



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η φιλοσοφία των Μαθηματικών του G. C. Rota

ΔΡΟΛΙΑ ΕΛΕΝΗ

A.M. Δ201517

Επιβλέπουσα

Δήμητρα Χριστοπούλου

Επίκουρη Καθηγήτρια

Αθήνα

ΙΟΥΝΙΟΣ 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 4^η Ιουνίου 2018 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Χριστοπούλου(Επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια
▪ Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Δ. Αναπολιτάνο	Ομοτ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την
καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Χριστοπούλου (Επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια
▪ Κ. Δημητρακόπουλο	Καθηγητή
▪ Δ. Αναπολιτάνο	Ομοτ. Καθηγητή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

- Την επιβλέπουσά μου επίκουρη καθηγήτρια κυρία Δήμητρα Χριστοπούλου για την άριστη συνεργασία που είχαμε, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, για τον πολύτιμο χρόνο που μου αφιέρωσε, για την αμέριστη υποστήριξη που μου παρείχε, για την υπομονή και την κατανόησή της, για τις επιμελείς υποδείξεις της στο κείμενο και γενικότερα για την καθοδήγηση της για την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να την ευχαριστήσω διότι χάρη στη διδασκαλία της στα μαθήματα της φιλοσοφίας των μαθηματικών και της μαθηματικής λογικής είχα την ευκαιρία να γνωρίσω και να μελετήσω τον μαγευτικό κόσμο της φιλοσοφίας των μαθηματικών.
- Τον καθηγητή κύριο Διονύσιο Αναπολιτάνο και τον καθηγητή κύριο Κωνσταντίνο Δημητρακόπουλο που με τιμήσανε με τη συμμετοχή τους στη συμβουλευτική επιτροπή.
- Τον καθηγητή κύριο Διονύσιο Αναπολιτάνο και την αναπληρώτρια καθηγήτρια κυρία Δέσποινα Πόταρη που με τιμήσανε με τη συμμετοχή τους στην εξεταστική επιτροπή.
- Όλους τους διδάσκοντες και τις διδάσκουσες του ΠΜΣ στην Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών για τις γνώσεις που μου παρείχαν καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου.
- Τη γραμματεία του προγράμματος και ιδιαίτερα την κυρία Ελένη Κλη για την πρόθυμη βοήθειά τους όποτε τη χρειάστηκα.
- Τους συμφοιτητές και τις συμφοιτήτριές μου για τις όμορφες στιγμές που μοιραστήκαμε.
- Την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την απεριόριστη στήριξη και κατανόησή τους σε αυτό μου το εγχείρημα.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	3
1.Βιογραφικά Στοιχεία για τον G. C. Rota.....	7
2.Φιλοσοφικό Στυλ (το φαινομενολογικό).....	9
3.Ο Rota για την ύπαρξη και το οντολογικό status των μαθηματικών αντικειμένων.....	15
4.Η ταυτότητα του μαθηματικού αντικειμένου.....	22
5.Μαθηματικός Ορισμός.....	25
6.Η έννοια της μαθηματικής απόδειξης στη σκέψη του Rota.....	28
7.Η σχέση ανάμεσα στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, τα Μαθηματικά και τη Φιλοσοφία.....	40
8.Η φαινομενολογική έννοια <i>Fundierung</i> στη σκέψη του Rota.....	54
9.Εναντίον του ‘αναγωγισμού’ και του ‘αντικειμενισμού’.....	60
10.Ο Φαινομενολογικός Ρεαλισμός του Rota.....	66
11.Φαινομενολογία και Μαθηματικά.....	69
12.Αποβλεπτικότητα και Ύπαρξη στον κόσμο.....	78
13. Συμπεράσματα.....	85
14. Βιβλιογραφία.....	91

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία αναφέρεται στις βασικές θέσεις της φιλοσοφίας των μαθηματικών του μαθηματικού G. C. Rota. Ο Rota ακολουθεί τη φαινομενολογική προσέγγιση στα μαθηματικά, θεωρώντας τον E. Husserl ως έναν από τους μεγαλύτερους φιλοσόφους. Όμως και ο ίδιος αναπτύσσει δικές του φιλοσοφικές ιδέες για τα μαθηματικά ανεξάρτητες και αυτόνομες. Ειδικότερα, τον ενδιαφέρουν ζητήματα όπως η μαθηματική ταυτότητα, η σχέση ανάμεσα στο μαθηματικό αντικείμενο και την αξιωματική παρουσίασή του, η έννοια της μαθηματικής απόδειξης στο ανακαλυπτικό πλαίσιο, ο ρόλος των μαθηματικών ορισμών, η σχέση μεταξύ μαθηματικών και φιλοσοφίας. Η φιλοσοφία του εμπεριέχει βαθιές οντολογικές αναζητήσεις για τα μαθηματικά αντικείμενα καθώς και ενδιαφέρουσες προτάσεις για τη μαθηματική πρακτική.

Abstract

G. C. Rota presents an interesting philosophy of mathematics in a broad phenomenological context. Although he has certain phenomenological inclinations, he has developed theses and ideas of his own which are characterized by exceptional freshness and innovation. Especially he has focused his attention on the issues of mathematical identity, the relation between mathematical objects and their axiomatic presentation, the notion of mathematical proof in the context of discovery, the role of mathematical definitions, the relation among mathematics and philosophy. His philosophy includes deep ontological pursuit and

research as well as interesting proposals concerning mathematical practice.

1.Βιογραφικά στοιχεία για τον G. C. Rota

Ο Gian – Carlo Rota γεννήθηκε στις 27 Απριλίου του 1932 στο Vigevano της Ιταλίας. Ο πατέρας του Giovanni, ήταν γνωστός μηχανικός και αρχιτέκτονας, ενώ διετέλεσε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Quito. Η αγάπη του για τις επιστήμες και τις τέχνες ήταν η αφορμή να έρθει ο Gian – Carlo σε επαφή με τα μαθηματικά, τις τέχνες, τη λογοτεχνία αλλά και τη φιλοσοφία, κυρίως μέσα από τα κείμενα του Benedetto Croce. Η θεία του Rosetta, ήταν μαθηματικός και παντρεμένη με τον γνωστό θεατρικό συγγραφέα Ennio Flaiano, ο οποίος άσκησε μεγάλη επιρροή στο νεαρό τότε Gian – Carlo. Ο πατέρας του συλλαμβάνεται το 1943 εξαιτίας της αντιναζιστικής του δράσης, και η μητέρα του αναγκάζεται να διαφύγει μ' αυτόν και την αδερφή του το 1944, στη λίμνη Orta της Ιταλίας. Εκεί διδάσκεται από την οικογένειά του μαθηματικά, Λατινικά και Γαλλικά. Το 1947 η οικογένεια Rota μετακομίζει στο Quito του Ecuador και ο Gian – Carlo, ετών 15, εγγράφεται στο Αμερικάνικο σχολείο και μαθαίνει Ισπανικά, Γαλλικά και εντείνει την ενασχόλησή του με τη φιλοσοφία μελετώντας συστηματικά τα κείμενα του Benedetto Croce. Το 1950 και ενώ έχει ήδη διακριθεί στα μαθηματικά, μετακομίζει στις Η.Π.Α και εγγράφεται στο Πανεπιστήμιο του Princeton, όπου και διδάσκεται από τους μεγάλους μαθηματικούς Alonzo Church, Emil Artin και Solomon Lefschetz. Η παρακολούθηση των διαλέξεων του Hermann Weyl παίζει καθοριστικό ρόλο στην μετέπειτα πορεία του Gian – Carlo, καθώς μαγεύεται από το συνδυασμό επιστημονικής και φιλοσοφικής θεώρησης που παρουσιάζει ο Weyl. Ο Rota αποφασίζει να παρακολουθήσει τα μαθήματα φιλοσοφίας του John Rawls και του Arthur Szathmary, ο οποίος και στρέφει την προσοχή του Rota από την Γερμανική ιδεαλιστική φιλοσοφία του Croce στην φαινομενολογία. Το ενδιαφέρον του για την φαινομενολογία ενισχύεται από την μελέτη των κειμένων των José Ortega y Gasset, Maurice Merleau-Ponty και Sartre, αν και όπως και ο ίδιος δηλώνει, καθοριστικός παράγοντας της φιλοσοφικής του ανάπτυξης υπήρξε ο Edmund Husserl, τον οποίο και χαρακτηρίζει ως τον μεγαλύτερο φιλόσοφο της ιστορίας. Ένας ακόμα φιλόσοφος που επηρέασε το έργο του Rota, είναι ο Martin Heidegger, αν και όπως δηλώνει, τα έργα του τα μελετάει πάντα μέσα από το πρίσμα της φιλοσοφίας του Husserl.

Το 1953 και αφού ολοκληρώνει τις σπουδές του με επιτυχία, ο Rota εγγράφεται στο Yale και κάνει τη διδακτορική του διατριβή με επιβλέποντα τον Jacob Schwartz. Το 1956 και το 1957 δουλεύει στο Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης ως μεταδιδακτορικός ερευνητής στο ινστιτούτο Courant και τα επόμενα δύο χρόνια στο Πανεπιστήμιο του Harvard δίπλα στον Benjamin Peirce. Το διάστημα 1959 με 1965 αναλαμβάνει θέση καθηγητή στο M.I.T και αναπτύσσει μεγάλη φιλία με τον σπουδαίο μαθηματικό John Nash. Από το 1962 μέχρι και το 1965, γίνεται βοηθός καθηγητή στο M.I.T και από το 1965 μέχρι το 1967 δουλεύει στο Πανεπιστήμιο Rockefeller. Το 1964 γνωρίζει τον Stanislaw Ulam, ο οποίος επηρέασε τόσο πολύ το μετέπειτα έργο του, που και ο ίδιος ο Rota αναφέρει χαριτολογώντας πως μετά από τόσα χρόνια συναναστροφής, είναι πολύ δύσκολο να ξεχωρίσει κανείς πού τελειώνει η δουλειά του Ulam και πού ξεκινάει η δική του. Ο Ulam χρηματοδοτεί τη συμμετοχή του Rota στο εργαστήριο του Los Alamos το έτος 1966, όπου και εξακολουθεί να εργάζεται μέχρι το θάνατό του. Η συμμετοχή του στο Los Alamos συμβάλλει στη συνεργασία του Rota με κυβερνητικούς οργανισμούς και υπηρεσίες όπως την Εθνική Υπηρεσία Ασφαλείας, από την οποία και λαμβάνει το 1992 μετάλλιο διακεκριμένης υπηρεσίας.

Το 1967 αναλαμβάνει την έκδοση του περιοδικού *Advances in Mathematics* και το 1979 ιδρύει το περιοδικό *Advances in Applied Mathematics*, κατέχοντας τη θέση του αρχισυντάκτη. Το 1967 επιστρέφει οριστικά στο M.I.T και από το 1972 διδάσκει με τη διπλή ιδιότητα του μαθηματικού και φιλοσόφου. Η δυνατότητα να διδάσκει εκτός από μαθηματικά και φιλοσοφία, διατηρώντας μάλιστα τη φαινομενολογική του διδασκαλία και έρευνα ανεξάρτητη από το τμήμα αναλυτικής φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου, είναι ο κύριος λόγος επιλογής του συγκεκριμένου ιδρύματος από τον Rota. Στα χρόνια που έπονται, ο Rota διατηρεί στενές σχέσεις συνεργασίας και φιλίας με τους φιλοσόφους Thomas Samuel Kuhn και Robert Sokolowski. Συμμετέχει ως ομιλητής σε πολλές διαλέξεις, όπως στο σύλλογο φαινομενολογίας και υπαρξιακής φιλοσοφίας, στη συνάντηση του κύκλου Husserl, στο συνέδριο της φιλοσοφίας της επιστήμης στη Βοστώνη, στο όγδοο διεθνές συνέδριο για τον Kant και άλλα. Από το 1982 αποτελεί μέλος της εθνικής ακαδημίας επιστημών και προεδρεύει του τμήματος των μαθηματικών από το 1994 μέχρι και το 1997. Οι ακαδημαϊκές του επιτυχίες όμως δεν περιορίζονται μόνο στην Αμερική.

Στην Ιταλία είναι καθηγητής στο ανώτερο σχολείο της Πίζας, μέλος της επιστημονικής της κοινότητας και του Πανεπιστημιακού ινστιτούτου του Carlo Cattaneo, ενώ από το 1990 μέχρι και το 1998 συνεργάζεται με το ιταλικό ινστιτούτο φιλοσοφικών σπουδών στη Νάπολη. Ο Gian - Carlo Rota αφήνει την τελευταία του πνοή από καρδιακή ανακοπή, στις 18 Απριλίου του 1999 στην κατοικία του στο Cambridge. Η σωρός του αποτεφρώνεται και οι στάχτες θάβονται στο κοιμητήριο του Mount Auburn (Palombi, 2011, 6-15).

2. Φιλοσοφικό Στυλ (το φαινομενολογικό)

Μελετώντας τα κείμενα του Gian - Carlo Rota μπορεί εύκολα κανείς να διαπιστώσει πως κύριο χαρακτηριστικό τους είναι η προσπάθεια επαναδιατύπωσης φαινομενολογικών εγχειριδίων και περιγραφής των φιλοσοφικών προσεγγίσεων, ώστε να είναι πιο εύκολη η κατανόησή τους. Τί είναι όμως η φαινομενολογία; Αρχικά θα αναφερθούμε σε έναν βασικό όρο της φαινομενολογίας, την «αποβλεπτικότητα». Σύμφωνα με τον Sokolowski (2000, 1-2&5), για τη φαινομενολογία κάθε εμπειρία και κάθε συνειδησιακή ενέργεια είναι αποβλεπτική και αποτελεί την εμπειρία ή την συνείδηση ενός πράγματος. Όταν κοιτάζω βλέπω ένα οπτικό αντικείμενο, όταν φαντάζομαι, η ενέργεια αυτή παρουσιάζει ένα φαντασιακό αντικείμενο, όταν θυμάμαι, έχω την θύμηση ενός αντικειμένου, μια κρίση αφορά την απόβλεψη ενός γεγονότος και ούτω καθεξής. Η προσοχή και η συνειδητότητα του ανθρώπου συνολικά «κατευθύνεται» σε αντικείμενα, υπάρχουν διαφορετικά είδη απόβλεψης και κάθε απόβλεψη έχει το αποβλεπτικό της αντικείμενο. Για ένα υλικό αντικείμενο επιτελούμε αντιληπτική απόβλεψη, για μια φωτογραφία επιτελούμε μια απόβλεψη της εικόνας κ.ο.κ. Η έννοια της αποβλεπτικότητας αφορά τη θεωρία της γνώσης και όχι αυτή της ανθρώπινης ύπαρξης και δεν θα πρέπει να συγχέεται με την πρόθεση που υπάρχει στον ανθρώπινο νου όταν ενεργεί, έχοντας ένα σκοπό. Έχει καθαρά γνωστικό και νοητικό χαρακτήρα και εκφράζει τη συνειδησιακή σχέση του ανθρώπου με ένα αντικείμενο.

Για να γίνει πιο κατανοητή η έννοια της φαινομενολογίας θα πρέπει να τονίσουμε τη διάκριση ανάμεσα στη φυσική και τη φαινομενολογική στάση. Όπως δηλώνει ο Sokolowski (2000, 39-48), κάθε άνθρωπος στην καθημερινότητά του έρχεται σε άμεση επαφή με μια ποικιλία πραγμάτων μέσα στον κόσμο, από την συναναστροφή με άλλους ανθρώπους, τις μετακινήσεις προς και από τη δουλειά, ακόμα και απλά υλικά αντικείμενα τα οποία παρουσιάζονται και κατά συνέπεια ταυτοποιούνται, γίνονται αντικείμενο συζήτησης και διευθέτησης, πηγή συναισθηματικής αντίδρασης και ούτω καθεξής. Ορισμένα από τα πράγματα με τα οποία αλληλεπιδρούμε είναι παρόντα, άλλα απόντα και πολλά τα καθοδηγούμε εμείς από την παρουσία στην απουσία και το αντίστροφο. Εκτός όμως από τα υλικά αντικείμενα υπάρχουν και τα μαθηματικά αντικείμενα τα οποία απαιτούν μια διαφορετικού είδους αποβλεπτικότητα, παρόλο που ενυπάρχουν στον κόσμο, αφού *είναι* με ένα διαφορετικό τρόπο από ότι τα υλικά αντικείμενα. Το σύνολο των πραγμάτων που αναφέραμε ταυτοποιούνται μέσα στον κόσμο μας και η ταυτότητά τους συνοδεύεται από τις αποβλέψεις μας. Υπάρχουν όμως και πράγματα που εμπεριέχονται στον κόσμο μας και τα οποία δεν μας δίνονται στην εμπειρία μας με άμεσο τρόπο αλλά τα αποβλέπουμε με έναν κενό τρόπο, όπως συμβαίνει όταν αποβλέπω ένα μέρος το οποίο δεν έχω επισκεφτεί ποτέ. Ο κόσμος μας επεκτείνεται πέρα από την άμεση αλλά και την δυνάμει εμπειρία μας. Επίσης, υπάρχει μια πληθώρα πραγμάτων στον κόσμο που παρουσιάζονται κάθε φορά με διαφορετικό τρόπο, και αυτό συμβαίνει ακόμα και με τον ίδιο τον κόσμο. Ο κόσμος μας δεν είναι ένα πράγμα, ούτε το άθροισμα των αντικειμένων του. Μοιάζει να είναι ο *ορίζοντας* για όλα όσα μπορούν να γίνουν αντικείμενο απόβλεψης, ενώ πολύ σημαντικό ρόλο παίζει το εγώ, το κέντρο δηλαδή γύρω από το οποίο διευθετούνται όλα τα πράγματα, η οντότητα που προσλαμβάνει τη γνώση. Τέλος, ο τρόπος αποδοχής των πραγμάτων του κόσμου είναι αυτός της πίστης, αν και κατά περιόδους διαφοροποιείται, και η βασικότερη πίστη είναι αυτή που έχουμε προς τον κόσμο μας ως σύνολο ότι είναι υπαρκτός. Όλα τα παραπάνω στοιχεία ανήκουν στη φυσική στάση, την κατεύθυνση προς τον κόσμο και τα πράγματά του ενώ φορέας είναι το εγώ.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί πως τα παραπάνω θέματα δεν θα μπορούσαν να έχουν διατυπωθεί εξαντλητικά από τη φυσική στάση. Η ενδεδειγμένη εξέτασή τους προέρχεται από τη φαινομενολογική στάση. Στο εσωτερικό της φυσικής στάσης

μπορεί να βρει κανείς πολλές και διαφορετικές οπτικές γωνίες, καμία όμως δεν μοιάζει με την φαινομενολογική η οποία είναι πιο περιεκτική και άκρως ριζική. Η φαινομενολογική στάση διαφοροποιείται από τη φυσική και εστιάζει κατά αναστοχαστικό τρόπο σε κάθε πράγμα. Όπως εξηγεί ο Sokolowski (2000, 45-48), η υιοθέτηση της φαινομενολογικής στάσης δεν σημαίνει πως κάποιος γίνεται ειδικός σε μια μορφή γνώσης αλλά πως γίνεται φιλόσοφος, εξετάζοντας και αναλύοντας όλες τις επιμέρους αποβλεπτικότητες και την πίστη στον κόσμο. Από την άλλη πλευρά χρειάζεται κάποτε μια αποστασιοποίηση από τις αποβλεπτικότητες που σημαίνει πως όσο τις εξετάζουμε τις αναστέλλουμε. Κατά τη φαινομενολογική στάση, λειτουργούμε ως φορείς της φιλοσοφικής ζωής και αποστασιοποιημένοι παρατηρητές. Οι αποβλεπτικότητες που εξετάζουμε και περιγράφουμε, εξακολουθούν να είναι οι δικές μας, απλώς τις αναλύουμε από μια αποστασιοποιημένη οπτική γωνία. Η φαινομενολογική στάση καλείται και φαινομενολογική αναγωγή και εκφράζει την αποστασιοποίηση από τους φυσικούς στόχους των ενδιαφερόντων μας ενώ ο όρος 'θέτει εντός παρενθέσεων' (bracketing) σημαίνει πως θέτουμε εντός τους τον κόσμο. Συγκεκριμένα εξετάζουμε τα στοιχεία του κόσμου κατ' αναλογία με τις αποβλεπτικότητες που κατευθύνονται προς αυτά. Ένα αντικείμενο της αντίληψης εξετάζεται ως αντιληπτό, ένα αντικείμενο της ανάμνησης ως κάτι που θυμόμαστε και μια μαθηματική οντότητα ως ένα σύστοιχο της μαθηματικής αποβλεπτικότητας. Στη φυσική στάση στοχεύουμε στο ίδιο το αντικείμενο μέσα από τις πολλές εμφανίσεις του. Αντίθετα, στη φαινομενολογική στάση, καθιστάμε τις εμφανίσεις ως ένα θεματικό αντικείμενο, ασχολούμαστε με το πολλαπλό των εμφανίσεων που μας προσφέρει το αντικείμενο κάνοντας πιο εύκολη τη διάκριση του αντικειμένου από τις εμφανίσεις του και τη διατήρηση της πραγματικότητάς του μέσα σε αυτές. Έτσι περιγράφουμε καλύτερα τον κόσμο.

Σύμφωνα με τον Sokolowski (2000, 5), μία από τις σημαντικότερες συνεισφορές της φαινομενολογίας είναι η κατάρριψη της εγωκεντρικής δυσχέρειας που χαρακτηρίζει τη δυτική φιλοσοφική σκέψη με αφετηρία τον Descartes. Δηλαδή η φαινομενολογία αναδεικνύει το δημόσιο χαρακτήρα του νου του οποίου η εμφάνιση και δράση δεν περιορίζεται στα όριά του. Κάθε πράγμα βρίσκεται 'έξω', «εμφανίζεται σε εμάς και εμείς εκθέτουμε στους εαυτούς μας και τους άλλους το πώς είναι τελικά τα πράγματα» (Sokolowski, ό.π.). Με άλλα λόγια, το υπό εξέταση αντικείμενο δεν

εγκλωβίζεται στην νοητική ατομικότητα του υποκειμένου. Η εποπτεία, μια φιλοσοφικά αμφισβητήσιμη έννοια, που πολλές φορές λαμβάνεται ως κάτι μη εκφράσιμο ή περιγράψιμο, για τη φαινομενολογία εκφράζει ακριβώς το να έχουμε ένα αντικείμενο ενεργεία *παρόν* παρά να πραγματοποιούμε κενές αποβλέψεις εν τη απουσία του. Η εποπτεία επιτυγχάνει την παρουσία του αντικειμένου που γνωρίζουμε και η αξία της είναι πολύ σημαντική ειδικά αν αναλογιστούμε πως χωρίς αυτήν οι αποβλέψεις παραμένουν κενές και η γνώση δεν είναι δυνατή. Η ταυτότητα του αντικειμένου υπάρχει μέσα ή πίσω από την απουσία όσο και από την παρουσία ενός και μόνου αντικειμένου.

Η διυποκειμενικότητα είναι εφικτή σύμφωνα με τον Sokolowski (2000, 160-164) και αποτελεί σημαντικό σημείο της φαινομενολογίας. Παρόλο που έχει κατηγορηθεί από αρκετούς ότι δείχνει να αγνοεί την παρουσία άλλων ανθρώπων όταν αναφέρεται στο υπερβατολογικό εγώ, η φαινομενολογία προσφέρει μια εκτενή περιγραφή της εμπειρίας μας σε διυποκειμενικό επίπεδο. Σύμφωνα με μια πρώτη προσέγγιση, περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο τα άλλα πρόσωπα γνωρίζονται από εμάς άμεσα στην εμπειρία, ενώ σύμφωνα με μια δεύτερη προσέγγιση, περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο μας δίνεται στην εμπειρία ο κόσμος ως εμπειρία ταυτόχρονα πολλαπλών όντων. Δεν εξετάζεται η άμεση σχέση ανάμεσα στο εγώ και τους άλλους αλλά η σχέση που έχουμε όλοι μας με τον κόσμο και τα πράγματα του που όλοι γνωρίζουμε. Όταν μου δίνεται στην εμπειρία ένα αντικείμενο όπως για παράδειγμα ένας κύβος, το αναγνωρίζω ως ταυτότητα στην πολλαπλότητα των πλευρών, των όψεων και των σκιάσεων, έννοιες που θα αναλύσουμε αναλυτικότερα παρακάτω. Το πολλαπλό έχει δυναμικό status αφού ανα πάσα στιγμή με τη μετακίνηση τη δική μου ή του κύβου μπορώ να δημιουργήσω νέα ροή πλευρών, όψεων και σκιάσεων. Στην περίπτωση που υπάρχουν και άλλοι άνθρωποι παρόντες, τότε το αντικείμενο που βλέπω εγώ, οι άλλοι το βλέπουν από μια διαφορετική γωνία και το ενεργεία για αυτούς είναι δυνάμει για μένα και το αντίστροφο. Το αντικείμενο επομένως, μπορεί να δοθεί διυποκειμενικά. Ο Husserl, κατά τον Rota, αποτελεί τον σημαντικότερο φιλόσοφο της ιστορίας. Όπως δηλώνει όμως ο ίδιος ο Rota (1997, 233), ο συνδυασμός του λιγοστού χρόνου που αφιερώνεται στην επανανακάλυψη των βασικών ισχυρισμών και συμπερασμάτων της φαινομενολογίας, σε συνδυασμό με μία αλαζονεία της διακήρυξής τους από τους μεταγενέστερους φιλοσόφους, έχει ως αποτέλεσμα την ανεπαρκή κατανόηση των

κειμένων του Husserl. Παράλληλα, μέσα από τα κείμενα του Rota διαφαίνεται η αμφίδρομη σχέση ανάμεσα στην μαθηματική και τη φιλοσοφική του έρευνα. Σύμφωνα με τον Palombi (2011, 16-17), η μαθηματική πρακτική του Rota επηρέασε την φιλοσοφική του έρευνα. Οι μαθηματικοί, κατά τη γνώμη του Rota, δεν διδάσκουν την μαθηματική ανάλυση χρησιμοποιώντας τα πρωτότυπα κείμενα επιστημόνων όπως ο Newton, ο Leibniz και ο Torricelli και ούτε θεωρούνται κλασικά τα πρώτα κείμενα μιας μαθηματικής θεωρίας. Κλασικό, κατά τον Rota (1990a), θεωρείται το εγχειρίδιο που εμπεριέχει όλα τα εξελικτικά βήματα κατανόησης μιας μαθηματικής θεωρίας. Για κάθε μαθηματική θεωρία υπάρχει μια δύναμη καινούργια έκθεση – περιγραφή, αποτέλεσμα μεγάλης και λεπτομερούς έρευνας. Στη φιλοσοφία, αντίθετα, η διδασκαλία γίνεται μέσα από τα πρωτότυπα κείμενα. Για να μελετήσει, για παράδειγμα, κάποιος τη φαινομενολογία, είναι απαραίτητο να ασχοληθεί με τα αρχικά κείμενα του Husserl. Όσες ιστορικές και φιλοσοφικές αναλύσεις και αν δοθούν σε κάποιον για την φαινομενολογία, παρόλη την αξία τους, δεν θα μπορέσουν να του διδάξουν ολόκληρο το φάσμα της, όπως συμβαίνει κατά τη διδασκαλία ενός τομέα όπως είναι η μαθηματική ανάλυση. Η αντίληψη αυτή οδήγησε τον Rota στην προσπάθεια να επαναδιατυπώσει τις απόψεις του Husserl, με οδηγό το πνεύμα ενός μαθηματικού που πασχίζει να κατανοήσει σε βάθος μια μαθηματική θεωρία. Η έννοια ενός μαθηματικού θεωρήματος, για τον Rota, δεν εξατομικεύεται στα ιστορικά στοιχεία ή τη βιογραφία αυτού που το ανακάλυψε επειδή τα στοιχεία αυτά σίγουρα δεν προσφέρουν τίποτα στην κατανόησή του. Αυτό δεν σημαίνει ωστόσο ότι υποτιμάει την ιστορική διάσταση της γνώσης.

Σε ορισμένα φιλοσοφικά ρεύματα, υπάρχει η πεποίθηση πως η επιστήμη είναι κατ'εξοχήν τεχνική. Αντίθετα, όπως σημειώνει ο Palombi (2011, 17-18), ο Rota είναι πεπεισμένος τόσο για το βάθος κάθε επιστημονικής ανακάλυψης όσο και για την δυνατότητα σύζευξης μιας επιστημολογικής έρευνας με «δυσάρεστες» φιλοσοφικές παραδόσεις όπως η επιστημολογικο-ερμηνευτική. Η ερμηνεία, κατά τον Ricoeur (1981), αντανakλά τις συνθήκες ανάπτυξης επιστημολογικών φιλοσοφικών δυνατοτήτων με πιο σημαντική συνθήκη την «έννοια», η πρωταρχική διάσταση της οποίας μας δίνει την δυνατότητα να κατανοήσουμε κάθε φυσικό και πολιτιστικό φαινόμενο. Η αξία της φαινομενολογίας για τον Rota, οφείλεται ακριβώς στην «έννοια» και τη φιλοσοφική προοπτική και όχι στα «απατηλά» δήθεν οριστικά

συμπεράσματα. Οι φαινομενολογικές περιγραφές δεν είναι οριστικές, καθώς υπάρχει η πιθανότητα αποκάλυψης στο μέλλον χαρακτηριστικών που έχουν στο παρελθόν αγνοηθεί. Τα «παραμελημένα» αυτά χαρακτηριστικά μπορούμε να τα αναλύουμε ξανά και ξανά με γνώμονα τις καινούργιες ανάγκες που έρχονται στο φως και που στην παρούσα φάση δεν μπορούμε να προβλέψουμε.

Από την άλλη πλευρά, το «πνεύμα» της φαινομενολογικής έρευνας για τον Rota μπορεί εύκολα να παρερμηνευθεί, ειδικότερα όταν οι φιλόσοφοι ταυτίζουν την φιλοσοφική απόδειξη με την απόδειξη της μαθηματικής λογικής. Ο Rota πιστεύει ότι οι συχνά αναφερόμενες λέξεις στο φιλοσοφικό λόγο όπως «επιχείρημα», «σχέση», «πρόβλημα», «λύση», «αντιστοιχία» και «λειτουργία» δεν πρέπει να επιδέχονται την συνήθη συμβατική ερμηνεία.

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της γραφής του Rota είναι η σημασία που αποδίδει στα *παραδείγματα* ως εργαλείο αποσαφήνισης των εννοιών. Δεν βασίζεται σε γενικεύσεις και αμφιβάλλει για την αποτελεσματικότητα των ορισμών, δηλώνει επιπλέον ξεκάθαρη προτίμηση σε αναφορά υποδειγματικών περιπτώσεων.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η επιφύλαξή του για τον ορισμό. Όπως δηλώνει ο ίδιος (στο ίδιο, 22) η μάθηση εννοιών είναι μια σύνθετη διαδικασία ανατροφοδότησης – φαινομενολογικής προοπτικής- και ο ορισμός μιας έννοιας είναι απλά ένα από τα βήματα. Στην φαινομενολογία οι ορισμοί πρέπει να αφήσουν χώρο στα παραδείγματα, αφού η κατανόηση προκύπτει από την επανάληψη χαρακτηριστικών περιπτώσεων που αναδεικνύουν τα κοινά τους χαρακτηριστικά.

3. Ο Rota για την ύπαρξη και το οντολογικό status των μαθηματικών αντικειμένων

Το ερώτημα της ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων αποτέλεσε μείζον ζήτημα για τους φιλοσόφους των μαθηματικών κατά τον 20^ο αιώνα. Οι πιθανές απάντησεις που μπορούν να δοθούν σε αυτό είναι τέσσερις: ναι, όχι, δεν γνωρίζουμε ή η ερώτηση αυτή δεν σχετίζεται με τη μαθηματική πρακτική. Με την τέταρτη επιλογή συντάσσεται και ο Gian-Carlo Rota ο οποίος δηλώνει πως τόσο η ερώτηση περί της ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων όσο και η ύπαρξη αυτή καθ' εαυτή είναι μηδαμινής σημασίας, καθώς η αλήθεια οποιασδήποτε μαθηματικής πρότασης δεν θα επηρεαζόταν, ακόμα και αν η μη ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων μπορούσε να αποδειχθεί πέραν πάσης αμφιβολίας. Αντίθετα, στις αναλυτικές προσεγγίσεις της φιλοσοφίας των μαθηματικών, η μη ύπαρξη των αριθμών πχ. 2, 4 ως αντικειμένων επηρεάζει την τιμή αληθείας της πρότασης « $2+4 = 6$ ». Θεωρείται δηλαδή ότι εάν η συγκεκριμένη πρόταση είναι αληθής (που είναι, ούτως ή άλλως) τότε υπάρχουν τα αντικείμενα αναφοράς των ενικών όρων '2', '4'. Μάλιστα, ο αντιπλατωνιστής H. Field που δεν αναγνωρίζει την ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων, χαρακτηρίζει τις προτάσεις των μαθηματικών ως «αδιάφορα (ή κατά κενό τρόπο) αληθείς» (vacuously true).

Σύμφωνα ωστόσο με τον Rota, που δεν συμμερίζεται τις θεωρίες της αναλυτικής φιλοσοφίας, ο άνθρωπος και ειδικότερα η συναισθηματική του ανάγκη για αμεταβλητότητα και σταθερότητα είναι ο λόγος για την αναζήτηση της ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων. Αυτός είναι ο λόγος που -κατά τη γνώμη του- έχουν αναπτυχθεί οι διάφορες πλατωνιστικές προσεγγίσεις των μαθηματικών. Αλλά αυτή η διαπίστωση -ο ίδιος θεωρεί- πως είναι κάτι που αφορά τον τομέα της ψυχολογίας περισσότερο παρά της φιλοσοφίας. Όπως αναφέρει ο Cellucci (2009, 212), την ίδια άποψη (ότι η ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων είναι αδιάφορη για την μαθηματική πρακτική) συμμερίζονται και οι εμπειριστές Locke, Hume και ο ρασιοναλιστής Descartes. Ο τελευταίος συγκεκριμένα, πίστευε πως η Αριθμητική και η Γεωμετρία είναι αδιάφορες ως προς την ύπαρξη αυτών των μαθηματικών αντικειμένων ενώ ο ιντουϊσιονιστής Brower επιχείρησε τη δημιουργία εναλλακτικών

μαθηματικών αποκλειστικά με κατασκευασμένα μαθηματικά αντικείμενα, τα οποία και μόνο θεωρούσε υπαρκτά. Απέτυχε όμως κατά την εφαρμογή των εναλλακτικών αυτών μαθηματικών, καθώς η προσπάθεια αυτή απέκλεισε μεγάλο μέρος της μαθηματικής δραστηριότητας, ακόμα και στοιχειώδεις έννοιες των μαθηματικών που ενδιαφέρουν μάλιστα την φυσική, όπως για παράδειγμα οι ασυνεχείς πραγματικές συναρτήσεις.

Σύμφωνα με τον Cellucci (2009, 213), για τον Rota, έννοιες όπως ποίημα, τιμές, αξία, συναίσθημα, υποατομικά σωματίδια και επιφάνειες Riemann είναι αντικείμενα «ιδεατά», με μια έννοια που δέχεται ο E. Husserl στις *Λογικές Έρευνες*. Ο R. Tieszen (2005) εξηγεί την φαινομενολογική προσέγγιση των μαθηματικών αντικειμένων ως «ιδεατών» αναφερόμενος στην υπερβατολογική τους συγκρότηση στη συνείδηση. Αυτή η συγκρότηση υπερβαίνει κάθε υποκειμενική ατομικότητα και δεν αποτελεί αντικείμενο μελέτης της ψυχολογίας. Τα μαθηματικά αντικείμενα, οι μαθηματικές σχέσεις και οι μαθηματικοί νόμοι αποτελούν για τον Rota ιδεατά αντικείμενα.

Σύμφωνα με τον Rota, τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι φυσικά με την έννοια που είναι οι καρέκλες, τα ποτάμια ή τα ηλεκτρόνια και δεν μπορούν να αναχθούν σε τέτοιου είδους αντικείμενα. Αλλά δεν είναι ούτε νοητικές κατασκευές, ούτε ανάγονται σε νοητικούς μηχανισμούς. Αυτές οι απόψεις συμφωνούν με την φαινομενολογική προσέγγιση διότι τα ιδεατά αντικείμενα του Husserl δεν είναι ούτε φυσικά αντικείμενα ούτε νοητικά. Έχουν υπερβατολογικό status. Αλλά ο Rota, πέρα από τις φαινομενολογικές του καταβολές, έχει περαιτέρω ιδέες για τη φύση του μαθηματικού αντικειμένου: κάθε μαθηματικό αντικείμενο ικανοποιεί μια συναρτησιακού χαρακτήρα σχέση. Για παράδειγμα η συναρτησιακή σχέση $()^2 + 1 = 10$ συμπληρώνεται από τον αριθμό 3. Το αντικείμενο δηλαδή που προϋποτίθεται για την συγκεκριμένη συνθήκη είναι ο αριθμός 3. Η θέση αυτή μας θυμίζει την άποψη του Frege για το διαχωρισμό έννοιας και αντικειμένου. Μια έννοια είναι, μια ακόρεστη οντότητα που δηλώνεται από ένα κατηγορημα. Αντίθετα, ένα όνομα αναφέρεται σε ένα αντικείμενο που είναι πλήρης οντότητα. Η έννοια συμπληρώνεται από ένα αντικείμενο και κάνουν μαζί πρόταση πχ. η έννοια 'είναι περιττός' συμπληρώνεται από το αντικείμενο 7 και έτσι παράγεται η πρόταση «Ο 7

είναι περιττός». Για τον Frege τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αυθύπαρκτες οντότητες. Για τον Rota είναι ιδεατά αντικείμενα (βλ και Χριστοπούλου, 2015, 80).

Τί είναι όμως τα ιδεατά αντικείμενα και πώς διαφέρουν από τα αφηρημένα; Όπως αναφέρει η Δ. Χριστοπούλου (2015, 80-85), ενώ η αναλυτική μεταφυσική ασχολείται με τα αφηρημένα αντικείμενα και οι ρεαλιστές αναλυτικοί φιλόσοφοι δέχονται τα αφηρημένα αντικείμενα ως ανεξάρτητες μη χωροχρονικές οντότητες, η φαινομενολογία απορρίπτει οποιαδήποτε μεταφυσική στάση και ασχολείται με τον τρόπο που τα ιδεατά αντικείμενα καθίστανται παρόντα στη συνείδηση. Κατά τον φαινομενολόγο Tieszen τα ιδεατά αντικείμενα αποτελούν σταθερά στοιχεία των φαινομένων και σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να θεωρούνται φανταστικά. Για την φαινομενολογία αυτό που έχει σημασία είναι ο τρόπος με τον οποίο συγκροτούνται μέσω της αποβλεπτικότητας του υποκειμένου, τα ιδεατά αντικείμενα. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της αποβλεπτικότητας θα ανατρέξουμε αρχικά στον ορισμό του Rota για τους αριθμούς τους οποίους προσδιορίζει, ακολουθώντας τα βήματα του Husserl (και του Frege), ως 1-1 αντιστοιχίες ανάμεσα σε συλλογές αντικειμένων. Ο G. Frege αλλά κι ο H. Weyl ασχολήθηκαν με τη σύνδεση των αριθμητικών ταυτοτήτων με 1-1 αντιστοιχίες. Ο Frege στα *Grundlagen der Arithmetik*, εισήγαγε μια καθολικά ποσοδευμένη ισοδυναμία μεταξύ μιας αριθμητικής ταυτότητας και μιας 1-1 αντιστοιχίας των πραγματώσεων δεδομένων εννοιών (η οποία ονομάζεται και Hume's Principle):

$$(\forall F)(\forall G) [(N_x : Fx = N_x : Gx) \leftrightarrow (F \text{ 1-1 } G)]$$

Επίσης, σύμφωνα με τον Weyl (1949, 10-11), οι αριθμοί είναι *ιδεατά* αντικείμενα τα οποία προέρχονται από τα αμετάβλητα στοιχεία (invariants) των νοητικών μας καταστάσεων που εκφράζονται μέσω 1-1 αντιστοιχιών μελών συλλογών. Το υποκείμενο αποβλέπει σε σχέσεις ισοδυναμίας, όπως είναι οι 1-1 αντιστοιχίες, αναγνωρίζει τα αμετάβλητα στοιχεία (invariants) που ενυπάρχουν σε αυτή τη σχέση ισοδυναμίας και τα μετασχηματίζει μέσω της εποπτείας σε αριθμητικά αντικείμενα. Ο ρόλος του υποκειμένου στην συγκρότηση ενός αριθμού μέσω μιας 1-1 αντιστοιχίας παρουσιάστηκε και από τον ίδιο τον Rota. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρει (1986, 247-248) πως το υποκείμενο οδηγείται σε έναν αριθμό, αποβλέποντας στην 1-1 αντιστοιχία μελών συλλογών και αγνοώντας τα άλλα χαρακτηριστικά των

αντιστοιχιζόμενων πραγμάτων (πχ. μια συλλογή από τρία μολύβια και μια συλλογή από τρεις μπίλιες). Κανένα αντικείμενο κατά τον Rota δεν μπορεί να δοθεί, εάν δεν υπάρξει η παρέμβαση του υποκειμένου, το οποίο επεξεργάζεται συγκεκριμένα χαρακτηριστικά μιας δυνητικά άπειρης συλλογής. Όταν το υποκείμενο αποβλέπει, η πράξη του αυτή κατευθύνεται προς όλα τα πολλαπλά επίπεδα της πραγματικότητας, την οποία και διανοίγει ή αλλιώς «ξεκλειδώνει» και σε καμία περίπτωση δεν θα πρέπει να ερμηνεύεται η πράξη αυτή ως πραγματιστική επιδίωξη ενός στόχου. Αξίζει εδώ να σημειωθεί πως επ' ουδενί δεν θα πρέπει να θεωρήσουμε πως τα συγκροτούμενα ιδεατά αντικείμενα εγκλωβίζονται στην ατομική υποκειμενικότητα, καθώς το νόημα είναι δημόσιο. Όπως δηλώνει και ο Sokolowski (2000, 94), η συγκρότηση ενός αντικειμένου δεν σημαίνει ότι το εμφανίζουμε με τον τρόπο που εμείς επιλέγουμε, αλλά πως αυτό διαρθρώνεται και έρχεται στο προσκήνιο. Στο πλαίσιο αυτό εντάσσεται και η κατά Rota ερμηνεία των ιδεατών αντικειμένων.

Σύμφωνα με τον Sokolowski (2000, 156-159), οι νεότερες επιστήμες ασχολούνται με πράγματα που έχουν γίνει ιδεατά όπως είναι οι επιφάνειες χωρίς τριβή, οι ακτίνες φωτός και άλλα, τα οποία δεν δημιουργούνται από το μηδέν αλλά αποτελούν προβολές πραγμάτων που έχουν τις ρίζες τους στην εμπειρία. Η ιδέα της γεωμετρικής επιφάνειας ξεκινάει από μια γνωστή επιφάνεια όπως αυτή ενός τραπεζιού, τη λείανση της οποίας φανταζόμαστε στο αζεπέραστο όριο, στα όρια δηλαδή του λείου. Η πλήρως λεία επιφάνεια είναι ένα ιδεατό αντικείμενο που όπως και κάθε ιδεατό συγκροτείται μέσω μιας ειδικής μορφής αποβλεπτικότητας που αποτελείται από ένα μείγμα αντίληψης και φαντασίας που έχει σημείο εκκίνησης κάτι που βρίσκεται στον κόσμο και στο οποίο ταυτοποιούμε ένα γνώρισμα που επιδέχεται διακύμανσης και καταλήγει σε κάτι που μοιάζει πια να μην βρίσκεται στον κόσμο μας. Τα ιδεατά αντικείμενα είναι πιο ακριβή, αποτελούν τη τέλεια εκδοχή του αντικειμένου που δίνεται από την εμπειρία και διατηρούν κάτι από το περιεχόμενό του. Για τη φαινομενολογία, οι μαθηματικές επιστήμες δεν είναι σε θέση να δώσουν λόγο για την ύπαρξή τους αφού υστερούν στη διαχείριση εννοιών όπως η αντίληψη και η ενθύμηση.

Σύμφωνα με τον Rota, τα ιδεατά αντικείμενα οφείλουν να περιφρουρούν τα κύρια χαρακτηριστικά των πραγματικών αντικειμένων που εξιδανικεύουν, δήλωση που ωστόσο, έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι ορισμένα μαθηματικά αντικείμενα –

όπως πχ. τα άπειρα σύνολα- δεν διαθέτουν κανένα κοινό στοιχείο με τα πραγματικά αντικείμενα.

Η θεώρηση των μαθηματικών αντικειμένων ως ιδεατών, υποβιβάζει την εφαρμογή των μαθηματικών στο φυσικό κόσμο. Αυτή είναι μια άποψη του Rota που επισημαίνει ο Cellucci (2009, 213): Ας αναλογιστούμε την πρόταση: «Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι ίσο με 2 ορθές».

Η δήλωση αυτή είναι της μορφής $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$, όπου $P(x)$: x είναι τρίγωνο και $Q(x)$: Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του x είναι ίσο με 2 ορθές. Ο Cellucci θεωρεί ότι η πρόταση αυτή της μορφής $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ είναι κενή αληθείας στον φυσικό κόσμο (επειδή δεν υπάρχουν φυσικά τρίγωνα). Αναλόγως και η πρόταση «Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών δεν είναι ίσο με 2 ορθές» αποτελεί μια πρόταση κενή αληθείας στον φυσικό κόσμο. Ο νομιναλιστής Field θα συμφωνούσε για την κενότητα των τιμών αληθείας των μαθηματικών προτάσεων με βάση την θέση του ότι τα μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι υπαρκτά. Ένας ρεαλιστής φιλόσοφος όμως, θα αντέτασσε την άποψη ότι οι μαθηματικές προτάσεις έχουν τιμές αληθείας και είναι αληθείς στο βαθμό που υπάρχουν αφηρημένα αντικείμενα και αφηρημένες καταστάσεις πραγμάτων που παίζουν το ρόλο των αληθοποιητών. Ο Rota βέβαια δεν είναι ούτε ρεαλιστής αλλά ούτε και νομιναλιστής, επειδή δεν τον ενδιαφέρει το ζήτημα της ύπαρξης ή όχι των μαθηματικών αντικειμένων. Η επισήμανσή του για τις παραπάνω προτάσεις αφορά την αδυνατότητα αυστηρής εφαρμογής των εν λόγω προτάσεων στον φυσικό κόσμο.

Σύμφωνα με τον Rota (1997, 119), υπάρχει κάτι το παράδοξο στην αλήθεια όχι μόνο των μαθηματικών αλλά και κάθε επιστήμης. Από τη μια, τα μαθηματικά γεγονότα ακολουθούν την *a posteriori* συμπεριφορά της φύσης και τα μαθηματικά αποτελούν ουσιαστικά καταγραφή φαινομένων ανεξάρτητων του ανθρώπινου νου και από την άλλη η αιτιολόγησή τους καταλήγει πάντα στην αναγωγή τους σε μια αναλυτική δήλωση. Κατά τον Rota, η ιδεατότητα των μαθηματικών αντικειμένων είναι συνδεδεμένη με την εξιδανίκευση στο πλαίσιο κάθε επιστήμης. Η εξιδανίκευση μέσω των μαθηματικών, όπως και της μαθηματικοποιημένης επιστήμης γενικότερα, θα οδηγήσει τελικά στην κατάργηση των συνθετικών *a- posteriori* προτάσεων. Με οδηγό τη δήλωση αυτή, ο Rota τονίζει πως όχι μόνο τα μαθηματικά αντικείμενα είναι

ιδεατά αλλά το σύνολο των επιστημονικών προτάσεων τείνουν να γίνουν αναλυτικές και οι διατυπωμένοι από την επιστήμη νόμοι του κόσμου τείνουν να καταστούν *a-priori* (εξαιτίας της έντονης μαθηματικοποίησής τους). Υποστηρίζει, με άλλα λόγια, πως οι μαθηματικοί κατασκευάζουν ιδεατούς νόμους τους οποίους και επιβάλλουν έπειτα στον φυσικό κόσμο. Η παράξενη άποψη του Rota αναφέρεται στο μέλλον και στην ολοένα και περισσότερο μαθηματικοποιημένη επιστήμη η οποία εν τέλει θα καταστεί κι αυτή *a priori*. Αυτός ο ισχυρισμός έρχεται σε αντίθεση με την τρέχουσα οπτική. Η αντίληψη των ανθρώπων για τον φυσικό κόσμο, με τους δικούς τους όρους διαμορφώνει τελικά την επιστήμη η οποία και περιγράφει *a posteriori* συνθετικά τα γεγονότα της φύσης. Με δεδομένο λοιπόν πως τα γεγονότα της φύσης δεν αποτελούν αλήθειες της λογικής, δεν αποτελούν ταυτολογίες, οι νόμοι του κόσμου δεν μπορούν να θεωρηθούν αναλυτικοί. Όπως ο Cellucci παρατηρεί (2009, 213), οι «φανταστικές κατασκευές» των μαθηματικών που επικαλείται ο Rota δεν μπορούν να θεωρηθούν εντελώς άσχετες με τη φυσική πραγματικότητα αφού, για να είναι κατάλληλες για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων, είναι εξαρτώμενες από τη φυσική και βιολογική σύσταση του φυσικού κόσμου. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 168), τα μαθηματικά αντικείμενα μπορούν εξίσου να θεωρηθούν είτε ως γεγονότα του φυσικού κόσμου, είτε ως αναλυτικές δηλώσεις που προκύπτουν από ένα αξιωματικό σύστημα, ενώ το εννοιολογικό πλαίσιο ενός μαθηματικού αντικειμένου το κατατάσσει ως *a priori* ή ως συνθετικό.

Όπως αναφέρει ο Cellucci (2009, 213-215), εκτός από τη σύλληψη των μαθηματικών αντικειμένων ως ιδεατών, υπάρχει και μία πιο συγκεκριμένη προσέγγιση του Rota, αυτή του μαθηματικού αντικειμένου ως «υπόθεση» ικανοποίησης μιας δεδομένης συνθήκης. Η ύπαρξη του μαθηματικού αντικειμένου γίνεται αντιληπτή με μεταφορικό τρόπο: εάν ικανοποιείται η συγκεκριμένη συνθήκη δεχόμαστε την ύπαρξη, ενώ εάν δεν ικανοποιείται, όχι. Για παράδειγμα, ένας άρτιος αριθμός x είναι η υπόθεση ότι ικανοποιείται η συνθήκη $x=2*y$ για κάποιον ακέραιο αριθμό y .

Η άποψη αυτή έχει τις ρίζες της στην φιλοσοφική θεώρηση του Πλάτωνα που ανέφερε πως όσοι ασχολούνται με την Γεωμετρία, την Αριθμητική και άλλες σχετικές επιστήμες, υποθέτουν τις γωνίες, υποθέτουν τα τρίγωνα και οτιδήποτε άλλο σχετίζεται με τις επιστήμες αυτές. Τα μαθηματικά αντικείμενα και οι ιδιότητές τους

είναι υποθέσεις, η σημασία τους μπορεί να γίνει κατανοητή μόνο με την εισαγωγή καινούργιων υποθέσεων. Η μέθοδος των μαθηματικών για τον Πλάτωνα είναι η αξιωματική μέθοδος, η οποία αποτελεί μια διαβάθμιση της διαλεκτικής μεθόδου και αυτό, γιατί η διαδικασία αυτή έχει ως αφετηρία μια αρχή (αξίωμα) που επιλέγεται, χωρίς να υπάρχει ουσιαστική γνώση αυτής και χωρίς κανέναν να λογοδοτεί για αυτή. Με άλλα λόγια, ένα αξίωμα είναι μία υπόθεση. Τα μαθηματικά αντικείμενα ορίζονται ως υπαρκτές μεν, ανεξάρτητες δε οντότητες που γίνονται αντιληπτές μέσω της διανοητικής διαίσθησης/εποπτείας, της μόνης ικανότητας κατανόησης πρωταρχικών, θεμελιωδών αρχών. Η διανοητική διαίσθηση όμως, κατά τον Πλάτωνα, είναι δυνατή μόνο εφόσον αφήσουμε το σώμα και μελετήσουμε τα πράγματα με την ψυχή, ενώ μέχρις ότου επιτευχθεί αυτό, το μόνο που μπορούμε είναι να δηλώνουμε γενικές υποθέσεις και να προσεγγίζουμε με την μέγιστη δυνατότητα τα μαθηματικά αντικείμενα.

Η προσέγγιση των μαθηματικών αντικειμένων ως «υποθέσεων» δεν πρέπει να συγχέεται με αυτή των μαθηματικών αντικειμένων ως «μύθων», την οποία πρεσβεύει ο φιξιοναλισμός/νομιναλισμός του Field. Αυτός δηλώνει πως στα μαθηματικά δεχόμαστε έναν μύθο για τους φυσικούς αριθμούς, έναν για τα σύνολα και ούτω καθεξής. Η πρόταση: « $3+2=5$ » είναι αληθής με τον ίδιο τρόπο που είναι αληθής και η πρόταση: «Ο Sherlock Holmes ζούσε στο Λονδίνο», με τη διαφορά ότι η αλήθεια της πρώτης κατοχυρώνεται συνήθως από τους νόμους των μαθηματικών ενώ της δεύτερης από μια ευρέως γνωστή ιστορία. Όμως, πρέπει να διευκρινιστεί πως οι μύθοι διαφέρουν από τις υποθέσεις καθώς, ενώ οι μύθοι εκφράζονται με την επίγνωση ότι δεν είναι αληθείς, οι υποθέσεις από την άλλη πλευρά διατυπώνονται με απώτερο σκοπό την προσέγγιση μίας άγνωστης πραγματικότητας. Συνεπώς, γίνεται για ακόμα μια φορά σαφές ότι ο Rota δεν υποστηρίζει καμιά φιξιοναλιστική προσέγγιση.

Τέλος, σύμφωνα με τον Rota (1997, 225), μία πολλά υποσχόμενη, κυρίως για τους λογικιστές, ιδέα είναι η απόδειξη της ύπαρξης ενός μαθηματικού αντικειμένου μέσω της απόδειξης της θετικής πιθανότητας της ύπαρξής του. Δηλώνει δε βέβαιος για την πιθανότητα δημιουργίας μιας καινούργιας λογικής στηριζόμενη στην πιθανολογική αιτιολόγηση, την οποία όμως πολύ δύσκολα θα αποδεχτούν οι φιλόσοφοι των μαθηματικών.

4. Η Ταυτότητα του μαθηματικού αντικειμένου

Σύμφωνα με τον Cellucci (2009, 215), η αξιωματική μέθοδος, η μέθοδος των μαθηματικών κατά τον Rota, όχι μόνο δεν επαρκεί για την ορθή και πλήρη περιγραφή της δομής ενός μαθηματικού αντικειμένου, αλλά και το μαθηματικό αντικείμενο είναι ανεξάρτητο από οποιοδήποτε αξιωματικό σύστημα (πρβλ. Χριστοπούλου, ό.π.).

Σύμφωνα με τον Rota (1997, 160), η ανεξαρτησία των μαθηματικών αντικειμένων με τα αξιωματικά συστήματα, είναι ανάλογη της ανεξαρτησίας των ιδεών (εννοιών), ως προς τις λέξεις που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή τους, χωρίς όμως να σημαίνει ότι είναι ανεξάρτητη η ύπαρξή τους. «Τα μαθηματικά αντικείμενα όπως η ευθεία γραμμή, το τρίγωνο και οι φυσικοί αριθμοί μοιράζονται την ιδιότητα της διατήρησης της ταυτότητας, την ίδια στιγμή που δέχονται αξιωματικές παρουσιάσεις που μπορεί να διαφέρουν ριζικά» (Rota, 1997, 151).

Για τον Rota, είναι ξεκάθαρο πως η ταυτότητα ενός μαθηματικού αντικειμένου παραμένει η ίδια ανεξάρτητα από την αξιωματική μέθοδο με την οποία αυτό παρουσιάζεται, καθώς η παρουσίαση ενός μαθηματικού συστήματος είναι συντακτικής σημασίας, δίνεται δηλαδή μέσω αξιωμάτων και συμπερασματικών κανόνων και οδηγεί σε ορισμό. Οι κανόνες και τα αξιώματα προσθέτουν μια καινούργια «δομή» σε μία συλλογή κλάσεων μαθηματικών αντικειμένων, όπως για παράδειγμα τη δομή της ομάδας, και ονομάζουμε μοντέλο ενός αξιώματος οποιαδήποτε δομή ικανοποιεί τα συγκεκριμένα αξιώματα. Η σημασιολογική ερμηνεία μιας θεωρίας είναι ουσιαστικά η περιγραφή όλων των μοντέλων του, ενώ η αμεταβλητότητα της ταυτότητας των μαθηματικών αντικειμένων σημαίνει τελικά, ότι διαφορετικές συντακτικές παρουσιάσεις μπορούν να αφορούν σημασιολογικώς ίδια αντικείμενα, δηλαδή ίδια μοντέλα.

Αυτό δεν σημαίνει ότι ο Rota απαξιώνει την αξιωματική παρουσίαση την οποία θεωρεί (1997, 90) αναπόδραστη για τη μαθηματική πρακτική. Τα μαθηματικά γεγονότα, σε αντίθεση με τα φυσικά, δεν υπόκεινται σε πειραματική επιβεβαίωση. Τα μαθηματικά γεγονότα ούτε επιβεβαιώνονται ούτε ανατρέπονται από την εμπειρία. Τα μαθηματικά όμως δεν είναι τα τυπικά τους συστήματα. Ο Rota (1990, 256), επισημαίνει την εσφαλμένη ταύτιση των μαθηματικών με τα αξιωματικά τους

συστήματα, την οποία αποδίδει στην ταύτισή τους με έναν συγκεκριμένο τρόπο παρουσίασης. Ένας τομέας που υστερεί η αξιωματική παρουσίαση είναι η αποτύπωση της γνωσιολογικής πορείας της απόδειξης του θεωρήματος. Παραβλέπεται ο νοητικός δρόμος που καταλήγει στην διατύπωση των μαθηματικών προτάσεων, οι οποίες τελικά παρουσιάζονται αποκρυσταλλωμένες, γεγονός που βρίσκει άκρως αντίθετο τον Rota που δείχνει μεγάλο ενδιαφέρον για τον τομέα της ανακάλυψης και διδασκαλίας ενός θεωρήματος, πεδία που αντίθετα με την δικαιολόγηση, η τυπική αποδειξιμότητα παίζει δευτερεύοντα ρόλο. Ειδικά στον τομέα της διδασκαλίας, η παρουσίαση της νοητικής πορείας που οδηγεί στη λύση παίζει πρωτεύοντα ρόλο (πρβλ. Χριστοπούλου, 2015, 77-78).

Μία ενδιαφέρουσα προσέγγιση εκφράζει ο Rota στο ζήτημα της ταυτότητας των μαθηματικών αντικειμένων και στο κατά πόσο αυτή προϋποθέτει ή όχι την ύπαρξη, τονίζοντας τη σημασία της διάκρισης ανάμεσα σε ύπαρξη και ταυτότητα. Όπως σημειώνει η Δ. Χριστοπούλου (2015, 78-79), σύμφωνα με τον Rota (1997, 187), η ταυτότητα αποτελεί το έσχατο οντολογικό στοιχείο του μαθηματικού αντικειμένου και παραμένει σταθερή καθ' όλες τις εμφανίσεις του. Δεν ανάγεται σε νοητικές διαδικασίες, προϋποτίθεται οποιασδήποτε ύπαρξης χωρίς να την προϋποθέτει και είναι αναλλοίωτη. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 185), η ταυτότητα είναι ο απροσδιόριστος όρος και το περιεχόμενό της, τα αξιώματα από τα οποία πηγάζει ο κόσμος. Ενώ εξωτερικά το πρόβλημα της ύπαρξης για την φιλοσοφία προκύπτει από την ανάγκη μας να θέσουμε μια φυσική βάση του κόσμου, εσωτερικά πρόκειται για την κατανόηση της ταυτότητας. Η ταυτότητα προϋπάρχει της ύπαρξης.

Όπως τονίζει ο Rota (1997, 187), η ταυτότητα δεν μπορεί να θεωρηθεί διαδικασία, ούτε καν νοητική, πόσο μάλλον να αναχθεί σε μία διαδικασία, ενώ σε καμία περίπτωση δεν μπορούμε να κατανοήσουμε το μηχανισμό της, αφού δεν μπορεί να θεωρηθεί μηχανισμός. Όλες οι επιστημονικές νοητικές διεργασίες προϋποθέτουν το φαινόμενο της ταυτότητας. Τα σχεσιακά συστήματα συνεχίζει (1997, 158), που χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε ένα μαθηματικό αντικείμενο δεν ταυτίζονται με την ταυτότητά του. Μπορούμε να δώσουμε για παράδειγμα πολλούς ορισμούς για το τρίγωνο. Κανένας όμως, δεν είναι το ίδιο το «τρίγωνο» ως αντικείμενο.

Σύμφωνα με τον Cellucci (2009, 215-217), ο Rota θεωρεί ότι η μαθηματική ταυτότητα δεν έχει υπόσταση ούτε νοητική ούτε φυσική και υπάρχει δυσκολία στο να προσδιοριστεί. Οι ιδιότητές της δεν μπορεί να είναι κάτι άλλο πέρα από λογικές, γι αυτό δεν είναι δυνατό να «αντλήσουμε» τον κόσμο αλλά ούτε καν κάποια χαρακτηριστικά του από αυτές. Η δυσκολία αυτή βέβαια, μπορεί να αποφευχθεί εάν θεωρήσουμε τα μαθηματικά αντικείμενα ως υποθέσεις (με την έννοια που προαναφέρθηκε) και αυτό γιατί οι υποθέσεις (περί της ικανοποίησης δεδομένων συνθηκών), παρόλο που δεν προσφέρουν πληροφορίες για την ύπαρξή τους, έχουν προσδιορισμένη ταυτότητα. Η ταυτότητα, επομένως, των μαθηματικών αντικειμένων προσδιορίζεται με βάση την θεώρησή τους ως υποθέσεων για την ικανοποίηση συνθηκών. Το 6 είναι ο συγκεκριμένος άρτιος γιατί καλύπτει την συνθήκη « $x = 2 \cdot y$ » με $y=3$. Ο χαρακτηρισμός όμως αυτός, μέσω υποθέσεων, είναι παροδικός και μερικός αφού η αλληλεπίδρασή του με άλλα αντικείμενα μπορεί να τον μεταβάλλει, προσφέροντας νέους προσδιορισμούς των μαθηματικών αντικειμένων και αποκαλύπτοντας νέες ιδιότητες που μπορεί να τροποποιούν ή να αντικαθιστούν την αρχική υπόθεση. Η διαδικασία αυτή είναι ατέρμονη όπως και η αλληλεπίδραση των μαθηματικών αντικειμένων με άλλα αντικείμενα. Ας δούμε για παράδειγμα την ευθεία γραμμή. Από τον Ευκλείδη χαρακτηρίζεται από μια υπόθεση: την υπόθεση ενός χωρίς πλάτος μήκους, ενώ από τους Cantor και Dedekind χαρακτηρίζεται από την υπόθεση για τους πραγματικούς αριθμούς.

5. Μαθηματικός Ορισμός

Ας έρθουμε στο θέμα των μαθηματικών ορισμών. Τί είναι ο ορισμός για τα Μαθηματικά; Ο G. Frege, βασικός υποστηρικτής του λογικισμού, δηλώνει πως ο ορισμός είναι απλά ένα μέσο σύμπτυξης περιεχομένων που διευκολύνει τον χειρισμό τους, χωρίς όμως να διευρύνει τη γνώση (αναλυτικότητα ορισμών). Έτσι, πχ. ο κύκλος είναι το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από ένα συγκεκριμένο σημείο Ο. Με τον όρο ‘κύκλος’ συμπυκνώνουμε το περιεχόμενο της διατύπωσης μετά το ‘είναι’. «Η αποκατάσταση των ακριβών ορισμών σε ένα αξιωματικό σύστημα, αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα των μαθηματικών του 20^{ου} αιώνα» (Rota, 1997, 48). Τα μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να οριστούν με ακρίβεια, αποκλείοντάς τα κατά αυτό τον τρόπο από τη σφαίρα της φαντασίας. Ο Rota πιστεύει ότι χρειάζεται ιδιαίτερη έμφαση στον ερευνητικό χρόνο που δαπανείται για την εύρεση του κατάλληλου ορισμού, έτσι ώστε να δηλωθούν σωστά όσα ξέρουμε ότι είναι ήδη αληθή. Ο ορισμός είναι το αποτέλεσμα μιας κοπιαστικής πορείας αναζήτησης. Πρέπει όμως, τονίζει, να διαχωρίσουμε τον ορισμό από την περιγραφή. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 161), η σωστή φαινομενολογική περιγραφή των μαθηματικών αντικειμένων είναι αυτή που εισήγαγε ο Husserl και συνίσταται σε μια καταγραφή των μαθηματικών αντικειμένων μαζί με τα φαινομενολογικά χαρακτηριστικά τους, χωρίς να αγνοούνται οποιεσδήποτε ανομοιογένειες και ασυμβατότητες και χωρίς την επιβολή κανονιστικών ισχυρισμών.

Όπως τονίζει ο Rota (1997, 48-50), λιγότερα βήματα εμφανίζονται στον τομέα της περιγραφής ενός μαθηματικού αντικειμένου, την οποία σε καμία περίπτωση δεν θα πρέπει να συγχέουμε με τον ορισμό. Η περιγραφή προϋπάρχει του ορισμού και λόγω αυτού η επιστήμη των μαθηματικών μπορεί να ανταπεξέλθει χωρίς ορισμούς, όχι όμως και χωρίς περιγραφές. Για την καλύτερη κατανόηση της διαφοράς ανάμεσα στον ορισμό και την περιγραφή ενός μαθηματικού αντικειμένου, ο Rota χρησιμοποιεί το παράδειγμα της διδασκαλίας μιας μαθηματικής έννοιας. Η έκθεση ενός ορισμού στον πίνακα μιας σχολικής τάξης, σίγουρα δεν επαρκεί για τη διδασκαλία της έννοιας και ο καθηγητής θα αναγκαστεί να στραφεί στην περιγραφή αυτού που ορίζεται. Ακόμα και οι φιλόσοφοι –σημειώνει-, έχουν αναρωτηθεί για το πώς πολλαπλοί

ορισμοί αντιστοιχούν στο ίδιο μαθηματικό αντικείμενο. Στα μαθηματικά, με εξαίρεση την Γεωμετρία χάρη στη συμβολή του Ευκλείδη, όχι μόνο η περιγραφή προϋπάρχει του ορισμού, αλλά η ιστορία έχει αποδείξει πως μπορούν να σταθούν χωρίς ορισμούς, όχι όμως χωρίς περιγραφή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, οι πραγματικοί αριθμοί που υπήρχαν και πριν τον ακριβή ορισμό τους από τον Dedekind και οτιδήποτε πριν τον ορισμό τους αυτό είναι πλήρως αποδεκτό. Η δήλωση βέβαια αυτή του Rota έρχεται, όπως ο ίδιος δηλώνει, σε αντίθεση με την κοινή άποψη και θέση των μαθηματικών πως οι ορισμοί είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τον κλάδο των μαθηματικών, τονίζει όμως πως οι μαθηματικοί ανέκαθεν διαφοροποιούσαν τη θεωρία από την πράξη. Οι πρακτικές τους, λέει, σπάνια ταυτίζονται με αυτά που διακηρύττουν. Μεγάλο μέρος της μαθηματικής έρευνας ανά τους αιώνες ασχολήθηκε με την εύρεση του κατάλληλου ορισμού για προτάσεις που δεχόμαστε ως αληθείς. Τρανό παράδειγμα ο τύπος για τα πολύεδρα, τον οποίο χρησιμοποιούσαμε και θεωρούσαμε σε ισχύ, πολύ πριν την παρουσίασή του από τους Euler – Schläfli και Poincaré, ενώ πάνω από εκατό χρόνια ερευνών δαπανήθηκαν προς αναζήτηση κατάλληλου ορισμού για τον τύπο αυτό. Ο ορισμός που αποδίδεται σε μια έννοια που ήδη χρησιμοποιείται, προσφέρει ανάλυση της έννοιας με σαφήνεια και κατά αυτό τον τρόπο, αποτελεί εξέλιξη της γνώσης. Η περιγραφή που αναφέρει ο Rota, μοιάζει να είναι ο τρόπος με τον οποίο δηλώνεται ασαφώς μια έννοια και η βάση στην οποία στηρίζεται η χρήση της. Η ασάφεια είναι εκείνη που παρακινεί τους μαθηματικούς να αναζητήσουν τους κατάλληλους ορισμούς για τον ακριβή προσδιορισμό των εννοιών και την αξιοποίηση ήδη γνωστών θεωρημάτων.

Σύμφωνα με τον Cellucci (2009, 217-219), ο Rota επιχειρεί να ξεκαθαρίσει τη σχέση μεταξύ ορισμών και θεωρημάτων την οποία θεωρεί αμφίδρομη. Όπως δηλώνει ο ίδιος ο Rota (1997, 97), υπάρχει η έντονη τάση τους «βασικούς ορισμούς» ή τους «απροσδιόριστους όρους» ενός μαθηματικού επιχειρήματος να τους δεχόμαστε ως την τελική επιλογή μέσα από μια πληθώρα εναλλακτικών, στην πραγματικότητα όμως δεν υπάρχει τίποτα αυθαίρετο στους μαθηματικούς ορισμούς. Τα θεωρήματα προκαλούν τους ορισμούς και το αντίστροφο. Το θεώρημα που αποδεικνύεται με τη βοήθεια ενός καλού ορισμού δικαιολογεί τον ορισμό καθεαυτό, κατ' αναλογία με τον τρόπο που η απόδειξη του θεωρήματος δικαιολογείται ακριβώς επειδή στηρίζεται στον δοσμένο ορισμό. Έχουμε δηλαδή, την εμφάνιση μιας κυκλικότητας. Τα

θεωρήματα αποδεικνύονται με αφετηρία τους ορισμούς ενώ οι ορισμοί κινητοποιούνται από τις ίδιες τις αλήθειες των θεωρημάτων. Την κυκλικότητα αυτή, κατά τον Rota (1997, 97-98), δεν την αποδέχονται οι αναλυτικοί φιλόσοφοι οι οποίοι θεωρούν την αξιωματική μέθοδο οριστικό γραμμικό δρόμο από τον ορισμό στο θεώρημα. Αναλογιστείτε όμως -λέει ο Rota-, πως σας δίνονται δύο επίσημες παρουσιάσεις της ίδιας μαθηματικής θεωρίας όπου οι ορισμοί της πρώτης αποτελούν τα θεωρήματα της δεύτερης και το αντίστροφο. Ποιά θα θεωρήσετε αληθή; Η σωστή απάντηση είναι πως δεν επιλέγουμε καμία, απαντάει, αφού πρόκειται για παρουσιάσεις της ίδιας θεωρίας. Η επίσημη παρουσίαση είναι απλά ένας τρόπος να επιδείξουμε την μαθηματική αλήθεια. Η εγκυρότητα και ορθότητα οποιασδήποτε αξιωματικής μεθόδου που επιλέγεται για την παρουσίαση μιας μαθηματικής θεωρίας, δεν θα πρέπει να ταυτίζεται με την αλήθεια της. «Η μαθηματική αλήθεια δεν δημιουργείται από την επίσημη παρουσίαση» (Rota, 1997, 98).

Για να κατανοηθούν οι παραπάνω απόψεις, πρέπει κανείς να λάβει υπόψη ότι ο Rota στο έργο του συνήθιζε να τονίζει τον «ανακαλυπτικό» χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας περισσότερο από τον «επικυρωτικό». Δηλαδή, στο πεδίο της ανακάλυψης διαπιστώνει μια αλληλεπίδραση μεταξύ της προσπάθειας διατύπωσης ενός ορισμού από το ένα μέρος και του ταιριάσματος αυτού του ορισμού με συγκεκριμένες αποδεκτές μαθηματικές αλήθειες από το άλλο. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι χαρακτηριστικό στοιχείο της πορείας αναζήτησης ενός ορισμού. Γι αυτό και όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως, ο Rota δίνει ιδιαίτερη έμφαση στις επανειλημμένες προσπάθειες και τον ερευνητικό χρόνο που οδηγούν σε μια ακριβή διατύπωση του ορισμού μιας έννοιας. Επίσης, όπως προαναφέραμε, ο Rota τονίζει την αποτελεσματικότητα των παραδειγμάτων για την εξήγηση μιας έννοιας παρά εκείνη των ορισμών.

6. Η έννοια της μαθηματικής απόδειξης στη σκέψη του Rota

Η αξιωματική ιδέα της απόδειξης είναι η επικρατούσα αντίληψη του 20^{ου} αιώνα και είναι αυτή κατά την οποία η απόδειξη αποτελεί έναν παραγωγικό συλλογισμό που οδηγεί σε μια πρόταση εκκινώντας από πρωταρχικές προκειμένες, δηλαδή αξιώματα. Ουσιαστικά, εδώ πρόκειται για τη συντακτική εκδοχή της απόδειξης: μια ακολουθία συντακτικών προτάσεων, στην οποία κάθε πρόταση προκύπτει μέσω κανόνων παραγωγής από προηγούμενες προτάσεις και στην οποία, η τελευταία πρόταση είναι η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε.

Ο Rota, παραδόξως βέβαια, εκφράζει την αποστροφή του προς αυτή την έννοια απόδειξης. Συνδέει την αποδεικτική διαδικασία με την ανακάλυψη περισσότερο, γι αυτό ενδιαφέρεται για τις εικασίες, τα νοητικά πειράματα κ.ά. Κατ' αρχάς ο ίδιος (1997, 134-135) δέχεται ότι η απόδειξη είναι μια αλληλουχία βημάτων που ακολουθούν τους κανόνες της λογικής και καταλήγουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Πιστεύει πως ο όρος «σωστή απόδειξη» δεν υφίσταται και παρόλο που τα ευρετικά επιχειρήματα παίζουν κάποιο βασικό ρόλο στην μαθηματική ανακάλυψη, δεν σχετίζονται με την τυπική λογική και την απόδειξη. Στα μαθηματικά, δηλώνει, αντίθετα με άλλες θετικές επιστήμες όπως η φυσική, οι αποδείξεις δεν μπορούν να διαβαθμιστούν. Ένας ισχυρισμός δεν μπορεί να έχει δύο ή περισσότερες αποδείξεις διαφορετικού βαθμού ορθότητας, μέχρι να καταλήξουμε στην τελική. Για τον Rota, η ευρέως αποδεκτή συντακτική εκδοχή της απόδειξης είναι υπαίτια διαφόρων προκαταλήψεων γύρω από την επιστήμη των μαθηματικών. Η σημαντικότερη προκατάληψη που ο ίδιος θεωρεί ότι συνδέεται με την παραπάνω εκδοχή της έννοιας της απόδειξης είναι η λανθασμένη (κατ' αυτόν) ταύτιση των μαθηματικών με τα αξιωματικά τους συστήματα. Η αξιωματική μέθοδος κατά τον Rota εξασφαλίζει την εγκυρότητα μιας μαθηματικής πρότασης, δεν προσφέρει όμως τίποτα όσον αφορά την περιγραφή της διαδικασίας απόδειξής της. Γενικότερα, σημειώνει, όταν αναφερόμαστε στην έννοια της απόδειξης αγνοούμε συνειδητά πολλά χαρακτηριστικά της μαθηματικής σκέψης ως ανακάλυψης αληθειών. « Η αξιωματική μέθοδος με την οποία γράφουμε τα μαθηματικά είναι ο μοναδικός τρόπος να εξασφαλίσουμε την αλήθεια ενός μαθηματικού ισχυρισμού. Παρόλα αυτά η

συζήτηση της αξιωματικής μεθόδου δεν μας λέει και πολλά για την μαθηματική απόδειξη» (Rota, 1997, 135).

Κατά τον Rota (1997, 142), παρόλο που η αξιωματική παρουσίαση εξασφαλίζει με τον καλύτερο και πιο αδιαμφισβήτητο τρόπο την αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης, οδηγούμαστε στο λανθασμένο συμπέρασμα πως τα μαθηματικά είναι απλά μια προσεκτικά τυποποιημένη γραμματική (συντακτικό). Δεχόμαστε δηλαδή πως μια μαθηματική απόδειξη, όπως αυτή του τελευταίου θεωρήματος του Fermat, επινοήθηκε με αποκλειστικό σκοπό να αποδείξει αυτά που υποτίθεται ότι αποδεικνύει. Όμως για τον Rota (1997, 143-144), ο σκοπός κάθε απόδειξης όπως και αυτής του θεωρήματος του Fermat, είναι να παρουσιάσει περαιτέρω νέες δυνατότητες και προοπτικές μέσα στα μαθηματικά. Δεν μπορούμε να αγνοήσουμε τις δυνατότητες που περιλαμβάνονται στα θεωρήματα, ακριβέστερα «κρύβονται» στα θεωρήματα. Ο λόγος ύπαρξης ενός θεωρήματος βρίσκεται ακριβώς μέσα στις δυνατότητες και προοπτικές που μπορεί αυτό να μας προσφέρει. Η αξία της απόδειξης δεν είναι απλώς αυτό που αποδεικνύει, δηλαδή η πρόταση που γίνεται θεώρημα, αλλά αυτό που γίνεται πια δυνατό να διερευνηθεί, οι καινούργιοι ερευνητικοί δρόμοι που ανοίγονται.

Το φιλοσοφικό πρόβλημα της οντολογικής προτεραιότητας που σχετίζεται με τα πρωταρχικά δομικά στοιχεία του κόσμου, κατά τον Rota (1997, 140), ισχύει και στα μαθηματικά και υποστηρίζονται δύο απόψεις. Η πρώτη υποστηρίζει πως τα πρωταρχικά στοιχεία των μαθηματικών είναι τα γεγονότα, που περιγράφονται από τα θεωρήματα, ενώ η δεύτερη αποδίδει τον πρωταρχικό ρόλο στις ίδιες τις αποδείξεις. Ο Rota δεν παίρνει θέση αλλά θέτει προς συζήτηση το κατά πόσον υπάρχει τελικά και ουσιαστικά μια λογική διαφορά ανάμεσα στα δύο. Δεν αρνείται βέβαια ότι στην πράξη, μια μαθηματική θεωρία ξεκινάει από τους ορισμούς και τα αξιώματα και μέσα από αποδεκτούς συμπερασματικούς κανόνες καταλήγει στα αποτελέσματα-θεωρήματα. Αυτό δεν μπορεί να το αρνηθεί γιατί είναι προφανές για κάθε μαθηματικό. Αντιλαμβάνεται λοιπόν πως η καθιέρωση οποιασδήποτε μαθηματικής δήλωσης πέραν αμφιβολίας, δεν μπορεί να υφίσταται χωρίς την αξιωματική παρουσίαση. Από την άλλη πλευρά όμως στο επιστημολογικό επίπεδο, θεωρεί πως ο ρόλος της απόδειξης είναι να βγουν στην επιφάνεια οι ερευνητικές δυνατότητες που

περιλαμβάνει, καθώς οι δυνατότητες σε μια αξιωματική θεωρία εμπεριέχονται από την αρχή στα αξιώματα. Οι εν λόγω ερευνητικές δυνατότητες πρέπει να γίνουν έκδηλες μέσα από την ανακαλυπτική διαδικασία της απόδειξης. Είναι γεγονός ότι μια τυπική απόδειξη δεν μπορεί να κάνει έκδηλες τις συνδέσεις ανάμεσα σε διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών, ούτε να αναδείξει νέες δυνατότητες των μεταξύ τους συσχετίσεων, αφού οι αξιωματικές θεωρίες είναι κλειστά συστήματα.

Σύμφωνα με τον Rota (1997, 156), ένα αξιωματικό σύστημα δεν παρέχει την πλήρη κατανόηση μιας μαθηματικής θεωρίας, αποτελεί όμως ένα μέσο με το οποίο μπορούμε να παρατηρήσουμε ένα μαθηματικό αντικείμενο, ένα σύνολο, ακόμα και έναν ολόκληρο τοπολογικό χώρο με μια διαφορετική ματιά και από μια άλλη γωνία, που θα μας αποκαλύψει καινούργιους και άγνωστους ερευνητικούς δρόμους. Τα μαθηματικά δεν ταυτίζονται με τους τρόπους παρουσίασής τους. «Κατά τη γνώμη μας είναι λάθος να ταυτίζουμε τον τρόπο παρουσίασης των μαθηματικών με τα ίδια τα μαθηματικά. Θα ήταν θλιβερό να πιστεύουμε ότι το αξιωματικό σύστημα, για το οποίο είμαστε τόσο περήφανοι, είναι ο οριστικός τρόπος παρουσίασης της μαθηματικής γνώσης» (Rota, 1997, 159).

Ο ιδεατός τρόπος παρουσίασης είναι τα θεωρήματα και οι αποδείξεις τους, χωρίς να σημαίνει πως αποτελούν την ιδεατή μορφή γνώσης τους. Μια αυστηρή παρουσίαση συνεχίζει (1997, 241-242), δεν επαρκεί για την γνώση των μαθηματικών. Η αξιωματική μέθοδος δεν είναι ικανή από μόνη της για να διδαχτεί κάποιος τις πράξεις ή τη γραμμική άλγεβρα. Αυτό που προσφέρει είναι μια αίσθηση ενός μέρους των μαθηματικών. Το ίδιο ισχύει και κατά τη διδασκαλία. Οι μαθητές, πρέπει πρώτα να έρχονται σε επαφή με μη αυστηρές έννοιες που οδηγούν σε μια ημιτελή μεν, βασική δε, κατανόηση των αποτελεσμάτων και εφαρμογών τους και στη συνέχεια να επέρχεται η αυστηρή τους παρουσίαση. Η αρχική, αν και μερική, κατανόηση προκύπτει μάλλον από την επαφή των μαθητών με περιγραφές και τυπικά παραδείγματα, παρά από την επαφή με ορισμούς και θεωρήματα.

Σύμφωνα με τον Rota (1997, 108-109), η έννοια της μαθηματικής αλήθειας αποκαλύπτεται ολοκληρωτικά μέσα από την ανάλυση της δουλειάς των μαθηματικών. Η αλήθεια μιας μαθηματικής δήλωσης επιβεβαιώνεται εφόσον προκύπτει από τα αξιώματα και μια μαθηματική θεωρία γεννάται περιλαμβάνοντας

όλες αυτές τις προαναφερθείσες αληθείς μαθηματικές δηλώσεις που προκύπτουν από τα αξιώματα. Αυτό δεν σημαίνει ότι μελετώντας τα αξιώματα μπορούμε να αναγνωρίσουμε την αλήθεια μαθηματικών θεωρημάτων, αλλά ότι η αλήθεια «βρίσκεται» ήδη μέσα στα αξιώματα. Η συζήτηση που αφορά τη σχέση ανάμεσα στα θεωρήματα και τα αξιώματα από τα οποία προκύπτουν, έχει για τον Rota (1997, 109-110) μία και μοναδική κατάληξη. Όλες οι μαθηματικές αλήθειες πρέπει να θεωρούνται τελικά ταυτολογικές αν και η ταυτολογία αυτή χρειάζεται πολλή δουλειά για να αποδειχτεί, καθώς δεν είναι ούτε άμεση ούτε προφανής και το «τελικά» είναι απλά ένας κομψός τρόπος να δηλώσουμε ότι η μαθηματική αλήθεια οφείλει να είναι ταυτολογική. Αυτό σημαίνει πως η συλλογιστική της απόδειξης ενός μαθηματικού θεωρήματος είναι απλώς ένα μέσο με το οποίο αργά ή γρήγορα θα πρέπει να είμαστε σε θέση να δούμε το συμπέρασμα ως αποτέλεσμα ή επακόλουθο ενός αξιώματος. Πώς θα μπορούσαμε να κατανοήσουμε αυτή την άποψη του Rota που μοιάζει με την άποψη των λογικών θετικιστών για τα μαθηματικά εν τέλει ως μία τεράστια ταυτολογία; Υποστηρίζει την αναλυτικότητα των μαθηματικών αφαιρώντας το πληροφοριακό τους περιεχόμενο ή μήπως εννοεί κάτι άλλο; Μάλλον θέλει να πει ότι η αλήθεια των θεωρημάτων υπάρχει ήδη στα αξιώματα και ότι δεν προστίθεται περισσότερη πληροφορία όταν φτάνουμε στο θεώρημα.

Εδώ, αξίζει να σημειωθεί, όπως αναφέρει και ο Cellucci (2009, 220-221), πως η άποψη του Rota για την κατοχύρωση της αλήθειας των μαθηματικών προτάσεων μέσω της αξιωματικής μεθόδου, - δεν συνάδει με τα θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel. Το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας του Gödel κάνει γνωστό ότι η αλήθεια των προτάσεων κάθε αξιωματικής θεωρίας που ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες, δεν μπορεί σε όλες τις περιπτώσεις να εδραιωθεί αποδεικτικά με τα μέσα της θεωρίας. Υπάρχουν δηλαδή προτάσεις που ούτε οι ίδιες ούτε οι αρνήσεις τους αποδεικνύονται στο πλαίσιο της θεωρίας (μη αποκρίσιμες ή μη αποφασίσιμες). Σε οποιονδήποτε επομένως κλάδο των μαθηματικών, η αξιωματική παρουσίαση δεν εξασφαλίζει την απόδειξη της αλήθειας πάντοτε.

Σύμφωνα με τον Rota (1997, 169), η μαθηματική απόδειξη δεν πρέπει να θεωρείται ένα μέσο αιτιολόγησης, αλλά ένας τρόπος ανακατασκευής των μαθηματικών στοιχείων αυτού που διατύπωσε την απόδειξη. Ο σκοπός της απόδειξης για τον Rota, όπως προαναφέραμε, είναι οι νέες δυνατότητες και προοπτικές που

προσφέρει, είναι η δυνατότητα που προσφέρει σε άλλους μαθηματικούς να επαναφέρουν τα αποδεικτικά στοιχεία που είχαν επιτύχει προηγούμενοι μαθηματικοί. Όπως δηλώνει ο ίδιος (1997, 168), η πρωταρχική λογική έννοια είναι αυτή της απόδειξης, της συνθήκης κατά την οποία είναι δυνατή η αλήθεια και ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της φαινομενολογίας είναι η αποψυχολογιοποίηση της απόδειξης. Η αλήθεια, από την άλλη, είναι συστατικό της μαθηματικής συλλογιστικής, έχει να κάνει με την πεποίθηση των μαθηματικών ότι μια δήλωση πρέπει να είναι αληθής, δεν είναι ψυχολογική αλλά αντικατοπτρίζει την προϋπόθεση της δυνατότητας που έχουμε να «βιώσουμε» την αλήθεια.

Σύμφωνα με τον Cellucci (2009, 223), ο Rota πιστεύει ότι η αλήθεια είναι η αναγνώριση της ταυτότητας της απόδειξης ενός μαθηματικού με αυτή κάποιου άλλου. Η αναζήτηση των μαθηματικών αφορά τα αποδεικτικά στοιχεία που στοχεύουν στην κατανόηση, η οποία και αποτελεί την εκπλήρωση της ερευνητικής προσπάθειας. Για τον Rota (1997, 131-132), όταν οι μαθηματικοί αναρωτιούνται σχετικά με τη σημασία της ερωτηματικής πρότασης «σε τι χρησιμεύει αυτό;», δεν σημαίνει ότι δεν αναγνωρίζουν τις εφαρμογές αλλά ότι αδυνατούν να συλλάβουν επακριβώς την έννοια. Η διασάφηση είναι ένας μη ανεπτυγμένος τομέας, καθώς λίγοι έχουν ασχοληθεί με αυτόν, αφού όχι μόνο είναι δύσκολο να επισημοποιηθεί αλλά δεν εμφανίζεται σε όλες τις δηλώσεις στον ίδιο βαθμό. Όταν οι μαθηματικοί αποκαλούν ένα θεώρημα «ωραίο», αυτό που εννοούν είναι πως είναι διαφωτιστικό ή διασαφηνιστικό. Μόλις φτάσουμε στα αποδεικτικά στοιχεία του ανατρέχουμε στο παρελθόν προσπαθώντας να εντοπίσουμε ακριβώς τη στιγμή που μας οδήγησε σε αυτά. Η αναζήτηση όμως αυτή είναι απλά ένας ευσεβής πόθος επειδή τα μαθηματικά βασίζονται σε μια εμπειρία που δεν μπορεί ούτε να εντοπιστεί ούτε να περιγραφεί στο χρόνο. Η εμπειρία που θα δώσει την ευκαιρία στους μαθηματικούς να ενισχύσουν την αλήθεια μιας πρότασης δεν είναι ψυχολογική, είναι συστατικό της μαθηματικής συλλογιστικής. Εάν στο σημείο αυτό έπρεπε να θυμηθούμε τον Frege, θα διαπιστώναμε ότι ο Rota συγχέει το ψυχολογικό με το λογικό, κάτι που ο Frege είχε υπαγορεύσει να αποφεύγουμε.

Σύμφωνα με τον Rota (1997, 45-46) οι μαθηματικοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τους θεωρητικούς και τους ενασχολούμενους με την επίλυση

προβλημάτων, αν και οι περισσότεροι αποτελούν ένα μείγμα των δύο εκδοχών. Οι θεωρητικοί αναζητούν την θεωρία που θα επεξηγήσει ένα φαινόμενο και ανακηρύσσουν επιτυχία όχι την επίλυση ενός προβλήματος αλλά την συγκρότηση της θεωρίας. Αποδίδουν πρωταγωνιστικό ρόλο στους ορισμούς των εννοιών ως την πραγματική συνεισφορά των μαθηματικών στον κόσμο. Τα θεωρήματα, μπαίνουν για αυτούς σε δεύτερη μοίρα και αποτελούν μια αναγκαιότητα για την καλύτερη κατανόηση των ορισμών. Οι θεωρητικοί αρκούνται στην πεποίθηση πως οι θεωρίες τους θα μείνουν αναλλοίωτες στο χρόνο.

Από το άλλο μέρος, η λύση ενός μαθηματικού προβλήματος που μέχρι τώρα θεωρούνταν άλυτο, αποτελεί το μεγαλύτερο επίτευγμα των μαθηματικών που κάνουν «επίλυση προβλημάτων». Η έρευνά τους ολοκληρώνεται με την εύρεση της λύσης, ανεξάρτητα από τη φύση της και τις πιθανές μετέπειτα μετατροπές της. Η μαθηματική θεωρία αντιμετωπίζεται ως μηδαμινής σημασίας, τα μαθηματικά αποτελούν μια αλληλουχία προβλημάτων και προκλήσεων, ενώ οι μαθηματικές έννοιες είναι γι αυτούς αιώνιες καθώς με τη βοήθειά τους δηλώνονται τα μαθηματικά προβλήματα. Η δεύτερη κατηγορία μαθηματικών αντιμετωπίζουν με δυσπιστία οποιαδήποτε καινούργια θεωρία και απεχθάνονται τις γενικεύσεις και ειδικά αυτές που μπορεί να μειώσουν το κύρος της λύσης ενός μαθηματικού προβλήματος. Τέλος, χαίρουν μεγάλης εκτίμησης στην μαθηματική κοινότητα και θεωρούνται ως οι ήρωες πίσω από κάθε μαθηματική κατάκτηση.

Σύμφωνα με τον Palombi (2011, 61-64), για τον Rota (1990b, 1997e), τα μαθηματικά έχουν μια «δεύτερη ζωή» η οποία απαρτίζεται από αποδείξεις. Η ανακάλυψη της αλήθειας των θεωρημάτων επήλθε μετά από προσπάθεια και δέσμευση πολλών γενεών μαθηματικών προς το σκοπό αυτό. Επιπλέον, ο Rota (1997e, 1997a, 135) διαχωρίζει τους μαθηματικούς που στοχεύουν στην ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης από τους επιστήμονες της λογικής. Ο διαχωρισμός αυτός θεωρείται από τον Rota ότι είναι ακριβώς ο ίδιος που εφαρμόζεται ανάμεσα στους αναλυτικούς και τους ηπειρωτικούς φιλοσόφους. Σύμφωνα με τον ίδιο, η αξιωματική προσέγγιση, αποκόρημα της αναλυτικής σχολής, διαχωρίζει τη φιλοσοφία των μαθηματικών από την ιστορία τους. Ο ίδιος πιστεύει ότι η φιλοσοφία των μαθηματικών θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη την ιστορική διαδρομή των μαθηματικών. Διατυπώνει το ερώτημα: εάν δεχτούμε πως όλες οι μαθηματικές

προτάσεις ακολουθούν τους κανόνες της τυπικής λογικής, δεν οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως τα μαθηματικά ανάγονται σε μια τεράστια ταυτολογία; Και πάλι, αυτή η άποψη θυμίζει τον λογικό θετικισμό. Για τον Rota, η απάντηση βρίσκεται στην αυστηρή ανάλυση της πραγματικής πτυχής των μαθηματικών και συγκεκριμένα στην πολυεπίπεδη έρευνά τους. Επιπλέον, ο Lakatos μέσα από το έργο του αποσαφηνίζει τη «δεύτερη ζωή» των μαθηματικών ασκώντας κριτική στον αξιωματικό αναγωγισμό και την μαθηματική φιλοσοφία που κατά τον ίδιο (1963–1976, 1), τείνει να ταυτίζει τα μαθηματικά με την αφαιρετική τους αξιωματικοποίηση. Ο Rota (1990a, 1997a, 112) από τη μεριά του συμμερίζεται την άποψη αυτή, δηλώνοντας πως οι φορμαλιστικές θεωρίες είναι αναγωγιστικές καθώς πρεσβεύουν την ταύτιση των μαθηματικών με την αξιωματική μέθοδο. Όπως προαναφέρθηκε, όλα αυτά σημαίνουν ότι για τον Rota, τα μαθηματικά δεν ταυτίζονται με την αξιωματική θεωρητική παρουσίασή τους. Η αξιωματική μέθοδος, αναγκαία μεν, αποτελεί μόνο ένα τρόπο παρουσίασης. Αυτό που όμως ο Rota επιθυμεί είναι να γίνεται γνωστή η ιστορική περιπέτεια που οδηγεί στα μαθηματικά αποτελέσματα.

Ο εκπρόσωπος του λογικού εμπειρισμού R. Carnap, απαιτούσε την αντικατάσταση της φιλοσοφίας από την λογική ανάλυση της επιστήμης και της φιλοσοφίας των μαθηματικών από τα μεταμαθηματικά. Στη φιλοσοφική ομάδα γνωστή ως «κύκλος της Βιέννης», εκφράστηκε από τους λογικούς θετικιστές η επιθυμία εύρεσης ενός συστήματος ανεξάρτητου από ιστορικές γλώσσες και αποτελούμενου από ουδέτερες τυπικές φόρμουλες (τύπους). Αντίθετα για τον Rota, όπως δηλώνει ο Palombi (2011, 64-70), θεμελιώδες στοιχείο των μαθηματικών αποτελεί ακριβώς η ικανότητα της βαθιάς κατανόησης, πέραν των προφανών, των μη θεματοποιημένων χαρακτηριστικών τους. Ο Rota είναι αντίθετος στις αρχές του λογικού θετικισμού/εμπειρισμού και μάλιστα τον ταυτίζει λανθασμένα με όλη την αναλυτική παράδοση στη φιλοσοφία. Η προσήλωση του λογικού εμπειρισμού στην «επιφάνεια» (κατά τον Rota) απλώς διαχωρίζει τα μαθηματικά από την ιστορία τους. Η αξιωματική μέθοδος επομένως, παρά την χρησιμότητά της αδυνατεί να προσφέρει την κατανόηση της ιστορικής φύσεως της μαθηματικής ανακάλυψης. Ο Rota αναγνωρίζει τη σημασία της ιστορικότητας, στην οποία βασικό ρόλο παίζουν όχι μόνο η συνείδηση και η μνήμη αλλά και η λήθη και η πιθανότητα ενεργοποίησης μιας

ξεχασμένης πρόθεσης. Η θέση αυτή αποτελεί εργαλείο για την ανάλυση μιας μαθηματικής πρακτικής που βρίσκει αντιπαραδείγματα, επεξεργάζεται εικασίες και επιλέγει από ένα σύνολο πιθανών αξιωματικών συστημάτων, ένα αξιωματικό σύστημα, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα μελέτης ενός μαθηματικού αντικειμένου από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Η επιλογή αυτή -σύμφωνα με τον Rota- αποτελεί θεμελιώδη πτυχή της μαθηματικής απόδειξης, την οποία επιλέγουν να αγνοούν οι υπερασπιστές της μη ιστορικής σύλληψης των μαθηματικών. Η απόδειξη στα μαθηματικά είναι για τον Rota προϊόν μιας πορείας που δεν περιορίζεται στην μελέτη ενός καθορισμένου συστήματος αξιωμάτων αλλά περνάει μέσα από την βαθύτερη εξέταση των προβλημάτων σε μαθηματικά πεδία που απέχουν πολύ από αυτά που τελικά προέκυψαν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα κατά τον Rota, αποτελεί το περίφημο τελευταίο θεώρημα του Fermat. Η εικασία του Euler ότι κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα δύο πρώτων (την οποία ο ίδιος αποδεχόταν ως πλήρως ορισμένο θεώρημα παρόλο που δεν μπορούσε να το αποδείξει), αποτελεί ένα από τα στηρίγματά του για να υπερασπιστεί τις απόψεις του Lakatos σχετικά με τη μέθοδο της «εικασίας και διάψευσης». Πρόκειται για την ευρετική διαδικασία που θέτει την εικασία και καλεί να εκφραστούν οι διαφωνίες.

Σύμφωνα με τον Rota (όπως και με τον Lakatos), η εικασία είναι αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών. Αυτό που ο Rota ονομάζει 'εικασία', είναι το φαινόμενο κατά το οποίο οι μαθηματικοί διαθέτουν μια διαισθητική βεβαιότητα για την αλήθεια μιας πρότασης προτού να έχουν τα κατάλληλα εργαλεία για να την επιβεβαιώσουν. «Η εικασία είναι ο κανόνας, όχι η εξαίρεση, στα μαθηματικά» (Rota, 1997, 165).

Πολλοί μαθηματικοί πρεσβεύουν πως κατά την ευρετική διαδικασία, οι υποθέσεις και οι αλήθειες των θεωρημάτων προηγούνται των αποδείξεων. Ο Rota (1990a, 1997a, 111) γίνεται ακόμα πιο συγκεκριμένος και δηλώνει πως προτού να γίνει γνωστός ο σωστός ορισμός ενός πολυεδρικού σχήματος, αναγνωριζόταν ο τύπος του ως αληθινός. Για τον Rota (1990a), τα διαδοχικά συμπεράσματα με τα οποία προχωράμε στην απόδειξη, και με τα οποία γίνεται αντιληπτό ένα θεώρημα, αποτελούν αναπόφευκτα επακόλουθα των αξιωμάτων. Οι αποδείξεις που προκύπτουν δικαιολογούν τις εικασίες από τις οποίες προήλθαν. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 110), η μαθηματική αλήθεια είναι διαφορετική από την αλήθεια που υιοθετείται από την αναλυτική φιλοσοφία και χρησιμοποιείται στη μαθηματική λογική ως

επαλήθευση. Η άποψη αυτή του Rota δεν είναι βέβαια ορθή διότι η αναλυτική φιλοσοφία διαχωρίζει τη σημασία της *επαλήθευσης* από τη σημασία της *αλήθειας*. Η πρώτη σημασία έχει να κάνει με μια «επιστημική» έννοια αλήθειας γιατί αφορά την επιβεβαίωση. Τουλάχιστον οι σημασιολογικοί ρεαλιστές διακρίνουν αυτές τις δύο έννοιες. Είναι γεγονός ότι οι απόψεις του Rota εφαρμόζονται στο πεδίο της μαθηματικής ανακάλυψης καθώς και στη διδασκαλία των μαθηματικών. Κάθε δάσκαλος οφείλει να παρέχει στους μαθητές του την πρέπουσα αιτιολόγηση για κάθε μαθηματική πεποίθηση, ενώ οι μαθητές με τη σειρά τους αδυνατούν να δεχτούν τα συμπεράσματα μιας θεωρίας χωρίς αιτιολόγηση ή επαλήθευση. Όπως δηλώνει ο Rota (1997, 111), ένας καθηγητής οφείλει να παρακινεί μια διαδικασία «πίσω - μπρος» ανάμεσα στη δικαιολόγηση των αξιωμάτων από τα θεωρήματα που μπορούν τα ίδια να αποδείξουν και τη δικαιολόγηση των θεωρημάτων με βάση τα αξιώματα (κυκλικότητα). Η δικαιολόγηση είναι σε αυτή την περίπτωση αμφίδρομη. Αυτού του τύπου η «πίσω-μπρος» μέθοδος δικαιολόγησης λέγεται σήμερα «αναστοχαστική ισορροπία». Γίνεται επομένως σαφές –σύμφωνα με τον Rota- πως η λογική είναι αναγκαία συνθήκη για την αυστηρή παρουσίαση των μαθηματικών θεωριών αλλά όχι ικανή για την ανακάλυψη ή για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Σε οποιοδήποτε επίπεδο της μαθηματικής πρακτικής εκδηλώνεται ένα παιχνίδι δούναι και λαβείν που κατά τον Rota (1990a, 111), αποτελεί μια παραλλαγή του ερμηνευτικού κύκλου. Γι αυτό και όπως προαναφέραμε, εάν δοθούν δύο τυπικές παρουσιάσεις μιας μαθηματικής θεωρίας για τις οποίες ισχύει ότι οι ορισμοί της καθε μίας αποτελούν θεωρήματα της άλλης, καμία από αυτές δεν μπορούμε με σιγουριά να δηλώσουμε ως την πιο αληθή. Πρόκειται απλώς για δύο παρουσιάσεις της ίδιας θεωρίας.

Η απόδειξη -κατά τον Rota- συνδέεται επίσης με (νοητικά) πειράματα. Σύμφωνα με τον Lakatos (1963–1976, 9) πρόκειται για ένα πείραμα σκέψης το οποίο διαχωρίζει τις αρχικές εικασίες σε υποεικασίες και λήμματα και τις ενσωματώνει με αυτό τον τρόπο σε ένα πιθανώς απομακρυσμένο κομμάτι γνώσης, καθιστώντας δυνατή τη σύνδεση των μαθηματικών με τις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία. Όπως στη φυσική, κάθε πείραμα πρέπει να αναλύεται για να ανακαλυφθούν οι λόγοι αποτυχίας του και οι πιθανοί τρόποι αντιμετώπισής του, έτσι και στα μαθηματικά οφείλουμε να εξετάζουμε και να αναλύουμε τα πειράματα σκέψης, τις ανεπίσημες δηλαδή

αποδείξεις, ώστε να ανακαλυφθούν οι υποθέσεις που μπορεί να οδηγούν σε αντιφάσεις και παράδοξα.

Η συνήθης απόρριψη μιας βασικής πτυχής της μαθηματικής πρακτικής με τον όρο ‘εικασία’, κατά τον Rota, οφείλεται στην υπόθεση ότι η δουλειά ενός μαθηματικού χωρίζεται σε δύο συνιστώσες. Από τη μια έχουμε τα επιχειρήματα που ανήκουν στη λογική και από την άλλη τη μαθηματική ανακάλυψη που ανήκει στην ψυχολογία. Η εικασία απορρίπτεται από πολλούς ως ψυχολογική. Εδώ όμως, όπως αναφέρει ο Rota (1997, 165-166), έρχεται ο Husserl να θέσει το εύλογο ερώτημα του κατά πόσο έχουμε το δικαίωμα να απορρίψουμε οποιαδήποτε μαθηματική πτυχή με τον όρο «ψυχολογικό». Η ανισορροπία, συνεχίζει, ανάμεσα στο ‘λογικό’ και το ‘ψυχολογικό’ γίνεται πιο σαφής αν εξετάσουμε την απήχηση της έννοιας της εικασίας στους φιλοσόφους για επιστήμες όπως η φυσική και η χημεία στις οποίες χαίρει μεγάλης αποδοχής και θαυμασμού. Για παράδειγμα στην εικασία σχετικά με έναν καινούργιο νόμο καταλήγουν μέσω της επαγωγικής λογικής. Ένα ακόμα δείγμα διαχωρισμού των επιστημών -επισημαίνει ο Rota-. Από τη μια έχουμε τις επιστήμες της φύσης, που ασχολούνται με τους συνθετικούς φυσικούς νόμους και από την άλλη τις επιστήμες του νου μέσα στις οποίες είναι και τα μαθηματικά και στις οποίες βάζουμε την ταμπέλα του ‘αναλυτικού’. Με άλλα λόγια, ο Rota θεωρεί ότι οι εικασίες είναι εξίσου σημαντικές στα μαθηματικά.

Ο Rota δεν ασχολήθηκε μόνο με τον σκοπό της απόδειξης, αλλά και με το κατά πόσο υπάρχουν οριστικές αποδείξεις ή όχι και για τον Rota η απάντηση είναι καταφατική. Κάθε καινούργιο θεώρημα, ακολουθείται από πιο απλές αποδείξεις, μέχρι να καταλήξουμε στην οριστική. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 146), η πρωταρχική απόδειξη πολλών θεωρημάτων υπήρξε αδικαιολόγητα πολύπλοκη και χρειάστηκε πολύς χρόνος να κατανοηθούν πλήρως τα δεδομένα που περικλείονταν σε αυτή. Η σταδιακή αναγνώριση και κατανόηση των δεδομένων οδηγεί σε διαδοχικές απλούστερες αποδείξεις μέχρι την πλήρη επίγνωση όλων των δεδομένων που οδηγεί στην πιο απλή εκδοχή ενός θεωρήματος. Κάθε θεώρημα δηλώνει (1997, 149), είναι ένα σύμπλεγμα από κρυμμένες πιθανότητες. Αν δεχτούμε την άποψη αυτή, γίνεται ξεκάθαρο πως η αλήθεια δεν είναι η μοναδική μέριμνα των μαθηματικών και αυτό γιατί εάν ήταν, δεν θα προέκυπτε ανάγκη για καινούργιες αποδείξεις (αφού η πρώτη

και μοναδική θα ήταν αρκετή). Σύμφωνα με τον Rota (1997, 161), ο σκοπός των μαθηματικών δεν είναι να ανακαλύψουν από τί είναι φτιαγμένα τα μαθηματικά, αλλά τις συνθήκες όλων των δυνατοτήτων ανακάλυψης στο πλαίσιο αυτού του ιδεατού τομέα.

Όπως σημειώνει ο Cellucci (2009, 222), η άποψη του Rota, για τον σκοπό της απόδειξης και την επιδίωξη να βρεθεί η πιο απλή απόδειξη χάνει την ισχύ της, αν αναλογιστούμε πως πολλές φορές οι καινούργιες αποδείξεις προκύπτουν από καινούργιες ιδέες που δεν σχετίζονται με την προηγούμενη. Το νόημα των νέων αποδείξεων και της αναζήτησής τους συνίσταται στην ευρετική τους αξία και την ανακάλυψη υποθέσεων που μπορούν να εδραιώσουν συσχετισμούς ανάμεσα σε διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών και να ανοίξουν τον δρόμο σε νέες ανακαλύψεις. Το αποτέλεσμα μιας απόδειξης δίνει νέες προοπτικές που δημιουργούν καινούργιες υποθέσεις, που μπορεί με τη σειρά τους να οδηγήσουν σε νέες αποδείξεις. Κι εφόσον νέες προοπτικές είναι πιθανές, δυνητικά νέες αποδείξεις είναι πιθανές και η ιδέα της οριστικής απόδειξης απορρίπτεται. Βέβαια, ακόμα και ο ίδιος ο Rota (1997, 156), παραδέχεται ότι κάθε μαθηματικό αντικείμενο προσφέρει τη δυνατότητα μιας αλληλουχίας παρουσιάσεων του από νέα αξιωματικά συστήματα, που κάθε ένα έχει στόχο την αποκάλυψη νέων χαρακτηριστικών του συγκεκριμένου μαθηματικού αντικειμένου. Επομένως, η απόδειξη μιας πρότασης δεν μπορεί να θεωρηθεί μοναδική.

Τί συμβαίνει όμως με την επαλήθευση; Σύμφωνα με τον Rota (1997, 136), η επαλήθευση αποτελεί μια μορφή μαθηματικής απόδειξης, αν και σπάνια γίνεται αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα, καθώς μπορεί η μέθοδος της παράθεσης όλων των πιθανών περιπτώσεων –με την οποία λειτουργεί η επαλήθευση- να θεωρείται αδιάψευστη ως προς τη αλήθεια της, αλλά αυτό δεν είναι ικανό να της προσδώσει την απαραίτητη αποδεικτική αξία .

Ένα παράδειγμα μαθηματικού θεωρήματος που η απόδειξή του μπορεί να δοθεί μέσω επαλήθευσης μας δίνεται από τον Rota (1997, 136-137) και είναι το εξής: αν θέλουμε να τοποθετήσουμε σε n κουτιά $n+1$ ή περισσότερους βόλους, τότε τουλάχιστον δύο θα τοποθετηθούν στο ίδιο κουτί. Αναφερόμαστε δηλαδή σε ένα παράδειγμα απλής περίπτωσης επαλήθευσης, μέσω αλγορίθμου, που δεν μας προσφέρει όμως καμία

γνώση ως προς το ποιο κουτί θα καταλήξει με περισσότερους από έναν βόλους και που κανένας μαθηματικός δεν θα θεωρήσει αποδεκτή χωρίς απόδειξη ύπαρξης. Οι αποδείξεις ύπαρξης είναι αυτές που γίνονται αποδεκτές καθώς, αντίθετα με την επαλήθευση, προσφέρουν τη δυνατότητα εφαρμογής σε παρόμοια θεωρήματα επίσης.

Σύμφωνα με τον Rota όμως (1997, 137/139), πρέπει να είναι ξεκάθαρο πως δεν γίνονται αποδεκτές όλες οι επαληθεύσεις ως αποδείξεις κι αυτό γιατί πολλές φορές δεν παρέχουν αιτιολόγηση, όπως στην περίπτωση των Cartan και Killing που επαλήθευσαν την αρχή πως μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός σύνθεσης διανυσμάτων ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες, χωρίς όμως να αιτιολογήσουν συγκεκριμένες ομάδες από τη λίστα αυτών που την επαληθεύουν.

Εν κατακλείδι, σχετικά με τις αποδείξεις, ο Rota ενδιαφέρεται για τη μαθηματική πρακτική και όχι για τα αξιωματικά συστήματα τα οποία κατά τη γνώμη του αποκρύβουν την μαθηματική περιπέτεια της ανακάλυψης. Οι παραπάνω απόψεις που παραθέσαμε δείχνουν ότι εστιάζει μάλλον στις εικασίες, τα νοητικά πειράματα, την ιστορική διάσταση της προσπάθειας εδραίωσης ενός θεωρήματος, την αποκάλυψη νέων ερευνητικών δυνατοτήτων.

7. Η σχέση ανάμεσα στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, τα Μαθηματικά και τη Φιλοσοφία

Το αιώνιο ερώτημα «Τί είναι μαθηματικά;» που πολλοί επιχείρησαν να απαντήσουν, για τον Rota δεν απαιτεί απάντηση, αλλά αποτελεί την εύλογη ανταπόκριση οποιουδήποτε έρχεται αντιμέτωπος με το μεγαλοπρεπές οικοδόμημα των μαθηματικών.

Σύμφωνα με τον Cellucci (2009, 224-226), μαζί με το ερώτημα των μαθηματικών, ο Rota δίνει απαντήσεις και για το ρόλο και τη θέση της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Για κάποιους οφείλει να είναι κανονιστική και να παρέχει αιτιολόγηση των μαθηματικών μαζί με κανόνες για την πρακτική τους. Ο Rota πιστεύει ότι η φιλοσοφία των μαθηματικών πρέπει να υιοθετήσει μια περιγραφική στάση και πως η μελέτη της μαθηματικής πρακτικής¹ πρέπει να προσεγγίζεται με μια λογική διαφορετική από αυτή της μαθηματικής λογικής. Σύμφωνα με τον Rota (1986, 180), η μαθηματική λογική, το εργαλείο της φιλοσοφίας των μαθηματικών (κατά τον Frege, τον Russell και άλλους μεταγενέστερους), δεν επαρκεί αλλά χρειάζεται κάτι άλλο που θα θέσει τις επιστήμες σε νέες βάσεις και θα τους δώσει θεωρητική αυτονομία. Για τον Rota επομένως, το κλειδί είναι μια φιλοσοφική επανάσταση.

Για τον Rota οι φιλόσοφοι των μαθηματικών χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τους *στατικούς* (mainstream) και τους *δυναμικούς* (maverick). Οι στατικοί είναι για τον Rota οι υποστηρικτές της αναλυτικής φιλοσοφίας, θεωρούν τα μαθηματικά στατικό κομμάτι της γνώσης και προσπαθούν να μελετήσουν την αιτιολόγηση της μαθηματικής γνώσης και τη δικαιολόγηση των μαθηματικών αληθειών. Οι δυναμικοί διαχωρίζουν τη στάση τους από την αναλυτική φιλοσοφία, θεωρούν τα μαθηματικά δυναμικό κομμάτι της γνώσης και προσπαθούν να μελετήσουν την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης. Κύριο μέλημά τους αποτελεί η μαθηματική πρακτική. Η

¹ Ο Rota ενδιαφέρεται περισσότερο για τον κλάδο που είναι γνωστός σήμερα ως «φιλοσοφία της μαθηματικής πρακτικής» (philosophy of mathematical practice) και διακρίνεται από την κλασική φιλοσοφία των μαθηματικών

ενασχόληση με τη μαθηματική πρακτική ανάγει τα μαθηματικά σε δυναμικό σώμα της γνώσης και αναδεικνύει ερωτήματα για τη μαθηματική ανακάλυψη.

Ο Rota συντάσσεται με αυτήν που ο ίδιος αποκαλεί «δυναμική» προσέγγιση. Η ανακάλυψη για το Rota, οφείλει να αποτελεί την κύρια ενασχόληση της φιλοσοφίας των μαθηματικών αφού τα ευρετικά επιχειρήματα είναι παρόντα στη μαθηματική πρακτική. Συνήθως, η φιλοσοφία των μαθηματικών δεν αναγνωρίζει την ευρετική διαδικασία παρόλο που παίζει σημαντικό ρόλο στη μαθηματική ανακάλυψη. Τονίζει τη σημασία του συναισθήματος στην μαθηματική ανακάλυψη καθώς οι μαθηματικοί δεν καταπιάνονται με κάποιο πρόβλημα αν δεν τους αρέσει. Η μαθηματική αιτιολόγηση απαιτεί κίνητρο και επιθυμία. Η «δυναμική» αυτή προσέγγιση χαρακτηρίζεται από πολλούς ως εναλλακτική και βρίσκεται σε συμφωνία με τη φιλοσοφία του Husserl. Εμείς θα σημειώναμε ότι η συμβολή του συναισθήματος και των κινήτρων εντάσσεται μάλλον στην ψυχολογία της μαθηματικής ανακάλυψης. Αναφέρει (1997, 92-93 & 163) ακόμα πως η μαθηματική λογική δεν επαρκεί για την πλήρη ανάλυση της δραστηριότητας των μαθηματικών. Η κλασική φιλοσοφία των μαθηματικών συνήθως δεν καταπιάνεται με τα φιλοσοφικά θέματα που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι μαθηματικοί στην καθημερινή δουλειά τους (mathematical practice).

Σύμφωνα με τον Cellucci, οι απόψεις του Rota για τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία τους παρουσιάζουν ανομοιογένεια και πολλές φορές είναι αντικρουόμενες μάλλον επειδή δηλώθηκαν σε διαφορετικούς χρόνους και ο ίδιος άλλαξε γνώμη.

Όπως προαναφέρθηκε, ο Rota ενδιαφέρεται για τη φιλοσοφία της μαθηματικής πρακτικής, έναν κλάδο που σήμερα είναι αυτόνομος και έχει αυτό ακριβώς το όνομα. Όμως, η φιλοσοφία των μαθηματικών είναι πολύ ευρύτερη σε περιεχόμενο και δεν μπορεί να περιοριστεί στον συγκεκριμένο κλάδο. Όπως δηλώνουν οι Lanciani and Majolino (2009, 229), η φιλοσοφία των μαθηματικών περιλαμβάνει οντολογία των μαθηματικών, γνωσιολογία των μαθηματικών και σημασιολογία της μαθηματικής γλώσσας κατά συνέπεια αποτελεί τεράστιο πεδίο. Ο Rota δεν λαμβάνει υπόψη αυτές τις περιοχές. Επιπλέον, είναι γεγονός ότι ο Rota υπήρξε πολέμιος της αναλυτικής φιλοσοφίας, κυρίως στο άρθρο του «*Mathematics and Philosophy: the story of a*

misunderstanding» (1990)². Η ανάπτυξη του φιλοσοφικού λόγου μέσα στην ιστορία για κάποιους έχει επιφέρει δύο αντιμαχόμενα στρατόπεδα: από τη μια βρίσκουμε τους αναλυτικούς φιλόσοφους, εκπαιδευμένους στην μαθηματική λογική, με βαθιά εξοικείωση στα πρόσφατα αποτελέσματα της επιστημονικής έρευνας και από την άλλη τους κλασικούς φιλόσοφους, που μαγεύονται από την ιστορία της φιλοσοφίας και την προσπάθεια για την ορθή ερμηνεία του πρωτότυπου κειμένου. Τα πράγματα όμως είναι πιο πολύπλοκα, αν αναλογιστούμε τις λεπτές διαφορές που διαχωρίζουν την κατευθυντήρια γραμμή φιλοσοφικών ρευμάτων όπως είναι η φαινομενολογία, η ψυχανάλυση, ο δομισμός, ο νεο-καντιανισμός, ο μεταμοντερνισμός κ.α. Ο Rota αναγνωρίζει την ιδεολογική φύση της υπεραπλουστευμένης διάκρισης, κρατά αποστάσεις από την κλασική φιλοσοφία, παρουσιάζει τον εαυτό του ως φαινομενολόγο και ασκεί δριμύτατη κριτική στην αναλυτική φιλοσοφία.

Στην αναλυτική φιλοσοφία υπάγονται τόσο αυτοί που θεωρούνται αναλυτικοί φιλόσοφοι όσο και αυτοί που αναγνωρίζουν και διεκδικούν την ύπαρξη, τις αρετές και την νοητική υπεροχή της λεγόμενης «αναλυτικής φιλοσοφίας». Ο Rota σέβεται τους πρώτους και αντιμάχεται τις πρακτικές των δεύτερων. Ο σεβασμός του για ορισμένους αναλυτικούς φιλόσοφους φαίνεται από ευνοϊκές αναφορές του όπως πχ. στο βιβλίο του G.Ryle «*The Concept of Mind*» το οποίο χαρακτηρίζει ικανό για μια εισαγωγή στη φαινομενολογία. Αντίθετη στάση και κριτική διάθεση διαφαίνεται στα καυστικά του σχόλια προς τους Quine, Passmore και Mackie, οι οποίοι δήλωσαν πως η καλή φιλοσοφία πρέπει να είναι αναλυτική. Σκοπός του δεν είναι να διαφωνήσει με συναδέλφους, η διαφωνία αυτή προκύπτει από την περίπλοκη άποψη και διάφορες παρανοήσεις που έχει για την αναλυτική φιλοσοφία.

Σύμφωνα με τον Palombi (2011, 23-25), το κύριο χαρακτηριστικό της αναλυτικής φιλοσοφίας κατά τον Rota, όπως αναφέρεται και στο D' Agostini (1997, 60) είναι η προσήλωση σε συγκεκριμένες πτυχές της πραγματικότητας, παραλείποντας τις περιεκτικές τους σχέσεις. Ο λογικός θετικισμός προσέφερε πολλά στην αναλυτική φιλοσοφία αλλά τα δύο ρεύματα έχουν πολλές και διακριτές διαφορές και δεν είναι εύκολο να τεθούν σε στερεότυπα. Ο Rota, αντιθέτως, δείχνει

² Βλ και τον τόμο G. C. Rota, *Μαθηματικά και Φιλοσοφία*, από τις εκδόσεις Ευρασία με πρόλογο του Γ. Ευαγγελόπουλου και επίμετρο της Δ. Χριστοπούλου.

να εκφράζει μια τάση ταύτισης της αναλυτικής φιλοσοφίας με το λογικό θετικισμό, αποδεχόμενος πλήρως πως η πρώτη είναι συνέχεια του δεύτερου. Ο Rota επικρίνει κάποιες λογικά θετικιστικές απόψεις ως λόγο επιστημονικών ιδεολογικών διαστρεβλώσεων.

Η αναλυτική φιλοσοφία, κατά τον Rota (1997, 134), εξαλείφει την ιστορική διάσταση του φιλοσοφείν και παρόλο που δίνει έμφαση στη λογική εγκυρότητα των επιχειρημάτων που δικαιολογούν μια φιλοσοφική θέση, αγνοεί την αξία των ευρετικών επιχειρημάτων και τους ρόλους τους στην ανακάλυψη των φιλοσοφικών εννοιών. Δεν δίνει αρκετή σημασία στο πεδίο της ανακάλυψης αλλά ενδιαφέρεται για το πεδίο της δικαιολόγησης. Ο διαχωρισμός αυτός για τον Rota παραπέμπει στο λογικό εμπειρισμό και συνιστά μια κυρίαρχη θέση της αναλυτικής φιλοσοφίας

Σύμφωνα με τον Rota (1997, 95), στη φιλοσοφία υπάρχει η εσφαλμένη άποψη πως για να έχει νόημα μια έννοια πρέπει να ορίζεται με ακρίβεια, όπως και ένα επιχείρημα οφείλει να παρατίθεται με ακρίβεια. Η προκατάληψη αυτή προέρχεται από την ακρίβεια των μαθηματικών και την επιτυχία τους, η οποία όμως δεν μπορεί να εφαρμοστεί στη φιλοσοφία της οποίας οι έννοιες δεν μπορούν σε καμία περίπτωση να θεωρηθούν εξίσου ακριβείς. Νους, μνήμη, αντίληψη είναι μερικές μόνο έννοιες που η σημασία τους όχι μόνο δεν είναι ξεκάθαρη, (χωρίς να σημαίνει ότι δεν έχουν), αλλά μπορεί και να αλλοιωθεί στην προσπάθειά μας να την αποδώσουμε με ακρίβεια. Η καθημερινή μας συλλογιστική, ακόμα και η ίδια η φύση στερείται ακρίβειας. Ο Rota παρομοιάζει τις φιλοσοφικές έννοιες με τους δρόμους μιας παλιάς πόλης που απαιτείται όραμα και υπομονή για να τους εκτιμήσουμε, θέλοντας έτσι να δώσει έμφαση στην προσοχή που απαιτείται στις λεπτομέρειες και τις διαφορετικές αποχρώσεις, το βασικό δηλαδή συστατικό της σύνθεσης της φαινομενολογίας. Ακόμα, στρέφεται εναντίον της Αγγλοσαξωνικής φιλοσοφίας η οποία θεωρεί (1990b, 1997a, 98), πως όχι μόνο αγνοεί τα κλασσικά προβλήματα της φιλοσοφίας στα φιλοσοφικά τμήματα των Πανεπιστημίων της αλλά επιβάλλει και «κυρώσεις» σε όσους τα αναφέρουν. Αποτέλεσμα αυτού, η συρρίκνωση της φιλοσοφίας σε μια προβληματική, περιορισμένη στην ενασχόληση με τη γλώσσα.

Η φιλοσοφία, αντίθετα με επιστήμες όπως τα μαθηματικά, παρέχει θεωρίες που δύσκολα μπορούν να θεωρηθούν πειστικές ή οριστικές. Κάθε φιλόσοφος θεωρεί

πως έφτασε στην αλήθεια, παρόλο που οι φιλοσοφικές ιδέες είναι αόριστες και δύσκολες να αποδειχτούν. Η φιλοσοφία ασχολείται μάταια με τα ίδια θέματα: τη σχέση ανάμεσα σε σώμα και ψυχή, τη φύση της αλήθειας και την πραγματικότητα και παρόλες τις προσπάθειες, καταλήγει σε «συνεχές ναυάγιο». Στα μαθηματικά αντίθετα, όχι μόνο οποιοδήποτε πρόβλημα βρίσκει αργά ή γρήγορα λύση, η αλήθεια τους είναι αιώνια και αδύνατον να διαψευστεί εφόσον αποδειχθεί και καθιερωθεί.

Οι Lanciani και Majolino εξηγούν τις απόψεις του Rota σχετικά με τη φιλοσοφία. Η φύση της φιλοσοφίας που χαρακτηρίζεται από τον Rota ως «ναυάγιο» αναγνωρίζεται με δύο τρόπους. Ο πρώτος το θεωρεί απαραίτητο χαρακτηριστικό της και δομικό στοιχείο της φιλοσοφικής αναζήτησης, που δεν πρέπει όμως να λαμβάνεται ως αδυναμία ή έλλειψη αυστηρότητας. Οι φιλόσοφοι επιλέγουν να παίζουν ένα παιχνίδι, μέρος του οποίου είναι να κατανοήσουν τους διαρθρωτικούς λόγους και τη λογική αυτού του ναυαγίου και από το οποίο είναι βέβαιο πως θα βγουν ηττημένοι, και αυτό θέλει πολύ κουράγιο. Ο δεύτερος το αντιμετωπίζει ως ενδεχόμενο. Οι φιλόσοφοι επανέρχονται στα ίδια γιατί έχουν αποτύχει στην παραγωγή μιας αυστηρής μεθόδου και ενός συνόλου από σαφώς καθορισμένες έννοιες, κάτι που μπορεί όμως να διορθωθεί αν ακολουθήσουν το παράδειγμα των μαθηματικών. Παρόλο που τόσο οι μαθηματικές όσο και οι φιλοσοφικές αλήθειες δεν μπορούν να αποδειχτούν εμπειρικά και οι εφαρμογές τους δεν αποτελούν σημάδι αληθείας, για τις μαθηματικές αλήθειες μπορεί να υπάρξει απόδειξη εφόσον αυτή εκφράζεται μέσω μιας επίσημης θεωρίας λόγω της δομής της, με έναν αυστηρό και σαφή τρόπο. Εδώ, το «παιχνίδι» της φιλοσοφίας δεν χρειάζεται κουράγιο, χρειάζεται να είναι κάποιος ικανός να αναγνωρίσει αυτή την επιτυχία των μαθηματικών, να μεταφέρει και να εκμεταλλευτεί τις μαθηματικές μεθόδους.

Οι υπερασπιστές του δεύτερου τρόπου χαρακτηρίζονται από τον Rota ως «μαθηματικίζοντες φιλόσοφοι» (mathematizing philosophers) γιατί χρησιμοποιούν τη μαθηματική έννοια μιας αποδεικτικής διαδικασίας για να υποστηρίξουν ένα φιλοσοφικό ισχυρισμό (πρβλ. και Χριστοπούλου, 2015, 86-88). Σύμφωνα με τον Rota (1997, 92-93), οι μαθηματικίζοντες φιλόσοφοι, πιστεύουν πως η φιλοσοφία οφείλει να είναι πιο ακριβής, βασισμένη σε γεγονότα και να χρησιμοποιεί στην επιχειρηματολογία της τους κανόνες της μαθηματικής λογικής, καθώς και πως κάθε φιλοσοφικός γρίφος μπορεί να λυθεί απλά και μόνο με καθαρή αιτιολόγηση. Ως

αποτέλεσμα της μαθηματικίζουσας φιλοσοφίας, η λογική δεν ανήκει πια στο χώρο της φιλοσοφίας αλλά σε αυτό τον μαθηματικών και καλείται μαθηματική λογική. Οι λογικιστές ως εκ τούτου επιχειρούν την αναγωγή των μαθηματικών στη λογική. Οι φιλοσοφικές πτυχές της μαθηματικής λογικής δεν παρουσιάζουν καμία ποιοτική διαφορά ως προς τις φιλοσοφικές πτυχές της τοπολογίας ή οποιουδήποτε άλλου μαθηματικού τομέα. Η φιλοσοφική ορολογία της μαθηματικής λογικής είναι κατά τον Rota (1997, 93), η αιτία για την εσφαλμένη αντίληψη πολλών φιλοσόφων ως προς τα ζητήματα της απόδειξης και της αλήθειας. Οι περισσότεροι πιστεύουν ότι η μαθηματική λογική ασχολείται με την αλήθεια, ενώ στην πραγματικότητα ασχολείται με το παιχνίδι (της επικύρωσης) της αλήθειας. « Η αλήθεια μιας δήλωσης με την έννοια της μαθηματικής λογικής είναι θέμα γραμματικής, που σχετίζεται με μια πετυχημένη μορφή έκθεσης· είναι ατυχές ότι οι φιλόσοφοι έχουν παραπλανηθεί ώστε να πιστεύουν πως η τακτοποιημένη και αποτελεσματική τεχνική που ονομάζεται μαθηματική λογική έχει οποιαδήποτε σχέση με την αλήθεια καθεαυτή» (Rota, 1997, 170).

Δεν υπάρχει, υποστηρίζει ο Rota, τίποτα μεμπτό στο να είναι κάποιος φιλόσοφος και μαθηματικός ή φιλόσοφος των μαθηματικών αφού και στις δύο περιπτώσεις διατηρείται η ειδικότητα και της φιλοσοφίας και των μαθηματικών. Όταν όμως, για την αποφυγή του διαρκούς ναυαγίου της φιλοσοφίας και με αρωγό την αξιωματική μέθοδο, εισαχθεί η έννοια των «μαθηματικών της φιλοσοφίας» μέσα στη φιλοσοφία τότε χάνονται τόσο τα μαθηματικά όσο και η φιλοσοφία (Πρβλ. Lanciani and Majolino, 2009, 229-231),.

Σύμφωνα με τους Lanciani and Majolino (2009, 232-234), Ο Rota πιστεύει ότι στο τέλος του 19^{ου} αιώνα, χάρη στην τεράστια επιτυχία των μαθηματικών και της μαθηματικής λογικής όπως αυτή χρησιμοποιείται για την ανάλυση της γλώσσας και του νοήματος, οι φιλόσοφοι αρχίζουν να αναγνωρίζουν τις δυνάμεις και τις προοπτικές της τυποποιημένης διατύπωσης και του συμβολισμού. Η αρχή γίνεται με τη προσφορά του Frege που εισάγει τους ποσοδείκτες, παρέχοντας ένα σημαντικό εργαλείο για την επίλυση παλιών φιλοσοφικών προβλημάτων. Ύστερα έρχεται (από τον Russell) η διάκριση ανάμεσα στα λογικά ονόματα και τις οριστικές περιγραφές και αποσαφηνίζεται η ανάγκη της χρήσης των ποσοδεικτών στο φορμαλισμό τους. Ο Russell έβαλε με αυτό τον τρόπο τάξη στο χάος της οντολογίας. Αυτό που ακολουθεί

είναι μια καινούργια σύλληψη της φιλοσοφίας με μαθηματικοποιημένα χαρακτηριστικά. Αυτή η φιλοσοφία είναι η αναλυτική.

Η φιλοσοφία καλείται να παλέψει να βρει μια αυστηρή γλώσσα που θα μπορέσει να περιγράψει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο ένα μέρος ή μια κατάσταση του κόσμου, όπως τον αντιλαμβανόμαστε. Οι φιλοσοφικές έννοιες οφείλουν να είναι μονοσήμαντα ορισμένες και οργανωμένες σε σωστά διαμορφωμένες αληθινές λειτουργικές προτάσεις, που να συνδέονται με διαλεκτικά μοτίβα τα οποία θα ακολουθούν πιστά τους κανόνες της μαθηματικής λογικής. Μια κατάλληλη γλώσσα μπορεί δηλαδή να βοηθήσει στο διαχωρισμό των πραγματικών και πολύτιμων φιλοσοφικών εννοιών από τις ψευτοέννοιες και των πραγματικών προβλημάτων από τα ψευδοπροβλήματα της φιλοσοφικής σκέψης. Το αίτημα αυτό καλλιεργήθηκε μέσω του λογικού θετικισμού.

Για τον Rota όμως, τα πράγματα είναι διαφορετικά. Ο ίδιος διαφωνεί με την εισαγωγή των μαθηματικών μέσα από τη μαθηματική λογική στο πεδίο της φιλοσοφίας ως φιλοσοφική μέθοδο, καθώς την θεωρεί καταστροφή τόσο για τα μαθηματικά όσο και για την ίδια τη φιλοσοφία. Απόρροια -σύμφωνα με τον Rota- της εισαγωγής αυτής, είναι η εξάλειψη της αυτονομίας της φιλοσοφίας, αφού μιμείται τις μαθηματικές μεθόδους αλλά επίσης κι η αναγωγή των μαθηματικών στα τυπικά τους συστήματα και την αξιωματική μέθοδο. Για τον Rota, το γεγονός πως κάποιοι σύγχρονοι φιλόσοφοι έχουν γίνει πιστοί της μαθηματικοποίησης δεν οφείλεται στην αυξημένη δύναμη των σύγχρονων μαθηματικών αλλά στο μύθο του νεωτερισμού που θέλει τα μαθηματικά ως βασίλισσα των επιστημών και που η αποδόμησή του αποκαλύπτει την «κρίση» των επιστημών, όπως την αποκαλεί ο Husserl. Όπως κάθε επιστημονική περιοχή οφείλει (κατά τον Husserl) να διατηρεί την αυτονομία της, ανάλογα και η φιλοσοφία πρέπει να είναι αυτόνομη.

Ο Rota καταλήγει πως η καθιέρωση της μαθηματικής λογικής ως η πραγματική μέθοδος της φιλοσοφίας οφείλεται εν τέλει στην αποδόμηση του μύθου των μαθηματικών ως βασίλισσας των επιστημών. Η αξιωματική μέθοδος που αρχικά θα έσωζε τα Μαθηματικά αποτρέποντας το δικό τους ναυάγιο, τώρα θα έσωζε τη φιλοσοφία. Οι Lanciani και Majolino δέχονται ότι υπάρχουν αρκετοί λόγοι ιστορικοί και φιλοσοφικοί για να συμφωνήσει κανείς με την άποψη του Rota. Οι λόγοι

συνδέονται κυρίως με τη συμβολή των οντολογικών ανησυχιών στις αρχικές αναλυτικές έρευνες. Οι οντολογικές ανησυχίες, αφού εκδιώχτηκαν από την μεταφυσική στο πλαίσιο του λογικού θετικισμού μεταφέρθηκαν στη φιλοσοφία της γλώσσας. Η πρώτη απόπειρα μεταφοράς της μαθηματικής λογικής από τα μαθηματικά στη φιλοσοφία, βρίσκεται στη σύνδεση ανάμεσα στη θεωρία του νοήματος και την οντολογία. Τα παλιά προβλήματα της μεταφυσικής, αυτά που επιβιώνουν της μεταφοράς, έρχονται στο φως χάρη στη λογική ανάλυση της γλώσσας. Η «άνοδος» της μαθηματικής λογικής ως είδωλο μπορεί να συνοψιστεί ως η σύμπραξη του παραδοσιακού φόβου για το φιλοσοφικό «ναυάγιο» από τη μια πλευρά και της κατάρρευσης του μύθου που θέλει τα μαθηματικά ως βασίλισσα των επιστημών από την άλλη, στις αρχές του 20^{ου} αι.

Συνοψίζοντας, στον 20^ο αι. ο Rota διαπιστώνει τις πρωταρχικές προσπάθειες να διασωθούν τα μαθηματικά μέσω της αξιωματικής μεθόδου από τα προβλήματα που ανέκυψαν στα θεμέλια, τη μεταφορά της αξιωματικής μεθόδου στη φιλοσοφία και την επιλογή της θεωρίας του νοήματος, ως τον μοναδικά υποσχόμενο τρόπο να λυθούν τα οντολογικά προβλήματα στη βάση του φορμαλισμού της μαθηματικής λογικής. Για το Rota λοιπόν, η προέλευση της αναλυτικής φιλοσοφίας έχει ιστορικές και φιλοσοφικές ρίζες και η επιτυχία της ως κυρίαρχη τάση δεν είναι απλά ιδεολογική.

Οι Lanciani και Majolino (2009, 235-237), παρουσιάζουν τις απόψεις του Rota και για τη φαινομενολογία. Ο Rota δεν προσδιορίζει επακριβώς τί είναι η φαινομενολογία, στο έργο του όμως μπορεί κανείς να διακρίνει τις ακόλουθες έννοιες. Η πρώτη είναι σε γενικό επίπεδο και αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη σχέση στο χρόνο. Φαινομενολόγος σημαίνει: μπορώ να αναγνωρίσω την ιστορικότητα οποιασδήποτε αντικειμενοποίησης, είτε πρόκειται για μια ρητή και θεματική όπως είναι οι θεωρίες, οι έννοιες, οι μέθοδοι, οι θεσμοί κ.α είτε πρόκειται για μια άρρητη και άνευ θέματος. Αν η λέξη «αντικείμενο» γίνει αντιληπτή με την ευρεία έννοια που της δίνει ο Rota, η έννοια συνοψίζεται στην εξής πρόταση: «Κάθε αντικείμενο κουβαλάει το σπόρο της δικής του ασάφειας». Με την ίδια σημασία, γενετική φαινομενολογία καλείται η απόπειρα να αποκαλυφθεί το «αυθεντικό δράμα» κατά τον Rota, που οδηγεί στη σύνθεση κάθε αντικειμένου και που επισημαίνει την κατάχρησή του. Όπως δηλώνει, οτιδήποτε έγινε αντικείμενο καλύπτει το δράμα που

οδήγησε στην σύστασή του. Το δράμα αυτό, λογικά ακολούθησε ένα δύσκολο ιστορικό δρόμο μέσα από πράγματα που παρέρχονται και που μένουν, από ανακατασκευές και παγίδες, πριν ολοκληρωθεί με το αντικείμενο που τελικά γίνεται ξένο ως προς την προέλευσή του. Αυτή η σειρά των πραγμάτων περιστρέφεται γύρω από τη διπλή έννοια των λέξεων «γέννηση» και «κρίση». Η απώλεια της προέλευσης είναι το σύνορο από το οποίο κάθε σχηματισμός αντικειμένων αντιπροσωπεύει τον τρόπο με τον οποίο συγκλίνουν η ιστορική με τη γενετική του σύσταση. Αυτή η έννοια της φαινομενολογίας αποτυπώνεται και στο έργο «*Krisis*» του Husserl. Η φαινομενολογία είναι μια προσπάθεια αποκάλυψης της εσωτερικής λογικής της αλλαγής σε σχηματισμούς αντικειμένων. Αντιπροσωπευτικό του παράδειγμα μπορεί κανείς να βρει στο τελευταίο έργο του Rota με τίτλο «*Husserl and the Reform of Logic*» όπου και παρουσιάζεται ο απολογισμός του για τους ιδανικούς αντικειμενικούς σχηματισμούς της επιστήμης. Κατ' αυτή την πρώτη έννοια λοιπόν, η φαινομενολογία αντιτίθεται στην αναλυτική φιλοσοφία και στην υπόστασή της που χαρακτηρίζεται από την αξιωματική μέθοδο.

Η δεύτερη έννοια της φαινομενολογίας -σύμφωνα με τον Rota- βρίσκεται σ' ένα ευρύτερο επίπεδο κατά το οποίο αποδίδεται στον όρο «φαινομενολογία» μια πράξη αντίστασης: μια πράξη αντίστασης απέναντι σε μια φιλοσοφία που παραιτήθηκε από την προσπάθεια να καθορίσει τον εαυτό της. Είναι δηλαδή μια ένσταση που απευθύνεται στην ίδια τη φιλοσοφία. Οι φιλόσοφοι, παρά το συνεχές φιλοσοφικό ναυάγιο, εξακολουθούν την προσπάθεια αναδιαμόρφωσης και επαναπροσδιορισμού των παλιών ερωτημάτων, αποκαλύπτοντας τις κρυμμένες προϋποθέσεις και επιχειρώντας να περιγράψουν φαινόμενα που η επιστήμη δεν μπορεί να περιγράψει. Κατά τον Rota, η πραγματικότητα που ζούμε αποτελείται από χιλιάδες αντιφάσεις που η παραδοσιακή φιλοσοφία προσπαθεί να περιγράψει με θαρραλέο ρεαλισμό. Ο πραγματικός κόσμος είναι πολύπλοκος γεμάτος απουσίες, παραλογισμούς, ανωμαλίες, παρεκκλίσεις και καταχρήσεις αλλά η πολυπλοκότητα αυτή μπορεί να περιγραφεί. Η περιγραφή αυτή βέβαια, δεν είναι εύκολη καθώς δεν έχουμε τα απαραίτητα λεπτομερή περιγραφικά εργαλεία που απαιτούνται. Η φιλοσοφία χρειάζεται να ενισχύσει τα λογικά εργαλεία της γλώσσας, της λογικής και των επιχειρημάτων, που είναι αναγκαία αλλά όχι ικανά φιλοσοφικά εργαλεία, με καινούργιες στρατηγικές περιγραφής. Ο Rota δηλώνει πως η αλήθεια είναι θέμα

ανακάλυψης. Για να είναι μια φιλοσοφική θεωρία αληθινά περιγραφική, θα πρέπει να παρουσιάζει νέους εννοιολογικούς σχηματισμούς που δημιουργήθηκαν με σκοπό να περιγράψουν τις πολυπλοκότητες αυτού του πολύπλοκου και αινιγματικού κόσμου με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Αυτοί οι εννοιολογικοί σχηματισμοί που συλλαμβάνονται από κάθε φιλόσοφο δεν θα πρέπει να συγχέονται με αυθαίρετες ή παράλογες διαδικασίες, μολοντί μπορεί να μην χαρακτηρίζονται από την αυστηρότητα της μαθηματικής λογικής.

Πίσω από κάθε φιλοσοφική ερώτηση για τον Rota βρίσκεται ένα συνοθύλευμα συναισθηματικών πόθων. Στο στόχο της φιλοσοφίας να περιγράψει φαινόμενα που βρίσκονται στα «όρια του ορθολογισμού», ενυπάρχει το ρίσκο η περιγραφή των φιλοσόφων να αντικατοπτρίζει αυτό που οι ίδιοι επιθυμούν να δουν να ικανοποιείται προσωπικά από την περιγραφή του κόσμου. Η φιλοσοφία έχει τρία στρώματα. Πρώτον, είναι μερικώς ορθολογική και λογική αφού στηρίζεται έστω και ελαφρά στις βασικές αρχές της κλασσικής λογικής. Δεύτερον, είναι μερικώς παράλογη αφού ασκείται από φιλοσόφους, δηλαδή από συναισθηματικά όντα με ενδιαφέροντα, φόβους και επιθυμίες που αποτυπώνονται στα λόγια και τις πράξεις τους και που συχνά έρχονται σε σύγκρουση μεταξύ τους. Τέλος, είναι εν μέρει ορθολογική καθώς αναδιαμορφώνει και παρουσιάζει καινούργια περιγραφικά εργαλεία για την κατανόηση της δομικά θολής φόρμας των φαινομένων, των κοσμικών φαινομένων που είναι ευρέως αποδεκτά και μελετώνται από την επιστήμη. Αυτή ακριβώς η πτυχή αποτελεί το φαινομενολογικό κορμό κάθε φιλοσοφίας. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 170), αυτό που ονομάζουμε «αναλυτική» δήλωση αποτελεί στην ουσία ένα βήμα προς μια απόδειξη, ενώ η αλήθεια της είναι πιθανή χάρη στην επίγνωση των αποδεικτικών της στοιχείων. Η φαινομενολογία διαφοροποιείται από την αναλυτική φιλοσοφία ακριβώς λόγω του ολοκληρωτικού περιγραφικού σκοπού της και της απεριόριστης φιλοσοφικής της φιλοδοξίας. Για το Rota, ο αναλυτικός φιλόσοφος δεν παίρνει το ρίσκο της πολυπλοκότητας, που ουσιαστικά είναι το ρίσκο της ίδιας της φιλοσοφίας. Παρουσιάζει μηδενικό ίχνος «θαρραλέου ρεαλισμού» και αποκρύπτει τα αινιγματικά σημεία του κόσμου. Ο αναλυτικός φιλόσοφος του Rota μπορεί να αντιμετωπίσει φιλοσοφικά ερωτήματα, χωρίς απαραίτητα να χρειάζεται να παλέψει με τα μεγάλα φιλοσοφικά προβλήματα.

Όπως παρατηρεί όμως η Δ. Χριστοπούλου (2015,94-95), η αναλυτική φιλοσοφία ποτέ δεν απέφυγε γνωσιολογικές και μεταφυσικές προσεγγίσεις. Τουναντίον, ασχολείται συστηματικά με βασικά φιλοσοφικά προβλήματα όπως η ταυτότητα, η ύπαρξη, η διάκριση ανάμεσα στο συγκεκριμένο και το αφηρημένο, οι πεποιθήσεις και η δικαιολόγησή τους, η αλήθεια, η γνώση και πολλά άλλα, και ουδέποτε απαξίωσε τη μελέτη των κλασσικών φιλοσοφικών οντολογικών και γνωσιολογικών προβλημάτων. Αντίστοιχα, η αναλυτική φιλοσοφία των μαθηματικών έχει ασχοληθεί τόσο με γνωσιολογικά προβλήματα που αφορούν τη μαθηματική αλήθεια όσο και με οντολογικά προβλήματα αφηρημένων οντοτήτων. Η φιλοσοφία των μαθηματικών έχει και γνωσιολογικό και οντολογικό χαρακτήρα. Είναι εμφανής επομένως, η μονομερής εικόνα που έχει σχηματίσει ο Rota για την αναλυτική φιλοσοφία που ταυτίζεται με αυτή των νατουραλιστών αναλυτικών φιλοσόφων. Η λανθασμένη ταύτιση της αναλυτικής φιλοσοφίας με την περιοχή της φυσικοποιημένης φιλοσοφίας που πρεσβεύει την αναγωγή καθετί υπαρκτού σε φυσικά ή νοητικά γεγονότα, αποτελεί την αιτία της απαξίωσης του Rota ως προς την αναλυτική φιλοσοφία. Για τον Rota, όπως έχουμε προαναφέρει, η φαινομενολογία οδηγεί στον αποψυχολογισμό των φαινομένων, απορρίπτοντας οποιαδήποτε αναγωγή ιδεατών αντικειμένων σε νοητικές διεργασίες. Την ίδια όμως άποψη υιοθετούν σύγχρονοι φρεγκεανοί φιλόσοφοι όπως οι Wright και Hale, που διαχωρίζουν το αφηρημένο (abstract) από το νοητικό (mental) αλλά και γενικότερα οι αναλυτικοί μεταφυσικοί όπως οι A. Bird, F. Macbride κ.α., ενώ μια κριτική προς τον αναγωγισμό, τον φυσικαλισμό και τον ψυχολογισμό βρίσκει σύμφωνο οποιονδήποτε αναλυτικό φιλόσοφο που δεν περιορίζει την ερευνητική του διεργασία στις γνωσιακές ή ψυχολογικές προσεγγίσεις. Είναι εμφανές πως μια συνάντηση αναλυτικής φιλοσοφίας και φαινομενολογίας είναι όχι μόνο εφικτή αλλά δύναται να επιφέρει παραγωγικό διάλογο σε ζητήματα όπως η ταυτότητα και ο ρόλος που αυτή κατέχει στην οντολογία, η συγκρότηση των αριθμητικών αντικειμένων, η συζήτηση για τα ιδεατά και αφηρημένα αντικείμενα και άλλα (Χριστοπούλου, ό.π.).

Είναι πάντως φανερό πως τα όρια μεταξύ φαινομενολογίας και κλασσικής φιλοσοφίας δεν είναι ξεκάθαρα. Σύμφωνα με τους Lanciani and Majolino (2009, 237-239), είτε η φαινομενολογία γίνει αντιληπτή ως μια «ορισμένη σχέση με το χρόνο» είτε ως μια «ορισμένη πράξη αντίστασης» η έννοια της φαινομενολογίας δείχνει να

αντιπροσωπεύει ένα μέρος της φιλοσοφίας. Η τρίτη έννοια της φιλοσοφίας κατονομάζει αυτό που ο Rota αποκαλεί μια «αναπροσαρμογή της αντίληψης». Μια αναδιάταξη δηλαδή, που θα έκανε δυνατό να κοιτάζουμε τις ηθικές αλλά και αισθητικές αξίες με την ίδια αντικειμενική απόσταση με την οποία αντιμετωπίζουμε τον αστρικό ουρανό που βρίσκεται από πάνω μας. Η έννοια αυτή της φαινομενολογίας σχετίζεται με το μύθο του φυσικού αντικείμενου. Όπως τονίζει ο Rota, ένα από τα πιο βασικά ζητήματα είναι πως τα φυσικά αντικείμενα όπως οι καρέκλες και τα τραπέζια, έχουν τον ίδιο βαθμό αληθείας με τα ιδεατά όπως είναι τα ποιήματα, οι αξίες, τα συναισθήματα, οι επιφάνειες Riemann κ.α. Η προκατάληψη όμως, πως τα φυσικά αντικείμενα είναι πιο αληθινά από τα ιδεατά ισχύει ακόμα και σήμερα και είναι μία από τις πιο βαθιά ριζωμένες απόψεις της δυτικής κουλτούρας, ενώ ένας από τους πιο ισχυρούς μύθους της δυτικής παράδοσης, είναι πως ο κόσμος μας απαρτίζεται αποκλειστικά από φυσικά αντικείμενα και ιδιότητες. Ο «μύθος» αυτός είναι πιο ανθεκτικός και από το «μύθο» της μαθηματικοποίησης, αν και οι δύο αυτοί μύθοι είναι ανεξάρτητοι. Μπορεί κάποιος να δεχτεί ότι ο πραγματικός κόσμος είναι φτιαγμένος από φυσικά αντικείμενα χωρίς να αποδέχεται ότι τα μαθηματικά είναι μια εδραιωμένη εικόνα του κόσμου.

Η έννοια αυτή της φαινομενολογίας, κάνει πιο ξεκάθαρη την άποψη του Rota για την αναλυτική φιλοσοφία. Σύμφωνα με τον πρώτο «μύθο», οι αναλυτικοί φιλόσοφοι είναι «μαθηματικοί φιλόσοφοι» και η υπόσταση αυτή της μαθηματικής μεθόδου, της αξιωματικής δηλαδή μεθόδου, ενσωματώνεται στη φιλοσοφική αναζήτηση. Οι μαθηματικοί φιλόσοφοι όπως δηλώνει ο Rota, είναι πεπεισμένοι πως το κύριο εργαλείο της ανακάλυψης είναι η αξιωματική μέθοδος. Η αξιωματική μέθοδος είναι ο βασικός τρόπος ελέγχου και παρουσίασης των μαθηματικών γεγονότων. Σύμφωνα με το Rota (1997, 96), η παρουσίαση και το περιεχόμενο των μαθηματικών διαφέρουν όσο το φαγητό με τα φάρμακα και επομένως δεν θα πρέπει σε καμία περίπτωση να συγχέονται. Οι μαθηματικοί φιλόσοφοι από την άλλη πρεσβεύουν πως η αξιωματική μέθοδος είναι το βασικό μέσο ανακάλυψης και θεωρούν εσφαλμένα ότι αποτελεί το εργαλείο απόδειξης θεωρημάτων και επίλυσης προβλημάτων για τους μαθηματικούς. Απόρροια αυτού, η επιθυμία υιοθέτησης της αξιωματικής μεθόδου από τη φιλοσοφία. Για τον Rota όμως, η αντίληψη αυτή προέρχεται από το φόβο ή την ανικανότητά τους να περιγράψουν

και να αναλύσουν τον τρόπο δομής της φιλοσοφικής αιτιολόγησης και την επιφυλακτικότητά τους ως προς την αυτονομία της αιτιολόγησης αυτής και την ικανότητά της να ανακαλύψει την αλήθεια. Νιώθοντας ανίκανοι ή φοβισμένοι να διαχωρίσουν, να αναλύσουν και να περιγράψουν τη φιλοσοφική αιτιολόγηση, αισθάνονται την ανάγκη να λάβουν βοήθεια από την αποδεδειγμένη τεχνική ενός άλλου πεδίου που χαίρει τον σεβασμό και τον φθόνο τους. Αμφισβητώντας τη δύναμη της φιλοσοφικής αιτιολόγησης για την αναζήτηση της αλήθειας, αποζητούν τη μίμηση της μαθηματικής απόδειξης .

Σύμφωνα με την τρίτη έννοια της φαινομενολογίας, οι αναλυτικοί φιλόσοφοι είναι και οντολογικοί αναγωγιστές. Τα φυσικά αντικείμενα δηλαδή, αντιπροσωπεύουν τα κύρια στοιχεία της πραγματικότητας όπως αυτοί την κατανοούν. Όσα δεν είναι φυσικά αντικείμενα και όσα δεν μπορούν να αναχθούν σε φυσικά αντικείμενα, απλά αντιμετωπίζονται σα να μην ανήκουν στον κόσμο. Η λογική πρώτης τάξης και η εκτατική σημασιολογία που λειτουργεί σε ένα οντολογικό πλαίσιο, γίνονται τα αναλυτικά εργαλεία που θα αποκαλύψουν την εσωτερική δομή του κόσμου, ενώ τα υπόλοιπα τα αναλαμβάνει η ψυχολογία. Εδώ παρατηρούμε πως ο Rota ασφαλώς δεν γνωρίζει ότι η αναλυτική φιλοσοφία μελετά διάφορες εκδοχές του οντολογικού ρεαλισμού που υποστηρίζουν την ύπαρξη αφηρημένων (abstract) αντικειμένων (πχ. μαθηματικών) τα οποία δεν είναι ούτε φυσικά (physical) αντικείμενα ούτε νοητικά (mental) και δεν ανάγονται στη σφαίρα του φυσικού ή του νοητικού. Η αναλυτική φιλοσοφία έχει αποφύγει τον ψυχολογισμό, με εξαίρεση βέβαια τους νατουραλιστές και τους φιλοσόφους του νου που υιοθετούν γνωσιακές προσεγγίσεις.

Η φαινομενολογία για τον Rota στηρίζεται σε μια κάπως διαφορετική άποψη. Για τον Rota, τίποτα δεν είναι καθαρά ψυχολογικό. Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται τα πράγματα μας δίνει στοιχεία για τα χαρακτηριστικά που τα απαρτίζουν. Η φαινομενολογία «αποψυχολογιοποιεί» την ιδέα του φαίνεσθαι και αποποιείται το παλιό ρητό «το φαίνεσθαι είναι υποκειμενικό και το είναι αντικειμενικό». Οι φαινομενολογικές περιγραφές αφορούν το πώς εμφανίζονται τα πράγματα. Με βάση το «μύθο» των φυσικών αντικειμένων, μπορούμε να δηλώσουμε πως τα πραγματικά αντικείμενα εμφανίζονται ως υπαρκτά, με συγκεκριμένο τρόπο και ως σύνολο πραγματικών ιδιοτήτων των υπαρκτών πραγματικών όντων.

Μελετώντας όμως πιο προσεκτικά τα αντικείμενα, αντιλαμβάνεται κανείς πως τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Αντικείμενα συνηθισμένα όπως είναι τα μολύβια, τα εργαλεία, οι εφημερίδες κ.α δεν εμφανίζονται πρωτίστως ως υπαρκτά αλλά ως ταυτότητες. Ειδικότερα, ως λειτουργικές ταυτότητες μέσα από πολλαπλές πραγματικότητες. Για την κατανόηση της έννοιας των πολλαπλών πραγματικοτήτων, ο Rota μας δίνει κάποια παραδείγματα. Αναλογιστείτε λέει, το πρωτοσελίδο της εφημερίδας New York Times, που το λαμβάνουμε όλοι ως ίδιο παρόλο που το διαβάξει ο καθένας σε διαφορετικά φύλλα ή ακόμα και στην οθόνη ενός υπολογιστή. Σκεφτείτε αναλογικά πως η αντίληψη του φίλου μου Pierre αφορά τον ίδιο που είδα και χτες, αλλά και πως αντιστοιχίζουμε την πέτρα που είδαμε χτες με την ίδια που βλέπουμε τώρα. Μόλις το αντικείμενο αποψυχολογιοποιηθεί, δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ταυτότητα μιας πολλαπλότητας, μια επανεμφανιζόμενη ομοιότητα.

Έτσι η φαινομενολογία αναζητά την ταυτότητα μέσα στις πολλαπλές εμφανίσεις της. Αλλά και ο Frege αποποιήθηκε τον ψυχολογισμό και μάλιστα άσκησε κριτική στον Husserl διότι στο πρώιμο έργο του ήταν ψυχολογιστής. Συνεπώς, ένα μεγάλο μέρος της αναλυτικής φιλοσοφίας αποψυχολογιοποιεί τη φιλοσοφία (και όχι ειδικά η φαινομενολογία). Έτσι κι εδώ ο Rota παρερμηνεύει την κουλτούρα της αναλυτικής φιλοσοφίας.

Στο θέμα της ταυτότητας, ο Rota είναι ξεκάθαρος: η ταυτότητα προηγείται της ύπαρξης (πρβλ. Χριστοπούλου, 2015). Εξωτερικά, ο κόσμος είναι φτιαγμένος από αντικείμενα, ιδέες ή οτιδήποτε άλλο και το πρόβλημα της ύπαρξης έχει κίνητρο τον ανθρώπινο πόθο για μια φυσική βάση του κόσμου. Εσωτερικά, όλες οι φυσικές, ιδεατές ή ψυχολογικές ιδιότητες ενός αντικειμένου έπονται του φαινομένου που ονομάζουμε ταυτότητα, ο κόσμος είναι φτιαγμένος από αντικείμενα που μοιράζονται την ίδια ιδιότητα, τη μονιμότητά τους δηλαδή σε κάθε παρουσίαση, και το πρόβλημα της ύπαρξης υπάγεται στην κατανόηση του θεμελιώδους ζητήματος, του θαύματος που είναι η ταυτότητα. Εάν τα πράγματα όπως μας δίνονται δεν ληφθούν ως όντα, αλλά ως λειτουργικά αμετάβλητες ταυτότητες μέσα σε μια πληθώρα πιθανών ή πραγματικών προσδιορισμών, τότε ο κόσμος ενός φαινομενολόγου δεν είναι ούτε ένα σύνολο από υπαρκτά αντικείμενα με τις ατομικές τους ιδιότητες, ούτε η ολότητα των γεγονότων δοσμένων στην επίσημη μορφή μιας προτασιακής γλώσσας. Είναι ένα πολυσύνθετο στρώμα του *Fundierung*.

8. Η φαινομενολογική έννοια *Fundierung* στη σκέψη του Rota

Η έννοια *Fundierung* που συνήθως μεταφράζεται ως «στήριξη» ή «θεμελίωση» εισήχθη από τον Husserl στο *Logical Investigations* και αναφέρεται σε ένα κατώτερο στρώμα που στηρίζει ένα ανώτερο, όπως ένας όροφος στηρίζει τους από πάνω ορόφους του. Όπως δηλώνει ο Palombi (2011, 35), ο όρος '*Fundierung*' δεν θα πρέπει να συγχέεται με τον όρο '*Begründung*', που αναφέρεται σε αυτό που στηρίζει χωρίς όμως να στηρίζεται ή να θεμελιώνεται το ίδιο. Για παράδειγμα η βάση του προαναφερθέντος οικοδομήματος στηρίζει αλλά δεν στηρίζεται ενώ ο 1ος όροφος στηρίζει τον 2ο όροφο αλλά επιπλέον στηρίζεται. Η στήριξη (*Fundierung*) για τον Rota, είναι μια λογική έννοια, μια πρωτογενής σχέση που δεν μπορεί με κανένα τρόπο να αναλυθεί σε απλούστερες και γίνεται αντιληπτή πριν από οποιαδήποτε πειραματική προσπάθεια αντίληψης. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 172-173), η έννοια του *Fundierung* μπορεί να λειτουργήσει ως βάση διεξαγωγής έγκυρων συμπερασμάτων και τρόπου αναφοράς απαραίτητων αληθειών. Δεν αποτελεί μέρος της λογικής, η υιοθέτησή της όμως θα επιφέρει αλλαγές στα θεμέλιά της.

Σε μια *Fundierungen* σχέση, διακρίνεται η *λειτουργία* από τη *γεγονικότητα* (πρβλ. Χριστοπούλου, 2015). Εάν ταυτίσουμε τη *λειτουργία* με την *γεγονικότητα* τότε θα οδηγηθούμε σε μια σχέση αναγωγής. Όπως δηλώνουν οι Lanciani and Majolino (2009, 239), σύμφωνα με τον Rota, η αναγωγή είναι το πιο σύνθηες και καταστροφικό λάθος της δικαιολόγησης στη σύγχρονη εποχή. Η σχέση *Fundierung* συνίσταται στη σχέση δύο πραγμάτων, της γεγονικότητας και της λειτουργίας που μαζί αποτελούν τα συστατικά από τα οποία είναι φτιαγμένος ο κόσμος. Οι λειτουργίες βασίζονται στα γεγονότα και τα γεγονότα είναι φορείς των λειτουργιών. Σε έναν οντολογικό κόσμο που –σύμφωνα με την αναλυτική φιλοσοφία- αποτελείται από αντικείμενα και ιδιότητες, η θεμελιώδης σχέση είναι αυτή που συνίσταται στη σχέση του αντικειμένου με τις ιδιότητές του. Σε ένα φαινομενολογικό κόσμο όμως, φτιαγμένο από πολλαπλές λειτουργίες και πανομοιότυπα γεγονότα, η θεμελιώδης σχέση είναι αυτή του *Fundierung*. Τα γεγονότα αντιπροσωπεύουν το στρώμα της πραγματικότητας όπως τεκμηριώνεται. Η γεγονικότητα κατά τον Rota παρέχει την πρωταρχική και βασική υποστήριξη, αλλά δεν μπορεί να επισκιάσει τη λειτουργία

που η ίδια θεμελιώνει. Η λογική του κόσμου επομένως, θα πρέπει να επισημοποιήσει τις Fundierungen σχέσεις που υφίστανται ανάμεσα στις λειτουργίες και τα γεγονότα.

Κατά τον Palombi (2011, 43-44), η *γεγονικότητα* παίζει σημαντικό ρόλο στη διατήρηση της λειτουργίας και αναπαριστά ένα βήμα πρόσβασης της λειτουργίας, αλλά μόνο η *λειτουργία* σχετίζεται με την έννοια. Η ταύτιση γεγονικότητας – λειτουργίας προέρχεται από την τάση του αναγωγισμού και της προσπάθειας αναγωγής της *λειτουργίας* σε φυσικά αντικείμενα. Ο αναγωγισμός είναι για τον Rota θεμελιώδες λάθος. «Το να συγχέουμε τη *λειτουργία* με τη *γεγονικότητα* σε μια σχέση Fundierung είναι μια υπόθεση αναγωγής. Ο αναγωγισμός είναι το πιο συχνό και καταστροφικό λάθος της σημερινής αιτιολόγησης. Η γεγονικότητα είναι η ουσιαστική υποστήριξη αλλά δεν μπορεί να επισκιάσει τη λειτουργία που συνθέτει.» (Rota, 1997, 176).

Όπως δηλώνει η Δ. Χριστοπούλου (2015, 68-69), η έννοια του Fundierung είναι μια θεμελιώδης σχέση ανάμεσα στα διαφορετικά επίπεδα της πραγματικότητας, που τους επιτρέπει όμως να διατηρούν τον χαρακτήρα και την αυτονομία τους. Εάν στην έννοια της θεμελίωσης δοθεί αναγωγιστική ερμηνεία, τότε ένα επίπεδο φαινομένων θεωρείται επιφανόμενο ενός άλλου επιπέδου στο οποίο και ανάγεται. Αντίθετα, εάν ερμηνευτεί φαινομενολογικά όπως ακριβώς επιχείρησε ο Rota, κάθε φαινόμενο γίνεται κατανοητό με την αυτόνομη και μη αναγώγιμη σημασία του, γι' αυτό και η έννοια του Fundierung γίνεται αντιληπτή ως μία έννοια σχέσης. Η ακριβής περιγραφή της έννοιας του Fundierung δεν μπορεί να δοθεί με ευκολία, επισημαίνει ο Palombi (2011). Κατά τον Rota (1991, 20-23), οι ορισμοί όπως έχουμε προαναφέρει, δεν επαρκούν για την πλήρη κατανόηση μιας έννοιας και για το λόγο αυτό χρησιμοποιεί στα κείμενά του παραδείγματα εφαρμογής τους. Έτσι, και για την έννοια του Fundierung, παραθέτει το παράδειγμα των παιχνιδιών και συγκεκριμένα του σκακιού. Το σκάκι εμπεριέχει μια σκακιέρα και πιόνια, τα φυσικά δηλαδή χαρακτηριστικά του, τα οποία είναι διακριτά από το νόημά του, καθώς κανένας δεν δύναται να κατανοήσει το πώς παίζεται μόνο από την όψη τους. Ακόμα δηλώνει (1991a, 41), πως οι νοητικές διεργασίες που απαιτούνται κατά το παίξιμό του, δεν σχετίζονται με τους κανόνες του παιχνιδιού παρά μόνο σε αυτούς που έχουν ήδη γνώση του. Όπως αναφέρει ο Palombi (2011, 41), στον «χώρο» των παιχνιδιών, ο Rota δηλώνει (1989, a), πως

υπάρχει μια σχέση Fundierung στην λειτουργία της ντάμας κούπα και της κάρτας σε οποιοδήποτε παιχνίδι, είτε είναι μπριτζ είτε είναι πόκερ, και την ίδια την κάρτα, αφού κανένας δεν είναι σε θέση να κατανοήσει τη λειτουργία της συγκεκριμένης κάρτας, το ρόλο της, από απλώς την γνώση της κάρτας και όχι των όρων του εκάστοτε παιχνιδιού. Υποστηρίζει επιπλέον, πως οι σχέσεις Fundierung είναι σύνθετες και βρίσκονται σε κάθε επίπεδο από τη νοητική διαδικασία των παικτών, στην φυσιολογία του «παίζω χαρτιά», στην ατμόσφαιρα των παικτών κ.α. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 180), η εξάρτηση του περιεχομένου σε μια σχέση Fundierung, παρερμηνεύεται από τους αναλυτικούς ως αυθαιρεσία. Οι κανόνες όμως του παιχνιδιού του μπριτζ δεν μπορούν να θεωρηθούν αυθαίρετες, αν και εξαρτώνται άμεσα από το περιεχόμενό του.

Ο Palombi (2011, 38-41), αναφέρεται σε άλλο ένα παράδειγμα για την ανάδειξη της σημασίας του Fundierung, που μας δίνεται από τον Rota και αφορά το φαινόμενο της ανάγνωσης. Ο κόσμος μας αποτελείται από γράμματα και λέξεις, η ανάγνωση αποτελεί μια από τις πιο βασικές ανθρώπινες λειτουργίες – αρκεί να αναλογιστούμε πως ένας παντελώς αναλφάβητος άνθρωπος δεν μπορεί να επιβιώσει στην σημερινή κοινωνία – και όμως δεν μπορούμε να κατανοήσουμε πλήρως το τί είναι η ανάγνωση. Οι επιστημονικοί κλάδοι δεν παρέχουν τα εργαλεία για την κατανόησή της, που βρίσκεται πέρα από την πράξη, γι' αυτό και καλείται η φιλοσοφία να επανανακαλύψει τις έννοιες απλών πράξεων όπως «βλέπω» και «διαβάζω». Ο Rota τάσσεται ενάντια σε ερμηνείες που ανάγουν την ανάγνωση σε μια φυσική πράξη αναγνώρισης σχημάτων μελανιού, που ερμηνεύονται μετέπειτα σε σύμβολα που κατέχουν κάποιο νόημα. Αποδίδει στην ανάγνωση δύο ερμηνείες, τη φυσική που εμπεριέχει βιολογικές, οπτικές και νευρολογικές διαδικασίες και την ερμηνεία της ως λειτουργία. Αναφέρει ακόμα (1991a, 65) πως ο υλιστικός αναγωγισμός αποδίδει την κατανόηση της ανάγνωσης μιας γραφής στα μόρια και τα άτομα του χαρτιού και το μελάνι. Η αναγωγή όμως της πραγματικότητας στην ύλη, καταλήγει στην μη ύπαρξη του φαινομένου της κατανόησης του περιεχομένου του κειμένου, καθώς καμία φυσική ανάλυση του χαρτιού δεν μπορεί να αποδώσει το περιεχόμενό του. Αν τώρα εμβαθύνουμε το πρόβλημα σε επίπεδο γραμματικής και σύνταξης, γίνεται ακόμα πιο φανερή η δυσκολία αναγωγής της κατανόησης μιας

γραφής σε λογικά βήματα και αλγορίθμους αφού παρά τη φαινομενική απλότητα του τρόπου γραφής μας (από τα αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω), η κατανόησή της δεν μπορεί να αναχθεί σε μια γραμμική διαδοχή αλλά πρόκειται για μια πολυγραμμική και πολυεπίπεδη δομή με πολλές κατευθύνσεις. Οι καινούργιες λέξεις που αποτυπώνουμε κατά τη γραφή μας στα δεξιά, μπορεί να αποδώσουν καινούργιο νόημα στις ήδη καταγεγραμμένες λέξεις στα αριστερά και ως εκ τούτου η έννοια της διατύπωσης της γραφής προκύπτει από την αναφορά και όχι με διαισθητικό και άμεσο τρόπο. Το φαινόμενο αυτό μπορούμε να το γενικεύσουμε και στις σχέσεις ανάμεσα σε προτάσεις, σελίδες ή ακόμα και ολόκληρα βιβλία. Η πολυπλοκότητα του φαινομένου της ανάγνωσης αντιμετωπίζεται από διαφορετικές θεωρίες και παρόλο που οι προσεγγίσεις τους διαφέρουν, όλες έχουν ως κοινό στοιχείο την αναγνώριση του προβλήματος της σχέσης ανάμεσα στο όλο και το επιμέρους το οποίο αντικατοπτρίζεται στη θέση του Rota για το Fundierung. Κυρίως αυτή η λογική έννοια καλείται να στηρίξει την κριτική του απέναντι στον αναγωγισμό.

Σύμφωνα με τον Rota (1997, 175), το περιεχόμενο ενός κειμένου μπορεί να είναι για εμάς μεγαλύτερης σημασίας από το ίδιο το κείμενο, δεν μπορούμε να πούμε όμως το ίδιο και για την ύπαρξή τους, καθώς αντίθετα με το κείμενο, το περιεχόμενό του υπάρχει «μέσα» στο μυαλό μας και εξαρτάται άμεσα από τις νοητικές μας λειτουργίες. Ο Palombi (2011, 41-42) παρατηρεί ότι για τον Rota (1991a, 67), το κείμενο είναι η γεγονικότητα ενώ το περιεχόμενό του και συγκεκριμένα οι έννοιες είναι η λειτουργία. Έτσι, αυτό που μας αφορά εμάς είναι η σύλληψη του νοήματος το οποίο και χάνεται όταν αναζητείται υλιστικά. Ο Rota αποδίδει την δυνατότητα σύγχυσης από την ταύτιση του κειμένου με το περιεχόμενό του στην αναγκαιότητα ύπαρξης ενός φυσικού υποστρώματος και κάνει ξεκάθαρο πως οι όροι «κείμενο» και «περιεχόμενο του κειμένου» πρέπει να θεωρούνται ισότιμοι αλλά διαφορετικοί. Ο Rota αναγνωρίζει φαινομενολογικά την υλικότητα του κειμένου και τα φυσικά χαρακτηριστικά της ανάγνωσης, αρνείται όμως την αναγωγή της έννοιας στα στοιχεία αυτά. Η σχέση κειμένου (γεγονικότητα) με το περιεχόμενό του (λειτουργία) δεν είναι μεταβατική και επομένως δεν μπορούμε να αναφέρουμε μια σχέση αιτίου – αποτελέσματος. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 176), η σχέση λειτουργίας –

γεγονικότητας δεν μπορεί να αναχθεί σε οποιαδήποτε άλλη μορφή σχέσης. Η γεγονικότητα παίζει υποστηρικτικό ρόλο ως προς τη λειτουργία, τη μόνη σχετιζόμενη, αφού το κείμενο είναι η λειτουργία που επιτρέπει στο περιεχόμενο να λειτουργήσει ως σχετικό. Το περιεχόμενο επομένως είναι λειτουργικά σχετικό με το ίδιο το κείμενο. Η σχετικότητα όμως της λειτουργίας δεν συνεπάγεται και την αυτονομία της. Η λειτουργία δεν υφίσταται χωρίς τη γεγονικότητα.

Ακόμα και αν δημιουργούσαμε όμως, μια σχέση εξάρτησης ανάμεσα στην υλικότητα του κειμένου και την αναγνωστική συμπεριφορά του υποκειμένου, θα σήμαινε την αυτόματη αναγωγή του φαινομένου σε φυσικά χαρακτηριστικά, κάτι που αντιτίθεται στη στάση του Rota απέναντι στον αναγωγισμό. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 174), η κατανόηση και μάθηση ενός κειμένου μπορεί να εξαρτάται από την διαδικασία ανάγνωσής του και το ίδιο το κείμενο, δεν αποτελεί όμως και η ίδια μια διαδικασία. Πρέπει να είναι ξεκάθαρος ο διαχωρισμός ανάμεσα στο κείμενο και το περιεχόμενο του, ειδικά αν αναλογιστούμε πως μπορούμε να μάθουμε το ίδιο περιεχόμενο, διαβάζοντας ένα διαφορετικό κείμενο ή το πόσο εύκολο είναι να θυμόμαστε το περιεχόμενο ενός κειμένου, χωρίς να μπορούμε να ανακαλέσουμε το ίδιο το κείμενο. Το περιεχόμενο βέβαια εξαρτάται από το κείμενο και η εξάρτηση αυτή, σύμφωνα με το φαινομενολογικό του τρόπο σκέψης, αποδίδεται στη σχέση του Fundierung.

Σύμφωνα με τον Palombi (2011, 44-47), ο Rota δίνει μεγάλη σημασία στην έννοια του *ρόλου* η οποία μπορεί να υπονομευθεί από τη *λειτουργία* όπως διαφαίνεται και από το παρακάτω παράδειγμα που παραθέτει ο ίδιος (1985e, 9). Φανταστείτε πως είστε σε ένα αεροδρόμιο και αντικρίζετε μια πόρτα που οδηγεί στον αεροδιάδρομο. Εάν ανοίξει η πόρτα και προσέλθει ένα πλήθος κόσμου, τότε ο υπεύθυνος ελέγχου διαβατηρίων τους αναγνωρίζει αμέσως ως επιβάτες αεροπλάνου. Εάν μεταφέρουμε τώρα το ίδιο σενάριο σε μια μη αναγνωρίσιμη τοποθεσία, ο υπεύθυνος θα αντικρύσει ένα πλήθος ανθρώπων οι οποίοι μπορεί να διέρχονται για ποικίλους λόγους. Η αναγνώριση μιας κατηγορίας ανθρώπων, επομένως, έχει άμεση σχέση με το ρόλο που κατέχουν σε ένα δεδομένο πλαίσιο ή περιβάλλον και καμία αναγνώριση προσώπων δεν μπορεί να υφίσταται χωρίς την σύλληψη μιας λειτουργίας. Ερμηνεύοντας το παράδειγμα αυτό με βάση τη σχέση του Fundierung, γίνεται ξεκάθαρη η σημασία των ρόλων που έχουν την ανάγκη ενός πόλου λειτουργίας, ενώ η ερώτηση του πώς

συνδέονται κάποια αντικείμενα, κατά τον Rota είναι εσφαλμένη, αφού η σχέση των αντικειμένων προσδιορίζεται από τις πιθανές κοινές τους λειτουργίες. Η γεγονικότητα είναι ένα μέρος του δικτύου των λειτουργιών των πιθανοτήτων. Τα φυσικά αντικείμενα, για εμάς, όπως για παράδειγμα μολύβι και χαρτί, από φαινομενολογική άποψη είναι εργαλεία που συμμετέχουν σε Fundierung σχέσεις. Η αναγνώριση ενός συγκεκριμένου εργαλείου, κατά τον Rota, προκύπτει από την εξοικειώσή μας με τις πιθανές του λειτουργίες και ο κόσμος μας είναι ένα δίκτυο συσχετιζόμενων λειτουργιών. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 177), κατά τη γραφή ενός κειμένου, σε μία σχέση Fundierung, το χαρτί και το μελάνι κατέχουν το ρόλο της λειτουργίας. Το στυλό δεν είναι ούτε αντικείμενο, ούτε υλικό, είναι απλά η λειτουργία που μου επιτρέπει να γράψω. Το αναγνωρίζω ως στυλό λόγω της εξοικειώσής μου με τις λειτουργίες τους ως προς τη γραφή, ενώ η γεγονικότητα του στυλού προέρχεται από τα κομμάτια που το απαρτίζουν, όπως το πλαστικό και το μελάνι. Άλλη μια σχέση Fundierung κατά τον Rota (1997, 178), αν και κάπως αμφιλεγόμενη, υπάρχει ανάμεσα στο βλέπω και το κοιτάζω. Το ότι κοιτάζω ένα στυλό βασίζεται στο ότι βλέπω κάτι, το ότι κοιτάζω όμως ένα κείμενο βασίζεται στο ότι το βλέπω, αυτό το συγκεκριμένο. Πιο συγκεκριμένα, το κοιτάζω είναι η γεγονικότητα πάνω στην οποία στηρίζεται η λειτουργία του βλέπω, δεν αποτελεί μια φυσική διαδικασία, ούτε καν διαδικασία, αφού πρόκειται για κάτι που συμβαίνει και όχι που υπάρχει και δεν μπορώ να κοιτάζω κάτι αν δεν το βλέπω. «Για την φαινομενολογία οι λειτουργίες ούτε έχουν ύπαρξη, ούτε δεν έχουν, αλλά ‘θεμελιώνονται’ (το μοναδικό είδος ύπαρξης που έχει νόημα)» (Rota, 1997, 180).

Ο Palombi (2011, 52), υποστηρίζει ότι ο Rota επιχειρεί έναν εμπλουτισμό και μια αναθέωση της λογικής μέσω της εφαρμογής της Fundierung. Για τον Rota (1989a, 1997a, 172), όπως αναφέραμε, η σχέση Fundierung όχι μόνο θα εμπλουτίσει τη λογική αλλά θα αποτελέσει τη βάση διεξαγωγής έγκυρων συμπερασμάτων και αναγκαίων αληθειών. Είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της προσπάθειας αναδιάρθρωσης εννοιών της μαθηματικής λογικής, είναι η θεμελιώδης αρχή που μας επιτρέπει να κατανοούμε και να αποδίδουμε τις έννοιες των λέξεων.

Η φαινομενολογία, σύμφωνα με την τρίτη και πιο ριζοσπαστική έννοια, είναι η «αναπροσαρμογή της αντίληψης». Για την καλύτερη κατανόηση του κόσμου, μετατοπίζει το σκοπό και την προσοχή της περιγραφής από τα φυσικά αντικείμενα στα φαινόμενα, από τα πράγματα στα επαναλαμβανόμενα στοιχεία και κυρίως από την ύπαρξη στην ταυτότητα. Με τη βοήθεια της έννοιας *Fundierung*, η οντολογία αντικαθίσταται από την γενεαλογία της ταυτότητας δηλαδή από τη λογική του πραγματικού κόσμου. Όπως αναφέρουν οι Lanciani and Majolino (2009, 240), η φαινομενολογία για τον Rota, είναι ουσιαστικά ένας τρόπος να αντιμετωπίζουμε τις ιδιαιτερότητες ενός περίπλοκου κόσμου με μια καινούργια αίσθηση του χρόνου, με θάρρος και με μια ικανή ολοκαίνουργια λογική.

9. Εναντίον του ‘αναγωγισμού’ και του ‘αντικειμενισμού’

Μελετώντας κανείς τα κείμενα του Rota, θα έρθει συχνά αντιμέτωπος με τις έννοιες «αναγωγισμός» (reductivism) και «αντικειμενισμός» (objectivism) παρόλο που δεν ορίζεται επακριβώς το εννοιολογικό τους περιεχόμενο.

Σε αρκετές περιπτώσεις, χρησιμοποιεί τον αναγωγισμό με υλιστικούς όρους δηλαδή ως το δόγμα που προσδιορίζει κάθε ψυχική δραστηριότητα με φυσικές και φυσιολογικές διεργασίες. Σύμφωνα με τον Palombi, ο Rota για τον αναγωγισμό, κρατάει μια ακραία αρνητική στάση κατονομάζοντας αυτό το είδος του ως υλισμό, όπου τα πάντα ανάγονται σε μπάλες μπιλιάρδου που η μία προσκρούει στην άλλη σύμφωνα με τους νόμους της μηχανικής, χωρίς να επεξηγεί όμως τί ανάγεται σε τί. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αναγάγουμε το διάβασμα σε μια φυσική ή μηχανική πράξη. Αυτό μπορεί να γίνει αν πούμε πως το διάβασμα είναι η φυσική πράξη κατά την οποία βλέπουμε συγκεκριμένα γράμματα και σύμβολα και κατόπιν τα ερμηνεύουμε ώστε να έχουν ένα συγκεκριμένο νόημα. Ο αναγωγισμός εδώ, καλείται μια φυσική ή μηχανική πράξη με ουσιώδη συστατικά την ερμηνεία συμβόλων και τον προσδιορισμό του νοήματος, ο αναγωγιστής όμως επιβάλλεται να προσδιορίσει εκτενέστερα την ερμηνεία των συμβόλων και την σύλληψη του νοήματος, καθώς για

έναν αναγωγιστή το νόημα δεν μπορεί να θεωρηθεί δεδομένο και είναι το κύριο φαινόμενο που πρέπει να εξηγηθεί ή να αναχθεί.

Ένα άλλο παράδειγμα που χρησιμοποιεί είναι το ακόλουθο: Συναντάω κάποιον στο δρόμο. Όπως κατευθύνεται προς τη μεριά μου τον αναγνωρίζω, είναι ο Pierre. Ο Pierre που συναντάω τώρα είναι ο ίδιος που συνάντησα χτες. Πώς το γνωρίζω αυτό; Συνήθως η απάντηση δίνεται μηχανιστικά, μεταφράζοντας το συγκεκριμένο γεγονός με όρους φυσιολογικούς. Τα μάτια μου καταγράφουν την εικόνα του Pierre, την μεταδίδουν στον εγκέφαλο ο οποίος την ταυτίζει μέσα από μια φυσιολογική διαδικασία με την χτεσινή εικόνα. Η εξήγηση αυτή για το Rota είναι μηχανιστική και έρχεται αντιμέτωπη με ένα αδιέξοδο που δεν μπορεί να αποφευχθεί χωρίς μια διανοητική ανεντιμότητα. Στο πρόβλημα αυτό που προκαλείται από κάθε μηχανιστική εξήγηση ενός φαινομένου αντίληψης, καλείται να δώσει απάντηση η φαινομενολογία του Husserl. Μεγάλο μέρος του έργου του Husserl *Logical Investigations* όπως και του *Krisis* είναι αφιερωμένα στον αναγωγισμό και μιας εκδοχής του, που παρουσιάζεται με τον καταδικαστικό όρο «ψυχολογισμός». Ο Husserl κάνει κατά μέτωπο επίθεση στον ψυχολογισμό, μολονότι αρχικά είχε κατηγορηθεί ο ίδιος για ψυχολογισμό με αφορμή το πρώιμο έργο του για τις ψυχολογικές μελέτες της αριθμητικής. Όμως ο Husserl στο *Logical Investigations* αντιτίθεται στην άποψη του Mill πως η εγκυρότητα των λογικών νόμων βασίζεται στην εμπειρική επαγωγική γενίκευση και υποστηρίζει πως η εμπειρία δεν μπορεί να εξηγήσει ή να δικαιολογήσει την καθολικότητα και την αναγκαιότητα που υποτίθεται ότι κατέχουν οι λογικοί νόμοι.

Σύμφωνα με τον Rota (1997, 102-103), η φιλοσοφία, αντίθετα με τα μαθηματικά, δεν ασχολείται με γεγονότα κι αυτό γιατί ο κόσμος μας χαρακτηρίζεται από παραλογισμούς, παρεκκλίσεις, απουσίες, ανωμαλίες και καταχρήσεις. Οι φιλόσοφοι επομένως, για τον ίδιο, βρίσκουν πιο εύκολο να μην ασχοληθούν με τα χαρακτηριστικά αυτά του κόσμου και επιχειρούν να αποδώσουν τον τρόπο με τον οποίο θα έπρεπε να είναι ο κόσμος. Ο Rota συμμαρτίζεται την απόρριψη της ποσοτικοποίησης των πάντων δηλαδή δέχεται ότι υπάρχουν στοιχεία της πραγματικότητας τα οποία δεν μπορούν να ποσοτικοποιηθούν. Η φαινομενολογία, σύμφωνα με τον Rota, είναι η προσπάθεια να ξεπεραστεί η, επηρεασμένη από τον ψυχολογισμό και αντικειμενισμό, φιλοσοφία αλλά και ειδικότερα, φιλοσοφία των

μαθηματικών. Χρησιμοποιεί τη σκληρή κριτική του Husserl στον ψυχολογισμό δηλαδή στην τάση αναγωγής των μαθηματικών σε ψυχολογικούς μηχανισμούς του υποκειμένου. Η συγκεκριμένη κριτική του Husserl εμφανίστηκε κατ'αρχήν στο «*Logical Investigations*», για την κατανόηση της δυναμικής των μαθηματικών και της ελευθερίας που παρέχουν.

Ο Rota επίσης, εξισώνει τον αναγωγισμό με τον ψυχολογισμό και ερμηνεύει τον ψυχολογισμό ως μια απόπειρα να αναχθούν οι λογικοί νόμοι σε καθαρά ψυχολογικές διαδικασίες. Οι υποστηρικτές βέβαια του ψυχολογισμού, καταφεύγουν σε ψυχολογικές διαδικασίες προκειμένου να δικαιολογήσουν την εγκυρότητα των λογικών νόμων, ενώ οι αναγωγιστές στοχεύουν στην ταυτοποίηση αυτού που ανάγεται με αυτό στο οποίο έχει αναχθεί. Ένας τυπικός εμπειριστής φιλόσοφος του 19^{ου} αιώνα πίστευε πως οι νόμοι της λογικής αποτελούσαν εμπειρικές γενικεύσεις των ψυχολογικών φαινομένων, όπως ακριβώς ένας τυπικός φυσικός πίστευε πως οι νόμοι της φυσικής ήταν εμπειρικές γενικεύσεις των παρατηρήσεων που καταγράφηκαν από τη μελέτη των φυσικών φαινομένων. Ο Rota όμως αντιτίθεται σε αυτές τις αντιλήψεις που τις θεωρεί άκρως αναγωγιστικές.

Σύμφωνα με τον Mugnai (2009, 242-243), ο Rota χρησιμοποιεί γενικά τον όρο «αναγωγισμός» για να χαρακτηρίσει οποιαδήποτε απόπειρα ταύτισης μιας δοσμένης λειτουργίας με την υλική της βάση, όπως ακριβώς συμβαίνει όταν κάποιος προσδιορίζει μια καρέκλα ως ένα σύνολο ατόμων χωρίς να αναγνωρίζει τον αφηρημένο κοινωνικό ρόλο της μέσα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο. Για να κάνει τη θέση του ακόμα πιο σαφή, χρησιμοποιεί το παράδειγμα του παιχνιδιού μπριτζ. Όταν περιγράφουμε σε κάποιον το παιχνίδι του μπριτζ, χρησιμοποιούμε λέξεις όπως 'ατού' και 'σταυροειδής' χωρίς να θεωρούμε ποτέ τα χαρτιά κομμάτια από χαρτόνι, παρά μόνο αν κατασκευάζουμε τραπουλόχαρτα προς πώληση. Αυτό σημαίνει πως δεν ζούμε αποκλειστικά σε έναν κόσμο από φυσικά αντικείμενα, όπως τα χαρτιά, αλλά σε μια πολλαπλή πραγματικότητα όπου τα πράγματα λαμβάνουν διαφορετικές λειτουργίες και ρόλους. Στον κόσμο του μπριτζ έχουμε τα 'ατού' και όχι απλά κομμάτια χαρτόνι, παρόλο που χωρίς αυτά τα κομμάτια από χαρτόνι δεν θα μπορούσαμε να παίζουμε το παιχνίδι. Δανειζόμενος όρους της φαινομενολογίας, ο Rota αποκαλεί *γεγονικότητα* τα κομμάτια από χαρτόνι και *λειτουργία* το ρόλο των χαρτιών στο παιχνίδι. Η *λειτουργία* δεν μπορεί να υπάρξει χωρίς την «ενσάρκωση»

της σε κάτι που προσφέρει στη λειτουργία τη δυνατότητα να εκτελείται ή να αναγνωρίζεται ως υπαρκτό, να αναγνωρίζεται ως «κάτι». Αυτό το κάτι είναι η *γεγονικότητα*.

Για τον Rota όμως, όπως αναφέρει ο Palombi (2011, 36-37), ο αναγωγισμός δεν έχει καμία θέση στη φαινομενολογία. Κάθε φαινόμενο μπορεί να γίνει κατανοητό μόνο αν περιγραφεί αυτόνομα χωρίς την αναγωγή σε προηγούμενες συλλήψεις του. Ο Husserl (1959, 121) ως γνήσιος φαινομενολόγος αναφέρει πως η ίδια η επιστήμη είναι ένα πνευματικό επίτευγμα του ανθρώπου το οποίο όμως ιστορικά και για κάθε μελετητή προϋποθέτει τον διαισθητικό και κοινό για όλους προϋπάρχοντα κόσμο. Οι αναγωγιστικές φιλοσοφικές αλλά και επιστημονικές απόψεις κατά τον Rota, οφείλονται σε μια υλιστική στάση η οποία όμως ερμηνεύει την πραγματικότητα με κριτήριο τα υπαρκτά αντικείμενα που θεωρεί ότι είναι τα φυσικά αντικείμενα. Ο Rota πιστεύει πως η περιγραφή οφείλει να είναι σε θέση να κρατάει την αυτονομία της και πως κάθε φαινόμενο γίνεται κατανοητό όταν κάποιος αντιλαμβάνεται την εγγενή και αρχέγονη έννοιά του. Η κριτική του Rota στον αναγωγισμό αλλά και το τέλος του αντικειμενισμού βασίζονται σε μια προσπάθεια του να συνδέσει τη σχέση του συνόλου με τα επιμέρους στοιχεία του με τη σχέση *Fundierung*. Όπως δηλώνει ο ίδιος (1997, 111-112), οι φορμαλιστικές θεωρίες της αλήθειας είναι αναγωγιστικές, καθώς είναι απόρροια μιας άτοπης ταύτισης των μαθηματικών με την αξιωματική μέθοδο παρουσίασής τους. Η σχέση ανάμεσα στην αξιωματική μέθοδο, απαραίτητη προϋπόθεση για την παρουσίαση των μαθηματικών, και τη μαθηματική αλήθεια είναι μια σχέση *Fundierung*.

Ο όρος «αντικειμενικότητα» έχει διττή σημασία. Από τη μια εκφράζει την αμεροληψία και από την άλλη την πραγματικότητα ενός αντικειμένου, ανεξάρτητα του νου. Ο Rota στα κείμενά του χρησιμοποιεί τον όρο «αντικειμενισμό» σχετικά με την κατανόηση του κόσμου μας ως αποτελούμενο από πράγματα. Ο όρος «πράγμα» με τη σειρά του, θεωρείται ο πιο γενικός όρος της κοινής γλώσσας και η κατανόησή του σίγουρα μας παρασύρει σε έναν λογικό κύκλο. Ο Husserl στο έργο του τον χρησιμοποιεί με πολλές ερμηνείες. Ο Rota επιλέγει τη σημασία που παρέχει η κοινή λογική και η οποία υποστηρίζει πως ο πραγματικός και φυσικός κόσμος είναι

ανεξάρτητος και αμετάβλητος από τυχόν εξηγήσεις του. Ο όρος «πράγμα» δηλαδή χαρακτηρίζεται από την ανεξαρτησία του ενώ τα «πράγματα» στην αντικειμενική επιστήμη όπως τονίζει και ο Husserl (1959, 130), δεν είναι αντικείμενα όπως πέτρες, σπίτια και δέντρα αλλά αντιπροσωπεύσεις, ιδεατές δηλαδή ενότητες σημασιοδοσίας, η λογική ιδεατότητα των οποίων καθορίζεται από το τέλος τους (telos), την ίδια τους την αλήθεια. Όπως τονίζει ο Palombi (2011, 29), τα επιστημονικά αντικείμενα καθορίζονται ως μια απομόνωση ενός στρώματος της πραγματικότητας. Μια πέτρα, ένα ρολόι ή ένα ηλιοβασίλεμα δεν είναι επιστημονικά αντικείμενα αλλά μπορούν να γίνουν εξαλείφοντας τα υποκειμενικά τους συστατικά. Επιδίωξη του αντικειμενισμού είναι η εξήγηση του συνόλου της πραγματικότητας με τη βοήθεια μιας ορθολογικής ανασυγκρότησης του κόσμου με σημείο εκκίνησης την φυσιοκρατική προσέγγιση. Τη γένεση της συγκεκριμένης «αντικειμενιστικής στρατηγικής» πολλοί την αποδίδουν αρχικά στο έργο των Galileo και Descartes παρόλο που εκείνοι διαφέρουν στην αντίληψη διαχωρισμού του κόσμου από το ον που τον συλλαμβάνει. Ο Galileo αναφέρεται σε μια επιστημολογική στρατηγική η οποία αναπτύσσει έναν επιστημονικό λόγο που διαχωρίζει εμφανώς τα συστατικά της δομής του ανθρωπίνου σώματος (σχήμα, μέγεθος, χωροχρόνος) από τη μηχανιστική τους δράση στα αισθητήρια όργανα (γεύσεις, ήχοι). Στην προσέγγιση του Descartes, σημειώνεται μια διάκριση ανάμεσα στην έκταση (που περιλαμβάνει τα αισθητά πράγματα) και στη νόηση. Ο δυισμός αυτός επηρέασε τη δυτική φιλοσοφία και οδήγησε σε αδιέξοδο τις προσπάθειες να προσδιοριστεί η σύνδεση ανάμεσα στο νου και το σώμα.

Όπως σχολιάζει ο Palombi (2011, 27-30), για τη φαινομενολογία, η αντίληψη των φυσικών πραγμάτων ως πρωταρχικών/πρωτογενών σε σχέση με αυτά που βιώνονται αποτελεί την αρχή του αντικειμενισμού και της επιστημονικής κρίσης της απώλειας του νοήματος της ζωής. Ο αντικειμενισμός, για τον Rota, εκφράζει μια αντίληψη της πραγματικότητας ως αποτελούμενη από φυσικά αντικείμενα και των μαθηματικών ως μέσο «αντικειμενικής» περιγραφής του κόσμου. Μαζί με τον συγγενή του, τον φυσικαλισμό, επιδιώκουν την ερμηνεία του κόσμου συνολικά, παραβλέποντας όμως ένα συγκεκριμένο τμήμα της πραγματικότητας. Αυτό είναι το τμήμα που αφαιρείται κατά την συγκρότηση ενός φυσικού επιστημονικού αντικειμένου όταν εστιάζουμε στην ποσοτική διάσταση. Τα φυσικά αντικείμενα προκύπτουν όταν εξαιρούνται συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της πραγματικότητας

και διατηρούνται οι συγκεκριμένες ιδιότητες που μπορούν να μαθηματικοποιηθούν. Οι φυσικές επιστήμες στοχεύουν στην αντικειμενικότητα με αρωγό τις αφαιρετικές διαδικασίες που παραβλέπουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά, όπως είναι αυτά που βλέπουμε, που γευόμαστε κ.α και εστιάζουν στα χαρακτηριστικά που ποσοτικοποιούνται, όπως είναι ο όγκος, το βάρος, το μήκος, το πλάτος, η ταχύτητα και άλλα. Ήδη τον 17^ο αι. υιοθετείται από τους Γαλιλαίο, Descartes κ.α. η διάκριση των πρωτογενών και των δευτερογενών ιδιοτήτων. Οι πρωτογενείς ιδιότητες που είναι τα μαθηματικοποιήσιμα χαρακτηριστικά των αντικειμένων της επιστημονικής έρευνας, χρησιμοποιούνται στη διατύπωση των φυσικών νόμων. Όμως τα μη μαθηματικοποιήσιμα χαρακτηριστικά γίνονται αντιληπτά κατά τα νεότερα χρόνια ως μη αντικειμενικά και έτσι αποκόβονται από την επιστημονική μελέτη. Η αντίληψη του κόσμου ως κόσμου που συγκροτείται αποκλειστικά από φυσικά αντικείμενα είναι απόρροια μιας αφαιρετικότητας που αναγνωρίζει ένα μόνο επίπεδο της πραγματικότητας. Η θέση αυτή -κατά τον Rota όπως και σύμφωνα με τον Husserl- οδήγησε στην απώλεια του νοήματος που διακατέχει κάθε προσπάθεια κατανόησης του κόσμου και στην κρίση της επιστήμης. Ο Rota, μαζί με τον Husserl, θεωρεί την πραγματικότητα κάτι παραπάνω από το σύνολο των ποσοτικοποιήσιμων στοιχείων της που μπορούν να λειτουργήσουν ως αντικείμενο μετρήσεων. Αυτή είναι μία αντίληψη που εκφράζεται στο *Krisis* από τον Husserl. Κάθε επιστήμη, και κυρίως οι επιστήμες του πνεύματος, είναι οντολογικά αυτόνομες. Κατέχουν τις δικές τους οντολογικές αρχές, παράγουν τις δικές τους κρίσεις και ερμηνεύουν τον κόσμο με την δική τους ξεχωριστή ματιά, κάτι που δεν αναγνωρίζει ο αναγωγισμός. Ο αναγωγισμός ομογενοποιεί τις διαφορετικές προσεγγίσεις των διαφορετικών επιστημών, εξαλείφοντας τις οντολογίες των επιμέρους επιστημονικών πεδίων και ανάγοντάς τες εν τέλει στην οντολογία της φυσικής. Ο αναγωγισμός περιορίζει την επιστημονική σκέψη των φυσικών επιστημών και την αυτοπροσδιορίζει ως ένα μεθοδολογικό σύστημα που έχει ως στόχο την ανάδειξη των μοντέλων, δηλαδή των μαθηματικοποιημένων απεικονίσεων της πραγματικότητας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της αντίληψης της πραγματικότητας ως φυσικοποιημένης αποτελεί, για τον Rota, ο τομέας της τεχνητής νοημοσύνης, ο οποίος μέσω της ψυχολογίας επεκτείνει την αναγωγιστική περιγραφή των φυσικών γεγονότων και δίνει απαντήσεις σε φιλοσοφικά ερωτήματα. Φυσικό αντικείμενο, σύμφωνα με τον Husserl, είναι οτιδήποτε ανήκει στον περιβάλλοντα κόσμο, ακόμα και αν πρόκειται για κάτι αόρατο

ή δυνατό, ακόμα και κάτι άπειρο αλλά και διακριτό. Η ιδέα του αντικειμενισμού για τον Rota (1985e, 9), αποτελεί εμπόδιο για την ανάπτυξη της επιστήμης, αφού η αδυναμία να βασίσουμε το φαινόμενο της αίσθησης σε έναν κόσμο αποτελούμενο αποκλειστικά από φυσικά πράγματα, είναι σημάδι της επιστημονικής κρίσης.

10. Ο Φαινομενολογικός Ρεαλισμός του Rota

Σύμφωνα με τον Rota, ο πρώτος που εξέφρασε με κωδικοποιημένο τρόπο την σύγχρονη αντίθεση ανάμεσα στον ρεαλισμό και τον ιδεαλισμό ήταν ο Kant. Ο ιδεαλισμός προκύπτει από μια ερμηνεία που κάνει το σύνολο των πραγμάτων να βασίζεται στη σκέψη, της οποίας όμως το νόημα δεν είναι μονοσήμαντο. Αντίθετα, για το ρεαλισμό η ύπαρξη της πραγματικότητας υφίσταται ανεξάρτητα από την σκέψη. Ο ρεαλισμός κατέχει μια επιστημολογική απαίτηση που διεκδικεί την ανεξαρτησία των πραγμάτων. Η φαινομενολογία συνήθως παρουσιάζεται ως ένας τρίτος τρόπος σκέψης που ξεπερνάει κάθε μορφή ρεαλισμού ή ιδεαλισμού. Ο Palombi (2009, 252), επισημαίνει ότι ο Rota ακολουθεί αυτή την τάση, αν και υπάρχουν πολλά μέρη του έργου του που αποτελούν ενδιαφέρουσες εξαιρέσεις. Σε μία από αυτές τις εξαιρέσεις, περιγράφει τη φαινομενολογία ως μια ακραία μορφή ρεαλισμού. Ο Rota δεν υποβιβάζει την ιδεαλιστική παράδοση αλλά θεωρώντας τη φαινομενολογία ως ένα είδος ρεαλισμού, διασφαλίζει την αξία και την ακρίβειά της μέσω άσκησης κριτικής στο νατουραλισμό και τον αναγωγισμό.

Για τον Rota, το ιδεώδες του ρεαλισμού έχει τις ρίζες του στην φαινομενολογία του Husserl. Ο Rota στο έργο του (1997, 135), συνοψίζει τους τέσσερις φαινομενολογικούς όρους της «ρεαλιστικής περιγραφής».

1. *Μια ρεαλιστική περιγραφή οφείλει να φέρει στο προσκήνιο κρυμμένα χαρακτηριστικά του κόσμου*
2. *Αναδεικνύει την αξία των περιθωριακών φαινομένων*

3. *Ο φαινομενολογικός ρεαλισμός δεν επιτρέπει καμιά δικαιολογία απόρριψης οποιουδήποτε χαρακτηριστικού των μαθηματικών ως ψυχολογικό, κοινωνιολογικό ή υποκειμενικό*

4. *Όλες οι κανονιστικές υποθέσεις θα εξαντληθούν*

Ο πρώτος όρος αναφέρεται στη δυνατότητα να εξεταστούν φαινόμενα της ύπαρξης, είτε της καθημερινής ύπαρξης είτε των υπαρκτικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών που θεωρούνται προφανή και τετριμμένα και να αναδειχτούν καινούργιες πτυχές τους.

«Περιθωριακά» φαινόμενα είναι ο όρος που, για τον Rota, εκφράζει τις πτυχές της εμπειρίας που τείνουν να περιθωριοποιούνται από την επιστημονική πρακτική ως επουσιώδεις ή υποκειμενικές και που θα πρέπει να αποτελούν μέρος αυτού που περιγράφουμε, χωρίς αναφορά σε υποθετικές εξηγήσεις ή ατέλειες.

Ο Rota μέσα από το φιλοσοφικό του έργο προειδοποιεί -σε αρκετές περιπτώσεις- για τον κίνδυνο που υπάρχει εάν ταυτίσουμε την ερμηνευτική κατανόηση με τα ψυχολογικά υποστρώματα πάνω στα οποία θεμελιώθηκε. «Θεμελιώθηκε» δεν σημαίνει υποχρεωτικά «προκάλεσε». Σύμφωνα με τον Palombi (2009, 257-258), κατά την τελευταία του διάλεξη φαινομενολογίας στο πανεπιστήμιο του M.I.T, ο Rota ανέλυσε την αναγωγιστική ερμηνεία του μαγνητικού τομογράφου και άσκησε κριτική σε κάθε είδους ταύτιση ανάμεσα στην ανθρώπινη σκέψη και τις εικόνες του μαγνητικού τομογράφου, που παρουσιάζουν τις διεργασίες του εγκεφάλου. Ο εγκέφαλος από μόνος του δεν είναι σκέψη. Είναι λάθος να πιστεύουμε ότι η σκέψη ταυτίζεται με τον εγκέφαλο.

Ο Rota αφιέρωσε αρκετό χρόνο στη φαινομενολογική ανάλυση της δημιουργίας των επιστημονικών εννοιών και στις δύο συμπληρωματικές και αντίθετες κατευθύνσεις τους. Στην πρώτη κατεύθυνση, το φαινόμενο της ανθρώπινης κατανόησης γίνεται δυνατό από το νου, το σώμα μας και το νευρικό του σύστημα (το οποίο εξηγείται ως σύνολο νευρώνων με πολύπλοκη οργάνωση). Μπορούμε όμως, να ξεχωρίσουμε μία δεύτερη κατεύθυνση στην οποία το φαινόμενο της ανθρώπινης κατανόησης ανακαλύπτει τους νευρώνες. Είναι η φιλοσοφική προοπτική που θεωρεί το νευρικό κύτταρο μια συμπληρωματική έννοια της επιστήμης. Η επιστημονική

έρευνα για τον Rota, δεν μπορεί να αντικαταστήσει πλήρως την φιλοσοφική προσέγγιση στην κατανόηση, κυρίως λόγω των διαφορετικών τους στόχων και ενδιαφερόντων. Η επιστημονική έρευνα εξετάζει τα αίτια, χρησιμοποιεί ακριβείς διαδικασίες και αναπτύσσει έννοιες που μεταβάλλονται κατά την επιστημονική εξέλιξη. Η κριτική του Husserl στο νατουραλισμό και τον ψυχολογισμό οδήγησε τον Rota στην πεποίθηση πως η φιλοσοφική ανάλυση του φαινομένου της ανθρώπινης κατανόησης δεν μπορεί να αντικατασταθεί, να ταυτιστεί ούτε καν να αναχθεί σε επιστημονικές έννοιες όπως ψυχικές ενότητες, δείκτης νοημοσύνης ή γενετική κληρονομιά.

Ας σκεφτούμε το ερώτημα του οντολογικού status των μαθηματικών. Ο R. Sokolowski, στον πρόλογο του έργου *Indiscrete Thoughts* τονίζει πως η φαινομενολογική προσέγγιση στα μαθηματικά, πρέπει να είναι σε επιφυλακή για να αντισταθεί σε κινδύνους όπως ο υποκειμενισμός ή ο ψυχολογισμός. Η ψυχολογική ερμηνεία αποδίδει τις μαθηματικές οντότητες στην νοητική δραστηριότητα, που αποδίδεται από τις νευροεπιστήμες στη νευρολογική δραστηριότητα. Ο Rota, αντιλαμβανόμενος τη διαδικασία αυτή και τη φιλοσοφική της σημασία, τονίζει πως οποιαδήποτε μορφή επιστημονικής πρακτικής αρθρώνεται «στη λήθη της σύστασης». Η λήθη αυτή, στη σημερινή εποχή μάλιστα, καταστέλλει την πολύπλοκη ιστορική γέννηση των επιστημονικών ιδεών και την φιλοσοφική τους σύσταση.

Ένας ακόμα όρος της φαινομενολογικής ρεαλιστικής ερμηνείας κατά τον Palombi (2009, 258), αποτρέπει τον Rota από το να δίνει οποιαδήποτε κανονιστική απάντηση, προερχόμενη από την επιστημολογία ή την ψυχολογία, σε ερωτήσεις του τύπου «Πώς δουλεύουν ένας μαθηματικός, ένας φιλόσοφος ή ένας καλλιτέχνης και τί κάνει δημιουργική τη δουλειά τους». Ο ίδιος προτιμάει να περιγράψει τις σημαντικές πτυχές της ερευνητικής του εμπειρίας, χωρισμένης σε φαινομενολογία και σε συνδυαστική και να κάνει τη σύγκριση των ευρημάτων του με αυτά άλλων ερευνητών .

Οι απόψεις του σχετικά με τον φαινομενολογικό ρεαλισμό έχουν φυσικά φιλοσοφικές και πολιτισμικές συνέπειες που δεν θα μπορούσαμε να αγνοήσουμε. Αρχικά, κάνουν ξεκάθαρη την ανησυχία του για την υπερβολική εξειδίκευση της έρευνας που αποτελεί κίνδυνο για τα μαθηματικά αλλά και την επιστήμη γενικότερα,

και την οποία θέτει προς συζήτηση στο άρθρο του «*Ten Lessons for the Survival of a Mathematics Department*». Σύμφωνα με τον Rota, τα προβλήματα της εκπαίδευσης της νέας γενιάς για τον Rota, δεν αντιμετωπίζονται με μαθήματα δημιουργικότητας αλλά εξάπτοντας την περιέργεια των μαθητών, χωρίς την επιβολή υπερβολικά άκαμπτων προγραμμάτων σπουδών. Οι μεγαλύτεροι του φόβοι βέβαια, αφορούσαν το μέλλον της φιλοσοφικής παράδοσης που απαιτεί για τη διάσωσή της, την διατήρηση της ιστορίας και τη συνεχή αναζήτηση του νοήματος. Η επιστήμη δεν αντικαθιστά την φιλοσοφία, μάλλον τροφοδοτεί τη φιλοσοφία με προβληματισμούς και προσφέρει υλικό για περαιτέρω εμβάθυνση στη φαινομενολογία. Το μάθημα της φαινομενολογίας γίνεται μια αναντικατάστατη πηγή αντίστασης στον σύγχρονο νατουραλισμό που είναι κυρίαρχος. «Είναι προς το συμφέρον όλων μας το να αντιμετωπίζουμε όλους όσους ασχολούνται με τα μαθηματικά, με οποιοδήποτε τρόπο, ως ίσους. Με το να είμαστε ενωμένοι, θα αυξήσουμε την πιθανότητα της επιβιώσής μας. Οι μαθηματικοί μπορούν να σώσουν τον κόσμο από την εισβολή των αναξιόπιστων με το να τους ξεσκεπάσουν και να συνεισφέρουν σε αυτόν με την βαθιά τους σκέψη. Αυτή είναι η μεγαλύτερη ευκαιρία που είχαμε εδώ και πολύ καιρό να κάνουμε μια χρόνια συνεισφορά για το καλό της επιστήμης.» (Rota, 1997, 208).

11. Φαινομενολογία και Μαθηματικά

Ο Rota ήταν πρώτα από όλα μαθηματικός, με βαθιά εκτίμηση στον τομέα της συνδυαστικής και στόχος του ήταν να ανακαλύψει όλες τις πιθανές δυνατότητες των μαθηματικών. Στα φιλοσοφικά έργα του είναι ξεκάθαρη η συμβολή του Imre Lakatos (1922-1974), αναδεικνύονται η ιστορία των μαθηματικών και το πεδίο της ανακάλυψης στην κατανόηση των μαθηματικών. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 214), τα μαθηματικά, όπως και κάθε άλλη επιστήμη, είναι η μελέτη των αναλογιών ανάμεσα στις αναλογίες και η μαθηματική πρόοδος είναι ένα ταξίδι από το άπειρο στο πεπερασμένο. Οι μαθηματικοί και οι επιστήμονες γενικότερα, προσπαθούν να αποδείξουν πως τα πράγματα που δεν φαίνονται εκ πρώτης όψεως ίδια, στην πραγματικότητα είναι. Σε αυτό έγκειται η ουσία της κατανόησης, ενώ το απόγειο των

μαθηματικών κατορθωμάτων είναι ο συνυφασμός μαθηματικών πεδίων που προηγουμένως θεωρούνταν ανεξάρτητα.

Εκτός όμως από τη διπλή ζωή των μαθηματικών που αναφέραμε προηγουμένως, ο Rota αναφέρεται και στη διπλή ζωή της φιλοσοφίας. Συγκεκριμένα δηλώνει (1997, 90-91), πως η πρώτη αποσκοπεί να επιδείξει το τρόπο με τον οποίο πρέπει να αντιμετωπίζουμε τον κόσμο. Επανεξετάζει τον τρόπο σκέψης, αποδομεί προκαταλήψεις και υποθέσεις και μέσα από τις φιλοσοφικές περιγραφές κάνει γνωστά φαινόμενα, έξω από τη λογική σφαίρα των επιστημών. Παρόλο δε που τα επιχειρήματα της φιλοσοφίας έχουν λιγότερη αξιοπιστία από αυτά των μαθηματικών, πιστεύει πως οφείλουμε να τους αναγνωρίσουμε πως σχετίζονται περισσότερο με τις ρίζες της ίδιας μας της ύπαρξης. Η δεύτερη ζωή της βασίζεται σε μια μέθοδο επιχειρηματολογίας που όπως τα μαθηματικά, ακολουθεί τους κανόνες της κοινής λογικής. Εν αντιθέσει όμως με τα μαθηματικά, υπάρχει έντονη διαφωνία ως προς την αποδοχή της φιλοσοφικής επιχειρηματολογίας από τους φιλοσόφους, καθώς τα φιλοσοφικά επιχειρήματα οδηγούνται από και συχνά βασίζονται στα συναισθήματα και σπάνια καταλήγουν σε αυστηρά συμπεράσματα.

Τα φιλοσοφικά προβλήματα κατά τον Rota, δεν επιλύονται και η δουλειά ενός φιλοσόφου δεν είναι να διαλύσει το μυστήριο που τα περιβάλλει, αλλά να παρατηρήσει και να επισημάνει την ταύτισή τους με άλλα μυστήρια. Μια οπτική του θέματος είναι πως η λέξη «λύση», δανεισμένη από τα μαθηματικά, μεταφέρθηκε στη φιλοσοφία προϋποθέτοντας όμως αναλογίες που δεν έχουν αποδειχθεί. Ο Rota επισημαίνει μία ακόμα διαφορά ανάμεσα στα μαθηματικά και τα φιλοσοφικά προβλήματα και αφορά την επίλυσή τους. Όπως δηλώνει ο ίδιος (1997, 93), στα μαθηματικά κάθε πρόβλημα όχι μόνο κάποια στιγμή επιλύεται και η λύση αυτή δεν μπορεί ποτέ να διαψευστεί, αλλά κατά κάποιο τρόπο καταντά 'ασήμαντο'. Όσο προοδεύουν τα μαθηματικά, τα 'δύσκολα' μαθηματικά προβλήματα γίνονται 'εύκολα' και αναθέτουμε την επίλυσή τους σε παιδιά σχολικής ηλικίας. Στη φιλοσοφία αντιθέτως, τα προβλήματα που πρωτοαπασχόλησαν τους φιλοσόφους στην αρχαία Ελλάδα, παρουσιάζουν ελάχιστες διαφορές με αυτά που ασχολούμαστε και σήμερα και τα οποία θα παραμείνουν για πάντα άλυτα, αφού κάθε φιλόσοφος παρουσιάζει από τη μεριά του μια «οριστική λύση», η οποία όμως καταρρίπτεται εύκολα από τους διαδόχους του. Η αποδοχή της αδυναμίας να δοθεί μια φιλοσοφική

απάντηση με έναν συγκεκριμένο τρόπο, είναι η προσπάθεια αντιμετώπισης ενός προβλήματος όχι ως εμπόδιο, αλλά αναζητώντας όλες του τις πτυχές, κάνοντας δυνατή την πλήρη κατανόηση της φύσης του.

Σύμφωνα με τον Palombi (2011, 53-57), το ερώτημα κατά πόσο οι μαθηματικές έννοιες προϋπάρχουν και ανακαλύπτονται ή εφευρίσκονται, κατά πόσο δηλαδή μια μαθηματική οντότητα πρέπει να ερμηνεύεται ως δοθείσα ή κατασκευασμένη, απασχόλησε και τον Rota. Στην απάντηση που ο τελευταίος δίνει, δεν ενστερνίζεται καμία από τις δύο αντίπαλες θέσεις αλλά θεωρεί πως κάθε άποψη και η αντίθετή της, μπορούν να παρουσιαστούν με εξίσου σαφείς και αδιάψευστες αποδείξεις. Ο ίδιος επιχειρεί να περιγράψει και τις δύο όψεις με σκοπό να κατανοήσει τις συνθήκες κάθε δυνατότητας (1990b, 1997a, 89). Στην πρώτη όψη τα μαθηματικά, ως επιστήμη, ανακαλύπτουν τα γεγονότα τους, η χρησιμότητα των οποίων φανερώνεται σε πολλές εφαρμογές. Ο όρος ‘γεγονός’ δεν αναφέρεται σε κάτι υποκειμενικό ή ψυχολογικό αλλά στην ύπαρξη των μαθηματικών προβλημάτων σε έναν κόσμο που οφείλει να γίνεται αντιληπτός από τους μαθηματικούς με όρους της καθημερινής ζωής. Η φαινομενολογική παρουσίαση των μαθηματικών πρέπει να είναι προσεχτική ώστε να μην υποπέσει σε φιλοσοφικά λάθη, όπως για παράδειγμα την ερμηνεία των φυσικών αντικειμένων ως πιο πραγματικών από τα ιδεατά ή την απόδοση φυσικής ύπαρξης στις μαθηματικές οντότητες. Ο Rota (1973a, 1986a, 169) στηρίζει την άποψη του Husserl για την αυτονομία της οντολογικής θέσης των διακεκριμένων επιστημών, επισημαίνοντας πως στα φυσικά αντικείμενα πρέπει να προσδίδεται ο ίδιος βαθμός πραγματικότητας με τα ιδεατά (πχ. μαθηματικά αντικείμενα). Με τη δήλωση αυτή, ο Rota επιθυμεί να κάνει ξεκάθαρη την αναγκαιότητα των δύο πόλων του Fundierung, την λειτουργία και την γεγονικότητα που έχουμε αναπτύξει και παραπάνω. Τα μαθηματικά δηλαδή, παρόλο που δεν μπορούν να υπάρξουν χωρίς μια μορφή αυστηρής γλώσσας και συμβολισμού, δεν θα πρέπει σε καμία περίπτωση να ταυτίζονται ή να ανάγονται στα σύμβολα. Ο Rota αποφεύγει ωστόσο την Πλατωνική ερμηνεία των μαθηματικών οντοτήτων και εστιάζει στην μαθηματική αλήθεια.

Σύμφωνα με τον Palombi (2011, 57-61), ο τρόπος προσέγγισης των μαθηματικών συνδέεται με τη θεωρία του Fundierung. Οι μαθηματικές θεωρίες παρουσιάζονται σε διαστρωματώσεις και κάθε πρόβλημα της μαθηματικής έρευνας

βρίσκεται σε κάποιο επίπεδο. Έστω ότι ένα πρόβλημα τοποθετείται στο επίπεδο n . Όλα τα αποτελέσματα που βρίσκονται στο $n-1$ θεωρούνται δεδομένα ή αλλιώς γεγονότα. Όταν ασχολούμαστε για παράδειγμα με διαφορετικές εξισώσεις στο πεδίο των πραγματικών αριθμών, δεχόμαστε ως δεδομένους τους πραγματικούς αριθμούς, ενώ τα αποτελέσματα μιας έρευνας στο n επίπεδο εκφράζονται σε μια ρητή φόρμα, ως θεωρήματα και αποτελούν τη βάση της έρευνας για το $n+1$ στρώμα. Ακόμα και αν κάποιος δώσει μια ερμηνεία ενός τομέα των μαθηματικών σε μια διαφορετική βάση, δεν είναι εύκολο για τον ερευνητή να εξετάσει όλη την διαστρωμάτωση της δυνητικά άπειρης μαθηματικής πραγματικότητας. Η έννοια του Fundierung είναι αυτή που, σύμφωνα με τον Rota, αποσαφηνίζει την διαστρωματική μορφή των μαθηματικών, μετατοπίζοντας κάθε πρόβλημα σε μια αναζήτηση νοήματος και προθέσεως, απορρίπτοντας την αναγωγή των μαθηματικών σε ένα μόνο στοιχείο, στο χαμηλότερο δηλαδή στρώμα.

Ο Rota (1987, a), εξετάζοντας τη σχέση Fundierung – νοήματος σε κάθε στρώμα γραπτών και λεκτικών μαθηματικών εκφράσεων πιστεύει πως η μαθηματική γνώση προέρχεται από κάθε στάδιο. Αρνείται πως το νόημά της είναι αποτέλεσμα του τελικού επιπέδου αλλά συμερίζεται την άποψη πως, εφόσον κάθε νόημα ενός επιπέδου βασίζεται στο προηγούμενο, η προγενέστερη έννοια αποτελεί, σε κάποιο βαθμό, μέρος της επόμενης προσδίδοντάς της ισχύ. Για τον Husserl, η γραπτή απεικόνιση όχι μόνο εδραιώνει την ιδεατότητα των μαθηματικών, αλλά καθιστά δυνατή τη μαθηματική ύπαρξη, την ύπαρξη των αποδεκτών από όλους αντικειμενικών εννοιών, ανεξάρτητων της προσωπικής συνείδησης.

Για να γίνει πιο κατανοητή η αντικειμενική και προσβάσιμη σε όλους ύπαρξη των μαθηματικών ο Palombi παραθέτει τον παρακάτω συλλογισμό. Ας αναλογιστούμε τις ιδιότητες του ορθογωνίου τριγώνου που περιγράφηκαν με τη μορφή του Πυθαγορείου θεωρήματος. Εάν θεωρούσαμε πως το θεώρημα αυτό είναι αμιγώς ψυχολογικό, τότε θα όφειλε να ανήκει μονάχα στο δημιουργό του ο οποίος θα είχε παρουσιάσει κάθε πιθανή εφαρμογή και συνέπειά του. Αυτό που συνέβη πραγματικά, ήταν πως έπειτα από κάποιους αιώνες οι αναλυτικοί γεωμέτρες ανέπτυξαν συνέπειες του συγκεκριμένου θεωρήματος μεταφράζοντάς το με όρους αλγεβρικούς, χωρίς να έχουν προφανώς γνωρίσει ποτέ προσωπικά τον Πυθαγόρα. Η επέκταση του συγκεκριμένου θεωρήματος, αν και ο Πυθαγόρας ήταν υπαρκτό πρόσωπο, συνέβη ανεξάρτητα από

τις σημειώσεις ή το αριθμητικό ή γεωμετρικό σύστημα που αυτός χρησιμοποίησε. Ο συλλογισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί σε οποιοδήποτε θεώρημα των μαθηματικών, εμφανίζεται πολλές φορές στην ιστορία των μαθηματικών. Η αντικειμενικότητα των επιστημών γενικότερα και των μαθηματικών ειδικότερα, ξεπερνάει την ψυχολογική ατομικότητα και κάθε πολιτισμική και πολιτιστική ιδιαιτερότητα και μεταδίδεται καθολικά, παρόλο που ο ανθρώπινος παράγοντας μπορεί να επηρεάσει εν μέρει ή ολοκληρωτικά αυτή τη μετάδοση. Ακόμα και αν -κατά περίεργο τρόπο- τα μαθηματικά εξαφανίζονταν και έπρεπε να ανακαλυφθούν από την αρχή, δεν θα μιλάγαμε για τα καινούργια μαθηματικά αλλά απλά για τα μαθηματικά, αυτά που υπάρχουν μόνο μια φορά ανεξάρτητα από τις φορές και τη γλώσσα στην οποία εκφράζονται. Ως εκ τούτου ο Rota αναφέρεται πάντα σε αυτούς που ανακαλύπτουν και όχι που εφευρίσκουν τα μοναδικά δεδομένα των μαθηματικών, όπως είναι τα θεωρήματα. Σε καμία περίπτωση βέβαια δεν θα πρέπει η άποψη αυτή να ερμηνευτεί ως απαξίωση των διαφορετικών αξιωματικών παρουσιάσεων ενός μαθηματικού αντικείμενου. Κάθε μαθηματικό αντικείμενο εμφανίζεται πάντα εν μέρει και ποτέ ολόκληρο, για αυτό και ένα αξιωματικό σύστημα δίνει την ευκαιρία σε κάθε μαθηματικό αντικείμενο, από μια ομάδα μέχρι την ευθεία και τους τοπολογικούς χώρους να προβληθεί και να παρατηρηθεί από μια καινούργια οπτική γωνία, παρουσιάζοντας δυνατότητες που μέχρι τότε ούτε καν τις υποψιαζόμαστε. Ο Rota (1988b, 1997a, 156-157) υποστηρίζει, πως η αναζήτηση καινούργιων αξιωματικοποιήσεων προϋποθέτει όχι μόνο την ταυτότητα του κάθε μαθηματικού αντικείμενου αλλά την παραδοχή πως οι ιδιότητές του μπορεί ποτέ να μην αποκαλυφθούν εξ ολοκλήρου. Ο κόσμος, κατά τον Rota, δεν αποτελείται ούτε από φυσικά αντικείμενα, ούτε από ιδέες αλλά από πιθανές ή πραγματικές ταυτότητες. Η ταυτότητα προϋπάρχει της ύπαρξης, οποιασδήποτε οντότητας, πραγματικής ή ιδεατής, και επομένως η σχέση μας με τον κόσμο βασίζεται στο φαινόμενο της «μονιμότητας της ταυτότητας».

Σύμφωνα με τον Rota (1997, 111-112), η αλήθεια μιας μαθηματικής θεωρίας εξαρτάται από την ύπαρξη σύνδεσής της με τα γεγονότα του κόσμου, και είναι αυτή η αλήθεια που ζητούν οι μαθητές και που οφείλουν να προσφέρουν οι καθηγητές κατά τη διδασκαλία, μια πραγματολογική αλήθεια που αφορά τον κόσμο. Φιλοσοφικά επομένως, η μαθηματική αλήθεια δεν παρουσιάζει καμία διαφορά με την αλήθεια

άλλων επιστημών όπως η φυσική και η χημεία, αφού προέρχεται από τη σύνδεση γεγονότων του κόσμου, ανεξάρτητα από αξιωματικά συστήματα και προσωπικές πεποιθήσεις. Η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης για τον Rota (1990a, 1997a, 113), εξελίσσεται ανάλογα με τη γνώση των φυσικών επιστημών ενώ και οι δύο έχουν τον ίδιο σκοπό, να ανακαλύψουν τις κανονικότητες του κόσμου. Η φύση της πραγματικότητας έχει δύο πτυχές, την αντικειμενική και την υποκειμενική. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στα μαθηματικά. «Η φύση μιμείται τα μαθηματικά» (Rota, 1997, 213).

Όπως αναφέρει ο Rota (1973a, 1986a, 169–170), το μοντέλο της πραγματικότητας δεν αντανakλάται μόνο στα φυσικά αντικείμενα, αφού μέσω των υπαρκτικών αλλά και φαινομενολογικών περιγραφών όχι μόνο αποκαλύπτονται τα ενδεχόμενα του φυσικού κόσμου αλλά αναδεικνύεται η βιωματική πραγματικότητα των ιδεατών πραγμάτων. Προτείνει ένα καινούργιο μοντέλο που θα βγάλει τα μαθηματικά από την απομόνωσή τους. Όπως προαναφέραμε, πιστεύει ότι κάθε επιστήμη οδεύει προς μια ιδεατότητα που θα χαρακτηρίζεται από την εξάλειψη όλων των συνθετικών *a posteriori* προτάσεων. Όλες οι αληθείς προτάσεις εν τέλει θα μετατραπούν σε αληθείς μαθηματικές προτάσεις, καθώς τα μαθηματικά αποτελούν το τέλος της επιστήμης όπως είχε δηλώσει και ο Fontana (1996, 82).

Όσον αφορά τα μαθηματικά αντικείμενα, ο Rota (1973b, 1986a, 250–251), ισχυρίζεται πως η φαινομενολογική θεωρία της σύστασης των αντικειμένων ακολουθεί το υπεραπλουστευμένο τυπικό μοτίβο του αριθμού που καθορίζεται μέσω κλάσεων ισοδυναμίας και για αυτό η γενετική λογική υποστηρίζει πως κάθε ιδεατό αντικείμενο μπορεί να αναλυθεί αναλόγως. Πρόκειται για καθόλα αντικειμενικές οντότητες, απαλλαγμένες από εμπειρική υποκειμενικότητα, και επαληθεύουν το «είναι αυτό που φαίνεται». Το οντολογικό status των μαθηματικών και το κατά πόσο αυτά αποτελούν το συνθετικό της σύστασης κάθε αντικειμένου και τί συνέπειες ενέχει η παραδοχή αυτή, αποτελούν σημαντικό και αμφιλεγόμενο ζήτημα. Σύμφωνα με τον Palombi (2011, 74–76), ο Rota χρησιμοποιεί το έργο του Sokolowski ‘*The Formation of Husserl’s Concept of Constitution*’ (1964), ως προς την υπερβατολογική συγκρότηση των μαθηματικών αντικειμένων στη συνείδηση.

Ο τομέας της ιστορίας των μαθηματικών που απασχόλησε τον Rota, είναι – κατά τη γνώμη του– ένας τομέας σημαντικός μεν παραμελημένος δε, και αυτό όχι μόνο λόγω των κοινωνικοπολιτικών καταστάσεων αλλά και λόγω της ιδιαίτερης φύσης τους. Κατά τον Rota (1990b, 1997a, 99), το σημαντικότερο βήμα κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος είναι η ανάλυση των περασμένων προσπαθειών, ακόμα και αυτών που εμείς υποθέτουμε ότι επιχειρήθηκαν, με σκοπό να κατανοήσουμε τον λόγο της αποτυχίας τους. Η επίλυση του προβλήματος δηλαδή, συνδέεται άμεσα και άρρηκτα με την ιστορία του και γι αυτό πιστεύει πως η επιστήμη των μαθηματικών είναι αυτή που επιβεβαιώνει με την ύπαρξή της την φύση της σκέψης. Όπως δηλώνει ο ίδιος (1997, 99), η ιστορικότητα ενός μαθηματικού προβλήματος είναι αναπόσπαστο κομμάτι της επίλυσής του. Ακόμα και η ίδια η σκέψη, όπως πίστευαν οι φιλόσοφοι από την εποχή του Ηράκλειτου, είναι ουσιαστικά ιστορική. Οι μαθηματικίζοντες φιλόσοφοι απεναντίας, θεωρούν πως το μυαλό είναι μια σύνθετη μηχανή, θέση την οποία ο Rota (1997, 100-101) επικρίνει, καθώς θεωρεί πως η υιοθέτηση της άποψης αυτής, οδηγεί στην αντίληψη πως οι άνθρωποι χωρίζονται ανά επίπεδα εξυπνάδας και η επίλυση ενός προβλήματος απαιτεί απλά και μόνο δυνατή σκέψη. Ο μύθος του μυαλού ως μηχανής αυτόματης πώλησης που μπορεί να ‘κατεβάσει’ λύσεις, μπορεί να ισχύει για τη φιλοσοφία, αλλά σε καμία περίπτωση δεν αφορά τα μαθηματικά. Η λανθασμένη αυτή σκέψη προκύπτει από τη σύνδεση και σύγχυση της εξέλιξης μιας σκέψης που απαιτείται για την επίλυση ενός προβλήματος, με την διαδικασία με την οποία δουλεύει ο ανθρώπινος νους. Πρόκειται για μια περίπτωση αναγωγισμού και δείγμα ψευτομαθηματοποιημένης φιλοσοφίας.

Αυτό που επιβάλλεται είναι μια ανακατασκευή της ιστορίας. Όμως και η κατανόηση των μαθηματικών θεωρημάτων εξαρτάται από την κατανόηση της εξέλιξής τους. Όπως δηλώνει ο ίδιος (1973a, 1986a, 170), ο ορισμός οποιουδήποτε αντικειμένου προέκυψε μέσα από μια ιστορία, η ανακατασκευή της οποίας δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί επαρκώς από την κλασσική λογική. Εάν έπρεπε να διατάξουμε τις επιστήμες με γνώμονα την οριστικότητά τους, τότε κατά τον Rota, σίγουρα στο τέλος θα βρίσκονταν επιστήμες που ενέχουν φιλοσοφικό ενδιαφέρον όπως η εξελικτική βιολογία και η κοσμολογία κι αυτό γιατί είναι πολύ απίθανο να βρεθούν ‘λύσεις’ στα κατ’ εξοχήν φιλοσοφικά προβλήματα, όπως η ύλη, ο νους, η πραγματικότητα κ.α.

Είναι πολύ δύσκολο να οριστεί το είδος του επιχειρήματος που μπορεί να γίνει αποδεκτό ως ‘λύση’ ενός φιλοσοφικού προβλήματος αφού η ιδέα της λύσης είναι δανεισμένη από τα μαθηματικά, δημιουργώντας την εσφαλμένη εντύπωση πως υπάρχει αναλογία ανάμεσα στα φιλοσοφικά και τα μαθηματικά προβλήματα. Ένα μαθηματικό πρόβλημα τελειώνει οριστικά τη στιγμή επίλυσής του και οποιοδήποτε γεγονός πέρα από αυτό δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να ακυρώσει ή να αντικρούσει την σωστή λύση. «Τα μαθηματικά αποτελέσματα είναι οριστικά. Τα μαθηματικά είναι για πάντα.» (Rota, 1997, 101).

Ο Rota ασχολήθηκε και με την λεγόμενη «κρίση» της μαθηματικής φυσικής στην αρχή του 20^{ου} αι. Τότε έγινε η μετάβαση από το νευτώνειο κόσμο στον κόσμο της σχετικότητας και η εν λόγω μετάβαση απασχόλησε τους φυσικούς επιστήμονες. Ο όρος ‘κρίση’ βέβαια είναι διφορούμενος, αφού στην καθημερινότητα χρησιμοποιείται με την αρνητική έννοια και συσχετίζεται με κίνδυνο και ασταθείς συνθήκες, ενώ στον τομέα της ιατρικής, η λέξη ‘κρίση’ εκφράζει το ουδέτερο σημείο μιας ασθένειας κατά το οποίο μπορεί είτε να εμφανιστεί ανάκαμψη που θα οδηγήσει σε ίαση είτε να οδηγήσει σε θάνατο. Η θετική πλευρά της έννοιας –η ανάκαμψη- που εν δυνάμει προκύπτει από μια επιστημονική κρίση μπορεί να γίνει πιο εύκολα κατανοητή αν ανατρέξουμε στην ετυμολογία της λέξης. Η λέξη ‘κρίση’ προέρχεται από το ρήμα ‘κρίνω’ που σημαίνει εκτιμώ, σχηματίζω γνώμη, αποφασίζω, δικάζω ή κατακρίνω, διαχωρίζω. Με την ερμηνεία της κρίσης ως απόφασης και επιλογής, φιλοσοφικά η λέξη συνδέεται με την ανάγκη να ξεπεραστούν οι अपαρχαιωμένες πεποιθήσεις που επικρατούν από την αρχαία και πεπαλαιωμένη σκέψη για την αξία της ανθρώπινης γνώσης. Η ανακάλυψη των μη-Ευκλείδειων γεωμετριών και η γενίκευση της άλγεβρας αποτελούν μερικά μόνο παραδείγματα που οδήγησαν σε απρόσμενες και σημαντικές επαναστάσεις ιδεών, που για τους φιλοσόφους των μαθηματικών αποτελούν «κρίσεις» των επιστημών. Η κρίση ενός επιστημονικού μοντέλου δεν σημαίνει αποτυχία της επιστήμης αλλά την ευκαιρία και την δυνατότητα να ξεπεραστούν οι παλιές αντιλήψεις, όχι με τη βοήθεια καινούργιων θεωριών, αλλά διερευνώντας προοπτικές που θεωρούνταν παρωχημένες και για την επιστήμη των μαθηματικών, με αρωγό την ιστορική τους διάσταση. Ο Rota πάνω σε αυτό το θέμα δηλώνει (1973a, 1986a, 168), πως η κρίση στα θεμέλια, μας παρέχει τη

δυνατότητα να παρατηρήσουμε τις θεμελιώδεις επιστημονικές έννοιες σε μια κατάσταση αποσπασμένη από το σύνολο.

Όπως αναφέρει ο Palombi (2011, 78-80), εδώ έχει νόημα η δήλωση του Heidegger (1927, 43), ότι όταν κυριαρχεί η παράδοση όλα όσα «μεταδίδει» γίνονται τόσο απρόσιτα που καταλήγουν να αποκρύπτονται. Αυτό που δόθηκε σε μας από την παράδοση, συνεχίζει, το λαμβάνει πάλι και μας το επιστρέφει ως αυτοαπόδειξη, αποκλείοντας έτσι την πρόσβασή μας στην πρωταρχική πηγή των εννοιών και οδηγώντας μας στην λήθη της προέλευσής τους και την μη κατανόηση της ανάγκης επιστροφής σε αυτές. Η ανακάλυψη όμως της προέλευσης μιας έννοιας αποτελεί για τον Rota το σκοπό της γενετικής λογικής. Την ανακάλυψη αυτή δεν την τοποθετεί χρονικά, ως ανάκτηση της έννοιας σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αλλά ως μια σειρά φάσεων που σηματοδοτεί το ρυθμό της ιστορικής εξέλιξης των επιστημών γενικότερα και των μαθηματικών ειδικότερα. Οι φάσεις παρουσιάζονται με βάση ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο που λειτουργεί ως εξής: η σύσταση της επιστήμης, που καθορίζεται από ένα ιδεατό αντικείμενο, μεταβαίνει μέσω μιας επιστημονικής κρίσης σε μια φάση κατά την οποία παρεμβαίνει η γενετική ανάλυση, η δημιουργία –με άλλα λόγια- του νέου ιδεατού αντικειμένου. Πχ. το νευτώνειο πλαίσιο για την εξήγηση του κόσμου αντικαθίσταται από το μοντέλο της σχετικότητας. Γενικά, η ανάπτυξη της επιστήμης παρουσιάζεται σε δύο στάδια: το πρώτο, της «αυγής» περιγράφει έναν αυτόνομο τομέα και τους εσωτερικούς του νόμους και το δεύτερο του «σούρουπου», ασκεί κριτική στην αυτονομία και οδηγεί στην διερεύνηση του τομέα αυτού. Η αναθεώρηση, ριζική και μη, των βασικών εννοιών της επιστήμης αποτελεί τελικά το πραγματικό «κίνημα» των επιστημών, ενώ το επίπεδο μιας επιστήμης καθορίζεται από το πόσο προετοιμασμένη είναι για την αντιμετώπιση μιας κρίσης των βασικών της εννοιών. Η προσέγγιση αυτή δεν είναι ίδια με την προσέγγιση του Kuhn, μολονότι η δεύτερη εμφανίζει επίσης ένα στάδιο κρίσης του ισχύοντος επιστημονικού «παραδείγματος» και την γένεση ενός άλλου. Ο Kuhn δίνει περισσότερη έμφαση στα γεγονότα των «ανωμαλιών» (δύστροπων φαινομένων) τα οποία δεν είναι ικανό να αντιμετωπίσει το ισχύον «παραδείγμα» και στους κοινωνικούς παράγοντες που οδηγούν στην ανατροπή του και στην αντικατάστασή του.

12. Αποβλεπτικότητα και Ύπαρξη στον κόσμο

Όταν κάποιος σαν τον Rota αποφεύγει τα αδιέξοδα του υποκειμενισμού αλλά και του αντικειμενισμού, όπως είδαμε στα προηγούμενα, τότε αποκτά μια νέα προσέγγιση του κόσμου στην οποία χρειάζεται τη θεωρία της προθετικότητας/αποβλεπτικότητας. Ο όρος 'intentionality' βέβαια δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται με την «αναλυτική» ερμηνεία που τον ταυτίζει με το σχέδιο ενός υποκειμένου που επιδιώκει ένα σκοπό. Όπως δηλώνει ο Palombi (2011, 31-33), ο Rota (1973b, 1986a, 247-248), παρέχει μια εξήγηση του συγκεκριμένου όρου με βάση τις φαινομενολογικές του επιρροές. Όπως τονίζει, κανένα αντικείμενο δεν μπορεί «να δοθεί» χωρίς την παρέμβαση ενός υποκειμένου το οποίο επιλέγει ορισμένα χαρακτηριστικά από μια δυνητικά άπειρη ποικιλία. Είναι αδύνατο να αναγνωρίσουμε ότι τρία κέρματα τοποθετημένα δίπλα σε τρεις βόλους είναι του ιδίου αριθμού χωρίς να εστιάσουμε στον αριθμό. Η εστίαση αυτή στην αντικειμενικότητα -και μόνο- είναι αμετάκλητη, καθώς απαιτεί τη συμβολή του υποκειμένου. Η άποψη αυτή συμπληρώνει την θέση του Frege που εστιάζει στην 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στις έννοιες 'κέρμα' και 'βόλος'. Εκείνος δεν αναφέρθηκε σε κάποιο υποκείμενο. Θεωρούσε ότι το «περιεχόμενο» της πρότασης για μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα υποτιθέμενα πχ. κέρματα και βόλους ανακατανέμεται με ένα διαφορετικό τρόπο σε μια ισοδύναμη πρόταση που περιλαμβάνει την ταυτότητα του αριθμού 3. Ο αριθμός της έννοιας 'κέρμα' ταυτίζεται με τον αριθμό της έννοιας 'βόλος' εάν και μόνο αν υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των πραγματώσεων των δύο εννοιών. Για τον Rota, βέβαια, η ύπαρξη του υποκειμένου που αφήνει απ' έξω τις άλλες ιδιότητες των κερμάτων και των βόλων και επικεντρώνεται στην 1-1 αντιστοιχία τους είναι αναπόδραστη (βλ. και Χριστοπούλου, 2015, 82). Η ύπαρξη του υποκειμένου που αποβλέπει στην εν λόγω κανονικότητα είναι ενδεχομενική. Η ανάγκη ενός εξωτερικού παρατηρητή που καθιστά το αντικείμενο ένα ενδεχόμενο γεγονός και ο δεδομένος κόσμος που μας προσφέρει υπό μελέτη πραγματικότητες, δημιουργεί παράδοξο. Η εναλλαγή της αναγκαιότητας και την ενδεχομενικότητας ενυπάρχει σε αυτή την προσέγγιση. Η σύσταση της φιλοσοφίας του Husserl χαρακτηρίζεται από τον φαινομενολόγο Sokolowski, ως η λειτουργία του να «προσδίδω έννοια», που σημαίνει ότι κάνω μια συνειδητή περιγραφή, μια περιγραφή που προσδίδει την απαιτούμενη έννοια,

αναγνωρίζοντας από την άλλη πλευρά, την πολλαπλότητα των εμπειριών που προϋπάρχουν για τη γέννησή της. Για τον Rota, η έννοια είναι σχετική ως προς ένα πλαίσιο, το οποίο γίνεται κατανοητό σε σχέση με το θέμα που διερευνούμε για να εξηγήσουμε τον κόσμο. Χωρίς αυτό το πλαίσιο δεν θα μπορούσαμε να συλλάβουμε την αρμόζουσα έννοια που μας βοηθά να διερευνήσουμε τη συγκεκριμένη όψη του κόσμου.

Σύμφωνα με τον Palombi (2011, 33), ο Rota θεωρεί πως αν εξετάσουμε τη σχέση μας με τον κόσμο μέσα από το φιλοσοφικό ή μεθοδολογικό πρίσμα, μας υποχρεώνει να αναρωτηθούμε για το τί είναι πρωταρχικό, τι ανήκει στον κόσμο των αντικειμένων, τί είναι δευτερεύον, μεταβλητό και ενδεχόμενο και ανήκει στο υποκείμενο. Ο «αντικειμενισμός», εναντίον του οποίου στράφηκε ο Rota, αποδομεί την προσπάθεια γεφύρωσης του υποκειμένου και του κόσμου, ενώ αντίθετα το *dasein*, δηλαδή το «είναι εκεί» που εισήγαγε ο Heidegger, δεν μπορεί να κατανοήσει μονοσήμαντα τον κόσμο, αφού μια τέτοια απόπειρα θα σήμαινε αυτόματα διαχωρισμό από τον εαυτό του.

Ο κόσμος μας, για τον Rota (Ibid,1-2), είναι ένας κόσμος εννοιών και η προέλευσή τους δεν μπορεί να στηριχτεί στα φυσικά αντικείμενα, ενώ το ερώτημα για την έννοια της έννοιας δεν μπορεί να έχει βάση αφού προϋποθέτει έναν εξωτερικό «μυθικό» και άκρως αντικειμενικό παρατηρητή του κόσμου και της υποκειμενικότητας. Η φαινομενολογία περιγράφει έναν κόσμο, όχι των φυσικών αντικειμένων και νόμων αλλά τον κόσμο με τον οποίο ασχολούμαστε. Το «ασχολούμαστε» για τον Rota είναι ο πιο ουδέτερος όρος και η βασικότερη σχέση ανθρώπου – κόσμου. Όταν το ζήτημα της έννοιας εξετάζεται φαινομενολογικά, μεγάλη σημασία, σύμφωνα με τον Rota (Ibid, 124), πρέπει να δίνεται στο «ρόλο» και αυτό γιατί η φαινομενολογική περιγραφή δεν αφορά αντικείμενα αλλά το ρόλο τους μέσα σε ένα πλαίσιο. Η παρερμηνεία της απόδοσης προνομίων στα αντικείμενα που μελετούν οι φυσικές επιστήμες οφείλεται στην προκατάληψη πως η διαστρωμάτωση των ρόλων έχει μια ιεραρχία και επομένως κάποιος ρόλος είναι θεμελιώδης. Ο «φαινομενολογικός» κόσμος (ο κόσμος που μελετά η φαινομενολογία) βασίζεται στον φυσικό κόσμο, αλλά με μια μη αναγωγική προσέγγιση. (πρβλ. Palombi, 2011, 32-35).

Όπως παρατηρεί ο Palombi (2011, 87-91), ο Rota (2000, 522), εκφράζει έντονα την ανησυχία του για την επιβίωση των μαθηματικών, υποστηρίζοντας πως απειλούνται από την άγνοια που υπάρχει ως προς τα αποτελέσματά τους. Επιπλέον απειλούνται από την εχθρική συμπεριφορά που εξαπλώνεται ανάμεσα στους ίδιους τους μαθηματικούς, λόγω της πεποίθησης μερικών, πως τα μαθηματικά οφείλουν να έχουν πολλαπλές εφαρμογές. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 213), υπάρχει η εσφαλμένη εντύπωση, που συμμερίζονται και ορισμένοι επιστήμονες, πως η εφαρμογή των μαθηματικών είναι στενά συνδεδεμένη με τα θεωρήματα. Μαθαίνω το τάδε θεώρημα, θα το εφαρμόσω εκεί. Στην πραγματικότητα, τα μαθηματικά αποτελέσματα σπάνια έχουν άμεσες εφαρμογές, αν και ευτυχώς έχουν πάρα πολλές έμμεσες. Η εφαρμογή πηγάζει από την κατανόηση των ορισμών, ενώ το ταλέντο στα εφαρμοσμένα μαθηματικά είναι από τα μεγαλύτερα και πιο σπάνια. Από την πολιτική και το στρατό μέχρι τους εκπαιδευτικούς, έχει δημιουργηθεί η παρερμηνεία ότι τα μαθηματικά οφείλουν να επιτυγχάνουν άμεση εφαρμογή στον τομέα τους. Δεδομένου όμως, πως η εφαρμογή για κάθε έναν από αυτούς τους τομείς δεν αποτελεί κανόνα αλλά εξαίρεση, οδηγούμαστε σε απογοήτευση, άμεση ή έμμεση μείωση της χρηματοδότησης της έρευνας και των πανεπιστημιακών σπουδαστών και αποστερωμένες επιστημολογικές και ηθικές συζητήσεις για την επιστήμη και την τεχνολογία. Αυτή η νοοτροπία αγνοεί την ιστορία των μαθηματικών και των επιστημών γενικά. Σύμφωνα με τον Rota (1997, 104-105), μπορούμε πολύ πιο εύκολα να προβλέψουμε το μέλλον όταν έχουμε στο μυαλό μας πώς όσα συμβαίνουν τώρα και όσα θα συμβούν μεταγενέστερα δεν είναι αποτέλεσμα της μοίρας, αλλά μια εικόνα η οποία βρίσκεται κρυμμένη στο παρελθόν επιστημόνων, φιλοσόφων, ποιητών κ.ο.κ. . Οι επαναστατικές θεωρίες του παρόντος δεν θα υφίσταντο αν δεν υπήρχαν τα απομεινάρια προηγούμενων φιλοσοφικών θεωριών.

Ο Rota, ασκεί δριμύτατη κριτική στον μύθο της «προόδου» της δυτικής κουλτούρας. Η πρόοδος κατά τον Rota (1990a, 1997a, 117), δεν συμβαδίζει με τα μοντέρνα μαθηματικά. Γενικότερα, αμφισβητεί την πρόοδο. Η αξιολόγηση της ανάπτυξης και της προόδου με βάση τους δείκτες του προσδόκιμου ζωής, του μέσου εισοδήματος, του Α.Ε.Π κ.α., είναι μονομερής και παραβλέπει άλλους θεμελιώδεις

τομείς της ζωής. Τα προβλήματα του ελεύθερου χρόνου, της αύξησης των ψυχικών ασθενειών στις αναπτυγμένες χώρες και του τρόπου ζωής στις τριτοκοσμικές χώρες υπάρχουν εδώ και χρόνια και δεν μπορούν να θεωρηθούν «πρόοδος». Μερικά δημιουργήθηκαν από την υποτιθέμενη πρόοδο και έχουμε την ψευδαίσθηση ότι η πρόοδος θα τα επιλύσει. Αγνοούμε την ανάγκη αλλαγής του τρόπου που παράγουμε, που καταναλώνουμε, που σκεφτόμαστε και που τελικά ζούμε κι αυτό οφείλεται στον αναγωγισμό. Έχει δημιουργηθεί μια νοοτροπία υπεραπλούστευσης και αναγωγής της ζωής σε ένα και μόνο θεμελιώδες επίπεδο, το υλιστικό.

Ο Rota (1974b) επιχειρεί επιπλέον να διερευνήσει τα τελεολογικά στοιχεία που συνδέονται με την αποβλεπτικότητα. Είναι αντίθετος προς την υπερβολική ανάπτυξη απόψεων σχετικά με την τελεολογία και την πρόοδο της επιστημονικής γνώσης. Η θεμελιώδης σχέση της συνείδησης με τον κόσμο είναι η εξής: «Κάθε συνείδηση είναι η συνειδητότητα ενός πράγματος». Η φράση αυτή παρερμηνεύεται συχνά και ο λόγος είναι ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αντιληπτή η λέξη «αποβλεπτικότητα» την οποία και ταυτίζουμε, όπως δηλώνει ο Spinićci (2002, 94), με την ιδέα της κατεύθυνσης προς το αντικείμενο. Το «πράγμα» προς το οποίο αναφέρεται η φράση, δεν μπορεί να ταυτιστεί ούτε να αναχθεί σε κάποιο «τέλος» ως σκοπό, αφομοιώνοντας την αποβλεπτικότητα στην τελεολογία. Δεν θα έπρεπε να αποδοθεί στη φαινομενολογική έννοια της αποβλεπτικότητας κάποιο είδος τελεολογίας.

Αντίθετα, τα μη τελεολογικά στοιχεία της φαινομενολογικής έρευνας γίνονται αντιληπτά αν αναλύσουμε την «ματιά» του αντιληπτικού χώρου. Όπως δηλώνει ο Rota (1973b, 1986a, 248), από φαινομενολογική άποψη, οι κανονικότητες του σύμπαντος δεν καθορίζονται από τις υποκειμενικές δομές, αλλά είναι αυτές που καθορίζουν το υποκείμενο και τον κόσμο ως τους δύο πόλους της εκούσιας σχέσης. Η σκίαση, μία από τις προαναφερθείσες κανονικότητες, έχει ιδιαίτερη σημασία αφού κάνει τα αντικείμενα να παρουσιάζονται ως μερικώς ορατά. Αλλάζοντας την οπτική γωνία γίνονται ορατά και προσβάσιμα τμήματα του αντικειμένου που προηγουμένως ήταν αόρατα, ενώ τα τμήματα στα οποία εστιάζαμε πριν, τώρα εξαφανίζονται. Έτσι και η συνείδηση, κατ' αναλογία, αποτελεί έναν ορίζοντα που οριοθετεί και χωρίζει το οπτικό πεδίο που απαρτίζεται από ορατές, μη ορατές και σκιασμένες περιοχές, ενώ οι μαθηματικές οντότητες, όπως και όλα τα αντικείμενα, γίνονται αντιληπτά μέσα από

σκιάσεις που κάνουν ορατές συγκεκριμένες πτυχές κάθε φορά. Εκεί ακριβώς οφείλεται η σημασία των διαφορετικών αποδείξεων, ερμηνειών και αξιωματικοποιήσεων για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο, αφού κάθε μία από αυτές μας δίνει τη δυνατότητα να κατανοήσουμε διαφορετικές πτυχές τους.

Για την καλύτερη κατανόηση της σκίασης και της συνειδητής εμπειρίας θα ανατρέξουμε στον Sokolowski και το παράδειγμα του κύβου. Σύμφωνα με τον Sokolowski (2000, 11-14), η αντίληψη ενός υλικού αντικειμένου όπως ο κύβος είναι πάντα μερική, καθώς είναι αδύνατο να δούμε ταυτόχρονα όλες τις πλευρές ενός κύβου. Μόνο ένα μέρος του μας δίνεται άμεσα κάθε φορά. Αυτό όμως δεν σημαίνει πως δεν δίνονται και οι υπόλοιπες πλευρές, ως απύσες μέσω της εμπειρίας. Η συνειδητή εμπειρία καθιστά ικανή την συν-αποβλεπτικότητα των πλευρών που όταν βλέπω έναν κύβο είναι κρυμμένες, ως ενεργεία απύσες αλλά δυνάμει ορατές. Αντικειμενικά, όταν βλέπω έναν κύβο λαμβάνω ένα μείγμα παρουσίας, των πλευρών που αντικρίζω, και απουσίας των πλευρών που συν-αποβλέπω, όπως ισχύει σε κάθε εμπειρία. Υποκειμενικά, αυτό που αντιλαμβάνομαι αποτελεί ένα μείγμα πεπληρωμένων και κενών αποβλέψεων. Η αντίληψη που έχω για τον κύβο είναι δυναμική και όχι στατική, καθώς μπορεί να βλέπω μία πλευρά του κύβου, ένα είδος ερευνητικής κινητικότητας όμως εισάγεται ακούσια από τη διακεκομμένη κίνηση των ματιών μου. Παρόλο που σε κάθε δεδομένη στιγμή μου δίνονται ορισμένες πλευρές του κύβου ως παρούσες, είναι δυνατό να κάνω στροφή του κύβου ή να κάνω εγώ τον κύκλο του, έτσι ώστε να αντικρίσω τις απύσες πλευρές του και οι παρούσες να τεθούν εκτός του οπτικού μου πεδίου. Κατά τη στροφή αυτή, το δυνάμει αντιληπτό γίνεται ενεργώς αντιληπτό ενώ αντίστοιχα το ενεργεία αντιληπτό γίνεται απόν. Οι πεπληρωμένες αποβλέψεις γίνονται κενές και το ανάποδο. Εκτός όμως από την όραση και οι υπόλοιπες αισθήσεις όπως η αφή, η ακοή, η όσφρηση και η γεύση αποτελούν δυνάμει στοιχεία, δυνάμει παρουσιάσεις που μπορούν να τεθούν σε λειτουργία και να οδηγήσουν σε άμεση παρουσία. Από αυτές βέβαια μόνο η όραση και η αφή παρουσιάζουν το αντικείμενο «κύβος». Οι υπόλοιπες προσφέρουν πληροφορίες μόνο για το υλικό από το οποίο είναι φτιαγμένος ο κύβος και όχι για τον χαρακτήρα του ως ον.

Όταν βλέπουμε έναν κύβο μπορούμε να διακρίνουμε τρία στρώματα σε αυτό που μας παρουσιάζεται. Στο πρώτο στρώμα βρίσκουμε τις πλευρές του κύβου οι οποίες

μπορούν να δοθούν σε εμάς υπό διαφορετικές προοπτικές. Εάν κοιτάξω μια πλευρά του κύβου απευθείας παρουσιάζεται τετράγωνη, εάν την γείρω ελαφρά και την απομακρύνω παρουσιάζεται ως γωνία, ενώ εάν την γείρω και την απομακρύνω ακόμα περισσότερο θα παρουσιαστεί ως ευθεία, μέχρις ότου κάποια στιγμή θα εξαφανιστεί από το οπτικό μου πεδίο. Μία πλευρά επομένως, όπως και ο κύβος μπορεί να γίνει αντιληπτή με διαφορετικούς τρόπους. Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται κάθε πλευρά ονομάζεται όψη και βρίσκεται στο δεύτερο στρώμα. Η όψη της πλευράς συγκεκριμένα είναι τετράγωνη όταν την κοιτάζω άμεσα, έχει όψη τραπεζίου εάν γείρω τον κύβο, ενώ οι πολλαπλές όψεις της πλευράς συνιστούν μεταβατικά και όψεις του κύβου. Στο τρίτο στρώμα εμπλέκεται ο χρόνος. Συγκεκριμένα, σε κάθε χρονική στιγμή παρουσιάζεται μια συγκεκριμένη όψη. Εάν δεν υπάρξει μια αλλαγή από μέρους μου, όπως κάποια μετακίνηση, τότε την επόμενη χρονική στιγμή θα παρουσιαστεί η ίδια όψη, η οποία μπορεί να δοθεί σε εμένα ως μια ταυτότητα που διαπερνά διαφορετικές χρονικά εμφανίσεις καθεμιά από τις οποίες ονομάζεται σκίαση της όψης. Πρόκειται για μια χρονικά εξατομικευμένη παρουσίαση της πλευράς αλλά και του κύβου καθώς όπως και με την όψη, η σκίαση μιας πλευράς συνιστά μεταβατικά σκίαση του κύβου.

Αξίζει όμως να σημειωθεί πως οι πολλαπλές αυτές όψεις και σκιάσεις είναι στοιχεία του ενός και μοναδικού κύβου, ο οποίος δεν μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των σκιάσεων. Η ταυτότητα του κύβου διαφοροποιείται από τις προσφερόμενες σε εμάς εμφανίσεις και ανήκει σε μια διαφορετική διάσταση από αυτή των όψεων, των πλευρών και των σκιάσεων. Η ταυτότητα παρόλο που δεν γίνεται αντιληπτή ως μία όψη ή μία σκίαση, παρουσιάζεται ως η ταυτότητα μέσα σε αυτά. Η παρουσίαση του κύβου σημαίνει ότι μας δίνεται η ταυτότητά του. Η αποβλεπτικότητα ανήκει σε μια βαθύτερη διάσταση, καθώς η συνείδησή μας δεν αποβλέπει τη ροή των εκάστοτε εμφανίσεων που παρουσιάζονται σε εμάς, αλλά την ταυτότητά του. Όταν γίνεται αντιληπτό επομένως ένα αντικείμενο, δεν έχουμε να κάνουμε με μια σειρά από σκιάσεις αλλά μέσα σε αυτές και μέσω αυτών μας δίνεται ο κύβος, το ίδιο το αντικείμενο ενώ η ταυτότητά του αποτελεί αντικείμενο αποβλεπτικότητας. Οι όψεις και οι σκιάσεις ανήκουν στο ένα και μοναδικό αντικείμενο, η ταυτότητα ανήκει σε αυτό που δίνεται από την εμπειρία ενώ η αναγνώρισή της οφείλεται στην αποβλεπτική δομή της προαναφερθείσας εμπειρίας.

Η παραπάνω ανάλυση των πλευρών, των όψεων και των σκιάσεων αποτελούν μια επιβεβαίωση του φαινομενολογικού ρεαλισμού που αποδέχεται ο Rota, καθώς είναι αδύνατο να διατυπώνουμε δομές που αφορούν τη διάκριση των όψεων από τις πλευρές και των σκιάσεων από τις όψεις, με όρους νοητικών εντυπώσεων και ιδεών. Αν δεχόμασταν ότι καθετί είναι εσωτερικό τότε δεν θα μπορούσαμε να κάνουμε διαχωρισμό ανάμεσα σε πλευρές, σε όψεις και σε σκιάσεις. Μέσα από τις διακρίσεις αυτές, είναι φανερό πως οι επιφάνειες και η θέαση των αντικειμένων βρίσκεται ‘κάπου έξω’ και δεν κατασκευάζονται με βάση τις εντυπώσεις που δημιουργούνται από την επαφή με την αισθητικότητά μας. Η πλευρά ή η όψη που δίνεται ως μία και αυτή από ένα πρόσωπο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές ή από πολλά πρόσωπα δεν είναι μια ιδέα που επηρεάζει την εκάστοτε υποκειμενικότητα ιδιωτικά. Πίσω από τις πολλαπλές όψεις και σκιάσεις βρίσκεται το ίδιο και αυτό αντικείμενο όπως και η μοναδική και δημόσια ταυτότητά του.

Σύμφωνα με τον Rota (1985e, 136), είναι ουτοπικό να θεωρούμε πως τα επιστημονικά προβλήματα, άρα και τα μαθηματικά προβλήματα, προκύπτουν και επιλύονται από πρακτικές ανάγκες. Όπως δηλώνει ο ίδιος (1997, 218), τα θεμέλια των μαθηματικών βρίσκονται στους ευσεβείς πόθους μας από τους οποίους προκύπτουν οι ερωτήσεις μας επί του θέματος και αναδύονται τα μαθηματικά προβλήματα. Στην πραγματικότητα, μόλις προκύψει ένα πρόβλημα τεχνολογικής εφαρμογής, ανατρέχουν για την επίλυσή του στην επιστημονική βιβλιογραφία ελπίζοντας να ανακαλύψουν αυτό που θα τους βοηθήσει, το οποίο όμως τις περισσότερες φορές αναπτύχθηκε για εντελώς διαφορετικούς λόγους ή καμιά φορά και για κανέναν απολύτως λόγο. Όπως επισημαίνει ο Palombi (2011, 92-94), η δόξα των μαθηματικών έγκειται στο γεγονός πως η θεωρία που αναπτύχθηκε προς απάντηση ενός προβλήματος αποτελεί συχνά τον τρόπο επίλυσης ενός, τελείως διαφορετικού από το αρχικό, προβλήματος. Για τον Rota, το γεγονός αυτό είναι τόσο σύνηθες που αποτελεί στοιχείο της βαθιάς ουσίας των μαθηματικών και κάθε φιλοσοφία τους οφείλει να το εξετάζει.

13. Συμπεράσματα

Ο Gian – Carlo Rota (23/04/1932 – 18/04/1999), υπήρξε σπουδαίος μαθηματικός και φιλόσοφος των μαθηματικών. Γεννημένος στην Ιταλία, έδειξε από μικρός την αγάπη του για το διάβασμα, τα μαθηματικά, τη λογοτεχνία αλλά και την φιλοσοφία.

Επηρεάστηκε από τον Martin Heidegger και τον Edmund Husserl τον οποίο και αποκαλούσε ως τον μεγαλύτερο φιλόσοφο της ιστορίας. Αρχικά μέσα από τα κείμενά του ο Rota επιχειρεί να επαναδιατυπώσει τα φαινομενολογικά εγχειρίδια αποσκοπώντας στην καλύτερη κατανόησή τους. Βασική έννοια της φαινομενολογίας, η αποβλεπτικότητα. Η συνειδητότητα ενός ανθρώπου «κατευθύνεται» συνολικά σε αντικείμενα και κάθε εμπειρία και συνειδησιακή ενέργεια είναι αποβλεπτική.

Αποτελούν την εμπειρία ή τη συνείδηση ενός αντικειμένου, κάθε απόβλεψη εμπεριέχει το αποβλεπτικό της αντικείμενο, ενώ υπάρχουν διάφορα είδη απόβλεψης. Πρόκειται για μια έννοια γνωστικού και νοητικού χαρακτήρα, που εκφράζει την συνειδησιακή σχέση του ανθρώπου με το αντικείμενο που γνωρίζει και δεν θα πρέπει να συγχέεται με την στόχευση και την πρόθεση που υπάρχει στο νου ενός ανθρώπου όταν ενεργεί βάσει σκοπού, καθώς δεν αφορά τη θεωρία της ανθρώπινης ύπαρξης αλλά αυτή της γνώσης. Η φαινομενολογική στάση που ενστερνίζεται ο Rota διαφοροποιείται από τη φυσική που αντιμετωπίζει τον κόσμο μας ως τον *ορίζοντα* για όλα τα πιθανά αντικείμενα απόβλεψης και όχι ως πράγμα ή άθροισμα αντικειμένων. Στη φυσική στάση η βασικότερη πίστη είναι αυτή του κόσμου μας συνολικά ως κάτι το υπαρκτό ενώ μεγάλο παράγοντα αποτελεί το εγώ. Αντίθετα η φαινομενολογική στάση διακρίνεται από την αποστασιοποίηση και τον αναστοχασμό. Οι αποβλέψεις παραμένουν δικές μας, αντιμετωπίζονται όμως αποστασιοποιημένα. Βασικός παράγοντας είναι η πολλαπλότητα των εμφανίσεων ενός αντικειμένου διατηρώντας την ταυτότητά του, κάτι που καθιστά ευκολότερη τη διάκριση ανάμεσα σε αυτό και τις εμφανίσεις του. Ακόμα ως φαινομενολόγος ο Rota υιοθετεί την έννοια του δημόσιου χαρακτήρα του νου και τη μη περιορισμένη δράση του. Κάθε αντικείμενο βρίσκεται «έξω» και εμφανίζεται χωρίς να εγκλωβίζεται στην νοητική ατομικότητα του εκάστοτε υποκειμένου.

Το ερώτημα της ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων καθώς και η ίδια η ύπαρξη κατά τον Rota είναι μηδαμινής σημασίας. Έννοιες όπως ποίημα, αξίες, συναίσθημα αλλά και επιφάνειες Riemann αντιμετωπίζονται ως *ιδεατά* με βάση την φαινομενολογική ερμηνεία των ιδεατών αντικειμένων που εισήγαγε ο E. Husserl και αναφέρεται στην υπερβατολογική συνειδησιακή τους συγκρότηση, πέρα από κάθε υποκειμενική ατομικότητα. Τα ιδεατά αντικείμενα διαθέτουν ένα υπερβατολογικό status και δεν είναι ούτε φυσικά, ούτε νοητικά. Ιδεατά βέβαια δεν είναι μόνο τα μαθηματικά αντικείμενα αλλά και όλες οι μαθηματικές σχέσεις και μαθηματικοί νόμοι. Εκτός από την φαινομενολογική ιδεατή φύση των μαθηματικών αντικειμένων για τον Rota κάθε μαθηματικό αντικείμενο ικανοποιεί μια σχέση συναρτησιακού τύπου, όπου το μαθηματικό αντικείμενο αποτελεί το αντικείμενο που προϋποτίθεται της συγκεκριμένης συνθήκης. Όπως για παράδειγμα, η συναρτησιακή σχέση $()^2 + 1 = 10$ που συμπληρώνεται από τον αριθμό 3. *Ιδεατά* αντικείμενα δεν είναι τα φανταστικά αντικείμενα. Αντίθετα με το νομιναλισμό που χαρακτηρίζει τα μαθηματικά αντικείμενα ως fictions οι φαινομενολόγοι ενδιαφέρονται για τον τρόπο που τα ιδεατά αντικείμενα καθίστανται παρόντα στην ανθρώπινη συνείδηση. Ο Rota ορίζει τους αριθμούς ως 1-1 αντιστοιχίες ανάμεσα σε συλλογές αντικειμένων, όπως ακριβώς πριν από αυτόν οι Frege και Husserl. Τα *ιδεατά* αντικείμενα είναι για τον Rota αποτέλεσμα εξιδανίκευσης. Η γεωμετρική, πλήρως λεία, επιφάνεια είναι ένα ιδεατό αντικείμενο που ξεκινάει από κάτι γνωστό μας στο οποίο και ταυτοποιούμε ένα γνώρισμα που επιδέχεται διακύμανσης, όπως είναι η γνωστή επιφάνεια του τραπέζιού την οποία και φανταζόμαστε λεία μέχρι το πιο αξεπέραστο σημείο. Πρόκειται δηλαδή για την τέλεια εκδοχή ενός αντικειμένου γνωστού μας από την εμπειρία, διατηρώντας όμως κάτι από το περιεχόμενό του.

Ο Rota προσφέρει ακόμα μια προσέγγιση των μαθηματικών αντικειμένων, ως «υπόθεση» ικανοποίησης μιας δεδομένης συνθήκης. Ικανοποίηση της συνθήκης συνεπάγεται αποδοχή της ύπαρξης. Ένας άρτιος αριθμός x για παράδειγμα, είναι η υπόθεση ότι ικανοποιείται η συνθήκη $x=2*y$ για κάποιον ακέραιο αριθμό y . Όποια και να είναι η προσέγγιση ένα είναι σίγουρο. Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι ανεξάρτητα των αξιωματικών τους συστημάτων, όπως οι έννοιες είναι ανεξάρτητες των λέξεων που χρησιμοποιούμε όταν τις περιγράφουμε. Η ταυτότητα του

μαθηματικού αντικειμένου παραμένει σταθερή σε κάθε του εμφάνιση. Αποτελεί το έσχατο οντολογικό του στοιχείο, προϋποτίθεται της ύπαρξης, χωρίς όμως να την προϋποθέτει, παραμένει αναλλοίωτη και δεν μπορεί να αναχθεί σε κάποια νοητική διαδικασία.

Ένας ακόμα σημαντικός διαχωρισμός για τον Rota είναι αυτός ανάμεσα στον ορισμό και την περιγραφή. Ο ορισμός έπεται της περιγραφής, εξ ου και η επιστήμη των μαθηματικών δύναται να ανταπεξέλθει χωρίς ορισμούς όχι όμως και χωρίς περιγραφές, θέση που αντιλαμβανόμαστε καλύτερα αν σκεφτούμε τη διδασκαλία μιας μαθηματικής έννοιας, η επεξήγηση της οποίας θα μας οδηγήσει ανεπιφύλακτα σε περιγραφή της διδασκόμενης έννοιας. Δεν είναι τυχαίο άλλωστε πως υπάρχουν πολλαπλοί ορισμοί οι οποίοι όμως αναφέρονται στο ίδιο μαθηματικό αντικείμενο. Ο Rota επικεντρώνεται γενικά περισσότερο στον «ανακαλυπτικό» χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας από ότι στον «επικυρωτικό», εντοπίζοντας μια αλληλεπίδραση στην προσπάθεια να διατυπώσουμε έναν ορισμό και να τον ταιριάξουμε με συγκεκριμένες μαθηματικές αλήθειες. Η ακριβής διατύπωση ενός μαθηματικού ορισμού απαιτεί επανειλημμένες προσπάθειες και μεγάλο ερευνητικό χρόνο, ενώ η εξήγηση των εννοιών γίνεται πιο αποτελεσματικά με τη βοήθεια των παραδειγμάτων. Όσον αφορά τη μαθηματική απόδειξη, ο Rota την αναγνωρίζει ως αλληλουχία βημάτων που ακολουθούν τους κανόνες της λογικής και αποδέχεται τη συντακτική εκδοχή της, ως ακολουθία συντακτικών προτάσεων όπου κάθε μία προκύπτει από τις προηγούμενες μέσω κανόνων παραγωγής. Αντιτίθεται όμως στην αποκλειστική χρήση αυτής της μορφής απόδειξης η οποία αποκρύβει την ανακαλυπτική πορεία προς την εύρεση μιας μαθηματικής αλήθειας. Μάλιστα όσον αφορά τον τομέα της διδασκαλίας, απαιτείται η παρουσίαση της ιστορικής διαδρομής μιας αποδεικτικής διαδικασίας. Ο Rota δείχνει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα νοητικά πειράματα και τις εικασίες. Η απόδειξη μπορεί να αποκαλύψει άγνωστους ερευνητικούς δρόμους, κρυμμένες δυνατότητες προσέγγισης άλλων αληθειών. Το αξιωματικό σύστημα δεν αποτελεί τον οριστικό τρόπο παρουσίασης των μαθηματικών και σε καμία περίπτωση δεν ταυτίζεται με αυτά. Ο Rota υποστηρίζει την άποψη του Lakatos για τη μέθοδο της «εικασίας και διάψευσης», την ευρετική δηλαδή διαδικασία που θέτει την εικασία και ζητά την έκφραση διαφωνιών. Τέλος υπάρχει μια σύνδεση ανάμεσα στην απόδειξη και τα νοητικά πειράματα, τα

πειράματα σκέψης δηλαδή που διαχωρίζουν τις αρχικές εικασίες σε υποεικασίες ενσωματώνοντάς τες σε ένα διαφορετικό και απομακρυσμένο κομμάτι γνώσης και διαμορφώνοντας το έδαφος σύνδεσης των μαθηματικών με τις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία.

Για τον Rota, οι φιλόσοφοι των μαθηματικών χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Τους στατικούς (mainstream), τους υποστηρικτές της αναλυτικής φιλοσοφίας που έχουν ως αντικείμενο μελέτης την αιτιολόγηση της μαθηματικής γνώσης και τη δικαιολόγηση των μαθηματικών αληθειών και τους δυναμικούς (maverick). Οι δυναμικοί, με τους οποίους συντάσσεται και ο Rota, διαφοροποιούνται από την αναλυτική φιλοσοφία, και αντικείμενο μελέτης τους αποτελεί η ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης και η μαθηματική πρακτική. Στην μαθηματική πρακτική όμως είναι παρόντα τα ευρετικά επιχειρήματα, για αυτό και κύρια ενασχόληση της φιλοσοφίας των μαθηματικών οφείλει κατά τον Rota, να είναι η ανακάλυψη. Κατά τη μαθηματική ανακάλυψη μεγάλο ρόλο παίζει το συναίσθημα, αφού για να καταπιαστούν οι μαθηματικοί με ένα πρόβλημα θα πρέπει αρχικά να τους αρέσει. Η μαθηματική αιτιολόγηση απαιτεί επιθυμία και κίνητρο. Ο τομέας βέβαια του συναισθήματος και του κινήτρου εντάσσεται περισσότερο στην ψυχολογία της μαθηματικής ανακάλυψης και όχι στη φιλοσοφία. Η άποψη του Rota δείχνει το ενδιαφέρον του για έναν κλάδο που λέγεται «φιλοσοφία της μαθηματικής πρακτικής».

Ο Rota μέσα από το έργο του εστιάζει στην έννοια του Fundierung, την οποία εισήγαγε ο Husserl, μεταφράζεται ως «στήριξη» ή «θεμελίωση» αναφέρεται σε ένα κατώτερο στρώμα που στηρίζει ένα ανώτερο και δεν θα πρέπει να συγχέεται με την έννοια του Begründung που δηλώνει αυτό που στηρίζει χωρίς όμως το ίδιο να στηρίζεται ή να θεμελιώνεται. Πρόκειται για μια λογική έννοια, μια πρωτογενή σχέση που δεν μπορεί να αναλυθεί σε απλούστερες και γίνεται αντιληπτή πριν επέλθει η πειραματική προσπάθεια αντίληψης. Συνίσταται στη σχέση δύο πραγμάτων, τη *γεγονικότητα* και τη *λειτουργία*, τα συστατικά του κόσμου τα οποία συνδέονται αμφίδρομα, καθώς τα γεγονότα είναι φορείς των λειτουργιών και οι λειτουργίες βασίζονται στα γεγονότα. Επίσης, μελετώντας τα κείμενά του Rota γίνεται φανερό η αντίθεσή του στην έννοια του αναγωγισμού, τον οποίο χρησιμοποιεί σε πολλές περιπτώσεις με όρους υλιστικών ως δόγμα προσδιορισμού κάθε ψυχικής

δραστηριότητας με φυσικές αλλά και φυσιολογικές διαδικασίες. Βασιζόμενος στην κριτική του Husserl προς τον ψυχολογισμό, την τάση αναγωγής των μαθηματικών σε ψυχολογικούς μηχανισμούς, εξισώνει τον ψυχολογισμό με τον αναγωγισμό, ερμηνεύοντάς τον ως μια προσπάθεια αναγωγής των λογικών νόμων σε ψυχολογικές διεργασίες. Αναγωγισμός και φαινομενολογία δεν συμβαδίζουν. Η κατανόηση ενός φαινομένου βασίζεται στην αυτόνομη περιγραφή του χωρίς οποιαδήποτε αναγωγή σε προηγούμενες συλλήψεις του. Για τη φαινομενολογία η επιστήμη προϋποθέτει τον κοινό και διαισθητικό προϋπάρχοντα κόσμο με τον οποίο δεν συμβαδίζουν οι αναγωγιστικές απόψεις μιας υλιστικής στάσης και ερμηνείας της πραγματικότητας με κριτήριο τα υπαρκτά φυσικά αντικείμενα. Η πραγματικότητα για τον Rota ξεφεύγει από τα ποσοτικοποιήσιμα στοιχεία της που λειτουργούν ως αντικείμενο μέτρησης. Κάθε επιστήμη είναι οντολογικά αυτόνομη, παράγει τις δικές της κρίσεις και ερμηνεύει ξεχωριστά τον κόσμο. Αντίθετα για τον αναγωγισμό οι διαφορετικές προσεγγίσεις κάθε επιστήμης ομογενοποιούνται και ανάγονται τελικά στην οντολογία μίας μόνο επιστήμης, της φυσικής.

Η φαινομενολογία κατά τον Rota είναι ένα είδος ρεαλισμού το ιδεώδες του οποίου έχει τις ρίζες του στη φιλοσοφία του Husserl. Οι τέσσερις φαινομενολογικοί όροι της ρεαλιστικής περιγραφής είναι πως οφείλει να αποκαλύπτει κρυμμένα χαρακτηριστικά του κόσμου, να αναδεικνύει την αξία περιθωριακών φαινομένων, να μην επιτρέπει οποιαδήποτε απόρριψη ενός χαρακτηριστικού των μαθηματικών ως κάτι ψυχολογικό, κοινωνιολογικό ή υποκειμενικό και να προωθεί την εξάλειψη κανονιστικών υποθέσεων. Το φαινόμενο της ανθρώπινης κατανόησης, αν αναλυθεί φιλοσοφικά, δεν δύναται να αντικατασταθεί, ταυτιστεί ή αναχθεί σε έννοιες όπως δείκτης νοημοσύνης και γενετική κληρονομιά. Η φαινομενολογία οφείλει να είναι επιφυλακτική σε όρους όπως ο υποκειμενισμός και ο ψυχολογισμός που ερμηνεύουν τις μαθηματικές οντότητες ως νοητικές δραστηριότητες τις οποίες οι νευροεπιστήμες με τη σειρά τους τις αποδίδουν σε νευρολογικές διαδικασίες.

Ο Rota εξέφρασε μεγάλο ενδιαφέρον για τον τομέα της ιστορίας των μαθηματικών. Το σημαντικότερο βήμα επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, θεωρεί ότι είναι η ανάλυση προηγούμενων προσπαθειών με σκοπό την κατανόηση

της αποτυχίας τους. Η ιστορικότητα ενός μαθηματικού προβλήματος αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της επίλυσής του και ως εκ τούτου η επιστήμη των μαθηματικών επιβεβαιώνει την φύση της σκέψης με την ύπαρξή της.

Ο Rota κάνει σύγκριση μεταξύ των μαθηματικών και των φιλοσοφικών προβλημάτων. Σε αντίθεση με τη φιλοσοφία όπου υπάρχει μεγάλη αδυναμία να βρεθεί μια τελική λύση, στα προβλήματα που θέτουν τα μαθηματικά δίνονται λύσεις οι οποίες είναι οριστικές. Ενώ η φιλοσοφία αποτελεί ένα «συνεχές ναυάγιο» μη καταφέροντας να απαντήσει στα φιλοσοφικά ερωτήματα που έχει θέσει εδώ και αιώνες αλλά τα επαναδιατυπώνει και τα θέτει εκ νέου, τα μαθηματικά απαντούν στα μαθηματικά ερωτήματα. Ένα μαθηματικό πρόβλημα τελειώνει οριστικά με την επίλυσή του. Τα μαθηματικά είναι «για πάντα» (“mathematics is for ever”).

14. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Carnap, R. (1937), *The logical syntax of language*, New York, NY: Kegan Paul
- Cellucci, C., Lanciani, A. and Majolino, C., Mugnai, M. (2009), *From Combinatorics to Philosophy: The Legacy of G.-C. Rota*, London & New York, Springer
- Christopoulou, D. (2014), “Weyl on Fregean implicit definitions: between phenomenology and symbolic construction”, *Journal for the General Philosophy of Science*, 10-11
- Husserl, E. (1970), *The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology* (Carr, D. Μεταφρ.), Evanston, Northwestern University Press
- Palombi, F. (2011), *The Star and the Whole: Gian – Carlo Rota on Mathematics and Phenomenology*, New York, Taylor and Francis Group LLC
- Rota, G.-C., Kac M., Schwartz J.-T. (1986), *Discrete Thoughts*, Misreading the History of Mathematics, Boston, Birkhauser
- Rota, G.-C. (1990a), “The concept of mathematical proof”, *Nuova civiltà delle machine*, 4, 145-150
- Rota, G.-C. (1991), *The end of objectivity. The legacy of phenomenology. Lectures at MIT*, MIT Mathematics Department, Cambridge, Massachusetts
- Rota, G.-C. (1997), *Indiscrete Thoughts* (Palombi εκδότης), Persons and Places, Boston, Birkhauser
- Rota, G.-C. (1997), *Indiscrete Thoughts* (Palombi F. εκδότης), Indiscrete Thoughts, Boston, Birkhauser
- Rota, G.-C. (1997), *Indiscrete Thoughts* (Palombi F. εκδότης), Philosophy: A Minority View, Boston, Birkhauser
- Rota, G.-C. (1997), *Indiscrete Thoughts* (Palombi F. εκδότης), Readings and Comments, Boston, Birkhauser

- Rota, G.-C. (2015), *Μαθηματικά και Φιλοσοφία: Το χρονικό μιας παρανόησης*, (Ευαγγελόπουλος, Γ., Λερούνης Κ., Χριστοπούλου, Δ., Μεταφρ.), Αθήνα, Ευρασία
- Sokolowski, R. (1997), *Indiscrete Thoughts (foreword)*, Boston, Birkhauser
- Sokolowski, R. (2006), *Εισαγωγή στη Φαινομενολογία* (2^η εκδ.), Πάτρα, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών
- Tieszen, R. (2005), *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press
- Wittgenstein, L. (2010), *Philosophical Investigations* (Hacker, P.M.S., Schulte, J. εκδ), Wiley-Blackwell
- Αναπολιτάνος, Δ. (1985), *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Αθήνα, Νεφέλη
- Αναπολιτάνος, Δ. (2009), “Η φύση των μαθηματικών αντικειμένων και το πληροφοριακό περιεχόμενο των μαθηματικών αληθειών” στο *Στιγμές και Διάρκειες-13 κείμενα φιλοσοφίας και ιστορίας των μαθηματικών και της λογικής* (επ. Αναπολιτάνου), Αθήνα, Νεφέλη
- Χριστοπούλου, Δ. (2015) «Ο φαινομενολόγος G. C. Rota για τη φιλοσοφία και τα μαθηματικά» (επίμετρο) στο βιβλίο G. C. Rota, *Μαθηματικά και Φιλοσοφία*, εκδόσεις Ευρασία, 2015
- Χριστοπούλου, Δ. (2009), “Οι αφαιρετικές αρχές του Frege” στο *Στιγμές και Διάρκειες-13 κείμενα φιλοσοφίας και ιστορίας των μαθηματικών και της λογικής* (επ. Αναπολιτάνου), Αθήνα, Νεφέλη
- Χριστοπούλου Δ.&Ψύλλος Σ. (2008), “Η έννοια του αριθμού και ο αριθμός της έννοιας: μια ανάλυση των Grundlagen του Frege”, *Νόησις*, 3, 16

