ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΠΙΚΛΙΝΕΣΤΑΤΗΣ ΚΑΘΟΔΟΥ ΣΕ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

21 Μαΐου 2018

Περίληψη

Ο λόγος που με οδήγησε στην ενασχόληση με την παρούσα διπλωματική εργασία είναι η σπουδαιότητα των ασυμπτωτικών μεθόδων στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Ορολογίες όπως μέθοδος του Laplace, λήμμα του Watson, μέθοδος επικλινέστατης καθόδου αποτελούσαν για μένα άγνωστες έννοιες.

Αλλά ας δούμε τι ακριβώς είναι η Ασυμπτωτική Ανάλυση. Μια πλήρης και αυστηρή απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι σχεδόν αδύνατη αφού δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί πλήρως. Έτσι η Ασυμπτωτική Ανάλυση, ως εξελισσόμενος κλάδος των Μαθηματικών δεν οριοθετείται από έναν πλήρη ορισμό. Ο μόνος τρόπος λοιπόν για το χαρακτηρισμό της Ασυμπτωτικής Ανάλυσης είναι να περιγράψουμε μερικούς στόχους που μπορεί να πετύχει και να δώσουμε μερικούς περιγραφικούς ορισμούς.

Όταν ο καθορισμός μιας συνάρτησης ή μιας λύσης μιας αλγεβρικής ή διαφορικής ή ολοκληρωτικής εξίσωσης με κλειστή αναλυτική μορφή είναι αδύνατος, τότε καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους. Υπάρχουν δυο τρόποι να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση. Ο ένας είναι να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τις τιμές, τις οποίες παίρνει σε διάφορα σημεία του πεδίου ορισμού της και αυτό χαρακτηρίζει την προσέγγιση ως ΄΄αριθμητική΄΄. Ο άλλος τρόπος είναι να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση που βρίσκεται πλησίον, με κάποια έννοια, στην προς υπολογισμό συνάρτηση και αυτό χαρακτηρίζει την προσέγγιση ως ΄΄αναλυτική΄΄. Οι μαθηματικές τεχνικές, οι οποίες στοχεύουν στον πρώτο τρόπο προσέγγισης συνιστούν το περιεχόμενο της Αριθμητικής Ανάλυσης. Αυτές που στοχεύουν στο δεύτερο τρόπο προσέγγισης συνιστούν το περιεχόμενο της Ασυμπτωτικής Ανάλυσης. Η τελική εφαρμογή της Αριθμητικής Ανάλυσης απαιτεί τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, ενώ η Ασυμπτωτική Ανάλυση απαίτει μεθόδους της κλασικής Μαθηματικής Ανάλυσης.

Ένας άλλος στόχος της Ασυμπτωτικής Ανάλυσης είναι η επιτάχυνση της σύγκλισης ορισμένων σειρών και είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι αυτό επιτυγχάνεται συχνά αντικαθιστώντας μια συγκλίνουσα με μια μη συγκλίνουσα σειρά. Με αφορμή τεχνικές αυτού του είδους μπορούμε να πούμε ότι με την Ασυμπτωτική Ανάλυση αντλούμε από τις αποκλείνουσες σειρές ότι καλό έχουν.

Στοιχεία τεχνικών Ασυμπτωτικής Ανάλυσης εμφανίζονται στη βιβλιογραφία από την εποχή του Euler και του Bernoulli. Αυτοί όμως, οι οποίοι οριοθέτησαν με αυστηρό τρόπο την περιοχή της Ασυμπτωτικής Ανάλυσης και έδωσαν τους πρώτους ορισμούς είναι οι Stieltjes και Poincare με δυο

ανεξάρτητες δημοσιεύσεις το 1886. Τεχνικές Ασυμπτωτικής Ανάλυσης έχουν αναπτυχθεί από τότε, προς διάφορες κατευθύνσεις, αλλά θεαματική ανάπτυξη παρουσιάζεται στις πρώτες δεκαετίες μετά το δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο.

Στην παρούσα εργασία, μεταξύ άλλων παρουσιάζεται η μέθοδος της επικλινέστατης καθόδου και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, τα οποία εμφανίζονται στις λύσεις των παραβολικών προβλημάτων διαφόρων τάξεων.

Η δομή των κεφαλαίων της παρούσας εργασίας είναι η ακόλουθη:

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται οι βασικές έννοιες και ορισμοί που εμφανίζονται στην Ασυμπτωτική Ανάλυση.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι ασυμπτωτικές τεχνικές της παραγοντικής ολοκλήρωσης, το Λήμμα του Watson και η μέθοδος του Laplace.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος τη Επικλινέστατης Καθόδου και αυτή εφαρμόζεται για την προσέγγιση των ολοκληρωμάτων τύπου Laplace, δηλαδή ολοκληρωμάτων τα οποία έχουν συγκεκριμένη μορφή.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται επίλυση της εξίσωσης της θερμότητας με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier και η προσέγγιση του ολοκληρώματος, το οποίο προκύπτει στη λύση αυτής, με τη μέθοδο της επικλινέστατης καθόδου.

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο προσεγγίζουμε με την παραπάνω μέθοδο τα ολοκληρώματα της λύσης, τα οποία προκύπτουν από τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier σε παραβολικά προβλήματα ανώτερης τάξης και δίνουμε ένα παράδειγμα για την περιπτώση της εξίσωσης τάξης $2m$.

Κλείνοντας αυτή τη σύντομη περίληψη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Γεράσιμο Μπαρμπάτη, αφενός για τη δυνατότητα επιλογής από εμένα της συγκεκριμένης ενδιαφέρουσας εργασίας και αφετέρου για την αμέριστη βοήθεια και συμπαράσταση που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της συγγραφής της. Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω εξίσου, τα μέλη της επιτροπής παρακολούθησης της παρούσας εργασίας, καθηγητές κ. Ιωάννη Στρατή και κ. Απόστολο Γιαννόπουλο για τον πολύτιμο χρόνο τον οποίον αφιέρωσαν για τη μελέτη της παρούσας εργασίας καθώς και για τις καίριες παρατηρήσεις τους για την ολοκλήρωσης της. Εδώ δε θα μπορούσα να μην αναφερθώ στους καθηγητές του Τομέα Ανάλυσης του Τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (ΕΚΠΑ), οι οποίοι μου παρείχαν πληθώρα καινούργιων πραγμάτων και εννοιών κατά τη διάρκεια των παραδόσεων των δέκα μαθημάτων, τα οποία παρακολούθησα στο πλαίσιο της ολοκλήρωσης του μεταπτυχιακού μου στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά στο παραπάνω Τμήμα.

Επιπλέον θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένεια μου, τη σύζυγο μου Μερόπη και τους υιούς μου Παύλο και Κωνσταντίνο,

οι οποίοι μου συμπαραστάθηκαν κατά τη διάρκεια της φοίτησης μου στο παραπάνω μεταπτυχιακό πρόγραμμα.

Τέλος την παρούσα διπλωματική εργασία αφιερώνω στη μητέρα μου, Δέσποινα, η οποία πολλά χρόνια πριν μου έκανε κατανοητό τον τρόπο με τον οποίο τα Μαθηματικά μελετώνται και στην καλή μου φίλη Κατερίνα, η οποία δυστυχώς έφυγε νωρίς.

Στέφανος Π. Παπαδόπουλος

Abstract

This thesis which has been produced as part of the completion of my graduate studies in the Department of Mathematics of the National and Kapodistrian University of Athens, has as main aim to introduce the implementation of the Method of Steepest Descents in parabolic problems of higher order.

The above method is an important tool of the Asymptotic analysis in the approach of asymptotic expansions of functions defined by integrals. Asympotic analysis is that branch of mathematics devoted to the study of the behavior of functions in patricular limits of interest.

This thesis comprises of the following chapters:

Initially, in chapter one, we mention some relations which are commonpalce in the Asymptotic analysis. In the second chapter we study the Watson lemma and the Laplace method with which we are able to calculate the asympotic expansions of some functions defined by integrals and are known as Laplace integrals. The third chapter is devoted to the Method of Steepest Descents and its implementation to approach the Laplace integrals. Subsequently in the fourth chapter we solve the heat equation applying the Fourier Transform. Finally in the last chapter we apply the Fourier Transform in parabolic problems of higher order, we end up in one type of integral which we can approach with the aid of the Method of Steepest Descents and we present the result in case of $2m$ order equation.

Stephanos P. Papadopoulos

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικοί Ορισμοί της Ασυμπτωτικής Ανάλυσης

1.1 Σχέσεις Ασυμπτωτικής Διάταξης

Ξεκινώντας την παρούσα διπλωματική εργασία θα δώσουμε έναν αριθμό σχέσεων, οι οποίες συναντώνται ευρέως στην Ασυμπτωτική Ανάλυση. Με τις σχέσεις αυτές μπορούμε να συγκρίνουμε ταχύτητες σύγκλισης διαφόρων συναρτήσεων καθώς πλησιάζουμε σε ένα σημείο.

1.1.1 Μεγάλο Όμικρον

Έστω οι μιγαδικές συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, οι οποίες ορίζονται σε κάποιο υποσύνολο D του μιγαδικού επιπέδου και z_o σημείο του μιγαδικού επιπέδου ή το άπειρο. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι μεγάλο όμικρον της συναρτησης $g(z)$ καθώς το z τείνει στο z_o, όταν υπάρχει θετικός αριθμός A και μία περιοχή U του z_o, έτσι ώστε να ισχύει:

$$|f(z)| \leq A|g(z)| \tag{1.1}$$

για κάθε $z \in U$. Συμβολικά η παραπάνω ανισότητα γράφεται όπως παρακάτω:

$$f(z) = O(g(z)), \qquad z \to z_o. \tag{1.2}$$

1.1.2 Μικρό Όμικρον

Έστω οι μιγαδικές συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, οι οποίες ορίζονται σε κάποιο υποσύνολο D του μιγαδικού επιπέδου και z_o σημείο του μιγαδικού επιπέδου ή το άπειρο. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι μικρό όμικρον της συναρτησης $g(z)$ καθώς το z τείνει στο z_o, όταν για κάθε $e > 0$, υπάρχει μια περιοχή U_e του z_o τέτοια ώστε να ισχύει:

$$|f(z)| \leq e|g(z)| \tag{1.3}$$

για κάθε $z \in U_e$. Συμβολικά η παραπάνω ανισότητα γράφεται όπως παρακάτω:

$$f(z) = o(g(z)), \qquad z \to z_o. \tag{1.4}$$

Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $g(z)$ δε μηδενίζεται στην περιοχή U, η οποία είναι υποσύνολο της περιοχής D, δηλαδή $U \subset D$, τότε είναι προφανές ότι ο πρώτος ορισμός, μεγάλο όμικρον, είναι ισοδύναμος με την παρακάτω σχέση:

$$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq A, \qquad z \in U \tag{1.5}$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(z)/g(z)$ είναι φραγμένη στην περιοχή U.

Επιπρόσθετα από τον δεύτερο ορισμό, μικρό όμικρον, προκύπτει η παρακάτω σχέση, εάν θεωρήσουμε ξανά ότι η συνάρτηση $g(z)$ δε μηδενίζεται στην περιοχή U_e:

$$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq e, \qquad z \in U_e \tag{1.6}$$

για κάθε για κάθε $e > 0$, που σημαίνει ότι:

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{g(z)} = 0. \tag{1.7}$$

Επομένως εάν μία συντάρτηση $f(z)$ είναι:

- Μεγάλο όμικρον της συνάρτησης $g(z)$ δε μεγαλώνει γρηγορότερα από τη συνάρτηση $g(z)$ στην περιοχή του z_o και καθώς $z \to z_o$.

- Μικρό όμικρον της συνάρτησης $g(z)$ τότε η $f(z)$ μικραίνει ταχύτερα από την $g(z)$ καθώς $z \to z_o$.

Στη συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό της ασυμπτωτικά ισοδύναμης ή ισοδύναμης συνάρτησης $f(z)$ με τη συνάρτηση $g(z)$ και της ασυμπτωτικής ακολουθίας.

1.1.3 Ασυμπτωτικά Ισοδύναμη ή Ισοδύναμη συνάρτηση

Η $f(z)$ θα λέμε ότι είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμη ή ισοδύναμη με τη συνάρτηση $g(z)$ αν ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{g(z)} = 1. \tag{1.8}$$

Η παραπάνω σχέση παριστάνεται με τον εξής συμβολισμό:

$$f(z) \sim g(z), \qquad z \to z_o.$$

1.1.4 Ασυμπτωτική ακολουθία

Μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n(z)$, όπου $n = 1, 2, ...$ ονομάζεται ασυμπτωτική ακολουθία καθώς $z \to z_o$ αν για όλα τα n ισχύει:

$$f_{n+1}(z) = o(f_n(z)), \qquad z \to z_o \tag{1.9}$$

ή ισοδύναμα αν για κάθε n με $f_n(z) \neq 0$, ισχύει ότι:

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} = 0. \tag{1.10}$$

Σε αυτό το σημείο δίνουμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα ασυμπτωτικών ακολουθιών:

$$(z - z_o)^n, \quad z \to z_o, \quad n = 1, 2, ...$$

και

$$e^z z^{-a_n}, \qquad z \to \infty$$

με

$$a_n \in \mathbb{R}, \quad a_{n+1} > a_n, \quad n = 1, 2, ...$$

1.2 Ασυμπτωτικό ανάπτυγμα ή ασυμπτωτική προσέγγιση συνάρτησης

Έστω $f_n(z)$, όπου $n = 1, 2, ...$ μια ασυμπτωτική ακολουθία συναρτήσεων καθώς $z \to z_o$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(z)$ λέγεται ασυμπτωτικό ανάπτυγμα ή ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης $f(z)$ εαν $\forall n$ ισχύει:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(z) + o(f_N(z)), \qquad z \to z_o \tag{1.11}$$

ή ισοδύναμα:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n f_n(z) + O(f_N(z)), \qquad z \to z_o. \tag{1.12}$$

1.3 Κυρίαρχος όρος ασυμπτωτικού αναπτύγματος

Εάν η $f(z)$ έχει ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, δηλαδή εάν ισχύει η σχεσή (1.11) τότε τα a_n καθορίζονται με τον ακόλουθο μοναδικό τρόπο:

$$f(z) = a_1 f_1(z) + o(f_1(z))$$

ή

$$a_1 = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{f_1(z)}$$

όμοια για τον όρο a_2 ισχύει:

$$a_2 = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - a_1 f_1(z)}{f_2(z)}$$

και τελικά για τον a_N έχουμε:

$$a_N = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n f_n(z)}{f_N(z)}. \tag{1.13}$$

Ορισμός 1.1 Ο πρώτος μη-μηδενικός όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος της συνάρτησης $f(z)$, δηλαδή της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(z)$ ονομάζεται κυριάρχος όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος. Τότε γραφουμε εάν π.χ έχουμε ότι $a_1 \neq 0$:

$$f(z) \sim a_1 f_1(z), \qquad z \to z_o.$$

1.4 Ασυμπτωτικές δυναμοσειρές

Είπαμε στο τέλος της παραγράφου 1.1 του παρόντος Κεφαλαίου ότι ένα παράδειγμα ασυμπτωτικής ακολουθίας, η οποία και συναντάται συχνά είναι το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα μιας αναλυτικής συνάρτησης, δηλαδή το εξής:

$$(z - z_o)^n, \quad z \to z_o, \quad n = 1, 2, ...$$

Θεωρώντας ότι το z_o είναι το άπειρο τότε ένα άλλο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα θα είναι της μορφής:

$$f(z) \sim g(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \qquad z \to \infty \tag{1.14}$$

Ορισμός 1.2 Ασυμπτωτικά αναπτύγματα της παραπάνω μορφής ονομάζονται ασυμπτωτικές δυναμοσειρές.

Κεφάλαιο 2

Ολοκληρώματα με πραγματική παράμετρο

2.1 Η Εκθετική συνάρτηση $E_i(x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{-1}\, \mathrm{d}t$

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, δηλαδή την εκθετική συνάρτηση. Όπως εύκολα προκύπτει το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς και επομένως θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την εκθετική συνάρτηση με μια άλλη συνάρτηση.

Αν θεωρήσουμε ότι $x > 0$ και αρκετά μεγάλο και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\begin{aligned} E_i(x) &= \int_x^\infty e^{-t} t^{-1}\, \mathrm{d}t = -\int_x^\infty \left(e^{-t}\right)' t^{-1}\, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^\infty e^{-t} t^{-2}\, \mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2\int_x^\infty e^{-t} t^{-3}\, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.1}$$

συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία και θεωρώντας ότι $x \to \infty$, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} E_i(x) = e^{-x} \left[\frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} \right] + \\ + (-1)^n n! \int_x^\infty e^{-t} t^{-(n+1)}\, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Για τη μελέτη της παραπάνω σχέσης θέτουμε:

$$s_n(x) = e^{-x} \left[\frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} \right] \tag{2.3}$$

και

$$r_n(x) = (-1)^n n! \int_x^{\infty} e^{-t} t^{-(n+1)} \, \mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

Το $s_n(x)$ ονομάζεται μερικό άθροισμα και το $r_n(x)$ ονομάζεται υπόλοιπο του υπολογισθέντος ολοκληρώματος.

Επιπρόσθετα το μερικό άθροισμα είναι αποκλίνουσα σειρά για δεδομένο x αφού από το κρίτηριο του λόγου (κριτήριο D' Alembert) η παρακάτω σχέση πάει στο άπειρο, όταν $n \to \infty$ και x σταθερό αφού εύκολα προκύπτει ότι:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{x}$$

Για το υπόλοιπο του ολοκληρώματος ισχύει λαμβάνοντας υπόψη τις παρακάτω ανισότητες για τη μεταβλητή t:

$$t > x > 1 \Rightarrow \frac{1}{t} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{t^{n+1}} < \frac{1}{x^{n+1}}$$

και επομένως αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στο υπόλοιπο του ολοκληρώματος εχουμέ:

$$r_n(x) < (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}} \int_x^{\infty} e^{-t} dt = \frac{(-1)^n n! e^{-x}}{x^{n+1}}.$$

Υποθέτωντας τώρα ότι στην παραπάνω σχέση το n είναι σταθερό και το x είναι αρκετά μεγάλο παίρνουμε ότι:

$$\frac{(-1)^n n! e^{-x}}{x^{n+1}} \to 0.$$

Αντιθέτως στην περίπτωση κατά την οποία το n δεν είναι πεπερασμένο, αλλά $n \to \infty$, το υπόλοιπο του ολοκληρώματος $r_n(x)$ είναι μη φραγμένο και επομένως δεν μπορούμε να δρούμε μια προσέγγιση της $E_i(x)$.

Έχουμε επομένως καταλήξει ότι άν το n είναι πεπερασμένο και το x ικανοποιητικά μεγάλο το μερικό άθροισμα $s_n(x)$ είναι μία καλή προσέγγιση της $E_i(x)$ και τότε μπορούμε να γράφουμε ότι:

$$E_i(x) \sim e^{-x} \left[\frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + ... \right], \qquad x \to \infty. \tag{2.5}$$

Εκμεταλλευόμενοι τώρα τα όσα αναφέραμε στην παράγραφο 1.2 μπορούμε να πούμε ότι το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της $E_i(x)$ καθώς το $x \to \infty$.

2.1.1 Το βέλτιστο n της παραπάνω διαδικασίας

Το ερώτημα, το οποίο προκύπτει τώρα, εφόσον το n είναι δεδομένο, είναι ποιο είναι το βέλτιστο n για το οποίο το $s_n(x)$ προσεγγίζει καλύτερα την $E_i(x)$, για δεδομένο x. Για μεγάλα x, οι όροι του μερικού αθροίσματος αρχικά μειώνονται, όμως για κάποιο n, έστω N, αυτό αντιστρέφεται εφόσον ο νιοστός όρος του μερικού αθροίσματος:

$$(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!e^{-x}}{x^n}$$

τείνει στο άπειρο όταν $n \to \infty$.

Το βέλτιστο n για να επιτευχθεί η καλύτερη δυνατή προσέγγιση της $E_i(x)$ από το $s_n(x)$ είναι αυτό για το οποίο ο επόμενος όρος γίνεται μεγαλύτερος από τον προηγούμενο.

2.2 Το Λήμμα του Watson

Το Λήμμα του Watson είναι ένας άμεσος τρόπος για να προσεγγίζουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$I(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \to \infty. \tag{2.6}$$

Ορισμός 2.1 Ολοκληρώματα της παραπάνω μορφής, σχέση (2.6), ονομάζονται ολοκληρώματα Laplace.

Στα ολοκληρώματα Laplace η $f(t)$ είναι απείρως παραγωγίσιμη και για κάθε παράγωγο της ισχύει ότι:

$$f^{(n)}(t) = O(e^{at}), \qquad t \geq 0. \tag{2.7}$$

Πριν από τη διατύπωση και απόδειξη του παραπάνω Λήμματος θα υπολογίσουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της ατελούς συνάρτησης Γάμμα, το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε στην παραπάνω απόδειξη.

2.2.1 Η ατελής συνάρτηση Γάμμα και η συνάρτηση Γάμμα

Η ατελής συνάρτηση Γάμμα δίνεται από τον τύπο:

$$\gamma(a,x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\,\mathrm{d}t, \qquad a, x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.8}$$

και η συνάρτηση Γάμμα από τον τύπο:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1}\,\mathrm{d}t, \qquad a \in \mathbb{R}^+. \tag{2.9}$$

Υπενθυμίζουμε ότι για τη συνάρτηση Γάμμα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \qquad a \in \mathbb{R}^+ \tag{2.10}$$

και

$$\Gamma(m+1) = m!, \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{2.11}$$

Έαν τώρα αναπτύξουμε στην ατελή συνάρτηση Γάμμα, τη συνάρτηση e^{-t} σε σειρά Taylor θα έχουμε:

$$\gamma(a,x) = \int_0^x \left[1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + ...\right] t^{a-1}\,\mathrm{d}t \tag{2.12}$$

και ολοκληρώνοντας κάθε όρο ξεχωριστά εύκολα προκύπτει ότι:

$$\gamma(a,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(a+n)n!}. \tag{2.13}$$

Απο το κριτήριο D' Alembert έχουμε ότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει για κάθε $x > 0$ εφόσον:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a+n}{(a+n+1)(n+1)} x \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Άρα μπορούμε να προσεγγίσουμε την ατελή συνάρτηση Γάμμα εκμεταλλευόμενοι την παραπάνω ασυμπτωτική δυναμοσειρά όταν $x \to 0$.

Όσο το x αυξάνει τόσο η παραπάνω δυναμοσειρά γίνεται λιγότερο χρήσιμη εφόσον δεν προσεγγίζει ικανοποιητικά την άτελη συνάρτηση Γάμμα. Μένει επομένως να δώσουμε μια απάντηση στο ερώτημα:

- Πώς θα προσεγγίζουμε την ατελή σύνάρτηση Γάμμα για μεγάλα x;

Για μεγάλα x μπορούμε να δουλέψουμε με τον εξής τρόπο:

$$\gamma(a,x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1}\,\mathrm{d}t - \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(a) - E_{i(1-a)}(x) \tag{2.14}$$

όπου για την προσέγγιση της $E_{i(1-a)}(x)$ με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε:

$$\begin{aligned} E_{i(1-a)}(x) &= -\int_x^\infty (e^{-t})' t^{a-1}\,\mathrm{d}t = \\ &= e^{-x}x^{a-1} + (a-1)\int_x^\infty e^{-t}t^{a-2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.15}$$

συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο έχουμε:

$$\begin{aligned} E_{i(1-a)}(x) = e^{-x}\left[x^{a-1} + (a-1)x^{a-2} + ... + (a-1)(a-2)...(a-N+1)x^{a-N}\right] + \\ +(a-1)(a-2)...(a-N)\int_x^\infty e^{-t}t^{a-N-1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Για N σταθερό και συγκεκριμένα $N > a-1$, έχουμε:

$$\left|\int_x^\infty e^{-t}t^{a-N-1}\,\mathrm{d}t\right| < x^{a-N-1}\int_x^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = x^{a-N-1}e^{-x}.$$

Όμως ισχύει ότι:

$$(x^{a-N-1}e^{-x}) = o(x^{a-N}e^{-x}), \qquad x \to \infty$$

και επομένως έχουμε ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για το $E_{i(1-a)}(x)$ αφού αποδείξαμε ότι:

$$E_{i(1-a)}(x) = e^{-x}x^a \sum_{n=1}^{n=N} \frac{(a-1)(a-2)...(a-n-1)}{x^n} + o(x^{a-N}e^{-x}) \tag{2.17}$$

καθώς $x \to \infty$.

Καταλήγουμε τότε στο παρακάτω αποτέλεσμα κάνοντας αντικατάσταση της σχέσης (2.17) στη σχέση (2.14):

$$\gamma(a,x) \sim \Gamma(a) - e^{-x}x^a\left[\frac{1}{x} + \frac{(a-1)}{x^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{x^3} + ...\right]. \tag{2.18}$$

2.2.2 Διατύπωση και Απόδειξη του Λήμματος του Watson

Έστω ότι η $f(t)$ στον ορισμό του ολοκληρώματος Laplace $I(x)$, σχέση (2.6), είναι της μορφής $t^\lambda g(t)$ τότε το Λήμμα του Watson διατυπώνεται ως εξής:

Λήμμα 2.1 *(Λήμμα του Watson)*

Θεωρούμε ότι η συνεχής συνάρτηση $g(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor σε μια περιοχή του μηδενός και $g(0) \neq 0$. Αν $\lambda > -1$ και $T > 0$, τότε έχουμε ότι:

$$\int_0^T e^{-xt} t^\lambda g(t)\, \mathsf{d}t \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(\lambda+n+1) x^{-(\lambda+n+1)}, \qquad x \to \infty \tag{2.19}$$

με

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}.$$

Απόδειξη

Αναζητούμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της συνάρτησης:

$$I(x) = \int_0^T e^{-xt} t^\lambda g(t)\, \mathsf{d}t, \quad x \to \infty, \quad T > 0 \tag{2.20}$$

και αφού η $g(t)$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor σε περιοχή του μηδενός τότε αυτή γράφεται:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n(0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{n=N} \frac{g^n(0)}{n!} t^n + r_N(t) \tag{2.21}$$

όπου

$$r_N(t) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{g^n(0)}{n!} t^n. \tag{2.22}$$

Επιπλέον για $|t| < R$, όπου R η ακτίνα συγκλισης της σειράς ισχύει:

$$|r_N(t)| < Lt^{N+1} \tag{2.23}$$

για κατάλληλο L. Θεωρώντας ότι $T < R$ και αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $g(t)$ έχουμε:

$$I(x) = \int_0^T e^{-xt} t^\lambda \sum_{n=0}^{n=N} a_n t^n\, \mathsf{d}t + \int_0^T e^{-xt} t^\lambda r_N(t)\, \mathsf{d}t. \tag{2.24}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.23) έχουμε για το δεύτερο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης ότι:

$$\left| \int_0^T e^{-xt} t^\lambda r_N(t)\, \mathsf{d}t \right| < L \int_0^T e^{-xt} t^\lambda t^{N+1}\, \mathsf{d}t \tag{2.25}$$

Για τον υπολογισμό της προσέγγισης του δεύτερου ολοκληρώματος της παραπάνω ανισότητας κάνουμε την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής:

$$\tau = xt \Rightarrow \mathsf{d}\tau = x\,\mathsf{d}t \tag{2.26}$$

και επομένως για τα όρια ολοκλήρωσης ισχύει:

$$t = 0 \Rightarrow \tau = 0, \qquad t = T \Rightarrow \tau = xT$$

και τελικά έχουμε κάνοντας τις παραπάνω αντικαταστάσεις:

$$\begin{aligned} L\int_0^T e^{-xt}t^{\lambda+N+1}\,\mathsf{d}t &= L\int_0^{xT} e^{-\tau}\frac{\tau^{\lambda+N+1}}{x^{\lambda+N+2}}\,\mathsf{d}\tau = \\ &= Lx^{-(\lambda+N+2)}\int_0^{xT} e^{-\tau}\tau^{\lambda+N+1}\,\mathsf{d}\tau = \\ &= Lx^{-(\lambda+N+2)}\left[\int_0^{\infty} e^{-\tau}\tau^{\lambda+N+1}\,\mathsf{d}\tau - \int_{xT}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{\lambda+N+1}\,\mathsf{d}\tau\right] = \\ &= Lx^{-(\lambda+N+2)}\left[\Gamma(\lambda+N+2) - \int_{xT}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{\lambda+N+1}\,\mathsf{d}\tau\right] \end{aligned} \tag{2.27}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα, η οποία δίνεται από τη σχέση (2.9).

Για τον υπολογισμό τώρα της προσέγγισης του ολοκληρώματος:

$$Lx^{-(\lambda+N+2)}\int_{xT}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{\lambda+N+1}\,\mathsf{d}\tau$$

κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$\tau = xT(1+u) \Rightarrow \mathsf{d}\tau = xT\,\mathsf{d}u \tag{2.28}$$

και επομένως για τα όρια ολοκλήρωσης ισχύει:

$$\tau = xT \Rightarrow u = 0, \qquad \tau = \infty \Rightarrow u = \infty$$

άρα με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &Lx^{-(\lambda+N+2)}\int_{xT}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{\lambda+N+1}\,\mathsf{d}\tau = \\ &= Lx^{-(\lambda+N+2)}\int_0^{\infty} e^{-xT(1+u)}\left(xT(1+u)\right)^{\lambda+N+1}xT\,\mathsf{d}u = \end{aligned}$$

$$= LT^{\lambda+N+2}e^{-xT}\int_0^{\infty} e^{-xTu}(1+u)^{\lambda+N+1}\,\mathsf{d}u. \tag{2.29}$$

Όμως για κάθε $u>0$ ισχύει $1+u<e^u$ άρα έχουμε:

$$\int_0^{\infty} e^{-xTu}(1+u)^{\lambda+N+1}\,\mathsf{d}u < \int_0^{\infty} e^{-xTu}e^{u(\lambda+N+1)}\,\mathsf{d}u \tag{2.30}$$

και επιπλέον με την εκτέλεση πράξεων παίρνουμε:

$$\int_0^{\infty} e^{-xTu}e^{u(\lambda+N+1)}\,\mathsf{d}u = \int_0^{\infty} e^{-xTu}e^{-u(-\lambda-N-1)}\,\mathsf{d}u =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-u(xT-\lambda-N-1)}\,\mathsf{d}u = \frac{1}{xT-(\lambda+N+1)} =$$

$$= \frac{1}{xT}\frac{1}{1-\left[\frac{\lambda+N+1}{xT}\right]} = \frac{1}{xT}\left[1+\frac{\lambda+N+1}{xT}+...\right]. \tag{2.31}$$

Επομένως έχοντας υποθέσει ότι $xT>\lambda+N+1$ καταλήξαμε στην παρακάτω σχέση:

$$\int_0^{\infty} e^{-xTu}e^{u(\lambda+N+1)}\,\mathsf{d}u \sim \frac{1}{xT} \tag{2.32}$$

και τελικά με αντικατάσταση στη σχέση (2.29) προκύπτει ότι :

$$Lx^{-(\lambda+N+2)}\int_{xT}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{\lambda+N+1}\,\mathsf{d}\tau \sim LT^{(\lambda+N+2)}e^{-xT}\frac{1}{xT} =$$

$$= LT^{(\lambda+N+1)}e^{-xT}\frac{1}{x} = o(e^{-xT}), \qquad x\to\infty. \tag{2.33}$$

Έχουμε επομένως βρεί ότι:

$$\int_0^{T} e^{-xt}t^{\lambda+N+1}\,\mathsf{d}t \sim x^{-(\lambda+N+2)}\Gamma(\lambda+N+2)+o(e^{-xT}) =$$

$$= x^{-(\lambda+N+2)}\Gamma(\lambda+N+2)+o(x^{-(\lambda+N+2)}), \qquad x\to\infty \tag{2.34}$$

Από την τελευταία σχέση και την ανισότητα, σχέση (2.25), έχουμε αποδείξαμε ότι:

$$\int_0^{T} e^{-xt}t^{\lambda}r_N(t)\,\mathsf{d}t = O(x^{-(\lambda+N+2)}), \qquad x\to\infty. \tag{2.35}$$

Άρα έχουμε αποδείξει ότι για κάθε N ισχύει:

$$\int_0^T e^{-xt} t^{\lambda} \sum_{n=0}^{n=N} a_n t^n \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{n=N} a_n \int_0^T e^{-xt} t^{(\lambda+n)} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=0}^{n=N} a_n \left[\int_0^{\infty} e^{-xt} t^{(\lambda+n)} \, \mathrm{d}t - \int_T^{\infty} e^{-xt} t^{(\lambda+n)} \, \mathrm{d}t \right] \sim$$

$$\sim \sum_{n=0}^{n=N} a_n \Gamma(\lambda+n+1) x^{-(\lambda+n+1)} + o(x^{-(\lambda+n+1)}), \qquad x \to \infty. \tag{2.36}$$

Επομένως βρήκαμε ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για την $I(x)$ για όλα τα N και συγκεκριμένα:

$$I(x) = \int_0^T e^{-xt} t^{\lambda} g(t) \, \mathrm{d}t \sim \sum_{n=0}^{n=N} a_n \Gamma(\lambda+n+1) x^{-(\lambda+n+1)} + o(x^{-(\lambda+n+1)}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(\lambda+n+1) x^{-(\lambda+n+1)}, \quad x \to \infty, \quad T > 0 \tag{2.37}$$

με

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

και έτσι έχουμε αποδείξει το Λήμμα του Watson.

2.3 Η Μέθοδος του Laplace

Στην παράγραφο αυτή, με τη βοήθεια του Λήμματος του Watson, θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int_0^T g(t) e^{xh(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Ας δούμε αρχικά μια γενική περίπτωση. Έστω ότι σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος:

$$\int_a^b f(x,t) dt, \qquad -\infty \leq a < b \leq \infty \tag{2.38}$$

όπου η $f(x,t)$ είναι συνάρτηση με μια παράμετρο x.

Είναι εύκολα κατανοητό ότι η μέγιστη συνεισφορά κατά τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος προέρχεται από τις περιοχές στις οποίες η $f(x,t)$ παρουσιάζει μέγιστο. Εάν η συνεισφορά αυτή αυξάνεται, δηλαδή εάν η συνάρτηση είναι αύξουσα καθώς το x γίνεται μεγαλύτερο, τότε αναμένουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος καθώς $x \to \infty$ να λαμβάνεται από την ολοκλήρωση της $f(x,t)$ σε αυτήν την περιοχή.

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η $f(x,t)$ σε μια τέτοια γειτονιά, γειτονιά μεγίστου αυτής, μπορεί να εκφραστεί μέσω απλούστερων συναρτήσεων, για τις οποίες συναρτήσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα τους ή στην περίπτωση κατά την οποία αυτό δεν είναι δυνατό να τις προσεγγίσουμε ασυμπτωτικά.

Αυτή είναι και η ιδέα της μεθόδου του Laplace για τον υπολογισμό ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων παρόμοιων ολοκληρωμάτων.

Για να συζητήσουμε τη μέθοδο του Laplace η πιο βολική μορφή της $f(x,t)$ είναι αυτή, η οποία χρησιμοποιήθηκε από τον ίδιο τον Laplace, ο οποίος θεώρησε ολοκληρώματα της μορφής:

$$f(x) = \int_a^b g(t)e^{xh(t)}dt, \qquad x > 0 \tag{2.39}$$

όπου

$$g(t) \in C[a,b], \quad h(t) \in C^2[a,b], \quad a \leq t \leq b$$

και $a, b \in \mathbb{R}$.

Αναζητούμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της $f(x)$ καθώς το $x \to \infty$.

Σύμφωνα με την ιδέα του Laplace η μέγιστη συνεισφορά στην προσέγγιση του ολοκληρώματος, εφόσον αυτό δεν υπολογίζεται ακριβώς όπως φυσικά ισχύει και για τα περισσότερα ολοκληρώματα, δηλαδή στον υπολογισμό του ασυμπτωτικού του αναπτύγματος, καθώς το $x \to \infty$ προέρχεται από την περιοχή του σημείου όπου η συνάρτηση στο εσωτερικό του ολοκληρώματος λαμβάνει μέγιστο.

Φυσικά στη συγκεκριμένη περίπτωση η συνάρτηση, η οποία όταν μεγιστοποιείται μεγιστοποείται και η συνάρτηση στο εσωτερικό του ολοκληρώματος είναι η $h(t)$.

Εαν υπάρχουν πολλά σημεία, στα οποία η $h(t)$ μεγιστοποιείται τότε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα θα λαμβανεται ως συνεισφορά όλων αυτών.

Για παραδείγμα στο Λήμμα του Watson είχαμε την περίπτωση όπου:

$$h(t) = -t, \qquad h'(0) = -1$$

και το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για $x \to \infty$ προήλθε από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στην περιοχή του μηδενός, το οποίο είναι και το σημείο μεγίστου για την $h(t)$. Στην παραπάνω περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση του Λήμματος του Watson, η περιοχή στην οποία η $h(t)$ λαμβάνει μέγιστο είναι η περιοχή ένος εκ των δύο ορίων ολοκλήρωσης.

Στην περίπτωση τώρα κατά την οποία, η $h(t)$ λαμβάνει μέγιστο σε ένα εσωτερικό σημείο, έστω $t = c$ του διαστήματος $[a, b]$ θα ισχύει ότι $h'(c) = 0$. Η συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί να υποπέσει στην περίπτωση όπου το μέγιστο της $h(t)$ είναι σε άκρο ολοκλήρωσης με αποτέλεσμα να υπάρχει η δυνατότητα της χρήσης του Λήμματος του Watson. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με τον παρακάτω τρόπο:

$$\int_a^b g(t)e^{h(t)}\,\mathsf{d}t = \int_a^c g(t)e^{h(t)}\,\mathsf{d}t + \int_c^b g(t)e^{h(t)}\,\mathsf{d}t. \tag{2.40}$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου ολοκληρώματος κάνουμε την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής:

$$t = c - \tau \Rightarrow \mathsf{d}t = -\,\mathsf{d}\tau \tag{2.41}$$

και επομένως για τα όρια ολοκλήρωσης ισχύει:

$$t = a \Rightarrow \tau = c - a, \qquad t = c \Rightarrow \tau = 0$$

Εκτελώντας τις παραπάνω αντικαταστάσεις στο πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (2.40) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\int_a^c g(t)e^{xh(t)}\,\mathsf{d}t &= -\int_{c-a}^0 g(c-\tau)e^{xh(c-\tau)}\,\mathsf{d}\tau = \\ &= \int_0^{c-a} g(c-\tau)e^{xh(c-\tau)}\,\mathsf{d}\tau.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (2.40), κάνοντας την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής:

$$t = c + \tau \Rightarrow \mathsf{d}t = \mathsf{d}\tau \tag{2.43}$$

για τα όρια ολοκλήρωσης θα ισχύει ότι:

$$t = c \Rightarrow \tau = 0, \qquad t = b \Rightarrow \tau = b - c$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\int_c^b g(t)e^{xh(t)}\,\mathsf{d}t = \int_0^{b-c} g(c+\tau)e^{xh(c+\tau)}\,\mathsf{d}\tau. \tag{2.44}$$

Τώρα σε κάθε ολοκλήρωμα η εκθετική συνάρτηση λαμβάνει το μέγιστο της για $\tau = 0$ και επομένως εμπίπτουμε στην περίπτωση του Λήμματος του Watson.

Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ολοκληρώματα της μορφής με σκοπό να διατυπώσουμε τη μέθοδο του Laplace:

$$I(x) = \int_0^T g(t)e^{xh(t)}\,\mathrm{d}t \tag{2.45}$$

όπου $h(0)$ είναι το μέγιστο της $h(t)$ στο διάστημα $[0, T]$.

Σε αυτό το σημείο επαναλαμβάνουμε ότι στην περίπτωση του ολοκληρώματος:

$$\int_a^b g(t)e^{h(t)}\,\mathrm{d}t \tag{2.46}$$

όπου η $h(t)$ έχει περισσότερα του ενός τοπικά μέγιστα και για να μπορέσουμε να υλοποιήσουμε όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, μπορούμε να δημιουργήσουμε ολοκληρώματα με κατάλληλα όρια ολοκλήρωσης ώστε η $h(t)$ να έχει ένα μέγιστο σε κάθε ένα από αυτά και έτσι θα ξεπεράσουμε το πρόβλημα των περισσοτέρων από ένα τοπικών μεγίστων.

Επιστρέφουμε τώρα στο ολοκλήρωμα, σχέση (2.45):

$$\int_0^T g(t)e^{xh(t)}\,\mathrm{d}t$$

όπου η $h(t)$ έχει μέγιστο στο $t = 0$, έχουμε δηλαδή:

$$h(0) > h(t), \qquad 0 < t \leq T$$

με

$$h'(0) = 0, \qquad h''(0) < 0$$

και επιπρόσθετα ισχύει ότι: $g(t) \in C[0, T]$ και $h''(t) \in C[0, T]$.

Αναζητούμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα για το ολοκλήρωμα:

$$I(x) = \int_0^T g(t)e^{xh(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad x \to \infty.$$

Για τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η μέγιστη συνεισφορά αυτού προέρχεται από το σημείο $t = 0$, εφόσον αυτο είναι σημείο στο οποίο η $h(t)$ μεγιστοποιείται.

Από τη συνέχεια της $h''(t)$ προκύπτει ότι υπαρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$0 \leq t \leq \delta < T, \qquad h''(t) < 0. \tag{2.47}$$

Αναπτύσσοντας επομένως την παραπάνω συνάρτηση σε δυναμοσειρά έχουμε:

$$h(t) - h(0) = \frac{1}{2}t^2 h''(\xi), \qquad 0 < \xi < \delta. \tag{2.48}$$

Μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε μια νέα μεταβλητή s, η οποία ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$h(t) - h(0) = -s^2 \tag{2.49}$$

και κάνοντας αντικατάσταση στη σχέση (2.45) έχουμε:

$$\int_0^T g(t)e^{xh(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^T g(t)e^{xh(0)}e^{-xs^2}\,\mathrm{d}t. \tag{2.50}$$

Σε μια μικρή περιοχή του $t = 0$ αναπτύσσοντας τη συνάρτηση $h(t)$ σε σειρά Taylor μια πρώτη προσέγγιση του t από το s λαμβάνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{2}h''(0)t^2 + ... = -s^2 \Rightarrow t = \left[\frac{-2}{h''(0)}\right]^{\frac{1}{2}} s + O(s^2). \tag{2.51}$$

Το επόμενο βήμα είναι να αντικαταστήσουμε την $g(t)$ με μια συνάρτηση του s, έχουμε πει όμως ότι η κύρια συνεισφορά στην προσέγγιση του ολοκληρώματος προέρχεται από την περιοχή του $t = 0$ και επομένως μια πρώτη προσέγγιση της $g(t)$ μπορεί να είναι η $g(0)$.

Αν θεωρήσουμε ότι η $g(t)$ δεν είναι μόνο συνεχής αλλά και αναλυτική στην περιοχη του μηδενός, τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + \dots \tag{2.52}$$

για μια πεπερασμένη ακτίνα σύγκλισης. Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.51) στη σχέση (2.52) παίρνουμε:

$$g(t) = g(0) + g'(0)\left[\frac{-2}{h''(0)}\right]^{\frac{1}{2}} s + O(s^2) \tag{2.53}$$

και έχουμε τώρα εκφράσει την $g(t)$ σαν μια συνάρτηση του s.

Από τη σχέση (2.49) παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $t = 0$ τότε έχουμε ότι $s = 0$. Μπορούμε τώρα να αλλάξουμε τη μεταβλητή του $I(x)$ από t σε s και εφόσον το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της $I(x)$ καθώς $x \to \infty$ δίνεται από την περιοχή όπου η συνάρτηση $h(t)$ μεγιστοποείται, δηλαδή για $t = s = 0$ μπορούμε να γράψουμε:

$$I(x) \sim e^{xh(0)}\left[\frac{-2}{h''(0)}\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^A e^{-xs^2}\left[g(0) + O(s)\right]\,\mathrm{d}s =$$

$$= e^{xh(0)}\left[\frac{-2}{h''(0)}\right]^{\frac{1}{2}} g(0)\int_0^A e^{-xs^2}\,\mathsf{d}s + e^{xh(0)}O\left(\int_0^A se^{-xs^2}\,\mathsf{d}s\right) \tag{2.54}$$

όπου A είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός ή άπειρο άφου όπως αποδείξαμε στο Λήμμα του Watson το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από αυτόν.

Στο σημείο αυτό και για την απλοποίηση της σχέσης (2.54) θα υπολογίσουμε τα δυο ολοκληρώματα στο δεύτερο μέλος αυτής. Προχωρώντας στον παραπάνω υπολογισμό έχουμε:

$$\int_0^A se^{-xs^2}\,\mathsf{d}s = -\frac{1}{2x}\left(e^{xA^2}-1\right) = O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{2.55}$$

Για τον υπολογισμό τώρα του ολοκλήρωματος:

$$\int_0^A e^{-xs^2}ds$$

θα κάνουμε την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής

$$s = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathsf{d}s = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathsf{d}t \tag{2.56}$$

για τα όρια ολοκλήρωσης του ολοκληρώματος ισχύει:

$$s = 0 \Rightarrow t = 0, \qquad s = A \Rightarrow t = A^2$$

και κάνοντας τις παραπάνω αντικαταστάσεις έχουμε:

$$\int_0^A e^{-xs^2}\,\mathsf{d}s = \frac{1}{2}\int_0^{A^2} e^{-xt}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathsf{d}t \tag{2.57}$$

Ο υπολογισμός όμως του ολοκληρώματος στο δεύτερο μέλος της σχέσης (2.57), μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του Λήμματος του Watson, σχέση (2.19) και επομένως με εφαρμογή του παραπάνω Λήμματος παίρνουμε ότι:

$$\frac{1}{2}\int_0^{A^2} e^{-xt}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathsf{d}t \sim \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{\frac{1}{2}}}, \qquad x\to\infty. \tag{2.58}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις σχέσεις (2.55) και (2.58) στη σχέση (2.54) παίρνουμε ότι:

$$\int_0^T g(t)e^{xh(t)}\,\mathsf{d}t \sim g(0)\left[\frac{-\pi}{2xh''(0)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{xh(0)} + e^{xh(0)}O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to\infty. \tag{2.59}$$

Η τελευταία σχέση είναι και η μαθηματική διατύπωση της μεθόδου του Laplace, η οποία δίνεται παρακάτω από το Θεώρημα 2.1.

Θεώρημα 2.1 *(Μέθοδος του Laplace)*
Έστω οι συναρτήσεις $g(t)$ *και* $h(t)$ *και* $0 \leq t \leq T \quad T \in \mathbb{R}^{+} \cup \infty$. *Η συνάρτηση* $g(t)$ *είναι συνεχής και αναλυτική στο διάστημα* $[0, T]$ *και η* $h(t)$ *είναι συνεχής, με συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα* $[0, T]$ *και λαμβάνει μέγιστο στο* $t = 0$. *Τότε το ολοκλήρωμα:*

$$\int_0^T g(t) e^{x h(t)} \, \mathsf{d}t$$

προσεγγίζεται από τον παρακάτω τύπο, όπου x *αρκετά μεγάλο:*

$$\int_0^T g(t) e^{x h(t)} \, \mathsf{d}t \sim g(0) \left[\frac{-\pi}{2 x h''(0)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{x h(0)} + e^{x h(0)} O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \infty.$$

Κεφάλαιο 3

Η μέθοδος της επικλινέστατης καθόδου

3.1 Περιγραφή της μεθόδου

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με ολοκληρώματα της ίδιας μορφής όπως και στην προηγούμενη παραγράφο, δηλαδή ολοκληρώματα τύπου Laplace, με τη διαφορά ότι οι συναρτήσεις στο εσωτερικό του ολοκληρώματος θα είναι μιγαδικές και η ολοκλήρωση θα γίνεται πάνω σε ένα δρόμο C στο μιγαδικό επίπεδο, ο οποίος βρίσκεται μέσα σε έναν τόπο δηλαδή σε ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο.

Έστω λοιπόν το ολοκλήρωμα:

$$I(\lambda) = \int_C g(z) e^{\lambda w(z)} dz \tag{3.1}$$

όπου $g(z)$ και $w(z)$ αναλυτικές συναρτήσεις στον παραπάνω τόπο, ο οποίος περιέχει το δρόμο C και λ θετικός πραγματικός αριθμός.

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, σκοπός μας είναι η προσέγγιση του $I(\lambda)$ καθώς το $\lambda \to \infty$, δηλαδή ο υπολογισμός του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του $I(\lambda)$.

Πρώτα από όλα για να είναι αυτό εφικτό θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα φράγμα για το παραπάνω ολοκλήρωμα. Για ένα δρόμο $C = C_o$ με πεπερασμένο μήκος έστω $l(C_o)$ έχουμε:

$$|I(\lambda)| \leq l(C_o) \max_{z \in C} \left[|g(z)| \exp[\lambda Rew(z)] \right]. \tag{3.2}$$

Τώρα ας ονομάσουμε Γ, το σύνολο όλων των δρόμων, οι οποίοι προκύπτουν από ομαλές παραμορφώσεις του δρόμου $C = C_o$ διατηρώντας τα άκρα αυτών σταθερά. Το ολοκλήρωμα $I(\lambda)$ σύμφωνα με το Θεώρημα του Cauchy είναι σταθερό κατά μήκος κάθε τέτοιου δρόμου. Ένα επιπλέον φράγμα θα δίνεται από τη σχέση:

$$|I(\lambda)| \leq \inf_{C\in\Gamma}\left[l(C_o)\max_{z\in C} g(z)\exp[\lambda Rew(z)]\right]. \tag{3.3}$$

Τώρα εφόσον ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση κατά την οποία το $\lambda \to \infty$, αναμένουμε ότι το μήκος του δρόμου δε θα επηρεάσει την ακρίβεια της εκτίμησης μας, εφόσον πρόκειται για πεπερασμένο αριθμό και ταυτόχρονα το λ είναι στον εκθέτη της εκθετικής συνάρτησης. Ακόμη είναι εύκολα κατανοητό ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης $w(z)$ παίζει πολύ σπουδαιότερο ρόλο από αυτήν της $g(z)$ στον υπολογισμό της προσέγγισης του ολοκληρώματος $I(\lambda)$, εφόσον και αυτή είναι εκθέτης της εκθετικής συνάρτησης. Επομένως μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση της μορφής:

$$|I(\lambda)| \leq D(g,C)\max_{z\in C}\exp[\lambda Rew(z)] \tag{3.4}$$

όπου $D(C,g)$ είναι μια σταθερά, η οποία εξατράται από το δρόμο C και τη συνάρτηση $g(z)$, αλλά δεν εξαρτάται από το λ. Σύμφωνα τώρα με τη σχέση (3.4) αναζητούμε ένα σημείο σε συγκεκριμένο δρόμο, στον οποίο να έχουμε το μέγιστο της συνάρτησης $Rew(z)$ και επομένως για τον υπολογισμό του φράγματος, αναζητούμε ένα δρόμο πάνω στον οποίο να λαμβάνεται το ελάχιστο του παραπάνω μέγιστου.

Το θεώρημα του Cauchy μας επιτρέπει να παραμορφώσουμε το δρόμο ολοκλήρωσης, για να βρούμε τον παραπάνω δρόμο, χωρίς να μεταβληθεί η τιμή του ολοκληρώματος.

Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να αναζητήσουμε ένα δρόμο ολοκλήρωσης ή άθροισμα δρόμων, έτσι ώστε όχι μόνο να μη μεταβάλλεται η τιμή του $I(\lambda)$, σχέση (3.1), αλλά και τα ολοκληρώματα, τα οποία προκύπτουν λόγω της αλλαγής των οριών ολοκλήρωσης να είναι τύπου Laplace, όπως δηλαδή αυτό το οποίο αναπτυύξαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο στη μέθοδο του Laplace, παράγραφος 2.3.

Τελικά σκοπός μας είναι με την κατάλληλη θεωρία να προβούμε στην εκτέλεση της παραπάνω τροποποίησης του δρόμου C, για την εξεύρεση του φράγματος με αποτέλεσμα στο τέλος την προσέγγιση του $I(\lambda)$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην αρχή της παρούσας παραγράφου η συνάρτηση $w(z)$ είναι αναλυτική στον τόπο D και επιπλέον δεν είναι σταθερή διότι εάν θεωρήσουμε οτι $w(z) = const$ έχουμε τελειώσει ώς προς την εύρεση του φράγματος, λόγω της αναλυτικότητας της $g(z)$.

Έστω τώρα ότι $z = x+iy$ και $w(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, όπου $u(x,y), v(x,y)$ πραγματικές συναστήσεις.

Θα αποδειχθεί σημαντικό για έμας να βρούμε καμπύλες στον τόπο D, κατά μήκος των οποίων η $u(x,y)$ επομένως και το μέτρο της $e^{\lambda w(z)}$ να είναι μονότονες.

Θα δώσουμε στη συνέχεια κάποιους ορισμούς, οι οποίοι συναντώνται ευρέως στη μέθοδο της επικλινέστατης καθόδου:

Ορισμός 3.1 Έστω $z_o = x_o + iy_o$ σημείο του τόπου D. Μια κατεύθυνση, η οποία περνάει από το z_o και κατά μήκος της οποίας η $u(x,y)$ φθίνει από την τιμή της $u(x_o,y_o)$ ονομάζεται κατεύθυνση καθόδου. Ανάλογα ορίζουμε και την κατεύθυνση ανόδου, ως μια κατεύθυνση διερχόμενη από το z_o κατά μήκος της οποίας η $u(x,y)$ αυξάνει από την τιμή $u(x_o,y_o)$.

Ορισμός 3.2 Αν C είναι καμπύλη, η οποία ενώνει το z_o με το όχι απαραίτητα πεπερασμένο σημείο z και σε κάθε σημείο της η εφαπτομένη της καμπύλης είναι σε κατεύθυνση καθόδου (ανόδου) τότε η C ονομάζεται δρόμος καθόδου (ανόδου).

Φυσικά από το z_o περνούν πολλές κατευθύνσεις καθόδου ή ανόδου και επομένως πολλοί δρόμοι καθόδου ή ανόδου. Είναι επιθυμητό να βρούμε κατευθύνσεις στις οποίες ο ρυθμός καθόδου (ανόδου) να είναι ο μέγιστος.

Ορισμός 3.3 Οι κατευθύνσεις αυτές ονομάζονται κατευθύνσεις επικλινέστατης καθόδου (ανόδου).

Πρέπει να επισημάνουμε ότι σε κάθε σημείο του τόπου D στο οποίο $\nabla u \neq 0$, η κατεύθυνση της επικλινέστατης καθόδου είναι μοναδική και συμπίπτει με αυτή του διανύσματος $-\nabla u$, ενώ αυτή της επικλινέστατης ανόδου συμπίπτει με το διάνυσμα ∇u.

Ορισμός 3.4 Μια καμπύλη της οποίας η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της έχει την κατεύθυνση της επικλινέστατης καθόδου (ανόδου) ονομάζεται δρόμος επικλινέστατης καθόδου (ανόδου).

Ορισμός 3.5 Ένα σημείο $z_1 = x_1 + iy_1$ λέγεται ότι βρίσκεται σε κοιλάδα της $w(z)$ ως προς το σημείο $z_o = x_o + iy_o$ εάν $u(x_1,y_1) < u(x_o,y_o)$ και σε λόφο της $w(z)$ ως προς το σημείο z_o εάν $u(x_1,y_1) > u(x_o,y_o)$. Εάν $u(z_1) = u(z_o)$ τότε το z_1 λέγεται ότι βρίσκεται στο σύνορο της κοιλάδας και του λόφου της $w(z)$ ως προς το σημείο z_o.

Επομένως καθώς κινούμαστε κατά μήκος ενός δρόμου καθόδου από το z_o κινούμαστε μέσα σε κοιλάδα, ενώ αν κινούμαστε κατά μήκος ενός δρόμου ανόδου κινούμαστε μέσα σε λόφο. Για να κατέβουμε μια κοιλάδα ή να ανέβουμε έναν λόφο όσο γρηγορότερα γίνεται αρκεί να επιλέξουμε το δρόμο της επικλινέστατης καθόδου ή ανόδου.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε δυο βασικά Λήμματα για τη μέθοδο επικλινέσταης καθόδου:

Λήμμα 3.1 *Οι καμπύλες επικλινέστατης καθόδου και επικλινέστατης ανόδου από κάθε σημείο $z_o = x_o + iy_o$ είναι αυτές που ορίζονται από τη σχέση:*

$$v(x_o, y_o) = v(x, y) = Im(w(z)) \tag{3.5}$$

Απόδειξη

Έστω $\delta w(z)$, η μεταβολή της συνάρτησης $w(z)$, η οποία ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\delta w(z) = w(z) - w(z_o) = u(x, y) - u(x_o, y_o) - i(v(x, y) - v(x_o, y_o)) =$$

$$= \delta u(x, y) + i\delta v(x, y). \tag{3.6}$$

Το μέτρο αυτού του μιγαδικού αριθμού δίνεται από τη σχέση:

$$|\delta w(x, y)|^2 = |\delta u(x, y)|^2 + |\delta v(x, y)|^2. \tag{3.7}$$

Επομένως εξάγεται εύκολα το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$|\delta u(x, y)| \leq |\delta w(x, y)| \tag{3.8}$$

άρα ισχύει ότι:

$$max|\delta u(x, y)| = |\delta w(x, y)| \Rightarrow \delta v(x, y) = 0 \Rightarrow v(x, y) = v(x_o, y_o). \tag{3.9}$$

Λήμμα 3.2 *Έστω:*

$$\frac{d^q w(z)}{dz^q} = 0, \quad z = z_o, \quad q = 1, 2, ..., n-1 \tag{3.10}$$

και

$$\frac{d^n w(z)}{dz^n} = ae^{i\alpha}, \qquad a > 0 \tag{3.11}$$

αν θέσουμε:

$$z - z_o = \rho e^{i\theta} \tag{3.12}$$

τότε οι γωνίες των κατευθύνσεων της επικλινέστατης καθόδου, της επικλινέστατης ανόδου και των κατευθύνσεων πάνω στις οποίες $u(x, y) = const$ στο σημείο $z = z_o$ δίνονται αντίστοιχα από τις παρακάτω σχέσεις:

1. *Κατεύθυνση επικλινέστατης καθόδου αντιστοιχεί στη γωνία:*

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + (2p+1)\frac{\pi}{n}, \qquad p = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{3.13}$$

2. *Κατεύθυνση επικλινέστατης ανόδου αντιστοιχεί στη γωνία:*

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + 2p\frac{\pi}{n}, \qquad p = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{3.14}$$

3. *Κατεύθυνση σταθερής $u(x, y)$ αντιστοιχεί στη γωνία:*

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + (p + \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}, \qquad p = 0, 1, 2, ..., 2n-1. \tag{3.15}$$

Απόδειξη

Έχουμε ότι αφού $w(z)$ αναλυτική σε μια περιοχή του z_o τότε η $w(z)$ γράφεται ως δυναμοσειρά, οπότε εκμεταλλευόμενοι και τη σχέση (3.12) έχουμε:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(z_o)}{n!}(z - z_o)^n = \frac{ae^{i\alpha}}{n!}\rho^n e^{in\theta}\left[1 + O(\rho)\right], \quad |z - z_o| < \rho \tag{3.16}$$

με αντικατάσταση στη σχέση (3.6) παίρνουμε:

$$\delta w(z) = w(z) - w(z_o) = \frac{ae^{i\alpha}}{n!}\rho^n e^{in\theta}\left[1 + O(\rho)\right]$$

και με την εκτέλεση απλών πράξεων καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\frac{\delta w(z)}{\rho^n} = \frac{ae^{i\alpha}}{n!}e^{in\theta}\left[1 + O(\rho)\right]. \tag{3.17}$$

Όμως σε μια κατεύθυνση επικλινέστατης καθόδου η ποσότητα:

$$\frac{\delta w(z)}{\rho^n}$$

είναι πραγματικός αριθμός και όσο γίνεται πιο αρνητικός, επομένως για το δεύτερο μέλος της σχέσης (3.17) θα ισχύουν τα παρακάτω:

$$e^{i[\alpha+n\theta]} = e^{i[2\pi p+\pi]} \Rightarrow (\alpha + n\theta) = (2p+1)\pi, \qquad p = 0, 1, ..., n-1 \tag{3.18}$$

λύνοντας τώρα την παραπάνω εξίσωση, σχέση (3.18), ως προς θ έχουμε:

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + (2p+1)\frac{\pi}{n}, \qquad p = 0, 1, ..., n-1. \tag{3.19}$$

Όμοια σε μια κατεύθυνση επικλινέστατης ανόδου η ποσότητα:

$$\frac{\delta w}{\rho^n}$$

είναι πραγματικός αριθμός και όσο γίνεται πιο θετικός επομένως με παρόμοιο τρόπο από τη σχέση (3.17) έχουμε:

$$e^{i[\alpha+n\theta]} = e^{i[2\pi p]} \Rightarrow (\alpha + n\theta) = (2p)\pi, \qquad p = 0, 1, ..., n-1. \tag{3.20}$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση, σχέση (3.20), πάλι ως προς θ, έχουμε:

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + 2p\frac{\pi}{n}, \qquad p = 0, 1, ..., n-1. \tag{3.21}$$

Στη τελευταία περίπτωση, στην οποία, κατά μήκος των κατευθύνσεων ισχύει ότι $u(x, y) = const$ η ποσότητα:

$$\frac{\delta w}{\rho^n}$$

είναι φανταστικός αριθμός και το δεύτερο μέλος της σχέσης (3.17) θα ισούται με:

$$e^{i[\alpha+n\theta]} = e^{i[p+\frac{1}{2}]\pi}, \qquad p = 0, 1, ..., 2n-1, \tag{3.22}$$

λύνοντας επομένως την παραπάνω εξίσωση ως προς θ παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(\alpha + n\theta) = (p + \frac{1}{2})\pi \Rightarrow \theta = -\frac{\alpha}{n} + (p + \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}, \qquad p = 0, 1, ..., 2n-1. \tag{3.23}$$

Τώρα για την καλύτερη κατανόηση του παραπάνω Λήμματος, ας θεωρήσουμε δυο καμπύλες, οι οποίες ξεκινούν από το σημείο $z = z_o$ και κατά μήκος των οποίων, η $u(x, y)$ είναι σταθερή. Σύμφωνα με τη σχέση (3.23) οι κατευθύνσεις των παραπάνω καμπυλών δίνονται από τις γωνίες:

$$\theta = -\frac{\alpha}{n} + \left(2\kappa + 1 \pm \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}, \qquad \kappa \in \mathbb{Z} \tag{3.24}$$

οι καμπύλες αυτές περιέχουν στην οξεία γωνία τους μια κοιλάδα της $w(z)$ σε σχέση με το $z = z_o$ και ακριβώς ένα δρόμο επικλινέστατης καθόδου, ο οποίος έχει κατεύθυνση με κλίση που δίνεται από τον παρακάτω τύπο, σύμφωνα με τη σχέση (3.19):

$$-\frac{\alpha}{n} + (2\kappa + 1)\,\frac{\pi}{n}. \tag{3.25}$$

Επιπρόσθετα από τη σχέση (3.24) για την οξεία γωνία θ_1, η οποία σχηματίζεται από τις καμπύλες που οριοθετούν την κοιλάδα, ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$-\frac{\alpha}{n} + \left(2\kappa + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} < \theta_1 < -\frac{\alpha}{n} + \left(2\kappa + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{n} \tag{3.26}$$

και φυσικά όπως έχουμε ήδη αναφέρει και παραπάνω η μεταβολή της συνάρτησης $w(z)$, δηλαδή το $\delta w(z)$, είναι πραγματικός αριθμός και όσο γίνεται πιο αρνητικός κατά μήκος της κατεύθυνσης επικλινέστατης καθόδου εντός της παραπάνω κοιλάδας.

Έχουμε επίσης ότι οι δυο καμπύλες κατά μήκος των οποίων η $u(x, y)$ παραμένει σταθερή, δηλαδή οι καμπύλες συνόρου κοιλάδας και λόφου, οι οποίες ξεκινούν από το $z = z_o$ με κατευθύνσεις που δίνονται από τις παρακάτω γωνίες:

$$-\frac{\alpha}{n} + \left(2\kappa \pm \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}, \qquad \kappa \in \mathbb{Z} \tag{3.27}$$

περιέχουν στην οξεία τους γωνία έναν λόφο της $w(z)$ ως προς το $z = z_o$ και ακριβώς έναν δρόμο επικλινέστατης ανόδου με κατεύθυνση που δίνεται από τη γωνία:

$$-\frac{\alpha}{n} + 2\kappa\frac{\pi}{n}, \qquad \kappa \in \mathbb{Z}. \tag{3.28}$$

Θα δώσουμε σε αυτό το σημείο τρεις ορισμούς:

Ορισμός 3.6 Ένα σημείο, στο οποίο ισχύει $\frac{dw(z)}{dz} = 0$ ονομάζεται σαγματικό σημείο της $w(z)$.

Η παραπάνω ονοματολογία προέρχεται από την τοπογραφική μορφής της $u(x, y)$ στο χώρο, η οποία έχει σχήμα σαμαριού.

Ορισμός 3.7 Ένα σαγματικό σημείο $z = z_o$ είναι τάξης n εαν ισχύουν τα παρακάτω:

$$w'(z_o) = ... = w^{(n)}(z_o) = 0, w^{(n+1)}(z_o) \neq 0. \tag{3.29}$$

Ορισμός 3.8 Ο αριθμός $Rew(z_o)$ οναμάζεται ύψος του σαγματικού σημείου.

Σε συνέχεια των όσων λέγαμε πρίν να δώσουμε τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να πούμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

Έστω z_o σαγματικό σημείο τάξης n της συνάρτησης $w(z)$. Τότε σε μία μικρή γειτονιά του σημείου z_o, η επίπεδη επιφάνεια $Rew(z) = Rew(z_o)$ αποτελείται από $n+1$ ευθείες, οι οποίες τέμνονται στο σημείο z_o και χωρίζουν τη γειτονιά του σαγματικού σημείου σε $2(n+1)$ τομείς με γωνία κορυφής $\frac{\pi}{n+1}$. Αυτοί οι τομείς είναι εναλλακτικά κοιλάδες και λόφοι. Οι διχοτόμοι των γωνιών κορυφής ορίζουν τις κατευθύνσεις επικλινέστατης καθόδου και ανόδου. Άρα καθώς προχωράμε γύρω από κάθε κύκλο, ο οποίος περιέχει το z_o εναλλάξ συναντάμε καμπύλες επικλινέστατης καθόδου και ανόδου, n στον αριθμό από κάθε είδος.

Για παράδειγμα και σύμφωνα με το τελαυταίο Λήμμα στην περίπτωση όπου έχουμε σαγματικό σημείο τάξης $n = 2$,υπάρχουν δυο κατευθύνσεις επικλινέστατης καθόδου, οι οποίες τέμνονται στο z_o και είναι οι παρακάτω:

$$\theta_1 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{2}. \tag{3.30}$$

Όπως παρατηρούμε οι κατευθύνσεις επικλινέστατης καθόδου είναι αντίθετες μεταξύ τους όπως και αυτές της επικλινέστατης ανόδου.

Σε αυτό το σημείο θα περιγράψουμε τον τρόπο τον οποίον θα ακολουθούμε για να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο επικλινέστατης καθόδου για τη προσέγγιση ολοκληρωμάτων τύπου $I(\lambda)$. Σε γενικές γραμμές για να εφαρμόσουμε τη συγκεκριμένη μέθοδο εκτελούμε τα παρακάτω πέντε βασικά βήματα:

1. Αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία της $I(\lambda)$.

   Ορισμός 3.9 Τα κρίσιμα σημεία της $I(\lambda)$ είναι τα όρια ολοκλήρωσης, τα σαγματικά σημεία της $w(z)$ και τα σημεία στα οποία οι $w(z)$ και $g(z)$ δεν είναι αναλυτικές.

2. Καθορίζουμε τους δρόμους επικλινέστατης καθόδου σε κάθε ένα από τα κρίσιμα σημεία.

3. Δικαιολογούμε με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού θεωρήματος του Cauchy, την παραμόρφωση του δρόμου ολοκλήρωσης, έτσι ώστε ο νέος δρόμος να διέρχεται από τους δρόμους επιλινέστατης καθόδου ορισμένων κρίσιμων σημείων. Ποια θα είναι τα συγκεκριμένα κρίσιμα σημεία θα το αποδείξουμε στο Κεφάλαιο 5.

4. Υπολογίζουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα κάθε ολοκλήρωματος, το οποίο προέκυψε από την παραμόρφωση του δρόμου και είναι ολοκλήρωμα τύπου Laplace.

5. Αθροίζουμε τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα για να καθορίσουμε την ασυμπτωτική προσέγγιση του $I(\lambda)$.

Παρατηρούμε ότι τα βήματα 1 και 5 είναι απλά και υπολογίζονται άμεσα. Το βήμα 4 απαίτει αρκετή δουλειά, η οποία είναι όμως γνωστή από την ανάλυση για την προσέγγιση των ολοκληρωμάτων τύπου Laplace. Τα σημαντικότερα βήματα της μεθόδου είναι τα βήματα 2 και 3, μάλιστα το βήμα 3 παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες. Τα δυο βήματα αυτά αφορούν στην εύρεση της κατάλληλης παραμόρφωσης του δρόμου ολοκλήρωσης, ώστε να περνούν μόνο από διευθύνσεις επικλινέστατης καθόδου και στη δικαιολόγηση αυτής της παραμόρφωσης.

3.2 Εφαρμογή της μεθόδου επικλινέστατης καθόδου για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων τύπου Laplace

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι τα βήματα $1, 2, 3$ έχουν εκτελεστεί και ότι C είναι ένας δρόμος επικλινέστατης καθόδου, ο οποίος παιρνά από το κρίσιμο σημείο $z = z_o$ και θα υπολογίσουμε το βήμα 4, δηλαδή το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της συνάρτησης:

$$I(\lambda) = \int_C g(z)e^{\lambda w(z)}\,\mathrm{d}z, \qquad \lambda \to \infty. \tag{3.31}$$

Στο σαγματικό σημείο πρώτης τάξης z_o, το οποίο ονομάζεται και απλό ισχύει:

$$w'(z) = 0, \qquad w''(z) \neq 0 \tag{3.32}$$

αναπτύσσοντας την $w(z)$ σε σειρά Taylor έχουμε:

$$w(z) = w(z_o) + \frac{1}{2}(z - z_o)^2 w''(z) + O\left((z - z_o)^3\right) \tag{3.33}$$

Εάν θεωρήσουμε ότι:

$$w''(z_o) = ae^{i\alpha}, \quad a > 0, \tag{3.34}$$

και

$$z - z_o = \rho e^{i\theta}, \quad \rho > 0 \tag{3.35}$$

τότε έχουμε με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στη σχέση (3.33):

$$w(z) = u(x,y)+iv(x,y) = u(x_o,y_o)+iv(x_o,y_o)+\frac{1}{2}\rho^2 a e^{i(2\theta+\alpha)}+O(\rho^3) \quad (3.36)$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη της παραπάνω σχέσης παίρνουμε:

$$u(x,y) = u(x_o,y_o) + \frac{1}{2}\rho^2 a \cos(2\theta+\alpha) + O(\rho^3) \quad (3.37)$$

και

$$v(x,y) = v(x_o,y_o) + \frac{1}{2}\rho^2 a \sin(2\theta+\alpha) + O(\rho^3) \quad (3.38)$$

Οι καμπύλες $u(x,y) = u(x_o,y_o)$, στο σαγματικό σημείο z_o, είναι εφαπτόμενες σε δύο κάθετες γραμμές, οι οποίες προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$\cos(2\theta+\alpha) = 0, \qquad a \neq 0 \quad (3.39)$$

αυτές οι γραμμές είναι οι παρακάτω ημιευθείες, όπως προκύπτει εύκολα από τη λύση της παραπάνω εξίσωσης:

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (3.40)$$

και οι επεκτάσεις τους:

$$\theta = \pi + \frac{1}{2}\left(\pm\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (3.41)$$

Επομένως υπάρχουν δυο διαστήματα, εντός των οποίων βρίσκεται η οξεία γωνία, έστω θ_1, που οριοθετείται από τις παραπάνω ημιευθείες, γύρω από το z_o και για τις οποίες ισχύει $u(x,y) < u(x_o,y_o)$:

- $$\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \quad (3.42)$$

- $$\frac{5\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < \theta < \frac{7\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \quad (3.43)$$

Με όμοιο τρόπο, εάν $v(x,y) = v(x_o,y_o)$, οι δύο γραμμές κατά μήκος των οποίων η $u(x,y)$ μεταβάλλεται ταχύτερα είναι εφαπτόμενες, στο σαγματικό σημείο $z = z_o$, στις δύο κάθετες γραμμές , οι οποίες είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\text{sin}(2\theta + \alpha) = 0, \qquad a \neq 0 \tag{3.44}$$

Αυτές οι γραμμές είναι η ημιευθεία:

$$\theta = -\frac{\alpha}{2} \tag{3.45}$$

με την επεκτάση της:

$$\theta = \pi - \frac{\alpha}{2} \tag{3.46}$$

και η ημιευθεία:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \tag{3.47}$$

με την επεκτάση της:

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}. \tag{3.48}$$

Αυτές τώρα οι ημιευθείες όπως εύκολα μπορεί να αποδειχτεί διχοτομούν τις γωνίες, τις οποίες σχηματίζουν, οι προηγούμενες ημιευθείες, οι οποίες σχηματίστηκαν για $u(x, y) = u(x_o, y_o)$.

Επιστρέφοντας στην αρχική μας επιδίωξη που είναι ο υπολογισμός του ασυμπτωτικού αναπτύγματος της συνάρτησης $I(\lambda)$ πάνω στο δρόμο ολοκλήρωσης C, ο οποίος σύμφωνα με το Θεώρημα του Cauchy, μπορεί να παραμορφωθεί με τέτοιο τρόπο σε έναν δρόμο, ο οποίος να διέρχεται από το z_o και να βρίσκεται μέσα σε μια κοιλάδα, όπου ισχύει $u(x, y) < u(x_o, y_o)$.

Τώρα θα παραμορφώσουμε το δρόμο C, θεωρώντας ότι τα άκρα ολοκλήρωσης βρίσκονται ένα σε κάθε κοιλάδα, έτσι ώστε αυτός να βρίσκεται κατά μήκος του δρόμου επικλινέστατης καθόδου $v(x, y) = v(x_o, y_o)$ και έτσι έχουμε σε μία περιοχή του z_o, το οποίο είναι απλό σαγματικό σημείο:

$$w(z) - w(z_o) = u(x, y) - u(x_o, y_o) = \frac{1}{2}(z - z_o)^2 w''(z) < 0. \tag{3.49}$$

Στο σημείο αυτό, όπως κάναμε και στη μέθοδο του Laplace εισάγουμε νέα πραγματική μεταβλητή τ, η οποία εκφράζεται από την παρακάτω σχέση:

$$w(z) - w(z_o) = -\tau^2, \qquad \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.50}$$

Από τη μονοτονία της συνάρτησης $w(z)$, πάνω στο δρόμο της επικλινέστατης καθόδου, μπορούμε να ορίσουμε την παρακάτω σχέση, εφόσον η συνάρτηση $w(z)$ είναι μια συνάρτηση ένα προς ένα και άρα αντιστρέφεται. Επομένως για την αντίστροφη της συνάρτηση, έστω $z(\tau)$, θα ισχύει ότι:

$$z(\tau) = w^{-1}\left(w(z_o) - \tau^2\right) \tag{3.51}$$

και με αντιακατάσταση των σχέσεων $(3.49), (3.50), (3.51)$ στην (3.31) παίρνουμε:

$$I(\lambda) = \int_C g(z)e^{\lambda w(z)}\,\mathsf{d}z = \int_{-\tau_a}^{\tau_b} g\left(z(\tau)\right) e^{\lambda w(z_o) - \lambda\tau^2} \frac{\mathsf{d}z}{\mathsf{d}\tau}\,\mathsf{d}\tau =$$

$$= e^{\lambda w(z_o)} \int_{-\tau_a}^{\tau_b} g\left(z(\tau)\right) e^{-\lambda\tau^2} \frac{\mathsf{d}z}{\mathsf{d}\tau}\,\mathsf{d}\tau. \tag{3.52}$$

Όπου $\tau_a, \tau_b > 0$ αντιστοιχούν στα νέα άκρα ολοκλήρωσης μετά την εκτέλεση της αλλαγής μεταβλητής, η οποία περιγράφεται από τη σχέση (3.50).

Τώρα το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του παραπάνω ολοκληρώματος, έστω $M(\lambda)$, μπορεί να υπολογισθεί μέσω του Λήμματος του Watson ή της μεθόδου του Laplace και επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$M(\lambda) \sim e^{\lambda w(z_o)} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(z(\tau)\right) e^{-\lambda\tau^2} \frac{\mathsf{d}z}{\mathsf{d}\tau}\,\mathsf{d}\tau, \qquad \lambda \to \infty \tag{3.53}$$

με το $z(\tau)$, όπως έχουμε ήδη προαναφέρει, να δίνεται από τη σχέση (3.51) δηλαδή $z(\tau) = w^{-1}\left(w(z_o) - \tau^2\right)$.

Η αντικατάσταση των τ_a, τ_b από το άπειρο οφείλεται στο γέγονός ότι το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του παραπάνω ολοκληρώματος καθώς το $\lambda \to \infty$ προέρχεται από την ολοκλήρωση στην περιοχή μεγίστου της συνάρτησης $-\lambda\tau^2$, δηλαδή στην περιοχή $\tau = 0$ και για αυτό το λόγο τα όρια ολοκλήρωσης δεν έχουν σημασία στον υπολογισμό αυτού.

Οι μόνες εργασίες, οι οποίες μένουν να ολοκληρωθούν για τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος είναι τώρα η αντιστροφή της $w(z) - w(z_o) = -\tau^2$, σχέση (3.51), πάνω στην επιφάνεια της επικλινέστατης καθόδου $v(x, y) = v(x_o, y_o)$ για τον υπολογισμό των παρακάτω ποσοτήτων:

- $$z(\tau) \tag{3.54}$$
- $$\frac{\mathsf{d}z}{\mathsf{d}\tau}. \tag{3.55}$$

Για τους παραπάνω υπολογισμούς έχουμε από τις σχέσεις (3.33) και (3.50):

$$w(z) - w(z_o) = \frac{1}{2}(z - z_o)^2 w''(z_o) + O\left((z - z_o)^3\right) = -\tau^2$$

και λύνοντας προς $z - z_o$ έχουμε:

$$z - z_o = \left[\frac{-2}{w''(z_o)}\right]^{\frac{1}{2}} \tau + O(\tau^2). \qquad (3.56)$$

Η ποσότητα $w''(z_o)$ είναι μιγαδικός αριθμός, το ίδιο ισχύει φυσικά και για την ποσότητα $\left[\frac{-1}{w''(z_o)}\right]^{\frac{1}{2}}$. Στο σημείο αυτό πρέπει να επιλέξουμε τον κατάλληλο κλάδο του μιγαδικού αριθμού $\left[\frac{-1}{w''(z_o)}\right]^{\frac{1}{2}}$ όταν το z βρίσκεται στο δρόμο της επικλινέστατης καθόδου. Αύτο καθορίζεται από τον τρόπο κατά τον οποίο, με την έννοια της κατεύθυνσης, κινούμαστε προς το κρίσιμο (σαγματικό) σημείο. Υποθέτουμε για παράδειγμα ότι όταν ο δρόμος C παραμορφώνεται με σκοπό να ταυτιστεί με αυτόν της επικλινέστατης καθόδου, $v(x,y) = v(x_o, y_o)$, με την ολοκλήρωση να λαμβάνει χώρα για z κοντά στο z_o κατά μήκος αυτού, από την περιοχή με $arg(z - z_o) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ στην περιοχή με $arg(z - z_o) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, ο κατάλληλος κλάδος για να επιλεχθεί θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε το όρισμα του παραπάνω μιγαδικού αριθμού, δηλαδή η ποσότητα:

$$arg\left[\frac{-1}{w''(z_o)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

να δίνει $\tau > 0$ όταν το z είναι μέσα στην αντίστοιχη κοιλάδα και επομένως $arg(z - z_o) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Έτσι από τη σχέση (3.56):

$$z - z_o = \left[\frac{-2}{w''(z_o)}\right]^{\frac{1}{2}} \tau + O(\tau^2)$$

έχω $\tau > 0$ όταν το z προσεγγίζει το z_o στην περιοχή κατά την οποία $arg(z - z_o) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, δηλαδή έαν $arg\left[\frac{-1}{w''(z_o)}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$w''(z_o) = ae^{i\alpha} = |w''(z_o)|\, e^{i\alpha}$$

και λύνοντας προς $|w''(z_o)|$ παίρνουμε:

$$|w''(z_o)| = \frac{w''(z_o)}{e^{i\alpha}}. \qquad (3.57)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.57) στη σχέση (3.56) παίρνουμε:

$$z - z_o = \left[\frac{-2}{|w''(z_o)|}\right]^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\tau + O(\tau^2) =$$

$$= i\sqrt{2}W''(z_o)^{-\frac{1}{2}}\tau + O(\tau^2). \qquad (3.58)$$

Όπου το $W''(z_o)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$(W''(z_o))^{-\frac{1}{2}} = |w''(z_o)|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}}. \qquad (3.59)$$

Από τη σχέση (3.56) και σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω, προκύπτει ότι όταν το z προσεγγίζει το z_o από την περιοχή $arg(z-z_o) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ τότε παίρνουμε $\tau < 0$.

Για την ολοκλήρωση του υπολογισμού της ασυμπτωτικού αναπτύγματος $M(\lambda)$, του ολοκληρώματος $I(\lambda)$ θεωρούμε την $g\left(z(\tau)\right)$ ως δυναμοσειρά και αντικαθιστώντας τη σχέση (3.56) έχουμε:

$$g\left(z(\tau)\right) = g(z_o) + (z - z_o)g'(z_o) + \cdots =$$

$$= g(z_o) + g'(z_o)\left[\frac{-2}{w''(z_o)}\right]^{\frac{1}{2}} \tau + O(\tau^2). \qquad (3.60)$$

Τώρα με την αντικατάσταση των σχέσεων (3.58) και (3.60) στη σχέση (3.53) και με τη βοήθεια του Λήμματος του Watson έχουμε ως προς τον υπολογισμό του ασυμπωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος:

$$I(\lambda) = e^{\lambda w(z_o)} g(z_o) \left[\frac{-2}{w''(z_o)}\right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\tau^2}\,\mathrm{d}\tau + \cdots \sim$$

$$\sim g(z_o)\left[\frac{-2\pi}{\lambda w''(z_o)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{\lambda w(z_o)} + O\left(\frac{e^{\lambda w(z_o)}}{\lambda}\right) \qquad \lambda \to \infty. \qquad (3.61)$$

Όπου σύμφωνα με την παραπάνω συζήτηση το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $\left[\frac{-1}{w''(z_o)}\right]^{\frac{1}{2}}$ πρέπει να επιλεχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να συμφωνεί με την κατεύθυνση, η οποία παιρνάει από το κρίσιμο σημείο z_o.

Στην περίπτωση τώρα κατά την οποία η κατεύθυνση αυτή παιρνάει από την περιοχή με $arg(z-z_o) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ στην περοχή με $arg(z-z_o) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ τότε η σχέση (3.61) λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.59) γίνεται:

$$I(\lambda) \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left|w''(z_o)\right|^{-\frac{1}{2}} g(z_o) e^{\lambda w(z_0) + \frac{i}{2}(\pi-\alpha)}. \qquad (3.62)$$

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το συμπέρασμα μας, το οποίο αφορά τον υπολογισμό ασυμπτωτικού αναπτύγματος ολοκληρώματος τύπου Laplace στο μιγαδικό επίπεδο.

Θεώρημα 3.1 *(Υπολογισμός Ασυμπτωτικού Αναπτύγματος Ολοκληρώματος τύπου Laplace στο μιγαδικό επίπεδο)*

Έστω οι συναρτήσεις $g(z)$ και $w(z)$, για τις οποίες ισχύει ότι η πρώτη είναι συνεχής στο σημείο z_o και η δεύτερη αναλυτική στο σημείο αυτό. Επιλπέον θεωρούμε ότι το σημείο z_o είναι απλό σαγματικό σημείο για τη συνάρτηση $w(z)$, δηλαδή ισχύει ότι: $w'(z) = 0, w''(z) \neq 0$. Τότε για τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος $M(\lambda)$, του ολοκληρώματος $I(\lambda)$ κατά μήκος δρόμου επικλινέστατης καθόδου με $\lambda \to \infty$ θα ισχύει ότι:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{\lambda w(z)}\,\mathsf{d}z \sim M(\lambda)$$

με:

$$M(\lambda) = g(z_o)\left[\frac{-2\pi}{\lambda w''(z_o)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{\lambda w(z_o)} + O\left(\frac{e^{\lambda w(z_o)}}{\lambda}\right).$$

Κεφάλαιο 4

Η εξίσωση της θερμότητας

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπολογίσουμε με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier τη λύση της εξίσωσης της θερμότητας.

4.1 Λύση της εξίσωσης της θερμότητας με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier

Έστω ότι αναζητούμε τη λύση του προβλήματος:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

Στο παραπάνω πρόβλημα θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή για την $f(x)$ ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{4.3}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}(\kappa)$ της συνάρτησης $f(x)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\widehat{f}(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\kappa x} \, \mathrm{d}x, \qquad \kappa \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Τώρα ότι θεωρήσαμε για την αρχική συνθήκη θα θεωρήσουμε και για τις συναρτήσεις: $u(x,t), u_x(x,t)$ και $u_{xx}(x,t)$, δηλαδή ότι είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες ως προς τη μεταβλητή x.

Μια συνθήκη, η οποία αρκεί για να ισχύει η παραπάνω ιδιότητα είναι η συνάρτηση $u(x,t)$ να έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης, δηλαδή $u(x,t) \in C^2(\Omega)$, όπου:

$$\Omega = \{(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0\} \tag{4.5}$$

και οι συναρτήσεις $u(x,t), u_x(x,t)$ και $u_{xx}(x,t)$ να φθίνουν ταχύτερα από κάθε αρνητική δύναμη του $|x|$ καθώς $|x| \to \infty$, δηλαδή να υπάρχουν σταθερές C_n τέτοιες ώστε:

$$|x^l u^{(m)}(x,t)| \leq C_{lm}, \qquad l = 1,2,3,..,m = 0,1,2. \tag{4.6}$$

Οι παραπάνω προϋποθέσεις εξασφαλίζουν τα παρακάτω:

1. Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $u(x,t)$ ως προς τη μεταβλητή x, δηλαδή η συνάρτηση:

$$\widehat{u}(\kappa,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\kappa x} \,\mathsf{d}x \tag{4.7}$$

   ορίζεται $\forall \kappa \in \mathbb{R}$.

2. Η συνάρτηση $u(x,t)$ δίνεται από το τύπο:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\kappa,t) e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa. \tag{4.8}$$

3. Ο τελεστής της μερικής παραγώγου ως προς τη μεταβλητή x, μπορεί να μπεί μέσα στο ολοκλήρωμα. Επομένως γράφουμε:

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\kappa,t) e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\kappa,t) i\kappa e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε ότι για τη δεύτερη μερική παράγωγο της συνάρτησης $u(x,t)$ ως προς την μεταβλητή x έχουμε:

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\kappa,t) \left(i\kappa\right)^2 e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa. \tag{4.10}$$

Εδώ θα υποθέσουμε ότι το ίδιο μπορεί να γίνει και με τον τελεστή της μερικής παραγώγου ως προς τη μεταβλητή t. Αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε τη σχέση:

$$u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\kappa,t) e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_t(\kappa, t) e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa. \tag{4.11}$$

Τώρα με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων $(4.10), (4.11)$ στην εξίσωση της θερμότητας έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_t(\kappa, t) e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\kappa, t) \, (i\kappa)^2 \, e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\widehat{u}_t(\kappa, t) + \kappa^2 \widehat{u}(\kappa, t) \right] e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa = 0. \tag{4.12}$$

Άρα για να ισχύει η σχέση (4.12) αρκεί να ισχύει $\forall \kappa \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{u}_t(\kappa, t) + \kappa^2 \widehat{u}(\kappa, t) = 0. \tag{4.13}$$

Λύνοντας την παραπάνω Συνήθη Διαφορική Εξίσωση έχουμε:

$$\widehat{u}(\kappa, t) = C(\kappa) e^{-\kappa^2 t} \tag{4.14}$$

Τώρα για τον υπολογισμό της σταθεράς $C(\kappa)$ για $t = 0$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε:

$$\widehat{u}(\kappa, 0) = C(\kappa) e^{-\kappa^2 0} = C(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-i\kappa x} \,\mathsf{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\kappa x} \,\mathsf{d}x = \widehat{f}(\kappa), \tag{4.15}$$

και έχουμε με αντιακτάσταση της (4.15) στην (4.14):

$$\widehat{u}(\kappa, t) = \widehat{f}(\kappa) e^{-\kappa^2 t}. \tag{4.16}$$

Τώρα γνωρίζοντας το μετασχηματισμό Fourier της $u(x, t)$ ως προς τη μεταβλητή x για $t > 0$ γράφουμε:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\kappa, t) e^{-\kappa^2 t} e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\kappa s} \,\mathsf{d}s \right) e^{-\kappa^2 t} e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa^2 t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\kappa s} \,\mathsf{d}s \right) e^{i\kappa x} \,\mathsf{d}\kappa. \tag{4.17}$$

Μπορούμε τώρα να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης στο παραπάνω ολοκλήρωμα εφόσον για σταθεροποιημένα $x \in \mathbb{R}, t > 0$ ισχυεί η παρακάτω σχέση:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa^2 t} f(s) e^{-i\kappa s} e^{i\kappa x} \, \mathsf{d}s \, \mathsf{d}\kappa \right| \leq$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\kappa^2 t} f(s) e^{-i\kappa s + i\kappa x} \right| \, \mathsf{d}s \, \mathsf{d}\kappa =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\kappa^2 t} f(s) \right| \, \mathsf{d\,s\,d}\kappa \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| \, \mathsf{d}s \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\kappa^2 t} \right| \, \mathsf{d}\kappa < \infty. \quad (4.18)$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa^2 t} e^{i\kappa(x-s)} \, \mathsf{d}\kappa \right) \mathsf{d}s =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) G(x,t) \, \mathsf{d}s \quad (4.19)$$

με:

$$G(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa^2 t + i\kappa(x-s)} \, \mathsf{d}\kappa. \quad (4.20)$$

4.2 Υπολογισμός του ολοκληρώματος $G(x,t)$

Σε πρώτη φάση, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, θα συμπληρώσουμε το τετράγωνο του εκθέτη της συνάρτησης στο εσωτερικό του ολοκληρώματος. Επόμενως με την εκτέλεση των παρακάτω πράξεων παίρνουμε:

$$\kappa^2 t - i\kappa(x-s) = t \left[\kappa^2 - i\kappa \left(\frac{x-s}{t} \right) \right] =$$

$$= t \left[\left(\kappa - i\frac{x-s}{2t} \right)^2 + \left(\frac{x-s}{2t} \right)^2 \right] = \frac{(x-s)^2}{4t} + t \left(\kappa - i\frac{x-s}{2t} \right)^2 \quad (4.21)$$

και ο εκθέτης της συνάρτησης εντός του ολοκληρώματος παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa^2 t+i\kappa(x-s)}\,\mathsf{d}\kappa = e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\left(\kappa-i\frac{x-s}{2t}\right)^2}\,\mathsf{d}\kappa. \tag{4.22}$$

Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος, σχέση (4.22), κάνουμε την παρακάτω αλλαγής μεταβλήτης:

$$\zeta = \sqrt{t}\left(\kappa - i\frac{x-s}{2t}\right) \Rightarrow \mathsf{d}\zeta = \sqrt{t}\,\mathsf{d}\kappa \tag{4.23}$$

οπότε με αντιακτάσταση της σχέσης (4.23) στη σχέση (4.22) έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\left(\kappa-i\frac{x-s}{2t}\right)^2}\,\mathsf{d}\kappa = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty-i\gamma}^{\infty-i\gamma} e^{-\zeta^2}\,\mathsf{d}\zeta \tag{4.24}$$

με

$$\gamma = \frac{x-s}{2t}. \tag{4.25}$$

Τώρα η συνάρτηση $e^{-\zeta^2}$ είναι ολόμορφη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, άρα από το Θεώρημα του Cauchy το ολοκλήρωμα της συνάρτησης στο σύνορο του ορθογωνίου, με κορυφές τα σημεία: $(-a,0),(b,0),(b,b-i\gamma),(-a,-a-i\gamma)$ είναι μηδέν. Εδώ οι αριθμοί a,b,γ θα θεωρήσουμε ότι είναι θετικοί, δηλαδή $a,b,\gamma>0$.

Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα στις κατακόρυφες πλευρές του παραλληλογράμμου, το οποίο περιγράψαμε παραπάνω και για αυτό το λόγο θα μελετήσουμε ένα εκ των δύο ολοκληρωμάτων εφόσον ό,τι ισχύει για το ένα θα ισχύει και για το άλλο. Ας πάρουμε λοιπόν το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$\int_{b}^{b-i\gamma} e^{-\zeta^2} d\zeta, \tag{4.26}$$

με το γ να δίνεται από τη σχέση (4.25). Κάνοντας την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής:

$$\zeta = b - i\psi \Rightarrow \mathsf{d}\zeta = -i\,\mathsf{d}\psi \tag{4.27}$$

και αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα της σχέσης (4.26) παίρνουμε ότι:

$$\int_{b}^{b-i\gamma} e^{-\zeta^2}\,\mathsf{d}\zeta = -i\int_{0}^{\gamma} e^{-(b-i\psi)^2}\,\mathsf{d}\psi = -ie^{-b^2}\int_{0}^{\gamma} e^{\psi^2+2ib\psi}\,\mathsf{d}\psi. \tag{4.28}$$

Φράσσοντας την παραπάνω ισότητα έχουμε:

$$\left|\int_{b}^{b-i\gamma} e^{-\zeta^2}\,\mathsf{d}\zeta\right| = \left|-ie^{-b^2}\int_{0}^{\gamma} e^{\psi^2+2ib\psi}\,\mathsf{d}\psi\right| \le e^{-b^2}\int_{0}^{\gamma} e^{\psi^2}\left|e^{2ib\psi}\right|\,\mathsf{d}\psi. \tag{4.29}$$

Όμως
$$\left|e^{2ib\psi}\right| = 1, \tag{4.30}$$
και καταλήγουμε ότι:
$$\left|\int_b^{b-i\gamma} e^{-\zeta^2}\,\mathsf{d}\zeta\right| \le e^{-b^2}\int_0^{\gamma} e^{\psi^2}\,\mathsf{d}\psi. \tag{4.31}$$
Αφήνοντας τώρα το b να πάει στο άπειρο το παραπάνω ολοκλήρωμα πάει στο μηδέν. Συνοψίζοντας επομένως όταν το b μεγαλώνει αρκετά η συνεισφορά για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της σχέσης (4.24) στο εκάστοτε παραλληλόγραμμο ολοκλήρωσης προέρχεται μόνο από τα ολοκληρώματα της συνάρτησης στους δρόμους ολοκλήρωσης, οι οποίοι είναι παράλληλοι προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Άρα έχουμε τελικά ότι:
$$\int_{-\infty-i\gamma}^{\infty-i\gamma} e^{-\zeta^2}\,\mathsf{d}\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2}\,\mathsf{d}\zeta = \sqrt{\pi}. \tag{4.32}$$
Τώρα αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.24) και (4.32) στη σχέση (4.22) παίρνουμε:
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa^2 t+i\kappa(x-s)}\,\mathsf{d}\kappa = e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}. \tag{4.33}$$
Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην εξίσωση (4.19) έχουμε τελικά ότι η λύση της εξίσωσης της θερμότητας δίνεται από την παρακάτω σχέση:
$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)G(x,t)\,\mathsf{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}f(s)\,\mathsf{d}s =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} f(s)\,\mathsf{d}s, \qquad x\in\mathbb{R}, \quad t>0. \tag{4.34}$$
Έδω είδαμε ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα η συνάστηση $G(x,t)$ μπορεί να υπολογισθεί ακριβώς. Στα παραβολικά προβλήματα ανώτερης τάξης αυτό δεν είναι εφικτό και όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο με τη βοήθεια της μεθόδου επικλινέστατης καθόδου θα προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $G(x,t)$ το οποίο προκύπτει από τη λύση της παραβολικής εξίσωσης με το μετασχηματισμό Fourier και έτσι θα έχουμε και μια προσέγγιση για τη λύση των παραβολικών προβλημάτων ανώτερης τάξης.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή της μεθόδου επικλινέστατης καθόδου σε παραβολικά προβλήματα ανώτερης τάξης

5.1 Υπολογισμός του αντίστοιχου ολοκληρώματος $G(x,t)$ σε παραβολικά προβλήματα ανώτερης τάξης

Τα παραβολικά προβλήματα ανώτερης τάξης, ανάλογα με την τάξη τους, χαρακτηρίζονται από μια διαφορική εξίσωση, η οποία έχει την παρακάτω μορφή:

$$\partial_t u(x,t) = (-1)^m \partial_x^{(2m)} u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{5.1}$$

με αρχική συνθήκη:

$$u(x,0) = u_o(x). \tag{5.2}$$

Για τη λύση αυτής της εξίσωσης με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier και σύμφωνα με όσα αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και συγκεκριμένα σύμφωνα με τις σχέσεις $(4.19), (4.20)$ θα έχουμε αντίστοιχα:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_o(s) G(x,t) \, \mathrm{d}s \tag{5.3}$$

με

$$G(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x - \kappa^{2m} t} \,\mathrm{d}\kappa. \tag{5.4}$$

Σκοπός μας τώρα και έχοντας σαν δεδομένο ότι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $G(x,t)$ δεν μπορεί να γίνει ακριβώς (κλειστή μορφή), είναι να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του παραπάνω ολοκληρώματος, σχέση (5.4), καθώς $t \to 0$ ή ισοδύναμα καθώς $x \to \infty$.

Για τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος $G(x,t)$ θα κάνουμε σε πρώτη φάση την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής:

$$t^{-\frac{1}{2m}} \eta = \kappa. \tag{5.5}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε ότι:

$$t^{-\frac{1}{2m}} \,\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\kappa \tag{5.6}$$

και επιπλέον σύμφωνα με τη σχέση (5.5) για τα όρια ολοκλήρωσης έχουμε ότι:

$$\kappa \to \pm\infty \Rightarrow \eta \to \pm\infty. \tag{5.7}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.5) και (5.6) στη σχέση (5.3) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x - \kappa^{2m} t} \,\mathrm{d}\kappa &= t^{-\frac{1}{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ix\eta t^{-\frac{1}{2m}} - t^{-1}\eta^{2m} t] \,\mathrm{d}\eta = \\
&= t^{-\frac{1}{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ix\eta t^{-\frac{1}{2m}} - \eta^{2m}] \,\mathrm{d}\eta = \\
&= t^{-\frac{1}{2m}} G(t^{-\frac{1}{2m}} x, 1) = t^{-\frac{1}{2m}} G(t^{-\frac{1}{2m}} x).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Με το ολοκλήρωμα $G(x)$ να δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta - \eta^{2m}} \,\mathrm{d}\eta. \tag{5.9}$$

Μας ενδιαφέρει η ασυμτωτική συμπεριφορά αυτού του ολοκληρώματος, σχέση (5.9), όταν $x \to \infty$.

Για τον παραπάνω υπολογισμό θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής:

$$\eta = \left(\frac{x}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} s \tag{5.10}$$

όπου με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\mathrm{d}\eta = \left(\frac{x}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \,\mathrm{d}s \tag{5.11}$$

και από τη σχέση (5.10) για τα όρια ολοκλήρωσης, έχουμε:

$$\eta \to \pm\infty \Rightarrow s \to \pm\infty. \tag{5.12}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τη σχέση (5.10) στη σχέση (5.9) το ολοκλήρωμα $G(x)$ γίνεται:

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta-\eta^{2m}}\,\mathrm{d}\eta = \left(\frac{x}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ix\left(\frac{x}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} s - \left(\frac{x}{2m}\right)^{\frac{2m}{2m-1}} s^{2m}]\,\mathrm{d}s =$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{x}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{x^{\frac{2m}{2m-1}}}{(2m)^{\frac{1}{2m-1}}}(is - \frac{s^{2m}}{2m})\right)\mathrm{d}s = \\ &= \left(\frac{x}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} F\left(\frac{x^{\frac{2m}{2m-1}}}{(2m)^{\frac{1}{2m-1}}}\right) = \left(\frac{x}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} F(\lambda). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Με το ολοκλήρωμα $F(\lambda)$ να δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\lambda(is - \frac{s^{2m}}{2m})\right]\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda\phi(s))\,\mathrm{d}s = \\ &= \int_{\mathbb{R}+i0} \exp(\lambda\phi(z))\,\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Με την συνάρτηση $\phi(z)$ να ισούται με:

$$\phi(z) = iz - \frac{z^{2m}}{2m} \tag{5.15}$$

5.1.1 Εύρεση των κρισίμων σημείων της $\phi(z)$

Για να χρησιμοποιείσουμε τη μέθοδο της επικλινέστατης καθόδου με σκοπό να υπολογίσουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος $F(\lambda)$ θα πρέπει σε πρώτη φάση βρούμε τα κρίσιμα (σαγματικά) σημεία της συνάρτησης $\phi(z)$. Τα κρίσιμα σημεία θα τα βρούμε παραγωγίζοντας της παραπάνω συνάρτηση, σχέση (5.15) και εξισώνοντας την με το μηδέν, έφοσον η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι παντού αναλυτική στο μιγαδικό επίπεδο. Επομένως έχουμε:

$$\phi'(z) = 0 \Rightarrow i - \frac{(2m)z^{2m-1}}{2m} = i - z^{2m-1} = 0 \Rightarrow z^{2m-1} = i. \tag{5.16}$$

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται εύκολα χρησιμοποιώντας το τύπο του De Moivre και έχει ακριβώς $2m-1$ ρίζες. Γράφοντας την εξίσωση, σχέση (5.16) με τον παρακάτω τρόπο:

$$z^{2m-1} = i = 1(0+i) = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

και εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο του De Moivre όπως είπαμε παραπάνω έχουμε:

$$z_\kappa = 1^{\frac{1}{2m-1}}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}\right] = \left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}\right] =$$
$$= e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}} \tag{5.17}$$

με $\kappa = 0, 1, 2...., 2(m-1)$.

Ας δούμε στο σημείο αυτό τα κρίσιμα σημεία για δυο παραδείγματα παραβολικών προβλημάτων και συγκεκριμένα στις περιπτώσεις όπου $m = 2$ και $m = 3$.

Για $m = 2$ έχουμε να λύσουμε την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$u_t(x,t) = u_{xxxx}(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{5.18}$$

με αρχική συνθήκη:

$$u(x,0) = u_o(x). \tag{5.19}$$

Η συνάρτηση $\phi(z)$ θα ισούται σύμφωνα με τη σχέση (5.15) με:

$$\phi(z) = iz - \frac{z^4}{4} \tag{5.20}$$

Τα κρίσιμα (σαγματικά) σημεία της συνάρτησης $\phi(z)$ είναι τα ακόλουθα:

- $$z_o = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \tag{5.21}$$

- $$z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \tag{5.22}$$

- $$z_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i \tag{5.23}$$

Ένω στην περίπτωση, κατά την οποία έχουμε $m = 3$, έχουμε την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$u_t(x,t) = u_{xxxxxx}(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{5.24}$$

με αρχική συνθήκη:

$$u(x,0) = u_o(x). \tag{5.25}$$

Η συνάρτηση $\phi(z)$ θα ισούται σύμφωνα με τη σχέση (5.15) με:

$$\phi(z) = iz - \frac{z^6}{6} \tag{5.26}$$

Τα κρίσιμα (σαγματικά) σημεία της συνάρτησης $\phi(z)$ είναι τα ακόλουθα:

- $$z_o = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} + i\frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right) \tag{5.27}$$

- $$z_1 = \cos\frac{5\pi}{10} + i\sin\frac{5\pi}{10} = i \tag{5.28}$$

- $$z_2 = \cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10} = -\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} + i\frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right) \tag{5.29}$$

- $$z_3 = \cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10} = -\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} + i\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1\right) \tag{5.30}$$

- $$z_4 = \cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10} = \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} + i\frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1\right) \tag{5.31}$$

Όπως παρατηρούμε τα σημεία αυτά, αλλά και γενικότερα τα κρίσιμα σημεία των παραβολικών εξισώσεων είναι ανά δύο συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

5.1.2 Εύρεση καμπυλών επικλινέστατης καθόδου

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει τοπικά σε κάθε κρίσιμο (σαγματικό) σημείο z_κ.

Παραγωγίζοντας δυο φορές τη συνάρτηση $\phi(z)$, σχέση (5.15) έχουμε:

$$\phi''(z) = -(2m-1)z^{2m-2} \Rightarrow \phi''(z_\kappa) = -(2m-1)z_\kappa^{2m-2} = -(2m-1)e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}(2m-2)} =$$

$$= -(2m-1)e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{1}(1-\frac{1}{2m-1})} = -(2m-1)ie^{-i\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}} =$$
$$= (2m-1)e^{-i\left[\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}+\frac{\pi}{2}\right]} \tag{5.32}$$

Ειδικότερα $\phi''(z_\kappa) \neq 0$, δηλαδή κάθε z_κ είναι μη εκφυλισμένο σαγματικό σημείο.

Στη γειτονιά τώρα του z_κ και εφόσον η συνάρτηση $\phi(z)$ είναι αναλυτική αφού την αναπτύξουμε σε σειρά Taylor έχουμε:

$$\phi(z) - \phi(z_\kappa) = \phi''(z_\kappa)\frac{(z-z_\kappa)^2}{2} + O\left((z-z_\kappa)^3\right) \tag{5.33}$$

αν τώρα θέσουμε:

$$z - z_\kappa = \rho e^{i\theta} \tag{5.34}$$

και στη συνέχεια αντικαταστήσουμε τη σχέση (5.34) στη σχέση (5.33) θα πάρουμε:

$$\phi(z) - \phi(z_\kappa) = \frac{2m-1}{2}e^{i\left[-\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}-\frac{\pi}{2}\right]}\rho^2 e^{2i\theta} + O\left(\rho^3\right) =$$

$$= \frac{(2m-1)\rho^2}{2}\,\text{exp}\left(i\left[-\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1} - \frac{\pi}{2} + 2\theta\right]\right) + O\left(\rho^3\right). \tag{5.35}$$

Τώρα όπως έχει ήδη αναφερθεί οι κατεύθυνσεις της επικλινέστατης καθόδου δίνονται από τη σχέση (3.13). Φυσικά και από τη σχέση (5.35) εύκολα μπορούν να υπολογισθούν εξισώνοντας την εκθετική συνάρτηση με -1, εφόσον το πρώτο μέλος αυτής της σχέσης είναι πραγματικός και όσο γίνεται πιο αρνητικός αριθμός κατά μήκος των συγκεκριμένων κατευθύνσεων. Άρα για κάθε κρίσιμο (σαγματικό) σημείο z_κ έχουμε:

$$\theta = -\frac{-\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{2m-1} - \frac{\pi}{2}}{2} \pm \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{4m-2} + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}. \tag{5.36}$$

Εξισώνοντας επομένως τους εκθέτες των εκθετικών συναρτήσεων καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\theta = \theta_{\pm}^{\kappa} = \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{4m-2} + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}. \tag{5.37}$$

Στον παραπάνω τύπο οι κατεύθυνσεις $\theta_{\pm}^{\kappa}$ αντιστοιχούν στο σαγματικό σημείο z_{κ} και παρατηρούμε ότι $\theta_{+}^{\kappa} - \theta_{-}^{\kappa} = \pi$.

Έστω τώρα ότι $\gamma_{\pm}^{\kappa}$ είναι οι καμπύλες επικλινέστατης καθόδου, οι οποίες αντιστοιχούν στα σαγματικά σημεία z_{κ} και έχουν κατεύθυνσεις $\theta_{\pm}^{\kappa}$, οι οποίες δίνονται από τη σχέση (5.37). Όπως και στην περίπτωση των κατευθύνσεων έτσι και στην περίπτωση των καμπύλων θα θεωρήσουμε ότι η καμπύλη γ_{+}^{κ} έχει κατεύθυνση, η οποία δίνεται από τη γωνία θ_{+}^{κ} και αντίστοιχα η καμπύλη γ_{-}^{κ} έχει κατεύθυνση με γωνία γ_{-}^{κ}.

5.1.3 Υπολογισμός του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος $\int_{\gamma_{-}^{\kappa}} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathrm{d}z$

Για τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος:

$$\int_{\gamma_{-}^{\kappa}} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathrm{d}z,$$

θα ξεκινήσουμε αναπτύσσοντας την $\phi(z)$ σε σειρά Taylor, έχουμε επομένως ότι:

$$\phi(z) = \phi(z_{\kappa}) + \frac{(z-z_{\kappa})^2}{2}\phi''(z_{\kappa}) + O\left((z-z_{\kappa})^3\right). \tag{5.38}$$

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε την εξής αλλαγή μεταβλητής:

$$s = \phi(z_{\kappa}) - \phi(z). \tag{5.39}$$

Αν επιπλέον θέσουμε ότι:

$$z - z_{\kappa} = As^{\frac{1}{2}} \Rightarrow A^2 = \frac{(z-z_{\kappa})^2}{s} \tag{5.40}$$

και αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (5.32) και (5.39) στη σχέση (5.40) έχουμε:

$$A^2 = \frac{(z-z_\kappa)^2}{s} \sim -\frac{2}{\phi''(z_\kappa)} = -\frac{2}{-(2m-1)ie^{-i\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{2m-1}}} = \frac{2}{(2m-1)i}e^{i\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{2m-1}} =$$

$$= \frac{2z_\kappa}{(2m-1)i}. \tag{5.41}$$

Για να πετύχουμε την κατεύθυνση θ_-^κ μπορούμε να θέσουμε οτι το A είναι ένας μιγαδικός αριθμός, ο οποίος δίνεται από την σχέση:

$$A = A_-^\kappa = \sqrt{\frac{2}{2m-1}}e^{\imath\theta_-^\kappa}, \tag{5.42}$$

αφού όπως παρατηρούμε εαν το δεύτερο μέρος αυτής υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τη σχέση (5.41).

Έχουμε τώρα για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος ότι ισχύει:

$$\int_{\gamma_+^\kappa} e^{\lambda\phi(z)}dz = -\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda\phi(z)}dz. \tag{5.43}$$

Η εξήγηση της παραπάνω σχέσης οφείλεται στο γεγονός οτι στη συγκεκριμένη πρίπτωση οι καμπύλες επικλινέστατης καθόδου γ_+^κ και γ_-^κ βρίσκονται μέσα σε κοιλάδες και αφήνουν το σαγματικό σημείο με αντίθετες κατευθύνσεις. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την παραγωγή κυρίαρχων όρων για τις συναρτήσεις, εντός του ολοκληρώματος, αντιθέτων προσήμων. Αρκετά συχνά, η παραμόρφωση ενός δρόμου C για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος παράγει ένα δρόμο, ο οποίος διέρχεται από ένα σαγματικό σημείο από τη μια κοιλάδα στην άλλη. Σε αυτή την περίπτωση η αντικατάσταση για τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος ενός ολοκληρωμάτος δίνει μια διαφορά των ολοκληρωματών πάνω στις κατευθύνσεις επικλινέστατης καθόδου. Αυτή η διαφορά είναι δυο φορές το ολοκλήρωμα πάνω σε μια εκ των δυο κατευθύνσεις επικλινέστατης καθόδου, σε αυτήν που έχει τον ίδιο προσανατολισμό με το δρόμο C. Σημειώνουμε εδώ ότι για την αναλυτική συναρτήση $\phi(z)$, οι επόμενοι όροι $[O\left(\lambda^{-1}\right)]$ είναι πανομοιότυποι και του ίδιου πρόσημου, επομένως αυτοί οι όροι θα αφαιρεθούν όταν τα δυο ολοκληρώματα θα υπολογιστούν κατά μήκος των καμπυλών επικλινέστατων καθόδων. Οι επόμενοι οροί $[O\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right)]$ είναι πανομοιότυποι αλλά αντιθέτου προσήμου, επομένως κατά τον υπολογισμό των ολοκληρωματών αυτοί οι όροι θα δώσουν το διπλάσιο ενός εκ των δύο όρων, ανάλογα με τον προσανατολισμό του αρχικού δρόμου C.

Επιστρέφοντας στον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος και παραγωγίζοντας τη σχέση (5.40) έχουμε:

$$z = z_\kappa + A s^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathrm{d}z = A\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s. \tag{5.44}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση εντός του ολοκληρώματος παίρνουμε:

$$\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^\infty e^{\lambda(\phi(z_\kappa)-s)} A\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s = \frac{A}{2}e^{\lambda\phi(z_\kappa)}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s, \tag{5.45}$$

στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι ως άνω όριο του ολοκληρώματος έχουμε βάλει το άπειρο δίοτι ξέρουμε από την Παράγραφο $2.2.2$, ότι το άνω όριο μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός οσοδήποτε μεγάλος χωρίς αυτό να επηρεάζει τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος.

Τώρα για το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda s}ds, \tag{5.46}$$

το οποίο είναι ολοκλήρωμα τύπου Laplace από το Λήμμα του Watson έχουμε ότι ισχύει:

$$\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{5.47}$$

και επομένως καταλήγουμε ότι:

$$\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{A_-^\kappa}{2}e^{\lambda\phi(z_\kappa)}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\lambda^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{5.48}$$

Όπου το A_-^κ είναι μια σταθερά, η οποία εξαρτάται από την καμπύλη επικλινέστατης καθόδου πάνω στην οποία γίνεται η ολοκλήρωση και δίνεται από τη σχέση (5.42).

Συνεχίζοντας τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος μας θα πρέπει τώρα να υπολογίσουμε το $\phi(z_\kappa)$ στο δεύτερο μέλος της σχέσης (5.48) και επομένως έχουμε αντικαθιστώντας το τύπο των κρισίμων σημείων στη συνάρτηση:

$$\phi(z_\kappa) = iz_\kappa - \frac{z_\kappa^{2m}}{2m} = ie^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}} - \frac{e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}2m}}{2m} =$$

$$= ie^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}} - \frac{e^{i\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)\frac{2m-1+1}{2m-1}}}{2m} = iz_\kappa - \frac{e^{i\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2m-1}\right)}}{2m} =$$

$$= iz_\kappa - \frac{e^{i\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)}e^{i\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}}{2m-1}}}{2m} = iz_\kappa - \frac{iz_\kappa}{2m} = \frac{2m-1}{2m} iz_\kappa. \tag{5.49}$$

Τώρα αντικαθιστώντας τη σχέση (5.49) στη σχέση (5.48) παίρνουμε:

$$\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathrm{d}z \sim \frac{A_-^\kappa}{2} e^{\lambda\phi(z_\kappa)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2} A_-^\kappa \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\frac{2m-1}{2m} iz_\kappa}. \tag{5.50}$$

Όμως αν θέσουμε ότι:

$$z_\kappa = x_\kappa + iy_\kappa \tag{5.51}$$

και αντικαταστήσουμε την τελευταία σχέση στη σχέση (5.50) παίρνουμε:

$$\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathrm{d}z \sim \frac{A_-^\kappa}{2} e^{\lambda\phi(z_\kappa)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2} A_-^\kappa \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\frac{2m-1}{2m} iz_\kappa} =$$

$$= \frac{1}{2} A_-^\kappa \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} e^{\lambda\frac{2m-1}{2m} i(x_\kappa+iy_\kappa)} = \frac{1}{2} A_-^\kappa \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} e^{i\lambda\frac{2m-1}{2m} x_\kappa} e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m} y_\kappa}. \tag{5.52}$$

Αντικαθιστώντας τώρα το A_-^κ από τη σχέση (5.42) στην τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathrm{d}z \sim \frac{1}{2} A_-^\kappa \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} e^{i\lambda\frac{2m-1}{2m} x_\kappa} e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m} y_\kappa} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m} y_\kappa} \sqrt{\frac{2}{2m-1}} e^{i\theta_-^\kappa} e^{i\lambda\frac{2m-1}{2m} x_\kappa} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{(4m-2)\lambda}} e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m} y_\kappa} e^{i\left(\theta_-^\kappa + \lambda\frac{2m-1}{2m} x_\kappa\right)}. \tag{5.53}$$

Όπου τα x_κ, y_κ και θ_-^κ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$x_\kappa = \cos\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) \tag{5.54}$$

$$y_\kappa = \sin\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}\right) \tag{5.55}$$

και

$$\theta_-^\kappa = \frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{4m-2} - \frac{\pi}{4}$$

σύμφωνα με τη σχέση (5.37).

Συνοψίζοντας έχουμε υπολογίσει το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος $\int_{\gamma_-^\kappa} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathrm{d}z$ κατά μήκος της καμπυλης επικλινέστατης καθόδου.

5.1.4 Υπολογισμός του ασυμπτωτικού αναπτύγματος του ολοκληρώματος $F(\lambda)$

Σε πρώτη φάση θα αποδείξουμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 5.1 *Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{exp}\left[\lambda(iz-\frac{z^{2m}}{2m})\right] \mathrm{d}z$ παραμένει σταθερό αν υπολογιστεί πάνω σε οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη στον άξονα των παραγματικων αριθμών, δηλαδή ότι:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{exp}\left[\lambda(iz-\frac{z^{2m}}{2m})\right] \mathrm{d}z = \int_{\mathrm{Im}z=H} \mathrm{exp}\left[\lambda(iz-\frac{z^{2m}}{2m})\right] \mathrm{d}z \tag{5.56}$$

όπου $H \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης θα γίνει με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Cauchy.

Συγκεκριμένα ολοκληρώνοντας σε ένα τυχαίο παραλληλόγραμμο με πλευρές τον άξονα των πραγματικών αριθμών, την ευθεία $y = H$, την ευθεία $x = -M$ και την ευθεία $x = M$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα Cauchy στο παραπάνω παραλληλόγραμμο έχουμε ότι:

$$\int_{-M}^{M} \mathrm{exp}\left[\lambda(ix-\frac{x^{2m}}{2m})\right] \mathrm{d}x + \int_{M}^{M+iH} \mathrm{exp}\left[\lambda(iz-\frac{z^{2m}}{2m})\right] \mathrm{d}z+$$
$$+\int_{M+iH}^{-M+iH} \mathrm{exp}\left[\lambda(iz-\frac{z^{2m}}{2m})\right] \mathrm{d}z+$$
$$+\int_{-M+iH}^{-M} \mathrm{exp}\left[\lambda(iz-\frac{z^{2m}}{2m})\right] \mathrm{d}z = 0. \tag{5.57}$$

Για το ολοκλήρωμα πάνω στην πλευρά $x = M$ ή στην πλευρά $x = -M$ έχουμε ότι ισχύει αν θεωρήσουμε ότι:

$$z = re^{i\theta} \tag{5.58}$$

τότε:

$$0 \leq \left|\int_{M}^{M+iH} \mathrm{exp}\left[\lambda(iz-\frac{z^{2m}}{2m})\right] \mathrm{d}z\right| \leq \int_{M}^{M+iH} \left|\mathrm{exp}\left[\lambda(iz-\frac{z^{2m}}{2m})\right]\right| |\mathrm{d}z| =$$
$$= \int_{M}^{M+iH} |\mathrm{exp}\,(\lambda iz)| \left|\mathrm{exp}\left(-\frac{z^{2m}}{2m}\right)\right| |\mathrm{d}z|. \tag{5.59}$$

Όμως ισχύει ότι:

$$|\text{exp}\,(i\lambda z)| = 1. \tag{5.60}$$

Επομένως η σχέση (5.59) γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (5.58) και (5.60):

$$\int_{M}^{M+iH} \left|\text{exp}\left(-\frac{r^{2m}e^{i2m\theta}}{2m}\right)\right| |\text{d}z| = O\left(e^{-\frac{r^{2m}}{2m}}\right). \tag{5.61}$$

Καταλήγοντας αφού ισχύει ότι:

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{5.62}$$

αφήνοντας το x να πάει στο άπειρο το r πάει και αυτό στο άπειρο και επομένως από τη σχέση (5.59) το ολοκλήρωμα πάει στο μηδέν και έτσι αποδείξαμε τη σχέση (5.56).

Στο σημείο αυτό και για το λόγο, ο οποίος θα γίνει κατανοητός παρακάτω, θα βρούμε το κρίσιμο (σαγματικό σημείο) z, το οποίο είναι συμμετρικό στο z_κ και βρίσκεται στο θετικό ημιεπίπεδο ($Imz > 0$). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το σημείο z_κ δίνεται από τον τύπο:

$$z_\kappa = e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}} \tag{5.63}$$

όπου $\kappa = 0, 1, 2...., m-1$. Επιπρόσθετα τα δυο αυτά συμμετρικά σημεία έχουν ίδιες τεταγμένες και αντίθετες τετμημένες στο μιγαδικό επίπεδο και επομένως θα ισχύει για το συμμετρικό ότι:

$$z = e^{i\left(\pi - \frac{\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{2m-1}\right)} = e^{i\frac{\pi(2m-1)-\frac{\pi}{2}-2\kappa\pi}{2m-1}} = e^{i\frac{2m\pi-\pi-\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)-2\kappa\pi}{2m-1}} =$$

$$= e^{i\frac{2m\pi-2\pi+\frac{\pi}{2}-2\kappa\pi}{2m-1}} = e^{i\frac{2(m-1-\kappa)\pi+\frac{\pi}{2}}{2m-1}} = z_{m-1-\kappa}. \tag{5.64}$$

Επομένως το συμμετρικό σημείο του z_o είναι το z_{m-1} όπως εύκολα προκύπτει από τον παραπάνω τύπο θέτωντας $\kappa = 0$.

Σε ένα άλλο ερώτημα στο οποίο πρέπει να απαντήσουμε είναι πάνω σε ποια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών ή διαφορετικά από ποιο ζευγάρι κρισίμων συμμετρικών σημείων θα παραμορφώσουμε τον δρόμο ολοκλήρωσης C για να περνάει από αυτά με σκοπό να πάρουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος $F(\lambda)$, το οποίο το προσεγγίζει καλύτερα. Απάντηση στην τελευταία τεθείσα ερώτηση δίνει το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 5.2 *(Επιλογή κρισίμων σημείων στα οποια θα υπολογισθεί το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος $F(\lambda)$)*

Πάνω στην ευθεία, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα των πραγματικών αριθμών και δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z_o) = \mathrm{Im}(z_{m-1})$$

ισχύει ότι:

$$\mathrm{Re}(\phi(z)) \leq \mathrm{Re}(\phi(z_o)) = \mathrm{Re}(\phi(z_{m-1})). \tag{5.65}$$

Τα σημεία z_o και z_{m-1} είναι συμμετρικά και $\phi(z) = iz - \frac{z^{2m}}{2m}$. Η ισότητα στην παραπάνω σχέση ισχύει για την περίπτωση κατά την οποία έχουμε $z = z_o = z_{m-1}$.

Απόδειξη

Η προς απόδειξη σχέση εφόσον ισχύει ότι:

$$\mathrm{Re}(iz) = \mathrm{Re}(iz_o) = -y = -y_o = const$$

γράφεται:

$$\mathrm{Re} z^{2m} \geq \mathrm{Re} z_o^{2m}. \tag{5.66}$$

Θέτοντας:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy$$

και

$$z_\rho = e^{i\theta_\rho}$$

έχουμε από τον τύπο του De Moivre ότι:

$$z^{2m} = r^{2m}(\cos 2m\theta + i\sin 2m\theta)$$

και επομένως ισχύει:

$$\mathrm{Re} z^{2m} = r^{2m}\cos 2m\theta. \tag{5.67}$$

Αντικαθιστώντας τώρα το r στην παραπάνω σχέση λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $y = r\sin\theta$ παίρνουμε:

$$\mathrm{Re} z^{2m} = y^{2m}(\sin\theta)^{-2m}\cos 2m\theta = y^{2m}g(\theta).$$

Με το $g(\theta)$ να δίνεται από τη σχέση:

$$g(\theta) = (\sin\theta)^{-2m}\cos 2m\theta. \tag{5.68}$$

Παραγωγίζοντας την $g(\theta)$ παίρνουμε:

$$g'(\theta) = -2m(\sin\theta)^{-2m-1}\cos\left((2m-1)\theta\right). \tag{5.69}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $g'(\theta) = 0$ αν:

$$\theta = \theta_\rho = \frac{\rho\pi + \frac{\pi}{2}}{2m-1}, \qquad 0 \leq \rho \leq 2m-3. \tag{5.70}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τον παρακάτω ισχυρισμό, ο οποίος θα μας επιτρέψει να αποδείξουμε τη ζητούμενη ανισότητα.

Ισχυρισμός: Ισχύει $g(\theta_\rho) > g(\theta_o), \quad 1 \leq \rho \leq 2m-3$.

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$(\sin\theta_\rho)^{-2m}\cos 2m\theta_\rho > (\sin\theta_o)^{-2m}\cos 2m\theta_o. \tag{5.71}$$

Έχουμε όμως ότι:

$$\cos 2m\theta_o = \cos 2m\frac{\frac{\pi}{2}}{2m-1} = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta_o) = -\sin\theta_o, \tag{5.72}$$

άρα κάνοντας αντικατάσταση της σχέσης (5.72) στη σχέση (5.71), αρκεί να δείξουμε ότι:

$$(\sin\theta_\rho)^{-2m}\cos 2m\theta_\rho > -(\sin\theta_o)^{-2m+1}. \tag{5.73}$$

Για να ισχύει το παραπάνω αρκεί να ισχύει:

$$(\sin\theta_\rho)^{-2m} < (\sin\theta_o)^{-2m+1}, \qquad \rho = 1, \ldots, 2m-3,$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{(\sin\theta_\rho)^{2m}}{(\sin\theta_o)^{2m-1}} > 1. \tag{5.74}$$

Αρκεί να δείξουμε την παραπάνω σχέση για $\rho = 1$. Τότε έχουμε κάνοντας αντικατάσταση στη σχέση (5.70), ότι ισχύει $\theta_1 = 3\theta_o$, άρα το πρώτο μέλος της τελευταίας σχέσης ισούται με:

$$\frac{(\sin\theta_\rho)^{2m}}{(\sin\theta_o)^{2m-1}} =$$

$$= \frac{\left(3\sin\theta_o - 4\sin^3\theta_o\right)^{2m}}{(\sin\theta_o)^{2m-1}} = 3^{2m}\sin\theta_o\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_o\right)^{2m}. \tag{5.75}$$

Έχουμε όμως ότι για όλα τα παραβολικά προβλήματα, κάθε τάξης, ισχύει ότι:

$$\theta_o \leq \frac{\pi}{6}$$

άρα:

$$\sin\theta_o \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{3}\sin^2\theta_o \leq \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{3} \tag{5.76}$$

και αντικαθιστώντας τη σχέση (5.76) στη σχέση (5.75) έχουμε:

$$3^{2m} \sin\theta_o \left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\theta_o\right)^{2m} \geq 3^{2m}\sin\theta_o \left(\frac{2}{3}\right)^{2m} = 2^{2m}\sin\theta_o$$

και έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό εφόσον από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$\frac{\sin\theta_\rho}{\sin\theta_o} \geq 2 > 1. \tag{5.77}$$

Το παραπάνω Λήμμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τη μελέτη των παραβολικών προβλημάτων κάθε τάξης με την εφαρμογή της μεθόδου της επικλινέστατης καθόδου, δήλαδη στο να προσεγγίσουμε τη λύση αυτών με τη συγκεκριμένη μέθοδο. Από τη σχέση (5.53) έχουμε ήδη υπολογίσει το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του ολοκληρώματος της συνάρτησης $e^{\lambda\phi(z)}$, την οποία ολοκληρώνουμε σε δρόμους επικλινέστατης καθόδου, οι οποίοι διέρχονται από τα κρίσιμα σημεία. Το παραπάνω Λήμμα μας λέει με πια συγκεκριμένα κρίσιμα σημεία και επομένως με ποιους δρόμους επικλινέστατης καθόδου πρέπει να ασχοληθούμε. Τώρα με τη βοήθεια του Λήμματος 5.1 σύμφωνα με το οποίο μπορούμε να ολοκληρώσουμε σε κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των παργματικών αριθμών επιλέγουμε αυτή των συμμετρικών κρισίμων σημείων z_o και το z_{m-1}.

Είναι συνέπεια του Λήμματος ότι για κάθε $r > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\Big| \int_{\substack{\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z_0)\\ |z-z_0|>r}} e^{\lambda\phi(z)}dz\Big| \leq |e^{\lambda(\phi(z_0)-\delta)}| \tag{5.78}$$

και αντίστοιχα:

$$\Big| \int_{\substack{\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z_0)\\ |z-z_{m-1}|>r}} e^{\lambda\phi(z)}dz\Big| \leq |e^{\lambda(\phi(z_{m-1})-\delta)}| \tag{5.79}$$

Επειδή έχουμε επίσης ότι $\phi(z_{m-1}) = \overline{\phi(z_0)}$, έπεται ότι από το ολοκλήρωμα πάνω στην ευθεία $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z_0) = \mathrm{Re}(z_{m-1})$ αυτό που συνεισφέρει στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα είναι μια οσοδήποτε μικρή περιοχή των σημείων z_o και z_{m-1}. Και κάνοντας μια μικρή παραμόρφωση της ευθείας κοντά στα σημεία αυτά, μπορούμε να περάσουμε σε καμπύλες επικλινέστατης καθόδου.

5.2 Ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης της παραβολικής εξίσωσης τάξης $2m$

Στη γενική περίπτωση της παραβολικής εξίσωσης τάξης $2m$, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου θα επικεντρωθούμε στα συμμετρικά κρίσιμα (σαγματικά) σημεία z_o, z_{m-1} και από τη σχέση (5.53) έχουμε ότι:

$$\int_{\gamma_-^o} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_-^{m-1}} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathrm{d}z \sim$$
$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{(4m-2)\lambda}} e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m}y_o} e^{i\left(\theta_-^o+\lambda\frac{2m-1}{2m}x_o\right)} +$$
$$+\sqrt{\frac{\pi}{(4m-2)\lambda}} e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m}y_{m-1}} e^{i\left(\theta_-^{m-1}+\lambda\frac{2m-1}{2m}x_{m-1}\right)} \tag{5.80}$$

Τώρα για να απλοποιήσουμε την παραπάνω παράσταση θα κάνουμε μερικές απλές πράξεις και θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι τα κρίσιμα σημεία είναι συμμετρικά, άρα έχουμε από τις σχέσεις (5.37), (5.54) και (5.55) για τα x_o, y_o και θ_-^o:

- $$x_o = \cos\left(\frac{2\cdot 0\cdot\pi+\frac{\pi}{2}}{2\cdot m-1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4\cdot m-2}\right) = -x_{m-1} \tag{5.81}$$
- $$y_o = \sin\left(\frac{2\cdot 0\cdot\pi+\frac{\pi}{2}}{2\cdot m-1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4\cdot m-2}\right) = y_{m-1} \tag{5.82}$$
- $$\theta_-^o = \frac{2\cdot 0\cdot\pi+\frac{\pi}{2}}{4\cdot m-2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8\cdot m-4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi\,(1-m)}{2\,(2\cdot m-1)}. \tag{5.83}$$

Επιπλέον για τη γωνία θ_-^{m-1} έχουμε από τη σχέση (5.37):

$$\theta_-^{m-1} = \frac{2\,(m-1)\,\pi+\frac{\pi}{2}}{4m-2} + \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = \frac{2m\pi-2\pi+\pi-\frac{\pi}{2}}{4m-2} - \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{2m\pi-2\pi+\pi}{4m-2} - \frac{2\cdot 0\pi+\frac{\pi}{2}}{4m-2} - \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2m\pi-\pi}{4m-2} - \frac{2\cdot 0\pi+\frac{\pi}{2}}{4m-2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{(2m-1)\pi}{2(2m-1)} - \left(\frac{2\cdot 0\pi + \frac{\pi}{2}}{4m-2} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta_-^o - \frac{\pi}{2} = -\theta_-^o. \qquad (5.84)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.81), (5.82) και (5.84) στη σχέση (5.80) έχουμε:

$$\int_{\gamma_-^o} e^{\lambda\phi(z)}\, \mathsf{d}z + \int_{\gamma_-^{m-1}} e^{\lambda\phi(z)}\, \mathsf{d}z \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{(4m-2)\lambda}} e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m}y_o} \left[e^{i\left(\theta_-^o + \lambda\frac{2m-1}{2m}x_o\right)} + e^{i\left(-\theta_-^o - \lambda\frac{2m-1}{2m}x_o\right)}\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{(4m-2)\lambda}} e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m}y_o} \left[e^{i\left(\theta_-^o + \lambda\frac{2m-1}{2m}x_o\right)} + e^{-i\left(\theta_-^o + \lambda\frac{2m-1}{2m}x_o\right)}\right]. \qquad (5.85)$$

Τώρα λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

παίρνουμε τελικά ότι:

$$\int_{\gamma_-^o} e^{\lambda\phi(z)}\, \mathsf{d}z + \int_{\gamma_-^{m-1}} e^{\lambda\phi(z)}\, \mathsf{d}z \sim$$

$$\sim 2\sqrt{\frac{\pi}{(4m-2)\lambda}} e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m}y_o} \cos\left(\theta_-^o + \lambda\frac{2m-1}{2m}x_o\right). \qquad (5.86)$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις των x_o, y_o και θ_-^o καταλήγουμε ότι:

$$\int_{\gamma_-^o} e^{\lambda\phi(z)}\, \mathsf{d}z + \int_{\gamma_-^{m-1}} e^{\lambda\phi(z)}\, \mathsf{d}z \sim$$

$$\sim 2\sqrt{\frac{\pi}{(4m-2)\lambda}} e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m}\sin\left(\frac{\pi}{4m-2}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi(1-m)}{2(2m-1)} + \lambda\frac{2m-1}{2m}\cos\left(\frac{\pi}{4m-2}\right)\right). \qquad (5.87)$$

Επιστρέφοντας τώρα στη λύση της εξίσωσης μας, η οποία δίνεται από τη σχέση (5.3) έχουμε:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_o(s)G(x,t)\, \mathsf{d}s.$$

Με την $G(x,t)$ να δίνεται από σχέση (5.4) και να ισούται σύμφωνα με τη σχέση (5.8), με:

$$G(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa x-\kappa^{2m}t}\,\mathrm{d}\kappa = t^{-\frac{1}{2m}}G(t^{-\frac{1}{2m}}x),$$

όπου από τη σχέση (5.9) έχουμε ότι:

$$G(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta-\eta^{2m}}\,\mathrm{d}\eta.$$

Τέλος σύμφωνα με τη σχέση (5.13) έχουμε υπολογίσει ότι:

$$G(x)=\Big(\frac{x}{2m}\Big)^{\frac{1}{2m-1}} F\left(\frac{x^{\frac{2m}{2m-1}}}{(2m)^{\frac{1}{2m-1}}}\right)=\Big(\frac{x}{2m}\Big)^{\frac{1}{2m-1}} F(\lambda).$$

Από τη σχέση τώρα (5.14) έχουμε ότι:

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\lambda\left(iz-\frac{z^{2m}}{2m}\right)\right]\,\mathrm{d}z \tag{5.88}$$

και σύμφωνα με όσα είπαμε στο Λήμμα 5.1 το αποτέλεσμα του παραπάνω ολοκλήρωματος είναι σταθερό σε οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών και εάν υπολογισθεί. Επομένως όπως έχουμε ήδη αναφέρει μπορούμε να θεωρήσουμε την ευθεία την οποία ορίζουν τα συμμετρικά κρίσιμα σημεία z_o και z_{m-1} και να γράψουμε ότι:

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\lambda\left(iz-\frac{z^{2m}}{2m}\right)\right]\mathrm{d}z=\int_{H=y_o} \exp\left[\lambda\left(iz-\frac{z^{2m}}{2m}\right)\right]\mathrm{d}z\sim$$

$$\sim\int_{A_1} \exp\left[\lambda\left(iz-\frac{z^{2m}}{2m}\right)\right]\mathrm{d}z+\int_{A_2} \exp\left[\lambda\left(iz-\frac{z^{2m}}{2m}\right)\right]\mathrm{d}z. \tag{5.89}$$

Όπου A_1 και A_2 είναι οι περιοχές των κρισίμων σημείων της συνάρτησης $\phi(z)$, z_o και z_{m-1} αντίστοιχα.

Στη σχέση (5.89) η τελευταία ισότητα ισχύει εφόσον το ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα τύπου Laplace και όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο τέλος του Κεφαλαίου 3, με το Θεώρημα 3.1 μπορούμε να βρούμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα αυτού. Αυτό το οποίο μένει για να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος της συνάρτησης $F(\lambda)$ και κατ΄επέκταση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης είναι να αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα για τη συνάρτηση exp $\left[\lambda\left(iz-\frac{z^{2m}}{2m}\right)\right]$, η οποία είναι ολόμορφη στο μιγαδικό επίπεδο μπορεί να προσεγγισθεί με τον ίδιο τρόπο και κατά μήκος των δρόμων της επικλίνέστατης καθόδου και κατα μήκος της ευθείας $H = y_o$ στις περιοχές των κρισίμων σημείων, z_o και z_{m-1}. Αυτό όμως ισχύει από το Θεώρημα του Cauchy αφού όταν τα άκρα ολοκλήρωσης είναι τα ίδια το ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από το δρόμο ολκλήρωσης, άρα μπορούμε οπως διατρέχουμε την ευθεία $H = y_o$ και λίγο πρίν το σημείο z_o να πίασουμε το δρόμο της επικλινέστατης καθόδου και φυσικά να κάνουμε το ίδιο και στο σημείο z_{m-1}. Άρα έχουμε:

$$F(\lambda) \sim \int_{A_1} \mathsf{exp}\left[\lambda\left(iz - \frac{z^{2m}}{2m}\right)\right] \mathsf{d}z + \int_{A_2} \mathsf{exp}\left[\lambda\left(iz - \frac{z^{2m}}{2m}\right)\right] \mathsf{d}z =$$

$$= \int_{\gamma_-^o} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathsf{d}z + \int_{\gamma_-^{m-1}} e^{\lambda\phi(z)}\,\mathsf{d}z =$$

$$= 2\sqrt{\frac{\pi}{(4m-2)\lambda}}\, e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m}\sin\left(\frac{\pi}{4m-2}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi\,(1-m)}{2\,(2m-1)} + \lambda\frac{2m-1}{2m}\cos\left(\frac{\pi}{4m-2}\right)\right). \qquad (5.90)$$

Τώρα από τις σχέσεις (5.13) και (5.90) υπολογίζουμε τη συνάρτηση $G(x)$, η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$G(x) \sim 2\left(\frac{x}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \sqrt{\frac{\pi}{(4m-2)\lambda}}\, e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m}\sin\left(\frac{\pi}{4m-2}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi\,(1-m)}{2\,(2m-1)} + \lambda\frac{2m-1}{2m}\cos\left(\frac{\pi}{4m-2}\right)\right). \qquad (5.91)$$

Στη συνέχεια από τις σχέσεις (5.8) και (5.91) έχουμε για τη $G(x,t)$:

$$G(x,t) = t^{-\frac{1}{2m}} G(t^{-\frac{1}{2m}}x) \sim$$

$$\sim 2t^{-\frac{1}{2m}} \left(\frac{\left(t^{-\frac{1}{2m}}\right)x}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \sqrt{\frac{\pi}{(4m-2)\lambda}}\, e^{-\lambda\frac{2m-1}{2m}\sin\left(\frac{\pi}{4m-2}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi\,(1-m)}{2\,(2m-1)} + \lambda\frac{2m-1}{2m}\cos\left(\frac{\pi}{4m-2}\right)\right). \qquad (5.92)$$

Επομένως στην παρούσα φάση μπορούμε να υπολογίσουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της λύση της διαφορικής εξίσωσης, κάνοντας αντικατάσταση της $G(x,t)$ στη σχέση (5.3) και συγκεκριμένα έχουμε:

$$u(x,t) \sim$$

$$\sim 2t^{-\frac{1}{2m}} \left(\frac{\left(t^{-\frac{1}{2m}}\right) x}{2m} \right)^{\frac{1}{2m-1}} \sqrt{\frac{\pi}{(4m-2)\lambda}} e^{-\lambda \frac{2m-1}{2m} \sin\left(\frac{\pi}{4m-2}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi (1-m)}{2(2m-1)} + \lambda \frac{2m-1}{2m} \cos\left(\frac{\pi}{4m-2} \right) \right) \int_{-\infty}^{\infty} u_o(s)\, \mathrm{d}s. \qquad (5.93)$$

Επομένως καταλήξαμε σε μια προσέγγιση της λύσης της παραβολικής εξίσωσης κάθε τάξης, το οποίο ήταν και το ζητούμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Βιβλιογραφία

[1] Norman Bleistein and Richard A.Handelsmam, Asymptotic Expansions of Integrals, Dover Publications, New York, 1974.

[2] Ivan Avramidi, Lectures Notes on Asymptotic Expansion, New Mexico Institute of Mining and Technology, Socorro 2000.

[3] J.D Murray, Asymptotic Analysis, Applied Maths Sciences, Oxford 1973.

[4] Norman Bleinstein, Mathematical Methods for Wave Phenomena, Academic Press, Inc 1984.

[5] Δάσιος Γέωργιος, Εισαγωγή στην Ασυμπτωτική Ανάλυση, Εκδόσεις ΤΣΟΤΡΑΣ, Αθήνα 2016.

[6] Γεώργιος Δ. Ακρίβης Νικόλαος Δ. Αλικάκος, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα 2012