

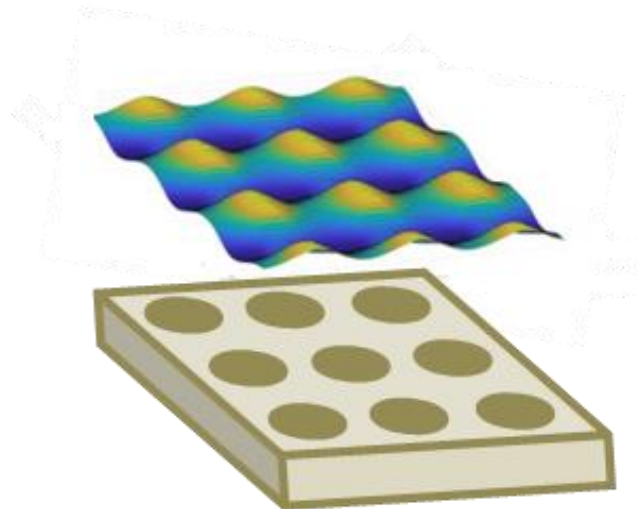


Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών – Τμήμα Φυσικής
Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης

ΜΔΕ «Φυσική των Υλικών»
Διπλωματική εργασία

**Υπολογισμός της μαγνονικής δομής ζωνών
περιοδικά δομημένων μαγνητικών υλικών με τη
μέθοδο των επιπέδων κυμάτων**

Κορδός Κωνσταντίνος: AM 201604



Επιβλέπων: Καθηγητής Ν. Στεφάνου
Αθήνα, 16 Μαΐου 2018

Σύνοψη

Στην εργασία αυτή μελετώνται οι σχέσεις διασποράς για τη διάδοση των κυμάτων σπιν σε διδιάστατες περιοδικές δομές μαγνητικών υλικών λύνοντας τη γραμμική εξίσωση κίνησης της μαγνήτισης Landau - Lifshitz για συγκεκριμένο ενεργό πεδίο που προκαλείται από διπολικές αλληλεπιδράσεις και αλληλεπιδράσεις ανταλλαγής. Παρατίθενται τα απαραίτητα στοιχεία για το χαρακτηρισμό της διάδοσης των κυμάτων σπιν και λύνεται η εξίσωση Landau - Lifshitz για μαγνητοστατικά κύματα σπιν. Εξάγονται οι εξισώσεις ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων της μαγνήτισης λύνοντας την εξίσωση Landau - Lifshitz χρησιμοποιώντας ανάπτυξη σε επίπεδα κύματα και ανάλυση Fourier για δύο διαφορετικές περιοδικές δομές κυλίνδρων εμβαπτισμένων σε μαγνητικό μητρικό υλικό.

Abstract

In this thesis we study the dispersion relations for the propagation of spin waves in two - dimensional periodic structures of magnetic materials by solving the linearized Landau - Lifshitz equation of motion of the magnetization for an effective field caused by dipolar and exchange interactions. We provide an overview of the necessary ingredients to describe the propagation of spin waves and discuss the solution of the Landau - Lifshitz equation for magnetostatic spin waves. We consider two different periodic structures of cylinders embedded in a magnetic material and the magnetic dynamics are studied using a plane wave method. By expanding the spatial variation of the magnetization and the material properties into plane waves, the equation of motion is transformed into an algebraic system of equations and the magnetization is deduced from the solution of an eigenvalue problem.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	7
1. Κύματα σπιν	9
1.1 Κύματα σπιν σε σιδηρομαγνητικά υλικά	9
1.2 Εξίσωση κίνησης της μαγνήτισης	13
1.3 Μαγνητικό πεδίο ανταλλαγής	17
1.4 Λύση της εξίσωσης Landau – Lifshitz για πλακίδιο μαγνητικού υλικού σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο	20
2. Διάδοση κυμάτων σπιν σε διατάξεις περιοδικών δομών με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο	27
2.1 Μέθοδος επιπέδων κυμάτων για τη διάδοση κυμάτων σπιν σε διδιάστατο περιοδικό σύστημα	28
2.2 Εύρεση μαγνονικών καταστάσεων σε περιοδικά διαμορφωμένο μαγνητικό υμένιο	34
3. Σχέσεις διασποράς των κυμάτων σπιν	39
3.1 Σχέσεις διασποράς για τη διάδοση του κύματος σπιν σε διδιάστατο περιοδικό μαγνονικό κρύσταλλο	39
3.2 Σχέσεις διασποράς για τη διάδοση του κύματος σπιν σε περιοδικά διαμορφωμένο λεπτό υμένιο	44
Συμπεράσματα	51
Παρατήματα	53
Βιβλιογραφία	63

Εισαγωγή

Η μελέτη της μαγνητικής δυναμικής σε μαγνητικά υλικά αποτελεί αντικείμενο μεγάλου ερευνητικού ενδιαφέροντος τα τελευταία χρόνια και παρουσιάζει πληθώρα εφαρμογών στη μαγνητική νανοτεχνολογία. Η θεμελιώδης πηγή της κίνησης του διανύσματος της μαγνήτισης σε ένα μαγνητικό υλικό είναι οι μαγνητικές ροπές που οφείλονται στο σπιν των ηλεκτρονίων. Η αντιμετώπιση της κίνησης της μαγνήτισης ως κυματική διαταραχή, η οποία οφείλεται στις συλλογικές κινήσεις των μαγνητικών ροπών των σπιν, εισάγει την έννοια του κύματος σπιν. Η διάδοση των κυμάτων σπιν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε κατάλληλα νανοδομημένα μαγνητικά υλικά, γνωστά ως μαγνονικοί κρύσταλλοι^[1]. Οι μαγνονικοί κρύσταλλοι παρέχουν τη δυνατότητα πλήρους ελέγχου και χειρισμού των κυμάτων σπιν, όπως κανείς ελέγχει τα ελαστικά κύματα με φωνονικούς κρυστάλλους^[2] ή το φως με φωτονικούς κρυστάλλους^[3]. Η διάδοση των κυμάτων σπιν σε μαγνονικούς κρυστάλλους σε σύγκριση με τη διάδοση σε ομοιογενή μαγνητικά υλικά προσφέρει τη δυνατότητα τροποποίησης κατά βούληση του φάσματος των κυμάτων σπιν με την εμφάνιση μαγνονικών χασμάτων και εντοπισμένων καταστάσεων συντονισμού σε ατέλειες, που εισάγονται επί τούτοις στην περιοδική δόμηση, όπως επίσης και τη δυνατότητα κυματοδήγησης. Οι μαγνονικοί κρύσταλλοι προσφέρουν εντυπωσιακές προοπτικές για ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών σε σπιντρονικές διατάξεις που βασίζονται στη δυναμική της μαγνήτισης και προωθούνται έντονα από τη βιομηχανία. Χρησιμοποιούνται ως δομικά στοιχεία σε μαγνητικές μνήμες τυχαίας προσπέλασης (RAM) και σε λογικές πύλες κυμάτων σπιν ολοκληρωμένες με ταλαντωτές ή διακόπτες σπιν^{[4][5]}. Η γεωμετρική δόμηση μαγνητικών λεπτών υμενίων παρέχει έναν αποτελεσματικό και εύκολο τρόπο για την περιοδική διαμόρφωση των μαγνητικών ιδιοτήτων τους με αποτέλεσμα πολλές μελέτες να εστιάζονται στις επίπεδες γεωμετρίες των μαγνονικών κρυστάλλων^[6].

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθούν οι σχέσεις διασποράς για τη διάδοση κυμάτων σπιν σε άπειρες διδιάστατες περιοδικές δομές μαγνητικών υλικών λύνοντας τη γραμμική εξίσωση κίνησης της μαγνήτισης Landau – Lifshitz για συγκεκριμένο ενεργό πεδίο που προκαλείται από διπολικές αλληλεπιδράσεις και αλληλεπιδράσεις ανταλλαγής. Ειδικότερα, στο κεφάλαιο 1 παρατίθενται τα απαραίτητα στοιχεία για το χαρακτηρισμό της διάδοσης των κυμάτων σπιν και λύνεται η εξίσωση Landau – Lifshitz για μαγνητοστατικά κύματα σπιν. Στο κεφάλαιο 2 εξάγονται οι εξισώσεις ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων της μαγνήτισης λύνοντας την εξίσωση Landau – Lifshitz, χρησιμοποιώντας ανάπτυξη σε επίπεδα κύματα και ανάλυση Fourier για δύο διαφορετικές περιοδικές δομές κυλίνδρων εμβαπτισμένων σε μαγνητικό μητρικό υλικό. Το κεφάλαιο 3 πραγματεύεται τις λύσεις των εξισώσεων κίνησης της μαγνήτισης χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές για το σχηματισμό των σχέσεων διασποράς και τα ιδιοανύσματα για την απεικόνιση των στιγμιότυπων των τρόπων ταλάντωσης των κυμάτων σπιν.

Κεφάλαιο 1

Κύματα σπιν

1.1 Κύματα σπιν σε σιδηρομαγνητικά υλικά

Τα κύματα σπιν είναι κυματικές διαταραχές της μαγνήτισης λόγω της περιστροφής των σπιν των ηλεκτρονίων γύρω από έναν σταθερό άξονα. Το σπιν μπορεί να αντιμετωπιστεί ως συνεχής ή διακριτή μεταβλητή ανάλογα με τις ανάγκες της εκάστοτε μελέτης. Στο παρόν εδάφιο αντιμετωπίζεται ως διακριτή μεταβλητή για εντοπισμένα ηλεκτρόνια στα άτομα ενός ατομικού πλέγματος. Η απαιτούμενη ενέργεια για να αντιστραφεί το σπιν ενός ηλεκτρονίου μέσα σε ένα σιδηρομαγνητικό υλικό δίνεται από την αλληλεπίδραση ανταλλαγής των ηλεκτρονίων^[7] και παρακάτω υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη χαμιλτονιανή του Heisenberg για την αλληλεπίδραση μεταξύ εντοπισμένων ηλεκτρονίων.

Έστω ένα σύνολο μαγνητικών ιόντων στις πλεγματικές θέσεις \mathbf{R}_i κρυστάλλου με σιδηρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις ανταλλαγής, που περιγράφονται από τη χαμιλτονιανή του Heisenberg^[7]:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (1)$$

όπου

$$J_{ij} = J(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) = J(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i) \geq 0 \quad (2)$$

το μέτρο της αλληλεπίδρασης ανταλλαγής μεταξύ δύο ιόντων ($J_{ii} = 0$) με διαστάσεις ενέργειας και τιμές της τάξης των 10^{-2} eV και ο παράγοντας $1/2$ υπεισέρχεται για να μην προσμετρώνται δύο φορές οι αλληλεπιδράσεις. Οι συνιστώσες του τελεστή του σπιν \mathbf{S} δρουν σε μία κατάσταση $|sm_s\rangle$, σπιν s και προβολής του σπιν στον άξονα $m_s = -s, -s + 1, \dots, s$, ως εξής:

$$\begin{aligned} S^z |sm_s\rangle &= m_s |sm_s\rangle \\ S^\pm |sm_s\rangle &= \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |sm_s \pm 1\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

όπου

$$S^\pm = S^x \pm iS^y. \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την (3), η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \left[S_i^z S_j^z + \frac{1}{2} (S_i^- S_j^+ + S_i^+ S_j^-) \right]. \quad (5)$$

Είναι αναμενόμενο η θεμελιώδης κατάσταση ελάχιστης ενέργειας να είναι αυτή με όλα τα σπιν προσανατολισμένα παράλληλα, έστω κατά τον άξονα z , με μέγιστη τιμή $m_s = s$

$$|0\rangle = \prod_{i'} |s\rangle_{i'}, \quad (6)$$

όπου για απλότητα οι καταστάσεις σπιν χαρακτηρίζονται μόνο με το δείκτη m_s ($= s$ εδώ). Δρώντας με τη χαμιλτονιανή (5) στη θεμελιώδη κατάσταση προκύπτει:

$$H|0\rangle = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} s^2 |0\rangle. \quad (7)$$

Άρα πράγματι η $|0\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση της H με ιδιοτιμή

$$E_0 = -\frac{1}{2} s^2 \sum_{i,j} J_{ij}. \quad (8)$$

Προφανώς, εφόσον $J_{ij} \geq 0$ και s η μέγιστη θετική τιμή της προβολής του σπιν στον άξονα z , οποιαδήποτε άλλη κατάσταση

$$|\lambda\rangle = \prod_{i'} |m_s\rangle_{i'} \quad (9)$$

θα έδινε υψηλότερη ενέργεια. Άρα η $|0\rangle$ είναι η θεμελιώδης κατάσταση που αντιστοιχεί σε μαγνήτιση κορεσμού (μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου, εδάφιο 1.2):

$$\mathbf{M} = g\mu_B \frac{N}{V} \mathbf{S}, \quad (10)$$

όπου N ο αριθμός των ιόντων σε όγκο V , g ο παράγοντας Lande με τιμή $g \approx 2$ για ελεύθερα ηλεκτρόνια και $\mu_B = |e|\hbar/2m_e$ η μαγνητόνη του Bohr (e : φορτίο του ηλεκτρονίου, m_e : μάζα του ηλεκτρονίου, \hbar : σταθερά του Planck).

Ας εξεταστεί τώρα μία χαμηλά διηγευμένη κατάσταση $|j'\rangle$ που διαφέρει από τη θεμελιώδη κατάσταση $|0\rangle$ μόνο στο ότι το σπιν στη θέση $\mathbf{R}_{j'}$ έχει συνιστώσα z ελαττωμένη από s σε $s - 1$. Δηλαδή, βάσει της (3):

$$|j'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2s}} S_{j'}^- |0\rangle. \quad (11)$$

Η κατάσταση $|j'\rangle$ παραμένει μία ιδιοκατάσταση των όρων της χαμιλτονιανής (5) που περιέχει τους τελεστές $S_i^z S_j^z$. Αν είτε $i = j'$ είτε $j = j'$, ένα σπιν αναφέρεται στη θέση $\mathbf{R}_{j'}$ και έχει τη

συνιστώσα z ελαττωμένη από s σε $s - 1$, διαφορετικά, αν $i \neq j'$ και $j \neq j'$, και τα δύο σπιν έχουν τη συνιστώσα z ίση με s . Δηλαδή:

$$S_i^z S_{j'}^z |j' \rangle = s(s-1)(\delta_{ij'} + \delta_{jj'}) |j' \rangle + s^2(1 - \delta_{ij'} - \delta_{jj'}) |j' \rangle = [s^2 - s(\delta_{ij'} + \delta_{jj'})] |j' \rangle. \quad (12)$$

Επειδή η συνιστώσα z του σπιν στη θέση $\mathbf{R}_{j'}$ δεν έχει τη μέγιστη τιμή, ο όρος $S_{j'}^+ |j' \rangle$ δεν μηδενίζεται και βάσει της (3) προκύπτει:

$$S_i^- S_{j'}^+ = S_i^- \delta_{jj'} \sqrt{2s} |0 \rangle = \delta_{jj'} 2s |i \rangle$$

και ομοίως,

$$S_i^+ S_{j'}^- |j' \rangle = \delta_{ij'} 2s |j \rangle. \quad (13)$$

Επομένως η κατάσταση $|j' \rangle$ δεν είναι ιδιοκατάσταση της χαμιλτονιανής (5). Είναι δυνατόν όμως να κατασκευαστεί μία ιδιοκατάσταση της χαμιλτονιανής με τον εξής γραμμικό συνδυασμό τέτοιων χαμηλά διηγερμένων ιδιοκαταστάσεων:

$$|\mathbf{q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j'=1}^N e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{j'}} |j' \rangle. \quad (14)$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} H|\mathbf{q} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j'=1}^N e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{j'}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \left[S_i^z S_j^z + \frac{1}{2} (S_i^- S_j^+ + S_i^+ S_j^-) \right] \right\} |j' \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j'=1}^N e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{j'}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} [s^2 - s(\delta_{ij'} + \delta_{jj'})] |j' \rangle - \frac{1}{4} 2s \sum_{i,j} J_{ij} (\delta_{jj'} |i \rangle + \delta_{ij'} |j \rangle) \right\} \\ &= E_0 |\mathbf{q} \rangle + \frac{s}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_i} |i \rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_j} |j \rangle \right] - \frac{s}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_j} |i \rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_i} |j \rangle \right] \end{aligned}$$

Οι δείκτες i, j είναι βουβοί και τα αθροίσματα είναι πεπλεγμένα μόνο όσον αφορά τη σταθερά ανταλλαγής J_{ij} . Έτσι μπορεί να θεωρηθεί ότι $J_{ij} = J(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) = J(\mathbf{R})$, με $\mathbf{R} \neq 0$ και να γίνει αλλαγή μεταβλητής στους δείκτες των όρων μέσα στις παρενθέσεις. Τελικά προκύπτει:

$$\begin{aligned} H|\mathbf{q} \rangle &= \left[E_0 + s \sum_{\mathbf{R} \neq 0} J(\mathbf{R}) - s \sum_{\mathbf{R} \neq 0} J(\mathbf{R}) \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}) \right] |\mathbf{q} \rangle \Rightarrow \\ H|\mathbf{q} \rangle &= \left[E_0 + 2s \sum_{\mathbf{R} \neq 0} J(\mathbf{R}) \sin^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}) \right] |\mathbf{q} \rangle = E(\mathbf{q}) |\mathbf{q} \rangle. \quad (15) \end{aligned}$$

Για κυματόνισμα \mathbf{q} με μικρό μέτρο ισχύει ότι $\sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}) \simeq \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}$ και η ιδιοτιμή της χαμιλτονιανής για τη δράση της στη κατάσταση $|\mathbf{q}\rangle$ γράφεται:

$$E(\mathbf{q}) = E_0 + 2s \sum_{\mathbf{R} \neq 0} J(\mathbf{R})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{R})^2. \quad (16)$$

Όπως φαίνεται από τη σχέση διασποράς (16), απουσία μαγνητικού πεδίου, η κβαντική ενέργεια διέγερσης των σπιν για κύματα μεγάλου μήκους κύματος σε ένα σιδηρομαγνήτη εξαρτάται από το τετράγωνο του κυματόνισματος \mathbf{q} και μηδενίζεται για αρκετά μικρές τιμές του. Αυτό συμβαίνει διότι η διαφορά στον προσανατολισμό του σπιν από άτομο σε άτομο γίνεται όλο και μικρότερη καθώς το μήκος κύματος μεγαλώνει και επομένως η αλληλεπίδραση ανταλλαγής μεταξύ των σπιν των ηλεκτρονίων συνεισφέρει όλο και λιγότερο στην ενέργεια. Η σύζευξη ανταλλαγής των σπιν γίνεται συγκρίσιμη με την ενέργεια των μαγνητικών διπόλων όταν εφαρμοστεί εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Για να δοθεί μία φυσική εξήγηση της συλλογικής κατάστασης $|\mathbf{q}\rangle$ σημειώνονται τα εξής:

- Επειδή η $|\mathbf{q}\rangle$ είναι μία υπέρθεση N καταστάσεων, σε καθεμιά από τις οποίες η προβολή του ολικού σπιν στη διεύθυνση z έχει ελαττωθεί από την τιμή κορεσμού Ns κατά μία μονάδα, η $|\mathbf{q}\rangle$ περιγράφει μία κατάσταση με συνιστώσα του ολικού σπιν κατά τον άξονα z $Ns - 1$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} | \sum_n S_n^z | \mathbf{q} \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i',j'} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_{j'} - \mathbf{R}_{i'})} \sum_n \langle i' | S_n^z | j' \rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i',j'} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_{j'} - \mathbf{R}_{i'})} \sum_n [\delta_{nj'}(s-1) + (1 - \delta_{nj'})s] \delta_{i'j'} = \frac{1}{N} \sum_{j'} \sum_n (s - \delta_{nj'}) = Ns - 1 \end{aligned}$$

- Η πιθανότητα το μικρότερο σπιν να βρεθεί στη θέση \mathbf{R}_n στην κατάσταση $|\mathbf{q}\rangle$ είναι:

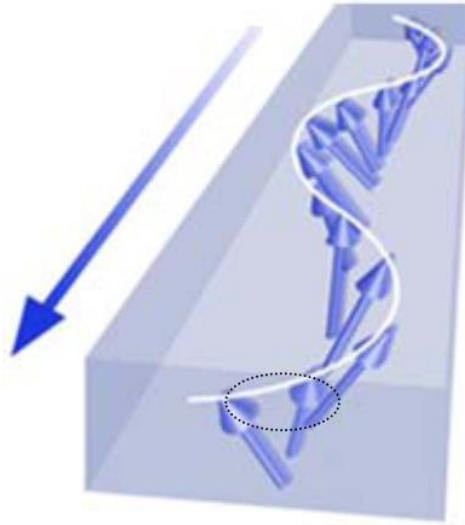
$$|\langle \mathbf{q} | n \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i'} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{i'}} \langle i' | n \rangle \right|^2 = \frac{1}{N},$$

δηλαδή το μικρότερο σπιν είναι κατανεμημένο με ίση πιθανότητα σε όλα τα μαγνητικά ιόντα.

- Η αναμενόμενη τιμή της συσχέτισης των συνιστωσών των σπιν κάθετα στη διεύθυνση z μεταξύ δύο οποιωνδήποτε θέσεων \mathbf{R}_i και $\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_n$ είναι:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} | S_i^x S_{i+n}^x + S_i^y S_{i+n}^y | \mathbf{q} \rangle &= \frac{1}{2N} \sum_{i',j'} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_{j'} - \mathbf{R}_{i'})} \langle i' | S_i^- S_{i+n}^+ + S_i^+ S_{i+n}^- | j' \rangle \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{i',j'} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_{j'} - \mathbf{R}_{i'})} \langle i' | (\delta_{(i+n)j'} 2s |i\rangle + \delta_{ij'} 2s |i+n\rangle) \\ &= \frac{2s}{2N} \sum_{i',j'} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_{j'} - \mathbf{R}_{i'})} (\delta_{ii'} \delta_{(i+n)j'} + \delta_{(i+n)i'} \delta_{ij'}) = \frac{2s}{N} \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_n). \end{aligned}$$

Δηλαδή, κατά μέσον όρο, κάθε σπιν έχει μία μικρή εγκάρσια συνιστώσα, κάθετα στη διεύθυνση της μαγνήτισης (κατά τον άξονα z) μεγέθους $\sqrt{2s/N}$. Οι προσανατολισμοί των εγκάρσιων συνιστωσών δύο σπιν που απέχουν κατά R_n διαφέρουν κατά γωνία $\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_n$. Δηλαδή, η μικροσκοπική μαγνήτιση στην κατάσταση $|\mathbf{q}\rangle$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1, περιγράφει ένα στιγμιότυπο κύματος σπιν με κυματάνυσμα \mathbf{q} .



Σχήμα 1: Διάδοση ενός κύματος σπιν.

1.2 Εξίσωση κίνησης της μαγνήτισης

Η θεμελιώδης πηγή της μαγνήτισης είναι οι μαγνητικές ροπές που οφείλονται στην τροχιακή στροφορμή του ηλεκτρονίου λόγω της περιστροφής του γύρω από τον πυρήνα του ατόμου και στο σπιν του ίδιου του ηλεκτρονίου^[6]. Η συνεισφορά της τροχιακής στροφορμής στα συνήθη μαγνητικά υλικά είναι αμελητέα και οι μαγνητικές ροπές καθορίζονται μόνο από το σπιν των ηλεκτρονίων. Η μελέτη της μαγνήτισης σε μακροσκοπικό επίπεδο, για την εξαγωγή της εξίσωσης κίνησής της, ανάγεται στη θεώρηση των μαγνητικών ροπών, και κατ' επέκταση των σπιν των ηλεκτρονίων, ως συνεχείς μεταβλητές σε ένα μαγνητικό υλικό.

Η μαγνητική ροπή ενός ρευματοφόρου βρόγχου που διαρέεται από ρεύμα ηλεκτρονίων I , ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{\mu} = IA\hat{\mathbf{n}}, \quad (17)$$

όπου A η επιφάνεια που ορίζει ο βρόγχος και $\hat{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια. Με εφαρμογή μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} , στο βρόγχο θα ασκηθεί ροπή στρέψης (Σχ. 2):

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (18)$$

Η μαγνητική ροπή βρίσκεται στην ίδια διεύθυνση με τη συνολική στροφορμή \mathbf{J} των κινουμένων ηλεκτρονίων και εκφράζεται:

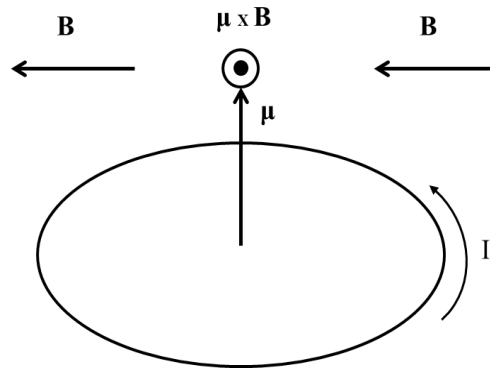
$$\boldsymbol{\mu} = \gamma\hbar\mathbf{J}, \quad (19)$$

όπου γ ο γυρομαγνητικός λόγος που οφείλεται στη συνολική στροφορμή των ηλεκτρονίων και θα προσδιορισθεί στη συνέχεια. Η συνολική στροφορμή του ηλεκτρονίου (μάζας m_e στην κλασική περιγραφή) γράφεται εν γένει:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (20)$$

όπου $\hbar\mathbf{L} = m_e \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ η τροχιακή στροφορμή για ηλεκτρόνιο που περιστρέφεται γύρω από τον πυρήνα του ατόμου και \mathbf{S} το ηλεκτρονικό σπιν. Ο γυρομαγνητικός λόγος γ είναι το άθροισμα των επιμέρους γυρομαγνητικών λόγων της τροχιακής στροφορμής και του σπιν:

$$\gamma = \gamma_L + \gamma_s. \quad (21)$$



Σχήμα 2: Ροπή στρέψης ρευματοφόρου βρόγχου εντός μαγνητικού πεδίου \mathbf{B}

Το ρεύμα I λόγω της περιστροφής ενός ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα ορίζεται:

$$I = \frac{v}{2\pi R} q, \quad (22)$$

όπου v το μέτρο της επιτρόχιας ταχύτητας του ηλεκτρονίου, $q = -|e|$ το φορτίο του και R η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα, αντίστοιχα. Το μέτρο της μαγνητικής ροπής (17) του βρόγχου περιστροφής του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα, επιφάνειας $A = \pi R^2$, είναι:

$$\mu_L = IA = \frac{qvR}{2} \quad (23)$$

και ο γυρομαγνητικός λόγος της τροχιακής στροφορμής εκφράζεται:

$$\gamma_L = \frac{\mu_L}{\hbar L} = \frac{q}{2m_e}. \quad (24)$$

Αντίστοιχα ο γυρομαγνητικός λόγος για το σπιν εκφράζεται:

$$\gamma_s = g \frac{q}{2m_e}, \quad (25)$$

όπου g ο παράγοντας Landé με τιμή $g = 2$ για τα ηλεκτρόνια. Από τις (19)-(21) και χρησιμοποιώντας τις (24), (25), η μαγνητική ροπή μπορεί να εκφραστεί:

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma_L \hbar (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}). \quad (26)$$

Η εξίσωση (26) για τη μαγνητική ροπή είναι προσεγγιστική. Η μαγνητική ροπή και η συνολική στροφορμή δεν έχουν την ίδια διεύθυνση λόγω της συνεισφοράς του σπιν. Ωστόσο, λόγω αρχής της απροσδιοριστίας του Heisenberg, μόνο η παράλληλη συνιστώσα της μαγνητικής ροπής στη συνολική στροφορμή είναι καθορισμένη και μετρήσιμη. Στα συνήθη μαγνητικά υλικά η συνεισφορά της τροχιακής στροφορμής \mathbf{L} είναι όπως αναφέρθηκε αμελητέα και η μαγνητική ροπή (26) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μόνο του σπιν:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{|e|\hbar}{m_e} \mathbf{S} = -g\mu_B \mathbf{S}. \quad (27)$$

Η ροπή στρέψης (18) είναι η χρονική παράγωγος της συνολικής στροφορμής (20). Έτσι, εν γένει, προκύπτει η εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \gamma \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (28)$$

Η εξίσωση κίνησης (28) λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τη συνεισφορά του σπιν στη συνολική στροφορμή και δεδομένου ότι

$$\gamma = \gamma_s = -\frac{|e|\hbar}{m_e}, \quad (29)$$

εκφράζεται:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}(t)}{dt} = -\gamma \mathbf{B} \times \boldsymbol{\mu}(t). \quad (30)$$

Αν υπάρχουν συνολικά N μαγνητικές ροπές σε όγκο V περί το σημείο \mathbf{r} , η συνολική τοπική μαγνητική ροπή $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ ανά μονάδα όγκου (μαγνήτιση) σε ένα μαγνητικό υλικό μπορεί να οριστεί:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \frac{N\boldsymbol{\mu}(t)}{V}, \quad (31)$$

οπότε η εξίσωση (30) γράφεται:

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \gamma \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (32)$$

Η εξίσωση (32) είναι η εξίσωση Landau – Lifshitz και, με τη μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} να βρίσκεται στη διεύθυνση z , προκύπτει:

$$\frac{\partial M_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \gamma B M_y(\mathbf{r}, t) \quad (33)$$

$$\frac{\partial M_y(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\gamma B M_x(\mathbf{r}, t) \quad (34)$$

$$\frac{\partial M_z(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (35)$$

Από τις εξισώσεις (33) – (35) προκύπτει ότι η μαγνήτιση περιστρέφεται στο επίπεδο $x - y$ με σταθερή γωνιακή συχνότητα $\omega_L = |\gamma|B$ που ονομάζεται συχνότητα Larmor.

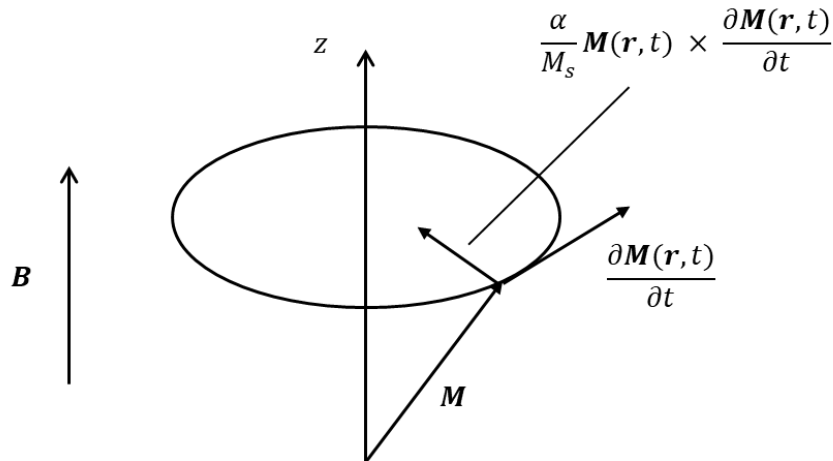
Σύμφωνα με την εξίσωση Landau – Lifshitz (32), αν η μαγνήτιση δεν είναι ευθυγραμμισμένη με το μαγνητικό πεδίο, θα περιστρέφεται επ' άοριστον γύρω από τον άξονα του μαγνητικού πεδίου. Στη πράξη υπάρχουν πάντα πηγές μαγνητικής απόσβεσης που μεταφέρουν, π.χ. ενέργεια από το σύστημα της μαγνήτισης στις ταλαντώσεις του πλέγματος^[2]. Οι όροι απόσβεσης που δεν έχουν εισαχθεί στην (32) είναι διανυσματικά κάθετοι στη χρονική μεταβολή της μαγνήτισης προς τον άξονα του μαγνητικού πεδίου και μπορούν να γραφούν στη γενική διανυσματική μορφή:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (36)$$

Ο όρος απόσβεσης \mathbf{A} εισάγεται στην εξίσωση Landau – Lifshitz (32) ως εξής:

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \gamma \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (37)$$

όπου α αδιάστατη σταθερά απόσβεσης και M_s η μαγνήτιση κορεσμού για την οποία θα μιλήσουμε στα Εδάφια 1.3 και 1.4.



Σχήμα 3: Η χρονική μεταβολή της μαγνήτισης σύμφωνα με την εξίσωση Landau – Lifshitz και ο όρος απόσβεσης με το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής \mathbf{B} να βρίσκεται στη διεύθυνση z .

Να σημειωθεί ότι ο όρος απόσβεσης επιδρά μόνο στην αλλαγή της κατεύθυνσης της μαγνήτισης και όχι του μέτρου της. Το μέτρο της μαγνήτισης παραμένει σταθερό διότι

$$\frac{\partial M^2}{\partial t} = 0, \quad (38)$$

όπως μπορεί να διαπιστωθεί αν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο των δύο μελών της (37) με $M(\mathbf{r}, t)$.

1.3 Μαγνητικό πεδίο ανταλλαγής

Το πεδίο ανταλλαγής, σε ένα ομοιογενές μαγνητικό υλικό, προκαλείται από την ενέργεια ανταλλαγής λόγω της αλληλεπίδρασης των σπιν των ιόντων του υλικού και παρακάτω παρουσιάζεται ένας τρόπος υπολογισμού του, θεωρώντας το σπιν ως συνεχή μεταβλητή εξαρτώμενη μόνο από τη θέση. Για να βρεθεί μία έκφραση της τοπικής πυκνότητας ενέργειας ανταλλαγής σε ένα ομοιογενές υλικό, $w(\mathbf{r})$, μπορούμε να ξεκινήσουμε από τη χαμιλτονιανή του Heisenberg (1) για την αλληλεπίδραση ενός μαγνητικού ιόντος, στην κεντρική θέση 0, με τα γειτονικά του και να αναφερθούμε στον όγκο της θεμελιώδους μοναδιαίας κυψελίδας Wigner - Seitz, V_0 , που περιέχει το ιόν (Σχ. 4):

$$w = -\frac{1}{V_0} J \sum_{n=1}^{\nu} \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{S}_n, \quad (39)$$

όπου θεωρήθηκαν, για απλότητα, ιστροπικές αλληλεπιδράσεις της ίδιας σταθεράς J , μόνο με τους ν πλησιέστερους γείτονες. Χειριζόμενοι τα σπιν ως κλασσικά περιστρεφόμενα διανύσματα του ίδιου μέτρου S που είναι συναρτήσεις της συνεχούς μεταβλητής της θέσης, είναι δυνατή η ανάπτυξη κατά Taylor:

$$\mathbf{S}_n \equiv \mathbf{S}(\mathbf{R}_n) \simeq \mathbf{S}_0 + \sum_{\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{r})}{\partial r_{\alpha}} \right]_0 R_{n,\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{S}(\mathbf{r})}{\partial r_{\alpha} \partial r_{\beta}} \right]_0 R_{n,\alpha} R_{n,\beta} \quad (40)$$

Εφόσον $\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{S}_0 = S^2$ (σταθερά), έχουμε

$$\mathbf{S}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{S}_0}{\partial r_{\alpha}} = 0 \Rightarrow \mathbf{S}_0 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{S}_0}{\partial r_{\alpha}^2} = -\left(\frac{\partial \mathbf{S}_0}{\partial r_{\alpha}} \right)^2 \quad (41)$$

και, αντικαθιστώντας τη (40) στη (39), προκύπτει:

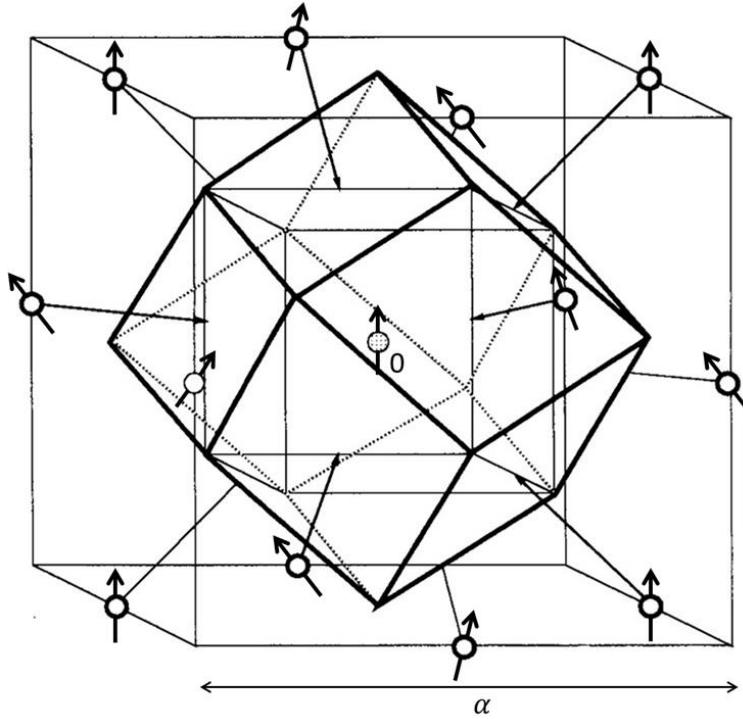
$$w = -\frac{1}{V_0} J \nu S^2 - \frac{1}{2V_0} J \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{\alpha, \beta} \mathbf{S}_0 \cdot \left[\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial r_{\alpha} \partial r_{\beta}} \right]_0 R_{n,\alpha} R_{n,\beta}. \quad (42)$$

Όμως σε ένα «ιστροπικό» πλέγμα, π.χ. κάποιο κυβικό πλεγματικής σταθεράς a , το άθροισμα των όρων για $\alpha \neq \beta$ σε όλους τους γείτονες στην (42) μηδενίζεται και χρησιμοποιώντας τη (41) με δεδομένο ότι στα κυβικά πλέγματα

$$\sum_{n=1}^{\nu} R_{n,\alpha}^2 = 2\alpha^2, \quad (43)$$

η εξίσωση (42) εκφράζεται:

$$w = -\frac{1}{V_0} J \nu S^2 + 2 \frac{\alpha^2}{V_0} J \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_0}{\partial r_{\alpha}} \right)^2. \quad (44)$$



Σχήμα 4: Διάταξη μαγνητικών ιόντων περί την κεντρική θέση σε πλέγμα fcc. Με παχιά γραμμή φαίνεται η κυψελίδα Wigner – Seitz, όγκου $V_0 = \alpha^3/4$, που σχηματίζεται από α μεσοκάθετα επίπεδα με τους $\nu = 12$ πλησιέστερους γείτονες του κεντρικού ιόντος.

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τη (10) με όγκο θεμελιώδους κυψελίδας $V_0 = V/N$, προκύπτει για την τοπική πυκνότητα ενέργειας ανταλλαγής:

$$w(\mathbf{r}) = \lambda M^2(\mathbf{r}) + \frac{A(\mathbf{r})}{M^2(\mathbf{r})} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\partial r_{\alpha}} \right)^2, \quad (45)$$

όπου

$$M(\mathbf{r}) = \frac{1}{V_0} g \mu_B S(\mathbf{r}), \lambda = -\frac{V_0 \nu J}{\mu_B^2 g^2} \text{ και } A(\mathbf{r}) = 2\alpha^2 J S^2(\mathbf{r}). \quad (46)$$

Αν στο ομοιογενές μαγνητικό υλικό εφαρμοστεί σταθερό μαγνητικό πεδίο, έστω κατά τη διεύθυνση του άξονα z , τότε το σπιν των ιόντων προσανατολίζεται κατά τη διεύθυνση του πεδίου με μικρές αποκλίσεις στο επίπεδο $x - y$ και το σπιν και η μαγνήτιση μπορούν να εκφραστούν:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = S_z \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{s}(\mathbf{r}) \text{ και } \mathbf{M}(\mathbf{r}) = M_s \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{m}(\mathbf{r}), \quad (47)$$

όπου $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ και $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ το σπιν και η μαγνήτιση στο επίπεδο $x - y$ αντίστοιχα, που οφείλονται στα μη προσανατολισμένα σπιν των ιόντων κατά τον άξονα z και

$$M_s = \frac{1}{V_0} g \mu_B S_z, \quad (48)$$

όπου M_s η μαγνήτιση κορεσμού, για την οποία ισχύει $M_s \gg m(\mathbf{r})$, αφού $S_z \gg s(\mathbf{r})$. Συνεπώς,

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) \simeq S_z \text{ και } \mathbf{M}(\mathbf{r}) \simeq M_s \quad (49)$$

και η τοπική πυκνότητα ενέργειας ανταλλαγής (45) εκφράζεται:

$$w(\mathbf{r}) = \lambda M_s^2 + \frac{A}{M_s^2} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{m}(\mathbf{r})}{\partial r_{\alpha}} \right)^2. \quad (50)$$

Για τον υπολογισμό της ολικής ενέργειας ανταλλαγής, E_{ex} , που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό υλικό, μπορούμε να ολοκληρώσουμε σε όλο τον όγκο V του υλικού:

$$E_{ex} = \int_V d^3r w(\mathbf{r}). \quad (51)$$

Το πεδίο ανταλλαγής, εκφράζεται με τη βοήθεια των συναρτησιακών παραγώγων για την κάθε διεύθυνση x, y, z ^[6]:

$$\mathbf{H}_{ex} = -\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\delta E_{ex}}{\delta M_x}, \frac{\delta E_{ex}}{\delta M_y}, \frac{\delta E_{ex}}{\delta M_z} \right], \quad (52)$$

όπου μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού και^[8]

$$\frac{\delta E_{ex}}{\delta M_{\alpha}} = \frac{\partial w}{\partial M_{\alpha}} - \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial r_{\beta}} \left(\frac{\partial w}{\partial \left(\frac{\partial M_{\alpha}}{\partial r_{\beta}} \right)} \right). \quad (53)$$

Τελικά, το πεδίο ανταλλαγής για ένα ομοιογενές μαγνητικό υλικό, το οποίο βρίσκεται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο προσανατολισμένο κατά τον άξονα z , εκφράζεται:

$$\mathbf{H}_{ex} = \frac{2}{\mu_0 M_s^2} A [\nabla^2 m_x(\mathbf{r}), \nabla^2 m_y(\mathbf{r}), 0] \Rightarrow \mathbf{H}_{ex} = \frac{2A}{\mu_0 M_s^2} \nabla^2 \mathbf{m}(\mathbf{r}). \quad (54)$$

1.4 Λύση της εξίσωσης Landau – Lifshitz για πλακίδιο μαγνητικού υλικού σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο

Αν ένα πλακίδιο μαγνητικού υλικού τοποθετηθεί σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο θα μαγνητιστεί και η δυναμική της μαγνήτισης μπορεί να μελετηθεί για τα διπολικά κύματα σπιν, λύνοντας την εξίσωση Landau – Lifshitz (32), για διπολικό πεδίο \mathbf{h} . Ως διπολικά κύματα σπιν αναφέρονται τα κύματα σπιν όπου οι μαγνητικές διπολικές αλληλεπιδράσεις είναι ισχυρότερες από τις αλληλεπιδράσεις ανταλλαγής, οι οποίες δεν λαμβάνονται υπόψιν. Για τη λύση της εξίσωσης Landau – Lifshitz απαιτείται η επιβολή συνοριακών συνθηκών με χρήση των εξισώσεων του Maxwell, οι οποίες απουσία φορτίων και ρευμάτων στο σύστημα μονάδων S.I. γράφονται:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (56)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (57)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (58)$$

όπου $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ η ηλεκτρική μετατόπιση, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ η μαγνητική επαγωγή, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ το μαγνητικό πεδίο και $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ το ηλεκτρικό πεδίο. Τα πεδία $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ και \mathbf{H} είναι εν γένει ασυνεχή στο σύνορο δύο διαφορετικών μέσων. Η ακριβής φύση των ασυνεχειών μπορεί να εξαχθεί από τις εξισώσεις Maxwell (57) – (58) στην ολοκληρωτική τους μορφή^[9]. Αν δεν υπάρχει ελεύθερο φορτίο και ρεύμα στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφορετικών υλικών 1 και 2, οι συνοριακές συνθήκες εκφράζονται:

$$D_1^\perp(\mathbf{r}, t) - D_2^\perp(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (59)$$

$$B_1^\perp(\mathbf{r}, t) - B_2^\perp(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (60)$$

$$\mathbf{E}_1^\parallel(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}_2^\parallel(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (61)$$

$$\mathbf{H}_1^\parallel(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}_2^\parallel(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (62)$$

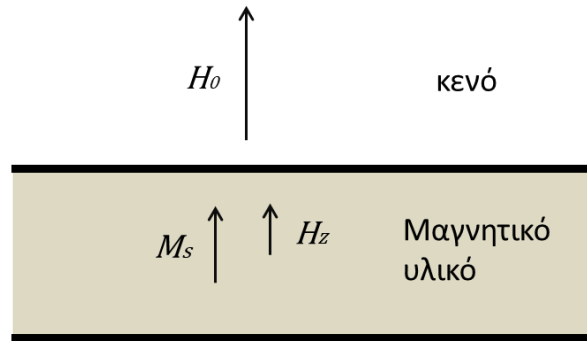
όπου οι δείκτες \perp, \parallel δηλώνουν τις κάθετες και παράλληλες συνιστώσες των πεδίων στη διαχωριστική επιφάνεια.

Με εφαρμογή επαρκώς ισχυρού μαγνητικού πεδίου H_0 στην κάθετη διεύθυνση z στην επιφάνεια του μαγνητικού πλακιδίου, το πλακίδιο θα αποκτήσει μαγνήτιση κορεσμού M_s στη διεύθυνση z (Σχ. 5). Η μαγνήτιση κορεσμού είναι η μέγιστη μαγνήτιση ανά μονάδα όγκου των

προσανατολισμένων σπιν των ηλεκτρονίων στη διεύθυνση z λόγω του εφαρμοσμένου πεδίου στο μαγνητικό υλικό. Λόγω της συνέχειας της κάθετης συνιστώσας της μαγνητικής επαγωγής (60) στη διεπιφάνεια αέρα – πλακιδίου προκύπτει για τη διεύθυνση z :

$$H_z + M_s = H_0, \quad (63)$$

όπου H_z το μαγνητικό πεδίο μέσα στο μαγνητικό υλικό στη διεύθυνση z .



Σχήμα 5: Πλακίδιο μαγνητικού υλικού μαγνητισμένο κάθετα στις διεπιφάνειες.

Το ολικό πεδίο μέσα στο υλικό μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{H}_{ολ}(\mathbf{r}, t) = H_z \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t), \quad (64)$$

όπου \mathbf{h} το διπολικό πεδίο που δημιουργείται μέσα στο υλικό στο επίπεδο $x - y$, λόγω των μη προσανατολισμένων μαγνητικών ροπών στη διεύθυνση z . Η μαγνήτιση εκφράζεται:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = M_s \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{m}(\mathbf{r}, t), \quad (65)$$

όπου \mathbf{m} οι διακυμάνσεις της μαγνήτισης, στο επίπεδο $x - y$. Οι συνιστώσες του πεδίου \mathbf{h} και της μαγνήτισης \mathbf{m} είναι πολύ μικρότερες κατά μέτρο από τα H_z και M_s αντίστοιχα. Η μαγνητική επαγωγή μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του ολικού πεδίου και της μαγνήτισης:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 (\mathbf{H}_{ολ}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)). \quad (66)$$

Για τη λύση της εξίσωση Landau – Lifshitz (32) η ολική μαγνήτιση και το πεδίο μπορούν να γραφούν σε μορφή επιπέδων κυμάτων:

$$\mathbf{H}_{ολ}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} h_x e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \\ h_y e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \\ H_z \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} m_x e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \\ m_y e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \\ M_s \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Συνεπώς από την (66) η μαγνητική επαγωγή εκφράζεται:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \begin{pmatrix} (h_x + m_x)e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \\ (h_y + m_y)e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \\ H_0 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Αντικαθιστώντας τις (68), (69) στην εξίσωση Landau – Lifshitz (32) προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} -i\omega m_x \\ -i\omega m_y \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma\mu_0 \begin{pmatrix} m_y H_0 - M_s(h_y + m_y) \\ -m_x H_0 + M_s(h_x + m_x) \\ m_x(h_y + m_y) - m_y(h_x + m_x) \end{pmatrix} \quad (70)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} i\omega & \gamma\mu_0 H_0 \\ \gamma\mu_0 H_0 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\mu_0 M_s \\ \gamma\mu_0 M_s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2 \mu_0^2 H_0^2} \begin{pmatrix} -i\omega & -\gamma\mu_0 H_0 \\ -\gamma\mu_0 H_0 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma\mu_0 M_s \\ \gamma\mu_0 M_s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2 \mu_0^2 H_0^2} \begin{pmatrix} -\gamma^2 \mu_0^2 H_0 M_s & -i\omega \gamma \mu_0 M_s \\ i\omega \gamma \mu_0 M_s & -\gamma^2 \mu_0^2 H_0 M_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \quad (73)$$

Δηλαδή η μαγνήτιση στο επίπεδο $x - y$ εκφράζεται:

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & iv \\ -iv & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}, \quad (74)$$

όπου

$$\kappa = \frac{\mu_0 \gamma^2 M_s \mu_0 H_0}{\gamma^2 \mu_0^2 H_0^2 - \omega^2} \quad \text{και} \quad v = \frac{\mu_0 \omega \gamma M_s}{\gamma^2 \mu_0^2 H_0^2 - \omega^2} \quad (75)$$

είναι τα στοιχεία του τανυστή μαγνητικής επιδεκτικότητας, ο οποίος έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = \kappa + v$ και $\lambda_2 = \kappa - v$ και ιδιοανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που το μήκος κύματος των κυμάτων σπιν είναι πολύ μικρότερο από το αντίστοιχο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, δηλαδή

$$\frac{\omega}{c} \ll |q|, \quad (76)$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός, ισχύει η μαγνητοστατική προσέγγιση^[6]:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\psi(\mathbf{r}, t), \quad (77)$$

όπου ψ το μαγνητοστατικό δυναμικό. Αν επιπλέον το μήκος κύματος των κυμάτων σπιν είναι πολύ μεγαλύτερο από την πλεγματική σταθερά, έτσι ώστε το πεδίο ανταλλαγής να είναι αμελητέο,

$$|q| \ll \frac{2\pi}{\alpha}, \quad (78)$$

τα κύματα σπιν οφείλονται στο διπολικό πεδίο \mathbf{h} (77) και αναφέρονται ως διπολικά μαγνητοστατικά κύματα σπιν. Η διέγερση των μαγνητοστατικών κυμάτων σπιν σε μαγνητικό πλακίδιο έχει μελετηθεί ([6], Εδάφια 5.2 – 5.5) για διάφορες περιπτώσεις:

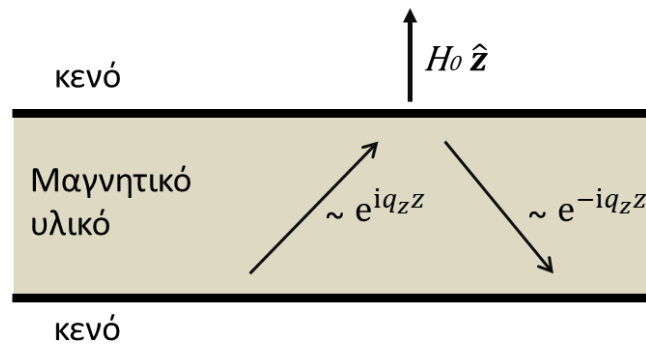
- 1) Στην περίπτωση που **το μαγνητικό πεδίο εφαρμόζεται κάθετα στο πλακίδιο (Σχ. 5)** η ανάκλαση των κυμάτων σπιν στις διεπιφάνειες του πλακιδίου δημιουργεί μαγνητοστατικά κύματα όγκου οδεύοντα προς τα εμπρός (εμπροσθοδιαδιδόμενα κύματα σπιν). Το κυματόνισμα ενός καθοδηγούμενου εμπροσθοδιαδιδόμενου κύματος σπιν το οποίο ανακλάται στην εσωτερική πάνω διεπιφάνεια του πλακιδίου μπορεί να εκφραστεί:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_t + q_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (79)$$

όπου $\mathbf{q}_t = q_x \hat{\mathbf{x}} + q_y \hat{\mathbf{y}}$. Το ανακλώμενο κύμα από την πάνω διεπιφάνεια του πλακιδίου περιγράφεται από το κυματόνισμα

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_t - q_z \hat{\mathbf{z}} \quad (80)$$

και ανακλάται στην κάτω διεπιφάνεια του πλακιδίου. Τελικά θα σχηματιστεί μία ομοιόμορφη κατανομή των κυμάτων σπιν στο επίπεδο $x - y$ που μπορεί να αναλυθεί σε επίπεδα κύματα ανακλώμενα στις δύο διεπιφάνειες του μαγνητικού πλακιδίου (Σχ. 6).



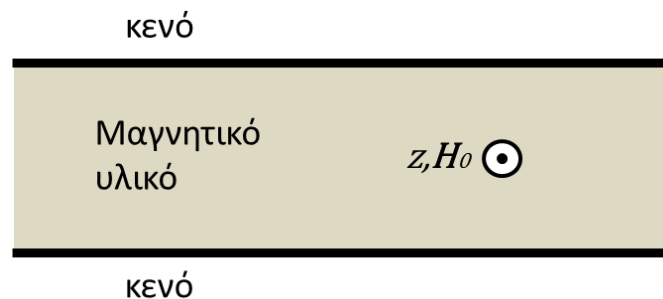
Σχήμα 6: Καθοδηγούμενο κύμα σπιν οδεύον προς τα εμπρός, ανακλώμενο στις διεπιφάνειες μαγνητικού πλακιδίου. Το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στις διεπιφάνειες κατά τη διεύθυνση του άξονα z .

Παρουσιάζονται ορισμένες ιδιότητες των εμπροσθοδιαδιδόμενων κυμάτων σπιν^[6]:

- Η διάδοση τους προς μία κατεύθυνση γίνεται για πολλές συχνότητες διότι έχουν την ίδια συχνότητα αποκοπής σε αντίθεση με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε έναν κυματοδηγό.
- Η σχέση διασποράς τους εξαρτάται από το μέτρο του διδιάστατου κυματόνισματος \mathbf{q}_t αλλά όχι από την κατεύθυνσή του.

- Οι ταχύτητες φάσης και ομάδας είναι ομόρροπες και γι' αυτό και ονομάζονται εμπροσθοδιαδιδόμενα κύματα.
- Το πλάτος του κύματος μεταβάλλεται ημιτονοειδώς στο εσωτερικού του μαγνητικού υλικού.

2) Στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο εφαρμόζεται στο επίπεδο του πλακιδίου κατά τον άξονα z (Σχ. 7), λόγω της συνέχειας της κάθετης συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο (60), το πεδίο θα είναι H_0 μέσα και έξω από το μαγνητικό υλικό. Διακρίνονται δύο ειδικές περιπτώσεις για τις οποίες τα κύματα σπιν διαδίδονται **παράλληλα** στο μαγνητικό πεδίο όπου $q \parallel H_0$ και **κάθετα** όπου $q \perp H_0$.



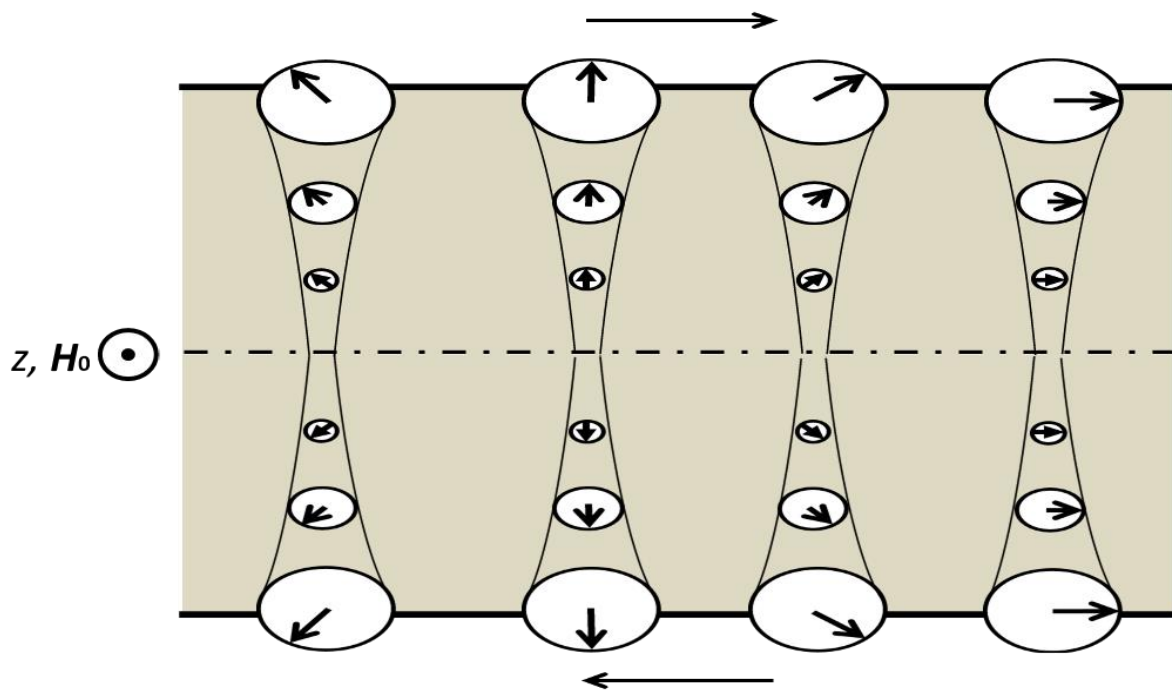
Σχήμα 7: Πλακίδιο μαγνητικού υλικού μαγνητισμένο στο επίπεδο κατά τον άξονα z .

Όταν $q \parallel H_0$ εμφανίζονται μαγνητοστατικά κύματα όγκου που οδεύουν προς τα πίσω (οπισθοδιαδιδόμενα κύματα σπιν) και εμφανίζουν τις εξής ιδιότητες:

- Όπως και τα εμπροσθοδιαδιδόμενα κύματα σπιν παρουσιάζουν ίδια συχνότητα αποκοπής για όλους τους τρόπους διάδοσης και η διάδοση προς μία κατεύθυνση γίνεται για πολλούς τρόπους ταλάντωσης.
- Η σχέση διασποράς είναι ανεξάρτητη της κατεύθυνσης διάδοσης του κύματος και εξαρτάται μόνο από το μέτρο του q_z . Δεδομένου ότι $q \parallel H_0$, οι τρόποι διάδοσης για κατευθύνσεις q και $-q$ εμφανίζουν την ίδια σχέση διασποράς.
- Οι ταχύτητες φάσης και ομάδας είναι αντίρροπες.
- Το πλάτος του κύματος μεταβάλλεται ημιτονοειδώς στο εσωτερικού του μαγνητικού υλικού.

Όταν $q \perp H_0$ εμφανίζονται μαγνητοστατικά κύματα επιφάνειας γνωστά και ως κύματα σπιν Damon – Eshbach^[10] που φθίνουν εκθετικά εκατέρωθεν των επιφανειών του μαγνητικού υλικού και παρουσιάζουν τις εξής ιδιότητες:

- Υπάρχει μόνο ένας τρόπος διάδοσης για μία συγκεκριμένη κατεύθυνση του κύματος, σε αντίθεση με τα εμπροσθοδιαδιδόμενα και οπισθοδιαδιδόμενα κύματα σπιν.
- Το πεδίο της μαγνήτισης είναι εντοπισμένο στη μία ή την άλλη διεπιφάνεια του μαγνητικού πλακιδίου, ανάλογα με την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος σπιν και δεδομένου ότι $\mathbf{q} \perp \mathbf{H}_0$.
- Οι ταχύτητες φάσης και ομάδας είναι ομόρροπες.
- Το πλάτος του κύματος δεν παρουσιάζει περιοδική διαμόρφωση στο εσωτερικό του μαγνητικού υλικού αλλά φθίνει εκθετικά από τις επιφάνειες του μαγνητικού πλακιδίου (Σχ. 8).



Σχήμα 8: Κάθετη διατομή στον άξονα z επιφάνειας πλακιδίου στην οποία αποτυπώνονται τα στιγμιότυπα της μαγνήτισης για ένα κύμα σπιν Damon - Eshbach. Το πλακίδιο είναι μαγνητισμένο στο επίπεδο κατά τη διεύθυνση του άξονα z και το κύμα σπιν διαδίδεται με ορολογιακή φορά στις επιφάνειες του μαγνητικού υλικού.

Κεφάλαιο 2

Διάδοση Κυμάτων Σπιν σε Διατάξεις Περιοδικών Δομών με Εξωτερικό Μαγνητικό Πεδίο

Πλακίδια μαγνητικών υλικών μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κυματοδηγοί κυμάτων σπιν. Όπως αναφέρθηκε στο εδάφιο 1.4 τα κύματα σπιν δημιουργούν καταστάσεις επιφάνειας (Damon – Eshbach) σε ένα πλακίδιο μαγνητικού υλικού όταν η διάδοση των κυμάτων σπιν είναι κάθετη στο μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται στο επίπεδο του πλακιδίου. Ένα λεπτό πλακίδιο μαγνητικού υλικού πάχους 100 – 500 nm μπορεί να αποτελέσει κυματοδηγό μαγνονίων. Οι μαγνητικές ροπές στις διεπιφάνειες του πλακιδίου επιφέρουν μείωση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του μαγνητικού υλικού και κύματα σπιν μπορούν να διεγερθούν στο πλακίδιο. Η συχνότητα των κυμάτων σπιν καθορίζεται από τη γωνία μεταξύ της κατεύθυνσης διάδοσης και του στατικού μαγνητικού πεδίου. Για μεγάλα μήκη κύματος, οι διπολικές αλληλεπιδράσεις κυριαρχούν και η συχνότητα δεν εξαρτάται από το κυματόνισμα. Καθώς το μήκος κύματος πλησιάζει διαστάσεις της τάξης των 100 nm, οι αλληλεπιδράσεις ανταλλαγής δεν μπορούν να αγνοηθούν και η συχνότητα εξαρτάται από το τετράγωνο του κυματόνισματος όπως παρατηρείται στην εξίσωση (16).

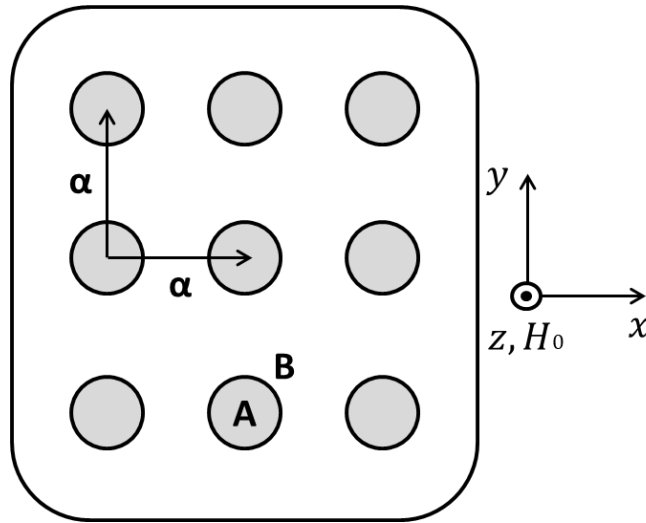
Για να υπάρξουν περισσότερες δυνατότητες ελέγχου των κυμάτων σπιν, ένας τρόπος είναι η διαμόρφωση του μαγνητικού υλικού όπως σε περιοδικές φωτονικές ή φωνονικές δομές. Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατό να δημιουργηθούν χάσματα συχνοτήτων στις μαγνονικές καταστάσεις, δηλαδή περιοχές συχνοτήτων όπου τα κύματα σπιν δεν διαδίδονται, καθώς επίσης κυματοδηγοί όπου η σχέση διασποράς και η ταχύτητα διάδοσης των μαγνονίων ρυθμίζονται κατά βούληση.

Η περιγραφή των κυμάτων σπιν σε ένα σιδηρομαγνητικό υλικό απαιτεί την επίλυση της εξίσωσης κίνησης Landau – Lifshitz για την εύρεση της μαγνήτισης, η οποία πρέπει να ικανοποιεί και τις εξισώσεις Maxwell. Στην περίπτωση περιοδικών δομών χρησιμοποιούνται ως συνήθως αναπτύγματα Bloch. Σύμφωνα με τις εξισώσεις Maxwell, η παρουσία μαγνητικής ροπής \mathbf{m} δημιουργεί μαγνητικό πεδίο \mathbf{h} . Από την εξίσωση Landau – Lifshitz η μαγνητική ροπή \mathbf{m} μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της παρουσίας μαγνητικού πεδίου \mathbf{h} .

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετηθεί η διάδοση κυμάτων σπιν σε δύο γεωμετρίες περιοδικά διαμορφωμένων μαγνητικών υλικών. Αρχικά θα μελετηθεί ένα περιοδικό σύστημα δύο διαστάσεων (διδιάστατος μαγνονικός κρύσταλλος), όπου τα μαγνητικά υλικά εκτείνονται αναλλοίωτα στην τρίτη διάσταση (διάταξη I) και στη συνέχεια ένα διδιάστατο μαγνητικό κρυσταλλικό υμένιο, δηλαδή ένα πλακίδιο μαγνητικών υλικών πεπερασμένου πάχους με περιοδική διαμόρφωση (διάταξη II). Τα κρυσταλλικά υμένια συχνά αναφέρονται και ως συστήματα 2.5 διαστάσεων.

2.1 Μέθοδος επιπέδων κυμάτων για τη διάδοση κυμάτων σπιν σε διδιάστατο περιοδικό σύστημα

Έστω διδιάστατο περιοδικό σύστημα δύο σιδηρομαγνητικών υλικών A, B εκ των οποίων το A είναι σε μορφή κυλίνδρων ακτίνας R που είναι εμβαπτισμένοι στο υλικό B. Το σύστημα των δύο υλικών εμφανίζει περιοδικότητα τετραγωνικού πλέγματος ως προς τα κέντρα των κυλίνδρων στο επίπεδο $x - y$ με πλεγματική σταθερά a , $\mathbf{R}_n = n_1 a \hat{x} + n_2 a \hat{y}$, όπου $n_1, n_2 \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2 \dots\}$ (Σχ. 9) ενώ είναι άπειρο στη διεύθυνση z . Το μαγνητικό πεδίο είναι προσανατολισμένο στη διεύθυνση z .



Σχήμα 9: Κάθετη διατομή στον άξονα z συστήματος δύο υλικών A, B. Το υλικό A βρίσκεται στη μορφή κυλίνδρων με τα κέντρα τοποθετημένα σε τετραγωνικό πλέγμα πλεγματικής σταθεράς a στο επίπεδο $x - y$ (διάταξη 1). Το μαγνητικό πεδίο εφαρμόζεται κάθετα στην περιοδική δομή κατά τον άξονα z .

Το ποσοστό κάλυψης της περιοδικής δομής από το υλικό A χαρακτηρίζεται από τον καθαρό αριθμό f και ο καθαρός αριθμός $1 - f$ χαρακτηρίζει το υλικό B. Οι διπολικές αλληλεπιδράσεις και η σύζευξη ανταλλαγής μεταξύ των δύο υλικών^[11] A, B στην περιοδική δομή που μελετάμε εκφράζονται με τις σταθερές μαγνήτισης κόρου M_{S_A}, M_{S_B} και τις σταθερές ανταλλαγής A_A, A_B αντίστοιχα για το κάθε υλικό. Η μαγνήτιση κόρου και η σταθερά ανταλλαγής παρουσιάζουν εξάρτηση από τη χωρική θέση στην περιοδική δομή και μπορούν να γραφούν:

$$M_s(\mathbf{r}) = (M_{S_A} - M_{S_B})\theta(R - |\mathbf{r} + \mathbf{R}_n|) + M_{S_B} \quad (81)$$

$$A(\mathbf{r}) = (A_A - A_B)\theta(R - |\mathbf{r} + \mathbf{R}_n|) + A_B, \quad (82)$$

όπου $\theta(R - |\mathbf{r} + \mathbf{R}_n|) = 1$ μέσα στο υλικό A και $\theta(R - |\mathbf{r} + \mathbf{R}_n|) = 0$ στο υλικό B.

Αν στην περιοδική δομή εφαρμοστεί ομογενές στατικό πεδίο \mathbf{H}_0 κατά τον άξονα z , το σύστημα των δύο υλικών A, B θα εμφανίσει μαγνήτιση $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ που περιγράφεται από την εξίσωση Landau - Lifshitz χωρίς τον όρο απόσβεσης (Εδάφιο 1.2):

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \gamma \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t), \quad (83)$$

όπου γ ο γυρομαγνητικός λόγος ($\gamma < \mathbf{0}$) ίδιος και για τα δύο υλικά A, B, \mathbf{H}_{eff} το ενεργό πεδίο στο εσωτερικό της δομής των δύο υλικών που αλληλεπιδρά με τη μαγνήτιση \mathbf{M} σύμφωνα με την (83) και \mathbf{r} τρισδιάστατο διάνυσμα θέσης.

Σύμφωνα με τις ιδέες που παρουσιάζονται στο εδάφιο 1.3 για ένα ομοιογενές μαγνητικό υλικό και, ακολουθώντας τις προσεγγίσεις των Vasseur *et al.* στη σχετική τους δημοσίευση [11] για ένα ανομοιογενές υλικό, στο εσωτερικό της μαγνητικής δομής η αλληλεπίδραση των μαγνητίσεων στις διεπιφάνειες επαφής μεταξύ των δύο μαγνητικών υλικών A, B δημιουργεί ένα πεδίο ανταλλαγής \mathbf{H}_{ex} που μπορεί να εκφραστεί:

$$\mathbf{H}_{ex}(\mathbf{r}, t) = \frac{2}{\mu_0 M_s} \left[\left(\nabla \frac{A}{M_s} \nabla \right) \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) + \frac{A}{M_s} \nabla^2 \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) \right], \quad (84)$$

όπου

$$\left(\nabla \frac{A}{M_s} \nabla \right) \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial \left(\frac{A}{M_s} \right)}{\partial r_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \right) \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) \quad (85)$$

και

$$\nabla^2 \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial r_{\alpha}^2} \mathbf{m}(\mathbf{r}, t).$$

Η συνολική μαγνήτιση γράφεται:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = M_s \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{m}(\mathbf{r}, t), \quad (86)$$

όπου M_s η μαγνήτιση κόρου που θα αποκτήσουν τα δύο υλικά στη διεύθυνση z λόγω της εφαρμογής του πεδίου \mathbf{H}_0 (Εδάφιο 1.4) και \mathbf{m} ο δυναμικός όρος της μαγνήτισης στο επίπεδο $x - y$. Οι δυναμικές συνιστώσες της μαγνήτισης (86) στο επίπεδο $x - y$ είναι πολύ μικρότερες κατά μέτρο από τη μαγνήτιση κόρου M_s , ωστόσο θα προκαλέσουν ένα ασθενές διπολικό (μαγνητοστατικό) πεδίο $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$ (Εδάφιο 1.4) στο επίπεδο $x - y$ και τελικά το ενεργό πεδίο στο εσωτερικό της μαγνητικής δομής εκφράζεται^[11]:

$$\mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t) = H_0 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) + \frac{2}{\mu_0 M_s} \left[\left(\nabla \frac{A}{M_s} \nabla \right) \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) + \frac{A}{M_s} \nabla^2 \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (87)$$

Η εξίσωση Landau – Lifshitz (83) θα υπολογιστεί εκφράζοντας τους δυναμικούς όρους \mathbf{m} και \mathbf{h} ως εξής:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (88)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (89)$$

όπου ω η γωνιακή συχνότητα του κύματος σπιν και

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = -\nabla\psi(\mathbf{r}), \quad (90)$$

όπου το μαγνητοστατικό δυναμικό $\psi(\mathbf{r})$ (εδάφιο 1.4) ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\nabla \cdot (\mathbf{h}(\mathbf{r}) + \mathbf{m}(\mathbf{r})) = -\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}) = 0. \quad (91)$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης Landau – Lifshitz (83), χρησιμοποιώντας την (86), εκφράζεται:

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -i\omega \mathbf{m}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = -i\omega (m_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + m_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}}) e^{-i\omega t} \quad (92)$$

και αντίστοιχα το δεξί μέλος της, μέσω των (87) – (90), γράφεται:

$$\begin{aligned} & \gamma\mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t) = \\ & = \gamma\mu_0 (M_s \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{m}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}) \\ & \quad \times \left\{ H_0 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \frac{2}{\mu_0 M_s} \left[\left(\nabla \frac{A}{M_s} \nabla \right) \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) + \frac{A}{M_s} \nabla^2 \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) \right] \right\} = \\ & = \gamma\mu_0 (m_x(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{x}} + m_y(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{y}} + M_s \hat{\mathbf{z}}) \times \\ & \quad \times \left\{ H_0 \hat{\mathbf{z}} + \left[-\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial x} e^{-i\omega t} + \frac{2}{\mu_0 M_s} \left[\left(\nabla \frac{A}{M_s} \nabla \right) + \frac{A}{M_s} \nabla^2 \right] m_x(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right] \hat{\mathbf{x}} \right. \\ & \quad \left. + \left[-\frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial y} e^{-i\omega t} + \frac{2}{\mu_0 M_s} \left[\left(\nabla \frac{A}{M_s} \nabla \right) + \frac{A}{M_s} \nabla^2 \right] m_y(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right] \hat{\mathbf{y}} \right\}. \end{aligned} \quad (93)$$

Εξισώνοντας τις (92), (93) σύμφωνα με την (83) με $\gamma = -|\gamma|$, προκύπτει για τη διεύθυνση x :

$$-i\omega m_x(\mathbf{r}) = -|\gamma|\mu_0 \left\{ H_0 m_y(\mathbf{r}) + M_s \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial y} - M_s \frac{2}{\mu_0 M_s} \left[\left(\nabla \frac{A}{M_s} \nabla \right) + \frac{A}{M_s} \nabla^2 \right] m_y(\mathbf{r}) \right\} \quad (94)$$

$$\Rightarrow \frac{i\omega}{|\gamma|\mu_0 H_0} m_x(\mathbf{r}) + \frac{2}{\mu_0 H_0} \left[\left(\nabla \frac{A}{M_s} \nabla \right) + \frac{A}{M_s} \nabla^2 \right] m_y(\mathbf{r}) - m_y(\mathbf{r}) - \frac{M_s}{H_0} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial y} = 0. \quad (95)$$

Θέτοντας:

$$\Omega = \frac{\omega}{|\gamma|\mu_0 H_0} \text{ και } Q = \frac{2A}{M_s \mu_0 H_0}, \quad (96)$$

προκύπτει:

$$i\Omega m_x(\mathbf{r}) + (\nabla Q \nabla + Q \nabla^2) m_y(\mathbf{r}) - m_y(\mathbf{r}) - \frac{M_s}{H_0} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial y} = 0. \quad (97)$$

Όμοια για τη διεύθυνση y προκύπτει η εξίσωση:

$$-(\nabla Q \nabla + Q \nabla^2) m_x(\mathbf{r}) + m_x(\mathbf{r}) + i\Omega m_y(\mathbf{r}) + \frac{M_s}{H_0} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial x} = 0. \quad (98)$$

Η περιοδικότητα της δομής στο επίπεδο $x - y$ μας επιτρέπει να αναπτύξουμε τα μεγέθη Q και M_s (81) σε σειρές Fourier:

$$Q(\mathbf{X}) = \sum_j Q(\mathbf{G}_j) e^{i\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{X}} \quad (99)$$

$$M_s(\mathbf{X}) = \sum_j M_s(\mathbf{G}_j) e^{i\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{X}}, \quad (100)$$

όπου $\mathbf{X} = (x, y)$ το διδιάστατο διάνυσμα θέσης και $\mathbf{G}_j = (G_{x,j}, G_{y,j})$ τα διανύσματα του διδιάστατου αντιστρόφου πλέγματος. Το τετραγωνικό πλέγμα πλεγματικής σταθεράς a το οποίο και μελετάται στο παρόν κεφάλαιο περιγράφεται από αντίστροφο πλέγμα με διάνυσμα αντιστρόφου πλέγματος:

$$\mathbf{G}_m = m_1 G_x \hat{\mathbf{x}} + m_2 G_y \hat{\mathbf{y}}, \quad (101)$$

όπου $m_1, m_2 \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2 \dots\}$ και $G_x = G_y = 2\pi/a$. Ο δείκτης m αριθμεί τα ανύσματα αντιστρόφου πλέγματος και αντιστοιχεί σε συνδυασμό των ακεραίων m_1, m_2 . Οι συντελεστές Fourier $Q(\mathbf{G}_j)$ και $M_s(\mathbf{G}_j)$ υπολογίζονται με ολοκλήρωση στη διδιάστατη θεμελιώδη κυψελίδα:

$$Q(\mathbf{G}_j) = \frac{1}{S} \iint d^2\mathbf{X} Q(\mathbf{X}) e^{-i\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{X}} \quad (102)$$

$$M_s(\mathbf{G}_j) = \frac{1}{S} \iint d^2\mathbf{X} M_s(\mathbf{X}) e^{-i\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{X}}, \quad (103)$$

όπου $S = a^2$ η επιφάνεια της θεμελιώδους κυψελίδας του τετραγωνικού πλέγματος (Σχ. 9).

Διακρίνονται οι περιπτώσεις για $\mathbf{G}_j = 0$ και $\mathbf{G}_j \neq 0$:

$$Q(\mathbf{G}_j = 0) = \bar{Q} = Q_A f + Q_B (1 - f) \quad (104)$$

$$M_s(\mathbf{G}_j = 0) = \bar{M}_s = M_{sA} f + M_{sB} (1 - f) \quad (105)$$

$$Q(\mathbf{G}_j \neq 0) = (Q_A - Q_B) F(\mathbf{G}_j) = \Delta Q F(\mathbf{G}_j) \quad (106)$$

$$M_s(\mathbf{G}_j \neq 0) = (M_{sA} - M_{sB}) F(\mathbf{G}_j) = \Delta M_s F(\mathbf{G}_j). \quad (107)$$

Ο παράγοντας δομής $F(\mathbf{G}_j)$ εκφράζεται με χρήση της συνάρτησης Bessel πρώτου είδους για ολοκλήρωμα που υπολογίζεται στην περιοχή του υλικού A και είναι μηδέν στο υλικό B:

$$F(\mathbf{G}_j) = \frac{1}{S} \iint d^2\mathbf{X} \delta_{in} e^{-i\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{X}} = 2f \frac{J_1(G_j R)}{G_j R}, \quad (108)$$

όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται για τη θεμελιώδη κυψελίδα, R είναι η ακτίνα των κυλίνδρων του υλικού A , $J_1(G_l R)$ η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και $f = \pi R^2/a^2$ το ποσοστό κάλυψης από το υλικό A .

Η κυματική διαταραχή της μαγνήτισης διαδίδεται στο επίπεδο $x - y$ και περιγράφεται από το διδιάστατο διάνυσμα θέσης $\mathbf{X} = (x, y)$. Οι συνιστώσες x, y της μαγνήτισης και το μαγνητοστατικό δυναμικό $\psi(\mathbf{r})$ αναπτύσσονται για κυματική διάδοση στο επίπεδο $x - y$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bloch για κυματάνυσμα $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$:

$$m_x(\mathbf{r}) = m_x(\mathbf{X}) = e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X}} \sum_j m_{x,q}(\mathbf{G}_j) e^{i\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{X}} \quad (109)$$

$$m_y(\mathbf{r}) = m_y(\mathbf{X}) = e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X}} \sum_j m_{y,q}(\mathbf{G}_j) e^{i\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{X}} \quad (110)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{X}) = e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X}} \sum_j \psi_q(\mathbf{G}_j) e^{i\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{X}}. \quad (111)$$

Με αντικατάσταση των (99) - (111) στις εξισώσεις (97) και (98) (Παράρτημα A) προκύπτουν αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} i\Omega m_{x,q}(\mathbf{G}_l) &= \frac{\overline{M}_s (q_x + G_{x,l})(q_y + G_{y,l})}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2} m_{x,q}(\mathbf{G}_l) \\ &+ \left[1 + |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2 \overline{Q} + \frac{\overline{M}_s (q_y + G_{y,l})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2} \right] m_{y,q}(\mathbf{G}_l) \\ &+ \sum_{j \neq l} F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \left\{ \frac{\Delta M_s (q_x + G_{x,j})(q_y + G_{y,j})}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} m_{x,q}(\mathbf{G}_j) \right. \\ &\left. + \left[\Delta Q(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) + \frac{\Delta M_s (q_y + G_{y,j})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} \right] m_{y,q}(\mathbf{G}_j) \right\} \end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{aligned}
i\Omega m_{y,q}(\mathbf{G}_l) &= -\frac{\overline{M}_s (q_x + G_{x,l})(q_y + G_{y,l})}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2} m_{y,q}(\mathbf{G}_l) \\
&\quad - \left[1 + |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2 \overline{Q} + \frac{\overline{M}_s (q_x + G_{x,l})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2} \right] m_{x,q}(\mathbf{G}_l) \\
&\quad - \sum_{j \neq l} F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \left\{ \frac{\Delta M_s (q_x + G_{x,j})(q_y + G_{y,j})}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} m_{y,q}(\mathbf{G}_j) \right. \\
&\quad \left. + \left[\Delta Q(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) + \frac{\Delta M_s (q_x + G_{x,j})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} \right] m_{x,q}(\mathbf{G}_j) \right\}.
\end{aligned} \tag{113}$$

Από τις (112) και (113) προκύπτει η εξίσωση ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων της μαγνήτισης:

$$M \mathbf{m}_q = i\Omega \mathbf{m}_q, \tag{114}$$

όπου:

$$M = \begin{pmatrix} M_{ij}^{xx} & M_{ij}^{xy} \\ M_{ij}^{yx} & M_{ij}^{yy} \end{pmatrix}, \tag{115}$$

με στοιχεία:

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{xx} &= \delta_{ij} \frac{\overline{M}_s (q_x + G_{x,l})(q_y + G_{y,l})}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2} \\
&\quad + (1 - \delta_{ij}) \frac{\Delta M_s}{H_0} F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \frac{(q_x + G_{x,j})(q_y + G_{y,j})}{|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2}
\end{aligned} \tag{116}$$

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{xy} &= \delta_{ij} \left[1 + |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2 \overline{Q} + \frac{\overline{M}_s (q_y + G_{y,l})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2} \right] \\
&\quad + (1 - \delta_{ij}) F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \left[\Delta Q(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) + \frac{\Delta M_s (q_y + G_{y,j})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} \right]
\end{aligned} \tag{117}$$

$$\begin{aligned}
M_{ij}^{yx} &= -\delta_{ij} \left[1 + |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2 \overline{Q} + \frac{\overline{M}_s (q_x + G_{x,l})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2} \right] \\
&\quad - (1 - \delta_{ij}) F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \left[\Delta Q(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) + \frac{\Delta M_s (q_x + G_{x,j})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} \right]
\end{aligned} \tag{118}$$

$$M_{ij}^{yy} = -M_{ij}^{xx}. \quad (119)$$

Τα στοιχεία του πίνακα ιδιοτιμών περιέχουν τους όρους ανταλλαγής που εξαρτώνται από τα \bar{Q} και ΔQ και τους διπολικούς όρους που εξαρτώνται από τα \bar{M}_S και ΔM_S .

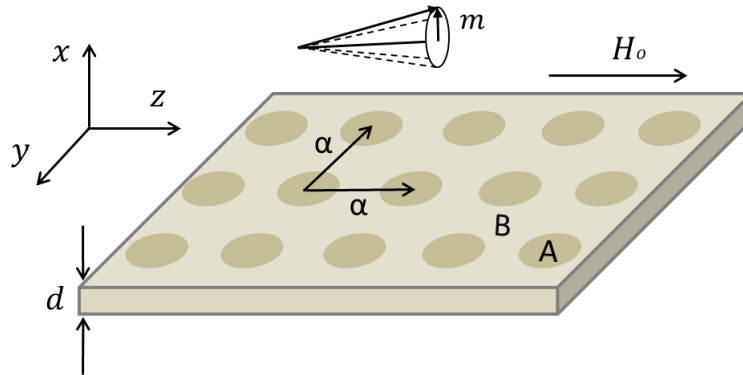
Από την (101) μπορεί να θεωρηθεί για το τετραγωνικό πλέγμα:

$$\begin{aligned} m_1 G_x &= -\frac{2\pi}{\alpha} N, -\frac{2\pi}{\alpha} (N-1), \dots, \frac{2\pi}{\alpha} N \\ \text{και} \\ m_2 G_y &= -\frac{2\pi}{\alpha} N, -\frac{2\pi}{\alpha} (N-1), \dots, \frac{2\pi}{\alpha} N. \end{aligned} \quad (120)$$

Το διάνυσμα του αντιστρόφου πλέγματος \mathbf{G}_m (101) λαμβάνει $p = (2N+1)^2$ τιμές και τα ιδιοανύσματα $\mathbf{m}_q^T = [m_{x,q}(\mathbf{G}_1), \dots, m_{x,q}(\mathbf{G}_p), m_{y,q}(\mathbf{G}_1), \dots, m_{y,q}(\mathbf{G}_p)]$ είναι $2(2N+1)^2$ διαστάσεων. Ο πίνακας της μαγνήτισης \mathbf{M} (115) είναι $2(2N+1)^2 \times 2(2N+1)^2$ διαστάσεων και αποτελείται από τέσσερις υποπίνακες με διαστάσεις $(2N+1)^2 \times (2N+1)^2$ ο κάθε ένας. Το N επιλέγεται κατάλληλα ανάλογα με την ακρίβεια που χρειάζεται ο υπολογισμός των σχέσεων διασποράς των κυμάτων σπιν (Κεφ. 3).

2.2 Εύρεση μαγνονικών καταστάσεων σε περιοδικά διαμορφωμένο μαγνητικό υμένιο

Θεωρείται άπειρη επιφάνεια στο επίπεδο $y-z$, με μικρό πάχος d στον άξονα x , από δύο σιδηρομαγνητικά υλικά A, B. Το A είναι σε μορφή κυλίνδρων ακτίνας R εμβαπτισμένο σε μητρικό υλικό B και η δομή εμφανίζει περιοδικότητα τετραγωνικού πλέγματος ως προς τα κέντρα των κυλίνδρων στο επίπεδο $y-z$ με πλεγματική σταθερά α (Σχ. 10). Το μαγνητικό πεδίο είναι προσανατολισμένο στη διεύθυνση z .



Σχήμα 10: Σύστημα περιοδικής δομής δύο υλικών A, B με άπειρη επιφάνεια στο επίπεδο $y-z$ και πάχος d στον άξονα x . Το υλικό A βρίσκεται στη μορφή κυλίνδρων ακτίνας R με τα κέντρα τοποθετημένα σε τετραγωνικό πλέγμα πλεγματικής σταθεράς α στο επίπεδο $y-z$ (διάταξη 2). Το διάνυσμα της δυναμικής μαγνήτισης \mathbf{m} περιστρέφεται στο επίπεδο $x-y$.

Ακολουθώντας την ανάλυση των Krawczyk *et al.* στη σχετική τους δημοσίευση [13], χρησιμοποιούμε και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα για διαφορετικές μορφές του πεδίου ανταλλαγής. Με εφαρμογή εξωτερικού ομογενούς πεδίου \mathbf{H}_0 στο επίπεδο του πλακιδίου (Σχ. 10) κατά τη διεύθυνση του άξονα z , το πεδίο ανταλλαγής ορίζεται σε διάφορες μορφές ανάλογα με τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του^[13]. Στο εδάφιο 2.1 μελετήθηκε μία συγκεκριμένη μορφή του πεδίου ανταλλαγής (84) όπου η μαγνήτιση κόρου M_s και η σταθερά ανταλλαγής A παρουσιάζουν εξάρτηση από τη χωρική θέση στη μαγνητική δομή (81),(82) και η μορφή I του πεδίου ανταλλαγής (*form I*) εκφράζεται:

$$\mathbf{H}_{ex,I}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{M_s} [(\nabla Q \nabla) \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) + Q \nabla^2 \mathbf{m}(\mathbf{r}, t)], \quad (121)$$

όπου:

$$Q = \frac{2A}{\mu_0 M_s}. \quad (122)$$

Αν το μαγνητικό υμένιο (Σχ. 10) θεωρηθεί ομογενές ως προς τη μαγνήτιση κόρου και τη σταθερά ανταλλαγής, ο όρος ∇Q στη μορφή I του πεδίου ανταλλαγής (121) μηδενίζεται και προκύπτει η μορφή II του πεδίου ανταλλαγής (*form II*)^[13]:

$$\mathbf{H}_{ex,II}(\mathbf{r}, t) = \frac{Q}{M_s} \nabla^2 \mathbf{m}(\mathbf{r}, t), \quad (123)$$

όπως δείξαμε στο εδάφιο 1.3 [εξίσωση (54)]. Επομένως, το ενεργό πεδίο που ικανοποιεί την εξίσωση Landau – Lifshitz (83) ορίζεται ανάλογα με τις δύο μορφές του πεδίου ανταλλαγής

$$\mathbf{H}_{eff,I(II)}(\mathbf{r}, t) = H_0 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{H}_{ms}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_{ex,I(II)}(\mathbf{r}, t), \quad (124)$$

όπου \mathbf{H}_{ms} το πεδίο απομαγνήτισης (διπολικό πεδίο), το οποίο διαχωρίζεται σε δύο όρους, το στατικό κατά τη διεύθυνση z και το δυναμικό όρο

$$\mathbf{H}_{ms}(\mathbf{r}, t) = H_{ms,z}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{h}_{ms}(\mathbf{r}, t). \quad (125)$$

Ο δυναμικός διπολικός όρος του πεδίου απομαγνήτισης $\mathbf{h}_{ms}(\mathbf{r}, t)$ και η δυναμική μαγνήτιση $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ εκφράζονται αντίστοιχα σύμφωνα με τις (88), (89) για τον υπολογισμό των αντίστοιχων εξισώσεων της μαγνήτισης (97), (98). Για τις διευθύνσεις x και y από την εξίσωση Landau – Lifshitz (83) προκύπτει:

Form I:

$$i \frac{\omega}{\gamma \mu_0} m_x(\mathbf{r}) = -(\nabla Q \nabla + Q \nabla^2) m_y(\mathbf{r}) + m_y(\mathbf{r})(H_0 + H_{ms,z}) - M_s h_{ms,y}(\mathbf{r}) \quad (126)$$

$$i \frac{\omega}{\gamma \mu_0} m_y(\mathbf{r}) = (\nabla Q \nabla + Q \nabla^2) m_x(\mathbf{r}) - m_x(\mathbf{r})(H_0 + H_{ms,z}) + M_s h_{ms,x}(\mathbf{r})$$

και για τη δεύτερη μορφή του πεδίου ανταλλαγής προκύπτει:

Form II:

$$i \frac{\omega}{\gamma \mu_0} m_x(\mathbf{r}) = -Q \nabla^2 m_y(\mathbf{r}) + m_y(\mathbf{r})(H_0 + H_{ms,z}) - M_s h_{ms,y}(\mathbf{r}) \quad (127)$$

$$i \frac{\omega}{\gamma \mu_0} m_y(\mathbf{r}) = Q \nabla^2 m_x(\mathbf{r}) - m_x(\mathbf{r})(H_0 + H_{ms,z}) + M_s h_{ms,x}(\mathbf{r}).$$

Το κύμα σπιν διαδίδεται στο επίπεδο $y - z$ και οι συνιστώσες x, y της μαγνήτισης λόγω της περιοδικότητας της δομής στο επίπεδο $y - z$ αναπτύσσονται σύμφωνα με τις (109), (110) για κυματάνασμα Bloch $\mathbf{q} = (q_y, q_z)$, διάνυσμα αντιστρόφου πλέγματος $\mathbf{G} = (G_y, G_z)$ και διδιάστατο διάνυσμα θέσης $\mathbf{X} = (y, z)$. Τα μεγέθη $Q(\mathbf{X})$, $M_s(\mathbf{X})$ αναπτύσσονται σε σειρές Fourier για περιοδική δομή στο επίπεδο $y - z$ (99), (100) και ο δυναμικός και ο στατικός όρος του πεδίου απομαγνήτισης (125) ικανοποιούν τις εξισώσεις του Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_{ms,z}(\mathbf{X}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{h}_{ms}(\mathbf{X}) &= 0 \\ \nabla \cdot (\mathbf{H}_{ms,z}(\mathbf{X}) + M_s \hat{\mathbf{z}}) &= 0 \\ \nabla \cdot (\mathbf{h}_{ms}(\mathbf{X}) + \mathbf{m}(\mathbf{X})) &= 0. \end{aligned} \quad (128)$$

Λύνοντας τις εξισώσεις (128) σύμφωνα με την ανάλυση των Kaczer και Murtinova στη σχετική τους δημοσίευση [14] για τη συγκεκριμένη δομή (Σχ. 10) με μεταβλητό ύψος στο διάστημα $x = [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$ του άξονα x , τα πεδία $\mathbf{H}_{ms,z}$, $\mathbf{h}_{ms,y}$ και $\mathbf{h}_{ms,x}$ υπολογίζονται^{[14],[15],[16]}:

$$\mathbf{H}_{ms,z}(\mathbf{X}, x) = - \sum_j \frac{M_s(\mathbf{G}_j)}{\mathbf{G}_j^2} G_{z,j}^2 [1 - C(|\mathbf{G}_j|, x)] e^{i\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{X}} \hat{\mathbf{z}} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{ms,x}(\mathbf{X}, x) &= \sum_j \left[i m_y(\mathbf{G}_j) \frac{q_y + G_{y,j}}{|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|} S(|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|, x) \right. \\ &\quad \left. - m_x(\mathbf{G}_j) C(|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|, x) \right] e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{ms,y}(\mathbf{X}, x) &= \sum_j \left\{ i m_x(\mathbf{G}_j) \frac{q_y + G_{y,j}}{|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|} S(|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|, x) \right. \\ &\quad \left. - m_y(\mathbf{G}_j) \frac{(q_y + G_{y,j})^2}{|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} [1 - C(|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|, x)] \right\} e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \hat{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (131)$$

όπου:

$$C(|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|, x) = \cosh(|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|x) e^{-|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j| \frac{d}{2}} \quad (132)$$

$$S(|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|, x) = \sinh(|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|x) e^{-|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j| \frac{d}{2}}.$$

Αν η διάταξη (Σχ. 10) έχει πάχος d αρκετά μικρό, οι όροι απομαγνήτισης (129)–(131) υπολογίζονται για $x = 0$:

$$\mathbf{H}_{ms,z}(\mathbf{X}, 0) = - \sum_j \frac{M_s(\mathbf{G}_j)}{\mathbf{G}_j^2} G_{z,j}^2 \left[1 - e^{-|\mathbf{G}_j| \frac{d}{2}} \right] e^{i\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{X}} \hat{\mathbf{z}} \quad (133)$$

$$\mathbf{h}_{ms,x}(\mathbf{X}, 0) = - \sum_j m_x(\mathbf{G}_j) e^{-|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j| \frac{d}{2}} e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \hat{\mathbf{x}} \quad (134)$$

$$\mathbf{h}_{ms,y}(\mathbf{X}, 0) = - \sum_j m_y(\mathbf{G}_j) \frac{(q_y + G_y)^2}{|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} \left[1 - e^{-|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j| \frac{d}{2}} \right] e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \hat{\mathbf{y}}. \quad (135)$$

Αντικαθιστώντας τις (133) – (135) στις (126) και (127) προκύπτει η εξίσωση ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων για τη μαγνήτιση:

$$M_\Lambda \mathbf{m}_q = i \frac{\omega}{|\gamma| \mu_0 H_0} \mathbf{m}_q, \quad (136)$$

όπου $\Lambda = I, II$ αντίστοιχα για τις δύο μορφές του πεδίου ανταλλαγής και

$$\mathbf{m}_q^T = [m_{x,q}(\mathbf{G}_1), \dots, m_{x,q}(\mathbf{G}_p), m_{y,q}(\mathbf{G}_1), \dots, m_{y,q}(\mathbf{G}_p)] \quad (137)$$

Ο πίνακας ιδιοτιμών παρουσιάζεται:

$$M_\Lambda = \begin{pmatrix} M_{lj}^{xx} & M_{lj}^{xy} \\ M_{lj}^{yx} & M_{lj}^{yy} \end{pmatrix}_\Lambda, \quad (138)$$

με στοιχεία:

$$M_{lj}^{xx} = M_{lj}^{yy} = 0 \quad (139)$$

$$M_{lj}^{xy} = \delta_{lj} + M_{lj}^{ex,\Lambda} + \frac{(q_y + G_{y,j})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} \left(1 - e^{-|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j| \frac{d}{2}} \right) M_s(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) - \frac{(G_{z,l} - G_{z,j})^2}{H_0 |\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j|^2} M_s(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \left(1 - e^{-|\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j| \frac{d}{2}} \right) \quad (140)$$

$$\begin{aligned}
M_{lj}^{xy} = & -\delta_{lj} - M_{lj}^{ex,\Lambda} - \frac{1}{H_0} e^{-|\mathbf{q}+\mathbf{G}_j|\frac{d}{2}} M_s(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) + \\
& + \frac{(G_{z,l} - G_{z,j})^2}{H_0 |\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j|^2} M_s(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \left(1 - e^{-|\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j|\frac{d}{2}}\right),
\end{aligned} \tag{141}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
M_{lj}^{ex,I} = & \frac{(\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{G}_j)}{H_0} Q(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \\
M_{lj}^{ex,II} = & \frac{(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j)^2}{H_0} Q(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j).
\end{aligned} \tag{142}$$

Οι εξισώσεις ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων (114) και (136) για τις δύο διατάξεις (I, II) μπορούν να λυθούν με κατάλληλο κώδικα matlab που παρουσιάζεται στο παράρτημα 2. Οι ιδιοτιμές χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό των σχέσεων διασποράς και τα ιδιοανύσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το σχηματισμό των στιγμιότυπων των τρόπων ταλάντωσης της μαγνήτισης στο μαγνονικό κρύσταλλο. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται και μελετώνται οι σχέσεις διασποράς για τη διάδοση των κυμάτων σπιν στις δύο διαφορετικές διατάξεις με συνδυασμούς μαγνητικών υλικών A και B.

Κεφάλαιο 3

Σχέσεις Διασποράς των Κυμάτων Σπιν

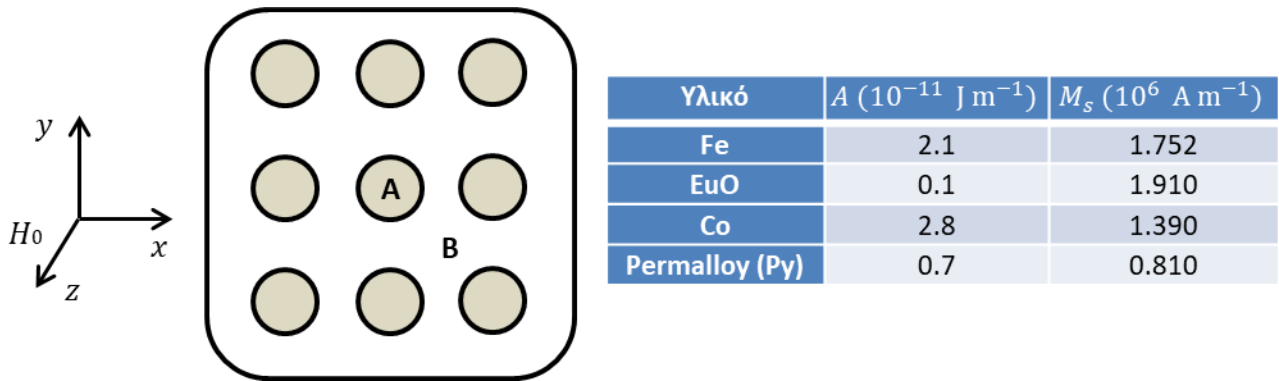
3.1 Σχέσεις διασποράς για τη διάδοση του κύματος σπιν σε διδιάστατο περιοδικό μαγνητικό κρύσταλλο

Από τις ιδιοτιμές της εξίσωσης της μαγνήτισης (114) για τη διάδοση των κυμάτων σπιν στη διάταξη I προκύπτουν οι τιμές των συχνοτήτων των κυμάτων σπιν (συχνότητες μαγνονίων). Σύμφωνα με την ανάλυση στο εδάφιο 2.1 και από την (120) προκύπτει ότι η διάσταση του πίνακα ιδιοτιμών M είναι $\dim M = 2(2N + 1)^2 \times 2(2N + 1)^2$, όπου $(2N + 1)^2$ ο αριθμός των διανυσμάτων αντιστρόφου πλέγματος. Ο αριθμός των ιδιοτιμών του πίνακα M είναι $2(2N + 1)^2$ για κάθε κυματόνισμα q . Με την απεικόνιση των αδιάστατων ιδιοτιμών της μαγνήτισης (114)

$$\Omega = \frac{\omega}{|\gamma|\mu_0 H_0}, \quad (143)$$

(όπου $1 \Omega \approx 2.801 \text{ GHz}$) σε διαγράμματα συχνότητας - κυματανύσματος σχηματίζονται ζώνες (σχέσεις διασποράς), των οποίων η δομή διαφέρει ανάλογα με τα υλικά που χρησιμοποιούνται.

Παρουσιάζεται η διάταξη 1 και ο πίνακας με τις μαγνητικές σταθερές για τέσσερα μαγνητικά υλικά^[11]:

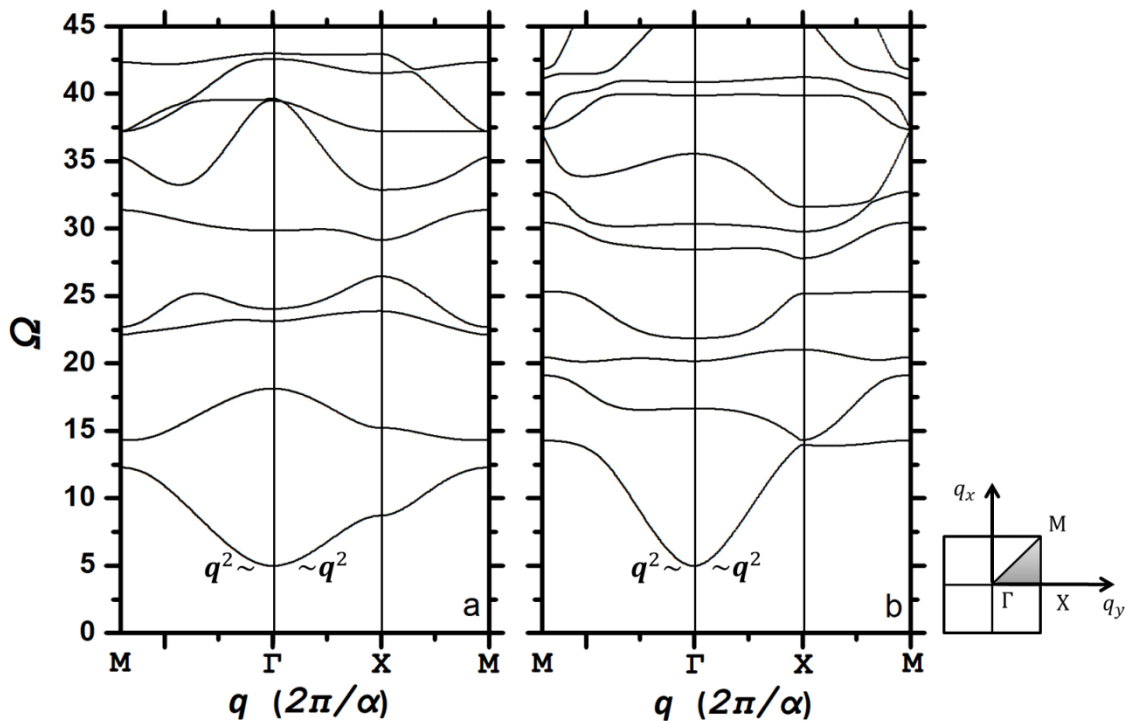


Σχήμα 11: Ο πίνακας με τις μαγνητικές σταθερές των τεσσάρων υλικών που χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό κυλίνδρων (υλικό A) που είναι εμβαπτισμένοι στο μαγνητικό υλικό B. Αριστερά παρουσιάζεται η περιοδική διάταξη του υλικού A σε κυλίνδρους μέσα στο υλικό B και το πεδίο H_0 στη διεύθυνση z στο εσωτερικό του υλικού.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι σχέσεις διασποράς (για $N = 6$) των μαγνονίων για τις κατευθύνσεις ΓΧΜ του κυματανύσματος $q = (q_x, q_y)$ στην πρώτη ζώνη Brillouin και συνδυασμό υλικών στις θέσεις A, B της διάταξης 1. Μπορούν να συγκριθούν με τις σχέσεις διασποράς της

δημοσίευσης [11] των Vasseur *et al.* για συγκεκριμένες τιμές πεδίου H_0 , ποσοστού κάλυψης f του υλικού A στη περιοδική δομή και συγκεκριμένη πλεγματική σταθερά α .

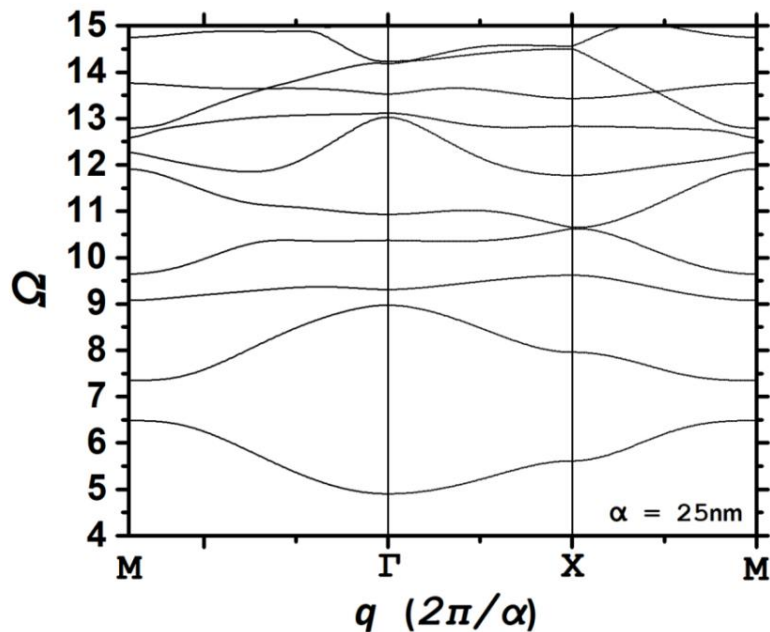
Στις σχέσεις διασποράς του σχήματος 12 παρατηρούνται χάσματα συχνοτήτων. Στο σχήμα 12a παρουσιάζονται χάσματα μεταξύ πρώτης και δεύτερης, δεύτερης και τρίτης, τέταρτης και πέμπτης και πέμπτης και έκτης ζώνης. Το εύρος των τριών πρώτων χασμάτων είναι της τάξης των 5.5, 11 και 7.5 αντίστοιχα. Στο σχήμα 12b παρουσιάζονται χάσματα μεταξύ δεύτερης και τρίτης, τρίτης και τέταρτης και τέταρτης και πέμπτης ζώνης. Το εύρος των δύο πρώτων χασμάτων είναι μικρότερο από το εύρος που παρουσιάζουν τα χάσματα στο σχήμα 12a. Ωστόσο το εύρος του τρίτου χάσματος είναι της τάξης των 7.5.



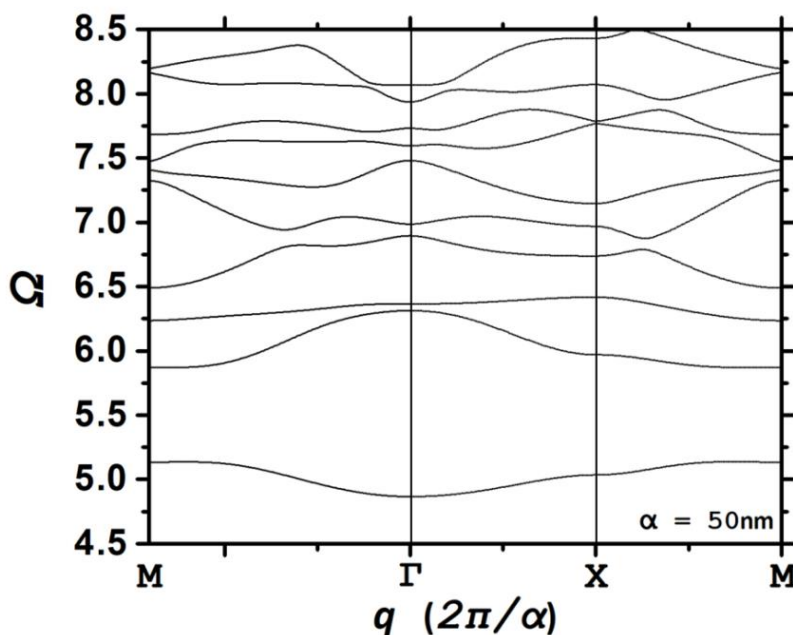
Σχήμα 12: Η σχέση διασποράς των μαγνονίων για τη διάταξη 1 με υλικά Fe και EuO. Αριστερά (Σχ. 12a) παρουσιάζεται η σχέση διασποράς για υλικό A τον Fe και υλικό B το EuO. Δεξιά (Σχ. 12b) παρουσιάζεται η σχέση διασποράς για υλικό A το EuO και B τον Fe. Τα χαρακτηριστικά της διάταξης και στις δύο περιπτώσεις είναι $f = 0.5$, $\alpha = 10$ nm και $\mu_0 H_0 = 0.1$ T.

Το εύρος των χασμάτων παρουσιάζει εξάρτηση από την πλεγματική σταθερά α . Όπως παρατηρείται στα στοιχεία του πίνακα ιδιοτιμών (116 - 119) οι όροι ανταλλαγής που περιέχουν τα \bar{Q} και ΔQ είναι ανάλογοι με το αντίστροφο του τετραγώνου της πλεγματικής σταθεράς, ενώ οι διπολικόι όροι που περιέχουν τα \bar{M}_s και ΔM_s δεν εξαρτώνται από την πλεγματική σταθερά. Κατά συνέπεια οι συχνότητες των μαγνονίων παρουσιάζουν ισχυρή εξάρτηση από τους όρους ανταλλαγής για μικρή πλεγματική σταθερά (έως 100 nm). Επίσης στο σχήμα 12 παρατηρείται η αναλογία της συχνότητας με το τετράγωνο του κυματανύσματος q (Εδάφιο 1.1), στο κέντρο της πρώτης ζώνης Brillouin (σημείο Γ) για την πρώτη ζώνη των σχέσεων διασποράς, όπου το μέτρο του κυματανύσματος q είναι μικρό και το μήκος κύματος μεγάλο.

Στα σχήματα 13 και 14 παρουσιάζονται οι σχέσεις διασποράς των μαγνονίων για κυλίνδρους Fe εμβαπτισμένους σε μητρικό υλικό από EuO και για πλεγματικές σταθερές $\alpha = 25 \text{ nm}$ και 50 nm αντίστοιχα.



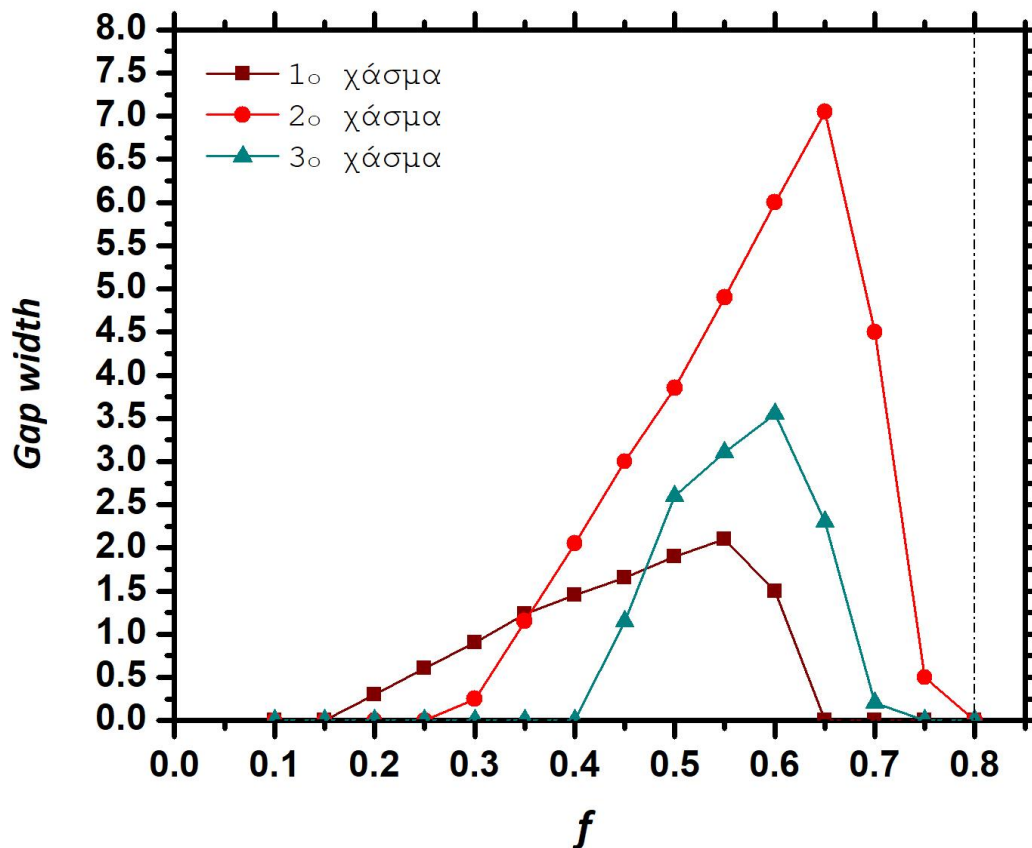
Σχήμα 13: Η σχέση διασποράς των μαγνονίων για τη διάταξη 1 με κυλίνδρους Fe σε EuO. Τα χαρακτηριστικά της διάταξης είναι $f = 0.5$, $\alpha = 25 \text{ nm}$ και $\mu_0 H_0 = 0.1 \text{ T}$.



Σχήμα 14: Η σχέση διασποράς των μαγνονίων για τη διάταξη 1 με κυλίνδρους Fe σε EuO. Τα χαρακτηριστικά της διάταξης είναι $f = 0.5$, $\alpha = 50 \text{ nm}$ και $\mu_0 H_0 = 0.1 \text{ T}$.

Με την αύξηση της πλεγματικής σταθεράς από 10 nm σε 25 nm και 50 nm αντίστοιχα παρατηρείται ότι το ελάχιστο της πρώτης ζώνης στη σχέση διασποράς παραμένει στην ίδια συχνότητα και ότι τα χάσματα μειώθηκαν σε δύο από τέσσερα. Το εύρος του πρώτου χάσματος μεταξύ της πρώτης και δεύτερης ζώνης μειώθηκε στο 1. Το δεύτερο χάσμα στις σχέσεις διασποράς παρουσιάζεται μεταξύ δεύτερης και τρίτης ζώνης για πλεγματική σταθερά 25 nm (Σχ. 13) και μεταξύ τρίτης και τέταρτης ζώνης για πλεγματική σταθερά 50 nm (Σχ. 14). Η μείωση των χάσμάτων με την αύξηση της πλεγματικής σταθεράς οφείλεται στη σταδιακά μικρότερη συνεισφορά των όρων ανταλλαγής, αφού η αντίθεση των παραμέτρων ανταλλαγής των δύο υλικών οδηγεί στην εμφάνιση διευρυμένων χάσμάτων.

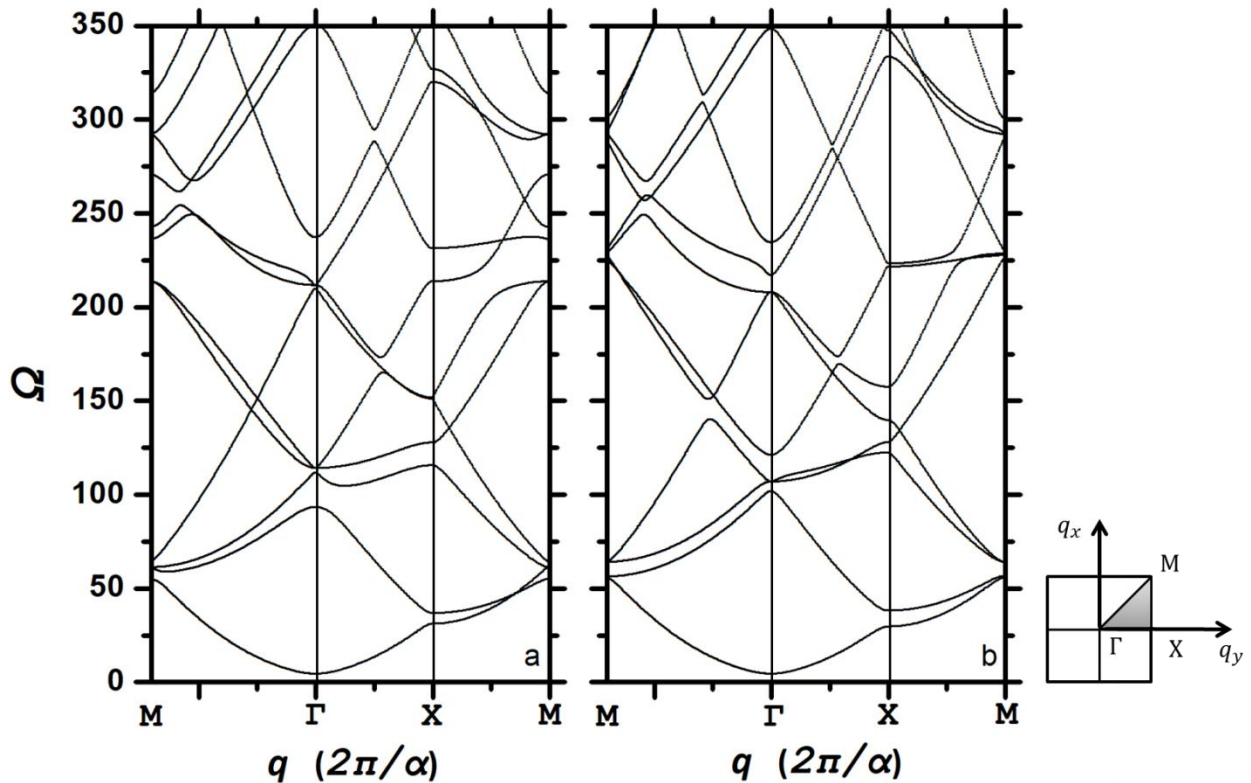
Το εύρος των χάσμάτων παρουσιάζει εξάρτηση και από το ποσοστό κάλυψης f της περιοδικής δομής από το υλικό A. Στο σχήμα 15 παρουσιάζεται η εξάρτηση του εύρους των τριών πρώτων χάσμάτων για κυλίνδρους Fe μέσα σε EuO συναρτήσει των διαφορετικών τιμών του ποσοστού κάλυψης f .



Σχήμα 15: Η εξάρτηση του εύρους των τριών πρώτων χάσμάτων από το ποσοστό κάλυψης f του EuO με κυλίνδρους Fe για τη διάταξη 1 με $\alpha = 10$ nm και $\mu_0 H_0 = 0.1$ T. Η κάθετη εστιγμένη γραμμή στο $f = 0.8$ δείχνει το ποσοστό κάλυψης όπου οι κύλινδροι σιδήρου έρχονται σε επαφή μεταξύ τους.

Όπως παρατηρείται στο σχήμα 15, το μεγαλύτερο εύρος παρουσιάζεται στο δεύτερο χάσμα για ποσοστό κάλυψης $f = 0.65$. Ωστόσο το εύρος του πρώτου χάσματος μηδενίζεται στη τιμή αυτή.

Στο σχήμα 16 παρουσιάζεται η σχέση διασποράς των μαγνόνίων για κυλίνδρους Co εμβαπτισμένους σε μητρικό υλικό Py (16a) και το αντίστροφο (16b). Όπως παρατηρείται δεν εμφανίζονται χάσματα στις σχέσεις διασποράς των μαγνόνίων. Η διάδοση των κυμάτων σπιν επιτρέπεται για όλες τις συχνότητες όταν ο μαγνητικός κρύσταλλος αποτελείται από υλικά Co και Py.

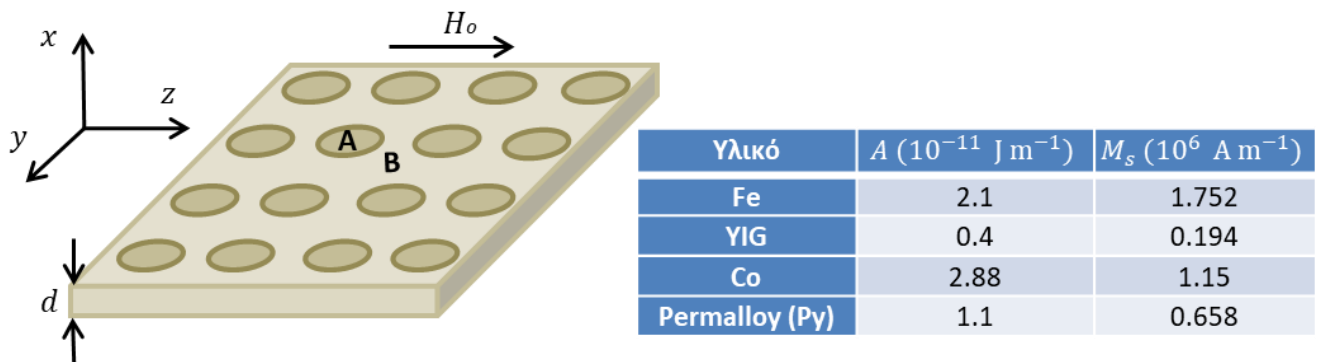


Σχήμα 16: Η σχέση διασποράς των μαγνόνίων για τη διάταξη 1 με υλικά Py και Co. Αριστερά (Σχ. 16a) παρουσιάζεται η σχέση διασποράς για υλικό A την Py και υλικό B το Co. Δεξιά (Σχ. 16b) παρουσιάζεται η σχέση διασποράς για υλικό A το Co και B την Py. Τα χαρακτηριστικά της διάταξης και στις δύο περιπτώσεις είναι $f = 0.5$, $\alpha = 10 \text{ nm}$ και $\mu_0 H_0 = 0.1 \text{ T}$.

Η εμφάνιση χασμάτων συνδέεται άμεσα με το λόγο των μαγνητικών σταθερών που παρουσιάζονται στον πίνακα του σχήματος 11 για το κάθε σύστημα. Οι λόγοι των σταθερών μαγνητίσεων κόρου (Ms_A/Ms_B) για τα δύο συστήματα Fe/EuO και Co/Py δεν παρουσιάζουν μεγάλη απόκλιση ενώ ο λόγος των σταθερών ανταλλαγής (A_A/A_B) είναι 21 και 4 αντίστοιχα για το κάθε σύστημα. Ο λόγος για την ύπαρξη χασμάτων στη σχέση διασποράς των μαγνόνίων για κυλίνδρους Fe εμβαπτισμένους σε EuO είναι η μεγάλη αντίθεση των σταθερών ανταλλαγής των δύο μαγνητικών υλικών. Αν ο λόγος των σταθερών ανταλλαγής είναι ίδιος και για τα δύο υλικά του συστήματος τότε θα εμφανιστούν χάσματα όταν ο λόγος των μαγνητίσεων κόρου των δύο υλικών είναι μεγαλύτερος του 10 ή μικρότερος του 0.1^[11]. Ωστόσο τα συνήθη σιδηρομαγνητικά υλικά (Fe, Co, Gd, Ni, Py, EuO) παρουσιάζουν μαγνητίσεις κόρου της ίδια τάξης ($0.5 \times 10^6 \text{ Am}^{-1}$ έως $2 \times 10^6 \text{ Am}^{-1}$)^[12].

3.2 Σχέσεις διασποράς για τη διάδοση κυμάτων σπιν σε περιοδικά διαμορφωμένο λεπτό υμένιο

Από τις ιδιοτιμές της εξίσωσης 136 προκύπτουν οι τιμές των συχνοτήτων των μαγνόνίων για την κάθε μορφή του πεδίου ανταλλαγής (Εδάφιο 2.2, *form II, I*) και μπορούν να σχηματιστούν οι σχέσεις διασποράς σε διαγράμματα συχνότητας – κυματανύσματος q . Στο σχήμα 17 παρουσιάζεται η διάταξη 2 και ο πίνακας με τις μαγνητικές σταθερές για τέσσερα μαγνητικά υλικά^[13].

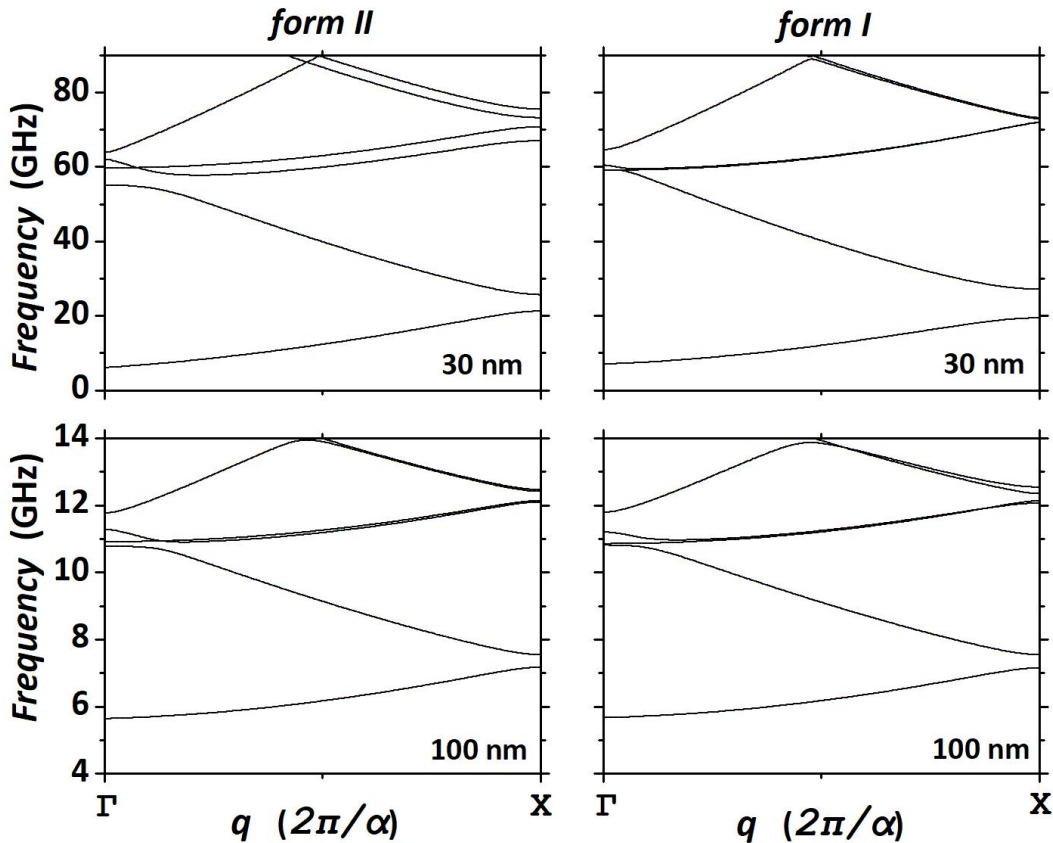


Σχήμα 17: Ο πίνακας με τις μαγνητικές σταθερές των τεσσάρων υλικών που χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό κυλίνδρων (υλικό A) μέσα στο μαγνητικό υλικό B. Αριστερά παρουσιάζεται η περιοδική διάταξη πάχους d κυλίνδρων του υλικού A στο υλικό B. Το εξωτερικό πεδίο H_0 βρίσκεται στη διεύθυνση του άξονα x .

Παρακάτω παρουσιάζονται οι σχέσεις διασποράς των μαγνόνίων για $N = 6$ (Εδάφια 2.1, 3.1) στην κατεύθυνση ΓΧ του κυματανύσματος $q = (q_y, 0)$ της πρώτης ζώνης Brillouin και συνδυασμό υλικών στις θέσεις A, B της διάταξης 2. Μπορούν να συγκριθούν με τις σχέσεις διασποράς της δημοσίευσης των Krawczyk και Sokolovskyy [13] για συγκεκριμένες τιμές του εξωτερικού πεδίου H_0 , πλεγματικής σταθεράς α , πάχους πλακιδίου d , μορφής του πεδίου ανταλλαγής (I, II) και ποσοστού κάλυψης f του υλικού A στο μητρικό υλικό B, όπου $f = \pi R^2/\alpha^2$, με R την ακτίνα των κυλίνδρων του υλικού A.

Στο σχήμα 18 παρουσιάζονται οι σχέσεις διασποράς για τη διάδοση των κυμάτων σπιν στη διάταξη 2 με υλικό A το Fe και υλικό B το YIG. Οι ζώνες για τις δύο μορφές του πεδίου ανταλλαγής με πλεγματικές σταθερές 100 nm δεν παρουσιάζουν διαφορές παρά μόνο στα άκρα της κατεύθυνσης ΓΧ. Αντίθετα, στις σχέσεις διασποράς για τις δύο μορφές του πεδίου ανταλλαγής με πλεγματικές σταθερές 30 nm, παρουσιάζονται διαφορές οι οποίες γίνονται εντονότερες στα άκρα. Όπως παρουσιάστηκε στο εδάφιο 2.2, η μορφή I του πεδίου ανταλλαγής (121) εμφανίζει ιδιαίτερη συμπεριφορά στις διεπιφάνειες μεταξύ των δύο υλικών A, B λόγω της ασυνέχειας της μαγνήτισης κόρου M_s και της σταθεράς ανταλλαγής A . Από την άλλη, στη μορφή II του πεδίου ανταλλαγής (123), η ασυνέχεια αυτή έχει εξαλειφθεί με την παραδοχή όμως του ομογενοποιημένου μαγνητικού υλικού. Η μορφή I του πεδίου ανταλλαγής παρουσιάζει μεγαλύτερη ευαισθησία στην απότομη μεταβολή των μαγνητικών σταθερών M_s και A στις διεπιφάνειες των δύο μαγνητικών υλικών A, B, αλλά δίνει καλύτερα αποτελέσματα ως προς τη σύγκλιση στις σχέσεις διασποράς αν η διαφορά στις μαγνητικές σταθερές δεν είναι μεγάλη (π.χ Co/Py). Η μορφή II του

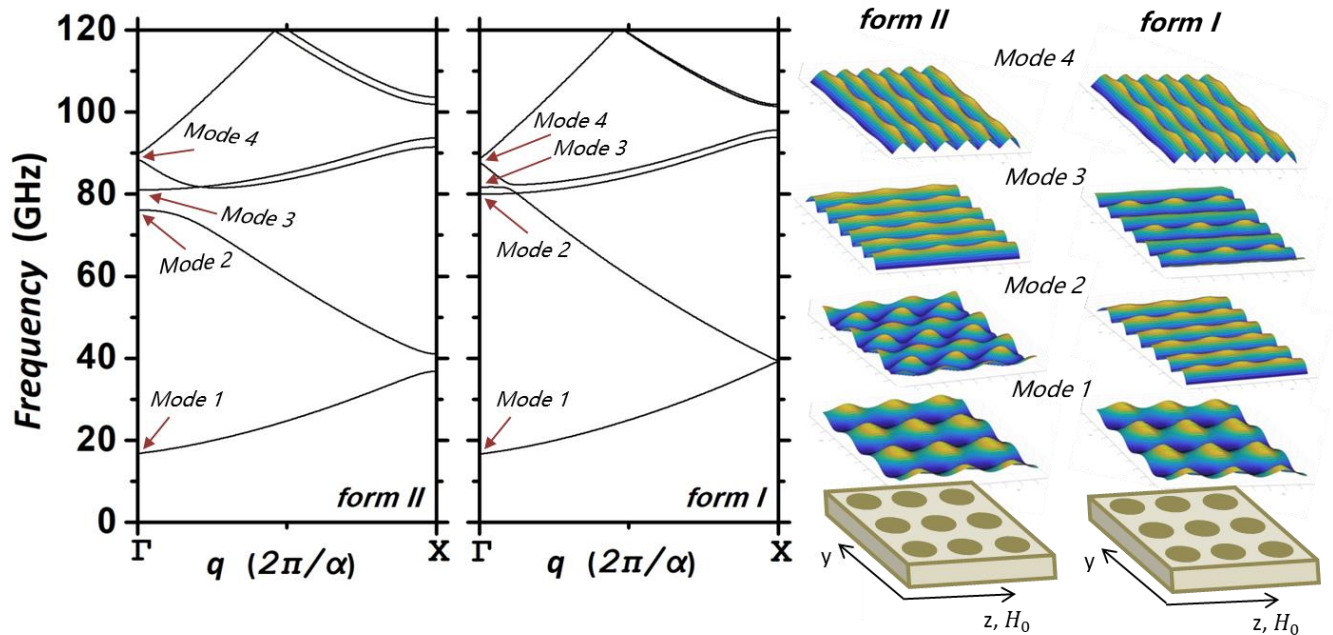
πεδίου ανταλλαγής δίνει αποτελέσματα καλύτερης σύγκλισης από τη μορφή I όταν η διαφορά των μαγνητικών σταθερών είναι αρκετά μεγάλη (π.χ Fe/YIG) και τα συνοριακά σφάλματα που υπεισέρχονται στη μορφή I του πεδίου ανταλλαγής είναι πολύ ισχυρά.



Σχήμα 18: Οι σχέσεις διασποράς των μαγνόνιων για τη διάταξη 2 με υλικό A τον Fe και υλικό B το YIG. Στην κάθε στήλη παρουσιάζονται οι σχέσεις διασποράς για πλεγματικές σταθερές 30 nm και 100 nm. Η αριστερή στήλη αναφέρεται στη μορφή II του πεδίου ανταλλαγής και η δεξιά στη μορφή I αντίστοιχα. Τα χαρακτηριστικά της διάταξης είναι $R = 7$ nm, $d = 4$ nm και $\mu_0 H_0 = 0.1$ T.

Όπως παρατηρείται στο σχήμα 18, οι διαφορές μεταξύ των σχέσεων διασποράς για τις δύο μορφές του πεδίου ανταλλαγής για πλεγματική σταθερά $\alpha = 100$ nm είναι μικρές σε σχέση με τις διαφορές στις σχέσεις διασποράς για πλεγματική σταθερά $\alpha = 30$ nm. Ο όρος ανταλλαγής $M_{ij}^{ex,\Lambda}$ (Εξ. 142) είναι ανάλογος με το αντίστροφο του τετραγώνου της πλεγματικής σταθεράς. Οι μαγνητοστατικοί όροι (ή αλλιώς διπολικοί όροι) στα στοιχεία του πίνακα ιδιοτιμών (140, 141) δεν παρουσιάζουν εξάρτηση από την πλεγματική σταθερά. Με την αύξηση της τελευταίας, οι μαγνητοστατικοί όροι υπερिशύουν έναντι του όρου ανταλλαγής και εξομαλύνονται οι διαφορές μεταξύ των σχέσεων διασποράς για τις δύο μορφές του πεδίου ανταλλαγής. Επίσης, όπως παρατηρείται και στις σχέσεις διασποράς στο εδάφιο 3.1, η υπερίσχυση των μαγνητοστατικών όρων με την αύξηση της πλεγματικής σταθεράς επιφέρει μείωση του αριθμού των χασμάτων και του εύρους τους.

Στο σχήμα 19 παρουσιάζονται οι σχέσεις διασποράς για τη διάδοση των κυμάτων σπιν στη διάταξη 2 με υλικό A την Py και υλικό B το Co και τα στιγμιότυπα των τρόπων ταλάντωσης της μαγνήτισης για τις τέσσερις πρώτες ζώνες στο κέντρο της πρώτης ζώνης Brillouin (σημείο Γ). Το πεδίο είναι αρκετά ισχυρό ώστε να μαγνητίσει το φιλμ στη διεύθυνση του άξονα z και χάσματα εμφανίζονται μόνο για τη μορφή II του πεδίου ανταλλαγής. Η μικρή πλεγματική σταθερά, $\alpha = 30$ nm, έχει ως αποτέλεσμα τις διαφορές στις σχέσεις διασποράς για τις δύο μορφές του πεδίου ανταλλαγής. Τα μέγιστα των ταλαντώσεων αντιστοιχούν στα σημεία του πλέγματος όπου το μέτρο της δυναμικής μαγνήτισης είναι μέγιστο και οι κοιλάδες στα σημεία όπου το μέτρο είναι ελάχιστο. Τα στιγμιότυπα ταλάντωσης θεωρώντας ξεχωριστά τις δύο μορφές του πεδίου ανταλλαγής, για τις ζώνες που ξεκινούν από την ίδια συχνότητα στο σημείο Γ , δεν παρουσιάζουν διαφορές μεταξύ τους. Το στιγμιότυπο 1 (*mode 1*), παρουσιάζει μεγάλη διαφορά σε σύγκριση με τα υπόλοιπα στιγμιότυπα 2, 3, 4 (*modes 2, 3, 4*) για την κάθε μορφή του πεδίου ανταλλαγής, λόγω της μεγάλης απόκλισης των συχνοτήτων. Εξάλλου, το στιγμιότυπο 1 χαρακτηρίζει τη χαμηλότερη συχνότητα και εμφανίζει τα λιγότερα μέγιστα και τις λιγότερες κοιλάδες ταλάντωσης.

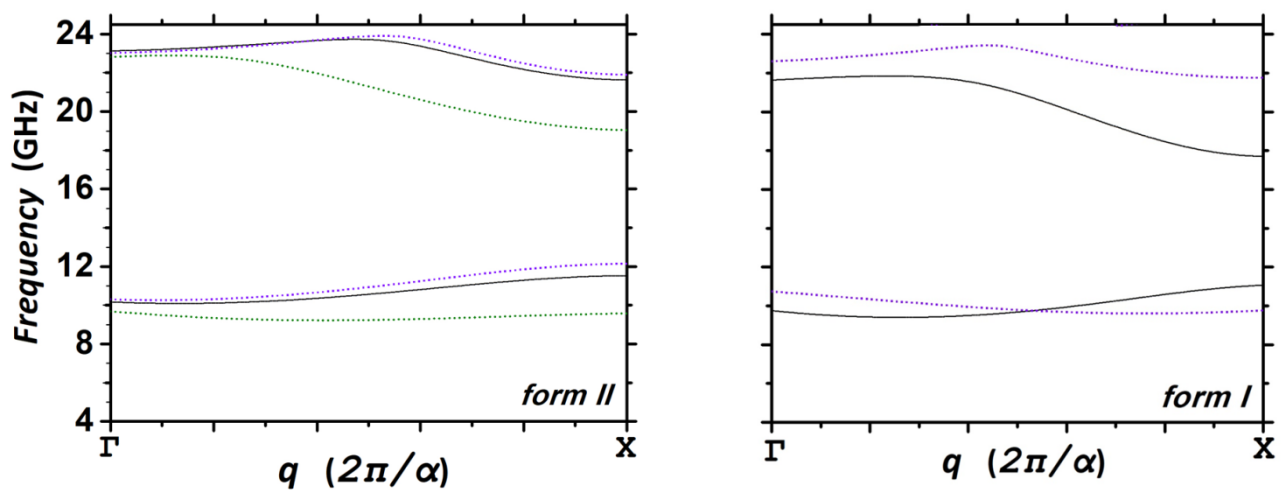


Σχήμα 19: Οι σχέσεις διασποράς των μαγνίων για τη διάταξη 2 με υλικό A την Py και υλικό B το Co. Δεξιά παρουσιάζονται τα στιγμιότυπα των τρόπων ταλάντωσης της μαγνήτισης για τις τέσσερις πρώτες ζώνες στο κέντρο της πρώτης ζώνης Brillouin (σημείο Γ). Οι σχέσεις διασποράς και τα στιγμιότυπα παρουσιάζονται για τις μορφές II και I του πεδίου ανταλλαγής αντίστοιχα. Τα χαρακτηριστικά της διάταξης είναι $R = 7$ nm, $\alpha = 30$ nm, $d = 4$ nm και $\mu_0 H_0 = 0.2$ T.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι σχέσεις διασποράς για τη διάδοση των κυμάτων σπιν στη διάταξη 2 με υλικό A τον αέρα και υλικό B το YIG. Ο αέρας μπορεί να προσομοιωθεί από ένα μη μαγνητικό υλικό, θεωρώντας ένα υλικό που μαγνητίζεται πολύ δύσκολα και μπορεί να εκφραστεί με σταθερά μαγνήτισης κόρου (ή αυθόρμητης μαγνήτισης) τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από αυτή του YIG ή, αντίστοιχα, με πολύ μικρότερη σταθερά ανταλλαγής. Ωστόσο, λόγω της μικρής σταθεράς ανταλλαγής του YIG (Σχ. 17), θεωρούμε τη σταθερά ανταλλαγής του αέρα ίση με 10^{-12} J m⁻¹ και αυξάνουμε μόνο την τιμή της αυθόρμητης μαγνήτισης του. Αυτό θα επιτρέψει την

εμφάνιση των μαγνονικών καταστάσεων του μαγνητικού υλικού σε διαφορετική περιοχή συχνοτήτων από τις καταστάσεις στο εσωτερικό της «τρύπας» στο μαγνονικό κρύσταλλο ώστε να μπορούν εύκολα να αφαιρεθούν οι τελευταίες εκ των υστέρων. Αλλά η μεγάλη διαφορά στις σταθερές μαγνήτισης επιφέρει σφάλματα στις συνοριακές συνθήκες στις διεπιφάνειες μεταξύ του μη μαγνητικού υλικού και του YIG και στις σχέσεις διασποράς εμφανίζονται ψευδοζώνες σε κάποιες περιοχές συχνοτήτων. Όπως αναφέρθηκε, η μορφή I του πεδίου ανταλλαγής επισύρει ισχυρά σφάλματα στις συνοριακές συνθήκες λόγω της μεγάλης απόκλισης της αυθόρμητης μαγνήτισης M_s στις διεπιφάνειες μεταξύ του μη μαγνητικού υλικού και του YIG. Η μορφή II του πεδίου ανταλλαγής είναι λιγότερο ευαίσθητη στην ασυνέχεια της αυθόρμητης μαγνήτισης μεταξύ των δύο υλικών και γι' αυτό υπάρχει καλύτερη σύγκλιση στις σχέσεις διασποράς που παρουσιάζονται παρακάτω. Οι σχέσεις διασποράς έχουν επιλεγεί με τις κατάλληλες παραμέτρους ώστε να μην εμφανιστεί κάποια ψευδοζώνη στις περιοχές συχνοτήτων που αναφέρονται τα παρακάτω σχήματα.

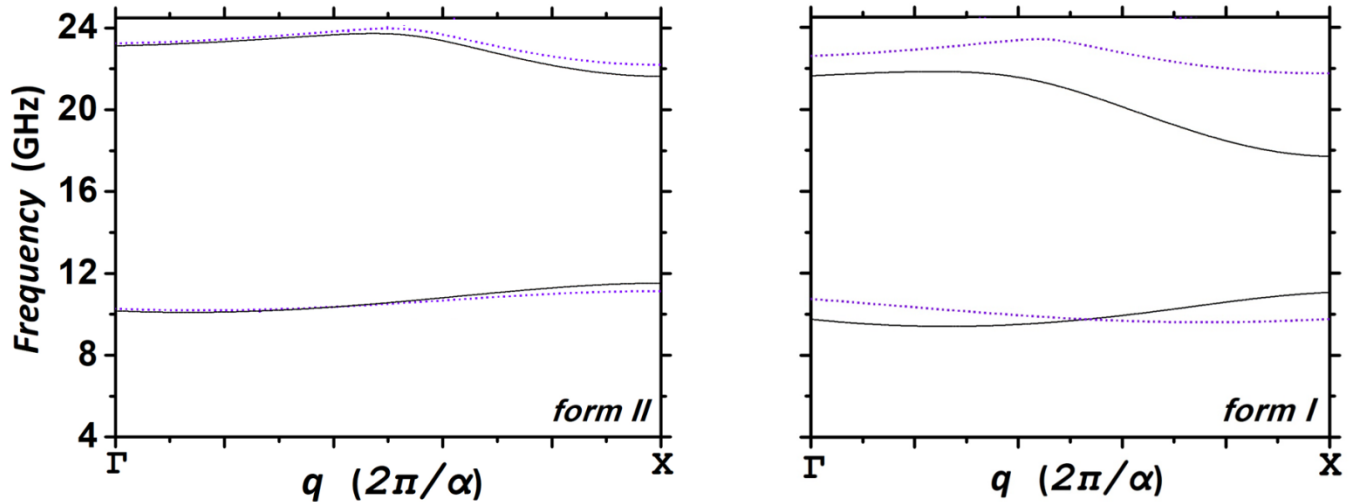
Λόγω της προσομοίωσης του αέρα μέσω μιας μεγάλης αυθόρμητης μαγνήτισης, οι σχέσεις διασποράς συγκλίνουν για μία ορισμένη περιοχή τιμών της παραμέτρου που επιλέγουμε να προσομοιώσουμε τον αέρα. Στο σχήμα 20 παρουσιάζεται η σύγκλιση των σχέσεων διασποράς για τις δύο μορφές του πεδίου ανταλλαγής με τιμές αυθόρμητης μαγνήτισης M_s (10^6A m^{-1}) του αέρα 90, 100 και 140. Όπως παρατηρείται, η σχέση διασποράς για τη μορφή II του πεδίου ανταλλαγής συγκλίνει ενώ η σχέση διασποράς για τη μορφή I δεν συγκλίνει διότι είναι πιο ευαίσθητη στα σφάλματα των συνοριακών συνθηκών που προκύπτουν από τη μεγάλη αντίθεση των αυθόρμητων μαγνητίσεων μεταξύ αέρα και YIG.



Σχήμα 20: Οι σχέσεις διασποράς των μαγνονίων με αναφορά στις δύο μορφές του πεδίου ανταλλαγής για τη διάταξη 2 με υλικό A τον αέρα και υλικό B το YIG. Οι μαύρες συνεχές γραμμές εκφράζουν τις σχέσεις διασποράς για μαγνητική σταθερά του αέρα M_s (10^6A m^{-1}) = 100 και οι μωβ και πράσινες διακεκομμένες τις σχέσεις διασποράς για M_s (10^6A m^{-1}) = 90 και M_s (10^6A m^{-1}) = 140 αντίστοιχα. Τα χαρακτηριστικά της διάταξης είναι $R = 5 \text{ nm}$, $\alpha = 60 \text{ nm}$, $d = 4 \text{ nm}$ και $\mu_0 H_0 = 0.1 \text{ T}$.

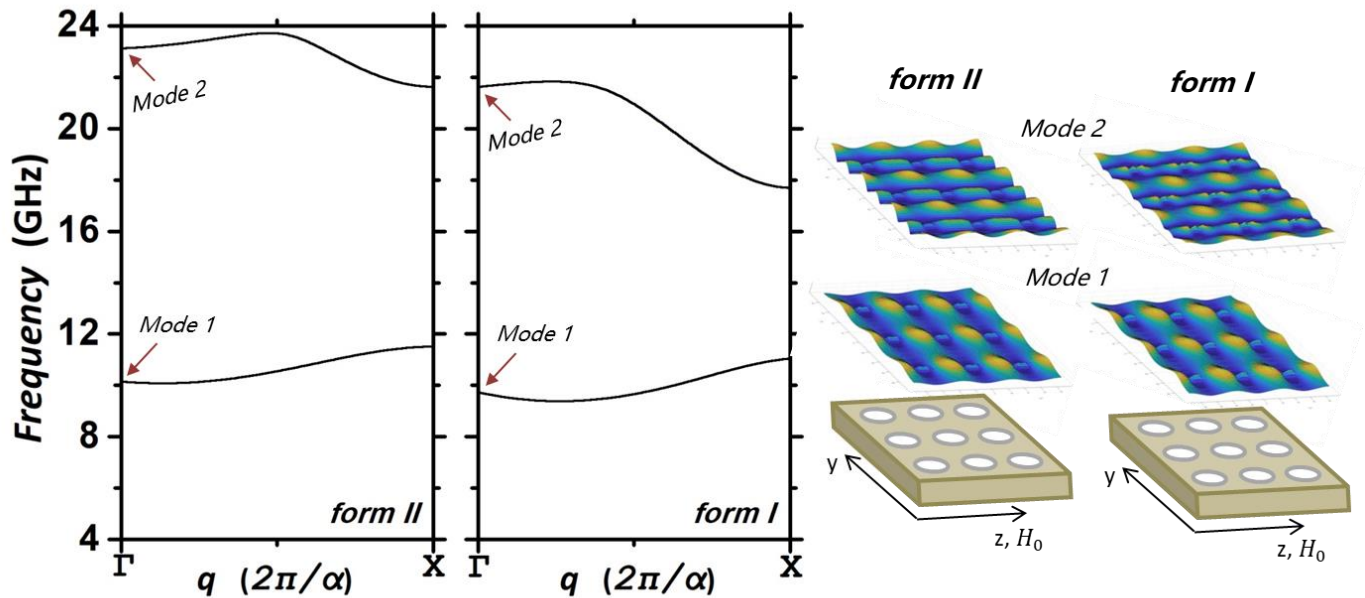
Η σύγκλιση των σχέσεων διασποράς μπορεί να εξεταστεί και για διαφορετικές τιμές του N . Στο σχήμα 21 παρουσιάζεται η σύγκλιση των σχέσεων διασποράς για $N = 6$ και $N = 8$ για τις δύο

μορφές του πεδίου ανταλλαγής, θεωρώντας την αυθόρμητη μαγνήτιση M_s (10^6 A m^{-1}) της μη μαγνητικής περιοχής ίση με 100. Όπως παρατηρείται, η σχέση διασποράς για τη μορφή I του πεδίου ανταλλαγής δεν συγκλίνει επιβεβαιώνοντας την ευαισθησία στις συνοριακές συνθήκες μεταξύ των διεπιφανειών του μη μαγνητικού υλικού και του YIG.



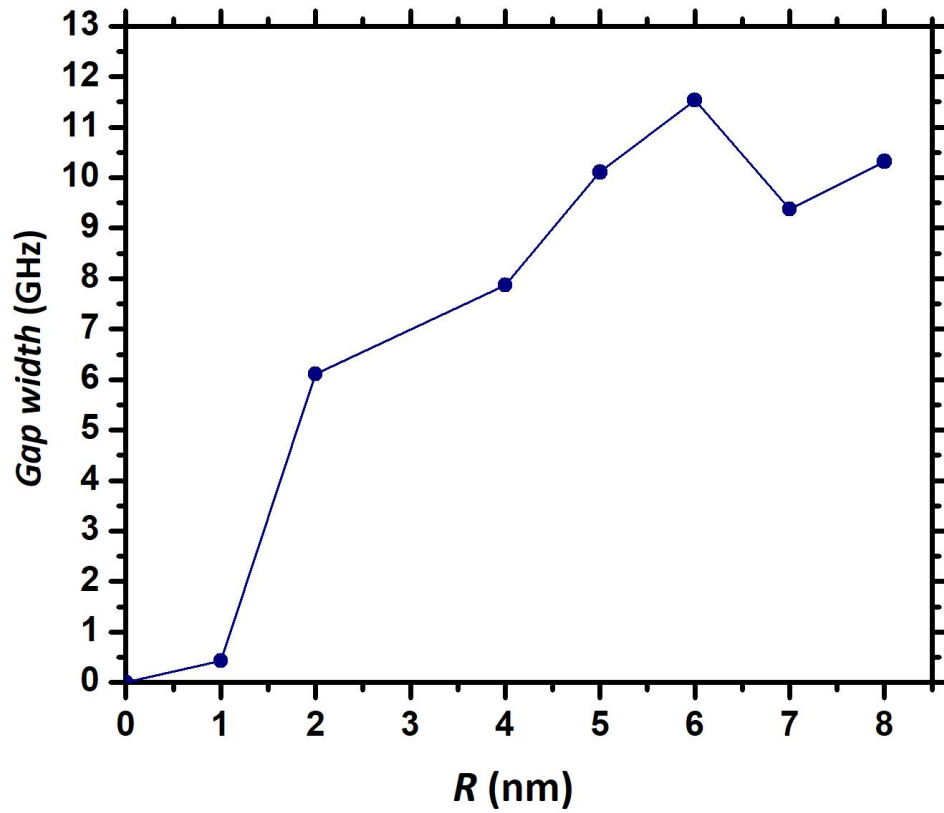
Σχήμα 21: Οι σχέσεις διασποράς των μαγνόνων με αναφορά στις δύο μορφές του πεδίου ανταλλαγής για τη διάταξη 2 με υλικό A τον αέρα και υλικό B το YIG. Οι μαύρες συνεχές γραμμές εκφράζουν τις σχέσεις διασποράς για $N = 6$ και οι μωβ διακεκομμένες τις σχέσεις διασποράς για $N = 8$ αντίστοιχα. Η αυθόρμητη μαγνήτιση του αέρα είναι M_s (10^6 A m^{-1}) = 100. Τα χαρακτηριστικά της διάταξης είναι $R = 5 \text{ nm}$, $\alpha = 60 \text{ nm}$, $d = 4 \text{ nm}$ και $\mu_0 H_0 = 0.1 \text{ T}$.

Στο σχήμα 22 παρουσιάζονται οι σχέσεις διασποράς για τη διάδοση των κυμάτων σπιν στη διάταξη 2 με υλικό A τον αέρα και υλικό B το YIG και τα στιγμιότυπα των τρόπων ταλάντωσης της μαγνήτισης για τις δύο πρώτες ζώνες στο κέντρο της πρώτης ζώνης Brillouin (σημείο Γ). Όπως παρατηρείται στα στιγμιότυπα ταλάντωσης (Σχ. 22), στα σημεία όπου θα έπρεπε να εμφανίζονται οι κοιλάδες απόσβεσης της μαγνήτισης εμφανίζονται μικρά μέγιστα μαγνήτισης λόγω της ασυνέχειας που παρουσιάζεται στις διεπιφάνειες των κυλίνδρων αέρα και του μητρικού υλικού YIG. Τα στιγμιότυπα ταλάντωσης για τη μορφή I του πεδίου ανταλλαγής παρουσιάζουν μεγαλύτερα μέγιστα μαγνήτισης στις θέσεις των κοιλάδων. Στο στιγμιότυπο 2 (*mode 2*) για τη μορφή I του πεδίου ανταλλαγής (Σχ. 22), η μαγνήτιση στις θέσεις των κοιλάδων αποκτά μέτρο παρόμοιο με αυτό της μαγνήτισης στα μέγιστα ταλάντωσης. Η δεύτερη ζώνη στις σχέσεις διασποράς για τη μορφή I του πεδίου ανταλλαγής επηρεάζεται σε μεγαλύτερο βαθμό από τα σφάλματα των συνοριακών συνθηκών, όπως είναι φανερό και στα σχήματα 20, 21, αφού παρουσιάζει χειρότερη σύγκλιση από την πρώτη ζώνη για διαφορετικά M_s και N .



Σχήμα 22: Οι σχέσεις διασποράς των μαγνόνιων για τη διάταξη 2 με υλικό A τον αέρα και υλικό B το YIG. Δεξιά παρουσιάζονται τα στιγμιότυπα των τρόπων ταλάντωσης της μαγνήτισης για τις δύο πρώτες ζώνες στο κέντρο της πρώτης ζώνης Brillouin (σημείο Γ). Οι σχέσεις διασποράς και τα στιγμιότυπα παρουσιάζονται για τις μορφές II και I του πεδίου ανταλλαγής αντίστοιχα. Η αυθόρμητη μαγνήτιση του αέρα είναι M_s (10^6 A m^{-1}) = 100. Τα χαρακτηριστικά της διάταξης είναι $R = 5 \text{ nm}$, $\alpha = 60 \text{ nm}$, $d = 4 \text{ nm}$ και $\mu_0 H_0 = 0.1 \text{ T}$.

Τα συνοριακά σφάλματα παρουσιάζουν εξάρτηση από την ακτίνα του μη μαγνητικού κυλίνδρου που είναι εμβαπτισμένος σε YIG. Με την αύξηση της ακτίνας οι διεπιφάνειες μεταξύ των κυλίνδρων και του YIG μεγαλώνουν με αποτέλεσμα την ύπαρξη μεγαλύτερων σφαλμάτων στις συνοριακές συνθήκες και, όπως παρατηρήθηκε, οι σχέσεις διασποράς για τη μορφή II του πεδίου ανταλλαγής παρουσιάζουν καλύτερη σύγκλιση από αυτές για τη μορφή I. Το χάσμα που εμφανίζεται στις σχέσεις διασποράς μεταξύ των δύο ζωνών μελετάται για τη μορφή II του πεδίου ανταλλαγής λόγω της καλύτερης σύγκλισης. Στο σχήμα 23 παρουσιάζεται το εύρος του χάσματος ανάλογα με την τιμή της ακτίνας των κυλίνδρων και για πλεγματική σταθερά. Η τιμή του εύρους του χάσματος γίνεται μέγιστη για τιμή ακτίνας $R = 6 \text{ nm}$. Στις μεγαλύτερες τιμές της ακτίνας το χάσμα εξαφανίζεται και δεν μπορεί να μελετηθεί διότι η ακτίνα είναι αρκετά μεγάλη με αποτέλεσμα την εμφάνιση ισχυρών σφαλμάτων στις συνοριακές συνθήκες. Η επίδραση των συνοριακών σφαλμάτων είναι φανερή και στις τιμές της ακτίνας για $R = 7 \text{ nm}$ και $R = 8 \text{ nm}$ όπου το εύρος του χάσματος μειώνεται και παρουσιάζεται μία μικρή διακύμανση για τις δύο τιμές της ακτίνας.



Σχήμα 23: Η εξάρτηση του εύρους του χάσματος στη σχέση διασποράς των μαγνονίων για τη διάταξη 2 με υλικό A τον αέρα και υλικό B το YIG από την ακτίνα των κυλίνδρων. Η αυθόρμητη μαγνήτιση του αέρα είναι M_s (10^6A m^{-1}) = 100 και τα χαρακτηριστικά της διάταξης είναι $\alpha = 60 \text{ nm}$, $d = 4 \text{ nm}$ και $\mu_0 H_0 = 0.1 \text{ T}$.

Συμπεράσματα

Συνοπτικά στην εργασία αυτή μελετήσαμε τη διάδοση κυμάτων σπιν σε περιοδικά διαμορφωμένα μαγνητικά υλικά μέσω της επίλυσης της γραμμικής εξίσωσης κίνησης της μαγνήτισης Landau – Lifshitz με τη μέθοδο των επιπέδων κυμάτων και τη χρήση ανάλυσης Fourier για συγκεκριμένο ενεργό πεδίο που προκαλείται από διπολικές αλληλεπιδράσεις και αλληλεπιδράσεις ανταλλαγής. Αναπτύχθηκε κατάλληλος κώδικας σε matlab για τη λύση της εξίσωσης ιδιοτιμών της μαγνήτισης με τη δυνατότητα υπολογισμού των σχέσεων διασποράς για τη διάδοση των κυμάτων σπιν σε διδιάστατες περιοδικές δομές μαγνητικών υλικών. Μελετήθηκαν οι σχέσεις διασποράς των μαγνονίων για την κυματική διάδοση σε διδιάστατα περιοδικά συστήματα και λεπτά υμένα με περιοδική διαμόρφωση τοποθετημένα σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Η μέθοδος υπολογισμού της διάδοσης κυμάτων σπιν που μελετήσαμε είναι σχετικά απλή και μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για τη δυναμική σπιν σε νανοδομημένα υλικά, ενώ μπορεί να επεκταθεί εύκολα και να επιτρέψει τη μελέτη κυματοδηγών ή κοιλοτήτων συντονισμού με την τεχνική των υπερπλεγμάτων. Παρόλα αυτά, οι μέθοδοι επιπέδων κυμάτων έχουν περιορισμούς και εμφανίζουν προβλήματα σύγκλισης όταν τα υλικά έχουν μεγάλες διαφορές στις μαγνητικές σταθερές, όπως διαπιστώθηκε στην περίπτωση προσομοιώσεων που περιλαμβάνουν μαγνητικά και μη μαγνητικά υλικά.

Παράρτημα Α

Στο παρόν παράρτημα εξάγονται οι εξισώσεις που περιγράφουν τις συνιστώσες της μαγνήτισης στο επίπεδο $x - y$ (112), (113) για τη διάταξη 1 (Σχ. 9). Ο διπολικός όρος \mathbf{h} του ενεργού πεδίου (87) και η μαγνήτιση \mathbf{m} χρησιμοποιώντας την (91) και δεδομένου ότι είναι διδιάστατα διανύσματα που περιγράφονται από το διάνυσμα $\mathbf{X} = (x, y)$ στο επίπεδο, ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\nabla \cdot (\mathbf{h}(\mathbf{r}) + \mathbf{m}(\mathbf{r})) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(\mathbf{X}) - \left(\frac{\partial m_x(\mathbf{X})}{\partial x} + \frac{\partial m_y(\mathbf{X})}{\partial y} \right) = 0. \quad (144)$$

Λύνοντας την (144) και χρησιμοποιώντας τις αναπτύξεις Fourier (109) – (111) υπολογίζονται οι συντελεστές $\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j)$ του δυναμικού $\psi(\mathbf{X})$ για συγκεκριμένη κατεύθυνση \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sum_j \psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_j m_{x,\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_j m_{y,\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow - \sum_j \left[(q_x + G_{x,j})^2 + (q_y + G_{y,j})^2 \right] \psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} = \\ &\sum_j \left[i(q_x + G_{x,j}) m_{x,\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} + i(q_y + G_{y,j}) m_{y,\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \right] \Rightarrow \\ \psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j) &= -i \frac{(q_x + G_{x,j}) m_{x,\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j) + (q_y + G_{y,j}) m_{y,\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j)}{|\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2}. \end{aligned} \quad (145)$$

Αντικαθιστώντας τις (99) – (111) σε όλους τους όρους του αριστερού μέλους της (97) προκύπτουν:

✚ Ο πρώτος όρος:

$$i\Omega m_x(\mathbf{r}) = i\Omega m_x(\mathbf{X}) = i\Omega \sum_j m_{x,\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}}. \quad (146)$$

✚ Ο τρίτος όρος:

$$m_y(\mathbf{r}) = m_y(\mathbf{X}) = \sum_j m_{y,\mathbf{q}}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}}. \quad (147)$$

✚ Ο τέταρτος όρος:

$$\begin{aligned}
-\frac{M_s}{H_0} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial y} &= -\frac{M_s(\mathbf{X})}{H_0} \frac{\partial \psi(\mathbf{X})}{\partial y} = -\sum_m M_s(\mathbf{G}_m) e^{i\mathbf{G}_m \cdot \mathbf{X}} \frac{1}{H_0} \frac{\partial}{\partial y} \sum_j \psi_q(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} = \\
&= -\frac{i}{H_0} \sum_{m,j} (q_y + G_{y,j}) M_s(\mathbf{G}_m) \psi_q(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_m + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} = \\
&= -\frac{i}{H_0} \overline{M_s} \sum_j (q_y + G_{y,j}) \psi_q(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \\
&\quad - \frac{i}{H_0} \Delta M_s \sum_{\substack{m,j \\ \mathbf{G}_m \neq 0}} (q_y + G_{y,j}) F(\mathbf{G}_m) \psi_q(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_m + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}}.
\end{aligned}$$

Θέτοντας $j = l$ στο πρώτο άθροισμα και $\mathbf{G}_m + \mathbf{G}_j = \mathbf{G}_l$ στο δεύτερο άθροισμα:

$$\begin{aligned}
-\frac{M_s}{H_0} \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial y} &= -\frac{i}{H_0} \overline{M_s} \sum_l (q_y + G_{y,l}) \psi_q(\mathbf{G}_l) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) \cdot \mathbf{X}} \\
&\quad - \frac{i}{H_0} \Delta M_s \sum_{\substack{l,j \\ l \neq j}} F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \psi_q(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) \cdot \mathbf{X}}.
\end{aligned} \tag{148}$$

✚ Ο δεύτερος όρος:

$$\begin{aligned}
(\nabla Q \nabla + Q \nabla^2) m_y(\mathbf{r}) &= (\nabla Q(\mathbf{X}) \nabla + Q(\mathbf{X}) \nabla^2) m_y(\mathbf{X}) \\
&= \nabla Q(\mathbf{X}) \cdot \nabla m_y(\mathbf{X}) + Q(\mathbf{X}) \nabla^2 m_y(\mathbf{X}).
\end{aligned} \tag{149}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (149) γράφεται:

$$\begin{aligned}
\nabla Q(\mathbf{X}) \cdot \nabla m_y(\mathbf{X}) &= \sum_{\substack{m,j \\ \mathbf{G}_m \neq 0}} Q(\mathbf{G}_m) \nabla e^{i\mathbf{G}_m \cdot \mathbf{X}} \cdot \left(\sum_j m_{y,q}(\mathbf{G}_j) \nabla e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \right) = \\
&= i \sum_{\substack{m \\ \mathbf{G}_m \neq 0}} (G_{x,m} \hat{x} + G_{y,m} \hat{y}) Q(\mathbf{G}_m) e^{i\mathbf{G}_m \cdot \mathbf{X}} \cdot \left(i \sum_j [(q_{x,j} + G_{x,j}) \hat{x} + (q_{y,j} + G_{y,j}) \hat{y}] m_{y,q}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \right) \\
&= - \sum_{\substack{m,j \\ \mathbf{G}_m \neq 0}} [(q_{x,j} + G_{x,j}) G_{x,m} + (q_{y,j} + G_{y,j}) G_{y,m}] Q(\mathbf{G}_m) m_{y,q}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_m + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}}.
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\nabla Q(\mathbf{X}) \cdot \nabla m_y(\mathbf{X}) = -\Delta Q \sum_{\substack{m,j \\ \mathbf{G}_m \neq 0}} (\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{G}_m F(\mathbf{G}_m) m_{y,q}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_m + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}}. \quad (150)$$

Ο δεύτερος όρος της (149) γράφεται:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{X}) \nabla^2 m_y(\mathbf{X}) &= \bar{Q} \sum_j m_{y,q}(\mathbf{G}_j) \nabla^2 e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \\ &+ \left(\Delta Q \sum_{\substack{m \\ \mathbf{G}_m \neq 0}} F(\mathbf{G}_m) e^{i\mathbf{G}_m \cdot \mathbf{X}} \right) \left(\sum_j m_{y,q}(\mathbf{G}_j) \nabla^2 e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \right) \Rightarrow \\ Q(\mathbf{X}) \nabla^2 m_y(\mathbf{X}) &= -\bar{Q} \sum_j |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2 m_{y,q}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}} \\ &- \Delta Q \sum_{\substack{m,j \\ \mathbf{G}_m \neq 0}} |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2 F(\mathbf{G}_m) m_{y,q}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_m + \mathbf{G}_j) \cdot \mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (151)$$

Αθροίζοντας τις (150), (151) θέτοντας $j = l$ στο μονό άθροισμα και $\mathbf{G}_m + \mathbf{G}_j = \mathbf{G}_l$ στα διπλά αθροίσματα προκύπτει ο δεύτερος όρος του αριστερού μέλους της (97):

$$\begin{aligned} (\nabla Q(\mathbf{X}) \nabla + Q(\mathbf{X}) \nabla^2) m_y(\mathbf{X}) &= -\bar{Q} \sum_l |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2 m_{y,q}(\mathbf{G}_l) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) \cdot \mathbf{X}} \\ &- \Delta Q \sum_{\substack{l,j \\ l \neq j}} (\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) m_{y,q}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) \cdot \mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (152)$$

Αντικαθιστώντας τις (146), (147), (148) και (152) στην (97) προκύπτει:

$$\begin{aligned} i\Omega m_x(\mathbf{X}) &= -(\nabla Q(\mathbf{X}) \nabla + Q(\mathbf{X}) \nabla^2) m_y(\mathbf{X}) + m_y(\mathbf{X}) + \frac{M_s}{H_0} \frac{\partial \psi(\mathbf{X})}{\partial y} \Rightarrow \\ &i\Omega \sum_l m_{x,q}(\mathbf{G}_l) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) \cdot \mathbf{X}} = \\ &= \bar{Q} \sum_l |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2 m_{y,q}(\mathbf{G}_l) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) \cdot \mathbf{X}} + \Delta Q \sum_{\substack{l,j \\ l \neq j}} (\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) m_{y,q}(\mathbf{G}_j) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) \cdot \mathbf{X}} \\ &+ \sum_l m_{y,q}(\mathbf{G}_l) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) \cdot \mathbf{X}} + \frac{i}{H_0} \bar{M}_s \sum_l (q_y + G_{y,l}) \psi_q(\mathbf{G}_l) e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) \cdot \mathbf{X}} + \end{aligned}$$

$$+\frac{i}{H_0}\Delta M_s \sum_{\substack{l,j \\ l \neq j}} (q_y + G_{y,j})F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j)\psi_q(\mathbf{G}_j)e^{i(\mathbf{q}+\mathbf{G}_l)\cdot\mathbf{X}}.$$

Για να ισχύουν τα παραπάνω πρέπει οι συντελεστές ανάπτυξης σε σειρά Fourier να είναι ίσοι, οπότε:

$$\begin{aligned} i\Omega m_{x,q}(\mathbf{G}_l) &= \bar{Q}|\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2 m_{y,q}(\mathbf{G}_l) + \Delta Q \sum_{\substack{j \\ l \neq j}} (\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) m_{y,q}(\mathbf{G}_j) \\ &+ m_{y,q}(\mathbf{G}_l) + \frac{i}{H_0} \bar{M}_s (q_y + G_{y,l}) \psi_q(\mathbf{G}_l) + \frac{i}{H_0} \Delta M_s \sum_{\substack{j \\ l \neq j}} (q_y + G_{y,j}) F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \psi_q(\mathbf{G}_j). \end{aligned} \quad (153)$$

Αντικαθιστώντας την (145) στην (153) προκύπτει:

$$\begin{aligned} i\Omega m_{x,q}(\mathbf{G}_l) &= \frac{\bar{M}_s (q_x + G_{x,l})(q_y + G_{y,l})}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2} m_{x,q}(\mathbf{G}_l) + \\ &+ \left[1 + |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2 \bar{Q} + \frac{\bar{M}_s (q_y + G_{y,l})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2} \right] m_{y,q}(\mathbf{G}_l) + \\ &+ \sum_{\substack{j \\ l \neq j}} F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \left\{ \frac{\Delta M_s (q_x + G_{x,j})(q_y + G_{y,j})}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} m_{x,q}(\mathbf{G}_j) \right. \\ &\left. + \left[\Delta Q (\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) + \frac{\Delta M_s (q_y + G_{y,l})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} \right] m_{y,q}(\mathbf{G}_j) \right\}. \end{aligned} \quad (154)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την (98):

$$\begin{aligned} i\Omega m_{y,q}(\mathbf{G}_l) &= -\frac{\bar{M}_s (q_x + G_{x,l})(q_y + G_{y,l})}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2} m_{y,q}(\mathbf{G}_l) - \\ &- \left[1 + |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2 \bar{Q} + \frac{\bar{M}_s (q_x + G_{x,l})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_l|^2} \right] m_{x,q}(\mathbf{G}_l) - \\ &- \sum_{\substack{j \\ l \neq j}} F(\mathbf{G}_l - \mathbf{G}_j) \left\{ \frac{\Delta M_s (q_x + G_{x,j})(q_y + G_{y,j})}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} m_{y,q}(\mathbf{G}_j) \right. \\ &\left. + \left[\Delta Q (\mathbf{q} + \mathbf{G}_j) \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{G}_l) + \frac{\Delta M_s (q_x + G_{x,l})^2}{H_0 |\mathbf{q} + \mathbf{G}_j|^2} \right] m_{x,q}(\mathbf{G}_j) \right\}. \end{aligned} \quad (155)$$

Παράρτημα Β

Στο παρόν παράρτημα παρουσιάζονται οι κώδικες που αναπτύχθηκαν σε matlab και χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των σχέσεων διασποράς της διάδοσης των κυμάτων σπιν στις διατάξεις I, II αντίστοιχα.

α) Οι σχέσεις διασποράς για τη διάδοση των κυμάτων σπιν στη διάταξη I υπολογίστηκαν από τον κώδικα:

```
function [ C ] = VectorsPr1( ~ )
% (2*N+1)*(2*N+1) number of dots in lattice
% X (x,y) = ma + nb
% G (t,j) = m'g1 + n'g2
% plStath is the lattice constant
plStath = 500E-10;
v = 0; r = 0; qq = 0; ee = 0; ww = 0;
% choose the number of N
N = 1;
ax = plStath;
ay = 0;
bx = 0;
by = plStath;
g1x = (-2*pi*by)/(-ax*by+ay*bx);
g1y = (2*pi*bx)/(-ax*by+ay*bx);
g2x = (-2*pi*ay)/(-bx*ay+by*ax);
g2y = (2*pi*ax)/(-bx*ay+by*ax);
p = (2*N+1)*(2*N+1);
for m1 = -N:N
    for n1 = -N:N
        x = (m1*ax + n1*bx);
        y = (m1*ay + n1*by);
        z = abs(sqrt(x^2+y^2));
        v = v + 1;
        a( v ) = z;
        x0(v)= x;
        y0(v)= y;
    end
end
[B I] = sort(a);
x1 = x0(I);
y1 = y0(I);
fprintf('\ndirect lattice\n');
for i = 1:p
    fprintf('index = %d, x = %d, y = %d, metro = %d \n', i, x1(i), y1(i), B(i));
end
for m2 = -N:N
    for n2 = -N:N
        t = (m2*g1x + n2*g2x);
        j = (m2*g1y + n2*g2y);
        z = abs(sqrt(t^2+j^2));
        r = r + 1;
        q(r) = z;
        t0(r)= t;
        j0(r)= j
    end
end
```

```

end
end
[E, W] = sort(q);
g1j1 = t0(W)*plStath/(2*pi);
g2j1 = j0(W)*plStath/(2*pi);
fprintf('\nreciprocal lattice in 2pi units\n');
for c = 1:p
fprintf('index = %d, t = %.3f, j = %.3f, metro = %.3f \n', c, g1j1(c)/(2*pi),
g2j1(c)/(2*pi), E(c)/(2*pi));
end
% <M>mk = iùBmk
% lamda = 1 (S.I.), Ho is the magnetic field, mo is the vacuum permeability
and f is the filling fraction
lamda = 1.0; Ho = ((1.0E6)/(4*pi)); mo = 4*pi*(1.0E-7); f = 0.5;
% write below the magnetic constants of the materials
MsA = 1.752E6;
MsB = 1.910E6;
QA = 2*(2.1E-11)/(MsA*0.1);
QB = 2*(0.1E-11)/(MsB*0.1);
Qmeso = QA*f +QB*(1-f);
DQ = QA - QB;
MsMeso = MsA*f + MsB*(1-f);
DMs = MsA - MsB;
R = plStath*sqrt(f/pi);
% choose the increment of k at GXM direction
GXk11 = (0.0001:0.004:0.5);
GXk22(1:125) = 0.000;
XMk11(1:125) = 0.5;
XMk22 = (0.0001:0.004:0.5);
MGk11 = (-0.0001:-0.002:-0.5);
MGk22 = (-0.0001:-0.002:-0.5);
[ddd,nnn]=size(GXk11);
AllDotsx = [GXk11 XMk11 MGk11];
AllDotsy = [GXk22 XMk22 MGk22];
[dd,nn]=size(AllDotsx);
OO = lamda*DMs/Ho;
SS = DQ*((2*pi/plStath)^2);
Alfa = lamda*MsMeso/Ho;
Beta = Qmeso*((2*pi/plStath)^2);
for vv = 1:nn
    k1 = AllDotsx(vv);
    k2 = AllDotsy(vv);
    qq = qq + 1;
    k3(qq) = k1 + k2;
for m4 = 1:p
    g11 = g1j1(m4);
    g21 = g2j1(m4);
    metro1 = (((k1+g11)^2)+(k2+g21)^2);
    aux1 = (Alfa*(k1+g11)*(k2+g21)/metro1);
    aux2 = (1 + Beta*metro1 + Alfa*((k2+g21)^2)/metro1);
    aux3 = (-1 - Beta*metro1 - Alfa*((k1+g11)^2)/metro1);
Mxx(m4,m4) = aux1;
Mxy(m4,m4) = aux2;
Myx(m4,m4) = aux3;
    for m3 = 1:p
        if (m3 ~= m4)

```

```

    g1j = g1j1(m3);
    g2j = g2j1(m3);
    xb = (2*pi/plStath)*R*(sqrt(((g1l-g1j)^2)+(g2l-g2j)^2));
    j1B = besselj(1,xb)/xb;
metro2 = (((k1+g1j)^2)+(k2+g2j)^2);
aux4 = (j1B*OO*(k1+g1j)*(k2+g2j))/metro2;
aux5 = j1B*((OO*((k2+g2j)^2))/metro2 +
SS*(((k1+g1j)*(k1+g1l))+((k2+g2j)*(k2+g2l))));
aux6 = -j1B*((OO*((k1+g1j)^2))/metro2 +
SS*(((k1+g1j)*(k1+g1l))+((k2+g2j)*(k2+g2l))));
    Mxx(m4,m3) = aux4;
    Mxy(m4,m3) = aux5;
    Myx(m4,m3) = aux6;
        end
    end
end
Myy = -Mxx;
M = [Mxx Mxy; Myx Myy];
D = eig(M);
omega(qq,:) = real(D/li);
end
% choose excel files to save the data of k and omega
xlswrite('C:\Users\Costas\Desktop\k.xlsx', k3');
xlswrite('C:\Users\Costas\Desktop\omega.xlsx', omega);
plot(k3, omega, 'r.')
% choose axis borders for the matlab plot
axis([-1 1 0 350])
end

```

β) Οι σχέσεις διασποράς και τα στιγμιότυπα ταλάντωσης για τη διάδοση των κυμάτων στην διάταξη II υπολογίστηκαν από τον κώδικα:

```

function [ u ] = VectorsPr2FormIorIIorIII( ~ )
% (2*N+1)*(2*N+1) number of dots in lattice
% X (x,y) = ma + nb
% G (t,j) = m'g1 + n'g2
% plStath is the lattice constant
plStath = 6E-8;
v = 0; r = 0; qq = 0; ww = 0;
% choose the number of N
N = 1;
ax = plStath;
ay = 0;
bx = 0;
by = plStath;
g1x = (-2*pi*by)/(-ax*by+ay*bx);
g1y = (2*pi*bx)/(-ax*by+ay*bx);
g2x = (-2*pi*ay)/(-bx*ay+by*ax);
g2y = (2*pi*ax)/(-bx*ay+by*ax);
p = (2*N+1)*(2*N+1);
for m1 = -N:N
    for n1 = -N:N
        x = (m1*ax + n1*bx);
        y = (m1*ay + n1*by);
        z = abs(sqrt(x^2+y^2));
    end
end

```

```

v = v + 1;
a( v ) = z;
x0(v)= x;
y0(v)= y;
end
end
[B I] = sort(a);
x1 = x0(I);
y1 = y0(I);
fprintf('\ndirect lattice\n');
for i = 1:p
fprintf('index = %d, x = %d, y = %d, metro = %d \n', i, x1(i), y1(i), B(i));
end
for m2 = -N:N
for n2 = -N:N
t = (m2*g1x + n2*g2x);
j = (m2*g1y + n2*g2y);
z = abs(sqrt(t^2+j^2));
r = r + 1;
q( r ) = z;
t0(r)= t;
j0(r)= j;
end
end
[E, W] = sort(q);
g1j1 = t0(W);
g2j1 = j0(W);
fprintf('\nreciprocal lattice in 2pi units\n');
for c = 1:p
fprintf('index = %d, t = %.3f, j = %.3f, metro = %.3f \n', c, g1j1(c)/(2*pi),
g2j1(c)/(2*pi), E(c)/(2*pi));
end
% <M>mk = iùBmk
% gyroMagnet is the gyromagnetic ratio of electron, R is the radius of
cylinder, f is the filling fraction and
% m0Ho is the vacuum permeability multiplied by the magnetic field
gyroMagnet = 194.6E9; R = 5E-9; f = pi*(R/plStath)^2; m0Ho = 0.1; Barn =
gyroMagnet*m0Ho;
m0 = (2.21E5)/gyroMagnet; Ho = 0.1/m0;
% write below the magnetic constants of the materials
MsA = 100E6;
MsB = 0.1945E6;
Aa = 0.01E-11;
Ab = 0.4E-11;
IExA = 2*Aa/(MsA*m0);
IExB = 2*Ab/(MsB*m0);
Msij1 = f*(MsA - MsB) + MsB;
IExij1 = f*(IExA - IExB) + IExB;
% paxosPlak is the film width
paxosPlak = 4.0E-9;
% write 1 for modes
modes = 0;
% write the form 1 or 2 of the exchange field
form = 1;

k2 = 0;
for k1 = 0.0001:0.00509:0.5

```

```

qq = qq + 1;
% k11 is for the dispersion relations and k111 is for the modulus of
magnetization
k11(qq) = k1;
k111(qq) = k1;
for m4 = 1:p
    Gyi = g1j1(m4);
    Gzi = g2j1(m4);
    kronik1 = 1;
    Probl = 0;
Mexij1 = ((k1*2*pi/plStath+Gyi)^2 + (k2*2*pi/plStath+Gzi)^2)*IExij1/Ho;
metro1 = Ho*((k1*2*pi/plStath+Gyi)^2+(k2*2*pi/plStath+Gzi)^2);
CqGj1 = exp(-
sqrt((k1*2*pi/plStath+Gyi)^2+(k2*2*pi/plStath+Gzi)^2)*paxosPlak/2);
aux2 = kronik1 + Mexij1 + (k1*2*pi/plStath+Gyi)^2*Msij1*(1-CqGj1)/metro1 -
Probl;
aux3 = - kronik1 - Mexij1 - CqGj1*Msij1/Ho + Probl;
    Mxx(m4,m4) = 0;
    Myy(m4,m4) = 0;
    Mxy(m4,m4) = aux2;
    Myx(m4,m4) = aux3;
for m3 = 1:p
    if (m3 ~= m4)
        Gyj = g1j1(m3);
        Gzj = g2j1(m3);
        GR = R*sqrt((Gyi-Gyj)^2+(Gzi-Gzj)^2);
        j1B = besselj(1,GR)/GR;
Msij2 = 2*f*(MsA - MsB)*j1B;
IExij2 = 2*f*(IExA - IExB)*j1B;
CGiGj = exp(-sqrt((Gyi-Gyj)^2+(Gzi-Gzj)^2)*paxosPlak/2);
metro2 = Ho*((Gyi-Gyj)^2+(Gzi-Gzj)^2);
Probl1 = Msij2*(Gzi-Gzj)^2*(1-CGiGj)/metro2;
kronik2 = 0;
        if (form == 2)
            Mexij2 = ((k1*2*pi/plStath+Gyj)^2 + (k2*2*pi/plStath+Gzj)^2)*IExij2/Ho;
        end
        if (form == 1)
            Mexij2 = ((k1*2*pi/plStath+Gyj)*(k1*2*pi/plStath+Gyi) +
(k2*2*pi/plStath+Gzj) )*(k2*2*pi/plStath+Gzi))* IExij2/Ho;
        end
metro11 = Ho*((k1*2*pi/plStath+Gyj)^2+(k2*2*pi/plStath+Gzj)^2);
CqGj2 = exp(-
sqrt((k1*2*pi/plStath+Gyj)^2+(k2*2*pi/plStath+Gzj)^2)*paxosPlak/2);
aux4 = kronik2 + Mexij2 + ((k1*2*pi/plStath+Gyj)^2*Msij2*(1-CqGj2))/metro11 -
Probl1;
aux5 = - kronik2 - Mexij2 - CqGj2*Msij2/Ho + Probl1;
        Mxx(m4,m3) = 0;
        Myy(m4,m3) = 0;
        Mxy(m4,m3) = aux4;
        Myx(m4,m3) = aux5;
        end
    end
end
M = [Mxx Mxy; Myx Myy];
if (modes == 1)
[V,D] = eig(M);
omega(qq,:) = Barn*diag(D)/(2*pi*1i*(1.0E9));

```

```

    if (qq == 1)
D1 = Barn*diag(D)/(2*pi*1i*(1.0E9));
IdioanysmaG(1:2*p,:) = V;
[B1 I1] = sort(D1);
end
else
D = eig(M);
omega(qq,:) = Barn*D/(2*pi*1i*(1.0E9));
end
        end
k11(qq) = k1;
% choose the mode frequency
myfeq = 22;
if (modes == 1)
[m,idmyfeq] = min(abs(B1-myfeq))
end
% choose excel files to save the data of k and omega
xlswrite('C:\Users\Costas\Desktop\k.xlsx', k11');
xlswrite('C:\Users\Costas\Desktop\omega.xlsx', omega);
plot(k11, omega, 'r.')
axis([0 0.5 0 25])
%hold on
    if (modes == 1)
for nn = 1:2*p
IdioanysmaG2(1:2*p,nn) = IdioanysmaG(1:2*p,I1(nn));
end
mm = idmyfeq;
Vmm(1:2*p,:) = IdioanysmaG2(1:2*p,mm);
V1 = Vmm(1:p);
V2 = Vmm(p+1:2*p);
% choose the formulation of the mode with NN and Npoints
NN = 3; Npoints = 100;
[xx,yy] = meshgrid(-NN*p1Stath/2:NN*p1Stath/Npoints:NN*p1Stath/2,-
NN*p1Stath/2:NN*p1Stath/Npoints:NN*p1Stath/2);
[qqq,ccc]=size(xx);
for m5 = 1:p
m1X(:,:,m5) = V1(m5)*exp(1i*((g1j1(m5)+0)*xx + (g2j1(m5) + k2)*yy));
m2X(:,:,m5) = V2(m5)*exp(1i*((g1j1(m5)+0)*xx + (g2j1(m5) + k2)*yy));
end
m11X = sum(m1X,3)
m22X = sum(m2X,3);
Magn = sqrt((abs(m11X)).^2 + (abs(m22X)).^2);
surf(xx,yy,Magn)
end
end

```

Βιβλιογραφία

1. S. O. Demokritov and A. N. Slavin: *Magnonics: From Fundamentals to Applications* (Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2013).
2. T. Gorishnyy, M. Maldovan, C. Ullal and E. Thomas, *Physics World* **18**, 24 (2005).
3. J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. D. Winn and R. D. Meade: *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light* (Princeton University Press, Princeton, 2008).
4. R. L. Stamps, S. Breitzkreutz, J. Akerman, A.V Chumak, Y. Otani, G. E. W. Bauer, J. U. Thiele, M. Bowen, S. A. Majetich, M. Klaui, I. L. Prejbeanu, B. Dieny, N. M. Dempsey and B. Hillebrands, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **4**, 28 (2014).
5. Hirohata and K. Takanashi, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **47**, 19 (2014).
6. D. D. Stancil and A. Prabhakar: *Spin Waves: Theory and Applications* (Springer Science and Business Media, 2009).
7. H. Ibach and H. Luth: *Φυσική Στερεάς Κατάστασης: Εισαγωγή στις Αρχές της Επιστήμης των Υλικών* (Εκδόσεις Ζήτη, 2012).
8. Ν. Στεφάνου: *Ηλεκτρονική Δομή και Ιδιότητες της Υλης*, Σημειώσεις (eclass.uoa.gr/courses/PHYS.108/, Αθήνα).
9. D. J. Griffiths: *Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική* (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2011).
10. R. W. Damon and J. R. Eshbach, *J. Phys. Chem. Solids* **19**, 3 (1961).
11. J. O. Vasseur, L. Dobrzynski and B. Djafari – Rouhani, *Phys. Rev. B* **54**, 2 (1996).
12. M. Vohl, J. Barnas and P. Grunberg: *Phys. Rev. B* **39**, 16 (1989).
13. M. Krawczyk, M. L. Sokolovskyy, J. W. Klos and S. Mamica, *Adv. Cond. Matter Phys.* **2012**, 764783 (2012).
14. J. Kaczer, L. Murtinova, *Phys. Status solidi (a)* **23**, 79 (1974).

15. M. L. Sokolovskyy and M. Krawczyk, *J. Nanopart. Res.* **13**, 6085 (2011).
16. S. Neusser, G. Duerr, S. Tacchi, M. Madami, M. L. Sokolovskyy, G. Gubbiotti, M. Krawczyk and D. Grundler, *Phys. Rev. B* **84**, 9 (2011).