ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η   Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Η σημασιολογική προσέγγιση στη διδασκαλία της απόδειξης: χαρακτηρισμός των διδακτικών δράσεων του διδάσκοντος

Καράβη Θωμαΐς

Δ201635

Επιβλέπουσα Συμβουλευτικής Επιτροπής:

Πόταρη Δέσποινα

Αθήνα,

Ιούνιος, 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 1η Ιουνίου 2018 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Π. Σπύρου	τ. Ανάπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα. Πόταρη για τις συμβουλές και την βοήθεια που μου προσέφερε τόσο κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας όσο και κατά την διάρκεια των σπουδών μου σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ζαχαριάδη για τις στοχευμένες παρατηρήσεις του, για το ενδιαφέρον και την εμπιστοσύνη του σε σχέση με τη συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Ευχαριστώ πολύ τον κ. Σπύρου και την κα. Τριανταφύλλου γιατί μέσω των μαθημάτων τους μου έδωσαν τροφή για σκέψη και το έναυσμα για μελέτη.

Ευχαριστώ ακόμη την κα. Πετροπούλου για το υλικό που μου παραχώρησε.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα. Κλη που από τη θέση της γραμματείας κάνει το καλύτερο για όλους μας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περίληψη 5
Abstract 6
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 7
2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 9
2.1 Το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο της εκπαίδευσης 9
2.2 Η διδασκαλία στο πανεπιστήμιο 10
2.2.1 Το πλαίσιο των διαλέξεων 11
2.3 Η διδασκαλία της απόδειξης στο πανεπιστήμιο 12
2.3.1 Η έννοια της παιδαγωγικής απόδειξης 16
2.4 Ο διδάσκων 26
2.4.1 Οι διδακτικές αποφάσεις 26
2.4.2 Ο μαθητής 27
3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 28
3.1 Ερευνητικά Ερωτήματα 28
3.2 Το πλαίσιο της έρευνας 28
3.3 Ερευνητική διαδικασία 30
3.4 Μεθοδολογία ανάλυσης των δεδομένων 31
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 33
4.1 Τα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας της απόδειξης 34
4.1.1 Η έκφραση του σημασιολογικού στυλ διδασκαλίας μέσω των άτυπων εργαλείων 34
4.1.2. Οι διδακτικές δράσεις του διδάσκοντος κατά την διδασκαλία της απόδειξης 44
4.1.3 Το μοτίβο δράσεων του διδάσκοντος και η αλληλεπίδραση τυπικών και άτυπων μέσων διδασκαλίας 56
4.2 Παράγοντες διαμόρφωσης της διδασκαλίας της απόδειξης 61
5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 68
6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 72

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1 - Η έκφραση του σημασιολογικού στυλ διδασκαλίας μέσω προσδιορισμού των άτυπων μέσων διδασκαλίας 34
Εικόνα 2 - Διάγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του θεωρήματος μοναδικότητας του ορίου (σημειώσεις πεδίου - αντιγραφή από τον πίνακα). . 35
Εικόνα 3 - Διάγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του κριτηρίου ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (σημειώσεις πεδίου - αντιγραφή από τον πίνακα). 36
Εικόνα 4 - Αναπαράσταση που χρησιμοποιήθηκε για απόδειξη της άσκησης: Έστω $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ δύο συναρτήσεις που είναι $1-1$ και επί. Δείξτε ότι η (g ∘ f) είναι $1-1$ και επί και ισχύει $(g^\circ f)^{-1} = f^{-1} {}^\circ g^{-1}$ (σημειώσεις πεδίου – αντιγραφή από τον πίνακα). 36
Εικόνα 5 - Διάγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του Θεωρήματος Bolzano (σημειώσεις πεδίου – αντιγραφή από τον πίνακα). 37
Εικόνα 6 - Διάγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του Θεωρήματος ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη (σημειώσεις πεδίου – αντιγραφή από τον πίνακα). 37
Εικόνα 7 - Οι διδακτικές δράσεις του διδάσκοντος κατά την αποδεικτική διαδικασία. 44
Εικόνα 8 - Τα άτυπα μέσα που χρησιμοποιούνται από τον διδάσκοντα στην τοποθέτηση του προβλήματος 45
Εικόνα 9 - Η ροή της αποδεικτικής διαδικασίας, 1η περίπτωση. 48
Εικόνα 10 - Η ροή της αποδεικτικής διαδικασίας, 2η περίπτωση. 49
Εικόνα 11 - Τα άτυπα μέσα που χρησιμοποιούνται από τον διδάσκοντα στην διαισθητική απόδειξη. 50
Εικόνα 12 - Τα άτυπα μέσα που χρησιμοποιούνται από τον διδάσκοντα στην τυπική απόδειξη. 53
Εικόνα 13 - Το μοτίβο δράσεων του διδάσκοντος κατά την αποδεικτική διαδικασία, η σύνδεση των επιμέρους δράσεων. 56
Εικόνα 14 - Σύνδεση τυπικής και διαισθητικής απόδειξης............................. 60

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά την παρουσίαση των αποδείξεων σε πανεπιστημιακό επίπεδο και συγκεκριμένα σε ένα μάθημα ανάλυσης που απευθύνεται κυρίως σε πρωτοετείς φοιτητές μαθηματικών. Παρατηρήθηκαν οι διαλέξεις ενός διδάσκοντα, ο οποίος αποτελεί μια ξεχωριστή περίπτωση διότι συνδυάζει γνώσεις από την έρευνα στα μαθηματικά και την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών. Υπογραμμίστηκαν οι δράσεις του διδάσκοντος κατά την παρουσίαση των αποδείξεων και προσδιορίστηκαν οι παράγοντες που διαμορφώνουν τις συγκεκριμένες δράσεις. Η έρευνα καταλήγει στο ότι τα άτυπα μέσα παρουσίασης της απόδειξης αποτελούν έναν τρόπο έκφρασης του σημασιολογικού στυλ διδασκαλίας. Επιπλέον προσδιορίστηκε ένας επαναληπτικός τρόπος με τον οποίο ο διδάσκων αντιμετωπίζει το ζήτημα της απόδειξης. Μέσω των παραπάνω έγινε σύνδεση του τυπικού και του διαισθητικού μέρους της απόδειξης. Η συγκεκριμένη σύνδεση επιτυγχάνεται με δύο τρόπους, ο ένας αφορά τη χρήση των άτυπων εργαλείων και ο δεύτερος σχετίζεται με την μοντελοποίηση του διαισθητικού μέρους στο τυπικό. Κλείνοντας η έρευνα καταλήγει στο ότι η προσωπικότητα του διδάσκοντος, οι γνώσεις και οι πεποιθήσεις του δεν αποσιωπώνται στο πλαίσιο της διάλεξης, καθώς η διδασκαλία λειτουργεί ως δίκτυο κοινωνικών αλληλεπιδράσεων.

Λέξεις κλειδιά: απόδειξη, πανεπιστημιακή διδασκαλία, διάλεξη, διδακτικές δράσεις

Abstract

The present work is concerned with the presentation of university-level mathematical proof and specifically during an Analysis course, before an audience consisted mainly of first-year students. The case study focuses on the lectures of a professor, who stands out as incorporating systematic knowledge from the research fields of mathematics and mathematics teaching. Certain actions, during the presentation of mathematical proofs, were identified and, consequently, the various aspects of said activities were systematically defined. The research concludes that the informal means of presentation are a way of expression of the semantic teaching style. Furthermore, a certain method surfaced, which the professor repetitively employs during his presentation. The remarks, so far, helped to trace the link between the typical and intuitive part of a mathematical proof. This link is achieved in two ways, the first being the use of informal means and the second, associated with the modeling of the semantic part of proof to the typical part. The research comes to the conclusion that the professor's personality, knowledge and beliefs all form, to a certain extent, integral elements of a lecture which, eventually, constitutes a broader network of social interaction.

Keywords: proof, university teaching, lecture, teaching actions

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αποδεικτική διαδικασία είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη μαθηματική πρακτική (π.χ. Lai & Weber, 2014, Zazkis κ.α., 2016). Τα τελευταία χρόνια έχουν διεξαχθεί αρκετές έρευνες οι οποίες φωτίζουν τις διάφορες πτυχές της απόδειξης, προσφέροντας γνώσεις για τη φύση της αποδεικτικής διαδικασίας και δίνοντας πληροφορίες τη διδασκαλία της απόδειξης στην σχολική τάξη (Stylianides κ.α., 2016). Είναι κοινά αποδεκτό από το σύνολο των ερευνητών της διδακτικής ότι η απόδειξη έχει κεντρικό ρόλο στην τάξη των μαθηματικών (NCTM, 2000). Ωστόσο εξακολουθεί να υφίσταται το ερώτημα αναφορικά με την επίδραση της εμπλοκής του διδάσκοντος στην αποδεικτική διαδικασία σε πανεπιστημιακό επίπεδο διδασκαλίας.

Η παρούσα εργασία αφορά τη διδασκαλία της απόδειξης σε πανεπιστημιακό επίπεδο, σε ένα μάθημα ανάλυσης, τον Απειροστικό Λογισμό 1, που κεντρικό στόχο έχει την εισαγωγή των φοιτητών στα ανώτερα μαθηματικά. Η διδασκαλία έχει τη μορφή διαλέξεων. Οι διαλέξεις αποτελούν το συνηθισμένο τρόπο διδασκαλίας σε πανεπιστημιακό επίπεδο, όμως λίγες είναι οι έρευνες που φωτίζουν τις δράσεις του διδάσκοντος σε σχέση με την απόδειξη σε αυτό το πλαίσιο. Η έρευνα δείχνει ότι δεν υπάρχει μοναδικό παράδειγμα διδασκαλίας στις διαλέξεις και ότι υπάρχει ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση (Weber, 2004). Η μελέτη των διδακτικών δράσεων γύρω από την απόδειξη στο πλαίσιο διαλέξεων μπορεί να δώσει χρήσιμες πληροφορίες για τις διαδικασίες και τις πρακτικές που ακολουθούνται στη διδασκαλία μαθηματικών στο πανεπιστήμιο.

Υπεύθυνοι για τη διεξαγωγή των διαλέξεων ανώτερων μαθηματικών στο πανεπιστήμιο είναι συνήθως μαθηματικοί, οι οποίοι ως ειδικοί στο αντικείμενο εστιάζουν στην παρουσίαση αποδείξεων άκρως πειθαρχημένων και στο ελάχιστο παιδαγωγικών (Lai & Weber, 2014). Οι Lai και Weber (2014) αναφέρονται στην ιδέα του Shulman που σχετίζεται με τη διάκριση της γνώσης για το αντικείμενο και της γνώσης για διδασκαλία του, με την έννοια της ικανότητας του διδάσκοντος να τροποποιεί κατάλληλα το περιεχόμενο της γνώσης που παρουσιάζει ώστε να είναι παιδαγωγικά ισχυρό και κατανοητό από το σύνολο των μαθητών που απευθύνεται. Η παρούσα εργασία φέρνει στο προσκήνιο τη διδασκαλία ενός διδάσκοντα με γνώσεις από την έρευνα στα μαθηματικά και την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών με στόχο να βρεθεί πώς οι δύο ερευνητικές περιοχές αλληλεπιδρούν στο σχεδιασμό ενός μαθήματος ανάλυσης.

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη των δράσεων του διδάσκοντος κατά τη διδασκαλία της απόδειξης και ο εντοπισμός των παραγόντων που επηρεάζουν τις συγκεκριμένες δράσεις. Η εργασία βασίστηκε σε παρακολούθηση διδασκαλιών του διδάσκοντος και συνεντεύξεις μαζί του σε σχέση με ζητήματα γύρω από τη διδασκαλία. Έχουν διεξαχθεί έρευνες που αφορούν μελέτες περίπτωσης διδασκόντων σε πανεπιστημιακές διδασκαλίες (π.χ. Weber, 2004, Fukawa – Connelly, 2012), όμως σε καμία από τις προηγούμενες έρευνες ο διδάσκων δεν φέρει γνώσεις από δύο ερευνητικές περιοχές. Είναι σημαντική η εύρεση του πώς οι γνώσεις από τη διδακτική επηρεάζουν σημεία της διδασκαλίας και τροποποιούν τους στόχους του διδάσκοντος δίνοντας έτσι μια διαφορετική οπτική για το τι είναι και πώς πρέπει να είναι η διδασκαλία ενός εισαγωγικού μαθήματος ανάλυσης.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 Το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο της εκπαίδευσης

Με τον όρο διδασκαλία των μαθηματικών στο πανεπιστήμιο αναφερόμαστε σε οποιαδήποτε ή όλες τις διδασκαλίες των μαθηματικών που λαμβάνουν χώρα στο πανεπιστήμιο. Ταυτόχρονα με την τοποθέτηση του ορισμού γεννιέται το ερώτημα σχετικά με το τι είναι τελικά διδασκαλία. Η διδασκαλία μπορεί να θεωρηθεί πρακτική ή μέσο εισαγωγής των μαθητών στη μαθηματική πρακτική ή ακόμη και δραστηριότητα. Στη συγκεκριμένη μελέτη, λαμβάνοντας υπόψιν την κοινωνικοπολιτισμική οπτική, η διδασκαλία θεωρείται αντικείμενο κατασκευής του δασκάλου αλλά και μέρος της κοινωνικής πρακτικής, δηλαδή αποτελεί ένα σύνθετο δίκτυο κοινωνικών αλληλεπιδράσεων (Jaworski, 2002).

Η συγκεκριμένη θεώρηση φέρνει στο κέντρο της διδασκαλίας τον δάσκαλο και τους μαθητές, οι οποίοι μαζί διαμορφώνουν την μορφή της (Jaworski, 2012). Η Jaworski (2012) αναφέρει την έρευνα της Rita Nolder, η οποία φέρνοντας τους καθηγητές σε κεντρικό πλάνο, υπογραμμίζει τους τρόπους που οι ίδιοι σκέφτονται και κατασκευάζουν την διδασκαλία. Αυτό που ξεχωρίζει όμως στις αναφορές της είναι η επίδραση της προσωπικότητας του διδάσκοντος ως μέρος της συνολικής πολυπλοκότητας μέσα στην οποία η διδασκαλία λαμβάνει χώρα. Στην συνέχεια της έρευνας η Jaworski (2012) αναγνωρίζει ότι οι καθηγητές είναι άτομα με συγκεκριμένα προσωπικά χαρακτηριστικά, που υπόκεινται σε μια σειρά επιρροών, μέσα στις κοινωνικές δομές στις οποίες εμπλέκονται, και εξετάζει πτυχές της προσωπικότητας και της ταυτότητας τους στο σχεδιασμό της διδασκαλίας προς όφελος των μαθητών.

Ωστόσο πέρα από τα προσωπικά χαρακτηριστικά του διδάσκοντος που διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στον σχεδιασμό της διδασκαλίας, υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που επηρεάζουν και αλληλεπιδρούν με τη διαδικασία της μάθησης. Οι δράσεις του καθηγητή καθορίζονται από εργαλεία όπως το πρόγραμμα σπουδών, τα διδακτικά εγχειρίδια και άλλα υλικά που εμπλέκονται στη μάθηση (Stouraitis κ.α., 2017). Ακόμη ο καθηγητής πρέπει να τοποθετεί τη διδασκαλία του στο πλαίσιο που ορίζουν τα εκπαιδευτικά ιδρύματα, να προλαβαίνει τα χρονικά όρια, να ενσωματώνεται τελικά στο ωρολόγιο πρόγραμμα και να προετοιμάζει τους μαθητές κατάλληλα για τις τελικές εξετάσεις (Stouraitis κ.α., 2017). Με άλλα λόγια ο καθηγητής καλείται να ισορροπεί μεταξύ της μάθησης των μαθηματικών, των κοινωνικών πλαισίων μέσα στην οποία τοποθετείται τελικά η μάθηση αλλά και της ίδιας του της προσωπικότητας με τις αντιλήψεις και τα πιστεύω που τον χαρακτηρίζουν.

Η διδασκαλία ανώτερων μαθηματικών φέρνει στο προσκήνιο έναν ακόμα παράγοντα που επηρεάζει τον τρόπο που γίνεται το μάθημα και αλληλεπιδρά με τη διδασκαλία του διδάσκοντος. Ο παράγοντας της ομαλής ένταξης του μαθητή στη νέα κουλτούρα των μαθηματικών αποτελεί μέρος της κοινωνικής πρακτικής (Petropoulou κ.α., 2015). Η τοποθέτηση στη νέα κουλτούρα είναι μια διαπροσωπική διαδικασία, επομένως τα άτομα που φέρουν ξεχωριστό ρόλο σε αυτή, δηλαδή οι διδάσκοντες, τονίζονται και μελετώνται ως φορείς της κουλτούρας των μαθηματικών (Petropoulou κ.α., 2015). Η διερεύνηση των παραγόντων που επηρεάζουν την διδασκαλία της απόδειξης στο πανεπιστήμιο είναι ένα από τα βασικά ερωτήματα που προσπαθεί να απαντήσει η συγκεκριμένη έρευνα και το πλαίσιο μέσα στο οποίο γίνεται η διδασκαλία λειτουργεί καθοριστικά για τον προσδιορισμό των συγκεκριμένων παραγόντων.

2.2 Η διδασκαλία στο πανεπιστήμιο

Η μελέτη της διδασκαλίας στο πανεπιστήμιο θεωρείται ως μια περιοχή με απουσία εμπειρικών ερευνών (Speer κ.α., 2010). Θα γίνει μια σύντομη αναφορά σε βασικά σημεία σχετικών ερευνών οι οποίες δείχνουν την προσπάθεια που γίνεται για ερμηνεία της διδασκαλίας στο νέο πλαίσιο. Οι μελέτες έχουν αρκετά κοινά χαρακτηριστικά· ένα από αυτά είναι ότι παρατηρούν τη διδασκαλία χωρίς να γίνεται κάποια παρέμβαση σε αυτή, δηλαδή ο διδάσκων δεν προσπαθεί να ενσωματώσει ή να δημιουργήσει νέες τεχνικές κατά τη διάρκεια της παράδοσης. Ακόμη ακολουθούν στο σύνολο τους ποιοτική προσέγγιση, αναφέρονται σε ένα διδάσκων ή μικρή ομάδα διδασκόντων, με στόχο την εις βάθος μελέτη της διδασκαλίας.

Μια έρευνα που εστιάζει στις αποφάσεις, στις δράσεις και στις αντιδράσεις του διδάσκοντος, καθώς και τις συνδέσεις αυτών με την ερευνητική και διδακτική του εμπειρία, και έδωσε το κίνητρο για την συγκεκριμένη διπλωματική είναι αυτή των Petropoulou, Potari και Zachariades (2011). Αναδεικνύονται από την ανάλυση ενός επεισοδίου, στο οποίο γίνεται χρήση αντιπαραδείγματος, οι διδακτικές δράσεις του διδάσκοντος, οι οποίες φαίνεται να ενισχύουν τη μαθηματική πρόκληση. Ο διδάσκων προχωρά σε αυτές τις δράσεις έχοντας ως στόχο οι μαθητές να αναπτύξουν υψηλού επιπέδου μαθηματική αιτιολόγηση. Παράλληλα οι διδακτικές δράσεις δείχνουν ευαισθησία στις ανάγκες των φοιτητών. Σημειώθηκε ακόμη ότι η διδασκαλία φέρει στοιχεία από τις εμπειρίες του στην έρευνα και στη διδακτική.

Μία ακόμη έρευνα η οποία προσπαθεί να χαρακτηρίσει τη διδασκαλία είναι αυτή των Mesa, Celis και Lande (2014). Οι ερευνητές ζήτησαν από 14 διδάσκοντες να περιγράψουν τις διδακτικές τους προσεγγίσεις και στην συνέχεια τις σύγκριναν με την ανάλυση των μαθημάτων τους. Οι ερευνητές χαρακτήρισαν τις προσεγγίσεις των διδασκόντων ως traditional, meaning making ή student support.

Στην έρευνα των Pampaka κ.α. (2012) γίνεται προσπάθεια εντοπισμού της παιδαγωγικής προσέγγισης 9 διδασκόντων με αποτέλεσμα να προχωρήσουν σε χαρακτηρισμό της διδασκαλίας ως transmissionist και teacher centered. Από την άλλη πλευρά οι Artemeva και Fox (2011) μελέτησαν την διδασκαλία σε προπτυχιακούς φοιτητές σε διάφορες χώρες από την πλευρά της γλώσσας και της επικοινωνίας. Οδηγήθηκαν στον προσδιορισμό του κυρίαρχου παιδαγωγικού είδους διδασκαλίας το οποίο ονόμασαν “chalk & talk” και γίνεται όταν ο διδάσκων γράφει στον πίνακα και παράλληλα μιλάει.

Οι έρευνες αυτές δείχνουν την προσπάθεια δημιουργίας κατηγοριών οι οποίες ερμηνεύουν τις παρατηρήσεις των ερευνητών. Όροι όπως «chalk and talk», «traditional», «meaning making», «student support» και «transmissionist» δημιουργούνται και φανερώνουν την αρχή ενός «νέου» λεξιλογίου που αντικατοπτρίζει την προσπάθεια περιγραφής της διδασκαλίας στο πανεπιστήμιο (Jaworski κ.α., 2017)

2.2.1 Το πλαίσιο των διαλέξεων

Η διδασκαλία στο πανεπιστήμιο έχει παραδοσιακά τη μορφή των διαλέξεων (Jaworski κ.α., 2017). Στη συγκεκριμένη μορφή διδασκαλίας ο διδάσκων έχει τον πρωταγωνιστικό ρόλο. Ο καθηγητής παρουσιάζει τις μαθηματικές ιδέες στους μαθητές, και αυτοί ακούν και αντιγράφουν από τον πίνακα κατασκευάζοντας ο καθένας τα δικά του νοήματα από τη διδασκαλία (Jaworski κ.α., 2017, Pritchard, 2010, Weber, 2004). Όπως αναφέρεται στο άρθρο των Jaworski, Mali και Petropoulou (2017) υπάρχουν αρκετές έρευνες που εντοπίζουν τις δυσκολίες των φοιτητών τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο των μαθηματικών που παρουσιάζεται στις διαλέξεις όσο και σε σχέση με την απότομη μετάβαση από τη σχολική τάξη στην πανεπιστημιακή πραγματικότητα. Εκτός από τις διαλέξεις, μια άλλη μορφή διδασκαλίας που συνηθίζεται στην πανεπιστημιακή εκπαίδευση είναι αυτή της διδασκαλίας σε ολιγάριθμα φροντιστηριακά τμήματα (tutorials). Οι έρευνες για την συγκεκριμένη μορφή διδασκαλίας είναι περιορισμένες και εστιάζουν κυρίως στην φύση της διδασκαλίας και στην γνώση που την πλαισιώνει (Mali, 2015, σελ. 2187).

Η διδασκαλία με τη μορφή διαλέξεων έχει δεχτεί κριτική, όμως συνεχίζει να αποτελεί τη βασική μορφή διδασκαλίας στα περισσότερα πανεπιστήμια (Pritchard, 2010). Ως διάλεξη ορίζεται από τον Pritchard (2010, σελ. 610) η τάξη που περιλαμβάνει ένα διδάσκων και ένα μεγάλο γκρουπ μαθητών (≥20, αλλά πρακτικά ≥100), στις οποίες ο κυρίαρχος τρόπος επικοινωνίας είναι από τον διδάσκοντα προς τους φοιτητές, χωρίς να αποκλείεται η αλληλεπίδραση φοιτητών – διδάσκοντα. Επίσης οι διαλέξεις συνήθως δεν αποτελούν μεμονωμένα περιστατικά αλλά μέρος ενός μαθήματος που τυπικά περιλαμβάνει 20 με 50 διαλέξεις.

Ο Fukawa – Connelly στο άρθρο του (2012) παραθέτει την άποψη της Burgan η οποία σημειώνει την αξία της διάλεξης ως μορφής διδασκαλίας στο πανεπιστήμιο και αναφέρει πιθανά οφέλη μιας εξαιρετικής διάλεξης για τους φοιτητές. Ένα από αυτά είναι η παρουσία του δασκάλου – προτύπου που προσπαθεί να μεταδώσει τις γνωστικές διαδικασίες που λαμβάνουν μέρος στις μαθηματικές δραστηριότητες καθώς μιλάει και γράφει. Επίσης η ίδια αναφέρει ότι ο διδάσκων μπορεί να εμπνεύσει τους φοιτητές με τις ερωτήσεις που θέτει ώστε να βρουν μαζί απαντήσεις. Ωστόσο η διδασκαλία με τη μορφή διαλέξεων έχει δεχτεί και αρκετή αρνητική κριτική. Για παράδειγμα οι Fritze και Nordkvelle (2003) αναφέρουν ότι ο φοιτητής αποκτά τον ρόλο παθητικού ακροατή και δεν συμμετέχει ενεργά στη διαδικασία της μάθησης, ενώ οι Lew κ.α. (2016) παρατηρούν ότι οι φοιτητές εστιάζουν μόνο σε όσα σημειώνει ο διδάσκων στον πίνακα, αγνοώντας τις υπόλοιπες δράσεις του. Η παρούσα εργασία προσπαθεί να δει πώς μέσα στις διαλέξεις ο διδάσκων τοποθετεί τις δράσεις, εστιάζοντας σε επεισόδια διδασκαλίας της απόδειξης.

2.3 Η διδασκαλία της απόδειξης στο πανεπιστήμιο

Η διδασκαλία μαθηματικών στο πανεπιστήμιο και συγκεκριμένα σε μία διάλεξη συμφωνεί κατά κύριο λόγο με την ακολουθία «Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη» (Dreyfus, 1991). Είναι ευρέως αποδεκτή η συγκεκριμένη πρακτική διδασκαλίας, για την οποία έχει ασκηθεί κριτική, αλλά έχουν γίνει λίγες εμπειρικές μελέτες, προκειμένου να εντοπιστεί τι πραγματικά συμβαίνει κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης διδασκαλίας και πώς αυτή επηρεάζει τη μάθηση των μαθητών (Weber, 2004).

Ο Weber (2004, σελ. 116) αναφέρει ότι δεν γίνεται να προσδιορίσει ο ίδιος με ακρίβεια τα χαρακτηριστικά που συνθέτουν μια τέτοια μορφή διδασκαλίας. Σχολιάζει όμως ότι φαίνεται να παρουσιάζονται τα ακόλουθα κοινά χαρακτηριστικά (σελ. 116, σε μετάφραση από το πρωτότυπο): «η συγκεκριμένη μορφή διδασκαλίας φαίνεται κατά κύριο λόγο να αποτελείται από τον καθηγητή που διδάσκει και από μαθητές που παθητικά κρατούν σημειώσεις από υλικό που παρουσιάζεται και έχει αυστηρά λογική συνέχεια (...) και ο βασικός στόχος του μαθήματος είναι οι μαθητές να γίνουν ικανοί να παράγουν αυστηρές αποδείξεις από το μαθηματικό υλικό που καλύπτεται».

Όπως αναφέρθηκε η συγκεκριμένη μέθοδος διδασκαλίας έχει δεχτεί αρνητική κριτική τόσο από μαθηματικούς όσο και από ερευνητές της διδακτικής (Weber, 2004). Η πιο συνηθισμένη αρνητική κριτική που εντοπίζεται είναι ότι ο διδάσκων που επιλέγει να διδάξει με το συγκεκριμένο τρόπο δίνει λιγότερη έμφαση σε άλλα σημαντικά στοιχεία της μαθηματικής σκέψης (Dreyfus, 1991). Θέματα που σχετίζονται με τον τρόπο που ορίζονται οι μαθηματικές έννοιες και με την κατανόηση αυτών με άτυπο τρόπο (π.χ. γραφική αναπαράσταση εννοιών), αλλά και με την πορεία σκέψης που οδηγεί στην τελική μορφή της απόδειξης συνήθως παραλείπονται από τον διδάσκοντα (Lew κ.α., 2016). Η πιο σοβαρή κριτική όμως σύμφωνα με τον Weber είναι αυτή που ασκείται από τους Leron και Dubinsky (αναφορά στο Weber, 2004) και αναφέρει ότι τελικά οι μαθητές μαθαίνουν πολύ λιγότερα από αυτά που θα ήθελε ο διδάσκων.

Στον αντίποδα της αρνητικής κριτικής, θεωρείται ότι η παραδοσιακή παρουσίαση μιας απόδειξης στους μαθητές μεταφέρει καλύτερα τις μαθηματικές αιτιολογήσεις και επεξηγήσεις (Lew κ.α., 2016). Επιπλέον η τυπική παρουσίαση των αποδείξεων βοηθά τους φοιτητές να μην αντιμετωπίζουν διαισθητικά την αλήθεια των θεωρημάτων αλλά να είναι σίγουροι για την αλήθεια τους (Dreyfus, 1991). Επίσης γίνονται πιο ικανοί στο να γράφουν μόνοι τους τυπικές αποδείξεις (Dreyfus, 1991).

Μελετώντας έναν καθηγητή στο συγκεκριμένο πλαίσιο ο Weber (2004) καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η διδασκαλία με τη μέθοδο «ορισμός – θεώρημα – απόδειξη» δεν είναι ένα μοναδικό παράδειγμα διδασκαλίας αλλά λειτουργεί ως συλλογή παιδαγωγικών τεχνικών που μοιράζονται κάποια κοινά χαρακτηριστικά. Οι διαλέξεις που θεωρούνται της συγκεκριμένης παραδοσιακής μορφής μπορούν να ποικίλουν και να οδηγούν τους μαθητές σε πολύ διαφορετικά γνωστικά αποτελέσματα. Συμπεραίνει ακόμα ότι οι δράσεις του διδάσκοντος σχετίζονται με τα πιστεύω του σχετικά με τα μαθηματικά, την εκπαίδευση και τους μαθητές.

Πτυχές γραφής απόδειξης

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούν τα διάφορα σημεία της απόδειξης που πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν από τον διδάσκοντα κατά την παρουσίαση της απόδειξης. Θα περιγραφούν οι διάφορες πτυχές της απόδειξης όπως τις προσδιόρισαν οι Selden και Selden (2009) και ισχυρίζονται ότι είναι αυτές που χρειάζονται να γνωρίζουν οι μαθητές, και άρα πρέπει να προωθούνται από τους διδάσκοντες, προκειμένου να αναπτύξουν οι μαθητές τις απαιτούμενες ικανότητες ώστε να γίνουν ικανοί στη συγγραφή των αποδείξεων. Οι 5 πτυχές πρέπει να υπάρχουν ώστε η απόδειξη που κατασκευάζεται να έχει νόημα:

- Ιεραρχική δομή (the Hierarchical Structure): η γνώση του τι χρειάζεται μια απόδειξη για να ολοκληρωθεί και ο συντονισμός των επιμέρους αποδείξεων και κατασκευών που την αποτελούν.
- Το κατασκευαστικό μονοπάτι (the Construction Path): αφορά τα μέσα που τελικά χρειάζονται για τη δημιουργία της απόδειξης. Είναι το γραμμικό μονοπάτι βημάτων που θα ακολουθούσε ο «ιδανικός λύτης» (σελ. 340).
- Το πλαίσιο της απόδειξης (the Proof Framework): περιλαμβάνει τις συμβάσεις που χρειάζονται κατά τη δημιουργία της απόδειξης αλλά δεν περιλαμβάνει την κατανόηση τους.
- Το τυπικό – ρητορικό μέρος της απόδειξης (the Formal – Rhetorical part of the proof): απαιτεί συμπεριφορική γνώση για να ολοκληρωθεί, δηλαδή να μπορεί ο λύτης να ενεργεί πάνω στην απόδειξη την κατάλληλη στιγμή. Για παράδειγμα (σελ. 343) αν το θεώρημα αναφέρει «για όλους τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει …» συμπεριφορική γνώση είναι να υπάρχει η ικανότητα να σκεφτεί ο λύτης να ξεκινήσει την απόδειξη παίρνοντας έναν αυθαίρετο πραγματικό αριθμό. Δηλαδή απαιτεί ικανότητα χειρισμού αλγεβρικού και τεχνικού συμβολισμού καθώς και διαχείριση της λογικής δομής.

- Το μέρος του κεντρικού προβλήματος της απόδειξης (the Problem – Centered part of the proof): περιλαμβάνει τον προσδιορισμό της κεντρικής ιδέας και των συναφών πτυχών της απόδειξης και απαιτεί εννοιολογική γνώση, μαθηματική διαίσθηση, και την ικανότητα του να φέρνει κανείς στο νου του την «κατάλληλη πηγή» στην «κατάλληλη στιγμή» (σελ. 343).

Στυλ παρουσίασης απόδειξης

Οι διάφορες πτυχές τις απόδειξης που αναφέρθηκαν πλαισιώνονται από το στυλ διδασκαλίας που επιλέγει ο διδάσκων. Ο Weber (2004) στην προσπάθεια του να εντοπίσει τι ακριβώς συμβαίνει κατά τη διδασκαλία στη μορφή «Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη» διεξήγαγε μία έρευνα μελέτης περίπτωσης, ένα από τα συμπεράσματα της οποίας ήταν ο προσδιορισμός των τριών βασικών στυλ διδασκαλίας της απόδειξης σε ένα μάθημα πραγματικής ανάλυσης. Τα στυλ διδασκαλίας που προέκυψαν βρέθηκε ότι επηρεάζονται τόσο από το περιεχόμενο που διδάσκεται όσο και από τις αντιλήψεις του διδάσκοντος για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία γενικότερα.

Το πρώτο στυλ ονομάστηκε λογικό – δομικό (logico – structural). Χαρακτηρίστηκε έτσι από τη σχέση του με το τυπικό μαθηματικό επιχείρημα. Από το συγκεκριμένο στυλ διδασκαλίας απουσιάζουν τα διαγράμματα και οποιαδήποτε άλλη διαισθητική προσέγγιση των ιδεών που πλαισιώνουν την απόδειξη. Δεν εμφανίζεται καμία σημασιολογική επεξήγηση των εννοιών. Έμφαση δίνεται κυρίως στους ορισμούς και στη λογική αλληλουχία των επιχειρημάτων που χρησιμοποιούνται για τη διεκπεραίωση της απόδειξης. Μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτό το στυλ απόδειξης σχετίζεται με την ιεραρχική δομή και τυπική – ρητορική πτυχή της απόδειξης όπως προσδιόρισαν οι Selden και Selden (Fukawa – Connelly, 2012).

Το δεύτερο στυλ ονομάστηκε διαδικαστικό (procedural). Σχετίζεται με τη μάθηση της δομής του επιχειρήματος και των λεπτών, δημιουργικών σημείων του, όχι τόσο με τη μαθηματική κατασκευή καθ΄ εαυτή. Δίνεται έμφαση από τον διδάσκοντα στις τεχνικές και ευρετικές που χρησιμοποιεί. Στο διαδικαστικό στυλ διδασκαλίας απουσιάζει η διαισθητική τεκμηρίωση των επιμέρους βημάτων της απόδειξης, σε αντιστοιχία με το λογικό – δομικό στυλ διδασκαλίας. Για αυτό το λόγο ο Fukawa – Connelly (2012) το συνδέει, όπως και το προηγούμενο στυλ, με την ιεραρχική δομή και τυπική – ρητορική πτυχή της απόδειξης. Ακόμη συνδέει το διαδικαστικό στυλ με το μέρος του κεντρικού προβλήματος της απόδειξης, υπό την έννοια της διαχείρισης των αλγεβρικών παραστάσεων και την απουσία βαθιάς κατανόησης των τεχνικών.

Τέλος, το τρίτο στυλ διδασκαλίας χαρακτηρίστηκε ως σημασιολογικό (semantic) και σχετίζεται με την τάση του διδάσκοντος να χρησιμοποιεί διαισθητικές έννοιες και σχέσεις. Ο διδάσκων σε αυτό το στυλ διδασκαλίας της απόδειξης επιχειρεί να παρουσιάσει την ιδέα που βρίσκεται πίσω από την έννοια που θέλει να αποδείξει. Συχνά χρησιμοποιούνται διαγράμματα για να πείσουν τους φοιτητές για την αλήθεια της πρότασης που θα αποδειχθεί. Σύμφωνα με τον Fukawa – Connelly (2012) το συγκεκριμένο στυλ απόδειξης μοντελοποιεί το μέρος του κεντρικού προβλήματος και το κατασκευαστικό μονοπάτι.

2.3.1 Η έννοια της παιδαγωγικής απόδειξης

Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάστηκαν κάποια χαρακτηριστικά της διδασκαλίας των μαθηματικών και συγκεκριμένα των αποδείξεων στο πανεπιστήμιο. Η διδασκαλία μαθηματικών στο πανεπιστήμιο γίνεται κυρίως σε διαλέξεις, όπου συνήθως ακολουθείται η παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας: «Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη». Σύμφωνα με τον Weber (2004) δεν είναι το μοναδικό παράδειγμα διδασκαλίας αλλά λειτουργεί ως συλλογή παιδαγωγικών τεχνικών που μοιράζονται κάποια κοινά χαρακτηριστικά. Επίσης αναφέρθηκαν ποια είναι τα χαρακτηριστικά που πρέπει να διαθέτει ιδανικά μία απόδειξη και πώς αυτά τα χαρακτηριστικά μοντελοποιούνται από το στυλ διδασκαλίας της απόδειξης που επιλέγεται. Όπως παρατηρείται όμως αυτό που ο διδάσκων προσπαθεί τελικά να πετύχει στα πανεπιστημιακά μαθήματα είναι να πείσει τους φοιτητές και όχι μόνο να παρουσιάσει τυπικά τις μαθηματικές έννοιες και τις αποδείξεις στις διαλέξεις του (Paoletti κ.α., 2018).

Το ερώτημα είναι πώς ο διδάσκων επιτυγχάνει τον παραπάνω στόχο. Σε αυτό το σημείο έρχεται στο προσκήνιο η έννοια της «παιδαγωγικής απόδειξης». Ως παιδαγωγική απόδειξη ορίζεται από τον Shulman η απόδειξη που μετατρέπει τη μαθηματική γνώση σε παρουσίαση ιδεών οι οποίες το άγνωστο κάνουν γνωστό, το μη κατανοητό κάνουν κατανοητό και διακριτό και το χωρίς πείρα (τεχνική) κάνουν «έμπειρο» (Shulman, αναφορά σε Lai & Weber, 2014). Ο Shulman, όπως αναφέρεται, σχολιάζει ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ της γνώσης του αντικειμένου και της γνώσης για τη διδασκαλία του αντικειμένου. Η διαφορά έγκειται στην ικανότητα του διδάσκοντος να μετατρέπει το περιεχόμενο της γνώσης που παρουσιάζει σε μορφές παιδαγωγικά ισχυρές και αποδοτικές για τους μαθητές στους οποίους απευθύνεται (Lai & Weber, 2014). Επομένως, η παρουσίαση μιας παιδαγωγικής απόδειξης είναι μια σύνθετη διαδικασία για τον διδάσκοντα καθώς πρέπει στο μάθημα του να λάβει υπόψην ποιες γνώσεις είναι οικείες και στα πλαίσια της εννοιολογικής κατανόησης των συμμετεχόντων (Stylianides, 2007).

Η παιδαγωγική απόδειξη εξυπηρετεί πολλούς ρόλους, με τους δύο σημαντικότερους να είναι η χρήση της προς επιβεβαίωση των μαθητών για το τι είναι απόδειξη και για τον τρόπο που μια απόδειξη μπορεί να παραχθεί (Lai & Weber, 2014). Σύμφωνα με τους Lai και Weber (2014) οι πολλαπλοί ρόλοι της παιδαγωγικής απόδειξης είναι αφορμή για δημιουργία εντάσεων. Ο λόγος για τον οποίο οδηγήθηκαν στη συγκεκριμένη άποψη είναι το άρθρο των Boero, Douek, Morselli και Pedemonte του 2010 που αφορά τον προσδιορισμό των παραγόντων που επηρεάζουν το πώς τα επιχειρήματα μετατρέπονται σε αποδείξεις. Ο διδάσκων προκειμένου να διδάξει πρέπει να είναι ενήμερος και να λαμβάνει υπόψιν αυτούς τους παράγοντες προκειμένου να οδηγηθεί στην παρουσίαση μια παιδαγωγικής απόδειξης (Lai & Weber, 2014). Οι παράγοντες που εντόπισαν αναφέρονται ως επιστημολογικοί, τελεολογικοί και επικοινωνιακοί:

- Οι επιστημολογικοί παράγοντες αφορούν τη λογική δομή της απόδειξης με τρόπο τέτοιο που κάθε βήμα της απόδειξης να είναι επαγωγική συνέπεια κάποιου αξιώματος, ορισμού ή εδραιωμένου θεωρήματος.
- Οι τελεολογικοί παράγοντες αντανακλούν την ανάγκη για γνώση των βημάτων που οδήγησαν στην τελική μορφή της απόδειξης, συμπεριλαμβανομένων των άτυπων αναπαραστάσεων της και της μη-επαγωγικής αιτιολόγησης που χρησιμοποιείται σε αρχικά στάδια της αποδεικτικής διαδικασίας.
- Οι επικοινωνιακοί παράγοντες που αφορούν τη χρήση της γλώσσας και φωτίζουν τους κανόνες πειθαρχίας.

Οι μαθηματικοί και οι ερευνητές της διδακτικής συμφωνούν στο ότι η διδασκαλία με τελεολογικούς παράγοντες προσφέρει διάφορα οφέλη στους μαθητές, έρχεται όμως σε σύγκρουση με τους δύο άλλους παράγοντες (Lai & Weber, 2014). Η παρουσίαση μιας τυπικής απόδειξης, με χρήση επιστημολογικών και επικοινωνιακών παραγόντων, δεν δείχνει στους μαθητές τον τρόπο με τον οποίο η απόδειξη δημιουργείται (Leron, αναφορά στο Lai & Weber, 2014). Μέσω των τελεολογικών παραγόντων ο φοιτητής κατανοεί τους λόγους για τους οποίους το εκάστοτε θεώρημα υπάρχει, τα ακριβή βήματα που οδήγησαν στην απόδειξη, ενώ αποκτά πρόσβαση σε μεθόδους χρήσιμες για την απόδειξη άλλων θεωρημάτων (Lai & Weber, 2014). Δημιουργείται επομένως το ερώτημα του πώς η διδασκαλία με βάση τους τελεολογικούς παράγοντες επιτρέπει στον μαθητή να έχει πρόσβαση και στους άλλους δύο παράγοντες. Η μελέτη που παρουσιάζεται διερευνά πώς ο καθηγητής διαχειρίζεται αυτούς τους παράγοντες κατά την διαδικασία παρουσίασης των αποδείξεων και δείχνει ότι σε μεγάλο βαθμό εξαρτώνται από τις αντιλήψεις του διδάσκοντος.

Παιδαγωγικά μέσα στην παρουσίαση της απόδειξης

Είναι γεγονός ότι οι διδάσκοντες στην προσπάθεια παρουσίασης παιδαγωγικών αποδείξεων χρησιμοποιούν διάφορα μέσα. Για παράδειγμα οι Iannone και Nardi (2005), μέσω συνεντεύξεων, διαπιστώνουν ότι οι καθηγητές επιλέγουν τις παιδαγωγικές αποδείξεις για να δείξουν στους μαθητές πώς να χρησιμοποιούν τα παραδείγματα για την ανάπτυξη ισχυρισμών ή για το πώς να μεταφράζουν τα σύμβολα σε λεκτικούς ισχυρισμούς. Για να πετύχουν αυτούς τους στόχους χρησιμοποιούν μέσα όπως η υπογράμμιση των ορισμών και η χρήση τους στην αποδεικτική διαδικασία. Άλλα μέσα που χρησιμοποιούνται είναι η έμφαση στην κεντρική ιδέα και η εστίαση στις υποθέσεις και τα συμπεράσματα της απόδειξης (Lai κ.α., 2012).

Άλλες έρευνες δείχνουν ότι αρκετοί διδάσκοντες χρησιμοποιούν παραδείγματα (π.χ. Fukawa – Connelly & Newton, 2014; Fukawa – Connelly κ.α., 2017, Mills, 2014), και άτυπες αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών (π.χ. Fukawa – Connelly κ.α., 2017; Weber, 2004), ενώ επιχειρηματολογούν άτυπα κατά τη διάρκεια παρουσίασης της απόδειξης (π.χ. Gabel & Dreyfus, 2017; Lew κ.α. 2016).

Οι Fukawa – Connelly κ.α. (2017) διεξήγαγαν μία έρευνα στην οποία μελέτησαν 3 υποθέσεις σχετικές με τα μαθήματα μαθηματικών που βασίζονται στην απόδειξη · η πρώτη είχε να κάνει με το ανεπίσημο περιεχόμενο που συμπεριλαμβάνουν οι διδάσκοντες στις διαλέξεις, η δεύτερη αφορούσε το ότι το ανεπίσημο περιεχόμενο παρουσιάζεται μόνο προφορικά και δεν γράφεται στον πίνακα, και η τρίτη έλεγε ότι οι φοιτητές δεν καταγράφουν το ανεπίσημο περιεχόμενο, αλλά μόνο ότι σημειώνεται στον πίνακα. Από την έρευνα βρέθηκε ότι χρησιμοποιείται ανεπίσημο περιεχόμενο από τους διδάσκοντες, ότι το ανεπίσημο περιεχόμενο συνήθως δεν καταγράφεται, και ότι συνήθως οι φοιτητές δεν σημειώνουν τις προφορικές παρατηρήσεις των διδασκόντων, επιβεβαιώνοντας σε μεγάλο βαθμό τις υποθέσεις.

Στο άρθρο γίνεται η ανάπτυξη ενός κώδικα προκειμένου να αναλυθούν τα δεδομένα συνθέτοντας την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Για την κωδικοποίηση των τυπικών μαθηματικών χρησιμοποίησαν κώδικες όπως ορισμός, θεώρημα, απόδειξη (αναφορά σε Davis & Hersh, 1981; Weber, 2004). Για το άτυπο μαθηματικό περιεχόμενο χρησιμοποιήθηκαν οι κώδικες:

- παράδειγμα (αναφορά σε Fukawa – Connelly και Newton, 2014): ένα συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο που ικανοποιεί την έννοια που ορίζεται.
- μαθηματική μέθοδος (αναφορά σε Weber, 2004): αφορά τη μη αλγοριθμική προσέγγιση που ακολουθείται προκειμένου να επιλυθεί μια άσκηση ή τις συνθήκες υπό τις οποίες η τεχνική θα είναι χρήσιμη.
- ανεπίσημη αναπαράσταση (αναφορά σε Weber, 2004): είναι ένα διάγραμμα ή μια γραφική αναπαράσταση της έννοιας ή η περιγραφή της έννοιας σε μη επίσημη γλώσσα.

Από την άλλη πλευρά υπάρχουν ερευνητές που προσπαθούν να περιγράψουν τις παιδαγωγικές πρακτικές των διδασκόντων μέσω κατασκευής νέων μοντέλων. Για παράδειγμα η Hemmi (2010) προσδιορίζει ένα μοντέλο που περιγράφει 3 στυλ παιδαγωγικών πρακτικών · το «progressive» όπου δίνεται έμφαση στις ανάγκες των μαθητών με κάποιου είδους ευαισθησίας προς αυτούς, το «deductive» όπου δίνεται έμφαση στη μάθηση των «πραγματικών μαθηματικών», και το «classical» όπου η απόδειξη γίνεται για την ομορφιά της και όχι απαραίτητα για την γνώση.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ οι καθηγητές γνωρίζουν την αξία μιας παιδαγωγικής απόδειξης που περιλαμβάνει χαρακτηριστικά όπως είναι η έμφαση στην κεντρική ιδέα και την μεθοδολογία δεν συνηθίζουν να ενσωματώνουν αυτές τις πτυχές στην διδασκαλία τους (Lai & Weber, 2014). Οι έρευνες δείχνουν ότι οι διδάσκοντες τείνουν να δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στις τυπικές πτυχές της απόδειξης (Alcock, 2010). Η εστίαση επικεντρώνεται κυρίως στην παρουσίαση των τεχνικών απόδειξης και όχι στον εντοπισμό της χρησιμότητας αυτών των τεχνικών και στην γενίκευση τους σε αντίστοιχες περιπτώσεις (Weber, 2012).

Στην συνέχεια της ενότητας θα γίνει εκτενέστερη αναφορά σε κάποια από τα άτυπα μέσα που χρησιμοποιούνται από τους διδάσκοντες κατά την παρουσίαση των αποδείξεων, υποστηρίζοντας την παιδαγωγική μορφή της απόδειξης.

Παραδείγματα

Για τον όρο παράδειγμα στη βιβλιογραφία έχουν αναφερθεί αρκετοί ορισμοί. Η Mills (2014) παρουσιάζει 3 χαρακτηριστικούς. Ο πρώτος ορισμός που αναφέρεται είναι αυτός των Watson και Mason όπου θεωρούν ότι παράδειγμα καλείται οτιδήποτε μπορεί να οδηγήσει τον μαθητή στην γενίκευση. Ο ορισμός αυτός δείχνει ότι το παράδειγμα είναι άμεσα συνδεδεμένο με τον άνθρωπο που το διαβάζει (Mills, 2014). Ο δεύτερος ορισμός που σχολιάζεται από την Mills είναι αυτός των Zazkis και Leikin οι οποίες θεωρούν ότι παράδειγμα είναι μία υπόδειξη, μία εικόνα, μία περίπτωση ή ένα στοιχείο της μαθηματικής ιδέας, αντικειμένου, διαδικασίας, ή κλάσης. Σε αυτό τον ορισμό η αλληλεπίδραση μαθητή και παραδείγματος δεν υπάρχει (Mills, 2014). Σε ανάλογο ύφος κινείται και ο τελευταίος ορισμός των Alcock και Weber για τους οποίους παράδειγμα είναι το μαθηματικό αντικείμενο που ικανοποιεί τον ορισμό μίας έννοιας. Συνδυάζοντας τους ορισμούς των Alcock – Weber και Watson – Mason οι Fukawa – Connelly και Newton (2014) διεξήγαγαν μια έρευνα η οποία είχε ως στόχο την παιδαγωγική χρήση των παραδειγμάτων σε μαθήματα που έχουν ως κέντρο την απόδειξη.

Οι έρευνες που έχουν γίνει σχετικά με τη χρήση των παραδειγμάτων επικεντρώνονται στη μάθηση των μαθητών και στο πώς οδηγούνται οι ίδιοι στην απόδειξη (Fukawa – Connelly και Newton, 2014). Λίγες έρευνες αφορούν τον διδάσκοντα και πώς αυτός ενσωματώνει τα παραδείγματα στη διδασκαλία του σε μαθήματα πανεπιστημιακού επιπέδου που έχουν ως βάση την απόδειξη (Fukawa – Connelly και Newton, 2014), ενώ κάποιοι ερευνητές ισχυρίζονται ότι οι διδάσκοντες δεν χρησιμοποιούν καθόλου παραδείγματα στις διαλέξεις (Lew κ.α., 2016). Γενικά ένα παράδειγμα επιτρέπει στον μαθητή να αναπτύξει εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών ιδεών που εμπλέκονται σε αυτό (Mason και Watson, 2008).

Αποκτά πρόσβαση στις μαθηματικές ιδέες και με την χρήση τους μπορεί να οδηγηθεί στην δημιουργία δικών του μαθηματικών αντικειμένων (Fukawa – Connelly και Newton, 2014). Επιτρέπουν την κατανόηση του νοήματος και σύμφωνα με τον ορισμό των Mason και Watson είναι σύμμαχοι της γενίκευσης (Fukawa – Connelly και Newton, 2014).

Στο άρθρο τους οι Fukawa – Connelly και Newton (2014) αναφέρουν την άποψη των Bill και Tall, σύμφωνα με τους οποίους είναι σφάλμα από ένα διδάσκοντα που διδάσκει με την μορφή «ορισμός – θεώρημα – απόδειξη» να μην δίνει στο μαθητή την ευκαιρία να αναπτύξει πλούσιες εμπειρίες και εικόνες χρησιμοποιώντας ποικιλία παραδειγμάτων και μη – παραδειγμάτων των εννοιών. Υπάρχουν πολλοί λόγοι για να ενσωματωθεί κάποιο παράδειγμα στη διδασκαλία (Mills, 2014). Χρησιμοποιούνται κατά την διάρκεια επίλυσης προβλήματος, για την απόδειξη σωστών ή λανθασμένων ισχυρισμών, για την κατασκευή της απόδειξης ή βοηθούν στην κατανόηση της απόδειξης (Mills, 2014). Ωστόσο αυτό που παρατηρείται είναι ότι τα παραδείγματα προσαρμόζονται μόνο σε ένα στυλ διδασκαλίας, όπως τα προσδιόρισε ο Weber (2004) και συγκεκριμένα στο σημασιολογικό, όπου ο καθηγητής επικαλείται πιο διαισθητικά μέσα προκειμένου να οδηγήσει τους μαθητές στην κατανόηση.

Μη αλγοριθμικές μέθοδοι

Οι Fukawa – Connelly κ.α. (2017) προκειμένου να αναγνωρίσουν τα περιστατικά της μαθηματικής μεθόδου προσπαθούν να εντοπίσουν τα ακόλουθα σημεία:

- ο διδάσκων παρουσιάζει ένα γενικό σχεδιάγραμμα για την ολοκλήρωση της άσκησης, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε άλλες παρόμοιες περιπτώσεις
- ο διδάσκων περιγράφει κάποιο κόλπο ή ευρετική για την ολοκλήρωση της μαθηματικής δραστηριότητας
- ο διδάσκων περιγράφει συγκεκριμένες συνθήκες κάτω από τις οποίες η μαθηματική έννοια ή μέθοδος μπορεί να είναι είτε χρήσιμη είτε όχι

Το στυλ διδασκαλίας στο οποίο υπάγονται τα παραπάνω χαρακτηριστικά είναι το σημασιολογικό καθώς τα σημεία όπως αναγνωρίστηκαν ξεφεύγουν από την τυπική παρουσίαση της απόδειξης ενώ ο διδάσκων επιχειρεί να αιτιολογήσει, να υπογραμμίσει την ιδέα πίσω από τις αποδείξεις και να δημιουργήσει συνδέσεις μεταξύ των εννοιών. Όπως περιγράφει ο Weber (2004), μελετώντας τις συνεντεύξεις του Dr. T, κατά την διδασκαλία με σημασιολογικό στυλ, είχε ως στόχο να δουν οι μαθητές «τι πραγματικά συμβαίνει μέσα στις αποδείξεις» (σελ. 128) και προσπαθούσε να εμβαθύνει στις τακτικές και στην κατανόηση που απαιτείται ώστε οι μαθητές να παράγουν μόνοι τους αποδείξεις.

Σε ένα άλλο άρθρο οι Lew κ.α. (2016) ερευνώντας την αποτελεσματικότητα των διαλέξεων ενός διδάσκοντα πανεπιστημιακών μαθημάτων εντόπισαν τις ιδέες που παρουσιάζει στοχεύοντας να «πείσει» τους μαθητές του. Ο καθηγητής κατά την διάρκεια της συνέντευξης, ακούγοντας το ηχογραφημένο μάθημα, διέκοπτε τους ερευνητές σε κάθε προσπάθεια που έκανε να πείσει τους μαθητές για κάποια κεντρική ιδέα της απόδειξης. Οι κεντρικές ιδέες όπως εντοπίστηκαν από τον διδάσκοντα δεν διέφεραν από αυτές που εντόπισαν οι ίδιοι οι ερευνητές αλλά δεν ταυτίζονταν με αυτές που κατάλαβαν οι μαθητές. Οι ιδέες ήταν δύο κατηγοριών · η πρώτη κατηγορία αφορούσε ιδέες μεθοδολογικές που μπορεί να είναι χρήσιμες στην απόδειξη άλλων θεωρημάτων (τεχνικές), και η δεύτερη κατηγορία περιελάμβανε ιδέες που επιβεβαιώνουν την αλήθεια αυτού που αποδεικνύεται. Είναι σημαντικό να τονισθεί ότι οι ιδέες από τον συγκεκριμένο διδάσκοντα παρουσιάζονταν προφορικά, με αποτέλεσμα να μην γίνονται εύκολα αντιληπτές από τους μαθητές. Ο Weber (2012) στις συνεντεύξεις που διεξήγαγε συμπέρανε ότι οι διδάσκοντες όταν εισάγουν νέες ιδέες ή τεχνικές δίνουν έμφαση σε αυτό το σημείο της απόδειξης προσπαθώντας με αυτό τον τρόπο να στρέψουν την προσοχή των μαθητών στην «σωστή μεριά» της αποδεικτικής διαδικασίας (σελ. 475).

Ερωτήσεις

Οι ερωτήσεις είναι και αυτές ένα σημαντικό μέσο που βοηθά τους διδάσκοντες στην παρουσίαση των αποδείξεων. Γενικά οι ερωτήσεις λειτουργούν ως το μέσο που μπορεί να εμπλέξει άμεσα τον φοιτητή με την γνωστική διαδικασία (π.χ. Paoletti κ.α., 2018, Lew κ.α., 2017). Φαίνεται ότι οι διδάσκοντες επιλέγουν να ρωτούν αρκετά συχνά τους φοιτητές τους, όμως αυτό που παρατηρείται είναι ότι σπάνια δίνουν τον χώρο και τον χρόνο σε αυτούς να απαντήσουν (Paoletti κ.α., 2018).

Δεν έχουν διεξαχθεί αρκετές έρευνες πάνω στη δημιουργία μοντέλων που περιγράφουν τη χρήση των ερωτήσεων σε πανεπιστημιακού επιπέδου μαθήματα μαθηματικών. Οι Paoletti κ.α. (2018), μελετώντας τις ερωτήσεις που γίνονται από τους διδάσκοντες στις διαλέξεις, επιλέγουν να «μεταφέρουν» στο θεωρητικό τους πλαίσιο έρευνες σχετικές με τις ερωτήσεις που έχουν διεξαχθεί με αναφορά στη σχολική εκπαίδευση. Σύμφωνα με την έρευνα στη σχολική εκπαίδευση οι ερωτήσεις στις οποίες προχωρούν οι δάσκαλοι χωρίζονται σε 4 κατηγορίες:

- Έμπρακτες ερωτήσεις: αφορούν ερωτήσεις για έννοιες που είναι ήδη γνωστές για τους μαθητές. Περιλαμβάνουν δεδομένα, κανόνες ή διαδικασίες (Paoletti κ.α., 2018).
- Διερευνητικές ερωτήσεις: αφορούν ερωτήσεις αιτιολόγησης και παρουσίασης της σκέψης των μαθητών (Paoletti κ.α., 2018).
- Γενεσιουργές ερωτήσεις: αφορούν ερωτήσεις προς τους μαθητές κατά τις οποίες πρέπει να σκεφτούν το επόμενο βήμα ή να παρουσιάσουν μια μαθηματική πληροφορία που δεν είναι ήδη γνωστή σε αυτούς (Paoletti κ.α., 2018).
- Προσανατολισμένες ερωτήσεις: αφορούν τις εστιασμένες ερωτήσεις σε συγκεκριμένες ιδέες ή στρατηγικές επίλυσης (Paoletti κ.α., 2018).

Οι Paoletti κ.α. (2018) σχολιάζουν ότι το κοινό της σχολικής και πανεπιστημιακής εκπαίδευσης είναι η επιλογή των καθηγητών κυρίως έμπρακτων ερωτήσεων για τους μαθητές τους. Το συγκεκριμένο είδος χαρακτηρίζεται από τους ίδιους τους διδάσκοντες ως το λιγότερο χρήσιμο για τους μαθητές, καθώς τους εμπλέκει στον ελάχιστο βαθμό με τη γνωστική διαδικασία ενώ δεν τους βοηθά να αναπτύξουν βαθύτερη κατανόηση στις έννοιες που διδάσκονται.

Ένας ακόμα παράγοντας που πρέπει να ληφθεί υπόψιν κατά τη μελέτη των ερωτήσεων είναι ο χρόνος αναμονής του διδάσκοντος προκειμένου να απαντήσει ο ίδιος ή να δώσει το λόγο σε κάποιον άλλο μαθητή. Γενικά στη σχολική τάξη η διάρκεια αναμονής του καθηγητή έχει προσδιοριστεί στα 3-5 δευτερόλεπτα (Paoletti κ.α., 2018). Όσο περισσότερο περιμένει ο διδάσκων τόσο μεγαλύτερο είναι και το περιθώριο για τον μαθητή να συμμετάσχει στο μάθημα (Paoletti κ.α., 2018). Αποτελεί ένα ανοιχτό ερώτημα για το αν αληθεύουν τα ευρήματα από την έρευνα στη σχολική εκπαίδευση για την πανεπιστημιακή εκπαίδευση (Paoletti κ.α., 2018).

Αναπαραστάσεις

Το διάγραμμα αποτελεί ένα στοιχείο που βοηθάει τόσο στο να κάνει κάποιος μαθηματικά όσο και στο να κατανοεί κάποιος μαθηματικά (Samkoff κ.α., 2012). Σύμφωνα με τον Dreyfus κάποια από τα οφέλη της χρήσης διαγραμμάτων είναι ότι επιτρέπουν στον λύτη «να δει, να συγκρίνει, και ταυτόχρονα να συνδέσει διάφορα κομμάτια πληροφοριών με λιγότερη γνωστική προσπάθεια από όταν η πληροφορία δίνεται συμβολικά και γραμμικά» (Samkoff κ.α., 2012, σελ. 49). Επίσης οι γραφικές αναπαραστάσεις αναδύουν ιδιότητες και παρέχουν επεξηγήσεις και πρόσβαση σε μαθηματικές ιδιότητες που θα ήταν δύσκολο να γίνουν κατανοητές με χρήση συμβόλων και λογικής (Samkoff κ.α., 2012).

Η απόδειξη όπως αναφέρθηκε είναι προϊόν μαθηματικής αιτιολόγησης και για αυτό το λόγο περιλαμβάνει συγκεκριμένα τυπικά χαρακτηριστικά, όμως η αιτιολόγηση που χρησιμοποιείται για να γεννηθεί η απόδειξη δεν είναι απαραίτητο να βασίζεται σε αυτά (Zazkis κ.α., 2016), και συχνά περιλαμβάνει οπτική αιτιολόγηση (Weber & Alcock, 2004). Η βιβλιογραφία προτείνει οι διδάσκοντες να ενθαρρύνουν τους φοιτητές να χρησιμοποιούν διαγράμματα κατά τη διαδικασία κατασκευής και αιτιολόγησης των αποδείξεων που συνθέτουν (Samkoff κ.α., 2012).

Όπως αναφέρουν οι Samkoff κ.α. (2012) η βιβλιογραφία υποστηρίζει τα οφέλη των διαγραμμάτων θεωρητικά και πρακτικά (σελ. 50). Θεωρητικά τα οφέλη τις αιτιολόγησης μέσω διαγραμμάτων είναι τα εξής:

- ✓ κάνουν κάτι αφηρημένο πιο συγκεκριμένο ώστε να αποκτήσει νόημα για τους μαθητές.
- ✓ επιτρέπουν χρήσιμους και γρήγορους χειρισμούς.
- ✓ βοηθούν τους φοιτητές να ξεπεράσουν τα εμπόδια όταν γράφουν αποδείξεις.

Ενώ τα πρακτικά οφέλη που σημειώνουν οι Samkoff κ.α. (2012) είναι:

- ✓ ο εντοπισμός φοιτητών οι οποίοι με τη χρήση διαγραμμάτων είχαν επιτυχία στη συγγραφή και κατανόηση των αποδείξεων.
- ✓ οι ίδιοι οι μαθηματικοί κατά την παραγωγή αποδείξεων επιλέγουν να βασίζουν την απόδειξη τους σε διαγράμματα – κάτι που φανερώνει ότι η χρήση γραφικών αναπαραστάσεων είναι διαδεδομένη μαθηματική πρακτική.

Ωστόσο δεν γίνεται να μην αναφερθούν οι περιορισμοί που αναδεικνύονται από τη χρήση διαγραμμάτων και γραφικών αναπαραστάσεων. Για παράδειγμα, ο Duval παρατηρεί ότι υπάρχουν διαφορές στη δομή των τυπικών αποδείξεων και των αποδείξεων βασισμένες στα διαγράμματα και για αυτό το λόγο πρέπει οι ερευνητές να αναγνωρίζουν τη γνωστική πολυπλοκότητα και να δρουν κατάλληλα (αναφορά σε Samkoff κ.α., 2012). Από την άλλη πλευρά η Alcock (2010) γράφει ότι ενώ τα διαγράμματα μπορούν να προσφέρουν πρόσβαση στις έννοιες, δεν είναι πάντα εύκολο για τους μαθητές να δουν τις συνδέσεις μεταξύ αυτών και των τυπικών αποδείξεων, ενισχύοντας έτσι την άποψη της γνωστικής πολυπλοκότητας που υπάρχει στη χρήση διαγραμμάτων.

Στη διδασκαλία οι Fukawa – Connelly κ.α. (2017) κωδικοποίησαν τη χρήση μη τυπικών αναπαραστάσεων παρατηρώντας τις εξής δράσεις του διδάσκοντος: περιγραφή του περιεχομένου με χρήση αναπαράστασης (διάγραμμα ή μεταφορά) που διαφέρει από τη λεκτική – συμβολική του παρουσίαση, σύνδεση προηγούμενης με υπάρχουσα μαθηματική γνώση, εστίαση στο νόημα ή τον σκοπό της μαθηματικής έννοιας με χρήση καθομιλουμένης γλώσσας και όχι τυπικής. Τα παραπάνω αποτελούν χαρακτηριστικά της σημασιολογικής διδασκαλίας όπου ο καθηγητής συνήθως με τη χρήση ενός διαγράμματος παρουσιάζει την κεντρική ιδέα της έννοιας προσπαθώντας να δημιουργήσει ένα πιο πλούσιο περιβάλλον για τους μαθητές και μια καλύτερη εικόνα του τι πραγματικά συμβαίνει. Ο Dr. T., ο καθηγητής στη μελέτη περίπτωσης που διεξήχθη από τον Weber (2004), στην διδασκαλία σε σημασιολογικό στυλ πρώτα έδειχνε την απόδειξη άτυπα, χρησιμοποιώντας το διάγραμμα, ζητώντας από τους μαθητές να μην κρατούν σημειώσεις προκειμένου να κατανοήσουν καλύτερα την πορεία της σκέψης του και στην συνέχεια παρουσίαζε την τυπική απόδειξη σε πιο γρήγορο ρυθμό, παραλείποντας κάποιες λεπτομέρειες.

Όπως αναφέρθηκε και στο κλείσιμο της προηγούμενης ενότητας, οι διδάσκοντες έχουν επίγνωση της παιδαγωγικής αξίας της μη τυπικής αιτιολόγησης των αποδείξεων και της παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών, όμως στις διαλέξεις τους επιλέγουν να δείξουν τις τυπικές πτυχές των μαθηματικών (Alcock, 2010). Όπως παρατήρησαν και οι Lai και Weber (2014) οι καθηγητές γνωρίζουν την αξία της απόδειξης που περιλαμβάνει διαγράμματα και που δίνει έμφαση στις σημαντικές ιδέες αλλά συχνά επιλέγουν να μην παρουσιάσουν τέτοιες αποδείξεις στις διαλέξεις τους. Στην παρούσα εργασία θα δούμε πώς οι δράσεις του διδάσκοντος γύρω από την απόδειξη υπογραμμίζονται από την χρήση άτυπων μέσων αιτιολόγησης.

2.4 Ο διδάσκων

Ο σκοπός της συγκεκριμένης ενότητας είναι ο χαρακτηρισμός των αποφάσεων του διδάσκοντος κατά τη διδασκαλία και ο εντοπισμός της σχέσης με τα πιστεύω του ίδιου. Ακόμη θα γίνει αναφορά και στον μαθητή στον οποίο απευθύνεται και στα ζητήματα που αντιμετωπίζει και καλείται να λάβει υπόψιν ο διδάσκοντας.

2.4.1 Οι διδακτικές αποφάσεις

Οι αποφάσεις του διδάσκοντος σε μεγάλο βαθμό εξαρτώνται από τις μαθηματικές του γνώσεις και τα πιστεύω του (Schoenfeld κ.α., 2016). Ο χαρακτηρισμός των αποφάσεων περιεγράφηκε από τον Schoenfeld, ο οποίος δημιούργησε ένα μοντέλο που επιτρέπει τόσο κατανόηση όσο και την διερεύνηση (Schoenfeld κ.α., 2016). Το μοντέλο βασίζεται στους ακόλουθους 3 βασικούς παράγοντες:

1. Τις πηγές του διδάσκοντος – αφορούν τις γνώσεις του, το υπόβαθρο και την εμπειρία του, αλλά περιλαμβάνουν ακόμα και το υλικό που χρησιμοποιεί (Pinto, 2013)
2. Τον προσανατολισμό του για τα μαθηματικά – δηλαδή τι θεωρεί ο ίδιος σημαντικό σε σχέση με τα πιστεύω, τις αξίες και τις προκαταλήψεις του κτλ. (Pinto, 2013)
3. Τους στόχους του για την διδασκαλία – δηλαδή αυτό που προσπαθεί να πετύχει στη διδασκαλία, συνειδητά ή ασυνείδητα (Pinto, 2013)

Στην πράξη, όπως αναφέρουν οι Schoenfeld κ.α. (2016), οι προσανατολισμοί του διδάσκοντος είναι αυτοί που καθορίζουν τελικά τους στόχους του τόσο πριν όσο και κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Επίσης οι προσανατολισμοί του χρησιμοποιούνται για την προσαρμογή του στην εκάστοτε τάξη και την ενεργοποίηση της σχετικής γνώσης. Οι αποφάσεις του διδάσκοντος λειτουργούν καθοριστικά για το αν θα επιτευχθούν οι στόχοι που έχει θέσει. Οι αποφάσεις που λαμβάνουν στιγμιαία οι καθηγητές οδηγούν το μάθημα σε σημαντικά διαφορετικές κατευθύνσεις (Pinto, 2013). Στην παρούσα εργασία, με την παραπάνω μοντελοποίηση, επιδιώκεται η κατανόηση των δράσεων του καθηγητή και η ανίχνευση της επίδρασης των συγκεκριμένων παραγόντων στην αποδεικτική διαδικασία.

2.4.2 Ο μαθητής

Η μετάβαση από το Λύκειο στο Πανεπιστήμιο είναι ένα από τα βασικά ζητήματα που καλείται να αντιμετωπίσει ο φοιτητής που απευθύνεται ο διδάσκων της παρούσας εργασίας. Το Πανεπιστήμιο λειτουργεί για τον πρωτοετή φοιτητή ως νέος χώρος μάθησης αλλά και ως νέος τρόπος ζωής. Ο φοιτητής πρέπει να μάθει την νέα γλώσσα και να προσαρμοστεί με τους νέους κανόνες που θα τον κάνουν να μην νιώθει ξένος στη νέα κοινότητα (Gueudet, αναφορά στο Bampili κ.α., 2017).

Η κοινωνική διάσταση της μετάβασης θέλει τον μαθητή φοβισμένο, εκνευρισμένο και αρκετά ντροπαλό στο πρώτο έτος των σπουδών του (Bampili κ.α., 2017). Από την άλλη πλευρά ο φοιτητής είναι χαρούμενος για το νέο του ξεκίνημα, για την ευκαιρία προσωπικής ανάπτυξης που του δίνεται και για τη διεύρυνση του κοινωνικού τους περίγυρου ενώ παράλληλα είναι έτοιμος για σκληρή δουλειά (Bampili κ.α., 2017). Ως πρόβλημα ωστόσο χαρακτηρίζεται από τους πρωτοετείς φοιτητές η απεριόριστη ελευθερία και η αύξηση των προσδοκιών (Bampili κ.α., 2017).

Ως προς τη γνωστική διάσταση ο φοιτητής καλείται να υιοθετήσει νέες στρατηγικές μάθησης και διαχείρισης της γνώσης, δουλεύοντας ανεξάρτητος (Bampili κ.α., 2017). Πρέπει επίσης να προσαρμοστεί στη διδασκαλία μέσω διαλέξεων, αναπτύσσοντας την ικανότητα του να κρατά σημειώσεις ενώ παρακολουθεί τον διδάσκοντα. Η διαδικασία καταγραφής σημειώσεων περιλαμβάνει 4 ικανότητες που πρέπει να αναπτυχθούν: ο φοιτητής πρέπει να ακούει, να επεξεργάζεται, να καταγράφει και να αναστοχάζεται κατά τη διάρκεια της διάλεξης (Williams & Eggert, 2002). Επίσης καλείται να αντιμετωπίσει και την αλλαγή στη δομή των μαθημάτων. Από τα υπολογιστικά μαθηματικά του Λυκείου, ο μαθητής μπαίνει στη διαδικασία να παρακολουθήσει μαθήματα που έχουν ως κέντρο την απόδειξη (Bampili κ.α., 2017).

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Ερευνητικά Ερωτήματα

Στην προηγούμενη ενότητα αναδείχθηκε η σημασία της απόδειξης στη διδασκαλία μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο όπως επίσης και ο κρίσιμος ρόλος του διδάσκοντος σε αυτή τη διαδικασία. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι τρόποι διδασκαλίας μιας απόδειξης ποικίλουν και σχετίζονται άμεσα με τον διδάσκοντα και τις αντιλήψεις του γύρω από αυτή. Ερευνητικό πρόβλημα είναι η εύρεση του τι χαρακτηρίζει μια απόδειξη σημασιολογική στη διδασκαλία στο Πανεπιστήμιο και από τι αυτή διαμορφώνεται. Αυτό το γεγονός οδήγησε στην διαμόρφωση των εξής ερευνητικών ερωτημάτων για τη συγκεκριμένη έρευνα.

Ερευνητικό ερώτημα 1: Ποιες δράσεις του διδάσκοντος εκφράζουν το σημασιολογικό στυλ διδασκαλίας της απόδειξης; Με ποιο τρόπο οι δράσεις που επιλέγει συνδέονται μεταξύ τους, υπάρχει κάποια κανονικότητα;

Ερευνητικό ερώτημα 2: Μελέτη των παραγόντων διαμόρφωσης της διδασκαλίας του διδάσκοντος. Πώς οι εμπειρίες, οι στόχοι και οι πηγές επηρεάζουν τη διδασκαλία της απόδειξης.

Η μελέτη των δύο ερευνητικών ερωτημάτων έγινε μέσω παρακολούθησης της διδασκαλίας του διδάσκοντος και με συνεντεύξεις πάνω στη διδασκαλία. Η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν οδήγησε στα συμπεράσματα της έρευνας και στην απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων.

3.2 Το πλαίσιο της έρευνας

Η έρευνα στη συγκεκριμένη εργασία είχε ως αντικείμενο ένα μάθημα ανάλυσης, συγκεκριμένα τον Απειροστικό Λογισμό. Το μάθημα είναι ένα από τα υποχρεωτικά μαθήματα ανάλυσης του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών και θεωρείται από τα πιο απαιτητικά. Η διδασκαλία του μαθήματος γίνεται με τη μορφή διαλέξεων και το ακροατήριο αποτελείται από μεγάλο αριθμό φοιτητών, με μέσο όρο περίπου 100 φοιτητές ανά διάλεξη. Στους φοιτητές παρέχονται ηλεκτρονικές σημειώσεις και ασκήσεις που καλύπτουν την ύλη του μαθήματος. Επίσης τους δίνεται η δυνατότητα να επιλέξουν ένα από τα βιβλία του μαθήματος που προσφέρονται.

Η ύλη του μαθήματος αποτελείται από πέντε κεφάλαια και περιλαμβάνουν θέματα όπως οι πραγματικοί αριθμοί, οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών και οι συναρτήσεις. Πιο αναλυτικά τα κεφάλαια που καλύπτονται είναι:

1. Πραγματικοί αριθμοί. Φυσικοί αριθμοί. Ρητοί αριθμοί, ύπαρξη αρρήτων. Αξίωμά πληρότητας. Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας και ακεραίου μέρους, πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς, προσέγγιση πραγματικών αριθμών από ρητούς, κλασικές ανισότητες.
2. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Συγκλίνουσες ακολουθίες, μονότονες ακολουθίες, κιβωτισμός διαστημάτων, ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά, δεκαδικό και δυαδικό ανάπτυγμα πραγματικού αριθμού.
3. Συναρτήσεις. Βασικοί ορισμοί. Αλγεβρικές συναρτήσεις, τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Εκθετική συνάρτηση.
4. Συνέχεια και όριο συναρτήσεων. Συνέχεια. Αρχή της μεταφοράς. Συνέχεια βασικών συναρτήσεων. Συνέχεια και τοπική συμπεριφορά. Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών. Ύπαρξη μέγιστης και ελάχιστης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε κλειστά διαστήματα. Μονότονες συναρτήσεις. Συνεχείς και 1-1 συναρτήσεις. Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Λογαριθμική συνάρτηση. Σημεία συσσώρευσης, μεμονωμένα σημεία συνόλων. Η έννοια του ορίου συνάρτησης.
5. Παράγωγος. Εισαγωγή: παραδείγματα από τη Γεωμετρία και τη Φυσική. Ορισμός της παραγώγου. Κανόνες παραγώγισης. Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων. Θεώρημα μέσης τιμής. Θεώρημα Darboux. Κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης. Κριτήρια τοπικών ακροτάτων. Γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής. Κανόνες de l’Hospital. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις. Σημεία καμπής. Μελέτη συναρτήσεων.

Το μάθημα έχει διάρκεια 90 λεπτών και γίνεται 3 φορές την εβδομάδα. Συνολικά στο τμήμα του χειμερινού εξαμήνου, από το οποίο συλλέχθηκαν δεδομένα, προσφέρθηκαν 39 διαλέξεις κατά τη διάρκεια 17 εβδομάδων.

3.3 Ερευνητική διαδικασία

Η μελέτη περίπτωσης

Η έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης (case study) (Yin, 1994, 2003), καθώς εξετάστηκε ένας μόνο διδάσκων με στόχο να γίνει ανάλυση σε βάθος. Με την μελέτη περίπτωσης επιχειρείται η παρουσίαση λεπτομερών πληροφοριών που αφορούν τις πρακτικές του διδάσκοντος σε σχέση με τη διδασκαλία της απόδειξης.

Ο διδάσκων της έρευνας αποτελεί μια εξαιρετικά ενδιαφέρουσα περίπτωση, καθώς συνδυάζει την εμπειρία πάνω στη διδασκαλία του συγκεκριμένου μαθήματος, με γνώσεις από την έρευνα στα μαθηματικά και την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών. Ο διδάσκων διδάσκει στο από το 1980. Από το 1980 μέχρι το 2000 ασχολήθηκε αποκλειστικά με την έρευνα στα μαθηματικά. Από το 2000 έως το 2011 διεξήγαγε παράλληλα έρευνες στα μαθηματικά και στη διδακτική των μαθηματικών. Από το 2012 έως σήμερα ασχολείται αποκλειστικά με την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών.

Διαδικασία συλλογής και δημιουργίας δεδομένων

Τα δεδομένα της έρευνας συλλέχθηκαν μέσω παρακολούθησης των διαλέξεων, άτυπων συζητήσεων και συνεντεύξεων με τον διδάσκοντα.

Αρχικά παρακολουθήθηκαν 17 δίωρες διαλέξεις του μαθήματος Απειροστικός Λογισμός 1. Κατά τη διάρκεια των διαλέξεων κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου στις οποίες καταγράφονταν κινήσεις του διδάσκοντος, όπως για παράδειγμα πότε γράφει στον πίνακα ή πότε χρησιμοποιεί χειρονομίες για να περιγράψει κάποιο διάγραμμα. Επίσης σημειώνονταν δεδομένα από τον πίνακα (διαγράμματα, αναπαραστάσεις, τυπικές αποδείξεις) και σχόλια που επισήμανε προφορικά στους φοιτητές, όπως για παράδειγμα σχόλια για την ροή που θα ακολουθήσει στο μάθημα και για το πως θα εξελιχθεί η πορεία μάθησης. Σε μερικές διαλέξεις έγιναν άτυπες συζητήσεις με τον διδάσκοντα στις οποίες σχολιάζονταν κάποια στοιχεία του μαθήματος. Σημειώσεις κρατήθηκαν και από τις συζητήσεις με τον διδάσκοντα.

Συνολικά έγιναν 3 συνεντεύξεις. Μία κατά τη διάρκεια παρακολούθησης των μαθημάτων, μία μετά την ανάλυση των δεδομένων και μία τελική μετά την καταγραφή των αποτελεσμάτων. Οι συνεντεύξεις είχαν κατά μέσο όρο διάρκεια 45 λεπτά και ήταν ημιδομημένες. Στις συνεντεύξεις συζητήθηκαν οι δράσεις του διδάσκοντος και πώς αυτές σχετίζονται με τις πεποιθήσεις, τις γνώσεις και την εμπειρία του. Οι διαλέξεις και οι συνεντεύξεις ηχογραφήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν.

3.4 Μεθοδολογία ανάλυσης των δεδομένων

Τα δεδομένα αναλύθηκαν με τεχνικές grounded (Strauss & Cubin, 1998). Η ανάλυση έγινε σε 3 φάσεις.

Στην πρώτη φάση, οι διαλέξεις χωρίστηκαν σε επεισόδια με κριτήριο τη διδασκαλία και απόδειξη κάποιου θεωρήματος. Συνολικά προέκυψαν 52 επεισόδια, τα οποία και απομαγνητοφωνήθηκαν. Έπειτα επιλέχθηκαν 13 επεισόδια για την ανάλυση τα οποία αφορούσαν τη διδασκαλία χαρακτηριστικών θεωρημάτων από το σύνολο της ύλης που διδάσκεται στον Απειροστικό Λογισμό 1. Η ανάλυση των επεισοδίων έγινε με τεχνικές grounded. Κάθε επεισόδιο από αυτά που επιλέχθηκαν κωδικοποιήθηκε με δύο είδη κωδικών. Σημειώθηκαν κώδικες οι οποίοι προσδιόριζαν τις διδακτικές δράσεις του διδάσκοντος, τι κάνει δηλαδή κατά τη διάρκεια του επεισοδίου. Παράλληλα τοποθετήθηκαν κώδικες για το αν οι δράσεις αυτές έρχονται με τη χρήση κάποιου άτυπου ή διαισθητικού εργαλείου. Οι κώδικες που προσδιορίστηκαν αναδύθηκαν από τα δεδομένα ή προέκυψαν από την συνεχή ανάγνωση των δεδομένων και σύγκριση τους με την υπάρχουσα βιβλιογραφία (π.χ. Petropoulou κ.α., 2016, Fukawa - Connelly κ.α., 2017). Αυτό που επιτεύχθηκε από την πρώτη φάση της ανάλυσης ήταν η εύρεση των συνθηκών κάτω από τις οποίες χρησιμοποιούνται τα άτυπα μέσα κατά τη διδασκαλία της απόδειξης και ο προσδιορισμός των δράσεων του διδάσκοντος που εξυπηρετούν. Η ανάλυση έφερε στο προσκήνιο τη χρήση έξι άτυπων εργαλείων μέσω των οποίων υπογραμμίζονται συγκεκριμένες δράσεις του διδάσκοντος.

Στην δεύτερη φάση της ανάλυσης, τα επεισόδια διαβάστηκαν ξανά, κατηγοριοποιώντας τις διδακτικές δράσεις. Από αυτή τη διαδικασία προέκυψε ένα επαναληπτικό μοτίβο μέσω του οποίου ο διδάσκων αντιμετωπίζει την απόδειξη. Τα επιμέρους στάδια του μοτίβου συνδέθηκαν με τα τυπικά και άτυπα μέσα της απόδειξης.

Στην τρίτη φάση της ανάλυσης, απομαγνητοφωνήθηκαν οι συνεντεύξεις και με βάση τα αποτελέσματα από τις δύο προηγούμενες φάσεις έγινε προσπάθεια προσδιορισμού των λόγων που ο διδάσκων επιλέγει να διδάσκει με αυτό τον τρόπο και να κάνει τις συγκεκριμένες δράσεις. Μετά την ανάλυση όλων των δεδομένων έγινε σύνθεση αυτών και έτσι αναδύθηκαν οι συνδέσεις των τυπικών και άτυπων στοιχείων της διδασκαλίας της απόδειξης.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

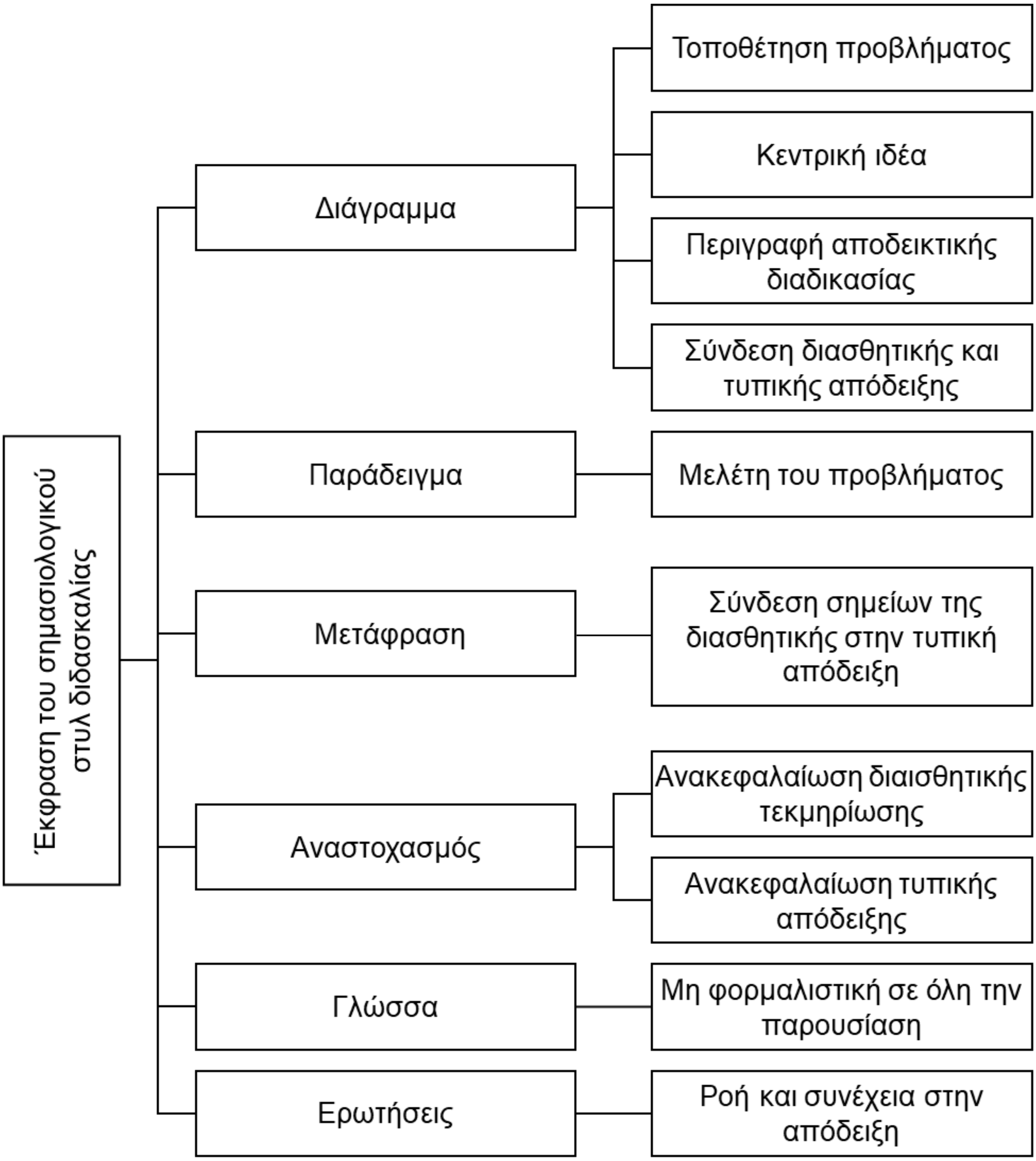
Κοιτώντας τις διαλέξεις του διδάσκοντος, για το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού 1, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι ακολουθούν τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας δηλαδή συμφωνούν με την ακολουθία «Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη». Ο διδάσκων παρουσίαζε ορισμούς, παραδείγματα, θεωρήματα, αποδείξεις και ασκήσεις – προβλήματα στον πίνακα, ενώ οι μαθητές κατά κύριο λόγο αντέγραφαν ότι σημείωνε ο ίδιος στον πίνακα και σπάνια συμμετείχαν στο μάθημα ή έθεταν ερωτήσεις.

Όμως, όπως θα δούμε και στις επόμενες ενότητες των αποτελεσμάτων, οι πρακτικές που υιοθέτησε ο διδάσκων, προκειμένου να παρουσιάσει τις αποδείξεις στους φοιτητές, διέφεραν σημαντικά από τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Ο διδάσκων αντί να παρουσιάζει τις αποδείξεις γραμμικά, προσπαθούσε να εμβαθύνει στις ιδέες που βρίσκονται πίσω από αυτές και να βοηθήσει τους μαθητές να σκέφτονται μαθηματικά, χρησιμοποιώντας το σημασιολογικό στυλ διδασκαλίας.

Στην πρώτη ενότητα θα αναδειχθούν τα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας της απόδειξης. Αρχικά θα γίνει αναφορά στα μέσα, μέσω των οποίων ο διδάσκων εξέφρασε το σημασιολογικό στυλ διδασκαλίας και έπειτα θα παρουσιαστεί το μοτίβο δράσεων του διδάσκοντος κατά τη διδασκαλία της απόδειξης. Κλείνοντας την πρώτη ενότητα των αποτελεσμάτων θα δούμε πώς τα άτυπα και τυπικά μέσα διδασκαλίας που χρησιμοποιεί ο διδάσκων αλληλεπιδρούν προκειμένου να οδηγήσουν στην απόδειξη των θεωρημάτων. Στην δεύτερη ενότητα των αποτελεσμάτων αναφέρονται οι παράγοντες που οδήγησαν τον διδάσκοντα στη διαμόρφωση της διδασκαλίας του.

4.1 Τα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας της απόδειξης

4.1.1 Η έκφραση του σημασιολογικού στυλ διδασκαλίας μέσω των άτυπων εργαλείων

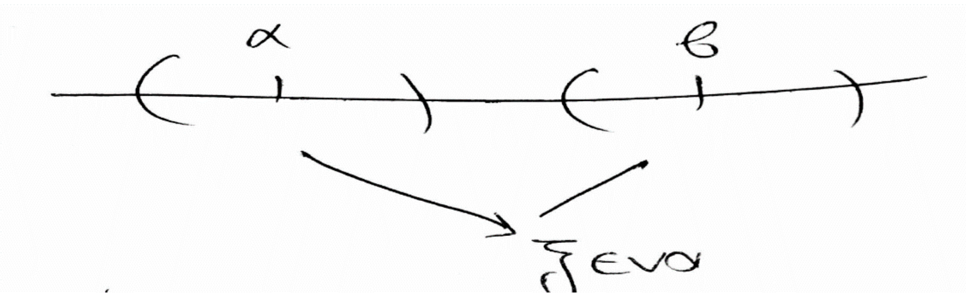


Εικόνα 1 - Η έκφραση του σημασιολογικού στυλ διδασκαλίας μέσω προσδιορισμού των άτυπων μέσων διδασκαλίας.

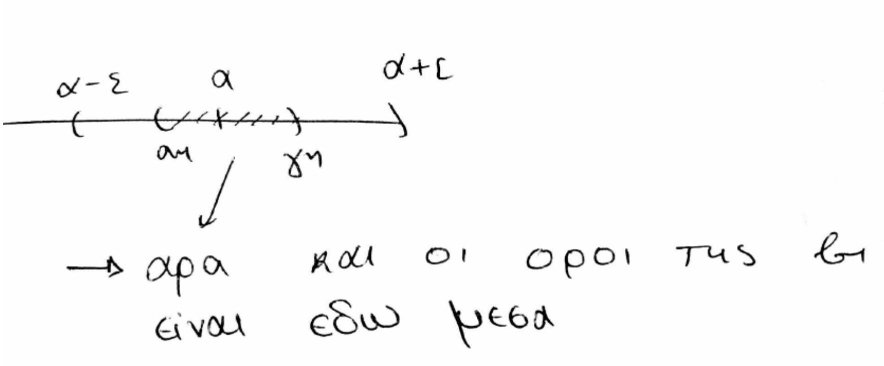
Η ανάλυση των δεδομένων έφερε στο προσκήνιο τη χρήση έξι άτυπων μέσων από τον διδάσκοντα, που λειτουργούν ως τα μέσα έκφρασης του σημασιολογικού στυλ διδασκαλίας της απόδειξης. Τα άτυπα μέσα αποτελούν στοιχεία της διδακτικής πρακτικής. Ο διδάσκων χρησιμοποιεί διαγράμματα, παραδείγματα, μεταφράσεις, αναστοχασμούς, ερωτήσεις και συγκεκριμένη γλώσσα προκειμένου να υπογραμμίσει τις διδακτικές δράσεις του. Στην συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά το κάθε μέσο και οι δράσεις του διδάσκοντος που σχετίζονται με αυτό.

Διαγράμματα

Τα διαγράμματα χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά από τον διδάσκοντα σε διάφορα σημεία της αποδεικτικής διαδικασίας. Συγκεκριμένα δεν υπήρχε επεισόδιο που αναλύθηκε το οποίο δεν διέθετε κάποιο διάγραμμα. Τα διαγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν είτε μονοδιάστατα είτε δισδιάστατα ανάλογα με την έννοια που παρουσιαζόταν την εκάστοτε στιγμή. Στο κεφάλαιο 1 «Το σύνολο των πραγματικών αριθμών» και στο κεφάλαιο 2 «Ακολουθίες πραγματικών αριθμών» της ύλης του Απειροστικού Λογισμού 1, ο διδάσκων χρησιμοποιούσε μονοδιάστατα διαγράμματα τα οποία αναπαριστούσαν γενικά ή ειδικά, δηλαδή με χρήση συγκεκριμένου παραδείγματος, την έννοια που παρουσίαζε.

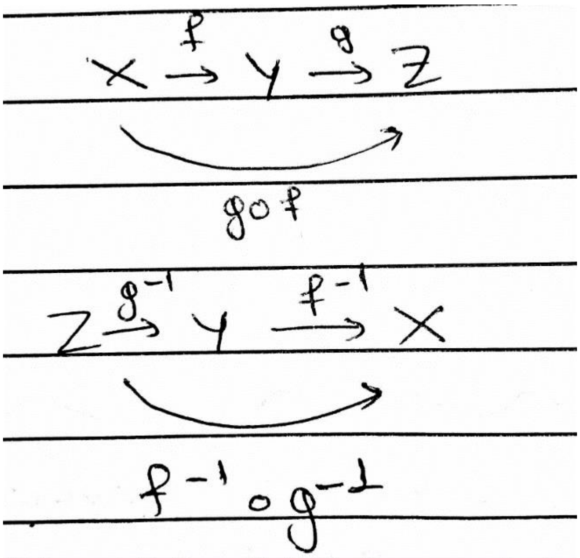


Εικόνα 2 - Διάγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του θεωρήματος μοναδικότητας του ορίου (σημειώσεις πεδίου - αντιγραφή από τον πίνακα).

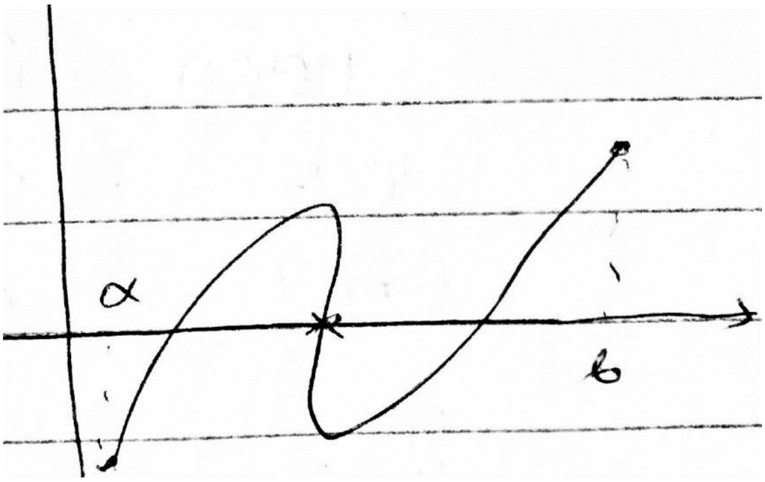


Εικόνα 3 - Διάγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του κριτηρίου ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (σημειώσεις πεδίου - αντιγραφή από τον πίνακα).

Στις επόμενες ενότητες που αφορούσαν συναρτήσεις ο διδάσκων χρησιμοποιούσε δισδιάστατα διαγράμματα των εννοιών ή μονοδιάστατες αναπαραστάσεις.



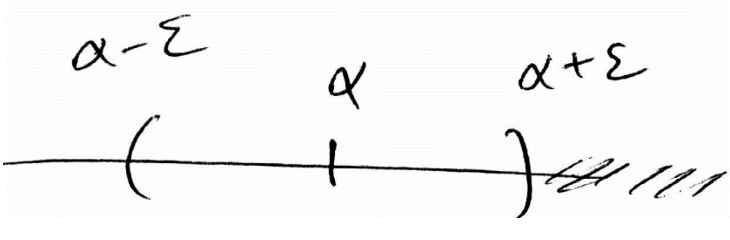
Εικόνα 4 - Αναπαράσταση που χρησιμοποιήθηκε για απόδειξη της άσκησης: Έστω f : X → Y, g : Y → Z δύο συναρτήσεις που είναι 1-1 και επί. Δείξτε ότι η (g ∘ f) είναι 1-1 και επί και ισχύει $(g^\circ f)^{-1} = f^{-1}{}^\circ g^{-1}$ (σημειώσεις πεδίου – αντιγραφή από τον πίνακα).



Εικόνα 5 - Διάγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του Θεωρήματος Bolzano (σημειώσεις πεδίου – αντιγραφή από τον πίνακα).

Η χρήση των διαγραμμάτων εντοπίζεται σε 4 φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας. Αρχικά τα διαγράμματα εμφανίζονται στην εκκίνηση της αποδεικτικής διαδικασίας, κατά την τοποθέτηση του προβλήματος. Ο διδάσκων επιλέγει κάποιο διάγραμμα ώστε να δώσει στους μαθητές μια εικόνα του αντικειμένου που θα ασχοληθούν και να επεξηγήσει τις υποθέσεις. Στο παράδειγμα που ακολουθεί ο διδάσκων χρησιμοποιεί το διάγραμμα με στόχο να γίνει κατανοητό τι σημαίνει για τους όρους της ακολουθίας η υπόθεση σύγκλισης στο α στην απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη:

> «Τώρα, για προσέξτε, λέμε ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο α, όποιο ε και να πάρω έξω από εδώ είναι πεπερασμένα *(σχήμα),* το πολύ n_0. Άρα από εδώ πάνω θα έχω πεπερασμένα και από εδώ κάτω θα έχω πεπερασμένα.»



Εικόνα 6 - Διάγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του Θεωρήματος ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη (σημειώσεις πεδίου – αντιγραφή από τον πίνακα).

Έπειτα τα διαγράμματα χρησιμοποιούνται για την σκιαγράφηση της κεντρικής ιδέας της απόδειξης. Ο διδάσκων σε αυτό το σημείο αποδίδει συλλογισμούς της απόδειξης στην εικόνα. Για παράδειγμα στην απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει μέγιστο κάτω φράγμα, ο διδάσκων περιγράφει την κεντρική ιδέα της απόδειξης χρησιμοποιώντας το διάγραμμα με τον ακόλουθο τρόπο:

> «Κοιτάξτε η απόδειξη είναι απλή, για προσέξτε να σας πω την ιδέα *(σχήμα στον πίνακα)*, όταν έχουμε ένα σύνολο που είναι κάτω φραγμένο, δηλαδή υπάρχει ένα α εδώ *(προσθέτει στο σχήμα),* άμα πάρω το σύνολο που αποτελείται από τα αντίθετα στοιχεία αυτού του συνόλου όλα θα είναι μεγαλύτερα από το $-\alpha$. Όταν το χ είναι μικρότερο από το α, τότε το $-\chi$ είναι μεγαλύτερο από το $-\alpha$.»

Τα διαγράμματα αποτελούν το βασικό στοιχείο της διαισθητικής περιγραφής της απόδειξης, που αποτελεί κεντρικό σημείο των επεισοδίων που αναλύθηκαν. Ο διδάσκων αφιερώνει αρκετό χρόνο από την συνολική παρουσίαση της απόδειξης στη διαισθητική τεκμηρίωση της απόδειξης του θεωρήματος, μιλώντας για τα βήματα που θα οδηγήσουν στην επιβεβαίωση της εικασίας. Το διάγραμμα σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό διότι με τη χρήση αυτού οι διαισθητικές παρατηρήσεις που γίνονται πάνω σε αυτό αποκτούν νόημα και βοηθούν στην διατύπωση ισχυρισμών. Στο παράδειγμα που ακολουθεί ο διδάσκων περιγράφει διαισθητικά το βήμα που θα οδηγήσει στην απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών:

> «Εκείνο που θα κάνουμε στην ουσία θα μετατοπίσουμε, θα κάνουμε μια μετατόπιση προς τα κάτω *(βάση του σχήματος που υπάρχει στον πίνακα)* αυτής της συνάρτησης. Δηλαδή εμείς θέλουμε το η να πέσει στο 0, άρα $f(\alpha)$ θα πέσει στο $f(\alpha) - \eta$ και το $f(\beta)$ στο $f(\beta) - \eta$.»

Κλείνοντας τα διαγράμματα χρησιμοποιούνται από τον διδάσκοντα για να δημιουργήσει συνδέσεις μεταξύ των επιμέρους τμημάτων της τυπικής απόδειξης. Η τυπική απόδειξη για τον διδάσκοντα έρχεται φυσιολογικά μετά την διαισθητική παρουσίαση της. Ο διδάσκων επιλέγει να επεξηγεί στους μαθητές τα βήματα της τυπικής απόδειξης χρησιμοποιώντας το διάγραμμα το οποίο δείχνει τη σχέση μεταξύ της διαισθητικής και τυπικής παρουσίασης. Στο επόμενο παράδειγμα ο διδάσκων παρουσιάζει την τυπική απόδειξη του Κριτηρίου Παρεμβολής, στο απόσπασμα γίνεται αναφορά στη χρήση του ε:

«Λοιπόν, θέλουμε να αποδείξουμε ότι το όριο της β_n είναι a. Θα πάμε με βάση τον ορισμό. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα n_0 ώστε όλα τα β_n να είναι στο διάστημα $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Άρα, θα ξεκινήσουμε με ένα τυχαίο ε . Έστω $\varepsilon > 0$. Τώρα για αυτό το ε *(εικόνα 3).* Για αυτό το ε αφού η α_nσυγκλίνει στο α θα υπάρχει ένας n_1 όπου οι όροι της α_n να είναι εδώ μέσα.»

Παραδείγματα

Το παράδειγμα για τον διδάσκοντα έχει τον ρόλο του «πειράματος». Χρησιμοποιείται κυρίως στην αρχή της αποδεικτικής διαδικασίας καθώς λειτουργεί ως το μέσο τοποθέτησης του προβλήματος, που θα βοηθήσει στον σχηματισμό της εικασίας. Για να ξεκινήσει τη διαχείριση του προβλήματος δίνει ένα παράδειγμα στους μαθητές το οποίο θα βοηθήσει στην επεξεργασία του και θα δημιουργήσει τα κατάλληλα ερωτήματα ή τους αναγκαίους περιορισμούς που τελικά θα οδηγήσουν στην εικασία και ακολούθως στην διατύπωση του θεωρήματος και της απόδειξής του.

Θα γίνει αναφορά σε δύο αποσπάσματα που χρησιμοποιούνται τα παραδείγματα. Το πρώτο παράδειγμα σχετίζεται με την απόδειξη της Αρχής του Κιβωτισμού. Ο διδάσκων αρχικά τοποθετεί το πρόβλημα, δηλαδή ρωτάει τους φοιτητές αν η τομή μιας γνησίως φθίνουσας ακολουθίας γνησίων υποσυνόλων πραγματικών αριθμών είναι ή όχι κενή. Έπειτα προκειμένου να βοηθήσει στην επεξεργασία του ζητήματος αναφέρει το παράδειγμα:

«Αν πάρω για $A = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1,2, ...$ Το $A_1 = (0,1)$ έτσι δεν είναι; Το $A_2 = (0, \frac{1}{2})$. Το $A_3 = \left(0, \frac{1}{3}\right)$. Και θα μειώνονται συνεχώς, θα μικραίνουν. Υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός που να ανήκει σε όλα αυτά; $(0,1)$, $(0, \frac{1}{2})$ κλπ. ανοιχτά διαστήματα, υπάρχει; Τι λέτε;»

Το παράδειγμα αυτό στοχεύει στην δημιουργία των κατάλληλων συνθηκών κάτω από τις οποίες θα ισχύει η Αρχή του Κιβωτισμού.

Το δεύτερο απόσπασμα αφορά την απόδειξη του θεωρήματος μοναδικότητας του ορίου. Ο διδάσκων αφού θέτει το πρόβλημα χρησιμοποιεί το παράδειγμα ως μέσο ενεργοποίησης της διαίσθησης των μαθητών προκειμένου να ξεκινήσουν την επεξεργασία του προβλήματος:

«Τώρα, για να δούμε κάτι, αν έχουμε μία ακολουθία που συγκλίνει αυτή μπορεί να συγκλίνει, να συγκλίνει σε περισσότερους από έναν αριθμούς;

Ξέρετε καμιά ακολουθία που συγκλίνει στο 1 και συγκλίνει και στο $\frac{1}{2}$ για παράδειγμα;»

Δηλαδή ενώ το μέσο είναι το ίδιο παρατηρείται ότι ο διδάσκων το αξιοποιεί με διαφορετικούς τρόπους προκειμένου να πετύχει τους στόχους του και να οδηγήσει τους μαθητές στην εικασία.

Μετάφραση

Η μετάφραση είναι ένα από τα μέσα που χρησιμοποιεί ο διδάσκων και λειτουργεί ως συνδετικός κρίκος μεταξύ των επιμέρους τμημάτων της απόδειξης. Ο διδάσκων μεταφράζει τα τυπικά ή σύνθετα μέρη της απόδειξης με όρους πιο απλούς και κατανοητούς, επεξηγώντας με αυτό τον τρόπο τις διαδικασίες ώστε να γίνονται αντιληπτές από τον φοιτητή. Εμφανίζεται κατά τη διάρκεια της τυπικής απόδειξης όπου συνεισφέρει στη δημιουργία συνδέσεων με την διαισθητική τεκμηρίωση.

Όπως αναφέρθηκε η μετάφραση είναι το μέσω που βοηθά στη δημιουργία συνδέσεων. Οι συνδέσεις γίνονται σε 2 επίπεδα. Σε πρώτο επίπεδο ο διδάσκων προσπαθεί, χρησιμοποιώντας την μετάφραση, να επεξηγεί και να αιτιολογεί τον ρόλο των τυπικών βημάτων που εκτελεί προκειμένου να αποδείξει τυπικά το θεώρημα. Σε δεύτερο επίπεδο η μετάφραση λειτουργεί και ως μέσο σύνδεσης διαισθητικής και τυπικής απόδειξης, υποδεικνύοντας τον ρόλο των στοιχείων της διαισθητικής τεκμηρίωσης στην τυπική απόδειξη. Στο παράδειγμα που ακολουθεί ο διδάσκων αποδεικνύει ότι μία συνάρτηση είναι επί:

«Αν πάρουμε ένα ψ πρέπει να βρούμε ένα χ ώστε $\alpha + (\beta - \alpha)\chi = \psi$. Επαναλαμβάνω, για το τυχαίο ψ στο σύνολο τιμών πρέπει να βρούμε ένα χ στο πεδίο ορισμού ώστε το $\psi = f(x)$. Άρα θα πάρουμε αυτή τη σχέση, το ψ είναι το δεδομένο, το χ ψάχνουμε να το βρούμε. Θα πάρουμε αυτή τη σχέση και θα βρούμε το χ.»

Όπως φαίνεται στο παραπάνω απόσπασμα, ο καθηγητής αφού παρουσιάζει το τυπικό βήμα που πρέπει να εκτελέσουν για την ολοκλήρωση της απόδειξης, επαναλαμβάνει την διαδικασία «μεταφράζοντας» στην ουσία αυτό που περιγράφει το τυπικό βήμα.

Αναστοχασμός

Ο αναστοχασμός ως μέσο χρησιμοποιείται από τον διδάσκοντα για την ανακεφαλαίωση των διαδικασιών τόσο στην διαισθητική τεκμηρίωση όσο και στην τυπική απόδειξη. Ο ρόλος του είναι να ενημερώνει τους φοιτητές για το στάδιο που βρίσκεται η αποδεικτική διαδικασία εκείνη τη στιγμή και να δίνει συνέχεια στη ροή της απόδειξης κάνοντας πιο εύκολα και κατανοητά τα επόμενα βήματα.

Όπως αναφέρθηκε εντοπίζεται σε δύο φάσεις. Η πρώτη αφορά την ανακεφαλαίωση στην διαισθητική τεκμηρίωση. Αρχικά ο διδάσκων αναφέρει το συμπέρασμα που καταλήγει η διαισθητική απόδειξη, δηλαδή αν επιβεβαιώνεται ή όχι η εικασία. Έπειτα συγκεντρώνει τα βήματα που έγιναν κατά την διαισθητική απόδειξη και με αυτό τον τρόπο περνάει ομαλά στην τυπική απόδειξη. Ακολουθεί ένα απόσπασμα από την απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη:

> «Άρα όταν έχω μια ακολουθία που συγκλίνει σε ένα οποιοδήποτε αριθμό, αν έχω αυτό που λέμε μία συγκλίνουσα ακολουθία, τότε αυτή είναι φραγμένη υποχρεωτικά. Γιατί, αν πάρω ένα διάστημα, τελικά όλοι οι όροι θα είναι εδώ μέσα, έξω από εδώ είναι πεπερασμένοι, άρα άμα φράξω τους απ' έξω, εύκολα τους φράσω αφού είναι πεπερασμένοι. Επομένως φράζω όλη την ακολουθία.»

Στην δεύτερη φάση ο αναστοχασμός ως μέσο χρησιμοποιείται στην ανακεφαλαίωση της τυπικής απόδειξης. Ο διδάσκων συγκεντρώνει τα προηγούμενα βήματα σε ένα τελικό σχόλιο που κλείνει την αποδεικτική διαδικασία ή ανακεφαλαιώνει κάποια στάδια της απόδειξης με στόχο να κάνει πιο εύκολα και γρήγορα τα επόμενα βήματα.

> «Επαναλαμβάνω, θέλω να αποδείξω ότι αν έχω μια συνεχή συνάρτηση μεταφέρει τα διαστήματα σε διαστήματα. Οπότε για να αποδείξουμε ότι η εικόνα διαστήματος είναι διάστημα παίρνουμε δύο στοιχεία στην εικόνα του διαστήματος, αυτά είναι οι εικόνες κάποιων στοιχείων μέσα στο διάστημα και παίρνουμε και ένα σημείο μεταξύ των δύο αυτών. Αφού αυτά είναι εικόνες δύο στοιχείων και το z είναι μεταξύ των δύο αυτών θα υπάρχει ένα ξ που το $f(\xi) = z$.»

Στο παραπάνω απόσπασμα ο διδάσκων συγκεντρώνει τα βήματα που έγιναν στην τυπική απόδειξη του θεωρήματος: «Έστω I ένα διάστημα στο R και έστω $f : I \rightarrow R$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η εικόνα $f(I)$ της f είναι διάστημα».

Στο επόμενο απόσπασμα ο διδάσκων ανακεφαλαιώνει ένα μέρος της απόδειξης της Αρχής Κιβωτισμού με στόχο να κάνει πιο σύντομα το επόμενο βήμα που είναι αντίστοιχο:

> «Επαναλαμβάνω, αν πάρουμε ένα τυχαίο όρο της ακολουθίας β_nείναι μεγαλύτερος ή ίσος από όλους τους όρους της α_n. Άρα ο τυχαίος όρος της β_n είναι άνω φράγμα του συνόλου. Επομένως το sup του συνόλου είναι μικρότερο ή ίσο από όλους τους όρους της ακολουθίας β_n.»

Γλώσσα

Η γλώσσα που χρησιμοποιεί ο διδάσκων είναι κατά κύριο λόγο άτυπη σε όλη τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας. Δεν επιλέγει τη χρήση τυπικού λεξιλογίου και αυστηρών μαθηματικών όρων αλλά λέξεις που ενισχύουν τη διαίσθηση του μαθητή. Επίσης περιορίζει στο ελάχιστο τη χρήση των μαθηματικών λογικών συμβολισμών. Στην θέση τους παρουσιάζει με λέξεις το νόημα τους διευκολύνοντας τους φοιτητές. Το ακόλουθο απόσπασμα είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του λεξιλογίου που χρησιμοποιεί ο διδάσκοντας στην παρουσίαση των αποδείξεων:

> «Δηλαδή αν πάρω έναν αριθμό που είναι άνω φράγμα του συνόλου και αν αφαιρέσω *κάτι πολύ μικρό, όσο μικρό θέλω,* πάντα εδώ μέσα θα υπάρχει ένα στοιχείο του συνόλου, τότε αναγκαστικά αυτό το s είναι sup.»

Ερωτήσεις

Οι ερωτήσεις ως μέσο χρησιμοποιούνται για να δίνουν συνέχεια στο λόγο του διδάσκοντα. Μέσω των ερωτήσεων εμπλέκει του φοιτητές και τους κινεί την προσοχή. Ακόμη βοηθούν στην ενημέρωση τους για το επόμενο βήμα της απόδειξης ενώ επεξηγούν τον τρόπο που εργάζεται ο ίδιος προκειμένου να αποδείξει τους ισχυρισμούς. Οι ερωτήσεις είναι δύο ειδών. Το πρώτο είδος αφορά ερωτήσεις που απευθύνονται στους φοιτητές και ο διδάσκων περιμένει να τις απαντήσουν. Το δεύτερο είδος είναι ρητορικές ερωτήσεις, δηλαδή ερωτήσεις για τις οποίες ο διδάσκων δεν περιμένει την απάντηση τους από τους φοιτητές αλλά την δίνει ο ίδιος.

> «Ποια λέτε να είναι η εικόνα; Όταν το [α, β] είναι κλειστό διάστημα και η f είναι συνεχής ποιο θα είναι αυτό το σύνολο;»

Το παραπάνω απόσπασμα αφορά την απόδειξη του θεωρήματος: «Έστω $f : [a,b] \to R$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχουν $m \leq M$ στο R ώστε $f([a,b]) = [m,M]$». Ο διδάσκων χρησιμοποιεί τις ερωτήσεις ώστε να οδηγήσει τους μαθητές στον σχηματισμό της εικασίας που αργότερα θα κληθούν να αποδείξουν.

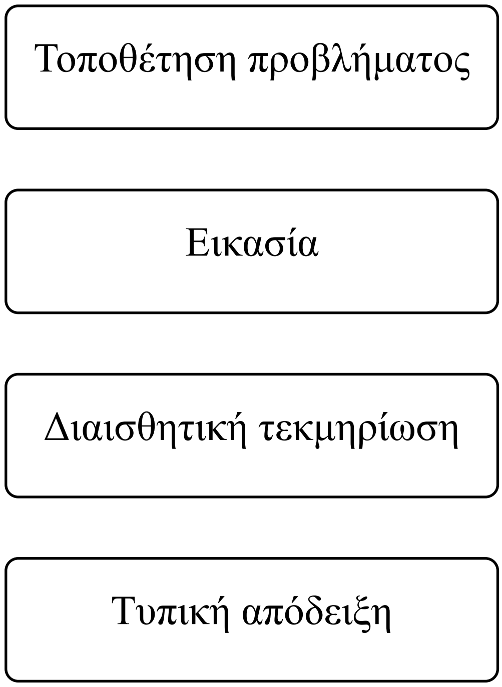
Στο ακόλουθο απόσπασμα ο διδάσκων ρωτάει και απαντάει ο ίδιος ώστε να δώσει την ροή στην απόδειξη. Το συγκεκριμένο μέσο χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στα επεισόδια που αναλύθηκαν.

> «Τι σημαίνει αυτό, το s, είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A; Σημαίνει ότι αν πάρω ένα αριθμό μικρότερο του s δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου.»

Στις παραπάνω παραγράφους αναφέρθηκαν τα 6 άτυπα μέσα που χρησιμοποιεί ο διδάσκων και μέσω αυτών εκφράζει το σημασιολογικό στυλ διδασκαλίας της απόδειξης. Οι πληροφορίες που προσφέρθηκαν από την συγκεκριμένη ενότητα των αποτελεσμάτων οδήγησαν στον προσδιορισμό του επαναληπτικού τρόπου διδασκαλίας της απόδειξης που επιλέγει ο διδάσκων και θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα.

4.1.2. Οι διδακτικές δράσεις του διδάσκοντος κατά την διδασκαλία της απόδειξης

Από την ανάλυση των επεισοδίων και τη μελέτη των άτυπων μέσων απόδειξης προέκυψαν οι βασικές δράσεις με τις οποίες ο διδάσκων αντιμετώπιζε το ζήτημα της απόδειξης.

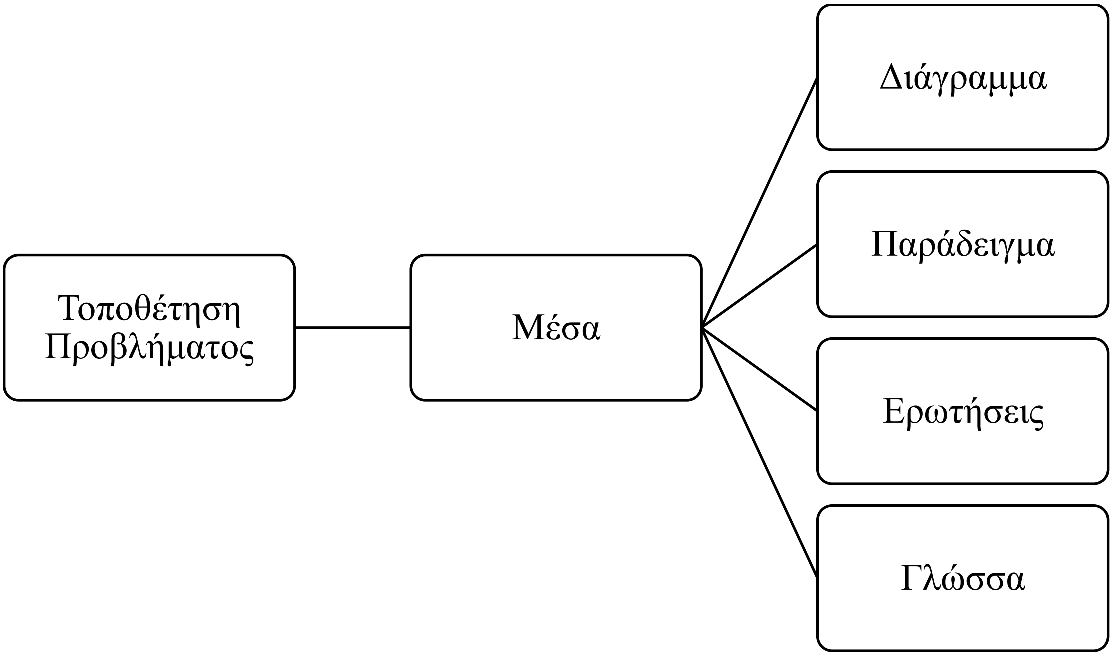


Εικόνα 7 - Οι διδακτικές δράσεις του διδάσκοντος κατά την αποδεικτική διαδικασία.

Οι δράσεις του διδάσκοντος προκειμένου να οδηγήσει τους μαθητές στην απόδειξη ακολουθούν 4 στάδια· το πρόβλημα, την εικασία, την διαισθητική τεκμηρίωση και την τυπική απόδειξη. Η σειρά με την οποία γίνονται οι δράσεις δεν είναι πάντα σταθερή αλλά ανάλογη του περιεχομένου που διδάσκεται. Όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα οι δράσεις που προσδιορίστηκαν οδηγούν στη δημιουργία του μοτίβου δράσεων του διδάσκοντος. Στην συνέχεια της ενότητας θα παρουσιαστεί το κάθε στάδιο υπογραμμίζοντας τις επιμέρους ενέργειες του εκπαιδευτικού και τους τρόπους με τους οποίους αυτές εκτελούνται.

Τοποθέτηση προβλήματος

Το πρόβλημα ή αλλιώς η τοποθέτηση μιας προβληματικής κατάστασης είναι το πρώτο στάδιο που συναντάται στην παρουσίαση της απόδειξης.



Εικόνα 8 - Τα άτυπα μέσα που χρησιμοποιούνται από τον διδάσκοντα στην τοποθέτηση του προβλήματος

Ο διδάσκων στην πρώτη φάση της αποδεικτικής διαδικασίας συνδέει το θεώρημα με μία προβληματική κατάσταση. Το πρόβλημα έρχεται στους μαθητές είτε με τη μορφή διαγράμματος, είτε μέσα από παράδειγμα, είτε με ερωτήσεις, είτε με συνδυασμό περισσότερων του ενός μέσων. Σε όλη τη διάρκεια της πρώτης φάσης η γλώσσα που χρησιμοποιεί ο καθηγητής είναι μη τυπική. Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάστηκαν αποσπάσματα τα οποία δείχνουν πώς το κάθε μέσο αξιοποιείται στην τοποθέτηση του προβλήματος.

Τα μέσα που χρησιμοποιούνται είναι τα εργαλεία του διδάσκοντος για να οργανώσει τις δράσεις του. Με την παρουσίαση της προβληματικής κατάστασης, ο γενικός στόχος που απορρέει από το σύνολο των επεισοδίων είναι να οδηγήσει ομαλά τους μαθητές στη διατύπωση του θεωρήματος και στην απόδειξη τους. Για την επίτευξη αυτού του στόχου προσπαθεί να υπενθυμίζει στους μαθητές έννοιες που συνδέεονται με το πρόβλημα, να περιγράφει τις έννοιες που ίσως είναι νέες ή μη οικείες για τους μαθητές και να δημιουργεί συνδέσεις προηγούμενων και επόμενων εννοιών.

Στο ακόλουθο παράδειγμα ο διδάσκων θέλει να ξεκινήσει την παρουσίαση του θεωρήματος Bolzano. Για να αρχίσει ομαλά την εισαγωγή στην προβληματική κατάσταση υπενθυμίζει στους φοιτητές ότι έχουν δει το θεώρημα και στο Λύκειο, μιλώντας, με αυτή την αφορμή, για τις υποθέσεις του θεωρήματος, δημιουργώντας συνδέσεις μεταξύ προηγούμενων και επόμενων γνώσεων. Ως μέσο παρουσίασης στην συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιεί διάγραμμα (βλ. εικόνα 5).

> «Λοιπόν, είχατε στο Λύκειο, είχατε διατυπώσει το θεώρημα, όταν έχουμε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα κλειστό διάστημα και το ένα άκρο έχει αρνητική τιμή και τα άλλο έχει θετική, και η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής, τότε αναγκαστικά, τουλάχιστον σε ένα σημείο θα κόβει τον άξονα χ, δηλαδή υπάρχει ένα ξ μεταξύ των δύο άκρων στο διάστημα αυτό από το οποίο περνάει η συνάρτηση. Και μετά με βάση αυτό αποδείξαμε το γενικότερο θεώρημα. Αυτή την απόδειξη δεν την έχετε δει. (βλ. εικόνα 5)»

Στο παρακάτω απόσπασμα παρατηρείται η προσπάθεια του καθηγητή να δημιουργήσει συνδέσεις μεταξύ του νέου θεωρήματος, με μια αντίστοιχη εφαρμογή που έχουν δει σε προηγούμενο μάθημα. Σε αυτό το σημείο το θεώρημα αφορά την μοναδικότητα του ορίου ενώ ο διδάσκων συνδέει την απόδειξη με την εφαρμογή ότι η ακολουθία $(-1)^n$ δεν συγκλίνει:

> «Αφού αυτοί οι αριθμοί είναι διαφορετικοί, αν αυτοί οι αριθμοί είναι διαφορετικοί, μπορούμε να βρούμε ένα διάστημα γύρω από τον ένα, ένα ε γύρω από εδώ και ένα ε εδώ, δηλαδή να βρούμε δύο τέτοια διαστήματα ώστε να είναι ξένα. Αυτό είναι μία σημαντική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών. Ήδη την χρησιμοποιήσαμε και πριν για να αποδείξουμε ότι η $(-1)^n$ δεν συγκλίνει.»

Στο απόσπασμα που ακολουθεί ο διδάσκων περιγράφει τον ρόλο των ιδιοτήτων που θα μελετήσουν, δηλαδή ιδιότητες που βοηθούν στον προσδιορισμό των ορίων ακολουθιών. Μετά την σύντομη αναφορά προχωρά, μέσω σχήματος (βλ. εικόνα 3), στην περιγραφή της ιδιότητας των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών.

> «Λοιπόν, έχουμε διάφορες ιδιότητες που μας βοηθάνε να βρίσκουμε όρια ακολουθιών όταν ξέρουμε τα όρια κάποιων άλλων ακολουθιών. Μία πολύ σημαντική ιδιότητα είναι η εξής ας πούμε αν έχουμε δύο ακολουθίες, ας πούμε ότι έχουμε μία ακολουθία α_n και μία ακολουθία

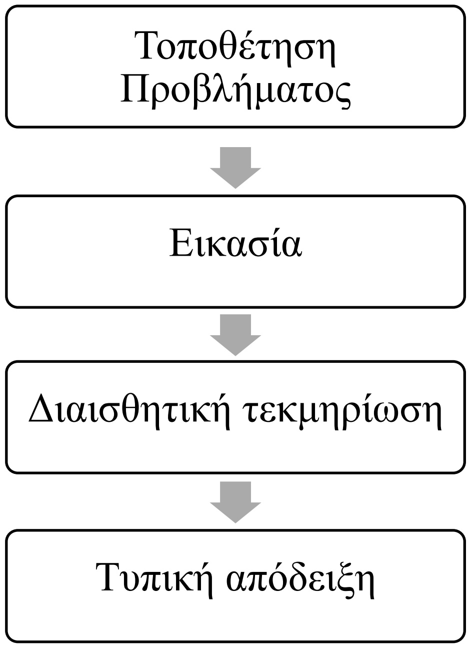
γ_n και επίσης ξέρουμε ότι και οι δύο συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό α. Αυτό τι σημαίνει; Ότι όποιο ε και να πάρουμε από κάπου και πάνω όλοι οι όροι της α_n θα είναι εδώ μέσα. Επίσης από κάπου και πάνω όλοι οι όροι της γ_n θα είναι εδώ μέσα.»

Τελικά αυτό που καταφέρνει ο διδάσκων μετά την παρουσίαση του προβλήματος είναι να δώσει στους φοιτητές μια ιδέα για το πώς προέκυψε το θεώρημα. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούνται οι προϋποθέσεις ώστε τα θεωρήματα να μην είναι αποκομμένα το ένα από το άλλο αλλά να οργανώνονται σε μια λογική σειρά. Προσπαθεί οι φοιτητές να αντιληφθούν την ιδέα και την ανάγκη ύπαρξης του θεωρήματος που επιδιώκει να αποδείξει και για αυτό το λόγο φέρνει και διάφορα μέσα παρουσίασης. Μέσω του προβλήματος δίνεται αφορμή για την έναρξη της αποδεικτικής διαδικασίας. Ο φοιτητής μετά την παρουσίαση του προβλήματος έχει μια εικόνα και του τι θα αποδειχθεί αλλά και μια διαισθητική ιδέα για το πώς θα οδηγηθεί σε αυτό.

Εικασία

Η εικασία παρατηρείται σε δύο φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας. Η πρώτη περίπτωση θέλει την εικασία να εμφανίζεται ακριβώς μετά την τοποθέτηση του προβλήματος ενώ στην δεύτερη περίπτωση να εμφανίζεται ακριβώς μετά την διαισθητική τεκμηρίωση. Στην συνέχεια θα γίνει αναφορά στις δύο περιπτώσεις.

Στην πρώτη περίπτωση η εικασία είναι το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει το προηγούμενο βήμα της αποδεικτικής διαδικασίας, δηλαδή το πρόβλημα. Η εικασία έχει τον ρόλο του ισχυρισμού που μέσω της απόδειξης θα αποδειχθεί αν ισχύει ή όχι. Όταν η εικασία εμφανίζεται σε αυτό το σημείο η αποδεικτική διαδικασία ακολουθεί την συγκεκριμένη ροή:



Εικόνα 9 - Η ροή της αποδεικτικής διαδικασίας, 1η περίπτωση.

Στο απόσπασμα που ακολουθεί ο διδάσκων τοποθετεί την εικασία για την απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Εδώ η εικασία έχει το ρόλο της κεντρικής ιδέας της απόδειξης, δηλαδή ο διδάσκων τοποθετεί το σημείο κλειδί που θα οδηγήσει ομαλά τους μαθητές στην αποδεικτική διαδικασία.

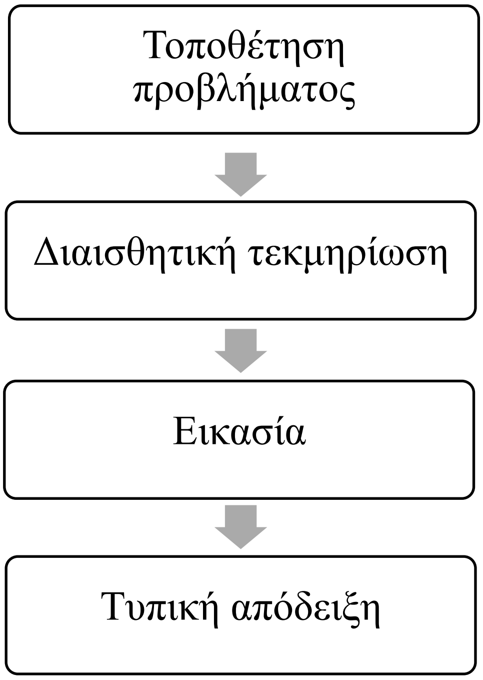
> «Αφού, όταν έχω πεπερασμένο το πλήθος αριθμούς υπάρχει πάντα μεγαλύτερος και μικρότερος, άμα έχω ένα πεπερασμένο σύνολο αυτό οπωσδήποτε έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο»

Όπως αναφέρθηκε, η εικασία αποτελεί μια πιθανή απάντηση στο πρόβλημα. Ο διδάσκων επιδιώκει μέσω της εικασίας να οδηγήσει τους φοιτητές στην απόδειξη του θεωρήματος. Στο απόσπασμα που ακολουθεί ο καθηγητής παρουσιάζει το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών. Στο στάδιο του προβλήματος επιλέγει να το συνδέσει με το Θεώρημα Bolzano. Στο στάδιο της εικασίας καταλήγει στο συμπέρασμα – γενίκευση της προηγούμενης ιδέας.

> «Και ακριβώς εδώ έχουμε αυτό, δεν μπορεί να κάνει άλμα. Δεν μπορεί δηλαδή να πηγαίνει να παίρνει κάποιες τιμές εδώ να υπάρχει κενό στο σύνολο.»

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποσπάσματα η εικασία είναι το στάδιο που ο διδάσκων θα μιλήσει για την κεντρική ιδέα της απόδειξης και θα δώσει τις αφορμές και τα εναύσματα που χρειάζονται για να ξεκινήσει η απόδειξη. Μπορεί σε έκταση να μην απασχολεί μεγάλο μέρος της αποδεικτικής διαδικασίας, όμως η ύπαρξη της είναι σημαντική καθώς δίνει ροή στην απόδειξη και συνδέει τα επιμέρους τμήματα της.

Στην δεύτερη περίπτωση η εικασία εμφανίζεται αμέσως μετά τη διαισθητική τεκμηρίωση. Ο διδάσκων τοποθετεί το πρόβλημα και προχωρά σε μια σειρά άτυπων συλλογισμών. Στην συνέχεια οι άτυποι συλλογισμοί καταλήγουν σε μια εικασία, που με τη σειρά της θα οδηγήσει στο θεώρημα. Η διαδικασία καταλήγει στην τυπική απόδειξη του θεωρήματος. Σε αυτή τη περίπτωση η αποδεικτική διαδικασία έχει την ακόλουθη εξέλιξη:



Εικόνα 10 - Η ροή της αποδεικτικής διαδικασίας, 2η περίπτωση.

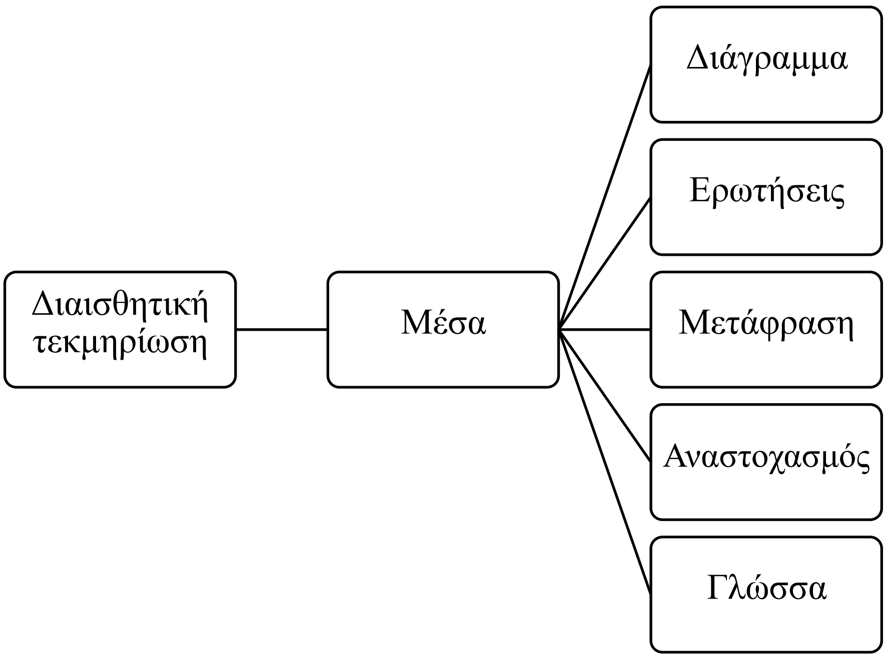
Στο παράδειγμα που ακολουθεί βλέπουμε την απόδειξη του θεωρήματος για την μοναδικότητα του ορίου. Ο διδάσκων έχει τοποθετήσει το πρόβλημα και έχει προχωρήσει σε μια σειρά συλλογισμών. Οι συλλογισμοί του καταλήγουν στην εικασία:

«Αν έχουμε δύο πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να τους διαχωρίσουμε με δύο ξένα διαστήματα από αυτό προκύπτει ότι μία ακολουθία αν συγκλίνει το όριο θα είναι μοναδικό. Δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο αριθμούς.»

Μετά από την συγκεκριμένη αναφορά τοποθετεί το θεώρημα και προχωρά στην τυπική απόδειξη του.

Διαισθητική τεκμηρίωση

Η διαισθητική τεκμηρίωση είναι το στάδιο που βρίσκεται πριν ή μετά την διατύπωση της εικασίας.



Εικόνα 11 - Τα άτυπα μέσα που χρησιμοποιούνται από τον διδάσκοντα στην διαισθητική απόδειξη.

Ο διδάσκων σε αυτό το σημείο της αποδεικτικής διαδικασίας απευθύνεται στη διαίσθηση των φοιτητών και τους παρουσιάζει τα κεντρικά βήματα της απόδειξης με χρήση άτυπων μέσων παρουσίασης. Στην αρχή της διαισθητικής απόδειξης μεταβαίνει από την εικασία, αν υπάρχει, σε δράσεις που θα οδηγήσουν στην απόδειξη. Έπειτα σχηματίζει ένα διάγραμμα μέσω του οποίου «χτίζει» βήμα – βήμα την απόδειξη. Την ροή στην διαισθητική τεκμηρίωση δίνουν οι ερωτήσεις που απευθύνονται είτε στον ίδιο, είτε στους φοιτητές. Κλείνοντας τη διαισθητική απόδειξη προχωράει στον αναστοχασμό, δηλαδή ανακεφαλαιώνει την συνολική διαδικασία. Σε όλη την διάρκεια της απόδειξης η γλώσσα που χρησιμοποιεί είναι μη τυπική και εμφανίζονται κυρίως λέξεις που ενισχύουν τις εικόνες του φοιτητή γύρω από την απόδειξη.

Τα μέσα που χρησιμοποιεί ο διδάσκων σε αυτό το στάδιο είναι πολύ σημαντικά καθώς βοηθούν να χτίσει ομαλά μια διαισθητική εικόνα για την απόδειξη. Η χρήση των διαισθητικών μέσων δίνει στον ακροατή την αίσθηση της αναγκαιότητας του κάθε βήματος και προσθέτουν αξία στην συνολική παρουσίαση με την πολύπλευρη παρουσίαση των εννοιών.

Στο ακόλουθο απόσπασμα περιγράφεται η διαισθητική τεκμηρίωση της απόδειξης του θεωρήματος για τη μοναδικότητα του ορίου. Επιλέχθηκε να δοθεί το συγκεκριμένο απόσπασμα γιατί φαίνεται πώς ο διδάσκων αξιοποιεί στο σύνολο τους τα μέσα και λειτουργεί ως συνέχεια του προβλήματος και της εικασίας που παρουσιάστηκε σε προηγούμενη παράγραφο. Ο διδάσκων σε αυτό το απόσπασμα χρησιμοποιεί το διάγραμμα που είχε παρουσιάσει κατά την τοποθέτηση του προβλήματος (βλ. εικόνα 2) και πάνω σε αυτό τοποθετεί την διαισθητική τεκμηρίωση της απόδειξης. Η πρώτη πρόταση του αποσπάσματος αφορά την μετάβαση από το πρόβλημα στους άτυπους συλλογισμούς και οδηγεί στην αποδεικτική μέθοδο που θα ακολουθήσουν, δηλαδή τη απαγωγή σε άτοπο. Φαίνεται ακόμη πως η γλώσσα που χρησιμοποιεί συνδέεται με το σχήμα και την διαίσθηση του φοιτητή, καθώς στο σύνολο της δεν περιέχει κανένα τυπικό όρο και σχετίζεται κυρίως με κινήσεις του ίδιου γύρω από το διάγραμμα. Επιπλέον ροή και συνέχεια στην απόδειξη δίνει η αυτοαναφορική ερώτηση που κάνει με στόχο να συνδέσει τον αρχικό ισχυρισμό με την υπόλοιπη διαισθητική τεκμηρίωση. Την διαδικασία κλείνει η τοποθέτηση της εικασίας (βλ. προηγούμενη παράγραφο), η οποία οδηγεί στην διατύπωση του θεωρήματος και της τυπικής του απόδειξης.

> «Αν η ακολουθία συγκλίνει και στους δύο τότε από κάπου και πάνω όλοι οι όροι θα είναι τελικά εδώ μέσα, από κάπου και πάνω όλοι οι όροι θα είναι εδώ μέσα, και έχουμε αντίφαση. Γιατί; Γιατί θα μπορούσαμε τότε να βρούμε ένα όρο που θα είναι ταυτόχρονα και εδώ και εδώ. Και αυτά είναι ξένα. Ή αν θέλετε, αν βρούμε δύο τέτοια διαστήματα, έξω από εδώ θα είναι πεπερασμένο. Άρα θα είχαμε πεπερασμένα εδώ μέσα. Επομένως έξω από εδώ θα είχαμε άπειρα που είναι αντίφαση.» (βλ. εικόνα 2).

Πρέπει να τονισθεί ότι η χρήση των άτυπων μέσων δημιουργεί συνδέσεις μεταξύ των επιμέρους τμημάτων της απόδειξης. Ο διδάσκων δίνει έμφαση στη δημιουργία συνέχειας στην απόδειξη με στόχο το κάθε βήμα της να προκύπτει λογικά από το προηγούμενο. Το παρακάτω απόσπασμα αφορά την απόδειξη της Αρχής Κιβωτισμού, δηλαδή το θεώρημα: έστω $[\alpha_1, b_1] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \ldots$ μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων. Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq 0.$ Αν επιπλέον $a_n - b_n \to 0$, τότε το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ περιέχει ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό (είναι μονοσύνολο). Κατά την διαισθητική τεκμηρίωση έχει προηγηθεί η κατασκευή σχήματος και η μετάβαση από την εικασία. Ο διδάσκων, στο απόσπασμα που παρατίθεται, επιχειρεί να δημιουργήσει σύνδεση μεταξύ των δύο επιμέρους τμημάτων της απόδειξης. Δείχνει αρχικά ότι η ακολουθία των α_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, επομένως συγκλίνει σε ένα αριθμό. Την διαδικασία αυτή την συγκεντρώνει μέσω του αναστοχασμού. Το δεύτερο μέρος της απόδειξης, ότι η ακολουθία b_n συγκλίνει σε κάποιο αριθμό, προκύπτει λογικά από το προηγούμενο βήμα της απόδειξης. Ο διδάσκων υπογραμμίζει ότι οι δύο περιπτώσεις είναι αντίστοιχες και έτσι τις συνδέει. Τα μέσα λειτουργούν καθοριστικά σε αυτό το σημείο της απόδειξης, διότι χωρίς το σχήμα και τις ερωτήσεις, αλλά και χωρίς τα σχόλια του διδάσκοντος που συγκεντρώνουν τις διαδικασίες, θα ήταν δύσκολο για τον φοιτητή να συνδέσει τις δύο περιπτώσεις και να «δει» ότι αφορούν αντίστοιχες καταστάσεις.

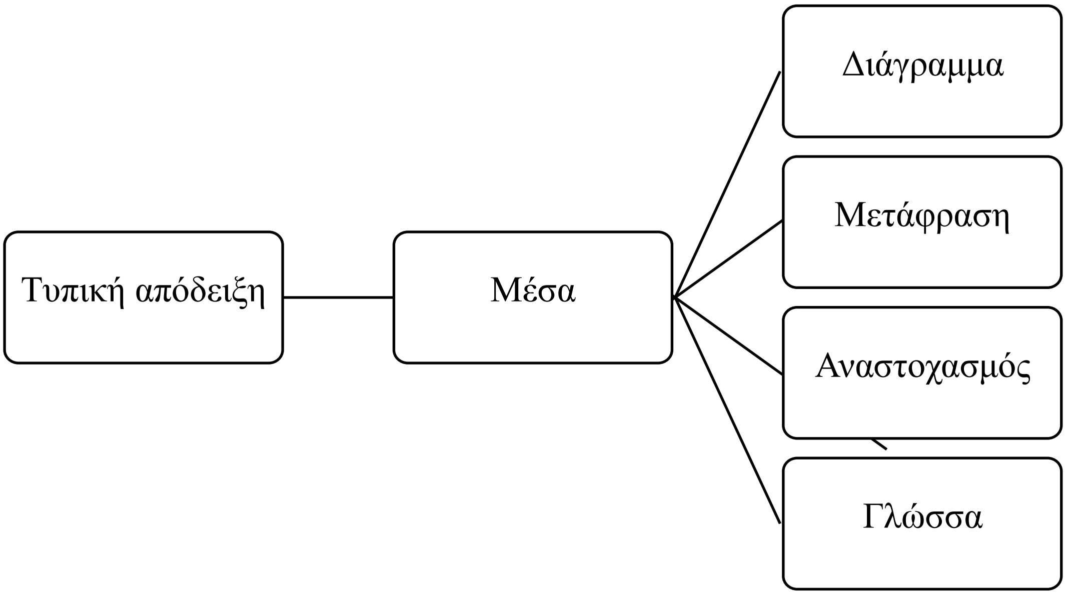
> «Και προσέξτε η ιδέα είναι απλή. Έτσι που είναι τα διαστήματα έχουμε δύο ακολουθίες: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ είναι μία ακολουθία, η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Από την άλλη μεριά έχουμε την ακολουθία $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ η οποία είναι φθίνουσα. Τώρα η α_n είναι αύξουσα. Είναι άνω φραγμένη; Τι λέτε; Η ακολουθία των κάτω άκρων, όταν έχουμε τα διαστήματα με αυτή τη σχέση είναι άνω φραγμένη;
>
> Φ: είναι από το b_n.
>
> Ακριβώς! Όλοι οι όροι της b_n είναι άνω φράγματα της α_n. Ακόμη και ο b_1. Όλοι οι όροι της α_n είναι μικρότεροι από τον b_1. Επομένως, η α_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα θα συγκλίνει σε ένα αριθμό. Αυτά τα α_n θα συγκλίνουν σε κάποιο α. Στο sup. Αντίστοιχα, η ακολουθία b_n που είναι φθίνουσα είναι κάτω φραγμένη; Είναι! Όλοι οι όροι της α_n είναι κάτω φράγματα. Άρα η b_n θα συγκλίνει σε κάποιο β. Τα α_n πάνε μέχρι εδώ αυτό είναι το sup. Τα b_n πάνε μέχρι εδώ – inf. Όλοι οι αριθμοί που είναι εδώ μέσα είναι σε όλα τα διαστήματα. Καταλαβαίνετε την ιδέα;»

Επομένως η διαισθητική τεκμηρίωση είναι ένα σημαντικό στάδιο της αποδεικτικής διαδικασίας. Σε αυτό το σημείο ο διδάσκων δείχνει στους μαθητές την αξία που έχει η απόδειξη, τις ιδέες που κρύβει και τα βήματα που θα οδηγήσουν σε αυτή. Όμως δείχνει και το γιατί συμβαίνουν και πώς η δομή χτίζεται μέσω λογικών συνδέσεων, κάτι που δεν θα γινόταν αν παρουσίαζε τυπικά την απόδειξη.

Η εικασία και η διαισθητική τεκμηρίωση συντονίζονται και αλληλεπιδρούν κατά την αποδεικτική διαδικασία. Τα δύο αυτό στάδια αποτελούν τον διαισθητικό συλλογισμό. Συνήθως κατά τη διάρκεια του διαισθητικού συλλογισμού τα τυπικά επιχειρήματα παραλείπονται. Στο τελευταίο στάδιο βρίσκεται το τυπικό μέρος της απόδειξης και θα γίνει αναφορά σε αυτό στη συνέχεια.

Τυπική απόδειξη

Η τυπική απόδειξη είναι το στάδιο που ολοκληρώνει την αποδεικτική διαδικασία.



Εικόνα 12 - Τα άτυπα μέσα που χρησιμοποιούνται από τον διδάσκοντα στην τυπική απόδειξη.

Και σε αυτό το στάδιο της αποδεικτικής διαδικασίας, ο διδάσκων χρησιμοποιεί άτυπα μέσα προκειμένου να υπογραμμίσει τις δράσεις του. Ο διδάσκων αρκετά συχνά φτιάχνει ένα νέο διάγραμμα και το χρησιμοποιεί για να δείχνει στους φοιτητές σε ποιο σημείο βρίσκεται η απόδειξη. Σημειώνει τα τυπικά βήματα της απόδειξης στον πίνακα, τα οποία επεξηγεί – μεταφράζει ακριβώς μετά. Επιπλέον χρησιμοποιεί τον αναστοχασμό για την ανακεφαλαίωση της τυπικής απόδειξης. Η γλώσσα με την οποία ο διδάσκων παρουσιάζεται η απόδειξη είναι μη τυπική.

Τα μέσα που επιλέγει ο διδάσκων για να παρουσιάσει το τυπικό κομμάτι της απόδειξης είναι καθοριστικά της συγκεκριμένης διαδικασίας. Η επιλογή των μέσων σχετίζεται άμεσα με τον προσδιορισμό των δράσεων του διδάσκοντος. Μετά την ανάλυση των επεισοδίων παρατηρήθηκε ότι συνήθως τα βήματα της τυπικής απόδειξης χωρίζονται σε τρία επιμέρους στάδια. Αρχικά ο διδάσκων παρουσιάζει έναν ισχυρισμό και ενημερώνει τους φοιτητές για το πώς θα επαληθεύσει τον ισχυρισμό, ποια μέθοδο θα εφαρμόσει, ποιες ιδέες θα χρειαστεί. Το μέσο που χρησιμοποιεί για την επίτευξη του συγκεκριμένου στόχου είναι η μετάφραση. Έπειτα ακολουθεί η τυπική γραφή της απόδειξης, η οποία παρουσιάζεται και στον πίνακα. Το τελικό τμήμα αφορά την επεξήγηση. Ο διδάσκων σε αυτό το τμήμα αναφέρει τι έκανε και συγκεντρώνει την διαδικασία, ώστε να είναι πιο εύκολα διαχειρίσιμη, επιλέγοντας ως μέσο τον αναστοχασμό.

Στο παρακάτω απόσπασμα, ο διδάσκων παρουσιάζει την απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε μη κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Όπως παρατηρείται η απόδειξη ξεκινάει με τον διδάσκοντα να θέτει το νέο σύνολο B με στοιχεία αντίθετα του συνόλου A. Έπειτα αναφέρεται και γίνεται υπόδειξη για το πώς η ιδιότητα του συνόλου A, δηλαδή το ότι το σύνολο A είναι κάτω φραγμένο, θα αξιοποιηθεί στην απόδειξη. Το απόσπασμα κλείνει με τον διδάσκοντα να επεξηγεί τα επόμενα βήματα που θα συμπληρώσουν την απόδειξη.

> «Έστω, λοιπόν, θέτουμε B είναι όλα τα αντίθετα των στοιχείων του A, ($B = \{-x: x \in A\}$).
> Επειδή A κάτω φραγμένο υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός ώστε να είναι κάτω φράγμα.
>
> Δηλαδή αφού το σύνολο είναι κάτω φραγμένο έχει κάτω φράγμα. Άρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που είναι μικρότερος από όλα τα στοιχεία του A. Εντάξει;

Τότε, αυτό που έλεγα πριν, $-\alpha \geq -\chi$ για κάθε χ στο A. Δηλαδή το $-\alpha$ είναι άνω φράγμα του B. Άρα το B είναι μη κενό και άνω φραγμένο. Επομένως από το αξίωμα της πληρότητας έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Έστω $s = supB$. Θα αποδείξουμε ότι το $-s = infA$.»

Στο επόμενο απόσπασμα παρουσιάζεται μία ολοκληρωμένη απόδειξη από τον διδάσκοντα. Αναφέρεται η απόδειξη του θεωρήματος ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το απόσπασμα επιλέχθηκε με στόχο να γίνει αντιληπτό πώς αλληλεπιδρούν τα τρία επιμέρους τμήματα σε ένα συγκεκριμένο επεισόδιο τυπικής απόδειξης. Αρχικά ο καθηγητής αναπτύσσει πώς θα αξιοποιηθεί η συγκλίνουσα ακολουθία που αναφέρει η υπόθεση. Έπειτα προχωρά στην επεξήγηση των επόμενων βημάτων της απόδειξης, δηλαδή δείχνει στους μαθητές πώς θα γίνει η επιλογή του κατάλληλου άνω φράγματος. Στο κλείσιμο της απόδειξης ανακεφαλαιώνει την συνολική διαδικασία και την αξιοποιεί ώστε να δείξει ότι θα είναι αντίστοιχα και στην περίπτωση του κάτω φράγματος.

«Λοιπόν, έστω ακολουθία a_n με όριο a.

Δηλαδή παίρνουμε μία τυχούσα συγκλίνουσα ακολουθία.

Κοιτάχτε, αφού συγκλίνει στο α σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει αυτό που λέμε, έτσι; Προσέξτε κάτι, όταν έχω δεδομένο ότι μια ακολουθία συγκλίνει άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει, μπορούμε να επιλέξουμε όποιο ε θέλουμε, για να φτιάξουμε αυτό το διάστημα ώστε από έξω να έχουμε πεπερασμένο.

Επιλέγουμε $\varepsilon = 1$. Τότε υπάρχει n_0 στο N ώστε το $\alpha - 1 < an < \alpha + 1$ για κάθε $n \geq n_0$. ….

Τώρα τι θα κάνουμε, τι είπαμε θα πάρουμε. Το άνω φράγμα ποιο θα είναι; Αν δεν έχει τίποτα από εδώ μπορεί η ακολουθία, οι όροι μέχρι το $n_0 - 1$, από το n_0, από το n_0 και πάνω όλοι οι όροι είναι εδώ μέσα, άρα πρέπει να δούμε τι γίνεται με τους προηγούμενους όρους, μέχρι το. $n_0 - 1$ Μπορεί μέχρι το $n_0 - 1$ να μην είναι από εδώ πάνω τότε ένα άνω φράγμα θα είναι το $\alpha + 1$. Αν έχει κάτι από εδώ πάνω θα πάρουμε το μέγιστο. Άρα αυτό θα το περιγράψουμε.

Θέτουμε $M = max\{a + 1, \alpha_1, \dots \alpha_{n_0-1}\}$.

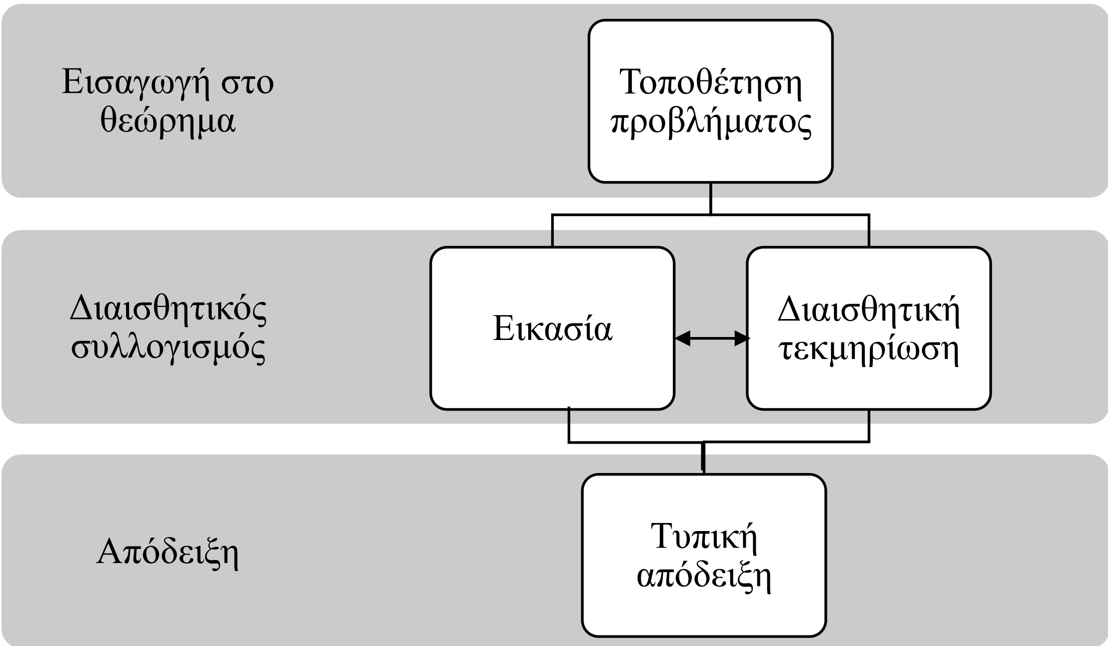
Παίρνουμε δηλαδή, προσέξτε αν όλοι αυτοί, κανείς δεν είναι πάνω από εδώ, αυτό το μάξιμουμ θα είναι το α+1. Αλλά αν κάποιοι είναι για αυτό παίρνουμε το σύνολο. Οπότε έχουμε το M αυτό εδώ πέρα. Ένα M που όλοι οι όροι είναι κάτω από αυτό, αυτό μας ενδιαφέρει. Επαναλαμβάνω, αν πάρουμε για M αυτό το μάξιμουμ από το n_0 και πάνω οι όροι μου είναι κάτω από το $\alpha + 1$, άρα κάτω από το μάξιμουμ. Μέχρι το $n_0 - 1$ δεν ξέρω ποιοι είναι οι όροι, αλλά σίγουρα είναι κάτω από το μάξιμουμ. Το καταλαβαίνετε αυτό που λέω; Αντίστοιχα θα κάνουμε και από κάτω.

Και $m = min\{a + 1, \alpha_1, \ldots \alpha_{n_0 - 1}\}$. Τότε όλα τα an είναι εδώ μέσα ($m \leq \alpha_n \leq M$) για κάθε $n = 1,2, ..$ Άρα η α_n είναι φραγμένη.»

4.1.3 Το μοτίβο δράσεων του διδάσκοντος και η αλληλεπίδραση τυπικών και άτυπων μέσων διδασκαλίας

Σε αυτή την ενότητα περιγράφεται το μοτίβο δράσεων του διδάσκοντος και ένα τυπικό παράδειγμα μέσα από το οποίο γίνεται προσπάθεια ανάδειξης της σύνδεσης των επιμέρους δράσεων του. Ο σκοπός είναι να εμφανιστεί η σημασία της κάθε δράσης για την συνοχή της αποδεικτικής διαδικασίας.

Σύμφωνα με τις δράσεις που προσδιορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα παρατηρήθηκε ότι ο διδάσκων ακολουθεί το συγκεκριμένο επαναληπτικό μοτίβο διδασκαλίας της απόδειξης που παρουσιάζεται στην εικόνα 13.



Εικόνα 13 - Το μοτίβο δράσεων του διδάσκοντος κατά την αποδεικτική διαδικασία, η σύνδεση των επιμέρους δράσεων.

Όπως είδαμε οι δράσεις του διδάσκοντος διαδέχονται η μία την άλλη και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αρμονικά με στόχο ο μαθητής να οδηγείται ομαλά στην διατύπωση του θεωρήματος και στην τυπική απόδειξη αυτού. Το μεγαλύτερο μέρος της αποδεικτικής διαδικασίας καταλαμβάνει ο διαισθητικός συλλογισμός. Στην συνέχεια θα δούμε πώς το διαισθητικό μέρος της αποδεικτικής διαδικασίας συνδέεται με το τυπικό.

Το επεισόδιο που θα παρουσιαστεί είναι τυπικό της διδασκαλίας του διδάσκοντος (πίνακας 1). Στο συγκεκριμένο επεισόδιο διδάσκεται το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών. Το θεώρημα διδάχθηκε, αφού πρώτα είχε προηγηθεί η διδασκαλία του θεωρήματος μοναδικότητας του ορίου και του θεωρήματος ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Στον πίνακα που θα παρουσιαστεί σημειώνονται τα αποσπάσματα από την διδασκαλία καθώς και οι διδακτικές δράσεις.

Επεισόδιο	**Διδακτικές Δράσεις**
[1] Λοιπόν, έχουμε διάφορες ιδιότητες που μας βοηθάνε να βρίσκουμε όρια ακολουθιών όταν ξέρουμε τα όρια κάποιων άλλων ακολουθιών.	Εισαγωγή στο πρόβλημα
[2] Μία πολύ σημαντική ιδιότητα είναι η εξής ας πούμε αν έχουμε δύο ακολουθίες, ας πούμε ότι έχουμε μία ακολουθία α_n και μία ακολουθία γ_n και επίσης ξέρουμε ότι και οι δύο συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό α *(βλ. εικόνα 3)*.	Τοποθέτηση προβλήματος
[3] Αυτό τι σημαίνει; Ότι όποιο ε και να πάρουμε από κάπου και πάνω όλοι οι όροι της α_n θα είναι εδώ μέσα. Επίσης από κάπου και πάνω όλοι οι όροι της γ_n θα είναι εδώ μέσα.	Περιγραφή του προβλήματος
[4] Άρα μπορώ να βρω ένα φυσικό που από εκεί και πάνω, για τον ίδιο φυσικό από εκεί και πάνω όλοι οι όροι θα είναι εδώ μέσα.	Μετάβαση από το πρόβλημα σε άτυπο συλλογισμό
[5] Δηλαδή αν από κάποιο n_1 όλοι οι όροι της α_n είναι εδώ μέσα και για κάποιο n_2όλοι οι όροι της γ_n είναι εδώ μέσα τότε άμα πάρω το μεγαλύτερο από τα δύο, το $n_1 + n_2$ θα έχω βρει ένα n_0 που από εκεί και πάνω κάθε n πάνω από το n_0 και ο α_n και ο γ_n θα είναι εδώ μέσα.	Επεξήγηση του άτυπου συλλογισμού
[6] Προσέξτε τώρα, αφού ο αn θα είναι εδώ και ο γ_n που είναι μεγαλύτερος ή ίσος θα είναι εδώ, ότι είναι μεταξύ του α_n και του γ_n δεν θα είναι εδώ και αυτό; Αναγκαστικά, δεν μπορεί να είναι κάπου αλλού.	Μετάβαση από το προηγούμενο βήμα

[7] Επομένως, αν έχω δύο ακολουθίες που συγκλίνουν στο ίδιο α και έχω και μία τρίτη που εγκλωβίζεται από αυτές τις δύο, αναγκαστικά και αυτή θα πηγαίνει στο ίδιο α. Δεν μπορεί να πάει κάπου αλλού. Γιατί αφού οι όροι της α_n και γ_n θα είναι εδώ μέσα και της β_n αφού είναι μεταξύ της α_n και γ_n δεν μπορεί να είναι κάπου αλλού. Είναι αυτό που ονομάζουμε αρχή των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών ή παρεμβολή. Θα το βρείτε αυτό και ως αρχή του σάντουιτς…	Τοποθέτηση εικασίας και θεωρήματος
[8] Λοιπόν, έστω οι ακολουθίες (α_n), (β_n), (γ_n) ώστε $a_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$ για $n = 1,2,\ldots$ αν $\lim \alpha_n = \lim \gamma_n = \alpha$ τότε $\lim \beta_n = \alpha$	Τυπική γραφή της ιδιότητας
[9] Είναι η περιγραφή που κάναμε. Λοιπόν, θέλουμε να αποδείξουμε ότι το $\lim \beta_n = \alpha$	Σύνδεση τυπικής και διαισθητικής απόδειξης
[10] Θα πάμε με βάση τον ορισμό. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα n_0 ώστε όλα τα β_n να είναι στο διάστημα $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Άρα, θα ξεκινήσουμε με ένα τυχαίο ε.	Παρουσίαση του επόμενου βήματος της απόδειξης
[11] Έστω $\varepsilon > 0$.	Τυπική γραφή
[12] Τώρα για αυτό το ε (*κάνει νέο σχήμα*). Για αυτό το ε αφού η α_n συγκλίνει στο α θα υπάρχει ένας n_1 όπου οι όροι της α_n να είναι εδώ μέσα.	Επεξήγηση της χρήσης του ορισμού
[13] Επειδή $\lim \alpha_n = \alpha \; \exists \, n_1 \in N : \alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_1$.	Τυπική γραφή
[14] Τώρα αντίστοιχα, επειδή $\lim \gamma_n = \alpha \; \exists \, n_2 \in N : \alpha - \varepsilon < \gamma_n < \alpha + \varepsilon \; \forall \, n \geq n_2$	Τυπική γραφή
[15] Άρα από το n_1 και πάνω όλα τα α_n είναι εδώ μέσα και από το n_2 και πάνω όλα τα γ_n είναι εδώ μέσα.	Ανακεφαλαίωση των προηγούμενων τυπικών βημάτων
[16] Εντάξει, εγώ θέλω να βρω όμως κάτι που να είναι μαζί τα α_n και γ_n. Έχω δύο φυσικούς n_1, n_2 ένας από τους δύο θα είναι μεγαλύτερος. Άμα πάρω τα n που είναι μεγαλύτερα από $n_1 \, και \, n_2$ σημαίνει ότι θα ικανοποιούν και την μία και την άλλη περίπτωση.	Επεξήγηση του επόμενου βήματος
[17] Επομένως, θέτουμε $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\alpha - \varepsilon < a_n \leq \gamma_n < \alpha + \varepsilon$	Τυπική γραφή
[18] Αναγκαστικά αφού το β_n είναι μεταξύ των αn και γ_n δεν θα είναι μεταξύ $\alpha + \varepsilon$ και $\alpha - \varepsilon$;	Επόμενο βήμα της απόδειξης
[19] Επειδή $a_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$ έχουμε $\alpha - \varepsilon < \beta_n < \alpha + \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα το όριο της β_n είναι α.	Τυπική γραφή

[20] Το β_n είναι εδώ μέσα, άρα είναι στο μεγάλο διάστημα.	Σύνδεση με το σχήμα
[21] Αυτή η πρόταση είναι πολύ χρησιμη γιατί μπορούμε να βρίσκουμε όρια ακολουθιών. Όταν καταφέρουμε να εγκλωβίσουμε την ακολουθία που ψάχνουμε να βρούμε το όριο της μεταξύ δύο ακολουθιών που ξέρουμε τα όρια ή τα βρίσκουμε εύκολα και είναι ίδια, θα είναι ίδιο.	Αναστοχασμός και χρησιμότητα της πρότασης

Πίνακας 1: Διδακτικό επεισόδιο και η ανάλυση του

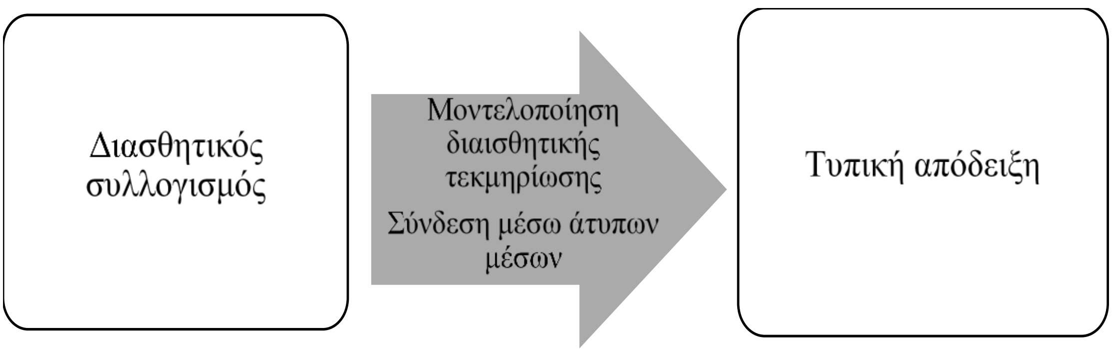
Στο παραπάνω επεισόδιο παρατίθεται ένα παράδειγμα από την συνολική προσπάθεια του διδάσκοντος να παρουσιάσει ολοκληρωμένα την ιδιότητα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών. Όπως παρουσιάστηκε και στην προηγούμενη ενότητα η απόδειξη χωρίζεται σε 4 στάδια · αρχικά παρουσιάζεται το πρόβλημα ([1]-[3]), έπειτα ο διδάσκων προχωρά στην διαισθητική τεκμηρίωση ([4]-[6]), στην συνέχεια αναφέρεται η εικασία ([7]), και καταλήγει στην τυπική απόδειξη ([8]-[21]). Παρατηρείται ότι τα όρια της κάθε δράσης δεν είναι εντελώς σαφή. Στην συνέχεια της ενότητας θα γίνει προσπάθεια να βρεθούν οι συνδέσεις μεταξύ των τυπικών και άτυπων στοιχείων που συνθέτουν την απόδειξη.

Όπως παρατηρείται στο παράδειγμα, το πρόβλημα τοποθετεί τον φοιτητή στο ευρύτερο πλαίσιο μέσα στο οποίο πρέπει να σκεφτεί. Αναφέρεται η ανάγκη η οποία λειτούργησε ως αφορμή για την ανάδειξη της συγκεκριμένης ιδιότητας, δηλαδή η ζήτηση πιο εύκολου τρόπου για τον προσδιορισμό των ορίων ακολουθιών. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ο διδάσκων χρησιμοποιεί σχήμα (βλ. εικόνα 3) για να ενισχύσει τα λεγόμενα του. Το σχήμα και η διαισθητική τεκμηρίωση είναι και αυτά που οδηγούν στον σχηματισμό της εικασίας. Μέσω του σχήματος ο διδάσκων προχωρά στη διαισθητική απόδειξη και στην τοποθέτηση των άτυπων συλλογισμών. Στο τελευταίο στάδιο, δηλαδή το στάδιο της τυπικής απόδειξης, ο διδάσκων επιλέγει να φτιάξει νέο σχήμα και πάνω σε αυτό παρουσιάζει την τυπική απόδειξη της ιδιότητας. Επομένως φαίνεται ότι τα άτυπα μέσα, και συγκεκριμένα η χρήση του διαγράμματος που λειτουργεί καθοριστικά σε αυτό το παράδειγμα, αποτελούν τον συνδετικό κρίκο μεταξύ των σταδίων της απόδειξης αλλά βοηθούν και στην ενεργοποίηση αυτών.

Θα μπορούσε να ειπωθεί πώς ένα από τα συμπεράσματα της προηγούμενης ενότητας είναι ότι ο διδάσκων σε όλα τα στάδια της απόδειξης χρησιμοποιεί κατά βάση άτυπα μέσα για να παρουσιάσει την απόδειξη. Η διαίσθηση είναι αυτή που έχει κεντρικό ρόλο και το τυπικό μέρος της απόδειξης μένει στο περιθώριο μέχρι το τελευταίο στάδιο της αποδεικτικής διαδικασίας. Στη συνέχεια θα γίνει αναφορά στην σύνδεση διαισθητικής και τυπικής απόδειξης όπως αυτή έρχεται στο τελευταίο στάδιο της αποδεικτικής διαδικασίας.

Η τυπική απόδειξη συνδέεται με την άτυπη τεκμηρίωση σε δύο άξονες · από την μία πλευρά η τυπική απόδειξη αποτελεί την μοντελοποίηση της διαισθητικής απόδειξης κατά το διαισθητικό συλλογισμό, και από την άλλη πλευρά τα μη τυπικά μέσα δίνουν συνέχεια και ροή στην τυπική απόδειξη.

Ο τρόπος με τον οποίο επικοινωνείται η τυπική απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια μοντελοποίηση της διαισθητικής απόδειξης. Ο διδάσκων, χρησιμοποιώντας τα άτυπα μέσα που αναφέρθηκαν κατά το στάδιο της τυπικής απόδειξης, μεταφέρει την διαισθητική απόδειξη, όπως την παρουσίασε στα προηγούμενα στάδια, σε ένα τυπικό πλαίσιο, επιβεβαιώνοντας έτσι τους ισχυρισμούς που διαπιστώθηκαν διαισθητικά. Ακόμη, τα μη τυπικά μέσα, βοηθούν στην ενοποίηση και συγκρότηση της ροής της τυπικής απόδειξης. Ο διδάσκων χρησιμοποιεί στοιχεία από την διαισθητική απόδειξη ώστε να επεξηγεί στους φοιτητές σε ποιο στάδιο βρίσκεται η τυπική απόδειξη.



Εικόνα 14 - Σύνδεση τυπικής και διαισθητικής απόδειξης

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο διδάσκων μοντελοποιεί την διαισθητική απόδειξη στα σημεία [9], [10], [16], [18], [20], [21]. Το σημείο [9] έρχεται και συνεχίζει την εικασία που παρουσιάστηκε μέσω του σχήματος στο σημείο [7]. Το σημείο [10] είναι η αφετηρία της απόδειξης και μοντελοποιεί την περιγραφή του προβλήματος στο σημείο [3]. Ακόμη το σημείο [16] συνδέεται με το σημείο [5] της διαισθητικής τεκμηρίωσης ενώ τα σημεία [18] και [20] περιγράφουν το σημείο [6] της διαισθητικής τεκμηρίωσης. Τέλος το σημείο [21] γυρίζει την τυπική απόδειξη στο αρχικό πρόβλημα, κλείνοντας έτσι την αποδεικτική διαδικασία. Έτσι ο διδάσκων επιβεβαιώνει τους διαισθητικούς ισχυρισμούς που έχουν γίνει στα προηγούμενα στάδια και συνδέει το τυπικό με το διαισθητικό μέρος της απόδειξης. Επιπλέον όπως αναφέρθηκε τα μη τυπικά μέσα βοηθούν την απόδειξη να διατηρεί μια σειρά. Αυτός είναι ένας λόγος που ο διδάσκων επιλέγει να ξανακάνει το σχήμα (σημείο [12]) προκειμένου να επαναλάβει με ακρίβεια τα βήματα που θα οδηγήσουν στην απόδειξη. Με αυτό τον τρόπο η επανάληψη της διαδικασίας αποκτά την ροή της διαισθητικής απόδειξης.

4.2 Παράγοντες διαμόρφωσης της διδασκαλίας της απόδειξης

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει αναφορά στους παράγοντες που διαμορφώνουν τη διδασκαλία και ειδικότερα τη διδασκαλία της απόδειξης του διδάσκοντος. Η παρούσα εργασία βασίζεται στη μελέτη ενός διδάσκοντα, ο οποίος αποτελεί μια ξεχωριστή, ιδιαίτερη περίπτωση καθηγητή μαθηματικών. Ο διδάσκων έχει ασχοληθεί με την έρευνα στα μαθηματικά και την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών. Ο τρόπος που οι δύο διαφορετικές ερευνητικές περιοχές αλληλεπιδρούν και συνθέτουν το μάθημα αποτελεί ένα ζήτημα που η μελέτη του αποκτά εξαιρετικό ενδιαφέρον. Οι εμπειρίες του διδάσκοντος καθορίζουν τους στόχους του, οι οποίοι σχετίζονται άμεσα με τον πρωτοετή φοιτητή και τις δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίσει στο πρώτο έτος των σπουδών του. Επιπλέον ο τρόπος που αντιμετωπίζει τις πηγές βοηθά στην σύνθεση του μαθήματος. Τέλος, την ενότητα θα κλείσουν οι απόψεις του διδάσκοντος για την πρακτική και τα μέσα που χρησιμοποιεί για να υπογραμμίσει τις δράσεις του κατά τη διδασκαλία της απόδειξης.

Εμπειρία

Ο διδάσκων φαίνεται να λαμβάνει υπόψιν στη διδασκαλία του τόσο τις εμπειρίες του ως μαθηματικός και ερευνητής των μαθηματικών όσο και τις εμπειρίες που αποκομίζει από την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών. Γενικά μπορεί να ειπωθεί ότι ο διδάσκων εντόπισε την βάση της διδασκαλίας του στον τρόπο που μελετούσε και λειτουργούσε ο ίδιος ως ερευνητής στα μαθηματικά Η συστηματοποίηση και η οργάνωση των δράσεων της διδασκαλίας έγινε μέσα από την ενασχόληση του με την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών.

«Η εμπειρία κυρίως ως διδακτορικός φοιτητής, όχι ως φοιτητής στο πανεπιστήμιο (….) Στο τελευταίο εξάμηνο, εκεί άρχισα σιγά σιγά να μπαίνω στην λογική. Και βέβαια μετά όταν έκανα διδακτορικό. Αυτό έπαιξε ρόλο στο πώς δίδασκα.»

Πιο συγκεκριμένα, ο διδάσκων δεν φάνηκε να έμεινε ικανοποιημένος από τον τρόπο που γινόταν το μάθημα κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών του σπουδών.

«Δηλαδή ξέρεις ως φοιτητής στο πανεπιστήμιο, είναι και πάρα πολλά χρόνια δεν μπορώ να θυμάμαι, αλλά νομίζω οι περισσότερες διδασκαλίες ήταν τελείως φορμαλιστικές. Σηκωνόταν ένας πάνω στον πίνακα έγραφε ένα θεώρημα, έγραφε μια απόδειξη, αυτά.»

Η έρευνα στα μαθηματικά βοήθησε τον διδάσκοντα να υιοθετήσει ένα τρόπο διδασκαλίας. Όμως με την έρευνα στην διδακτική των μαθηματικών η διδασκαλία του απέκτησε σχήμα και δομή ενώ παράλληλα εμπλουτίστηκαν οι συνιστώσες της. Με την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών αποσαφηνίστηκε για τον διδάσκοντα το τι θέλει να πετύχει στις διδασκαλίες του και έλαβε υπόψιν του παραμέτρους που η έρευνα στα μαθηματικά δεν τονίζει ή θεωρεί αυτονόητες. Αναφέρει:

«Ξέρεις τι συμβαίνει με την έρευνα *(στα μαθηματικά)* κανείς κάνει κάποια πράγματα αλλά δεν τα σχηματοποιεί. (….) Οπότε μετά όταν κάνεις μάθημα μπορεί να κάνεις κάποια στοιχεία (…) αλλά μετά η ενασχόληση με τη διδακτική σε βάζει σε σκέψεις να δημιουργήσεις ένα μοντέλο, ένα σχήμα, μια πορεία αυτών των πραγμάτων για να την κάνεις πιο συγκεκριμένη και πιο σαφή και για ποιο λόγο γίνεται το καθένα που εντάξει στο άλλο τα κάνεις υποσυνείδητα. Το να σκεφτείς στα μαθηματικά όταν κάνεις έρευνα, να προβληματιστείς για το αντίθετο είναι άμεσο, θα το κάνεις, το να το μεταφέρεις αυτό στη διδασκαλία σου να είναι ένα βασικό σημείο της διδασκαλίας σου δεν σημαίνει ότι θα γίνει υποχρεωτικά.»

Ένας ακόμα παράγοντας που επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται το μάθημα είναι η διδακτική εμπειρία. Ο διδάσκων διδάσκει το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού πολλά χρόνια, κάθε φορά όμως προσπαθεί να εξελίσσεται και να βελτιώνεται.

«Δεν είναι από την αρχή έτσι. Έχεις κάποια πράγματα στο μυαλό σου. Αλλά σιγά σιγά, διδάσκοντας και με τα χρόνια και με την εμπειρία που αποκτάς κάπως εξελίσσονται.»

Καθοριστικό ρόλο στην βελτίωση του διδάσκοντος έχει η ανατροφοδότηση από τους φοιτητές και η αξιολόγηση του μαθήματος. Ο προβληματισμός του πάνω στα σχόλια των φοιτητών τον οδηγεί να αλλάζει τον τρόπο που διαχειρίζεται διάφορα ζητήματα μέσα στη διάλεξη, όπως, για παράδειγμα, ο τρόπος που γράφει στον πίνακα. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο διδάσκων δεν επαναπαύεται και αναγνωρίζει τα δυνατά αλλά και να μη λειτουργικά σημεία του μαθήματος.

> «Θέλει πολύ προσοχή, αυτός ο συνδυασμός του άτυπου και του τυπικού, θέλει πολύ προσοχή και στην διαχείριση του πίνακα. Ας πούμε τα πρώτα χρόνια το έκανα τραγικά, δηλαδή έγραφα έσβηνα, δεν ξέρω τι καταλάβαιναν οι από κάτω. Αυτά έκανα *(αναφέρεται στην ύλη του Απειροστικού Λογισμού)*. Αλλά σημασία έχει και πώς τα παρουσιάζεις στον πίνακα ώστε να τα καταλαβαίνουν οι φοιτητές. Γιατί έτσι και αλλιώς είναι κάτι ξένο σε αυτούς. Σιγά σιγά κάπως το βελτίωσα. Κοίτα εγώ αυτό το βελτίωσα γιατί θυμάμαι τα πρώτα χρόνια ζήταγα από τους φοιτητές να αξιολογήσουν το μάθημα ανώνυμα, πριν κάνουμε αξιολογήσεις. Και θυμάμαι, υπήρχαν δύο σημεία που με είχαν προβληματίσει πολύ, ο τρόπος που έγραφα στον πίνακα και το άλλο είναι ότι είχα άγχος όταν δίδασκα και τους το μετέφερα. Γιατί για να κάνεις έτσι ένα θεώρημα θες διπλάσιο χρόνο. Αν καθόμουν να κάνω μια τυπική απόδειξη θα είχα τελειώσει σε 5 λεπτά. Αλλά πρέπει να τελειώσεις και την ύλη. Το θέμα είναι πώς να τα συνδυάσεις.»

Στόχοι

Ένας από τους βασικούς στόχους του διδάσκοντος κατά τη διδασκαλία του μαθήματος έχει να κάνει με τον τρόπο που δουλεύουν οι φοιτητές όταν διαβάζουν μόνοι τους μαθηματικά. Ο διδάσκων έχει παρατηρήσει ότι οι φοιτητές δυσκολεύονται να μυηθούν στη νέα κουλτούρα μάθησης του Πανεπιστημίου. Το πώς πρέπει να διαβάζει κανείς στο Πανεπιστήμιο διαφέρει σημαντικά από τον τρόπο διαβάσματος που έχει συνηθίσει ως μαθητής στο Λύκειο.

> «Το μεγάλο πρόβλημα το φοιτητών, αργότερα το συνειδητοποίησα, είναι ότι δεν ξέρουν να διαβάζουν μαθηματικά. Γιατί βλέπεις φοιτητές που έρχονται, παρακολουθούν, διαβάζουν και πολλές ώρες και έρχονται και γράφουν 2, 3 (…) Δεν ξέρουν να διαβάζουν. Έρχονται και διαβάζουν έτσι ακριβώς που διάβαζαν για τις πανελλαδικές. Αυτός ο τρόπος διαβάσματος δεν οδηγεί πουθενά.»

Η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών και η αλληλεπίδραση του διδάσκοντος με τους φοιτητές τον οδήγησαν στο να συνειδητοποιήσει το συγκεκριμένο πρόβλημα των φοιτητών.

«Τις περισσότερες φορές αυτό βγαίνει όταν γίνονται οι εξετάσεις και μετά τις εξετάσεις βγάζουμε τους βαθμούς και μπορούν να έρθουν να δουν τις κόλλες τους. (….) Οπότε όταν διαβάζει κανείς, αν είναι αλήθεια αυτό που λένε και παρακολουθεί και στο τέλος γράφει ασυναρτησίες υπάρχει ένα θέμα. (…) Επίσης στο πλαίσιο μιας διπλωματικής *(παλαιότερα)* και μιας *(τρέχουσας)* διδακτορικής διατριβής έχουν γίνει συζητήσεις με αρκετά παιδιά για αυτό το θέμα. Από μερικά παιδιά βγαίνει το συμπέρασμα αυτό, ενώ κάποιοι άλλοι το λένε καθαρά, ότι δεν ξέρουν να διαβάζουν και κατάλαβαν από ένα σημείο και μετά το πώς να διαβάζουν. Αυτό συνδέεται και με το πώς η διδακτική με επηρεάζει.»

Μετά τον εντοπισμό του προβλήματος από τον διδάσκοντα και την τοποθέτηση του στόχου για τη διδασκαλία, αυτόματα επηρεάζεται και ο τρόπος που γίνεται το μάθημα ώστε δίνει στους φοιτητές μια κατεύθυνση για το πώς πρέπει να δουλεύουν όταν διαβάζουν μαθηματικά. Έμφαση δίνεται από τον ίδιο στο πώς πρέπει να διαβάζουν τις αποδείξεις.

«Να προσπαθώ να μάθω μια απόδειξη απ' έξω, να την ξέρω ή να μάθω μια μεθοδολογία (…) δεν είναι αποτελεσματικό. Και άρα προσπαθώ και μέσα από τον τρόπο του μαθήματος να δουν πώς πρέπει να διαβάζουν και οι ίδιοι. Όταν παίρνουν ένα βιβλίο και πάνε να διαβάσουν μια απόδειξη, πώς θα πρέπει να την διαβάσουν.»

Οι στόχοι του διδάσκοντος δεν περιορίζονται μόνο στο πώς πρέπει να διαβάζουν οι φοιτητές. Βασικό για τον ίδιο είναι να κατανοούν τις έννοιες και να μπορούν να σκέφτονται μαθηματικά. Αναφέρει ότι το να σκέφτονται μαθηματικά είναι ίσως ο πιο σημαντικός από τους στόχους που θέτει καθώς οι έννοιες που περιλαμβάνει το μάθημα, όπως για παράδειγμα η έννοιας του ορίου, είναι αρκετά σύνθετες και η κατανόηση τους έρχεται σταδιακά.

«Να μπορούν να σκέφτονται μαθηματικά (….) Αυτό είναι το κύριο. Γιατί εντάξει το να ξέρουν τι λένε τα θεωρήματα και αυτά, εντάξει. Και να τα καταλαβαίνουν. Να τα έχουν κατανοήσει (…) Να σκέφτονται μαθηματικά, να έχουν κατανοήσει τις έννοιες σε κάποιο βαθμό, γιατί η έννοια του ορίου δεν μπορεί να την κατανοήσει κανείς από το πρώτο έτος, από το πρώτο εξάμηνο μάλλον. Νομίζω είναι από τις πιο δύσκολες έννοιες. Και η κατανόηση έρχεται σταδιακά και μετά όταν κάνεις πραγματική ανάλυση και δεις τους μετρικούς χώρους εκεί καταλαβαίνεις καλύτερα τι έκανες στον Απειροστικό. Οπότε να έχουν κατανοήσει σε ένα ικανοποιητικό βαθμό τις έννοιες και να μπορούν να σκέφτονται.»

Η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών δεν αφήνει ανεπηρέαστους τους στόχους του διδάσκοντος. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως μέσω της έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών αναδύθηκαν προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές σε σχέση με το διάβασμα τους για το μάθημα και έτσι τα προβλήματα αυτά διαμόρφωσαν τον στόχο του διδάσκοντος. Η έρευνα έβαλε σε διαδικασία τον διδάσκοντα να κοιτάξει το ευρύτερο πλαίσιο μέσα στο οποίο ζει και μαθαίνει ο φοιτητής και όχι μόνο τα μαθηματικά αυτά καθ' αυτά. Με αφορμή μια πρόσφατη διατριβή που συμμετέχει αναφέρει:

> «Τώρα σε σχέση με τους στόχους ας πούμε ένα καλό παράδειγμα είναι μια διατριβή. Έχει να κάνει με τη διδασκαλία στο πανεπιστήμιο και τους στόχους που βάζουν. Εντάξει αρχίζω και βλέπω μέσα από αυτό και στους στόχους που βάζουν και άλλοι διδάσκοντες μπαίνει περισσότερο το κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο. Παλιά ήταν τα μαθηματικά, όλα είχαν να κάνουν με τα μαθηματικά. Βλέποντας όμως και τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν στη μετάβαση από το σχολείο στο πανεπιστήμιο και άλλα προβλήματα που προφανώς επηρεάζουν την απόδοση, και βλέποντας και κάποιες άλλες απόψεις διδασκόντων πάλι μέσα από την έρευνα άρχισα να μετράω περισσότερο να δίνω βάρος και σε αυτούς τους παράγοντες. Οπότε μειώνονται κάπως οι απαιτήσεις οι μαθηματικές που ενδεχομένως να ήταν κάπως υπερβολικές για το πρώτο έτος.»

Πηγές

Ο διδάσκων χρησιμοποιεί διάφορες βασικές πηγές για την διδασκαλία του μαθήματος:

> «Χρησιμοποιώ τις σημειώσεις που είναι στο διαδίκτυο και τα 2 βιβλία. Και είναι συνδυασμός.»

Στην συνέντευξη τέθηκε το ζήτημα αν οι αποδείξεις που γίνονται στην τάξη επηρεάζονται από τις πηγές. Ο διδάσκων ανέφερε ότι οι αποδείξεις στα βιβλία δεν είναι εφικτό να έχουν τέτοια μορφή και έθεσε το ζήτημα του ρόλου του δασκάλου. Ο δάσκαλος σε οποιαδήποτε βαθμίδα θεωρεί ότι πρέπει να προσφέρει στον μαθητή κάτι διαφορετικό από αυτό που θα του έδινε μόνο η ανάγνωση του βιβλίου.

> «Δεν έχουν τέτοιες αποδείξεις τα βιβλία. Δεν μπορεί ένα βιβλίο να έχει τέτοιο πράγμα. Δηλαδή σκέψου ένα βιβλίο να είχε ένα πρόβλημα μετά μια συζήτηση να κατέληγε σε εικασία. (….) Δεν είναι θέμα ότι δεν είναι καλά βιβλία. Δεν γίνεται. Και εδώ είναι ο ρόλος του δάσκαλου. Σε οποιαδήποτε βαθμίδα. Το θέμα είναι τι θα κάνεις πέρα από το βιβλίο.»

Η διδασκαλία

Οι εμπειρίες του διδάσκοντος όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο φαίνεται να επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τον τρόπο που γίνεται το μάθημα. Γενικά η εμπειρία από την έρευνα στα μαθηματικά, ειδικότερα από το πώς μελετούσε για να κατανοήσει ερευνητικές εργασίες, έδωσε στον διδάσκοντα την μέθοδο διδασκαλίας ενώ η έρευνα στη διδακτική τον βοήθησε να την κατανοήσει καλύτερα και να την μοντελοποιήσει – οργανώσει. Η γενική πορεία διδασκαλίας που ακολουθεί συμφωνεί με το μοτίβο που προσδιορίστηκε στην ενότητα 4.1.3. Ο διδάσκων τοποθετεί το πρόβλημα, μετά ακολουθεί η συζήτηση που το κάνει πιο συγκεκριμένο και συνεχίζει με την διατύπωση της εικασίας και την διαισθητική τεκμηρίωση. Στο τέλος γίνεται η τυπική απόδειξη που είναι στην ουσία η μετάφραση του διαισθητικού συλλογισμού (βλ. ενότητα 4.1.2 - 4.1.3). Μεγάλη έμφαση δίνεται από τον διδάσκοντα στη μετάβαση από το άτυπο στο τυπικό.

> «(…) Μετά ουσιαστικά τι κάνουμε, προσπαθούμε να μεταφράσουμε το μη τυπικό και όλα αυτά τα προηγούμενα. Δηλαδή έχουμε το εξής, εδώ έχουμε μια εικασία. Όταν έχουμε μια εικασία δεν ξέρουμε αν ισχύει ή όχι και αρχίζουμε και σκεφτόμαστε άτυπα, όπως είναι όλα αυτά. Και κάπως στο τέλος όλης αυτής της πορείας, αποκτούμε έτσι έντονη πεποίθηση ότι είναι σωστό. Και πάμε να γράψουμε τώρα το τυπικό. Το τυπικό είναι για να σιγουρευτούμε ότι είναι σωστό. Δηλαδή με το άτυπο δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι αυτά που σκεφτήκαμε άτυπα είναι σωστά, κάτι μπορεί να μας έχει ξεφύγει, κάτι να μην… Οπότε εκεί τώρα τι προσπαθούμε στην ουσία, να μεταφράσουμε, σε εισαγωγικά την μετάφραση, το άτυπο στο τυπικό.»

Η συγκεκριμένη πορεία που ακολουθεί το μάθημα είναι αποτέλεσμα της έρευνας τόσο στα μαθηματικά όσο και στη διδακτική των μαθηματικών. Ο διδάσκων επιλέγει να ακολουθεί το μάθημα την πορεία που περιεγράφηκε για να βοηθήσει τους φοιτητές να κατανοήσουν την πορεία της μαθηματικής σκέψης.

> «Είναι μάθημα σε μαθηματικούς άρα δεν είναι απλά να μάθουν ένα θεώρημα τι λέει για να λύσουν ασκήσεις αλλά να δουν και πως εξελίσσεται η σκέψη στα μαθηματικά και πως οδηγεί. Αφορμή ήταν και η έρευνα στα μαθηματικά και η διδακτική. Η μορφή που έχει πάρει ολοκληρώθηκε και μέσα από τη διδακτική. Δηλαδή αποκρυσταλλώθηκε σε κάποιο σχήμα. Ξεκίνησε από την έρευνα και ολοκληρώθηκε από τη διδακτική.»

Ο διδάσκων σε αυτό το σημείο διαφοροποιείται και από την παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας «Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη» που αναφέρει ότι δείχνει μόνο το αποτέλεσμα της σκέψης και όχι την πορεία προς αυτήν.

> «Αυτό το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας δεν είναι μόνο ορισμός, θεώρημα, απόδειξη. Είναι να λες ξερά έναν ορισμό, να λες μετά κάποια παραδείγματα ενδεχομένως, μετά να διατυπώνεις ένα θεώρημα και να λες την απόδειξη του και μετά να κάνεις και εφαρμογές. Εντάξει αυτό σου δείχνει το αποτέλεσμα της μαθηματικής σκέψης αλλά δεν δείχνεις την μαθηματική σκέψη που οδηγεί στο αποτέλεσμα. Αυτή είναι η προσπάθεια που προσπαθώ εγώ να κάνω.»

Σχετικά με τα άτυπα μέσα που παρατηρήθηκε ότι χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία, ο διδάσκων κάνει ιδιαίτερη αναφορά στο σχήμα. Όλες οι εναλλαγές από το άτυπο στο τυπικό γίνονται με αφορμή το σχήμα. Ακόμη το σχήμα βοηθά στην μοντελοποίηση της διαισθητικής απόδειξης σε τυπική. Στόχος του είναι να φαίνεται η σύνδεση μεταξύ των δύο αποδείξεων.

> «Δηλαδή αυτή η εναλλαγή γίνεται με αναφορά στο σχήμα. Πολλές φορές το ξαναφτιάχνω. Στην ουσία πολλές φορές ξανακάνω την διαδικασία την προηγούμενη με το σχήμα, αλλά βήμα βήμα και κάθε βήμα το μεταφράζω στο τυπικό. Για να φαίνεται και η σύνδεση.»

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα έρευνα αφορά μια μελέτη περίπτωσης. Ο διδάσκων που μελετήθηκε, στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού 1, αποτελεί μία ιδιαίτερη περίπτωση καθώς έχει ασχοληθεί τόσο με την έρευνα στα μαθηματικά όσο και με την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών, και ο συνδυασμός των δύο λειτουργεί ως αφορμή διερεύνησης των δράσεων και των αντιλήψεων του γύρω από αυτές. Πολλά σημεία από αυτά που συζητήθηκαν είναι ιδιαίτερα και αφορούν τον συγκεκριμένο διδάσκοντα, υπάρχουν όμως τέσσερα γενικά συμπεράσματα που προκύπτουν μέσα από τα δεδομένα και θα αναφερθούν στην συνέχεια της ενότητας.

Αναφορικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα η ανάλυση των δεδομένων έφερε στο φως τη χρήση έξι άτυπων μέσων από τον διδάσκοντα που λειτουργούν ως τα μέσα έκφρασης του σημασιολογικού στυλ διδασκαλίας της απόδειξης και αποτελούν το πρώτο συμπέρασμα της έρευνας. Τα άτυπα μέσα που χρησιμοποιούνται είναι τα διαγράμματα, τα παραδείγματα, η γλώσσα, οι ερωτήσεις, η μετάφραση και ο αναστοχασμός, τα οποία μετατρέπουν σε πράξη όλες τις διδακτικές ενέργειες του διδάσκοντος σε σχέση με την απόδειξη. Ο διδάσκων, όπως διαπιστώθηκε, ακολουθεί το σημασιολογικό στυλ διδασκαλίας στο σύνολο των διαλέξεων, σε αντίθεση με τον διδάσκοντα που μελέτησε ο Weber (2004), ο οποίος άλλαζε στυλ διδασκαλίας ανάλογα με το περιεχόμενο της ύλης. Ο διδάσκων σε αυτή την περίπτωση επιλέγει τη χρήση άτυπων μέσων σε όλη τη διάρκεια της απόδειξης δημιουργώντας συνδέσεις μεταξύ των επιμέρους διαστάσεων της και ενισχύοντας τις εικόνες των μαθητών γύρω από τις έννοιες. Η βιβλιογραφία (π.χ. Alcock, 2010, Lai & Weber, 2013, Weber, 2012) εντοπίζει το άγχος και την ανασφάλεια των διδασκόντων στη χρήση άτυπων μέσων παρουσίασης της απόδειξης και σημειώνει την έμφαση στην τυπική απόδειξη χωρίς εντοπισμό της χρησιμότητας του κάθε βήματος. Ο διδάσκων που μελετήθηκε έρχεται σε αντίθεση με τις παρατηρήσεις των ερευνών και δεν διστάζει να αφιερώσει μεγάλο μέρος της παρουσίασης του δίνοντας έμφαση στην διαίσθηση που υπογραμμίζεται από την χρήση μη τυπικών μέσων.

Το δεύτερο συμπέρασμα της μελέτης αφορά την τροποποίηση του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας και την εξέλιξη του σε ένα νέο μοτίβο δράσεων, το οποίο υιοθετεί ο διδάσκων προκειμένου να υποστηρίξει τη διδασκαλία του, λειτουργώντας συμπληρωματικά στην απάντηση του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος. Η παραδοσιακή διδασκαλία συμβαδίζει με την ακολουθία «Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη». Ο διδάσκων στη συγκεκριμένη περίπτωση αντιμετωπίζει το ζήτημα της απόδειξης ακολουθώντας το μοτίβο «Πρόβλημα – Εικασία – Διαισθητική τεκμηρίωση – Τυπική απόδειξη». Έγινε προσπάθεια να εντοπισθούν οι δράσεις που χαρακτηρίζουν κάθε στάδιο του μοτίβου και ο προσδιορισμός των άτυπων μέσω που υποστηρίζουν κάθε στάδιο. Διαπιστώθηκε ότι το μοτίβο αυτό χαρακτηρίζει το σημασιολογικό στυλ διδασκαλίας, υποδεικνύοντας τα βήματα που μπορεί να ακολουθήσει ένας διδάσκων για την διδασκαλία της απόδειξης.

Οι λόγοι που οδήγησαν τον διδάσκοντα στη χρήση και εξέλιξη του συγκεκριμένου μοτίβου σχετίζονται άμεσα με την απάντηση του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος και τους παράγοντες που διαμορφώνουν την διδασκαλία της απόδειξης. Οι προηγούμενες εμπειρίες λειτούργησαν καθοριστικά στην επιλογή των συγκεκριμένων ενεργειών. Οι εικόνες από τις διδασκαλίες που είχε λάβει μέρος ο διδάσκων στο προπτυχιακό επίπεδο και η διαφορά τους σε σχέση με τις διδασκαλίες που παρακολούθησε στη διάρκεια του διδακτορικού αλλά και οι εμπειρίες από την έρευνα στα μαθηματικά και την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών επηρέασαν καθοριστικά τον τρόπο που γίνεται το μάθημα. Ο διδάσκων έχει ως στόχο η διδασκαλία του να δείχνει στους μαθητές έναν τρόπο να σκέφτονται μαθηματικά, καθώς όπως αναφέρει, η διδασκαλία απευθύνεται σε μαθηματικούς. Με τη χρήση του μοτίβου επιτυγχάνεται ένας ολοκληρωμένος τρόπος παρουσίασης της έννοιας, δείχνοντας στο μαθητή πως προέκυψε κάθε βήμα και όχι μόνο το τελικό αποτέλεσμα. Το μοτίβο που προσδιορίστηκε πήρε την ολοκληρωμένη μορφή μετά την ενασχόληση του διδάσκοντος με την έρευνα στη διδακτική, η οποία λειτούργησε ως αφορμή για να κατανοήσει τον ρόλο που έχει κάθε βήμα και τον σκοπό που επιτελεί στην αποδεικτική διαδικασία. Το πλαίσιο μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η διδασκαλία είναι σημαντικό για τη διαμόρφωση του μοτίβου, καθώς όπως σημειώθηκε από τη Jaworski (2002) η διδασκαλία αποτελεί ένα σύνθετο δίκτυο κοινωνικών αλληλεπιδράσεων. Οι δυσκολίες των μαθητών που εντοπίζονται μέσω της έρευνας στη διδακτική, όπως για παράδειγμα ο τρόπος που διαβάζουν μαθηματικά, λήφθηκαν υπόψιν από τον διδάσκοντα και οδήγησαν σε αυτό το μοντέλο.

Το τρίτο συμπέρασμα έχει να κάνει με τον τρόπο που συνδέεται το τυπικό με το διαισθητικό μέρος της απόδειξης, δημιουργώντας γέφυρες μεταξύ των διαφορετικών σταδίων του μοτίβου που εντοπίστηκε, ολοκληρώνοντας έτσι την μελέτη του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος. Όπως συζητήθηκε η σύνδεση επιτυγχάνεται μέσω της μοντελοποίησης του διαισθητικού τμήματος της απόδειξης στο τυπικό και μέσω της χρήσης των άτυπων εργαλείων. Σε αυτό το σημείο έρχεται στο προσκήνιο η έννοια που αναφέρθηκε στη βιβλιογραφία ως «παιδαγωγική απόδειξη». Όπως σχολιάστηκε η παρουσίαση μιας παιδαγωγικής απόδειξης είναι μια σύνθετη διαδικασία (Stylianides, 2007), η οποία σχετίζεται με την ανάγκη του διδάσκοντα να πείσει τους φοιτητές για την αξία και τον ρόλο των εννοιών παρά απλώς να τις παρουσιάσει (Paoletti κ.α., 2018). Επισημάνθηκαν ακόμη οι εντάσεις που δημιουργούνται στην προσπάθεια παρουσίασης μιας παιδαγωγικής απόδειξης σε σχέση με την σύνδεση των παραγόντων όπως αναφέρθηκαν από τους Lai και Weber (2014). Συμπεραίνουμε ότι ο διδάσκων, με τις δράσεις που επιλέγει και σχετίζονται με τους στόχους του στη διδασκαλία, καταφέρνει να συνδέσει τους τελεολογικούς παράγοντες με τους άλλους δύο κατά τη μετάβαση από τη διαισθητική στην τυπική απόδειξη. Οι επιστημολογικοί παράγοντες εντοπίζονται στην διατήρηση της λογικής δομής και της αναγκαιότητας του κάθε βήματος που προκύπτει με χρήση των άτυπων εργαλείων, ενώ οι επικοινωνιακοί παράγοντες φαίνονται κατά την μοντελοποίηση καθώς η ορολογία που χρησιμοποιήθηκε στην άτυπη απόδειξη διατηρείται και μεταφέρεται κατάλληλα στην τυπική απόδειξη.

Αναφορικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα και τους παράγοντες που διαμορφώνουν τη διδασκαλία του διδάσκοντος παρατηρήθηκε ότι στοιχεία της προσωπικότητας και των αντιλήψεων του διδάσκοντα δεν αποσιωπώνται κατά τη διάρκεια των διαλέξεων αλλά αντίθετα καθορίζουν και διαμορφώνουν τις διδακτικές δράσεις του σε σχέση με την απόδειξη. Ο διδάσκων επιλέγει να «χτίσει» ένα μάθημα γύρω από τους φοιτητές, λαμβάνοντας υπόψιν το επίπεδο, τις εμπειρίες τους από το σχολείο, και τις δυσκολίες που πιθανόν θα αντιμετωπίσουν. Επιλέγει να αλληλεπιδρά με αυτούς παρά απλώς να παρουσιάζει ορισμούς, θεωρήματα και αποδείξεις, δείχνοντας έτσι πώς ο παραδοσιακός τρόπος διδασκαλίας διαφέρει και κατανοείται διαφορετικά από κάθε διδάσκοντα και μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικά γνωστικά αποτελέσματα, συμφωνώντας με τις παρατηρήσεις του Weber (2004).

Σε μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να μελετηθεί πώς η χρήση του μοντέλου που επιλέγει ο συγκεκριμένος διδάσκων επιδρά στην μάθηση των φοιτητών, αξιολογώντας και παρατηρώντας τις αντιδράσεις και την απόδοση τους στο συγκεκριμένο μάθημα. Ακόμη έχει ενδιαφέρον να βρεθεί ποιοι είναι οι στόχοι των φοιτητών όταν παρακολουθούν ένα τέτοιο μάθημα και πώς οι στόχοι μεταφράζονται σε δράσεις από την μεριά τους. Επιπλέον θα ήταν χρήσιμη η εφαρμογή της συγκεκριμένης μελέτης και σε άλλους διδάσκοντες με στόχο την κατασκευή ενός δικτύου δράσεων γύρω από την απόδειξη και σύνδεση τους με τους στόχους του κάθε διδάσκοντα.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. In F. Hit, D. Holton, & P. Thompson (Eds.), *Research in collegiate mathematics education VII* (pp. 63–92). Washington DC: MAA.

Artemeva, N., & Fox, J. (2011). The writing's on the board: The global and the local in teaching undergraduate mathematics through chalk talk. *Written Communication*, *28*(4), 345–379.

Bampili, A. C., Zachariades, T., & Sakonidis, C. (2017). *The transition from high school to university mathematics: a multidimensional process.* In Proceedings of the 10th Conference of the European Society for research in Mathematics Education (CERME 10).

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

Fritze, Y., & Nordkvelle, Y.T. (2003). Comparing lectures: effects of the technological context of a studio. *Education and Information Technologies*, *8*(4), 327–343.

Fukawa-Connelly, T. (2012). A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: Making sense of her pedagogical moves. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(3), 325–345.

Fukawa-Connelly, T. P., & Newton, C. (2014). Analyzing the teaching of advanced mathematics courses via the enacted example space. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 323–349.

Fukawa-Connelly, T. P., Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2017). Informal content and student note taking in advanced mathematics classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(5), 567–579.

Gabel, M., & Dreyfus, T. (2017). Affecting the flow of a proof by creating presence—A case study in number theory. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 187–205.

Hemmi, K. (2010). Three styles characterizing mathematicians' pedagogical perspectives on proof. *Educational Studies in Mathematics, 75,* 271–291.

Iannone, P., & Nardi, E. (2005). On the pedagogical insight of mathematicians: Interaction and transition from the concrete to the abstract. *The Journal of Mathematical Behavior, 24,* 191–215.

Jaworski, B. (2002). Sensitivity and challenge in university mathematics tutorial teaching. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 71–94.

Jaworski, B. (2012). Mathematics teaching development as a human practice: Identifying and drawing the threads. *ZDM*, *44*(5), 613–625.

Jaworski, B., Mali, A., & Petropoulou, G., 2017. Critical Theorizing from Studies of Undergraduate Mathematics Teaching for Students' Meaning Making in Mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(1), pp. 168-197.

Lai, Y., & Weber, K. (2014). Factors mathematicians profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics, 85*(1), 93–108.

Lai, Y., Weber, K., & Mejia-Ramos, J. P. (2012). Mathematicians' perspectives on features of a good pedagogical proof. *Cognition and Instruction, 30*(2), 146–169.

Lew, K., Fukawa-Connelly, T. P., Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2016). Lectures in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(2), 162–198.

Mali, A. (2015). Characterizing university mathematics teaching. In K. Krasner & N. Vondra (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2187–2193). Prague: CERME.

Mason, J., & Watson, A. (2008). Mathematics as a constructive activity: Exploiting dimensions of possible variation. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 189–202). Washington, DC: MAA.

Mesa, V., Celis, S., & Lande, E. (2014). Teaching approaches of community college mathematics faculty: Do they relate to classroom practices? *American Educational Research Journal, 51*(1), 117–151.

Mills, M. (2014). A framework for example usage in proof presentations. *The Journal of Mathematical Behavior, 33,* 106–118.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Pampaka, M., Williams, J., Hutcheson, G., Wake, G., Black, L., Davis, P., & Hernandez-Martinez, P. (2012). *The association between mathematics pedagogy and learners' dispositions for university study. British Educational Research Journal, 38*(3), 473–496.

Paoletti, T., Krasnik, V., Papadopoulos, D., Olsen, J., Fukawa-Connelly, T., & Weber, K. (2018). Teacher questioning and invitations to participate in advanced mathematics lectures. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 1-17.

Petropoulou, G., Jaworski, B., Potari, D. & Zachariades, T. (2015). *How do research mathematicians teach Calculus?* In Proceedings of the 9th Conference of the European Society for research in Mathematics Education (CERME 9).

Petropoulou, G., Jaworski, B., Potari, D. & Zachariades, T (2016), *Addressing large cohorts of first year mathematics students in lectures*. In drum 2016 Proceedings.

Petropoulou, G., Potari, D., & Zachariades, T. (2011). Inquiring mathematics teaching at the university level. In B. Abuzz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 386–392). Ankara: PME.

Pinto, A. (2013). *Revisiting university mathematics teaching: A tale of two instructors.* In Proceedings of the 8th Conference of the European Society for research in Mathematics Education (CERME 8)

Pritchard, D. (2010). Where learning starts? A framework for thinking about lectures in university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(5), 609–623.

Samkoff, A., Lai, Y., & Weber, K. (2012). Mathematicians' use of diagrams in proof construction. *Journal for Research in Mathematics Education, 14,* 49–67.

Schoenfeld, A., Thomas, M., & Barton, B. (2016). On understanding and improving the teaching of university mathematics. *International Journal of STEM Education, 3*(4), 1-17.

Selden, A., & Selden, J. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In: *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 339–354). Reston, VA: NCTM.

Speer, N. M., Smith, J. P., III, & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *Journal of Mathematical Behavior, 29*(2–29), 99–114

Stouraitis, K., Potari, D., & Scott, J. (2017). Contradictions, dialectical oppositions and shifts in teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 203–217.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). Basics of Qualitative Research. *Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory.* (Second Edition). London, United Kingdom: SAGE.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289–321.

Stylianides, A., Baeda, K., & Morelli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In A. Gutierrez, G. Leeder, & P. Boeri (Eds.), *2nd handbook on the psychology of mathematics education* (pp. 315–351). Rotterdam: Sense Publishers.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(2), 115–133.

Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 43*, 463–482.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics, 56*(3), 209–234.

Williams, R. L., & Eggert, A. C. (2002). Notetaking in college classes: Student patterns and instructional strategies. *Journal of General Education*, *51*(3), 173–199.

Yin, R. K. (1994). *Case Study Research. Design and Methods* (Third Edition). London, United Kingdom: SAGE

Yin, R. K. (2003*). Case study research: Design and methods* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Zazkis, D., Weber, K., & Mejia-Ramos, P. (2016). Bridging the gap between visual arguments and verbal symbolic proofs in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(2), 155–173.