιξαν τις τάξεις τους και μου επέτρεψαν να πραγματοποιήσω την έρευνα μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια κα Χριστίνα Μισαηλίδου, που με βοήθησε στην διεκπεραίωση της εργασίας αυτής, με στήριξε δίνοντας μου υλικό και κατευθύνσεις για την διεξαγωγή της και στον εντοπισμό αποτελεσμάτων.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Εισαγωγή

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να εξετάσει με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό μία διαφοροποιημένη και καλά σχεδιασμένη διδασκαλία μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα. Με τον τρόπο αυτό, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν ενεργά και ουσιαστικά στη μάθηση, καθώς και να κατανοήσουν και να κατακτήσουν τα βήματα του παραδοσιακού αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης, αλλά και ποιες έννοιες εμπεριέχονται σε αυτά. Θέλοντας να μελετηθεί το θέμα σε βάθος, έγινε βιβλιογραφική ανασκόπηση, ενώ επίσης πραγματοποιήθηκε πειραματική έρευνα σε δύο τμήματα της Γ' Δημοτικού εξετάζοντας τους παράγοντες, που το θέμα της εργασίας ορίζει.

Στο πρώτο κεφάλαιο, όπου εμπεριέχεται το θεωρητικό μέρος της εργασίας περιλαμβάνεται ο σκοπός της έρευνας, όπου και καταγράφονται αναλυτικά τα ερευνητικά ερωτήματα, οι υποθέσεις καθώς και το έναυσμα της διπλωματικής αυτής εργασίας. Στη συνεχεία, παρουσιάζονται σχετικές έρευνες με το θέμα της εργασίας. Τέλος, σε ξεχωριστό υποκεφάλαιο παρουσιάζεται η δομή της παρούσας εργασίας.

Το δεύτερο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη βιβλιογραφική ανασκόπηση της εργασίας. Πιο συγκεκριμένα αναφέρονται πρόσφατες έρευνες από ερευνητές του εξωτερικού, το αντικείμενο με το οποίο καταπιάστηκαν ακριβώς καθώς και τα αποτελέσματα της κάθε έρευνας. Οι παραπάνω έρευνες, βοηθούν στην κατανόηση του στόχου της διπλωματικής αυτής εργασίας, καθώς και στην σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ αυτών και της παρούσας έρευνας. Στα υποκεφάλαια αυτού του κεφαλαίου αναλύονται τα δομικά στοιχεία που στοιχειοθετούν την έρευνα. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζονται όλοι εκείνοι οι παράγοντες που επηρεάζουν τη διδακτική διαδικασία κατά τη διδασκαλία της έννοιας με την οποία ασχολείται η παρούσα έρευνα.

Ακολουθεί το ερευνητικό μέρος της διπλωματικής εργασίας, ορίζοντας αρχικά τη μεθοδολογία. Αναλυτικότερα, στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται το είδος της έρευνας που επιλέχθηκε για την διεξαγωγή της, οι λόγοι που οδήγησαν στην επιλογή του συγκεκριμένου τρόπου, καθώς και τα μέσα που χρησιμοποιήθηκαν. Στη συνέχεια, στα υποκεφάλαια που έπονται γίνεται περιγραφή και ανάλυση των φύλλων αξιολόγησης (pre-test και post-test) που δόθηκαν στους μαθητές, αλλά και μία διεξοδική παρουσίαση των διαφοροποιημένων διδασκαλιών.

Εν συνεχεία, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας μέσα από στατιστική ανάλυση, ενώ παράλληλα υπάρχει σχολιασμός των αποτελεσμάτων αυτών, καθώς και η σύνδεσή τους με την βιβλιογραφία του θεωρητικού μέρους. Ακολουθούν τα συμπεράσματα και οι προτάσεις και τέλος το έναυσμα για περεταίρω έρευνα πάνω στο συγκεκριμένο αντικείμενο.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.1 Σκοπός της έρευνας

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να εξετάσει με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό μία διαφοροποιημένη και καλά σχεδιασμένη διδασκαλία μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα. Με τον τρόπο αυτό, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν ενεργά και ουσιαστικά στη μάθηση, καθώς και να κατανοήσουν και να κατακτήσουν τα βήματα του παραδοσιακού αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης, αλλά και ποιες έννοιες εμπεριέχονται σε αυτά. Θέλοντας να μελετηθεί το θέμα σε βάθος, έγινε βιβλιογραφική ανασκόπηση, ενώ επίσης πραγματοποιήθηκε πειραματική έρευνα σε δύο τμήματα της Γ' Δημοτικού εξετάζοντας τους παράγοντες, που το θέμα της εργασίας ορίζει.

Σκοπός και στόχοι της έρευνας

Αναλυτικότερα, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει την ανταπόκριση και την επίδοση των Ελλήνων μαθητών ενός τμήματος της Γ΄ Δημοτικού σε μία διαφοροποιημένη διδασκαλία για την εισαγωγή του κάθετου αλγόριθμου της διαίρεσης δίνοντας νοηματοδότηση στα βήματα που ακολουθούνται, σε σύγκριση με ένα άλλο τμήμα, το οποίο θα ακολουθήσει μία πιο παραδοσιακή διδασκαλία βασισμένη στα σχολικά εγχειρίδια. Επιπλέον, δευτερεύον στόχο της έρευνας αποτελεί ο εντοπισμός των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν και τα λάθη που κάνουν οι μαθητές όταν καλούνται να πραγματοποιήσουν τον αλγόριθμο, αλλά και να λύσουν προβλήματα διαίρεσης με αυτόν. Τέλος, στόχος μας είναι να εξετάσουμε τις άτυπες στρατηγικές που πιθανόν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για την εκμάθηση του αλγόριθμού.

1.2 Αναγκαιότητα της έρευνας

Καθορισμός του προβλήματος της Έρευνας

Τα κίνητρα της έρευνας

Ο παραδοσιακός αλγόριθμος της κάθετης διαίρεσης διδάσκεται ακόμη και σήμερα μηχανικά ακολουθώντας μία σειρά συγκεκριμένων βημάτων, ως αποτέλεσμα του οποίου να υπάρχει χαμηλή ή και καμία κατανόηση της ίδιας της έννοιας. Όπως αναφέρεται στον Lee (2007) ο συγκεκριμένος αλγόριθμος αποτελεί το πιο διαδεδομένο παράδειγμα κατά το οποίο, οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις περισσότερες δυσκολίες από ότι στους υπόλοιπους αλγόριθμους των άλλων αριθμητικών πράξεων. Για αυτό το λόγο η έρευνα έχει ως κύριο στόχο μέσα από μία σειρά διδασκαλιών να παρέχει στους μαθητές την απαιτούμενη νοηματοδότηση κατά την διάρκεια των βημάτων που απαιτούνται, αλλά και την σύνδεση μεταξύ τους, για την επιτυχή ολοκλήρωση του συγκεκριμένου αλγόριθμου.

Πολύ συχνά η κατανόηση της έννοιας της διαίρεσης συχνά συγχέεται με την ικανότητα του μαθητή να χειρίζεται μόνο τον παραδοσιακό αλγόριθμο της διαίρεσης, ο οποίος γίνεται το μόνο κριτήριο για τον καθορισμό και την αξιολόγηση ενός παιδιού στην κατανόηση σχετικά με αυτήν την έννοια (Lautert, Spinillo & Correa, 2012).

Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά η Montague (2003), οι εκπαιδευτικοί που διδάσκουν Μαθηματικά, έχουν σοβαρά αρχίσει να αναρωτιούνται, αν θα πρέπει να συνεχίσουμε να διδάσκουμε τον παραδοσιακό αλγόριθμο της διαίρεσης. Η επιχειρηματολογία τους είναι ότι η παραδοσιακή διαίρεση σπάνια χρησιμοποιείται πλέον στην καθημερινή ζωή και, αν χρειαστεί, μπορεί κάλλιστα να αντικατασταθεί με τη χρήση μιας αριθμομηχανής για τον υπολογισμό, η οποία μάλιστα παράγει μια ταχύτερη και πιο ακριβή λύση. Αν, όμως οι μαθητές κατανοήσουν τις εννοιολογικές βάσεις του αλγορίθμου, φαίνεται από έρευνες να μην υπάρχει καμία ανάγκη από τους μαθητές να εξασκήσουν τον αλγόριθμο για μεγάλο χρονικό διάστημα, και ταυτόχρονα να επιτυγχάνουν σε αυτόν. Σύμφωνα ακόμη με τον Geary (1994) όπως αναφέρεται στην Montague (2003), σε σύγκριση με τις άλλες τρεις μαθηματικές πράξεις, λιγότερη έρευνα έχει γίνει για τις διεργασίες που απαιτούνται από τους μαθητές να πραγματοποιήσουν ώστε να επιτύχουν σε προβλήματα διαίρεσης.

Τέλος, σε αντίθεση με την πιο κοινή «μηχανική μέθοδο» διδασκαλίας του παραδοσιακού αλγόριθμου της διαίρεσης, μια σειρά από στοχευμένες διδασκαλίες δείχνουν πόσο αποτελεσματικά, μπορεί να είναι τα κατάλληλα παιδαγωγικά εργαλεία, οι ουσιαστικές εργασίες-ασκήσεις που βασίζονται στα σωστά θεωρητικά πλαίσια και στα προγράμματα σπουδών, και η δυναμική συζήτηση στην τάξη επιτρέπουν στους μαθητές να έρθουν σε μια ισχυρή κατανόηση του παραδοσιακού αλγορίθμου της διαίρεσης. (Lee, 2007)

Οριοθέτηση του προβλήματος

Όπως ισχύει αντίστοιχα με την πρόσθεση και την αφαίρεση, οι μαθητές που έχουν μόνο τη γνώση του προτύπου αλγορίθμου, αντιμετωπίζουν συχνά δυσκολίες στα βήματα, που δεν κατανοούν πλήρως (Biddlecombe & Carr, 2011). Οι συγγραφείς και ερευνητές στον τομέα διδακτικής των Μαθηματικών τονίζουν το ρόλο της κατανόησης των βημάτων που πρέπει να ακολουθηθούν, αλλά και των μερών του κάθετου αλγορίθμου της διαίρεσης και τη σύνδεση της με την έννοια της διαίρεσης.

Πολλές δεξιότητες του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης αναπτύσσονται άμεσα από τις συνήθειες και τις στρατηγικές της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Για να πολλαπλασιάσει και να διαιρέσει κανείς, χρησιμοποιώντας διψήφιους αριθμούς απαιτείται η κατανόηση της αξίας θέσης. Η κατανόηση του τρόπου πολλαπλασιασμού, μπορεί να βοηθήσει με τις εκτιμήσεις που απαιτούνται στη διαίρεση, τονίζει πως ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση σχετίζονται άμεσα. (Van de Walle, Karp, Williams & Wrey, 2010)

Οι λόγοι που οδήγησαν στην επιλογή της συγκεκριμένης εργασίας είναι:

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση της διαδικασίας της διαίρεσης (Parmar, 2003). Σύμφωνα με τον Fischbein και άλλους (1985), όπως αναφέρεται από την Anghileri (2001) η πράξη της διαίρεσης παρουσιάζει περισσότερες δυσκολίες από τις άλλες πράξεις. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές τείνουν να μπερδεύουν τον αλγόριθμο και χωρίς να έχουν κατανοήσει τη διαδικασία, αδυνατούν να αναδομήσουν τα βήματα που δεν μπορούν να θυμηθούν (Anghileri, 2001).

Σύμφωνα και με τον Λεμονίδη (2009), η εισαγωγή της πράξης της διαίρεσης πρέπει να γίνεται με τρόπο που να είναι διαισθητικός και βασισμένος στη συμπεριφορά των παιδιών, γιατί διαφορετικά παραβιάζονται στοιχειώδεις κανόνες της διδασκαλίας (Λεμονίδης, 2009).

Τέλος, έχουν επισημανθεί από πολλούς ερευνητές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές συγκεκριμένα στην κατανόηση της έννοιας του υπολοίπου στη διαίρεση. Σύμφωνα με τον Van de Walle (2005), αυτές είναι: ότι το υπόλοιπο (1) παραβλέπεται και δίνεται απάντηση με ακέραιο αριθμό, (2) ερμηνεύεται σαν να ισούται με ένα σύνολο και προστίθεται στην απάντηση και (3) η απάντηση στρογγυλοποιείται στον πιο κοντινό ακέραιο αριθμό και δίνεται ένα κατά προσέγγιση αποτέλεσμα. Ακόμα και μαθητές ηλικίας 11 ετών αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες στην διαχείριση της συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας (Cooper & Harries, 2005).

1.3 Υποθέσεις και ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία η παρούσα ερευνητική εργασία πραγματεύεται και θέτει είναι τα ακόλουθα:

1. Ποια είναι η διαφοροποίηση στις επιδόσεις των Μαθητών της Γ΄ Δημοτικού, οι οποίοι θα ακολουθήσουν μία διαφορετική προσέγγιση στη διδασκαλία του αλγορίθμου, σε ασκήσεις- προβλήματα που σχετίζονται με τον κάθετο αλγόριθμο της διαίρεσης από αυτούς που θα διδαχτούν με την καθιερωμένη μέθοδο διδασκαλίας;
2. Ποιες δυσκολίες συναντούν οι μαθητές τις Γ΄ Δημοτικού, καθώς έρχονται σε επαφή για πρώτη φορά με τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης;
3. Ποια λάθη πραγματοποιούν;
4. Ποιες στρατηγικές χρησιμοποιούν;
5. Γιατί η παρέμβαση που ακολούθησε η ερευνητική ομάδα ήταν πετυχημένη;
6. Ποια χαρακτηριστικά της διδασκαλίας – παρέμβασης έφεραν καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Εισαγωγή

Τα υπολογιστικά σφάλματα των μαθητών έχουν εξεταστεί για αρκετές δεκαετίες σε πολλές πειραματικές μελέτες (Ashlock, 2001, Brown & Burton, 1978, Brown & VanLehn, 1980, Burton, 1982, VanLehn, 1990). Αυτές οι μελέτες έκαναν διάκριση μεταξύ συστηματικών σφαλμάτων και παραλήψεων. Τα συστηματικά σφάλματα, προκύπτουν από τη συνεπή εφαρμογή μιας ελαττωματικής μεθόδου, ενός αλγόριθμου ή κανόνα, ενώ οι παραλήψεις είναι ανοργάνωτα απρόσεκτα λάθη. Μία από της ευρέως αποδεκτές εξηγήσεις για τα συστηματικά σφάλματα υπολογισμού των μαθητών είναι η εσφαλμένη ή ασθενής κατανόηση του συστήματος θέσης και αξίας ενός ψηφίου. Όταν στη διαδικαστική πτυχή του υπολογισμού έχει δοθεί υπερβολική έμφαση χωρίς σαφή εννοιολογική κατανόηση του συστήματος αξίας-θέσης, οι μαθητές έχουν την τάση να μην σκέφτομαι την έννοια του τι κάνουν και απλά παπαγαλίζουν τις κατευθύνσεις-οδηγίες κάποιου άλλου, ώστε να εκτελέσουν υπολογισμούς (O'Brien, 1999).

2.1. Θεωρητικό Πλαίσιο της Εργασίας

2.1.1. Κοινωνικοπολιτισμικές Θεωρίες Μάθησης

Στην ενότητα αυτή θα γίνει αναφορά στις θεωρίες μάθησης καθώς και τα ευρήματα της σύγχρονης ερευνητικής βιβλιογραφίας στα οποία θα στοιχειοθετήσουμε τη μελέτη μας.

Η θεωρία του κοινωνικό-πολιτιστικού εποικοδομισμού του Vygotsky είναι εκείνη η οποία για πρώτη φορά τονίζει ιδιαίτερα τη συμβολή του κοινωνικού περιβάλλοντος στην αλληλεπιδραστική διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης και της μάθησης (Ράπτης & Ράπτη, 2013). Όπως αναφέρουν οι Ράπτης & Ράπτη (2013), στον κοινωνικό εποικοδομισμό η αλληλεπίδραση ατόμου – κοινωνικού περιβάλλοντος δεν διευκολύνει απλώς τη μάθηση, αλλά τη διαμορφώνει. Τα τελευταία 30 χρόνια η σημασία της κοινωνικής ομάδας και του πολιτισμικού πλαισίου τονίζεται ιδιαιτέρως (Μισαηλίδου, 2014). Οι Κοινωνικοπολιτισμικές Θεωρίες Μάθησης που εμφανίζονται αποτελούν συνέχεια του κοινωνικού εποικοδομισμού και δίνουν έμφαση στο κοινωνικό πλαίσιο και την επίδραση των μελών μιας κοινότητας ως χώρου που συντελείται η μάθηση (Ράπτης & Ράπτη, 2013).

Στις Κοινωνικοπολιτισμικές Θεωρίες Μάθησης η μάθηση συντελείται κατά τη διάρκεια συμμετοχής σε κοινωνικές ομάδες και η συνομιλία είναι αυτή που καθιστά δυνατή τη συμμετοχή στην κοινότητα (Μισαηλίδου, 2014). Μέσα από συζητήσεις, επιχειρηματολογία και συμπεράσματα πραγματοποιούνται αλλαγές στον τρόπο σκέψης και μέσω διαπραγμάτευσης των εννοιών πραγματοποιείται η μάθηση. Πρόκειται επομένως για μια διαδικασία κοινωνικής αλληλεπίδρασης στην οποία κυρίαρχο ρόλο παίζει η γλώσσα (Μισαηλίδου, 2014).

Σε αυτές τις πιο πρόσφατες θεωρίες του κονστρουκτιβισμού (Von Glaserfeld) είναι πλέον κοινά αποδεκτό ότι η μαθηματική γνώση κατασκευάζεται από το μαθητή, καθώς αυτός αναζητά νοήματα και δημιουργεί συνδέσεις με ένα ενεργό ρόλο. (Anghileri, 2001). Όταν, λοιπόν το παιδί αντιμετωπίζεται ως ο κατασκευαστής της δικής του γνώσης, η ενστικτώδης κατανόηση του κατασκευάζει τη βάση για την περεταίρω κατανόηση μιας έννοιας ή μιας διεργασίας (Anghileri, 2001).

Από την δεκαετία του ’80 και έπειτα επιβεβαιώνεται ολοένα και πιο ρητά από την έρευνα στους κόλπους της Διδακτικής των Μαθηματικών ο καθοριστικός ρόλος που διαδραματίζουν οι παρανοήσεις των μαθητών, η διαγνωστική διδασκαλία και η ομαδική συζήτηση στα πλαίσια της σχολικής τάξης για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

2.1.2. Διαγνωστική Διδασκαλία

Ο όρος «διαγνωστική διδασκαλία» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία από τον Bell και την ερευνητική του ομάδα το 1985 και αφορά μια μέθοδο διδασκαλίας η οποία περιλαμβάνει εννοιολογικά διαγνωστικά τεστ που βοηθούν τους μαθητές να ανακαλύψουν τις παρανοήσεις τους και τους δασκάλους τους να παρακολουθούν την πρόοδό τους. Ειδικότερα, τονίζεται η ανάγκη για μια «πλούσια» διδακτική κατάσταση που παρέχει κάποιες πληροφορίες στους μαθητές και τους προκαλεί να σκεφτούν τι πληροφορίες μπορούν να βρουν από αυτά που τους δίνονται ενώ παράλληλα δίνεται έμφαση σε ειδικά επιλεγμένες ερωτήσεις οι οποίες είναι σχεδιασμένες έτσι ώστε να προκαλούν εννοιολογικά εμπόδια στους μαθητές για να έρθουν στην επιφάνεια οι παρανοήσεις τους – όταν αυτές υπάρχουν (Bell et all, 1985). Ο Graham υποστηρίζει μάλιστα πως η αρχική δραστηριότητα πρέπει να έχει διατυπωθεί προσεκτικά όχι μόνο για να αναδείξει τις παρανοήσεις, αλλά για να εξασφαλιστεί, στο μέτρο του δυνατού, ότι οι μεγάλες παρανοήσεις θα υποστηρίζονται από ένα καλό ποσοστό των μαθητών.

2.1.3. Συζήτηση σε ομάδες

Όσον αφορά τη συζήτηση σε ομάδες, ήδη από το 1978 ο Vygotsky τόνισε πόσο σημαντική είναι η συνεργασία με τους άλλους προκειμένου η μάθηση να είναι αποτελεσματική. Αργότερα, ο Davidson (1990) αναφέρει χαρακτηριστικά πως η συνεργατική μάθηση σε μικρές ομάδες μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ενισχύσει την αποτελεσματική μαθηματική επικοινωνία, την επίλυση προβλήματος, το λογικό συλλογισμό και την κατασκευή μαθηματικών συνδέσεων. Ο Bell και οι συνεργάτες του (1985) υποστηρίζουν πως με τη βοήθεια «συζήτησης για την επίλυση αντικρουόμενων απόψεων» (conflict discussion) μπορούν να επιλυθούν οι παρανοήσεις και τα λάθη των μαθητών που έχουν διαγνωστεί μέσω κατάλληλων διαγνωστικών τεστ. Αντίστοιχα, οι Cobb, Boufi, McClain and Whitenack (1997) επικεντρώνονται σε ένα συγκεκριμένο είδος συζήτησης, την «αναστοχαστική συνομιλία», που χαρακτηρίζεται από επαναλαμβανόμενες μετατοπίσεις, έτσι ώστε οτιδήποτε κάνουν πράξη δάσκαλος και μαθητές να γίνεται στη συνέχεια ρητά αντικείμενο συζήτησης, και τα παιδιά να σκέφτονται, να προβληματίζονται, να ενεργοποιούνται από τη συμμετοχή τους στο διάλογο. Σύμφωνα όμως με τον Bell και την ομάδα του (1985), για να γίνει μια τέτοια συζήτηση χρειάζεται τα άτομα που θα λάβουν μέρος να έχουν αντικρουόμενες απόψεις – είτε σε σχέση με τους συμμαθητές τους είτε μεταξύ αρχικής και τελικής τους απάντησης (Bell et all, 1985). Παρομοίως, οι Williams & Payan (2000) παρουσιάζουν ως απαραίτητο στοιχείο της συζήτησης την «προβληματική», ένα άλυτο ή μη εύκολα επιλύσιμο πρόβλημα που να δημιουργεί αντίθεση και διαφωνία στους μαθητές και την ανάγκη να διατυπώσουν λογικά επιχειρήματα και εξηγήσεις.

Οι Bell, Swan, Onslow, Pratt & Purdy (1985) τονίζουν πως ένας τρόπος πρόκλησης συζήτησης μέσα στην τάξη που θεωρήθηκε ιδιαίτερα πετυχημένος από πολλούς δασκάλους σε πολλές τάξεις είναι να δοθεί το επιλεγμένο πρόβλημα σε μικρές ομάδες μαθητών και όταν κάθε ομάδα συμφωνήσει σε μία απάντηση, ο αντιπρόσωπός της να εξηγήσει τους λόγους επιλογής της σε ολόκληρη την τάξη. Σύμφωνα με τον Graham, οι μαθητές καλούνται να σκεφτούν σχετικά με τη δοσμένη δραστηριότητα αρχικά ατομικά και, στη συνέχεια, σχηματίζουν μικρές ομάδες όπου θα συζητήσουν και θα φθάσουν (ελπίζουμε) σε συναίνεση. Η τελική φάση είναι μια συζήτηση σε ολόκληρη την τάξη στην οποία παρουσιάζεται η απάντηση κάθε ομάδας και συζητείται δημόσια από την υπόλοιπη τάξη (Graham).

Ο αριθμός των μελών της ομάδας συζήτησης καθώς και οι ικανότητες τους στα Μαθηματικά αποτελούν ζητήματα που προκάλεσαν έντονη διχογνωμία μεταξύ των ερευνητών. Ο Davidson (1990) υποστηρίζει πως οι μικρές ομάδες προσφέρουν δυνατότητες για επιτυχία στα μαθηματικά σε όλους τους μαθητές και έναν τόπο συζήτησης στον οποίο οι μαθητές ρωτούν, συζητούν ιδέες, κάνουν λάθη, μαθαίνουν να ακούν τις ιδέες των υπολοίπων, προσφέρουν εποικοδομητική κριτική και συνοψίζουν τις ανακαλύψεις τους. Επίσης, σύμφωνα με τους Cohen, Manion & Morrison (2000), ο αριθμός των μελών της ομάδας είναι σημαντικό στοιχείο αφού «αν ο αριθμός είναι πολύ μικρός μπορεί το κάθε μέλος να αισθανθεί πιεσμένο, ενώ αν ο αριθμός είναι πολύ μεγάλος η ομάδα διασπάται και αποσπάται από το στόχο της». Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Davidson (1990), «Στα μαθηματικά, ομάδες των 4 ατόμων φαίνεται να λειτουργούν καλύτερα. Είναι αρκετά μικρές για να επιτρέψουν την ουσιαστική συμμετοχή των μελών και αρκετά μεγάλες για να γίνει ανταλλαγή ιδεών.» Οι Yackel, Cobb & Wood (1991) υποστηρίζουν ότι τα μέλη μιας ομάδας δεν πρέπει να διαφέρουν πολύ ως προς τις μαθηματικές τους ικανότητες, ο Dillon (1994) αναφέρει ότι οι «ομάδες συζήτησης (discussion groups) είναι πιο πετυχημένες όταν τα μέλη τους είναι της ίδιας ηλικίας και ικανότητας», ενώ ο Davidson (1990) υποστηρίζει πως πρέπει να υπάρχει ποικιλία ως προς τις μαθηματικές ικανότητες των μελών που απαρτίζουν την ομάδα.

Ο Lerman (2001) υποστηρίζει πως οι μαθητές, όταν έχουν διαφορετικές αρχικές ιδέες ως προς το πώς να λύσουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, μπορούν να εργαστούν παραγωγικά στη ζώνη της επικείμενης ανάπτυξής τους. Στο βιβλίο του «Dialogic Inquiry. Towards a Sociocultural Practice and Theory of Education», ο Wells (1999) αναφέρει πως η έννοια της ΖΕΑ πρωτοδιατυπώθηκε από τον Vygotsky και αποτέλεσε ένα πολύτιμο εργαλείο για μεταγενέστερους θεωρητικούς και ερευνητές. Όπως διευκρινίζουν οι Ράπτης & Ράπτη (2013) η Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης αφορά την περιοχή εκείνη των γνωστικών δεξιοτήτων του μαθητευομένου που βρίσκεται σε μία κατάσταση σχετικής ετοιμότητας για ανάπτυξη, εφόσον υπάρχει η διαμεσολάβηση κάποιου είδους βοήθειας από το περιβάλλον του. «Η Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης δεν είναι ένα ανεξάρτητο χαρακτηριστικό ενός ατόμου. Αντίθετα κατασκευάζεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των συμμετεχόντων κατά την κοινή εμπλοκή τους σε συγκεκριμένη δραστηριότητα… Η μάθηση στα πλαίσια της ΖΕΑ εμπλέκει όλες τις πτυχές του μαθητή και οδηγεί στην ανάπτυξη της ταυτότητας καθώς και των δεξιοτήτων και των γνώσεων του μαθητή… Για να διδάξεις πρέπει να είσαι ευαίσθητος στις πρόσφατες κατακτήσεις και το επίπεδο ανάπτυξης των μαθητών και να παρέχεις καθοδήγηση και βοήθεια που τους καθιστά ικανούς να επιτύχουν τους στόχους τους και να αυξήσουν το δυναμικό τους για μελλοντική συμμετοχή» (Wells, 1999).

2.1.4. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Σύμφωνα με τον Davidson (1990), ο ρόλος του δασκάλου στη συζήτηση είναι πολυδιάστατος και στα καθήκοντά του συμπεριλαμβάνονται η παρουσίαση καινούριου υλικού, η διευκόλυνση των δραστηριοτήτων των ομάδων, η ανακεφαλαίωση, η παροχή καθοδήγησης και βοήθειας, η αλληλεπίδραση με τις ομάδες. Όπως επισημαίνει και ο Graham, ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι κρίσιμος καθώς σκοπός του είναι να ξεκινήσει τη συζήτηση και να την ελέγχει, αλλά να μην συμμετέχει – να παραμείνει ουδέτερος, όταν αυτή ρέει. Και οι Cobb, Boufi, McClain & Whitenack (1997) υποστηρίζουν ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να στηρίξουν ενεργά την μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών καθοδηγώντας, και εφόσον χρειάζεται, εισάγοντας νέες μεταστροφές στη συζήτηση. Τονίζουν το ρόλο του δασκάλου στην συμβολική αναπαράσταση των ιδεών των μαθητών και αναγνωρίζουν πως η έναρξη και η καθοδήγηση της ανάπτυξης αναστοχαστικής συζήτησης απαιτεί μεγάλη σοφία και κρίση εκ μέρους των εκπαιδευτικών (Cobb, Boufi, McClain & Whitenack, 1997).

2.1.5. Εργαλεία και μέθοδοι κατά την διδασκαλία

Στο πλαίσιο της διαγνωστικής διδασκαλίας, προτείνεται επίσης η χρήση διαφόρων εργαλείων και μεθόδων (διαγράμματα, παιχνίδια, ερωτήσεις από τους μαθητές, βαθμολόγηση από τους μαθητές, ομαδικές δραστηριότητες, άμεση ανατροφοδότηση κ.α.) προκειμένου να αποκαλυφθούν οι παρανοήσεις αλλά και να προκληθούν γόνιμοι συλλογισμοί στη συνέχεια (Bell κλπ., 1985). Σύμφωνα με τους Ruchti & Bennett (2013) η χρήση των εικονικών αναπαραστάσεων μπορεί να υποστηρίξει τους μαθητές στην ανάπτυξη δεξιοτήτων συλλογισμού, την οικοδόμηση εννοιολογικής κατανόησης, τον εντοπισμό και τη διόρθωση παρανοήσεων και την οικοδόμηση προόδου. Με την οπτικοποίηση ενός προβλήματος, που απεικονίζει τη σκέψης τους, και με τη χρήση ισάξιων ομάδων που θα προβούν σε ουσιαστικές συζητήσεις, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να αναπτύξουν τις μαθηματικές πρακτικές τους και βαθύτερες μαθηματικές αντιλήψεις (Ruchti & Bennett, 2013).

Στο έργο τους, οι Davis και Maher (1997) δείχνουν "πώς οι αναπαραστάσεις μερικές φορές νοητικές, και μερικές φορές σε χαρτί, καθιστούν δυνατή τη σκέψη κάποιας ιδέας που θα μπορούσε διαφορετικά να επισημαίνεται ως « νέα »" (σελ.114). Οι συγγραφείς δείχνουν επίσης, πώς της τάξης καθώς και οι εμπειρίες της καθημερινής ζωής παρέχουν τη βάση για την κατασκευή των αναπαραστάσεων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη μαθηματική επίλυση προβλημάτων.

2.2. Η Έννοια της Διαίρεσης

2.2.1. Εισαγωγή

Ανεπίσημα, η διαίρεση ορίζεται ως η διαδικασία της κατανομής ορισμένων στοιχείων ενός ενιαίου μεγάλου συνόλου σε πολλά μικρότερα σύνολα, καθένα από τα οποία περιέχει ίσο αριθμό τμημάτων. Σε ένα πιο επίσημο επίπεδο, η διαίρεση μπορεί να γίνει αντιληπτή ως η διαίρεση ενός ενιαίου μεγαλύτερου συνόλου σε ισοδύναμα ανεξάρτητα σύνολα με ή χωρίς υπόλοιπο (Reisman, 1977). Διαίρεση είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού, καθώς ως πολλαπλασιασμό αναφερόμαστε σε έναν αριθμό μικρότερων συνόλων ίσου μεγέθους που ομαδοποιούνται σε ένα ενιαίο μεγαλύτερο σύνολο.

Η πράξη της διαίρεσης παρουσιάζει μεγαλύτερη πολυπλοκότητα από τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, όχι μόνο επειδή είναι δύο διακριτές διαδικασίες που παρουσιάζονται στην ίδια την πράξη, αλλά επειδή οι περισσότερες υπολογιστικές της διαδικασίες απαιτούν πολλαπλασιαστικά βήματα και την ικανότητα της εκτίμησης, καθώς και τη χρήση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης για να οδηγηθείς στη λύση.

2.2.2. Οι τύποι της διαίρεσης

Οι δύο κύριες εννοιολογήσεις της διαίρεσης (διαίρεση μέτρησης και διαίρεση μερισμού) και η κατανόηση των τεσσάρων βασικών όρων (διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο και υπόλοιπο) περιλαμβάνουν τα δομικά στοιχεία της διαίρεσης. Σε διαιρέσεις μερισμού ένα μεγαλύτερο στοιχείο είναι χωρισμένο σε ένα καθορισμένο αριθμό ομάδων, αλλά το μέγεθος της κάθε ομάδας είναι άγνωστη. Ενώ η διαίρεση μέτρησης, από την άλλη πλευρά, αναφέρεται σε μία κατάσταση όπου είναι γνωστό το μέγεθος της κάθε ομάδας, αλλά ο αριθμός των ομάδων είναι άγνωστος. Οι τέσσερις βασικοί όροι αναφέρονται στον αριθμό που διαιρείται, ο διαιρέτης, ο οποίος αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ομάδων σε διαιρέσεις μερισμού και τον αριθμό των στοιχείων που θα έχει η κάθε ομάδα σε διαιρέσεις μέτρησης, τα πόσα στοιχεία (π.χ., πηλίκο), και ό, τι έχει απομείνει (π.χ., το υπόλοιπο) (Reisman, 1977).

Όπως αναφέρουν οι η Teresa E. Foley και ο John F. Cawley, από τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση), η διαίρεση είναι η τελευταία που θα εισαχθεί. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να λαμβάνουν το ελάχιστο ποσό της αναλογούμενης εμπειρίας τους στην σχολική τάξη με διαίρεση. Μέσα στη σφαίρα του υπολογισμού, η διαίρεση θεωρείται ότι είναι η πιο δύσκολη από τις αριθμητικές πράξεις και τυπικά έχει το μεγαλύτερο αριθμό των προαπαιτούμενων δεξιοτήτων (Hatfield, Edwards, Bitter & Morrow, 2000). Συμφώνα και με άλλες έρευνες, που μελετήθηκαν κατά την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, υπάρχει η διάκριση μεταξύ του *μαθαίνω* για τη διαίρεση και του *κάνω* διαίρεση. Ως εκ τούτου, προτείνεται ότι οι μαθητές πρέπει να συμμετέχουν σε μια ποικιλία εμπειριών, ώστε να εντρυφήσουν με την έννοια της διαίρεσης ήδη από μικρή ηλικία (Teresa E. Foley and John F. Cawley, 2003).

2.2.3. Ο Αλγόριθμος της κάθετης διαίρεσης

Ο παραδοσιακός αλγόριθμος της κάθετης διαίρεσης είναι ένα γνωστό παράδειγμα, καθώς πολλοί μαθητές τον βρίσκουν ιδιαίτερα δύσκολο να εκτελεστεί με κατανόηση. Μερικά χαρακτηριστικά του παραδοσιακού αλγορίθμου της διαίρεσης δημιουργούν περισσότερες δυσκολίες για τους μαθητές από ότι σε οποιοδήποτε άλλο αλγόριθμο για τις βασικές του λειτουργίες. Για παράδειγμα, σε αντίθεση με άλλες πράξεις, ο παραδοσιακός αλγόριθμος της κάθετης διαίρεσης ξεκινάει από αριστερά προς τα δεξιά, εξετάζοντας και συγκρίνοντας αριθμούς με διαφορετικές ποσότητες και ψηφία με διαφορετική αξία-θέση. Οι απαιτούμενες δεξιότητες εκτίμησης συχνά δημιουργούν άγχος και είναι δύσκολο για μερικούς μαθητές να προσδιορίσουν το μέγεθος των απαντήσεων που γράφουν σε κάθε θέση (Fuson, 2003, Van de Walle, 2001). Η κατάσταση αυτή οδηγεί συχνά τους μαθητές ή και τους εκπαιδευτικούς σε παράλογες μνημονικές φράσεις, για να απομνημονεύσουν την ακολουθία του «Πόσες φορές χωράει - Πολλαπλασιάστε - Φέρτε - Αφαιρέστε κλπ.» Με την απομνημόνευση αυτών των μηχανικών κανόνων, οι μαθητές θα είναι σε θέση να παράγουν σωστές απαντήσεις. Ωστόσο, πολλοί εκπαιδευτικοί και ερευνητές έχουν υποστηρίξει ότι η ουσία του να κάνεις μαθηματικά είναι η διαδικασία της "νοηματοδότησης» και της «ανακάλυψης της γνώσης» (π.χ., Schoenfeld, 1991, Skemp, 1987), και όχι οι παραπάνω μνημονικές και μηχανιστικές φράσεις και προσεγγίσεις, που μόνο συνεισφέρουν σε αυτή τη διαδικασία. Δυστυχώς, φαίνεται ότι μια τέτοια προσέγγιση ψάχνει το δρόμο της μέσα στην σχολική τάξη, όμως συναντά αντιστάσεις από έναν μηχανικό τρόπο διδασκαλίας.

Όπως αναφέρει ο Ji-Eun Lee (2007*)* «μερικά χαρακτηριστικά του αλγορίθμου της διαίρεσης δημιουργούν περισσότερες δυσκολίες στους μαθητές απ' ότι οι άλλοι αλγόριθμοι των βασικών πράξεων. Για παράδειγμα, αντίθετα με τις άλλες πράξεις, ο αλγόριθμος της διαίρεσης ξεκινά με το αριστερό μέρος του αριθμού ή αυτό με τη μεγαλύτερη θεσιακή αξία. Αυτή η κατάσταση οδηγεί συχνά τους μαθητές αλλά και τους δασκάλους σε παράλογες μνημονικές φράσεις. Η απομνημόνευση αυτών των μνημονικών από τους μαθητές μπορεί να οδηγήσει στην παραγωγή σωστών απαντήσεων. Ωστόσο, πολλοί εκπαιδευτικοί επιβεβαιώνουν ότι η ουσία των μαθηματικών είναι η διαδικασία «της κατανόησης του νοήματος» (e.g., Schoenfeld,1991, Skemp, 1987)».

Συγκεκριμένα, μέσω της μελέτης της εκπαιδευτικής βιβλιογραφίας των τελευταίων χρόνων, διαπιστώθηκε ότι η διαίρεση δε δυσκολεύει μόνο τους μαθητές κατά την πρώτη φάση της επαφής τους με το συγκεκριμένο αλγόριθμο αλλά και στη μετέπειτα πορεία τους. Ο παραδοσιακός αλγόριθμος της διαίρεσης είναι η πιο κοινή μέθοδος που διδάσκεται στο δημοτικό σχολείο για να διαιρεθούν οι αριθμοί. Ωστόσο ο αλγόριθμος αυτός προκαλεί προβλήματα σε πολλούς μαθητές τόσο στο δημοτικό όσο και στο γυμνάσιο (Nur Shazwani Nor Arzemia, Pumadevi Sivasubramaniamb, 2010). Για τον τρόπο ενέργειας της διαίρεσης έχει αναπτυχθεί μια διδακτική μέθοδος στην Ολλανδία, η οποία εισήχθη από τον Treffers (1986) και ονομάστηκε προοδευτική σχηματοποίηση. Ωστόσο, παρά την μερική εμπειρική έρευνα που έχει επικεντρωθεί σ’ αυτή τη μέθοδο, η διαίρεση παραμένει μια δύσκολη διαδικασία τόσο για να διδαχθεί όσο και για να τη μάθει κάποιος (Karel Hurts, 2008).

Από την έρευνα που διεξήγαγε ο Ji-Eun Lee (2007*)* προκύπτει μάλιστα ότι πολλοί έχουν δείξει πως οι εναλλακτικοί αλγόριθμοι ή οι αλγόριθμοι που έχουν εφευρεθεί από τους μαθητές είναι πιο στενά συνδεδεμένοι με τους φυσικούς τρόπους επίλυσης των προβλημάτων από τους ίδιους τους μαθητές (Randolph Sherman, 2001) και, τελικά, είναι πιο αποτελεσματικοί στην ενίσχυση των μαθητών για την κατανόηση των αριθμών και των πράξεων (Carroll Porter, 1998? Heuser, 2005). Άλλη έρευνα έχει αποδείξει ότι οι παραδοσιακοί αλγόριθμοι μπορούν λογικά να διδαχθούν αν οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να συμμετάσχουν σε εννοιολογικές δραστηριότητες και να εκτιμήσουν τη σημασία των αλγορίθμων κατά το αρχικό στάδιο, αντί να βασίζονται στη μηχανική απομνημόνευση (Ji-Eun Lee, 2007).

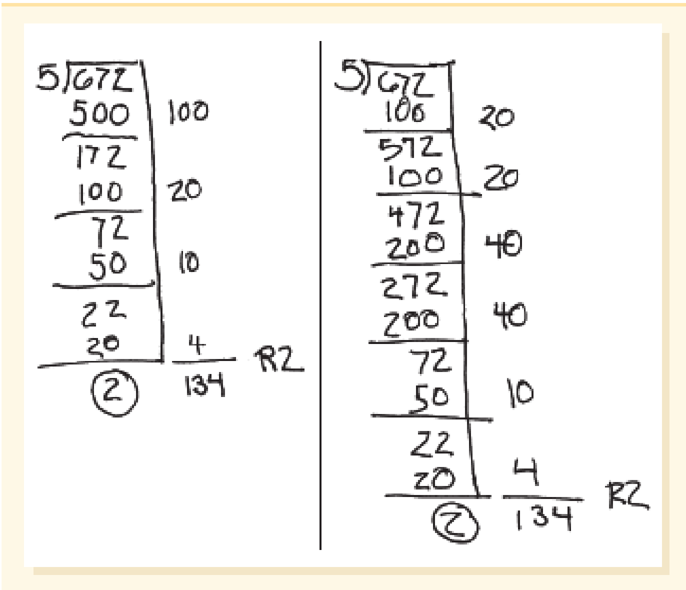
Η κατανόηση της έννοιας της διαίρεσης συχνά συγχέεται με την επιδεξιότητα στη λειτουργία και χρήση του αλγόριθμου, που γίνεται έτσι το μόνο κριτήριο για τον καθορισμό και την αξιολόγηση της κατανόησης του παιδιού σχετικά με αυτήν την έννοια. Αυτός ο τρόπος σύλληψης της διαίρεσης έχει επιπτώσεις στη διδασκαλία καταστάσεων και δεν φαίνεται να βοηθά στην αντιμετώπιση των κύριων δυσκολιών που παιδιά βιώνουν με μία τόσο πολύπλοκη έννοια (Lautert, Spinillo, Correa, 2016).

Υπάρχει η αντίληψη, κυρίως από τους ενήλικες ότι η διαίρεση είναι η πιο επαχθής από τις τέσσερις υπολογιστικές πράξεις, όμως πολλοί είναι οι μαθητές που την βρίσκουν ευκολότερη από τον πολλαπλασιασμό. Οι υπολογιστικές στρατηγικές της διαίρεσης αναπτύσσονται από την Γ΄ Δημοτικού έως και την Ε΄ Δημοτικού. (Van de Walle, Karp, Williams & Wrey, 2010).

Η μεθοδολογική αρχή, στην οποία στηρίζονται τα σχολικά εγχειρίδια κυρίως για την διδασκαλία του αλγόριθμου της διαίρεσης είναι η αρχή του «μοιράσματος» ή η μέθοδος της «ίσης μοιρασιάς». Ενώ η πιο γνωστή στρατηγική στην οποία βασίζεται ο αλγόριθμος, είναι αυτή των επαναλαμβανόμενων αφαιρέσεων και μπορεί να θεωρηθεί ως ένας καλός τρόπος για να καταγράψει με προσέγγιση τον παράγοντα που λείπει με τους αριθμούς να καταγράφονται στη στήλη στα δεξιά κατά τον υπολογισμό της διαίρεσης.

Αυτή μπορεί να είναι η προτιμώμενη στρατηγική για κάποιους μαθητές, κυρίως μαθητές από άλλες χώρες και οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες, όπως αναφέρεται στην παρούσα βιβλιογραφία. Λαμβάνοντας υπόψη την βιβλιογραφία οι μαθητές από διαφορετικές χώρες μαθαίνουν διαφορετικά "πρότυπα-αλγόριθμους", και αυτά αποτιμώνται ως επιτυχημένες επιλογές για να πραγματοποιείται η διαίρεση. Όπως φαίνεται και από τα δύο παραδείγματα στην Εικόνα 4, ένα πλεονέκτημα του τυπικού αλγορίθμου που χρησιμοποιείται στις Ηνωμένες Πολιτείες είναι ότι υπάρχει απόλυτη ευελιξία στους παράγοντες επιλέγονται σε κάθε βήμα της διαδικασίας του. Αυτό είναι σημαντικό για τους μαθητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες, καθώς μπορούν να επιλέξουν τους παράγοντες που ξέρουν και να εργαστούν από εκείνο το σημείο(Van de Walle, Karp, Williams & Wrey, 2013).

Εικόνα 1



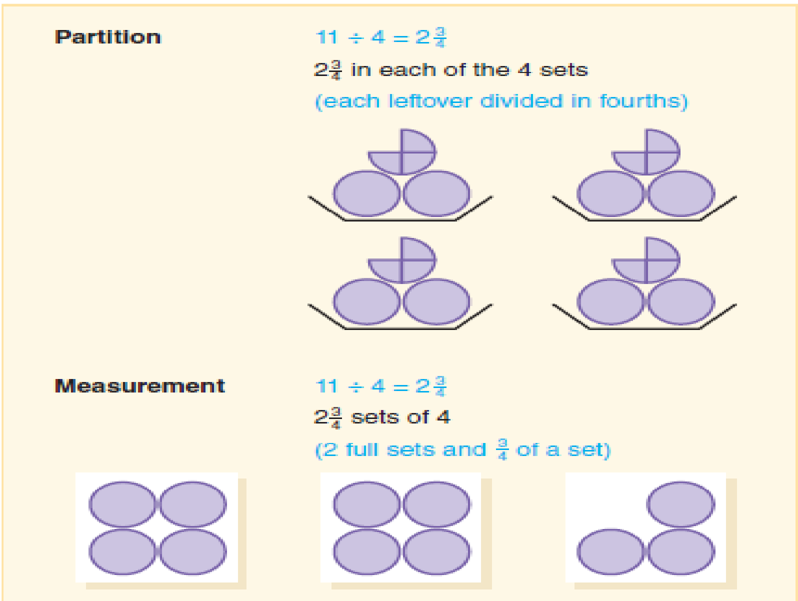
Η εκμάθηση εναλλακτικών αλγορίθμων βοηθάει τα παιδιά να αναπτύξουν μία εννοιολογική κατανόηση και επίσης να αρθρώσουν ένα σκεπτικό που θα χρησιμοποιήσουν για να καταλήξουν σε λύσεις σε προβλήματα διαίρεσης. Όπως αναφέρεται, οι λανθασμένες συλλογιστικές και παρανοήσεις είναι πιο εύκολο να εντοπιστούν και να κατανοηθούν μέσα σε ένα πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων (Marjorie Montague, 2003).

2.2.4. Διαίρεση με υπόλοιπο

Όπως αναφέρουν πολλές έρευνες, οι μαθητές δυσκολεύονται ακόμη περισσότερο στην περίπτωση που η διαίρεση παρουσιάζει υπόλοιπο. Ακόμη κι όταν καταφέρνουν να λύσουν ορθά τον αλγόριθμο της διαίρεσης, δεν είναι απόλυτα βέβαιο ότι έχει κατανοηθεί πλήρως η έννοια του υπολοίπου. Παράλληλα, μεγάλη δυσκολία παρουσιάζεται σε λεκτικά προβλήματα διαίρεσης με υπόλοιπο, στα οποία οι μαθητές πολύ συχνά αδυνατούν να συνδέσουν την έννοια του υπολοίπου με το εννοιολογικό πλαίσιο του προβλήματος.

Πιο συχνά από ότι δε συμβαίνει σε πραγματικές καταστάσεις, η διαίρεση δεν οδηγεί σε ένα απλό ακέραιο αριθμό. Για παράδειγμα, τα προβλήματα με το 6 ως διαιρέτη θα οδηγήσει σε ένα ακέραιο αριθμό μόνο μία φορά από τις έξι. Σε οποιαδήποτε περίπτωση απουσίας του από ένα πλαίσιο, ένα υπόλοιπο μπορεί να αντιμετωπιστεί μόνο με δύο τρόπους: Μπορεί είτε να παραμείνει μια ποσότητα που έχει απομείνει ή να χωριστεί σε κλάσμα. Στην εικόνα 4, η διαίρεση 11÷4 μοντελοποιείται, ώστε να δείξει κλάσμα.

Εικόνα 2



Σε πραγματιστικά πλαίσια, το υπόλοιπο έχει μερικές φορές τρεις επιπλέον επιδράσεις στις απαντήσεις:

1. Το υπόλοιπο απορρίπτεται, αφήνοντας ένα μικρότερο ακέραιο αριθμό ως απάντηση.

2. Το υπόλοιπο μπορεί να "οδηγήσει" την απάντηση στον επόμενο υψηλότερο ακέραιο αριθμό.

3. Η απάντηση στρογγυλοποιείται στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό για ένα κατά προσέγγιση αποτέλεσμα.

Τα ακόλουθα προβλήματα απεικονίζουν τις πέντε διαφορετικές περιπτώσεις που περιγράφηκαν παραπάνω.

1. Έχετε 30 καραμέλες να μοιράσετε δίκαια με 7 παιδιά. Πόσες καραμέλες θα πάρει το κάθε παιδί; Απάντηση: 4 καραμέλες και 2 απομένουν.

2. Κάθε βάζο χωράει 8 ουγγιές του υγρού. Εάν υπάρχουν 46 ουγκιές μέσα σε μία στάμνα, πόσα βάζα θα χρειαστούμε; Απάντηση: 5 βάζα και 6/8 του βάζου. (Κατανέμεται ως κλάσμα)

3. Το σχοινί έχει μήκους 25 μέτρα. Πόσα σχοινιά μήκους 7-μέτρων μπορούμε να πάρουμε; Απάντηση: 3 σχοινιά άλμα. (Απορρίφθηκε)

4. Το πλοίο μπορεί να χωρέσει 8 αυτοκίνητα. Πόσα ταξίδια θα πρέπει να κάνει για να μεταφέρει 25 αυτοκίνητα κατά μήκος του ποταμού; Απάντηση: 4 ταξίδια. (Αναγκάστηκε να επόμενο ακέραιο αριθμό)

5. Έξι παιδιά σχεδιάζουν να μοιραστούν μια τσάντα με 50 τεμάχια τσιχλόφουσκα. Πόσα κομμάτια θα πάρει το κάθε παιδί; Απάντηση: Περίπου 8 κομμάτια για κάθε παιδί. (Με στρογγυλοποίηση, κατά προσέγγιση αποτέλεσμα)

Οι μαθητές δεν θα πρέπει να σκέφτονται το υπόλοιπο ως «ένα απλό υπόλοιπο π.χ. 5» ή «ότι έχει απομείνει ." Η διδασκαλία του τι να κάνεις με το υπόλοιπο πρέπει να είναι κεντρικής σημασίας για τη διδασκαλία σχετικά με διαίρεση. Στην πραγματικότητα, ένα από τα πιο συνηθισμένα λάθη που κάνουν οι μαθητές σε υψηλού επιπέδου διεργασίες είναι να διαιρούν πρώτα και στη συνέχεια να μην δίνουν προσοχή στο πλαίσιο κατά την επιλογή της απάντησή τους. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα 4, απαντώντας με 3 και 1/8 ταξίδια δεν έχει κανένα νόημα (Van de Walle, Karp, Williams & Wrey, 2013).

2.2.5. Μονοψήφιος Διαιρέτης

Συνήθως, ο αλγόριθμος διαίρεσης με μονοψήφιο διαιρέτη εισάγεται στην τρίτη τάξη, και πρέπει να παρέχει τη βάση για τους διψήφιους διαιρέτες που θα ακολουθήσουν στις επόμενες τάξεις. Οι μαθητές στις ανώτερες τάξεις που αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τον αλγόριθμο διαίρεσης μπορούν επίσης να επωφεληθούν από αυτήν την εννοιολογική ανάπτυξη.

Ξεκινώντας με μοντέλα: Παραδοσιακά, αν ήταν να κάνουμε ένα πρόβλημα όπως το 583 ÷ 4 =, θα μπορούσαμε να πούμε, «4 χωράει στο 5 μία φορά.» Αυτό αποτελεί ένα μυστήριο σε πρώτο επίπεδο για τους μαθητές. Πώς μπορούμε απλά να αγνοήσουμε το «83» και έτσι να αλλάξουμε το πρόβλημα; Κατά προτίμηση, επιθυμούμε οι μαθητές να σκεφτούν το 583 ως 5 εκατοντάδες, 8 δεκάδες, και 3 μονάδες, και όχι ως ανεξάρτητα ψηφία 5, 8, και 3. Μια ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα πλαίσιο όπως είναι καραμέλες, οι οποίες ομαδοποιούνται σε κουτιά που περιέχει το ένα 10 καραμέλες και σε ένα χαρτοκιβώτιο που περιέχει δέκα κουτιά (100 καραμέλες). Στη συνέχεια, το πρόβλημα γίνεται ως εξής: Έχουμε 5 χαρτοκιβώτια, 8 κουτιά, και 3 καραμέλες και θέλουμε να μοιραστούν ισομερώς μεταξύ 4 σχολείων. Στο πλαίσιο αυτό, είναι λογικό να μοιράζονται τα χαρτοκιβώτια πρώτα, μέχρι να μην απομείνει τίποτα. Οι καραμέλες που απομένουν «νοούνται εκτός των χαρτοκιβωτίων» ενώ τα κουτιά από μοιράζονται, και ούτω καθεξής. Χρήματα (€100, € 10, και € 1) μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο ίδιο πλαίσιο με παρόμοιο τρόπο.

Η γλώσσα παίζει τεράστιο ρόλο στον εννοιολογικό τρόπο σκέψης που σχετίζεται με τον αλγόριθμο της διαίρεσης. Οι περισσότεροι ενήλικες είναι τόσο εξοικειωμένοι με τη φράση «χωράει στο» που είναι δύσκολο να την παραγκωνίσουν. Για το πρόβλημα 583 ÷ 4, εδώ προτείνονται μερικές γλωσσικές προσεγγίσεις:

- Θέλω να μοιράσω 5 εκατοντάδες, 8 δεκάδες, και 3 μονάδες μεταξύ τεσσάρων ομάδων. Υπάρχουν αρκετές εκατοντάδες για κάθε ομάδα για να πάρει μία εκατοντάδα. Αυτό αφήνει την μία εκατοντάδα, την οποία μπορώ μοιράσω.

- Θα χωρίσω την μία εκατοντάδα σε 10 δεκάδες. Αυτό μου δίνει ένα σύνολο από 18 δεκάδες. Μπορώ να δώσω σε κάθε ομάδα 4 δεκάδες και να περισσέψουν 2 δεκάδες. Δύο δεκάδες, δεν είναι αρκετές για να μοιραστούν στις τέσσερις ομάδες.

- Μπορώ να χωρίσω τις 2 δεκάδες σε 20 μονάδες και να τις προσθέσω με τις 3 που είχα ήδη. Αυτό μας δίνει συνολικά 23 μονάδες. Μπορώ να δώσω 5 μονάδες σε κάθε μία από τις τέσσερις ομάδες. Αυτό με αφήνει με 3 μονάδες ως ένα υπόλοιπο. Συνολικά, έδωσα σε κάθε ομάδα 1 εκατοντάδα, 4 δεκάδες, και 5 μονάδες με 3 μονάδες να απομένουν.

Το παραπάνω σύστημα για τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης δεν είναι εντελώς διαισθητικό. Θα πρέπει να δοθούν στους μαθητές αρκετά λεπτομερείς οδηγίες, για να τους βοηθήσουν να μάθουν να συνδυάζουν τη δίκαιη κατανομή (μοιρασιά) με τα μοντέλα. Προτείνονται από τη βιβλιογραφία τέσσερα βασικά στάδια:

1. Μοιράστε και καταγράψτε τον αριθμό των κομματιών που θα τοποθετήσετε σε κάθε ομάδα.

2. Καταγράψτε τον αριθμό των κομματιών που μοιράστηκαν συνολικά. Πολλαπλασιάστε για να βρείτε τον αριθμό αυτό.

3. Καταγράψτε τον αριθμό των κομματιών που απομένουν. Αφαιρέστε για να βρείτε τον αριθμό αυτό.

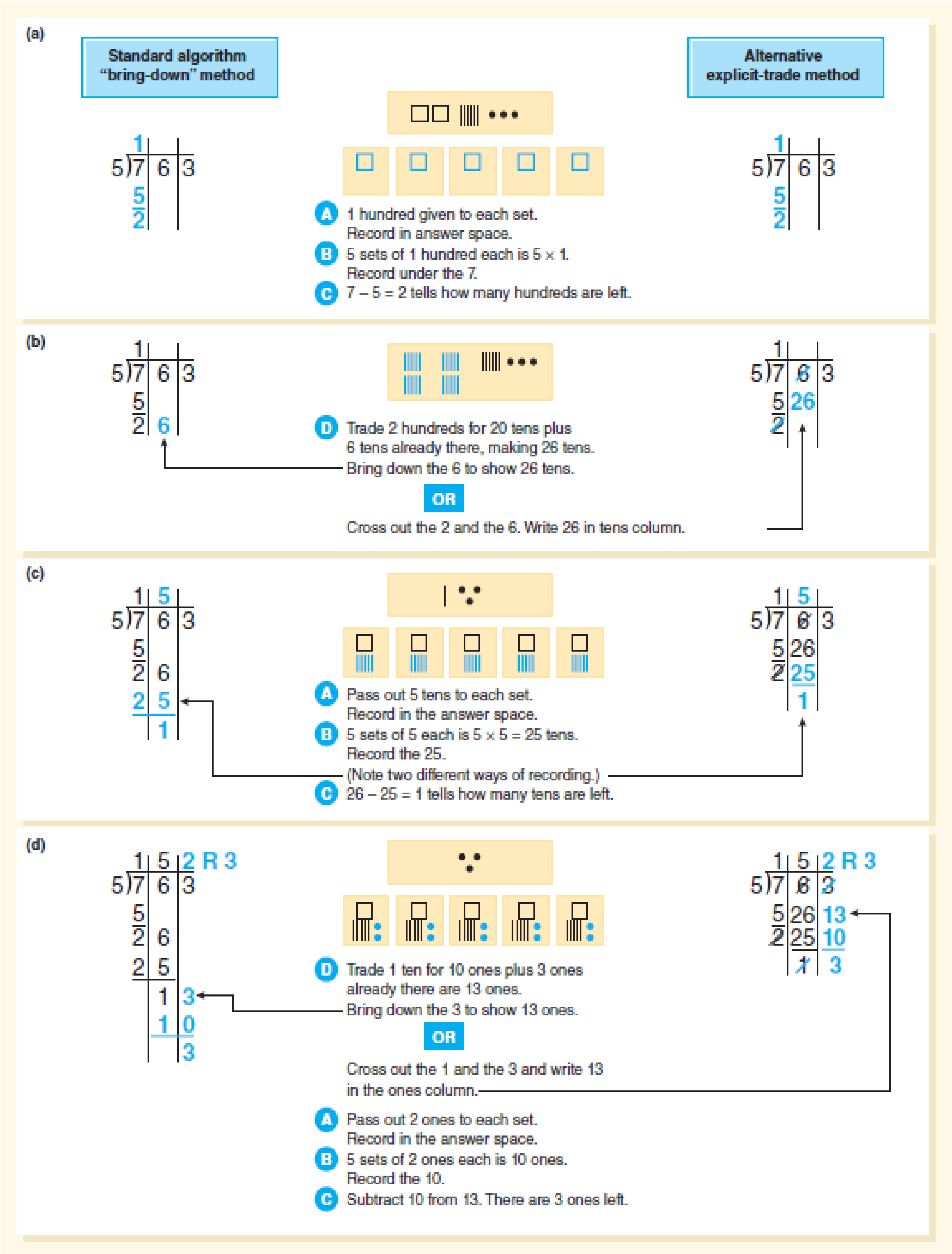
4. Χωρίστε (εάν είναι απαραίτητο) σε μικρότερα κομμάτια, και συνδυάστε τα με οποιαδήποτε άλλα που υπάρχουν ήδη. Καταγράψτε τον νέο αριθμό συνολικά στην διπλανή στήλη.

Όταν οι μαθητές μοντελοποιούν προβλήματα με μονοψήφιο διαιρέτη, τα βήματα 2 και 3 φαίνονται περιττά. Εξηγούμε ότι αυτά τα βήματα θα τους βοηθήσουν πραγματικά, όταν δεν υπάρχουν αριθμοί εκεί για να μετρήσουν (Van de Walle, Karp, Williams & Wrey, 2013).

Στην παρακάτω Εικόνα παρουσιάζονται οι λεπτομέρειες για κάθε βήμα της διαδικασίας που μόλις περιγράφηκε. Στα αριστερά, παρουσιάζεται ο πρότυπος αλγόριθμος της κάθετης διαίρεσης. Στα δεξιά είναι μια πρόταση που ταιριάζει με την πραγματική δράση και τον συνδυασμό των μοντέλων που περιγράφονται παραπάνω και σχετίζονται ρητά με τις ΄΄συναλλαγές΄΄. Αντί για την κάπως περίεργη και γνωστή σε εμάς διαδικασία «κατεβάζω το», βήμα του προτύπου αλγορίθμου, τα μοιραζόμενα κομμάτια διαγράφονται και ξαναγράφονται στη διπλανή στήλη (των δεκάδων), συνδυασμένα με το ψηφίο που θα κατέβαινε κανονικά. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε στη θέση των δεκάδων έναν διψήφιο αριθμό. Στο παράδειγμα που αναγράφεται, οι 2 εκατοντάδες χωρίζονται για 20 δεκάδες, και σε συνδυασμό με τις 6 που υπήρχαν, έγιναν συνολικά 26 δεκάδες. Το 26 είναι, ως εκ τούτου, γραμμένο στη στήλη των δεκάδων.

Οι μαθητές που καλούνται να βγάλουν νόημα από τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης, βρίσκουν αυτήν την εναλλακτική μέθοδο ευκολότερη να ακολουθήσουν. Η μέθοδος αυτή είναι μια εφεύρεση του John Van de Walle και έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία στην Γ΄ έως και την Στ΄ τάξη. Τόσο η μέθοδος αυτή, τόσο και η χρήση των στηλών αξίας-θέσης θα βοηθήσουν με το πρόβλημα της διαχείρισης του μηδενός που εμφανίζεται στη μέση μεταξύ των ψηφίων (βλέπε Εικόνα) (Van de Walle, Karp, Williams & Wrey, 2013).

Εικόνα 3


(a)
Standard algorithm "bring-down" method
Alternative explicit-trade method
A 1 hundred given to each set. Record in answer space.
B 5 sets of 1 hundred each is 5 × 1. Record under the 7.
C 7 – 5 = 2 tells how many hundreds are left.
(b)
D Trade 2 hundreds for 20 tens plus 6 tens already there, making 26 tens. Bring down the 6 to show 26 tens.
OR
Cross out the 2 and the 6. Write 26 in tens column.
(c)
A Pass out 5 tens to each set. Record in the answer space.
B 5 sets of 5 each is 5 × 5 = 25 tens. Record the 25.
(Note two different ways of recording.)
C 26 – 25 = 1 tells how many tens are left.
(d)
D Trade 1 ten for 10 ones plus 3 ones already there are 13 ones. Bring down the 3 to show 13 ones.
OR
Cross out the 1 and the 3 and write 13 in the ones column.
A Pass out 2 ones to each set. Record in the answer space.
B 5 sets of 2 ones each is 10 ones. Record the 10.
C Subtract 10 from 13. There are 3 ones left.

2.2.6. Δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές

Στην περίπτωση της διαίρεσης, τα παιδιά πρέπει να αντιμετωπίσουν τις σταθερές της πράξης που διέπουν αυτή την έννοια: (i) το μέγεθος των τμημάτων πρέπει να είναι η ίδιο για όλα τα μέρη, (ii) το μέγεθος του συνόλου είναι ο αριθμός των τμημάτων που πολλαπλασιάζεται με το μέγεθος των τμημάτων συν το υπόλοιπο, (iii) υπάρχει μια αντίστροφη συν-διακύμανση μεταξύ του μεγέθους των τμημάτων και του αριθμού των τμημάτων, (iv) το σύνολο πρέπει να κατανέμεται πλήρως μέχρι τα υπόλοιπα στοιχεία να είναι ανεπαρκή για περαιτέρω διανομή, και (v) το υπόλοιπο δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με τον αριθμό των τμημάτων ή το μέγεθος των τμημάτων, ανάλογα το είδος της διαίρεσης (μερισμού ή μέτρησης) (Fischbein, Deri, Nello και Marino, 1985, Harel και Cofrey, 1994, Kouba, 1989, Nunes και Bryant, 1996).

Τρεις είναι κυρίως οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατά την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης, όπως εμφανίζονται συχνά κατά κοινή ομολογία στη βιβλιογραφία: (i) δυσκολίες που σχετίζονται με τους τύπους των προβλημάτων (Brown, 1981, Correa, Nunes και Bryant, 1998, Downton, 2009, Fischbein, Deri, Nello και Marino, 1985, Nesher, 1988, Skoumpoudi και Sofikiti, 2009), (ii) δυσκολίες στην κατανόηση της αντίστροφης συν-διακύμανσης μεταξύ των όρων όταν ο διαιρετέος παραμένει σταθερός (Correa, Nunes και Bryant, 1998, Κορνηλάκη και Nunes, 1997, Squire και Bryant, 2002) και (iii) δυσκολίες στην αντιμετώπιση του υπόλοιπου (Carraher και Sleeman, 1991, Campbell και Fraser, 1997, Desforges και Desforges, 1980, Li και Silver, 2000, Silver, 1988, Silver, Shapiro και Deutsch, 1993, Spinillo και Lautert, 2002, 2006).

2.2.7. Δυσκολίες που σχετίζονται με το είδος του προβλήματος διαίρεσης

Δύο τύποι των προβλημάτων διαίρεσης αναφέρονται στη βιβλιογραφία (Fischbein, Deri, Nello και Μαρίνο, 1985, Greer, 1992, Squire και Bryant, 2002): η διαίρεση μερισμού και η διαίρεση μέτρησης. Στα προβλήματα διαίρεσης μερισμού, ένα αρχικό ποσό και τα αριθμητικά μέρη στα οποία διαιρείται το αρχικό ποσό δίνονται ως γνωστά, και αυτό είναι απαραίτητο να βρεθεί είναι το μέγεθος του κάθε τμήματος (παράδειγμα: « ο Charles αγόρασε 15 μολύβια για να δώσει στους τρεις φίλους του. Πόσα μολύβια θα πάρει ο κάθε φίλος; »). Σε προβλήματα διαίρεσης μέτρησης, δίνονται ένα αρχικό ποσό και το μέγεθος του κάθε τμήματος, και είναι απαραίτητο να βρεθεί ο αριθμός των τμημάτων στα οποία το αρχικό ποσό χωρίζεται (παράδειγμα:. " ο Charles αγόρασε 15 μολύβια Θέλει να δώσει τρία μολύβια σε κάθε φίλο. Σε πόσους φίλους θα δώσει τα μολύβια που αγόρασε; » (Lautert, Spinillo και Correa, 2012).

Οι έρευνες που έχουν διεξαθχεί με παιδιά έχουν δείξει ότι τα προβλήματα διαίρεσης μερισμού είναι πιο εύκολα στην επίλυση από ότι τα προβλήματα διαίρεση μέτρησης επειδή περιλαμβάνουν το σχήμα δράσης του μοιράσματος, το οποίο είναι μια έννοια, η οποία τα παιδιά κατανοούν από μικρή ηλικία και έχει τις ρίζες της σε διάφορες κοινωνικές καταστάσεις. Από την άλλη πλευρά, τα μικρά παιδιά φαίνεται να έχουν λιγότερη εμπειρία με προβλήματα διαίρεσης μέτρησης, η οποία φαίνεται να αποκτιέται αργότερα μέσω της επίσημης διδασκαλίας σε σχολικό πλαίσιο.

2.2.8. Δυσκολίες με την αντίστροφη συνδιακύμανση

Τα παιδιά μπορούν να ασχοληθούν με διαφορετικές αριθμητικές καταστάσεις πολύ πριν τους ζητηθεί επισήμως στο σχολείο. Στην περίπτωση της διαίρεσης, η ιδέα του μοιράσματος αναδύεται από πολύ νωρίς, όπως προαναφέρθηκε, και για αυτό το λόγο υπάρχει και μια ισχυρή συσχέτιση μεταξύ της κοινής χρήσης του μερισμού και των αρχικών εννοιών που τα μικρά παιδιά έχουν για την διαίρεση. Όπως αναφέρουν οι Correa, Nunes και Bryant (1998) και οι Nunes και Bryant (1996), η διαίρεση ως πράξη δεν είναι το ίδιο με τη μοιρασιά, αν και η αρχική έννοια της μοιρασιάς, είναι σημαντική, δεν εξασφαλίζει την κατανόηση σχετικά την αντίστροφη συν-διακύμανση μεταξύ των όρων της διαίρεσης.

Σε περιπτώσεις μοιράσματος, ένα παιδί χωρίζει ένα "χ" ποσό σε "y" τμήματα μέχρι αυτά τα τμήματα να χρησιμοποιηθούν και να συμπληρώσουν το αρχικό ποσό που πρέπει να διαιρεθεί, χρησιμοποιώντας έτσι διαδικασίες που περιλαμβάνουν μία-προς-μία αντίδραση. Όμως, όπως αναφέρει ο Piaget (1974), η διαίρεση εμπλέκει το παιδί σε μία-προς-πολλές αντιδράσεις, αφού απαιτεί από το παιδί να ασχοληθεί με τρεις μεταβλητές. Για παράδειγμα, όταν το παιδί ασχολείται με τη διαίρεση λουλουδιών μεταξύ ενός δεδομένου αριθμού δοχείων-βάζων, το παιδί λειτουργεί με τρεις διαφορετικές ποσότητες: το συνολικό αριθμό των λουλουδιών, τον αριθμό των δοχείων και τον αριθμό των λουλουδιών ανά βάζο. Σε μια τέτοια κατάσταση, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε τις σχέσεις μεταξύ του διαιρετέου (λουλούδια) και διαιρέτης (αγγεία), προκειμένου να προσδιοριστεί το πηλίκο (αριθμός των ανθέων σε κάθε βάζο). Οι Squire και Bryant (2002) δείχνουν ότι οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνουν μεταξύ των όρων της διαίρεσης του διαιρετέου, διαιρέτη, και πηλίκου και να κατανοούν το ρόλο του καθενός σε προβλήματα διαίρεσης.

Πολλές από τις δυσκολίες στην επίλυση των προβλημάτων διαίρεσης πηγάζουν από τη μη κατανόηση της αντίστροφης συν-διακύμανσης μεταξύ των όρων της διαίρεσης, δηλαδή, τνη αντίληψη ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των τμημάτων (βάζα) στην οποία το σύνολο διαιρείται (συνολικός αριθμός των ανθέων), τόσο μικρότερο είναι το μέγεθος του κάθε τμήματος. Έτσι, η κατανόηση αυτής αντίστροφης σχέση είναι ένα κρίσιμο βήμα στην κατανόηση της διαίρεσης ως μια διαδικασία που πηγαίνει πέρα από τη δράση του επιμερισμού (Lautert, Spinillo και Correa, 2012).

2.2.9. Δυσκολίες με το υπόλοιπο

Τα παιδιά έχουν δυσκολίες στην κατανόηση του νοήματος του υπολοίπου σε προβλήματα διαίρεσης. Ορισμένες από αυτές τις δυσκολίες οφείλονται στο γεγονός ότι υπάρχουν πολλές διαφορετικές μορφές που αναπαριστούν το υπόλοιπο (για παράδειγμα, το αποτέλεσμα των 50 ÷ 4 μπορεί να εκφραστεί ως 12,5, 12 1/2 ή ακόμη και 12 Υ2) και επίσης λόγω του γεγονότος ότι οι τρόποι που εκφράζουν το υπόλοιπο δεν είναι πάντοτε ενσωματωμένοι στη λύση του προβλήματος (Li και Silver, 2000, Silver, 1988, Silver, Mukhopadhyay και Gabriele, 1992, Silver, Shapiro και Deutsch, 1993).

Άλλες έρευνες έδειξαν ότι, κατά την διαδικασία επίλυσης προβλημάτων διαίρεσης υπήρχε μία τάση να αφαιρείται το υπόλοιπο τελείως από τη διαδικασία επίλυσης (Selva, 1998). Τα δεδομένα στη συγκεκριμένη έρευνα έδειξαν ότι το υλικό που χρησιμοποιείται (μολύβι και χαρτί ή αντικείμενα) επηρέασε τον τρόπο που τα παιδιά αντιμετωπίζουν το υπόλοιπο, κυρίως οι μαθητές έξι ετών, για τους οποίους η ιδέα της κατανομής του υπολοίπου μεταξύ των μερών σχετίζονταν περισσότερο με τη χρήση του μολυβιού και του χαρτιού από άλλα στερεά αντικείμενα.

Έτσι, η μη κατανόηση της αντίστροφης συν-διακύμανσης και οι ακατάλληλοι τρόποι αντιμετώπισης του υπόλοιπου φαίνεται να είναι η αιτία για τις κύριες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά κατά την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης. Κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί, αν τα παιδιά θα μπορούσαν να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες και να αναπτύξουν μια κατανόηση της διαίρεσης, αν είχαν μια πιο σταθερή εμπειρία σε καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων στις οποίες οι αμετάβλητες αρχές της διαίρεσης γίνονταν ρητά κατανοητές σε αυτά.

Για παράδειγμα, οι καταστάσεις για την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης θα μπορούσαν να συνοδεύονται από συζητήσεις και εξηγήσεις σχετικά με το ρόλο του υπολοίπου, τη σημασία της διατήρησης της ισότητας των μερών και την αντίστροφη συν-διακύμανση μεταξύ του μεγέθους των τμημάτων και τον αριθμό των τμημάτων. Αυτή η ιδέα δοκιμάστηκε σε μια μελέτη παρέμβασης που αφορούσε τα παιδιά του δημοτικού σχολείου οι οποίοι αντιμετώπιζαν δυσκολίες με την έννοια της διαίρεσης. Η προτεινόμενη παρέμβαση βασίστηκε στο να κάνει διακριτές στο παιδί τις αμετάβλητες αρχές που διέπουν την έννοια της διαίρεσης

Το βασικό συμπέρασμα που προκύπτει από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας είναι ότι τα παιδιά μπορούν να ξεπεράσουν τις δυσκολίες τους σχετικά με την έννοια της διαίρεσης, όταν οι αμετάβλητες αρχές στις οποίες βασίζεται αυτή η έννοια γίνουν διακριτές και κατανοητές σε αυτά και συσχετιστούν με τα λάθη τους κατά την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης (Lautert, Spinillo και Correa, 2012).

2.2.10. Στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων διαίρεσης πριν τη διδασκαλία

Πριν από την τρίτη τάξη, οι μαθητές περιορίζονται σε προ-αλγοριθμικές στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης. Οι προ-αλγοριθμικές στρατηγικές περιλαμβάνουν τον σχεδιασμό εικόνων ή πινάκων, τη χρήση του πολλαπλασιασμού ως την αντίστροφη πράξη της διαίρεσης, καθώς οι μαθητές έχουν γνώση της προπαίδειας ή την επαναλαμβανόμενη αφαίρεση. Με την εισαγωγή στον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης, οι μαθητές της τρίτης δημοτικού διευρύνουν την γνωστική τους βάση σε στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης. Το πώς οι μαθητές βλέπουν και να κατανοούν τα προβλήματα μπορεί να αποδειχθεί από το πώς θα λύσουν τα προβλήματα. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να αναλύσουν τον τρόπο που οι μαθητές θα λύσουν τα προβλήματα, ώστε να καταλάβουν πού κάνουν λάθη. Με αυτόν τον τύπο ανάλυσης, οι εκπαιδευτικοί θα είναι σε καλύτερη θέση να διορθώσουν τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών τους και να μπορέσουν οι μαθητές να είναι επιτυχείς στην επίλυση προβλημάτων (Ashlock, 1994).

Τα παιδιά στις μέρες μας είναι αναμενόμενο να παρατηρούν μοτίβα και σχέσεις, έτσι ώστε να κατανοούν τις διασυνδέσεις μεταξύ των αριθμών και των διαδικασιών και να αναπτύσσουν μία «αίσθηση» για τους αριθμούς, η οποία αναφέρεται συχνά ως «αριθμητική αίσθηση» και είναι ευρέως πλέον διαδεδομένη σαν όρος στην διεθνή βιβλιογραφία. Η «αριθμητική αίσθηση» αναφέρεται ως μία αντίδραση του παιδιού, η οποία εμπεριέχει μιας μορφής προσαρμοστικότητα και ανακαλυπτικότητα σε υπολογιστικές στρατηγικές, που δίνουν έμφαση σε υπολογιστικές διαδικασίες, που έχουν διδαχθεί στο παρελθόν χωρίς τη χρήση σκέψης (Anghileri, 2001).

Η «αριθμητική αίσθηση» περιέχει έναν τρόπο σκέψης, ο οποίος δίνει τη δυνατότητα στα παιδιά να αναγνωρίζουν σημαντικές σχέσεις μεταξύ των αριθμών, όπως για παράδειγμα το 48 δεν είναι μόνο το $40 + 8$, αλλά και το $50 – 2$, και σίγουρα το 4×12, κλπ. Ο τρόπος με τον οποίο σχετίζονται οι αριθμοί ο ένας με τον άλλο, άλλα και οι δυνατότητες που παρουσιάζονται για διαφορετικές αναπαραστάσεις, καθώς και οι σημασίες που μπορούν να σχετιστούν με τις διαδικασίες, μπορούν να παίξουν ένα καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση συνδέσεων, οι οποίες θα είναι κρίσιμές για τη δημιουργία αυτής της «αριθμητικής αίσθησης».

Τα πρόσφατα ευρήματα που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία, αναφέρουν ότι οι μαθητές δημιουργούν διαφορετικά ενστικτώδη μοντέλα για το πώς επιλύουν σε πρώτη φάση προβλήματα διαίρεσης. Ορισμένες από αυτές τις στρατηγικές είναι οι εξής:

- ✓ Απευθείας μέτρηση

- ✓ Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση
- ✓ Επαναλαμβανόμενη αφαίρεση
- ✓ Πολλαπλασιαστικές προσεγγίσεις κ.α. (Mulligan και Mitchelmore,1997)

Αυτές οι ερμηνείες δεν μπορούν να αγνοηθούν, αφού μπορούν να παρουσιάσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών με μία προσέγγιση, η οποία διαφέρει από τις επίσημες. Έτσι, οι μαθητές διαμορφώνουν σε αρχικό στάδιο πολύ ισχυρούς αλγορίθμους, οι οποίοι έρχονται σε αντιδιαστολή με τους παραδοσιακούς αλγορίθμους που διδάσκονται στη σχολική αίθουσα. Αν αξιολογηθούν σωστά, μπορούν να βρεθούν οι συνιστώσες, ώστε αυτές οι πρώιμες ιδέες των μαθητών να αποτελέσουν το γόνιμο έδαφος και τα θεμέλια, όπου θα καθίσουν οι επόμενες γνώσεις και διαδικασίες (Anghileri, 2001).

Ακόμα κι αν πολλοί ενήλικες πιστεύουν ότι η διαίρεση είναι η πιο επαχθής από τις υπολογιστικές πράξεις, κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι είναι πολύ πιο εύκολη από τον πολλαπλασιασμό. Οι στρατηγικές υπολογισμού της διαίρεσης αναπτύσσονται από την τρίτη έως και την πέμπτη τάξη (Van de Walle, 2013).

Υπενθυμίζεται ότι υπάρχουν δύο έννοιες για την διαίρεση. Πρώτον, υπάρχει η διαίρεση μερισμού ή η ιδέα της ίσης μοιρασιάς, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά από το παρακάτω πρόβλημα:

Η τσάντα έχει 783 ζελεδάκια και η Eileen και οι 4 φίλες της θέλουν να τα μοιραστούν εξίσου. Πόσα ζελεδάκια η Eileen και καθεμία από τις φίλες της θα πάρει;

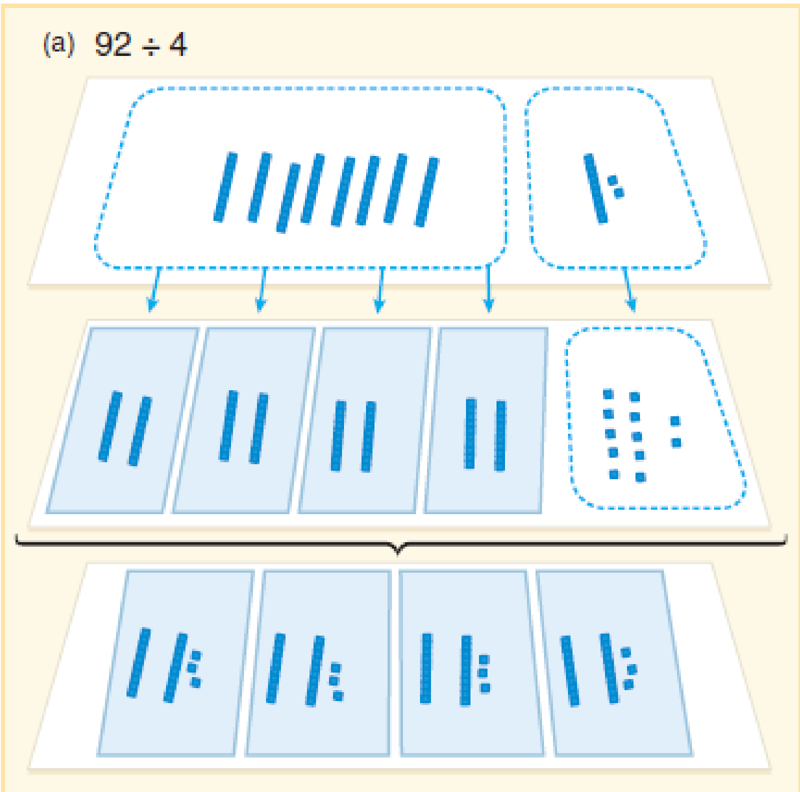
Στη συνέχεια, υπάρχει η έννοια της διαίρεσης μέτρησης ή της επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης:

Ο Jumbo ο ελέφαντας αγαπά τα φιστίκια. Ο προπονητής του έχει 625 φιστίκια. Αν δίνει στον Jumbo 20 φιστίκια κάθε μέρα, πόσες μέρες θα διαρκέσουν τα φιστίκια;

Οι μαθητές θα πρέπει να κληθούν να λύσουν και τα δύο είδη προβλημάτων. Ωστόσο, τα προβλήματα ίσης μοιρασιάς είναι συχνά πιο εύκολα στη λύση τους με βάση τον χωρισμό των δεκάδων. Επιπλέον, ο κλασσικός αλγόριθμος της διαίρεσης είναι χτισμένος στην ιδέα του μερισμού. Τελικά, οι μαθητές θα αναπτύξουν στρατηγικές που θα ισχύουν και για τους δύο τύπους προβλημάτων διαίρεσης, ακόμη και όταν η διαδικασία τους δεν ταιριάζει με τη δράση του πλαισίου (Van de Walle, 2013).

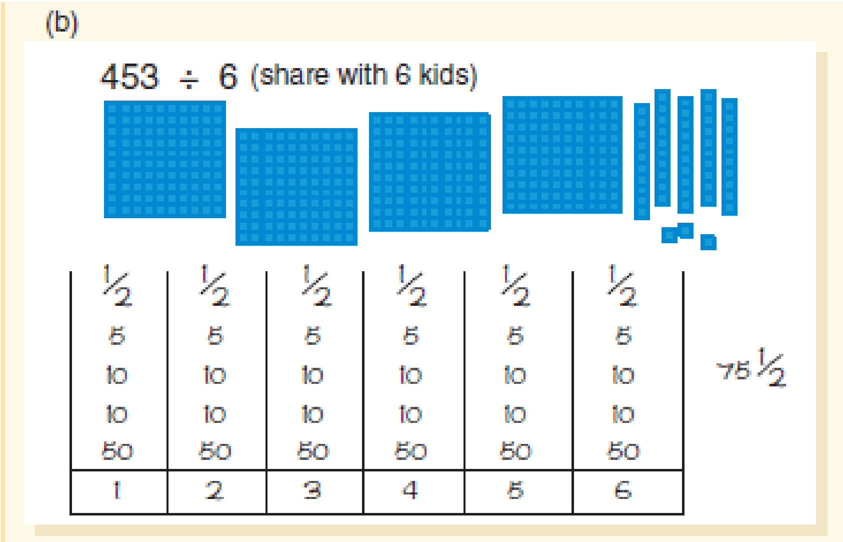
Η παρακάτω εικόνα (Εικόνα 4) δείχνει στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές της Γ' Δημοτικού για την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης. Το πρώτο παράδειγμα δείχνει την επίλυση της διαίρεσης 92÷4 με τη χρήση του χωρισμού των δεκάδων και μιας διαδικασία μοιρασιάς. Η δεκάδα χωρίζεται σε 10 μονάδες όταν δεν μπορεί να κατανεμηθεί σε κάποια ομάδα. Στη συνέχεια, οι 12 μονάδες διανέμονται, με αποτέλεσμα το κάθε σετ να έχει 23 μονάδες. Αυτό το μοντέλο-προσέγγιση με που βασίζεται στο χωρισμό των δεκάδων είναι αρκετά εύκολο να κατανοηθεί και να χρησιμοποιηθεί, ακόμα και για τους μαθητές της τρίτης τάξης.

Εικόνα 4



Στο επόμενο σχήμα (Εικόνα 2), οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν το παραπάνω μοντέλο αλλά σχηματίζουν ένα «σχεδιάγραμμα» με έξι στήλες. Αφού διαπίστωσε ότι δεν υπάρχουν αρκετές εκατοντάδες για κάθε ομάδα, χωρίζει τις 3 εκατοντάδες στο μισό, βάζοντας 50 σε κάθε στήλη. Αυτό αφήνει με υπόλοιπο μία 1 εκατοντάδα, 5 δεκάδες και 3 μονάδες. Μετά από το ΄΄σπάσιμο΄΄ της εκατοντάδας σε δεκάδες (τώρα υπάρχουν 15 δεκάδες), δίνει 20 σε κάθε μία ομάδα, σημειώνοντας 2 δεκάδες σε κάθε στήλη. Τώρα έχουν μείνει 3 δεκάδες και 3 μονάδες, ή 33. Οι μαθητές γνωρίζουν ότι το 5 × 6 μας δίνει 30, έτσι δίνει σε κάθε στήλη 5, αφήνοντάς 3 μονάδες. Τέλος, οι 3 μονάδες χωρίζονται στη μέση και γράφονται σε κάθε στήλη.

Εικόνα 5



1	2	3	4	5	6
½	½	½	½	½	½
5	5	5	5	5	5
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
50	50	50	50	50	50

Μία επιπλέον άτυπη στρατηγική που χρησιμοποιείται από τους μαθητές παρουσιάζεται το παρακάτω σχήμα (Εικόνα 3). Οι μαθητές για την επίλυση ενός προβλήματος μερισμού χρησιμοποιούν μία διαδικασία καταμέτρησης. Στην ουσία, θέλουν να βρουν πόσα οκτάρια χωράνε στο 143. Αρχικά οι μαθητές πραγματοποιούν εικασίες. Πολλαπλασιάζοντας το 8 πρώτα με το 10, στη συνέχεια με το 20 (η εργασία αυτή δεν φαίνεται), και στη συνέχεια με το 14. Οι μαθητές γνωρίζουν και κατανοούν ότι η απάντηση είναι περισσότερο από 14 και λιγότερο από 20. Αυτή η σκέψη τους οδηγεί στην επανεξέταση του προβλήματος, ως εξής: *Πόσα οχτάρια χωράνε στο 100 και πόσα οχτάρια στο 40;* (Van de Walle, 2013).

Εικόνα 6

(c)

143 jelly beans shared with 8 kids

Try 14 × 8 → 112

12 groups of 8 is 96.
12 groups in 100 leaves 4.
5 groups of 8 is 40.
And 3 more left over.
12 + 5 is 17 with 7 left.

Εξετάζοντας τα δύο πρώτα παραπάνω παραδείγματα (a) και (b) παρατηρούμε πώς η χρήση που βασίζεται στον χωρισμό και στην επαναδιανόμη της δεκάδας τείνει να αναπτύξει ένα μοντέλο-προσέγγιση προσανατολισμένο στο σύστημα αρίθμησης και στην αξία θέσης των εκατοντάδων, στη συνέχεια, των δεκάδων, και τέλος των μονάδων. Αν και αυτό είναι καλό υπόβαθρο για τον τυπικό αλγόριθμο της διαίρεσης, αυτό δεν βοηθά την ανάπτυξη στρατηγικών για τους τέλειους αριθμούς που είναι επίσης αρκετά χρήσιμες. Στο παράδειγμα (c), οι μαθητές χρησιμοποιούν μια πολλαπλασιαστική προσέγγιση. Στην ουσία, προσπαθούν να ανακαλύψουν, "Πόσες φορές το 8 θα είναι κοντά στο 143 με το να αφήνει υπόλοιπο λιγότερο από 8;"

Συνοψίζοντας, αυτού του είδους οι άτυπες στρατηγικές που χρησιμοποιούνται στη διαίρεση, αρκετές φορές μπορεί να μην είναι αποτελεσματικές, παρόλα αυτά μας αποκαλύπτουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών και ιδίως όταν πρόκειται για προβλήματα διαίρεσης. Μάλιστα, οι στρατηγικές της καταμέτρησης και της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης κρίνονται πολλές φορές ανεπαρκείς όταν οι μαθητές εμπλέκονται με μεγάλους αριθμούς, αποτελούν μία στέρεα βάση για τις στρατηγικές που θα οικοδομήσουν αργότερα (Anghileri, 2001). Εξετάζοντας και την οπτική του δασκάλου, οι άτυπες στρατηγικές επίλυσης, βοηθούν τον εκπαιδευτικό, αφού μπορεί να εκμαιεύσει τον τρόπο σκέψης του μαθητή και έχοντας τον ως αφετηρία, μπορεί να χτίσει πάνω σε αυτή πιο αποτελεσματικές στρατηγικές.

2.3. Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών της Διδακτικής Ενότητας

Λέγοντας Αναλυτικό Πρόγραμμα, ο νους μας δεν πηγαίνει συνήθως καταρχήν στη διαδικασία σύνταξής του αλλά κυρίως στο αποτέλεσμα, στο προϊόν αυτής της διαδικασίας. Σύμφωνα δηλαδή με την κοινότερη αντίληψη το Αναλυτικό Πρόγραμμα είναι ένα εργαλείο το οποίο χρησιμοποιεί ο εκπαιδευτικός στην καθημερινή του πράξη, ένα εργαλείο που του χρησιμεύει ως επαγγελματική πυξίδα και του λέει τι πρέπει να κάνει και πότε πρέπει να το κάνει. Ένα Αναλυτικό Πρόγραμμα δεν γράφεται σχεδόν ποτέ εξαρχής ολόκληρο, αλλά συμπληρώνεται, βελτιώνεται ή αναμορφώνεται. Για αυτό και δεν μιλάμε ποτέ σχεδόν για διαδικασία σύνταξης Αναλυτικού Προγράμματος, αλλά για διαδικασία βελτίωσης, αναμόρφωσης και σε περίπτωση ριζικών αλλαγών για διαδικασία μεταρρύθμισης των Αναλυτικών Προγραμμάτων.

Ένας γενικός ορισμός του Αναλυτικού Προγράμματος οποιασδήποτε μορφής θα μπορούσε να είναι ο εξής: ένα Αναλυτικό Πρόγραμμα είτε παραδοσιακού είτε νέου τύπου είναι το αποτέλεσμα και το προϊόν διαδικασιών σχεδιασμού και σύνταξης ενός γενικού πλαισίου μακροπρόθεσμης οργάνωσης της διδασκαλίας, που γίνεται σε διάφορα επίπεδα και με διαφορετικό κατά περίπτωση βαθμό εγκυρότητας και νομιμότητας.

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα αποτελεί την «αχίλλειο πτέρνα» οποιασδήποτε εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης. Τα τελευταία χρόνια έχει γίνει συνείδηση και στη χώρα μας αυτή η πραγματικότητα, όπως αποδεικνύεται όχι μόνον από τις έντονες συζητήσεις αλλά και από τις προσπάθειες για αναμόρφωση τόσο των Αναλυτικών Προγραμμάτων όσο και των σχολικών εγχειριδίων. Μόλις πριν από δύο περίπου δεκαετίες έφτασε στην Ελλάδα αυτή η προβληματική, όταν ίσως σε άλλες χώρες η συζήτηση οδηγούνταν σε αδιέξοδο. Η αναμόρφωση του Αναλυτικού Προγράμματος θα σήμαινε την πραγματοποίηση της εκπαιδευτικής μεταρρύθμισης και την αναβάθμιση του σχολείου, η οποία θα έπρεπε να οδηγήσει στη βελτίωση της κοινωνίας (Βρεττός & Καψάλης, Αθήνα 1999).

Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του 2003 για τα Μαθηματικά ο σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών εντάσσεται στους γενικότερους σκοπούς της Εκπαίδευσης και αφορά τη συμβολή στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του μαθητή και την επιτυχή κοινωνική ένταξή του, εφόσον τα Μαθηματικά:

- Ασκούν τον μαθητή στην μεθοδική σκέψη, στην ανάλυση, στην αφαίρεση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες και τον διδάσκουν να διατυπώνει τα διανοήματά του με τάξη, σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια.
- Αναπτύσσουν την παρατηρητικότητα, την προσοχή, τη δύναμη αυτοσυγκέντρωσης, την επιμονή, την πρωτοβουλία, τη δημιουργική φαντασία, την ελεύθερη σκέψη, καλλιεργούν την αίσθηση της αρμονίας, της τάξης και του ωραίου και διεγείρουν το κριτικό πνεύμα.
- Είναι απαραίτητα στην καθημερινή ζωή και ιδιαίτερα στο χώρο εργασίας αλλά και για την ανάπτυξη και εξέλιξη των άλλων επιστημών και ιδιαίτερα της Τεχνολογίας, της Οικονομίας και των Κοινωνικών Επιστημών.

Ως ειδικοί σκοποί της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό αναφέρονται:

- Η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων.
- Η καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας.
- Η κατανόηση στοιχειωδών Μαθηματικών μεθόδων.
- Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία.
- Η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων.
- Η ανάδειξη της δυνατότητας εφαρμογής και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών.
- Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης (ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών).
- Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά.

Συγκεκριμένα, το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του 2003 για τα Μαθηματικά, όσον αφορά τη διδασκαλία του μαθήματος για την Γ’ Δημοτικού, ξεκινά τη στοχοθεσία του με τον θεματικό άξονα «Επίλυση Προβλημάτων» και ακολουθεί ο θεματικός άξονας «Αριθμοί και πράξεις». Στην ενότητα 9 «Αριθμοί μέχρι το 10.000 – Κλάσματα και δεκαδικοί – Πράξεις - Γεωμετρία», που μάλιστα αποτελεί τη τελευταία ενότητα του σχολικού εγχειριδίου, προτείνεται να αφιερωθούν συνολικά 15 διδακτικές ώρες από τις 120 ώρες που είναι ο συνολικός διδακτικός χρόνος για το μάθημα στη διδασκαλία στην εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της διαίρεσης. Αναλυτικότερα, οι μαθητές καλούνται με μία σειρά ενδεικτικών δραστηριοτήτων να μπορούν:

- Να πραγματοποιούν οριζόντιες γραπτές διαιρέσεις (με αντιστροφή της προπαίδειας) καθώς και προφορικές διαιρέσεις.
- Να επιλύουν προβλήματα διαίρεσης με την χρήση εμπειρικών μεθόδων αξιοποιώντας προηγούμενες γνώσεις τους.
- Να συγκροτούν τον αλγόριθμο της διαίρεσης με τη χρήση των άλλων αριθμητικών πράξεών (πρόσθεση, διαδοχικές αφαιρέσεις).
- Να εξοικειώνονται με δραστηριότητες που παραπέμπουν στην διαίρεση.

Πιο συγκεκριμένα η εισαγωγή στον κάθετο αλγόριθμο της διαίρεσης πραγματοποιείται στο κεφάλαιο 56 με τίτλο Διαιρέσεις (2), ‘όπου σύμφωνα με το βιβλίο Δασκάλου οι στόχοι που τίθενται είναι οι παρακάτω.

Οι βασικοί στόχοι που επιδιώκονται με αυτό το κεφάλαιο είναι οι μαθητές να μπορούν να:

➢ Εφαρμόζουν την πράξη της διαίρεσης σε καθημερινές καταστάσεις όπου η διαίρεση εμφανίζεται με τη μορφή μερισμού ή μέτρησης.

➢ Εκτελούν οριζόντιες διαιρέσεις με μονοψήφιο ή διψήφιο διαιρέτη.

➢ Έρθουν σε μία πρώτη επαφή και να μάθουν το σύμβολο (τις δύο κάθετες γραμμές) του γραπτού αλγόριθμου της διαίρεσης.

➢ Μάθουν τους όρους πηλίκο και υπόλοιπο και να τους αντιστοιχίζουν στους κατάλληλους αριθμούς μίας διαίρεσης.

➢ Προσεγγίζουν τον διαιρετέο με διαδοχικά πολλαπλάσια του διαιρέτη.

➢ Περιορίζουν με ανισότητες το διαιρετέο μέσα σε δύο διαδοχικά πολλαπλάσια του διαιρέτη.

Σε μία προσπάθεια σύνθεσης όλων των παραπάνω στόχων που αφορούν τη διδασκαλία του γραπτού αλγορίθμου της διαίρεσης, θα μπορούσαμε να αναφέρουμε σαν προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα (ΠΜΑ), οι μαθητές να μπορούν να αναπτύσσουν και να εφαρμόζουν το αλγόριθμο της διαίρεσης με μονοψήφιο διαιρέτη, χρησιμοποιώντας μία ποικιλία από στρατηγικές, μέσα και αναπαραστάσεις.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} : ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

6.1. Η πειραματική έρευνα

Το βασικότερο χαρακτηριστικό της πειραματικής έρευνας είναι ότι οι ερευνητές σκοπίμως ελέγχουν και μπορούν να χειριστούν τις συνθήκες που προσδιορίζουν τις εκδηλώσεις στις οποίες ενδιαφέρονται, εισαγάγουν μια παρέμβαση και μετρούν τη διαφορά που κάνει. Ένα πείραμα περιλαμβάνει μια αλλαγή στην τιμή μιας μεταβλητής, η οποία λέγεται η ανεξάρτητη μεταβλητή - και παρατηρώντας την επίδραση αυτής της αλλαγής σε μια άλλη μεταβλητή - που ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή. Χρησιμοποιώντας ένα σταθερό σχέδιο, η πειραματική έρευνα μπορεί να είναι επιβεβαιωτική, και επιδιώκει να υποστηρίξει ή να μην υποστηρίξει μια μηδενική υπόθεση, ή διερευνητική, ανακαλύπτοντας τις επιδράσεις ορισμένων μεταβλητών. Μια ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η μεταβλητή εισόδου, ενώ η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η μεταβλητή αποτελέσματος ή το αποτέλεσμα. Σε μία πειραματική έρευνα , το posttest μετρά την εξαρτημένη μεταβλητή, και οι ανεξάρτητες μεταβλητές απομονώνονται και ελέγχονται προσεκτικά.

6.1.1. Οι βασικοί παράγοντες σε μία πειραματική έρευνα

Οι βασικοί παράγοντες σε μία πειραματική έρευνα είναι οι εξής:

- την τυχαία κατανομή του συνόλου σε δύο συμφωνημένες ομάδες (ομάδα ελέγχου και πειραματική ομάδα), με την αρχική μέτρηση του μεγέθους, ώστε να διασφαλιστεί ότι ήταν η ίδια και για τις δύο ομάδες .
- τον προσδιορισμό των βασικών μεταβλητών.
- τον έλεγχο των βασικών μεταβλητών (όμοια σε κάθε ομάδα).
- τον αποκλεισμό όλων των άλλων μεταβλητών.
- την παροχή ειδικής αγωγής (η παρέμβαση) προς την πειραματική ομάδα, ενώ παράλληλα διατηρείται σταθερή κάθε άλλη μεταβλητή για τις δύο ομάδες.
- την τελική μέτρηση και σύγκριση της απόδοσης και της ανάπτυξης της

ομάδας ελέγχου και της πειραματικής ώστε να διαπιστώσουμε τις διαφορές από την προσμέτρηση των αποτελεσμάτων (pretest-posttest).

- η σύγκριση μιας ομάδας με την άλλη.
- το στάδιο της γενίκευσης - ότι αυτή η νέα παρέμβαση βελτιώνει την απόδοση και την ανάπτυξη υπό ένα δεδομένο σύνολο συνθηκών.

Στις πειραματικές έρευνες, οι ερευνητές θα πρέπει να παραμένουν σχετικά απόμακροι από τους συμμετέχοντες, φέρνοντας ένα βαθμό αντικειμενικότητας στην έρευνα (Robson 2002: 98). Οι επιδράσεις του παρατηρητή μπορεί πολλές φορές να στρεβλώσουν το πείραμα, για παράδειγμα οι ερευνητές μπορεί να καταγράφουν με ασυνέπεια, ή ανακριβώς, ή επιλεκτικά, ή, λιγότερο συνειδητά, και τα παραπάνω μπορούν να έχουν επίπτωση επί του πειράματος. Ακόμη, οι αντιδράσεις των συμμετεχόντων μπορεί να στρεβλώσουν το πείραμα, γεγονός που μπορεί να οφείλεται απλά στη παρουσία του ερευνητή σε αυτό, παρά αυτό που το ίδιο το πείραμα κάνει. Έτσι, η παρουσία μπορεί να είναι αρκετή για να μεταβάλει τη συμπεριφορά των συμμετεχόντων (Louis Cohen, Lawrence Manion και Keith Morrison, 2007).

6.1.2. Σχεδιασμός σε εκπαιδευτικές πειραματικές έρευνες

Υπάρχουν πολλά διαφορετικά είδη πειραματικών σχεδιασμών, για παράδειγμα:

- το ελεγχόμενο πείραμα σε συνθήκες εργαστηρίου (the true experiment): δύο ή περισσότερες ομάδες.
- το πεδίο ή to οιονεί-πείραμα σε φυσικό χώρο και όχι στο εργαστήριο, όπου οι μεταβλητές απομονώνονται, ελέγχονται και χειραγωγούνται.
- το φυσικό πείραμα στο οποίο δεν είναι δυνατή η απομόνωση στις μεταβλητές ελέγχου.

Το εργαστηριακό πείραμα (το κλασικό πραγματικό πείραμα) διεξάγεται σε ειδικά διαμορφωμένο, τεχνητό περιβάλλον, έτσι ώστε οι μεταβλητές να μπορούν να απομονωθούν, να ελέγχθουν και χειραγωγηθούν. Το πείραμα πεδίου είναι παρόμοιο με το εργαστηριακό πείραμα, εκτός του ότι οι μεταβλητές είναι απομονωμένες, ελέγχονται και χειραγωγούνται, αλλά η ο χώρος διεξαγωγής είναι ο πραγματικός κόσμος και όχι ένας τεχνητά κατασκευασμένος κόσμος του εργαστηρίου. Μερικές φορές δεν είναι δυνατόν, επιθυμητό ή ηθικό να δημιουργηθεί ένα εργαστηριακό πείραμα ή πείραμα πεδίου.

Στο περίγραμμα της έρευνας που ακολουθεί χρησιμοποιούμε σύμβολα και συμβάσεις από τους Campbell και Stanley (1963):

- ✓ Το X αντιπροσωπεύει την έκθεση μιας ομάδας σε μία πειραματική μεταβλητή ή συμβάν, οι επιπτώσεις της οποίας πρόκειται να μετρηθούν.
- ✓ Το O αναφέρεται στη διαδικασία της παρατήρησης ή μέτρησης.
- ✓ Τα Xs και τα Os σε μια δεδομένη σειρά αναφέρονται στα ίδια πρόσωπα.
- ✓ Η αριστερά προς τα δεξιά σειρά, δείχνει μία χρονική ακολουθία.
- ✓ Τα Xs και τα Os κάθετα μεταξύ τους είναι ταυτόχρονα.
- ✓ Το R υποδηλώνει την τυχαία ανάθεση για το διαχωρισμό των ομάδων.
- ✓ Οι παράλληλες σειρές αδιαχώριστες με παύλες αντιπροσωπεύουν τις ομάδες σύγκρισης που εξισώνονται τυχαία, ενώ εκείνες που χωρίζονται από μια διακεκομμένη γραμμή αντιπροσωπεύουν τις ομάδες που δεν εξισώνονται με τυχαία ανάθεση.

6.1.3. Ο σχεδιασμός της (pretest-posttest-control-experimental-group) πειραματικής έρευνας

Οι Campbell και Stanley (1963), προκειμένου να προσδιορίσουν τα βασικά χαρακτηριστικά αυτού που ονομάζουμε ένα «πραγματικό πειραματικό» και σε τι ο Kerlinger (1970) αναφέρεται ως ένα «καλό» σχεδιασμό, παρουσιάζεται παρακάτω σχηματικά, πως θεωρείται ένας σχεδιασμός πειραματικής έρευνας. Μαζί με τις παραλλαγές του, το επιλεγόν σχέδιο χρησιμοποιείται συνήθως σε εκπαιδευτικό πειραματισμό.

Ο σχεδιασμός της (pretest-posttest-control-experimental-group) πειραματικής έρευνας μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

Πειραματική Ομάδα (experimental group)	RO_1	X	O_2
Ομάδα Ελέγχου (control group)	RO_3		O_4

Ο Kerlinger (1970) παρατηρεί ότι, θεωρητικά, η τυχαία ανάθεση των E και C προϋποθέσεων ελέγχει όλες τις πιθανές ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην πράξη, βέβαια, αυτό ισχύει μόνο όταν υπάρχουν αρκετά αντικείμενα που περιλαμβάνονται στο πείραμα, και η αρχή της τυχαιοποίησης έχει την ευκαιρία να λειτουργήσει ως ισχυρός έλεγχος. Ωστόσο, τα αποτελέσματα της τυχαιοποίησης έχουν ισχύ και σε μικρότερο δείγμα.

Αυτή η τυχαιοποίηση, εξασφαλίζει την μεγαλύτερη πιθανότητα της ισοδυναμίας, δηλαδή, την απομάκρυνση μεταξύ της πειραματικής και της ομάδας ελέγχου όλων εκείνων των παραγόντων ή χαρακτηριστικών των ατόμων που θα μπορούσαν να επηρεάσουν θεωρητικά τις πειραματικές μεταβλητές για τις οποίες ο ερευνητής ενδιαφέρεται. Αν οι ομάδες γίνουν ισοδύναμες, τότε όλες οι λεγόμενες «θολές» επιδράσεις γίνονται παρούσες και στις δύο ομάδες.

Τόσο ισχυρός είναι αυτός ο απλός και κομψός πειραματικός σχεδιασμός, που όλες αυτές οι απειλές για την εσωτερική εγκυρότητα, σύμφωνα με τους Campbell και Stanley (1963), ελέγχονται κατά το σχεδιασμό του ***pretest – post-test*** της ομάδας ελέγχου .Η επίδραση μιας παρέμβασης μπορεί να υπολογιστεί σε τρία βήματα:

- ✓ Αφαιρέστε τα αποτελέσματα του pretest από τα αποτελέσματα του post-test της πειραματικής ομάδας για να αποδώσετε τη βαθμολογία 1.
- ✓ Αφαιρέστε τα αποτελέσματα pretest από τα αποτελέσματα του post-test της ομάδας ελέγχου για να αποδώσετε τη βαθμολογία 2
- ✓ Αφαιρέστε τη βαθμολογία 2 από τη βαθμολογία 1.

Χρησιμοποιώντας την ορολογία των Campbell και Stanley, η επίδραση της πειραματικής παρέμβασης είναι:

$$\boxed{(O2 - RO1) - (O4 - RO3)}$$

Αν το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, τότε η αιτιώδης επίδραση ήταν αρνητική.

6.1.4. Οι Διαδικασίες για τη διεξαγωγή πειραματικών ερευνών

Μια πειραματική έρευνα πρέπει να ακολουθεί μια σειρά από λογικές διαδικασίες. Τις οποίες θα απαριθμήσουμε στη συνέχεια, όμως, θα πρέπει να αντιμετωπίζονται με κάποια περίσκεψη. Είναι εξαιρετικά δύσκολο (και παράτολμο) να θεσπιστούν σαφείς κανόνες ως οδηγοί για την πειραματική έρευνα. Στην καλύτερη περίπτωση, μπορούμε να εντοπίσουμε μια ιδανική διαδρομή που πρέπει να ακολουθηθεί, γνωρίζοντας πολύ καλά ότι η εκπαιδευτική έρευνα σπάνια προχωρά με ένα τέτοιο συστηματικό τρόπο.

Κατ 'αρχάς, οι ερευνητές πρέπει να εντοπίσουν και να καθορίσουν το ερευνητικό πρόβλημα όσο το δυνατόν ακριβέστερα και σαφέστερα, γεγονός που προϋποθέτει ότι το πρόβλημα είναι επιδεκτικό σε πειραματικές μεθόδους.

Σε δεύτερο επίπεδο, οι ερευνητές πρέπει να διατυπώσουν τις υποθέσεις που επιθυμούν να δοκιμάσουν. Αυτό σημαίνει να κάνουμε προβλέψεις για τις σχέσεις μεταξύ συγκεκριμένων μεταβλητών και την ίδια στιγμή τη λήψη αποφάσεων σχετικά με άλλες μεταβλητές που θα πρέπει να εξαιρεθούν από το πείραμα με τη βοήθεια των ελέγχων. Οι μεταβλητές, πρέπει να έχουν δύο ιδιότητες. Η πρώτη ιδιότητα είναι ότι οι μεταβλητές πρέπει να είναι μετρήσιμες. Η εξαίρεση των μεταβλητών από το πείραμα είναι αναπόφευκτη, δεδομένων των περιορισμών χρόνου και χρήματος. Ως εκ τούτου, προκύπτει ότι πρέπει κανείς να θέτει προτεραιότητες μεταξύ των μεταβλητών, για τις οποίες κάποιος δεν ενδιαφέρεται, έτσι ώστε η πιο σημαντική από αυτές να μπορεί να μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια του πειράματος, ενώ οι άλλες να παραμένουν σταθερές.

Τρίτον, οι ερευνητές πρέπει να επιλέξουν τα κατάλληλα επίπεδα στα οποία θα δοκιμάσουν τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Με άλλα λόγια, ο ερευνητής θα ποικίλει τα ερεθίσματα σε τέτοια επίπεδα ώστε να είναι πρακτικού ενδιαφέροντος σε μία πραγματική κατάσταση.

Τέταρτον, οι ερευνητές πρέπει να αποφασίσουν ποιο είδος πειράματος θα υιοθετήσουν, από την ποικιλία που έχει καθοριστεί.

Πέμπτον, κατά τον σχεδιασμό του κορμού του πειράματος, οι ερευνητές θα πρέπει να λάβουν υπόψη τους τον πληθυσμού, στον οποίο επιθυμούν να γενικεύσουν τα αποτελέσματά τους. Αυτό συνεπάγεται τη λήψη αποφάσεων επί των μεγεθών των δειγμάτων και τις μεθόδους δειγματοληψίας. Οι αποφάσεις για την δειγματοληψίας συνδέονται με ζητήματα των διαθέσιμων κεφαλαίων, τη στελέχωση και το ποσό του διαθέσιμου χρόνου για τον πειραματισμό.

Έκτον, έχοντας τα προβλήματα εγκυρότητας κατά νου, οι ερευνητές πρέπει να επιλέξουν τα μέσα, να επιλέξουν δοκιμές και να αποφασίσουν για τις κατάλληλες μεθόδους ανάλυσης.

Έβδομον, πριν ξεκινήσει ο κάθε ερευνητής την πραγματική διεξαγωγή του πειράματος, θα πρέπει να δημιουργήσει ένα πιλοτικό πείραμα για να δοκιμάσει τις πειραματικές διαδικασίες για τον εντοπισμό πιθανών εμπλοκών σε σχέση με οποιαδήποτε πτυχή της έρευνας. Αυτό είναι ζωτικής σημασίας.

Όγδοον, κατά τη διάρκεια του ίδιου του πειράματος, οι ερευνητές πρέπει να προσπαθήσουν να ακολουθήσουν τις ελεγμένες και συμφωνημένες διαδικασίες κατά γράμμα. Η τυποποίηση των οδηγιών, το ακριβές χρονοδιάγραμμα των πειραματικών ακολουθιών, η σχολαστική καταγραφή και ο έλεγχος των παρατηρήσεων – αυτά πρέπει είναι το σήμα κατατεθέν του αρμόδιου ερευνητή.

Αφού έχουν συλλέξει τα δεδομένα, οι ερευνητές αντιμετωπίζουν το πιο σημαντικό μέρος του όλου εγχειρήματος. Η επεξεργασία δεδομένων, η ανάλυση των αποτελεσμάτων και η σύνταξη εκθέσεων είναι όλα στάδια, εξαιρετικά απαιτητικά, τόσο στην πνευματική προσπάθεια αλλά και στο χρόνο που απαιτούν. Συχνά, σε αυτό το τελευταίο μέρος της πειραματικής έρευνας δίνεται πολύ λίγος χρόνος σε σχέση με τον συνολικό σχεδιασμό της έρευνας. Ακόμη και έμπειροι ερευνητές κάνουν ένα τέτοιο λάθος. Τα υπολογιστικά σφάλματα του προγράμματος και μια ντουζίνα πιο απρόβλεπτες καταστροφές διδάσκουν το σκληρό μάθημα, του να μην αφήνεις αρκετό χρόνο για την ανάλυση και την ερμηνεία των πειραματικών ευρημάτων. Ένα μοντέλο δέκα βημάτων προτείνεται από την παρούσα βιβλιογραφία, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι πρέπει να ακολουθείται κατά γράμμα (Louis Cohen, Lawrence Manion και Keith Morrison, 2007):

- ✓ Προσδιορίστε το σκοπό του πειράματος.
- ✓ Επιλέξτε τις σχετικές μεταβλητές.
- ✓ Καθορίστε το επίπεδο(α) της παρέμβασης (π.χ. χαμηλή, μεσαία, υψηλή παρέμβαση).
- ✓ Ελέγξτε τις πειραματικές συνθήκες και περιβάλλον.
- ✓ Επιλέξτε το κατάλληλο πειραματικό σχεδιασμό.

- ✓ Χορηγήστε το pretest.
- ✓ Αντιστοιχίστε τους συμμετέχοντες στην ομάδα (ες).
- ✓ Διεξαγωγή της παρέμβασης.
- ✓ Διεξαγωγή του post-test.
- ✓ Αναλύστε τα αποτελέσματα

Η αλληλουχία των σταδίων 6 και 7 μπορεί να αντιστραφεί. Η πρόθεση στην τοποθέτηση τους στην παρούσα αλληλουχία είναι να εξασφαλιστεί ότι οι δύο ομάδες είναι τυχαία τοποθετημένες και να συνταιριασμένες. Σε πειράματα και σταθερούς σχεδιασμούς, τα στοιχεία είναι συγκεντρωτικά και δεν σχετίζονται με συγκεκριμένα άτομα, και τα δεδομένα στοχεύουν σε για μέσους όρους, στο εύρος των αποτελεσμάτων, και στην απόκλιση τους. Κατά τον υπολογισμό των διαφορών ή ομοιοτήτων μεταξύ των ομάδων κατά τα στάδια της προκαταρκτικής δοκιμής και του post-test, το *t-test* για ανεξάρτητα δείγματα χρησιμοποιείται συχνά.

6.2. Θέμα

Η έρευνα διεξήχθη στο ιδιωτικό σχολείο ¨Εκπαιδευτήρια Μαλιάρα ¨ στην περιοχή του Αλίμου. Για τις ανάγκες της μελέτης πραγματοποιήθηκε συνεργασία με δύο συναδέλφους εκπαιδευτικούς της Γ΄ Δημοτικού. Το ένα τμήμα αποτέλεσε την ομάδα ελέγχου (control group), η οποία ακολούθησε την καθιερωμένη και προγραμματισμένη διδασκαλία για την εισαγωγή στην έννοια του κάθετου αλγόριθμου της διαίρεσης και το δεύτερο αποτέλεσε την πειραματική ομάδα (experimental group), η οποία ακολούθησε μία εναλλακτική διδασκαλία. Τα παιδιά σε αυτές τις δύο τάξεις του ιδιωτικού σχολείου ήταν ως επί το πλείστον από οικογένειες μέσης και υψηλής κοινωνικοοικονομικής κατάστασης και ηλικιακά, ήταν 8-9 ετών. Η μελέτη είχε ως σκοπό να εξετάσει τη διαφοροποίηση στις επιδόσεις των Μαθητών της Γ΄ Δημοτικού, οι οποίοι θα ακολουθήσουν μία διαφορετική προσέγγιση στη διδασκαλία του αλγορίθμου, σε ασκήσεις - προβλήματα που σχετίζονται με τον κάθετο αλγόριθμο της διαίρεσης από αυτούς που θα διδαχτούν με την καθιερωμένη μέθοδο διδασκαλίας.

Η έρευνα αποτελείται από τρία στάδια. Κατά το πρώτο στάδιο, δόθηκε στους μαθητές και των δύο τάξεων ένα φύλλο αξιολόγησης (pretest), για να εντοπισθεί ο βαθμός ετοιμότητας τους για την διδασκαλία της νέας έννοιας, αλλά και για να εκμαιεύσουμε πιθανές παρανοήσεις, άτυπες στρατηγικές και λάθη που φέρουν οι μαθητές και θα μας βοηθούσαν στην δόμηση των διδασκαλιών κατά τη δεύτερη φάση της έρευνας. Στο δεύτερο μέρος της έρευνας πραγματοποιήθηκαν δύο δίωρες διδασκαλίες από τους εκπαιδευτικούς των τμημάτων, οι οποίες καταγράφηκαν από εμένα, τον ερευνητή. Στο τρίτο και τελευταίο στάδιο της έρευνας, καθώς ολοκληρώθηκε η διδασκαλία της ενότητας, δόθηκε στους μαθητές των δύο τμημάτων ακόμη ένα φύλλο αξιολόγησης (posttest), που αποσκοπούσε να εξετάσει το πώς διαμορφώθηκαν οι επιδόσεις των δύο ομάδων και σε ποιό βαθμό μία εναλλακτική διδασκαλία μπορεί να βελτιώσει τις επιδόσεις και την κατανόηση των μαθητών του experimental group πάνω στον αλγόριθμο της διαίρεσης.

Στο σύνολο, 43 παιδιά συμμετείχαν στην συγκεκριμένη έρευνα. Η ομάδα ελέγχου αποτελούνταν από 21 παιδιά (13 αγόρια - 8 κορίτσια) και η πειραματική ομάδα αποτελούνταν από 22 παιδιά (10 αγόρια - 12 κορίτσια). Οι δύο δασκάλες που συνεργάστηκαν και διέθεσαν τα τμήματα τους, διαθέτουν πολυετή πείρα και εμπειρία. Η εκπαιδευτικός της ομάδας ελέγχου διαθέτει πάνω από 20 χρόνια εμπειρία και η εκπαιδευτικός της πειραματικής ομάδας 6 έτη εμπειρίας. Η παρούσα έρευνα είχε ως πηγή έμπνευσης την μελέτη του Ji-Eun Lee (*Making sense of the traditional long division algorithm*), η οποία αποτέλεσε και αφετηρία και οδηγός στη διαμόρφωση της.

Αφού ολοκληρώθηκε το πρώτο στάδιο της έρευνας και έγινε η συλλογή και ταξινόμηση των δεδομένων του pretest, η δασκάλα της πειραματικής ομάδας κλήθηκε να συμμετέχει σε συνεδρίες με τον ερευνητή, έτσι ώστε να συνδιαμορφώσουν το περιεχόμενο των διδασκαλιών, καθώς ενσωματώθηκαν σε αυτές νέες προσεγγίσεις, μέθοδοι και εργαλεία.

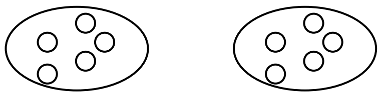
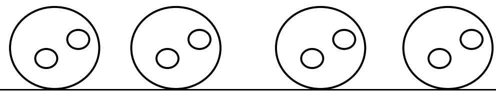
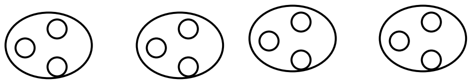
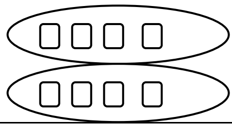
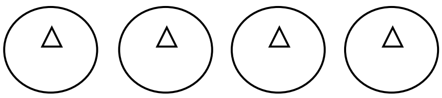
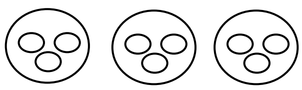
6.3. Το pretest

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι δραστηριότητες που επιλέχθηκαν από τον ερευνητή για να συνθέσουν το pre-test. Αναλυτικότερα, θα αναφερθεί η έρευνα από την οποία πάρθηκε η κάθε μία, ο σκοπός που εξυπηρετείται από αυτήν, αλλά και τα λάθη που πιθανών να κάνουν οι μαθητές στις απαντήσεις που θα δώσουν.

1. Δραστηριότητα 1

Η δραστηριότητα 1 βρίσκεται στο άρθρο *«About the Mathematics of Division: Implications for Students With Disabilities»*, των Teresa E. Foley και John F. Cawley. Αφού μελετήθηκε, προσαρμόστηκε στο επίπεδο τη Γ΄ Δημοτικού και παρουσιάζεται παρακάτω με την μορφή που δόθηκε:

1. ***Αντιστοιχίστε τους αριθμούς της 1ης στήλης με τα γράμματα της 2ης στήλης όπως το παράδειγμα:***

ΣΤΗΛΗ 1	ΣΤΗΛΗ 2
1. 6 : 3	Α. 
2. 8: 2	Β. 
3. 4 : 1	Γ. 
4. 9: 3	Δ. 
5. 10 | 5	Ε. 
6. 12 | 3	ΣΤ. 
7. 4 | 2	Ζ. 
8. 8 : 4	Η. 

1.1. Σκοπός της Έρευνας

Ο γενικός σκοπός του άρθρου από το οποίο πάρθηκε η παραπάνω δραστηριότητα, είναι να αναδείξει πολλά από τα συστατικά στοιχεία της έννοιας της διαίρεσης. Ο πρωταρχικός σκοπός αυτού του άρθρου είναι να αναδείξει μερικές από τις σημαντικές μαθηματικές εκτιμήσεις στη διαίρεση για να αυξηθούν οι ευκαιρίες των μαθητών, έτσι ώστε να μάθουν πολλά πράγματα για τη διαίρεση και να μάθουν διαφορετικούς τρόπους για να κάνουν διαίρεση. Επιπλέον, στο πλαίσιο της έρευνας, οι μαθητές θα πρέπει να έχουν πολλαπλές ευκαιρίες να βιώσουν τις ομοιότητες και τις διαφορές στο εννοιολογικό πλαίσιο της διαίρεσης. Μαθαίνοντας διαίρεση σημαίνει να αναγνωρίσουμε, να εξηγήσουμε και να αποδείξουμε επιλεγμένες έννοιες στη διαδικασίας της διαίρεσης.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές θα πρέπει να διαφοροποιούν καταστάσεις στις οποίες έχουν έναν αριθμό στοιχείων και (α) να τον χωρίζουν, ώστε κάθε σύνολο από έναν δοσμένο αριθμό να έχει τον ίδιο αριθμό των στοιχείων, (β) να προσδιορίζουν τον αριθμό των συνόλων που θα οδηγεί σε ένα δεδομένο αριθμό μερών ανά σύνολο, και (γ) να δημιουργούν σύνολα με διαφορετικό αριθμό στοιχείων.

1.2. Η δραστηριότητα

Για την παραπάνω δραστηριότητα τονίζεται ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών δεν γνωρίζουν πώς να χρησιμοποιούν εναλλακτικές αναπαραστάσεις για την πράξη της διαίρεσης, με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν δυσκολία στην αντιστοίχιση.

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι μέτριου επιπέδου, αρκεί οι μαθητές να καταλάβουν ότι πρόκειται για διαιρέσεις μέτρησης. Επιπλέον, στη δραστηριότητα εμφανίζεται ο κάθετος αλγόριθμος της διαίρεσης, με σκοπό να εκμαιεύσουμε αν οι μαθητές φέρουν αυτή τη γνώση πριν ακόμα διδαχθούν την έννοια.

1.3. Πιθανά Λάθη

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να μην μπορούν να απαντήσουν σε καμία αντιστοίχιση, αν δεν είναι εξοικειωμένοι με τις αναπαραστάσεις.
- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να κάνουν λάθη απροσεξίας και βιασύνης.

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να μην μπορούν να απαντήσουν στις περιπτώσεις 5, 6, 7 καθώς δεν έχουν διδαχθεί την έννοια του αλγορίθμου.
- Η επιλογή των αριθμών για τις διαιρέσεις είναι συγκεκριμένος και δεν επιτρέπει εννοιολογικά λάθη.

2. Δραστηριότητα 2

Να γινουν οι παρακάτω πράξεις:

Α) 321	Β) 657	Γ) 1.111	Δ) 152	Ε) 23	ΣΤ) 56
- 130	- 469	- 999	× 8	× 16	× 38

2.1. Η δραστηριότητα

Η παραπάνω δραστηριότητα επιλέχθηκε σκοπίμως, επειδή ο κάθετος αλγόριθμος της διαίρεσης προϋποθέτει τόσο την πράξη της αφαίρεσης όσο και του πολλαπλασιασμού μέσα από τις διαδοχικές αφαιρέσεις και το πόσες φορές χωράει ένας αριθμός σε έναν άλλο. Αυτό τονίζεται από την βιβλιογραφία, για αυτό θεωρήθηκε σωστό να εξεταστεί η ευχέρεια ή και οι δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε αυτές τις πράξεις.

3. Δραστηριότητα 3

Στη δραστηριότητα 3 οι μαθητές καλούνται να οδηγηθούν σε ένα αποτέλεσμα, εξετάζοντας τον τρόπο που θα το πετύχουν, καθώς θα πρέπει να σκεφτούν τη σύνδεση που υπάρχει μεταξύ των αριθμών. Η παρακάτω δραστηριότητα πάρθηκε από το άρθρο «*About the Mathematics of Division: Implications for Students With Disabilities*», των Teresa E. Foley και John F. Cawley.

3. Να συμπληρώσετε τα κενά με τους αριθμούς:

Α. 36 : 2 = __ : __ = __ : __ = 3

Β. 48 : __ = __ : __ = __ : __ = 4

3.1. Η δραστηριότητα

Η παραπάνω δραστηριότητα δίνεται σε μαθητές στο άρθρο για να εξετάσει πως μπορούν να οδηγηθούν στο ζητούμενο αποτέλεσμα με διαφορετικούς τρόπους, με σκοπό να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ των αριθμών και της πράξης της διαίρεσης. Αυτό μπορεί στη συνέχεια να χρησιμεύσει ως βάση για μια συζήτηση σχετικά με τη μεταβλητότητα με την οποία σκέφτονται οι μαθητές για τη διαίρεση. Ακόμα, επειδή τα κενά είναι συγκεκριμένα περιορίζουν τους μαθητές σε συγκεκριμένα βήματα, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι αυτή είναι μία εύκολη δραστηριότητα για αυτούς.

3.2. Πιθανές Λύσεις και Λάθη

Επειδή στην Α περίπτωση δίνεται ο διαιρέτης, υπάρχουν μόνο 2 επιλογές:

A. 36 : 2 = 18 : 2 = 9 : 3 = 3

A. 36 : 2 = 18 : 3 = 6 : 2 = 3

Στη Β. υπάρχουν περισσότερες επιλογές:

B. 48 : 2 = 24 : 2 = 12 : 3 = 4

B. 48 : 4 = 12 : 3 = 4 : 1 = 4

B. 48 : 3 = 16 : 2 = 8 : 2 = 4

B. 48 : 2 = 24 : 3 = 8 : 2 = 4 κ.α

4. Δραστηριότητα 4

Η δραστηριότητα 4 απαρτίζεται από δύο μέρη. Σε αυτές τις δραστηριότητες οι μαθητές καλούνται να αναλύσουν και να συνθέσουν αριθμούς, όπως δίνονται παρακάτω. Η έρευνα του Ji-Eu Lee (2007) με τίτλο «*Making sense of the traditional* *long algorithm*» αποτέλεσε την έμπνευση, ώστε να σχεδιαστεί η συγκεκριμένη δραστηριότητα, καθώς οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την ευχέρεια να δουλεύουν και να κατανοούν τις ασκήσεις που συμπεριλαμβάνουν τη έννοια της αξίας - θέσης ενός αριθμού. Η παραπάνω έννοια είναι καθοριστικής σημασίας για την διδασκαλία και εκμάθηση του αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης.

7. ***Α) Να αναλύσετε του παρακάτω αριθμούς σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες και χιλιάδες:***

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΜΟΝΑΔΕΣ	ΔΕΚΑΔΕΣ	ΕΚΑΤΟΝΤΑΔΕΣ	ΧΙΛΙΑΔΕΣ
325				
8.219				
234				

Β) Να συμπληρώσεις τους αριθμούς όπως το παράδειγμα:

a. 9 μονάδες + 7 δεκάδες + 5 εκατοντάδες = 579

b. 6 μονάδες + 8 δεκάδες + 3 εκατοντάδες + 6 χιλιάδες =

c. 10 μονάδες + 7 δεκάδες + 2 εκατοντάδες + 1 χιλιάδα =

d. 11 μονάδες + 9 δεκάδες + 5 εκατοντάδες + 9 χιλιάδες =

e. 16 μονάδες + 6 δεκάδες + 9 εκατοντάδες + 2 χιλιάδες =

4.1. Σκοπός της Έρευνας

Η έρευνα του Ji-Eu Lee παρουσιάζει τις εμπειρίες μαθητών δημοτικού κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του παραδοσιακού κάθετου αλγορίθμου της διαίρεσης. Η συγκεκριμένη έρευνα παίρνει αφόρμηση από ότι δεν υπάρχει ουσιαστική κατανόηση της έννοιας της διαίρεσης όταν η διδασκαλία ακολουθεί μηχανικά βήματα, και για αυτό εξετάζει εναλλακτικούς τρόπους διδασκαλίας που θα δώσουν νόημα στους μαθητές στα αφηρημένα βήματα του αλγορίθμου.

Η παρούσα έρευνα εξετάζει:

Το πώς ο παραδοσιακός αλγόριθμος μπορεί να διδαχθεί με τρόπο, πιο κοντινό στις σημασιοδοτήσεις και τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών Γ' Δημοτικού, αντί να βασίζεται στην μηχανική απομνημόνευση.

Στην παραπάνω έρευνα στην οποία στηρίζεται η παρούσα εργασία, δίνεται ιδιαίτερη σημασία στην θέση και αξία που έχουν οι αριθμοί και πως η ενασχόληση και εξάσκηση των μαθητών σε αυτό θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν και να δώσουν νόημα στα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν στον κάθετο αλγόριθμο της διαίρεσης.

4.2. Η δραστηριότητα

Η δραστηριότητα αποβλέπει στο να διαπιστώσουμε, αν οι μαθητές μπορούν να δουλέψουν σωστά με τις μονάδες, τις δεκάδες, τις εκατοντάδες κ.α., καθώς αυτές οι δεξιότητες κρίνονται απαραίτητες για την διεξαγωγή των διδασκαλιών αργότερα.

Οι δραστηριότητες αυτές διαφέρουν από τις όμοιες τους, στο ότι δοσμένων των αριθμών ζητούνται πρώτα οι μονάδες, έπειτα οι δεκάδες, μετά οι εκατοντάδες κ.ο.κ. Αυτό θέλει να εξετάσει την ουσιαστική κατανόηση των μαθητών και όχι κάποια μηχανιστική προσέγγιση.

7.1. Πιθανά λάθη και παρανοήσεις

- Στην δραστηριότητα 4 Α. αναμένεται από κάποιους μαθητές να γράψουν και να μπερδέψουν τις εκατοντάδες με τις μονάδες.

Π.χ.

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΜΟΝΑΔΕΣ	ΔΕΚΑΔΕΣ	ΕΚΑΤΟΝΤΑΔΕΣ	ΧΙΛΙΑΔΕΣ
325	3	2	5	

- Ενώ στη δραστηριότητα 4.Β. αναμένεται να γίνουν λάθη στα παραδείγματα d, e καθώς οι μαθητές θα πρέπει να μετατρέψουν τις 10 μονάδες σε 1 δεκάδα.
- Οι παραπάνω δραστηριότητες είναι μέτριου επιπέδου, αλλά καθοριστικής σημασίας.

5. Δραστηριότητα 5

Η δραστηριότητα 5 αποτελεί ένα διαγνωστικό πρόβλημα των B. Cooper και T. Harries από το άρθρο *«Making sense of realistic word problems: portraying working class 'failure' on a division with remainder problem».* Η έρευνα που διεξήγαγαν οι παραπάνω ερευνητές στην Μεγάλη Βρετανία, αποτέλεσε την αφορμή για να ενταχθεί αυτό το πρόβλημα στο pre-test.

8. Αυτή είναι η ένδειξη στον ανελκυστήρα μιας πολυκατοικίας με γραφεία

Αυτός ο ανελκυστήρας μπορεί να μεταφέρει μέχρι

8 άτομα

Το πρωί, στην ώρα αιχμής, 76 άνθρωποι θέλουν να ανέβουν με τον ανελκυστήρα.

Πόσες φορές πρέπει να ανέβει ο ανελκυστήρας;

8.1. Η δραστηριότητα

Οι λόγοι για τους οποίους επιλέχθηκε το συγκεκριμένο διαγνωστικό πρόβλημα είναι ποικίλοι. Αρχικά, έχει ήδη ερευνηθεί σε μαθητές στη Μεγάλη Βρετανία και έχουν διαπιστωθεί αρκετές παρανοήσεις. Ο κυριότερος λόγος επιλογής του προβλήματος είναι η συγκέντρωση των άτυπων στρατηγικών που θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για την επίλυση του, ώστε να αποτελέσουν τη βάση για τις διδασκαλίες και τη δημιουργία αποτελεσματικών και δυναμικών συζητήσεων για την οικοδόμηση της έννοιας του κάθετου αλγορίθμου της διαίρεσης.

8.2. Πιθανά λάθη και παρανοήσεις

Στην έρευνα που διεξήγαγαν οι Cooper & Harries πάνω από το 50% των μαθητών απάντησε 10 στο πρόβλημα με τον ανελκυστήρα. Τα 24 από τα 54 παιδιά όμως έδωσαν απαντήσεις διαφορετικές από το 10. Τα 20 ήταν μάλιστα παιδιά της εργατικής τάξης. Αυτά τα 20 λάθη μπορούν να ταξινομηθούν σε 3 βασικές κατηγορίες:

- ✓ Εννέα (9): 7 από τους 20 μαθητές απάντησαν 9.
- ✓ Εννιάμιση (9,5) ή Εννέα και υπόλοιπο τέσσερα (9 και υπόλοιπο 4): 5 μαθητές.
- ✓ 608 ή 588 (λανθασμένη απόπειρα να πολλαπλασιάσουν το 76 με το 8): 3 μαθητές. (Cooper & Harries, 2005).

Παρόμοια λάθη και παρανοήσεις περιμένουμε, τουλάχιστον προσεγγιστικά να πραγματοποιήσουν και οι μαθητές των δύο Τμημάτων όπου διεξήχθη και η έρευνα μας.

3.4. Επεισόδια Τάξης: Δίνοντας νόημα στον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης

3.4.1. Πριν τις διδασκαλίες

Πριν από την εισαγωγή στον παραδοσιακό αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης, τα παιδιά είχαν κληθεί να λύσουν προβλήματα και πράξεις διαίρεσης χρησιμοποιώντας τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις: (1) τα βασικά στοιχεία της διαίρεσης ως αντίστροφης διαδικασίας των βασικών στοιχείων του πολλαπλασιασμού (π.χ., 3 × 8 = 24, 24 ÷ 3 = 8), (2) την εκτίμηση (π.χ., 92 ÷ 23 "Πόσες ομάδες των 23 είναι 92;»), και (3) μία απλοποιημένη μορφή εφαρμογής της επιμεριστικής ιδιότητας σε αριθμούς, που το επέτρεπαν σε αυτή την ηλικία (π.χ., 42 ÷ 2 = (40 + 2) ÷ 2 = (40 ÷ 2) + (2 ÷ 2) = 20 + 1 = 21. Το πρόγραμμα σπουδών παρείχε επίσης διάφορα προβλήματα για την ενασχόληση των παιδιών με διαιρέσεις μερισμού (δίκαιης κατανομής, όπως ορίζεται από την τιμή του διαιρέτη) και διαιρέσεις μέτρησης (επαναλαμβανόμενη αφαίρεση της τιμής του διαιρέτη), όπως αυτά συναντώνται και σε συμφωνία με τα αναλυτικά προγράμματα από τη Δευτέρα δημοτικού.

Τα δύο τμήματα (control και experimental groups) , όπως ήδη έχουμε αναφέρει ακολούθησαν διαφορετικές προσεγγίσεις στην διδασκαλία της νέας έννοιας. Ακολούθησαν δύο δίωρες διδασκαλίες (συνολικός χρόνος 180 λεπτά), όπου στο control group πραγματοποιήθηκε η διδασκαλία της έννοιας, όπως είχε προγραμματιστεί από τη συνάδελφο εκπαιδευτικό, χωρίς καμία παρέμβασή και αλλαγή από τον ερευνητή. Σε πλήρη αντίθεση, στο experimental group ακολουθήθηκε μία τροποποιημένη διδασκαλία, η οποία σχεδιάστηκε από τον ερευνητή σε συνεργασία με την δεύτερη συνάδελφο εκπαιδευτικό, σύμφωνα με τις αρχές που στοιχειοθετούν αυτήν την εργασία και αναφέρονται στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας. Οι δύο αυτές διδασκαλίες θα περιγραφούν και θα αναλυθούν παρακάτω.

Για να διατηρηθεί η ανωνυμία των μαθητών, προτιμήθηκε η αναφορά σε αυτούς με συγκεκριμένη κωδικοποίηση, ανάλογα με την σειρά των απαντήσεων τους (π.χ., $M_{1.........\nu}$), καθώς και η αντίστοιχη εκπαιδευτικός θα αναφέρεται με (Δ).

3.4.2. 1ο Επεισόδιο Τάξης

1ο Στάδιο : Εισαγωγική δραστηριότητα

Ένα πρόβλημα διαίρεσης γράφτηκε στον πίνακα: 648 ÷ 2 =. Αμέσως, ο Μ4 πρότεινε μια μέθοδο για να λύσει αυτό το πρόβλημα, καθώς και άλλες απαντήσεις και άλλων μαθητών ακολούθησαν και παρουσιάζονται παρακάτω:

Μ4 : (Αφού διαβάζει δυνατά τον αριθμό)
«Κάνω 6 ÷ 2 και ότι βρω το γράφω στο ΄΄=΄΄ , δηλαδή 3, το ίδιο 2 ÷ 2, δηλαδή 2 και 8 ÷ 2, δηλαδή 4. Έτσι βρήκα 324».
Δ : «Ποιος μπορεί να μου πει, πως λέγεται αυτός ο αριθμός;»
Μ6 : «Τριψήφιος»
Μ7 : «Ο αριθμός αποτελείται από το 600, το 40 και το 8»
Δ : (Η δασκάλα δείχνει το 6 στον αρχικό αριθμό)
« Τι είναι αυτό το 6;»
Μ8 : «Το 6 είναι ση θέση των εκατοντάδων, το 4 στη θέση των δεκάδων και το 8 στις μονάδες».
Μ9 : «Το ξέρω, μπορούμε να γράψουμε και 600 ÷ 2 = 300 , 40 ÷ 2 = 20 και 8 ÷ 2 = 4»
Δ : «Γράφω αυτό που μόλις μου είπες στον πίνακα».
648 ÷ 2 = (600 ÷ 2) + (40 ÷ 2) + (8 ÷ 2) =
«Τι δημιούργησα;»
Μ10 : «Διαιρέσεις, 3 Διαιρέσεις !!»
Δ : «Και τώρα τι κάνω;»
Μ11 : «Ότι βρούμε από τις διαιρέσεις, το προσθέτουμε, δηλαδή 300 + 20 + 4 = 324»
Δ : « Βλέπετε τι κάναμε;»
Μ12 : «Βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα με πριν»

2ο Στάδιο : Σύνδεση με τον συμβολισμό

Η δασκάλα γράφει στον πίνακα 648|2

Δ : «Το ίδιο πράγμα που κάναμε πριν μπορούμε να το γράψουμε και έτσι, αφού έτσι συμφώνησαν όλοι οι μαθηματικοί, αυτός ονομάζεται αλγόριθμος της κάθετης διαίρεσης, όμως απλά τον έγραψα, δεν τον έχω λύσει ακόμη».

3ο Στάδιο : Πρώτη Επαφή με την λειτουργία του αλγόριθμου

Δ : « Πάμε να δοκιμάσουμε τις δυνάμεις μας στον αλγόριθμο της διαίρεσης. Ας ξεκινήσουμε με ένα πιο απλό παράδειγμα 24 ÷ 2».
Μ13 : «Κάνει 12, χώρισα το 24 στα 2, άρα 12 και μάλιστα 12 × 2 = 24»
Μ14 : «Είναι πράξεις αντίστροφες»
Δ : «Για να το γράψω και κάθετα. Το έχει ξαναδεί κάποιος, ξέρει κάποιος να το λύσει»
Η δασκάλα σημειώνει στον πίνακα την διαίρεση : 24|2

Μ15 : «Ξέρω που μπαίνει το 12»
Μ16 : «Εγώ ξέρω να τη λύσω»

Ο μαθητής σηκώθηκε στον πίνακα έλυσε σωστά την διαίρεση, χωρίς να αναφέρει τίποτα και όταν ρωτήθηκε από τη δασκάλα δεν μπόρεσε να εξηγήσει τα βήματα που ακολούθησε.

$$\begin{array}{r|l} 24 & \underline{2} \\ -24 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

Δ : «Τι άλλο βλέπουμε σε αυτό που έκανε ο συμμαθητής μας που ξέρουμε »
Μ17 : «Βλέπουμε το σύμβολο της αφαίρεσης»
Δ : «Πολύ ωραία, για να πάμε πρώτα από όλα να δώσουμε ονόματα στους αριθμούς που βλέπουμε. Το 24 θα το ονομάζουμε διαιρετέο και το 2 διαιρέτη. για πείτε μου τώρα πόσα ψηφία έχει ο διαιρετέος και πόσα ο διαιρέτης;»
Μ18 : «Δύο ψηφία έχει ο διαιρετέος και ένα ο διαιρέτης.»
Δ : «Εμείς θα παίξουμε με το ένα ψηφίο κάθε φορά, δηλαδή το 2 πόσες φορές χωράει στο 2»
Μ19 : «1 φορά χωράει»
Δ : «Πως το βρήκαμε αυτό;»
Μ20 : «Κάναμε διαίρεση»
Δ : «Πολύ ωραία 1 φορά το 2 μας κάνει 2 και το γράφω εδώ. Τι έκανα τώρα»
Μ21 : «Πολλαπλασιασμό»
Δ : « Και τώρα θα χρησιμοποιήσω την αφαίρεση που μου είπατε πριν»
Μ22 : «άρα 2 -2 = 0»
Δ : «Τελειώσαμε;»
Μ22 : «Όχι, μας έχει μείνει το 4 »
Δ : «Άρα να το σκουντήξω και αυτό»

Η δασκάλα τονίζει το 4 και ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία από τους μαθητές μέχρι να βρεθεί το πηλίκο 12 και το υπόλοιπο 0.

Δ : «Τι βρήκαμε;»
Μ23 : «12»
Δ : «Αυτό θα το ονομάζουμε πηλίκο, και το 0 που περίσσεψε εκεί πως θα το λέμε το έχει ακούσει κάποιος;»
Μ24 : «Νομίζω περισσευούμενο, ε όχι υπόλοιπο, το έχω ξανακούσει».

4ο Στάδιο : Εφαρμογή

Σε αυτό το σημείο η εκπαιδευτικός γράφει το δεύτερο παράδειγμα (42 ÷ 2) και ζητά από ένα μαθητή να προσπαθήσει να λύσει τη διαίρεση.

$$\begin{array}{r|l} 42 & \underline{2} \\ & \end{array}$$

Ο μαθητής Μ26 έλυσε τη διαίρεση, ακολουθώντας τη διαδικασία, όπως την παρακολούθησε στο προηγούμενο στάδιο. Ονόμασε αρχικά τους όρους σε διαιρετέο (42) και διαιρέτη (2), Τόνισε το 4 και έγραψε στη θέση του πηλίκου 2, καθώς το 2 χωράει 2 φόρες στο 4, στη συνέχεια έγραψε το 4 κάτω από το 4 του διαιρετέου και έκανε αφαίρεση, όπου και βρήκε 0. Ακολούθησε ακριβώς τα ίδια βήματα με τον άρουμε 2 του διαιρετέου και κατέληξε στο αποτέλεσμα του πηλίκου 12 και υπολοίπου 0. Κατά τη διάρκεια της διεκπεραίωσης της πράξης η εκπαιδευτικός ζητούσε από τον μαθητή να κάνει παύσεις και να εξηγεί αναλυτικά τον συλλογισμό του, ώστε να συμβαδίσει και με το υπόλοιπο τμήμα.

Στη συνέχεια δόθηκε φυλλάδιο στην τάξη (βλ. Παράρτημα), το οποίο περιλάμβανε τις ακόλουθες κάθετες διαιρέσεις : α) 96 ÷ 3, β) 84 ÷ 4, γ) 693 ÷ 3, δ) 248 ÷ 2 και ε) 848 ÷ 4. Η εκπαιδευτικός έδινε τον απαιτούμενο χρόνο στους μαθητές να προσπαθήσουν και να λύσουν τις διαιρέσεις, κάθε μία τη φορά και έδινε επεξηγήσεις στους μαθητές που δυσκολεύονταν. Η πλειοψηφία των μαθητών δεν αντιμετώπισε δυσκολία και έλυσε σωστά τις πράξεις, χρησιμοποιώντας τη νέα γνώση. Το φυλλάδιο περιείχε κάθετες διαιρέσεις όπου οι διαιρετέοι ήταν τριψήφιοι αριθμοί. Αυτή επιλογή έγινε με τη σκοπιμότητα, ώστε να διαπιστωθεί η αυτενέργεια των μαθητών και το πώς θα αντιμετωπίζονταν από αυτούς ένα μικρό εμπόδιο. Οι πλειοψηφία δεν αντιμετώπισε ιδιαίτερη δυσκολία, πλην ορισμένων περιπτώσεων.

Δ : «Πριν θα τελείωνα στο 3 επειδή είχα διψήφιο διαιρετέο, τώρα τι μπορώ να κάνω;»
Μ31 : «Θα συνεχίσω και θα κατεβάσω το 3 και θα κάνω ακριβώς το ίδιο πράγμα»

```
 6 9 3 | 3
-6     |-----
       | 2 3 1
 0 9   |
-  9   |
-----
   0 3
    -3
   ---
     0
```

Κατά τη διάρκεια της ενασχόλησης των μαθητών με το φυλλάδιο, η εκπαιδευτικός περνούσε συνεχώς και παρατηρούσε τη δουλειά των μαθητών και έδινε οδηγίες, καθώς και παρότρυνε τους μαθητές να συνεχίσουν τη δουλειά τους. Με την ολοκλήρωση του φυλλαδίου, η εκπαιδευτικός έθεσε ένα ερώτημα προς την τάξη:

Δ : «Γιατί πιστεύετε ότι χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμό της κάθετης διαίρεσης που μάθαμε σήμερα;»

Μ32 : «Γιατί έτσι είναι πιο αναλυτικά»

Μ33 : «Μπορούμε να τον χρησιμοποιούμε για να λύσουμε διαιρέσεις με μεγάλους αριθμούς».

3.4.3. 2º Επεισόδιο Τάξης

1ο Στάδιο : Εισαγωγική δραστηριότητα

Το δεύτερο επεισόδιο τάξης πραγματοποιήθηκε, αφού ολοκληρώθηκε 1 ώρα διδασκαλίας, ώστε να ελεγχθούν ασκήσεις εφαρμογής που δόθηκαν στο τέλος του πρώτου επεισοδίου. Στη δεύτερη διδασκαλία η εκπαιδευτικός ξεκινά με ένα ερώτημα. Γράφει στον πίνακα δύο κάθετες διαιρέσεις (96 ÷ 3 =, 42 ÷ 3 =) και στη συνεχεία απευθύνεται στους μαθητές και τους ζητά να απαντήσουν, ποια από τις δύο διαιρέσεις είναι ευκολότερη στην επίλυση.

Δ : «Σήμερα θα ξεκινήσουμε πάλι με ένα ερώτημα. Θα ξεκινήσω με δύο διαιρέσεις. Ποια νομίζετε ότι είναι πιο εύκολο να λυθεί:»

96 | 3   42 | 3

Μ1 : «Η πρώτη είναι πιο εύκολη, γιατί στη δεύτερη τα νούμερα 4 και 2 δεν υπάρχουν στην προπαίδεια του 3».

Μ2 : « Όταν θα κατεβάσουμε το 2 δεν θα μπορεί να διαιρεθεί με το 3».

Δ : (Η δασκάλα δείχνει το 4 στον αρχικό αριθμό 42)

« Δεν ξέρουμε όμως τι θα συμβεί με το 4; Τελικά συμφωνούμε όλοι, ότι η πρώτη είναι πιο εύκολη;»

(Απαντούν όλοι οι μαθητές δυνατά: Η πρώτη είναι πιο εύκολη, γιατί το 9 και το 6 είναι στη προπαίδεια του 3.)

Δ : «Να τη λύσουμε όπως έχουμε μάθει»

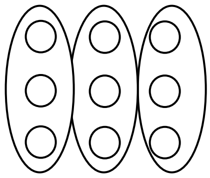
Οι μαθητές ανοίγουν τα τετράδια τους και λύνουν την διαίρεση (96 ÷ 3 =) με τη χρήση του κάθετου αλγορίθμου, όπως διδάχθηκαν στο προηγούμενο επεισόδιο χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.

2ο Στάδιο : Σύνδεση του αλγορίθμου με την αναπαράσταση

Σε αυτό το σημείο η εκπαιδευτικός γράφει στον πίνακα τη διαίρεση (9 ÷ 3 =) κάθετα και ζητά από τους μαθητές να ανοίξουν και πάλι τα τετράδια τους και να την λύσουν. Η διαίρεση αυτή είναι αισθητά μικρότερης δυσκολίας συγκριτικά με τις προηγούμενες, με τις οποίες έχουν εμπλακεί οι μαθητές. Αυτή η σκοπιμότητα, εξυπηρετεί την ομαλότερη μετάβαση στη σύνδεση του αλγορίθμου με την αναπαράσταση, όπως θα δούμε παρακάτω.

Δ : «Θυμάστε που γινόμαστε ζωγράφοι κάποιες φορές; Έτσι και τώρα το 9 θα το ζωγραφίσω »

$$\begin{array}{r|l} 9 & \underline{3} \\ \underline{-9} & 3 \\ 0 & \end{array}$$



(Η εκπαιδευτικός σχεδιάζει δίπλα στην κάθετη διαίρεση 9 μικρούς κύκλους.)

Δ : «Αφού έχουμε όλοι λύσει τη διαίρεση στο τετράδιο μας, μπορεί κάποιος να σηκωθεί και να τη λύσει έτσι στο σχέδιο; ».

Μ3 : «Θα το μοιράσω σε 3 ίσα μέρη».

Δ : «Τι σημαίνει 9 ÷ 3;»

Μ4 : «Πόσες φορές χωράει το 3 στο 9».

Μ5 : «Θα χωρίσω στο σχέδιο, το 9 σε 3 ίσα μέρη».

Δ : «Επειδή έχουμε πολύ φαντασία, τι λέτε να φανταστούμε ότι αυτοί οι μικροί κύκλοι είναι καραμέλες. Για να πάμε στην διαίρεση που έχουμε λύσει. Τι είναι το 3 που βλέπω στο πηλίκο»

Μ6 : «Μέσα σε κάθε κύκλο πόσες καραμέλες έχω».

Δ : « Τι είναι το 9 που αφαιρώ;»

Μ7 : «Είναι οι καραμέλες όλες μαζί»

Δ : « Έχω υπόλοιπο εδώ;»

Μ8 : «Όχι είναι μηδέν, γιατί δεν περισσεύει κάτι, αφού χωρίσαμε το 9 σε τρεις ομάδες που κάθε μία έχει 3 καραμέλες».

3ο Στάδιο : Εισαγωγή στη νέα γνώση: Διαιρέτης που δε χωρά ακριβώς στο Διαιρετέο

Δ : «Τώρα θα σας δυσκολέψω λίγο, γράψτε στο τετράδιο σας».

$$\begin{array}{r|l} 10 & \underline{3} \\ & \end{array}$$

Δ : «Για να δούμε τι θα κάνει τώρα ο ζωγράφος; Θα αλλάξω την τέχνη μου και θα ζωγραφίσω αυτό. Πριν είχαμε το 9 στη θέση του διαιρετέου και σχεδιάσαμε 9 κουκίδες, τώρα έκανα αυτό και επειδή μιλάμε για καραμέλες μου θυμίζει τα smarties».

(Η εκπαιδευτικός σχεδιάζει στον πίνακα μία μεγάλη κάθετη γραμμή) 

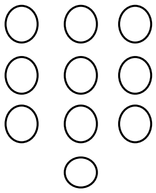
Μ7 : «Είναι το 1 από τα 10».
Μ8 : «Είναι 1 κουτάκι καραμέλες».
Δ : «Ίσως θα μπορούσε να είναι».
Μ9 : «Είναι μία δεκάδα».
Μ10: «Το υπόλοιπο που θα περισσέψει;»
Δ : «Σωστά!! Αυτό είναι μία δεκάδα. Που εμφανίζεται το 10 στη διαίρεση μας;»
Μ11 : «Στο διαιρετέο έχουμε 10».
Δ : « Για πάμε τώρα να λύσουμε τη διαίρεση;»
Μ12 : «Το 3 στο 1 χωράει 3 φορές».

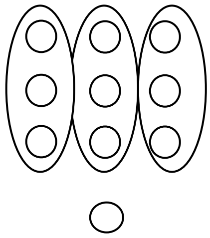
Εδώ ο μαθητής Μ12 αντιλαμβάνεται ότι το 3 χωράει 3 φορές στο 10, παρόλα αυτά δεν κατέχει την απαιτούμενη γνώση για να το αιτιολογήσει σε σχέση με τη λειτουργία του αλγορίθμου, για αυτό απαντά καθαυτόν τον τρόπο. Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε γνωστική σύγκρουση.

Δ : « Χωράει το 3 στο 1;»
Μ13 : «Όχι δεν χωράει καμία φορά».
Δ : « Τι προτείνετε να κάνουμε τώρα;»
Μ14 : «Όχι δεν χωράει καμία φορά».
Δ : « Τι προτείνετε να κάνουμε τώρα;»
Μ15 : «Πρέπει να μοιράσουμε σε 3 ίσα 3 ίσα μέρη».
Δ : « Και πως θα το κάνω αυτό;»
Μ16 : «Μάλλον πρέπει να σχεδιάσω 10 γραμμές».
Δ : « Μα εμείς έχουμε μόνο μία και δε μπορούμε να σχεδιάσουμε άλλη. Από τη αποτελείται η δεκάδα;»
Μ17 : «Από 10 καραμέλες».
Μ18 : «Θα ζωγραφίσω 9 καραμέλες όπως και πριν και……». (υπήρξε παύση)

(Ο μαθητής Μ18 έχει αντιληφθεί ότι πρέπει να αναλύσει τη δεκάδα στα συστατικά της μέρη. Παρόλα αυτά δεν το καταφέρνει)

Δ : « Τι προτείνετε να κάνουμε τώρα; Πώς θα τις ζωγραφίσω;»
Μ19 : «Με 10 κουκίδες».
Δ : « Θέλω να έρθει κάποιος να τις χωρίσει σε 3 παιδιά;»
Μ18 : « Πρώτα, θα τις σχεδιάσω έτσι, και μετά θα τις χωρίσω».





Δ : « Ποιος μπορεί να λύσει τη διαίρεση; Πόσες φορές χωράει το 3 στο 10;»

Μ19 : «30 φορές».

Δ : « Πρόσεξε καλύτερα το σχήμα θα σε βοηθήσει. Πόσες φορές χωράει το 3 στο 10; »

Μ19 : «3 φορές γιατί 3 επί 3 κάνει 9».

Δ : « Τι είναι αυτό το 9;»

Μ20 : « Είναι οι καραμέλες που μοιράσαμε στα παιδιά».

Δ : « Αυτό το 1, τι είναι;»

Μ21 : « Είναι το υπόλοιπο, δηλαδή η καραμέλα που δε θα πάρει κανείς».

10	3
- 9	3
1	

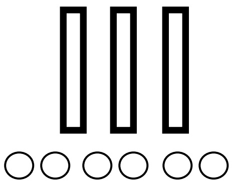
4ο Στάδιο : Αναπαραστάσεις σε τέλειες και ατελείς διαιρέσεις

Δ : «Για να πάμε παρακάτω και να λύσουμε άλλη μία διαίρεση».

36	3

Δ : «Για πείτε μου τι θα ζωγραφίσω;»

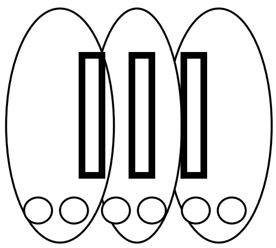
Μ21 : «3 δεκάδες και 6 μονάδες».



(Ο μαθητής Μ21, σηκώνεται και σχεδιάζει)

Δ : «Τι εντολή μου δίνει ο διαιρέτης».

Μ22 : «Μου λέει να τις μοιράσω σε 3 ίσα μέρη».

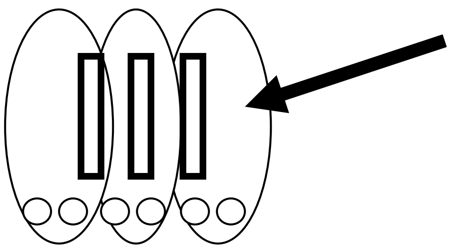


Δ : «Τι έχει μέσα η κάθε ομάδα που έφτιαξες;»

Μ22: «Έχει 12 καραμέλες».

Δ : «Σωστά!! Αλλά που το βρήκες;»

Μ22 : «Αφού έχουμε μία δεκάδα και 2 μονάδες».



Δ : « Νομίζω ξέρουμε το αποτέλεσμα, πάμε να λύσουμε τη διαίρεση».

Μ23 :

(Ο μαθητής λύνει τη διαίρεση όπως γνωρίζει, αλλά τον διακόπτει η δασκάλα και απευθύνεται στην τάξη)

$$\begin{array}{r|l} 36 & 3 \\ \hline -3 & 1 \\ 0 & \end{array}$$

Δ : « Τι είναι αυτό το 1; Που το βλέπω σε αυτό που σχεδίασα;»

Μ24 : «Είναι η γραμμή, η δεκάδα και κάθε ομάδα έχει μέσα μία».

Δ : « Συνεχίζουμε, τι είναι το 6;»

Μ25 : « Είναι οι 6 καραμέλες εκεί κάτω από τις δεκάδες».

Δ : « Ωραία, συνέχισε να λύνεις τη διαίρεση».

Μ23 :

$$\begin{array}{r|l} 36 & 3 \\ \hline -3 & 12 \\ 06 & \\ -6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Δ : « Συνεχίζουμε, τι είναι το 2;»

Μ27 : « Είναι καραμέλες».

Δ : « Τι καραμέλες;».

Μ27 : «Είναι οι καραμέλες που πάνε μαζί με τη δεκάδα».

Δ : « Τι είναι το 12;»

Μ28 : « Το πηλίκο, το αποτέλεσμα».

Δ : «Στο σχέδιο που φαίνεται το 12;»

Μ29 : « Είναι οι καραμέλες που έχει η κάθε ομάδα».

Δ : «Έχουμε 3 ομάδες από 12 καραμέλες, η καθεμία».

Μ30 : « Ναι, 36 καραμέλες».

Δ : «Τι είναι το 36;»

Μ31 : « Είναι ο διαιρετέος».

Δ : «Για πείτε πάλι τι είναι το 12».

Μ32 : « Είναι το πηλίκο, η κάθε ομάδα».

Δ : «Και το 0;»

Μ33 : « Είναι το υπόλοιπο».

Σε αυτό το σημείο η εκπαιδευτικός εισάγει την έννοια της τέλειας διαίρεσης για πρώτη φορά. Οι μαθητές διερωτούνται τι συμβαίνει σε περιπτώσεις όπου το υπόλοιπο δεν είναι 0.

Δ : «Ε λοιπόν οι διαιρέσεις που έχουν υπόλοιπο 0 όπως αυτή θα τις λέμε από δω και πέρα τέλειες διαιρέσεις.

Μ34: « Και αυτές που δεν έχουν υπόλοιπο 0, πως θα τις λέμε;»

Δ : «Πολύ ωραία, θα το δούμε αμέσως;»

Δ : «Τι πρέπει να κάνω;»

$$\begin{array}{r|l} 38 & 3 \\ \hline & \end{array}$$

Μ35 : «Πρέπει να χωρίσω σε 3 δεκάδες και 8 καραμέλες».

Δ : «Και τι θα ζωγραφίσω;»

Μ36 : « Όπως και πριν».

Δ : «Ποιος θα δοκιμάσει να κάνει τη δίκαιη μοιρασιά, σε πόσα παιδιά θα δώσω καραμέλες;»

Μ37 : « Σε 3».

Δ : «Όλοι πρέπει να πάρουν το ίδιο. Πόσους κύκλους θα πάρει το κάθε παιδί;».

Μ38 : « Δεν είμαι σίγουρος».

(Ο μαθητής Μ38 δυσκολεύεται να δώσει απάντηση. Είναι πιθανόν να έρχεται σε γνωστική σύγκρουση με τη διαχείριση του υπολοίπου, καθώς θέλει να το συμπεριλάβει στην απάντηση του.)

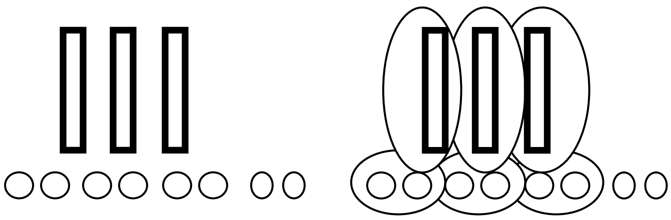
Δ : «Για να ξεκινήσουμε από τις δεκάδες.»

Μ39 : « Μία θα πάρει ο καθένας».

Δ : « Ωραία, και πόσες μονάδες θα πάρει ο καθένας;»

Μ40 : « 2 μονάδες - καραμέλες».

Δ : «Για πάμε να τη λύσουμε όπως έχουμε μάθει».



$$\begin{array}{r|l} 38 & 3 \\ \hline -3 & 12 \\ \hline 08 & \\ -6 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Δ : «Τι είναι αυτό το 1;»

Μ41 : « Είναι η δεκάδα που θα πάρει το κάθε παιδί».

Δ : «Και το 8;»

Μ42 : «Όλες οι καραμέλες - μονάδες».

Δ : «Το 6 τι είναι;»

Μ43 : « Αυτό που διαίρεσα, οι καραμέλες που πήραν τα παιδιά».

Δ : «Και στο τέλος αυτό το 2;»

Μ44 : « Είναι το υπόλοιπο».

Δ : «Και ποιος θα πάρει αυτές τις καραμέλες;»

Μ44 : « Κανένας».

Δ : «Αυτή διαίρεση έχει υπόλοιπο».

Μ45 : « Ωραία, τώρα θα δούμε πως θα τη λέμε».

Δ : «Είναι τέλεια διαίρεση όπως και πριν;»

Μ46 : « Όχι, γιατί έχει υπόλοιπο 2».

Δ : «Μπράβο, άρα τη διαίρεση που έχει υπόλοιπο θα την ονομάζουμε ατελή».

5^{o} Στάδιο : Εφαρμογή και εμπέδωση

Σε αυτό το στάδιο της διδασκαλίας δόθηκε στους μαθητές φυλλάδιο, στο οποίο κλήθηκαν να λύσουν 6 παραδείγματα διαιρέσεων χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο. Οι διαιρέσεις που κλήθηκαν να βρουν τη λύση τους οι μαθητές είναι οι ακόλουθες: α) 97 ÷ 2 =, β)) 85 ÷ 3 =, γ)) 848 ÷ 6 =, δ)) 623 ÷ 4 =, ε) 851 ÷ 7 = και στ) 729 ÷ 6 =. Η πλειοψηφία των μαθητών δεν αντιμετώπισε πρόβλημα στην επίλυση των πράξεων. Η εκπαιδευτικός παρείχε τον απαιτούμενο χρόνο, ώστε οι μαθητές να εργαστούν ατομικά στο κάθε παράδειγμα. Με την ολοκλήρωση της προσπάθειας, η πράξη επιλύονταν στον πίνακα από κάποιο μαθητή ή μαθήτρια, τον οποίο θα επέλεγε η εκπαιδευτικός, λαμβάνοντας υπόψη της τους μαθητές που αντιμετώπισαν δυσκολία. Ο επίλυση και η διαδικασία περάτωσης του αλγορίθμου ελέγχονταν από τους μαθητές καθ΄ όλη τη διάρκεια.

Αξίζει να σημειωθεί μία παρανόηση που διαπιστώθηκε από 2 μαθητές κατά τη διάρκεια επίλυσης του πρώτου παραδείγματος από τις διαιρέσεις του φυλλαδίου (97 ÷ 2 =).

1^{o} Παράδειγμα

97	2
-8	48
17	
-16	
1	

Μ47 : « Το 2 στο 9 δε γίνεται, δεν είναι στη προπαίδεια του».

Δ : «Και τι θα κάνω;»

Μ48 : « Προσπαθώ να βρω ένα αριθμό πιο κοντινό».

Μ47 : «Α, το 8, γιατί 4 φορές το 2 μας κάνει 8, 9 βγάζω 8 μας κάνει 1. Κατεβάζω και το 7. Το 2 στο 7 χωράει 3 φορές».

Δ : «Μήπως έχουμε κάνει κάποιο λαθάκι;»

Μ48 : « Ναι, έπρεπε να πούμε το 2 στο 17 και όχι στο 7. Είναι όπως πριν με τις καραμέλες, γιατί έχουμε 9 δεκάδες και θέλουμε να τις χωρίσουμε σε 2 παιδιά. Άρα μας περισσεύει 1 δεκάδα, αφού θα χρειαστούμε 8 δεκάδες και ο καθένας θα πάρει 4».

Το παραπάνω λάθος - παρανόηση διαπιστώθηκε σε δύο μαθητές, καθώς δεν συνυπολόγισαν την υπολειπόμενη δεκάδα στην διαδικασία επίλυσης τους. Η παρανόηση αντιμετωπίσθηκε με τη βοήθεια του μαθητή Μ48, ο οποίος έχει κατανοήσει πλήρως τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης καθώς και την σύνδεση του με την αναπαράσταση.

Δ : «Για να θυμηθούμε πως ξεκινήσαμε τη διδασκαλία μας σήμερα; Τι σας ρώτησα;»

Μ48 : «Μας ρωτήσατε ποια από τις δύο διαιρέσεις είναι πιο δύσκολη να λύσουμε».

$$96 \,\big|\, \underline{3} \qquad\qquad\qquad 42 \,\big|\, \underline{3}$$

Μ48 : «Τώρα είναι και οι δύο το ίδιο εύκολες!»

3.5. Το post-test

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι δραστηριότητες που επιλέχθηκαν από τον ερευνητή για να συνθέσουν το post-test. Αναλυτικότερα, θα αναφερθεί η έρευνα από την οποία πάρθηκε η κάθε μία, ο σκοπός που εξυπηρετείται από αυτήν, αλλά και τα λάθη που πιθανώς να κάνουν οι μαθητές στις απαντήσεις που θα δώσουν.

Το post-test δόθηκε στους μαθητές και των δύο τάξεων, αφού ολοκληρώθηκαν οι διδασκαλίες που σχετίζονταν με την εκμάθηση του αλγορίθμου, οι οποίες και είχαν διάρκεια δύο εβδομάδες. Κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών εξετάστηκαν όλες οι πιθανές περιπτώσεις κάθετης διαίρεσης με διαιρετέο έως και τριψήφιο αριθμό και διαιρέτη μονοψήφιο.

1. Δραστηριότητα 1

1.1. Η δραστηριότητα

Οι λόγοι για τους οποίους επιλέχθηκε η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι για να εξετάσει την ικανότητα των μαθητών και των δύο ομάδων να επιλύουν κάθετες διαιρέσεις. Οι διαιρέσεις που επιδέχθηκαν εξυπηρετούν συγκεκριμένο σκοπό, καθώς είναι αντιπροσωπευτικά παραδείγματα διαφορετικών περιπτώσεων. Σε κάθε μία από αυτές τα ψηφία του διαιρετέου αλλά και το υπόλοιπο που αφήνουν σε σχέση με το διαιρέτη κάθε φορά, δημιουργούν διαφορετικές καταστάσεις, κατά τις οποίες οι μαθητές πρέπει να ενεργήσουν ανάλογα.

1. Να κάνετε με προσοχή τις παρακάτω διαιρέσεις:

Α) 728 | 6

Β) 532 | 4

Γ) 802 | 6

Δ) 404 | 8

Ε) 192 | 4

Σ Τ) 707 | 7

1.2. Πιθανά Λάθη και Παρανοήσεις

Στην παραπάνω δραστηριότητα οι μαθητές αναμένεται να πραγματοποιήσουν μία σειρά από λάθη τα οποία θα τα ταξινομήσουμε στις παρακάτω κατηγορίες:

- Υπολογιστικά λάθη αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού: Σε αυτήν την κατηγορία εντάσσουμε τα λάθη που γίνονται από λάθος εκτίμηση των αποτελεσμάτων σε αυτές τις πράξεις, αλλά και από απροσεξία. Π.χ. 3 × 4 = 12 ή 19 – 16 = 2.

- Σχέση διαιρέτη με τα ψηφία διαιρετέου: Τα λάθη αυτής της κατηγορίας σχετίζονται με το αν ο διαιρέτης χωρά στο πρώτο ψηφίο του διαιρετέου. Π.χ. 404 ÷ 8. Στο παράδειγμα αυτό οι μαθητές ενδέχεται να αντιμετωπίσουν δυσκολία και να απαντήσουν λάθος.

- Η ύπαρξη του μηδενός στα ψηφία του διαιρετέου: Οι μαθητές πολλές φορές δεν συνυπολογίζουν το μηδέν όταν βρίσκεται στα ψηφία του διαιρέτη, καθώς το κατεβάζουν, το προσπερνούν και εξετάζουν το επόμενο ψηφίο. Π.χ. στην κάθετη διαίρεση 707 ÷ 7, ενδέχεται να δώσουν αποτέλεσμα 11 και όχι 101, που είναι και το σωστό.

2. Δραστηριότητα 2

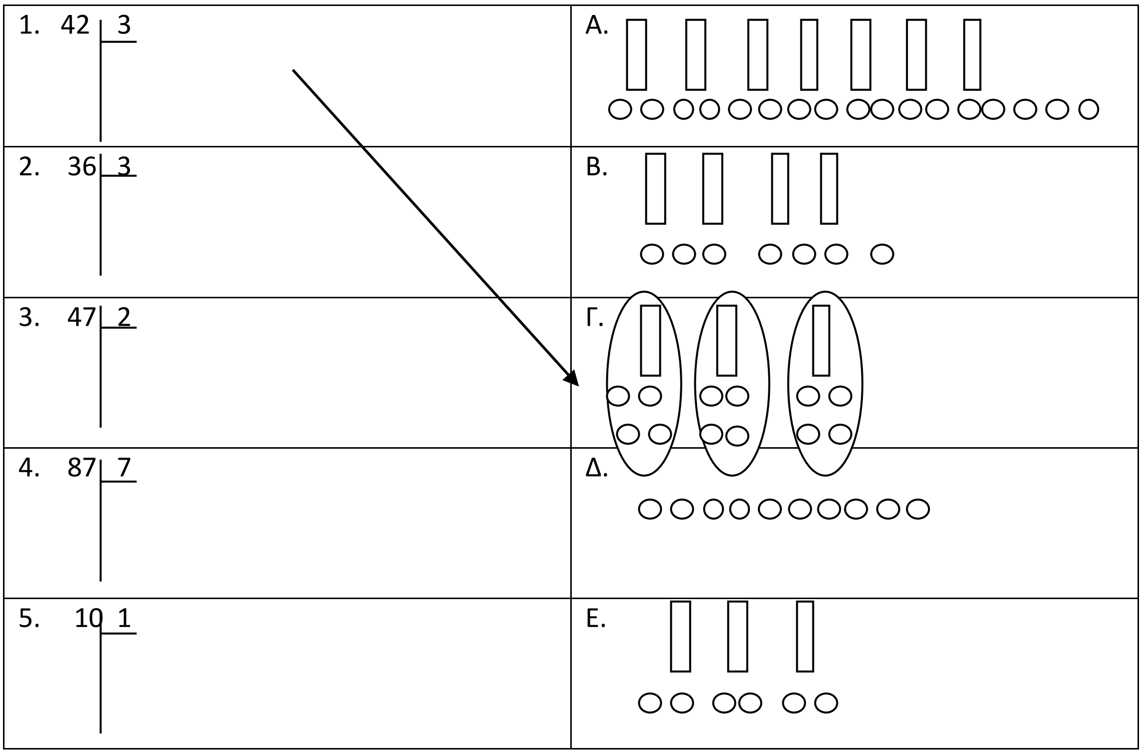
Η δραστηριότητα 2 σχεδιάστηκε στα πλαίσια αυτής της έρευνας, καθώς συνυπολογίστηκε το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια των εναλλακτικών διδασκαλιών που πραγματοποιήθηκαν σημαίνουσα θέση είχαν οι αναπαραστάσεις και η σύνδεση τους με το αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης. Έμπνευση για το σχεδιασμό της συγκεκριμένης δραστηριότητας αποτελεί το άρθρο *«About the Mathematics of Division: Implications for Students With Disabilities»*, των Teresa E. Foley και John F. Cawley. Αφού μελετήθηκε το παραπάνω άρθρο, η δραστηριότητα προσαρμόστηκε στο επίπεδο τη Γ΄ Δημοτικού και παρουσιάζεται με την μορφή που δίνεται παρακάτω.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές θα πρέπει να διαφοροποιούν καταστάσεις στις οποίες έχουν έναν αριθμό στοιχείων και (α) να τον χωρίζουν, ώστε κάθε σύνολο από έναν δοσμένο αριθμό να έχει τον ίδιο αριθμό των στοιχείων, (β) να προσδιορίζουν τον αριθμό των συνόλων που θα οδηγεί σε ένα δεδομένο αριθμό μερών ανά σύνολο, και (γ) να δημιουργούν σύνολα με διαφορετικό αριθμό στοιχείων.

2.1. Η δραστηριότητα

Για την παραπάνω δραστηριότητα τονίζεται ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών δεν γνωρίζουν πώς να χρησιμοποιούν εναλλακτικές αναπαραστάσεις για την πράξη της διαίρεσης, με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν δυσκολία στην αντιστοίχιση. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι μέτριου επιπέδου, αρκεί οι μαθητές να καταλάβουν ότι πρόκειται για διαιρέσεις μερισμού.

2. Αν η μια γραμμή είναι μία δεκάδα και η μία κουκίδα είναι μία μονάδα, να κάνετε τις παρακάτω αντιστοιχίσεις και να σχεδιάσετε τις λύσεις των παρακάτω διαιρέσεων, όπως το παράδειγμα.



2.2. Πιθανά Λάθη

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να μην μπορούν να απαντήσουν σε καμία αντιστοίχιση, αν δεν είναι εξοικειωμένοι με τις αναπαραστάσεις.
- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να κάνουν λάθη απροσεξίας και βιασύνης.
- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να μην μπορούν να απαντήσουν στην περιπτώσεις 5, καθώς θα πρέπει να επιλέξουν και τα 10 στοιχεία σε ένα σύνολο.
- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να κάνουν λάθη στο χωρισμό των συνόλων και να συμπεριλάβουν το υπόλοιπο στις απαντήσεις τους.

3. Δραστηριότητα 3

Το παρακάτω πρόβλημα σχεδιάστηκε και προσαρμόστηκε στα δεδομένα της Γ΄ Δημοτικού, αφού μελετήθηκε αντίστοιχο πρόβλημα, το οποίο βρίσκεται στο βιβλίο *«Elementary and Middle School Mathematic Teaching Developmentally»*, των John A. Van de Walle, Karen S. Karp, Jennifer M. Bay-Williams. Παρακάτω παρουσιάζεται το πρόβλημα με τον τρόπο που δόθηκε στους μαθητές και των δύο ομάδων:

1ο Πρόβλημα:

Έχουμε μαζέψει από ένα μπαζάρ 5 κιβώτια, που το καθένα χωράει 100 καραμέλες, 8 κουτιά, που το καθένα χωράει 10 καραμέλες και επιπλέον 3 καραμέλες και θέλουμε να τις μοιράσουμε ισόποσα σε 4 σχολεία. Πόσες καραμέλες θα πάρει το κάθε σχολείο;

Λύση:

Απάντηση:

____
____

3.1. Σκοπός της Έρευνας

Ο γενικός σκοπός του υποκεφαλαίου από το οποίο πάρθηκε το παραπάνω πρόβλημα είναι να αναλύσει λεπτομερώς τις εννοιολογικές αρχές που συνδέονται με τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης, καθώς και να παρουσιάσει μοντέλα με τα οποία οι μαθητές θα επωφεληθούν και θα δομήσουν την απαιτούμενη εννοιολογική ανάπτυξη.

Τυπικά, ο αλγόριθμος της διαίρεσης με μονοψήφιους διαιρέτες εισάγεται στην τρίτη τάξη του Δημοτικού, και θα πρέπει να παρέχει τη βάση για διψήφιους διαιρέτες. Η εργασία αυτή τονίζει ότι οι μαθητές στις μεγαλύτερες τάξεις, οι οποίοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες με τον αλγόριθμο της διαίρεσης μπορούν επίσης να επωφεληθούν από μια εννοιολογική ανάπτυξη που θα τους παρέχει το πλαίσιο ενός μοντέλου.

Ξεκινώντας με τα μοντέλα: Παραδοσιακά, αν θέλαμε να λύσουμε μία κάθετη διαίρεση όπως για παράδειγμα το 583 ÷ 4, θα μπορούσαμε να πούμε, "το 4 χωράει στο 5 μία φορά." Αυτό είναι πολύ μυστηριώδες για τους μαθητές. Πώς μπορούμε απλά να αγνοούμε το "83" και να μην εξηγούμε τι σημαίνει ως μέρος του αριθμού και πως αυτό συνδέεται με την αξία και την θέση του κάθε αριθμού; Κατά προτίμηση, θέλουμε οι μαθητές να σκεφτούν τα 583 ως 5 εκατοντάδες, 8 δεκάδες, Και 3 μονάδες, όχι ως ανεξάρτητα ψηφία 5, 8 και 3.

Η ιδέα είναι να χρησιμοποιηθεί ένα πλαίσιο. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό με τις καραμέλες. Συγκεκριμένα, ένα κουτί περιέχει δέκα (10) καραμέλες και ένα κιβώτιο εκατό (100). Τότε το πρόβλημα γίνεται ως εξής: Έχουμε 5 κουτιά, 8 κιβώτια, και 3 καραμέλες τα οποία θέλουμε να μοιράσουμε ομοιόμορφα μεταξύ 4 σχολείων. Σε αυτό το πλαίσιο, είναι λογικό να μοιραστούν πρώτα τα κιβώτια μέχρι να μην υπάρχουν για να μοιραστούν. Αυτά που απομένουν, "αποσυσκευάζονται" και συνεχίζουν να μοιράζονται ομοιόμορφα και ούτω καθεξής. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε παρόμοιο μοντέλο χρήματα ($ 100, $ 10 και $ 1) με παρόμοιο τρόπο (Van de Walle, 2013).

3.2. Η δραστηριότητα

Το πρόβλημα που εξετάζεται στο post-test είναι υψηλής δυσκολίας. Οι μαθητές θα πρέπει να συνθέσουν τον αριθμό που πρόκειται να διαιρέσουν, αρκεί να κατανοήσουν το πλαίσιο του προβλήματος. Κάποιοι μαθητές πιθανών να χρησιμοποιήσουν κάποιου είδους αναπαράσταση για την επίλυση του προβλήματος. Επιπλέον η διαίρεση είναι ατελής και το υπόλοιπο θα πρέπει να συνυπολογιστεί στην απάντηση, χωρίς να την επηρεάζει βέβαια.

3.3. Πιθανά λάθη

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να πραγματοποιήσουν λάθη απροσεξίας κατά την σύνθεση του διαιρετέου.

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να μην συνυπολογίσουν το υπόλοιπο στην απάντηση τους.

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα μηχανικά και να πραγματοποιήσουν πράξεις που δεν συνδέονται με το εννοιολογικό πλαίσιο του προβλήματος.

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να μην απαντήσουν καθόλου στο δοσμένο πρόβλημα.

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να πραγματοποιήσουν λάθη υπολογισμού κατά την περάτωση του αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης.

4. Δραστηριότητα 4

Το παρακάτω πρόβλημα σχεδιάστηκε και προσαρμόστηκε στα δεδομένα της Γ΄ Δημοτικού, αφού μελετήθηκε αντίστοιχο πρόβλημα, το οποίο βρίσκεται στο άρθρο *«A study of progression in written calculation strategies of division»,* της Julia Anghileri. Παρακάτω παρουσιάζεται το πρόβλημα με τον τρόπο που δόθηκε στους μαθητές και των δύο ομάδων:

2^{o} Πρόβλημα:

Τα 431 παιδιά ενός σχολείου θα πάνε εκδρομή στο εργοστάσιο σοκολάτας. Το σχολείο αποφάσισε να χρησιμοποιήσουν μικρά λεωφορεία που το καθένα χωράει 9 παιδιά. Πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν για τη μεταφορά των μαθητών;

Λύση:

Απάντηση:

____

____

4.1. Σκοπός της Έρευνας

Σκοπός της έρευνας της Julia Anghileri είναι μέσα από τις αποτελεσματικές και μη αποτελεσματικές στρατηγικές που χρησιμοποιούνται για την διαίρεση, να φωτίσει το πρόβλημα του πως οι μαθητές αναπτύσσουν την *«αριθμητική αίσθηση»* μέσω της κατανόησης των υπολογιστικών μεθόδων που χρησιμοποιούν.

Η *«αριθμητική αίσθηση»* αναφέρεται στην γενική κατανόηση του ατόμου επάνω στους αριθμούς και τις πράξεις, καθώς και την ικανότητα και κλίση του να χρησιμοποιεί αυτήν την κατανόηση με ευέλικτους τρόπους, ώστε να κάνει μαθηματικές κρίσεις και να αναπτύσσει χρήσιμες στρατηγικές, για να αντιμετωπίζει αριθμούς και πράξεις (Mcintosh κ.α., 1992).

Η αριθμητική αίσθηση εμπεριέχει έναν τρόπο σκέψης, ο οποίος δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αναγνωρίζουν σύντομα σημαντικές σχέσεις μεταξύ των αριθμών, όπως για παράδειγμα το 48 δεν είναι μόνο 40 + 8, αλλά και 50 – 2, καθώς επίσης το 40 είναι και 20 + 20 ή ακόμα και 4 × 10 και 5 × 8 κλπ. Ο τρόπος με τον οποίο οι αριθμοί συνδέονται, οι δυνατότητες για διαφορετικές αναπαραστάσεις, και οι έννοιες που μπορούν να συσχετιστούν μπορούν να διαδραματίσουν ένα κρίσιμο ρόλο στην κατανόηση των λειτουργιών μιας αριθμητικής πράξης (Anghileri, 2001).

4.2. Η δραστηριότητα

Το πρόβλημα που εξετάζεται στο post-test είναι υψηλής δυσκολίας. Οι μαθητές καλούνται να πραγματοποιήσουν μία κάθετη διαίρεση, παρόλα αυτά θα πρέπει να δώσουν ιδιαίτερη προσοχή στο πλαίσιο του προβλήματος. Κάποιοι μαθητές πιθανώς να χρησιμοποιήσουν κάποιου είδους αναπαράσταση για την επίλυση του προβλήματος. Επιπλέον η διαίρεση είναι ατελής και το υπόλοιπο θα πρέπει να συνυπολογιστεί στην απάντηση. Ιδιαίτερη σημασία καταλαμβάνει το υπόλοιπο της διαίρεσης σε αυτό το πρόβλημα, καθώς διαμορφώνει και την σωστή απάντηση.

4.3. Πιθανά λάθη

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να μην συνυπολογίσουν το υπόλοιπο στην απάντηση τους.

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα μηχανικά και να πραγματοποιήσουν πράξεις που δεν συνδέονται με το εννοιολογικό πλαίσιο του προβλήματος.

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να μην απαντήσουν καθόλου στο δοσμένο πρόβλημα.

- Περιμένουμε κάποιοι μαθητές να πραγματοποιήσουν λάθη υπολογισμού κατά την περάτωση του αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{o} : ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1. Συλλογή και επεξεργασία των ερευνητικών δεδομένων

Η συλλογή δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε δύο επίπεδα, καθώς σε πρώτο στάδιο δοθήκαν στους μαθητές της Γ΄ Δημοτικού φύλλα εργασίας, στα οποία κλήθηκαν να απαντήσουν, έτσι ώστε να λάβουμε γνώση σε τι επίπεδο βρίσκονται, άλλα και να συγκεντρώσουμε τις παρανοήσεις, τις αδυναμίες, τα λάθη αλλά και τις στρατηγικές επίλυσης που χρησιμοποίησαν στις διαφορές ασκήσεις του pretest με σκοπό την δόμηση και το σχεδιασμό των διδασκαλιών που θέλαμε να πραγματοποιήσουμε σε επόμενο στάδιο. Με την ολοκλήρωση των διδασκαλιών, ξεκίνησε ο σχεδιασμός του post-test, το οποίο και δόθηκε σε τρίτο στάδιο στους μαθητές των δύο τάξεων. Αφού συγκεντρώθηκαν όλα τα Φύλλα απαντήσεων, ξεκίνησε η διαδικασία επεξεργασίας και κατηγοριοποίησης των απαντήσεων των μαθητών, με στόχο την πραγματοποίηση μιας επιτυχούς ανάλυσης και την εξαγωγή καλών και ασφαλών συμπερασμάτων.

Τόσο στο pretest, όσο και sto post-test, οι δραστηριότητες που επιλέχθηκαν και σε αυτές κλήθηκαν να απαντήσουν οι μαθητές, εξέταζαν αποκλειστικά συγκεκριμένες δεξιότητες και έννοιες, ατομικά η καθεμία. Συνεπώς η επεξεργασία και κατηγοριοποίηση των δεδομένων, στηρίχθηκε στην παραπάνω ιδέα. Έτσι, οι απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν ως προς την εφαρμογή, τον βαθμό επιτυχίας και την εκτέλεση συγκεκριμένων στρατηγικών σε δύο μεγάλες υποκατηγορίες: α) Σωστή Εφαρμογή και Επίλυση και β) Λανθασμένη Εφαρμογή και Επίλυση. Μια τέτοια κατηγοριοποίηση αποδείχθηκε απαραίτητη, ώστε να είμαστε σε θέση να αξιολογήσουμε τις ικανότητες των μαθητών πριν και μετά τη διδασκαλία του κάθετου αλγορίθμου της διδασκαλίας, καθώς και τα λάθη που κάνουν.

4.2. Ανάλυση δεδομένων

Αφού διορθώθηκαν τα φύλλα εργασίας (pretest-posttest), κατηγοριοποιήθηκαν τα λάθη των μαθητών, ώστε να οδηγηθούμε πιο εύκολα σε εύστοχα και συγκεκριμένα συμπεράσματα. Οι σημειώσεις και οι παρατηρήσεις κατά τη συμπλήρωση των φύλλων εργασίας από τους μαθητές, με αφορμή απορίες και ερωτήσεις τους, βοήθησαν ακόμα περισσότερο στην καταγραφή των δυσκολιών που αντιμετώπισαν κατά τη συμπλήρωση. Σε κάθε ερώτημα εντοπίστηκε το ποσοστό επιτυχίας του *experimental group* και του *control group*. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται η σύγκριση των δύο ομάδων μέσα από τις απαντήσεις που έδωσαν. Το ποσοστό κάθε κατηγορίας υπολογίστηκε με προσέγγιση στο δέκατο, ενώ τα γραφήματα σχεδιάστηκαν με το Λογισμικό Tableau. Το παραπάνω λογισμικό άντλησε τα δεδομένα (Data set) για τον σχεδιασμό των γραφημάτων από το Λογισμικό Υπολογιστικών Φύλλων (Microsoft Excel).

4.3. Ανάλυση αποτελεσμάτων Pretest

Συνολικά Αποτελέσματα:

Πίνακας 4.1

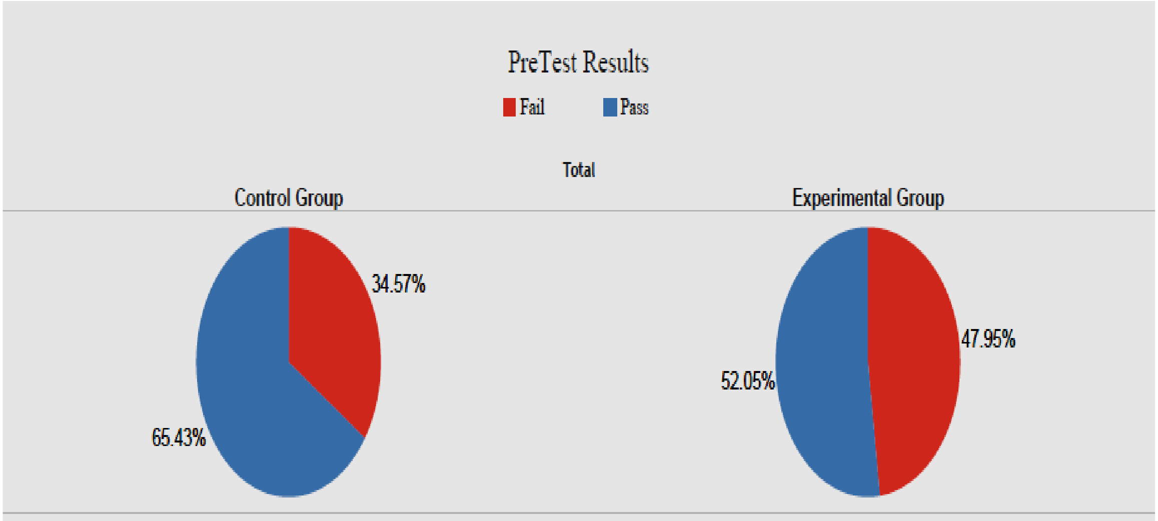
Total			
Groups		Pretest	
	N	Mean	Sd
Experimental	22	52.05%	17.99%
Control	21	65.43%	16.30%

Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζεται η συνολική αποτίμηση της επίδοσης των μαθητών της Γ΄ Δημοτικού που συμμετείχαν στη ερευνητική αυτή εργασία κατά το *pretest,* το οποίο αποτελεί και το πρώτο στάδιο της έρευνας. Συγκεκριμένα, στον παραπάνω πίνακα φαίνεται ο μέσος όρος (Mean) που αφορά στην επιτυχία των μαθητών συνολικά σε όλες τις δραστηριότητες του *pretest,* καθώς και η τυπική απόκλιση. Όπως βλέπουμε η Ερευνητική Ομάδα (Experimental Group) έχει σημειώσει **Συνολικό Μέσο Όρο 52,05%**, όσον αφορά στον βαθμό επιτυχίας των πέντε δραστηριοτήτων του Pretest. Αντίστοιχα, η Ομάδα Ελέγχου (Control Group), παρατηρούμε ότι σημείωσε αρκετά υψηλότερο ποσοστό της τάξεως του **65,43%**.

Παρακάτω παρουσιάζεται το αντίστοιχο Γράφημα (Γράφημα 4.1), όπου φαίνεται ο Μέσος Όρος επιτυχίας και αποτυχίας των δύο ομάδων-τμημάτων της Γ΄

Δημοτικού.

Γράφημα 4.1



Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι πίνακες και τα γραφήματα της κάθε δραστηριότητας ξεχωριστά, ενώ αναλύονται τα αποτελέσματα και σχολιάζονται αντιστοίχως, λαμβάνοντας υπόψη την κάθε έννοια που εξετάστηκε στην κάθε δραστηριότητα, όπως αναφέρεται σε προηγούμενο υποκεφάλαιο (Βλ. 3.3 Το Pretest).

Δραστηριότητα 1 (Τ1):

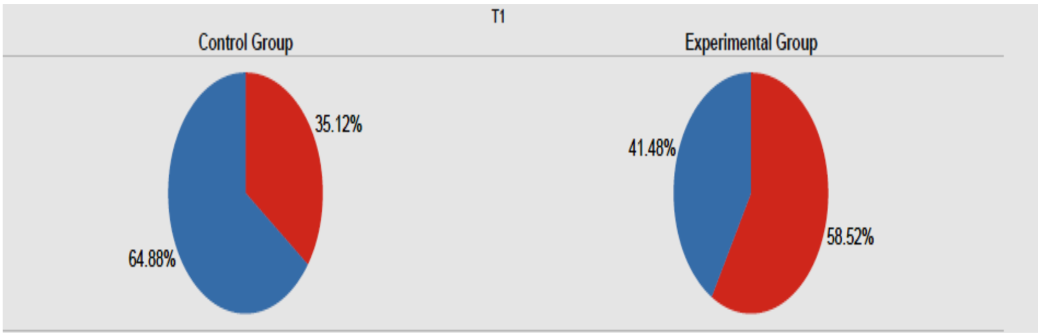
Πίνακας 4.2

T1			
Groups		Pretest	
	N	Mean	Sd
Experimental	22	41.48%	31.39%
Control	21	64,88%	28.51%

Για την παραπάνω δραστηριότητα οι δύο ομάδες-τμήματα καλούνται να χρησιμοποιήσουν εναλλακτικές αναπαραστάσεις για την πράξη της διαίρεσης. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να αντιστοιχίσουν τις διαιρέσεις της μίας στήλης με τα χωρισμένα σύνολα της άλλης. Αν και η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι μέτριου επιπέδου, πρέπει οι μαθητές να καταλάβουν ότι πρόκειται για διαιρέσεις μέτρησης. Επιπλέον, στη δραστηριότητα εμφανίζεται ο κάθετος αλγόριθμος της διαίρεσης, με σκοπό να εκμαιεύσουμε αν οι μαθητές φέρουν αυτή τη γνώση πριν ακόμα διδαχθούν την έννοια.

Συγκεκριμένα, στον πίνακα 4.2 φαίνεται ο μέσος όρος (Mean) που αφορά στην επιτυχία των μαθητών στη Δραστηριότητα 1 (T1) του *pretest,* καθώς και η τυπική απόκλιση. Όπως βλέπουμε η Ερευνητική Ομάδα (Experimental Group) έχει σημειώσει **Μέσο Όρο 41,48%**, ενώ η Ομάδα Ελέγχου, παρατηρούμε ότι σημείωσε πολύ υψηλότερο ποσοστό της τάξεως του **64,88%** στη ίδια ακριβώς δραστηριότητα. Τα άνωθεν αποτελέσματα παρουσιάζονται και στο Γράφημα 4.2

Γράφημα 4.2



Φαίνεται λοιπόν ότι η Ομάδα Ελέγχου (Control Group) βρίσκεται σε υψηλότερο επίπεδο από την Ερευνητική Ομάδα (Experimental Group), καθώς επιτυγχάνει εμφανώς υψηλότερο σκορ σε αυτήν την δραστηριότητα. Συνδέει καλύτερα τις αναπαραστάσεις με τις διαιρέσεις και περιορίζεται κατά κύριο λόγο σε λάθη που έχουν να κάνουν με το αν η διαίρεση είναι μέτρησης ή μερισμού (στα παραδείγματα 8÷2, 8÷4). Απεναντίας η Ερευνητική Ομάδα εμφανίζει αδυναμία στη σύνδεση της έννοιας της διαίρεσης με την αναπαράσταση της και γενικότερα στην κατανόηση της δραστηριότητας, αφού οι μαθητές πραγματοποιούν και λάθη απροσεξίας, αλλά και λάθη που δεν μπορούν κατηγοριοποιηθούν σε κάποια κατηγορία.

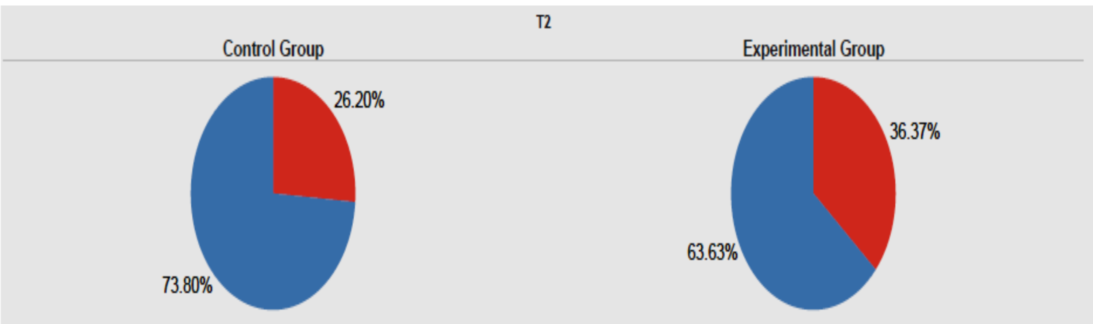
Δραστηριότητα 2 (Τ2):

Πίνακας 4.3

T2			
Groups	Pretest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	63.64%	22.27%
Control	21	73.81%	22.17%

Ο κάθετος αλγόριθμος της διαίρεσης προϋποθέτει τόσο την πράξη της αφαίρεσης όσο και του πολλαπλασιασμού μέσα από τις διαδοχικές αφαιρέσεις και το πόσες φορές χωράει ένας αριθμός σε έναν άλλο. Αυτό τονίζεται από την βιβλιογραφία, για αυτό η δραστηριότητα 2 (Τ2) εξετάζει την ευχέρεια και τις δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίσουν οι μαθητές σε αυτές τις δύο αριθμητικές πράξεις. Όπως παρουσιάζει και ο Πίνακας 4.3, παρατηρούμε ότι και οι δύο ομάδες έχουν σημειώσει υψηλό Μέσο Όρο. Μολαταύτα, η Ομάδα Ελέγχου πέτυχε Μέσο Όρο **73.81%**, αρκετά υψηλότερο και πάλι από την Πειραματική Ομάδα, η οποία σημείωσε **63.64%**, όπως παρουσιάζεται και στο Γράφημα 4.3.

Γράφημα 4.3



Οι μαθητές και των δύο ομάδων προσανατολίστηκαν σε παρόμοιες κατηγορίες λαθών, οι οποίες και αναφέρονται παρακάτω. Οι περισσότεροι μαθητές υπέπεσαν σε λάθη απροσεξίας τόσο στην αριθμητική πράξη της αφαίρεσης όσο και του πολλαπλασιασμού. Επιπλέον, παρατηρήθηκαν λάθη στη χρήση και διαχείριση του κρατούμενου, το οποίο δημιούργησε πολλά αριθμητικά λάθη. Τέλος, λιγότερες ήταν οι περιπτώσεις, όπου μαθητές πραγματοποίησαν λάθη στα δομικά μέρη του αλγορίθμου του κάθετου πολλαπλασιασμού.

Δραστηριότητα 3 (Τ3):

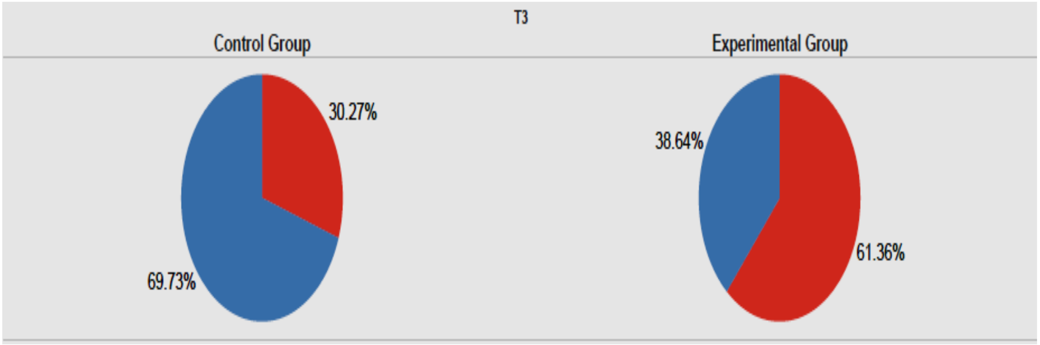
Πίνακας 4.4

T3			
Groups	Pretest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	38.64%	43.43%
Control	21	69.73%	32.91%

Η Δραστηριότητα 3 (Τ3) δόθηκε στους μαθητές των δύο τμημάτων, ώστε να εξεταστεί αν μπορούν να οδηγηθούν στο ζητούμενο αποτέλεσμα με διαφορετικούς τρόπους, με σκοπό να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ των αριθμών και της πράξης της διαίρεσης. Τα δεδομένα που πάρθηκαν από τις απαντήσεις των μαθητών χρησίμευαν ως ένα θεμέλιο για μια συζήτηση σχετικά με τη μεταβλητότητα με την οποία σκέφτονται οι μαθητές για τη διαίρεση και αποτέλεσαν μία βάση για τον σχεδιασμό των εναλλακτικών διδασκαλιών που ακολούθησαν. Ακόμη, επειδή τα κενά στη δοσμένη Δραστηριότητα είναι συγκεκριμένα περιορίζουν τους μαθητές σε συγκεκριμένα βήματα, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι αυτή είναι μία εύκολη δραστηριότητα για αυτούς.

Όπως βλέπουμε η Ερευνητική Ομάδα (Experimental Group) έχει σημειώσει **Μέσο Όρο 38.64%**, ενώ η Ομάδα Ελέγχου (Control Group), παρατηρούμε ότι σημείωσε πολύ υψηλότερο ποσοστό της τάξεως του **69.73%** στη ίδια ακριβώς δραστηριότητα. Παρατηρούμε μία μεγάλη απόκλιση στο ποσοστό επιτυχίας (Μέσο Όρο) μεταξύ των δύο τμημάτων της Γ΄ Δημοτικού. Τα άνωθεν αποτελέσματα παρουσιάζονται και στο Γράφημα 4.4.

Γράφημα 4.4



Παρατηρώντας το Γράφημα 4.4 βλέπουμε ότι η Ομάδα Ελέγχου έχει σημειώσει μια υψηλή και ικανοποιητική επίδοση στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, σε αντίθεση με την Πειραματική Ομάδα. Παρότι η Δραστηριότητα 3 (Τ3) είναι σχετικά υψηλής δυσκολίας για αυτήν την ηλικιακή ομάδα μαθητών, προξένησε ανησυχία και παράλληλα το ενδιαφέρον για το πώς τα δύο τμήματα σημείωσαν τέτοια διαφορά στην επίδοση τους, καθώς και ποιος παράγοντας συντέλεσε σε αυτά τα αποτελέσματα. Γενικότερα, η Πειραματική Ομάδα εμφάνισε μία αδυναμία περάτωσης της δραστηριότητας, αφού πολλοί ήταν οι μαθητές που δεν την συμπλήρωσαν καθόλου (9 στους 22). Επιπλέον, πραγματοποιήθηκαν αρκετά λάθη απροσεξίας, καθώς και λάθη, τα οποία δεν έφεραν καμία λογική σύνδεση μεταξύ των δοσμένων αριθμών. Τέλος, τα περισσότερα λάθη πραγματοποιήθηκαν στο δεύτερο παράδειγμα (24 ÷ …... = 3), καθότι ήταν και μεγαλύτερης δυσκολίας και προϋπόθετε υψηλότερο επίπεδο αφαιρετικής σκέψης.

Δραστηριότητα 4Α (Τ4i):

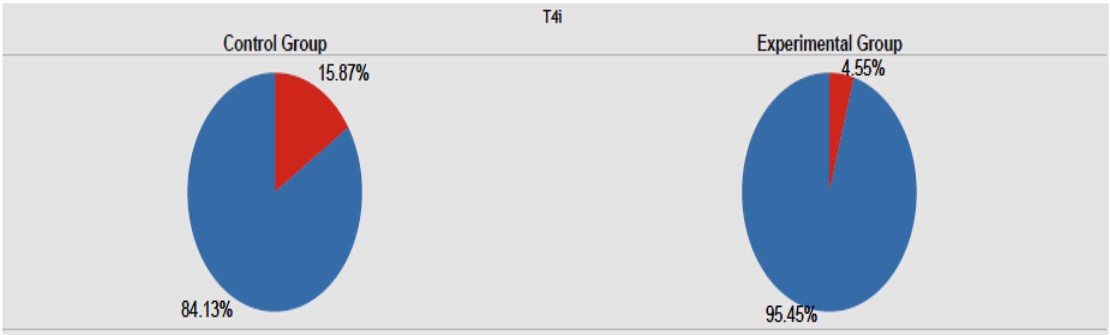
Πίνακας 4.5

T4i			
Groups		Pretest	
	N	Mean	Sd
Experimental	22	95.45%	20.83%
Control	21	84.13%	32.45%

Η δραστηριότητα 4 απαρτίζεται από δύο μέρη. Σε αυτές τις δραστηριότητες οι μαθητές καλούνται να αναλύσουν και να συνθέσουν αριθμούς. Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την ευχέρεια να δουλεύουν και να κατανοούν τις ασκήσεις που συμπεριλαμβάνουν τη έννοια της αξίας - θέσης ενός αριθμού. Η παραπάνω έννοια είναι καθοριστικής σημασίας για την διδασκαλία και εκμάθηση του αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης.

Παρατηρώντας τον πίνακα 4.5, βλέπουμε ότι και οι δύο ομάδες-τμήματα έχουν σημειώσει πολύ υψηλά αποτελέσματα στην Δραστηριότητα T4i. Συγκεκριμένα, η Ερευνητική Ομάδα σημείωσε **Μέσο Όρο 95.45%** και η Ομάδα Ελέγχου **84.13%** αντίστοιχα. Η παραπάνω δραστηριότητα είναι χαμηλού επιπέδου, για αυτό και παρατηρούνται τόσο υψηλά ποσοστά επιτυχίας.

Γράφημα 4.5



Τα παραπάνω αποτελέσματα επιτυχίας και αποτυχίας παρουσιάζονται ξεκάθαρα και από το Γράφημα 4.5. Οι μαθητές και των δύο Ομάδων περιορίστηκαν στην πραγματοποίηση λαθών που οφείλονταν σε απροσεξία. Τέλος, ένα μικρό ποσοστό μαθητών εμφάνισε λάθη, τα οποία οφείλονταν στη μη κατανόηση της έννοιας της αξίας – θέσης και αυτό τους οδήγησε σε μία λανθασμένη ανάλυση των ζητούμενων αριθμών.

Δραστηριότητα 4Β (T4ii):

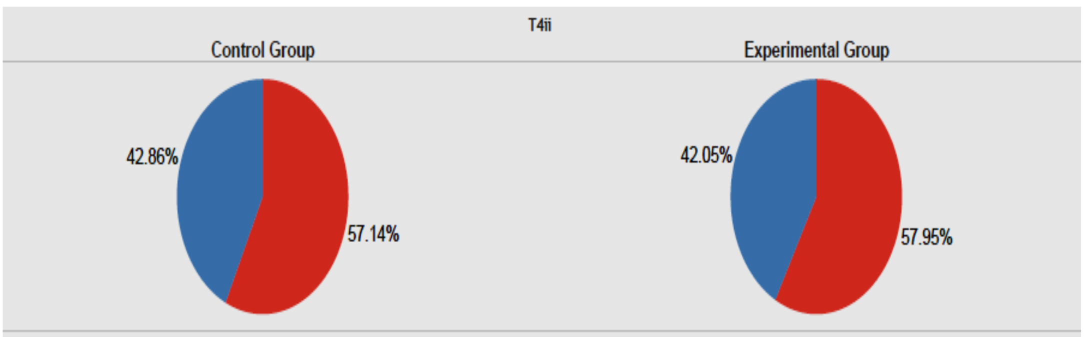
Πίνακας 4.6

T4ii			
Groups		Pretest	
	N	Mean	Sd
Experimental	22	42.05%	28.59%
Control	21	42.86%	31.00%

Η δραστηριότητα T4ii αποβλέπει στο να διαπιστώσουμε, αν οι μαθητές μπορούν να δουλέψουν σωστά με τις μονάδες, τις δεκάδες, τις εκατοντάδες κ.α., καθώς αυτές οι δεξιότητες κρίνονται απαραίτητες για την διεξαγωγή των διδασκαλιών αργότερα. Οι δραστηριότητα αυτή διαφέρει από τις όμοιες της, στο ότι δοσμένων των αριθμών δίνονται πρώτα οι μονάδες, έπειτα οι δεκάδες, μετά οι εκατοντάδες κ.ο.κ. Αυτό θέλει να εξετάσει την ουσιαστική κατανόηση των μαθητών και όχι κάποια μηχανιστική προσέγγιση.

Η δραστηριότητα όπως δομήθηκε είναι υψηλής δυσκολίας, για αυτό και τα δύο δεν σημείωσαν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Μολαταύτα, βλέπουμε ότι η απόκλιση στον Μέσο Όρο είναι ελάχιστη μεταξύ των δύο τμημάτων. Η Ομάδα Ελέγχου (Control Group) πέτυχε **42.86%** Μέσο Όρο, ενώ η Πειραματική Ομάδα (Experimental Group) σημείωσε Μέσο Όρο **42.05%**. Τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζονται και στο Γράφημα 4.6.

Γράφημα 4.6



Οι μαθητές εμφάνισαν αρκετά λάθη και παρανοήσεις στη συγκεκριμένη δραστηριότητα, τα οποία ήταν καθοριστικής σημασίας και αποτέλεσαν μία ουσιαστική βάση για τον σχεδιασμό των διδασκαλιών που ακολούθησαν. Αρκετοί μαθητές πραγματοποίησαν λάθη απροσεξίας. Όμως η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών εμφάνισε την αδυναμία σύνθεσης του αριθμού δοσμένων των στοιχείων του, όταν τα στοιχεία μιας τάξης υπερέβαιναν τη βάση του αριθμητικού συστήματος (Π.χ. στην υποπερίπτωση που δίνονταν 11 μονάδες έπρεπε οι μαθητές να διατηρήσουν 1 μονάδα και να προσθέσουν τις 10 μονάδες ως 1 δεκάδα στις δεκάδες). Πολλοί ήταν οι μαθητές, οι οποίοι όταν αντιμετώπιζαν την παραπάνω δυσκολία και διαπίστωναν ότι δεν μπορούσαν να εργαστούν, πρόσθεταν τις μονάδες στις δεκάδες (Π.χ. 16 Μον. + 6 Δεκ. + 9 Εκ. + 2 Χιλ. = 2922). Επιπλέον αρκετοί μαθητές πραγματοποίησαν απλή μεταφορά των δεδομένων που τους δίνονταν, χωρίς να συνδέσουν τους αριθμούς με την αξία η τη θέση τους (Π.χ. 16 Μον. + 6 Δεκ. + 9 Εκ. + 2 Χιλ. = 16.692 ή και 29.616).

Δραστηριότητα 5 (Τ5):

Πίνακας 4.7

T5

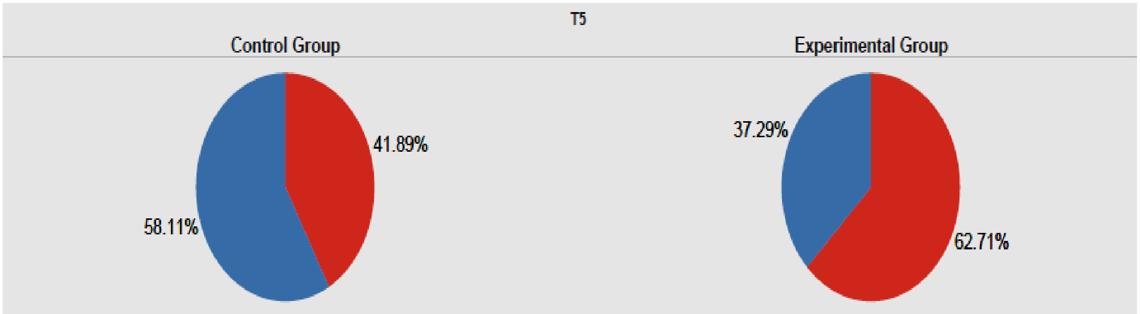
Groups	Pretest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	37.27%	25.79%
Control	21	58.10%	16.30%

Οι λόγοι για τους οποίους επιλέχθηκε το συγκεκριμένο διαγνωστικό πρόβλημα είναι ποικίλοι. Αρχικά, έχει ήδη ερευνηθεί σε μαθητές στη Μεγάλη Βρετανία και έχουν διαπιστωθεί αρκετές παρανοήσεις. Ο κυριότερος λόγος επιλογής του προβλήματος είναι η συγκέντρωση των άτυπων στρατηγικών που θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για την επίλυση του, ώστε να αποτελέσουν τη βάση για τις διδασκαλίες και τη δημιουργία αποτελεσματικών και δυναμικών συζητήσεων για την οικοδόμηση της έννοιας του κάθετου αλγορίθμου της διαίρεσης.

Το παραπάνω διαγνωστικό πρόβλημα είναι υψηλής δυσκολίας. Οι μαθητές καλούνται να πραγματοποιήσουν μία κάθετη διαίρεση, παρόλα αυτά θα πρέπει να δώσουν ιδιαίτερη προσοχή στο πλαίσιο του προβλήματος. Επιπλέον η διαίρεση είναι ατελής και το υπόλοιπο θα πρέπει να συνυπολογιστεί στην απάντηση. Ιδιαίτερη σημασία καταλαμβάνει το υπόλοιπο της διαίρεσης σε αυτό το πρόβλημα, καθώς διαμορφώνει και την σωστή απάντηση.

Όπως παρατηρούμε από τον Πίνακα 4.7 η Πειραματική Ομάδα (Experimental Group) σημείωσε αρκετά χαμηλό ποσοστό επιτυχίας της τάξεως του **37.27%**. Αντίθετα, η Ομάδα Ελέγχου (Control Group) είχε αισθητά υψηλότερο ποσοστό και κυμάνθηκε σε μέτριο επίπεδο, σημειώνοντας ποσοστό **58.10%**. Τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζονται και στο Γράφημα 4.7.

Γράφημα 4.7



Οι μαθητές και των δύο τμημάτων, οι οποίοι εξετάστηκαν στα πλαίσια της έρευνας κατά το pretest στη δραστηριότητα Τ5, υπέπεσαν σε παρόμοια λάθη και τα οποία συμπίπτουν με την βιβλιογραφία που στοιχειοθέτησε την έρευνα μας. Οι λανθασμένες επιλογές και παρανοήσεις των μαθητών ταξινομούνται στις παρακάτω κατηγορίες. Αρκετοί μαθητές (κυρίως από την Πειραματική Ομάδα) δεν κατόρθωσαν να λύσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα, αφήνοντας κενό στη λύση του. Επιπλέον, η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών έδωσε απάντηση «9 φορές», καθώς δεν συμπεριέλαβε στην απάντηση της το υπόλοιπο της διαίρεσης, το οποίο ήταν και καθοριστικής σημασίας για την ορθή λύση του προβλήματος. Ακόμη, αρκετοί μαθητές έκαναν χρήση πολλαπλασιασμού (76 × 8 = 608) και δεν έλαβαν υπόψη τους καθόλου το πλαίσιο του προβλήματος. Επίσης, λίγοι μαθητές πραγματοποίησαν λάθη απροσεξίας. Τέλος, άξιο αναφοράς είναι οι απαντήσεις δύο μαθητών, όπου έδωσαν απάντηση «13 φορές». Στις συγκεκριμένες απαντήσεις οι μαθητές είχαν προσθέσει το πηλίκο και το υπόλοιπο (Π: 9 + Υ:4 = 13 φορές). Αυτή η κατηγορία παρανόησης δείχνει την αδυναμία κατανόησης των δομικών στοιχείων της διαίρεσης και των λειτουργιών τους.

4.4. Ανάλυση αποτελεσμάτων Posttest

Συνολικά Αποτελέσματα:

Πίνακας 4.8

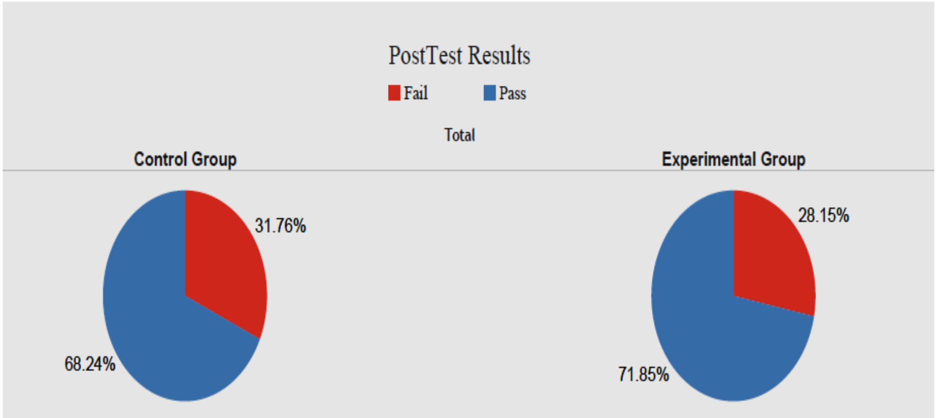
Total

Groups	Posttest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	71.85%	15.83%
Control	21	68.24%	16.20%

Στον Πίνακα 4.8 παρουσιάζεται η συνολική αποτίμηση της επίδοσης των μαθητών της Γ΄ Δημοτικού που συμμετείχαν στη ερευνητική αυτή εργασία κατά το *posttest,* το οποίο αποτελεί και το τρίτο και τελευταίο στάδιο της έρευνας. Συγκεκριμένα, στον παραπάνω πίνακα φαίνεται ο μέσος όρος (Mean) που αφορά στην επιτυχία των μαθητών συνολικά σε όλες τις δραστηριότητες του *posttest,* καθώς και η τυπική απόκλιση. Όπως βλέπουμε η Ερευνητική Ομάδα (Experimental Group) έχει σημειώσει **Συνολικό Μέσο Όρο 71.85%** όσον αφορά στον βαθμό επιτυχίας των τεσσάρων δραστηριοτήτων του Pretest. Αντίστοιχα, η Ομάδα Ελέγχου (Control Group), παρατηρούμε ότι σημείωσε αρκετά υψηλότερο ποσοστό της τάξεως του **68.24%**.

Παρακάτω παρουσιάζεται το αντίστοιχο Γράφημα (Γράφημα 4.8), όπου φαίνεται ο Μέσος Όρος επιτυχίας και αποτυχίας των δύο ομάδων-τμημάτων της Γ΄ Δημοτικού.

Γράφημα 4.8



Δραστηριότητα 1 (Τ1):

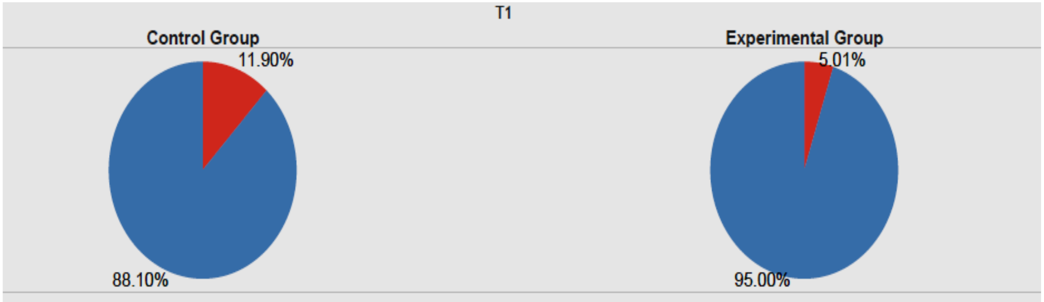
Πίνακας 4.9

T1			
Groups		Posttest	
	N	Mean	Sd
Experimental	22	95.00%	9.52%
Control	21	88.10%	14.09%

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα (Τ1΄) επιλέχθηκε για να εξετάσει την ικανότητα των μαθητών και των δύο ομάδων να επιλύουν κάθετες διαιρέσεις. Οι διαιρέσεις που επιδέχθηκαν εξυπηρετούν συγκεκριμένο σκοπό, καθώς είναι αντιπροσωπευτικά παραδείγματα διαφορετικών περιπτώσεων. Σε κάθε μία από αυτές τα ψηφία του διαιρετέου αλλά και το υπόλοιπο που αφήνουν σε σχέση με το διαιρέτη κάθε φορά, δημιουργούν διαφορετικές καταστάσεις, κατά τις οποίες οι μαθητές πρέπει να ενεργήσουν ανάλογα.

Όπως παρατηρούμε από τον Πίνακα 4.9 και οι δύο ομάδες σημείωσαν υψηλά αποτελέσματα. Ειδικότερα, η Πειραματική Ομάδα (Experimental Group) πραγματοποίησε μία πολύ υψηλή επίδοση με ποσοστό **95.00%**. Αντίστοιχά, σε πολύ καλό επίπεδο κινήθηκε και η Ομάδα Ελέγχου με ποσοστό επιτυχίας **88.10%**, δείχνοντας ότι τα δύο τμήματα μπορούν και χρησιμοποιούν τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεση με ευχέρεια. Τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζονται και στο Γράφημα 4.9

Γράφημα 4.9



Ένα μικρό ποσοστό των μαθητών και των δύο τμημάτων κατά την περάτωση των διαιρέσεων πραγματοποίησαν λάθη κατά την εκτέλεση των αλγορίθμων. Αυτά τα λάθη και τις παρανοήσεις που εμφάνισαν οι μαθητές μπορούμε να τα κατατάξουμε στις ακόλουθες 4 κατηγορίες. Πρώτον, οι μαθητές πραγματοποίησαν αριθμητικά λάθη απροσεξίας, κυρίως κάνοντας λάθος εκτίμηση στο πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στον διαιρετέο, καθώς επίσης έγιναν και αριθμητικά λάθη κατά την πραγματοποίηση ορισμένων αφαιρέσεων εσωτερικά του αλγορίθμου. Μία δεύτερη κατηγορία λαθών σχετίζεται με την ύπαρξη του 0 στο πηλίκο, όταν ο διαιρέτης δεν χωράει καμία φορά στο ψηφίο του διαιρετέου και πρέπει να κατεβάσουμε το επόμενο ψηφίο. Ακόμη, ελάχιστοι μαθητές παρέλειψαν να γράψουν το 0 στο πηλίκο στην διαίρεση 707 ÷ 7 και έδωσαν αποτέλεσμα 11 και όχι 101. Τέλος, ορισμένοι μαθητές έκαναν λάθη, όταν ο διαιρέτης δεν χωρούσε στο πρώτο ψηφίο του διαιρετέου και έπρεπε να τονίσουν το επόμενο. Αυτό παρατηρήθηκε στη διαίρεση 192 ÷ 4, κατά την οποία το 4 δεν χωράει στο 1 και πρέπει οι μαθητές να σκεφτούν πόσες φορές χωράει στο 19.

Δραστηριότητα 2a (T2i):

Πίνακας 4.10

T2i

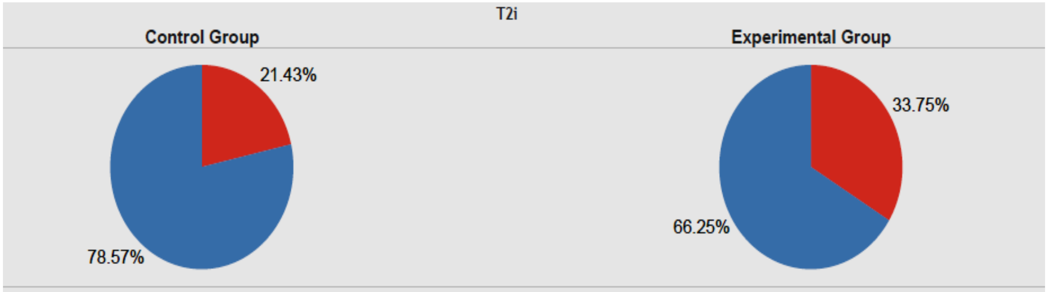
Groups	Posttest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	66.25%	42.36%
Control	21	78.57%	28.82%

Η δραστηριότητα 2 σχεδιάστηκε στα πλαίσια αυτής της έρευνας, καθώς συνυπολογίστηκε το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια των εναλλακτικών διδασκαλιών που πραγματοποιήθηκαν σημαίνουσα θέση είχαν οι αναπαραστάσεις και η σύνδεση τους με το αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης.

Για την παραπάνω δραστηριότητα τονίζεται ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών δεν γνωρίζουν πώς να χρησιμοποιούν εναλλακτικές αναπαραστάσεις για την πράξη της διαίρεσης, με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζουν δυσκολία στην αντιστοίχιση. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι μέτριου επιπέδου, μολαταύτα οι μαθητές έπρεπε να κατανοήσουν ότι πρόκειται για διαιρέσεις μερισμού. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα αξιολογήθηκε σε τρία επίπεδα. Η πρώτη αξιολόγηση εξέτασε την σύνδεση – αντιστοίχιση των διαιρέσεων της πρώτης στήλης με τις αναπαραστάσεις τις δεύτερης (T2i). Σε δεύτερο επίπεδο οι μαθητές αξιολογήθηκαν στον χωρισμό των συνόλων της δεύτερης στήλης όπως όριζαν οι διαιρέσεις από την πρώτη στήλη (T2ii). Τέλος, δίνεται η συνολική αποτίμηση της επιτυχίας ή αποτυχίας των δύο ομάδων (Ts).

Παρατηρώντας τον πίνακα 4.10, βλέπουμε ότι και οι δύο ομάδες-τμήματα έχουν σημειώσει υψηλά αποτελέσματα στην Δραστηριότητα T2i. Συγκεκριμένα, η Ερευνητική Ομάδα σημείωσε **Μέσο Όρο 66.25%** και η Ομάδα Ελέγχου **78.57%** αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται και στο Γράφημα 4.10.

Γράφημα 4.10



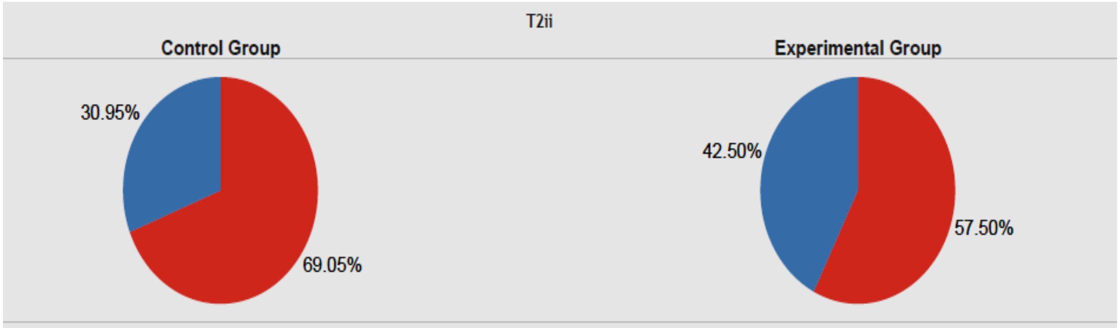
Δραστηριότητα 2β (T2ii):

Πίνακας 4.11

T2ii			
Groups	Posttest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	42.50%	43.75%
Control	21	30.95%	35.27%

Όπως παρατηρούμε από τον Πίνακα 4.11 τα αποτελέσματα και των δύο ομάδων εμφανίζονται πολύ χαμηλά, ιδιαιτέρως αυτά της Ομάδας Ελέγχου, η οποία σημείωσε Μέσο Όρο **30.95%.** Στην ίδια φάση της δραστηριότητας η Πειραματική Ομάδα σημείωσε υψηλότερο Μέσο Όρο της τάξεως του **42.50%**. Η διαφοροποίηση μεταξύ των δύο ομάδων στα αποτελέσματα αυτής της δραστηριότητας ήταν αναμενόμενη, καθώς η Πειραματική Ομάδα είχε εμπλακεί σε δραστηριότητες με αναπαραστάσεις κατά τη διάρκεια των εναλλακτικών διδασκαλιών. Τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζονται και στο γράφημα 4.11.

Γράφημα 4.11



Δραστηριότητα 2S (T2S):

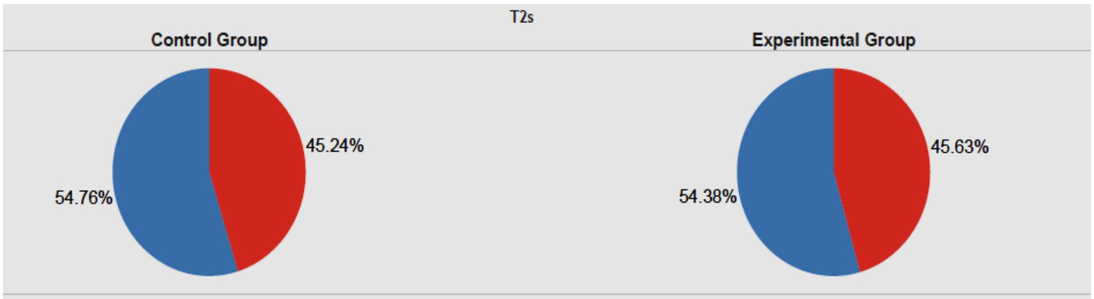
Πίνακας 4.12

T2S			
Groups		Posttest	
	N	Mean	Sd
Experimental	22	54.38%	40.20%
Control	21	54.76%	27.24%

Σε συνολικό επίπεδο κατά την αξιολόγηση των δύο τμημάτων, παρατηρούμε ότι οι δύο ομάδες έχουν σημειώσει πολύ κοντινά αποτελέσματα. Παρόλα αυτά, αυτό προκύπτει, επειδή η Ομάδα Ελέγχου σημείωσε υψηλότερη βαθμολογία στο πρώτο σκέλος της δραστηριότητας (T2i), ενώ η Πειραματική Ομάδα στο δεύτερο σκέλος (T2ii). Συνολικά Η Πειραματική Ομάδα πέτυχε **54.38%** Μέσον Όρο και η Ομάδα Ελέγχου **54.76%** αντιστοίχως.

Οι μαθητές και των δύο τμημάτων, οι οποίοι εξετάστηκαν στα πλαίσια της T2, υπέπεσαν σε παρόμοια λάθη και τα οποία συμπίπτουν με την βιβλιογραφία. Αρκετοί μαθητές και από τις δύο ομάδες πραγματοποίησαν λανθασμένες αντιστοιχίσεις-συνδέσεις των διαιρέσεων που δίνονταν στην πρώτη στήλη της δραστηριότητας με τις αναπαραστάσεις της δεύτερης στήλης. Γενικότερα, παρατηρήθηκε μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας κατά το πρώτο σκέλος της αξιολόγησης T2i, ενώ πολλοί ήταν οι μαθητές που δεν συμπλήρωσαν και κατανόησαν το δεύτερο σκέλος T2ii. Οι μαθητές πραγματοποίησαν αρκετά λάθη στον χωρισμό των αναπαραστάσεων σε υποσύνολα που το περιεχόμενο δήλωνε το πηλίκο και το πλήθος τους τον διαιρέτη. Επιπλέον πραγματοποιήθηκαν λάθη στον χωρισμό των υποσυνόλων στις περιπτώσεις που οι διαιρέσεις ήταν ατελείς, καθώς οι μαθητές συμπεριέλαβαν στις απαντήσεις τους το υπόλοιπο των διαιρέσεων εντός των καθορισμένων συνόλων που δήλωναν μόνο το πηλίκο. Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του παραδείγματος 5 της Δραστηριότητας Τ2, όπου κατά την διαίρεση 10 ÷ 1 οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν και τα 10 στοιχεία σε ένα σύνολο. Μολαταύτα, πολλοί από αυτούς δημιούργησαν 10 υποσύνολα του ενός στοιχείου. Παρακάτω δίνεται η συνολική αποτίμηση των αποτελεσμάτων της Δραστηριότητας Τ2 στο Γράφημα 4.12.

Γράφημα 4.12



Δραστηριότητα 3 (Τ3):

Πίνακας 4.13

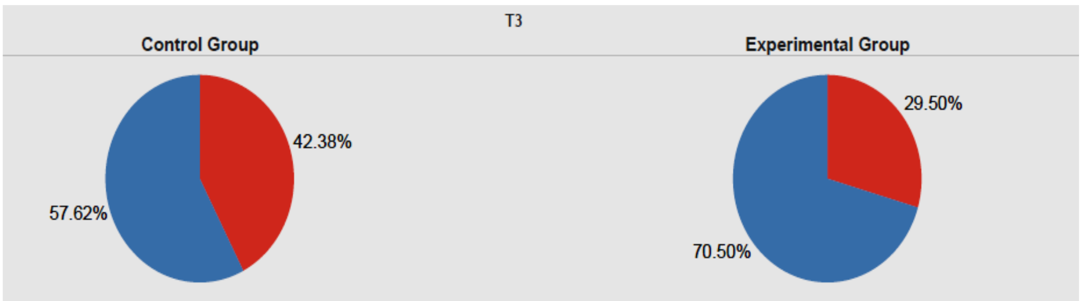
T3			
Groups	Posttest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	70.50%	39.20%
Control	21	57.62%	35.80%

Το πρόβλημα της Δραστηριότητας 3 σχεδιάστηκε και προσαρμόστηκε στα δεδομένα της Γ΄ Δημοτικού. Το πρόβλημα που εξετάζεται στο post-test είναι υψηλής δυσκολίας. Οι μαθητές θα πρέπει να συνθέσουν τον αριθμό που πρόκειται να διαιρέσουν, αρκεί να κατανοήσουν το πλαίσιο του προβλήματος. Κάποιοι μαθητές πιθανών να χρησιμοποιήσουν κάποιου είδους αναπαράσταση για την επίλυση του προβλήματος. Επιπλέον η διαίρεση είναι ατελής και το υπόλοιπο θα πρέπει να συνυπολογιστεί στην απάντηση, χωρίς να επηρεάζει τα αποτελέσματα της.

Όπως παρατηρούμε από τον Πίνακα 4.13 τα αποτελέσματα και των δύο ομάδων εμφανίζονται αρκετά ικανοποιητικά, ιδιαιτέρως αυτά της Πειραματικής Ομάδας, η οποία σημείωσε Μέσο Όρο **70.50%,** αισθητά υψηλότερη βαθμολογία από την Ομάδα Ελέγου, η οποία και σημείωσε **57.62%.**

Κατά την αξιολόγηση του προβλήματος της Δραστηριότητας 3, διαπιστώθηκε ότι και οι δύο ομάδες πραγματοποίησαν παρόμοια λάθη και εμφάνισαν κοινές παρανοήσεις κατά την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος. Κάποιοι μαθητές πραγματοποίησαν αριθμητικά λάθη αλλά και λάθη απροσεξίας κατά την σύνθεση του διαιρετέου (500+80+3=583). Επιπλέον, ένα μικρό ποσοστό δεν κατόρθωσε να δώσει καμία λύση και δεν συμπλήρωσε τίποτα στο πρόβλημα αυτό. Τα περισσότερα λάθη πραγματοποιήθηκαν, επειδή οι μαθητές δεν κατάφεραν να κατανοήσουν το πλαίσιο του προβλήματος και αυτό τους οδήγησε σε μία μηχανική αλληλουχία πράξεων χωρίς κάποιο νόημα, απλώς χρησιμοποιώντας τους αριθμούς που τους δίνονταν από το πρόβλημα. Συγκεκριμένα, αυτοί οι μαθητές πραγματοποίησαν εσφαλμένα προσθέσεις και κάθετες διαιρέσεις μεταξύ των αριθμών, χωρίς να προκύπτει κάποια ουσιαστική σύνδεση μεταξύ αυτών των πράξεων. Τέλος, δύο μαθήτριες έκαναν χρήση αναπαράστασης για την σύνθεση του διαιρετέου (583), γεγονός που τις ώθησε στην σωστή επίλυση του προβλήματος. Στο Γράφημα 4.13 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δύο ομάδων.

Γράφημα 4.13



Δραστηριότητα 4 (Τ4):

Πίνακας 4.14

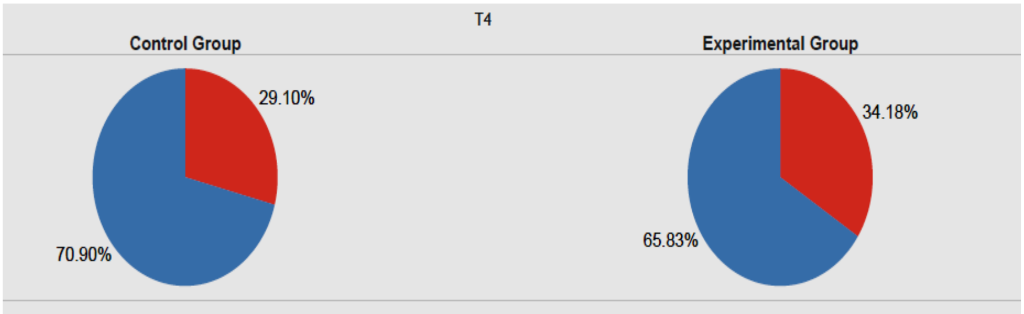
T4			
Groups	Posttest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	65.83%	18.41%
Control	21	70.90%	13.37%

Το πρόβλημα που εξετάζεται στο post-test είναι υψηλής δυσκολίας. Οι μαθητές καλούνται να πραγματοποιήσουν μία κάθετη διαίρεση, παρόλα αυτά θα πρέπει να δώσουν ιδιαίτερη προσοχή στο πλαίσιο του προβλήματος. Κάποιοι μαθητές πιθανών να χρησιμοποιήσουν κάποιου είδους αναπαράσταση για την επίλυση του προβλήματος. Επιπλέον η διαίρεση είναι ατελής και το υπόλοιπο θα πρέπει να συνυπολογιστεί στην απάντηση. Ιδιαίτερη σημασία καταλαμβάνει το υπόλοιπο της διαίρεσης σε αυτό το πρόβλημα, καθώς διαμορφώνει και την σωστή απάντηση.

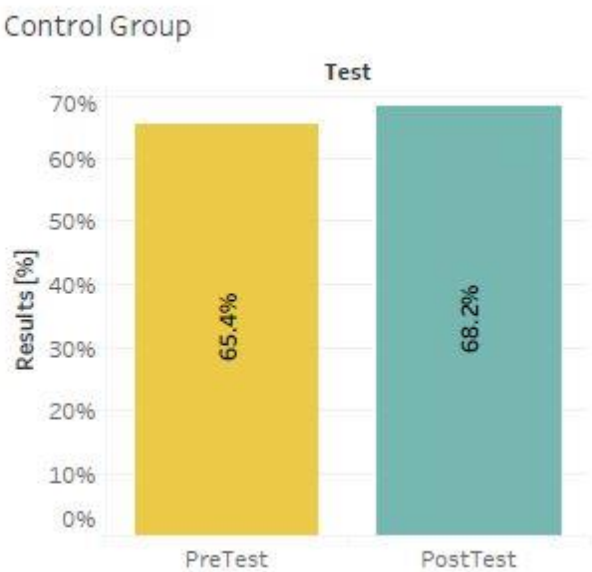
Κατά την αξιολόγηση των δύο τμημάτων, παρατηρούμε ότι οι δύο ομάδες έχουν σημειώσει σχετικώς υψηλές βαθμολογίες για την δυσκολία του προβλήματος. Όπως παρατηρούμε από τον Πίνακα 4.14, η Πειραματική Ομάδα σημείωσε **Μέσο Όρο 65.83%**, ελαχίστως χαμηλότερη βαθμολογία από την Ομάδα Ελόγου, η οποία και σημείωσε **70.90%**.

Κατά την αξιολόγηση του προβλήματος της Δραστηριότητας 4, διαπιστώθηκε ότι και οι δύο ομάδες πραγματοποίησαν παρόμοια λάθη και εμφάνισαν κοινές παρανοήσεις κατά την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος. Αρκετοί μαθητές πραγματοποίησαν υπολογιστικά – αριθμητικά λάθη κατά την πραγματοποίηση της κάθετης διαίρεσης. Μολαταύτα, το μεγαλύτερο ποσοστό λαθών που εμφάνισαν οι μαθητές και των δύο ομάδων ήταν ο μη υπολογισμός του υπολοίπου της διαίρεσης στην απάντηση τους, γεγονός που την καθόριζε και ως σωστή. Το πηλίκο της συγκεκριμένης διαίρεσης ήταν 47 (431 ÷ 9). Καθώς η παραπάνω διαίρεση είναι ατελής, το υπόλοιπο που προκύπτει και σε συνδυασμό με το πλαίσιο του προβλήματος καθορίζουν ως σωστή απάντηση το 48 (λεωφορεία). Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω και οι δύο ομάδες σημείωσαν ικανοποιητική βαθμολογία. Αναμέναμε από κάποιους μαθητές να αντιμετωπίσουν δυσκολία στην συμπλήρωση της άσκησης ή ακόμη και να πραγματοποιήσουν πράξεις μηχανικού περιεχομένου που δεν θα ταίριαζαν με το πλαίσιο του προβλήματος. Παρόλα αυτά, όλοι οι μαθητές και των δύο ομάδων χειρίστηκαν το πρόβλημα στη σωστή κατεύθυνση, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης. Στο Γράφημα 4.14 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δύο ομάδων.

Γράφημα 4.14

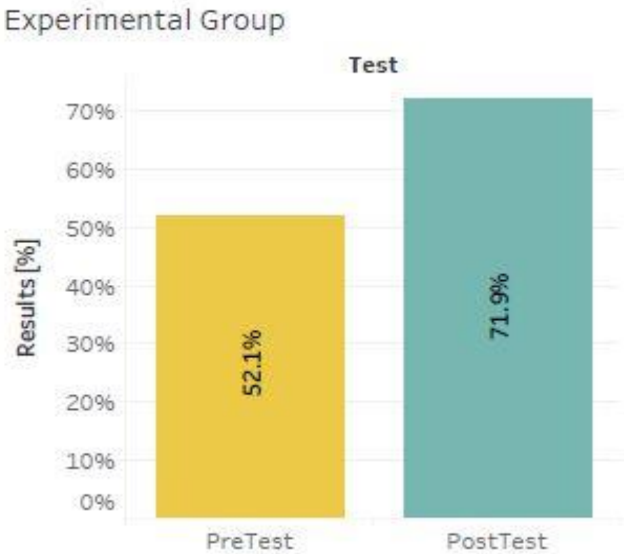


Γράφημα 4.15



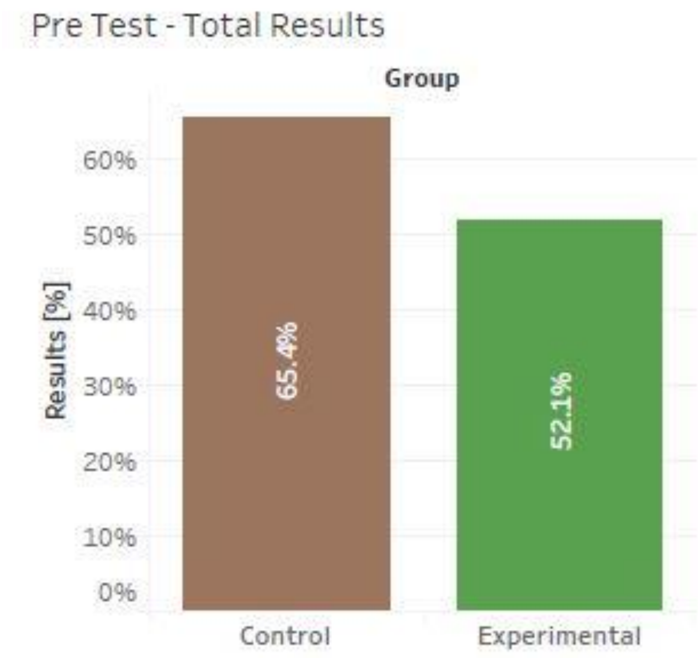
Στο Γράφημα 4.15 παρουσιάζεται η συνολική αποτίμηση της επίδοσης των μαθητών της Ομάδας Ελέγχου (Control Group) που συμμετείχαν στη ερευνητική αυτή εργασία κατά το PrestTest αλλά και το PostTest. Συγκεκριμένα, στο παραπάνω γράφημα φαίνεται ο μέσος όρος (Mean) που αφορά στην επιτυχία των μαθητών συνολικά σε όλες τις δραστηριότητες και των 2 αξιολογήσεων (Tests). Διαπιστώνεται ότι οι μαθητές της Ομάδας Ελέγχου έχουν σημειώσει ποσοστό επιτυχίας **65,4%** κατά την αξιολόγηση τους στο PreTest, ενώ **68,4%** κατά το PostTest. Συμπερασματικά, παρατηρείται μία αύξηση στην επίδοση τους της τάξεως των **2,8%** μονάδων.

Γράφημα 4.16



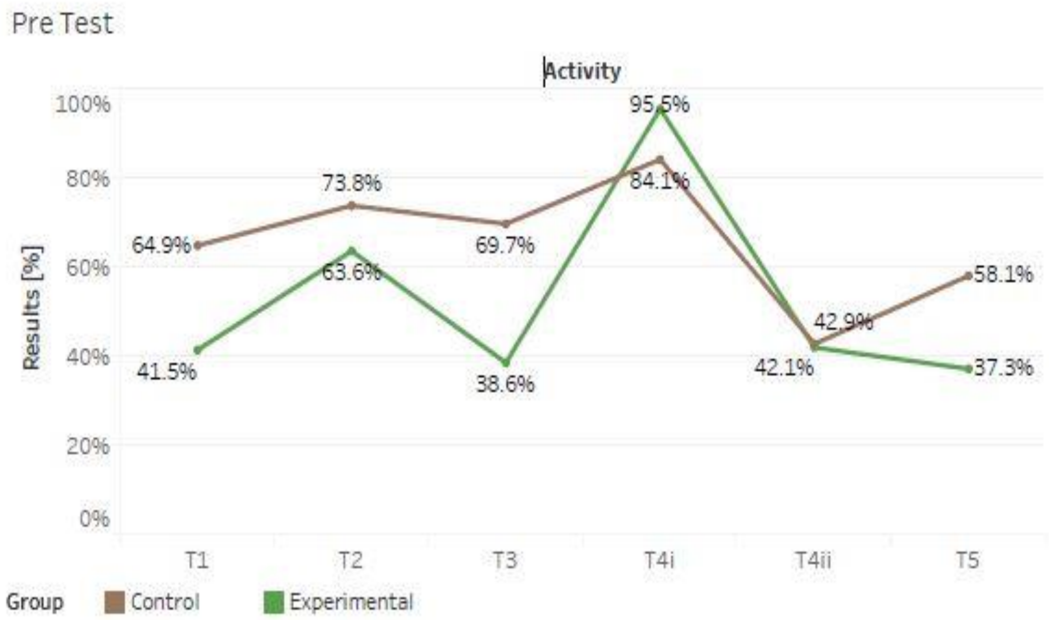
Παρομοίως στο Γράφημα 4.16 παρουσιάζεται η συνολική αποτίμηση της επίδοσης των μαθητών της Πειραματικής Ομάδας (Experimental Group) που συμμετείχαν στη ερευνητική αυτή εργασία κατά το PrestTest αλλά και το PostTest. Συγκεκριμένα, στον παραπάνω πίνακα φαίνεται ο μέσος όρος (Mean) που αφορά στην επιτυχία των μαθητών συνολικά σε όλες τις δραστηριότητες και των 2 αξιολογήσεων (Tests). Διαπιστώνεται ότι οι μαθητές της Πειραματικής Ομάδας έχουν σημειώσει ποσοστό επιτυχίας **52,1%** κατά την αξιολόγηση τους στο PreTest, ενώ **71,9%** κατά το PostTest. Συμπερασματικά, παρατηρείται μία αξιοσημείωτη αύξηση στην επίδοση τους της τάξεως των **19,2%** μονάδων.

Γράφημα 4.17



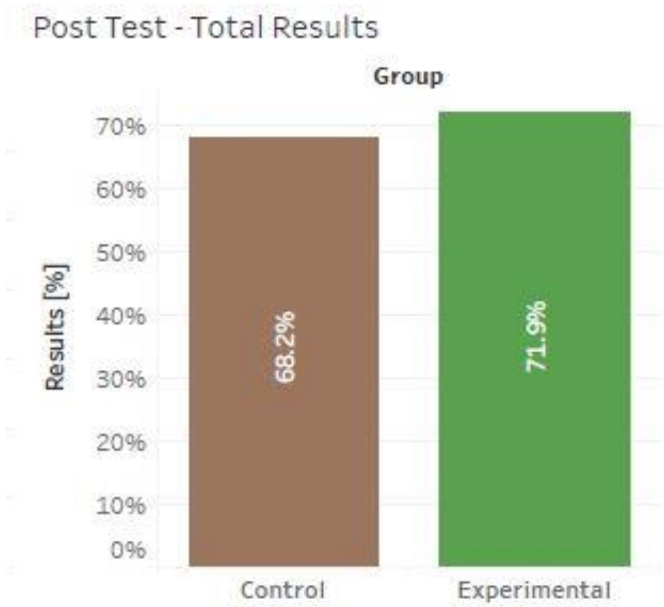
Το παραπάνω Γράφημα (4.17) παρουσιάζει ταυτόχρονα τα συνολικά αποτελέσματα των δραστηριοτήτων των δύο Ομάδων κατά το PreTest. Όπως παρατηρείται η Ομάδα Ελέγχου προηγείται αισθητά στην επίδοση της έναντι της Ερευνητικής Ομάδας, καθώς έχει σημειώσει **Μέσο Όρο (Mean) 68,4%,** ενώ η Ερευνητική Ομάδα στις ίδιες δραστηριότητες σημείωσε χαμηλότερο **Μέσο Όρο (Mean) 52,1%.**

Γράφημα 4.18



Στο Γράφημα 4.18 παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων της καθεμιάς Ομάδας, καθώς δίνονται οι αξιολογήσεις των δραστηριοτήτων ξεχωριστά και ταυτόχρονα εύκολα κανείς μπορεί να συγκρίνει τις επιδόσεις των δύο Τμημάτων. Διαπιστώθηκε, ότι η Ομάδα Ελέγχου σημείωσε υψηλότερους Μέσους Όρους σε όλες τις δραστηριότητες (T1, T2, T3, T4i, T5), εκτός της δραστηριότητας T4ii.

Γράφημα 4.19



Στο παραπάνω Γράφημα (4.19) παρουσιάζονται τα συνολικά αποτελέσματα των δραστηριοτήτων των δύο Ομάδων κατά το PostTest. Όπως διαπιστώνεται η Πειραματική Ομάδα προηγείται αισθητά στην επίδοση της έναντι της Ομάδα Ελέγχου, αφού έχει αυξήσει τον Μέσο Όρο και συγκεκριμένα έχει σημειώσει **Μέσο Όρο (Mean) 71,9%,** ενώ η Ομάδα Ελέγχου στις ίδιες δραστηριότητες σημείωσε χαμηλότερο **Μέσο Όρο (Mean) 68,2%.**

Γράφημα 4.20

Στο Γράφημα 4.20 παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων της καθεμιάς Ομάδας, καθώς δίνονται οι αξιολογήσεις των δραστηριοτήτων ξεχωριστά και ταυτόχρονα εύκολα κανείς μπορεί να συγκρίνει τις επιδόσεις των δύο Τμημάτων. Εξετάζοντας τις δραστηριότητες, παρατηρείται ότι η Πειραματική Ομάδα έχει πετύχει υψηλοτέρα αποτελέσματα στην αξιολόγηση της σε ***3 από τις 5*** δραστηριότητες του PostTest. Ιδιαίτερη αναφορά θα πρέπει να γίνει στις δραστηριότητες Τ3 και Τ4, όπου οι μαθητές των δύο Τμημάτων κλήθηκαν να εργαστούν στη λύση 2 προβλημάτων διαίρεσης και να εμπλακούν με το πλαίσιο τους αλλά και τις ιδιαιτερότητες που αυτό επέφερε στη λύση τους. Από το παραπάνω διάγραμμα διαπιστώνεται, ότι η Πειραματική Ομάδα έχει πετύχει αρκετά υψηλούς Μέσους Όρους συγκριτικά με την Ομάδα Ελέγχου, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα χαρακτηριστικά και η δομή της εναλλακτικής διδασκαλίας, έφεραν καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα. Επιπροσθέτως η παρέμβαση μας ήταν πετυχημένη.

4.5. Ποιοτική ανάλυση και σύγκριση των διδασκαλιών

Υπάρχουν εκτενείς ανησυχίες σχετικά με την ιδέα ότι οι μαθητές δεν αναπτύσσουν επαρκείς μαθηματικές ικανότητες. Το πρόβλημα αυτό σχετίζεται τουλάχιστον εν μέρει με τη διδασκαλία της μάθησης που βασίζεται στη διαδικασία. Παρόλο που προτείνονται καλύτερες μέθοδοι διδασκαλίας, υπάρχουν περιορισμένες ερευνητικές γνώσεις σχετικά με το γιατί ορισμένες μέθοδοι λειτουργούν καλύτερα από άλλες και τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες εφαρμόζονται αυτές οι μέθοδοι.

Ο πρωταρχικός στόχος στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν μαθηματική ικανότητα. που είναι η ικανότητα να κατανοήσουμε, να κρίνουμε, να κάνουμε και να χρησιμοποιήσουμε τα μαθηματικά σε μια ποικιλία μαθηματικών καταστάσεων (Niss, 2007). Οι βασικές μαθηματικές ικανότητες περιλαμβάνουν τις ικανότητες επίλυσης προβλημάτων (το πώς να επιλύονται τα προβλήματα χωρίς να γνωρίζουμε μια μέθοδο λύσης εκ των προτέρων), τη συλλογιστική ικανότητα (ικανότητα να δικαιολογούνται οι επιλογές και τα συμπεράσματα) και την εννοιολογική κατανόηση (γνώσεις σχετικά με την προέλευση, το κίνητρο, χρήση μαθηματικών). Σε ένα πειραματικό σχέδιο η παρούσα μελέτη ασχολείται πρωτίστως με τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν εννοιολογική κατανόηση μέσω της μαθηματικής επίλυσης προβλημάτων και της μαθηματικής λογικής συμμετέχοντας σε πιο δημιουργικές δραστηριότητες από τη μάθηση που βασίζεται στη διαδικασία χρησιμοποιώντας προκαθορισμένους αλγορίθμους (π.χ., Haavold, 2011, Lithner, 2008).

Μεγάλα χρονικά διαστήματα δαπανώνται στα μαθήματα μαθηματικών για την εκμάθηση και απομνημόνευση αλγόριθμων, οι οποίοι υποτίθεται ότι παρέχουν στους μαθητές έναν γρήγορο και αξιόπιστο τρόπο αντιμετώπισης πολλών από τα επόμενα καθήκοντα (Boesen et al., 2014, Hiebert, 2003). Υπάρχουν, ωστόσο, αμφιβολίες ως προς το αν αυτοί οι αλγόριθμοι οδηγούν στην πραγματικότητα σε οποιαδήποτε βαθύτερη κατανόηση των αρχών των μαθηματικών, ή αν η εκτεταμένη χρήση αλγορίθμων είναι αντιπαραγωγική (Hiebert, 2003). Η έννοια ενός αλγορίθμου περιλαμβάνει όλες τις προκαθορισμένες διαδικασίες, δηλαδή πεπερασμένες ακολουθίες εκτελέσιμων οδηγιών που επιτρέπουν την επίλυση ενός δεδομένου συνόλου εργασιών (Brousseau, 1997). Η σημασία ενός αλγορίθμου είναι ότι μπορεί να προσδιοριστεί εκ των προτέρων και η εκτέλεση ενός αλγορίθμου συνδέεται με την υψηλή αξιοπιστία και ταχύτητα, η οποία είναι η δύναμη της χρήσης του, όταν ο σκοπός μιας εργασίας είναι μόνο να παράγει απάντηση σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα . Σε πολλές περιπτώσεις, η χρήση ενός αλγορίθμου είναι απαραίτητη, καθώς εξοικονομείται χρόνος και αποτρέπονται εσφαλμένες εκτιμήσεις. Με αυτόν τον τρόπο, η χρήση αλγορίθμων παρέχει στους μαθητές ευκαιρίες να επιλύσουν τις εργασίες τους απλώς επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που αντιπροσωπεύει ο ειδικός αλγόριθμος. Ωστόσο, η χρήση αλγοριθμικών συλλογισμών δεν αποτελεί, από μόνη της, ένδειξη της εννοιολογικής κατανόησης των μαθηματικών (Haavold, 2011).

Σκοπός του παρόντος υποκεφαλαίου είναι να αντιπαραβάλλει τις διαφοροποιήσεις στην διδασκαλία της ενότητας που πραγματεύεται η συγκεκριμένη εργασία, και να τονίσει ποιες είναι αυτές οι συνιστώσες που επιλέχθηκαν κατά τον σχεδιασμό των διδακτικών παρεμβάσεων και οδήγησαν σε καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα την Ερευνητική Ομάδα. Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο η Ερευνητική Ομάδα ακολούθησε 2 δίωρες διαφοροποιημένες διδασκαλίες για την καλύτερη και εις βάθος κατανόηση του αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης. Σε αυτές τις διδασκαλίες ενσωματώθηκαν εκείνα τα χαρακτηριστικά, τα οποία είχαν μελετηθεί στην βιβλιογραφία, καθώς έννοιες και παρανοήσεις που εκμαιεύτηκαν από την ανάλυση του PreTest. Παρακάτω εξετάζονται αναλυτικά αυτά τα χαρακτηριστικά στις διδασκαλίες που σχεδιάστηκαν, ενώ παράλληλα αντιπαραβάλλονται με τις διδασκαλίες που ακολούθησε η Ομάδα Ελέγχου.

Χαρακτηριστικά διδασκαλίας.

- **Ρόλος του εκπαιδευτικού**

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι ιδιαιτέρως σημαντικός. Στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας μας απασχόλησε ο ρόλος του δασκάλου στη διεξαγωγή μιας εποικοδομητικής συζήτησης μέσα στην τάξη κατά την διδασκαλία μιας ενότητας. Ο ρόλος του δασκάλου στη συζήτηση είναι πολυδιάστατος και στα καθήκοντά του συμπεριλαμβάνονται η παρουσίαση καινούριου υλικού, η διευκόλυνση των δραστηριοτήτων των ομάδων, η ανακεφαλαίωση, η παροχή καθοδήγησης και βοήθειας, η αλληλεπίδραση με τις ομάδες. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να στηρίξουν ενεργά την μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών καθοδηγώντας, και εφόσον χρειάζεται, εισάγοντας νέες μεταστροφές στη συζήτηση.

Στη συνέχεια παραθέτονται τμήματα από τις διδασκαλίες που πραγματοποιήθηκαν από την Ερευνητική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου κατά την εισαγωγή της έννοιας της κάθετης διαίρεσης με σκοπό την εξέταση της στάσης και ρόλου του εκπαιδευτικού κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

1η Διδακτική Παρέμβαση – Ερευνητική Ομάδα: Πρώτη Επαφή με την λειτουργία του αλγόριθμου

Δ : « Πάμε να δοκιμάσουμε τις δυνάμεις μας στον αλγόριθμο της διαίρεσης. Ας ξεκινήσουμε με ένα πιο απλό παράδειγμα 24 ÷ 2».
Μ13 : «Κάνει 12, χώρισα το 24 στα 2, άρα 12 και μάλιστα 12 × 2 = 24»
Μ14 : «Είναι πράξεις αντίστροφες»
Δ : «Για να το γράψω και κάθετα. Το έχει ξαναδεί κάποιος, ξέρει κάποιος να το λύσει»
Η δασκάλα σημειώνει στον πίνακα την διαίρεση :

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Μ15 : «Ξέρω που μπαίνει το 12»
Μ16 : «Εγώ ξέρω να τη λύσω»

Ο μαθητής σηκώθηκε στον πίνακα έλυσε σωστά την διαίρεση, χωρίς να αναφέρει τίποτα και όταν ρωτήθηκε από τη δασκάλα δεν μπόρεσε να εξηγήσει τα βήματα που ακολούθησε.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ \cline{2-2} -24 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

Δ : «Τι άλλο βλέπουμε σε αυτό που έκανε ο συμμαθητής μας που ξέρουμε »
Μ17 : «Βλέπουμε το σύμβολο της αφαίρεσης»
Δ : «Πολύ ωραία, για να πάμε πρώτα από όλα να δώσουμε ονόματα στους αριθμούς που βλέπουμε. Το 24 θα το ονομάζουμε διαιρετέο και το 2 διαιρέτη. για πείτε μου τώρα πόσα ψηφία έχει ο διαιρετέος και πόσα ο διαιρέτης;»
Μ18 : «Δύο ψηφία έχει ο διαιρετέος και ένα ο διαιρέτης.»
Δ : «Εμείς θα παίξουμε με το ένα ψηφίο κάθε φορά, δηλαδή το 2 πόσες φορές χωράει στο 2»
Μ19 : «1 φορά χωράει»
Δ : «Πως το βρήκαμε αυτό;»
Μ20 : «Κάναμε διαίρεση»
Δ : «Πολύ ωραία 1 φορά το 2 μας κάνει 2 και το γράφω εδώ. Τι έκανα τώρα»
Μ21 : «Πολλαπλασιασμό»
Δ : « Και τώρα θα χρησιμοποιήσω την αφαίρεση που μου είπατε πριν»

M22 : «άρα 2 -2 = 0»
Δ : «Τελειώσαμε;»
M22 : «Όχι, μας έχει μείνει το 4 »
Δ : «Άρα να το σκουντήξω και αυτό»

Η δασκάλα τονίζει το 4 και ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία από τους μαθητές μέχρι να βρεθεί το πηλίκο 12 και το υπόλοιπο 0.

Δ : «Τι βρήκαμε;»
M23 : «12»
Δ : «Αυτό θα το ονομάζουμε πηλίκο, και το 0 που περίσσεψε εκεί πως θα το λέμε το έχει ακούσει κάποιος;»
M24 : «Νομίζω περισσευούμενο, ε όχι υπόλοιπο, το έχω ξανακούσει».

1η Διδασκαλία στην Ενότητα –Ομάδα Ελέγχου: Πρώτη Επαφή με την λειτουργία του αλγόριθμου

Δ : «Σήμερα θα μάθουμε τον αλγόριθμο της κάθετης διαίρεσης. Θα κάνουμε δηλαδή κάθετα τη διαίρεση και μάλιστα μοιάζει με καρεκλάκι. Η διαίρεση θα έχει αυτή τη μορφή. 42 δια 2. Αυτή η γραμμή ανάμεσα στους αριθμούς μας είναι το δια, τραβάμε την γραμμή και κάνουμε ένα καρεκλάκι. Ας γράψουμε την διαίρεση οριζόντια 42 : 2 = . Τι σημαίνει:»
M1 : «Κάνω την προπαίδεια του 2.»
Δ : «Δε βγαίνει μέχρι το 42»
M2: «Πόσες φορές χωράει το 2 στο 42;»
Δ : «Πόσο κάνει;»
M2 : «21.»

42 | 2

Δ : «Πως το βρήκες;»
M2: «Έκανα 20 + 20 = 40 και μία φορά το 2. Άρα 21.»
M3: «Εγώ έκανα το μισό του 40 που είναι 20 και το μισό του 2 που είναι 1. Άρα 21.»
Δ : «Πάμε να ονομάσουμε του όρους που χρησιμοποιήσαμε. Το 42 ονομάζεται διαιρετέος! Και το 2 λέγεται διαιρέτης! Πάμε να τα δούμε ένα. Ας πάρουμε το 4 πρώτα. Πόσες φορές χωράει το 2 στο 4.»
M2: «2 φορές.»
Δ : «Γράφω το 2 εδώ, όπου θα γράφουμε το αποτέλεσμα, μετά θα πολλαπλασιάσω το 2 επί 2 που κάνει 4 και το γράφω εδώ. Τέλος κάνω αφαίρεση 4 – 4= 0. Αυτά είναι τα τρία στάδια που έκανα και δεν τα ξεχνώ.»

1. «Πόσες φορές χωράει»
2. «Επί
3. «Πλην»

42 | 2
-4 | 21
02 |
-02 |
0

Οι παραπάνω διαφορετικές προσεγγίσεις στην διδασκαλία είχαν ως σκοπό τη εισαγωγή των μαθητών στη λειτουργία του αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης.

Εξετάζοντας το τμήμα της διδασκαλίας που δόθηκε στην Ερευνητική Ομάδα, παρατηρείται ότι ο ρόλος του εκπαιδευτικού διαφέρει από αυτόν της διδασκαλίας που παρατέθηκε στην Ομάδα Ελέγχου, αφού ο εκπαιδευτικός έλαβε υπόψην του τα χαρακτηριστικά εκείνα που υπαγορεύονται παραπάνω και τα οποία ενσωματώθηκαν στην διδακτική παρέμβαση.

- **Ενεργή συμμετοχή και δυναμική συζήτηση.**

Ένα συγκεκριμένο είδος συζήτησης μελετήθηκε και ενσωματώθηκε σε αυτές τις εναλλακτικές διδασκαλίες. Η «αναστοχαστική συνομιλία», όπως αναφέρεται και στη βιβλιογραφία, που χαρακτηρίζεται από επαναλαμβανόμενες μετατοπίσεις, έτσι ώστε οτιδήποτε κάνουν πράξη δάσκαλος και μαθητές να γίνεται στη συνέχεια ρητά αντικείμενο συζήτησης, και τα παιδιά να σκέφτονται, να προβληματίζονται, να ενεργοποιούνται από τη συμμετοχή τους στο διάλογο.

Στη συνέχεια παραθέτονται τα τμήματα από τις διδασκαλίες που πραγματοποιήθηκαν από την Ερευνητική Ομάδα και την Ομάδα Ελέγχου κατά την εισαγωγή της έννοιας της κάθετης διαίρεσης με σκοπό την εξέταση του συγκεκριμένου είδους συζήτησης.

1ο Στάδιο : Εισαγωγική δραστηριότητα – Ερευνητική Ομάδα

Ένα πρόβλημα διαίρεσης γράφτηκε στον πίνακα: 648 ÷ 2 =. Αμέσως, ο Μ4 πρότεινε μια μέθοδο για να λύσει αυτό το πρόβλημα, καθώς και άλλες απαντήσεις και άλλων μαθητών ακολούθησαν και παρουσιάζονται παρακάτω:

Μ4 : (Αφού διαβάζει δυνατά τον αριθμό)
«Κάνω 6 ÷ 2 και ότι βρω το γράφω στο ΄΄=΄΄ , δηλαδή 3, το ίδιο 2 ÷ 2, δηλαδή 2 και 8 ÷ 2, δηλαδή 4. Έτσι βρήκα 324».
Δ : «Ποιος μπορεί να μου πει, πως λέγεται αυτός ο αριθμός;»
Μ6 : «Τριψήφιος»
Μ7 : «Ο αριθμός αποτελείται από το 600, το 40 και το 8»
Δ : (Η δασκάλα δείχνει το 6 στον αρχικό αριθμό)
« Τι είναι αυτό το 6;»
Μ8 : «Το 6 είναι ση θέση των εκατοντάδων, το 4 στη θέση των δεκάδων και το 8 στις μονάδες».
Μ9 : «Το ξέρω, μπορούμε να γράψουμε και 600 ÷ 2 = 300 , 40 ÷ 2 = 20 και 8 ÷ 2 = 4»

Δ : «Γράφω αυτό που μόλις μου είπες στον πίνακα».
648 ÷ 2 = (600 ÷ 2) + (40 ÷ 2) + (8 ÷ 2) =
«Τι δημιούργησα;»
Μ10 : «Διαιρέσεις, 3 Διαιρέσεις !!»
Δ : «Και τώρα τι κάνω;»
Μ11 : «Ότι βρούμε από τις διαιρέσεις, το προσθέτουμε, δηλαδή 300 + 20 + 4 = 324»
Δ : « Βλέπετε τι κάναμε;»
Μ12 : «Βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα με πριν»

Οι διδασκαλίες που πραγματοποιήθηκαν από την Ομάδα Ελέγχου είχαν χαρακτηριστικά δασκαλοκεντρικής διδασκαλίας και ο εκπαιδευτικός είχε κεντρικό ρόλο κατά την διεξαγωγή τους. Κατά την διάρκεια των διδασκαλιών ο εκπαιδευτικός έθετε ερωτήσεις διαδικαστικού περιεχομένου και προχωρούσε την διδασκαλία του σύμφωνα με την στοχοθεσία του και τον προγραμματισμό του, που συμβάδιζε με τα σχολικά εγχειρίδια. Το κυριότερο χαρακτηριστικό της διδασκαλίας ήταν η πραγματοποίηση μιας διαδικασίας και η επανάληψη της με σκοπό την εκμάθηση της από τους μαθητές.

- **Σχεδιασμός δραστηριοτήτων με νόημα (struggle not obstacle)**

2η Διδακτική Παρέμβαση
1ο Στάδιο : Εισαγωγική δραστηριότητα

Το δεύτερο επεισόδιο τάξης πραγματοποιήθηκε, αφού ολοκληρώθηκε 1 ώρα διδασκαλίας, ώστε να ελεγχθούν ασκήσεις εφαρμογής που δόθηκαν στο τέλος του πρώτου επεισοδίου. Στη δεύτερη διδασκαλία η εκπαιδευτικός ξεκινά με ένα ερώτημα. Γράφει στον πίνακα δύο κάθετες διαιρέσεις (96 ÷ 3 =, 42 ÷ 3 =) και στη συνεχεία απευθύνεται στους μαθητές και τους ζητά να απαντήσουν, ποια από τις δύο διαιρέσεις είναι ευκολότερη στην επίλυση.

Δ : «Σήμερα θα ξεκινήσουμε πάλι με ένα ερώτημα. Θα ξεκινήσω με δύο διαιρέσεις. Ποια νομίζετε ότι είναι πιο εύκολο να λυθεί:»

96 | 3   42 | 3

Μ1 : «Η πρώτη είναι πιο εύκολη, γιατί στη δεύτερη τα νούμερα 4 και 2 δεν υπάρχουν στην προπαίδεια του 3».

Μ2 : « Όταν θα κατεβάσουμε το 2 δεν θα μπορεί να διαιρεθεί με το 3».

Δ : (Η δασκάλα δείχνει το 4 στον αρχικό αριθμό 42)

« Δεν ξέρουμε όμως τι θα συμβεί με το 4; Τελικά συμφωνούμε όλοι, ότι η πρώτη είναι πιο εύκολη;»

(Απαντούν όλοι οι μαθητές δυνατά: Η πρώτη είναι πιο εύκολη, γιατί το 9 και το 6 είναι στη προπαίδεια του 3.)

Δ : «Να τη λύσουμε όπως έχουμε μάθει»

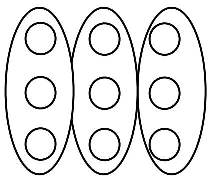
Οι μαθητές ανοίγουν τα τετράδια τους και λύνουν την διαίρεση (96 ÷ 3 =) με τη χρήση του κάθετου αλγορίθμου, όπως διδάχθηκαν στο προηγούμενο επεισόδιο χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία. Η επιλογή της δεύτερης κάθετης διαίρεσης κατά τον σχεδιασμό της εισαγωγικής δραστηριότητας της δεύτερης διδακτικής παρέμβασης είχε νόημα, διότι έφερε σε γνωστική σύγκρουση τους μαθητές, καθώς αυτοί δεν μπορούσαν με τις υπάρχουσες γνώσεις τους να προχωρήσουν την διαίρεση. Αυτό έφερε τον προβληματισμό σε αυτούς και αποτέλεσε το έναυσμα για να συνεχιστεί η διδασκαλία.

2ο Στάδιο : Σύνδεση του αλγορίθμου με την αναπαράσταση

Σε αυτό το σημείο η εκπαιδευτικός γράφει στον πίνακα τη διαίρεση (9 ÷ 3 =) κάθετα και ζητά από τους μαθητές να ανοίξουν και πάλι τα τετράδια τους και να την λύσουν. Η διαίρεση αυτή είναι αισθητά μικρότερης δυσκολίας συγκριτικά με τις προηγούμενες, με τις οποίες έχουν εμπλακεί οι μαθητές. Αυτή η σκοπιμότητα, εξυπηρετεί την ομαλότερη μετάβαση στη σύνδεση του αλγορίθμου με την αναπαράσταση, όπως θα δούμε παρακάτω.

Δ : «Θυμάστε που γινόμαστε ζωγράφοι κάποιες φορές; Έτσι και τώρα το 9 θα το ζωγραφίσω »

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ -9 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$$



(Η εκπαιδευτικός σχεδιάζει δίπλα στην κάθετη διαίρεση 9 μικρούς κύκλους.)

Δ : «Αφού έχουμε όλοι λύσει τη διαίρεση στο τετράδιο μας, μπορεί κάποιος να σηκωθεί και να τη λύσει έτσι στο σχέδιο; ».

Μ3 : «Θα το μοιράσω σε 3 ίσα μέρη».

Δ : «Τι σημαίνει 9 ÷ 3;»

Μ4 : «Πόσες φορές χωράει το 3 στο 9».

Μ5 : «Θα χωρίσω στο σχέδιο, το 9 σε 3 ίσα μέρη».

Δ : «Επειδή έχουμε πολύ φαντασία, τι λέτε να φανταστούμε ότι αυτοί οι μικροί κύκλοι είναι καραμέλες. Για να πάμε στην διαίρεση που έχουμε λύσει. Τι είναι το 3 που βλέπω στο πηλίκο»

Μ6 : «Μέσα σε κάθε κύκλο πόσες καραμέλες έχω».

Δ : « Τι είναι το 9 που αφαιρώ;»

Μ7 : «Είναι οι καραμέλες όλες μαζί»

Δ : « Έχω υπόλοιπο εδώ;»

Μ8 : «Όχι είναι μηδέν, γιατί δεν περισσεύει κάτι, αφού χωρίσαμε το 9 σε τρεις ομάδες που κάθε μία έχει 3 καραμέλες».

3ο Στάδιο : Εισαγωγή στη νέα γνώση: Διαιρέτης που δε χωρά ακριβώς στο Διαιρετέο

Δ : «Τώρα θα σας δυσκολέψω λίγο, γράψτε στο τετράδιο σας».

10 | 3

Δ : «Για να δούμε τι θα κάνει τώρα ο ζωγράφος; Θα αλλάξω την τέχνη μου και θα ζωγραφίσω αυτό. Πριν είχαμε το 9 στη θέση του διαιρετέου και σχεδιάσαμε 9 κουκίδες, τώρα έκανα αυτό και επειδή μιλάμε για καραμέλες μου θυμίζει τα smarties».

(Η εκπαιδευτικός σχεδιάζει στον πίνακα μία μεγάλη κάθετη γραμμή)

Μ7 : «Είναι το 1 από τα 10».

Μ8 : «Είναι 1 κουτάκι καραμέλες».

Δ : «Ίσως θα μπορούσε να είναι».

Μ9 : «Είναι μία δεκάδα».

Μ10: «Το υπόλοιπο που θα περισσέψει;»

Δ : «Σωστά!! Αυτό είναι μία δεκάδα. Που εμφανίζεται το 10 στη διαίρεση μας;»

Μ11 : «Στο διαιρετέο έχουμε 10».

Δ : « Για πάμε τώρα να λύσουμε τη διαίρεση;»

Μ12 : «Το 3 στο 1 χωράει 3 φορές».

Εδώ ο μαθητής Μ12 αντιλαμβάνεται ότι το 3 χωράει 3 φορές στο 10, παρόλα αυτά δεν κατέχει την απαιτούμενη γνώση για να το αιτιολογήσει σε σχέση με τη λειτουργία του αλγορίθμου, για αυτό απαντά καταυτόν τον τρόπο. Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε γνωστική σύγκρουση.

Δ : « Χωράει το 3 στο 1;»

Μ13 : «Όχι δεν χωράει καμία φορά».

Δ : « Τι προτείνετε να κάνουμε τώρα;»

Μ14 : «Όχι δεν χωράει καμία φορά».

Δ : « Τι προτείνετε να κάνουμε τώρα;»

Μ15 : «Πρέπει να μοιράσουμε σε 3 ίσα 3 ίσα μέρη».

Δ : « Και πως θα το κάνω αυτό;»

Μ16 : «Μάλλον πρέπει να σχεδιάσω 10 γραμμές».

Δ : « Μα εμείς έχουμε μόνο μία και δε μπορούμε να σχεδιάσουμε άλλη. Από τη αποτελείται η δεκάδα;»

Μ17 : «Από 10 καραμέλες».

Μ18 : «Θα ζωγραφίσω 9 καραμέλες όπως και πριν και……». (υπήρξε παύση)

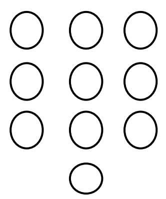
(Ο μαθητής Μ18 έχει αντιληφθεί ότι πρέπει να αναλύσει τη δεκάδα στα συστατικά της μέρη. Παρόλα αυτά δεν το καταφέρνει)

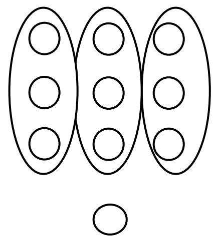
Δ : « Τι προτείνετε να κάνουμε τώρα; Πώς θα τις ζωγραφίσω;»

Μ19 : «Με 10 κουκίδες».

Δ : « Θέλω να έρθει κάποιος να τις χωρίσει σε 3 παιδιά;»

Μ18 : « Πρώτα, θα τις σχεδιάσω έτσι, και μετά θα τις χωρίσω».





Δ : « Ποιος μπορεί να λύσει τη διαίρεση; Πόσες φορές χωράει το 3 στο 10;»

Μ19 : «30 φορές».

Δ : « Πρόσεξε καλύτερα το σχήμα θα σε βοηθήσει. Πόσες φορές χωράει το 3 στο 10; »

Μ19 : «3 φορές γιατί 3 επί 3 κάνει 9».

Δ : « Τι είναι αυτό το 9;»

Μ20 : « Είναι οι καραμέλες που μοιράσαμε στα παιδιά».

Δ : « Αυτό το 1, τι είναι;»

Μ21 : « Είναι το υπόλοιπο, δηλαδή η καραμέλα που δε θα πάρει κανείς».

10	3
- 9	3
1	

2η Διδασκαλία – Ομάδα Ελέγχου

1ο Στάδιο : Εισαγωγική δραστηριότητα

Δ : «Σήμερα θα κάνουμε διαιρέσεις με υπόλοιπο. Ο μηχανισμός είναι ο

ίδιος, όπως τον μάθαμε χθες, πάμε να το δούμε:»
Όλοι : «α) Πόσες φορές χωράει; β) επί, γ)πλην.»
Δ : «Πάμε να με βοηθήσετε.»
Όλοι: «Πόσες φορές χωράει το 5 στο 7;»
Δ : «Το γράφω στο πηλίκο»
Όλοι: «1 φορά το 5 μας κάνει 5, 7 μείον 5 μας κάνει 2»
Δ : «Εδώ προσέχουμε πόσες φορές χωράει το 5 στο 28;»

783 | 5
-5 | 156
28
-25
33
-30
0

«Όχι μόνο στο 8 αλλά στο 28, κάμνουμε το ίδιο και σκεφτόμαστε την προπαίδεια του 5.»
Όλοι: «5 φορές»
Δ : «Που το γράφω;»
Όλοι: «Στο πηλίκο.»

Παρατηρείται ότι η Ομάδα Ελέγχου ακολούθησε μία μηχανική προσέγγιση στην διδασκαλία του αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης κατά την εισαγωγή της έννοιας του υπολοίπου που αφήνει ο διαιρετέος σαν διαφορά με το γινόμενο του διαιρέτη επί τον αριθμό του πηλίκου που χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση. Στην παρόμοια περίπτωση κατά τη διδασκαλία που πραγματοποίησε η Ερευνητική Ομάδα, οι μαθητές οδηγήθηκαν στοχευμένα από τον εκπαιδευτικό σε γνωστική σύγκρουση, που έδωσε την αφορμή στους μαθητές να εργαστούν ενεργά με την επόμενη δραστηριότητα και μέσω αυτής να ξεπεράσουν το γνωστικό εμπόδιο που συνάντησαν αλλά και να αποκτήσουν γνωστικά θεμέλια στο δομικό στοιχείο του αλγορίθμου που πραγματευόταν η δραστηριότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κατά την διεκπεραίωση της διπλωματικής εργασίας, με γνώμονα πάντα μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί από σημαντικούς ερευνητές, μου δόθηκε η δυνατότητα να ασχοληθώ και να μελετήσω τις παρανοήσεις και γενικότερα τις εμπειρίες που παρουσιάζουν οι μαθητές κατά την εισαγωγή και την πρώτη διδασκαλία τους στην έννοια του αλγορίθμου της διαίρεσης, καθώς αυτή διδάσκεται συνήθως με ένα μηχανικό τρόπο, έχοντας ως αποτέλεσμα, αυτή η βήμα-βήμα διαδικασία να δημιούργει αδυναμίες στην κατανόηση της έννοιας. Αυτό αποτέλεσε το έναυσμα, ώστε να σχεδιαστεί μία σειρά εναλλακτικών διδασκαλιών (class episodes), οι οποίες ακολουθήθηκαν από την Πειραματική Ομάδα. Οι συγκεκριμένες διδασκαλίες βασιστήκαν σε διάφορους παράγοντες, οι οποίοι ενθάρρυναν τους μαθητές να συμμετάσχουν ενεργά στην κατανόηση του αλγόριθμου, παράγοντες όπως: ασκήσεις που είχαν νόημα και ήταν βασισμένες σε ένα θεωρητικό πλαίσιο, αλλά και στο πρόγραμμα σπουδών, αποτελεσματικά παιδαγωγικά εργαλεία, και τη δυναμική συζήτηση στην τάξη. Εξετάζοντας όλα τα παραπάνω, διαπιστώθηκε ότι η πειραματική ομάδα κατάφερε να επιτύχει υψηλότερα αποτελέσματα στην τελική αξιολόγηση σε σύγκριση με την ομάδα ελέγχου, η οποία προσέγγισε την έννοια του αλγορίθμου με παραδοσιακή δασκαλοκεντρική διδασκαλία.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να εξετάσει με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό μία διαφοροποιημένη και καλά σχεδιασμένη διδασκαλία μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα. Με τον τρόπο αυτό, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν ενεργά και ουσιαστικά στη μάθηση, καθώς και να κατανοήσουν και να κατακτήσουν τα βήματα του παραδοσιακού αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης, αλλά και ποιες έννοιες εμπεριέχονται σε αυτά. Θέλοντας να μελετηθεί το θέμα σε βάθος, έγινε βιβλιογραφική ανασκόπηση, ενώ επίσης πραγματοποιήθηκε πειραματική έρευνα σε δύο τμήματα της Γ’ Δημοτικού εξετάζοντας τους παράγοντες, που το θέμα της εργασίας ορίζει.

Αναλυτικότερα, σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει την ανταπόκριση και την επίδοση των Ελλήνων μαθητών ενός τμήματος της Γ΄ Δημοτικού σε μία διαφοροποιημένη διδασκαλία για την εισαγωγή του κάθετου αλγόριθμου της διαίρεσης δίνοντας νοηματοδότηση στα βήματα που ακολουθούνται, σε σύγκριση με ένα άλλο τμήμα, το οποίο θα ακολουθήσει μία πιο παραδοσιακή διδασκαλία βασισμένη στα σχολικά εγχειρίδια. Επιπλέον, δευτερεύον στόχο της έρευνας αποτελεί ο εντοπισμός των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν και τα λάθη που κάνουν οι μαθητές όταν καλούνται να πραγματοποιήσουν τον αλγόριθμο, αλλά και να λύσουν προβλήματα διαίρεσης με αυτόν. Τέλος, στόχος μας είναι να εξετάσουμε τις άτυπες στρατηγικές που πιθανόν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για την εκμάθηση του αλγόριθμού.

Ο παραδοσιακός αλγόριθμος της κάθετης διαίρεσης διδάσκεται ακόμη και σήμερα μηχανικά ακολουθώντας μία σειρά συγκεκριμένων βημάτων, ως αποτέλεσμα του οποίου να υπάρχει χαμηλή ή και καμία κατανόηση της ίδιας της έννοιας. Όπως αναφέρεται στον Lee (2007) ο συγκεκριμένος αλγόριθμος αποτελεί το πιο διαδεδομένο παράδειγμα κατά το οποίο, οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις περισσότερες δυσκολίες από ότι στους υπόλοιπους αλγόριθμους των άλλων αριθμητικών πράξεων. Για αυτό το λόγο η έρευνα έχει ως κύριο στόχο μέσα από μία σειρά διδασκαλιών να παρέχει στους μαθητές την απαιτούμενη νοηματοδότηση κατά την διάρκεια των βημάτων που απαιτούνται, αλλά και την σύνδεση μεταξύ τους, για την επιτυχή ολοκλήρωση του συγκεκριμένου αλγόριθμου.

Πολύ συχνά η κατανόηση της έννοιας της διαίρεσης συχνά συγχέεται με την ικανότητα του μαθητή να χειρίζεται μόνο τον παραδοσιακό αλγόριθμο της διαίρεσης, ο οποίος γίνεται το μόνο κριτήριο για τον καθορισμό και την αξιολόγηση ενός παιδιού στην κατανόηση σχετικά με αυτήν την έννοια (Lautert, Spinillo & Correa, 2012).

Όλες οι παραπάνω συνιστώσες εξετάστηκαν προσεκτικά και οδήγησαν στη δόμηση αυτής της έρευνας, αλλά και στον επιμέρους σχεδιασμό της. Αναλύοντας διεξοδικά τα αποτελέσματα των δύο «τεστ», τα οποία συγκεντρώθηκαν και αξιολογήθηκαν συμπεραίνουμε ότι τα χαρακτηριστικά εκείνα που ενσωματώθηκαν στη δομή της εναλλακτικής διδασκαλίας, έφεραν καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα. Επιπροσθέτως η παρέμβαση μας ήταν πετυχημένη, καθώς η Πειραματική Ομάδα κατάφερε να καλύψει ένα μεγάλο κενό σε ποσοστιαίες μονάδες επί τις εκατό στους Μέσους Όρους που σημείωσε κατά το PreTest και PostTest και μάλιστα ξεπέρασε τις επιδόσεις της Ομάδας Ελέγχου. Παρακάτω αναλύονται οι συνιστώσες που εξετάστηκαν.

- **Ο αλγόριθμος σαν διαδικασία**

Σαφέστατα, η παρούσα εργασία έχει ως σκοπό την ολόπλευρη κατανόηση του αλγόριθμου της καθετής διαίρεσης από τους μαθητές, και όχι την ικανότητα τους απλά να χειρίζονται έναν αλγόριθμο και να πετυχαίνουν τα απαιτούμενα αποτελέσματα με μία μηχανική προσέγγιση. Με την ολοκλήρωση της ενότητας, όπως επίσης και των διδακτικών παρεμβάσεων, οι δύο ομάδες αξιολογήθηκαν στην επίλυση κάθετων διαιρέσεων όπως όριζε η δραστηριότητα Τ1 του PostTest. Οι λόγοι για τους οποίους επιλέχθηκε η συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι, για να εξετάσει την ικανότητα των μαθητών και των δύο ομάδων να επιλύουν κάθετες διαιρέσεις. Οι διαιρέσεις που επιλέχθηκαν εξυπηρετούν συγκεκριμένο σκοπό, καθώς είναι αντιπροσωπευτικά παραδείγματα διαφορετικών περιπτώσεων. Σε κάθε μία από αυτές τα ψηφία του διαιρετέου αλλά και το υπόλοιπο που αφήνουν σε σχέση με το διαιρέτη κάθε φορά, δημιουργούν διαφορετικές καταστάσεις, κατά τις οποίες οι μαθητές πρέπει να ενεργήσουν ανάλογα. Όπως έδειξαν και τα αποτελέσματα της αξιολόγησης η Πειραματική Ομάδα σημείωσε μέσο όρο 95% σε αντίθεση με την Ομάδα ελέγχου, η οποία σημείωσε 88%. Τα ποσοστά και των δύο ομάδων είναι σίγουρα παραπάνω από ικανοποιητικά και ιδιαιτέρως υψηλά, παρόλα αυτά η Πειραματική Ομάδα πέτυχε σχεδόν το «Άριστα», γεγονός που σημαίνει ότι υπήρξε βαθύτατη κατανόηση της δομής και των συνιστωσών του αλγορίθμου, συνεπώς και κατάλληλη αντιμετώπιση των καταστάσεων που όριζαν οι διαφορετικές κάθετες διαιρέσεις.

- **Η χρήση των αναπαραστάσεων στην διδασκαλία**

Όπως προκύπτει από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών, η πρώτη συνιστώσα που εξετάστηκε και ενσωματώθηκε στην εναλλακτική διδασκαλία που πραγματοποίησε η Πειραματική Ομάδα ήταν η χρήση των αναπαραστάσεων. Συμπεραίνουμε ότι η χρήση αναπαραστάσεων κατά την διδασκαλία του αλγορίθμου της κάθετης διαίρεσης και η σύνδεση τους με τα επιμέρους βήματα του, έφερε εντυπωσιακά αποτελέσματα και οδήγησε στην επίτευξη των προαπαιτούμενων στόχων. Αυτό έγινε εμφανές από την αξιολόγηση των δύο τμημάτων κατά το PreTest και το PostTest, όπου η Ερευνητική Ομάδα σημείωσε μέσους όρους 41,48% και 66,25% στις σχετιζόμενες με αυτήν την έννοια δραστηριότητες (Τ1 και Τ2).

Παρατηρούμε μία αύξηση στην επίδοση της τάξεως των 24,83% μονάδων.

- **Ανάλυση-Σύνθεση αριθμών και η αξία θέσης ψηφίου**

Οι παραπάνω δεξιότητες που αναφέρονται στον τίτλο είναι προαπαιτούμενες πριν από την διδασκαλία της διαίρεσης και οι μαθητές θα πρέπει να έχουν εμπλακεί σε αυτές σε προηγούμενες διδασκαλίες όπως ορίζουν τα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών. Για αυτό το λόγο οι δύο ομάδες αξιολογήθηκαν κατά το PreTest στις δραστηριότητες T4i και T4ii, όπου και σημείωσαν, η Ερευνητική Ομάδα 95,45% και 42,05% καθώς και η Ομάδα Ελέγχου 84,13% και 42,86% αντίστοιχα. Οι μαθητές σημείωσαν αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Οι γνωστικές δεξιότητες στις έννοιες αυτές κρίθηκαν απαραίτητες στο πρόβλημα-δραστηριότητα (T3) του PostTest, καθώς το πλαίσιο του προβλήματος όριζε την σύνθεση του διαιρετέου. Σε αυτήν την δραστηριότητα η Ερευνητική Ομάδα πέτυχε μέσο όρο 70,5%, αφού και πάλι οι παραπάνω συνιστώσες είχαν ενσωματωθεί στην εναλλακτική διδασκαλία, ενώ η Ομάδα Ελέγχου 57,62%.

- **Η έννοια του υπολοίπου της διαίρεσης**

Η κατανόηση της έννοιας του υπολοίπου της διαίρεσης ως δομικό στοιχείο της πράξης αλλά και της λειτουργίας του αποτέλεσε καθοριστικής σημασίας συνιστώσα κατά την αξιολόγηση (PreTest και PostTest) των μαθητών καθώς και είχε σημαίνουσα θέση στον σχεδιασμό των εναλλακτικών διδασκαλιών. Σε πρώτο στάδιο, οι μαθητές κατά το PreTest αξιολογήθηκαν, συγκεκριμένα στην δραστηριότητα T5, στη διαχείριση του υπολοίπου μιας διαίρεσης. Σε αυτό το στάδιο δεν μας ενδιέφερε η πραγματοποίηση μιας αλγοριθμικής διαδικασίας, καθώς οι μαθητές δεν την είχαν ακόμη διδαχθεί. Ο κυριότερος λόγος επιλογής αυτού του διαγνωστικού προβλήματος ήταν η συγκέντρωση των άτυπων στρατηγικών που θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για την επίλυση του, όπως και η διαχείριση των δομικών στοιχείων της πράξης που θα προέκυπταν. Εξετάζοντας τα αποτελέσματα της αξιολόγησης παρατηρήθηκε υψηλό ποσοστό αδυναμίας επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος. Επιπροσθέτως, το υπόλοιπο της διαίρεσης δεν συμπεριλαμβανόταν στις απαντήσεις των μαθητών. Η Ομάδα Ελέγχου σημείωσε μέσο όρο 58,11% και η Ερευνητική Ομάδα 37,27%. Αυτή η κατηγορία παρανόησης δείχνει την αδυναμία κατανόησης των δομικών στοιχείων της διαίρεσης και των λειτουργιών τους. Με την ολοκλήρωση των διδασκαλιών σε αυτήν την ενότητα οι μαθητές αξιολογήθηκαν κατά το PostTest στην δραστηριότητα Τ4, η οποία είχε ως στοχοθεσία την επανεξέταση της έννοιας του υπολοίπου ως δομικό στοιχείο της διαίρεσης και της λειτουργίας του καθώς και την ένταξη του σε ένα πλαίσιο που όριζε το πρόβλημα. Το συγκεκριμένο διαγνωστικό πρόβλημα ήταν σαφέστατα υψηλότερης δυσκολίας από το προαναφερθέν του PreTest. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι και οι δύο ομάδες σημείωσαν αρκετά υψηλά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, η Ομάδα Ελέγχου πέτυχε 70,9% ποσοστό, ενώ η Ερευνητική Ομάδα 65,83%. Άξιο αναφοράς αποτελεί η άνοδος στην επίδοση της Ερευνητικής Ομάδας, η οποία σημείωσε αύξηση στην επίδοση της κατά 28,56% μονάδες.

Συμπεραίνεται λοιπόν ότι η διδακτικές παρεμβάσεις ενίσχυσαν την μαθησιακή διαδικασία και έφεραν καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα, όπως επίσης επιτεύχθηκαν και οι μαθησιακοί στόχοι όπως αυτοί είχαν οριστεί κατά τον σχεδιασμό των διδασκαλιών και γενικότερα της παρούσας έρευνας

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η παρούσα μελέτη ασχολείται με ένα από τα πιο επίμονα προβλήματα στην εκπαίδευση των μαθηματικών: την αντικατάσταση των κυρίαρχων αλγοριθμικών μοντέλων διδασκαλίας με μοντέλα που δίνουν έμφαση στην κατασκευή των γνώσεων των μαθητών.

Ο πρωταρχικός στόχος στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν μαθηματική ικανότητα. που είναι η ικανότητα να κατανοήσουμε, να κρίνουμε, να κάνουμε και να χρησιμοποιήσουμε τα μαθηματικά σε μια ποικιλία μαθηματικών καταστάσεων. Οι βασικές μαθηματικές ικανότητες περιλαμβάνουν τις ικανότητες επίλυσης προβλημάτων (πώς να λύσουν τα καθήκοντα χωρίς να γνωρίζουν μια μέθοδο λύσης εκ των προτέρων), τη συλλογιστική ικανότητα (ικανότητα να δικαιολογούν επιλογές και συμπεράσματα) και την εννοιολογική κατανόηση (γνώσεις σχετικά με την προέλευση, το κίνητρο, χρήση μαθηματικών) (Niss, 2007).

Μεγάλα χρονικά διαστήματα δαπανώνται στα μαθήματα μαθηματικών για την εκμάθηση και απομνημόνευση αλγόριθμων, οι οποίοι υποτίθεται ότι παρέχουν στους μαθητές έναν γρήγορο και αξιόπιστο τρόπο αντιμετώπισης πολλών από τα επόμενα καθήκοντα (Boesen et al., 2014, Hiebert, 2003). Υπάρχουν, ωστόσο, αμφιβολίες ως προς το αν αυτοί οι αλγόριθμοι οδηγούν στην πραγματικότητα σε οποιαδήποτε βαθύτερη κατανόηση των αρχών των μαθηματικών, ή αν η εκτεταμένη χρήση αλγορίθμων είναι αντιπαραγωγική (Hiebert, 2003).

Οι αλγόριθμοι παρουσιάζονται συχνά μέσα στο περιβάλλον της αίθουσας. Μια τυπική κατάσταση προκύπτει από την οποία ο δάσκαλος ή το βιβλίο παρέχει στους μαθητές ένα σύνολο μαθηματικών ασκήσεων και μια μέθοδο τυποποιημένης λύσης (αλγόριθμος). Αυτό ακολουθείται από μία μαζική επανάληψη του αλγορίθμου, οδηγώντας σε μια μη ουσιαστική χρήση του ίδιου του αλγορίθμου (Boesen κ.α., 2014, Lithner, 2008). Επομένως, κάθε δοσμένη δραστηριότητα μπορεί να επιλυθεί σωστά σύμφωνα με το παρεχόμενο πρότυπο, αλλά δυστυχώς χωρίς εννοιολογική κατανόηση του πραγματικού προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

<u>Ελληνόγλωσση</u>

1. Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών, Αθήνα: Leader Books.
2. Κολέζα, Ε. (2009), Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών (4η έκδ.) Αθήνα: Τόπος.
3. Ματσαγγούρας, Η. (1998). Θεωρία και Πράξη της Διδασκαλίας, Στρατηγικές Διδασκαλίας: Η Κριτική Σκέψη στη Διδακτική Πράξη, Τόμος Β΄, Αθήνα: Gutenberg.
4. Μισαηλίδου, Χ. (2014). Λύση Προβλημάτων [Πανεπιστημιακές Σημειώσεις]. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, ΠΜΣ: Μαθηματικά στην Εκπαίδευση – Διδακτική των Μαθηματικών, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-15. Αθήνα.
5. Πόταρη, Δ. (2011). Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά, Υπουργείο Παιδείας
6. Ράπτης, Α. & Ράπτη, Α. (2013). Μάθηση και Διδασκαλία στην Εποχή της Πληροφορίας. Αθήνα.
7. Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά Μεγάλα Μαθηματικά Νοήματα-προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*, Αθήνα: Gutenberg.
8. Τουμάσης, Μ. (2002). Σύγχρονή Διδακτική των Μαθηματικών: Διδακτική Θεωρία και Πράξη, Αθήνα: Gutenberg.
9. Τρούλης, Γ. (1991). Πόσο ξέρουν οι μαθητές της Στ΄ Δημοτικού τη Γλώσσα των Μαθηματικών: Παιδαγωγική Επιθεώρηση, 14-15/91, 32-61.
10. Χασάπης, Δ. (2000). Διδακτική Βασικών Μαθηματικών Εννοιών-Αριθμοί και Αριθμητικές πράξεις, Μεταίχμιο: 2000.

Ξενόγλωσση

1. Aditya R., Zulfikar M. T., Manik N. I. (2015). Testing Division Rings and Fields Using a Computer Program. Procedia Computer Science 59 540–549.
2. Anghileri, J. & Beishuizen M. (1998). Counting, chunking and the division algorithm, Mathematics in School, 27, 1.
3. Arzemi, N., Sivasubramaniam, P. (2010). Long Division and the Double Division Method. Procedia Social and Behavioral Sciences, 8, 85–92.
4. Ashlock, R. (2001). Error patterns in computations: Using error patterns to improve instruction. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
5. Barrows, H. S. (1997). Problem-based learning is more than just learning based around problems. "The Problem Log." 2 (2): 4-5.
6. Bell, A. Swan, M. Onslow, B. Pratt, K. & Purdy, D. (1985). Diagnostic Teaching: Teaching for long term Learning. Nottingham: Shell Centre for Mathematics Education.
7. Bell, A. (1993). Some Experiments in Diagnostic Teaching. Educational Studies in Mathematics, 24, 115-137.
8. Campbell, P. F., Rowan, T. E., & Suarez, A. R. (1998). What criteria for student-invented algorithms? In L. J. Morrow (Ed.), The teaching and learning of algorithms in school mathematics, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 49–55). Reston, VA: NCTM.
9. Carroll, W. M., & Porter, D. (1998). Alternative algorithms for whole-number operations. In L. J. Morrow (Ed.), The teaching and learning of algorithms in school mathematics, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 106–114). Reston, VA: NCTM.
10. Chapman, O. (2006). Classroom Practices For Context of Mathematics Word Problems. Educational Studies in Mathematics, 62, 211-230.
11. Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection, Journal for Research in Mathematics Education, 28, 258-277.
12. Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). Research methods in Education. London: Routledge.
13. Cohen, J. (1988). Statistical power analysis for the behavioral sciences (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

14. Cooper B. & Harries T. (2003). Children's use of realistic considerations in problem solving: some English evidence. Journal of Mathematical Behavior 22, 451–465.
15. De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of Rewarding Verbal Problem Rerpesentations and Solutions. Journal of Educational Psychology, 77 (4), 460-470.
16. Foley, T., & Cawley, J. (2003). About the mathematics of division: Implications for students with learning disabilities. Exceptionality.
17. Glasersfeld, E. (1995). Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning, Great Britain: Burgess Science Press.
18. Hurts, K. (2008). Building cognitive support for the learning of long division skills using progressive schematization: Design and empirical validation. Computers & Education, 50,1141–1156.
19. Jansen A. (2008). Prospective elementary teachers' motivation to participate in whole-class discussions during mathematics content courses for teachers. Educational Studies in Mathematics. 71:145–160.
20. Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. The Journal of Mathematical Behavior, 36, 20–32.
21. Lautert, S. L., Spinillo, A. G. (2004). Inverse relations between division terms: a difficulty, children are able to overcome. In M. J. Høines and A. B. Fuglestad (Eds). Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol 1, p. 397. Bergen, Norway: PME.
22. Lee, J.-E. (2007). Making sense of the traditional long division algorithm. The Journal of Mathematical Behavior, 26 (1), 48-59.
23. Li, Y., Silver, E. (2000). Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. Journal of Mathematical Behavior,19, 233-246.
24. MacDonald T. H. (1977). A general concept internalization model exemplified by the long division algorithm. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 8:2, 157-167.
25. Matalliotaki E. (2012). Resolution of division problems by young children: what are children capable of and under which conditions? European Early

Childhood Education Research Journal. 20 (2), 283-299.

26. McCrink K. & Spelke S. E. (2016). Non-symbolic division in childhood. Journal of Experimental Child Psychology 142 66–82.
27. Montague M. (2010). Teaching Division to Students With Learning Disabilities: A Constructivist Approach. Lawrence Erlbaum Associates, Inc. 11(3), 165–175
28. Parmar R. S. (2003). Understanding the Concept of “Division”: Assessment Considerations. Vol. 11, Iss. 3. Routledge.
29. Polya, G. (1990). Πώς να το λύσω; (Σιαδήμας Λάμπης Μετάφ.), Αθήνα: Σπηλιώτη.
30. Ruchti, P. W., & Bennett, A. C. (2013), Develop Reasoning through Pictorial Representations. Mathematics Teaching in the Middle School, 19, 30-36.
31. Squire S. & Bryant P. (2002). From sharing to dividing: young children’s understanding for division. Developmental Science 5:4, pp 452–466.
32. Streefland L. (1991). Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Μαργαρίτα Μανσόλα Μετάφ.). Αθήνα: Leader Books.
33. Tarım, K. (2009). The effects of cooperative learning on preschoolers’ mathematics problem-solving ability. Springer Science & Business Media B.V.
34. Van de Walle, J. (2005). Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διδασκαλία (Αλεξανδροπούλου Αρχοντούλα, Κομπορόζος Βασίλης Μετάφ.). Αθήνα: Τυπωθύτω.
35. Van De Walle, John A. (2001). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally. Boston: Allyn and Bacon.
36. Vygotsky, L. S. (1962). Thought and language. Cambridge, MA: MIT Press.
37. Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), The concept of activity in Soviet psychology (pp. 144 –148). Armonk, NY: Sharp.
38. Wilder Raymond, L. (1986), Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών, Αθήνα: Π. Κουτσουμπός Α.Ε.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

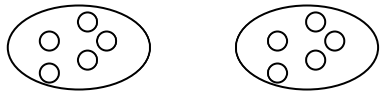
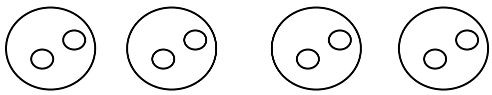
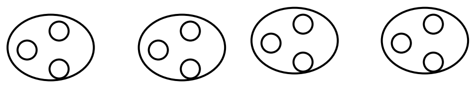
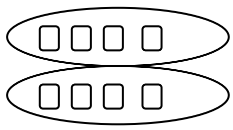
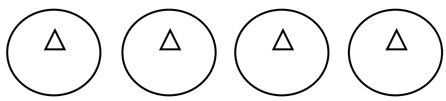
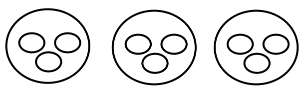
1. Pre-test

Κριτήριο Μαθηματικών Ικανοτήτων

ΤΑΞΗ Γ΄

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ____

1. ***Αντιστοιχίστε τους αριθμούς της $1^{ης}$ στήλης με τα γράμματα της $2^{ης}$ στήλης όπως το παράδειγμα:***

ΣΤΗΛΗ 1	ΣΤΗΛΗ 2
1. 6 : 3	Α. 
2. 8: 2	Β. 
3. 4 : 1	Γ. 
4. 9: 3	Δ. 
5. 10 | 5	Ε. 
6. 12 | 3	ΣΤ. 
7. 4 | 2	Ζ. 
8. 8 : 4	Η. 

2. ***Να γινουν οι παρακάτω πράξεις:***

Α) 321
- 130

Β) 657
- 469

Γ) 1.111
- 999

Δ) 152
× 8

Ε) 23
× 16

ΣΤ) 56
× 38

3. ***Να συμπληρώσετε τα κενά με τους αριθμούς:***

C. 16 : 2 = __ : __ = 2

D. 24 : __ = __ : __ = 3

4. Α) ***Να αναλύσετε του παρακάτω αριθμούς σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες και χιλιάδες:***

ΑΡΙΘΜΟΙ	ΜΟΝΑΔΕΣ	ΔΕΚΑΔΕΣ	ΕΚΑΤΟΝΤΑΔΕΣ	ΧΙΛΙΑΔΕΣ
325				
8.219				
2.340				

Β) Να συμπλήρώσεις τους αριθμους όπως το παράδειγμα:

f. 9 μονάδες + 7 δεκάδες + 5 εκατοντάδες = 579

g. 6 μονάδες + 8 δεκάδες + 3 εκατοντάδες + 6 χιλιάδες =

h. 10 μονάδες + 7 δεκάδες + 2 εκατοντάδες + 1 χιλιάδα =

i. 11 μονάδες + 9 δεκάδες + 5 εκατοντάδες + 9 χιλιάδες =

j. 16 μονάδες + 6 δεκάδες + 9 εκατοντάδες + 2 χιλιάδες =

5.

Αυτή είναι η ένδειξη στον ανελκυστήρα μιας πολυκατοικίας με γραφεία

Αυτός ο ανελκυστήρας μπορεί να μεταφέρει μέχρι **8 άτομα**

Το πρωί, στην ώρα αιχμής, 76 άνθρωποι θέλουν να ανέβουν με τον ανελκυστήρα.

Πόσες φορές πρέπει να ανέβει ο ανελκυστήρας;

<u>Λύση:</u>

<u>Απάντηση:</u>

2. Post-test

Κριτήριο Μαθηματικών Ικανοτήτων

ΤΑΞΗ Γ΄

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ____

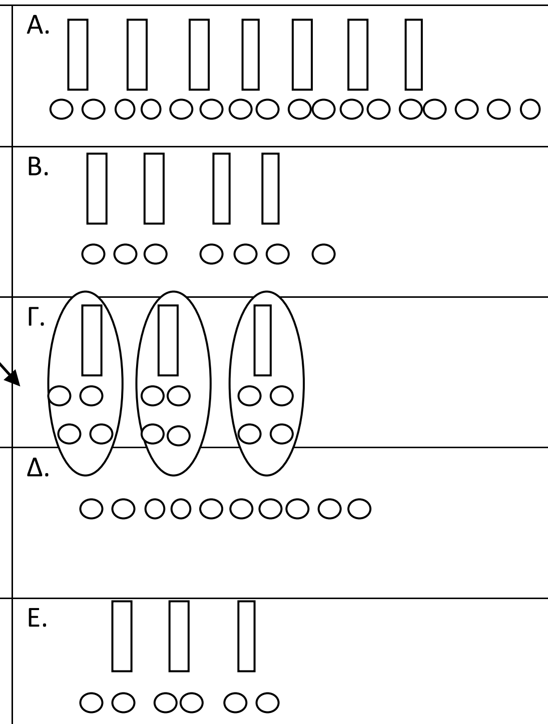
1. Να κάνετε με προσοχή τις παρακάτω διαιρέσεις:

Α) 728 | 6   Β) 532 | 4   Γ) 802 | 6

Δ) 404 | 8   192 | 4   707 | 7

2. Αν η μια γραμμή είναι μία δεκάδα και η μία κουκίδα είναι μία μονάδα, να κάνετε τις παρακάτω αντιστοιχίσεις και να σχεδιάσετε τις λύσεις των παρακάτω διαιρέσεων, όπως το παράδειγμα.

1. 42 | 3	Α.
2. 36 | 3	Β.
3. 47 | 2	Γ.
4. 87 | 7	Δ.
5. 10 | 1	Ε.



3. 1ο Πρόβλημα:

Έχουμε μαζέψει από ένα μπαζάρ 5 κιβώτια, που το καθένα χωράει 100 καραμέλες, 8 κουτιά, που το καθένα χωράει 10 καραμέλες και επιπλέον 3 καραμέλες και θέλουμε να τις μοιράσουμε ισόποσα σε 4 σχολεία. Πόσες καραμέλες θα πάρει το κάθε σχολείο;

Λύση:

Απάντηση:

____

____

4. 2^o Πρόβλημα:

Τα 431 παιδιά ενός σχολείου θα πάνε εκδρομή στο εργοστάσιο σοκολάτας. Το σχολείο αποφάσισε να χρησιμοποιήσουν μικρά λεωφορεία που το καθένα χωράει 9 παιδιά. Πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν για τη μεταφορά των μαθητών;

Λύση:

Απάντηση:

____
____

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

3. Ασκήσεις και Φυλλάδια που δόθηκαν στους μαθητές

3.1. Φυλλάδιο 1:

Γ' Τάξη

" Ο αλγόριθμος της διαίρεσης "

(Με διαιρετέο του οποίου όλα τα ψηφία διαιρούνται με το μονοψήφιο διαιρέτη)
(έγινε στην τάξη)

Ας δούμε λοιπόν αναλυτικά το μηχανισμό του αλγόριθμου της διαίρεσης (κάθετη διαίρεση) ✓

διαιρετέος ← 42 | 2 → διαιρέτης
-4 | 21 → πηλίκο
02
-2
0 → υπόλοιπο

Ας κάνουμε τώρα μερικές κάθετες διαιρέσεις:

α) 96 | 3   84 | 4   693 | 3

β) 248 | 2   848 | 4   939 | 3

3.2. Φυλλάδιο 2:

Άσκηση για το σπίτι

Να κάνεις με προσοχή τις παρακάτω κάθετες διαιρέσεις:

39 | 3	82 | 2	48 | 4
824 | 2	936 | 3	884 | 4
639 | 3	448 | 4	684 | 2
62 | 2	63 | 3	55 | 5

3.3. Φυλλάδιο 3:

Άσκηση για το σπίτι

Να κάνεις με προσοχή τις παρακάτω κάθετες διαιρέσεις:

437	3	822	5	634	4
719	2	982	5	491	3
679	5	879	7	587	3
939	6	972	7	863	5

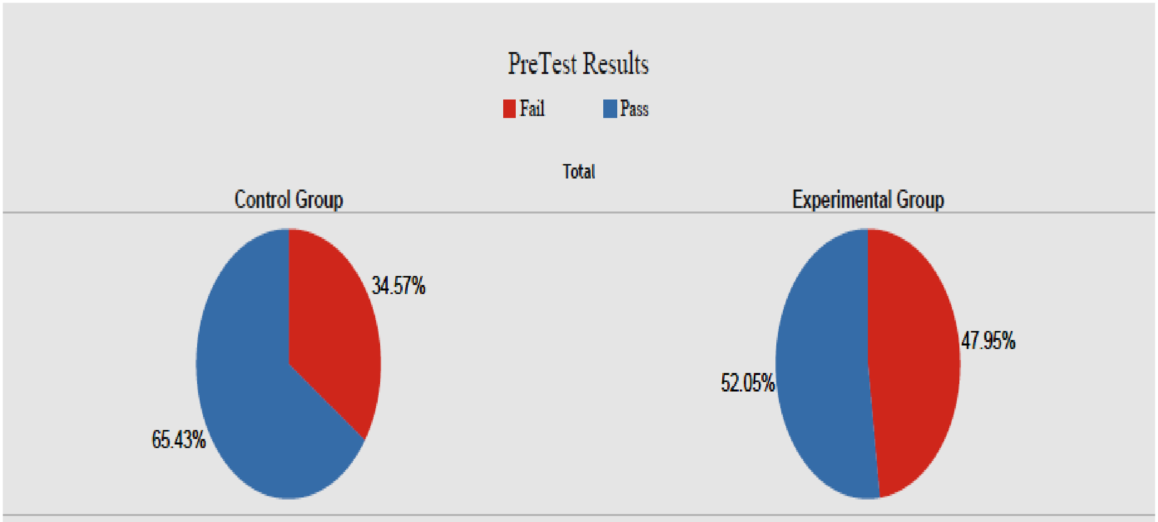
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III

1. Pretest

Συνολικά Αποτελέσματα:

Πίνακας 4.1

Total			
Groups	Pretest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	52.05%	17.99%
Control	21	65.43%	16.30%



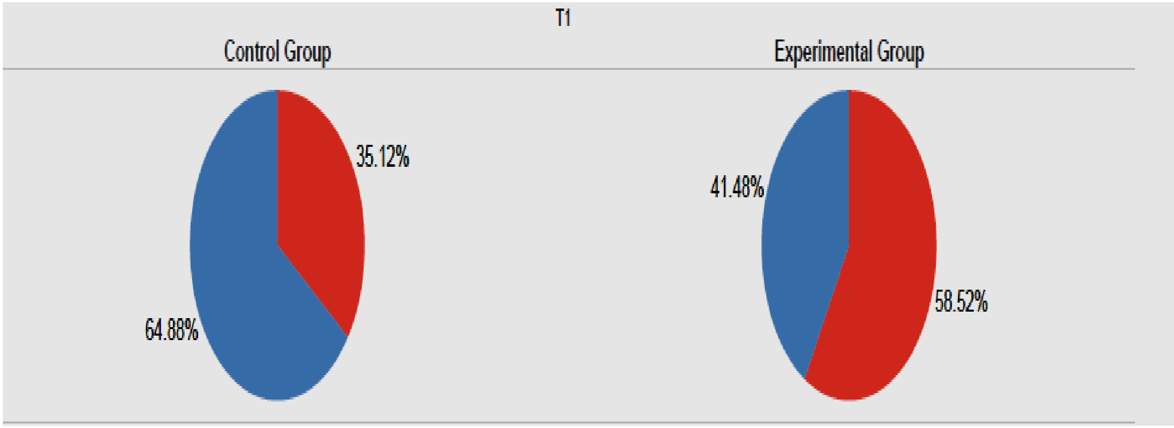
Γράφημα 4.1

Δραστηριότητα 1 (T1):

Πίνακας 4.2

T1			
Groups	Pretest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	41.48%	31.39%
Control	21	64,88%	28.51%

Γράφημα 4.2

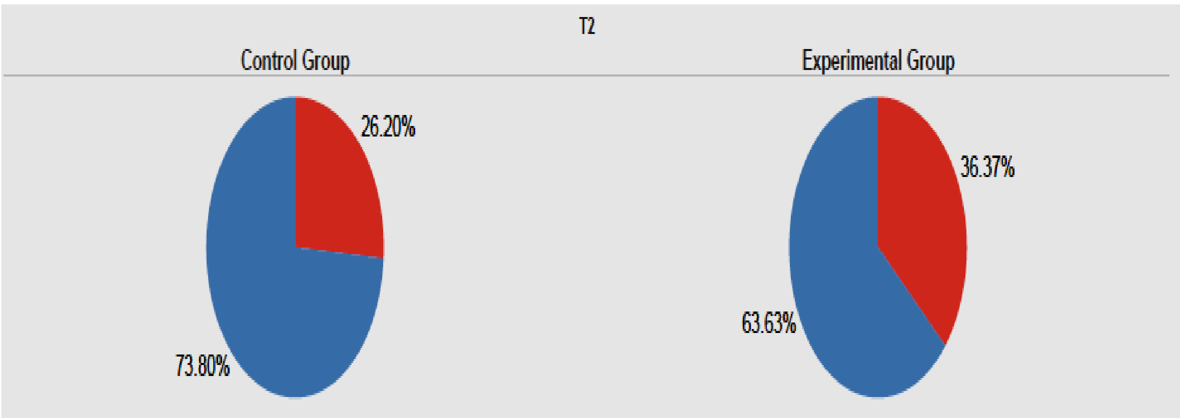


Δραστηριότητα 2 (Τ2):

Πίνακας 4.3

T2			
Groups	Pretest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	63.64%	22.27%
Control	21	73.81%	22.17%

Γράφημα 4.3

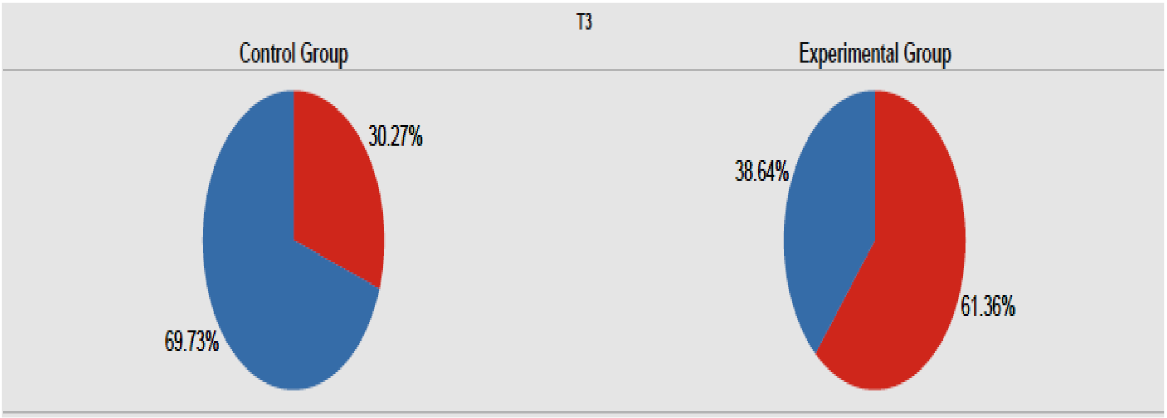


Δραστηριότητα 3 (T3):

Πίνακας 4.4

T3			
Groups		Pretest	
	N	Mean	Sd
Experimental	22	38.64%	43.43%
Control	21	69.73%	32.91%

Γράφημα 4.4

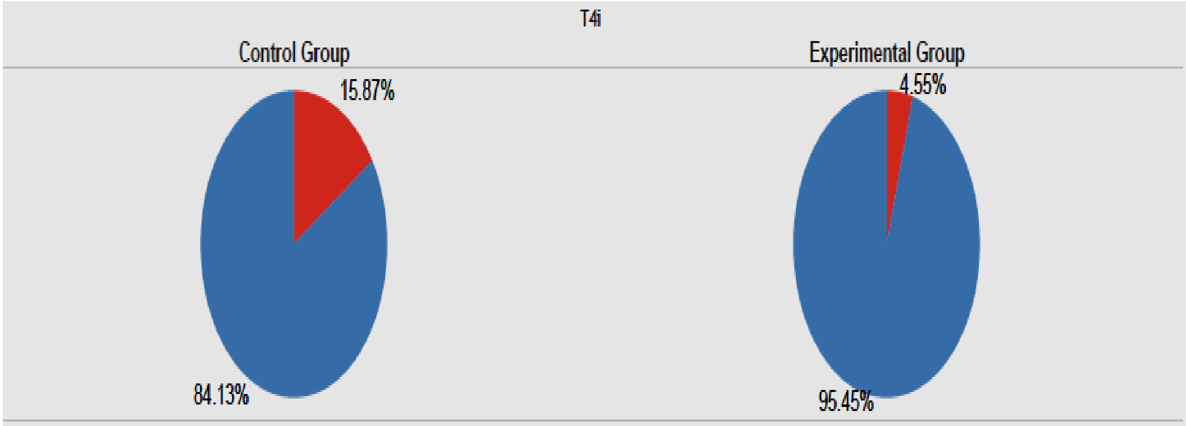


Δραστηριότητα 4Α (T4i):

Πίνακας 4.5

T4i			
Groups		Pretest	
	N	Mean	Sd
Experimental	22	95.45%	20.83%
Control	21	84.13%	32.45%

Γράφημα 4.5

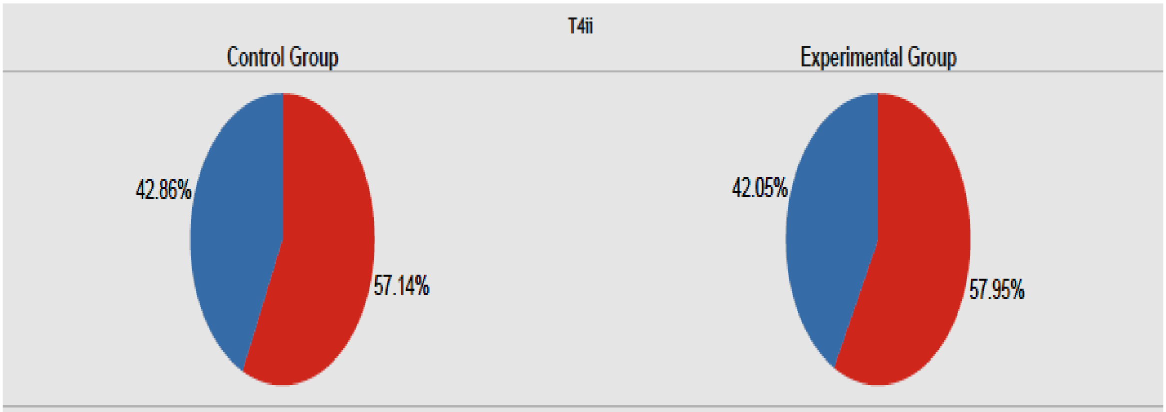


Δραστηριότητα 4Β (T4ii):

Πίνακας 4.6

T4ii			
Groups	Pretest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	42.05%	28.59%
Control	21	42.86%	31.00%

Γράφημα 4.6



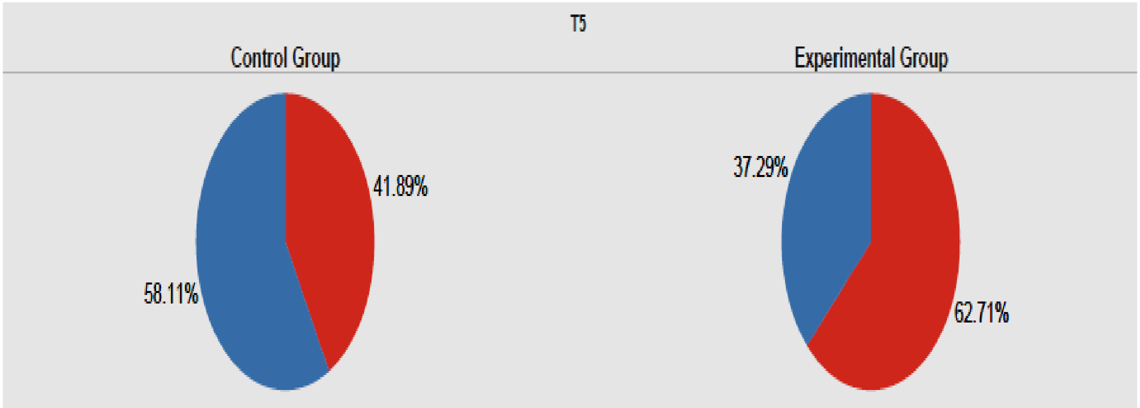
Δραστηριότητα 5 (Τ5):

Πίνακας 4.7

T5

Groups	Pretest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	37.27%	25.79%
Control	21	58.10%	16.30%

Γράφημα 4.7



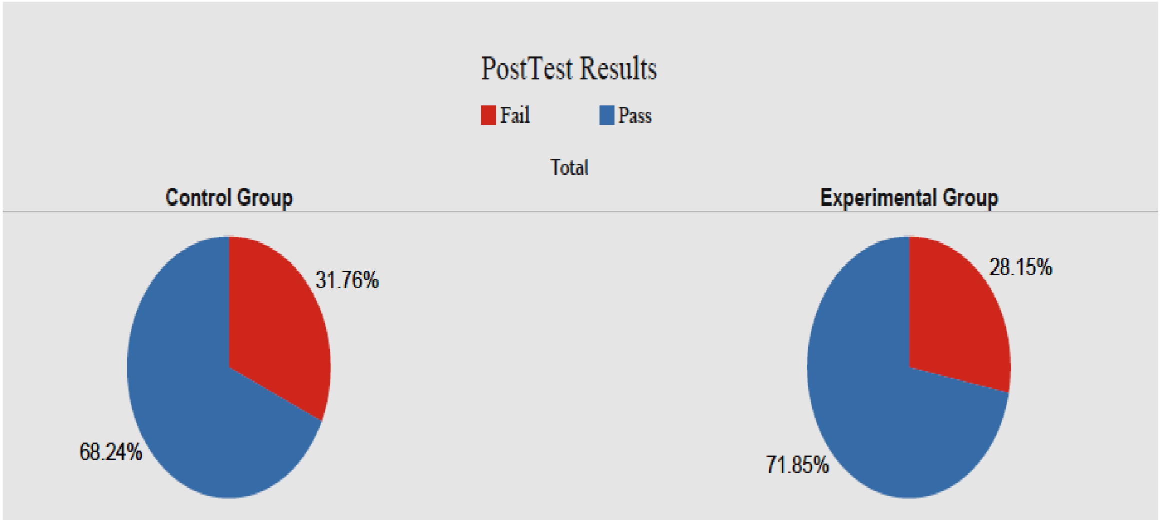
2. Posttest

Συνολικά Αποτελέσματα:

Πίνακας 4.8

Total			
Groups	Posttest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	71.85%	15.83%
Control	21	68.24%	16.20%

Γράφημα 4.8

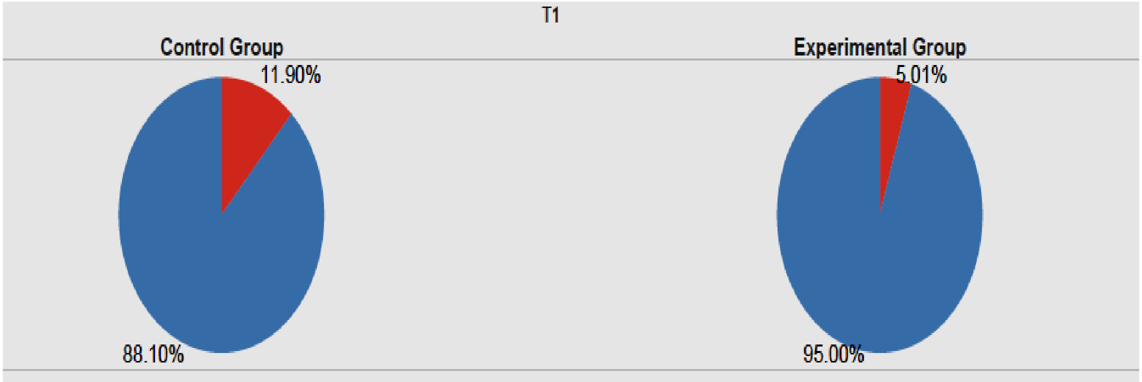


Δραστηριότητα 1 (T1):

Πίνακας 4.9

T1			
Groups	Posttest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	95.00%	9.52%
Control	21	88.10%	14.09%

Γράφημα 4.9

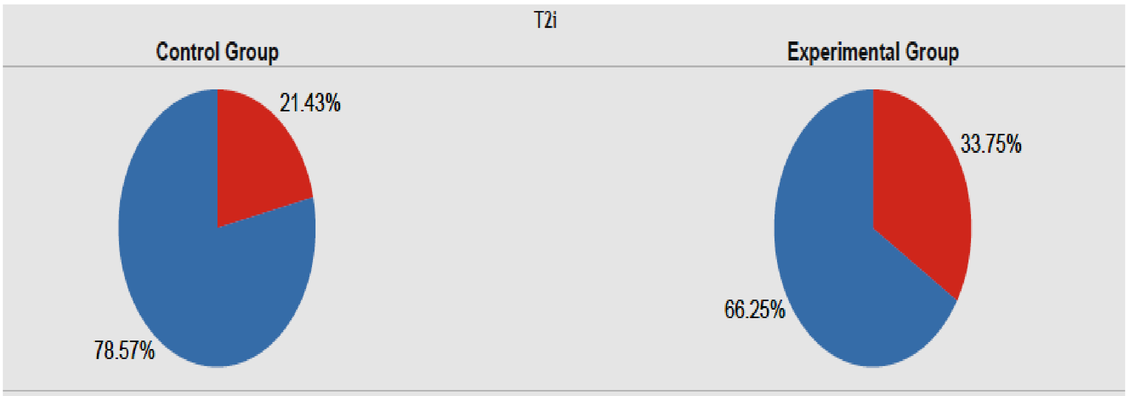


Δραστηριότητα 2a (T2i):

Πίνακας 4.10

T2i			
Groups	Posttest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	66.25%	42.36%
Control	21	78.57%	28.82%

Γράφημα 4.10

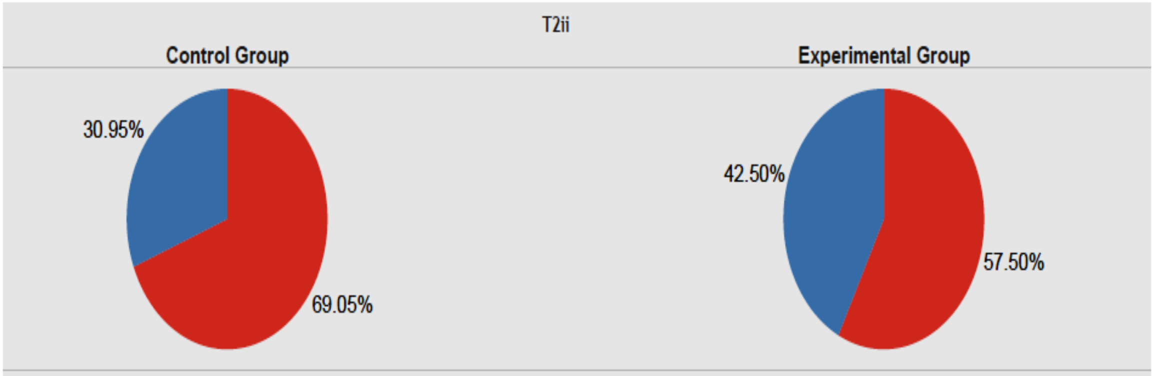


Δραστηριότητα 2β (T2ii):

Πίνακας 4.11

T2ii			
Groups	Posttest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	42.50%	43.75%
Control	21	30.95%	35.27%

Γράφημα 4.11

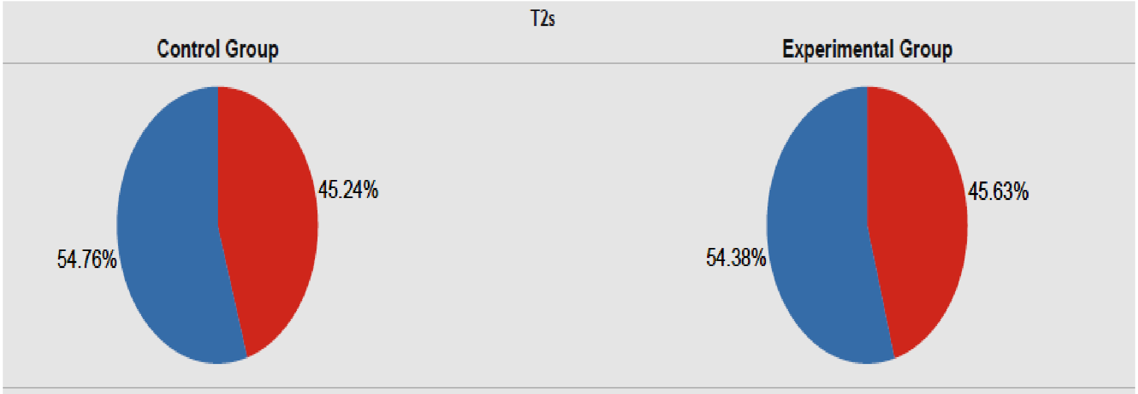


Δραστηριότητα 2S (T2S):

Πίνακας 4.12

T2S			
Groups	Posttest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	54.38%	40.20%
Control	21	54.76%	27.24%

Γράφημα 4.12

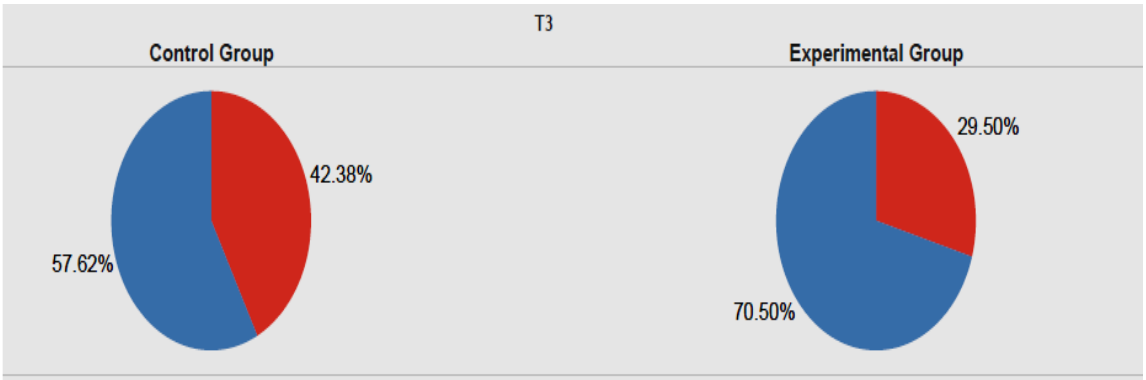


Δραστηριότητα 3 (T3):

Πίνακας 4.13

T3			
Groups		Posttest	
	N	Mean	Sd
Experimental	22	70.50%	39.20%
Control	21	57.62%	35.80%

Γράφημα 4.13

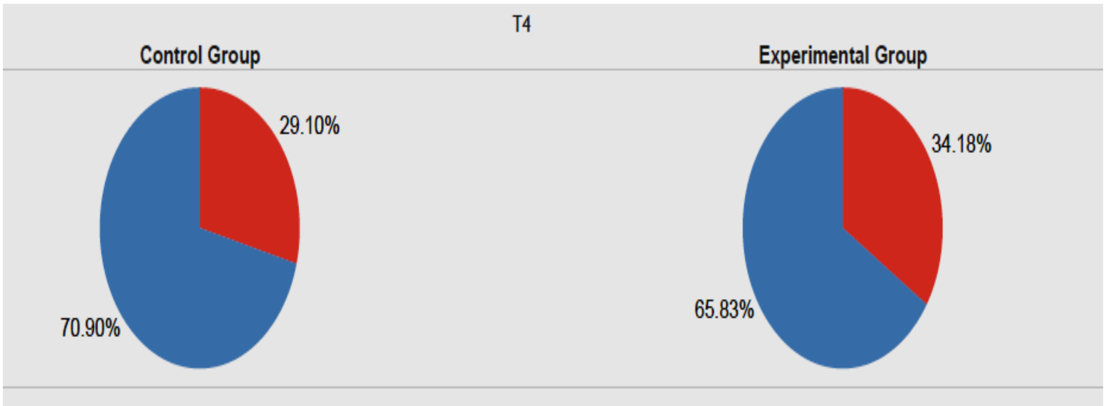


Δραστηριότητα 4 (Τ4):

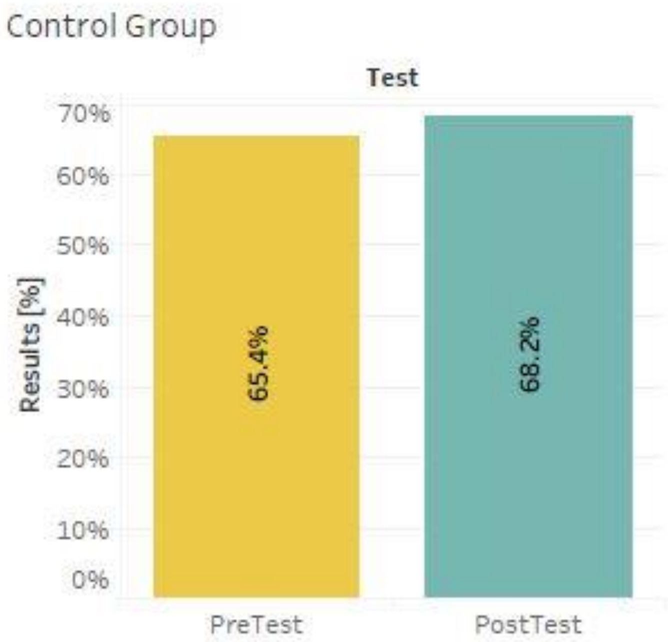
Πίνακας 4.14

T4			
Groups	Posttest		
	N	Mean	Sd
Experimental	22	65.83%	18.41%
Control	21	70.90%	13.37%

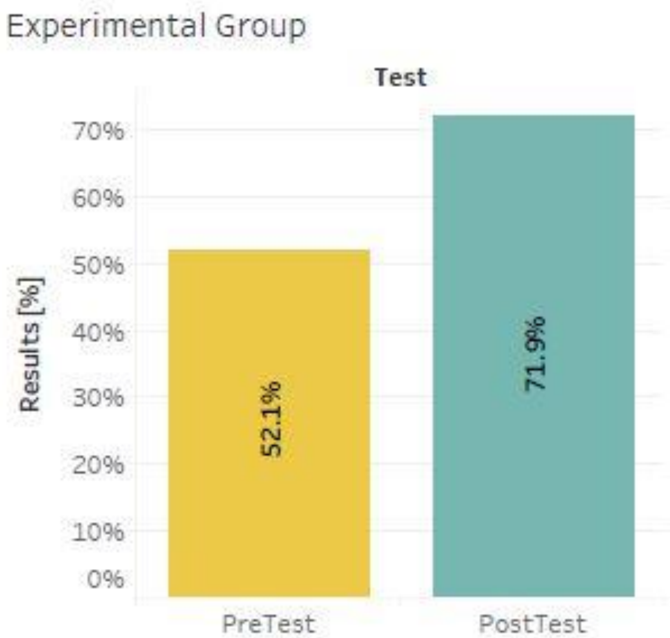
Γράφημα 4.14



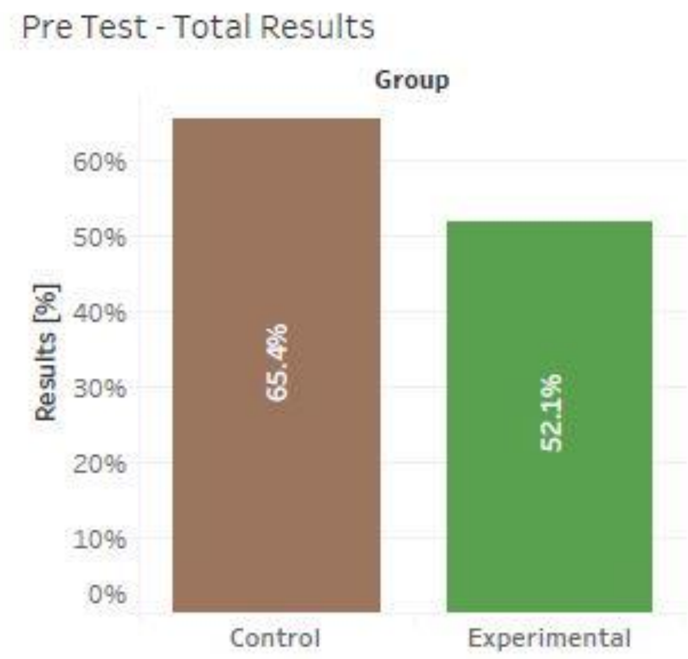
Γράφημα 4.15



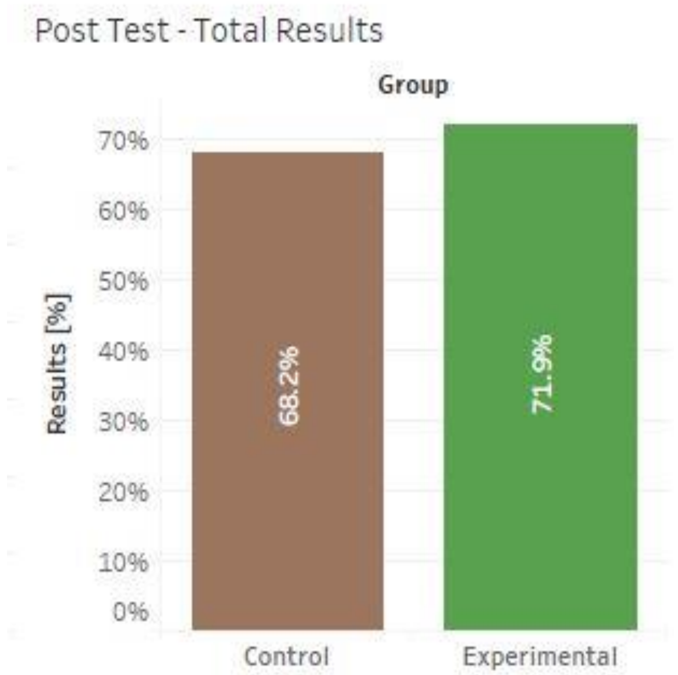
Γράφημα 4.16



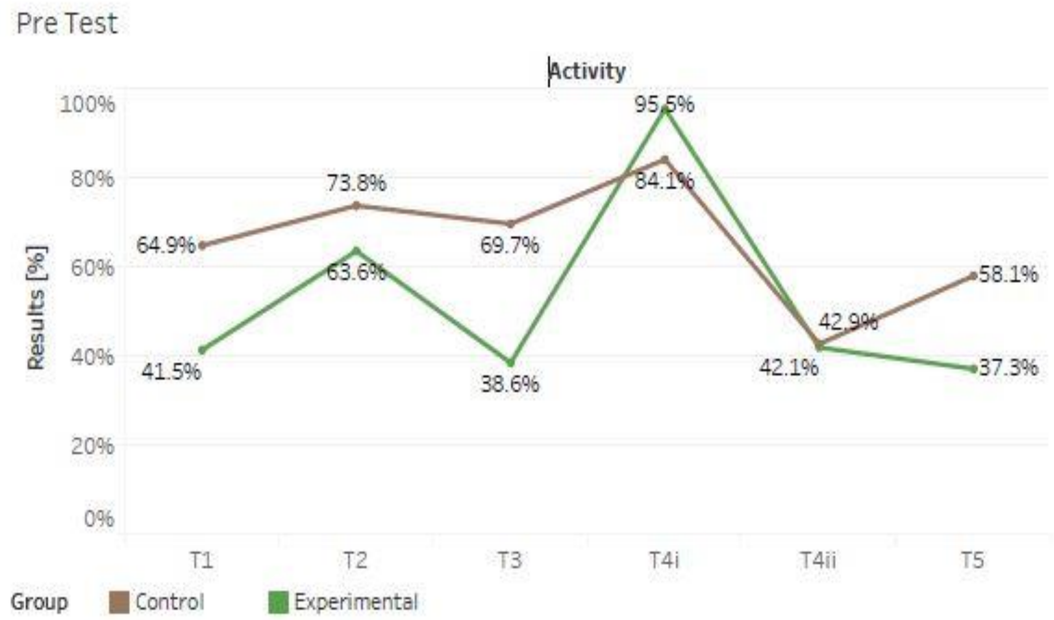
Γράφημα 4.17



Γράφημα 4.19



Γράφημα 4.18



Γράφημα 4.20

Λέξεις-Κλειδιά

Ελληνικά:

Μαθηματικά στην εκπαίδευση, διδακτική πρόταση, αλγόριθμος κάθετης διαίρεσης, ερευνητική εργασία, Ομάδα ελέγχου, ερευνητική ομάδα, διαγνωστική διδασκαλία, εναλλακτικές διδασκαλίες, χρήση αναπαραστάσεων, ο ρόλος του δασκάλου.

Αγγλικά ή άλλη γλώσσα:

Mathematics in education, teaching proposal, vertical division algorithm, research work, control group, experimental research, experimental group, diagnostic teaching, alternative teachings, use of representations, the role of the teacher.